УДК 517.956.4

О численном решении обратной задачи теплопроводности

© А.Ф. Грибов, Е.Н. Жидков, И.К. Краснов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследована обратная задача восстановления коэффициента теплопроводности параболического уравнения по финальному распределению температуры, служащего математической моделью для задачи определения дефектов конструкций. Предложен способ решения поставленной задачи, а также рассмотрен численный пример решения обратной задачи.

Ключевые слова: *обратная задача, тепловизор, параболическое уравнение, разностная аппроксимация, функционал Тихонова, случайный поиск.*

В последнее время большое внимание уделяется задачам неразрушающего контроля конструкций. Одним из вариантов такого контроля является тепловидение: с помощью тепловизора можно определить положение дефекта в образце [1–9].

Математически эта задача сводится к задаче определения коэффициента при старшей производной. Этим вопросам посвящено большое количество работ [10–16].

В данной работе рассмотрено численное решение обратной задачи.

Сформулируем математическую постановку задачи.

Пусть имеется неоднородный стержень длиной l. На правый конец стержня подается поток тепла, на левом конце происходит теплообмен с внешней средой по закону Стефана – Больцмана. Зная начальную и конечную температуры, требуется определить теплофизические характеристики стержня.

Обозначим $u(x,t)$ температуру стержня в момент времени t в точке x, $k(x)$ – кусочно-постоянный коэффициент.

Тогда тепловое поле удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), x \in (0,l), t \in (0,T],\\
&u(x,0) = u_0 = \text{const} > 0,\\
&-\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sigma(u^4(x,t) - u_0^4),\\
&\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = q(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь α, σ – положительные постоянные; $q(t)$ – заданная неотрицательная функция.

Для практического решения поставленной задачи дискретизируем (1), для чего введем равномерную сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j)\},\ x_i = ih,\ t_j = \tau j,\ h = l/n,\ \tau = T/m.$$

Обозначим $u\left(x_i, t_j\right) = u_{ij}$.

К уравнению (1) применим консервативную схему [16].

Обозначим

$$k_{i+1/2} = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}\right]^{-1},$$

$$W_{i+1/2} = \frac{1}{h} k_{i+1/2}\left(u_{ij} - u_{ij+1}\right),$$

$$\hat{W}_{i+1/2} = \frac{1}{h} k_{i+1/2}\left(\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{ij+1}\right).$$

Для разностной задачи получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}(u_{ij+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h}\left(\hat{W}_{i-\frac{1}{2}} - \hat{W}_{i+\frac{1}{2}} + W_{i-\frac{1}{2}} - W_{i+\frac{1}{2}}\right),\\
&u_{i0} = u_0,\\
&-\frac{1}{h}(\hat{u}_1 - \hat{u}_{0)} = \sigma\left(u_{0j}^4 - u_0^4\right),\\
&\frac{1}{h}\left(\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}\right) = q_j.
\end{aligned} \tag{2}$$

Решим задачу методом разностной прогонки [17]. В силу нелинейности левого граничного условия прогоночный коэффициент нелинейным образом зависит от температуры на левой границе. Для определения поля температуры можно воспользоваться методом простой итерации на каждом временном шаге [18].

В качестве обратной рассмотрим следующую задачу.

Пусть известно решение задачи (1) при $t = T$, $u(x, T) = \varphi(x)$. Зная $\varphi(x)$ требуется найти функцию $k(x)$. Сформулируем разностный аналог поставленной задачи.

Пусть функция u_{ij} – решение задачи (2). Обозначим $\varphi_i = \varphi\left(x_i\right)$.

Введем невязку

$$N = \sum_{0}^{n} (u_{im} - \varphi_i)^2.$$

Требуется найти такой вектор $\overline{k} = \left(k_{\frac{1}{2}}, k_{\frac{3}{2}}, \ldots, k_{n-\frac{1}{2}}\right)^T$, который минимизирует невязку N. Вследствие некорректности поставленной задачи [17] минимизируем функционал Тихонова:

$$M^{\beta}\left(\overline{k}\right) = N\left(\overline{k}\right) + \beta \sum_{1}^{n} \left(k_{i-\frac{1}{2}}\right)^2, \tag{3}$$

где β – положительная постоянная.

