Р 2.7003т

Н. И. Мерцаловъ.

Динамика механизмовъ.

38/6
Начальнику Василій Игнатьевичу Гриневецкому
На память отъ М. Фелинскаго

Н. И. МЕРЦАЛОВЪ,
11.X.16.
Москва.

ПРОФЕССОРЪ ИМПЕРАТОРСКАГО МОСКОВСКАГО
ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА.

IV 169

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВЪ.

КУРСЪ ЛЕКЦІЙ, ЧИТАННЫХЪ ВЪ ИМПЕРАТОРСКОМЪ
ТЕХНИЧЕСКОМЪ УЧИЛИЩѢ.

Провер. 1935
Р 6 40031
Изъ книгъ Проф. В. И. Гриневецкаго
ПРОВЕРЕНО 1952
ПРОВЕРЕНО 1945

ОБРАБОТАЛЪ И ИЗДАЛЪ
М. И. ФЕЛИНСКІЙ.

МОСКВА,
1914.

Предисловіе.

„Динамика механизмовъ" представляетъ собою вторую часть курса Прикладной Механики, читаемаго въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ профессоромъ Н. И. Мерцаловымъ. Въ основаніе текста настоящаго изданія положены краткія записки по этому курсу, составленныя М. И. Фелинскимъ на лекціяхъ проф. Н. И. Мерцалова, читанныхъ въ весеннихъ семестрахъ 1909–1912 гг. Подробная разработка текста выполнена также М. И. Фелинскимъ по указаніямъ и подъ общей редакціей профессора Н. И. Мерцалова.

Недостатокъ времени и необходимость выпустить курсъ къ опредѣленному сроку не дали возможности включить въ настоящее изданіе цѣлый рядъ статей, трактующихъ такіе интересные и важные для техники вопросы, какъ, напримѣръ, вопросъ о регулированіи непериодическихъ колебаній угловыхъ скоростей вращенія коренного вала (вопросъ о регуляторахъ), вопросъ о разсѣяніи энергіи въ опорныхъ средахъ при скоростяхъ, близкихъ къ критическимъ, и мн. др. По той же причинѣ не помѣщены въ настоящемъ изданіи и предполагавшіеся здѣсь къ напечатанію „Вопросы для повторенія, задачи и примѣры." Весь этотъ неиспользованный здѣсь матеріалъ имѣетъ быть введенъ въ слѣдующее изданіе курса.

Переписка и чертежи настоящаго изданія выполнены М. И. Фелинскимъ, литографированіе первыхъ 15-ти листовъ (стр. 1—240) — литографіей И. Х. Кавыкина, а листовъ 16—39 (стр. 241—610) и начальныхъ страницъ I—VII — типо-литографіей „Печатникъ" (Москва, Хапиловская ул., д. №54).

Всѣ замѣчанія по поводу погрѣшностей и опечатокъ издатель проситъ направлять по адресу: Москва, Нѣмецкая улица, Императорское Техническое Училище, профессору Н. И. Мерцалову, для передачи М. И. Фелинскому. — Сообщеніе этихъ замѣчаній будетъ встрѣчено съ тѣмъ большей благодарностью, что они смогутъ въ значительной мѣрѣ облегчить трудъ провѣрки и подготовки текста слѣдующаго очереднаго изданія.

М. Фелинскій.

Москва, 17 ноября 1913 г.

Оглавленіе.

Предисловіе III
Оглавленіе V

Динамика механизмовъ.

Часть первая. Треніе въ машинахъ.

I. Треніе скольженія.

§1. Предварительныя соображенія. Представленіе Понселе́. Законы Кулона 12
§2. Равновѣсіе точки на поверхности при наличности силъ тренія. Область тренія 42
§3. Движеніе твердаго тѣла по плоскости подъ вліяніемъ силъ, пропорціональныхъ разстояніямъ тѣла отъ нѣкотораго центра притяженія, и силъ тренія. Движеніе подъ воздѣйствіемъ пружинъ 50
§4. Движеніе маятника съ треніемъ въ точкѣ привѣса 103
§5. Наклонная плоскость 126
§6. Винтъ 138
§7. Клинъ 150
§8. Зубчатыя колеса 166
§9. Червячная передача 195
§10. Общая теорема о коэффиціентѣ полезнаго дѣйствія самотормозящихъ механизмовъ 203
§11. Ременная передача 210

II. Треніе качанія.

§12. Общія соображенія. Связь тренія качанія съ треніемъ сколь-

женія. Представленіе Рейнольдса. Коэффиціентъ тренія качения. 248

§13. Движеніе цилиндра по наклонной плоскости. Движеніе тѣлъ-жекъ подъ воздѣйствіемъ силъ внѣшнихъ и силъ внутреннихъ. Случай буксованія. 270

Часть вторая. Динамическое изслѣдованіе механизмовъ.

§14. Предварительныя соображенія. Діаграмма свободныхъ усилій. Формулировка основныхъ задачъ 299

§15. Теорема о центрѣ качанія. 346

§16. Принципы д'Аламбера и Лагранжа въ примѣненіи ихъ къ изслѣдованію движенія произвольно-сложныхъ плоскихъ механизмовъ. 373

§17. Теорема моментовъ относительно полюса плана скоростей . 379

§18. Теорема живыхъ силъ въ примѣненіи ея къ движенію плоскихъ механизмовъ 387

§19. Примѣненіе уравненія моментовъ къ рѣшенію вопроса объ опредѣленіи ускореній различныхъ точекъ даннаго механизма . 404

§20. Опредѣленіе скоростей точекъ механизма, движущагося подъ воздѣйствіемъ данныхъ силъ. 433

§21. Опредѣленіе ускореній точекъ механизма, движущагося подъ воздѣйствіемъ данныхъ силъ 437

§22. Опредѣленіе зависимости угловыхъ скоростей ϑ и угловыхъ ускореній $d\vartheta/dt$ кривошипа $A0$ отъ времени. 440

§23. Расчетъ маховика помощью діаграммы тангенціальныхъ усилій. 448

§24. Расчетъ маховика помощью теоремы живыхъ силъ. 494

Часть третья. Устойчивость машинъ во время ихъ хода.

§ 25. Устойчивость машинъ на фундаментѣ въ случаѣ кривошипныхъ механизмовъ, входящихъ въ составъ данной машины. Погашеніе силъ инерціи. Расчетъ противовѣса. . . . 516

§ 26. Механизмы съ упругими звеньями. Пружинный молотъ. Критическая скорость. 535

§ 27. Критическія скорости машинъ на фундаментѣ 564

§ 28. Критическія скорости быстро вращающихся системъ . . 582

Динамика механизмовъ.

Введеніе.

Предметомъ нашего курса является изученіе динамическихъ условій работы нашихъ машинъ. Прежде всего мы ставимъ себѣ задачей выясненіе условій, при которыхъ весь комплексъ силъ, проявляющихъ свое дѣйствіе въ данной машинѣ, можетъ работать наиболѣе производительно, наивыгоднѣйшимъ для насъ образомъ. Само собою разумѣется, что сопротивленія, представляемыя при этомъ машиной, должны быть сведены къ минимуму, что, понятно, вызываетъ необходимость въ наиболѣе совершенномъ съ указанной точки зрѣнія конструированіи всѣхъ частей машины,—механизма нашей машины. Итакъ, первымъ вопросомъ, подлежащимъ нашему разсмотрѣнію, является вопросъ о степени совершенства, съ точки зрѣнія работы, механизмовъ нашихъ машинъ.

Вторымъ вопросомъ, подлежащимъ нашему раз

Листы 1-ый, 2-ой, 3-ій, 12-ый, 14-ый и 15-ый настоящаго экземпляра напечатаны повторнымъ изданіемъ. Литографированіе ихъ выполнено типо-литографіей „Печатникъ". Абзацъ, помѣщенный на стр. 22–23 и отмѣченный значками *, имѣется только въ этомъ новомъ изданіи.

смотрѣнію, является вопросъ о наивыгоднѣйшемъ полученіи работы отъ данной машины, т.-е. о полученіи отъ машины наибольшаго количества работы въ продолженіе сколь-угодно значительнаго промежутка времени ея дѣйствія. Обезпеченіе возможности этого сводится, какъ увидимъ ниже, къ обезпеченію удерживанія скоростей частей машины или, точнѣе говоря, скорости вращенія главнаго, коренного вала въ извѣстныхъ узкихъ, заранѣе нами поставленныхъ, предѣлахъ. Такимъ образомъ, вторымъ вопросомъ является вопросъ о регулированіи хода машинъ.

Далѣе, не нужно забывать, что каждая машина, при своей работѣ, должна быть устойчива какъ во всѣхъ своихъ движущихся частяхъ, такъ и въ неподвижныхъ, какъ-то: фундаментахъ, различныхъ опорахъ и т. д. Скорости нѣкоторыхъ частей машины, измѣняясь за каждый періодъ хода ея въ своихъ величинахъ и направленіяхъ, могутъ вліять разрушающе какъ на части машины, такъ и на фундаментъ ея и опоры. Такимъ образомъ, третьимъ вопросомъ курса является вопросъ объ устойчивости машины во время ея хода.

Не менѣе важнымъ является вопросъ объ измѣреніи всѣхъ величинъ, подлежащихъ учету при разрѣшеніи упомянутыхъ выше основныхъ вопросовъ. Разсматривать его мы, однако, не будемъ, ибо онъ представляетъ собою часть болѣе общаго вопроса о техническихъ измѣреніяхъ вообще, составляющаго предметъ

особаго курса, читаемаго въ Императорскомъ Техническомъ Училищѣ.

Постараемся теперь болѣе или менѣе подробно выяснить тѣ общія основанія, на которыхъ можетъ быть построено рѣшеніе перваго изъ поставленныхъ нами выше вопросовъ, а именно, вопроса о степени совершенства механизма данной машины и о способѣ учета этой величины.

Отвлекаясь отъ деформацій, неизбѣжно имѣющихъ мѣсто въ нашихъ машинахъ, предполагая, иными словами, что части ихъ представляютъ собою тѣла, совершенно неизмѣняемыя, можемъ опредѣлить каждую нашу машину, съ точки зрѣнія теоретической механики, какъ систему, условія коей отъ времени не зависятъ. Въ виду этого ко всякой машинѣ можно примѣнить теорему живыхъ силъ, согласно которой приращеніе живой силы такой системы за какой-либо промежутокъ времени t равно совершенной за то же время работѣ всѣхъ дѣйствующихъ на эту систему силъ. Обозначая массы точекъ системы черезъ m, скорости этихъ точекъ — черезъ v (въ концѣ промежутка времени t) и v_0 (въ началѣ этого промежутка), а работы участвующихъ здѣсь силъ (за то же время t) — черезъ l, получимъ выраженіе этой теоремы въ алгебраической формѣ въ видѣ уравненія:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \Sigma l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Сумма, стоящая въ правой части этого уравненія, есть сумма алгебраическая, составленная слѣдующимъ образомъ:

Во всякой машинѣ всегда имѣется нѣкоторый источникъ работы,—паръ, газъ и т. д.,—обусловливающій своимъ присутствіемъ появленіе и наличность дѣйствующихъ силъ, питающихъ нашу машину и поддерживающихъ движеніе ея. Работа, доставляемая этимъ источникомъ, и представляетъ собою работу упомянутыхъ дѣйствующихъ силъ. Разсматривая движеніе машины за какой-либо промежутокъ времени t, мы и предположимъ, что упомянутая работа, доставленная источникомъ машинѣ за это время t, равна $\mathfrak{L}$. Такъ какъ наша машина эту работу получила, то количеству $\mathfrak{L}$ припишемъ знакъ плюсъ.

Движенію машины, въ свою очередь, препятствуетъ цѣлый рядъ другихъ силъ,—будемъ называть ихъ силами сопротивленія. Работу этихъ силъ за то же время t обозначимъ черезъ $\mathfrak{L}_1$, при чемъ будемъ приписывать этой величинѣ знакъ минусъ, ибо это есть работа, затрачиваемая нашей машиной за счетъ упомянутаго источника работы и расходуемая ею на преодолѣніе работы силъ сопротивленія.

Въ виду этихъ соображеній можно написать, что

$$\Sigma l = \mathfrak{L} - \mathfrak{L}_1,$$

послѣ чего общее уравненіе (1) принимаетъ видъ:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \mathfrak{L} - \mathfrak{L}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Итакъ, отъ источника работы, упомянутаго выше, наша машина получаетъ работу $\mathfrak{L}$, а на преодолѣніе сопротивленій сама затрачиваетъ работу $\mathfrak{L}_1$. Уравненіе (2) показываетъ, что, если $\mathfrak{L} > \mathfrak{L}_1$, то всѣ конечныя скорости v будутъ больше начальныхъ v_0, такъ что машина будетъ, оче-

видно, ускорять свой ходъ; если же $L < L_1$, то будетъ имѣть мѣсто замедленіе хода.

Работу L_1 силъ сопротивленія можно разбить на двѣ части, принимая во вниманіе слѣдующее обстоятельство:

Прежде всего, каждая машина должна преодолѣвать работу нѣкоторыхъ опредѣленныхъ силъ сопротивленія,—она должна или приводить въ движеніе другія машины, если это—машина-двигатель, или обрабатывать тотъ или иной матеріалъ, если это машина-орудіе. Сопротивленія, при этомъ нашей машинѣ представляющіяся, будемъ называть полезными, а работу, затрачиваемую нашей машиной на ихъ преодолѣніе,—работой полезныхъ сопротивленій или, просто, полезной работой; обозначать ее будемъ черезъ L_n. Холостымъ ходомъ машины называется обычно тотъ, при которомъ полезная работа, совершаемая нашей машиной, равна нулю.

Кромѣ этой полезной работы, каждой машинѣ приходится затрачивать извѣстную работу L_z на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій, намъ ненужныхъ, но всегда имѣющихся налицо, вслѣдствіе извѣстныхъ физическихъ свойствъ матеріаловъ. Эти вредныя сопротивленія сопутствуютъ работѣ каждой машины и, притомъ, совершенно независимо отъ того, производитъ ли машина, при своемъ движеніи, какую-либо работу (полезную) или идетъ порожнемъ. На покрытіе этой работы L_z будетъ затрачена часть работы L силъ дѣйствующихъ, и эта затрата является для насъ чистой потерей, не только ничѣмъ не вознаграждаемой, но, наоборотъ, сопровождаемой постепеннымъ разрушеніемъ машины,—изнашиваніемъ ея; такимъ образомъ, каждая машина

таитъ сама въ себѣ источники своего разрушенія.

Итакъ, общая работа сопротивленій, $\mathfrak{L}_1$, выражается такъ:

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

послѣ чего уравненіе живыхъ силъ (2) принимаетъ видъ:

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \mathfrak{L} - (\mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_z), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

откуда, наконецъ, мы и получаемъ основное уравненіе, представляющее собою полный балансъ всѣхъ тратъ работы, производимыхъ въ машинѣ за счетъ работы $\mathfrak{L}$, доставляемой нашей машинѣ упомянутымъ источникомъ; уравненіе это имѣетъ видъ:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_z + \Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Полученное уравненіе показываетъ, что вся работа $\mathfrak{L}$, совершаемая въ нашей машинѣ дѣйствующими силами, расчленяется такъ:

1) часть $\mathfrak{L}_n$ ея уходитъ на совершеніе полезной работы,

2) часть $\mathfrak{L}_z$ идетъ на преодолѣніе работы вредныхъ сопротивленій, и, наконецъ,

3) все остальное идетъ на увеличеніе живой силы движущихся частей.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію вопроса о критеріи совершенства нашихъ машинъ. Ясно, что машина будетъ тѣмъ совершеннѣе, чѣмъ больше доля полезной работы, $\mathfrak{L}_n$, ею выполняемой, по отношенію ко всей работѣ $\mathfrak{L}$, подводимой нами къ машинѣ чрезъ посредство источника, т.-е. затрачиваемой нами, при томъ условіи, конечно, что эта работа $\mathfrak{L}$ тратится машиной, вообще говоря, лишь на самое неизбѣжк-

ное и необходимое. Уравненіе (5) показываетъ, что послѣднее условіе, вообще говоря, не удовлетворяется, такъ какъ работа $\mathfrak{L}$ затрачивается не только на выполненіе работъ $\mathfrak{L}_n$ и $\mathfrak{L}_z$, производить которыя машина должна во всякомъ случаѣ, но и на увеличеніе живой силы, что, съ точки зрѣнія общей экономіи въ работѣ, является уже излишнимъ, а иногда даже и недопустимымъ, такъ какъ наиболѣе продуктивно машины могутъ работать лишь при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ угловыхъ скоростяхъ вращенія ихъ коренныхъ валовъ, причемъ эти скорости могутъ колебаться лишь въ нѣкоторыхъ предѣлахъ, вообще говоря, очень тѣсныхъ.

Такимъ образомъ, для возможности использованія уравненія (5) въ нашихъ цѣляхъ, нужно подвергнуть разсмотрѣнію лишь тѣ случаи движенія машины, когда увеличеніе живой силы системы мѣста не имѣетъ, т.-е. когда

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Замѣчая теперь, что всѣ количества m, v^2 и v_0^2, входящія въ составъ уравненія (6), представляютъ собою величины, существенно положительныя, заключаемъ, что условіе (6) можетъ быть выполнено лишь тогда, когда удовлетворяется условіе

$$v = v_0.$$

Въ этомъ случаѣ обѣ суммы, входящія въ составъ лѣвой части выраженія (6), становятся равными, вслѣдствіе чего разность ихъ, дѣйствительно, будетъ равна нулю.

Итакъ, мы не получимъ никакого увеличенія живой силы системы, если для взятаго промежутка времени t начальныя

скорости v_0 оказываются равными конечным v. Но такое равенство скоростей может имѣть мѣсто не только тогда, когда машина движется равномѣрно, такъ что скорости ея частей остаются все время постоянными, неизмѣняющимися *), но и тогда, когда она работаетъ съ перемѣнными скоростями, лишь бы эти измѣненія скоростей протекали періодически, какъ это и имѣетъ мѣсто почти у всѣхъ нашихъ машинъ: у каждой есть извѣстный періодъ, въ теченіе котораго, при установившемся ходѣ ея, заверщается извѣстный циклъ скоростей, повторяющійся затѣмъ, въ одномъ и томъ же порядкѣ ихъ, при каждомъ новомъ періодѣ. Такимъ образомъ, черезъ промежутки времени, равные періоду, наша машина будетъ проходить черезъ одни и тѣ же скорости. Значитъ, если взятый нами промежутокъ времени t равенъ именно такому періоду нашей машины, то можно сказать, что для каждаго такого промежутка-періода t приращеніе живой силы системы, представляемой нашей машиной, оказывается равнымъ нулю, — какъ въ началѣ каждаго періода, такъ и въ концѣ его, (точнѣе, въ соотвѣтствующихъ точкахъ періодовъ) скорости всѣхъ движущихся частей машины будутъ одинаковы. Такимъ образомъ, относя общее уравненіе (5) къ такому именно періоду нашей машины, получимъ болѣе простое соотношеніе:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

*) Въ виду ограниченности размѣровъ нашихъ машинъ, постоянство скоростей можетъ наблюдаться лишь въ тѣхъ машинахъ, гдѣ имѣютъ мѣсто лишь вращательныя движенія; поступательныя же движенія неминуемо влекутъ за собою остановки движенія, т.-е. переходъ скоростей черезъ нуль.

могущее быть прочтенным такъ:

Во всякой правильно-періодически дѣйствующей машинѣ работа силъ движущихъ, выполненная ими за періодъ дѣйствія машины, равна суммѣ работъ полезныхъ и вредныхъ сопротивленій, совершенныхъ за то же время.

Теперь становится возможнымъ установить искомый критерій совершенства машины, а именно:

Замѣчая, что, черезъ посредство источника, мы сообщаемъ нашей машинѣ работу въ количествѣ $\mathfrak{L}$, а намъ она возвращаетъ лишь долю всей этой работы $\mathfrak{L}$, въ количествѣ лишь $\mathfrak{L}_n$, заключаемъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія, который мы будемъ обозначать всегда греческой буквой η, выразится такъ:

$$\eta = \frac{\mathfrak{L}_n}{\mathfrak{L}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Величина η, такъ опредѣляемая, можетъ служить мѣрой совершенства каждой машины; она представляетъ собою отвлеченное число и всегда меньше единицы, ибо числитель $\mathfrak{L}_n$ ея всегда меньше знаменателя, что явствуетъ изъ того соображенія, что членъ $\mathfrak{L}_z$, входящій въ составъ уравненія (7), никогда не можетъ быть равенъ нулю; работа $\mathfrak{L}_z$ можетъ быть болѣе или менѣе уменьшена, но уничтожить ея нельзя никакъ.

Присмотримся теперь нѣсколько ближе къ этимъ вреднымъ сопротивленіямъ, присутствіе коихъ, обусловливающее собою появленіе члена $\mathfrak{L}_z$ въ уравненіяхъ (3)-(7), тѣмъ самымъ удаляетъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія, η, отъ единицы.

Всякій механизмъ, сколь бы простъ или сложенъ онъ ни былъ, всегда представляетъ собою сочетаніе кинематическихъ паръ, каждый изъ элементовъ коихъ обладаетъ нѣкоторымъ опредѣленнымъ движеніемъ относительно тѣлъ, съ ними сопряженныхъ. Но всякое движеніе твердаго тѣла можетъ быть сведено къ вращенію этого тѣла около мгновенной оси вращенія и къ нѣкоторому поступательному движенію. При этомъ поступательномъ движеніи получается скольженіе одного тѣла по поверхности другого, а при вращеніи можетъ имѣть мѣсто какъ скольженіе, такъ и каченіе, при чемъ чистое каченіе наблюдается тогда, когда ось мгновеннаго вращенія приходится на поверхности соприкосновенія одного тѣла съ другимъ; въ остальныхъ же случаяхъ ея расположенія будетъ имѣть мѣсто какъ каченіе, такъ и скольженіе. При плоскомъ движеніи мы имѣемъ всегда систему двухъ полодій, одна изъ коихъ катится по другой; остальныя части этой движущейся системы имѣютъ еще и скольженіе. Но движеніе скольженія, равно какъ и движеніе качения, всегда сопровождается извѣстнымъ сопротивленіемъ, какъ это будетъ детально выяснено ниже: на части нашихъ машинъ дѣйствуютъ различныя силы, прижимающія одну деталь къ другой, и опытъ показываетъ, что такое движеніе всегда сопровождается такъ называемымъ сопротивленіемъ трения, при чемъ это треніе будетъ или треніемъ скольженія, если имѣетъ мѣсто чистое скольженіе, или треніемъ качения, если имѣется лишь чистое каченіе. На преодолѣніе работы этого сопротивленія трения и уходитъ часть работы дѣйствующихъ силъ, въ размѣрѣ $L_{\frac{1}{2}}$, и, такимъ образомъ, сопротивленіе трения и представляетъ со-

бою тотъ факторъ, который, вызывая разницу между работами L_n и L, удалятъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія каждой машины отъ единицы. Въ первыхъ главахъ нашего курса мы и познакомимся детально сначала съ явленіями треніа скольженія, а затѣмъ и съ треніемъ качениа. Эти главы курса составятъ собою первую часть курса,—статью о треніи въ машинахъ,—имѣющую задачей подробно освѣтить первый основной вопросъ, намѣченный выше. Остальныя главы курса будутъ посвящены разбору второго и третьяго основныхъ вопросовъ.

Часть первая.

Треніе въ машинахъ.

I. Треніе скольженія.

§1. Предварительныя соображенія. Представленіе Понселе́. Законы Кулона.

Машиной мы называемъ систему парныхъ сочетаній различныхъ тѣлъ, каждое изъ которыхъ имѣетъ опредѣленное принужденное движеніе. Сообразно съ этимъ, силы, имѣющія приводить части машины въ движеніе, могутъ воздѣйствовать на эти части уже не по своимъ собственнымъ направленіямъ, а по нѣкоторымъ другимъ, находящимся въ каждый отдѣльный моментъ въ извѣстной зависимости отъ направленій движенія этихъ частей. Такимъ образомъ, дѣйствующими силами являются, вообще говоря, не данныя силы, а ихъ слагающія по нѣкоторымъ опредѣленнымъ направленіямъ. Значитъ, каждая изъ данныхъ силъ, при своемъ воздѣйствіи на часть машины, разлагается такъ, что одна изъ ея слагающихъ идетъ по направленію относительнаго движенія, заставляя эту часть выполнять это относительное движеніе, вполнѣ опредѣленное; вторая слагающая, перпендикулярная къ

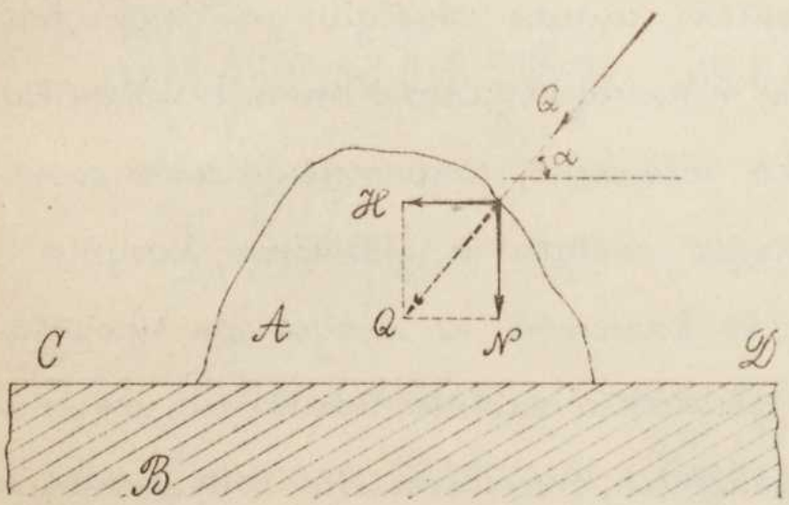
первой, должна, какъ говорятъ въ механикѣ, уничтожаться соотвѣтственнымъ сопротивленіемъ другихъ частей машины, и, казалось бы, всѣ наши разсужденія, основываемыя на данныхъ теоретической механики, на этомъ и должны бы закончиться: всѣмъ силамъ, дѣйствующимъ по желательнымъ намъ направленіямъ, предоставляется полная свобода дѣйствій, всѣ же остальныя, дѣйствующія перпендикулярно этимъ направленіямъ, уничтожаются, какъ говорятъ, сопротивленіями соотвѣтствующихъ сопряженныхъ частей и, значитъ, могутъ быть прямо отклидываемы, въ качествѣ не могущихъ производить никакого вліянія на движеніе частей машины, испытывающихъ на себѣ ихъ воздѣйствіе, относительно сопряженныхъ съ ними другихъ.

Опытъ, однако, показываетъ, что, въ дѣйствительности, на дѣлѣ происходитъ нѣчто другое: наличность этихъ вторыхъ слагающихъ, перпендикулярныхъ желательнымъ направленіямъ, для движенія каждой пары сопряженныхъ деталей безслѣдно не проходитъ, ибо на поверхности соприкосновенія этихъ послѣднихъ указанныя нормальныя слагающія, прижимающія одну деталь къ другой, вызываютъ появленіе особыхъ сопротивленій, затрудняющихъ и задерживающихъ движеніе одной детали относительно другой. Сопротивленія эти носятъ названіе силъ тренія и дѣйствуютъ, какъ это теперь вполнѣ очевидно,

прямопротивоположно перемѣщенію одной детали относительно сопряженной съ ней другой, - короче говоря, противоположно относительному движенію разсматриваемой детали.

Все сказанное хорошо иллюстрируется на слѣдующемъ простомъ примѣрѣ движенія одного тѣла относительно другого:

Пусть нѣкоторое тѣло A, лежащее на горизонтальной плоскости CD, принадлежащей другому тѣлу B, остающемуся неподвижнымъ, находится подъ дѣйствіемъ силы Q, наклоненной къ горизонту подъ угломъ α (фиг. 1). Предполагая, что сила Q находится все время въ одной и той же плоскости, — напримѣръ, плоскости чертежа, заключаемъ, что при этихъ условіяхъ тѣло A будетъ



Фиг. 1.

двигаться прямолинейно-поступательно; предположенія эти мы дѣлаемъ исключительно ради простоты дальнѣйшихъ разсужденій. — Теоретическая механика говоритъ, что, при соблюденіи вышеприведенныхъ условій движеніе тѣла A будетъ происходить подъ дѣйствіемъ силы H, — горизонтальной слагающей данной силы Q, въ виду чего дифференціальное уравненіе движенія тѣла A напишется въ формѣ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = H = Q\cos\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

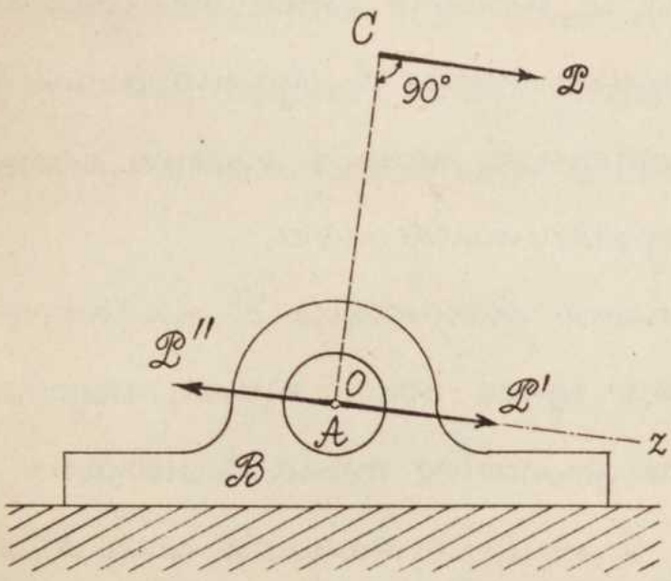
гдѣ m есть масса тѣла A, а α, какъ мы уже указали, уголъ наклона силы Q къ горизонту, такъ что, разъ уголъ α отличенъ отъ $90°$, то движеніе тѣла A должно имѣть мѣсто непремѣнно. Что же касается силы N, — вертикальной слагающей силы Q, то обычно предполагается, что она просто уничтожается сопротивленіемъ детали B, въ виду чего объ ней можно

и не упоминать совсѣмъ. Опытъ, однако, показываетъ, что въ подобныхъ случаяхъ дѣйствія силы Q движеніе тѣла A имѣетъ мѣсто далеко не всегда: сила Q можетъ быть отклоненной отъ нормали ($\alpha < 90°$), а между тѣмъ тѣло A будетъ оставаться въ покоѣ. Съ условіями, при которыхъ могутъ имѣть мѣсто подобныя явленія, мы подробно познакомимся ниже.

Несомнѣнно, что горизонтальная слагающая H ни въ коемъ случаѣ не можетъ способствовать здѣсь покою тѣла; слѣдовательно, вызвать противодѣйствіе движенію тѣла A можетъ только другая слагающая силы Q, т.-е. нормальная сила N, а такъ какъ эта сила перпендикулярна къ поверхности соприкосновенія и, значитъ, сама по себѣ непосредственнаго воздѣйствія на движеніе тѣла A оказать не можетъ, то и остается признать, что эта нормальная сила N, прижимающая одну деталь A къ другой B, вызываетъ на поверхности ихъ соприкосновенія силу сопротивленія, направленную противоположно горизонтальной силѣ H или, что то же, дѣйствующую въ направленіи, прямопротивоположномъ направленію относительнаго перемѣщенія тѣла A по тѣлу B.

Подобнымъ же образомъ, если деталь A (валъ, шипъ и т.д.) вращается въ своемъ подшипникѣ B подъ дѣйствіемъ силы P, работающей на плечѣ OC (фиг. 2), гдѣ O есть ось вращенія вала, при чемъ уголъ между направленіемъ силы P и плечомъ OC предположимъ равнымъ прямому, то, прилагая въ центрѣ O двѣ противоположно направленныя силы P' и P'', равныя силѣ P и ей параллельныя, увидимъ, что деталь A будетъ вращаться подъ воздѣйствіемъ силъ P и P'', составляющихъ пару съ моментомъ P.OC, а кромѣ того, сила P', приложенная въ точкѣ O

детали A, будетъ прижимать ее къ детали B по своему направленію Oz, вызывая, такимъ образомъ, на поверхности соприкосновенія A съ B силы тренія, противодѣйствующія перемѣщенію одной детали по другой, иными словами, сопротивляющіяся вращенію тѣла A относительно тѣла B, откуда слѣдуетъ, что моментъ этихъ силъ тренія будетъ направленъ противоположно моменту силы P; такимъ образомъ, если моментъ силы P вращаетъ тѣло A по часовой стрѣлкѣ, то моментъ силъ тренія будетъ стремиться вращать его противъ часовой стрѣлки, и обратно.



Фиг. 2.

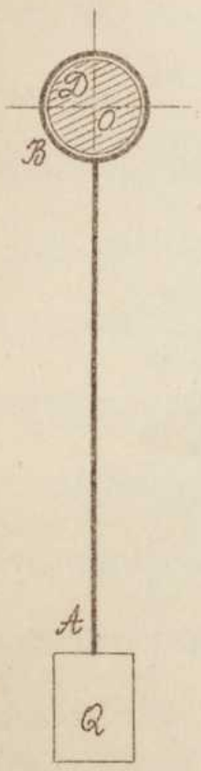
Итакъ, если какія-либо два тѣла, принуждаемыя нѣкоторыми силами находиться въ постоянномъ соприкосновеніи другъ съ другомъ, движутся каждое своимъ самостоятельнымъ движеніемъ, то на поверхности соприкосновенія ихъ возбуждаются силы тренія, препятствующія перемѣщенію одного тѣла относительно другого и, значитъ, направленныя противоположно относительному перемѣщенію разсматриваемаго тѣла. Такимъ образомъ, для правильнаго опредѣленія того направленія, въ которомъ работаютъ силы тренія, воздѣйствующія на данное тѣло одновременно съ другими силами, необходимо каждый разъ опредѣлять относительное движеніе разсматриваемаго тѣла, что выполняется крайне просто, помощью пріема, извѣстнаго изъ кинематики и состоящаго въ слѣдующемъ:

Пусть данная намъ система состоитъ изъ тѣлъ A и B, при чемъ тѣло A движется нѣкоторымъ опредѣленнымъ движеніемъ (α), а тѣло B — движеніемъ (β), также вполнѣ опредѣленнымъ, и требуется опредѣлить относительное движеніе тѣла A (относительно тѣла B). Для этого необходимо, чтобы тѣло B стало неподвижнымъ, и, чтобы добиться этого, придаемъ всей системѣ (A, B) движеніе, обратное дѣйствительному движенію тѣла B, т.-е. движеніе (−β). Тогда тѣло B остановится, а тѣло A станетъ двигаться новымъ движеніемъ (α−β), вполнѣ опредѣленнымъ, въ результатѣ чего, такимъ образомъ, и обнаружится, что движеніе тѣла A относительно тѣла B есть движеніе (α−β). Если относительное движеніе тѣла A сопровождается треніемъ, то силы этого тренія, препятствующія движенію тѣла A и, значитъ, воздѣйствующія на тѣло A, направлены въ каждый данный моментъ прямопротивоположно этому относительному движенію (α−β) тѣла A.



Само собою разумѣется, что силы тренія, воздѣйствующія на B, будутъ равны и противоположны силамъ тренія, воздѣйствующимъ на A, какъ это слѣдуетъ согласно принципу: „дѣйствіе равно противодѣйствію". Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно опредѣлить движеніе тѣла B относительно A; очевидно, что оно будетъ прямопротивоположно прежнему, въ виду чего направленіе силъ тренія, воздѣйствующихъ на B, будетъ противоположно направленію силъ тренія, воздѣйствующихъ на A. Примѣнительно къ случаю, изображенному на фиг. 1, скажемъ, что, при движеніи тѣла A влѣво подъ воздѣйствіемъ силы Q, тѣло A будетъ находиться подъ воздѣйствіемъ силъ тренія, направленныхъ вправо, а тѣло B — влѣво.

Въ виду важности приведеннаго выше основного положенія о направленіи силъ тренія, мы разберемъ еще одинъ примѣръ опредѣленія этого направленія,—полученными результатами намъ придется пользоваться въ дальнѣйшемъ.



Фиг. 3.

Пусть ко втулкѣ B (фиг. 3), надѣтой на неподвижный шипъ D и могущей на немъ свободно вращаться какъ въ одну сторону, такъ и въ другую, помощью стержня AB наглухо прикрѣпленo тѣло Q, образующее, такимъ образомъ, вмѣстѣ съ втулкой, физическій маятникъ AB, могущій качаться около оси O шипа D.

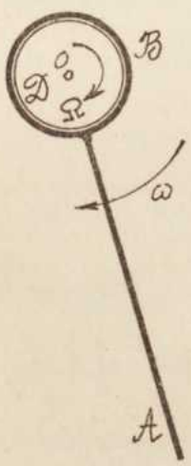
Такъ какъ шипъ D неподвиженъ, то абсолютное движеніе маятника AB представитъ собою въ то же время и относительное его движеніе (относительно шипа). Поэтому, если маятникъ, подъ воздѣйствіемъ тѣхъ или иныхъ силъ (силы тяжести и т. д.) станетъ качаться, вращаясь, такимъ образомъ, вокругъ оси O, то силы тренія, воздѣйствующія на втулку и сопротивляющіяся движенію ея, будутъ направлены каждый разъ такъ, что моментъ ихъ (какъ говорятъ, моментъ тренія) будетъ дѣйствовать обратно направленію вращенія маятника, такъ что, когда маятникъ идетъ вправо, противъ стрѣлки часовъ, то моментъ тренія будетъ направленъ обратно, по стрѣлкѣ часовъ, и наоборотъ. — Этотъ простой случай никакихъ особенностей не представляетъ, и на немъ больше останавливаться теперь не будемъ и перейдемъ къ разбору того интереснаго случая, когда шипъ D не остается неподвижнымъ, а вращается все время въ одну и ту же сторону, — положимъ, по стрѣл-

къ часовъ (фиг. 4), при чемъ допустимъ, что

угловая скорость Ω вращенія шипа **больше** наибольшей, возможной здѣсь при данныхъ условіяхъ угловой скорости ω вращенія маятника, такъ что

$$\Omega_{шипа} > \omega_{max} \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Такъ, если маятникъ находится подъ воздѣйствіемъ силы тяжести, то онъ будетъ качаться съ угловыми скоростями ω, перемѣнными какъ по величинѣ, такъ и по направленію: онъ мѣняются отъ нуля черезъ максимумъ опять къ нулю въ одну сторону и подобнымъ же образомъ въ другую. Мы и предполагаемъ, что шипъ вращается все время быстрѣе маятника, такъ что постоянно удовлетворяется условіе (2).



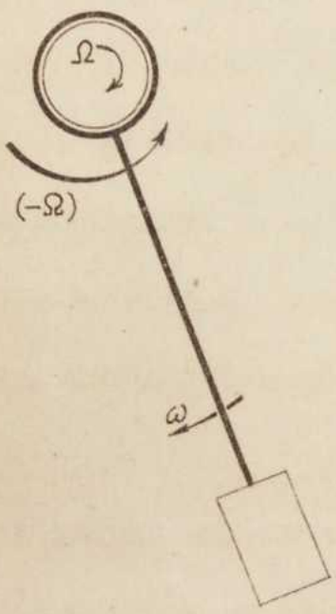
Фиг. 4.

Пусть маятникъ AB совершаетъ въ данный моментъ свое качаніе влѣво, по часовой стрѣлкѣ, и, значитъ, въ одну сторону съ шипомъ, какъ это и изображено на фиг. 4. Такъ какъ, по условію, угловая скорость вращенія шипа больше любой изъ скоростей вращенія маятника, и, значитъ, шипъ вращается быстрѣе втулки, то отсюда слѣдуетъ, что поверхность шипа перемѣщается въ пространствѣ быстрѣе, чѣмъ прилегающая къ ней поверхность втулки, а это, очевидно, сводится къ тому, что поверхность втулки будетъ отставать отъ поверхности шипа, въ виду чего относительнымъ движеніемъ втулки явится движеніе ея противъ шипа, т.-е. противъ часовой стрѣлки. Отсюда, естественно, вытекаетъ, что силы трѣнія, воздѣйствующія на втулку и направленныя противоположно относительному движенію ея, будутъ дѣйствовать по часовой

стрѣлкѣ, т.-е. **согласно съ направленіемъ вращенія шипа.**

Къ тому же результату придемъ, примѣняя обычный пріемъ, упомянутый выше. Разсуждаемъ такъ:

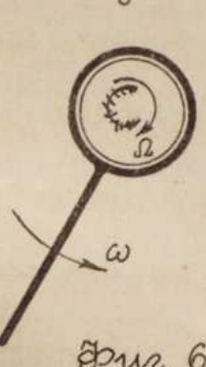
Намъ нужно опредѣлить движеніе маятника относительно шипа. Для этого надо сдѣлать шипъ неподвижнымъ, чего достигнемъ, придавъ всей системѣ шипа и маятника движеніе, обратное движенію шипа, т.-е. вращеніе противъ часовой стрѣлки съ угловой скоростью Ω, — это вращеніе обозначится символически черезъ $(-\Omega)$, — см. фиг. 5. Въ такомъ случаѣ шипъ останавливается, а маятникъ получаетъ новое движеніе, — вращеніе около оси O съ угловой скоростью $(\omega - \Omega)$. Такъ какъ Ω всегда больше, чѣмъ ω, то эта скорость $(\omega - \Omega)$ будетъ имѣть знакъ, одинаковый съ знакомъ у $(-\Omega)$



Фиг. 5.

такъ что относительное движеніе маятника представится здѣсь нѣкоторымъ вращеніемъ противъ часовой стрѣлки, откуда, въ свою очередь, согласно съ предыдущимъ, слѣдуетъ, что силы тренія, воздѣйствующія на маятникъ, будутъ дѣйствовать по часовой стрѣлкѣ, т.-е. **согласно съ направленіемъ вращенія шипа.**

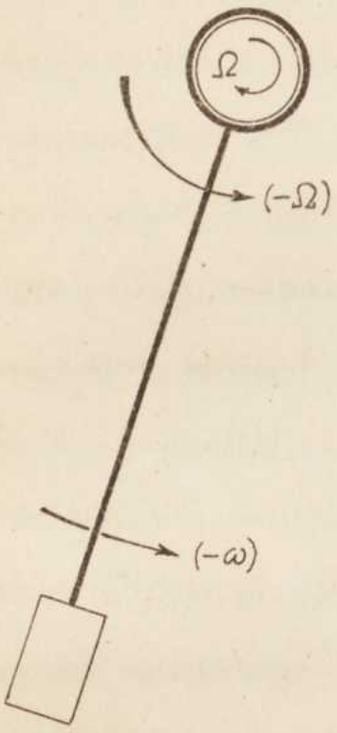
Разсмотримъ теперь качаніе маятника вправо (фиг. 6). Шипъ, попрежнему, продолжаетъ вращаться по часовой стрѣлкѣ съ угловой скоростью Ω. Такъ какъ втулка движется теперь навстрѣчу шипу, противъ часовой стрѣлки, то относительнымъ движеніемъ втулки и будетъ, оче-



Фиг. 6.

видно, движеніе противъ часовой стрѣлки.

Тотъ же результатъ получается и при использованіи обычнаго пріема: придаемъ всей системѣ шипа и маятника движеніе $(-\Omega)$, обратное движенію шипа; это будетъ вращеніе около оси O шипа D противъ часовой стрѣлки со скоростью Ω. Послѣ прибавленія этого новаго вращенія шипъ D остановится, а маятникъ станетъ вращаться вокругъ той же, прежней оси O со скоростью $(-\omega-\Omega)$, т.-е. со скоростью $(\Omega+\omega)$ противъ часовой стрѣлки (фиг. 7). Отсюда слѣдуетъ, что, при качаніи нашего маятника вправо, силы треніи, воздѣйствующія на втулку, будутъ направлены опять по часовой стрѣлкѣ, т.-е. **согласно съ направленіемъ вращенія шипа**, и, такимъ образомъ, сохранятъ то же направленіе, какое онѣ имѣли при качаніи маятника влѣво.



Фиг. 7.

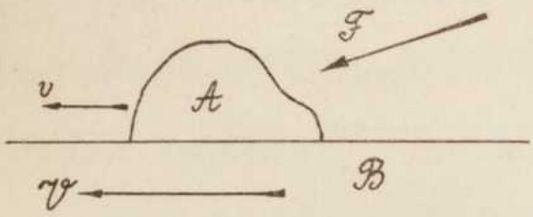
Итакъ, разъ соблюдается условіе (2), т.-е. если

$$\Omega_{шипа} > \omega_{max},$$

то, каково бы ни было направленіе качанія маятника, а **направленіе силъ треніи, воздѣйствующихъ на втулку его, остается все время однимъ и тѣмъ же, согласнымъ съ направленіемъ вращенія шипа.** — Этотъ результатъ пригодится намъ въ дальнѣйшемъ.

Случай $\Omega \leqq \omega$ особеннаго интереса не представляетъ, почему подвергать его разбору мы не станемъ.

*Разберемъ еще одинъ интересный примѣръ опредѣленія направленія силъ тренія. Пусть нѣкоторое тѣло A движется по горизонтальной поверхности другого тѣла B подъ дѣйствіемъ



какихъ-либо силъ F, дѣйствующихъ все время въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ плоскости B и параллельныхъ плоскости чертежа; силы эти измѣняютъ свои величины и направленія по нѣкоторому опредѣленному закону, такъ что движеніе тѣла A будетъ прямолинейно-возвратнымъ и поступательнымъ, параллельнымъ плоскости чертежа. Скорости такого движенія тѣла A будутъ, вообще говоря, перемѣнными какъ по направленію, такъ и по величинѣ; имѣя въ виду дальнѣйшее, мы выдѣлимъ наибольшую изъ всѣхъ возможныхъ здѣсь этихъ скоростей $v_д$ и назовемъ ее черезъ v_m.

Замѣтивъ это, предположимъ сначала, что плоскость B неподвижна. Тогда, безъ дальнѣйшихъ разсужденій, ясно, что силы тренія, воздѣйствующія на тѣло A, будутъ направлены каждый разъ обратно скорости $v_д$ движенія тѣла A и, значитъ, при возвратномъ движеніи тѣла A, будутъ мѣнять свое направленіе одновременно съ перемѣной его у тѣла A. Этотъ случай никакихъ особенностей не представляетъ, почему останавливаться на немъ мы больше не будемъ.

Но предположимъ теперь, что плоскость B сама становится подвижной и движется параллельно плоскости чертежа, все время въ одну и ту же сторону, со скоростью V, бо́льшей, чѣмъ наибольшая возможная здѣсь скорость v_m тѣла A, такъ что постоянно соблюдается условіе, что

$$V > v_m.$$

Тогда разсужденія, во всемъ подобныя предыдущимъ, покажутъ, что силы тренія, воздѣйствующія на тѣло A, мѣнять своего направленія здѣсь уже не будутъ: какъ бы тѣло A ни двигалось, вправо или влѣво, но эти силы тренія всегда будутъ направлены въ ту же сторону, въ какую направлена скорость V движенія опорной плоскости B, — силы тренія направлены здѣсь согласно со скоростью V. Результатъ этотъ, совершенно аналогичный результату предыдущаго примѣра, приводитъ къ ряду весьма интересныхъ заключеній, о которыхъ намъ придется говорить въ отдѣльной статьѣ.*

Приведенные примѣры достаточно ясно иллюстрируютъ упомянутое выше свойство силъ тренія быть направленными, при воздѣйствіи ихъ на какое-либо тѣло, прямопротивоположно относительному движенію его. Такъ какъ на дѣлѣ мы обычно сталкиваемся со скоростями движенія, а не съ ними самими, и такъ какъ каждое движеніе можетъ быть вполнѣ охарактеризовано закономъ измѣненія его скоростей, то приведенное выше опредѣленіе направленія силъ тренія обычно замѣняютъ другимъ, формулируя его такъ:

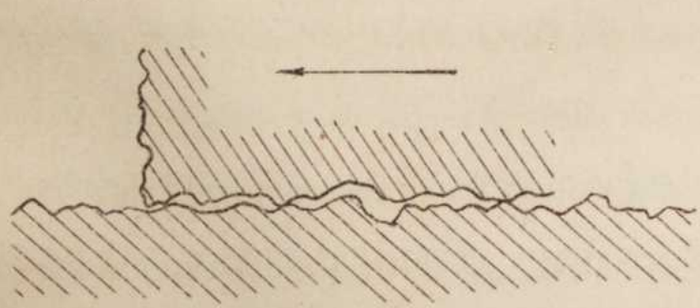
Силы тренія направлены всегда прямопротивоположно скорости относительнаго движенія.

Вышеприведенныя соображенія указываютъ, что силы тренія имѣютъ тенденцію уменьшать скорость относительнаго движенія, болѣе или менѣе энергично содѣйствуя прекращенію его и переводу его въ состояніе относительнаго покоя, являющееся, такимъ образомъ, конечной цѣлью дѣйствія этихъ силъ. Возникаетъ вопросъ о механизмѣ появле-

ния этихъ силъ, о сущности ихъ дѣйствія, носящей, въ смыслѣ поддержки и ускоренія движенія, характеръ, какъ видимъ, отрицательный. Попытокъ осветить этотъ вопросъ сдѣлано было очень много, но вполнѣ удовлетворительнаго объясненія явленій трения въ различныхъ тѣлахъ,—твердыхъ, жидкихъ и газообразныхъ,—мы не имѣемъ до сихъ поръ. Однако, будучи вынуждаемы условіями практики учитывать воздѣйствіе и вліяніе силъ трения, мы поневолѣ довольствуемся различными опытными коэффиціентами, въ большинствѣ случаевъ полученными путемъ весьма грубыхъ опытовъ и поэтому не могущими претендовать на сколь-нибудь серьезное научное значеніе.

Для простѣйшаго случая трения двухъ твердыхъ тѣлъ, скользящихъ одно по другому, механизмъ возникновения силъ трения довольно просто и наглядно былъ объясненъ знаменитымъ французскимъ математикомъ Понселе́ (Poncelet), соображения котораго по этому вопросу мы теперь и изложимъ.

Понселе указываетъ, что даже самыя гладкія и наилучшимъ образомъ отполированныя поверхности остаются, въ сущности, всегда шероховатыми, въ чемъ можно убѣдиться и непосредственно, хотя бы, напримѣръ, помощью лупы. Всякая поверхность представляетъ собою рядъ неправильныхъ возвышеній, бугровъ, впадинъ и т. д.

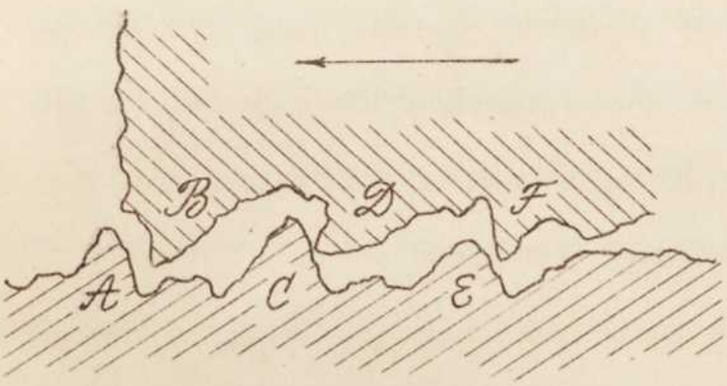


Фиг. 8.

На фиг. 8 представленъ въ утрированномъ видѣ разрѣзъ двухъ тѣлъ, соприкасающихся другъ съ другомъ своими гладкими сторонами. Уже при первомъ взглядѣ на этотъ чертежъ становится понятнымъ, что, при существованіи усилія, при-

жимающаго эти два тѣла одно къ другому, уже просто только для того, чтобы продвинуть одно тѣло по поверхности другого, необходимо потратить извѣстную работу. Становится, далѣе, понятнымъ, на что собственно затрачивается эта работа: легко видѣть, что въ данномъ случаѣ она пойдетъ, прежде всего, на деформированіе поверхностей, скользящихъ одна по другой.

Представимъ себѣ въ сильно увеличенномъ видѣ какой-либо зубецъ A поверхности одного тѣла и надвигающійся на него зубецъ B поверхности другого (фиг. 9). Предполагая, что, при перемѣщеніи одного тѣла по другому два эти зубца непремѣнно должны будутъ столкнуться, видимъ, что, прежде чѣмъ зубецъ B пройдетъ надъ зубцомъ A, оба они должны будутъ испытать деформаціи, степень которыхъ будетъ зависѣть отъ упругости матеріала данныхъ тѣлъ. Если эти деформаціи будутъ лежать въ предѣлахъ упругости, то оба зуба, освободившись отъ давленія другъ на друга, что наступитъ, когда зубъ B перейдетъ по лѣвую сторону отъ зуба A и освободитъ его совсѣмъ, — оба эти зуба будутъ стремиться вернуться въ свое начальное состояніе, при чемъ повторится то же, что имѣетъ мѣсто для всякаго упругаго бруса, защемленнаго съ одного конца, согнутаго и затѣмъ отпущеннаго, — зубья, подобно такому брусу, придутъ въ колебательное движеніе. То же самое повторится и съ другими



Фиг. 9.

зубьями, сидящими на поверхностях: въ случаѣ, если деформаціи ихъ окажутся лежащими въ предѣлахъ упругости, всѣ зубцы придутъ въ колебательное движеніе, и эти упругія колебанія ихъ повлекутъ за собою дрожаніе тѣла, вызывая, такимъ образомъ, соотвѣтствующій условіямъ дѣла звукъ смѣшаннаго, а иногда и вполнѣ опредѣленнаго по тембру и высотѣ, характера. Въ обычныхъ условіяхъ получается тотъ шорохъ, который слышится при скольженіи одного тѣла по другому. Само собою разумѣется, что на такое упругое деформированіе зубцовъ и обусловливаемое этимъ дрожаніе ихъ потребуется извѣстная работа, которая и будетъ взята изъ общей работы дѣйствующихъ здѣсь силъ. Ясно, однако, что вернуть эту работу мы не можемъ, — вся она цѣликомъ пропадаетъ безполезно для насъ, составляя чистую потерю.

Представимъ себѣ теперь, что деформаціи зубцевъ оказываются выходящими изъ предѣловъ упругости. Тогда зубцы будутъ или подвергаться остающимся деформаціямъ, переставая возвращаться въ начальное состояніе, такъ что поверхность, по которой происходитъ скольженіе, будетъ мѣнять свой внѣшній видъ, но объемъ тѣла убывать при этомъ не будетъ, — или же эти зубцы будутъ, попросту срѣзаться, сдираться съ поверхности тѣла, при чемъ въ такихъ случаяхъ будетъ мѣняться не только видъ поверхностей скольженія, но и объемы тѣлъ. Это сдираніе зубцовъ и горбовъ поверхности и даетъ явленіе **изнашиванія поверхностей скольженія**, въ общемъ случаѣ усложняемое различными другими явленіями, — тепловыми и др. Работа, требующаяся для производства этихъ деформацій, опять будетъ взята изъ общей работы

дѣйствующихъ силъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, представить собою чистую нашу потерю, такъ какъ быть полученной обратно она, вообще говоря, не сможетъ.

Само собою разумѣется, что въ общемъ случаѣ явленія упругихъ деформацій протекаютъ одновременно съ явленіями неупругихъ, остающихся, — въ однихъ мѣстахъ поверхности происходятъ одни явленія, въ другихъ - другія, — но, во всякомъ случаѣ, всѣ эти явленія, наблюдаемыя при треніи, влекутъ за собою потерю работы, идущей на ихъ совершеніе. Потеря эта является совершенно нежелательной, ибо, двигая одно тѣло по другому, мы не желаемъ производить при этомъ ни тепла, ни звука, ни, тѣмъ болѣе, истиранія и изнашиванія поверхностей, а между тѣмъ всѣ эти явленія приходится производить съ затратой извѣстной работы, несмотря на всю ненужность этихъ явленій и убыточность ихъ для насъ. Конечно, въ различныхъ случаяхъ движенія одни явленія протекаютъ и проявляются сильнѣе, другія — слабѣе, но полнаго устраненія ихъ всѣхъ мы не сможемъ добиться никогда.

Та часть теряемой нами такимъ образомъ работы, которая переходитъ въ тепло, могла бы, пожалуй, быть использована въ смыслѣ полученія изъ этого тепла нѣкоторой полезной работы, могущей пойти затѣмъ хотя бы на то же перемѣщеніе тѣла, и схему приспособленій для такого использованія тепла можно представить себѣ въ болѣе или менѣе опредѣленныхъ очертаніяхъ. Извѣстны, кромѣ того, случаи, когда треніе примѣняется въ цѣляхъ прямого полученія тепла въ количествахъ, достаточно большихъ для того, чтобы вызвать горѣніе дерева и т. п., но эти случаи преднамѣреннаго возбу-

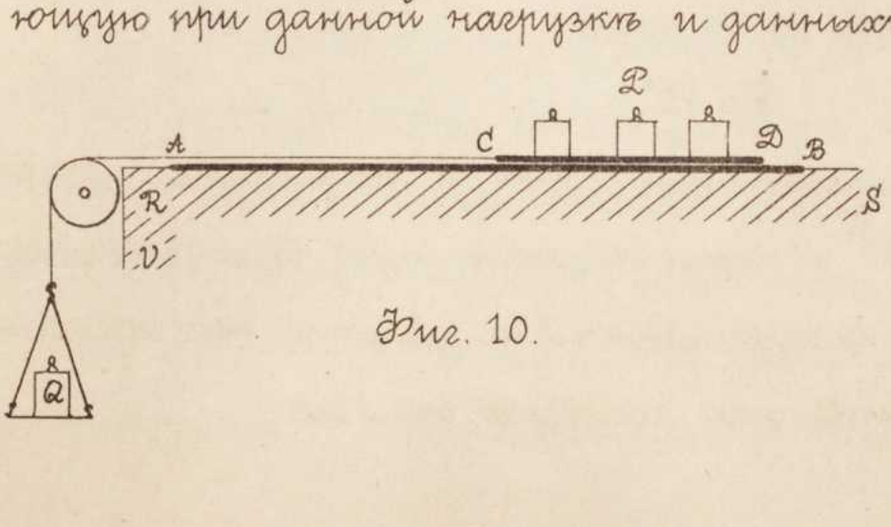
жденія и прямого использованія силъ тренія являются единичными и въ расчетъ принимаемы быть не могутъ. Вообще же говоря, въ машиностроительной практикѣ выдѣленіе тепла при скольженіи деталей машины одной по другой является крайне нежелательнымъ и вреднымъ, такъ какъ влечетъ за собою облегченіе дальнѣйшихъ деформацій; это ясно изъ того соображенія, что упругость тѣла и способность его противостоять деформаціямъ быстро уменьшаются съ возрастаніемъ температуры его. Такъ называемое горѣніе шиповъ опасно именно потому, что такой загорѣвшійся, все болѣе и болѣе раскаливающійся шипъ оказывается уже не въ состояніи сопротивляться тому моменту, на какой онъ былъ разсчитанъ холодный, и поэтому сейчасъ же ломается.

Таковы въ общихъ чертахъ соображенія Понселе, дающія общее представленіе о сущности явленій тренія скольженія твердыхъ тѣлъ. Что же касается детальнаго разбора этихъ явленій, то, какъ было уже указано, у насъ имѣются такъ называемые законы тренія, но они представляютъ собою лишь резюме́ весьма грубыхъ опытовъ и до сихъ поръ остаются весьма несовершенными схемами, подлежащими серьезнымъ поправкамъ. Къ разсмотрѣнію этихъ явленій мы теперь и приступимъ.

Первая попытка болѣе или менѣе систематическаго изученія силъ тренія и выясненія зависимости ихъ отъ различныхъ обстоятельствъ и факторовъ движенія принадлежитъ Кулону (Coulomb), продѣлавшему рядъ опытовъ и на основаніи ихъ давшему (въ 1781 году) рядъ положеній, извѣстныхъ обыкновенно подъ названіемъ законовъ тренія твердыхъ

тѣлъ. Опыты Кулона были очень просты: для того, чтобы опредѣлить силу тренія, возникающую при скольженіи одного твердаго тѣла по другому, онъ строганіемъ и шлифовкой придавалъ сторонамъ ихъ, имѣющимъ войти въ соприкосновеніе, возможно болѣе гладкую плоскую поверхность и накладывалъ этими сглаженными поверхностями одно тѣло на другое, располагая плоскость соприкосновенія горизонтально. Подвижное тѣло нагружалось тѣмъ или инымъ опредѣленнымъ грузомъ, такъ что полная сила, прижимавшая одно тѣло къ другому, была въ каждомъ отдѣльномъ опытѣ извѣстна,—она равнялась вѣсу подвижного тѣла плюсъ вѣсъ груза, на это тѣло наложеннаго.

Прилагая теперь къ подвижному тѣлу какую-либо горизонтальную силу Q, Кулонъ получалъ неравномѣрное движеніе тѣла, особое для каждой новой величины этой горизонтальной силы и оказывавшееся, вообще говоря, равномѣрно-ускоренными, что указывало на то, что это движеніе тѣла по горизонтальной плоскости совершалось подъ воздѣйствіемъ постоянной горизонтальной силы, бывшей всегда < Q. Опредѣляя ее по параметрамъ полученнаго равномѣрно-ускореннаго движенія и по массѣ движущейся системы и вычитая ее изъ Q, Кулонъ и находилъ такимъ путемъ силу тренія, возникающую при данной нагрузкѣ и данныхъ условіяхъ движенія и сопротивляющуюся движенію тѣла.



Фиг. 10.

Схема прибора, которымъ пользовался при своихъ опытахъ

Кулонъ, изображена на фиг. 10: AB представляетъ собою доску изъ одного испытуемаго матеріала, а CD — изъ другого; доска AB прикрѣпляется къ стойкѣ VRS наглухо, а подвижная доска CD, скользящая по AB, приводится въ движеніе грузомъ Q помощью веревки, перекинутой черезъ блокъ.

Наблюдая явленія тренія при различныхъ условіяхъ, Кулонъ пришелъ къ заключеніямъ, сформулированнымъ имъ въ видѣ слѣдующихъ пяти положеній:

1) Сила тренія пропорціональна слагающей всѣхъ силъ по нормали къ поверхности скольженія.

Формулировка Кулона была, собственно говоря, нѣсколько иная; свое первое заключеніе онъ высказалъ такъ: сила тренія пропорціональна вѣсу P движущагося тѣла, но мы, имѣя въ виду послѣдующее, будемъ говорить не о вѣсѣ движущихся тѣлъ, а о слагающихъ силахъ, нормальныхъ къ поверхности стыка.

Если эту нормальную слагающую назовемъ черезъ P, а горизонтальную силу, которую нужно приложить къ тѣлу для того, чтобы его сдвинуть и двигать затѣмъ равномѣрно, черезъ F, — это будетъ, слѣдовательно, сила, равная по величинѣ своей силѣ тренія, но ей прямопротивоположная, то, по Кулону, между силами P и F существуетъ соотношеніе

$$F = fP. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Коэффиціентъ пропорціональности f называется коэффиціентомъ тренія и представляетъ собою число отвлеченное. По Кулону, этотъ коэффиціентъ f не зависитъ отъ нормальнаго давленія P, каково бы это послѣднее ни было.

2) Коэффиціентъ f зависитъ отъ матеріала трущихся тѣлъ и отъ состоянія трущихся поверхностей, — т.-е. степени ихъ гладкости и смазки.

Здѣсь будетъ умѣстно замѣтить, что случай тренія сухихъ тѣлъ нужно строго отличать отъ тренія смазанныхъ, такъ какъ присутствіе слоя жидкости, хотя бы исчезающе тонкаго, на поверхности соприкосновенія трущихся тѣлъ значительно мѣняетъ всю картину явленія тренія. Тончайшій слой или даже налетъ жидкости, присутствіе котораго зачастую бываетъ трудно даже замѣтить, въ случаѣ точныхъ опытовъ и измѣреній можетъ обусловить собою ошибочность результатовъ и выводовъ. Этого вопроса мы коснемся еще разъ въ дальнѣйшемъ.

3) Коэффиціентъ тренія покоя больше коэффиціента тренія движенія.

Прежде всего, необходимо условиться, что слѣдуетъ понимать подъ этими двумя терминами. Сдѣлать это необходимо потому, что понятіе тренія неразрывно связано съ понятіемъ движенія, — треніе подразумѣваетъ наличность движенія, — и поэтому сопоставленіе понятія „треніе" съ понятіемъ „покой" можетъ вызвать недоразумѣніе, во избѣжаніе котораго необходимо принять во вниманіе нижеслѣдующее:

Если твердое тѣло въ продолженіе извѣстнаго времени спокойно лежало на поверхности другого и если мы пожелаемъ теперь сдвинуть его съ мѣста, то оказывается, что въ первый, начальный моментъ движенія для сдвиженія тѣла съ мѣста потребуется усиліе бо́льшее, чѣмъ потомъ,

когда движеніе уже началось. Въ первый моментъ скольженія, когда мы только что сдвинули тѣло, бывшее до того въ покоѣ, къ тѣлу приходится приложить нѣкоторую силу $\mathcal{F}_1$, и пусть

$$\mathcal{F}_1 = f_1 \mathcal{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Когда тѣло уже начало двигаться, то для поддержанія равномѣрнаго движенія его, – эта равномѣрность, очевидно, укажетъ на равенство между движущей силой и противоположно ей направленной силой тренія, – понадобится приложить уже другую силу $\mathcal{F}_2$, отличную отъ первой. Предположимъ, что

$$\mathcal{F}_2 = f_2 \mathcal{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Опытъ показываетъ, что сила $\mathcal{F}_1$ всегда бо́льше силы $\mathcal{F}_2$, такъ что имѣетъ мѣсто неравенство

$$\mathcal{F}_1 > \mathcal{F}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Въ виду соотношеній (4) и (5) это неравенство переходитъ въ неравенство

$$f_1 > f_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Въ виду всего вышесказаннаго, коэффиціентъ f_1 носитъ названіе коэффиціента тренія покоя, а f_2 – коэффиціента тренія движенія.

4) Коэффиціентъ тренія f не зависитъ отъ величины поверхности соприкосновенія трущихся тѣлъ, такъ что, по Кулону, сила тренія всегда будетъ выражаться произведеніемъ изъ нормальнаго давленія $\mathcal{P}$ на соотвѣтствующій ко-

эффиціентъ f, совершенно независимо отъ того, будетъ ли скользящее тѣло опираться на другое поверхностью большой площади или малой; Кулонъ устанавливаетъ, что въ обоихъ этихъ случаяхъ сила трѣнія будетъ оставаться одной и той же, если только будетъ оставаться однимъ и тѣмъ же внѣшнее давленіе.

Послѣднее, пятое, положеніе, данное Кулономъ, говоритъ намъ, что

Коэффиціентъ трѣнія f не зависитъ отъ относительной скорости скольженія одного тѣла по другому.

Приведенныя выше пять основныхъ положеній были сформулированы и высказаны впервые Кулономъ, почему и получили названіе законовъ Кулона. Иногда ихъ называютъ также законами трѣнія, но, въ сущности, для этого не имѣется никакихъ достаточныхъ основаній, такъ какъ не только при строгой провѣркѣ ихъ экспериментальнымъ путемъ, но даже при бѣгломъ сопоставленіи ихъ съ вышеприведеннымъ нагляднымъ представленіемъ, даннымъ Понселе, важнѣйшіе изъ нихъ, а именно, первый и четвертый, оказываются весьма сомнительными и мало вѣроятными; возбуждаетъ сомнѣніе и пятый законъ, о которомъ мы будемъ говорить подробнѣе впослѣдствіи, въ статьѣ о движеніи маятника съ трѣніемъ въ точкѣ привѣса. Мы теперь займемся послѣдовательнымъ сопоставленіемъ законовъ Кулона съ представленіемъ Понселе и начнемъ съ перваго закона.

Само собою разумѣется, что, чѣмъ больше будетъ нормальная сила, нажимающая одну скользящую поверхность на другую, тѣмъ бо́льшими окажутся деформаціи, испытываемыя горбами и выступами, имѣющимися на этихъ поверхностяхъ, и, значитъ, тѣмъ большей будетъ работа, требующаяся для передвиженія одного тѣла по другому, равно какъ, понятно, и сила тренія. — Эта сторона вопроса сомнѣній не вызываетъ. За то приходится признать совершенно не отвѣчающей дѣйствительности столь простую зависимость между нагрузкой P на скользящее тѣло и возбуждаемой при этомъ силой тренія F, какъ это устанавливаетъ первый законъ; на дѣлѣ эта зависимость и должна быть, и оказывается, какъ это выясняется изъ болѣе точныхъ изслѣдованій, гораздо болѣе сложной. Относительно зависимости, данной Кулономъ, можно сказать, что она представляетъ собою соотношеніе, первое пришедшее ему въ голову, не обоснованное математически и, вдобавокъ, не провѣренное съ достаточною строгостью на опытѣ, а тотъ фактъ, что на этой зависимости остановились и придерживаются ея до сихъ поръ, объясняется единственно лишь тѣмъ, что формула (3), весьма простая въ ариѳметическомъ смыслѣ, представляетъ рядъ весьма значительныхъ удобствъ при пользованіи ею на практикѣ. Строго говоря, коэффиціентъ f долженъ зависѣть, между прочимъ, и отъ величины нормальной нагрузки P.

Второй законъ понятенъ самъ собою и никакихъ трудностей для объясненія не представляетъ.

Съ точки зрѣнія Poncelet, нетрудно уяснить себѣ совершенно наглядно и третій законъ. Дѣйствительно, если одно тѣло, прижимаемое нѣкоторой силой къ поверхности другого, спокойно лежало на немъ въ продолженіе нѣкотораго времени, то ясно, что за это время оно успѣло своими зубцами войти, въѣсться во впадины другого; на этотъ процессъ, понятно, требуется время, и чѣмъ больше оно, т.-е. чѣмъ дольше продолжается это соприкосновеніе тѣлъ, тѣмъ больше и глубже, въ извѣстныхъ, конечно, предѣлахъ, будетъ совершаться это въѣданіе. Очевидно, что, принуждая сдвинуться съ мѣста такое въѣвшееся тѣло, мы должны приложить большее усиліе, чѣмъ тогда, когда мы его уже сдвинули, — въ первомъ случаѣ намъ придется произвести и вызвать деформаціи бо́льшія, чѣмъ во второмъ, когда зубцы и выступы будутъ проходить другъ надъ другомъ, лишь неглубоко, за недостаткомъ времени, входя во впадины соприкасающейся поверхности и мало деформируясь.

Четвертый законъ Кулона уже совсѣмъ не соотвѣтствуетъ представленію Poncelet. Дѣйствительно, при большихъ поверхностяхъ соприкосновенія трущихся тѣлъ деформаціи зубцевъ, надо ожидать, будутъ меньше, чѣмъ при малыхъ, ибо при большомъ числѣ этихъ зубцевъ и выступовъ, подвергающихся одновременно деформаціи, что, очевидно, имѣетъ мѣсто при большой поверхности соприкосновенія, на каждый изъ нихъ придется меньшая доля деформирующаго усилія, чѣмъ при маломъ числѣ зубцевъ, т.-е. при малой поверхности соприкосновенія. Все сказанное станетъ понятнымъ еще

болѣе, если мы представимъ себѣ, что подвижное тѣло имѣетъ форму усѣченной пирамиды. По четвертому закону Кулона, сила трѣнія будетъ одна и та же, независимо отъ того, какъ мы станемъ двигать эту пирамиду, опирая ее о неподвижную плоскость широкимъ основаніемъ или узкимъ. Это, очевидно, сомнительно, ибо, если мы станемъ двигать пирамиду, опирая ее о неподвижную поверхность узкой вершиной, то, при одномъ и томъ же нажимающемъ усиліи, она будетъ въѣдаться въ плоскость гораздо глубже, чѣмъ тогда, когда она опирается о плоскоать своей широкой базой, и, при достаточной величинѣ нажимающаго усилія, можетъ даже случиться, что не произойдетъ никакого скольженія вообще. Уменьшая размѣры узкаго сѣченія до нуля и переходя, такимъ образомъ, къ случаю обыкновенной островершинной пирамиды, можемъ, при извѣстныхъ условіяхъ, даже вогнать, вѣдрить ее этой острой вершиной въ опорную поверхность, подобно тому, какъ мы можемъ вонзить шило въ дерево; при такихъ условіяхъ не только не будетъ имѣть мѣста никакое движеніе, но, наоборотъ, мы получимъ систему, въ извѣстномъ смыслѣ могущую быть принятой за одно цѣлое.

Итакъ, несомнѣнно, что уменьшенію площади соприкосновенія имѣется извѣстный предѣлъ, ниже котораго скольженіе становится уже невозможнымъ, въ виду чего слѣдуетъ признать, что между величиной нормальнаго давленія на единицу поверхности соприкосновенія извѣстная зависимость, несомнѣнно, существуетъ; къ сожалѣнію, никакихъ опредѣленныхъ указаній по этому вопросу у насъ не имѣется совсѣмъ, и намъ, поневолѣ, приходится довольствоваться тѣмъ, что далъ Кулонъ.

Что касается послѣдняго, пятаго, закона, говорящаго, что коэффиціентъ треніа не зависитъ отъ относительной скорости движенія тѣлъ, то законъ этотъ опять ведетъ къ ряду сомнѣній: не говоря уже о томъ, что предположеніе о существованіи зависимости между скоростью деформированія зубьевъ и усиліями, требуемыми для этого, т. е. силами треніа, нельзя не признать весьма правдоподобнымъ, мы, кромѣ того, имѣемъ рядъ опытовъ, прямо устанавливающихъ существованіе такой зависимости; съ однимъ изъ методовъ такого опытнаго изученія этой зависимости мы познакомимся ниже.

Все сказанное, а въ частности, наши постоянныя указанія на отсутствіе надежныхъ данныхъ по всѣмъ вопросамъ, касающимся треніа, заставляетъ задаться вопросомъ, почему же, при такомъ огромномъ числѣ изслѣдователей и за столь большой промежутокъ времени, — отъ Соломб'а до нашихъ дней, — по вопросу о треніи сдѣлано такъ мало или, вѣрнѣе, ничего? Нетрудно видѣть, что причина тому, прежде всего, лежитъ въ крайней сложности и трудности относящихся сюда аналитическихъ выкладокъ, допускающей простоту рѣшенія лишь въ немногихъ частныхъ случаяхъ; затѣмъ, много препятствій и трудностей представляетъ собою постановка относящихся сюда опытовъ, которая могла бы обусловить и обезпечить надежность получаемыхъ результатовъ.

По поводу послѣдняго замѣчанія необходимо указать, что законы Кулона имѣютъ въ виду треніе сухихъ,

несмазанныхъ тѣлъ; но получить на практикѣ нѣчто подобное крайне трудно,- поверхности трущихся тѣлъ могутъ быть влажными или чѣмъ-либо смазанными, а между тѣмъ малѣйшихъ, даже незамѣтныхъ остатковъ влаги или смазки уже вполнѣ достаточно для извращенія явленій и совершенно измѣненія результатовъ.

Руководясь этими соображеніями, двое физиковъ, Wachsmuth и Babo, при производствѣ своихъ весьма интересныхъ опытовъ съ треніемъ, поставленныхъ ими въ 1877 году, приняли всѣ мѣры къ обезпеченію сухости трущихся поверхностей, съ каковой цѣлью поставили себѣ задачей изслѣдованіе треніе стеклянной линзы о стеклянную пластинку, - это, какъ увидимъ, дало имъ возможность вести весьма строгій контроль надъ степенью влажности пластинки. Линза была подвѣшена на нитяхъ, подобно крутильному маятнику. Закрутивъ линзу и выведя ее, такимъ образомъ, изъ положенія равновѣсія, ее отпускали, и линза, стремясь возвратиться въ свое начальное состояніе, начинала вращаться, при чемъ ей приходилось испытывать треніе о поверхность подставки; по ходу затуханія вращательныхъ колебаній можно было легко опредѣлить силу, обусловливавшую затуханіе колебаній, т.-е. силу треніе линзы о подставку. Закручивая линзу на различные углы и, значитъ, вызывая появленіе различныхъ крутящихъ моментовъ, можно было получать движеніе съ самыми разнообразными угловыми скоростями. Произведя рядъ этихъ опытовъ, названные выше изслѣдователи, обработавъ результаты наблюденій, пришли, между прочимъ, къ заключенію, что сила треніе отъ скорости не зависитъ. Но это заключеніе справедливо

лишь для случая трения сухихъ тѣлъ, какой эти ученые и имѣли въ своихъ опытахъ: линзы, которыми они пользовались при опытахъ, равно какъ и опорныя стеклянныя пластинки, высушивались передъ опытами весьма тщательно; весь приборъ ставился въ герметически закрывавшійся ящикъ, куда помѣщались также сосуды съ веществами, притягивающими и поглощающими влагу, и т. д. Принявъ такія предосторожности, экспериментаторы могли быть увѣрены, что извнѣ къ трущимся поверхностямъ влажность доступа не имѣетъ и что, поэтому, они, дѣйствительно, имѣютъ дѣло съ треніемъ сухихъ тѣлъ. Кромѣ того, благодаря присутствію цвѣтныхъ Ньютоновыхъ колецъ, оказывалось возможнымъ весьма легко и удобно слѣдить за степенью сухости поверхностей соприкосновенія, ибо эти кольца, при появленіи малѣйшихъ слѣдовъ влаги на этихъ поверхностяхъ, сейчасъ же мѣняютъ свой характеръ, видъ и расположеніе. Такимъ образомъ, благодаря ряду предосторожностей, въ упомянутыхъ выше опытахъ удалось обезпечить треніе дѣйствительно сухихъ тѣлъ, а вдобавокъ, сочетаніе оптическихъ феноменовъ обезпечивало возможность дѣйствительнаго и весьма строгаго контроля надъ степенью сухости поверхностей соприкосновенія въ любой моментъ опыта, и, притомъ, безъ всякаго перерыва теченія его.

Нечего и говорить, что подобные опыты, произведенные съ тѣлами малопрозрачными или непрозрачными, заслуживающихъ довѣрія результатовъ дать не могутъ потому, что въ такихъ случаяхъ мы не имѣемъ никакой возможности слѣдить за состояніемъ трущихся поверхностей,

а это, въ свою очередь, отнимаетъ у экспериментатора всякую увѣренность въ томъ, что результаты, полученные имъ помощью такихъ опытовъ, дѣйствительно имѣютъ силу для сухихъ данныхъ тѣлъ. Не болѣе довѣрія внушаютъ и всякіе другіе опыты съ треніемъ, поставленные до сихъ поръ, въ виду чего къ всякимъ цифровымъ даннымъ, приводимымъ въ различныхъ руководствахъ и справочникахъ, слѣдуетъ относиться съ большей осторожностью. Можно сказать, что опытное изученіе треніа еще не поставлено на надлежащую почву и представляетъ еще обширное, почти не затронутое, поле для самыхъ разнообразныхъ изслѣдованій.

Все, сказанное выше о силахъ треніа, позволяетъ отнести ихъ къ категоріи силъ пассивныхъ, въ томъ смыслѣ, что самостоятельное ихъ возникновеніе, при отсутствіи относительнаго движенія и силъ, дающихъ нажимъ одного тѣла на другое, невозможно; кромѣ того, эти силы сами по себѣ, безъ участія другихъ силъ, не могутъ ни содѣйствовать движенію, въ смыслѣ увеличенія скорости, ни вызвать вновь хотя бы какое бы то ни было движеніе. Надо признать, что своей конечной цѣлью силы треніа имѣютъ уничтоженіе движенія и переводъ тѣла въ состояніе покоя. Этимъ свойствомъ силъ треніа, какъ извѣстно, весьма широко пользуются въ самыхъ разнообразныхъ случаяхъ практики, — достаточно напомнить о тормозахъ и, вообще, всякаго рода модераторахъ движенія, имѣющихъ исключительной своей задачей содѣйствіе успокоенію и прекращенію движенія различныхъ системъ въ кратчайшее время; иными словами,

эти приспособленія, пользуясь треніемъ, переводятъ весь запасъ живой силы данной движущейся системы въ различные другіе виды энергіи,—въ тепло, свѣтъ и т. д.

Роль силъ треніа не только въ машиностроеніи и строительномъ дѣлѣ, но и, вообще, въ хозяйствѣ природы, громадна,— неподвижность всякихъ сооруженій и опорныхъ частей машинъ почти во всѣхъ случаяхъ обезпечивается путемъ возбужденія силъ треніа, достаточныхъ для противодѣйствія сдвигающимъ усиліямъ, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто при укрѣпленіи станинъ различныхъ машинъ на фундаментахъ, при кладкѣ стѣнъ, скрѣпленіи различныхъ частей сооруженій и машинъ помощью болтовъ, клиньевъ, гвоздей, заклепокъ и проч.

Если бы не было треніа, то мы не имѣли бы ни тканей, ни веревокъ, ни бумаги и т. д.; мало того, ни одно живое существо, разсматриваемое, какъ нѣкоторая система, находящаяся подъ дѣйствіемъ единственной неуравновѣшенной внѣшней силы,—силы тяжести,— не могло бы перемѣщать своего центра тяжести въ направленіяхъ, отличныхъ отъ направленія силы тяжести: центръ тяжести каждаго такого организма или оставался бы все время въ покоѣ или перемѣщался бы въ пространствѣ прямолинейно и равномѣрно, а кромѣ того, могъ бы еще перемѣщаться только по направленію силы тяжести, т.-е. въ вертикальномъ направленіи. Такимъ образомъ, мы не могли бы самостоятельно сдвинуться съ мѣста въ какомъ-нибудь горизонтальномъ направленіи, не прибѣгая къ помощи и содѣйствію другихъ системъ, не могли бы также удержаться на мѣстѣ, разъ начали бы двигать-

ся; мы не имѣли бы возможности ни взять и зажать что-либо въ руку, ни поднять что-либо, а, значитъ, и бросить, и т.д. О послѣдствіяхъ исчезновенія трения на землѣ можно было бы говорить очень много, но и сказаннаго, полагаемъ, достаточно для обрисовки, хотя бы только въ главныхъ чертахъ, значенія силъ трения среди другихъ силъ, принимающихъ участіе въ жизни природы.

§2. Равновѣсіе точки на поверхности при наличности силъ трения. Область равновѣсія.

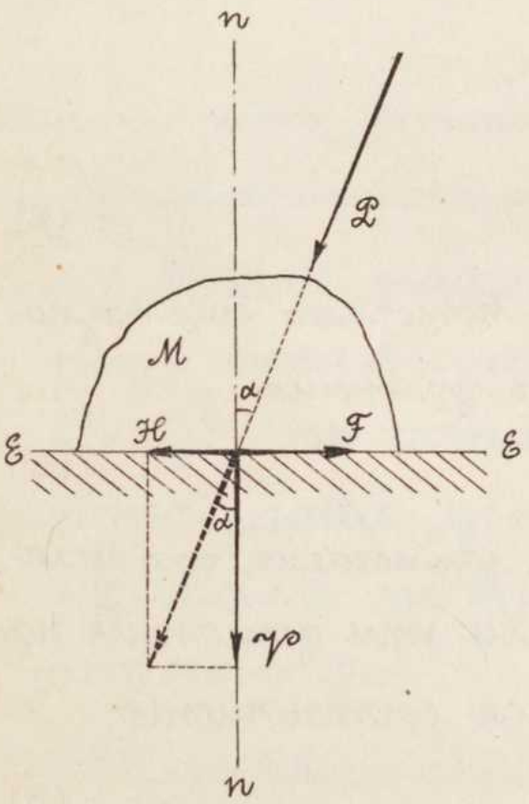
То универсальное значеніе, которое, какъ мы видѣли, имѣютъ пассивныя силы трения въ явленіяхъ природы, дѣлаетъ необходимымъ внесеніе соотвѣтствующихъ поправокъ въ уравненія механики, трактующія и обрисовывающія эти явленія. Несомнѣнно, что всѣ, какъ статическія, такъ и динамическія уравненія механики должны быть дополняемы членами, характеризующими вліяніе и участіе силъ трения въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Въ нашемъ курсѣ мы, по необходимости, ограничимся лишь наиболѣе простыми случаями равновѣсія и движенія и въ текущемъ параграфѣ разсмотримъ вопросъ о поправкѣ, которая должна быть введена въ основное положеніе статики, говорящее, что

для равновѣсія точки на поверхности подъ дѣйствіемъ какой-либо силы необходимо, чтобы сила была **нормальна** къ поверхности.

если же эта сила оказывается наклоненной къ нормали хотя бы подъ сколь угодно малымъ угломъ, то равновѣсіе мѣста имѣть уже не можетъ, и мы получаемъ движеніе.

Опытъ показываетъ, однако, что на дѣлѣ происходитъ нѣчто совершенно другое: сила, воздѣйствующая на тѣло, можетъ быть отклоняема отъ нормали на довольно большой уголъ, прежде чѣмъ начнется движеніе. Этотъ фактъ получаетъ объясненіе, если къ учету силъ, дѣйствующихъ на тѣло, мы привлечемъ еще и силы тренія.

Разберемъ сначала тотъ случай, когда движущееся тѣло M находится на нѣкоторой плоскости EE (фиг. 11). Пусть дѣйствующая на это тѣло сила P, результирующая всѣхъ внѣшнихъ силъ, образуетъ съ нормалью nn къ этой поверхности уголъ α. Разложимъ теперь эту силу P на силу V, перпендикулярную къ плоскости и, значитъ, дѣйствующую на тѣло по нормали nn, и на силу H, параллельную плоскости. Сила V, равная $P\cos\alpha$, представитъ собою нормальное давленіе нагруженнаго силой P тѣла M на плоскость EE; сила же H, равная $P\sin\alpha$, представитъ собою силу, движущую тѣло по поверхности EE, при чемъ движеніе тѣла M будетъ протекать, очевидно, въ направленіи этой силы H. Этому движенію тѣла будетъ, однако, противодѣйствовать сила тренія F, вызываемая на поверхности соприкосновенія нормальнымъ давленіемъ V; направлена она будетъ противоположно скорости относительнаго движенія тѣла M, т.-е.



Фиг. 11.

противоположно силѣ H и будетъ равна fV, т.-е. $fP\cos\alpha$, гдѣ f есть коэффиціентъ тренія, принадлежащій данному случаю. Ясно, что, если сила H будетъ недостаточна для того, чтобы преодолѣть сопротивленіе, оказываемое силой тренія F, т.-е. если

$$H < F, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

то движенія не будетъ. Подставляя вмѣсто H и F значенія ихъ, данныя выше, находимъ, что условіемъ покоя тѣла является неравенство

$$P\sin\alpha < fP\cos\alpha,$$

иначе

$$\operatorname{tg}\alpha < f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Послѣднее значеніе угла α, при которомъ еще возможенъ покой тѣла, опредѣляется изъ уравненія

$$\operatorname{tg}\alpha = f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Соединяя условія (2) и (2') въ одно, заключаемъ, что условіемъ покойнаго состоянія тѣла при дѣйствіи на него какой-либо силы P, является соотношеніе

$$\operatorname{tg}\alpha \leqq f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

При дальнѣйшемъ увеличеніи угла α уже начинается движеніе. Такимъ образомъ, можно сказать, что для покоя тѣла въ данномъ случаѣ вовсе не обязательно, чтобы результирующая P всѣхъ внѣшнихъ силъ была непремѣнно нормальна къ плоскости EE; для этого достаточно только, чтобы эта сила P была наклонена къ нормали подъ угломъ α, тангенсъ котораго меньше соотвѣтствующаго взятому случаю коэффиціента тренія f.

Условію (3) можно дать иной, нѣсколько болѣе удобный видъ, положивъ

$$f = \operatorname{tg}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Уголъ φ, опредѣляемый отсюда, называется **угломъ тренія**. Въ виду (4), условію (3) можетъ быть дано теперь видъ:

$$\operatorname{tg}\alpha \leqq \operatorname{tg}\varphi,$$

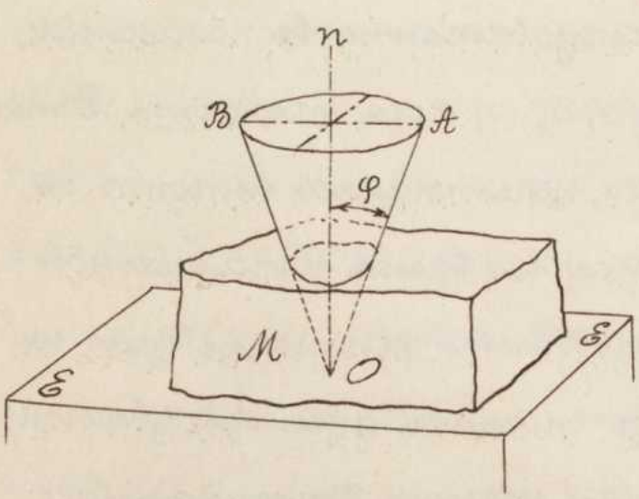
что сводится къ соотношенію

$$\alpha \leqq \varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

и условіе покоя даннаго тѣла, приведенное выше, можетъ быть перифразировано теперь такъ:

Тѣло, находящееся на поверхности подъ воздѣйствіемъ какой-угодно силы P, будетъ оставаться въ покоѣ до тѣхъ поръ, пока уголъ α наклона силы P къ нормали не будетъ превосходить угла тренія φ.

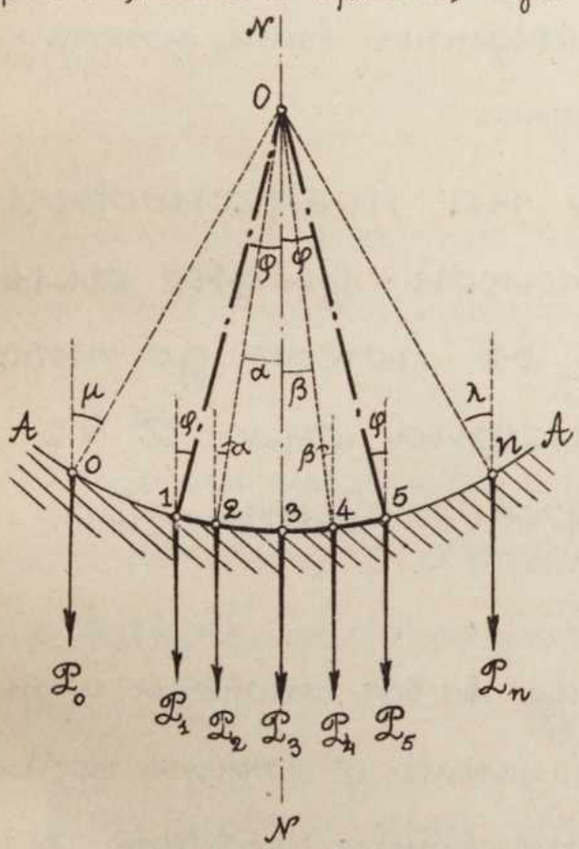
Взявъ общій случай движенія во всѣ стороны и описавъ угломъ φ вокругъ нормали nn конусъ OAB (фиг. 12), называемый **конусомъ тренія**, можемъ сказать, что, если данная сила, будучи направлена къ вершинѣ этого конуса, лежитъ внутри этого конуса, то движенія не будетъ; предѣльнымъ случаемъ будетъ совпаденіе силы съ на-



Фиг. 12.

правленіемъ образующей этого конуса.

Посмотримъ теперь, какъ будетъ обстоять дѣло въ случаѣ, если данное тѣло и, ради упрощенія дѣла, матеріальная точка, вынуждены все время находиться на нѣкоторой кривой или поверхности конечной кривизны. Разберемъ простѣйшій случай такого движенія, а именно, случай математическаго маятника: пусть нѣкоторая матеріальная точка m, находясь подъ дѣйствіемъ силы тяжести, принуждена все время оставаться на дугѣ AA постояннаго радіуса R и центра O (фиг. 13). Посмотримъ, гдѣ размѣстятся по этой дугѣ всѣ положенія равновѣсія этой точки.



Фиг. 13.

Въ предѣлахъ дуги AA качанія маятника силы тяжести можно считать направленными параллельно отвѣсной линіи ON и, значитъ, параллельными другъ другу. Въ виду этого, при перемѣщеніи точки m по этой дугѣ, изъ нѣкотораго начальнаго положенія O послѣдовательно въ положенія $1, 2, \ldots, 5, \ldots$, сила тяжести P точки m, перемѣщаясь вмѣстѣ съ этой послѣдней, будетъ оставаться все время параллельной самой себѣ, при чемъ будетъ образовывать различные углы съ нормалями въ соотвѣтствующихъ точкахъ дуги AA, увеличивающіеся по мѣрѣ удаленія точки m отъ вертикальнаго радіуса OS.

По законамъ теоретической механики, точка m, будучи

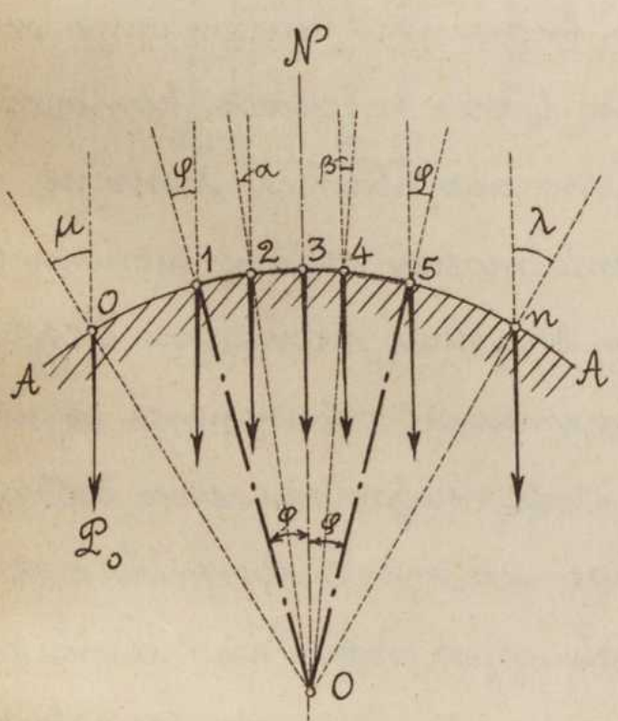
положенія на дугу A_0A, будетъ имѣть на ней только одно положеніе равновѣсія, а именно,— положеніе (3) на вертикальномъ радіусѣ O_3. На дугѣ, однако, такихъ положеній оказывается безконечное множество. Дѣйствительно, согласно предыдущему, можемъ утверждать, что точка m можетъ находиться въ равновѣсіи тамъ, гдѣ уголъ μ силы P съ нормалью не превосходитъ угла тренія φ. Въ данномъ случаѣ такими точками дуги A_0A, удовлетворяющими этому требованію, оказываются всѣ точки дуги (1–5), крайніе радіусы которой O_1 и O_5 образуютъ углы φ съ вертикальнымъ радіусомъ O_3. Дѣйствительно, для любой точки (2) дуги (1–3) уголъ α силы P съ нормалью $2O$ оказывается равнымъ центральному углу $2O_3$, а этотъ послѣдній, будучи измѣряемъ дугой (2–3), будетъ меньше угла тренія φ, измѣряемаго дугой (1–3). То же самое имѣетъ мѣсто для любой точки дуги (3–5),— въ каждой точкѣ ея уголъ силы тяжести съ нормалью будетъ меньше φ.

Итакъ, на дугѣ A_0A можно выдѣлить нѣкоторую опредѣленную часть ея,— дугу (1–5),— во всѣхъ точкахъ которой уголъ силы тяжести съ нормалью оказывается меньше угла тренія φ, а это значитъ, что точка m, очутившись въ какой-либо моментъ гдѣ-нибудь внутри этой дуги **безъ всякой скорости**, самостоятельно сдвинуться съ мѣста уже не сможетъ. Эта дуга (1–5) представляетъ собою, такимъ образомъ, геометрическое мѣсто положеній равновѣсія данной точки на данной дугѣ A_0A. Положеній равновѣсія оказывается здѣсь, такимъ образомъ, не одно, какъ это говоритъ теоретическая механика, а безконечное мно-

жество; всѣ онѣ расположены на выдѣлившейся указаннымъ опредѣленнымъ образомъ дугѣ (1–5), которая, въ силу разъясненныхъ выше свойствъ ея точекъ, и носитъ названіе **области равновѣсія.**

Въ случаѣ сферическаго маятника, когда точка m можетъ перемѣщаться по поверхности сферы, положимъ, того же радіуса O3, область равновѣсія опредѣлится, очевидно, вращеніемъ дуги 1–3 вокругъ неподвижной вертикали O3 и представитъ собою, такимъ образомъ, часть поверхности этой сферы, вырѣзанную центральнымъ угломъ 1O3, вращающимся около своей стороны O3. Очутившись въ этой области безъ начальной скорости, матеріальная точка m останется въ покоѣ. Положеній равновѣсія ея оказывается здѣсь также безконечно много. Область равновѣсія представитъ собою, очевидно, поверхность основанія шарового сектора съ угломъ 2φ.

Тѣ же замѣчанія имѣютъ силу и для того случая, когда дуга, по которой движется точка m, обращена своей выпуклостью вверхъ, какъ это и изображено на фиг. 14. Если вертикальный радіусъ обозначимъ черезъ O3, а уголъ треніа – черезъ φ, то разсужденія, во всемъ подобныя предыдущимъ, покажутъ, что здѣсь, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, опять выдѣлится угловая область равновѣсія, – это будетъ дуга (15), крайніе радіусы которой O1 и O5 образуютъ углы треніа φ



Фиг. 14.

съ среднимъ вертикальнымъ радіусомъ $O3$. Вращая дугу AA вокругъ вертикали $O3$, выдѣлимъ на поверхности сферы радіуса $O3$ нѣкоторую площадку, служащую основаніемъ сферическаго сектора съ угломъ 2φ; боковую поверхность его опредѣлитъ сторона $O1$ угла φ, вращающагося вокругъ своей стороны $O3$.

Подобныя разсужденія возможно примѣнить къ любой другой криволинейной поверхности, сколь бы сложна она ни была; на ней всегда окажется возможнымъ выдѣлить нѣкую область равновѣсія, обнимающую собою всѣ тѣ точки ея, нормали въ которыхъ образуютъ съ направленіями соотвѣтствующихъ результирующихъ всѣхъ внѣшнихъ силъ углы, меньшіе принадлежащихъ случаю угловъ тренія,— иными словами, въ этой области равновѣсія лежатъ всѣ тѣ точки, въ которыхъ результирующія оказываются проходящими внутри соотвѣтствующихъ конусовъ тренія.

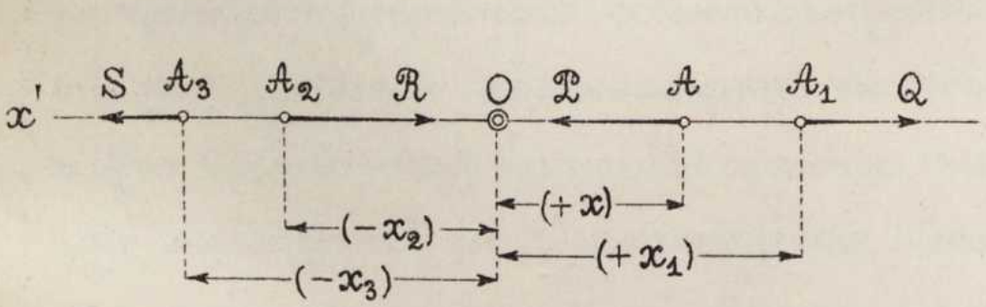
Всѣ эти заключенія примѣнимы къ любой системѣ матеріальныхъ точекъ, и, по аналогіи съ предыдущимъ, нетрудно заключить, что для каждой такой системы, а значитъ, для каждаго имѣющагося у насъ механизма, существуетъ безконечное множество положеній равновѣсія, опредѣляемыхъ соотвѣтствующими областями равновѣсія отдѣльныхъ точекъ; размѣры и расположеніе этихъ областей равновѣсія обусловливаются формой поверхностей, по которымъ происходитъ движеніе точекъ, и значеніями силъ тренія. Результатъ этотъ можно распространить и

на всякія динамическія сочетанія, — на случаи движенія системъ и точекъ подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ и силъ тренія, — и два простѣйшихъ примѣра изслѣдованія подобныхъ движеній мы и приведемъ теперь же, въ очередныхъ параграфахъ.

§3. Движеніе твердаго тѣла по плоскости подъ вліяніемъ силъ, пропорціональныхъ разстояніямъ тѣла отъ нѣкотораго центра притяженія, и силъ тренія. Движеніе подъ воздѣйствіемъ пружины.

На излагаемыхъ ниже простыхъ примѣрахъ разсмотримъ, что вноситъ треніе въ вопросъ о движеніи. Взятые нами случаи удобны тѣмъ, что легко поддаются простому анализу и даютъ возможность, путемъ аналогій, судить и о болѣе сложныхъ случаяхъ, разъ только ихъ удается подвести подъ изслѣдуемые ниже. Предварительно, во избѣжаніе недоразумѣній, необходимо условиться въ обозначеніяхъ различныхъ векторовъ, съ которыми намъ придется имѣть дѣло въ дальнѣйшемъ.

Пусть на прямой $x'x$ (фиг. 15) выдѣлены нами ряд точекъ: A, A_1, A_2, ... Для того, чтобы координировать ихъ, принимаемъ прямую $x'x$



Фиг. 15.

за ось абсциссъ, а одну ея точку, — какую-либо точку O, — за начало координатъ. Тогда положенія всѣхъ точекъ на оси $x'x$ опредѣлятся разстояніями ихъ отъ начала координатъ O, т.-е. отрѣзками OA_3, OA_2, OA, OA_1, . . ., причемъ для точекъ, лежащихъ вправо отъ начала, будемъ считать эти разстоянія положительными, а влѣво — отрицательными, что и будемъ отмѣчать знаками плюсъ и минусъ, приставляя ихъ къ абсолютнымъ значеніямъ длинъ этихъ отрѣзковъ, выраженныхъ въ какихъ-либо единицахъ. Такимъ образомъ, разстояніе OA точки A (фиг. 15) выразится черезъ $(+x)$, разстояніе OA_3 — черезъ $(-x_3)$ и т. д.

Пусть, далѣе, всѣ эти точки находятся подъ дѣйствіемъ различныхъ силъ: P, Q, . . ., дѣйствующихъ по тому или другому направленію вдоль оси $x'x$. Условимся считать положительно-направленными или положительными тѣ изъ нихъ, которыя стремятся увеличить разстоянія точекъ отъ начала, а отрицательно-направленными или отрицательными тѣ, которыя эти разстоянія уменьшаютъ. Въ виду этого силы P и R (фиг. 15) слѣдуетъ признать отрицательными и общія выраженія ихъ снабдить знакомъ минусъ, а силы Q и S — положительными и выраженія ихъ снабдить плюсомъ.

Далѣе, при составленіи уравненій движенія намъ придется имѣть дѣло еще съ ускореніями $\frac{d^2x}{dt^2}$. Чтобы не путаться съ знаками этихъ вторыхъ производныхъ, нужно помнить, что подъ аргументомъ x

разумѣется здѣсь координата нашей тѣки въ разсматриваемомъ положеніи ея на оси и что мы составляемъ законъ измѣненія ускореній этой точки, т.-е. законъ измѣненія второй производной отъ этой координаты по времени. Поэтому для точекъ съ положительными координатами $(+x)$ вторая производная должна быть изображаема черезъ $\frac{d^2(+x)}{dt^2}$, т.-е. черезъ $\frac{d^2x}{dt^2}$, и здѣсь мы составимъ уравненіе, характеризующее извѣстныя измѣненія положительныхъ координатъ; для точекъ же съ отрицательными координатами $(-x)$ вторая производная должна быть изображаема черезъ $\frac{d^2(-x)}{dt^2}$, т.-е. черезъ $\left(-\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, и уравненіе дастъ намъ законъ извѣстныхъ опредѣленныхъ измѣненій отрицательныхъ координатъ.

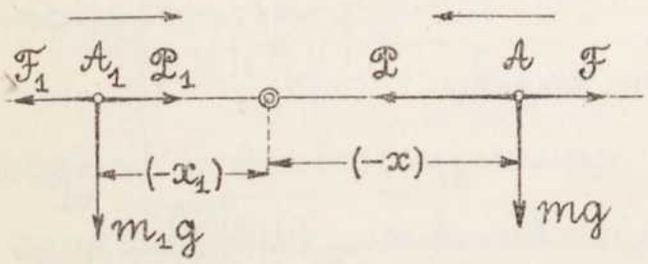
Послѣ этихъ необходимыхъ предварительныхъ замѣчаній приступимъ къ разбору интересующей насъ теперь задачи, сформулировать условіе коей можно такъ:

Нѣкоторая матеріальная точка массы m движется по горизонтальной оси $x'x$ (фиг. 16), будучи притягиваема центромъ O, лежащимъ на той же прямой $x'x$, съ силой, прямопропорціональной разстоянію этой точки отъ центра притяженія O. Опредѣлить движеніе этой точки, предполагая, что она движется по оси $x'x$ съ треніемъ, коэффиціентъ котораго примемъ равнымъ f.

Такимъ образомъ, сила P притяженія данной точки центромъ O выражается, вообще, черезъ

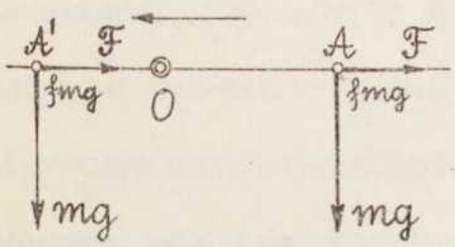
$$P = -k.d, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

гдѣ k есть нѣкоторый опредѣленный коэффиціентъ пропорціональности, а d — разстояніе точки въ данный моментъ отъ начала. Въ виду этого, если точка находится въ положеніи A, гдѣ $d = OA = +x$, то здѣсь $P = -kx$; если же точка взята въ положеніи A_1, гдѣ $d = OA_1 = -x_1$, то здѣсь $P_1 = -k.OA_1 = -k(-x_1) = +kx_1$ и т. д.



