Р2.4054

Мерцалов

Динамика

Механизмов

БИБЛІОТЕКА
Московскаго
Техническаго Училища

Шифръ № 1037.

Динамика механизмовъ.

Введеніе.

Предметомъ нашего курса является изученіе динамическихъ условій работы нашихъ машинъ. Прежде всего мы ставимъ себѣ задачей выясненіе условій, при которыхъ весь комплексъ силъ, проявляющихъ свое дѣйствіе въ данной машинѣ, можетъ работать наиболѣе производительно, наивыгоднѣйшимъ для насъ образомъ. Само собою разумѣется, что сопротивленія, представляемыя при этомъ самой машиной, т.-е. различными деталями ея, должны быть сведены къ минимуму, что, понятно, вызываетъ необходимость въ наиболѣе совершенномъ съ указанной точки зрѣнія конструированіи всѣхъ этихъ частей, а значитъ, и всей машины. Итакъ, первымъ вопросомъ, подлежащимъ нашему разсмотрѣнію, является вопросъ о степени совершенства, съ точки зрѣнія работы, механизмовъ нашихъ машинъ.

Вторымъ вопросомъ, подлежащимъ нашему

2403

1946

разсмотрѣнію, является вопросъ о полученіи наивыгоднѣйшей для насъ работы данной машины въ продолженіе сколь-угодно значительнаго промежутка времени. Обезпеченіе возможности этого сводится, какъ мы увидимъ ниже, къ обезпеченію удерживанія скоростей частей машины или, точнѣе говоря, скорости вращенія главнаго, коренного, вала въ извѣстныхъ узкихъ, заранѣе нами поставленныхъ, предѣлахъ. Это будетъ, такимъ образомъ, вопросъ о регулированіи хода машинъ.

Далѣе, не нужно забывать, что машина во время работы должна быть устойчива какъ въ своихъ двигающихся частяхъ, такъ и въ неподвижныхъ,— фундаментахъ, различныхъ опорахъ и т. д. Скорости нѣкоторыхъ частей машины, измѣняясь за періодъ хода въ своихъ величинахъ и направленіяхъ, могутъ вліять разрушающе какъ на части машины, такъ и на ея фундаментъ и опоры. Такимъ образомъ, третьимъ вопросомъ курса будетъ вопросъ объ устойчивости машины во время ея работы.

Не менѣе важнымъ является вопросъ объ измѣреніи всѣхъ величинъ, подлежащихъ учету при разрѣшеніи упомянутыхъ выше основныхъ вопросовъ. Разсматривать его мы, однако, не будемъ, ибо онъ представляетъ собою часть болѣе общаго вопроса о техническихъ измѣреніяхъ вообще, составляющаго предметъ особаго курса.

Постараемся теперь выяснить болѣе или менѣе подробно тѣ общія основанія, на которыхъ можетъ быть построено рѣшеніе перваго изъ поставленныхъ нами выше вопросовъ, а именно, вопроса о степени совершенства механизмовъ въ нашей машинѣ и о способахъ учета этой величины.

Отвлекаясь отъ деформацій, имѣющихъ мѣсто въ нашихъ машинахъ, предполагая, иными словами, что части ихъ представляютъ собою тѣла совершенно неизмѣняемыя, можемъ опредѣлить каждую нашу машину, съ точки зрѣнія теоретической механики, какъ систему, условія коей отъ времени не зависятъ. Въ виду этого ко всякой машинѣ можно примѣнить теорему живыхъ силъ, согласно которой приращеніе живой силы системы за какой-либо промежутокъ времени t равно совершенной за то же время работѣ всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ. Обозначая массы точекъ системы черезъ m, скорости этихъ точекъ — черезъ v (въ концѣ промежутка времени t) и черезъ v_0 (въ началѣ этого промежутка), а работы силъ — черезъ l, получимъ выраженіе этой теоремы въ алгебраической формѣ:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma l \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Сумма, стоящая въ правой части уравненія (1), есть сумма алгебраическая, составленная слѣдующимъ образомъ:

Во всякой машинѣ всегда имѣется нѣкоторый источникъ работы, — паръ, газъ и т. п., — обусловливающій своимъ присутствіемъ появленіе и наличность «дѣйствующихъ» силъ, питающихъ нашу машину и поддерживающихъ движеніе ея. Работа, доставляемая этимъ источникомъ, и представляетъ собою работу упомянутыхъ «дѣйствующихъ силъ». Разсматривая движеніе машины за какой-либо промежутокъ времени t, предположимъ, что эта работа за взятое время t равна $\mathcal{L}$. Такъ какъ наша машина эту работу получила, то количеству $\mathcal{L}$ будемъ приписывать знакъ плюсъ.

Движенію машины, въ свою очередь, препятствуетъ цѣлый рядъ другихъ силъ, — будемъ называть ихъ «силами сопротивленія», а работу ихъ за то же время t обозначимъ черезъ $\mathcal{L}_1$, причемъ этой величинѣ будемъ приписывать знакъ минусъ, ибо это есть работа, нашей машиной затрачиваемая за счетъ упомянутаго источника работы, расходуемая ею на преодолѣніе работы силъ сопротивленія.

Въ виду этихъ соображеній общее уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_1 \ldots\ldots (2)$$

Итакъ, отъ источника работы машина получаетъ работу $\mathcal{L}$, а затрачиваетъ сама работу $\mathcal{L}_1$. Уравненіе (2) показываетъ, что если $\mathcal{L} > \mathcal{L}_1$, то

всѣ конечныя скорости v большіе начальныхъ v_0, т.-е. машина будетъ ускорять свой ходъ; если же $\mathfrak{L} < \mathfrak{L}_1$, то будетъ имѣть мѣсто замедленіе хода.

Работу $\mathfrak{L}_1$ силъ сопротивленія можно разбить на двѣ части: прежде всего замѣчаемъ, что машина должна преодолѣвать работу нѣкоторыхъ опредѣленныхъ силъ сопротивленія, — она должна или приводить въ движеніе другія машины, или обрабатывать тотъ или иной матеріалъ, и т. д. Сопротивленія, при этомъ нашей машинѣ представляющіяся, будемъ называть полезными, а работу ихъ, — «полезную работу», — за то же время t совершенную, будемъ обозначать черезъ $\mathfrak{L}_n$. «Холостымъ» ходомъ машины мы называемъ тотъ, при которомъ полезная работа $\mathfrak{L}_n$ равна нулю.

Кромѣ этой «полезной» работы $\mathfrak{L}_n$, въ составъ общей работы сопротивленій $\mathfrak{L}_1$ входитъ еще работа $\mathfrak{L}_2$ сопротивленій вредныхъ, намъ ненужныхъ, но всегда имѣющихся налицо, вслѣдствіе извѣстныхъ физическихъ свойствъ матеріаловъ; эти «вредныя» сопротивленія сопутствуютъ работѣ каждой машины совершенно независимо отъ того, производитъ ли машина при своемъ движеніи какую-либо полезную работу или идетъ порожнемъ; на покрытіе этой работы $\mathfrak{L}_2$ будетъ затрачена часть работы дѣйствующихъ силъ, и эта затрата является для насъ чистой потерей, не только ничѣмъ не вознаграждаемой, но, наоборотъ, сопро-

вождаемый постепенным разрушением машины; — каждая машина, таким образом, имеет сама в себе источники своего разрушения.

Итак, общая работа сопротивлений, $\mathfrak{L}_1$, выражается так:

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_f, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

после чего уравнение живых сил (2) может быть переписано так:

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \mathfrak{L} - (\mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_f) \ldots (4)$$

откуда получаем основное уравнение, представляющее собою полный баланс всех трат работы, производимых в машине за счет доставляемой ей упомянутым источником работы $\mathfrak{L}$, — уравнение

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_f + \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} \ldots (5)$$

Это уравнение показывает, что вся работа $\mathfrak{L}$, совершаемая в нашей машине действующими силами, расчленяется так: часть в количестве $\mathfrak{L}_n$ уходит на совершение полезной работы, часть $\mathfrak{L}_f$ — на преодоление работы вредных сопротивлений, все же остальное идет на увеличение живой силы движущихся частей.

Теперь обратимся к вопросу об установлении критерия совершенства нашей машины. Ясно, что машина будет тем совершеннее, чем больше доля полезной работы $\mathfrak{L}_n$, ею выполняе-

мой, по отношенію ко всей работѣ $\mathfrak{L}$, подводимой нами къ машинѣ чрезъ посредство источника, т.-е. затрачиваемой нами, при томъ условіи, конечно, что эта работа $\mathfrak{L}$ тратится машиной, вообще говоря, продуктивно и только на самое необходимое. Уравненіе (5) показываетъ, что послѣднее условіе, вообще, не удовлетворяется, такъ какъ работа $\mathfrak{L}$ затрачивается не только на выполненіе работъ $\mathfrak{L}_n$ и $\mathfrak{L}_f$, производить которыя машина должна во всякомъ случаѣ, но и на увеличеніе живой силы, что, съ точки зрѣнія общей экономіи работы, является уже излишнимъ, а иногда прямо недопустимымъ, такъ какъ наиболѣе продуктивно машины могутъ работать лишь при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ скоростяхъ, колеблющихся для каждой машины въ довольно тѣсныхъ предѣлахъ.

Такимъ образомъ, для возможности использованія уравненія (5) въ нашихъ цѣляхъ, нужно взять для разсмотрѣнія лишь тѣ случаи движенія машины, когда увеличеніе живой силы машины мѣста не имѣетъ, т.-е. когда

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Замѣчая, что количества m, v^2 и v_0^2 суть величины существенно положительныя, заключаемъ, что это условіе можетъ быть выполнено тогда, когда существуетъ равенство

$$v = v_0 .$$

Въ этомъ случаѣ обѣ суммы становятся рав-

ными, давая въ результатѣ нуль. Итакъ, увеличенія живой силы не происходитъ, если для взятаго промежутка времени t начальныя скорости v_0 оказываются равными конечнымъ v. Но такое равенство скоростей можетъ имѣть мѣсто не только тогда, когда машина движется равномѣрно, такъ что скорости ея частей остаются все время постоянными, неизмѣняющимися *), но и тогда, когда она работаетъ съ измѣняющимися скоростями, лишь бы эти измѣненія скоростей протекали періодически, какъ это и имѣетъ мѣсто почти у всѣхъ нашихъ машинъ: у каждой машины есть извѣстный періодъ, въ теченіе котораго, при установившемся ходѣ ея, завершается извѣстный циклъ скоростей, повторяемый затѣмъ, въ одномъ и томъ же порядкѣ ихъ, при каждомъ новомъ періодѣ. Такимъ образомъ, черезъ промежутки времени, равные періоду, наша машина будетъ проходить черезъ одни и тѣ же скорости. Значитъ, если взятый нами промежутокъ времени t мы положимъ равнымъ именно такому періоду нашей машины, то сможемъ сказать, что для каждаго такого періода t приращеніе живой силы системы, представляемой нашей машиной, оказывается равнымъ нулю, — какъ въ началѣ каждаго періода, такъ и въ концѣ его,

*) Въ виду ограниченности размѣровъ нашихъ машинъ, постоянство скоростей можетъ наблюдаться лишь въ тѣхъ машинахъ, гдѣ имѣютъ мѣсто лишь вращательныя движенія; поступательныя же движенія неминуемо влекутъ за собою остановки движенія, т.-е. переходъ скоростей черезъ нуль.

(точнѣе, въ соотвѣтствующихъ точкахъ періодовъ), скорости частей машины будутъ одинаковы. Такимъ образомъ, относя общее уравненіе (5) къ такому именно періоду нашей машины, получимъ болѣе простое соотношеніе:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

могущее быть прочтеннымъ такъ: во всякой правильно-періодически дѣйствующей машинѣ, за каждый періодъ работы ея, работа силъ движущихъ равна работѣ силъ сопротивленій полезныхъ и вредныхъ.

Теперь становится возможнымъ установить искомый критерій совершенства машины. Замѣчая, что нашей машинѣ мы, черезъ посредство источника, сообщаемъ работу въ количествѣ $\mathfrak{L}$, возвращаетъ же она намъ работу $\mathfrak{L}_n$, т.-е. лишь нѣкоторую часть работы $\mathfrak{L}$, заключаемъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія ея, η, выразится такъ:

$$\eta = \frac{\mathfrak{L}_n}{\mathfrak{L}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Величина η, такъ опредѣляемая, можетъ служить мѣрой совершенства каждой машины. Она, какъ видимъ, всегда меньше единицы, ибо числитель дроби, стоящей въ правой части соотношенія (8), всегда меньше знаменателя: членъ $\mathfrak{L}_z$ уравненія (7) никогда не можетъ быть равенъ нулю, такъ что часть всей работы, подводимой нами къ машинѣ, идетъ на постепенное разрушеніе машины. Эта-

смотримся теперь ближе къ этимъ вреднымъ сопротивленіямъ, присутствіе коихъ, обусловливающее собою появленіе члена Σf въ уравненіяхъ (3)–(7), тѣмъ самымъ удаляетъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія η отъ единицы.

Всякій механизмъ, сколь бы сложенъ онъ ни былъ представляетъ собою рядъ парныхъ сочетаній различныхъ тѣлъ, каждое изъ коихъ имѣетъ свое движеніе относительно тѣлъ, съ нимъ сопряженныхъ. Но всякое движеніе твердаго тѣла можетъ быть сведено къ вращенію этого тѣла около мгновенной оси вращенія и къ нѣкоторому поступательному движенію. При этомъ поступательномъ движеніи мы будемъ имѣть скольженіе одного тѣла по поверхности другого, а при вращеніи можетъ имѣть мѣсто какъ скольженіе, такъ и каченіе, причемъ чистое каченіе имѣетъ мѣсто тогда, когда ось мгновеннаго вращенія приходится на поверхности соприкосновенія одного тѣла съ другимъ; въ остальныхъ же случаяхъ ея расположенія будетъ имѣть мѣсто какъ каченіе, такъ и скольженіе: при плоскомъ движеніи мы имѣемъ всегда систему двухъ полодій, одна изъ коихъ катится по другой; остальныя части движущейся системы имѣютъ еще скольженіе. Но движеніе скольженія, равно какъ и движеніе качанія, всегда сопровождается извѣстнымъ сопротивленіемъ, какъ это будетъ детально выяснено ниже: на части нашихъ

машинѣ дѣйствуютъ различныя силы, заставляющія одну деталь прижиматься къ другой, и опытъ показываетъ, что такое движеніе всегда сопровождается такъ называемымъ сопротивленіемъ треніа, которое, слѣдовательно, будетъ или треніемъ скольженія, если имѣетъ мѣсто чистое скольженіе, или треніемъ каченія, если имѣетъ мѣсто чистое каченіе. На преодолѣніе работы этого сопротивленія треніа и уходитъ часть, равная L_z, работы дѣйствующихъ силъ, и сопротивленіе треніа и представляетъ собою, такимъ образомъ, тотъ факторъ, который, вызывая различіе между работами L_n и L, удаляетъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія каждой машины отъ единицы. Въ первыхъ главахъ нашего курса мы и познакомимся детально сначала съ явленіями треніа скольженія, а затѣмъ и съ треніемъ каченія.

Эти главы курса составятъ собою первую часть его,— статью «о треніи въ машинахъ»,— имѣющую задачей подробно освѣтить первый основной вопросъ, намѣченный выше. Остальныя главы будутъ посвящены разбору второго и третьяго основныхъ вопросовъ.—

Часть первая.

Треніе въ машинахъ.

I. Треніе скольженія.

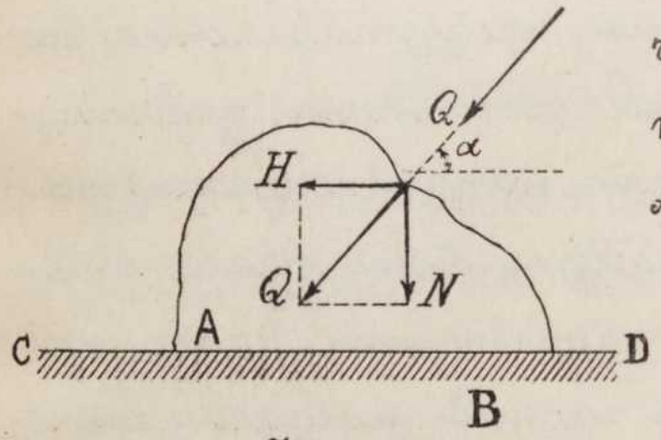
§ 1. Предварительныя соображенія. Представленіе Понселе. Законы Кулона.

Машиной мы называемъ систему парныхъ сочетаній тѣлъ, каждое изъ которыхъ имѣетъ опредѣленное принужденное движеніе. Сообразно съ этимъ, силы, имѣющія приводить части машины въ движеніе, могутъ воздѣйствовать на эти части уже не по своимъ направленіямъ, а по нѣкоторымъ другимъ, находящимся въ каждый отдѣльный моментъ въ извѣстной зависимости отъ направленій движенія этихъ частей. Такимъ образомъ, дѣйствующими силами являются, вообще говоря, не данныя силы, а ихъ слагающія по нѣкоторымъ опредѣленнымъ направленіямъ. Значитъ, каждая изъ данныхъ силъ при своемъ воздѣйствіи на часть машины, разлагается такъ, что одна изъ ея слагающихъ идетъ по опредѣленному направленію относительнаго движенія. Вторая слагающая, перпендикулярная къ

первой, должна, какъ говорятъ въ механикѣ, уничтожаться соотвѣтственнымъ сопротивленіемъ другихъ частей машины, и на этомъ, казалось бы, всѣ наши разсужденія, основываемыя на данныхъ теоретической механики, и должны бы закончиться: всѣмъ силамъ, дѣйствующимъ по желательнымъ для насъ направленіямъ, предоставляется полная свобода дѣйствія, всѣ же остальныя, дѣйствующія перпендикулярно этимъ направленіямъ, уничтожаются и, значитъ, могутъ быть прямо откидываемы, какъ не могущія производить какое-либо вліяніе на движеніе однихъ частей машины относительно сопряженныхъ съ ними другихъ.

Опытъ, однако, показываетъ, что на дѣлѣ происходитъ нѣчто другое: наличность этихъ вторыхъ слагающихъ, перпендикулярныхъ желательнымъ направленіямъ, не проходитъ безслѣдно для движенія каждой пары сопряженныхъ деталей: на поверхности соприкосновенія этихъ послѣднихъ указанныя нормальныя слагающія, прижимающія одну деталь къ другой, вызываютъ появленіе особыхъ сопротивленій, затрудняющихъ движеніе одной детали относительно другой. Сопротивленія эти носятъ названіе силъ треніяи дѣйствуютъ, какъ видимъ, прямопротивоположно перемѣщенію одной детали относительно сопряженной съ ней другой. Все сказанное хорошо иллюстрируется на приводимомъ ниже простомъ случаѣ движенія:

Пусть нѣкоторое тѣло A, лежащее на горизонтальной плоскости CD, принадлежащей другому тѣлу B, находится подъ дѣйствіемъ силы Q, наклоненной къ горизонту подъ угломъ α (фиг. 1). Предполагая, что сила Q находится все время въ одной и той же плоскости (напримѣръ, плоскости чертежа), заключаемъ, что при этихъ условіяхъ тѣло A будетъ двигаться прямолинейно поступательно; предположенія эти мы дѣлаемъ исключительно ради простоты разсужденій.



Фиг. 1.

Теоретическая механика говоритъ, что въ такомъ случаѣ движеніе тѣла A будетъ происходить подъ дѣйствіемъ силы H, горизонтальной слагающей силы Q, такъ что уравненіе движенія тѣла A напишется такъ:

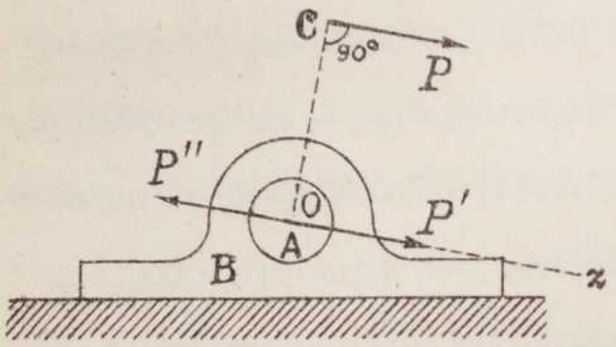
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = H = Q\cos\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ m есть масса тѣла A, а α, какъ мы уже указывали, уголъ наклона силы Q къ горизонту, такъ что, разъ уголъ α отличенъ отъ 90°, движеніе должно имѣть мѣсто непремѣнно. Что же касается силы N, вертикальной слагающей данной силы Q, то она-де уничтожается сопротивленіемъ детали B, въ виду чего объ ней можно просто не говорить. Опытъ, однако, показываетъ, что въ подобныхъ слу-

чаяхъ дѣйствія силы Q движеніе тѣла A имѣетъ мѣсто далеко не всегда: сила Q можетъ быть отклоненной отъ нормали ($\alpha < 90°$), а между тѣмъ тѣло A будетъ оставаться въ покоѣ, — съ условіями подобныхъ явленій мы подробно познакомимся ниже. Сила H, очевидно, способствовать покою тѣла не можетъ никакъ; слѣдовательно, противодѣйствовать движенію можетъ только другая слагающая, т.-е. нормальная сила N. А такъ какъ эта сила перпендикулярна къ поверхности соприкосновенія и, значитъ, сама по себѣ на движеніе тѣла A воздѣйствовать не можетъ, то и остается признать, что эта нормальная сила N, прижимающая одну деталь A къ другой B, вызываетъ на поверхности соприкосновенія ихъ силу сопротивленія, направленную противоположно горизонтальной силѣ H или, что то же, дѣйствующую въ направленіи, прямопротивоположномъ направленію относительнаго перемѣщенія тѣла A по тѣлу B.

Подобнымъ же образомъ, если деталь A (валъ, шипъ и т. п.) вращается въ своемъ подшипникѣ B подъ дѣйствіемъ силы P, работающей на плечѣ OC, гдѣ O есть ось вращенія вала (фиг. 2), причемъ уголъ между направленіемъ силы P и плечомъ OC предположимъ равнымъ прямому, то, прилагая въ центрѣ O двѣ противоположныя силы P′ и P″, равныя и параллельныя силѣ P, увидимъ, что деталь A будетъ вращаться подъ вліяніемъ силъ P и P″, соста-

ляющихъ пару съ моментомъ $P.OC$, а кромѣ того, сила P', приложенная въ точкѣ O детали A, будетъ прижимать ее къ детали B по своему направленію Oz, вызывая, такимъ образомъ, на поверхности соприкосновенія A съ B силы



Фиг. 2.

тренія, противодѣйствующія перемѣщенію одной детали по другой; т.-е. сопротивляющіяся вращенію тѣла A относительно тѣла B, откуда слѣдуетъ, что моментъ этихъ силъ тренія будетъ направленъ противоположно моменту силы P; такимъ образомъ, если моментъ силы P вращаетъ тѣло A по часовой стрѣлкѣ, то моментъ силъ тренія будетъ стремиться вращать его противъ часовой стрѣлки, и обратно.

Итакъ, если два тѣла, принуждаемыя нѣкоторыми силами находиться въ постоянномъ соприкосновеніи другъ съ другомъ, двигаются каждое своимъ самостоятельнымъ движеніемъ, то на поверхности соприкосновенія ихъ возбуждаются силы тренія, направленныя противоположно относительному перемѣщенію разсматриваемаго тѣла. Такимъ образомъ, для того, чтобы правильно опредѣлить направленія силъ тренія, воздѣйствующихъ на данное тѣло одновременно съ другими силами, необходимо опредѣлить относительное движеніе его, что выполняется крайне просто, помощью

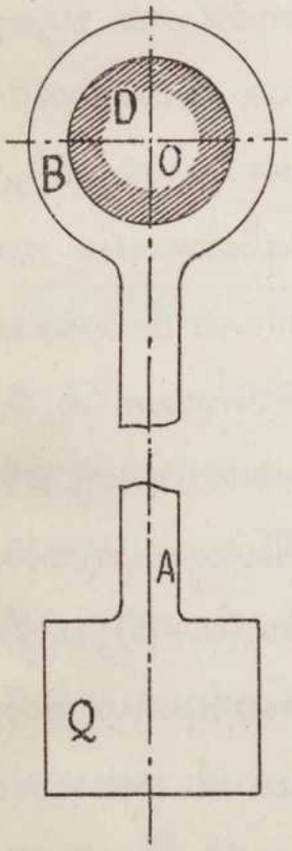
пріема, извѣстнаго намъ изъ курса кинематики и состоящаго въ слѣдующемъ:

Пусть данная намъ система состоитъ изъ тѣлъ A и B, причемъ тѣло A движется нѣкоторымъ движеніемъ (α), а тѣло B — движеніемъ (β), и требуется опредѣлить относительное движеніе тѣла A. Для этого необходимо, чтобы тѣло B стало неподвижнымъ, съ каковой цѣлью всей системѣ (A, B) придаемъ движеніе, обратное дѣйствительному движенію системы B, т.-е. движеніе ($-\beta$). Тогда тѣло A будетъ двигаться новымъ движеніемъ ($\alpha-\beta$), а тѣло B остановится, и въ результатѣ, такимъ образомъ, обнаружится, что движеніе тѣла A относительно B есть движеніе ($\alpha-\beta$). Если бы относительное движеніе тѣла A сопровождалось треніемъ, то силы этого треніа, воздѣйствующія на тѣло A, т.-е. сопротивляющіяся относительному движенію его, были бы въ каждый данный моментъ направлены прямопротивоположно этому относительному движенію ($\alpha-\beta$) тѣла A.

Само собою разумѣется, что силы треніа, воздѣйствующія на B, будутъ равны и прямопротивоположны силамъ треніа, воздѣйствующимъ на A, согласно принципу «дѣйствіе равно противодѣйствію». Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно опредѣлить движеніе тѣла B относительно A, — оно, очевидно, будетъ прямопротивоположно прежнему, въ виду чего направленіе силъ треніа,

БИБЛІОТЕКА
Московскаго

воздѣйствующихъ на B, будетъ противоположно направленію силъ тренія, воздѣйствующихъ на A.



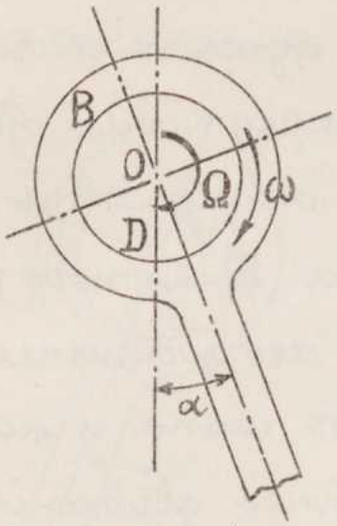
Фиг. 3.

Въ виду важности приведеннаго выше положенія о направленіи силъ тренія, приведемъ еще одинъ примѣръ опредѣленія этого направленія, могущій быть использованнымъ нами въ дальнѣйшемъ.

Пусть ко втулкѣ B (фиг. 3), надѣтой на неподвижный штифтъ D и могущей на немъ вращаться, наглухо прикрѣплено тѣло Q, образующее, такимъ образомъ, вмѣстѣ со втулкой физическій маятникъ AB, могущій качаться около оси O штифта D. Такъ какъ штифтъ D неподвиженъ, то абсолютное движеніе маятника будетъ въ то же время относительнымъ его движеніемъ (относительно штифта). Поэтому, если маятникъ, подъ вліяніемъ тѣхъ или иныхъ силъ, станетъ вращаться вокругъ оси O, положимъ, по часовой стрѣлкѣ, то силы тренія, воздѣйствующія на втулку и сопротивляющіяся движенію ея, т.-е. качанію маятника, будутъ имѣть моментъ, направленный противъ стрѣлки часовъ, — и обратно.

Но предположимъ теперь, что штифтъ D не остается неподвижнымъ, а самъ вращается все время въ одну и ту же сторону, — положимъ, по стрѣлкѣ часовъ (фиг. 4), причемъ допустимъ, что угловая скорость Ω вращенія штифта больше

возможной здѣсь наибольшей скорости ω вращенія маятника, — маятникъ, какъ извѣстно, качается съ перемѣнными по величинѣ и по направленію скоростями: отъ нуля черезъ максимумъ въ одну сторону и подобнымъ же образомъ въ другую. Обозначая, какъ выше, эту максимальную скорость маятника черезъ ω, имѣемъ, такимъ образомъ, за все время движенія маятника соотношеніе:



Фиг. 4.

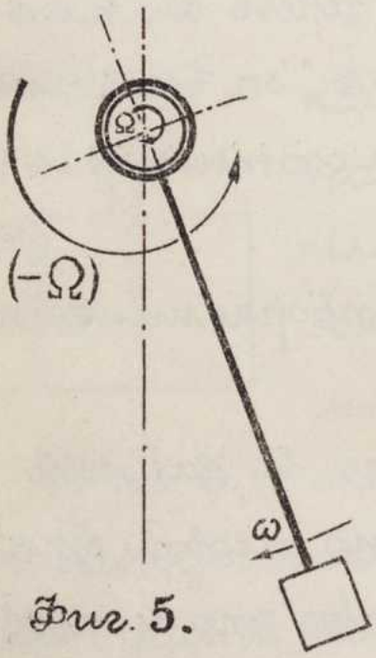
$$\Omega > \omega \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

долженствующее быть здѣсь удовлетворяемымъ постоянно.

Пусть маятникъ AB совершаетъ въ данный моментъ свое качаніе влѣво, т.-е. по часовой стрѣлкѣ, въ одну сторону съ шипомъ, какъ это и изображено на фиг. 4. Такъ какъ угловая скорость вращенія его больше любой изъ скоростей вращенія маятника, и, значитъ, шипъ вращается быстрѣе, чѣмъ маятникъ, то поверхность шипа будетъ перемѣщаться въ пространствѣ быстрѣе, чѣмъ прилегающая къ ней поверхность втулки, а это, очевидно, сводится къ тому, что поверхность втулки будетъ отставать отъ поверхности шипа, въ виду чего относительнымъ движеніемъ втулки будетъ движеніе ея противъ часовой стрѣлки, откуда, въ свою очередь, заключаемъ, что силы трѣнія, воздѣйствующія на втулку и направленныя

противоположно относительному движению ея, будутъ дѣйствовать по часовой стрѣлкѣ, т.-е. согласно съ направленіемъ вращенія шипа.

Такой же результатъ получимъ путемъ обычнаго, упомянутаго выше, пріема для опредѣленія относительныхъ движеній. Намъ нужно опредѣлить движеніе маятника относительно шипа. Для этого шипъ долженъ быть сдѣланъ неподвижнымъ, чего достигнемъ,

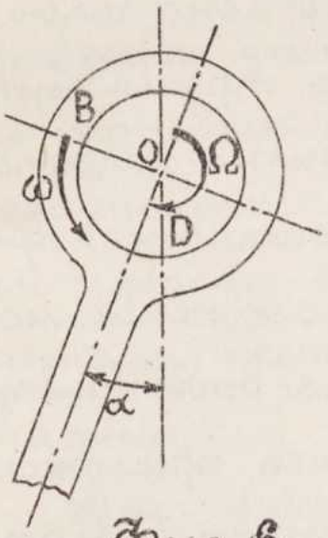


Фиг. 5.

придавая всей системѣ шипа и маятника движеніе, обратное движенію шипа, т.-е. вращеніе противъ часовой стрѣлки со скоростью Ω,— обозначимъ ее черезъ (−Ω) (фиг. 5). Тогда шипъ остановливается, а маятникъ начнетъ двигаться, вращаясь около оси O съ угловой скоростью (−Ω+ω). Такъ какъ Ω всегда больше, чѣмъ ω, то эта скорость (−Ω+ω) будетъ имѣть знакъ, одинаковый съ знакомъ у (−Ω), что и показываетъ, что относительное движеніе маятника представится здѣсь нѣкоторымъ вращеніемъ около оси O, направленнымъ противъ часовой стрѣлки, откуда, въ свою очередь, согласно съ предыдущимъ слѣдуетъ, что силы тренія, воздѣйствующія на маятникъ, будутъ дѣйствовать по часовой стрѣлкѣ, т.-е. согласно съ направленіемъ вращенія шипа.

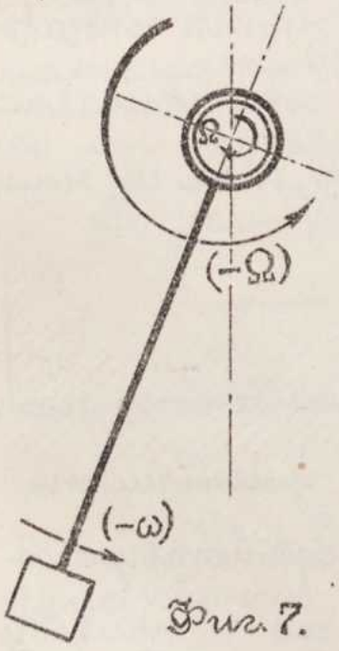
Разсмотримъ теперь качаніе маятника вправо (фиг. 6). Шипъ, попрежнему, продолжаетъ вращаться

по часовой стрѣлкѣ. Такъ какъ втулка движется теперь навстрѣчу шипу, противъ часовой стрѣлки, то относительнымъ движеніемъ втулки будетъ, очевидно, движеніе противъ часовой стрѣлки.



Фиг. 6.

Тотъ же результатъ получится и обычнымъ путемъ: придаемъ всей системѣ движеніе $(-\Omega)$, обратное движенію шипа,—это будетъ вращеніе вокругъ оси шипа O противъ часовой стрѣлки. Послѣ прибавленія этого новаго вращенія шипъ D остановится, а маятникъ станетъ вращаться со скоростью $(-\Omega-\omega)$, т.-е. со скоростью $(\Omega+\omega)$ противъ часовой стрѣлки (фиг. 7); отсюда заключаемъ, что силы тренія, воздѣйствующія на втулку, будутъ, при этомъ качаніи маятника, направлены по часовой стрѣлкѣ, т.-е. сохранятъ то же направленіе, что и при качаніи маятника влѣво.



Фиг. 7.

Итакъ, разъ соблюдается условіе (2), т.-е.

$$\Omega > \omega ,$$

то, каково бы ни было направленіе качанія маятника, направленіе силъ тренія, воздѣйствующихъ на втулку его, остается все время одними и тѣми же, согласными съ направленіемъ вращенія шипа. Этотъ результатъ пригодится намъ въ дальнѣйшемъ.

Случай $\Omega \gtrless \omega$ ничего особеннаго не представляетъ, и подвергать его разбору мы не станемъ.

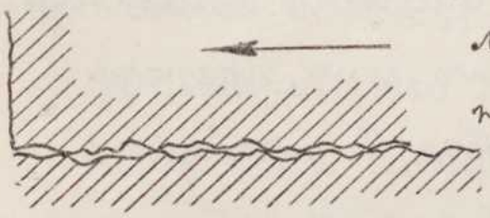
Приведенные примѣры достаточно ясно иллюстрируютъ упомянутое свойство силъ тренія быть направленными, при своемъ воздѣйствіи на какое-либо тѣло, прямопротивоположно относительному движенію его. Формулировка этого положенія можетъ быть нѣсколько иная, отличная отъ приведенной и болѣе удобная при практическихъ приложеніяхъ, а именно, говорятъ, что силы тренія направлены всегда прямопротивоположно скорости относительнаго движенія. Разницы между двумя приведенными формулировками нѣтъ никакой, но вторая удобнѣе, ибо на дѣлѣ мы сталкиваемся обыкновенно со скоростями движенія, а не съ нимъ самимъ.

Вышеприведенныя замѣчанія указываютъ намъ, что силы тренія имѣютъ тенденцію уменьшать скорость относительнаго движенія, содѣйствуя болѣе или менѣе энергично, прекращенію его и приводу тѣла въ состояніе покоя, являющееся, такимъ образомъ, конечной цѣлью дѣйствія этихъ силъ. Возникаетъ вопросъ о механизмѣ возникновенія этихъ силъ, о сущности ихъ дѣйствія, носящей, въ смыслѣ поддержки и поощренія движенія, характеръ, какъ видимъ, отрицательный. Попытокъ освѣтить

этотъ вопросъ сдѣлано было очень много, но вполнѣ удовлетворительнаго объясненія явленій тренія въ различныхъ тѣлахъ, твердыхъ. жидкихъ и газообразныхъ, мы не имѣемъ до сихъ поръ, будучи вынуждаемы условіями практики учитывать воздѣйствіе и вліяніе силъ тренія, мы поневолѣ довольствуемся различными опытными коэффиціентами, въ большинствѣ случаевъ полученными путемъ весьма грубыхъ опытовъ и не могущими, поэтому, претендовать на какое-либо серьезное научное значеніе.

Для простѣйшаго случая тренія двухъ твердыхъ тѣлъ, скользящихъ другъ по другу, механизмъ возникновенія силъ тренія довольно просто и наглядно былъ объясненъ знаменитымъ французскимъ математикомъ Понселе́ (Poncelet), и соображенія его мы теперь и изложимъ.

Понселе указываетъ, что самыя гладкія и наилучшимъ образомъ отполированныя поверхности, въ сущности, остаются всегда шероховатыми,

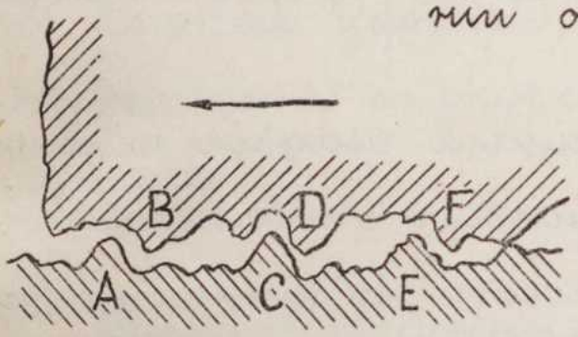


Фиг. 8

въ чемъ можно убѣдиться непосредственно, хотя бы, напримѣръ, помощью лупы. Всякая поверхность всегда представляетъ изъ себя рядъ неправильныхъ возвышеній, бугровъ, впадинъ и т. д. На фиг. 8 представленъ въ утрированномъ видѣ разрѣзъ двухъ тѣлъ, соприкасающихся другъ съ другомъ своими гладкими сторонами, и уже при первомъ взглядѣ на этотъ

чертежъ становится понятнымъ, что, при существованіи усилія, прижимающаго эти два тѣла одно къ другому, уже просто только для того, чтобы передвинуть одно тѣло по поверхности другого, необходимо потратить извѣстную работу. Становится, далѣе, понятнымъ, на что собственно потратится эта работа: легко видѣть, что въ данномъ случаѣ она пойдетъ, прежде всего, на деформированіе поверхностей, скользящихъ одна по другой.

Представимъ себѣ въ сильно увеличенномъ видѣ какой либо зубецъ A поверхности одного тѣла и надвигающійся на него зубецъ B поверхности другого (фиг. 9). Предполагая, что, при перемѣщеніи одного тѣла по другому два эти зубца непремѣнно должны будутъ столкнуться, видимъ, что, прежде чѣмъ зубецъ B пройдетъ надъ зубцомъ A, оба они должны будутъ испытать деформаціи, степень которыхъ будетъ зависѣть отъ свойствъ матеріаловъ данныхъ тѣлъ. Если эти деформаціи будутъ лежать въ предѣлахъ упругости, то оба зуба, освободившись отъ давленія другъ на друга, что наступитъ, когда зубъ B перейдетъ по лѣвую сторону отъ зуба A и освободитъ его совсѣмъ, — оба эти зуба будутъ стремиться вернуться въ свое



Фиг. 9.

начальное состояніе, причемъ повторится то же, что имѣетъ мѣсто для всякаго упругаго бруса, защемленнаго однимъ концемъ, согнутаго, а затѣмъ отпущеннаго, — зубья, подобно такому брусу, придутъ въ колебательное состояніе. То же самое повторится и съ другими зубьями, сидящими на поверхностяхъ, — въ случаѣ, если деформаціи ихъ окажутся лежащими въ предѣлахъ упругости, всѣ зубцы придутъ въ колебательное состояніе, и эти упругія колебанія ихъ повлекутъ за собою дрожаніе тѣла, вызывая, такимъ образомъ, соотвѣтствующій условіямъ дѣла звукъ слышимаго, но иногда и вполнѣ опредѣленнаго по тембру и высотѣ, характера; въ обыкновенныхъ условіяхъ получается тотъ шорохъ, который слышится при скольженіи одного тѣла по другому. Само собою разумѣется, что на такое упругое деформированіе зубцовъ и обусловливаемое имъ дрожаніе ихъ потребуется извѣстная работа, которая и будетъ взята изъ общей работы дѣйствующихъ здѣсь силъ. Ясно, однако, что вернуть эту работу обратно мы не можемъ, — вся эта работа цѣликомъ пропадаетъ безполезно для насъ, являясь потерянной работой

Представимъ себѣ теперь, что деформаціи зубьевъ оказываются выходящими изъ предѣловъ упругости. Тогда зубцы будутъ или подвергаться остающимся деформаціямъ, переставая воз-

вращаться въ начальное состояніе, такъ что поверхность, по которой происходитъ скольженіе, будетъ мѣнять свой внѣшній видъ, но объемъ тѣла убывать при этомъ не будетъ; или же эти зубцы будутъ, попросту, срѣзаться, срываться съ поверхности тѣла, причемъ въ такихъ случаяхъ будетъ мѣняться не только видъ поверхности, но и объемъ тѣла. Это сдираніе зубцовъ и горбовъ поверхности и даетъ явленіе изнашиванія поверхности, въ общемъ случаѣ усложняемое различными другими явленіями, — тепловыми и т.д. Работа, потребная на эти деформаціи, опять будетъ взята изъ общей работы дѣйствующихъ силъ и, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, представитъ собою чистую нашу потерю, такъ какъ быть возвращенной назадъ она, вообще говоря, не сможетъ.

Само собою разумѣется, что въ общемъ случаѣ явленія упругихъ деформацій протекаютъ одновременно съ явленіями неупругихъ, остающихся, — въ однихъ мѣстахъ поверхности соприкосновенія происходятъ одни явленія, въ другихъ — другія, но, во всякомъ случаѣ, всѣ эти явленія, сопровождающія явленіе тренія, влекутъ за собою потерю работы, идущей на ихъ совершеніе. Эта потеря является совершенно нежелательной, ибо, двигая одно тѣло по другому, мы не желаемъ производить при этомъ ни же-

тла, или звука, или, тѣмъ болѣе, истиранія и изнашиванія поверхностей, а между тѣмъ всѣ эти явленія приходится производить съ затратой извѣстной работы, несмотря на всю ненужность этихъ явленій и убыточность ихъ для насъ. Конечно, въ различныхъ случаяхъ движенія одни явленія протекаютъ и проявляются сильнѣе, другія — слабѣе, но полнаго устраненія ихъ всѣхъ мы не сможемъ добиться никогда.

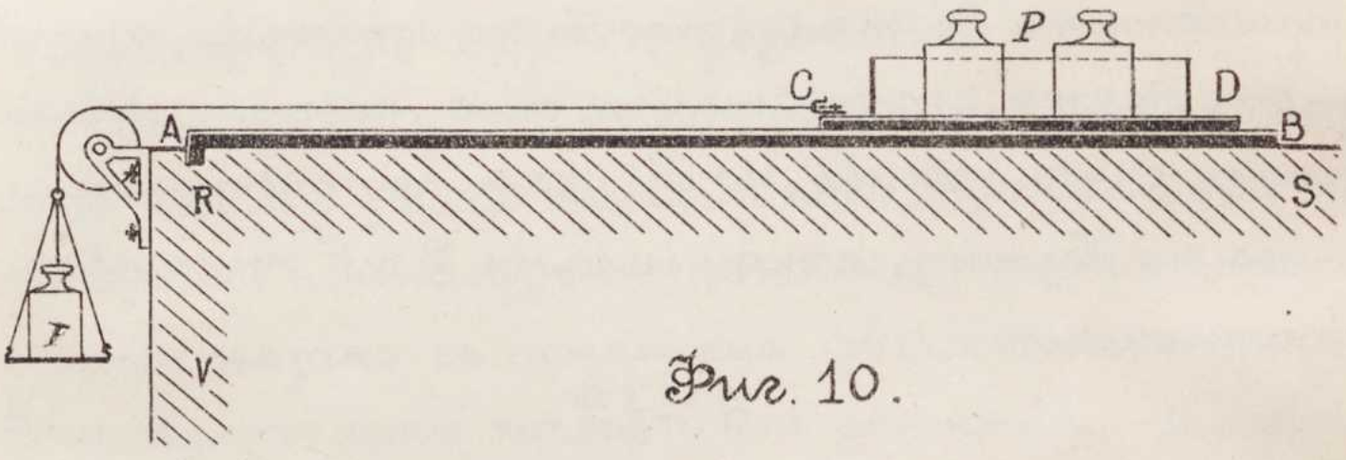
Та часть теряемой нами такимъ образомъ работы, которая переходитъ въ тепло, могла бы, пожалуй, быть использована въ смыслѣ полученія изъ этого тепла нѣкоторой полезной работы, могущей пойти, напримѣръ, хотя бы на то же перемѣщеніе тѣла, и схему приспособленій для такого использованія тепла можно представить себѣ въ болѣе или менѣе опредѣленныхъ очертаніяхъ. Извѣстны, кромѣ того, случаи, когда треніе примѣняется въ цѣляхъ прямого полученія тепла въ количествахъ, достаточно большихъ для того, чтобы вызвать горѣніе дерева и т. п., но эти случаи преднамѣреннаго возбужденія и прямого использованія силъ треніе являются единичными и въ расчетъ приниматься быть не могутъ. Вообще же говоря, въ машиностроительной практикѣ выдѣленіе тепла при скольженіи деталей машины одной по другой является крайне нежелательнымъ и вреднымъ, такъ какъ влечетъ за собою облегченіе дальнѣйшихъ деформацій; это ясно изъ того соображенія, что упругость тѣла и способность его

противостоять деформаціямъ быстро уменьшаются съ возрастаніемъ температуры его. Такъ называемое горячіе шипомъ опасно именно потому, что такой загорѣвшійся, накаленный шипъ оказывается уже не въ состояніи сопротивляться тому моменту, на какой онъ былъ расчитанъ холодный, и поэтому сейчасъ же ломается.

Таковы въ главныхъ чертахъ соображенія Понселе́, дающія общее представленіе о сущности явленій тренія скольженія твердыхъ тѣлъ. Что же касается детальнаго разбора этихъ явленій, то, какъ было уже указано, у насъ имѣются такъ называемые **законы тренія**, но они представляютъ собою лишь резюме́ весьма грубыхъ опытовъ и остаются до сихъ поръ весьма несовершенными схемами, подлежащими серьезнымъ поправкамъ. Къ разсмотрѣнію этихъ явленій мы теперь и приступимъ.

Первая попытка болѣе или менѣе систематическаго изученія силъ тренія и выясненія зависимости ихъ отъ различныхъ обстоятельствъ движенія была сдѣлана Кулономъ (Coulomb), продѣлавшимъ рядъ опытовъ и на основаніи ихъ давшимъ рядъ положеній, извѣстныхъ обыкновенно подъ названіемъ **законовъ тренія твердыхъ тѣлъ**. Опыты Кулона были очень просты: для того, чтобы опредѣлить силу тренія, возникающую при скольженіи одного твердаго тѣла по друго-

му, онъ строганіемъ и шлифовкой придавалъ поверхностямъ ихъ, имѣющимъ войти въ соприкосновеніе, возможно болѣе гладкую плоскую поверхность и накладывалъ этими сглаженными поверхностями одно тѣло на другое, располагая плоскость соприкосновенія горизонтально. Подвижное тѣло нагружалось тѣмъ или другимъ опредѣленнымъ грузомъ, такъ что полная сила, прижимавшая одну поверхность къ другой, была въ каждомъ отдѣльномъ опытѣ извѣстна,—она равнялась вѣсу подвижного тѣла плюсъ вѣсъ груза, на это тѣло наложеннаго. Опредѣлялась, наконецъ, величина той горизонтальной силы, которую нужно было приложить къ подвижному тѣлу для того, чтобы оно двигалось равномѣрно. Схема прибора, кото-



Фиг. 10.

рымъ пользовался Кулонъ, изображена на фиг. 10: AB представляетъ собою доску изъ одного испытуемаго матеріала, а CD — изъ другого; доска AB прикрѣпляется къ стойкѣ RSV неподвижно, а подвижная доска CD, скользящая по AB, приводится въ движеніе грузомъ F, помощью веревки, перекинутой черезъ блокъ.

Наблюдая явленія тренія при различныхъ условіяхъ, Кулонъ пришелъ къ слѣдующимъ пяти заключеніямъ:

1) Сила тренія пропорціональна слагающей всѣхъ силъ по нормали къ поверхности скольженія.

Формулировка Кулона была, собственно говоря, нѣсколько иная,— онъ высказалъ это первое свое заключеніе такъ: сила тренія пропорціональна вѣсу P движущагося тѣла, но мы, имѣя въ виду послѣдующее, будемъ говорить не о вѣсѣ движущихся тѣлъ, а о слагающихъ силахъ, нормальныхъ къ поверхности стыка.

Если эту нормальную слагающую назовемъ черезъ P, а горизонтальную силу, которую нужно приложить къ тѣлу, чтобы его сдвинуть, черезъ F, — это будетъ, слѣдовательно, сила, равная по величинѣ силѣ тренія, но ей прямопротивоположная, — то, по Кулону, между силами P и F существуетъ соотношеніе

$$F = fP \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Коэффиціентъ пропорціональности f называется коэффиціентомъ тренія и представляетъ собою число отвлеченное. По Кулону, этотъ коэффиціентъ f не зависитъ отъ нормальнаго давленія P, каково бы это послѣднее ни было.

2) Коэффиціентъ f зависитъ отъ матеріала трущихся тѣлъ и отъ состоянія

трущихся поверхностей, — степени ихъ гладкости и смазки.

Мы должны замѣтить, что случай трения сухихъ тѣлъ нужно строго отличать отъ трения тѣлъ смазанныхъ, такъ какъ присутствіе слоя жидкости на поверхности соприкосновения трущихся тѣлъ, хотя бы даже въ минимальномъ количествѣ, значительно мѣняетъ явленія трения; этотъ иногда тончайшій слой жидкости, присутствіе котораго зачастую бываетъ трудно даже замѣтить, въ случаяхъ точныхъ опытовъ и измѣреній можетъ обусловить собою ошибочность результатовъ и выводовъ. Этого вопроса мы коснемся еще разъ въ дальнѣйшемъ.

3) Коэффиціентъ трения покоя больше коэффиціента трения движенія.

Необходимо условиться, что слѣдуетъ понимать подъ этими двумя терминами; сдѣлать это необходимо потому, что понятіе трения неразрывно связано съ понятіемъ движенія, — треніе подразумѣваетъ наличность движенія, — и поэтому сопоставленіе понятія о треніи съ понятіемъ о покоѣ можетъ вызвать недоразумѣніе. Дѣло здѣсь заключается въ слѣдующемъ: если твердое тѣло въ продолженіе извѣстнаго времени уже лежало на поверхности другого и если мы пожелаемъ теперь сдвинуть его съ мѣста, то, какъ оказывается, въ первый, начальный моментъ движенія, для того,

чтобы его сдвинуть, нужно употребить усиліе бо́льшее, чѣмъ потомъ, когда движеніе уже началось. Въ первый моментъ скольженія, когда мы только что сдвинули тѣло, бывшее до того въ покоѣ, мы должны приложить къ нему для этого нѣкоторую силу F_1, и пусть

$$F_1 = f_1 P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Когда тѣло начало уже двигаться, то для поддержки равномѣрнаго движенія его, — эта равномѣрность укажетъ на равенство между движущей силой и противоположно ей направленной силой треніа, — понадобится приложить уже другую силу F_2, отличную отъ первой. Пусть

$$F_2 = f_2 P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Опытъ показываетъ, что сила F_2 всегда меньше прежней F_1:

$$F_2 < F_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Это неравенство, въ виду соотношеній (4) и (5), принимаетъ видъ

$$f_1 > f_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Коэффиціентъ f_1, въ виду сказаннаго, носитъ названіе коэффиціента треніа покоя, а f_2 — коэффиціента треніа движенія.

4) Коэффиціентъ треніа f не зависитъ отъ величины поверхности соприкосновеніа трущихся тѣлъ, такъ что сила треніа всегда будетъ, по Кулону, выражаться произведеніемъ изъ нормальнаго давленія P на соотвѣтствующій

коэффиціентъ f, совершенно независимо отъ того, будетъ ли скользящее тѣло опираться на другое поверхностью большой площади или малой; Кулонъ устанавливаетъ, что сила трѣнія въ обоихъ этихъ случаяхъ будетъ одна и та же, если будетъ оставаться однимъ и тѣмъ же внѣшнее давленіе.

Имѣемъ, наконецъ, послѣднее, пятое положеніе, говорящее, что

5) Коэффиціентъ трѣнія f не зависитъ отъ относительной скорости скольженія одного тѣла по другому.

Приведенныя нами пять положеній были сформулированы и высказаны впервые Кулономъ, почему и получили названіе законовъ Кулона; называютъ ихъ также законами трѣнія, но, въ сущности, это невѣрно, такъ какъ не только при строгой провѣркѣ ихъ экспериментальнымъ путемъ, но даже при бѣгломъ сопоставленіи съ вышеприведеннымъ нагляднымъ представленіемъ Понселе, важнѣйшіе изъ нихъ, а именно, 1-ый и 4-ый, оказываются весьма сомнительными; возбуждаетъ сомнѣнія и пятый законъ, о которомъ мы будемъ говорить подробнѣе впослѣдствіи, въ статьѣ о движеніи маятника съ трѣніемъ въ точкѣ привѣса. — Займемся теперь сопоставленіемъ законовъ Кулона съ представленіемъ Понселе. Начнемъ съ перваго закона.

Понятно, что, чѣмъ больше будетъ нормальная сила, нажимающая одну поверхность на другую, тѣмъ бо́льшими будутъ деформаціи, испытываемыя горбами и выступами скользящихъ другъ по другу поверхностей, т.-е. тѣмъ бо́льшей будетъ работа, потребная для передвиженія одного тѣла по другому, и, значитъ, тѣмъ большей будетъ сила трeнія. Эта сторона вопроса сомнѣній не вызываетъ. Но зато приходится признать совершенно не отвѣчающей дѣйствительности столь простую зависимость между нагрузкой P на тѣло и силой трeнія F, какъ это устанавливаетъ первый законъ,— на дѣлѣ эта зависимость оказывается гораздо болѣе сложной; относительно же зависимости, данной Кулономъ, можно сказать, что она представляетъ собою соотношеніе, первое пришедшее ему въ голову, не провѣренное имъ, вдобавокъ, на опытѣ съ должной строгостью, а тотъ фактъ, что на этой зависимости остановились и придерживаются ея до сихъ поръ, объясняется весьма значительными удобствами, доставляемыми формулой (3) при пользованіи ею на практикѣ. Строго говоря, коэффиціентъ f долженъ зависѣть, между прочимъ, и отъ величины нагрузки P.

Второй законъ понятенъ самъ собою и особыхъ трудностей для объясненія не представляетъ.

Третій законъ также нетрудно уяснить себѣ совершенно наглядно по Понселе: въ томъ случаѣ, когда одно тѣло въ продолженіе нѣкотораго време-

ни спокойно лежало на другомъ, оно за это время успѣло своими зубцами войти, въѣсться во впадины другого, — на этотъ процессъ, понятно, требуется время, и чѣмъ больше оно, т.-е. чѣмъ дольше продолжается этого соприкосновеніе тѣлъ, тѣмъ больше и глубже, — въ извѣстныхъ, конечно, предѣлахъ, — будетъ совершаться это въѣданіе. Очевидно теперь, что, принуждая сдвинуться такое въѣвшееся тѣло, мы должны приложить большее усиліе, чѣмъ тогда, когда мы его уже сдвинули, потому что въ первомъ случаѣ намъ придется произвести и вызвать деформаціи бо́льшія, чѣмъ во второмъ, когда зубцы будутъ проходить другъ надъ другомъ, лишь неглубоко входя во впадины и мало деформируясь.

Четвертый законъ Кулона уже не соотвѣтствуетъ представленію Poncelet. Дѣйствительно, при бо́льшихъ поверхностяхъ соприкосновенія деформаціи зубьевъ, можно ожидать, будутъ меньше, чѣмъ при малыхъ, ибо при бо́льшомъ числѣ зубьевъ, подвергающихся одновременно деформаціи, — что, очевидно, имѣетъ мѣсто при большой поверхности соприкосновенія, — на каждый изъ нихъ придется меньшая доля деформирующаго усилія, чѣмъ при маломъ числѣ зубьевъ, т.-е. при малой поверхности соприкосновенія. Сказанное станетъ еще болѣе понятнымъ, если мы представимъ себѣ подвижное тѣло имѣющимъ форму усѣченной пирамиды. По четвертому закону Кулона, сила трения будетъ

одна и та же, будемъ ли мы двигать эту пирамиду, опирая ее о неподвижную плоскость широкимъ основаніемъ или узкимъ. Это, очевидно, сомнительно, ибо если мы станемъ двигать пирамиду, опирая ее о плоскость узкой вершиной, то, при одномъ и томъ же нажимающемъ усиліи, она будетъ въѣдаться въ плоскость гораздо глубже, чѣмъ тогда, когда она опирается о плоскость своей широкой базой, и можетъ случиться, что скольженія при этомъ не будетъ никакого. Уменьшая размѣры узкаго сѣченія до нуля и переходя, такимъ образомъ, къ обыкновенной островершинной пирамидѣ, можемъ, при извѣстныхъ условіяхъ, вогнать ее этой острой вершиной въ опорную поверхность, подобно тому, какъ мы можемъ вонзить иглу въ дерево; при такихъ условіяхъ не только не будетъ никакого движенія, но, наоборотъ, мы получаемъ систему, въ извѣстномъ смыслѣ могущую быть принятой за одно цѣлое.

Итакъ, несомнѣнно, что уменьшенію площади соприкосновенія имѣется извѣстный предѣлъ, ниже котораго скольженіе становится уже невозможнымъ, въ виду чего слѣдуетъ принять, что между величиной нормальнаго давленія на единицу поверхности соприкосновенія извѣстная зависимость, несомнѣнно, существуетъ; къ сожалѣнію, никакихъ опредѣленныхъ указаній по этому вопросу не имѣется совсѣмъ, и мы вынуждены довольствоваться тѣмъ, что намъ далъ Кулонъ.

Что касается послѣдняго, пятаго, закона, говорящаго, что коэффиціентъ тренія не зависитъ отъ относительной скорости движенія тѣлъ, то законъ этотъ опять ведетъ къ ряду сомнѣній: не говоря уже о томъ, что предположеніе о существованіи зависимости между скоростью деформированія зубьевъ и коэффиціентомъ тренія нельзя не признать весьма правдоподобнымъ, мы имѣемъ рядъ прямыхъ опытовъ, устанавливающихъ существованіе такой зависимости; съ однимъ изъ методовъ изученія ея мы познакомимся въ дальнѣйшемъ.

Все сказанное, а въ частности, наши постоянныя указанія на отсутствіе надежныхъ данныхъ по всѣмъ вопросамъ, касающимся тренія, заставляетъ задаться вопросомъ: почему же, при такомъ огромномъ числѣ изслѣдователей и за столь большой промежутокъ времени, отъ Coulomb'a до нашихъ дней, по вопросу о треніи сдѣлано такъ мало или, вѣрнѣе, ничего? Нетрудно видѣть, что причина тому лежитъ, прежде всего, въ крайней сложности и трудности относящихся сюда аналитическихъ выкладокъ, допускающей простоту рѣшенія лишь въ немногихъ частныхъ случаяхъ; затѣмъ, много препятствій и трудностей представляетъ собою постановка относящихся сюда опытовъ, которая могла бы обусловить и обезпечить надежность получаемыхъ результатовъ.

По поводу послѣдняго замѣчанія необходимо указать, что законы Кулона имѣютъ въ виду

трение сухих, несмазанных тел; но получить на практике нечто подобное крайне трудно, — поверхности трущихся тел могут быть влажными или чем-либо смазанными, а между тем малейших, даже незамытных остатков влаги или смазки уже вполне достаточно для извращения явлений и совершенно изменения результатов.

Въ конце 70-ых годов физиками Warburg'ом и был предпринят ряд опытов съ треніемъ, где были приняты всѣ мѣры къ обезпеченію сухости трущихся поверхностей. Эти физики изслѣдовали треніе стеклянной линзы о стеклянную же пластинку; эта линза съ наложеннымъ на нее грузомъ была подвѣшиваема, какъ крутильный маятникъ. Закрутивъ линзу и выведя ее, такимъ образомъ, изъ положенія равновѣсія, ее отпускали, и линза, стремясь возвратиться въ свое начальное положеніе, начинала вращаться, причемъ ей приходилось испытывать треніе о поверхность подставки; по затуханію вращательныхъ колебаній можно легко опредѣлить силу, обусловливавшую появленіе затуханій, т.-е. можно подсчитать силу треніа, проявлявшуюся здѣсь. Закручивая линзу на разные углы и, значитъ, вызывая различныя угловыя скорости вращенія, и нагружая линзу различными грузами, оказалось возможнымъ вывести, между прочимъ, заключеніе, что сила треніа отъ скорости не зависитъ. Но это заключеніе справедливо лишь для случая треніа сухихъ тѣлъ, какой названные ученые и имѣли въ своихъ

опытахъ: линзы, которыми они пользовались при опытахъ, а также опорныя стеклянныя пластинки, высушивались передъ опытами весьма тщательно; весь приборъ ставился въ герметически закрывавшійся ящикъ со стеклянными стѣнками, куда помѣщались также сосуды съ веществами, притягивающими и поглощающими влагу. Принявъ такія предосторожности, экспериментаторы могли быть увѣрены, что къ трущимся поверхностямъ доступа влажности извнѣ не было и что поэтому они, дѣйствительно, имѣли дѣло съ треніемъ сухихъ тѣлъ. Кромѣ того, благодаря присутствію цвѣтныхъ Ньютоновыхъ колецъ, оказывалось возможнымъ весьма легко и удобно слѣдить за степенью сухости поверхности соприкосновенія въ приборѣ, ибо эти кольца, при наличности нѣкоторой влажности на поверхности соприкосновенія, сейчасъ же соотвѣтственно мѣняютъ свой характеръ. Такимъ образомъ, благодаря ряду предосторожностей, удалось обезпечить треніе дѣйствительно сухихъ тѣлъ, а вдобавокъ, сочетаніе оптическихъ феноменовъ обезпечивало возможность контролированія сухости поверхности соприкосновенія въ любой моментъ опыта.

Нечего и говорить, что подобные опыты, произведенные съ непрозрачными тѣлами, заслуживающіе довѣрія результатовъ дать не могутъ потому, что за состояніемъ трущихся поверхностей слѣдить въ такихъ случаяхъ невозможно, а это, въ свою очередь,

отнимаетъ у насъ всякую увѣренность въ томъ, что тѣ или другіе полученные нами путемъ такихъ опытовъ результаты дѣйствительно имѣютъ силу для сухихъ данныхъ тѣлъ. Не болѣе довѣрія внушаютъ и всякіе другіе опыты съ треніемъ, въ виду чего ко всякимъ цифровымъ даннымъ, приводимымъ въ различныхъ руководствахъ и справочникахъ, слѣдуетъ относиться съ большой осторожностью.

Все сказанное о силахъ трепія позволяетъ отнести ихъ къ категоріи силъ пассивныхъ, въ томъ смыслѣ, что самостоятельное ихъ возникновеніе, при отсутствіи другихъ силъ, могущихъ дать слагающія, максимальныя одно тѣло на другое, невозможно; кромѣ того, содѣйствовать движенію, въ смыслѣ увеличенія скорости его, или вызвать вновь хотя какое бы то ни было движеніе, эти силы сами по себѣ не могутъ. Надо признать, что силы трепія имѣютъ своею конечною цѣлью уничтоженіе движенія и переводъ тѣла въ состояніе покоя. Какъ извѣстно, этимъ свойствомъ силъ трепія весьма широко пользуются въ самыхъ разнообразныхъ случаяхъ практики,— достаточно напомнить о тормозахъ и всякаго рода модераторахъ движенія, имѣющихъ исключительной своей цѣлью уничтоженіе движенія различныхъ системъ въ кратчайшее время,— иными словами, переводъ всего запаса живой силы данной системы въ различные другіе виды энергіи.

Роль силъ трепія не только въ машиностроеніи и

строительномъ дѣлѣ, но и, вообще, въ хозяйствѣ природы, громадна, — неподвижность частей машинъ и сооруженій обезпечивается почти во всѣхъ случаяхъ существованіемъ возбужденія силъ тренія, достаточныхъ для противодѣйствія сдвигающимъ усиліямъ, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто при укрѣпленіи станинъ различныхъ машинъ на фундаментахъ, при кладкѣ стѣнъ, скрѣпленіи различныхъ частей сооруженій и машинъ помощью болтовъ, клиньевъ, гвоздей, заклепокъ и проч. Если бы не было тренія, то мы не имѣли бы ни тканей, ни веревокъ, ни бумаги и т. д.; мало того, ни одно живое существо, разсматриваемое, какъ нѣкоторая система, находящаяся подъ дѣйствіемъ цѣлаго ряда силъ внутреннихъ и единственной внѣшней силы, — силы тяжести, — не могло бы перемѣщать своего центра тяжести въ направленіяхъ, отличныхъ отъ направленія силы тяжести: центръ тяжести каждаго такого организма или оставался бы все время въ покоѣ или перемѣщался бы въ пространствѣ прямолинейно и равномѣрно, а кромѣ того, могъ бы перемѣщаться еще только по направленію силы тяжести, т. е. въ вертикальномъ направленіи. Такимъ образомъ, мы не могли бы самостоятельно ни сдвинуться съ мѣста въ какомъ-нибудь горизонтальномъ направленіи, не прибѣгая къ помощи и содѣйствію другихъ системъ, не могли бы также удержаться на мѣстѣ, разъ начали бы двигаться; взять и захватить что-либо въ руки, поднять что-

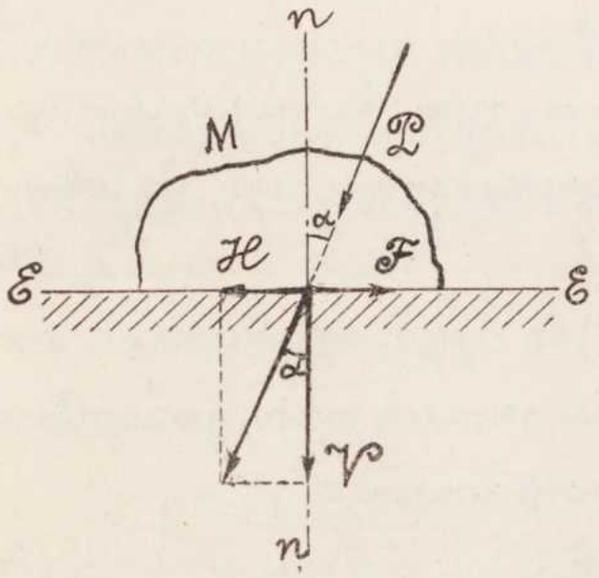
-нибудь, а значитъ, и бросить, мы бы возможности не имѣли. О послѣдствіяхъ исчезновенія треніа на земномъ шарѣ можно было бы говорить очень много, но и сказаннаго, полагаемъ, достаточно для обрисовки, хотя бы только въ главныхъ чертахъ, значенія силъ треніа среди другихъ силъ, участвующихъ въ жизни природы.

§ 2. Равновѣсіе точки на поверхности при наличности силъ треніа. Область равновѣсія.

То универсальное значеніе, которое, какъ мы видѣли, имѣютъ пассивныя силы треніа въ явленіяхъ природы, дѣлаетъ необходимымъ внесеніе соотвѣтствующихъ поправокъ въ уравненія механики, трактующія эти явленія. Несомнѣнно, что всѣ, какъ статическія, такъ и динамическія уравненія механики должны быть дополняемы членами, характеризующими вліяніе и участіе силъ треніа въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Въ нашемъ курсѣ мы, по необходимости, ограничимся лишь наиболѣе простыми случаями равновѣсіа и движенія и въ текущемъ параграфѣ разсмотримъ, какая поправка должна быть введена въ основное положеніе статики, говорящее, что для равновѣсія точки на поверхности подъ дѣйствіемъ какой-либо силы необходимо, чтобы сила была нормальна къ поверхности; если же эта сила окажется наклоненной къ

нормали хотя бы подъ сколь угодно малымъ угломъ, то результатомъ этого сейчасъ же явится движеніе. Опытъ показываетъ, однако, что на дѣлѣ происходитъ нѣчто совершенно другое: сила, воздѣйствующая на тѣло, можетъ быть отклоняема отъ нормали на довольно большой уголъ, прежде чѣмъ начнется движеніе. Этотъ фактъ получаетъ объясненіе, если мы привлечемъ къ учету силъ, здѣсь дѣйствующихъ, еще и силы тренія.

Разберемъ сначала тотъ случай, когда нѣкоторое тѣло M лежитъ на нѣкоторой плоскости EE (фиг. 11).



Фиг. 11.

Пусть дѣйствующая на это тѣло сила P, результирующая всѣхъ внѣшнихъ силъ, образуетъ съ нормалью nn уголъ α.

Разложимъ силу P на силу V, перпендикулярную къ плоскости, — сила V пойдетъ по нормали nn, — и на силу H, параллельную плоскости. Сила V, равная $P\cos\alpha$, представитъ собою нормальное давленіе тѣла на плоскость EE; сила же H, равная $P\sin\alpha$, представитъ собою силу, движущую тѣло по поверхности. Этому движенію будетъ, однако, противодѣйствовать сила тренія F, вызываемая на поверхности соприкосновенія нормальнымъ давленіемъ V; направлена она будетъ противоположно силѣ H и будетъ равна fV, иначе $fP\cos\alpha$, гдѣ f есть коэффиціентъ

трения, примѣчествующій данному случаю. Ясно, что если сила H будетъ недостаточна для того, чтобы преодолѣть сопротивленіе, оказываемое силой трения F, т.-е. если

$$H < F, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

то движенія не будетъ. Подставляя вмѣсто H и F значенія ихъ, данныя выше, находимъ, что условіемъ покоя тѣла является неравенство

$$P\sin\alpha < fP\cos\alpha,$$

иначе

$$\operatorname{tg}\alpha < f. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Послѣднее значеніе угла α, при которомъ еще возможенъ покой тѣла, опредѣляется изъ условія

$$\operatorname{tg}\alpha = f. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2')$$

Соединяя условія (2) и (2') въ одно, заключаемъ, что условіемъ покойнаго состоянія тѣла при дѣйствіи на него силы P, является соотношеніе

$$\operatorname{tg}\alpha \leqq f. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

При дальнѣйшемъ увеличеніи угла α уже начинается движеніе. Такимъ образомъ, можно сказать, что для покоя тѣла въ данномъ случаѣ вовсе необязательно, чтобы результирующая P всѣхъ внѣшнихъ силъ была непремѣнно нормальна къ плоскости EE; для этого достаточно только, чтобы эта сила P была наклонена къ нормали подъ угломъ α, тангенсъ котораго меньше коэффиціента трения f.

Условію (3) можно дать иной внѣшній видъ, положивъ

$$f = \operatorname{tg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Уголъ φ, опредѣляемый отсюда, называется угломъ тренія. Условію (3) можетъ быть дано теперь видъ:

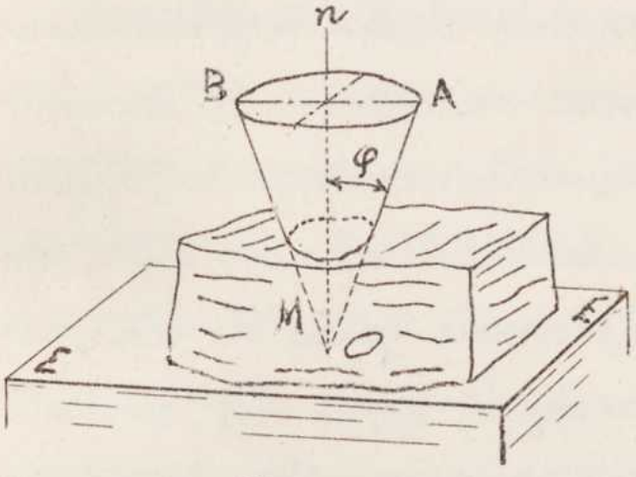
$$\operatorname{tg}\alpha \leqq \operatorname{tg}\varphi,$$

что сводится къ соотношенію

$$\alpha \leqq \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

и условіе покоя даннаго тѣла, приведенное выше, можетъ быть перифразировано короче такъ: тѣло, находящееся подъ воздѣйствіемъ какой-угодно силы P, будетъ оставаться въ покоѣ до тѣхъ поръ, пока уголъ α наклона силы P къ нормали не будетъ превосходить угла тренія φ.

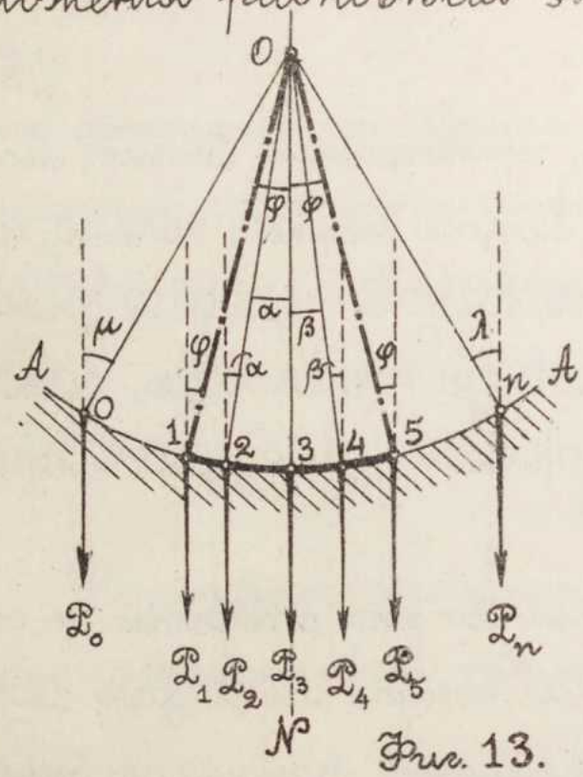
Взявъ общій случай движенія во всѣ стороны и описавъ уголъ φ вокругъ нормали конусъ AOB (фиг. 12), называемый конусомъ тренія, можемъ сказать, что если данная сила лежитъ внутри этого конуса, то движенія не будетъ; предѣльнымъ случаемъ будетъ совпаденіе силы съ направленіемъ образующей этого конуса.



Фиг. 12.

Посмотримъ теперь, какъ будетъ обстоять дѣло въ случаѣ, если данное тѣло или, ради упрощенія дѣла, матеріальная точка, вынуждены все время находиться на кривой или поверхности конечной кривизны. Разберемъ простѣйшій случай,— случай математическаго маятника: пусть нѣкоторая матеріаль-

ная точка m, находясь подъ дѣйствіемъ силы тяжести, принуждена все время оставаться на дугѣ AA постояннаго радіуса R и центра O (фиг. 13). Посмотримъ, гдѣ размѣстятся по этой дугѣ всѣ положенія равновѣсія этой точки.



Фиг. 13.

Въ предѣлахъ дуги AB качанія нашего маятника силы тяжести можно считать направленными параллельно отвѣсной линіи ON и, значитъ параллельными другъ другу. Въ виду этого, при перемѣщеніи точки m по этой дугѣ изъ нѣкотораго начальнаго положенія O послѣдовательно въ положенія 1, 2, ..., 5, .., сила тяжести P точки m, перемѣщаясь вмѣстѣ съ этой послѣдней, будетъ оставаться все время параллельной самой себѣ, причемъ будетъ образовывать различные углы съ нормалями въ соотвѣтствующихъ точкахъ дуги AA, увеличивающіеся по мѣрѣ удаленія точки m отъ вертикальнаго радіуса OЗ.

По законамъ теоретической механики, точка m, будучи помѣщена на дугу AA, будетъ имѣть на ней только одно положеніе равновѣсія, а именно, положеніе (З) на вертикальномъ радіусѣ OЗ. На дугѣ же такихъ положеній оказывается безконечное множество. Дѣйствительно, согласно предыдущему,

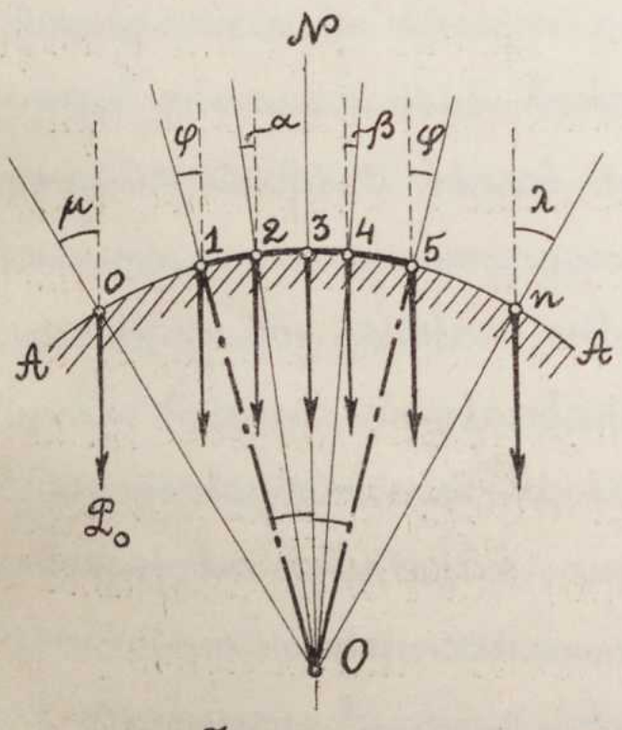
можемъ утверждать, что точка m можетъ находиться въ равновѣсіи тамъ, гдѣ уголъ μ силы P съ нормалью не будетъ превосходить угла тренія φ. Въ данномъ случаѣ точками дуги AA, удовлетворяющими этому требованію, оказываются всѣ точки дуги (1–5), крайніе радіусы которой O1 и O5 образуютъ углы φ съ вертикальнымъ радіусомъ O3. Дѣйствительно, для любой точки (2) дуги (1–3) уголъ α силы P съ нормалью 2N_2 оказывается равнымъ центральному углу 2O3, а этотъ послѣдній, будучи измѣряемъ дугой (2–3), будетъ меньше угла тренія φ, измѣряемаго дугой (1–3). То же самое имѣетъ мѣсто для любой точки дуги (3–5),— въ каждой точкѣ ея уголъ силы тяжести съ нормалью будетъ меньше φ.

Итакъ, на дугѣ AA можно выдѣлить нѣкоторую опредѣленную часть ея,— дугу (1–5),— во всѣхъ точкахъ которой уголъ силы тяжести съ нормалью оказывается меньшимъ угла тренія φ, а это значитъ, что точка m, оказавшись въ какой-либо моментъ гдѣ-нибудь внутри этой дуги безъ всякой скорости, самостоятельно сдвинуться затѣмъ съ мѣста уже не сможетъ; эта дуга (1–5) представляетъ собою, такимъ образомъ, геометрическое мѣсто положеній равновѣсія данной точки на данной дугѣ AA. Положеній равновѣсія оказывается здѣсь, такимъ образомъ, не одно, какъ это говоритъ теоретическая механика, а безконечное множество; всѣхъ ихъ обнимаетъ выдѣлившаяся указаннымъ опредѣленнымъ образомъ дуга (1–5), которая, въ силу

разъясненныхъ выше свойствъ ея точекъ, и носитъ названіе области равновѣсія.

Въ случаѣ сферическаго маятника, когда точка m можетъ перемѣщаться сферы, положимъ, того же радіуса 03, область равновѣсія опредѣлится, очевидно, вращеніемъ дуги 13 вокругъ вертикали 03 и представитъ собою, такимъ образомъ, часть поверхности сферы, вырѣзанную центральнымъ угломъ 103, вращающимся около своей стороны 03. Очутившись въ этой области безъ начальной скорости, матеріальная точка m останется въ покоѣ. Положеній равновѣсія ея оказывается здѣсь также безконечно много. Область равновѣсія представитъ собою, очевидно, поверхность основанія шарового сектора съ угломъ 2φ.

Тѣ же замѣчанія имѣютъ силу и для того случая, когда дуга, по которой движется точка m, расположена своей выпуклостью вверхъ, какъ это изображено на фиг. 14. Если вертикальный радіусъ обозначимъ черезъ 03, а уголъ треніе — черезъ φ, то разсужденія, во всѣмъ подобныя предыдущимъ, покажутъ, что здѣсь опять выдѣлится цѣлая область равновѣсія, — это будетъ дуга (15), крайніе радіусы которой 01 и 05 образуютъ углы φ



Фиг. 14.

съ среднимъ вертикальнымъ радіусомъ $O3$. Вращая дугу AA вокругъ вертикали $O3$, выдѣлимъ на поверхности сферы радіуса $O3$ нѣкоторую площадку, служащую основаніемъ сферическаго сектора съ угломъ 2φ; боковую поверхность его опредѣлитъ сторона $O1$ угла φ, вращающагося вокругъ своей стороны $O3$.

Подобныя разсужденія возможно примѣнить къ любой другой криволинейной поверхности, сколь бы сложна она ни была; на ней всегда окажется возможнымъ выдѣлить нѣкую область равновѣсія, обнимающую собою всѣ тѣ точки ея, нормали въ которыхъ образуютъ съ направленіями соотвѣтствующихъ результирующихъ всѣхъ внѣшнихъ силъ углы, меньшіе принадлежащихъ случаю угловъ тренія,— иными словами, въ этой области равновѣсія лежатъ всѣ тѣ точки, въ которыхъ результирующія оказываются проходящими внутри соотвѣтствующихъ конусовъ тренія.

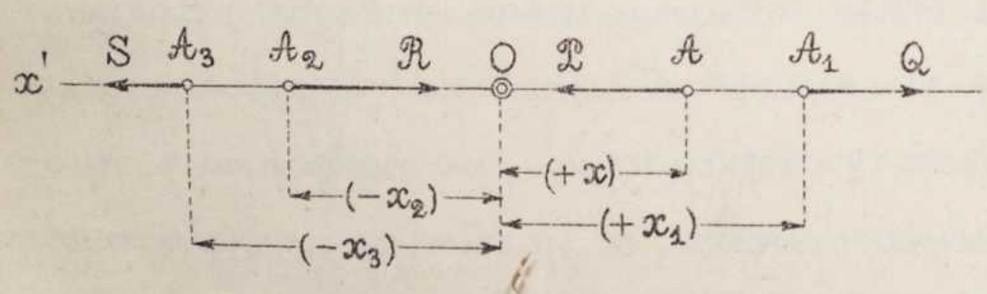
Всѣ эти заключенія примѣнимы къ любой системѣ матеріальныхъ точекъ, и, по аналогіи съ предыдущимъ, нетрудно заключить, что для каждой такой системы, а значитъ, для каждаго имѣющагося у насъ механизма, существуетъ безконечное множество положеній равновѣсія, опредѣляемыхъ соотвѣтствующими областями равновѣсія отдѣльныхъ точекъ; размѣры и расположеніе этихъ областей равновѣсія обусловливаются формой поверхностей, по которымъ происходитъ движеніе точекъ, и значеніями силъ тренія. Результатъ этотъ можно распространить и

на всякія динамическія сочетанія, — на случаи движенія системъ и точекъ подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ и силъ тренія, — и два простѣйшихъ примѣра изслѣдованія подобныхъ движеній мы и приведемъ теперь же, въ очередныхъ параграфахъ.

§3. Движеніе твердаго тѣла по плоскости подъ вліяніемъ силъ, пропорціональныхъ разстояніямъ тѣла отъ нѣкотораго центра притяженія, и силъ тренія. Движеніе подъ воздѣйствіемъ пружинъ.

На излагаемыхъ ниже простыхъ примѣрахъ разсмотримъ, что вноситъ треніе въ вопросъ о движеніи. Взятые нами случаи удобны тѣмъ, что легко поддаются простому анализу и даютъ возможность, путемъ аналогій, судить и о болѣе сложныхъ случаяхъ, разъ только ихъ удается подвести подъ изслѣдуемые ниже. Предварительно, во избѣжаніе недоразумѣній, необходимо условиться въ обозначеніяхъ различныхъ векторовъ, съ которыми намъ придется имѣть дѣло въ дальнѣйшемъ.

Пусть на прямой $x'x$ (фиг. 15) выдѣленъ нами рядъ точекъ: A, A_1, A_2, ... Для того, чтобы координировать на принимаемой прямую $x'x$



Фиг. 15.

за ось абсциссъ, а одну ея точку, — какую-либо точку O, — за начало координатъ. Тогда положенія всѣхъ точекъ на оси $x'x$ опредѣлятся разстояніями ихъ отъ начала координатъ O, т.-е. отрѣзками OA_3, OA_2, OA, OA_1, . . ., причемъ для точекъ, лежащихъ вправо отъ начала, будемъ считать эти разстоянія положительными, а влѣво — отрицательными, что и будемъ отмѣчать знаками плюсъ и минусъ, приставляя ихъ къ абсолютнымъ значеніямъ длинъ этихъ отрѣзковъ, выраженныхъ въ какихъ-либо единицахъ. Такимъ образомъ, разстояніе OA точки A (фиг. 15) выразится черезъ $(+x)$, разстояніе OA_3 — черезъ $(-x_3)$ и т. д.

Пусть, далѣе, всѣ эти точки находятся подъ дѣйствіемъ различныхъ силъ: P, Q, . . ., дѣйствующихъ по тому или другому направленію вдоль оси $x'x$. Условимся считать положительно-направленными или положительными тѣ изъ нихъ, которыя стремятся увеличить разстоянія точекъ отъ начала, а отрицательно-направленными или отрицательными тѣ, которыя эти разстоянія уменьшаютъ. Въ виду этого силы P и R (фиг. 15) слѣдуетъ признать отрицательными и общія выраженія ихъ снабдить знакомъ минусъ, а силы Q и S — положительными и выраженія ихъ снабдить плюсомъ.

Далѣе, при составленіи уравненій движенія намъ придется имѣть дѣло еще съ ускореніями $\frac{d^2x}{dt^2}$. Чтобы не путаться съ знаками этихъ вторыхъ производныхъ, нужно помнить, что подъ аргументомъ x

разумѣется здѣсь координата нашей точки въ разсматриваемомъ положеніи ея на оси и что мы составляемъ законъ измѣненія ускореній этой точки, т.-е. законъ измѣненія второй производной отъ этой координаты по времени. Поэтому для точекъ съ положительными координатами $(+x)$ вторая производная должна быть изображаема черезъ $\frac{d^2(+x)}{dt^2}$, т.-е. черезъ $\frac{d^2x}{dt^2}$, и здѣсь мы составимъ уравненіе, характеризующее извѣстныя измѣненія положительныхъ координатъ; для точекъ же съ отрицательными координатами $(-x)$ вторая производная должна быть изображаема черезъ $\frac{d^2(-x)}{dt^2}$, т.-е. черезъ $\left(-\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, и уравненіе дастъ намъ законъ извѣстныхъ опредѣленныхъ измѣненій отрицательныхъ координатъ.

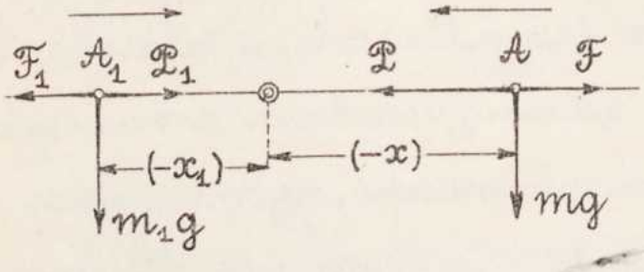
Послѣ этихъ необходимыхъ предварительныхъ замѣчаній приступимъ къ разбору интересующей насъ теперь задачи, сформулировать условіе коей можно такъ:

Нѣкоторая матеріальная точка массы m движется по горизонтальной оси $x'x$ (фиг. 16), будучи притягиваема центромъ O, лежащимъ на той же прямой $x'x$, съ силой, прямопропорціональной разстоянію этой точки отъ центра притяженія O. Опредѣлить движеніе этой точки, предполагая, что она движется по оси $x'x$ съ треніемъ, коэффиціентъ котораго примемъ равнымъ f.

Такимъ образомъ, сила $\mathfrak{P}$ притяженія данной точки центромъ O выражается, вообще, черезъ

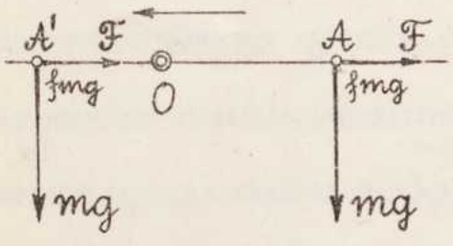
$$\mathfrak{P} = -k.d, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

гдѣ k есть нѣкоторый опредѣленный коэффиціентъ пропорціональности, а d — разстояніе точки въ данный моментъ отъ начала. Въ виду этого, если точка находится въ положеніи A, гдѣ $d = OA = +x$, то здѣсь $\mathfrak{P} = -kx$; если же точка взята въ положеніи A_1, гдѣ $d = OA_1 = -x_1$, то здѣсь $\mathfrak{P}_1 = -k.OA_1 = -k(-x_1) = +kx_1$ и т. д.



Фиг. 16.

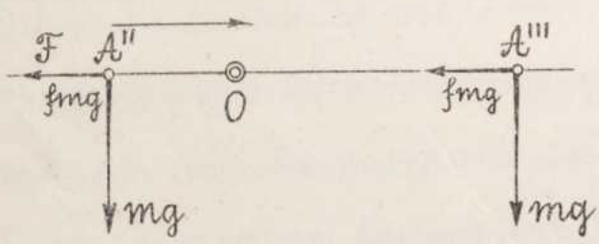
Что касается силъ тренія, то онѣ появятся благодаря тому, что наша матеріальная точка находится подъ воздѣйствіемъ силы тяжести ея mg, направленной всегда внизъ. Согласно общимъ положеніямъ, сила тренія выразится здѣсь черезъ fmg и будетъ въ каждый данный моментъ направлена противоположно движенію точки. При учетѣ ея необходимо придерживаться правила о знакахъ силъ, приведеннаго выше, а это ведетъ къ слѣдующимъ очевиднымъ заключеніямъ:



Фиг. 17.

Пусть точка движется справа налѣво, какъ это изображено на фиг. 17. Въ этомъ случаѣ сила тренія F, равная fmg, въ положеніи A нашей точки должна быть взята съ плюсомъ, ибо она здѣсь сопротивляется уменьшенію разстоянія OA, въ положеніи же A' — съ минусомъ, ибо здѣсь она этому уменьшенію разстоянія точки до начала способствуетъ.

Если точка движется слѣва направо, какъ это изображено на фиг. 18, то въ моментъ нахожденія ея въ A'' знакъ у силы тренія F будетъ плюсъ $(+fmg)$, а въ A''' — минусъ $(-fmg)$.

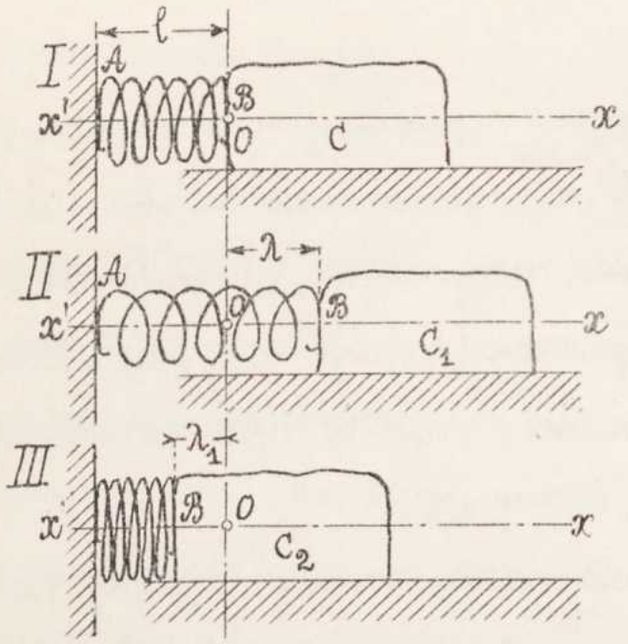


Фиг. 18.

Съ силами, повинующимися закону (a), на практикѣ приходится встрѣчаться весьма часто, а именно — во всѣхъ случаяхъ примѣненія цилиндрическихъ и коническихъ пружинъ, рессоръ и т. п. Дѣйствительно, пусть у насъ имѣется нѣкоторая цилиндрическая пружина AB (фиг. 19), одинъ конецъ которой, A, наглухо закрѣпленъ въ стѣнѣ или въ какой-либо неподвижной детали, а къ другому концу B прикрѣпленa подвижная деталь C, могущая перемѣщаться параллельно оси $x'x$ данной пружины.

Положимъ, кромѣ того, что конецъ B пружины приходится какъ разъ на этой оси, такъ что, при движеніи тѣла C, онъ будетъ перемѣщаться именно по этой прямой $x'x$. Легко видѣть, что, при взятомъ нами поступательномъ перемѣщеніи тѣла C, это движеніе его можно опредѣлять движеніемъ какой-либо одной его точки, и за нее мы и возьмемъ эту точку B, — точку прикрѣпленія пружины къ тѣлу. Такимъ образомъ, принимая за начальное положеніе тѣла то, когда вся система находится въ равновѣсіи, — этотъ случай изображенъ на фиг. 19, I, — и отмѣтивъ на оси $x'x$ соотвѣтствующее положеніе точки B, — пусть это будетъ нѣкоторая точка O, — мы можемъ въ дальнѣйшемъ опредѣлять

величину перемѣщенія тѣла отклоненіемъ точки B отъ начальнаго положенія ея O. Такъ, при перемѣщеніи въ C_1, передвиженіе тѣла, а значитъ, и вытяжка пружины, оцѣнятся отрѣзкомъ λ (фиг. 19, II), а при перемѣщеніи въ C_2, гдѣ имѣетъ мѣсто уже сжатіе пружины, — отрѣзкомъ λ_1 (фиг. 19, III) и т. д.



Фиг. 19.

Подобная оцѣнка перемѣщеній тѣла C является особенно удобной при опредѣленіи воздѣйствія пружины на тѣло. На самомъ дѣлѣ, пусть тѣло C въ нѣкоторый моментъ оказалось оттянутымъ отъ его первоначальнаго положенія C въ положеніе C_1 (фиг. 19, II). Все перемѣщеніе тѣла, равно какъ и измѣненіе длины пружины, можно оцѣнить перемѣщеніемъ выбранной нами точки B. Принимая, что теперь она перешла въ B_1, заключаемъ, что вытяжка пружины равна здѣсь OB_1, — длину эту мы обозначили на чертежѣ черезъ λ. Но изъ теоріи упругости извѣстно, что сопротивленіе пружины растяженію ея (или сжатію) пропорціонально вытяжкѣ ея (или сокращенію). Поэтому мы имѣемъ право сказать, что, при перемѣщеніи тѣла въ C_1, на него будетъ дѣйствовать сила сопротивленія пружины, равная $k\lambda$, гдѣ k есть нѣкоторая вполнѣ опредѣленная для данной

случая и постоянная при данныхъ условіяхъ величина, зависящая отъ размѣровъ пружины и свойствъ матеріала ея.

Подобнымъ же образомъ, при перемѣщеніи тѣла въ C_2 (фиг. 19, III), когда точка B передвинется влѣво на величину λ_1, сила сопротивленія пружины, претерпѣвающей здѣсь сжатіе λ_1, выразится черезъ $k\lambda_1$, гдѣ коэффиціентъ k остается тотъ же, что и при растяженіи пружины.

Такимъ образомъ, данное намъ тѣло C, при разнообразныхъ перемѣщеніяхъ его вдоль оси $x'x$, будетъ, въ каждомъ данномъ положеніи, испытывать со стороны пружины такое же воздѣйствіе, какъ если бы въ точкѣ O находился нѣкоторый центръ притяженій, дѣйствующій съ силой, пропорціональной разстоянію опредѣленной точки B этого тѣла отъ этого центра O, а пружины бы уже не было. Такое представленіе о существованіи подобнаго центра O освобождаетъ насъ отъ необходимости слѣдить за состояніемъ пружины AB въ разные моменты ея работы: какъ видимъ, достаточно подсчитать значеніе коэффиціента k и опредѣлить положеніе центра O, чтобы получить затѣмъ возможность учитывать дѣйствіе пружины на тѣло A въ каждый данный моментъ. Послѣ этихъ замѣчаній вернемся къ нашей задачѣ.

Замѣчая, что движеніе нашей точки,—это будетъ, какъ видимъ точка, соотвѣтствующая упомянутой выше точкѣ B тѣла,— можетъ протекать

только вдоль оси $x'x$, заключаемъ, что рѣшеніе нашей задачи сводится къ интегрированію дифференціальнаго уравненія вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum \mathfrak{X} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

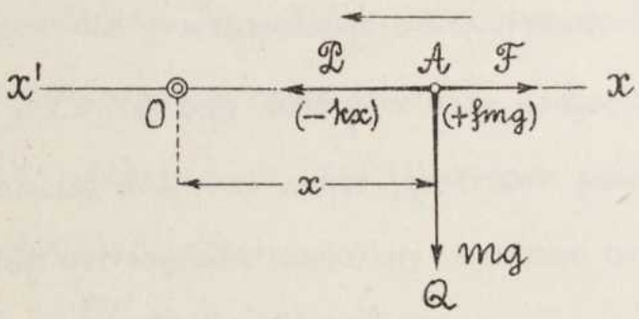
гдѣ d^2x/dt^2 есть ускореніе точки въ движеніи ея по оси $x'x$, а ΣX — сумма проекцій на туже ось всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на нашу точку; при этомъ замѣтимъ, что, въ виду того, что наша точка можетъ двигаться только по оси абсциссъ, ускореніе d^2x/dt^2 представляетъ собою въ то же время полное ускореніе точки. Напишемъ теперь уравненіе (b) въ раскрытомъ видѣ примѣнительно къ какому-либо случаю движенія точки, который мы примемъ за основной. За такой основной случай возьмемъ тотъ, когда наша точка, двигаясь влѣво, находится въ области положительныхъ абсциссъ; случай этотъ изображенъ на фиг. 20. Посмотримъ, прежде всего, какъ при этихъ условіяхъ выразится сумма, стоящая въ правой части ур-ія (b).

По условію, наша точка притягивается центромъ O съ силой, пропорціональной разстоянію d точки до центра притяженія O. Обозначивъ коэффиціентъ этой пропорціональности черезъ k, — этотъ коэффиціентъ, какъ извѣстно, имѣетъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ свое вполнѣ опредѣленное значеніе, — находимъ, что сила притяженія P точки, находящейся въ основномъ положеніи A (фиг. 20), выразится такъ:

$$P = -k.d = -k.OA = -k.(+x) = -kx \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Такъ какъ сила P направлена по оси $x'x$, то она спроектируется на эту ось цѣликомъ и цѣликомъ же войдетъ въ уравненіе (b).

Далѣе, на нашу точку все время дѣйствуетъ вѣсъ ея Q, — это есть постоянная сила, равная mg. Такъ какъ она направлена все время вертикально, а ось $x'x$ горизонтальна, то проекція силы Q на эту ось оказывается равной нулю, вслѣдствіе чего въ уравненіе (b) эта сила не войдетъ совсѣмъ.



Фиг. 20.

Зато въ это уравненіе войдетъ вызываемая этой силой Q сила тренія F, направленная здѣсь горизонтально и выражаемая, вообще, соотношеніемъ

$$F = fQ = fmg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Сила эта направлена всегда прямопротивоположно движенію точки и въ основномъ случаѣ (фиг. 20) выразится черезъ

$$F = + fmg \, , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

— знакъ плюсъ поставленъ потому, что сила F противодѣйствуетъ здѣсь уменьшенію разстоянія d. Сила эта войдетъ въ уравненіе (b) цѣликомъ, такъ какъ въ данномъ случаѣ оказывается направленной постоянно по оси $x'x$.

Этими силами исчерпывается вся совокупность силъ, дѣйствующихъ на нашу точку, въ виду чего сумма ΣX, стоящая въ правой части основного уравненія

(в), выразится въ этомъ основномъ случаѣ такъ:

$$\Sigma X = \mathfrak{P} + \mathfrak{F} = -kx + fmg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Переходимъ теперь къ лѣвой части. Такъ какъ точка находится въ области положительныхъ абсциссъ, то производная, стоящая въ этой лѣвой части, выразится здѣсь черезъ $d^2(+x)/dt^2$, послѣ чего основное уравненіе (в) перепишется въ раскрытомъ видѣ такъ:

$$m\frac{d^2(+x)}{dt^2} = -kx + fmg$$

т.-е.

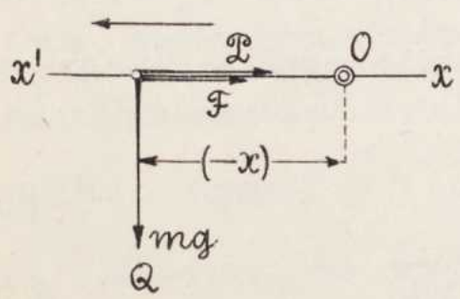
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fmg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

Раздѣливъ обѣ части уравненія на m и назвавъ частное k/m, ради сокращенія письма, опять черезъ k, дадимъ уравненію (1') видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fg^{*}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

---

*) Замѣтимъ, что при движеніи точки влѣво уравненіе (1) сохраняетъ свой видъ и для отрицательныхъ абсциссъ ($x < 0$). Дѣйствительно, замѣчая, что при $x<0$ сила $\mathfrak{P}$ выражается черезъ $\mathfrak{P} = -kd = -k(-x) = +kx$, а сила $\mathfrak{F}$, какъ способствующая теперь уменьшенію разстоянія d, будетъ взята съ минусомъ, перепишемъ уравненіе (в) для этой области такъ



Фиг. 21.

$$\frac{d^2(-x)}{dt^2} = +kx - fg,$$

что, очевидно, сведется къ тѣмъ же уравненіямъ (1') и (1).

Что касается движенія точки вправо, то оно, какъ это нетрудно провѣрить на дѣлѣ, опредѣляется уравненіемъ, нѣсколько отличнымъ отъ уравненія (1'). Объ этомъ обстоятельствѣ мы будемъ говорить подробно въ дальнѣйшемъ.

