

На правах рукописи

Вахлярский Дмитрий Сергеевич

**ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО
ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА
РАСЩЕПЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ**

Специальность:

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук



Москва – 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана).

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Гуськов Александр Михайлович

Официальные оппоненты **Меркурьев Игорь Владимирович**, доктор технических наук, заведующий кафедрой робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Киселёв Алексей Сергеевич, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник национального исследовательского центра «Курчатовский Институт»

Ведущая организация Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится «26» февраля 2020 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.141.03 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана по адресу: 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

Ваш отзыв в двух экземплярах, заверенных гербовой печатью, просьба направлять по указанному адресу ученому секретарю диссертационного совета Д 212.141.03.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана www.bmstu.ru.

Автореферат разослан « » 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.141.03,
кандидат технических наук, доцент

М.В. Мурашов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) – прибор измерения первичной инерциальной информации, который может работать в режиме датчика угловых скоростей или в режиме датчика угла поворота. В настоящее время ВТГ разрабатывается и производится на ряде отечественных и зарубежных предприятий. Ведутся активные работы по созданию микроэлектромеханических ВТГ. Чувствительным элементом такого типа гироскопов является резонатор, выполненный в виде тонкой оболочки вращения. В настоящее время двумя основными формами резонаторов являются полусфера и цилиндр, однако постоянно ведутся работы по усовершенствованию текущей и поиску новой геометрии меридионального сечения резонаторов, улучшающей динамические характеристики прибора, а также являющейся более технологичной. Погрешности изготовления резонатора, нарушающие его осевую симметрию, существенным образом влияют на его динамические характеристики, (например, в работах Журавлёва В.Ф., Матвеева В.А., Жбанова Ю.К., Меркурьева И.В., Козубняк С.А. и др. показано, что для формы колебаний с окружным волновым числом $n=2$ расщепление частот определяется гармоникой дефектов с номером $k=4$) и, как следствие, на точность прибора, поэтому задача оптимального проектирования формы резонатора с точки зрения минимальной чувствительности к влиянию погрешностей является актуальной. К точности изготовления чувствительных элементов ВТГ предъявляются высокие требования, что естественным образом обуславливает особые требования к точности численных моделей, используемых для вычисления динамических характеристик резонаторов. В настоящее время надёжно зарекомендовавший себя метод конечных элементов (МКЭ) не даёт достаточной точности при вычислении, например, одной из наиболее важных характеристик резонатора, такой как расщепление его собственных частот, соответствующих рабочей форме изгибных колебаний. Таким образом, ещё одной актуальной задачей для оптимального проектирования по критериям динамических характеристик чувствительного элемента является создание надёжного и универсального инструмента, позволяющего вычислять эти динамические характеристики. Таким инструментом может являться как авторская программа, так и методика построения численных моделей, обеспечивающих требуемую точность вычислений в существующем на данный момент программном обеспечении.

Цель диссертационной работы заключается в разработке метода построения конечно-элементных моделей, соединённых с аналитическими процедурами метода возмущений, для вычисления расщепления частот при оптимальном проектировании резонаторов ВТГ и применения разработанного метода к оптимизации формы резонатора по критерию минимальной чувствительности расщепления частот к фиксированным технологическим погрешностям геометрии и свойств материала.

Для достижения указанной цели требуется **решить следующие задачи:**

1. Разработать подход к вычислению расщепления собственных частот резонаторов с дефектами на основе совместного использования метода конечных элементов и методов теории возмущений.

2. Разработать конечный элемент на основе осесимметричной порождающей задачи, позволяющий вычислять возмущения матрицы масс и матрицы жёсткости вплоть до требуемого порядка n .

3. Разработать методику оптимизации формы меридиана и функции меридионального изменения толщины по критерию минимума расщепления собственных частот, вызванного дефектами произвольной природы, имеющими заданное меридиональное распределение.

Объект исследования: оболочка резонатора волнового твердотельного гироскопа с технологическими погрешностями геометрии и свойств материала.

Методы исследования. Для решения поставленных задач применялись: метод конечных элементов; методы теории возмущений линейных операторов в задаче на собственные значения; высокоуровневая среда разработки алгоритмов, численных расчетов и анализа данных MATLAB; программное обеспечение, реализующее метод конечных элементов ANSYS.

Достоверность полученных результатов обеспечена строгостью использованных математических методов, проверкой разработанных алгоритмов и программ на модельных и тестовых задачах, сопоставлением полученных автором результатов с известными результатами аналитических, численных и экспериментальных исследований.

Положения, выносимые на защиту:

1. Методика оптимизации формы резонатора по критерию минимума расщепления частот при фиксированном меридиональном изменении четвертой гармоники дефектов;

2. Совместное применение метода возмущений и метода конечных элементов при вычислении приближения порядка n к расщеплению частот резонаторов ВТГ с погрешностями изготовления;

3. Алгоритм численной реализации метода возмущений при формировании матриц конечного элемента с применением трёхмерных массивов для хранения возмущённых величин и переопределением математических операций, позволяющий не выводить формулы для возмущённых величин;

4. Конечный элемент, построенный на основе предлагаемой численной реализации метода возмущений, позволяющий рассматривать резонаторы произвольной формы с дефектами геометрии и свойств материала.

