УДК 517.57

Приближение в четырехгранном угле гармонических функций трех переменных

© О.Д. Алгазин, А.В. Копаев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены линейные комбинации конечного числа гармонических функций трех переменных — трехмерных аналогов действительных и мнимых частей экспонент. Определены коэффициенты линейной комбинации, минимизирующей интеграл энергии разности между данной функцией трех переменных, гармонической в четырехгранном угле, и этой линейной комбинацией.

Ключевые слова: *приближение функций, гармонические функции трех переменных, интеграл энергии, минимизация.*

Приближению аналитических функций полиномами из экспонент (и разложению в ряды экспонент) посвящено огромное количество работ (см., например, библиографию в [1, 2]).

При действительном λ и комплексном $w = x + yi$

$$\exp(\lambda w) = \exp(\lambda x + \lambda yi) = \exp(\lambda x)\cos(\lambda y) + \exp(\lambda x)\sin(\lambda y)\,i,$$

поэтому гармонические функции двух переменных естественно приближать линейными комбинациями (и разлагать в ряды) гармонических функций

$$\exp(\lambda_m x)\cos(\lambda_m y) \text{ и } \exp(\lambda_m x)\sin(\lambda_m y).$$

В работе [3], например, одним из авторов определены коэффициенты линейной комбинации действительных и мнимых частей конечного числа экспонент, минимизирующие интеграл энергии разности между данной функцией, гармонической в угле, и этой линейной комбинацией.

Сложнее обстоит дело с гармоническими функциями трех переменных. Здесь уже нет прямой связи с аналитическими функциями. Конформные отображения в трехмерном пространстве слишком просты, поэтому для каждой задачи приходится искать свой метод решения.

В настоящей работе предлагается приближать функции, гармонические в четырехгранном угле

$$A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : |y - y_0| < k(x - x_0),\ |z - z_0| < k(x - x_0),\ x > x_0\}$$

(k — положительное число), линейными комбинациями функций

$$p_{m,l}\left(x;y;z\right)=\exp\left(-\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}\cdot x\right)\cos\left(\lambda_m y\right)\cos\left(\lambda_l z\right),$$

$$q_{m,l}\left(x;y;z\right)=\exp\left(-\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}\cdot x\right)\cos\left(\lambda_m y\right)\sin\left(\lambda_l z\right),$$

$$s_{m,l}\left(x;y;z\right)=\exp\left(-\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}\cdot x\right)\sin\left(\lambda_m y\right)\cos\left(\lambda_l z\right),$$

$$t_{m,l}\left(x;y;z\right)=\exp\left(-\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}\cdot x\right)\sin\left(\lambda_m y\right)\sin\left(\lambda_l z\right),$$

которые можно считать трехмерными аналогами действительных и мнимых частей экспонент (здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — возрастающая последовательность положительных чисел).

Поскольку для функции $u(x;y;z)$, гармонической в угле A, функция $\tilde{u}\left(x';y';z'\right)=u(x'+x_0;\ y'+y_0;z'+z_0)$ является гармонической в угле $G=\{(x';y';z')\in\mathbb{R}^3:\left|y'\right|<kx',\ \left|z'\right|<kx',\ x'>0\}$, а для функции $\tilde{u}\left(x';y';z'\right)$, гармонической в угле G, функция $u\left(x;y;z\right)=$ $=\tilde{u}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ является гармонической в угле A и

$$\exp\left(-\lambda x\right)=\exp\left(-\lambda(x'+x_0)\right)=\exp\left(-\lambda x_0\right)\exp\left(-\lambda x'\right),$$

$$\exp\left(-\lambda x'\right)=\exp\left(-\lambda(x-x_0)\right)=\exp\left(\lambda x_0\right)\exp\left(-\lambda x\right),$$

$$\sin\left(\lambda w\right)=\sin\left(\lambda(w'+w_0)\right)=\sin\left(\lambda w_0\right)\cos\left(\lambda w'\right)+\cos\left(\lambda w_0\right)\sin\left(\lambda w'\right),$$

