

Моделирование упругопластического поведения материала при импульсном нагружении

© Т.А. Бутина, В.М. Дубровин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена модель расчета упругопластического поведения материалов при интенсивном нагружении. При воздействии интенсивных кратковременных нагрузок в элементах конструкции возникает сложное напряженно-деформированное состояние. Ударная волна, продвигаясь по материалу, приводит к его нагреванию за счет взаимного перехода механической энергии в тепловую, возникающего вследствие больших скоростей деформации, вызванных импульсным нагружением. Процессы, на которые влияет скорость деформации, еще недостаточно хорошо изучены экспериментально. Изменение свойств материалов при деформировании влияет в итоге на поведение всей конструкции, ее работоспособность. Большой интерес представляют задачи, связанные с пластическим поведением материалов. Рассмотрено распределение напряжений в двухслойной сфере.

Ключевые слова: *напряженно-деформированное состояние, пластическая деформация, скорость пластической деформации, предел текучести.*

Введение. В последнее время широко распространены две основные теории пластичности: теория пластического течения и деформационная теория [1]. Состояние пластичности можно характеризовать как неспособность реальных материалов выдерживать большие сдвиговые напряжения, поэтому все ограничения, связанные с наличием состояния пластичности, относятся к девиаторным (сдвиговым) составляющим полного тензора напряжений. В литературе предлагается несколько критериев текучести; обычно они различаются намного меньше, чем неопределенности физических постоянных, характеризующих свойства материалов конструкции. В качестве условия наступления пластичности в рассматриваемой модели выбрано обобщенное условие Мизеса. Критерий Мизеса хорошо описывает реальное поведение широкого класса материалов и в то же время имеет простое математическое выражение, что позволяет использовать его в численных расчетах.

Моделирование поведения материала при импульсном нагружении. Согласно критерию Мизеса, пластическое течение возникает в том случае, если второй инвариант девиатора тензора напряжений (интенсивность сдвиговых напряжений) достигает некоторой критической величины. Причем эта величина в общем виде может быть функцией таких параметров, как скорость деформаций, предел текучести, полная внутренняя энергия, пластическая работа. В главных осях (рис. 1, а, б)

$$Y'_0 = \left[\frac{1}{6(\sigma_1 - \sigma_2)^2} + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] = K_0; \quad (1)$$

$$K_0 = K(\dot{\varepsilon}_0, \varepsilon_0, p, W_{\text{пл}}), \quad (2)$$

где $\dot{\varepsilon}_0$ — интенсивность скорости деформаций; ε_0 — интенсивность напряжений; p — гидростатическое давление; $W_{\text{пл}}$ — работа пластического деформирования.

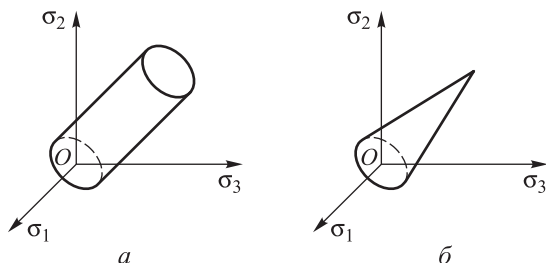


Рис. 1. Форма поверхности при выполнении условий (3) (а) и (4) (б)

Функция K имеет смысл предела текучести при чистом сдвиге:

$$\sigma_1 = -\sigma_2, \sigma_3 = 0, \sigma_1 = K. \quad (3)$$

В случае использования вместо функции K предела текучести Y_0 (при простом растяжении) условие (1) принимает вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y_0^2. \quad (4)$$

В общем случае предел текучести Y_0 является функцией перечисленных выше параметров: $Y_0 = Y_0(\varepsilon_0^2, \varepsilon_0, P, W_{\text{пл}})$.

Вид функции определяется экспериментально и специфичен для различных классов материалов. Поверхность текучести (в случае идеальной пластичности) представляет собой поверхность кругового цилиндра с радиусом основания, равным $K\sqrt{2}$ и $\sqrt{\frac{2}{3}}Y_0$ соответственно.

Обобщенное условие Мизеса имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6(K' + d|p|). \quad (5)$$

Здесь d — экспериментальный коэффициент; p — гидростатическое давление, $p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$; $K' = (\dot{\varepsilon}_i, \varepsilon_i, W_{\text{пл}})$.