Научная новизна:

1. Разработана методика построения конечно-элементных моделей высокой точности и вычисления расщепления частот оболочки, близкой к оболочке вращения с произвольной формой меридиана, произвольным изменением толщины в меридиональном направлении и произвольным распределением дефектов геометрии (отсчётной поверхности и толщины) и свойств материала (плотности, модуля упругости, коэффициента Пуассона и др.) как в меридиональном, так и в окружном направлениях;

2. Впервые показано, что при одновременном наличии двух гармоник одного дефекта (например, две гармоники дефекта толщины) или по одной гармонике двух разных дефектов (например, одна гармоника дефекта толщины и одна гармоника дефекта плотности) с соотношением номеров $|k \pm m| = 2n$ значение расщепления частот существенно возрастает. При этом величина расщепления является билинейной функцией амплитуд дефектов с коэффициентом пропорциональности, зависящим от меридионального изменения каждой гармоники;

3. Предложена и реализована методика упрощенного вычисления линейной части расщепления частот, вызванного четвертой гармоникой дефекта, произвольно распределенной вдоль меридиана;

4. Предложен метод вычисления максимально возможной линейной части расщепления частот и соответствующей ей функции изменения четвертой гармоники дефекта вдоль меридиана. Указанный метод позволяет также вычислить предельно допустимые значения амплитуд четвертой гармоники дефектов при заданной величине расщепления.

Практическая значимость работы заключается в следующем:

1. Разработанный метод построения конечно-элементных моделей резонаторов волновых твердотельных гироскопов обеспечивает конструктору возможность оптимального проектирования геометрии резонаторов с точки зрения максимально возможного расщепления частот при заданном уровне погрешностей изготовления.

2. Предложенный способ вычисления максимально возможной линейной части расщепления частот для выбранной формы резонатора и амплитуды дефекта позволяет: установить поля допусков на изготовление резонаторов; обосновать требование к однородности материала; выявить наиболее чувствительные к погрешностям области резонаторов.

3. Разработанная методика построения конечно-элементных моделей с использованием метода возмущений позволяет оценить пределы применимости коммерческого программного обеспечения, реализующего метод конечных элементов, применительно к задачам моделирования динамики резонаторов волновых твердотельных гироскопов. Эта методика также может использоваться для моделирования других структур, для которых порождающей задачей при использовании метода возмущений является осесимметричная, например, исследование напряженно-деформированного состояния различных роторных машин, в частности, газотурбинных двигателей.

Внедрение. Разработанная методика построения конечно-элементных моделей повышенной точности применяется для построения конечно-элементной модели полусферического резонатора ВТГ в АО «Инерициальные Технологии Технокомплекса» и цилиндрического резонатора ВТГ в АО «НПК «КБМ», что подтверждено соответствующими актами.

Апробация. Результаты работы докладывались и обсуждались на международных научно-технических конференциях: «МИКМУС – 2016» (Москва, 2016); II Всероссийская научно-техническая конференция, посвященная юбилеям основателей кафедры «Прикладная механика» МГТУ

им. Н.Э. Баумана профессоров С.Д. Пономарева, В.Л. Бидермана, К.К. Лихарева, Н.Н. Малинина, В.А. Светлицкого (Москва, 2017); «Навигация и управление движением» (Санкт-Петербург, 2018); «Научное приборостроение» (Казань, 2018); «XIX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону 2018).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 научных работ, включая 4 статьи в журналах из перечня ВАК РФ, 1 статью в сборнике трудов конференции и 4 тезиса докладов. Общий объем публикаций составляет 3,25 п. л.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав, общих выводов и заключения, приложения. Изложена на 195 страницах машинописного текста, включая 53 иллюстрации, 70 таблиц и библиографический список, содержащий 98 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель исследования, приведено краткое содержание работы.

В Главе 1 выполнен обзор работ, посвященных изучению резонаторов волновых твердотельных гироскопов, приведены основные причины погрешностей показаний ВТГ, рассмотрены модели, используемые в настоящее время для исследования динамики резонаторов ВТГ. Наиболее общей и в то же время достаточно простой для построения моделью является конечно-элементная (КЭ) модель резонатора, однако высокая точность самого прибора и особенность конструкции его резонатора предъявляют жесткие требования к качеству конечно-элементных моделей, используемых при исследовании динамики. Указанной особенностью конструкции является нарушение осевой симметрии в виде небольших отклонений геометрий реальных резонаторов ВТГ или свойств их материала. Математические модели (а в частности, и КЭ модель), используемые для исследования динамики резонатора, должны обеспечивать возможность внесения указанных выше отклонений, и в качестве следствия обнаруживать появление расщепления собственных частот. При исследовании идеальных резонаторов без нарушения осевой симметрии «паразитное» расщепление частот, возникающее за счёт численных погрешностей, должно быть минимальным. Указанное выше «паразитное» расщепление может выступать одним из критериев качества КЭ модели резонатора без нарушения осевой симметрии. Очевидно, что чем выше значение этого «паразитного» расщепления, тем больше будут погрешности при моделировании стационарных и переходных процессов в резонаторах ВТГ. При внесении в КЭ модель погрешностей геометрии и свойств материала (нарушающих осевую симметрию) проблема возникновения «паразитного» расщепления остаётся. Более того, в этом случае отделить уход гироскопа, вызванный моделируемым расщеплением, от ухода, вызванного «паразитным» расщеплением, практически невозможно. Таким образом, построение КЭ модели с возможностью внесения необходимых несовершенств и минимальным

«паразитным» расщеплением частот является важной задачей для точного моделирования динамики резонаторов ВТГ.

Стоит отметить, что работы, посвященные оценке качества КЭ моделей с точки зрения точности вычисления получаемых с их помощью динамических характеристик (таких как, например, расщепление частот), практически отсутствуют.

Рассмотренный ниже пример построения конечно-элементной модели полусферического резонатора без дефектов (Рис. 1) показывает наличие «артефактного» расщепления при вычислении частот. Как видно из Таблицы 1, указанное расщепление оказывается не ниже ограничения, накладываемого на значение остаточного расщепления после балансировки (0,001 Гц), независимо от типа используемых конечных элементов и числа конечных элементов в окружном направлении.

