УДК 629.7

Безрасходная разгрузка накопленного кинетического момента инерционных исполнительных органов автономного космического аппарата на высокоэллиптической орбите

© Е.А. Воробьева[1], Н.Е. Зубов[1,2], Е.А. Микрин[1,2]

[1] ОАО «Ракетно-космическая корпорация ”Энергия“ имени С.П. Королёва»,
г. Королев Московской области, 141070, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается задача безрасходной разгрузки накопленного кинетического момента инерционных исполнительных органов автономного космического аппарата на высокоэллиптической орбите. Получено аналитическое решение задачи гравитационной разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов в гироскопически связанных между собой каналах крена — рысканья и показаны преимущества этого решения.

Ключевые слова: *инерционные исполнительные органы (ИИО), космический аппарат, гравитационный момент, МИМО-система, уровни декомпозиции, метод точного размещения полюсов.*

Введение. Характерной особенностью инерционных исполнительных органов (ИИО) космических аппаратов (КА), обеспечивающих решения задач ориентации орбитального движения является необходимость разгрузки накапливаемого кинетического момента ИИО. В силу большой длительности полета автономных КА наиболее предпочтительной является разгрузка без расхода рабочего тела. Для высокоэллиптической орбиты наиболее предпочтительным является использование гравитационного момента [1]. Вопросы построения законов управления разгрузкой кинетического момента ИИО изучались в ряде работ [2, 3] и касались в основном круговых орбит или эллиптических для автономного канала тангажа [2], но они не рассматривали возможность получения аналитического решения для гироскопически связанных между собой каналов крена — рысканья. Решению этой проблемы и посвящена данная статья.

1. Математическая модель КА. Динамические уравнения углового движения КА, несущего вращающиеся массы (в данном случае маховики), при воздействии гравитационного момента в соответствии с [4] имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{абс}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} + \dot{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \mathbf{h} = 3\frac{G}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{J}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{1}$$

где $\mathbf{J}$ — матрица тензора инерции КА; $\mathbf{h}$ — вектор суммарного кинетического момента маховиков; $\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}}$ — векторы абсолютной угловой скорости в проекциях на связанный базис; $\mathbf{r}/r = i_2$ — единичный вектор местной вертикали; $3\frac{G}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{J}\frac{\mathbf{r}}{r}$ — гравитационный момент; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из центра Земли в центр масс объекта управления; $G=\mu M$; μ — гравитационная постоянная; M — масса Земли.

Считаем, что на борту КА имеется ЭВМ с тактом работы Δt. В этом случае на каждом такте ЭВМ для высокоэллиптических орбит в соответствии с (1) линеаризованные уравнения орбитальной ориентации в окрестности точки $\gamma=\psi=0,\ \vartheta=\theta_0$ при наличии в каждом канале управления ИИО с учетом гравитационного момента имеют вид

$$
\begin{gathered}
\ddot{\gamma}=\left(\frac{J_y-J_z}{J_x}\right)\left(\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)+3\frac{G}{r^3}\cos^2\theta_0\right)\gamma-\\
-\left(\frac{J_x+J_y-J_z}{J_x}\right)\sqrt{\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)}\ \dot{\psi}+\\
+\frac{G}{r^3}\left(2e\sin\nu-3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_0+\vartheta\cos 2\theta_0\right)\right)\psi=\\
=-\dot{h}_x-\sqrt{\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)}\ h_y,\\
\ddot{\psi}=\left(\frac{J_x-J_z}{J_y}\right)\left(\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)+3\frac{G}{r^3}\sin^2\theta_0\right)\psi+\\
+\left(\frac{J_x+J_y-J_{zz}}{J_y}\right)\sqrt{\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)}\ \dot{\gamma}-\\
-\frac{G}{r^3}\left(2e\sin\nu+3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_0+\vartheta\cos 2\theta_0\right)\right)\gamma=\\
=-\dot{h}_y+\sqrt{\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)}\ h_x,\\
\ddot{\vartheta}=3\frac{G}{r^3}\left(\frac{J_y-J_x}{J_z}\right)\cos(2\theta_0)\vartheta+\\
+\frac{3}{2}\frac{G}{r^3}\left(\frac{J_y-J_x}{J_z}\right)\sin(2\theta_0)-2\frac{G}{r^3}e\sin\nu=-h_z,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции КА; h_x, h_y, h_z — проекции кинетического момента ИИО на оси связанного базиса; γ, ψ, ϑ — углы отклонения связанного базиса по крену вокруг местной вертикали и от местной вертикали по рысканью и тангажу.

Применяя теорему об изменении кинетического момента отдельно к корпусу КА и отдельно к ИИО на основании системы (1), имеем

$$
\begin{aligned}
\ddot{\gamma} &= \left(\frac{J_y - J_z}{J_x}\right)\left(\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu) + 3\frac{G}{r^3}\cos^2\theta_0\right)\gamma - \\
&\quad - \left(\frac{J_x + J_y - J_z}{J_x}\right)\sqrt{\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)}\ \dot{\psi} + \\
&\quad + \frac{G}{r^3}\big(2e\sin\nu - 3(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta_0 + \vartheta\cos 2\theta_0)\big)\ \psi - \frac{u_x}{J_x}, \\
\ddot{\psi} &= \left(\frac{J_x - J_z}{J_y}\right)\left(\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu) + 3\frac{G}{r^3}\sin^2\theta_0\right)\psi + \\
&\quad + \left(\frac{J_x + J_y - J_z}{J_y}\right)\sqrt{\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)}\ \dot{\gamma} - \\
&\quad - \frac{G}{r^3}\left(2e\sin\nu + 3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_0 + \vartheta\cos 2\theta_0\right)\right)\gamma - \frac{u_y}{J_y}, \\
\dot{h}_x &+ \sqrt{\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)}\ h_y = u_x, \\
\dot{h}_y &- \sqrt{\frac{G}{r^3}(1+e\cos\nu)}\ h_x = u_y, \\
\ddot{\vartheta} &= 3\frac{G}{r^3}\left(\frac{J_y - J_x}{J_z}\right)\cos(2\theta_0)\vartheta + \frac{3}{2}\frac{G}{r^3}\left(\frac{J_y - J_x}{J_z}\right)\sin(2\theta_0) - \\
&\quad - 2\frac{G}{r^3}e\sin\nu - \frac{u_z}{J_z}, \\
\dot{h}_z &= u_z.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь u_x, u_y, u_z — моменты реакции в подшипниках маховиков, через которые осуществляется как управляющее воздействие на корпус КА с целью поддержания его ориентации, так и разгрузка накопленного кинетического момента ИИО. Система уравнений (2) распадается на две независимые подсистемы: одна из них определяет движение в гироскопически связанных между собой каналах крен — рысканье, а вторая — в автономном канале тангажа. Решение задачи разгрузки для канала тангажа рассмотрена в [2]. Соответственно для каналов крена — рысканья на основании (3) можно записать