Таковъ законъ движенія нашей точки по оси x'x при наличности треніа. Если бы треніа не было, то членъ fmg отсутствовалъ бы, и для движенія безъ треніа мы получили бы уравненіе

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Съ движеніемъ, характеризуемымъ этимъ уравненіемъ (2), мы уже знакомы по курсу теоретической механики, почему на изслѣдованіи его здѣсь останавливаться не будемъ, тѣмъ болѣе, что ходъ его одинаковъ съ ходомъ рѣшенія аналогичнаго ему уравненія, получаемаго изъ ур-ія (1). Поэтому мы ограничимся приведеніемъ главнѣйшихъ выводовъ, къ которымъ приводитъ интеграція уравненія (2) движенія безъ Трен

Предположивъ, что въ начальномъ положеніи своемъ точка находится на разстояніи x_0 отъ центра притяженія, причемъ скорость ея въ этотъ моментъ равна нулю (начальная скорость $v_0 = 0$), находимъ, что движеніе точки характеризуется уравненіями:

$$x = x_0 \cos t\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots (g)$$

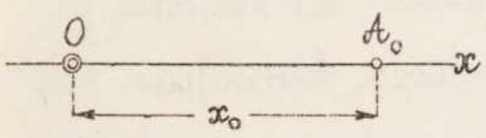
$$\frac{dx}{dt} = -x_0\sqrt{k} \sin t\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots (h)$$

Это есть такъ называемое гармоническое движеніе, при которомъ точка движется колебательнымъ движеніемъ съ періодомъ $\pi/\sqrt{k}$ по закону косинуса, отклоняясь отъ центра притяженія O по оси x'x на величину x_0 какъ въ одну сторону, такъ и въ

другую, такъ что вся амплитуда колебанія равна $2x_0$. Если мы представимъ себѣ точку, равномѣрно движущуюся по окружности радіуса x_0, то проекція ея на какой-либо неподвижный діаметръ будетъ двигаться по немуу, повинуясь законамъ (2), (g) и (h).

Это колебательное движеніе точки по закону (2) будетъ продолжаться все время безъ перерывовъ и безъ измѣненія періода и амплитуды колебаній. Посмотримъ, какъ будетъ обстоять дѣло въ случаѣ движенія съ треніемъ, характеризуемаго уравненіемъ (1).

Установимъ, прежде всего, начальныя данныя; они опредѣляются изъ того условія, что въ начальномъ положеніи A_0, на разстояніи $OA_0 = x_0$ отъ центра O, наша точка скорости не имѣла совсѣмъ, — мы отводимъ нашу точку на разстояніе x_0 отъ центра O, задерживаемъ ее тамъ и въ нѣкоторый моментъ, отъ котораго и будемъ вести счетъ времени за это движеніе точки влѣво, отпускаемъ, предоставивъ точку самой себѣ. Въ переводѣ на алгебраическій языкъ это основное условіе выразится такъ: при $t = 0$ имѣемъ $x = x_0$ и $(dx/dt)_{t=0} = 0$.

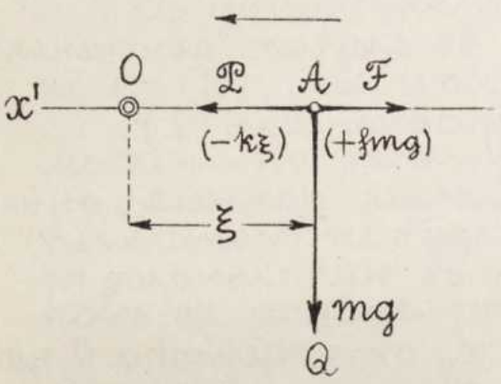


Фиг. 22.

Далѣе, въ виду наличности треніа, прежде всего возникаетъ вопросъ о существованіи при этомъ движеніи области треніа. Въ случаѣ движенія безъ треніа область равновѣсія представляется одной точкой O, — точка A можетъ находиться въ равновѣсіи лишь тогда, когда мы остановимъ ее въ моментъ прихода

ея въ точку O; будучи же остановленной, а затѣмъ освобожденной, внѣ точки O, она немедленно придетъ снова въ движеніе, и о покоѣ ея не можетъ быть затѣмъ и рѣчи. Посмотримъ, какъ будетъ обстоять дѣло въ случаѣ движенія съ треніемъ.

Возьмемъ точку A на какомъ-нибудь разстояніи ξ отъ центра O (фиг. 23). Сила, притягивающая ее къ центру O, выразится здѣсь черезъ $(-k\xi)$. Взявъ точку въ этомъ положеніи, мы не можемъ заранѣе сказать, будетъ ли она находиться при этомъ въ покоѣ или въ движеніи; все будетъ зависѣть отъ того, которая изъ горизонтальныхъ силъ, дѣйствующихъ на нашу точку, будетъ имѣть здѣсь перевѣсъ. Если сила треніе F, направленная здѣсь противоположно силѣ притяженія P, будетъ (по абсолютной величинѣ) больше ея, то точка A, не имѣя возможности двигаться, будетъ оставаться въ равновѣсіи; если же меньше, то, навѣрное, будетъ въ движеніи. Случай равенства будетъ предѣльнымъ, — при немъ точка можетъ двигаться только при наличности начальной скорости; если же точка при этомъ скорости имѣть не будетъ, то она будетъ оставаться въ покоѣ. Итакъ, условіемъ равновѣсія точки является неравенство



Фиг. 23.

$$[k\xi] \gtrless [fg] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Квадратныя скобки показываютъ, что величины,

въ нихъ заключенныя берутся въ ихъ абсолютныхъ значеніяхъ.

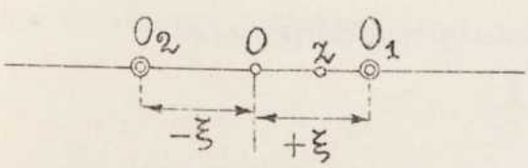
Такъ какъ факторы k, f и g суть величины постоянныя и положительныя, а перемѣнной является абсцисса ξ, то всегда можно подобрать такое ξ, чтобы это неравенство было удовлетворено. Отсюда заключаемъ, что положеній равновѣсія имѣется здѣсь безконечное множество; всѣ они характеризуются неравенствомъ

$$[\xi] \geqq \left[\frac{fg}{k}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Изъ этого соотношенія заключаемъ, что наибольшее отклоненіе $[\xi_0]$, при которомъ еще возможно равновѣсіе точки A, опредѣляется изъ уравненія

$$[\xi_0] = \left[\frac{fg}{k}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Всѣ $[\xi]$, бо́льшія $[\xi_0]$, будутъ давать **движеніе** точки A, а всѣ меньшія — покой ея, такъ что область равновѣсія будетъ имѣть своими границами точки O_1 и O_2 (фиг. 24), отстоящія каждая отъ центра O на ξ_0 и лежащія по разныя стороны отъ него. Такимъ образомъ, точка A, очутившись въ этой области безъ скорости, такъ въ покоѣ здѣсь и останется.



Фиг. 24.

Итакъ, область равновѣсія въ данномъ случаѣ существуетъ и представляется участкомъ O_1OO_2 (фиг. 24), крайнія точки котораго, O_1 и O_2, отстоятъ отъ начала O каждая на величину $\xi_0 = fg/k$. Размѣры этой обла-

сти ($O_1O_2 = 2\xi_0 = 2fg/k$) пропорціональны массѣ точки, коэффиціенту тренія f и обратно пропорціональна коэффиціенту притяженія k. Разсматривая случай движенія безъ тренія, какъ частный случай движенія съ треніемъ, когда $f = 0$, получимъ, что $2\xi_0 = 0$, и область равновѣсія сводится къ самой точкѣ O,— результатъ, извѣстный изъ предыдущаго.

Всѣ эти замѣчанія и заключенія по поводу области равновѣсія позволяютъ намъ значительно упростить разсмотрѣніе основного уравненія

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fg \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

путемъ замѣны перемѣннаго. Для этого во второй его части вынесемъ за скобки $(-k)$; тогда получимъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x - \frac{fg}{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Понятно, что для опредѣленія ξ_0, т.-е. абсциссы точки O_1, границы равновѣсія, достаточно приравнять d^2x/dt^2 нулю, т.-е. положить

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x - \frac{fg}{k}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (k)$$

Дѣйствительно, отсюда получаемъ уравненіе

$$x - \frac{fg}{k} = 0,$$

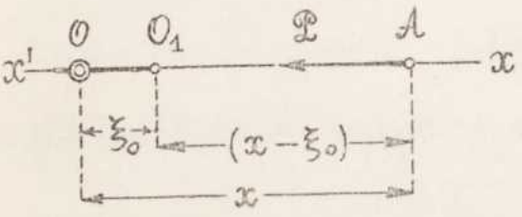
дающее какъ разъ значеніе ξ_0:

$$x = \frac{fg}{k} = \xi_0,$$

уже опредѣленное выше, по ур. (5). Имѣя его въ виду, можемъ дать основному уравненію (1) видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - \xi_0), \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

показывающій, что наша точка двигается точно такъ же, какъ двигалась бы она, если бы треніе исчезло, а центръ притяженія, находившійся раньше въ O, оказался перенесеннымъ съ этого стараго мѣста на новое O_1, отстоящее отъ O на разстояніи ξ_0, — иными словами, если бы треніе исчезло, а центръ притяженія перешелъ въ правую граничную точку области равновѣсія, O_1 (фиг. 25).



Фиг. 25.

Дѣйствительно, при центрѣ O_1 сила притяженія имѣ нашей точки выразится такъ:

$$P = -k \cdot O_1A = -k(x-\xi_0),$$

вслѣдствіе чего уравненіе движенія безъ треніе будетъ имѣть видъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-\xi_0),$$

— мы получимъ то же уравненіе (7). Проинтегрируемъ его.

Это уравненіе можно упростить, перенося начало координатъ въ точку O_1, но оставляя ось $x'x$ прежней. Обозначая новыя абсциссы прописными X, имѣемъ основное уравненіе такого перехода

$$X = x - \xi_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

Замѣчая теперь, что

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2(x-\xi_0)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

можемъ дать уравненію (7) видъ

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

причемъ коэффиціентъ k сохраняетъ то же значеніе, какое онъ имѣлъ какъ въ основномъ уравненіи (1), такъ и

въ уравненіи (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Начальныя данныя представляются условіемъ, по которому при $t=0$ мы имѣли $x = x_0$ и $(dx/dt)_{t=0}=0$. Примѣнительно къ новому перемѣнному X условіе это выразится такъ: при $t=0$ новая начальная абсцисса, которую мы обозначимъ черезъ X_0, выразится, въ видду соотношенія (l), черезъ

$$(X)_{t=0} = X_0 = x_0 - \xi_0, \quad \ldots\ldots\ldots (n)$$

а начальная скоростъ, попрежнему, будетъ равна нулю

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (p)$$

ибо, въ видду (l),

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt}.$$

Послѣ установленія этихъ начальныхъ данныхъ примѣнительно къ новой системѣ координатъ, перейдемъ къ самому процессу интегрированія уравненія (8)

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Самый видъ его показываетъ, что X долженъ быть такой функціей отъ t, которая, будучи продифференцирована два раза, принимаетъ, согласно (8), видъ, подобный начальному; иными словами, если

$$x = \varphi(t),$$

то

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t) = -k\varphi(t).$$

Такими свойствами, какъ извѣстно, обладаютъ тригонометрическія функціи sin и cos, ибо они, будучи

дифференцированы два раза, дают опять sin и cos. Поэтому вполне позволительно предположить, что общий интеграл уравнения (8) имеет вид:

$$x = a\cos\beta t + b\sin\beta t, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

где постоянные коэффициенты a, b и β подлежат определению на основании начальных данных, выше,— см. соотношения (n) и (p),— нами установленных. Это определение удобнее всего начать с рассмотрения первой производной dx/dt при начальных условиях движения. Из (9) имеем выражение ея

$$\frac{dx}{dt} = -a\beta\sin\beta t + b\beta\cos\beta t \quad \ldots\ldots \quad (q)$$

Замечая, что, в силу соотношения (p), это выражение при $t = 0$ должно обращаться в нуль, находим, после подстановки $t = 0$, соотношение

$$0 = -a\beta\sin 0 + b\beta\cos 0,$$

т.-е. соотношение

$$b\beta = 0,$$

а так как фактор β нулем быть не может, ибо в таком случае, в виду (9), переменное x оказалось бы равным a, т.-е. постоянным, то остается установить, что

$$b = 0.$$

В виду этого общий интеграл (9) значительно упрощается, принимая вид

$$x = a\cos\beta t \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Первая производная, выражаемая соотношением (q), принимает теперь вид:

$$\frac{dx}{dt} = -a\beta \sin \beta t, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

так что вторая производная выразится через

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\beta^2 \cos \beta t. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Так как, согласно основному уравнению (8),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

то соотношения (12) и (10) дают возможность установить новое соотношение

$$-a\beta^2 \cos \beta t = -ak \cos \beta t,$$

переходящее, после сокращения на $(-a\cos\beta t)$, в уравнение

$$\beta^2 = k,$$

откуда определяется второй неизвестный коэф-т

$$\beta = +\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Мы поставили перед корнем знак плюс потому, что, по условию, β есть величина положительная. В виду (13) общий интеграль (10) принимает вид:

$$x = a \cos t\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Единственный остающийся здесь неизвестным фактор a можно определить помощью начального условия (n), в силу которого при $t=0$ абсцисса x принимает значение x_0. Поэтому, полагая в (14) $t=0$, получаем уравнение

$$a \cos 0 = x_0,$$

так что коэффициент a оказывается равным-как раз x_0:

$$a = x_0 = x_0 - \xi_0.$$

В виду этого основныя уравнения, определяющия

всѣ обстоятельства разсматриваемаго движенія, въ окончательномъ видѣ представятся такъ:

$$x = x_0 \cos t\sqrt{k}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\frac{dx}{dt} = -x_0\sqrt{k}\,\sin t\sqrt{k}, \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx_0\cos t\sqrt{k} = -kx \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Такова окончательная форма уравненій даннаго движенія. Изслѣдуемъ ихъ. Прежде всего, посмотримъ, черезъ сколько времени послѣ начала движенія точка пройдетъ черезъ начало O_1; иными словами, посмотримъ, при какомъ значеніи t абсцисса x обращается въ нуль. Соотношеніе (15), представляющее собою интегралъ даннаго намъ уравненія (8) въ окончательномъ его (интеграла) видѣ, даетъ для этого случая уравненіе:

$$0 = x_0 \cos t\sqrt{k}.$$

Такъ какъ множитель x_0 отличенъ, вообще говоря, отъ нуля, то для опредѣленія для искомаго времени t_m уравненія

$$\cos t_m\sqrt{k} = 0,$$

что даетъ

$$t_m\sqrt{k} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$t_m = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

что показываетъ, что наша точка пройдетъ черезъ начало O_1 черезъ промежутокъ времени $\pi/2\sqrt{k}$, считая съ момента начала движенія. Легко, далѣе, убѣдиться, что въ моментъ этого прохожденія черезъ начало O_1,

скорость dx/dt точки достигает своего максимума. Действительно, в этот момент абсцисса x обращается в нуль, вследствие чего, согласно (8), обращается здесь в нуль и вторая производная d^2x/dt^2, откуда, в свою очередь, следует, что первая производная, dx/dt, переходит в этот момент через свой максимум. Таким образом, максимальное значение скорости точки получим, подставив в общее выражение скоростей (16) значение t, соответствующее моменту перехода точки через начало O_1 и выраженное соотношением (18). Тогда найдем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{max} = v_{max} = -x_0\sqrt{k}\,\sin\frac{\pi\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = -x_0\sqrt{k}\sin\pi,$$

откуда окончательно

$$v_{max} = -x_0\sqrt{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Итак, в момент перехода через граничную точку O_1 (фиг. 26) области равновесия точка обладает максимальной скоростью v_{max}, выражаемой соотношением (19). Перейдя эту границу, точка, понятно, будет продолжать двигаться влево, но скорость ея при этом будет, очевидно, убывать, и чтобы определить момент, в который она обратится в нуль, — в этот момент точка, значит, остановится, — нужно приравнять общее выражение скорости, (16), нулю. Таким путем для определения искомого промежутка времени t_1 получаем уравнение

$$\sin t_1\sqrt{k} = 0,$$

где множитель $x_0\sqrt{k}$ отличен от нуля. Отсюда

находимъ

$$t_1\sqrt{k} = \pi,$$

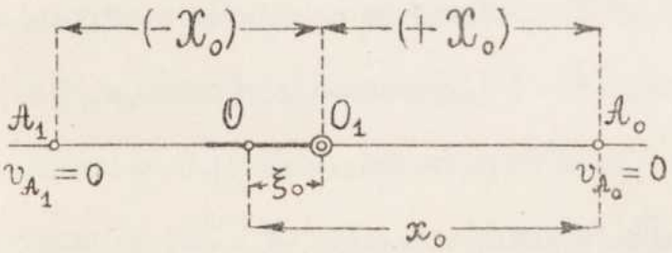
и

$$t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{k}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Въ этотъ моментъ точка отойдетъ влѣво отъ границы O_1, своего центра качанія, на разстояніе

$$x_1 = x_0 \cos\frac{\pi\sqrt{k}}{\sqrt{k}} = x_0 \cos\pi = -x_0,$$

т.-е. въ разсматриваемый моментъ $t_1 = \pi/\sqrt{k}$ точка очутится на разстояніи x_0 влѣво отъ O_1 и, значитъ, окажется въ положеніи A_1, симметричномъ съ начальнымъ A_0 по отношенію къ центру симметріи, — началу O_1, — (фиг. 26), причемъ потеряетъ всю свою скорость,



Фиг. 26.

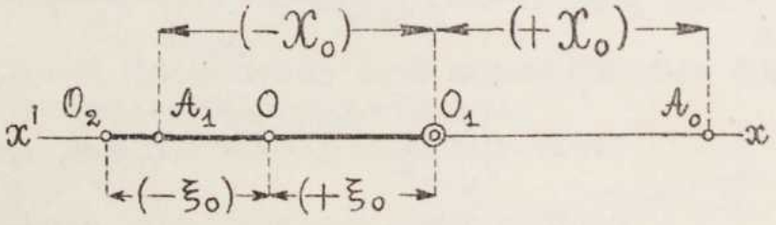
что указываетъ намъ, что она здѣсь въ этотъ моментъ остановится, и, значитъ, это движеніе нашей точки влѣво будетъ первымъ колебаніемъ ея, со временемъ колебанія, равнымъ $\pi/\sqrt{k}$ и амплитудой, равной $2X_0 = 2(x_0 - \xi_0) = 2x_0 - 2\xi_0$.

Если бы треніе не было, то амплитуда этого колебанія была бы равна $2x_0$, а время его ... $\pi/\sqrt{k}$. Отсюда можно заключить, что вліяніе треніе сказалось на этомъ первомъ колебаніи тѣмъ, что амплитуда $2x_0$, которая получилась бы при отсутствіи треніе, уменьшилась изъ-за него на $2\xi_0$, т.-е. на величину области равновѣсія. Что же касается времени колебанія, то вліянія на него треніе не имѣетъ никакого,—

это время остается тѣмъ же, $\pi/\sqrt{k}$, какимъ оно бы
бы въ отсутствіе трения.

Въ своемъ крайнемъ положеніи A_1 наша точка об
рости не имѣетъ: $v_{A_1}=0$, подобно тому, какъ не имѣ
ла она скорости и въ положеніи A_0: $v_{A_0}=0$. Если бы, по
тому, оказалось, что A_1 приходится внутри области
равновѣсія, то наша точка, достигнувъ A_1, такъ въ
этомъ положеніи и осталась бы, и все движеніе огра
ничилось бы однимъ первымъ колебаніемъ. Возможность
такого исхода аналитически выражается такъ:

Первое колебаніе точки можетъ быть разсматри
ваемо совершающимся
около центра O_1 та
какъ если бы трени
не было совсѣмъ; въ ко
цѣ колебанія точка



Фиг. 27.

удаляется влѣво отъ O_1 на разстояніе X_0 отъ него
(фиг. 27). Условіемъ того, чтобы точка могла попас
внутрь области равновѣсія, является, очевидно, нер
венство

$$X_0 \geqq O_1O_2,$$

т.-е.

$$X_0 \geqq 2\xi_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

а такъ какъ

$$X_0 = x_0 - \xi_0,$$

то это неравенство (r) переходитъ въ неравенство

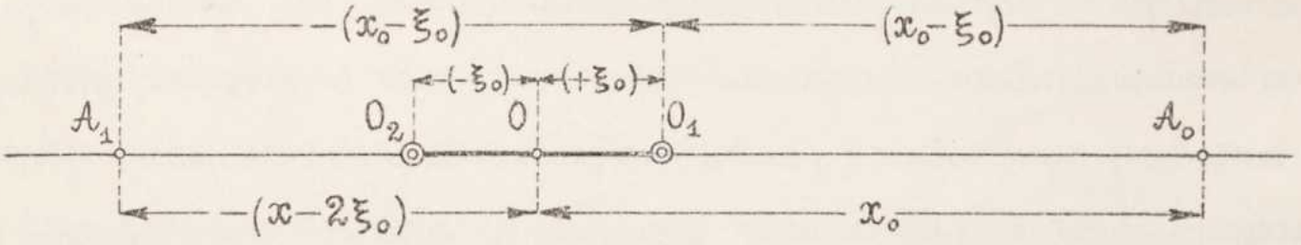
$$x_0 - \xi_0 \geqq 2\xi_0,$$

т.-е. въ неравенство

$$x_0 \geqq 3\xi_0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

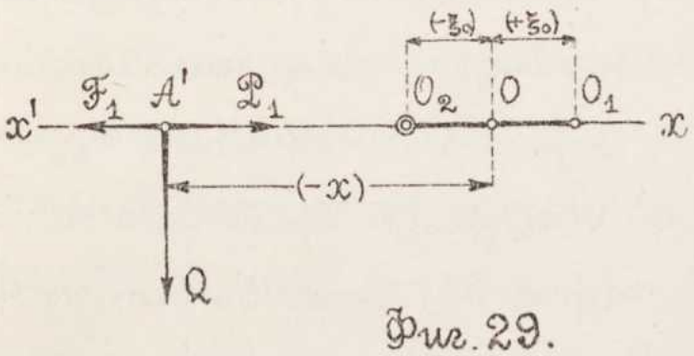
Итакъ, если въ начальномъ своемъ положеніи A_0 точка отстоитъ отъ начала O дальше, чѣмъ на полуторную величину области равновѣсія, то она придетъ въ равновѣсіе немедленно по совершеніи перваго своего колебанія.

Но положимъ, что $x_0 > 3\xi_0$, такъ что точка A_1 оказывается лежащей внѣ области равновѣсія (фиг. 28). Въ такомъ случаѣ, остановившись на мгновеніе въ этомъ



Фиг. 28.

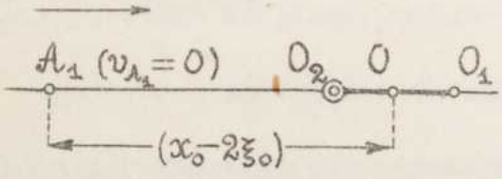
своемъ крайнемъ лѣвомъ положеніи A_1, наша точка, будучи, попрежнему, притягиваема центромъ O, повернетъ назадъ, къ O, и опять, въ каждый данный моментъ этого движенія, будетъ находиться подъ воздѣйствіемъ силы притяженія $\mathcal{F}_1$ и силы трепія $\mathcal{F}_1$, изъ коихъ первая будетъ все время стремиться уменьшать разстояніе OA_1, а вторая будетъ или помогать этому или препятствовать, что будетъ зависѣть отъ того, въ области какихъ абсциссъ будетъ двигаться въ разсматриваемый моментъ наша точка.



Фиг. 29.

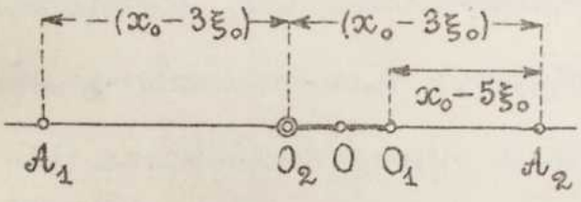
Нетрудно сообразить, что здѣсь мы имѣемъ задачу, только что разсмотрѣнную нами, но лишь при начальныхъ данныхъ по другую сторону центра притяженія O, сравнительно съ прежнимъ, и формулировка этой но-

бой задачи можетъ быть выполнена такъ: по лѣвую сторону центра O, на разстояніи $(x_0 - 2\xi_0)$ отъ него (фиг. 30), внѣ границы O_2 области равновѣсія находится точка A_1 безъ начальной скорости, подверженная дѣйствію силы притяженія ея центромъ O и силы треніе $F = fmg$.



Фиг. 30.

Легко видѣть, что это есть наша основная задача, но лишь, такъ сказать, перенесенная влѣво, по другую сторону центра O, а въ такомъ случаѣ можно утверждать, что для этого движенія сохраняютъ силу всѣ заключенія, полученныя нами при разсмотрѣніи основной задачи, но также перенесенныя влѣво; въ виду этого, не обращаясь къ новымъ вычисленіямъ, какъ не могущимъ дать ничего отличнаго отъ того, что мы уже получили, скажемъ, что наша точка совершитъ теперь колебаніе вправо около своего центра O_2, — ближайшей къ A_1 границы равновѣсія, — съ амплитудой A_1A_2, равной двойному начальному удаленію точки отъ O_2, т.-е. $2(x_0 - 3\xi_0)$, и временемъ $\pi/\sqrt{k}$ (фиг. 31). Если въ концѣ этого колебанія точка окажется внутри области равновѣсія O_2O_1, то это второе колебаніе будетъ, въ то же время, и послѣднимъ; это случится, очевидно, при $x_0 - 3\xi_0 \geqq 2\xi_0$, т.-е. при $x_0 \geqq 5\xi_0$. Если же въ концѣ колебанія точка окажется внѣ области равновѣсія, что будетъ при $x_0 > 5\xi_0$, то она, оста-



Фиг. 31.

новившись въ A_2, повернетъ опять назадъ, къ O, и совершитъ новое, третье, колебаніе и т. д. Легко убѣдиться, что амплитуды колебаній будутъ все время убывать, составляя ариѳметическую прогрессію:

$$2(x_0-\xi_0),\ 2(x_0-3\xi_0),\ 2(x_0-5\xi_0),\ \ldots,\ 2[x_0-(2n+1)\xi_0]$$

съ разностью $4\xi_0$, времена же колебаній мѣняться не будутъ, оставаясь каждое равнымъ $\pi/\sqrt{k}$.

Итакъ, движеніе нашей точки будетъ совершаться слѣдующимъ образомъ: первое свое колебаніе (влѣво) точка совершаетъ около центра O_1, отходя отъ него въ концѣ этого колебанія на разстояніе O_1A_1, равное разстоянію начальной точки A_0 отъ правой граничной точки O_1, т.-е. отъ перваго центра колебаній. Слѣдующее свое колебаніе, вправо, точка совершитъ уже около лѣвой граничной точки O_2, отходя въ концѣ этого второго колебанія отъ O_2 на разстояніе O_2A_2, равное O_2A_1. Третье колебаніе, влѣво, совершится снова около центра O_1,—правой граничной точки; четвертое—около лѣвой граничной точки O_2, и т. д. Такимъ образомъ, колебанія будутъ происходить попеременно то около одной граничной точки, то около другой, въ результатѣ чего, какъ было показано, получается неуклонное уменьшеніе амплитуды колебаній, которое будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока крайняя точка какого-либо колебанія не попадетъ внутрь области равновѣсія,—тогда точка успокоится.

Легко провѣрить, что, если начальная абсцисса x_0

выражается въ функціи ξ_0 формулами

$$x_0 = (2n-1)\xi_0 + \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

или

$$x_0 = 2n\xi_0 + \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

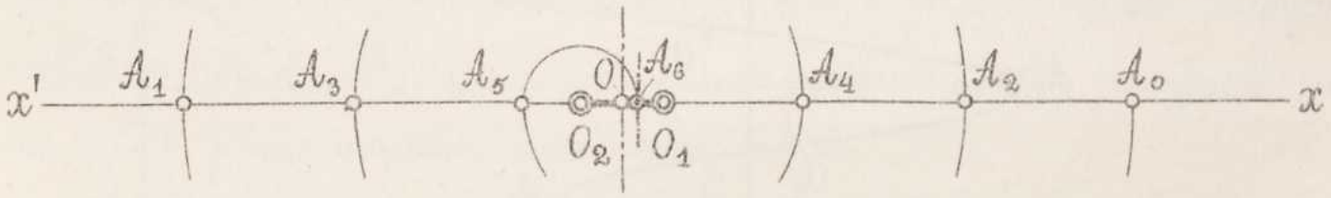
гдѣ $\alpha < \xi_0$, то число колебаній будетъ равно n.

Слѣдуетъ замѣтить тотъ фактъ, что времена колебаній никакихъ измѣненій не претерпятъ, — время каждаго колебанія остается равнымъ $\pi/\sqrt{k}$, — вслѣдствіе чего можемъ установить, что на время колебаній треніе не вліяетъ, откуда, въ свою очередь, заключаемъ, что скорости каждаго колебанія постепенно затухаютъ, — это становится очевиднымъ, если мы вспомнимъ, что амплитуды колебаній неуклонно убываютъ, а между тѣмъ на прохожденіе каждой требуется одно и то же время; ясно, что выполненіе колебаній совершается съ постепенно уменьшающимися скоростями. Такимъ образомъ, затуханіе колебаній обусловливается не только уменьшеніемъ амплитудъ колебаній, но и постепеннымъ уменьшеніемъ скоростей, въ виду чего оно протекаетъ весьма плавно.

Слѣдуетъ отмѣтить еще то обстоятельство, что время, протекающее отъ начала колебаній до ихъ совершеннаго прекращенія, всегда будетъ кратнымъ времени одного колебанія: точка всегда совершаетъ цѣлое число колебаній, а не дробное, какъ иногда думаютъ: того обстоятельства, что точка проходитъ черезъ область равновѣсія съ нѣкоторой убывающей скоростью, отличной отъ нуля, еще мало для того, чтобы она могла въ этой области остановиться и, такимъ образомъ, прекратить свое движеніе; для этого нужно, чтобы она оказалась въ этой области какъ разъ въ тотъ моментъ

когда скорость ея обращается въ нуль;—тогда, и только тогда, она, дѣйствительно, такъ тамъ и останется; а такъ какъ обращеніе въ нуль скорости точки можетъ имѣть мѣсто лишь въ концѣ каждаго колебанія, то мы и заключаемъ, вообще, что отъ начала колебаній до конца ихъ точка совершитъ цѣлое число колебаній.

Имѣя въ виду все сказанное, весьма легко графически найти положеніе равновѣсія данной точки и число колебаній ея по даннымъ начальному положенію точки и размѣрамъ области равновѣсія, въ предположеніи, что начальная скорость точки равна нулю. Такъ, пусть въ начальный моментъ точка безъ начальной скорости нахо-



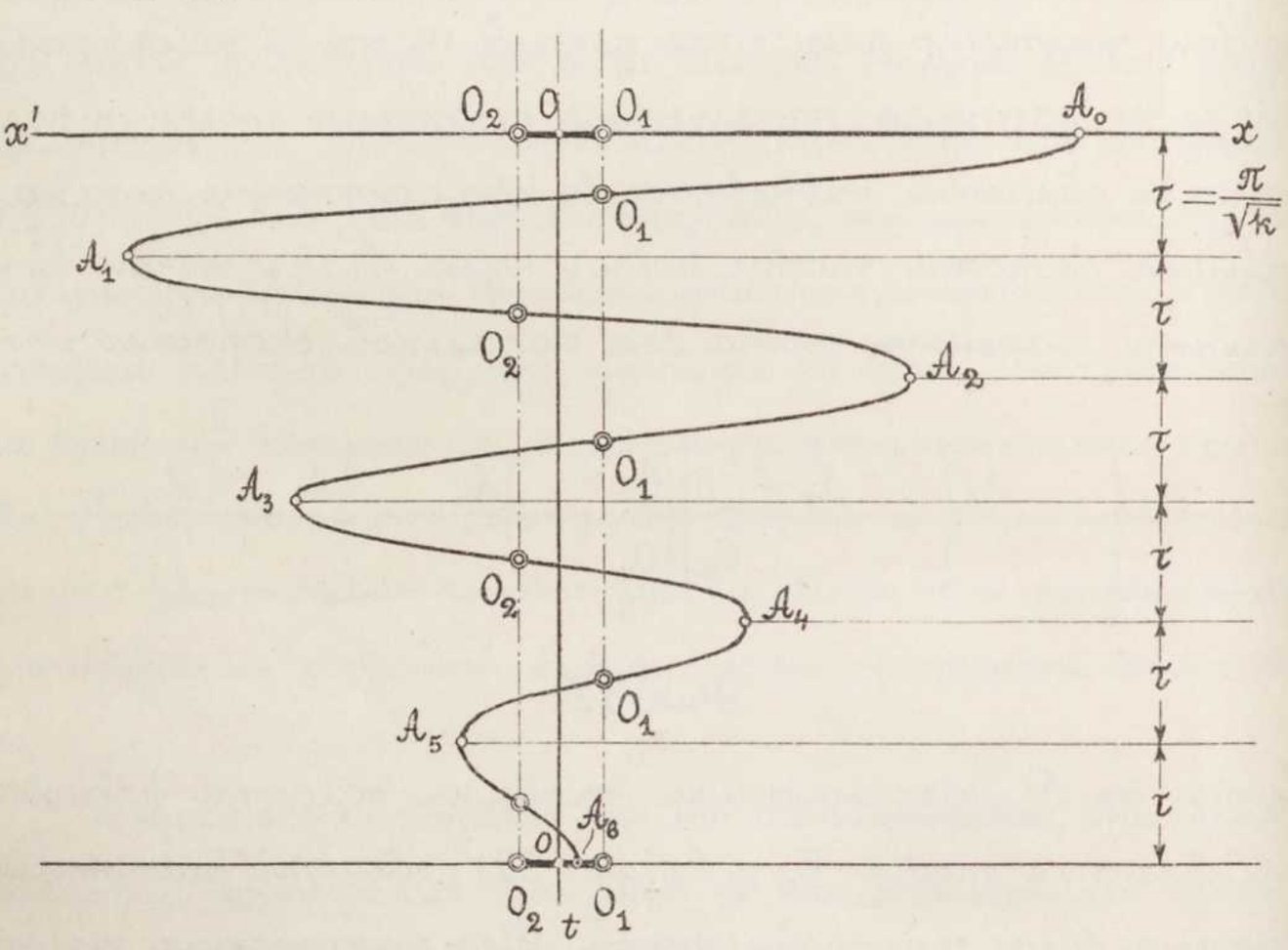
Фиг. 32.

дится въ A_0, а граничными точками области равновѣсія являются точки O_1 и O_2 (фиг. 32); область равновѣсія огерчена болѣе толстой чертой. Для нахожденія положенія точки въ моментъ прекращенія колебаній поступаемъ, согласно полученнымъ раньше заключеніямъ, такъ:

Изъ ближайшей къ A_0 граничной точки области равновѣсія, O_1, какъ изъ центра, засѣкаемъ дугу радіусомъ O_1A_0,—получимъ точку A_1, конечную точку перваго колебанія. Далѣе, изъ центра O_2 описываемъ дугу радіусомъ O_2A_1,—получаемъ конечную точку A_2 втораго колебанія. Теперь снова изъ центра O_1 описываемъ дугу радіусомъ O_1A_2,—получимъ

крайнюю точку A_3 третьяго колебанія, и т. д. Въ случаѣ, изображенномъ на чертежѣ, точка попадаетъ въ конецъ шестого колебанія въ точку A_6 области равновѣсія, гдѣ, затѣмъ, и остается въ равновѣсіи.

Весьма наглядно все происходящее здѣсь иллюстрируется діаграммой, изображенной на фиг. 33. Откладывая по оси $0A_0$, въ ту и другую сторону, амплитуды колебаній, а по оси $0t$ — вре-



Фиг. 33.

мена, получимъ для случая, изображеннаго на предыдущей фигурѣ, синусоидальную затухающую кривую $A_0A_1 \ldots A_6$, весьма наглядно рисующую убываніе амплитудъ и затуханіе колебаній. Мы видимъ, что за время τ перваго колебанія, гдѣ $\tau = \pi/\sqrt{k}$, точка, качнувшись относительно O_1, придетъ въ A_1, откуда, повернувъ назадъ и качнувшись уже около O_2, — центры качаній помѣчены отдѣльно для каждаго участка

кривой, изображающаго отдѣльное колебаніе, — дойдетъ уже только до A_2, подавшись, такимъ образомъ, ближе къ оси Ot на $4\xi_0$, т.-е. на $2O_1O_2$. Слѣдующее качаніе совершится около O_1, причемъ въ концѣ его точка остановится еще ближе къ оси Ot, въ точкѣ A_3, и т. д. Такое убываніе амплитудъ будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока точка въ концѣ котораго-нибудь изъ своихъ колебаній (у насъ въ концѣ 6-го) не окажется въ области равновѣсія, гдѣ и останется, — на чертежѣ наша точка изображена успокоившейся въ положеніи A_6.

Замѣчая, что каждое отдѣльное колебаніе представляетъ собою полнаго гармоническаго колебанія съ періодомъ 2τ и съ мѣняющейся отъ колебанія къ колебанію амплитудой, то кривая A_0A_6 представляетъ собою рядъ сочлененныхъ полусинусоидъ: A_0A_1, A_1A_2, ..., A_5A_6, съ одинаковыми полупериодами, но съ убывающими амплитудами.

Отмѣтимъ кстати, что кривую A_0A_6 можно получить непосредственно помощью самого тѣла; для этого достаточно, снабдивъ его карандашемъ, дать ему возможность записать свое движеніе на бумагѣ, равномѣрно продвигающейся мимо него по направленію tO. Такимъ путемъ легко опредѣлить графически величину области равновѣсія путемъ прямого измѣренія амплитудъ послѣдовательныхъ колебаній, — мы знаемъ, что она будетъ равна половинѣ разности амплитудъ двухъ смежныхъ колебаній; съ другой стороны, подсчитавъ заранѣе ее теоретически, можно такимъ путемъ опредѣлить коэффиціентъ тренія f.

Въ заключеніе этого нашего аналитическаго изслѣдованія, по необходимости, весьма краткаго и касающагося лишь главнѣйшихъ особенностей раз-

сматриваемаго движенія, отмѣтимъ, что въ случаѣ, если бы изученіе колебаній мы пожелали вести детально, изслѣдуя каждое колебаніе отдѣльно и, притомъ, аналитическимъ же путемъ, — если бы, напримѣръ, требовалось найти законъ убыванія максимальныхъ скоростей и т. п., — то пришлось бы обратиться къ написанію соотвѣтствующихъ уравненій, рѣшеніе коихъ и дастъ намъ возможность подмѣтить эти законы, а затѣмъ и сформулировать ихъ. Писать такія уравненія для движенія влѣво мы умѣемъ; посмотримъ, какой видъ они имѣютъ для движенія вправо, для чего мы разсмотримъ второе колебаніе, — аналогично ему будутъ выражены уравненіями всѣ остальныя четныя колебанія, подобно тому, какъ аналогично первому выразятся всѣ нечетныя колебанія.

Это второе колебаніе начинается съ того момента, когда точка, достигнувъ положенія A_1 (фиг. 28 на стр. 73), повернетъ назадъ, къ 0. Пока точка остается въ области отрицательныхъ абсциссъ, имѣемъ, согласно фиг. 29, для силы притяженія $\mathfrak{P}_1$ выраженіе

$$\mathfrak{P}_1 = -kd = -k.\,0A' = -k.(-x) = +kx;$$

затѣмъ, для силы тренія $\mathfrak{F}_1$ имѣемъ выраженіе

$$\mathfrak{F}_1 = +fmg.$$

Что же касается ускоренія, то оно выразится для этой области черезъ

$$\frac{d^2(-x)}{dt^2},$$

такъ что уравненіе движенія напишется такъ:

$$\frac{d^2(-x)}{dt^2} = +kx + fg$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x + \frac{fg}{k}\right).$$

Легко убѣдиться, что это уравненіе пригодно и при движеніи точки вправо въ области положительныхъ абсциссъ. Начальныя данныя даются условіемъ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

и

$$x_{t=0} = -(x_0 - 2\xi_0).$$

Сейчасъ же опредѣлится положеніе лѣвой граничной точки 0_2 области равновѣсія изъ уравненія

$$x + \frac{fg}{k} = 0,$$

откуда

$$x = -\xi_0 = -\frac{fg}{k},$$

и уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + \xi_0).$$

Полагая $x+\xi_0=X$, находимъ новое ур-іе $d^2X/dt^2=-kX$, при чемъ начальныя данныя будутъ таковы: $(dX/dt)_{t=0}=0$ и $(X)_{t=0}=-(x_0-3\xi_0)=-X_1$. Интегралъ полученнаго ур-ія имѣетъ видъ: $X=-X_1\cos t\sqrt{k}$. Періодъ колебанія равенъ $t\sqrt{k}$, т.-е. періоду перваго колебанія. Максимальная скорость v''_{max}, присущая точкѣ въ моментъ прохожденія черезъ O_2, будетъ равна

$$v''_{max}=X_1\sqrt{k}=(X_0-2\xi_0)\sqrt{k}=v'_{max}-2\xi_0\sqrt{k}=\sqrt{k}(x_0-3\xi_0),$$

гдѣ черезъ v'_{max} обозначена максимальная скорость перваго колебанія, равная $X_0\sqrt{k}$.

Нетрудно выполнить подобнымъ же образомъ изслѣдованіе всѣхъ слѣдующихъ колебаній и дать общія выраженія какъ для ихъ дифференціальныхъ уравненій, такъ и для общихъ интеграловъ ихъ и всѣхъ, вообще, факторовъ даннаго движенія. Такъ, напримѣръ, окажется, что общее выраженіе для максимальной скорости n-го колебанія, при прохожденіи черезъ O_2, имѣетъ видъ

$$v^{(n)}_{max}=\sqrt{k}\,[x_0-(2n-1)\xi_0],$$

и т.д. Вопросъ, такимъ образомъ, исчерпывается вполнѣ.

Весьма простое и наглядное рѣшеніе поставленной задачи можетъ быть получено графическимъ путемъ, помощью примѣненія къ движенію нашей точки теоремы живыхъ силъ, извѣстной изъ аналитической механики и говорящей намъ, что для системы, связи которой явно отъ времени не зависятъ, сумма работъ всѣхъ силъ, дѣйствовавшихъ на точку въ продолженіе извѣстнаго времени, равна приращенію живой силы системы, имѣющему мѣсто за то же время. Наша система состоитъ всего лишь изъ одной матеріальной точки, двигающейся подъ вліяніемъ нѣкотораго центра притяженія по прямой, черезъ него проходящей. Связи, наложенныя на точку, состоятъ въ томъ, что точка принуждена двигаться постоянно по этой прямой, и, значитъ, отъ времени не зависятъ, въ виду чего теорема живыхъ силъ оказывается приложимой здѣсь вполнѣ. Что касается силъ, воздѣйствующихъ на точку при движеніи ея по прямой, то это будутъ: 1) сила притяженія, по условію, пропорціональная разстоянію d точки отъ центра, и

2) сила трения, не мѣняющая своей величины, но мѣняющая знакъ при каждой перемѣнѣ направленія движенія точки. Съ вопросомъ о силахъ мы уже знакомы,—см. стр. 51, 52, 58 и др.

Использованіе теоремы живыхъ силъ въ цѣляхъ графическаго изслѣдованія движеній, подобныхъ нашему, можетъ быть выполнено на основаніи слѣдующихъ простыхъ соображеній:

Пусть наша точка, при своемъ движеніи, подвергается воздѣйствію на нее силъ, величина и направленіе коихъ зависятъ лишь отъ положенія точки на ея траекторіи. Таковъ, напримѣръ, случай движенія поршня паровой машины, гдѣ, при данномъ направленіи хода поршня, давленіе на поршень въ каждой точкѣ этого хода представляется функціей отклоненія поршня отъ соотвѣтствующаго начальнаго (мертваго) положенія. Подобнымъ же образомъ, давленіе, передаваемое отъ поршня на палецъ кривошипа, представляется функціей угла отклоненія кривошипа отъ нѣкотораго начальнаго его положенія. Взятый нами случай движенія точки подъ это условіе, очевидно, подходитъ вполнѣ.

Условившись обозначать силы, дѣйствующія на точку, черезъ $\mathfrak{P}$, проекціи элементарныхъ перемѣщеній ds точки на направленія этихъ силъ — черезъ dp, массу точки — черезъ m, а начальную и конечную скорость ея при прохожденіи какого-либо пути s — черезъ v_0 и v_1, можемъ изобразить алгебраически теорему живыхъ силъ въ видѣ уравненія

$$\int \mathfrak{P}\, dp = \tfrac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Такъ какъ въ дальнѣйшемъ мы будемъ разбирать лишь такіе случаи движенія, когда точка перемѣщается по нѣкоторой прямой, по которой, въ то же время, проявляютъ свое дѣйствіе и силы, воздѣйствующія на точку, то проекціи dp совпадутъ въ такомъ случаѣ съ самими перемѣщеніями, въ силу чего, обозначая дѣйствительныя перемѣщенія точки по прямой не черезъ ds, а, въ виду послѣдующаго, черезъ dx, можемъ дать ур-ію (24) видъ:

$$\int \mathfrak{P}\, dx = \tfrac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Интегралъ $\int \mathfrak{P} dx$, стоящій въ лѣвой части этого уравненія, по аналогіи съ интеграломъ $\int y\, dx$, можетъ быть изображенъ въ видѣ нѣкоторой площади въ такой системѣ координатъ, гдѣ осью абсциссъ служитъ прямая, по которой перемѣщается наша точка, а ординатами служатъ силы $\mathfrak{P}$, воздѣйствующія на точку при движеніи ея по этой прямой. Такой именно системой мы и будемъ пользоваться въ дальнѣйшемъ. При этомъ, ради опредѣленности геометрическихъ разсужденій, будемъ изобра-

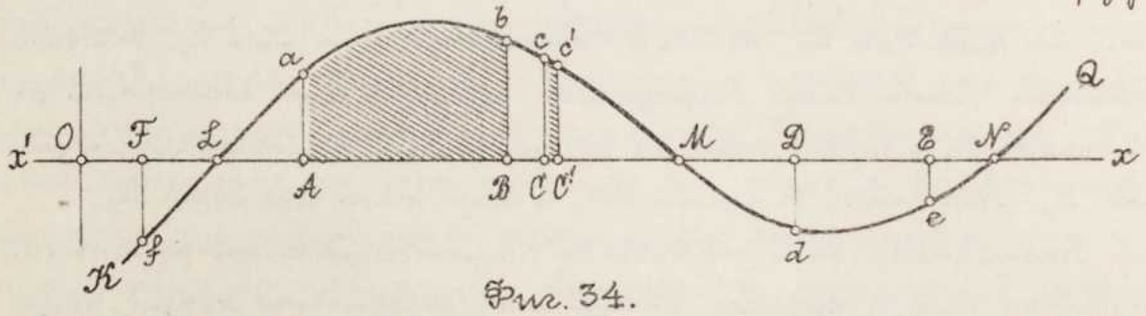
жать силы P, какъ векторы, отличая то или другое направленіе ихъ отложеніемъ этихъ векторовъ по ту или другую сторону оси x. Условимся откладывать вверхъ отъ оси x векторы, изображающіе силы, направленныя вправо, въ положительную сторону оси абсциссъ, причемъ будемъ считать ихъ положительными; векторы же, изображающіе силы, направленныя влѣво, въ отрицательную сторону оси абсциссъ, будемъ откладывать внизъ отъ оси абсциссъ и будемъ считать ихъ, какъ и силы, отрицательными. Что касается выбора начала, то онъ будетъ обусловливаться каждый разъ условіями даннаго случая; устанавливать что-либо здѣсь невозможно.

Предположимъ теперь, что на нашу точку, при движеніи ея по оси $x'x$, въ моментъ перехода черезъ F (фиг. 34 на стр. 84) дѣйствуетъ отрицательная сила P_f, въ точкахъ L, M и N на нее не дѣйствуютъ никакія силы, въ точкахъ A и B — положительныя сила P_a и P_b, въ D и E — отрицательныя P_d и P_e. Условимся теперь изображать наши силы отрѣзками прямой, какъ векторами, въ нѣкоторомъ масштабѣ μ, и пусть, такимъ образомъ, сила P_f изображается отрѣзкомъ Ff, сила P_a — отрѣзкомъ съ длиной Aa, и т. д., такъ что $Ff = \mu . P_f$, $Aa = \mu . P_a$, и т. д. Откладывая эти отрѣзки въ надлежащія стороны отъ оси x, согласно направленію силъ, и соединяя концы ихъ непрерывной линіей, получимъ такимъ образомъ нѣкоторую кривую KQ, весьма наглядно рисующую ходъ измѣненія силъ, дѣйствующихъ на нашу точку при движеніи ея по оси. Посмотримъ теперь, какими свойствами обладаетъ эта силовая кривая KQ.

Взявъ на оси абсциссъ какія-либо двѣ смежныя точки C и C_1, такъ что $CC' = dx$, и проведя ординаты Cc и $C'c'$, мы выдѣлимъ такимъ образомъ изъ всей площади, ограниченной кривой KQ и осью абсциссъ, элементарную площадку $Ccc'C'C$, съ ошибкой до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ могущую быть принятой за прямоугольникъ съ основаніемъ $CC' = dx$ и высотой $Cc = P_c = P$. Иными словами, силы, дѣйствующія на точку на безконечно-маломъ пути $CC' = dx$, можно принять не мѣняющимися своей величиной, — постоянными, — и остающимися все время равными $P_c = P$. Въ такомъ случаѣ эта площадка можетъ быть выражена произведеніемъ Cc на CC', т.-е. $P\,dx$, и, слѣдовательно, выражаетъ собою работу силы P на пути dx. Дѣлая такое допущеніе о постоянствѣ силы P, мы, конечно, дѣлаемъ нѣкоторую ошибку, но такъ какъ она опускается лишь безконечно-малыми высшихъ порядковъ и обращается въ нуль въ предѣлѣ, то мы ею пренебрегаемъ.

Итакъ, каждая элементарная площадка типа Cc' выражаетъ собою, въ извѣстномъ масштабѣ, работу силъ при перемѣщеніи точки по основанію CC' этой площадки. Если приращеніе CC' первоначальной абсциссы OC положительно, а сила Cc также положительна, то элементарная работа $Cc' = P\,dx$ будетъ также положительна. Она будетъ отрицательна, если одинъ изъ факторовъ, P или dx, окажется отрицательнымъ.

Переходя теперь къ конечнымъ перемѣщеніямъ, какъ, напримѣръ, къ какому-либо перемѣщенію AB, можемъ написать, что соотвѣтствующая ему площадь $AabB$ выразится интеграломъ $\int \mathfrak{P} dx$, взятымъ въ предѣлахъ $x_A = OA$ и $x_B = OB$, и, очевидно, представитъ собою работу всѣхъ силъ, дѣйствовавшихъ на нашу точку при прохожденіи ею этого пути AB. То же заключеніе справедливо для любыхъ другихъ участковъ пути точки; такимъ образомъ, при прохожденіи пути BMD положительныя силы (на участкѣ BM) совершаютъ работу положительную, оцѣниваемую площадью BbM, отрицательныя же силы (на участкѣ MD) совершаютъ отрицательную работу, выражаемую площадью MDd, и т.д. Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы, пользуясь зависимостью $\mathfrak{P} = f(x)$, вычислять интегралъ $\int \mathfrak{P} dx = \int f(x) dx$, могущій при этомъ вычисленіи, въ случаѣ сложной функціи $f(x)$, представить тѣ или другія вычислительныя трудности, можемъ этотъ интегралъ вычислить графически, пользуясь силовой кривой KQ.



Фиг. 34.

Принимая теперь во вниманіе уравненіе (24), можемъ теперь истолковать его графически такъ: приращеніе живой силы точки на какомъ-либо пути ея выражается площадью, ограниченною осью абсциссъ, силовой кривой и крайними ординатами. Это заключеніе весьма важно, ибо даетъ возможность въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, при наличности указанныхъ факторовъ, получить значеніе интеграла $\int \mathfrak{P} dx$, не заботясь о видѣ функціи $f(x)$, выражающей зависимость $\mathfrak{P}$ отъ x. Присмотримся теперь поближе къ такому графическому толкованію уравненія (25).

Пусть точка движется вправо, выходя изъ начальнаго своего положенія A со скоростью v_A. Вплоть до M она, какъ видимъ, будетъ двигаться въ области положительныхъ силъ, дѣйствующихъ также направо и, стало быть, помогающихъ движенію ея, вслѣдствіе чего можно заранѣе утверждать, что скорость ея на всемъ этомъ пути AM будетъ возрастать. И на самомъ дѣлѣ, при прохожденіи любого участка $CC' = dx$, причемъ это $dx > 0$, гдѣ, кромѣ того, силы также все время положительны, работа на Cc' будетъ также положительна; слѣдовательно, будетъ положительнымъ и равное этой элементарной работѣ приращеніе живой силы, т.-е. пройдя путь CC', точка испытаетъ приростъ живой силы, равный этой площадкѣ Cc' и выражающійся черезъ $\frac{1}{2} m(v_{C'}^2 - v_C^2)$. Такъ какъ этотъ приростъ здѣсь положителенъ, то $v_{C'}^2 - v_C^2 > 0$, что показываетъ, что $v_{C'} > v_C$, т.-е. каждая послѣдующая скорость здѣсь бо́льше предыдущей. Итакъ, на

участкѣ AM пути нашей точки скорость ея будетъ все время возрастать, — силы, дѣйствующія здѣсь на точку, направлены въ ту же сторону, въ какую совершается движеніе точки. Пусть скорость нашей точки въ моментъ M есть v_M; въ такомъ случаѣ полный приростъ живой силы на пути AM изобразится черезъ $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_A^2)$ = площ. AabMA. Такимъ образомъ, весь запасъ живой силы, имѣющійся у точки въ моментъ перехода черезъ M, равенъ $\frac{1}{2}mv_M^2$; сравнительно съ начальнымъ запасомъ $\frac{1}{2}mv_A^2$ онъ увеличился на величину, равную площади AabMA. Посмотримъ теперь, какъ будетъ двигаться въ прежнемъ направленіи наша точка, вступивъ за точкой M въ область отрицательныхъ силъ.

Такъ какъ всѣ P здѣсь < 0, а $dx > 0$, то $\int P\,dx < 0$; слѣдовательно, приращенія живой силы будутъ здѣсь отрицательны. Такъ, если точка перешла здѣсь изъ D въ E, то ур-іе (25) дастъ намъ: $\int P\,dx$ = площади DEed = $= \frac{1}{2}m(v_E^2 - v_D^2)$, а такъ какъ интегралъ и площадь отрицательны, то имѣемъ неравенство $v_E^2 - v_D^2 < 0$, показывающее, что $v_E < v_D$, т.-е. что движеніе точки въ прежнемъ направленіи будетъ совершаться съ убывающими скоростями, ибо оказывается, что послѣдующая скорость здѣсь меньше предыдущей; живая сила точки, движущейся здѣсь противоположно направленію силъ, на нее дѣйствующихъ, будетъ все время убывать, ибо будетъ постепенно расходоваться на преодолѣніе работы силъ отрицательныхъ, ея движенію препятствующихъ.

Отсюда можемъ вывести весьма важное для насъ заключеніе: разъ до точки M, на пути AM, скорость точки все время возрастала, а за точкой M, на пути MN, она все время убываетъ, то отсюда слѣдуетъ, что въ самой точкѣ M пересѣченія силовой кривой съ осью абсциссъ скорость v_M нашей точки будетъ максимальной.

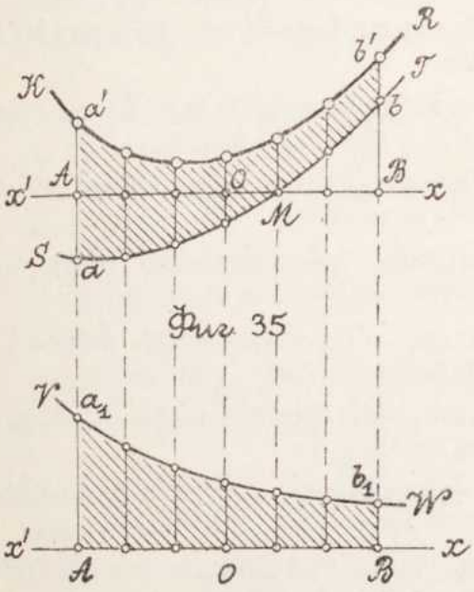
Подобнымъ же образомъ нетрудно убѣдиться, что въ точкѣ N очереднаго за M пересѣченія кривой силъ съ осью абсциссъ скорость нашей точки будетъ минимальной. Дѣйствительно, на всемъ участкѣ MN, гдѣ приращеніе живой силы остается все время отрицательнымъ, т.-е. гдѣ все время имѣетъ мѣсто убываніе живой силы, будемъ имѣть, какъ было уже указано, постоянную убыль скоростей. А такъ какъ за точкой N начнется опять возрастаніе ихъ, то ясно, что въ самой точкѣ N имѣетъ мѣсто минимумъ скоростей. Очевидно, что слѣдующей пересѣченіе силовой линіи съ осью x'x дастъ опять моментъ максимума, затѣмъ получимъ моментъ минимума, и т.д. Это свойство точекъ пересѣченія силовой кривой съ осью абсциссъ очень важно, и его необходимо запомнить, — оно пригодится намъ въ дальнѣйшемъ.

Мы указывали, что по мѣрѣ проникновенія въ область отрицательныхъ силъ скорость нашей точки будетъ непрестанно убывать. Спрашивается, при какихъ условіяхъ можетъ она обратиться въ

нуль; ясно, что этотъ моментъ будетъ соотвѣтствовать моменту остановки точки. Пусть точка вышла изъ A вправо со скоростью v_A. Въ точкѣ M скорость ея, все время до того возраставшая, достигнетъ своего максимальнаго значенія v_M, и запасъ живой силы нашей точки въ этотъ моментъ окажется равнымъ $\frac{1}{2}mv_M^2$. За счетъ этого именно запаса наша точка и сможетъ двигаться въ прежнемъ направленіи въ области препятствующихъ такому движенію отрицательныхъ силъ; этотъ запасъ будетъ уходить на преодолѣніе работы этихъ силъ, постепенно, такимъ образомъ, расходуясь и уменьшаясь. Въ виду, однако, ограниченности его это его уменьшеніе будетъ продолжаться лишь до тѣхъ поръ, пока онъ не обратится въ нуль; въ этотъ моментъ работа отрицательныхъ силъ окажется въ точности равной всему этому запасу $\frac{1}{2}mv_M^2$, а такъ какъ эта работа выражается также площадью, ограниченною извѣстнымъ образомъ, то можемъ сказать, что, при своемъ движеніи вправо въ области отрицательныхъ силъ, точка будетъ двигаться здѣсь до тѣхъ поръ, пока отрицательная площадь, дающая работу этихъ силъ, не станетъ, по своей абсолютной величинѣ, равна запасу $\frac{1}{2}mv_M^2$, имѣвшемуся у точки въ моментъ вступленія въ эту область. Если эта площадь окажется площадью $MEeM$, то точка, при своемъ движеніи вправо, сможетъ дойти лишь до точки E, гдѣ и остановится. Можетъ, понятно, случиться и такъ, что вся отрицательная площадь $MNeM$ будетъ, по абсолютной величинѣ, меньше запаса живой силы $\frac{1}{2}mv_M^2$; тогда окажется, что точка, затративъ на этотъ путь часть своей живой силы въ количествѣ, опредѣляемомъ площадью $MNeM$, придетъ въ N съ живой силой $\frac{1}{2}v_N^2$, потерявъ по дорогѣ всего $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_N^2)$ ея, ибо площадь $MNeM$ и равна $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_N^2)$. Такимъ образомъ, въ области положительныхъ силъ точка вступитъ со скоростью v_N; скорость эта будетъ въ этой области все время увеличиваться, пока точка не подойдетъ къ слѣдующей области отрицательныхъ силъ, гдѣ, возможно, она остановится, и т. д. Учесть возможность остановки точки, какъ видимъ, весьма легко, путемъ прямого планиметрированія; при этомъ опредѣлится и мѣсто остановки. Понятно, что разъ въ моментъ остановки точка продолжаетъ оставаться подъ вліяніемъ тѣхъ или иныхъ силъ, то, остановившись на мгновеніе, она пойдетъ затѣмъ туда, куда повлекутъ ее эти силы. Отмѣтимъ, что остановка можетъ имѣть мѣсто въ той области, силы которой направлены противоположно скорости точки.

Необходимо сдѣлать еще одно замѣчаніе по поводу графическаго учета равнодѣйствующей въ случаѣ нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ на нашу точку одновременно, и построенія кривой, дающей ходъ измѣненій этой равнодѣйствующей. Такъ какъ всѣ силы, съ которыми намъ придется имѣть дѣло въ дальнѣйшемъ, направлены по оси абциссъ, то сложеніе ихъ будетъ производиться крайне просто, путемъ

прямого прибавленія ихъ или отнятія, соотвѣтственно знакамъ ихъ. Пусть напримѣръ, наша точка, при своемъ движеніи по оси абсциссъ, принуждена подчиняться силамъ, силовыя кривыя коихъ представляются: для однихъ силъ кривой ST, а для другихъ — кривой VW (фиг. 35 и 36). Дѣйствуя на нашу точку одновременно, эти силы будутъ складываться или вычитаться путемъ прямого прибавленія или отнятія соотвѣтствующихъ векторовъ. Такимъ образомъ, отрицательная сила Aa, складываясь съ дѣйствующей въ той же точкѣ A положительной силой Aa_1, дастъ положительную силу Aa'; точка a' — конецъ вектора, эту силу изображающаго, причемъ, откладывая отъ крайней точки a силы Aa векторъ $aa' = Aa_1$ вверхъ, ибо сила Aa_1 положительна. Точно такъ же положительная сила Bb, складываясь съ дѣйствующей въ тотъ же моментъ силой Bb_1, также положительной, дастъ положительную же силу Bb'. Соединяя концы $a', b', \ldots\ldots$ такъ полученныхъ векторовъ непрерывной линіей, получимъ кривую KR, дающую собою законъ распредѣленія силъ (результирующихъ) по оси $x'x$ (фиг. 35). Съ этой кривой KR и можно вести въ дальнѣйшемъ все изслѣдованіе движенія, уже не заботясь о слагающихъ силахъ, эту кривую давшихъ. Работа всѣхъ силъ на пути AB выразится, очевидно, площадью $Aa'b'B$, равной, конечно, суммѣ работъ каждой категоріи силъ отдѣльно. Такъ, замѣчая, что работа силъ (ST) изображается черезъ (— площ. AMa + площ. MbB), а работа силъ (VW) — черезъ площадь Aa_1b_1B или равную ей площадь $aa'b'bMa$, заключаемъ, что, по уничтоженіи отрицательной работы AMa равной ей положительной, у насъ и останется какъ разъ упомянутая уже площадь $Aa'b'B$. Равновеликія площади Aa_1b_1B и $aa'b'bMa$ заштрихованы.



Фиг. 35

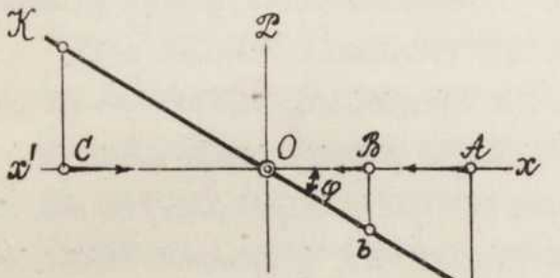
Фиг. 36.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что все, сказанное о движеніи вправо, будетъ справедливо и для движенія влѣво съ тою лишь разницей, что теперь, въ виду $dx < 0$, приращеніе живой силы можетъ быть положительнымъ лишь тогда, когда $P < 0$, т.-е. когда точка движется все время подъ дѣйствіемъ силъ отрицательныхъ; живая сила точки будетъ въ такомъ случаѣ все время возрастать, т.-е. скорость точки будетъ увеличиваться. Если же $P > 0$, т.-е. если на точку, при этомъ движеніи ея влѣво, дѣйствуютъ силы положительныя, то приращеніе живой силы будетъ отрицательнымъ; живая сила точки будетъ убывать, а скорость ея — уменьшаться. При движеніи влѣво точка, слѣдовательно, можетъ остановиться въ области положительныхъ силъ, какъ объ этомъ можно было заключить и заранѣе, принимая во вниманіе, что помогать движенію будутъ здѣсь силы отри-

цательныя, а препятствовать ему — силы положительныя. Всѣ заключенія о максимумахъ скоростей и о ихъ минимумахъ остаются, конечно, въ силѣ.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній, необходимыхъ для дальнѣйшихъ изслѣдованій, вернемся къ нашей задачѣ и попробуемъ разсмотрѣть ее при помощи только что изложенныхъ соображеній.

Приступая къ графическому изслѣдованію движенія точки подъ дѣйствіемъ притяженія ея центромъ O съ силами, пропорціональными разстоянію точки отъ центра, примемъ сначала разсмотрѣть движеніе безъ трѣнія, а потомъ и съ трѣніемъ, необходимо, прежде всего, разсмотрѣть, какой видъ имѣютъ здѣсь кривыя, изображающія законы измѣненія силъ при измѣненіи разстоянія точки отъ центра, въ обоихъ указанныхъ выше случаяхъ.



Фиг. 37.

По условію, нѣкоторая точка массы m движется по прямой xx' подъ вліяніемъ силъ притяженія ея центромъ O, лежащимъ на этой же оси, притягивающимъ пропорціонально разстоянію. Прежде всего заключаемъ, что точка, находящаяся справа отъ центра, будетъ находиться подъ воздѣйствіемъ силъ отрицательныхъ, а слѣва отъ центра — положительныхъ. Поэтому векторы, изображающіе силы притяженія, приходится откладывать для области Ox оси внизъ, а для области Ox' — вверхъ. Пусть, теперь, силы, дѣйствующія въ точкахъ A и B оси, равны P_A и P_B. Согласно основному положенію, онѣ выразятся въ функціи разстояній

OA и OB такъ: $\mathfrak{P}_A = -k.OA$ и $\mathfrak{P}_B = -k.OB$, такъ что

$$\mathfrak{P}_A : \mathfrak{P}_B = OA : OB.$$

Откладывая теперь внизъ отъ оси $x'x$ векторы Aa и Bb, изображающіе эти силы въ нѣкоторомъ масштабѣ μ, имѣемъ, въ силу этого, соотношенія: $Aa = \mu.\mathfrak{P}_A$ и $Bb = \mu.\mathfrak{P}_B$, откуда

$$Aa : Bb = \mathfrak{P}_A : \mathfrak{P}_B = OA : OB,$$

а такъ какъ $Aa \parallel Bb$, то заключаемъ, что точки a и b лежатъ на одной и той же прямой, проходящей черезъ центръ. Уголъ наклона этой прямой къ оси x, — обозначимъ его черезъ φ, — опредѣляется изъ соотношенія:

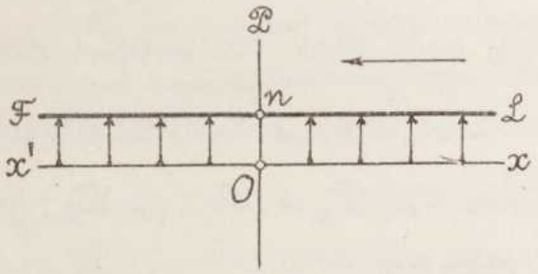
$$\operatorname{tg}\varphi = Aa : OA = (\mu.\mathfrak{P}_A) : (-\tfrac{1}{k}.\mathfrak{P}_A) = -k\mu,$$

что показываетъ, что эта прямая пройдетъ въ 4-ой и 2-ой четвертяхъ, какъ это и изображено на чертежѣ — прямая KR на фиг. 37.

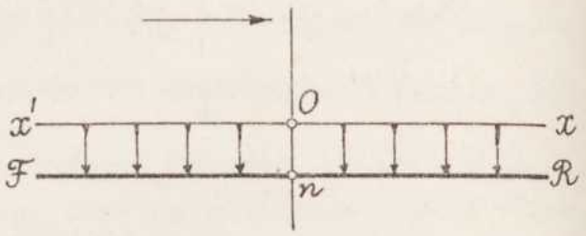
Итакъ, силы притяженія распредѣляются по закону, изображаемому прямой KR. Очевидно, что положеніе прямой KR, равно какъ и наклонъ ея къ оси $x'x$, отъ направленія движенія точки не зависятъ. Посмотримъ, какъ обстоитъ дѣло съ силами треніе.

Наша точка обладаетъ массой m. Въ виду этого, при движеніи ея по оси $x'x$ развивается сила треніе, fmg, въ каждый данный моментъ направленная противоположно движенію ея, въ виду чего, при движеніи точки влѣво, эта сила будетъ направлена вправо, т.-е. будетъ положительной, и обратно. Принимая теперь во вниманіе, что за все время движенія сила треніе будетъ оставаться постоянной, мѣняя лишь свой знакъ, заключаемъ, что силовая кривая ея представляется прямой, параллельной

оси $x'x$ и при движеніи точки влѣво проходящей выше начала, на разстояніи $On = \mu.(fmg)$ отъ него (фиг. 38, прямая FL;



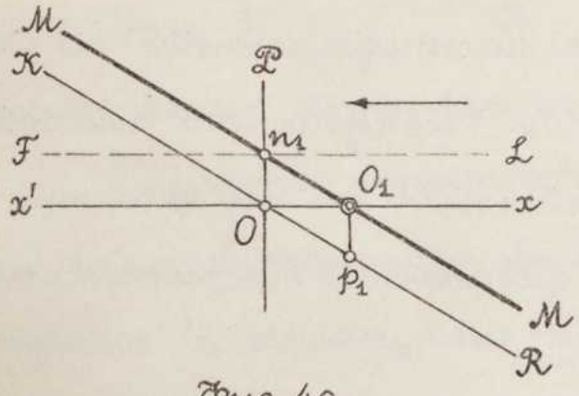
Фиг. 38.



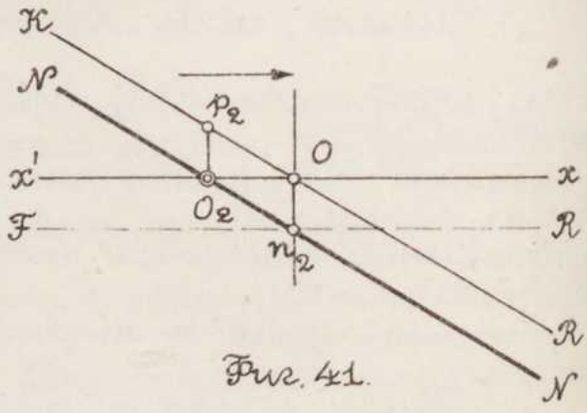
Фиг. 39.

а при движеніи вправо проходящей ниже начала на тотъ же разстояніи On отъ него (фиг. 39, прямая FR).

Такимъ образомъ, если точка движется по оси $x'x$ безъ треніа, то силовая кривая представится здѣсь прямой KR; если же движеніе будетъ происходить съ треніемъ, то результирующая силовая кривая получится путемъ складываніа векторовъ, т.-е. сочетаніа прямой KR или съ прямой FL



Фиг. 40.



Фиг. 41.

(фиг. 38) или съ прямой FR (фиг. 39), что будетъ зависѣть отъ направленія движенія. Если точка движется влѣво, то силы треніа окажутся положительными, и ихъ придется все время прибавлять къ ординатамъ прямой KR, отчего результирующая кривая окажется здѣсь прямой MM, представляющей собою ту же прямую KR, лишь поднятую относительно своего прежняго положенія на величину On_1 силы треніа вверхъ по направленію OP (фиг. 40). Если же движеніе

точки будетъ происходить вправо, то силы трения окажутся направленными влѣво, т.-е. отрицательными, и ихъ придется отнимать отъ ординатъ прямой KR, отчего результирующей кривой окажется здѣсь прямая $N'N$, параллельная KR и проходящая черезъ конецъ n_2 вектора On_2, изображающаго силу трения; эта прямая $N'N$ представляетъ собою ту же прямую KR, сдвинутую лишь внизъ, по направленію On_2, на величину On_2 переменной силы трения (фиг. 41).

Отмѣтимъ кстати, что на участкѣ OO_1, какъ и на участкѣ OO_2 силы трения, по абсолютной своей величинѣ, бо́льше силъ притяженія, въ виду чего участокъ O_1O_2 представляетъ собою область равновѣсія. Она, какъ видимъ, опредѣляется здѣсь пересѣченіемъ результирующихъ прямыхъ съ осью $x'x$, дающимъ граничныя ея точки, и, понятно, имѣетъ тѣ же размѣры, какіе даетъ уравненіе (5) на 63 стр.

Дѣйствительно, въ точкахъ O_1 и O_2 силы трения p_1O_1 и p_2O_2 равны и противоположны силамъ притяженія O_1p_1 и O_2p_2, и, значитъ, здѣсь

$$[\mu . fmg] = [\mu . \mathfrak{P}_{O_1}] = [\mu . k . OO_1].$$

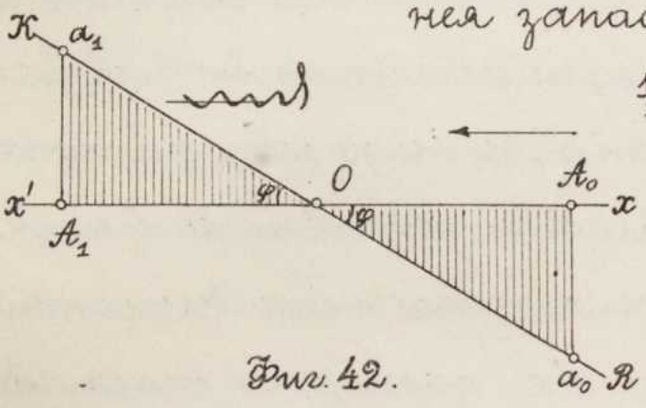
Сокращая на μ и полагая $m=1$, получимъ ту же формулу (5). Для OO_2 напишется уравненіе такого же вида. Для точекъ, лежащихъ внутри области O_1O_2 имѣетъ мѣсто неравенство.

Полученныя выше данныя позволяютъ намъ весьма просто и наглядно изслѣдовать взятое нами движеніе точки подъ вліяніемъ силъ притяженія ея центромъ O, причемъ мы сначала разберемъ движеніе безъ трения.

Пусть точка въ началѣ своего движенія находится въ A, въ области отрицательныхъ силъ (фиг. 42), безъ на-

гальной скорости, такъ что $v_{A_0} = 0$. Подчиняясь силѣ притяженія, исходящей отъ центра 0, наша точка двинется къ центру, по направленію $A_0 0$, и такъ какъ при этомъ и $dx < 0$, и $P < 0$, — пока, понятно, точка остается вправо отъ 0, — то приращенія живой силы за все время движенія въ области $A_0 0$ положительными, и скорость точки будетъ возрастать вплоть до момента перехода черезъ 0, гдѣ она будетъ максимальной и равной, положимъ, V.

Дальше, за 0, точка, благодаря накопившемуся у нея запасу живой силы въ количествѣ $\frac{1}{2} m V^2$, будетъ двигаться въ прежнемъ направленіи, но такъ какъ теперь она будетъ двигаться въ области положительныхъ силъ, направленныхъ противъ движенія ея, такъ что при $dx < 0$ силы P здѣсь < 0, то приращенія живой силы ея будутъ все время отрицательными; скорость ея, такимъ образомъ, будетъ здѣсь все время убывать, пока, наконецъ, въ нѣкоторой точкѣ A_1 не обратится въ нуль, — здѣсь наша точка остановится.



Фиг. 42.

Положеніе этой крайней точки A_1 найти весьма легко, прилагая сюда теорему живыхъ силъ: замѣчая, что на пути $A_0 0$ приращеніе живой силы точки, равное $\frac{1}{2} m (V^2 - v_{A_0}^2)$, выражается площадью $A_0 0 a_0$ и что, въ виду отсутствія начальной скорости ($v_{A_0} = 0$) это приращеніе оказывается равнымъ $\frac{1}{2} m V^2$, т.-е. запасу живой силы точки въ моментъ прохожденія черезъ

центръ O, заключаемъ, что весь запасъ живой силы въ моментъ O вступленія въ область Ox' противодѣйствующихъ движенію положительныхъ силъ выражается площадью A_0Oa_0. Мы знаемъ, что движеніе точки въ области Ox' по прежнему направленію A_0Ox' будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока имѣющійся у нея запасъ живой силы не истратится на преодолѣніе работы положительныхъ силъ, а такъ какъ эта работа выражается площадью типа A_1a_1O, то можемъ сказать, что точка, при своемъ движеніи влѣво, остановится внутри области Ox' въ такомъ положеніи A_1, гдѣ площадь A_1Oa_1 будетъ равна площади A_0Oa_0. Замѣчая теперь, что фигуры A_1Oa_1 и A_0Oa_0 представляютъ собою прямоугольные треугольники съ одинаковыми острыми углами φ, заключаемъ, что это равенство будетъ имѣть мѣсто тогда, когда катетъ A_0O будетъ равенъ катету OA_1. Поэтому крайнее лѣвое положеніе точки опредѣлится отложеніемъ влѣво отъ центра O отрѣзка OA_1, равнаго OA_0. Легко убѣдиться въ томъ, что движеніе точки будетъ симметрично относительно центра O; такъ, скорости v_a въ положеніяхъ, равноотстоящихъ отъ центра, будутъ одинаковы по своей величинѣ и, въ данномъ движеніи влѣво, по знаку, что слѣдуетъ изъ того, что запасы живой силы въ каждыхъ двухъ такихъ положеніяхъ будутъ одинаковы. Итакъ, наша точка, выйдя изъ A_0 безъ начальной скорости, будетъ двигаться съ все возрастающими скоростями вплоть до точки O, гдѣ скорость будетъ максимальной; затѣмъ она перейдетъ въ область поло-

жительныхъ силъ, ея движенію сопротивляющихся, и здѣсь скорость ея будетъ постепенно убывать, доходя до нуля въ точкѣ A_1, гдѣ наша точка и остановится, причемъ разстояній точекъ A_1 и A_0 до центра O одинаковы. Движеніе на участкѣ A_0A_1, симметричное относительно центра O, представитъ собою первое колебаніе нашей точки.

Остановившись въ A_1, наша точка, будучи попрежнему притягиваема центромъ O, повернетъ назадъ, къ O. Теперь на всемъ участкѣ A_1O она будетъ двигаться въ области положительныхъ силъ, причемъ здѣсь будемъ имѣть $dx > 0$. Слѣдовательно, на этомъ участкѣ какъ живая сила точки, такъ и скорость ея, будутъ все время возрастать вплоть до точки O, гдѣ наша точка вступитъ въ область отрицательныхъ силъ, имѣя съ собою запасъ живой силы въ количествѣ, выражаемомъ площадью A_1a_1O. Очевидно, что въ области Ox она сможетъ дойти только до такой точки Z, которая опредѣлитъ собою площадь, равную площади A_1a_1O. Очевидно, что такой точкой Z можетъ быть только точка A_0, какъ удовлетворяющая указанному требованію. Значитъ, наша точка, при своемъ движеніи вправо, дойдетъ лишь до начальнаго своего положенія A_0, гдѣ и остановится. Такимъ образомъ, движеніе вправо окажется колебаніемъ съ той же амплитудой, которая имѣла мѣсто въ первомъ колебаніи.

Далѣе, очевидно, совершится третье колебаніе, повторяющее собою первое, причемъ точка дойдетъ опять только до прежняго положенія A_1. Затѣмъ совершится четвер-

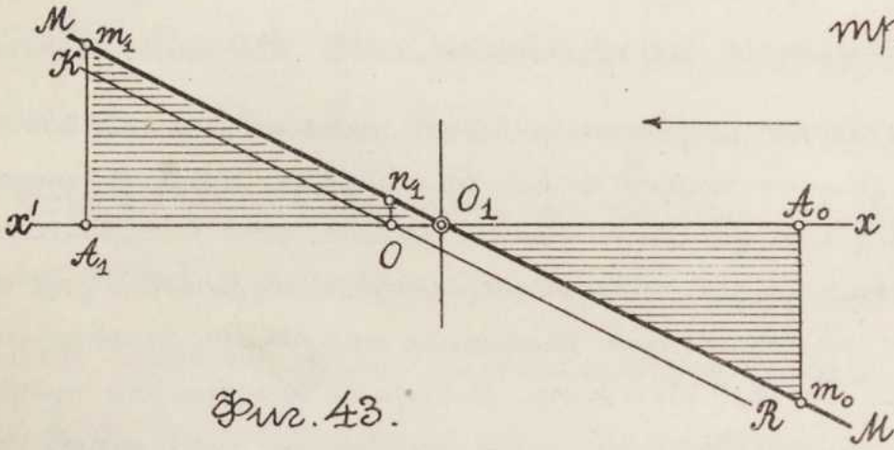
тое, повторяющее второе, и т. д. Выходитъ, такимъ образомъ, что точка будетъ все время колебаться около центра O, отходя отъ него то вправо, то влѣво, на одно и то же разстояніе $OA_0 = OA_1$, такъ что амплитуда колебаній будетъ все время оставаться постоянной, равной $A_0A_1 = 2\,A_0O = 2x_0$. Скорости точки въ симметричныхъ положеніяхъ ея относительно центра O будутъ одинаковы, а черезъ центръ притяженія O она будетъ проходить съ максимальными скоростями, одинаковыми по величинѣ, но отличающимися только знаками, соотвѣтствующими направленіямъ колебаній.

Нетрудно подсчитать и значеніе этой максимальной скорости V. Замѣчая, что запасъ живой силы въ моментъ перехода черезъ O выражается черезъ $\frac{1}{2}mV^2$, а, съ другой стороны, помня, что въ данномъ случаѣ онъ выражается площадью треугольника A_0a_0O, равной $\frac{1}{2}A_0O^2 tg\varphi$ или, что то же, $\frac{1}{2}A_0O^2 . k\mu$ (по абсолютной величинѣ), получаемъ уравненіе $mV^2 = A_0O^2 k\mu$, такъ что $V = A_0O\sqrt{k}.\sqrt{\mu/m}$. Выбирая масштабъ такъ, чтобы (μ/m) равнялось единицѣ, получимъ знакомое уже намъ изъ предыдущаго значеніе этой максимальной скорости: $V = A_0O\sqrt{k}$, а такъ какъ $A_0O = x_0$, то $V = x_0\sqrt{k}$.

Отмѣтимъ, наконецъ, что всякій разъ, когда точка движется по оси подъ дѣйствіемъ притяженія ея центромъ, лежащимъ на той же оси, съ силами, пропорціональными разстоянію точки до этого центра, причемъ треніе отсутствуетъ, то силовая кривая выражается прямой, пересѣкающей ось $x'x$ какъ разъ въ этомъ центрѣ притяженія. Обратное заключеніе также справедливо: если силовая кривая представляется прямой, пересѣкающей ось $x'x$ въ нѣкоторой точкѣ Z, то движеніе точки подъ дѣйствіемъ силъ, распредѣляю-

щихъ по закону, изображаемому этой прямой, будетъ совершаться такъ, какъ если бы точка находилась подъ дѣйствіемъ притяженія ея центромъ Z съ силами, пропорціональными разстояніямъ, а никакихъ другихъ силъ не было. Это замѣчаніе сейчасъ же намъ пригодится.

Посмотримъ теперь, какъ обстоитъ дѣло въ случаѣ движенія съ треніемъ. Пусть въ нѣкоторый моментъ наша точка находится въ положеніи A_0 безъ начальной скорости, такъ что $v_{A_0} = 0$. Повинуясь притяженію ея центромъ O, она двинется влѣво, почему силы треніе окажутся направленными въ правую сторону, т.-е. положительными, и результирующая кривая



Фиг. 43.

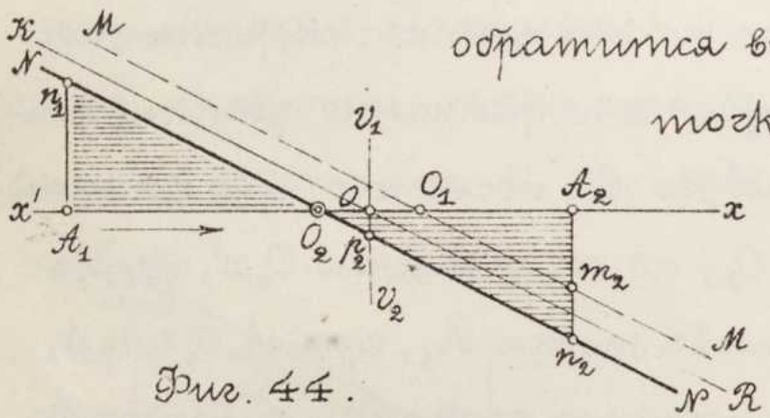
представится прямой MM_3, проходящей выше прямой притяженія KR, черезъ точку n_1, гдѣ $On_1 = \mu . fmg$ (фиг. 43).

Такимъ образомъ, движеніе нашей точки будетъ совершаться по закону, изображаемому прямой MM_3. Согласно замѣчанію, сдѣланному выше, это будетъ движеніе подъ дѣйствіемъ притяженія нашей точки центромъ O_1, лежащимъ въ пересѣченіи прямой MM съ осью $x'x$, съ силами, пропорціональными разстоянію точки именно до этого центра O_1, причемъ никакихъ другихъ силъ здѣсь нѣтъ. Такимъ образомъ, движеніе будетъ происходить такъ, какъ если бы треніе исчезло, но зато центръ притяженія O

переместится въ точку O_1, представляющую собою, какъ видимъ, правую граничную точку области равновѣсія. Слѣдовательно, наша точка, при этомъ своемъ движеніи влѣво, будетъ двигаться по схемѣ, изображенной на фиг. 42, съ тѣмъ лишь измѣненіемъ, что силовая прямая MM проходитъ не черезъ дѣйствительный центръ притяженія O, а черезъ нѣкоторый другой, воображаемый, O_1. За этимъ измѣненіемъ все остальное не мѣняется: скорость точки на всемъ пути A_0O_1 будетъ непрестанно увеличиваться, достигнетъ максимума въ O_1, послѣ чего, при дальнѣйшемъ движеніи точки, за O_1, по направленію O_1x', станетъ убывать, обращаясь въ нуль въ точкѣ A_1, гдѣ $A_0O_1 = O_1A_1$. Въ A_1 наша точка остановится за полнымъ израсходованіемъ всего запаса живой силы, принесеннаго ею съ собой: запасъ этотъ выражается площадью $A_0O_1m_1$ и уйдетъ на покрытіе работы положительныхъ силъ на участкѣ O_1A_1, выражаемой площадью $O_1A_1m_1$, равной, въ виду $A_0O_1 = O_1A_1$, площади $A_0O_1m_1$. Двѣ эти равныя по величинѣ, но противоположныя по своимъ знакамъ, площади заштрихованы.

Остановившись на мгновеніе въ A_1, наша точка немедленно повернетъ назадъ, къ O_1. Принимая во вниманіе, что силы тренія перемѣнятъ теперь свое направленіе, заключаемъ, что, согласно схемѣ фиг. 41, силовая кривая изобразится теперь прямой NN, идущей ниже основной прямой KR и отстоящей отъ нея въ направленіи OV_2 на величину Op_2 силы тренія (фиг. 44). Такимъ образомъ, движеніе нашей точки изъ A_1 вправо

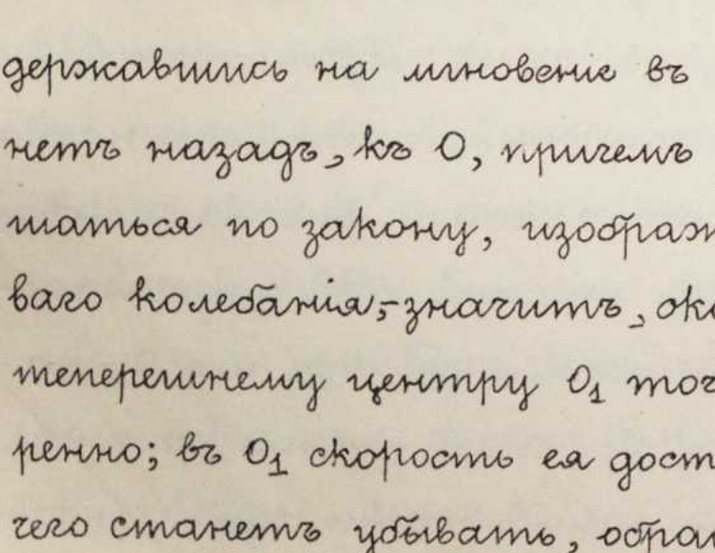
совершится такъ, какъ если бы центръ притяженія переместился теперь въ O_2. Вплоть до O_2 движеніе будетъ идти съ все возрастающими скоростями, въ точкѣ O_2 получимъ максимумъ скорости, а пройдя O_2, точка вступитъ въ область отрицательныхъ силъ, O_2x, гдѣ будетъ постепенно растрачивать свою живую силу,—скорость ея будетъ убывать вплоть до точки A_2, гдѣ она обратится въ нуль, такъ что наша точка здѣсь остановится.



Фиг. 44.

Положеніе точки A_2 опредѣлится изъ условія $A_1O_2 = O_2A_2$, ибо площади треугольниковъ $A_1n_1O_2$ и $O_2A_2n_2$ должны быть въ точности равны.

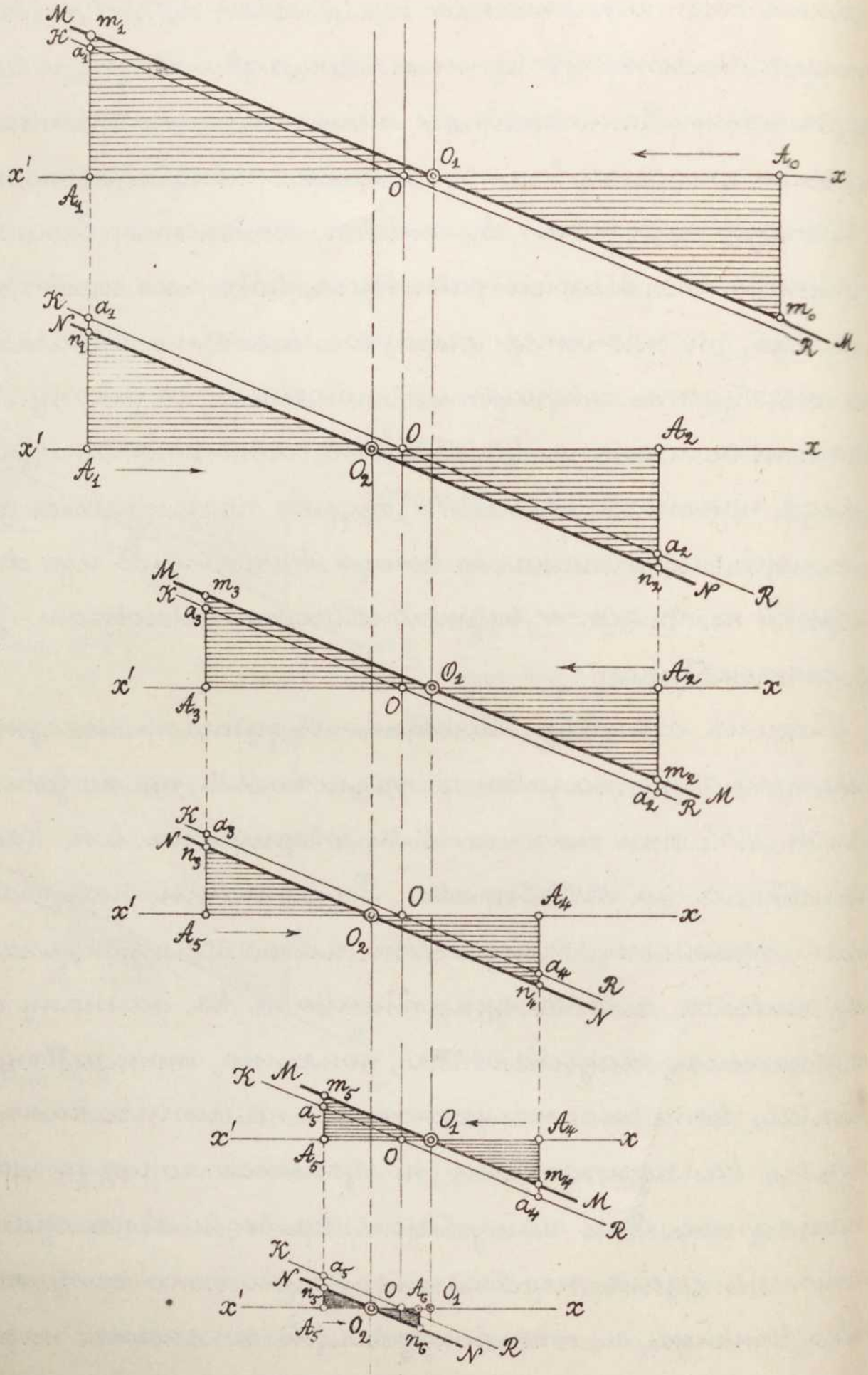
Если бы точка A_2 оказалась лежащей внутри области равновѣсія, то наша точка такъ бы въ A_2 и осталась. Но если A_2 окажется находящейся внѣ области равновѣсія, какъ это изображено на фиг. 45, то, задержавшись на мгновеніе въ A_2, она немедленно повернетъ назадъ, къ O, причемъ движеніе станетъ совершаться по закону, изображаемому прямой MM перваго колебанія,—значитъ, около того же центра O_1. Къ тепереишему центру O_1 точка будетъ подходить ускоренно; въ O_1 скорость ея достигнетъ максимума, послѣ чего станетъ убывать, обращаясь въ нуль въ точкѣ A_3,



Фиг. 45.

положеніе коей опредѣляется изъ условія: $A_2O_1 = O_1A_3$; въ такомъ случаѣ заштрихованныя площадки $A_2O_1m_2$ и $O_1A_3m_3$ будутъ равны. Если крайняя точка A_3 этого третьяго колебанія придется внутри области равновѣсія, то точка въ этомъ положеніи A_3 такъ и останется. Если же A_3 придется внѣ области равновѣсія, какъ это изображено на фиг. 45, то начнется очередное колебаніе вправо, причемъ оно будетъ совершаться, понятно, по закону NN. Такая игра и смѣна колебаній и соотвѣтствующихъ силовыхъ прямыхъ MM и NN будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока точка въ концѣ какого-либо изъ своихъ колебаній не придется внутри области равновѣсія,—тогда она остановится.

Такимъ образомъ, колебанія будутъ происходить попеременно то по закону прямой MM, то по закону прямой NN, причемъ по MM совершатся всѣ колебанія влѣво, а по NN—вправо. Результаты пользованія этими прямыми, графически иллюстрирующими теорему живыхъ силъ въ примѣненіи ея къ данному случаю движенія, оказываются, понятно, тождественными съ тѣми, которые получаются аналитическимъ путемъ, но все изслѣдованіе получается гораздо проще и наглядное. При пользованіи приведеннымъ графическимъ методомъ необходимо помнить о смѣнѣ силовыхъ кривыхъ и сопровождающей ее смѣнѣ подставныхъ центровъ притяженія O_1 и O_2 одного другимъ. На фигурѣ 46 приведено, въ рядѣ чертежей, соотвѣтствующихъ каждый отдѣльному колебанію, изслѣдованіе


M
K
m_1
a_1
x'
A_1
O_1
O
A_0
x
m_0
R
M
K
a_1
N
n_1
x'
A_1
O
O_2
A_2
x
a_2
n_2
N
R
M
K
m_3
a_3
x'
A_3
O_1
O
A_2
x
m_2
a_2
R
M
K
a_3
N
n_3
x'
A_5
O
O_2
A_4
x
a_4
R
n_4
N
K
M
m_5
a_5
x'
A_5
O_1
O
A_4
x
m_4
M
a_4
R
K
a_5
N
n_5
x'
A_5
O
A_5
O_1
x
O_2
n_5
N
R

Фиг. 46.

движенія, разобраннаго на фиг. 32 и 33 (стр. 77 и 78). Въ каждомъ отдѣльномъ чертежѣ толстой чертой выдѣлена силовая прямая (MM или NN, смотря по направленію колебанія; двойнымъ кружкомъ, стоящимъ въ пересѣченіи каждой такой силовой прямой съ осью x'x, обозначенъ воображаемый центръ каждаго колебанія; на послѣднемъ чертежѣ отмѣчены оба такіе центра, O_1 и O_2, чтобы показать, что точка A_6 попала внутрь области равновѣсія. Дѣйствительный центръ притяженія помѣченъ вездѣ буквой O. Одинаковыя буквы различныхъ чертежей обозначаютъ одну и ту же точки системы x'Ox. Равновеликія площади заштрихованы. Мы видимъ, что наша точка, выйдя изъ A_0 безъ начальной скорости, совершитъ всего 6 колебаній и остановится въ A_6.

Замѣчая, что съ каждымъ новымъ колебаніемъ амплитуда его, сравнительно съ предыдущей, уменьшается на двойную величину области равновѣсія, т.-е. на $2\,O_1O_2$, заключаемъ, что крайнія правыя точки, какъ и крайнія лѣвыя, отстоятъ одна отъ другой на $2\,O_1O_2$, такъ что, примѣнительно къ фиг. 32, имѣемъ равенства: $A_0A_2 = A_2A_4 = A_4A_6 = 2\,O_1O_2$ и, подобнымъ же образомъ, $A_1A_3 = A_3A_5 = 2\,O_1O_2$. Поэтому, зная величину области равновѣсія O_1O_2 и начальное положеніе A_0 точки, легко найти положеніе ея внутри области равновѣсія, откладывая отъ A_0 циркулемъ рядъ отрѣзковъ, равныхъ каждый $2\,O_1O_2$; тогда найдутся

$A_2, A_4, \ldots,$ — крайнія правыя точки послѣдовательныхъ колебаній. Если какая-либо изъ этихъ точекъ попадетъ внутрь области равновѣсія, то это будетъ значить, что точка остановится въ своемъ колебаніи вправо. Если же въ области равновѣсія не окажется ни одной крайней правой точки, то это значитъ, что тамъ лежитъ крайняя лѣвая точка, положеніе коей найдемъ, откладывая упомянутые отрѣзки $2O_1O_2$ уже отъ первой крайней лѣвой точки A_1. Тогда одной изъ такъ получаемыхъ точекъ мы навѣрное попадемъ въ область равновѣсія.

Изложенныя разсужденія съ достаточной наглядностью выясняютъ сущность и причины уничтожающаго дѣйствія пружинъ на движеніе снабженныхъ ими системъ. Разсмотрѣніе явленій, здѣсь происходящихъ, удобнѣе всего вести такъ: пусть намъ дана система двухъ тѣлъ, могущихъ двигаться поступательно въ одномъ и томъ же направленіи, съ треніемъ, и соединенныхъ другъ съ другомъ помощью пружинъ, какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ вагонахъ. Для того, чтобы приложить вышеприведенныя разсужденія, нужно, чтобы одно изъ тѣлъ было неподвижнымъ и играло роль нашей стѣны, — см. фиг. 19 на 55 стр., — а для этого нужно и достаточно разсматривать не дѣйствительное движеніе тѣлъ, а относительное, для полученія коего въ каждый данный моментъ мы придаемъ всей нашей системѣ

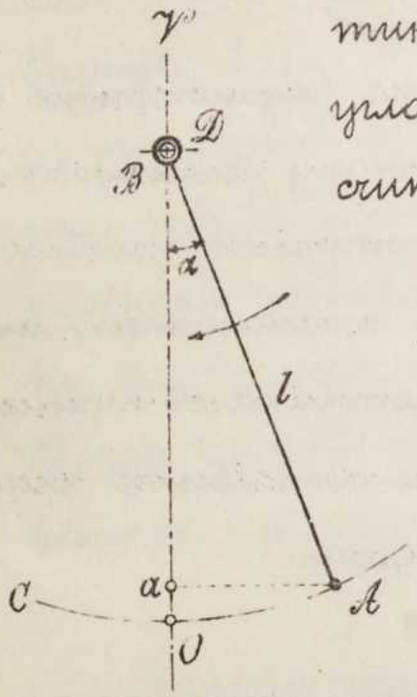
движеніе, равное и обратное движенію одного изъ данныхъ тѣлъ. Очевидно, что ни на число колебаній, ни на время и амплитуду ихъ такое добавленіе вліяніе не окажетъ, а между тѣмъ вопросъ о прекращеніи колебаній будетъ значительно упрощенъ.

Этими замѣчаніями мы закончимъ разсмотрѣніе взятаго движенія и перейдемъ къ детальному разслѣдованію еще одного случая движенія, при нѣкоторыхъ условіяхъ представляющаго рядъ любопытныхъ особенностей,—мы подразумѣваемъ случай движенія маятника съ треніемъ въ точкѣ привѣса; изслѣдованіе его и составитъ предметъ очереднаго параграфа нашего курса.

§ 4. Движеніе маятника съ треніемъ въ точкѣ привѣса.

Предположимъ, что у насъ имѣется маятникъ, подвѣшенный на неподвижномъ шипѣ D (фиг. 47) помощью втулки B, охватывающей этотъ шипъ и неизмѣняемо соединенной со стержнемъ AB маятника; при качаніи его втулка будетъ, такимъ образомъ, вращаться на шипѣ, какъ на оси. При этомъ, ради упрощенія вычисленій, предположимъ, что у насъ имѣется не физическій маятникъ, а математическій, состоящій изъ нѣкоторой матеріальной точки массы M, подвѣшенной на невѣсомомъ и нерастяжимомъ стержнѣ AB. Длиной l маятника будемъ считать разстояніе отъ этой матеріальной точки A до оси шипа D, а радіусъ шипа D, а значитъ и втулки B, обозначимъ черезъ r.

Угломъ α отклоненія маятника будемъ называть уголъ, образованный стержнемъ AB съ вертикалью OV; вершиной этого угла будетъ все время служить центръ сѣченія шипа плоскостью чертежа, предполагаемой вертикальной. Примѣнительно къ этимъ угламъ α отклоненія маятника будемъ считать дѣйствительными, за соотвѣтственными, конечно, измѣненіями, всѣ тѣ положенія, которыя были установлены въ предыдущемъ параграфѣ для абсциссъ x, дающихъ отклоненія точки отъ начала координатъ при движеніи ея по оси $x'x$. Сообразно съ этимъ, углы, дающіе отклоненія маятника вправо отъ вертикали OV, будемъ считать положительными и отмѣчать знакомъ плюсъ, а влѣво — отрицательными и помѣчать знакомъ минусъ. Подобнымъ же образомъ сохранятъ свою силу положенія о правильномъ написаніи производныхъ какъ въ области положительныхъ α, такъ и отрицательныхъ. Посмотримъ теперь, какъ происходитъ движеніе такого маятника въ предположеніи, что между шипомъ и втулкой, нагруженной здѣсь различными силами, о чемъ мы будемъ говорить подробно ниже, развиваются силы трѣнія, движенію маятника, по ихъ основному свойству, препятствующія.