Фиг. 16.

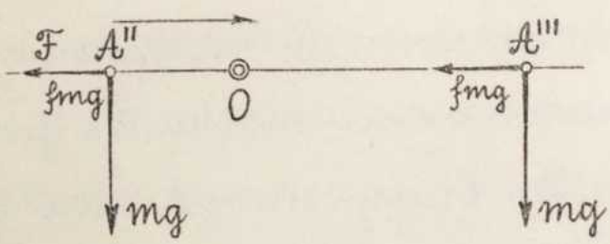
Что касается силъ тренія, то онѣ появятся благодаря тому, что наша матеріальная точка находится подъ воздѣйствіемъ силы тяжести ея mg, направленной всегда внизъ. Согласно общимъ положеніямъ, сила тренія выразится здѣсь черезъ fmg и будетъ въ каждый данный моментъ направлена противоположно движенію точки. При учетѣ ея необходимо придерживаться правила о знакахъ силъ, приведеннаго выше, а это ведетъ къ слѣдующимъ очевиднымъ заключеніямъ:



Фиг. 17.

Пусть точка движется справа налѣво, какъ это изображено на фиг. 17. Въ этомъ случаѣ сила тренія F, равная fmg, въ положеніи A нашей точки должна быть взята съ плюсомъ, ибо она здѣсь сопротивляется уменьшенію разстоянія OA, въ положеніи же A' — съ минусомъ, ибо здѣсь она этому уменьшенію разстоянія точки до начала способствуетъ.

Если точка движется слѣва направо, какъ это изобра-



Фиг. 18.

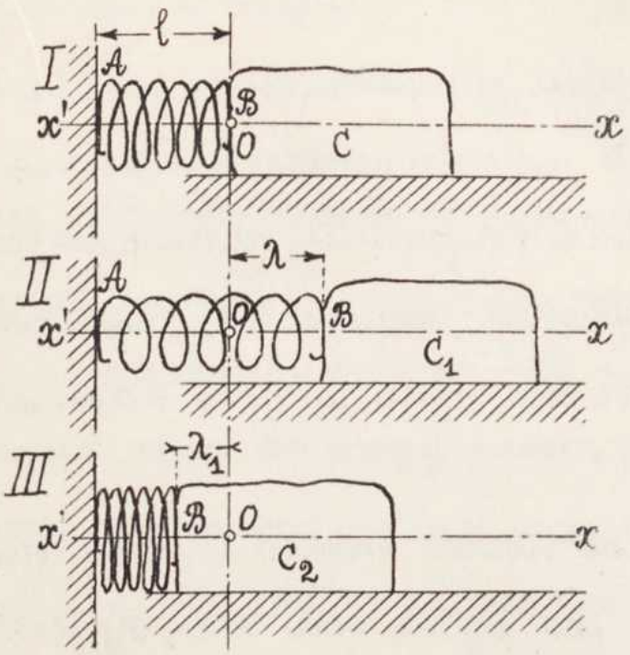
жено на фиг. 18, то въ моментъ нахожденія ея въ A'' знакъ у силы тренія F будетъ плюсъ (+fmg), а въ A''' — минусъ (−fmg).

———

Съ силами, повинующимися закону (a), на практикѣ приходится встрѣчаться весьма часто, а именно — во всѣхъ случаяхъ примѣненія цилиндрическихъ и коническихъ пружинъ, рессоръ и т. п. Дѣйствительно, пусть у насъ имѣется нѣкоторая цилиндрическая пружина AB (фиг. 1 одинъ конецъ которой, A, наглухо закрѣпленъ въ стѣнѣ или въ какой-либо неподвижной детали, а къ другому концу B прикрѣпленa подвижная деталь C, могущая перемѣщаться параллельно оси x'x данной пружины.

Положимъ, кромѣ того, что конецъ B пружины приходится какъ разъ на этой оси, такъ что, при движеніи тѣла C, онъ будетъ перемѣщаться именно по этой прямой x'x. Легко видѣть, что, при взятомъ нами поступательномъ перемѣщеніи тѣла C, это движеніе его можно опредѣлять движеніемъ какой-либо одной его точки, и за нее мы и возьмемъ эту точку B, — точку прикрѣпленія пружины къ тѣлу. Такимъ образомъ, принимая за начальное положеніе тѣла то, когда вся система находится въ равновѣсіи, — этотъ случай изображенъ на фиг. 19, I, — и отмѣтивъ на оси x'x соотвѣтствующее положеніе точки B, — пусть это будетъ нѣкоторая точка O, — мы можемъ въ дальнѣйшемъ опредѣлять

величину перемѣщенія тѣла отклоненіемъ точки B отъ начальнаго положенія ея O. Такъ, при перемѣщеніи въ C_1, передвиженіе тѣла, а значитъ, и вытяжка пружины, оцѣнятся отрѣзкомъ λ (фиг. 19, II), а при перемѣщеніи въ C_2, гдѣ имѣетъ мѣсто уже сжатіе пружины, — отрѣзкомъ λ_1 (фиг. 19, III) и т. д.



Фиг. 19.

Подобная оцѣнка перемѣщеній тѣла C является особенно удобной при опредѣленіи воздѣйствія пружины на тѣло. На самомъ дѣлѣ, пусть тѣло C въ нѣкоторый моментъ оказалось оттянутымъ отъ его первоначальнаго положенія C въ положеніе C_1 (фиг. 19, II). Все перемѣщеніе тѣла, равно какъ и измѣненіе длины пружины, можно оцѣнить перемѣщеніемъ выбранной нами точки B. Принимая, что теперь она перешла въ B_1, заключаемъ, что вытяжка пружины равна здѣсь OB_1, — длину эту мы обозначили на чертежѣ черезъ λ. Но изъ теоріи упругости извѣстно, что сопротивленіе пружины растяженію ея (или сжатію) пропорціонально вытяжкѣ ея (или сокращенію). Поэтому мы имѣемъ право сказать, что, при перемѣщеніи тѣла въ C_1, на него будетъ дѣйствовать сила сопротивленія пружины, равная $k\lambda$, гдѣ k есть нѣкоторая вполнѣ опредѣленная для данной

случая и постоянная при данныхъ условіяхъ величина, зависящая отъ размѣровъ пружины и свойствъ матеріала ея.

Подобнымъ же образомъ, при перемѣщеніи тѣла въ C_2 (фиг. 19, III), когда точка B передвинется влѣво на величину λ_1, сила сопротивленія пружины, претерпѣвающей здѣсь сжатіе λ_1, выразится черезъ $k\lambda_1$, гдѣ коэффиціентъ k остается тотъ же, что и при растяженіи пружины.

Такимъ образомъ, данное намъ тѣло C, при разнообразныхъ перемѣщеніяхъ его вдоль оси $x'x$, будетъ, въ каждомъ данномъ положеніи, испытывать со стороны пружины такое же воздѣйствіе, какъ если бы въ точкѣ O находился нѣкоторый центръ притяженій, дѣйствующій съ силой, пропорціональной разстоянію опредѣленной точки B этого тѣла отъ этого центра O, а пружины бы уже не было. Такое представленіе о существованіи подобнаго центра O освобождаетъ насъ отъ необходимости слѣдить за состояніемъ пружины AB въ разные моменты ея работы: какъ видимъ, достаточно подсчитать значеніе коэффиціента k и опредѣлить положеніе центра O, чтобы получить затѣмъ возможность учитывать дѣйствіе пружины на тѣло A въ каждый данный моментъ. Послѣ этихъ замѣчаній вернемся къ нашей задачѣ.

Замѣчая, что движеніе нашей точки, — это будетъ, какъ видимъ, точка, соотвѣтствующая упомянутой выше точкѣ B тѣла, — можетъ протекать

только вдоль оси $x'x$, заключаемъ, что рѣшеніе нашей задачи сводится къ интегрированію дифференціальнаго уравненія вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

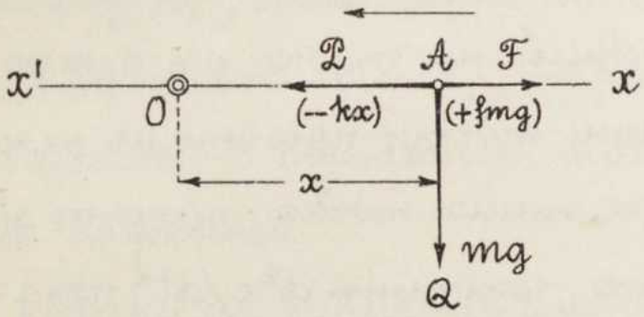
гдѣ d^2x/dt^2 есть ускореніе точки въ движеніи ея по оси $x'x$, а $\sum X$ — сумма проекцій на ту же ось всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на нашу точку; при этомъ замѣтимъ, что, въ виду того, что наша точка можетъ двигаться только по оси абсциссъ, ускореніе d^2x/dt^2 представляетъ собою въ то же время полное ускореніе точки. Напишемъ теперь уравненіе (b) въ раскрытомъ видѣ примѣнительно къ какому-либо случаю движенія точки, который мы примемъ за основной. За такой основной случай возьмемъ тотъ, когда наша точка, двигаясь влѣво, находится въ области положительныхъ абсциссъ; случай этотъ изображенъ на фиг. 20. Посмотримъ, прежде всего, какъ при этихъ условіяхъ выразится сумма, стоящая въ правой части ур-ія (b).

По условію, наша точка притягивается центромъ O съ силой, пропорціональной разстоянію d точки до центра притяженія O. Обозначивъ коэффиціентъ этой пропорціональности черезъ k, — этотъ коэффиціентъ, какъ извѣстно, имѣетъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ свое вполнѣ опредѣленное значеніе, — находимъ, что сила притяженія P точки, находящейся въ основномъ положеніи A (фиг. 20), выразится такъ:

$$P=-k.d=-k.OA=-k.(+x)=-kx \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Такъ какъ сила P направлена по оси x'x, то она спроектируется на эту ось цѣликомъ и цѣликомъ же войдетъ въ уравненіе (b).

Далѣе, на нашу точку все время дѣйствуетъ вѣсъ ея Q, — это есть постоянная сила, равная mg. Такъ какъ она направлена все время вертикально, а ось x'x горизонтальна, то проекція силы Q на эту ось оказывается равной нулю, вслѣдствіе чего въ уравненіе (b) эта сила не войдетъ совсѣмъ.



Фиг. 20.

Зато въ это уравненіе войдетъ вызываемая этой силой Q сила тренія F, направленная здѣсь горизонтально и выражаемая, вообще, соотношеніемъ

$$F = fQ = fmg \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Сила эта направлена всегда прямопротивоположно движенію точки и въ основномъ случаѣ (фиг. 20) выразится черезъ

$$F = + fmg \, , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

— знакъ плюсъ поставленъ потому, что сила F противодѣйствуетъ здѣсь уменьшенію разстоянія d. Сила F войдетъ въ уравненіе (b) цѣликомъ, такъ какъ въ данномъ случаѣ оказывается направленной постоянно по оси x'x.

Этими силами исчерпывается вся совокупность силъ, дѣйствующихъ на нашу точку, въ виду чего сумма ΣX, стоящая въ правой части основного уравненія

(б), выразится въ этомъ основномъ случаѣ такъ:

$$\Sigma X = \mathfrak{P} + \mathfrak{F} = -kx + fmg \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

Переходимъ теперь къ лѣвой части. Такъ какъ точка находится въ области положительныхъ абсциссъ, то производная, стоящая въ этой лѣвой части, выразится здѣсь черезъ $d^2(+x)/dt^2$, послѣ чего основное уравненіе (б) перепишется въ раскрытомъ видѣ такъ:

$$m\frac{d^2(+x)}{dt^2} = -kx + fmg$$

т.-е.

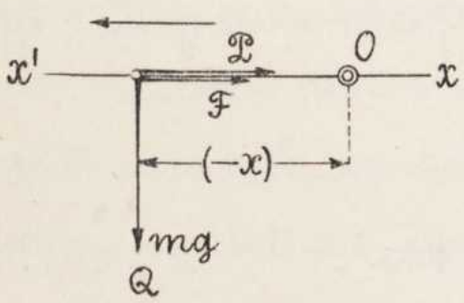
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fmg \quad \ldots\ldots \quad (1')$$

Раздѣливъ обѣ части уравненія на m и назвавъ частное k/m, ради сокращенія письма, опять черезъ k, дадимъ уравненію (1') видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fg^{*}) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

---

*) Замѣтимъ, что при движеніи точки влѣво уравненіе (1) сохраняетъ свой видъ и для отрицательныхъ абсциссъ ($x < 0$). Дѣйствительно, замѣчая, что при $x < 0$ сила $\mathfrak{P}$ выражается черезъ $\mathfrak{P} = -kd = -k(-x) = +kx$, а сила $\mathfrak{F}$, какъ способствующая теперь уменьшенію разстоянія d, будетъ взята съ минусомъ, перепишемъ уравненіе (б) для этой области такъ



Фиг. 21.

$$\frac{d^2(-x)}{dt^2} = +kx - fg,$$

что, очевидно, сведется къ тѣмъ же уравненіямъ (1') и (1).

Что касается движенія точки вправо, то оно, какъ это нетрудно провѣрить на дѣлѣ, опредѣляется уравненіемъ, нѣсколько отличнымъ отъ уравненія (1'). Объ этомъ обстоятельствѣ мы будемъ говорить подробно въ дальнѣйшемъ.

Таковъ законъ движенія нашей точки по оси x'x при наличности треніа. Если бы треніа не было, то членъ fmg отсутствовалъ бы, и для движенія безъ треніа мы получили бы уравненіе

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Съ движеніемъ, характеризуемымъ этимъ уравненіемъ (2), мы уже знакомы по курсу теоретической механики, почему на изслѣдованіи его здѣсь останавливаться не будемъ, тѣмъ болѣе, что ходъ его одинаковъ съ ходомъ рѣшенія аналогичнаго ему уравненія, получаемаго изъ ур-ія (1). Поэтому мы ограничимся приведеніемъ главнѣйшихъ выводовъ, къ которымъ приводитъ интеграція уравненія (2) движенія безъ Трен

Предположивъ, что въ начальномъ положеніи своемъ точка находится на разстояніи x_0 отъ центра притяженія, причемъ скорость ея въ этотъ моментъ равна нулю (начальная скорость $v_0 = 0$), находимъ, что движеніе точки характеризуется уравненіями:

$$x = x_0 \cos t\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots (g)$$

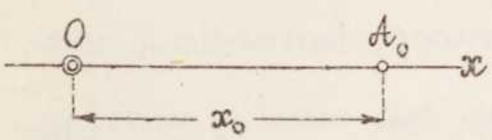
$$\frac{dx}{dt} = -x_0\sqrt{k} \sin t\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots (h)$$

Это есть такъ называемое гармоническое движеніе, при которомъ точка движется колебательнымъ движеніемъ съ періодомъ $\pi/\sqrt{k}$ по закону косинуса, отклоняясь отъ центра притяженія O по оси x'x на величину x_0 какъ въ одну сторону, такъ и въ

другую, такъ что вся амплитуда колебанія равна $2x_0$. Если мы представимъ себѣ точку, равномѣрно движущуюся по окружности радіуса x_0, то проекція ея на какой-либо неподвижный діаметръ будетъ двигаться по немуъ, повинуясь законамъ (2), (g) и (h).

Это колебательное движеніе точки по закону (2) будетъ продолжаться все время безъ перерывовъ и безъ измѣненія періода и амплитуды колебаній. Посмотримъ, какъ будетъ обстоять дѣло въ случаѣ движенія съ треніемъ, характеризуемаго уравненіемъ (1).

Установимъ, прежде всего, начальныя данныя; они опредѣляются изъ того условія, что въ начальномъ положеніи A_0, на разстояніи $OA_0 = x_0$ отъ центра O, наша точка скорости не имѣла совсѣмъ, — мы отводимъ нашу точку на разстояніе x_0 отъ центра O, задерживаемъ ее тамъ и въ нѣкоторый моментъ, отъ котораго и будемъ вести счетъ времени за это движеніе точки влѣво, отпускаемъ, предоставивъ точку самой себѣ. Въ переводѣ на алгебраическій языкъ это основное условіе выразится такъ: при $t = 0$ имѣемъ $x = x_0$ и $(dx/dt)_{t=0} = 0$.

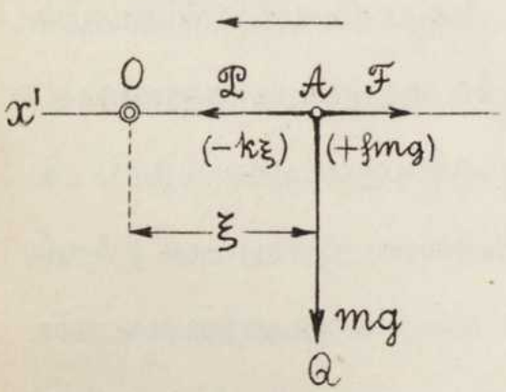


Фиг. 22.

Далѣе, въ виду наличности треніа, прежде всего возникаетъ вопросъ о существованіи при этомъ движеніи области треніа. Въ случаѣ движенія безъ треніа область равновѣсія представляется одной точкой O, — точка A можетъ находиться въ равновѣсіи лишь тогда, когда мы остановимъ ее въ моментъ прихода

ея въ точку O; будучи же остановленной, а затѣмъ освобожденной, внѣ точки O, она немедленно придетъ снова въ движеніе, и о покоѣ ея не можетъ быть затѣмъ и рѣчи. Посмотримъ, какъ будетъ обстоять дѣло въ случаѣ движенія со треніемъ.

Возьмемъ точку A на какомъ-нибудь разстояніи ξ отъ центра O (фиг. 23). Сила, притягивающая ее къ центру O, выразится здѣсь черезъ $(-k\xi)$. Взявъ точку въ этомъ положеніи, мы не можемъ заранѣе сказать, будетъ ли она находиться при этомъ въ покоѣ или въ движеніи; все будетъ зависѣть отъ того, которая изъ горизонтальныхъ силъ, дѣйствующихъ на нашу точку, будетъ имѣть здѣсь перевѣсъ. Если сила треніе F, направленная здѣсь противоположно силѣ притяженія P, будетъ (по абсолютной величинѣ) больше ея, то точка A, не имѣя возможности двигаться, будетъ оставаться въ равновѣсіи; если же меньше, то, навѣрное, будетъ въ движеніи. Случай равенства будетъ предѣльнымъ, — при немъ точка можетъ двигаться только при наличности начальной скорости; если же точка при этомъ скорости имѣть не будетъ, то она будетъ оставаться въ покоѣ. Итакъ, условіемъ равновѣсія точки является неравенство



Фиг. 23.

$$[k\xi] \geqq [fg] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Квадратныя скобки показываютъ, что величины,

въ нихъ заключенныя берутся въ ихъ абсолютныхъ значеніяхъ.

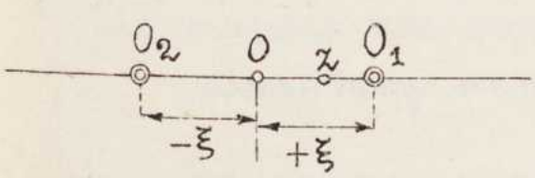
Такъ какъ факторы k, f и g суть величины постоянныя и положительныя, а перемѣнной является абсцисса ξ, то всегда можно подобрать такое ξ, чтобы это неравенство было удовлетворено. Отсюда заключаемъ, что положеній равновѣсія имѣется здѣсь безконечное множество; всѣ они характеризуются неравенствомъ

$$[\xi] \geqq \left[\frac{fg}{k}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Изъ этого соотношенія заключаемъ, что наибольшее отклоненіе $[\xi_0]$, при которомъ еще возможно равновѣсіе точки A, опредѣляется изъ уравненія

$$[\xi_0] = \left[\frac{fg}{k}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Всѣ $[\xi]$, большія $[\xi_0]$, будутъ давать движеніе точки A, а всѣ меньшія — покой ея, такъ что область равновѣсія будетъ имѣть своими границами точки O_1 и O_2 (фиг. 24), отстоящія каждая отъ центра O на ξ_0 и лежащія по разныя стороны отъ него. Такимъ образомъ, точка A, очутившись въ этой области безъ скорости, такъ въ покоѣ здѣсь и останется.



Фиг. 24.

Итакъ, область равновѣсія въ данномъ случаѣ существуетъ и представляется участкомъ O_1OO_2 (фиг. 24), крайнія точки котораго, O_1 и O_2, отстоятъ отъ начала O каждая на величину $\xi_0 = fg/k$. Размѣры этой обла-

сти ($O_1O_2 = 2\xi_0 = 2fg/k$) пропорціональны массѣ точки, коэффиціенту тренія f и обратно пропорціональна коэффиціенту притяженія k. Разсматривая случай движенія безъ тренія, какъ частный случай движенія съ треніемъ, когда $f = 0$, получимъ, что $2\xi_0 = 0$, и область равновѣсія сводится къ самой точкѣ O,— результатъ, извѣстный изъ предыдущаго.

Всѣ эти замѣчанія и заключенія по поводу области равновѣсія позволяютъ намъ значительно упростить разсмотрѣніе основного уравненія

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fg \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

путемъ замѣны перемѣннаго. Для этого во второй его части вынесемъ за скобки $(-k)$; тогда получимъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x - \frac{fg}{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Понятно, что для опредѣленія ξ_0, т.-е. абсциссы точки O_1, границы равновѣсія, достаточно приравнять d^2x/dt^2 нулю, т.-е. положить

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x - \frac{fg}{k}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (k)$$

Дѣйствительно, отсюда получаемъ уравненіе

$$x - \frac{fg}{k} = 0,$$

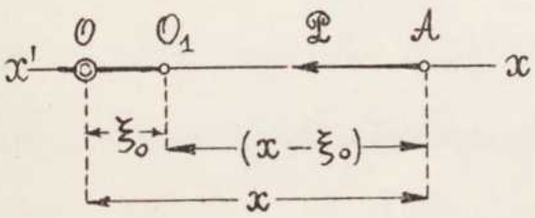
дающее какъ разъ значеніе ξ_0:

$$x = \frac{fg}{k} = \xi_0,$$

уже опредѣленное выше, по ур. (5). Имѣя его въ виду, можемъ дать основному уравненію (1) видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - \xi_0), \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

показывающій, что наша точка двигается точно такъ же, какъ двигалась бы она, если бы треніе исчезло, а центръ притяженія, находившійся раньше въ O, оказался перенесеннымъ съ этого стараго мѣста на новое O_1, отстоящее отъ O на разстояніи ξ_0, — иными словами, если бы треніе исчезло, а центръ притяженія перешелъ въ правую граничную точку области равновѣсія, O_1 (фиг. 25).



Фиг. 25.

Дѣйствительно, при центрѣ O_1 сила притяженія имъ нашей точки выразится такъ:

$$P = -k \cdot O_1 A = -k(x - \xi_0),$$

вслѣдствіе чего уравненіе движенія безъ треніе будетъ имѣть видъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - \xi_0),$$

— мы получаемъ то же уравненіе (7). Проинтегрируемъ его.

Это уравненіе можно упростить, перенося начало координатъ въ точку O_1, но оставляя ось $x'x$ прежней. Обозначая новыя абсциссы прописными X, имѣемъ основное уравненіе такого перехода

$$X = x - \xi_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (l)$$

Замѣчая теперь, что

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2(x - \xi_0)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ldots\ldots (m)$$

можемъ дать уравненію (7) видъ

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

причемъ коэффиціентъ k сохраняетъ то же значеніе, какое онъ имѣлъ какъ въ основномъ уравненіи (1), такъ и

въ уравненіи (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Начальныя данныя представляются условіемъ, по которому при $t=0$ мы имѣли $x = x_0$ и $(dx/dt)_{t=0}=0$. Примѣнительно къ новому перемѣнному X условіе это выразится такъ: при $t=0$ новая начальная абсцисса, которую мы обозначимъ черезъ X_0, выразится, въ виду соотношенія (l), черезъ

$$(X)_{t=0} = X_0 = x_0 - \xi_0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

а начальная скорость, попрежнему, будетъ равна нулю:

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

ибо, въ виду (l),

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt}.$$

Послѣ установленія этихъ начальныхъ данныхъ примѣнительно къ новой системѣ координатъ, перейдемъ къ самому процессу интегрированія уравненія (8)

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -kX. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Самый видъ его показываетъ, что X долженъ быть такой функціей отъ t, которая, будучи продифференцирована два раза, принимаетъ, согласно (8), видъ, подобный начальному; иными словами, если

$$x = \varphi(t),$$

то

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t) = -k\varphi(t).$$

Такими свойствами, какъ извѣстно, обладаютъ тригонометрическія функціи sin и cos, ибо онѣ, будучи при

дифференцированы два раза, дают опять sin и cos. Поэтому вполне позволительно предположить, что общий интеграл уравнения (8) имеет вид:

$$x = a\cos\beta t + b\sin\beta t, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

где постоянные коэффициенты a, b и β подлежат определению на основании начальных данных, выше,— см. соотношения (n) и (p),— нами установленных. Это определение удобнее всего начать с рассмотрения первой производной dx/dt при начальных условиях движения. Из (9) имеем выражение ея

$$\frac{dx}{dt} = -a\beta\sin\beta t + b\beta\cos\beta t \quad \ldots\ldots \quad (q)$$

Замечая, что, в силу соотношения (p), это выражение при $t = 0$ должно обращаться в нуль, находим, после подстановки $t = 0$, соотношение

$$0 = -a\beta\sin 0 + b\beta\cos 0,$$

т.-е. соотношение

$$b\beta = 0,$$

а так как фактор β нулем быть не может, ибо в таком случае, в виду (9), переменное x оказалось бы равным a, т.-е. постоянным, то остается установить, что

$$b = 0.$$

В виду этого общий интеграл (9) значительно упрощается, принимая вид

$$x = a\cos\beta t \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Первая производная, выражаемая соотношением (q), принимает теперь вид:

$$\frac{dx}{dt} = -a\beta \sin \beta t, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

такъ что вторая производная выразится черезъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\beta^2 \cos \beta t. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Такъ какъ, согласно основному уравненію (8),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

то соотношенія (12) и (10) даютъ возможность установить новое соотношеніе

$$-a\beta^2 \cos \beta t = -ak \cos \beta t,$$

переходящее, послѣ сокращенія на $(-a\cos\beta t)$, въ уравненіе

$$\beta^2 = k,$$

откуда опредѣляется второй неизвѣстный коэф-тъ

$$\beta = +\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Мы поставили передъ корнемъ знакъ плюсъ потому, что, по условію, β есть величина положительная. Въ видуу (13) общій интегралъ (10) принимаетъ видъ:

$$x = a \cos t\sqrt{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Единственный остающійся здѣсь неизвѣстнымъ факторъ a можно опредѣлить помощью начальнаго условія (n), въ силу котораго при $t=0$ абсцисса x принимаетъ значеніе x_0. Поэтому, полагая въ (14) $t=0$, получаемъ уравненіе

$$a \cos 0 = x_0,$$

такъ что коэффиціентъ a оказывается равнымъ какъ разъ x_0:

$$a = x_0 = x_0 - \xi_0.$$

Въ видуу этого основныя уравненія, опредѣляющія

всѣ обстоятельства разсматриваемаго движенія, въ окончательномъ видѣ представятся такъ:

$$x = x_0 \cos t\sqrt{k}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\frac{dx}{dt} = -x_0\sqrt{k}\,\sin t\sqrt{k}, \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx_0\cos t\sqrt{k} = -kx \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Такова окончательная форма уравненій даннаго движенія. Изслѣдуемъ ихъ. Прежде всего, посмотримъ, черезъ сколько времени послѣ начала движенія точка пройдетъ черезъ начало O_1; иными словами, посмотримъ, при какомъ значеніи t абсцисса x обращается въ нуль. Соотношеніе (15), представляющее собою интегралъ даннаго намъ уравненія (8) въ окончательномъ его (интеграла) видѣ, даетъ для этого случая уравненіе:

$$0 = x_0 \cos t\sqrt{k}.$$

Такъ какъ множитель x_0 отличенъ, вообще говоря, отъ нуля, то для опредѣленія для искомаго времени t_m уравненіе

$$\cos t_m\sqrt{k} = 0,$$

что даетъ

$$t_m\sqrt{k} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$t_m = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

что показываетъ, что наша точка пройдетъ черезъ начало O_1 черезъ промежутокъ времени $\pi/2\sqrt{k}$, считая съ момента начала движенія. Легко, далѣе, убѣдиться, что въ моментъ этого прохожденія черезъ начало O_1,

скорость dx/dt точки достигает своего максимума. Действительно, в этот момент абсцисса x обращается в нуль, вследствие чего, согласно (8), обращается здесь в нуль и вторая производная d^2x/dt^2, откуда, в свою очередь, следует, что первая производная, dx/dt, переходит в этот момент через свой максимум. Таким образом, максимальное значение скорости точки получим, подставив в общее выражение скоростей (16) значение t, соответствующее моменту перехода точки через начало O_1 и выраженное соотношением (18). Тогда найдем

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{max} = v_{max} = -x_0\sqrt{k}\,\sin\frac{\pi\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = -x_0\sqrt{k}\sin\pi,$$

откуда окончательно

$$v_{max} = -x_0\sqrt{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Итак, в момент перехода через граничную точку O_1 (фиг. 26) области равновесия точка обладает максимальной скоростью v_{max}, выражаемой соотношением (19). Перейдя эту границу, точка, понятно, будет продолжать двигаться влево, но скорость ея при этом будет, очевидно, убывать, и чтобы определить момент, в который она обратится в нуль, — в этот момент точка, значит, остановится, — нужно приравнять общее выражение скорости, (16), нулю. Таким путем для определения искомого промежутка времени t_1 получаем уравнение

$$\sin t_1\sqrt{k} = 0,$$

где множитель $x_0\sqrt{k}$ отличен от нуля. Отсюда

находимъ

$$t_1\sqrt{k} = \pi,$$

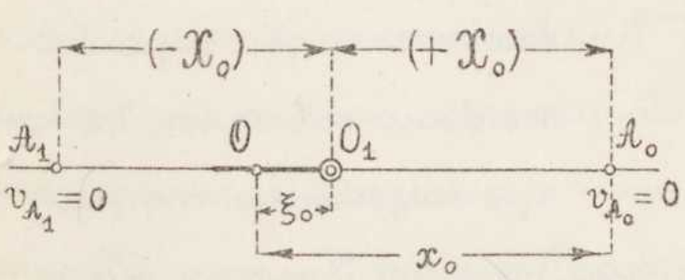
и

$$t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{k}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Въ этотъ моментъ точка отойдетъ влѣво отъ границы O_1, своего центра качанія, на разстояніе

$$x_1 = x_0 \cos\frac{\pi\sqrt{k}}{\sqrt{k}} = x_0 \cos\pi = -x_0,$$

т.-е. въ разсматриваемый моментъ $t_1 = \pi/\sqrt{k}$ точка очутится на разстояніи x_0 влѣво отъ O_1 и, значитъ, окажется въ положеніи A_1, симметричномъ съ начальнымъ A_0 по отношенію къ центру симметріи, — началу O_1, — (фиг. 26), причемъ потеряетъ всю свою скорость,



Фиг. 26.

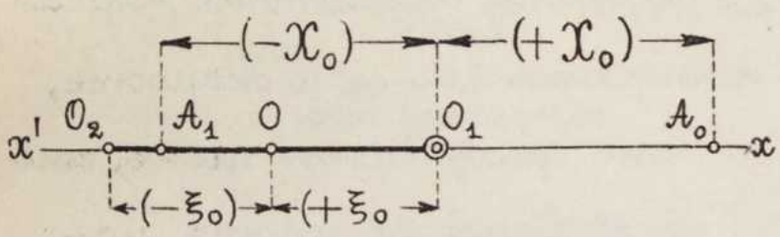
что указываетъ намъ, что она здѣсь въ этотъ моментъ остановится, и, значитъ, это движеніе нашей точки влѣво будетъ первымъ колебаніемъ ея, со временемъ колебанія, равнымъ $\pi/\sqrt{k}$ и амплитудой, равной $2X_0 = 2(x_0 - \xi_0) = 2x_0 - 2\xi_0$.

Если бы треніе не было, то амплитуда этого колебанія была бы равна $2x_0$, а время его ... $\pi/\sqrt{k}$. Отсюда можно заключить, что вліяніе треніе сказалось на этомъ первомъ колебаніи тѣмъ, что амплитуда $2x_0$, которая получилась бы при отсутствіи треніе, уменьшилась изъ-за него на $2\xi_0$, т.-е. на величину области равновѣсія. Что же касается времени колебанія, то вліянія на него треніе не имѣетъ никакого,—

это время остается тѣмъ же, $\pi/\sqrt{k}$, какимъ оно было бы въ отсутствіе трения.

Въ своемъ крайнемъ положеніи A_1 наша точка скорости не имѣетъ: $v_{A_1}=0$, подобно тому, какъ не имѣла она скорости и въ положеніи A_0: $v_{A_0}=0$. Если бы, поэтому, оказалось, что A_1 приходится внутри области равновѣсія, то наша точка, достигнувъ A_1, такъ въ этомъ положеніи и осталась бы, и все движеніе ограничилось бы однимъ первымъ колебаніемъ. Возможность такого исхода аналитически выражается такъ:

Первое колебаніе точки можетъ быть разсматриваемо совершающимся около центра O_1 такъ, какъ если бы трения не было совсѣмъ; въ концѣ колебанія точка удаляется влѣво отъ O_1 на разстояніе X_0 отъ него (фиг. 27). Условіемъ того, чтобы точка могла попасть внутрь области равновѣсія, является, очевидно, неравенство



Фиг. 27.

$$X_0 \gtrless O_1O_2,$$

т.-е.

$$X_0 \gtrless 2\xi_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

а такъ какъ

$$X_0 = x_0 - \xi_0,$$

то это неравенство (r) переходитъ въ неравенство

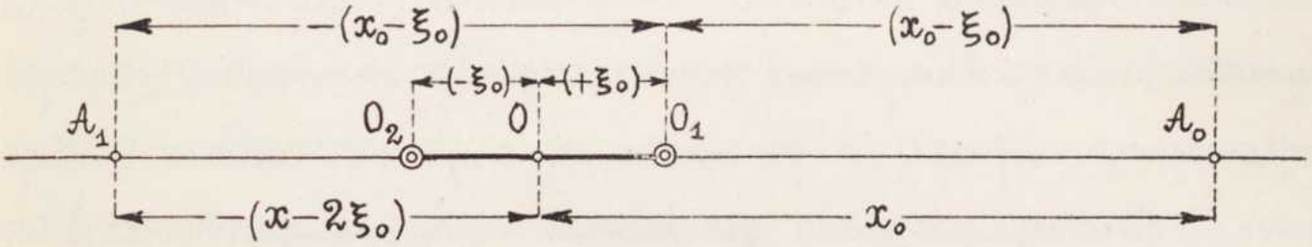
$$x_0 - \xi_0 \gtrless 2\xi_0,$$

т.-е. въ неравенство

$$x_0 \gtrless 3\xi_0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

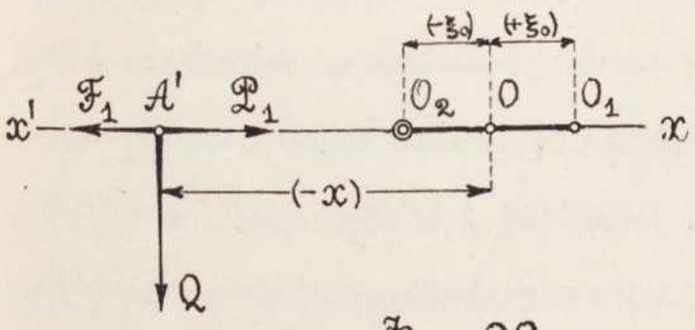
Итакъ, если въ начальномъ своемъ положеніи A_0 точка отстоитъ отъ начала O бліже, чѣмъ на полуторную величину области равновѣсія, то она придетъ въ равновѣсіе немедленно по совершеніи перваго своего колебанія.

Но положимъ, что $x_0 > 3\xi_0$, такъ что точка A_1 оказывается лежащей внѣ области равновѣсія (фиг. 28). Въ такомъ случаѣ, остановившись на мгновеніе въ этомъ



Фиг. 28.

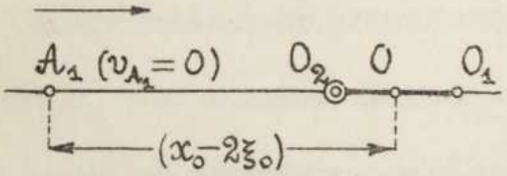
своемъ крайнемъ лѣвомъ положеніи A_1, наша точка, будучи, попрежнему, притягиваема центромъ O, повернетъ назадъ, къ O, и опять, въ каждый данный моментъ этого движенія, будетъ находиться подъ воздѣйствіемъ силы притяженія P_1 и силы тренія F_1, изъ коихъ первая будетъ все время стремиться уменьшать разстояніе OA_1, а вторая будетъ или помогать этому или препятствовать, что будетъ зависѣть отъ того, въ области какихъ абсциссъ будетъ двигаться въ разсматриваемый моментъ наша точка.



Фиг. 29.

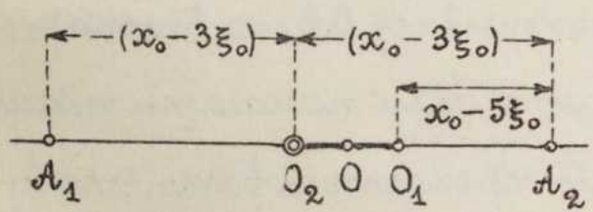
Нетрудно сообразить, что здѣсь мы имѣемъ задачу, только что разсмотрѣнную нами, но лишь при начальныхъ данныхъ по другую сторону центра притяженія O, сравнительно съ прежними, и формулировка этой но-

вой задачи можетъ быть выполнена такъ: по лѣвую сторону центра O, на разстояніи $(x_0 - 2\xi_0)$ отъ него (фиг. 30), внѣ границы O_2 области равновѣсія находится точка A_1 безъ начальной скорости, подверженная дѣйствію силы притяженія ея центромъ O и силы тренія $F = fmg$.



Фиг. 30.

Легко видѣть, что это есть наша основная задача, но лишь, такъ сказать, перенесенная влѣво, по другую сторону центра O, а въ такомъ случаѣ можно утверждать, что для этого движенія сохраняютъ силу всѣ заключенія, полученныя нами при разсмотрѣніи основной задачи, но также перенесенныя влѣво; въ виду этого, не обращаясь къ новымъ вычисленіямъ, какъ не могущимъ дать ничего отличнаго отъ того, что мы уже получили, скажемъ, что наша точка совершитъ теперь колебаніе вправо около своего центра O_2, — ближайшей къ A_1 границы равновѣсія, — съ амплитудой A_1A_2, равной двойному начальному удаленію точки отъ O_2, т.-е. $2(x_0 - 3\xi_0)$, и временемъ $\pi/\sqrt{k}$ (фиг. 31). Если въ концѣ этого колебанія точка окажется внутри области равновѣсія O_2O_1, то это второе колебаніе будетъ, въ то же время, и послѣднимъ; это случится, очевидно, при $x_0 - 3\xi_0 \leqq 2\xi_0$, т.-е. при $x_0 \leqq 5\xi_0$. Если же въ концѣ колебанія точка окажется внѣ области равновѣсія, что будетъ при $x_0 > 5\xi_0$, то она, оста-



Фиг. 31.

новившись въ A_2, повернетъ опять назадъ, къ O, и совершитъ новое, третье, колебаніе и т. д. Легко убѣдиться, что амплитуды колебаній будутъ все время убывать, составляя ариѳметическую прогрессію:

$$2(x_0-\xi_0),\ 2(x_0-3\xi_0),\ 2(x_0-5\xi_0),\ \ldots,\ 2[x_0-(2n+1)\xi_0]$$

съ разностью $4\xi_0$, времена же колебаній мѣняться не будутъ, оставаясь каждое равнымъ $\pi/\sqrt{k}$.

Итакъ, движеніе нашей точки будетъ совершаться слѣдующимъ образомъ: первое свое колебаніе (влѣво) точка совершаетъ около центра O_1, отходя отъ него въ концѣ этого колебанія на разстояніе O_1A_1, равное разстоянію начальной точки A_0 отъ правой граничной точки O_1, т.-е. отъ перваго центра колебаній. Слѣдующее свое колебаніе, вправо, точка совершитъ уже около лѣвой граничной точки O_2, отходя въ концѣ этого втораго колебанія отъ O_2 на разстояніе O_2A_2, равное O_2A_1. Третье колебаніе, влѣво, совершится снова около центра O_1,—правой граничной точки; четвертое—около лѣвой граничной точки O_2, и т. д. Такимъ образомъ, колебанія будутъ происходить попеременно то около одной граничной точки, то около другой, въ результатѣ чего, какъ было показано, получается неуклонное уменьшеніе амплитуды колебаній, которое будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока крайняя точка какого-либо колебанія не попадетъ внутрь области равновѣсія,—тогда точка успокоится.

Легко провѣрить, что, если начальная абсцисса x_0

выражается въ функціи ξ_0 формулами

$$x_0 = (2n-1)\xi_0 + \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

или

$$x_0 = 2n\xi_0 + \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

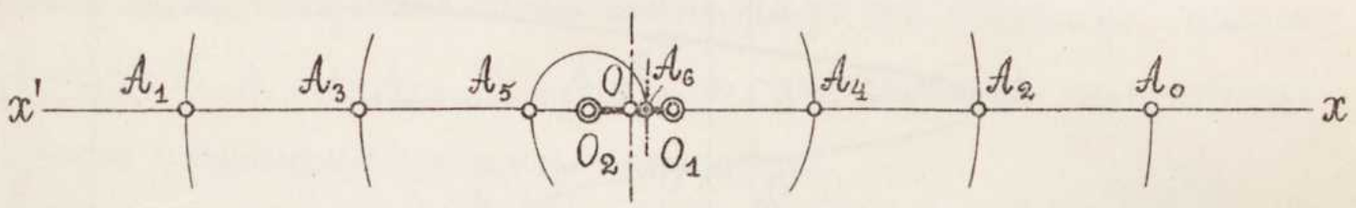
гдѣ $\alpha < \xi_0$, то число колебаній будетъ равно n.

Слѣдуетъ замѣтить тотъ фактъ, что времена колебаній никакихъ измѣненій не претерпятъ, — время каждаго колебанія остается равнымъ $\pi/\sqrt{k}$, — вслѣдствіе чего можемъ установить, что на время колебаній треніе не вліяетъ, откуда, въ свою очередь, заключаемъ, что скорости каждаго колебанія постепенно затухаютъ, — это становится очевиднымъ, если мы вспомнимъ, что амплитуды колебаній неуклонно убываютъ, а между тѣмъ на прохожденіе каждой требуется одно и то же время; ясно, что выполненіе колебаній совершается съ постепенно уменьшающимися скоростями. Такимъ образомъ, затуханіе колебаній обусловливается не только уменьшеніемъ амплитудъ колебаній, но и постепеннымъ уменьшеніемъ скоростей, въ виду чего оно протекаетъ весьма плавно.

Слѣдуетъ отмѣтить еще то обстоятельство, что время, протекающее отъ начала колебаній до ихъ совершеннаго прекращенія, всегда будетъ кратнымъ времени одного колебанія, — точка всегда совершаетъ цѣлое число колебаній, а не дробное, какъ иногда думаютъ: того обстоятельства, что точка проходитъ черезъ область равновѣсія съ нѣкоторой убывающей скоростью, отличной отъ нуля, еще мало для того, чтобы она могла въ этой области остановиться и, такимъ образомъ, прекратить свое движеніе; для этого нужно, чтобы она оказалась въ этой области какъ разъ въ тотъ моментъ

когда скорость ея обращается въ нуль;—тогда, и только тогда, она, дѣйствительно, такъ тамъ и останется; а такъ какъ обращеніе въ нуль скорости точки можетъ имѣть мѣсто лишь въ концѣ каждаго колебанія, то мы и заключаемъ, вообще, что отъ начала колебаній до конца ихъ точка совершитъ цѣлое число колебаній.

Имѣя въ виду все сказанное, весьма легко графически найти положеніе равновѣсія данной точки и число колебаній ея по даннымъ начальному положенію точки и размѣрамъ области равновѣсія, въ предположеніи, что начальная скорость точки равна нулю. Такъ, пусть въ начальный моментъ точка безъ начальной скорости находится въ A_0, а граничными точками области равновѣсія являются точки O_1 и O_2 (фиг. 32); область равновѣсія очерчена болѣе толстой чертой. Для нахожденія положенія точки въ моментъ прекращенія колебаній поступаемъ, согласно полученнымъ раньше заключеніямъ, такъ:

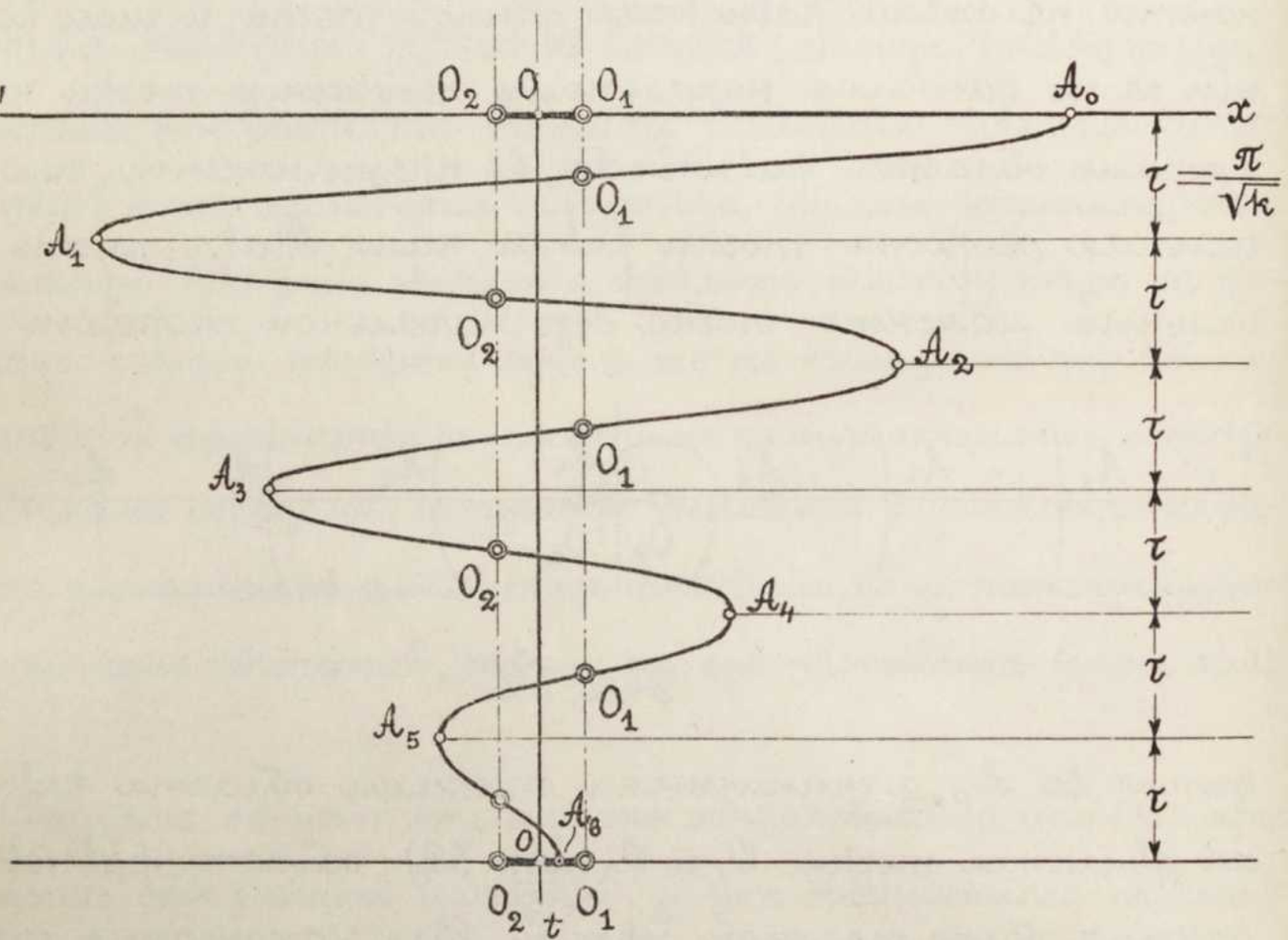


Фиг. 32.

Изъ ближайшей къ A_0 граничной точки области равновѣсія, O_1, какъ изъ центра, засѣкаемъ дугу радіусомъ O_1A_0,—получимъ точку A_1, конечную точку перваго колебанія. Далѣе, изъ центра O_2 описываемъ дугу радіусомъ O_2A_1,—получаемъ конечную точку A_2 втораго колебанія. Теперь снова изъ центра O_1 описываемъ дугу радіусомъ O_1A_2,—получимъ

крайнюю точку A_3 третьяго колебанія, и т. д. Въ случаѣ, изображенномъ на чертежѣ, точка попадаетъ въ концѣ шестого колебанія въ точку A_6 области равновѣсія, гдѣ, затѣмъ, и остается въ равновѣсіи.

Весьма наглядно все происходящее здѣсь иллюстрируется діаграммой, изображенной на фиг. 33. Откладывая по оси $0A_0$, въ ту и другую сторону, амплитуды колебаній, а по оси $0t$ — вре-



Фиг. 33.

мена, получимъ для случая, изображеннаго на предыдущей фигурѣ, синусоидальную затухающую кривую $A_0A_1 \ldots A_6$, весьма наглядно рисующую убываніе амплитудъ и затуханіе колебаній. Мы видимъ, что за время τ перваго колебанія, гдѣ $\tau = \pi/\sqrt{k}$, точка, качнувшись относительно O_1, придетъ въ A_1, откуда, повернувъ назадъ и качнувшись уже около O_2, — центры качаній помѣчены отдѣльно для каждаго участка

кривой, изображающаго отдѣльное колебаніе, — дойдетъ уже только до A_2, подавшись, такимъ образомъ, ближе къ оси Ot на $4\xi_0$, т.-е. на $2\,O_1O_2$. Слѣдующее качаніе совершится около O_1, причемъ въ концѣ его точка остановится еще ближе къ оси Ot, въ точкѣ A_3, и т. д. Такое убываніе амплитудъ будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока точка въ концѣ котораго-нибудь изъ своихъ колебаній (у насъ въ концѣ 6-го) не окажется въ области равновѣсія, гдѣ и останется, — на чертежѣ наша точка изображена успокоившейся въ положеніи A_6.

Замѣчая, что каждое отдѣльное колебаніе представляетъ собою полнаго гармоническаго колебанія съ періодомъ 2τ и съ мѣняющейся отъ колебанія къ колебанію амплитудой, то кривая A_0A_6 представляетъ собою рядъ сочлененныхъ полусинусоидъ: A_0A_1, A_1A_2, ..., A_5A_6, съ одинаковыми полупериодами, но съ убывающими амплитудами.

Отмѣтимъ кстати, что кривую A_0A_6 можно получить непосредственно помощью самого тѣла; для этого достаточно, снабдивъ его карандашемъ, дать ему возможность записать свое движеніе на бумагѣ, равномѣрно продвигающейся мимо него по направленію tO. Такимъ путемъ легко опредѣлить графически величину области равновѣсія путемъ прямого измѣренія амплитудъ послѣдовательныхъ колебаній, — мы знаемъ, что она будетъ равна половинѣ разности амплитудъ двухъ смежныхъ колебаній; съ другой стороны, подсчитавъ заранѣе ее теоретически, можно такимъ путемъ опредѣлить коэффиціентъ треніа f.

Въ заключеніе этого нашего аналитическаго изслѣдованія, по необходимости, весьма краткаго и касающагося лишь главнѣйшихъ особенностей раз-

сматриваемаго движенія, отмѣтимъ, что въ случаѣ, если бы изученіе колебаній мы пожелали вести детально, изслѣдуя каждое колебаніе отдѣльно и, притомъ, аналитическимъ же путемъ, — если бы, напримѣръ, требовалось найти законъ убыванія максимальныхъ скоростей и т. п., — то пришлось бы обратиться къ написанію соотвѣтствующихъ уравненій, рѣшеніе коихъ и дастъ намъ возможность подмѣтить эти законы, а затѣмъ и сформулировать ихъ. Писать такія уравненія для движенія влѣво мы умѣемъ; посмотримъ, какой видъ они имѣютъ для движенія вправо, для чего мы разсмотримъ второе колебаніе, — аналогично ему будутъ выражены уравненіями всѣ остальныя четныя колебанія, подобно тому, какъ аналогично первому выразятся всѣ нечетныя колебанія.

Это второе колебаніе начинается съ того момента, когда точка, достигнувъ положенія A_1 (фиг. 28 на стр. 73), повернетъ назадъ, къ O. Пока точка остается въ области отрицательныхъ абсциссъ, имѣемъ, согласно фиг. 29, для силы притяженія $\mathfrak{P}_1$ выраженіе

$$\mathfrak{P}_1 = -kd = -k.OA' = -k.(-x) = +kx;$$

затѣмъ, для силы тренія $\mathfrak{F}_1$ имѣемъ выраженіе

$$\mathfrak{F}_1 = +fmg.$$

Что же касается ускоренія, то оно выразится для этой области черезъ

$$\frac{d^2(-x)}{dt^2},$$

такъ что уравненіе движенія напишется такъ:

$$\frac{d^2(-x)}{dt^2} = +kx + fg$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x + \frac{fg}{k}\right).$$

Легко убѣдиться, что это уравненіе пригодно и при движеніи точки вправо въ области положительныхъ абсциссъ. Начальныя данныя даются условіемъ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

и

$$x_{t=0} = -(x_0 - 2\xi_0).$$

Сейчасъ же опредѣлится положеніе лѣвой граничной точки O_2 области равновѣсія изъ уравненія

$$x + \frac{fg}{k} = 0,$$

откуда

$$x = -\xi_0 = -\frac{fg}{k},$$

и уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + \xi_0).$$

Полагая $x+\xi_0=X$, находимъ новое ур-іе $\frac{d^2X}{dt^2}=-kX$, при чемъ начальныя данныя будутъ таковы: $(dX/dt)_{t=0}=0$ и $(X)_{t=0}=-(x_0-3\xi_0)=-X_1$. Интегралъ полученнаго ур-ія имѣетъ видъ: $X=-X_1\cos t\sqrt{k}$. Періодъ колебанія равенъ $t\sqrt{k}$, т.-е. періоду перваго колебанія. Максимальная скорость v''_{max}, присущая точкѣ въ моментъ прохожденія черезъ O_2, будетъ равна

$$v''_{max}=X_1\sqrt{k}=(X_0-2\xi_0)\sqrt{k}=v'_{max}-2\xi_0\sqrt{k}=\sqrt{k}(x_0-3\xi_0),$$

гдѣ черезъ v'_{max} обозначена максимальная скорость перваго колебанія, равная $X_0\sqrt{k}$.

Нетрудно выполнить подобнымъ же образомъ изслѣдованіе всѣхъ слѣдующихъ колебаній и дать общія выраженія какъ для ихъ дифференціальныхъ уравненій, такъ и для общихъ интеграловъ ихъ и всѣхъ, вообще, факторовъ даннаго движенія. Такъ, напримѣръ, окажется, что общее выраженіе для максимальной скорости n-го колебанія, при прохожденіи черезъ O_2, имѣетъ видъ

$$v^{(n)}_{max}=\sqrt{k}\,[x_0-(2n-1)\xi_0],$$

и т.д. Вопросъ, такимъ образомъ, исчерпывается вполнѣ.

Весьма простое и наглядное рѣшеніе поставленной задачи можетъ быть получено графическимъ путемъ, помощью примѣненія къ движенію нашей точки теоремы живыхъ силъ, извѣстной изъ аналитической механики и говорящей намъ, что для системы, связи которой явно отъ времени не зависятъ, сумма работъ всѣхъ силъ, дѣйствовавшихъ на точку въ продолженіе извѣстнаго времени, равна приращенію живой силы системы, имѣющему мѣсто за то же время. Наша система состоитъ всего лишь изъ одной матеріальной точки, двигающейся подъ вліяніемъ нѣкотораго центра притяженія по прямой, черезъ него проходящей. Связи, наложенныя на точку, состоятъ въ томъ, что точка принуждена двигаться постоянно по этой прямой, и, значитъ, отъ времени не зависятъ, въ виду чего теорема живыхъ силъ оказывается приложимой здѣсь вполнѣ. Что касается силъ, воздѣйствующихъ на точку при движеніи ея по прямой, то это будутъ: 1) сила притяженія, по условію, пропорціональная разстоянію d точки отъ центра, и

2) сила трения, не мѣняющая своей величины, но мѣняющая знакъ при каждой перемѣнѣ направленія движенія точки. Съ вопросомъ о силахъ мы уже знакомы,—см. стр. 51, 52, 58 и др.

Использованіе теоремы живыхъ силъ въ цѣляхъ графическаго изслѣдованія движеній, подобныхъ нашему, можетъ быть выполнено на основаніи слѣдующихъ простыхъ соображеній:

Пусть наша точка, при своемъ движеніи, подвергается воздѣйствію на нее силъ, величина и направленіе коихъ зависятъ лишь отъ положенія точки на ея траекторіи. Таковъ, напримѣръ, случай движенія поршня паровой машины, гдѣ, при данномъ направленіи хода поршня, давленіе на поршень въ каждой точкѣ этого хода представляется функціей отклоненія поршня отъ соотвѣтствующаго начальнаго (мертваго) положенія. Подобнымъ же образомъ, давленіе, передаваемое отъ поршня на палецъ кривошипа, представляется функціей угла отклоненія кривошипа отъ нѣкотораго начальнаго его положенія. Взятый нами случай движенія точки подъ это условіе, очевидно, подходитъ вполнѣ.

Условившись обозначать силы, дѣйствующія на точку, черезъ P, проекціи элементарныхъ перемѣщеній ds точки на направленія этихъ силъ — черезъ dp, массу точки — черезъ m, а начальную и конечную скорость ея при прохожденіи какого-либо пути s — черезъ v_0 и v_1, можемъ изобразить алгебраически теорему живыхъ силъ въ видѣ уравненія

$$\int P\,dp = \tfrac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Такъ какъ въ дальнѣйшемъ мы будемъ разбирать лишь такіе случаи движенія, когда точка перемѣщается по нѣкоторой прямой, по которой, въ то же время, проявляютъ свое дѣйствіе и силы, воздѣйствующія на точку, то проекціи dp совпадутъ въ такомъ случаѣ съ самими перемѣщеніями, въ силу чего, обозначая дѣйствительныя перемѣщенія точки по прямой не черезъ ds, а, въ виду послѣдующаго, черезъ dx, можемъ дать ур-ію (24) видъ:

$$\int P\,dx = \tfrac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Интегралъ $\int P dx$, стоящій въ лѣвой части этого уравненія, по аналогіи съ интеграломъ $\int y\,dx$, можетъ быть изображенъ въ видѣ нѣкоторой площади въ такой системѣ координатъ, гдѣ осью абсциссъ служитъ прямая, по которой перемѣщается наша точка, а ординатами служатъ силы P, воздѣйствующія на точку при движеніи ея по этой прямой. Такой именно системой мы и будемъ пользоваться въ дальнѣйшемъ. При этомъ, ради опредѣленности геометрическихъ разсужденій, будемъ изобра-

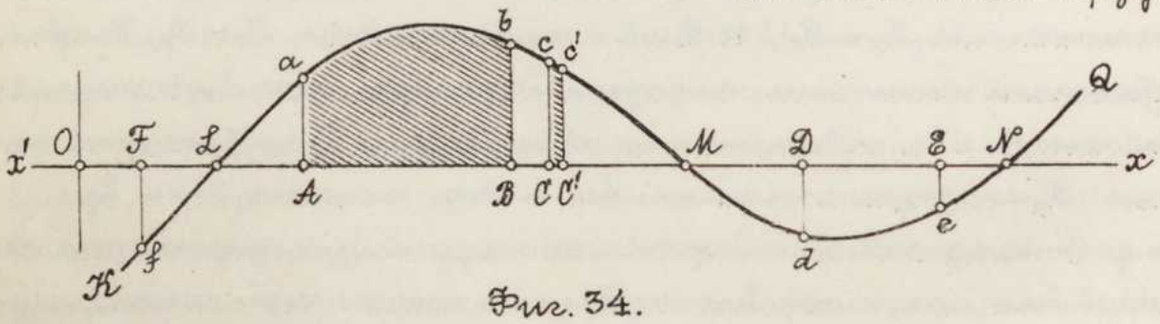
жать силы P, какъ векторы, отмѣчая то или другое направленіе ихъ отложеніемъ этихъ векторовъ по ту или другую сторону оси x. Условимся откладывать вверхъ отъ оси x векторы, изображающіе силы, направленныя вправо, въ положительную сторону оси абсциссъ, причемъ будемъ считать ихъ положительными; векторы же, изображающіе силы, направленныя влѣво, въ отрицательную сторону оси абсциссъ, будемъ откладывать внизъ отъ оси абсциссъ и будемъ считать ихъ, какъ и силы, отрицательными. Что касается выбора начала, то онъ будетъ обусловливаться каждый разъ условіями даннаго случая; устанавливать что-либо здѣсь невозможно.

Предположимъ теперь, что на нашу точку, при движеніи ея по оси $x'x$, въ моментъ перехода черезъ F (фиг. 34 на стр. 84) дѣйствуетъ отрицательная сила P_F, въ точкахъ L, M и N на нее не дѣйствуютъ никакія силы, въ точкахъ A и B — положительныя силы P_A и P_B, въ D и E — отрицательныя P_D и P_E. Условимся теперь изображать наши силы отрѣзками прямой, какъ векторами, въ нѣкоторомъ масштабѣ μ, и пусть, такимъ образомъ, сила P_F изображается отрѣзкомъ Ff, сила P_A — отрѣзкомъ съ длиной Aa, и т. д., такъ что $Ff = \mu . P_F$, $Aa = \mu . P_A$, и т. д. Откладывая эти отрѣзки въ надлежащія стороны отъ оси x, согласно направленію силъ, и соединяя концы ихъ непрерывной линіей, получимъ такимъ образомъ нѣкоторую кривую KQ, весьма наглядно рисующую ходъ измѣненія силъ, дѣйствующихъ на нашу точку при движеніи ея по оси. Посмотримъ теперь, какими свойствами обладаетъ эта силовая кривая KQ.

Взявъ на оси абсциссъ какія-либо двѣ смежныя точки C и C_1, такъ что $CC' = dx$, и проведя ординаты Cc и $C'c'$, мы выдѣлимъ такимъ образомъ изъ всей площади, ограниченной кривой KQ и осью абсциссъ, элементарную площадку $Ccc'C'$, съ ошибкой до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ могущую быть принятой за прямоугольникъ съ основаніемъ $CC' = dx$ и высотой $Cc = P_c = P$. Иными словами, силы, дѣйствующія на точку на безконечно-маломъ пути $CC' = dx$, можно принять не мѣняющими своей величины, — постоянными, — и остающимися все время равными $P_c = P$. Въ такомъ случаѣ эта площадка можетъ быть выражена произведеніемъ Cc на CC', т.-е. $P\,dx$, и, слѣдовательно, выражаетъ собою работу силы P на пути dx. Дѣлая такое допущеніе о постоянствѣ силы P, мы, конечно, дѣлаемъ нѣкоторую ошибку, но такъ какъ она опускается лишь безконечно-малыми высшихъ порядковъ и обращается въ нуль въ предѣлѣ, то мы ею пренебрегаемъ.

Итакъ, каждая элементарная площадка типа Cc' выражаетъ собою, въ извѣстномъ масштабѣ, работу силъ при перемѣщеніи точки по основанію CC' этой площадки. Если приращеніе CC' первоначальной абсциссы OC положительно, а сила Cc также положительна, то элементарная работа $Cc' = P\,dx$ будетъ также положительна. Она будетъ отрицательна, если одинъ изъ факторовъ, P или dx, окажется отрицательнымъ.

Переходя теперь къ конечнымъ перемѣщеніямъ, какъ, напримѣръ, къ какому-либо перемѣщенію AB, можемъ написать, что соотвѣтствующая ему площадь $AabB$ выразится интеграломъ $\int X\,dx$, взятымъ въ предѣлахъ $x_A = OA$ и $x_B = OB$, и, очевидно, представитъ собою работу всѣхъ силъ, дѣйствовавшихъ на нашу точку при прохожденіи ею этого пути AB. То же заключеніе справедливо для любыхъ другихъ участковъ пути точки; такимъ образомъ, при прохожденіи пути BMD положительныя силы (на участкѣ BM) совершаютъ работу положительную, опѣниваемую площадью BbM, отрицательныя же силы (на участкѣ MD) совершаютъ отрицательную работу, выражаемую площадью MDd, и т. д. Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы, пользуясь зависимостью $X = f(x)$, вычислять интегралъ $\int X\,dx = \int f(x)\,dx$, могущій при этомъ вычисленіи, въ случаѣ сложной функціи $f(x)$, представить тѣ или другія вычислительныя трудности, можемъ



Фиг. 34.

этотъ интегралъ вычислить графически, пользуясь силовой кривой KQ.

Принимая теперь во вниманіе уравненіе (24), можемъ теперь истолковать его графически такъ: приращеніе живой силы точки на какомъ-либо пути ея выражается площадью, ограниченною осью абсциссъ, силовой кривой и крайними ординатами. Это заключеніе весьма важно, ибо даетъ возможность въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, при наличности указанныхъ факторовъ, получить значеніе интеграла $\int X\,dx$, не заботясь о видѣ функціи $f(x)$, выражающей зависимость X отъ x. Присмотримся теперь поближе къ такому графическому толкованію уравненія (25).

Пусть точка движется вправо, выходя изъ начальнаго своего положенія A со скоростью v_A. Вплоть до M она, какъ видимъ, будетъ двигаться въ области положительныхъ силъ, дѣйствующихъ также направо и, стало быть, помогающихъ движенію ея, вслѣдствіе чего можно заранѣе утверждать, что скорость ея на всемъ этомъ пути AM будетъ возрастать. И на самомъ дѣлѣ, при прохожденіи любого участка $CC' = dx$, причемъ это $dx > 0$, гдѣ, кромѣ того, силы также все время положительны, работа на Cc' будетъ также положительна; слѣдовательно, будетъ положительнымъ и равное этой элементарной работѣ приращеніе живой силы, т.-е. пройдя путь CC', точка испытаетъ приростъ живой силы, равный этой площадкѣ Cc' и выражающійся черезъ $\frac{1}{2}m(v_{C'}^2 - v_C^2)$. Такъ какъ этотъ приростъ здѣсь положителенъ, то $v_{C'}^2 - v_C^2 > 0$, что показываетъ, что $v_{C'} > v_C$, т.-е. каждая послѣдующая скорость здѣсь бо́льше предыдущей. Итакъ, на

участкѣ AM пути нашей точки скорость ея будетъ все время возрастать, — силы, дѣйствующія здѣсь на точку, направлены въ ту же сторону, въ какую совершается движеніе точки. Пусть скорость нашей точки въ моментъ M есть v_M; въ такомъ случаѣ полный приростъ живой силы на пути AM изобразится черезъ $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_A^2)$ = площ. AabMA. Такимъ образомъ, весь запасъ живой силы, имѣющійся у точки въ моментъ перехода черезъ M, равенъ $\frac{1}{2}mv_M^2$; сравнительно съ начальнымъ запасомъ $\frac{1}{2}mv_A^2$ онъ увеличился на величину, равную площади AabMA. Посмотримъ теперь, какъ будетъ двигаться въ прежнемъ направленіи наша точка, вступивъ за точкой M въ область отрицательныхъ силъ.

Такъ какъ всѣ P здѣсь < 0, а $dx > 0$, то $\int P\,dx < 0$; слѣдовательно, приращенія живой силы будутъ здѣсь отрицательны. Такъ, если точка перешла здѣсь изъ D въ E, то ур-іе (25) дастъ намъ: $\int P\,dx$ = площади DEed = $= \frac{1}{2}m(v_E^2 - v_D^2)$, а такъ какъ интегралъ и площадь отрицательны, то имѣемъ неравенство $v_E^2 - v_D^2 < 0$, показывающее, что $v_E < v_D$, т.-е. что движеніе точки въ прежнемъ направленіи будетъ совершаться съ убывающими скоростями, ибо оказывается, что послѣдующая скорость здѣсь меньше предыдущей; живая сила точки, движущейся здѣсь противоположно направленію силъ, на нее дѣйствующихъ, будетъ все время убывать, ибо будетъ постепенно расходоваться на преодолѣніе работы силъ отрицательныхъ, ея движенію препятствующихъ.

Отсюда можемъ вывести весьма важное для насъ заключеніе: разъ до точки M, на пути AM, скорость точки все время возрастала, а за точкой M, на пути MN, она все время убываетъ, то отсюда слѣдуетъ, что въ самой точкѣ M пересѣченія силовой кривой съ осью абсциссъ скорость v_M нашей точки будетъ максимальной.

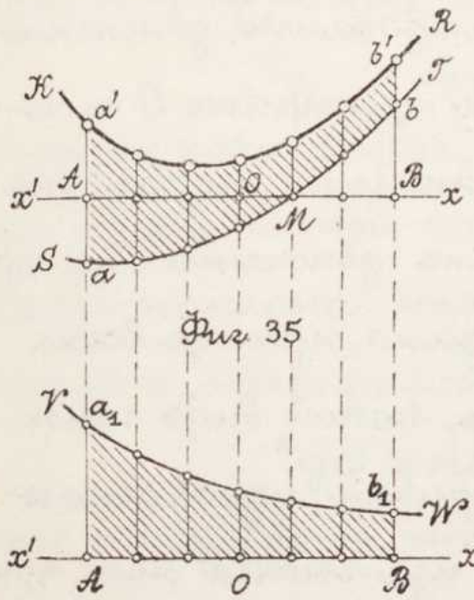
Подобнымъ же образомъ нетрудно убѣдиться, что въ точкѣ N очередного за M пересѣченія кривой силъ съ осью абсциссъ скорость нашей точки будетъ минимальной. Дѣйствительно, на всемъ участкѣ MN, гдѣ приращеніе живой силы остается все время отрицательнымъ, т.-е. гдѣ все время имѣетъ мѣсто убываніе живой силы, будемъ имѣть, какъ было уже указано, постоянную убыль скоростей. А такъ какъ за точкой N начнется опять возрастаніе ихъ, то ясно, что въ самой точкѣ N имѣетъ мѣсто минимумъ скоростей. Очевидно, что слѣдующей пересѣченіе силовой линіи съ осью x'x дастъ опять моментъ максимума, затѣмъ получимъ моментъ минимума, и т.д. Это свойство точекъ пересѣченія силовой кривой съ осью абсциссъ очень важно, и его необходимо запомнить, — оно пригодится намъ въ дальнѣйшемъ.

Мы указывали, что по мѣрѣ проникновенія въ область отрицательныхъ силъ скорость нашей точки будетъ непрестанно убывать. Спрашивается, при какихъ условіяхъ можетъ она обратиться въ

нуль; ясно, что этотъ моментъ будетъ соотвѣтствовать моменту остановки точки. Пусть точка вышла изъ A вправо со скоростью v_A. Въ точкѣ M скорость ея, все время до того возрастающая, достигнетъ своего максимальнаго значенія v_M, и запасъ живой силы нашей точки въ этотъ моментъ окажется равнымъ $\frac{1}{2}mv_M^2$. За счетъ этого именно запаса наша точка и сможетъ двигаться въ прежнемъ направленіи въ области препятствующихъ такому движенію отрицательныхъ силъ; этотъ запасъ будетъ уходить на преодолѣніе работы этихъ силъ, постепенно, такимъ образомъ, расходуясь и уменьшаясь. Въ виду, однако, ограниченности его это его уменьшеніе будетъ продолжаться лишь до тѣхъ поръ, пока онъ не обратится въ нуль; въ этотъ моментъ работа отрицательныхъ силъ окажется въ точности равной всему этому запасу $\frac{1}{2}mv_M^2$, а такъ какъ эта работа выражается также площадью, ограниченною извѣстнымъ образомъ, то можемъ сказать, что, при своемъ движеніи вправо въ области отрицательныхъ силъ, точка будетъ двигаться здѣсь до тѣхъ поръ, пока отрицательная площадь, дающая работу этихъ силъ, не станетъ, по своей абсолютной величинѣ, равна запасу $\frac{1}{2}mv_M^2$, имѣвшемуся у точки въ моментъ вступленія въ эту область. Если эта площадь окажется площадью MEeM, то точка, при своемъ движеніи вправо, сможетъ дойти лишь до точки E, гдѣ и остановится. Можетъ, понятно, случиться и такъ, что вся отрицательная площадь MNeM будетъ, по абсолютной величинѣ, меньше запаса живой силы $\frac{1}{2}mv_M^2$; тогда окажется, что точка, затративъ на этотъ путь часть своей живой силы въ количествѣ, опредѣляемомъ площадью MNeM, придетъ въ N съ живой силой $\frac{1}{2}v_N^2$, потерявъ по дорогѣ всего $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_N^2)$ ея, ибо площадь MNeM и равна $\frac{1}{2}m(v_M^2 - v_N^2)$. Такимъ образомъ, въ область положительныхъ силъ точка вступитъ со скоростью v_N; скорость эта будетъ въ этой области все время увеличиваться, пока точка не подойдетъ къ слѣдующей области отрицательныхъ силъ, гдѣ, возможно, она остановится, и т. д. Учесть возможность остановки точки, какъ видимъ, весьма легко, путемъ прямого планиметрированія; при этомъ опредѣлится и мѣсто остановки. Понятно, что разъ въ моментъ остановки точка продолжаетъ оставаться подъ вліяніемъ тѣхъ или иныхъ силъ, то, остановившись на мгновеніе, она пойдетъ затѣмъ туда, куда повлекутъ ее эти силы. Отмѣтимъ, что остановка можетъ имѣть мѣсто въ той области, силы которой направлены противоположно скорости точки.

Необходимо сдѣлать еще одно замѣчаніе по поводу графическаго учета равнодѣйствующей въ случаѣ нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ на нашу точку одновременно, и построенія кривой, дающей ходъ измѣненій этой равнодѣйствующей. Такъ какъ всѣ силы, съ которыми намъ придется имѣть дѣло въ дальнѣйшемъ, направлены по оси абсциссъ, то сложеніе ихъ будетъ производиться крайне просто, путемъ

прямого прибавленія ихъ или отнятія, соотвѣтственно знакамъ ихъ. Пусть напримѣръ, наша точка, при своемъ движеніи по оси абсциссъ, принуждена подчиняться силамъ, силовыя кривыя коихъ представляются: для однихъ силъ кривой ST, а для другихъ — кривой VW (фиг. 35 и 36). Дѣйствуя на нашу точку одновременно, эти силы будутъ складываться или вычитаться путемъ прямого прибавленія или отнятія соотвѣтствующихъ векторовъ. Такимъ образомъ, отрицательная сила Aa, складываясь съ дѣйствующей въ той же точкѣ A положительной силой Aa_1, дастъ положительную силу Aa'; точка a' — конецъ вектора, эту силу изображающаго, полученный, откладывая отъ крайней точки a силы Aa векторъ $aa' = Aa_1$ вверхъ, ибо сила Aa_1 положительна. Точно такъ же положительная сила Bb, складываясь съ дѣйствующей въ тотъ же моментъ силой Bb_1, также положительной, дастъ положительную же силу Bb'. Соединяя концы $a', b', \ldots\ldots$ такъ полученныхъ векторовъ непрерывной линіей, получимъ кривую KR, дающую собою законъ распредѣленія силъ (результирующихъ) по оси $x'x$ (фиг. 35). Въ этой кривой KR и можно вести въ дальнѣйшемъ все изслѣдованіе движенія, уже не заботясь о слагающихъ силахъ, эту кривую давшихъ. Работа всѣхъ силъ на пути AB выразится, очевидно, площадью $Aa'b'B$, равной, конечно, суммѣ работъ каждой категоріи силъ отдѣльно. Такъ, замѣчая, что работа силъ (ST) изображается черезъ ($-$площ. AMa $+$ площ. MbB), а работа силъ (VW) — черезъ площадь Aa_1b_1B или равную ей площадь $aa'b'bMa$, заключаемъ, что, по уничтоженіи отрицательной работы AMa равной ей положительной, у насъ и останется какъ разъ упомянутая уже площадь $Aa'b'B$. Равновеликія площади Aa_1b_1B и $aa'b'bMa$ заштрихованы.



Фиг. 35

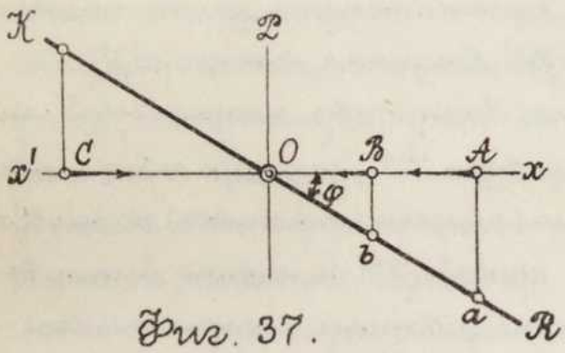
Фиг. 36.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что все, сказанное о движеніи вправо, будетъ справедливо и для движенія влѣво съ тою лишь разницей, что теперь, въ виду $dx < 0$, приращеніе живой силы можетъ быть положительнымъ лишь тогда, когда $P < 0$, т.-е. когда точка движется все время подъ дѣйствіемъ силъ отрицательныхъ; живая сила точки будетъ въ такомъ случаѣ все время возрастать, т.-е. скорость точки будетъ увеличиваться. Если же $P > 0$, т.-е. если на точку, при этомъ движеніи ея влѣво, дѣйствуютъ силы положительныя, то приращеніе живой силы будетъ отрицательнымъ; живая сила точки будетъ убывать, а скорость ея — уменьшаться. При движеніи влѣво точка, слѣдовательно, сможетъ остановиться въ области положительныхъ силъ, какъ объ этомъ можно было заключить и заранѣе, принимая во вниманіе, что помогать движенію будутъ здѣсь силы отри-

ціательныя, а препятствовать ему — силы положительныя. Всѣ заключенія о максимумахъ скоростей и о ихъ минимумахъ остаются, конечно, въ силѣ.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній, необходимыхъ для дальнѣйшихъ изслѣдованій, вернемся къ нашей задачѣ и попробуемъ разсмотрѣть ее при помощи только что изложенныхъ соображеній.

Приступая къ графическому изслѣдованію движенія точки подъ дѣйствіемъ притяженія ея центромъ O съ силами, пропорціональными разстоянію точки отъ центра, примемъ сначала разсматривать движеніе безъ треніе, а потомъ и съ треніемъ, необходимо, прежде всего, разсмотрѣть, какой видъ имѣютъ здѣсь кривыя, изображающія законы измѣненія силъ при измѣненіи разстоянія точки отъ центра, въ обоихъ указанныхъ выше случаяхъ.



Фиг. 37.

По условію, нѣкоторая точка массы m движется по прямой xx' подъ вліяніемъ силъ притяженія ея центромъ O, лежащимъ на этой же оси, притягивающимъ пропорціонально разстоянію. Прежде всего заключаемъ, что точка, находящаяся справа отъ центра, будетъ находиться подъ воздѣйствіемъ силъ отрицательныхъ, а слѣва отъ центра — положительныхъ. Поэтому векторы, изображающіе силы притяженія, приходится откладывать для области Ox оси внизъ, а для области Ox' — вверхъ. Пусть, теперь, силы, дѣйствующія въ точкахъ A и B оси, равны P_A и P_B. Согласно основному положенію, онѣ выразятся въ функціи разстояній

OA и OB такъ: $\mathfrak{P}_A = -k.OA$ и $\mathfrak{P}_B = -k.OB$, такъ что

$$\mathfrak{P}_A : \mathfrak{P}_B = OA : OB.$$

Откладывая теперь внизъ отъ оси $x'x$ векторы Aa и Bb, изображающіе эти силы въ нѣкоторомъ масштабѣ μ, имѣемъ, въ силу этого, соотношенія: $Aa = \mu.\mathfrak{P}_A$ и $Bb = \mu.\mathfrak{P}_B$, откуда

$$Aa : Bb = \mathfrak{P}_A : \mathfrak{P}_B = OA : OB,$$

а такъ какъ $Aa \parallel Bb$, то заключаемъ, что точки a и b лежатъ на одной и той же прямой, проходящей черезъ центръ. Уголъ наклона этой прямой къ оси x, — обозначимъ его черезъ φ, — опредѣляется изъ соотношенія:

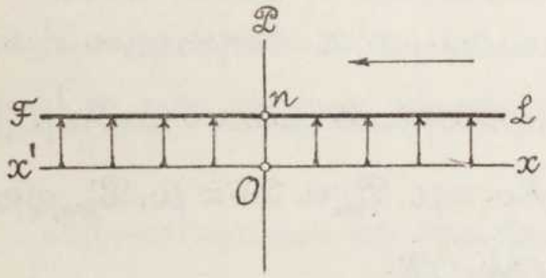
$$\operatorname{tg}\varphi = Aa : OA = (\mu.\mathfrak{P}_A) : (-\tfrac{1}{k}.\mathfrak{P}_A) = -k\mu,$$

что показываетъ, что эта прямая пройдетъ въ 4-ой и 2-ой четвертяхъ, какъ это и изображено на чертежѣ — прямая KR на фиг. 37.

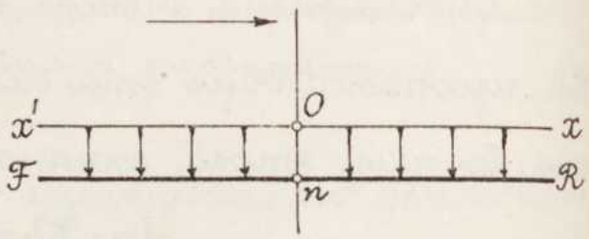
Итакъ, силы притяженія распредѣляются по закону, изображаемому прямой KR. Очевидно, что положеніе прямой KR, равно какъ и наклонъ ея къ оси $x'x$, отъ направленія движенія точки не зависятъ. Посмотримъ, какъ обстоитъ дѣло съ силами тренія.

Наша точка обладаетъ массой m. Въ виду этого, при движеніи ея по оси $x'x$ развивается сила тренія, fmg, въ каждый данный моментъ направленная противоположно движенію ея, въ виду чего, при движеніи точки влѣво, эта сила будетъ направлена вправо, т.-е. будетъ положительной, и обратно. Принимая теперь во вниманіе, что за все время движенія сила тренія будетъ оставаться постоянной, мѣняя лишь свой знакъ, заключаемъ, что силовая кривая ея представляется прямой, параллельной

оси x'x и при движеніи точки влѣво проходящей выше начала, на разстояніи On = μ.(fmg) отъ него (фиг. 38, прямая FL),



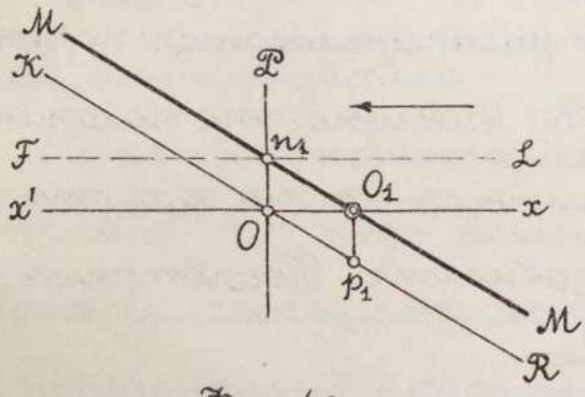
Фиг. 38.



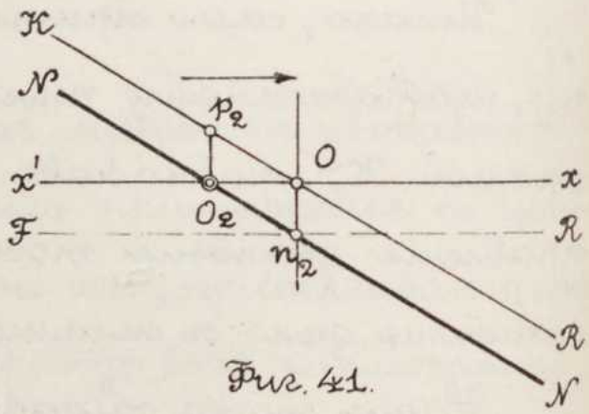
Фиг. 39.

а при движеніи вправо проходящей ниже начала на тотъ же разстояніи On отъ него (фиг. 39, прямая FR).

Такимъ образомъ, если точка движется по оси x'x безъ треніа, то силовая кривая представится здѣсь прямой KR; если же движеніе будетъ происходить съ треніемъ, то результирующая силовая кривая получится путемъ складываніа векторовъ, т.-е. сочетаніа прямой KR или съ прямой FL



Фиг. 40.



Фиг. 41.

(фиг. 38) или съ прямой FR (фиг. 39), что будетъ зависѣть отъ направленіа движеніа. Если точка движется влѣво, то силы треніа окажутся положительными, и ихъ придется все время прибавлять къ ординатамъ прямой KR, отчего результирующая кривая окажется здѣсь прямой MM, представляющей собою ту же прямую KR, лишь поднятую относительно своего прежняго положеніа на величину On_1 силы треніа вверхъ по направленію OP (фиг. 40). Если же движеніе

точки будетъ происходить вправо, то силы трения окажутся направленными влѣво, т.-е. отрицательными, и ихъ придется отнимать отъ ординатъ прямой KR, отчего результирующей кривой окажется здѣсь прямая NN, параллельная KR и проходящая черезъ конецъ n_2 вектора On_2, изображающаго силу трения; эта прямая NN представляетъ собою ту же прямую KR, сдвинутую лишь внизъ, по направленію On_2, на величину On_2 переменной силы трения (фиг. 41).

Отмѣтимъ кстати, что на участкѣ OO_1, какъ и на участкѣ OO_2 силы трения, по абсолютной своей величинѣ, бо́льше силъ притяженія, въ виду чего участокъ O_1O_2 представляетъ собою область равновѣсія. Она, какъ видимъ, опредѣляется здѣсь пересѣченіемъ результирующихъ прямыхъ съ осью $x'x$, дающимъ граничныя ея точки, и, понятно, имѣетъ тѣ же размѣры, какіе даетъ уравненіе (5) на 63 стр.

Дѣйствительно, въ точкахъ O_1 и O_2 силы трения p_1O_1 и p_2O_2 равны и противоположны силамъ притяженія O_1p_1 и O_2p_2, и, значитъ, здѣсь

$$[\mu . fmg] = [\mu . \mathfrak{P}_{O_1}] = [\mu . k . OO_1].$$

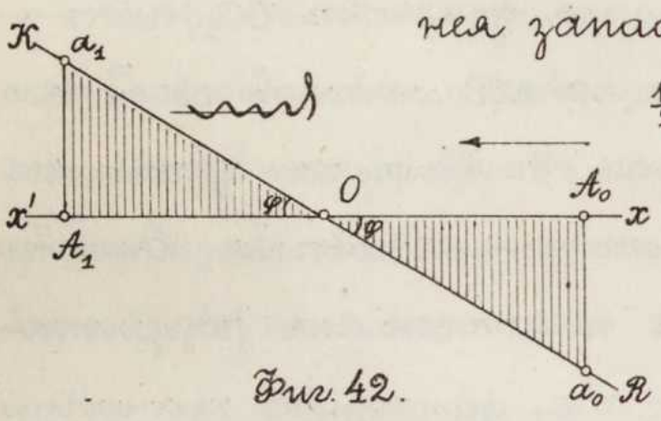
Сокращая на μ и полагая $m=1$, получимъ ту же формулу (5). Для OO_2 напишется уравненіе такого же вида. Для точекъ, лежащихъ внутри области O_1O_2 имѣетъ мѣсто неравенство.

Полученныя выше данныя позволяютъ намъ весьма просто и наглядно изслѣдовать взятое нами движеніе точки подъ вліяніемъ силъ притяженія ея центромъ O, причемъ мы сначала разберемъ движеніе безъ трения.

Пусть точка въ началѣ своего движенія находится въ A, въ области отрицательныхъ силъ (фиг. 42), безъ на-

гальной скорости, такъ что $v_{A_0} = 0$. Подчиняясь силѣ притяженія, исходящей отъ центра O, наша точка двинется къ центру, по направленію A_0O, и такъ какъ при этомъ и $dx < 0$, и $P < 0$, — пока, понятно, точка остается вправо отъ O, — то приращенія живой силы за все время движенія въ области A_0O положительными, и скорость точки будетъ возрастать вплоть до момента перехода черезъ O, гдѣ она будетъ максимальной и равной, положимъ, V.

Дальше, за O, точка, благодаря накопившемуся у нея запасу живой силы въ количествѣ $\frac{1}{2}mV^2$, будетъ двигаться въ прежнемъ направленіи, но такъ какъ теперь она будетъ двигаться въ области положительныхъ силъ, направленныхъ противъ движенія ея, такъ что при $dx < 0$ силы P здѣсь < 0, то приращенія живой силы ея будутъ все время отрицательными; скорость ея, такимъ образомъ, будетъ здѣсь все время убывать, пока, наконецъ, въ нѣкоторой точкѣ A_1 не обратится въ нуль, — здѣсь наша точка остановится.



Фиг. 42.

Положеніе этой крайней точки A_1 найти весьма легко, прилагая сюда теорему живыхъ силъ: замѣчая, что на пути A_0O приращеніе живой силы точки, равное $\frac{1}{2}m(V^2 - v_{A_0}^2)$, выражается площадью A_0Oa_0 и что, въ виду отсутствія начальной скорости ($v_{A_0} = 0$) это приращеніе оказывается равнымъ $\frac{1}{2}mV^2$, т.-е. запасу живой силы точки въ моментъ прохожденія черезъ

центръ O, заключаемъ, что весь запасъ живой силы въ моментъ O вступленія въ область Ox' противодѣйствующихъ движенію положительныхъ силъ выражается площадью A_0Oa_0. Мы знаемъ, что движеніе точки въ области Ox' по прежнему направленію A_0Ox' будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока имѣющійся у нея запасъ живой силы не истратится на преодолѣніе работы положительныхъ силъ, а такъ какъ эта работа выражается площадью типа A_1a_1O, то можемъ сказать, что точка, при своемъ движеніи влѣво, остановится внутри области Ox' въ такомъ положеніи A_1, гдѣ площадь A_1Oa_1 будетъ равна площади A_0Oa_0. Замѣчая теперь, что фигуры A_1Oa_1 и A_0Oa_0 представляютъ собою прямоугольные треугольники съ одинаковыми острыми углами φ, заключаемъ, что это равенство будетъ имѣть мѣсто тогда, когда катетъ A_0O будетъ равенъ катету OA_1. Поэтому крайнее лѣвое положеніе точки опредѣлится отложеніемъ влѣво отъ центра O отрѣзка OA_1, равнаго OA_0. Легко убѣдиться въ томъ, что движеніе точки будетъ симметрично относительно центра O; такъ, скорости ея въ положеніяхъ, равноотстоящихъ отъ центра, будутъ одинаковы по своей величинѣ и, въ данномъ движеніи влѣво, по знаку, что слѣдуетъ изъ того, что запасы живой силы въ каждыхъ двухъ такихъ положеніяхъ будутъ одинаковы. Итакъ, наша точка, выйдя изъ A_0 безъ начальной скорости, будетъ двигаться съ все возрастающими скоростями вплоть до точки O, гдѣ скорость будетъ максимальной; затѣмъ она перейдетъ въ область поло-

жительныхъ силъ, ея движенію сопротивляющихся, и здѣсь скорость ея будетъ постепенно убывать, доходя до нуля въ точкѣ A_1, гдѣ наша точка и остановится, причемъ разстояній точекъ A_1 и A_0 до центра O одинаковы. Движеніе на участкѣ A_0A_1, симметричное относительно центра O, представитъ собою первое колебаніе нашей точки.

Остановившись въ A_1, наша точка, будучи попрежнему притягиваема центромъ O, повернетъ назадъ, къ O. Теперь на всемъ участкѣ A_1O она будетъ двигаться въ области положительныхъ силъ, причемъ здѣсь будемъ имѣть $dx > 0$. Слѣдовательно, на этомъ участкѣ какъ живая сила точки, такъ и скорость ея, будутъ все время возрастать вплоть до точки O, гдѣ наша точка вступитъ въ область отрицательныхъ силъ, имѣя съ собою запасъ живой силы въ количествѣ, выражаемомъ площадью A_1a_1O. Очевидно, что въ области Ox она сможетъ дойти только до такой точки Z, которая опредѣлитъ собою площадь, равную площади A_1a_1O. Очевидно, что такой точкой Z можетъ быть только точка A_0, какъ удовлетворяющая указанному требованію. Значитъ, наша точка, при своемъ движеніи вправо, дойдетъ лишь до начальнаго своего положенія A_0, гдѣ и остановится. Такимъ образомъ, движеніе вправо окажется колебаніемъ съ той же амплитудой, которая имѣла мѣсто въ первомъ колебаніи.

Далѣе, очевидно, совершится третье колебаніе, повторяющее собою первое, причемъ точка дойдетъ опять только до прежняго положенія A_1. Затѣмъ совершится четвер-

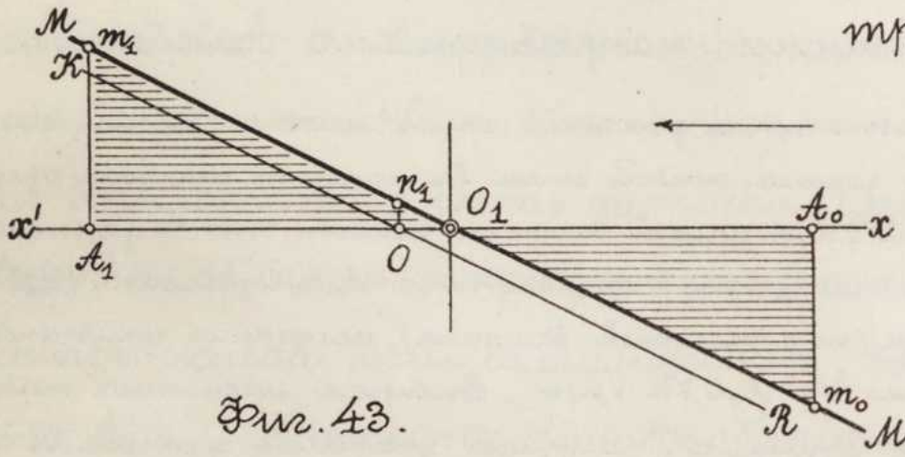
тое, повторяющее второе, и т. д. Выходитъ, такимъ образомъ, что точка будетъ все время колебаться около центра O, отходя отъ него то вправо, то влѣво, на одно и то же разстояніе $OA_0 = OA_1$, такъ что амплитуда колебаній будетъ все время оставаться постоянной, равной $A_0A_1 = 2\,A_0O = 2x_0$. Скорости точки въ симметричныхъ положеніяхъ ея относительно центра O будутъ одинаковы, а черезъ центръ притяженія O она будетъ проходить съ максимальными скоростями, одинаковыми по величинѣ, но отличающимися только знаками, соотвѣтствующими направленіямъ колебаній.

Нетрудно подсчитать и значеніе этой максимальной скорости V. Замѣчая, что запасъ живой силы въ моментъ перехода черезъ O выражается черезъ $\frac{1}{2}mV^2$, а, съ другой стороны, помня, что въ данномъ случаѣ онъ выражается площадью треугольника A_0a_0O, равной $\frac{1}{2}A_0O^2\operatorname{tg}\varphi$ или, что то же, $\frac{1}{2}A_0O^2 \cdot k\mu$ (по абсолютной величинѣ), получаемъ уравненіе $mV^2 = A_0O^2 k\mu$, такъ что $V = A_0O\sqrt{k}\cdot\sqrt{\mu/m}$. Выбирая масштабъ такъ, чтобы (μ/m) равнялось единицѣ, получимъ знакомое уже намъ изъ предыдущаго значеніе этой максимальной скорости: $V = A_0O\sqrt{k}$, а такъ какъ $A_0O = x_0$, то $V = x_0\sqrt{k}$.

Отмѣтимъ, наконецъ, что всякій разъ, когда точка движется по оси подъ дѣйствіемъ притяженія ея центромъ, лежащимъ на той же оси, съ силами, пропорціональными разстоянію точки до этого центра, причемъ треніе отсутствуетъ, то силовая кривая выражается прямой, пересѣкающей ось $x'x$ какъ разъ въ этомъ центрѣ притяженія. Обратное заключеніе также справедливо: если силовая кривая представляется прямой, пересѣкающей ось $x'x$ въ нѣкоторой точкѣ Z, то движеніе точки подъ дѣйствіемъ силъ, распредѣляю-

щихъ по закону, изображаемому этой прямой, будетъ совершаться такъ, какъ если бы точка находилась подъ дѣйствіемъ притяженія ея центромъ Z съ силами, пропорціональными разстояніямъ, а никакихъ другихъ силъ не было. Это замѣчаніе сейчасъ же намъ пригодится.

Посмотримъ теперь, какъ обстоитъ дѣло въ случаѣ движенія съ треніемъ. Пусть въ нѣкоторый моментъ наша точка находится въ положеніи A_0 безъ начальной скорости, такъ что $v_{A_0} = 0$. Повинуясь притяженію ея центромъ O, она двинется влѣво, почему силы треніе окажутся направленными въ правую сторону, т.-е. положительными, и результирующая кривая



Фиг. 43.

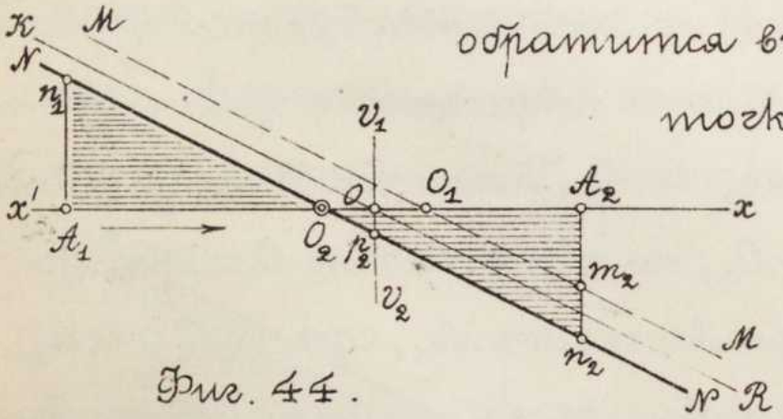
представится прямой MM, проходящей выше прямой притяженія KR, черезъ точку n_1, гдѣ $On_1 = \mu . 3mg$ (фиг. 43).

Такимъ образомъ, движеніе нашей точки будетъ совершаться по закону, изображаемому прямой MM. Согласно замѣчанію, сдѣланному выше, это будетъ движеніе подъ дѣйствіемъ притяженія нашей точки центромъ O_1, лежащимъ въ пересѣченіи прямой MM съ осью $x'x$, съ силами, пропорціональными разстоянію точки именно до этого центра O_1, причемъ никакихъ другихъ силъ здѣсь нѣтъ. Такимъ образомъ, движеніе будетъ происходить такъ, какъ если бы треніе исчезло, но зато центръ притяженія O

переместится въ точку O_1, представляющую собою, какъ видимъ, правую граничную точку области равновѣсія. Слѣдовательно, наша точка, при этомъ своемъ движеніи влѣво, будетъ двигаться по схемѣ, изображенной на фиг. 42, съ тѣмъ лишь измѣненіемъ, что силовая прямая MM проходитъ не черезъ дѣйствительный центръ притяженія O, а черезъ нѣкоторый другой, воображаемый, O_1. За этимъ измѣненіемъ все остальное не мѣняется: скорость точки на всемъ пути A_0O_1 будетъ непрестанно увеличиваться, достигнетъ максимума въ O_1, послѣ чего, при дальнѣйшемъ движеніи точки, за O_1, по направленію O_1x', станетъ убывать, обращаясь въ нуль въ точкѣ A_1, гдѣ $A_0O_1 = O_1A_1$. Въ A_1 наша точка остановится за полнымъ израсходованіемъ всего запаса живой силы, принесеннаго ею съ собой: запасъ этотъ выражается площадью $A_0O_1m_1$ и уйдетъ на покрытіе работы положительныхъ силъ на участкѣ O_1A_1, выражаемой площадью $O_1A_1m_1$, равной, въ виду $A_0O_1 = O_1A_1$, площади $A_0O_1m_1$. Двѣ эти равныя по величинѣ, но противоположныя по своимъ знакамъ, площади заштрихованы.

Остановившись на мгновеніе въ A_1, наша точка немедленно повернетъ назадъ, къ O_1. Принимая во вниманіе, что силы тренія перемѣнятъ теперь свое направленіе, заключаемъ, что, согласно схемѣ фиг. 41, силовая кривая изобразится теперь прямой NN, идущей ниже основной прямой KR и отстоящей отъ нея въ направленіи OV_2 на величину Op_2 силы тренія (фиг. 44). Такимъ образомъ, движеніе нашей точки изъ A_1 вправо

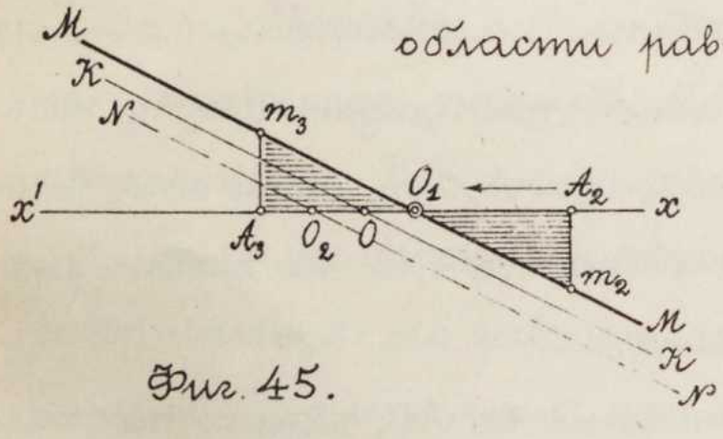
совершится такъ, какъ если бы центръ притяженія переместился теперь въ O_2. Вплоть до O_2 движеніе будетъ идти съ все возрастающими скоростями, въ точкѣ O_2 получимъ максимумъ скорости, а пройдя O_2, точка вступитъ въ область отрицательныхъ силъ, O_2x, гдѣ будетъ постепенно растрачивать свою живую силу,—скорость ея будетъ убывать вплоть до точки A_2, гдѣ она обратится въ нуль, такъ что наша точка здѣсь остановится.



Фиг. 44.

Положеніе точки A_2 опредѣлится изъ условія $A_1O_2 = O_2A_2$, ибо площади треугольниковъ $A_1n_1O_2$ и $O_2A_2n_2$ должны быть въ точности равны.

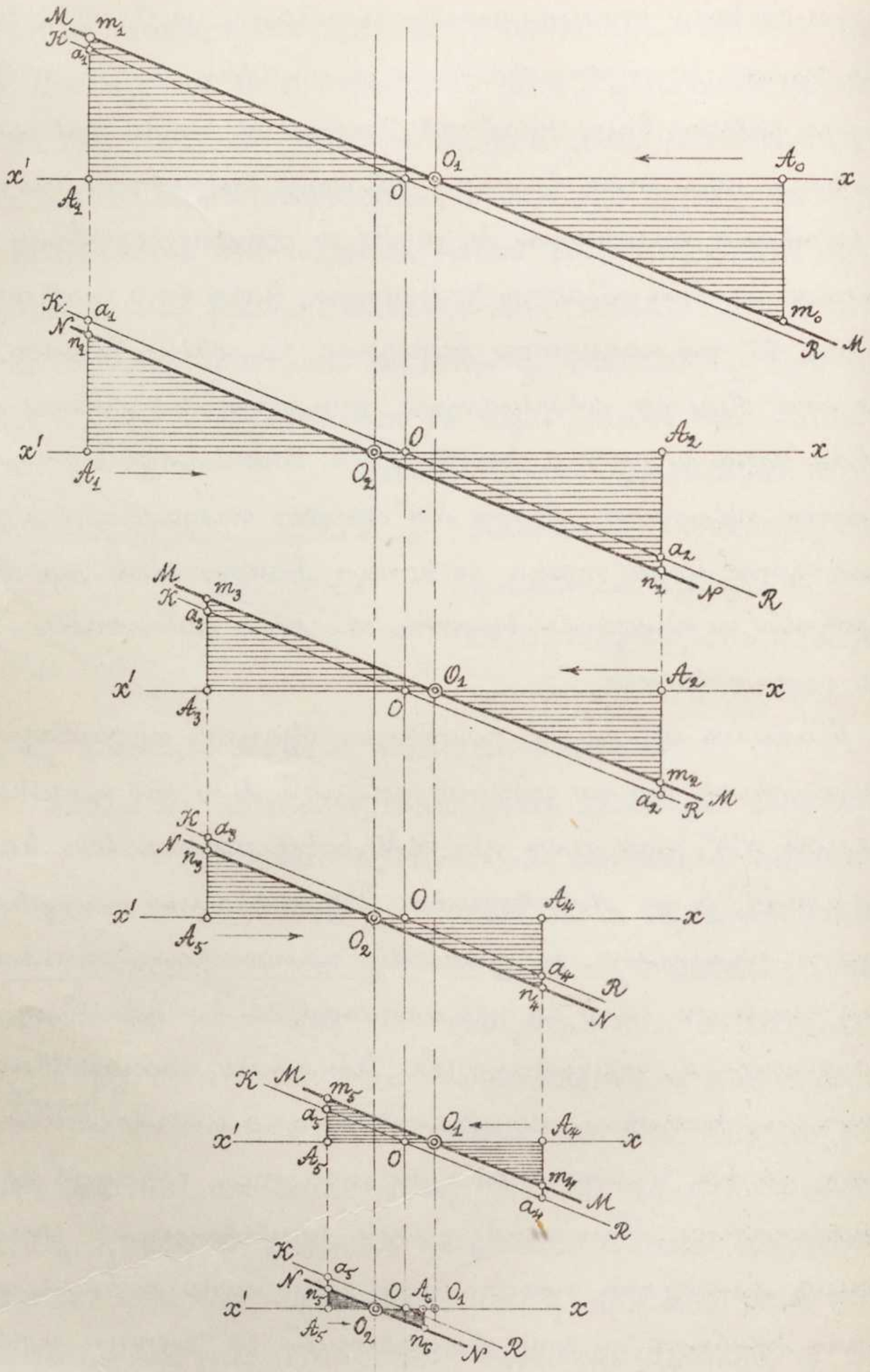
Если бы точка A_2 оказалась лежащей внутри области равновѣсія, то наша точка такъ бы въ A_2 и осталась. Но если A_2 окажется находящейся внѣ области равновѣсія, какъ это изображено на фиг. 45, то, задержавшись на мгновеніе въ A_2, она немедленно повернетъ назадъ, къ O, причемъ движеніе станетъ совершаться по закону, изображаемому прямой MM перваго колебанія,—значитъ, около того же центра O_1. Къ теперешнему центру O_1 точка будетъ подходить ускоренно; въ O_1 скорость ея достигнетъ максимума, послѣ чего станетъ убывать, обращаясь въ нуль въ точкѣ A_3,



Фиг. 45.