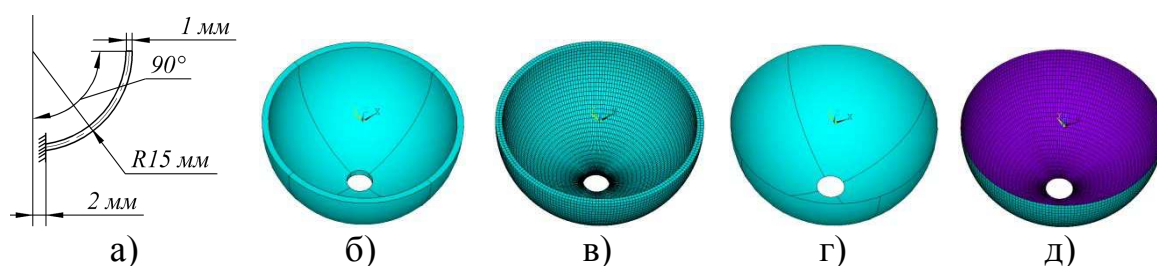


Рис. 1. Пример построения конечно-элементной модели резонатора без дефектов: а - эскиз меридиана; б, г - твердотельная и поверхностная модели резонатора; в, д – оболочечная и твердотельная конечно-элементные модели

Таблица 1.

Частоты и расщепления

Число КЭ в окружном направлении	Восьмиузловые КЭ solid185			Двадцатиузловые КЭ solid186		
	$f_{2(1)}$, Гц	$f_{2(2)}$, Гц	Δf_2 , Гц	$f_{2(1)}$, Гц	$f_{2(2)}$, Гц	Δf_2 , Гц
120	5115,286	5115,405	0,119	4867,949	4867,951	0,002
124	5102,981	5103,092	0,111	4867,947	4867,948	0,001
128	5091,796	5091,891	0,095	4867,945	4867,946	0,001
200	4990,091	4990,118	0,026	4867,934	4867,937	0,003
204	4987,327	4987,349	0,022	4867,933	4867,937	0,003
208	4984,718	4984,738	0,020	4867,933	4867,936	0,003
	Четырехузловые КЭ shell181			Восьмиузловые КЭ shell281		
120	4876,839	4877,241	0,401	4866,890	4866,904	0,015
124	4876,660	4877,073	0,413	4866,887	4866,902	0,015
128	4876,498	4876,922	0,424	4866,885	4866,900	0,015
200	4875,080	4875,602	0,521	4866,863	4866,880	0,017
204	4875,044	4875,568	0,524	4866,862	4866,879	0,017
208	4875,010	4875,536	0,527	4866,862	4866,879	0,017

Таким образом, представленный пример демонстрирует необходимость разработки надёжного способа построения КЭ моделей повышенной точности (как минимум с точки зрения величины расщепления частот) для резонаторов при использовании коммерческого программного обеспечения (ПО). Ещё более важной задачей является разработка метода построения КЭ моделей резонаторов, позволяющего оценить точность вычисления расщепления частот, моделирования стационарных и переходных процессов методом конечных элементов при использовании коммерческого ПО. Одним из способов, позволяющих получить расщепление не через разность самих частот, а независимо от них, является построение конечных элементов с применением метода возмущений.

В Главе 2 описан подход к совместному использованию метода конечных элементов и метода возмущений применительно к задаче вычисления расщепления собственных частот оболочки, близкой к оболочке вращения, но имеющей произвольное распределение дефектов (под дефектами понимается малое отклонение от осесимметричной структуры). Описано построение авторского конечного элемента, позволяющего вычислить приближение расщепления частот вплоть до требуемого порядка n . Перемещения в пределах элемента раскладываются в ряд по малому параметру согласно методу возмущений.

Задача на собственные значения после дискретизации методом конечных элементов для оболочки резонатора ВТГ при свободных колебаниях имеет вид

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_n - \lambda_n \mathbf{M}\mathbf{q}_n = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где $\mathbf{K}, \mathbf{M}$ – матрицы жесткости и масс КЭ модели оболочки соответственно; $\mathbf{q}_n$ – собственный вектор узловых перемещений; λ_n – собственное значение; n - окружное волновое число.

Учитывая, что отклонения от осевой симметрии малы, матрицы жесткости и масс конечно-элементной модели могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}^{(0)} + \Delta\mathbf{K}(\varepsilon), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}^{(0)} + \Delta\mathbf{M}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)}$ – матрицы жесткости и масс идеальной осесимметричной КЭ модели оболочки соответственно; $\Delta\mathbf{K}, \Delta\mathbf{M}$ – возмущения матриц жесткости и масс соответственно, характеризующие отличие исходной задачи от порождающей осесимметричной задачи; λ_n – собственное значение; n - окружное волновое число; ε – малый параметр.

Возмущения матриц жёсткости и масс определяются следующими дефектами, рассмотренными в работе

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{K} &= \Delta \mathbf{K}(\Delta \vec{\mathbf{r}}, \Delta h, \Delta E, \Delta \rho, \Delta \mu), \\ \Delta \mathbf{M} &= \Delta \mathbf{M}(\Delta \vec{\mathbf{r}}, \Delta h, \Delta E, \Delta \rho, \Delta \mu),\end{aligned}\quad (3)$$

где $\Delta \vec{\mathbf{r}}$ – дефект геометрии отсчётной поверхности оболочки резонатора; Δh – дефект толщины оболочки резонатора; $\Delta E, \Delta \rho, \Delta \mu$ – дефекты модуля упругости, плотности и коэффициента Пуассона соответственно.