Фиг. 47.

Къ изслѣдованію даннаго движенія примѣнимъ извѣстный изъ теоретической механики принципъ

д'Аламбера, могущій быть сформулированнымъ такъ:

Если въ какой-нибудь моментъ остановить систему и къ движущимъ силамъ прибавить еще силы инерціи, соотвѣтствующія взятому моменту, то будетъ имѣть мѣсто равновѣсіе; при этомъ всѣ силы давленія, натяженія и т. д., развивающіяся между частями системы при такомъ равновѣсіи, будутъ дѣйствительными силами давленія, натяженія и проч. при движеніи системы въ разсматриваемый моментъ времени.

Предположимъ, что нашъ маятникъ взятъ въ 1ый моментъ своего качанія влѣво, когда онъ находится въ положеніи A,— см. фиг. 47. Прибавляя въ этотъ моментъ силы инерціи, ему соотвѣтствующія, получимъ равновѣсіе, при чемъ всѣ силы давленій останутся, какъ мы указывали прежними, дѣйствительными, имѣвшими мѣсто при движеніи системы въ разсматриваемый моментъ. Значитъ, останутся прежними и всѣ силы тренія, возбуждаемыя на поверхности соприкосновенія шипа съ втулкой, благодаря нагрузкѣ этой послѣдней различными силами. Разъ имѣетъ мѣсто равновѣсіе, то получается возможность написать уравненія, алгебраически выражающія условія этого равновѣсія, причемъ въ учетъ попадутъ, конечно, кромѣ силъ движущихъ, и добавленныя нами силы инерціи, обусловившія наличность этого равновѣсія, безъ нихъ мѣста не имѣвшаго. Въ данномъ случаѣ, когда система маятника представляетъ собою систему, имѣющую лишь вращательное движеніе во-

кругъ оси шипа D, мы имѣемъ возможность ограничиться написаніемъ одного лишь уравненія моментовъ всѣхъ силъ, дающихъ равновѣсіе, при чемъ для написанія момента силъ инерціи можемъ воспользоваться тѣмъ выраженіемъ его, какое намъ даетъ теоретическая механика для момента силъ, вращающихъ данное тѣло вокругъ неподвижной оси, а именно:

Моментъ силъ, вращающихъ данное тѣло вокругъ неподвижной оси, равенъ моменту инерціи тѣла относительно оси вращенія на угловое ускореніе. Обозначимъ моментъ вращающихъ силъ черезъ $\mathfrak{L}$, моментъ инерціи маятника относительно оси шипа-черезъ J_D, а угловое ускореніе-черезъ $d^2\alpha/dt^2$, получаемъ, такимъ образомъ, уравненіе

$$\mathfrak{L} = J_D \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

А такъ какъ, въ силу существованія равновѣсія, моментъ силъ инерціи относительно оси вращенія долженъ быть равенъ и противоположенъ моменту дѣйствующихъ силъ, то отсюда заключаемъ, что моментъ силъ инерціи относительно оси вращенія будетъ выражаться черезъ

$$\mathfrak{L}_{in} = -J_D \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Замѣчая, что для математическаго маятника

$$J_D = Ml^2,$$

находимъ искомое выраженіе для момента силъ инерціи нашего маятника

$$\mathfrak{L}_{in} = -Ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Прибавивъ силы инерціи, мы получимъ равновѣсіе.

Имѣя это въ виду, напишемъ одно изъ условій его, говорящее, что при равновѣсіи сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно какой-угодно оси моментовъ равна нулю. При этомъ надо замѣтить, что въ число этихъ всѣхъ силъ должны войти и силы инерціи. За ось моментовъ возьмемъ ось вращенія маятника, т.-е. ось шипа D. Въ такомъ случаѣ для момента силъ инерціи выраженіе уже подготовлено,— оно дается соотношеніемъ (1). Займемся теперь составленіемъ моментовъ другихъ силъ, дѣйствующихъ на маятникъ. Силами этими оказываются:

1) сила тяжести маятника,— вѣсъ его; она равна Mq и направлена вертикально внизъ;

2) центробѣжная сила, развивающаяся при движеніи маятника; предполагая, однако, углы отклоненія маятника въ его крайнихъ положеніяхъ, т.-е. амплитуду его, весьма малыми, получаемъ весьма медленное движеніе его, что ведетъ къ появленію лишь весьма незначительныхъ центробѣжныхъ силъ, коими, въ силу этого замѣчанія, мы и будемъ пренебрегать.

3) силы треніи, возникающія на поверхности соприкосновенія втулки съ шипомъ, вслѣдствіе нагрузки втулки вѣсомъ маятника Mq. Величину силы треніи можно учесть, предположивъ ее пропорціональной нагрузкѣ Mq втулки и принявъ факторъ этой пропорціональности, т.-е. коэффиціентъ треніи въ шипѣ, постояннымъ и равнымъ μ. О связи этого коэффиціента съ коэффиціентомъ треніи скольженія f подробно говорится въ статьѣ о треніи въ шипахъ.— Итакъ, эту силу Тре-

нія суммарно можно принять равной μMg.

Посмотримъ теперь, какъ выразятся моменты всѣхъ этихъ силъ относительно оси вращенія D. Начнемъ съ силы тяжести. Опуская изъ точки A, въ которой находится нашъ маятникъ во взятый моментъ, перпендикуляръ Aa на вертикаль OV, заключаемъ, что моментъ силы тяжести относительно указанной оси выражается черезъ $Mg \times Aa$. Замѣчая, что

$$Aa = l \sin\alpha,$$

и ограничиваясь разсмотрѣніемъ лишь такихъ малыхъ колебаній, при которыхъ $\sin\alpha$ можно приблизительно принять равнымъ аргументу его α, можемъ для такихъ малыхъ колебаній принять, что

$$Aa = l\alpha,$$

вслѣдствіе чего моментъ силы тяжести Mg можно принять равнымъ $Mgl\alpha$. Что касается знака его, то, по аналогіи съ знакоположеніемъ силъ, дѣйствующихъ на точку при движеніи ея по оси, условимся и здѣсь считать моменты, уменьшающіе уголъ отклоненія отъ вертикали, отрицательными, а увеличивающіе уголъ — положительными. Въ силу этого моменту силы тяжести, какъ стремящемуся во всякій моментъ движенія маятника уменьшать уголъ отклоненія, придется всегда приписывать знакъ минусъ. Такимъ образомъ, устанавливаемъ, что

$$\text{моментъ}(Mg) = -Mgl\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Переходимъ къ силамъ трѣнія. Плечо силы трѣнія равно, очевидно, радіусу шипа r, такъ что моментъ

ея выразится черезъ μMgr. Что касается знака его, то, замѣчая, что, при взятомъ положеніи и направленіи движенія маятника, силы трепія противодѣйствуютъ уменьшенію угла α, т.-е. способствуютъ увеличенію его, ставимъ передъ этимъ моментомъ знакъ плюсъ, такъ что

$$\text{моментъ}(\mu Mg) = +\mu Mgr \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Больше силъ не имѣется, ибо центробѣжной силой, по малости ея при взятыхъ условіяхъ, мы пренебрегли. Такимъ образомъ, искомое условіе равновѣсія, требующее равенства нулю суммы моментовъ всѣхъ силъ, приметъ, въ виду уравненій (1), (2) и (3), видъ

$$-Ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - Mgl\alpha + \mu Mgr = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Дѣля все на $(-Ml^2)$ и перенося второй и третій члены вправо, получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} + \frac{\mu gr}{l^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

— дифференціальное уравненіе движенія нашего маятника, при чемъ перемѣннымъ является уголъ α отклоненія маятника отъ вертикали OV.

Полагая

$$\frac{g}{l} = h,$$

получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -h\alpha + \frac{h\mu r}{l},$$

по построенію своему совершенно аналогичное съ основнымъ уравненіемъ движенія точки по прямой подъ воздѣйствіемъ силъ притяженія, пропорціональныхъ разстояніямъ точки отъ центра, и силъ трепія; это уравне-

ніе, — см. стр. 59, ур. (1), — имѣетъ видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fg.$$

Вся разница сводится къ другому смыслу и обозначенію перемѣнныхъ и къ инымъ значеніямъ постоянныхъ коэффиціентовъ: роль отклоненія x отъ центра притяженія играетъ здѣсь уголъ отклоненія α отъ вертикальной оси OV. Начальныя условія построены также вполнѣ аналогично случаю уравненія (1)', — см. стр. 59: при $t=0$ начальное отклоненіе предполагается равнымъ α_0, а начальная угловая скорость въ этотъ же моментъ — нулю, т.-е.

$$(\alpha)_{t=0} = \alpha_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

и

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Легко убѣдиться, какъ и въ случаѣ движенія точки по прямой, что уравненіе (5) пригодно, при движеніи маятника влѣво, и для области отрицательныхъ угловъ α. Дѣйствительно, при отрицательномъ α и движеніи влѣво моментъ силъ инерціи принимаетъ значеніе $\left[-Ml^2\frac{d^2(-\alpha)}{dt^2}\right]$, моментъ силы тяжести — значеніе $[-Mgl(-\alpha)]$, а моментъ силъ треніа, какъ способствующій теперь уменьшенію отклоненія отъ оси OV — значеніе $(-\mu Mgr)$. Въ виду этого уравненіе моментовъ принимаетъ теперь видъ:

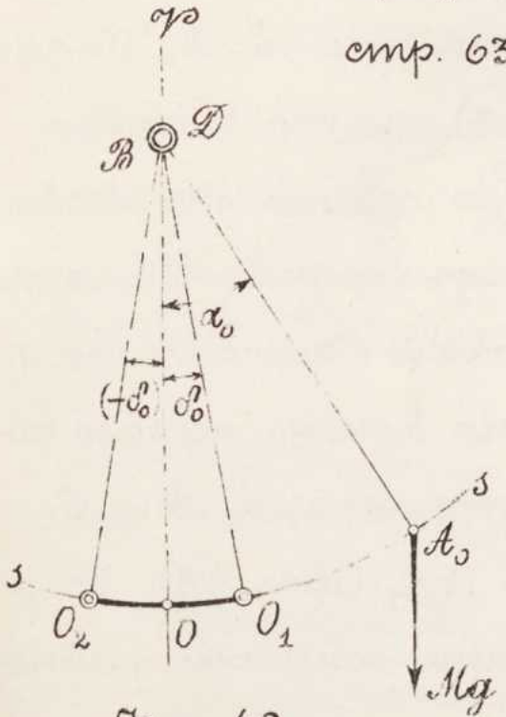
$$\left[-Ml^2\frac{d^2(-\alpha)}{dt^2}\right] + [-Mgl(-\alpha)] + (-\mu Mgr) = 0,$$

что, послѣ необходимыхъ упрощеній, сводится къ тому же уравненію (4). Такимъ образомъ, уравненіе (4) характеризуетъ собою, вообще, все движеніе маятника влѣво. Для движенія вправо уравненіе напишется иначе, какъ объ этомъ будетъ сказано ниже.

Принимая во вниманіе все сказанное, можемъ утверждать, что всѣ заключенія, къ которымъ мы пришли послѣ разсмотрѣнія ур-ія (1) движенія точки по прямой, — см. стр. 59, — могутъ быть, послѣ соотвѣтственныхъ измѣненій, примѣнены и къ нашему уравненію (6). Опять

на дугѣ качаній ss (фиг. 48) выдѣлится область равновѣсія $O_1 O O_2$, причемъ размѣры ея опредѣлятся по уравненію (5) аналогично тому, какъ опредѣлялись размѣры области равновѣсія въ случаѣ, разобранномъ въ предыдущемъ параграфѣ, — см. ур. (5) на стр. 63, — гдѣ мы имѣли

$$\xi_0 = \delta g / \kappa .$$



Фиг. 48.

Въ нашемъ случаѣ изъ уравненія (5) получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -h\left(\alpha - \frac{\mu r}{l}\right) \quad . \quad . \quad (9)$$

Приравнивая вторую производную нулю, получимъ уравненіе, опредѣляющее то положеніе маятника, при которомъ имѣетъ мѣсто равенство между моментомъ силы тяжести и противоположнымъ ему по знаку моментомъ силы тренія. Это уравненіе имѣетъ видъ:

$$\alpha - \frac{\mu r}{l} = 0 ,$$

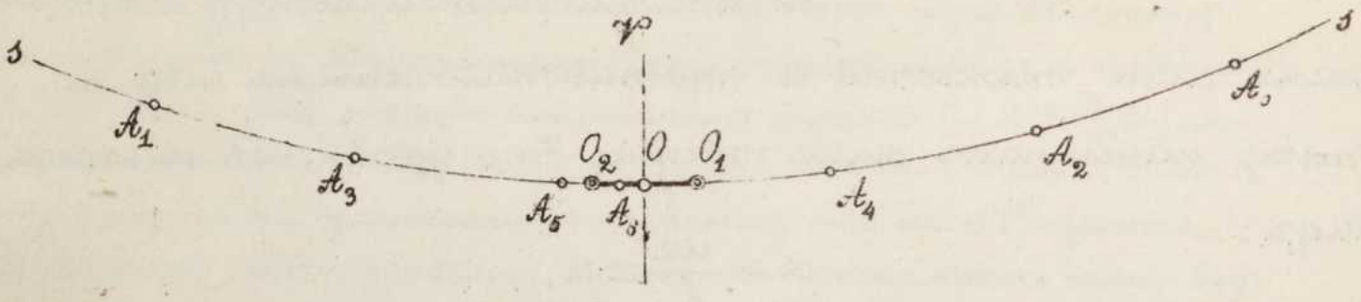
откуда и получаемъ одно граничное значеніе угла α, для движенія маятника влѣво; обозначая это граничное значеніе черезъ δ_0, имѣемъ выраженіе его:

$$\delta_0 = \frac{\mu r}{l} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Этотъ уголъ δ_0 опредѣлитъ собою положеніе правой границы, O_1, области равновѣсія. Въ дальнѣйшемъ мы опредѣлимъ положеніе лѣвой границы, O_2, — она опредѣлится угломъ $(-\delta_0)$, такъ что точка O_2 будетъ

расположена симметрично точкѣ O_1 относительно оси OV, и, значитъ, весь уголъ O_2OO_1 равенъ $2\delta_0$.

Если маятникъ въ начальномъ его положеніи окажется находящимся внутри области O_1O_2, то при данныхъ начальныхъ условіяхъ (7) и (8) онъ тамъ такъ и останется. Но если начальное его положеніе, A_0, будетъ лежать внѣ этой области (фиг. 48), то онъ начнетъ качаться, но первое свое качаніе онъ совершитъ, какъ и въ случаѣ точки, находящейся подъ воздѣйствіемъ пружины, не около вертикали OV, а около ближайшаго граничнаго радіуса DO_1. Въ силу этого конецъ перваго колебанія придется въ точкѣ A_1, отстоящей отъ O_1 влѣво на дугу O_1A_1, равную дугѣ A_0O_1 (фиг. 49). Если бы эта точка A_1 пришлась внутри области равно-



Фиг. 49.

вѣсія, то она тамъ бы и осталась. Но предположимъ, что точка A_1 приходится внѣ области равновѣсія, какъ это изображено на фиг. 49, такъ что, остановившись на мгновеніе, она немедленно повернетъ назадъ и станетъ совершать свое второе колебаніе, вправо.

Аналогично тому, что имѣло мѣсто въ предыдущемъ параграфѣ, это второе колебаніе будетъ совершаться уже около новой оси DO_2, — лѣваго гранич-

наго радіуса, и конецъ A_2 этого второго колебанія опредѣлится путемъ отложенія отъ O_2 вправо дуги O_2A_2, равной дугѣ O_2A_1.

Для колебанія вправо уравненіе движенія составится согласно съ положеніями, положенными въ основу уравненія (4), — см. стр. 109. Въ данномъ случаѣ мы получаемъ уравненіе

$$-Mg\alpha - Ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mu Mgz = 0,$$

переходящее въ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} - \frac{\mu gz}{l^2} = -h\alpha - \frac{h\mu z}{l}.$$

Отсюда для угла δ_1, образуемаго центральнымъ радіусомъ O_2D съ вертикалью OV получаемъ выраженіе:

$$\delta_1 = -\frac{\mu z}{l} = -\delta_0,$$

показывающее, что радіусы O_1D и O_2D располагаются симметрично относительно вертикали OV, какъ объ этомъ было сказано выше, на стр. 111.

Если точка A_2 придется внутри области равновѣсія, то точка останется въ A_2; если же внѣ этой области, то она приступитъ къ совершенію третьяго колебанія, которое и выполнитъ уже относительно праваго граничнаго радіуса O_1D; конечной точкой этого колебанія явится точка A_3, опредѣляемая изъ того условія, что дуга O_1A_3 равна дугѣ O_1A_2. Дальше можетъ совершиться четвертое колебаніе, вправо, — оно совершится около лѣваго граничнаго радіуса O_2D, и т. д. Амплитуды колебаній, какъ нетрудно въ этомъ убѣдиться изъ прямого подсчета ихъ, будутъ послѣдовательно убывать, уменьшаясь съ каждымъ новымъ колебаніемъ на $2(\smile O_1O)$, т.-е. на $2\delta_0$.

Такая смѣна осей качанія и убываніе амплитудъ будутъ длиться до тѣхъ поръ, пока наша точка, въ концѣ какого-либо изъ своихъ колебаній, не попадетъ внутрь области равновѣсія; тогда она тамъ и останется. На

фиг. 49 изображенъ случай, когда число колебаній оказалось равнымъ шести, — въ концѣ послѣдняго, шестого, колебанія точка оказалась въ положеніи A_6, внутри области равновѣсія; въ этомъ положеніи A_6 она и осталась затѣмъ въ покоѣ. Время каждаго колебанія, какъ это покажетъ непосредственный подсчетъ, остается незатронутымъ и постояннымъ, равнымъ $\pi/\sqrt{k} = \pi : \sqrt{\frac{F}{l}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, т.-е. времени колебанія математическаго маятника безъ треніа и съ тою же длиной его l.

Легко сообразить, что здѣсь, какъ и въ случаѣ движенія точки подъ воздѣйствіемъ пружины, колебаній будетъ совершено тѣмъ больше, чѣмъ меньше область треніа; это ясно изъ того соображенія, что каждое качаніе уменьшаетъ амплитуду на $2\delta_0$, т.-е. на величину дуги, изображающей область равновѣсія. Такимъ образомъ, если начальное отклоненіе α_0 выражается въ функціи δ_0 формулами

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= (2n-1)\delta_0 + \varepsilon \\ \text{или} \qquad \alpha_0 &= 2n\delta_0 + \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

гдѣ $\varepsilon < \delta_0$, то число колебаній будетъ равно n и, какъ показываетъ формула, будетъ увеличиваться съ уменьшеніемъ δ_0 и обратно.

Нетрудно, далѣе, убѣдиться, что область равновѣсія тѣмъ меньше, чѣмъ меньше моментъ треніа. Дѣйствительно, по формулѣ (10) имѣемъ, что

$$\delta_0 = \frac{\mu r}{l} = \frac{\mu M g r}{M g l},$$

а въ виду ур-іа (3) на стр. 109, это выраженіе перепишется такъ:

$$\delta_0 = \frac{\text{моменту силы трения } (\mu Mg)}{Mgl} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Этимъ, напримѣръ, вполнѣ объясняется тотъ фактъ, что число колебаній въ вѣсахъ, представляющихъ собою, въ сущности, тотъ же маятникъ, обыкновенно бываетъ очень велико. Дѣйствительно, моментъ трѣнія сведенъ здѣсь къ минимуму, ибо не только трѣніе сведено къ минимуму, но и плечо его ч является крайне малымъ; это обстоятельство, при сравнительно большихъ значеніяхъ знаменателя выраженія (12), ведетъ къ тому, что уголъ δ_0, а значитъ, и размѣры области равновѣсія, будутъ крайне малы. Вслѣдствіе этого, системѣ вѣсовъ придется совершить очень много колебаній, прежде чѣмъ центръ качанія вѣсовъ попадетъ въ область равновѣсія.

Если бы трѣнія не было, то въ уравненіи (4) выпалъ бы членъ μMgr, учитывающій моментъ силы трѣнія, и это уравненіе перешло бы въ уравненіе

$$-Ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - Mgl\alpha = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (4')$$

переходящее въ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (5')$$

или, окончательно, въ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -h\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots (6')$$

вполнѣ аналогичное уравненію (2) движенія точки безъ трѣнія подъ воздѣйствіемъ пружины (стр. 60):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Всѣ выводы, полученные изъ разсмотрѣнія уравненія (2.) прямолинейнаго движенія точки, могутъ быть, послѣ соотвѣтственныхъ измѣненій, примѣнены къ уравненію (6'), и, такимъ образомъ, можно заключить, что въ этомъ случаѣ маятникъ, разъ приведенный въ движеніе, будетъ качаться, не мѣняя ни времени своего качанія, равнаго здѣсь $\pi/\sqrt{h}$, т.-е. $\pi\sqrt{l/g}$, ни амплитуды, равной $2\alpha_0$. Эти результаты знакомы намъ изъ курса физики.

Такимъ образомъ, каждый маятникъ, при небольшихъ отклоненіяхъ его отъ вертикали VOV, можетъ быть разсматриваемъ движущимся какъ бы подъ вліяніемъ притяженія его къ оси OV съ силами, перпендикулярными оси маятника, AD, и пропорціональными угловому отклоненію его α отъ той же вертикали OV. Эффектъ силы тяжести въ данномъ случаѣ совершенно аналогиченъ эффекту отъ дѣйствія пружины съ криволинейной осью ss, дѣйствующей подобно пружинѣ съ прямолинейной осью x'x (фиг. 19).

Этими соображеніями мы и закончимъ изложеніе рѣшенія поставленной нами задачи. Мы видѣли, что какихъ-либо особенностей, сравнительно съ задачей о прямолинейномъ движеніи точки подъ воздѣйствіемъ пружины, она не представляетъ, являя собою лишь частный случай такого движенія, и гораздо болѣе интересной является та модификація только что разсмотрѣнной задачи, гдѣ шипъ, на который надѣвается втулка маятника, при движеніи этого послѣдняго не остается неподвижнымъ, а вращается самостоятельно, независимо отъ маятника, съ угловой скоростью, не спускающейся ниже нѣкотораго опредѣленнаго предѣла. Этотъ случай, имѣющій нѣкоторое значеніе для области эксперимента, былъ указанъ и разобранъ Н. Е. Жуковскимъ.

Мы знаемъ, что угловая скорость маятника, при качаніи его, не остается постоянной, но непрестанно мѣняется, поднимаясь отъ нуля въ одномъ край-

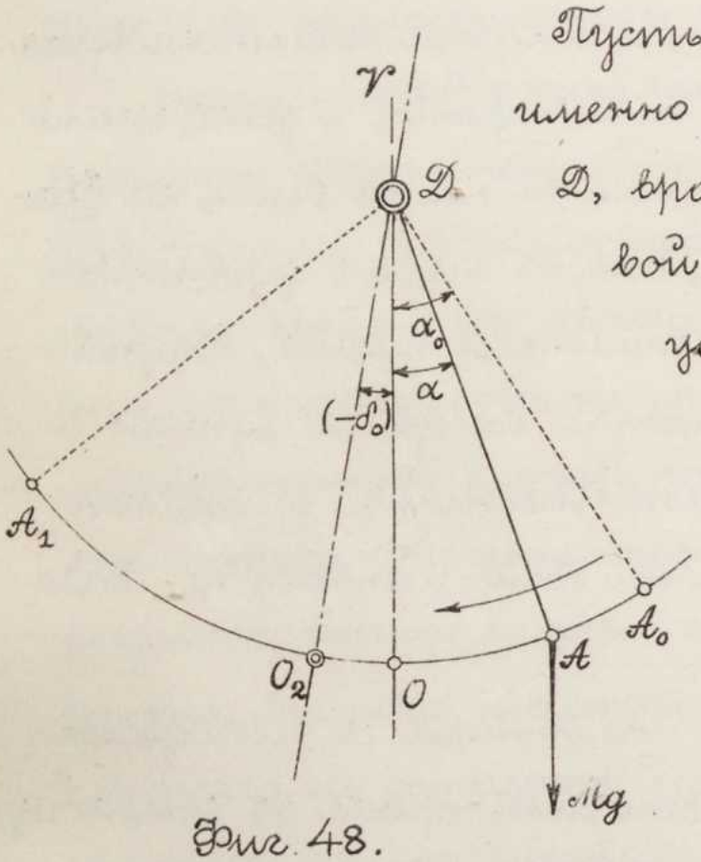
нем его положения до некоторого максимума при переходе через ось качания и, затем, спускаясь опять до нуля в следующем крайнем положении. Обозначим эту максимальную угловую скорость маятника через ω_m и положим, что шип приведен во вращение, все время в одну и ту же сторону, с угловой скоростью Ω, большей, чем ω_m, так что за все время движения имеет место неравенство

$$\Omega > \omega_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Так как втулка B нашего шипа нагружена весом Mg маятника, то на поверхности соприкосновения ея с шипом развиваются силы трения, и детальный разбор этого вопроса, выполненный нами выше, на страницах 18—21, показывает, что, в случае удовлетворения неравенства (13), направление сил трения, воздействующих на втулку, остается все время одним и тем же, согласным с направлением вращения шипа, каково бы, при этом, ни было направление качания маятника.

Рассматривая движение маятника с неподвижным шипом, мы видели, что силы трения в этом случае меняют свое направление вместе с изменением направления качания маятника. Случай маятника с подвижным шипом резко в этом отношении отличается от случая неподвижного шипа, и поэтому уже заранее можно предвидеть, что рассмотрение движения с подвижным шипом даст результаты, расходящиеся с результатами, полученными для

неподвижнаго типа. Въ этомъ можно убѣдиться путемъ непосредственнаго изслѣдованія, которое мы теперь и выполнимъ. Посмотримъ, какъ пишутся уравненія движенія для маятника съ подвижнымъ типомъ, какъ при качаніяхъ влѣво, такъ и при качаніяхъ вправо, и изслѣдуемъ эти уравненія, при чемъ предположимъ, что типъ маятника вращается все время по часовой стрѣлкѣ, такъ что моментъ силъ тренія, въ виду существованія неравенства (13), будетъ дѣйствовать на втулку все время также по часовой стрѣлкѣ.



Фиг. 48.

Пусть у насъ имѣется такой именно маятникъ AD, и типъ его, D, вращается все время по часовой стрѣлкѣ со скоростью Ω, удовлетворяющей основному неравенству (13). Разберемъ сначала движеніе влѣво, при чемъ предположимъ, что маятникъ находится въ области положительныхъ отклоненій α, какъ это изображено на фиг. 48. Составимъ сначала моменты всѣхъ дѣйствующихъ здѣсь силъ и силъ инерціи.

Моментъ силъ инерціи, согласно (1), выразится черезъ

$$-Ml^2\frac{d^2(+\alpha)}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Моментъ силы тяжести выразится черезъ

. . . . . .

$$-Mgl(+\alpha), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

причемъ мы приписали ему знакъ минусъ потому, что онъ стремится, какъ всегда, уменьшить отклоненіе маятника отъ вертикали VO.

Наконецъ, моментъ силъ треніа выразится черезъ

$$-\mu Mgr, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

причемъ мы приписали ему знакъ минусъ потому, что онъ, дѣйствуя постоянно по часовой стрѣлкѣ, будетъ во взятый моментъ содѣйствовать уменьшенію отклоненіа.

Въ виду этихъ соображеній, уравненіе равновѣсіа, аналогичное (4), принимаетъ здѣсь видъ:

$$-Ml^2\frac{d^2(+\alpha)}{dt^2} - Mgl\alpha - \mu Mgr = 0$$

Дѣля на Ml^2 и группируя члены, свободные отъ производныхъ, отдѣльно, получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha - \frac{\mu gr}{l^2} = -\frac{g}{l}\left(\alpha + \frac{\mu r}{l}\right) \quad \ldots\ldots (14)$$

Приравнивая $d^2\alpha/dt^2$ нулю, получаемъ уравненіе, опредѣляющее положеніе граничнаго радіуса D_2, служащаго здѣсь осью качанія:

$$\alpha + \frac{\mu r}{l} = 0,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{\mu r}{l} = -\delta_0,$$

согласно съ (10). Отсюда заключаемъ, что первое колебаніе совершится такъ, какъ если бы треніе исчезло, а ось колебанія переместилась изъ вертикали VO въ радіусъ D_2, отклонившись отъ вертикали VO въ сторону вращенія шара на уголъ δ_0. Этотъ радіусъ D_2, есть, какъ видимъ, лѣвый граничный радіусъ прежней области равновѣсія. Около этого радіуса D_2 и совер-

шится первое колебаніе нашего маятника совершенно такъ же, какъ если бы треніа не было совсѣмъ. Поэтому, полагая, что въ начальный моменть маятникъ находился въ A_0 (фиг. 50), заключаемъ, что въ конецъ перваго качанія онъ окажется въ A_1,—конечной точкѣ дуги O_2A_1, равной дугѣ O_2A_0. Вся дуга A_0A_1,—амплитуда перваго колебанія,—будетъ, очевидно, равна дугѣ $2(\alpha_0+\delta_0)$, въ то время какъ при движеніи съ треніемъ, но при неподвижномъ шипѣ, эта амплитуда была бы равна $2(\alpha_0-\delta_0)$. Легко убѣдиться, что, одновременно съ этимъ увеличеніемъ амплитуды, время качанія остается незатронутымъ и, попрежнему, равнымъ $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.—Итакъ, при вращеніи шипа съ такою скоростью Ω, первое качаніе (влѣво) совершится не около ближайшаго граничнаго радіуса DO_1, а около дальняго, лѣваго, DO_2; иными словами, ось качанія математическаго маятника безъ треніа, вертикаль VO, перемѣщается по направленію вращенію шипа D на уголъ δ_0.

Замѣтимъ, между прочимъ, что точка A_1 никогда не можетъ придтись между O_2 и O, въ прежней области равновѣсія, потому что центральной линіей качанія является здѣсь именно лѣвый радіусъ DO_2, и точка A_1, по необходимости должна лежать влѣво отъ него, т.-е. внѣ прежней области равновѣсія. Посмотримъ теперь, какъ дѣло будетъ происходить дальше.

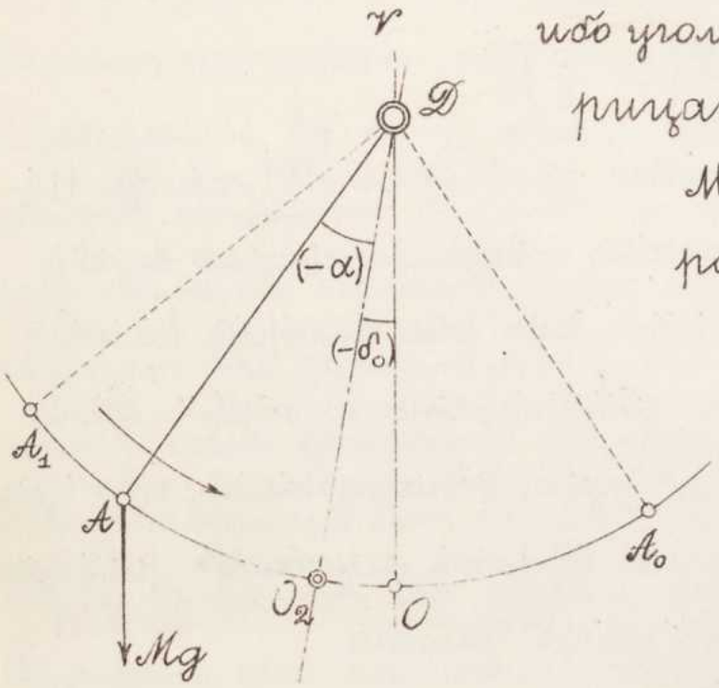
Остановившись на мгновеніе въ A_1, маятникъ повернетъ назадъ и начнетъ совершать свое второе качаніе, вправо. Посмотримъ, какъ напишется теперь уравненіе движенія для этого качанія.

Возьмемъ нашъ маятникъ въ тотъ моментъ второго его колебанія (вправо), когда онъ находится въ какой-либо точкѣ A, такъ что уголъ отклоненія его во взятый моментъ равенъ $(-\alpha)$, — см. фиг. 51. Моменты участвующихъ здѣсь силъ изобразятся такъ:

Моментъ силъ инерціи выразится теперь черезъ

$$-Ml^2\frac{d^2(-\alpha)}{dt^2}, \quad \ldots\ldots (e)$$

ибо уголъ отклоненія ADO здѣсь отрицателенъ и равенъ $(-\alpha)$.



Фиг. 51.

Моментъ силы тяжести выразится черезъ

$$-Mgl(-\alpha), \quad \ldots (f)$$

причемъ впереди выраженія момента знакъ минусъ поставленъ потому, что этотъ моментъ стремится уменьшить отклоненіе ADO маятника, а передъ угломъ α минусъ поставленъ потому, что этотъ уголъ лежитъ въ области отрицательныхъ угловъ.

Что касается момента трѣнія, то онъ, дѣйствуя, по условію, согласно со смысломъ вращенія шипа, т.-е. по часовой стрѣлкѣ, будетъ здѣсь противодѣйствовать уменьшенію угла отклоненія ADO, почему мы припишемъ ему плюсъ, изобразивъ его въ видѣ

$$+\mu Mgr. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

Въ виду всего этого уравненіе равновѣсія напишется здѣсь такъ:

$$-Ml^2\frac{d^2(-\alpha)}{dt^2} - Mgl(-\alpha) + \mu Mgr = 0,$$

что можетъ быть переписано проще такъ:

$$Ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mgl\alpha - \mu Mgr.$$

Дѣля на Ml^2, получаемъ уравненіе втораго качанія нашего маятника (вправо, отъ A_1 къ 0):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left(\alpha + \frac{\mu r}{l}\right),$$

въ точности повторяющее собою уравненіе (14), — см. стр. 119, — написанное для перваго качанія, совершающагося влѣво, это обстоятельство показываетъ, что это второе колебаніе совершится по тому же закону, что и первое. Дѣйствительно, приравнивая $d^2\alpha/dt^2$ нулю, обнаружимъ, что центральной линіей этого качанія будетъ служить радіусъ, наклоненный къ вертикали подъ угломъ

$$\alpha = -\frac{\mu r}{l} = -\delta_0.$$

Этотъ радіусъ, очевидно, представитъ собою тотъ же радіусъ DO_2, который служилъ осью перваго колебанія (влѣво). Качаніе будетъ совершаться такъ, какъ если бы треніе не было, вслѣдствіе чего нашъ маятникъ, выйдя изъ A_1, въ концѣ этого своего второго колебанія придетъ въ точку, отстоящую отъ O_2 вправо, считая по дугѣ качаній, на длину, равную длинѣ дуги A_1O_2; это значитъ, что маятникъ вернется, въ концѣ своего второго колебанія, въ ту же точку A_0, изъ которой онъ вышелъ въ началѣ своего перваго колебанія. Такимъ образомъ, второе колебаніе будетъ точнымъ повтореніемъ

перваго какъ по отношенію къ величинѣ амплитуды колебаній, такъ и къ положенію оси его; время колебаній остается также незатронутымъ. Вся разница сводится лишь къ разницѣ направленій колебанія и другихъ кинематическихъ факторовъ, и только. Такимъ образомъ, второе колебаніе представляетъ собою то же первое колебаніе, лишь повернутое относительно оси колебаній D_2 на 180°.

Слѣдующее, третье, колебаніе представитъ собою буквальное повтореніе перваго, ибо наша матеріальная точка, возвратясь въ A_0 и остановившись тамъ, окажется въ этотъ моментъ въ тѣхъ же самыхъ условіяхъ, въ какихъ она была въ началѣ своего перваго колебанія: какъ всѣ силы, на нее здѣсь теперь дѣйствующія, такъ и начальныя условія движенія будутъ тождественно одинаковы. Слѣдовательно, это качаніе совершится опять около оси D_2, и въ концѣ его точка придетъ опять въ положеніе A_1, послѣ чего начнется четвертое колебаніе, тождественно повторяющее второе и т. д. Словомъ, при такихъ условіяхъ нашъ маятникъ будетъ качаться такъ, какъ если бы трепія не было, а центральная линія качаній, остающаяся неизмѣнной какъ для качаній въ одну сторону, такъ и для качаній въ другую, отклонилась отъ вертикали въ сторону вращенія шипа на уголъ δ_0. Такимъ образомъ, нашъ маятникъ, имѣвшій возможность при неподвижномъ шипѣ совершить лишь ограниченное число колебаній, — амплитуда ихъ, согласно сказанному выше, съ каждымъ новымъ колебаніемъ убываетъ на одну и ту же величину $2\delta_0$, — при подвижномъ шипѣ, враща-

ющемся съ угловой скоростью Ω, большей, чѣмъ максимальная скорость ω_m маятника, превращается въ идеальный маятникъ безъ тренія, могущій при благопріятныхъ условіяхъ, каковыми является отсутствіе сопротивленія среды, въ которой ему приходится двигаться, качаться неопредѣленно долгое время между однѣми и тѣми же крайними точками A_0 и A_1 дуги качаній, равноотстоящими отъ центральной точки качаній, O_2. Разница между теоретическимъ маятникомъ безъ тренія и маятникомъ, разобраннымъ выше, сводится лишь къ тому, что центральная линія качаній, совпадающая у перваго съ вертикалью OV, у втораго оказывается удалившейся отъ этой вертикали въ сторону вращенія цапфы на уголъ δ_0, опредѣляемый по величинѣ треніе въ цапфѣ.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ любопытному результату: оказывается, что всякій маятникъ съ треніемъ въ точкѣ привѣса можетъ быть переведенъ въ идеальный маятникъ уже безъ всякаго треніе; для этого цапфу, на которую надѣвается втулка маятника, нужно привести во вращеніе съ угловой скоростью, большей, чѣмъ максимальная угловая скорость вращенія маятника.

Этотъ случай качанія представляетъ интересъ еще въ томъ отношеніи, что даетъ возможность опредѣлять коэффиціентъ скользящаго треніе f. Дѣйствительно, величина угла δ_0 отклоненія центральной линіи объ вертикали опредѣляется изъ соотношенія: $\delta_0 = \mu r/l$,

гдѣ μ есть коэффиціентъ тренія въ шипѣ, а въ составъ этого коэффиціента входитъ, какъ мы увидимъ, и коэффиціентъ тренія скольженія f. Такъ какъ уголъ δ_0 можно опредѣлить непосредственно путемъ прямого наблюденія, то сейчасъ же, при извѣстныхъ r и l, опредѣлится коэффиціентъ μ, а отсюда и коэффиціентъ f.

Имѣя въ виду, что скорость вращенія шипа Ω можно мѣнять какъ угодно, лишь бы она оставалась все время больше максимальной скорости ω_m, можно также поставить вопросъ о зависимости коэффиціента f отъ величины относительной скорости v. Если бы оказалось, что уголъ δ_0 сохраняетъ одно и то же значеніе при всякихъ скоростяхъ Ω шипа, то это показало бы, что относительная скорость скольженія на величину коэффиціента тренія не вліяетъ; если же обнаружилось бы, что измѣненіе скорости Ω влечетъ за собою измѣненіе угла δ_0, то пришлось бы признать существованіе зависимости между указанными двумя факторами. Достаточно надежныхъ данныхъ пока не имѣется, почему отъ какихъ бы то ни было заключеній приходится воздержаться.

Случая $\Omega \leqq \omega_m$ разбирать не стоитъ, ибо онъ ничего интереснаго не даетъ: въ этомъ случаѣ силы тренія постояннаго направленія не имѣютъ, и въ извѣстные моменты оно мѣняется. Амплитуды будутъ убывать и, слѣдовательно, колебанія черезъ нѣкоторое время затухнутъ.

Разборомъ приведенныхъ примѣровъ движенія съ участіемъ силъ треніа мы и ограничимся. Въ болѣе сложныхъ случаяхъ ходъ разсужденій остается тотъ же: мы напишемъ дифференціальныя уравненія движенія, принимая во вниманіе и силы треніа, и интеграція этихъ уравненій, если только она окажется выполнимой, дастъ намъ возможность выяснить всѣ особенности изслѣдуемаго движенія.

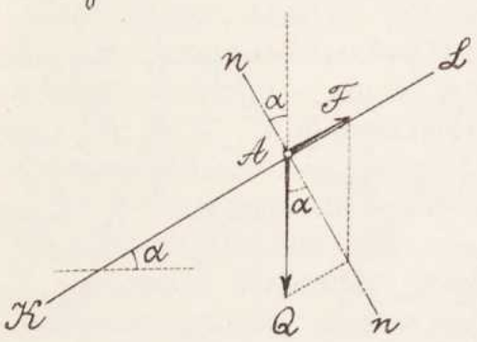
Теперь, въ порядкѣ изложенія нашего курса, мы приступимъ къ нахожденію выраженій силъ треніа въ наиболѣе часто встрѣчающихся на практикѣ случаяхъ проявленія ихъ, причемъ будемъ предполагать, что движеніе точекъ и тѣлъ происходитъ равномѣрно, такъ что ускореніе каждый разъ равно нулю. Попутно будемъ подсчитывать значенія коэффиціентовъ полезнаго дѣйствія, согласно схемѣ, приведенной на стр. 9 и выраженной формулой (8). Мы начнемъ наше разсмотрѣніе съ простѣйшаго случая,— съ случая движенія матеріальной точки по наклонной плоскости.

§ 5. Наклонная плоскость.

Пусть на плоскости KL, наклоненной къ горизонту подъ нѣкоторымъ угломъ α (фиг. 52), лежитъ матеріальная точка A массы m, такъ что вѣсъ ея равенъ $Q = mg$. Согласно сказанному выше, на стр. 43 – 45, можемъ сказать, что точка A будетъ находиться на этой плоскости въ равновѣсіи тогда, когда уголъ α

наклона силы Q къ нормали nn къ плоскости KL, т.-е. уголъ наклона плоскости KL къ горизонту, будетъ меньше угла тренія φ или, въ предѣлѣ, равенъ ему. Условіе это выразится соотношеніемъ

$$\alpha \leqq \varphi \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$



Фиг. 52.

Иными словами, сила Q должна лежать внутри конуса тренія, пристроеннаго въ точкѣ A и имѣющаго своею осью нормаль nn.

Если уголъ α окажется удовлетворяющимъ условію (1), то точка A, будучи положена на плоскость KL и предоставлена затѣмъ самой себѣ, будетъ оставаться въ равновѣсіи въ любомъ мѣстѣ плоскости KL; сколь бы великъ ни былъ ея вѣсъ Q, она при такихъ условіяхъ, будучи подвержена воздѣйствію силъ Q и F, самостоятельно сдвинуться съ мѣста не сможетъ, почему для удержанія ея отъ соскальзыванія внизъ по плоскости не потребуется вмѣшательства никакихъ новыхъ силъ,— функцію задерживанія, торможенія точки принимаетъ на себя въ такихъ случаяхъ сила тренія F, равная $fQ\cos\alpha$. Плоскость KL, обладающая такимъ цѣннымъ на практикѣ свойствомъ, покупаемымъ, однако, какъ мы увидимъ ниже, довольно дорогой цѣной, называется самотормозящей. Въ случаѣ же $\alpha > \varphi$ для удержанія тѣла на плоскости потребуется вмѣшательство той или другой внѣшней силы, и свойства самоторможенія такая плоскость имѣть уже не будетъ.

Здѣсь будетъ умѣстно сдѣлать одно общее замѣчаніе по поводу несамотормозящихъ плоскостей. Дѣло въ томъ, что, пока $\alpha < \varphi$, точка будетъ оставаться въ равновѣсіи, и придти въ движеніе она сможетъ лишь тогда, когда слагающая силы Q, параллельная плоскости KL, окажется равной силѣ тренія $F_1 = f_1 N$, гдѣ f_1 есть коэффиціентъ тренія покоя. Положивъ $f_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, гдѣ уголъ φ_1 будемъ называть угломъ тренія покоя, можемъ сказать, что предѣльный, наименьшій уголъ α, при которомъ возможно ожидать, что точка сдвинется со своего мѣста сама, дается соотношеніемъ

$$\operatorname{tg} \alpha = f_1$$

или, что то же,

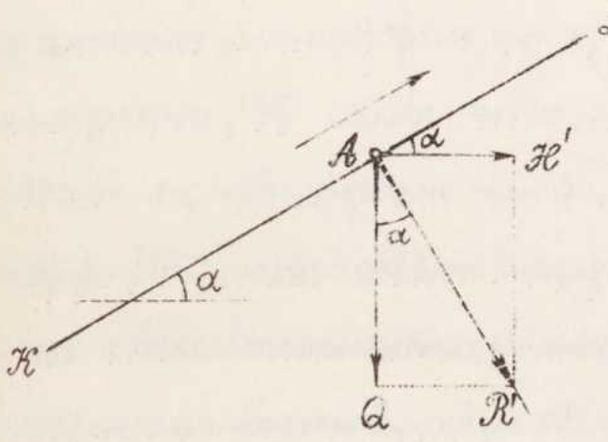
$$\alpha = \varphi_1 .$$

Но разъ движеніе точки началось, то уголъ наклона α можетъ быть уменьшенъ до размѣровъ

$$\alpha = \varphi_2 ,$$

гдѣ φ_2 есть уголъ тренія движенія, опредѣляемый изъ условія $f_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, причемъ черезъ f_2 обозначенъ коэффиціентъ тренія движенія, какъ извѣстно, меньшій, чѣмъ f_1. Подобныя же разсужденія примѣнимы, вообще, въ различныхъ случаяхъ участія силъ Треніе въ опредѣленіи движенія тѣла, но повторять ихъ мы не будемъ, подразумѣвая подъ коэффиціентомъ треніе f, вносимымъ въ наши формулы, тотъ изъ нихъ двухъ, который причитствуетъ разсматриваемому случаю. Послѣ этого необходимаго замѣчанія вернемся къ нашей задачѣ.

Мы разсмотрѣли тотъ случай, когда точка находилась подъ воздѣйствіемъ лишь собственнаго вѣса и вызываемыхъ имъ силъ тренія. Посмотримъ теперь, при какихъ условіяхъ будетъ имѣть мѣсто равновѣсіе или равномѣрное движеніе, если, кромѣ силы тяжести, на точку дѣйствуютъ какія-либо другія силы (активныя). При этомъ, ради упрощенія выводовъ и возможности примѣненія ихъ въ дальнѣйшемъ, въ случаѣ винта, предположимъ, что всѣ эти новыя силы сводятся къ нѣкоторой горизонтальной силѣ, лежащей въ вертикальной плоскости, перпендикулярной къ данной наклонной плоскости и совпадающей съ плоскостью чертежа. Случаи, когда равнодѣйствующія этихъ силъ представляются направленными какъ-нибудь иначе, могутъ быть сведены къ упомянутому выше, ибо каждая такая равнодѣйствующая, отличная отъ горизонтальной, можетъ быть разложена на силу горизонтальную и на силы, лежащія въ самой плоскости.



Фиг. 53.

Итакъ, предположимъ, что матеріальная точка A, вѣса Q, лежитъ на плоскости KL, уголъ коей съ горизонтомъ обозначимъ черезъ α (фиг. 53). Пусть, кромѣ силы тяжести Q, на точку дѣйствуетъ еще горизонтальная сила H', понуждающая нашу точку двигаться вверхъ по плоскости KL. При отсутствіи силы тренія мы имѣли бы равномѣрное движеніе точки или покой ея тогда,

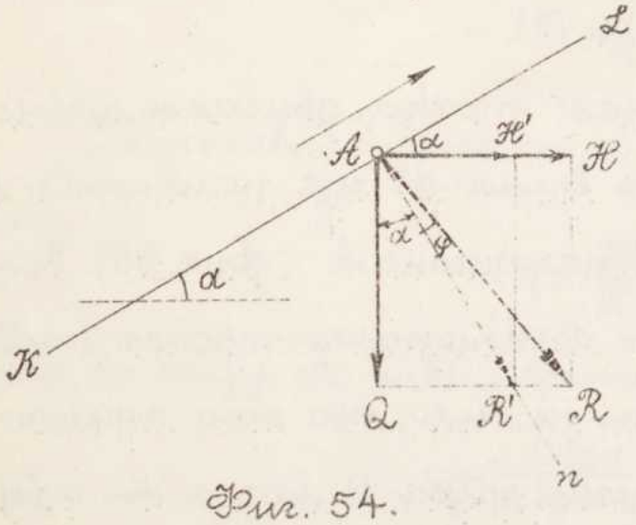
когда силы Q и H' оказалось бы возможным свести къ равнодѣйствующей R', перпендикулярной къ плоскости KL,—этотъ случай и изображенъ на фиг. 53. Сила H'. удовлетворяющая поставленному требованію, выражается въ функціи угла α и силы Q соотношеніемъ

$$H' = Q \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Сила H, опредѣляемая по этому уравненію, есть минимальная сила, могущая, при отсутствіи треніа, поддерживать равномѣрное движеніе вверхъ по плоскости. Силы, бо́льшія $Q \operatorname{tg} \alpha$, дадутъ ускоренное движеніе вверхъ, а меньшія $Q \operatorname{tg} \alpha$ двигать точку вверхъ не смогутъ, и она станетъ скользить внизъ по плоскости, также ускоренно. Само собою разумѣется, что сила H', опредѣляемая по (2), дастъ движеніе лишь тогда, когда точка, въ моментъ подчиненія ея воздѣйствію силы H', будетъ обладать какой-либо скоростью v, отличной отъ нуля; если же $v = 0$, т.-е. если точка въ указанный моментъ была неподвижной, то она останется неподвижной и тогда, когда на нее станетъ дѣйствовать сила H'.

Этой горизонтальной силы H' будетъ, однако, уже недостаточно для возможности равномѣрнаго продвиганія точки вверхъ по плоскости, разъ движеніе будетъ происходить съ треніемъ. Дѣйствительно, разъ силы H' и Q даютъ равнодѣйствующую R', совпадающую съ нормалью An, то, при наличности треніа, это будетъ значить, что равнодѣйствующая R' совпадаетъ съ осью конуса треніа, а это показываетъ, что точка A при этихъ условіяхъ двигаться не сможетъ, какъ это вытекаетъ изъ сказанна-

го раньше: мы знаемъ, что пока равнодѣйствующая P внѣшнихъ силъ остается внутри конуса тренія, точка будетъ пребывать въ покоѣ; если эта сила P совпадетъ съ образующей конуса тренія, то наша точка получитъ возможность или оставаться въ покоѣ и дальше или же двигаться равномѣрно въ ту сторону, куда наклонена сила P, вызывающая и поддерживающая это равномѣрное движеніе. Если же сила P выйдетъ изъ конуса, такъ что уголъ наклона ея къ нормали будетъ больше угла тренія φ, то точка станетъ двигаться ускоренно въ ту же сторону, въ какую наклонена сила P.



Фиг. 54.

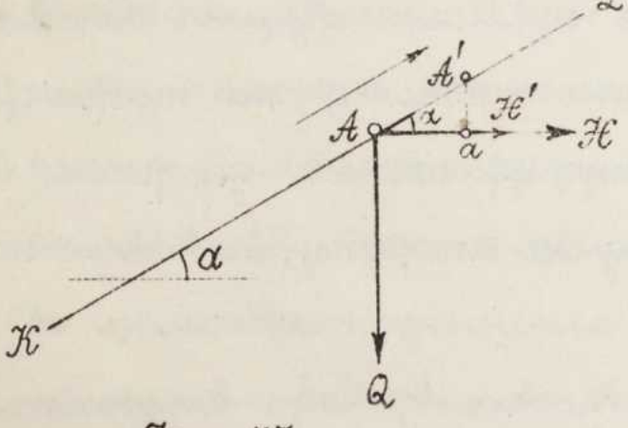
Такимъ образомъ, разъ точка A, подъ вліяніемъ горизонтальной силы H (фиг. 54), должна двигаться вверхъ по плоскости KL, то равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ Q и H должна быть наклонена къ нормали An минимумъ подъ угломъ φ; въ этотъ моментъ она можетъ дать равномѣрное движеніе точки вверхъ по плоскости. Поэтому заключаемъ, что наименьшая горизонтальная сила, могущая дать еще равномѣрное движеніе по плоскости, опредѣлится изъ уравненія

$$H = Q\,\mathrm{tg}(\alpha+\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Сравнивая эту формулу съ полученной выше формулой (2) и замѣчая, что, при углахъ α, φ и $(\alpha+\varphi)$, меньшихъ 90° каждый, $\mathrm{tg}(\alpha+\varphi) > \mathrm{tg}\,\alpha$, заключаемъ, что $H > H'$, такъ

этого можно было ожидать заранѣе: движеніе съ треніемъ требуетъ примѣненія бо́льшей силы, при прочихъ равныхъ условіяхъ, чѣмъ движеніе безъ треніа, ибо въ первомъ случаѣ часть работы дѣйствующей силы должна будетъ пойти на покрытіе работы силъ треніа. Попробуемъ подсчитать коэффиціентъ полезнаго дѣйствія данной наклонной плоскости, что можно выполнить при помощи полученныхъ нами выше формулъ (2) и (3).

Пусть наша матеріальная точка, двигаясь равномѣрно, перешла за нѣкоторое время dt изъ положенія A въ положеніе A' (фиг. 55). Если бы безполезныхъ тратъ работы не было, то это перемѣщеніе груза Q могла бы совершить наша сила H', равная $Q \operatorname{tg}\alpha$, при чемъ работа ея выразилась бы черезъ $H' . Aa$, гдѣ Aa представляетъ собою проекцію дѣйствительнаго перемѣщенія груза, AA', на горизонтальную прямую AH. Эта работа, — обозначимъ ее черезъ L', — не затрачиваемая ни на что другое, кромѣ подъема груза Q на высоту aA', и представляетъ собою ту полезную работу, которая должна быть, помимо прочаго, произведена любой другой силой, перемѣщающей грузъ Q изъ положенія A въ положеніе A'. Сила H, поднимая грузъ изъ A въ A', произведетъ работу L, равную $H . Aa$ и бо́льшую, чѣмъ L', ибо $H > H'$; это происходитъ оттого, что часть работы L должна будетъ уйти на преодолѣніе работы треніа. Такимъ



Фиг. 55.

образомъ, хотя на подъемъ груза изъ A въ A' затрачивается въ дѣйствительности работа $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} . Aa$, но при отсутствіи вредныхъ сопротивленій для этого было бы достаточно работы $\mathfrak{L}' = \mathfrak{H}' . Aa$, откуда заключаемъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія η выразится, согласно общимъ положеніямъ, черезъ

$$\eta = \frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}}.$$

Подставляя вмѣсто $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}$ ихъ выраженія, находимъ, что

$$\eta = \frac{\mathfrak{H}' . Aa}{\mathfrak{H} . Aa} = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}},$$

что, въ виду (2) и (3), перепишется иначе такъ:

$$\eta = \frac{Q \operatorname{tg}\alpha}{Q \operatorname{tg}(\alpha+\varphi)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Тотъ же результатъ можно получить проще, разсуждая такъ: пусть грузъ Q, подъ воздѣйствіемъ горизонтальной силы $\mathfrak{H}$, передвинулся изъ своего положенія A въ положеніе A', двигаясь, при томъ, равномѣрно. Такимъ образомъ, полезная работа, произведенная силой $\mathfrak{H}$, предѣлывается работой подъема груза Q на высоту aA'. Но сила $\mathfrak{H}$ на самомъ дѣлѣ произвела работу $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} . Aa$, что и показываетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія нашей наклонной плоскости выражается черезъ

$$\eta = \frac{Q . aA'}{\mathfrak{H} . Aa} = \frac{Q}{Q \operatorname{tg}(\alpha+\varphi)} \cdot \frac{aA'}{Aa} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)},$$

ибо $aA' : Aa = \operatorname{tg}\alpha$. Мы получили то же выраженіе (4), какъ и быть должно, ибо работа $\mathfrak{L}'$ силы $\mathfrak{H}'$ на пути aA и представляетъ собою работу подъема груза Q на высоту aA'. Дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{K}' . \, aA = Q \operatorname{tg}\alpha . \, aA = Q . \, aA \operatorname{tg}\alpha = Q . \, aA' .$$

Итакъ, общее выраженіе коэффиціента полезнаго дѣйствія наклонной плоскости дается соотношеніемъ (4). Легко показать, что для самотормозящихъ плоскостей, гдѣ, слѣдовательно, $\alpha < \varphi$, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія весьма низокъ, ибо не достигаетъ даже 0,5. Дѣйствительно, разъ

$$\alpha < \varphi,$$

то

$$\operatorname{tg}\varphi > \operatorname{tg}\alpha .$$

Положимъ, что

$$\operatorname{tg}\varphi = k \operatorname{tg}\alpha,$$

при чемъ, очевидно, $k > 1$, и мы положимъ, что

$$k = 1 + \delta,$$

гдѣ $\delta > 0$. Въ видѣ этихъ соотношеній выраженіе (4) можетъ быть переписано такъ:

$$\eta = \operatorname{tg}\alpha : \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}\alpha : \frac{\operatorname{tg}\alpha + k \operatorname{tg}\alpha}{1 - k \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 - k \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + k} .$$

Замѣчая теперь, что числитель этой дроби меньше единицы, а знаменатель больше двухъ, заключаемъ, что

$$\eta_{\text{самоторм.}} < \frac{1}{2} .$$

Ниже будетъ показано, что такимъ низкимъ коэффиціентомъ обладаютъ, вообще, всѣ самотормозящіе механизмы, — у всѣхъ ихъ $\eta < \frac{1}{2}$.

Возвращаясь къ выраженію (3), легко можемъ подсчитать предѣльную величину наклона α, при которой поднятіе груза вверхъ по плоскости при помощи одной только горизонтальной силы становится уже невозможнымъ. Очевидно, что это будетъ имѣть мѣсто при $\alpha + \varphi = 90°$,

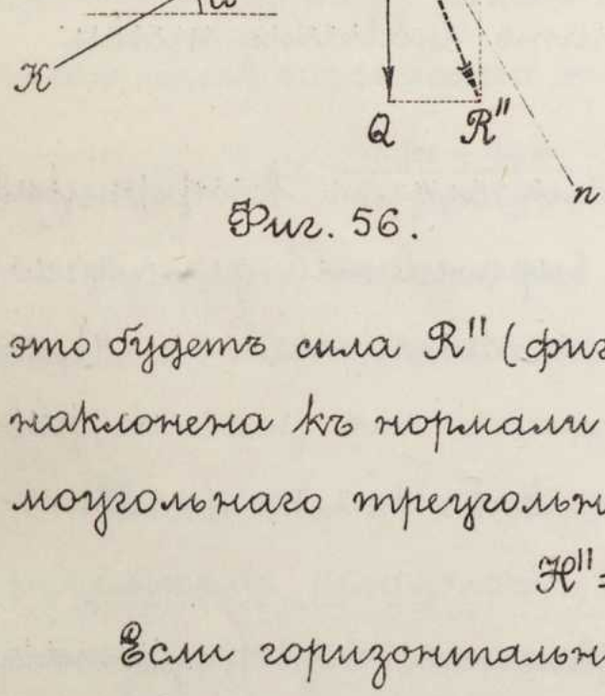
такъ что $\alpha = 90° - \varphi$. При такомъ значеніи угла α горизонтальная сила H, имѣющая двигать точку вверхъ по плоскости, должна имѣть безконечно большое значеніе, и это обстоятельство указываетъ на то, что перемѣщеніе точки вверхъ по плоскости помощью горизонтальныхъ силъ оказывается фактически невозможнымъ, и для такого перемѣщенія необходимо примѣнить силы, направленныя къ вертикали подъ угломъ, меньшимъ 90°. Такимъ образомъ, при наклонѣ плоскости къ горизонту, равномъ $(90° - \varphi)$, продвинуть точку вверхъ по плоскости помощью горизонтальной силы оказывается совершенно невозможнымъ. Легко убѣдиться, что при наклонѣ, превосходящемъ значеніе $(90° - \varphi)$, никакой горизонтальной силой не удастся предотвратить сползаніе точки внизъ по плоскости.

Въ указанномъ предѣльномъ случаѣ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія плоскости, выражаемый для случая работы горизонтальныхъ силъ соотношеніемъ (4), обращается въ нуль, ибо $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ принимаетъ значеніе, равное безконечности, въ то время какъ $\operatorname{tg}\alpha$ представится величиной конечной.

Въ случаѣ $\alpha = 0$, т.-е. при движеніи по горизонтальной плоскости, горизонтальная сила H принимаетъ значеніе $Q \operatorname{tg}\varphi$, т.-е. fQ, иными словами, становится равной силѣ треніа $F = fQ$, какъ и быть должно, ибо для возможности равномѣрнаго движенія по горизонтальной плоскости, горизонтальная сила, движущая точку, должна быть равна силѣ треніа fQ. Коэффиціентъ η здѣсь также ра-

вень нуля, ибо вся работа силы H будетъ уходить исключительно на преодолѣніе работы тренія, полезная же работа равна здѣсь нулю.

Разберемъ, наконецъ, вопросъ о величинѣ горизонтальной силы, могущей удержать грузъ на несаморможеной плоскости, гдѣ, слѣдовательно, $\alpha > \varphi$. Предѣльнымъ значеніемъ этой силы является то, при которомъ возможно равномѣрное скольженіе груза внизъ по плоскости. Обозначивъ величину этой горизонтальной силы черезъ H'', заключаемъ, что она опредѣлится графически изъ того условія, чтобы равнодѣйствующая этой силы H'' и вѣса Q угласъ по образующей конуса тренія m, при томъ, въ сторону предполагаемаго равномѣрнаго движенія. Пусть это будетъ сила R'' (фиг. 56). Такъ какъ сила R'' будетъ наклонена къ нормали An подъ угломъ φ, то изъ прямоугольнаго треугольника AQR'' находимъ, что

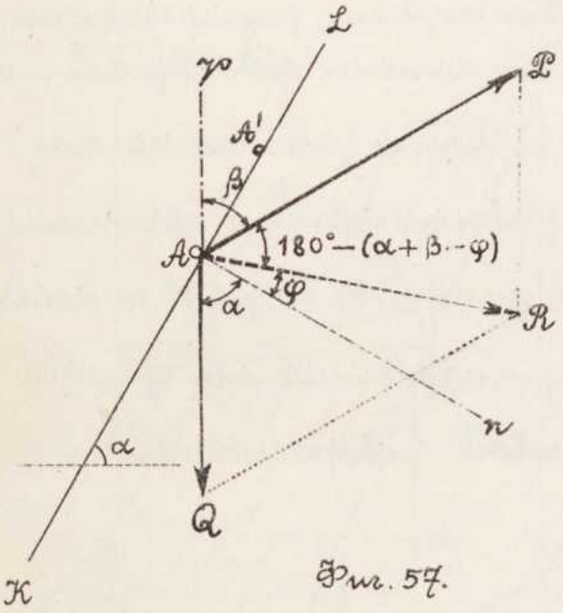


Фиг. 56.

$$H'' = Q \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Если горизонтальная сила будетъ равна H'', то грузъ A будетъ имѣть возможность равномѣрно скользить внизъ по плоскости KL. Если горизонтальная сила будетъ больше H'', то скольженія внизъ уже не будетъ, а можетъ произойти одно изъ двухъ: если сила R'' будетъ лежать внутри конуса тренія, что будетъ возможно тогда, когда значенія силы, направленной горизон-

тально, будутъ заключаться между $Q\,tg(\alpha-\varphi)$ и $Q\,tg(\alpha+\varphi)$,— то грузъ Q будетъ оставаться на плоскости въ покоѣ. Если же значеніе горизонтальной силы превзойдетъ величину $Q\,tg(\alpha+\varphi)$, то грузъ Q станетъ ускоренно подниматься вверхъ по плоскости, ибо въ этомъ случаѣ равнодѣйствующая R выйдетъ изъ предѣловъ конуса тренія, будучи, въ то же время наклоненной въ сторону движенія вверхъ по плоскости. При горизонтальной силѣ, меньшей, чѣмъ $Q\,tg(\alpha-\varphi)$, будетъ имѣть мѣсто ускоренное движеніе внизъ по плоскости $K\mathfrak{L}$.



Фиг. 57.

Если на точку, помимо всѣхъ ея Q, дѣйствуетъ сила $\mathfrak{P}$, направленная не горизонтально, а подъ угломъ β къ вертикали AV, отличнымъ отъ 90° (фиг. 57), то условіе равномѣрнаго движенія точки A вверхъ по плоскости $K\mathfrak{L}$ выразится опять требованіемъ того, чтобы равнодѣйствующая силъ $\mathfrak{P}$ и Q совпала съ образующей конуса тренія, наклоненной въ сторону желаемаго движенія. Такой именно случай и изображенъ на фиг. 57, и изъ косоугольнаго треугольника $A\mathfrak{P}R$ мы и получаемъ необходимое для указаннаго совпаденія соотношеніе между силами $\mathfrak{P}$ и Q:

$$\mathfrak{P}=Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha+\beta+\varphi)}.$$

Легко подсчитать значеніе коэффиціента полезнаго дѣйствія для этого общаго случая: замѣчая, что при перемѣщеніи груза Q изъ положенія A въ положеніе A' полезная работа $\mathfrak{L}'$ выразится черезъ $Q.AA'\sin\alpha$, на самомъ же дѣлѣ сила $\mathfrak{P}$, поднимающая грузъ, произведетъ работу $\mathfrak{L}$, равную $\mathfrak{P}.AA'\sin(\alpha+\beta)$, заключаемъ, что коэффиціентъ η, при произвольномъ углѣ β наклона силы $\mathfrak{P}$ къ отвѣсной линіи VA, выражается такъ:

$$\eta=\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}}=\frac{Q\sin\alpha}{\mathfrak{P}\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\varphi)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\varphi)}$$

Подстановка тѣхъ или другихъ значеній α и β даетъ всѣ полученныя раньше формулы (2)–(4). Такъ, напримѣръ, для горизонтально направленныхъ силъ, гдѣ $\beta=90°$, имѣемъ $\mathfrak{P}=Q\,tg(\alpha+\varphi)$, а $\eta=tg\alpha/tg(\alpha+\varphi)$, что было

получено уже раньше. Случай горизонтальной плоскости и горизонтальной же силы задается условіями $\alpha = 0$ и $\beta = 90°$; вышенаписанныя соотношенія дадутъ для этого случая знакомыя уже намъ формулы: $P = Q \operatorname{tg} \varphi = fQ$ и $\eta = 0$.

Замѣтимъ, наконецъ, что общая формула для η показываетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія наклонной плоскости опредѣляется не только угломъ α наклона этой плоскости къ горизонту и угломъ трения φ, но и угломъ β наклона силы P къ отвѣсной прямой. Такимъ образомъ, одна и та же наклонная плоскость можетъ дать самые разнообразные коэффиціенты η, — это будетъ зависѣть 1) отъ матеріала положеннаго на нее тѣла и 2) отъ наклона β силы, на данное тѣло дѣйствующей. Каждый отдѣльный коэффиціентъ η даетъ намъ представленіе о степени использованія въ нашихъ цѣляхъ работы дѣйствующей при данныхъ условіяхъ силы, — мы можемъ, очевидно, создать для работы этой силы и благопріятныя условія, уменьшая треніе, и неблагопріятныя, увеличивая его, а это регулированіе тренія и можетъ быть достигнуто измѣненіемъ наклона дѣйствующей силы.

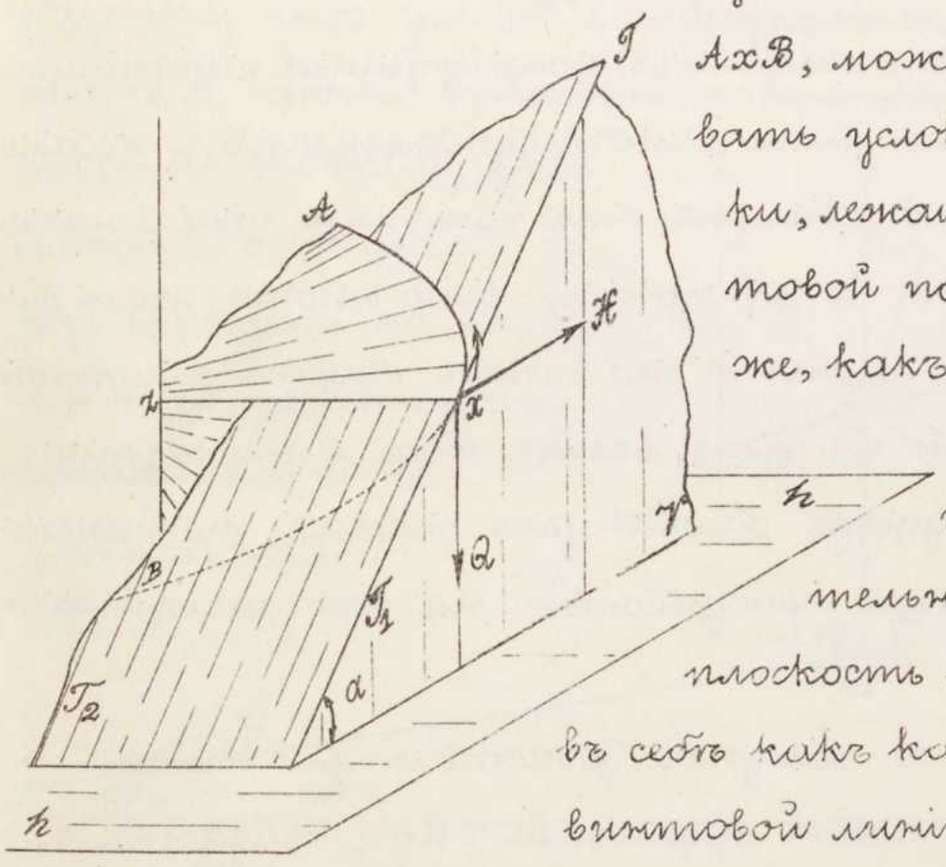
Этими общими соображеніями мы и закончимъ разсмотрѣніе условій равновѣсія и равномѣрнаго движенія точки по наклонной плоскости и теперь, въ порядкѣ послѣдовательности, перейдемъ къ выводу подобныхъ же условій въ случаѣ движенія точки по винтовой поверхности.

§ 6. Винтъ.

Въ техникѣ находятъ себѣ примѣненіе какъ винты съ прямоугольной нарѣзкой, такъ и съ остроугольной. Винтовую поверхность первыхъ можно представить себѣ образованной движеніемъ нѣкоторой прямой, скользящей одновременно по нѣкоторой правильной винтовой линіи и по ея оси, служащей въ то же время и осью винта, при чемъ указанная прямая, — образующая винтовой поверхности, — остается все время перпендикулярной къ оси винтовой линіи. Если же эта прямая будетъ не перпендикулярна къ этой оси, а наклонна, при чемъ уголъ наклона остается все время неизмѣннымъ, постояннымъ, то при-

движеніи такой наклонной прямой получимъ поверхность винта съ остроугольной нарѣзкой.

Первый случай,—случай винта съ прямоугольной нарѣзкой,—тождественъ съ случаемъ наклонной плоскости, разобраннымъ нами въ предыдущемъ параграфѣ. Дѣйствительно, взявъ на винтовой линіи точку x, въ которой въ данный моментъ находится движущаяся масса (фиг. 58), и проведя черезъ эту точку x плоскость TT_1T_2, касательную къ винтовой поверхности AxB, можемъ разсматривать условія равновѣсія точки, лежащей на этой винтовой поверхности, такъ же, какъ если бы эта точка лежала на упомянутой касательной плоскости. Эта плоскость TT_1T_2 заключаетъ въ себѣ какъ касательную TT_1 къ винтовой линіи въ точкѣ x ея, такъ и образующую винтовой линіи, прямую zx, соотвѣтствующую точкѣ x. Такимъ образомъ, мы имѣемъ случай наклонной плоскости, уже детально разобранный нами, и поэтому, не обращаясь къ ближайшему разсмотрѣнію вопроса, можемъ сразу установить, что, если мы желаемъ помощью нѣкотораго горизонтальнаго усилія H, касательнаго къ цилин-



Фиг. 58.

дической поверхности и представляющаго собою окружное усиліе, поднять вверхъ по винтовой поверхности нѣкоторый грузъ Q, то для этой цѣли придется примѣнить ту же горизонтальную силу H, какую пришлось бы употребить въ случаѣ соотвѣтствующей наклонной плоскости, такъ что, обозначивъ уголъ наклона винтовой линіи къ горизонту черезъ α, можемъ сказать, что должная величина силы H опредѣлится изъ соотношенія:

$$H = Q \operatorname{tg}(\alpha+\varphi), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

аналогичнаго соотношенію (3) предыдущаго параграфа.

Винтъ можетъ быть самотормозящимъ и несамотормозящимъ, что зависитъ отъ величины угла α наклона винтовой линіи къ горизонту: если этотъ уголъ будетъ меньше угла тренія φ, то винтъ будетъ самотормозящимъ, сколь бы ни былъ великъ вѣсъ Q груза; если же этотъ уголъ будетъ больше угла тренія, то винтъ будетъ вывертываться при дѣйствіи на него малѣйшаго груза Q.

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія для винта съ прямоугольной нарѣзкой будетъ, въ виду сказаннаго, выражаться такъ же, какъ и въ случаѣ наклонной плоскости:

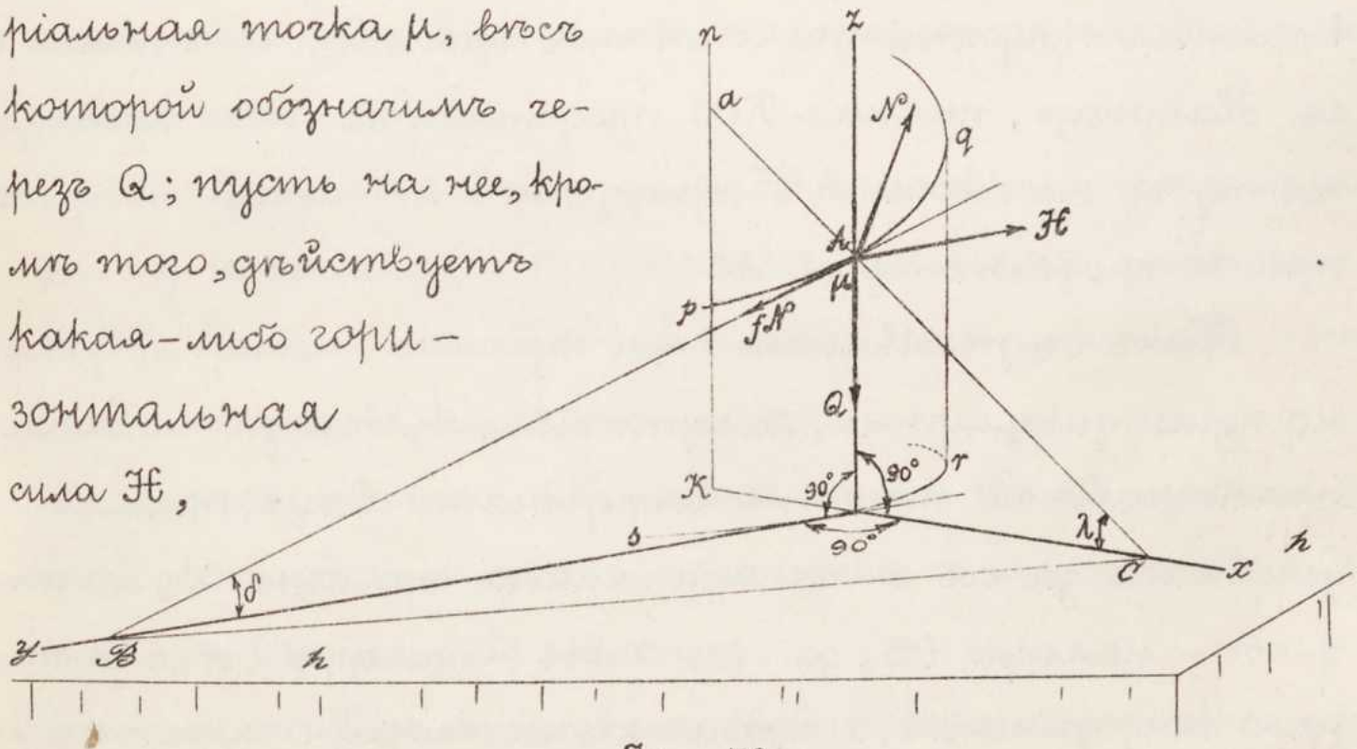
$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

При самотормозящемъ винтѣ η будетъ всегда меньше 0,5, въ виду чего ради увеличенія этого коэффиціента приходится отказываться отъ самоторможенія и давать углу α значенія, бо́льшія угла тренія φ.

Такъ просто разсматривается вопросъ о равновѣсіи

тьла на винтовой поверхности въ случаѣ винта съ прямоугольной нарѣзкой. Въ случаѣ винта съ острогольной нарѣзкой изслѣдованіе выходитъ болѣе сложнымъ, и проще всего вести его слѣдующимъ образомъ:

Пусть направляющая винтовая линія pAq (фиг. 59) лежитъ на поверхности круглаго цилиндра qrs съ осью nK, стоящаго на горизонтальной плоскости hh такъ, что ось его Kn оказывается вертикальной. Пусть, далѣе, образующая aA винтовой поверхности наклонена къ горизонту подъ угломъ λ. — Предположимъ теперь, что въ точкѣ A нашей винтовой поверхности лежитъ матеріальная точка μ, вѣсъ которой обозначимъ черезъ Q; пусть на нее, кромѣ того, дѣйствуетъ какая-либо горизонтальная сила H,



Фиг. 59.

касательная къ поверхности цилиндра Kq какъ разъ въ этой точкѣ A.

Проводимъ теперь прямую AB, касательную къ винтовой линіи въ той же точкѣ A, и, затѣмъ, прямую AC, — продолженіе образующей прямой aA. Точки пересѣченія ихъ съ горизонтальной плоскостью hh обозначимъ черезъ B и C, а углы ихъ съ тою же горизонтальной плоскостью —

черезъ δ и λ. Очевидно, что плоскость ABC, проходящая черезъ касательную AB въ точкѣ A винтовой поверхности и черезъ образующую aA, проведенную въ тѣ же точку A, представитъ собою касательную плоскость къ данной винтовой поверхности, проведенную черезъ данную на этой послѣдней точку A. Далѣе, если черезъ точку A проведемъ образующую цилиндра, zA, и точку пересѣченія ея съ горизонтальной плоскостью обозначимъ черезъ O, такъ что прямая zAO будетъ перпендикулярна къ плоскости hh, то прямая BO будетъ служить проекціей касательной BA на эту плоскость hh и въ то же время будетъ касаться окружности основанія цилиндра въ точкѣ O ея. Наконецъ, прямая KOC представитъ собою проекцію на тѣ же плоскость hh образующей aA нашей поверхности и продолженія ея AC.

Такъ выдѣлившіяся три прямыя, очевидно, взаимно перпендикулярныя, могутъ быть взяты за три оси прямоугольной системы координатъ $Oxyz$, причемъ условимся за ось x-овъ принимать прямую OC, за ось y-овъ — прямую OB, за ось z-овъ — прямую OA, а за начало координатъ, слѣдовательно, точку O пересѣченія образующей zA съ плоскостью hh. Замѣтимъ кстати, что касательная AB лежитъ въ плоскости xy, а образующая aA и продолженіе ея AC — въ плоскости zx.

При перемѣщеніи точки A по винтовой поверхности $aqAp$ проявятъ свое воздѣйствіе на нее четыре силы:

1) вѣсъ точки A, — мы обозначимъ его черезъ Q;

2) влекущая ее по винтовой поверхности горизон-

тальная сила H;

3) сопротивленіе винтовой поверхности N, направленное, очевидно, перпендикулярно касательной плоскости ABC, и, наконецъ,

4) сила треніа, fN, направленная противоположно скорости точки A въ разсматриваемый моментъ, т.е. направленная по AB, отъ A къ B.

Напишемъ теперь уравненія равновѣсія точки A подъ дѣйствіемъ этихъ четырехъ силъ, но предварительно разберемся подробнѣе въ расположеніи всѣхъ этихъ силъ:

1) Сила Q направлена внизъ по оси Oz; эта сила представляетъ собою вѣсъ тѣла, находящагося на винтовой поверхности;

2) горизонтальная сила H направлена параллельно оси Oy и является окружнымъ усиліемъ, дѣйствующимъ касательно боковой поверхности цилиндра, — эта сила лежитъ въ плоскости yOz;

3) сила треніа fN, направленная по AB, лежитъ въ той же плоскости yOz и образуетъ съ плоскостью xOy и съ осью Oy уголъ δ; наконецъ,

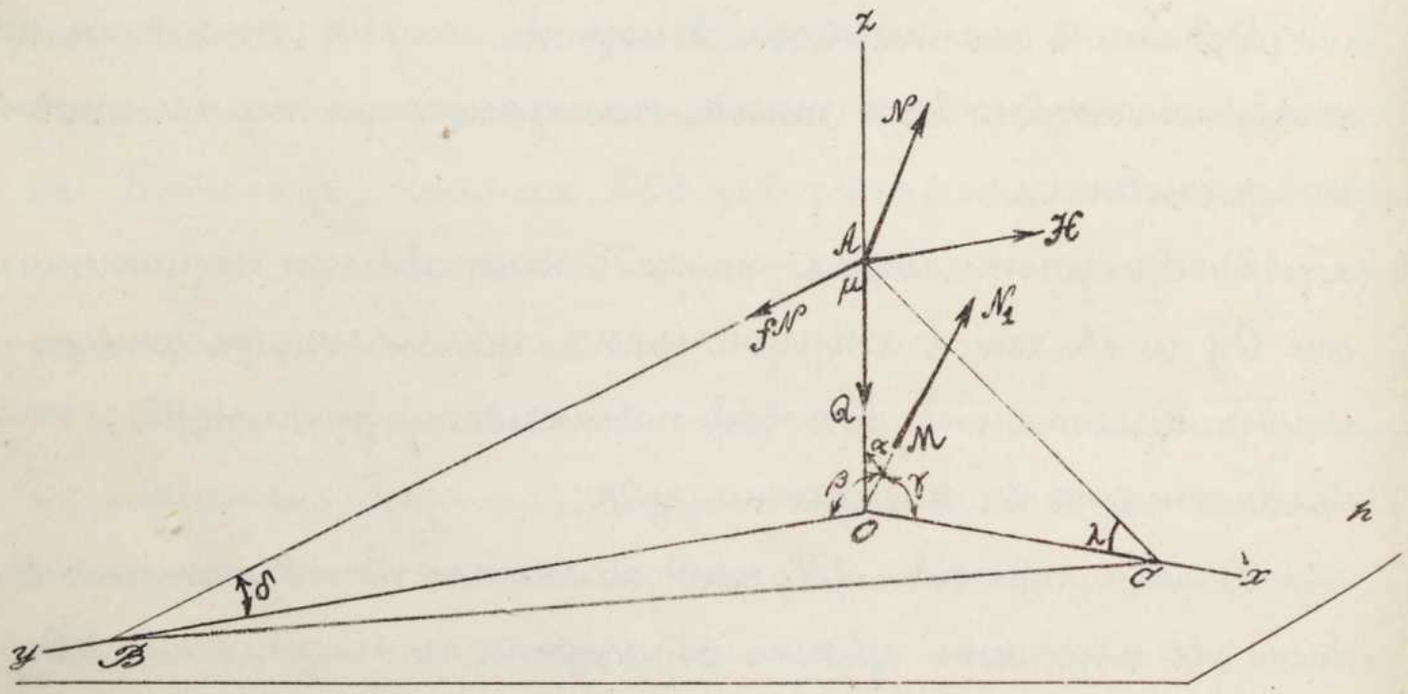
4) сила N реакціи винтовой поверхности перпендикулярна къ плоскости ABC и не лежитъ въ одной плоскости съ силами Q и fN, какъ это имѣло бы мѣсто въ случаѣ прямоугольной нарѣзки. Обозначимъ углы этой силы N съ осями нашей системы координатъ черезъ α, β и γ. Такъ какъ $N \perp$ плоскости AB, то эти углы представятъ собою углы съ нашими осями перпендикуляра OM', опущеннаго изъ начала O на плоскость ABC (фиг. 60), и мы,

таким образом, обнаружим, что

$$\angle MOz = \alpha, \angle MOy = \beta, \angle MOx = \gamma,$$

при чем, ради удобства подсчета проекций силы N на оси, можем представить равную и параллельную ей силу N', выходящую из точки M и идущую по направлению перпендикуляра OM.

Пишем теперь уравнения равновесия наших четырех сил, причем можем ограничиться одними лишь уравнениями проекций по осям координат.



Фиг. 60.

Уравнения равновесия будут выражать требование, чтобы суммы проекций сил по осям давали для каждой из осей нуль. Таким образом, искомые уравнения будут иметь вид:

1) для оси Oy:

$$H - N\cos\beta - fN\cos\delta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

2) для оси Oz:

$$Q - N\cos\alpha + fN\sin\delta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

3) что касается оси x, то проекцію на нее дастъ одна лишь сила N; проекція ея на ось x-овъ равна $N\cos\gamma$ и, какъ видимъ, изъ всѣхъ взятыхъ нами силъ ни одна не можетъ дать ей уравновѣшивающей, откуда слѣдуетъ, что, въ случаѣ равновѣсія точки на винтовой поверхности, кромѣ перечисленныхъ нами четырехъ силъ имѣется еще такая, направленная параллельно оси x противоположно силѣ $N\cos\gamma$ и равная ей. Обозначивъ эту новую силу черезъ X, получаемъ для опредѣленія ея уравненіе:

$$N\cos\gamma - X = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Эта сила X существуетъ въ дѣйствительности и является въ видѣ сопротивленія гайки винта радіальному распору. Принимая во вниманіе, что уравненіе (5) для дальнѣйшихъ изслѣдованій не даетъ ничего, мы касаться его больше не будемъ и ограничимся первыми двумя уравненіями равновѣсія, — (3) и (4). Пользуясь ими, выяснимъ теперь зависимость между силой H и вѣсомъ тѣла Q.

Исключая изъ уравненій (3) и (4) силу N, находимъ значеніе ея изъ (3):

$$N = \frac{H}{\cos\beta + f\cos\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

и вставляемъ его въ (4), послѣ чего получаемъ искомую зависимость въ видѣ:

$$Q = N(\cos\alpha - f\sin\delta) = H\,\frac{\cos\alpha - f\sin\delta}{\cos\beta + f\cos\delta}$$

Итакъ,

$$Q = H\,\frac{\cos\alpha - f\sin\delta}{\cos\beta + f\cos\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Остается исключить углы α и β при помощи угловъ

δ и λ; воспользоваться двумя последними углами удобно потому, что они характеризуют собою каждую остроугольную нарезку. Упомянутое исключение проще всего выполняется так:

Принимая во внимание, что система координат Oxyz, принятая нами, есть система прямоугольная, можем написать соотношения, — см. фиг. 60, —

$$OA = OC\,tg\lambda = OB\,tg\delta. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Из прямоугольных при M треугольников OMA, OMB и OMC находим далее:

$$OA = \frac{OM}{\cos\alpha};\ OB = \frac{OM}{\cos\beta};\ OC = \frac{OM}{\cos\gamma}, \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

и теперь, в виду (B), соотношения (a) принимают вид:

$$\frac{OM}{\cos\alpha} = \frac{OM\,tg\lambda}{\cos\gamma} = \frac{OM\,tg\delta}{\cos\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

откуда получаем:

$$\cos\beta = \cos\alpha.tg\delta. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

и

$$\cos\gamma = \cos\alpha.tg\lambda. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Прибавим, имея в виду дальнейшее, к двум вышенаписанным соотношениям тождество

$$\cos\alpha = \cos\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Замечая, что всякие три угла, образованные какой-либо прямой с осями прямоугольной системы координат, обладают тем свойством, что сумма квадратов косинусов их всегда равна единице, и замечая, что углы α, β и γ и являются как раз такими углами, образованными прямой OM с осями нашей координатной системы, можем написать для них соотношение:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Это соотношение, въ виду (d), (e) и (f), принимаетъ видъ

$$1 = \cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\lambda + \operatorname{tg}^2\delta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Обозначимъ, ради краткости письма трехчленъ $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\delta)$ черезъ k^2; тогда (g) перепишется такъ:

$$1 = k^2\cos^2\alpha .$$

Отсюда, замѣчая, что $\cos\alpha > 0$, находимъ:

$$\cos\alpha = \frac{1}{k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

послѣ чего изъ (d) находимъ:

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{tg}\delta}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Въ виду двухъ послѣднихъ соотношеній можемъ дать основному соотношенію (7) видъ:

$$\mathcal{H} = Q\,\frac{\frac{1}{k}\operatorname{tg}\delta + f\cos\delta}{\frac{1}{k} - f\sin\delta} = Q\,\frac{\operatorname{tg}\delta + kf\cos\delta}{1 - kf\sin\delta} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Такова зависимость между силами $\mathcal{H}$ и Q въ случаѣ острогольной нарѣзки, характеризуемой угломъ λ наклона образующей къ горизонту и угломъ δ наклона къ горизонту же винтовой (направляющей) линіи.

Легко получить коэффиціентъ полезнаго дѣйствія для острогольной нарѣзки. Замѣчая, что, при перемѣщеніи груза Q вверхъ по винтовой поверхности на какую-либо дугу AA', работа силы $\mathcal{H}$ выразится черезъ $\mathcal{H} \times AA'\cos\delta$, въ то время какъ произведенная при этомъ работа поднятія груза, т.-е. полезная работа, будетъ равна $Q \times AA'\cos\delta$, заключаемъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія винта съ острогольной нарѣзкой напишется такъ:

$$\eta = \frac{Q\operatorname{tg}\delta}{\mathcal{H}},$$

что, въ виду соотношенія (8) перепишется иначе такъ:

$$\eta = \frac{(1 - kf\sin\delta)\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\delta + kf\cos\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) примѣнимы и къ прямоугольной нарѣзкѣ, при чемъ, примѣнительно къ обозначеніямъ этой послѣдней, придется положить $\lambda = 0$ и $\delta = \alpha$. Замѣняя,

кромѣ того, къ черезъ $1/\cos\alpha$, можемъ дать формулѣ (8) видъ:

$$\mathcal{H} = Q\frac{\operatorname{tg}\alpha + f\cos\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}{1 - f\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}} = Q\frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f\operatorname{tg}\alpha};$$

Замѣчая, кромѣ того, что $f = \operatorname{tg}\varphi$, можемъ дать полученному выраженію видъ:

$$\mathcal{H} = Q\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi} = Q\operatorname{tg}(\alpha+\varphi),$$

— та же формула (1).

Подобнымъ же образомъ, выполняя такія же подстановки въ формулѣ (9), найдемъ, что значеніе коэффиціента полезнаго дѣйствія η для случая прямоугольной нарѣзки будетъ таково:

$$\eta = \frac{(1 - \operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\alpha\cdot 1/\cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi\cdot\cos\alpha\cdot 1/\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi},$$

что, очевидно, сводится къ выраженію

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)},$$

полученному нами путемъ прямого подсчета для наклонной плоскости и распространенному затѣмъ, по аналогіи, и на случай винта съ прямоугольной нарѣзкой, — см. форм. (2).

Въ заключеніе настоящаго параграфа выяснимъ, при какихъ условіяхъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія винта съ прямоугольной нарѣзкой достигаетъ своего максимума. Уравненіе (3) показываетъ, что, при одномъ и томъ же φ, коэффиціентъ η будетъ мѣняться въ зависимости отъ измѣненія угла α. Составляемъ поэтому условіе максимума въ формѣ

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = 0.$$

Выраженіе (3) даетъ намъ:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2(\alpha+\varphi)}}{\operatorname{tg}^2(\alpha+\varphi)} = 0.$$

Замѣтимъ, что знаменатель принимаетъ безконечно-большое значеніе при $\alpha+\varphi = 90°$, т.-е. тогда, когда, согласно

сказанному на стр. 136, никакія горизонтальныя силы не смогутъ сдвинуть грузъ по наклонной плоскости, а, значитъ, и по винтовой поверхности съ тѣмъ же угломъ наклона винтовой линіи. Въ указанномъ случаѣ, какъ мы видѣли, $\eta = 0$, т.-е. переходитъ черезъ свой минимумъ.

Въ виду сказаннаго, попробуемъ приравнять нулю числитель, предполагая, слѣдовательно, заранѣе, что $(\alpha+\varphi)$ отлично отъ 90°. Элементарныя геометрическія преобразованія полученнаго теперь уравненія приведутъ насъ окончательно къ уравненію

$$\cos(2\alpha+\varphi)=0,$$

дающему искомое значеніе угла α, — онъ оказывается равнымъ

$$\alpha' = 45° - \frac{\varphi}{2}.$$

Значеніе η, соотвѣтствующее этому углу, есть

$$\eta_{max} = \frac{1-f\cos\varphi}{1+f\cos\varphi}.$$

Легко убѣдиться, что для перемѣщенія одного и того же груза въ случаѣ винта съ остроугольной нарѣзкой потребуется большее окружное усиліе, чѣмъ для винта съ прямоугольной нарѣзкой. Дѣйствительно, для перехода отъ формулы (8) для косоугольной нарѣзки къ формулѣ (1) прямоугольной придется положить $\lambda = 0$, вслѣдствіе чего числитель выраженія (8) уменьшится, а знаменатель увеличится, и, значитъ, вся дробь уменьшится. Такимъ образомъ, при одномъ и томъ же грузѣ Q и равныхъ углахъ наклона винтовыхъ линій къ горизонту $(\alpha=\delta)$,

$H_{прям.}$ будетъ меньше $H_{острогуг.}$ Вслѣдствіе этого, $\eta_{прям.}$ будетъ больше, чѣмъ $\eta_{острогуг.}$, такъ какъ для поднятія груза на одну и ту же высоту dh въ случаѣ прямоугольной нарѣзки потребуется затрата меньшаго количества работы, чѣмъ въ случаѣ остроугольной.

Всѣ эти заключенія показываютъ, что, если проектируемый винтовой механизмъ предназначается для передачи движенія, то винту этого механизма слѣдуетъ давать непремѣнно прямоугольную нарѣзку; если же винтъ имѣетъ служить для скрѣпленія двухъ деталей, то необходимо брать остроугольную нарѣзку, ибо въ такомъ случаѣ развинчиваніе отъ случайныхъ и постоянныхъ боковыхъ усилій становится менѣе вѣроятнымъ; кромѣ того, въ такомъ винтѣ, при одной и той же силѣ предварительной затяжки, сила треніа поверхностей винта и гайки будетъ значительно больше, чѣмъ въ случаѣ винта съ прямоугольной нарѣзкой.

§7. Клинъ.

Клинъ, подобно винту, употребляется какъ для перемѣщенія грузовъ, такъ и для скрѣпленія деталей. Простѣйшимъ примѣромъ примѣненія клина можетъ служить расщепливаніе какого-либо тѣла A при помощи клина, вдвигаемаго нѣкоторой силой P (фиг. 61). Заставляя расходиться части K и L детали, клинъ въ каждый данный моментъ подвергается воздѣйствію силъ реакціи этихъ частей, такъ что онъ на-

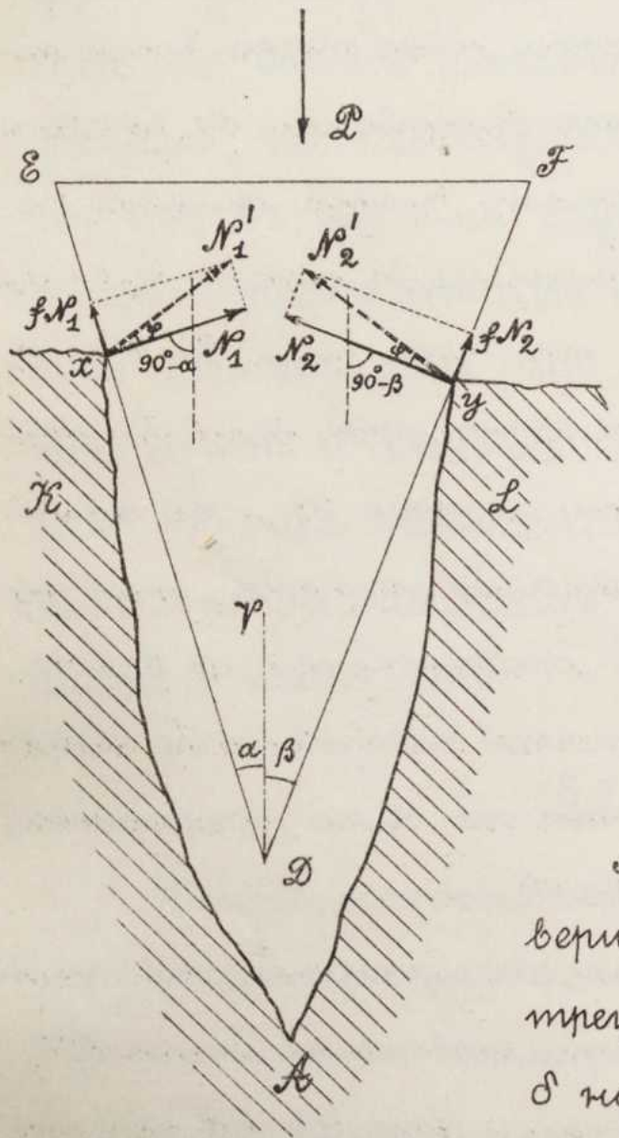
ходится все время подъ дѣйствіемъ силы P, вдвигающей его и силъ реакціи N_1 и N_2, нормальныхъ къ его гранямъ и вызывающихъ появленіе силъ тренія, противодѣйствующихъ этому вдвиганію.

Предположимъ, что сила P, вгоняющая клинъ въ деталь A, направлена вертикально; какъ это изображено на фиг. 61, и пусть подъ воздѣйствіемъ силы P и причествующихъ условіямъ даннаго случая силъ реакціи клинъ перемѣщается равномѣрно. Если бы силъ тренія не было, то такое равномѣрное перемѣщеніе клина было бы возможно лишь тогда, когда сила P въ каждый данный моментъ оказывалась бы уравновѣшенной нормальными къ гранямъ клина силами реакціи опоръ, N_1 и N_2, и, слѣдовательно, въ случаѣ равновѣсія всей этой силовой системы, три эти силы, P, N_1 и N_2, должны были бы составлять замкнутый силовой треугольникъ, какъ это и изображено на фиг. 62, — на этой фигурѣ, ради ясности всѣхъ деталей чертежа, силы изображены въ довольно крупномъ, сравнительно съ фиг. 61, масштабѣ, причемъ параллельность направленій отрѣзковъ, изображающихъ одинъ и тѣ же силы, сохранена, такъчто $AB \parallel P$, $BC \parallel y N_2$ и $CA \parallel x N_1$.

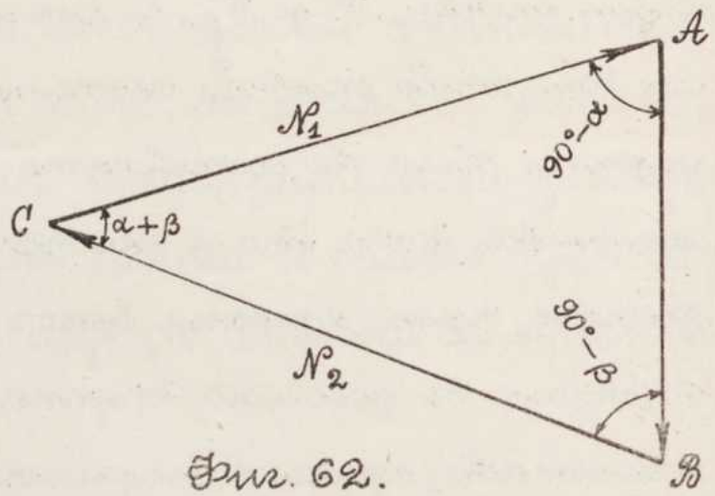
Положимъ, ради простоты разсужденій, что сила P направлена вертикально и что отвѣсная линія DV, проведенная черезъ вершину D клина (фиг. 61), образуетъ со сторонами клина углы α и β, такъ что уголъ D клина, равный δ, выразится черезъ

$$\delta = \alpha + \beta . \quad . \quad . \quad

будутъ равны $(90°-\alpha)$ и $(90°-\beta)$ и, значитъ, при извѣстныхъ α и β будутъ вполнѣ извѣстны. Такимъ образомъ, опредѣливъ углы α и β и зная величину усилія P, сейчасъ же сможемъ построить и силовой треугольникъ ABC (фиг. 62), проводя въ конечныхъ точкахъ отрѣзка AB, изображающаго въ извѣстномъ масштабѣ силу P, прямыя AC и BC подъ углами $(90°-\alpha)$ и $(90°-\beta)$ къ AB. Точка C пересѣченія этихъ прямыхъ и опредѣлитъ величину опорныхъ сопротивленій N_1 и N_2, воздѣйствующихъ на клинъ со стороны детали A, въ предположеніи отсутствія силъ трения и равномѣрнаго движенія клина.



Фиг. 61.



Фиг. 62.

Легко провѣрить, что уголъ при вершинѣ C такъ полученнаго силового треугольника равенъ $(\alpha+\beta)$, т.-е. углу δ нашего клина.

Перейдемъ теперь къ тому, что имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности,— вдвиганіе клина затрудняется, помимо опорныхъ сопротивленій N_1 и N_2, еще силами трения, направленными противъ скорости

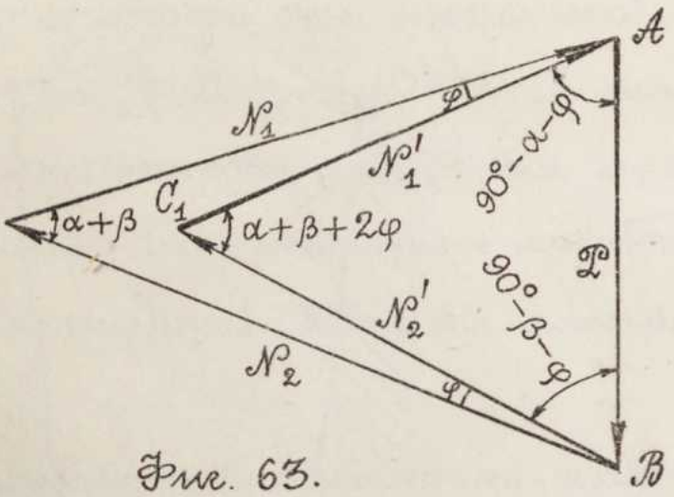
относительнаго скольженія клина по частямъ детали, откуда слѣдуетъ, что въ точкѣ x соприкосновенія стороны клина DE съ частью K детали будетъ воздѣйствовать на нашъ клинъ сила тренія $f_x . N_1$, направленная по DE, а въ точкѣ y — сила тренія $f_y . N_2$, направленная по DF. Коэффиціенты тренія мы обозначили отлично другъ отъ друга потому, что части детали, соприкасающіяся съ нашимъ клиномъ, могутъ оказаться выполненными изъ различныхъ матеріаловъ. Имѣя, однако, въ виду, что такое предположеніе нѣсколько усложняетъ дальнѣйшіе подсчеты, не давая, при томъ, особенной выгоды въ смыслѣ общности результатовъ, мы будемъ предполагать, что части K и L детали выполнены изъ одного и того же матеріала, такъ что коэффиціенты f_x и f_y можно считать равными, и мы будемъ обозначать ихъ одинаково, черезъ f. При такомъ предположеніи силы тренія, сохраняя свои направленія DE и DF, выразятся черезъ fN_1 и fN_2.

