УДК 511.331, 530.145

Дзета-функция Римана, ее знакопеременная версия и их q-аналоги

© А.О. Шишанин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены q-аналоги дзета-функции Римана и ее знакопеременной версии с использованием функциональных рядов. Вычислены их значения в отрицательных целых точках, которые в классическом пределе $q \to 1$ соответствуют значениям, полученным Л. Эйлером.

Ключевые слова: *дзета-функция Римана, квантовый анализ, q-аналог, классический предел.*

Введение. Дзета-функция Римана [1, 2] является уникальным объектом исследования и имеет много интересных обобщений, в частности о теоретико-числовых дзета-функциях [3]. Одним из крупнейших событий в математике XX в. было доказательство гипотез А. Вейля для дзета-функции Хассе – Вейля. Дзета-функция применяется в статистической механике и в квантовой теории поля [4]. Такие обобщения дзета-функции строятся по неотрицательному самосопряженному оператору. Обычная дзета-функция Римана часто входит в формулы квантовой статистики. К известным примерам можно отнести закон Стефана – Больцмана теплового излучения абсолютно черного тела.

Считается, что дзета-функцию ввел Л. Эйлер, который впервые вычислил сумму известного задолго до него следующего числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Он решил эту задачу несколькими способами, например разложением функции $\sin x/x$ в бесконечное произведение с применением теоремы Виета (если рассматривать эту функцию как многочлен). Далее он ввел функцию, задаваемую следующим рядом:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots$$

Похожим образом Л. Эйлер нашел значение дзета-функции в положительных четных точках:

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6)=\frac{\pi^6}{950},\ldots$$

Общая формула для любого натурального n имеет вид

$$\zeta(2n) = 2^{2n-1}\pi^{2n}\frac{B_n}{(2n)!},$$

где B_n – числа Бернулли.

Л. Эйлер получил также следующую формулу для дзета-функции в виде бесконечного произведения:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}},$$

где p пробегает все множество простых чисел.

Новое понимание дзета-функции и ее приложений для теории чисел внес в XIX в. Б. Риман. Он предложил рассматривать дзета-функцию как функцию комплексной переменной. Б. Риман вывел функциональное уравнение и с его помощью построил аналитическое продолжение, а также сформулировал знаменитую гипотезу о нетривиальных нулях дзета-функции. Согласно этой гипотезе, нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой с действительной частью $s = 1/2$. Это утверждение до сих пор не доказано.

Рассмотрим знакопеременную дзета-функцию

$$\tilde{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots$$

Эта функция связана с обычной дзета-фукцией следующим образом:

$$\tilde{\zeta}(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s). \tag{1}$$

Б. Риман получил функциональное уравнение для дзета-функции в виде

$$\zeta(1-s) = \frac{1}{2^{s-1}\pi^s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

Посредством функционального уравнения дзета-функцию можно аналитически продолжить на отрицательные числа. Тогда запишем ее значения для отрицательных целых чисел

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \zeta(-2n) = 0,$$

в частности, можно записать

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}; \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}; \\ \zeta(-2) = 0; \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120}... \tag{2}$$

Утверждение, что ζ(1) = –1/12, иногда в литературе называют странной формулой. В физике эта формула находит применение для вычисления энергии притяжения двух пластин в эффекте Казимира, а также для вычисления энергии основного состояния бозонной струны (она оказывается отрицательной, и, следовательно, вакуум в этом случае нестабилен). Утверждают, что основное состояние бозонной струны является тахионом. Отметим, что дзета-функция равна нулю в отрицательных четных числах. Такие нули $\zeta(s)$ называются тривиальными. Для знакопеременного случая запишем

$$\tilde{\zeta}(0) = \frac{1}{2}; \quad \tilde{\zeta}(-1) = \frac{1}{4}; \\ \tilde{\zeta}(-2) = 0; \quad \tilde{\zeta}(-3) = -\frac{1}{8},... \tag{3}$$

Для дзета-функции Римана имеются представления в виде интеграла. Одной из самых известных формул является следующая:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}dx.$$

Эта формула в статистической физике появляется в описании квантового бозонного газа. Знакопеременный случай имеет отношение к фермионам:

$$\tilde{\zeta}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}dx.$$

Простейшим обобщением дзета-функции Римана является дзета-функция Гурвица [1]:

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.$$

Для этой функции нет аналога формулы Эйлера в виде произведения, но имеются функциональное уравнение и интегральное представление.