$$\sin\left(\lambda w'\right)=\sin\left(\lambda(w-w_0)\right)=-\sin\left(\lambda w_0\right)\cos\left(\lambda w\right)+\cos\left(\lambda w_0\right)\sin\left(\lambda w\right),$$

$$\cos\left(\lambda w\right)=\cos\left(\lambda(w'+w_0)\right)=\cos\left(\lambda w_0\right)\cos\left(\lambda w'\right)-\sin\left(\lambda w_0\right)\sin\left(\lambda w'\right),$$

$$\cos\left(\lambda w'\right)=\cos\left(\lambda(w-w_0)\right)=\cos\left(\lambda w_0\right)\cos\left(\lambda w\right)+\sin\left(\lambda w_0\right)\sin\left(\lambda w\right),$$

то достаточно ограничиться рассмотрением угла G.

Итак, будем решать следующую задачу: пусть функция $u(x;y;z)$ является гармонической в четырехгранном угле G и имеет конечный интеграл Дирихле по области G, определенный формулой [4]:

$$D_G\left[u\right]=\iiint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Найти коэффициенты $a_{ml},\ b_{ml},\ c_{ml},\ d_{ml}$ $(m,l=1,2,\ldots,n)$, минимизирующие интеграл Дирихле от функции

$$r(x;y;z)=u(x;y;z)-\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\Big[a_{m\,l}p_{m,l}(x;y;z)+b_{m\,l}q_{m,l}(x;y;z)+$$

$$+c_{m\,l}s_{m,l}(x;y;z)+d_{m\,l}t_{m,l}(x;y;z)\Big].$$

Непосредственным расчетом находим, что

$$D_G\left[p_{m,l}(x;y;z)\right]=$$

$$=\frac{k^2\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}}{2}\left\{\frac{1}{\lambda_m^2+\lambda_l^2}+\frac{\lambda_m^2}{\left[\lambda_m^2+\left(1+k^2\right)\lambda_l^2\right]^2}+\frac{\lambda_l^2}{\left[\lambda_l^2+\left(1+k^2\right)\lambda_m^2\right]^2}\right\};$$

$$D_G\left[q_{m,l}(x;y;z)\right]=$$

$$=\frac{k^2\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}}{2}\left\{\frac{1}{\lambda_m^2+\lambda_l^2}-\frac{\lambda_m^2}{\left[\lambda_m^2+\left(1+k^2\right)\lambda_l^2\right]^2}+\frac{\lambda_l^2}{\left[\lambda_l^2+\left(1+k^2\right)\lambda_m^2\right]^2}\right\};$$

$$D_G\left[s_{m,l}(x;y;z)\right]=$$

$$=\frac{k^2\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}}{2}\left\{\frac{1}{\lambda_m^2+\lambda_l^2}+\frac{\lambda_m^2}{\left[\lambda_m^2+\left(1+k^2\right)\lambda_l^2\right]^2}-\frac{\lambda_l^2}{\left[\lambda_l^2+\left(1+k^2\right)\lambda_m^2\right]^2}\right\};$$

$$D_G\left[t_{m,l}(x;y;z)\right]=$$

$$=\frac{k^2\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}}{2}\left\{\frac{1}{\lambda_m^2+\lambda_l^2}-\frac{\lambda_m^2}{\left[\lambda_m^2+\left(1+k^2\right)\lambda_l^2\right]^2}-\frac{\lambda_l^2}{\left[\lambda_l^2+\left(1+k^2\right)\lambda_m^2\right]^2}\right\};$$

$$D_G\left[p_{m,l};q_{m',l'}\right]=0,\ \ D_G\left[p_{m,l};s_{m',l'}\right]=0,$$

$$D_G\left[p_{m,l};t_{m',l'}\right]=0,\ \ D_G\left[q_{m,l};s_{m',l'}\right]=0,$$

$$D_G\left[q_{m,l};t_{m',l'}\right]=0,\ \ D_G\left[s_{m,l};t_{m',l'}\right]=0,\ \ m,l,m',l'=1,2,\ldots,n.$$