$$\ddot{\gamma} = \left(\frac{J_y - J_z}{J_x}\right)\left(\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu) + 3\frac{G}{r^3}\cos^2\theta_0\right)\gamma -$$

$$-\left(\frac{J_x + J_y - J_z}{J_x}\right)\sqrt{\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu)}\;\dot{\psi} +$$

$$+\frac{G}{r^3}\left(2e\sin\nu - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_0 + \vartheta\cos 2\theta_0\right)\right)\psi - \frac{u_x}{J_x},$$

$$\ddot{\psi} = \left(\frac{J_x - J_z}{J_y}\right)\left(\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu) + 3\frac{G}{r^3}\sin^2\theta_0\right)\psi +$$

$$+\left(\frac{J_x + J_y - J_z}{J_y}\right)\sqrt{\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu)}\;\dot{\gamma} -$$

$$-\frac{G}{r^3}\left(2e\sin\nu + 3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_0 + \vartheta\cos 2\theta_0\right)\right)\gamma - \frac{u_y}{J_y},$$

$$\dot{h}_x + \sqrt{\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu)}\;h_y = u_x,$$

$$\dot{h}_y - \sqrt{\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu)}\;h_x = u_y,$$

или в общем виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u}, \tag{4}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $x_1 = \gamma,\ x_2 = \dot{\gamma},\ x_3 = \psi,\ x_4 = \dot{\psi},$ $x_5 = h_x,\ x_6 = h_y.$

2. Модифицированный алгоритм точного размещения полюсов. Для решения задачи синтеза законов управления разгрузкой кинетического момента ИИО воспользуемся модифицированным алгоритмом точного размещения полюсов [2], который основан на следующей многоуровневой декомпозиции системы (4):

нулевой уровень

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}, \tag{5}$$

k-й уровень ($k = \overline{1, L}$, $L = \mathrm{ceil}(n / r) - 1$)

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp -}, \quad \boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{B}_i^{\perp-}$ — 2-полуобратная матрица для $\boldsymbol{B}_i^{\perp}$ [3, 4], т. е. матрица, удовлетворяющая условиям регулярности:

$$\boldsymbol{B}_i^{\perp}\boldsymbol{B}_i^{\perp-}\boldsymbol{B}_i^{\perp}=\boldsymbol{B}_i^{\perp},\ \boldsymbol{B}_i^{\perp-}\boldsymbol{B}_i^{\perp}\boldsymbol{B}_i^{\perp-}=\boldsymbol{B}_i^{\perp-}. \tag{7}$$

Пусть система (4) полностью управляемая и выполнена многоуровневая декомпозиция (5), (6), где все матрицы $\boldsymbol{B}_i^{\perp-}$ удовлетворяют условиям регулярности (7). Тогда в соответствии с [2] матрица $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0\in\mathbb{R}^{r\times n}$, являющаяся матрицей обратной связи регулятора, вычисляется по формулам

$$\boldsymbol{K}_L=\boldsymbol{B}_L^{+}\boldsymbol{A}_L-\Phi_L\boldsymbol{B}_L^{+}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{B}_k^{-}\boldsymbol{A}-\Phi_k\boldsymbol{B}_k^{-},\quad \boldsymbol{B}_k^{-}=\boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{B}_k^{\perp}+\boldsymbol{B}_k^{+},\qquad k=\overline{0,L-1}, \tag{9}$$

и обеспечивает заданное размещение полюсов

$$\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)=\bigcup_{i=1}^{L+1}\operatorname{eig}(\Phi_{i-1}).$$

Здесь $\boldsymbol{B}^{\perp\mathrm{T}}=\operatorname{null}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$ — ортогональная матрица; $\boldsymbol{B}^{+}$ — псевдообратная матрица Мура — Пенроуза; n — размерность объекта управления; r — размерность вектора управления.

3. Разгрузка кинетического момента ИИО в каналах крена — рысканья. Рассмотрим применение изложенного выше модифицированного алгоритма синтеза регулятора, обеспечивающего заданное размещение полюсов применительно к задаче нахождения законов управления разгрузкой кинетического момента ИИО КА, который описывается моделью (4). Определим вектор состояния КА следующей матрицей-столбцом:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_8\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\gamma & \dot{\gamma} & h_x & \int_0^t h_x dt & \psi & \dot{\psi} & h_y & \int_0^t h_y dt\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

Для сокращения записи аналитического решения будем считать, что моменты инерции КА удовлетворяют следующим соотношениям:

$$J_y=\frac{5}{4}J_x,\ \ J_z=\frac{1}{2}J_x.$$

Тогда в обозначениях уравнения (9) на основании системы (8) с учетом (10) имеем

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{25} & -\dfrac{7\omega_0}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{61} & \dfrac{7\omega_0}{5} & 0 & 0 & a_{65} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{J_x} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{4}{5J_x} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu)},$$

$$a_{21} = \left(\frac{J_{yy} - J_{zz}}{J_{xx}}\right)\left(\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu) + 3\frac{G}{r^3}\cos^2\theta_0\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu) + 3\frac{G}{r^3}\cos^2\theta_0\right),$$

$$a_{25} = \frac{G}{r^3}\left(2e\sin\nu - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_0 + \vartheta\cos 2\theta_0\right)\right),$$

$$a_{61} = -\frac{G}{r^3}\left(2e\sin\nu + 3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta_0 + \vartheta\cos 2\theta_0\right)\right),$$

$$a_{65} = \left(\frac{J_{xx} - J_{zz}}{J_{yy}}\right)\left(\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu) + 3\frac{G}{r^3}\sin^2\theta_0\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{G}{r^3}(1 + e\cos\nu) + 3\frac{G}{r^3}\sin^2\theta_0\right).$$

Размерность n вектора состояния объекта управления равна восьми, вектора управления $r = 2$ и, следовательно, $L = \operatorname{ceil}(n/r) - 1 = 4 - 1 = 3$, т. е. число уровней декомпозиции равно четырем (нулевой, первый, второй и третий).