Целью данной работы является исследование одного из обобщений дзета-функции и его возможных применений в теории поля.

Рассмотрим пример приложения дзета-функции в физической задаче. В квантовой теории поля часто необходимо вычислять регуляризованные детерминанты операторов Бельтрами – Лапласа, Дирака и т. д. Это необходимо, например, чтобы найти статсумму в некоторой квантовой теории поля. Такие детерминанты можно найти с помощью подхода, который называется дзета-регуляризацией [5, 6]. Регуляризованный детерминант оператора Q можно вычислить, используя следующую формулу:

$$\det{}' P = \exp(-\zeta_Q'(0)).$$

Здесь дзета-функция $\zeta_Q(s)$ построена по собственным значениям λ_n оператора Q:

$$\zeta_Q = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n^s}.$$

Рассмотрим, например, свободную квантовую частицу на окружности. Она описывается одномерной гауссовой теорией поля. Для того чтобы найти статсумму этой теории, нужно определить детерминант оператора $-d^2/dx^2$. Спектр этого оператора состоит из 0 и $(n/r)^2$, где r – радиус окружности, n – любое натуральное число. Примем для простоты $r = 1$, тогда

$$\zeta_Q(s) = 2\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{2s} = 2\zeta(2s).$$

Поскольку

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi),$$

то

$$\det{}' \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) = 2\pi.$$

Дзета-регуляризация дает для произведения $\infty! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots$ значение, равное $\sqrt{2\pi}$.

Квантовый анализ. Квантовый или q-анализ можно определить, по крайней мере, двумя способами [7]. В частности, можно определить h-анализ с производной

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Здесь мы будем рассматривать q-анализ, в котором производная функции имеет вид

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}.$$

Обе производные переходят в обычную производную в пределах $h \to 0$ и $q \to 1$ соответственно. Определим q-аналог действительного числа как

$$[n] = n_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Для аналога бесконечности (если $0 < q < 1$) имеем

$$[\infty] = \frac{1}{1 - q}.$$

Запишем для целого $n > 1$ следующее выражение:

$$(x-a)_q^n = (x-a)(x-qa)...(x-q^{n-1}).$$

С учетом полученного выражения можно записать

$$D_q (x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}.$$

Представим q-экспоненты следующими рядами:

$$e_q^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{[i]!}; \qquad E_q^x = \sum_{i=0}^{\infty} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \frac{x^i}{[i]!}.$$

Используя формулу Эйлера, можно построить через q-экспоненты тригонометрические функции.

Квантовый аналог интеграла в начале XX в. ввел Ф. Джексон:

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q) a \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i a).$$

Определим q-гамма- и q-бета-функции. Обычная гамма-функция имеет вид простого функционального уравнения: $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$. Найдем для ее q-аналога похожее функциональное уравнение. Запишем q-гамма-функцию в виде следующего интеграла Джексона:

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x.$$

Можно показать, что для нее функциональным уравнением будет

$$\Gamma_q(t+1) = [t]\Gamma_q(t),$$

а для натуральных чисел имеем $\Gamma_q(n + 1) = [n]!$.

Аналогично для q-бета-функции, определяемой формулой

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_q x,$$

получим следующее выражение:

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}.$$

Примечательно, что эти функции можно записать в виде бесконечных произведений:

$$B_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q};$$

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty}.$$

Первая формула упрощается для натуральных n и имеет вид

$$B_q(t,n) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}.$$

Квантовая дзета-функция. Корректно q-аналог дзета-функции Римана был впервые представлен в работе [8], хотя различные варианты рассматривались и ранее. Основная идея работы [8] заключается в следующем.