Интеграл Дирихле для пары функций $u(x;y;z)$ и $v(x;y;z)$ определяется формулой [4]

$$D_G[u;v]=\iiint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz.$$

Отметим, что функции $p_{m,l}\left(x;y;z\right)$ $(m, l = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы. Действительно, предположим, что эти функции линейно зависимы. Тогда существуют числа $c_{m\,l}$ $(m, l = 1, 2, \ldots, n)$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{m\,l} \exp\left(-\sqrt{\lambda_m^2+\lambda_l^2}\cdot x\right)\cos(\lambda_m y)\cos(\lambda_l z) = 0$$

в угле G, а значит, и во всем трехмерном пространстве.

Положим в этом равенстве $x = 0$. Получим, что для любых действительных чисел y и z

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{m\,l} \cos(\lambda_m y)\cos(\lambda_l z) = 0.$$

Поскольку задача Дирихле в классе двоякогармонических функций в области $\{(x_1; x_2; y; z) \in \mathbb{R}^4 : x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$ четырехмерного пространства $\mathbb{R}^4$ имеет единственное ограниченное решение [5], то в этой области (а значит, и во всем четырехмерном пространстве)

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{m\,l} \exp(-\lambda_m x_1)\exp(-\lambda_l x_2)\cos(\lambda_m y)\cos(\lambda_l z) = 0.$$

Но тогда для любых действительных чисел x_2, z

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{m\,l} \exp(-\lambda_m w)\exp(-\lambda_l x_2)\cos(\lambda_l z)\right] = 0,$$

где $w = x_1 + yi$ — комплексное переменное. Отсюда получим, что

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{m\,l} \exp(-\lambda_m w)\exp(-\lambda_l x_2)\cos(\lambda_l z)) = iC(x_2; z), \qquad (1)$$

где $C(x_2; z)$ — действительная функция.

Продифференцируем равенство (1) по w. Получим

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left[-\lambda_m c_{m\,l} \exp(-\lambda_m w)\exp(-\lambda_l x_2)\cos(\lambda_l z)\right] = 0. \qquad (2)$$

Перегруппируем слагаемые в равенстве (2):

$$\sum_{m=1}^{n} \exp(-\lambda_m w)\left[-\lambda_1 c_{m\,1} \exp(-\lambda_1 x_2)\cos(\lambda_1 z) - \ldots - \right.$$

$$\left. - \lambda_n c_{m\,n} \exp(-\lambda_n x_2)\cos(\lambda_n z)\right] = 0.$$

Но поскольку функции $\exp\left(-\lambda_m w\right)$ ($m=1, 2, \ldots, n$) линейно независимы, то для любого $m=1, 2, \ldots, n$

$$-\lambda_1 c_{m\,1}\exp(-\lambda_1 x_2)\cos(\lambda_1 z)-\ldots-\lambda_n c_{m\,n}\exp(-\lambda_n x_2)\cos(\lambda_n z)=0. \quad (3)$$

Пусть $c_{m_0 l_0}\neq 0$. Положив в равенстве (3) $m=m_0$, получим

$$-\lambda_1 c_{m_0 1}\exp(-\lambda_1 x_2)\cos(\lambda_1 z)-\ldots-\lambda_n c_{m_0 n}\exp(-\lambda_n x_2)\cos(\lambda_n z)=0,$$

а это невозможно, так как функции $\exp\left(-\lambda_l x_2\right)\cos\left(\lambda_l z\right)$ ($l=1, 2, \ldots, n$) линейно независимы [3].

Аналогично доказывается линейная независимость функций $q_{m,l}\left(x;y;z\right)$ $(m,l=1,2,\ldots,n)$, $s_{m,l}\left(x;y;z\right)$ $(m,l=1,2,\ldots,n)$, $t_{m,l}\left(x;y;z\right)$ $(m,l=1,2,\ldots,n)$. Отсюда следует, что все четыре указанных множества функций образуют базисы в своих линейных оболочках.