положеніе коей опредѣляется изъ условія: $A_2O_1 = O_1A_3$; въ такомъ случаѣ заштрихованныя площадки $A_2O_1m_2$ и $O_1A_3m_3$ будутъ равны. Если крайняя точка A_3 этого третьяго колебанія придется внутри области равновѣсія, то точка въ этомъ положеніи A_3 такъ и останется. Если же A_3 придется внѣ области равновѣсія, какъ это изображено на фиг. 45, то начнется очередное колебаніе вправо, причемъ оно будетъ совершаться, понятно, по закону NN. Такая игра и смѣна колебаній и соотвѣтствующихъ силовыхъ прямыхъ MM и NN будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока точка въ концѣ какого-либо изъ своихъ колебаній не придется внутри области равновѣсія,—тогда она остановится.

Такимъ образомъ, колебанія будутъ происходить попеременно то по закону прямой MM, то по закону прямой NN, причемъ по MM совершатся всѣ колебанія влѣво, а по NN—вправо. Результаты пользованія этими прямыми, графически иллюстрирующими теорему живыхъ силъ въ примѣненіи ея къ данному случаю движенія, оказываются, понятно, тождественными съ тѣми, которые получаются аналитическимъ путемъ, но все изслѣдованіе получается гораздо проще и наглядное. При пользованіи приведеннымъ графическимъ методомъ необходимо помнить о смѣнѣ силовыхъ кривыхъ и сопровождающей ее смѣнѣ подставныхъ центровъ притяженія O_1 и O_2 одного другимъ. На фигурѣ 46 приведено, въ рядѣ чертежей, соотвѣтствующихъ каждый отдѣльному колебанію, изслѣдованіе


M
K
m1
a1
x'
A1
O1
O
A0
x
m0
R
M
K
a1
N
n1
x'
A1
O
O2
A2
x
a2
n2
N
R
M
K
m3
a3
x'
A3
O1
O
A2
x
m2
a2
R
M
K
a3
N
n3
x'
A5
O
O2
A4
x
a4
R
n4
N
K
M
m5
a5
x'
A5
O1
O
A4
x
m4
a4
M
R
K
a5
N
n5
x'
A5
O
A6
O1
x
O2
n6
N
R

Фиг. 46.

движенія, разобраннаго на фиг. 32 и 33 (стр. 77 и 78). Въ каждомъ отдѣльномъ чертежѣ толстой чертой выдѣлена силовая прямая (MM или NN, смотря по направленію колебанія; двойнымъ кружкомъ, стоящимъ въ пересѣченіи каждой такой силовой прямой съ осью x'x, обозначенъ воображаемый центръ каждаго колебанія; на послѣднемъ чертежѣ отмѣчены оба такіе центра, O_1 и O_2, чтобы показать, что точка A_6 попала внутрь области равновѣсія. Дѣйствительный центръ притяженія помѣченъ вездѣ буквой O. Одинаковыя буквы различныхъ чертежей обозначаютъ одну и ту же точки системы x'Ox. Равновеликія площади заштрихованы. Мы видимъ, что наша точка, выйдя изъ A_0 безъ начальной скорости, совершитъ всего 6 колебаній и остановится въ A_6.

Замѣчая, что съ каждымъ новымъ колебаніемъ амплитуда его, сравнительно съ предыдущей, уменьшается на двойную величину области равновѣсія, т.-е. на $2\,O_1O_2$, заключаемъ, что крайнія правыя точки, какъ и крайнія лѣвыя, отстоятъ одна отъ другой на $2\,O_1O_2$, такъ что, примѣнительно къ фиг. 32, имѣемъ равенства: $A_0A_2 = A_2A_4 = A_4A_6 = 2\,O_1O_2$ и, подобнымъ же образомъ, $A_1A_3 = A_3A_5 = 2\,O_1O_2$. Поэтому, зная величину области равновѣсія O_1O_2 и начальное положеніе A_0 точки, легко найти положеніе ея внутри области равновѣсія, откладывая отъ A_0 циркулемъ рядъ отрѣзковъ, равныхъ каждый $2\,O_1O_2$; тогда найдутся

$A_2, A_4, \ldots,$ — крайнія правыя точки послѣдовательныхъ колебаній. Если какая-либо изъ этихъ точекъ попадетъ внутрь области равновѣсія, то это будетъ значить, что точка остановится въ своемъ колебаніи вправо. Если же въ области равновѣсія не окажется ни одной крайней правой точки, то это значитъ, что тамъ лежитъ крайняя лѣвая точка, положеніе коей найдемъ, откладывая упомянутые отрѣзки $2O_1O_2$ уже отъ первой крайней лѣвой точки A_1. Тогда одной изъ такъ получаемыхъ точекъ мы навѣрное попадемъ въ область равновѣсія.

Изложенныя разсужденія съ достаточной наглядностью выясняютъ сущность и причины умѣряющаго дѣйствія пружинъ на движеніе снабженныхъ ими системъ. Разсмотрѣніе явленій, здѣсь происходящихъ, удобнѣе всего вести такъ: пусть намъ дана система двухъ тѣлъ, могущихъ двигаться поступательно въ одномъ и томъ же направленіи, съ треніемъ, и соединенныхъ другъ съ другомъ помощью пружинъ, какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ вагонахъ. Для того, чтобы приложить вышеприведенныя разсужденія, нужно, чтобы одно изъ тѣлъ было неподвижнымъ и играло роль нашей стѣны, — см. фиг. 19 на 55 стр., — а для этого нужно и достаточно разсмотрѣть не дѣйствительное движеніе тѣлъ, а относительное, для полученія коего въ каждый данный моментъ мы придаемъ всей нашей системѣ

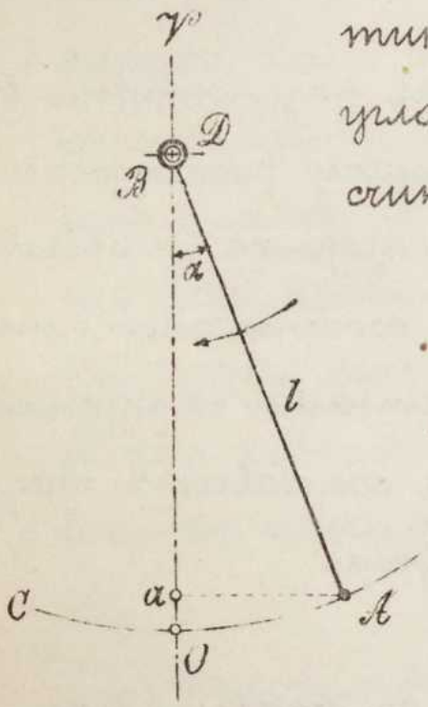
движеніе, равное и обратное движенію одного изъ данныхъ тѣлъ. Очевидно, что ни на число колебаній, ни на время и амплитуду ихъ такое добавленіе вліяніе не окажетъ, а между тѣмъ вопросъ о прекращеніи колебаній будетъ значительно упрощенъ.

Этими замѣчаніями мы закончимъ разсмотрѣніе взятаго движенія и перейдемъ къ детальному разслѣдованію еще одного случая движенія, при нѣкоторыхъ условіяхъ представляющаго рядъ любопытныхъ особенностей,—мы подразумѣваемъ случай движенія маятника съ треніемъ въ точкѣ привѣса; изслѣдованіе его и составитъ предметъ очереднаго параграфа нашего курса.

§ 4. Движеніе маятника съ треніемъ въ точкѣ привѣса.

Предположимъ, что у насъ имѣется маятникъ, подвѣшенный на неподвижномъ шипѣ D (фиг. 47) помощью втулки B, охватывающей этотъ шипъ и неизмѣняемо соединенной со стержнемъ AB маятника; при качаніи его втулка будетъ, такимъ образомъ, вращаться на шипѣ, какъ на оси. При этомъ, ради упрощенія вычисленій, предположимъ, что у насъ имѣется не физическій маятникъ, а математическій, состоящій изъ нѣкоторой матеріальной точки массы M, подвѣшенной на невѣсомомъ и несгибаемомъ стержнѣ AB. Длиной l маятника будемъ считать разстояніе отъ этой матеріальной точки A до оси шипа D, а радіусъ шипа D, а значитъ и втулки B, обозначимъ черезъ r.

Угломъ α отклоненія маятника будемъ называть уголъ, образованный стержнемъ AB съ вертикалью OV; вершиной этого угла будетъ все время служить центръ сѣченія шипа плоскостью чертежа, предполагаемой вертикальной. Примѣнительно къ этимъ угламъ α отклоненія маятника будемъ считать дѣйствительными, за соотвѣтственными, конечно, измѣненіями, всѣ тѣ положенія, которыя были установлены въ предыдущемъ параграфѣ для абсциссъ x, дающихъ отклоненія точки отъ начала координатъ при движеніи ея по оси $x'x$. Сообразно съ этимъ, углы, дающіе отклоненія маятника вправо отъ вертикали OV, будемъ считать положительными и обмѣчать знакомъ плюсъ, а влѣво — отрицательными и помѣчать знакомъ минусъ. Подобнымъ же образомъ сохранятъ свою силу положенія о правильномъ написаніи производныхъ какъ въ области положительныхъ α, такъ и отрицательныхъ. Посмотримъ теперь, какъ происходитъ движеніе такого маятника въ предположеніи, что между шипомъ и втулкой, нагруженной здѣсь различными силами, о чемъ мы будемъ говорить подробно ниже, развиваются силы трения, движенію маятника, по ихъ основному свойству, препятствующія.



Фиг. 47.

Къ изслѣдованію даннаго движенія примѣнимъ извѣстный изъ теоретической механики принципъ

д'Аламбера, могущій быть сформулированнымъ такъ:

Если въ какой-нибудь моментъ остановить систему и къ движущимъ силамъ прибавить еще силы инерціи, соотвѣтствующія взятому моменту, то будетъ имѣть мѣсто равновѣсіе; при этомъ всѣ силы давленія, натяженія и т. д., развивающіяся между частями системы при такомъ равновѣсіи, будутъ дѣйствительными силами давленія, натяженія и проч. при движеніи системы въ разсматриваемый моментъ времени.

Предположимъ, что нашъ маятникъ взятъ въ 7омъ моментѣ своего качанія влѣво, когда онъ находится въ положеніи A,— см. фиг. 47. Прибавляя въ этотъ моментъ силы инерціи, ему соотвѣтствующія, получимъ равновѣсіе, при чемъ всѣ силы давленій останутся, какъ мы указывали прежними, дѣйствительными, имѣвшими мѣсто при движеніи системы въ разсматриваемый моментъ. Значитъ, останутся прежними и всѣ силы тренія, возбуждаемыя на поверхности соприкосновенія шипа съ втулкой, благодаря нагрузкѣ этой послѣдней различными силами. Разъ имѣетъ мѣсто равновѣсіе, то получается возможность написать уравненія, алгебраически выражающія условія этого равновѣсія, причемъ въ учетъ попадутъ, конечно, кромѣ силъ движущихъ, и добавленныя нами силы инерціи, обусловившія наличность этого равновѣсія, безъ нихъ мѣста не имѣвшаго. Въ данномъ случаѣ, когда система маятника представляетъ собою систему, имѣющую лишь вращательное движеніе во-

кругъ оси шипа D, мы имѣемъ возможность ограничиться написаніемъ одного лишь уравненія моментовъ всѣхъ силъ, дающихъ равновѣсіе, при чемъ для написанія момента силъ инерціи можемъ воспользоваться тѣмъ выраженіемъ его, какое намъ даетъ теоретическая механика для момента силъ, вращающихъ данное тѣло вокругъ неподвижной оси, а именно:

Моментъ силъ, вращающихъ данное тѣло вокругъ неподвижной оси, равенъ моменту инерціи тѣла относительно оси вращенія на угловое ускореніе. Обозначимъ моментъ вращающихъ силъ черезъ $\mathfrak{L}$, моментъ инерціи маятника относительно оси шипа-черезъ J_D, а угловое ускореніе-черезъ $d^2\alpha/dt^2$, получаемъ, такимъ образомъ, уравненіе

$$\mathfrak{L} = J_D \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

А такъ какъ, въ силу существованія равновѣсія, моментъ силъ инерціи относительно оси вращенія долженъ быть равенъ и противоположенъ моменту дѣйствующихъ силъ, то отсюда заключаемъ, что моментъ силъ инерціи относительно оси вращенія будетъ выражаться черезъ

$$\mathfrak{L}_{in} = -J_D \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Замѣчая, что для математическаго маятника

$$J_D = Ml^2,$$

находимъ искомое выраженіе для момента силъ инерціи нашего маятника

$$\mathfrak{L}_{in} = -Ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Приравнявъ силы инерціи, мы получимъ равновѣсіе

Имѣя это въ виду, напишемъ одно изъ условій его, говорящее, что при равновѣсіи сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно какой-угодно оси моментовъ равна нулю. При этомъ надо замѣтить, что въ число этихъ всѣхъ силъ должны войти и силы инерціи. За ось моментовъ возьмемъ ось вращенія маятника, т.-е. ось шипа D. Въ такомъ случаѣ для момента силъ инерціи выраженіе уже подготовлено,— оно дается соотношеніемъ (1). Займемся теперь составленіемъ моментовъ другихъ силъ, дѣйствующихъ на маятникъ. Силами этими оказываются:

1) сила тяжести маятника,—вѣсъ его; она равна Mq и направлена вертикально внизъ;

2) центробѣжная сила, развивающаяся при движеніи маятника; предполагая, однако, углы отклоненія маятника въ его крайнихъ положеніяхъ, т.-е. амплитуду его, весьма малыми, получаемъ весьма медленное движеніе его, что ведетъ къ появленію лишь весьма незначительныхъ центробѣжныхъ силъ, коими, въ силу этого замѣчанія, мы и будемъ пренебрегать.

3) силы треніи, возникающія на поверхности соприкосновенія втулки съ шипомъ, вслѣдствіе нагрузки втулки вѣсомъ маятника Mq. Величину силы треніи можно учесть, предположивъ ее пропорціональной нагрузкѣ Mq втулки и принявъ факторъ этой пропорціональности, т.-е. коэффиціентъ треніи въ шипѣ, постояннымъ и равнымъ μ. О связи этого коэффиціента съ коэффиціентомъ треніи скольженія f подробно говорится въ статьѣ о треніи въ шипахъ.—Итакъ, эту силу Тре-

нія суммарно можно принять равной μMg.

Посмотримъ теперь, какъ выразятся моменты всѣхъ этихъ силъ относительно оси вращенія D. Начнемъ съ силы тяжести. Опуская изъ точки A, въ которой находится нашъ маятникъ во взятый моментъ, перпендикуляръ Aa на вертикаль OV, заключаемъ, что моментъ силы тяжести относительно указанной оси выражается черезъ $Mg \times Aa$. Замѣчая, что

$$Aa = l \sin\alpha,$$

и ограничиваясь разсмотрѣніемъ лишь такихъ малыхъ колебаній, при которыхъ $\sin\alpha$ можно приблизительно принять равнымъ аргументу его α, можемъ для такихъ малыхъ колебаній принять, что

$$Aa = l\alpha,$$

вслѣдствіе чего моментъ силы тяжести Mg можно принять равнымъ $Mgl\alpha$. Что касается знака его, то, по аналогіи съ знакоположеніемъ силъ, дѣйствующихъ на точку при движеніи ея по оси, условимся и здѣсь считать моменты, уменьшающіе уголъ отклоненія отъ вертикали, отрицательными, а увеличивающіе уголъ — положительными. Въ силу этого моменту силы тяжести, какъ стремящемуся во всякій моментъ движенія маятника уменьшать уголъ отклоненія, придется всегда приписывать знакъ минусъ. Такимъ образомъ, устанавливаемъ, что

$$\text{моментъ}(Mg) = -Mgl\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Переходимъ къ силамъ треніа. Плечо силы треніа равно, очевидно, радіусу шипа r, такъ что моментъ

ея выразится черезъ μMgr. Что касается знака его, то, замѣчая, что, при взятомъ положеніи и направленіи движенія маятника, силы тренія противодѣйствуютъ уменьшенію угла α, т.-е. способствуютъ увеличенію его, ставимъ передъ этимъ моментомъ знакъ плюсъ, такъ что

$$\text{моментъ}(\mu Mg) = +\mu Mgr \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Большихъ силъ не имѣется, ибо центробѣжной силой, по малости ея при взятыхъ условіяхъ, мы пренебрегли. Такимъ образомъ, искомое условіе равновѣсія, требующее равенства нулю суммы моментовъ всѣхъ силъ, приметъ, въ виду уравненій (1), (2) и (3), видъ

$$-Ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - Mgl\alpha + \mu Mgr = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Дѣля все на $(-Ml^2)$ и перенося второй и третій члены вправо, получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} + \frac{\mu g r}{l^2}, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

—дифференціальное уравненіе движенія нашего маятника, при чемъ перемѣннымъ является уголъ α отклоненія маятника отъ вертикали OV.

Полагая

$$\frac{g}{l} = h,$$

получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -h\alpha + \frac{h\mu r}{l},$$

по построенію своему совершенно аналогичное съ основнымъ уравненіемъ движенія точки по прямой подъ воздѣйствіемъ силъ притяженія, пропорціональныхъ разстояніямъ точки отъ центра, и силъ тренія; это уравне-

ніе, — см. стр. 59, ур. (1), — имѣетъ видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fg.$$

Вся разница сводится къ другому смыслу и обозначенію перемѣнныхъ и къ инымъ значеніямъ постоянныхъ коэффиціентовъ: роль отклоненія x отъ центра притяженія играетъ здѣсь уголъ отклоненія α отъ вертикальной оси OV. Начальныя условія построены также вполнѣ аналогично случаю уравненія (1)', — см. стр. 59: при $t=0$ начальное отклоненіе предполагается равнымъ α_0, а начальная угловая скорость въ этотъ же моментъ — нулю, т.-е.

$$(\alpha)_{t=0} = \alpha_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

и

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Легко убѣдиться, какъ и въ случаѣ движенія точки по прямой, что уравненіе (5) пригодно, при движеніи маятника влѣво, и для области отрицательныхъ угловъ α. Дѣйствительно, при отрицательномъ α и движеніи влѣво моментъ силъ инерціи принимаетъ значеніе $\left[-Ml^2\frac{d^2(-\alpha)}{dt^2}\right]$, моментъ силы тяжести — значеніе $[-Mgl(-\alpha)]$, а моментъ силъ тренія, какъ способствующій теперь уменьшенію отклоненія отъ оси OV — значеніе $(-\mu Mgr)$. Въ виду этого уравненіе моментовъ принимаетъ теперь видъ:

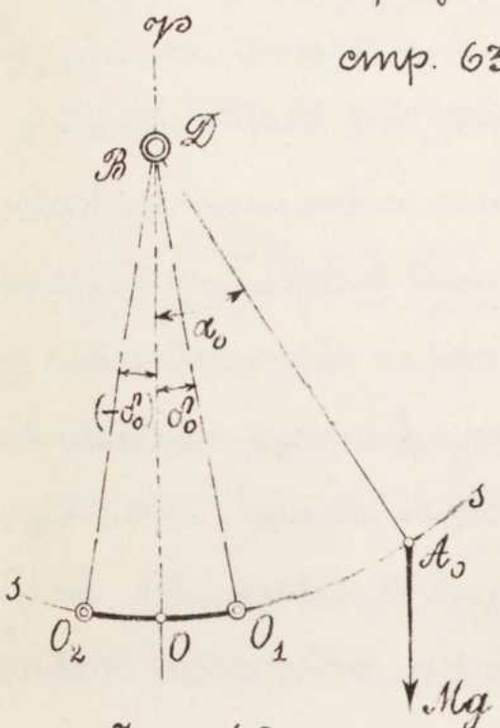
$$\left[-Ml^2\frac{d^2(-\alpha)}{dt^2}\right] + [-Mgl(-\alpha)] + (-\mu Mgr) = 0,$$

что, послѣ необходимыхъ упрощеній, сводится къ тому же уравненію (4). Такимъ образомъ, уравненіе (4) характеризуетъ собою, вообще, все движеніе маятника влѣво. Для движенія вправо уравненіе напишется иначе, какъ объ этомъ будетъ сказано ниже.

Принимая во вниманіе все сказанное, можемъ утверждать, что всѣ заключенія, къ которымъ мы пришли послѣ разсмотрѣнія ур-ія (1) движенія точки по прямой, — см. стр. 59, — могутъ быть, послѣ соотвѣтственныхъ измѣненій, примѣнены и къ нашему уравненію (6). Онѣ

на дугѣ качаній ss (фиг. 48) выдѣлится область равновѣсія $O_1 O O_2$, причемъ размѣры ея опредѣлятся по уравненію (5) аналогично тому, какъ опредѣлялись размѣры области равновѣсія въ случаѣ, разобранномъ въ предыдущемъ параграфѣ, — см. ур. (5) на стр. 63, — гдѣ мы имѣли

$$\xi_0 = \mathfrak{F}/\kappa .$$



Фиг. 48.

Въ нашемъ случаѣ изъ уравненія (5) получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -h\left(\alpha - \frac{\mu r}{l}\right) \quad . \quad . \quad (9)$$

Приравнивая вторую производную нулю, получимъ уравненіе, опредѣляющее то положеніе маятника, при которомъ имѣетъ мѣсто равенство между моментомъ силы тяжести и противоположнымъ ему по знаку моментомъ силы тренія. Это уравненіе имѣетъ видъ:

$$\alpha - \frac{\mu r}{l} = 0,$$

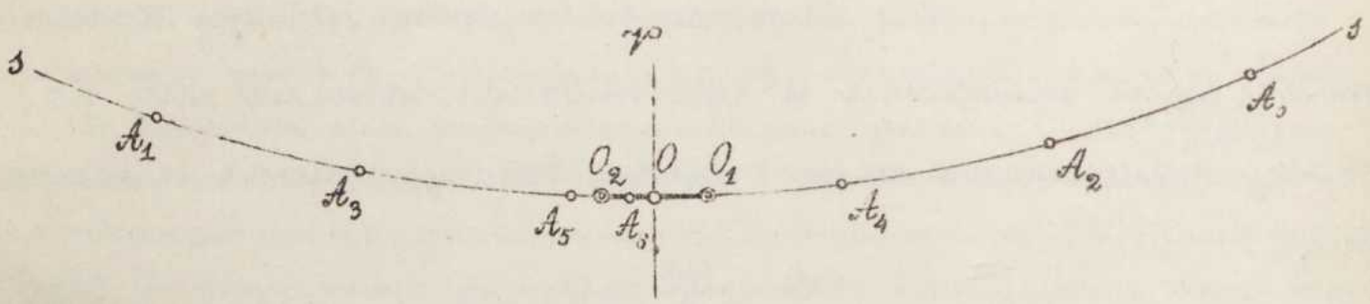
откуда и получаемъ одно граничное значеніе угла α, для движенія маятника влѣво; обозначая это граничное значеніе черезъ δ_0, имѣемъ выраженіе его:

$$\delta_0 = \frac{\mu r}{l} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Этотъ уголъ δ_0 опредѣлитъ собою положеніе правой границы, O_1, области равновѣсія. Въ дальнѣйшемъ мы опредѣлимъ положеніе лѣвой границы, O_2, — оно опредѣлится угломъ $(-\delta_0)$, такъ что точка O_2 будетъ

расположена симметрично точкѣ O_1 относительно оси OV, и, значитъ, весь уголъ O_2OO_1 равенъ $2\delta_0$.

Если маятникъ въ начальномъ его положеніи окажется находящимся внутри области O_1O_2, то при данныхъ начальныхъ условіяхъ (7) и (8) онъ тамъ такъ и останется. Но если начальное его положеніе, A_0, будетъ лежать внѣ этой области (фиг. 48), то онъ начнетъ качаться, но первое свое качаніе онъ совершитъ, какъ и въ случаѣ точки, находящейся подъ воздѣйствіемъ пружины, не около вертикали OV, а около ближайшаго граничнаго радіуса DO_1. Въ силу этого конецъ перваго колебанія придется въ точкѣ A_1, отстоящей отъ O_1 влѣво на дугу O_1A_1, равную дугѣ A_0O_1 (фиг. 49). Если бы эта точка A_1 пришлась внутри области равно-



Фиг. 49.

вѣсія, то она тамъ бы и осталась. Но предположимъ, что точка A_1 приходится внѣ области равновѣсія, какъ это изображено на фиг. 49, такъ что, остановившись на мгновеніе, она немедленно повернетъ назадъ и станетъ совершать свое второе колебаніе, вправо.

Аналогично тому, что имѣло мѣсто въ предыдущемъ параграфѣ, это второе колебаніе будетъ совершаться уже около новой оси DO_2, — лѣваго гранич-

наго радіуса, и конецъ A_2 этого второго колебанія опредѣлится путемъ отложенія отъ O_2 вправо дуги O_2A_2, равной дугѣ O_2A_1.

Для колебанія вправо уравненіе движенія составится согласно съ положеніями, положенными въ основу уравненія (4), — см. стр. 109. Въ данномъ случаѣ мы получаемъ уравненіе

$$-Mg\alpha - Ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mu Mgz = 0,$$

переходящее въ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} - \frac{\mu gz}{l^2} = -h\alpha - \frac{h\mu z}{l}.$$

Отсюда для угла δ_1, образуемаго центральнымъ радіусомъ O_2D съ вертикалью OV получаемъ выраженіе:

$$\delta_1 = -\frac{\mu z}{l} = -\delta_0,$$

показывающее, что радіусы O_1D и O_2D располагаются симметрично относительно вертикали OV, какъ объ этомъ было сказано выше, на стр. 111.

Если точка A_2 придется внутри области равновѣсія, то точка останется въ A_2; если же внѣ этой области, то она приступитъ къ совершенію третьяго колебанія, которое и выполнитъ уже относительно праваго граничнаго радіуса O_1D; конечной точкой этого колебанія явится точка A_3, опредѣляемая изъ того условія, что дуга O_1A_3 равна дугѣ O_1A_2. Дальше можетъ совершиться четвертое колебаніе, вправо, — оно совершится около лѣваго граничнаго радіуса O_2D, и т. д. Амплитуды колебаній, какъ нетрудно въ этомъ убѣдиться изъ прямого подсчета ихъ, будутъ послѣдовательно убывать, уменьшаясь съ каждымъ новымъ колебаніемъ на $2(\smile O_1O)$, т.-е. на $2\delta_0$.

Такая смѣна осей качанія и убываніе амплитудъ будутъ длиться до тѣхъ поръ, пока наша точка, въ концѣ какого-либо изъ своихъ колебаній, не попадетъ внутрь области равновѣсія; тогда она тамъ и останется. На

фиг. 49 изображенъ случай, когда число колебаній оказалось равнымъ шести, — въ концѣ послѣдняго, шестого, колебанія точка оказалась въ положеніи A_6, внутри области равновѣсія; въ этомъ положеніи A_6 она и осталась затѣмъ въ покоѣ. Время каждаго колебанія, какъ это покажетъ непосредственный подсчетъ, остается незатронутымъ и постояннымъ, равнымъ $\pi/\sqrt{h} = \pi : \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, т.-е. времени колебанія математическаго маятника безъ треніа и съ тою же длиной его l.

Легко сообразить, что здѣсь, какъ и въ случаѣ движенія точки подъ воздѣйствіемъ пружины, колебаній будетъ совершено тѣмъ больше, чѣмъ меньше область треніа; это ясно изъ того соображенія, что каждое качаніе уменьшаетъ амплитуду на $2\delta_0$, т.-е. на величину дуги, изображающей область равновѣсія. Такимъ образомъ, если начальное отклоненіе α_0 выражается въ функціи δ_0 формулами

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= (2n-1)\delta_0 + \varepsilon \\ \alpha_0 &= 2n\delta_0 + \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

или

гдѣ $\varepsilon < \delta_0$, то число колебаній будетъ равно n и, какъ показываетъ формула, будетъ увеличиваться съ уменьшеніемъ δ_0 и обратно.

Нетрудно, далѣе, убѣдиться, что область равновѣсія тѣмъ меньше, чѣмъ меньше моментъ треніа. Дѣйствительно, по формулѣ (10) имѣемъ, что

$$\delta_0 = \frac{\mu r}{l} = \frac{\mu M g r}{M g l},$$

а въ виду ур-ія (3) на стр. 109, это выраженіе перепишется такъ:

$$\delta_0 = \frac{\text{моменту силы трения } (\mu Mg)}{Mgl} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Этимъ, напримѣръ, вполнѣ объясняется тотъ фактъ, что число колебаній въ вѣсахъ, представляющихъ собою, въ сущности, тотъ же маятникъ, обыкновенно бываетъ очень велико. Дѣйствительно, моментъ трѣнія сведенъ здѣсь къ минимуму, ибо не только трѣніе сведено къ минимуму, но и плечо его ч является крайне малымъ; это обстоятельство, при сравнительно большихъ значеніяхъ знаменателя выраженія (12), ведетъ къ тому, что уголъ δ_0, а значитъ, и размѣры области равновѣсія, будутъ крайне малы. Вслѣдствіе этого, системѣ вѣсовъ придется совершить очень много колебаній, прежде чѣмъ центръ качанія вѣсовъ попадетъ въ область равновѣсія.

Если бы трѣнія не было, то въ уравненіи (4) выпалъ бы членъ μMgr, учитывающій моментъ силы трѣнія, и это уравненіе перешло бы въ уравненіе

$$-Ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} - Mgl\alpha = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (4')$$

переходящее въ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (5')$$

или, окончательно, въ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -h\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots (6')$$

вполнѣ аналогичное уравненію (2) движенія точки безъ трѣнія подъ воздѣйствіемъ пружины (стр. 60):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Всѣ выводы, полученные изъ разсмотрѣнія уравненія (2) прямолинейнаго движенія точки, могутъ быть, послѣ соотвѣтственныхъ измѣненій, примѣнены къ уравненію (6'), и, такимъ образомъ, можно заключить, что въ этомъ случаѣ маятникъ, разъ приведенный въ движеніе, будетъ качаться, не мѣняя ни времени своего качанія, равнаго здѣсь $\pi/\sqrt{h}$, т.-е. $\pi\sqrt{l/g}$, ни амплитуды, равной $2\alpha_0$. Эти результаты знакомы намъ изъ курса физики.

Такимъ образомъ, каждый маятникъ, при небольшихъ отклоненіяхъ его отъ вертикали VOV, можетъ быть разсматриваемъ движущимся какъ бы подъ вліяніемъ притяженія его къ оси OV съ силами, перпендикулярными оси маятника, AD, и пропорціональными угловому отклоненію его α отъ той же вертикали OV. Эффектъ силы тяжести въ данномъ случаѣ совершенно аналогиченъ эффекту отъ дѣйствія пружины съ криволинейной осью ss, дѣйствующей подобно пружинѣ съ прямолинейной осью x'x (фиг. 19).

Этими соображеніями мы и закончимъ изложеніе рѣшенія поставленной нами задачи. Мы видѣли, что какихъ-либо особенностей, сравнительно съ задачей о прямолинейномъ движеніи точки подъ воздѣйствіемъ пружины, она не представляетъ, являя собою лишь частный случай такого движенія, и гораздо болѣе интересной является та модификація только что разсмотрѣнной задачи, гдѣ шипъ, на который надѣвается втулка маятника, при движеніи этого послѣдняго не остается неподвижнымъ, а вращается самостоятельно, независимо отъ маятника, съ угловой скоростью, не спускающейся ниже нѣкотораго опредѣленнаго предѣла. Этотъ случай, имѣющій нѣкоторое значеніе для области эксперимента, былъ указанъ и разобранъ Н. Е. Жуковскимъ.

Мы знаемъ, что угловая скорость маятника, при качаніи его, не остается постоянной, но непрестанно мѣняется, поднимаясь отъ нуля въ одномъ край-

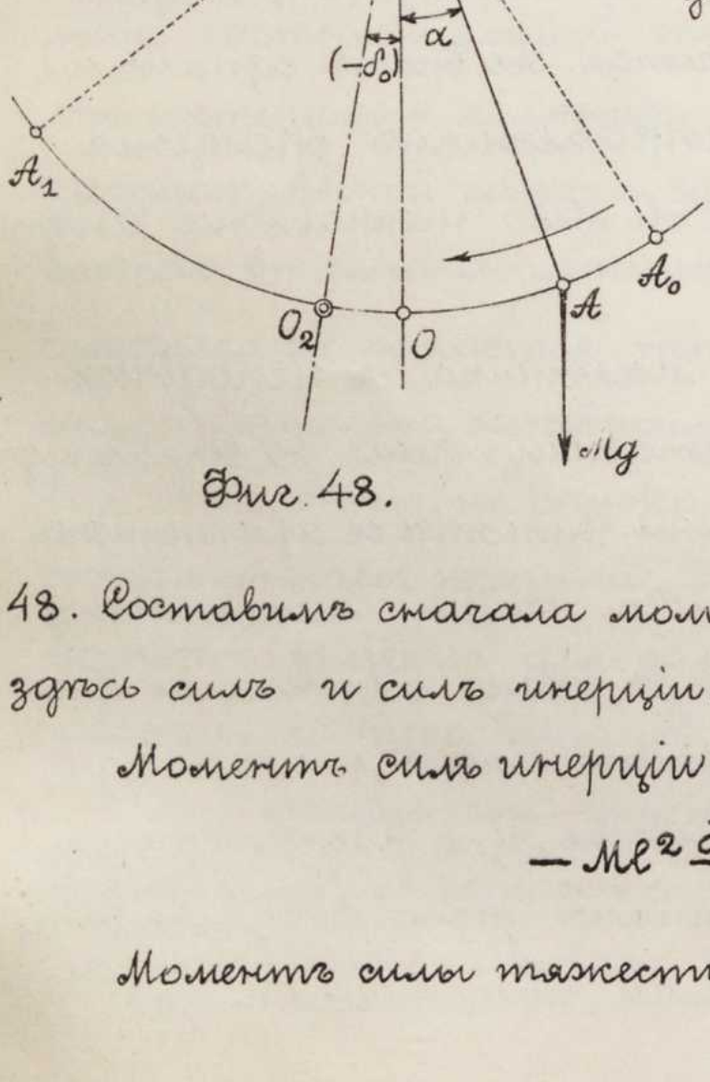
нем его положении до нѣкотораго максимума при переходѣ черезъ ось качанія и, затѣмъ, спускаясь опять до нуля въ слѣдующемъ крайнемъ положеніи. Обозначимъ эту максимальную угловую скорость маятника черезъ ω_m и положимъ, что шипъ приведенъ во вращеніе, все время въ одну и ту же сторону, съ угловой скоростью Ω, большей, чѣмъ ω_m, такъ что за все время движенія имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Omega > \omega_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Такъ какъ втулка B нашего шипа нагружена вѣсомъ Mg маятника, то на поверхности соприкосновенія ея съ шипомъ развиваются силы тренія, и детальный разборъ этого вопроса, выполненный нами выше, на страницахъ 18—21, показываетъ, что, въ случаѣ удовлетворенія неравенства (13), направленія силъ тренія, воздѣйствующихъ на втулку, остается все время однимъ и тѣмъ же, согласнымъ съ направленіемъ вращенія шипа, каково бы, при этомъ, ни было направленіе качанія маятника.

Разсматривая движеніе маятника съ неподвижнымъ шипомъ, мы видѣли, что силы тренія въ этомъ случаѣ мѣняютъ свое направленіе вмѣстѣ съ измѣненіемъ направленія качанія маятника. Случай маятника съ подвижнымъ шипомъ рѣзко въ этомъ отношеніи отличается отъ случая неподвижнаго шипа, и поэтому уже заранѣе можно предвидѣть, что разсмотрѣніе движенія съ подвижнымъ шипомъ дастъ результаты, расходящіеся съ результатами, полученными для

неподвижнаго типа. Въ этомъ можно убѣдиться путемъ непосредственнаго изслѣдованія, которое мы теперь и выполнимъ. Посмотримъ, какъ пишутся уравненія движенія для маятника съ подвижнымъ типомъ, какъ при качаніяхъ влѣво, такъ и при качаніяхъ вправо; и изслѣдуемъ эти уравненія, при чемъ предположимъ, что типъ маятника вращается все время по часовой стрѣлкѣ, такъ что моментъ силъ тренія, въ виду существованія неравенства (13), будетъ дѣйствовать на втулку все время также по часовой стрѣлкѣ.



Фиг. 48.

Пусть у насъ имѣется такой именно маятникъ AD, и типъ его, D, вращается все время по часовой стрѣлкѣ со скоростью Ω, удовлетворяющей основному неравенству (13). Разберемъ сначала движеніе влѣво, при чемъ предположимъ, что маятникъ находится въ области положительныхъ отклоненій α, какъ это изображено на фиг. 48. Составимъ сначала моменты всѣхъ дѣйствующихъ здѣсь силъ и силъ инерціи.

Моментъ силъ инерціи, согласно (1), выразится черезъ

$$-Me^2\frac{d^2(+\alpha)}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (в)$$

Моментъ силы тяжести выразится черезъ

$$-Mgl(+\alpha), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

причемъ мы приписали ему знакъ минусъ потому, что онъ стремится, какъ всегда, уменьшить отклоненіе маятника отъ вертикали VO.

Наконецъ, моментъ силъ трения выразится черезъ

$$-\mu Mgr, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

причемъ мы приписали ему знакъ минусъ потому, что онъ, дѣйствуя постоянно по часовой стрѣлкѣ, будетъ во взятый моментъ содѣйствовать уменьшенію отклоненія.

Въ виду этихъ соображеній, уравненіе равновѣсія, аналогичное (4), принимаетъ здѣсь видъ:

$$-Ml^2\frac{d^2(+\alpha)}{dt^2} - Mgla - \mu Mgr = 0$$

Дѣля на Ml^2 и группируя члены, свободные отъ производныхъ, отдѣльно, получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha - \frac{\mu gr}{l^2} = -\frac{g}{l}\left(\alpha + \frac{\mu r}{l}\right) \quad \ldots\ldots (14)$$

Приравнивая $d^2\alpha/dt^2$ нулю, получаемъ уравненіе, опредѣляющее положеніе граничнаго радіуса DO_2, служащаго здѣсь осью качанія:

$$\alpha + \frac{\mu r}{l} = 0,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{\mu r}{l} = -\delta_0,$$

согласно съ (10). Отсюда заключаемъ, что первое колебаніе совершится такъ, какъ если бы треніе исчезло, а ось колебанія перемѣстилась изъ вертикали VO въ радіусъ DO_2, отклонившись отъ вертикали VO въ сторону вращенія гипа на уголъ δ_0. Этотъ радіусъ DO_2, есть, какъ видимъ, лѣвый граничный радіусъ прежней области равновѣсія. Около этого радіуса DO_2 и совер-

шится первое колебаніе нашего маятника совершенно такъ же, какъ если бы треніа не было совсѣмъ. Поэтому, полагая, что въ начальный моментъ маятникъ находился въ A_0 (фиг. 50), заключаемъ, что въ концѣ перваго качанія онъ окажется въ A_1,—конечной точкѣ дуги O_2A_1, равной дугѣ O_2A_0. Вся дуга A_0A_1,—амплитуда перваго колебанія,—будетъ, очевидно, равна дугѣ $2(\alpha_0+\delta_0)$, въ то время какъ при движеніи съ треніемъ, но при неподвижномъ шипѣ, эта амплитуда была бы равна $2(\alpha_0-\delta_0)$. Легко убѣдиться, что, одновременно съ этимъ увеличеніемъ амплитуды, время качанія остается незатронутымъ и, попрежнему, равнымъ $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.—Итакъ, при вращеніи шипа съ такою скоростью Ω, первое качаніе (влѣво) совершится не около ближайшаго граничнаго радіуса DO_1, а около дальняго, лѣваго, DO_2; иными словами, ось качанія математическаго маятника безъ треніа, вертикаль VO, перемѣщается по направленію вращенію шипа D на уголъ δ_0.

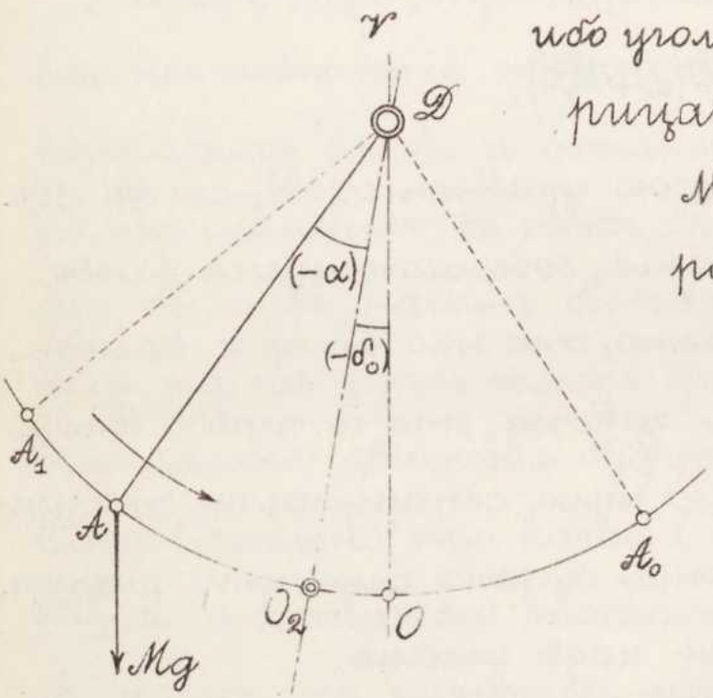
Замѣтимъ, между прочимъ, что точка A_1 никогда не можетъ придтись между O_2 и O, въ прежней области равновѣсія, потому что центральной линіей качанія является здѣсь именно лѣвый радіусъ DO_2, и точка A_1, по необходимости должна лежать влѣво отъ него, т.-е. внѣ прежней области равновѣсія. Посмотримъ теперь, какъ дѣло будетъ происходить дальше.

Остановившись на мгновеніе въ A_1, маятникъ повернетъ назадъ и начнетъ совершать свое второе качаніе, вправо. Посмотримъ, какъ напишется теперь уравненіе движенія для этого качанія.

Возьмемъ нашъ маятникъ въ тотъ моментъ второго его колебанія (вправо), когда онъ находится въ какой-либо точкѣ A, такъ что уголъ отклоненія его во взятый моментъ равенъ $(-\alpha)$, — см. фиг. 51. Моменты участвующихъ здѣсь силъ изобразятся такъ:

Моментъ силъ инерціи выразится теперь черезъ

$$-Ml^2\frac{d^2(-\alpha)}{dt^2}, \quad \ldots\ldots (e)$$



Фиг. 51.

ибо уголъ отклоненія ADO здѣсь отрицателенъ и равенъ $(-\alpha)$.

Моментъ силы тяжести выразится черезъ

$$-Mgl(-\alpha), \quad \ldots (f)$$

причемъ впереди выраженія момента знакъ минусъ поставленъ потому, что этотъ моментъ стремится уменьшить отклоненіе ADO маятника, а передъ угломъ α минусъ поставленъ потому, что этотъ уголъ лежитъ въ области отрицательныхъ угловъ.

Что касается момента трѣнія, то онъ, дѣйствуя, по условію, согласно со смысломъ вращенія шипа, т.-е. по часовой стрѣлкѣ, будетъ здѣсь противодѣйствовать уменьшенію угла отклоненія ADO, почему мы припишемъ ему плюсъ, изобразивъ его въ видѣ

$$+\mu Mgr. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

Въ виду всего этого уравненіе равновѣсія напишется здѣсь такъ:

$$-Ml^2\frac{d^2(-\alpha)}{dt^2} - Mgl(-\alpha) + \mu Mgr = 0,$$

что можетъ быть переписано проще такъ:

$$Ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mgl\alpha - \mu Mgr.$$

Дѣля на Ml^2, получаемъ уравненіе второго качанія нашего маятника (вправо, отъ A_1 къ 0):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left(\alpha + \frac{\mu r}{l}\right),$$

въ точности повторяющее собою уравненіе (14),—см. стр. 119,—написанное для перваго качанія, совершающагося влѣво, это обстоятельство показываетъ, что это второе колебаніе совершится по тому же закону, что и первое. Дѣйствительно, приравнивая $d^2\alpha/dt^2$ нулю, обнаружимъ, что центральной линіей этого качанія будетъ служить радіусъ, наклоненный къ вертикали подъ угломъ

$$\alpha = -\frac{\mu r}{l} = -\delta_0.$$

Этотъ радіусъ, очевидно, представитъ собою тотъ же радіусъ DO_2, который служилъ осью перваго колебанія (влѣво). Качаніе будетъ совершаться такъ, какъ если бы треніе не было, вслѣдствіе чего нашъ маятникъ, выйдя изъ A_1, въ концѣ этого своего второго колебанія придетъ въ точку, отстоящую отъ O_2 вправо, считая по дугѣ качаній, на длину, равную длинѣ дуги A_1O_2; это значитъ, что маятникъ вернется, въ концѣ своего второго колебанія, въ ту же точку A_0, изъ которой онъ вышелъ въ началѣ своего перваго колебанія. Такимъ образомъ, второе колебаніе будетъ точнымъ повтореніемъ

перваго какъ по отношенію къ величинѣ амплитуды колебаній, такъ и къ положенію оси его; время колебаній остается также незатронутымъ. Вся разница сводится лишь къ разницѣ направленій колебанія и другихъ кинематическихъ факторовъ, и только. Такимъ образомъ, второе колебаніе представляетъ собою то же первое колебаніе, лишь повернутое относительно оси колебаній DO_2 на 180°.

Слѣдующее, третье, колебаніе представитъ собою буквальное повтореніе перваго, ибо наша матеріальная точка, возвратясь въ A_0 и остановившись тамъ, окажется въ этотъ моментъ въ тѣхъ же самыхъ условіяхъ, въ какихъ она была въ началѣ своего перваго колебанія: какъ всѣ силы, на нее здѣсь теперь дѣйствующія, такъ и начальныя условія движенія будутъ тождественно одинаковы. Слѣдовательно, это качаніе совершится опять около оси DO_2, и въ концѣ его точка придетъ опять въ положеніе A_1, послѣ чего начнется четвертое колебаніе, тождественно повторяющее второе и т. д. Словомъ, при такихъ условіяхъ нашъ маятникъ будетъ качаться такъ, какъ если бы трѣнія не было, а центральная линія качаній, остающаяся неизмѣнной какъ для качаній въ одну сторону, такъ и для качаній въ другую, отклонилась отъ вертикали въ сторону вращенія шипа на уголъ δ_0. Такимъ образомъ, нашъ маятникъ, имѣвшій возможность при неподвижномъ шипѣ совершить лишь ограниченное число колебаній,—амплитуда ихъ, согласно сказанному выше, съ каждымъ новымъ колебаніемъ убываетъ на одну и ту же величину $2\delta_0$,—при подвижномъ шипѣ, враща-

ющемся съ угловой скоростью Ω, большей, чѣмъ максимальная скорость ω_m маятника, превращается въ идеальный маятникъ безъ треніа, могущій при благопріятныхъ условіяхъ, каковыми является отсутствіе сопротивленія среды, въ которой ему приходится двигаться, качаться неопредѣленно долгое время между одними и тѣми же крайними точками A_0 и A_1 дуги качаній, равноотстоящими отъ центральной точки качаній, O_2. Разница между теоретическимъ маятникомъ безъ треніа и маятникомъ, разобраннымъ выше, сводится лишь къ тому, что центральная линія качаній, совпадающая у перваго съ вертикалью OV, у втораго оказывается удалившейся отъ этой вертикали въ сторону вращенія цапфа на уголъ δ_0, опредѣляемый по величинѣ треніа въ цапфѣ.

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ любопытному результату: оказывается, что всякій маятникъ съ треніемъ въ точкѣ привѣса можетъ быть переведенъ въ идеальный маятникъ уже безъ всякаго треніа; для этого цапфа, на который надѣвается втулка маятника, нужно привести во вращеніе съ угловой скоростью, большей, чѣмъ максимальная угловая скорость вращенія маятника.

Этотъ случай качаній представляетъ интересъ еще въ томъ отношеніи, что даетъ возможность опредѣлять коэффиціентъ скользящаго треніа f. Дѣйствительно, величина угла δ_0 отклоненія центральной линіи отъ вертикали опредѣляется изъ соотношенія: $\delta_0 = \mu r / l$,

гдѣ μ есть коэффиціентъ тренія въ шипѣ, а въ составѣ этого коэффиціента входитъ, какъ мы увидимъ, и коэффиціентъ тренія скольженія f. Такъ какъ уголъ δ_0 можно опредѣлить непосредственно путемъ прямого наблюденія, то сейчасъ же, при извѣстныхъ r и l, опредѣлится коэффиціентъ μ, а отсюда и коэффиціентъ f.

Имѣя въ виду, что скорость вращенія шипа Ω можно мѣнять какъ угодно, лишь бы она оставалась все время больше максимальной скорости ω_m, можно также поставить вопросъ о зависимости коэффиціента f отъ величины относительной скорости v. Если бы оказалось, что уголъ δ_0 сохраняетъ одно и то же значеніе при всякихъ скоростяхъ Ω шипа, то это показало бы, что относительная скорость скольженія на величину коэффиціента тренія не вліяетъ; если же обнаружилось бы, что измѣненіе скорости Ω влечетъ за собою измѣненіе угла δ_0, то пришлось бы признать существованіе зависимости между указанными двумя факторами. Достаточно надежныхъ данныхъ пока не имѣется, почему отъ какихъ бы то ни было заключеній приходится воздержаться.

Случая $\Omega \leqq \omega_m$ разбирать не стоитъ, ибо онъ ничего интереснаго не даетъ: въ этомъ случаѣ силы тренія постояннаго направленія не имѣютъ, и въ извѣстные моменты оно мѣняется. Амплитуды будутъ убывать и, слѣдовательно, колебанія черезъ нѣкоторое время затухнутъ.

Разборомъ приведенныхъ примѣровъ движенія съ участіемъ силъ трепія мы и ограничимся. Въ болѣе сложныхъ случаяхъ ходъ разсужденій остается тотъ же: мы напишемъ дифференціальныя уравненія движенія, принимая во вниманіе и силы трепія, и интеграція этихъ уравненій, если только она окажется выполнимой, дастъ намъ возможность выяснить всѣ особенности изслѣдуемаго движенія.

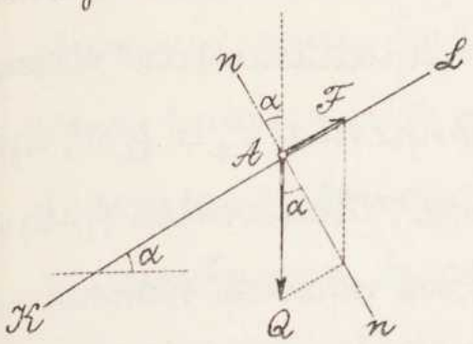
Теперь, въ порядкѣ изложенія нашего курса, мы приступимъ къ нахожденію выраженій силъ трепія въ наиболѣе часто встрѣчающихся на практикѣ случаяхъ проявленія ихъ, причемъ будемъ предполагать, что движеніе точекъ и тѣлъ происходитъ равномѣрно, такъ что ускореніе каждый разъ равно нулю. Попутно будемъ подсчитывать значенія коэффиціентовъ полезнаго дѣйствія, согласно схемѣ, приведенной на стр. 9 и выраженной формулой (8). Мы начнемъ наше разсмотрѣніе съ простѣйшаго случая,—съ случая движенія матеріальной точки по наклонной плоскости.

§ 5. Наклонная плоскость.

Пусть на плоскости K_2, наклоненной къ горизонту подъ нѣкоторымъ угломъ α (фиг. 52), лежитъ матеріальная точка A массы m, такъ что вѣсъ ея равенъ $Q = mg$. Согласно сказанному выше, на стр. 43 – 45, можемъ сказать, что точка A будетъ находиться на этой плоскости въ равновѣсіи тогда, когда уголъ α

наклона силы Q къ нормали nn къ плоскости Kλ, т.-е. уголъ наклона плоскости Kλ къ горизонту, будетъ меньше угла трения φ или, въ предѣлѣ, равенъ ему. Условіе это выразится соотношеніемъ

$$\alpha \leqq \varphi \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$



Фиг. 52.

Иными словами, сила Q должна лежать внутри конуса трения, пристроеннаго въ точкѣ A и имѣющаго своею осью нормаль nn.

Если уголъ α окажется удовлетворяющимъ условію (1), то точка A, будучи положена на плоскость Kλ и предоставлена затѣмъ самой себѣ, будетъ оставаться въ равновѣсіи въ любомъ мѣстѣ плоскости Kλ; сколь бы велика ни была ея вѣсъ Q, она при такихъ условіяхъ, будучи подвержена воздѣйствію силъ Q и F, самостоятельно сдвинуться съ мѣста не сможетъ, почему для удержанія ея отъ соскальзыванія внизъ по плоскости не потребуется вмѣшательства никакихъ новыхъ силъ,— функцію задерживанія, торможенія точки принимаетъ на себя въ такихъ случаяхъ сила тренія F, равная $fQ\cos\alpha$. Плоскость Kλ, обладающая такимъ цѣннымъ на практикѣ свойствомъ, покупаемымъ, однако, какъ мы увидимъ ниже, довольно дорогой цѣной, называется самотормозящей. Въ случаѣ же $\alpha > \varphi$ для удержанія тѣла на плоскости потребуется вмѣшательство той или другой внѣшней силы, и свойства самоторможенія такая плоскость имѣть уже не будетъ.

Здѣсь будетъ умѣстно сдѣлать одно общее замѣчаніе по поводу несамотормозящихъ плоскостей. Дѣло въ томъ, что, пока $\alpha < \varphi$, точка будетъ оставаться въ равновѣсіи, и придти въ движеніе она сможетъ лишь тогда, когда слагающая силы Q, параллельная плоскости KL, окажется равной силѣ треніа $F_1 = f_1 N$, гдѣ f_1 есть коэффиціентъ треніа покоя. Положивъ $f_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, гдѣ уголъ φ_1 будемъ называть угломъ треніа покоя, можемъ сказать, что предѣльный, наименьшій уголъ α, при которомъ возможно ожидать, что точка сдвинется со своего мѣста сама, дается соотношеніемъ

$$\operatorname{tg}\alpha = f_1$$

или, что то же,

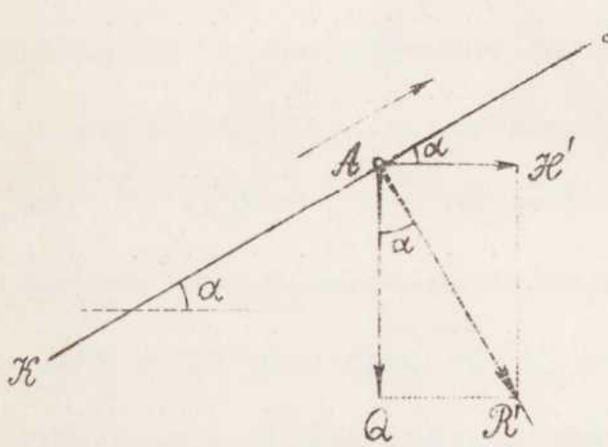
$$\alpha = \varphi_1 .$$

Но разъ движеніе точки началось, то уголъ наклона α можетъ быть уменьшенъ до размѣровъ

$$\alpha = \varphi_2 ,$$

гдѣ φ_2 есть уголъ треніа движеніа, опредѣляемый изъ условіа $f_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, причемъ черезъ f_2 обозначенъ коэффиціентъ треніа движеніа, какъ извѣстно, меньшій, чѣмъ f_1. Подобныя же разсужденіа примѣнимы, вообще, въ различныхъ случаяхъ участіа силъ Треніа въ опредѣленіи движеніа тѣла, но повторять ихъ мы не будемъ, подразумѣвая подъ коэффиціентомъ треніа f, вносимымъ въ наши формулы, тотъ изъ нихъ двухъ, который причитствуетъ разсматриваемому случаю. Послѣ этого необходимаго замѣчаніа вернемся къ нашей задачѣ.

Мы разсмотрѣли тотъ случай, когда точка находилась подъ воздѣйствіемъ лишь собственнаго вѣса и вызываемыхъ имъ силъ тренія. Посмотримъ теперь, при какихъ условіяхъ будетъ имѣть мѣсто равновѣсіе или равномѣрное движеніе, если, кромѣ силы тяжести, на точку дѣйствуютъ какія-либо другія силы (активныя). При этомъ, ради упрощенія выводовъ и возможности примѣненія ихъ въ дальнѣйшемъ, въ случаѣ винта, предположимъ, что всѣ эти новыя силы сводятся къ нѣкоторой горизонтальной силѣ, лежащей въ вертикальной плоскости, перпендикулярной къ данной наклонной плоскости и совпадающей съ плоскостью чертежа. Случаи, когда равнодѣйствующія этихъ силъ представляются направленными какъ-нибудь иначе, могутъ быть сведены къ упомянутому выше, ибо каждая такая равнодѣйствующая, отличная отъ горизонтальной, можетъ быть разложена на силу горизонтальную и на силы, лежащія въ самой плоскости.



Фиг. 53.

Итакъ, предположимъ, что матеріальная точка A, вѣса Q, лежитъ на плоскости KL, уголъ коей съ горизонтомъ обозначимъ черезъ α (фиг. 53). Пусть, кромѣ силы тяжести Q, на точку дѣйствуетъ еще горизонтальная сила H', понуждающая нашу точку двигаться вверхъ по плоскости KL. При отсутствіи силы тренія мы имѣли бы равномѣрное движеніе точки или покой ея тогда,

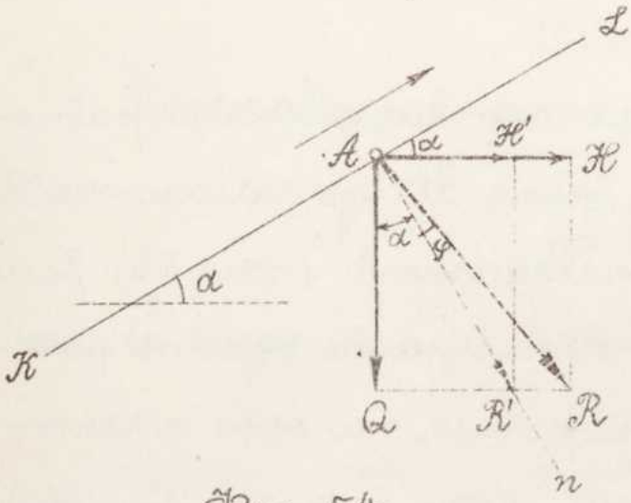
когда силы Q и H' оказалось бы возможным свести къ равнодѣйствующей R', перпендикулярной къ плоскости KL,—этотъ случай и изображенъ на фиг. 53. Сила H'. удовлетворяющая поставленному требованію, выражается въ функціи угла α и силы Q соотношеніемъ

$$H' = Q \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Сила H, опредѣляемая по этому уравненію, есть минимальная сила, могущая, при отсутствіи тренія, поддерживать равномѣрное движеніе вверхъ по плоскости. Силы, бо́льшія Q tgα, дадутъ ускоренное движеніе вверхъ, а меньшія Q tgα двигать точку вверхъ не смогутъ, и она станетъ скользить внизъ по плоскости, также ускоренно. Само собою разумѣется, что сила H', опредѣляемая по (2), дастъ движеніе лишь тогда, когда точка, въ моментъ подчиненія ея воздѣйствію силы H', будетъ обладать какой-либо скоростью v, отличной отъ нуля; если же v = 0, т.-е. если точка въ указанный моментъ была неподвижной, то она останется неподвижной и тогда, когда на нее станетъ дѣйствовать сила H'.

Этой горизонтальной силы H' будетъ, однако, уже недостаточно для возможности равномѣрнаго продвиганія точки вверхъ по плоскости, разъ движеніе будетъ происходить съ треніемъ. Дѣйствительно, разъ силы H' и Q даютъ равнодѣйствующую R', совпадающую съ нормалью An, то, при наличности тренія, это будетъ значить, что равнодѣйствующая R' совпадаетъ съ осью конуса тренія, а это показываетъ, что точка A при этихъ условіяхъ двигаться не сможетъ, какъ это вытекаетъ изъ сказанна-

го раньше: мы знаемъ, что пока равнодѣйствующая P внѣшнихъ силъ остается внутри конуса трения, точка будетъ пребывать въ покоѣ; если эта сила P совпадетъ съ образующей конуса трения, то наша точка получитъ возможность или оставаться въ покоѣ и дальше или же двигаться равномѣрно въ ту сторону, куда наклонена сила P, вызывающая и поддерживающая это равномѣрное движение. Если же сила P выйдетъ изъ конуса, такъ что уголъ наклона ея къ нормали будетъ бо́льше угла трения φ, то точка станетъ двигаться ускоренно въ ту же сторону, въ какую наклонена сила P.



Фиг. 54.

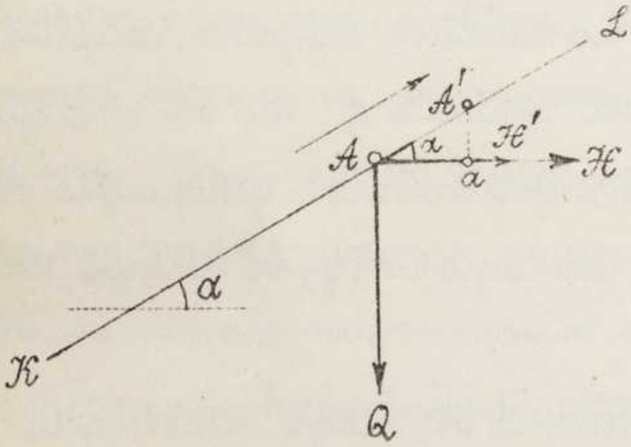
Такимъ образомъ, разъ точка A, подъ вліяніемъ горизонтальной силы H (фиг. 54), должна двигаться вверхъ по плоскости KL, то равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ Q и H должна быть наклонена къ нормали An минимумъ подъ угломъ φ; въ этотъ моментъ она можетъ дать равномѣрное движение точки вверхъ по плоскости. Поэтому заключаемъ, что наименьшая горизонтальная сила, могущая дать еще равномѣрное движение по плоскости, опредѣлится изъ уравнения

$$H = Q \operatorname{tg}(\alpha+\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Сравнивая эту формулу съ полученной выше формулой (2) и замѣчая, что, при углахъ α, φ и $(\alpha+\varphi)$, меньшихъ 90° каждый, $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi) > \operatorname{tg}\alpha$, заключаемъ, что $H > H'$, такъ

этого можно было ожидать заранѣе: движеніе съ треніемъ требуетъ примѣненія бо́льшей силы, при прочихъ равныхъ условіяхъ, чѣмъ движеніе безъ треніа, ибо въ первомъ случаѣ часть работы дѣйствующей силы должна будетъ пойти на покрытіе работы силъ треніа. Попробуемъ подсчитать коэффиціентъ полезнаго дѣйствія данной наклонной плоскости, что можно выполнить при помощи полученныхъ нами выше формулъ (2) и (3).

Пусть наша матеріальная точка, двигаясь равномѣрно, перешла за нѣкоторое время dt изъ положенія A въ положеніе A' (фиг. 55). Если бы безполезныхъ тратъ работы не было, то это перемѣщеніе груза Q могла бы совершить наша сила N', равная $Q\,tg\alpha$, при чемъ работа ея выразилась бы черезъ $N'.Aa$, гдѣ Aa представляетъ собою проекцію дѣйствительнаго перемѣщенія груза, AA', на горизонтальную прямую AN. Эта работа, — обозначимъ ее черезъ L', — не затрачиваемая ни на что другое, кромѣ подъема груза Q на высоту aA', и представляетъ собою ту полезную работу, которая должна быть, помимо прочаго, произведена любой другой силой, перемѣщающей грузъ Q изъ положенія A въ положеніе A'. Сила N, поднимая грузъ изъ A въ A', произведетъ работу L, равную $N.Aa$ и бо́льшую, чѣмъ L', ибо $N > N'$; это происходитъ оттого, что часть работы L должна будетъ уйти на преодолѣніе работы треніа. Такимъ



Фиг. 55.

образомъ, хотя на подъемъ груза изъ A въ A' затрачивается въ дѣйствительности работа $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} . Aa$, но при отсутствіи вредныхъ сопротивленій для этого было бы достаточно работы $\mathfrak{L}' = \mathfrak{H}' . Aa$, откуда заключаемъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія η выразится, согласно общимъ положеніямъ, черезъ

$$\eta = \frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}}.$$

Подставляя вмѣсто $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}$ ихъ выраженія, находимъ, что

$$\eta = \frac{\mathfrak{H}' . Aa}{\mathfrak{H} . Aa} = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}},$$

что, въ виду (2) и (3), перепишется иначе такъ:

$$\eta = \frac{Q \operatorname{tg} \alpha}{Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Тотъ же результатъ можно получить проще, разсуждая такъ: пусть грузъ Q, подъ воздѣйствіемъ горизонтальной силы $\mathfrak{H}$, передвинулся изъ своего положенія A въ положеніе A', двигаясь, при томъ, равномѣрно. Такимъ образомъ, полезная работа, произведенная силой $\mathfrak{H}$, предѣлывается работой поднятія груза Q на высоту aA'. Но сила $\mathfrak{H}$ на самомъ дѣлѣ произвела работу $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} . Aa$, что и показываетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія нашей наклонной плоскости выражается черезъ

$$\eta = \frac{Q . aA'}{\mathfrak{H} . Aa} = \frac{Q}{Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \cdot \frac{aA'}{Aa} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)},$$

ибо $aA' : Aa = \operatorname{tg} \alpha$. Мы получили то же выраженіе (4), какъ и быть должно, ибо работа $\mathfrak{L}'$ силы $\mathfrak{H}'$ на пути aA и представляетъ собою работу подъема груза Q на высоту aA'. Дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$L' = H' . aA = Q \operatorname{tg}\alpha . aA = Q . aA \operatorname{tg}\alpha = Q . aA'.$$

Итакъ, общее выражение коэффиціента полезнаго дѣйствія наклонной плоскости дается соотношеніемъ (4). Легко показать, что для самотормозящихъ плоскостей, гдѣ, слѣдовательно, $\alpha < \varphi$, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія весьма низокъ, ибо не достигаетъ даже 0,5. Дѣйствительно, разъ

$$\alpha < \varphi,$$

то

$$\operatorname{tg}\varphi > \operatorname{tg}\alpha.$$

Положимъ, что

$$\operatorname{tg}\varphi = k \operatorname{tg}\alpha,$$

при чемъ, очевидно, $k > 1$, и мы положимъ, что

$$k = 1 + \delta,$$

гдѣ $\delta > 0$. Въ виду этихъ соотношеній выраженіе (4) можетъ быть переписано такъ:

$$\eta = \operatorname{tg}\alpha : \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}\alpha : \frac{\operatorname{tg}\alpha + k \operatorname{tg}\alpha}{1 - k \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 - k \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + k}.$$

Замѣчая теперь, что числитель этой дроби меньше единицы, а знаменатель больше двухъ, заключаемъ, что

$$\eta_{\text{самоторм.}} < \frac{1}{2}.$$

Ниже будетъ показано, что такимъ низкимъ коэффиціентомъ обладаютъ, вообще, всѣ самотормозящіе механизмы, — у всѣхъ нихъ $\eta < \frac{1}{2}$.

Возвращаясь къ выраженію (3), легко можемъ подсчитать предѣльную величину наклона α, при которой поднятіе груза вверхъ по плоскости при помощи одной только горизонтальной силы становится уже невозможнымъ. Очевидно, что это будетъ имѣть мѣсто при $\alpha + \varphi = 90°$,

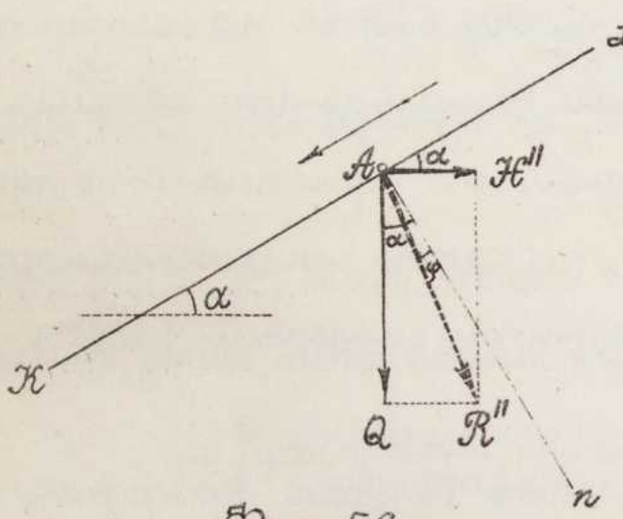
такъ что $\alpha = 90° - \varphi$. При такомъ значеніи угла α горизонтальная сила H, имѣющая двигать точку вверхъ по плоскости, должна имѣть безконечно большое значеніе, и это обстоятельство указываетъ на то, что перемѣщеніе точки вверхъ по плоскости помощью горизонтальныхъ силъ оказывается фактически невозможнымъ, и для такого перемѣщенія необходимо примѣнить силы, направленныя къ вертикали подъ угломъ, меньшимъ 90°. Такимъ образомъ, при наклонѣ плоскости къ горизонту, равномъ $(90° - \varphi)$, продвинуть точку вверхъ по плоскости помощью горизонтальной силы оказывается совершенно невозможнымъ. Легко убѣдиться, что при наклонѣ, превосходящемъ значеніе $(90° - \varphi)$, никакой горизонтальной силой не удастся предотвратить сползаніе точки внизъ по плоскости.

Въ указанномъ предѣльномъ случаѣ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія плоскости, выражаемый для случая работы горизонтальныхъ силъ соотношеніемъ (4), обращается въ нуль, ибо $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$ принимаетъ значеніе, равное безконечности, въ то время какъ $\operatorname{tg}\alpha$ представится величиной конечной.

Въ случаѣ $\alpha = 0$, т.-е. при движеніи по горизонтальной плоскости, горизонтальная сила H принимаетъ значеніе $Q \operatorname{tg}\varphi$, т.-е. fQ, иными словами, становится равной силѣ тренія $F = fQ$, какъ и быть должно, ибо для возможности равномѣрнаго движенія по горизонтальной плоскости, горизонтальная сила, движущая точку, должна быть равна силѣ тренія fQ. Коэффиціентъ η здѣсь также ра-

вень нуля, ибо вся работа силы H будетъ уходить исключительно на преодолѣніе работы тренія, полезная же работа равна здѣсь нулю.

Разберемъ, наконецъ, вопросъ о величинѣ горизонтальной силы, могущей удержать грузъ на несамоторможящей плоскости, гдѣ, слѣдовательно, $\alpha > \varphi$. Предѣльнымъ значеніемъ этой силы является то, при которомъ возможно равномѣрное скольженіе груза внизъ по плоскости. Обозначивъ величину этой горизонтальной силы черезъ H'', заключаемъ, что она опредѣлится графически изъ того условія, чтобы равнодѣйствующая этой силы H'' и вѣса Q укладась по образующей конуса тренія m, при томъ, въ сторону предполагаемаго равномѣрнаго движенія. Пусть это будетъ сила R'' (фиг. 56). Такъ какъ сила R'' будетъ наклонена къ нормали An подъ угломъ φ, то изъ прямоугольнаго треугольника AQR'' находимъ, что

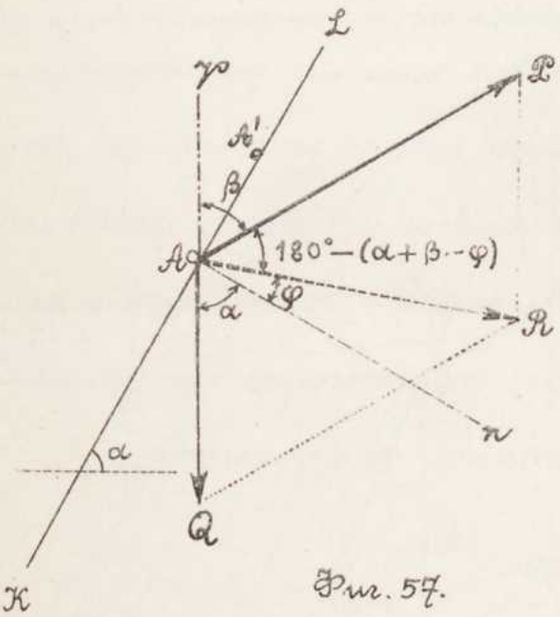


Фиг. 56.

$$H'' = Q \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Если горизонтальная сила будетъ равна H'', то грузъ A будетъ имѣть возможность равномѣрно скользить внизъ по плоскости KL. Если горизонтальная сила будетъ больше H'', то скольженія внизъ уже не будетъ, а можетъ произойти одно изъ двухъ: если сила R'' будетъ лежать внутри конуса тренія, что будетъ возможно тогда, когда значенія силы, направленной горизон-

тально, будутъ заключаться между $Q\,tg(\alpha-\varphi)$ и $Q\,tg(\alpha+\varphi)$,— то грузъ Q будетъ оставаться на плоскости въ покоѣ. Если же значеніе горизонтальной силы превзойдетъ величину $Q\,tg(\alpha+\varphi)$, то грузъ Q станетъ ускоренно подниматься вверхъ по плоскости, ибо въ этомъ случаѣ равнодѣйствующая R выйдетъ изъ предѣловъ конуса тренія, будучи, въ то же время наклоненной въ сторону движенія вверхъ по плоскости. При горизонтальной силѣ, меньшей, чѣмъ $Q\,tg(\alpha-\varphi)$, будетъ имѣть мѣсто ускоренное движеніе внизъ по плоскости KL.



Фиг. 57.

Если на точку, помимо вѣса ея Q, дѣйствуетъ сила P, направленная не горизонтально, а подъ угломъ β къ вертикали AV, отличнымъ отъ 90° (фиг. 57), то условіе равномѣрнаго движенія точки A вверхъ по плоскости KL выразится опять требованіемъ того, чтобы равнодѣйствующая силъ P и Q совпала съ образующей конуса тренія, наклоненной въ сторону желаемаго движенія. Такой именно случай и изображенъ на фиг. 57, и изъ косоугольнаго треугольника APR мы и получаемъ необходимое для указаннаго совпаденія соотношеніе между силами P и Q:

$$P = Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha+\beta+\varphi)}.$$

Легко подсчитать значеніе коэффиціента полезнаго дѣйствія для этого общаго случая: замѣчая, что при перемѣщеніи груза Q изъ положенія A въ положеніе A' полезная работа L' выразится черезъ $Q.AA'\sin\alpha$, на самомъ же дѣлѣ сила P, поднимающая грузъ, произведетъ работу L, равную $P.AA'\sin(\alpha+\beta)$, заключаемъ, что коэффиціентъ η, при произвольномъ углѣ β наклона силы P къ отвѣсной линіи VA, выражается такъ:

$$\eta = \frac{L'}{L} = \frac{Q\sin\alpha}{P\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\varphi)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\varphi)}$$

Подстановка тѣхъ или другихъ значеній α и β дастъ всѣ полученныя раньше формулы (2)—(4). Такъ, напримѣръ, для горизонтально направленныхъ силъ, гдѣ $\beta = 90°$, имѣемъ $P = Q\,tg(\alpha+\varphi)$, а $\eta = tg\alpha/tg(\alpha+\varphi)$, что было

получено уже раньше. Случай горизонтальной плоскости и горизонтальной же силы задастся условіями $\alpha = 0$ и $\beta = 90°$; вышенаписанныя соотношенія дадутъ для этого случая знакомыя уже намъ формулы: $P = Q \operatorname{tg} \varphi = fQ$ и $\eta = 0$.

Замѣтимъ, наконецъ, что общая формула для η показываетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія наклонной плоскости опредѣляется не только угломъ α наклона этой плоскости къ горизонту и угломъ тренія φ, но и угломъ β наклона силы P къ отвѣсной прямой. Такимъ образомъ, одна и та же наклонная плоскость можетъ дать самые разнообразные коэффиціенты η, — это будетъ зависѣть 1) отъ матеріала положеннаго на нее тѣла и 2) отъ наклона β силы, на данное тѣло дѣйствующей. Каждый отдѣльный коэффиціентъ η даетъ намъ представленіе о степени использованія въ нашихъ цѣляхъ работы дѣйствующей при данныхъ условіяхъ силы, — мы можемъ, очевидно, создать для работы этой силы и благопріятныя условія, уменьшая треніе, и неблагопріятныя, увеличивая его, а это регулированіе тренія и можетъ быть достигнуто измѣненіемъ наклона дѣйствующей силы.

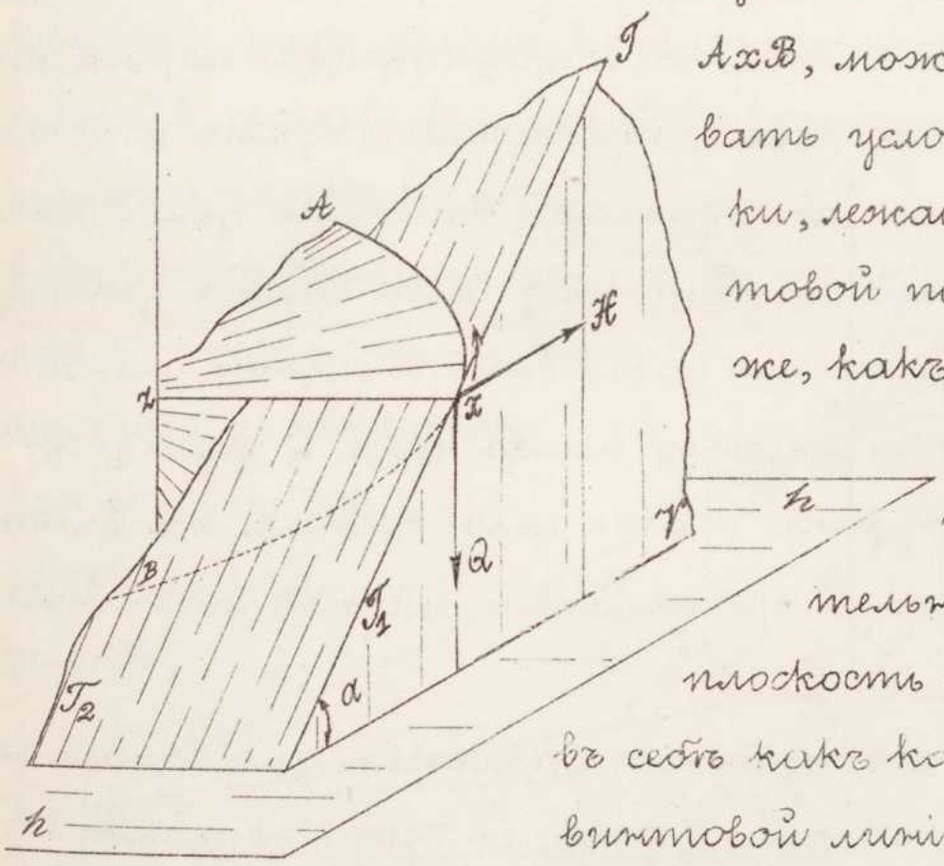
Этими общими соображеніями мы и закончимъ разсмотрѣніе условій равновѣсія и равномѣрнаго движенія точки по наклонной плоскости и теперь, въ порядкѣ послѣдовательности, перейдемъ къ выводу подобныхъ же условій въ случаѣ движенія точки по винтовой поверхности.

§ 6. Винтъ.

Въ техникѣ находятъ себѣ примѣненіе какъ винты съ прямоугольной нарѣзкой, такъ и съ остроугольной. Винтовую поверхность первыхъ можно представить себѣ образованной движеніемъ нѣкоторой прямой, скользящей одновременно по нѣкоторой правильной винтовой линіи и по ея оси, служащей въ то же время и осью винта, при чемъ указанная прямая, — образующая винтовой поверхности, — остается все время перпендикулярной къ оси винтовой линіи. Если же эта прямая будетъ не перпендикулярна къ этой оси, а наклонна, при чемъ уголъ наклона остается все время неизмѣннымъ, постояннымъ, то при-

движеніи такой наклонной прямой получимъ поверхность винта съ острогольной нарѣзкой.

Первый случай,—случай винта съ прямогольной нарѣзкой,—тождественъ съ случаемъ наклонной плоскости, разобраннымъ нами въ предыдущемъ параграфѣ. Дѣйствительно, взявъ на винтовой линіи точку x, въ которой въ данный моментъ находится движущаяся масса (фиг. 53), и проведя черезъ эту точку x плоскость TT_1T_2, касательную къ винтовой поверхности AxB, можемъ разсматривать условія равновѣсія точки, лежащей на этой винтовой поверхности, такъ же, какъ если бы эта точка лежала на упомянутой касательной плоскости. Эта плоскость TT_1T_2 заключаетъ въ себѣ какъ касательную TT_1 къ винтовой линіи въ точкѣ x ея, такъ и образующую винтовой линіи, прямую xx, соотвѣтствующую точкѣ x. Такимъ образомъ, мы имѣемъ случай наклонной плоскости, уже детально разобранный нами, и поэтому, не обращаясь къ ближайшему разсмотрѣнію вопроса, можемъ сразу установить, что, если мы желаемъ помощью нѣкотораго горизонтальнаго усилія H, касательнаго къ цилин-



Фиг. 58.

дической поверхности и представляющаго собою окружное усиліе, поднять вверхъ по винтовой поверхности нѣкоторый грузъ Q, то для этой цѣли придется примѣнить ту же горизонтальную силу $\mathcal{H}$, какую пришлось бы употребить въ случаѣ соотвѣтствующей наклонной плоскости, такъ что, обозначивъ уголъ наклона винтовой линіи къ горизонту черезъ α, можемъ сказать, что должная величина силы $\mathcal{H}$ опредѣлится изъ соотношенія:

$$\mathcal{H} = Q \operatorname{tg}(\alpha+\varphi), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

аналогичнаго соотношенію (3) предыдущаго параграфа.

Винтъ можетъ быть самотормозящимъ и несамотормозящимъ, что зависитъ отъ величины угла α наклона винтовой линіи къ горизонту: если этотъ уголъ будетъ меньше угла тренія φ, то винтъ будетъ самотормозящимъ, сколь бы ни былъ великъ вѣсъ Q груза; если же этотъ уголъ будетъ больше угла тренія, то винтъ будетъ вывертываться при дѣйствіи на него малѣйшаго груза Q.

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія для винта съ прямоугольной нарѣзкой будетъ, въ виду сказаннаго, выражаться такъ же, какъ и въ случаѣ наклонной плоскости:

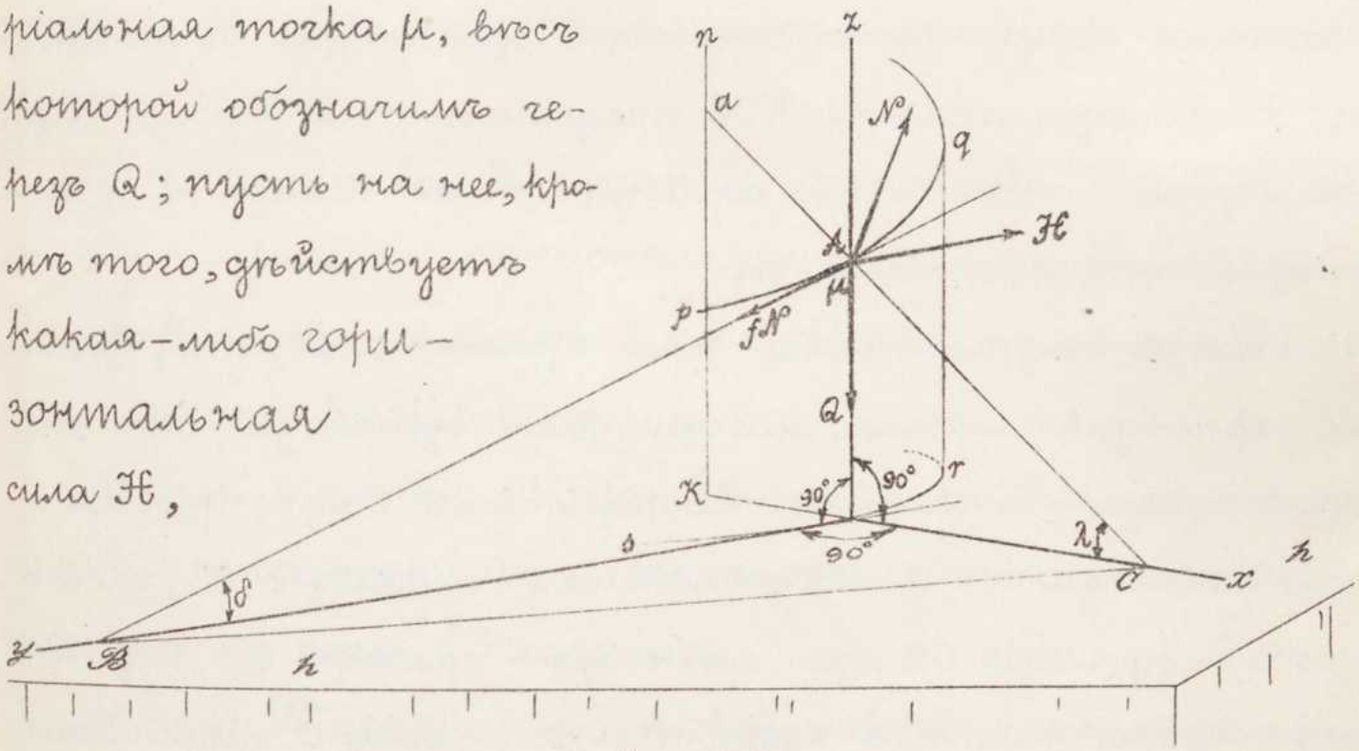
$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

При самотормозящемъ винтѣ η будетъ всегда меньше 0,5, въ виду чего ради увеличенія этого коэффиціента приходится отказываться отъ самоторможенія и давать углу α значенія, бо́льшія угла тренія φ.

Такъ просто разсматривается вопросъ о равновѣсіи

тьла на винтовой поверхности въ случаѣ винта съ прямоугольной нарѣзкой. Въ случаѣ винта съ остроугольной нарѣзкой изслѣдованіе выходитъ болѣе сложнымъ, и проще всего вести его слѣдующимъ образомъ:

Пусть направляющая винтовая линія pAq (фиг. 59) лежитъ на поверхности круглаго цилиндра qrs съ осью nK, стоящаго на горизонтальной плоскости hh такъ, что ось его Kn оказывается вертикальной. Пусть, далѣе, образующая aA винтовой поверхности наклонена къ горизонту подъ угломъ λ. — Предположимъ теперь, что въ точкѣ A нашей винтовой поверхности лежитъ матеріальная точка μ, вѣсъ которой обозначимъ черезъ Q; пусть на нее, кромѣ того, дѣйствуетъ какая-либо горизонтальная сила H,



Фиг. 59.

касательная къ поверхности цилиндра Kq какъ разъ въ этой точкѣ A.

Проводимъ теперь прямую AB, касательную къ винтовой линіи въ той же точкѣ A, и, затѣмъ, прямую AC, — продолженіе образующей прямой aA. Точки пересѣченія ихъ съ горизонтальной плоскостью hh обозначимъ черезъ B и C, а углы ихъ съ тою же горизонтальной плоскостью —

черезъ δ и λ. Очевидно, что плоскость ABC, проходящая черезъ касательную AB въ точкѣ A винтовой поверхности и черезъ образующую aA, проведенную въ ту же точку A, представитъ собою касательную плоскость къ данной винтовой поверхности, проведенную черезъ данную на этой послѣдней точку A. Далѣе, если черезъ точку A проведемъ образующую цилиндра, zA, и точку пересѣченія ея съ горизонтальной плоскостью обозначимъ черезъ O, такъ что прямая zAO будетъ перпендикулярна къ плоскости hh, то прямая BO будетъ служить проекціей касательной BA на эту плоскость hh и въ то же время будетъ касаться окружности основанія цилиндра въ точкѣ O ея. Наконецъ, прямая KOC представитъ собою проекцію на ту же плоскость hh образующей aA нашей поверхности и продолженія ея AC.

Такъ выдѣлившіяся три прямыя, очевидно, взаимно перпендикулярныя, могутъ быть взяты за три оси прямоугольной системы координатъ Oxyz, причемъ условимся за ось x-овъ принимать прямую OC, за ось y-овъ — прямую OB, за ось z-объ — прямую OA, а за начало координатъ, слѣдовательно, точку O пересѣченія образующей zA съ плоскостью hh. Замѣтимъ кстати, что касательная AB лежитъ въ плоскости xy, а образующая aA и продолженіе ея AC — въ плоскости zx.

При перемѣщеніи точки A по винтовой поверхности aqAp проявятъ свое воздѣйствіе на нее четыре силы:

1) вѣсъ точки A, — мы обозначимъ его черезъ Q;

2) влекущая ее по винтовой поверхности горизон-

тальная сила H;

3) сопротивленіе винтовой поверхности N, направленное, очевидно, перпендикулярно касательной плоскости ABC, и, наконецъ,

4) сила треніа, fN, направленная противоположно скорости точки A въ разсматриваемый моментъ, т.е. направленная по AB, отъ A къ B.

Напишемъ теперь уравненія равновѣсія точки A подъ дѣйствіемъ этихъ четырехъ силъ, но предварительно разберемся подробнѣе въ расположеніи всѣхъ этихъ силъ:

1) Сила Q направлена внизъ по оси Oz; эта сила представляетъ собою вѣсъ тѣла, находящагося на винтовой поверхности;

2) горизонтальная сила H направлена параллельно оси Oy и является окружнымъ усиліемъ, дѣйствующимъ касательно боковой поверхности цилиндра, — эта сила лежитъ въ плоскости yOz;

3) сила треніа fN, направленная по AB, лежитъ въ той же плоскости yOz и образуетъ съ плоскостью xOy и съ осью Oy уголъ δ; наконецъ,

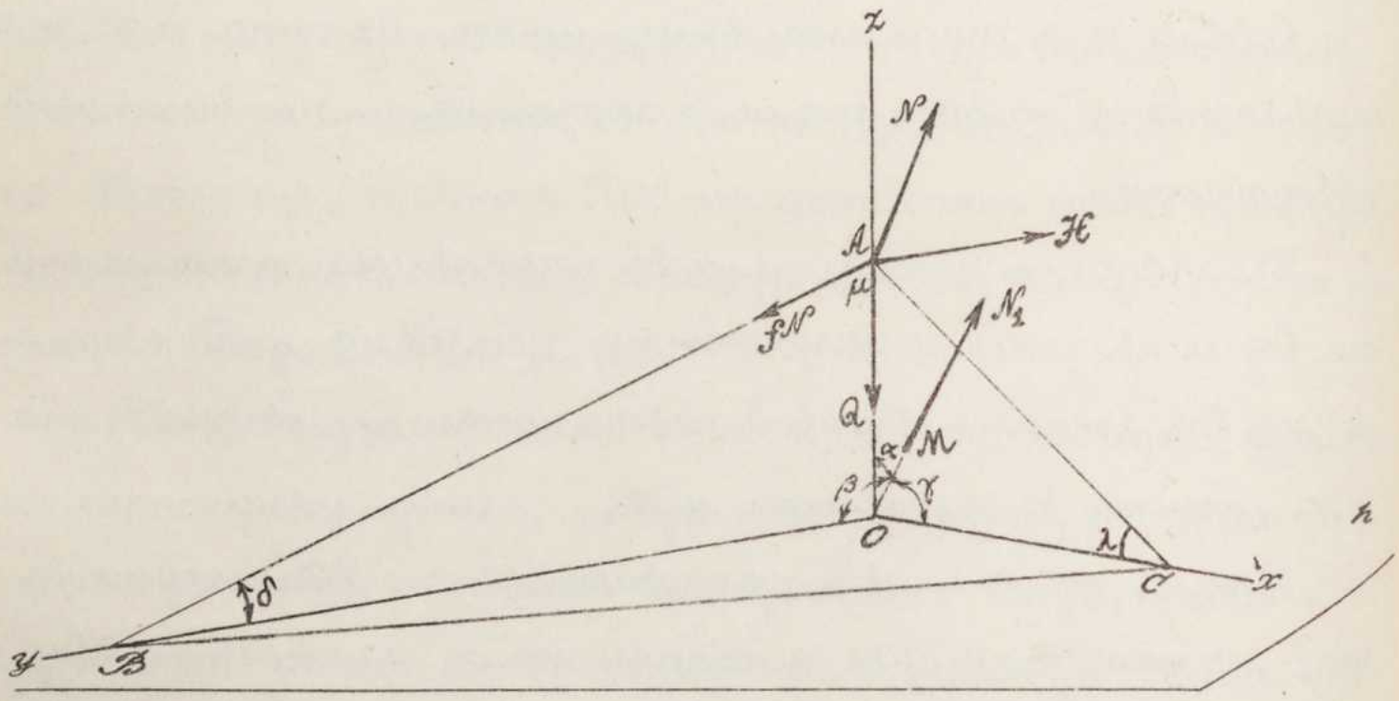
4) сила N реакціи винтовой поверхности перпендикулярна къ плоскости ABC и не лежитъ въ одной плоскости съ силами Q и fN, какъ это имѣло бы мѣсто въ случаѣ прямоугольной нарѣзки. Обозначимъ углы этой силы N съ осями нашей системы координатъ черезъ α, β и γ. Такъ какъ $N \perp$ плоскости AB, то эти углы представятъ собою углы съ нашими осями перпендикуляра $OM N'$, опущеннаго изъ начала O на плоскость ABC (фиг. 60), и мы,

такимъ образомъ, обнаружимъ, что

$$\angle MOz = \alpha, \angle MOy = \beta, \angle MOx = \gamma,$$

при чемъ, ради удобства подсчета проекцій силы N на оси, можемъ представить равную и параллельную ей силу N', выходящую изъ точки M и идущую по направленію перпендикуляра OM.

Пишемъ теперь уравненія равновѣсія нашихъ четырехъ силъ, причемъ можемъ ограничиться одними лишь уравненіями проекцій по осямъ координатъ.



Фиг. 60.

Уравненія равновѣсія будутъ выражать требованіе, чтобы суммы проекцій силъ по осямъ давали для каждой изъ осей нуль. Такимъ образомъ, искомыя уравненія будутъ имѣть видъ:

1) для оси Oy:

$$H - N\cos\beta - fN\cos\delta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

2) для оси Oz:

$$Q - N\cos\alpha + fN\sin\delta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

3) что касается оси x, то проекцію на нее дастъ одна лишь сила N; проекція ея на ось x-овъ равна $N\cos\gamma$ и, какъ видимъ, изъ всѣхъ взятыхъ нами силъ ни одна не можетъ дать ей уравновѣшивающей, откуда слѣдуетъ, что, въ случаѣ равновѣсія точки на винтовой поверхности, кромѣ перечисленныхъ нами четырехъ силъ имѣется еще нѣкая, направленная параллельно оси x противоположно силѣ $N\cos\gamma$ и равная ей. Обозначивъ эту новую силу черезъ X, получаемъ для опредѣленія ея уравненіе:

$$N\cos\gamma - X = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Эта сила X существуетъ въ дѣйствительности и является въ видѣ сопротивленія гайки винта радіальному распору. Принимая во вниманіе, что уравненіе (5) для дальнѣйшихъ изслѣдованій не даетъ ничего, мы касаться его больше не будемъ и ограничимся первыми двумя уравненіями равновѣсія, — (3) и (4). Пользуясь ими, выяснимъ теперь зависимость между силой H и вѣсомъ тѣла Q.

Исключая изъ уравненій (3) и (4) силу N, находимъ значеніе ея изъ (3):

$$N = \frac{H}{\cos\beta + f\cos\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

и вставляемъ его въ (4), послѣ чего получаемъ искомую зависимость въ видѣ:

$$Q = N(\cos\alpha - f\sin\delta) = H\,\frac{\cos\alpha - f\sin\delta}{\cos\beta + f\cos\delta}$$

Итакъ,

$$Q = H\,\frac{\cos\alpha - f\sin\delta}{\cos\beta + f\cos\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Остается исключить углы α и β при помощи угловъ

δ и λ; воспользоваться двумя последними углами удобно потому, что они характеризуют собою каждую остроугольную нарезку. Упомянутое исключение проще всего выполняется так:

Принимая во внимание, что система координат Oxyz, принятая нами, есть система прямоугольная, можем написать соотношения, — см. фиг. 60, —

$$OA = OC\,tg\lambda = OB\,tg\delta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Из прямоугольных при M треугольников OMA, OMB и OMC находим далее:

$$OA = \frac{OM}{\cos\alpha};\ OB = \frac{OM}{\cos\beta};\ OC = \frac{OM}{\cos\gamma}, \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

и теперь, в виду (b), соотношения (a) принимают вид:

$$\frac{OM}{\cos\alpha} = \frac{OM\,tg\lambda}{\cos\gamma} = \frac{OM\,tg\delta}{\cos\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

откуда получаем:

$$\cos\beta = \cos\alpha . tg\delta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

и

$$\cos\gamma = \cos\alpha . tg\lambda. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Прибавим, имея в виду дальнейшее, к двум вышенаписанным соотношениям тождество

$$\cos\alpha = \cos\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Замечая, что всякие три угла, образованные какой-либо прямой с осями прямоугольной системы координат, обладают тем свойством, что сумма квадратов косинусов их всегда равна единице, и замечая, что углы α, β и γ и являются как раз такими углами, образованными прямой OM с осями нашей координатной системы, можем написать для них соотношение:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Это соотношение, въ виду (d), (e) и (f), принимаетъ видъ

$$1 = \cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\lambda + \operatorname{tg}^2\delta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Обозначимъ, ради краткости письма трехчленъ $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\delta)$ черезъ k^2; тогда (g) перепишется такъ:

$$1 = k^2\cos^2\alpha .$$

Отсюда, замѣчая, что $\cos\alpha > 0$, находимъ:

$$\cos\alpha = \frac{1}{k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

послѣ чего изъ (d) находимъ:

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{tg}\delta}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Въ виду двухъ послѣднихъ соотношеній можемъ дать основному соотношенію (7) видъ:

$$\mathcal{H} = Q\,\frac{\frac{1}{k}\operatorname{tg}\delta + f\cos\delta}{\frac{1}{k} - f\sin\delta} = Q\,\frac{\operatorname{tg}\delta + kf\cos\delta}{1 - kf\sin\delta} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Такова зависимость между силами $\mathcal{H}$ и Q въ случаѣ острогольной нарѣзки, характеризуемой угломъ λ наклона образующей къ горизонту и угломъ δ наклона къ горизонту же винтовой (направляющей) линіи.

Легко получить коэффиціентъ полезнаго дѣйствія для острогольной нарѣзки. Замѣчая, что, при перемѣщеніи груза Q вверхъ по винтовой поверхности на какую-либо дугу AA', работа силы $\mathcal{H}$ выразится черезъ $\mathcal{H} \times AA'\cos\delta$, въ то время какъ произведенная при этомъ работа поднятія груза, т.-е. полезная работа, будетъ равна $Q \times AA'\cos\delta$, заключаемъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія винта съ острогольной нарѣзкой напишется такъ:

$$\eta = \frac{Q\operatorname{tg}\delta}{\mathcal{H}},$$

что, въ виду соотношенія (8) перепишется иначе такъ:

$$\eta = \frac{(1 - kf\sin\delta)\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\delta + kf\cos\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) примѣнимы и къ прямоугольной нарѣзкѣ, при чемъ, примѣнительно къ обозначеніямъ этой послѣдней, придется положить $\lambda = 0$ и $\delta = \alpha$. Замѣняя,

кромѣ того, k черезъ $1/\cos\alpha$, можемъ дать формулѣ (8) видъ:

$$\mathcal{H} = Q\frac{\operatorname{tg}\alpha + f\cos\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}}{1 - f\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}} = Q\frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f\operatorname{tg}\alpha};$$

Замѣчая, кромѣ того, что $f = \operatorname{tg}\varphi$, можемъ дать полученному выраженію видъ:

$$\mathcal{H} = Q\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi} = Q\operatorname{tg}(\alpha+\varphi),$$

— та же формула (1).

Подобнымъ же образомъ, выполняя такія же подстановки въ формулѣ (9), найдемъ, что значеніе коэффиціента полезнаго дѣйствія η для случая прямоугольной нарѣзки будетъ таково:

$$\eta = \frac{(1 - \operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\alpha\cdot 1/\cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi\cdot\cos\alpha\cdot 1/\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi},$$

что, очевидно, сводится къ выраженію

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)},$$

полученному нами путемъ прямого подсчета для наклонной плоскости и распространенному затѣмъ, по аналогіи, и на случай винта съ прямоугольной нарѣзкой, — см. форм. (2).

Въ заключеніе настоящаго параграфа выяснимъ, при какихъ условіяхъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія винта съ прямоугольной нарѣзкой достигаетъ своего максимума. Уравненіе (3) показываетъ, что, при одномъ и томъ же φ, коэффиціентъ η будетъ мѣняться въ зависимости отъ измѣненія угла α. Составляемъ поэтому условіе максимума въ формѣ

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = 0.$$

Выраженіе (3) даетъ намъ:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2(\alpha+\varphi)}}{\operatorname{tg}^2(\alpha+\varphi)} = 0.$$

Замѣтимъ, что знаменатель принимаетъ безконечно-большое значеніе при $\alpha+\varphi = 90°$, т.-е. тогда, когда, согласно

сказанному на стр. 136, никакія горизонтальныя силы не смогутъ сдвинуть грузъ по наклонной плоскости, а, значитъ, и по винтовой поверхности съ тѣмъ же угломъ наклона винтовой линіи. Въ указанномъ случаѣ, какъ мы видѣли, $\eta = 0$, т.-е. переходитъ черезъ свой минимумъ.

Въ виду сказаннаго, попробуемъ приравнять нулю числитель, предполагая, слѣдовательно, заранѣе, что $(\alpha+\varphi)$ отлично отъ 90°. Элементарныя геометрическія преобразованія полученнаго теперь уравненія приведутъ насъ окончательно къ уравненію

$$\cos(2\alpha+\varphi)=0,$$

дающему искомое значеніе угла α, — онъ оказывается равнымъ

$$\alpha' = 45° - \frac{\varphi}{2}.$$

Значеніе η, соотвѣтствующее этому углу, есть

$$\eta_{max} = \frac{1-f\cos\varphi}{1+f\cos\varphi}.$$

Легко убѣдиться, что для перемѣщенія одного и того же груза въ случаѣ винта съ остроугольной нарѣзкой потребуется большее окружное усиліе, чѣмъ для винта съ прямоугольной нарѣзкой. Дѣйствительно, для перехода отъ формулы (8) для косоугольной нарѣзки къ формулѣ (1) прямоугольной придется положить $\lambda = 0$, вслѣдствіе чего числитель выраженія (8) уменьшится, а знаменатель увеличится, и, значитъ, вся дробь уменьшится. Такимъ образомъ, при одномъ и томъ же грузѣ Q и равныхъ углахъ наклона винтовыхъ линій къ горизонту ($\alpha = \delta$),

$H_{прям.}$ будетъ меньше $H_{остроуг.}$ Вслѣдствіе этого, $\eta_{прям.}$ будетъ больше, чѣмъ $\eta_{остроуг.}$, такъ какъ для поднятія груза на одну и ту же высоту dh въ случаѣ прямоугольной нарѣзки потребуется затрата меньшаго количества работы, чѣмъ въ случаѣ остроугольной.

Всѣ эти заключенія показываютъ, что, если проектируемый винтовой механизмъ предназначается для передачи движенія; то винту этого механизма слѣдуетъ давать непремѣнно прямоугольную нарѣзку; если же винтъ имѣетъ служить для скрѣпленія двухъ деталей, то необходимо брать остроугольную нарѣзку, ибо въ такомъ случаѣ развинчиваніе отъ случайныхъ и постоянныхъ боковыхъ усилій становится менѣе вѣроятнымъ; кромѣ того, въ такомъ винтѣ, при одной и той же силѣ предварительной затяжки, сила треніа поверхностей винта и гайки будетъ значительно больше, чѣмъ въ случаѣ винта съ прямоугольной нарѣзкой.

§ 7. Клинъ.