Рассмотрим следующее семейство рядов:

$$f_q(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{nt}}{[n]^s} = \frac{q^t}{[1]^s} + \frac{q^2 t}{[2]^s} + \frac{q^3 t}{[3]^s} + \frac{q^4 t}{[4]^s} + \ldots = (1-q)^s \sum_{r=0}^{\infty} C_r^{s+r-1} \frac{q^{t+r}}{1-q^{t+r}} =$$

$$= (1-q)^s \left(\frac{q^t}{1-q^t} + s\frac{q^{t+1}}{1-q^{t+1}} + \frac{s(s+1)}{2} \frac{q^{t+2}}{1-q^{t+2}} + \ldots \right).$$

Ряды $f_q(s,\ t)$ имеют полюса первого порядка в точках $t \in\ Z \leq 0 + 2\pi i Z/\log q$. Следует отметить, что дзета-функция Римана имеет только одну особенность, а именно: полюс первого порядка в точке $s = 1$.Тогда выберем $t = s - 1$ и получим правильный классический предел:

$$\zeta_q(s) = f_q(s, s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(s-1)}}{[n]^s} = \frac{q^{s-1}}{[1]^s} + \frac{q^{2(s-1)}}{[2]^s} + \frac{q^{3(s-1)}}{[3]^s} + \frac{q^{4(s-1)}}{[4]^s} + \ldots$$

Представим также знакопеременную квантовую дзета-функцию в виде

$$\tilde{\zeta}_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{q^{n(s-1)}}{[n]^s} = \frac{q^{s-1}}{[1]^s} - \frac{q^{2(s-1)}}{[2]^s} + \frac{q^{3(s-1)}}{[3]^s} - \frac{q^{4(s-1)}}{[4]^s} + \ldots$$

Тогда формуле (1) будет соответствовать выражение

$$\tilde{\zeta}_q(s) = \zeta_q(s) - 2\frac{1}{(1+q)^s}\zeta_{q^2}(s).$$

В частности, отсюда следует, что $\zeta_q(s)$ и $\zeta_q(s)$ будут совпадать при $q = -1$ и $s < 0$. Можно записать следующие функциональные ряды:

$$\zeta_q(s) = (1-q)^s \left(\frac{q^{s-1}}{1-q^{s-1}} + s\frac{q^s}{1-q^s} + \frac{s(s+1)}{2}\frac{q^{s+1}}{1-q^{s+1}} + \ldots \right);$$

$$\tilde{\zeta}_q(s) = (1-q)^s \left(\frac{q^{s-1}}{1+q^{s-1}} + s\frac{q^s}{1+q^s} + \frac{s(s+1)}{2}\frac{q^{s+1}}{1+q^{s+1}} + \ldots \right).$$

Для натуральных m предельное значение $\lim\limits_{s\to -m} \zeta_q(s)$ существует и представлено в виде

$$\zeta_q(-m) = (1-q)^{-m} \left(\sum_{r=0}^{m} (-1)^r C_r^m \frac{1}{q^{m+1-r}-1} + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)\log q} \right).$$

Для $\tilde{\zeta}_q(s)$ получим

$$\tilde{\zeta}_q(-m) = (1-q)^{-m} \left(\sum_{r=0}^{m} (-1)^r C_r^m \frac{1}{q^{m+1-r}+1} \right). \tag{4}$$

Рассмотрим следующие примеры [8]:

$$\zeta_q(0)=\frac{1}{1-q}-\frac{1}{\log q};\quad \zeta_q(-1)=\frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{q^2-1}-\frac{1}{q-1}+\frac{1}{2\log q}\right).$$

В классическом пределе $q\to 1$ получены формулы Эйлера (2):

$$\lim_{q\to 1}\zeta_q(0)=-\frac{1}{2};\quad \lim_{q\to 1}\zeta_q(-1)=-\frac{1}{12}.$$