Такимъ образомъ, сочетая опорныя сопротивленія N_1 и N_2 съ вызываемыми ими силами тренія, можемъ сказать, что прежнія силы N_1 и N_2 можно замѣнить теперь результирующими N_1' и N_2', получаемыми отъ сложенія силъ N_1 и N_2 съ силами тренія fN_1 и fN_2 соотвѣтственно; каждая изъ этихъ результирующихъ будетъ наклонена къ своей нормали подъ угломъ φ.

Предположивъ теперь, что подъ воздѣйствіемъ этихъ трехъ силъ, P, N_1' и N_2', клинъ перемѣщается опять равномѣрно, заключаемъ, что эти три силы уравновѣшива-

тоть другъ друга, почему изъ нихъ можно опять составить замкнутой силовой треугольникъ, при чемъ по поводу его можно сдѣлать слѣдующія замѣчанія:

Углы результирующихъ силъ N_1' и N_2' съ силой P равны, очевидно, $(90°-\alpha-\varphi)$ и $(90°-\beta-\varphi)$ соотвѣтственно; значитъ, они меньше угловъ $(90°-\alpha)$ и $(90°-\beta)$ наклона силъ N_1 и N_2 къ той же силѣ P, вслѣдствіе чего отрѣзки, изображающіе силы N_1' и N_2', окажутся наклоненными къ силѣ P положе, чѣмъ отрѣзки, изображающіе силы N_1 и N_2. Въ виду этого новый силовой треугольникъ AC_1B, имѣющій съ прежнимъ одно и то же основаніе $AB = \mu . P$, гдѣ μ есть масштабъ силъ, расположится внутри прежняго треугольника ACB (фиг. 63).



Фиг. 63.

Новый треугольникъ равновѣсія, отличный, какъ видимъ, отъ прежняго, и дастъ намъ возможность изслѣдовать помощью его условія равновѣсія клина подъ воздѣйствіемъ какъ дѣйствующей силы P, такъ и силъ опорныхъ сопротивленій, N_1 и N_2, и силъ тренія, fN_1 и fN_2. Ради удобства обращенія съ нимъ, мы вычерчиваемъ его отдѣльно, на фиг. 64.

Углы C_1AB и C_1BA его, получившіеся путемъ вычитанія угла φ изъ угловъ $(90°-\alpha)$ и $(90°-\beta)$ прежняго силового треугольника, выразятся такъ:

$$\angle C_1AB = 90° - (\alpha + \varphi),$$

$$\angle C_1BA = 90° - (\beta + \varphi).$$

Отсюда слѣдуетъ, что третій уголъ, C_1, выразится такъ:

$$\angle C_1 = 180^\circ - [180^\circ - (\alpha+\beta+2\varphi)] = \alpha+\beta+2\varphi = \delta+2\varphi,$$

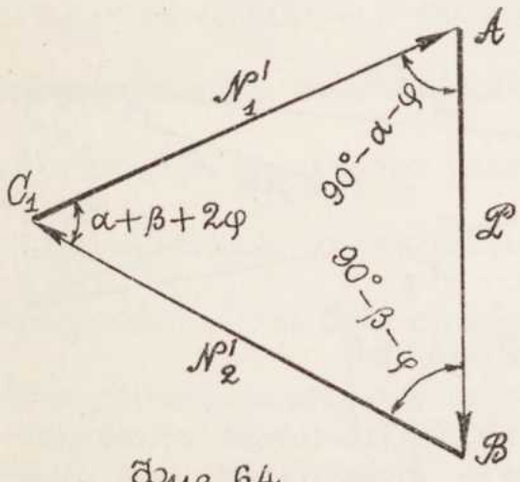
гдѣ δ есть уголъ нашего клина, равный $(\alpha+\beta)$.

Выписанныя выраженія угловъ нашего треугольника даютъ возможность по силѣ $\mathfrak{P}$ и угламъ α, β и φ, опредѣлить результирующія N_1' и N_2'. Дѣйствительно, изъ треугольника ABC_1 (фиг. 64) имѣемъ:

$$N_1' = \mathfrak{P}\,\frac{\sin[90^\circ-(\beta+\varphi)]}{\sin(\delta+2\varphi)} = \mathfrak{P}\,\frac{\cos(\beta+\varphi)}{\sin(\delta+2\varphi)} \quad \ldots\ldots (1)$$

Подобнымъ же образомъ для силы N_2' найдемъ:

$$N_2' = \mathfrak{P}\,\frac{\sin[90^\circ-(\alpha+\varphi)]}{\sin(\delta+2\varphi)} = \mathfrak{P}\,\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\sin(\delta+2\varphi)} \quad \ldots\ldots (2)$$



Фиг. 64.

Выраженія (1) и (2) даютъ возможность опредѣлить и опорныя сопротивленія, N_1 и N_2, ибо

$$N_1 = N_1' \cos\varphi \quad \ldots\ldots (3)$$

и

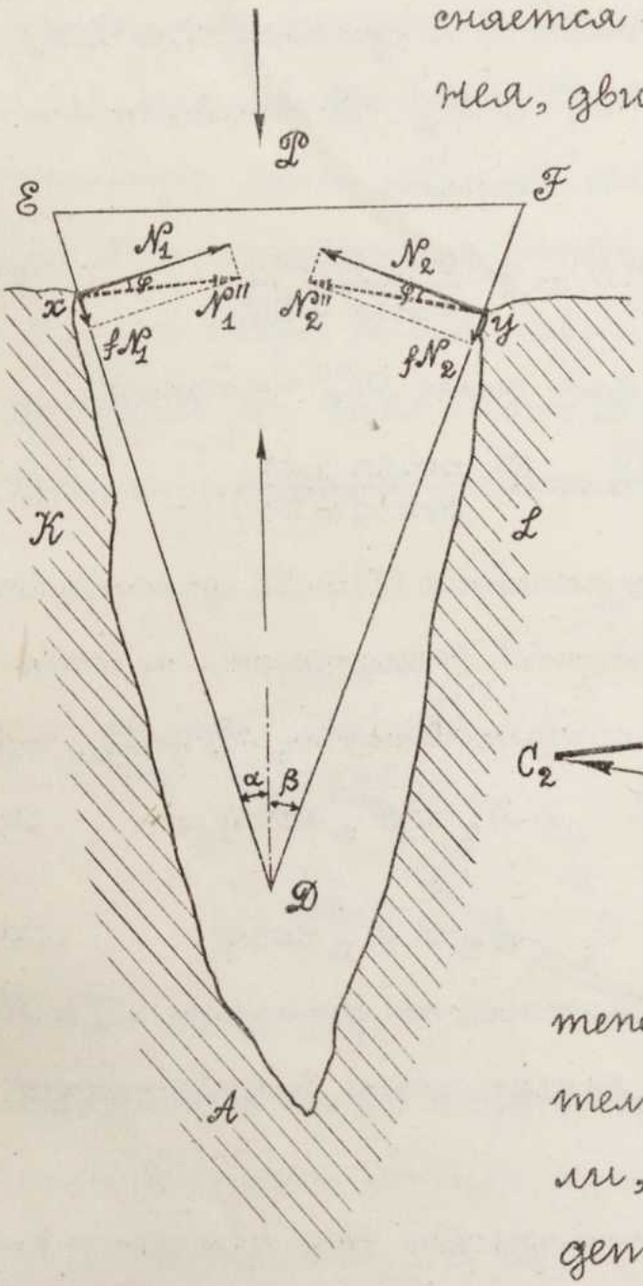
$$N_2 = N_2' \cos\varphi \quad \ldots\ldots (4)$$

Обратно, по даннымъ N_1' и N_2' легко опредѣлить вызывающую ихъ внѣшнюю силу $\mathfrak{P}$.

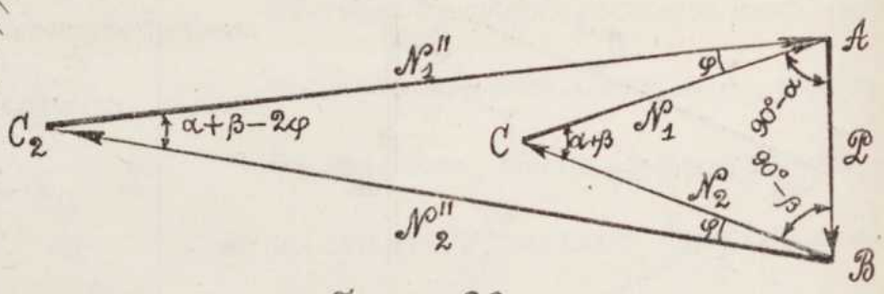
Перейдемъ теперь къ выясненію условій, при которыхъ клинъ оказывается самотормозящимъ, т.-е. будучи введенъ въ деталь и предоставленъ затѣмъ самому себѣ, однѣми силами реакціи N_1 и N_2, безъ участія посторонннихъ внѣшнихъ силъ, вытѣснень быть изъ нея не можетъ. Вопросъ этотъ проще всего разрѣшается такъ:

Пусть клинъ DEF, будучи загнанъ въ деталь A (фиг. 65),

оказался, затѣмъ, предоставленнымъ воздѣйствію на него внѣшней силы P, направленной вертикально внизъ, силъ N_1 и N_2 опорныхъ сопротивленій и, наконецъ, вызываемыхъ этими послѣдними силъ треніа. Подъ дѣйствіемъ всей этой группы силъ клинъ, предположимъ, вытъсняется изъ детали и вылъзаетъ изъ нея, двигаясь, при томъ, равномѣрно, несмотря на сопротивленіе вертикальной силы P. Такъ какъ клинъ движется теперь вверхъ, вылъзая изъ детали, то силы треніа fN_1 и fN_2 перемѣнятъ



Фиг. 65.



Фиг. 66.

теперь свое направленіе сравнительно съ тѣмъ, какое они имѣли, когда клинъ входилъ внутрь детали, — см. фиг. 61, — эти силы треніа, fN_1 и fN_2, будутъ имѣть теперь направленіе отъ E и F къ вершинѣ D клина, какъ это и показано на чертежѣ (см. фиг. 65). Силы треніа, сопротивляясь вылъзанію клина, будутъ помогать дѣйствію силы P, стремящейся удержать клинъ въ деталн.

Въ виду такой перемѣны направленія силъ треніа результирующія нормальныхъ сопротивленій, N_1 и N_2, и силъ треніа, fN_1 и fN_2, окажутся наклоненными опять подъ углами φ къ нормалямъ, но уже по другую сторону нормалей, сравнительно съ прежними,— новыя результирующія окажутся направленными въ сторону вершины клина, въ то время какъ въ предыдущемъ случаѣ онѣ отклонялись отъ нормалей въ сторону основанія клина. Углы этихъ результирующихъ, N_1'' и N_2'', съ силой P оказываются, такимъ образомъ, равными $[(90°-\alpha)+\varphi]$ и $[(90°-\beta)+\varphi]$, и силовой треугольникъ, построенный на взаимно уравновѣшивающихся силахъ P, N_1'' и N_2'', расположится, очевидно, внѣ силового треугольника, построеннаго на силахъ P, N_1 и N_2,— см. фиг. 66, гдѣ масштабъ силъ взятъ, во избѣжаніе громоздкости чертежа, немного меньшимъ, чѣмъ на фиг. 63 и 64; углы φ придется отложить теперь по другую сторону отрѣзковъ AC и BC сравнительно съ предыдущимъ, и силовой треугольникъ приметъ теперь видъ, изображенный на чертежѣ,— треугольникъ ABC_2 на фиг. 66.

Изъ этого новаго силового треугольника имѣемъ соотношенія:

$$P = N_1'' \frac{\sin(\alpha+\beta-2\varphi)}{\sin(90°-\beta+\varphi)} = N_1'' \frac{\sin(\delta-2\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} \quad \ldots\ldots (5)$$

и

$$P = N_2'' \frac{\sin(\delta-2\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Въ виду равенства лѣвыхъ частей этихъ уравненій, равны и правыя ихъ части, что дастъ намъ въ

дальнѣйшемъ возможность вывести геометрически признакъ самоторможенія клина, а теперь мы разрѣшимъ этотъ вопросъ аналитически, исходя изъ уравненій (5) и (6), только что нами полученныхъ.

Предѣльнымъ случаемъ самоторможенія будетъ тотъ, когда клинъ, не будучи удерживаемъ никакой внѣшней силой, т.-е. при $\mathfrak{P}=0$, будетъ или оставаться въ покоѣ или двигаться равномѣрно, если ему тѣмъ или инымъ путемъ будетъ сообщена нѣкоторая начальная скорость,—оба эти состоянія являются для него одинаково возможными. Итакъ, предѣльный случай самоторможенія опредѣляется изъ условія

$$\mathfrak{P}=0,$$

ведущаго, въ виду (5) и (6), къ условіямъ

$$N_1'' \frac{\sin(\delta-2\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} = N_2'' \frac{\sin(\delta-2\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)} = 0 \quad \ldots\ldots (7)$$

Такъ какъ силы реакціи N_1'' и N_2'' отличны отъ нуля, а знаменатели безконечныхъ значеній принимать не могутъ, то полученному условію (7) можно удовлетворить единственнымъ образомъ, положивъ равнымъ нулю числитель, т.-е. принявъ, что

$$\sin(\delta-2\varphi)=0.$$

Такъ какъ уголъ δ клина всегда меньше 180°, то полученному условію можно удовлетворить, лишь предположивъ, что

$$\delta=2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Итакъ, если уголъ δ клина сдѣлать равнымъ двойному углу трѣнія φ, то для удерживанія клина въ деталяхъ никакой посторонней, внѣшней, силы не нужно,

— внѣшняя сила P можетъ здѣсь отсутствовать: $P=0$; но если дать клину толчокъ вверхъ, сообщивъ ему, такимъ образомъ, нѣкоторую начальную скорость, то онъ придетъ въ движеніе и станетъ равномѣрно вылѣзать изъ детали A.

Если мы возьмемъ, далѣе, уголъ δ клина еще меньшимъ, такимъ, чтобы онъ удовлетворялъ неравенству

$$\delta < 2\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

то сила P становится отрицательной, ибо $\sin(\delta - 2\varphi)$ становится меньше нуля, въ то время какъ знаменатель остается все время положительнымъ. То обстоятельство, что здѣсь $P<0$, истолковывается такъ: при условіи (9) для возможности равномѣрнаго вылѣзанія клина изъ детали придется уже не ограничиться толчкомъ снизу вверхъ, какъ это имѣло мѣсто въ предыдущемъ случаѣ, а приложить къ нему нѣкоторую опредѣленную силу P, направленную отрицательно, т.-е. снизу вверхъ; говоря попросту, нашъ клинъ придется въ этомъ случаѣ тащить изъ детали съ нѣкоторымъ усиліемъ P, самъ же онъ изъ нея не вылѣзетъ, сколь бы велики ни были боковыя усилія N_1 и N_2, старающіяся вытѣснить его оттуда.

Итакъ, при уголъ δ клина, меньшемъ двойного угла тренія φ, клинъ, будучи загнанъ въ деталь и предоставленъ затѣмъ самому себѣ, не только будетъ удерживаться въ детали самъ, безъ помощи посторонннихъ внѣшнихъ силъ, но уже для того, чтобы дать ему возможность выйти изъ детали, надо приложить къ нему нѣко-

торую силу $\mathfrak{P}$, направленную снизу вверхъ, т.-е. придется клинъ изъ детали вытаскивать съ силой $\mathfrak{P}$, опредѣляемой изъ уравненій (5) или (6).

Замѣтимъ, что уравненія (5) и (6) могутъ быть получены прямо изъ ранѣе выведенныхъ уравненій (1) и (2) путемъ замѣны угла $(+\varphi)$ угломъ $(-\varphi)$, соотвѣтственно перемѣнѣ направленія силъ треніа.

Если бы оказалось, что углы α и β равны, такъ что

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2}\delta,$$

то силы N_1' и N_2' оказались бы между собою равными, точно такъ же, какъ и силы N_1'' и N_2''. Въ этомъ случаѣ мы получили бы а) для движенія клина внутрь детали:

$$N_1' = N_2' = \frac{\mathfrak{P}}{2\sin(\alpha+\varphi)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

и в) для движенія наружу, изъ детали:

$$N_1'' = N_2'' = \frac{\mathfrak{P}}{2\sin(\alpha-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Условіемъ самоторможенія является соотношеніе

$$\alpha \leqq \varphi,$$

причемъ равенство представляетъ собою предѣльный случай возможности какъ равномѣрнаго выползанія клина изъ детали, такъ и покоя его тамъ.

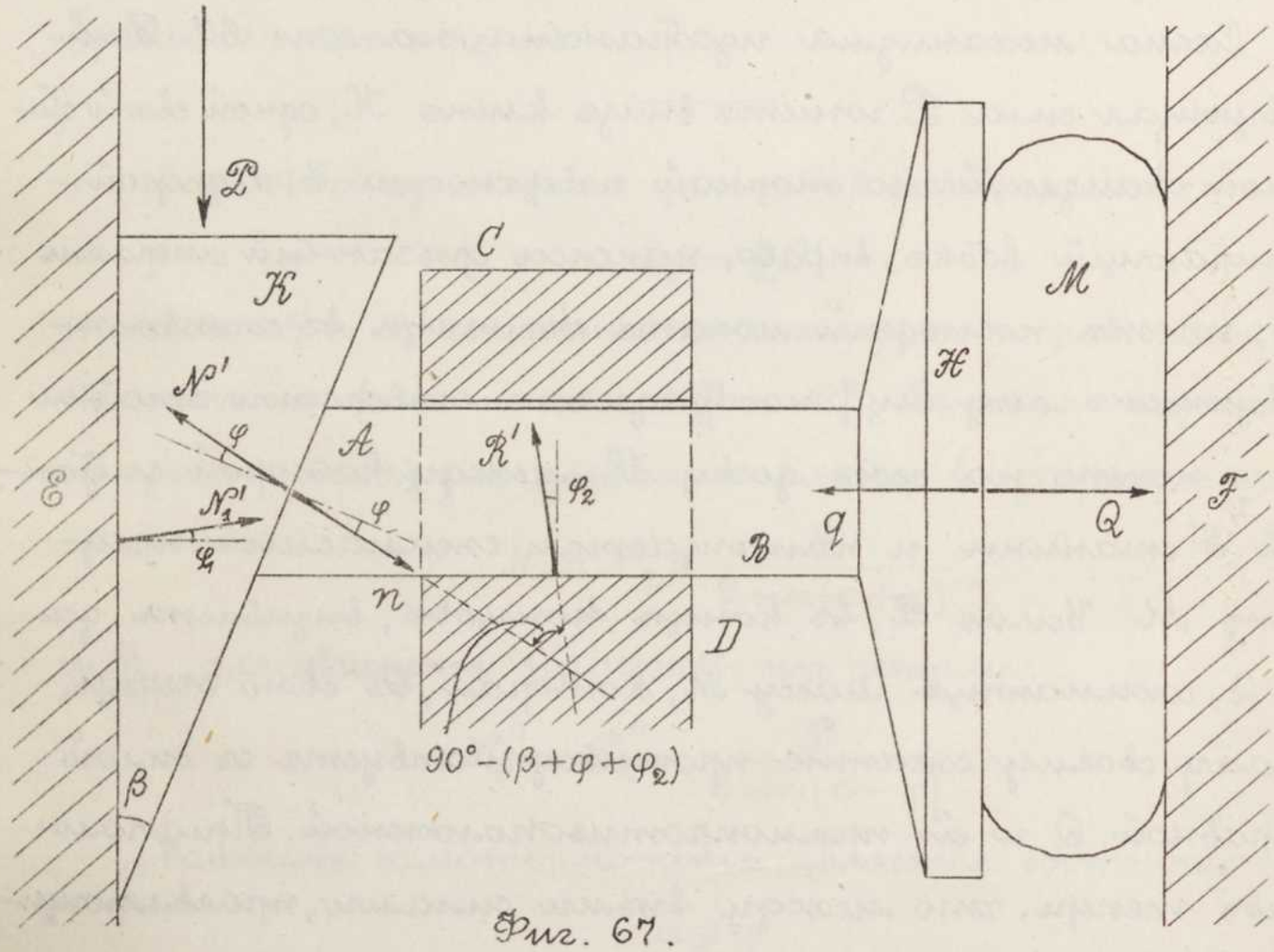
Въ машиностроеніи скрѣпленія клиньями употребляются довольно часто, напр., въ головкахъ шатуновъ и т.п. Встрѣчаются даже цѣлые механизмы, гдѣ главной частью, дающей выигрышъ въ силѣ, является именно клинъ, и одинъ изъ такихъ механизмовъ, — такъ называемый клинчатый прессъ мы теперь и разберемъ. Въ такомъ

простомъ видѣ, какъ это изображено на чертежѣ (фиг. 67), онъ на практикѣ не выполняется; тѣмъ не менѣе мы разберемъ его именно въ этомъ упрощенномъ видѣ, чтобы, не осложняя дѣла введеніемъ и разсмотрѣніемъ различныхъ привходящихъ сюда деталей, дать представленіе о ходѣ изслѣдованія подобныхъ механизмовъ.

Схема механизма изображена на фиг. 67. Дѣйствующая сила P гонитъ внизъ клинъ K, одной своей стороной скольженія по опорной поверхности E, а другой — выпирающій вбокъ, вправо, наискось срѣзанный стержень AB; этотъ послѣдній можетъ скользить въ соотвѣтствующемъ ему муфтообразномъ отверстіи стойки CD и несетъ на себѣ доску H, между которой и грѣнкой F станины и помѣщается сжимаемый предметъ M. Усиліе P, въ концѣ концовъ, вызываетъ усиліе Q, сжимающее массу M, которая, въ свою очередь, этому своему сжатію противодѣйствуетъ съ силой q, равной Q и ей прямопротивоположной. Предположивъ теперь, что между всѣми силами, проявляющими свое дѣйствіе въ этомъ механизмѣ во время его работы, въ разсматриваемый моментъ существуетъ равновѣсіе, постараемся опредѣлить условія его, равно какъ и связь между дѣйствующей силой P и сжимающей Q или, что то же, между силой P и силой сопротивленія сжимаемаго предмета, q. При этомъ сначала разсмотримъ условія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на клинъ K, а затѣмъ силъ, воздѣйствующихъ на стержень AB; двумя этими деталями

механизмъ пресса собственно и исчерпывается.

Предполагая, что въ разсматриваемый моментъ клинъ движется равномѣрно внизъ и, значитъ, стержень AB вправо, и что матеріалы стержня AB и стѣнки E различны, такъ что углы тренія φ и φ_1 между со-



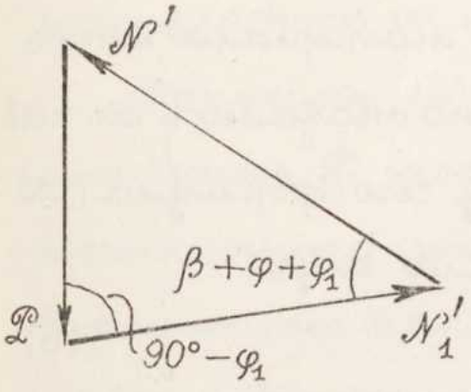
Фиг. 67.

не равны, заключаемъ, что силы тренія, сопротивляющіяся движенію клина, будутъ направлены вверхъ по его стѣнкамъ, а сила тренія, препятствующая движенію стержня AB, будетъ направлена влѣво. Ясно теперь, что результирующія сопротивленія N', N_1' и R' окажутся направленными подъ углами φ, φ_1 и φ_2 тренія къ своимъ нормалямъ, и, при томъ, какъ всегда, въ стороны, обратныя движенію (относительному) деталей. Разсмотримъ теперь условія равновѣсія клина K.

Составляя изъ силъ P, N' и N_1', дѣйствующихъ на клинъ, силовой треугольникъ (фиг. 68), можемъ, пользуясь имъ, написать соотношеніе:

$$P = N' \frac{\sin(\beta+\varphi+\varphi_1)}{\cos\varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

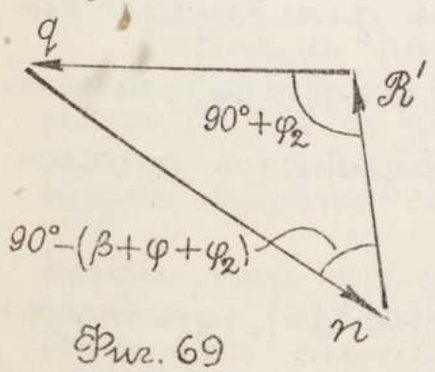
Если бы матеріалы стержня AB и стойки E были одинаковы, такъ что мы имѣли бы, что $\varphi = \varphi_1$, то формула (12) приняла бы болѣе простой видъ:



Фиг. 68.

$$P = N_2' \frac{\sin(\beta+2\varphi)}{\cos\varphi} \quad \ldots (12')$$

Переходимъ теперь къ стержню AB. На него дѣйствуютъ: 1) сила n нажатія со стороны клина, равная и противоположная той силѣ N', съ которой стержень противодѣйствуетъ движенію клина; 2) результирующая R' сопротивленій со стороны стойки CD, наклоненная къ нормали подъ угломъ трепія φ_2, положимъ, отличнымъ какъ отъ φ, такъ и отъ φ_1, и, наконецъ, 3) сила q сопротивленія предмета M сжатію. Составляя изъ этихъ трехъ силъ силовой треугольникъ (фиг. 69), можемъ, на основаніи его, написать соотношеніе:



Фиг. 69

$$n = q \frac{\cos\varphi_2}{\cos(\beta+\varphi+\varphi_2)} \quad \ldots (13)$$

Въ виду равенствъ $n = N'$ и $Q = q$, можемъ теперь, на основаніи формулъ (12) и (13) вывести искомое соотношеніе между силами P и Q, исключая изъ этихъ уравненій силу N'. Тогда получимъ соот-

ношеніе:

$$P = Q\,\frac{\sin(\beta+\varphi+\varphi_1)\cos\varphi_2}{\cos(\beta+\varphi+\varphi_2)\cos\varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Если бы матеріалы стѣнки E и стойки CD оказались одинаковыми, такъ что углы φ_1 и φ_2 были бы равны, то формула (14) приняла бы видъ:

$$P = Q\,\mathrm{tg}(\beta+\varphi+\varphi_1) \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Если бы, наконецъ оказалось, что матеріалы всѣхъ деталей E, K, AB и CD, одинаковы, то оказались бы равными и всѣ углы φ, φ_1 и φ_2, въ силу чего формула (15) упростилась бы еще больше и приняла видъ:

$$P = Q\,\mathrm{tg}(\beta+2\varphi), \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

вполнѣ аналогичный формулѣ (3) на стр. 131, имѣющей мѣсто для наклонной плоскости. То обстоятельство, что въ формулѣ (3) уголъ тренія взятъ одинъ разъ, а въ формулѣ (16) — два раза, объясняется тѣмъ, что формула (16) вынуждена была учесть одно лишнее скольженіе (AB по CD), что и обусловило появленіе внутри скобокъ одного лишняго угла.

Что касается коэффиціента полезнаго дѣйствія, то подсчетъ его мы выполнимъ лишь для случая равенства всѣхъ трехъ угловъ тренія ($\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$); случай различныхъ угловъ можетъ быть разобранъ аналогичнымъ путемъ.

Если бы тренія не было, то, согласно (16), гдѣ теперь $\varphi = 0$, то же напряженіе Q могло бы быть вызвано силой P_1, меньшей P, гдѣ

$$P_1 = Q\,\mathrm{tg}\beta; \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

при наличности же тренія имѣемъ $\varphi > 0$ и формулу (16).

Отсюда получаемъ искомое выраженіе коэффиціента полезнаго дѣйствія η; очевидно, что онъ будетъ равенъ отношенію между силами $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}$, такъ что:

$$\eta = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+2\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Какъ видимъ, онъ меньше, чѣмъ въ случаѣ наклонной плоскости съ угломъ β, — ср. форм. (4) на стр. 133.

Формула (16) показываетъ, что $Q = \mathfrak{P}\operatorname{cotg}(\beta+2\varphi)$, т.-е. что усиліе $\mathfrak{P}$, необходимое для полученія опредѣленнаго сжимающаго усилія, тѣмъ меньше, чѣмъ меньше уголъ β клина; но параллельно съ уменьшеніемъ угла β измѣняется и коэффиціентъ полезнаго дѣйствія η. Нетрудно подсчитать максимальное значеніе η и величину соотвѣтствующаго угла β. Приравнявъ производную $d\eta/d\beta$ нулю, находимъ, что наивыгоднѣйшее значеніе β, — обозначимъ его черезъ β_n, — есть

$$\beta_n = 45° - \varphi,$$

и этому значенію β соотвѣтствуетъ η_{max}, равный

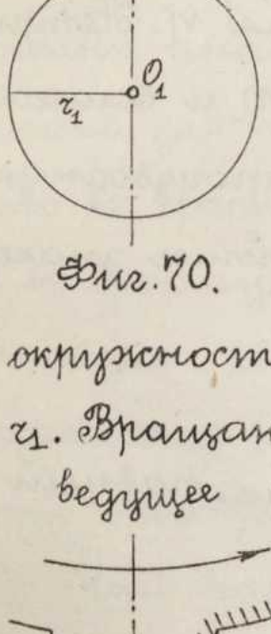
$$\eta_{max} = \frac{\operatorname{tg}(45°-\varphi)}{\operatorname{tg}(45°+\varphi)}.$$

Путемъ разсужденій, аналогичныхъ приведеннымъ на стр. 158 и слѣд., можно убѣдиться, что этотъ механизмъ будетъ самоторможащимъ, попрежнему, тогда, когда, при $\varphi \neq \varphi_1$, $\beta \leqq \varphi+\varphi_1$, или, при $\varphi = \varphi_1$, когда $\beta \leqq 2\varphi$. Въ этихъ случаяхъ клинъ вылѣзть самъ не сможетъ, — для этого понадобится употребить извѣстное усиліе, могущее быть подсчитаннымъ по формуламъ, аналогичнымъ вышевыведеннымъ, но лишь съ обратными знаками у половъ трепія φ.

§8. Зубчатыя колеса.

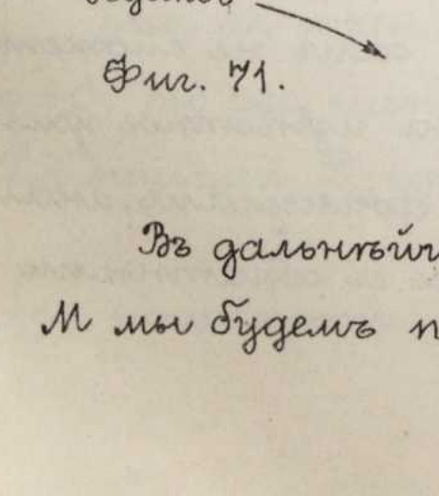
Перейдемъ теперь къ вопросу о величинѣ работы тренія въ зубчатыхъ колесахъ и о величинѣ коэффиціента полезнаго дѣйствія ихъ.

Представимъ себѣ, что у насъ имѣются два цилиндрическихъ зубчатыхъ колеса, O и O_1 (фиг. 70), находящихся между собою въ извѣстномъ зацѣпленіи, циклическомъ или эвольвентномъ или любомъ другомъ. Допустимъ,



Фиг. 70.

что линія зацѣпленія также извѣстна. Ведущимъ колесомъ пусть служитъ верхнее колесо, O, а ведомымъ — нижнее, O_1, и пусть моментъ, вращающій верхнее колесо, равенъ M. Предположимъ, далѣе, что точкой касанія начальныхъ окружностей нашихъ колесъ служитъ точка P, такъ что радіусъ ведущей окружности, OP, равенъ r, а радіусъ O_1P ведомой равенъ r_1. Вращающій моментъ M можно представить себѣ



Фиг. 71.

полученнымъ помощью нѣкотораго ведущаго окружного усилія T, касательнаго къ начальной окружности и направленнаго согласно вращенію колеса O. Величину этого окружного усилія получимъ изъ уравненія

$$M = Tr,$$

откуда

$$T = M/r. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Въ дальнѣйшемъ вмѣсто вращающаго момента M мы будемъ пользоваться этимъ именно окружнымъ

усиліемъ P. Единовременно въ зацѣпленіи можетъ находиться, вообще говоря, нѣсколько паръ зубцевъ, но, ради простоты разсужденій, предположимъ, что каждый моментъ оказываются находящимися въ зацѣпленіи только два зуба, — положимъ, зубъ a ведущаго колеса (фиг. 71) и зубъ b ведомаго; мы, такимъ образомъ, предположимъ, что сопротивленіе вращенію оказываетъ только одинъ зубецъ ведомаго колеса, а преодолѣваетъ это сопротивленіе только одинъ зубецъ ведущаго. Это сопротивленіе или, точнѣе, давленіе сопротивляющагося зубца всегда направлено по нормали къ поверхности его, проведенной въ точкѣ касанія его съ ведущимъ зубомъ. Въ данномъ случаѣ эта нормаль, очевидно, представитъ собою общую нормаль An къ тѣмъ касающимся другъ друга поверхностямъ зубцовъ, проходящую черезъ точку соприкосновенія ихъ A (фиг. 71). Припоминая, далѣе, что профили зубцовъ очерчиваются сопряженными кривыми, огибающими и огибаемыми, — заключаемъ, что эта общая нормаль должна пройти черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія P, — точку соприкосновенія полодій.

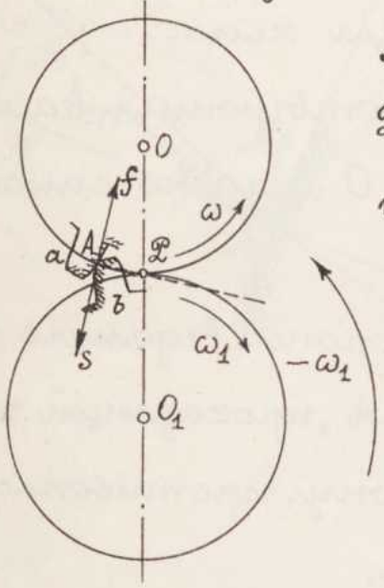
Итакъ, прежде всего, оказывается, что сопротивленіе N ведомаго зубца направлено по прямой AP, соединяющей полюсъ P съ точкой A касанія профилей зубцовъ, и, при томъ, очевидно, въ сторону, противоположную направленію вращенія ведущаго колеса O.

Замѣтимъ, кстати, что точка A касанія профилей лежитъ, конечно, на линіи зацѣпленія.

Кромѣ этихъ двухъ силъ необходимо принять во вниманіе силы тренія, здѣсь возникающія. По поводу ихъ въ данномъ случаѣ можно сказать слѣдующее: профили зубцовъ очерчиваются, какъ мы знаемъ, огибаемыми и огибающими. Но всякая огибаемая движется по своей огибающей не только катясь, но и скользя. Въ виду этого, для полноты рѣшенія, слѣдовало бы учесть работу какъ тренія скольженія, такъ и тренія качения. Принимая, однако, во вниманіе незначительность работы, уходящей на преодолѣніе тренія качения, имъ обычно пренебрегаютъ, хотя, надо сказать, учетъ его никакихъ особыхъ трудностей не представляетъ, и ограничиваются подсчетомъ одного лишь скольженія; такимъ же образомъ поступимъ и мы и постараемся произвести учетъ работы, уходящей на треніе въ зубцахъ, при чемъ будемъ имѣть въ виду одно лишь треніе скольженія.

Прежде всего, рѣшимъ основной вопросъ о направленіи силы тренія, возникающей между зубцами. Какъ всегда, сила тренія будетъ направлена прамопротивоположно относительному движенію одного зубца по другому. Поэтому, имѣя въ дальнѣйшемъ въ виду написаніе уравненія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на ведущее колесо, мы и постараемся опредѣлить направленіе силы тренія скольженія, дѣйствующей на зубецъ ведущаго колеса. Для этого, согласно общей схемѣ, опредѣляемъ движеніе этого колеса относительно ведомаго, съ каковой цѣлью придаемъ всей системѣ (обоимъ движущимся колесъ O и O_1) движеніе, обратное

движению ведомаго колеса. Такъ какъ, по основному предположению, оно двигалось по часовой стрѣлкѣ съ нѣкоторой угловой скоростью ω_1, то мы придадимъ теперь всей системѣ движение противъ часовой стрѣлки съ тою же скоростью ω_1, — это новое движение мы обозначимъ символомъ $(-\omega_1)$. Теперь колесо O_1 останавливается, а колесо O оказывается вынужденнымъ совершать одновременно два вращения: около своего центра съ угловой скоростью ω ↑ и вокругъ центра O_1 съ угловой скоростью ω_1 ↑. Въ результатѣ сложения этихъ двухъ движений получаемъ вращение колеса O вокругъ точки P касания начальныхъ окружностей, — полюса мгновеннаго вращения новаго движения; при чемъ это вращение будетъ совершаться со скоростью $(\omega + \omega_1)$ опять противъ часовой стрѣлки.



Фиг. 72.

Значитъ, зубецъ a колеса O (фиг. 72) будетъ скользить по зубцу b колеса O_1, двигаясь по направлению, указанному стрѣлкой s, откуда слѣдуетъ, что сила трения скольжения, дѣйствующая на зубецъ a колеса O, будетъ направлена по стрѣлкѣ Af, оказываясь направленной относительно полюса P въ сторону, одинаковую со смысломъ вращения вокругъ O_1.

Кромѣ этого, необходимо замѣтить, что, такъ какъ перемѣщение поверхности одного зубца по поверхности другого будетъ происходить въ направлении As, перпендикулярномъ къ общей нормали AP, т.-е. въ напра-

вленію общей касательной къ нимъ, то направленіе Af будетъ перпендикулярно къ общей нормали къ профилямъ, т.-е. къ лучу AP, соединяющему точку касанія A съ полюсомъ мгновеннаго вращенія P. Итакъ, сила тренія, дѣйствующая на зубецъ колеса O, будетъ имѣть направленіе Af, перпендикулярное къ AP.

Что касается величины этой силы тренія, то она выразится черезъ Nf, гдѣ f есть коэффиціентъ тренія между зубьями a и b.

Итакъ, мы установили, что на систему ведущаго колеса O воздѣйствуютъ слѣдующія силы:

1) сила T окружного усилія, дѣйствующая касательно къ начальной окружности колеса O согласно смыслу вращенія его,

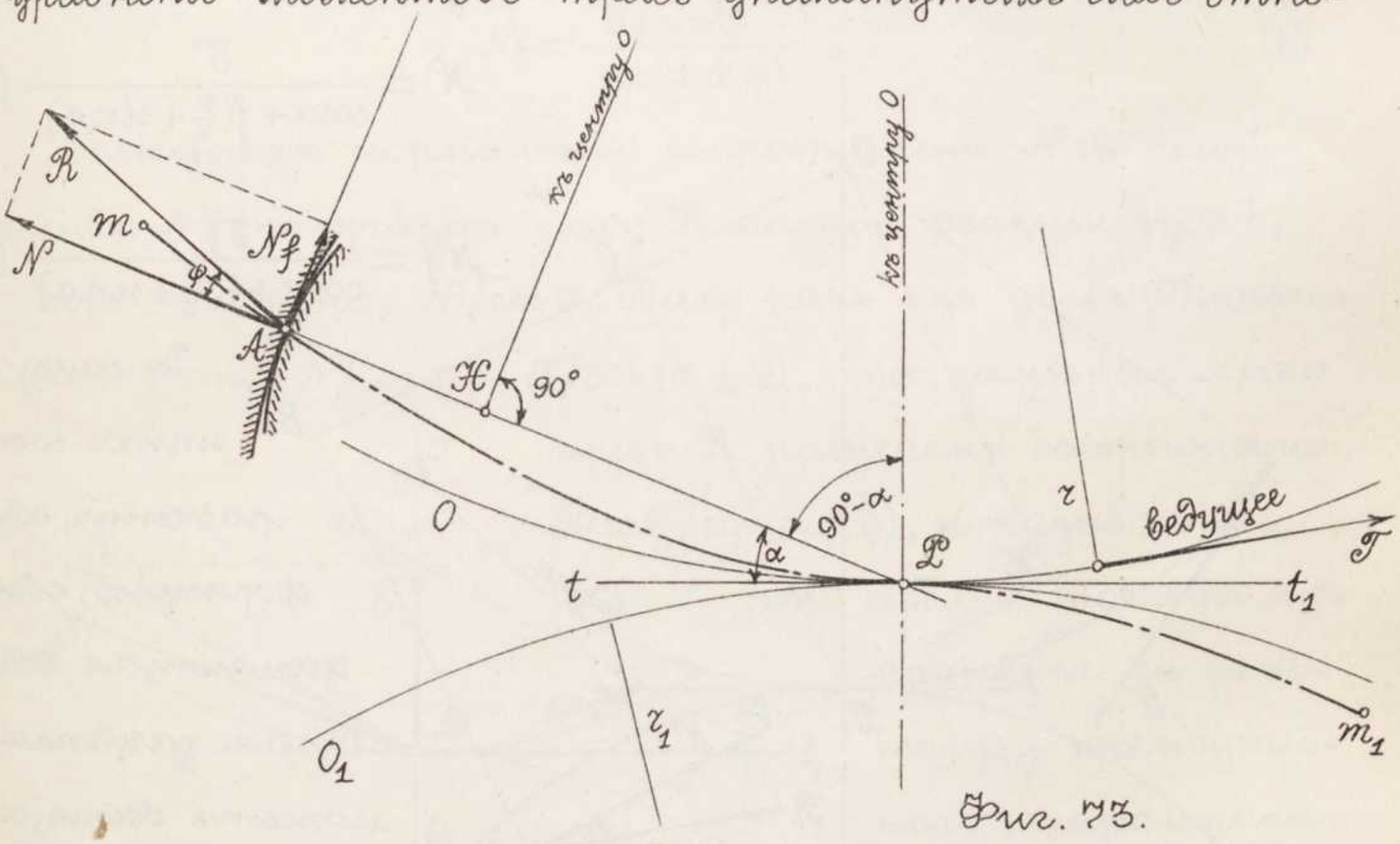
2) сила N сопротивленія со стороны ведомаго колеса O_1, направленная по нормали PA, проходящей черезъ точку A касанія профилей, въ сторону, противоположную движенію колеса O, и, наконецъ,

3) сила Nf тренія между зубцами a и b, направленная перпендикулярно нормали AP, въ сторону, противоположную смыслу вращенія колеса O.

Конечно, къ этимъ сопротивленіямъ слѣдовало бы прибавить еще сопротивленіе тренія въ подшипникахъ, но мы вводить его не будемъ, чтобы не осложнять вычисленій. Учесть его никакихъ особыхъ трудностей представить не можетъ.

Теперь мы имѣемъ всѣ данныя, позволяющія намъ составить уравненіе моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствую-

шихъ на колесо O, въ предположеніи равномѣрнаго вращенія его. Обозначимъ уголъ нормали AP съ общей касательной tPt_1 къ полодіямъ, т.-е. уголъ APt (фиг. 73), черезъ α, а уголъ тренія зубцовъ a и b черезъ φ, такъ что $f = \operatorname{tg}\varphi$. Обозначимъ, далѣе, длину отрѣзка AP, т.-е. разстояніе точки A касанія зубцовъ до полюса P, черезъ p; радіусъ полодіи O обозначенъ уже нами черезъ r. Опустимъ теперь изъ центра O перпендикуляръ OH на прямую AP. Тогда уравненіе моментовъ трехъ упомянутыхъ силъ отно-



Фиг. 73.

сительно центра O ведущаго колеса, напишется такъ:

$$-Tr + N.OH + Nf.AH = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Замѣчая теперь, что $OH = OP\sin(90°-\alpha) = r\cos\alpha$, а $AH = AP - HP = p - r\sin\alpha$, можемъ дать уравненію (2) видъ:

$$Tr = Nr\cos\alpha + Nf(p - r\sin\alpha),$$

откуда и находимъ, что

$$N = \frac{Tr}{r\cos\alpha + f(p - r\sin\alpha)} = \frac{T}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} - \sin\alpha\right)} \quad \ldots\ldots (3)$$

Въ виду этого сила трения Nf выразится такъ:

$$Nf = \frac{Tf}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} - \sin\alpha\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

На фиг. 73 отмѣченъ одинъ изъ моментовъ зацѣпленія передъ линіей центровъ. Если бы мы взяли случай зацѣпленія за линіей центровъ, — напримѣръ, изображенный на фиг. 74, — то, по написаніи уравненія моментовъ, получили бы уравненія, аналогичныя (3) и (4) и разнящіяся отъ нихъ только знаками у $\sin\alpha$, а именно, уравненіе:

$$N = \frac{T}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} + \sin\alpha\right)} \quad (5)$$

и

$$Nf = \frac{Tf}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} + \sin\alpha\right)} \quad (6)$$



Фиг. 74.

Въ силу этихъ соображеній, общая формула, объединяющая оба случая зацѣпленія, можетъ быть, согласно (4) и (6), написана въ видѣ:

$$Nf = \frac{Tf}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} \mp \sin\alpha\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Принимая теперь во вниманіе, что размѣры линіи зацѣпленія, сравнительно съ радіусомъ колеса, вообще говоря, очень малы, и отрѣзокъ p составляетъ лишь малую долю радіуса r, заключаемъ, что дробь p/r представляетъ собою нѣкоторую малую величину; а если, вдо-

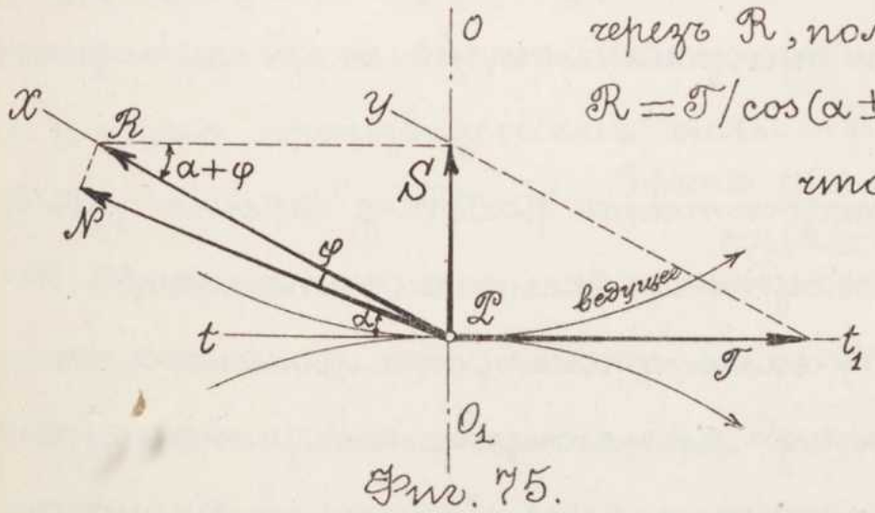
бавокъ къ этому, мы помножимъ ее еще на f,—также дробь небольшую,—то получимъ дробь fp/r, уже настолько малую, что ею, безъ замѣтной погрѣшности, свободно можно пренебречь. Послѣ этого выраженіе (7) приметъ видъ:

$$Nf = \frac{Tf}{\cos\alpha \mp f\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Подставивъ сюда вмѣсто f выраженіе его черезъ φ, т.-е. $\operatorname{tg}\varphi$, получимъ, послѣ очевидныхъ упрощеній, что

$$Nf = \frac{Tf\cos\varphi}{\cos(\alpha \pm \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Складывая нормальное сопротивленіе N съ силой тренія Nf, получаемъ силу R полной реакціи зуба b, равную, очевидно, $N/\cos\varphi$. Такъ какъ изъ ур-ія (9) можемъ вывести, что $N/\cos\varphi = T/\cos(\alpha \pm \varphi)$, то, замѣняя $N/\cos\varphi$ черезъ R, получаемъ соотношеніе $R = T/\cos(\alpha \pm \varphi)$, показывающее, что сила R можетъ быть принята за гипотенузу прямоугольнаго треугольника съ катетомъ T и прилежащимъ къ нему острымъ угломъ $(\alpha \pm \varphi)$. Поэтому усиліе R можетъ быть получено еще путемъ слѣдующаго простого геометрическаго построенія:



Фиг. 75.

Проводимъ линію центровъ OO_1 обоихъ колесъ (фиг. 75), отмѣчаемъ на ней точку P касанія полодій и проводимъ прямую $tt_1 \perp OO_1$,—общую касательную къ полодіямъ,—и на ней въ надлежащую сторону откладываемъ окружное усиліе T. Далѣе, подъ угломъ α къ tt_1

проводимъ прямую PN, дающую направленіе нормальнаго сопротивленія N, и, далѣе, подъ угломъ φ къ PN, отложеннымъ въ надлежащую сторону отъ PN, проводимъ прямую PX, дающую направленіе полной реакціи R; величину же ея получимъ, проводя TY ∥ PX и опредѣляя точку S пересѣченія TY съ OO_1. Отрѣзокъ TS и дастъ собою величину полной реакціи R, ибо $TS = PT/\cos PTS = PT/\cos(\alpha \pm \varphi)$.

Построеніе это можетъ быть получено также путемъ разсмотрѣнія того момента, когда точка A касанія зубьевъ приходитъ въ полюсъ P; тогда, очевидно, $p = 0$, и формула (8), послѣ очевидныхъ упрощеній, сразу принимаетъ видъ (9).

Замѣтимъ, кстати, что силы T и R, складываясь, даютъ силу S, представляющую собою силу, нагружающую ось вала и прижимающую ее къ ея подшипникамъ.

Имѣя въ виду подсчитать работу треніе зубьевъ за извѣстный промежутокъ времени и получивъ выраженіе величины N_f силы треніе, отъ момента къ моменту свою величину мѣняющей, мы должны теперь опредѣлить путь, проходимый точкой приложенія этой силы треніе N_f за тотъ же промежутокъ времени. Въ данномъ случаѣ треніе обусловлено наличностью относительнаго скольженія одного зубца по другому; нужно поэтому знать скорость этого скольженія. Ее можно опредѣлить, принявъ во вниманіе, что относительное движеніе зубцовъ можетъ быть воспроизведено каченіемъ одной полодіи по другой. При

этомъ въ каждый отдѣльный моментъ будетъ имѣть мѣсто вращеніе около полюса мгновеннаго вращенія $\mathfrak{P}$ со скоростью $(\omega + \omega_1)$, и искомую линейную скорость точки A получимъ въ видѣ произведенія этой угловой скорости $(\omega + \omega_1)$ на разстояніе точки A отъ полюса мгновеннаго вращенія $\mathfrak{P}$, такъ что

$$v_A = \rho(\omega + \omega_1),$$

въ силу чего точка A за время dt окажется прошедшей путь $dl = v_A\, dt$, иначе изображаемый черезъ

$$dl = \rho(\omega + \omega_1)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Что касается направленія этого пути dl, то оно, будучи перпендикулярно къ вектору $\mathfrak{P}A$, очевидно, совпадетъ съ направленіемъ силы тренія Nf, въ точкѣ A дѣйствующей. Въ виду этого элементарная работа силъ тренія за взятый промежутокъ времени dt выразится просто произведеніемъ силы Nf на путь dl, что дастъ:

$$dL_f = Nf \times dl = \frac{Tf\cos\varphi \cdot \rho(\omega + \omega_1)}{\cos(\alpha \pm \varphi)}\, dt \quad \ldots\ldots (a)$$

Отсюда можно исключить время t и угловыя скорости ω и ω_1, предположивъ, что полодіи вращаются равномѣрно. Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ время можетъ быть измѣряемо дугами, проходимыми по той или другой полодіи. Пусть за время dt длина дуги полодій, пройденной полюсомъ мгновеннаго вращенія, есть ds. Тогда имѣемъ соотношенія

$$ds = \omega r\, dt = \omega_1 r_1\, dt,$$

гдѣ r и r_1 суть радіусы полодій. Отсюда находимъ, что $\omega\, dt = ds/r$ и $\omega_1\, dt = ds/r_1$, въ силу чего основное уравненіе (a) можетъ быть иначе переписано такъ:

$$dL = \frac{T \nu p \cos\varphi}{\cos(\alpha \pm \varphi)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Такова работа трения зубцовъ за то время, пока полодіи прокатываются одна по другой на дугу ds. Стоитъ теперь подсчитать всю эту работу за всю дугу зацѣпленія, т.-е. начиная съ того момента, когда зубцы вошли въ зацѣпленіе, до того, когда они изъ него вышли, — и мы получимъ искомый результатъ. Работу эту, конечно, можно подсчитать и по частямъ, — сначала за то время, пока точка A пройдетъ часть линіи зацѣпленія mP, до линіи центровъ, а затѣмъ за время, въ которое она проходитъ остальную часть Pm_1 линіи зацѣпленія (фиг. 73), — результатъ, понятно, получится тотъ же самый, что и при прямомъ подсчетѣ за всю дугу зацѣпленія.

Прежде чѣмъ идти дальше, необходимо сдѣлать нѣкоторыя существенныя указанія относительно основныхъ положеній, приведшихъ насъ къ уравненію (11). Дѣло въ томъ, что существованіе окружного усилія T и осевого давленія S было связано нами съ нормальнымъ сопротивленіемъ лишь одного зубца ведомаго колеса. Оба эти усилія, T и S, имѣются налицо во всякой парѣ сцѣпляющихся зубчатыхъ колесъ, но при этомъ въ соприкосновеніи находится не одна пара зубцовъ, а двѣ или, вообще, нѣсколько. Является поэтому вопросъ о томъ, какъ же въ дѣйствительности распредѣляется это окружное усиліе между соприкасающимися парами зубцовъ? Къ рѣшенію этого вопроса, до сихъ поръ, къ сожалѣнію, остающагося открытымъ, можно было бы подойти при помощи теоріи упругости, руководствуясь такими соображеніями:

Если въ зацѣпленіи находится одна пара зубцовъ, то, какъ мы видѣли, дѣло сводится къ построенію нѣкотораго опредѣленнаго параллелограмма силъ. Но пусть въ зацѣпленіе вступили двѣ пары. Спрашивается, какъ распредѣлится теперь все давленіе между ними? Очевидно, что это распредѣленіе въ данномъ случаѣ зависитъ отъ измѣненія формы зубцовъ подъ дѣйствіемъ испытываемаго ими давленія. Если бы случилось, что одинъ зубецъ

первой пары оказался болѣе слабымъ, чѣмъ у другой, что могло бы имѣть мѣсто, если бы, напримѣръ, онъ былъ выполненъ изъ болѣе податливаго матеріала, то въ результатѣ вышло бы, что этотъ зубецъ первой пары поддался бы сравнительно легко, и все давленіе оказалось бы цѣликомъ сосредоточеннымъ только на одномъ зубцѣ второй пары. Если же, наоборотъ, первый зубецъ былъ бы менѣе податливъ, то онъ воспринялъ бы на себя давленіе большее, чѣмъ другой. Значитъ, распредѣленіе давленія зависитъ отъ того, насколько велико измѣненіе формы одного зубца сравнительно съ другимъ. Изслѣдовать же вопросъ объ этомъ измѣненіи формы можно было бы, исходя изъ того соображенія, что каждый зубецъ, подвергаясь нормальному давленію, долженъ въ извѣстной мѣрѣ сгибаться. Принимая теперь всѣ эти нормальныя давленія на зубцы за неизвѣстныя, мы могли бы въ функціи ихъ выразить всѣ деформаціи зубцевъ, что, въ свою очередь, дало бы намъ возможность вывести распредѣленіе давленій.

Дѣло обстоитъ, однако, гораздо сложнѣе, въ томъ отношеніи, что здѣсь имѣется налицо не только изгибъ зубцевъ, какъ балокъ, защемленныхъ съ одного конца, но и смятіе ихъ. И вотъ подсчетъ этихъ сложныхъ деформацій,— деформацій изгиба и смятія,— представляется настолько сложнымъ и труднымъ, что выполненіе его въ настоящее время слѣдуетъ признать почти невозможнымъ,— методы ученія о сопротивленіи матеріаловъ данныхъ для рѣшенія этого сложнаго вопроса не даютъ.

Принимая во вниманіе всѣ эти неблагопріятныя обстоятельства, мы, ради простоты и возможности разсужденій и имѣя въ виду составить себѣ хотя бы приблизительное понятіе о величинѣ работы тренія, имѣющаго мѣсто между зубцами передачи, и останавливаемся на начальномъ нашемъ предположеніи, что въ соприкосновеніи находится лишь по одному зубцу каждаго колеса, и продолжимъ разборъ полученнаго выше основного уравненія (11).

Дѣля числителя и знаменателя уравненія (11) на $\cos\varphi$ и помня, что $\operatorname{tg}\varphi = f$, можемъ дать этому уравненію видъ, болѣе удобный для дальнѣйшихъ упрощеній, а именно:

$$dL = \frac{T f p}{\cos\alpha \mp f \sin\alpha}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) ds \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Формула эта даетъ выраженіе работы тренія за то время, пока полодіи перекатываются одна по другой на дугу ds, и мы должны теперь подсчитать ее за все время зацѣпленія взятой нами пары сопряженныхъ зу-

бъевъ. Произвести этотъ подсчетъ было бы легко, если бы была извѣстна зависимость между всѣми перемѣнными величинами, входящими въ составъ выраженія (12), т.-е. между α, ρ и s, гдѣ α есть уголъ нормали къ профилямъ съ общей касательной къ полодіямъ,—при перемѣщеніи точки A по линіи зацѣпленія этотъ уголъ, какъ это нетрудно усмотрѣть изъ фиг. 73, будетъ постоянно мѣняться; въ то же время будетъ мѣняться ρ, какъ длина мѣняющагося отрѣзка AP, и, наконецъ, мѣняется и величина дуги переката s.

Такимъ образомъ, въ дифференціальное соотношеніе (12) входятъ три перемѣнныхъ величины: α, ρ и s, такъ что, для возможности интеграціи этого уравненія необходимо двѣ изъ этихъ перемѣнныхъ выразить черезъ третью,—выразить, напримѣръ, α и ρ черезъ s. Зависимость между α, ρ и s имѣется, къ сожалѣнію, лишь для случая эвольвентнаго зацѣпленія, гдѣ она, притомъ, имѣетъ весьма простой видъ,—см. ниже, форм. (15); въ случаѣ же циклическаго зацѣпленія она оказывается крайне сложной, а если профиля выбираются произвольно, то дать эту зависимость въ аналитической формѣ можетъ оказаться совершенно невозможнымъ. Въ силу этого, при аналитическомъ изслѣдованіи разсматриваемаго вопроса приходится ограничиваться изслѣдованіемъ одного лишь случая эвольвентнаго зацѣпленія.

Предварительно замѣтимъ, что выраженіе (12) можно нѣсколько упростить, допустивъ еще одну

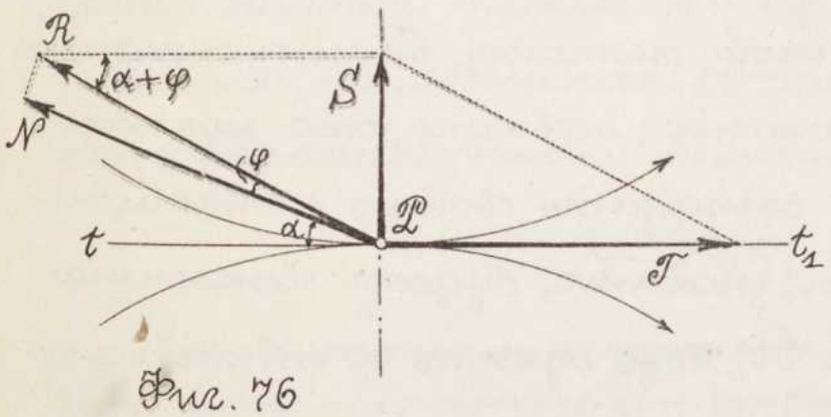
погрѣшность, а именно: принимая во вниманіе, что уголъ α, вообще говоря, малъ, а коэффиціентъ f представляетъ собою также величину небольшую, можемъ членомъ $f\sin\alpha$, какъ величиной малой сравнительно съ $\cos\alpha$, пренебречь.

Такъ, напримѣръ, если $\alpha = 15°$, а $f = 0,25$, то $f\sin\alpha = 0,25 \cdot 0,259 = 0,065$; въ то же время $\cos 15° = 0,966$, такъ что отбрасываніе члена $f\sin\alpha$ даетъ въ знаменатель погрѣшность около 6,7 %; на величину же самой дроби это отразится погрѣшностью въ 7 – 8 %. При углахъ, близкихъ къ нулю, эта погрѣшность достигаетъ лишь весьма малыхъ значеній, при большихъ она, естественно, больше.

Послѣ этого выраженіе (12) принимаетъ видъ:

$$dL_f = T f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) \frac{p}{\cos\alpha}\, ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Уголъ α не долженъ превосходить извѣстныхъ значеній, во избѣжаніе излишнихъ давленій на подшипники. Дѣйствительно, замѣчая, что полная реакція R и окружное усиліе T обусловливаютъ появленіе осевого давленія S, равнаго $T\,\mathrm{tg}(\alpha+\varphi)$, заключаемъ, что это усиліе S будетъ, при одномъ и томъ же T, весьма быстро возрастать по мѣрѣ увеличенія угла α (фиг. 76). Увеличеніе же S невыгодно потому, что заставляетъ шипы колеса сильнѣе прижиматься къ подшипникамъ и вызываетъ тѣмъ самымъ излишнюю потерю работы на преодолѣніе возникающаго здѣсь треніа. Для возможнаго уменьшенія этой траты полодій берутся достаточно большими сравнительно съ



Фиг. 76

размѣрами зубцовъ, такъ что уголъ α выходитъ, обычно, достаточно малымъ.

Замѣчая теперь, что факторы F, f, r и r_1 представляютъ собою величины постоянныя, и интегрируя выраженіе (13) за время прохожденія по полодіямъ дуги s, получаемъ выраженіе работы тренія зубцевъ, L_f, за это время, а именно:

$$L_f = Ff\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\int_0^s \frac{p}{\cos\alpha}\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Мы уже указывали, что, для возможности интеграціи уравненія (13), т.-е. взятія интеграла, входящаго въ уравненіе (14), необходимо имѣть зависимость между параметрами α, p и s. Въ случаѣ эвольвентнаго зацѣпленія зависимость эта имѣетъ особенно простой видъ. Дѣло въ томъ, что при этомъ зацѣпленіи линія зацѣпленія представляетъ собою нѣкоторую прямую, имѣющую въ данной системѣ вполнѣ опредѣленное и неизмѣнное положеніе; очевидно, что нормаль AP будетъ постоянно совпадать своимъ направленіемъ съ этой прямой и, значитъ, будетъ наклонена къ общей касательной tt_1 подъ однимъ и тѣмъ же постояннымъ угломъ α, такъ что при эвольвентномъ зацѣпленіи перемѣнными окажутся лишь величины p и s. Далѣе, извѣстно, что здѣсь длина линіи зацѣпленія равна произведенію изъ дуги зацѣпленія, пройденной за это время, на $\cos\alpha$, такъ что имѣется зависимость

$$p = s\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Въ виду этого интегралъ выраженія (14) подсчитывается здѣсь очень легко: сдѣлавъ подстановку, ука-

зываемую выражениемъ (15), получаемъ, что

$$\int_0^s \frac{p}{\cos\alpha}\,ds = \int_0^s s\,ds = \frac{1}{2}s^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

вслѣдствіе чего выраженіе (14) работы тренія въ случаѣ эвольвентнаго зацѣпленія принимаетъ видъ:

$$\mathcal{L}_f = \tfrac{1}{2}\mathcal{T}f\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)s^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Отмѣтимъ кстати, что сумма $(1/r + 1/r_1)$ представляетъ собою величину, обратную діаметру d поворотнаго круга; т.-е. величину $1/d$. Сдѣлавъ эту подстановку, можемъ дать формулѣ (17) болѣе компактный видъ, а именно:

$$\mathcal{L}_f = \frac{\mathcal{T}f s^2}{2d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Обычно, не желая упоминать о поворотныхъ кругахъ, эту формулу пишутъ въ видѣ (17). Если желательно знать работу тренія на единицѣ длины дуги зацѣпленія, то, обозначая ее черезъ λ_f, гдѣ $\lambda_f = \mathcal{L}_f/s$, получимъ выраженіе этой величины λ_f въ видѣ:

$$\lambda_f = \frac{1}{2}\mathcal{T}f s\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Если въ зацѣпленіи находится не одна пара зубьевъ, а нѣсколько, то можно положить,-конечно, приблизительно,— что все давленіе $\mathcal{T}$ распредѣляется равномѣрно между всѣми зубьями, находящимися въ зацѣпленіи, и тогда въ выраженіи работы тренія одной пары вмѣсто $\mathcal{T}$ стояло бы $\mathcal{T}/n$; для полученія относительной потери на работу тренія всѣхъ зубьевъ всѣ эти n частныхъ работъ пришлось бы просуммировать, послѣ чего мы получили бы опять то же выраженіе (19).

Полученное выраженіе (19) можно нѣсколько измѣнить, использовавъ зависимость между числами зубьевъ z и z_1, радіусами колесъ r и r_1 и шагомъ t, устанавливаемую уравненіями $zt = 2\pi r$ и $z_1 t = 2\pi r_1$, откуда, затѣмъ, находимъ:

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}=\frac{2\pi}{t}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Такъ какъ s есть величина, кратная t:

$$s=nt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

то выражение (19), въ виду соотношений (20) и (21), приметъ видъ

$$\lambda_f=\frac{nt}{2}f_T\frac{2\pi}{t}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z_1}\right)$$

или, послѣ сокращений:

$$\lambda_f=\pi n f_T\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Слѣдуетъ помнить, что всѣ эти формулы для L_f и λ_f относятся только къ случаю эвольвентнаго зацѣпления; къ этому же случаю относятся и всѣ другія подобныя имъ формулы, приводимыя въ справочникахъ.

Подсчетъ работы трения въ случаяхъ циклическаго зацѣпления и другихъ, поддающихся аналитическому опредѣлению, въ виду сложности формулъ, выражающихъ зависимость между α, ρ и s, становится крайне затруднителенъ; онъ становится невозможенъ въ отсутствіи такихъ аналитическихъ опредѣлений и соотношений, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто при произвольномъ заданіи линіи зацѣпления или профиля зубца. Въ этихъ случаяхъ аналитическій подсчетъ работы трения невозможенъ, но, взамѣнъ этого, онъ оказывается легко и удобно выполнимымъ во всевозможныхъ случаяхъ зацѣплений при помощи графическаго метода, помощью котораго представляется возможность найти интегралъ общаго уравненія (11) графическимъ путемъ,

сводя подсчетъ его на вычисленіе нѣкоторой площади, ограниченной опредѣленнымъ образомъ. Этотъ графическій пріемъ подсчета работы силы тренія между зубцами передачи состоитъ въ слѣдующемъ:

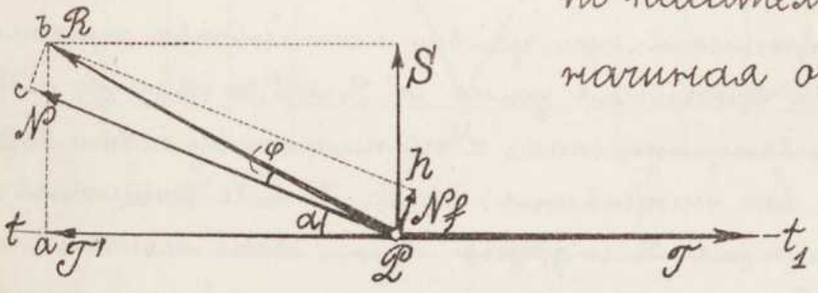
Общее дифференціальное уравненіе, дающее собою выраженіе элементарной работы тренія dL_f въ зависимости отъ различныхъ факторовъ зацѣпленія и уже выведенное нами выше, имѣетъ видъ:

$$dL_f = \frac{T_f \rho \cos\varphi}{\cos(\alpha+\varphi)}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)ds. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Согласно (9) можемъ написать, что

$$\frac{T_f \cos\varphi}{\cos(\alpha+\varphi)} = N_f.$$

Эту силу N_f легко получить графически, откладывая по касательной tt_1 къ полодіямъ, начиная отъ полюса P, силу T', равную и противоположную силѣ T, а затѣмъ откладывая углы α и φ (фиг. 77).



Фиг. 77.

Тогда перпендикуляръ ab, возставленный изъ конца a вектора Pa, изображающаго силу T_1, въ пересѣченіи съ стороной Pb угла $(\alpha+\varphi)$ дастъ точку b, — конецъ вектора Pb, изображающаго полную реакцію R, равную $T/\cos(\alpha+\varphi)$. Проекція силы R на сторону Pc угла α дастъ силу N нормальнаго сопротивленія, — замѣтимъ, кстати, что Pc есть направленіе общей нормали къ профилямъ зубцовъ, — и, наконецъ, проекція силы R на направленіе Ph, перпендикулярное къ общей нор-

мали $\mathfrak{Pc}$, дастъ силу $\mathfrak{Nf}$ трeнія зубцовъ. Дѣйствительно, $\mathfrak{Ph} = R\sin\varphi = R\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi = R f\cos\varphi = T f\cos\varphi / \cos(\alpha+\varphi) = \mathfrak{Nf}$.

Итакъ, векторъ $\mathfrak{Ph}$ опредѣляетъ собою силу $\mathfrak{Nf}$ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ векторъ $\mathfrak{Pa}$ изображаетъ силу T'. Этотъ векторъ $\mathfrak{Ph}$ можно, очевидно, получить для любого угла α, т.-е. для любого момента разсматриваемаго движенія. Особенно просто онъ получается, понятно, въ случаѣ эвольвентнаго зацѣпленія, ибо здѣсь направленія силъ R, N и $\mathfrak{Nf}$ будутъ постоянны, вслѣдствіе чего отрѣзокъ $\mathfrak{Ph}$ остается за все время движенія неизмѣннымъ какъ по величинѣ, такъ и по направленію; въ другихъ видахъ зацѣпленій эти факторы его будутъ все время мѣняться, вызывая перемѣнность его самого.

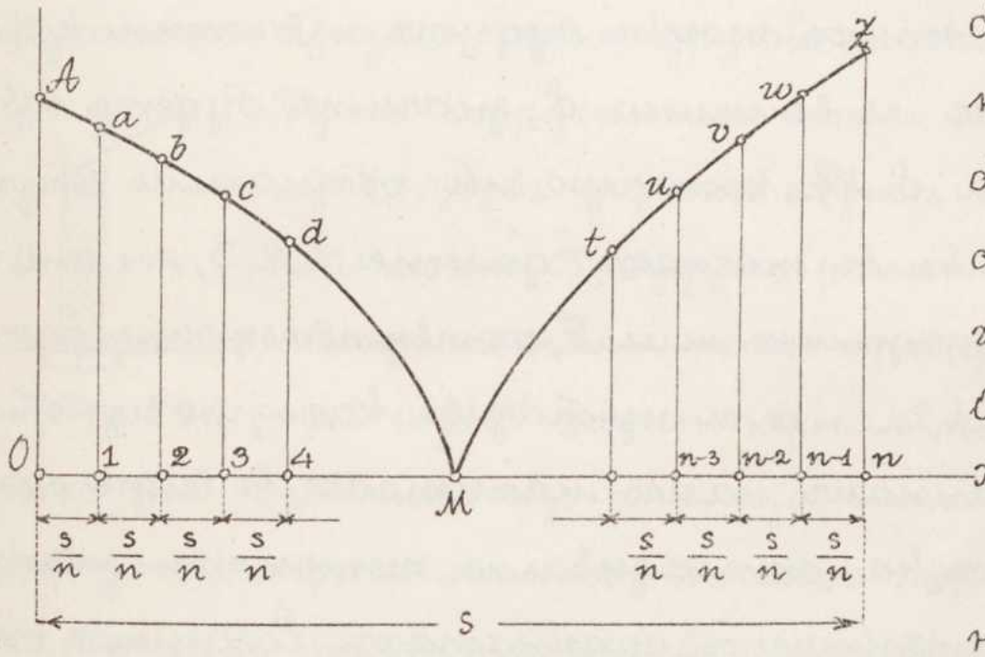
Въ эвольвентномъ зацѣпленіи, при условіи постоянства окружного усилія T, — при $T = \text{const}$, — всѣ остальныя усилія N, R и S, а значитъ, и $\mathfrak{Nf}$, будутъ постоянны какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Это явствуетъ изъ того соображенія, что всѣ направленія: tt, $\mathfrak{Pa}$, $\mathfrak{Pb}$ и $\mathfrak{Pc}$ остаются постоянными, а сила T', дающая R и другія силы, своей величины и направленія не мѣняетъ. Эта особенность эвольвентнаго зацѣпленія весьма благопріятно выдѣляетъ его изъ среды другихъ.

Что касается суммы $(1/r + 1/r_1)$, то это есть величина постоянная, которую для данной пары колесъ можно подсчитать разъ навсегда; напомнимъ, что это есть величина, обратная діаметру d поворотнаго круга данной системы. Помноживъ эту величину на p, получимъ нѣкоторую перемѣнную величину $p(1/r + 1/r_1)$, могущую быть вычисленной для любого момента движенія. Обозначимъ ее черезъ δ. Тогда наше основное соотношеніе (11) перепишется такъ:

$$dL = Nf.\delta.ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Замѣтимъ, что δ есть величина отвлеченная и, какъ это слѣдуетъ изъ опредѣленія ея, перемѣнная; она обращается въ нуль при $p = 0$, т.-е. въ тотъ моментъ, когда соприкосновеніе профилей происходитъ въ самомъ полюсѣ мгновеннаго вращенія; въ этотъ же моментъ dL обращается въ нуль.

Такъ какъ факторы Nf и δ извѣстны для каждаго даннаго момента, то будетъ извѣстной и величина $\delta.Nf$; она будетъ представлять собою нѣкоторую силу (ибо δ есть число отвлеченное). Обозначимъ эту силу черезъ F.



Фиг. 78.

Тогда уравненіе (23) приметъ весьма простой видъ, а именно:

$$dL_f = F\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Полученное ур-іе (24) указываетъ намъ на возможность графическаго рѣшенія задачи объ опредѣленіи работы L_f слѣдующимъ образомъ:

Возьмемъ прямоугольную систему координатъ xoy (фиг. 78) и по оси абсциссъ условимся откладывать части дуги зацѣпленія, ординатами же будемъ брать отрѣзки, изображающіе въ томъ или иномъ масштабѣ

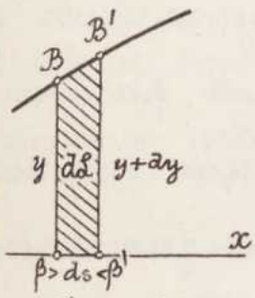
силу F, взятому моменту соотвѣтствующую. Удобнѣе всего поступать такъ: по оси Ox, начиная, положимъ, отъ точки O ея, откладываемъ въ извѣстномъ масштабѣ длину s всей дуги зацѣпленія и дѣлимъ ее на равныя части, возможно малыя, числомъ n. Моменту перехода черезъ конечную правую точку каждаго новаго отрѣзка s/n будетъ соотвѣтствовать своя величина нормали p и угла α; брать ихъ придется по основному чертежу зацѣпленія. Такимъ образомъ, для каждой изъ этихъ точекъ будутъ извѣстны какъ сила N_f, такъ и величина δ; значитъ, будетъ извѣстна и сила $\delta . N_f$, которую мы обозначили черезъ F.

Возставивъ въ точкахъ дѣленія $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ ординаты, опредѣливъ силы F, соотвѣтствующія каждой изъ точекъ $0, 1, 2, \ldots, n$, и изобразивъ каждую изъ этихъ силъ въ выбранномъ нами масштабѣ въ видѣ нѣкотораго отрѣзка, откладываемъ теперь эти отрѣзки на соотвѣтствующихъ ординатахъ. Соединивъ теперь концы $A, a, b, \ldots, w, Z$ этихъ отрѣзковъ непрерывной линіей, получимъ, такимъ образомъ, кривую AMZ, характеризующую измѣненія силы F въ зависимости отъ измѣненія s. Очевидно, что въ тотъ моментъ, когда точка касанія профилей придетъ въ полюсъ P, сила F обратится въ нуль; въ этотъ моментъ кривая AZ будетъ имѣть ординату, равную нулю, т.-е. спустится до самой оси абсциссъ, послѣ чего сейчасъ же начнетъ снова подниматься отъ нея вверхъ, какъ это и изображено на фиг. 78. Видъ кривой AZ

можетъ быть весьма различенъ въ зависимости отъ индивидуальности зацѣпленія.

Нетрудно убѣдиться, что площадь $OAMZnO$, ограниченная кривой AMZ, крайними ординатами OA и nZ и осью абсциссъ Ox, представляетъ собою не что иное, какъ работу тренія L_f за все время зацѣпленія взятой пары зубьевъ. Убѣдиться въ этомъ нетрудно помощью слѣдующихъ простыхъ разсужденій:

Выдѣлимъ гдѣ-либо на нашей кривой AMZ двѣ безконечно-близкія одна другой точки B и B' (фиг. 79).



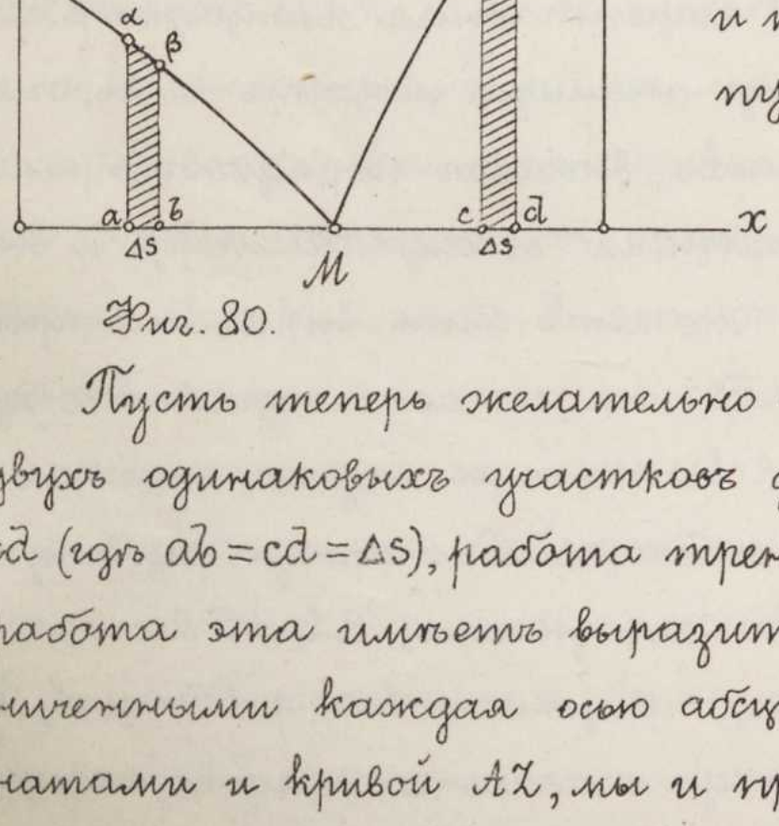
Фиг. 79.

Пусть координаты точки B имѣютъ значенія (x, y); въ такомъ случаѣ координаты смежной точки, B', будутъ равны $(x+dx, y+dy)$. Выдѣлившаяся послѣ проведенія ординатъ βB и $\beta' B'$ элементарная площадка $\beta B B' \beta'$, какъ это извѣстно изъ анализа, можетъ быть, съ ошибкой до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ, принята за площадь прямоугольника съ основаніемъ $\beta\beta'$ и высотой βB, и, въ виду этого можетъ быть выражена произведеніемъ $\beta\beta' \times \beta B = y\,dx$ или, согласно нашимъ обозначеніемъ, черезъ $F\,ds$. А въ такомъ случаѣ эта площадка и изображаетъ собою элементарную работу силы тренія dL_f, ибо, какъ мы знаемъ, $dL_f = F\,ds$.

Такимъ образомъ, опредѣленіе всей работы L_f сводится къ суммированію ряда такихъ площадокъ, построенныхъ одна возлѣ другой вдоль всей кривой AMZ, а это сводится, попросту говоря, къ опредѣленію величины всей указанной выше площади $OAMZnO$.

Самый подсчетъ площади можетъ быть выполненъ весьма различно: можно прибѣгнуть сюда формулы трапецій или Симпсона, можно воспользоваться планиметромъ Амслера и т. д. Такъ или иначе, но площадь эту можно вычислить всегда и, значитъ, можно всегда получить интегралъ уравненія (11), т.-е. величину работы трепія между зубами данной передачи.

Разсмотрѣнный графическій методъ имѣетъ передъ аналитическимъ то важное преимущество, что позволяетъ составлять весьма наглядныя діаграммы работы отдѣльныхъ участковъ данныхъ профилей, работы, соотвѣтствующія различнымъ частямъ дуги зацѣпленія и т. п. Такъ, напримѣръ, пусть для даннаго зацѣпленія кривая усилій F имѣетъ видъ, изображенный на фиг. 80.

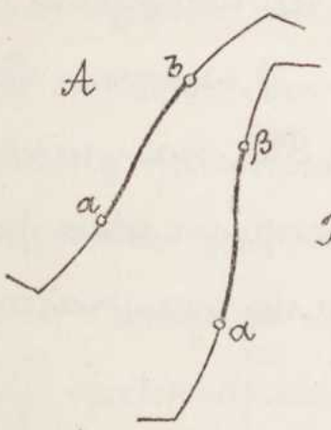


Фиг. 80.

Пусть теперь желательно узнать, на которомъ изъ двухъ одинаковыхъ участковъ дуги зацѣпленія, ab или cd (гдѣ $ab = cd = \Delta s$), работа трепія больше? Помня, что работа эта имѣетъ выразиться площадями, ограниченными каждая осью абсциссъ Ox, крайними ординатами и кривой Az, мы и проводимъ эти крайнія ординаты $a\alpha$, $b\beta$ и т. д. Такимъ образомъ выдѣлятся площади $a\alpha\beta b$ и $c\gamma\delta d$, ясно показывающія, что на участкѣ cd работа трепія много больше, нежели на

участкъ cd. Нетрудно подсчитать величину этихъ двухъ площадокъ и дать, такимъ образомъ, количественное представленіе объ этихъ работахъ. Подобными же соображеніями можно руководствоваться и при изслѣдованіи профилей на работу. Здѣсь дѣло ведется такъ:

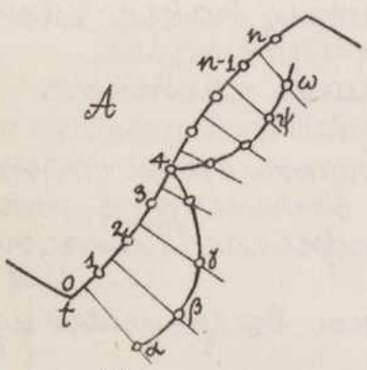
Указанія кинематики позволяютъ намъ вполнѣ точно опредѣлить, какъ велики рабочія части каждаго профиля; нетрудно также установить, какія части одного профиля соотвѣтствуютъ какимъ частямъ другого, а также и то, какой дугѣ зацѣпленія соотвѣтствуетъ каждая взятая часть профиля. Такъ, напримѣръ, пусть на профиль зубца A мы выдѣлили извѣстный участокъ aъ (фиг. 81). Тогда элементарныя геометрическія построенія позволятъ намъ установить, что на профилѣ B этому участку будетъ соотвѣтствовать участокъ aβ. Пусть на кривой AMZ усилій F дугѣ зацѣпленія $[3(n-2)]$ (фиг. 78), соотвѣтствующей дугамъ aъ и aβ, причитается работа въ размѣрѣ площади $3cv(n-2)$ (фиг. 78). Тогда представляется возможность опредѣлить величину работы, приходящейся на единицу длины каждаго изъ этихъ участковъ, что иногда бываетъ весьма важнымъ. Понятно, что это опредѣленіе будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньшимъ взятъ участокъ aъ профиля. Можно поступить еще при изслѣдованіи профилей и такъ:



Фиг. 81.

Дѣлимъ одинъ изъ профилей, напримѣръ, профиль

зубца A (всю рабочую его часть tn, на возможно большее число равных долей: $01, 12, 23, \ldots, (n-1)n$ (фиг. 82), и пусть кривая AMB, построенная для этого зацепления, указывает, что этим участкам профиля соответствуют работы $l_{01}, l_{12}, l_{23}, \ldots$. Представив теперь все эти работы в известном масштабе прямолинейными отрезками, отложим все эти отрезки на перпендикулярах, восставленных из середин соответствующих участков, — это удобнее всего потому, что сразу указывает, к какому участку профиля относится отложенный отрезок l_{st}; отложения на границах могут повлечь недоразумения, и их делать не следует. Соединив теперь конечные точки $\alpha, \beta, \ldots, \psi, \omega$ всех этих отрезков непрерывной линией $\alpha\omega$ (фиг. 82), получим кривую, весьма наглядно рисующую распределение работы трения по отдельным участкам данного профиля.



Фиг. 82.

С другим профилем можно поступить двояко: или определить на нем точки $0', 1', 2', \ldots, n'$, соответствующия точкам $0, 1, 2, \ldots, n$ профиля A, и отложить на перпендикулярах, восставленных из середин этих участков $0'1', 1'2', 2'3', \ldots, (n-1)'n'$, отрезки, изображающие те же работы $l_{01}, l_{12}, \ldots$, соединить затем верхушки всех этих отрезков непрерывной кривой $\alpha'\omega'$ и принять ее за кривую работ трения; или же действовать вполне аналогично тому,

какъ мы дѣйствовали съ профилемъ A, т.-е. разбить всю рабочую его часть на равныя, возможно болѣе мелкія, доли, опредѣлить причитающуюся для каждой такой доли работу трѣнія, отложить эти работы на перпендикулярахъ, возставленныхъ изъ серединъ, и соединить верхушки полученныхъ отрѣзковъ непрерывной кривой линіей; получимъ кривую работъ трѣнія по участкамъ профиля. При аккуратномъ выполненіи обѣ кривыя работъ трѣнія, полученныя указанными двумя способами, должны совпасть и повторить одна другую. Обычно довольствуются первымъ способомъ.

Здѣсь можетъ встрѣтиться рядъ весьма любопытныхъ задачъ: можно задаться цѣлью подобрать профиля такъ, чтобы работа трѣнія была распредѣлена равномѣрно по длинѣ рабочей части его; можно сравнивать различныя зацѣпленія по отношенію ихъ къ затратѣ работы трѣнія и т. д. Изложенный графическій методъ дѣлаетъ отсутствіе зависимости между факторами α, ρ и s совершенно незамѣтнымъ; построенія для опредѣленія силы F и соотвѣтственныхъ точекъ на профиляхъ весьма несложны, а самое важное, этотъ методъ примѣнимъ и ко всякимъ другимъ зацѣпленіямъ, съ произвольными профилями, произвольными линіями зацѣпленія и произвольными некруглыми колесами; нѣкоторые факторы окажутся здѣсь перемѣнными, какъ, напримѣръ, r и r_1, Γ и т. д., но это отразится лишь на аріѳметической сторонѣ метода, сущность же его останется незатронутой.

Подобныя изслѣдованія важны въ томъ отношеніи, что дѣлаютъ возможнымъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ принятіе мѣръ противъ излишняго изнашиванія; даже болѣе, въ нѣкоторыхъ случаяхъ они являются прямо необходимыми; напримѣръ, въ тѣхъ, когда отъ правильности работы зубцовъ зависитъ правильность работы самой машины, какъ это имѣетъ мѣсто въ зубчатыхъ горныхъ желѣзныхъ дорогахъ. Діаграммы работы Тренія, составленныя указанными выше способами, сейчасъ же укажутъ намъ, гдѣ и въ какой мѣрѣ придется ихъ измѣнить или же составить и подобрать профиля зубьевъ такъ, чтобы работа тренія была распредѣлена возможно равномѣрнѣе.

Что касается величины коэффиціента полезнаго дѣйствія, то вопросъ о немъ мы разберемъ примѣнительно лишь къ случаю эвольвентнаго зацѣпленія, для котораго работа тренія за время прохода дуги зацѣпленія s выражается, согласно (18), — эту формулу берем ради краткости письма, — черезъ

$$L_f = \frac{f s^2 T}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

На томъ же пути s работа окружного усилія T выражается черезъ Ts. Давъ формулѣ (18) видъ

$$L_f = T s \frac{f s}{2a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

видимъ, что отъ всей работы Ts, изъ-за тренія между зубцами, теряется часть ея, оцѣниваемая дробью $fs/2a$, что даетъ въ % величину потери:

$$u_f\% = \frac{50 f s}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Легко теперь подсчитать коэффиціентъ полезнаго дѣйствія зубчатой передачи съ эвольвентными зацѣпленіемъ: пока тренія не было, работа усилія T на пути s выражалась произведеніемъ Ts; при наличности же тренія, на преодолѣніе коего уходитъ работа L_f, ведомое колесо сможетъ воспринять уже только работу $Ts\left(1-\frac{fs}{2a}\right)$; отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія этой передачи, η, выразится такъ:

$$\eta = Ts\left(1-\frac{fs}{2a}\right) : Ts = 1-\frac{fs}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

Можно разсуждать еще и такъ: пока не было тренія, на пути s выполнялась работа Ts, ибо все время работало окружное усиліе T. При наличности тренія, на тотъ же путь s совершается работа $Ts\left(1-\frac{fs}{2a}\right)$, такъ что здѣсь на пути s работаетъ уже какъ бы не прежнее усиліе T, а усиліе $T\left(1-\frac{fs}{2a}\right)$. Значитъ, эффектъ тренія сводится какъ бы къ уменьшенію начальнаго окружного усилія до размѣровъ $T\left(1-\frac{fs}{2a}\right)$. Отсюда слѣдуетъ, что работы этихъ усилій, совершенныя на одномъ и томъ же пути s, будутъ относиться, какъ T относится къ $T\left(1-\frac{fs}{2a}\right)$. Величина же коэффиціента полезнаго дѣйствія, η, выразится отношеніемъ, обратнымъ этому, что и приведетъ къ тому же выраженію (27).

Если радіусъ одного изъ зубчатыхъ колесъ,—положимъ, r_1,—обратился въ безконечность, такъ что это

колесо перешло въ зубчатую полосу (рейку), и у насъ имѣется зацѣпленіе колеса съ рейкой, то, въ случаѣ, если это зацѣпленіе оказывается эвольвентнымъ, формула (17), дающая выраженіе количества $\mathfrak{L}_f$ работы, уходящей на преодолѣніе тренія между зубцами, приметъ здѣсь видъ:

$$\mathfrak{L}_f = \frac{T_f s^2}{2r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

на единицу же дуги зацѣпленія приходится, въ среднемъ, работа

$$\lambda = \frac{T_f s}{2r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Положивъ, далѣе, что шагъ зацѣпленія мало отличается отъ дуги зацѣпленія и что на всей дугѣ зацѣпленія работаетъ каждый разъ только одинъ зубецъ, такъ что $n=1$ и $s=t$, и принимая, забѣмъ, во вниманіе, что $zt = 2\pi r$, можемъ дать формулѣ (29) видъ:

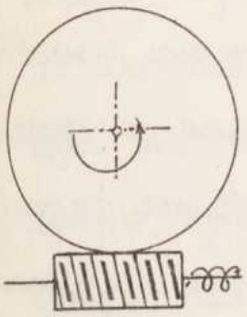
$$\lambda = \frac{1}{2} T_f \frac{t^2 . 2\pi}{zt} = \frac{T_f \pi}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Такова потеря работы на треніе на единицѣ длины дуги зацѣпленія въ случаѣ сцѣпленія колеса съ зубчатой полосой и при эвольвентномъ очертаніи зубьевъ. Формулой (30) придется пользоваться при изслѣдованіи тренія въ червячной передачѣ.

Перечисляя на стр. 169–170 силы, подлежащія учету, мы не ввели въ разсмотрѣніе силы S осевого давленія только потому, что имѣли въ виду написать ур-іе моментовъ, а моментъ этой силы относительно центра O равенъ нулю, такъ что отъ невведенія этой силы въ ур-іе (2) правильности его и выводовъ изъ него не нарушило совсѣмъ.

§ 9. Червячная передача.

Мы разсмотримъ лишь тотъ, чаще другихъ встрѣчающійся на практикѣ, случай червячной передачи, когда оси червяка и червячнаго колеса взаимно перпендикулярны (фиг. 83). Оставляя въ сторонѣ вопросъ о треніи въ шипахъ и пятахъ этой передачи, мы ограничимся суммарнымъ подсчетомъ, по необходимости, приблизительнымъ, потерь на треніе, имѣющихъ мѣсто въ самой передачѣ, т.е. между зубцами ея. Если, съ извѣстной степенью приближенія, предположить, что здѣсь, подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто въ цилиндрическихъ косозубчатыхъ (правильнѣе, винтовыхъ) колесахъ, зацѣпленіе можетъ быть уподоблено зацѣпленію безконечнаго множества параллельныхъ зубчатыхъ полосъ (реекъ), — каждой со своимъ колесомъ, — или, суммарно, зацѣпленію нѣкоторой одной такой полосы со своимъ колесомъ, то будемъ имѣть:



Фиг. 83.

1) треніе между зубцами этой полосы и колеса, могущее быть опредѣленнымъ (на единицу длины дуги зацѣпленія) по формулѣ (30) на стр. 194:

$$\lambda = \frac{T f \pi}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

гдѣ T есть окружное усиліе на колесѣ, и

2) треніе винта о свою гайку, ибо роль винта играетъ здѣсь червякъ, а гайки (части ея) — винтовое колесо. Ради простоты выкладокъ, предположимъ при этомъ, что нарѣзка выполнена прямоугольной.

Оба эти вида трения мы и будемъ имѣть въ виду при выводѣ зависимости между окружными усиліями T на колесѣ и P на червякѣ. При этомъ разберемъ отдѣльно два случая, могущихъ здѣсь представиться: 1) усиліе передается отъ червяка къ колесу и 2) оно передается отъ колеса къ червяку. Обычно оба эти случая разсматриваются, какъ одинъ и тотъ же, — никакой разницы между ними не предполагается, и формулы, выведенныя для перваго случая, наиболѣе часто встрѣчающагося, не стѣсняются примѣнять безъ всякихъ измѣненій къ случаю (2). Мы, однако, не замедлимъ убѣдиться, что эти два случая приводятъ къ различнымъ формуламъ зависимости между T и P, что и указываетъ на необходимость строгаго раздѣленія этихъ случаевъ одного отъ другого.

Первый случай передачи силы, а съ ней и движенія, имѣетъ мѣсто тамъ, гдѣ необходимо осуществить переходъ отъ быстраго вращенія къ медленному, какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ грузоподъемныхъ машинахъ и т.п. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда медленное движеніе надо перевести въ быстрое, какъ это требуется, напримѣръ, въ центрофугахъ, то здѣсь, во избѣжаніе громоздкихъ зубчатыхъ передачъ, приходится примѣнять передачу отъ червячнаго колеса къ червяку.

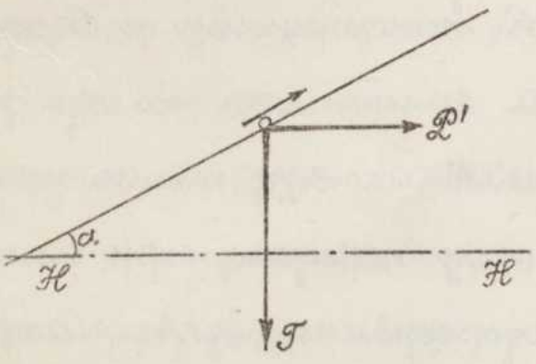
Дѣло въ томъ, что зубчатую передачу съ передаточнымъ числомъ, меньшимъ 1/6, устраивать затруднительно, въ виду возникающаго здѣсь сильнаго изнашиванія зубцовъ малаго колеса. Поэтому, если бы потребовалось

осуществить, напримѣръ, передачу съ передаточнымъ числомъ 1/75, то ее можно было бы осуществить уже съ помощью только трехъ цилиндрическихъ передачъ 1/3.1/5.1/5, что привело бы къ очень громоздкой конструкціи и большой потерѣ работы между зубцами и въ шипахъ на преодолѣніе возникающаго тамъ трѣнія. А между тѣмъ ничто не мѣшаетъ намъ осуществить эту передачу при помощи только одного колеса и одного червяка, взявъ, напримѣръ, однооборотный червякъ и колесо къ нему съ 75 зубцами или двухоборотный червякъ и колесо къ нему съ 150 зубцами, и т. д. Преимущества такой передачи очевидны, но осуществленіе возможно, какъ мы увидимъ ниже, не всегда, — при передачѣ отъ червяка къ колесу придется позаботиться о выполненіи нѣкоторыхъ условій, выясненіе коихъ помѣщено ниже. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію обоихъ отмѣченныхъ нами выше случаевъ передачи движенія.

Первымъ случаемъ мы выбрали тотъ, когда движеніе предполагается передающимся отъ червяка къ колесу. Значитъ, въ этомъ случаѣ къ окружности червяка приложено нѣкоторое усиліе (окружное) P, передающееся затѣмъ на червячное колесо въ видѣ нѣкотораго усилія T, касательнаго къ его окружности. Итакъ, усиліе P, дѣйствующее на червякъ, вызываетъ появленіе на окружности колеса нѣкотораго усилія T. Выведемъ зависимость между этими усиліями.

Зубецъ движущагося червячнаго колеса, вошедшій въ зацѣпленіе съ червякомъ, можно уподобить здѣсь

грузу, вѣсомъ G, ползущему вверхъ по наклонной плоскости подъ вліяніемъ нѣкоторой силы P', параллельной основанію ея (фиг. 84). Въ этомъ случаѣ между силами P' и G существуетъ соотношеніе



Фиг. 84.

$$P' = G\,tg(\alpha+\varphi) \quad \ldots\ldots (1)$$

Силу, параллельную основанію горизонтальной плоскости, мы обозначили черезъ P', ибо это есть не вся сила P, а лишь та часть ея, которая осталась отъ нея послѣ преодолѣнія тренія въ зубцахъ передачи. На это треніе, какъ мы видѣли, уходитъ $f\pi/z$ -ая часть дѣйствующаго здѣсь усилія, каковымъ въ данномъ случаѣ является усиліе P. Поэтому, послѣ преодолѣнія тренія въ зубцахъ, въ нашемъ распоряженіи оказывается не все усиліе P, а это усиліе, уменьшенное на указанную выше часть, т.-е. усиліе $P\left(1-\frac{\pi f}{z}\right)$.

Итакъ, усиліе P', перемѣщающее зубецъ колеса по винтовой поверхности червяка, выражается соотношеніемъ

$$P' = P\left(1-\frac{\pi f}{z}\right).$$

Исключая изъ написанныхъ двухъ уравненій силу P', получаемъ искомую зависимость между силами P и G, а именно:

$$P = G\,\frac{tg(\alpha+\varphi)}{1-\frac{\pi f}{z}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Такимъ должно быть окружное усиліе P на червякѣ, чтобы преодолѣть на колесѣ полезное сопротивленіе G.

Если бы вредныхъ сопротивленій не было, такъ что мы имѣли бы $\varphi = 0$ и $f = 0$, то для преодолѣнія того же по-

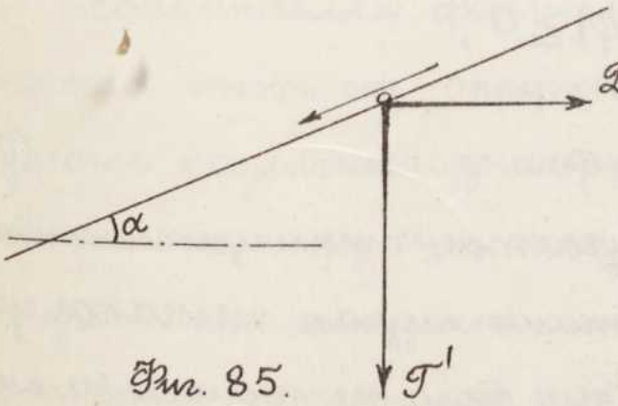
лезнаго сопротивленія T понадобилась бы сила p_1, очевидно, меньшая P и равная

$$p_1 = T \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія червячной передачи въ этомъ случаѣ выражается такъ

$$\eta_1 = \frac{p_1}{P} = \frac{(1 - \frac{\pi f}{z}) \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Обращаясь къ формулѣ (1), видимъ, что передача подобнаго рода, — отъ червяка къ колесу, — возможна всегда, ибо, каковъ бы ни былъ уголъ наклона нарѣзки, α, но $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ будетъ всегда > 0; подобнымъ же образомъ величина $(1 - \frac{\pi f}{z})$ также всегда > 0, ибо $\pi f < 3$, а z обычно во много разъ больше трехъ, такъ что дробь $\pi f / z$ всегда меньше единицы. Въ виду этого P имѣетъ всегда положительныя значенія, что и указываетъ на возможность такой передачи во всѣхъ случаяхъ, сколь бы малъ ни былъ уголъ α. Посмотримъ теперь, какъ будетъ обстоять дѣло въ случаѣ передачи отъ колеса къ червяку.



Фиг. 85.