Клинъ, подобно винту, употребляется какъ для перемѣщенія грузовъ, такъ и для скрѣпленія деталей. Простѣйшимъ примѣромъ примѣненія клина можетъ служить расщепливаніе какого-либо тѣла A при помощи клина, вдвигаемаго нѣкоторой силой P (фиг. 61). Заставляя расходиться части K и L детали, клинъ въ каждый данный моментъ подвергается воздѣйствію силъ реакціи этихъ частей, такъ что онъ на-

ходится все время подъ дѣйствіемъ силы P, вдвигающей его и силъ реакціи N_1 и N_2, нормальныхъ къ его граняхъ и вызывающихъ появленіе силъ треніи, противодѣйствующихъ этому вдвиганію.

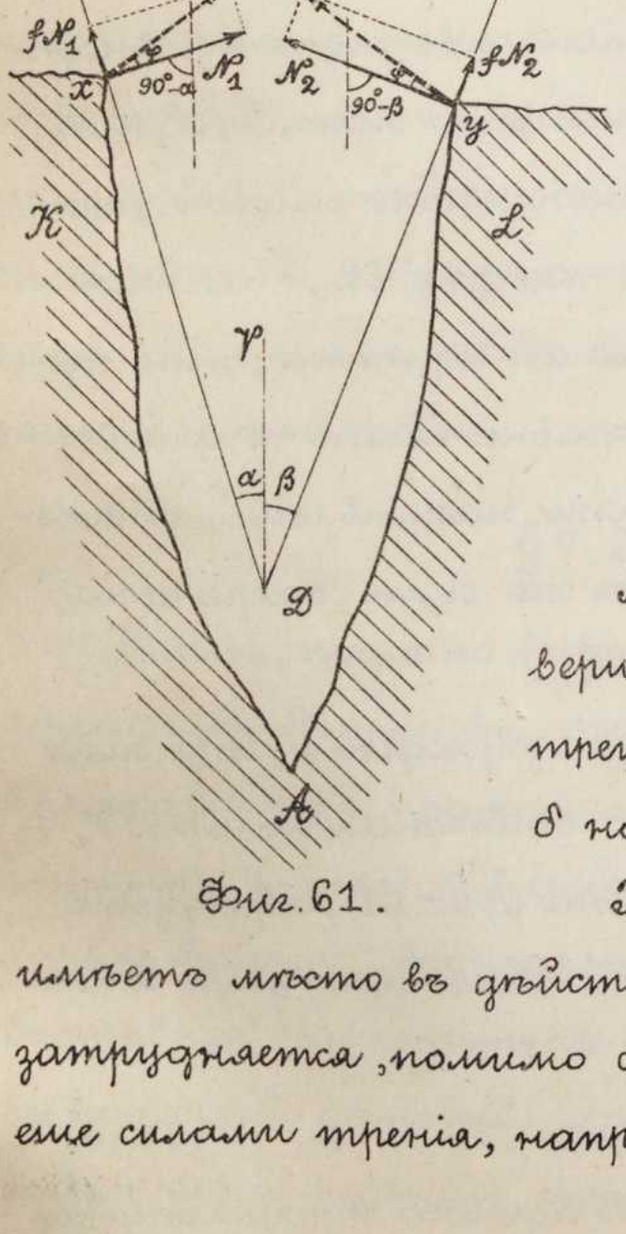
Предположимъ, что сила P, вгоняющая клинъ въ деталь A, направлена вертикально; какъ это изображено на фиг. 61, и пусть подъ воздѣйствіемъ силы P и примѣствующихъ условіямъ даннаго случая силъ реакціи клинъ перемѣщается равномѣрно. Если бы силъ треніи не было, то такое равномѣрное перемѣщеніе клина было бы возможно лишь тогда, когда сила P въ каждый данный моментъ оказывалась бы уравновѣшенной нормальными къ граняхъ клина силами реакціи опоръ, N_1 и N_2, и, слѣдовательно, въ случаѣ равновѣсія всей этой силовой системы, три эти силы, P, N_1 и N_2, должны были бы составлять замкнутый силовой треугольникъ, какъ это и изображено на фиг. 62, — на этой фигурѣ, ради ясности всѣхъ деталей чертежа, силы изображены въ довольно крупномъ, сравнительно съ фиг. 61, масштабѣ, причемъ параллельность направленій отрѣзковъ, изображающихъ одинъ и тѣ же силы, сохранена, такъ что $AB \parallel P$, $BC \parallel y N_2$ и $CA \parallel x N_1$.

Положимъ, ради простоты разсужденій, что сила P направлена вертикально и что отвѣсная линія DV, проведенная черезъ вершину D клина (фиг. 61), образуетъ со сторонами клина углы α и β, такъ что уголъ D клина, равный δ, выразится черезъ

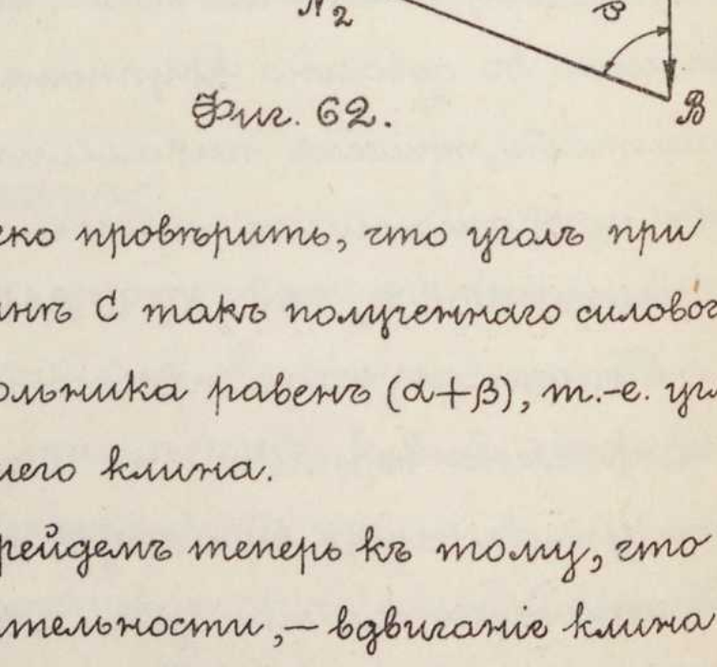
$$\delta = \alpha + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Такимъ образомъ, углы A и B силового треугольника

будутъ равны $(90°-\alpha)$ и $(90°-\beta)$ и, значитъ, при извѣстныхъ α и β будутъ вполнѣ извѣстны. Такимъ образомъ, опредѣливъ углы α и β и зная величину усилія P, сейчасъ же сможемъ построить и силовой треугольникъ ABC (фиг. 62), проводя въ конечныхъ точкахъ отрѣзка AB, изображающаго въ извѣстномъ масштабѣ силу P, прямыя AC и BC подъ углами $(90°-\alpha)$ и $(90°-\beta)$ къ AB. Точка C пересѣченія этихъ прямыхъ и опредѣлитъ величину опорныхъ сопротивленій N_1 и N_2, воздѣйствующихъ на клинъ со стороны детали A, въ предположеніи отсутствія силъ трения и равномѣрнаго движенія клина.



Фиг. 61.



Фиг. 62.

Легко провѣрить, что уголъ при вершинѣ C такъ полученнаго силового треугольника равенъ $(\alpha+\beta)$, т.-е. углу δ нашего клина.

Перейдемъ теперь къ тому, что имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности,—вдвиганіе клина затрудняется, помимо опорныхъ сопротивленій N_1 и N_2, еще силами трения, направленными противъ скорости

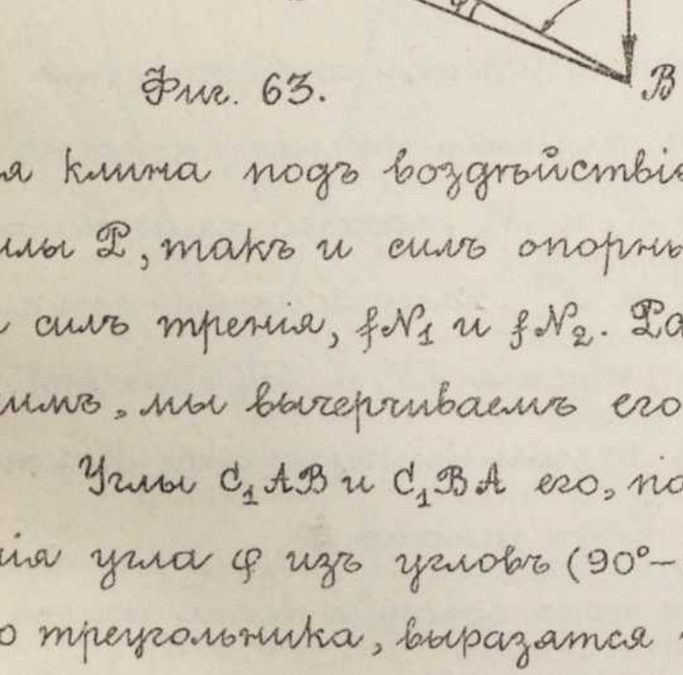
относительнаго скольженія клина по гастямъ детали, откуда слѣдуетъ, что въ точкѣ x соприкосновенія стороны клина DE съ частью K детали будетъ воздѣйствовать на нашъ клинъ сила тренія $f_x . N_1$, направленная по DE, а въ точкѣ y — сила тренія $f_y . N_2$, направленная по DF. Коэффиціенты тренія мы обозначимъ отлично другъ отъ друга потому, что части детали, соприкасающіяся съ нашимъ клиномъ, могутъ оказаться выполненными изъ различныхъ матеріаловъ. Имѣя, однако, въ виду, что такое предположеніе нѣсколько усложняетъ дальнѣйшіе подсчеты, не давая, при томъ, особенной выгоды въ смыслѣ общности результатовъ, мы будемъ предполагать, что части K и L детали выполнены изъ одного и того же матеріала, такъ что коэффиціенты f_x и f_y можно считать равными, и мы будемъ обозначать ихъ одинаково, черезъ f. При такомъ предположеніи силы тренія, сохраняя свои направленія DE и DF, выразятся черезъ fN_1 и fN_2.

Такимъ образомъ, сочетая опорныя сопротивленія N_1 и N_2 съ вызываемыми ими силами тренія, можемъ сказать, что прежнія силы N_1 и N_2 можно замѣнить теперь результирующими N_1' и N_2', получаемыми отъ сложенія силъ N_1 и N_2 съ силами тренія fN_1 и fN_2 соотвѣтственно; каждая изъ этихъ результирующихъ будетъ наклонена къ своей нормали подъ угломъ φ.

Предположивъ теперь, что подъ воздѣйствіемъ этихъ трехъ силъ, P, N_1' и N_2', клинъ перемѣщается опять равномѣрно, заключаемъ, что эти три силы уравновѣшива-

гонъ другъ друга, почему изъ нихъ можно опять составить замкнутый силовой треугольникъ, при чемъ по поводу его можно сдѣлать слѣдующія замѣчанія:

Углы результирующихъ силъ N_1' и N_2' съ силой P равны, очевидно, $(90°-\alpha-\varphi)$ и $(90°-\beta-\varphi)$ соотвѣтственно; значитъ, они меньше угловъ $(90°-\alpha)$ и $(90°-\beta)$ наклона силъ N_1 и N_2 къ той же силѣ P, вслѣдствіе чего отрѣзки, изображающіе силы N_1' и N_2', окажутся наклоненными къ силѣ P положе, чѣмъ отрѣзки, изображающіе силы N_1 и N_2. Въ виду этого новый силовой треугольникъ AC_1B, имѣя съ прежнимъ одно и то же основаніе $AB = \mu . P$, гдѣ μ есть масштабъ силъ, расположится внутри прежняго треугольника ACB (фиг. 63).



Фиг. 63.

Новый треугольникъ равновѣсія, отличный, какъ видимъ, отъ прежняго, и дастъ намъ возможность изслѣдовать помощью его условія равновѣсія клина подъ воздѣйствіемъ какъ дѣйствующей силы P, такъ и силъ опорныхъ сопротивленій, N_1 и N_2, и силъ тренія, fN_1 и fN_2. Ради удобства обращенія съ нимъ, мы вычерчиваемъ его отдѣльно, на фиг. 64.

Углы C_1AB и C_1BA его, получившіеся путемъ вычитанія угла φ изъ угловъ $(90°-\alpha)$ и $(90°-\beta)$ прежняго силового треугольника, выразятся такъ:

$$\angle C_1AB = 90° - (\alpha + \varphi),$$

$$\angle C_1BA = 90° - (\beta + \varphi).$$

Отсюда слѣдуетъ, что третій уголъ, C_1, выразится такъ:

$$\angle C_1 = 180^\circ - [180^\circ - (\alpha+\beta+2\varphi)] = \alpha+\beta+2\varphi = \delta+2\varphi,$$

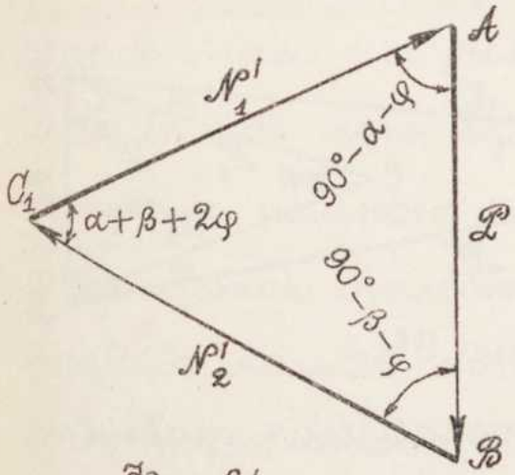
гдѣ δ есть уголъ нашего клина, равный $(\alpha+\beta)$.

Выписанныя выраженія угловъ нашего треугольника даютъ возможность по силѣ P и угламъ α, β и φ, опредѣлить результирующія N_1' и N_2'. Дѣйствительно, изъ треугольника ABC_1 (фиг. 64) имѣемъ:

$$N_1' = P\,\frac{\sin[90^\circ-(\beta+\varphi)]}{\sin(\delta+2\varphi)} = P\,\frac{\cos(\beta+\varphi)}{\sin(\delta+2\varphi)}. \quad \ldots . (1)$$

Подобнымъ же образомъ для силы N_2' найдемъ:

$$N_2' = P.\frac{\sin[90^\circ-(\alpha+\varphi)]}{\sin(\delta+2\varphi)} = P.\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\sin(\delta+2\varphi)}. \quad \ldots . (2)$$



Фиг. 64.

Выраженія (1) и (2) даютъ возможность опредѣлить и опорныя сопротивленія, N_1 и N_2, ибо

$$N_1 = N_1' \cos\varphi \quad \ldots . (3)$$

и

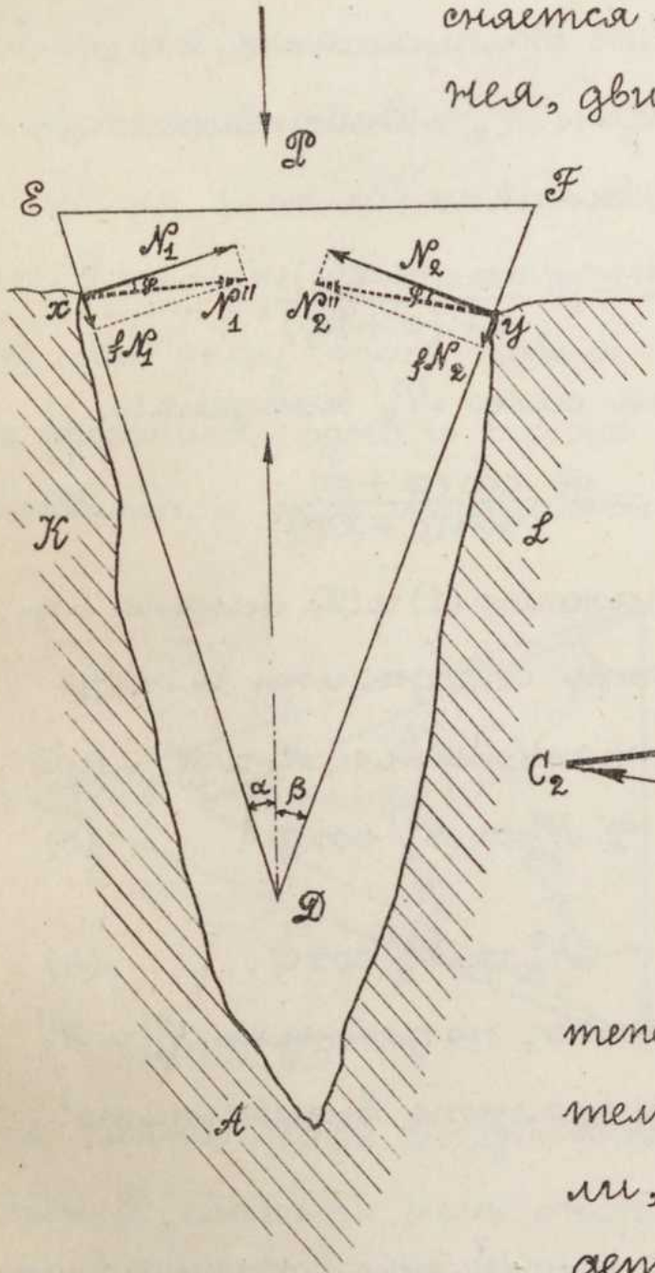
$$N_2 = N_2' \cos\varphi. \quad \ldots . (4)$$

Обратно, по даннымъ N_1' и N_2' легко опредѣлить вызывающую ихъ внѣшнюю силу P.

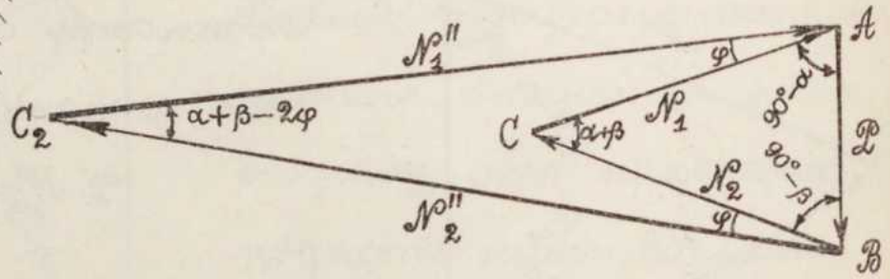
Перейдемъ теперь къ выясненію условій, при которыхъ клинъ оказывается самотормозящимъ, т.-е. будучи введенъ въ деталь и предоставленъ затѣмъ самому себѣ, однѣми силами реакціи N_1 и N_2, безъ участія посторонннихъ внѣшнихъ силъ, выпрыснуть быть изъ нея не можетъ. Вопросъ этотъ проще всего разрѣшается такъ:

Пусть клинъ DEF, будучи загнанъ въ деталь A (фиг. 65),

оказался, затѣмъ, предоставленнымъ воздѣйствію на него внѣшней силы P, направленной вертикально внизъ, силъ N_1 и N_2 опорныхъ сопротивленій и, наконецъ, вызываемыхъ этими послѣдними силъ тренія. Подъ дѣйствіемъ всей этой группы силъ клинъ, предположимъ, вынимается изъ детали и вылѣзаетъ изъ нея, двигаясь, при томъ, равномѣрно, несмотря на сопротивленіе вертикальной силы P. Такъ какъ клинъ движется теперь вверхъ, вылѣзая изъ детали, то силы тренія fN_1 и fN_2 перемѣнятъ



Фиг. 65.



Фиг. 66.

теперь свое направленіе сравнительно съ тѣмъ, какое они имѣли, когда клинъ входилъ внутрь детали, — см. фиг. 61, — эти силы тренія, fN_1 и fN_2, будутъ имѣть теперь направленіе отъ E и F къ вершинѣ D клина, какъ это и показано на чертежѣ (см. фиг. 65). Силы тренія, сопротивляясь вылѣзанію клина, будутъ помогать дѣйствію силы P, стремящейся удержать клинъ въ деталѣ.

Въ виду такой перемѣны направленія силъ треніа результирующія нормальныхъ сопротивленій, N_1 и N_2, и силъ треніа, fN_1 и fN_2, окажутся наклоненными опять подъ углами φ къ нормалямъ, но уже по другую сторону нормалей, сравнительно съ прежнимъ,— новыя результирующія окажутся направленными въ сторону вершины клина, въ то время какъ въ предыдущемъ случаѣ онѣ отклонялись отъ нормалей въ сторону основанія клина. Углы этихъ результирующихъ, N_1'' и N_2'', съ силой P оказываются, такимъ образомъ, равными $[(90°-\alpha)+\varphi]$ и $[(90°-\beta)+\varphi]$, и силовой треугольникъ, построенный на взаимно уравновѣшивающихся силахъ P, N_1'' и N_2'', расположится, очевидно, внѣ силового треугольника, построеннаго на силахъ P, N_1 и N_2,— см. фиг. 66, гдѣ масштабъ силъ взятъ, во избѣжаніе громоздкости чертежа, немного меньшимъ, чѣмъ на фиг. 63 и 64; углы φ придется отложить теперь по другую сторону отрѣзковъ AC и BC сравнительно съ предыдущимъ, и силовой треугольникъ приметъ теперь видъ, изображенный на чертежѣ,— треугольникъ ABC_2 на фиг. 66.

Изъ этого новаго силового треугольника имѣемъ соотношенія:

$$P = N_1'' \frac{\sin(\alpha+\beta-2\varphi)}{\sin(90°-\beta+\varphi)} = N_1'' \frac{\sin(\delta-2\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} \quad \ldots\ldots (5)$$

и

$$P = N_2'' \frac{\sin(\delta-2\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Въ виду равенства лѣвыхъ частей этихъ уравненій, равны и правыя ихъ части, что дастъ намъ въ

дальнѣйшемъ возможность вывести геометрически признакъ самоторможенія клина, а теперь мы разрѣшимъ этотъ вопросъ аналитически, исходя изъ уравненій (5) и (6), только что нами полученныхъ.

Предѣльнымъ случаемъ самоторможенія будетъ тотъ, когда клинъ, не будучи удерживаемъ никакой внѣшней силой, т.-е. при $\mathfrak{P}=0$, будетъ или оставаться въ покоѣ или двигаться равномѣрно, если ему тѣмъ или инымъ путемъ будетъ сообщена нѣкоторая начальная скорость,—оба эти состоянія являются для него одинаково возможными. Итакъ, предѣльный случай самоторможенія опредѣляется изъ условія

$$\mathfrak{P}=0,$$

ведущаго, въ виду (5) и (6), къ условіямъ

$$N_1'' \frac{\sin(\delta-2\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} = N_2'' \frac{\sin(\delta-2\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)} = 0. \quad \ldots\ldots (7)$$

Такъ какъ силы реакціи N_1'' и N_2'' отличны отъ нуля, а знаменатели безконечныхъ значеній принимать не могутъ, то полученному условію (7) можно удовлетворить единственнымъ образомъ, положивъ равнымъ нулю числитель, т.-е. принявъ, что

$$\sin(\delta-2\varphi)=0.$$

Такъ какъ уголъ δ клина всегда меньше $180°$, то полученному условію можно удовлетворить, лишь предположивъ, что

$$\delta=2\varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Итакъ, если уголъ δ клина сдѣлать равнымъ двойному углу треніа φ, то для удерживаніа клина въ покоѣ никакой посторонней „внѣшней“ силы не нужно,

— внѣшняя сила P можетъ здѣсь отсутствовать: $P=0$; но если дать клину толчокъ вверхъ, сообщивъ ему, такимъ образомъ, нѣкоторую начальную скорость, то онъ придетъ въ движеніе и станетъ равномѣрно вынуждать изъ детали A.

Если мы возьмемъ, далѣе, уголъ δ клина еще меньшимъ, такимъ, чтобы онъ удовлетворялъ неравенству

$$\delta < 2\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

то сила P становится отрицательной, ибо $\sin(\delta - 2\varphi)$ становится меньше нуля, въ то время какъ знаменатель остается все время положительнымъ. То обстоятельство, что здѣсь $P<0$, истолковывается такъ: при условіи (9) для возможности равномѣрнаго вынужденія клина изъ детали придется уже не ограничиться толчкомъ снизу вверхъ, какъ это имѣло мѣсто въ предыдущемъ случаѣ, а приложить къ нему нѣкоторую опредѣленную силу P, направленную отрицательно, т.-е. снизу вверхъ; говоря попросту, нашъ клинъ придется въ этомъ случаѣ тащить изъ детали съ нѣкоторымъ усиліемъ P, самъ же онъ изъ нея не вынудитъ, сколь бы велики ни были боковыя усилія N_1 и N_2, старающіяся вытѣснить его оттуда.

Итакъ, при уголъ δ клина, меньшемъ двойного угла треніа φ, клинъ, будучи загнанъ въ деталь и предоставленъ затѣмъ самому себѣ, не только будетъ удерживаться въ детали самъ, безъ помощи посторонннихъ внѣшнихъ силъ, но уже для того, чтобы дать ему возможность выйти изъ детали, надо приложить къ нему нѣко-

торую силу $\mathfrak{P}$, направленную снизу вверхъ, т.-е. придется клинъ изъ детали вытаскивать съ силой $\mathfrak{P}$, опредѣляемой изъ уравненій (5) или (6).

Замѣтимъ, что уравненія (5) и (6) могутъ быть получены прямо изъ ранѣе выведенныхъ уравненій (1) и (2) путемъ замѣны угла $(+\varphi)$ угломъ $(-\varphi)$, соотвѣтственно перемѣнѣ направленія силъ треніа.

Если бы оказалось, что углы α и β равны, такъ что

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2}\delta,$$

то силы $\mathfrak{N}_1'$ и $\mathfrak{N}_2'$ оказались бы между собою равными, точно такъ же, какъ и силы $\mathfrak{N}_1''$ и $\mathfrak{N}_2''$. Въ этомъ случаѣ мы получили бы а) для движенія клина внутрь детали:

$$\mathfrak{N}_1' = \mathfrak{N}_2' = \frac{\mathfrak{P}}{2\sin(\alpha+\varphi)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

и в) для движенія наружу, изъ детали:

$$\mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_2'' = \frac{\mathfrak{P}}{2\sin(\alpha-\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Условіемъ самоторможенія является соотношеніе

$$\alpha \leqq \varphi,$$

причемъ равенство представляетъ собою предѣльный случай возможности какъ равномѣрнаго выползанія клина изъ детали, такъ и покоя его тамъ.

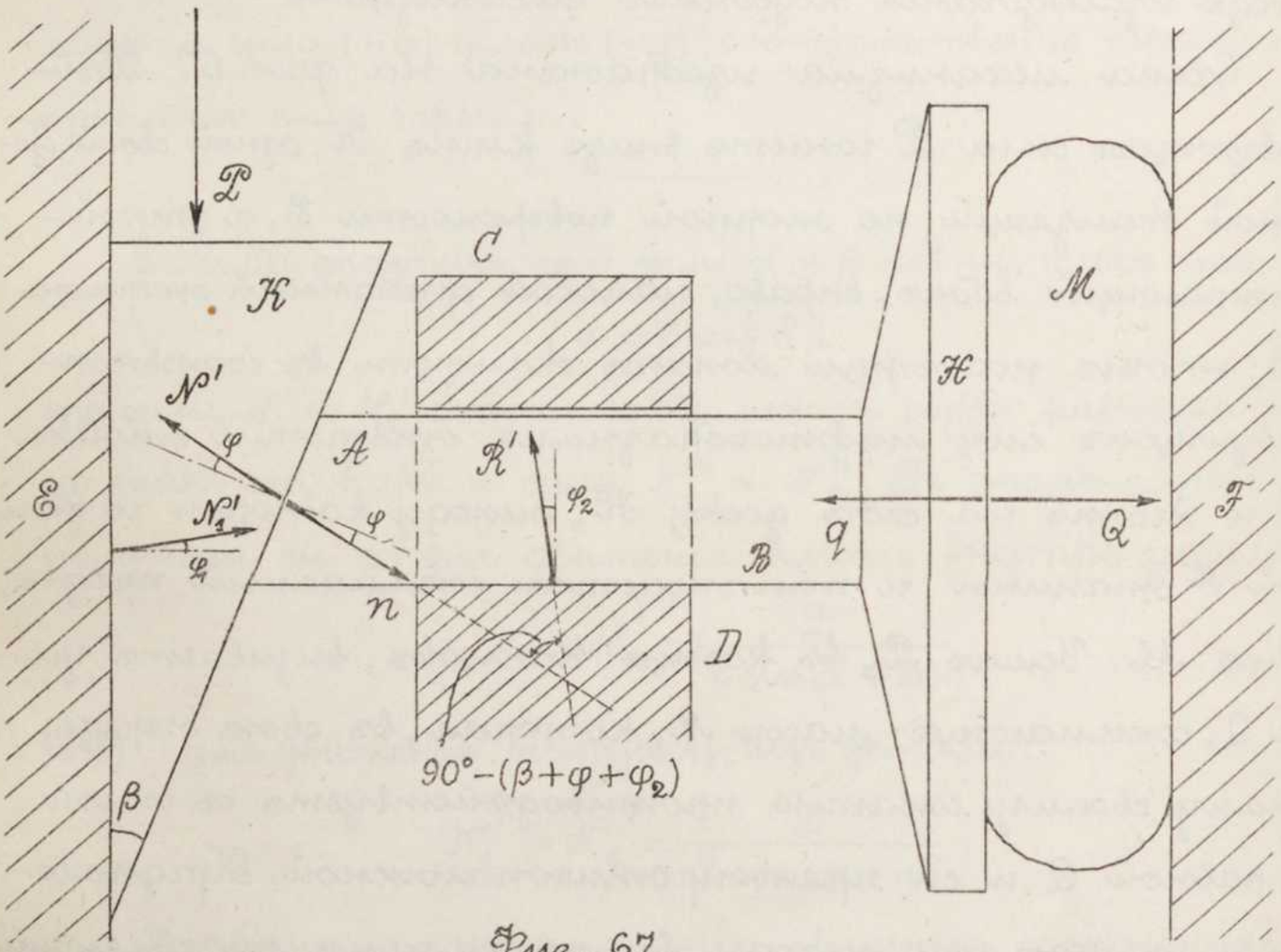
Въ машиностроеніи скрѣпленія клиньями употребляются довольно часто, напр., въ головкахъ шатуновъ и т.п. Встрѣчаются даже цѣлые механизмы, гдѣ главной частью, дающей выигрышъ въ силѣ, является именно клинъ, и одинъ изъ такихъ механизмовъ, — такъ называемый

простомъ видѣ, какъ это изображено на чертежѣ (фиг. 67), онъ на практикѣ не выполняется; тѣмъ не менѣе мы разберемъ его именно въ этомъ упрощенномъ видѣ, чтобы, не осложняя дѣла введеніемъ и разсмотрѣніемъ различныхъ привходящихъ сюда деталей, дать представленіе о ходѣ изслѣдованія подобныхъ механизмовъ.

Схема механизма изображена на фиг. 67. Дѣйствующая сила P гонитъ внизъ клинъ K, одной своей гранью скользящій по опорной поверхности E, а другой — выпирающій вбокъ, вправо, наискось связанный стержень AB; этотъ послѣдній можетъ скользить въ соотвѣтствующемъ ему муфтообразномъ отверстіи стойки CD и несетъ на себѣ доску H, между которой и грудкой F станины и помѣщается сжимаемый предметъ M. Усиліе P, въ концѣ концовъ, вызываетъ усиліе Q, сжимающее массу M, которая, въ свою очередь, этому своему сжатію противодѣйствуетъ съ силой q, равной Q и ей прямопротивоположной. Предположивъ теперь, что между всѣми силами, проявляющими свое дѣйствіе въ этомъ механизмѣ во время его работы, въ разсматриваемый моментъ существуетъ равновѣсіе, постараемся опредѣлить условія его, равно какъ и связь между дѣйствующей силой P и сжимающей Q или, что то же, между силой P и силой сопротивленія сжимаемаго предмета, q. При этомъ сначала разсмотримъ условія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на клинъ K, а затѣмъ силъ, воздѣйствующихъ на стержень AB; двумя этими деталями

механизмъ пресса собственно и исчерпывается.

Предполагая, что въ разсматриваемый моментъ клинъ движется равномѣрно внизъ и, значитъ, стержень AB вправо, и что матеріалы стержня AB и стѣнки E различны, такъ что углы тренія φ и φ_1 между со-



Фиг. 67.

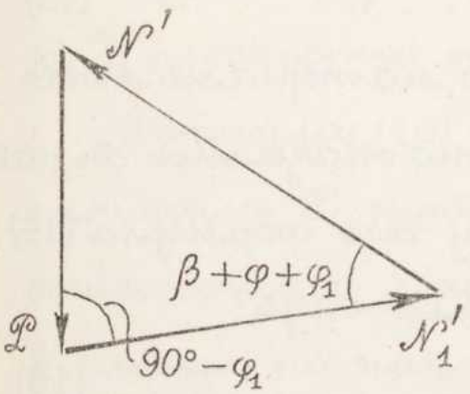
не равны, заключаемъ, что силы тренія, сопротивляющіяся движенію клина, будутъ направлены вверхъ по его стѣнкамъ, а сила тренія, препятствующая движенію стержня AB, будетъ направлена влѣво. Ясно теперь, что результирующія сопротивленія N', N_1' и R' окажутся направленными подъ углами φ, φ_1 и φ_2 тренія къ своимъ нормалямъ, и, при томъ, какъ всегда, въ стороны, обратныя движенію (относительному) деталей. Разсмотримъ теперь условія равновѣсія клина K.

Составляя изъ силъ P, N' и N_1', дѣйствующихъ на клинъ, силовой треугольникъ (фиг. 68), можемъ, пользуясь имъ, написать соотношеніе:

$$P = N' \frac{\sin(\beta+\varphi+\varphi_1)}{\cos\varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

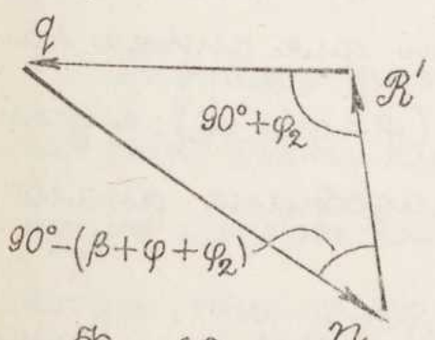
Если бы матеріалы стержня AB и стойки E были одинаковы, такъ что мы имѣли бы, что $\varphi = \varphi_1$, то формула (12) приняла бы болѣе простой видъ:

$$P = N_2' \frac{\sin(\beta+2\varphi)}{\cos\varphi} \quad \ldots (12')$$



Фиг. 68.

Переходимъ теперь къ стержню AB. На него дѣйствуютъ: 1) сила n нажатія со стороны клина, равная и противоположная той силѣ N', съ которой стержень противодѣйствуетъ движенію клина; 2) результирующая R' сопротивленій со стороны стойки CD, наклоненная къ нормали подъ угломъ тренія φ_2, положимъ, отличнымъ какъ отъ φ, такъ и отъ φ_1, и, наконецъ, 3) сила q сопротивленія предмета M сжатію. Составляя изъ этихъ трехъ силъ силовой треугольникъ (фиг. 69), можемъ, на основаніи его, написать соотношеніе:



Фиг. 69

$$n = q \frac{\cos\varphi_2}{\cos(\beta+\varphi+\varphi_2)} \quad \ldots\ldots (13)$$

Въ виду равенствъ $n = N'$ и $Q = q$, можемъ теперь, на основаніи формулъ (12) и (13) вывести искомое соотношеніе между силами P и Q, исключая изъ этихъ уравненій силу N'. Тогда получимъ соот-

ношеніе:

$$\mathfrak{P} = Q\,\frac{\sin(\beta+\varphi+\varphi_1)\cos\varphi_2}{\cos(\beta+\varphi+\varphi_2)\cos\varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Если бы матеріалы стѣнки E и стойки CD оказались одинаковыми, такъ что углы φ_1 и φ_2 были бы равны, то формула (14) приняла бы видъ:

$$\mathfrak{P} = Q\,\mathrm{tg}(\beta+\varphi+\varphi_1) \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Если бы, наконецъ оказалось, что матеріалы всѣхъ деталей E, K, AB и CD, одинаковы, то оказались бы равными и всѣ углы φ, φ_1 и φ_2, въ силу чего формула (15) упростилась бы еще больше и приняла видъ:

$$\mathfrak{P} = Q\,\mathrm{tg}(\beta+2\varphi), \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

вполнѣ аналогичный формулѣ (3) на стр. 131, имѣющей мѣсто для наклонной плоскости. То обстоятельство, что въ формулѣ (3) уголъ тренія взятъ одинъ разъ, а въ формулѣ (16) — два раза, объясняется тѣмъ, что формула (16) вынуждена была учесть одно лишнее скольженіе (AB по CD), что и обусловило появленіе внутри скобокъ одного лишняго угла.

Что касается коэффиціента полезнаго дѣйствія, то подсчетъ его мы выполнимъ лишь для случая равенства всѣхъ трехъ becъ тренія ($\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$); случай различныхъ becъ можетъ быть разобранъ аналогичнымъ путемъ.

Если бы тренія не было, то, согласно (16), гдѣ теперь $\varphi = 0$, то же напряженіе Q могло бы быть вызвано силой $\mathfrak{P}_1$, меньшей $\mathfrak{P}$, гдѣ

$$\mathfrak{P}_1 = Q\,\mathrm{tg}\beta; \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

при наличности же тренія имѣемъ $\varphi > 0$ и формулу (16).

Отсюда получаемъ искомое выраженіе коэффиціента полезнаго дѣйствія η; очевидно, что онъ будетъ равенъ отношенію между силами $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}$, такъ что:

$$\eta = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+2\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Какъ видимъ, онъ меньше, чѣмъ въ случаѣ наклонной плоскости съ угломъ β, — ср. форм. (4) на стр. 133.

Формула (16) показываетъ, что $Q = \mathfrak{P}\operatorname{cotg}(\beta+2\varphi)$, т.-е. что усиліе $\mathfrak{P}$, необходимое для полученія опредѣленнаго сжимающаго усилія, тѣмъ меньше, чѣмъ меньше уголъ β клина; но параллельно съ уменьшеніемъ угла β измѣняется и коэффиціентъ полезнаго дѣйствія η. Нетрудно подсчитать максимальное значеніе η и величину соотвѣтствующаго угла β. Приравнявъ производную $d\eta/d\beta$ нулю, находимъ, что наивыгоднѣйшее значеніе β, — обозначимъ его черезъ β_n, — есть

$$\beta_n = 45° - \varphi,$$

и этому значенію β соотвѣтствуетъ η_{max}, равный

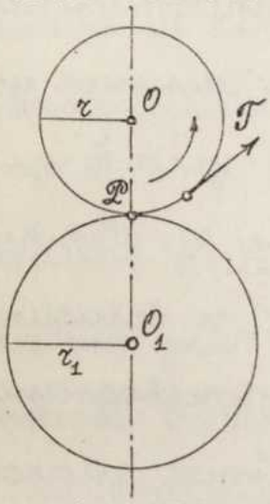
$$\eta_{max} = \frac{\operatorname{tg}(45°-\varphi)}{\operatorname{tg}(45°+\varphi)}.$$

Путемъ разсужденій, аналогичныхъ приведеннымъ на стр. 158 и слѣд., можно убѣдиться, что этотъ механизмъ будетъ самотормозящимъ, попрежнему, тогда, когда, при $\varphi \neq \varphi_1$, $\beta \leqq \varphi+\varphi_1$, или, при $\varphi = \varphi_1$, когда $\beta \leqq 2\varphi$. Въ этихъ случаяхъ клинъ вынуть самъ не сможетъ, — для этого понадобится употребить извѣстное усиліе, могущее быть подсчитаннымъ по формуламъ, аналогичнымъ вышевыведеннымъ, но лишь съ обратными знаками у угловъ трѣнія φ.

§8. Зубчатыя колеса.

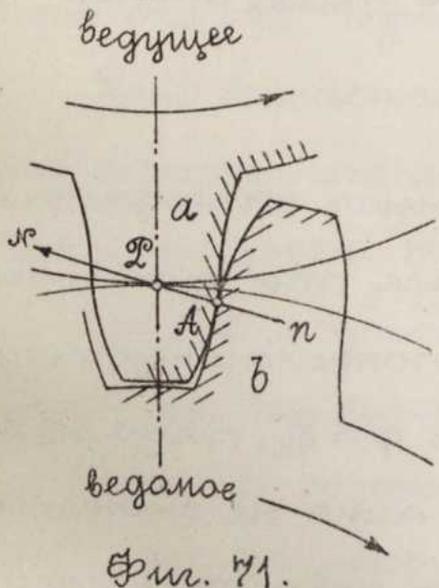
Перейдемъ теперь къ вопросу о величинѣ работы тренія въ зубчатыхъ колесахъ и о величинѣ коэффиціента полезнаго дѣйствія ихъ.

Представимъ себѣ, что у насъ имѣются два цилиндрическихъ зубчатыхъ колеса, O и O_1 (фиг. 70), находящихся между собою въ извѣстномъ зацѣпленіи, циклическомъ или эвольвентномъ или любомъ другомъ. Допустимъ,



Фиг. 70.

что линія зацѣпленія также извѣстна. Ведущимъ колесомъ пусть служитъ верхнее колесо, O, а ведомымъ — нижнее, O_1, и пусть моментъ, вращающій верхнее колесо, равенъ M. Предположимъ, далѣе, что точкой касанія начальныхъ окружностей нашихъ колесъ служитъ точка P, такъ что радіусъ ведущей окружности, OP, равенъ r, а радіусъ O_1P ведомой равенъ r_1. Вращающій моментъ M можно представить себѣ



Фиг. 71.

полученнымъ помощью нѣкотораго ведущаго окружного усилія T, касательнаго къ начальной окружности и направленнаго согласно вращенію колеса O. Величину этого окружного усилія получимъ изъ уравненія

$$M = Tr,$$

откуда

$$T = M/r. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Въ дальнѣйшемъ вмѣсто вращающаго момента M мы будемъ пользоваться этимъ именно окружнымъ

усиліемъ P. Единовременно въ зацѣпленіи можетъ находиться, вообще говоря, нѣсколько паръ зубьевъ, но, ради простоты разсужденій, предположимъ, что каждый моментъ оказываются находящимися въ зацѣпленіи только два зуба, — положимъ, зубъ a ведущаго колеса (фиг. 71) и зубъ b ведомаго; мы, такимъ образомъ, предположимъ, что сопротивленіе вращенію оказываетъ только одинъ зубецъ ведомаго колеса, а преодолѣваетъ это сопротивленіе только одинъ зубецъ ведущаго. Это сопротивленіе или, точнѣе, давленіе сопротивляющагося зубца всегда направлено по нормали къ поверхности его, проведенной въ точкѣ касанія его съ ведущимъ зубомъ. Въ данномъ случаѣ эта нормаль, очевидно, представитъ собою общую нормаль An къ обѣимъ касающимся другъ друга поверхностямъ зубцовъ, проходящую черезъ точку соприкосновенія ихъ A (фиг. 71). Припоминая, далѣе, что профили зубцовъ очерчиваются сопряженными кривыми, — огибающими и огибаемыми, — заключаемъ, что эта общая нормаль должна пройти черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія P, — точку соприкосновенія полодій.

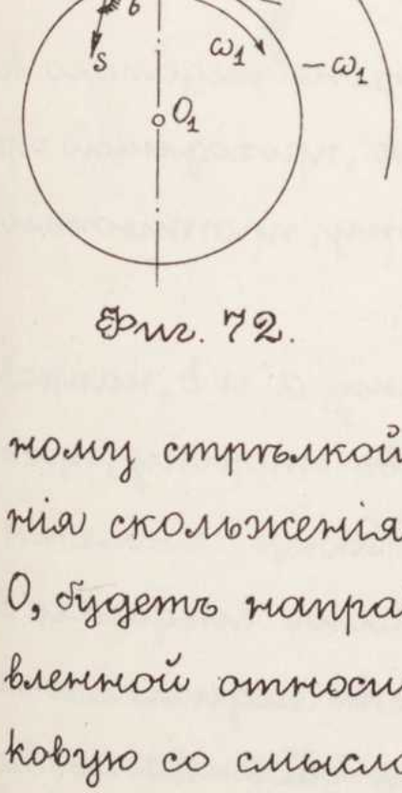
Итакъ, прежде всего, оказывается, что сопротивленіе N ведомаго зубца направлено по прямой AP, соединяющей полюсъ P съ точкой A касанія профилей зубцовъ, и, при томъ, очевидно, въ сторону, противоположную направленію вращенія ведущаго колеса O.

Замѣтимъ, кстати, что точка A касанія профилей лежитъ, конечно, на линіи зацѣпленія.

Кромѣ этихъ двухъ силъ необходимо принять во вниманіе силы тренія, здѣсь возникающія. По поводу ихъ въ данномъ случаѣ можно сказать слѣдующее: профили зубцовъ очерчиваются, какъ мы знаемъ, огибаемыми и огибающими. Но всякая огибаемая движется по своей огибающей не только катясь, но и скользя. Въ виду этого, для полноты рѣшенія, слѣдовало бы учесть работу какъ тренія скольженія, такъ и тренія качанія. Принимая, однако, во вниманіе незначительность работы, уходящей на преодолѣніе тренія качанія, мы обычно пренебрегаемъ, хотя, надо сказать, учетъ его никакихъ особыхъ трудностей не представляетъ, и ограничиваются подсчетомъ одного лишь скольженія; такимъ же образомъ поступимъ и мы и постараемся произвести учетъ работы, уходящей на треніе въ зубцахъ, при чемъ будемъ имѣть въ виду одно лишь треніе скольженія.

Прежде всего, рѣшимъ основной вопросъ о направленіи силы тренія, возникающей между зубцами. Какъ всегда, сила тренія будетъ направлена прамопротивоположно относительному движенію одного зубца по другому. Поэтому, имѣя въ дальнѣйшемъ въ виду написаніе уравненія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на ведущее колесо, мы и постараемся опредѣлить направленіе силы тренія скольженія, дѣйствующей на зубецъ ведущаго колеса. Для этого, согласно общей схемѣ, опредѣляемъ движеніе этого колеса относительно ведомаго, съ каковой цѣлью придаемъ всей системѣ (обоимъ движущимся колесъ O и O_1) движеніе, обратное

движению ведомаго колеса. Такъ какъ, по основному предположению, оно двигалось по часовой стрѣлкѣ съ нѣкоторой угловой скоростью ω_1, то мы придадимъ теперь всей системѣ движение противъ часовой стрѣлки съ тою же скоростью ω_1, — это новое движение мы обозначимъ символомъ $(-\omega_1)$. Теперь колесо O_1 останавливается, а колесо O оказывается вынужденнымъ совершать одновременно два вращения: около своего центра съ угловой скоростью ω ↻ и вокругъ центра O_1 съ угловой скоростью ω_1 ↻. Въ результатѣ сложения этихъ двухъ движений получаемъ вращение колеса O вокругъ точки P касания начальныхъ окружностей, — полюса мгновеннаго вращения новаго движения, при чемъ это вращение будетъ совершаться со скоростью $(\omega + \omega_1)$ опять противъ часовой стрѣлки.



Фиг. 72.

Значитъ, зубецъ a колеса O (фиг. 72) будетъ скользить по зубцу b колеса O_1, двигаясь по направлению, указанному стрѣлкой s, откуда слѣдуетъ, что сила трения скольжения, дѣйствующая на зубецъ a колеса O, будетъ направлена по стрѣлкѣ Af, оказываясь направленной относительно полюса P въ сторону, одинаковую со смысломъ вращения вокругъ O_1.

Кромѣ этого, необходимо замѣтить, что, такъ какъ перемѣщение поверхности одного зубца по поверхности другого будетъ происходить въ направлении As, перпендикулярномъ къ общей нормали AP, т. е. въ направ-

вленію общей касательной къ нимъ, то направленіе Af будетъ перпендикулярно къ общей нормали къ профилямъ, т.-е. къ лучу AP, соединяющему точку касанія A съ полюсомъ мгновеннаго вращенія P. Итакъ, сила трeнія, дѣйствующая на зубецъ колеса O, будетъ имѣть направленіе Af, перпендикулярное къ AP.

Что касается величины этой силы трeнія, то она выразится черезъ Nf, гдѣ f есть коэффиціентъ трeнія между зубьями a и b.

Итакъ, мы установили, что на систему ведущаго колеса O воздѣйствуютъ слѣдующія силы:

1) сила T окружного усилія, дѣйствующая касательно къ начальной окружности колеса O согласно смыслу вращенія его,

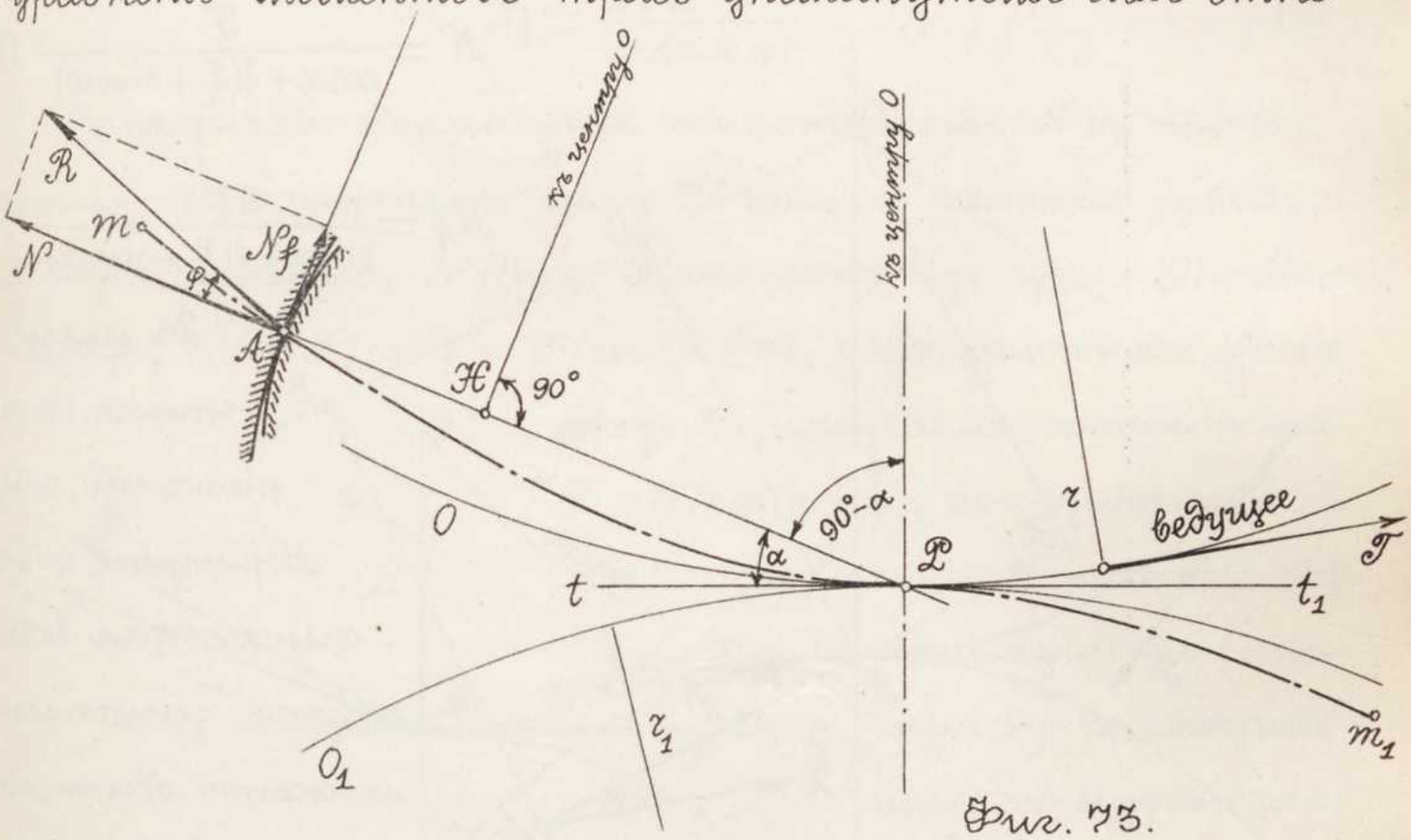
2) сила N сопротивленія со стороны ведомаго колеса O_1, направленная по нормали PA, проходящей черезъ точку A касанія профилей, въ сторону, противоположную движенію колеса O, и, наконецъ,

3) сила Nf трeнія между зубцами a и b, направленная перпендикулярно нормали AP, въ сторону, противоположную смыслу вращенія колеса O.

Конечно, къ этимъ сопротивленіямъ слѣдовало бы прибавить еще сопротивленіе трeнія въ подшипникахъ, но мы вводить его не будемъ, чтобы не осложнять вычисленій. Учесть его никакихъ особыхъ трудностей представить не можетъ.

Теперь мы имѣемъ всѣ данныя, позволяющія намъ составить уравненіе моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствую-

шихъ на колесо O, въ предположеніи равномѣрнаго вращенія его. Обозначимъ уголъ нормали AP съ общей касательной tPt_1 къ полодіямъ, т.-е. уголъ APt (фиг. 73), черезъ α, а уголъ тренія зубцовъ a и b черезъ φ, такъ что $f = \operatorname{tg}\varphi$. Обозначимъ, далѣе, длину отрѣзка AP, т.-е. разстояніе точки A касанія зубьевъ до полюса P, черезъ ρ; радіусъ полодіи O обозначенъ уже нами черезъ r. Опустимъ теперь изъ центра O перпендикуляръ OH на прямую AP. Тогда уравненіе моментовъ трехъ упомянутыхъ силъ отно-



Фиг. 73.

сительно центра O ведущаго колеса, напишется такъ:

$$-Tr + N.OH + Nf.AH = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Замѣчая теперь, что $OH = OP\sin(90°-\alpha) = r\cos\alpha$, а $AH = AP - HP = \rho - r\sin\alpha$, можемъ дать уравненію (2) видъ:

$$Tr = Nr\cos\alpha + Nf(\rho - r\sin\alpha),$$

откуда и находимъ, что

$$N = \frac{Tr}{r\cos\alpha + f(\rho - r\sin\alpha)} = \frac{T}{\cos\alpha + f\left(\frac{\rho}{r} - \sin\alpha\right)} \quad \ldots\ldots (3)$$

Въ виду этого сила трения Nf выразится такъ:

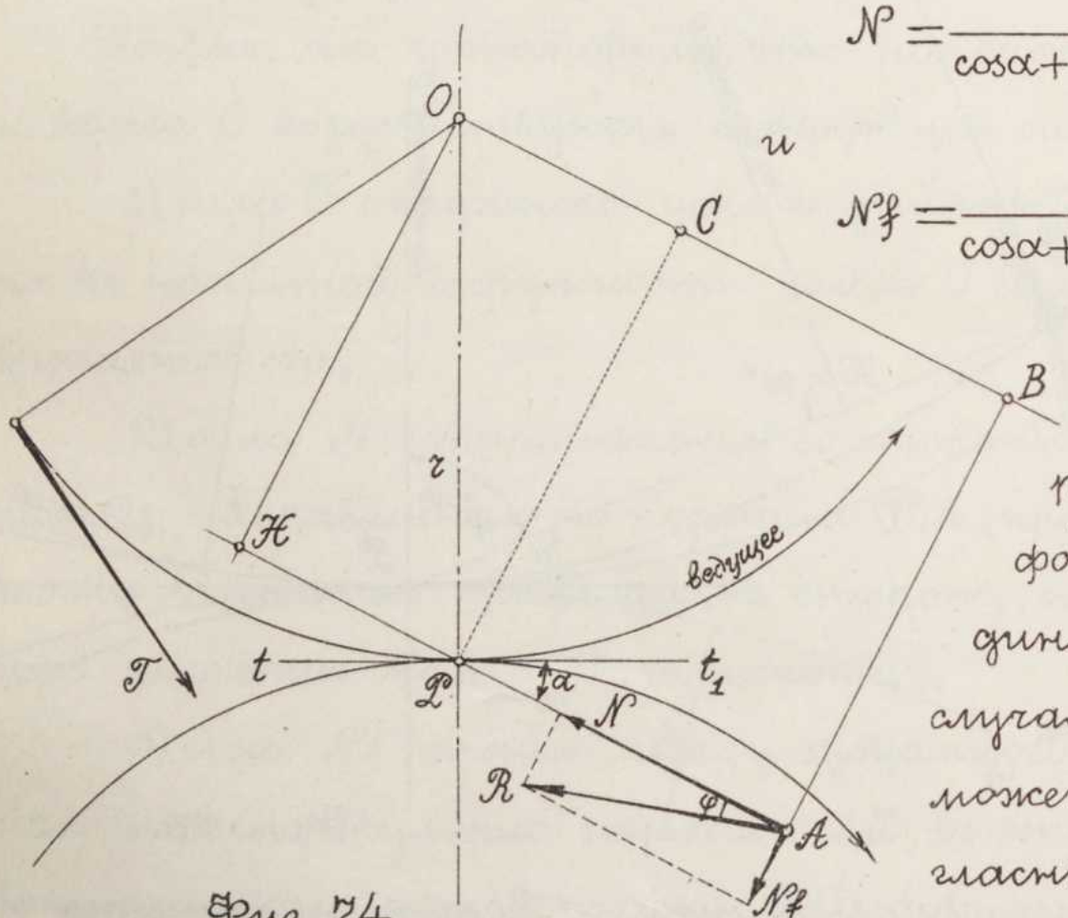
$$Nf = \frac{Tf}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} - \sin\alpha\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

На фиг. 73 отмѣчена одинъ изъ моментовъ зацѣпленія передъ линіей центровъ. Если бы мы взяли случай зацѣпленія за линіей центровъ, — напримѣръ, изображенный на фиг. 74, — то, по написаніи уравненія моментовъ, получили бы уравненія, аналогичныя (3) и (4) и разнящіяся отъ нихъ только знаками у $\sin\alpha$, а именно, уріи:

$$N = \frac{T}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} + \sin\alpha\right)} \quad (5)$$

и

$$Nf = \frac{Tf}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} + \sin\alpha\right)} \quad (6)$$



Фиг. 74.

Въ силу этихъ соображеній, общая формула, объединяющая оба случая зацѣпленія, можетъ быть, согласно (4) и (6), написана въ видѣ:

$$Nf = \frac{Tf}{\cos\alpha + f\left(\frac{p}{r} \mp \sin\alpha\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Принимая теперь во вниманіе, что размѣры линіи зацѣпленія, сравнительно съ радіусомъ колеса, вообще говоря, очень малы, и отрѣзокъ p составляетъ лишь малую долю радіуса r, заключаемъ, что дробь p/r представляетъ собою нѣкоторую малую величину; а если, вдо-

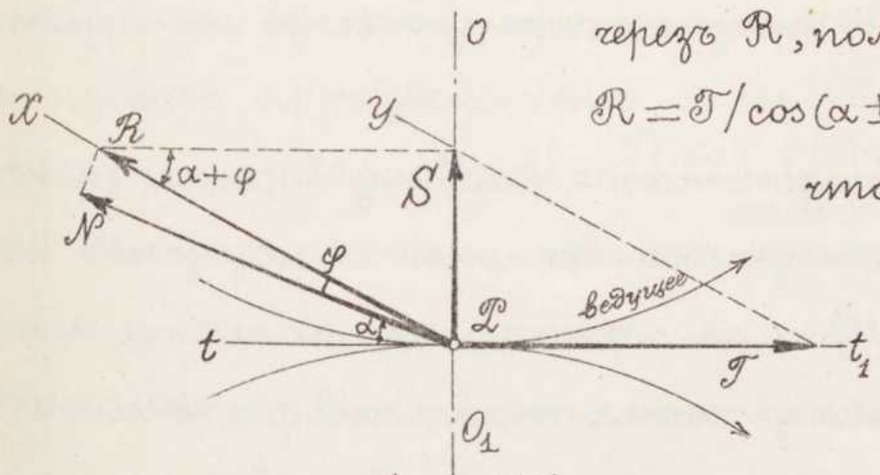
бавокъ къ этому, мы помножимъ ее еще на f, — также дробь небольшую, — то получимъ дробь fp/r, уже настолько малую, что ею, безъ замѣтной погрѣшности, свободно можно пренебречь. Послѣ этого выраженіе (7) приметъ видъ:

$$N_f = \frac{Tf}{\cos\alpha \mp f\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Подставивъ сюда вмѣсто f выраженіе его черезъ φ, т.-е. $\operatorname{tg}\varphi$, получимъ, послѣ очевидныхъ упрощеній, что

$$N_f = \frac{Tf\cos\varphi}{\cos(\alpha \pm \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Складывая нормальное сопротивленіе N съ силой тренія N_f, получаемъ силу R полной реакціи зуба b, равную, очевидно, $N/\cos\varphi$. Такъ какъ изъ ур-ія (9) можемъ вывести, что $N/\cos\varphi = T/\cos(\alpha \pm \varphi)$, то, замѣняя $N/\cos\varphi$ черезъ R, получаемъ соотношеніе $R = T/\cos(\alpha \pm \varphi)$, показывающее, что сила R можетъ быть принята за гипотенузу прямоугольнаго треугольника съ катетомъ T и прилежащимъ къ нему острымъ угломъ $(\alpha \pm \varphi)$. Поэтому усиліе R можетъ быть получено еще путемъ слѣдующаго простого геометрическаго построенія:



Фиг. 75.

Проводимъ линію центровъ OO_1 обоихъ колесъ (фиг. 75), отмѣчаемъ на ней точку P касанія полодій и проводимъ прямую $tt_1 \perp OO_1$, — общую касательную къ полодіямъ, — и на ней въ надлежащую сторону откладываемъ окружное усиліе T. Далѣе, подъ угломъ α къ tt_1

проводимъ прямую PN, дающую направленіе нормальнаго сопротивленія N, и, далѣе, подъ угломъ φ къ PN, отложеннымъ въ надлежащую сторону отъ PN, проводимъ прямую PX, дающую направленіе полной реакціи R; величину же ея получимъ, проводя TY ∥ PX и опредѣляя точку S пересѣченія TY съ OO_1. Отрѣзокъ TS и дастъ собою величину полной реакціи R, ибо $TS = PT/\cos PTS = PT/\cos(\alpha \pm \varphi)$.

Построеніе это можетъ быть получено также путемъ разсмотрѣнія того момента, когда точка A касанія зубьевъ приходитъ въ полюсъ P; тогда, очевидно, $p = 0$, и формула (8), послѣ очевидныхъ упрощеній, сразу принимаетъ видъ (9).

Замѣтимъ, кстати, что силы T и R, складываясь, даютъ силу S, представляющую собою силу, нагружающую ось вала и прижимающую ее къ ея подшипникамъ.

Имѣя въ виду подсчитать работу треніе зубьевъ за извѣстный промежутокъ времени и получивъ выраженіе величины N_f силы треніе, отъ момента къ моменту свою величину мѣняющей, мы должны теперь опредѣлить путь, проходимый точкой приложенія этой силы треніе N_f за тотъ же промежутокъ времени. Въ данномъ случаѣ треніе обусловлено наличностью относительнаго скольженія одного зубца по другому; нужно поэтому знать скорость этого скольженія. Ее можно опредѣлить, принявъ во вниманіе, что относительное движеніе зубцовъ можетъ быть воспроизведено каченіемъ одной полодіи по другой. При

столь въ каждый отдѣльный моментъ будетъ имѣть мѣсто вращеніе около полюса мгновеннаго вращенія P со скоростью $(\omega + \omega_1)$, и искомую линейную скорость точки A получимъ въ видѣ произведенія этой угловой скорости $(\omega + \omega_1)$ на разстояніе точки A отъ полюса мгновеннаго вращенія P, такъ что

$$v_A = p(\omega + \omega_1),$$

въ силу чего точка A за время dt окажется прошедшей путь $dl = v_A\, dt$, иначе изображаемый черезъ

$$dl = p(\omega + \omega_1)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Что касается направленія этого пути dl, то оно, будучи перпендикулярно къ вектору PA, очевидно, совпадетъ съ направленіемъ силы тренія Nf, въ точкѣ A дѣйствующей. Въ виду этого элементарная работа силъ тренія за взятый промежутокъ времени dt выразится просто произведеніемъ силы Nf на путь dl, что дастъ:

$$dL_f = Nf \times dl = \frac{Tf \cos\varphi \cdot p(\omega + \omega_1)}{\cos(\alpha \pm \varphi)}\, dt \quad \ldots\ldots (a)$$

Отсюда можно исключить время t и угловыя скорости ω и ω_1, предположивъ, что полодіи вращаются равномѣрно. Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ время можетъ быть измѣряемо дугами, проходимыми по той или другой полодіи. Пусть за время dt длина дуги полодій, пройденной полюсомъ мгновеннаго вращенія, есть ds. Тогда имѣемъ соотношенія

$$ds = \omega r\, dt = \omega_1 r_1\, dt,$$

гдѣ r и r_1 суть радіусы полодій. Отсюда находимъ, что $\omega\, dt = ds/r$ и $\omega_1\, dt = ds/r_1$, въ силу чего основное уравненіе (a) можетъ быть иначе переписано такъ:

$$dL = \frac{T_1 p \cos\varphi}{\cos(\alpha \pm \varphi)}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Такова работа трения зубцовъ за то время, пока полодіи прокатываются одна по другой на дугу ds. Стоитъ теперь подсчитать всю эту работу за всю дугу зацѣпленія, т.-е. начиная съ того момента, когда зубцы вошли въ зацѣпленіе, до того, когда они изъ него вышли, — и мы получимъ искомый результатъ. Работу эту, конечно, можно подсчитать и по частямъ, — сначала за то время, пока точка A пройдетъ часть линіи зацѣпленія mP, до линіи центровъ, а затѣмъ за время, въ которое она проходитъ остальную часть Pm_1 линіи зацѣпленія (фиг. 73), — результатъ, понятно, получится тотъ же самый, что и при прямомъ подсчетѣ за всю дугу зацѣпленія.

Прежде чѣмъ идти дальше, необходимо сдѣлать нѣкоторыя существенныя указанія относительно основныхъ положеній, приведшихъ насъ къ уравненію (11). Дѣло въ томъ, что существованіе окружного усилія T и осевого давленія S было связано нами съ нормальнымъ сопротивленіемъ лишь одного зубца ведомаго колеса. Оба эти усилія, T и S, имѣются налицо во всякой парѣ сцѣпляющихся зубчатыхъ колесъ, но при этомъ въ соприкосновеніи находится не одна пара зубцовъ, а двѣ или, вообще, нѣсколько. Является поэтому вопросъ о томъ, какъ же въ дѣйствительности распредѣляется это окружное усиліе между соприкасающимися парами зубцовъ? Къ рѣшенію этого вопроса, до сихъ поръ, къ сожалѣнію, остающагося открытымъ, можно было бы подойти при помощи теоріи упругости, руководствуясь такими соображеніями:

Если въ зацѣпленіи находится одна пара зубцовъ, то, какъ мы видѣли, дѣло сводится къ построенію нѣкотораго опредѣленнаго параллелограмма силъ. Но пусть въ зацѣпленіе вступили двѣ пары. Спрашивается, какъ распредѣлится теперь все давленіе между ними? Очевидно, что это распредѣленіе въ данномъ случаѣ зависитъ отъ измѣненія формы зубцовъ подъ дѣйствіемъ испытываемаго ими давленія. Если бы случилось, что одинъ зубецъ

первой пары оказалася болѣе слабымъ, чѣмъ у другой, что могло бы имѣть мѣсто, если бы онъ, напримѣръ, былъ выполненъ изъ болѣе податливаго матеріала, то въ результатѣ вышло бы, что этотъ зубецъ первой пары поддался бы, сравнительно, легко, и все давленіе оказалось бы сосредоточеннымъ чѣликомъ только на одномъ зубцѣ второй пары. Если же, наоборотъ, первый зубецъ былъ бы менѣе податливъ, то онъ воспринялъ бы на себя давленіе большее, чѣмъ другой. Значитъ, распредѣленіе давленія зависитъ отъ того, насколько велико измѣненіе формы одного зубца сравнительно съ другимъ, изслѣдовать же вопросъ объ этомъ измѣненіи формы можно было бы, исходя изъ того соображенія, что каждый зубецъ, подвергаясь нормальному давленію, долженъ въ извѣстной мѣрѣ сгибаться. Принимая теперь всѣ эти нормальныя давленія на зубцы за неизвѣстныя, мы могли бы выразить въ функціи ихъ всѣ деформаціи зубцовъ, что, въ свою очередь, дало бы намъ возможность вывести и распредѣленіе давленій.

Въ дѣйствительности дѣло обстоитъ гораздо сложнѣе, въ томъ отношеніи, что здѣсь имѣется налицо не только изгибъ брусьевъ, какъ балокъ, защемленныхъ на одномъ концѣ, но и смятіе ихъ,—и вотъ подсчетъ этихъ сложныхъ деформацій,—деформацій изгиба и смятія,—представляется настолько сложнымъ и труднымъ, что выполненіе его въ настоящее время слѣдуетъ признать почти невозможнымъ,—методы ученія о сопротивленіи матеріаловъ не даютъ данныхъ для рѣшенія этого сложнаго вопроса.

Принимая во вниманіе всѣ эти неблагопріятныя обстоятельства, мы, ради простоты и возможности разсужденій и имѣя въ виду составить себѣ хотя бы приблизительное понятіе о величинѣ работы тренія, имѣющаго мѣсто между зубцами передачи, и останавливаемся на начальномъ нашемъ предположеніи, что въ соприкосновеніи находится лишь по одному зубцу каждаго колеса, и продолжимъ разборъ полученнаго нами выше основного уравненія (11).

Дѣля числителя и знаменателя уравненія (11) на $\cos\varphi$ и помня, что $\operatorname{tg}\varphi = f$, можемъ дать этому уравненію видъ, болѣе удобный для дальнѣйшихъ упрощеній, а именно:

$$dL = \frac{T f p}{\cos\alpha \mp f \sin\alpha}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Формула эта даетъ выраженіе работы тренія за то время, пока полодіи перекатываются одна по другой на дугу ds, и мы должны теперь подсчитать ее за все время зацѣ-

пленія взятой нами пары сопряженныхъ зубьевъ. Произвести этотъ подсчетъ было бы легко, еслибы была извѣстна зависимость между всѣми перемѣнными величинами, входящими въ составъ выраженія (12), т.-е. между α, ρ и s, гдѣ α есть уголъ нормали къ профилямъ съ общей касательной къ полодіямъ, — при перемѣщеніи точки A по линіи зацѣпленія этотъ уголъ, какъ это нетрудно усмотрѣть изъ фиг. 73, будетъ постоянно мѣняться; въ то же время будетъ мѣняться ρ, какъ длина мѣняющагося отрѣзка AP, и, наконецъ, мѣняется и величина дуги переката s.

Такимъ образомъ, въ дифференціальное соотношеніе (12) входятъ три перемѣнныхъ величины: α, ρ и s, такъ что, для возможности интеграціи этого уравненія необходимо двѣ изъ этихъ перемѣнныхъ выразить черезъ третью, — выразить, напримѣръ, α и ρ черезъ s. Зависимость между α, ρ и s имѣется, къ сожалѣнію, лишь для случая эвольвентнаго (разверточнаго) зацѣпленія, гдѣ она, притомъ, имѣетъ весьма простой и компактный видъ, — см. ниже, форм. (15); въ случаѣ же циклическаго зацѣпленія она оказывается крайне сложной, а если профила выбираются произвольно, то получить эту зависимость въ аналитической формѣ можетъ оказаться даже совершенно невозможнымъ. Въ силу этого, при аналитическомъ изслѣдованіи поставленнаго нами вопроса приходится поневолѣ ограничиваться изслѣдованіемъ одного лишь случая эвольвентнаго зацѣпленія.

Предварительно замѣтимъ, что выраженіе (12) можно нѣсколько упростить, допустивъ еще одну погрѣшность,

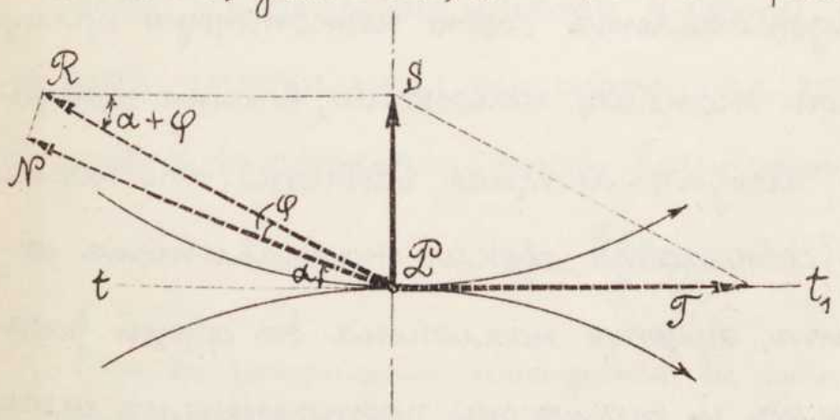
а именно: принимая во вниманіе, что уголъ α, вообще говоря, малъ, а коэффиціентъ тренія f представляетъ собою также величину небольшую, заключаемъ, что величина $f\sin\alpha$ представляетъ собою, сравнительно съ $\cos\alpha$, величину настолько малую, что ею можно свободно пренебречь.

Такъ, напримѣръ, если $\alpha = 15°$, а $f = 0{,}25$, то $f\sin\alpha = 0{,}25 \cdot 0{,}259 = 0{,}065$; въ то же время $\cos 15° = 0{,}966$, такъ что откидываніе члена $f\sin\alpha$ даетъ въ знаменатель погрѣшность, достигающую 6,7 %; на величинѣ же самой дроби отбрасываніе отразится погрѣшностью въ 7–8%. При углахъ, близкихъ къ нулю, эта погрѣшность достигаетъ лишь весьма малыхъ значеній, при большихъ она, естественно, больше.

Послѣ этого выраженіе (12) принимаетъ видъ:

$$dL_3 = Tf\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\frac{p}{\cos\alpha}\,ds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Уголъ α не долженъ превосходить извѣстныхъ значеній, во избѣжаніе излишнихъ давленій на подшипники. Дѣйствительно, замѣчая, что полная реакція R и окружное усиліе T обусловливаютъ появленіе осевого давленія S, равнаго $T\,tg(\alpha+\varphi)$, заключаемъ, что это усиліе S будетъ, при одномъ и томъ же T, весьма быстро возрастать по мѣрѣ увеличенія угла α (фиг. 76); увеличеніе же S невыгодно потому, что заставляетъ шипы оси колеса сильнѣе прижиматься къ подшипникамъ и вызываетъ тѣмъ самымъ излишнюю потерю работы на преодолѣніе возникающаго здѣсь тренія. Для возможно большаго уменьшенія этой траты полодіи берутся достаточно большими сравнительно съ



Фиг. 76.

размѣрами зубцовъ, такъ что обычно уголъ α выходитъ достаточно малымъ.

Замѣчая теперь, что факторы T, f, r и r_1 представляютъ собою величины, для данной пары колесъ постоянныя, и интегрируя выраженіе (13) за время прохожденія по полодіямъ дуги s, получаемъ выраженіе работы L_f треніа зубцевъ за это время въ видѣ:

$$L_f = T f \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) \int_0^s \frac{p}{\cos\alpha}\, ds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Мы уже указывали, что, для возможности интеграціи уравненія (13), т.-е. для взятія интеграла, входящаго въ выраженіе (14), необходимо имѣть выраженную въ аналитической формѣ зависимость между параметрами α, p и s. Въ случаѣ эвольвентнаго зацѣпленія зависимость эта имѣетъ особенно простой видъ. Дѣло въ томъ, что при этомъ зацѣпленіи линія зацѣпленія представляетъ собою нѣкоторую прямую, занимающую въ данной системѣ положеніе, вполнѣ опредѣленное и со временемъ неизмѣняющееся. Очевидно, что нормаль AP постоянно будетъ совпадать своимъ направленіемъ съ этой прямой и, значитъ, будетъ наклонена къ общей касательной tt_1 подъ однимъ и тѣмъ же постояннымъ угломъ α, такъ что при эвольвентномъ зацѣпленіи перемѣнными окажутся лишь величины p и s. Извѣстно, далѣе, что въ эвольвентномъ зацѣпленіи длина линіи зацѣпленія равна произведенію изъ дуги зацѣпленія, пройденной за это время, на $\cos\alpha$, такъ что имѣетъ мѣсто зависимость

$$p = s\cos\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Въ виду этого интегралъ выраженія (14) подсчитывает-

ся здѣсь очень легко: дѣлая подстановку, указываемую соотношеніемъ (15), получаемъ, что

$$\int_0^s \frac{p}{\cos\alpha}\,ds = \int_0^s s\,ds = \frac{1}{2}s^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

вслѣдствіе чего выраженіе (14) работы тренія въ случаѣ эвольвентнаго зацѣпленія принимаетъ видъ:

$$\mathcal{L}_f = \frac{\mathcal{T}f}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)s^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Отмѣтимъ, кстати, что сумма $(1/r + 1/r_1)$ представляетъ собою величину, обратную діаметру d поворотнаго круга, т.-е. величину $1/d$. Сдѣлавъ эту подстановку, можемъ дать формулѣ (17) болѣе компактный видъ, а именно:

$$\mathcal{L}_f = \frac{\mathcal{T}fs^2}{2d}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Обычно, не желая упоминать о поворотныхъ кругахъ, пишутъ эту формулу въ видѣ (17).

Если желательно знать работу тренія на единицѣ длины дуги зацѣпленія, то, обозначая ее черезъ λ_f, гдѣ $\lambda_f = \mathcal{L}_f : s$, получимъ выраженіе этой величины λ_f въ видѣ:

$$\lambda_f = \frac{\mathcal{T}fs}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Если въ зацѣпленіи находится не одна пара зубьевъ, а нѣсколько, то можно положить, — конечно, приблизительно, — что все давленіе $\mathcal{T}$ распредѣляется равномѣрно между всѣми зубьями, находящимися въ зацѣпленіи, и тогда въ выраженіи работы тренія одной пары вмѣсто $\mathcal{T}$ стояло бы $\mathcal{T}/n$; для полученія относительной потери на работу тренія всѣхъ зубцовъ всѣ эти n частныхъ работъ пришлось бы просуммировать, послѣ чего мы получили бы опять то же выраженіе (19).

Полученное выраженіе (19) можно нѣсколько измѣнить, используя зависимость между числами зубцовъ z и z_1, радіусами колесъ r и r_1 и шагомъ t, выражаемую уравненіями

$zt = 2\pi r$ и $z_1 t = 2\pi r_1$, откуда затѣмъ находимъ:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{2\pi}{t}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_1}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Такъ какъ s есть величина, кратная t:

$$s = nt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

то, въ виду (20) и (21), выраженіе (19) принимаетъ видъ:

$$\lambda_z = \frac{nt}{2} \cdot \varphi\mathcal{T} \cdot \frac{2\pi}{t}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_1}\right),$$

или, послѣ сокращеній, видъ:

$$\lambda_z = \pi n \varphi\mathcal{T}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_1}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Слѣдуетъ помнить, что всѣ эти формулы для $\mathcal{L}_z$ и λ_z относятся только къ случаю эвольвентнаго зацѣпленія; къ этому же случаю относятся и всѣ другія подобныя имъ формулы, приводимыя въ справочникахъ.

Подсчетъ работы треніа въ случаяхъ циклическаго зацѣпленія и другихъ, поддающихся аналитической обработкѣ, становится крайне затруднительнымъ въ виду сложности формулъ, выражающихъ зависимость между α, ρ и s; онъ становится, наконецъ, совершенно невозможнымъ при отсутствіи такихъ аналитическихъ опредѣленій и соотношеній, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто при произвольномъ заданіи линіи зацѣпленія или профиля зубца. Въ этихъ случаяхъ аналитическій подсчетъ работы треніа невозможенъ, взамѣнъ этого, онъ оказывается легко и удобно выполнимымъ во всѣвозможныхъ случаяхъ зацѣпленій при помощи графическаго метода, дающаго возможность найти интегралъ общаго уравненія (11) графическимъ путемъ, свода

подсчетъ его на вычисленіе нѣкоторой площади, ограниченной опредѣленнымъ образомъ. Этотъ **графическій пріемъ подсчета работы силъ треніа въ зубчатой передачѣ** состоитъ въ слѣдующемъ:

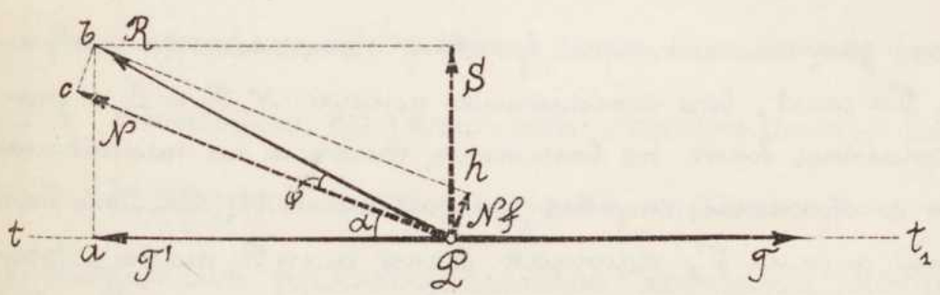
Общее дифференціальное уравненіе, дающее собою выраженіе элементарной работы треніа, dL_f, въ зависимости отъ различныхъ факторовъ зацѣпленія, имѣетъ, какъ было показано выше, видъ:

$$dL_f = \frac{T_f p \cos\varphi}{\cos(\alpha+\varphi)}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)ds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Согласно (9), можемъ написать, что

$$\frac{T_f \cos\varphi}{\cos(\alpha+\varphi)} = N_f.$$

Эту силу N_f легко получить графически, откладывая по касательной къ полодіямъ, — по прямой tt_1, — начиная отъ полюса P, силу T', равную и противоположную силѣ T, а затѣмъ откладывая углы α и φ (фиг 77).



Фиг 77.

Тогда перпендикуляръ ab, возставленный изъ конца a вектора Pa, изображающаго силу T_1, въ пересѣченіи съ стороной Pb угла $(\alpha+\varphi)$ дастъ точку b, — конецъ вектора Pb, изображающаго полную реакцію R, равную $T/\cos(\alpha+\varphi)$. Проекція силы R на сторону Pc угла α дастъ силу N нормальнаго сопротивленія, — замѣтимъ, кстати, что Pc есть направленіе общей нормали къ профилямъ зубцовъ, —

и, наконецъ, проекція силы R на направленіе Ph, перпендикулярное къ общей нормали Pc, дастъ силу Nf трения зубцовъ. Дѣйствительно,

$$Ph = R\sin\varphi = R\cos\varphi.\ \mathrm{tg}\,\varphi = Rf\cos\varphi = Tf\cos\varphi\,/\cos(\alpha+\varphi) = Nf.$$

Итакъ, векторъ Ph опредѣляетъ собою силу Nf въ томъ же масштабѣ, въ какомъ векторъ Pa изображаетъ силу T'. Этотъ векторъ Ph можно, очевидно, получить для любого угла α, т.-е. для любого момента разсматриваемаго движенія. Особенно просто онъ получается, понятно, въ случаѣ эвольвентнаго зацѣпленія, ибо здѣсь направленія силъ R, N и Nf будутъ постоянны, вслѣдствіе чего отрѣзокъ Ph за все время движенія остается неизмѣннымъ какъ по величинѣ, такъ и по направленію; въ другихъ видахъ зацѣпленій эти факторы будутъ все время мѣняться, вслѣдствіе окажется перемѣннымъ и самый этотъ отрѣзокъ Ph.

Въ эвольвентномъ зацѣпленіи, при условіи постоянства окружного усилія T, т.-е. при $T = \mathrm{const}$, всѣ остальныя усилія: N, R и S, а значитъ, и Nf, будутъ постоянны какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Это явствуетъ изъ того соображенія, что всѣ направленія: tt_1, Pa, Pb и Pc, остаются постоянными, а сила T', дающая какъ силу R, такъ и другія, своей величины и направленія не мѣняетъ. Эта особенность эвольвентнаго зацѣпленія весьма выгодно выдѣляетъ его изъ среды другихъ.

Что касается суммы $(1/r + 1/r_1)$, то это есть величина постоянная, которую для данной пары колесъ можно подсчитать разъ навсегда; напомнимъ, что это есть величина, обратная діаметру d поворотнаго круга данной системы. Помноживъ эту величину на p, получимъ нѣкоторую перемѣнную величину $p(1/r + 1/r_1)$, могущую быть вычисленной для любого момента движенія. Обозначимъ ее черезъ δ, такъ что

$$\delta = p\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

Въ виду этого наше основное соотношеніе (11) переписывается такъ:

$$dL = N_f . \delta . ds . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Замѣтимъ, что δ есть величина отвлеченная и, какъ это слѣдуетъ изъ самого опредѣленія ея, перемѣнная; она обращается въ нуль при $\rho = 0$, т.-е. въ тотъ моментъ, когда соприкосновеніе профилей происходитъ въ самомъ полюсѣ P мгновеннаго вращенія; для этого момента dL также обращается въ нуль.

Такъ какъ факторы N_f и δ извѣстны для каждаго даннаго момента, то будетъ извѣстной и величина $\delta . N_f$; она будетъ представлять собою нѣкоторую силу, ибо δ есть число отвлеченное. Обозначимъ эту силу черезъ F. Тогда уравненіе (23) принимаетъ весьма простой видъ, а именно:

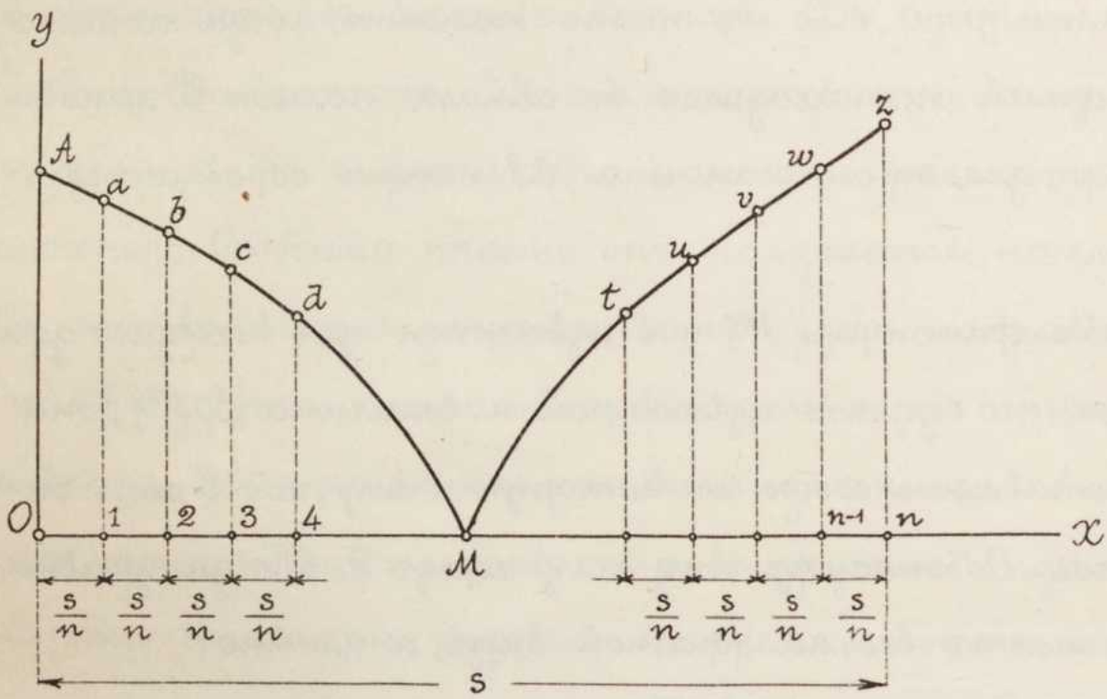
$$dL_f = F\, ds . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Это уравненіе указываетъ намъ на возможность графическаго рѣшенія задачи объ опредѣленіи работы L_f; для полученія его будемъ разсуждать такъ:

Возьмемъ прямоугольную систему координатъ XOY (фиг. 78), по оси абсциссъ которой условимся откладывать части дуги зацѣпленія, а ординатами будемъ брать отрѣзки, изображающіе въ томъ или иномъ масштабѣ силу F, соотвѣтствующую взятому моменту. Удобнѣе всего поступать такъ:

По оси OX, начиная отъ какой-либо точки O ея, принятой за начало, откладываемъ въ извѣстномъ масштабѣ длину s всей дуги зацѣпленія и дѣлимъ ее на равныя части, возможно малыя, числомъ n. Моменту перехода черезъ конечную правую точку каждаго новаго отрѣзка $\frac{1}{n}$ будетъ соотвѣтствовать

своя величина нормали p и угла α; брать ихъ придется по основному чертежу зацѣпленія. Такимъ образомъ, для каждой изъ этихъ точекъ будутъ извѣстны какъ сила N, такъ и величина δ; значитъ, будетъ извѣстна и сила $\delta . N$, которую мы обозначили черезъ F.



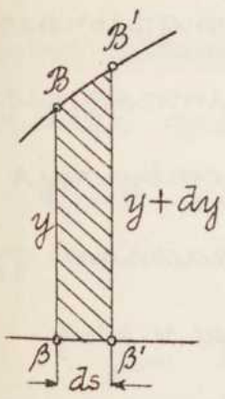
Фиг. 78.

Возставивъ въ точкахъ дѣленія $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$ ординаты, опредѣливъ для каждой изъ точекъ $0, 1, \ldots, n$ соотвѣтствующую силу F и изобразивъ каждую изъ этихъ силъ въ выбранномъ нами масштабѣ въ видѣ нѣкотораго отрѣзка, откладываемъ теперь эти отрѣзки на соотвѣтствующихъ ординатахъ. Соединивъ теперь концы $A, a, b, \ldots, w, Z$ этихъ отрѣзковъ непрерывной плавной линіей, получимъ, такимъ образомъ, нѣкоторую кривую AMZ (фиг. 78), изображающую измѣненія силы F въ зависимости отъ измѣненія s. Очевидно, что въ тотъ моментъ, когда точка касанія профилей приходитъ въ полюсъ P, сила F обращается въ нуль; въ этотъ моментъ кривая AZ будетъ имѣть ординату, равную нулю, т.-е. спустится до самой оси абсциссъ, послѣ чего сейчасъ же начнетъ снова подниматься вверхъ, какъ это и изображено на фиг. 78.

Видъ кривой AZ можетъ быть весьма различенъ, ибо онъ зависитъ отъ индивидуальности зацѣпленія; во всякомъ случаѣ, однако, кривая AZ всегда будетъ имѣть одну точку M, лежащую на оси Ox.

Нетрудно убѣдиться, что площадь OAMZnO, ограниченная такъ полученной нами кривой AMZ, крайними ординатами OA и nZ и осью абсциссъ Ox, представляетъ собою не что иное, какъ работу трепія L_z, совершенную здѣсь силами трепія за все время зацѣпленія взятой нами пары зубьевъ. Убѣдиться въ этомъ нетрудно помощью слѣдующихъ простыхъ разсужденій:

Выдѣлимъ гдѣ-либо на нашей кривой AMZ двѣ безконечно близкія другъ другу точки B и B' (фиг. 79). Пусть координаты точки B имѣютъ значенія (x, y); въ такомъ случаѣ координаты смежной точки B' будутъ равны $(x+dx, y+dy)$. Проведя ординаты Bβ и B'β' этихъ точекъ, мы выдѣляемъ, такимъ образомъ элементарную площадку ββBB'β', которая, какъ это извѣстно изъ анализа, можетъ быть, съ ошибкой до безконечно малыхъ высшихъ порядковъ, принята равной площади прямоугольника съ основаніемъ ββ' и высотой ββ, и, въ виду этого, можетъ быть выражена произведеніемъ ββ' × ββ, т.-е. $y\,dx$, что, согласно принятымъ нами обозначеніямъ, и есть $F\,ds$. Такимъ образомъ, выдѣленная нами элементарная площадка ββ', дѣйствительно, изображаетъ собою элементарную работу силы трепія, dL_z, ибо мы приняли, какъ-разъ, что $dL_z = F\,ds$.

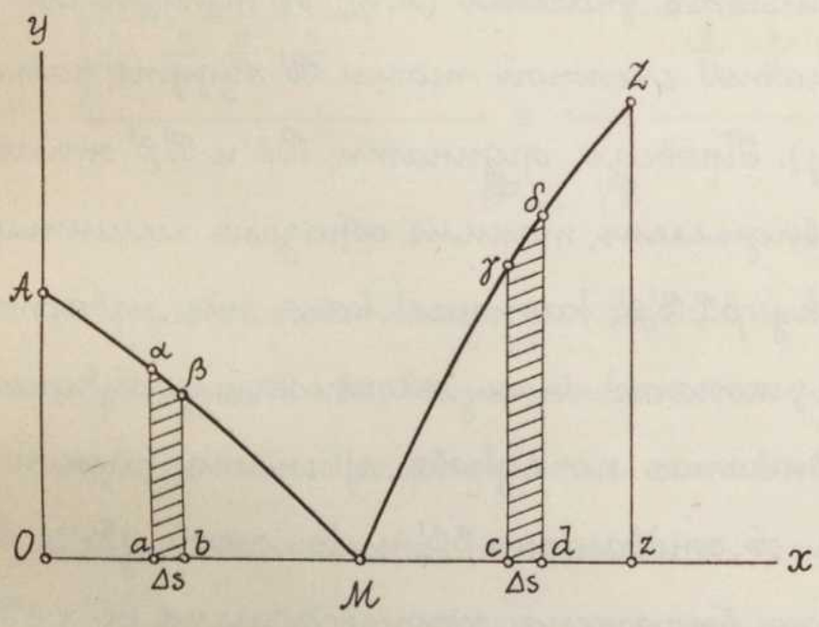


Фиг. 79.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что опредѣленіе всей работы L_z сводится къ суммированію ряда такихъ площадокъ, построенныхъ одна возлѣ другой вдоль всей кривой AMZ, а это

сводится, попросту говоря, къ опредѣленію величины всей указанной выше площади $0AMz2n0$. Подсчетъ этотъ можетъ быть выполненъ весьма различно: можно прибѣгнуть сюда формулы трапецій, Стирлинга, можно для опредѣленія ея воспользоваться планиметромъ Амслера, и т. д. Такъ или иначе, но площадь эту можно вычислить всегда и, значитъ, всегда можно получить интегралъ уравненія (11), т.-е. величину работы трѣнія между зубьями данной передачи за все время прохожденія полной дуги зацѣпленія s.

Разсмотрѣнный графическій методъ имѣетъ передъ аналитическимъ то важное преимущество, что позволяетъ весьма просто составлять наглядныя діаграммы работы трѣнія на



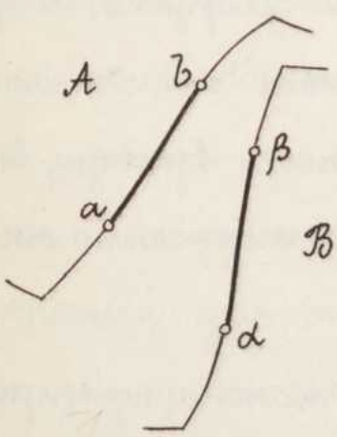
Фиг. 80.

различныхъ отдѣльныхъ участкахъ, затѣмъ, работы, соотвѣтствующія различнымъ частямъ дуги зацѣпленія и т. д. Такъ, напримѣръ, пусть для даннаго зацѣпленія кривая усилій F имѣетъ видъ, изображенный на фиг. 80, и пусть теперь желательно узнать, на которомъ изъ двухъ одинаковыхъ участковъ дуги зацѣпленія, ab или cd, гдѣ $ab = cd = \Delta s$, работа трѣнія больше?

Вопросъ этотъ разрѣшается теперь крайне просто: помня, что работа эта имѣетъ выразиться площадями, ограниченными каждая осью абсциссъ $0x$, крайними ордина-

тами и кривой AZ, мы и проводимъ эти крайнія ординаты $a\alpha$, $b\beta$ и т. д. Такимъ образомъ выдѣлятся площадки $a\alpha\beta b$ и $c\gamma\delta d$, сравненіе которыхъ ясно показываетъ, что на участкѣ cd работа тренія много больше, нежели на участкѣ cd. Нетрудно подсчитать величину этихъ двухъ площадокъ и дать, такимъ образомъ, количественное представленіе объ этихъ работахъ. Подобными же соображеніями можно руководствоваться и при изслѣдованіи профилей на работу. Здѣсь дѣло ведется такъ:

Указанія кинематики позволяютъ намъ вполнѣ точно опредѣлить, какъ велики рабочія части каждаго профиля; нетрудно также установить, какія части одного профиля соотвѣтствуютъ даннымъ частямъ другого, а также, наконецъ, и то, какой части дуги зацѣпленія соотвѣтствуетъ каждая взятая часть профиля. Такъ, напримѣръ, пусть на профиль зуба A мы выдѣлили извѣстный участокъ ab (фиг. 81). Тогда

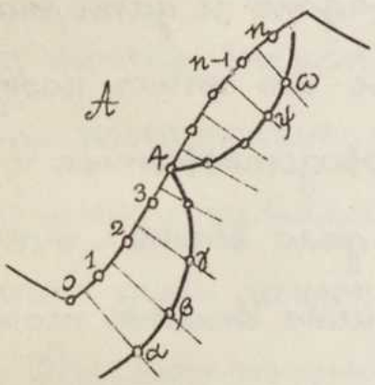


Фиг. 81.

элементарныя геометрическія построенія позволятъ намъ установить, что на профиль зуба B этому участку ab будетъ соотвѣтствовать нѣкоторый вполнѣ опредѣленный участокъ $\alpha\beta$. Пусть на кривой AMZ дугѣ $[3(n-2)]$ зацѣпленія, соотвѣтствующей дугамъ $\alpha\beta$ и ab, причитается работа въ размѣрѣ $3cv(n-2)$ (фиг. 78). Тогда представляется возможность опредѣлить величину работы, приходящейся на единицу длины каждаго изъ этихъ участковъ, что иногда бываетъ весьма важнымъ. Понятно, что это опредѣленіе будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше взятый нами участокъ ab профиля. Можно поступить

при изслѣдованіи профилей еще и такъ:

Дѣлимъ одинъ изъ профилей,—напримѣръ, профиль зуба A,—точнѣе говоря, всю рабочую часть его, tn (фиг. 82), на возможно большее число равныхъ долей: 01, 12, 23, ..., (n-1)n, и пусть кривая AMZ работъ треніи, построенная для этого случая, указываетъ, что этимъ участкамъ профиля соотвѣтствуютъ работы $l_{01}, l_{12}, l_{23}, \ldots$ Представивъ теперь всѣ эти работы, въ извѣстномъ масштабѣ прямолинейными отрѣзками, отложимъ всѣ эти отрѣзки на перпендикулярахъ, возставленныхъ изъ серединъ соотвѣтствующихъ участковъ,—это удобнѣе всего потому, что сразу указываетъ, къ какому участку профиля относится отложенный отрѣзокъ l_{st}; отложенія на граничныхъ точкахъ могутъ вызвать недоразумѣнія, почему ихъ дѣлать не слѣдуетъ. Соединивъ теперь конечныя точки $\alpha, \beta, \ldots, \psi, \omega$ всѣхъ этихъ отрѣзковъ непрерывной линіей $\alpha\omega$ (фиг. 82), получимъ кривую, весьма наглядно рисующую распредѣленіе работы треніи по отдѣльнымъ участкамъ даннаго профиля.



Фиг. 82.

Съ другимъ (сопряженнымъ) профилемъ можно поступить двояко: или 1) опредѣлить на немъ точки 0', 1', 2', ..., n', соотвѣтствующія точкамъ 0, 1, 2, .., n профиля A, и отложить на перпендикулярахъ, возставленныхъ изъ серединъ этихъ участковъ 0'1', 1'2', ..., (n-1)'n' отрѣзки, изображающіе тѣ же работы $l_{01}, l_{12}, \ldots$, соединить затѣмъ верхушки всѣхъ этихъ отрѣзковъ непрерывной кривой $\alpha'\omega'$ и принять ее за кривую распредѣленія работъ треніи; или же 2) дѣйствовать

вполнѣ аналогично тому, что мы сдѣлали съ профилемъ A, т.-е. разбить всю рабочую часть его на равныя, возможно болѣе мелкія доли, опредѣлить для каждой изъ этихъ долей причитающуюся ей работу трѣнія, отложить эти работы на перпендикулярахъ, возставленныхъ изъ серединъ этихъ долей, и соединить верхушки такъ отложенныхъ отрѣзковъ непрерывной кривой линіей; получимъ кривую работъ трѣнія по участкамъ профиля. При аккуратномъ выполненіи обѣ кривыя, полученныя указанными двумя способами, должны въ точности совпасть и повторить одна другую. Обычно довольствуются однимъ первымъ способомъ.

Здѣсь можетъ встрѣтиться рядъ весьма любопытныхъ задачъ; такъ, напримѣръ, можно задаться цѣлью подобрать профиля такъ, чтобы работа трѣнія была распредѣлена равномѣрно по длинѣ всей рабочей части его; можно также сравнивать различныя зацѣпленія по отношенію ихъ къ затратѣ работы трѣнія, и т.д. Вышеизложенный графическій методъ дѣлаетъ отсутствіе аналитической зависимости между факторами α, ρ и s совершенно незамѣтнымъ; построенія для опредѣленія силы F и соотвѣтствующихъ другъ другу точекъ на профиляхъ, весьма несложны, а самое важное, этотъ методъ одинаково примѣнимъ ко всякимъ зацѣпленіямъ вообще, съ произвольными профилями, произвольными линіями зацѣпленій и произвольными некруглыми полодіями. Нѣкоторые факторы, какъ, напримѣръ, r, r_1, T и др., могутъ оказаться здѣсь перемѣнными, но это отразится лишь на ариѳметической сторонѣ метода, сущность же его останется незадѣтой.

Подобныя изслѣдованія важны въ томъ отношеніи, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ дѣлаютъ возможнымъ принятіе мѣръ противъ излишняго изнашиванія; даже болѣе, въ нѣкоторыхъ случаяхъ они являются прямо необходимыми, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто въ тѣхъ случаяхъ, когда отъ правильности работы зубцовъ зависитъ правильность работы самой машины, что, напримѣръ, наблюдается въ зубчатыхъ горныхъ желѣзныхъ дорогахъ. Діаграммы работы треніа, составленныя указанными выше способами, сейчасъ же укажутъ намъ, гдѣ и въ какой мѣрѣ придется измѣнить или составить и подобрать профиля зубьевъ такъ, чтобы производимая здѣсь работа треніа была распредѣлена возможно равномѣрнѣе.

Что касается величины коэффиціента полезнаго дѣйствіа, то вопросъ о немъ мы разберемъ теперь примѣнительно лишь къ случаю эвольвентнаго зацѣпленіа, для котораго работа треніа за время прохода всей дуги зацѣпленіа s выражается, согласно (18), черезъ

$$\mathfrak{L}_f = \frac{f s^2 T}{2d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Эту формулу мы берем исключительно ради краткости письма. — На томъ же пути s работа окружного усилія T выражается черезъ Ts. Поэтому, давъ формулѣ (18) видъ:

$$\mathfrak{L}_f = T s \frac{fs}{2d}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

видимъ, что отъ всей работы Ts, вслѣдствіе треніа между зубцами, теряется часть ея, опредѣляемая дробью $fs : 2d$, что даетъ величину потери въ %:

$$u_f\% = \frac{50 f s}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Легко теперь подсчитать коэффиціентъ полезнаго дѣйствія зубчатой передачи съ эвольвентными зацѣпленіемъ: пока трепія не было, работа усилія T на пути s выражалась произведеніемъ Ts; при наличности же трепія, на преодолѣніе коего уходитъ работа L_f, ведомое колесо сможетъ воспринять уже только работу $Ts\left(1-\frac{fs}{2d}\right)$; отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія этой передачи, η, выразится такъ:

$$\eta = Ts\left(1-\frac{fs}{2d}\right) : Ts = 1-\frac{fs}{2d} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

Можно разсуждать еще и такъ: пока не было трепія, на пути s выполнялась работа Ts, ибо все время работало окружное усиліе T. При наличности трепія, на тотъ же пути s совершается работа $Ts\left(1-\frac{fs}{2d}\right)$, такъ что здѣсь на пути s работаетъ уже какъ бы не прежнее усиліе T, а усиліе $T\left(1-\frac{fs}{2d}\right)$. Значитъ, эффектъ трепія сводится какъ бы къ уменьшенію начальнаго окружного усилія до размѣровъ $T\left(1-\frac{fs}{2d}\right)$. Отсюда слѣдуетъ, что работы этихъ усилій, совершенныя на одномъ и томъ же пути s, будутъ относиться, какъ T относится къ $T\left(1-\frac{fs}{2d}\right)$. Величина же коэффиціента полезнаго дѣйствія, η, выразится отношеніемъ, обратнымъ этому, что и приведетъ къ тому же выраженію (27).

Если радіусъ одного изъ зубчатыхъ колесъ,—положимъ, r_1,—обратился въ безконечность, такъ что это

колесо перешло въ зубчатую полосу (рейку), и у насъ имѣется зацѣпленіе колеса съ рейкой, то, въ случаѣ, если это зацѣпленіе оказывается эвольвентнымъ, формула (17), дающая выраженіе количества $\mathfrak{L}_f$ работы, уходящей на преодолѣніе тренія между зубцами, приметъ здѣсь видъ:

$$\mathfrak{L}_f = \frac{T_f s^2}{2r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

на единицу же дуги зацѣпленія приходится, въ среднемъ, работа

$$\lambda = \frac{T_f s}{2r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Положивъ, далѣе, что шагъ зацѣпленія мало отличается отъ дуги зацѣпленія и что на всей дугѣ зацѣпленія работаетъ каждый разъ только одинъ зубецъ, такъ что $n=1$ и $s=t$, и принимая, забѣмъ, во вниманіе, что $zt = 2\pi r$, можемъ дать формулѣ (29) видъ:

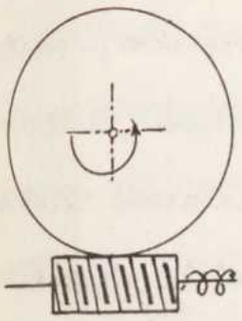
$$\lambda = \frac{1}{2} T_f \frac{t^2 . 2\pi}{zt} = \frac{T_f \pi}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Такова потеря работы на треніе на единицѣ длины дуги зацѣпленія въ случаѣ сцѣпленія колеса съ зубчатой полосой и при эвольвентномъ очертаніи зубьевъ. Формулой (30) придется пользоваться при изслѣдованіи тренія въ червячной передачѣ.