Будем считать, что требуется обеспечить заданный характеристический полином замкнутой системы, который запишем как

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_8 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}\right) = \left(\lambda - \tilde{\lambda}_1\right)\cdots\left(\lambda - \tilde{\lambda}_8\right) = \prod_{j=1}^{8}\left(\lambda - \tilde{\lambda}_j\right), \qquad (11)$$

а $\tilde{\lambda}_j$ заданы исходя из некоторых определенных требований.

Нулевой уровень многоуровневой декомпозиции для MIMO-системы [3] (5) реализуется тривиально. Соответственно для КА, описываемого уравнениями (7), имеем

$$\boldsymbol{B}_0^{\perp} = \boldsymbol{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{5J_x}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_0^{+} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{J_x}{(J_x^2+1)} & 1-\dfrac{1}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{20J_x}{(25J_x^2+16)} & 1-\dfrac{16}{(25J_x^2+16)} & 0 \end{bmatrix},$$

Проверка условия ортогональности матрицы $\boldsymbol{B}_0^{\perp}$ показывает, что в данном случае оно не выполняется, поэтому решение поставленной задачи может быть осуществлено только с помощью модифицированного метода. Найдем псевдообратную матрицу [2] для $\boldsymbol{B}_0^{\perp}$, которая в данном случае запишется так:

$$\boldsymbol{B}_0^{\perp -} = \boldsymbol{B}_0^{\perp +} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{J_x}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{20J_x}{(25J_x^2+16)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{16}{(25J_x^2+16)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку в нашем случае $\boldsymbol{B}_k^{\perp -} = \boldsymbol{B}_k^{\perp +}$ первый уровень декомпозиции будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{B}_0^{\perp}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0^{\perp+} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{J_x}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_x a_{21} & 0 & 0 & J_x a_{25} & -\dfrac{\omega_0(35J_x^2+16)}{(25J_x^2+16)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(J_x^2+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{20J_x}{(25J_x^2+16)} & 0 \\ \dfrac{5J_x a_{61}}{4} & \dfrac{\omega_0(7J_x^2+4)}{4(J_x^2+1)} & 0 & \dfrac{5J_x a_{65}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{16}{(25J_x^2+16)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0^{\perp}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{J_x} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\omega_0}{5} \\ 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{4}{5J_x} \\ -\dfrac{3\omega_0}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

при этом

$$\boldsymbol{B}_1^{\perp} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{J_x\omega_0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3J_x\omega_0}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{5}{2\omega_0} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1^{\perp+} = \begin{bmatrix} b_{1_{11}}^{\perp+} & 0 & b_{1_{13}}^{\perp+} & 0 \\ 0 & b_{1_{22}}^{\perp+} & 0 & b_{1_{24}}^{\perp+} \\ b_{1_{31}}^{\perp+} & 0 & b_{1_{33}}^{\perp+} & 0 \\ 0 & b_{1_{42}}^{\perp+} & 0 & b_{1_{44}}^{\perp+} \\ b_{1_{51}}^{\perp+} & 0 & b_{1_{53}}^{\perp+} & 0 \\ 0 & b_{1_{62}}^{\perp+} & 0 & b_{1_{64}}^{\perp+} \end{bmatrix}.$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$b_{1_{11}}^{\perp+} = \frac{16J_x}{b_1},\ b_{1_{13}}^{\perp+} = -\frac{12J_x\omega_0}{b_1},\ b_{1_{22}}^{\perp+} = \frac{8J_x\omega_0}{b_2},\ b_{1_{24}}^{\perp+} = -\frac{10J_x^2\omega_0}{b_2},$$

$$b_{1_{31}}^{\perp+} = 1-\frac{16J_x^2}{b_1},\ b_{1_{33}}^{\perp+} = \frac{12J_x^2\omega_0}{b_1},\ b_{1_{42}}^{\perp+} = 1-\frac{16}{b_2},\ b_{1_{44}}^{\perp+} = \frac{20J_x}{b_2},$$

$$b_{1_{51}}^{\perp+} = \frac{12J_x^2\omega_0}{b_1},\ b_{1_{53}}^{\perp+} = \frac{16(J_x^2+1)}{b_1},\ b_{1_{62}}^{\perp+} = \frac{20J_x}{b_2},\ b_{1_{64}}^{\perp+} = 1-\frac{25J_x^2}{b_2},$$

$$b_1 = (9J_x^2\omega_0^2+16J_x^2+16),\ b_2 = (4\omega_0^2+25)J_x^2+16.$$

Аналитические расчеты показывают, что псевдообратная матрица $\boldsymbol{B}_1^+$ для первого уровня декомпозиции определяется равенством

$$\boldsymbol{B}_1^+ = \begin{bmatrix} b_{1_{11}}^+ & 0 & b_{1_{13}}^+ & 0 & b_{1_{15}}^+ & 0 \\ 0 & b_{1_{22}}^+ & 0 & b_{1_{24}}^+ & 0 & b_{1_{26}}^+ \end{bmatrix},$$

где

$$b_{1_{11}}^+ = -\frac{16J_x}{b_1},\ b_{1_{22}}^+ = \frac{10J_x^2\omega_0}{b_2},\ b_{1_{13}}^+ = \frac{16J_x^2}{b_1},\ b_{1_{24}}^+ = -\frac{20J_x}{b_2},$$

$$b_{1_{15}}^+ = -\frac{12J_x^2\omega_0}{b_1},\ b_{1_{26}}^+ = \frac{25J_x^2}{b_2}.$$

Для второго уровня декомпозиции имеем

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B}_1^{\perp}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1^{\perp+} = \begin{bmatrix} 0 & a_{2_{12}} & 0 & a_{2_{14}} \\ a_{2_{21}} & a_{2_{22}} & a_{2_{23}} & a_{2_{24}} \\ a_{2_{31}} & a_{2_{32}} & a_{2_{33}} & a_{2_{34}} \\ a_{2_{41}} & a_{2_{42}} & a_{2_{43}} & a_{2_{44}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_1^{\perp}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2\omega_0}{5} \\ -\dfrac{4a_{21}-3\omega_0^2}{2J_x\omega_0} & -\dfrac{8a_{25}}{5J_x\omega_0} \\ -\dfrac{5a_{61}}{4} & \dfrac{2\omega_0^2}{5}-a_{65} \\ \dfrac{5a_{21}}{2\omega_0}-\dfrac{21\omega_0}{8} & \dfrac{2a_{25}}{\omega_0} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{2_{12}} = \frac{8J_x\omega_0}{b_2},\ a_{2_{14}} = -\frac{10J_x^2\omega_0}{b_2},$$

