УДК 519.21+519.718

Уравнения марковского процесса гибели в математической теории надежности

©А.В. Калинкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В работе предложены формы записи дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса простой гибели, используемого в математической теории надежности.

Ключевые слова: *вероятностная теория надежности, марковские процессы, процесс гибели, уравнения Колмогорова, производящие функции.*

При рассмотрении вероятности надежной работы системы из i одинаковых единиц оборудования часто полагают, что случайное время работы одной единицы оборудования имеет показательное распределение вероятностей и не зависит от состояния других единиц оборудования [1, 2] В более общей математической модели работы системы из i единиц, в которой учитывается учитывающей взаимосвязь между единицами оборудования, можно полагать [1], что показательное распределение имеет случайное время τ_i совместной работы до выхода из строя одной из имеющихся единиц оборудования,

$$\mathbf{P}\{\tau_i \le t\} = 1 - e^{-\varphi_i t},$$

где $\varphi_0 = 0,\ \varphi_i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots$.

Обозначим $P_{ij}(t)$ — вероятность наличия в момент времени t работоспособных j единиц оборудования, при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ имелось i единиц оборудования. В настоящей работе получены новые типы уравнений для переходных вероятностей и некоторые их следствия.

Определение марковского процесса гибели. Рассматриваемой математической моделью является марковский процесс гибели ξ_t, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний

$$N = \{0, 1, 2, \ldots\};$$

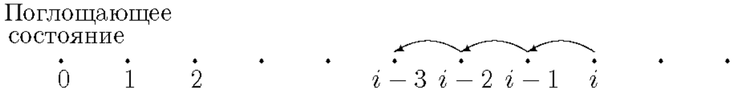
переходные вероятности

$$P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\}, \quad i, j \in N,$$

представимы при $t \to 0+$ в виде [3]

$$P_{i,i-1}(t) = \varphi_i t + o(t);$$

$$P_{ii}(t) = 1 - \varphi_i t + o(t).$$



Скачки́ процесса гибели

Скачки процесса простой гибели ξ_t изображены на рисунке. Пусть при $t = 0$ процесс находится в начальном состоянии i. В момент времени τ_i $\mathbf{P}\{\tau_i \leq t\} = 1 - e^{-\varphi_i t}$. происходит переход процесса в состояние $i - 1$ и т. д.

Уравнения Колмогорова в производящих функциях. Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей в случае процесса гибели имеет вид [3]:

$$\frac{dP_{0j}(t)}{dt} = -\varphi_0 P_{0j}(t);$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \varphi_i P_{i-1,j}(t) - \varphi_i P_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

с начальными условиями $P_{ii}(0) = 1$, $P_{ij}(0) = 0$ при $i \neq j$.

Далее используем введенный в работе [4] оператор обобщенной производной, определенный на аналитических в окрестности нуля функциях

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j;$$

$$D_s(f) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j s^{j-1}.$$

Свертывая систему с помощью производящей функции переходных вероятностей

$$G_j(t; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_i} P_{ij}(t), \quad j \in N,$$

имеем цепочку равенств

$$\frac{\partial G_j}{\partial t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_i} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}} P_{i-1,j}(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}} P_{ij}(t) = z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i-1}}{\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}} P_{i-1,j}(t) -$$

$$-z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i-1}}{\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}} P_{ij}(t) = zG_j - zD_z(G_j) = z(1 - D_z)G_j.$$

Таким образом, первая система дифференциальных уравнений получает вид

$$\frac{\partial G_j(t;z)}{\partial t} = z(1 - D_z)G_j(t;z)$$

с начальным условием

$$G_j(0;z) = \frac{z^j}{\varphi_1 \dots \varphi_j}.$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей в случае процесса гибели имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{i0}(t)}{dt} &= -P_{i0}(t)\varphi_0 + P_{i1}(t)\varphi_1; \\ \frac{dP_{ij}(t)}{dt} &= -P_{ij}(t)\varphi_j + P_{i,j+1}(t)\varphi_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

с начальными условиями $P_{ii}(0) = 1$, $P_{ij}(0) = 0$ при $i \neq j$.