В соответствии с методом возмущений матрицы жёсткости, масс, вектор узловых перемещений и собственное значение раскладываются в ряд по малому параметру

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{K}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{K}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{K}^{(2)} + \dots, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{M}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{M}^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{q}_n &= \mathbf{q}_n^{(0)} + \varepsilon \mathbf{q}_n^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{q}_n^{(2)} + \dots, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \varepsilon \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} + \dots,\end{aligned}\quad (4)$$

где $\mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)}, \mathbf{q}_n^{(0)}, \lambda_n^{(0)}$ – невозмущённые величины, соответствующие осесимметричной задаче; $\mathbf{K}^{(p)}, \mathbf{M}^{(p)}, \mathbf{q}_n^{(p)}, \lambda_n^{(p)}$ – возмущения порядка $p (p > 0)$ соответствующих величин.

Первое приближение возмущения собственного значения вычисляется по формуле

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\mathbf{q}_n^{(0)T} (\mathbf{K}^{(1)} - \lambda_n^{(0)} \mathbf{M}^{(0)}) \mathbf{q}_n^{(0)}}{\mathbf{q}_n^{(0)T} \mathbf{M}^{(0)} \mathbf{q}_n^{(0)}}. \quad (5)$$

Первое приближение возмущения собственных векторов вычисляется из решения следующей системы уравнений

$$(\mathbf{K}^{(0)} - \lambda_n^{(0)} \mathbf{M}^{(0)}) \mathbf{q}_n^{(1)} = (\lambda_n^{(1)} \mathbf{M}^{(0)} + \lambda_n^{(0)} \mathbf{M}^{(1)} - \mathbf{K}^{(1)}) \mathbf{q}_n^{(0)}. \quad (6)$$

Поскольку оболочка резонатора замкнута в окружном направлении, дефекты $\Delta \vec{\mathbf{r}}, \Delta h, \Delta E, \Delta \rho, \Delta \mu$ могут быть разложены в гармонический ряд Фурье по окружному углу

$$\begin{aligned}\Delta p &= \Delta p_0(\xi) + \sum_k \Delta p_{Ck}(\xi) \cos(k\varphi) + \Delta p_{Sk}(\xi) \sin(k\varphi), \\ (p &= \vec{\mathbf{r}}, h, E, \rho, \mu),\end{aligned}\quad (7)$$

где ξ, φ – меридиональная и окружная гауссовы координаты отсчётной поверхности оболочки резонатора.

Наличие в дефектах постоянной части $p_0(\xi)$ приводит к сдвигу собственных частот, гармонические составляющие Δp_{Ck} и Δp_{Sk} вызывают расщепление собственных частот. При малых величинах дефектов линейная часть разложения расщепления частот (5), дающая самый существенных вклад

в расщепление, для окружного волнового числа $n = 2$ определяется гармоникой дефекта $k = 4$.

При использовании метода возмущений, как правило, получаются довольно громоздкие формулы. Запись аналитических выражений для матрицы масс и матрицы жесткости конечного элемента, с учетом возмущений геометрии и перемещений, автору вообще представляется вряд ли возможной. Поэтому в диссертационной работе при численной реализации метода возмущений для хранения возмущённых величин используются трёхмерные массивы. Это позволяет не строить громоздкие аналитические зависимости для каждого приближения, а использовать формулы для вычисляемых возмущённых величин, как если бы метод возмущений не использовался. При этом возмущения соответствующих порядков автоматически записываются по третьему индексу переменных. Используются именно трёхмерные массивы, потому как возмущенными могут быть скаляры, векторы и матрицы. Для осуществления такого подхода необходимо переопределить математические операции, используемые при формировании матриц конечного элемента. Переопределение математических операций производится разложением результата их действия в ряд Тейлора по малому параметру ε . Результат произведения двух возмущённых величин $b = b^{(0)} + \varepsilon b^{(1)} + \varepsilon^2 b^{(2)}$ и $c = c^{(0)} + \varepsilon c^{(1)} + \varepsilon^2 c^{(2)}$ при предлагаемой компьютерной реализации метода возмущений записывается в трёхмерный массив следующим образом

$$\begin{aligned} d(i, j, 1) &= b(i, j, 1)c(i, j, 1), \\ d(i, j, 2) &= b(i, j, 2)c(i, j, 1) + b(i, j, 1)c(i, j, 2), \\ d(i, j, 3) &= b(i, j, 3)c(i, j, 1) + b(i, j, 2)c(i, j, 2) + b(i, j, 1)c(i, j, 3). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, используя трехмерные массивы для хранения возмущенных величин и переопределение необходимых математических операций, формулы для вычисления матриц жесткости и масс авторского конечного элемента имеют такой же вид, как если бы метод возмущений не использовался. А возмущения этих матриц вычисляются автоматически и записываются по третьему измерению используемых массивов. Отметим, что предложенный подход к численной реализации метода возмущений является общим и может быть использован в других задачах.

Разработанный в диссертации конечный элемент имеет два узла и представляет собой тонкий кольцевой элемент оболочки (Рис. 2). Аппроксимация геометрии конечного элемента не проводится, все необходимые геометрические величины (такие, например, как координаты и определитель первого метрического тензора поверхности, координаты касательных векторов и вектора нормали, символы Кристоффеля – Шварца) вычисляются на основе функций, задающих форму меридиана оболочки и функций изменения гармоник дефектов вдоль него. Перемещения в пределах представляются разложением в ряд по малому параметру ε

$$\vec{u}(\xi, \varphi) = \vec{u}^{(0)}(\xi, \varphi) + \varepsilon \vec{u}^{(1)}(\xi, \varphi) + \varepsilon^2 \vec{u}^{(2)}(\xi, \varphi) + \dots \quad (9)$$

Каждый член разложения (9) представляется в виде ряда по окружному углу

$$\vec{u}^{(n)}(\xi, \varphi) = \vec{u}_A^{(n)}(\xi) + \sum_{h=1}^{N_H} \vec{u}_{C_h}^{(n)}(\xi) \cos(h\varphi) + \vec{u}_{S_h}^{(n)}(\xi) \sin(h\varphi), \quad (10)$$

где N_H – число гармоник разложения перемещений по окружному углу, удерживаемых при построении конечного элемента.