Ведущимъ является здѣсь усиліе T на окружности [illegible] колеса. Такъ какъ на преодолѣніе въ зубцахъ уйдетъ $(\frac{\pi f}{z})$-ая часть его, то на вращеніе червяка пойдетъ остатокъ усилія T, т.-е. усиліе

$$T' = T(1 - \frac{\pi f}{z}).$$

Теперь дѣло будетъ обстоять такъ, какъ если бы грузъ T' сталъ перемѣщаться по наклонной плоскости внизъ

(фиг. 85), и этому перемѣщенію препятствовало усиліе $\mathfrak{P}$, параллельное основанію наклонной плоскости и являющееся, очевидно, приложеннымъ къ окружности червяка. Такъ какъ здѣсь $\mathfrak{P} = T' \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$, то, въ силу вышенаписаннаго соотношенія между T' и T, можемъ написать, что

$$\mathfrak{P} = T\left(1 - \frac{\pi f}{z}\right)\operatorname{tg}(\alpha - \varphi), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

откуда

$$T = \frac{\mathfrak{P}}{\left(1 - \frac{\pi f}{z}\right)\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Если бы трѣнія не было, то усиліе T вызвало бы на окружности червяка усиліе $p_2 = T \operatorname{tg}\alpha$, бо́льшее усилія $\mathfrak{P}$. Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія такой передачи выражается такъ:

$$\eta_2 = \frac{\mathfrak{P}}{p_2} = \left(1 - \frac{\pi f}{z}\right)\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Формула (4) указываетъ, что эта передача возможна не всегда, а лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда удовлетворяется условіе

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \geqq 0,$$

т.-е. когда

$$\alpha \geqq \varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

При $\alpha < \varphi$ усиліе $\mathfrak{P}$ получается отрицательнымъ, что и указываетъ, что въ этомъ случаѣ никакое усиліе T, сколь бы велико оно ни было, не только не сможетъ вызвать на червякѣ какого-либо вращающаго момента, но для вращенія червяка нужно будетъ приложить къ окружности его еще нѣкоторое дополнительное усиліе, абсолютная величина коего, для возмож-

ности вращенія всей этой нагруженной усиліемъ T системы, опредѣлится уже по формулѣ (4). Такимъ образомъ, при $\alpha < \varphi$ червячная передача оказывается самотормозящей въ томъ смыслѣ, что, въ то время, какъ вращеніе червяка, при достаточной величинѣ силы P на немъ, всегда можетъ вызвать вращеніе колеса, это послѣднее, находясь подъ воздѣйствіемъ окружного усилія T, можетъ дать вращеніе червяка только въ случаѣ $\alpha > \varphi$; въ случаѣ же $\alpha < \varphi$ никакой вращающій моментъ, сколь бы великъ онъ ни былъ, дѣйствуя на колесо, не сможетъ вызвать вращенія червяка,—для этого придется вращать его парой, спеціально для этого къ нему приложенной.

Итакъ, для того, чтобы на окружности червяка вызвать усиліе P, необходимо на окружности червячнаго колеса заставить работать окружное усиліе T, опредѣляемое по формулѣ (5), но при этомъ уголъ α наклона нарѣзки червяка ни въ коемъ случаѣ не долженъ быть меньше угла тренія φ.

Сопоставляя формулы (1) и (4), видимъ, что, при однихъ и тѣхъ же окружныхъ усиліяхъ T на колесѣ, они даютъ различныя значенія для P, какъ это и должно быть по самому существу дѣла. Дѣйствительно, въ одномъ случаѣ, при передачѣ отъ червяка къ колесу, усиліе P, послѣ всѣхъ потерь на треніе, должно дать на колесѣ усиліе T; значитъ, здѣсь окружное усиліе P червяка должно быть больше T. Въ другомъ случаѣ, при передачѣ отъ колеса къ червяку, окружное усиліе колеса, T, вызываетъ на червякѣ, послѣ всѣхъ потерь на этомъ пути, нѣ-

которое усиліе P_1; значитъ, здѣсь $T > P_1$. Если усилія T въ обоихъ случаяхъ оказываются одинаковыми, то и выйдетъ, что $P > P_1$, что и указывается формулами.

Всѣ эти соображенія указываютъ на невозможность примѣненія формулы (1) ко всѣмъ безъ разбора случаямъ червячной передачи, какъ это обычно дѣлается на практикѣ. Формулы (1) и (4), характеризующія два могущихъ встрѣтиться здѣсь случая передачи, являются вовсе несимметричными и совершенно самостоятельными, относясь каждая къ своему соотвѣтствующему ей случаю.

Выведенныя выше формулы являются, конечно, приближенными, ибо, если бы мы пожелали подойти къ вопросу ближе, то должно были бы поступать такъ, какъ это мы дѣлали въ цилиндрической передачѣ: слѣдовало бы взять нормальное усиліе, — оно здѣсь будетъ наклонно, — опредѣлить направленіе относительнаго движенія, разложить, взять моменты его и силъ тренія и т. д. Все это повело бы насъ къ весьма сложнымъ формуламъ и вычисленіямъ, въ виду чего мы и ограничиваемся соображеніями и выводами, приведенными выше, тѣмъ болѣе, что точность ихъ оказывается вполнѣ достаточной для цѣлей практики.

Принимая во вниманіе, что дробь $\pi f/z$ обычно оказываясь достаточно малой для того, чтобы ею можно было пренебречь, — такъ, при $f = 0{,}3$ и $z = 50$ эта дробь приблизительно равна 0,02, — факторомъ $(1 - \pi f/z)$ пренебрегаютъ, и тогда получаютъ обычныя упрощенныя формулы червячной передачи, выводимыя и упоминаемыя въ курсахъ деталей машинъ и ничѣмъ не отличающіяся отъ формулъ наклонной плоскости.

Послѣ всего сказаннаго ясно, однако, что такъ упрощенныя формулы обладаютъ меньшей степенью точности, нежели выведенныя выше формулы (1)—(6)..

---

§10. Общая теорема о коэффиціентѣ полезнаго дѣйствія самотормозящихъ механизмовъ.

Выше было показано, что наклонная плоскость, при углѣ α наклона ея къ горизонту, меньшемъ угла тренія φ, обладаетъ такъ называемымъ свойствомъ самоторможенія,—иными словами, грузъ, положенный на такую плоскость, самъ по себѣ, безъ участія новыхъ внѣшнихъ силъ, сдвинуться съ мѣста и скользить внизъ по этой плоскости не можетъ, каковъ бы ни былъ вѣсъ его. Невозможность самостоятельнаго движенія груза обусловливается здѣсь вмѣшательствомъ силъ тренія, поглощающихъ цѣликомъ ту слагающую вѣса этого тѣла, которая могла бы вызвать и, затѣмъ, поддерживать скольженіе груза внизъ по плоскости. Подобнымъ же свойствомъ самоторможенія обладаетъ, при соотвѣтствующемъ углѣ наклона направляющей, и винтовая поверхность (винтъ, червякъ и т.д), равно какъ и другія модификаціи наклонной поверхности,—каковы, напримѣръ, поверхности коническія и др. При этомъ всегда оказывается, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія каждой такой самотормозящей детали меньше половины.

Существуетъ множество болѣе сложныхъ системъ, и нетрудно придумать сколькоугодно новыхъ, составленныхъ изъ наклонныхъ плоскостей, винтовъ, зубчатыхъ и червячныхъ передачъ и т.п., и обладающихъ свойствомъ самотор-

ложенія, въ томъ смыслѣ, что для равновѣсія и покоя ихъ не требуется никакихъ вспомогательныхъ приспособленій, какова бы ни были нагрузки, на эти системы возлагаемыя. Отсутствіе упомянутыхъ вспомогательныхъ приспособленій является условіемъ, необходимымъ для того, чтобы данная система могла быть признана самотормозящей, — эффектъ самоторможенія долженъ быть вызываемъ исключительно силами тренія, возникающими на поверхностяхъ соприкосновенія различныхъ кинематическихъ паръ, составляющихъ данный механизмъ, и оказывающимися настолько значительными, чтобы быть въ состояніи противодѣйствовать движенію частей системы, всякія же иныя механическія приспособленія, имѣющія своею цѣлью установленіе и поддержку равновѣсія и покоя системы и входящія въ игру лишь съ момента предоставленія системы самой себѣ, не даютъ системѣ права называться самотормозящей, такъ какъ, послѣ отнятія ихъ, система немедленно, по самому существу дѣла, выйдетъ изъ равновѣсія, и всѣ части ея, имѣвшія оставаться неподвижными, придутъ въ движеніе подъ воздѣйствіемъ силъ, до того уравновѣшивавшихся сопротивленіемъ упомянутыхъ приспособленій, и безъ всякаго участія какихъ бы то ни было новыхъ внѣшнихъ силъ.

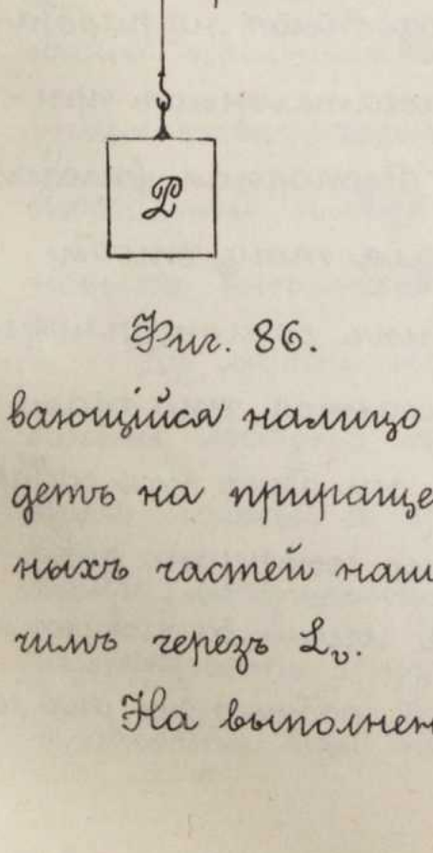
Къ любой наклонной плоскости или винтовой поверхности можно придѣлать, напримѣръ, нѣкоторыя зубчатыя полосы, а грузъ снабдить соотвѣтствующими собачками, могущими, путемъ сцѣпленія съ этими полосами, удерживать грузъ отъ движенія по поверхности; но эти плоскости или поверхности были бы самотормозящими

лишь тогда, когда лежащіе на нихъ грузы, будучи, послѣ снятія этихъ защепокъ, предоставлены сами себѣ, остались бы въ покоѣ на своихъ опорныхъ поверхностяхъ.

Подобнымъ же образомъ любую грузоподъемную машину можно снабдить предохранительными приспособленіями,—различными зажимами, клещами, крюками и т.д,—имѣющими своей цѣлью удержать отъ паденія грузъ, предоставленный самъ себѣ; но самотормозящими можно будетъ назвать только тѣ изъ этихъ машинъ, у которыхъ грузъ остается недвижно висящимъ на машинѣ безъ всякаго участія упомянутыхъ вспомогательныхъ приспособленій.

Такимъ образомъ, разъ система обладаетъ свойствомъ самоторможенія, то въ упомянутыхъ вспомогательныхъ приспособленіяхъ, имѣющихъ своей задачей удерживаніе системы въ покоѣ послѣ предоставленія ей полной свободы, нужды не представляется никакой, что, конечно, ведетъ къ значительному упрощенію механизма и представляетъ весьма большія удобства, выгодно отличающія такія самотормозящія системы отъ другихъ, имъ подобныхъ, но работающихъ съ помощью упомянутыхъ вспомогательныхъ приспособленій. Къ сожалѣнію, однако, эта безспорная выгода покупается слишкомъ дорогой цѣной для того, чтобы имѣть возможность примѣнять принципъ самоторможенія во всѣхъ подобныхъ случаяхъ; оказывается, что такіе самотормозящіе механизмы, какова бы ни была ихъ форма, весьма непроизводительны, ибо, какъ это нетрудно доказать, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія лишь въ исключительныхъ случаяхъ поднимается до 0,5, обычно же онъ гораздо меньше.

Дѣйствительно, предположимъ, что у насъ имѣется какой-либо, напримѣръ, подъемный, — механизмъ M (фиг. 86), на рукоятку котораго дѣйствуетъ сила Q, вызывающая перемѣщеніе груза P. Пусть, далѣе, этотъ механизмъ обладаетъ свойствомъ самоторможенія, такъ что, удаливъ силу Q и предоставивъ дѣйствовать одной лишь силѣ P, увидимъ, что вся система (грузъ и механизмъ) останется въ покоѣ, и грузъ P будетъ висѣть неподвижно въ пространствѣ, безъ всякой посторонней поддержки. Разсмотримъ сначала одинъ изъ тѣхъ моментовъ, когда сила Q не была удалена и продолжала свою работу, и посмотримъ, на что эта работа, — назовемъ ее черезъ L_Q, — расходовалась; напишемъ, иными словами, балансъ всѣхъ работъ, здѣсь производимыхъ.



Фиг. 86.

Часть работы L_Q уходитъ, прежде всего, на подъемъ груза P; обозначимъ работу, потребную на это, черезъ L_P.

Такъ какъ, далѣе, при работѣ механизма проявляютъ свое дѣйствіе силы тренія, то на преодолѣніе работы этихъ вредныхъ сопротивленій уйдетъ еще нѣкоторая часть работы L_Q, — положимъ, въ размѣрѣ L_f.

Остатокъ отъ работы L_Q, оказывающійся налицо послѣ выполненія работъ L_P и L_f, пойдетъ на приращеніе живой силы груза и другихъ подвижныхъ частей нашей системы. Этотъ остатокъ обозначимъ черезъ L_v.

На выполненіе трехъ этихъ частныхъ работъ и ухо-

дить вся работа $\mathfrak{L}_Q$ силы Q, вслѣдствіе чего можемъ написать основное уравненіе работъ, имѣющее здѣсь мѣсто:

$$\mathfrak{L}_Q = \mathfrak{L}_x + \mathfrak{L}_f + \mathfrak{L}_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ради упрощенія разсужденій, предположимъ, что движеніе груза P и другихъ частей механизма совершается или равномѣрно, или съ такими малыми ускореніями, что ими можно пренебречь. Въ такомъ случаѣ можно будетъ предположить, что никакого приращенія живой силы, во время работы силы Q, не происходитъ, а значитъ, работа $\mathfrak{L}_v$, предназначаемая какъ разъ на полученіе этого приращенія, обращается въ нуль:

$$\mathfrak{L}_v = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Послѣ этого уравненіе работъ (1) принимаетъ для взятаго частнаго случая видъ:

$$\mathfrak{L}_Q = \mathfrak{L}_x + \mathfrak{L}_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія представляетъ отношеніе полученной работы къ работѣ затраченной. Обозначая этотъ коэффиціентъ черезъ η, находимъ соотношеніе

$$\eta = \frac{\mathfrak{L}_x}{\mathfrak{L}_Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Теперь посмотримъ, что дѣлается въ нашемъ механизмѣ въ теченіе какого-либо малаго промежутка времени Δt. Балансъ работъ, выражаемый уравненіемъ (3), имѣетъ, конечно, мѣсто и для этого промежутка времени; поэтому, отмѣчая малыя работы, имѣющія здѣсь мѣсто, знаками Δ, можемъ написать для этого промежутка времени Δt уравненіе работъ въ видѣ:

$$\Delta\mathfrak{L}_Q = \Delta\mathfrak{L}_x + \Delta\mathfrak{L}_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Удалимъ теперь силу Q. Такъ какъ механизмъ M предположенъ самотормозящимъ, то вся система придетъ въ равновѣсіе, а грузъ P останется покойно висящимъ въ пространствѣ. Это показываетъ, что работа, требуемая на преодолѣніе работы сопротивленія теперешнихъ силъ тренія, — обозначимъ ее черезъ ΔL_{T_1}, — оказывается настолько большой, что грузъ P оказывается слишкомъ малымъ для того, чтобы ее выполнить. Это простое соображеніе позволяетъ намъ весьма просто разрѣшить поставленную задачу.

Итакъ, работа ΔL_P, которую можетъ произвести грузъ P, оказывается меньше работы ΔL_{T_1} теперешнихъ вредныхъ сопротивленій или, въ лучшемъ случаѣ, равна ей. Это заключеніе приводитъ насъ къ соотношенію

$$\Delta L_P \leqq \Delta L_{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Когда нашъ механизмъ былъ нагруженъ силами Q и P, то работа, требуемая на преодолѣніе работы вредныхъ сопротивленій, т.-е. силъ тренія, опредѣлялась членомъ L_T. Несомнѣнно, что, когда на машину стали воздѣйствовать одинъ лишь грузъ P, то величина вредныхъ сопротивленій стала гораздо меньше прежней, ибо нагрузка машины стала меньше; вслѣдствіе этого полная работа, потребная на преодолѣніе работы теперешнихъ силъ тренія, — обозначимъ ее черезъ L_{T_1}, — будетъ меньше прежней работы L_T или, въ крайнемъ случаѣ, равна ей:

$$L_{T_1} \leqq L_T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Такъ какъ это соотношеніе имѣетъ силу для любого промежутка времени, а значитъ, и для Δt, то уравненіе (7) можно переписать еще въ разностной формѣ такъ:

$$\Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{x}_1} \gtrless \Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Въ виду этого соотношеніе (6) принимаетъ видъ

$$\Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{X}} \gtrless \Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{x}_1} \gtrless \Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{x}},$$

иначе

$$\Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{X}} \gtrless \Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{x}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

что показываетъ, что работа $\Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$, уходящая на поднятіе груза, въ этомъ случаѣ всегда меньше работы силъ треніа или равна ей. Въ виду этого, замѣняя въ равенствѣ (5) членъ $\Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{x}}$ членомъ $\Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$, равнымъ ему или меньшимъ, согласно (9), можемъ дать соотношенію (5) видъ

$$\Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{Q}} \gtrless \Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{X}} + \Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{Z}}.$$

Мы поставили здѣсь двойной знакъ $\gtrless$ потому, что одно слагаемое суммы (5) замѣнили новымъ, могущимъ имѣть или то же значеніе или меньшее. Отсюда, далѣе, находимъ:

$$\Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{Q}} \gtrless 2\, \Delta \mathfrak{L}_{\mathfrak{X}},$$

что для конечнаго промежутка времени даетъ конечное же соотношеніе

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{Q}} \gtrless 2\, \mathfrak{L}_{\mathfrak{X}},$$

откуда находимъ, что

$$\frac{\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}}{\mathfrak{L}_{\mathfrak{Q}}} \lesseqgtr \frac{1}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

а такъ какъ дробь $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}} / \mathfrak{L}_{\mathfrak{Q}}$ и есть коэффиціентъ полезнаго дѣйствія нашей машины, η, то мы и получаемъ искомое соотношеніе

$$\eta \lesseqgtr \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Примѣненная нами схема доказательства имѣетъ силу не только для общаго уравненія (1), но и для любой самотормозящей системы вообще, — стоитъ лишь примѣнить къ имѣющимся въ системѣ силамъ принципъ возможныхъ

перемѣщеній или возможныхъ работъ. Результатъ получится опять въ формѣ (11).

Въ прежнее время такіе самотормозящіе механизмы были очень распространены, несмотря на свою малую производительность, — способность самоторможенія искупала ими неустранимый ихъ недостатокъ. Въ наше время отъ такихъ механизмовъ, именно изъ-за этой малой ихъ производительности, вообще отказались и примѣняютъ ихъ только въ нѣкоторыхъ спеціальныхъ случаяхъ, гдѣ, ради достиженія особыхъ цѣлей, приходится мириться съ большими потерями работы, требуемыми этимъ самоторможеніемъ.

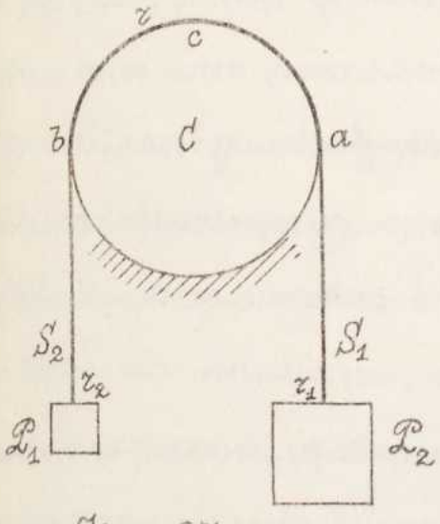
---

§ 11. Ременная передача.

До сихъ поръ мы разсматривали вопросы о передачѣ движенія при посредствѣ твердыхъ тѣлъ; теперь разберемъ въ общихъ чертахъ вопросъ о передачѣ движенія при помощи тѣлъ гибкихъ, тянущихся о твердыя. Такими гибкими тѣлами, примѣняемыми на практикѣ, являются ремни, канаты, веревки и проч. Деформаціи изгиба и др., происходящія съ этими тѣлами при ихъ работѣ, обычно оказываются настолько значительными, что при точныхъ расчетахъ приходится принимать ихъ во вниманіе и учитывать работу, на выполненіе ихъ уходящую. При тѣхъ, однако, приближенныхъ вычисленіяхъ, которыя приводятся ниже, учетомъ работы деформацій, изъ-за его сложности, мы заниматься не будемъ, предполагая, иными словами, что гибкія тѣла, передающія движеніе и разсматриваемыя нами

представляются идеально гибкими въ томъ смыслѣ, что на деформированіе ихъ работы не требуется совсѣмъ.

Пусть, такимъ образомъ, имѣется нѣкоторое идеальное гибкое тѣло, — нѣкоторый ремень $r_1 r r_2$ (фиг. 87), — перекинутое черезъ круглый цилиндръ (шкивъ и т. п.) C, остающійся пока что неподвижнымъ. Нагрузимъ теперь концы ремня, свисающіе съ цилиндра C, силами P_1 и P_2. Согласно основнымъ положеніямъ механики и отвлекаясь отъ вѣса ремня, т.-е. принявъ его или весьма малымъ или включивъ вѣса свисающихъ частей въ грузы P_1 и P_2, можно было бы предположить, что равновѣсіе всей этой системы (ремень + грузы) будетъ имѣть мѣсто лишь тогда, когда грузы P_1 и P_2 будутъ между собою въ точности равны. Опытъ, однако, показываетъ, что можно, не нарушая равновѣсія, увеличивать нагрузку ремня съ одной стороны, увеличивая, напримѣръ, грузъ P_1, и нарушеніе покоя этой системы начнется лишь тогда, когда избытокъ груза P_1 надъ грузомъ P_2 достигнетъ нѣкоторой опредѣленной величины δ, опредѣляемой каждый разъ условіями задачи. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ, при разсмотрѣніи этой передачи, имѣть въ виду послѣдній изъ моментовъ покоя или, что то же, начальный моментъ равномѣрнаго скольженія системы ремня. При дальнѣйшемъ увеличеніи груза P_1, когда $P_1 - P_2 > \delta$, ремень начнетъ скользить уже ускоренно; мы же подвергнемъ разсмотрѣнію тотъ случай, когда онъ движется равномѣрно, когда, слѣ-



Фиг. 87.

дательно, силы, это движение его поддерживающия, удовлетворяют условиям равновесия.

Итак, при наложении ремня на цилиндр возбуждается, как видим, некоторое дополнительное сопротивление, обусловленное членом δ и позволяющее меньшему грузу, P_2, уравновешивать больший, P_1. Нетрудно показать, что это новое, привходящее сопротивление δ появляется в силу наличности трения между ремнем и цилиндром, и сущность явления, имеющаго здесь место, можно уяснить себе помощью следующих простых соображений:

Пусть дуга цилиндра C, охватываемая ремнем, есть некоторая дуга acb (фиг. 87), так что точкой входа ремня на цилиндр служит точка a, а точкой схода — точка b; в этих точках происходит касание свисающих частей ремня, r_1a и r_2b, с поверхностью цилиндра. Нетрудно усмотреть, что на всем протяжении этих свисающих частей ремень не подвергается воздействию никаких других сил, кроме грузов P_1 и P_2, — весом ремня мы пренебрегаем. Вследствие этого можно предположить, что натяжения ремня на этих частях остаются постоянными, т.-е. что как в точке r_1, так и в точке a и во всех точках, лежащих между r_1 и a, натяжение ремня остается одним и тем же, равным S_1, где $S_1 = P_1$; подобным же образом, в точках r_2, b и всех промежуточных натяжение ремня опять остается одним и тем же, равным S_2, где, конечно, $S_2 = P_2$.

Обозначив площадь ремня в поперечных сечениях его у a и b через F, — предположим, что она там и здесь одинакова, — можем, далее, сказать, что напряжение ремня на

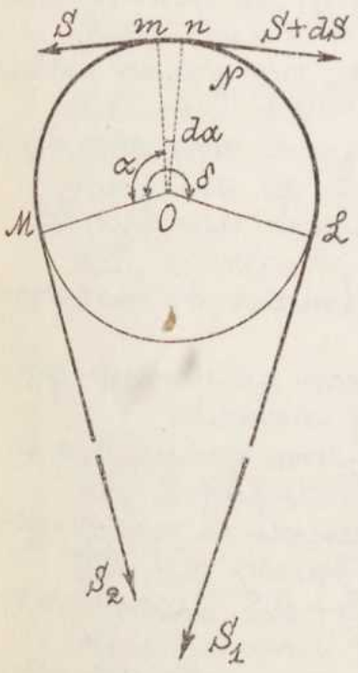
растяженіе въ сѣченіи a, — обозначимъ его черезъ σ_1, — выразится черезъ

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

а въ сѣченіи b черезъ

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{F}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

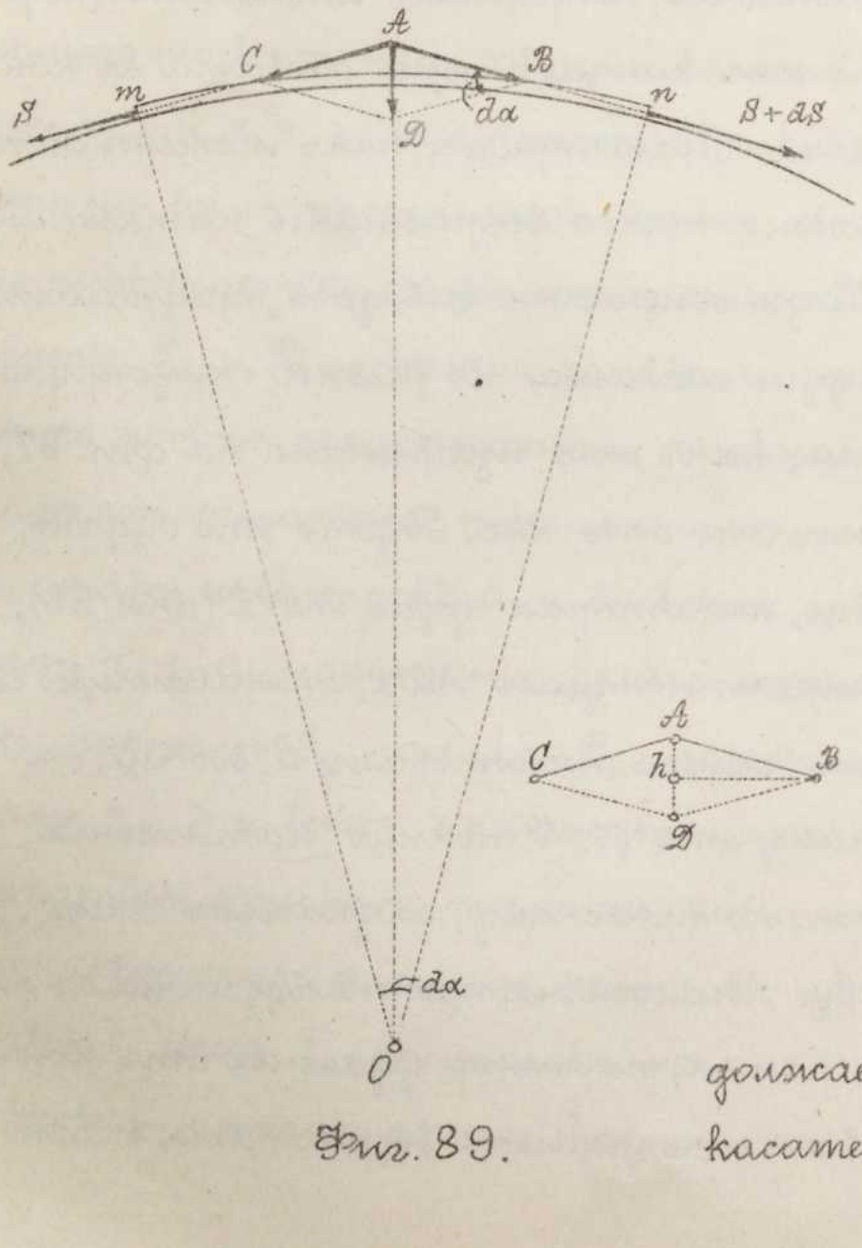
Итакъ, оказывается, что часть ремня acb, лежащая на поверхности цилиндра, нагружена у точки a усиліемъ S_1, а у точки b — усиліемъ S_2. Такъ какъ $S_2 < S_1$, то необходимо принять, что переходъ натяженія S_2 въ большее натяженіе S_1, совершающійся на протяженіи дуги обхвата bca, протекаетъ непрерывно, т.-е. что натяженія части ремня bca отъ сѣченія къ сѣченію непрерывно мѣняются, возрастая по направленію отъ конца b дуги обхвата къ концу a ея. Посмотримъ, какъ можетъ быть объяснено такое возрастаніе натяженій.



Фиг. 88.

Ради общности выводовъ, предположимъ, что дуга обхвата не равна полуокружности, какъ это изображено на фиг. 87, а отлична отъ нея. Пусть это будетъ, вообще, нѣкоторая дуга MNL (фиг. 88); центральный уголъ MOL, стягивающій ее, пусть равенъ нѣкоторому δ, вообще, отличному отъ π. Крайнія натяженія ремня, по прежнему, обозначимъ черезъ S_1 и S_2, при чемъ $S_1 > S_2$. Аналогично прежнему, можемъ сказать, что натяженія ремня, по мѣрѣ удаленія отъ конца M его, будутъ все время непрерывно возрастать, вплоть

до конца l, гдѣ натяженіе равно S_1. Выдѣлимъ теперь гдѣ-либо на части ремня MN l элементъ его mn, длину коего обозначимъ черезъ dl. Пусть центральный уголъ $MOm = \alpha$, а уголъ $mOn = d\alpha$ (фиг. 88). Если натяженіе на конецъ m этого элемента обозначимъ черезъ S, то натяженіе въ точкѣ n, смежной съ m, надо принять возросшимъ сравнительно съ S лишь на безконечно-малую величину dS и равнымъ, поэтому $S + dS$. Попрежнему, очевидно, что эти натяженія S и $S + dS$ имѣютъ направленія, параллельныя касательнымъ въ конечныхъ точкахъ m и n элемента, т.-е. перпендикулярныя крайнимъ радіусамъ Om и On. Изобразимъ теперь ради большей ясности чертежа, элементъ mn и всѣ другіе факторы чертежа 88, относящіеся къ этому элементу, въ увеличенномъ видѣ; получимъ такимъ образомъ чертежъ, изображенный на фиг. 89.



Фиг. 89.

Итакъ, въ точкѣ m нашего элемента дѣйствуетъ усиліе S, а въ смежной съ ней n-усиліе $S + dS$. Сложимъ теперь эти два усилія по правилу параллелограмма, для чего просто продолжаемъ ихъ направленія, т.-е. касательныя въ точкахъ m и n,

до пересѣченія въ нѣкоторой точкѣ A, куда, затѣмъ, переносимъ и самыя усилія, такъ что векторъ AC будетъ изображать усиліе S, а векторъ AB — усиліе $S + \partial S$. Складывая ихъ, получаемъ нѣкоторое равнодѣйствующее усиліе AD, какъ діагональ параллелограмма ABDC. Замѣчая теперь, что стороны AB и AC этого параллелограмма отличаются другъ отъ друга лишь на безконечно-малую величину, можемъ съ безконечно-малой погрѣшностью принять, что эти стороны AB и AC между собою равны, т.-е. что параллелограмъ ABDC есть ромбъ. Съ столь же малой ошибкой можно, слѣдовательно, принять, что діагональ AD дѣлитъ уголъ A этого ромба пополамъ, т.-е. что направленіе AD проходитъ черезъ центръ O, будучи, такимъ образомъ, перпендикулярно къ поверхности цилиндра.

Замѣчая теперь, что уголъ $ABD = \partial\alpha$ и что въ равнобедренномъ треугольникѣ ABD съ безконечно малымъ угломъ $\partial\alpha$ при вершинѣ основаніе AD можно принять совпадающимъ съ дугой, описанной изъ центра B радіусомъ BD, можемъ, далѣе, написать, что $AD = BD \cdot \partial\alpha$, т.-е. что

$$AD = S\,\partial\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Можно разсуждать еще и такъ: опустивъ изъ вершины B равнобедреннаго треугольника ABD перпендикуляръ Bh на основаніе, получаемъ соотношеніе: $Ah = AB \sin \frac{1}{2}\partial\alpha$; по малости угла $(\frac{1}{2}\partial\alpha)$ синусъ его можно замѣнить самой дугой, т.-е. можно написать, что $Ah = \frac{1}{2} AB \cdot \partial\alpha$; отсюда и получаемъ, наконецъ, что $2Ah = AD = AB\,\partial\alpha = BD\,\partial\alpha = S\,\partial\alpha$.

Итакъ, нормальное давленіе со стороны элемента давленія на цилиндръ выражается величиной $S\,\partial\alpha$. Обозн-

гда коэффиціентъ тренія между ремнемъ и цилиндромъ черезъ f, можемъ сказать, что это нормальное къ поверхности цилиндра усиліе AD, равное $S\,d\alpha$, обусловливаетъ собою появленіе сопротивленія тренія $fS\,d\alpha$, противодѣйствующаго сдвиженію элемента dl подъ воздѣйствіемъ разности натяженій dS. Въ томъ случаѣ, когда ремень скользитъ по цилиндру равномѣрно, всѣ силы, дѣйствующія на каждый такой элементъ dl, должны быть уравновѣшиваемы, а это ведетъ къ тому заключенію, что сила тренія $fS\,d\alpha$, сопротивляющаяся движенію ремня, должна быть уравновѣшена силой dS, разницей натяженій, въ виду чего можемъ написать дифференціальное уравненіе равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на элементъ dl (замѣтимъ, что всѣ эти силы: S, $S+dS$ и $fS\,d\alpha$ можно принять дѣйствующими перпендикулярно лучу AO, силу же $S\,d\alpha$ мы приняли направленной именно по этому лучу; поэтому, учитывая проекціи всѣхъ этихъ силъ на направленіе, перпендикулярное лучу AO, мы и можемъ написать первое уравненіе равновѣсія):

$$dS = fS\,d\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Раздѣляя перемѣнныя, получаемъ уравненіе

$$\frac{dS}{S} = f\,d\alpha,$$

интегрированіе котораго приводитъ къ уравненію

$$\lg S = \alpha f + C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

гдѣ C есть произвольное постоянное интегрированія, опредѣляемое по начальнымъ даннымъ, а именно: при $\alpha = 0$, т.-е. у точки M (фиг. 88) натяженіе равно S_2. Значитъ, подставляя $\alpha = 0$ въ уравненіе (e), получаемъ соотношеніе

$$\lg S_2 = f.0 + C,$$

откуда и находимъ, что

$$C = \lg S_2,$$

въ виду чего основное уравненіе (e) принимаетъ видъ:

$$\lg S = \alpha f + \lg S_2.$$

Переходя отъ lg къ числамъ, получаемъ окончательное уравненіе

$$S = S_2 e^{\alpha f}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

связывающее натяженіе ремня въ какомъ-нибудь мѣстѣ дуги обхвата съ остальными факторами, какъ то: 1) съ наименьшимъ натяженіемъ S_2, 2) соотвѣтствующимъ точкѣ дугою обхвата α и 3) коэффиціентомъ тренія f. Уравненіе (1) даетъ возможность установить зависимость между крайними натяженіями S_1 и S_2 и угломъ обхвата δ, а именно: замѣчая, что натяженіе S_1 имѣетъ мѣсто въ крайней точкѣ L дуги обхвата MNL (фиг. 87), гдѣ уголъ α принимаетъ значеніе δ, и подставляя въ уравненіе (1) вмѣсто S величину S_1, а вмѣсто α уголъ δ, получаемъ искомое соотношеніе

$$S_1 = S_2 e^{\delta f}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Если уголъ обхвата δ имѣетъ значеніе такое, что имѣющіяся налицо натяженія S_1 и S_2 удовлетворяютъ уравненію (2), то ремень можетъ или покойно лежать на поверхности цилиндра или равномѣрно по нему скользить.

Если уголъ обхвата δ настолько малъ, что, при имѣющихся натяженіяхъ S_1 и S_2, гдѣ $S_1 > S_2$, существуетъ неравенство $S_1 > S_2 e^{f\delta}$, то будетъ имѣть мѣсто ускоренное движеніе ремня по цилиндру въ сторону усилія S_1.

Если, наконецъ, уголъ обхвата δ настолько великъ, что при $S_1 > S_2$, оказывается $S_1 < S_2 e^{f\delta}$, то система ремня будетъ, при этихъ крайнихъ натяженіяхъ S_1 и S_2, оставаться въ покоѣ; дѣйствительно, усиліе S_1 сдвинуть въ свою сторону ремня не можетъ, ибо S_1 слишкомъ для этого мало (оно меньше $S_2 e^{f\delta}$); въ свою очередь, усиліе S_2 не можетъ продвинуть ремня къ себѣ потому, что этому сопротивляется S_1, которое $> S_2$.

Только что разобранный случай въ практическомъ отношеніи является наиболѣе интереснымъ и важнымъ. Дѣло въ томъ, что показательная функція $e^{f\delta}$ при $f\delta > 0$ есть функція возрастающая и, при томъ, весьма быстро сравнительно съ возрастаніемъ аргумента $f\delta$, какъ это можно видѣть изъ слѣдующей таблицы:

$f\delta =$	1	2	3	4	5	6 . . . .
$e^{f\delta} =$	2,7	7,4	20,1	54,6	148,4	403,4 . . .

При $f = 0{,}25$ соотвѣтствующіе углы δ въ градусахъ будутъ имѣть значенія:

$\delta =$	229°	458°	687°	916°	1145°	1374° . . .
	(=360°+98°)	(=360°+327°)	(=2.360+196°)	(3.360°+65°)	(3.360°+294°)	

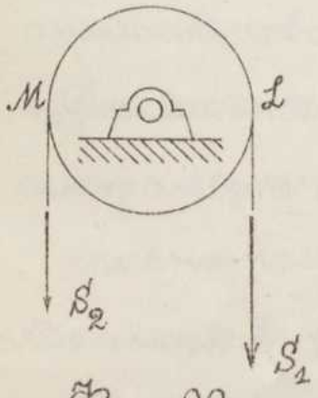
Итакъ, при $f = 0{,}25$ и $f\delta$, равномъ, напримѣръ, 4, т.-е. уже при $2\frac{1}{2}$ оборотахъ ремня вокругъ цилиндра натяженіе $S_1 = 54\, S_2$; иначе говоря, грузъ величиной въ S_2 можетъ уравновѣсить здѣсь грузъ S_1, въ 54 раза большій, чѣмъ S_2. Этимъ объясняется также и тотъ фактъ, что, обмотавъ веревку или ремень вокругъ неподвижнаго вала нѣсколько разъ, мы можемъ совершенно безопасно повѣсить на одномъ концѣ его извѣстный грузъ, совершенно не придерживая дру-

го, оставляя его висѣть совершенно свободно,—небольшая сила вѣса свободнаго конца веревки, давая небольшое S_2, при помощи тренія можетъ удержать на другомъ концѣ грузъ S_1, превосходящій ее во много разъ. Эти же самыя соображенія находятъ себѣ примѣненіе при оивартовываніи судовъ у пристаней,—канаты, имѣющіе удерживать судно, обматываются нѣсколько разъ вокругъ причальныхъ столбовъ, и тогда усилія одного—двухъ человѣкъ бываетъ вполнѣ достаточно для удержанія на мѣстѣ корпуса судна, зачастую вѣсящаго много тысячъ пудовъ. Особенно широко пользуются уравненіемъ (2) въ различныхъ грузоподъемныхъ механизмахъ, при устройствѣ тормазныхъ приспособленій.

Разность конечныхъ натяженій, $S_1 - S_2$, всецѣло обязана своимъ существованіемъ наличности тренія между ремнемъ и цилиндромъ и оказываетъ собою сопротивленіе движенію ремня, этимъ треніемъ оказываемое. Съ другой стороны, очевидно, что нашъ цилиндръ радіуса R, будучи нагруженъ силами S_1 и S_2, касательными къ его поверхности, находится подъ воздѣйствіемъ момента $(S_1 - S_2)R$, стремящагося повернуть этотъ цилиндръ въ сторону бо́льшаго натяженія S_1. Если бы этотъ вращающій моментъ мы пожелали выразить произведеніемъ нѣкотораго окружного усилія, P, касательнаго къ окружности цилиндра, на радіусъ цилиндра R, то значеніе этого окружного усилія получили бы изъ уравненія $PR = R(S_1 - S_2)$, откуда и нашли бы, что

$$P = S_1 - S_2 = S_2(e^{f\alpha} - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Итакъ, окружное усиліе P, стремящееся повернуть цилиндръ, огибаемый ремнемъ, представляетъ собою сопротивленіе трения между ремнемъ и цилиндромъ и равно разности конечныхъ натяженій S_1 и S_2. Посмотримъ теперь, каковы условія утилизаціи этого окружного усилія P. Очевидно, что первымъ изъ нихъ является подвижность цилиндра, способность его къ вращенію. Предположимъ поэтому, что нашъ цилиндръ сидитъ на валу, вращающемся въ подшипникахъ, и черезъ него, попрежнему, перекинутъ ремень, концы коего подвержены натяженіямъ S_1 и S_2 (фиг. 90). Мы имѣемъ, однимъ словомъ, нѣкоторый ременной шкивъ. Ради простоты выкладокъ, предположимъ, что обѣ части ремня, сходящая и восходящая, настолько близки къ параллельности, что усилія S_1 и S_2 можно считать направленными параллельно другъ другу. Въ такомъ случаѣ нагрузка на валъ будетъ приблизительно равна $S_1 + S_2$. Если, теперь, коэффиціентъ трения вала въ подшипникахъ обозначимъ черезъ μ, а радіусъ вала — черезъ ρ, то сопротивленіе трения въ подшипникахъ выразится суммарно черезъ $\mu(S_1 + S_2)$, а моментъ его, m_2, относительно оси вращенія шкива — черезъ $\mu\rho(S_1+S_2)$. Итакъ,



Фиг. 90.

$$m_2 = \mu\rho(S_1 + S_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Допустимъ, далѣе, что на валу имѣется еще нѣкоторый пассивный моментъ, m_p, не могущій самъ вращать нашего шкива, но вращенію его другими моментами сопротивляющійся, — пусть это будетъ моментъ сопротивленія станковъ, насоса и, вообще, машинъ-орудій.

Всѣ эти моменты сопротивленія, препятствующіе вращенію нашего шкива, могутъ быть преодолѣны лишь за счетъ момента M, обусловливаемаго наличностью окружного усилія на шкивѣ, P, и равнаго PR. Такимъ образомъ, дѣйствующимъ моментомъ является здѣсь моментъ M, выражающійся такъ:

$$M = PR = (S_1 - S_2)R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Если ремень имѣетъ двигаться и увлекать, при этомъ, за собою шкивъ, т.-е. если онъ по шкиву скользить не долженъ, то для этого, прежде всего, должно быть удовлетворено условіе $S_1 \leqq S_2 e^{f\alpha}$, ибо, если бы оказывалось, что $S_1 > S_2 e^{f\alpha}$, то, согласно сказанному выше, это значило бы, что ремень можетъ скользить по шкиву. Дѣйствительно для возможности вращенія шкива необходимо, чтобы дѣйствующій моментъ M могъ преодолѣть сопротивленіе какъ момента треніа въ подшипникахъ, m_f, такъ и момента пассивнаго сопротивленія, m_p. Поэтому условія увлеканія шкива ремнемъ выражаются неравенствами

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\leqq S_2 e^{f\alpha} \\ M &\geqq \mu\varrho(S_1 + S_2) + m_p. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

и

Если бы оказалось, что

$$S_1 \leqq S_2 e^{f\alpha}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7^{\text{I}})$$

такъ что ремень по шкиву скользить не можетъ, но въ то же время моментъ M слишкомъ слабъ для того, чтобы преодолѣть моменты сопротивленій, т.-е. если

$$M < \mu\varrho(S_1 + S_2) + m_p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7^{\text{II}})$$

то вся система ремня и шкива будетъ оставаться въ покоѣ,

и вращеніе совершаться не можетъ. Итакъ, условія покоя системы выражаются соотношеніями (7') и (7'').

Если, далѣе,

$$S_1 > S_2 e^{f\delta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

такъ что ремень по шкиву скользить можетъ, а въ то же время

$$M < \mu\varrho(S_1 + S_2) + m_p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8'')$$

то повернуть шкива ремень не сможетъ, самъ же по нему скользить будетъ. Такимъ образомъ, условія скольженія ремня по шкиву и одновременнаго съ этимъ покоя шкива выражаются соотношеніями (8') и (8'').

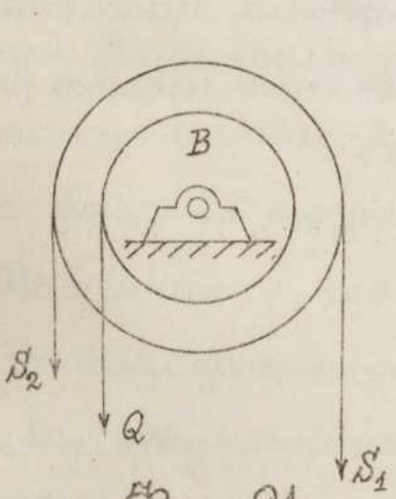
Если, затѣмъ,

$$S_1 > S_2 e^{f\delta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

такъ что возможно скольженіе ремня, но

$$M > \mu\varrho(S_1 + S_2) + m_p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9'')$$

такъ что моментъ M достаточенъ для преодолѣнія всѣхъ моментовъ сопротивленія, то получается неопредѣленность, — можетъ случиться, что одновременно будетъ происходить скольженіе ремня и вращеніе шкива.



Фиг. 91.

Особый интересъ представляетъ тотъ случай, когда на валу имѣется моментъ сопротивленія не пассивный, какъ это было выше, а активный, m_a, могущій самъ привести валъ и всю систему въ движеніе, — если, напримѣръ, на валу сидитъ глухо закрѣпленный на немъ барабанъ B, по окружности коего дѣйствуетъ сила Q, стремящаяся повернуть всю систему согласно своему направленію (фиг. 91). Для этого случая $m_a = Qr$, гдѣ r есть радіусъ барабана.

Здѣсь условіе покоя выразится соотношеніями

$$\left.\begin{aligned} S_1 &< S_2 e^{fs} \\ \text{и} \\ M &< \mu\varrho(S_1+S_2)+m_a, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

ибо это есть тотъ случай, когда ремень не можетъ скользить по шкиву, а дѣйствующій моментъ M не можетъ преодолѣть имѣющихся здѣсь сопротивленій.

Если

$$\left.\begin{aligned} S_1 &< S_2 e^{fs} \\ \text{и} \\ M &> \mu\varrho(S_1+S_2)+m_a, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

то ремень скользить по шкиву не сможетъ и будетъ увлекать за собою какъ шкивъ, такъ и барабанъ.

Подобнымъ же образомъ можно разобрать и всѣ остальные случаи.

Замѣтимъ, наконецъ, что разъ моментъ m_a есть моментъ активный, то можетъ случиться, что подъ дѣйствіемъ его вся система можетъ оказаться вынужденной вращаться въ обратную сторону. Очевидно, что это можетъ имѣть мѣсто при условіи

$$m_a > M+\mu\varrho(S_1+S_2) \quad \ldots\ldots\ldots (12')$$

Моментъ m_a можетъ, такимъ образомъ, повернуть, а, затѣмъ, вращать шкивъ въ обратную сторону, т.-е. согласно своему направленію. Если, при этомъ, оказывается, что

$$S_1 \geqq S_2 e^{fs}, \quad \ldots\ldots\ldots (12'')$$

такъ что возможно скольженіе ремня, то можетъ имѣть мѣсто движеніе шкива назадъ, а ремня – впередъ.

Наконецъ, случай

$$\left.\begin{aligned} S_1 &< S_2 e^{f\delta} \\ \text{и} \qquad m_a &> M + \mu\varrho(S_1 + S_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

есть весьма важный въ практическомъ отношеніи случай передачи движенія отъ вала и его шкива другому валу при посредствѣ ремня, охватывающаго шкивы этихъ валовъ. Никакихъ затрудненій не представитъ разборъ и другихъ, могущихъ представиться здѣсь, случаевъ.

При обходѣ шкивовъ частицы ремня вынуждены описывать криволинейныя, — круговыя, — траекторіи, вслѣдствіе чего при большихъ скоростяхъ ремня необходимо принимать во вниманіе еще одинъ важный факторъ, — центробѣжную силу этихъ частицъ. Замѣчая, что она будетъ всегда направлена отъ центра къ периферіи, заключаемъ, что она будетъ уменьшать нормальныя давленія элементовъ ремня на шкивъ, вслѣдствіе чего будетъ имѣть мѣсто соотвѣтственное уменьшеніе и силъ треніи. Учетъ зависимости между S_1 и S_2 можно выполнить теперь такъ:

Выдѣлимъ изъ части ремня, лежащей на шкивѣ, элементъ его длиной ∂l и положимъ, что масса его есть ∂m. Предположимъ, далѣе, что радіусъ шкива есть R, а окружная скорость его — v. Тогда центробѣжная сила этого элемента, F, выразится произведеніемъ изъ центробѣжнаго ускоренія его, v^2/R, на массу ∂m, такъ что

$$F = \frac{\partial m \cdot v^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Обозначимъ вѣсъ погонной единицы ремня черезъ q, а ускореніе силы тяжести черезъ g. Въ такомъ случаѣ

масса этой единицы, — величина, для данного ремня постоянная, — выразится черезъ q/g. Будемъ обозначать эту величину черезъ μ, такъ что

$$\mu = \frac{q}{g} = const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Послѣ этого масса dm взятаго нами элемента съ длиной $d\lambda$ выразится такъ

$$dm = \mu\, d\lambda .$$

Замѣчая теперь, что

$$d\lambda = R\, d\alpha ,$$

получаемъ для dm новое выраженіе, а именно:

$$dm = \mu R\, d\alpha ,$$

въ виду чего уравненіе (α) перепишется такъ:

$$\mathcal{F} = \mu R\, d\alpha . \frac{v^2}{R} = \mu v^2 d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha')$$

На такую именно величину и уменьшится теперь нормальная сила $S\, d\alpha$, — см. форм. (c), — прижимающая элементъ $d\lambda$ къ поверхности цилиндра. Въ силу этого общее дифференціальное уравненіе (d) перепишется въ дополненномъ видѣ такъ:

$$dS = f(S - \mu v^2) d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Предположивъ теперь, что вращеніе цилиндра происходитъ равномѣрно, такъ что окружная скорость его $v = const$, имѣемъ, что

$$d(S - \mu v^2) = dS ,$$

вслѣдствіе чего уравненію (γ) можно дать видъ:

$$d(S - \mu v^2) = f(S - \mu v^2) d\alpha .$$

Раздѣляя перемѣнныя, т.-е. дѣля обѣ части полученнаго уравненія на $(S - \mu v^2)$, получаемъ уравненіе

$$\frac{d(S-\mu v^2)}{S-\mu v^2}=f\,d\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

что, послѣ интеграціи, даетъ уравненіе

$$\lg(S-\mu v^2)=f\alpha+C. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

Замѣчая, что, при $\alpha=0$, натяженіе S ремня равно S_2, опредѣляемъ помощью этого начальнаго условія произвольное постоянное C, а именно:

$$\lg(S_2-\mu v^2)=f.0+C,$$

откуда и находимъ, что

$$C=\lg(S_2-\mu v^2),$$

послѣ чего уравненіе (ε) переписывается такъ:

$$\lg(S-\mu v^2)=f\alpha+\lg(S_2-\mu v^2),$$

а переходя отъ lg къ числамъ, находимъ связь между натяженіемъ S въ любой точкѣ дуги обхвата и другими факторами передачи въ видѣ уравненія

$$S-\mu v^2=e^{f\alpha}(S_2-\mu v^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\zeta)$$

Замѣчая, далѣе, что, при $\alpha=\delta$, натяженіе S оказывается равнымъ S_1, находимъ изъ (ζ) соотношеніе между крайними натяженіями S_1 и S_2 въ видѣ уравненія

$$S_1-\mu v^2=e^{f\delta}(S_2-\mu v^2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\eta)$$

Опредѣлимъ теперь окружное усиліе P, равное S_1-S_2. Для этого изъ уравненія (η) находимъ сначала S_2; получаемъ:

$$S_2=(S_1-\mu v^2)e^{-f\delta}+\mu v^2.$$

Вычитая обѣ части этого равенства изъ S_1, находимъ искомое выраженіе для P; оно имѣетъ видъ

$$P=S_1-S_2=S_1-(S_1-\mu v^2)e^{-f\delta}-\mu v^2=(S_1-\mu v^2)(1-e^{-f\delta}). \quad (\vartheta)$$

Формула эта показываетъ, что при

$$S_1=\mu v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varkappa)$$

окружное усиліе P обращается въ нуль, въ виду чего обра-

щается въ нуль и количество передаваемой шкивомъ работы. Такимъ образомъ, опредѣляемая изъ уравненія (к), является въ этомъ смыслѣ предѣльной; обозначивъ ее черезъ $v_к$, имѣемъ для опредѣленія ея уравненіе

$$v_к = \sqrt{\frac{S_1}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\lambda)$$

Выражая натяженіе S_1 ремня черезъ площадь сѣченія его и допускаемое напряженіе на разрывъ, можемъ по этимъ даннымъ опредѣлить въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ величину соотвѣтствующей предѣльной скорости, при которой ремень перестаетъ передавать работу.

Замѣчая теперь, что передача работы не имѣетъ мѣста еще при $v=0$, когда шкивъ стоитъ, и принимая во вниманіе, что количество L работы, передаваемой ремнемъ, есть функція скорости его и что эта величина L обращается въ нуль два раза, а именно, при $v=0$ и при $v=v_к$, заключаемъ, что между этими предѣльными значеніями 0 и $v_к$ непремѣнно должно существовать такое, при которомъ количество передаваемой работы будетъ максимальнымъ. Отыскать значеніе $v_н$ этой наивыгоднѣйшей скорости можно по общимъ правиламъ теоріи maximum'овъ и minimum'овъ, разсуждая такъ:

Общее выраженіе работы L, передаваемой ремнемъ въ единицу времени, имѣетъ видъ

$$L = Pv,$$

гдѣ P есть окружное усиліе, а v — окружная скорость шкива. Въ видѣ (ϑ) это соотношеніе переписывается такъ:

$$L = (S_1 - \mu v^2)(1 - e^{-f\beta})v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

Максимумъ работы получимъ изъ условія:

$$\frac{dL}{dv}=0,$$

что, примѣнительно къ (μ), даетъ уравненіе

$$S_1-3\mu v^2=0.$$

Отсюда получаемъ выраженіе наивыгоднѣйшей скоро
v_n, при которой ремень будетъ передавать шкиву мак
мальную работу:

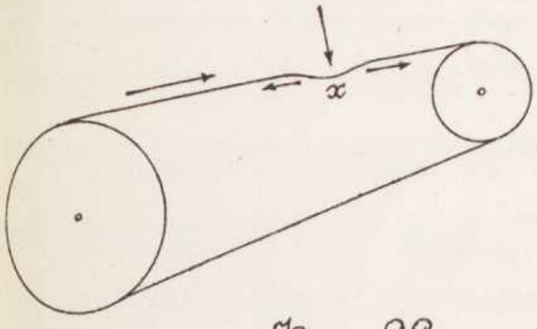
$$v_n=\sqrt{\frac{S_1}{3\mu}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\nu)$$

Если мы не желаемъ перегружать ремень, т.-е. брат
натяженіе S_1 большее полагающагося для даннаго ремня
при ѣзатомъ допускаемомъ напряженіи его, то, задавшись
S_1, сейчасъ же по формулѣ (ν) опредѣлимъ наивыгоднѣйшу
для данной передачи скорость. Соединяя выраженія (μ) и
(ν), получаемъ выраженіе максимальной работы, могущей
быть переданной на шкивъ помощью даннаго ремня:

$$L_{max}=\left(S_1-\frac{S_1}{3}\right)\left(1-e^{-f\delta}\right)\sqrt{\frac{S_1}{3\mu}}=\frac{2}{3}S_1\sqrt{\frac{S_1}{3\mu}}\left(1-e^{-f\delta}\right). \quad (\pi)$$

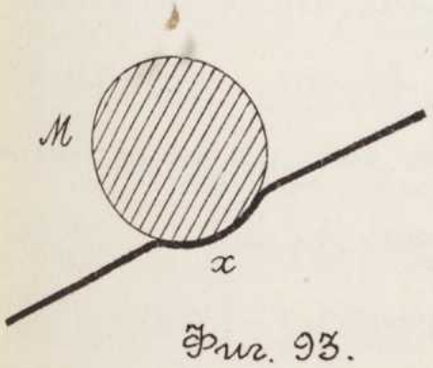
Скорость v_n, вычисляемая по формулѣ (ν), выходитъ, при
ходовыхъ величинахъ S_1 и q, довольно большой; во всякомъ слу
чаѣ, она значительно выше тѣхъ, кои осуществляются
обычно на практикѣ, почему и можно сказать, что на
практикѣ ремень вполнѣ не утилизируется никогда.
Обыкновенно говорятъ, что допускать большія скорости
ременной передачи нельзя, потому что это можетъ
якобы вызвать бѣеніе шкивовъ, обусловливаемое неточной
центрировкой ихъ, а, кромѣ того, предполагается, что ма
лѣйшее уклоненіе ремня отъ должнаго направленія, при
которомъ онъ можетъ правильно обѣжать шкивъ, можетъ

при большой скорости его, повлечь за собою сходъ его со шкива. Нетрудно, однако, путемъ уже элементарныхъ соображеній, показать несостоятельность послѣдняго предположенія; для этого достаточно будетъ разсмотрѣть эффектъ удара по ремню.



Фиг. 92.

Пусть въ какой-либо точкѣ x бѣгущаго ремня (фиг. 92) мы дали ему ударъ перпендикулярно его поверхности. Понятно, что импульсъ этого удара сообщится сосѣднимъ частицамъ со скоростью распространенія упругихъ колебаній въ средѣ ремня, и въ результатѣ удара мы получимъ двѣ волны, выходящія изъ x, изъ коихъ одна пойдетъ по направленію скорости ремня, а другая — ей противоположно. Первая изъ этихъ волнъ, дойдя до шкива, потухнетъ; также можетъ потухнуть и вторая волна, дойдя до другого шкива. Но предположимъ, что скорость ремня равна упомянутой скорости распространенія упругихъ колебаній. Въ такомъ случаѣ окажется, что вторая волна, идущая навстрѣчу ремню, остановится неподвижно въ пространствѣ, какъ бы застынетъ на мѣстѣ, и въ этомъ случаѣ ремень будетъ идти такъ, какъ если бы въ x ему представилась нѣкоторая твердая, неподвижная преграда M (фиг. 93), — нѣчто въ родѣ блока или цилиндра.



Фиг. 93.

Такимъ образомъ, въ случаѣ указаннаго равенства скоростей ремень дѣлается какъ-бы податливымъ на всякія изг-

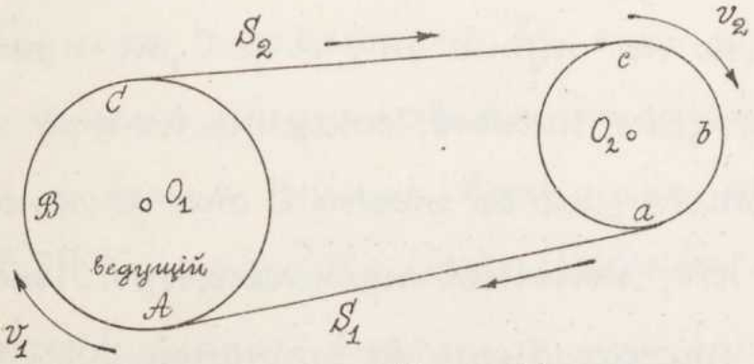
мѣненія его формы, и если въ какой-либо точкѣ x его мы подведемъ къ нему, напримѣръ, блокъ M, то ремень охотно будетъ обтягать его, не пытаясь ни соскользнуть съ этого блока, ни обойти это препятствіе, ни оказывать на него какое бы то ни было давленіе. — Такова причина, почему ремни при большихъ скоростяхъ работаютъ всегда очень плавно; можно сказать, что ремень въ подобныхъ случаяхъ принимаетъ нѣкоторое стойчивое положеніе равновѣсія.

Всѣ эти теоретическіе выводы вполнѣ оправдались на опытахъ Radinger'a, устроившаго подобную передачу (съ большими скоростями ремня) въ очень большихъ размѣрахъ; передача эта работала вполнѣ исправно въ продолженіе нѣсколькихъ лѣтъ.

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе устойчивость ремня, идущаго съ большой скоростью, не слѣдуетъ опасаться давать ремнямъ скорости, приближающіяся къ наиболѣе выгоднымъ съ точки зрѣнія работы. — Въ случаѣ, если скорость ремня окажется меньше, чѣмъ скорость распространенія упругихъ колебаній, волна, идущая противъ ремня, будетъ перемѣщаться въ этомъ направленіи со скоростью, равною разности скоростей колебаній и самого ремня. Степень устойчивости будетъ, очевидно тѣмъ больше, чѣмъ эта разность будетъ меньше.

До сихъ поръ мы предполагали, что на всемъ протяженіи дуги обхвата ремень, плотно прилегая къ окружности шкива, идетъ со скоростью, равной окружной скорости шкива и, значитъ, относительнаго движенія по немъ

не имѣетъ, т.-е. по шкиву не скользитъ. На дѣлѣ же, какъ оказывается, происходитъ нѣчто совершенно иное: ремень, за время обхода шкива, имѣетъ еще нѣкоторое относительное движеніе скольженія по шкиву. Н. Е. Жуковскому удалось показать это при помощи очень простого прибора, описаніе коего будетъ помѣщено въ прибавленіи къ курсу. Сущность явленія, совершающагося здѣсь, заключается въ слѣдующемъ:



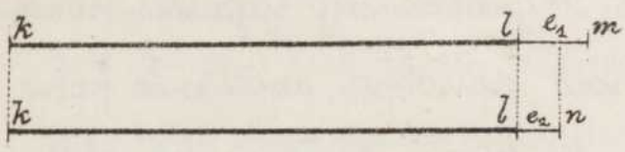
Фиг. 94.

Пусть ремень охватываетъ два шкива, O_1 и O_2 (фиг. 94), и вся эта система находится въ движеніи, будучи побуждаема къ тому вращеніемъ „ведущаго" шкива O_1; шкивъ O_2 будемъ называть „ведомымъ". Если вращеніе ведущаго шкива совершается по часовой стрѣлкѣ, то въ части aA ремня натяженіе S_1 будетъ больше натяженія S_2 въ части Cc. Разность $S_1 - S_2$ дастъ намъ величину окружного усилія P, какъ это извѣстно изъ предыдущаго.

Очевидно теперь, что въ части aA, съ бо́льшимъ натяженіемъ S_1, ремень будетъ вытянутъ больше, нежели въ части Cc съ меньшимъ натяженіемъ S_2. Слѣдовательно, вытяжка ремня въ различныхъ частяхъ его будетъ различна, и мы разсмотримъ теперь ходъ измѣненій ея.

Пусть единица длины ремня въ его естественномъ, невытянутомъ, состояніи (до наложенія его на шкивы) изображается отрѣзкомъ kl (фиг. 95). Переходя по шкиву O_1 отъ A къ B и дальше, къ C, ремень будетъ получать раз-

личныя удлиненія: если въ части Aa она удлиняется до размѣра km, получивъ нѣкоторое удлиненіе $lm = e_1$, то въ части C, гдѣ натяженіе меньше, она получитъ и меньшее удлиненіе, — нѣкоторое $ln = e_2$, имѣя теперь, такимъ образомъ, размѣръ kn, меньшій прежняго, km. Такимъ образомъ выходитъ, что каждая единица длины, kl, на всемъ пути aA будетъ имѣть длину km, но на пути отъ A до C, т.-е. проходя дугу обхвата на ведущемъ шкивѣ, станетъ все это время непрерывно сокращаться, ибо въ точкѣ C она должна будетъ занять протяженіе kn, меньшее прежняго, km. Ясно, что это сокращеніе будетъ происходить въ сторону, обратную движенію шкива, а это повлечетъ за собою отставаніе ремня отъ шкива, т.-е. скольженіе его относительно шкива въ сторону, обратную движенію этого послѣдняго.



Фиг. 95.

Ближайшее разсмотрѣніе вопроса показываетъ, что не скользитъ лишь нѣкоторая часть ремня; но о томъ, какова длина дуги, на которой это скольженіе не имѣетъ мѣста, гдѣ располагается эта дуга и т. д., мы говорить не будемъ. Замѣтимъ лишь тотъ фактъ, что прилеганіе (безъ скольженія) ремня къ шкиву имѣетъ мѣсто лишь на нѣкоторой дугѣ, — части всей дуги обхвата; дальше же, на остальной части дуги обхвата, происходитъ скольженіе.

Прослѣдимъ теперь, какъ работаетъ ремень, обходя второй шкивъ O_2. Идя по направленію движенія ремня, мы замѣчаемъ, что на протяженіи теперешней дуги обхвата, натяженіе S_2 его измѣняется, достигая, наконецъ, величины S_1. Значитъ, проходя дугу обхвата, ремень долженъ вытягиваться и, слѣдовательно, опережать шкивъ. Вслѣдствіе того получимъ опять скольженіе ремня по шки-

ву, но теперь уже въ сторону движенія, — шкивъ будетъ отставать отъ ремня.

Нетрудно усмотрѣть, что такое поведеніе ремня влечетъ за собою потерю въ передаваемой работѣ. Дѣйствительно, окружныя скорости шкивовъ оказываются различными, ибо ведущій шкивъ идетъ быстрѣе ведомаго, что, конечно, и ведетъ къ потерѣ работы, воспринимаемой шкивомъ O_2. Потерю эту можно оцѣнить въ среднихъ числахъ, но въ эти подробности мы вдаваться не будемъ, предоставляя желающимъ ближе познакомиться со всѣмъ этимъ вопросомъ обратиться къ брошюрѣ Н. Е. Жуковскаго «О скольженіи ремней по шкиву». А теперь коснемся вкратцѣ еще вопроса о потерѣ скорости, обусловливаемой этимъ скольженіемъ, и выяснимъ, что, дѣйствительно, ведущій шкивъ идетъ съ одной скоростью, соотвѣтствующей натяженію S_1, а ведомый — съ другого, соотвѣтствующей S_2.

Пусть, согласно фиг. 95, единицы длины ремня на ведущей части его, гдѣ натяженіе равно S_1, обратилась въ $(1+e_1)$, а на ведущей части, съ S_2, въ $(1+e_2)$. Величины $e_1 = lm$ и $e_2 = ln$, сравнительно съ kl, очень малы. Предполагая, что оба шкива вращаются равномѣрно, можемъ сказать, что

удлиненіе единицы длины kl до размѣровъ $(1+e_1)$ происходитъ на ведущемъ шкивѣ въ то же самое время (— обозначимъ это время черезъ τ), въ какое на ведомомъ происходитъ удлиненіе той же единицы длины kl до размѣровъ $(1+e_2)$,

иначе говоря, какая-либо точка ремня проходитъ на ведущемъ шкивѣ пространство $(1+e_1)$ въ то же самое время τ, въ какое на ведомомъ она проходитъ $(1+e_2)$. Посмотримъ, къ какимъ аналитическимъ соотношеніямъ приведутъ насъ эти логическіе выводы.

Пусть окружныя скорости шкивовъ будутъ: у ведущаго — v_1, а у ведомаго — v_2. Въ такомъ случаѣ, согласно замѣчанію, сдѣланному выше, можемъ написать, что

$$1+e_1=v_1\tau,$$

а

$$1+e_2=v_2\tau.$$

Отсюда получаемъ соотношеніе

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{1+e_1}{1+e_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

показывающее, что отношеніе удлиненныхъ единицъ равно отношенію окружныхъ скоростей шкивовъ. Въ силу этого, потеря окружной скорости на ведомомъ шкивѣ, т.-е. величина v_1-v_2, можетъ быть подсчитана такъ:

Изъ (6) имѣемъ, что

$$\frac{v_1-v_2}{v_1}=\frac{e_1-e_2}{1+e_1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

Такъ какъ величина e_1 очень мала, то, откинувъ ее въ знаменателѣ, мы измѣнимъ дробь, стоящую въ правой части соотношенія (7') лишь очень мало.

Дѣйствительно, эту дробь можно представить въ видѣ ряда: $(e_1-e_2)(1-e_1+e_1^2-e_1^3+e_1^4-\ldots)$. При маломъ e_1 эта величина будетъ отличаться отъ разности (e_1-e_2), получаемой послѣ откидыванія e_1 въ знаменателѣ, на величину $[(e_1-e_2)(-e_1+e_1^2-\ldots)]$, т.-е. величину высшаго порядка сравнительно съ e_1. Такова будетъ ошибка, вызываемая отбрасываніемъ члена e_1 въ знаменателѣ.

Въ силу этого уравненіе (7') можетъ быть переписано такъ:

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} = e_1 - e_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Разность $(e_1 - e_2)$ легко выразить въ функціи коэффиціента упругости E ремня и площади поперечнаго сѣченія его, F. Согласно закону Гука, можемъ написать выраженія вытяжекъ e_1 и e_2 такъ:

$$e_1 = \frac{S_1}{EF} \quad \text{и} \quad e_2 = \frac{S_2}{EF},$$

вслѣдствіе чего уравненіе (7) можетъ быть переписано такъ:

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{S_1 - S_2}{EF} = \frac{P}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Итакъ, потеря скорости оказывается тѣмъ большей, чѣмъ большее окружное усиліе P и чѣмъ меньше поперечное сѣченіе ремня F. Потеря эта неизбѣжна, и въ случаѣ, если между числами оборотовъ шкивовъ требуется соблюсти заданное соотношеніе, то это скольженіе нужно принять во вниманіе непремѣнно.

Если бы скорости v_1 и v_2 были равны, то изъ соотношеній $v_1 = \omega_1 r_1$ и $v_2 = \omega_2 r_2$ мы получили бы обычное соотношеніе $\omega_1 : \omega_2 = r_2 : r_1$, т. е. угловыя скорости шкивовъ были бы обратно пропорціональны радіусамъ ихъ. Въ дѣйствительности, какъ мы видѣли, эти скорости не равны между собою, а потому упомянутая пропорціональность мѣста не имѣетъ, и при точномъ расчетѣ радіусы шкивовъ придется немного поправить, что можно выполнить, пользуясь формулой (8). Изъ нея, очевидно, имѣемъ, что $v_1 - v_2 = v_1 \cdot \frac{P}{EF} = v_1 k$, гдѣ черезъ k обозначена, ради простоты писанія, дробь P/EF. Отсюда, далѣе, находимъ, что $\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 = k\omega_1 r_1$ или $\omega_1 r_1 (1-k) = \omega_2 r_2$. Задаваясь соотношеніемъ $\omega_1 : \omega_2 = n$, находимъ, что $n r_1 (1-k) = r_2$, откуда, наконецъ,

$$r_1 = \frac{r_2}{n(1-k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Если бы скольженія не было, то $k = 0$ и формула (9) приняла бы обычный видъ

$$r_1 = \frac{r_2}{n}.$$

При предварительных расчетах представляет интерес учет полного давления на вал шкива в функции окружного усилия P, а не натяжений S_1 и S_2. Предполагая, что обе части ремня, Aa и Cc (фиг. 92) почти параллельны, можем, с известным приближением, принять, что это полное давление на вал шкива, Q, выразится так:

$$Q = S_1 + S_2.$$

Далее имеем соотношения:

$$S_1 = S_2 e^{f\delta}$$

и

$$P = S_1 - S_2.$$

Если Aa почти параллельно Cc, то дуга обхвата близко подходит к полуокружности, так что в этом случае δ придется положить равной π. Полагая, далее, $f = 0{,}22$, находим, что $f\delta = 0{,}22\,\pi = 0{,}693$, а так как $e^{0{,}693} = 2$, то в этом случае

$$S_1 = 2S_2,$$

вследствие чего

$$P = S_2$$

и, что самое важное,

$$Q = 3S_2 = 3P. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

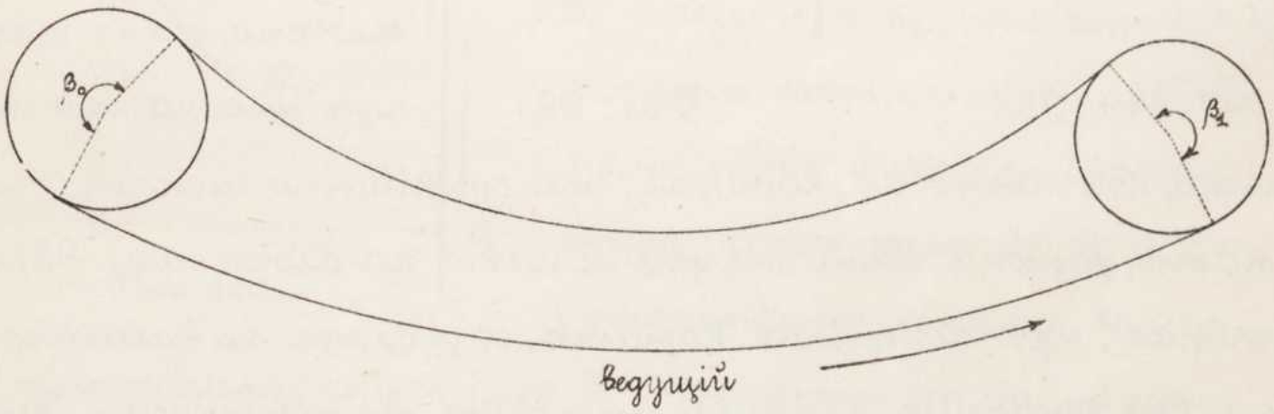
Итак, в указанных условиях можно приблизительно принимать, что полное давление на вал шкива равно тройному окружному усилию, т.-е. $3P$.

При решении вопроса о том, где следует помещать ведущий шкив, а где ведомый, нужно руководствоваться тем соображением, что дуга обхвата должна быть осуществляема всегда как можно бо́льшей. Поэтому ведущий конец следует пускать вниз, а ведомый — наверх. Фиг. 96 и 97 весь-

ма наглядно выяснена зависимость между величинами угловъ обхвата и расположеніемъ ведущей части ремня: углы α_0 и α_1 схемы фиг. 96, неудовлетворяющей упомянутому выше правилу относительно расположенія ведущей части, выходятъ значительно меньше угловъ β_0 и β_1 фиг. 97, этому



Фиг. 96.



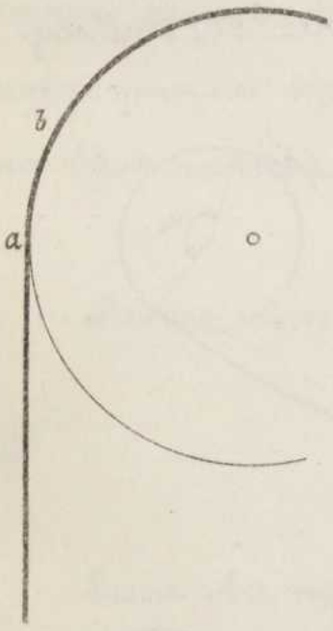
Фиг. 97.

правилу удовлетворяющей.

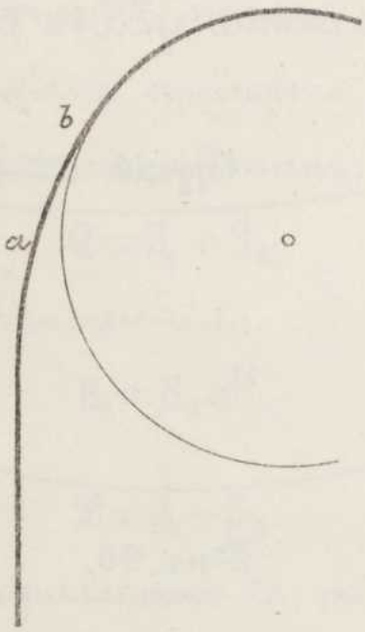
Здѣсь будетъ умѣстно упомянуть вкратцѣ о сущности вопроса о жесткости ремней и канатовъ, досихъ поръ нами не затронутаго. Мы вездѣ предполагали, что ремни (и канаты), о которыхъ шла рѣчь, представляютъ собою тѣла совершенно гибкія, не требующія на свое деформированіе никакой работы. Тонкіе ремни, пожалуй, можно еще считать тѣлами совершенно гибкими, но въ

случаѣ канатовъ, особенно достаточно толстыхъ, такое предположеніе, конечно, мѣста имѣть не можетъ.

Такимъ образомъ, при толстыхъ ремняхъ и канатахъ является еще одинъ источникъ потери работы, это — сопротивленіе этихъ тѣлъ измѣненію ихъ формы. Легко усмотрѣть, что въ той своей части, гдѣ натяженіе меньше, канатъ будетъ прижиматься къ своему блоку менѣе плотно, чѣмъ тамъ, гдѣ это натяженіе



Фиг. 98

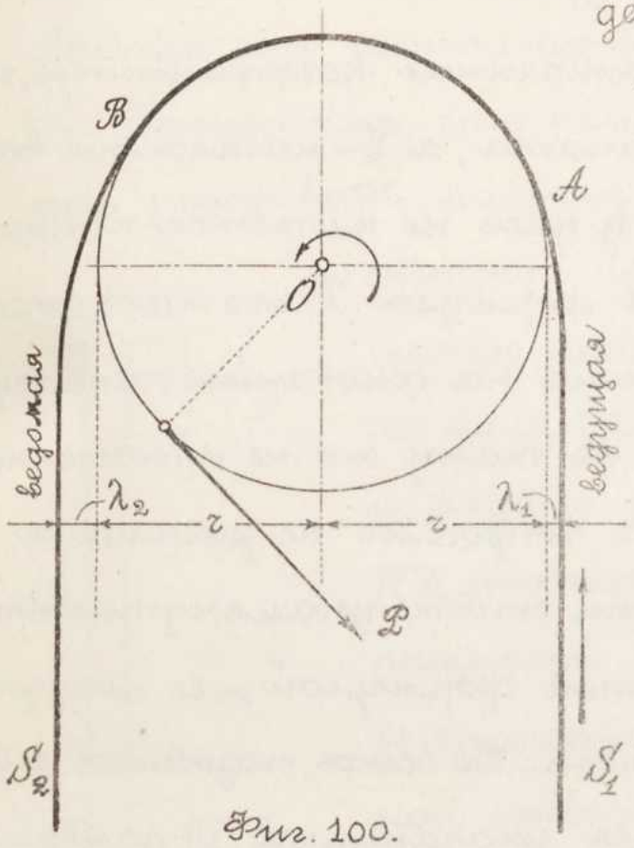


Фиг. 99.

большее. Въ части ab, которая, при совершенно гибкомъ канатѣ, должна была бы уже лежать на блокѣ (фиг. 98) и которая, при жесткомъ канатѣ, еще блока не касается (фиг. 99), сгибанію каната мѣшаетъ его жесткость. Такъ какъ канатъ состоитъ изъ ряда переплетенныхъ нитей, то, при сгибаніи его, въ мѣстахъ соприкосновенія этихъ нитей возникаетъ треніе ихъ между собою, равно какъ сдавливаніе и растягиваніе; на эти именно деформаціи и уходитъ часть работы. Въ ремняхъ эти явленія частью отсутствуютъ, частью же являются значительно ослабленными, почему ремни и оказываются податливѣе канатовъ. Эффектъ жесткости состоитъ въ томъ, что присутствіе ея обусловливаетъ собою какъ бы появленіе нѣкотораго придатка къ плечамъ силъ, дѣйствующихъ на окружс-

ности блока; учесть его можно такъ:

Пусть ведущая часть каната впервые касается блока въ точкѣ A, а ведомая сходитъ съ него въ точкѣ B (фиг. 100). Натяженія ведущей и ведомой частей каната обозначимъ черезъ S_1 и S_2, гдѣ $S_1 > S_2$. Такъ какъ сгибаніе каната будетъ происходить тѣмъ жестче, чѣмъ больше его натяженіе, то въ ведомой части канатъ будетъ отходить отъ блока дальше, чѣмъ въ ведущей. Поэтому, обозначивъ упомянутые придатки плечъ r силъ S_1 и S_2 черезъ λ_1 и λ_2, при чемъ $\lambda_1 < \lambda_2$, можемъ написать уравненіе моментовъ всѣхъ дѣйствующихъ здѣсь силъ S_1, S_2 и P относительно центра вращенія O. Замѣтимъ, что черезъ P обозначено нами окружное сопротивленіе, дающее моментъ сопротивленія Pr. — Это уравненіе моментовъ имѣетъ видъ:



Фиг. 100.

$$S_1(r_1+\lambda_1) - S_2(r_2-\lambda_2) - Pr = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Оно показываетъ, что жесткость каната обусловливаетъ собою потерю момента $(S_2\lambda_2 - S_1\lambda_1)$; потеря же въ работѣ будетъ равна $(S_2\lambda_2 - S_1\lambda_1)\omega$.

Если бы жесткость своего дѣйствія не проявляла, то канатъ могъ бы передать работу $(S_1 - S_2)r\omega = P'r\omega$. Поэтому потеря работы, въ долякъ работы $P'r\omega$, могущей быть переданной канатомъ, выразится дробью:

$$\vartheta = \frac{S_2\lambda_2 - S_1\lambda_1}{P'\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Величину ϑ можно было бы опредѣлить, если бы мы знали величину придатковъ λ_1 и λ_2. Но, кромѣ формулы Вейсбаха:

$$\lambda = \left(\alpha + \beta.\frac{\tau}{d}\right)d^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

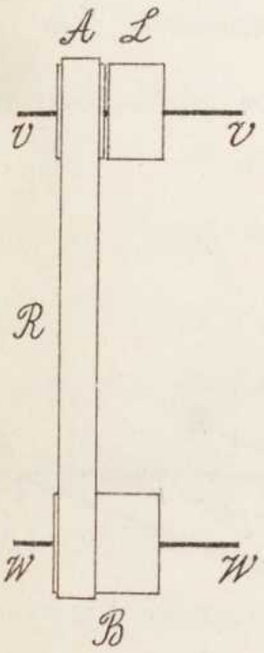
гдѣ α и β суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, τ радіусъ блока, d – діаметръ каната, а S – натяженіе каната въ данномъ мѣстѣ, – у насъ не имѣется почти никакихъ относящихся сюда формулъ. Такъ какъ формула Вейсбаха была выведена имъ на основаніи очень грубыхъ и неточныхъ опытовъ, къ тому же не провѣренныхъ, ибо со временъ Вейсбаха этимъ вопросомъ не занимался никто, то нельзя утверждать, чтобы упомянутые придатки выражались именно этой формулой, – ее слѣдуетъ считать лишь приблизительной. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ лучше всего пользоваться указаніями и данными опыта, полученными при изученіи существующихъ передачъ подобнаго рода.

Нѣкоторые авторы пытались разобраться въ этомъ вопросѣ, допуская иногда самыя крайнія предположенія; такъ, напримѣръ, предполагали, что канатъ сгибается такъ, какъ если бы каждая нить его представляла собою гибкій брусъ или стержень. Однако и эти предположенія не подвинули впередъ рѣшенія поставленнаго вопроса, и данныя этими изслѣдователями формулы никакого предпочтенія передъ Вейсбаховской, въ сущности, не заслуживаютъ.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ видахъ ременной передачи, въ тѣхъ именно, гдѣ ремень приходится перемѣщать съ холостого шкива на рабочій и обратно, – представляется возможность постоянно наблюдать одно явленіе, прекрасно

иллюстрирующее и оправдывающее то изъ основныхъ положеній теоріи трепія скольженія, которое устанавливаетъ тотъ фактъ, что сила трепія направлена всегда прямо противоположно относительной скорости скольженія тѣла въ данный моментъ. Явленіе это состоитъ въ слѣдующемъ:

Допустимъ, что ремень R (фиг. 101) временами имѣетъ передавать работу съ раздаточнаго вала VV мастерской на валъ WW станка. Осуществить такую передачу можно, напримѣръ, такъ: на валъ VV сажаютъ два шкива,—рабочій A и, рядомъ съ нимъ, холостой L,—а на валъ WW станка сажаютъ достаточно широкій пріемный шкивъ B. Тогда, желая привести во вращеніе валъ WW, переводятъ спеціальной отводкой ремень R на рабочій шкивъ A; остановка станка и покой его достигаются путемъ перевода ремня на холостой шкивъ L. И вотъ при этихъ переводахъ ремня всегда можно замѣтить, что движеніе ремня поперекъ шкива A, т.-е. параллельно оси VV, при вращеніи этого шкива выполняется гораздо легче, чѣмъ при его покоѣ; въ этомъ послѣднемъ случаѣ, особенно при туго натянутомъ ремнѣ, передвиженіе ремня по неподвижному шкиву оказывается крайне затруднительнымъ.



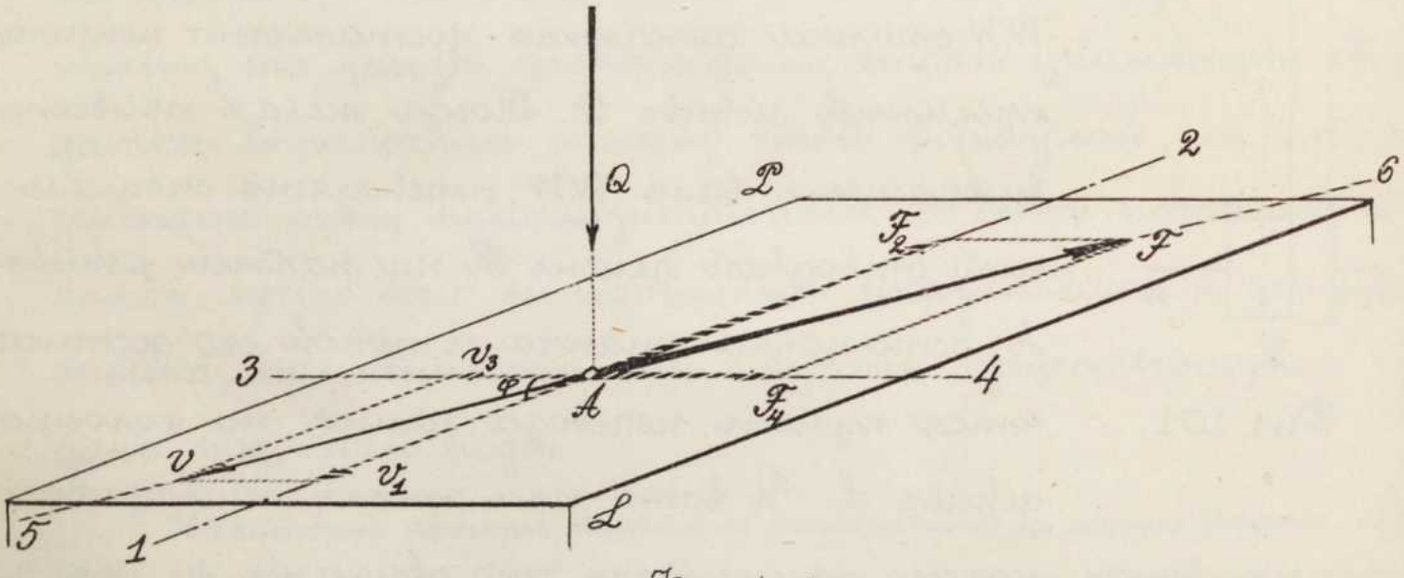
Фиг. 101.

Далѣе оказывается, что передвиженіе ремня по вращающемуся шкиву выполняется тѣмъ легче, чѣмъ скорость вращенія его больше и чѣмъ, при томъ, медлен-

ныѣ мы передвигаемъ ремень.

Явленіе это, на первый взглядъ кажущееся нѣсколько парадоксальнымъ, объясняется весьма просто, если принять во вниманіе упомянутое выше свойство силъ тренія. Чтобы упростить разсужденія, модифицируемъ нѣсколько разсматриваемое явленіе и представимъ его такъ:

Предположимъ, что по неподвижной плоскости PL (фиг. 102) въ нѣкоторомъ направленіи A1 со скоростью v_1 движется матеріальная точка A, прижимаемая къ плоскости силой Q, — положимъ, ради простоты выводовъ, перпендикулярной къ этой плоскости.



Фиг. 102.

Допустимъ, что намъ желательно, не измѣняя движенія точки A по направленію A1, сдвинуть ее вбокъ, по направленію A3, составляющему нѣкоторый уголъ φ съ прежнимъ A1, съ нѣкоторой скоростью v_3. Спрашивается, сколь велико будетъ сопротивленіе такому перемѣщенію точки A? Вопросъ этотъ весьма просто разрѣшается при помощи слѣдующихъ очевидныхъ разсужденій:

Разъ точка A вынуждена теперь совершать одновременно два движенія, со скоростями v_1 и v_3, то въ результатѣ такого составного движенія она должна будетъ перемѣщаться по нѣкоторому новому направленію A5, опредѣляемому діагональю AV параллелограмма скоростей, построеннаго на данныхъ скоростяхъ v_1 и v_3, при чемъ величина скорости этого результирующаго движенія (по A5) опредѣлится величиной этой діагонали.

Итакъ, точка A, совершая одновременно два движенія, по A1 и по A3, будетъ двигаться по нѣкоторому вполнѣ опредѣленному направленію A5, при чемъ, попрежнему, будетъ находиться подъ воздѣйствіемъ силы Q, прижимающей ее къ плоскости PL; эта сила Q возбуждаетъ силу треніе fQ, сопротивляющуюся движенію точки A и, согласно указанному выше положенію, направленную противоположно относительной скорости точки въ разсматриваемый моментъ. Ради краткости письма, будемъ обозначать эту силу треніе fQ черезъ F.

Когда точка A совершала свое движеніе по направленію A1, то эта сила F была направлена противоположно скорости v_1 этого движенія и, значитъ, имѣла направленіе A2. – Теперь точка A движется по направленію A5, отличному отъ прежняго, A1. Слѣдовательно, сила F, не мѣняя прежней своей величины, fQ, измѣнитъ лишь направленіе, ибо, будучи силой треніе, она будетъ теперь вынуждена направиться противоположно скорости v новаго, результирующаго, движенія, и пусть теперешнее направленіе силы F, противоположное направленію A5 скорости v, будетъ AB (фиг. 102).

Разложимъ теперь это полное сопротивленіе движенію точки A, — силу тренія F, — по направленіямъ $A2$ и $A4$, противоположнымъ направленіямъ $A1$ и $A3$, по которымъ вынуждена одновременно двигаться наша точка. Пусть слагающими силы F по этимъ направленіямъ являются силы F_2 и F_4. Въ такомъ случаѣ становится очевиднымъ, что движенію по направленію $A1$ будетъ сопротивляться сила F_2, а движенію по $A3$ — сила F_4, и, значитъ, двигая точку A по направленію $A3$ со скоростью v, мы должны будемъ, прежде всего, преодолѣть сопротивленіе силы F_4, т.-е. приложить къ точкѣ A силу T, равную F_4, но ей прямопротивоположную и, значитъ, направленную по $A3$.

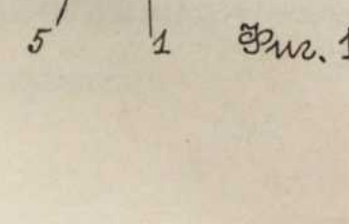
Итакъ, оказывается, что усиліе, нужное для перемѣщенія точки A по направленію $A3$ (кромѣ имѣющагося уже $A1$), равно и прямопротивоположно слагающей F_4 полнаго сопротивленія тренія F, разложеннаго по даннымъ направленіямъ $A2$ и $A4$.

Очевидно, далѣе, что эта слагающая F_4 будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше скорость v_3 по сравненію со скоростью v_1 и чѣмъ ближе уголъ φ къ $90°$. Минимумъ F_4, при данныхъ v_1 и v_3, будетъ имѣть мѣсто при $\varphi = 90°$, — случай этотъ изображенъ здѣсь на фиг. 103. Въ этомъ наивыгоднѣйшемъ для передвиженія точки случаѣ имѣемъ, что

$$F_4 = F\cos\alpha = Qf\cos\alpha,$$

гдѣ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1}{v_3}.$$



Фиг. 103.

Итакъ, дѣйствительно, оказывается, что желаемое смѣщеніе движущейся точки A выполняется тѣмъ легче, чѣмъ

1) ближе уголъ φ къ 90°,

2) чѣмъ меньше скорость v_3 и

3) чѣмъ больше скорость v_1.

Кромѣ того, сила F_4, опредѣляющая собою усиліе, потребное для сдвиженія, будетъ пропорціональна нажимающему усилію Q и коэффиціенту тренія f. — Вопросъ о сдвиженіи точки A можно считать, такимъ образомъ, исчерпаннымъ.

Вернемся теперь къ данной намъ ременной передачѣ. Здѣсь мы имѣемъ движеніе уже не точки, а цѣлой системы (ремня), съ нѣкоторой опредѣленной скоростью и въ нѣкоторомъ опредѣленномъ направленіи. Подобно точкѣ A, система ремня находится, между прочимъ, подъ воздѣйствіемъ силъ, прижимающихъ ее къ поверхности шкива и возбуждающихъ соотвѣтствующія силы тренія, опять, какъ всегда, направляющіяся противоположно скорости ремня. Если систему такого бѣгущаго ремня мы пожелаемъ перевести по шкиву вбокъ, то, аналогично тому, что имѣло мѣсто для точки A, окажется, что направленіе движенія ремня теперь измѣнится, вслѣдствіе чего измѣнится и направленіе силы тренія, такъ что сопротивляться передвиженію ремня будетъ лишь нѣкоторая опредѣленная слагающая полной силы тренія, и нетрудно убѣдиться, что эта слагающая, а значитъ, и сила, нужная для смѣщенія ремня, будутъ тѣмъ меньше, чѣмъ быстрѣе бѣжитъ ремень, т.-е. чѣмъ быстрѣе вращается

шкивъ, и чѣмъ медленнѣе мы этотъ ремень переводимъ.

Болѣе подробное изслѣдованіе этого вопроса даетъ результаты, болѣе сложные по ихъ внѣшнему виду; но сущность рѣшенія остается той же, почему мы и ограничиваемся вышеприведенными простыми соображеніями,— наша цѣль сводилась лишь къ выясненію причины, въ силу коей въ данномъ случаѣ и во всѣхъ другихъ, ему аналогичныхъ, движущаяся съ треніемъ система оказываетъ такое малое сопротивленіе смѣщенію ея въ бокъ.

Такое же самое явленіе приходится наблюдать, напримѣръ, при движеніи саней: пока сани стоятъ неподвижно, сдвинуть ихъ вбокъ довольно трудно; но разъ они пришли въ движеніе, то для сдвиженія ихъ вбокъ понадобится сила, тѣмъ меньшая, чѣмъ быстрѣе движутся сани. Этимъ вполнѣ объясняется явленіе раската саней на поворотахъ, гдѣ смѣщеніе ихъ вбокъ,— перпендикулярно скорости ихъ въ данный моментъ,— происходитъ подъ вліяніемъ центробѣжной силы, развивающейся при описываніи санями поворотовъ и, вообще, при прохожденіи ими криволинейныхъ участковъ пути.

Нетрудно убѣдиться, что стаскиваніе колеса съ оси его значительно облегчается, если станемъ при этомъ вращать это колесо. На практикѣ такъ именно и поступаютъ, вращая колесо, во время его стаскиванія, то въ одну сторону, то въ другую. Здѣсь, какъ и во многихъ другихъ случаяхъ, безсознательно пользуются все тѣмъ же, указаннымъ выше, свойствомъ силъ треніи.

По той же причинѣ весьма легко повернуть рулъ автомобиля на ходу этого послѣдняго и гораздо труднѣе, когда автомобиль стоитъ.

При проектированіи сложнаго золотника Ридера приходится выполнять подсчеты нѣкоторыхъ факторовъ, основанные на соображеніяхъ, аналогичныхъ вышеприведеннымъ.

Этими замѣчаніями мы закончимъ статью о треніи скольженія и перейдемъ къ изложенію статьи о треніи качанія или, какъ говорятъ иначе, треніи второго рода. Явленія этого треніа изучены гораздо меньше, чѣмъ это сдѣлано для треніа скольженія, почему статья о треніи качанія будетъ имѣть объемъ, значительно меньшій, чѣмъ у вышеизложенной статьи о треніи скольженія.

II Треніе качения.

§ 12. Общія соображенія. Связь треніе качения съ треніемъ скольженія. Представленіе Рейнольдса. Коэффиціентъ треніе качения.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда въ относительномъ движеніи двухъ данныхъ тѣлъ оси мгновеннаго вращенія ихъ приходятся на поверхности ихъ соприкосновенія, когда, иными словами, оба тѣла очерчены по полодіямъ даннаго движенія, мы должны были бы получить чистое качение одного тѣла по другому. Податливость матеріаловъ, изъ которыхъ выполняются на практикѣ катящіяся тѣла, извращаетъ, однако, это чистое качение, перевода его въ качение, сопровождаемое скольженіемъ, и ходъ явленій, имѣющихъ здѣсь мѣсто, представляется такимъ:

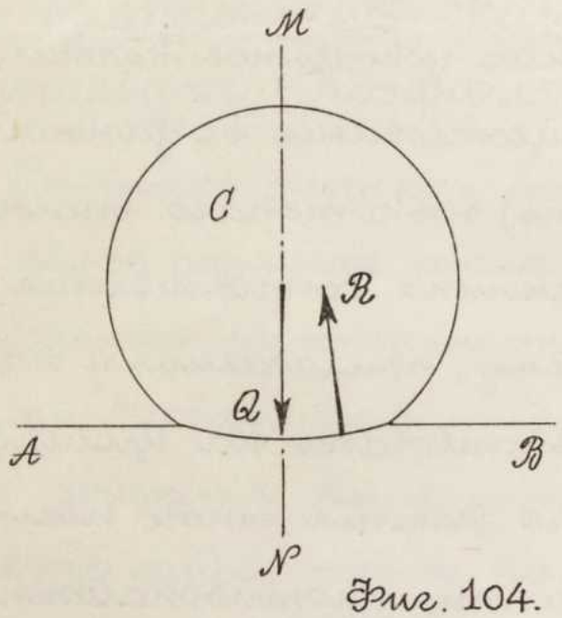
Пусть на горизонтальной плоскости лежитъ нѣкоторый круглый цилиндръ, находящійся все время подъ дѣйствіемъ вертикальной силы,— силы тяжести. Опытъ показываетъ, что, для возможности качения такого цилиндра, къ нему нужно приложить нѣкоторую пару,— создать извѣстный добавочный вращающій моментъ, величина коего, для возможности равномѣрнаго качения цилиндра, должна быть, для данныхъ

цилиндра и плоскости, вполнѣ опредѣленной, при чемъ этотъ добавочный моментъ долженъ дѣйствовать на цилиндръ непрестанно. Если этотъ добавочный моментъ будетъ меньше упомянутой опредѣленной величины, то качения не будетъ; при равенствѣ этихъ факторовъ будетъ имѣть мѣсто, какъ мы указывали, равномѣрное качение; если же этотъ моментъ окажется бо́льшимъ указанной величины, то получимъ ускоренное качение.

Все это указываетъ на существованіе въ данной системѣ (цилиндръ + плоскость) нѣкотораго вполнѣ опредѣленнаго пассивнаго момента сопротивленія, равнаго, очевидно, тому внѣшнему, прилагаемому нами, моменту, который долженъ дѣйствовать на цилиндръ для возможности равномѣрнаго качения этого послѣдняго, и этому внѣшнему моменту противоположнаго. Отсюда слѣдуетъ, что величину этого пассивнаго момента сопротивленія можно опредѣлить опытнымъ путемъ, опредѣляя тотъ моментъ, который даетъ равномѣрное качение цилиндра,—искомый моментъ сопротивленія будетъ ему равенъ. Итакъ, сопротивление качению выражается уже не силой, какъ это имѣло мѣсто въ случаѣ скольженія, а парой силъ, и появленіе ея стараются обычно объяснить такъ:

Пусть круглый цилиндръ C вынужденъ катиться по плоскости AB (фиг. 104). Такъ какъ матеріалы цилиндра и плоскости сжимаемы, то цилиндръ, обладающій извѣстнымъ вѣсомъ, налегши на плоскость, отчасти деформируетъ ее, отчасти же деформируется и самъ,—въ мѣ-

стъ соприкосновенія онъ нѣсколько сплющится, а на плоскости образуетъ подъ собою нѣкоторую желобообразную поверхность. Казалось бы вполнѣ естественнымъ, что, въ виду полной симметріи деформированныхъ частей обоихъ тѣлъ относительно вертикальной діаметральной плоскости MN, въ которой, очевидно, лежитъ сила тяжести Q цилиндра, равнодѣйствующая R всѣхъ силъ упругости, вызванныхъ на деформированной части плоскости AB, будетъ лежать въ той же плоскости MN и дѣйствовать по той же прямой, что и сила Q, но лишь въ противоположную ей сторону; а такъ какъ по величинѣ своей двѣ эти силы должны быть равны, ибо всякое дѣйствіе равно противодѣйствію, то можно было бы ожидать, что двѣ эти силы, какъ равныя и направленныя по одной и той же прямой въ разныя стороны, взаимно уничтожаются. Слѣдовательно, о появленіи какой бы то ни было пары сопротивленія здѣсь не пришлось бы говорить совсѣмъ, ибо силы R и Q, какъ это явствуетъ изъ сказаннаго, никакой пары дать бы не могли, а другихъ силъ, могущихъ дать пару, въ разсматриваемой системѣ нѣтъ.



Фиг. 104.

Факты, однако, говорятъ другое,—мы указывали уже, что пара сопротивленія качанію, несомнѣнно, существуетъ. Въ виду этого разсуждаютъ дальше такъ:

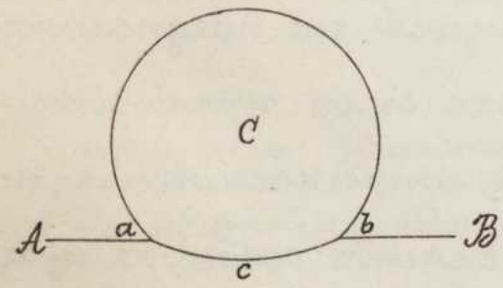
разъ пара сопротивленія существуетъ, а другихъ силъ, кромѣ силъ R и Q, нѣтъ, то и надо принять, что пару сопротивленія и даютъ именно двѣ эти силы. Въ силу такого заключенія эти силы уже нельзя предположить дѣйствующими по одной и той же прямой MN, — теперь ихъ нужно принять расположенными такъ, что сила R, хотя и лежитъ въ плоскости того же вертикальнаго сѣченія, что и сила Q, но отходитъ отъ этой послѣдней впередъ, по направленію движенія, какъ это и изображено на фиг. 104. Сила R можетъ быть нѣсколько наклонена къ вертикали MN, и тогда вертикальная слагающая ея и можетъ, вмѣстѣ съ силой Q, образовать пару, могущую противодѣйствовать парѣ, нами къ тѣлу извнѣ прилагаемой.

