УДК 517.97

Оценивание параметров модели по нечетким данным

© И.А. Мочалов[1], М.С. Хрисат[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2] Российский университет дружбы народов, 117198, Россия

Рассмотрены традиционные методы получения точечных оценок применительно к «гибридным» данным, которые являются одной из разновидностей нечетких случайных переменных. Методами теории нечетких линейных систем показано, что при обработке «гибридных» данных возникают «сильные/слабые» оценки точечных параметров. Приведены простейшие примеры обработки нечетких случайных данных.

Ключевые слова: *гибридные данные, методы обработки гибридных данных, «сильные/слабые» оценки.*

Введение. Одной из задач традиционной математической статистики является оценка неизвестных четких параметров выбранной параметрической модели. В этом случае полагается, что закон распределения $f(x, \theta)$ четкого случайного вектора x генеральной совокупности задан, а четкий вектор θ параметров является неизвестным. Задача оценивания в этом случае имеет вид: необходимо найти четкий вектор оценки $\hat{\theta}$ по выборке четких случайных данных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полученной из генеральной совокупности случайным образом.

Подобная задача оценивания имеет место в нечетком случае, когда x — нечеткий случайный вектор с θ нечетким вектором параметров. Такие нечеткие случайные данные принято называть гибридными данными (ГД) [1]. В терминах вероятностных пространств полагается, что метрика в этом пространстве задается в виде евклидовой метрики.

Далее будем рассматривать задачу оценивания для ГД. В этом случае применяются традиционные методы математической статистики, а для нахождения функции принадлежностей полученной оценки используются приемы и терминология теории нечетких линейных систем [2]. В результате этого появляются «сильные/слабые» оценки.

1. Постановка задачи. Имеется многомерная нечеткая плотность $f(x_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}})$ генеральной совокупности, где $x_{\text{Н}}$, $\theta_{\text{Н}}$ — нечеткие векторы; Н — индекс нечеткости. Необходимо по ГД $x_{1\text{Н}}, x_{2\text{Н}}, \ldots, x_{n\text{Н}}$ случайной выборки из генеральной совокупности найти вектор нечеткой оценки $\hat{\theta}_{\text{Н}}$ нечеткого вектора параметров $\theta_{\text{Н}}$.

2. Методы решения. В прикладных задачах традиционной математической статистики для решения сформулированной выше задачи чаще всего используются методы моментов, максимального правдоподобия, наименьших квадратов [3].

2.1. Метод моментов. Есть нечеткая случайная выборка данных $x_{\text{Н}} = (x_{1\text{Н}}, x_{2\text{Н}}, \ldots, x_{n\text{Н}})$ из генеральной совокупности $X_{\text{Н}}$, которая имеет закон $f(x_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}})$ распределения с точностью до нечеткого вектора параметров $\theta_{\text{Н}} = (\theta_{1\text{Н}}, \theta_{2\text{Н}}, \ldots, q_{n\text{Н}})$. Полагается, что у нечеткой случайной величины $X_{\text{Н}}$ существуют первые r нечетких моментов $m_{k\text{Н}} = EX_{\text{Н}}^k, k = \overline{1,r}$, которые являются функциями нечеткого вектора неизвестных параметров $m_k(\theta_{\text{Н}})$.

С другой стороны, имеется r нечетких выборочных характеристик (нечеткие статистики) $\hat{m}_{k\text{Н}} = n^{-1}\sum_{i=1}^n x_{i\text{Н}}^k, k = \overline{1,r}$.

В соответствии с методом моментов нечеткая оценка $\hat{\theta}_{\text{Н}}$ находится из нечеткой системы уравнений: $m_k\left(\theta_{\text{Н}}\right) = \hat{m}_{k\text{Н}}, k = \overline{1,r}$ относительно $\theta_{\text{Н}}$. В общем случае эта система является нелинейной. Подобные уравнения справедливы относительно нечетких центральных моментов и их выборочными нечеткими центральными моментами: $\mu_k\left(\theta_{\text{Н}}\right) = \hat{\mu}_{k\text{Н}}, k = \overline{1,r}$.

Пример. Пусть нечеткая случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с неизвестным нечетким параметром $\lambda_{\text{Н}}$:

$$f\left(x, \lambda_{\text{Н}}\right) = \lambda_{\text{Н}} e^{-\lambda_{\text{Н}} x}, x \geq 0.$$

Задана нечеткая случайная выборка: $x_{1\text{Н}}, x_{2\text{Н}}, \ldots, x_{n\text{Н}}$.