Перечисляя на стр. 169–170 силы, подлежащія учету, мы не ввели въ разсмотрѣніе силы S осевого давленія только потому, что имѣли въ виду написать ур-іе моментовъ, а моментъ этой силы относительно центра O равенъ нулю, такъ что отъ невведенія этой силы въ ур-іе (2) правильности его и выводовъ изъ него не нарушило совсѣмъ.

§ 9. Червячная передача.

Мы разсмотримъ лишь тотъ, чаще другихъ встрѣчающійся на практикѣ, случай червячной передачи, когда оси червяка и червячнаго колеса взаимно перпендикулярны (фиг. 83). Оставляя въ сторонѣ вопросъ о треніи



Фиг. 83.

въ шипахъ и пятахъ этой передачи, мы ограничимся суммарнымъ подсчетомъ, по необходимости, приблизительнымъ, потерь на треніе, имѣющихъ мѣсто въ самой передачѣ, т.е. между зубцами ея. Если, съ извѣстной степенью приближенія, предположить, что здѣсь, подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто въ цилиндрическихъ косозубчатыхъ (правильнѣе, винтовыхъ) колесахъ, зацѣпленіе можетъ быть уподоблено зацѣпленію безконечнаго множества параллельныхъ зубчатыхъ полосъ (реекъ), — каждой со своимъ колесомъ, — или, суммарно, зацѣпленію нѣкоторой одной такой полосы со своимъ колесомъ, то будемъ имѣть:

1) треніе между зубцами этой полосы и колеса, могущее быть оцѣненнымъ (на единицу длины дуги зацѣпленія) по формулѣ (30) на стр. 194:

$$\lambda = \frac{T f \pi}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

гдѣ T есть окружное усиліе на колесѣ, и

2) треніе винта о свою гайку, ибо роль винта играетъ здѣсь червякъ, а гайки (части ея) — винтовое колесо. Ради простоты выкладокъ, предположимъ при этомъ, что нагрузка выполнена прямоугольной.

Оба эти вида трения мы и будемъ имѣть въ виду при выводѣ зависимости между окружными усиліями T на колесѣ и P на червякѣ. При этомъ разберемъ отдѣльно два случая, могущихъ здѣсь представиться: 1) усиліе передается отъ червяка къ колесу и 2) оно передается отъ колеса къ червяку. Обычно оба эти случая разсматриваются, какъ одинъ и тотъ же, — никакой разницы между ними не предполагается, и формулы, выведенныя для перваго случая, наиболѣе часто встрѣчающагося, не стѣсняются примѣнять безъ всякихъ измѣненій къ случаю (2). Мы, однако, не замедлимъ убѣдиться, что эти два случая приводятъ къ различнымъ формуламъ зависимости между T и P, что и указываетъ на необходимость строгаго раздѣленія этихъ случаевъ одного отъ другого.

Первый случай передачи силы, а съ ней и движения, имѣетъ мѣсто тамъ, гдѣ необходимо осуществить переходъ отъ быстраго вращенія къ медленному, какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ грузоподъемныхъ машинахъ и т.п. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда медленное движеніе надо перевести въ быстрое, какъ это требуется, напримѣръ, въ центрофугахъ, то здѣсь, во избѣжаніе громоздкихъ зубчатыхъ передачъ, приходится примѣнять передачу отъ червячнаго колеса къ червяку.

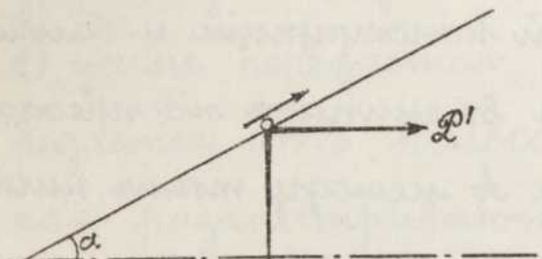
Дѣло въ томъ, что зубчатую передачу съ передаточнымъ числомъ, меньшимъ 1/6, устраивать затруднительно, въ виду возникающаго здѣсь сильнаго изнашиванія зубцовъ малаго колеса. Поэтому, если бы потребовалось

осуществить, напримѣръ, передачу съ передаточнымъ числомъ 1/75, то ее можно было бы осуществить уже съ помощью только трехъ цилиндрическихъ передачъ 1/3. 1/5. 1/5, что привело бы къ очень громоздкой конструкціи и большой потерѣ работы между зубцами и въ шипахъ на преодолѣніе возникающаго тамъ треніа. А между тѣмъ ничто не мѣшаетъ намъ осуществить эту передачу при помощи только одного колеса и одного червяка, взявъ, напримѣръ, однооборотный червякъ и колесо къ нему съ 75 зубцами или двухоборотный червякъ и колесо къ нему съ 150 зубцами, и т. д. Преимущества такой передачи очевидны, но осуществленіе возможно, какъ мы увидимъ ниже, не всегда, — при передачѣ отъ червяка къ колесу придется позаботиться о выполненіи нѣкоторыхъ условій, выясненіе коихъ помѣщено ниже. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію обоихъ отмѣченныхъ нами выше случаевъ передачи движенія.

Первымъ случаемъ мы выбрали тотъ, когда движеніе предполагается передающимся отъ червяка къ колесу. Значитъ, въ этомъ случаѣ къ окружности червяка приложено нѣкоторое усиліе (окружное) P, передающееся затѣмъ на червячное колесо въ видѣ нѣкотораго усилія T, касательнаго къ его окружности. Итакъ, усиліе P, дѣйствующее на червякъ, вызываетъ появленіе на окружности колеса нѣкотораго усилія T. Выведемъ зависимость между этими усиліями.

Зубецъ движущагося червячнаго колеса, вошедшій въ зацѣпленіе съ червякомъ, можно уподобить здѣсь

грузу, вѣсомъ T, ползущему вверхъ по наклонной плоскости подъ вліяніемъ нѣкоторой силы P', параллельной основанію ея (фиг. 84). Въ этомъ случаѣ между силами P' и T существуетъ соотношеніе



Фиг. 84.

$$P' = T \operatorname{tg}(\alpha+\varphi). \quad \ldots \quad (1)$$

Силу, параллельную основанію горизонтальной плоскости, мы обозначили черезъ P', ибо это есть не вся сила P, а лишь та часть ея, которая осталась отъ нея послѣ преодолѣнія тренія въ зубцахъ передачи. На это треніе, какъ мы видѣли, уходитъ $f\pi/z$ -ая часть дѣйствующаго здѣсь усилія, каковымъ въ данномъ случаѣ является усиліе P. Поэтому, послѣ преодолѣнія тренія въ зубцахъ, въ нашемъ распоряженіи оказывается не все усиліе P, а это усиліе уменьшенное на указанную выше часть, т.-е. усиліе $P(1-\ldots)$.

Итакъ, усиліе P', перемѣщающее зубецъ колеса по винтовой поверхности червяка, выражается соотношеніемъ

$$P' = P\left(1 - \frac{\pi f}{z}\right).$$

Исключая изъ написанныхъ двухъ уравненій силу P', получаемъ искомую зависимость между силами P и T, а именно:

$$P = T \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}{1 - \frac{\pi f}{z}} \quad \ldots \quad (2)$$

Такимъ должно быть окружное усиліе P на червякѣ, чтобы преодолѣть на колесѣ полезное сопротивленіе T.

Если бы вредныхъ сопротивленій не было, такъ что мы имѣли бы $\varphi = 0$ и $f = 0$, то для преодолѣнія того же по-

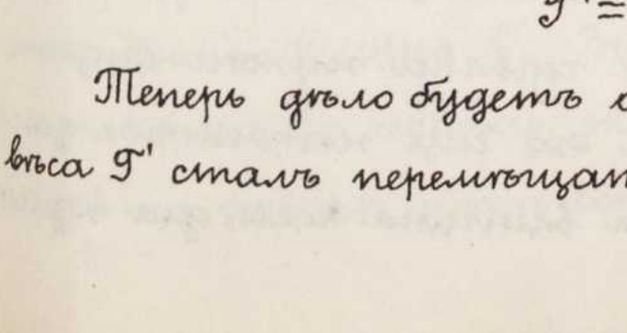
лезнаго сопротивленія T понадобилась бы сила p_1, очевидно, меньшая P и равная

$$p_1 = T \operatorname{tg}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2')$$

Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія червячной передачи въ этомъ случаѣ выражается такъ

$$\eta_1 = \frac{p_1}{P} = \frac{(1 - \frac{\pi f}{z})\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Обращаясь къ формулѣ (1), видимъ, что передача подобнаго рода, — отъ червяка къ колесу, — возможна всегда, ибо, каковъ бы ни былъ уголъ наклона нарѣзки, α, но $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)$ будетъ всегда > 0; подобнымъ же образомъ величина $(1 - \frac{\pi f}{z})$ также всегда > 0, ибо $\pi f < 3$, а z обычно во много разъ больше трехъ, такъ что дробь $\pi f/z$ всегда меньше единицы. Въ виду этого P имѣетъ всегда положительныя значенія, что и указываетъ на возможность такой передачи во всѣхъ случаяхъ, сколь бы малъ ни былъ уголъ α. Посмотримъ теперь, какъ будетъ обстоять дѣло въ случаѣ передачи отъ колеса къ червяку.



Фиг. 85.

Ведущимъ является здѣсь усиліе T на окружности [illegible] колеса. Такъ какъ на треніе въ зубцахъ уйдетъ $(\frac{\pi f}{z})$-ая часть его, то на вращеніе червяка пойдетъ остатокъ усилія T, т.-е. усиліе

$$T' = T(1 - \frac{\pi f}{z}).$$

Теперь дѣло будетъ обстоять такъ, какъ если бы грузъ T' сталъ перемѣщаться по наклонной плоскости внизъ

(фиг. 85), и этому перемѣщенію препятствовало усиліе P, параллельное основанію наклонной плоскости и являющееся, очевидно, приложеннымъ къ окружности червяка. Такъ какъ здѣсь $P = T' \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$, то, въ силу вышенаписанного соотношенія между T' и T, можемъ написать, что

$$P = T\left(1 - \frac{\pi f}{z}\right)\operatorname{tg}(\alpha - \varphi), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

откуда

$$T = \frac{P}{\left(1 - \frac{\pi f}{z}\right)\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Если бы трѣнія не было, то усиліе T вызвало бы на окружности червяка усиліе $p_2 = T \operatorname{tg}\alpha$, бо́льшее усилія P. Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія такой передачи выражается такъ:

$$\eta_2 = \frac{P}{p_2} = \left(1 - \frac{\pi f}{z}\right)\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Формула (4) указываетъ, что эта передача возможна не всегда, а лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда удовлетворяется условіе

$$\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \geqq 0,$$

т.-е. когда

$$\alpha \geqq \varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

При $\alpha < \varphi$ усиліе P получается отрицательнымъ, что и указываетъ, что въ этомъ случаѣ никакое усиліе T, сколь бы велико оно ни было, не только не сможетъ вызвать на червякѣ какого-либо вращающаго момента, но для вращенія червяка нужно будетъ приложить къ окружности его еще нѣкоторое дополнительное усиліе, абсолютная величина коего, для возмож-

ности вращенія всей этой нагруженной усиліемъ T системы, опредѣлится уже по формулѣ (4). Такимъ образомъ, при $\alpha < \varphi$ червячная передача оказывается самотормозящей въ томъ смыслѣ, что, въ то время, какъ вращеніе червяка, при достаточной величинѣ силы P на немъ, всегда можетъ вызвать вращеніе колеса, это послѣднее, находясь подъ воздѣйствіемъ окружного усилія T, можетъ дать вращеніе червяка только въ случаѣ $\alpha > \varphi$; въ случаѣ же $\alpha < \varphi$ никакой вращающій моментъ, сколь бы великъ онъ ни былъ, дѣйствуя на колесѣ, не сможетъ вызвать вращенія червяка,— для этого придется вращать его парой, спеціально для этого къ нему приложенной.

Итакъ, для того, чтобы на окружности червяка вызвать усиліе P, необходимо на окружности червячнаго колеса заставить работать окружное усиліе T, опредѣляемое по формулѣ (5), но при этомъ уголъ α наклона нарѣзки червяка ни въ коемъ случаѣ не долженъ быть меньше угла тренія φ.

Сопоставляя формулы (1) и (4), видимъ, что, при однихъ и тѣхъ же окружныхъ усиліяхъ T на колесѣ, онѣ даютъ различныя значенія для P, какъ это и должно быть по самому существу дѣла. Дѣйствительно, въ одномъ случаѣ, при передачѣ отъ червяка къ колесу, усиліе P, послѣ всѣхъ потерь на треніе, должно дать на колесѣ усиліе T; значитъ, здѣсь окружное усиліе P червяка должно быть больше T. Въ другомъ случаѣ, при передачѣ отъ колеса къ червяку, окружное усиліе колеса, T, вызываетъ на червякѣ, послѣ всѣхъ потерь на этомъ пути, нѣ-

которое усиліе P_1; значитъ, здѣсь $T > P_1$. Если усилія T въ обоихъ случаяхъ оказываются одинаковыми, то и выйдетъ, что $P > P_1$, что и указывается формулами.

Всѣ эти соображенія указываютъ на невозможность примѣненія формулы (1) ко всѣмъ безъ разбора случаямъ червячной передачи, какъ это обычно дѣлается на практикѣ. Формулы (1) и (4), характеризующія два могущихъ встрѣтиться здѣсь случая передачи, являются вовсе несимметричными и совершенно самостоятельными, относясь каждая къ своему соотвѣтствующему ей случаю.

Выведенныя выше формулы являются, конечно, приближенными, ибо, если бы мы пожелали подойти къ вопросу ближе, то должно были бы поступать такъ, какъ это мы дѣлали въ цилиндрической передачѣ: слѣдовало бы взять нормальное усиліе, — оно здѣсь будетъ наклонно, — опредѣлить направленіе относительнаго движенія, разложить, взять моменты его и силъ треніи и т. д. Все это повело бы насъ къ весьма сложнымъ формуламъ и вычисленіямъ, въ виду чего мы и ограничиваемся соображеніями и выводами, приведенными выше, тѣмъ болѣе, что точность ихъ оказывается вполнѣ достаточной для цѣлей практики.

Принимая во вниманіе, что дробь $\pi f/z$ обычно оказывается достаточно малой для того, чтобы ею можно было пренебречь, — такъ, при $f = 0{,}3$ и $z = 50$ эта дробь приблизительно равна 0,02, — факторомъ $(1 - \frac{\pi f}{z})$ пренебрегаютъ, и тогда получаютъ обычныя упрощенныя формулы червячной передачи, выводимыя и упоминаемыя въ курсахъ деталей машинъ и ничѣмъ не отличающіяся отъ формулъ наклонной плоскости.

Послѣ всего сказаннаго ясно, однако, что такъ упрощенныя формулы обладаютъ меньшей степенью точности, нежели выведенныя выше формулы (1)—(6)..

---

§10. Общая теорема о коэффиціентѣ полезнаго дѣйствія самотормозящихъ механизмовъ.

Выше было показано, что наклонная плоскость, при углѣ α наклона ея къ горизонту, меньшемъ угла тренія φ, обладаетъ такъ называемымъ свойствомъ самоторможенія,— иными словами, грузъ, положенный на такую плоскость, самъ по себѣ, безъ участія новыхъ внѣшнихъ силъ, сдвинуться съ мѣста и скользить внизъ по этой плоскости не можетъ, каковъ бы ни былъ вѣсъ его. Невозможность самостоятельнаго движенія груза обусловливается здѣсь вмѣшательствомъ силъ тренія, поглощающихъ цѣликомъ ту слагающую вѣса этого тѣла, которая могла бы вызвать и, затѣмъ, поддерживать скольженіе груза внизъ по плоскости. Подобнымъ же свойствомъ самоторможенія обладаетъ, при соотвѣтствующемъ углѣ наклона направляющей, и винтовая поверхность (винтъ, червякъ и т.д), равно какъ и другія модификаціи наклонной поверхности,— каковы, напримѣръ, поверхности коническія и др. При этомъ всегда оказывается, что коэффиціентъ полезнаго дѣйствія каждой такой самотормозящей детали меньше половины.

Существуетъ множество болѣе сложныхъ системъ, и нетрудно придумать сколькоугодно новыхъ, составленныхъ изъ наклонныхъ плоскостей, винтовъ, зубчатыхъ и червячныхъ передачъ и т.п., и обладающихъ свойствомъ самотор-

ложенія, въ томъ смыслѣ, что для равновѣсія и покоя ихъ не требуется никакихъ вспомогательныхъ приспособленій, каковы бы ни были нагрузки, на эти системы возлагаемыя. Отсутствіе упомянутыхъ вспомогательныхъ приспособленій являясь условіемъ, необходимымъ для того, чтобы данная система могла быть признана самотормозящей, — эффектъ самоторможенія долженъ быть вызываемъ исключительно силами тренія, возникающими на поверхностяхъ соприкосновенія различныхъ кинематическихъ паръ, составляющихъ данный механизмъ, и оказывающимися настолько значительными, чтобы быть въ состояніи противодѣйствовать движенію частей системы; всякія же иныя механическія приспособленія, имѣющія своею цѣлью установленіе и поддержку равновѣсія и покоя системы и входящія въ игру лишь съ момента предоставленія системы самой себѣ, не даютъ системѣ права называться самотормозящей, такъ какъ, послѣ отключенія ихъ, система неминуемо, по самому существу дѣла, выйдетъ изъ равновѣсія, и всѣ части ея, имѣвшія оставаться неподвижными, придутъ въ движеніе подъ воздѣйствіемъ силъ, до того уравновѣшивавшихся сопротивленіемъ упомянутыхъ приспособленій, и безъ всякаго участія какихъ бы то ни было новыхъ внѣшнихъ силъ.

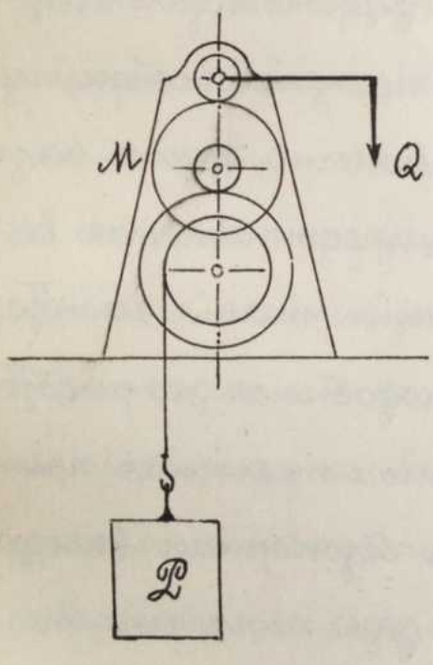
Къ любой наклонной плоскости или винтовой поверхности можно придѣлать, напримѣръ, нѣкоторыя зубчатыя полосы, а грузъ снабдить соотвѣтствующими собачками, могущими, путемъ сцѣпленія съ этими полосами, удерживать грузъ отъ движенія по поверхности; но эти плоскости или поверхности были бы самотормозящими

лишь тогда, когда лежащіе на нихъ грузы, будучи, послѣ снятія этихъ защѣпокъ, предоставлены сами себѣ, остались бы въ покоѣ на своихъ опорныхъ поверхностяхъ.

Подобнымъ же образомъ любую грузоподъемную машину можно снабдить предохранительными приспособленіями,—различными зажимами, клещами, крюками и т. д.,—имѣющими своей цѣлью удержать отъ паденія грузъ, предоставленный самъ себѣ; но самотормозящими можно будетъ назвать только тѣ изъ этихъ машинъ, у которыхъ грузъ остается недвижно висящимъ на машинѣ безъ всякаго участія упомянутыхъ вспомогательныхъ приспособленій.

Такимъ образомъ, разъ система обладаетъ свойствомъ самоторможенія, то въ упомянутыхъ вспомогательныхъ приспособленіяхъ, имѣющихъ своей задачей удерживаніе системы въ покоѣ послѣ предоставленія ей полной свободы, нужды не представляется никакой, что, конечно, ведетъ къ значительному упрощенію механизма и представляетъ весьма большія удобства, выгодно отличающія такія самотормозящія системы отъ другихъ, имъ подобныхъ, но работающихъ съ помощью упомянутыхъ вспомогательныхъ приспособленій. Къ сожалѣнію, однако, эта безспорная выгода покупается слишкомъ дорогой цѣной для того, чтобы имѣть возможность примѣнять принципъ самоторможенія во всѣхъ подобныхъ случаяхъ; оказывается, что такіе самотормозящіе механизмы, каковъ бы ни былъ ихъ составъ, весьма непроизводительны, ибо, какъ это нетрудно доказать, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія лишь въ исключительныхъ случаяхъ поднимается до 0,5, обычно же онъ гораздо меньше.

Дѣйствительно, предположимъ, что у насъ имѣется какой-либо, напримѣръ, подъемный, — механизмъ M (фиг. 86), на рукоятку котораго дѣйствуетъ сила Q, вызывающая перемѣщеніе груза P. Пусть, далѣе, этотъ механизмъ обладаетъ свойствомъ самоторможенія, такъ что, удаливъ силу Q и предоставивъ дѣйствовать одной лишь силѣ P, увидимъ, что вся система (грузъ и механизмъ) останется въ покоѣ, и грузъ P будетъ висѣть неподвижно въ пространствѣ, безъ всякой посторонней поддержки. Разсмотримъ сначала одинъ изъ тѣхъ моментовъ, когда сила Q не была удалена и продолжала свою работу, и посмотримъ, на что эта работа, — назовемъ ее черезъ L_Q, — расходовалась; напишемъ, иными словами, балансъ всѣхъ работъ, здѣсь производимыхъ.



Фиг. 86.

Часть работы L_Q уходитъ, прежде всего, на подъемъ груза P; обозначимъ работу, потребную на это, черезъ L_P.

Такъ какъ, далѣе, при работѣ механизма проявляютъ свое дѣйствіе силы тренія, то на преодолѣніе работы этихъ вредныхъ сопротивленій уйдетъ еще нѣкоторая часть работы L_Q, — положимъ, въ размѣрѣ L_f.

Остатокъ отъ работы L_Q, оказывающійся налицо послѣ выполненія работъ L_P и L_f, пойдетъ на приращеніе живой силы груза и другихъ подвижныхъ частей нашей системы. Этотъ остатокъ обозначимъ черезъ L_v.

На выполненіе трехъ этихъ частныхъ работъ и ухо-

дитъ вся работа $\mathfrak{L}_Q$ силы Q, вслѣдствіе чего можемъ написать основное уравненіе работъ, имѣющее здѣсь мѣсто:

$$\mathfrak{L}_Q = \mathfrak{L}_x + \mathfrak{L}_f + \mathfrak{L}_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ради упрощенія разсужденій, предположимъ, что движеніе груза P и другихъ частей механизма совершается или равномѣрно, или съ такими малыми ускореніями, что ими можно пренебречь. Въ такомъ случаѣ можно будетъ предположить, что никакого приращенія живой силы, во время работы силы Q, не происходитъ, а значитъ, работа $\mathfrak{L}_v$, предназначаемая какъ разъ на полученіе этого приращенія, обращается въ нуль:

$$\mathfrak{L}_v = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Послѣ этого уравненіе работъ (1) принимаетъ для взятаго частнаго случая видъ:

$$\mathfrak{L}_Q = \mathfrak{L}_x + \mathfrak{L}_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія представляетъ отношеніе полученной работы къ работѣ затраченной. Обозначая этотъ коэффиціентъ черезъ η, находимъ соотношеніе

$$\eta = \frac{\mathfrak{L}_x}{\mathfrak{L}_Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Теперь посмотримъ, что дѣлается въ нашемъ механизмѣ въ теченіе какого-либо малаго промежутка времени Δt. Балансъ работъ, выражаемый уравненіемъ (3), имѣетъ, конечно, мѣсто и для этого промежутка времени; поэтому, отмѣчая малыя работы, имѣющія здѣсь мѣсто, значками Δ, можемъ написать для этого промежутка времени Δt уравненіе работъ въ видѣ:

$$\Delta\mathfrak{L}_Q = \Delta\mathfrak{L}_x + \Delta\mathfrak{L}_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Удалимъ теперь силу Q. Такъ какъ механизмъ M предположенъ самотормозящимъ, то вся система придетъ въ равновѣсіе, а грузъ P останется покойно висящимъ въ пространствѣ. Это показываетъ, что работа, требуемая на преодолѣніе работы сопротивленія теперешнихъ силъ тренія, — обозначимъ ее черезъ ΔL_{f_1}, — оказывается настолько большой, что грузъ P оказывается слишкомъ малымъ для того, чтобы ее выполнить. Это простое соображеніе позволяетъ намъ весьма просто разрѣшить поставленную задачу.

Итакъ, работа ΔL_P, которую можетъ произвести грузъ P, оказывается меньше работы ΔL_{f_1} теперешнихъ вредныхъ сопротивленій или, въ лучшемъ случаѣ, равна ей. Это заключеніе приводитъ насъ къ соотношенію

$$\Delta L_P \leqq \Delta L_{f_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Когда нашъ механизмъ былъ нагруженъ силами Q и P, то работа, требуемая на преодолѣніе работы вредныхъ сопротивленій, т.-е. силъ тренія, опредѣлялась членомъ L_f. Несомнѣнно, что, когда на машину станетъ воздѣйствовать одинъ лишь грузъ P, то величина вредныхъ сопротивленій стала гораздо меньше прежней, ибо нагрузка машины стала меньше; вслѣдствіе этого полная работа, потребная на преодолѣніе работы теперешнихъ силъ тренія, — обозначимъ ее черезъ L_{f_1}, — будетъ меньше прежней работы L_f или, въ крайнемъ случаѣ, равна ей:

$$L_{f_1} \leqq L_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Такъ какъ это соотношеніе имѣетъ силу для любого промежутка времени, а значитъ, и для Δt, то уравненіе (7) можно переписать еще въ разностной формѣ такъ:

$$\Delta \mathfrak{L}_{f_1} \geqq \Delta \mathfrak{L}_f \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Въ виду этого соотношеніе (6) принимаетъ видъ:

$$\Delta \mathfrak{L}_x \geqq \Delta \mathfrak{L}_{f_1} \geqq \Delta \mathfrak{L}_f,$$

такъ что

$$\Delta \mathfrak{L}_x \geqq \Delta \mathfrak{L}_f, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

что показываетъ, что работа $\Delta \mathfrak{L}_x$, уходящая на поднятіе груза, въ этомъ случаѣ всегда меньше работы силъ треніа или равна ей. Въ виду этого, замѣняя въ равенствѣ (5) членъ $\Delta \mathfrak{L}_f$ членомъ $\Delta \mathfrak{L}_x$, равнымъ ему или меньшимъ, согласно (9), можемъ дать соотношенію (5) видъ:

$$\Delta \mathfrak{L}_Q \geqq \Delta \mathfrak{L}_x + \Delta \mathfrak{L}_x.$$

Мы поставили здѣсь двойной знакъ $\geqq$ потому, что одно слагаемое суммы (5) замѣнили новымъ, могущимъ имѣть или то же значеніе, или меньшее. Отсюда, далѣе, находимъ:

$$\Delta \mathfrak{L}_Q \geqq 2\Delta \mathfrak{L}_x,$$

что для конечнаго промежутка времени даетъ конечное же соотношеніе

$$\mathfrak{L}_Q \geqq 2\mathfrak{L}_x,$$

откуда находимъ, что

$$\frac{\mathfrak{L}_x}{\mathfrak{L}_Q} \leqq \frac{1}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

а такъ какъ дробь $\mathfrak{L}_x/\mathfrak{L}_Q$ и есть коэффиціентъ полезнаго дѣйствія нашей машины, η, то мы и получаемъ, наконецъ, искомое соотношеніе

$$\eta \leqq \frac{1}{2}. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Примѣненная нами схема доказательства имѣетъ силу не только для общаго уравненія (1), но и для любой самотормозящей системы вообще,—стоитъ лишь примѣнить къ имѣющимся въ системѣ силамъ принципъ возможныхъ

перемѣщеній или возможныхъ работъ. Результатъ получится опять въ формѣ (21).

Въ прежнее время такіе самотормозящіе механизмы пользовались большимъ распространеніемъ, несмотря на свою малую производительность,– способность самоторможенія искупала этотъ неустранимый ихъ недостатокъ. Въ наше время отъ такихъ механизмовъ, именно изъ-за этой малой ихъ производительности, вообще, отказались и примѣняютъ ихъ только въ нѣкоторыхъ спеціальныхъ случаяхъ, гдѣ, ради достиженія особыхъ цѣлей, приходится мириться съ большими потерями работы, требуемыми этимъ самоторможеніемъ.

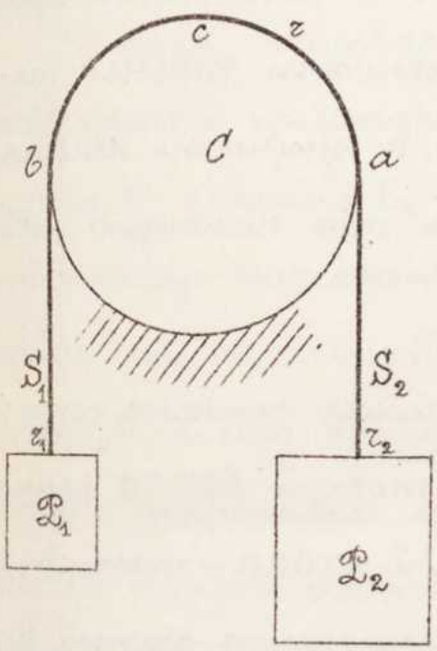
---

§11. Ременная передача.

До сихъ поръ мы разсматривали вопросы о передачѣ движенія при посредствѣ твердыхъ тѣлъ; теперь разберемъ въ общихъ чертахъ вопросъ о передачѣ движенія при помощи тѣлъ гибкихъ, прущихся о твердыя. Такими гибкими тѣлами, примѣняемыми на практикѣ, являются ремни, канаты, веревки и проч. Деформаціи изгиба и др., происходящія съ этими тѣлами, при работѣ ихъ, обычно оказываются настолько значительными, что при точныхъ расчетахъ приходится принимать ихъ во вниманіе и учитывать работу, на выполненіе ихъ уходящую. При тѣхъ, однако, приближенныхъ вычисленіяхъ, которыя приводятся ниже, учетомъ работы деформацій, изъ-за его сложности, мы заниматься не будемъ, предполагая, иными словами, что гибкія тѣла, передающія движеніе и разсматриваемыя нами,

представляются идеально гибкими въ томъ смыслѣ, что на деформированіе ихъ работы не требуется совсѣмъ.

Пусть, такимъ образомъ, у насъ имѣется нѣкоторое идеально-гибкое тѣло, — нѣкоторый ремень $z_1 c z_2$ (фиг. 87), — перекинутое черезъ круглый цилиндръ (шкивъ и т. п.) C, остающійся пока что неподвижнымъ. Нагрузимъ теперь концы ремня, сбѣгающіеся съ цилиндра C, силами P_1 и P_2. Согласно основнымъ положеніямъ механики и отвлекаясь отъ вѣса ремня, т.-е. или принявъ его весьма малымъ или включивъ вѣса сбѣгающихся частей въ вѣса грузовъ P_1 и P_2, можно было бы предположить, что равновѣсіе всей этой системы (ремень + грузы) будетъ имѣть мѣсто лишь тогда, когда грузы P_1 и P_2 будутъ между собою въ точности равны.



Фиг. 87.

Опытъ, однако, показываетъ, что можно, не нарушая равновѣсія, увеличивать нагрузку ремня съ одной стороны, увеличивая, напримѣръ, грузъ P_1, и нарушеніе покоя этой системы начнется лишь тогда, когда избытокъ груза P_1 надъ грузомъ P_2 достигнетъ нѣкоторой опредѣленной величины δ, опредѣляемой каждый разъ условіями задачи. Въ дальнѣйшемъ, при разсмотрѣніи этой передачи, мы будемъ имѣть въ виду послѣдній изъ моментовъ покоя или, что то же, первый, — начальный, — моментъ равномѣрнаго скольженія системы ремня. При дальнѣйшемъ увеличеніи груза P_1, когда $P_1 - P_2 > \delta$, ремень начнетъ скользить уже ускоренно, мы же подвергнемъ разсмотрѣнію тотъ случай, когда онъ движется равномѣрно, когда, слѣдовательно,

силы, дѣйствующія на систему ремня, удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія.

Итакъ, оказывается, что, при наложеніи ремня на цилиндръ возбуждается нѣкоторое дополнительное сопротивленіе, опредѣляемое членомъ δ и позволяющее меньшему грузу уравновѣшивать большій. Нетрудно показать, что это новое, привходящее сопротивленіе δ появляется въ силу наличности треніа между ремнемъ и поверхностью цилиндра, и сущность явленія, имѣющаго здѣсь мѣсто, можно уяснить себѣ помощью слѣдующихъ простыхъ соображеній:

Пусть дуга цилиндра C, охватываемая ремнемъ, есть нѣкоторая дуга acb (фиг. 87), такъ что точкой входа ремня на цилиндръ служитъ точка a, а точкой схода — точка b; въ этихъ точкахъ происходитъ касаніе свисающихъ частей ремня, r_1a и r_2b, съ поверхностью шкива. Нетрудно усмотрѣть, что на всемъ протяженіи этихъ свисающихъ частей ремень не подвергается дѣйствію никакихъ другихъ силъ, кромѣ грузовъ P_1 и P_2,— вѣсомъ ремня мы пренебрегаемъ. Вслѣдствіе этого можно предположить, что натяженія ремня на этихъ частяхъ остаются постоянными, т.-е. что какъ въ точкѣ r_1, такъ и въ точкѣ a и во всѣхъ точкахъ, лежащихъ между r_1 и a, натяженіе ремня остается однимъ и тѣмъ же, равнымъ S_1, гдѣ $S_1 = P_1$. Подобнымъ же образомъ, въ точкахъ r_2, b и всѣхъ промежуточныхъ, натяженіе ремня остается опять однимъ и тѣмъ же, равнымъ S_2, гдѣ $S_2 = P_2$.

Обозначивъ площадь поперечныхъ сѣченій ремня, взятыхъ у точекъ a и b, черезъ F,— предположимъ, что она тамъ и здѣсь одинакова,— можемъ, далѣе, сказать, что напряженіе ремня на

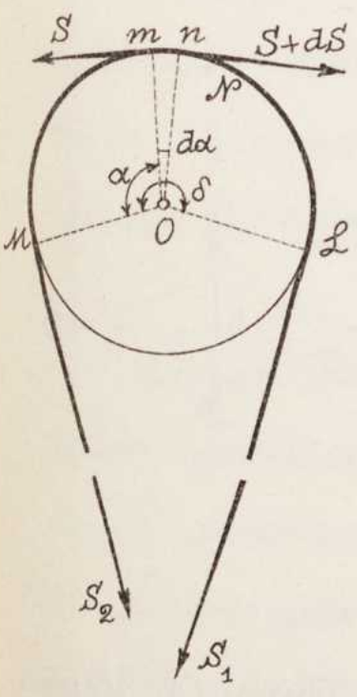
растяженіе (разрывъ) въ сѣченіи a, — обозначимъ это напряженіе черезъ σ_1, — выразится черезъ

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{\mathcal{F}}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

а въ сѣченіи b черезъ

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{\mathcal{F}} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

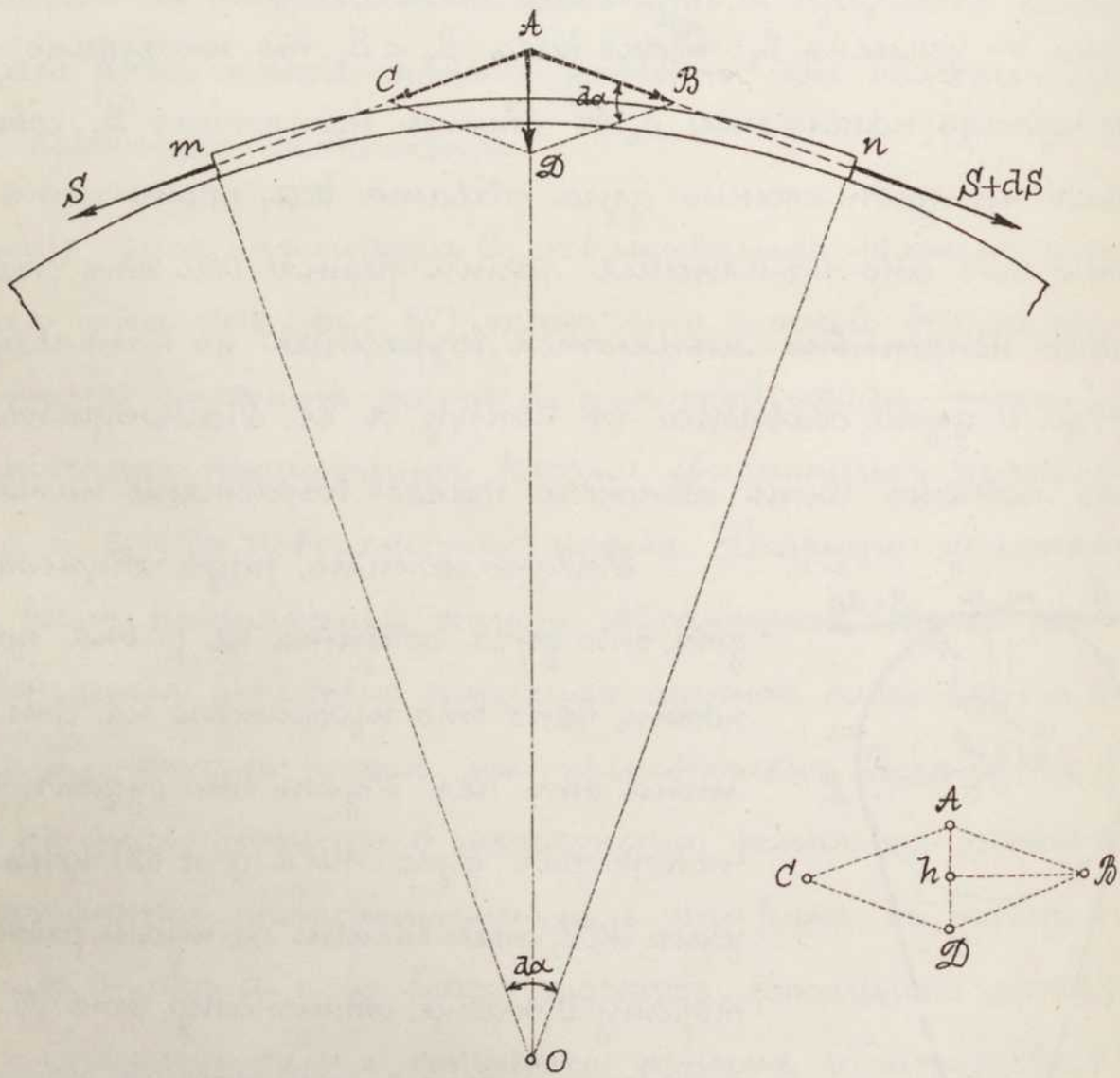
Итакъ, оказывается, что часть ремня acb, лежащая на поверхности цилиндра, нагружена у точки a усиліемъ S_1, а у точки b — усиліемъ S_2. Такъ какъ $S_2 < S_1$, то необходимо признать, что переходъ натяженія S_2 въ бо́льшее натяженіе S_1, совершающійся на протяженіи дуга обхвата bca, протекаетъ непрерывно, т.-е. что натяженія части ремня bca отъ сѣченія къ сѣченію непрерывно мѣняются, возрастая по направленію отъ конца b дуги обхвата къ концу a ея. Посмотримъ теперь, какъ можетъ быть объяснено такое возрастаніе натяженій.



Фиг. 88.

Предположимъ, ради общности выводовъ, что дуга обхвата не равна полуокружности, какъ это изображено на фиг. 87, а отлична отъ нея. Пусть это будетъ, вообще, нѣкоторая дуга MNL (фиг. 88); центральный уголъ MOL, стягиваемый ею, пусть равенъ нѣкоторому δ, вообще, отличному отъ π. Крайнія натяженія ремня попрежнему обозначимъ черезъ S_1 и S_2, причемъ $S_1 > S_2$. Аналогично прежнему, можемъ сказать, что натяженія ремня, по мѣрѣ удаленія отъ конца M, будутъ все время непрерывно возрастать, вплоть до конца L, гдѣ натяженіе равно S_1. Выдѣлимъ теперь гдѣ-либо на части ре-

мая MN2 элементъ его mn, длину коего обозначимъ черезъ dl. Пусть центральный уголъ MOm равенъ α, а уголъ mOn, представляющій элементарное приращеніе его, ... dα (фиг. 88). Если натяженіе на концѣ m этого элемента обозначимъ черезъ S, то натяженіе въ точкѣ n, смежной съ m, надо принять возросшимъ, сравнительно съ S, лишь на безконечно-малую величину, dS, и равнымъ, поэтому, S + dS. Попрежнему, очевидно, что эти натяженія S и (S + dS) имѣютъ направленія, параллельныя касательнымъ въ конечныхъ точкахъ m и n элемента,



Фиг. 89.

т.-е. перпендикулярныя крайнимъ радіусамъ Om и On. Изобразимъ теперь, ради большей ясности чертежа, элементъ mn и всѣ другіе факторы чертежа 88, относящіеся къ этому элементу, въ увеличенномъ видѣ; такимъ образомъ, получимъ чертежъ, изображенный на фиг. 89.

Итакъ, въ точкѣ m нашего элемента дѣйствуетъ усиліе S, а въ смежной съ ней n — усиліе $(S+dS)$. Сложимъ теперь эти два усилія по правилу параллелограмма, для чего просто продолжаемъ ихъ направленія, т.-е. касательныя въ точкахъ m и n, до пересѣченія въ нѣкоторой точкѣ A, куда, затѣмъ, переносимъ и самыя усилія, такъ что векторъ AC будетъ изображать усиліе S, а векторъ AB — усиліе $(S+dS)$. Складывая ихъ, получаемъ нѣкоторое равнодѣйствующее усиліе AD, какъ діагональ параллелограмма $ABDC$. Замѣчая теперь, что стороны AB и AC этого параллелограмма отличаются другъ отъ друга лишь на безконечно-малую величину, можемъ, допуская безконечно-малую ошибку, принять, что эти стороны AB и AC между собою равны, т.-е. что параллелограммъ $ABDC$ есть ромбъ. Со столь же малой ошибкой можно, слѣдовательно, принять, что діагональ AD дѣлитъ уголъ A этого ромба пополамъ, т.-е. что направленіе AD проходитъ черезъ центръ O и будетъ, такимъ образомъ, $\perp$-но къ поверхности цилиндра.

Замѣчая теперь, что $\angle ABD = d\alpha$ и что въ равнобедренномъ треугольникѣ ABD съ безконечно-малымъ угломъ $d\alpha$ при вершинѣ основаніе AD его можно принять совпадающимъ съ дугой, описанной изъ центра B радіусомъ BD, можемъ, далѣе, написать, что $AB = BD.d\alpha$, т.-е. что

$$AD = S\,d\alpha. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Можно разсуждать еще и такъ: опустивъ изъ вершины B равнобедреннаго Δ-ка ABD перпендикуляръ Bh на основаніе, получаемъ соотношеніе: $Ah = AB \sin \frac{d\alpha}{2}$. По малости угла $\frac{d\alpha}{2}$ синусъ его можно замѣнить самой этой дугой, т.-е. можно написать, что $Ah = \frac{1}{2} AB.d\alpha$; отсюда и получаемъ, наконецъ, что

$$2\,Ah = AD = AB\,d\alpha = BD\,d\alpha = S\,d\alpha.$$

Итакъ, нормальное давленіе со стороны элемента dl ремня на цилиндръ выражается черезъ $S\,d\alpha$. Обозначая коэффи-

цієнтъ тренія между ремнемъ и цилиндромъ черезъ f, можемъ что это нормальное къ поверхности цилиндра усиліе AD, равное $S\,d\alpha$, обусловливаетъ собою появленіе сопротивленія тренія $fS\,d\alpha$, противодѣйствующаго сдвиженію элемента $d\lambda$ по поверхности нашего цилиндра подъ воздѣйствіемъ силы dS, т.-е. разности натяженій въ конечныхъ точкахъ этого элемента. Въ томъ случаѣ, когда ремень скользитъ по цилиндру равномѣрно, всѣ силы, дѣйствующія на каждый такой элементъ $d\lambda$, должны быть уравновѣшиваемы, откуда вытекаетъ заключеніе, что сила тренія $fS\,d\alpha$, сопротивляющаяся движенію ремня, должна быть уравновѣшиваема силой dS,-разностью концевыхъ натяженій. Замѣчая теперь, что всѣ эти силы S, $(S+dS)$ и $fS\,d\alpha$ можно принять направленными перпендикулярно лучу AO, а силу $S\,d\alpha$ мы приняли направленной именно по этому лучу, и, далѣе, учитывая проекціи всѣхъ этихъ силъ на направленіе, перпендикулярное лучу AO, можемъ составить и написать условіе равновѣсія всѣхъ этихъ силъ въ формѣ весьма простого уравненія:

$$dS = fS\,d\alpha. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d).$$

Получилось, такимъ образомъ, простенькое дифференціальное уравненіе, которое непосредственно интегрируется помощью раздѣленія перемѣнныхъ, а именно: дѣля обѣ части на S, получаемъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{dS}{S} = f\,d\alpha,$$

интеграція коего приводитъ къ уравненію

$$\lg S = \alpha f + C, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

гдѣ C есть произвольное постоянное интеграціи, опредѣляемое по начальнымъ даннымъ, а именно:

При $\alpha = 0$, т.-е. у точки M (фиг. 88), натяженіе равно S_2; поэтому, подставляя $\alpha = 0$ въ уравненіе (e), получаемъ соотношеніе

$$\lg S_2 = f.0 + C,$$

откуда и находимъ, что

$$C = \lg S_2,$$

въ виду чего основное уравненіе (e) принимаетъ видъ:

$$\lg S = \alpha f + \lg S_2.$$

Переходя отъ lg къ числамъ, получаемъ, наконецъ, искомое уравненіе

$$S = S_2 e^{\alpha f}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

связывающее натяженіе S ремня въ какомъ-нибудь мѣстѣ m дуги обхвата съ остальными факторами, т.-е. 1) съ наименьшимъ натяженіемъ S_2, 2) съ угломъ обхвата α, соотвѣтствующимъ точкѣ m, и 3) съ коэффиціентомъ треніа f.

Уравненіе (1) даетъ возможность установить зависимость между крайними натяженіями S_1 и S_2 и угломъ обхвата δ, для чего разсуждаемъ такъ: замѣчая, что натяженіе S_1 имѣетъ мѣсто въ крайней точкѣ 2 дуги обхвата $M\,2$ (фиг. 87), гдѣ уголъ α принимаетъ значеніе δ, и подставляя въ уравненіе (1) величину S_1 вмѣсто S и уголъ δ вмѣсто α, получаемъ основное уравненіе ременной передачи, а именно:

$$S_1 = S_2 e^{\delta f}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Если уголъ обхвата δ имѣетъ значеніе такое, что имѣющіяся налицо натяженіа S_1 и S_2 удовлетворяютъ условію (2), то ремень можетъ или покойно лежать на поверхности цилиндра или равномѣрно по нему скользить.

Далѣе, если уголъ обхвата δ настолько малъ, что, при имѣющихся натяженіяхъ S_1 и S_2, гдѣ $S_1 > S_2$, существуетъ нера-

венство $S_1 > S_2 e^{f\delta}$, то будетъ имѣть мѣсто ускоренное скольженіе ремня по цилиндру въ сторону бо́льшаго усилія S_1.

Если, наконецъ, уголъ обхвата δ настолько великъ, что, при $S_1 > S_2$, оказывается $S_1 < S_2 e^{f\delta}$, то, при такихъ крайнихъ натяженіяхъ, система ремня будетъ оставаться въ покоѣ. Дѣйствительно, усиліе S_1 сдвинуть въ свою сторону ремень не сможетъ, ибо оно слишкомъ для этого мало (оно $< S_2 e^{f\delta}$); въ свою очередь, усиліе S_2 не можетъ продвинуть ремня къ себѣ потому, что этому сопротивляется S_1, которое больше S_2.

Послѣдній случай, т.-е. $S_1 > S_2$ и $S_1 < S_2 e^{f\delta}$, въ практическомъ отношеніи является наиболѣе интереснымъ и важнымъ. Дѣло въ томъ, что при $f\delta$ перемѣнномъ и > 0, показательная функція $e^{f\delta}$ есть функція возрастающая и, притомъ, весьма быстро сравнительно съ возрастаніемъ аргумента $f\delta$, какъ это можно видѣть изъ слѣдующей таблицы:

$f\delta =$	1	2	3	4	5	6 . . . .
$e^{f\delta} =$	2,7	7,4	20,1	54,6	148,4	403,4. . .

При $f = 0{,}25$ соотвѣтствующіе углы δ въ градусахъ будутъ имѣть значенія:

$\delta =$	229°	458°	687°	916°	1145°	1374°. . .
		(360°+98°)	(360°+327°)	(2.360°+196°	(3.360°+65°)	(3.360°+294°)

Итакъ, при $f = 0{,}25$ и $f\delta$, равномъ, напримѣръ, 4, т.-е. уже при 2½ оборотахъ ремня вокругъ цилиндра, натяженіе $S_1 = 54 S_2$; иначе говоря, грузъ величиной въ S_2 можетъ уравновѣсить здѣсь грузъ S_1, въ 54 раза бо́льшій, чѣмъ S_2. Этимъ объясняется также и тотъ фактъ, что, обмотавъ веревку или ремень вокругъ неподвижнаго вала нѣсколько разъ, мы можемъ, затѣмъ, совершенно безопасно повѣсить на одномъ концѣ его извѣстный

грузъ, совершенно не придерживая другого и оставляя его висѣть совершенно свободно,— небольшая сила вѣса свободно свѣшивающагося конца веревки, давая небольшое S_2, при помощи тренія можетъ удержать на другомъ концѣ грузъ S_1, превосходящій ее во много разъ. Тѣ же самыя соображенія находятъ себѣ примѣненіе при оивартовываніи судовъ у пристаней,— канаты, имѣющіе удерживать судно у пристани, обматываются нѣсколько разъ вокругъ причальныхъ столбовъ, и тогда усилія одного-двухъ человѣкъ бываетъ достаточно для того, чтобы удержать на мѣстѣ это судно, зачастую вѣсящее много тысячъ пудовъ. Уравненіемъ (2) особенно широко пользуются въ различныхъ грузоподъемныхъ механизмахъ при устройствѣ тормозныхъ приспособленій.

Разность $S_1 - S_2$ конечныхъ натяженій всецѣло обязана своимъ существованіемъ наличности тренія между ремнемъ и поверхностью цилиндра и оцѣниваетъ собою сопротивленіе движенію ремня, оказываемое этимъ треніемъ. Съ другой стороны, очевидно, что нашъ цилиндръ радіуса R, будучи нагруженъ силами S_1 и S_2, касательными къ его поверхности, находится подъ воздѣйствіемъ момента $(S_1 - S_2)R$, стремящагося повернуть этотъ цилиндръ въ сторону бо́льшаго натяженія S_1. Если бы мы пожелали выразить этотъ вращающій моментъ въ видѣ произведенія нѣкотораго окружного усилія $\mathfrak{P}$, касательнаго къ окружности цилиндра, на радіусъ цилиндра R, то значеніе этого окружного усилія получили бы изъ уравненія

$$\mathfrak{P}R = R(S_1 - S_2),$$

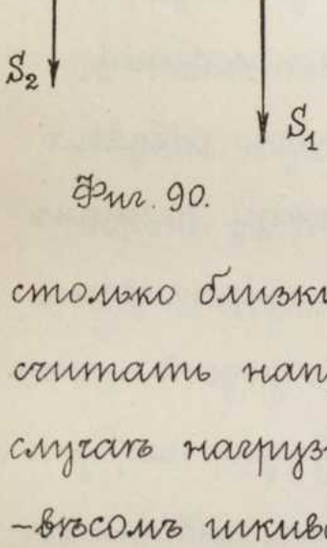
откуда и нашли бы, что

$$\mathfrak{P} = S_1 - S_2 = S_2(e^{f\delta} - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Итакъ, окружное усиліе $\mathfrak{P}$, стремящееся повернуть ци-

цилиндръ, огибаемый ремнемъ, представляетъ собою сопротивленіе трепія между ремнемъ и цилиндромъ и равно разности концевыхъ натяженій S_1 и S_2. Посмотримъ теперь, каковы условія утилизаціи этого окружного усилія P.

Очевидно, что первымъ изъ нихъ является подвижность цилиндра, способность его къ вращенію. Предположимъ, поэтому, что нашъ цилиндръ сидитъ на валу, вращающемся въ подшипникахъ; черезъ него, попрежнему, перекинутъ ремень, концы коего, вслѣдствіе имѣющихся на нихъ нагрузокъ, испытываютъ натяженія S_1 и S_2 (фиг. 90). Однимъ словомъ, мы имѣемъ нѣкоторый ременной шкивъ. Ради простоты дальнѣйшихъ выкладокъ, предположимъ, что обѣ части ремня, сходящая и восходящая, настолько близки къ параллельности, что усилія S_1 и S_2 можно считать направленными параллельно другъ другу. Въ такомъ случаѣ нагрузка на валъ будетъ приблизительно равна (S_1+S_2), — вѣсомъ шкива и ремня можно пренебречь. Если, теперь, коэффиціентъ трепія вала въ его подшипникахъ обозначимъ черезъ μ, а радіусъ вала — черезъ ϱ, то сопротивленіе трепія въ подшипникахъ выразится суммарно черезъ $\mu(S_1+S_2)$, а моментъ m_z его относительно оси вращенія шкива — черезъ $\mu\varrho(S_1+S_2)$.



Фиг. 90.

Итакъ

$$m_z = \mu\varrho(S_1-S_2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Допустимъ, далѣе, что на валу имѣется еще нѣкоторый пассивный моментъ, m_p, самъ нашего шкива вращать не могущій, но вращенію его другими моментами сопротивляющійся, — пусть это будетъ моментъ сопротивленія банковъ, насоса и, вообще, машинъ-орудій.

Всѣ эти моменты сопротивленія, препятствующіе вращенію нашего шкива, могутъ быть преодолѣны лишь за счетъ момента M, обусловливаемаго наличностью окружного усилія $\mathfrak{P}$ на шкивѣ и равнаго $\mathfrak{P}R$. Такимъ образомъ, дѣйствующимъ моментомъ является здѣсь моментъ M, выражающійся такъ:

$$M = \mathfrak{P}R = (S_1 - S_2)R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Если ремень имѣетъ двигаться и увлекать, при этомъ, за собою шкивъ, т.-е. если онъ не долженъ скользить по шкиву, то для этого, прежде всего, должно быть удовлетворено условіе $S_1 \leqq S_2 e^{f\delta}$, ибо въ обратномъ случаѣ, т.-е. при $S_1 > S_2 e^{f\delta}$, оказалось бы, согласно сказанному выше, что ремень можетъ скользить по шкиву въ сторону усилія S_1. Далѣе, для возможности вращенія шкива необходимо, чтобы дѣйствующій моментъ M могъ преодолѣть сопротивленіе какъ момента m_ξ трепія въ подшипникахъ, такъ и момента пассивнаго сопротивленія, m_p. Поэтому условія увлеканія шкива ремнемъ выражаются неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\leqq S_2 e^{f\delta} \\ M &\leqq \mu\varrho(S_1 + S_2) + m_p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

и

Если бы оказалось, что

$$S_1 \leqq S_2 e^{f\delta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

такъ что ремень по шкиву скользить не можетъ, но въ то же время моментъ M слишкомъ слабъ для того, чтобы преодолѣть моменты сопротивленій, т.-е. если

$$M < \mu\varrho(S_1 + S_2) + m_p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7'')$$

то вся система ремня и шкива будетъ оставаться въ по-

коть, и вращеніе совершаться не сможетъ. Итакъ, условія покоя нашей системы выражаются соотношеніями (7') и (7'').

Если, далѣе,

$$S_1 > S_2 e^{f\delta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8')$$

такъ что ремень можетъ скользить по шкиву, и, далѣе, если въ то же время

$$M < \mu\varrho(S_1 + S_2) + m_p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8'')$$

то повернуть шкива ремень не сможетъ, самъ же по нему скользить сможетъ. Такимъ образомъ, условія скольженія ремня по шкиву и, одновременно съ этимъ, покоя шкива выражаются соотношеніями (8') и (8'').

Если, затѣмъ,

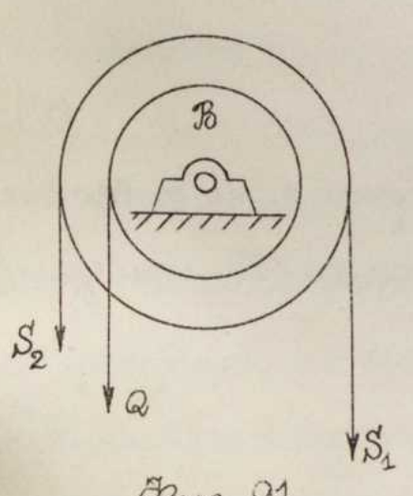
$$S_1 > S_2 e^{f\delta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

такъ что возможно скольженіе ремня, и если въ то же время

$$M > \mu\varrho(S_1 + S_2) + m_p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9'')$$

такъ что моментъ M достаточенъ для преодолѣнія всѣхъ моментовъ сопротивленія, то получается неопредѣленность, — можетъ случиться, что одновременно будетъ происходить какъ скольженіе ремня, такъ и вращеніе шкива.

Особый интересъ представляетъ тотъ случай, когда на валу имѣется моментъ сопротивленія не пассивный, какъ это было выше, но активный, m_a, могущій самъ привести во вращеніе какъ валъ, такъ и всю его систему, — если, напримѣръ, на валу сидитъ закрѣпленный на немъ наглухо барабанъ B, касательно къ окружности коего дѣйствуетъ сила Q, стремящаяся повернуть всю систему согласно



Фиг. 91.

своему направленію (фиг. 91). Для этого случая

$$m_a = Qr,$$

гдѣ r есть радіусъ барабана B. Здѣсь условіе покоя выразится неравенствами

$$\left.\begin{aligned} S_1 &< S_2 e^{f\delta} \\ \text{и} \qquad M &< \mu\varrho(S_1+S_2)+m_a, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ибо это есть тотъ случай, когда ремень по шкиву скользить не можетъ, а дѣйствующій моментъ M не можетъ преодолѣть моментовъ имѣющихся здѣсь сопротивленій.

Если

$$\left.\begin{aligned} S_1 &< S_2 e^{f\delta} \\ \text{и} \qquad M &> \mu\varrho(S_1+S_2)+m_a, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

то ремень скользить по шкиву не сможетъ и будетъ увлекать за собою какъ шкивъ, такъ и барабанъ B

Подобнымъ же образомъ можно разобрать и всѣ остальные случаи, могущіе здѣсь встрѣтиться.

Замѣтимъ, наконецъ, что, разъ моментъ m_a есть моментъ активный, то можетъ случиться, что подъ дѣйствіемъ его вся система будетъ вынуждена вращаться въ обратную сторону. Очевидно, что это будетъ имѣть мѣсто при условіи

$$m_a > M + \mu\varrho(S_1+S_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12')$$

Моментъ m_a можетъ, такимъ образомъ, сначала повернуть, а затѣмъ и вращать все время систему въ обратную сторону, т.-е. согласно своему направленію. Если, при этомъ, оказывается, что

$$S_1 \geqq S_2 e^{f\delta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12'')$$

такъ что возможно скольженіе ремня, то можетъ имѣть

мѣсто движеніе шкива назадъ, а ремня – впередъ.

Наконецъ, случай

$$\left.\begin{aligned} S_1 &< S_2 e^{\beta\delta} \\ \text{и} \\ m_a &> M + \mu\rho(S_1 + S_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

есть весьма важный въ практическомъ отношеніи случай передачи движенія отъ вала и его шкива другому валу, при посредствѣ ремня, охватывающаго шкивы этихъ валовъ. – Никакихъ затрудненій не представитъ разборъ и другихъ, могущихъ здѣсь представиться, случаевъ.

При обходѣ шкивовъ частицы ремня вынуждены описывать криволинейныя (круговыя) траекторіи, вслѣдствіе чего при большихъ скоростяхъ ремня необходимо принимать во вниманіе еще одинъ важный факторъ, – центробѣжную силу этихъ частицъ. Замѣчая, что она будетъ всегда направлена отъ центра къ периферіи, заключаемъ, что она будетъ уменьшать нормальныя давленія элементовъ ремня на шкивъ, вслѣдствіе чего будетъ имѣть мѣсто и соотвѣтственное уменьшеніе силъ треніа. Зависимость между S_1 и S_2 окажется теперь иной, и получить ее здѣсь можно такъ:

Выдѣлимъ изъ бѣгущей части ремня, въ данный моментъ прилегающей къ шкиву, элементъ его длиной въ δl и положимъ, что масса его равна δm. Предположимъ, далѣе, что радіусъ шкива есть R, а окружная скорость его – v. Тогда центробѣжная сила F этого элемента выразится произведеніемъ изъ центробѣжнаго ускоренія его, v^2/R, на массу δm, такъ что

$$\mathfrak{F} = \frac{dm.v^2}{\mathcal{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Обозначимъ вѣсъ погонной единицы ремня черезъ q, а ускореніе силы тяжести — черезъ g. Въ такомъ случаѣ масса этой единицы, — величина, для даннаго ремня постоянная, — выразится черезъ q/g. Будемъ обозначать эту величину черезъ μ, такъ что

$$\mu = \frac{q}{g} = \text{const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Въ виду этого масса dm взятаго нами элемента съ длиной $d\lambda$ выразится такъ:

$$dm = \mu\, d\lambda.$$

Замѣчая теперь, что

$$d\lambda = \mathcal{R}\, d\alpha,$$

получаемъ для dm новое выраженіе, а именно:

$$dm = \mu \mathcal{R}\, d\alpha,$$

послѣ чего уравненіе (α) переписывается такъ:

$$\mathfrak{F} = \mu \mathcal{R}\, d\alpha . \frac{v^2}{\mathcal{R}} = \mu v^2 d\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha')$$

На такую именно величину и уменьшится теперь нормальная сила $S\, d\alpha$, — см. форм. (c), — прижимающая элементъ $d\lambda$ къ поверхности шкива. Въ силу этого общее дифференціальное уравненіе (d) перепишется въ дополненномъ видѣ такъ:

$$dS = f(S - \mu v^2) d\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Предположивъ теперь, что вращеніе шкива протекаетъ равномѣрно, такъ что окружная скорость его $v = \text{const}$, имѣемъ:

$$d(S - \mu v^2) = dS,$$

вслѣдствіе чего уравненію (γ) можно дать видъ:

$$d(S - \mu v^2) = f(S - \mu v^2) d\alpha.$$

Раздѣляя перемѣнныя, т.-е. дѣля объ части полученнаго

уравненія на $(S-\mu v^2)$, получаемъ уравненіе

$$\frac{d(S-\mu v^2)}{S-\mu v^2}=f\,d\alpha, \qquad (\delta)$$

что, послѣ интеграціи, даетъ уравненіе

$$lg(S-\mu v^2)=f\alpha+C. \qquad (\varepsilon)$$

Замѣчая, что, при $\alpha=0$, натяженіе S ремня равно S_2, опредѣляемъ помощью этого начальнаго условія произвольное постоянное C, а именно:

$$lg(S_2-\mu v^2)=f.0+C,$$

откуда и находимъ, что

$$C=lg(S_2-\mu v^2),$$

послѣ чего уравненіе (ε) переписывается такъ:

$$lg(S-\mu v^2)=f\alpha+lg(S_2-\mu v^2),$$

а переходя отъ lg къ числамъ, находимъ связь между натяженіемъ S въ любой точкѣ дуги обхвата и другими факторами передачи въ видѣ уравненія

$$S-\mu v^2=e^{f\alpha}(S_2-\mu v^2). \qquad (\zeta)$$

Замѣчая, далѣе, что, при $\alpha=\delta$, натяженіе S оказывается равнымъ S_1, находимъ изъ (ζ) соотношеніе между крайними натяженіями S_1 и S_2 въ видѣ уравненія

$$S_1-\mu v^2=e^{f\delta}(S_2-\mu v^2) \qquad (\eta)$$

Опредѣлимъ теперь окружное усиліе P, равное (S_1-S_2). Для этого опредѣляемъ сначала S_2 изъ (η); находимъ:

$$S_2=(S_1-\mu v^2)e^{-f\delta}+\mu v^2.$$

Вычитая объ части этого уравненія изъ S_1, находимъ искомое выраженіе для P, — оно имѣетъ видъ:

$$P=S_1-S_2=S_1-(S_1-\mu v^2)e^{-f\delta}-\mu v^2=(S_1-\mu v^2)(1-e^{-f\delta}). \qquad (\vartheta)$$

Эта формула показываетъ, что при

$$S_1 = \mu v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\kappa)$$

окружное усиліе P обращается въ нуль, въ виду чего обращается въ нуль и вся работа L, передаваемая ремнемъ на шкивъ. Такимъ образомъ, скорость v, опредѣляемая изъ уравненія (κ), является въ этомъ смыслѣ предѣльной. Обозначивъ ее черезъ $v_к$, получаемъ для опредѣленія ея выраженіе

$$v_к = \sqrt{\frac{S_1}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\lambda)$$

Выражая натяженіе S_1 ремня черезъ площадь поперечнаго сѣченія его и допускаемое напряженіе на разрывъ, можемъ по этимъ даннымъ опредѣлить въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ величину соотвѣтствующей предѣльной скорости, при которой ремень уже перестаетъ передавать работу.

Замѣчая теперь, что передача работы не имѣетъ мѣста еще при $v = 0$, когда шкивъ стоитъ, и принимая во вниманіе, что количество L работы, передаваемой ремнемъ, есть функція скорости его и что эта величина L обращается въ нуль два раза, а именно, при $v = 0$ и $v = v_к$, заключаемъ, что между этими предѣльными значеніями 0 и $v_к$ непремѣнно должно существовать такое, при которомъ количество работы, передаваемой ремнемъ, будетъ максимальнымъ. Отыскать значеніе $v_н$ этой наивыгоднѣйшей скорости можно, руководствуясь общими правилами теоріи maximum'овъ и minimum'овъ; въ данномъ случаѣ можно разсуждать такъ:

Общее выраженіе работы L, передаваемой ремнемъ въ единицу времени, имѣетъ видъ

$$L = Pv,$$

гдѣ P есть окружное усиліе, а v — окружная скорость шкива.

Въ виду (ϑ) это соотношеніе переписывается такъ:

$$\mathfrak{L} = (S_1 - \mu v^2)(1 - e^{-f\delta})v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

Условіе тахітит'а имѣетъ, какъ мы знаемъ, видъ:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dv} = 0,$$

приводящій въ данномъ случаѣ къ уравненію

$$S_1 - 3\mu v^2 = 0.$$

Отсюда непосредственно получается выраженіе наивыгоднѣйшей скорости v_n, при которой ремень будетъ передавать шкиву максимальную работу, а именно:

$$v_n = \sqrt{\frac{S_1}{3\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\nu)$$

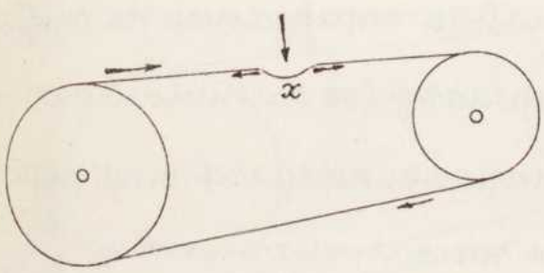
Если мы не желаемъ перегружать ремень, т.-е. брать натяженіе S_1 большее полагающагося для даннаго ремня при взятомъ допускаемомъ напряженіи его, то, задавшись S_1, сейчасъ же по формулѣ (ν) опредѣлимъ скорость, наивыгоднѣйшую для данной передачи. Соединяя выраженія (μ) и (ν), получаемъ выраженіе максимальной работы, могущей быть переданной на шкивъ помощью даннаго ремня:

$$\mathfrak{L}_{max} = \left(S_1 - \frac{S_1}{3}\right)(1 - e^{-f\delta})\sqrt{\frac{S_1}{3\mu}} = \frac{2}{3} S_1 \sqrt{\frac{S_1}{3\mu}}\,(1 - e^{-f\delta}) \quad \ldots \quad (\pi)$$

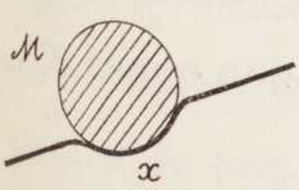
Скорость v_n, вычисляемая по формулѣ (ν), выходитъ, при ходовыхъ величинахъ S_1 и q, довольно большой, — во всякомъ случаѣ она значительно выше тѣхъ, кои обычно осуществляются на практикѣ, почему и можно сказать, что на практикѣ ремень вполнѣ не утилизируется никогда. Обычно говорятъ, что въ ременной передачѣ нельзя допускать большихъ скоростей потому, что это якобы можетъ вызвать биеніе шки-

вовъ, обусловливаемое неточной центрировкой ихъ, а, кромѣ того, предполагается, что малѣйшее уклоненіе ремня отъ должнаго направленія, при которомъ онъ можетъ правильно объѣжать шкивъ, можетъ, при большой скорости его, повлечь за собою сходъ его со шкива. Нетрудно, однако, путемъ уже элементарныхъ соображеній, показать всю несостоятельность послѣдняго предположенія; для этого достаточно будетъ разсмотрѣть эффектъ удара по ремню.

Предположимъ, такимъ образомъ, что въ какой-либо точкѣ x бѣгущаго ремня (фиг. 92) мы дали ему ударъ перпендикулярно его поверхности. Понятно, что импульсъ этого удара сообщится соѣднимъ частицамъ со скоростью, равной скорости распространенія упругихъ колебаній въ средѣ ремня, и въ результатѣ удара мы получимъ двѣ волны, вышедшія изъ x, изъ коихъ одна пойдетъ по направленію скорости ремня, а другая — ей противоположно. Первая изъ этихъ волнъ, дойдя до шкива, потухнетъ; также можетъ потухнуть и вторая, дойдя до другого шкива. Но предположимъ, что скорость ремня равна упомянутой скорости распространенія упругихъ колебаній. Тогда окажется, что вторая волна, идущая навстрѣчу ремню, остановится неподвижно въ пространствѣ, какъ бы застынетъ на мѣстѣ, и въ этомъ случаѣ ремень будетъ идти такъ, какъ если бы въ x ему представилась нѣкоторая твердая, неподвижная преграда M (фиг. 93) — нѣчто въ родѣ блока или цилиндра.



Фиг. 92.



Фиг. 93.

Такимъ образомъ, въ случаѣ указаннаго равенства скоростей ремень дѣлается какъ-бы податливымъ на всякія измѣненія его формы, и если въ какой-либо точкѣ X его мы подведемъ къ нему, напримѣръ, блокъ M, то ремень будетъ охотно объгать его, не пытаясь ни соскользнуть съ этого блока, ни обойти это препятствіе, ни оказывать на него какое-бы то ни было давленіе. — Такова причина, почему ремни при большихъ скоростяхъ работаютъ всегда очень плавно; можно сказать, что въ подобныхъ случаяхъ ремень принимаетъ нѣкоторое устойчивое положеніе равновѣсія.

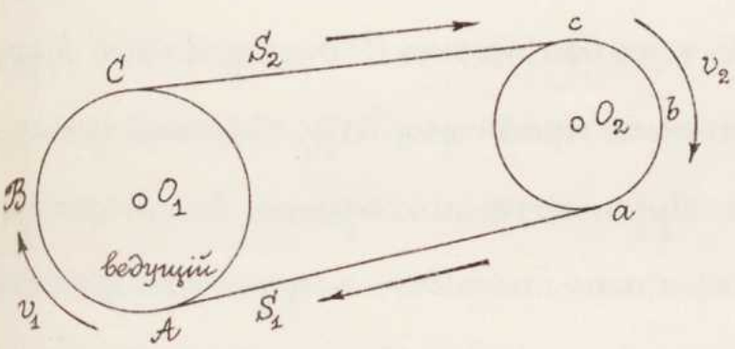
Всѣ эти теоретическіе выводы вполнѣ оправдались на опытахъ Radinger'a, устроившаго подобную передачу (съ большими скоростями ремня) въ очень большихъ размѣрахъ; передача эта работала вполнѣ исправно въ продолженіе нѣсколькихъ лѣтъ.

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе устойчивость ремня, идущаго съ большой скоростью, не слѣдуетъ опасаться давать ремнямъ скорости, приближающіяся къ наиболѣе выгоднымъ съ точки зрѣнія работы. Въ случаѣ, если скорость ремня окажется меньше скорости распространенія упругихъ колебаній, волна, идущая противъ ремня, будетъ перемѣщаться въ этомъ направленіи со скоростью, равною разности скоростей колебаній и самого ремня. Степень устойчивости будетъ, очевидно, тѣмъ больше, чѣмъ эта разность будетъ меньше.

До сихъ поръ мы предполагали, что на всемъ протяженіи дуги обхвата ремень, плотно прилегая къ окружности шкива, идетъ со скоростью, равной окружной скорости шкива, и, значитъ, относительнаго движенія по нему не имѣетъ, т.-е. по

шкивъ не скользитъ. На дѣлѣ же, какъ оказывается, происходитъ нѣчто совершенно иное: ремень, за время обхода шкива, имѣетъ еще нѣкоторое относительное движеніе скольженія по шкиву. Профессору Н. Е. Жуковскому удалось показать это при помощи очень простого прибора, описаніе коего будетъ помѣщено въ прибавленіи къ курсу. Сущность явленія, совершающагося здѣсь, заключается въ слѣдующемъ:

Пусть ремень охватываетъ два шкива, O_1 и O_2 (фиг. 94), и вся эта система находится въ движеніи, будучи понуждаема къ тому вращеніемъ ведущаго шкива O_1; шкивъ O_2 будемъ называть „ведомымъ". Если вращеніе ведущаго шкива совершается по часовой стрѣлкѣ, то натяженіе S_1 ремня въ части aA его будетъ больше натяженія S_2 въ части Cc. Разность $(S_1 - S_2)$ дастъ, какъ это извѣстно намъ изъ предыдущаго, величину окружного усилія P.

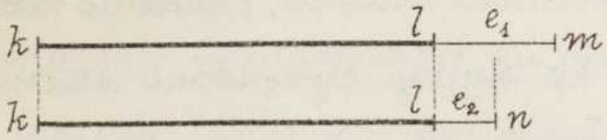


Фиг. 94.

Очевидно теперь, что въ части aA, съ бо́льшимъ натяженіемъ S_1, ремень будетъ вытянутъ больше, нежели въ части Cc съ меньшимъ натяженіемъ S_2. Слѣдовательно, вытяжка ремня въ различныхъ частяхъ его будетъ различна, и мы разсмотримъ теперь ходъ измѣненій ея.

Пусть единица длины ремня въ его естественномъ, невытянутомъ, состояніи (до наложенія его на шкивы) изображается въ нѣкоторомъ масштабѣ отрѣзкомъ kl (фиг. 95). Переходя по шкиву O_1 отъ A къ B и, дальше, къ C (фиг. 94), ремень

будетъ получать различныя удлиненія: если въ части Aa она удлиняется до размѣра km, получая, такимъ образомъ, удлиненіе $lm = e_1$, то въ части C, гдѣ натяженіе меньше, она получитъ и меньшее удлиненіе, – нѣкоторое $ln = e_2$, и тѣла теперь,



Фиг. 95.

такимъ образомъ, размѣръ kn, меньшій прежняго, km. Такимъ образомъ, выходитъ, что каждая единица длины, kl, на всемъ пути aA будетъ имѣть длину km, но на пути отъ A до C, т.-е. проходя дугу обхвата на ведущемъ шкивѣ, станетъ все это время непрерывно сокращаться, ибо уже въ точкѣ C она должна будетъ занять протяженіе kn, меньшее прежняго km, бывшаго у точки A. Ясно, что это сокращеніе будетъ происходить въ сторону, обратную движенію шкива, а это повлечетъ за собою отставаніе ремня отъ шкива, т.-е. скольженіе его относительно шкива въ сторону, обратную движенію этого послѣдняго.

Ближайшее разсмотрѣніе вопроса показываетъ, что не скользитъ лишь нѣкоторая часть ремня, но о томъ, какъ велика дуга, на которой не происходитъ скольженіе, гдѣ располагается эта дуга и проч., мы говорить здѣсь не будемъ. Замѣтимъ лишь, какъ фактъ, что плотное прилеганіе (безъ скольженія) ремня къ шкиву имѣетъ мѣсто лишь на нѣкоторой дугѣ – части всей дуги обхвата; дальше же, на остальныхъ частяхъ дуги обхвата, происходитъ скольженіе.

Прослѣдимъ теперь, какъ работаетъ ремень, обходя второй шкивъ O_2. Идя по направленію движенія ремня, мы замѣчаемъ, что на протяженіи всей теперешней дуги обхвата натяженіе S_2 его измѣняется, достигая, наконецъ, величины S_1. Значитъ, проходя здѣсь дугу обхвата, ремень долженъ вытягиваться и, слѣдовательно, опережать шкивъ, вслѣдствіе чего здѣсь опять получается скольженіе ремня по шкиву

теперь, однако, уже въ сторону движенія, такъ что здѣсь ремень будетъ опережать шкивъ.

Нетрудно усмотрѣть, что такое поведеніе ремня влечетъ за собою потерю въ передаваемой работѣ. Дѣйствительно, окружныя скорости шкивовъ оказываются различными, ибо ведущій шкивъ идетъ быстрѣе ведомаго, что, конечно, уменьшаетъ работу, воспринимаемую ведомымъ шкивомъ O_2. Потерю эту можно оцѣнить въ среднихъ числахъ, но въ эти подробности мы вдаваться не будемъ, предоставляя желающимъ ближе ознакомиться со всѣмъ этимъ вопросомъ обратиться къ брошюрѣ проф. Н. Е. Жуковскаго: „О скольженіи ремней по шкиву", а теперь коснемся вкратцѣ еще вопроса о потерѣ скорости, обусловливаемой этимъ скольженіемъ, и покажемъ, что, дѣйствительно, ведущій шкивъ идетъ съ одной скоростью, соотвѣтствующей натяженію S_1, а ведомый – съ другою, соотвѣтствующей S_2.

Пусть, согласно фиг. 95, единица длины ремня на ведущей части его, гдѣ натяженіе равно S_1, обратилась въ $(1+\varepsilon_1)$, а на ведущей части, съ S_2, – въ $(1+\varepsilon_2)$. Величины $\varepsilon_1 = lm$ и $\varepsilon_2 = ln$, сравнительно съ kl, очень малы. Предполагая, что оба шкива вращаются равномѣрно, можемъ сказать, что удлиненіе единицы длины kl до размѣровъ $(1+\varepsilon_1)$ происходитъ на ведущемъ шкивѣ въ то же самое время (обозначимъ это время черезъ τ), въ какое на ведомомъ происходитъ удлиненіе той же единицы длины kl до размѣровъ $(1+\varepsilon_1)$; иными словами, какая-либо точка ремня проходитъ на ведущемъ шкивѣ пространство $(1+\varepsilon_1)$ въ то же самое время τ, въ какое на ведомомъ она проходитъ $(1+\varepsilon_2)$. Эти заключенія приводятъ къ слѣдующимъ аналитическимъ соотношеніямъ:

Пусть окружныя скорости шкивовъ имѣютъ значенія: v_1 — на ведущемъ шкивѣ и v_2 — на ведомомъ. Согласно замѣчанію, сдѣланному выше, можемъ написать соотношенія:

$$1+e_1=v_1\tau$$

и

$$1+e_2=v_2\tau.$$

Дѣля первое изъ этихъ соотношеній на второе, получаемъ новое соотношеніе

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{1+e_1}{1+e_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

показывающее, что отношеніе окружныхъ скоростей шкивовъ равно отношенію удлиненныхъ единицъ. Въ силу этого, потеря окружной скорости на ведомомъ шкивѣ, т.-е. величина v_1-v_2, можетъ быть подсчитана такъ:

Изъ (6) имѣемъ, что

$$\frac{v_1-v_2}{v_1}=\frac{e_1-e_2}{1+e_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

Такъ какъ величина e_1 очень мала, то, откинувъ ее въ знаменателѣ, мы измѣнимъ дробь, стоящую въ правой части соотношенія (7'), лишь очень мало. Дѣйствительно, эту дробь можно представить въ видѣ ряда $(e_1-e_2)(1-e_1+e_1^2-e_1^3+e_1^4-\ldots)$. При маломъ e_1 эта величина будетъ отличаться отъ величины (e_1-e_2), получаемой послѣ упомянутаго откидыванія e_1 въ знаменателѣ, на величину $[(e_1-e_2)(-e_1+e_1^2-e_1^3+\ldots)]$, т.-е. на величину высшаго порядка сравнительно съ e_1. Такова будетъ ошибка, вызываемая отбрасываніемъ члена e_1 въ знаменателѣ. Послѣ такого упрощенія выраженіе (7') переписывается такъ:

$$\frac{v_1-v_2}{v_1}=e_1-e_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7')$$

Разность (e_1-e_2) легко выразить въ функціи коэффиціента упругости ремня, $\mathcal{E}$, и площади поперечнаго сѣченія его, $\mathcal{F}$. Согласно закону Гука, выраженія вытяжекъ e_1 и e_2 напишутся такъ:

$$e_1=\frac{S_1}{\mathcal{E}\mathcal{F}}$$

и

$$e_2=\frac{S_2}{\mathcal{E}\mathcal{F}},$$

въ виду чего уравненіе (7) можетъ быть переписано такъ:

$$\frac{v_1-v_2}{v_1}=\frac{S_1-S_2}{\mathcal{E}\mathcal{F}}=\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}\mathcal{F}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Итакъ, потеря скорости оказывается тѣмъ большей, чѣмъ большее окружное усиліе $\mathcal{P}$ и чѣмъ меньше поперечное сѣченіе ремня $\mathcal{F}$. Потеря эта неизбѣжна, и въ случаѣ, если между числами оборотовъ шкивовъ требуется точно соблюсти заданное соотношеніе скоростей, эту потерю надо принимать во вниманіе непремѣнно.

Если-бы скорости v_1 и v_2 были равны, то изъ соотношеній $v_1=\omega_1 r_1$ и $v_2=\omega_2 r_2$ мы получили-бы обычное соотношеніе $\omega_1:\omega_2=r_2:r_1$, говорящее, что угловыя скорости шкивовъ обратно пропорціональны радіусамъ ихъ. Въ дѣйствительности, однако, скорости v между собою, какъ мы видѣли, не равны, а потому упомянутая пропорціональность на дѣлѣ мѣста не имѣетъ, и при точномъ расчетѣ радіусы шкивовъ придется должнымъ образомъ исправить, что выполняется на основаніи формулы (8). Изъ нея, очевидно, получаемъ, что $v_1-v_2=v_1\mathcal{P}/\mathcal{E}\mathcal{F}=v_1 k$, гдѣ черезъ k обозначена, ради простоты писанія, дробь $\mathcal{P}:\mathcal{E}\mathcal{F}$. Отсюда, далѣе находимъ, что

$$\omega_1 r_1-\omega_2 r_2=k\omega_1 r_1,$$

т.-е.

$$\omega_1 r_1(1-k)=\omega_2 r_2.$$

Задаваясь отношеніемъ $\omega_1:\omega_2=n$, находимъ, далѣе, что $n r_1(1-k)=r_2$, откуда и находимъ, наконецъ, что

$$r_1=\frac{r_2}{n(1-k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Если-бы скольженія не было, то мы имѣли-бы $k=0$ и (9) перешло-бы въ обычную формулу

$$r_1=\frac{r_2}{n}.$$

При предварительныхъ расчетахъ представляетъ интересъ учетъ полнаго давленія на валъ шкива въ функціи окружного усилія $\mathfrak{P}$, а не концевыхъ натяженій S_1 и S_2. Предполагая, что объ части ремня, Aa и Cc (фиг. 92) почти параллельны, можемъ, съ извѣстнымъ приближеніемъ, принять, что это полное давленіе Q на валъ шкива выражается такъ:

$$Q = S_1 + S_2.$$

Далѣе имѣемъ соотношенія

$$S_1 = S_2 e^{f\delta}$$

и

$$\mathfrak{P} = S_1 - S_2.$$

Если часть Aa ремня почти параллельна части Cc, то дуга обхвата близка къ полуокружности, такъ что въ этомъ случаѣ δ можно принять равной π. Полагая, кромѣ того, $f = 0{,}22$, находимъ, что $f\delta = 0{,}22\pi = 0{,}693$, а такъ какъ $e^{0{,}693} = 2$, то въ этомъ случаѣ оказывается, что

$$S_1 = 2S_2,$$

вслѣдствіе чего

$$\mathfrak{P} = S_2$$

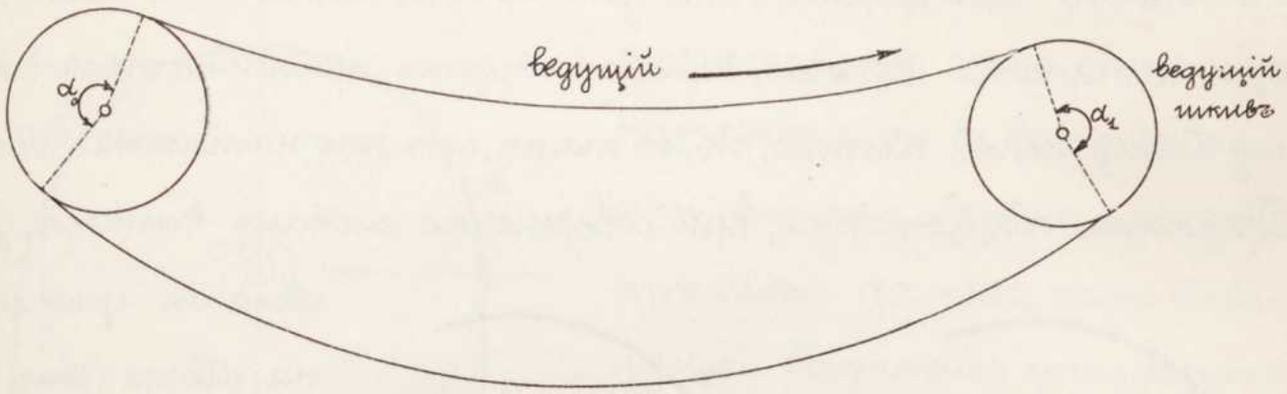
и, значитъ,

$$Q = 3S_2 = 3\mathfrak{P}. \qquad (10)$$

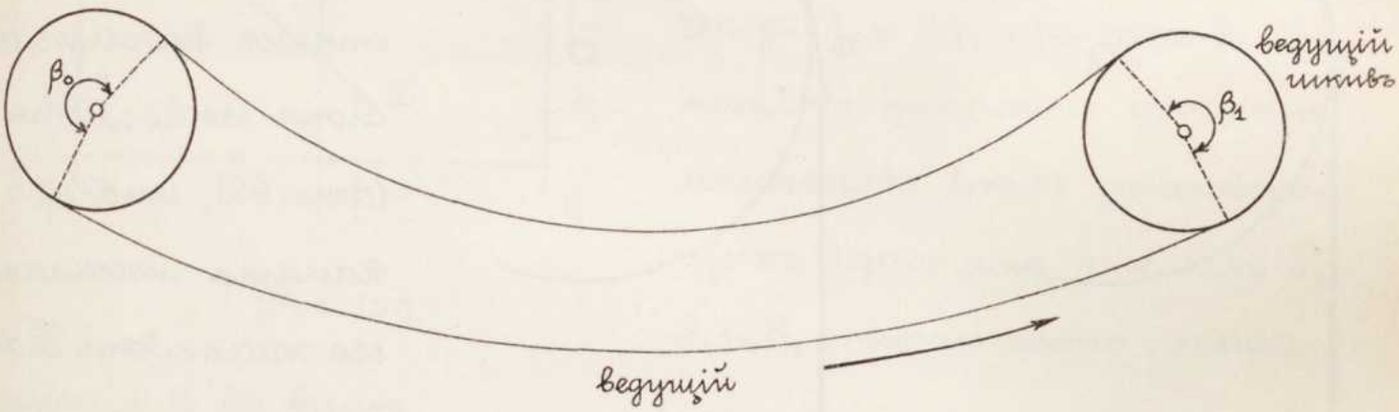
Итакъ, въ указанныхъ условіяхъ можно приблизительно принимать, что полное давленіе на валъ шкива ровно тройному окружному усилію, т.-е. $3\mathfrak{P}$.

При рѣшеніи вопроса о томъ, гдѣ слѣдуетъ помѣщать ведущую часть ремня, а гдѣ - ведомую, нужно руководствоваться тѣмъ соображеніемъ, что передачу нужно устраивать такъ, чтобы дуга

обхвата выходила возможно большей. Очевидно, что для этого ведущій конецъ слѣдуетъ пускать внизъ, а ведомый — наверхъ. Фигуры 96 и 97 весьма наглядно выясняютъ зависимость между величинами угловъ обхвата и расположеніемъ ведущей части ремня: углы α_0 и α_1 схемы фиг. 96, неудовлетворяющей приведенному



Фиг. 96.

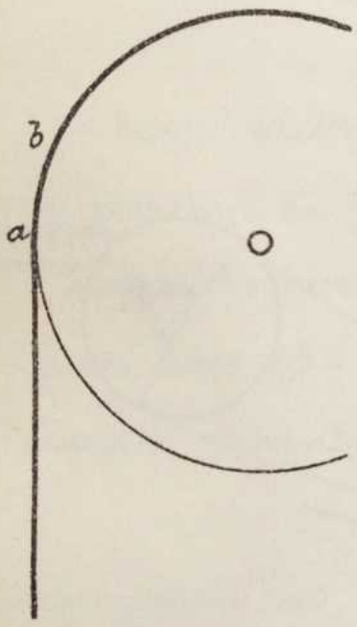


Фиг. 97.

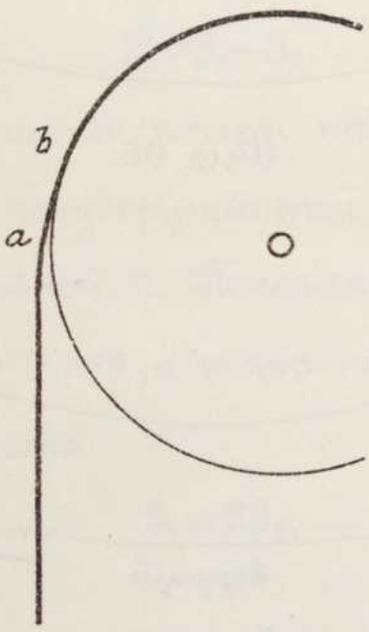
выше правилу относительно расположенія ведущей части, выходятъ значительно меньше угловъ β_0 и β_1 схемы фиг. 97, этому правилу удовлетворяющей.

Здѣсь будетъ умѣстно коснуться вкратцѣ сущности вопроса о жесткости ремней и канатовъ, до сихъ поръ нами не затронутаго. Выше мы все время предполагали, что ремни (и канаты), о которыхъ шла рѣчь, представляютъ собою тѣла совершенно гибкія, не требующія на свое деформированіе никакой работы. Тонкіе ремни,

пожалуй, можно еще считать тѣлами совершенно гибкими, но въ случаѣ канатовъ, особенно достаточно толстыхъ, такое предположеніе, конечно, мѣста имѣть не можетъ. Такимъ образомъ, при толстыхъ ремняхъ и канатахъ является еще одинъ источникъ потерь работы, это — сопротивленіе этихъ тѣлъ измѣненію ихъ формы. Легко усмотрѣть, что въ той своей части, гдѣ натяженіе меньше, канатъ будетъ прижиматься къ своему блоку менѣе плотно, чѣмъ тамъ, гдѣ это натяженіе больше. Въ части ab, которая, при совершенно гибкомъ канатѣ, должна была бы уже лежать на блокѣ (фиг. 98) и которая, при жесткомъ канатѣ, еще блока не касается (фиг. 99), сгибанію каната мѣшаетъ его жесткость. Такъ какъ канатъ состоитъ изъ ряда переплетенныхъ нитей, то, при сгибаніи его, въ мѣстахъ соприкосновенія этихъ нитей возникаетъ треніе ихъ другъ о друга, равно какъ сдавливаніе и растяженіе; на выполненіе всѣхъ этихъ деформацій и уходитъ часть работы. Въ ремняхъ эти явленія частью отсутствуютъ, частью же являются значительно ослабленными, почему ремни и оказываются податливѣе канатовъ. Эффектъ жесткости состоитъ въ томъ, что присутствіе ея обусловливаетъ собою какъ бы появленіе нѣкотораго придатка къ плечамъ силъ, дѣйствующихъ на окруж-



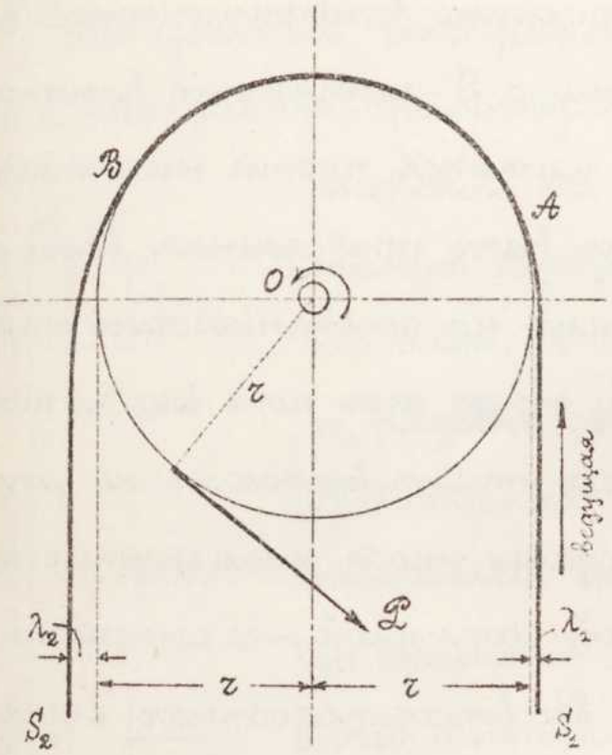
Фиг. 98.



Фиг. 99.

ности блока; учесть его можно такъ:

Пусть ведущая часть каната впервые касается блока въ точкѣ A, а ведомая сходитъ съ него въ точкѣ B (фиг. 100). Натяженіе ведущей части каната обозначимъ черезъ S_1, а ведомой — черезъ S_2, причемъ $S_1 > S_2$. Такъ какъ сгибаніе каната будетъ происходить тѣмъ значительнѣе, чѣмъ больше его натяженіе, то въ ведомой части канатъ будетъ отходить отъ блока дальше, чѣмъ въ ведущей. Обозначивъ упомянутые придатки плечъ r силъ S_1 и S_2 черезъ λ_1 и λ_2, при чемъ $\lambda_1 < \lambda_2$, можемъ написать уравненіе моментовъ всѣхъ дѣйствующихъ здѣсь силъ, т.-е. силъ P, S_1 и S_2 относительно центра вращенія O въ видѣ



Фиг. 100.

$$S_1(r_1+\lambda_1) - S_2(r_2+\lambda_2) - Pr = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Это уравненіе показываетъ, что жесткость каната обусловливаетъ собою потерю момента $(S_2\lambda_2 - S_1\lambda_1)$; потеря въ работѣ выразится, такимъ образомъ, черезъ

$$(S_2\lambda_2 - S_1\lambda_1)\omega.$$

Если бы жесткость своего дѣйствія не проявляла, то канатъ могъ бы передать работу

$$(S_1 - S_2)r\omega = P'r\omega.$$

Поэтому потеря работы, въ доляхъ работы $P'r\omega$, могущей быть переданной канатомъ, выразится дробью:

$$\vartheta = \frac{S_2\lambda_2 - S_1\lambda_1}{\mathfrak{P}'\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Величину ϑ можно было бы опредѣлить, если бы мы знали величину отпрѣзковъ λ_1 и λ_2. Но, кромѣ формулы Вейсбаха:

$$\lambda = \left(\alpha + \beta\frac{\tau}{S}\right)d^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

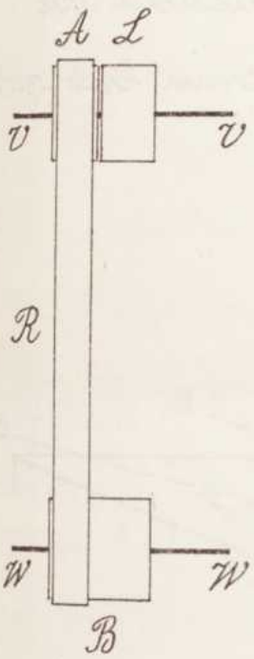
гдѣ α и β суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, τ-радіусъ блока, d – діаметръ каната, а S – натяженіе каната въ данномъ мѣстѣ, – у насъ не имѣется почти никакихъ относящихся сюда формулъ. Такъ какъ приведенная выше формула Вейсбаха была выведена имъ на основаніи очень грубыхъ и неточныхъ опытовъ, къ тому же до сихъ поръ еще не провѣренныхъ, ибо со временъ Вейсбаха этимъ вопросомъ не занимался никто, но нельзя утверждать, чтобы упомянутые придатки выражались именно этой формулой, – ее слѣдуетъ считать лишь приблизительной. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ лучше и правильнѣе всего пользоваться указаніями и данными опыта, полученными путемъ изученія существующихъ передачъ подобнаго рода.

Нѣкоторые авторы пытались разобраться въ этомъ вопросѣ, допуская иногда самыя крайнія предположенія; такъ, напримѣръ, предполагали, что канатъ сгибается такъ, какъ если бы каждая нить его представляла собою гибкій брусъ или стержень. Однако и эти предположенія не подвинули впередъ рѣшенія поставленнаго вопроса, и данныя этими изслѣдователями формулы никакого предпочтенія передъ Вейсбаховской, въ сущности, не заслуживаютъ.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ видахъ ременной передачи, – въ тѣхъ именно, гдѣ ремень приходится перемѣщать съ холостого шкива на рабочій и обратно, – представляется возможность постоянно наблюдать одно явленіе, прекрасно

иллюстрирующее и оправдывающее то изъ основныхъ положеній теоріи трепія скольженія, которое устанавливаетъ тотъ фактъ, что сила трепія направлена всегда прямо противоположно относительной скорости скольженія тѣла въ данный моментъ. Явленіе это состоитъ въ слѣдующемъ:

Допустимъ, что ремень R (фиг. 101) временами имѣетъ передавать работу съ раздаточнаго вала VV мастерской на валъ WW станка. Осуществить такую передачу можно, напримѣръ, такъ: на валъ VV сажаютъ два шкива, — рабочій A и, рядомъ съ нимъ, холостой L, — а на валъ WW станка сажаютъ достаточно широкій пріемный шкивъ B. Тогда, желая привести во вращеніе валъ WW, переводятъ спеціальной отводкой ремень R на рабочій шкивъ A; остановка станка и покой его достигаются путемъ перевода ремня на холостой шкивъ L. И вотъ при этихъ переводахъ ремня всегда можно замѣтить, что движеніе ремня поперекъ шкива A, т.-е. параллельно оси VV, при вращеніи этого шкива выполняется гораздо легче, чѣмъ при его покоѣ; въ этомъ послѣднемъ случаѣ, особенно при туго натянутомъ ремнѣ, передвиженіе ремня по неподвижному шкиву оказывается крайне затруднительнымъ.



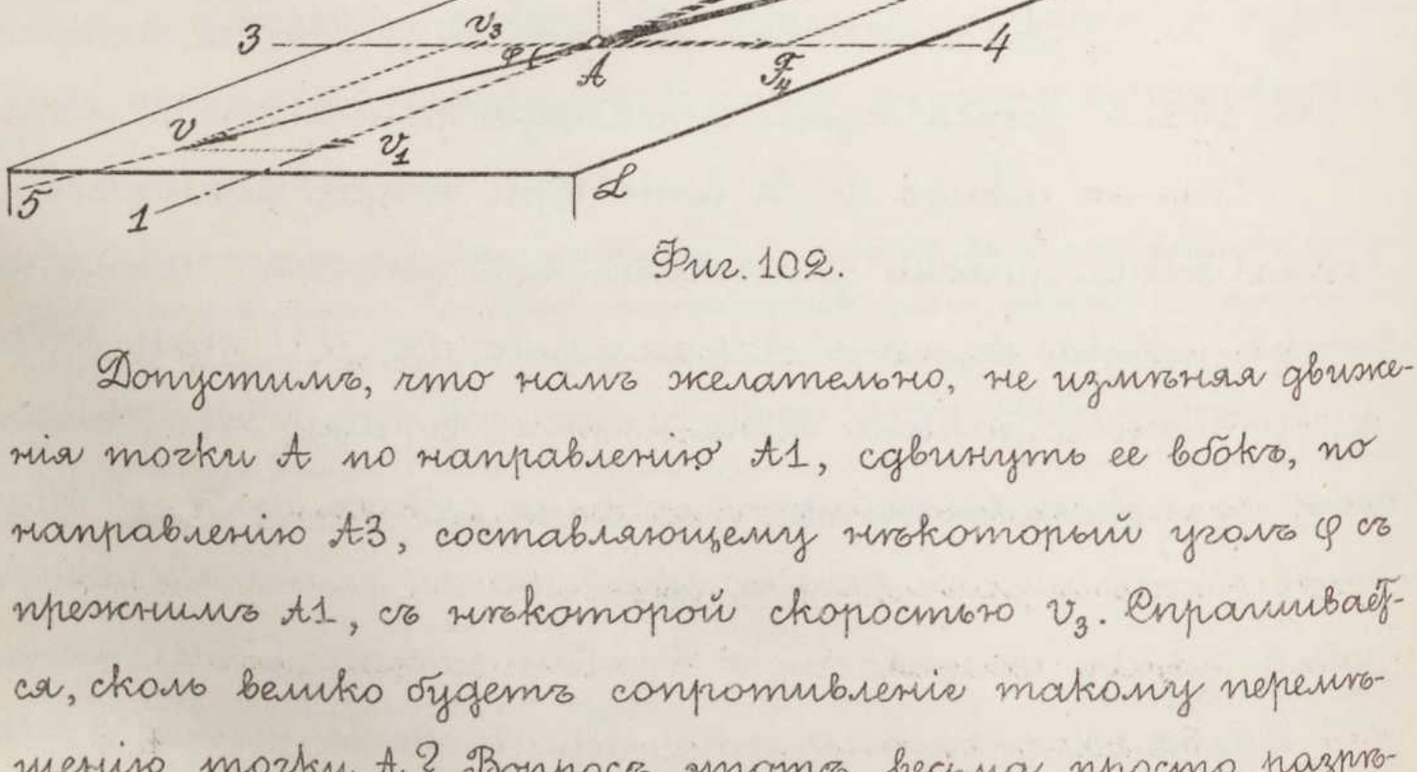
Фиг. 101.

Далѣе оказывается, что передвиженіе ремня по вращающемуся шкиву выполняется тѣмъ легче, чѣмъ скорость вращенія его больше и чѣмъ, при томъ, медлен-

нные мы передвигаемъ ремень.

Явленіе это, на первый взглядъ кажущееся нѣсколько парадоксальнымъ, объясняется весьма просто, если принять во вниманіе упомянутое выше свойство силъ тренія. Чтобы упростить разсужденія, модифицируемъ нѣсколько разсматриваемое явленіе и представимъ его такъ:

Предположимъ, что по неподвижной плоскости PL (фиг. 102) въ нѣкоторомъ направленіи A1 со скоростью v_1 движется матеріальная точка A, прижимаемая къ плоскости силой Q, — положимъ, ради простоты выводовъ, перпендикулярной къ этой плоскости.



Фиг. 102.

Допустимъ, что намъ желательно, не измѣняя движенія точки A по направленію A1, сдвинуть ее вбокъ, по направленію A3, составляющему нѣкоторый уголъ φ съ прежнимъ A1, съ нѣкоторой скоростью v_3. Спрашивается, сколь велико будетъ сопротивленіе такому перемѣщенію точки A? Вопросъ этотъ весьма просто разрѣшается при помощи слѣдующихъ очевидныхъ разсужденій:

Разъ точка A вынуждена теперь совершать одновременно два движенія, со скоростями v_1 и v_3, то въ результатѣ такого составного движенія она должна будетъ перемѣщаться по нѣкоторому новому направленію A5, опредѣляемому діагональю AV параллелограмма скоростей, построеннаго на данныхъ скоростяхъ v_1 и v_3, при чемъ величина скорости этого результирующаго движенія (по A5) опредѣлится величиной этой діагонали.

Итакъ, точка A, совершая одновременно два движенія, по A1 и по A3, будетъ двигаться по нѣкоторому вполнѣ опредѣленному направленію A5, при чемъ, попрежнему, будетъ находиться подъ воздѣйствіемъ силы Q, прижимающей ее къ плоскости PP; эта сила Q возбуждаетъ силу тренія fQ, сопротивляющуюся движенію точки A и, согласно указанному выше положенію, направленную противоположно относительной скорости точки въ разсматриваемый моментъ. Ради краткости письма, будемъ обозначать эту силу тренія fQ черезъ F.

