УДК 531.3, 531.011

Общие теоремы динамики и общее уравнение механики

© В.В. Лапшин

МГТУ им. Н.Э. Бумана, Москва, 105005, Россия

При решении задач на практических занятиях основные трудности у студентов связаны с выбором необходимой теоремы (или теорем) при решении задачи. Рассмотрен вывод общих теорем динамики из общего уравнения механики. При этом изменена формулировка теорем: в них не входят силы реакции идеальных связей (внешние и внутренние), которые всегда являются дополнительными неизвестными. Формулировка теорем позволяет понять, какие из общих теорем динамики необходимо использовать при решении задач.

Ключевые слова: *общие теоремы динамики, общее уравнение механики.*

Введение. В курсах теоретической механики технических вузов, в том числе в МГТУ им. Н.Э. Баумана, принято общие теоремы динамики выводить из уравнений движения механической системы [1–5]. При этом силы, действующие на механическую систему, разбивают на внешние и внутренние. Силы реакции связей отдельно не выделяются, а понятие идеальных связей вводится существенно позднее, в разделе «Аналитическая механика». При решении задач на практических занятиях основные трудности у студентов связаны с выяснением, какую теорему (или какие теоремы) необходимо использовать при решении задачи. У студентов создается впечатление, что мастерство и опыт преподавателя в значительной степени заключаются в умении ответить на этот вопрос. На самом деле ответ на этот вопрос дает другая формулировка этих теорем, в которых силы, действующие на систему, разбивают на внешние и внутренние активные силы и силы реакции идеальных связей. Эти теоремы выводятся из общего уравнения механики [6–7]. Силы реакции идеальных связей, являющиеся неизвестными, не совершают работу на виртуальных перемещениях системы и поэтому не входят в общее уравнение механики, также как и в правые части общих теорем динамики. Соответственно, если в задаче выполнены условия одной из этих теорем, то эту теорему следует использовать для решения. Если на систему наложены неидеальные связи, то силы реакции этих связей необходимо добавить к активным силам. В связи с этим в курсе теоретической механики при изучении аналитической механики целесообразно вернуться к общим теоремам динамики и вывести их из общего уравнения механики.

Общие теоремы динамики. Рассмотрим механическую систему, на которую наложены голономные, удерживающие и идеальные связи.

Запишем уравнения движения системы:

$$m_k \ddot{\overline{r}}_k = \overline{F}_k^{(a,e)} + \overline{F}_k^{(a,i)} + \overline{R}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где m_k — масса k-й точки системы; $\overline{r}_k$ — ее радиус-вектор, $\overline{F}_k^{(a,e)}$, $\overline{F}_k^{(a,i)}$ — внешняя и внутренняя активные силы; $\overline{R}_k = \overline{R}_k^{(e)} + \overline{R}_k^{(i)}$ — сила реакции идеальных связей, приложенные к k-й точке системы.

Общее уравнение механики имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-m_k \ddot{\overline{r}}_k + \overline{F}_k^{(a,e)} + \overline{F}_k^{(a,i)} \right) \delta \overline{r}_k = 0. \tag{2}$$

Теорема 1 (об изменении количества движения). Если среди виртуальных перемещений системы есть перемещение системы как единого целого вдоль оси Ox

$$\delta \overline{r}_k = \delta x \, \overline{i}, \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

то

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{(e)}, \tag{4}$$

где Q_x — количество движения системы вдоль оси Ox.

Доказательство. Подставляя соотношение (3) в общее уравнение механики (2), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-m_k \ddot{x}_k + F_{kx}^{(a,e)} + F_{kx}^{(a,i)} \right) \delta x = 0.$$

Отсюда следует

$$\sum_{k=1}^{n} \left(-m_k \ddot{x}_k + F_{kx}^{(a,e)} + F_{kx}^{(a,i)} \right) = 0.$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{x}_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k = \frac{dQ_x}{dt}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{(a,i)} = 0,$$

так как внутренние силы образуют систему сил, эквивалентную нулю, получаем выражение (4).