Необходимо найти нечеткую оценку $\hat{\lambda}_{\text{Н}}$ неизвестного параметра $\lambda_{\text{Н}}$ по методу моментов. Для экспоненциального распределения имеем $m_{1\text{Н}} = \lambda_{\text{Н}}^{-1}$ [3].

Первый нечеткий выборочный начальный момент $\hat{m}_{1\text{Н}} = n^{-1}\sum_{i=1}^n x_{i\text{Н}}$, откуда $\hat{\lambda}_{\text{Н}} = \left(n^{-1}\sum_{i=1}^n x_{i\text{Н}}\right)^{-1}$.

Для упрощения дальнейших вычислений переходим к обратной величине $\hat{T}_{\text{Н}} = \lambda_{\text{Н}}^{-1} = n^{-1}\sum_{i=1}^n x_{i\text{Н}}$.

Положим

$$x_{i\text{Н}} = \left(\underline{x}_i(r) = \left(x_i - \beta\right) + \beta r; \overline{x}_i(r) = \left(x_i + \alpha\right) - \alpha r \,/\, r \in \left[0;1\right]\right),$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \alpha > \beta$$

— параметры, тогда

$$\hat{T}_{\text{Н}} = \begin{pmatrix} \underline{\hat{T}}(r) = n^{1} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\left(x_i - \beta \right) + \beta r \right) \right]; \\ \bar{\hat{T}}(r) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(x_i + \alpha \right) - \alpha r \right] / \, r \in \left[0;1 \right] \end{pmatrix},$$

откуда

$$\hat{T}_{\text{Н}} = \left(\underline{\hat{T}}(r) = \left(T_{\text{ср}} - \beta \right) + \beta r; \bar{\hat{T}}(r) = \left(T_{\text{ср}} + \alpha \right) - \alpha r \, / \, r \in \left[0;1 \right] \right), T_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, .$$

Для того чтобы $\hat{T}_{\text{Н}}$ было нечетким числом, должны выполняться неравенства [2]

$$\begin{cases} \left(T_{\text{ср}} + \alpha \right) - \alpha r \le 0, \\ \left(T_{\text{ср}} - \beta \right) + \beta r \ge 0, \end{cases} \left(T_{\text{ср}} + \alpha \right) - \alpha r \ge \left(T_{\text{ср}} - \beta \right) + \beta r, \forall r \in \left[0;1 \right],$$

которые справедливы всегда, так как $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Это означает, что нечеткая оценка $\hat{T}_{\text{Н}}$ является «сильной». Расчеты показывают, что $\hat{\lambda}_{\text{Н}}$ также является «сильной» нечеткой оценкой.

2.2. Метод максимального правдоподобия. Вектор нечетной оценки находится из следующего условия: $\max_{\theta_{\text{Н}}} \ln L\left(x_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}} \right)$, где $L\left(x_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}} \right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_{i\text{Н}}, \theta_{\text{Н}} \right)$ — функция правдоподобия.

Это приводит к нечеткой системе уравнений относительно нечетких компонент $\theta_{k\text{Н}}$ вектора $\theta_{\text{Н}}$:

$$\frac{\partial \ln L\left(x_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}} \right)}{\partial \, \theta_{\text{Н}}} = 0, K = \overline{1, r} \, .$$

Пример. В теории управления достаточно часто используются нечувствительные или робастные нечеткие системы [4], которые малочувствительны к внешним возмущениям. Аналогичные системы существуют при нечетком оценивании, когда возникает задача фильтрации аномальных измерений. Один из способов их описания состоит в использовании для этих целей нечеткого распределения Лапласа [3].

Пусть задана нечеткая случайная выборка $x = (x_{1\text{Н}}, x_{2\text{Н}}, \ldots, x_{n\text{Н}})$ с независимыми компонентами, которые имеют плотность

$$f\left(x_{i\text{Н}}, \theta_{\text{Н}} \right) = 2^{-\frac{1}{2}} \delta \exp \left\{ - \frac{2^{\frac{1}{2}} / \left| x_{i\text{Н}} - \theta_{\text{Н}} \right|}{\delta} \right\}, i = \overline{1, 2} \, .$$

Здесь $\theta_{\text{Н}} = E_x$ — нечеткое математическое ожидание, подлежащее оцениванию; δ — заданная четкая константа.