Приведенное объясненіе, опирающееся на предположеніе, будто результирующая R всѣхъ силъ упругости не проходитъ черезъ середину дуги соприкосновенія, т.-е. черезъ центръ цилиндра, представляетъ собою, въ сущности, лишь перифразировку этого самого предположенія; оно говоритъ намъ, что дѣло можно объяснить смѣщеніемъ равнодѣйствующей R съ вертикали MN, но не говоритъ самаго главнаго, — почему же происходитъ это смѣщеніе, такое странное и, въ сущности, необъяснимое.

Изложенному выше объясненію, которое, несмотря на всю его очевидную несостоятельность, можно встрѣтить почти во всѣхъ курсахъ механики, слѣдуетъ, во всякомъ случаѣ, предпочесть объясненіе, данное Осборномъ

Рейнольдсомъ и приводимое нами ниже; оно затрагиваетъ самую сущность вопроса и нуждается лишь въ аналитической обработкѣ для того, чтобы его можно было признать окончательнымъ и вполнѣ исчерпывающимъ поставленный вопросъ. Рейнольдсъ задался цѣлью доказать, что треніе качения можетъ быть сведено къ треню скольженія, и ходъ его разсужденій былъ при этомъ таковъ:

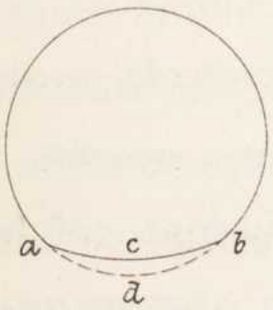
Допустимъ, что на горизонтальной плоскости лежитъ нѣкоторое твердое тѣло, ограниченное криволинейной поверхностью,—ради опредѣленности разсужденій, предположимъ, что тѣло это представляетъ собою круглый цилиндръ. Такъ какъ матеріалы цилиндра и плоскости абсолютной твердостью не отличаются, то въ мѣстѣ соприкосновенія поверхности будутъ вынуждены претерпѣть нѣкоторыя деформаціи,—цилиндръ здѣсь сплющится, а плоскость вдавится (фиг. 105), и нетрудно убѣдиться, что частицы каждой изъ соприкасающихся поверхностей, приходящіяся на этихъ деформированныхъ участкахъ, испытаютъ при деформированіи нѣкоторыя перемѣщенія одни относительно другихъ, а именно: поверхность цилиндра въ мѣстѣ соприкосновенія испытаетъ сжатіе, а поверхность плоскости – растяженіе.



Фиг. 105.

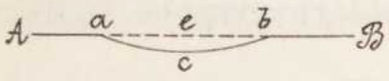
Дѣйствительно, поверхность цилиндра до момента соприкосновенія была строго цилиндричной; съ

наступленіемъ же соприкосновенія съ плоскостью, участокъ adb ея, вошедшій въ соприкосновеніе съ опорной поверхностью, нѣсколько сплющился, получивъ вмѣстѣ съ этимъ меньшую кривизну, и дуга adb перешла теперь въ дугу acb (фиг. 106), очевидно, болѣе короткую, чѣмъ дуга adb. Вслѣдствіе этого, частицы поверхности цилиндра, располагавшіяся раньше по дугѣ adb, теперь, по наступленіи соприкосновенія, расположились по дугѣ acb, болѣе короткой, — значитъ, по необходимости, сблизились, — иначе говоря, на этомъ участкѣ цилиндра произошло сжатіе матеріала его.



Фиг. 106.

Подобнымъ же образомъ нетрудно убѣдиться, что частицы плоскости, до того располагавшіеся на прямолинейномъ участкѣ aeb, теперь укладываются по бо́льшей дугѣ acb (фиг. 107); значитъ, онѣ обязаны теперь раздвинуться, что и указываетъ на то обстоятельство, что участокъ aeb плоскости претерпѣлъ теперь растяженіе.

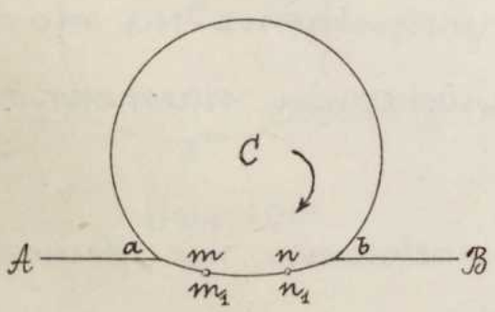


Фиг. 107.

Пока цилиндръ лежитъ на плоскости неподвижно, между силами упругости опорной поверхности и вѣсомъ цилиндра существуетъ равновѣсіе. Но предположимъ, что нѣкоторая пара выводитъ цилиндръ изъ состоянія покоя и заставляетъ его катиться по плоскости. Ясно, что въ такомъ случаѣ начнутъ подвергаться деформированію все новые и новые участки поверхностей цилиндра и плоскости, а одновременно съ этимъ части-

цы участковъ, претерпѣвшихъ деформацію, а теперь одинъ за другимъ возвращающихся въ свое начальное состояніе, станутъ уходить на свои прежнія мѣста, которыя они занимали передъ деформированіемъ ихъ участковъ, такъ что, въ концѣ концовъ, работы на выполненіе этихъ упругихъ деформацій отъ насъ не потребуется совсѣмъ, — ту работу, которую потребуетъ на свою деформацію одинъ участокъ, подвергающійся ей, отдастъ намъ равный ему другой, уже претерпѣвшій деформацію и вернувшійся въ начальное состояніе. Такимъ образомъ, затрата работы, всегда имѣющая мѣсто при каченіи, ни въ какой связи съ работой упругихъ деформацій не находится. Работа, затрачиваемая нами при каченіи, уходитъ, какъ это впервые подмѣтилъ Рейнольдсъ, на преодолѣніе работы тренія скольженія, имѣющаго здѣсь мѣсто. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Кусокъ mn поверхности цилиндра, выйдя изъ соприкосновенія съ плоскостью, непремѣнно долженъ будетъ удлиниться, ибо во время соприкосновенія онъ былъ сжатъ (фиг. 108). Съ другой стороны, совпадавшій съ нимъ во время соприкосновенія кусокъ плоскости m_1n_1, выйдя изъ соприкосновенія, непремѣнно сожмется, ибо во время соприкосновенія онъ былъ растянутъ. Значитъ, какъ только при каченіи цилиндра наступитъ такой моментъ, что элементы (mn, m_1n_1) выйдутъ изъ соприкосновенія, то какъ плоскость, такъ



Фиг. 108.

и цилиндръ, въ этихъ мѣстахъ ихъ будутъ стремиться принять свою прежнюю форму, т.-е. кусокъ mn цилиндра будетъ растягиваться, а кусокъ m_1n_1 плоскости — сжиматься, сокращаться, вслѣдствіе чего каждые два такихъ элемента, при возвращеніи своемъ въ первобытное состояніе, будутъ вынуждены другъ по другу скользить. То же самое придется повторить относительно всѣхъ другихъ элементовъ, находящихся въ данный моментъ въ соприкосновеніи.

Что касается элементовъ, предлежащихъ точкѣ b и имѣющихъ своевременно войти въ соприкосновеніе, то въ началѣ его одни изъ нихъ, — элементы поверхности цилиндра, — должны будутъ сокращаться, а другіе, — элементы плоскости, — растягиваться, что, понятно, опять поведетъ къ относительному скольженію ихъ другъ по другу.

Заключеніе очевидно: разъ при каченіи цилиндра происходитъ такое относительное скольженіе элементовъ поверхностей цилиндра и плоскости, то на выполненіе его, т.-е. на преодолѣніе сопротивленія этому скольженію, нужно затратить извѣстную работу, которую и придется, поэтому, къ катящемуся цилиндру постоянно подводить; этотъ-то подводъ и будетъ выполнять внѣшняя пара, нами къ цилиндру прилагаемая и его во вращеніе приводящая. Если работа этой пары, опредѣляемая, какъ извѣстно, произведеніемъ изъ момента ея на угловую скорость вращенія цилиндра, будетъ меньше работы сопротивленія

скольженію, то движенія не будетъ; при равенствѣ этихъ работъ можетъ имѣть мѣсто равномѣрное каченіе, и, наконецъ, при перевѣсѣ внѣшней работы будемъ имѣть ускоренное каченіе цилиндра

Если въ нѣкоторый моментъ внѣшняя пара, приводившая цилиндръ въ движеніе, свое дѣйствіе прекратитъ, то цилиндръ, по инерціи, свое каченіе продолжитъ, но будетъ катиться уже замедленно, и это каченіе его будетъ длиться до тѣхъ поръ, пока запасъ живой силы, бывшій у цилиндра въ моментъ прекращенія дѣйствія внѣшней пары, не израсходуется цѣликомъ на преодолѣніе работы трѣнія качанія и другихъ сопротивленій. Въ моментъ полнаго исчерпанія этого запаса живой силы цилиндръ прекратитъ свое каченіе и остановится.

Итакъ, трата работы, наблюдаемая при каченіи, обусловливается скольженіемъ элементовъ поверхности одного тѣла по поверхности другого,— таково заключеніе, къ которому пришелъ Рейнольдсъ. Заключеніе это, являясь по существу своему совершенно вѣрнымъ, могло бы привести къ ряду весьма важныхъ результатовъ, если бы его удалось выразить въ аналитической формѣ, перевести на языкъ анализа. Къ сожалѣнію, трудности аналитической обработки здѣсь столь велики, что въ настоящее время надѣяться на разрѣшеніе ихъ еще нельзя. И, такимъ образомъ, хотя картина явленій качанія представляется намъ совершенно ясно, но мы, тѣмъ не менѣе, не имѣемъ возможности изучить ни одного изъ факторовъ качанія, какъ то: распредѣленія

давлений по поверхности соприкосновения, величины работы сжатия на различных участках и т. д. Изследования Рейнольдса важны еще в том отношении, что могут служить отправной точкой для будущих аналитических изысканий по этому вопросу; они могут дать обоснование для некоторых общих практических соображений и изысканий, хотя подкрепление их числовыми данными пока является невозможным.

Практика, однако, с таким положением дела считаться не может и требует от теории представления какого-либо критерия для оценки работы качения, могущей совершиться при данных условиях, — и такой критерий, весьма, впрочем, несовершенный и грубый, был дан уже довольно давно и с тех пор успел войти во всеобщее употребление. Сущность его заключается в следующем:

Учет работы качения и величины сопротивления его принято производить применительно к первому из приведенных нами толкований: сопротивление это оценивается известным моментом M, всегда противодействующим качению и, значит, действующим всегда в сторону, обратную смыслу качения. Этот момент M является, несомненно, функцией и нагрузки Q на цилиндр или, скажем точнее, силы Q, нормальной к поверхности качения, так что

$$M = \varphi(Q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

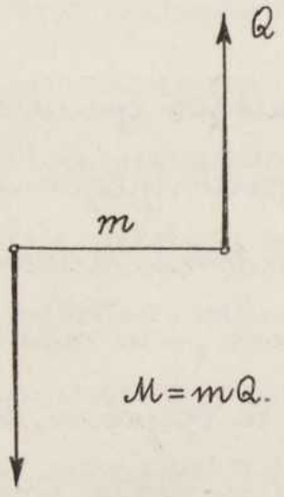
По аналогии с учетом сопротивления скольжению, где сила трения F, оценивающая собою это сопроти-

вленіе, принимается пропорціональной первой степени нагрузки:

$$F = fQ,$$

такъ что коэффиціентъ f представляетъ собою постоянное отвлеченное число,— моментъ M сопротивленія качению принимается пропорціональнымъ также первой степени нагрузки:

$$M = mQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



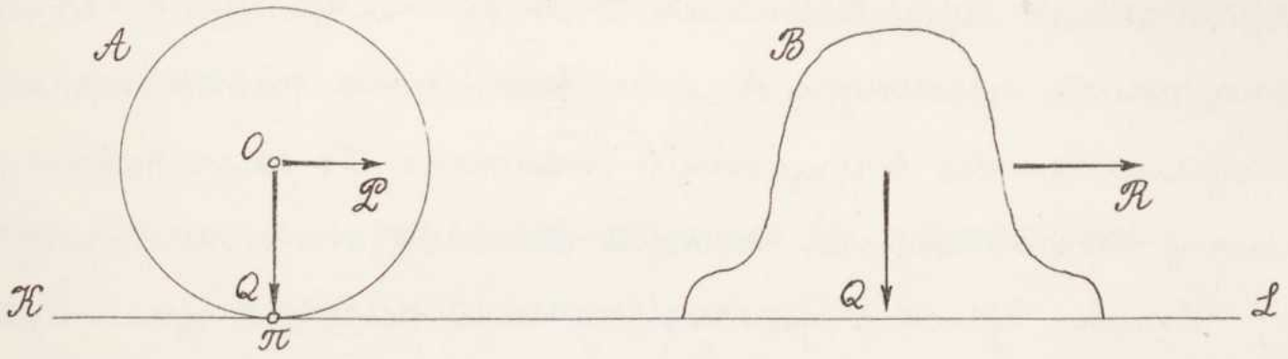
Фиг. 109.

Коэффиціентъ пропорціональности m представляетъ собою, по предположенію, нѣкоторое постоянное число, но это будетъ уже не отвлеченное число, какъ это было въ случаѣ учета скольженія, а число именованное, ибо этотъ коэффиціентъ m опредѣляетъ собою величину (длину) плеча той пары, которая, будучи составлена изъ двухъ силъ Q, имѣетъ моментъ, равный M (фиг. 109).

Въ виду этого, коэффиціентъ m, называемый коэффиціентомъ трепія качепія, всегда долженъ быть задаваемъ въ какихъ-либо опредѣленныхъ единицахъ длины,— сантиметрахъ, дюймахъ и т. д.;—а никакъ не простымъ отвлеченнымъ числомъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ случаѣ скольженія. Измѣреніе коэффиціента m есть $[L]^1$, въ то время какъ f есть величина нулевого измѣренія.....$[L]^0$. Но разъ эти коэффиціенты представляютъ собою величины различныхъ измѣреній, то прямо сравнивать численныя значенія ихъ между собою невозможно, и по абсолютнымъ величинамъ этихъ

коэффиціентовъ еще нельзя судить о томъ, какое движеніе, —каченіе или скольженіе,— выгоднѣе осуществить въ томъ или другомъ данномъ случаѣ, и вопросъ о преимуществахъ того или другого трѣнія можно разрѣшить такъ:

Предположимъ, что нѣкоторое тѣло, вѣсомъ Q, имѣетъ быть перемѣщаемо по плоскости KL. Тѣлу этому



Фиг. 110.

Фиг. 111.

можно дать любую внѣшнюю форму,— его можно выполнить въ видѣ цилиндра A радіуса $O\pi = r$ (фиг. 110), что удобно для качанія, или въ видѣ тѣла B съ болѣе или менѣе развитой опорной поверхностью, что удобно для скольженія (фиг. 111). Подсчитаемъ теперь и сравнимъ между собою тѣ силы P и R, которыя, будучи приложены къ этимъ двумъ формамъ даннаго тѣла, могутъ дать равномѣрное движеніе его, т.-е. равномѣрное каченіе въ случаѣ цилиндра A и равномѣрное скольженіе въ случаѣ формы B.

Сравненіе силъ P и R, а не работъ ихъ, т.-е. не работъ трѣнія того и другого видовъ, является въ данномъ случаѣ вполнѣ закономѣрнымъ, ибо на одномъ и томъ же пути s работы этихъ силъ, а значитъ, и равныя и противоположныя имъ работы трѣнія, пропорціональны величинамъ силъ, ибо выражаются черезъ P_s и R_s. Стало быть, какъ равенство $P_s = R_s$, такъ и неравенства $P_s \leqq R_s$, сводятся къ равенству $P = R$ или къ неравенствамъ $P \leqq R$, т.-е. къ соотношеніямъ того же типа.

Качение цилиндра A сводится, как известно, к ряду элементарных поворотов его вокруг смежных друг друга полюсов мгновенного вращения π (фиг. 110). Поэтому, приложив силу P к оси цилиндра (ее можно приложить и в любой другой точке цилиндра,— см. ниже), получим, что момент силы P, имеющий вращать (катить) цилиндр, выражается произведением P. Oπ, т.-е. Pr, где r = Oπ. Для того, чтобы цилиндр A мог катиться равномерно, необходимо, чтобы вращающий момент Pr был равен моменту сопротивления трения качения, т.-е. моменту mQ.

Итак, условие равномерного качения цилиндра A пишется в виде:

$$Pr = mQ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

откуда получаем величину горизонтальной силы P, приложенной к оси цилиндра и могущей дать равномерное качение его:

$$P = \frac{m}{r} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Переходим теперь к телу B. Для равномерного скольжения его необходимо, чтобы горизонтальная сила R была равна развивающейся здесь силе трения fQ, так что условие равномерного скольжения тела B имеет вид

$$R = fQ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Уравнение это дает в то же время выражение горизонтальной силы R, могущей вызвать равномерное скольжение тела, весом в Q. Сопоставим теперь полученные выше уравнения (3) и (4).

Если

$$P > R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

то это значитъ, что качение цилиндра A потребуетъ приложенія большей силы, чѣмъ скольженіе тѣла B. Иными словами, въ этомъ случаѣ скольженіе выгоднѣе качения.

Соотношеніе (5) можетъ быть представлено въ нѣсколько иномъ видѣ, болѣе удобномъ для пользованія: подставляя вмѣсто $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{R}$ ихъ выраженія изъ (3) и (4), получаемъ неравенство

$$\frac{m}{r}Q > fQ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

послѣ сокращенія на Q переходящее въ неравенство

$$\frac{m}{r} > f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

выражающее преимущество скольженія. — Идемъ дальше.

Если

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{R}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

то это значитъ, что качение цилиндра потребуетъ приложенія къ нему такой же силы, какая потребуется для равномѣрнаго скольженія его. Пользуясь выраженіями (3) и (4), можемъ этому равенству (7) дать видъ

$$\frac{m}{r} = f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Таково условіе эквивалентности скольженія и качения.

Если, наконецъ,

$$\mathfrak{P} < \mathfrak{R}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

такъ что

$$\frac{m}{r} < f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

то для качения понадобится меньшая сила, чѣмъ для скольженія, такъ что неравенства (9) и (10) выражаютъ собою преимущество качения.

При всѣхъ этихъ разсужденіяхъ необходимо помнить, что они были проведены въ томъ предположеніи, что сила P, дѣйствующая на цилиндръ, приложена въ центрѣ O поперечнаго его сѣченія (круга). Если точка приложенія силы P лежитъ не въ центрѣ O, а въ какомъ-либо другомъ мѣстѣ сѣченія, то результаты будутъ имѣть нѣсколько другой видъ, вполнѣ, впрочемъ, аналогичный полученнымъ выше, — подробно объ этомъ будетъ сказано ниже.

Вопросъ о преимуществахъ того или иного способа перемѣщенія тѣла, разобранный выше и детально освѣщенный формулами (2)—(10), можно поставить нѣсколько иначе, сформулировавъ его такъ:

Данъ цилиндръ радіуса r и вѣса Q, имѣющій перемѣщаться по плоскости KL подъ воздѣйствіемъ силы P, параллельной этой плоскости и приложенной въ центрѣ O. Спрашивается, какъ будетъ двигаться этотъ цилиндръ, — катясь или скользя, — и каковы условія того или другого движенія, предполагая, что оба эти движенія имѣютъ совершаться равномѣрно.

Рѣшеніе этого вопроса совершенно тождественно съ приведеннымъ выше. Цилиндръ, какъ и всякое другое тѣло, можетъ скользить, но онъ можетъ еще также и катиться, чего не могутъ выполнять многія другія тѣла. Поэтому примѣнительно къ цилиндру можемъ написать, что сопротивленіе скольженію его выразится силой Qf, и сила P, для возможности равномѣрнаго скольженія, должна быть равна этому сопротивленію Qf:

$$P = Qf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Условіе равномѣрнаго качения нашего цилиндра, примѣнительно къ даннымъ условіямъ (фиг. 110), напишется такъ:

$$Pr = mQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Теперь очевидно, что если сила P неспособна вызвать качение цилиндра, а можетъ лишь заставить его скользить, то должны удовлетворяться соотношения:

$$P = Qf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

и

$$mQ > Pr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Соотношения эти могутъ быть совмѣщены въ одно, имѣющее видъ:

$$m > fr$$

или

$$\frac{m}{r} > f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

— получилось то же соотношение (6).

Если сила P можетъ катить цилиндръ, но заставить скользить его не можетъ, то будутъ удовлетворяться неравенства

$$P < Qf$$

и

$$Pr = mQ,$$

откуда получаемъ объединяющее ихъ неравенство

$$\frac{m}{r} < f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

— прежнее соотношение (10).

Если, наконецъ, сила P съ одинаковымъ успѣхомъ можетъ выполнять какъ качение цилиндра, такъ и скольженіе его, то будутъ одновременно удовлетворяться равенства:

$$\mathfrak{P} = Qf,$$

$$\mathfrak{P}r = mQ,$$

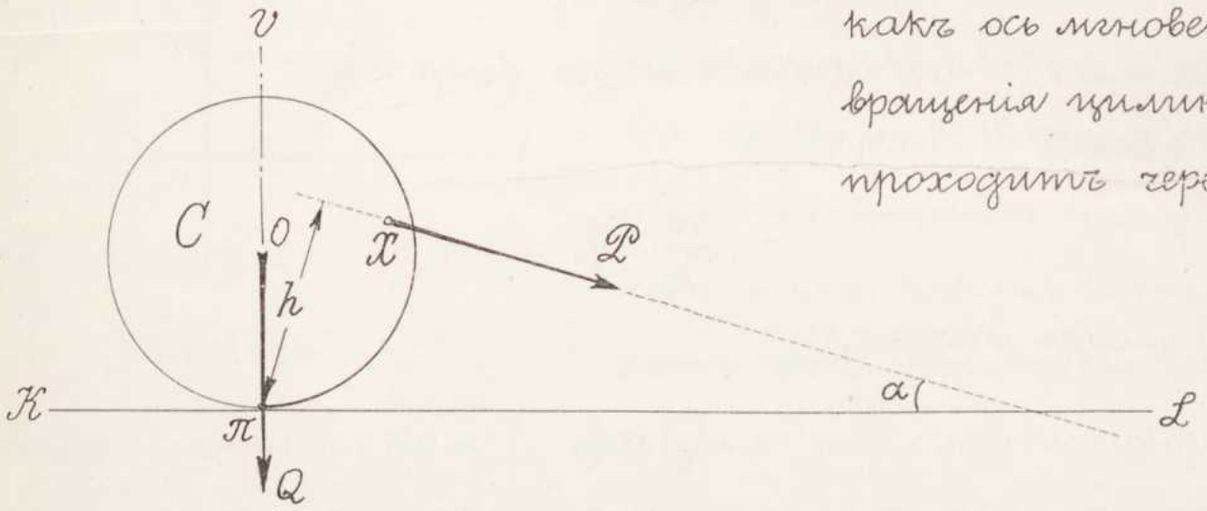
т.-е. равенство

$$\frac{m}{r} = f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

Соотношенія (6'), (8') и (10') въ томъ отношеніи, что самымъ очевиднымъ образомъ выясняютъ необоснованность общераспространеннаго мнѣнія, будто круглое тѣло,—круглый цилиндръ,—будетъ всегда катиться, разъ на него будетъ дѣйствовать какая бы то ни было сила, гдѣ-угодно въ сѣченіи C его приложенная. Оказывается, что это вовсе не такъ: цилиндръ, кромѣ качанія,—рода движенія, преимущественно присущаго ему по его геометрическимъ свойствамъ, можетъ испытывать еще и скольженіе,—движеніе, какъ видимъ, болѣе общаго характера. При данномъ характерѣ нагрузки цилиндра силой $\mathfrak{P}$,—мы прилагали ее все время въ центрѣ O поперечнаго сѣченія,—возможность того или другого движенія всецѣло зависитъ отъ соотношенія между величинами m/r и f: каждый разъ мы будемъ получать то движеніе, къ которому относится коэффиціентъ въ меньшей части неравенствъ (6') и (10'). Продолжимъ теперь наши изслѣдованія дальше.

Прежде всего, слѣдуетъ отмѣтить, что сила $\mathfrak{P}$, имѣющая приводить цилиндръ въ движеніе, далеко не всегда прилагается въ центрѣ поперечнаго сѣченія C цилиндра, какъ это имѣло мѣсто въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 110. Сила $\mathfrak{P}$ можетъ быть приложена и въ какой-либо другой точкѣ этого сѣченія, и общій случай воздѣйствія этой силы на цилиндръ мы теперь и разберемъ.

Пусть сила P, лежащая въ плоскости съченія C, направлена не параллельно плоскости KL, какъ это было предположено выше, а подъ угломъ α къ ней, отличнымъ отъ нуля; точка X приложенія этой силы пусть, при этомъ, лежитъ внѣ вертикальнаго діаметра πOV (фиг. 112). Такъ какъ ось мгновеннаго вращенія цилиндра проходитъ черезъ



Фиг. 112.

полюсъ мгновеннаго вращенія π, то, опустивъ изъ этой точки π перпендикуляръ h на направленіе силы P, найдемъ, что моментъ, имѣющій вращать цилиндръ, равенъ Ph, и условіе равномѣрнаго вращенія цилиндра этой силой P напишется такъ:

$$Ph = mQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Съ другой стороны, условіе равномѣрнаго скольженія выразится уравненіемъ

$$fQ = P\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Поэтому заключаемъ, что скольженіе будетъ имѣть мѣсто при

$$\frac{m\cos\alpha}{h} > f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

качені̀е – при

$$\frac{m\cos\alpha}{h} < f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

и, наконецъ, оба эти вида движенія будутъ равновозможны

при

$$\frac{m\cos\alpha}{h}=f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Если сила P направлена параллельно K_2, такъ что

$$\alpha=0$$

и

$$\cos\alpha=1,$$

то условія (13)–(15) принимаютъ видъ:

1) условіе скольженія

$$\frac{m}{h}>f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

2) условіе качанія

$$\frac{m}{h}<f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

и 3) условіе эквивалентности этихъ двухъ родовъ движенія

$$\frac{m}{h}=f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Если сила P направлена параллельно K_2, а $h=r$, т.-е. сила P приложена въ центрѣ съѣзда, какъ это изображено на фиг. 110, то мы, подставляя въ формулахъ (16)-(18) r вмѣсто h, получимъ найденныя уже выше формулы (6), (8) и (10).

Если, какъ это часто случается на практикѣ,

$$h=2r,$$

—этотъ случай изображенъ на фиг. 113,— то

1) качаніе получится при

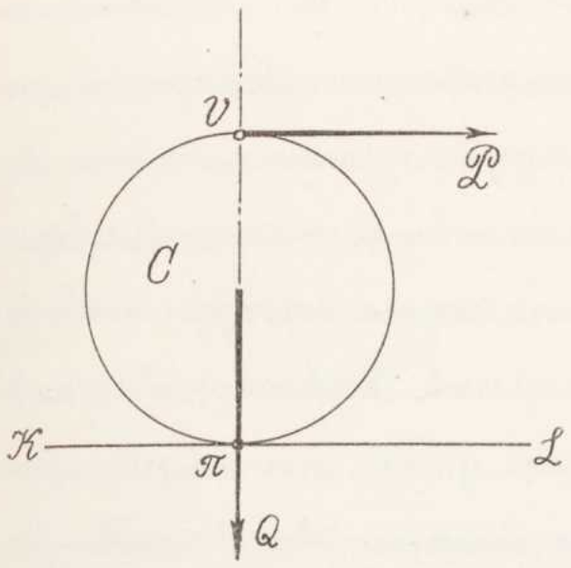
$$\frac{m}{2r}<f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

2) скольженіе — при

$$\frac{m}{2r}>f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

и 3) оба рода движенія будутъ равновозможны при

$$\frac{m}{2r} = f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$



Фиг. 113.

Вышеприведенныя выраженія, устанавливающія зависимость вида движенія цилиндра отъ соотношенія между величинами m/h и f, важны еще въ томъ отношеніи, что указываютъ намъ, какимъ образомъ можетъ быть выполняемо сравненіе коэффиціентовъ m и f; сравненіе это, будучи невозможнымъ путемъ непосредственнаго сопоставленія величинъ m и f, относящихся къ данному случаю, становится возможнымъ путемъ обращенія именованной величины m въ отвлеченную путемъ дѣленія ея на плечо h силы, имѣющей двигать цилиндръ, относительно полюса мгновеннаго вращенія π. Полученное такимъ образомъ отвлеченное число m/h можно затѣмъ сравнивать съ коэффиціентомъ f, — меньшее изъ этихъ чиселъ и укажетъ на движеніе, могущее имѣть здѣсь мѣсто. Какъ видимъ, подобныя сравненія должны быть выполняемы отдѣльно для каждаго даннаго случая.

Сравненіе работъ, затрачиваемыхъ при каченіи тѣла и, затѣмъ, при скольженіи его, показываетъ, что въ обычныхъ условіяхъ движенія работа трепія каченія меньше работы трепія скольженія. Съ точки зрѣнія Рейнольдса, такое преимущество каченія является вполнѣ понятнымъ.

Дѣйствительно, предположимъ, что нѣкоторое круглое тѣло продвинулось по опорной поверхности на нѣкоторое разстояніе s, одинъ разъ скользя по этой поверхности, а другой разъ катясь по ней. Не трудно убѣдиться, что въ первомъ случаѣ скольженіе будетъ имѣть мѣсто на всемъ этомъ пути s, а во второмъ случаѣ путь, пройденный чистымъ скольженіемъ, будетъ равенъ лишь нѣкоторой малой долѣ всего этого пути s. На самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что каченіе сводится также къ скольженію, но къ скольженію поверхностей, деформированныхъ вслѣдствіе нажатія: такъ, за время прохожденія каченіемъ пути aeb (фиг. 107), скольженіе будетъ имѣть мѣсто, говоря суммарно, лишь на пространствѣ $[(adb-acb)+(acb-aeb)]=adb-aeb$, а никакъ не на всемъ участкѣ aeb. А такъ указанная разность, при сколь-нибудь твердыхъ матеріалахъ тѣла и поверхности, оказывается всегда очень малой, то будетъ весьма малымъ какъ скольженіе, такъ и работа, потребная на него.

Таковы соображенія, скрыто лежащія въ основаніи общераспространеннаго мнѣнія о преимуществахъ качества передъ скольженіемъ, — мнѣнія, выражаемаго лаконически въ формѣ, по существу, неточной и неправильной: обыкновенно говорятъ, что «треніе качества меньше треніе скольженія». Вышеприведенныя соображенія достаточно ясно показываютъ, какъ нужно понимать такое утвержденіе, — дѣло здѣсь не въ треніи, а въ работѣ треніе.

Непосредственный опытъ уже съ незапамятныхъ временъ указалъ людямъ на преимущественную выгодность качества, и при перемѣщеніи тяжести издавна

пользовались катками, подкладывая их подъ грузы или подъ платформы, эти грузы несущія; пользуемся такими катками, придавая имъ различныя внѣшнія формы, и мы,—подшипники и подпятники на шарикахъ, платформы вращающихся круговъ на коническихъ роликахъ и другія тому подобныя детали пользуются въ наше время повсѣмѣстнымъ и вполнѣ заслуженнымъ распространеніемъ.

Рядъ соображеній, приведенныхъ выше, позволяетъ намъ разобраться во всѣхъ вопросахъ, гдѣ приходится сталкиваться съ треніемъ качанія. Необходимо помнить всегда лишь одно, что

> качаніе представляетъ собою непрерывный рядъ поворотовъ тѣла около мгновенныхъ осей вращенія, лежащихъ на поверхности соприкосновенія,

въ виду чего для возможности качанія необходимо обезпечить возможность вращенія (поворота) тѣла около каждой такой оси; иными словами, необходимо, чтобы катящееся тѣло имѣло возможность обезпечить неподвижность каждой очередной своей мгновенной оси вращенія. Требованіе это сводится, иначе говоря, къ тому, чтобы треніе между соприкасающимися поверхностями было настолько велико, чтобы катящееся тѣло, подведя такую очередную ось—прямую въ совпаденіе съ опорной поверхностью, могло, благодаря тренію, получить и обезпечить неподвижность этой прямой за все время τ своего вращенія около нея. Если

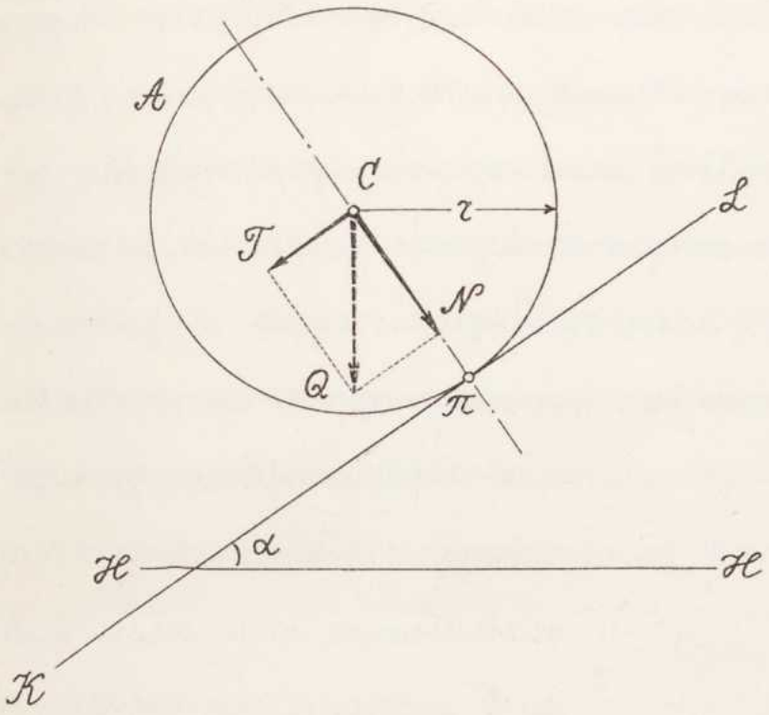
же треніе окажется слишкомъ малымъ для того, чтобы указанная прямая могла задержаться на опорной поверхности, то каченіе имѣть мѣсто не сможетъ.

Этими замѣчаніями мы закончимъ изложеніе общихъ соображеній относительно треніа каченіа и перейдемъ къ разсмотрѣнію ряда наиболѣе важныхъ въ практическомъ отношеніи примѣровъ и задачъ, въ которыхъ приходится сталкиваться съ сопротивленіями треніа обоихъ видовъ и учитывать ихъ совмѣстно.

§13. Движеніе цилиндра по наклонной плоскости. Движеніе тѣлъжекъ подъ воздѣйствіемъ силъ внѣшнихъ и силъ внутреннихъ. Случай буксованіа.

Разберемъ теперь нѣсколько важнѣйшихъ задачъ на примѣненіе полученныхъ въ предыдущемъ параграфѣ общихъ правилъ и формулъ, и прежде всего разберемъ задачу о движеніи тяжелаго цилиндра по наклонной плоскости подъ воздѣйствіемъ силы тяжести, т.-е. собственнаго вѣса его. Обычно предполагается, что разъ цилиндръ, будучи положенъ на горизонтальную плоскость, предоставляется затѣмъ самому себѣ, то, каковъ бы ни былъ матеріалъ и размѣры его, а онъ сейчасъ же непремѣнно начнетъ съ этой плоскости скатываться, — ни скольженіе его по плоскости, ни покой его на ней возможными вообще не предполагаются. Посмотримъ теперь, какъ дѣло это можетъ обстоять въ дѣйствительности.

Пусть нѣкоторый круглый цилиндръ A радіуса r и вѣса Q (фиг. 114) помѣщенъ на наклонной плоскости $K\mathcal{L}$, составляющей съ горизонтомъ уголъ α, и предоставляется затѣмъ самому себѣ, такъ что онъ оказывается находящимся подъ воздѣйствіемъ вертикальной силы Q,— вѣса его,— приложенной въ центрѣ тяжести C его, т.-е. на серединѣ оси его. Положимъ, что поперечное сѣченіе цилиндра, проходящее черезъ центръ тяжести C, совпадаетъ съ плоскостью чертежа, и ось цилиндра пусть расположилась горизонтально, такъ что цилиндръ касается плоскости $K\mathcal{L}$ также по горизонтальной прямой, проходящей черезъ точку касанія π и представляющей собою ось мгновеннаго вращенія системы цилиндра въ разсматриваемый моментъ движенія.



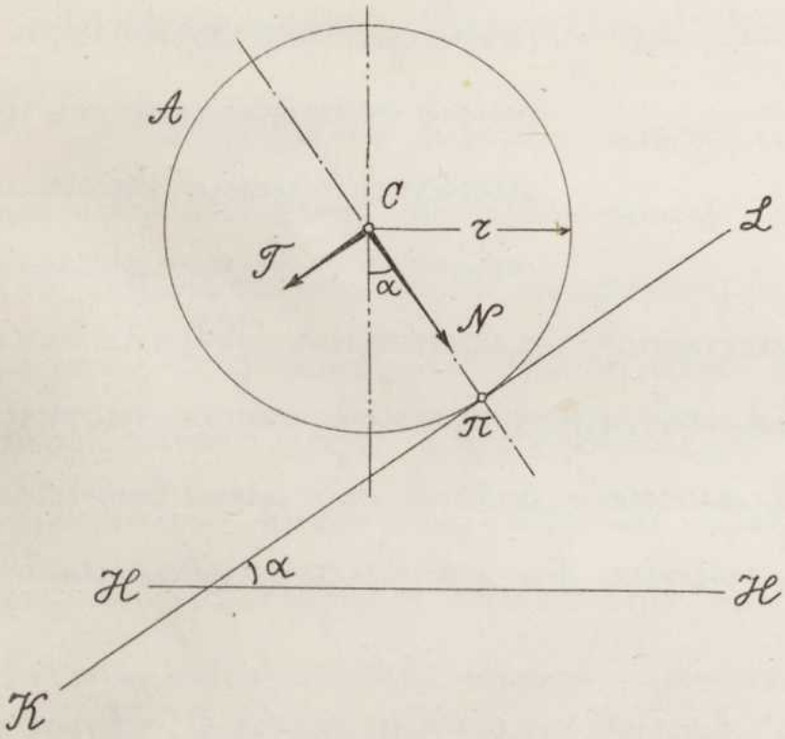
Фиг. 114.

Разложимъ теперь вертикальную силу Q,— вѣсъ цилиндра,— на силу T, параллельную плоскости $K\mathcal{L}$, и на силу N, этой плоскости перпендикулярную. Связь этихъ силъ съ силой Q устанавливается соотношеніями:

$$T = Q\sin\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$N = Q\cos\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Таким образом, если цилиндр A, положенный, как указано, на плоскость KL, будет, затем, предоставлен сам себе, то единственной активной внешней силой, могущей не только вызвать движение цилиндра, но и поддерживать его дальше, является слагающая T силы тяжести, параллельная плоскости KL. Что же касается силы N, перпендикулярной к плоскости KL, то она обусловливает собою возникновение проявляющихся здесь трений, и, таким образом, если цилиндр будет по плоскости скользить, то сопротивление трения скольжения выразится силой Nf; если же цилиндр будет по плоскости катиться, то момент пары сопротивления качению выразится через mN. Заметим, наконец, что силы Q, N и T можно считать приложенными в центр тяжести C цилиндра, совпадающем с геометрическим центром взятого нами кругового сечения.



Фиг. 115.

Отбросим теперь силу Q, заменив ее силами T и N, ее слагающими (фиг. 115). Нетрудно усмотреть, что мы получили здесь основной случай движения, уже разобранный выше и изображенный на фиг. 110: роль силы P, параллельной опорной поверхности

и приложенной въ центрѣ сѣченія, играетъ здѣсь сила T, а роль силы Q, нормальной къ той же опорной поверхности,— сила N.

Очевидно, что каченіе цилиндра будетъ возможно при условіи

$$mN < Tr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ Tr есть моментъ вращающей силы T относительно полюса мгновеннаго вращенія π, а mN — моментъ сопротивленія качению. Подставляя въ (3) вмѣсто T и N ихъ выраженія изъ (1) и (2), находимъ соотношеніе

$$mQ\cos\alpha < rQ\sin\alpha,$$

что, послѣ очевидныхъ упрощеній, и даетъ, наконецъ, условіе возможности качения цилиндра по наклонной плоскости подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса его, въ видѣ соотношенія

$$\frac{m}{r} < \operatorname{tg}\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Нетрудно вывести теперь и условіе скольженія цилиндра подъ воздѣйствіемъ силы тяжести. Очевидно, что оно будетъ имѣть мѣсто

1) при условіи невозможности качения, имѣющемъ, въ силу (4), видъ

$$\frac{m}{r} > \operatorname{tg}\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

и 2) при непремѣнномъ условіи того, чтобы плоскость KL не была самотормозящей, т.-е. чтобы было

$$\operatorname{tg}\alpha > f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

иначе, чтобы

$$\alpha > \varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ φ есть уголъ трения.

Сочетая вмѣстѣ условія (5) и (6), получаемъ условіе скольженія цилиндра по наклонной плоскости подъ воздѣйствіемъ силы тяжести, въ видѣ ряда неравенствъ

$$\frac{m}{r} > \operatorname{tg}\alpha > f,$$

сводящагося, очевидно, къ неравенству

$$\frac{m}{r} > f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Условіе покоя изобразится соотношеніями

$$f > \frac{m}{r} > \operatorname{tg}\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Имѣя въ виду, что при данныхъ условіяхъ, каковыми въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ являются матеріалы цилиндра и плоскости и уголъ этой послѣдней съ горизонтомъ, зависящимъ отъ насъ является лишь выборъ того или другого радіуса r, мы всегда можемъ обезпечить себѣ, по желанію, или каченіе, или скольженіе. Предположимъ, что плоскость несамотормозящая ($\alpha > \varphi$), такъ что цилиндръ можетъ по ней какъ скользить, такъ и катиться. Если онъ имѣетъ по этой плоскости катиться, то, для обезпеченія этого, радіусъ r надо подобрать настолько большимъ, чтобы удовлетворилось условіе (4): $m/r < f$. Если же цилиндръ долженъ по плоскости скользить, то должно быть удовлетворено условіе (8): $m/r > f$. Въ этомъ случаѣ радіусъ r выходитъ обычно очень малымъ. Такъ, пусть для данныхъ матеріаловъ $m = 0{,}1$ см и $f = 0{,}2$; тогда оказывается, что r долженъ быть $< 0{,}5$ см.; при этомъ условіи цилиндръ, будучи положенъ на плоскость, скатиться по ней не сможетъ; онъ сможетъ только съ нея сползти, если только уголъ α не окажется меньше угла трения φ.

Перейдемъ теперь къ болѣе сложнымъ задачамъ, при чемъ ограничимся лишь тѣми, въ которыхъ приходится имѣть дѣло съ катками, примѣняемыми при перемѣщеніи грузовъ, и, прежде всего, разберемъ одну изъ древнѣйшихъ формъ транспорта грузовъ при помощи платформы на каткахъ, какъ это изображено на фиг. 116.

Предположимъ, такимъ образомъ, что на n катковъ одинаковаго размѣра, т.-е. съ однимъ и тѣмъ же радіусомъ r поперечнаго сѣченія, лежащихъ на горизонтальной плоскости KL, положена платформа AB, несущая на себѣ грузъ Q. Спрашивается, какую горизонтальную силу H нужно приложить къ платформѣ, чтобы она стала двигаться равномѣрно?

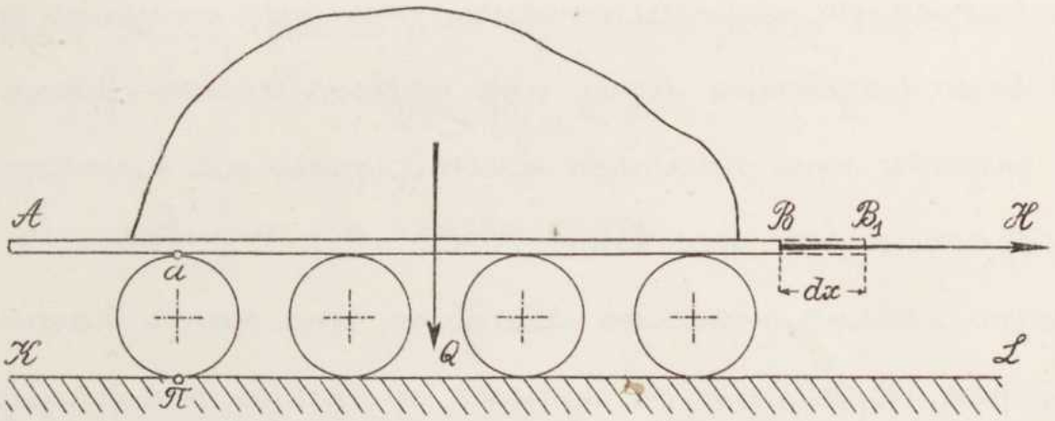
Непремѣннымъ условіемъ этой равномѣрности является то, чтобы за какой-либо промежутокъ времени dt работа влекущей силы H была равна совершенной за то же время dt работѣ всѣхъ сопротивленій, каковыми являются здѣсь сопротивленія тренія качения катковъ какъ по плоскости KL, такъ и по перемѣщающейся относительно нихъ платформѣ AB. Напишемъ уравненіе элементарныхъ работъ, выполненныхъ за безконечно-малое время dt всѣми участвующими здѣсь силами.

Пусть за время dt платформа передвинулась на dx. Элементарная работа влекущей силы H, — обозначимъ ее черезъ ΔL_{ye}, — выразится поэтому такъ:

$$\Delta L_{ye} = H\,dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Перейдемъ теперь къ подсчету элементарныхъ работъ сопротивленій. Обозначимъ коэффиціентъ тренія качения для катковъ по плоскости KL черезъ m_1, а для катковъ и

платформы AB — черезъ m_2. Матеріалы плоскости и платформы могутъ быть одинаковы, но могутъ быть и различны;



Фиг. 116.

ради общности выводовъ, мы беремъ именно послѣдній случай. Согласно основнымъ положеніямъ теоріи качения, моменты сопротивленія качению выразятся здѣсь такъ:

1) для катковъ и плоскости KL

$$M_1 = m_1 Q, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

2) для катковъ и платформы AB

$$M_2 = m_2 Q, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

при чемъ оба момента берутся суммарно, учитывая сопротивленіе качению сразу всѣхъ n катковъ, здѣсь участвующихъ; иначе говоря, мы полагаемъ, что каждый изъ катковъ нагруженъ грузомъ Q/n, вслѣдствіе чего и окажется, что моментъ сопротивленія качению каждаго катка по плоскости KL равенъ $m_1 \cdot Q/n$, а по платформѣ AB — равенъ $m_2 \frac{Q}{n}$. Для всѣхъ n катковъ получимъ выраженія, приведенныя выше.

Такимъ образомъ, общій моментъ сопротивленія качению всѣхъ n катковъ, M, выразится суммой моментовъ M_1 и M_2, такъ что можно написать, что

$$M = M_1 + M_2 = (m_1 + m_2) Q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Элементарная работа сопротивлений качению выразится, такимъ образомъ, черезъ

$$\Delta \mathcal{L}_w = M\omega dt = (m_1 + m_2) Q \omega dt, \quad . \quad . \quad . \quad . (\varepsilon)$$

гдѣ ω есть угловая скорость вращенія катковъ во взятый моментъ, въ то же время представляющая собою мгновенную угловую скорость вращенія катковъ около ихъ полюсовъ мгновеннаго вращенія. Это обстоятельство даетъ возможность установить связь между элементарнымъ перемѣщеніемъ платформы dx, угловой скоростью ω и радіусомъ катка r.

Дѣло въ томъ, что центръ (ось) мгновеннаго вращенія каждаго катка лежитъ въ точкѣ Π касанія его съ плоскостью KL. Такъ какъ каченіе катка за время dt сводится къ повороту его вокругъ полюса Π съ угловой скоростью ω, то точка a касанія катка съ платформой AB за это время dt продвинется на разстояніе $\omega . 2r . dt$, а такъ какъ это перемѣщеніе точки a равно, понятно, перемѣщенію платформы dx, ибо платформа относительно катковъ катится, но не скользитъ, то мы и можемъ написать, что

$$dx = \omega . 2r\, dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (\varkappa)$$

Въ виду этого выраженіе (α) принимаетъ видъ

$$\Delta \mathcal{L}_{\varkappa} = \mathcal{H}\, dx = \mathcal{H}\omega . 2r\, dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (\eta)$$

Мы уже указывали, что, для возможности равномѣрнаго движенія системы необходимо, чтобы за каждый промежутокъ времени работа движущей силы была равна работѣ сопротивленій. Примѣнительно къ данному случаю это ведетъ къ равенству

$$\Delta \mathfrak{L}_{\mathcal{H}} = \Delta \mathfrak{L}_{w},$$

что, въ виду (η) и (ε), приводитъ къ уравненію

$$\mathcal{H}\omega . 2r\,dt = (m_1 + m_2) Q\omega\,dt.$$

Сокращая на $\omega\,dt$, находимъ выраженіе силы $\mathcal{H}$, дающей равномѣрное перемѣщеніе груза Q:

$$\mathcal{H} = \frac{m_1 + m_2}{2r} Q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Мѣняя матеріалы платформы, но оставляя тѣ же катки и плоскость $K\mathfrak{L}$, равно какъ тотъ же грузъ Q, и находя, затѣмъ, соотвѣтствующія $\mathcal{H}$, дающія равномѣрное движеніе платформы, можемъ опредѣлить сначала коэффиціентъ m_1, а затѣмъ и коэффиціентъ m_2. Это — обычный путь для опредѣленія этихъ коэффиціентовъ.

Вѣсъ платформы можно включить въ вѣсъ груза Q. Что касается катковъ, то въ вышеприведенномъ расчетѣ вѣса ихъ мы во вниманіе не приняли, считая его ничтожно малымъ сравнительно съ Q. Если бы, однако, этого сдѣлать было нельзя, по значительности вѣса катковъ, то учетъ горизонтальной силы, могущей равномѣрно тащить грузъ, можно было бы выполнить такъ:

Пусть всѣ n катковъ имѣютъ одинаковый вѣсъ и пусть вѣсъ каждаго катка равенъ q, такъ что общій вѣсъ ихъ есть nq. Наличность этой вертикальной силы nq сказывается увеличеніемъ момента трѣнія качанія катковъ по плоскости $K\mathfrak{L}$, но, разумѣется, нисколько не отзывается на моментѣ сопротивленія качанію этихъ катковъ относительно платформы AB; такимъ образомъ, наличность катковъ вызываетъ появленіе новаго добавочнаго мо-

мента сопротивления качению, равнаго $m_1 . nq$. Въ силу этого оказывается, что полный моментъ M_1' сопротивления качению катковъ по плоскости K_2, принимая во вниманіе уже и вѣсъ катковъ, изобразится такъ:

$$M_1' = m_1 Q + m_1 . nq = m_1 (Q + nq).$$

Въ то же время моментъ сопротивления качению катковъ относительно платформы AB останется, попрежнему, равнымъ $m_2 Q$, — выше мы обозначили его черезъ M_2, такъ что

$$M_2 = m_2 Q.$$

Вслѣдствіе этого полный моментъ сопротивления качению, M', выразится теперь такъ:

$$M' = M_1' + M_2 = (m_1 + m_2) Q + m_1 nq.$$

Элементарная работа этого момента M' напишется такъ:

$$\Delta \mathfrak{L}_w' = M' \omega dt,$$

послѣ чего уравненіе возможныхъ работъ приметъ видъ

$$\mathfrak{H}' . 2r . \omega dt = M' \omega dt,$$

откуда получаемъ выраженіе искомой горизонтальной силы $\mathfrak{H}'$:

$$\mathfrak{H}' = \frac{M'}{2r}.$$

Подставляя вмѣсто M' его выраженіе, написанное выше, получаемъ, что

$$\mathfrak{H}' = \frac{m_1 + m_2}{2r} Q + \frac{m_1 nq}{2r} = \mathfrak{H} + \frac{m_1}{2r} nq. \quad . \quad . \quad (11)$$

Поправка силы $\mathfrak{H}$ на вѣсъ nq катковъ равна, какъ и слѣдовало ожидать, величинѣ $m_1 nq / 2r$.

По поводу уравненія (10) можно замѣтить еще слѣдующее:

Если бы грузъ Q пришлось перемѣщать по плоскости

путемъ простого скольженія, то нужная для этого горизонтальная сила h выразилась бы такъ:

$$h = fQ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

гдѣ f есть коэффиціентъ тренія скольженія матеріала груза по плоскости $K2$. Если бы теперь оказалось, что $h < H$, т.-е. то

$$f < \frac{m_1 + m_2}{2r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

то, очевидно, примѣненіе катковъ было бы невыгоднымъ, ибо для перемѣщенія груза скольженіемъ потребовалась бы меньшая сила, чѣмъ при наличности катковъ.

Если оказывается, что $h = H$, т.-е. что

$$f = \frac{m_1 + m_2}{2r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

то, въ виду равенства усилій h и H, оба рода движенія были бы эквивалентны.

Если бы, наконецъ, получилось, что $h > H$, т.-е. что

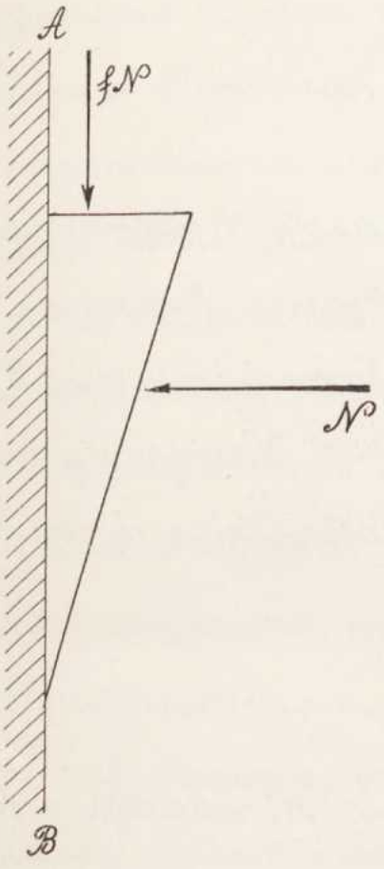
$$f > \frac{m_1 + m_2}{2r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

то перемѣщеніе помощью катковъ было бы выгоднѣе.

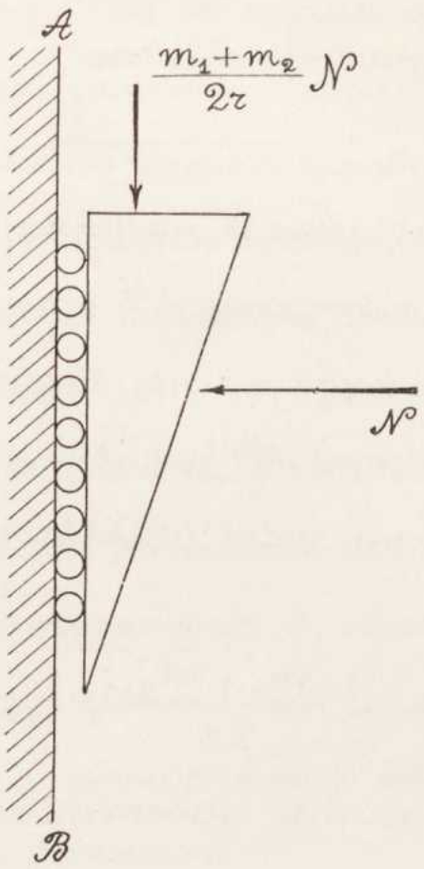
Принимая во вниманіе, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ это было показано выше, скольженіе можетъ быть съ выгодой замѣняемо каченіемъ, можно задаться вопросомъ о выясненіи обстоятельствъ такой замѣны,— возможности и выгодности ея. Для опредѣленности разсужденій, возьмемъ какую-либо деталь изъ числа разобранныхъ нами,— возьмемъ, напримѣръ, клинъ изъ клинчатаго пресса (фиг. 117). Къ вертикальной плоскости его прижимаетъ нѣкоторая сила N, къ этой плоскости AB перпендикулярная. Отсюда слѣдуетъ, что равномѣрное

движеніе клина внизъ можетъ быть при этихъ условіяхъ вызвано вертикальной силой, равной fN, гдѣ f есть коэффиціентъ тренія между клиномъ и плоскостью.

Попробуемъ теперь замѣнить скольженіе каченіемъ, для чего между клиномъ и опорной плоскостью AB вводимъ



Фиг. 117.



Фиг. 118.

рядъ катковъ одинаковаго радіуса r (фиг. 118). Тогда, полагая, что клинъ, попрежнему, нагруженъ той же силой N, перпендикулярной плоскости AB, заключаемъ, что сила, параллельная плоскости AB и могущая двигать клинъ равномѣрно, выразится, согласно формулѣ (10), черезъ

$$F=\frac{m_1+m_2}{2r}N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Если окажется, что

$$\frac{m_1+m_2}{2r}N>fN,$$

т.-е. что

$$\frac{m_1+m_2}{2r}>f,$$

то скольженіе будетъ предпочтительнѣе, ибо каченіе потребуетъ примѣненія большей силы.

Если

$$\frac{m_1+m_2}{2r}=f$$

то оба вида движенія будутъ эквивалентны.

Наконецъ, при

$$\frac{m_1+m_2}{2r}<f$$

каченіе будетъ предпочтительнѣе.

Мы видѣли, что деталь, нагруженная силой N, перпендикулярной къ опорной плоскости AB (фиг. 118), будетъ двигаться равномѣрно тогда, когда на нее будетъ дѣйствовать сила F, параллельная плоскости AB и равная $\frac{m_1+m_2}{2r}N$. Замѣчая теперь, что дробь $\frac{m_1+m_2}{2r}$ есть число отвлеченное, обозначая ее черезъ f_1, такъ что

$$\frac{m_1+m_2}{2r}=f_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

и помножая обѣ части равенства (16) на N, находимъ равенство

$$\frac{m_1+m_2}{2r}N=f_1N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Присматриваясь къ правой части его, замѣчаемъ, что она составлена по тому же закону, по какому составилось бы выраженіе силы сопротивленія скольженію для тѣла, прижимаемаго къ поверхности скольженія нормальной къ ней силой N, при томъ условіи, что коэффиціентъ тренія такого скольженія равенъ какъ разъ f_1, т.-е. $m_1+m_2/2r$. Поэтому можемъ сказать, что движеніе съ катками эквивалентно движенію скольженія съ коэффиціентомъ f_1, равнымъ $m_1+m_2/2r$.

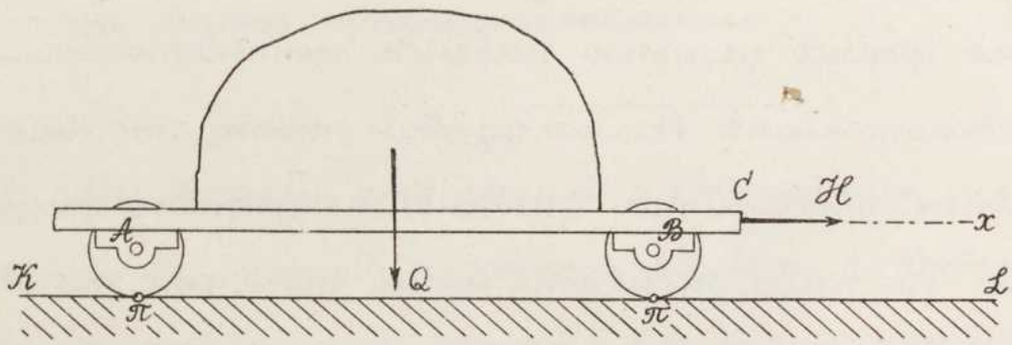
Прилагая подобныя же разсужденія ко всѣмъ случаямъ сравненія качепія со скольженіемъ, разобраннымъ нами выше, можемъ сказать, что въ случаѣ фиг. 110 качепіе эквивалентно скольженію съ коэффиціентомъ тренія, равнымъ $^{m}/_{r}$; въ случаѣ нагрузки по типу фиг. 112 этотъ коэффиціентъ долженъ имѣть значеніе $^{m}/_{h}$; въ случаѣ фиг. 113 — значеніе $^{m}/_{2r}$ и т. д. Подобная форма замѣны качепія гипотетическимъ, подставнымъ скольженіемъ весьма удобна тѣмъ, что, благодаря этой замѣнѣ, приходится сравнивать два коэффиціента скольженія. Не надо забывать лишь того, что эти коэффиціенты типа f_1 изъ (16) и (17) не представляютъ собою коэффиціентовъ дѣйствительнаго скольженія, ибо въ дѣйствительности, при данныхъ матеріалахъ тѣла и плоскости, коэффиціентъ тренія скольженія, f, является уже вполнѣ опредѣленнымъ, коэффиціентъ же f_1, являясь отличнымъ отъ f, будетъ, очевидно, относиться къ другимъ матеріаламъ, отличнымъ отъ данныхъ.

Разсмотримъ теперь еще одинъ, весьма важный въ практическомъ отношеніи, случай примѣненія катковъ,—тотъ именно, когда катки снабжаются шипами, а платформа не налегаетъ на эти катки, какъ это было въ случаѣ фиг. 116, а несетъ на себѣ подшипники для шиповъ катковъ. Это будетъ случай перемѣщенія груза помощью тележки.

Пусть имѣется такая тележка, нагруженная грузомъ Q и равномѣрно катящаяся по горизонтальной плоскости KL подъ воздѣйствіемъ горизонтальной же силы H (фиг. 119). Предположимъ, что радіусы всѣхъ катковъ одинаковы и равны

каждый r; радіусы шиповъ пусть будутъ также одинаковы и равны каждый ρ.

Сопротивленіе движенію этой тельѣжки составится: 1) изъ сопротивленія качепію катковъ по плоскости $K\mathcal{L}$ и 2) изъ сопротивленія тренія скольженія шиповъ A и B въ ихъ подшипникахъ. Сопротивленія воздуха и другихъ, за малостью ихъ, вводить въ разсмотрѣніе не будемъ.



Фиг. 119.

Моментъ сопротивленія качепію суммарно можетъ быть выраженъ черезъ mQ; моментъ сопротивленія тренію шиповъ въ ихъ гнѣздахъ выразится, также суммарно, черезъ $\mu Q\rho$.

Если тельѣжка имѣетъ 4 колеса (катка), то нагрузка каждаго равна $\frac{1}{4}Q$; моментъ сопротивленія качепію каждаго колеса будетъ равенъ $\frac{1}{4}mQ$, что для всѣхъ колесъ и дастъ моментъ mQ, какъ мы и написали.

Что касается тренія въ шипахъ, то силу этого тренія мы принимаемъ пропорціональной нагрузкѣ шипа, полагая коэффиціентъ пропорціональности равнымъ μ; такимъ образомъ, для каждаго изъ шиповъ тельѣжки сила тренія будетъ равна $\frac{1}{4}\mu Q$, а такъ какъ плечо каждой такой силы тренія равно ρ, то моментъ тренія въ шипѣ будетъ равенъ $\frac{1}{4}\mu Q\rho$; для всѣхъ же четырехъ шиповъ моментъ тренія въ нихъ равенъ $\mu Q\rho$.

Если бы радіусы шиповъ были бы различны и равны $r_1, r_2, \ldots$, нагрузки же также различны и равны соотвѣтственно $q_1, q_2, \ldots$, то общій моментъ сопротивленія тренія въ шипахъ былъ бы равенъ $\mu\Sigma qr$, и его и нужно было бы подставлять вмѣсто момента $\mu Q\rho$. Ради простоты разсужденій мы полагаемъ всѣ радіусы и нагрузки шиповъ одинаковыми, что и приведетъ насъ къ выраженіямъ моментовъ, данными выше.

Поставленную задачу рѣшимъ помощью принципа возможныхъ перемѣщеній. Пусть внѣшняя горизонтальная сила H приложена къ обоймѣ тельѣжки, несущей на себѣ подшипники

для шиповъ A и B. Точку приложенія этой силы можно взять вдоль направленія x'x ея гдѣ-угодно,—пусть это будетъ точка C обоймы. Предположивъ, что подъ воздѣйствіемъ приложенной нами силы H, мы и напишемъ для какого-либо момента движенія уравненіе возможныхъ работъ, подобно тому, какъ мы писали ихъ выше.

Пусть за время dt тельжка продвинулась на разстояніе dx. Въ такомъ случаѣ возможная работа силы H выразится черезъ H dx,—возможныя перемѣщенія здѣсь совпадаютъ съ дѣйствительными.

Такой же путь dx пройдетъ и обойма тельжки съ укрѣпленными на ней подшипниками, а вмѣстѣ съ ними и передвигаемые ими шипы и оси колесъ. Но каждое колесо перемѣщается по горизонтальной плоскости, катясь по ней, т.-е. поворачиваясь въ каждый данный моментъ около соотвѣтствующаго этому моменту полюса мгновеннаго вращенія съ нѣкоторой угловой скоростью ω. Поэтому линейная скорость оси колеса A, при вращеніи его вокругъ полюса П, будетъ равна $v = \omega . A\Pi = \omega r$, и путь, пройденный осью A за время dt, выразится черезъ $\omega r\, dt$. А такъ какъ этотъ путь мы обозначили черезъ dx, то и получаемъ уравненіе

$$dx = r\omega\, dt.$$

Въ силу этого возможная работа $\Delta L_{\text{в}}$ силы H выразится такъ:

$$\Delta L_{\text{в}} = H\,\delta x = H\,dx = H . r\omega\, dt.$$

Такъ какъ при равенствѣ радіусовъ колесъ угловая скорость вращенія ихъ около ихъ полюсовъ П будетъ также

равна ω, то работа наших$_ъ$ пар$_ъ$ сопротивления, mQ и $\mu Q\rho$, за единицу времени выразится через$_ъ$ $mQ\omega$ и $\mu Q\rho\omega$, а за время dt – через$_ъ$ $mQ\omega dt$ и $\mu Q\rho\omega dt$.

Въ силу этого уравнение возможных$_ъ$ работ$_ъ$ напишется так$_ъ$:

$$\mathcal{H}r\omega dt = mQ\omega dt + \mu Q\rho\omega dt,$$

что, после необходимых$_ъ$ упрощений, приведет$_ъ$ к$_ъ$ уравнению:

$$\mathcal{H}r = mQ + \mu Q\rho = Q(m + \mu\rho), \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

могущему быть истолкованным$_ъ$ так$_ъ$:

Для возможности равномѣрнаго движения тележки на каткахъ, снабженных$_ъ$ шипами, необходимо, чтобы момент$_ъ$ силы $\mathcal{H}$, приложенной к$_ъ$ оси A (или B) катка, относительно полюса мгновеннаго вращения его, Π, былъ равенъ суммѣ моментов$_ъ$ сопротивлений

1) трения качения катков$_ъ$ (колес$_ъ$) по плоскости $K\mathfrak{L}$, – этот$_ъ$ момент$_ъ$ оцѣнивается членом$_ъ$ mQ, – и

2) трения скольжения шипов$_ъ$ въ их$_ъ$ подшипниках$_ъ$, – этот$_ъ$ момент$_ъ$ оцѣненъ членом$_ъ$ $\mu Q\rho$.

Если

$$\mathcal{H}r < Q(m + \mu\rho), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

то это значитъ, что сила $\mathcal{H}$ слишком$_ъ$ мала для того, чтобы моментъ $\mathcal{H}r$ ея могъ преодолѣть сумму моментов$_ъ$ имѣющихся здѣсь сопротивлений. Слѣдовательно, въ случаѣ существования неравенства (19), колеса тележки вращаться не смогутъ, и, значитъ, тележка катиться не будетъ, – шипы ея окажутся какъ бы зацепленными въ своих$_ъ$ гнѣздах$_ъ$.

Отсюда, однако, вовсе не слѣдуетъ, что тележка непре

жно останется неподвижной, ибо, если она не сможетъ катиться, то, быть можетъ, будетъ въ состояніи СКОЛЬЗИТЬ. Это, какъ извѣстно, будетъ возможно тогда, когда сила H будетъ способна преодолѣть сопротивленіе скольженію тележки (съ невращающимися теперь колесами ея) по плоскости K_2, т.-е. когда будетъ удовлетворено неравенство:

$$H > fQ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Сочетая неравенства (19) и (20), мы и получимъ общее условіе того, чтобы тележка не катилась, а СКОЛЬЗИЛА по плоскости, безъ вращенія, при томъ, колесъ ея; условіе это пишется, значитъ, такъ:

$$fQ < H < \frac{m+\mu\varrho}{r} Q.$$

Составивъ неравенство изъ крайнихъ членовъ и сокративъ его на Q, получаемъ условіе скольженія тележки, безъ вращенія колесъ ея, въ формѣ одного неравенства

$$f < \frac{m+\mu\varrho}{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Для того, чтобы удовлетворить этому неравенству при обычныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ f, m и μ, радіусы r катковъ приходится брать очень малыми; но разъ этотъ радіусъ взятъ именно такимъ достаточно малымъ, то каченіе колесъ тележки по плоскости окажется невозможнымъ, и тележка будетъ двигаться такъ, какъ если бы цапфы колесъ ея оказались наглухо защемленными въ ихъ подшипникахъ, — тележка станетъ скользить всѣми своими колесами по плоскости K_2, какъ бы на полозьяхъ.

Вопросъ этотъ имѣетъ большое практическое значеніе, — такъ, при конструированіи тележекъ кранокъ, гдѣ колеса

имѣютъ всегда очень малые радіусы, необходимо для каждой тельѣжки провѣрить, будетъ ли она, при заданныхъ для нея условіяхъ тяги и нагрузки, катиться или скользить. Случаи скольженія колесныхъ экипажей встрѣчаются вовсе не такъ рѣдко, какъ это можетъ показаться съ перваго взгляда. Особенно часто эти случаи приходится наблюдать тогда, когда коэффиціентъ f, въ силу тѣхъ или иныхъ причинъ, спускается до такихъ малыхъ размѣровъ, что становится возможнымъ осуществленіе неравенство (21). Такъ, бываетъ, напримѣръ, зимой, когда колесному экипажу приходится двигаться по снѣгу или льду; здѣсь коэффиціентъ f оказывается такъ малымъ, а, съ другой стороны, коэффиціентъ μ въ шинахъ становится (отъ мороза) такимъ большимъ, что неравенство (21) удовлетворяется вполнѣ,—въ этихъ случаяхъ экипажъ начинаетъ всѣми своими колесами скользить по снѣгу совершенно такъ же, какъ если бы вмѣсто колесъ у него оказались полозья. Будутъ ли, однако, колеса вертѣться или станутъ скользить, но экипажъ, влекомый внѣшней силой, будетъ продолжать двигаться по ея направленію, катясь ли или скользя; разница между этими двумя видами движенія сведется лишь къ тому, что въ одномъ случаѣ колеса будутъ имѣть относительное движеніе (относительно экипажа), а въ другомъ — не будутъ, и въ послѣднемъ случаѣ весь экипажъ со своими колесами составитъ одно цѣлое,—одно жесткое тѣло, скользящее по плоскости подъ дѣйствіемъ данной внѣшней силы.

Все это, однако, коренньимъ образомъ мѣняется, разъ экипажъ имѣетъ быть приводимъ въ движеніе силами

внутренними, какъ это имѣетъ мѣсто во всѣхъ самодвижущихся экипажахъ, каковы паровозъ, трамвай, автомобиль и т. д. Сюда же можно отнести и велосипедъ съ сидящимъ на немъ и приводящимъ его въ движеніе ѣздокомъ. Здѣсь движеніе экипажа подъ воздѣйствіемъ внутреннихъ силъ возможно далеко не всегда. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Изъ теоретической механики извѣстно, что система, находящаяся подъ воздѣйствіемъ однихъ внутреннихъ силъ, будетъ двигаться такъ, что центръ тяжести (массы) ея будетъ или оставаться въ покоѣ или перемѣщаться равномѣрно и прямолинейно. Давленіе пара, газа (въ калорическихъ двигателяхъ), электромагнитныя воздѣйствія въ электромоторахъ и т. д., представляютъ собою силы внутреннія, не могущія, согласно вышесказанному, самостоятельно измѣнять равномѣрное движеніе центра тяжести или нарушать покой его, почему, слѣдовательно, въ случаѣ необходимости измѣнить скорость движенія системы или остановить систему, уже движущуюся, одними внутренними силами обойтись нельзя, ибо, повторяемъ, никакихъ измѣненій въ состояніи центра тяжести эти внутреннія силы вызвать не могутъ.

Въ этихъ случаяхъ приходится прибѣгать къ помощи внѣшнихъ силъ или сопротивленій, которыя и слѣдуетъ подбирать и примѣнять такъ, чтобы данная система, подчиняясь теперь уже совокупному воздѣйствію на нее внутреннихъ силъ и внѣшнихъ силъ (или сопротивленій), могла перемѣщаться своимъ центромъ тяжести такъ, какъ это нужно для насъ. Очевидно, что для этого внѣшнія

силы должны имѣть величину, достаточную для достиженія требуемыхъ измѣненій движенія. Если же величина внѣшнихъ силъ окажется для этого недостаточной, то система или испытаетъ уменьшенныя противъ желательнаго измѣненія движенія или же сразу начнетъ двигаться согласно теоремѣ о движеніи центра тяжести, т.-е. при наличности живой силы станетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно, при отсутствіи же запаса ея — не будетъ двигаться (относительно своей опорной поверхности) совсѣмъ.

Роль внѣшнихъ силъ и сопротивленій въ нашихъ самодвижущихся экипажахъ принимаютъ на себя слѣдующія силы:

1) сила тяжести экипажа, грузовъ и т.д.;

2) сопротивленіе воздуха, обнаруживающееся при движеніи экипажа и при большихъ скоростяхъ его достигающее весьма значительныхъ размѣровъ; при малыхъ скоростяхъ имъ, обычно, пренебрегаютъ;

3) сопротивленіе со стороны другихъ системъ, имѣющихъ быть приводимыми въ движеніе посредствомъ данной, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто въ случаѣ желѣзнодорожнаго поѣзда, гдѣ паровозъ принужденъ тащить за собою вагоны, въ трамвайномъ движеніи, гдѣ къ вагону съ моторомъ присоединяется „прицѣпъ" и т.д.; наконецъ,

4) сопротивленіе тренія колесъ при каченіи ихъ по опорной поверхности, — по рельсамъ, мостовой и т.д.

Присмотримся болѣе детально къ этимъ четыремъ силамъ и къ результатамъ учета ихъ дѣйствія.

Первая сила, — сила тяжести, — въ случаѣ движенія системы по горизонтальной плоскости, прямо на это движе-

ніе вліять не можетъ; ее придется имѣть въ виду лишь при учетѣ сопротивленій тренія. Если опорная поверхность окажется наклоненной къ горизонту, то сила тяжести дастъ еще слагающую, параллельную плоскости и представляющую собою активную силу, либо помогающую движенію, либо ему сопротивляющуюся.

Второй силой,— силой сопротивленія воздуха,— по сравнительной малости ея въ обычныхъ условіяхъ движенія, будемъ пренебрегать.

Третья сила является лишь при наличности прицѣпныхъ экипажей; ради общности разсужденій мы и разсмотримъ именно тотъ случай, когда къ данному экипажу-мотору прицѣпленъ рядъ другихъ, имъ въ движеніе приводимыхъ.

Четвертая сила,— сила сопротивленія тренія скольженія,— и является, при горизонтальной опорной поверхности, той силой, которой всегда пользуются на практикѣ съ цѣлью измѣненія состоянія центра тяжести системы.

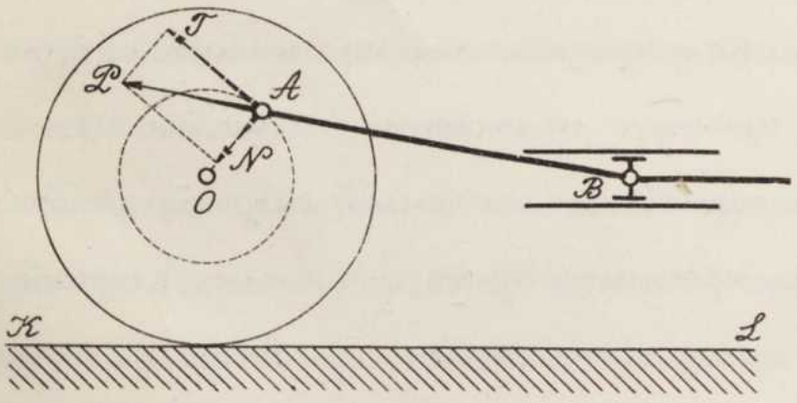
Разсмотримъ теперь наиболѣе сложный случай движенія подъ воздѣйствіемъ внутреннихъ силъ, а именно, случай паровоза, вѣсомъ въ Q, имѣющаго тащить за собою по горизонтальной плоскости рядъ вагоновъ; случай движенія по наклонной плоскости разберемъ особо.

Колеса паровоза приводятся во вращеніе путемъ непрестаннаго воздѣйствія пара на поршни паровозной машины; помощью промежуточныхъ звеньевъ давленіе пара передается на пальцы A кривошиповъ, закрѣпленныхъ на ведущихъ колесахъ (фиг. 120), въ видѣ нѣкотораго усилія P, направленнаго по шатуну и непрестанно мѣняющаго какъ свою величину, такъ, очевидно, и направленіе. Разлагая P у

силу P на силу N, идущую по радіусу, проходящему черезъ точку A, и силу T, перпендикулярную къ этому радіусу, т.-е. касательную къ окружности, описываемой пальцемъ кривошипа, видимъ, что вращеніе колеса паровоза можетъ быть вызвано воздѣйствіемъ лишь этой перемѣнной по своей величинѣ силы T. Слѣдовательно, активнымъ моментомъ, стремящимся катить колесо по рельсу, является перемѣнный по своей величинѣ моментъ M, выражающійся такъ:

$$M = Tr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

гдѣ $r = AO$ и есть радіусъ окружности, описываемой пальцемъ A кривошипа. — Посмотримъ теперь, какъ выразятся моменты всѣхъ сопротивленій, противодѣйствующіе моменту M.



Фиг. 120.

Моментъ сопротивленія каченію колесъ паровоза по рельсамъ, согласно общимъ положеніямъ, выразится черезъ mQ.

Моментъ сопротивленія тренія въ шипахъ (шейкахъ) выразится черезъ $\mu Q\varrho$, гдѣ μ есть нѣкоторый коэффиціентъ тренія въ шипахъ, а ϱ — радіусъ шипа.

Необходимо, наконецъ, преодолѣть сопротивленіе вагоновъ. Его мы полагаемъ приведеннымъ къ нѣкоторой силѣ P_1, дѣйствующей все время на плечѣ, равномъ радіусу R колесъ паровоза. Такимъ образомъ, моментъ сопротивленія вагоновъ выражается черезъ P_1R.

Теперь мы имѣемъ всѣ данныя для того, чтобы составить уравненіе возможныхъ работъ за какой-либо промежутокъ времени dt, примѣнительно къ системѣ нашего паровоза. Пусть колеса его вращаются съ угловой скоростью ω; съ той же скоростью ω вращаются, понятно, какъ шипы осей, такъ и радіусъ OA. Въ силу этого возможная работа дѣйствующей силы T изобразится черезъ $Tr\omega\,dt$, а возможныя работы сопротивленій тренія — черезъ $mQ\omega\,dt$, $\mu Q\rho\omega\,dt$ и $P_1R\omega\,dt$. Кромѣ того, если бы оказалось, что паровозъ по рельсамъ не катится, а скользитъ, то сопротивленіе этому скольженію было бы равно fQ, моментъ этого сопротивленія относительно полюса мгновеннаго вращенія колеса равнялся бы fQR, а возможная работа его за время dt — черезъ $fQR\omega\,dt$.

Очевидно, что каченіе паровоза будетъ возможно тогда, когда возможная работа дѣйствующей силы T окажется больше суммы всѣхъ работъ сопротивленій, обнаруживающихся при каченіи. Значитъ, условіе качения паровоза изображается неравенствомъ:

$$Tr\omega dt > mQ\omega dt + \mu Q\rho\omega dt + P_1R\omega dt, \quad . \quad . \quad . (23)$$

которое, послѣ необходимыхъ сокращеній, переходитъ въ неравенство:

$$Tr > mQ + \mu Q\rho + P_1R. \quad . \quad . \quad . \quad . (24)$$

Предѣльный случай будетъ имѣть мѣсто при равенствѣ между правой и лѣвой частями соотношенія (24).

Далѣе, для того, чтобы колеса паровоза при этомъ не скользили, нужно, чтобы дѣйствующая сила T не могла преодолѣть сопротивленія скольженію колесъ по рельсамъ и шиповъ въ ихъ гнѣздахъ; значитъ, возможная работа силы

T должна быть меньше возможной работы сопротивления скольженія и треніа въ шипахъ, т.-е. должно существовать соотношеніе

$$Tr\omega dt < fQR\omega dt + \mu Q\rho\omega dt, \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

сводящееся къ неравенству

$$Tr < fQR + \mu Q\rho. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Сопоставляя неравенства (24) и (26), получаемъ неравенство

$$fQR + \mu Q\rho > mQ + \mu Q\rho + P_1 R,$$

сводящееся, послѣ необходимыхъ сокращеній, къ неравенству

$$f > \frac{m}{R} + \frac{P_1}{Q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Таково условіе качения паровоза по рельсамъ и невозможности его скольженія.

Теперь посмотримъ, при какомъ условіи паровозъ не сможетъ катиться. Для этого возможная работа силы T должна быть меньше суммы возможныхъ работъ сопротивленій, имѣющихъ мѣсто при качении, такъ что должно существовать неравенство

$$Tr\omega dt < mQ\omega dt + \mu Q\rho\omega dt + P_1 R\omega dt, \quad . \quad . \quad (28)$$

т.-е. неравенство

$$Tr < mQ + \mu Q\rho + P_1 R. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

При этомъ условіи колеса паровоза по рельсамъ катиться не смогутъ. Но если они не могутъ катиться, то могутъ по рельсамъ скользить, — какъ говорятъ, буксовать, — причемъ паровозъ будетъ или оставаться на мѣстѣ, а колеса его будутъ продолжать вращаться, не подаваясь впередъ, если весь поѣздъ былъ до того неподвиженъ, — или станетъ двигаться равномѣрно, будучи понуждаемъ къ тому вагонами, продолжающими двигаться по инерціи, если поѣздъ до момента

буксованія былъ въ движеніи; колеса его, продолжая вращаться подъ воздѣйствіемъ тангенціальныхъ усилій T, станутъ теперь частью скользить, частью катиться.

Условіе возможности такого скольженія,—буксованія,—сводится къ требованію того, чтобы возможная работа дѣйствующей силы T была больше суммы возможныхъ работъ сопротивленій, возникающихъ при скольженіи, и, одновременно, чтобы та же возможная работа силы T была меньше суммы возможныхъ работъ всѣхъ сопротивленій, имѣющихъ мѣсто при каченіи. Значитъ, для возможности буксованія должны одновременно удовлетворяться неравенства:

$$Tr\,\omega dt > fQR\,\omega dt + \mu Q\rho\,\omega dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

и

$$Tr\,\omega dt < mQ\,\omega dt + \mu Q\rho\,\omega dt + P_1 R\,\omega dt. \quad . \quad . \quad (31)$$

Замѣтимъ, что въ неравенствѣ (30), какъ и въ (25), членъ $P_1 R\,\omega dt$ отсутствуетъ потому, что, при скольженіи колесъ паровоза, онъ не можетъ не только тащить вагоновъ, но и подать впередъ себя самого; значитъ, при буксованіи преодолѣваются лишь тѣ сопротивленія скольженія, которыя имѣютъ мѣсто въ системѣ паровоза.

Сокращая выраженія (30) и (31) на ωdt и сочетая ихъ въ одно, получаемъ неравенство

$$mQ + \mu Q\rho + P_1 R > fQR + \mu Q\rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

или неравенство

$$mQ + P_1 R > fQR,$$

откуда находимъ, что

$$f < \frac{m}{R} + \frac{P_1}{Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Таково условіе буксованія паровоза.

Если прицѣпныхъ вагоновъ нѣтъ, такъ что $P_1 = 0$, то неравенства (27) и (33) принимаютъ видъ:

1) условіе качения:

$$f > \frac{m}{R}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

2) условіе буксованія:

$$f < \frac{m}{R}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Явленія буксованія могутъ быть наблюдаемы всякій разъ, когда, въ силу тѣхъ или иныхъ причинъ, каковы дождь, снѣгъ, гололедица и т. д., коэффиціентъ f понижается настолько, что становится возможнымъ удовлетвореніе условій (33) и (35). Тогда наступаетъ буксованіе со всѣми его непріятными послѣдствіями. Очевидно, что, для устраненія буксованія, надо неравенство (33) перевести въ неравенство (27), имѣющее мѣсто при каченіи; для этого необходимо поднять величину коэффиціента трения скольженія f, что, обычно, достигается посыпкой рельсовъ пескомъ и т. п.

Въ заключеніе настоящаго параграфа коснемся вкратцѣ вопроса о движеніи поѣзда по плоскости, наклоненной къ горизонту подъ угломъ i. Обозначивъ вѣсъ паровоза черезъ Q, а вагоновъ — черезъ W, найдемъ, что вѣсъ всего поѣзда будетъ равенъ $Q + W$. Пусть поѣздъ по этой плоскости взбирается вверхъ. Очевидно, что слагающая вѣса поѣзда, параллельная этой плоскости и сопротивляющаяся такому его движенію, равна $(Q+W)\sin i$. Эта сила, воздѣйствуя на оси паровоза, даетъ добавочный моментъ сопротивленія, равный $(Q+W)R\sin i$, гдѣ R есть радіусъ колесъ паровоза. Возможная

работа этого новаго сопротивленія выразится черезъ

$$(Q+W)R\sin i.\omega dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Нетрудно, далѣе, усмотрѣть, что къ опорной плоскости паровозъ будетъ прижиматься не всей силой Q своего вѣса, а лишь слагающей ея $Q\cos i$, вслѣдствіе чего сила сопротивленія скольженію паровоза выразится теперь уже черезъ $fQ\cos i$, моментъ же ея — черезъ $fQR\cos i$. Составивъ теперь опять уравненія возможныхъ работъ, мы, послѣ необходимыхъ сокращеній, найдемъ, что

1) условіе качепія паровоза изображается теперь неравенствомъ

$$fQR\cos i > mQ + \mathfrak{P}_1 R + (Q+W)R\sin i. \quad . \quad . \quad (37)$$

или неравенствомъ

$$f > \frac{1}{\cos i}\left(\frac{m}{R} + \frac{\mathfrak{P}_1}{Q}\right) + \left(1 + \frac{W}{Q}\right)\operatorname{tg} i; \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

2) условіе буксованія и, значитъ, невозможности подъема вверхъ, — неравенствомъ

$$f < \frac{1}{\cos i}\left(\frac{m}{R} + \frac{\mathfrak{P}_1}{Q}\right) + \left(1 + \frac{W}{Q}\right)\operatorname{tg} i. \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Предѣльный уголъ i_0 опредѣлится изъ равенства

$$fQR\cos i_0 = mQ + \mathfrak{P}_1 R + (Q+W)R\sin i_0. \quad . \quad . \quad (40)$$

Если прицѣпныхъ вагоновъ нѣтъ, такъ что $W=0$ и $\mathfrak{P}_1 = 0$, то

1) условіе качепія одного паровоза (вверхъ по плоскости) изобразится неравенствомъ

$$fQR\cos i > mQ + QR\sin i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

т.-е. неравенствомъ

$$f > \frac{m}{R\cos i} + \operatorname{tg} i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

а 2) условіе буксованія — неравенствомъ

$$f < \frac{m}{R\cos i} + \operatorname{tg} i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Предѣльный уклонъ i_0' для этого случая вычислится по формулѣ

$$fR\cos i_0' = m + R\sin i_0', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

откуда для опредѣленія i_0' получаемъ соотношеніе

$$\sin(\varphi - i_0') = \frac{m\cos\varphi}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Этими соображеніями мы закончимъ статью о треніи въ машинахъ и перейдемъ ко второй части нашего курса, излагающей основанія динамическаго изслѣдованія плоскихъ механизмовъ.

Часть вторая.

Динамическое изслѣдованіе плоскихъ механизмовъ.

§ 14. Предварительныя соображенія. Діаграмма свободныхъ усилій. Формулировка основныхъ задачъ.

Въ этой части нашего курса мы займемся изслѣдованіемъ динамическихъ условій движенія плоскихъ механизмовъ. Кинематическая сторона движенія ихъ разобрана въ курсѣ „Кинематики механизмовъ",—тамъ былъ данъ рядъ указаній, коими нужно руководствоваться при опредѣленіи скоростей и ускореній различныхъ точекъ механизма по извѣстнымъ начальнымъ даннымъ.

Наше динамическое изслѣдованіе мы ограничимъ разсмотрѣніемъ двухъ задачъ, имѣющихъ наибольшую важность съ практической точки зрѣнія, и предварительно обратимся къ разсмотрѣнію тѣхъ основныхъ требованій, которымъ должна удовлетворять каждая машина, имѣющая дѣйствовать правильно-періодически, выполняя при этомъ должное количество работы. Требованія эти сводятся къ слѣдующимъ четыремъ основнымъ пунктамъ:

Каждая машина должна:

1) обладать достаточной прочностью,

2) быть достаточно устойчивой на своемъ фундаментѣ,

3) обладать должной равномѣрностью хода своего главнаго вала, и, наконецъ,

4) давать наибольшій возможный въ данныхъ условіяхъ механическій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія.

Другихъ требованій, каковы: удобство конструкціи, простота ея и др., мы касаться здѣсь не будемъ,— требованія эти въ данный моментъ имѣютъ для насъ значеніе второстепенное.

Разсмотримъ теперь нѣсколько детальнѣе сформулированныя выше основныя требованія и условія ихъ удовлетворенія.

Первое требованіе будетъ удовлетворено тогда, когда всѣ части и детали разсматриваемой машины, во время работы ея, т.-е. при нагрузкѣ ихъ различными силами, проявляющими свое дѣйствіе при работѣ машины, будутъ испытывать напряженія, не выходящія изъ предѣловъ допускаемыхъ, что можетъ быть достигнуто лишь приданіемъ этимъ деталямъ должныхъ размѣровъ, обусловливаемыхъ характеромъ и величиной нагрузки ихъ и свойствами ихъ матеріаловъ. Поэтому, прежде чѣмъ окончательно опредѣлить размѣры данной детали, необходимо совершенно точно выяснить величины, направленія и точки приложенія силъ, имѣющихъ дѣйствовать на деталь. Необходимо, значитъ, установить тѣ способы и пріемы, которыми слѣдуетъ пользоваться при выясненіи этихъ силъ.

Къ разсмотрѣнію въ общихъ чертахъ этого вопроса мы теперь и перейдемъ.

Силы, дѣйствующія въ нашихъ машинахъ, могутъ быть, при всемъ разнообразіи ихъ, распредѣлены по слѣдующимъ возможнымъ здѣсь категоріямъ; это могутъ быть

a) силы активныя, дѣйствующія, понуждающія машину къ движенію и производящія работу; таковы, напримѣръ, силы упругости пара (въ паровыхъ машинахъ) и газовыхъ смѣсей (въ двигателяхъ внутренняго сгоранія), давленіе жидкости, силы упругости пружины, сила тяжести и т. д.;

b) силы полезныхъ сопротивленій, для преодолѣнія коихъ машина, собственно и предназначается;

c) силы вредныхъ сопротивленій, т.-е. силы тренія; на преодолѣніе работы ихъ безвозвратно уходитъ часть работы активныхъ силъ, отчего, какъ мы знаемъ, понижается коэффиціентъ полезнаго дѣйствія машины. Къ послѣдней категоріи, наконецъ, мы отнесемъ

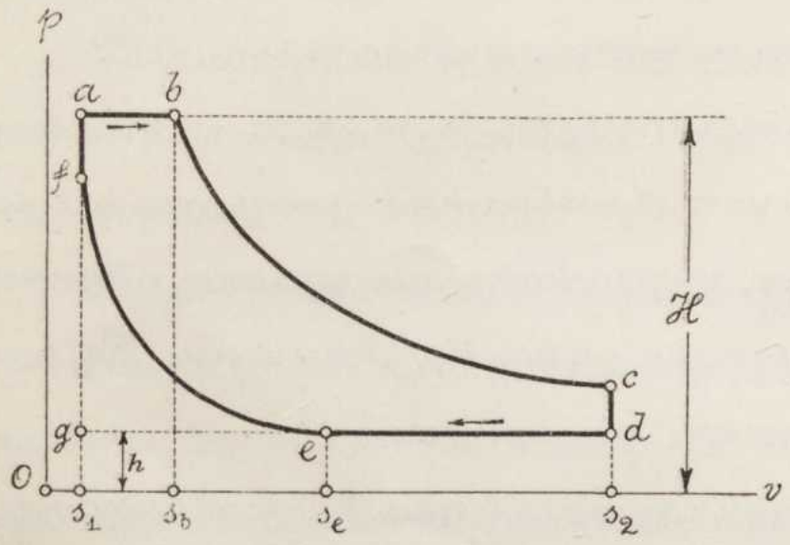
d) силы инерціи, возникающія всегда, какъ только появляются измѣненія скоростей (линейныхъ или угловыхъ) различныхъ массъ машины, т.-е. когда ускоренія массъ машины становятся отличными отъ нуля.

Не касаясь пока вопроса о связи между всѣми этими силами, устанавливаемой, вообще, при помощи теоремы возможныхъ перемѣщеній Лагранжа, а въ данномъ случаѣ — при помощи теоремы живыхъ силъ, — ниже объ этомъ будетъ сказано подробно, — мы сначала разсмотримъ вопросъ объ учетѣ и заданіи на практикѣ силъ первыхъ двухъ категорій, т.-е. активныхъ силъ и силъ полезныхъ

сопротивленій. Ради опредѣленности разсужденій, предположимъ, что у насъ имѣется, въ качествѣ двигателя, обыкновенная одноцилиндровая паровая машина.

Силами, въ ней дѣйствующими, являются силы упругости пара подъ поршнемъ, при чемъ давленіе пара за время одного оборота коренного вала, т.-е. за ходъ поршня впередъ и назадъ, — иначе говоря, за одинъ періодъ работы ея, — будетъ измѣняться такъ:

Предположимъ, что въ системѣ координатъ pOv (фиг. 121) абсциссы изображаютъ собою отклоненія поршня отъ лѣваго крайняго его положенія, а ординаты — соотвѣтствующія давленія пара на единицу поверхности поршня. Замѣтимъ попутно, что въ данномъ случаѣ, благодаря постоянству площади поршня, абсциссы будутъ давать собою въ то же время и объемы, ограничиваемые и образуемые поршнемъ въ каждый данный моментъ.



Фиг. 121.

Пусть крайнее лѣвое положеніе поршня есть s_1, а крайнее правое — s_2, такъ что полный ходъ поршня есть $s_1 s_2$. Предположимъ теперь, что мы, пуская машину въ ходъ, подвели поршень къ крайнему лѣвому его положенію s_1 и, открывъ паровпускное отверстіе, установили сообщеніе подпоршневого пространства Os_1 съ паровымъ пространствомъ котла, откуда свѣжій паръ и начинаетъ поступать подъ

поршень. Это поступаніе пара будетъ длиться нѣкоторое время Δt, составляя такъ называемый періодъ впуска пара, соотвѣтствующій части $s_1 s_b$ пути поршня. Давленіе пара за весь этотъ періодъ впуска будетъ равно давленію H пара въ котлѣ, такъ что силовая кривая на этомъ участкѣ $s_1 s_b$ пути поршня представится отрѣзкомъ ab прямой, параллельной оси Ov абсциссъ и отстоящей отъ нея на разстояніе H.

Впускъ свѣжаго пара производится не за весь ходъ поршня, $s_1 s_2$, а лишь на части $s_1 s_b$ его, въ виду того соображенія, что, если бы онъ производился до конца хода, т.-е. до момента s_2, то давленіе въ этотъ моментъ оказалось бы равнымъ H, и, значитъ, при слѣдующемъ затѣмъ періодѣ выпуска, пришлось бы выпускать наружу паръ весьма высокаго давленія H, равнаго давленію пара въ котлѣ, что было бы крайне неэкономично, ибо мы выпускали бы паръ, далеко не использовавъ всего запаса энергіи, въ немъ заключающагося. Такое расточительное пользованіе паромъ допускается лишь тамъ, гдѣ этого требуютъ особыя обстоятельства, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто при троганіи въ путь паровоза съ прицѣпленнымъ къ нему поѣзднымъ составомъ,—здѣсь требуется въ кратчайшее время получить отъ котла максимумъ работы, какой только возможенъ при данныхъ условіяхъ, ибо требуется въ кратчайшій срокъ сообщить всему поѣзду извѣстную скорость, т.-е. извѣстный запасъ живой силы. Впослѣдствіи, по достиженіи поѣздомъ этой желательной скорости, впускъ начинаютъ сокращать, доводя его до извѣстной нормальной величины, обусловливаемой тѣми или другими обстоятельствами работы паро-

воза. Въ обычныхъ условіяхъ работы паровыхъ машинъ такого чрезмѣрнаго увеличенія періода впуска не допускаютъ никогда, ограничиваясь для него лишь извѣстной малой долей хода поршня, — у насъ на чертежѣ эта доля равна $s_1 s_b$.

Въ моментъ достиженія поршнемъ конечной точки впуска, s_b, паровпускное отверстіе закрывается, и пару, заполняющему все пространство подъ поршнемъ и имѣющему давленіе H, предоставляется возможность расширенія вплоть до конца хода поршня, s_2. Въ курсѣ паровыхъ машинъ указывается, что, при расширеніи пара подъ гонимымъ имъ поршнемъ, давленіе его измѣняется обратно-пропорціонально объему, такъ что давленіе p и объемъ v связаны здѣсь соотношеніемъ $pv = const$ и силовой кривой расширяющагося пара является равносторонняя гипербола съ асимптотами Op и Ov.

Такъ какъ давленіе p_c въ концѣ расширенія, при обычныхъ условіяхъ работы машины, желательно получить близкимъ къ давленію той среды, куда выпускается расширившійся и отработавшій паръ, и такъ какъ $v_c = v_{s_2}$ и есть величина данная, то, въ силу условія $p \cdot v = p_c v_c = H v_b$, по извѣстнымъ H, p_c и v_c опредѣлится v_{s_b}, т.-е. точка s_b конца впуска.

По достиженіи конечной точки с фазы расширенія, т.-е. въ концѣ s_2 хода поршня, начинается слѣдующая фаза, — выпускъ пара во внѣшнюю среду: въ моментъ s_2 открывается паровыпускное отверстіе, давленіе пара падаетъ до давленія h во внѣшней средѣ; заканчивается онъ, однако, не въ точкѣ d пересѣченія прямой $dg \parallel Ov$ съ ординатой точки a, т.-е. не въ концѣ s_1 этого обратнаго хода поршня, а въ нѣкоторой промежуточной точкѣ e; выпускъ, такимъ

образомъ, продолжается не за весь обратный ходъ поршня, а лишь на извѣстной части его.

Послѣ этого начинается послѣдняя фаза,— сжатіе пара, отъ точки b_2 вплоть до конца этого хода поршня,—до точки b_1, и въ концѣ сжатія давленіе пара поднимается почти до давленія пара въ котлѣ, и кривая сжатія ef своей конечной точкой f почти упирается въ точку a начала впуска. Такое высокое предварительное сжатіе приходится осуществлять въ силу слѣдующихъ соображеній:

По мѣрѣ приближенія поршня къ мертвому положенію ускореніе его все возрастаетъ, вслѣдствіе чего возрастаетъ и сила инерціи его, и вотъ, во избѣжаніе удара въ моментъ перехода черезъ мертвое положеніе, т.-е. при перемѣнѣ хода, мы и создаемъ передъ поршнемъ упругую паровую подушку, могущую смягчить этотъ ударъ весьма значительно. Для этой цѣли мы съ нѣкотораго момента b_2 прекращаемъ впускъ и за счетъ запаса живой силы нашего механизма, сжимаемъ оставшійся подъ поршнемъ паръ, повышая, такимъ образомъ, его упругость до желаемыхъ размѣровъ.

Упомянутая выше причина не является, однако, единственной; существуютъ еще и другія соображенія, еще болѣе вѣскія, заставляющія производить предварительное сжатіе во всѣхъ паровыхъ машинахъ, даже и тихоходныхъ; сущность этихъ соображеній состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть давленіе h выпуска равно, положимъ, 1 at, такъ что температура пара, находящагося подъ поршнемъ во время выпуска подъ этимъ давленіемъ, можно считать равной 100° C. Предположимъ, затѣмъ, что давленіе пара въ котлѣ

достигаетъ 10 at, чему соотвѣтствуетъ температура пара около 180° C. Слѣдовательно, если бы мы доводили выпускъ вплоть до конца хода, s_1, такъ что линіей выпуска служила бы прямая dg (фиг. 121), то, при перемѣнѣ хода въ моментъ s_1, намъ пришлось бы въ мертвое пространство Os_1, наполненное паромъ при 1 at и 100° C, ввести паръ при 10 at и 180° C, что, понятно, вызвало бы охлажденіе этого свѣжаго пара, т.-е. конденсацію его, сопровождаемую, понятно, паденіемъ давленія этого вводимаго сюда свѣжаго пара ниже располагаемаго здѣсь давленія H. Такое паденіе давленія, сильно уменьшая работоспособность машины, является совершенно нежелательнымъ и, насколько возможно, подлежащимъ устраненію, и весьма дѣйствительное средство для избѣжанія этой конденсаціи и дается упомянутымъ предварительнымъ сжатіемъ: прекративъ выпускъ въ моментъ s_e, мы на всей остальной части хода, $s_e s_1$, сжимаемъ этотъ паръ; по мѣрѣ этого сжатія температура и давленіе его растутъ все больше и больше, и, конечно, отъ насъ зависитъ довести его такъ, чтобы въ концѣ s_2 этого хода температура и давленіе пара оказались весьма близкими къ температурѣ и давленію пара въ котлѣ, вслѣдствіе чего конденсація свѣжаго пара окажется теперь въ значительной степени ослабленной.

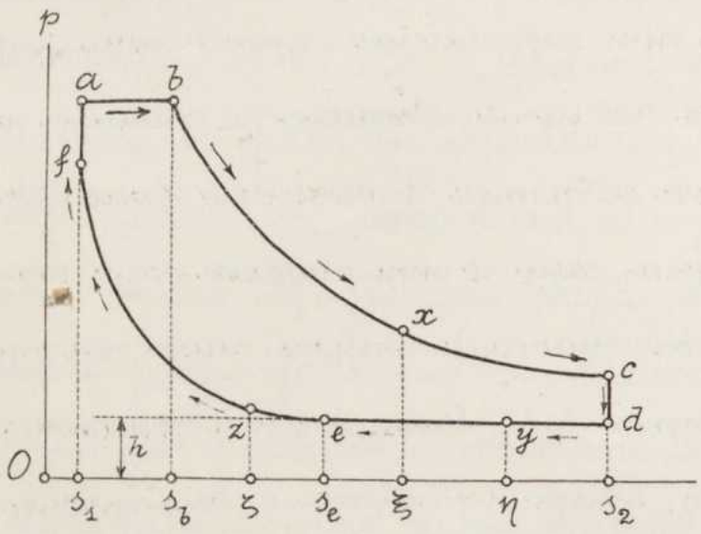
Степень этого предварительнаго сжатія въ различныхъ машинахъ различна: въ скороходныхъ машинахъ она очень велика, такъ что конечное давленіе сжатія доходитъ въ нихъ почти до давленія въ котлѣ; въ тихоходныхъ машинахъ она такъ высоко не идетъ.