Теперь построим новый базис $\varphi_1\left(x;y;z\right)$, $\varphi_2\left(x;y;z\right)$, ..., $\varphi_{n^2}\left(x;y;z\right)$ в линейной оболочке функций $p_{m,l}\left(x;y;z\right)$ $(m,l= =1,2,\ldots,n)$, такой, что $D_G\left[\varphi_m;\varphi_l\right]=0$ $(m,l=1,2,\ldots,n^2;\, m\neq l)$.

К функциям $p_{m,l}\left(x;y;z\right)$ $(m,l=1\ldots n)$ применим процесс, аналогичный процессу ортогонализации Грама — Шмидта [6]. Сначала преобразуем двумерный массив $p_{m,l}\left(x;y;z\right)$ $(m,l=1,2,\ldots,n)$ в одномерный, положив

$$P_j\left(x;y;z\right)=p_{m,l}\left(x;y;z\right),\qquad j=\begin{cases}(m-1)^2+l, \text{ если } m\geq l;\\ (l-1)^2+2l-m, \text{ если } l>m,\end{cases}$$

$$P_1\left(x;y;z\right)=p_{1,1}\left(x;y;z\right),\quad P_2\left(x;y;z\right)=p_{2,1}\left(x;y;z\right),\quad \ldots$$

Примем $\varphi_1\left(x;y;z\right)=P_1\left(x;y;z\right)$. Далее положим $\varphi_2\left(x;y;z\right)= =P_2\left(x;y;z\right)+\gamma\,\varphi_1\left(x;y;z\right)$ и найдем γ из условия $D_G\left[\varphi_2;\varphi_1\right]=0$. Имеем

$$D_G\left[P_2+\gamma\varphi_1;\varphi_1\right]=D_G\left[P_2;\varphi_1\right]+\gamma D_G\left[\varphi_1\right]=0,\qquad \gamma=-\frac{D_G\left[P_2;\varphi_1\right]}{D_G\left[\varphi_1\right]}.$$

Отметим, что $\varphi_2(x;y;z)\not\equiv 0$. Иначе функции $P_2\left(x;y;z\right)$ и $P_1\left(x;y;z\right)=\varphi_1\left(x;y;z\right)$ были бы линейно зависимы. Отметим также, что $\partial\varphi_2/\partial x\not\equiv 0$, $\partial\varphi_2/\partial y\not\equiv 0$ и $\partial\varphi_2/\partial z\not\equiv 0$.

Действительно,

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\frac{\partial P_2}{\partial x}+\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial p_{12}}{\partial x}+\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=$$

$$=-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot x\right)\cos(\lambda_1 y)\cos(\lambda_2 z)-$$

$$-\gamma\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_1^2}\cdot\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_1^2}\cdot x\right)\cos(\lambda_1 y)\cos(\lambda_1 z);$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=\frac{\partial P_2}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial p_{12}}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=$$

$$=-\lambda_1\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot x\right)\sin(\lambda_1 y)\cos(\lambda_2 z)-$$

$$-\gamma\lambda_1\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_1^2}\cdot x\right)\sin(\lambda_1 y)\cos(\lambda_1 z);$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=\frac{\partial P_2}{\partial z}+\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\frac{\partial p_{12}}{\partial z}+\gamma\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=$$

$$=-\lambda_2\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot x\right)\cos(\lambda_1 y)\sin(\lambda_2 z)-$$

$$-\gamma\lambda_1\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_1^2}\cdot x\right)\cos(\lambda_1 y)\sin(\lambda_1 z).$$

Поэтому, если $\partial\varphi_2/\partial x\equiv 0$, то функции $\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot x\right)\times$ $\times\cos(\lambda_1 y)\cos(\lambda_2 z)$ и $\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_1^2}\cdot x\right)\cos(\lambda_1 y)\cos(\lambda_1 z)$ линейно зависимы, что неверно. Аналогично, если $\partial\varphi_2/\partial y\equiv 0$, то функции $\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot x\right)\sin(\lambda_1 y)\cos(\lambda_2 z)$ и $\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_1^2}\cdot x\right)\sin(\lambda_1 y)\cos(\lambda_1 z)$ линейно зависимы, что также неверно. Если $\partial\varphi_2/\partial z\equiv 0$, то функции $\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\cdot x\right)\cos(\lambda_1 y)\sin(\lambda_2 z)$ и $\exp\left(-\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_1^2}\cdot x\right)\cos(\lambda_1 y)\sin(\lambda_1 z)$ линейно зависимы, что также неверно. Отсюда следует, что $D_G[\varphi_2]\neq 0$.