Поверхность текучести (5) представляет собой поверхность кругового конуса с вершиной $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = K'/d$.

Напряженное состояние в произвольной точке, находящейся внутри конуса или цилиндра, полностью определяется соотношениями теории упругости. Если параметры напряженного состояния соответствуют точке, лежащей вне этих поверхностей, для расчета возникающего пластического течения корректируют девиатор тензора напряжений. Ниже показано, что такая корректировка равносильна использованию для расчета пластичности полных соотношений теории пластического течения.

Известно, что пластичность материала зависит только от сдвига при условии, что сумма девиаторов тензора напряжений

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0.$$

Равнонаклоненная к осям и проходящая через начало координат плоскость (см. рис. 1, а) при пересечении с указанными поверхностями образует круг текучести радиусом $K\sqrt{2}$ или $\sqrt{\frac{2}{3}}Y_0$. Рассмотрим в качестве условия пластичности простое растяжение (случай чистого сдвига может быть получен незначительным пересчетом). Пластическое течение накладывает ограничение лишь на сдвиговые напряжения, связанные с пластической деформацией. Причем эта пластическая часть деформации перпендикулярна кругу текучести. Если при расчете новое напряженное состояние (точка в пространстве $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) окажется за пределом текучести, скорректированное напряженное состояние будет находиться на пересечении круга текучести и перпендикуляра, опущенного на него из этой точки. Таким образом, основная задача корректировки напряженного состояния в случае наличия пластического течения сводится к сохранению девиатора тензора напряжений на круге текучести [2].

Запишем условие (4) для компонент девиатора тензора напряжений в виде

$$(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2 \leq 2Y_0^2$$

или с учетом условия $S_1 + S_2 + S_3 = 0$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \leq \frac{2}{3}Y_0^2. \quad (6)$$

При наличии пластического течения полная деформация равна сумме упругой ε_{iy} и пластической $\varepsilon_{i\text{пл}}$ деформаций:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{iy} + \varepsilon_{i\text{пл}}. \quad (7)$$

Продифференцируем выражение (7) по времени:

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_{iy} + \varepsilon_{i\text{пл}}.$$

Теория пластического течения позволяет получить связь между девиатором тензора напряжений и тензором скоростей пластических деформаций:

$$\varepsilon_{i\text{пл}} = qS_i, \quad \dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_{iy} + qS_i. \quad (8)$$

Величина $\dot{\varepsilon}_{iy}$ определяется соотношениями теории упругости:

$$\dot{S}_i = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_{iy} - \frac{1}{3} \dot{V} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{iy} = \frac{\dot{S}_i}{2\mu} + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}. \quad (9)$$

Подставим соотношение (9) в формулу (8)

$$2\mu \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right) = \dot{S}_i + q2\mu S_i. \quad (10)$$

Затем умножим обе части выражения (10) на S_i и преобразуем его с учетом (6):

$$2\mu q \sum_{i=1}^3 S_i^2 + \sum_{i=1}^3 \dot{S}_i S_i = 2\mu \sum_{i=1}^3 S_i \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right). \quad (11)$$

Условие текучести (6) представим в виде

$$\sum_{i=1}^3 S_i^2 = \frac{2}{3} Y_0^2 \quad (12)$$

или после дифференцирования

$$\sum_{i=1}^3 \dot{S}_i S_i = 0. \quad (13)$$

Из формулы (11) с учетом выражения (13) находим:

$$\text{при } \sum_{i=1}^3 S_i^2 \geq \frac{2}{3} Y_0^2$$

$$q = \frac{3 \sum_{i=1}^3 S_i \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right)}{2Y_0^2}, \quad (14)$$

$$\text{при } \sum_{i=1}^3 S_i^2 < 2/3 Y_0^2$$

$$q = 0.$$

Вычислим напряжения S_i^2 , используя упругие соотношения и полную деформацию:

$$\dot{S}_{iy} = 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{3} \dot{V} \right). \quad (15)$$

Подставив выражение (15) в формулы (7) и (14), получим

$$S_{iy} - \dot{S}_i = 2\mu q S_i, \quad (16)$$

$$q = \frac{3 \sum_{i=1}^3 S_i \dot{S}_{iy}}{4\mu Y_0^2}. \quad (17)$$

Запишем выражение (16) для приращений ΔS_{iy} , ΔS_i :

$$\Delta S_{iy} - \Delta S_i = 2\mu q S_i \Delta t. \quad (18)$$

Соотношение (18) показывает, что разность между приращениями напряжений, вычисляемая в соответствии с законом Гука, и приращениями истинных напряжений лежит на радиусе-векторе точки, попавшей за круг текучести. Известно, что

$$\sum_{i=1}^3 \dot{S}_i S_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 S_i \Delta S_i = 0. \quad (19)$$

Значит, приращение истинных напряжений находится на касательной к кругу текучести.