Итакъ, прекращеніе выпуска и слѣдующее затѣмъ сжатіе пара производятся не только изъ-за желанія ослабить дѣйствіе силъ инерціи, но и въ видахъ экономіи пара.

Процессомъ сжатія заканчиваются всѣ измѣненія въ состояніи пара, имѣющія мѣсто при совершеніи одного періода работы машины, т.-е. при ходѣ поршня впередъ и назадъ и, значитъ, при одномъ полномъ оборотѣ коренного вала. Въ слѣдующій моментъ, при перемѣнѣ хода и при началѣ хода поршня отъ s_1 къ s_2, получимъ снова: сначала выпускъ пара на пути $s_1 s_b$, расширеніе его на пути $s_b s_2$, выпускъ на участкѣ $s_2 s_e$ и сжатіе на участкѣ $s_e s_1$. Такимъ образомъ, весь циклъ измѣненій состоянія пара, совершающійся при каждомъ полномъ оборотѣ кривошипа, можетъ быть изображенъ замкнутой кривой abcdefa, носящей названіе индикаторной діаграммы, — ее вычерчиваетъ сама машина помощью прибора, называемаго индикаторомъ, отъ котораго діаграмма и получила свое названіе. Кривая эта, очевидно, представляетъ собою силовую кривую давленій p пара на одну сторону поршня, — въ разсматриваемомъ случаѣ это будетъ та сторона его, коей соотвѣтствуетъ мертвое пространство Os_1; назовемъ эту сторону лѣвой стороной, согласно мѣсту мертваго пространства Os_1 относительно отрѣзка $s_1 s_2$, изображающаго ходъ поршня.

Имѣя такую діаграмму, можемъ весьма легко опредѣлить давленіе p пара (на единицу площади поршня) въ любой моментъ движенія, т.-е. при любомъ положеніи поршня. Такъ, въ тотъ моментъ, когда поршень, при ходѣ вправо, переходитъ черезъ положеніе ξ (фиг. 122), давленіе это выразится ордина-

той $x\xi$; въ положеніи η, когда поршень идетъ обратнымъ ходомъ, влѣво, давленіе выразится ординатой $y\eta$; въ положеніи ζ — ординатой $z\zeta$. Такимъ образомъ, разъ направленіе движенія поршня дано, то давленія на него въ каждомъ его положеніи будутъ извѣстны вполнѣ, при чемъ каждому отдѣльному положенію поршня будетъ соотвѣтствовать свое опредѣленное давленіе, величина и направленіе коего совершенно не будутъ зависѣть отъ быстроты движенія поршня, т.-е. отъ скорости и ускореній его, — иначе говоря, не будутъ зависѣть отъ времени; давленія эти зависятъ, какъ видимъ, лишь отъ положенія поршня въ цилиндрѣ, отъ мѣста его тамъ, т.-е. отъ величины абсциссы, это мѣсто его тамъ опредѣляющей. На языкѣ анализа это заключеніе будетъ выражено такъ:



Фиг. 122.

величина давленія пара отъ времени не зависитъ и представляетъ собою функцію однихъ лишь координатъ, опредѣляющихъ положеніе поршня.

Въ системѣ координатъ, принятой нами, положеніе поршня опредѣляется просто одной лишь абсциссой типа $O\xi$ (фиг. 122), а функціональная зависимость задается не аналитически, а геометрически, — въ видѣ діаграммы $abcdefa$, подобной начерченной выше; каждая ордината $x\xi$ ея есть функція соотвѣтствующей абсциссы $O\xi$. Добавимъ, что, въ виду замкнутаго характера діаграммы,

необходимо, задаваясь тѣмъ или другимъ положеніемъ поршня, указывать еще и направленіе хода, въ которомъ идетъ поршень въ этотъ моментъ.

Говоря о давленіи p на поршень, мы подъ этимъ p подразумѣвали давленіе на единицу площади его (въ кг на $см^2$, пудахъ на квадр. дюймъ и т.п.). Полное давленіе P на всю площадь F поршня (по одну сторону его) выразится, очевидно, такъ:

$$P = pF. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Такъ какъ P прямопропорціонально p, ибо F есть const, то опять можемъ сказать, что

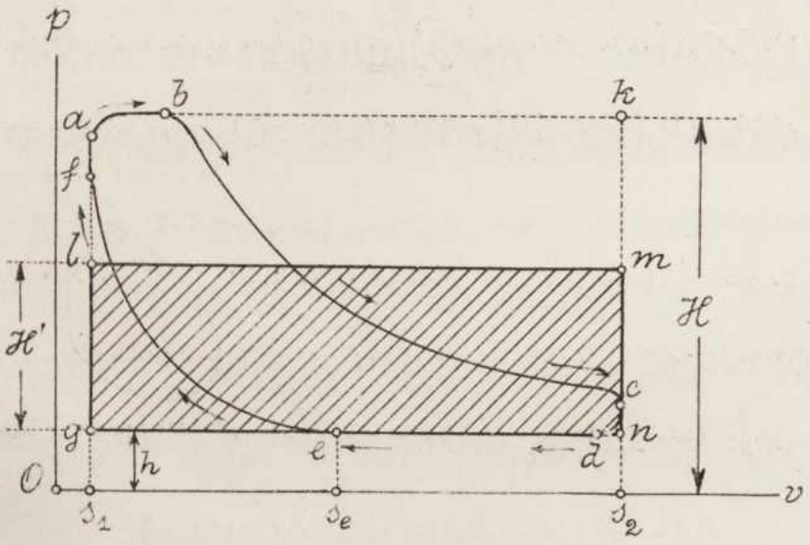
полное давленіе P пара на одну сторону поршня отъ времени не зависитъ и представляетъ собою функцію однихъ лишь координатъ, опредѣляющихъ положеніе поршня.

Замѣчая, далѣе, что каждому положенію поршня соотвѣтствуетъ свое отдѣльное, единственное положеніе механизма, можемъ сформулировать высказанное выше положеніе еще и такъ:

Давленія p и P отъ времени не зависятъ и представляютъ собою функціи только положеній механизма.

Вернемся теперь снова къ нашей индикаторной діаграммѣ $abcdefa$ (фиг. 121). Углы ея,—у a, b, c и d,—въ дѣйствительности никогда не бываютъ такими рѣзко очерченными, какъ это изображено на этой фигурѣ. Обычно они оказываются болѣе или менѣе скругленными, сглаженными,

что объясняется тѣмъ, что органы машины, вѣдающіе распредѣленіе пара, мгновенности въ конечные моменты впуска и выпуска дать не могутъ. Золотниковое парораспредѣленіе обороты угловъ дать не можетъ; болѣе или менѣе совершенно даютъ ее крановыя и клапанныя парораспредѣленія. Несомнѣнно, что сглаживаніе, округливаніе этихъ угловъ желательнымъ признать нельзя, такъ какъ оно замѣтно убавляетъ величину площади діаграммы, но, при употребляемыхъ на практикѣ типахъ парораспредѣленій, съ этимъ обстоятельствомъ приходится поневолѣ мириться. Такимъ образомъ, въ дѣйствительности приходится имѣть дѣло съ діаграммами, подобными изображенной на фиг. 123 и представляющей собою ту же діаграмму $adа$ фигуры 121, но лишь съ сглаженными углами. Съ діаграммами, подобными діаграммѣ фиг. 123, мы и будемъ вести



Фиг. 123.

дальше наше изслѣдованіе.

Нетрудно подсчитать, путемъ ли прямого планиметрированія или помощью приближенныхъ формулъ (Симпсона и др.), площадь, ограниченную замкнутой кривой $abcdefa$ нашей діаграммы. Площадь эта дастъ намъ, въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ единицахъ, зависящихъ отъ масштаба абсциссъ и ординатъ, работу пара за одинъ полный оборотъ вала, при дѣйствіи пара на одну сторону поршня. Дѣй-

сительно, при ходѣ поршня вправо ($s_1 \to s_2$) работа пара выразится площадью $s_1 fabc s_2 s_1$; при ходѣ же влѣво ($s_2 \to s_1$) на выпускъ пара и на слѣдующее затѣмъ сжатіе его уйдетъ работа, выражаемая площадью $ce f s_1 s_2 c$. Отсюда слѣдуетъ, что за этотъ полный ходъ поршня (впередъ и назадъ) машина дастъ работу, выражаемую площадью $abcef a$.

Итакъ, работа пара на одной сторонѣ поршня за каждый полный оборотъ коренного вала выражается площадью индикаторной діаграммы, въ нѣкоторыхъ единицахъ, зависящихъ отъ масштабовъ, принятыхъ при вычерчиваніи діаграммы. Опредѣливъ эту площадь, можемъ замѣнить ее площадью равновеликаго ей прямоугольника съ основаніемъ, равнымъ ходу s поршня, гдѣ $s = s_1 s_2$. Пусть величина этой площади равна A_1. Въ такомъ случаѣ высота H' этого прямоугольника опредѣлится изъ условія

$$A_1 = Hs,$$

откуда и находимъ, что

$$H' = \frac{A_1}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Эта величина H', представляющая собою нѣкоторое давленіе, называется среднимъ избыточнымъ (надъ давленіемъ выпуска h) давленіемъ. Такимъ образомъ получается представленіе о среднемъ индикаторномъ давленіи, — избыточномъ (H') сверхъ давленія выпуска (h) или абсолютномъ ($H' + h$) отъ нуля давленій. Такъ какъ H' есть давленіе на единицу площади поршня, то на весь поршень съ площадью F, давленіе будетъ равно FH', и, значитъ, работа пара на одной сторонѣ поршня за каждый оборотъ вала, т.-е. за

полный ходъ поршня (впередъ и назадъ), выразится черезъ

$$L_1 = sFH', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ s есть ходъ поршня, $s_1 s_2$, равный діаметру ($2r$) окружности, описываемой пальцемъ кривошипа.

Принимая теперь во вниманіе, что въ паровыхъ машинахъ паръ работаетъ по обѣ стороны поршня и что измѣненія его состоянія протекаютъ по этимъ двумъ сторонамъ его одинаково, заключаемъ, что полная работа пара по обѣ стороны поршня, получаемая отъ машины за каждый полный оборотъ вала, выражается черезъ $2sFH'$, такъ что, если валъ машины дѣлаетъ N оборотовъ въ минуту, то, предположивъ работу $2sFH'$ выраженной въ kgmt, можно сказать, что мощность нашей машины равна $2sFH'/60.75$ лошадиныхъ силъ, ибо одна лош. сила есть работа въ 75 kgmt, совершаемая въ одну секунду.

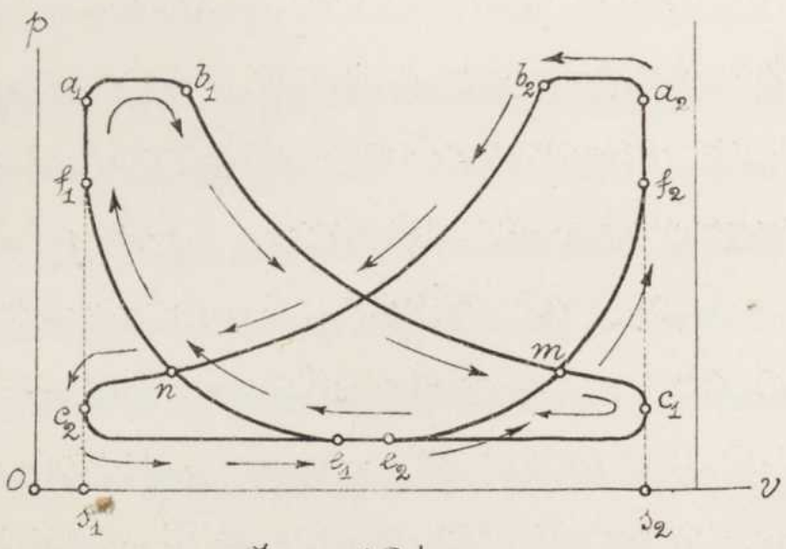
Было уже указано, что въ паровыхъ машинахъ паръ работаетъ по обѣ стороны поршня; въ двигателяхъ внутренняго сгоранія, какъ это будетъ разъяснено ниже, газовая смѣсь работаетъ лишь по одну сторону поршня. Въ паровыхъ машинахъ парораспредѣленіе выполняется такъ, что индикаторныя діаграммы, рисующія измѣненія состояній пара по обѣимъ сторонамъ поршня, оказываются въ большинствѣ случаевъ почти одинаковыми и располагаются приблизительно симметрично, какъ это и изображено на фиг. 124. Такимъ образомъ, при ходѣ вправо на одной сторонѣ поршня,—лѣвой,—выполняется процессъ впуска ($a_1 b_1$) и, затѣмъ, расширенія ($b_1 c_1$), а на другой, правой,—процессъ выпуска ($c_2 e_2$) и сжатія ($e_2 f_2$). Если

на кривыхъ двойной діаграммы фиг. 124 поставимъ стрѣлки, указывающія направленіе, въ которомъ протекаютъ измѣненія въ состояніи пара, то и окажется, что ходу поршня вправо будутъ соотвѣтствовать кривыя, имѣющія стрѣлки, направленныя вправо, — кривыя $a_1b_1mc_1$ и $c_2e_2mf_2$. Ихъ можно выдѣлить изъ общей діаграммы фиг. 124, послѣ чего получимъ фигуру, изображенную на чертежѣ 125 и состоящую изъ кривой $a_1b_1mc_1$, принадлежащей лѣвой сторонѣ поршня, и кривой c_2mf_2, принадлежащей правой сторонѣ, — короче сказать, изъ одинаково направленныхъ правой и лѣвой кривыхъ фиг. 124.

Подобнымъ же образомъ, при ходѣ влѣво, по лѣвую сторону поршня будутъ выполняться процессы выпуска (c_1e_1) и сжатія (e_1f_1), а по правую — процессы впуска (a_2b_2) и расширенія (b_2c_2). Подобно вышесказанному, обѣ кривыя фиг. 124, изображающія эти процессы, будутъ отмѣчены стрѣлками, идущими въ обоихъ случаяхъ влѣво, т.-е. согласно направленію хода поршня. Выдѣливъ особо эти двѣ кривыя, получимъ діаграмму фиг. 126, рисующую измѣненія состоянія пара при ходѣ влѣво, подобно тому, какъ фиг. 125 рисуетъ эти измѣненія при ходѣ вправо.

Діаграммы, изображенныя на фиг. 125 и 126, интересны и важны въ томъ отношеніи, что даютъ возможность опредѣлить въ каждый данный моментъ дѣйствительное давленіе пара на поршень, какъ результатъ давленій, оказываемыхъ на него одновременно какъ съ одной его стороны, такъ и съ другой. На самомъ дѣлѣ,

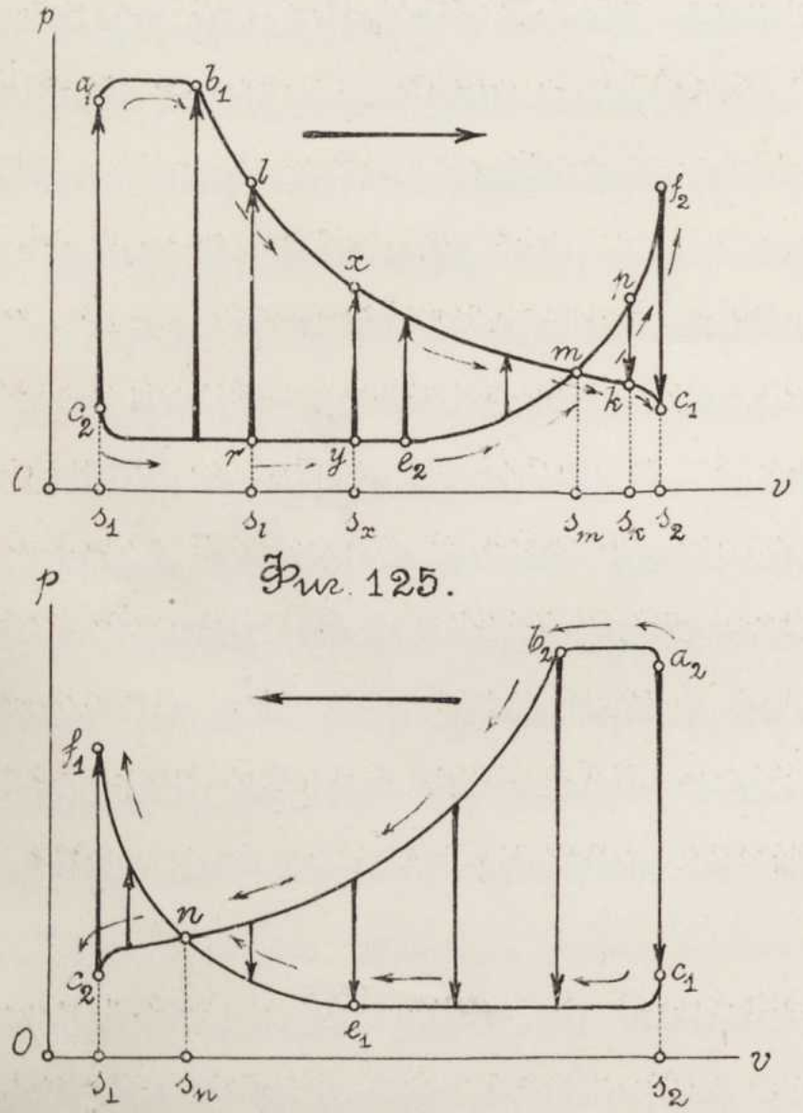
пусть поршень идетъ направо. Согласно сказанному, ходъ измѣненій состоянія пара изобразится въ этомъ случаѣ діаграммой фиг. 125, образованной изъ двухъ кривыхъ: изъ „лѣвой" кривой (т.-е. относящейся къ лѣвой сторонѣ поршня) $a_1b_1mc_1$ и „правой" c_2mf_2; по мѣрѣ удаленія поршня отъ крайняго лѣваго положенія s_1, давленія пара на лѣвую сторону его будутъ идти по „лѣвой" силовой кривой $a_1b_1mc_1$, а на правую — по „правой" силовой кривой c_2mf_2.



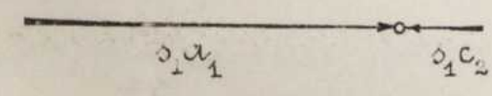
Фиг. 124.

Фиг. 125.

Теперь разсуждаемъ такъ: въ моментъ a_1 начала впуска лѣвая сторона поршня испытываетъ давленіе s_1a_1, направленное вправо (фиг. 127) и, значитъ, полагающее движенію поршня, въ то время какъ правая сторона поршня подвергается давленію, изображаемому отрѣзкомъ s_1c_2, направленному влѣво и, значитъ, пре-



Фиг. 126.



Фиг. 127

противующему движению поршня,— такія препятствующія давленія будемъ называть противодавленіями. Отсюда заключаемъ, что дѣйствительное, результирующее давленіе на поршень,— будемъ называть его свободнымъ усиліемъ,— будетъ равно разности между давленіемъ b_1a_1 и противодавленіемъ b_1c_2 и, значитъ, направится въ сторону большаго изъ нихъ. Нетрудно сообразить, что оно изобразится отрѣзкомъ c_2a_1 и, въ виду преобладанія здѣсь давленія надъ противодавленіемъ, окажется направленнымъ вправо, помогая, такимъ образомъ, движенію поршня. Если силы, направленныя вправо, условимся изображать векторами, направленными вверхъ, а влѣво-направленными внизъ, то полученное свободное усиліе c_2a_1 придется изобразить векторомъ, идущимъ вверхъ. Направленія упомянутыхъ векторовъ будемъ отмѣчать соотвѣтствующими стрѣлками.

Замѣтивъ, что стрѣлка ординаты c_2a_1 идетъ отъ „правой" кривой c_2mf_2 къ „лѣвой" a_1mc_1 и что объ эти кривыя имѣютъ согласное направленіе и вычерчены въ діаграмму фиг. 125, можемъ сказать еще, что свободное усиліе въ моментъ b_1 изобразится отрѣзкомъ c_2a_1 ординаты этой точки b_1, лежащимъ между согласно идущими кривыми двойной діаграммы фиг. 124 a_1mc_1 и c_2mf_2, этому движенію поршня соотвѣтствующими, при чемъ направленіе стрѣлки, указывающей направленіе самого свободнаго усилія, будетъ идти отъ „правой" кривой c_2mf_2 къ „лѣвой" a_1mc_1.

Подобнымъ же образомъ, въ нѣкоторый моментъ b_2 свободное давленіе изобразится отрѣзкомъ lr (фиг. 125) и будетъ направлено опять согласно движенію поршня, т.-е. вправо.

Въ виду этого мы отмѣтимъ его стрѣлкой вверхъ, что вполнѣ согласно съ отмѣткой направленія отъ правой кривой къ лѣвой.

Въ моментъ b_x свободное давленіе будетъ дано отрѣзкомъ yx и будетъ направлено вправо (стрѣлка вверхъ).

Въ моментъ b_m свободное давленіе окажется равнымъ нулю, ибо въ этотъ моментъ давленіе $b_m m$ будетъ равно противодавленію mb_m.

Нетрудно убѣдиться, что на оставшейся части хода, $b_m b_2$, свободныя давленія окажутся направленными противъ хода поршня, ибо кривая противодавленій („правая" кривая) mf_2 идетъ выше „лѣвой" кривой давленій mc_1. Значитъ, на всемъ участкѣ $b_m b_2$ свободныя давленія будутъ направлены все время влѣво, что и отмѣчено стрѣлками внизъ, идущими опять, согласно вышеприведенному условію, отъ „правой" кривой mf_2 „къ лѣвой" mc_1.

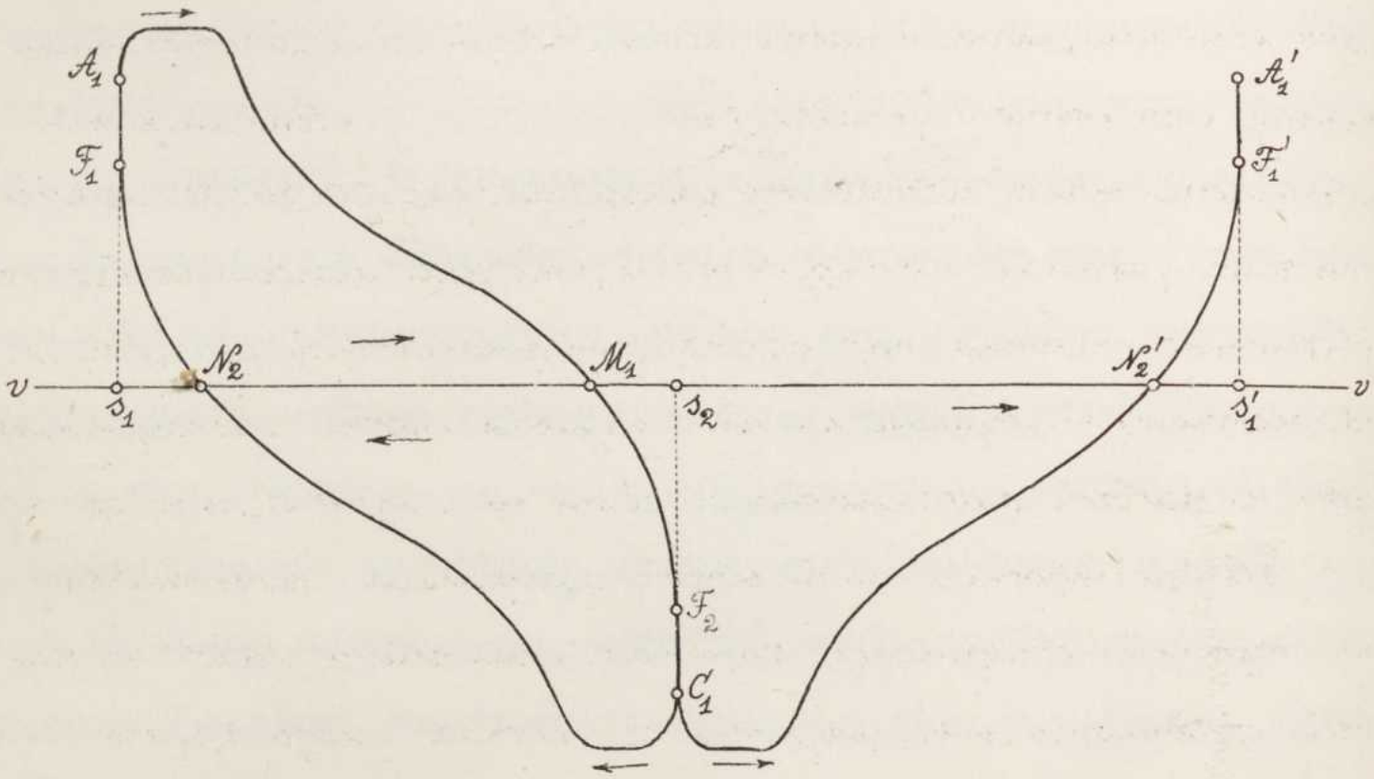
При ходѣ влѣво учетъ свободныхъ давленій будетъ выполненъ совершенно аналогично вышеизложенному: обратившись опять къ соотвѣтствующей этому случаю діаграммѣ, дающей измѣненія состоянія пара по обѣимъ сторонамъ поршня (фиг. 126) и разсмотрѣвъ рядъ различныхъ положеній поршня, увидимъ, что свободныя давленія будутъ выражаться, какъ и раньше, отрѣзками ординатъ, заключенными между обѣими кривыми этой діаграммы, а направленія, попрежнему, будутъ указываться стрѣлками, идущими отъ „правой" кривой $a_2 b_2 nc_2$ къ „лѣвой" $c_1 nf_1$, какъ это и изображено на фиг. 126. Выясняется, такимъ образомъ, что на всемъ участкѣ $b_2 b_m$ свободныя давленія будутъ помогать движенію поршня, будучи направлены

влѣво, а на участкѣ mb_1 будутъ этому движенію препятствовать, ибо будутъ направлены вправо.

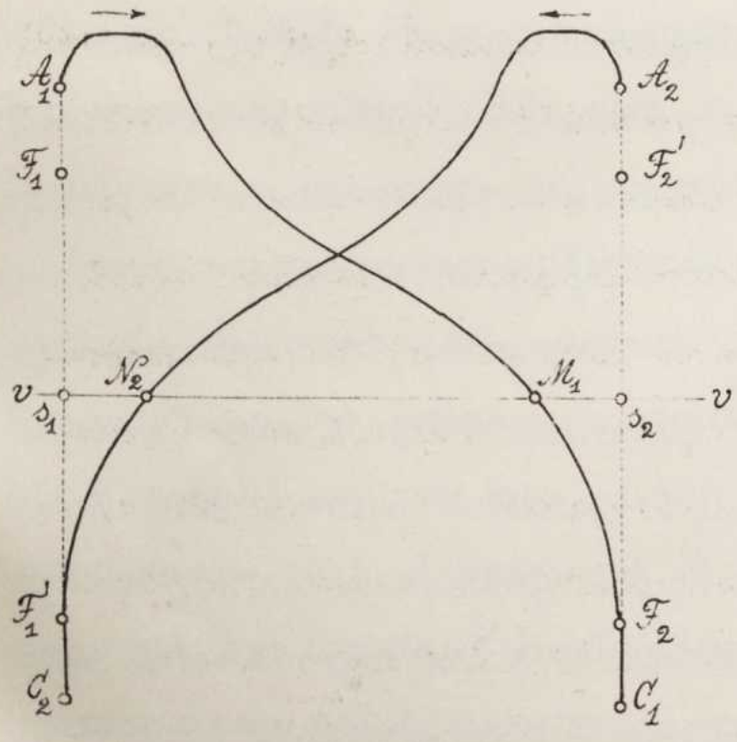
Итакъ, для каждаго положенія поршня можно опредѣлить какъ величину, такъ и направленіе свободнаго усилія, этому моменту соотвѣтствующаго. Это обстоятельство позволяетъ намъ построить діаграмму свободныхъ усилій, при чемъ заранѣе можно сказать, что эта діаграмма будетъ совершенно отлична отъ рабочей, индикаторной діаграммы, ибо, напримѣръ, будетъ имѣть нулевыя точки, между тѣмъ какъ въ рабочей діаграммѣ ихъ быть не можетъ, и т. д.

Для построенія этой новой діаграммы бёремъ такую же систему координатъ, которая принята нами въ рабочей діаграммѣ, и въ различныхъ точкахъ хода b_1b_2 поршня откладываемъ на ординатахъ соотвѣтствующія этимъ точкамъ величины свободныхъ усилій, получаемыя помощью пріемовъ, указанныхъ выше. Такимъ образомъ, для хода поршня вправо получимъ кривую свободныхъ усилій $A_1M_1C_1$ (фиг. 128), соотвѣтствующую діаграммѣ фиг. 125. Ходъ измѣненій дѣйствительнаго, свободнаго давленія (на единицу площади поршня) при ходѣ вправо, обрисовывается помощью этой діаграммы весьма ясно. Замѣтимъ, во избѣжаніе недоразумѣній, что за крайнюю правую ординату b_2C_1 мы будемъ принимать разность между давленіемъ начала впуска b_1a_1 и давленіемъ выпуска въ моментъ b_2, а не между давленіемъ конца сжатія $b_2\beta_2$ и давленіемъ выпуска b_2C_1, какъ это принято было, при разсмотрѣніи единичнаго, отдѣльнаго хода вправо, приведшаго къ діаграммѣ фиг. 125,—при непрерывномъ движеніи машины давленіе $b_2\beta_2$ предполагается мно-

венно возрастающее до давления $s_1 a_1$ начала впуска, отсюда, понятно, столь же мгновенно возрастает и свободное давление. Моменты конца сжатия отмечены векторами типа (sF).



Фиг. 128.



Фиг. 129.

При движении поршня влево получим, помощью диаграммы фиг. 126, кривую $C_1 N_2 A_1$ (фиг. 128). Строить ее можно различно: можно построить ее на том же отрезке $s_2 s_1$, на котором построена и кривая $A_1 M_1 C_1$ хода вправо, но можно построить и отдельно, взявъ для хода влево отрезокъ $s_2 s_1'$, какъ продолжение отрезка $s_1 s_2$; тогда получимъ кривую $C_1 N_2' A_1'$, симметричную кривой $C_1 N_2 A_1$ относительно вертикали $C_1 s_2$.

Отмѣтку направленія свободныхъ усилій можно дѣлать еще и иначе,— можно условиться считать положительными тѣ изъ нихъ, которыя помогаютъ движенію поршня и, такимъ образомъ, производятъ отрицательную работу; эти усилія можно помѣчать стрѣлками, направленными вверхъ, и откладывать ихъ вверхъ отъ оси абсциссъ; давленія, препятствующія движенію, придется отмѣчать стрѣлками, идущими внизъ, и откладывать внизъ отъ оси абсциссъ. Въ силу этого стрѣлки фигуры 126 теперь перемѣнили бы свое направленіе, а діаграмма свободныхъ усилій $A_1 M_1 C_1 N_2 A_1$ (фиг. 128) приняла бы видъ, изображенный на фиг. 129,— кривая $C_1 N_2 A_1$ свободныхъ давленій при ходѣ влѣво замѣнилась бы кривой $C_2 N_2 A_2$, симметричной ей относительно оси абсциссъ. Во избѣжаніе недоразумѣній, у этихъ кривыхъ слѣдуетъ поставить стрѣлки, указывающія направленіе того хода, которому принадлежитъ данная кривая.

Такая помѣтка направленій является еще тѣмъ болѣе удобной, что она вполнѣ соотвѣтствуетъ другому положенію, согласно коему положительными слѣдуетъ считать тѣ работы, которыя произведены силами, помогающими движенію поршня, а отрицательными — тѣ, которыя произведены силами, этому движенію препятствующими; площади же, эти работы выражающія, слѣдуетъ строить вверхъ отъ оси абсциссъ, если онѣ положительны, и внизъ, если онѣ отрицательны. Діаграмма фигуры 129 требованіямъ этимъ удовлетворяетъ вполнѣ.

По поводу діаграммы свободныхъ усилій необходимо сдѣлать слѣдующихъ два важныхъ замѣчанія:

Пусть поршень движется вправо, такъ что кривыя, рисующія ходъ давленій на него (на единицу площади его), изображаются кривыми фиг. 125 и кривой $A_1M_1C_1$ фиг. 128. Кривыя фигуры 125 выдѣляютъ площадь $c_2a_1me_2c_2$, дающую положительную работу, ибо здѣсь свободныя давленія помогаютъ ходу поршня, и площадку mf_2c_1, дающую работу отрицательную, ибо свободныя давленія здѣсь ходу поршня препятствуютъ. Отсюда слѣдуетъ, что работа пара за этотъ ходъ вправо будетъ равна разности этихъ площадей,—точнѣе говоря, алгебраической суммѣ ихъ.

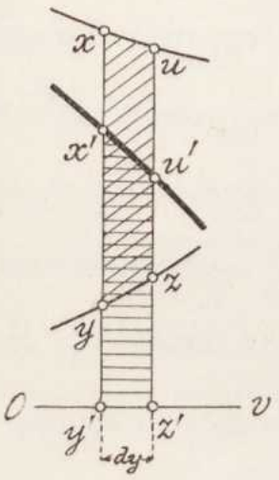
По діаграммѣ фиг. 128 полная работа свободныхъ давленій изобразится разностью площадей $s_1A_1M_1s_1$ и $M_1s_2C_1M_1$. Спрашивается теперь, будутъ ли эти разности въ обоихъ случаяхъ одинаковы, а кромѣ того, въ какомъ отношеніи находятся онѣ къ основной діаграммѣ ac фиг. 123?

Чтобы разобраться въ этомъ, разсмотримъ ходъ поршня вправо. Обращаясь къ діаграммѣ фиг. 125, видимъ, что работа l_1 пара выражается здѣсь разностью площадей $s_1a_1mc_1s_2$ и $s_1c_2e_2mf_2c_1s_2$*). Но, обращаясь къ фиг. 124, видимъ, что эта послѣдняя (площадь $s_1e_2f_2s_2$) равна площади $s_1f_1e_1c_1s_2$ (фиг. 124), откуда слѣдуетъ, что наша разность равна площади $a_1b_1mc_1e_1f_1a_1$ фиг. 124, т.-е. площади прямоугольника $qlmn$ (фиг. 123), равной sH.

Перейдемъ теперь къ діаграммѣ свободныхъ усилій $A_1M_1C_1$, соотвѣтствующей тому же ходу вправо. Получена она, какъ извѣстно, путемъ откладыванія отрѣзковъ типа lr и xy (фиг. 125) отъ оси абсциссъ Ov въ ту же сторону, въ какую

*) Очевидно, что разность площадей $a_1me_2c_2a_1$ и mf_2c_1 равна разности площадей $s_1a_1mc_1s_2$ и $s_1c_2e_2mf_2c_1s_2$, взятыхъ здѣсь.

эти отрѣзки идутъ отъ „правой кривой $c_2 f_2$. Произошло, такимъ образомъ, осаживаніе этихъ отрѣзковъ внизъ, вплоть до оси абсциссъ Ov, но нетрудно убѣдиться, что измѣненія въ площади, подвергшейся такой осадкѣ, произойти не могло: контуръ площади измѣнился, но величина площади осталась неизмѣненной (съ точностью до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ. Дѣйствительно, пусть какіе-либо отрѣзки xy и uz (фиг. 130) ординатъ, лежащіе между „правой" и „лѣвой" кривыми діаграммы фиг. 125, осаживаются по этимъ ихъ ординатамъ внизъ до тѣхъ поръ, пока точка y не придетъ въ точку y' на оси Ov, а точка z — въ точку z'. Замѣчая теперь, что площади двухъ безконечно-малыхъ трапецій $xuzy$ и $x'u'z'y'$, съ точностью до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ могутъ быть приняты равными другъ другу, — высота у нихъ $(y'z')$ одна и та же, а длины параллельныхъ сторонъ не измѣнились, — заключаемъ, что на величинѣ площади осадка подобнаго рода не отражается совсѣмъ. Распространяя то же заключеніе на всю площадь $c_2 a_1 m c_1 f_2 m c_2$ (фиг. 125), скажемъ, что она въ точности будетъ равна площади $s_1 A_1 M_1 C_1 s_2$ (фиг. 128), при чемъ, отдѣльно, площадь $c_2 a_1 m e_2 c_2$ будетъ равна площади $s_1 A_1 M_1 s_1$, а площадь $m f_2 c_1 m$ будетъ равна площади $M_1 s_2 C_1 M_1$. Въ результатѣ окажется, что разность площадей $A_1 M_1 s_1$ и $M_1 C_1 s_2$, изъ коихъ первая даетъ положительную работу свободныхъ усилій, а вторая — отрицательную, такъ что разность абсолютныхъ величинъ ихъ представитъ собою ихъ алгебраическую сумму, — эта разность



Фиг. 130.

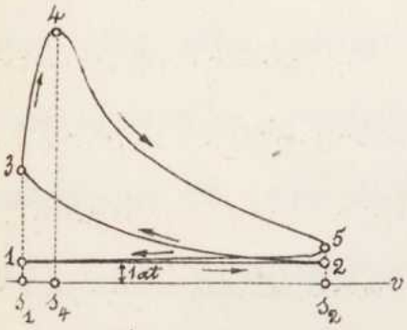
даетъ тотъ же прямоугольникъ dmn (фиг. 123) съ площадью SH. Необходимо помнить, что діаграмма свободныхъ усилій даетъ, подобно индикаторной діаграммѣ, давленія не на весь поршень, а на единицу площади его, такъ что давленіе на весь поршень, взятое помощью діаграммы свободныхъ усилій, дающей разности (p_1-p_2), выразится черезъ $F(p_1-p_2)$, гдѣ F есть площадь поршня.

Второе замѣчаніе, которое необходимо здѣсь сдѣлать, касается вопроса о независимости свободныхъ усилій отъ времени. Мы уже видѣли, что давленія p_1 пара на лѣвую сторону поршня отъ времени не зависятъ и являются функціями координатъ, опредѣляющихъ положеніе поршня. То же самое можно, очевидно, сказать и относительно давленій p_2 на правую сторону поршня, ибо законъ измѣненія ихъ дается такой же діаграммой, какая даетъ законъ давленій p_1. Ясно, что свободныя усилія, — на единицу ли площади поршня, (p_1-p_2), или на всю эту площадь, $[F(p_1-p_2)]$, — также отъ времени зависѣть не будутъ, представляя собою функціи координатъ, опредѣляющихъ положеніе поршня; иначе говоря,

свободныя усилія, не завися отъ времени, зависятъ лишь отъ положенія механизма, отъ конфигураціи его частей.

При динамическихъ изслѣдованіяхъ нашихъ машинъ и механическихъ устройствъ обычно приходится имѣть дѣло только съ силами, не зависящими отъ времени, но представляющими собою функціи положенія въ пространствѣ точекъ ихъ приложенія, т.-е. функціи конфигураціи, расположенія частей этихъ машинъ, — функціи фазъ механизма. Съ такими дѣйствующими, активными силами будемъ имѣть въ дальнѣйшемъ дѣло и мы.

Умѣстно будетъ упомянуть здѣсь вкратцѣ о составленіи діаграммы свободныхъ усилій въ случаѣ двигателей внутренняго сгоранія, гдѣ процессъ измѣненія рабочей газовой смѣси протекаетъ обычно по одну сторону поршня, въ то время какъ другая остается постоянно подъ воздѣйствіемъ одного лишь атмосфернаго давленія. Разсмотримъ вкратцѣ схему работы какого-либо такого двигателя,—напримѣръ, 4-хъ-тактнаго двигателя, работающаго по циклу Отто и дающаго индикаторную діаграмму, изображенную на фиг. 131.



Фиг. 131

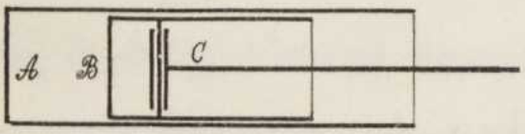
За первый свой ходъ вправо (первый тактъ), отъ s_1 до s_2, двигатель всасываетъ горючую смѣсь, наполняющую къ концу хода, т.-е. къ моменту s_2, все пространство подъ поршнемъ подъ давленіемъ, равнымъ внѣшнему, атмосферному, такъ что линія, изображающая ходъ давленій за этотъ тактъ, изобразится прямой (1—2), параллельной оси абсциссъ. Въ моментъ (s_2) впускной клапанъ закрывается.

Въ теченіе слѣдующаго, очереднаго хода поршня,—хода влѣво (втораго такта), отъ s_2 къ s_1,—происходитъ нѣкоторое опредѣленное (адіабатическое) сжатіе газовой смѣси, всосанной подъ поршень къ концу (2) перваго такта; измѣненіе давленія будетъ дано здѣсь силовой линіей (2-3).

Слѣдующій ходъ вправо,—третій тактъ,—отводится частью для взрыва,-(3—4), на пути $s_1 s_4$,-а частью для расширенія продуктовъ взрыва,-(4—5) на пути $s_4 s_2$,-причемъ это расширеніе доводится почти до давленія во внѣшней средѣ.

И, наконецъ, весь циклъ завершается четвертымъ тактомъ, при ходѣ влѣво $s_2 s_1$, во время котораго происходитъ выталкиваніе сгорѣвшей, непригодной для дальнѣйшей работы, газовой смѣси наружу, при чемъ давленіе этой изгоняемой смѣси мѣняется по кривой (5–1), весьма близко подходящей къ линіи всасыванія (1–2).

Кривая свободныхъ усилій строится здѣсь особенно просто потому, что давленіе на одну сторону поршня, положимъ, правую, – остается все время постояннымъ, равнымъ атмосферному: цилиндръ двигателя открытъ, и горючая смѣсь работаетъ внутри его, въ пространствѣ AB подъ поршнемъ (фиг. 132),



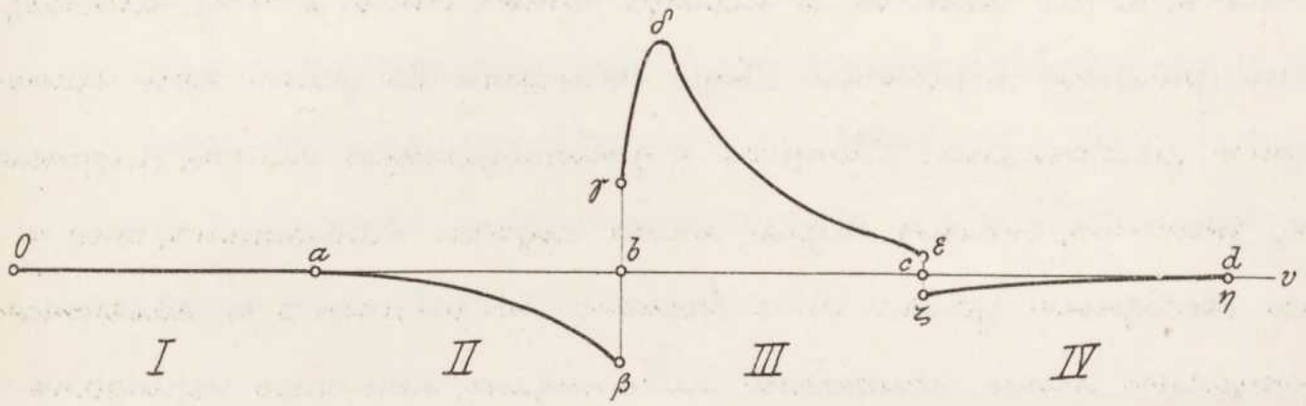
Фиг. 132.

такъ что воздѣйствію этой смѣси подвергается все время одна и та же, внутренняя сторона B поршня. Давленіе этой смѣси, т.-е. давленіе внутри цилиндра, будемъ обозначать черезъ p_B; наружная же сторона C его остается все время подъ давленіемъ внѣшней среды, и мы будемъ обозначать его черезъ p_c. — Разсмотримъ теперь ходъ измѣненій свободныхъ усилій и работу ихъ за весь четырехтактный циклъ, для чего возьмемъ систему координатъ, подобную прежней, при чемъ вверхъ отъ оси абсциссъ будемъ откладывать свободныя усилія, помогающія движенію поршня, а внизъ – ему сопротивляющіяся. Всѣ 4 хода выпрямимъ, для наглядности, въ одну прямую. Тогда окажется слѣдующее:

За первый тактъ (1–2) свободныя усилія остаются во все время равными нулю, такъ какъ давленія p_B и p_c за

весь этотъ ходъ оказываются другъ другу равными. Значитъ, діаграмма свободныхъ давленій за первый тактъ даетъ прямую 0a, совпадающую съ осью абсциссъ (фиг. 133).

За второй тактъ (ходъ влѣво), когда происходитъ сжатіе, давленія $p_в$ будутъ расти по закону (2–3), противодѣйствуя движенію; помогать же движенію будетъ внѣшнее давленіе p_c. Поэтому свободныя давленія будутъ даны здѣсь отрѣзками ординатъ между прямой (1–2) и кривой (2–3) и окажутся всѣ отрицательными, вслѣдствіе



Фиг. 133.

чего ихъ придется откладывать внизъ, и мы получимъ кривую aβ, представляющую собою ту же кривую (2–3), лишь повернутую вокругъ точки (2) на 180°.

За третій тактъ (вправо) давленія $p_в$ сгорающей, а затѣмъ сгорѣвшей и расширяющейся газовой смѣси будутъ направлены также вправо, т.-е. будутъ помогать движенію; внѣшнее же давленіе p_c будетъ ему противодѣйствовать. Свободныя усилія изобразятся отрѣзками ординатъ между кривой (3–4–5) и прежней прямой (1–2), и для этого такта получимъ кривую свободныхъ усилій γδε, представляющую собою ту же кривую (3–4–5), отнесенную къ оси абсциссъ (1–2)

Наконецъ, за четвертый тактъ, влѣво, давленія $p_в$ будутъ противодѣйствовать движенію, а внѣшнія, p_c, — ему помогать, вслѣдствіе чего свободныя давленія окажутся отрицательными, и кривая $\zeta\eta$ ихъ пойдетъ ниже оси абсциссъ. Эта кривая $\zeta\eta$ есть та же кривая (5–1), лишь повернутая вокругъ точки (1) относительно своего прежняго положенія (5–1) на 180°.

Такимъ образомъ получается кривыя свободныхъ усилій $0\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$, рисующая измѣненія ихъ за полный циклъ. Она даетъ собою законъ измѣненія давленій на поршень, а значитъ, и на штокъ и палецъ кривошипа (шейку кольна), и эти давленія и должны быть приняты въ учетъ при изслѣдованіи механизма. Вопросъ о дѣйствующихъ силахъ, разрѣшается, значитъ, вполнѣ и для этого случая. Замѣтимъ, что и здѣсь свободныя усилія отъ времени не зависятъ и являются функціями лишь положеній механизма, при чемъ періодомъ механизма является здѣсь циклъ изъ четырехъ тактовъ, т.-е. изъ двухъ полныхъ оборотовъ коренного вала, что для существа дѣла является, конечно, безразличнымъ.

Въ случаѣ другихъ двигателей діаграммы будутъ имѣть видъ, можетъ быть, весьма отличающійся отъ діаграммъ фиг. 123 и 131, но каковъ бы этотъ видъ ихъ ни былъ, а мы всегда сможемъ построить діаграмму свободныхъ усилій для одного періода работы машины, и, значитъ, будемъ имѣть всѣ свѣдѣнія объ активныхъ силахъ, работающихъ въ механизмѣ. Перейдемъ теперь къ изученію силъ сопротивленій, обнаруживающихся при работѣ нашихъ механизмовъ и машинъ.

Работа преодоленія полезныхъ сопротивленій выражается во вращеніи съ извѣстной угловой скоростью ω коренного вала, на которомъ дѣйствуетъ извѣстный моментъ внѣшняго полезнаго сопротивленія, M. Имѣя въ виду послѣдующее, мы будемъ предполагать, что этотъ моментъ вызывается нѣкоторой силой R, дѣйствующей на плечѣ, равномъ радіусу r окружности, описываемой пальцемъ кривошипа, такъ что

$$M = Rr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Далѣе, обычно предполагается, что этотъ моментъ полезнаго сопротивленія на коренномъ валу есть величина постоянная, сообразно чему, въ виду постоянства радіуса r, будетъ постояннымъ и усиліе R полезнаго сопротивленія на пальцѣ кривошипа:

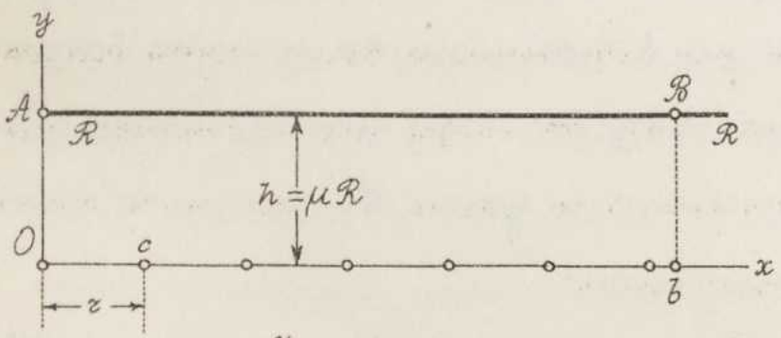
$$R = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Діаграмма усилія R построится очень просто: принимаемъ какую-либо прямую Ox (фиг. 134) за ось абсциссъ, а прямую $Oy \perp Ox$ за ось ординатъ, и будемъ откладывать по оси абсциссъ пути, проходимые точкой приложенія силы R, т.-е. центромъ поперечнаго сѣченія пальца кривошипа; это, значитъ, будутъ дуги окружности, описываемой этой точкой, — дуги, выпрямляемыя и откладываемыя по этой оси Ox хотя бы отъ той же точки O ея. Такимъ образомъ, если радіусъ r пальца кривошипа, т.-е. разстояніе между осями вала и пальца кривошипа, изображается отрѣзкомъ Oc, то вся окружность, описываемая центромъ сѣченія пальца кривошипа, будучи выпрямлена, изобразится отрѣзкомъ Ob, равнымъ $2\pi r$, т.-е. $6{,}28\ Oc$. Та-

кова будетъ величина пути, проходимаго точкой приложенія силы R за одинъ оборотъ коренного вала.

Если періодъ равенъ не одному, а нѣсколькимъ оборотамъ вала, — какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ двигателяхъ внутренняго сгоранія, гдѣ онъ составляетъ 2 оборота, — то путь точки приложенія силы R соотвѣтственно измѣнится, и, напримѣръ, для двигателей внутренняго сгоранія онъ будетъ равенъ уже $4\pi r$, т.-е. 12,56 Oc, и т. д.

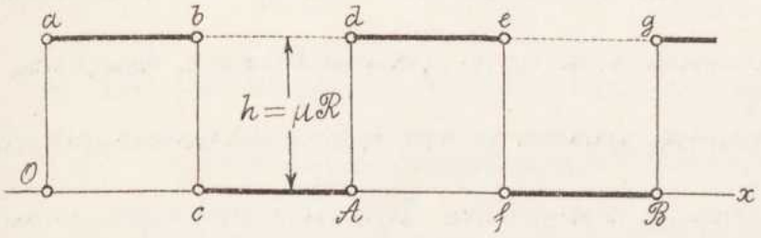
Если, согласно прежнему, на ординатахъ условимся откладывать силы, дѣйствующія на точку въ направленіи ея пути, то въ данномъ случаѣ, въ видѣ постояннаго совпаденія силы R съ касательной къ окружности пальца кривошипа, всѣ эти ординаты окажутся одинаковыми и равными каждая R, такъ что силовой кривой полезныхъ сопротивленій R явится прямая RR, параллельная оси Ox и отстоящая отъ нея на $h = \mu R$, гдѣ μ есть масштабъ силъ, заранѣе нами выбранный.



Фиг. 134.

Мы видѣли, что за полный оборотъ вала точка приложенія силы R пройдетъ путь $Ob = 2\pi r = 2\pi . Oc$. Такъ какъ сила R, будучи все время касательной къ окружности пальца кривошипа, постоянно направлена по пути этой точки, то работа полезнаго сопротивленія за одинъ оборотъ вала выразится площадью прямоугольника $OABb$ и будетъ равна, въ нѣкоторыхъ единицахъ работы, за каждый оборотъ вала, $Ob \times h = 2\pi r . \mu R = \mu . 2\pi r R = 2\pi \mu M$.

Конечно, ходъ сопротивленія можетъ быть и инымъ,—можетъ, напримѣръ, случиться такъ, что сопротивленіе будетъ имѣть ся лишь на части періода, а на другой его части сопротивленія не будетъ совсѣмъ. Тогда силовая кривая можетъ принять видъ, подобный изображенному на фиг. 135: на части Oc полнаго періода OA появляется полезное сопротивленіе R, исчезающее въ моментъ перехода механизма черезъ положеніе (c) и уже не появляющееся вплоть до начала A слѣдующаго періода AB. Здѣсь силовая кривая полезнаго сопротивленія за одинъ періодъ изобразится прямыми ($ab - cA$) и т. д.



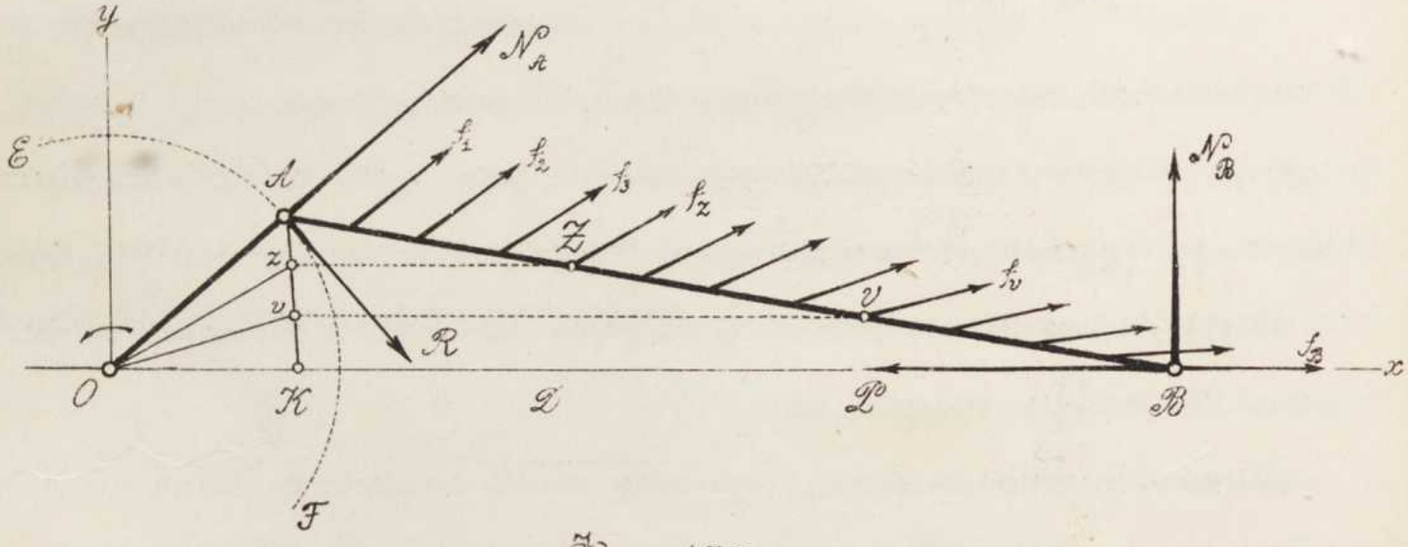
Фиг. 135.

Конечно, сопротивленіе можетъ быть задано и какъ-нибудь иначе; но для насъ важенъ не характеръ этого заданія, а лишь то обстоятельство, чтобы величина и направленіе силъ сопротивленія отъ времени не зависѣли, а представлялись лишь функціями положеній механизма. Такими мы и будемъ считать ихъ въ дальнѣйшемъ.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію силъ вредныхъ сопротивленій и силъ инерціи, и, прежде всего, покажемъ, что **силы вредныхъ сопротивленій**, т.-е. силы тренія, **зависятъ не только отъ силъ дѣйствующихъ (P) и силъ полезнаго сопротивленія, но еще и отъ силъ инерціи.** Доказать это весьма нетрудно, хотя бы съ помощью слѣдующихъ элементарныхъ разсужденій:

Допустимъ, ради опредѣленности разсужденій, что у насъ имѣется система шатуна AB (фиг. 136), которую мы

разсматриваемъ въ тотъ моментъ ея движенія, когда она занимаетъ положеніе, изображенное на чертежѣ. Въ силу условій, наложенныхъ на свободныя усилія и на усилія полезныхъ сопротивленій, мы должны принять, что въ моментъ, изображенный на чертежѣ, въ точкѣ B шатуна на него дѣйствуетъ вполнѣ опредѣленная какъ по величинѣ, такъ и по направленію, сила P (свободное усиліе), а въ точкѣ A — также вполнѣ опредѣленное



Фиг. 136.

усиліе полезнаго сопротивленія R. Кромѣ этихъ двухъ силъ, система шатуна оказывается нагруженной еще цѣлымъ рядомъ другихъ силъ, а именно: силами инерціи всѣхъ массъ, входящихъ въ составъ шатуна, и силами опорныхъ сопротивленій, N_A и N_B, нормальными къ траекторіямъ точекъ A и B, т.-е. къ окружности EF въ точкѣ A ея и къ прямой Ox въ точкѣ B ея. Разсмотримъ сначала силы инерціи.

Относительно силъ инерціи, прежде всего, можно сказать, что онѣ появляются каждый разъ, когда имѣетъ мѣсто измѣненіе скоростей точекъ системы, т.-е. когда ускоренія массъ этихъ точекъ оказываются отличными отъ нуля. Это явствуетъ изъ выраженія силы инерціи какой-либо матеріальной точки съ массой m; сила инерціи, f_m, ея выража-

ется такъ:

$$f = -mj, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

и представляетъ собою полное ускореніе этой точки, т.-е. полное измѣненіе скорости v ея со временемъ. Выраженіе полнаго ускоренія пишутъ обычно въ болѣе полной формѣ, въ видѣ геометрической суммы проекцій его по осямъ координатъ, а именно, въ видѣ:

$$f_m = -mj = -m\left(\overline{\frac{d^2x}{dt^2}} + \overline{\frac{d^2y}{dt^2}} + \overline{\frac{d^2z}{dt^2}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Принимая во вниманіе, что мы будемъ изучать движенія лишь плоскихъ механизмовъ, и располагая плоскость xOy въ этой именно плоскости движенія нашего механизма, имѣемъ, что $z = 0$ или const, вслѣдствіе чего выраженіе полнаго ускоренія плоскихъ механизмовъ принимаетъ видъ:

$$f_m = -mj = -m\left(\overline{\frac{d^2x}{dt^2}} + \overline{\frac{d^2y}{dt^2}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія силы инерціи какой-либо матеріальной точки съ массой m необходимо имѣть полное ускореніе j ея, взятому моменту соотвѣтствующее. Для точекъ шатуна ускоренія эти могутъ быть получены при помощи плана ускореній, построеніе коего выполняется по извѣстнымъ правиламъ кинематики. Пусть планъ ускореній, соотвѣтствующій данному моменту движенія шатуна, изображается треугольникомъ OAK, — мы допустимъ, ради простоты чертежа, что кривошипъ движется равномѣрно. Тогда ускореніе любой точки шатуна будетъ извѣстно,

а это, въ свою очередь, позволитъ намъ сейчасъ же опредѣлить какъ величину силы инерціи каждой точки шатуна, такъ и направленіе ея. Напримѣръ, если точкѣ Z шатуна въ планѣ ускореній соотвѣтствуетъ точка z, то сила инерціи f_z этой точки Z выразится произведеніемъ изъ массы m_z этой точки на полное ускореніе ея j_z, равное $z0.k$, гдѣ k есть коэффиціентъ пропорціональности плана ускореній, при чемъ произведеніе это надлежитъ брать со знакомъ минусъ для обозначенія того обстоятельства, что сила инерціи f_z будетъ направлена прямопротивоположно полному ускоренію j_z.

Итакъ,

$$f_z = -m_z . z0 . k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Если бы точка A шатуна двигалась по своей траекторіи неравномѣрно, то направленіе полнаго ускоренія j составляло бы съ направленіемъ вектора $z0$ уголъ μ, тангенсъ коего дается формулой:

$$tg\,\mu = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{d\vartheta}{dt}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

гдѣ ϑ есть угловая скорость вращенія кривошипа. Въ данномъ случаѣ, въ виду $\vartheta = const$, имѣемъ $tg\,\mu = 0$ и $\mu = 0$.

Принимая теперь во вниманіе, что коэффиціентъ k, вычисленный для даннаго момента движенія, сохраняетъ для всей системы шатуна одно и то же значеніе; далѣе, что каждой точкѣ Z шатуна соотвѣтствуетъ своя точка z плана ускореній, и что, наконецъ, массы точекъ шатуна могутъ быть весьма различны, заключаемъ, что въ данный моментъ силы инерціи шатуна, будучи пропорціональны массамъ точекъ его и длинамъ векторовъ типа $z0$, окажутся весьма разнообразными какъ по величинѣ, такъ и

по направленію. Тѣмъ не менѣе, все это разнообразіе силъ инерціи по величинѣ ихъ и по направленію нисколько не мѣшаетъ намъ поставить вопросъ о равнодѣйствующей силѣ инерціи, эквивалентной всему безконечному множеству частичныхъ силъ инерціи, и этотъ вопросъ будетъ нами разсмотрѣнъ и разрѣшенъ въ слѣдующемъ параграфѣ, гдѣ и будетъ указано, что такая равнодѣйствующая сила инерціи, дѣйствительно, существуетъ въ каждомъ данномъ случаѣ, имѣя вполнѣ опредѣленныя величину, направленіе и точку приложенія; доказательство этого положенія и выводы изъ него и составятъ собою содержаніе такъ называемой теоремы о центрѣ качанія.

Итакъ, оказывается, что въ каждый данный моментъ силы инерціи шатуна имѣютъ вполнѣ опредѣленныя величины и направленія. Замѣтивъ это, обратимся къ разсмотрѣнію опорныхъ сопротивленій N_A и N_B. По поводу ихъ необходимо имѣть въ виду слѣдующее:

Точка A шатуна движется по своей траекторіи,—окружности центра O и радіуса OA,—а точка B по своей—прямой OB (фиг. 136). Такимъ образомъ, помимо силъ P, R и силъ инерціи (f_z), система шатуна находится подъ воздѣйствіемъ геометрическихъ связей, вынуждающихъ точки A и B двигаться вышеуказаннымъ образомъ. Для того, чтобы нашу систему можно было считать системой совершенно свободной, находящейся подъ воздѣйствіемъ однихъ лишь силъ, необходимо отъ этихъ геометрическихъ связей освободиться, что и достигается путемъ замѣны этихъ связей силами реакціи=сопротивленія-ихъ, нормальными къ траек-

точкамъ точекъ A и B, — это и будутъ силы опорныхъ сопротивленій, N_A и N_B, благодаря коимъ и возбуждаются силы тренія, на покрытіе работы которыхъ и потребуется затрата части работы свободныхъ усилій P.

Такимъ образомъ, усилія опорныхъ сопротивленій будутъ всегда перпендикулярны къ траекторіямъ, по которымъ происходитъ движеніе концовъ отрѣзка, опредѣляющаго движеніе системы, такъ что направленія этихъ усилій будутъ извѣстны въ каждый моментъ движенія, для каждаго положенія механизма. Спрашивается теперь, сколь велика будетъ величина ихъ? Детально вопросъ этотъ будетъ разрѣшенъ въ одномъ изъ слѣдующихся параграфовъ, въ данный же моментъ мы ограничимся однимъ лишь общимъ соображеніемъ и намѣтимъ лишь ходъ рѣшенія. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

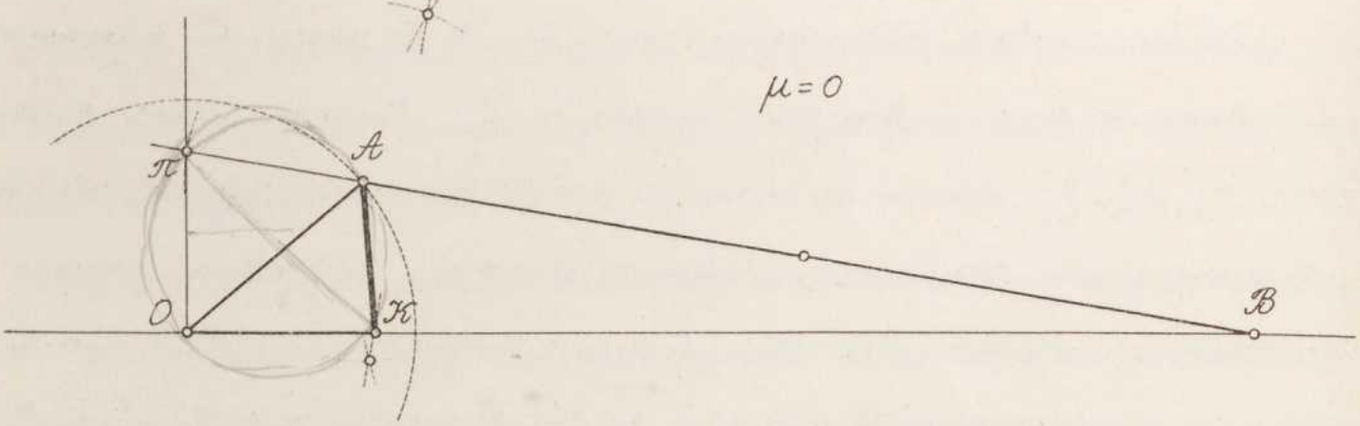
Изъ механики извѣстно, что связь между силами инерціи и всѣми другими силами, дѣйствующими въ системѣ, устанавливается при помощи принципа д'Аламбера, говорящаго, что

«если въ какой-либо моментъ времени мы остановимъ движущуюся систему и къ силамъ, ее движущимъ, прибавимъ еще всѣ силы инерціи, соотвѣтствующія данному моменту времени, то будетъ имѣть мѣсто равновѣсіе, при чемъ всѣ силы давленій, натяженій и проч., развивающіяся между частями системы при такомъ равновѣсіи, будутъ представлять собою дѣйствительныя силы давленій, натяженій и проч., имѣющія мѣсто при движеніи системы въ разсматриваемый моментъ времени».

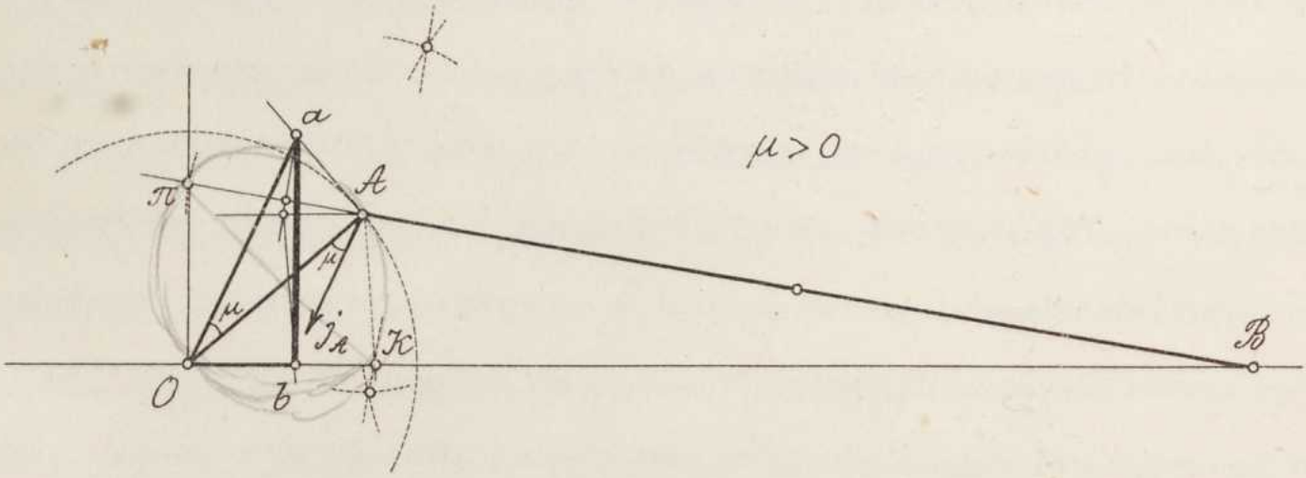
Применимъ этотъ принципъ къ системѣ нашего шатуна, для чего, остановивъ систему шатуна AB въ данный моментъ, прибавляемъ къ ней всѣ силы инерціи (f_z). Между всѣми силами, $[P, R, N_A, N_B, f_z]$, теперь къ системѣ приложенными, будетъ, согласно упомянутому принципу, имѣть мѣсто равновѣсіе, — силы инерціи уравновѣшиваютъ собою всѣ остальныя силы $[P, R, N_A$ и $N_B]$. Отсюда слѣдуетъ, что для всей этой системы силъ $[f_z), P, R, N_A, N_B]$ будутъ имѣть мѣсто обычныя условія равновѣсія силъ, сводящіяся въ данномъ случаѣ, въ виду плоскаго движенія ея, къ двумъ уравненіямъ проекцій на оси координатъ и къ уравненію моментовъ относительно какой-либо точки, — всѣ эти уравненія, примѣнительно къ случаю простого кривошипнаго механизма, будутъ написаны нами въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ; теперь же мы ограничимся указаніемъ лишь на возможность ихъ написанія, изъ которой вытекаетъ слѣдующее весьма важное замѣчаніе:

Вращая кривошипъ AO съ различными скоростями и ускореніями, можемъ получать для одного и того же положенія шатуна самые разнообразные планы ускореній его точекъ, что весьма наглядно иллюстрируется тремя случаями построенія этихъ плановъ при различныхъ значеніяхъ угловыхъ ускореній кривошипа AO, т.-е. при различныхъ углахъ μ, — случаями, изображенными на фигурахъ 137–139. Кривошипный механизмъ взятъ здѣсь одинъ и тотъ же, взяты также одни и тѣ же положенія шатуна, но планы ускореній получаются, какъ и слѣдуетъ ожидать, разные, въ зависимости отъ закона вращенія кривошипа: на фиг. 137, гдѣ изображенъ случай

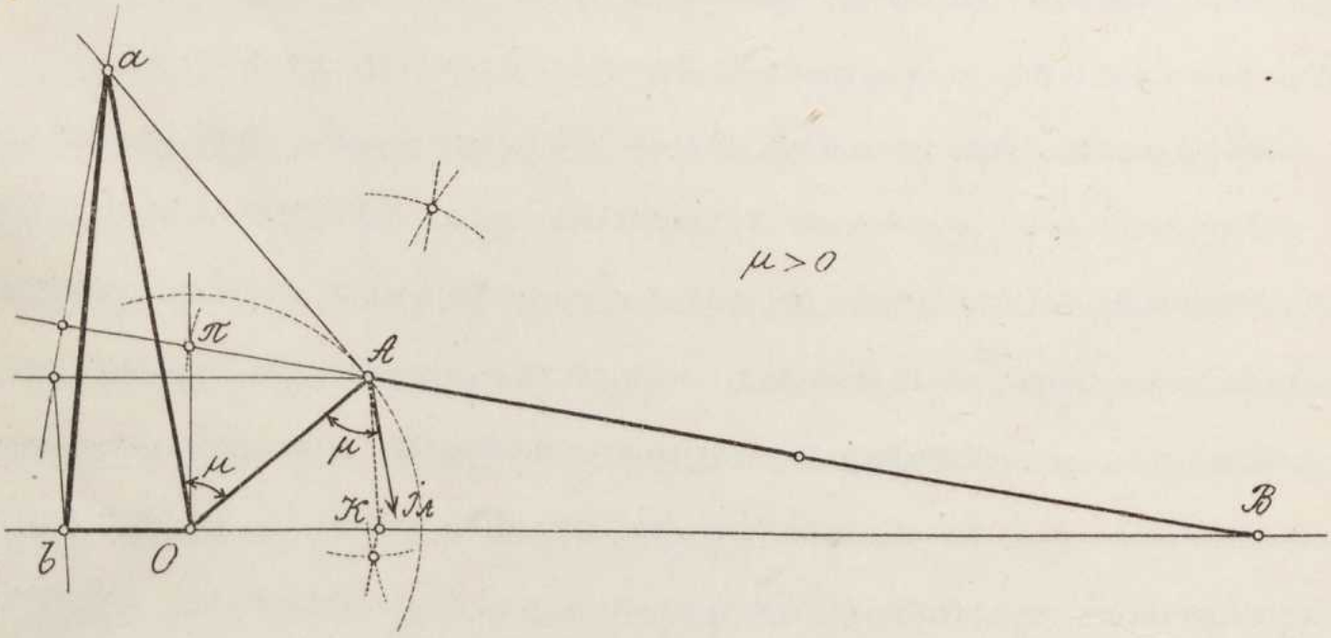
равномѣрнаго вращенія кривошипа,—тотъ же, что и на фиг. 136,—



Фиг. 137.



Фиг. 138.



Фиг. 139.

уголъ $\mu = 0$, и планъ ускореній изображается Δ-комъ OAB; на фигурѣ 138, гдѣ взятъ случай вращенія кривошипа съ небольшимъ угловымъ ускореніемъ, гдѣ, слѣдовательно, уголъ μ невеликъ, планъ ускореній представляется треугольникомъ Oab; наконецъ, на фиг. 139,

гдѣ угловое ускореніе очень велико и гдѣ, слѣдовательно, уголъ μ близокъ къ 90°, планъ ускореній изображается треугольникомъ $0ab$, уже значительно отличающимся отъ предыдущихъ случаевъ. Коэффиціентъ пропорціональности у всѣхъ этихъ плановъ одинъ и тотъ же, — онъ равенъ ϑ^2, т.-е. квадрату угловой скорости вращенія кривошипа AO.

Итакъ, оказывается, что ускоренія точекъ шатуна, даже при одномъ и томъ же его положеніи и одной и той же угловой скорости ϑ въ данный моментъ, могутъ имѣть значенія, весьма разнящіяся другъ отъ друга какъ по величинѣ, такъ и по направленію; различія эти зависятъ отъ угла μ, т.-е. отъ величины углового ускоренія $d\vartheta/dt$ и, значитъ, отъ закона $\vartheta=\varphi(t)$, дающаго ходъ измѣненія угловой скорости ϑ со временемъ.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что столь же разнообразныя значенія могутъ имѣть, при одномъ и томъ же положеніи кривошипа, и силы инерціи массъ его: онѣ, какъ видимъ, также зависятъ отъ $d\vartheta/dt$, т.-е. отъ вида функціи φ, опредѣляющей зависимость угловой скорости ϑ отъ времени t.

Принимая теперь во вниманіе, что силы P и R совершенно отъ этого закона не зависятъ, но что, въ то же самое время, всѣ участвующія здѣсь силы $[P, R, N_A, N_B, (f_z)]$ связаны между собою тремя уравненіями равновѣсія, заключаемъ, что силы N_A и N_B надо также признать зависящими отъ углового ускоренія $d\vartheta/dt$, т.-е. отъ вида функціи φ, и, значитъ, мѣняя его, можемъ для одного и того же положенія шатуна получить самыя разнообразныя значенія силъ N_A и N_B.

Нетрудно, однако, усмотрѣть, что такое разнообразіе въ значеніяхъ силъ инерціи (f_z) и, вмѣстѣ съ этимъ, силъ

N_A и N_B можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда функція Φ не представляетъ собою функціи положеній механизма,— напримѣръ, функціи угла AOB отклоненія кривошипа. Если же функція Φ представляетъ собою функцію положеній механизма, то, очевидно, это будетъ функція періодическая, и движеніе системы будетъ, слѣдовательно, періодическимъ и, какъ говорятъ, «установившимся»,— при немъ каждому отдѣльному положенію механизма будутъ соотвѣтствовать свои, ему присущія, значенія скоростей и ускореній точекъ его, періодически, при томъ, возвращающіяся при каждомъ новомъ переходѣ системы черезъ это именно положеніе. Ясно, что такое установившееся движеніе можетъ быть какъ равномѣрнымъ, такъ и неравномѣрнымъ. Мы увидимъ ниже, сколь важную роль играетъ оно среди другихъ движеній, разбираемыхъ въ динамикѣ механизмовъ вообще.

Пусть механизмъ нашей паровой машины движется установившимся движеніемъ съ періодомъ, равнымъ одному обороту коренного вала. Очевидно, что въ такомъ случаѣ каждому данному положенію шатуна будутъ соотвѣтствовать свои значенія силъ инерціи f_z и силъ опорныхъ сопротивленій N_A и N_B. Такъ какъ силы P и R, попрежнему, продолжаютъ быть функціями положеній механизма, то можно сказать, что

> въ случаѣ установившагося движенія силы инерціи и силы опорныхъ сопротивленій являются функціями положеній механизма, подобно силамъ P и R, и, подобно этимъ послѣднимъ, отъ времени не зависятъ.

Установившееся движение характеризуется, как видим, тем, что каждая из сил (P, R, N_A, N_B) и каждая из сил инерции (f_z), при движении системы, меняет свою величину и направление совершенно определенным образом, периодически, колеблясь, следовательно, между некоторым максимумом и минимумом своих значений и между некоторыми крайними направлениями, в то время как при неустановившемся движении скорости и ускорения могут, увеличиваясь при ускоренном движении, достигать безконечно-больших значений, или, убывая при замедленном движении, достигать нуля, менять свои знаки и доходить до безконечно-больших значений в другую сторону. Это обстоятельство выгодно оттеняет и подчеркивает практическия удобства установившагося движения вообще. — Въ этим вопросом мы встретимся еще разъ въ дальнейшем, а теперь обратимся снова къ нашему шатуну.

Силы, воздействующия на шатунъ въ разсматриваемый моментъ его движения, можно считать, такимъ образомъ, вполнѣ извѣстными. Но для расчета шатуна этого еще мало, ибо этотъ расчетъ надо выполнить при такомъ сочетании этихъ силъ, когда нагрузка шатуна оказывается наиболее тяжелой для него и невыгодной. Обстоятельство это ведетъ, естественно, къ необходимости изучения цѣлаго ряда послѣдовательныхъ положений шатуна, ибо только такимъ образомъ и окажется возможнымъ нахождение самаго невыгоднаго и, значитъ, расчетнаго, положения. Изучение это сводится, очевидно, къ опредѣлению измѣнения величинъ ϑ и $d\vartheta/dt$, иными словами, къ опре-

дѣленію послѣдовательныхъ скоростей и ускореній различныхъ точекъ его, при чемъ начальная скорость, изъ которой приходится выходить при изслѣдованіи, можетъ быть или отличной отъ нуля, какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ двигателяхъ внутренняго сгоранія, гдѣ, для пуска его въ ходъ, мы должны предварительно развертѣть маховикъ,—или быть нулемъ, какъ это имѣетъ мѣсто при пускѣ въ ходъ паровыхъ машинъ. Поэтому первая задача, представляющаяся при динамическомъ изслѣдованіи механизма, можетъ быть, по принятіи во вниманіе всего вышесказаннаго, сформулирована такъ:

Дается законъ измѣненія свободныхъ усилій P и силъ полезнаго сопротивленія R, а кромѣ того, начальная скорость v_x какой-либо точки X механизма (по этой скорости v_x опредѣлятся, очевидно, скорости всѣхъ остальныхъ точекъ механизма въ тотъ же начальный моментъ движенія механизма). По этимъ даннымъ требуется опредѣлить:

1) начальное ускореніе какой-либо одной точки,—по нему опредѣлятся начальныя ускоренія всѣхъ другихъ точекъ. Очевидно, что разъ начальныя скорости точекъ механизма были равны нулю, то начальныя ускоренія окажутся всѣ тангенціальными,—далѣе нужно опредѣлить

2) послѣдующія скорости и ускоренія.

Знаніе ускореній дастъ намъ возможность опредѣлить силы инерціи и величины опорныхъ сопротивленій, какъ для начальнаго момента, такъ и для всѣхъ послѣдующихъ. Наконецъ,

3) можетъ быть поставлено дополнительное за-

данiе о зависимости скоростей и ускорений точекъ системы отъ времени, т-е. о выясненiи хода измѣненiй этихъ факторовъ съ временемъ.

Къ этой же задачѣ примыкаетъ и задача о пускѣ въ ходъ, когда начальныя скорости всѣхъ точекъ механизма равны нулю; здѣсь приходится изучать измѣненiе скоростей и ускорений за промежутокъ времени отъ начала движенiя вплоть до наступленiя установившагося, периодическаго движенiя. Можно будетъ опредѣлить и самое время, потребное для пуска въ ходъ и т. д.

Всѣ эти данныя дадутъ намъ возможность выяснить второй основной вопросъ, представляющiйся при изученiи механизма, — вопросъ объ устойчивости механизма на его основанiи (фундаментѣ), ибо этому основанiю приходится воспринимать на себя воздѣйствiе всѣхъ силъ, въ механизмѣ проявляющихся; можно будетъ выяснить число и размѣры болтовъ, прикрѣпляющихъ станину къ фундаменту, равно какъ и размѣры этого послѣдняго. Если механизмъ уже осуществленъ, то представляется возможность провѣрки этихъ факторовъ, и т. д.

Мы имѣли уже случай указать, что наиболѣе выгоднымъ для механизма является правильный периодическiй возвратъ скоростей и ускорений точекъ его, при чемъ, въ силу требованiй практики, изъ всѣхъ такихъ периодическихъ, установившихся движенiй особенную важность имѣютъ тѣ, при которыхъ кривошипъ, вращающiй коренной валъ, движется равномѣрно или, если и нерав-

номѣрно, то съ такими малыми отклоненіями своихъ угловыхъ скоростей отъ нѣкоторой требуемой средней, какія являются здѣсь еще допустимыми по условіямъ работы даннаго механизма. Требуется, такимъ образомъ, чтобы угловая скорость ϑ кривошипа была приблизительно постоянной, что, очевидно, можетъ имѣть мѣсто тогда, когда угловое ускореніе $d\vartheta/dt$ кривошипа будетъ оставаться все время достаточно малымъ, колеблясь, при этомъ, періодически около нуля то въ одну сторону отъ него, то въ другую; амплитуда этихъ колебаній должна оставаться возможно малой, періодъ же ихъ долженъ быть одинаковъ съ періодомъ механизма. Разборъ условій, при которыхъ возможно осуществленіе требуемой равномѣрности вращенія кривошипа, составитъ содержаніе второй задачи, могущей быть, поэтому, сформулированной такъ:

Даются силы, дѣйствующія на механизмъ, и начальныя данныя движенія его. Требуется выяснить условія, при которыхъ вращеніе кривошипа будетъ выполняться съ желаемой степенью равномѣрности.

Это будетъ, слѣдовательно, задача о регулированіи періодическихъ измѣненій угловой скорости кривошипа. Рѣшеніе ея дастъ отвѣтъ на третій основной, задаваемый при конструированіи механизмовъ, вопросъ, поставленный нами выше.

Что касается послѣдняго, четвертаго вопроса,—о достиженіи наибольшаго коэффиціента полезнаго дѣйствія, то свѣдѣнія для оцѣнки этого коэффиціента

будутъ даны величинами опорныхъ сопротивленій типа N_A, вызывающихъ появленіе силъ трепія; опредѣливъ эти силы трепія, сможемъ подсчитать и работу, на это теченіе уходящую, а это и дастъ намъ возможность подсчитать искомый коэффиціентъ полезнаго дѣйствія.

Объ основныя задачи, сформулированныя выше, поставлены были нами примѣнительно къ простому механизму паровой машины. Нетрудно, однако, убѣдиться, путемъ разсужденій, во всемъ подобныхъ предыдущимъ, что задачи эти сохраняютъ свое основное значеніе для всякихъ вообще механизмовъ, сколь бы сложны они ни были. Вся разница будетъ сводиться лишь къ увеличенію числа силъ, могущихъ проявлять здѣсь свое дѣйствіе: свободныхъ усилій, какъ и силъ полезныхъ сопротивленій, можетъ оказаться не по одному, а по нѣсколько; увеличится число опорныхъ сопротивленій, согласно увеличенію числа кинематическихъ паръ, коими звенья механизма сопрягаются другъ съ другомъ; войдетъ, наконецъ, цѣлый рядъ новыхъ силъ инерціи, и т. д., — но все это умноженіе числа силъ на существо вопроса никакого вліянія не окажетъ. Разъ законъ измѣненія свободныхъ усилій и полезныхъ сопротивленій будетъ извѣстенъ, то опять выяснится необходимость опредѣленія ряда послѣдовательныхъ скоростей, по данной начальной скорости одной какой-либо точки, и ряда ускореній; знаніе этихъ факторовъ дастъ намъ возможность опредѣлить силы инерціи и, затѣмъ, силы опорныхъ сопротивленій и силы трепія. Будетъ, затѣмъ, по-

ставленъ вопросъ о равномѣрности вращенія коренного (главнаго) вала и его кривошипа и о средствахъ обезпеченія этой равномѣрности и т. д. — Вопросъ, такимъ образомъ, нѣсколько усложнится, но это усложненіе, какъ увидимъ, будетъ носить, такъ сказать, лишь арифметическій характеръ, основанія же рѣшенія его будутъ оставаться все время одни и тѣ же, — ихъ мы и постараемся выяснить въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ, теперь же, въ порядкѣ изложенія матеріала нашего курса, мы перейдемъ къ изложенію одной изъ важнѣйшихъ теоремъ динамики, — такъ называемой „теоремы о центрѣ качанія". Сущность ея заключается въ слѣдующемъ:

Выше, на примѣрѣ паровой машины, была достаточно рельефно выяснена роль силъ инерціи при динамическомъ изслѣдованіи механизма. Оказалось, что каждая точка шатуна этой машины, при движеніи его, нагружается силой инерціи, величина и направленіе коей опредѣляются:

1) массой этой точки,

2) геометрическими условіями движенія, опредѣляющими, въ связи съ извѣстными кинематическими данными, планъ ускореній системы, и, наконецъ,

3) закономъ измѣненія скоростей и ускореній, опредѣляющимъ величину коэффиціента пропорціональности этого плана ускореній.

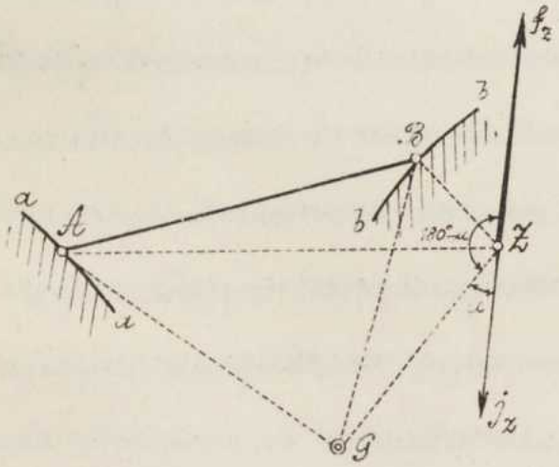
Разъ всѣ эти факторы извѣстны для каждаго момента движенія, то будутъ для каждаго же момента извѣстны и силы инерціи, нагружающія шатунъ.

Къ такому же заключенію приведетъ насъ разсмотрѣніе силъ инерціи любого звена всякаго другого механизма, сколь бы

сложенъ этотъ послѣдній ни былъ. Разъ будутъ извѣстны упомянутые три фактора, то будутъ вполнѣ извѣстны и всѣ силы инерціи, нагружающія это звено, и вопросъ можно было бы считать исчерпаннымъ, если бы примѣненіе всѣхъ этихъ данныхъ могло привести къ дѣйствительному выясненію всѣхъ силъ инерціи, ихъ величины и направленія. Но дѣлѣ, однако, такого выясненія нельзя и ожидать потому, что помощью формулы (e) можно получить выраженія лишь частичныхъ силъ инерціи, въ безконечномъ множествѣ нагружающихъ каждое звено при его движеніи; понятно, что манипулированіе съ безконечно-большимъ числомъ безконечно-малыхъ силъ никакихъ удобствъ не представляетъ, и передъ нами появляется весьма важная для практики задача о подсчетѣ этихъ частичныхъ силъ инерціи, о нахожденіи одной силы инерціи, равнодѣйствующей для всѣхъ этихъ частныхъ, при чемъ необходимо опредѣлить не только величину ея, но и направленіе и, если это возможно, точку приложенія, наиболѣе удобную въ практическомъ отношеніи. Всѣ эти подсчеты и выводы и включены въ названную выше теорему, которую мы теперь и изложимъ примѣнительно къ самому общему случаю плоскаго движенія произвольной матеріальной системы. Основанія для упомянутаго подсчета будутъ даны намъ тѣми основными свойствами центра ускореній, изученію которыхъ была посвящена одна изъ главъ курса кинематики.

§15. Теорема о центрѣ качанія.

Предположимъ, что намъ дана нѣкоторая неизмѣняемая матеріальная система, надѣленная извѣстнымъ плоскимъ движеніемъ, вслѣдствіе чего движеніе ея можно охарактеризовать движеніемъ нѣкотораго принадлежащаго ей прямого отрѣзка AB, движущагося по траекторіямъ aa и bb его концовъ (фиг. 140). Разсмотримъ одинъ изъ моментовъ этого движенія,— тотъ именно, когда упомянутый отрѣзокъ занимаетъ положеніе, изображенное на чертежѣ,— и пусть центръ ускореній нашей системы находится въ этотъ моментъ въ точкѣ B. Такъ какъ всѣ детали разсматриваемаго движенія намъ, по предположенію, извѣстны, то мы и примемъ, что во взятый моментъ у насъ извѣстны всѣ факторы, опредѣляющіе величину ускореній всѣхъ точекъ системы; этими факторами могутъ служить, напримѣръ, угловая скорость ω вращенія ея около полюса мгновеннаго вращенія и законъ измѣненія ея со временемъ, т.-е. соотношеніе $\omega = \varphi(t)$, или величина и направленіе полнаго ускоренія какой-либо точки системы, и т. д.



Фиг. 140.

Выдѣлимъ теперь во взятой нами системѣ (AB) какую-либо точку ея Z (фиг 140). Согласно формулѣ (29),— Кинематика механизмовъ, стр. 72,— полное ускореніе j_z этой точки выразится такъ:

$$j_z = BZ\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Формула эта, после некоторых преобразований, приводится к формуле:

$$j_z = GZ \cdot \frac{\omega^2}{\cos\mu}. \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (h)$$

Вследствіе этого сила инерціи f_z нашей точки Z выразится такъ:

$$f_z = -mj_z = -m \cdot GZ \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} = -m \cdot GZ \cdot \frac{\omega^2}{\cos\mu}, \qquad \ldots \quad (6)$$

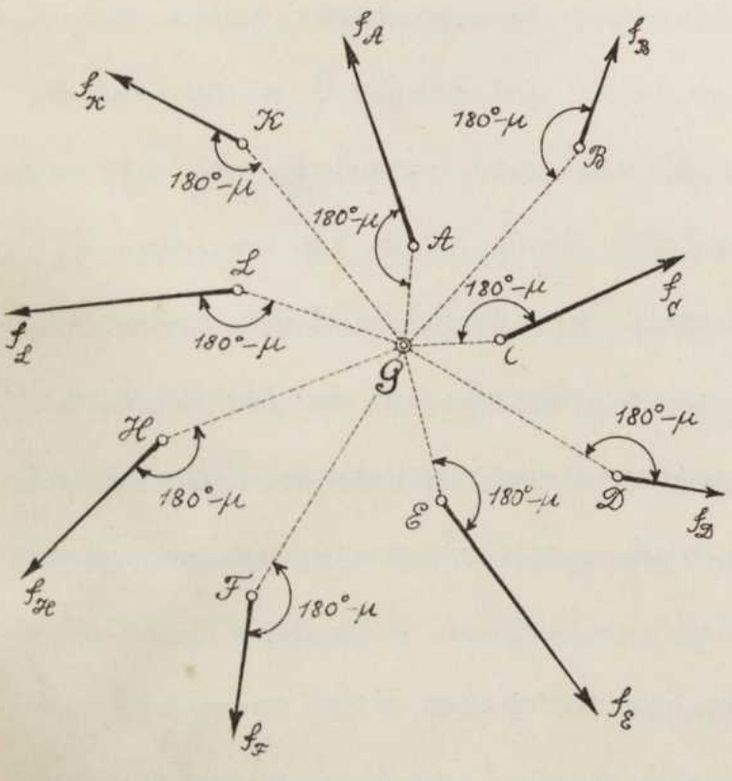
при чемъ, напомнимъ, уголъ μ есть уголъ полнаго ускоренія съ векторомъ, соединяющимъ точку съ центромъ ускореній G, и для всѣхъ точекъ системы въ данный моментъ ея движенія сохраняетъ одну и ту же величину; тангенсъ этого угла выражается, какъ извѣстно, формулой

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Итакъ, величина силы инерціи точки Z дается формулой (6). Что касается направленія ея, то оно опредѣлится такъ: соединивъ прямой линіей точку Z съ центромъ ускореній G и отложивъ въ надлежащую сторону уголъ μ, найдемъ направленіе Zj_z полнаго ускоренія j_z этой точки (фиг. 140); сила же инерціи f_z этой точки Z будетъ направлена прямопротивоположно этому направленію v, значитъ, будетъ составлять съ векторомъ GZ уголъ $(180° - \mu)$, какъ это и отмѣчено на чертежѣ. Такъ какъ точка Z есть произвольная точка данной системы, то формула (6) примѣнима ко всѣмъ безъ исключенія точкамъ данной системы. Согласно этой формулѣ, заключаемъ, что силы инерціи точекъ системы пропорціональны какъ массамъ точекъ, такъ и разстояніямъ этихъ точекъ до центра ускореній G, а, кромѣ того, всѣ эти силы инерціи оказываются направленными подъ однимъ и тѣмъ же угломъ $(180° - \mu)$ къ векторамъ, соединяю-

ющимъ точки съ центромъ ускореній, и, при томъ, въ опредѣленную относительно этихъ векторовъ сторону; послѣднее обстоятельство вполнѣ опредѣляется закономъ измѣненія угловой скорости ω, какъ это легко сообразить на основаніи разсужденій, высказанныхъ въ свое время по аналогичному поводу по поводу опредѣленія направленія полныхъ ускореній j, — см. Кинематику механизмовъ, стр. 73—74; окажется, что если ω со временемъ возрастаетъ, такъ что $d\omega/dt > 0$, то силы инерціи f_z придется откладывать обратно смыслу вращенія, и наоборотъ.

Такимъ образомъ, силы инерціи системы распредѣляются въ ней такъ, какъ это показываетъ фиг. 141, и уже этотъ схематическій чертежъ заставляетъ предполагать, что въ подсчетѣ силъ инерціи, моментовъ ихъ и т. д., центру ускореній будетъ принадлежать центральная роль, которую мы теперь и выяснимъ путемъ непосредственныхъ вычисленій.



Фиг. 141.

Полная закономѣрность, наблюдаемая какъ въ значеніяхъ отдѣльныхъ силъ инерціи, такъ и въ направленіяхъ ихъ, позволяетъ предположить, что суммированіе всѣхъ этихъ частичныхъ силъ инерціи оказывается вполнѣ возможнымъ, т.-е. что можно найти равнодѣйствующую всѣхъ этихъ силъ инерціи, опредѣленную какъ по величинѣ своей, такъ и по направленію. Суммированіе это можно выполнить на осно-

ваніи обычныхъ соображеній статики, относящихся къ вопросу о нахожденіи равнодѣйствующихъ, а именно:

Если у всѣхъ этихъ частичныхъ силъ инерціи f_z, являющихся теперь слагающими силами, существуетъ равнодѣйствующая, результирующая сила инерціи F, то

1) сумма проекцій слагающихъ силъ инерціи f_z на каждую изъ осей координатъ произвольно выбранной координатной системы будетъ равна проекціи на ту же ось результирующей силы инерціи F,—это условіе дастъ намъ два уравненія проекцій по осямъ; далѣе,

2) сумма моментовъ слагающихъ относительно какой-либо точки плоскости, принятой за центръ моментовъ, будетъ равна моменту результирующей относительно того же центра; это условіе дастъ намъ уравненіе моментовъ,—третье уравненіе статики, и всѣ эти три уравненія и дадутъ намъ возможность найти всѣ три элемента, вполнѣ опредѣляющіе искомую равнодѣйствующую F, а именно: величину ея, направленіе и точку ея приложенія.

Имѣя въ виду написать эти уравненія на самомъ дѣлѣ, мы, прежде всего, условимся въ выборѣ системы координатъ. Ради удобства дальнѣйшихъ вычисленій, за начало примемъ центръ ускореній $\mathcal{J}$; самую систему координатъ полагаемъ прямоугольной, при чемъ ось $x^{\text{овъ}}$ проводимъ произвольно,—напримѣръ, горизонтально,—такъ что ось $y^{\text{овъ}}$ пойдетъ вертикально (фиг. 142).

Пусть, далѣе, центръ тяжести системы лежитъ въ нѣкоторой точкѣ C, опредѣляемой координатами

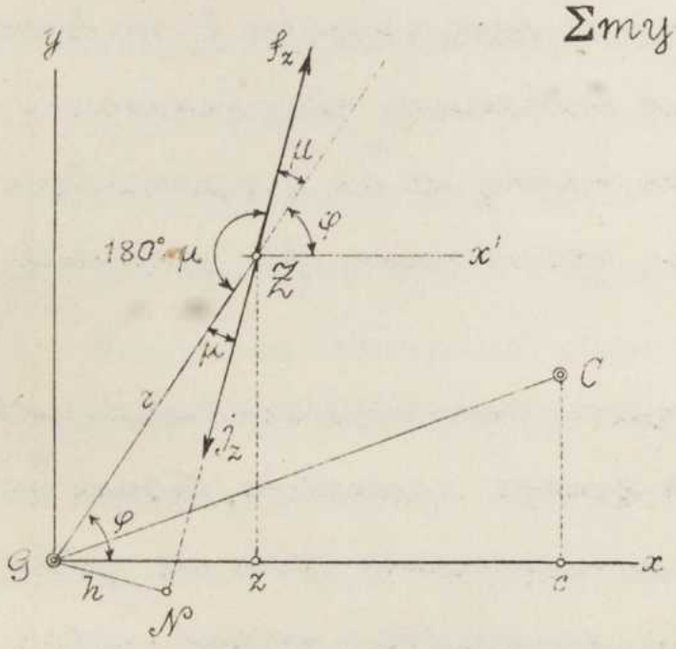
$$\mathcal{J}c = x_c \quad \text{и} \quad Cc = y_c.$$

Если координаты различных точек системы будем обозначать буквами x и y, а массы этих точек — буквами m, то положение точки C, т.-е. координаты x_c и y_c ея, можно будет определить помощью известных уравнений статики:

$$\Sigma mx = Mx_c, \quad \ldots \quad (k)$$

$$\Sigma my = My_c, \quad \ldots \quad (l)$$

где M есть масса всей движущейся системы, равная Σm.



Фиг. 142.

Замѣчая теперь, что, при перемѣщеніи системы, перемѣщается, вообще говоря, и центръ тяжести ея, приходимъ къ заключенію, что координаты x_c и y_c центра тяжести можно считать также величинами переменными, въ виду чего представляется возможнымъ дифференцированіе этихъ координатъ по присмотрѣвшемуся случаю независимому перемѣнному; въ данномъ случаѣ такимъ независимымъ перемѣннымъ слѣдуетъ взять время t, и мы, дифференцируя двукратно по t уравненія (k) и (l), получаемъ соотношенія, весьма важныя для дальнѣйшаго, а именно:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = M \frac{d^2x_c}{dt^2} \quad \ldots \quad (7)$$

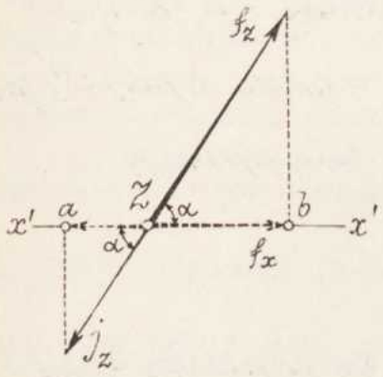
и

$$\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = M \frac{d^2y_c}{dt^2} \quad \ldots \quad (8)$$

Замѣтивъ это, вернемся опять къ нашей задачѣ и напишемъ выраженія проекцій силы инерціи f_z на оси координатъ. Мы имѣемъ, вообще, что

$$f_z = -mj_z,$$

такъ что сила инерціи выражается произведеніемъ изъ массы точки на ускореніе ея, взятымъ со знакомъ минусъ. Очевидно, что проекція силы инерціи на какую либо ось xx' (фиг. 143) выразится опять произведеніемъ той же массы m на проекцію ускоренія на эту ось, при чемъ произведенію придется опять приписать знакъ минусъ. Въ виду этого можемъ написать, что



Фиг. 143.

$$np_x f_z = -m.\, np_x j_z,$$

$$np_y f_z = -m.\, np_y j_z.$$

Замѣчая теперь, что

$$np_x f_z = f_z \cos(f_z, \mathcal{G}x)$$

и

$$np_x j_z = j_z \cos(j_z, \mathcal{G}x) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

можемъ написать, что

$$np_x f_z = f_z \cos(f_z, \mathcal{G}x) = -m.\, np_x j_z = -m j_z \cos(j_z, \mathcal{G}x) = -m\frac{d^2x}{dt^2}. \quad (9)$$

Аналогично получимъ, что

$$np_y f_z = f_z \cos(f_z, \mathcal{G}y) = -m.\, np_y j_z = -m j_z \cos(j_z, \mathcal{G}y) = -m\frac{d^2y}{dt^2}. \quad (10)$$

Составляемъ теперь суммы проекцій силъ инерціи (f_z) по осямъ; каждая такая сумма дастъ намъ проекцію искомой результирующей на соотвѣтствующую ось. Суммируя выраженія (9) и (10) по всѣмъ точкамъ системы, можемъ, въ виду (7) и (8), написать, что

$$\Sigma np_x f_z = -\Sigma m j_z \cos(j_z, \mathcal{G}x) = -\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = -M\frac{d^2x_c}{dt^2}. \quad (11)$$

и

$$\Sigma np_y f_z = -\Sigma m j_z \cos(j_z, \mathcal{G}y) = -\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = -M\frac{d^2y_c}{dt^2}. \quad (12)$$

При движеніи система движется, вообще говоря, и центръ

тяжести C ея; проекціи ускоренія этого движенія центра C на оси координатъ выражаются производными d^2x_c/dt^2 и d^2y_c/dt^2. Значитъ, если бы мы сосредоточили всю массу M даннаго тѣла въ этомъ центрѣ тяжести C и подсчитали теперь по общимъ формуламъ (9) и (10) проекціи силы инерціи такой точки C, то получили бы, очевидно, для этихъ проекцій выраженія

$$-M\frac{d^2x_c}{dt^2} \quad \text{и} \quad -M\frac{d^2y_c}{dt^2},$$

—какъ разъ тѣ самыя, которыя стоятъ въ правыхъ частяхъ уравненій (11) и (12). Отсюда слѣдуетъ, что равнодѣйствующая сила инерціи, несомнѣнно, существуетъ и по величинѣ своей представляетъ собою силу инерціи центра тяжести, вычисленную въ предположеніи сосредоточенія въ немъ всей массы M даннаго тѣла. Проекціи этой силы $\mathcal{F}$ выражаются соотношеніями (11) и (12), такъ что

$$np_x\mathcal{F} = -M\frac{d^2x_c}{dt^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$np_y\mathcal{F} = -M\frac{d^2y_c}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Формулы эти, являясь вполнѣ общими, не даютъ, однако, болѣе близкихъ указаній на составъ выраженія силы $\mathcal{F}$. Это могутъ сдѣлать болѣе подробныя вычисленія, къ выполненію которыхъ мы теперь и приступимъ.