В авторской программе число удерживаемых в разложении (10) гармоник N_H является настраиваемым параметром, выбираемым оператором.

Амплитудные функции из разложения (10) представляются проекциями на оси цилиндрической системы координат

$$\vec{u}_{I_h}^{(n)} = u_{I_h1}^{(n)} \vec{e}_1 + u_{I_h2}^{(n)} \vec{e}_2 + u_{I_h3}^{(n)} \vec{e}_3, \quad (I = A, C, S). \quad (11)$$

Аппроксимация проекций перемещений из (11) проводится с помощью кубических полиномов

$$\begin{aligned} u_{I_hJ}^{(n)} = & \left(u_{I_hJ}^{(n)} \right)_1 N_1(\xi) + \left(\frac{\partial u_{I_hJ}^{(n)}}{\partial \xi} \right)_1 \frac{N_2(\xi)}{(\xi_{sh(2)} - \xi_{sh(1)})} + \\ & + \left(u_{I_hJ}^{(n)} \right)_2 N_3(\xi) + \left(\frac{\partial u_{I_hJ}^{(n)}}{\partial \xi} \right)_2 \frac{N_3(\xi)}{(\xi_{sh(2)} - \xi_{sh(1)})}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$(I = A, C, S; J = 1, 2, 3),$$

где N_1, N_2, N_3, N_4 – функции формы. Узловыми перемещениями элемента являются значения проекций $\left(u_{I_hJ}^{(n)} \right)_1, \left(u_{I_hJ}^{(n)} \right)_2$ из (11) и их производных $\left(\partial u_{I_hJ}^{(n)} / \partial \xi \right)_1, \left(\partial u_{I_hJ}^{(n)} / \partial \xi \right)_2$ в узлах.

При вычислении матриц жесткости и масс конечного элемента для интегрирования применяется метод Гаусса-Лежандра. Число точек интегрирования в авторской программе является настраиваемым параметром (в меридиональном направлении может быть установлено от 3 до 6 точек интегрирования, в окружном направлении может быть установлено произвольное число точек, определяемое производительностью компьютера).

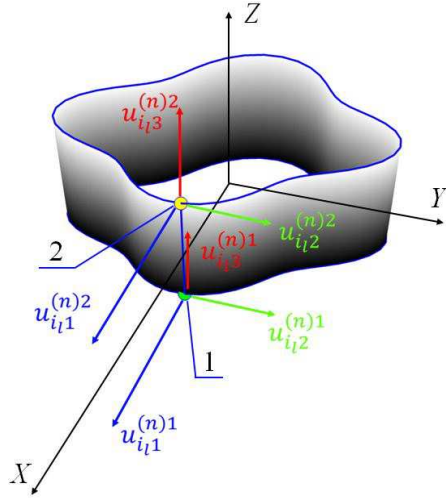


Рис. 2. Геометрия авторского конечного элемента

В Главе 3 рассматривается случай произвольного изменения четвёртой гармоники дефекта в меридиональном направлении. В этом случае величина расщепления частот зависит от функции меридионального изменения дефекта. При вычислении методом конечных элементов каждая конкретная функция $g_{(p)}(\xi)$ (Рис. 3) потребует перестроения КЭ модели. В данной главе приводится методика упрощённого вычисления величины расщепления частот, не требующая построения КЭ модели для каждой конкретной функции меридионального

изменения дефекта при заданной конфигурации резонатора. В основе построения данной методики лежит линейность зависимости величины расщепления частот от амплитуды четвёртой гармоники при малых значениях дефектов. Данная методика может быть применена только при выбранной конфигурации резонатора, то есть когда заданы форма меридиана и функция изменения толщины вдоль него. Результатом её применения является вектор-столбец интерполяционных коэффициентов $\zeta_{(p)\text{int}}$.

Для вычисления этих коэффициентов необходимо разбить меридиан на участки (Рис. 3) и провести серию расчётов величины расщепления частот с наложением на каждом участке с номером i двух типовых линейных функции меридионального изменения дефекта $N_i^{(1)}$ и $N_i^{(2)}$ (Рис. 3). Далее, при произвольной функции меридионального изменения дефекта вычисление величины расщепления частот сводится к простому скалярному умножению полученного вектора-столбца $\zeta_{(p)\text{int}}$ на вектор-столбец ординат функции меридионального изменения дефекта и амплитуду четвёртой гармоники дефекта

$$\Delta f_{2(p)}^{\text{int}} = \Delta p_4 \zeta_{(p)\text{int}}^T \cdot \mathbf{g}_{(p)\text{int}}, \quad (13)$$

где p – обозначение типа дефекта; $\zeta_{(p)\text{int}}$ – вектор-столбец интерполяционных коэффициентов; $\mathbf{g}_{(p)\text{int}}$ – вектор-столбец значений функции меридионального изменения дефекта (Рис. 3).

Для заданного значения расщепления частот приведён способ вычисления максимально допустимой амплитуды дефекта. При заданной амплитуде дефекта приведён способ вычисления функции его меридионального изменения, дающей максимальное значение расщепления частот.