$$a_{2_{21}} = -\frac{8J_x k_6}{\omega_0 b_1},\ a_{2_{22}} = -\frac{2a_{25}}{\omega_0}\left(\frac{16}{b_2}-1\right),$$

$$a_{2_{23}} = -\frac{J_x^2(24a_{21}+32)+32}{J_x b_1},\quad a_{2_{24}} = \frac{40J_x a_{25}}{\omega_0 b_2},$$

$$a_{2_{31}} = \frac{20J_x^2 a_{61}}{b_1},\ a_{2_{32}} = J_x\left[\frac{5a_{65}}{4}+\frac{4k_3}{b_2}\right],$$

$$a_{2_{33}} = -\frac{15J_x^2 a_{25}\omega_0}{b_1},\ a_{2_{34}} = -\frac{5J_x^2 k_3}{b_2},$$

$$a_{2_{41}} = -\frac{2J_x^2(20a_{21}-21\omega_0^2)}{\omega_0 b_1},\ a_{2_{42}} = \frac{5J_x a_{25}}{2\omega_0}\left(\frac{16}{b_2}-1\right),$$

$$a_{2_{43}} = \frac{2(J_x^2(15a_{21}+28)+28)}{b_1},\ a_{2_{44}} = -\frac{50J_x^2 a_{25}}{\omega_0 b_2},$$

$$\begin{aligned} b_{2_{11}}^{\perp+} = -2\{&6(147J_x^2+48)\omega_0^7 - \\ &-3(256a_{21}+5(147J_x^2+48)a_{65}+560J_x^2 a_{21})\omega_0^5 + \\ &+4(15(2a_{21}a_{65}-a_{25}a_{61})(35J_x^2+16)+ \\ &+2(100J_x^2+64)a_{21}^2)\omega_0^3 - 80a_{21}(25J_x^2+16)k_1\omega_0\}/b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2_{12}}^{\perp+} = -16\omega_0^2\{&(a_{21}(96a_{25}-125J_x^2 a_{61}a_{65}) - \\ &-500J_x^2 a_{25}a_{61}^2\omega_0^2)+\omega_0^2(525J_x^2 a_{61}a_{65}-288a_{25} - \\ &-210J_x^2 a_{61}\omega_0^2+200J_x^2 a_{21}a_{61}\}/b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2_{21}}^{\perp+} = \{&16J_x(\omega_0(300a_{25}^2 a_{61}-\omega_0^4(126a_{25}+30a_{61})+ \\ &+315a_{25}a_{65}\omega_0^2)+a_{21}\omega_0(40\omega_0^2(3a_{25}+a_{61})a_{21}-300a_{25}a_{65}))\}/b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2_{22}}^{\perp+} = \{&4J_x(2000k_1^2+400\omega_0^2(4a_{21}+9a_{65})k_1+64\omega_0^2(5a_{21}^2-9a_{21}\omega_0^2)+ \\ &+63\omega_0^6(1+\omega_0^2)+5\omega_0^4(576a_{21}a_{65}-288a_{25}a_{61}+315a_{65}^2-252a_{65}\omega_0^2))\}/b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2_{31}}^{\perp+} = 4\omega_0^2\{&3(147J_x^2+48)\omega_0^4-24(35J_x^2+16)a_{21}\omega_0^2+ \\ &+16(a_{21}^2(25J_x^2+16)+36a_{25}^2)\}/b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2_{32}}^{\perp+} = -b_{2_{41}}^{\perp+} = -8\{&3(35J_x^2 a_{61}+48a_{25})\omega_0^5+ \\ &+4(90a_{25}a_{65}-a_{21}(25J_x^2 a_{61}-48a_{25}))\omega_0^3+480a_{25}k_1\omega_0\}/b, \end{aligned}$$

$$b_{2_{42}}^{\perp+} = \{16(25J_x^2 a_{61}^2 \omega_0^4 + 400k_1^2 - 40\omega_0^2(8a_{21} + 15a_{65})(a_{21}a_{65} - a_{25}a_{61}) +$$
$$+ 4\omega_0^2(16a_{21}^2 - 24a_{21}\omega_0^2 + 9\omega_0^4)(1+\omega_0^2) +$$
$$+ 15\omega_0^4(32a_{21}a_{65} - 16a_{25}a_{61} + 15a_{65}^2 - 12a_{65}\omega_0^2))\} / b,$$

$$b = 400(25J_x^2 + 16)(a_{21}^2 a_{65}^2 + a_{25}^2 a_{61}^2) + 4\omega_0^2(1+\omega_0^2) \times$$
$$\times (400J_x^2 a_{21}^2 - 840J_x^2 a_{21}\omega_0^2 + 441J_x^2\omega_0^4 + 256a_{21}^2 - 384a_{21}\omega_0^2 + 144\omega_0^4) -$$
$$- 20000J_x^2 a_{21}a_{25}a_{61}a_{65} - 40\omega_0^2(a_{21}a_{65} - a_{25}a_{61}) \times$$
$$\times (-200J_x^2 a_{21} - 525J_x^2 a_{65} - 128a_{21} + 240a_{65}) +$$
$$+ 5J_x^2\omega_0^4(3360a_{21}a_{65} + 80a_{61}(a_{61} - 21a_{25}) + 2205a_{65}^2 - 1764a_{65}\omega_0^2) +$$
$$+ 16(800a_{21}a_{25}a_{61}a_{65} + +480a_{21}a_{65}\omega_0^4 - 240a_{25}a_{61}\omega_0^4 + 144a_{25}^2\omega_0^2 +$$
$$+ 225a_{65}^2\omega_0^4 - 180a_{65}\omega_0^6\},$$

$$k_1 = (a_{25}a_{61} - a_{21}a_{65}), \quad k_3 = (2\omega_0^2 - 5a_{65}), \quad k_6 = (3\omega_0^2 - 4a_{21}).$$

При этом

$$\boldsymbol{B}_2^{\perp} = \begin{bmatrix} 5\dfrac{4k_1 + 3a_{65}\omega_0^2}{2\omega_0 k_6} - \omega_0 & \dfrac{5J_x a_{61}\omega_0}{2k_6} & 1 & 0 \\ \dfrac{6a_{25}}{k_6} & \dfrac{J_x(21\omega_0^2 - 20a_{21})}{4k_6} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2^{\perp+} = \begin{bmatrix} b_{2_{11}}^{\perp+} & b_{2_{12}}^{\perp+} \\ b_{2_{21}}^{\perp+} & b_{2_{22}}^{\perp+} \\ b_{2_{31}}^{\perp+} & b_{2_{32}}^{\perp+} \\ b_{2_{41}}^{\perp+} & b_{2_{42}}^{\perp+} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2^{+} = \begin{bmatrix} b_{2_{11}}^{+} & b_{2_{12}}^{+} & b_{2_{13}}^{+} & b_{2_{14}}^{+} \\ b_{2_{21}}^{+} & b_{2_{22}}^{+} & b_{2_{23}}^{+} & b_{2_{24}}^{+} \end{bmatrix},$$