Когда точка A совершала свое движеніе по направленію A1, то эта сила F была направлена противоположно скорости v_1 этого движенія и, значитъ, имѣла направленіе A2. — Теперь точка A движется по направленію A5, отличному отъ прежняго, A1. Слѣдовательно, сила F, не мѣняя прежней своей величины, fQ, измѣнитъ лишь направленіе, ибо, будучи силой тренія, она будетъ теперь вынуждена направиться противоположно скорости v новаго, результирующаго, движенія, и пусть теперешнее направленіе силы F, противоположное направленію A5 скорости v, будетъ AB (фиг. 102).

Разложимъ теперь это полное сопротивленіе движенію точки A, — силу тренія F, — по направленіямъ $A2$ и $A4$, противоположнымъ направленіямъ $A1$ и $A3$, по которымъ вынуждена одновременно двигаться наша точка. Пусть слагающими силы F по этимъ направленіямъ являются силы F_2 и F_4. Въ такомъ случаѣ становится очевиднымъ, что движенію по направленію $A1$ будетъ сопротивляться сила F_2, а движенію по $A3$ — сила F_4, и, значитъ, двигая точку A по направленію $A3$ со скоростью v, мы должны будемъ, прежде всего, преодолѣть сопротивленіе силы F_4, т.-е. приложить къ точкѣ A силу T, равную F_4, но ей прямопротивоположную и, значитъ, направленную по $A3$.

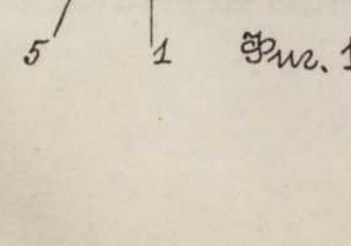
Итакъ, оказывается, что усиліе, нужное для перемѣщенія точки A по направленію $A3$ (кромѣ имѣющагося уже $A1$), равно и прямопротивоположно слагающей F_4 полнаго сопротивленія тренія F, разложеннаго по даннымъ направленіямъ $A2$ и $A4$.

Очевидно, далѣе, что эта слагающая F_4 будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше скорость v_3 по сравненію со скоростью v_1 и чѣмъ ближе уголъ φ къ $90°$. Минимумъ F_4, при данныхъ v_1 и v_3, будетъ имѣть мѣсто при $\varphi = 90°$, — случай этотъ изображенъ здѣсь на фиг. 103. Въ этомъ наивыгоднѣйшемъ для передвиженія точки случаѣ имѣемъ, что

$$F_4 = F\cos\alpha = Qf\cos\alpha,$$

гдѣ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1}{v_3}.$$



Фиг. 103.

Итакъ, дѣйствительно, оказывается, что желаемое смѣщеніе движущейся точки A выполняется тѣмъ легче, чѣмъ

1) ближе уголъ φ къ 90°,

2) чѣмъ меньше скорость v_3 и

3) чѣмъ больше скорость v_1.

Кромѣ того, сила F_4, опредѣляющая собою усиліе, потребное для сдвиженія, будетъ пропорціональна нажимающему усилію Q и коэффиціенту тренія f. — Вопросъ о сдвиженіи точки A можно считать, такимъ образомъ, исчерпаннымъ.

Вернемся теперь къ данной намъ ременной передачѣ. Здѣсь мы имѣемъ движеніе уже не точки, а цѣлой системы (ремня), съ нѣкоторой опредѣленной скоростью и въ нѣкоторомъ опредѣленномъ направленіи. Подобно точкѣ A, система ремня находится, между прочимъ, подъ воздѣйствіемъ силъ, прижимающихъ ее къ поверхности шкива и возбуждающихъ соотвѣтствующія силы тренія, опять, какъ всегда, направляющіяся противоположно скорости ремня. Если систему такого бѣгущаго ремня мы пожелаемъ перевести по шкиву вбокъ, то, аналогично тому, что имѣло мѣсто для точки A, окажется, что направленіе движенія ремня теперь измѣнится, вслѣдствіе чего измѣнится и направленіе силы тренія, такъ что сопротивляться передвиженію ремня будетъ лишь нѣкоторая опредѣленная слагающая полной силы тренія, и нетрудно убѣдиться, что эта слагающая, а значитъ, и сила, нужная для смѣщенія ремня, будутъ тѣмъ меньше, чѣмъ быстрѣе бѣжитъ ремень, т.-е. чѣмъ быстрѣе вращается

ликивъ, и тѣмъ медленнѣе мы этотъ ремень переводимъ.

Болѣе подробное изслѣдованіе этого вопроса даетъ результаты, болѣе сложные по ихъ внѣшнему виду; но сущность рѣшенія остается той же, почему мы и ограничиваемся вышеприведенными простыми соображеніями,— наша цѣль сводилась лишь къ выясненію причины, въ силу коей въ данномъ случаѣ и во всѣхъ другихъ, ему аналогичныхъ, движущаяся съ треніемъ система оказываетъ такое малое сопротивленіе смѣщенію ея въ бокъ.

Такое же самое явленіе приходится наблюдать, напримѣръ, при движеніи саней: пока сани стоятъ неподвижно, сдвинуть ихъ вбокъ довольно трудно; но разъ они пришли въ движеніе, то для сдвиженія ихъ вбокъ понадобится сила, тѣмъ меньшая, чѣмъ быстрѣе движутся сани. Этимъ вполнѣ объясняется явленіе раскатa саней на поворотахъ, гдѣ смѣщеніе ихъ вбокъ,— перпендикулярно скорости ихъ въ данный моментъ,— происходитъ подъ вліяніемъ центробѣжной силы, развивающейся при описываніи санями поворотовъ и, вообще, при прохожденіи ими криволинейныхъ участковъ пути.

Нетрудно убѣдиться, что стаскиваніе колеса съ оси его значительно облегчается, если станемъ при этомъ вращать это колесо. На практикѣ такъ именно и поступаютъ, вращая колесо, во время его стаскиванія, то въ одну сторону, то въ другую. Здѣсь, какъ и во многихъ другихъ случаяхъ, безсознательно пользуются все тѣмъ же, указаннымъ выше, свойствомъ силъ треніа.

По той же причинѣ весьма легко повернуть рулъ автомобиля на ходу этого послѣдняго и гораздо труднѣе, когда автомобиль стоитъ.

При проектированіи сложнаго золотника Гидера приходится выполнять подсчеты нѣкоторыхъ факторовъ, основанные на соображеніяхъ, аналогичныхъ вышеприведеннымъ.

Этими замѣчаніями мы закончимъ статью о треніи скольженія и перейдемъ къ изложенію статьи о треніи качанія или, какъ говорятъ иначе, треніи второго рода. Явленія этого треніа изучены гораздо меньше, чѣмъ это сдѣлано для треніа скольженія, почему статья о треніи качанія будетъ имѣть объемъ, значительно меньшій, чѣмъ у вышеизложенной статьи о треніи скольженія.

II Треніе качения.

§ 12. Общія соображенія. Связь треніе качения съ треніемъ скольженія. Представленіе Рейнольдса. Коэффиціентъ треніе качения.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда въ относительномъ движеніи двухъ данныхъ тѣлъ оси мгновеннаго вращенія ихъ приходятся на поверхности ихъ соприкосновенія, когда, иными словами, оба тѣла очерчены по полодіямъ даннаго движенія, мы должны были бы получить чистое качение одного тѣла по другому. Податливость матеріаловъ, изъ которыхъ выполняются на практикѣ катящіяся тѣла, извращаетъ, однако, это чистое качение, перевода его въ качение, сопровождаемое скольженіемъ, и ходъ явленій, имѣющихъ здѣсь мѣсто, представляется такимъ:

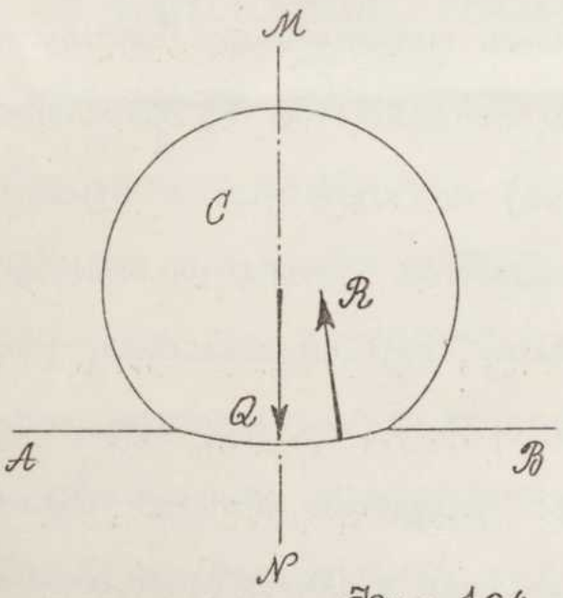
Пусть на горизонтальной плоскости лежитъ нѣкоторый круглый цилиндръ, находящійся все время подъ дѣйствіемъ вертикальной силы,— силы тяжести. Опытъ показываетъ, что, для возможности качения такого цилиндра, къ нему нужно приложить нѣкоторую пару,— создать извѣстный добавочный вращающій моментъ, величина коего, для возможности равномѣрнаго качения цилиндра, должна быть, для данныхъ

цилиндра и плоскости, вполнѣ опредѣленной, при чемъ этотъ добавочный моментъ долженъ дѣйствовать на цилиндръ непрестанно. Если этотъ добавочный моментъ будетъ меньше упомянутой опредѣленной величины, то качения не будетъ; при равенствѣ этихъ факторовъ будетъ имѣть мѣсто, какъ мы указывали, равномѣрное качение; если же этотъ моментъ окажется бо́льшимъ указанной величины, то получимъ ускоренное качение.

Все это указываетъ на существованіе въ данной системѣ (цилиндръ + плоскость) нѣкотораго вполнѣ опредѣленнаго пассивнаго момента сопротивленія, равнаго, очевидно, тому внѣшнему, прилагаемому нами, моменту, который долженъ дѣйствовать на цилиндръ для возможности равномѣрнаго качения этого послѣдняго, и этому внѣшнему моменту противоположнаго. Отсюда слѣдуетъ, что величину этого пассивнаго момента сопротивленія можно опредѣлить опытнымъ путемъ, опредѣляя тотъ моментъ, который даетъ равномѣрное качение цилиндра,—искомый моментъ сопротивленія будетъ ему равенъ. Итакъ, сопротивление качению выражается уже не силой, какъ это имѣло мѣсто въ случаѣ скольженія, а парой силъ, и появленіе ея стараются обычно объяснить такъ:

Пусть круглый цилиндръ C вынужденъ катиться по плоскости AB (фиг. 104). Такъ какъ матеріалы цилиндра и плоскости сжимаемы, то цилиндръ, обладающій извѣстнымъ вѣсомъ, налегши на плоскость, отчасти деформируетъ ее, отчасти же деформируется и самъ,—въ мѣ-

стъ соприкосновенія онъ нѣсколько сплющится, а на плоскости образуетъ подъ собою нѣкоторую желобообразную поверхность. Казалось бы вполнѣ естественнымъ, что, въ виду полной симметріи деформированныхъ частей обоихъ тѣлъ относительно вертикальной діаметральной плоскости MN, въ которой, очевидно, лежитъ сила тяжести Q цилиндра, равнодѣйствующая R всѣхъ силъ упругости, вызванныхъ на деформированной части плоскости AB, будетъ лежать въ той же плоскости MN и дѣйствовать по той же прямой, что и сила Q, но лишь въ противоположную ей сторону; а такъ какъ по величинѣ своей двѣ эти силы должны быть равны, ибо всякое дѣйствіе равно противодѣйствію, то можно было бы ожидать, что двѣ эти силы, какъ равныя и направленныя по одной и той же прямой въ разныя стороны, взаимно уничтожаются. Слѣдовательно, о появленіи какой бы то ни было пары сопротивленія здѣсь не пришлось бы говорить совсѣмъ, ибо силы R и Q, какъ это явствуетъ изъ сказаннаго, никакой пары дать бы не могли, а другихъ силъ, могущихъ дать пару, въ разсматриваемой системѣ нѣтъ.



Фиг. 104.

Факты, однако, говорятъ другое, — мы указывали уже, что пара сопротивленія качѣнію, несомнѣнно, существуетъ. Въ виду этого разсуждаютъ дальше такъ:

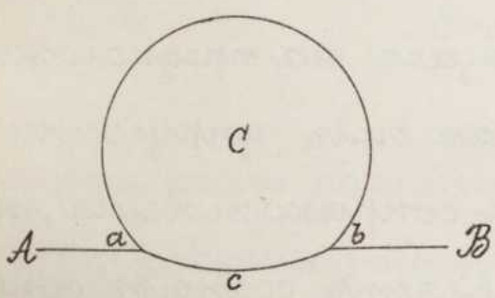
разъ пара сопротивленія существуетъ, а другихъ силъ, кромѣ силъ R и Q, нѣтъ, то и надо принять, что пару сопротивленія и даютъ именно двѣ эти силы. Въ силу такого заключенія эти силы уже нельзя предположить дѣйствующими по одной и той же прямой MN, — теперь ихъ нужно принять расположенными такъ, что сила R, хотя и лежитъ въ плоскости того же вертикальнаго сѣченія, что и сила Q, но отходитъ отъ этой послѣдней впередъ, по направленію движенія, какъ это и изображено на фиг. 104. Сила R можетъ быть нѣсколько наклонена къ вертикали MN, и тогда вертикальная слагающая ея и можетъ, вмѣстѣ съ силой Q, образовать пару, могущую противодѣйствовать парѣ, нами къ тѣлу извнѣ прилагаемой.

Приведенное объясненіе, опирающееся на предположеніе, будто результирующая R всѣхъ силъ упругости не проходитъ черезъ середину дуги соприкосновенія, т.-е. черезъ центръ цилиндра, представляетъ собою, въ сущности, лишь перифразировку этого самого предположенія; оно говоритъ намъ, что дѣло можно объяснить смѣщеніемъ равнодѣйствующей R съ вертикали MN, но не говоритъ самаго главнаго, — почему же происходитъ это смѣщеніе, такое странное и, въ сущности, необъяснимое.

Изложенному выше объясненію, которое, несмотря на всю его очевидную несостоятельность, можно встрѣтить почти во всѣхъ курсахъ механики, слѣдуетъ, во всякомъ случаѣ, предпочесть объясненіе, данное Осборномъ

Рейнольдсомъ и приводимое нами ниже; оно затрагиваетъ самую сущность вопроса и нуждается лишь въ аналитической обработкѣ для того, чтобы его можно было признать окончательнымъ и вполнѣ исчерпывающимъ поставленный вопросъ. Рейнольдсъ задался цѣлью доказать, что треніе качения можетъ быть сведено къ треню скольженія, и ходъ его разсужденій былъ при этомъ таковъ:

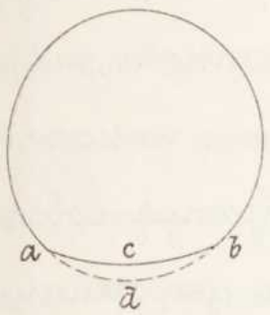
Допустимъ, что на горизонтальной плоскости лежитъ нѣкоторое твердое тѣло, ограниченное криволинейной поверхностью,—ради опредѣленности разсужденій, предположимъ, что тѣло это представляетъ собою круглый цилиндръ. Такъ какъ матеріалы цилиндра и плоскости абсолютной твердостью не отличаются, то въ мѣстѣ соприкосновенія поверхности будутъ вынуждены претерпѣть нѣкоторыя деформаціи,—цилиндръ здѣсь сплющится, а плоскость вдавится (фиг. 105), и нетрудно убѣдиться, что частицы каждой изъ соприкасающихся поверхностей, приходящіяся на этихъ деформированныхъ участкахъ, испытаютъ при деформированіи нѣкоторыя перемѣщенія одни относительно другихъ, а именно: поверхность цилиндра въ мѣстѣ соприкосновенія испытаетъ сжатіе, а поверхность плоскости – растяженіе.



Фиг. 105.

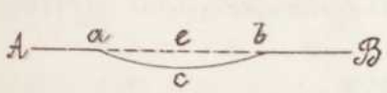
Дѣйствительно, поверхность цилиндра до момента соприкосновенія была строго цилиндрической; съ

наступленіемъ же соприкосновенія съ плоскостью, участокъ adb ея, вошедшій въ соприкосновеніе съ опорной поверхностью, нѣсколько сплющился, получивъ вмѣстѣ съ этимъ меньшую кривизну, и дуга adb перешла теперь въ дугу acb (фиг. 106), очевидно, болѣе короткую, чѣмъ дуга adb. Вслѣдствіе этого, частицы поверхности цилиндра, располагавшіяся раньше по дугѣ adb, теперь, по наступленіи соприкосновенія, расположились по дугѣ acb, болѣе короткой, — значитъ, по необходимости, сблизились, — иначе говоря, на этомъ участкѣ цилиндра произошло сжатіе матеріала его.



Фиг. 106.

Подобнымъ же образомъ нетрудно убѣдиться, что частицы плоскости, до того располагавшіеся на прямолинейномъ участкѣ aeb, теперь укладываются по бо́льшей дугѣ acb (фиг. 107); значитъ, онѣ обязаны теперь раздвинуться, что и указываетъ на то обстоятельство, что участокъ aeb плоскости претерпѣлъ теперь растяженіе.

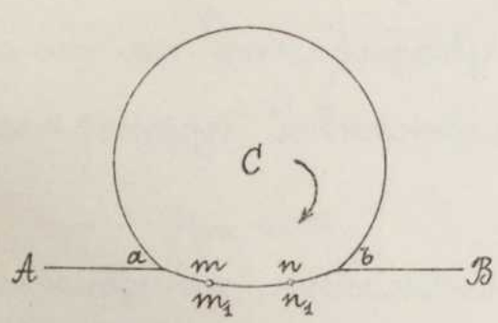


Фиг. 107.

Пока цилиндръ лежитъ на плоскости неподвижно, между силами упругости опорной поверхности и вѣсомъ цилиндра существуетъ равновѣсіе. Но предположимъ, что нѣкоторая пара выводитъ цилиндръ изъ состоянія покоя и заставляетъ его катиться по плоскости. Ясно, что въ такомъ случаѣ начнутъ подвергаться деформированію все новые и новые участки поверхностей цилиндра и плоскости, а одновременно съ этимъ части-

цы участковъ, претерпѣвшихъ деформацію, а теперь одинъ за другимъ возвращающихся въ свое начальное состояніе, станутъ уходить на свои прежнія мѣста, которыя они занимали передъ деформированіемъ ихъ участковъ, такъ что, въ концѣ концовъ, работы на выполненіе этихъ упругихъ деформацій отъ насъ не потребуется совсѣмъ, — ту работу, которую потребуетъ на свою деформацію одинъ участокъ, подвергающійся ей, отдастъ намъ равный ему другой, уже претерпѣвшій деформацію и вернувшійся въ начальное состояніе. Такимъ образомъ, затрата работы, всегда имѣющая мѣсто при каченіи, ни въ какой связи съ работой упругихъ деформацій не находится. Работа, затрачиваемая нами при каченіи, уходитъ, какъ это впервые подмѣтилъ Рейнольдсъ, на преодолѣніе работы тренія скольженія, имѣющаго здѣсь мѣсто. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Кусокъ mn поверхности цилиндра, выйдя изъ соприкосновенія съ плоскостью, непремѣнно долженъ будетъ удлиниться, ибо во время соприкосновенія онъ былъ сжатъ (фиг. 108). Съ другой стороны, совпадавшій съ нимъ во время соприкосновенія кусокъ плоскости m_1n_1, выйдя изъ соприкосновенія, непремѣнно сожмется, ибо во время соприкосновенія онъ былъ растянутъ. Значитъ, какъ только при каченіи цилиндра наступитъ такой моментъ, что элементы (mn, m_1n_1) выйдутъ изъ соприкосновенія, то какъ плоскость, такъ



Фиг. 108.

и цилиндръ, въ этихъ мѣстахъ ихъ будутъ стремиться принять свою прежнюю форму, т.-е. кусокъ mn цилиндра будетъ растягиваться, а кусокъ m_1n_1 плоскости — сжиматься, сокращаться, вслѣдствіе чего каждые два такихъ элемента, при возвращеніи своемъ въ первобытное состояніе, будутъ вынуждены другъ по другу скользить. То же самое придется повторить относительно всѣхъ другихъ элементовъ, находящихся въ данный моментъ въ соприкосновеніи.

Что касается элементовъ, предлежащихъ точкѣ b и имѣющихъ своевременно войти въ соприкосновеніе, то въ началѣ его одни изъ нихъ, — элементы поверхности цилиндра, — должны будутъ сокращаться, а другіе, — элементы плоскости, — растягиваться, что, понятно, опять поведетъ къ относительному скольженію ихъ другъ по другу.

Заключеніе очевидно: разъ при каченіи цилиндра происходитъ такое относительное скольженіе элементовъ поверхностей цилиндра и плоскости, то на выполненіе его, т.-е. на преодолѣніе сопротивленія этому скольженію, нужно затратить извѣстную работу, которую и придется, поэтому, къ катящемуся цилиндру постоянно подводить; этотъ-то подводъ и будетъ выполнять внѣшняя пара, нами къ цилиндру прилагаемая и его во вращеніе приводящая. Если работа этой пары, опредѣляемая, какъ извѣстно, произведеніемъ изъ момента ея на угловую скорость вращенія цилиндра, будетъ меньше работы сопротивленія

скольженію, то движенія не будетъ; при равенствѣ этихъ работъ можетъ имѣть мѣсто равномѣрное каченіе, и, наконецъ, при перевѣсѣ внѣшней работы будетъ имѣть ускоренное каченіе цилиндра

Если въ нѣкоторый моментъ внѣшняя пара, приводившая цилиндръ въ движеніе, свое дѣйствіе прекратитъ, то цилиндръ, по инерціи, свое каченіе продолжитъ, но будетъ катиться уже замедленно, и это каченіе его будетъ длиться до тѣхъ поръ, пока запасъ живой силы, бывшій у цилиндра въ моментъ прекращенія дѣйствія внѣшней пары, не израсходуется цѣликомъ на преодолѣніе работы трепія качепія и другихъ сопротивленій. Въ моментъ полнаго исчерпанія этого запаса живой силы цилиндръ прекратитъ свое каченіе и остановится.

Итакъ, трата работы, наблюдаемая при качепіи, обусловливается скольженіемъ элементовъ поверхности одного тѣла по поверхности другого,— таково заключеніе, къ которому пришелъ Рейнольдсъ. Заключеніе это, являясь по существу своему совершенно вѣрнымъ, могло бы привести къ ряду весьма важныхъ результатовъ, если бы его удалось выразить въ аналитической формѣ, перевести на языкъ анализа. Къ сожалѣнію, трудности аналитической обработки здѣсь столь велики, что въ настоящее время надѣяться на разрѣшеніе ихъ еще нельзя. И, такимъ образомъ, хотя картина явленій качепія представляется намъ совершенно ясно, но мы, тѣмъ не менѣе, не имѣемъ возможности изучить ни одного изъ факторовъ качепія, какъ то: распредѣленія

давлений по поверхности соприкосновения, величины работы сжатия на различных участках и т. д. Изследования Рейнольдса важны еще в том отношении, что могут служить отправной точкой для будущих аналитических изысканий по этому вопросу; они могут дать обоснование для некоторых общих практических соображений и изысканий, хотя подкрепление их числовыми данными пока является невозможным.

Практика, однако, с таким положением дела считаться не может и требует от теории представления какого-либо критерия для оценки работы качения, могущей совершиться при данных условиях, — и такой критерий, весьма, впрочем, несовершенный и грубый, был дан уже довольно давно и с тех пор успел войти во всеобщее употребление. Сущность его заключается в следующем:

Учет работы качения и величины сопротивления его принято производить применительно к первому из приведенных нами толкований: сопротивление это оценивается известным моментом M, всегда противодействующим качению и, значит, действующим всегда в сторону, обратную смыслу качения. Этот момент M является, несомненно, функцией и нагрузки Q на цилиндр или, скажем точнее, силы Q, нормальной к поверхности качения, так что

$$M = \varphi(Q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

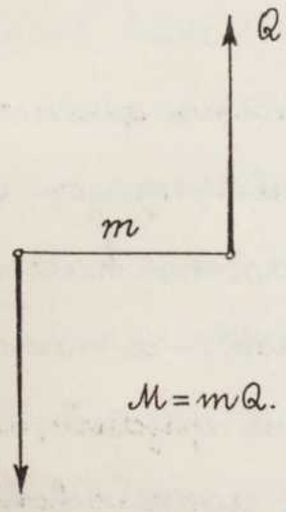
По аналогии с учетом сопротивления скольжению, где сила трения F, оценивающая собою это сопроти-

вленіе, принимается пропорціональной первой степени нагрузки:

$$F = fQ,$$

такъ что коэффиціентъ f представляетъ собою постоянное отвлеченное число,— моментъ M сопротивленія качению принимается пропорціональнымъ также первой степени нагрузки:

$$M = mQ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



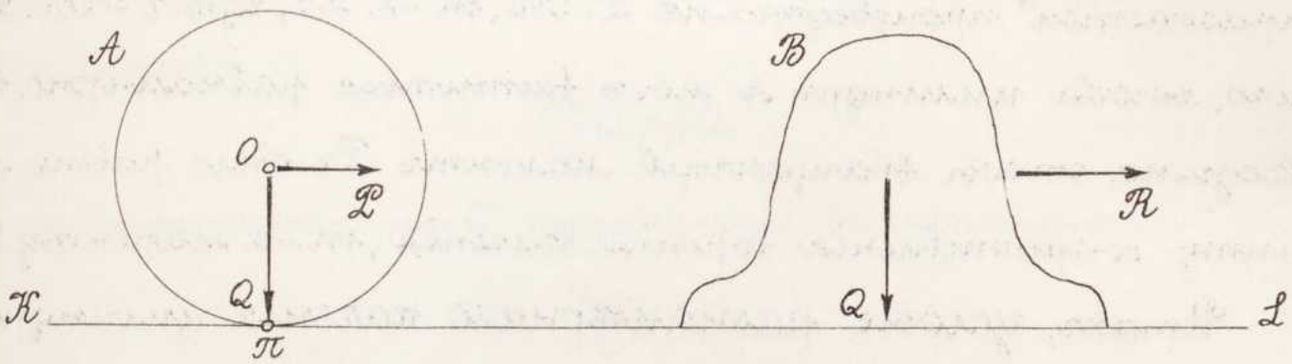
Фиг. 109.

Коэффиціентъ пропорціональности m представляетъ собою, по предположенію, нѣкоторое постоянное число, но это будетъ уже не отвлеченное число, какъ это было въ случаѣ учета скольженія, а число именованное, ибо этотъ коэффиціентъ m опредѣляетъ собою величину (длину) плеча той пары, которая, будучи составлена изъ двухъ силъ Q, имѣетъ моментъ, равный M (фиг. 109).

Въ виду этого, коэффиціентъ m, называемый коэффиціентомъ тренія качения, всегда долженъ быть задаваемъ въ какихъ-либо опредѣленныхъ единицахъ длины,— сантиметрахъ, дюймахъ и т. д.;— а никакъ не простымъ отвлеченнымъ числомъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ случаѣ скольженія. Измѣреніе коэффиціента m есть $[L]^1$, въ то время какъ f есть величина нулевого измѣренія.....$[L]^0$. Но разъ эти коэффиціенты представляютъ собою величины различныхъ измѣреній, то прямо сравнивать численныя значенія ихъ между собою невозможно, и по абсолютнымъ величинамъ ихъ

коэффиціентовъ еще нельзя судить о томъ, какое движеніе, —каченіе или скольженіе,— выгоднѣе осуществить въ томъ или другомъ данномъ случаѣ, и вопросъ о преимуществахъ того или другого трѣнія можно разрѣшить такъ:

Предположимъ, что нѣкоторое тѣло, вѣсомъ Q, имѣетъ быть перемѣщаемо по плоскости KL. Тѣлу этому



Фиг. 110. Фиг. 111.

можно дать любую внѣшнюю форму,—его можно выполнить въ видѣ цилиндра A радіуса $O\pi = r$ (фиг. 110), что удобно для качанія, или въ видѣ тѣла B съ болѣе или менѣе развитой опорной поверхностью, что удобно для скольженія (фиг. 111). Подсчитаемъ теперь и сравнимъ между собою тѣ силы P и R, которыя, будучи приложены къ этимъ двумъ формамъ даннаго тѣла, могутъ дать равномѣрное движеніе его, т.-е. равномѣрное каченіе въ случаѣ цилиндра A и равномѣрное скольженіе въ случаѣ формы B.

Сравненіе силъ P и R, а не работъ ихъ, т.-е. не работъ трѣнія того и другого видовъ, является въ данномъ случаѣ вполнѣ закономѣрнымъ, ибо на одномъ и томъ же пути s работы этихъ силъ, а значитъ, и равныя и противоположныя имъ работы трѣнія, пропорціональны величинамъ силъ, ибо выражаются черезъ P_s и R_s. Стало быть, какъ равенство $P_s = R_s$, такъ и неравенства $P_s \leqq R_s$, сводятся къ равенству $P = R$ или къ неравенствамъ $P \leqq R$, т.-е. къ соотношеніямъ того же типа.

Качение цилиндра A сводится, как известно, к ряду элементарных поворотов его вокруг смежных друг друга полюсов мгновенного вращения π (фиг. 110). Поэтому, приложив силу P к оси цилиндра (ее можно приложить и в любой другой точке цилиндра,— см. ниже), получим, что момент силы P, имеющий вращать (катить) цилиндр, выражается произведением P. Oπ, т.-е. Pr, где r = Oπ. Для того, чтобы цилиндр A мог катиться равномерно, необходимо, чтобы вращающий момент Pr был равен моменту сопротивления трения качения, т.-е. моменту mQ.

Итак, условие равномерного качения цилиндра A пишется в виде:

$$Pr = mQ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

откуда получаем величину горизонтальной силы P, приложенной к оси цилиндра и могущей дать равномерное качение его:

$$P = \frac{m}{r} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Переходим теперь к телу B. Для равномерного скольжения его необходимо, чтобы горизонтальная сила R была равна развивающейся здесь силе трения fQ, так что условие равномерного скольжения тела B имеет вид

$$R = fQ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Уравнение это дает в то же время выражение горизонтальной силы R, могущей вызвать равномерное скольжение тела, весом в Q. Сопоставим теперь полученные выше уравнения (3) и (4).

Если

$$P > R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

то это значитъ, что качение цилиндра A потребуетъ приложенія большей силы, чѣмъ скольженіе тѣла B. Иными словами, въ этомъ случаѣ скольженіе выгоднѣе качения.

Соотношеніе (5) можетъ быть представлено въ нѣсколько иномъ видѣ, болѣе удобномъ для пользованія: подставляя вмѣсто P и R ихъ выраженія изъ (3) и (4), получаемъ неравенство

$$\frac{m}{r}Q > fQ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

послѣ сокращенія на Q переходящее въ неравенство

$$\frac{m}{r} > f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

выражающее преимущество скольженія. — Идемъ дальше.

Если

$$P = R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

то это значитъ, что качение цилиндра потребуетъ приложенія къ нему такой же силы, какая потребуется для равномѣрнаго скольженія его. Пользуясь выраженіями (3) и (4), можемъ этому равенству (7) дать видъ

$$\frac{m}{r} = f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Таково условіе эквивалентности скольженія и качения.

Если, наконецъ,

$$P < R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

такъ что

$$\frac{m}{r} < f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

то для качения понадобится меньшая сила, чѣмъ для скольженія, такъ что неравенства (9) и (10) выражаютъ собою преимущество качения.

При всѣхъ этихъ разсужденіяхъ необходимо помнить, что они были проведены въ томъ предположеніи, что сила P, дѣйствующая на цилиндръ, приложена въ центрѣ O поперечнаго его сѣченія (круга). Если точка приложенія силы P лежитъ не въ центрѣ O, а въ какомъ-либо другомъ мѣстѣ сѣченія, то результаты будутъ имѣть нѣсколько другой видъ, вполнѣ, впрочемъ, аналогичный полученнымъ выше, — подробно объ этомъ будетъ сказано ниже.

Вопросъ о преимуществахъ того или иного способа перемѣщенія тѣла, разобранный выше и детально освѣщенный формулами (2)–(10), можно поставить нѣсколько иначе, сформулировавъ его такъ:

Данъ цилиндръ радіуса r и вѣса Q, имѣющій перемѣщаться по плоскости KL подъ воздѣйствіемъ силы P, параллельной этой плоскости и приложенной въ центрѣ O. Спрашивается, какъ будетъ двигаться этотъ цилиндръ, — катясь или скользя, — и каковы условія того или другого движенія, предполагая, что оба эти движенія имѣютъ совершаться равномѣрно.

Рѣшеніе этого вопроса совершенно тождественно съ приведеннымъ выше. Цилиндръ, какъ и всякое другое тѣло, можетъ скользить, но онъ можетъ еще также и катиться, чего не могутъ выполнять многія другія тѣла. Поэтому примѣнительно къ цилиндру можемъ написать, что сопротивленіе скольженію его выразится силой Qf, и сила P, для возможности равномѣрнаго скольженія, должна быть равна этому сопротивленію Qf:

$$P = Qf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Условіе равномѣрнаго качения нашего цилиндра, примѣнительно къ даннымъ условіямъ (фиг. 110), напишется такъ:

$$Pr = mQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Теперь очевидно, что если сила P неспособна вызвать качение цилиндра, а можетъ лишь заставить его скользить, то должны удовлетворяться соотношенія:

$$P = Qf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

и

$$mQ > Pr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Соотношенія эти могутъ быть совмѣщены въ одно, имѣющее видъ:

$$m > fr$$

или

$$\frac{m}{r} > f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

— получилось то же соотношеніе (6).

Если сила P можетъ катить цилиндръ, но заставить скользить его не можетъ, то будутъ удовлетворяться неравенства

$$P < Qf$$

и

$$Pr = mQ,$$

откуда получаемъ объединяющее ихъ неравенство

$$\frac{m}{r} < f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

— прежнее соотношеніе (10).

Если, наконецъ, сила P съ одинаковымъ успѣхомъ можетъ выполнять какъ качение цилиндра, такъ и скольженіе его, то будутъ одновременно удовлетворяться равенства:

$$\mathfrak{P} = Qf,$$

$$\mathfrak{P}r = mQ,$$

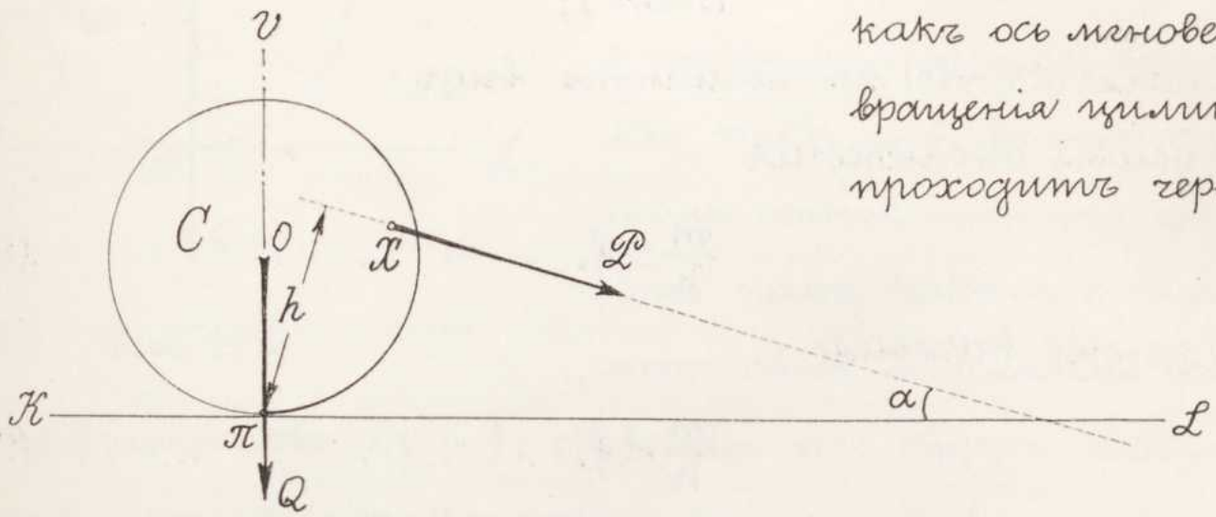
т.-е. равенство

$$\frac{m}{r} = f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

Соотношения (6'), (8') и (10') въ томъ отношеніи, что самымъ очевиднымъ образомъ выясняютъ необоснованность общераспространеннаго мнѣнія, будто круглое тѣло,—круглый цилиндръ,—будетъ всегда катиться, разъ на него будетъ дѣйствовать какая бы то ни было сила, гдѣ-угодно въ сѣченіи C его приложенная. Оказывается, что это вовсе не такъ: цилиндръ, кромѣ качанія,—рода движенія, преимущественно присущаго ему по его геометрическимъ свойствамъ, можетъ испытывать еще и скольженіе,—движеніе, какъ видимъ, болѣе общаго характера. При данномъ характерѣ нагрузки цилиндра силой $\mathfrak{P}$,—мы прилагали ее все время въ центрѣ O поперечнаго сѣченія,—возможность того или другого движенія всецѣло зависитъ отъ соотношенія между величинами m/r и f: каждый разъ мы будемъ получать то движеніе, къ которому относится коэффиціентъ въ меньшей части неравенствъ (6') и (10'). Продолжимъ теперь наши изслѣдованія дальше.

Прежде всего, слѣдуетъ отмѣтить, что сила $\mathfrak{P}$, имѣющая приводить цилиндръ въ движеніе, далеко не всегда прилагается въ центрѣ поперечнаго сѣченія C цилиндра, какъ это имѣло мѣсто въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 110. Сила $\mathfrak{P}$ можетъ быть приложена и въ какой-либо другой точкѣ этого сѣченія, и общій случай воздѣйствія этой силы на цилиндръ мы теперь и разберемъ.

Пусть сила P, лежащая въ плоскости съченія C, направлена не параллельно плоскости $K\mathfrak{L}$, какъ это было предположено выше, а подъ угломъ α къ ней, отличнымъ отъ нуля; точка X приложенія этой силы пусть, при этомъ, лежитъ внѣ вертикальнаго діаметра πOV (фиг. 112). Такъ



какъ ось мгновеннаго вращенія цилиндра проходитъ черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія π, то, опустивъ изъ этой точки π перпендикуляръ h на направленіе силы P, найдемъ, что моментъ, имѣющій вращать цилиндръ, равенъ Ph, и условіе равномѣрнаго вращенія цилиндра этой силой P напишется такъ:

Фиг. 112.

$$Ph = mQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Съ другой стороны, условіе равномѣрнаго скольженія выразится уравненіемъ

$$fQ = P\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Поэтому заключаемъ, что скольженіе будетъ имѣть мѣсто при

$$\frac{m\cos\alpha}{h} > f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

каченіе – при

$$\frac{m\cos\alpha}{h} < f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

и, наконецъ, оба эти вида движенія будутъ равновозможны

при

$$\frac{m\cos\alpha}{h}=f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Если сила P направлена параллельно KL, такъ что

$$\alpha=0$$

и

$$\cos\alpha=1,$$

то условія (13)–(15) принимаютъ видъ:

1) условіе скольженія

$$\frac{m}{h}>f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

2) условіе качанія

$$\frac{m}{h}<f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

и 3) условіе эквивалентности этихъ двухъ родовъ движенія

$$\frac{m}{h}=f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Если сила P направлена параллельно KL, а $h=r$, т.-е. сила P приложена въ центръ съченія, какъ это изображено на фиг. 110, то мы, подставляя въ формулахъ (16)-(18) r вмѣсто h, получимъ найденныя уже выше формулы (6), (8) и (10).

Если, какъ это часто случается на практикѣ,

$$h=2r,$$

—этотъ случай изображенъ на фиг. 113,— то

1) качаніе получится при

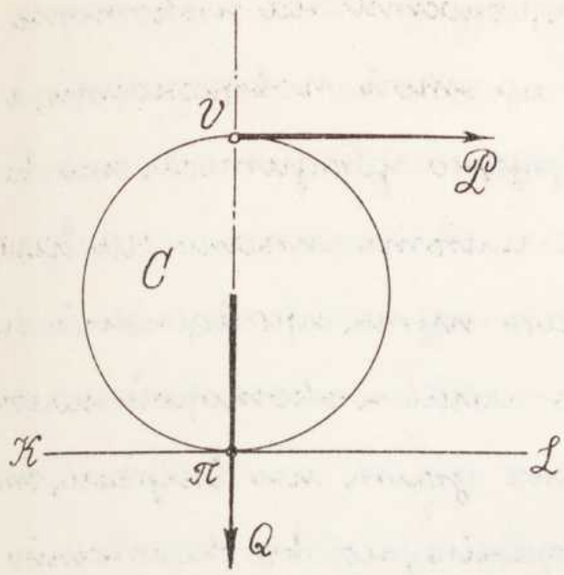
$$\frac{m}{2r}<f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

2) скольженіе – при

$$\frac{m}{2r}>f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

и 3) оба рода движенія будутъ равновозможны при

$$\frac{m}{2r} = f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$



Фиг. 113.

Вышеприведенныя выраженія, устанавливающія зависимость вида движенія цилиндра отъ соотношенія между величинами m/h и f, важны еще въ томъ отношеніи, что указываютъ намъ, какимъ образомъ можетъ быть выполняемо сравненіе коэффиціентовъ m и f; сравненіе это, будучи невозможнымъ путемъ непосредственнаго сопоставленія величинъ m и f, относящихся къ данному случаю, становится возможнымъ путемъ обращенія именованной величины m въ отвлеченную путемъ дѣленія ея на плечо h силы, имѣющей двигать цилиндръ, относительно полюса мгновеннаго вращенія π. Полученное такимъ образомъ отвлеченное число m/h можно затѣмъ сравнивать съ коэффиціентомъ f, — меньшее изъ этихъ чиселъ и укажетъ на движеніе, могущее имѣть здѣсь мѣсто. Какъ видимъ, подобныя сравненія должны быть выполняемы отдѣльно для каждаго даннаго случая.

Сравненіе работъ, затрачиваемыхъ при каченіи тѣла и, затѣмъ, при скольженіи его, показываетъ, что въ обычныхъ условіяхъ движенія работа тренія каченія меньше работы тренія скольженія. Съ точки зрѣнія Рейнольдса, такое преимущество каченія является вполнѣ понятнымъ.

Дѣйствительно, предположимъ, что нѣкоторое круглое тѣло продвинулось по опорной поверхности на нѣкоторое разстояніе s, одинъ разъ скользя по этой поверхности, а другой разъ катясь по ней. Не трудно убѣдиться, что въ первомъ случаѣ скольженіе будетъ имѣть мѣсто на всемъ этомъ пути s, а во второмъ случаѣ путь, пройденный чистымъ скольженіемъ, будетъ равенъ лишь нѣкоторой малой долѣ всего этого пути s. На самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что каченіе сводится также къ скольженію, но къ скольженію поверхностей, деформированныхъ вслѣдствіе нажатія: такъ, за время прохожденія каченіемъ пути aeb (фиг. 107), скольженіе будетъ имѣть мѣсто, говоря суммарно, лишь на пространствѣ $[(adb - acb) + (acb - aeb)] = adb - aeb$, а никакъ не на всемъ участкѣ aeb. А такъ указанная разность, при сколь-нибудь твердыхъ матеріалахъ тѣла и поверхности, оказывается всегда очень малой, то будетъ весьма малымъ какъ скольженіе, такъ и работа, потребная на него.

Таковы соображенія, скрыто лежащія въ основаніи общераспространеннаго мнѣнія о преимуществахъ качества передъ скольженіемъ, — мнѣнія, выражаемаго лаконически въ формѣ, по существу, неточной и неправильной: обыкновенно говорятъ, что «треніе качества меньше треніе скольженія». Вышеприведенныя соображенія достаточно ясно показываютъ, какъ нужно понимать такое утвержденіе, — дѣло здѣсь не въ треніи, а въ работѣ треніе.

Непосредственный опытъ уже съ незапамятныхъ временъ указалъ людямъ на преимущественную выгодность качества, и при перемѣщеніи тяжести издавна

пользовались катками, подкладывая ихъ подъ грузы или подъ платформы, эти грузы несущія; пользуемся такими катками, придавая имъ различныя внѣшнія формы, и мы, — подшипники и подпятники на шарикахъ, платформы вращающихся круговъ на коническихъ роликахъ и другія тому подобныя детали пользуются въ наше время повсемѣстнымъ и вполнѣ заслуженнымъ распространеніемъ.

Рядъ соображеній, приведенныхъ выше, позволяетъ намъ разобраться во всѣхъ вопросахъ, гдѣ приходится сталкиваться съ треніемъ качанія. Необходимо помнить всегда лишь одно, что

> качаніе представляетъ собою непрерывный рядъ поворотовъ тѣла около мгновенныхъ осей вращенія, лежащихъ на поверхности соприкосновенія,

въ виду чего для возможности качанія необходимо обезпечить возможность вращенія (поворота) тѣла около каждой такой оси; иными словами, необходимо, чтобы катящееся тѣло имѣло возможность обезпечить неподвижность каждой очередной своей мгновенной оси вращенія. Требованіе это сводится, иначе говоря, къ тому, чтобы треніе между соприкасающимися поверхностями было настолько велико, чтобы катящееся тѣло, подведя такую очередную ось — прямую въ совпаденіе съ опорной поверхностью, могло, благодаря тренію, получить и обезпечить неподвижность этой прямой за все время т своего вращенія около нея. Если

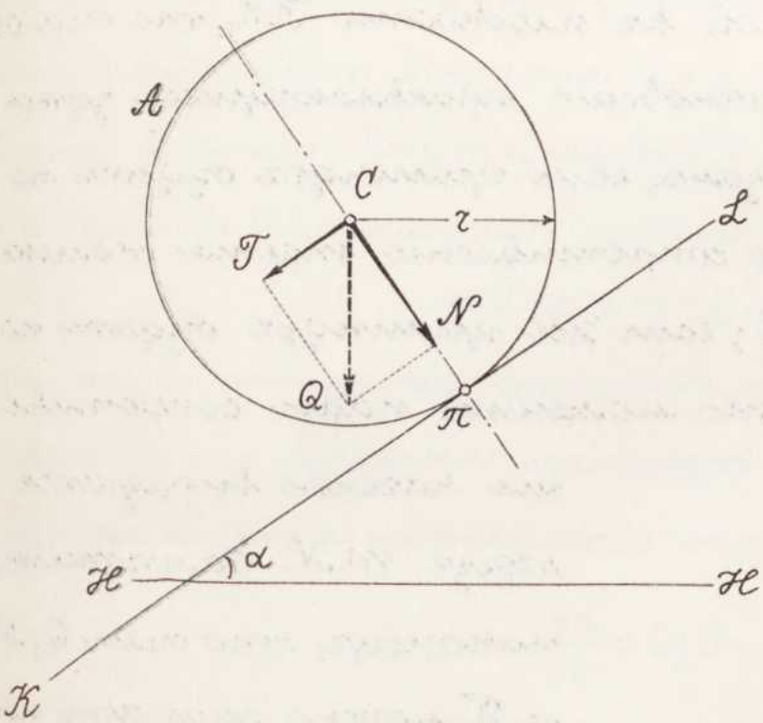
же треніе окажется слишкомъ малымъ для того, чтобы указанная прямая могла задержаться на опорной поверхности, то каченіе имѣть мѣсто не сможетъ.

Этими замѣчаніями мы закончимъ изложеніе общихъ соображеній относительно треніа каченіа и перейдемъ къ разсмотрѣнію ряда наиболѣе важныхъ въ практическомъ отношеніи примѣровъ и задачъ, въ которыхъ приходится сталкиваться съ сопротивленіями треніа обоихъ видовъ и учитывать ихъ совмѣстно.

§13. Движеніе цилиндра по наклонной плоскости. Движеніе телѣжекъ подъ воздѣйствіемъ силъ внѣшнихъ и силъ внутреннихъ. Случай буксованіа.

Разберемъ теперь нѣсколько важнѣйшихъ задачъ на примѣненіе полученныхъ въ предыдущемъ параграфѣ общихъ правилъ и формулъ, и прежде всего разберемъ задачу о движеніи тяжелаго цилиндра по наклонной плоскости подъ воздѣйствіемъ силы тяжести, т.-е. собственнаго вѣса его. Обычно предполагается, что разъ цилиндръ, будучи положенъ на горизонтальную плоскость, предоставляется затѣмъ самому себѣ, то, каковъ бы ни былъ матеріалъ и размѣры его, а онъ сейчасъ же непремѣнно начнетъ съ этой плоскости скатываться, — ни скольженіе его по плоскости, ни покой его на ней возможными вообще не предполагаются. Посмотримъ теперь, какъ дѣло это можетъ обстоять въ дѣйствительности.

Пусть нѣкоторый круглый цилиндръ A радіуса r и вѣса Q (фиг. 114) помѣщенъ на наклонной плоскости KL, составляющей съ горизонтомъ уголъ α, и предоставляется затѣмъ самому себѣ, такъ что онъ оказывается находящимся подъ воздѣйствіемъ вертикальной силы Q,—вѣса его,—приложенной въ центрѣ тяжести C его, т.-е. на серединѣ оси его. Положимъ, что поперечное сѣченіе цилиндра, проходящее черезъ центръ тяжести C, совпадаетъ съ плоскостью чертежа, и ось цилиндра пусть расположилась горизонтально, такъ что цилиндръ касается плоскости KL также по горизонтальной прямой, проходящей черезъ точку касанія π и представляющей собою ось мгновеннаго вращенія системы цилиндра въ разсматриваемый моментъ движенія.



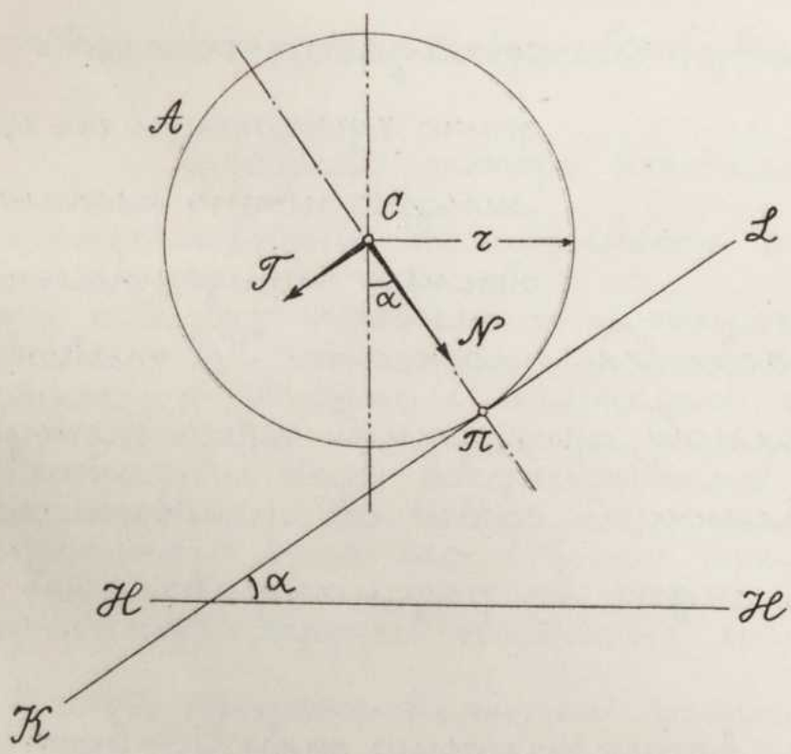
Фиг. 114.

Разложимъ теперь вертикальную силу Q,—вѣсъ цилиндра,—на силу T, параллельную плоскости KL, и на силу N, этой плоскости перпендикулярную. Связь этихъ силъ съ силой Q устанавливается соотношеніями:

$$T = Q \sin\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$N = Q \cos\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Такимъ образомъ, если цилиндръ A, положенный, какъ указано, на плоскость KL, будетъ, затѣмъ, предоставленъ самъ себѣ, то единственной активной внѣшней силой, могущей не только вызвать движеніе цилиндра, но и поддерживать его дальше, является слагающая T силы тяжести, параллельная плоскости KL. Что же касается силы N, перпендикулярной къ плоскости KL, то она обусловливаетъ собою возникновеніе проявляющихся здѣсь треній, и, такимъ образомъ, если цилиндръ будетъ по плоскости скользить, то сопротивленіе трепія скольженія выразится силой Nf; если же цилиндръ будетъ по плоскости катиться, то моментъ пары сопротивленія качепію выразится черезъ mN. Замѣтимъ, наконецъ, что силы Q, N и T можно считать приложенными въ центрѣ тяжести C цилиндра, совпадающемъ съ геометрическимъ центромъ взятаго нами кругового сѣченія.



Фиг. 115.

Отбросимъ теперь силу Q, замѣнивъ ее силами T и N, ея слагающими (фиг. 115). Нетрудно усмотрѣть, что мы получили здѣсь основной случай движенія, уже разобранный выше и изображенный на фиг. 110: роль силы P, параллельной опорной поверхности

и приложенной въ центрѣ сѣченія, играетъ здѣсь сила T, а роль силы Q, нормальной къ той же опорной поверхности,— сила N.

Очевидно, что каченіе цилиндра будетъ возможно при условіи

$$mN < Tr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ Tr есть моментъ вращающей силы T относительно полюса мгновеннаго вращенія π, а mN — моментъ сопротивленія качению. Подставляя въ (3) вмѣсто T и N ихъ выраженія изъ (1) и (2), находимъ соотношеніе

$$mQ\cos\alpha < rQ\sin\alpha,$$

что, послѣ очевидныхъ упрощеній, и даетъ, наконецъ, условіе возможности качения цилиндра по наклонной плоскости подъ дѣйствіемъ собственнаго вѣса его, въ видѣ соотношенія

$$\frac{m}{r} < \operatorname{tg}\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Нетрудно вывести теперь и условіе скольженія цилиндра подъ воздѣйствіемъ силы тяжести. Очевидно, что оно будетъ имѣть мѣсто

1) при условіи невозможности качения, имѣющемъ, въ силу (4), видъ

$$\frac{m}{r} > \operatorname{tg}\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

и 2) при непремѣнномъ условіи того, чтобы плоскость K_2 не была самотормозящей, т.-е. чтобы было

$$\operatorname{tg}\alpha > f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

иначе, чтобы

$$\alpha > \varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

гдѣ φ есть уголъ трения.

Сочетая вмѣстѣ условія (5) и (6), получаемъ условіе скольженія цилиндра по наклонной плоскости подъ воздѣйствіемъ силы тяжести, въ видѣ ряда неравенствъ

$$\frac{m}{r} > \operatorname{tg}\alpha > f,$$

сводящагося, очевидно, къ неравенству

$$\frac{m}{r} > f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Условіе покоя изобразится соотношеніями

$$f > \frac{m}{r} > \operatorname{tg}\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Имѣя въ виду, что при данныхъ условіяхъ, каковыми въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ являются матеріалы цилиндра и плоскости и уголъ этой послѣдней съ горизонтомъ, зависящимъ отъ насъ является лишь выборъ того или другого радіуса r, мы всегда можемъ обезпечить себѣ, по желанію, или каченіе, или скольженіе. Предположимъ, что плоскость несамотормозящa ($\alpha > \varphi$), такъ что цилиндръ можетъ по ней какъ скользить, такъ и катиться. Если онъ имѣетъ по этой плоскости катиться, то, для обезпеченія этого, радіусъ r надо подобрать настолько большимъ, чтобы удовлетворилось условіе (4): $m/r < f$. Если же цилиндръ долженъ по плоскости скользить, то должно быть удовлетворено условіе (8): $m/r > f$. Въ этомъ случаѣ радіусъ r выходитъ обычно очень малымъ. Такъ, пусть для данныхъ матеріаловъ $m = 0{,}1$ см и $f = 0{,}2$; тогда оказывается, что r долженъ быть $< 0{,}5$ см.; при этомъ условіи цилиндръ, будучи положенъ на плоскость, скатиться по ней не сможетъ; онъ сможетъ только съ нея сползти, если только уголъ α не окажется меньше угла трения φ.

Перейдемъ теперь къ болѣе сложнымъ задачамъ, при чемъ ограничимся лишь тѣми, въ которыхъ приходится имѣть дѣло съ катками, примѣняемыми при перемѣщеніи грузовъ, и, прежде всего, разберемъ одну изъ древнѣйшихъ формъ транспорта грузовъ при помощи платформы на каткахъ, какъ это изображено на фиг. 116.

Предположимъ, такимъ образомъ, что на n катковъ одинаковаго размѣра, т.-е. съ однимъ и тѣмъ же радіусомъ r поперечнаго сѣченія, лежащихъ на горизонтальной плоскости KL, положена платформа AB, несущая на себѣ грузъ Q. Спрашивается, какую горизонтальную силу H нужно приложить къ платформѣ, чтобы она стала двигаться равномѣрно?

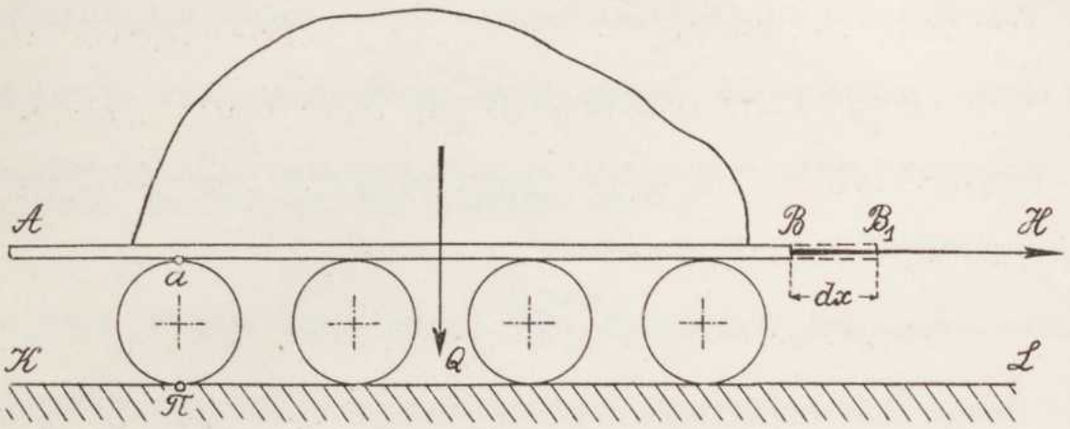
Непремѣннымъ условіемъ этой равномѣрности является то, чтобы за какой-либо промежутокъ времени dt работа влекущей силы H была равна совершенной за то же время dt работѣ всѣхъ сопротивленій, каковыми являются здѣсь сопротивленія тренія качения катковъ какъ по плоскости KL, такъ и по перемѣщающейся относительно нихъ платформѣ AB. Напишемъ уравненіе элементарныхъ работъ, выполненныхъ за безконечно-малое время dt всѣми участвующими здѣсь силами.

Пусть за время dt платформа передвинулась на dx. Элементарная работа влекущей силы H, — обозначимъ ее черезъ ΔL_{ye}, — выразится потому такъ:

$$\Delta L_{ye} = H\,dx. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Перейдемъ теперь къ подсчету элементарныхъ работъ сопротивленій. Обозначимъ коэффиціентъ тренія качения для катковъ по плоскости KL черезъ m_1, а для катковъ и

платформы AB — черезъ m_2. Матеріалы плоскости и платформы могутъ быть одинаковы, но могутъ быть и различны;



Фиг. 116.

ради общности выводовъ, мы беремъ именно послѣдній случай. Согласно основнымъ положеніямъ теоріи качения, моменты сопротивленія качению выразятся здѣсь такъ:

1) для катковъ и плоскости KL

$$M_1 = m_1 Q, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

2) для катковъ и платформы AB

$$M_2 = m_2 Q, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

при чемъ оба момента берутся суммарно, учитывая сопротивленіе качению сразу всѣхъ n катковъ, здѣсь участвующихъ; иначе говоря, мы полагаемъ, что каждый изъ катковъ нагруженъ грузомъ Q/n, вслѣдствіе чего и окажется, что моментъ сопротивленія качению каждаго катка по плоскости KL равенъ $m_1 \cdot Q/n$, а по платформѣ AB — равенъ $m_2 Q/n$. Для всѣхъ n катковъ получимъ выраженія, приведенныя выше.

Такимъ образомъ, общій моментъ сопротивленія качению всѣхъ n катковъ, M, выразится суммой моментовъ M_1 и M_2, такъ что можно написать, что

$$M = M_1 + M_2 = (m_1 + m_2) Q. \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Элементарная работа сопротивлений качению выразится, такимъ образомъ, черезъ

$$\Delta \mathcal{L}_w = M\omega dt = (m_1 + m_2) Q \omega dt, \quad . \quad . \quad . \quad .(\varepsilon)$$

гдѣ ω есть угловая скорость вращенія катковъ во взятый моментъ, въ то же время представляющая собою мгновенную угловую скорость вращенія катковъ около ихъ полюсовъ мгновеннаго вращенія. Это обстоятельство даетъ возможность установить связь между элементарнымъ перемѣщеніемъ платформы dx, угловой скоростью ω и радіусомъ катка r.

Дѣло въ томъ, что центръ (ось) мгновеннаго вращенія каждаго катка лежитъ въ точкѣ π касанія его съ плоскостью KL. Такъ какъ каченіе катка за время dt сводится къ повороту его вокругъ полюса π съ угловой скоростью ω, то точка a касанія катка съ платформой AB за это время dt продвинется на разстояніе $\omega . 2r . dt$, а такъ какъ это перемѣщеніе точки a равно, понятно, перемѣщенію платформы dx, ибо платформа относительно катковъ катится, но не скользитъ, то мы и можемъ написать, что

$$dx = \omega . 2r\, dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .(\varkappa)$$

Въ виду этого выраженіе (α) принимаетъ видъ

$$\Delta \mathcal{L}_{\varkappa} = \mathcal{H}\, dx = \mathcal{H}\omega . 2r\, dt. \quad . \quad . \quad . \quad .(\eta)$$

Мы уже указывали, что, для возможности равномѣрнаго движенія системы необходимо, чтобы за каждый промежутокъ времени работа движущей силы была равна работѣ сопротивленій. Примѣнительно къ данному случаю это ведетъ къ равенству

$$\Delta \mathfrak{L}_{\mathcal{H}} = \Delta \mathfrak{L}_{w},$$

что, въ виду (η) и (ε), приводитъ къ уравненію

$$\mathcal{H}\omega . 2r\,dt = (m_1 + m_2) Q\omega\,dt.$$

Сокращая на $\omega\,dt$, находимъ выраженіе силы $\mathcal{H}$, дающей равномѣрное перемѣщеніе груза Q:

$$\mathcal{H} = \frac{m_1 + m_2}{2r} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Мѣняя матеріалы платформы, но оставляя тѣ же катки и плоскость $K\mathfrak{L}$, равно какъ тотъ же грузъ Q, и находя, затѣмъ, соотвѣтствующія $\mathcal{H}$, дающія равномѣрное движеніе платформы, можемъ опредѣлить сначала коэффиціентъ m_1, а затѣмъ и коэффиціентъ m_2. Это — обычный путь для опредѣленія этихъ коэффиціентовъ.

Вѣсъ платформы можно включить въ вѣсъ груза Q. Что касается катковъ, то въ вышеприведенномъ расчетѣ вѣса ихъ мы во вниманіе не приняли, считая его ничтожно малымъ сравнительно съ Q. Если бы, однако, этого сдѣлать было нельзя, по значительности вѣса катковъ, то учетъ горизонтальной силы, могущей равномѣрно тащить грузъ, можно было бы выполнить такъ:

Пусть всѣ n катковъ имѣютъ одинаковый вѣсъ и пусть вѣсъ каждаго катка равенъ q, такъ что общій вѣсъ ихъ есть nq. Наличность этой вертикальной силы nq сказывается увеличеніемъ момента трепія качепія катковъ по плоскости $K\mathfrak{L}$, но, разумѣется, нисколько не отзывается на моментѣ сопротивленія качепію этихъ катковъ относительно платформы AB; такимъ образомъ, наличность катковъ вызываетъ появленіе новаго добавочнаго мо-

мента сопротивления качению, равного $m_1 . nq$. Въ силу этого оказывается, что полный моментъ M_1' сопротивления качению катковъ по плоскости $K\mathfrak{L}$, принимая во вниманіе уже и вѣсъ катковъ, изобразится такъ:

$$M_1' = m_1 Q + m_1 . nq = m_1 (Q + nq).$$

Въ то же время моментъ сопротивления качению катковъ относительно платформы AB останется, попрежнему, равнымъ $m_2 Q$, — выше мы обозначили его черезъ M_2, такъ что

$$M_2 = m_2 Q.$$

Вслѣдствіе этого полный моментъ сопротивления качению, M', выразится теперь такъ:

$$M' = M_1' + M_2 = (m_1 + m_2) Q + m_1 nq.$$

Элементарная работа этого момента M' напишется такъ:

$$\Delta \mathfrak{L}_w' = M' \omega dt,$$

послѣ чего уравненіе возможныхъ работъ приметъ видъ

$$\mathfrak{H}' . 2r . \omega dt = M' \omega dt,$$

откуда получаемъ выраженіе искомой горизонтальной силы $\mathfrak{H}'$:

$$\mathfrak{H}' = \frac{M'}{2r}.$$

Подставляя вмѣсто M' его выраженіе, написанное выше, получаемъ, что

$$\mathfrak{H}' = \frac{m_1 + m_2}{2r} Q + \frac{m_1 nq}{2r} = \mathfrak{H} + \frac{m_1}{2r} nq. \quad . \quad . \quad (11)$$

Поправка силы $\mathfrak{H}$ на вѣсъ nq катковъ равна, какъ и слѣдовало ожидать, величинѣ $m_1 nq / 2r$.

По поводу уравненія (10) можно замѣтить еще слѣдующее:

Если бы грузъ Q пришлось перемѣщать по плоскости

путемъ простого скольженія, то нужная для этого горизонтальная сила h выразилась бы такъ:

$$h = fQ, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\vartheta)$$

гдѣ f есть коэффиціентъ тренія скольженія матеріала груза по плоскости KL. Если бы теперь оказалось, что $h < H$, т.-е. то

$$f < \frac{m_1 + m_2}{2r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

то, очевидно, примѣненіе катковъ было бы невыгоднымъ, ибо для перемѣщенія груза скольженіемъ потребовалась бы меньшая сила, чѣмъ при наличности катковъ.

Если оказывается, что $h = H$, т.-е. что

$$f = \frac{m_1 + m_2}{2r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

то, въ виду равенства усилій h и H, оба рода движенія были бы эквивалентны.

Если бы, наконецъ, получилось, что $h > H$, т.-е. что

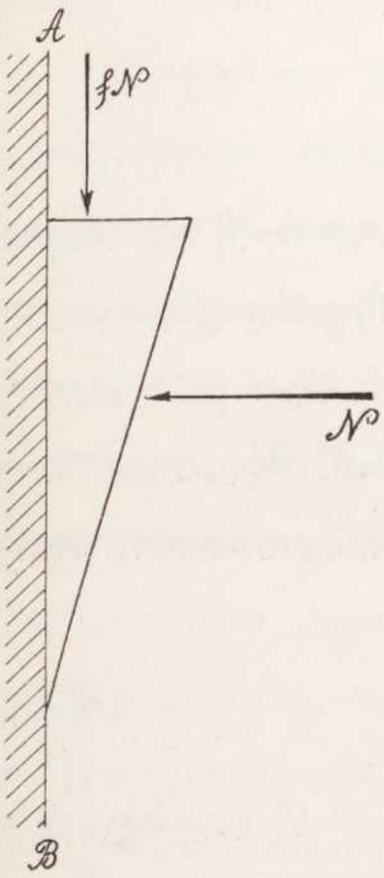
$$f > \frac{m_1 + m_2}{2r}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

то перемѣщеніе помощью катковъ было бы выгоднѣе.

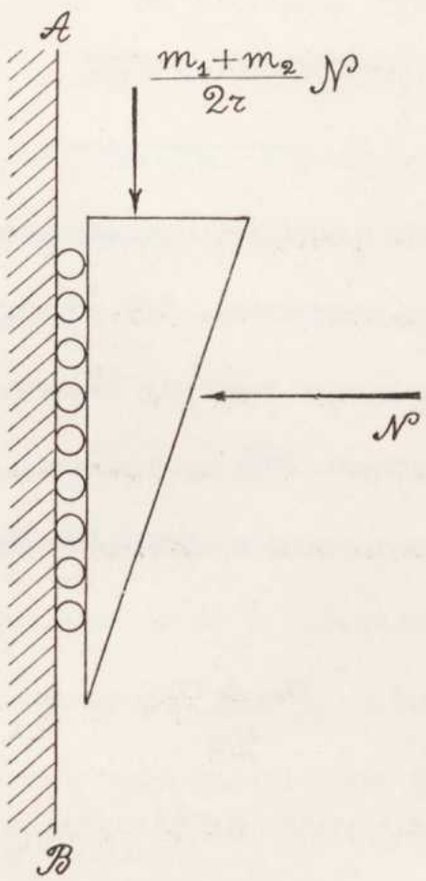
Принимая во вниманіе, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ это было показано выше, скольженіе можетъ быть съ выгодой замѣняемо каченіемъ, можно задаться вопросомъ о выясненіи обстоятельствъ такой замѣны,— возможности и выгодности ея. Для опредѣленности разсужденій, возьмемъ какую-либо деталь изъ числа разобранныхъ нами,— возьмемъ, напримѣръ, клинъ изъ клинчатаго пресса (фиг. 117). Къ вертикальной плоскости его прижимаетъ нѣкоторая сила N, къ этой плоскости AB перпендикулярная. Отсюда слѣдуетъ, что равномѣрное

движеніе клина внизъ можетъ быть при этихъ условіяхъ вызвано вертикальной силой, равной fN, гдѣ f есть коэффиціентъ тренія между клиномъ и плоскостью.

Попробуемъ теперь замѣнить скольженіе каченіемъ, для чего между клиномъ и опорной плоскостью AB вводимъ рядъ катковъ одинаковаго радіуса r (фиг. 118). Тогда, полагая, что клинъ, попрежнему, нагруженъ той же силой N, перпендикулярной плоскости AB, заключаемъ, что сила, параллельная плоскости AB и могущая двигать клинъ равномѣрно, выразится, согласно формулѣ (10), черезъ



Фиг. 117.



Фиг. 118.

$$T=\frac{m_1+m_2}{2r}N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Если окажется, что

$$\frac{m_1+m_2}{2r}N>fN,$$

т.-е. что

$$\frac{m_1+m_2}{2r}>f,$$

то скольженіе будетъ предпочтительнѣе, ибо каченіе потребуетъ приложенія большей силы.

Если

$$\frac{m_1+m_2}{2r}=f$$

то оба вида движенія будутъ эквивалентны.

Наконецъ, при

$$\frac{m_1+m_2}{2r}<f$$

каченіе будетъ предпочтительнѣе.

Мы видѣли, что деталь, нагруженная силой N, перпендикулярной къ опорной плоскости AB (фиг. 118), будетъ двигаться равномѣрно тогда, когда на нее будетъ дѣйствовать сила F, параллельная плоскости AB и равная $\frac{m_1+m_2}{2r}N$. Замѣчая теперь, что дробь $\frac{m_1+m_2}{2r}$ есть число отвлеченное, обозначая ее черезъ f_1, такъ что

$$\frac{m_1+m_2}{2r}=f_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

и помножая обѣ части равенства (16) на N, находимъ равенство

$$\frac{m_1+m_2}{2r}N=f_1N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Присматриваясь къ правой части его, замѣчаемъ, что она составлена по тому же закону, по какому составилось бы выраженіе силы сопротивленія скольженію для тѣла, прижимаемаго къ поверхности скольженія нормальной къ ней силой N, при томъ условіи, что коэффиціентъ тренія такого скольженія равенъ какъ разъ f_1, т.-е. $m_1+m_2/2r$. Поэтому можемъ сказать, что движеніе съ катками эквивалентно движенію скольженія съ коэффиціентомъ f_1, равнымъ $m_1+m_2/2r$.

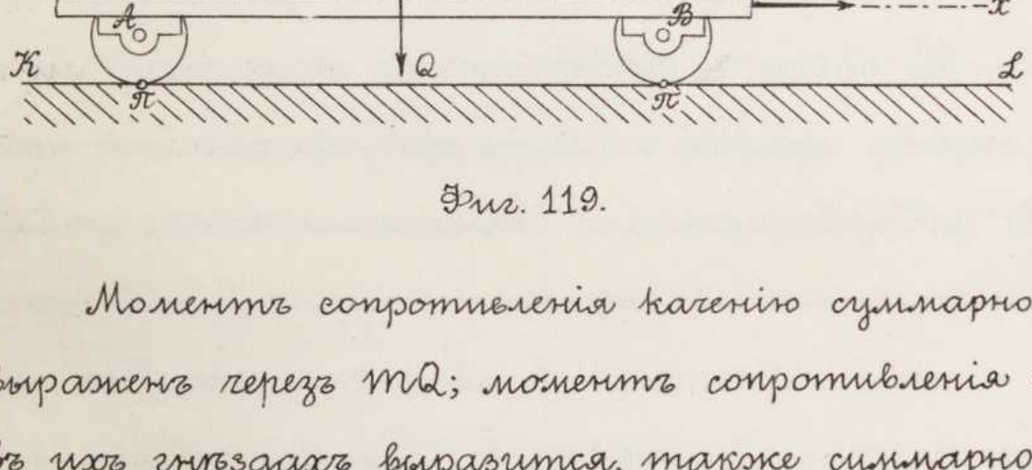
Прилагая подобныя же разсужденія ко всѣмъ случаямъ сравненія качения со скольженіемъ, разобраннымъ нами выше, можемъ сказать, что въ случаѣ фиг. 110 качение эквивалентно скольженію съ коэффиціентомъ тренія, равнымъ $^{m}/_{r}$; въ случаѣ нагрузки по типу фиг. 112 этотъ коэффиціентъ долженъ имѣть значеніе $^{m}/_{h}$; въ случаѣ фиг. 113 — значеніе $^{m}/_{2r}$ и т. д. Подобная форма замѣны качения гипотетическимъ, подставнымъ скольженіемъ весьма удобна тѣмъ, что, благодаря этой замѣнѣ, приходится сравнивать два коэффиціента скольженія. Не надо забывать лишь того, что эти коэффиціенты типа f_1 изъ (16) и (17) не представляютъ собою коэффиціентовъ дѣйствительнаго скольженія, ибо въ дѣйствительности, при данныхъ матеріалахъ тѣла и плоскости, коэффиціентъ тренія скольженія, f, является уже вполнѣ опредѣленнымъ, коэффиціентъ же f_1, являясь отличнымъ отъ f, будетъ, очевидно, относиться къ другимъ матеріаламъ, отличнымъ отъ данныхъ.

Разсмотримъ теперь еще одинъ, весьма важный въ практическомъ отношеніи, случай примѣненія катковъ, — тотъ именно, когда катки снабжаются шипами, а платформа не налегаетъ на эти катки, какъ это было въ случаѣ фиг. 116, а несетъ на себѣ подшипники для шиповъ катковъ. Это будетъ случай перемѣщенія груза помощью тележки.

Пусть имѣется такая тележка, нагруженная грузомъ Q и равномѣрно катящаяся по горизонтальной плоскости KL подъ воздѣйствіемъ горизонтальной же силы H (фиг. 119). Предположимъ, что радіусы всѣхъ катковъ одинаковы и равны

каждый r; радіусы шиповъ пусть будутъ также одинаковы и равны каждый ρ.

Сопротивленіе движенію этой тельжки составится: 1) изъ сопротивленія качению катковъ по плоскости KL и 2) изъ сопротивленія тренія скольженія шиповъ A и B въ ихъ подшипникахъ. Сопротивленія воздуха и другихъ, за малостью ихъ, вводить въ разсмотрѣніе не будемъ.



Фиг. 119.

Моментъ сопротивленія качению суммарно можетъ быть выраженъ черезъ mQ; моментъ сопротивленія тренію шиповъ въ ихъ гнѣздахъ выразится, также суммарно, черезъ $\mu Q\rho$.

Если тельжка имѣетъ 4 колеса (катка), то нагрузка каждаго равна $\frac{1}{4}Q$; моментъ сопротивленія качению каждаго колеса будетъ равенъ $\frac{1}{4}mQ$, что для всѣхъ колесъ и дастъ моментъ mQ, какъ мы и написали.

Что касается тренія въ шипахъ, то силу этого тренія мы принимаемъ пропорціональной нагрузкѣ шипа, полагая коэффиціентъ пропорціональности равнымъ μ; такимъ образомъ, для каждаго изъ шиповъ тельжки сила тренія будетъ равна $\frac{1}{4}\mu Q$, а такъ какъ плечо каждой такой силы тренія равно ρ, то моментъ тренія въ шипъ будетъ равенъ $\frac{1}{4}\mu Q\rho$; для всѣхъ же четырехъ шиповъ моментъ тренія въ нихъ равенъ $\mu Q\rho$.

Если бы радіусы шиповъ были бы различны и равны $r_1, r_2, \ldots$, нагрузки же также различны и равны соотвѣтственно $q_1, q_2, \ldots$, то общій моментъ сопротивленія тренія въ шипахъ былъ бы равенъ $\mu\Sigma qr$, и его и нужно было бы подставлять вмѣсто момента $\mu Q\rho$. Ради простоты разсужденій мы полагаемъ всѣ радіусы и нагрузки шиповъ одинаковыми, что и приведетъ насъ къ выраженіямъ моментовъ, данными выше.

Поставленную задачу рѣшимъ помощью принципа возможныхъ перемѣщеній. Пусть внѣшняя горизонтальная сила H приложена къ обоймѣ тельжки, несущей на себѣ подшипники

для шиповъ A и B. Точку приложенія этой силы можно взять вдоль направленія x'x ея гдѣ-угодно,—пусть это будетъ точка C обоймы. Предположивъ, что подъ воздѣйствіемъ приложенной нами силы H, мы и напишемъ для какого-либо момента движенія уравненіе возможныхъ работъ, подобно тому, какъ мы писали ихъ выше.

Пусть за время dt тельѣжка продвинулась на разстояніе dx. Въ такомъ случаѣ возможная работа силы H выразится черезъ $H\,dx$,—возможныя перемѣщенія здѣсь совпадаютъ съ дѣйствительными.

Такой же путь dx пройдетъ и обойма тельѣжки съ укрѣпленными на ней подшипниками, а вмѣстѣ съ ними и передвигаемые ими шипы и оси колесъ. Но каждое колесо перемѣщается по горизонтальной плоскости, катясь по ней, т.-е. поворачиваясь въ каждый данный моментъ около соотвѣтствующаго этому моменту полюса мгновеннаго вращенія съ нѣкоторой угловой скоростью ω. Поэтому линейная скорость оси колеса A, при вращеніи его вокругъ полюса П, будетъ равна $v = \omega . A\pi = \omega r$, и путь, пройденный осью A за время dt, выразится черезъ $\omega r\,dt$. А такъ какъ этотъ путь мы обозначили черезъ dx, то и получаемъ уравненіе

$$dx = r\omega\,dt.$$

Въ силу этого возможная работа $\Delta\mathcal{L}_{\text{ж}}$ силы H выразится такъ:

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{ж}} = H\,\delta x = H\,dx = H . r\omega\,dt.$$

Такъ какъ при равенствѣ радіусовъ колесъ угловая скорость вращенія ихъ около ихъ полюсовъ П будетъ также

равна ω, то работа наших$_ъ$ пар$_ъ$ сопротивления, mQ и $\mu Q\varrho$, за единицу времени выразится через $mQ\omega$ и $\mu Q\varrho\omega$, а за время dt – через $mQ\omega dt$ и $\mu Q\varrho\omega dt$.

Въ силу этого уравнение возможных$_ъ$ работ$_ъ$ напишется так$_ъ$:

$$Hr\omega dt = mQ\omega dt + \mu Q\varrho\omega dt,$$

что, после необходимых$_ъ$ упрощений, приведет$_ъ$ к$_ъ$ уравнению:

$$Hr = mQ + \mu Q\varrho = Q(m + \mu\varrho), \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

могущему быть истолкованным$_ъ$ так$_ъ$:

Для возможности равномѣрнаго движения тележки на каткахъ, снабженных$_ъ$ шипами, необходимо, чтобы моментъ силы H, приложенной к$_ъ$ оси A (или B) катка, относительно полюса мгновеннаго вращения его, Π, былъ равенъ суммѣ моментовъ сопротивлений

1) трения качения катковъ (колесъ) по плоскости $K\Sigma$, – этотъ моментъ оцѣнивается членомъ mQ, – и

2) трения скольжения шиповъ въ их$_ъ$ подшипникахъ, – этотъ моментъ оцѣненъ членомъ $\mu Q\varrho$.

Если

$$Hr < Q(m + \mu\varrho), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

то это значитъ, что сила H слишкомъ мала для того, чтобы моментъ Hr ея могъ преодолѣть сумму моментовъ имѣющихся здѣсь сопротивлений. Слѣдовательно, въ случаѣ существования неравенства (19), колеса тележки вращаться не смогутъ, и, значитъ, тележка катиться не будетъ, – шипы ея окажутся какъ бы зацѣпленными въ своих$_ъ$ гнѣздах$_ъ$.

Отсюда, однако, вовсе не слѣдуетъ, что тележка непре

мѣнно останется неподвижной, ибо, если она не сможетъ катиться, то, быть можетъ, будетъ въ состояніи СКОЛЬЗИТЬ. Это, какъ извѣстно, будетъ возможно тогда, когда сила H будетъ способна преодолѣть сопротивленіе скольженію тельжки (съ невращающимися теперь колесами ея) по плоскости K_2, т.-е. когда будетъ удовлетворено неравенство:

$$H > fQ. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Сочетая неравенства (19) и (20), мы и получимъ общее условіе того, чтобы тельжка не катилась, а СКОЛЬЗИЛА по плоскости, безъ вращенія, при томъ, колесъ ея; условіе это пишется, значитъ, такъ:

$$fQ < H < \frac{m+\mu\rho}{r} Q.$$

Составивъ неравенство изъ крайнихъ членовъ и сокративъ его на Q, получаемъ условіе скольженія тельжки, безъ вращенія колесъ ея, въ формѣ одного неравенства

$$f < \frac{m+\mu\rho}{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Для того, чтобы удовлетворить этому неравенству при обычныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ f, m и μ, радіусы r катковъ приходится брать очень малыми; но разъ этотъ радіусъ взятъ именно такимъ достаточно малымъ, то каченіе колесъ тельжки по плоскости окажется невозможнымъ, и тельжка будетъ двигаться такъ, какъ если бы шипы колесъ ея оказались наглухо зацемленными въ ихъ подшипникахъ, — тельжка станетъ скользить всѣми своими колесами по плоскости K_2, какъ бы на полозьяхъ.

Вопросъ этотъ имѣетъ большое практическое значеніе, — такъ, при конструированіи тельжекъ кранокъ, гдѣ колеса

имѣютъ всегда очень малые радіусы, необходимо для каждой тельѣжки провѣрить, будетъ ли она, при заданныхъ для нея условіяхъ тяги и нагрузки, катиться или скользить. Случаи скольженія колесныхъ экипажей встрѣчаются вовсе не такъ рѣдко, какъ это можетъ показаться съ перваго взгляда. Особенно часто эти случаи приходится наблюдать тогда, когда коэффиціентъ f, въ силу тѣхъ или иныхъ причинъ, спускается до такихъ малыхъ размѣровъ, что становится возможнымъ осуществленіе неравенство (21). Такъ, бываетъ, напримѣръ, зимой, когда колесному экипажу приходится двигаться по снѣгу или льду; здѣсь коэффиціентъ f оказывается такъ малымъ, а, съ другой стороны, коэффиціентъ μ въ шинахъ становится (отъ мороза) такимъ большимъ, что неравенство (21) удовлетворяется вполнѣ,—въ этихъ случаяхъ экипажъ начинаетъ всѣми своими колесами скользить по снѣгу совершенно такъ же, какъ если бы вмѣсто колесъ у него оказались полозья. Будутъ ли, однако, колеса вертѣться или станутъ скользить, но экипажъ, влекомый внѣшней силой, будетъ продолжать двигаться по ея направленію, катясь ли или скользя; разница между этими двумя видами движенія сведется лишь къ тому, что въ одномъ случаѣ колеса будутъ имѣть относительное движеніе (относительно экипажа), а въ другомъ — не будутъ, и въ послѣднемъ случаѣ весь экипажъ со своими колесами составитъ одно цѣлое,— одно жесткое тѣло, скользящее по плоскости подъ дѣйствіемъ данной внѣшней силы.

Все это, однако, коренньмъ образомъ мѣняется, разъ экипажъ имѣетъ быть приводимъ въ движеніе силами

внутренними, какъ это имѣетъ мѣсто во всѣхъ самодвижущихся экипажахъ, каковы паровозъ, трамвай, автомобиль и т. д. Сюда же можно отнести и велосипедъ съ сидящимъ на немъ и приводящимъ его въ движеніе ѣздокомъ. Здѣсь движеніе экипажа подъ воздѣйствіемъ внутреннихъ силъ возможно далеко не всегда. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Изъ теоретической механики извѣстно, что система, находящаяся подъ воздѣйствіемъ однихъ внутреннихъ силъ, будетъ двигаться такъ, что центръ тяжести (массы) ея будетъ или оставаться въ покоѣ или перемѣщаться равномѣрно и прямолинейно. Давленіе пара, газа (въ калорическихъ двигателяхъ), электромагнитныя воздѣйствія въ электромоторахъ и т. д., представляютъ собою силы внутреннія, не могущія, согласно вышесказанному, самостоятельно измѣнять равномѣрное движеніе центра тяжести или нарушать покой его, почему, слѣдовательно, въ случаѣ необходимости измѣнить скорость движенія системы или остановить систему, уже движущуюся, одними внутренними силами обойтись нельзя, ибо, повторяемъ, никакихъ измѣненій въ состояніи центра тяжести эти внутреннія силы вызвать не могутъ.

Въ этихъ случаяхъ приходится прибѣгать къ помощи внѣшнихъ силъ или сопротивленій, которыя и слѣдуетъ подбирать и примѣнять такъ, чтобы данная система, подчиняясь теперь уже совокупному воздѣйствію на нее внутреннихъ силъ и внѣшнихъ силъ (или сопротивленій), могла перемѣщаться своимъ центромъ тяжести такъ, какъ это нужно для насъ. Очевидно, что для этого внѣшнія

силы должны имѣть величину, достаточную для достиженія требуемыхъ измѣненій движенія. Если же величина внѣшнихъ силъ окажется для этого недостаточной, то система или испытаетъ уменьшенныя противъ желательнаго измѣненія движенія или же сразу начнетъ двигаться согласно теоремѣ о движеніи центра тяжести, т.-е. при наличности живой силы станетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно, при отсутствіи же запаса ея — не будетъ двигаться (относительно своей опорной поверхности) совсѣмъ.

Роль внѣшнихъ силъ и сопротивленій въ нашихъ самодвижущихся экипажахъ принимаютъ на себя слѣдующія силы:

1) сила тяжести экипажа, грузовъ и т.д.;

2) сопротивленіе воздуха, обнаруживающееся при движеніи экипажа и при большихъ скоростяхъ его достигающее весьма значительныхъ размѣровъ; при малыхъ скоростяхъ имъ, обычно, пренебрегаютъ;

3) сопротивленіе со стороны другихъ системъ, имѣющихъ быть приводимыми въ движеніе посредствомъ данной, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто въ случаѣ желѣзнодорожнаго поѣзда, гдѣ паровозъ принужденъ тащить за собою вагоны, въ трамвайномъ движеніи, гдѣ къ вагону съ моторомъ присоединяется „прицѣпъ" и т.д.; наконецъ,

4) сопротивленіе тренія колесъ при каченіи ихъ по опорной поверхности, — по рельсамъ, мостовой и т.д.

Присмотримся болѣе детально къ этимъ четыремъ силамъ и къ результатамъ учета ихъ дѣйствія.

Первая сила, — сила тяжести, — въ случаѣ движенія системы по горизонтальной плоскости, прямо на это движе-

ніе вліять не можетъ; ее придется имѣть въ виду лишь при учетѣ сопротивленій тренія. Если опорная поверхность окажется наклоненной къ горизонту, то сила тяжести дастъ еще слагающую, параллельную плоскости и представляющую собою активную силу, либо помогающую движенію, либо ему сопротивляющуюся.

Второй силой,— силой сопротивленія воздуха,— по сравнительной малости ея въ обычныхъ условіяхъ движенія, будемъ пренебрегать.

Третья сила является лишь при наличности прицѣпныхъ экипажей; ради общности разсужденій мы и разсмотримъ именно тотъ случай, когда къ данному экипажу-мотору прицѣпленъ рядъ другихъ, имъ въ движеніе приводимыхъ.

Четвертая сила,— сила сопротивленія тренія скольженія,— и является, при горизонтальной опорной поверхности, той силой, которой всегда пользуются на практикѣ съ цѣлью измѣненія состоянія центра тяжести системы.

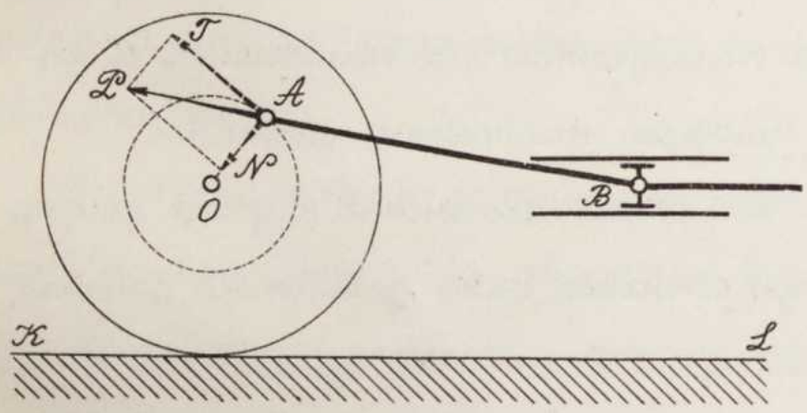
Разсмотримъ теперь наиболѣе сложный случай движенія подъ воздѣйствіемъ внутреннихъ силъ, а именно, случай паровоза, вѣсомъ въ Q, имѣющаго тащить за собою по горизонтальной плоскости рядъ вагоновъ; случай движенія по наклонной плоскости разберемъ особо.

Колеса паровоза приводятся во вращеніе путемъ непрестаннаго воздѣйствія пара на поршни паровозной машины; помощью промежуточныхъ звеньевъ давленіе пара передается на пальцы A кривошиповъ, закрѣпленныхъ на ведущихъ колесахъ (фиг. 120), въ видѣ нѣкотораго усилія P, направленнаго по шатуну и непрестанно мѣняющаго какъ свою величину, такъ, очевидно, и направленіе. Разлагая P

силу P на силу N, идущую по радіусу, проходящему черезъ точку A, и силу T, перпендикулярную къ этому радіусу, т.-е. касательную къ окружности, описываемой пальцемъ кривошипа, видимъ, что вращеніе колеса паровоза можетъ быть вызвано воздѣйствіемъ лишь этой перемѣнной по своей величинѣ силы T. Слѣдовательно, активнымъ моментомъ, стремящимся катить колесо по рельсу, является перемѣнный по своей величинѣ моментъ M, выражающійся такъ:

$$M = Tr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

гдѣ $r = AO$ и есть радіусъ окружности, описываемой пальцемъ A кривошипа. — Посмотримъ теперь, какъ выразятся моменты всѣхъ сопротивленій, противодѣйствующіе моменту M.



Фиг. 120.

Моментъ сопротивленія качанію колесъ паровоза по рельсамъ, согласно общимъ положеніямъ, выразится черезъ mQ.

Моментъ сопротивленія тренія въ шипахъ (шейкахъ) выразится черезъ $\mu Q\varrho$, гдѣ μ есть нѣкоторый коэффиціентъ тренія въ шипахъ, а ϱ — радіусъ шипа.

Необходимо, наконецъ, преодолѣть сопротивленіе вагоновъ. Его мы полагаемъ приведеннымъ къ нѣкоторой силѣ P_1, дѣйствующей все время на плечѣ, равномъ радіусу R колесъ паровоза. Такимъ образомъ, моментъ сопротивленія вагоновъ выражается черезъ P_1R.

Теперь мы имѣемъ всѣ данныя для того, чтобы составить уравненіе возможныхъ работъ за какой-либо промежутокъ времени dt, примѣнительно къ системѣ нашего паровоза. Пусть колеса его вращаются съ угловой скоростью ω; съ той же скоростью ω вращаются, понятно, какъ шины осей, такъ и радіусъ OA. Въ силу этого возможная работа дѣйствующей силы T изобразится черезъ $Tr\omega\,dt$, а возможныя работы сопротивленій тренія — черезъ $mQ\omega\,dt$, $\mu Q\rho\omega\,dt$ и $P_1R\omega\,dt$. Кромѣ того, если бы оказалось, что паровозъ по рельсамъ не катится, а скользитъ, то сопротивленіе этому скольженію было бы равно fQ, моментъ этого сопротивленія относительно полюса мгновеннаго вращенія колеса равнялся бы fQR, а возможная работа его за время dt — черезъ $fQR\omega\,dt$.

Очевидно, что каченіе паровоза будетъ возможно тогда, когда возможная работа дѣйствующей силы T окажется больше суммы всѣхъ работъ сопротивленій, обнаруживающихся при каченіи. Значитъ, условіе качения паровоза изображается неравенствомъ:

$$Tr\omega\,dt > mQ\omega dt + \mu Q\rho\omega dt + P_1R\omega dt, \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

которое, послѣ необходимыхъ сокращеній, переходитъ въ неравенство:

$$Tr > mQ + \mu Q\rho + P_1R. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Предѣльный случай будетъ имѣть мѣсто при равенствѣ между правой и лѣвой частями соотношенія (24).

Далѣе, для того, чтобы колеса паровоза при этомъ не скользили, нужно, чтобы дѣйствующая сила T не могла преодолѣть сопротивленія скольженію колесъ по рельсамъ и шиповъ въ ихъ гнѣздахъ; значитъ, возможная работа силы

T должна быть меньше возможной работы сопротивления скольженія и треніа въ шипахъ, т.-е. должно существовать соотношеніе

$$Tr\omega dt < fQR\omega dt + \mu Q\rho\omega dt, \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

сводящееся къ неравенству

$$Tr < fQR + \mu Q\rho. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Сопоставляя неравенства (24) и (26), получаемъ неравенство

$$fQR + \mu Q\rho > mQ + \mu Q\rho + P_1 R,$$

сводящееся, послѣ необходимыхъ сокращеній, къ неравенству

$$f > \frac{m}{R} + \frac{P_1}{Q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Таково условіе качения паровоза по рельсамъ и невозможности его скольженія.

Теперь посмотримъ, при какомъ условіи паровозъ не сможетъ катиться. Для этого возможная работа силы T должна быть меньше суммы возможныхъ работъ сопротивленій, имѣющихъ мѣсто при качении, такъ что должно существовать неравенство

$$Tr\omega dt < mQ\omega dt + \mu Q\rho\omega dt + P_1 R\omega dt, \quad . \quad . \quad (28)$$

т.-е. неравенство

$$Tr < mQ + \mu Q\rho + P_1 R. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

При этомъ условіи колеса паровоза по рельсамъ катиться не смогутъ. Но если они не могутъ катиться, то могутъ по рельсамъ скользить, — какъ говорятъ, буксовать, — причемъ паровозъ будетъ или оставаться на мѣстѣ, а колеса его будутъ продолжать вращаться, не подаваясь впередъ, если весь поѣздъ былъ до того неподвиженъ, — или станетъ двигаться равномѣрно, будучи понуждаемъ къ тому вагонами, продолжающими двигаться по инерціи, если поѣздъ до момента

буксованія былъ въ движеніи; колеса его, продолжая вращаться подъ воздѣйствіемъ тангенціальныхъ усилій T, станутъ теперь частью скользить, частью катиться.

Условіе возможности такого скольженія,—буксованія,—сводится къ требованію того, чтобы возможная работа дѣйствующей силы T была больше суммы возможныхъ работъ сопротивленій, возникающихъ при скольженіи, и, одновременно, чтобы та же возможная работа силы T была меньше суммы возможныхъ работъ всѣхъ сопротивленій, имѣющихъ мѣсто при каченіи. Значитъ, для возможности буксованія должны одновременно удовлетворяться неравенства:

$$Tr\,\omega dt > fQR\,\omega dt + \mu Q\rho\,\omega dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

и

$$Tr\,\omega dt < mQ\,\omega dt + \mu Q\rho\,\omega dt + P_1 R\,\omega dt. \quad . \quad . \quad (31)$$

Замѣтимъ, что въ неравенствѣ (30), какъ и въ (25), членъ $P_1 R\,\omega dt$ отсутствуетъ потому, что, при скольженіи колесъ паровоза, онъ не можетъ не только тащить вагоновъ, но и подать впередъ себя самого; значитъ, при буксованіи преодолѣваются лишь тѣ сопротивленія скольженія, которыя имѣютъ мѣсто въ системѣ паровоза.

Сокращая выраженія (30) и (31) на ωdt и сочетая ихъ въ одно, получаемъ неравенство

$$mQ + \mu Q\rho + P_1 R > fQR + \mu Q\rho. \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

или неравенство

$$mQ + P_1 R > fQR,$$

откуда находимъ, что

$$f < \frac{m}{R} + \frac{P_1}{Q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Таково условіе буксованія паровоза.

Если прицѣпныхъ вагоновъ нѣтъ, такъ что $P_1 = 0$, то неравенства (27) и (33) принимаютъ видъ:

1) условіе качения:

$$f > \frac{m}{R}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

2) условіе буксованія:

$$f < \frac{m}{R} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Явленія буксованія могутъ быть наблюдаемы всякій разъ, когда, въ силу тѣхъ или иныхъ причинъ, каковы дождь, снѣгъ, гололедица и т. д., коэффиціентъ f понижается настолько, что становится возможнымъ удовлетвореніе условій (33) и (35). Тогда наступаетъ буксованіе со всѣми его непріятными послѣдствіями. Очевидно, что, для устраненія буксованія, надо неравенство (33) перевести въ неравенство (27), имѣющее мѣсто при каченіи; для этого необходимо поднять величину коэффиціента трения скольженія f, что, обычно, достигается посыпкой рельсовъ пескомъ и т. п.

Въ заключеніе настоящаго параграфа коснемся вкратцѣ вопроса о движеніи поѣзда по плоскости, наклоненной къ горизонту подъ угломъ i. Обозначивъ вѣсъ паровоза черезъ Q, а вагоновъ — черезъ W, найдемъ, что вѣсъ всего поѣзда будетъ равенъ $Q + W$. Пусть поѣздъ по этой плоскости взбирается вверхъ. Очевидно, что слагающая вѣса поѣзда, параллельная этой плоскости и сопротивляющаяся такому его движенію, равна $(Q+W)\sin i$. Эта сила, воздѣйствуя на оси паровоза, даетъ добавочный моментъ сопротивленія, равный $(Q+W)R\sin i$, гдѣ R есть радіусъ колесъ паровоза. Возможная

работа этого новаго сопротивленія выразится черезъ

$$(Q+W)R\sin i.\omega dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .(36)$$

Нетрудно, далѣе, усмотрѣть, что къ опорной плоскости паровозъ будетъ прижиматься не всей силой Q своего вѣса, а лишь слагающей ея $Q\cos i$, вслѣдствіе чего сила сопротивленія скольженію паровоза выразится теперь уже черезъ $fQ\cos i$, моментъ же ея — черезъ $fQR\cos i$. Составивъ теперь опять уравненія возможныхъ работъ, мы, послѣ необходимыхъ сокращеній, найдемъ, что

1) условіе качанія паровоза изображается теперь неравенствомъ

$$fQR\cos i > mQ + \mathfrak{P}_1 R + (Q+W)R\sin i. \quad . \quad . \quad .(37)$$

или неравенствомъ

$$f > \frac{1}{\cos i}\left(\frac{m}{R} + \frac{\mathfrak{P}_1}{Q}\right) + \left(1 + \frac{W}{Q}\right)\operatorname{tg} i; \quad . \quad . \quad . \quad .(38)$$

2) условіе буксованія и, значитъ, невозможности поѣзда вверхъ, — неравенствомъ

$$f < \frac{1}{\cos i}\left(\frac{m}{R} + \frac{\mathfrak{P}_1}{Q}\right) + \left(1 + \frac{W}{Q}\right)\operatorname{tg} i. \quad . \quad . \quad . \quad .(39)$$

Предѣльный уголъ i_0 опредѣлится изъ равенства

$$fQR\cos i_0 = mQ + \mathfrak{P}_1 R + (Q+W)R\sin i_0. \quad . \quad . \quad .(40)$$

Если прицѣпныхъ вагоновъ нѣтъ, такъ что $W=0$ и $\mathfrak{P}_1=0$, то

1) условіе качанія одного паровоза (вверхъ по плоскости) изобразится неравенствомъ

$$fQR\cos i > mQ + QR\sin i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

т.-е. неравенствомъ

$$f > \frac{m}{R\cos i} + \operatorname{tg} i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .(42)$$

а 2) условіе буксованія — неравенствомъ

$$f < \frac{m}{R\cos i} + \operatorname{tg} i. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Предѣльный уклонъ i_0' для этого случая вычислится по формулѣ

$$fR\cos i_0' = m + R\sin i_0', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

откуда для опредѣленія i_0' получаемъ соотношеніе

$$\sin(\varphi - i_0') = \frac{m\cos\varphi}{R}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Этими соображеніями мы закончимъ статью о треніи въ машинахъ и перейдемъ ко второй части нашего курса, излагающей основанія динамическаго изслѣдованія плоскихъ механизмовъ.

Часть вторая.

Динамическое изслѣдованіе плоскихъ механизмовъ.

§ 14. Предварительныя соображенія. Діаграмма свободныхъ усилій. Формулировка основныхъ задачъ.

Въ этой части нашего курса мы займемся изслѣдованіемъ динамическихъ условій движенія плоскихъ механизмовъ. Кинематическая сторона движенія ихъ разобрана въ курсѣ „Кинематики механизмовъ",—тамъ былъ данъ рядъ указаній, коими нужно руководствоваться при опредѣленіи скоростей и ускореній различныхъ точекъ механизма по извѣстнымъ начальнымъ даннымъ.

Наше динамическое изслѣдованіе мы ограничимъ разсмотрѣніемъ двухъ задачъ, имѣющихъ наибольшую важность съ практической точки зрѣнія, и предварительно обратимся къ разсмотрѣнію тѣхъ основныхъ требованій, которымъ должна удовлетворять каждая машина, имѣющая дѣйствовать правильно-періодически, выполняя при этомъ должное количество работы. Требованія эти сводятся къ слѣдующимъ четыремъ основнымъ пунктамъ:

Каждая машина должна:

1) обладать достаточной прочностью,

2) быть достаточно устойчивой на своемъ фундаментѣ,

3) обладать должной равномѣрностью хода своего главнаго вала, и, наконецъ,

4) давать наибольшій возможный въ данныхъ условіяхъ механическій коэффиціентъ полезнаго дѣйствія.

Другихъ требованій, каковы: удобство конструкціи, простота ея и др., мы касаться здѣсь не будемъ,— требованія эти въ данный моментъ имѣютъ для насъ значеніе второстепенное.

Разсмотримъ теперь нѣсколько детальнѣе сформулированныя выше основныя требованія и условія ихъ удовлетворенія.

Первое требованіе будетъ удовлетворено тогда, когда всѣ части и детали разсматриваемой машины, во время работы ея, т.-е. при нагрузкѣ ихъ различными силами, проявляющими свое дѣйствіе при работѣ машины, будутъ испытывать напряженія, не выходящія изъ предѣловъ допускаемыхъ, что можетъ быть достигнуто лишь приданіемъ этимъ деталямъ должныхъ размѣровъ, обусловливаемыхъ характеромъ и величиной нагрузки ихъ и свойствами ихъ матеріаловъ. Поэтому, прежде чѣмъ окончательно опредѣлить размѣры данной детали, необходимо совершенно точно выяснить величины, направленія и точки приложенія силъ, имѣющихъ дѣйствовать на деталь. Необходимо, значитъ, установить тѣ способы и пріемы, которыми слѣдуетъ пользоваться при выясненіи этихъ силъ.

Къ разсмотрѣнію въ общихъ чертахъ этого вопроса мы теперь и перейдемъ.