Продолжим этот процесс «ортогонализации»:

$$\varphi_m(x;y;z)=P_m(x;y;z)+\gamma_1\varphi_1(x;y;z)+\gamma_2\varphi_2(x;y;z)+\ldots+$$

$$+\gamma_{m-1}\varphi_{m-1}(x;y;z).$$

Коэффициенты γ_1, γ_2, …, γ_{m-1} найдем из условий

$$D_G\left[\varphi_m;\varphi_1\right]=D_G\left[\varphi_m;\varphi_2\right]=\ldots=D_G\left[\varphi_m;\varphi_{m-1}\right]=0.$$

Для $l<m$ получим

$$D_G\left[\varphi_m;\varphi_l\right]=D_G\left[P_m+\gamma_1\varphi_1+\gamma_2\varphi_2+\ldots+\gamma_{m-1}\varphi_{m-1},\varphi_l\right]=$$

$$=D_G\left[P_m;\varphi_l\right]+\gamma_l D_G\left[\varphi_l\right]=0.$$

Отсюда

$$\gamma_l=-\frac{D_G[P_m;\varphi_l]}{D_G[\varphi_l]}.$$

Аналогично строятся новый базис $\psi_1(x;y;z)$, $\psi_2(x;y;z)$, …, $\psi_{n^2}(x;y;z)$ в линейной оболочке функций $Q_1(x;y;z), Q_2(x;y;z)$, ..., $Q_{n^2}(x;y;z)$, такой, что

$$D_G\left[\psi_m;\psi_l\right]=0 \quad (m,l=1,2,\ldots,n^2,\ \ m\neq l),$$

и базисы $\chi_1(x;y;z)$, $\chi_2(x;y;z)$, ..., $\chi_{n^2}(x;y;z)$, $\omega_1(x;y;z)$, $\omega_2(x;y;z)$, ..., $\omega_{n^2}(x;y;z)$ в линейных оболочках функций $S_1(x;y;z)$, $S_2(x;y;z)$, …, $S_{n^2}(x;y;z)$, $T_1(x;y;z)$, $T_2(x;y;z)$, $T_{n^2}(x;y;z)$, такие, что

$$D_G\left[\chi_m;\chi_l\right]=0,\ \ D_G\left[\omega_m;\omega_l\right]=0 \quad (m,l=1,2,\ldots,n^2,\ m\neq l),$$

Поскольку

$$D_G\left[P_m;Q_l\right]=D_G\left[P_m;S_l\right]=D_G\left[P_m;T_l\right]=D_G\left[Q_m;S_l\right]=D_G\left[Q_m;T_l\right]=$$

$$=D_G\left[S_m;T_l\right]=0 \ \ (m,l=1,2,\ldots,n^2),$$

то

$$D_G\left[\varphi_m;\psi_l\right]=D_G\left[\varphi_m;\chi_l\right]=D_G\left[\varphi_m;\omega_l\right]=D_G\left[\psi_m;\chi_l\right]=D_G\left[\psi_m;\omega_l\right]=$$

$$=D_G\left[\chi_m;\omega_l\right]=0 \ \ (m,l=1,2,\ldots,n^2,\ m\neq l).$$

Теперь рассмотрим задачу, к которой сводится поставленная ранее задача: найти коэффициенты $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n^2}$, $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n^2}$, γ_1, $\gamma_2,\ldots,\gamma_{n^2}$, $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{n^2}$, минимизирующие интеграл Дирихле от гармонической в угле G функции

$$r(x;y;z)=u(x;y;z)-$$

$$-\sum_{m=1}^{n^2}\left[\alpha_m\varphi_m(x;y;z)+\beta_m\psi_m(x;y;z)+\gamma_m\chi_m(x;y;z)+\delta_m\omega_m(x;y;z)\right].$$