Для полусферической и цилиндрической оболочек численно показано, что при наличии двух гармоник дефекта с соотношением номеров $|k \pm m| = 2n$,

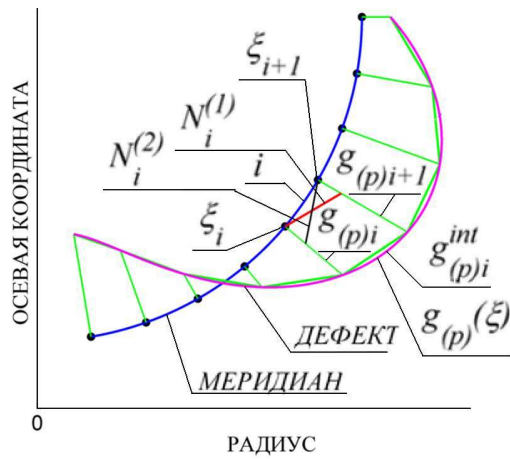


Рис. 3. Меридиан с дефектом, разбитый на участки

В Таблице 2 приведены сравнительные результаты частот, абсолютных и относительных величин расщеплений для разных форм резонаторов. Как видно, величина расщепления зависит от формы резонатора, что подтверждает возможность оптимизации по критерию минимума расщепления собственных частот.

Таблица 2.

Наибольшие расщепления рабочих частот (дефекты распределены в окружном направлении по гармонике $k = 2n = 4$)

Форма резонатора														
Невозмущенная собственная частота f_2 , Гц														
1825	3553	2480	2357	3057	3720	2596	1488	3187	3902	1990	2788	2642	1828	2871
Наибольшее абсолютное расщепление частоты $\Delta f_{\Sigma}^{\max}$, Гц														
14,8	29,2	23,2	22,6	31,0	38,4	28,2	19,4	47,3	58,8	30,4	48,8	49,4	45,6	77,0
Наибольшее относительное расщепление частоты $\frac{\Delta f_{\Sigma}^{\max}}{f_2} \cdot 10^4$														
81,2	82,2	93,7	95,9	101,4	103,2	108,8	130,5	148,3	150,6	152,9	175,0	187,0	249,2	268,1

В Главе 5 описана методика оптимизации формы меридиана резонатора ВТГ по критерию минимума расщепления собственных частот. Рассмотрены примеры оптимизации резонаторов с разным количеством точек аппроксимации геометрии меридиана и разными начальными приближениями.

Оптимизационная задача ставится следующим образом

$$\begin{cases} F_{\min} = \min(F(X)), \\ X_{\min} < X < X_{\max}, \\ \text{constraints}(X), \end{cases} \quad (14)$$

где $F(X)$ – целевая функция; $F_{\min}$ – минимальное значение целевой функции; X – вектор параметров оптимизации; $X_{\min}, X_{\max}$ – нижняя и верхняя границы вектора X ; $\text{constrains}(X)$ – дополнительные ограничения, накладываемые, например, на рабочую частоту.

В качестве целевой функции используется суммарное расщепление частоты, вызванное различными дефектами. В главе 4 было показано, что при одновременном наличии двух дефектов различной природы, одинаково распределенных в окружном направлении по четвёртой гармонике с одинаковыми окружными фазами, расщепление частот, вызванное первым, может как увеличиваться, так и уменьшаться за счет второго дефекта. Это зависит от формы меридиана и функции меридионального изменения толщины. В процессе оптимизации форма меридиана и толщина оболочки резонатора меняются на каждой итерации. Тогда вычисление расщепления частот с одновременным наложением всех дефектов не даст максимально возможного значения искомого расщепления для данной формы меридиана. Поскольку оптимизация проводится только для дефектов, распределенных в окружном направлении по удвоенной гармонике рабочей формы $2n$, то в наихудшем случае суммарное расщепление, вызванное всеми дефектами, будет определяться как простая сумма расщеплений, вызванных каждым дефектом в отдельности

$$\Delta f_{\Sigma} = \Delta f_{(r)} + \Delta f_{(z)} + \Delta f_{(h)} + \Delta f_{(\rho)} + \Delta f_{(E)} + \Delta f_{(\mu)}, \quad (15)$$

где $\Delta f_{(r)}, \Delta f_{(z)}, \Delta f_{(h)}, \Delta f_{(\rho)}, \Delta f_{(E)}, \Delta f_{(\mu)}$ – расщепления частоты, вызванные наличием дефектов радиуса, осевой координаты, толщины, плотности, модуля упругости и коэффициента Пуассона соответственно.

Таким образом, целевая функция имеет вид

$$F_1 = \gamma_r \Delta f_{(r)} + \gamma_z \Delta f_{(z)} + \gamma_h \Delta f_{(h)} + \gamma_{\rho} \Delta f_{(\rho)} + \gamma_E \Delta f_{(E)} + \gamma_{\mu} \Delta f_{(\mu)}, \quad (16)$$

где $\gamma_r, \gamma_z, \gamma_h, \gamma_{\rho}, \gamma_E, \gamma_{\mu}$ – весовые коэффициенты, отвечающие расщеплениям, вызванным соответствующими типами дефектов (задаются конструктором).

Меридиональное распределение дефектов принимается заданным и не меняется в процессе оптимизации.

При решении оптимизационной задачи меридиан оболочки может быть параметризован набором функций (например, полиномами) или дискретным набором точек, лежащих на нём, через их координаты. Распределение толщины в меридиональном направлении также может быть параметризовано одним из двух указанных выше способов. В данной работе меридиан и распределение толщины задаётся по точкам. Это позволяет более гибко задавать форму меридиана и толщину оболочки резонатора, а также накладывать ограничения на изменение координат каждой точки в отдельности. Кроме того, при попытке

использовать полиномы высокой степени для описания оболочки сложной формы, на меридиане появляются «мелкие волны», которые сильно влияют на результат, так как при формировании матриц жесткости конечного элемента используются вторые производные радиус-вектора оболочки по меридиональной координате. Количество точек может задаваться исследователем. Для вычисления координат узлов и значений толщин в них между точками параметризации меридиана при построении конечно-элементной модели используется встроенный в Matlab метод интерполяции кубическими эрмитовыми сплайнами. На Рис. 4 показан меридиан, построенный по точкам интерполяции, и функция меридионального изменения толщины, а также границы, в пределах которых могут изменяться положения точек параметризации меридиана.