Очевидно, что функционал (3) положительно определен, поэтому у него существует единственный минимум

$$\overline{k}^{\beta} = \left(k^{\beta}_{\frac{1}{2}}, \ldots, k^{\beta}_{n-\frac{1}{2}}\right)^T. \tag{4}$$

Если набор $\{\varphi_i\}$ известен точно, то в качестве решения обратной задачи

$$\overline{k}^{0} = \lim_{\beta\to 0} \overline{k}^{\beta} = \left(k^{0}_{\frac{1}{2}}, \ldots, k^{0}_{n-\frac{1}{2}}\right)^T. \tag{5}$$

Если вместо точного значения $\{\varphi_i\}$ известны их приближенные значения $\{\varphi_i^{\delta}\}$, такие что $\sum_{i=0}^{n} (\varphi_i - \varphi_i^{\delta})^2 \le \delta^2$, то в качестве решения обратной задачи берется вектор $\overline{k}^{\beta}$, для которого

$$N = \sum_{0}^{n} (u_{im} - \varphi_i)^2 = \delta^2.$$

В этом случае решение обратной задачи устойчиво [17].

Как пример рассмотрим решение обратной задачи (минимизация функционала Тихонова) при следующих начальных данных:

$$\sigma = 5{,}669 \cdot 10^{-8}, \quad q(t) = 1, \; T = 2, \; u_0 = 20,$$

$$k(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\in(0;0,5];\\ 5 \text{ при } x\in(0,5;1).\end{cases}$$

Число интервалов дискретизации равно 20, $N=21$, $\tau=h=0,05$.

Минимизация функционала как функции $N-1$ переменной проводилась методом случайного поиска, основой которого является итерационный процесс

$$\overline{k}^{n+1}=\overline{k}^{n}+\alpha_n\frac{\xi}{||\xi||},\quad n=0,1,\ldots,$$

где $\alpha_n>0$ – величина шага; $\xi=(\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_N)$ – реализация $N-1$-мерного случайного вектора.

Начальное приближение $\overline{k}^0=(5,5,\cdots,5)$. Число неудачных попыток на очередном шаге найти меньшее значение минимизируемой функции $N_{\max}=3\cdot N$.

В случае если все попытки были неудачными, шаг поиска α уменьшался, и процедура повторялась до $\alpha<10^{-4}$. Результаты расчетов приведены на рис. 1 и 2. На рис. 1 сплошной линией показаны значения коэффициентов $k(x)$ при решении прямой задачи, пунктиром – результат решения обратной задачи. На рис. 2 показаны результаты решения прямой и обратной задач при T = 2. Сплошная кривая – решение прямой задачи, пунктирная – восстановленное распределение температуры.