где

$$b_{2_{11}}^{\perp+} = -2\{6(147J_x^2 + 48)\omega_0^7 - 3(256a_{21} + 5(147J_x^2 + 48)a_{65} +$$
$$+ 560J_x^2 a_{21})\omega_0^5 + 4(15(2a_{21}a_{65} - a_{25}a_{61})(35J_x^2 + 16) +$$
$$+ 2(100J_x^2 + 64)a_{21}^2)\omega_0^3 - 80a_{21}(25J_x^2 + 16)k_1\omega_0\} / b,$$

$$b_{2_{12}}^{\perp+} = -16\omega_0^2\{(a_{21}(96a_{25} - 125J_x^2 a_{61}a_{65}) - 500J_x^2 a_{25}a_{61}^2\omega_0^2) +$$
$$+ \omega_0^2(525J_x^2 a_{61}a_{65} - 288a_{25} - 210J_x^2 a_{61}\omega_0^2 + 200J_x^2 a_{21}a_{61}\} / b,$$

$$b_{2_{21}}^{\perp+} = \{16J_x(\omega_0(300a_{25}^2 a_{61} - \omega_0^4(126a_{25} + 30a_{61}) + 315a_{25}a_{65}\omega_0^2) +$$
$$+ a_{21}\omega_0(40\omega_0^2(3a_{25} + a_{61})a_{21} - 300a_{25}a_{65}))\} / b,$$

$$b_{2_{22}}^{\perp+} = \{4J_x(2000k_1^2 + 400\omega_0^2(4a_{21} + 9a_{65})k_1 + 64\omega_0^2(5a_{21}^2 - 9a_{21}\omega_0^2) +$$
$$+ 63\omega_0^6(1+\omega_0^2) + 5\omega_0^4(576a_{21}a_{65} - 288a_{25}a_{61} + 315a_{65}^2 - 252a_{65}\omega_0^2))\} / b,$$

$$b_{2_{31}}^{\perp+} = 4\omega_0^2\{3(147J_x^2 + 48)\omega_0^4 - 24(35J_x^2 + 16)a_{21}\omega_0^2 +$$
$$+16(a_{21}^2(25J_x^2 + 16) + 36a_{25}^2)\}/b,$$

$$b_{2_{32}}^{\perp+} = -b_{2_{41}}^{\perp+} = -8\{3(35J_x^2 a_{61} + 48a_{25})\omega_0^5 +$$
$$+4(90a_{25}a_{65} - a_{21}(25J_x^2 a_{61} - 48a_{25}))\omega_0^3 + 480a_{25}k_1\omega_0\}/b,$$

$$b_{2_{42}}^{\perp+} = \{16(25J_x^2 a_{61}^2\omega_0^4 + 400k_1^2 - 40\omega_0^2(8a_{21} + 15a_{65})(a_{21}a_{65} - a_{25}a_{61}) +$$
$$+4\omega_0^2(16a_{21}^2 - 24a_{21}\omega_0^2 + 9\omega_0^4)(1 + \omega_0^2) + 15\omega_0^4(32a_{21}a_{65} -$$
$$-16a_{25}a_{61} + 15a_{65}^2 - 12a_{65}\omega_0^2))\}/b,$$

$$b_{2_{11}}^{+} = 32\omega_0(\omega_0^2(10J_x^2 a_{61}(80a_{65} + \omega_0^2) +$$
$$+a_{25}(105J_x^2 + 48)) - 4a_{21}a_{25}(25J_x^2 + 16))/b,$$

$$b_{2_{12}}^{+} = -32J_x(12\omega_0^5(5a_{65} - 1 - \omega_0^2) + 5\omega_0^3(8a_{25}a_{61} - 15a_{65}^2) +$$
$$+20a_{25}\omega_0(6a_{25} - 5a_{61}a_{65}) + 4a_{21}(25a_{65}^2\omega_0 - 4\omega_0^3(5a_{65} - 1) + 4\omega_0^5))/b,$$

$$b_{2_{13}}^{+} = 16(3a_{25}\omega_0^2(35J_x^2 + 16)k_3 - 4a_{25}((25J_x^2 + 16)5k_1 + 2a_{21}\omega_0^2))/b,$$

$$b_{2_{14}}^{+} = 8(4\omega_0(125J_x^2 a_{21}a_{65}^2 - a_{25}(125J_x^2 a_{61}a_{65} + 96a_{25})) +$$
$$+5J_x^2\omega_0^3(40a_{25}a_{61} + 105a_{65}^2 - 80a_{21}a_{65} + 16a_{21}) +$$
$$+4J_x^2\omega_0^5(20a_{21} + 105a_{65} - 21) - 84J_x^2\omega_0^7)/b,$$

$$b_{2_{21}}^{+} = 10(3\omega_0^5(147J_x^2 + 48) + 4\omega_0^3(25J_x^2 a_{25}^2 - 210a_{21}J_x^2 - 96a_{21}) +$$
$$+16a_{21}^2\omega_0(25J_x^2 + 16))/b,$$

$$b_{2_{22}}^{+} = -40J_x\omega_0(a_{25}(100a_{61}^2 + 126\omega_0^2) + 75a_{61}a_{65}\omega_0^2 -$$
$$-30a_{61}\omega_0^4 + 20a_{21}(a_{61}k_3 + 6a_{25}))/b,$$

$$b_{2_{23}}^{+} = 5(80a_{21}(25J_x^2 + 16)k_1 + 4\omega_0^2(15(2a_{21}a_{65} - a_{25}a_{61})(35J_x^2 + 16) +$$
$$+8a_{21}^2(25J_x^2 + 16)) + 6\omega_0^6(147J_x^2 + 48) - 3\omega_0^4(16a_{21}(16 + 35J_x^2) +$$
$$+5a_{65}(147J_x^2 + 48)))/b,$$

$$b_{2_{24}}^{+} = 10\omega_0(4a_{25}(125a_{61}^2 J_x^2 + 96a_{21}) - 200J_x^2 a_{21}a_{61}\omega_0^2 -$$
$$-3\omega_0^2(-175J_x^2 a_{61}a_{65} + 96a_{25} + 70J_x^2 a_{61}\omega_0^2) - 500J_x^2 a_{21}a_{61}a_{65}\omega_0^2)/b,$$