Имеем

$$f\left(x_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}}\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(x_{i\text{Н}}, \theta_{\text{Н}}\right) = \delta^{-n} 2^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i\text{Н}} - \theta_{\text{Н}}\right|}{\delta}\right\}$$

— функция правдоподобия нечетких переменных.

Логарифмическая функция правдоподобия

$$\ln f\left(x_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}}\right) = -n\ln\delta - 0{,}5\ln 2 - 2^{-\frac{1}{2}}\delta^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i\text{Н}} - \theta_{\text{Н}}\right| = a + b\left(\Sigma_1 + \Sigma_2\right),$$

где

$$\begin{gathered}\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|x_{i\text{Н}} - \theta_{\text{Н}}\right|,\ x_{i\text{Н}} > \theta_{\text{Н}};\ \ \Sigma_2 = \sum_{i=1}^{n}\left|x_{i\text{Н}} - \theta_{\text{Н}}\right|,\ x_{i\text{Н}} < \theta_{\text{Н}}; \\ a = -n\ln\delta - 0{,}5\ln 2;\ \ b = -2^{-\frac{1}{2}}\delta^{1};\ \ n_1 + n_2 = n\end{gathered}.$$

Нечеткое уравнение для нахождения $\hat{\theta}_{\text{Н}}$:

$$\max_{\theta_{\text{Н}}} \ln f\left(x_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}}\right) \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial\,\theta_{\text{Н}}}\left[a + b\left(\sum_{1}\theta_{\text{Н}} + \sum_{2}\theta_{\text{Н}}\right)\right] = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow b\left(-n_1 + n_2\right) = 0 \leftrightarrow n_1 = n_2.$$

Это означает, что $\hat{\theta}_{\text{Н}} = Me\left\{x_{i\text{Н}}\right\}_{i=1}^{i=n}$, где Me — символ медианы совокупности нечетких переменных $x_{i\text{Н}},\ i = \overline{1,n}$.

Медиана нечеткой совокупности находится аналогичным способом, существующим для четких переменных. В этом случае отношение порядка «<»; «>»; «=» для нечетких переменных, определенные в [5], используются для построения нечеткого вариационного ряда $x_{(1)\text{Н}}, x_{(2)\text{Н}}, \ldots, x_{(n)\text{Н}}$.

В результате получим:

$$\theta_{\text{Н}} = Me\left\{x_{i\text{Н}}\right\}_{i=1}^{i=n} = \left\{\begin{matrix} 0{,}5\left[x_{(2m)\text{Н}} + x_{(2m+1)\text{Н}}\right],\ n \text{ — четное} \\ x_{(2m+1)\text{Н}},\ n \text{ — нечетное}\end{matrix}\right\}.$$

Пусть n — нечетное, тогда $\hat{\theta}_{\text{Н}}$ является «сильной» оценкой, так как по условию задачи полагается, что все элементы $\left\{x_{i\text{Н}}\right\}_{i=1}^{i=n}$ имеют функции принадлежностей в виде нечетких чисел.

Очевидно, что при четном n также получается «сильная» оценка.

2.3. Метод наименьших квадратов (МНК). В соответствии с МНК нечеткие случайные данные $y_{i\text{Н}},\ i = \overline{1,m}$ связаны между собой линейной моделью $y_{\text{Н}}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{i\text{Н}} f_i(t) + e_{\text{Н}}(t), t \in [0, T] \in R_1$, где $e_{\text{Н}}$ — нечеткая случайная переменная с симметричной плотностью и параметрами: $Ee_{\text{Н}}(0)$; $De_{\text{Н}}(t) = \delta_2 \cdot I$, I — единичная матрица; δ^2 — заданная четкая константа; нечеткость $e_{\text{Н}}(t)$ задается с помощью функции принадлежностей $r(e_{\text{Н}})$ треугольного типа; $f_i(t), i = \overline{1, n}$, — заданные базисные функции модели; $x_{i\text{Н}}, i = \overline{1, n}$ — неизвестные нечеткие параметры модели, подлежащие определению по m нечетким случайным измерениям: $Y_{\text{Н}}^{\tau} = (y_h(t_1), y_{\text{Н}}(t_2), ..., y_{\text{Н}}(t_m)) = (y_{1\text{Н}}, y_{2\text{Н}}, ..., y_{m\text{Н}})$, которые получены в момент времени t: t_1, t_2, …, t_m; $m > n$ — число измерений m больше числа n неизвестных параметров модели.