Свертывая систему с помощью производящей функции переходных вероятностей

$$F_i(t;s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j, \quad i \in N; \quad |s| \le 1,$$

имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{dP_{ij}(t)}{dt} s^j = -\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)\varphi_j s^j + \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j+1}(t)\varphi_{j+1} s^j = \\ = -s\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(t)\varphi_j s^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(t)\varphi_j s^{j-1} = \\ = -sD_s(F_i) + D_s(F_i) = (-s+1)D_s(F_i). \end{aligned}$$

Вторая система дифференциальных уравнений получает вид

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = (1-s)D_s(F_i)$$

с начальным условием

$$F_i(0,s) = s^i.$$

Соответственно, двойная производящая функция

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t;z,s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_i} F_i(t;s) = \\ = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_i} P_{ij}(t)s^j = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(t;z)s^j, \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = z(1 - D_z)\mathcal{F}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = (1 - s)D_s(\mathcal{F}) \tag{2}$$

с начальным условием

$$\mathcal{F}(0; z, s) = e(zs).$$

Функция $e(z)$, определенная равенством [4]

$$e(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\varphi_1 \dots \varphi_i}, \tag{3}$$

является собственной функцией оператора обобщенной производной D_z

$$D_z(e(z)) = e(z).$$

Для процесса чистой гибели известны [3] явные выражения для переходных вероятностей

$$P_{ij}(t) =$$

$$= \varphi_i \cdots \varphi_{j+1} \sum_{n=j}^{i} \frac{e^{-\varphi_n t}}{(\varphi_i - \varphi_n) \cdots (\varphi_{n+1} - \varphi_n)(\varphi_{n-1} - \varphi_n) \cdots (\varphi_j - \varphi_n)},$$

$$j \leq i,$$

используя которые, легко получить решение уравнений (1) и (2) в виде ряда с разделенными переменными

$$\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1 \dots \varphi_n} \widetilde{C}_n(z) C_n(s) e^{-\varphi_n t}, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{C}_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n+k}}{(\varphi_{n+1} - \varphi_n) \dots (\varphi_{n+k} - \varphi_n)};$$

$$C_n(s) = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{k+1} \dots \varphi_n}{(\varphi_k - \varphi_n) \dots (\varphi_{n-1} - \varphi_n)} s^k.$$

Если $\varphi_{i+1} > \varphi_i$, $i \in N$, и $\lim\limits_{i \to \infty} \varphi_i = \infty$, то ряд (4) абсолютно сходится при любых z, $|s| < 1$ и $t \in [0, \infty)$. При $t = 0$ получаем разложение обобщенной экспоненты (3)

$$e(zs) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_1 \dots \varphi_n} \widetilde{C}_n(z) C_n(s). \tag{5}$$

Процесс гибели линейного типа и независимость работы единиц оборудования. Для процесса гибели линейного типа, когда $(\lambda > 0)$

$$\varphi_i = i\lambda,$$

оператор обобщенной производной совпадает с обычной производной

$$D_s = \lambda \frac{d}{ds},$$

имеем уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z\Big(1 - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2}\Big);$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda(1-s)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z; s) = e^{zs}$. Тогда выражения (4) и (5) получают вид

$$\mathcal{F}(t; z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/\lambda)^n}{n!} e^{z/\lambda}(s-1)^n\, e^{-n\lambda t}; \tag{6}$$

$$e^{zs} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} e^{z}(s-1)^n.$$

Суммируя ряд (6), приходим к замкнутому выражению для двойной производящей функции

$$\mathcal{F}(t; z, s) = e^{(z/\lambda)(1+(s-1)e^{-\lambda t})}.$$

Отсюда и из определения $\mathcal{F}(t; z, s)$ получаем (5)

$$F_i(t; s) = (1 - e^{-\lambda t} + s\, e^{-\lambda t})^i, \qquad i \in N. \tag{7}$$

Соотношение (7) означает, что *случайные времена работы каждой из имеющихся i единиц оборудования не зависят друг от друга*; такое свойство независимости имеет место только для процесса линейного типа.

Для приложений в математической теории надежности [1, 2] представляет интерес нахождение аналогичного (7) замкнутого интегрального представления для производящей функции $F_i(t; s)$, как решения уравнений Колмогорова (1) и (2) для процесса гибели (путем суммирования ряда Фурье (4)), при частных предположениях о функции $\varphi_i = \varphi(i)$.