Преобразуем формулы (16) с (17) с учетом соотношения (19):

$$\dot{S}_{iy} - \dot{S}_i = \frac{3S_i}{2Y_0^2} \sum_{i=1}^3 S_i (\dot{S}_{iy} - \dot{S}_i). \quad (20)$$

Проинтегрируем выражение (20) вдоль радиуса-вектора, перпендикулярного к кругу текучести с учетом соотношений (18), (19):

$$S_{iy} - S_i = \left(\frac{3}{2} Y_0^2 \right) S_i \sum_{j=1}^3 S_j (s_{jy} - s_j). \quad (21)$$

Это соотношение показывает связь между напряжениями истинными и вычисленными с использованием теории упругости:

$$s_i = N s_{iy}. \quad (22)$$

Из выражения (21) найдем параметр N :

$$s_{iy}(1-N) = \frac{3}{2} Y_0^2 N^2 s_i^2 \sum_{i=1}^3 s_{iy}^2 (1-N). \quad (23)$$

Сокращая левую и правую части формулы (23) на $(1-N)s_{iy}$ и учитывая, что $\sum_{i=1}^3 s_{iy}^2 = \frac{2}{3} Y_0^2$, находим

$$N = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} Y_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (s_{iy})^2}}. \quad (24)$$

Таким образом, значения истинных напряжений (с учетом пластичности) получены простым умножением упругих напряжений s_{iy} , рассчитанных исходя из закона Гука, на некоторую величину N , определяемую соотношением (24), что равносильно использованию полных соотношений (8) закона пластического течения.

Большой интерес представляет расчет работы пластической деформации, численно равной предельному сдвиговому напряжению, умноженному на пластическую деформацию каждого элемента среды, для которого выполняется условие Мизеса (5). Пластическая деформация есть разность между полной деформацией ε_i , вызванной действием избыточного сдвигового напряжения, рассчитанного по соотношениям теории упругости, и деформацией ε_i^* , которая может возникнуть под действием скорректированного напряжения:

$$\varepsilon_{i\text{пл}} = \varepsilon_i - \varepsilon_i^*, \quad \dot{\varepsilon}_{i\text{пл}} = \dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_i^*. \quad (25)$$

Используя соотношения теории упругости для сдвиговых напряжений, получаем

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\dot{s}_i}{2\mu} + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}, \quad \dot{\varepsilon}_i^* = \frac{\dot{s}_i^*}{2\mu} + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V}, \quad (26)$$

подставив выражение (26) в формулу (25) находим

$$\dot{\varepsilon}_{i\text{пл}} = \frac{(\dot{s}_i - \dot{s}_i^*)}{\mu}$$

или

$$\varepsilon_{i\text{пл}} = \frac{(s_i - s_i^*)}{2\mu}.$$

Согласно полученным соотношениям (22), (24), имеем

$$s_i = s_i^* \frac{\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}}{\sqrt{\frac{2}{3}} Y_0},$$

тогда

$$\varepsilon_{i\text{пл}} = \frac{s_i^*}{2\mu} \left(\frac{\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}}{\sqrt{\frac{2}{3}} Y_0} - 1 \right).$$

В соответствии с определением пластической работы

$$E_{i\text{пл}} = s_i^* \varepsilon_{i\text{пл}}, \quad E_{i\text{пл}} = \frac{(s_i^*)^2}{2\mu} \left(\frac{\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}}{\sqrt{\frac{2}{3}} Y_0} - 1 \right). \quad (27)$$

Преобразуем выражение (27) с учетом условия (2):

$$E_{\text{пл}} = \frac{Y_0^2}{2\mu} \left(\frac{\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)}}{\sqrt{\frac{2}{3}} Y_0} - 1 \right). \quad (28)$$

Расчет пластического течения с помощью описанной выше процедуры корректировки девиатора тензора напряжений наиболее удобен при численном исследовании задач прочности. В этом случае два последовательных напряженных состояния n и $n+1$ (старое и новое) разделены малым промежутком времени Δt . Следовательно, погрешность определения параметров пластического течения будет малой величиной [3, 4].