Нечеткий вектор оценок находится из условия

$$\min_x e_{\text{Н}}^{\tau} e_{\text{Н}} = \min_x \left\| Y_{\text{Н}} - FX \right\|_{E_n}^2,$$

где $F = (f_i(t_j))_{m \times n}$ — прямоугольная матрица.

Это приводит к необходимости решения нечеткой линейной системы [2] $AX = U_{\text{Н}}^{\tau}$, где $A = (f_i, f_j)$; $i, j = n$ — квадратная матрица $\dim A = (n \times n)$; $U_{\text{Н}}^{\tau} = \left(U_{1\text{Н}} = (f_1, Y_{\text{Н}}), U_{2\text{Н}} = (f_2, Y_{\text{Н}}), ..., U_{n\text{Н}} = (f_n, Y_{\text{Н}})\right)$ — вектор нечетких переменных, $U_{i\text{Н}} = (f_i, Y_{\text{Н}}), i = \overline{1, n}$, — скалярное произведение векторов f_i, $Y_{\text{Н}}$ в E_n. В результате находится вектор нечетких оценок $\hat{X}_{\text{Н}}^T = (\hat{x}_{1\text{Н}}, \hat{x}_{2\text{Н}}, ..., \hat{x}_{n\text{Н}})$, компоненты которого, согласно [2], могут быть «сильными» или «слабыми».

Пример. Имеем модель $y_{\text{Н}}(t) = x_{1\text{Н}} \cdot 1 + x_{2\text{Н}} \cdot t + e_{\text{Н}}(t)$. Здесь $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ — базисные функции ($n = 2$). Получены нечеткие случайные данные ($m = 3$):

точка $O_1 : \left(t_1 = -1;\ y_{1\text{Н}} = \left(\underline{y}_1 = r;\ \overline{y}_1 = 2 - r / r \in [0;1]\right)\right)$,

точка $O_2 : \left(t_2 = 0;\ y_{2\text{Н}} = \left(\underline{y}_2 = 0;\ \overline{y}_2 = 0 / r \in [0;1]\right)\right)$,

точка $O_3 : \left(t_3 = 1;\ y_{3\text{Н}} = \left(\underline{y}_3 = r;\ \overline{y}_3 = (\beta - 1) - \beta r / r \in [0;1]\right)\right), \beta > 0.$

Вычисления дают следующее:

$$(f_1, f_1) = \sum_{i=1}^{3} 1 \cdot 1 = 3; (f_1, f_2) = (f_2, f_1) = \sum_{i=1}^{3} 1 \cdot t_i = 0;$$

$$(f_2, f_2) = \sum_{i=1}^{3} t_i^2 = 2;$$

$$(f_1, Y_{\text{Н}}) = \sum_{i=1}^{3} 1 \cdot y_{i\text{Н}} = \underbrace{(y_{1\text{Н}} + y_{3\text{Н}})}_{U_{i\text{Н}}} U_{1\text{Н}} =$$

$$= \left(\underline{U}_1(r) = 2 \cdot r; \overline{U}_1(r) = (\beta + 3) - (\beta + 1) r / r \in [0;1]\right);$$

$$\left(f_2, Y_{\text{Н}}\right) = \sum_{i=1}^{3} t_i y_{i\text{Н}} = \underbrace{\left(-y_{1\text{Н}} + y_{3\text{Н}}\right)}_{U_{2\text{Н}}} = U_{2\text{Н}} =$$
$$= \left(\underline{U}_2\left(r\right) = 0; \overline{U}_2\left(r\right) = \left(\beta - 1\right) - \left(\beta - 1\right) r \,/\, r \in \left[0;1\right]\right).$$