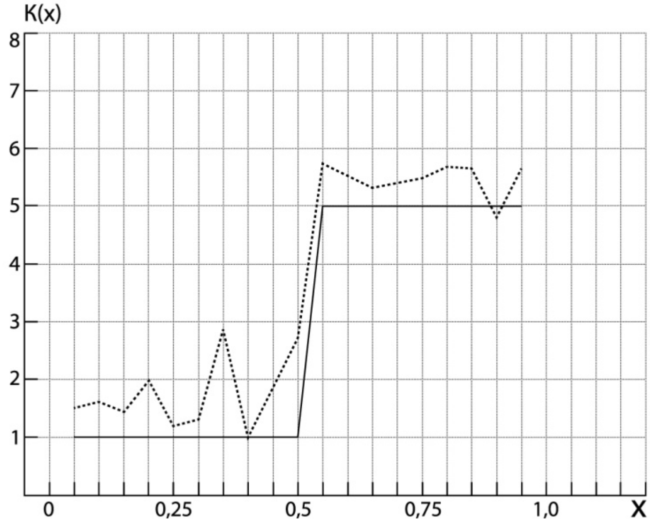

Рис. 1. Коэффициенты $k(x)$: ——– точные; ········ – восстановленные

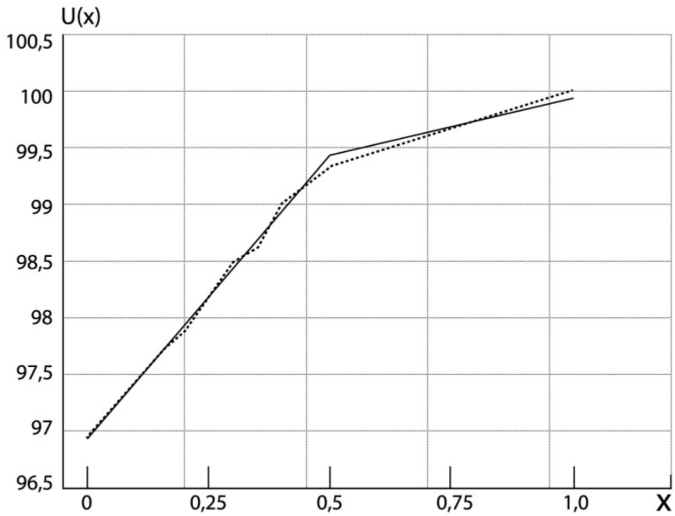

Рис. 2. Распределение температуры —— – точное; ········ – восстановленное

Анализ полученных результатов показывает приемлемое совпадение теоретического и найденного в ходе решения обратной задачи значений коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Будадин О.Н., Кутюрин В.Ю., Каледин В.О. Диагностика технического состояния сосудов, работающих под внутренним давлением, тепловым (тепловизионным) методом. *Дефектоскопия*, 2008, № 10, с. 16−25.

[2] Вавилов В.П., Нестерчук Д.А., Ширяев В.В., Иванов А.И., Свидерский В. Тепловая (инфракрасная) томография: терминология, основные процедуры и применение для неразрушающего контроля композиционных материалов. *Дефектоскопия*, 2010, № 3, с. 3−16.

[3] Будадин О.Н., Потапов А.И., Колганов В.И., Троицкий-Марков Т.Е., Абрамова Е.В. *Тепловой неразрушающий контроль изделий*. Москва, Наука, 2002.

[4] Мацевитый Ю.М. *Обратные задачи теплопроводности*. В 2 т. Киев, Наукова думка, 2002.

[5] Мацевитый Ю.М., Костиков А.О. Математические аспекты решения геометрических обратных задач теплопроводности: проблемы и пути их решения. *Проблемы машиностроения*, 2007, т. 10, № 3, с. 27−34.

[6] Cheng C.-Y. Shape Identification by Inverse Heat Transfer Method. *J. Heat Transfer*. 2003, vol. 125(2), pp. 224–231.

[7] Chun-Yun Wu, Wen-Chang Lin. Using Genetic Algorithms to Defect Interfacial Cracks Based on Thermal Resistance for Multilayer Materials. *Дефектоскопия*, 2007, № 7, с. 71−84.

[8] Huang C.H. A Shape Identification Problem in Estimating the Interfacial Configurations in a Multiple Region Domain. *J. Thermophys Heat Transfer*, 2004.

[9] Димитриенко Ю.И., Николаев А.А., Краснов И.К. Разработка автоматизированных технологий неразрушающего контроля для оценки остаточного ресурса неметаллических конструкций. *Сб. тр. Четвертой международ-*

ной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности». Санкт-Петербург, Изд-во Политехнического университета, 2007, т. 11, с. 326–329.

[10] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New-York, Marcel Dekker, Inc., 1999.

[11] Kozhanov A.I. *Composite Type Equations and Inverse Problems*. Utrecht, VSP, 1999.

[12] Ivanchov M. *Inverse problems for equation of parabolic type. Math. Studies. Monograph Series*. vol. 10. Lviv. WNTL Publishers, 2003.

[13] Isakov V. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin, Springer-Verlag, 1998.

[14] Isakov V. The Inverse Problem of Option Pricing. *Recent Developments in Theory and Numerics. International Conference on Inverse problems*. City Univercity of Hong Kong, 2002, 47–55.

[15] Гольдман Н.Л. Обратные задачи с финальным переопределением. *ДАН РФ*, 2011, т. 438, № 2, с. 162–167.

[16] Калиткин Н.Н. *Численные методы*. Москва, Наука,1978, 512 с.

[17] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука, 1979.

[18] Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. *Разностные методы решения задач теплопроводности*. Томск, Изд-во ТПУ, 2007, 172 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Грибов А.Ф., Жидков Е.Н., Краснов И.К. О численном решении обратной задачи теплопроводности. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/964.html

Грибов Александр Федорович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: alexandr-gribov@list.ru

Жидков Евгений Николаевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: ENZhidkov@yandex.ru

Краснов Игорь Константинович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: igorkrsnv@yandex.ru