Суммарная пластическая работа в произвольном элементе будет определяться суммой величин (28) для всего времени T расчета:

$$E_{\text{пл}} = \sum_{t=\Delta t}^T \frac{Y_0^2}{3\mu} \left(\frac{\sqrt{(S_1^2(t) + S_2^2(t) + S_3^2(t))}}{\sqrt{\frac{2}{3}} Y_0} - 1 \right). \quad (29)$$

Суммируя выражения (29) по всем элементам конструкции, получаем полную пластическую работу.

Как указывалось ранее, предел текучести не зависит от того, происходит сжатие или растяжение материала, которые при этом существенно различаются (эффект Баушингера). Пусть при сжатии предел текучести равен Y_0 , при растяжении — Y'_0 . Тогда общее выражение для определения предела текучести с учетом эффекта Баушингера имеет вид

$$Y = \frac{Y_0 + Y'_0}{2} + \text{sign}\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)\left(\frac{Y_0 - Y'_0}{2}\right).$$

Рассмотрим двухслойную сферу радиусом 10 см. Допустим, что в начальный момент часть внешнего слоя, граничащая с вакуумом, прогрета до температуры 300 °С. Температура остальной части этого и второго слоя равна нулю. Плотность второго слоя в 100 раз больше, чем первого. На рис. 2, 3 показано распределение напряжения и массовой

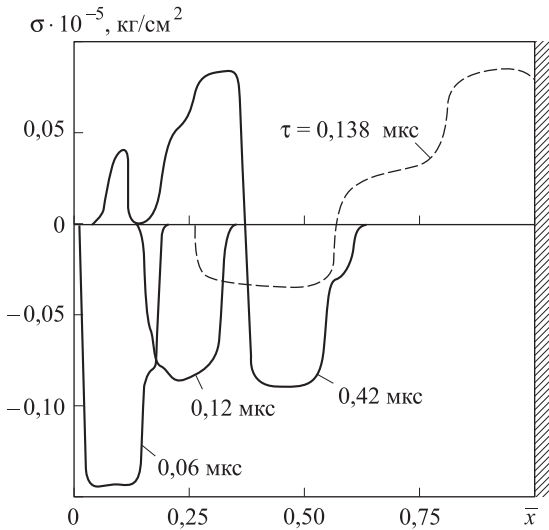


Рис. 2. Распределение напряжения в разные моменты времени

скорости в разные моменты времени, примем за единицу времени 1 мкс. Ясно, что со стороны свободной поверхности и от границы раздела нагретого и холодного вещества распространяются волны разгрузки ($\tau = 0,06$ мкс), внутрь материала идет волна сжатия. На наружной поверхности вследствие полной разгрузки напряжение равно нулю ($t = 0,12$ мкс). Центральная часть нагретого слоя неподвижна, а область, граничащая с холодным веществом, движется в сторону, противоположную движению наружной поверхности с вдвое меньшей скоростью. Напряжение в этой области составляет половину первоначального значения. В момент времени, соответствующий времени пробега