В результате получим

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \left(f_1, f_1\right) & \left(f_1, f_2\right) \\ \left(f_2, f_1\right) & \left(f_2, f_2\right) \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{1\text{Н}} \\ x_{2\text{Н}} \end{pmatrix}}_{X_{\text{Н}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} U_{1\text{Н}} = \left(f_1, Y_{\text{Н}}\right) \\ U_{2\text{Н}} = \left(f_2, Y_{\text{Н}}\right) \end{pmatrix}}_{U_{\text{Н}}} \leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot x_{1\text{Н}} + 0 \cdot x_{2\text{Н}} = U_{1\text{Н}} \\ 0 \cdot x_{1\text{Н}} + 2 \cdot x_{\text{Н}} = U_{2\text{Н}} \end{cases} \to$$

$$\to \hat{x}_{1\text{Н}} = U_{1\text{Н}} / 3 = \left(\underline{x}_1\left(r\right) = \frac{2}{3} r; \overline{x}_1\left(r\right) = \frac{\beta + 3}{3} - \frac{\beta + 1}{3} r \,/\, r \in \left[0;1\right] \right);$$

$$\hat{x}_{2\text{Н}} = U_{2\text{Н}} / 2 = \left(\underline{x}_2\left(r\right) = 0; \overline{x}_2(r) = \frac{\left(\beta - 1\right)}{2} - \frac{\left(\beta - 1\right)}{2} r \,/\, r \in \left[0;1\right] \right).$$

Оценка $\hat{x}_{i\text{Н}}, i = \overline{1,2}$ является «сильной», если компоненты $\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), i = \overline{1,2}$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $\overline{x}_i(r)$ — монотонно убывающая;

(ii) $\underline{x}_i(r)$ — монотонно возрастающая:

(iii) $\overline{x}_i(r) \geq \underline{x}_i(r), \forall r \in [0;1]$.

Для $\overline{x}_{1\text{Н}}(r)$ имеем: $\underline{x}_1(r) \uparrow; \overline{x}_1(r) \downarrow, x_{1\text{Н}}(r = 1) = x_1 = 2/3$; $\overline{x}_1(r = 0) = = 1 + \beta / 3$, поэтому при $\forall \beta > 0, r = 0 \to 1 + \beta / 3 > 2/3 \leftrightarrow \leftrightarrow \overline{x}_1(r = 0) \Rightarrow x_1$ справедливо (iii). Это означает, что $\hat{x}_{1\text{Н}}$ является «сильной» оценкой при $\forall \beta$.

Аналогичные вычисления для $\hat{x}_{2\text{Н}}$ дают, что при $\beta \geq 1$ оценка $\hat{x}_{2\text{Н}}$ является «сильной», а при $0 < \beta < 1$ — «слабой». Это означает, что в зависимости от величины параметра β нечеткая оценка модели $y_{\text{Н}}(t)$ может быть либо «сильной», либо «слабой».

Выводы.

1. Рассмотрены нечеткие случайные переменные в виде «гибридных» данных.

2. Сформулирована задача по оцениванию параметров «гибридных» данных.

3. Рассмотрены модификации традиционных методов математической статистики: метод моментов; метод максимального правдоподобия; метод наименьших квадратов при обработке «гибридных» данных.

4. Приведены простейшие примеры появления «сильных/слабых» оценок.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bernhard F. Arnold. Jesting fuzzy hypotheses with crips data. *Fuzzy sets and systems*, 94(1998), pp. 323–333.

[2] Menahem Friedman et al. Fuzzy linear systems. *Fuzzy sets and systems*, 96(1998), pp. 201–209.

[3] Горяинов В.Б. и др. *Математическая статистика*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

[4] Ma J., Feng G. An approach to H∞ control of fuzzy dynamic systems. *Fuzzy sets and systems*, 137 (2003), pp. 367–386.

[5] Goetshel R. Jr and Voxman W. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy sets and systems*, 18 (1986), pp. 31–43.

Статья поступила в редакцию 28.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Мочалов И.А., Хрисат М.С. Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 10. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/1089.html

Мочалов Иван Александрович родился в 1941 г., окончил Московский энергетический институт в 1965 г., МГУ им. М.В. Ломоносова в 1971 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области теории и практики оптимизации и идентификации систем автоматического управления.

Хрисат Мохммад Слеман родился в 1981 г., окончил Нью-Йоркский технологический институт в 2007 г., получив степень магистра, преподает в университете Аль-Балка с 2007 г., аспирант Российского университета дружбы народов с 2012 г. e-mail: mohd.khrisat@fet.edu.jo