Третий уровень декомпозиции выглядит так

$$\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{B}_2^{\perp}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2^{\perp+} = \begin{bmatrix} a_{3_{11}} & a_{3_{12}} \\ a_{3_{21}} & a_{3_{22}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{B}_2^{\perp}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} b_{3_{11}} & b_{3_{12}} \\ b_{3_{21}} & b_{3_{22}} \end{bmatrix}.$$

Здесь введены обозначения

$$a=(4a_{21}-3\omega_0^2)b,$$

$$a_{3_{11}}=4(45(49J_x^2a_{61}-42J_x^2a_{25}a_{65}+2a_{61}(8-5J_x^2a_{65}))\omega_0^7+$$
$$+15\omega_0^5(J_x^2a_{25}(315a_{65}^2-8a_{61}(5a_{61}+21a_{25}))+8a_{21}(36J_x^2a_{25}a_{65}-35J_x^2a_{61}-$$
$$-2a_{61}(8-5J_x^2a_{65})))-80\omega_0^3(a_{21}^2(25J_x^2a_{61}-30J_x^2a_{25}a_{65}+2a_{61}(8-5J_x^2a_{65}))+$$
$$+5J_x^2a_{21}(2a_{25}a_{61}(3a_{25}+a_{61})-27a_{25}a_{65}^2)+135J_x^2a_{25}^2a_{61}a_{65}+36a_{25}^2a_{61})+$$
$$+6000J_x^2a_{25}(a_{21}a_{65}-a_{25}a_{61})^2\omega_0)/a,$$

$$a_{3_{12}}=-5(400(20k_1^3+(51J_x^2a_{65}\omega_0^2+16J_x^2a_{21}\omega_0^2)k_1^2)+4J_x^2\omega_0^2(1+\omega_0^2)\times$$
$$\times(189a_{65}\omega_0^6+4\cdot 320a_{21}^2k_1+256a_{25}a_{61}\omega_0^4+816a_{21}^2a_{65}\omega_0^2-576a_{21}a_{25}a_{61}\omega_0^2-$$
$$-684a_{21}a_{65}\omega_0^4)+960J_x^2\omega_0^4(13a_{21}a_{25}a_{61}a_{65}-17a_{21}^2a_{65}^2-6a_{25}^2a_{61}^2)+$$
$$+64a_{25}\omega_0^4(24a_{21}a_{61}-9a_{61}k_3)+J_x^2\omega_0^6(13680a_{21}a_{65}^2-9360a_{25}a_{61}a_{65}+$$
$$+840a_{61}^2+4725a_{65}^3)-800J_x^2a_{21}a_{61}^2\omega_0^4-3780J_x^2a_{65}^2\omega_0^8+$$
$$+60J_x^2\omega_0^2(285a_{65}^2\omega_0^2+64a_{25}a_{61})k_1)/a,$$

$$a_{3_{21}}=16\omega_0^2(9(49J_x^2a_{21}-42J_x^2a_{25}^2-10J_x^2a_{25}a_{61}+16a_{21})\omega_0^4+$$
$$+3(5J_x^2a_{25}(24a_{21}a_{25}+8a_{21}a_{25}a_{61}+63a_{25}a_{65})-$$
$$-8a_{21}^2(35J_x^2+16))\omega_0^2+400J_x^2a_{21}^3+900J_x^2a_{25}^2k_1+$$
$$+256a_{21}^3+576a_{21}a_{25}^2)/a,$$

$$a_{3_{22}}=-4(240\omega_0(-a_{21}^2a_{25}a_{65}(16-25J_x^2a_{65})+25J_x^2a_{25}^3a_{61}+a_{21}a_{25}^2a_{61}\times$$
$$\times(16-50J_x^2a_{65}))-\omega_0^5(135J_x^2a_{25}(32a_{25}a_{61}+35a_{65}^2)-960J_x^2a_{21}^2a_{25}-$$
$$-24a_{21}(72J_x^2a_{25}-35J_x^2a_{61}-360J_x^2a_{25}a_{65}+48a_{25}))+16\omega_0^3(675J_x^2a_{25}^2a_{61}a_{65}-$$
$$-2a_{21}^2(30J_x^2a_{25}-25J_x^2a_{61}-150J_x^2a_{25}a_{65}+48a_{25})+15a_{21}a_{25}\times$$
$$\times(20J_x^2a_{25}a_{61}-45J_x^2a_{65}^2+12a_{65}))-08J_x^2a_{25}\omega_0^7(35a_{65}-7+16a_{21})-$$
$$-756J_x^2a_{25}\omega_0^9)/a,$$

$$b_{3_{11}}=5\left[\frac{3a_{65}\omega_0}{8}-\frac{(8a_{21}+3\omega_0^2)k_1-5a_{61}^2\omega_0^2}{4\omega_0k_6}\right],$$

$$b_{3_{12}}=-\frac{a_{61}(8a_{25}^2+\omega_0^2k_3)+2a_{25}a_{65}k_6}{\omega_0k_6},$$

$$b_{3_{21}}=\frac{3a_{25}k_6+5a_{21}a_{61}}{2k_6},\qquad b_{3_{22}}=-\frac{4(6a_{25}^2+a_{21}k_3)}{5k_6},$$

Выберем матрицы $\mathbf{\Phi}_0$, $\mathbf{\Phi}_1, ..., \mathbf{\Phi}_3$, фигурирующие в методе задания полюсов, в следующем диагональном виде:

$$\mathbf{\Phi}_0 = \begin{bmatrix} f_{01} & 0 \\ 0 & f_{02} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} f_{21} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} f_{31} & 0 \\ 0 & f_{32} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\left(f_{01}, f_{11}; f_{21}, f_{31}; f_{02}, f_{12}; f_{22}, f_{32}\right)$ — в общем случае комплексные числа, подчиненные определенным правилам их формирования [3].