Силы, дѣйствующія въ нашихъ машинахъ, могутъ быть, при всемъ разнообразіи ихъ, распредѣлены по слѣдующимъ возможнымъ здѣсь категоріямъ; это могутъ быть

a) силы активныя, дѣйствующія, понуждающія машину къ движенію и производящія работу; таковы, напримѣръ, силы упругости пара (въ паровыхъ машинахъ) и газовыхъ смѣсей (въ двигателяхъ внутренняго сгоранія), давленіе жидкости, силы упругости пружины, сила тяжести и т. д.;

b) силы полезныхъ сопротивленій, для преодолѣнія коихъ машина, собственно и предназначается;

c) силы вредныхъ сопротивленій, т.-е. силы тренія; на преодолѣніе работы ихъ безвозвратно уходитъ часть работы активныхъ силъ, отчего, какъ мы знаемъ, понижается коэффиціентъ полезнаго дѣйствія машины. Къ послѣдней категоріи, наконецъ, мы отнесемъ

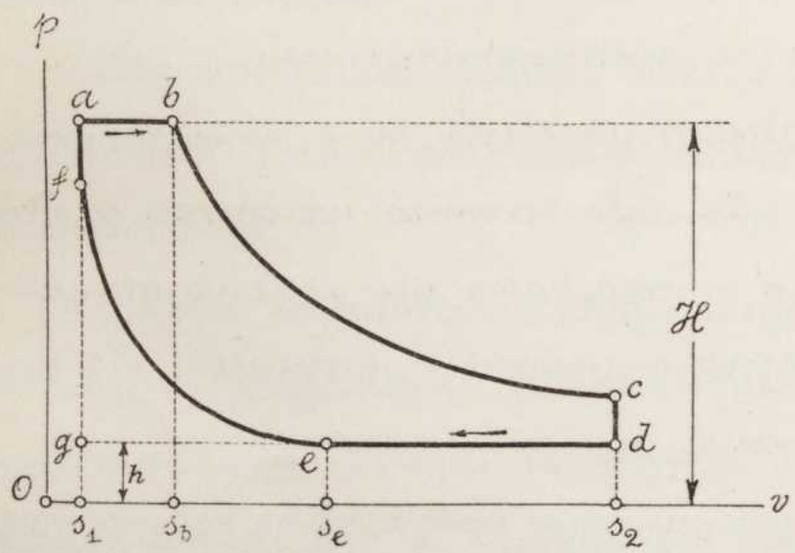
d) силы инерціи, возникающія всегда, какъ только появляются измѣненія скоростей (линейныхъ или угловыхъ) различныхъ массъ машины, т.-е. когда ускоренія массъ машины становятся отличными отъ нуля.

Не касаясь пока вопроса о связи между всѣми этими силами, устанавливаемой, вообще, при помощи теоремы возможныхъ перемѣщеній Лагранжа, а въ данномъ случаѣ — при помощи теоремы живыхъ силъ, — ниже объ этомъ будетъ сказано подробно, — мы сначала разсмотримъ вопросъ объ учетѣ и заданіи на практикѣ силъ первыхъ двухъ категорій, т.-е. активныхъ силъ и силъ полезныхъ

сопротивлений. Ради опредѣленности разсужденій, предположимъ, что у насъ имѣется, въ качествѣ двигателя, обыкновенная одноцилиндровая паровая машина.

Силами, въ ней дѣйствующими, являются силы упругости пара подъ поршнемъ, при чемъ давленіе пара за время одного оборота коренного вала, т.-е. за ходъ поршня впередъ и назадъ, — иначе говоря, за одинъ періодъ работы ея, — будетъ измѣняться такъ:

Предположимъ, что въ системѣ координатъ pOv (фиг. 121) абсциссы изображаютъ собою отклоненія поршня отъ лѣваго крайняго его положенія, а ординаты — соотвѣтствующія давленія пара на единицу поверхности поршня. Замѣтимъ попутно, что въ данномъ случаѣ, благодаря постоянству площади поршня, абсциссы будутъ давать собою въ то же время и объемы, ограничиваемые и образуемые поршнемъ въ каждый данный моментъ.



Фиг. 121.

Пусть крайнее лѣвое положеніе поршня есть s_1, а крайнее правое — s_2, такъ что полный ходъ поршня есть $s_1 s_2$. Предположимъ теперь, что мы, пуская машину въ ходъ, подвели поршень къ крайнему лѣвому его положенію s_1 и, открывъ паровпускное отверстіе, установили сообщеніе подпоршневого пространства Os_1 съ паровымъ пространствомъ котла, откуда свѣжій паръ и начинаетъ поступать подъ

поршень. Это поступаніе пара будетъ длиться нѣкоторое время Δt, составляя такъ называемый періодъ впуска пара, соотвѣтствующій части $s_1 s_b$ пути поршня. Давленіе пара за весь этотъ періодъ впуска будетъ равно давленію H пара въ котлѣ, такъ что силовая кривая на этомъ участкѣ $s_1 s_b$ пути поршня представится отрѣзкомъ ab прямой, параллельной оси Ov абсциссъ и отстоящей отъ нея на разстояніе H.

Впускъ свѣжаго пара производится не за весь ходъ поршня, $s_1 s_2$, а лишь на части $s_1 s_b$ его, въ виду того соображенія, что, если бы онъ производился до конца хода, т.-е. до момента s_2, то давленіе въ этотъ моментъ оказалось бы равнымъ H, и, значитъ, при слѣдующемъ затѣмъ періодѣ выпуска, пришлось бы выпускать наружу паръ весьма высокаго давленія H, равнаго давленію пара въ котлѣ, что было бы крайне неэкономично, ибо мы выпускали бы паръ, далеко не использовавъ всего запаса энергіи, въ немъ заключающагося. Такое расточительное пользованіе паромъ допускается лишь тамъ, гдѣ этого требуютъ особыя обстоятельства, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто при троганіи въ путь паровоза съ прицѣпленнымъ къ нему поѣзднымъ составомъ,—здѣсь требуется въ кратчайшее время получить отъ котла максимумъ работы, какой только возможенъ при данныхъ условіяхъ, ибо требуется въ кратчайшій срокъ сообщить всему поѣзду извѣстную скорость, т.-е. извѣстный запасъ живой силы. Впослѣдствіи, по достиженіи поѣздомъ этой желательной скорости, впускъ начинаютъ сокращать, доводя его до извѣстной нормальной величины, обусловливаемой тѣми или другими обстоятельствами работы паро-

воза. Въ обычныхъ условіяхъ работы паровыхъ машинъ такого чрезмѣрнаго увеличенія періода впуска не допускаютъ никогда, ограничиваясь для него лишь извѣстной малой долей хода поршня, — у насъ на чертежѣ эта доля равна $s_1 s_b$.

Въ моментъ достиженія поршнемъ конечной точки впуска, s_b, паровпускное отверстіе закрывается, и пару, заполняющему все пространство подъ поршнемъ и имѣющему давленіе H, предоставляется возможность расширенія вплоть до конца хода поршня, s_2. Въ курсѣ паровыхъ машинъ указывается, что, при расширеніи пара подъ гонимымъ имъ поршнемъ, давленіе его измѣняется обратно-пропорціонально объему, такъ что давленіе p и объемъ v связаны здѣсь соотношеніемъ $pv = const$ и силовой кривой расширяющагося пара является равносторонняя гипербола съ асимптотами Op и Ov.

Такъ какъ давленіе p_c въ концѣ расширенія, при обычныхъ условіяхъ работы машины, желательно получить близкимъ къ давленію той среды, куда выпускается расширившійся и отработавшій паръ, и такъ какъ $v_c = v_{s_2}$ и есть величина данная, то, въ силу условія $p\,v = p_c v_c = H v_b$, по извѣстнымъ H, p_c и v_c опредѣлится v_{s_b}, т.-е. точка s_b конца впуска.

По достиженіи конечной точки c фазы расширенія, т.-е. въ концѣ s_2 хода поршня, начинается слѣдующая фаза, — выпускъ пара во внѣшнюю среду: въ моментъ s_2 открывается паровыпускное отверстіе, давленіе пара падаетъ до давленія h во внѣшней средѣ; заканчивается онъ, однако, не въ точкѣ g пересѣченія прямой $dg \parallel Ov$ съ ординатой Go точки a, т.-е. не въ концѣ s_1 этого обратнаго хода поршня, а въ нѣкоторой промежуточной точкѣ e; выпускъ, такимъ

образомъ, продолжается не за весь обратный ходъ поршня, а лишь на извѣстной части его.

Послѣ этого начинается послѣдняя фаза,— сжатіе пара, отъ точки b_2 вплоть до конца этого хода поршня,—до точки b_1, и въ концѣ сжатія давленіе пара поднимается почти до давленія пара въ котлѣ, и кривая сжатія ef своей конечной точкой f почти упирается въ точку a начала впуска. Такое высокое предварительное сжатіе приходится осуществлять въ силу слѣдующихъ соображеній:

По мѣрѣ приближенія поршня къ мертвому положенію ускореніе его все возрастаетъ, вслѣдствіе чего возрастаетъ и сила инерціи его, и вотъ, во избѣжаніе удара въ моментъ перехода черезъ мертвое положеніе, т.-е. при перемѣнѣ хода, мы и создаемъ передъ поршнемъ упругую паровую подушку, могущую смягчить этотъ ударъ весьма значительно. Для этой цѣли мы съ нѣкотораго момента b_2 прекращаемъ впускъ и за счетъ запаса живой силы нашего механизма, сжимаемъ оставшійся подъ поршнемъ паръ, повышая, такимъ образомъ, его упругость до желаемыхъ размѣровъ.

Упомянутая выше причина не является, однако, единственной; существуютъ еще и другія соображенія, еще болѣе вѣскія, заставляющія производить предварительное сжатіе во всѣхъ паровыхъ машинахъ, даже и тихоходныхъ; сущность этихъ соображеній состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть давленіе h выпуска равно, положимъ, 1 at, такъ что температуру пара, находящагося подъ поршнемъ во время выпуска подъ этимъ давленіемъ, можно считать равной 100° C. Предположимъ, затѣмъ, что давленіе пара въ котлѣ

достигаетъ 10 at, чему соотвѣтствуетъ температура пара около 180° C. Слѣдовательно, если бы мы доводили выпускъ вплоть до конца хода, s_1, такъ что линіей выпуска служила бы прямая dg (фиг. 121), то, при перемѣнѣ хода въ моментъ s_1, намъ пришлось бы въ мертвое пространство Os_1, наполненное паромъ при 1 at и 100° C, ввести паръ при 10 at и 180° C, что, понятно, вызвало бы охлажденіе этого свѣжаго пара, т.-е. конденсацію его, сопровождаемую, понятно, паденіемъ давленія этого вводимаго сюда свѣжаго пара ниже располагаемаго здѣсь давленія H. Такое паденіе давленія, сильно уменьшая работоспособность машины, является совершенно нежелательнымъ и, насколько возможно, подлежащимъ устраненію, и весьма дѣйствительное средство для избѣжанія этой конденсаціи и дается упомянутымъ предварительнымъ сжатіемъ: прекративъ выпускъ въ моментъ s_2, мы на всей остальной части хода, $s_2 s_1$, сжимаемъ этотъ паръ; но мѣрѣ этого сжатія температура и давленіе его растутъ все больше и больше, и, конечно, отъ насъ зависитъ довести его такъ, чтобы въ концѣ s_2 этого хода температура и давленіе пара оказались весьма близкими къ температурѣ и давленію пара въ котлѣ, вслѣдствіе чего конденсація свѣжаго пара окажется теперь въ значительной степени ослабленной.

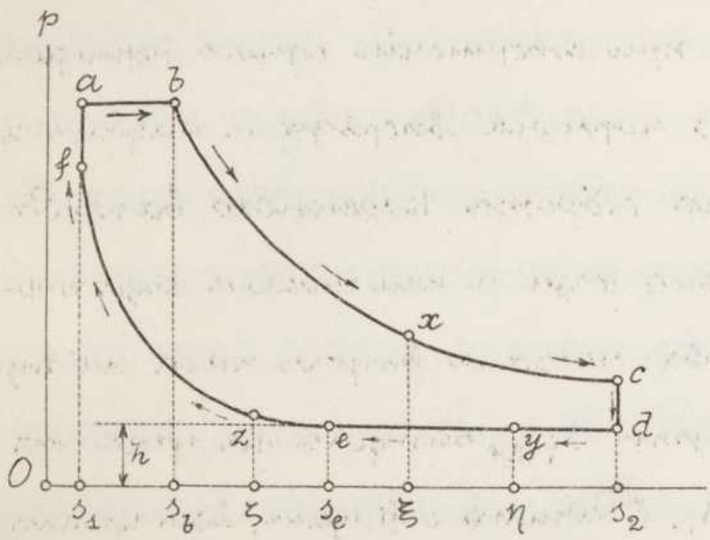
Степень этого предварительнаго сжатія въ различныхъ машинахъ различна: въ скороходныхъ машинахъ она очень велика, такъ что конечное давленіе сжатія доходитъ въ нихъ почти до давленія въ котлѣ; въ тихоходныхъ машинахъ она такъ высоко не идетъ.

Итакъ, прекращеніе выпуска и слѣдующее затѣмъ сжатіе пара производятся не только изъ-за желанія ослабить дѣйствіе силъ инерціи, но и въ видахъ экономіи пара.

Процессомъ сжатія заканчиваются всѣ измѣненія въ состояніи пара, имѣющія мѣсто при совершеніи одного періода работы машины, т.-е. при ходѣ поршня впередъ и назадъ и, значитъ, при одномъ полномъ оборотѣ коренного вала. Въ слѣдующій моментъ, при перемѣнѣ хода и при началѣ хода поршня отъ s_1 къ s_2, получимъ снова: сначала выпускъ пара на пути $s_1 s_b$, расширеніе его на пути $s_b s_2$, выпускъ на участкѣ $s_2 s_e$ и сжатіе на участкѣ $s_e s_1$. Такимъ образомъ, весь циклъ измѣненій состоянія пара, совершающійся при каждомъ полномъ оборотѣ кривошипа, можетъ быть изображенъ замкнутой кривой abcdefa, носящей названіе индикаторной діаграммы, — ее вычерчиваетъ сама машина помощью прибора, называемаго индикаторомъ, отъ котораго діаграмма и получила свое названіе. Кривая эта, очевидно, представляетъ собою силовую кривую давленій p пара на одну сторону поршня, — въ разсматриваемомъ случаѣ это будетъ та сторона его, коей соотвѣтствуетъ мертвое пространство Os_1; назовемъ эту сторону лѣвой стороной, согласно мѣсту мертваго пространства Os_1 относительно отрѣзка $s_1 s_2$, изображающаго ходъ поршня.

Имѣя такую діаграмму, можемъ весьма легко опредѣлить давленіе p пара (на единицу площади поршня) въ любой моментъ движенія, т.-е. при любомъ положеніи поршня. Такъ, въ тотъ моментъ, когда поршень, при ходѣ вправо, переходитъ черезъ положеніе ξ (фиг. 122), давленіе это выразится ордина-

той $x\xi$; въ положеніи η, когда поршень идетъ обратнымъ ходомъ, влѣво, давленіе выразится ординатой $y\eta$; въ положеніи ζ — ординатой $z\zeta$. Такимъ образомъ, разъ направленіе движенія поршня дано, то давленія на него въ каждомъ его положеніи будутъ извѣстны вполнѣ, при чемъ каждому отдѣльному положенію поршня будетъ соотвѣтствовать свое опредѣленное давленіе, величина и направленіе коего совершенно не будутъ зависѣть отъ быстроты движенія поршня, т.-е. отъ скорости и ускореній его, — иначе говоря, не будутъ зависѣть отъ времени; давленія эти зависятъ, какъ видимъ, лишь отъ положенія поршня въ цилиндрѣ, отъ мѣста его тамъ, т.-е. объ величины абсциссы, это мѣсто его тамъ опредѣляющей. На языкѣ анализа это заключеніе будетъ выражено такъ:



Фиг. 122.

величина давленія пара отъ времени не зависитъ и представляетъ собою функцію однихъ лишь координатъ, опредѣляющихъ положеніе поршня.

Въ системѣ координатъ, принятой нами, положеніе поршня опредѣляется просто одной лишь абсциссой типа $O\xi$ (фиг. 122), а функціональная зависимость задается не аналитически, а геометрически, — въ видѣ діаграммы абсцеса, подобной начерченной выше; каждая ордината $x\xi$ ея есть функція соотвѣтствующей абсциссы $O\xi$. Добавимъ, что, въ виду замкнутаго характера діаграммы,

необходимо, задаваясь тѣмъ или другимъ положеніемъ поршня, указывать еще и направленіе хода, въ которомъ идетъ поршень въ этотъ моментъ.

Говоря о давленіи p на поршень, мы подъ этимъ p подразумѣвали давленіе на единицу площади его (въ кг на $см^2$, пудахъ на квадр. дюймъ и т.п.). Полное давленіе P на всю площадь F поршня (по одну сторону его) выразится, очевидно, такъ:

$$P = pF. \qquad (1)$$

Такъ какъ P прямопропорціонально p, ибо F есть const, то опять можемъ сказать, что

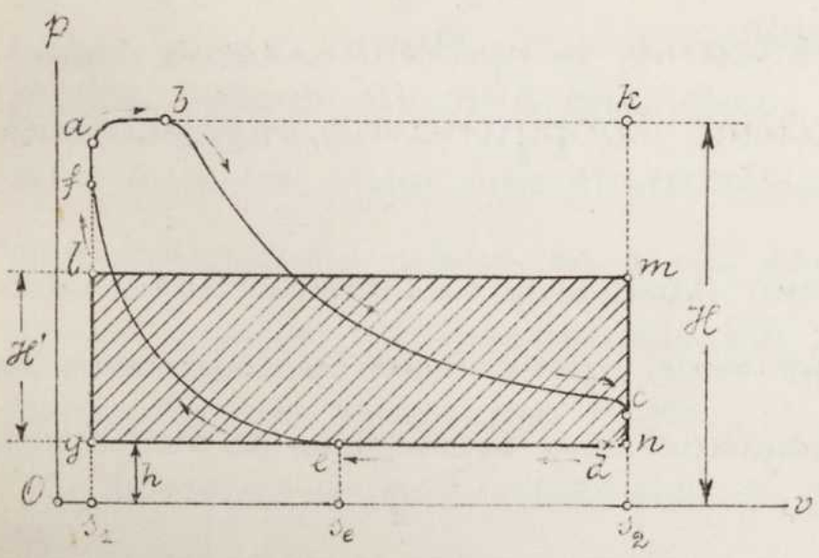
полное давленіе P пара на одну сторону поршня отъ времени не зависитъ и представляетъ собою функцію однихъ лишь координатъ, опредѣляющихъ положеніе поршня.

Замѣчая, далѣе, что каждому положенію поршня соотвѣтствуетъ свое отдѣльное, единственное положеніе механизма, можемъ сформулировать высказанное выше положеніе еще и такъ:

Давленія p и P отъ времени не зависятъ и представляютъ собою функціи только положеній механизма.

Вернемся теперь снова къ нашей индикаторной діаграммѣ $abcdefa$ (фиг. 121). Углы ея,—у a, b, c и d,—въ дѣйствительности никогда не бываютъ такими рѣзко очерченными, какъ это изображено на этой фигурѣ. Обычно они оказываются болѣе или менѣе скругленными, сглаженными,

что объясняется тѣмъ, что органы машины, вѣдающіе распредѣленіе пара, мгновенности въ конечные моменты впуска и выпуска дать не могутъ. Золотниковое парораспредѣленіе обороты угловъ дать не можетъ; болѣе или менѣе совершенно дають ее крановыя и клапанныя парораспредѣленія. Несомнѣнно, что сглаживаніе, округливаніе этихъ угловъ желательнымъ признать нельзя, такъ какъ оно замѣтно убавляетъ величину площади діаграммы, но, при употребляемыхъ на практикѣ типахъ парораспредѣленій, съ этимъ обстоятельствомъ приходится поневолѣ мириться. Такимъ образомъ, въ дѣйствительности приходится имѣть дѣло съ діаграммами, подобными изображенной на фиг. 123 и представляющей собою ту же діаграмму adda фигуры 121, но лишь съ сглаженными углами. Съ діаграммами, подобными діаграммѣ фиг. 123, мы и будемъ вести



Фиг. 123.

дальше наше изслѣдованіе.

Нетрудно подсчитать, путемъ ли прямого планиметрированія или помощью приближенныхъ формулъ (Симпсона и др.), площадь, ограниченную замкнутой кривой abcdefa нашей діаграммы. Площадь эта дастъ намъ, въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ единицахъ, зависящихъ отъ масштаба абсциссъ и ординатъ, работу пара за одинъ полный оборотъ вала, при дѣйствіи пара на одну сторону поршня. Дѣй-

сительно, при ходѣ поршня вправо ($s_1 \to s_2$) работа пара выразится площадью $s_1 fabc s_2 s_1$; при ходѣ же влѣво ($s_2 \to s_1$) на выпускъ пара и на слѣдующее затѣмъ сжатіе его уйдетъ работа, выражаемая площадью $ce f s_1 s_2 c$. Отсюда слѣдуетъ, что за этотъ полный ходъ поршня (впередъ и назадъ) машина дастъ работу, выражаемую площадью $abcefa$.

Итакъ, работа пара на одной сторонѣ поршня за каждый полный оборотъ коренного вала выражается площадью индикаторной діаграммы, въ нѣкоторыхъ единицахъ, зависящихъ отъ масштабовъ, принятыхъ при вычерчиваніи діаграммы. Опредѣливъ эту площадь, можемъ замѣнить ее площадью равновеликаго ей прямоугольника съ основаніемъ, равнымъ ходу s поршня, гдѣ $s = s_1 s_2$. Пусть величина этой площади равна A_1. Въ такомъ случаѣ высота H' этого прямоугольника опредѣлится изъ условія

$$A_1 = Hs,$$

откуда и находимъ, что

$$H' = \frac{A_1}{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Эта величина H', представляющая собою нѣкоторое давленіе, называется среднимъ избыточнымъ (надъ давленіемъ выпуска h) давленіемъ. Такимъ образомъ получается представленіе о среднемъ индикаторномъ давленіи, — избыточномъ (H') сверхъ давленія выпуска (h) или абсолютномъ ($H' + h$) отъ нуля давленій. Такъ какъ H' есть давленіе на единицу площади поршня, то на весь поршень съ площадью F, давленіе будетъ равно FH', и, значитъ, работа пара на одной сторонѣ поршня за каждый оборотъ вала, т.-е. за

полный ходъ поршня (впередъ и назадъ), выразится черезъ

$$2_1 = 2sFH', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ s есть ходъ поршня, $s_1 s_2$, равный діаметру ($2r$) окружности, описываемой пальцемъ кривошипа.

Принимая теперь во вниманіе, что въ паровыхъ машинахъ паръ работаетъ по обѣ стороны поршня и что измѣненія его состоянія протекаютъ по этимъ двумъ сторонамъ его одинаково, заключаемъ, что полная работа пара по обѣ стороны поршня, получаемая отъ машины за каждый полный оборотъ вала, выражается черезъ $2sFH'$, такъ что, если валъ машины дѣлаетъ N оборотовъ въ минуту, то, предположивъ работу $2sFH'$ выраженной въ kgmt, можно сказать, что мощность нашей машины равна $2sFH'/60.75$ лошадиныхъ силъ, ибо одна лош. сила есть работа въ 75 kgmt, совершаемая въ одну секунду.

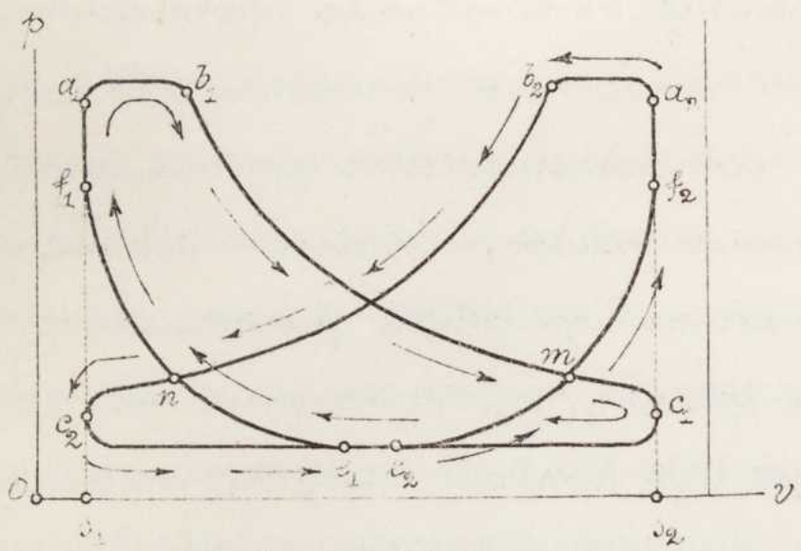
Было уже указано, что въ паровыхъ машинахъ паръ работаетъ по обѣ стороны поршня; въ двигателяхъ внутренняго горѣнія, какъ это будетъ разъяснено ниже, газовая смѣсь работаетъ лишь по одну сторону поршня. Въ паровыхъ машинахъ парораспредѣленіе выполняется такъ, что индикаторныя діаграммы, рисующія измѣненія состояній пара по обѣимъ сторонамъ поршня, оказываются въ большинствѣ случаевъ почти одинаковыми и располагаются приблизительно симметрично, какъ это и изображено на фиг. 124. Такимъ образомъ, при ходѣ вправо на одной сторонѣ поршня,—лѣвой,—выполняется процессъ впуска $(a_1 b_1)$ и, затѣмъ, расширенія $(b_1 c_1)$, а на другой, правой,—процессъ выпуска $(c_2 e_2)$ и сжатія $(e_2 f_2)$. Если

на кривыхъ двойной діаграммы фиг. 124 поставимъ стрѣлки, указывающія направленіе, въ которомъ протекаютъ измѣненія въ состояніи пара, то и окажется, что ходу поршня вправо будутъ соотвѣтствовать кривыя, имѣющія стрѣлки, направленныя вправо, — кривыя $a_1b_1mc_1$ и $c_2e_2mf_2$. Ихъ можно выдѣлить изъ общей діаграммы фиг. 124, послѣ чего получимъ фигуру, изображенную на чертежѣ 125 и состоящую изъ кривой $a_1b_1mc_1$, принадлежащей лѣвой сторонѣ поршня, и кривой c_2mf_2, принадлежащей правой сторонѣ, — короче сказать, изъ одинаково направленныхъ правой и лѣвой кривыхъ фиг. 124.

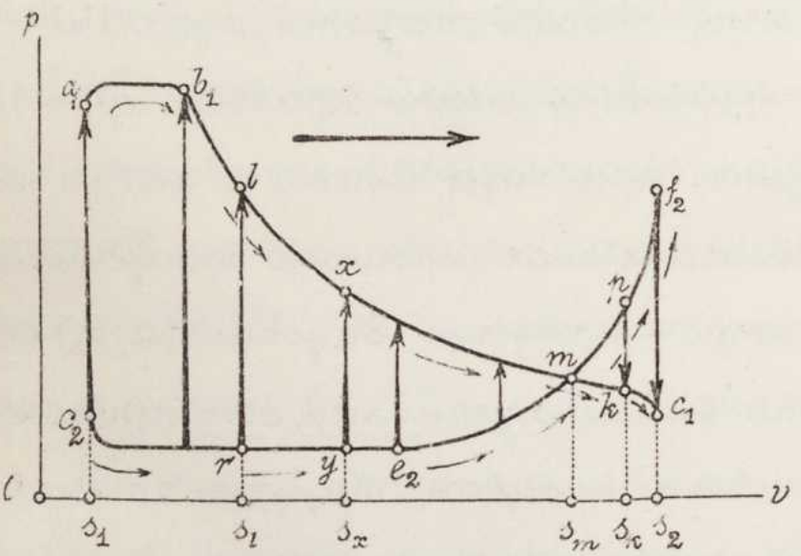
Подобнымъ же образомъ, при ходѣ влѣво, по лѣвую сторону поршня будутъ выполняться процессы выпуска (c_1e_1) и сжатія (e_1f_1), а по правую — процессы впуска (a_2b_2) и расширенія (b_2c_2). Подобно вышесказанному, обѣ кривыя фиг. 124, изображающія эти процессы, будутъ отмѣчены стрѣлками, идущими въ обоихъ случаяхъ влѣво, т.-е. согласно направленію хода поршня. Выдѣливъ особо эти двѣ кривыя, получимъ діаграмму фиг. 126, рисующую измѣненія состоянія пара при ходѣ влѣво, подобно тому, какъ фиг. 125 рисуетъ эти измѣненія при ходѣ вправо.

Діаграммы, изображенныя на фиг. 125 и 126, интересны и важны въ томъ отношеніи, что даютъ возможность опредѣлить въ каждый данный моментъ дѣйствительное давленіе пара на поршень, какъ результатъ давленій, оказываемыхъ на него одновременно какъ съ одной его стороны, такъ и съ другой. На самомъ дѣлѣ,

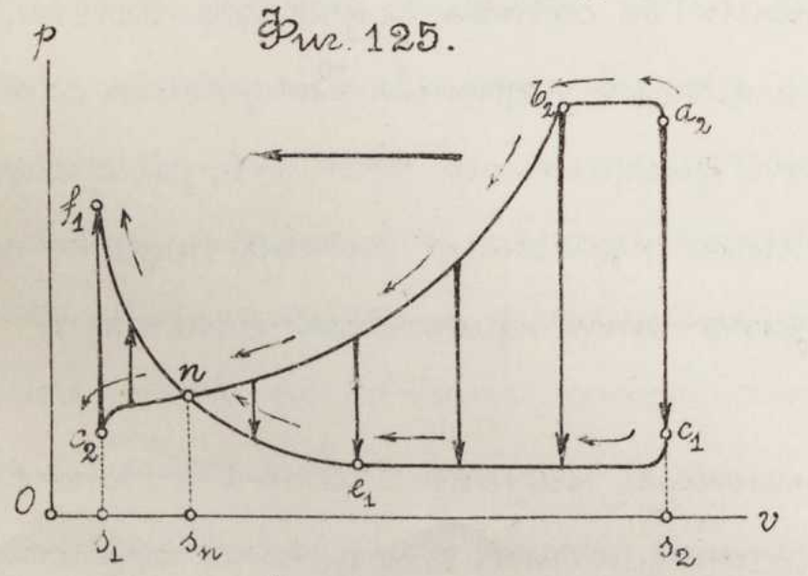
пусть поршень идетъ направо. Согласно сказанному, ходъ изменений состоянія пара изобразится въ этомъ случаѣ діаграммой фиг. 125, образованной изъ двухъ кривыхъ: изъ „лѣвой" кривой (т.-е. относящейся къ лѣвой сторонѣ поршня) $a_1 b_1 m c_1$ и „правой" $c_2 m f_2$; по мѣрѣ удаленія поршня отъ крайняго лѣваго положенія s_1, давленія пара на лѣвую сторону то будутъ идти по „лѣвой" силовой кривой $a_1 b_1 m c_1$, а на правую — по „правой" силовой кривой $c_2 m f_2$.



Фиг. 124.

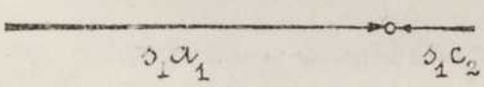


Фиг. 125.



Фиг. 126.

Теперь разсуждаемъ такъ: въ моментъ a_1 начала впуска лѣвая сторона поршня испытываетъ давленіе $s_1 a_1$, направленное вправо (фиг. 127) и, значитъ, помогающее движенію поршня, въ то время какъ правая сторона поршня подвергается давленію, изображаемому отрѣзкомъ $s_1 c_2$, направленному влѣво и, значитъ, пре-



Фиг. 127

противодействующему движению поршня,— такія препятствующія давленія будемъ называть противодавленіями. Отсюда заключаемъ, что дѣйствительное, результирующее давленіе на поршень,— будемъ называть его свободнымъ усиліемъ,— будетъ равно разности между давленіемъ b_1a_1 и противодавленіемъ b_1c_2 и, значитъ, направится въ сторону большаго изъ нихъ. Нетрудно сообразить, что оно изобразится отрѣзкомъ c_2a_1 и, въ виду преобладанія здѣсь давленія надъ противодавленіемъ, окажется направленнымъ вправо, помогая, такимъ образомъ, движенію поршня. Если силы, направленныя вправо, условимся изображать векторами, направленными вверхъ, а влѣво-направленными внизъ, то полученное свободное усиліе c_2a_1 придется изобразить векторомъ, идущимъ вверхъ. Направленія упомянутыхъ векторовъ будемъ отмѣчать соотвѣтствующими стрѣлками.

Замѣтивъ, что стрѣлка ординаты c_2a_1 идетъ отъ „правой" кривой c_2mf_2 къ „лѣвой" a_1mc_1 и что обѣ эти кривыя имѣютъ согласное направленіе и вычерчены въ діаграмму фиг. 125, можемъ сказать еще, что свободное усиліе въ моментъ b_1 изобразится отрѣзкомъ c_2a_1 ординаты этой точки b_1, лежащимъ между согласно идущими кривыми двойной діаграммы фиг. 124 a_1mc_1 и c_2mf_2, этому движенію поршня соотвѣтствующими, при чемъ направленіе стрѣлки, указывающей направленіе самого свободнаго усилія, будетъ идти отъ „правой" кривой c_2mf_2 къ „лѣвой" a_1mc_1.

Подобнымъ же образомъ, въ нѣкоторый моментъ b_4 свободное давленіе изобразится отрѣзкомъ lr (фиг. 125) и будетъ направлено опять согласно движенію поршня, т.-е. вправо.

Въ виду этого мы отмѣтимъ его стрѣлкой вверхъ, что вполнѣ согласно съ отмѣткой направленія отъ правой кривой къ лѣвой.

Въ моментъ b_x свободное давленіе будетъ дано отрѣзкомъ yx и будетъ направлено вправо (стрѣлка вверхъ).

Въ моментъ b_m свободное давленіе окажется равнымъ нулю, ибо въ этотъ моментъ давленіе $b_m m$ будетъ равно противодавленію mb_m.

Нетрудно убѣдиться, что на оставшейся части хода, $b_m b_2$, свободныя давленія окажутся направленными противъ хода поршня, ибо кривая противодавленій („правая" кривая) mf_2 идетъ выше „лѣвой" кривой давленій mc_1. Значитъ, на всемъ участкѣ $b_m b_2$ свободныя давленія будутъ направлены все время влѣво, что и отмѣчено стрѣлками внизъ, идущими опять, согласно вышеприведенному условію, отъ „правой" кривой mf_2 „къ лѣвой" mc_1.

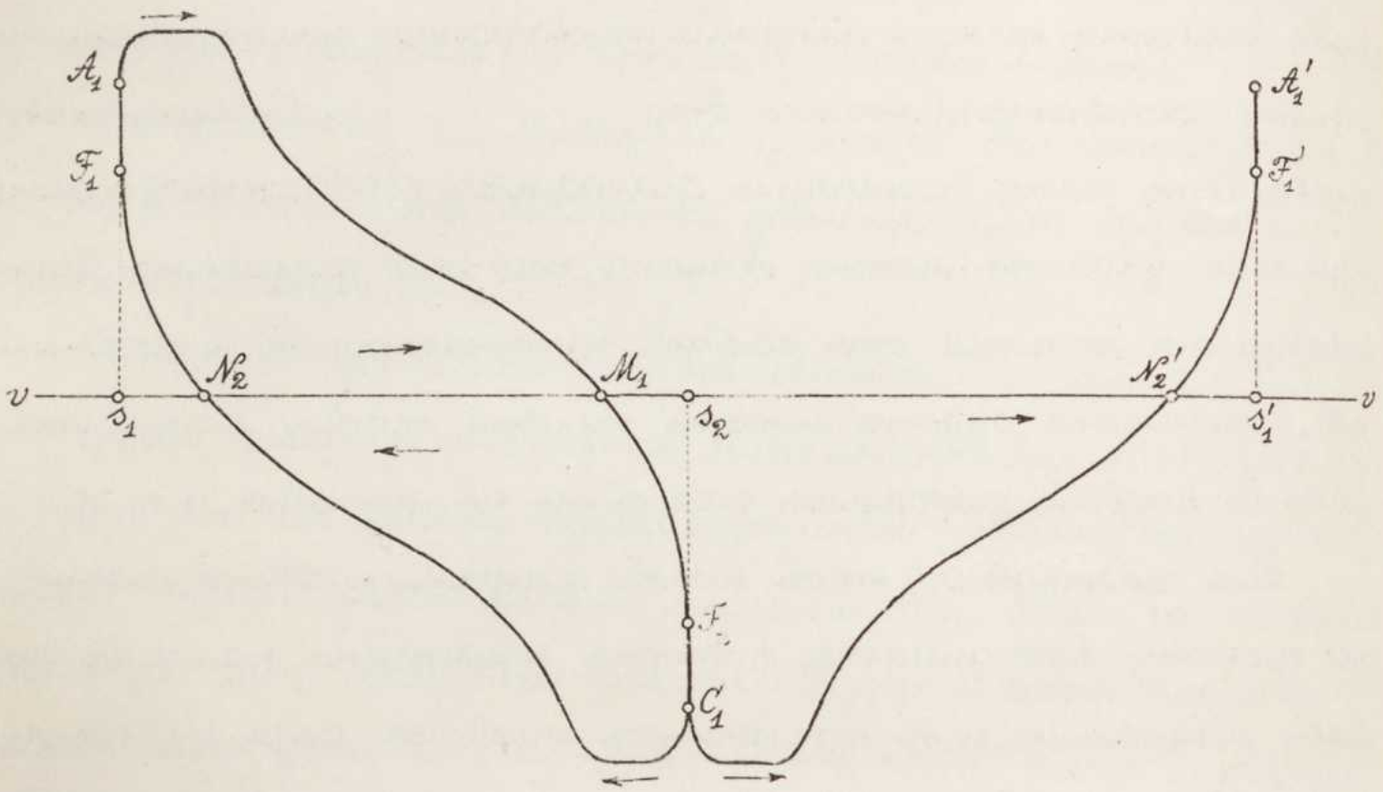
При ходѣ влѣво учетъ свободныхъ давленій будетъ выполненъ совершенно аналогично вышеизложенному: обратившись опять къ соотвѣтствующей этому случаю діаграммѣ, дающей изображенія состоянія пара по обѣимъ сторонамъ поршня (фиг. 126) и разсмотрѣвъ рядъ различныхъ положеній поршня, увидимъ, что свободныя давленія будутъ выражаться, какъ и раньше, отрѣзками ординатъ, заключенными между обѣими кривыми этой діаграммы, а направленія, попрежнему, будутъ указываться стрѣлками, идущими отъ „правой" кривой $a_2 b_2 nc_2$ къ „лѣвой" $c_1 nf_1$, какъ это и изображено на фиг. 126. Выясняется, такимъ образомъ, что на всемъ участкѣ $b_2 b_n$ свободныя давленія будутъ помогать движенію поршня, будучи направлены

влѣво, а на участкѣ ms_1 будутъ этому движенію препятствовать, ибо будутъ направлены вправо.

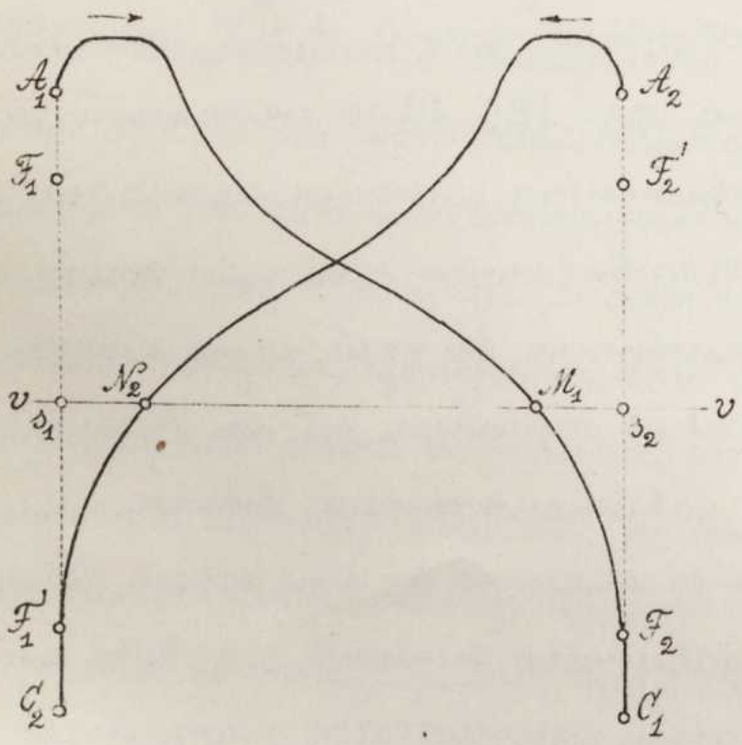
Итакъ, для каждаго положенія поршня можно опредѣлить какъ величину, такъ и направленіе свободнаго усилія, этому моменту соотвѣтствующаго. Это обстоятельство позволяетъ намъ построить діаграмму свободныхъ усилій, при чемъ заранѣе можно сказать, что эта діаграмма будетъ совершенно отлична отъ рабочей, индикаторной діаграммы, ибо, напримѣръ, будетъ имѣть нулевыя точки, между тѣмъ какъ въ рабочей діаграммѣ ихъ быть не можетъ, и т. д.

Для построенія этой новой діаграммы беремъ такую же систему координатъ, которая принята нами въ рабочей діаграммѣ, и въ различныхъ точкахъ хода s_1s_2 поршня откладываемъ на ординатахъ соотвѣтствующія этимъ точкамъ величины свободныхъ усилій, получаемыя помощью пріемовъ, указанныхъ выше. Такимъ образомъ, для хода поршня вправо получимъ кривую свободныхъ усилій $A_1M_1C_1$ (фиг. 128), соотвѣтствующую діаграммѣ фиг. 125. Ходъ измѣненій дѣйствительнаго, свободнаго давленія (на единицу площади поршня) при ходѣ вправо, обрисовывается помощью этой діаграммы весьма ясно. Замѣтимъ, во избѣжаніе недоразумѣній, что за крайнюю правую ординату s_2C_1 мы будемъ принимать разность между давленіемъ начала впуска s_1a_1 и давленіемъ выпуска въ моментъ s_2, а не между давленіемъ конца сжатія s_2b_2 и давленіемъ выпуска s_2c_1, какъ это принято было, при разсмотрѣніи единичнаго, отдѣльнаго хода вправо, приведшаго къ діаграммѣ фиг. 125,—при непрерывномъ движеніи машины давленіе s_2b_2 предполагается мно-

венно возрастающее до давления $s_1 a_1$ начала впуска, откуда, понятно, столь же мгновенно возрастает и свободное давление. Моменты конца сжатия отмечены векторами типа (sF).



Фиг. 128.



Фиг. 129.

При движении поршня влево получим, помощью диаграммы фиг. 126, кривую $C_1 N_2 A_1$ (фиг. 128). Вторично ее можно различно: можно построить ее на том же отрезке $s_2 s_1$, на котором построена и кривая $A_1 M_1 C_1$ хода вправо, но можно построить и отдельно, взявъ для хода влево отрезокъ $s_2 s_1'$, какъ продолженіе отрезка $s_1 s_2$; тогда получимъ кривую $C_1 N_2' A_1'$, симметричную кривой $C_1 N_2 A_1$ относительно вертикали $C_1 s_2$.

Отмѣтку направленія свободныхъ усилій можно дѣлать еще и иначе,— можно условиться считать положительными тѣ изъ нихъ, которыя помогаютъ движенію поршня и, такимъ образомъ, производятъ отрицательную работу; эти усилія можно помѣчать стрѣлками, направленными вверхъ, и откладывать ихъ вверхъ отъ оси абсциссъ; давленія, препятствующія движенію, придется отмѣчать стрѣлками, идущими внизъ, и откладывать внизъ отъ оси абсциссъ. Въ силу этого стрѣлки фигуры 126 теперь перемѣнили бы свое направленіе, а діаграмма свободныхъ усилій $A_1 M_1 C_1 N_2 A_1$ (фиг. 128) приняла бы видъ, изображенный на фиг. 129,— кривая $C_1 N_2 A_1$ свободныхъ давленій при ходѣ влѣво замѣнилась бы кривой $C_2 N_2 A_2$, симметричной ей относительно оси абсциссъ. Во избѣжаніе недоразумѣній, у этихъ кривыхъ слѣдуетъ поставить стрѣлки, указывающія направленіе того хода, которому принадлежитъ данная кривая.

Такая помѣтка направленій является еще тѣмъ болѣе удобной, что она вполнѣ соотвѣтствуетъ другому положенію, согласно коему положительными слѣдуетъ считать тѣ работы, которыя произведены силами, помогающими движенію поршня, а отрицательными — тѣ, которыя произведены силами, этому движенію препятствующими; площади же, эти работы выражающія, слѣдуетъ строить вверхъ отъ оси абсциссъ, если онѣ положительны, и внизъ, если онѣ отрицательны. Діаграмма фигуры 129 требованіямъ этимъ удовлетворяетъ вполнѣ.

По поводу діаграммы свободныхъ усилій необходимо сдѣлать слѣдующихъ два важныхъ замѣчанія:

Пусть поршень движется вправо, такъ что кривыя, рисующія ходъ давленій на него (на единицу площади его), изображаются кривыми фиг. 125 и кривой $A_1M_1C_1$ фиг. 128. Кривыя фигуры 125 выдѣляютъ площадь $c_2a_1me_2c_2$, дающую положительную работу, ибо здѣсь свободныя давленія помогаютъ ходу поршня, и площадку mf_2c_1, дающую работу отрицательную, ибо свободныя давленія здѣсь ходу поршня препятствуютъ. Отсюда слѣдуетъ, что работа пара за этотъ ходъ вправо будетъ равна разности этихъ площадей,—точнѣе говоря, алгебраической суммѣ ихъ.

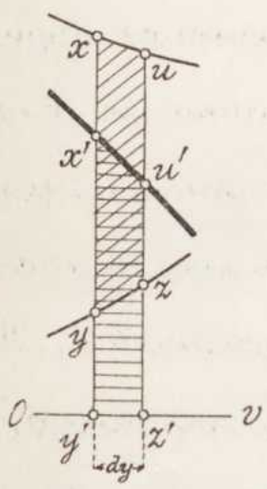
По діаграммѣ фиг. 128 полная работа свободныхъ давленій изобразится разностью площадей $s_1A_1M_1s_1$ и $M_1s_2C_1M_1$. Спрашивается теперь, будутъ ли эти разности въ обоихъ случаяхъ одинаковы, а кромѣ того, въ какомъ отношеніи находятся онѣ къ основной діаграммѣ ac фиг. 123?

Чтобы разобраться въ этомъ, разсмотримъ ходъ поршня вправо. Обращаясь къ діаграммѣ фиг. 125, видимъ, что работа l_1 пара выражается здѣсь разностью площадей $s_1a_1mc_1s_2$ и $s_1c_2e_2mf_2c_1s_2$*). Но, обращаясь къ фиг. 124, видимъ, что эта послѣдняя (площадь $s_1e_2f_2s_2$) равна площади $s_1f_1e_1c_1s_2$ (фиг. 124), откуда слѣдуетъ, что наша разность равна площади $a_1b_1mc_1e_1f_1a_1$ фиг. 124, т.-е. площади прямоугольника $dlmn$ (фиг. 123), равной sH'.

Перейдемъ теперь къ діаграммѣ свободныхъ усилій $A_1M_1C_1$, соотвѣтствующей тому же ходу вправо. Получена она, какъ извѣстно, путемъ откладыванія отрѣзковъ типа lr и xy (фиг. 125) отъ оси абсциссъ Ov въ ту же сторону, въ какую

*) Очевидно, что разность площадей $a_1me_2c_2a_1$ и mf_2c_1 равна разности площадей $s_1a_1mc_1s_2$ и $s_1c_2e_2mf_2c_1s_2$, взятыхъ здѣсь.

эти отрѣзки идутъ отъ „правой кривой $c_2 f_2$. Произошло, такимъ образомъ, осаживаніе этихъ отрѣзковъ внизъ, вплоть до оси абсциссъ Ov, но нетрудно убѣдиться, что измѣненія въ площади, подвергшейся такой осадкѣ, произойти не могло: контуръ площади измѣнился, но величина площади осталась неизмѣненной (съ точностью до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ. Дѣйствительно, пусть какіе-либо отрѣзки xy и uz (фиг. 130) ординатъ, лежащіе между „правой" и „лѣвой" кривыми діаграммы фиг. 125, осаживаются по этимъ ихъ ординатамъ внизъ до тѣхъ поръ, пока точка y не придетъ въ точку y' на оси Ov, а точка z — въ точку z'. Замѣчая теперь, что площади двухъ безконечно-малыхъ трапецій $xuzy$ и $x'u'z'y'$, съ точностью до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ могутъ быть приняты равными другъ другу, — высота у нихъ $(y'z')$ одна и та же, а длины параллельныхъ сторонъ не измѣнились, — заключаемъ, что на величинѣ площади осадка подобнаго рода не отражается совсѣмъ. Распространяя то же заключеніе на всю площадь $c_2 a_1 m c_1 f_2 m c_2$ (фиг. 125), скажемъ, что она въ точности будетъ равна площади $s_1 A_1 M_1 C_1 s_2$ (фиг. 128), при чемъ, отдѣльно, площадь $c_2 a_1 m e_2 c_2$ будетъ равна площади $s_1 A_1 M_1 s_1$, а площадь $m f_2 c_1 m$ будетъ равна площади $M_1 s_2 C_1 M_1$. Въ результатѣ окажется, что разность площадей $A_1 M_1 s_1$ и $M_1 C_1 s_2$, изъ коихъ первая даетъ положительную работу свободныхъ усилій, а вторая — отрицательную, такъ что разность абсолютныхъ величинъ ихъ представитъ собою ихъ алгебраическую сумму, — эта разность



Фиг. 130.

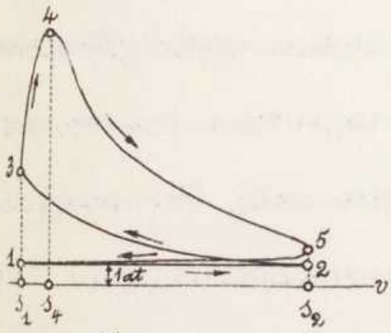
даетъ тотъ же прямоугольникъ $dlmn$ (фиг. 123) съ площадью $\mathfrak{M}$. Необходимо помнить, что діаграмма свободныхъ усилій даетъ, подобно индикаторной діаграммѣ, давленія не на весь поршень, а на единицу площади его, такъ что давленіе на весь поршень, взятое помощью діаграммы свободныхъ усилій, дающей разности $(p_1 - p_2)$, выразится черезъ $\mathfrak{F}(p_1 - p_2)$, гдѣ $\mathfrak{F}$ есть площадь поршня.

Второе замѣчаніе, которое необходимо здѣсь сдѣлать, касается вопроса о независимости свободныхъ усилій отъ времени. Мы уже видѣли, что давленія p_1 пара на лѣвую сторону поршня отъ времени не зависятъ и являются функціями координатъ, опредѣляющихъ положеніе поршня. То же самое можно, очевидно, сказать и относительно давленій p_2 на правую сторону поршня, ибо законъ измѣненія ихъ дается такой же діаграммой, какая даетъ законъ давленій p_1. Ясно, что свободныя усилія, — на единицу ли площади поршня, $(p_1 - p_2)$, или на всю эту площадь, $[\mathfrak{F}(p_1 - p_2)]$, — также отъ времени зависѣть не будутъ, представляя собою функціи координатъ, опредѣляющихъ положеніе поршня; иначе говоря,

> свободныя усилія, не завися отъ времени, зависятъ лишь отъ положенія механизма, отъ конфигураціи его частей.

При динамическихъ изслѣдованіяхъ нашихъ машинъ и механическихъ устройствъ обычно приходится имѣть дѣло только съ силами, не зависящими отъ времени, но представляющими собою функціи положенія въ пространствѣ точекъ ихъ приложенія, т.-е. функціи конфигураціи, расположенія частей этихъ машинъ, — функціи фазъ механизма. Съ такими дѣйствующими, активными силами будемъ имѣть въ дальнѣйшемъ дѣло и мы.

Умѣстно будетъ упомянуть здѣсь вкратцѣ о составленіи діаграммы свободныхъ усилій въ случаѣ двигателей внутренняго сгоранія, гдѣ процессъ измѣненія рабочей газовой смѣси протекаетъ обычно по одну сторону поршня, въ то время какъ другая остается постоянно подъ воздѣйствіемъ одного лишь атмосфернаго давленія. Разсмотримъ вкратцѣ схему работы какого-либо такого двигателя,—напримѣръ, 4-хъ-тактнаго двигателя, работающаго по циклу Отто и дающаго индикаторную діаграмму, изображенную на фиг. 131.



Фиг. 131

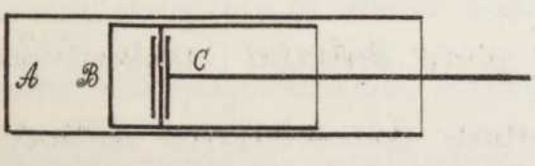
За первый свой ходъ вправо (первый тактъ), отъ s_1 до s_2, двигатель всасываетъ горючую смѣсь, наполняющую къ концу хода, т.-е. къ моменту s_2, все пространство подъ поршнемъ подъ давленіемъ, равнымъ внѣшнему, атмосферному, такъ что линія, изображающая ходъ давленій за этотъ тактъ, изобразится прямой (1—2), параллельной оси абсциссъ. Въ моментъ (s_2) впускной клапанъ закрывается.

Въ теченіе слѣдующаго, очереднаго хода поршня,—хода влѣво (второго такта), отъ s_2 къ s_1,—происходитъ нѣкоторое опредѣленное (адіабатическое) сжатіе газовой смѣси, всосанной подъ поршень къ концу (2) перваго такта; измѣненіе давленія будетъ дано здѣсь силовой линіей (2—3).

Слѣдующій ходъ вправо,—третій тактъ,—отводится частью для взрыва,—(3—4), на пути $s_1 s_4$,—а частью для расширенія продуктовъ взрыва,—(4—5) на пути $s_4 s_2$,—причемъ это расширеніе доводится почти до давленія во внѣшней средѣ.

И, наконецъ, весь циклъ завершается четвертымъ тактомъ, при ходѣ влѣво $s_2 s_1$, во время котораго происходитъ выталкиваніе сгорѣвшей, непригодной для дальнѣйшей работы, газовой смѣси наружу, при чемъ давленіе этой изгоняемой смѣси мѣняется по кривой (5–1), весьма близко подходящей къ линіи всасыванія (1–2).

Кривая свободныхъ усилій строится здѣсь особенно просто потому, что давленіе на одну сторону поршня, положимъ, правую, – остается все время постояннымъ, равнымъ атмосферному: цилиндръ двигателя открытъ, и горючая смѣсь работаетъ внутри его, въ пространствѣ AB подъ поршнемъ (фиг. 132),



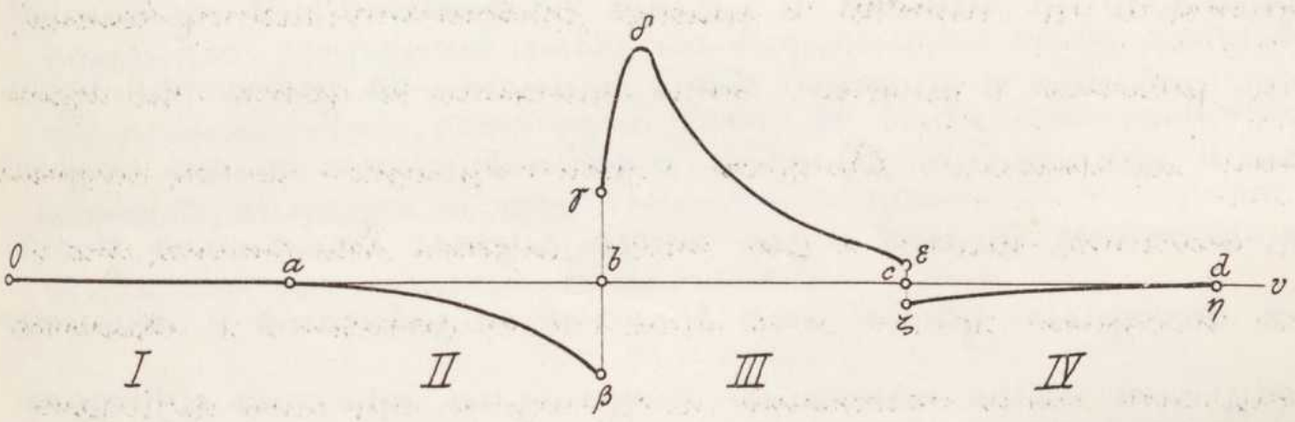
Фиг. 132.

такъ что воздѣйствію этой смѣси подвергается все время одна и та же, внутренняя сторона B поршня. Давленіе этой смѣси, т.-е. давленіе внутри цилиндра, будемъ обозначать черезъ p_B; наружная же сторона C его остается все время подъ давленіемъ внѣшней среды, и мы будемъ обозначать его черезъ p_c. — Разсмотримъ теперь ходъ измѣненій свободныхъ усилій и работу ихъ за весь четырехтактный циклъ, для чего возьмемъ систему координатъ, подобную прежней, при чемъ вверхъ отъ оси абсциссъ будемъ откладывать свободныя усилія, помогающія движенію поршня, а внизъ — ему сопротивляющіяся. Всѣ 4 хода вытянемъ, для наглядности, въ одну прямую. Тогда окажется слѣдующее:

За первый тактъ (1–2) свободныя усилія остаются во все время равными нулю, такъ какъ давленія p_B и p_c за

весь этотъ ходъ оказываются другъ другу равными. Значитъ, діаграмма свободныхъ давленій за первый тактъ даетъ прямую $0a$, совпадающую съ осью абсциссъ (фиг. 133).

За второй тактъ (ходъ влѣво), когда происходитъ сжатіе, давленія $p_в$ будутъ расти по закону (2–3), противодѣйствуя движенію; помогать же движенію будетъ внѣшнее давленіе p_c. Поэтому свободныя давленія будутъ даны здѣсь отрѣзками ординатъ между прямой (1–2) и кривой (2–3) и окажутся всѣ отрицательными, вслѣдствіе



Фиг. 133.

чего ихъ придется откладывать внизъ, и мы получимъ кривую ab, представляющую собою ту же кривую (2–3), лишь повернутую вокругъ точки (2) на 180°.

За третій тактъ (вправо) давленія $p_в$ сгорающей, а затѣмъ сгорѣвшей и расширяющейся газовой смѣси будутъ направлены также вправо, т.-е. будутъ помогать движенію; внѣшнее же давленіе p_c будетъ ему противодѣйствовать. Свободныя усилія изобразятся отрѣзками ординатъ между кривой (3–4–5) и прежней прямой (1–2), и для этого такта получимъ кривую свободныхъ усилій $\gamma\delta\varepsilon$, представляющую собою ту же кривую (3–4–5), отнесенную къ оси абсциссъ (1–2)

Наконецъ, за четвертый тактъ, влѣво, давленія $p_в$ будутъ противодѣйствовать движенію, а внѣшнія, p_c, — ему помогать, вслѣдствіе чего свободныя давленія окажутся отрицательными, и кривая $\zeta\eta$ ихъ пойдетъ ниже оси абсциссъ. Эта кривая $\zeta\eta$ есть та же кривая (5–1), лишь повернутая вокругъ точки (1) относительно своего прежняго положенія (5–1) на 180°.

Такимъ образомъ получается кривыя свободныхъ усилій $0\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$, рисующая измѣненія ихъ за полный циклъ. Она даетъ собою законъ измѣненія давленій на поршень, а значитъ, и на шатокъ и палецъ кривошипа (шейку кольна), и эти давленія и должны быть приняты въ учетъ при изслѣдованіи механизма. Вопросъ о дѣйствующихъ силахъ, разрѣшается, значитъ, вполнѣ и для этого случая. Замѣтимъ, что и здѣсь свободныя усилія отъ времени не зависятъ и являются функціями лишь положеній механизма, при чемъ періодомъ механизма является здѣсь циклъ изъ четырехъ тактовъ, т.-е. изъ двухъ полныхъ оборотовъ коренного вала, что для существа дѣла является, конечно, безразличнымъ.

Въ случаѣ другихъ двигателей діаграммы будутъ имѣть видъ, можетъ быть, весьма отличающійся отъ діаграммъ фиг. 123 и 131, но каковъ бы этотъ видъ ихъ ни былъ, а мы всегда сможемъ построить діаграмму свободныхъ усилій для одного періода работы машины, и, значитъ, будемъ имѣть всѣ свѣдѣнія объ активныхъ силахъ, работающихъ въ механизмѣ. Перейдемъ теперь къ изученію силъ сопротивленій, обнаруживающихся при работѣ нашихъ механизмовъ и машинъ.

Работа преодоленія полезныхъ сопротивленій выражается во вращеніи съ извѣстной угловой скоростью ω коренного вала, на которомъ дѣйствуетъ извѣстный моментъ внѣшняго полезнаго сопротивленія, M. Имѣя въ виду послѣдующее, мы будемъ предполагать, что этотъ моментъ вызывается нѣкоторой силой R, дѣйствующей на плечѣ, равномъ радіусу r окружности, описываемой пальцемъ кривошипа, такъ что

$$M = Rr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Далѣе, обычно предполагается, что этотъ моментъ полезнаго сопротивленія на коренномъ валу есть величина постоянная, сообразно чему, въ виду постоянства радіуса r, будетъ постояннымъ и усиліе R полезнаго сопротивленія на пальцѣ кривошипа:

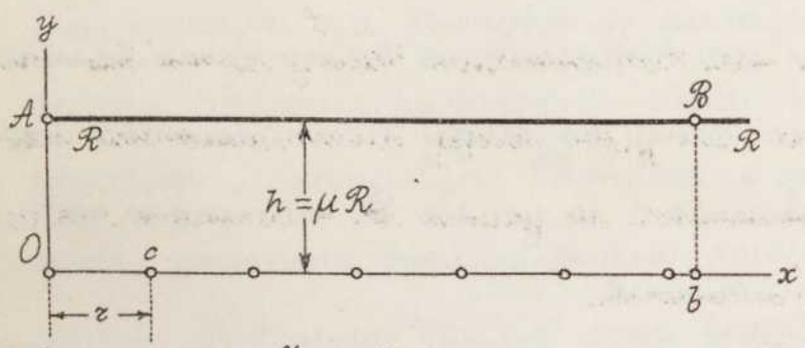
$$R = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Діаграмма усилія R построится очень просто: принимаемъ какую-либо прямую Ox (фиг. 134) за ось абсциссъ, а прямую $Oy \perp Ox$ за ось ординатъ, и будемъ откладывать по оси абсциссъ пути, проходимые точкой приложенія силы R, т.-е. центромъ поперечнаго сѣченія пальца кривошипа; это, значитъ, будутъ дуги окружности, описываемой этой точкой, — дуги, выпрямляемыя и откладываемыя по этой оси Ox хотя бы отъ той же точки O ея. Такимъ образомъ, если радіусъ r пальца кривошипа, т.-е. разстояніе между осями вала и пальца кривошипа, изображается отрѣзкомъ Oc, то вся окружность, описываемая центромъ сѣченія пальца кривошипа, будучи выпрямлена, изобразится отрѣзкомъ Ob, равнымъ $2\pi r$, т.-е. $6{,}28\ Oc$. Та-

кова будетъ величина пути, проходимаго точкой приложенія силы R за одинъ оборотъ коренного вала.

Если періодъ равенъ не одному, а нѣсколькимъ оборотамъ вала, — какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ двигателяхъ внутренняго сгоранія, гдѣ онъ составляетъ 2 оборота, — то путь точки приложенія силы R соотвѣтственно удвоится, и, напримѣръ, для двигателей внутренняго сгоранія онъ будетъ равенъ уже $4\pi r$, т.-е. 12,56 Oc, и т. д.

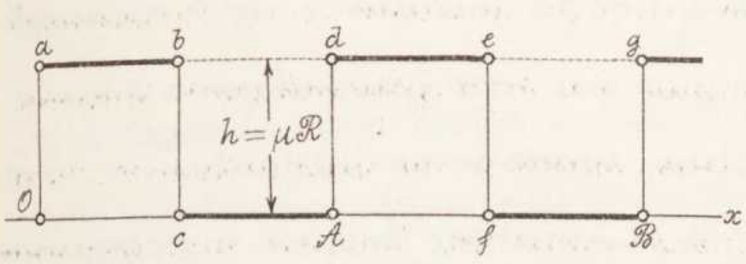
Если, согласно прежнему, на ординатахъ условимся откладывать силы, дѣйствующія на точку въ направленіи ея пути, то въ данномъ случаѣ, въ виду постояннаго совпаденія силы R съ касательной къ окружности пальца кривошипа, всѣ эти ординаты окажутся одинаковыми и равными каждая R, такъ что силовой кривой полезныхъ сопротивленій R явится прямая RR, параллельная оси Ox и отстоящая отъ нея на $h = \mu R$, гдѣ μ есть масштабъ силъ, заранѣе нами выбранный.



Фиг. 134.

Мы видѣли, что за полный оборотъ вала точка приложенія силы R пройдетъ путь $Ob = 2\pi r = 2\pi . Oc$. Такъ какъ сила R, будучи все время касательной къ окружности пальца кривошипа, постоянно направлена по пути этой точки, то работа полезнаго сопротивленія за одинъ оборотъ вала выразится площадью прямоугольника $OABb$ и будетъ равна, въ нѣкоторыхъ единицахъ работы, за каждый оборотъ вала, $Ob \times h = 2\pi r . \mu R = \mu . 2\pi r R = 2\pi \mu M$.

Конечно, ходъ сопротивленія можетъ быть и инымъ,—можетъ, напримѣръ, случиться такъ, что сопротивленіе будетъ имѣть мѣсто на части періода, а на другой его части сопротивленія не будетъ совсѣмъ. Тогда силовая кривая можетъ принять видъ, подобный изображенному на фиг. 135: на части Oc полнаго періода OA появляется полезное сопротивленіе R, исчезающее въ моментъ перехода механизма черезъ положеніе (c) и уже не появляющееся вплоть до начала A слѣдующаго періода AB. Здѣсь силовая кривая полезнаго сопротивленія за одинъ періодъ изобразится прямыми ($ab - cA$) и т. д.



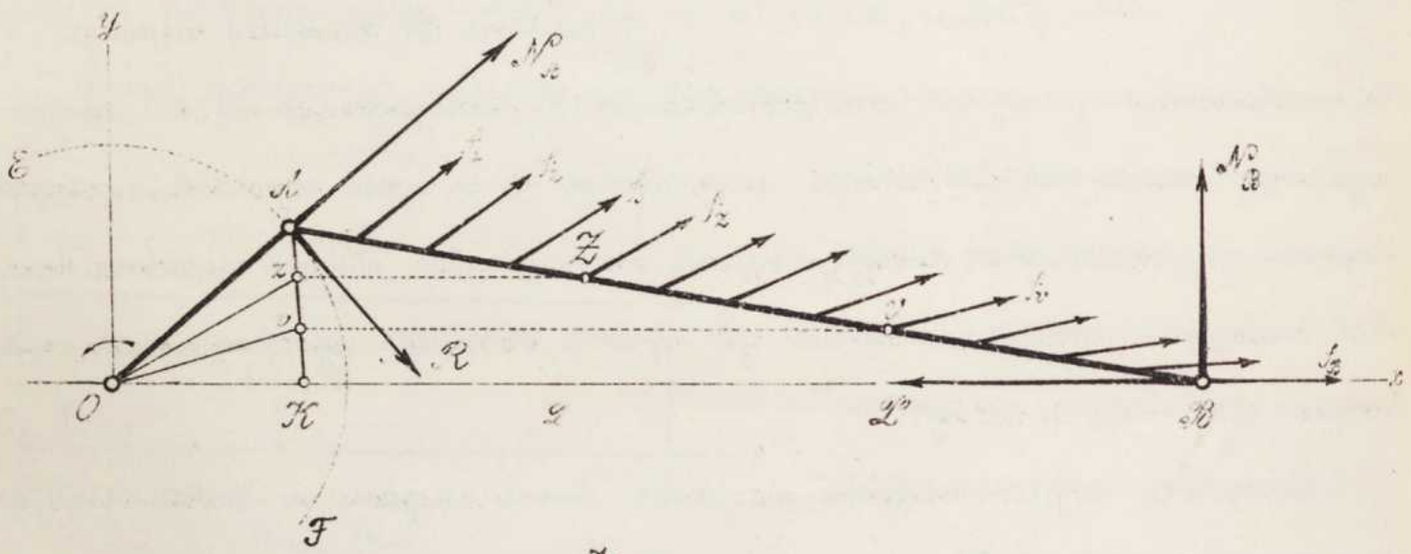
Фиг. 135.

Конечно, сопротивленіе можетъ быть задано и какъ-нибудь иначе, но для насъ важенъ не характеръ этого задания, а лишь то обстоятельство, чтобы величина и направленіе силъ сопротивленія отъ времени не зависѣли, а представлялись лишь функціями положеній механизма. Такими мы и будемъ считать ихъ въ дальнѣйшемъ.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію силъ вредныхъ сопротивленій и силъ инерціи, и, прежде всего, покажемъ, что силы вредныхъ сопротивленій, т.-е. силы тренія, зависятъ не только отъ силъ дѣйствующихъ (P) и силъ полезнаго сопротивленія, но еще и отъ силъ инерціи. Доказать это весьма нетрудно, хотя бы съ помощью слѣдующихъ элементарныхъ разсужденій:

Допустимъ, ради опредѣленности разсужденій, что у насъ имѣется система шатуна AB (фиг. 136), которую мы

разсматриваемъ въ тотъ моментъ ея движенія, когда оно занимаетъ положеніе, изображенное на чертежѣ. Въ силу условій, наложенныхъ на свободныя усилія и на усилія полезныхъ сопротивленій, мы должны принять, что въ моментъ, изображенный на чертежѣ, въ точкѣ B шатуна на него дѣйствуетъ вполнѣ опредѣленная какъ по величинѣ, такъ и по направленію, сила P (свободное усиліе), а въ точкѣ A — также вполнѣ опредѣленное



Фиг. 136.

усиліе полезнаго сопротивленія R. Кромѣ этихъ двухъ силъ, система шатуна оказывается нагруженной еще цѣлымъ рядомъ другихъ силъ, а именно: силами инерціи всѣхъ массъ, входящихъ въ составъ шатуна, и силами опорныхъ сопротивленій, N_A и N_B, нормальными къ траекторіямъ точекъ A и B, т.-е. къ окружности EF въ точкѣ A ея и къ прямой Ox въ точкѣ B ея. Разсмотримъ сначала силы инерціи.

Относительно силъ инерціи, прежде всего, можно сказать, что онѣ появляются каждый разъ, когда имѣетъ мѣсто измѣненіе скоростей точекъ системы, т.-е. когда ускоренія массъ этихъ точекъ оказываются отличными отъ нуля. Это явствуетъ изъ выраженія силы инерціи какой-либо матеріальной точки съ массой m; сила инерціи, φ_m, ея выража-

ется такъ:

$$f = -mj, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

и представляетъ собою полное ускореніе этой точки, т. е. полное измѣненіе скорости v ея со временемъ. Выраженіе полнаго ускоренія пишутъ обычно въ болѣе полной формѣ, въ видѣ геометрической суммы проекцій его по осямъ координатъ, а именно, въ видѣ:

$$f_m = -mj = -m\left(\overline{\frac{d^2x}{dt^2}} + \overline{\frac{d^2y}{dt^2}} + \overline{\frac{d^2z}{dt^2}}\right) . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Принимая во вниманіе, что мы будемъ изучать движенія лишь плоскихъ механизмовъ, и располагая плоскость xOy въ этой именно плоскости движенія нашего механизма, имѣемъ, что $z = 0$ или const, вслѣдствіе чего выраженіе полнаго ускоренія плоскихъ механизмовъ принимаетъ видъ:

$$f_m = -mj = -m\left(\overline{\frac{d^2x}{dt^2}} + \overline{\frac{d^2y}{dt^2}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія силы инерціи какой-либо матеріальной точки съ массой m необходимо имѣть полное ускореніе j ея, взятому моменту соотвѣтствующее. Для точекъ шатуна ускоренія эти могутъ быть получены при помощи плана ускореній, построеніе коего выполняется по извѣстнымъ правиламъ кинематики. Пусть планъ ускореній, соотвѣтствующій данному моменту движенія шатуна, изображается треугольникомъ OAK, — мы допустимъ, ради простоты чертежа, что кривошипъ движется равномѣрно. Тогда ускореніе любой точки шатуна будетъ извѣстно,

а это, въ свою очередь, позволитъ намъ сейчасъ же опредѣлить какъ величину силы инерціи каждой точки шатуна, такъ и направленіе ея. Напримѣръ, если точкѣ Z шатуна въ планѣ ускореній соотвѣтствуетъ точка z, то сила инерціи f_z этой точки Z выразится произведеніемъ изъ массы m_z этой точки на полное ускореніе ея j_z, равное $z0.k$, гдѣ k есть коэффиціентъ пропорціональности плана ускореній, при чемъ произведеніе это надлежитъ брать со знакомъ минусъ для обозначенія того обстоятельства, что сила инерціи f_z будетъ направлена прямопротивоположно полному ускоренію j_z.

Итакъ,

$$f_z = -m_z . z0 . k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Если бы точка A шатуна двигалась по своей траекторіи неравномѣрно, то направленіе полнаго ускоренія j составляло бы съ направленіемъ вектора $z0$ уголъ μ, тангенсъ коего дается формулой:

$$tg\,\mu = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

гдѣ ϑ есть угловая скорость вращенія кривошипа. Въ данномъ случаѣ, въ виду $\vartheta = const$, имѣемъ $tg\,\mu = 0$ и $\mu = 0$.

Принимая теперь во вниманіе, что коэффиціентъ k, вычисленный для даннаго момента движенія, сохраняетъ для всей системы шатуна одно и то же значеніе; далѣе, что каждой точкѣ Z шатуна соотвѣтствуетъ своя точка z плана ускореній, и что, наконецъ, массы точекъ шатуна могутъ быть весьма различны, заключаемъ, что въ данный моментъ силы инерціи шатуна, будучи пропорціональны массамъ точекъ его и длинамъ векторовъ типа $z0$, окажутся весьма разнообразными какъ по величинѣ, такъ и

по направленію. Тѣмъ не менѣе, все это разнообразіе силъ инерціи по величинѣ ихъ и по направленію нисколько не мѣшаетъ намъ поставить вопросъ о равнодѣйствующей силѣ инерціи, эквивалентной всему безконечному множеству частичныхъ силъ инерціи, и этотъ вопросъ будетъ нами разсмотрѣнъ и разрѣшенъ въ слѣдующемъ параграфѣ, гдѣ и будетъ указано, что такая равнодѣйствующая сила инерціи, дѣйствительно, существуетъ въ каждомъ данномъ случаѣ, имѣя вполнѣ опредѣленныя величину, направленіе и точку приложенія; доказательство этого положенія и выводы изъ него и составятъ собою содержаніе такъ называемой теоремы о центрѣ качанія.

Итакъ, оказывается, что въ каждый данный моментъ силы инерціи шатуна имѣютъ вполнѣ опредѣленныя величины и направленія. Замѣтивъ это, обратимся къ разсмотрѣнію опорныхъ сопротивленій N_A и N_B. По поводу ихъ необходимо имѣть въ виду слѣдующее:

Точка A шатуна движется по своей траекторіи,—окружности центра O и радіуса OA,—а точка B по своей—прямой OB (фиг. 136). Такимъ образомъ, помимо силъ P, R и силъ инерціи (f_z), система шатуна находится подъ воздѣйствіемъ геометрическихъ связей, вынуждающихъ точки A и B двигаться вышеуказаннымъ образомъ. Для того, чтобы нашу систему можно было считать системой совершенно свободной, находящейся подъ воздѣйствіемъ однихъ лишь силъ, необходимо отъ этихъ геометрическихъ связей освободиться, что и достигается путемъ замѣны этихъ связей силами реакціи—сопротивленія—ихъ, нормальными къ траек-

торіямъ точекъ A и B, — это и будутъ силы опорныхъ сопротивленій, N_A и N_B, благодаря коимъ и возбуждаются силы тренія, на покрытіе работы которыхъ и потребуется затрата части работы свободныхъ усилій P.

Такимъ образомъ, усилія опорныхъ сопротивленій будутъ всегда перпендикулярны къ траекторіямъ, по которымъ происходитъ движеніе концовъ отрѣзка, опредѣляющаго движеніе системы, такъ что направленія этихъ усилій будутъ извѣстны въ каждый моментъ движенія, для каждаго положенія механизма. Спрашивается теперь, сколь велика будетъ величина ихъ? Детально вопросъ этотъ будетъ разрѣшенъ въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ, въ данный же моментъ мы ограничимся однимъ лишь общимъ соображеніемъ и намѣтимъ лишь ходъ рѣшенія. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

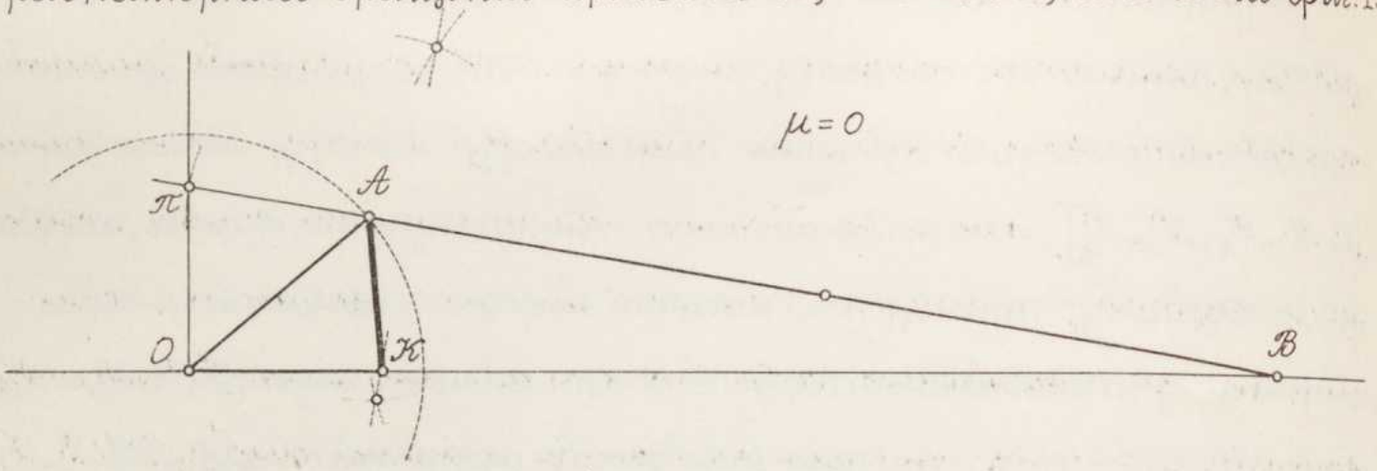
Изъ механики извѣстно, что связь между силами инерціи и всѣми другими силами, дѣйствующими въ системѣ, устанавливается при помощи принципа д'Аламбера, говорящаго, что

«если въ какой-либо моментъ времени мы остановимъ движущуюся систему и къ силамъ, ее движущимъ, прибавимъ еще всѣ силы инерціи, соотвѣтствующія данному моменту времени, то будетъ имѣть мѣсто равновѣсіе, при чемъ всѣ силы давленій, натяженій и проч., развивающіяся между частями системы при такомъ равновѣсіи, будутъ представлять собою дѣйствительныя силы давленій, натяженій и проч., имѣющія мѣсто при движеніи системы въ разсматриваемый моментъ времени».

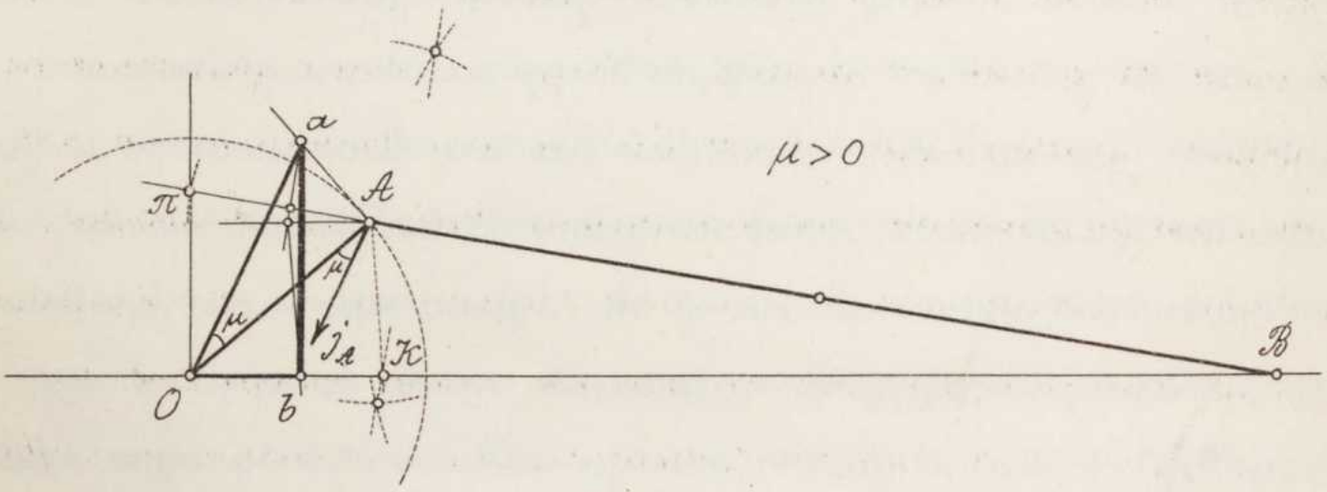
Применимъ этотъ принципъ къ системѣ нашего шатуна, для чего, остановивъ систему шатуна AB въ данный моментъ, прибавляемъ къ ней всѣ силы инерціи (f_z). Между всѣми силами, $[P, R, N_A, N_B, f_z]$, теперь къ системѣ приложенными, будетъ, согласно упомянутому принципу, имѣть мѣсто равновѣсіе, — силы инерціи уравновѣшиваютъ собою всѣ остальныя силы $[P, R, N_A$ и $N_B]$. Отсюда слѣдуетъ, что для всей этой системы силъ $[f_z, P, R, N_A, N_B]$ будутъ имѣть мѣсто обычныя условія равновѣсія силъ, сводящіяся въ данномъ случаѣ, въ виду плоскаго движенія ея, къ двумъ уравненіямъ проекцій на оси координатъ и къ уравненію моментовъ относительно какой-либо точки, — всѣ эти уравненія, примѣнительно къ случаю простого кривошипнаго механизма, будутъ написаны нами въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ; теперь же мы ограничимся указаніемъ лишь на возможность ихъ написанія, изъ которой вытекаетъ слѣдующее весьма важное замѣчаніе:

Вращая кривошипъ AO съ различными скоростями и ускореніями, можемъ получать для одного и того же положенія шатуна самые разнообразные планы ускореній его точекъ, что весьма наглядно иллюстрируется тремя случаями построенія этихъ becъ планъ при различныхъ значеніяхъ угловыхъ ускореній кривошипа AO, т.-е. при различныхъ углахъ μ, — случаями, изображенными на фигурахъ 137–139. Кривошипный механизмъ взятъ здѣсь одинъ и тотъ же, взяты также одни и тѣ же положенія шатуна, но планы ускореній получаются, какъ и слѣдуетъ ожидать, разные, въ зависимости отъ закона вращенія кривошипа: на фиг. 137, гдѣ изображенъ случай

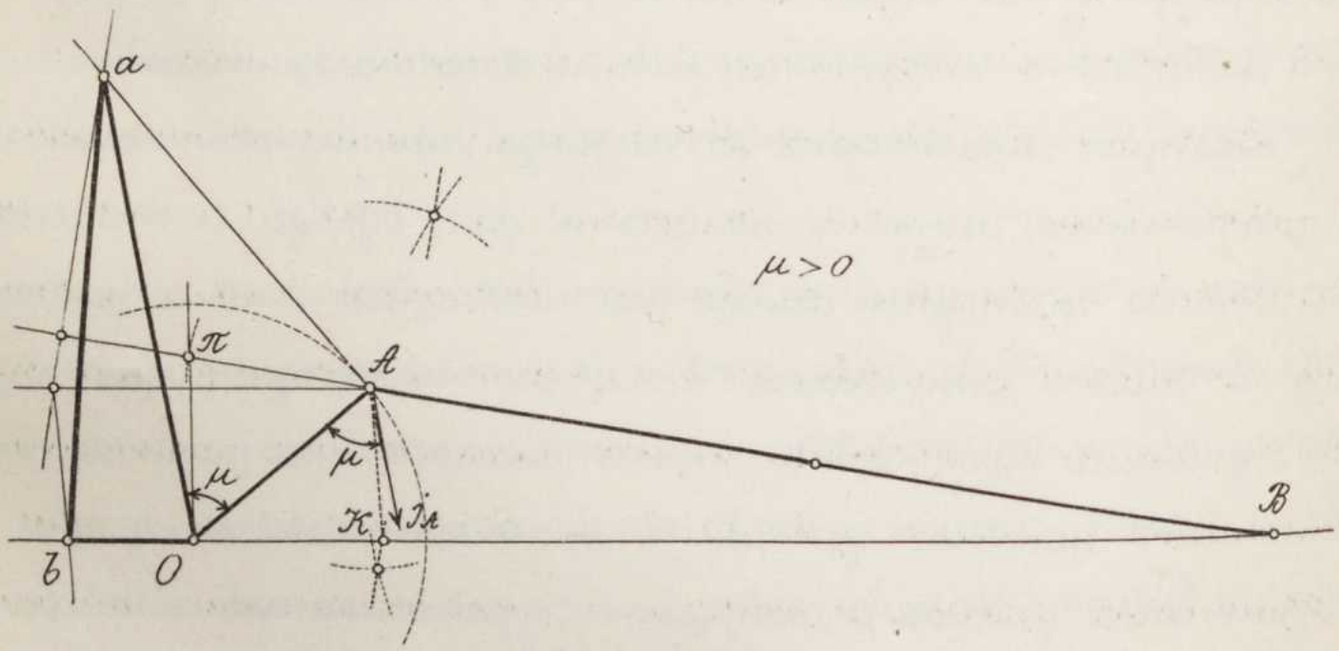
равномѣрнаго вращенія кривошипа,—тотъ же, что и на фиг. 136,-



Фиг. 137.



Фиг. 138.



Фиг. 139.

уголъ $\mu = 0$, и планъ ускореній изображается Δ-комъ OAB; на фигурѣ 138, гдѣ взятъ случай вращенія кривошипа съ небольшимъ угловымъ ускореніемъ, гдѣ, слѣдовательно, уголъ μ невеликъ, планъ ускореній представляется треугольникомъ Oab; наконецъ, на фиг. 139,

гдѣ угловое ускореніе очень велико и гдѣ, слѣдовательно, уголъ μ близокъ къ 90°, планъ ускореній изображается треугольникомъ Oa', уже значительно отличающимся отъ предыдущихъ случаевъ. Коэффиціентъ пропорціональности у всѣхъ этихъ плановъ одинъ и тотъ же, — онъ равенъ ϑ^2, т.-е. квадрату угловой скорости вращенія кривошипа AO.

Итакъ, оказывается, что ускоренія точекъ шатуна, даже при одномъ и томъ же его положеніи и одной и той же угловой скорости ϑ въ данный моментъ, могутъ имѣть значенія, весьма разнящіяся другъ отъ друга какъ по величинѣ, такъ и по направленію; различія эти зависятъ отъ угла μ, т.-е. отъ величины углового ускоренія $d\vartheta/dt$ и, значитъ, отъ закона $\vartheta=\varphi(t)$, дающаго ходъ измѣненія угловой скорости ϑ со временемъ.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что столь же разнообразныя значенія могутъ имѣть, при одномъ и томъ же положеніи кривошипа, и силы инерціи массъ его: онѣ, какъ видимъ, также зависятъ отъ $d\vartheta/dt$, т.-е. отъ вида функціи φ, опредѣляющей зависимость угловой скорости ϑ отъ времени t.

Принимая теперь во вниманіе, что силы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{R}$ совершенно отъ этого закона не зависятъ, но что, въ то же самое время, всѣ участвующія здѣсь силы $[\mathfrak{P}, \mathfrak{R}, N_A, N_B, (f_x)]$ связаны между собою тремя уравненіями равновѣсія, заключаемъ, что силы N_A и N_B надо также признать зависящими отъ углового ускоренія $d\vartheta/dt$, т.-е. отъ вида функціи φ, и, значитъ, мѣняя его, можемъ для одного и того же положенія шатуна получить самыя разнообразныя значенія силъ N_A и N_B.

Нетрудно, однако, усмотрѣть, что такое разнообразіе въ значеніяхъ силъ инерціи (f_x) и, вмѣстѣ съ этимъ, силъ

N_A и N_B можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда функція Φ не представляетъ собою функціи положеній механизма,— напримѣръ, функціи угла AOB отклоненія кривошипа. Если же функція Φ представляетъ собою функцію положеній механизма, то, очевидно, это будетъ функція періодическая, и движеніе системы будетъ, слѣдовательно, періодическимъ и, какъ говорятъ, «установившимся»,—при немъ каждому отдѣльному положенію механизма будутъ соотвѣтствовать свои, ему присущія, значенія скоростей и ускореній точекъ его, періодически, при томъ, возвращающіяся при каждомъ новомъ переходѣ системы черезъ это именно положеніе. Ясно, что такое установившееся движеніе можетъ быть какъ равномѣрнымъ, такъ и неравномѣрнымъ. Мы увидимъ ниже, сколь важную роль играетъ оно среди другихъ движеній, разбираемыхъ въ динамикѣ механизмовъ вообще.

Пусть механизмъ нашей паровой машины движется установившимся движеніемъ съ періодомъ, равнымъ одному обороту коренного вала. Очевидно, что въ такомъ случаѣ каждому данному положенію шатуна будутъ соотвѣтствовать свои значенія силъ инерціи f_z и силъ опорныхъ сопротивленій N_A и N_B. Такъ какъ силы P и R, попрежнему, продолжаютъ быть функціями положеній механизма, то можно сказать, что

> въ случаѣ установившагося движенія силы инерціи и силы опорныхъ сопротивленій являются функціями положеній механизма, подобно силамъ P и R, и, подобно этимъ послѣднимъ, отъ времени не зависятъ.

Установившееся движение характеризуется, какъ видимъ, тѣмъ, что каждая изъ силъ (P, R, N_A, N_B) и каждая изъ силъ инерціи (f_z), при движеніи системы, мѣняетъ свою величину и направленіе совершенно опредѣленнымъ образомъ, періодически, колеблясь, слѣдовательно, между нѣкоторымъ максимумомъ и минимумомъ своихъ значеній и между нѣкоторыми крайними направленіями, въ то время какъ при неустановившемся движеніи скорости и ускоренія могутъ, увеличиваясь при ускоренномъ движеніи, достигать безконечно-большихъ значеній, или, убывая при замедленномъ движеніи, достигать нуля, мѣнять свои знаки и доходить до безконечно-большихъ значеній въ другую сторону. Это обстоятельство выгодно оттѣняетъ и подчеркиваетъ практическія удобства установившагося движенія вообще. — Въ этимъ вопросамъ мы встрѣтимся еще разъ въ дальнѣйшемъ, а теперь обратимся снова къ нашему шатуну.

Силы, воздѣйствующія на шатунъ въ разсматриваемый моментъ его движенія, можно считать, такимъ образомъ, вполнѣ извѣстными. Но для расчета шатуна этого еще мало, ибо этотъ расчетъ надо выполнить при такомъ сочетаніи этихъ силъ, когда нагрузка шатуна оказывается наиболѣе тяжелой для него и невыгодной. Обстоятельство это ведетъ, естественно, къ необходимости изученія цѣлаго ряда послѣдовательныхъ положеній шатуна, ибо только такимъ образомъ и окажется возможнымъ нахожденіе самаго невыгоднаго и, значитъ, расчетнаго, положенія. Изученіе это сводится, очевидно, къ опредѣленію измѣненія величинъ ϑ и $d\vartheta/dt$, иными словами, къ опре-

дѣленію послѣдовательныхъ скоростей и ускореній различныхъ точекъ его, при чемъ начальная скорость, изъ которой приходится выходить при изслѣдованіи, можетъ быть или отличной отъ нуля, какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ двигателяхъ внутренняго сгоранія, гдѣ, для пуска его въ ходъ, мы должны предварительно развертѣть маховикъ,—или быть нулемъ, какъ то имѣетъ мѣсто при пускѣ въ ходъ паровыхъ машинъ. Поэтому первая задача, представляющаяся при динамическомъ изслѣдованіи механизма, можетъ быть, по принятіи во вниманіе всего вышесказаннаго, сформулирована такъ:

Дается законъ измѣненія свободныхъ усилій P и силъ полезнаго сопротивленія R, а кромѣ того, начальная скорость v_x какой-либо точки X механизма (по этой скорости v_x опредѣляется, очевидно, скорости всѣхъ остальныхъ точекъ механизма въ тотъ же начальный моментъ движенія механизма). По этимъ даннымъ требуется опредѣлить:

1) начальное ускореніе какой-либо одной точки, по нему опредѣляются начальныя ускоренія всѣхъ другихъ точекъ. Очевидно, что разъ начальныя скорости точекъ механизма были равны нулю, то начальныя ускоренія окажутся всѣ тангенціальными,—далѣе нужно опредѣлить

2) послѣдующія скорости и ускоренія.

Знаніе ускореній дастъ намъ возможность опредѣлить силы инерціи и величины опорныхъ сопротивленій, какъ для начальнаго момента, такъ и для всѣхъ послѣдующихъ. Наконецъ,

3) можетъ быть поставлено дополнительное за-

данiе о зависимости скоростей и ускорений точекъ системы отъ времени, т-е. о выясненiи хода измѣненiй этихъ факторовъ съ временемъ.

Къ этой же задачѣ примыкаетъ и задача о пускѣ въ ходъ, когда начальныя скорости всѣхъ точекъ механизма равны нулю; здѣсь приходится изучать измѣненiе скоростей и ускорений за промежутокъ времени отъ начала движенiя вплоть до наступленiя установившагося, периодическаго движенiя. Можно будетъ опредѣлить и самое время, потребное для пуска въ ходъ и т. д.

Всѣ эти данныя дадутъ намъ возможность выяснить второй основной вопросъ, представляющiйся при изученiи механизма, — вопросъ объ устойчивости механизма на его основанiи (фундаментѣ), ибо этому основанiю приходится воспринимать на себя воздѣйствiе всѣхъ силъ, въ механизмѣ проявляющихся; можно будетъ выяснить число и размѣры болтовъ, прикрѣпляющихъ станину къ фундаменту, равно какъ и размѣры этого послѣдняго. Если механизмъ уже осуществленъ, то представляется возможность провѣрки этихъ факторовъ, и т. д.

Мы имѣли уже случай указать, что наиболѣе выгоднымъ для механизма является правильный периодическiй возвратъ скоростей и ускорений точекъ его, при чемъ, въ силу требованiй практики, изъ всѣхъ такихъ периодическихъ, установившихся движенiй особенную важность имѣютъ тѣ, при которыхъ кривошипъ, вращающiй коренной валъ, движется равномѣрно или, если и нерав-

номѣрно, то съ такими малыми отклоненіями своихъ угловыхъ скоростей отъ нѣкоторой требуемой средней, какія являются здѣсь еще допустимыми по условіямъ работы даннаго механизма. Требуется, такимъ образомъ, чтобы угловая скорость ϑ кривошипа была приблизительно постоянной, что, очевидно, можетъ имѣть мѣсто тогда, когда угловое ускореніе $d\vartheta/dt$ кривошипа будетъ оставаться все время достаточно малымъ, колеблясь, при этомъ, періодически около нуля то въ одну сторону отъ него, то въ другую; амплитуда этихъ колебаній должна оставаться возможно малой, періодъ же ихъ долженъ быть одинаковъ съ періодомъ механизма. Разборъ условій, при которыхъ возможно осуществленіе требуемой равномѣрности вращенія кривошипа, составитъ содержаніе второй задачи, могущей быть, поэтому, сформулированной такъ:

Даются силы, дѣйствующія на механизмъ, и начальныя данныя движенія его. Требуется выяснить условія, при которыхъ вращеніе кривошипа будетъ выполняться съ желаемой степенью равномѣрности.

Это будетъ, слѣдовательно, задача о регулированіи періодическихъ измѣненій угловой скорости кривошипа. Рѣшеніе ея дастъ отвѣтъ на третій основной, задаваемый при конструированіи механизмовъ, вопросъ, поставленный нами выше.

Что касается послѣдняго, четвертаго вопроса, — о достиженіи наибольшаго коэффиціента полезнаго дѣйствія, то свѣдѣнія для оцѣнки этого коэффиціента

будутъ даны величинами опорныхъ сопротивленій типа N_A, вызывающихъ появленіе силъ трепія; опредѣливъ эти силы трепія, сможемъ подсчитать и работу, на это тченіе уходящую, а это и дастъ намъ возможность подсчитать искомый коэффиціентъ полезнаго дѣйствія.

Объ основныя задачи, сформулированныя выше, поставлены были нами примѣнительно къ простому механизму паровой машины. Нетрудно, однако, убѣдиться, путемъ разсужденій, во всемъ подобныхъ предыдущимъ, что задачи эти сохраняютъ свое основное значеніе для всякихъ вообще механизмовъ, сколь бы сложны они ни были. Вся разница будетъ сводиться лишь къ увеличенію числа силъ, могущихъ проявлять здѣсь свое дѣйствіе: свободныхъ усилій, какъ и силъ полезныхъ сопротивленій, можетъ оказаться не по одному, а по нѣсколько; увеличится число опорныхъ сопротивленій, согласно увеличенію числа кинематическихъ паръ, коими звенья механизма сопрягаются другъ съ другомъ; войдетъ, наконецъ, цѣлый рядъ новыхъ силъ инерціи и т. д., — но все это умноженіе числа силъ на существо вопроса никакого вліянія не окажетъ. Разъ законъ измѣненія свободныхъ усилій и полезныхъ сопротивленій будетъ извѣстенъ, то опять выяснится необходимость опредѣленія ряда послѣдовательныхъ скоростей, по данной начальной скорости одной какой-либо точки, и ряда ускореній; знаніе этихъ факторовъ дастъ намъ возможность опредѣлить силы инерціи и, затѣмъ, силы опорныхъ сопротивленій и силы трепія. Будетъ, затѣмъ, по-

ставленъ вопросъ о равномѣрности вращенія коренного (главнаго) вала и его кривошипа и о средствахъ обезпеченія этой равномѣрности и т. д. — Вопросъ, такимъ образомъ, нѣсколько усложнится, но это усложненіе, какъ увидимъ, будетъ носить, такъ сказать, лишь ариѳметическій характеръ, основанія же рѣшенія его будутъ оставаться все время одни и тѣ же, — ихъ мы и постараемся выяснить въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ, теперь же, въ порядкѣ изложенія матеріала нашего курса, мы перейдемъ къ изложенію одной изъ важнѣйшихъ теоремъ динамики, — такъ называемой „теоремы о центрѣ качанія". Сущность ея заключается въ слѣдующемъ:

Выше, на примѣрѣ паровой машины, была достаточно рельефно выяснена роль силъ инерціи при динамическомъ изслѣдованіи механизма. Оказалось, что каждая точка шатуна этой машины, при движеніи его, нагружается силой инерціи, величина и направленіе коей опредѣляются:

1) массой этой точки,

2) геометрическими условіями движенія, опредѣляющими, въ связи съ извѣстными кинематическими данными, планъ ускореній системы, и, наконецъ,

3) закономъ измѣненія скоростей и ускореній, опредѣляющимъ величину коэффиціента пропорціональности этого плана ускореній.

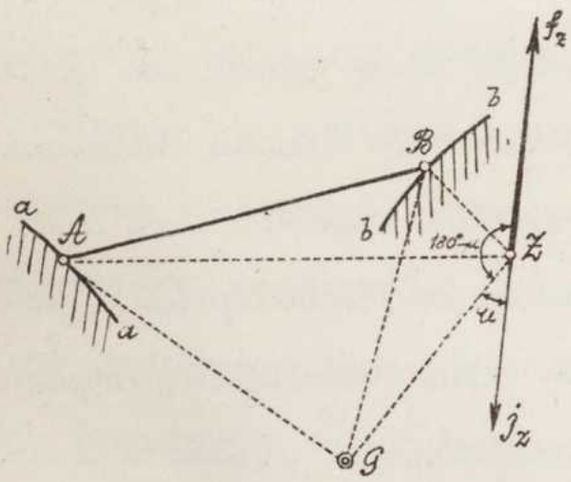
Разъ всѣ эти факторы извѣстны для каждаго момента движенія, то будутъ для каждаго же момента извѣстны и силы инерціи, нагружающія шатунъ.

Къ такому же заключенію приведетъ насъ разсмотрѣніе силъ инерціи любого звена всякаго другого механизма, сколь бы

сложенъ этотъ послѣдній ни былъ. Разъ будутъ извѣстны упомянутые три фактора, то будутъ вполнѣ извѣстны и всѣ силы инерціи, нагружающія это звено, и вопросъ можно было бы считать исчерпаннымъ, если бы примѣненіе всѣхъ этихъ данныхъ могло привести къ дѣйствительному выясненію всѣхъ силъ инерціи, ихъ величины и направленія. На дѣлѣ, однако, такого выясненія нельзя и ожидать потому, что помощью формулы (e) можно получить выраженія лишь частичныхъ силъ инерціи, въ безконечномъ множествѣ нагружающихъ каждое звено при его движеніи; понятно, что манипулированіе съ безконечно-большимъ числомъ безконечно-малыхъ силъ никакихъ удобствъ не представляетъ, и передъ нами появляется весьма важная для практики задача о подсчетѣ этихъ частичныхъ силъ инерціи, о нахожденіи одной силы инерціи, равнодѣйствующей для всѣхъ этихъ частныхъ, при чемъ необходимо опредѣлить не только величину ея, но и направленіе и, если это возможно, точку приложенія, наиболѣе удобную въ практическомъ отношеніи. Всѣ эти подсчеты и выводы и включены въ названную выше теорему, которую мы теперь и изложимъ примѣнительно къ самому общему случаю плоскаго движенія произвольной матеріальной системы. Основанія для упомянутаго подсчета будутъ даны намъ тѣми основными свойствами центра ускореній, изученію которыхъ была посвящена одна изъ главъ курса кинематики.

§15. Теорема о центрѣ качанія.

Предположимъ, что намъ дана нѣкоторая неизмѣняемая матеріальная система, надѣленная извѣстнымъ плоскимъ движеніемъ, вслѣдствіе чего движеніе ея можно охарактеризовать движеніемъ нѣкотораго принадлежащаго ей прямого отрѣзка AB, движущагося по траекторіямъ aa и bb его концовъ (фиг. 140). Разсмотримъ одинъ изъ моментовъ этого движенія, — тотъ именно, когда упомянутый отрѣзокъ занимаетъ положеніе, изображенное на чертежѣ, — и пусть центръ ускореній нашей системы находится въ этотъ моментъ въ точкѣ G. Такъ какъ всѣ детали разсматриваемаго движенія намъ, по предположенію, извѣстны, то мы и примемъ, что во взятый моментъ у насъ имѣются всѣ факторы, опредѣляющіе величину ускореній всѣхъ точекъ системы; этими факторами могутъ служить, напримѣръ, угловая скорость ω вращенія ея около полюса мгновеннаго вращенія и законъ измѣненія ея со временемъ, т.-е. соотношеніе $\omega = \varphi(t)$, или величина и направленіе полнаго ускоренія какой-либо точки системы, и т. д.



Фиг. 140.

Выдѣлимъ теперь во взятой нами системѣ (AB) какую-либо точку ея Z (фиг. 140). Согласно формулѣ (29), — Кинематика механизмовъ, стр. 72, — полное ускореніе j_z этой точки выразится такъ:

$$j_z = GZ\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Формула эта, после нѣкоторыхъ преобразованій, приводитъ къ формулѣ:

$$j_z = GZ \cdot \frac{\omega^2}{\cos\mu}. \quad \ldots \quad (h)$$

Вслѣдствіе этого сила инерціи f_z нашей точки Z выразится такъ:

$$f_z = -mj_z = -m \cdot GZ\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} = -m \cdot GZ \cdot \frac{\omega^2}{\cos\mu}, \quad \ldots \quad (6)$$

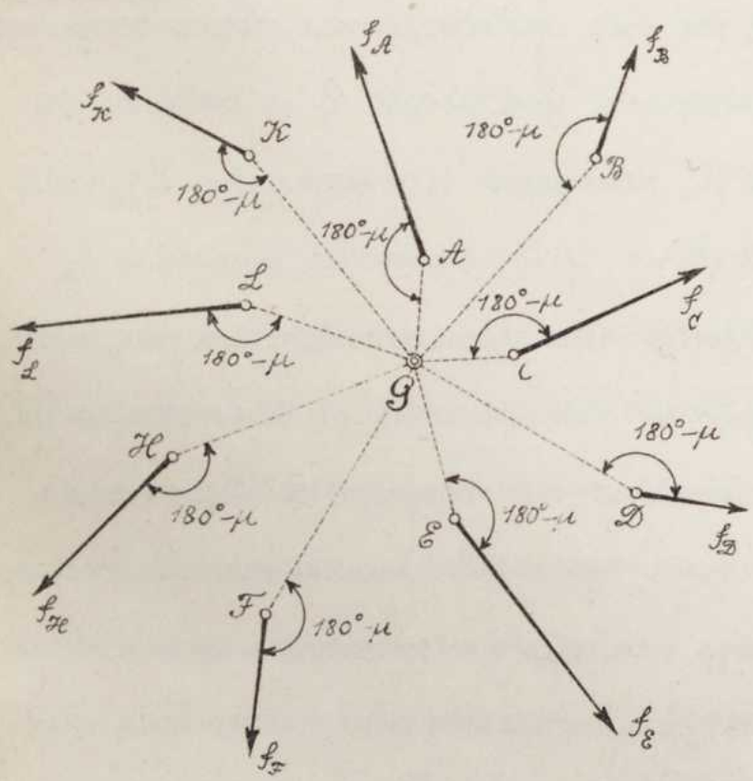
при чемъ, напомнимъ, уголъ μ есть уголъ полнаго ускоренія съ векторомъ, соединяющимъ точку съ центромъ ускореній G, и для всѣхъ точекъ системы въ данный моментъ ея движенія сохраняетъ одну и ту же величину; тангенсъ этого угла выражается, какъ извѣстно, формулой

$$tg\mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Итакъ, величина силы инерціи точки Z дается формулой (6). Что касается направленія ея, то оно опредѣлится такъ: соединивъ прямой линіей точку Z съ центромъ ускореній G и отложивъ въ надлежащую сторону уголъ μ, найдемъ направленіе Zj_z полнаго ускоренія j_z этой точки (фиг. 140); сила же инерціи f_z этой точки Z будетъ направлена прямопротивоположно этому направленію и, значитъ, будетъ составлять съ векторомъ GZ уголъ $(180° - \mu)$, какъ это и отмѣчено на чертежѣ. Такъ какъ точка Z есть произвольная точка данной системы, то формула (6) примѣнима ко всѣмъ безъ исключенія точкамъ данной системы. Согласно этой формулѣ, заключаемъ, что силы инерціи точекъ системы пропорціональны какъ массамъ точекъ, такъ и разстояніямъ этихъ точекъ до центра ускореній G, а, кромѣ того, всѣ эти силы инерціи оказываются направленными подъ однимъ и тѣмъ же угломъ $(180° - \mu)$ къ векторамъ, соединяю-

ющимъ точки съ центромъ ускореній, и, при томъ, въ опредѣленную относительно этихъ векторовъ сторону; послѣднее обстоятельство вполнѣ опредѣляется закономъ измѣненія угловой скорости ω, какъ это легко сообразить на основаніи разсужденій, высказанныхъ въ свое время по аналогичному поводу по поводу опредѣленія направленія полныхъ ускореній j, — см. Кинематику механизмовъ, стр. 73—74; окажется, что если ω со временемъ возрастаетъ, такъ что $d\omega/dt > 0$, то силы инерціи f_z придется откладывать обратно смыслу вращенія, и наоборотъ.