В случае процесса квадратичного типа полагают

$$\varphi_i = i(i-1)\lambda.$$

Тогда

$$D_s = \lambda s \, \frac{d^2}{ds^2},$$

и имеем систему уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z^2 \Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} \Big);$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (s - s^2) \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial s^2}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z; s) = e^{zs}$.

В случае процесса полиномиального типа полагают

$$\varphi_i = i(i-1)\dots(i-k+1)\lambda, \quad k = 3, 4, \dots \; .$$

Тогда

$$D_s = \lambda s^{k-1} \, \frac{d^k}{ds^k},$$

и имеем систему уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda z^k \Big(\frac{\partial^{k-1} \mathcal{F}}{\partial z^{k-1}} - \frac{\partial^k \mathcal{F}}{\partial z^k} \Big);$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda (s^{k-1} - s^k) \frac{\partial^k \mathcal{F}}{\partial s^k}$$

с начальным условием $\mathcal{F}(0; z; s) = e^{zs}$.

В случае процесса степенного типа полагают

$$\varphi_i = i^\rho \lambda, \quad 0 < \rho < 1.$$

В случае процесса пуассоновского типа полагают

$$\varphi_0 = 0, \; \varphi_i = \lambda, \quad i = 1, 2, \dots,$$

тогда

$$D_s(f) = \lambda \frac{f(s) - f(0)}{s}.$$

Задача построения замкнутых решений указанных систем дифференциальных уравнений для процесса гибели является сложной [6].

Заключение. Отметим, что полученные в работе виды уравнений также имеют место для марковских процессов рождения и гибели на N. Такие марковские модели возникают, например, в задачах оценки надежности в системах с восстанавливаемыми элементами [7].

В задачах анализа остаточной надежности резервированных систем [8] рассматриваются полумарковские процессы гибели. Пусть техническая система состоит из i соединенных элементов, которые имеют одинаковые распределения наработок до отказа с функцией распределения $F(t)$ [9]. При функционировании системы все компоненты находятся в рабочем состоянии. В случае отказе любого компонента его функции берут на себя оставшиеся годными компоненты (полумарковский процесс переходит из состояния i в состояние $i-1$). Система функционирует до отказа последнего элемента (состояние 0). При отказе очередного элемента режимы работ неотказавших элементов изменяются. Это может привести к изменению распределений остаточных наработок до отказа этих компонент, что сказывается на показателях надежности всей системы. По статистической выборке результатов испытаний n систем проверяется гипотеза о сохранении закона распределения остаточных наработок до отказа компонент системы, которые продолжают функционировать после отказа r $(r < i)$ компонент системы [9].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А. Д. *Математические методы в теории надежности.* Москва, Наука, 1965, 524 с.

[2] Gnedenko B., Pavlov I., Ushakov I. *Statistical reliability engineering.* New York, John Wiley & Sons, 499 p.

[3] Гихман И.И., Скороход А.В. *Введение в теорию случайных процессов*. Москва, Наука, 1977, 568 с.

[4] Гельфонд А. О., Леонтьев А.Ф. Об одном обобщении ряда Фурье. *Математ. сборник*, 1951, т. 29(71), вып. 3, с. 477–500.

[5] Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы.* Москва, Наука, 1971, 436 с.

[6] Калинкин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. *Усп. матем. наук.* 2002, т. 57, вып. 2, с. 23–84.

[7] Павлов И.В. Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежностей систем с восстановлением. *Известия АН СССР. Техническая кибернетика.* 1988, вып. 3, с. 109–116.

[8] Тимонин В.И. О предельном распределении статистики одного непараметрического критерия. *Теория вероятностей и ее применения.* 1987. т. 32, вып. 4, с. 790–792.

[9] Тимонин В.И., Ермолаева М.А. Точные распределения статистик типа Колмогорова — Смирнова, применяемых для анализа остаточной надежности резервированных систем. *Электромагнитные волны и электронные системы.* 2012, вып. 10, с. 66–72.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Калинкин А.В. Уравнения марковского процесса гибели в математической теории надежности. *Инженерный журнал*: *наука и инновации*, 2013, вып. 14.
URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1150.html

Калинкин Александр Вячеславович родился в 1956 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1978 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области теории вероятностей и математического моделирования.
e-mail: kalinkin@bmstu.ru