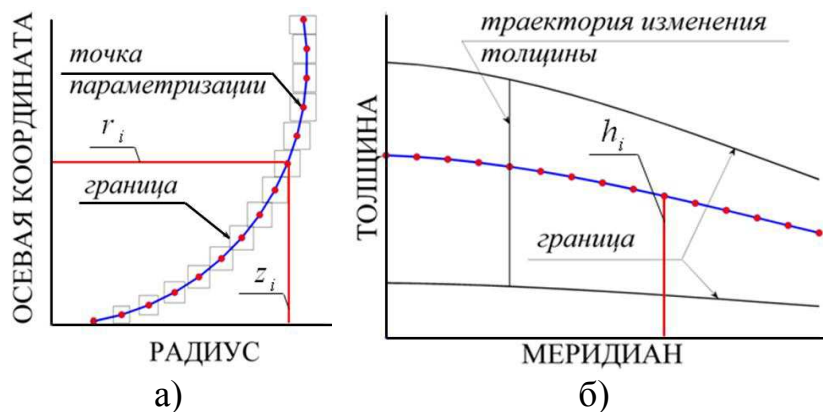


Рис. 4. Параметризация геометрии меридиана и толщины по точкам при оптимизации: а – меридиан; б – функция толщины

$F_{end} = 0,48$ Гц (частота оболочки резонатора для начального приближения равна $(f_2)_{start} = 3228,2$ Гц, (для конечного – $(f_2)_{start} = 2360,8$ Гц).

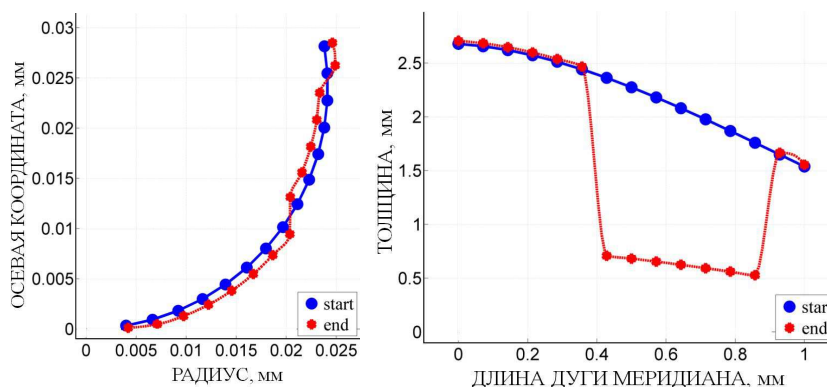


Рис. 5. Начальное и конечное приближения при многоточечной оптимизации (синий – начальное приближение, красный – конечное приближение)

На Рис. 5 показаны начальное и конечное приближения формы меридиана и функции изменения толщины при оптимизации по 15 точкам. Начальное значение целевой функции равно $F_{start} = 11,36$ Гц, конечное значение целевой функции равно

В Главе 6 описана методика измерений геометрии экспериментальной партии металлических резонаторов в виде цилиндров с двумя участками постоянной толщины. Описана методика проведения эксперимента по измерению расщепления частоты указанных

резонаторов. Проводится сравнение расчетных и экспериментальных значений расщепления частоты. Для экспериментальной проверки вычисления расщепления частоты были изготовлены 11 цилиндрических резонаторов (Рис. 6). Измерение амплитуд гармоник некруглости резонатора выполнялось с

помощью кругломера Tyler&Hobson при содействии российского представительства фирмы Tyler&Hobson. Измерение проводится контактным методом. Резонаторы устанавливались в тяжелое основание (Рис. 6) во избежание возможных смещений, вызванных контактом со щупом.

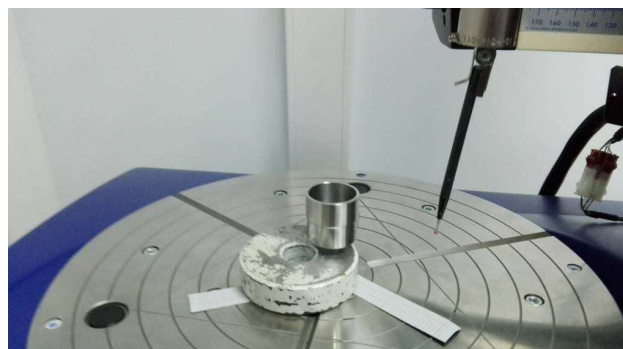
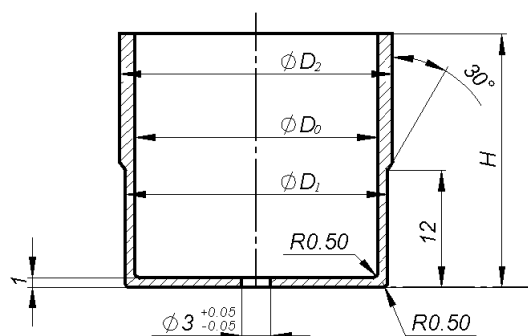


Рис. 6. Эскиз образца резонатора и его установка в кругломер

Результаты расчёта и измерения расщеплений частот экспериментальных образцов приведены в Таблице 3.

Таблица 3.