Обращаясь къ фигурѣ 142 и замѣчая, что уголъ силы инерціи f_z съ осью абсциссъ Ox равенъ, очевидно, $(\mu+\varphi)$, можемъ написать, что

$$f_z\cos(f_z, Ox) = f_z\cos(\mu+\varphi),$$

гдѣ φ есть уголъ вектора OZ съ осью $x^{\text{овъ}}$. Вслѣдствіе этого и въ силу (6), выраженіе (11) можетъ быть переписано еще такъ:

$$\Sigma f_z \cos(f_z, Gx) = \Sigma f_z \cos(\mu+\varphi) = -\Sigma m.GZ.\frac{\omega^2}{\cos\mu}\cos(\mu+\varphi) = -\frac{\omega^2}{\cos\mu}\Sigma m.GZ\cos(\mu+\varphi) \ldots (m)$$

Множитель $\omega^2/\cos\mu$ представилось возможнымъ вынести за знакъ суммы потому, что какъ факторъ ω, — угловая скорость вращенія системы около полюса мгновеннаго вращенія, — такъ и факторъ μ, — уголъ ускореній съ векторами, соединяющими точки системы съ центромъ ускореній G, — для всѣхъ точекъ системы въ разсматриваемый моментъ движенія ея остаются одними и тѣми же, общими; они могутъ мѣняться лишь со временемъ, отъ момента къ моменту.

Приступимъ теперь къ преобразованію полученнаго выше соотношенія (m). Замѣчая, что

$$GZ\cos\varphi = Gz = x_z = x$$

и

$$GZ\sin\varphi = Zz = y_z = y,$$

— точка Z есть произвольная точка системы, почему координаты x_z и y_z ея можно обозначить просто черезъ x и y, безъ индексовъ, — находимъ далѣе, что

$$GZ\cos(\mu+\varphi) = GZ(\cos\mu\cos\varphi - \sin\mu\sin\varphi) = x\cos\mu - y\sin\mu, \quad \ldots (n)$$

въ силу чего (m) можетъ быть преобразовано такъ:

$$\Sigma f_z \cos(f_z, Gx) = -\frac{\omega^2}{\cos\mu}\Sigma m(x\cos\mu - y\sin\mu) =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\cos\mu}(\cos\mu\,\Sigma mx - \sin\mu\,\Sigma my) =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\cos\mu}(\cos\mu.Mx_c - \sin\mu.My_c) =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\cos\mu}M(x_c\cos\mu - y_c\sin\mu) \ldots \quad \ldots (p)$$

Замѣчая, что для точки C соотношеніе (n) принимаетъ видъ

$$GC\cos(\mu+\varphi) = x_c\cos\mu - y_c\sin\mu,$$

и сопоставляя это выраженіе съ (p), можемъ переписать это по-

слѣднее такъ:

$$\Sigma f_z \cos(f_z, Ox) = \Sigma f_z \cos(\mu+\varphi) = -M.OC\,\frac{\omega^2}{\cos\mu}\cos(\mu+\varphi). \quad .(13)$$

Такова величина проекціи результирующей силы инерціи F на ось x овъ. Подобнымъ же образомъ выразится и сумма проекцій силъ инерціи на ось Oy:

$$\Sigma f_z \cos(f_z, Oy) = \Sigma f_z \sin(\mu+\varphi) = -M.OC\,\frac{\omega^2}{\cos\mu}\sin(\mu+\varphi). \quad .(14)$$

Выраженія (13) и (14) даютъ возможность получить величину искомой результирующей силы инерціи F; она выразится, очевидно, такъ:

$$F = -\sqrt{[\Sigma f_z \cos(f_z, Ox)]^2 + [\Sigma f_z \cos(f_z, Oy)]^2} = -M.OC\frac{\omega^2}{\cos\mu}. \quad .(15)$$

Это выраженіе указываетъ уже вполнѣ опредѣленнымъ образомъ, что

результирующая сила инерціи F представляетъ собою (по величинѣ своей) силу инерціи центра тяжести, вычисленную въ предположеніи сосредоточенія въ немъ всей массы M даннаго тѣла.

Итакъ, величина результирующей силы инерціи F опредѣлилась вполнѣ. Что касается направленія ея, то оно можетъ быть опредѣлено помощью слѣдующихъ простыхъ разсужденій:

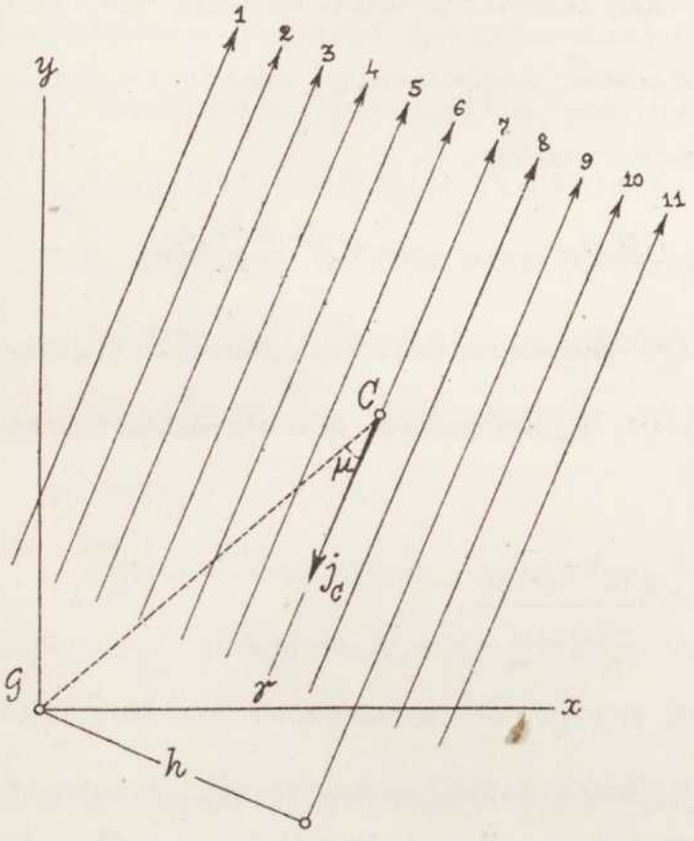
Общее выраженіе силы инерціи какой-либо точки Z съ массой m имѣетъ, согласно (6), видъ

$$f_z = -m.OZ\,\frac{\omega^2}{\cos\mu},$$

при чемъ, какъ извѣстно, направленіе этой силы инерціи прямопротивоположно направленію ускоренію j_z и составляетъ съ вектором OZ опредѣленный уголъ $(180°-\mu)$. Сопоставляя это выраженіе съ выраженіемъ (15)

$$F = -M.JC.\frac{\omega^2}{\cos\mu},$$

видимъ, что оба они составлены по одному и тому же закону. Поэтому, прежде всего, надо принять, что сила инерціи F направлена прямопротивоположно ускоренію j_C центра тяжести C. Затѣмъ, проводя аналогію и дальше, казалось бы вполнѣ естественнымъ предположить, что и приложена эта сила инерціи F также въ центрѣ тяжести C, какъ точкѣ, для которой и производился подсчетъ величины ея. На дѣлѣ, однако, оказывается, что сила инерціи F черезъ эту точку C не проходитъ, въ чемъ мы сейчасъ непосредственно и убѣдимся.



Фиг. 144.

Пусть ускореніе j_C точки C имѣетъ направленіе $C\gamma$,—см. фиг. 144,—такъ что, согласно вышесказанному, сила инерціи F будетъ имѣть направленіе, параллельное γG, и, значитъ, пойдетъ по одной изъ прямыхъ 1, 2, . . ., параллельныхъ γC. По которой изъ этихъ прямыхъ пойдетъ она, можно будетъ опредѣлить лишь тогда, когда будетъ дана или точка, черезъ которую эта сила F проходитъ, или, что для насъ въ данномъ случаѣ является болѣе удобнымъ, плечо h той прямой, по которой направлена эта сила, относительно начала координатъ, т.-е. центра ускореній G. Плечо это

можно опредѣлить при помощи оставшагося еще неисполь-зованнымъ третьяго уравненія равновѣсія,— уравненія моментовъ,— которое мы теперь и составимъ, принявъ за центръ моментовъ начало взятой нами системы координатъ, т.-е. центръ ускореній G.

Напишемъ сначала выраженіе статическаго момента одной какой-либо силы инерціи относительно центра моментовъ G,— возьмемъ для этого хотя бы ту же силу инерціи f_z точки Z (фиг. 142). Плечо GN ея, обозначенное нами черезъ h, равно $GZ\sin\mu$, такъ что искомый моментъ этой частной силы инерціи f_z напишется такъ:

$$f_z.GN = f_z \times h = -m.GZ\frac{\omega^2}{\cos\mu}.GZ\sin\mu = -m.GZ^2\frac{\omega^2\sin\mu}{\cos\mu}.$$

Обозначая, ради сокращенія письма, разстояніе GZ точки Z отъ центра ускореній G черезъ r, можемъ дать полученному выраженію видъ:

$$f_z.h = -mr^2\frac{\omega^2\sin\mu}{\cos\mu}.$$

Сумма такихъ моментовъ, распространенная на всѣ точки даннаго тѣла, и будетъ равна моменту результирующей силы инерціи F. Обозначая черезъ H плечо ея относительно центра моментовъ G, получаемъ, такимъ образомъ, уравненіе

$$F \times H = \Sigma(f_z \times h) = -\Sigma mr^2\frac{\omega^2\sin\mu}{\cos\mu} = -\frac{\omega^2\sin\mu}{\cos\mu}\Sigma mr^2.$$

Подставляя вмѣсто F его выраженіе изъ (15), получаемъ соотношеніе

$$\left(-M.GC.\frac{\omega^2}{\cos\mu}\right) \times H = -\frac{\omega^2\sin\mu}{\cos\mu}\Sigma mr^2,$$

что, послѣ сокращенія на $(-\omega^2/\cos\mu)$, даетъ выраженіе искомаго плеча H, а именно:

$$\mathcal{H} = \frac{\sin\mu \, \Sigma m r^2}{M \cdot GC} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Сумма $\Sigma m r^2$ представляетъ собою не что иное, какъ моментъ инерціи нашей системы относительно центра ускореній G. Обозначивъ его черезъ J_g, можемъ, поэтому, написать, что

$$\mathcal{H} = \frac{J_g \sin\mu}{M \cdot GC} = \frac{J_g \sin\mu}{MR}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

гдѣ черезъ R, ради краткости письма, обозначено GC, т.-е. разстояніе центра тяжести C отъ центра ускореній G. Полученное выраженіе можно значительно упростить помощью извѣстной теоремы динамики, говорящей, что

моментъ инерціи системы относительно какой-либо оси равенъ моменту инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести параллельно данной, плюсъ произведеніе изъ массы тѣла на квадратъ разстоянія между осями.

Примѣняя эту теорему къ разсматриваемому случаю плоскаго движенія, получаемъ соотношеніе

$$J_g = J_c + MR^2,$$

гдѣ черезъ J_c обозначенъ моментъ инерціи системы относительно центра тяжести C, а $R = GC$, какъ это было условлено выше. Въ виду этого выраженіе (16) переписывается такъ:

$$\mathcal{H} = \frac{(J_c + MR^2)\sin\mu}{MR} = \sin\mu\left(R + \frac{J_c}{MR}\right). \quad . \quad . \quad (17)$$

Обозначимъ радіусъ инерціи нашей системы черезъ ρ; величина его опредѣлится изъ условія

$$J_c = M\rho^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Въ виду этого уравненіе (17) можетъ быть преобразовано такъ:

$$\mathcal{H} = \sin\mu\left(\mathcal{R} + \frac{M\varrho^2}{M\mathcal{R}}\right) = \sin\mu\left(\mathcal{R} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}}\right) = \sin\mu\left(\frac{\mathcal{R}^2+\varrho^2}{\mathcal{R}}\right). \quad . \quad .(19)$$

Имѣя величины $\mathcal{R}$ и ϱ, весьма легко опредѣлить величину отрѣзка, выражаемаго дробью $(\mathcal{R}^2+\varrho^2)/\mathcal{R}$, — очевидно, что гипотенуза $\sqrt{\mathcal{R}^2+\varrho^2}$ будетъ служить средней пропорціональной между искомымъ отрѣзкомъ $\mathcal{H}$ и отрѣзкомъ $\mathcal{R} = \mathcal{GC}$.

Выраженіями (15) и (19) величина и положеніе искомой результирующей силы инерціи $\mathcal{F}$ опредѣляется вполнѣ. Оказывается, что

1) величина этой силы инерціи $\mathcal{F}$ выражается такъ:

$$\mathcal{F} = -M.\mathcal{GC}.\frac{\omega^2}{\cos\mu} = -M\mathcal{R}\frac{\omega^2}{\cos\mu}, \quad . \quad . \quad . \quad .(15)$$

и, какъ было доказано, равна величинѣ той силы инерціи, которой бы обладалъ центръ тяжести нашей системы, если бы въ немъ оказалась сосредоточенной вся масса M данной сисѣмы;

2) направленіе этой силы инерціи $\mathcal{F}$ прямопротивоположно направленію полнаго ускоренія j_c центра тяжести C системы, и, наконецъ,

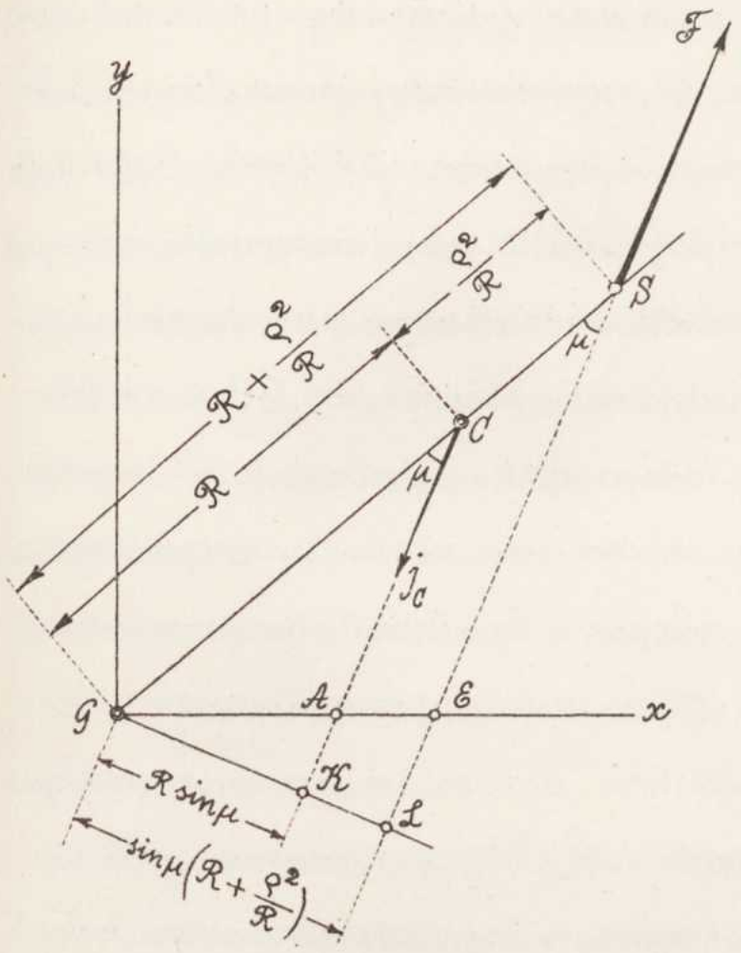
3) плечо этой результирующей силы инерціи $\mathcal{F}$ относительно центра ускореній $\mathcal{G}$ выражается формулами:

$$\mathcal{H} = \sin\mu\left(\mathcal{R} + \frac{J_c}{M\mathcal{R}}\right) = \sin\mu\left(\mathcal{R} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}}\right) = \sin\mu\left(\frac{\mathcal{R}^2+\varrho^2}{\mathcal{R}}\right). \quad . \quad .(19)$$

Имѣя это плечо $\mathcal{H}$, можемъ теперь вполнѣ опредѣленно указать, что результирующая сила инерціи $\mathcal{F}$ будетъ дѣйствовать по нѣкоторой прямой $\mathcal{EF}$ (фиг. 145), параллельной AC (сравн. фиг. 144) и отстоящей отъ центра ускореній $\mathcal{G}$ на разстояніе $\mathcal{H}$, величина коего дается формулами (17) и (19). Посмотримъ теперь, нѣтъ ли на этой прямой $\mathcal{EF}$ какой-

либо точки, которая могла бы служить наиболѣе удобной въ практическомъ отношеніи точкой приложенія этой результирующей F.

Соединимъ точки G и C прямой линіей и продолжимъ ее до пересѣченія съ прямой EF, по которой дѣйствуетъ сила инерціи F, въ нѣкоторой точкѣ S, разстояніе GS коей отъ центра ускореній G легко найти, замѣтивъ, что длина GL перпендикуляра, опущеннаго изъ точки G на прямую EF, какъ было показано, равна $\sin\mu\,(R+\rho^2/R)$. Такъ какъ уголъ $GSL=\mu$, а треугольникъ GSL прямоугольнъ (при L), то можемъ написать, что



Фиг. 145.

$$GL = GS\sin\mu.$$

Но, съ другой стороны,

$$GL=\left(R+\frac{\rho^2}{R}\right)\sin\mu;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$GS=R+\frac{\rho^2}{R}=GC+\frac{\rho^2}{R}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Замѣчая теперь, что дробь ρ^2/R всегда положительна, заключаемъ, что всегда

$$GS>GC,$$

что показываетъ, что точка S отстоитъ отъ центра ускореній G дальше, чѣмъ центръ тяжести C, такъ что центръ тяжести лежитъ всегда между центромъ ускореній

G и точкой S, при чемъ всѣ эти три точки лежатъ на одной и той же прямой GCS.

Нетрудно убѣдиться, что положеніе точки S въ системѣ въ каждый данный моментъ является вполнѣ опредѣленнымъ. Дѣйствительно, представимъ себѣ нашу систему въ какой-либо моментъ ея движенія, — хотя бы, напримѣръ, тотъ, который взятъ на чертежѣ 145. Положеніе центра ускореній G въ этотъ моментъ является вполнѣ опредѣленнымъ, вслѣдствіе чего для даннаго момента явится вполнѣ опредѣленнымъ какъ по величинѣ своей, такъ и по положенію, отрѣзокъ GC, т.-е. R. Такъ какъ, далѣе, масса M тѣла есть величина постоянная, при движеніи тѣла своей величины не мѣняющая, точно такъ же, какъ и моментъ инерціи J_c тѣла относительно центра тяжести C, а значитъ, и радіусъ инерціи ρ, ибо $\rho = \sqrt{J_c/M}$, то вполнѣ опредѣлится и соотвѣтствующая данному моменту величина дроби ρ^2/R и, значитъ, длина отрѣзка GS, а вмѣстѣ съ этимъ, и положеніе точки S.

Въ слѣдующій моментъ, вмѣстѣ съ измѣненіемъ положенія точки G, измѣнится и длина R отрѣзка GC, но величины J_c, M и ρ останутся тѣ же; вслѣдствіе измѣненія R измѣнится и положеніе точки S, но это перемѣщеніе ея будетъ имѣть характеръ, вполнѣ опредѣленный: замѣчая, что $GC = R$ и $CS = \rho^2/R$, заключаемъ, что перемѣщеніе точки S будетъ носить характеръ, обратный характеру перемѣщенія центра G, а именно, если центръ ускореній G приближается къ центру тяжести C, то точка S отъ C удаляется (по направленію GC), и обратно. Колебанія точки G относительно центра тяжести C влекутъ за собою обратно-пропорціональныя имъ ко-

лебанія относительно C и нашей точки S. Три точки системы,— точки G, C и S,— оказываются связанными между собою тѣснѣйшимъ образомъ.

Мы видѣли, что положеніе точки S для каждаго положенія системы опредѣляется помощью формулы (19), содержащей въ себѣ всего лишь одну перемѣнную величину $R = GC$. Въ силу сказаннаго, эту точку S весьма удобно принять за точку приложенія равнодѣйствующей силы инерціи F, для которой, такимъ образомъ, будутъ теперь извѣстны всѣ три фактора, опредѣляющіе ея положеніе, а именно: величина, направленіе и точка приложенія. Вопросъ объ опредѣленіи результирующей силы инерціи разрѣшается, такимъ образомъ, вполнѣ. Остается лишь выяснить роль и свойства точки S, въ которой можно считать приложенной результирующую силу инерціи F; для этого замѣтимъ слѣдующее:

Всякое плоское движеніе системы всегда можно представить себѣ составленнымъ изъ двухъ движеній,— изъ вращенія системы около центра ускореній G и изъ параллельнаго перенесенія ея со скоростью того же центра; такъ какъ скорость эта за два сосѣдніе промежутка времени, $2\,dt$, остается, какъ извѣстно, постоянной, то, какъ это было показано въ курсѣ кинематики (см. стр. 69–70), это параллельное перенесеніе на дефиціяхъ скоростей не отзывается ничѣмъ, вслѣдствіе чего всѣ дѣйствительныя ускоренія системы оказываются тѣми же самыми, какія имѣли бы мѣсто при одномъ лишь вращеніи нашей системы около центра ускореній G съ дѣйствительными угловыми скоростями этихъ моментовъ: ω и $(\omega + d\omega)$.

Такимъ образомъ, пока дѣло касается ускореній и, значитъ, силъ инерціи, движеніе нашей системы можно представлять себѣ, какъ послѣдовательное вращеніе ея около смѣняющихъ другъ друга центровъ ускореній S, — въ каждый данный моментъ систему нашу можно разсматривать, какъ вращающуюся или качающуюся около центра ускореній S, этому моменту соотвѣтствующаго, и всѣ ускоренія и силы инерціи системы оказываются при такомъ подставномъ, воображаемомъ движеніи ея такими же, какими онѣ должны быть въ дѣйствительномъ движеніи. Оказывается, такимъ образомъ, что наша система можетъ быть въ указанномъ выше смыслѣ уподоблена физическому маятнику съ точкой привѣса въ центрѣ ускореній S, — около этого центра система качается въ теченіе времени $2\,dt$, за которое центромъ ускореній остается точка S. За слѣдующій промежутокъ времени $2dt$ система будетъ качаться около слѣдующаго, очереднаго центра ускореній S_1, соотвѣтствующаго этому промежутку времени, и т. д.

Изъ курса физики извѣстно, что въ каждомъ физическомъ маятникѣ всегда имѣется такъ называемый центръ качаній, разстояніе коего до точки привѣса даетъ длину математическаго маятника, эквивалентнаго данному физическому съ точки зрѣнія амплитудъ и временъ качанія, а кромѣ того, — и это самое важное, — въ этомъ центрѣ качаній можно считать приложенной результирующую всѣхъ силъ инерціи системы этого маятника.

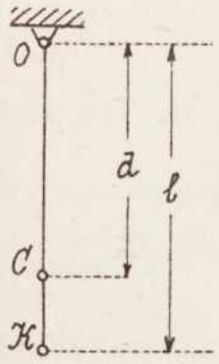
Наша система, съ точки зрѣнія подсчета ускореній и силъ инерціи, можетъ быть, какъ мы видѣли, уподоблена

физическому маятнику съ точкой привѣса въ центрѣ ускореній, вслѣдствіе чего въ ней долженъ имѣться и соотвѣтствующій центръ качаній, въ которомъ и будетъ приложена результирующая всѣхъ силъ инерціи.

Въ нашемъ случаѣ мы нашли какъ результирующую силу инерціи, такъ и точку ея приложенія. Вполнѣ естественно будетъ посмотрѣть, не является ли эта точка приложенія силы инерціи F такимъ именно центромъ качанія нашей системы, при точкѣ привѣса ея въ B, центрѣ ускореній? Вычисленія, помощью которыхъ можно провѣрить это само собою напрашивающееся предположеніе, очень просты и сводятся къ слѣдующему:

Изъ аналитической механики извѣстно, что каждый физическій маятникъ эквивалентенъ (въ упомянутомъ выше смыслѣ) такому математическому, длина l котораго опредѣляется формулой

$$l = \frac{B}{Md}, \qquad \ldots \qquad (r)$$



Фиг. 146.

гдѣ B есть моментъ инерціи системы физическаго маятника относительно точки привѣса O (фиг. 146), M – масса его, d – разстояніе центра тяжести маятника C до точки привѣса O.

Такимъ образомъ, если на прямой, проходящей черезъ точку привѣса O и центръ тяжести C, отложимъ отъ точки O по направленію OC, отрѣзокъ OK, равный l, то точка K, такимъ образомъ опредѣлившаяся, и представитъ собою такъ называемый центръ качаній даннаго физическаго маятника, и если въ этой точкѣ K мы сосредоточимъ всю массу M тѣла, то и получимъ математическій маятникъ

OK, эквивалентный данному физическому съ точки зрѣнія амплитудъ и времени качанія.

Данную намъ систему можно въ извѣстномъ, опредѣленномъ выше смыслѣ считать физическимъ маятникомъ съ точкой привѣса въ S; вслѣдствіе этого формула (r) должна имѣть мѣсто и для нея. Въ виду этого соображенія мы и попробуемъ подсчитать длину l для нашей системы.

Моментъ инерціи B есть въ нашемъ случаѣ моментъ инерціи системы относительно точки S; выше мы обозначили его черезъ J_S.

Масса M качающагося тѣла сохранитъ то же обозначеніе и для нашей системы; наконецъ,

Разстояніе d центра тяжести до точки привѣса,— у насъ, слѣдовательно, до точки S,— обозначено нами черезъ R.

Въ виду этихъ обозначеній формула (r), будучи примѣнена къ нашей системѣ, дастъ соотвѣтствующую нашему случаю длину l математическаго маятника:

$$l = \frac{J_S}{MR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (s)$$

Замѣтивъ, что

$$J_S = J_C + MR^2 = M\rho^2 + MR^2 = M(R^2 + \rho^2),$$

можемъ дать полученной формулѣ (s) видъ:

$$l = \frac{J_C + MR^2}{MR} = R + \frac{J_C}{MR} = R + \frac{\rho^2}{R}, \quad . \quad . \quad . \quad (t)$$

что, согласно (20), и есть SS, разстояніе точки S приложенія результирующей силы инерціи F отъ центра ускореній S. Формула (t) въ то же время показываетъ, что эта точка S является центромъ качаній данной системы съ точки зрѣнія ускореній этихъ качаній и силъ инерціи ихъ: математическій маятникъ SS съ точкой привѣса въ S и въ

точкѣ S котораго предположена сосредоточенной вся масса M тѣла, будетъ въ точности эквивалентенъ нашей системѣ съ точки зрѣнія силъ инерціи и ускореній.

Итакъ, окончательно, мы приходимъ къ слѣдующимъ весьма важнымъ результатамъ:

1) Всякая система, надѣленная плоскимъ движеніемъ, можетъ, въ теченіе каждыхъ двухъ смежныхъ элементовъ времени, $2dt$, быть уподоблена, съ точки зрѣнія опредѣленія силъ инерціи и ускореній, физическому маятнику той же массы M съ точкой привѣса въ центрѣ ускореній G.

2) Всѣ силы инерціи плоско-движущейся системы приводятся къ нѣкоторой вполнѣ опредѣленной результирующей силѣ инерціи F, выражаемой черезъ параметры системы формулой (15), имѣющей видъ:

$$F = -MR\frac{\omega^2}{\cos\mu}.$$

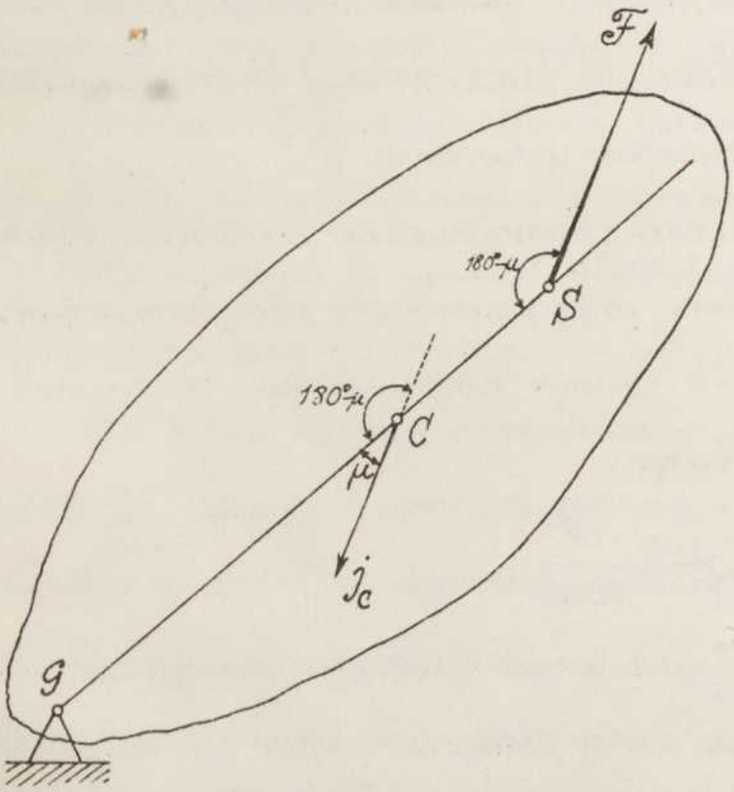
3) Эта равнодѣйствующая сила инерціи представляетъ собою не что иное, какъ силу инерціи центра тяжести, вычисленную въ предположеніи сосредоточенія въ немъ всей массы M данной системы и перенесенную затѣмъ параллельно самой себѣ въ нѣкоторую точку S прямой GC, проходящей черезъ центръ ускореній G и центръ тяжести C (фиг. 147)

4) Эта точка S приложенія силы инерціи F представляетъ собою центръ качанія данной системы при точкѣ привѣса ея въ центрѣ ускореній G. Разстояніе GS ея отъ центра G опредѣляется обычной формулой, опредѣляющей длину математическаго маятника, эквивалент-

нако данному физическому:

$$GS = l = \frac{J_G}{MR} = R + \frac{J_C}{MR} = R + \frac{\rho^2}{R}, \quad . \quad . \quad . \quad (t)$$

— иными словами, точка S отстоитъ отъ центра C по прямой GC на длину $CS = J_C/MR = \rho^2/R$, какъ это и помѣчено на фиг. 145; при этомъ расположеніе точекъ G, C и S всегда оказывается одними и тѣми же, а именно: 1) центръ ускореній G, 2) центръ тяжести C и 3) центръ качаній S.



Фиг. 147.

Что касается величинъ, входящихъ въ составъ выше-написанныхъ основныхъ формулъ (15) и (t), то относительно ихъ можно замѣтить слѣдующее:

1) Масса M даннаго тѣла вычисляется по его вѣсу P помощью формулы

$$M = \frac{P}{g},$$

гдѣ g есть ускореніе силы тяжести. Не слѣдуетъ упускать изъ виду, что численно величина g можетъ выражаться различно, въ зависимости отъ величины единицъ, выбранныхъ при выполненіи вычисленій; такъ, напримѣръ,

$$g = 9{,}81\ ^{mt}/_{sec^2} = 981\ ^{cm}/_{sec^2} = 9810\ ^{mm}/_{sec^2} = 35316\ ^{mt}/_{min^2} \text{ и т. д.}$$

2) Положеніе центра тяжести C данной системы опредѣляется въ ней разъ навсегда.

3). J_C — моментъ инерціи даннаго тѣла относительно

его центра тяжести, — есть величина постоянная и вычисляется для данной системы разъ навсегда. О подсчетъ его на практикъ см. ниже.

4) R, — разстояніе GC отъ центра ускореній G до центра тяжести C, — есть величина перемѣнная, ибо центръ ускореній G, при движеніи системы, свое положеніе въ ней мѣняетъ, въ то время какъ центръ тяжести C остается въ системѣ все время на одномъ мѣстѣ. Въ силу этого будетъ мѣняться и положеніе центра качаній S.

5) Угловая скорость ω опредѣляется условіями движенія и начальными данными; или же опредѣляется для каждаго даннаго положенія системы и уголъ μ. Такимъ образомъ, факторы ω и μ представляютъ собою величины перемѣнныя, въ виду чего будетъ перемѣнной какъ величина результирующей силы инерціи F, такъ и направленіе ея и положеніе точки приложенія S. Такимъ образомъ, результирующая сила инерціи F подлежитъ учету при каждомъ новомъ положеніи системы.

Можно замѣтить еще, что моментъ инерціи J_C можетъ быть вычисленъ приблизительно, путемъ раздѣленія тѣла на малыя части, удобныя для подсчета ихъ объемовъ. Опредѣляя положеніе центра тяжести каждой такой части и зная массу ея m, предполагаемъ затѣмъ эту массу сосредоточенной въ центрѣ тяжести выдѣленной части. При достаточно большомъ числѣ этихъ частей моментъ инерціи J_C получается достаточно близкимъ къ его точному, дѣйствительному значенію, — точность такого приблизительнаго подсчета можетъ быть

вполнѣ достаточной для цѣлей практики. Такъ поступаютъ, напримѣръ, при подсчетѣ моментовъ инерціи шатуновъ кривошипныхъ механизмовъ. Существуютъ также спеціальныя таблицы для подсчета моментовъ инерціи различныхъ тѣлъ, равно какъ и приборы для опытнаго опредѣленія величины ихъ (приборъ Н. Е. Жуковскаго).

Итакъ, подсчетъ силъ инерціи въ плоскомъ движеніи системы никакихъ особыхъ трудностей не представляетъ. Для каждаго положенія системы, какъ оказывается, существуетъ результирующая сила инерціи F, вполнѣ опредѣленная какъ по величинѣ, такъ и по направленію; вполнѣ опредѣляется также и точка приложенія ея. Имѣя эту результирующую силу инерціи для любого положенія системы, мы получаемъ возможность сводить разсмотрѣніе задачи динамики,— опредѣленія всѣхъ обстоятельствъ движенія,— на задачу статики путемъ примѣненія къ такой плоскодвижущейся системѣ принципа д'Аламбера въ наиболѣе простой его формѣ, говорящей, что

> если ко всѣмъ силамъ, дѣйствующимъ на данную систему, прибавить результирующую силу инерціи, то получимъ равновѣсіе системы.

Въ виду этого соображенія мы получаемъ возможность для всего комплекса силъ, участвующихъ въ данномъ плоскомъ движеніи системы, т.-е. для всѣхъ дѣйствующихъ силъ и для результирующей силы инерціи F, писать обыкновенныя условія равновѣсія, сводящіяся, въ видѣ плоскаго движенія системы, къ двумъ уравненій проекцій и одному уравненію моментовъ. Положеніе осей

координатъ и начала моментовъ можемъ выбрать теперь, какъ угодно, наиболѣе удобнымъ для насъ образомъ. При этомъ требуется только одно: знать положеніе центра ускореній G, ибо этимъ самымъ опредѣляется факторъ $R = GC$ и положеніе центра качаній S. Требованіе это выполняется, однако, далеко не всегда: центръ ускореній G не всегда помѣщается въ предѣлахъ чертежа, являясь, такимъ образомъ, недоступнымъ для насъ, и тогда рѣшеніе вопроса путемъ простого подсчета длины отрѣзка GC становится фактически невозможнымъ. Тѣмъ не менѣе вопросъ этотъ можетъ быть вполнѣ точно разрѣшенъ и въ этихъ затруднительныхъ случаяхъ, и именно при помощи плана ускореній, соотвѣтствующаго данному моменту, и это рѣшеніе, въ виду всей важности центра качаній для динамическаго изслѣдованія механизмовъ, мы теперь же подробно и разсмотримъ.

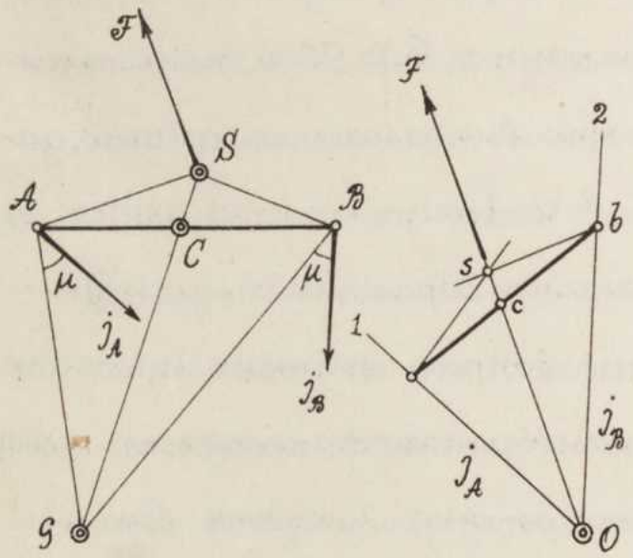
Пусть центръ ускореній даннаго звена AB занимаетъ въ разсматриваемый моментъ положеніе G, центръ тяжести — положеніе C, а центръ ускореній — положеніе S (фиг. 148). Пусть, затѣмъ, ускоренія точекъ A и B будутъ j_A и j_B, причемъ, какъ извѣстно, направленія этихъ ускореній будутъ составлять съ векторами GA и GB одинъ и тотъ же $\angle \mu$, величины же ихъ будутъ пропорціональны длинамъ этихъ векторовъ GA и GB, такъ что

$$j_A = k \cdot GA,$$

$$j_B = k \cdot GB.$$

Строимъ теперь планъ ускореній системы отрѣзка AB, для чего изъ произвольной точки O, принятой за полюсъ

этого плана, проводимъ лучи $01 \parallel j_A$ и $02 \parallel j_B$ и на этихъ лучахъ откладываемъ отрѣзки $0a$ и $0b$, пропорціональныя величинамъ ускореній j_A и j_B; соединивъ прямой полученныя такимъ образомъ точки a и b, получаемъ планъ ускореній системы даннаго отрѣзка AB въ видѣ нѣкотораго треугольника $0ab$, очевидно, подобнаго треугольнику gAB, при чемъ каждой изъ точекъ системы AB будетъ соотвѣтствовать отдѣльная точка плана ускореній; такъ, точкѣ A будетъ соотвѣтствовать точка a плана ускореній, точкѣ B – точка b, центру ускореній g – полюсъ плана 0, центру тяжести C – точка c, опредѣляемая изъ соотношенія $ac : AC = ab : AB$, центру качаній S – точка s, опредѣляемая изъ соотношеній $0s : gS = 0c : gC = ac : AC = ab : AB$ и т. д. Обозначивъ длину отрѣзка AB черезъ L, а отрѣзка ab – черезъ l, можемъ написать, что отрѣзки плана ускореній будутъ относиться къ соотвѣтствующимъ имъ отрѣзкамъ системы AB, какъ l относится къ L. Замѣтивъ это, нетрудно находить положеніе центра качаній S въ системѣ AB, не прибѣгая къ помощи центра ускореній g ея, а пользуясь лишь планомъ ускореній $0ab$. Для этого поступаемъ такъ:



Фиг. 148.

Пусть моментъ инерціи системы AB относительно центра тяжести C есть J_c, а масса ея есть M. Отсюда опредѣляемъ радіусъ инерціи ρ системы AB, пользуясь уравненіемъ $M\rho^2 = J_c$, изъ коего находимъ, что $\rho^2 = J_c / M$.

Мы знаемъ, что разстояніе GS центра ускореній G отъ центра качаній S дается формулой

$$GS = \mathcal{R} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}} = GC + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}},$$

гдѣ $\mathcal{R} = GC$. Точка s плана ускореній, соотвѣтствующая центру качаній S, опредѣлится изъ того условія, что она должна лежать на одной прямой съ точками O и C, на разстояніи Os отъ точки O, равномъ, согласно сказанному,

$$GS.\frac{ab}{AB} = GS.\frac{l}{\mathcal{L}} = \left(\mathcal{R} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}}\right)\frac{l}{\mathcal{L}}.$$

Итакъ,

$$Os = \left(\mathcal{R} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}}\right)\frac{l}{\mathcal{L}}.$$

Векторъ $\mathcal{R}$, оказывающійся неизвѣстнымъ при отсутствіи центра ускореній G, можно изъ полученнаго соотношенія исключить, пользуясь соотношеніями

$$GC : Oc = \mathcal{R} : Oc = AB : ab,$$

откуда и находимъ, что

$$\mathcal{R} = Oc.\frac{AB}{ab} = Oc.\frac{\mathcal{L}}{l}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Въ виду этого искомое разстояніе Os выразится такъ:

$$Os = \mathcal{R}.\frac{l}{\mathcal{L}} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}}.\frac{l}{\mathcal{L}} = Oc.\frac{\mathcal{L}}{l}.\frac{l}{\mathcal{L}} + \frac{\varrho^2}{Oc}.\frac{l}{\mathcal{L}}.\frac{l}{\mathcal{L}} = Oc + \frac{\varrho^2}{Oc}.\frac{l^2}{\mathcal{L}^2} \quad . \quad (B)$$

Это выраженіе разрѣшаетъ поставленный вопросъ вполнѣ, ибо, построивъ планъ ускореній, сможемъ непосредственнымъ измѣреніемъ найти величины Oc и l, величины же ϱ и $\mathcal{L}$ будутъ извѣстны по начальнымъ даннымъ для звена AB. Несложныя графическія построенія дадутъ возможность сейчасъ же опредѣлить Os; можно, конечно, опредѣлить его и непосредственнымъ вычисленіемъ; при этомъ, во избѣжаніе недоразумѣній, слѣ-

ет тщательно слѣдить за тѣмъ, чтобы всѣ отрѣзки Oc, ρ, l и L были, при подстановкѣ значеній ихъ въ формулу (B), выражены въ однихъ и тѣхъ же единицахъ, — напримѣръ, въ миллиметрахъ; въ тѣхъ же единицахъ получится тогда и Os.

Пусть, напримѣръ, $L = 2{,}5$ mt, l получилось равнымъ 5 cm, $\rho = 50$ cm и $Oc = 50$ mm. Тогда, прежде всего, пишемъ, что $L = 2500$ mm, $l = 50$ mm, $\rho = 500$ mm и $Oc = 50$ mm. Подстановка въ формулу (B) даетъ для Os величину 52 mm, такъ что отрѣзокъ cs (въ планѣ ускореній) будетъ равенъ 2 mm. Въ натурѣ разстояніе CS будетъ равно $2.\frac{2500}{500} = 100$ mm.

Получивъ точку s въ планъ ускореній, можемъ, если бы это понадобилось, найти положеніе центра качаній S въ системѣ самого отрѣзка AB. Но обычно эту точку s приходится переносить въ планъ скоростей, что и будетъ выполнено обычными пріемами, путемъ, напримѣръ, построенія треугольника, подобнаго треугольнику abs и т. д.

Разобранный пріемъ удобенъ еще тѣмъ, что сразу даетъ величину и направленіе ускоренія центра тяжести C: ускореніе это выражается векторомъ cO и будетъ направлено отъ c къ O; равно же оно будетъ k. cO, гдѣ k есть коэффиціентъ пропорціональности плана ускореній. Отсюда слѣдуетъ, что результирующая сила инерціи, F, будетъ равна $Mj_c = kM.cO$ и направится прямопротивоположно cO, т.-е. по направленію Ocs, при чемъ точкой приложенія ея будетъ служить точка s, — изображеніе центра качаній S въ планѣ Oab.

Этими замѣчаніями мы закончимъ разборъ «теоремы о центрѣ качанія» и перейдемъ теперь къ разбору другихъ основныхъ теоремъ, находящихъ себѣ примѣненіе при динамическомъ изслѣдованіи механизмовъ.

§ 16. Принципы д'Аламбера и Лагранжа въ примѣненіи ихъ къ изслѣдованію движенія произвольно-сложныхъ плоскихъ механизмовъ.

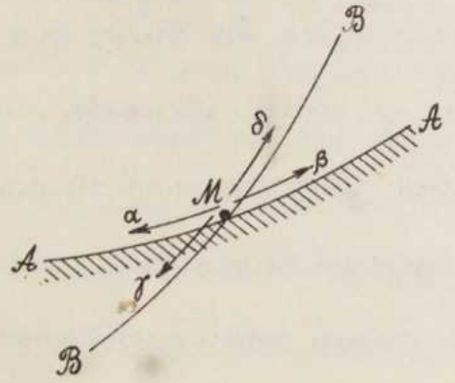
Предположимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый сколь-угодно сложный суставчатый плоскій механизмъ. Въ виду такой полной произвольности состава его, т.-е. числа звеньевъ его, способа ихъ сочетаній и проч., мы не будемъ задаваться никакой «примѣрной» схемой механизма, а будемъ вести изложеніе съ самой общей точки зрѣнія, принявъ лишь относительно изучаемыхъ нами механизмовъ только то одно существенное ограничительное условіе, что движеніе каждаго звена, каждой детали его, является вполнѣ опредѣленнымъ въ томъ смыслѣ, что каждое опредѣленное перемѣщеніе одного звена (или точки) его должно вызывать вполнѣ опредѣленныя соотвѣтствующія ему перемѣщенія всѣхъ остальныхъ звеньевъ (или точекъ).

Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся изученіемъ однихъ лишь плоскодвижущихся механизмовъ, и движенія отрѣзковъ, изображающихъ различныя звенья механизма, будемъ принимать совершающимися въ одной и той же неподвижной плоскости, которую мы и примемъ за плоскость координатъ (x, y); координату z будемъ принимать, такимъ образомъ, равной нулю.

Далѣе, въ виду того, что, говоря о началѣ Лагранжа, намъ придется упоминать о возможныхъ и дѣйствительныхъ перемѣщеніяхъ, мы и постараемся теперь же совершенно ясно установить различіе между этими двумя видами элементарныхъ перемѣщеній массъ системы, могущихъ имѣть мѣсто при движеніи ея.

Пусть, при движеніи системы, нѣкоторая матеріальная

точка M во время своего движенія принуждена постоянно оставаться на нѣкоторой поверхности, съ теченіемъ времени мѣняющей свой видъ и положеніе въ пространствѣ. Выражая эту же мысль на языкѣ механики, скажемъ, что связи, наложенныя на нашу точку и обусловливающія движеніе ея, со временемъ мѣняются, представляя собою, такимъ образомъ, функціи времени. Если въ данный моментъ поверхность, по которой происходитъ движеніе нашей точки, есть, положимъ, AA (фиг. 149), то въ слѣдующій моментъ, по истеченіи времени dt, эта поверхность окажется принявшей уже видъ BB; переходъ вида AA въ видъ BB будетъ совершенъ именно за это время dt. Въ силу этого, то элементарное перемѣщеніе, которая точка выполнитъ въ дѣйствительности за время dt, окажется или перемѣщеніемъ γ или перемѣщеніемъ δ, — начало этихъ перемѣщеній лежало бы на поверхности AA, а конецъ — на поверхности BB, какъ это и изображено на чертежѣ.



Фиг. 149.

Не то, однако, было бы, если бы эта поверхность оставалась со временемъ немѣняющейся, т.-е. если бы связи, наложенныя на точку и опредѣляющія движеніе ея, были независящими отъ времени. Тогда поверхность AA такъ поверхностью AA все время бы и оставалась, и элементарными перемѣщеніями точки M оказались бы перемѣщенія α и β. Это, значитъ, были бы тѣ перемѣщенія, которыя были бы возможны въ данный моментъ для нашей точки, если бы поверхность AA въ этотъ моментъ перестала измѣняться, т.-е. если бы связи въ этотъ моментъ перестали зависѣть отъ времени. Такія возможныя перемѣ-

щенія (α или β), какъ видимъ, при зависимости связей отъ времени, съ дѣйствительными перемѣщеніями (γ или δ) не совпадаютъ,—это совпаденіе могло бы имѣть мѣсто лишь въ томъ единственномъ случаѣ, когда поверхность AA со временемъ бы не мѣнялась,—въ этомъ случаѣ дѣйствительными перемѣщеніями оказались бы тѣ же α и β, которыя оказываются и возможными. Обычно возможныя перемѣщенія обозначаютъ буквами δ, а дѣйствительныя — буквами d, и можно сказать, что, при зависимости связей отъ времени, всѣ возможныя перемѣщенія $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots\ldots$, отличны отъ дѣйствительныхъ $dx, dy, dz, \ldots$, и замѣнять другъ друга не могутъ; въ то же время при связяхъ, отъ времени не зависящихъ и остающихся все время неизмѣняющимися, всѣ $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$, могутъ быть замѣняемы черезъ $dx, dy, dz, \ldots$.

Связи, имѣющія мѣсто въ нашихъ механизмахъ, со временемъ не мѣняются, ибо мы отвлекаемся отъ разсмотрѣнія тѣхъ измѣненій въ размѣрахъ отдѣльныхъ звеньевъ и деталей, кои обусловливаются, напр., измѣненіями нагрузки ихъ, температуры и т. д. Поэтому-то мы и можемъ сказать, что въ нашихъ механизмахъ возможныя перемѣщенія совпадаютъ съ дѣйствительными, и это обстоятельство, какъ мы увидимъ ниже, даетъ возможность весьма простой аналитической обработки принципа Лагранжа въ примѣненіи его къ нашимъ механизмамъ.

Итакъ, предположимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый плоскій механизмъ. Каковъ бы онъ ни былъ, но къ нему всегда можно примѣнить принципъ возможныхъ работъ, данный Лагранжемъ и могущій быть, въ общемъ его видѣ, сформулированнымъ такъ:

«Каковы бы ни были связи, наложенныя на механическую систему, но если къ дѣйствующимъ на нее силамъ мы прибавимъ еще силы инерціи и, мысленно остановивъ систему, дадимъ ей возможныя для этого момента перемѣщенія, то сумма всѣхъ работъ, могущихъ быть совершенными при этомъ, будетъ равна нулю».

Пусть на нашъ механизмъ дѣйствуетъ рядъ силъ $P, Q, R, \ldots$; обозначимъ возможныя перемѣщенія точекъ приложенія этихъ силъ въ направленіи этихъ силъ черезъ $\delta p, \delta q, \delta r, \ldots$ Въ такомъ случаѣ сумма возможныхъ работъ дѣйствующихъ силъ напишется такъ:

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots.$$

Ради краткости письма, будемъ обозначать эту сумму просто черезъ $\Sigma P\,\delta p$.

Переходимъ теперь къ силамъ инерціи. Такъ какъ механизмъ состоитъ изъ ряда подвижныхъ звеньевъ, числомъ, положимъ, n, и такъ какъ для каждаго звена сумма возможныхъ работъ силъ инерціи изображается суммой

$$-\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right),$$

то, распространивъ ее на всѣ n звеньевъ механизма, получимъ сумму возможныхъ работъ силъ инерціи всѣхъ звеньевъ, т.-е. всего механизма, въ видѣ двойной суммы

$$-\sum_1^n\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

Такъ какъ движеніе механизма предполагается совершающимся въ плоскости xOy, то $z = 0$, въ виду чего написанная выше двойная сумма упростится такъ:

$$-\Sigma\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right).$$

Послѣ этого уравненіе возможныхъ работъ для всего нашего механизма будетъ имѣть видъ:

$$\Sigma\mathfrak{P}\delta p-\Sigma\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right)=0 \quad . \quad . \quad .(21)$$

Двойную сумму, входящую въ составъ этого уравненія можно значительно упростить, принявъ во вниманіе, что, согласно одной изъ теоремъ Динамики, сумма работъ слагающихъ равна работѣ равнодѣйствующей. Въ данномъ случаѣ сумма работъ слагающихъ (частичныхъ) силъ инерціи для каждаго звена выражается черезъ $\left[-\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right)\right]$. Но такъ какъ, согласно теоремѣ о центрѣ тяжести, для силъ инерціи каждаго звена всегда можетъ быть найдена результирующая сила инерціи $\mathfrak{F}$, приложенная въ центръ качанія S этого звена, то, обозначая возможныя перемѣщенія центра качанія черезъ $\delta\sigma$, мы и сможемъ, въ силу упомянутой теоремы, написать, что

$$-\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right)=+\mathfrak{F}\delta\sigma$$

Въ виду этого двойная сумма уравненія (21) перепишется просто въ видѣ суммы $\sum_1^n\mathfrak{F}\delta\sigma$ и будетъ, такимъ образомъ, представлять собою сумму возможныхъ работъ результирующихъ силъ инерціи $\mathfrak{F}$, относящихся каждая къ своему звену. Въ силу этого уравненіе (21) возможныхъ работъ нашего механизма можетъ быть написано въ формѣ:

$$\Sigma\mathfrak{P}\delta p+\Sigma\mathfrak{F}\delta\sigma=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .(22)$$

Относительно всѣхъ этихъ возможныхъ перемѣщеній δ напомнимъ еще разъ, что принципъ Лагранжа требуетъ, чтобы мы

представимъ себѣ въ данный моментъ всѣ связи системы какъ бы отвердѣвшими и потерявшими способность къ дальнѣйшему измѣненію, и тогда перемѣщенія системы, возможныя при такомъ условіи, и будутъ тѣми возможными перемѣщеніями δp, о которыхъ говоритъ начало Лагранжа. Такъ какъ въ нашихъ механизмахъ всѣ связи можно считать жесткими и неизмѣняющимися,—механизмы съ упругими звеньями (пружинами и проч.) мы изъ нашего разсмотрѣнія пока исключаемъ, а въ остальныхъ считаемъ деформаціи частей ихъ ничтожно малыми,—то возможныя перемѣщенія можно считать совпадающими съ дѣйствительными, вслѣдствіе чего всѣ δp могутъ быть замѣнены дифференціалами dp, и начала д'Аламбера и Лагранжа сведутся къ уравненіямъ

$$\Sigma \mathfrak{P} dp - \sum_1^n \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy \right) = 0 \quad \ldots \quad (23)$$

и

$$\Sigma \mathfrak{P} dp + \Sigma \mathfrak{F} d\sigma = 0 \quad \ldots \quad (24)$$

Оба эти уравненія, конечно, другъ другу эквивалентны, но разница въ ихъ внѣшнихъ формахъ позволяетъ вывести на основаніи ихъ двѣ основныхъ теоремы динамики механизмовъ; первую изъ нихъ получимъ, изслѣдовавъ уравненіе (24), т.-е. разсмотрѣвъ уравненіе работъ безъ всякаго преобразованія его по существу; вторую теорему получимъ путемъ преобразованія ур-ія (23) въ болѣе простое дифференціальное уравненіе и послѣдующей затѣмъ интеграціи его для какого-либо произвольнаго промежутка времени τ. Иными словами, во второмъ случаѣ мы примѣнимъ уравненіе работъ къ какому-либо произвольному промежутку времени (конечному или безконечно-малому), а въ первомъ разсмотримъ примѣненіе его только къ безконечно-

малому промежутку времени dt. Къ этимъ изслѣдованіямъ мы теперь непосредственно и приступимъ.

§17. Теорема моментовъ относительно полюса плана скоростей.

Механизмъ, взятый нами для разсмотрѣнія, обладаетъ свойствомъ опредѣленности своихъ движеній,— давъ одной точкѣ его какое-либо опредѣленное перемѣщеніе, мы получимъ, одновременно съ этимъ, вполнѣ опредѣленныя перемѣщенія всѣхъ остальныхъ точекъ его. Отсюда слѣдуетъ, что по данной скорости одной изъ точекъ механизма можно опредѣлить скорости всѣхъ остальныхъ, при чемъ соотношенія между величинами и направленіями всѣхъ этихъ скоростей могутъ быть весьма удобно изучаемы графическимъ путемъ, помощью такъ называемаго плана скоростей, представляющаго собою цѣлую систему треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину въ нѣкоторой точкѣ плоскости этого плана, называемой полюсомъ плана скоростей. Каждый изъ этихъ треугольниковъ конструируется такъ, что конечные векторы (стороны) его, выходящіе изъ полюса плана, представляютъ собою, въ извѣстномъ масштабѣ, скорости конечныхъ точекъ звена, которому этотъ треугольникъ соотвѣтствуетъ, и направлены перпендикулярно этимъ скоростямъ, третья же сторона каждаго Δ-ка, противолежащая полюсу, параллельна прямой, соединяющей двѣ упомянутыя точки звена. Затѣмъ, каждой точкѣ X звена будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая вполнѣ опредѣленная точка x плана, и скорость v_x точки X выразится такъ:

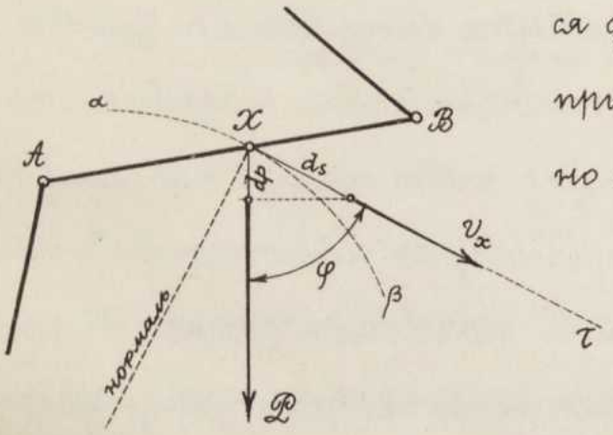
$$v_x = Ox.\vartheta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (u)$$

гдѣ O есть полюсъ плана скоростей, x — точка плана, соотвѣтствующая точкѣ X системы, а ϑ — общая для всѣхъ точекъ плана угловая скорость, — масштабъ плана; при этомъ векторъ Ox будетъ перпендикуляренъ скорости v_x взятой точки X.

Предположимъ теперь, что эта точка X служитъ точкой приложенія силы P, — одной изъ силъ, дѣйствующихъ на механизмъ, — и пусть элементарная работа dL этой силы P за промежутокъ времени dt выражается черезъ $P\,dp$, такъ что

$$dL = P\,dp,$$

при чемъ необходимо помнить, что dp есть перемѣщеніе точки приложенія X не въ дѣйствительномъ направленіи движенія точки X, а въ направленіи дѣйствія силы P (фиг. 150). Что же касается дѣйствительнаго перемѣщенія ds, то, принимая во вниманіе, что оно направлено всегда по скорости точки v_x, т.-е. по касательной Xt къ траекторіи ab данной точки, можемъ написать, что



Фиг. 150.

$$ds = v_x\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

Скорость v_x точки X можно выразить черезъ $\vartheta . Ox$, гдѣ Ox есть векторъ плана скоростей, соединяющій полюсъ O плана съ точкой x его, соотвѣтствующей точкѣ x, а ϑ — масштабъ плана; въ силу этого выраженіе (v) принимаетъ видъ:

$$ds = Ox . \vartheta\,dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (w)$$

Мы указывали, что dp есть перемѣщеніе точки X въ направленіи силы P; иными словами, это есть проекція дѣйствительнаго перемѣщенія ds на направленіе силы P, и, если уголъ между P и ds обозначимъ черезъ φ, то можно будетъ написать, что

$$dp = ds\cos\varphi = ds\cos(v_x, \mathfrak{P}),$$

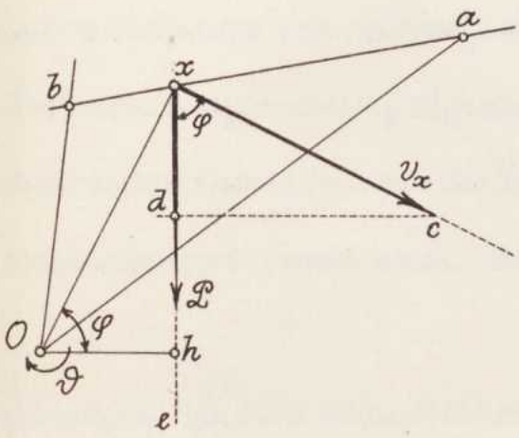
вследствіе чего элементарная работа dL силы $\mathfrak{P}$ выразится такъ:

$$dL = \mathfrak{P}\,dp = \mathfrak{P}\,ds\cos(v_x, \mathfrak{P}),$$

что, въ виду (w), принимаетъ видъ:

$$dL = \mathfrak{P}.0x.\cos(v_x, \mathfrak{P})\,\vartheta\,dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x)$$

Перенесемъ теперь силу $\mathfrak{P}$ параллельной ей самой изъ точки X звена AB въ соотвѣтствующую ей точку x плана скоростей (фиг. 151). Въ такомъ случаѣ векторъ $0x$ будетъ, какъ извѣстно, имѣть направленіе, перпендикулярное къ скорости v_x. Если, теперь, изъ начала 0 плана скоростей мы опустимъ перпендикуляръ $0h$ на прямую xe, по которой направлена перенесенная нами сила $\mathfrak{P}$, то $\angle x0h$ окажется равнымъ углу φ между v_x и $\mathfrak{P}$, ибо у этихъ двухъ угловъ стороны оказываются взаимно перпендикулярными. Но разъ уголъ $(v_x, \mathfrak{P})$ равенъ углу $x0h$, то факторъ $0x.\cos(v_x, \mathfrak{P})$, равный, иначе, $0x\cos x0h$, т.-е. $0x\cos\varphi$, будетъ, очевидно, равенъ $0h$, т.-е. плечу силы $\mathfrak{P}$ относительно полюса 0 плана скоростей, въ силу чего элементарная работа dL силы $\mathfrak{P}$ выразится теперь такъ:



Фиг. 151.

$$dL = \mathfrak{P}\,dp = \mathfrak{P}.0x\cos(v_x, \mathfrak{P})\,\vartheta\,dt = \mathfrak{P}.0h.\vartheta\,dt. \quad . \quad . \quad (25)$$

Это выраженіе весьма важно; оно указываетъ, что элементарная работа силы $\mathfrak{P}$ можетъ быть получена помощью плана скоростей путемъ слѣдующей операціи:

Отыскиваемъ въ планѣ скоростей точку x, соотвѣтствующую точкѣ X приложенія силы $\mathfrak{P}$, переносимъ въ эту точку x силу $\mathfrak{P}$ параллельно ей самой и опускаемъ изъ начала 0 перпендикуляръ $0h$ на направленіе xe такъ перенесенной нами си-

лы $\mathfrak{P}$; тогда элементарная работа силы $\mathfrak{P}$ за время dt выразится произведеніемъ изъ силы $\mathfrak{P}$ на плечо Oh и на факторъ $\vartheta\, dt$, очевидно, общій всѣмъ точкамъ системы.

Произведеніе $\mathfrak{P}.Oh$, очевидно, представляетъ собою статическій моментъ силы $\mathfrak{P}$, перенесенной указаннымъ путемъ въ планъ ускореній относительно полюса O этого плана. Обозначивъ его, ради краткости письма, черезъ $m_{\mathfrak{P}}$, можемъ переписать выраженіе (25) такъ:

$$\mathfrak{P}\, dp = da = m_{\mathfrak{P}}\, \vartheta\, dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (y)$$

Итакъ, элементарная работы каждой силы, проявляющей свое дѣйствіе въ механизмѣ, равна произведенію изъ постояннаго для даннаго момента фактора $\vartheta\, dt$ на статическій моментъ этой силы, перенесенной въ планъ скоростей, относительно полюса этого плана.

Что касается знака этого момента, то онъ опредѣляется смысломъ вращенія его около полюса, и, согласно общепринятому положенію, положительнымъ будемъ считать моментъ, стремящійся вращать систему по часовой стрѣлкѣ, а отрицательнымъ — противъ нея.

Соотношеніе (y) можетъ быть, по аналогіи, распространено какъ на всѣ дѣйствующія силы $\mathfrak{P}, Q, R, \ldots$, приложенныя нами къ механизму, такъ и на всѣ силы инерціи или, что то же, на всѣ n результирующихъ силъ инерціи $\mathfrak{F}$. Составивъ всѣ такія выраженія и просуммировавъ ихъ отдѣльно для силъ дѣйствующихъ и, затѣмъ, отдѣльно для силъ инерціи $\mathfrak{F}$, можемъ написать, что

$$\Sigma \mathfrak{P}\, dp = \mathfrak{P}\, dp + Q\, dq + R\, dr + \ldots = m_{\mathfrak{P}}\, \vartheta\, dt + m_{Q}\, \vartheta\, dt + m_{R}\, \vartheta\, dt + \ldots =$$

$$= \Sigma (m_{\mathfrak{P}}\, \vartheta\, dt) = \vartheta\, dt\, \Sigma m_{\mathfrak{P}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (z)$$

и, затѣмъ,

$$\Sigma \mathfrak{F} d\sigma = m_{\mathfrak{F}_1} \vartheta dt + m_{\mathfrak{F}_2} \vartheta dt + \ldots + m_{\mathfrak{F}_n} \vartheta dt = \vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{F}}, \ldots (\alpha)$$

при чемъ относительно выраженія (α) отмѣтимъ, что каждая результирующая сила инерціи $\mathfrak{F}_k$, приложенная въ центрѣ качанія своего звена, S_k, при перенесеніи ея въ планъ скоростей, должна быть прилагаема въ точкѣ s_k плана, соотвѣтствующей точкѣ S_k звена.

Итакъ, возможная работа силъ дѣйствующихъ, приложенныхъ къ нашему механизму, выражается суммой $\vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{P}}$, а возможная работа всѣхъ силъ инерціи — суммой $\vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{F}}$. Согласно началу Лагранжа, сумма двухъ этихъ видовъ возможныхъ работъ, должна быть равна нулю, почему можемъ написать, что уравненіе (24), имѣющее видъ

$$\Sigma \mathfrak{P} dp + \Sigma \mathfrak{F} d\sigma = 0,$$

въ силу уравненій (z) и (α) перепишется такъ:

$$\vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{P}} + \vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{F}} = 0,$$

что, по сокращеніи на ϑdt, даетъ уравненіе

$$\Sigma m_{\mathfrak{P}} + \Sigma m_{\mathfrak{F}} = 0, \ldots (26)$$

представляющее собою, какъ видимъ, уравненіе моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на механизмъ, считая въ томъ числѣ и силы инерціи, относительно полюса плана скоростей, при чемъ всѣ силы предполагаются перенесенными въ планъ скоростей параллельно самимъ себѣ и приложенными въ тѣхъ точкахъ плана, кои являются соотвѣтствующими для точекъ приложенія этихъ силъ въ данномъ механизмѣ.

Уравненіе возможныхъ работъ (24) было написано нами въ томъ предположеніи, что къ даннымъ силамъ, дѣйствующимъ на механизмъ, были прибавлены еще всѣ силы инерціи. Такъ

какъ, согласно принципу д'Аламбера, послѣ такого прибавленія наступаетъ равновѣсіе между всѣми этими силами, то уравненіе (26), какъ производное отъ (23), представляетъ собою не что иное, какъ одно изъ обычныхъ уравненій равновѣсія, но написанное въ формѣ, болѣе простой и удобной для практическаго использованія. Уравненіе это можно истолковать еще и иначе, принявъ во вниманіе слѣдующія соображенія:

Уравненіе (26) есть уравненіе моментовъ всѣхъ силъ, оказывавшихъ свое воздѣйствіе на механизмъ и перенесенныхъ опредѣленнымъ образомъ въ планъ скоростей, относительно одной и той же точки,— полюса плана скоростей. Въ другой сторонѣ, это же уравненіе можетъ быть разсматриваемо, какъ уравненіе равновѣсія нѣкоторой жесткой системы, могущей вращаться около полюса O и находящейся подъ воздѣйствіемъ всего комплекса перенесенныхъ нами силъ. Значитъ, выходитъ, что если фигуру, изображающую нашъ механизмъ въ планѣ скоростей, будемъ считать жесткой, неизмѣняемой, иными словами, если примемъ ее за нѣкоторый жесткій рычагъ, съ точкой опоры въ полюсѣ плана скоростей и, затѣмъ, перенесемъ всѣ силы изъ механизма на эту фигуру,— каждую силу въ свою соотвѣтствующую точку,— то одно изъ условій равновѣсія такой жесткой фигуры, такого жесткаго рычага, могущаго вращаться около полюса плана, какъ около точки опоры,— а именно, уравненіе моментовъ всѣхъ силъ относительно этой точки опоры,— и представится уравненіемъ (26).

Оказывается, такимъ образомъ, что, сколь бы сложенъ ни былъ данный плоскій механизмъ, но изученіе соотношеній между силами, на него дѣйствующими, считая въ томъ числѣ

и силы инерціи, можетъ быть весьма просто и удобно выполняемо путемъ сведенія этого сложнаго вопроса къ простѣйшей задачѣ статики, для чего нужно:

1) построить полный планъ скоростей даннаго механизма, что дастъ намъ въ этомъ планѣ фигуру, соотвѣтствующую данному механизму въ разсматриваемый моментъ;

2) перенести въ планъ скоростей всѣ силы, дѣйствующія на механизмъ, включая въ число ихъ и результирующія силы инерціи, приложенныя въ центрахъ качаній звеньевъ механизма; каждую силу нужно перенести въ точку плана, соотвѣтствующую точкѣ приложенія ея въ механизмѣ;

3) принявъ, наконецъ, фигуру, изображающую въ планѣ скоростей данный механизмъ, за жесткій рычагъ съ точкой опоры въ планѣ скоростей, написать одно изъ уравненій статическаго равновѣсія для системы этого рычага, нагруженнаго перенесенными на него силами; а именно, уравненіе моментовъ всѣхъ этихъ силъ относительно точки опоры (центра вращенія) рычага, т.-е. относительно полюса плана скоростей.

Полученное такимъ путемъ уравненіе моментовъ и будетъ представлять собою выведенное выше уравненіе (26), т.-е. условіе равновѣсія силъ дѣйствующихъ и силъ инерціи даннаго механизма. Очевидно, что каждому отдѣльному положенію механизма будетъ соотвѣтствовать свой рычагъ и свое уравненіе моментовъ.

Если окажется, что величина какой-либо изъ силъ, воздѣйствующихъ на механизмъ, неизвѣстна, но направленіе и точка приложенія ея намъ даны, равно какъ даны величины, направленія и точки приложенія всѣхъ остальныхъ силъ, то уравне-

ніе (26) дастъ намъ возможность опредѣлить и величину этой силы, и, значитъ, весь комплексъ силъ, дѣйствующихъ на нашъ механизмъ, будетъ извѣстенъ вполнѣ. Это соображеніе играетъ весьма важную роль при разсмотрѣніи задачи объ обезпеченіи равномѣрности хода простыхъ и сложныхъ кривошипныхъ механизмовъ,— при помощи этого именно уравненія (26) и строится такъ называемая діаграмма тангенціальныхъ усилій. Построеніе этой діаграммы и выясненіе значенія ея будетъ выполнено въ одномъ изъ дальнѣйшихъ параграфовъ.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ числѣ силъ, вошедшихъ въ уравненіе (26), опорныхъ сопротивленій N, учитывающихъ реакціи связей, не имѣется, и эти силы не могутъ войти въ это уравненіе по самому существу дѣла. Дѣйствительно, уравненіе (26) было получено изъ основного уравненія возможныхъ работъ (24); но возможныя работы этихъ сопротивленій N всѣ равны нулю, такъ какъ возможныя перемѣщенія точекъ приложенія этихъ силъ N перпендикулярны направленіямъ этихъ силъ. Вслѣдствіе этого, въ основное уравненіе (24) эти силы N войти не смогутъ, а значитъ, не будетъ ихъ и въ уравненіи моментовъ (26).

Опредѣленіе этихъ силъ N придется вести для каждаго звена отдѣльно, помощью уравненій проекцій всѣхъ силъ, воздѣйствующихъ на звено, сначала на одну ось проекцій, а затѣмъ на другую, ей перпендикулярную,— оси эти, понятно, нужно выбирать наиболѣе удобнымъ для дѣла образомъ. Два полученныхъ такимъ путемъ уравненія проекцій дадутъ возможность опредѣлить силы опорныхъ сопротивленій N и, значитъ, какъ силы трѣнія, такъ и работу этихъ послѣднихъ, что, въ свою

очередь, позволитъ составить представленіе о степени совершенства нашей машины.

Этими соображеніями мы и закончимъ выводъ и разборъ теоремы моментовъ. О приложеніяхъ ея на практикѣ мы будемъ говорить еще въ дальнѣйшемъ, а теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію второго уравненія, вытекающаго изъ принциповъ д'Аламбера и Лагранжа, а именно, уравненія (23).

§ 18. Теорема живыхъ силъ въ приложеніи ея къ движенію плоскихъ механизмовъ.

Въ виду того, что, согласно основному предположенію, связи нашихъ механизмовъ отъ времени не зависятъ, оказалось возможнымъ въ общемъ уравненіи, выражающемъ начала д'Аламбера и Лагранжа, замѣнить возможныя перемѣщенія $\delta x, \delta y, \delta p, \ldots$, дѣйствительными $dx, dy, dp, \ldots$, послѣ чего получилось уравненіе

$$\Sigma \mathfrak{P} dp - \sum_{1}^{n} \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy \right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Двойная сумма, входящая въ составъ этого уравненія, получилась, какъ мы знаемъ, такъ:

Работа силы инерціи какой-нибудь матеріальной точки съ массой m, совершенная за время dt, выражается черезъ

$$-m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy \right).$$

Взявъ сумму такихъ работъ для одного звена нашего механизма, мы обозначимъ результатъ такого суммированія первымъ знакомъ Σ; распространеніе же такого суммированія на всѣ звенья механизма мы отмѣтимъ вторымъ знакомъ Σ.

Ради простоты писанія, условимся суммированіе работъ всѣхъ силъ инерціи для всѣхъ массъ механизма (для всѣхъ массъ всѣхъ его звеньевъ) отмѣчать не двумя знаками суммъ, а только однимъ, такъ что уравненіе (23) можетъ быть переписано еще такъ:

$$\Sigma \mathfrak{P}\,dp - \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (23')$$

Соотношеніе это представляетъ собою нѣкоторое дифференціальное уравненіе, имѣющее мѣсто для даннаго момента времени dt. Попробуемъ распространить его на какой-либо произвольный промежутокъ времени Δt, равный $(t_2 - t_1)$; для этого нужно проинтегрировать всѣ члены этого уравненія въ указанныхъ предѣлахъ, и мы теперь и займемся такимъ интегрированіемъ. Обратимся, прежде всего, къ первой суммѣ $\Sigma \mathfrak{P}\,dp$ и напишемъ ее въ раскрытомъ видѣ; имѣемъ, что

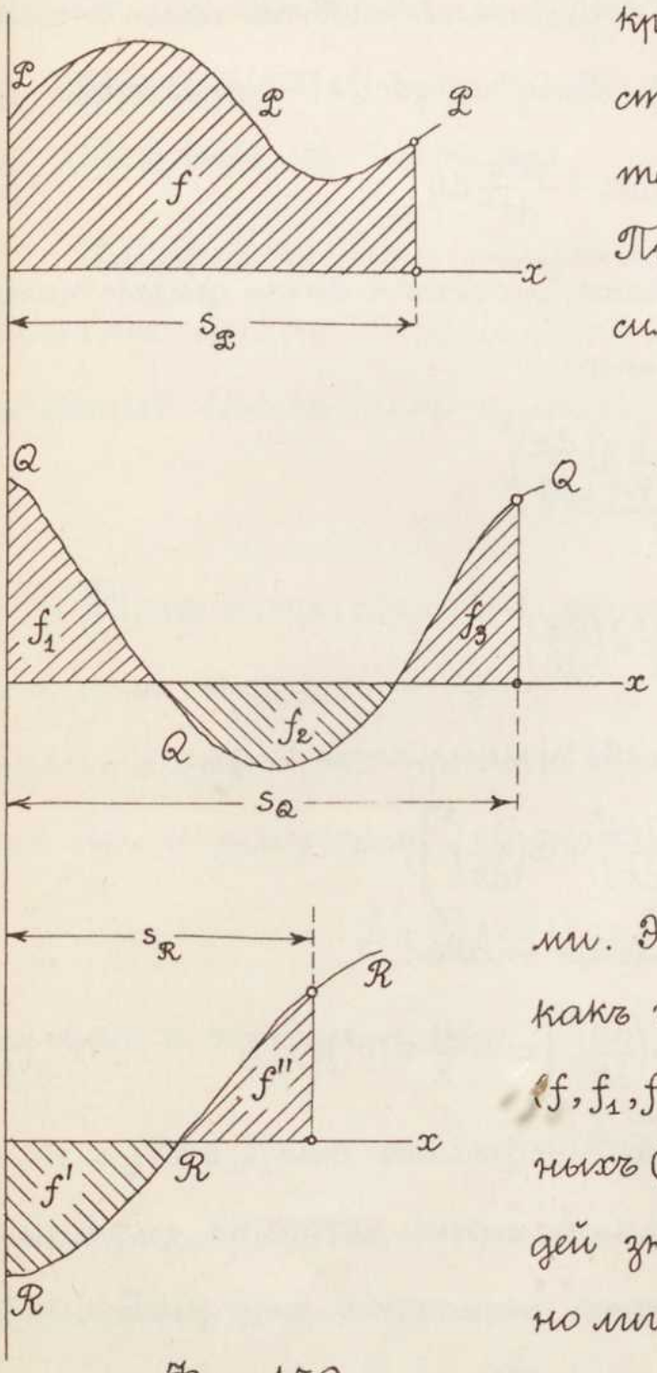
$$\Sigma \mathfrak{P}\,dp = \mathfrak{P}\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots .$$

Замѣчая, что величины силъ $\mathfrak{P}, Q, R$ и т. д. могутъ мѣняться вмѣстѣ съ измѣненіемъ конфигураціи механизма, т.-е. вмѣстѣ съ движеніемъ его, въ силу чего постоянными считать ихъ, вообще говоря, нельзя, и интегрируя написанное выраженіе въ предѣлахъ отъ t_1 до t_2, получимъ выраженіе работы $\mathfrak{L}$ всѣхъ этихъ силъ за время Δt въ видѣ соотношенія

$$\mathfrak{L} = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P}\,dp = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P}\,dp + \int_{t_1}^{t_2} Q\,dq + \int_{t_1}^{t_2} R\,dr + \ldots .$$

Такъ какъ зависимость между величинами силъ и перемѣщеніями точекъ приложенія ихъ дается обычно не въ аналитической формѣ, а въ графической, — въ видѣ силовыхъ кривыхъ, изображающихъ каждая измѣненіе своей силы по мѣрѣ пе-

ремѣщенія точки приложенія ея, то величину каждаго интеграла можно найти, подсчитавъ тѣмъ или инымъ путемъ величину площади, ограниченной силовой кривой, осью абсциссъ и крайними ординатами, соотвѣтствующими началу и концу взятаго промежутка времени Δt. Пусть силовыя кривыя нашихъ силъ P, Q, R и т. д. изображаются кривыми $PP, QQ, RR, \ldots\ldots$, (фиг. 152), и пусть за время Δt точки приложенія ихъ прошли въ направленіи силъ пути $s_P, s_Q, s_R, \ldots$, такъ что работы силъ изобразятся заштрихованными площадями. Эти площади могутъ состоять какъ изъ положительныхъ участковъ (f, f_1, f_3, f''), такъ и изъ отрицательныхъ (f_2, f'), но составъ этихъ площадей значенія для насъ не имѣетъ. Важно лишь то, что, взявъ алгебраическую сумму всѣхъ этихъ площадей, относящихся къ взятому промежутку времени Δt, мы получимъ величину L работы всѣхъ дѣйствующихъ силъ, выполненной за это время.—Само собою разумѣется, что какъ заданіе силъ, такъ и подсчетъ работы ихъ, могутъ быть выполнены и другими путями, но, по существу дѣла, это является для насъ безразличнымъ,—важно лишь имѣть значеніе работы L, и только.



Фиг. 152.

Перейдемъ теперь ко второй суммѣ и сначала разсмотримъ, какъ можетъ быть выражена иначе работа силъ инерціи за какое-либо время τ.

Для элементарной массы m возможная работа силы инерціи ея за время δt,—обозначимъ эту работу черезъ $d\lambda$,—выражается такъ:

$$d\lambda = -m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, можетъ быть значительно упрощено, если мы замѣтимъ, что

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx = \frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2}dy = \frac{1}{2}d\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Въ виду этихъ соотношеній (β) принимаетъ видъ:

$$d\lambda = -\frac{m}{2}\left[d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + d\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right],$$

что можетъ быть переписано дальше такъ:

$$d\lambda = -\frac{m}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -\frac{m}{2}d(v^2) \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Интегрируя это уравненіе въ предѣлахъ отъ t_1 до t_2 и полагая, что при $t = t_1$ скорость v взятой точки имѣетъ значеніе v_1, а при $t = t_2$ имѣемъ $v = v_2$, можемъ написать, что работа λ силы инерціи элементарной массы m за время Δt, равное, очевидно, $t_2 - t_1$, выразится такъ:

$$\lambda = -\int_{v_1}^{v_2}\frac{m}{2}d(v^2) = -\frac{m}{2}\int_{v_1}^{v_2}d(v^2) = +\frac{m}{2}\int_{v_2}^{v_1}d(v^2) = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2). \quad (27)$$

Замѣчая, что приращеніе живой силы этой массы выражается черезъ

$$k = +\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2),$$

заключаемъ, что

$$\lambda = -\kappa,$$

т.-е. что работа силы инерціи какой-либо элементарной массы m за время Δt равна приращенію живой силы этой массы, полученному ею за то же время Δt, но взятому съ обратнымъ знакомъ.

Распространяя полученный результатъ на всѣ массы взятаго нами механизма, можемъ написать, что общая работа всѣхъ силъ инерціи за время Δt выразится такъ:

$$\Sigma\lambda = \Sigma\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Такъ какъ, согласно общему положенію, возможная работа силъ инерціи въ суммѣ съ возможной работой силъ дѣйствительныхъ, за то же время совершенной, должна дать нуль, то мы и получаемъ уравненіе

$$\mathcal{L} + \Sigma\lambda = 0 = \mathcal{L} + \Sigma\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

откуда и находимъ, что

$$\mathcal{L} = \Sigma\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

гдѣ суммированіе приращеній живыхъ силъ распространено на всѣ массы всѣхъ звеньевъ механизма. Полученное соотношеніе и выражаетъ собою теорему живыхъ силъ, получающуюся въ результатѣ распространенія начала Лагранжа на какой-либо промежутокъ времени, въ томъ предположеніи, что связи механизма отъ времени не зависятъ. Теорема эта говоритъ, что работа всѣхъ дѣйствующихъ на механизмъ силъ (свободныхъ усилій, полезныхъ сопротивленій и проч., но не силъ инерціи, какъ это выяснилось теперь вполнѣ ясно) за извѣстное вре-

мя Δt идетъ всегда на приращеніе живой силы механизма за то же время Δt. Такъ какъ работы силъ, помогающихъ движенію, считаются положительными и отмѣчаются плюсомъ, а работы силъ, препятствующихъ движенію, считаются отрицательными, то, принимая, что въ движеніи нашего механизма принимаютъ участіе силы обѣихъ этихъ категорій, мы и должны установить, что подъ $\mathfrak{L}$ разумѣется алгебраическая сумма всѣхъ, дѣйствующими силами произведенныхъ, работъ за извѣстный промежутокъ времени Δt.

Очевидно, что если въ началѣ этого промежутка времени скорости (v_1) массъ механизма имѣютъ тѣ же значенія, что и въ концѣ его, (v_2), такъ что для каждой матеріальной точки $v_1 = v_2$, то, очевидно, $\mathfrak{L} = 0$, т.-е. работа силъ дѣйствующихъ равна работѣ всѣхъ сопротивленій. — Къ этимъ и имъ подобнымъ вопросамъ мы встрѣтимся еще въ дальнѣйшемъ, а теперь продолжимъ наши общія изысканія и вернемся къ полученному нами общему уравненію живыхъ силъ (29), имѣющему видъ:

$$\mathfrak{L} = \Sigma \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Непосредственный подсчетъ суммы, стоящей въ правой части уравненія (29), является фактически невыполнимымъ; тѣмъ не менѣе, его можно выполнить вполнѣ точно, руководясь слѣдующими простыми соображеніями:

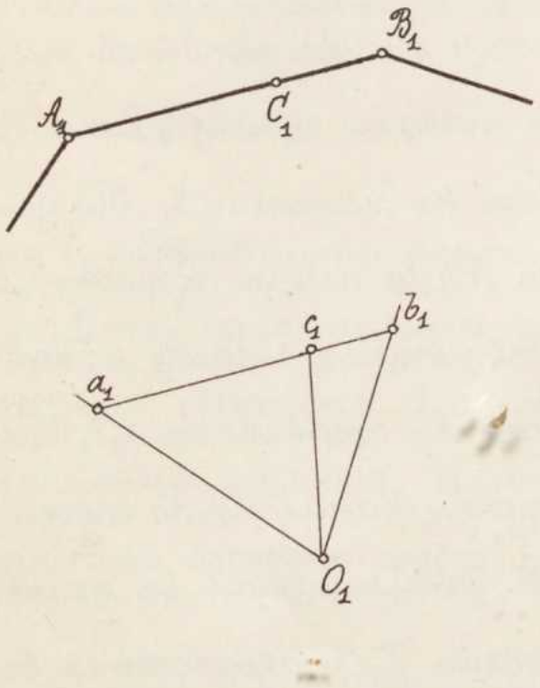
Замѣчая, что мы имѣемъ здѣсь дѣло со скоростями и то, поэтому, является вполнѣ естественнымъ привлеченіе къ участію въ преобразованіяхъ этой суммы плана скоростей, мы и

предположимъ, что намъ данъ нѣкоторый сложный плоскій механизмъ съ цѣлымъ рядомъ звеньевъ: $AB, BC, \ldots, KL, \ldots$ Примѣнительно къ нему теорема живыхъ силъ въ раскрытой формѣ, для нѣкотораго промежутка времени Δt, напишется такъ:

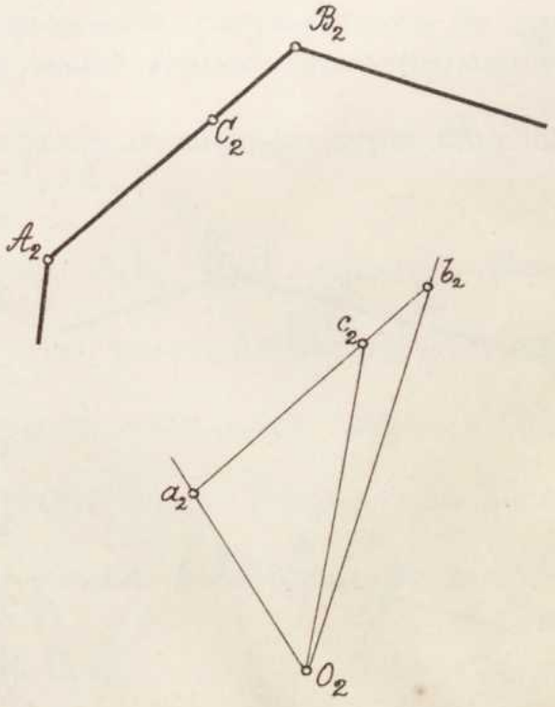
$$\mathfrak{L} = \sum_{AB} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \sum_{BC} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \ldots$$

Имѣя это въ виду, мы и разсмотримъ, какъ выразится приращеніе живой силы сначала для одного какого-либо звена, — положимъ, звена AB, — а затѣмъ распространимъ полученный результатъ на весь механизмъ.

Вычертимъ нашъ механизмъ въ двухъ положеніяхъ, — начальномъ, соотвѣтствующемъ начальному моменту t_1, и конечномъ, соотвѣтствующемъ конечному моменту t_2, а затѣмъ построимъ планы скоростей этого механизма, соотвѣтствующіе этимъ же моментамъ t_1 и t_2, и предположимъ, что выдѣленное нами звено AB въ первый моментъ занимаетъ положеніе, изображенное на фигурѣ 153, а во второй — положеніе, изображенное на фиг. 154, отрѣзки же, изображающіе это звено въ планахъ



Фиг. 153.



Фиг. 154.

скоростей, построенныхъ для тѣхъ же моментовъ, пусть будутъ a_1b_1 для перваго момента и a_2b_2 — для второго. Полюсы плановъ пусть лежатъ въ O_1 и O_2. Наконецъ, центръ тяжести звена AB пусть лежитъ въ C; въ указанные моменты онъ будетъ занимать положенія C_1 и C_2, въ планахъ же скоростей соотвѣтствующими ему точками пусть служатъ точки c_1 и c_2.

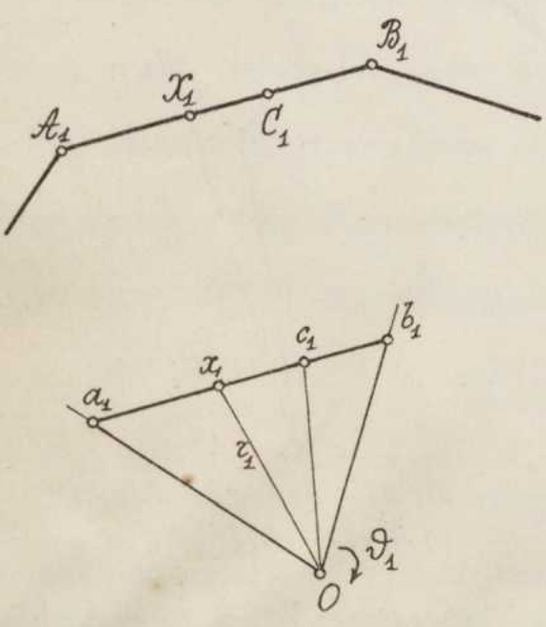
Приращеніе живой силы звена AB за время $\Delta t = t_2 - t_1$ выражается черезъ

$$\Sigma \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

т.-е. черезъ

$$\Sigma \frac{mv_2^2}{2} - \Sigma \frac{mv_1^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Посмотримъ теперь, какъ, при помощи плана скоростей выразятся обѣ эти суммы, и разсмотримъ сначала сумму $\frac{1}{2}\Sigma mv_1^2$, относящуюся къ моменту t_1. По условію, звено AB въ планѣ скоростей, соотвѣтствующемъ этому моменту, изображается отрѣзкомъ a_1b_1 (фиг. 155), и пусть какая-либо точка X звена AB, занимающая въ моментъ (t_1) положеніе X_1, изображается въ этомъ планѣ точкой x_1.



Фиг. 155.

Если коэффиціентъ пропорціональности перваго плана, — это будетъ нѣкоторая опредѣленная угловая скорость, которую можно найти по даннымъ заданія, — обозначимъ черезъ ϑ_1, при чемъ эта величина ϑ_1 будетъ одна и та же для всего плана скоростей въ моментъ (t_1), то скорость точки X въ моментъ (t_1) вы-

зится такъ:

$$v_x = 0x_1 . \vartheta_1 .$$

Въ силу этого сумма $\Sigma \frac{mv_1^2}{2}$ перепишется такъ:

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \Sigma \frac{m . 0x_1^2 . \vartheta_1^2}{2} = \frac{\vartheta_1^2}{2} \Sigma m . 0x_1^2 . \quad . \quad . \quad . (z)$$

Обозначимъ, ради краткости письма, длину вектора $0x_1$ черезъ r_1. Тогда (z) перепишется такъ:

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{\vartheta_1^2}{2} \Sigma m r_1^2 .$$

Если мы представимъ себѣ, что всѣ точки отрѣзка $a_1 b_1$ снабжены массами соотвѣтствующихъ имъ точекъ звена AB, такъ что отрѣзокъ $a_1 b_1$ представитъ собою какъ бы то же звено AB, но лишь измѣненное въ своихъ линейныхъ размѣрахъ въ отношеніи

$$a_1 b_1 : AB = l_1 : L ,$$

гдѣ l_1 обозначаетъ длину отрѣзка $a_1 b_1$, а L — длину звена AB, — то $\Sigma m r_1^2$ представитъ собою не что иное, какъ моментъ инерціи отрѣзка $a_1 b_1$, снабженнаго массами звена AB, относительно полюса плана скоростей, O_1. Обозначивъ этотъ моментъ инерціи черезъ J_{O_1} и принимая во вниманіе, что

$$J_{O_1} = J_{C_1} + M . O_1 C_1^2 ,$$

гдѣ J_{C_1} есть моментъ инерціи этого же отрѣзка $a_1 b_1$ относительно центра тяжести его C_1 (соотвѣтствующаго центру тяжести C отрѣзка AB), M — масса звена AB (и, значитъ, отрѣзка $a_1 b_1$, ибо этотъ послѣдній мы снабдили массами звена AB), а $0C_1$ — разстояніе полюса плана до этой точки C_1. Такимъ образомъ, можемъ написать, что

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{\vartheta_1^2}{2} (J_{C_1} + M . O_1 C_1^2) . \quad . \quad . \quad . \quad . (\vartheta)$$

Выраженіе это можно значительно упростить путемъ преобразованія выраженія J_{c_1}. Дѣло въ томъ, что этотъ моментъ инерціи удобнѣе всего выразить черезъ J_C,—моментъ инерціи основного звена AB относительно центра тяжести его C,—ибо этотъ моментъ инерціи J_C при движеніи звена не мѣняется и можетъ быть подсчитанъ разъ навсегда, между тѣмъ какъ моментъ инерціи J_{c_1} зависитъ отъ линейныхъ размѣровъ отрѣзка a_1b_1, мѣняющихся съ каждымъ новымъ планомъ скоростей.

Обозначая разстоянія точекъ звена AB отъ центра тяжести его C черезъ r, а разстоянія точекъ отрѣзка a_1b_1 отъ точки c_1 (центра тяжести отрѣзка a_1b_1) черезъ r_1, можемъ написать, что

$$J_C = \Sigma m r^2$$

и

$$J_{c_1} = \Sigma m r_1^2,$$

при чемъ векторы r и r_1, какъ соединяющіе соотвѣтственныя точки, связаны соотношеніями

$$r : r_1 = AB : a_1b_1 = L : l_1,$$

гдѣ L постоянно, а l_1 отъ момента къ моменту можетъ мѣняться. Поэтому можемъ написать, что

$$r_1 = r \cdot \frac{l_1}{L},$$

вслѣдствіе чего

$$J_{c_1} = \Sigma m r_1^2 = \Sigma\left(m r^2 \cdot \frac{l_1^2}{L^2}\right) = \frac{l_1^2}{L^2}\Sigma m r^2 = \frac{l_1^2}{L^2} J_C .$$

Такъ какъ

$$J_C = M\rho^2,$$

гдѣ ρ есть радіусъ инерціи звена AB и при перемѣщеніи его не мѣняется, то выраженіе для J_{c_1}, полученное выше, можетъ

быть переписано такъ:

$$J_{c_1} = \frac{l_1^2}{l^2} M\rho^2; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

послѣ чего (9) принимаетъ видъ:

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{\vartheta_1^2}{2}\left(M\rho^2 \frac{l_1^2}{l^2} + M.O_1c_1^2\right)$$

или, иначе

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2} M\vartheta_1^2 \left[\left(\frac{\rho l_1}{l}\right)^2 + O_1c_1^2\right]. \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Величина, стоящая въ квадратныхъ скобкахъ, представляетъ собою квадратъ гипотенузы прямоугольнаго треугольника, катеты коего имѣютъ значенія $\rho l_1/l$ и O_1c_1. Если длину этой гипотенузы обозначимъ черезъ λ_1, такъ что

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{\rho l_1}{l}\right)^2 + O_1c_1^2,$$

то сможемъ написать, что

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2} M\vartheta_1^2\lambda_1^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

Такъ выражается сумма живыхъ силъ звена AB въ начальный моментъ (t_1) взятаго нами промежутка времени Δt. Посмотримъ теперь, какъ выразится эта сумма въ конечный моментъ (t_2) того же промежутка. Планъ скоростей будетъ здѣсь уже другой, съ инымъ коэффиціентомъ пропорціональности, ϑ_2; измѣнится также длина l_1 отрѣзка a_1b_1, перейдя въ l_2, такъ что $a_2b_2 = l_2$; измѣнится также и O_1c_1, перейдя въ O_2c_2; сохранятъ же свои значенія только M, ρ и l. Поэтому, аналогично (31) можемъ написать, что

$$\Sigma \frac{mv_2^2}{2} = \frac{1}{2} M\vartheta_2^2 \left[\left(\frac{\rho l_2}{l}\right)^2 + O_2c_2^2\right]. \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Положивъ снова

$$\left(\frac{\rho l_2}{\mathfrak{L}}\right)^2 + O_2 c_2^2 = \lambda_2^2,$$

где λ_2 представит собою, аналогично прежнему, гипотенузу прямоугольнаго треугольника съ катетами $(\rho l_2/\mathfrak{L})$ и $O_2 c_2$, можемъ написать, что

$$\Sigma \frac{m v_2^2}{2} = \frac{1}{2} M \vartheta_2^2 \lambda_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Сопоставляя (32) и (34), можемъ написать, что приращеніе живой силы звена AB за промежутокъ времени Δt, равный $(t_2 - t_1)$, выражается такъ:

$$\Sigma \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} M (\vartheta_2^2 \lambda_2^2 - \vartheta_1^2 \lambda_1^2). \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Это выраженіе написано нами для звена AB. Написавъ теперь рядъ такихъ же выраженій для всѣхъ остальныхъ движущихся звеньевъ даннаго механизма и сложивъ ихъ, получимъ полное приращеніе живой силы всего механизма, равное работѣ $\mathfrak{L}$ дѣйствующихъ силъ за то же время Δt. Поэтому получаемъ:

Для звена AB: $\Sigma_{AB} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} M_{AB} \vartheta_2^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{2} M_{AB} \vartheta_1^2 \lambda_1^2,$

для звена BC: $\Sigma_{BC} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} M_{BC} \vartheta_2^2 \lambda_2'^2 - \frac{1}{2} M_{BC} \vartheta_1^2 \lambda_1'^2,$

для звена CD: $\Sigma_{CD} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} M_{CD} \vartheta_2^2 \lambda_2''^2 - \frac{1}{2} M_{CD} \vartheta_1^2 \lambda_1''^2,$

. . . . . .

. . . . . .

для всего мех-зма: $\Sigma \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \vartheta_2^2 \Sigma M \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \vartheta_1^2 \Sigma M \lambda_1^2, \quad (36)$

такъ что теорема живыхъ силъ, примѣненная къ сколь-угодно сложному плоскому механизму, приводитъ къ весьма простому

уравненію:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\vartheta_2^2 \Sigma M\lambda_2^2 - \frac{1}{2}\vartheta_1^2 \Sigma M\lambda_1^2. \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

По поводу полученныхъ уравненій (36) и (37) необходимо, во избѣжаніе недоразумѣній, замѣтить слѣдующее:

1) Для плана скоростей, соотвѣтствующаго начальному моменту (t_1) взятаго нами промежутка времени Δt, коэффиціентъ пропорціональности его ϑ_1,— нѣкоторая опредѣленная угловая скорость,— остается однимъ и тѣмъ же для всѣхъ отрѣзковъ типа (a_1b_1), изображающихъ въ этомъ планѣ звенья (AB) взятаго механизма. Въ виду этого факторъ ϑ_1^2 оказался общимъ множителемъ у всѣхъ слагаемыхъ правой части уравненія (36), относящихся къ начальному моменту (t_1), и его оказалось возможнымъ вынести за знакъ суммы, относящейся къ первому плану, построенному для момента (t_1).

2) То же замѣчаніе имѣетъ силу и для втораго плана скоростей, соотвѣтствующаго конечному моменту (t_2) взятаго промежутка времени Δt; здѣсь общимъ множителемъ у всѣхъ слагаемыхъ, относящихся къ этому моменту (t_2), явился факторъ ϑ_2^2,— квадратъ нѣкоторой угловой скорости ϑ_2, служащей коэффиціентомъ пропорціональности для втораго плана скоростей.

3) Массы M звеньевъ, вообще говоря, различны; мѣняются отъ момента къ моменту и отъ звена къ звену величины λ упомянутыхъ выше гипотенузъ. Въ силу этого всѣ факторы типа $M\lambda^2$ пришлось оставить подъ знаками соотвѣтственныхъ суммъ.

4) Величина $\mathfrak{L}$, входящая въ уравненіе (37), есть работа силъ дѣйствующихъ и силъ сопротивленій. Работа силъ инерціи будетъ равна $(-\mathfrak{L})$ и выразится, слѣдовательно, второй частью уравненія (37) съ измѣненными на обратные знаками ея членовъ.

Если массы и размѣры звеньевъ механизма извѣстны и имѣется возможность построить планы скоростей этого механизма для начальнаго и конечнаго моментовъ какого-либо промежутка времени Δt, то объ суммы $\Sigma M\lambda_1^2$ и $\Sigma M\lambda_2^2$ можно будетъ получить помощью весьма простыхъ геометрическихъ построеній. Опредѣливъ полную работу $\mathfrak{L}$ всѣхъ дѣйствующихъ силъ за взятое время Δt и зная ϑ_1, сможемъ, на основаніи (37), опредѣлить ϑ_2, а вмѣстѣ съ этимъ и скорости всѣхъ точекъ механизма въ концѣ взятаго промежутка Δt. Этого вопроса мы коснемся еще разъ въ дальнѣйшемъ, при разборѣ основныхъ задачъ.

По поводу подсчета и построенія гипотенузъ λ необходимо замѣтить то же, что мы имѣли уже случай подчеркнуть по поводу нахожденія центра качаній помощью плана ускореній, а именно: такъ какъ величина λ опредѣляется, вообще говоря, изъ уравненія

$$\lambda^2 = \left(\frac{\varrho l}{\mathfrak{L}}\right)^2 + Oc^2,$$

то величины ϱ и $\mathfrak{L}$ должны быть выражены въ тѣхъ же единицахъ, въ какихъ берутся по чертежу плана скоростей величины l и Oc. Если, напримѣръ, измѣряя l и Oc для какого-либо звена въ планѣ скоростей въ миллиметрахъ, мы получи-