В общем случае

$$\lim_{q\to 1}\zeta_q(-m)=-\frac{B_{m+1}}{m+1}.$$

Рассмотрим знакопеременный случай, когда формула (4) принимает следующий вид в неположительных целых точках:

$$\tilde{\zeta}_q(0)=\frac{1}{q+1};\quad \tilde{\zeta}_q(-1)=\frac{q}{(q^2+1)(q+1)};$$

$$\tilde{\zeta}_q(-2)=\frac{q(q-1)}{(q^3+1)(q^2+1)};\quad \tilde{\zeta}_q(-3)=\frac{q(q^4-q^3-q^2-q+1)}{(q^4+1)(q^3+1)(q^2+1)};\tag{5}$$

$$\tilde{\zeta}_q(-4)=\frac{q(q-1)(q^2+q+1)(q^4-2q^3-2q+1)}{(q^4-q^3+q^2-q+1)(q^4+1)(q^3+1)(q^2+1)}.$$

Полученные формулы (5) переходят в классические формулы Эйлера (3). Действительными нулями $\tilde{\zeta}_q(-3)$ являются $q_1=0$ и

$$q_{2,3}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{13}\pm\sqrt{2(\sqrt{13}-1)}),$$

а нули $\tilde{\zeta}_q(-4)$ суть 0, 1 и

$$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\sqrt[4]{3}).$$

В свою очередь, q-аналог дзета-функции Гурвица задается рядом

$$\zeta(s;a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+a)(s-1)}}{[n+a]^s}.$$

В классическом пределе $q\to 1$ для натуральных m можно получить

$$\lim_{q\to 1}\zeta_q(m;a)=-\frac{B_{m+1}(a)}{m+1}.$$

Здесь полиномы Бернулли $B_n(x)$ определяются разложением производящей функции:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Вполне возможно, что q-аналог дзета-функции Римана нельзя записать в виде бесконечного произведения или в виде функционального уравнения [9], хотя доказательство этого требует дополнительного рассмотрения. Известно, что у обычной дзета-функции имеются тождества и они выводятся, как правило, через формулу Эйлера бесконечного произведения. Неизвестно, есть ли похожие тождества для квантового аналога, но если даже они существуют, то для их доказательства потребуются другие подходы.

Заключение. Таким образом, вычислены значения знакопеременной версии дзета-функции $\zeta(s)$ в целых отрицательных точках, которые являются рациональными функциями. Используя полученные результаты, можно, например, найти спектр масс в классической теории поля с кинетическим членом в виде q-аналога знакопеременной версии дзета-функции, в котором вместо q стоит оператор д'Аламбера.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. *Курс современного анализа*. Т. 2. Москва, Физматгиз, 1963, 516 с.

[2] Титчмарш Э.Ч. *Дзета-функция Римана*. Москва, Едиториал УРСС, 2010, 152 с.

[3] Манин Ю.И., Панчишкин Л.Ю. *Введение в современную теорию чисел*. Москва, МНЦМО, 2009, 552 с.

[4] Харт Н. *Геометрическое квантование в действие*. Москва, Мир, 1985, 343 с.

[5] Ray D., Singer I. M. R-torsion and the laplacian on Riemannian manifolds. *Adv. in Math*., 1971, vol. 7, pp. 145–210.

[6] Bost J.-B. Fibres determinants, determinants regularises et measures sur les espaces de modules des courbes complexes, Sem. Bourbaki, 39 eme annee1986-1987, n 676, Asterisque 152, 153, 1987, pp. 113–149 (пер. *Математический анализ и геометрия*: сб. статей, 1983–1987 гг., Москва, Мир, 1990, 248 с.).

[7] Кац В.Г., Чен П. *Квантовый анализ*. Москва, МНЦМО, 2005, 128 с.

[8] Kaneko M., Kurokawa N., Wakayama M. A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta-function. *Kyushu Journal of Math*., 2003, vol. 57, pp. 175–192.

[9] Kawagoe K., Wakayama M.,Yamasaki Y. The q-Analogues of the Riemann zeta, Dirichlet L-functions, and a crystal zeta-function. *Forum Math*, 2008, vol. 1, pp. 1–26.

Статья поступила в редакцию 05.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шишанин А.О. Дзета-функция Римана, ее знакопеременная версия и их q-аналоги. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 8. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/867.html

Шишанин Андрей Олегович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 20 публикаций. Области научных интересов: математическая физика, квантовая теория поля. e-mail: shishandr@rambler.ru