Расчётные и экспериментальные значения расщеплений частот

Номер резонатора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Расчётное расщепление, Гц	3,7	1,0	1,4	0,9	1,6	2,1	2,2	1,2	0,3	1,4	0,5
Измеренное значение расщепления, Гц	1,4	2,8	3,1	4,4	2,5	5,7	0,5	1,3	3,0	2,6	5,7

Средние значения экспериментальных (3,0 Гц) и расчетных (1,5 Гц) величин расщеплений по всем резонаторам отличаются в два раза. Расчетные и экспериментальные значения расщеплений по каждому из резонаторов в отдельности плохо коррелируют между собой. Автор связывает это с тем, что при расчете расщеплений частот экспериментальных резонаторов не были заданы окружные дефекты распределения физических свойств материала за неимением таковых.

В общих выводах и заключениях подведены итоги работы и отмечены возможные направления дальнейшего развития предложенных подходов.

В приложении приведены: результаты измерений амплитуд и фаз гармоник некруглости для экспериментальных образцов, полученные с помощью кругломера; сравнение результатов расчёта частот и их расщеплений, полученных с помощью авторского конечного элемента, с известными результатами; приведены результаты исследования сходимости рассчитываемых с помощью авторской программы собственных частот и их расщеплений в зависимости от количества конечных элементов, числа точек интегрирования в пределах элемента, количества удерживаемых в решении гармоник разложения перемещений; исследование сходимости результатов при

вычислении собственных частот и их расщеплений при использовании коммерческого программного обеспечения ANSYS; листинг функций переопределения математических операций и вычисления геометрических параметров оболочки.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработана универсальная методика, позволяющая исследовать резонаторы ВТГ с произвольной формой меридиана, произвольной функцией меридионального изменения толщины и типами дефектов, произвольным образом распределенными в меридиональном и окружном направлениях: толщины, срединной поверхности, плотности, модуля упругости, коэффициента Пуассона. Проведен анализ влияния указанных выше дефектов на величину расщепления частот резонаторов ВТГ со следующей типовой формой меридиана: цилиндрической, полусферической, конической, тороидальной, «китайский колокол».

2. Разработан метод вычисления расщепления собственных частот резонаторов с дефектами на основе совместного использования метода конечных элементов и методов теории возмущений. Данный подход позволяет подтвердить достоверность результатов вычисления расщепления частот с помощью коммерческого программного обеспечения, а также оценить пределы применимости использования коммерческих КЭ комплексов к данной задаче.

3. Разработана методика упрощённого вычисления линейной части расщепления частот при произвольном законе изменения дефекта вдоль меридиана. Преимуществом данной методики является отсутствие необходимости построения конечно-элементной модели с заданным дефектом. Фактически вычисление расщепления сводится к скалярному произведению двух векторов.

4. Разработана методика вычисления максимальных предельных отклонений геометрии и свойств материала при заданной величине расщепления собственных частот резонаторов ВТГ.

5. Разработана методика оптимизации формы меридиана и функции меридионального изменения толщины по критерию минимума расщепления частот, вызванного дефектами геометрии и свойств материала, имеющими заданное меридиональное распределение.

6. Показано, что при одновременном наложении двух гармоник, номера которых подчиняются равенству $|k \pm m| = 2n$, расщепление частот существенно возрастает (где k, m – номера гармоник дефектов, n – окружное волновое число). Например, для цилиндрического резонатора расщепление частот, вызванное 1 или 3 гармониками дефекта толщины, с амплитудами 10^{-5} м практически равно нулю. При этом, если обе гармоники присутствуют одновременно, расщепление равно 0,0219 Гц, что превышает ограничение, установленное на величину расщепления после балансировки.

Основные публикации по теме диссертации:

1. Использование метода конечных элементов совместно с методом возмущений в задаче вычисления расщепления частоты оболочки с дефектом формы срединной поверхности /Д.С. Вахлярский [и др.] //Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. Эл. № ФС77-48211. 2016. № 5. С. 152-174. (1,44 п. л. / 1,2 п. л.). DOI: 10.7463/0516.0839190.
2. Численное исследование резонаторов ВТГ различной формы при наличии дефектов различного типа /Д.С. Вахлярский [и др.] // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. Эл. № ФС77-48211. 2016. № 10. С. 1-22. (1,38 п. л. / 1,15 п. л.). DOI: 10.7463/1016.0848188.
3. Численное моделирование прецессии упругой волны в цилиндрическом резонаторе волнового твердотельного гироскопа с неоднородным распределением плотности /Д.С. Вахлярский [и др.] // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 5. С. 41-51. (0,7 п. л. / 0,2 п. л.). DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51.
4. Расчёт расщепления собственной частоты цилиндрического резонатора твердотельного волнового гироскопа на основе численного интегрирования высокой точности /Д.С. Вахлярский [и др.] // Инженерный журнал: наука и инновации. Эл. № ФС77-53688. 2019. № 5. С. 1-15. (1,0 п. л. / 0,3 п. л.). DOI: 10.18698/2308-6033-2019-5-1876.
5. Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Сорокин Ф.Д. Оптимизация толщины оболочки цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с целью уменьшения расщепления частоты: научная статья // Сб. трудов XXVIII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых учёных и студентов «МИКМУС – 2016». Москва, ИМАШ РАН, 2017. С. 140 – 143. (0,25 п. л. / 0,2 п. л.).
6. Моделирование балансировки резонатора волнового твердотельного гироскопа по разночастотности методом конечных элементов: тезисы доклада /Д.С. Вахлярский [и др.] // Сб. материалов II Всероссийской научно-практической конференции «Научное приборостроение. Современное состояние и перспективы развития». Казань, КНЦ РАН, 2018. С. 77 – 79. (0,25 п. л. / 0,2 п. л.).