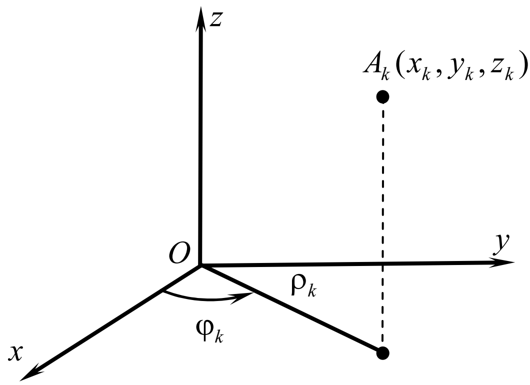
Теорема 2 (об изменении кинетического момента). Если среди виртуальных перемещений системы есть поворот системы как единого целого вокруг оси Oz, то

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k^{(a,e)}\right), \tag{5}$$

где K_z — кинетический момент системы при ее повороте вокруг оси Oz.

Доказательство. Если виртуальным перемещением системы является поворот системы как единого целого вокруг оси Oz на угол $\delta\varphi$, то декартовы и цилиндрические координаты k-й точки (см. рисунок) связаны соотношениями

$$x_k = \rho_k \cos\varphi_k;\ \ y_k = \rho_k \sin\varphi_k;\ \ z_k = z_k.$$



Декартовы и цилиндрические координаты точки

На рассматриваемом виртуальном перемещении

$$\delta\rho_k = 0;\quad \delta z_k = 0;\quad \delta\varphi_k = \delta\varphi,$$

тогда

$$\delta x_k = -\rho_k \sin\varphi_k \delta\varphi = -y_k\delta\varphi;\quad \delta y_k = \rho_k \cos\varphi_k \delta\varphi = x_k\delta\varphi;\quad \delta z_k = 0.$$

Подставляя эти соотношения в общее уравнение механики (2), получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left[-m_k\left(x_k\ddot{y}_k - y_k\ddot{x}_k\right) + x_k F_{ky}^{(a,e)} - y_k F_{kx}^{(a,e)} + x_k F_{ky}^{(a,i)} - y_k F_{kx}^{(a,i)}\right]\delta\varphi = 0,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\left[-m_k\left(x_k\ddot{y}_k-y_k\ddot{x}_k\right)+x_kF_{ky}^{(a,e)}-y_kF_{kx}^{(a,e)}+x_kF_{ky}^{(a,i)}-y_kF_{kx}^{(a,i)}\right]=0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{dK_z}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}m_k\left(x_k\dot{y}_k-y_k\dot{x}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(x_k\ddot{y}_k+\dot{x}_k\dot{y}_k-y_k\ddot{x}_k-\dot{x}_k\dot{y}_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(x_k\ddot{y}_k-y_k\ddot{x}_k\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[x_kF_{ky}^{(a,e)}-y_kF_{kx}^{(a,e)}\right]=\sum_{k=1}^{n}M_z\left(\overline{F}_k^{(a,e)}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[x_kF_{ky}^{(a,i)}-y_kF_{kx}^{(a,i)}\right]=\sum_{k=1}^{n}M_z\left(\overline{F}_k^{(a,i)}\right)=0,$$

получаем соотношение (5).

Теорема 3 (об изменении кинетической энергии). Если действительное перемещение является одним из виртуальных перемещений

$$\delta\overline{r}_k=d\overline{r}_k,\ \ k=1,\,2,\,\ldots,\,n, \tag{6}$$

то

$$dT=\sum_{k=1}^{n}dA\left(\overline{F}_k^{(a,e)}\right)+\sum_{k=1}^{n}dA\left(\overline{F}_k^{(a,i)}\right), \tag{7}$$

где T — кинетическая энергия системы; $dA(\overline{F})$ — элементарная работа силы $\overline{F}$.

Доказательство. Подставляя соотношение (6) в общее уравнение механики (2), получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-m_k\ddot{\overline{r}}_k+\overline{F}_k^{(a,e)}+\overline{F}_k^{(a,i)}\right)d\overline{r}_k=0.$$

С учетом

$$dT=\sum_{k=1}^{n}m_k\dot{\overline{r}}_kd\dot{\overline{r}}_k=\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{d\overline{r}_k}{dt}d\dot{\overline{r}}_k=\sum_{k=1}^{n}m_kd\overline{r}_k\frac{d\dot{\overline{r}}_k}{dt}=\sum_{k=1}^{n}m_k\ddot{\overline{r}}_kd\overline{r}_k;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(a,e)} d\overline{r}_k = \sum_{k=1}^{n} dA\left(\overline{F}_k^{(a,e)}\right); \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^{(a,i)} d\overline{r}_k = \sum_{k=1}^{n} dA\left(\overline{F}_k^{(a,i)}\right)$$

получим соотношение (7).