С учетом ранее полученных выражений для матриц всех уровней декомпозиции можно вычислить матрицы коэффициентов обратных связей:

$$\boldsymbol{K}_3 = \boldsymbol{B}_3^{-1}\left(\boldsymbol{A}_3 - \mathbf{\Phi}_3\right),$$

$$\boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{B}_2^{-}\boldsymbol{A}_2 - \mathbf{\Phi}_2\boldsymbol{B}_2^{-},$$

$$\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{B}_1^{-}\boldsymbol{A}_1 - \mathbf{\Phi}_1\boldsymbol{B}_1^{-},$$

где

$$\boldsymbol{B}_2^{-} = \boldsymbol{K}_3\boldsymbol{B}_2^{\perp} + \boldsymbol{B}_2^{+},$$

$$\boldsymbol{B}_1^{-} = \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{B}_1^{\perp} + \boldsymbol{B}_1^{+}.$$

В соответствии со вторым выражением (9) для нулевого уровня имеем

$$\boldsymbol{B}^{-} = \boldsymbol{B}_0^{-} = \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{B}_0^{\perp} + \boldsymbol{B}_0^{+}.$$

Наконец, матрица коэффициентов решения задачи разгрузки кинетического момента ИИО будет

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{B}_0^{-}\boldsymbol{A}_0 - \mathbf{\Phi}_0\boldsymbol{B}_0^{-} = \\ = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Здесь

$$K_{11} = J_x[10a_{21}k_1(10k_1 + \omega_0^2 k_2) + 25\omega_0^2 \times \\ \times (11a_{21}a_{25}a_{61}a_{65} - 4a_{25}^2 a_{61}^2 - 7a_{21}^2 a_{65}^2) + 20k_1(5k_1 + 2a_{21}\omega_0^2)f_1 + \\ + 5\omega_0 k_1(5a_{61}k_3 - 16a_{21}a_{25})f_2 + 60a_{25}\omega_0 k_1 f_3 + 2(\omega_0^2(14a_{21}\omega_0^2 + \\ + 42a_{25}^2 + 20a_{25}a_{61} - 55a_{21}a_{65}) - 50a_{65}k_1)f_4]/[5k], \qquad (13)$$

$$K_{12} = -J_x[\omega_0\, k_1(5a_{61}k_3 - 4a_{25}k_2) - 16a_{25}\omega_0 k_1 f_1 + \\ + k_1(20k_1 + \omega_0^2(35a_{65} + 2k_2))f_2 + 4k_1k_3 f_3 - 2k_4 f_4]/[k], \tag{14}$$

$$K_{13} = 2[8a_{25}\omega_0 k_1(f_1 - \omega_0^2) + 2k_1k_3(\omega_0^2 f_2 - f_3) + k_4 f_4]/[k], \tag{15}$$

$$K_{14} = \frac{4f_4(12a_{25}^2\omega_0^2 + 5a_{25}a_{61}k_3 + a_{21}k_3^2)}{5k}, \tag{16}$$

$$K_{15} = J_x[2k_1(20a_{25}k_1 + a_{25}\omega_0^2(2k_2 + 15a_{65})) + 16a_{25}\omega_0^2 k_1 f_1 + \\ + 2\omega_0 k_1(5a_{65}k_3 - 16a_{25}^2)f_2 - 4\omega_0 k_1 k_3 f_3 + \\ + (40a_{25}k_1 + 7a_{61}\omega_0^2 k_3 + 42a_{25}a_{65}\omega_0^2)f_4]/[2k], \tag{17}$$

$$K_{16} = -J_x[\omega_0 k_1(140k_1 + 285a_{65}\omega_0^2 + 14k_2 - 64a_{25}^2 - 100a_{65}^2)) + \\ + 20\omega_0 k_1 k_3 f_1 + 80a_{25}k_1(f_3 - \omega_0^2 f_2) + 8k_5 f_4]/[4k], \tag{18}$$

$$K_{17} = -4[5\omega_0 k_1 k_3(f_1 - \omega_0^2) + 20a_{25}k_1(f_3 - \omega_0^2 f_2) + 2k_5 f_4]/[5k], \tag{19}$$

$$K_{18} = \frac{2f_4 a_{25}(8a_{25}k_1 + \omega_0 k_4)}{k}, \tag{20}$$

$$K_{21} = J_x[5a_{61}k_1(20a_{25}k_1 + \omega_0^2(8a_{21} - 21\omega_0^2 + 15a_{65})) + \\ + 5\omega_0 k_1(25a_{61}^2 - 4a_{21}k_6)f_6 + 15\omega_0 k_1(k_6 f_7 + 5a_{61}\omega_0 f_5) + \\ + (100a_{61}k_1 + 7\omega_0^2(3a_{25}k_6 + 10a_{21}a_{61}))f_8]/[4k], \tag{21}$$

$$K_{22} = J_x[\omega_0 k_1(140k_1 + 105a_{65}\omega_0^2 + 256a_{21}\omega_0^2 - 125a_{61}^2 - 147\omega_0^4 - \\ - 80a_{21}^2) + 20\omega_0 k_1 k_6 f_5 + 100a_{61}k_1(\omega_0^2 f_6 - f_7) + 5k_7 f_8]/[4k], \tag{22}$$

$$K_{23} = 5[4\omega_0 k_1 k_6(f_5 - \omega_0^2) + 20a_{61}k_1(\omega_0^2 f_6 - f_7) + k_7 f_8]/[4k], \tag{23}$$

$$K_{24} = \frac{f_8(5a_{21}a_{61}k_3 + a_{25}(25a_{61}^2 + 3\omega_0^2 k_6))}{k}, \tag{24}$$

$$K_{25} = 5J_x[4(a_{65}k_1(20a_{25}k_1 + \omega_0^2(15a_{65} - 21\omega_0^2)) + \\ + 4\omega_0^2(12a_{21}a_{25}a_{61}a_{65} - 5a_{25}^2a_{61}^2 - 7a_{21}^2a_{65}^2)) + \\ + 4k_1(5(4k_1 + 3a_{65}\omega_0^2)f_5 + \omega_0(25a_{61}a_{65} - 4a_{25}k_6)f_6 - 10a_{61}\omega_0 f_7) - \\ -(80a_{21}k_1 - \omega_0^2(10a_{61}(7a_{61} + 6a_{25}) + 9a_{65}(7\omega_0^2 - 16a_{21})))f_8]/[16k], \tag{25}$$

$$K_{26} = -5J_x[\omega_0 k_1(5a_{61}(5a_{65} - 7\omega_0^2) - 4a_{25}k_6) + 25a_{61}\omega_0 k_1 f_5 + \\ + k_1(20k_1 + \omega_0^2(15a_{65} - 7k_6))f_6 + 5k_1k_6 f_7 + k_8 f_8]/[4k], \tag{26}$$

$$K_{27} = -[25a_{61}\omega_0 k_1(f_5 - \omega_0^2) - 5\omega_0^2 k_1 k_6 f_6 + 5k_1 k_6 f_7 + k_8 f_8]/[k], \tag{27}$$