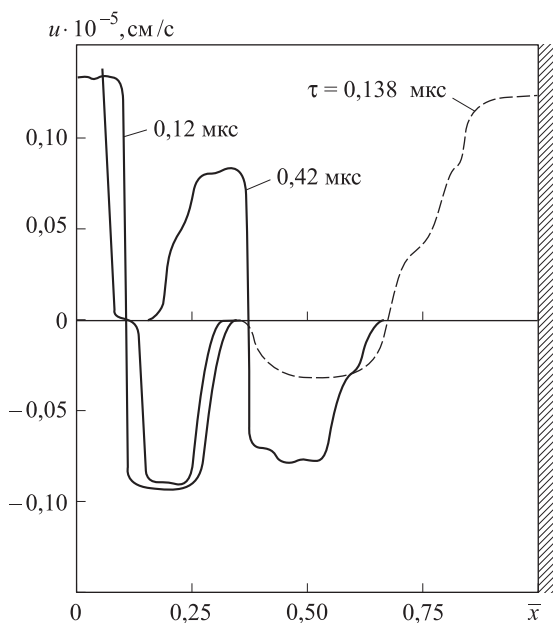


Рис. 3. Распределение массовой скорости в разные моменты времени

возмущения по половине прогретого слоя ($\tau = 0,12$ мкс), волны, идущие с границ прогретого слоя, смыкаются. Распространение волн разгрузки и сжатия вызывает движение всего нагретого материала, что ведет к возникновению растягивающих напряжений. Амплитуда распространяющейся внутрь материала волны сжатия $\sigma_r \cong -1/2 \sigma_0$, массовая скорость $u \cong -u/2$. За ударной волной следует волна разгрузки с амплитудой $\sigma_r \cong \sigma_0$. За волной разгрузки напряжение скачком убывает до нуля ($\tau = 0,42$ мкс). На этой кривой наблюдаются участки, соответствующие упругому предвестнику и упругой волне разгрузки.

Наличие жесткой поверхности у материала второго слоя исключает движение внутренней границы первого слоя. После отражения от жесткой поверхности распределение напряжения и скорости ($\tau = 0,138$ мкс) представлено на рис. 2, 3 (штриховая кривая). Профиль скорости и напряжения искажается из-за наличия диссипативных механизмов и в результате взаимодействия волн при отражении от жесткой поверхности. При расчетах вычисляли полную подведенную тепловую, механическую, полную внутреннюю энергию, работу пластического деформирования. Эти параметры нужны для проверки дисбаланса энергии. Работа напряжений на пластических деформациях определяется уровнем и характером нагружения, свойствами конструкционных материалов. Расчеты показывают, что она в основном возрастает в начальный период, когда интенсивность напряжений превышает предел текучести.

Заключение. Описанная методика корректировки составляющих напряжения позволяет проводить расчеты напряженно-деформированного состояния в элементах многослойных конструкций при действии интенсивного теплосилового нагружения. В рамках упомянутой математической модели проведены расчеты напряженно-деформированного состояния в различных элементах конструкций при импульсном нагружении. В разрешающую систему уравнений входят уравнения сохранения массы, импульса, энергии, уравнения состояния.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. Москва, Наука, 1969, с. 415.
- [2] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, т. 1, 2011, с. 463.
- [3] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, т. 2, 2011, с. 559.
- [4] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Моделирование расслоений, отколов в многослойных элементах конструкций при импульсном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 7(19), с. 8. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/897.html>

Статья поступила в редакцию 10.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Бутина Т.А., Дубровин В.М. Моделирование упругопластического поведения материала при импульсном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 3. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1231.html>

Бутина Татьяна Александровна родилась в 1950 г., окончила факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Награждена медалями им. М.В. Келдыша и им. Ю.А. Гагарина. Область научных интересов: прочность и устойчивость деформируемых систем. e-mail: butinata@mail.ru

Дубровин Виктор Митрофанович родился в 1934 г., окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета в 1958 г. Канд. тех. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» и кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: динамика, прочность и устойчивость деформируемых систем, ползучесть конструкционных материалов. Автор пяти изобретений. e-mail: vmdubrovinv1934@mail.ru

Modelling of material elastoplastic behavior under impact loading

© T.A. Butina, V.M. Dubrovin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article describes a suggested calculation model of elastoplastic behavior of materials under intense loading. Complex stress-strain state rises in structural elements under the influence of intense transient loads. The shock wave, moving along the material, causes its heating due to the mutual transfer of mechanical energy into heat which arises due to the large deformation rates, which are caused by impact loading. Processes that are affected by the rate of deformation are still not well studied experimentally. Changing of the material properties during deformation affects in the result on the behavior of the whole structure, its performance. The tasks associated with the plastic behavior of materials are of great interest. In this work we consider stress distribution in a two-layer sphere.

Keywords: stress-strain state, plastic deformation, rate of plastic deformation, yield strength.

REFERENCES

- [1] Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 415 p.
- [2] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 1. Tenzornyi analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [3] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [4] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2013, no. 7(19), Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/897.html>

Butina T.A. (b. 1950) graduated from the Faculty of Management and Applied Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology in 1974. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. A specialist in the field of strength and stability of deformable systems. e-mail: butinata@mail.ru

Dubrovin V.M. (b. 1934) graduated from the Faculty of Mathematics and Mechanics of the Saratov State University in 1958. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics and of the Higher Mathematics Departments of Bauman Moscow State Technical University. Research interests: dynamics, strength and stability of deformable systems; creep of structural materials. He is the author of five inventions. e-mail: vmdubrovinm1934@mail.ru