Заключение. Формулировки полученных теорем отличаются от формулировок общих теорем динамики тем, что в них не входят силы реакции идеальных связей, которые неизвестны. Поэтому условия этих теорем о виртуальных перемещениях могут обусловить выбор общих теорем динамики для решения задачи.

Если среди виртуальных перемещений системы есть перемещение системы как единого целого вдоль некоторой оси, то для решения задачи необходимо использовать теорему об изменении количества движения в проекции на эту ось.

Если среди виртуальных перемещений системы есть поворот системы как единого целого вокруг некоторой оси, то для решения задачи необходимо использовать теорему об изменении кинетического момента вокруг этой оси.

В подавляющем большинстве задач связи, наложенные на систему, стационарны. В этом случае действительное перемещение является одним из виртуальных и условия теоремы об изменении кинетической энергии выполнены. Однако далеко не всегда задачи решаются с помощью этой теоремы, поскольку не известны внутренние силы, обеспечивающие заданные в условиях задач относительные перемещения тел механической системы, а отличная от нуля работа этих сил входит в формулировку теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колесников К.С., ред. *Курс теоретической механики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 758 с.

[2] Никитин Н.Н. *Курс теоретической механики*. СПб., Изд-во Лань, 2011, 720 с.

[3] Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. *Курс теоретической механики*. СПб, Изд-во Лань, 2009, 736 с.

[4] Тарг С.М. *Краткий курс теоретической механики*. Москва, Высшая школа, 1995, 416 с.

[5] Аппель П. *Теоретическая механика*. Т. 2. Москва, Физматгиз, 1960, 487 с.

[6] Березкин Е.Н. *Курс теоретической механики*. Москва, Изд-во Московского университета, 1974, 646 с.

[7] Голубев Ю.Ф. *Основы теоретической механики*. Москва, Изд-во Московского университета, 2000, 719 с.

Статья поступила в редакцию 29.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Лапшин В.В. Общие теоремы динамики и общее уравнение механики. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12.

URL: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/1347.html

Лапшин Владимир Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 120 научных работ. Область научных интересов: механика и управление движением шагающих машин, теоретическая механика. e-mail: vladimir@lapshin.net

General theorems of dynamics and general equation of mechanics

© V.V. Lapshin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

General theorems of dynamics constitute one of the main parts in theoretical mechanics. Traditionally, these theorems are being derived from motion equations of a mechanical system. The main students' difficulties are associated with the question which theorem (or theorems) should be used to obtain the solution. The paper shows these theorems' derivation from the general equation of mechanics. This leads to changes in the theorems' formulation: reaction force of ideal constraints (internal and external) is out of the consideration. This approach compared with the traditional one gives a hint about the theorems to be used in the solution.

Keywords: *general theorems of dynamics, general equation of mechanics.*

REFERENCES

[1] Kolesnikov K.S., ed. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* [A course of Theoretical Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 758 p.
[2] Nikitin N.N. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* [A course of Theoretical Mechanics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011, 720 p.
[3] Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* [A course of Theoretical Mechanics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2009, 736 p.
[4] Targ S.M. *Kratkiy kurs teoreticheskoi mekhaniki* [A short course of Theoretical Mechanics]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1995, 416 p.
[5] Appel P. *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical Mechanics], vol. 2. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 487 p.
[6] Berezkin E.N. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* [A course of Theoretical Mechanics]. Moscow, Moskovskiy Universitet Publ., 1974, 646 p.
[7] Golubev Yu.F. *Osnovy teoreticheskoi mekhaniki* [Foundations of Theoretical Mechanics]. Moscow, Moskovskiy Universitet Publ., 2000, 719 p.

Lapshin V.V., Dr. Sci. (Phys.&Math.), professor of the Bauman Moscow State Technical University. He is the author of over 120 scientific papers. Scientific interests: mechanics and motion control of walking machines, theoretical mechanics. e-mail: vladimir@lapshin.net