$$K_{28} = \frac{5f_8(10a_{61}^2\omega_0^2 + 4a_{25}a_{61}k_6 + k_6^2)}{4k}, \tag{28}$$

$$k_2 = (4a_{21} - 7\omega_0^2),\ k_4 = \omega_0(a_{61}k_3 + 6a_{25}a_{65}),\quad k_5 = \omega_0(a_{21}k_3 + 6a_{25}^2),$$

$$k_7 = \omega_0(3a_{65}k_6 + 10a_{61}^2),\ k_8 = \omega_0(3a_{25}k_6 + 10a_{21}a_{61}),$$

$$k = k_1(20a_{25}a_{61} - 20a_{21}a_{65} + 8a_{21}\omega_0^2 + 15a_{65}\omega_0^2 - 6\omega_0^4),$$

$$f_1 = (f_{01}f_{11} + f_{01}f_{21} + f_{01}f_{31} + f_{11}f_{21} + f_{11}f_{31} + f_{21}f_{31}),$$

$$f_2 = (f_{01} + f_{11} + f_{21} + f_{31}),$$

$$f_3 = (f_{01}f_{11}f_{21} + f_{01}f_{11}f_{31} + f_{01}f_{21}f_{31} + f_{11}f_{21}f_{31}),$$

$$f_4 = f_{01}f_{11}f_{21}f_{31},$$

$$f_5 = (f_{02}f_{12} + f_{02}f_{22} + f_{02}f_{32} + f_{12}f_{22} + f_{12}f_{32} + f_{22}f_{32}),$$

$$f_6 = (f_{02} + f_{12} + f_{22} + f_{32}),$$

$$f_7 = (f_{02}f_{12}f_{22} + f_{02}f_{12}f_{32} + f_{02}f_{22}f_{32} + f_{12}f_{22}f_{32}),$$

$$f_8 = f_{02}f_{12}f_{22}f_{32}.$$

Итак, выражения (12)–(28) определяют аналитическое решение задачи разгрузки кинетического момента ИИО в каналах крена — рысканья и позволяют формировать закон управления для каждого такта работы бортовой ЭВМ. Они имеют относительно простой физический смысл и однозначно определяются параметрами орбиты, массово-инерционными характеристиками КА, а также значениями корней характеристического полинома (11). Следует заметить, что ИИО в силу своих конструктивных особенностей имеют ограничения на управление, поэтому значения корней не должны приводить к нарушению этих ограничений.

Преимущества данного аналитического решения заключаются в следующем. Во-первых, оно пригодно для всех типов КА, дает возможность проводить исследования, варьируя значения полюсов из области их устойчивости и конструктивных особенностей ИИО. Во-вторых, позволяет решить проблему плохой обусловленности матрицы $\boldsymbol{A}$, поскольку для КА значения ее компонент могут отличаться на два и более порядка друг от друга, что, как показали исследования авторов, затрудняет или даже делает практически невозможным получение решения с использованием не символьной, а числовой матрицы $\boldsymbol{A}$.

Не составляет труда получить численные значения коэффициентов в матрицах разгрузки кинетического момента в случае, когда характеристический полином (11) представляет собой нормированный полином Баттерворта 8-го порядка, имеющий в данном случае вид

$$\lambda^8 + 5{,}12\sigma\lambda^7 + 13{,}1\sigma^2\lambda^6 + 21{,}8\sigma^3\lambda^5 + 25{,}7\sigma^4\lambda^4 + 21{,}8\sigma^5\lambda^3 + \\ + 13{,}1\sigma^6\lambda^2 + 5{,}12\sigma^7\lambda + \sigma^8.$$

Здесь σ — нормирующий коэффициент $(\sigma > 0)$. Если корни полинома (полюсы) (26) задать в качестве элементов матриц $\mathbf{\Phi}_0$, $\mathbf{\Phi}_1, ..., \mathbf{\Phi}_3$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\lambda}_1 = f_{01} = \sigma(-0{,}1950 + 0{,}9807i),\ \bar{\tilde{\lambda}}_1 = f_{11} = \sigma(-0{,}1950 - 0{,}9807i),\\
&\tilde{\lambda}_2 = f_{02} = \sigma(-0{,}5555 + 0{,}8314i), \bar{\tilde{\lambda}}_2 = f_{12} = \sigma(-0{,}5555 - 0{,}8314i),\\
&\tilde{\lambda}_3 = f_{21} = \sigma(-0{,}8314 + 0{,}5555i),\ \bar{\tilde{\lambda}}_3 = f_{31} = \sigma(-0{,}8314 - 0{,}5555i),\\
&\tilde{\lambda}_4 = f_{22} = \sigma(-0{,}98078 + 0{,}1950i),\ \bar{\tilde{\lambda}}_3 = f_{32} = \sigma(-0{,}9807 - 0{,}1950i),
\end{aligned} \tag{29}$$

то подстановка (29) в матрицу (12) с элементами, определяемыми выражениями (13) – (28), и выбранным значением σ, удовлетворяющим конструктивным особенностям ИИО, даст числовую действительную матрицу коэффициентов регулятора в задаче разгрузки кинетического момента ИИО. Другие сочетания элементов будут приводить к другим матрицам, представляющим иные варианты формирования обратных связей в контурах управления.

Заключение. В работе осуществлен синтез законов управления разгрузкой ИИО с использованием модифицированного метода точного размещения полюсов. Впервые для высокоэллиптической орбиты получено аналитическое решение задачи гравитационной разгрузки кинетического момента ИИО КА в гироскопически связанных между собой каналах крена — рысканья.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов.* Москва, Наука, 1974.

[2] Богачев А.В., Воробьева Е.А., Зубов Н.Е. и др. Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа. *Изв. РАН. ТиСУ,* 2011, № 3, с. 132–139.

[3] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением КА. *Изв. РАН. ТиСУ,* 2013, № 2, с. 148–162.

[4] Белецкий В.В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс.* Москва, Наука, 1965.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. Безрасходная разгрузка накопленного кинетического момента инерционных исполнительных органов автономного космического аппарата на высокоэллиптической орбите. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL : http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1072.html

Воробьева Екатерина Андреевна — аспирантка ОАО «РКК ”Энергия“ им. С.П. Королева». Автор 4 работ области проблем управления космическими аппаратами.

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ОАО «РКК ”Энергия“ им. С.П. Королева», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 работ в области проблем управления космическими аппаратами.
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО «РКК ”Энергия“ им. С.П. Королева», заведующий кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 работ в области проблем управления космическими аппаратами.