Имеем

$$D_G[r]=D_G[u]-$$

$$-2\sum_{m=1}^{n^2}\left(\alpha_m D_G[u;\varphi_m]+\beta_m D_G[u;\psi_m]+\gamma_m D_G[u;\chi_m]+\delta_m D_G[u;\omega_m]\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n^2}\left(\alpha_m^2 D_G[\varphi_m]+\beta_m^2 D_G[\psi_m]+\gamma_m^2 D_G[\chi_m]+\delta_m^2 D_G[\omega_m]\right).$$

Далее,

$$\frac{\partial D_G[r]}{\partial\alpha_m}=-2D_G[u;\varphi_m]+2\alpha_m D_G[\varphi_m]=0;$$

$$\frac{\partial D_G[r]}{\partial\beta_m}=-2D_G[u;\psi_m]+2\beta_m D_G[\psi_m]=0;$$

$$\frac{\partial D_G[r]}{\partial\gamma_m}=-2D_G[u;\chi_m]+2\gamma_m D_G[\chi_m]=0;$$

$$\frac{\partial D_G[r]}{\partial\delta_m}=-2D_G[u;\omega_m]+2\delta_m D_G[\omega_m]=0.$$

Отсюда получим, что

$$\alpha_m=\frac{D_G[u;\varphi_m]}{D_G[\varphi_m]};\quad \beta_m=\frac{D_G[u;\psi_m]}{D_G[\psi_m]};\quad \gamma_m=\frac{D_G[u;\chi_m]}{D_G[\chi_m]};\quad \delta_m=\frac{D_G[u;\omega_m]}{D_G[\omega_m]};$$

$$\min D_G[r]=D_G[u]-$$

$$-\sum_{m=1}^{n^2}\left\{\frac{(D_G[u;\varphi_m])^2}{D_G[\varphi_m]}+\frac{(D_G[u;\psi_m])^2}{D_G[\psi_m]}+\frac{(D_G[u;\chi_m])^2}{D_G[\chi_m]}+\frac{(D_G[u;\omega_m])^2}{D_G[\omega_m]}\right\}.$$

Таким образом, коэффициенты, минимизирующие интеграл энергии разности между данной гармонической функцией и линейной комбинацией функций $p_{m,l}(x;y;z)$, $q_{m,l}(x;y;z)$, $s_{m,l}(x;y;z)$, $t_{m,l}(x;y;z)$, найдены. Отметим, что коэффициенты α_m, β_m, γ_m, δ_m на зависят от числа *n*.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент*. Москва, Наука, 1976, 536 с.
[2] Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент*. Москва, Наука, 1980, 384 с.
[3] Копаев А.В. О приближении в угле гармонических функций двух переменных. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, спец. выпуск № 7, с. 71–76.
[4] Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. *Введение в теорию гармонических функций*. Москва, Наука, 1968, 207 с.
[5] Фукс Б.А. *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных*. Москва, Физматлит, 1962, 419 с.
[6] Гельфанд И.М. *Лекции по линейной алгебре*. Москва, Наука, 1971, 271 с.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Алгазин О.Д., Копаев А.В. Приближение в четырехгранном угле гармонических функций трех переменных. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1164.html

Алгазин Олег Дмитриевич родился в 1948 г., окончил Московский областной педагогический институт им. Н.К. Крупской в 1970 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более15 работ, в основном в области краевых задач для аналитических функций. e-mail: mopi66@yandex.ru

Копаев Анатолий Владимирович родился в 1951 г., окончил Орловский государственный педагогический институт в 1972 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области комплексного анализа, теории гармонических функций и их применений в подземной гидродинамике. e-mail: 5736234@mail.ru