Такимъ образомъ, силы инерціи системы распредѣляются въ ней такъ, какъ это показываетъ фиг. 141, и уже этотъ схематическій чертежъ заставляетъ предполагать, что въ подсчетѣ силъ инерціи, моментовъ ихъ и т. д., центру ускореній будетъ принадлежать центральная роль, которую мы теперь и выяснимъ путемъ непосредственныхъ вычисленій.



Фиг. 141.

Полная закономѣрность, наблюдаемая какъ въ значеніяхъ отдѣльныхъ силъ инерціи, такъ и въ направленіяхъ ихъ, позволяетъ предположить, что суммированіе всѣхъ этихъ частичныхъ силъ инерціи окажется вполнѣ возможнымъ, т.-е. что можно найти равнодѣйствующую всѣхъ этихъ силъ инерціи, опредѣленную какъ по величинѣ своей, такъ и по направленію. Суммированіе это можно выполнить на осно-

ваніи обычныхъ соображеній статики, относящихся къ вопросу о нахожденіи равнодѣйствующихъ, а именно:

Если у всѣхъ этихъ частичныхъ силъ инерціи f_z, являющихся теперь слагающими силами, существуетъ равнодѣйствующая, результирующая сила инерціи $\mathfrak{F}$, то

1) сумма проекцій слагающихъ силъ инерціи f_z на каждую изъ осей координатъ произвольно выбранной координатной системы будетъ равна проекціи на ту же ось результирующей силы инерціи $\mathfrak{F}$,—это условіе дастъ намъ два уравненія проекцій по осямъ; далѣе,

2) сумма моментовъ слагающихъ относительно какой-либо точки плоскости, принятой за центръ моментовъ, будетъ равна моменту результирующей относительно того же центра; это условіе дастъ намъ уравненіе моментовъ,—третье уравненіе статики, и всѣ эти три уравненія и дадутъ намъ возможность найти всѣ три элемента, вполнѣ опредѣляющіе искомую равнодѣйствующую $\mathfrak{F}$, а именно: величину ея, направленіе и точку ея приложенія.

Имѣя въ виду написать эти уравненія на самомъ дѣлѣ, мы, прежде всего, условимся въ выборѣ системы координатъ. Ради удобства дальнѣйшихъ вычисленій, за начало примемъ центръ ускореній $\mathfrak{Z}$; самую систему координатъ полагаемъ прямоугольной, при чемъ ось $x^{овъ}$ проводимъ произвольно,—напримѣръ, горизонтально,—такъ что ось $y^{овъ}$ пойдетъ вертикально (фиг. 142).

Пусть, далѣе, центръ тяжести системы лежитъ въ нѣкоторой точкѣ C, опредѣляемой координатами

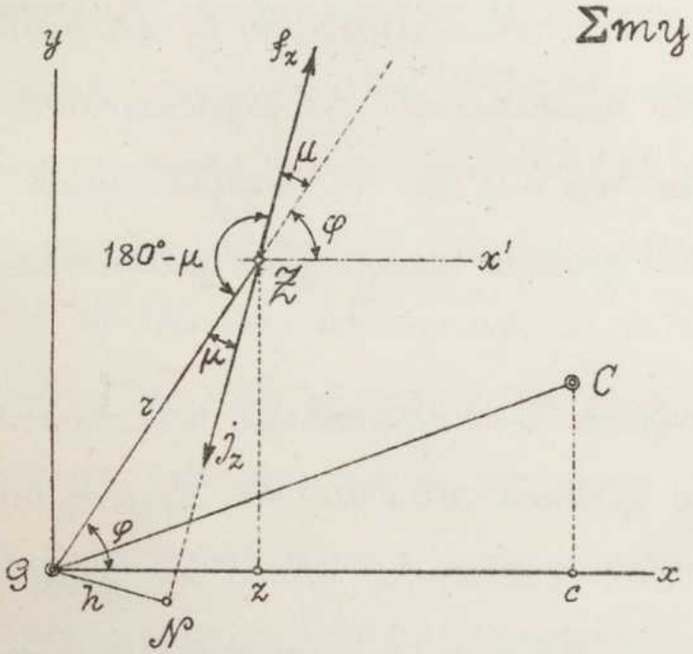
$$\mathfrak{Z}c = x_c \quad и \quad Cc = y_c.$$

Если координаты различныхъ точекъ системы будемъ обозначать буквами x и y, а массы этихъ точекъ — буквами m, то положеніе точки C, т.-е. координаты x_c и y_c ея, можно будетъ опредѣлить помощью извѣстныхъ уравненій статики:

$$\Sigma mx = Mx_c, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (k)$$

$$\Sigma my = My_c, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (l)$$

гдѣ M есть масса всей движущейся системы, равная Σm.



Фиг. 142.

Замѣчая теперь, что, при перемѣщеніи системы, перемѣщается, вообще говоря, и центръ тяжести ея, приходимъ къ заключенію, что координаты x_c и y_c центра тяжести можно считать также величинами перемѣнными, въ виду чего представляется возможнымъ дифференцированіе этихъ координатъ по принадлежащему случаю независимому перемѣнному; въ данномъ случаѣ такимъ независимымъ перемѣннымъ слѣдуетъ взять время t, и мы, дифференцируя двукратно по t уравненія (k) и (l), получаемъ соотношенія, весьма важныя для дальнѣйшаго, а именно:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = M \frac{d^2x_c}{dt^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

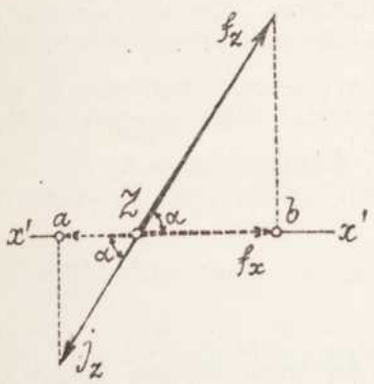
и

$$\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = M \frac{d^2y_c}{dt^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Замѣтивъ это, вернемся опять къ нашей задачѣ и напишемъ выраженія проекцій силы инерціи f_z на оси координатъ. Мы имѣемъ, вообще, что

$$f_z = -mj_z,$$

такъ что сила инерціи выражается произведеніемъ изъ массы точки на ускореніе ея, взятымъ со знакомъ минусъ. Очевидно, что проекція силы инерціи на какую либо ось xx' (фиг. 143) выразится опять произведеніемъ той же массы m на проекцію ускоренія на эту ось, при чемъ произведенію придется опять приписать знакъ минусъ. Въ виду этого можемъ написать, что



Фиг. 143.

$$np_x f_z = -m.\, np_x j_z,$$

$$np_y f_z = -m.\, np_y j_z.$$

Замѣчая теперь, что

$$np_x f_z = f_z \cos(f_z, \mathcal{G}x)$$

и

$$np_x j_z = j_z \cos(j_z, \mathcal{G}x) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

можемъ написать, что

$$np_x f_z = f_z \cos(f_z, \mathcal{G}x) = -m.\, np_x j_z = -m j_z \cos(j_z, \mathcal{G}x) = -m\frac{d^2x}{dt^2} \quad . . (9)$$

Аналогично получимъ, что

$$np_y f_z = f_z \cos(f_z, \mathcal{G}y) = -m.\, np_y j_z = -m j_z \cos(j_z, \mathcal{G}y) = -m\frac{d^2y}{dt^2} \quad . . (10)$$

Составляемъ теперь суммы проекцій силъ инерціи (f_z) по осямъ; каждая такая сумма дастъ намъ проекцію искомой результирующей на соотвѣтствующую ось. Суммируя выраженія (9) и (10) по всѣмъ точкамъ системы, можемъ, въ виду (7) и (8), написать, что

$$\Sigma np_x f_z = -\Sigma m j_z \cos(j_z, \mathcal{G}x) = -\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = -M\frac{d^2x_c}{dt^2} \quad . \quad . (11)$$

и

$$\Sigma np_y f_z = -\Sigma m j_z \cos(j_z, \mathcal{G}y) = -\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = -M\frac{d^2y_c}{dt^2} \quad . \quad . (12)$$

При движеніи системы движется, вообще говоря, и центръ

тяжести C ея; проекціи ускоренія этого движенія центра C на оси координатъ выражаются производными d^2x_c/dt^2 и d^2y_c/dt^2. Значитъ, если бы мы сосредоточили всю массу M даннаго тѣла въ этомъ центрѣ тяжести C и подсчитали теперь по общимъ формуламъ (9) и (10) проекціи силы инерціи такой точки C, то получили бы, очевидно, для этихъ проекцій выраженія

$$-M\frac{d^2x_c}{dt^2} \quad \text{и} \quad -M\frac{d^2y_c}{dt^2},$$

— какъ разъ тѣ самыя, которыя стоятъ въ правыхъ частяхъ уравненій (11) и (12). Отсюда слѣдуетъ, что равнодѣйствующая сила инерціи, несомнѣнно, существуетъ и по величинѣ своей представляетъ собою силу инерціи центра тяжести, вычисленную въ предположеніи сосредоточенія въ немъ всей массы M даннаго тѣла. Проекціи этой силы $\mathcal{F}$ выражаются соотношеніями (11) и (12), такъ что

$$np_x\mathcal{F} = -M\frac{d^2x_c}{dt^2}, \qquad (13)$$

$$np_y\mathcal{F} = -M\frac{d^2y_c}{dt^2} \qquad (14)$$

Формулы эти, являясь вполнѣ общими, не даютъ, однако, болѣе близкихъ указаній на составъ выраженія силы $\mathcal{F}$. Это могутъ сдѣлать болѣе подробныя вычисленія, къ выполненію которыхъ мы теперь и приступимъ.

Обращаясь къ фигурѣ 142 и замѣчая, что уголъ силы инерціи f_z съ осью абсциссъ Ox равенъ, очевидно, $(\mu+\varphi)$, можемъ написать, что

$$f_z\cos(f_z, Ox) = f_z\cos(\mu+\varphi),$$

гдѣ φ есть уголъ вектора OZ съ осью $x^{овъ}$. Вслѣдствіе этого и въ силу (6), выраженіе (11) можетъ быть переписано еще такъ:

$$\Sigma f_z \cos(f_z, \mathcal{G}x) = \Sigma f_z \cos(\mu+\varphi) = -\Sigma m.\mathcal{G}Z.\frac{\omega^2}{\cos\mu}\cos(\mu+\varphi) = -\frac{\omega^2}{\cos\mu}\Sigma m.\mathcal{G}Z\cos(\mu+\varphi)\ldots(m)$$

Множитель $\omega^2/\cos\mu$ представилось возможнымъ вынести за знакъ суммы потому, что какъ факторъ ω,—угловая скорость вращенія системы около полюса мгновеннаго вращенія,—такъ и факторъ μ,—уголъ ускореній съ векторами, соединяющими точки системы съ центромъ ускореній $\mathcal{G}$,—для всѣхъ точекъ системы въ разсматриваемый моментъ движенія ея остаются одними и тѣми же, общими; они могутъ мѣняться лишь со временемъ, отъ момента къ моменту.

Приступимъ теперь къ преобразованію полученнаго выше соотношенія (m). Замѣчая, что

$$\mathcal{G}Z\cos\varphi = \mathcal{G}z = x_z = x$$

и

$$\mathcal{G}Z\sin\varphi = Zz = y_z = y,$$

—точка Z есть произвольная точка системы, почему координаты x_z и y_z ея можно обозначить просто черезъ x и y, безъ индексовъ, —находимъ далѣе, что

$$\mathcal{G}Z\cos(\mu+\varphi) = \mathcal{G}Z(\cos\mu\cos\varphi - \sin\mu\sin\varphi) = x\cos\mu - y\sin\mu\ , \quad \ldots(n)$$

въ силу чего (m) можетъ быть преобразовано такъ:

$$\Sigma f_z \cos(f_z, \mathcal{G}x) = -\frac{\omega^2}{\cos\mu}\Sigma m(x\cos\mu - y\sin\mu) =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\cos\mu}(\cos\mu\Sigma mx - \sin\mu\Sigma my) =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\cos\mu}(\cos\mu.Mx_c - \sin\mu.My_c) =$$

$$= -\frac{\omega^2}{\cos\mu}M(x_c\cos\mu - y_c\sin\mu)\ldots \quad \ldots(p)$$

Замѣчая, что для точки C соотношеніе (n) принимаетъ видъ

$$\mathcal{G}C\cos(\mu+\varphi) = x_c\cos\mu - y_c\sin\mu,$$

и сопоставляя это выраженіе съ (p), можемъ переписать это по-

слѣдующее такъ:

$$\Sigma f_z \cos(f_z, Gx) = \Sigma f_z \cos(\mu+\varphi) = -M.GC\,\frac{\omega^2}{\cos\mu}\cos(\mu+\varphi). \quad .(13)$$

Такова величина проекціи результирующей силы инерціи F на ось x ^{obr}. Подобнымъ же образомъ выразится и сумма проекцій силъ инерціи на ось Gy:

$$\Sigma f_z \cos(f_z, Gy) = \Sigma f_z \sin(\mu+\varphi) = -M.GC\,\frac{\omega^2}{\cos\mu}\sin(\mu+\varphi). \quad .(14)$$

Выраженія (13) и (14) даютъ возможность получить величину искомой результирующей силы инерціи F; она выразится, очевидно, такъ:

$$F = -\sqrt{[\Sigma f_z \cos(f_z, Gx)]^2 + [\Sigma f_z \cos(f_z, Gy)]^2} = -M.GC\frac{\omega^2}{\cos\mu}. \quad .(15)$$

Это выраженіе указываетъ уже вполнѣ опредѣленнымъ образомъ, что

результирующая сила инерціи F представляетъ собою (по величинѣ своей) силу инерціи центра тяжести, вычисленную въ предположеніи сосредоточенія въ немъ всей массы M даннаго тѣла.

Итакъ, величина результирующей силы инерціи F опредѣлилась вполнѣ. Что касается направленія ея, то оно можетъ быть опредѣлено помощью слѣдующихъ простыхъ разсужденій:

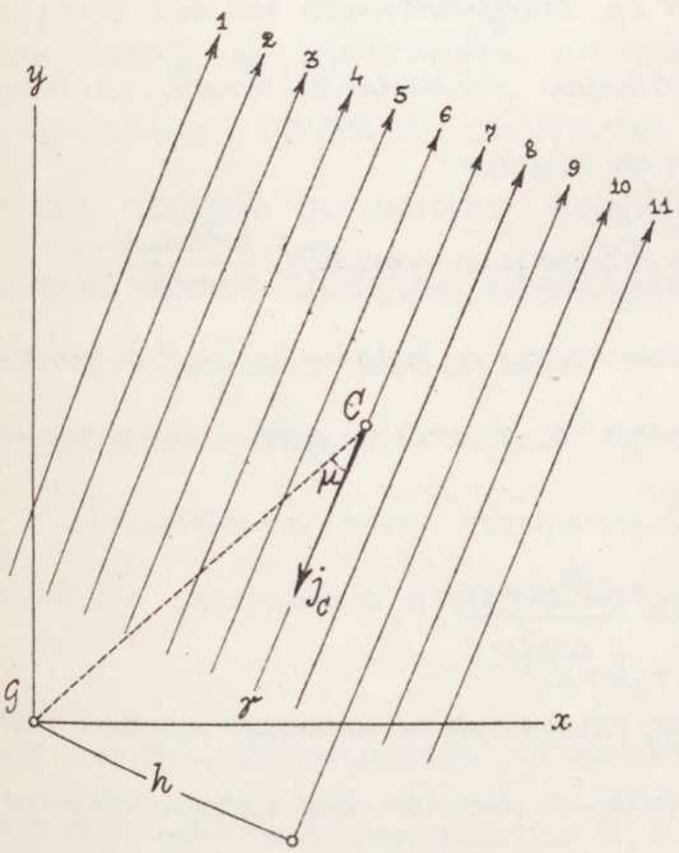
Общее выраженіе силы инерціи какой-либо точки Z съ массой m имѣетъ, согласно (6), видъ

$$f_z = -m.GZ\,\frac{\omega^2}{\cos\mu},$$

при чемъ, какъ извѣстно, направленіе этой силы инерціи прямопротивоположно направленію ускоренія j_z и составляетъ съ вектором GZ опредѣленный уголъ $(180°-\mu)$. Сопоставляя это выраженіе съ выраженіемъ (15)

$$F = -M.\mathfrak{J}C.\frac{\omega^2}{\cos\mu},$$

видимъ, что оба они составлены по одному и тому же закону. Поэтому, прежде всего, надо принять, что сила инерціи F направлена прямопротивоположно ускоренію j_c центра тяжести C. Затѣмъ, проводя аналогію и дальше, казалось бы вполнѣ естественнымъ предположить, что и приложена эта сила инерціи F также въ центръ тяжести C, какъ точкѣ, для которой и производился подсчетъ величины ея. На дѣлѣ, однако, оказывается, что сила инерціи F черезъ эту точку C не проходитъ, въ чемъ мы сейчасъ непосредственно и убѣдимся.



Фиг. 144.

Пусть ускореніе j_c точки C имѣетъ направленіе Cy,—см. фиг. 144,—такъ что, согласно вышесказанному, сила инерціи F будетъ имѣть направленіе, параллельное $y\mathfrak{J}$, и, значитъ, пойдетъ по одной изъ прямыхъ 1, 2, . . ., параллельныхъ $y\mathfrak{J}$. По которой изъ этихъ прямыхъ пойдетъ она, можно будетъ опредѣлить лишь тогда, когда будетъ дана или точка, черезъ которую эта сила F проходитъ, или, что для насъ въ данномъ случаѣ является болѣе удобнымъ, плечо h той прямой, по которой направлена эта сила, относительно начала координатъ, т.-е. центра ускореній $\mathfrak{J}$. Плечо это

можно определить при помощи оставшагося еще неиспользованным третьяго уравненія равновѣсія,— уравненія моментовъ,—которое мы теперь и составимъ, принявъ за центръ моментовъ начало взятой нами системы координатъ, т.-е. центръ ускореній G.

Напишемъ сначала выраженіе статическаго момента одной какой-либо силы инерціи относительно центра моментовъ G,—возьмемъ для этого хотя бы ту же силу инерціи f_z точки Z (фиг. 142). Плечо GN ея, обозначенное нами черезъ h, равно $GZ \sin\mu$, такъ что искомый моментъ этой составной силы инерціи f_z напишется такъ:

$$f_z . GN = f_z \times h = -m . GZ \frac{\omega^2}{\cos\mu} . GZ \sin\mu = -m . GZ^2 \frac{\omega^2 \sin\mu}{\cos\mu}.$$

Обозначая, ради сокращенія письма, разстояніе GZ точки Z отъ центра ускореній G черезъ r, можемъ дать полученному выраженію видъ:

$$f_z . h = -mr^2 \frac{\omega^2 \sin\mu}{\cos\mu}.$$

Сумма такихъ моментовъ, распространенная на всѣ точки даннаго тѣла, и будетъ равна моменту результирующей силы инерціи F. Обозначая черезъ H плечо ея относительно центра моментовъ G, получаемъ, такимъ образомъ, уравненіе

$$F \times H = \Sigma (f_z \times h) = -\Sigma mr^2 \frac{\omega^2 \sin\mu}{\cos\mu} = -\frac{\omega^2 \sin\mu}{\cos\mu} \Sigma mr^2.$$

Подставляя вмѣсто F его выраженіе изъ (15), получаемъ соотношеніе

$$(-M . GC . \frac{\omega^2}{\cos\mu}) \times H = -\frac{\omega^2 \sin\mu}{\cos\mu} \Sigma mr^2,$$

что, послѣ сокращенія на $(-\omega^2/\cos\mu)$, даетъ выраженіе искомаго плеча H, а именно:

$$\mathcal{H} = \frac{\sin\mu \Sigma m r^2}{M \cdot GC} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Сумма $\Sigma m r^2$ представляетъ собою не что иное, какъ моментъ инерціи нашей системы относительно центра ускореній G. Обозначивъ его черезъ J_g, можемъ, поэтому, написать, что

$$\mathcal{H} = \frac{J_g \sin\mu}{M \cdot GC} = \frac{J_g \sin\mu}{MR}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

гдѣ черезъ R, ради краткости письма, обозначено GC, т.-е. разстояніе центра тяжести C отъ центра ускореній G. Полученное выраженіе можно значительно упростить помощью извѣстной теоремы динамики, говорящей, что

моментъ инерціи системы относительно какой-либо оси равенъ моменту инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести параллельно данной, плюсъ произведеніе изъ массы тѣла на квадратъ разстоянія между осями.

Примѣняя эту теорему къ разсматриваемому случаю плоскаго движенія, получаемъ соотношеніе

$$J_g = J_c + MR^2,$$

гдѣ черезъ J_c обозначенъ моментъ инерціи системы относительно центра тяжести C, а $R = GC$, какъ это было условлено выше. Въ виду этого выраженіе (16) переписывается такъ:

$$\mathcal{H} = \frac{(J_c + MR^2)\sin\mu}{MR} = \sin\mu\left(R + \frac{J_c}{MR}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Обозначимъ радіусъ инерціи нашей системы черезъ ρ; величина его опредѣлится изъ условія

$$J_c = M\rho^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Въ виду этого уравненіе (17) можетъ быть преобразовано такъ:

$$\mathcal{H} = \sin\mu\left(\mathcal{R} + \frac{M\rho^2}{M\mathcal{R}}\right) = \sin\mu\left(\mathcal{R} + \frac{\rho^2}{\mathcal{R}}\right) = \sin\mu\left(\frac{\mathcal{R}^2+\rho^2}{\mathcal{R}}\right). \quad . \quad .(19)$$

Имѣя величины $\mathcal{R}$ и ρ, весьма легко опредѣлить величину отрѣзка, выражаемаго дробью $(\mathcal{R}^2+\rho^2)/\mathcal{R}$, — очевидно, что гипотенуза $\sqrt{\mathcal{R}^2+\rho^2}$ будетъ служить средней пропорціональной между искомымъ отрѣзкомъ $\mathcal{H}$ и отрѣзкомъ $\mathcal{R} = GC$.

Выраженіями (15) и (19) величина и положеніе искомой результирующей силы инерціи $\mathcal{F}$ опредѣляется вполнѣ. Оказывается, что

1) величина этой силы инерціи $\mathcal{F}$ выражается такъ:

$$\mathcal{F} = -M.GC.\frac{\omega^2}{\cos\mu} = -M\mathcal{R}\frac{\omega^2}{\cos\mu}, \quad . \quad . \quad . \quad .(15)$$

и, какъ было доказано, равна величинѣ той силы инерціи, которой бы обладалъ центръ тяжести нашей системы, если бы въ немъ оказалась сосредоточенной вся масса M данной системы;

2) направленіе этой силы инерціи $\mathcal{F}$ прямопротивоположно направленію полнаго ускоренія j_c центра тяжести C системы, и, наконецъ,

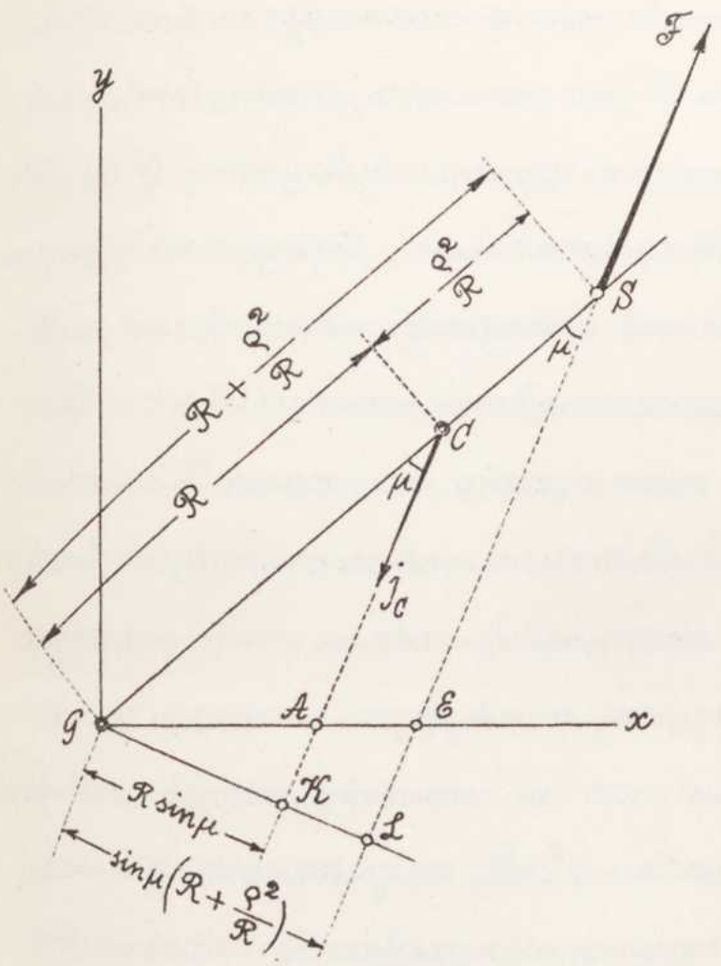
3) плечо этой результирующей силы инерціи $\mathcal{F}$ относительно центра ускореній G выражается формулами:

$$\mathcal{H} = \sin\mu\left(\mathcal{R} + \frac{J_c}{M\mathcal{R}}\right) = \sin\mu\left(\mathcal{R} + \frac{\rho^2}{\mathcal{R}}\right) = \sin\mu\left(\frac{\mathcal{R}^2+\rho^2}{\mathcal{R}}\right). \quad . \quad .(19)$$

Имѣя это плечо $\mathcal{H}$, можемъ теперь вполнѣ опредѣленно указать, что результирующая сила инерціи $\mathcal{F}$ будетъ дѣйствовать по нѣкоторой прямой EF (фиг. 145), параллельной AC (сравн. фиг. 144) и отстоящей отъ центра ускореній G на разстояніе $\mathcal{H}$, величина коего дается формулами (17) и (19). Посмотримъ теперь, нѣтъ ли на этой прямой EF какой-

либо точки, которая могла бы служить наиболѣе удобной въ практическомъ отношеніи точкой приложенія этой результирующей F.

Соединимъ точки G и C прямой линіей и продолжимъ ее до пересѣченія съ прямой EF, по которой дѣйствуетъ сила инерціи F, въ нѣкоторой точкѣ S, разстояніе GS коей отъ центра ускореній G легко найти, замѣтивъ, что длина GL перпендикуляра, опущеннаго изъ точки G на прямую EF, какъ было показано, равна $\sin\mu\left(R+\rho^2/R\right)$. Такъ какъ уголъ $GSL=\mu$, а треугольникъ GSL прямоугольный (при L), то можемъ написать, что



Фиг. 145.

$$GL = GS\sin\mu.$$

Но, съ другой стороны,

$$GL=\left(R+\frac{\rho^2}{R}\right)\sin\mu;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$GS=R+\frac{\rho^2}{R}=GC+\frac{\rho^2}{R}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Замѣчая теперь, что дробь ρ^2/R всегда положительна, заключаемъ, что всегда

$$GS>GC,$$

что показываетъ, что точка S отстоитъ отъ центра ускореній G дальше, чѣмъ центръ тяжести C, такъ что центръ тяжести лежитъ всегда между центромъ ускореній

G и точкой S, при чемъ всѣ эти три точки лежатъ на одной и той же прямой GCS.

Нетрудно убѣдиться, что положеніе точки S въ системѣ въ каждый данный моментъ является вполнѣ опредѣленнымъ. Дѣйствительно, представимъ себѣ нашу систему въ какой-либо моментъ ея движенія, — хотя бы, напримѣръ, тотъ, который взятъ на чертежѣ 145. Положеніе центра ускореній G въ этотъ моментъ является вполнѣ опредѣленнымъ, вслѣдствіе чего для даннаго момента явится вполнѣ опредѣленнымъ какъ по величинѣ своей, такъ и по положенію, отрѣзокъ GC, т.-е. R. Такъ какъ, далѣе, масса M тѣла есть величина постоянная, при движеніи тѣла своей величины не мѣняющая, точно такъ же, какъ и моментъ инерціи J_c тѣла относительно центра тяжести C, а значитъ, и радіусъ инерціи ρ, ибо $\rho = \sqrt{J_c/M}$, то вполнѣ опредѣлится и соотвѣтствующая данному моменту величина дроби ρ^2/R и, значитъ, длина отрѣзка GS, а вмѣстѣ съ этимъ, и положеніе точки S.

Въ слѣдующій моментъ, вмѣстѣ съ измѣненіемъ положенія точки G, измѣнится и длина R отрѣзка GC, но величины J_c, M и ρ останутся тѣ же; вслѣдствіе измѣненія R измѣнится и положеніе точки S, но это перемѣщеніе ея будетъ имѣть характеръ, вполнѣ опредѣленный: замѣчая, что $GC = R$ и $CS = \rho^2/R$, заключаемъ, что перемѣщеніе точки S будетъ носить характеръ, обратный характеру перемѣщенія центра G, а именно, если центръ ускореній G приближается къ центру тяжести C, то точка S отъ C удаляется (по направленію GC), и обратно. Колебанія точки G относительно центра тяжести C влекутъ за собою обратно-пропорціональныя имъ ко-

лебанія относительно C и нашей точки S. Три точки системы,— точки G, C и S,— оказываются связанными между собою тѣснѣйшимъ образомъ.

Мы видѣли, что положеніе точки S для каждаго положенія системы опредѣляется помощью формулы (19), содержащей въ себѣ всего лишь одну перемѣнную величину $\mathfrak{R} = GC$. Въ силу сказаннаго, эту точку S весьма удобно принять за точку приложенія равнодѣйствующей силы инерціи $\mathfrak{F}$, для которой, такимъ образомъ, будутъ теперь извѣстны всѣ три фактора, опредѣляющіе ея положеніе, а именно: величина, направленіе и точка приложенія. Вопросъ объ опредѣленіи результирующей силы инерціи разрѣшается, такимъ образомъ, вполнѣ. Остается лишь выяснить роль и свойства точки S, въ которой можно считать приложенной результирующую силу инерціи $\mathfrak{F}$; для этого замѣтимъ слѣдующее:

Всякое плоское движеніе системы всегда можно представить себѣ составленнымъ изъ двухъ движеній,—изъ вращенія системы около центра ускореній G и изъ параллельнаго перенесенія ея со скоростью того же центра; такъ какъ скорость эта за два сосѣдніе промежутка времени, $2\,dt$, остается, какъ извѣстно, постоянной, то, какъ это было показано въ курсѣ кинематики (см. стр. 69–70), это параллельное перенесеніе на девіаціяхъ скоростей не отзывается ничѣмъ, вслѣдствіе чего всѣ дѣйствительныя ускоренія системы оказываются тѣми же самыми, какія имѣли бы мѣсто при одномъ лишь вращеніи нашей системы около центра ускореній G съ дѣйствительными угловыми скоростями этихъ моментовъ: ω и $(\omega + d\omega)$.

Такимъ образомъ, пока дѣло касается ускореній и, значитъ, силъ инерціи, движеніе нашей системы можно представлять себѣ, какъ послѣдовательное вращеніе ея около смѣняющихъ другъ друга центровъ ускореній G, — въ каждый данный моментъ систему нашу можно разсматривать, какъ вращающуюся или качающуюся около центра ускореній G, этому моменту соотвѣтствующаго, и всѣ ускоренія и силы инерціи системы оказываются при такомъ подставномъ, воображаемомъ движеніи ея такими же, какими онѣ должны быть въ дѣйствительномъ движеніи. Оказывается, такимъ образомъ, что наша система можетъ быть въ указанномъ выше смыслѣ уподоблена физическому маятнику съ точкой привѣса въ центрѣ ускореній G, — около этого центра система качается въ теченіе времени $2\,dt$, за которое центромъ ускореній остается точка G. За слѣдующій промежутокъ времени $2dt$ система будетъ качаться около слѣдующаго, очереднаго центра ускореній G_1, соотвѣтствующаго этому промежутку времени, и т. д.

Изъ курса физики извѣстно, что въ каждомъ физическомъ маятникѣ всегда имѣется такъ называемый центръ качаній, разстояніе коего до точки привѣса даетъ длину математическаго маятника, эквивалентнаго данному физическому съ точки зрѣнія амплитудъ и временъ качанія, а кромѣ того, — и это самое важное, — въ этомъ центрѣ качаній можно считать приложенной результирующую всѣхъ силъ инерціи системы этого маятника.

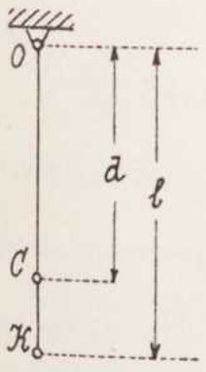
Наша система, съ точки зрѣнія подсчета ускореній и силъ инерціи, можетъ быть, какъ мы видѣли, уподоблена

физическому маятнику съ точкой привѣса въ центрѣ ускореній, вслѣдствіе чего въ ней долженъ имѣться и соотвѣтствующій центръ качаній, въ которомъ и будетъ приложена результирующая всѣхъ силъ инерціи.

Въ нашемъ случаѣ мы нашли какъ результирующую силу инерціи, такъ и точку ея приложенія. Вполнѣ естественно будетъ посмотрѣть, не является ли эта точка приложенія силы инерціи F такимъ именно центромъ качанія нашей системы, при точкѣ привѣса ея въ B, центрѣ ускореній? Вычисленія, помощью которыхъ можно провѣрить это само собою напрашивающееся предположеніе, очень просты и сводятся къ слѣдующему:

Изъ аналитической механики извѣстно, что каждый физическій маятникъ эквивалентенъ (въ упомянутомъ выше смыслѣ) такому математическому, длина l котораго опредѣляется формулой

$$l = \frac{B}{Md}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



Фиг. 146.

гдѣ B есть моментъ инерціи системы физическаго маятника относительно точки привѣса O (фиг. 146), M – масса его, d – разстояніе центра тяжести маятника C до точки привѣса O.

Такимъ образомъ, если на прямой, проходящей черезъ точку привѣса O и центръ тяжести C, отложимъ отъ точки O по направленію OC, отрѣзокъ OK, равный l, то точка K, такимъ образомъ опредѣлившаяся, и представитъ собою такъ называемый центръ качаній даннаго физическаго маятника, и если въ этой точкѣ K мы сосредоточимъ всю массу M тѣла, то и получимъ математическій маятникъ

ОК, эквивалентный данному физическому съ точки зрѣнія амплитуды и времени качанія.

Данную намъ систему можно въ извѣстномъ, опредѣленномъ выше смыслѣ считать физическимъ маятникомъ съ точкой привѣса въ S; вслѣдствіе этого формула (r) должна имѣть мѣсто и для нея. Въ виду этого соображенія мы и попробуемъ подсчитать длину l для нашей системы.

Моментъ инерціи B есть въ нашемъ случаѣ моментъ инерціи системы относительно точки S; выше мы обозначили его черезъ J_S.

Масса M качающагося тѣла сохранитъ то же обозначеніе и для нашей системы; наконецъ,

Разстояніе d центра тяжести до точки привѣса,—у насъ, слѣдовательно, до точки S,—обозначено нами черезъ R.

Въ виду этихъ обозначеній формула (r), будучи примѣнена къ нашей системѣ, дастъ соотвѣтствующую нашему случаю длину l математическаго маятника:

$$l = \frac{J_S}{MR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (s)$$

Замѣтивъ, что

$$J_S = J_C + MR^2 = M\rho^2 + MR^2 = M(R^2 + \rho^2),$$

можемъ дать полученной формулѣ (s) видъ:

$$l = \frac{J_C + MR^2}{MR} = R + \frac{J_C}{MR} = R + \frac{\rho^2}{R}, \quad . \quad . \quad . \quad (t)$$

что, согласно (20), и есть SS, разстояніе точки S приложенія результирующей силы инерціи F отъ центра ускореній S. Формула (t) въ то же время показываетъ, что эта точка S является центромъ качаній данной системы съ точки зрѣнія ускореній этихъ качаній и силъ инерціи ихъ: математическій маятникъ SS съ точкой привѣса въ S и въ

точкѣ S котораго предположена сосредоточенной вся масса M тѣла, будетъ въ точности эквивалентенъ нашей системѣ съ точки зрѣнія силъ инерціи и ускореній.

Итакъ, окончательно, мы приходимъ къ слѣдующимъ весьма важнымъ результатамъ:

1) Всякая система, надѣленная плоскимъ движеніемъ, можетъ, въ теченіе каждыхъ двухъ смежныхъ элементовъ времени, $2dt$, быть уподоблена, съ точки зрѣнія опредѣленія силъ инерціи и ускореній, физическому маятнику той же массы M съ точкой привѣса въ центрѣ ускореній G.

2) Всѣ силы инерціи плоско-движущейся системы приводятся къ нѣкоторой вполнѣ опредѣленной результирующей силѣ инерціи F, выражаемой черезъ параметры системы формулой (15), имѣющей видъ:

$$F = -MR\frac{\omega^2}{\cos\mu}.$$

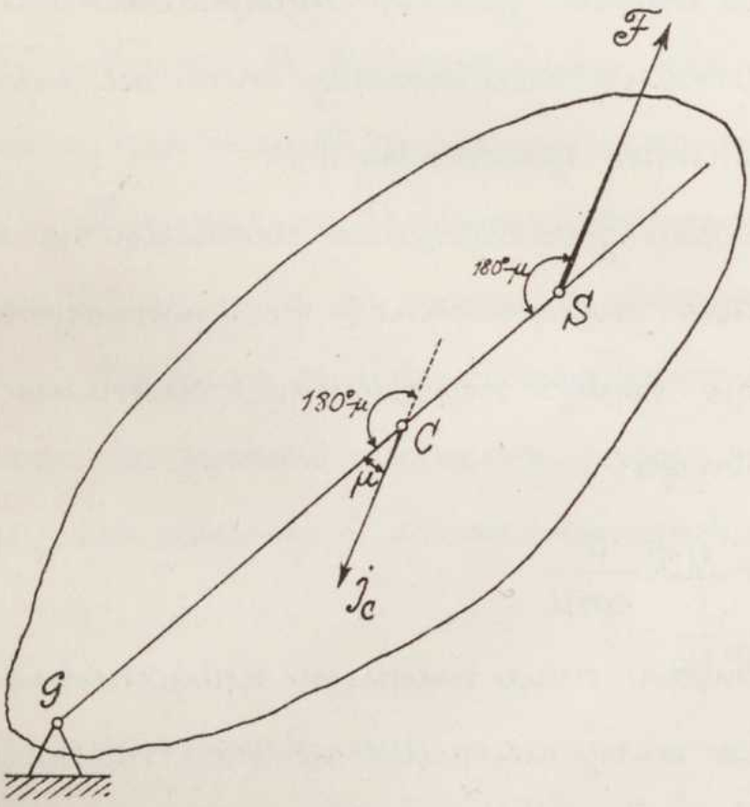
3) Эта равнодѣйствующая сила инерціи представляетъ собою не что иное, какъ силу инерціи центра тяжести, вычисленную въ предположеніи сосредоточенія въ немъ всей массы M данной системы и перенесенную затѣмъ параллельно самой себѣ въ нѣкоторую точку S прямой GC, проходящей черезъ центръ ускореній G и центръ тяжести C (фиг. 147)

4) Эта точка S приложенія силы инерціи F представляетъ собою центръ качанія данной системы при точкѣ привѣса ея въ центрѣ ускореній G. Разстояніе GS ея отъ центра G опредѣляется обычной формулой, опредѣляющей длину математическаго маятника, эквивалент-

наго данному физическому:

$$\mathcal{G}S = l = \frac{J_{\mathcal{G}}}{MR} = R + \frac{J_C}{MR} = R + \frac{\rho^2}{R}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (t)$$

— иными словами, точка S отстоитъ отъ центра C по прямой $\mathcal{G}C$ на длину $CS = J_C/MR = \rho^2/R$, какъ это и помѣчено на фиг. 145; при этомъ расположеніе точекъ $\mathcal{G}$, C и S всегда оказывается однимъ и тѣмъ же, а именно: 1) центръ ускореній $\mathcal{G}$, 2) центръ тяжести C и 3) центръ качаній S.



Фиг. 147.

Что касается величинъ, входящихъ въ составъ вышенаписанныхъ основныхъ формулъ (15) и (t), то относительно ихъ можно заключить слѣдующее:

1) Масса M даннаго тѣла вычисляется по его вѣсу $\mathcal{P}$ помощью формулы

$$M = \frac{\mathcal{P}}{g},$$

гдѣ g есть ускореніе силы тяжести. Не слѣдуетъ упускать изъ виду, что численно величина g можетъ выражаться различно, въ зависимости отъ величины единицъ, выбранныхъ при выполненіи вычисленій; такъ, напримѣръ,

$$g = 9{,}81\ ^{mt}/_{sec^2} = 981\ ^{cm}/_{sec^2} = 9810\ ^{mm}/_{sec^2} = 35316\ ^{mt}/_{min^2} \text{ и т. д.}$$

2) Положеніе центра тяжести C данной системы опредѣляется въ ней разъ навсегда.

3). J_C — моментъ инерціи даннаго тѣла относительно

его центра тяжести, — есть величина постоянная и вычисляется для данной системы разъ навсегда. О подсчетъ его на практикъ см. ниже.

4) R, — разстояніе GC отъ центра ускореній G до центра тяжести C, — есть величина перемѣнная, ибо центръ ускореній G, при движеніи системы, свое положеніе въ ней мѣняетъ, въ то время какъ центръ тяжести C остается въ системѣ все время на одномъ мѣстѣ. Въ силу этого будетъ мѣняться и положеніе центра качаній S.

5) Угловая скорость ω опредѣляется условіями движенія и начальными данными; или же опредѣляется для каждаго даннаго положенія системы и уголъ μ. Такимъ образомъ, факторы ω и μ представляютъ собою величины перемѣнныя, въ виду чего будетъ перемѣнной какъ величина результирующей силы инерціи F, такъ и направленіе ея и положеніе точки приложенія S. Такимъ образомъ, результирующая сила инерціи F подлежитъ учету при каждомъ новомъ положеніи системы.

Можно замѣтить еще, что моментъ инерціи J_C можетъ быть вычисленъ приблизительно, путемъ раздѣленія тѣла на малыя части, удобныя для подсчета ихъ объемовъ. Опредѣляя положеніе центра тяжести каждой такой части и зная массу ея m, предполагаемъ затѣмъ эту массу сосредоточенной въ центрѣ тяжести выдѣленной части. При достаточно большомъ числѣ этихъ частей моментъ инерціи J_C получается достаточно близкимъ къ его точному, дѣйствительному значенію, — точность такого приблизительнаго подсчета можетъ быть

вполнѣ достаточной для цѣлей практики. Такъ поступаютъ, напримѣръ, при подсчетѣ моментовъ инерціи шатуновъ кривошипныхъ механизмовъ. Существуютъ также спеціальныя таблицы для подсчета моментовъ инерціи различныхъ тѣлъ, равно какъ и приборы для опытнаго опредѣленія величины ихъ (приборъ Н. Е. Жуковскаго).

Итакъ, подсчетъ силъ инерціи въ плоскомъ движеніи системы никакихъ особыхъ трудностей не представляетъ. Для каждаго положенія системы, какъ оказывается, существуетъ результирующая сила инерціи F, вполнѣ опредѣленная какъ по величинѣ, такъ и по направленію; вполнѣ опредѣляется также и точка приложенія ея. Имѣя эту результирующую силу инерціи для любого положенія системы, мы получаемъ возможность сводить разсмотрѣніе задачи динамики,— опредѣленія всѣхъ обстоятельствъ движенія,— на задачу статики путемъ примѣненія къ такой плоскодвижущейся системѣ принципа д'Аламбера въ наиболѣе простой его формѣ, говорящей, что

> если ко всѣмъ силамъ, дѣйствующимъ на данную систему, прибавить результирующую силу инерціи, то получимъ равновѣсіе системы.

Въ виду этого соображенія мы получаемъ возможность для всего комплекса силъ, участвующихъ въ данномъ плоскомъ движеніи системы, т.-е. для всѣхъ дѣйствующихъ силъ и для результирующей силы инерціи F, писать обыкновенныя условія равновѣсія, сводящіяся, въ виду плоскаго движенія системы, къ двумъ уравненій проекцій и одному уравненію моментовъ. Положеніе осей

координатъ и начала моментовъ можемъ выбрать теперь, какъ угодно, наиболѣе удобнымъ для насъ образомъ. При этомъ требуется только одно: знать положеніе центра ускореній G, ибо этимъ самымъ опредѣляется факторъ $R = GC$ и положеніе центра качаній S. Требованіе это выполняется, однако, далеко не всегда: центръ ускореній G не всегда помѣщается въ предѣлахъ чертежа, являясь, такимъ образомъ, недоступнымъ для насъ, и тогда рѣшеніе вопроса путемъ простого подсчета длины отрѣзка GC становится фактически невозможнымъ. Тѣмъ не менѣе вопросъ этотъ можетъ быть вполнѣ точно разрѣшенъ и въ этихъ затруднительныхъ случаяхъ, и именно при помощи плана ускореній, соотвѣтствующаго данному моменту, и это рѣшеніе, въ виду всей важности центра качаній для динамическаго изслѣдованія механизмовъ, мы теперь же подробно и разсмотримъ.

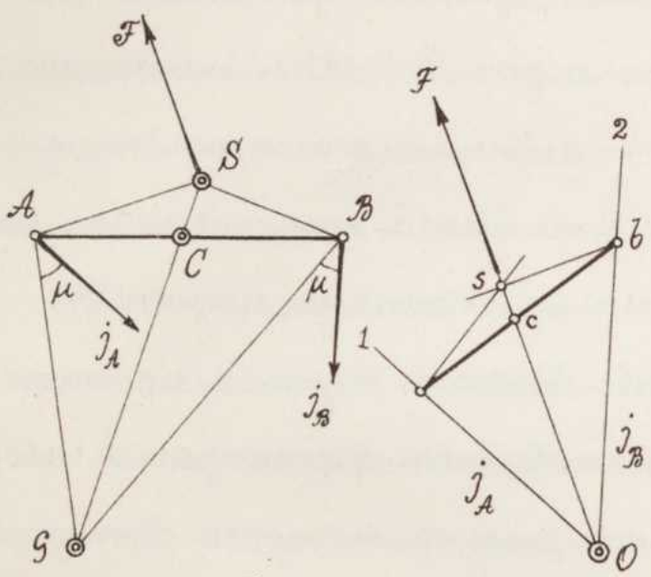
Пусть центръ ускореній даннаго звена AB занимаетъ въ разсматриваемый моментъ положеніе G, центръ тяжести — положеніе C, а центръ ускореній — положеніе S (фиг. 148). Пусть, затѣмъ, ускоренія точекъ A и B будутъ j_A и j_B, причемъ, какъ извѣстно, направленія этихъ ускореній будутъ составлять съ векторами GA и GB одинъ и тотъ же $\angle \mu$, величины же ихъ будутъ пропорціональны длинамъ этихъ векторовъ GA и GB, такъ что

$$j_A = k \cdot GA,$$

$$j_B = k \cdot GB.$$

Строимъ теперь планъ ускореній системы отрѣзка AB, для чего изъ произвольной точки O, принятой за полюсъ

этого плана, проводимъ лучи $01 \parallel j_A$ и $02 \parallel j_B$ и на этихъ лучахъ откладываемъ отрѣзки $0a$ и $0b$, пропорціональныя величинамъ ускореній j_A и j_B; соединивъ прямой полученныя такимъ образомъ точки a и b, получаемъ планъ ускореній системы даннаго отрѣзка AB въ видѣ нѣкотораго треугольника $0ab$, очевидно, подобнаго треугольнику GAB, при чемъ каждой изъ точекъ системы AB будетъ соотвѣтствовать отдѣльная точка плана ускореній; такъ, точкѣ A будетъ соотвѣтствовать точка a плана ускореній, точкѣ B – точка b, центру ускореній G – полюсъ плана 0, центру тяжести C – точка c, опредѣляемая изъ соотношенія $ac : AC = ab : AB$, центру качаній S – точка s, опредѣляемая изъ соотношеній $0s : GS = 0c : GC = ac : AC = ab : AB$ и т. д. Обозначивъ длину отрѣзка AB черезъ L, а отрѣзка ab – черезъ l, можемъ написать, что отрѣзки плана ускореній будутъ относиться къ соотвѣтствующимъ имъ отрѣзкамъ системы AB, какъ l относится къ L. Замѣтивъ это, нетрудно находить положеніе центра качаній S въ системѣ AB, не прибѣгая къ помощи центра ускореній G ея, а пользуясь лишь планомъ ускореній $0ab$. Для этого поступаемъ такъ:



Фиг. 148.

Пусть моментъ инерціи системы AB относительно центра тяжести C есть J_c, а масса ея есть M. Отсюда опредѣляемъ радіусъ инерціи ρ системы AB, пользуясь уравненіемъ $M\rho^2 = J_c$, изъ коего находимъ, что $\rho^2 = J_c / M$.

Мы знаемъ, что разстояніе GS центра ускореній G отъ центра качаній S дается формулой

$$GS = \mathcal{R} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}} = GC + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}},$$

гдѣ $\mathcal{R} = GC$. Точка s плана ускореній, соотвѣтствующая центру качаній S, опредѣлится изъ того условія, что она должна лежать на одной прямой съ точками O и C, на разстояніи Os отъ точки O, равномъ, согласно сказанному,

$$GS.\frac{ab}{AB} = GS.\frac{l}{\mathcal{L}} = \left(\mathcal{R} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}}\right)\frac{l}{\mathcal{L}}.$$

Итакъ,

$$Os = \left(\mathcal{R} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}}\right)\frac{l}{\mathcal{L}}.$$

Векторъ $\mathcal{R}$, оказывающійся неизвѣстнымъ при отсутствіи центра ускореній G, можно изъ полученнаго соотношенія исключить, пользуясь соотношеніями

$$GC : Oc = \mathcal{R} : Oc = AB : ab,$$

откуда и находимъ, что

$$\mathcal{R} = Oc.\frac{AB}{ab} = Oc.\frac{\mathcal{L}}{l}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Въ виду этого искомое разстояніе Os выразится такъ:

$$Os = \mathcal{R}.\frac{l}{\mathcal{L}} + \frac{\varrho^2}{\mathcal{R}}.\frac{l}{\mathcal{L}} = Oc.\frac{\mathcal{L}}{l}.\frac{l}{\mathcal{L}} + \frac{\varrho^2}{Oc}.\frac{l}{\mathcal{L}}.\frac{l}{\mathcal{L}} = Oc + \frac{\varrho^2}{Oc}.\frac{l^2}{\mathcal{L}^2} \quad . \quad (B)$$

Это выраженіе разрѣшаетъ поставленный вопросъ вполнѣ, ибо, построивъ планъ ускореній, сможемъ непосредственнымъ измѣреніемъ найти величины Oc и l, величины же ϱ и $\mathcal{L}$ будутъ извѣстны по начальнымъ даннымъ для звена AB. Несложныя графическія построенія дадутъ возможность сейчасъ же опредѣлить Os; можно, конечно, опредѣлить его и непосредственнымъ вычисленіемъ; при этомъ, во избѣжаніе недоразумѣній, слѣ-

ет тщательно слѣдить за тѣмъ, чтобы всѣ отрѣзки Oc, ρ, l и $\mathfrak{L}$ были, при подстановкѣ значеній ихъ въ формулу (B), выражены въ однихъ и тѣхъ же единицахъ, — напримѣръ, въ миллиметрахъ; въ тѣхъ же единицахъ получится тогда и Os.

Пусть, напримѣръ, $\mathfrak{L} = 2{,}5$ mt, l получилось равнымъ 5 cm, $\rho = 50$ cm и $Oc = 50$ mm. Тогда, прежде всего, пишемъ, что $\mathfrak{L} = 2500$ mm, $l = 50$ mm, $\rho = 500$ mm и $Oc = 50$ mm. Подстановка въ формулу (B) даетъ для Os величину 52 mm, такъ что отрѣзокъ cs (въ планѣ ускореній) будетъ равенъ 2 mm. Въ натурѣ разстояніе CS будетъ равно $2.\frac{2500}{500} = 100$ mm.

Получивъ точку s въ планѣ ускореній, можемъ, если бы это понадобилось, найти положеніе центра качаній S въ системѣ самого отрѣзка AB. Но обычно эту точку s приходится переносить въ планъ скоростей, что и будетъ выполнено обычными пріемами, путемъ, напримѣръ, построенія треугольника, подобнаго треугольнику abs и т. д.

Разобранный пріемъ удобенъ еще тѣмъ, что сразу даетъ величину и направленіе ускоренія центра тяжести C: ускореніе это выражается векторомъ cO и будетъ направлено отъ c къ O; равно же оно будетъ $k.cO$, гдѣ k есть коэффиціентъ пропорціональности плана ускореній. Отсюда слѣдуетъ, что результирующая сила инерціи, F, будетъ равна $Mj_c = kM.cO$ и направится прямопротивоположно cO, т.-е. по направленію Oc, при чемъ точкой приложенія ея будетъ служить точка s, — изображеніе центра качаній S въ планѣ Oab.

Этими замѣчаніями мы закончимъ разборъ «теоремы о центрѣ качанія» и перейдемъ теперь къ разбору другихъ основныхъ теоремъ, находящихъ себѣ примѣненіе при динамическомъ изслѣдованіи механизмовъ.

§ 16. Принципы д'Аламбера и Лагранжа въ примѣненіи ихъ къ изслѣдованію движенія произвольно-сложныхъ плоскихъ механизмовъ.

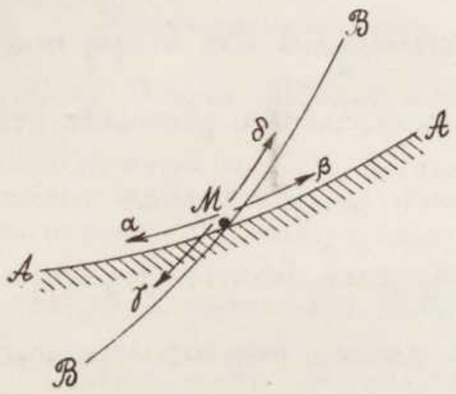
Предположимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый сколь-угодно сложный суставчатый плоскій механизмъ. Въ виду такой полной произвольности состава его, т.-е. числа звеньевъ его, способа ихъ сочетаній и проч., мы не будемъ задаваться никакой «примѣрной» схемой механизма, а будемъ вести изложеніе съ самой общей точки зрѣнія, принявъ лишь относительно изучаемыхъ нами механизмовъ только то одно существенное ограничительное условіе, что движеніе каждаго звена, каждой детали его, является вполнѣ опредѣленнымъ въ томъ смыслѣ, что каждое опредѣленное перемѣщеніе одного звена (или точки) его должно вызывать вполнѣ опредѣленныя соотвѣтствующія ему перемѣщенія всѣхъ остальныхъ звеньевъ (или точекъ).

Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся изученіемъ однихъ лишь плоскодвижущихся механизмовъ, и движенія отрѣзковъ, изображающихъ различныя звенья механизма, будемъ принимать совершающимися въ одной и той же неподвижной плоскости, которую мы и примемъ за плоскость кординатъ (x, y); координату z будемъ принимать, такимъ образомъ, равной нулю.

Далѣе, въ виду того, что, говоря о началѣ Лагранжа, намъ придется упоминать о возможныхъ и дѣйствительныхъ перемѣщеніяхъ, мы и постараемся теперь же совершенно ясно установить различіе между этими двумя видами элементарныхъ перемѣщеній массъ системы, могущихъ имѣть мѣсто при движеніи ея.

Пусть, при движеніи системы, нѣкоторая матеріальная

точка M во время своего движения принуждена постоянно оставаться на нѣкоторой поверхности, съ теченіемъ времени мѣняющей свой видъ и положеніе въ пространствѣ. Выражая эту же мысль на языкѣ механики, скажемъ, что связи, наложенныя на нашу точку и обусловливающія движеніе ея, со временемъ мѣняются, представляя собою, такимъ образомъ, функціи времени. Если въ данный моментъ поверхность, по которой происходитъ движеніе нашей точки, есть, положимъ, AA (фиг. 149), то въ слѣдующій моментъ, по истеченіи времени dt, эта поверхность окажется принявшей уже видъ BB; переходъ вида AA въ видъ BB будетъ совершенъ именно за это время dt. Въ силу этого, то элементарное перемѣщеніе, которая точка выполнитъ въ дѣйствительности за время dt, окажется или перемѣщеніемъ γ или перемѣщеніемъ δ, — начало этихъ перемѣщеній лежало бы на поверхности AA, а конецъ — на поверхности BB, какъ это и изображено на чертежѣ.



Фиг. 149.

Не то, однако, было бы, если бы эта поверхность оставалась со временемъ немѣняющейся, т.-е. если бы связи, наложенныя на точку и опредѣляющія движеніе ея, были независящими отъ времени. Тогда поверхность AA такъ поверхностью AA все время бы и оставалась, и элементарными перемѣщеніями точки M оказались бы перемѣщенія α и β. Это, значитъ, были бы тѣ перемѣщенія, которыя были бы возможны въ данный моментъ для нашей точки, если бы поверхность AA въ этотъ моментъ перестала измѣняться, т.-е. если бы связи въ этотъ моментъ перестали зависѣть отъ времени. Такія возможныя перемѣ-

щенія (α или β), какъ видимъ, при зависимости связей отъ времени, съ дѣйствительными перемѣщеніями (γ или δ) не совпадаютъ,—это совпаденіе могло бы имѣть мѣсто лишь въ томъ единственномъ случаѣ, когда поверхность AA со временемъ бы не мѣнялась,—въ этомъ случаѣ дѣйствительными перемѣщеніями оказались бы тѣ же α и β, которыя оказываются и возможными. Обычно возможныя перемѣщенія обозначаютъ буквами δ, а дѣйствительныя—буквами d, и можно сказать, что, при зависимости связей отъ времени, всѣ возможныя перемѣщенія $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots\ldots$, отличны отъ дѣйствительныхъ $dx, dy, dz, \ldots$, и замѣнять другъ друга не могутъ; въ то же время при связяхъ, отъ времени не зависящихъ и остающихся все время неизмѣняющимися, всѣ $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$, могутъ быть замѣняемы черезъ $dx, dy, dz, \ldots$.

Связи, имѣющія мѣсто въ нашихъ механизмахъ, со временемъ не мѣняются, ибо мы отвлекаемся отъ разсмотрѣнія тѣхъ измѣненій въ размѣрахъ отдѣльныхъ звеньевъ и деталей, кои обусловливаются, напр., измѣненіями нагрузки ихъ, температуры и т. д. Поэтому-то мы и можемъ сказать, что въ нашихъ механизмахъ возможныя перемѣщенія совпадаютъ съ дѣйствительными, и это обстоятельство, какъ мы увидимъ ниже, даетъ возможность весьма простой аналитической обработки принципа Лагранжа въ примѣненіи его къ нашимъ механизмамъ.

Итакъ, предположимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый плоскій механизмъ. Какъ бы онъ ни былъ, но къ нему всегда можно примѣнить принципъ возможныхъ работъ, данный Лагранжемъ и могущій быть, въ общемъ его видѣ, сформулированнымъ такъ:

«Каковы бы ни были связи, наложенныя на механическую систему, но если къ дѣйствующимъ на нее силамъ мы прибавимъ еще силы инерціи и, мысленно остановивъ систему, дадимъ ей возможныя для этого момента перемѣщенія, то сумма всѣхъ работъ, могущихъ быть совершенными при этомъ, будетъ равна нулю».

Пусть на нашъ механизмъ дѣйствуетъ рядъ силъ $P, Q, R, \ldots$; обозначимъ возможныя перемѣщенія точекъ приложенія этихъ силъ въ направленіи этихъ силъ черезъ $\delta p, \delta q, \delta r, \ldots$ Въ такомъ случаѣ сумма возможныхъ работъ дѣйствующихъ силъ напишется такъ:

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots.$$

Ради краткости письма, будемъ обозначать эту сумму просто черезъ $\Sigma P\delta p$.

Переходимъ теперь къ силамъ инерціи. Такъ какъ механизмъ состоитъ изъ ряда подвижныхъ звеньевъ, числомъ, положимъ, n, и такъ какъ для каждаго звена сумма возможныхъ работъ силъ инерціи изображается суммой

$$-\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right),$$

то, распространивъ ее на всѣ n звеньевъ механизма, получимъ сумму возможныхъ работъ силъ инерціи всѣхъ звеньевъ, т.-е. всего механизма, въ видѣ двойной суммы

$$-\sum_1^n\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

Такъ какъ движеніе механизма предполагается совершающимся въ плоскости xOy, то $z=0$, въ виду чего написанная выше двойная сумма упростится такъ:

$$-\Sigma\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right).$$

Послѣ этого уравненіе возможныхъ работъ для всего нашего механизма будетъ имѣть видъ:

$$\Sigma\mathcal{P}\delta p-\Sigma\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right)=0 \quad . \quad . \quad .(21)$$

Двойную сумму, входящую въ составъ этого уравненія можно значительно упростить, принявъ во вниманіе, что, согласно одной изъ теоремъ Динамики, сумма работъ слагающихъ равна работѣ равнодѣйствующей. Въ данномъ случаѣ сумма работъ слагающихъ (частичныхъ) силъ инерціи для каждаго звена выражается черезъ $\left[-\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right)\right]$. Но такъ какъ, согласно теоремѣ о центрѣ тяжести, для силъ инерціи каждаго звена всегда можетъ быть найдена результирующая сила инерціи $\mathcal{F}$, приложенная въ центръ качанія S этого звена, то, обозначая возможныя перемѣщенія центра качанія черезъ $\delta\sigma$, мы и сможемъ, въ силу упомянутой теоремы, написать, что

$$-\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\right)=+\mathcal{F}\delta\sigma$$

Въ виду этого двойная сумма уравненія (21) перепишется просто въ видѣ суммы $\sum_1^n\mathcal{F}\delta\sigma$ и будетъ, такимъ образомъ, представлять собою сумму возможныхъ работъ результирующихъ силъ инерціи $\mathcal{F}$, относящихся каждая къ своему звену. Въ силу этого уравненіе (21) возможныхъ работъ нашего механизма можетъ быть написано въ формѣ:

$$\Sigma\mathcal{P}\delta p+\Sigma\mathcal{F}\delta\sigma=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .(22)$$

Относительно всѣхъ этихъ возможныхъ перемѣщеній δ напомнимъ еще разъ, что принципъ Лагранжа требуетъ, чтобы мы

представимъ себѣ въ данный моментъ всѣ связи системы какъ бы отвердѣвшими и потерявшими способность къ дальнѣйшему измѣненію, и тогда перемѣщенія системы, возможныя при такомъ условіи, и будутъ тѣми возможными перемѣщеніями δp, о которыхъ говоритъ начало Лагранжа. Такъ какъ въ нашихъ механизмахъ всѣ связи можно считать жесткими и неизмѣняющимися,—механизмы съ упругими звеньями (пружинами и проч.) мы изъ нашего разсмотрѣнія пока исключаемъ, а въ остальныхъ считаемъ деформаціи частей ихъ ничтожно малыми,—то возможныя перемѣщенія можно считать совпадающими съ дѣйствительными, вслѣдствіе чего всѣ δp могутъ быть замѣнены дифференціалами dp, и начала д'Аламбера и Лагранжа сведутся къ уравненіямъ

$$\Sigma \mathfrak{P} dp - \sum_1^n \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy \right) = 0 \quad \ldots \quad (23)$$

и

$$\Sigma \mathfrak{P} dp + \Sigma \mathfrak{F} d\sigma = 0 \quad \ldots \quad (24)$$

Оба эти уравненія, конечно, другъ другу эквивалентны, но разница въ ихъ внѣшнихъ формахъ позволяетъ вывести на основаніи ихъ двѣ основныхъ теоремы динамики механизмовъ; первую изъ нихъ получимъ, воспользовавъ уравненіе (24), т.-е. разсматривая уравненіе работъ безъ всякаго преобразованія его по существу; вторую теорему получимъ путемъ преобразованія ур-ія (23) въ болѣе простое дифференціальное уравненіе и послѣдующей затѣмъ интеграціи его для какого-либо произвольнаго промежутка времени τ. Иными словами, во второмъ случаѣ мы примѣнимъ уравненіе работъ къ какому-либо произвольному промежутку времени (конечному или безконечно-малому), а въ первомъ разсмотримъ примѣненіе его только къ безконечно-

малому промежутку времени dt. Къ этимъ изслѣдованіямъ мы теперь непосредственно и приступимъ.

§17. Теорема моментовъ относительно полюса плана скоростей.

Механизмъ, взятый нами для разсмотрѣнія, обладаетъ свойствомъ опредѣленности своихъ движеній,—давъ одной точкѣ его какое-либо опредѣленное перемѣщеніе, мы получимъ, одновременно съ этимъ, вполнѣ опредѣленныя перемѣщенія всѣхъ остальныхъ точекъ его. Отсюда слѣдуетъ, что по данной скорости одной изъ точекъ механизма можно опредѣлить скорости всѣхъ остальныхъ, при чемъ соотношенія между величинами и направленіями всѣхъ этихъ скоростей могутъ быть весьма удобно изучаемы графическимъ путемъ, помощью такъ называемаго плана скоростей, представляющаго собою цѣлую систему треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину въ нѣкоторой точкѣ плоскости этого плана, называемой полюсомъ плана скоростей. Каждый изъ этихъ треугольниковъ конструируется такъ, что конечные векторы (стороны) его, выходящіе изъ полюса плана, представляютъ собою, въ извѣстномъ масштабѣ, скорости конечныхъ точекъ звена, которому этотъ треугольникъ соотвѣтствуетъ, и направлены перпендикулярно этимъ скоростямъ, третья же сторона каждаго Δ-ка, противолежащая полюсу, параллельна прямой, соединяющей двѣ упомянутыя точки звена. Затѣмъ, каждой точкѣ X звена будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая вполнѣ опредѣленная точка x плана, и скорость v_x точки X выразится такъ:

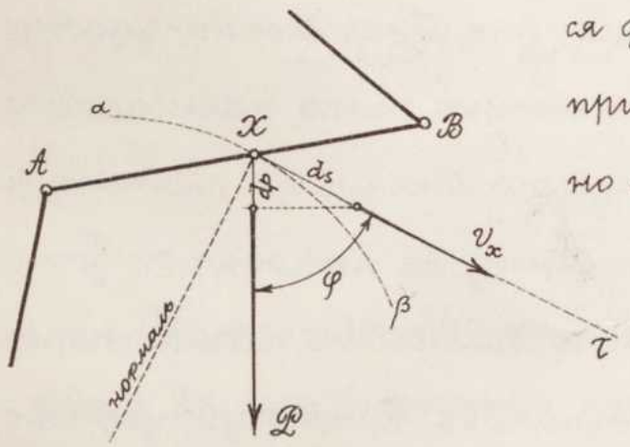
$$v_x = Ox \cdot \vartheta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (u)$$

гдѣ O есть полюсъ плана скоростей, x — точка плана, соотвѣтствующая точкѣ X системы, а ϑ — общая для всѣхъ точекъ плана угловая скорость, — масштабъ плана; при этомъ векторъ Ox будетъ перпендикуляренъ скорости v_x взятой точки X.

Предположимъ теперь, что эта точка X служитъ точкой приложенія силы $\mathfrak{P}$, — одной изъ силъ, дѣйствующихъ на механизмъ, — и пусть элементарная работа dL этой силы $\mathfrak{P}$ за промежутокъ времени dt выражается черезъ $\mathfrak{P}dp$, такъ что

$$dL = \mathfrak{P}\,dp,$$

при чемъ необходимо помнить, что dp есть перемѣщеніе точки приложенія X не въ дѣйствительномъ направленіи движенія точки X, а въ направленіи дѣйствія силы $\mathfrak{P}$ (фиг. 150). Что же касается дѣйствительнаго перемѣщенія ds, то, принимая во вниманіе, что оно направлено всегда по скорости точки v_x, т.-е. по касательной Xt къ траекторіи ab данной точки, можемъ написать, что



Фиг. 150.

$$ds = v_x\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

Скорость v_x точки X можно выразить черезъ $\vartheta . Ox$, гдѣ Ox есть векторъ плана скоростей, соединяющій полюсъ O плана съ точкой x его, соотвѣтствующей точкѣ x, а ϑ — масштабъ плана; въ силу этого выраженіе (v) принимаетъ видъ:

$$ds = Ox . \vartheta\,dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (w)$$

Мы указывали, что dp есть перемѣщеніе точки X въ направленіи силы $\mathfrak{P}$; иными словами, это есть проекція дѣйствительнаго перемѣщенія ds на направленіе силы $\mathfrak{P}$, и, если уголъ между $\mathfrak{P}$ и ds обозначимъ черезъ φ, то можно будетъ написать, что

$$dp = ds\cos\varphi = ds\cos(v_x, \mathfrak{P}),$$

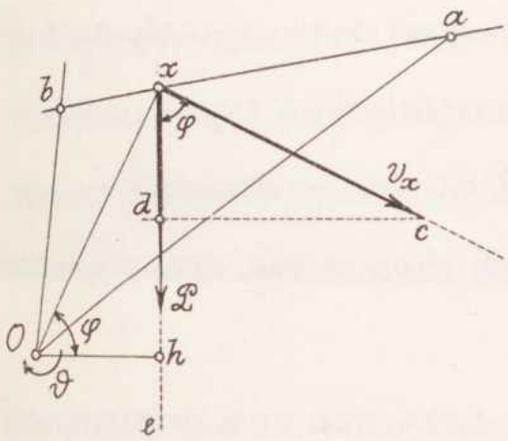
вслѣдствіе чего элементарная работа $d\mathfrak{L}$ силы $\mathfrak{P}$ выразится такъ:

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{P}\,dp = \mathfrak{P}\,ds\cos(v_x, \mathfrak{P}),$$

что, въ видѣ (w), принимаетъ видъ:

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{P}.Ox.\cos(v_x, \mathfrak{P})\vartheta\,dt. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x)$$

Перенесемъ теперь силу $\mathfrak{P}$ параллельной ей самой изъ точки X звена AB въ соотвѣтствующую ей точку x плана скоростей (фиг. 151). Въ такомъ случаѣ векторъ Ox будетъ, какъ извѣстно, имѣть направленіе, перпендикулярное къ скорости v_x. Если, теперь, изъ начала O плана скоростей мы опустимъ перпендикуляръ Oh на прямую xe, по которой направлена перенесенная нами сила $\mathfrak{P}$, то $\angle xOh$ окажется равнымъ углу φ между v_x и $\mathfrak{P}$, ибо у этихъ двухъ угловъ стороны оказываются взаимно перпендикулярными. Но разъ уголъ $(v_x, \mathfrak{P})$ равенъ углу xOh, то факторъ $Ox.\cos(v_x, \mathfrak{P})$, равный, иначе, $Ox\cos xOh$, т.-е. $Ox\cos\varphi$, будетъ, очевидно, равенъ Oh, т.-е. плечу силы $\mathfrak{P}$ относительно полюса O плана скоростей, въ силу чего элементарная работа $d\mathfrak{L}$ силы $\mathfrak{P}$ выразится теперь такъ:



Фиг. 151.

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{P}\,dp = \mathfrak{P}.Ox\cos(v_x, \mathfrak{P})\vartheta\,dt = \mathfrak{P}.Oh.\vartheta\,dt. \quad . \quad . \quad (25)$$

Это выраженіе весьма важно; оно указываетъ, что элементарная работа силы $\mathfrak{P}$ можетъ быть получена помощью плана скоростей путемъ слѣдующей операціи:

Отыскиваемъ въ планѣ скоростей точку x, соотвѣтствующую точкѣ X приложенія силы $\mathfrak{P}$, переносимъ въ эту точку x силу $\mathfrak{P}$ параллельно ей самой и опускаемъ изъ начала O перпендикуляръ Oh на направленіе xe такъ перенесенной нами си-

лы P; тогда элементарная работа силы P за время dt выразится произведеніемъ изъ силы P на плечо Oh и на факторъ $\vartheta\, dt$, очевидно, общій всѣмъ точкамъ системы.

Произведеніе $P.Oh$, очевидно, представляетъ собою статическій моментъ силы P, перенесенной указаннымъ путемъ въ планъ ускореній относительно полюса O этого плана. Обозначивъ его, ради краткости письма, черезъ m_p, можемъ переписать выраженіе (25) такъ:

$$P\,dp = dL = m_p\,\vartheta\,dt. \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (y)$$

Итакъ, элементарная работы каждой силы, проявляющей свое дѣйствіе въ механизмѣ, равна произведенію изъ постояннаго для даннаго момента фактора $\vartheta\,dt$ на статическій моментъ этой силы, перенесенной въ планъ скоростей, относительно полюса этого плана.

Что касается знака этого момента, то онъ опредѣляется смысломъ вращенія его около полюса, и, согласно общепринятому положенію, положительнымъ будемъ считать моментъ, стремящійся вращать систему по часовой стрѣлкѣ, а отрицательнымъ — противъ нея.

Соотношеніе (y) можетъ быть, по аналогіи, распространено какъ на всѣ дѣйствующія силы $P, Q, R, \ldots$, приложенныя нами къ механизмы, такъ и на всѣ силы инерціи или, что то же, на всѣ n результирующихъ силъ инерціи F. Составивъ всѣ такія выраженія и просуммировавъ ихъ отдѣльно для силъ дѣйствующихъ и, затѣмъ, отдѣльно для силъ инерціи F, можемъ написать, что

$$\Sigma P\,dp = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = m_p\,\vartheta\,dt + m_q\,\vartheta\,dt + m_r\,\vartheta\,dt + \ldots =$$

$$= \Sigma\,(m_p\,\vartheta\,dt) = \vartheta\,dt\,\Sigma\,m_p. \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (z)$$

и, затѣмъ,

$$\Sigma \mathfrak{F} d\sigma = m_{\mathfrak{F}_1} \vartheta dt + m_{\mathfrak{F}_2} \vartheta dt + \ldots + m_{\mathfrak{F}_n} \vartheta dt = \vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{F}}, \ldots (\alpha)$$

при чемъ относительно выраженія (α) отмѣтимъ, что каждая результирующая сила инерціи $\mathfrak{F}_k$, приложенная въ центръ качанія своего звена, S_k, при перенесеніи ея въ планъ скоростей, должна быть прилагаема въ точкѣ s_k плана, соотвѣтствующей точкѣ S_k звена.

Итакъ, возможная работа силъ дѣйствующихъ, приложенныхъ къ нашему механизму, выражается суммой $\vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{P}}$, а возможная работа всѣхъ силъ инерціи — суммой $\vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{F}}$. Согласно началу Лагранжа, сумма двухъ этихъ видовъ возможныхъ работъ, должна быть равна нулю, почему можемъ написать, что уравненіе (24), имѣющее видъ

$$\Sigma \mathfrak{P} dp + \Sigma \mathfrak{F} d\sigma = 0,$$

въ силу уравненій (z) и (α) перепишется такъ:

$$\vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{P}} + \vartheta dt \Sigma m_{\mathfrak{F}} = 0,$$

что, по сокращеніи на ϑdt, даетъ уравненіе

$$\Sigma m_{\mathfrak{P}} + \Sigma m_{\mathfrak{F}} = 0, \ldots (26)$$

представляющее собою, какъ видимъ, уравненіе моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на механизмъ, считая въ томъ числѣ и силы инерціи, относительно полюса плана скоростей, при чемъ всѣ силы предполагаются перенесенными въ планъ скоростей параллельно самимъ себѣ и приложенными въ тѣхъ точкахъ плана, кои являются соотвѣтствующими для точекъ приложенія этихъ силъ въ данномъ механизмѣ.

Уравненіе возможныхъ работъ (24) было написано нами въ томъ предположеніи, что къ даннымъ силамъ, дѣйствующимъ на механизмъ, были прибавлены еще всѣ силы инерціи. Такъ

какъ, согласно принципу д'Аламбера, послѣ такого прибавленія наступаетъ равновѣсіе между всѣми этими силами, то уравненіе (26), какъ производное отъ (23), представляетъ собою не что иное, какъ одно изъ обычныхъ уравненій равновѣсія, но написанное въ формѣ, болѣе простой и удобной для практическаго использованія. Уравненіе это можно истолковать еще и иначе, принявъ во вниманіе слѣдующія соображенія:

Уравненіе (26) есть уравненіе моментовъ всѣхъ силъ, оказывавшихъ свое воздѣйствіе на механизмъ и перенесенныхъ опредѣленнымъ образомъ въ планъ скоростей, относительно одной и той же точки,—полюса плана скоростей. Въ другой сторонѣ, это же уравненіе можетъ быть разсматриваемо, какъ уравненіе равновѣсія нѣкоторой жесткой системы, могущей вращаться около полюса O и находящейся подъ воздѣйствіемъ всего комплекса перенесенныхъ нами силъ. Значитъ, выходитъ, что если фигуру, изображающую нашъ механизмъ въ планѣ скоростей, будемъ считать жесткой, неизмѣняемой, иными словами, если примемъ ее за нѣкоторый жесткій рычагъ, съ точкой опоры въ полюсѣ плана скоростей, и, затѣмъ, перенесемъ всѣ силы изъ механизма на эту фигуру,—каждую силу въ свою соотвѣтствующую точку,—то одно изъ условій равновѣсія такой жесткой фигуры, такого жесткаго рычага, могущаго вращаться около полюса плана, какъ около точки опоры,—а именно, уравненіе моментовъ всѣхъ силъ относительно этой точки опоры,—и представится уравненіемъ (26).

Оказывается, такимъ образомъ, что, сколь бы сложенъ ни былъ данный плоскій механизмъ, но изученіе соотношеній между силами, на него дѣйствующими, считая въ томъ числѣ

и силы инерціи, можетъ быть весьма просто и удобно выполняемо путемъ сведенія этого сложнаго вопроса къ простѣйшей задачѣ статики, для чего нужно:

1) построить полный планъ скоростей даннаго механизма, что дастъ намъ въ этомъ планѣ фигуру, соотвѣтствующую данному механизму въ разсматриваемый моментъ;

2) перенести въ планъ скоростей всѣ силы, дѣйствующія на механизмъ, включая въ число ихъ и результирующія силы инерціи, приложенныя въ центрахъ качаній звеньевъ механизма; каждую силу нужно перенести въ точку плана, соотвѣтствующую точкѣ приложенія ея въ механизмѣ;

3) принявъ, наконецъ, фигуру, изображающую въ планѣ скоростей данный механизмъ, за жесткій рычагъ съ точкой опоры въ планѣ скоростей, написать одно изъ уравненій статическаго равновѣсія для системы этого рычага, нагруженнаго перенесенными на него силами; а именно, уравненіе моментовъ всѣхъ этихъ силъ относительно точки опоры (центра вращенія) рычага, т.-е. относительно полюса плана скоростей.

Полученное такимъ путемъ уравненіе моментовъ и будетъ представлять собою выведенное выше уравненіе (26), т.-е. условіе равновѣсія силъ дѣйствующихъ и силъ инерціи даннаго механизма. Очевидно, что каждому отдѣльному положенію механизма будетъ соотвѣтствовать свой рычагъ и свое уравненіе моментовъ.

Если окажется, что величина какой-либо изъ силъ, воздѣйствующихъ на механизмъ, неизвѣстна, но направленіе и точка приложенія ея намъ даны, равно какъ даны величины, направленія и точки приложенія всѣхъ остальныхъ силъ, то уравне-

ніе (26) дастъ намъ возможность опредѣлить и величину этой силы, и, значитъ, весь комплексъ силъ, дѣйствующихъ на нашъ механизмъ, будетъ извѣстенъ вполнѣ. Это соображеніе играетъ весьма важную роль при разсмотрѣніи задачи объ обезпеченіи равномѣрности хода простыхъ и сложныхъ кривошипныхъ механизмовъ,— при помощи этого именно уравненія (26) и строится такъ называемая діаграмма тангенціальныхъ усилій. Построеніе этой діаграммы и выясненіе значенія ея будетъ выполнено въ одномъ изъ дальнѣйшихъ параграфовъ.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ числѣ силъ, вошедшихъ въ уравненіе (26), опорныхъ сопротивленій N, учитывающихъ реакціи связей, не имѣется, и эти силы не могутъ войти въ это уравненіе по самому существу дѣла. Дѣйствительно, уравненіе (26) было получено изъ основного уравненія возможныхъ работъ (24); но возможныя работы этихъ сопротивленій N всѣ равны нулю, такъ какъ возможныя перемѣщенія точекъ приложенія этихъ силъ N перпендикулярны направленіямъ этихъ силъ. Вслѣдствіе этого, въ основное уравненіе (24) эти силы N войти не смогутъ, а значитъ, не будетъ ихъ и въ уравненіи моментовъ (26).

Опредѣленіе этихъ силъ N придется вести для каждаго звена отдѣльно, помощью уравненій проекцій всѣхъ силъ, воздѣйствующихъ на звено, сначала на одну ось проекцій, а затѣмъ на другую, ей перпендикулярную,— оси эти, понятно, нужно выбирать наиболѣе удобнымъ для дѣла образомъ. Два, полученныхъ такимъ путемъ уравненія проекцій дадутъ возможность опредѣлить силы опорныхъ сопротивленій N и, значитъ, какъ силы тренія, такъ и работу этихъ послѣднихъ, что, въ свою

очередь, позволитъ составить представленіе о степени совершенства нашей машины.

Этими соображеніями мы и закончимъ выводъ и разборъ теоремы моментовъ. О приложеніяхъ ея на практикѣ мы будемъ говорить еще въ дальнѣйшемъ, а теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію второго уравненія, вытекающаго изъ принциповъ д'Аламбера и Лагранжа, а именно, уравненія (23).

§ 18. Теорема живыхъ силъ въ примѣненіи ея къ движенію плоскихъ механизмовъ.

Въ виду того, что, согласно основному предположенію, связи нашихъ механизмовъ отъ времени не зависятъ, оказалось возможнымъ въ общемъ уравненіи, выражающемъ начала д'Аламбера и Лагранжа, замѣнить возможныя перемѣщенія $\delta x, \delta y, \delta p, \ldots$, дѣйствительными $dx, dy, dp, \ldots$, послѣ чего получилось уравненіе

$$\Sigma \mathfrak{P} dp - \sum_1^n \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Двойная сумма, входящая въ составъ этого уравненія, получилась, какъ мы знаемъ, такъ:

Работа силы инерціи какой-нибудь матеріальной точки съ массой m, совершенная за время dt, выражается черезъ

$$-m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy\right).$$

Взявъ сумму такихъ работъ для одного звена нашего механизма, мы обозначили результатъ такого суммированія первымъ знакомъ Σ; распространеніе же такого суммированія на всѣ звенья механизма мы отмѣтили вторымъ знакомъ Σ.

Ради простоты писанія, условимся суммированіе работъ всѣхъ силъ инерціи для всѣхъ массъ механизма (для всѣхъ массъ всѣхъ его звеньевъ) отмѣчать не двумя знаками суммъ, а только однимъ, такъ что уравненіе (23) можетъ быть переписано еще такъ:

$$\Sigma \mathfrak{P}\,dp - \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (23')$$

Соотношеніе это представляетъ собою нѣкоторое дифференціальное уравненіе, имѣющее мѣсто для даннаго момента времени dt. Попробуемъ распространить его на какой-либо произвольный промежутокъ времени Δt, равный $(t_2 - t_1)$; для этого нужно проинтегрировать всѣ члены этого уравненія въ указанныхъ предѣлахъ, и мы теперь и займемся такимъ интегрированіемъ. Обратимся, прежде всего, къ первой суммѣ $\Sigma \mathfrak{P}\,dp$ и напишемъ ее въ раскрытомъ видѣ; имѣемъ, что

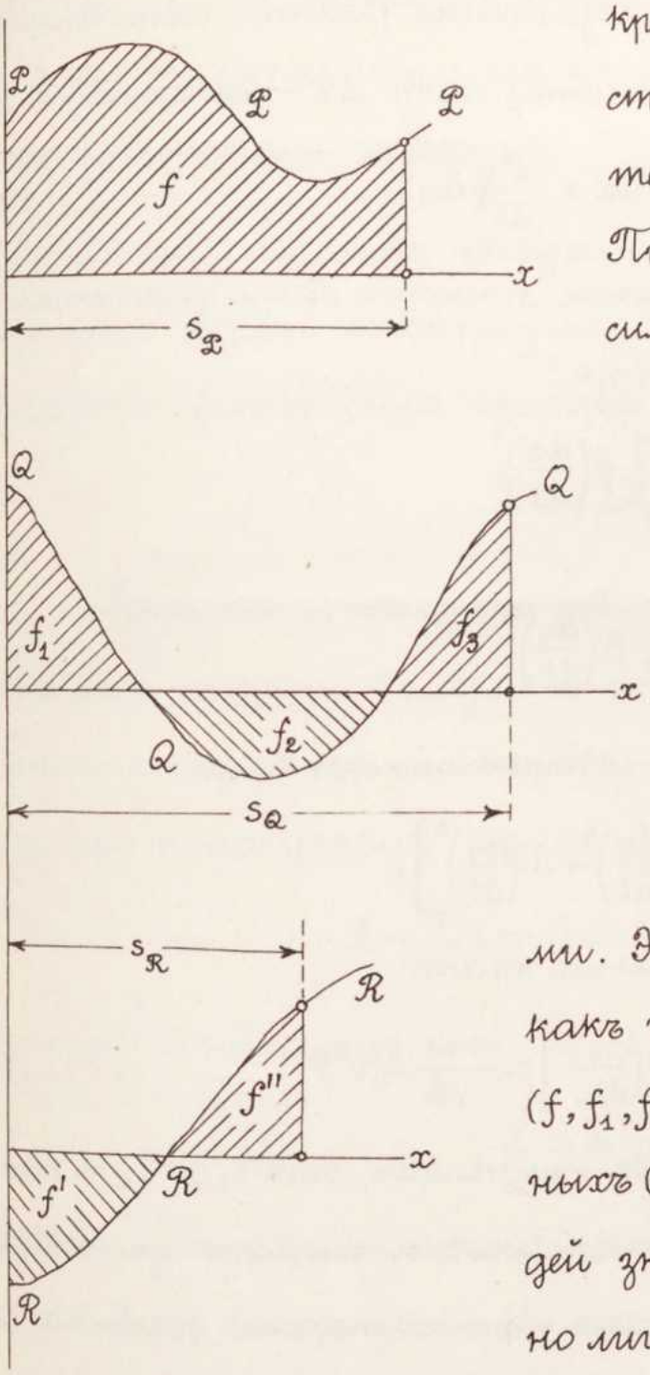
$$\Sigma \mathfrak{P}\,dp = \mathfrak{P}\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots\ldots$$

Замѣчая, что величины силъ $\mathfrak{P}, Q, R$ и т. д. могутъ мѣняться вмѣстѣ съ измѣненіемъ конфигураціи механизма, т.-е. вмѣстѣ съ движеніемъ его, въ силу чего постоянными считать ихъ, вообще говоря, нельзя, и интегрируя написанное выраженіе въ предѣлахъ отъ t_1 до t_2, получимъ выраженіе работы $\mathfrak{L}$ всѣхъ этихъ силъ за время Δt въ видѣ соотношенія

$$\mathfrak{L} = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P}\,dp = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P}\,dp + \int_{t_1}^{t_2} Q\,dq + \int_{t_1}^{t_2} R\,dr + \ldots\ldots$$

Такъ какъ зависимость между величинами силъ и перемѣщеніями точекъ приложенія ихъ дается обычно не въ аналитической формѣ, а въ графической, — въ видѣ силовыхъ кривыхъ, изображающихъ каждая измѣненіе своей силы по мѣрѣ пе-

ремѣщенія точки приложенія ея, то величину каждаго интеграла можно найти, подсчитавъ тѣмъ или инымъ путемъ величину площади, ограниченной силовой кривой, осью абсциссъ и крайними ординатами, соотвѣтствующими началу и концу взятаго промежутка времени Δt. Пусть силовыя кривыя нашихъ силъ $\mathfrak{P}, Q, R$ и т. д. изображаются кривыми $\mathfrak{P}\mathfrak{P}, QQ, RR, \ldots\ldots$, (фиг. 152), и пусть за время Δt точки приложенія ихъ прошли въ направленіи силъ пути $s_{\mathfrak{P}}, s_Q, s_R, \ldots$, такъ что работы силъ изобразятся заштрихованными площадями. Эти площади могутъ состоять какъ изъ положительныхъ участковъ (f, f_1, f_3, f''), такъ и изъ отрицательныхъ (f_2, f'), но составъ этихъ площадей значенія для насъ не имѣетъ. Важно лишь то, что, взявъ алгебраическую сумму всѣхъ этихъ площадей, относящихся къ взятому промежутку времени Δt, мы получимъ величину $\mathfrak{L}$ работы всѣхъ дѣйствующихъ силъ, выполненной за это время. — Само собою разумѣется, что какъ заданіе силъ, такъ и подсчетъ работы ихъ, могутъ быть выполнены и другими путями, но, по существу дѣла, это является для насъ безразличнымъ, — важно лишь имѣть значеніе работы $\mathfrak{L}$, и только.



Фиг. 152.

Перейдемъ теперь ко второй суммѣ и сначала разсмотримъ, какъ можетъ быть выражена иначе работа силъ инерціи за какое-либо время τ.

Для элементарной массы m возможная работа силы инерціи ея за время dt,—обозначимъ эту работу черезъ $d\lambda$,—выражается такъ:

$$d\lambda = -m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, можетъ быть значительно упрощено, если мы замѣтимъ, что

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx = \frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2}dy = \frac{1}{2}d\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Въ виду этихъ соотношеній (β) принимаетъ видъ:

$$d\lambda = -\frac{m}{2}\left[d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + d\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right],$$

что можетъ быть переписано дальше такъ:

$$d\lambda = -\frac{m}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -\frac{m}{2}d(v^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Интегрируя это уравненіе въ предѣлахъ отъ t_1 до t_2 и полагая, что при $t = t_1$ скорость v взятой точки имѣетъ значеніе v_1, а при $t = t_2$ имѣемъ $v = v_2$, можемъ написать, что работа λ силы инерціи элементарной массы m за время Δt, равное, очевидно, $t_2 - t_1$, выразится такъ:

$$\lambda = -\int_{v_1}^{v_2}\frac{m}{2}d(v^2) = -\frac{m}{2}\int_{v_1}^{v_2}d(v^2) = +\frac{m}{2}\int_{v_2}^{v_1}d(v^2) = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2). \quad (27)$$

Замѣчая, что приращеніе живой силы этой массы выражается черезъ

$$k = +\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2),$$

заключаемъ, что

$$\lambda = -\kappa,$$

т.-е. что работа силы инерціи какой-либо элементарной массы m за время Δt равна приращенію живой силы этой массы, полученному ею за то же время Δt, но взятому съ обратнымъ знакомъ.

Распространяя полученный результатъ на всѣ массы взятаго нами механизма, можемъ написать, что общая работа всѣхъ силъ инерціи за время Δt выразится такъ:

$$\Sigma\lambda = \Sigma\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Такъ какъ, согласно общему положенію, возможная работа силъ инерціи въ суммѣ съ возможной работой силъ дѣйствительныхъ, за то же время совершенной, должна дать нуль, то мы и получаемъ уравненіе

$$\mathcal{L} + \Sigma\lambda = 0 = \mathcal{L} + \Sigma\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

откуда и находимъ, что

$$\mathcal{L} = \Sigma\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

гдѣ суммированіе приращеній живыхъ силъ распространено на всѣ массы всѣхъ звеньевъ механизма. Полученное соотношеніе и выражаетъ собою теорему живыхъ силъ, получающуюся въ результатѣ распространенія начала Лагранжа на какой-либо промежутокъ времени, въ томъ предположеніи, что связи механизма отъ времени не зависятъ. Теорема эта говоритъ, что работа всѣхъ дѣйствующихъ на механизмъ силъ (свободныхъ усилій, полезныхъ сопротивленій и проч., но не силъ инерціи, какъ это выяснилось теперь вполнѣ ясно) за извѣстное вре-

мя Δt идетъ всегда на приращеніе живой силы механизма за то же время Δt. Такъ какъ работы силъ, помогающихъ движенію, считаются положительными и отмѣчаются плюсомъ, а работы силъ, препятствующихъ движенію, считаются отрицательными, то, принимая, что въ движеніи нашего механизма принимаютъ участіе силы обѣихъ этихъ категорій, мы и должны установить, что подъ $\mathcal{L}$ разумѣется алгебраическая сумма всѣхъ, дѣйствующими силами произведенныхъ, работъ за извѣстный промежутокъ времени Δt.

Очевидно, что если въ началѣ этого промежутка времени скорости (v_1) массъ механизма имѣютъ тѣ же значенія, что и въ концѣ его, (v_2), такъ что для каждой матеріальной точки $v_1 = v_2$, то, очевидно, $\mathcal{L} = 0$, т.-е. работа силъ дѣйствующихъ равна работѣ всѣхъ сопротивленій. — Къ этимъ и имъ подобнымъ вопросамъ мы встрѣтимся еще въ дальнѣйшемъ, а теперь продолжимъ наши общія изысканія и вернемся къ полученному нами общему уравненію живыхъ силъ (29), имѣющему видъ:

$$\mathcal{L} = \Sigma \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Непосредственный подсчетъ суммы, стоящей въ правой части уравненія (29), является фактически невыполнимымъ; тѣмъ не менѣе, его можно выполнить вполнѣ точно, руководясь слѣдующими простыми соображеніями:

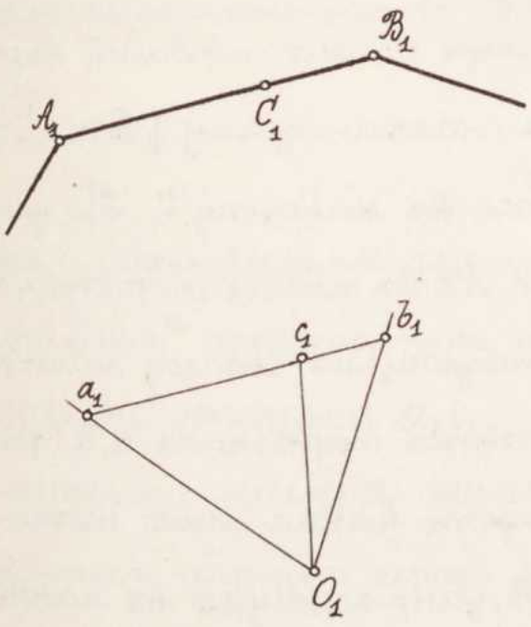
Замѣчая, что мы имѣемъ здѣсь дѣло со скоростями и то, поэтому, является вполнѣ естественнымъ привлеченіе къ участію въ преобразованіяхъ этой суммы плана скоростей, мы и

предположимъ, что намъ данъ нѣкоторый сложный плоскій механизмъ съ цѣлымъ рядомъ звеньевъ: $AB, BC, \ldots, KL, \ldots$ Примѣнительно къ нему теорема живыхъ силъ въ раскрытой формѣ, для нѣкотораго промежутка времени Δt, напишется такъ:

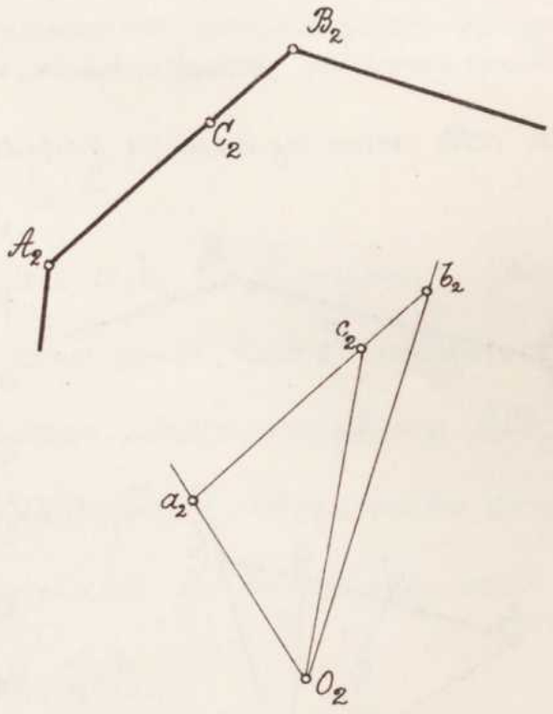
$$L = \sum_{AB} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \sum_{BC} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \ldots$$

Имѣя это въ виду, мы и разсмотримъ, какъ выразится приращеніе живой силы сначала для одного какого-либо звена, — положимъ, звена AB, — а затѣмъ распространимъ полученный результатъ на весь механизмъ.

Вычертимъ нашъ механизмъ въ двухъ положеніяхъ, — начальномъ, соотвѣтствующемъ начальному моменту t_1, и конечному, соотвѣтствующемъ конечному моменту t_2, а затѣмъ построимъ планы скоростей этого механизма, соотвѣтствующіе этимъ же моментамъ t_1 и t_2, и предположимъ, что выдѣленное нами звено AB въ первый моментъ занимаетъ положеніе, изображенное на фигурѣ 153, а во второй — положеніе, изображенное на фиг. 154, отрѣзки же, изображающіе это звено въ планахъ



Фиг. 153.



Фиг. 154.

скоростей, построенныхъ для тѣхъ же моментовъ, пусть будутъ a_1b_1 для перваго момента и a_2b_2 — для второго. Полюсы плановъ пусть лежатъ въ O_1 и O_2. Наконецъ, центръ тяжести звена AB пусть лежитъ въ C; въ указанные моменты онъ будетъ занимать положенія C_1 и C_2, въ планахъ же скоростей соотвѣтствующими ему точками пусть служатъ точки c_1 и c_2.

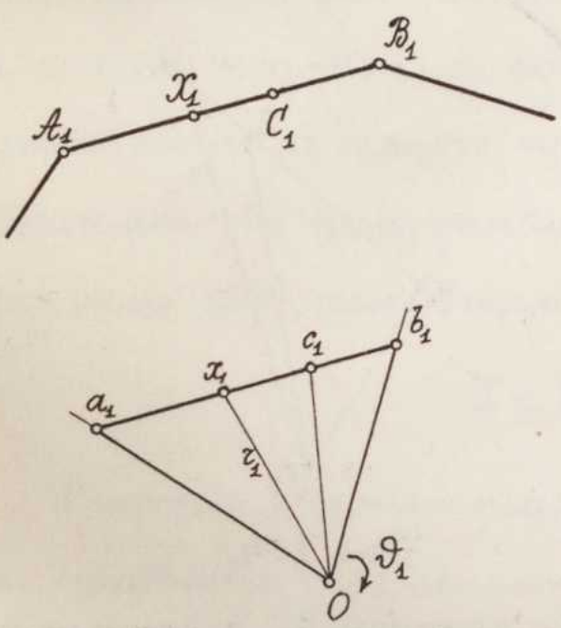
Приращеніе живой силы звена AB за время $\Delta t = t_2 - t_1$ выражается черезъ

$$\Sigma \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

т.-е. черезъ

$$\Sigma \frac{mv_2^2}{2} - \Sigma \frac{mv_1^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Посмотримъ теперь, какъ, при помощи плана скоростей выразятся обѣ эти суммы, и разсмотримъ сначала сумму $\frac{1}{2}\Sigma mv_1^2$, относящуюся къ моменту t_1. По условію, звено AB въ планѣ скоростей, соотвѣтствующемъ этому моменту, изображается отрѣзкомъ a_1b_1 (фиг. 155), и пусть какая-либо точка X звена AB, занимающая въ моментъ (t_1) положеніе X_1, изображается въ этомъ планѣ точкой x_1.



Фиг. 155.

Если коэффиціентъ пропорціональности перваго плана, — это будетъ нѣкоторая опредѣленная угловая скорость, которую можно найти по даннымъ заданія, — обозначимъ черезъ ϑ_1, при чемъ эта величина ϑ_1 будетъ одна и та же для всего плана скоростей въ моментъ (t_1), то скорость точки X въ моментъ (t_1) вы-

зится такъ:

$$v_x = Ox_1 . \vartheta_1 .$$

Въ силу этого сумма $\Sigma \frac{mv_1^2}{2}$ перепишется такъ:

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \Sigma \frac{m . Ox_1^2 . \vartheta_1^2}{2} = \frac{\vartheta_1^2}{2} \Sigma m . Ox_1^2 . \quad . \quad . \quad . (z)$$

Обозначимъ, ради краткости письма, длину вектора Ox_1 черезъ r_1. Тогда (z) перепишется такъ:

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{\vartheta_1^2}{2} \Sigma m r_1^2 .$$

Если мы представимъ себѣ, что всѣ точки отрѣзка $a_1 b_1$ снабжены массами соотвѣтствующихъ имъ точекъ звена AB, такъ что отрѣзокъ $a_1 b_1$ представитъ собою какъ бы то же звено AB, но лишь измѣненное въ своихъ линейныхъ размѣрахъ въ отношеніи

$$a_1 b_1 : AB = l_1 : L ,$$

гдѣ l_1 обозначаетъ длину отрѣзка $a_1 b_1$, а L — длину звена AB, — то $\Sigma m r_1^2$ представитъ собою не что иное, какъ моментъ инерціи отрѣзка $a_1 b_1$, снабженнаго массами звена AB, относительно полюса плана скоростей, O_1. Обозначивъ этотъ моментъ инерціи черезъ J_{o_1} и принимая во вниманіе, что

$$J_{o_1} = J_{c_1} + M . O_1 c_1^2 ,$$

гдѣ J_{c_1} есть моментъ инерціи этого же отрѣзка $a_1 b_1$ относительно центра тяжести его c_1 (соотвѣтствующаго центру тяжести C отрѣзка AB), M — масса звена AB (и, значитъ, отрѣзка $a_1 b_1$, ибо этотъ послѣдній мы снабдили массами звена AB), а Oc_1 — разстояніе полюса плана до этой точки c_1. Такимъ образомъ, можемъ написать, что

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{\vartheta_1^2}{2} (J_{c_1} + M . O_1 c_1^2) . \quad . \quad . \quad . \quad . (\vartheta)$$

Выражение это можно значительно упростить путем преобразования выражения J_{c_1}. Дѣло въ томъ, что этотъ моментъ инерціи удобнѣе всего выразить черезъ J_C,—моментъ инерціи основного звена AB относительно центра тяжести его C,—ибо этотъ моментъ инерціи J_C при движеніи звена не мѣняется и можетъ быть подсчитанъ разъ навсегда, между тѣмъ какъ моментъ инерціи J_{c_1} зависитъ отъ линейныхъ размѣровъ отрѣзка a_1b_1, мѣняющихся съ каждымъ новымъ планомъ скоростей.

Обозначая разстоянія точекъ звена AB отъ центра тяжести его C черезъ r, а разстоянія точекъ отрѣзка a_1b_1 отъ точки c_1 (центра тяжести отрѣзка a_1b_1) черезъ r_1, можемъ написать, что

$$J_C = \Sigma m r^2$$

и

$$J_{c_1} = \Sigma m r_1^2,$$

при чемъ векторы r и r_1, какъ соединяющіе соотвѣтственныя точки, связаны соотношеніями

$$r : r_1 = AB : a_1b_1 = L : l_1,$$

гдѣ L постоянно, а l_1 отъ момента къ моменту можетъ мѣняться. Поэтому можемъ написать, что

$$r_1 = r \cdot \frac{l_1}{L},$$

вслѣдствіе чего

$$J_{c_1} = \Sigma m r_1^2 = \Sigma\left(m r^2 \cdot \frac{l_1^2}{L^2}\right) = \frac{l_1^2}{L^2} \Sigma m r^2 = \frac{l_1^2}{L^2} J_C .$$

Такъ какъ

$$J_C = M \rho^2,$$

гдѣ ρ есть радіусъ инерціи звена AB и при перемѣщеніи его не мѣняется, то выраженіе для J_{c_1}, полученное выше, можетъ

быть переписано такъ:

$$J_{c_1} = \frac{l_1^2}{L^2} M\rho^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

послѣ чего (9) принимаетъ видъ:

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{\vartheta_1^2}{2}\left(M\rho^2 \frac{l_1^2}{L^2} + M.O_1c_1^2\right)$$

или, иначе

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2} M\vartheta_1^2 \left[\left(\frac{\rho l_1}{L}\right)^2 + O_1c_1^2\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Величина, стоящая въ квадратныхъ скобкахъ, представляетъ собою квадратъ гипотенузы прямоугольнаго треугольника, катеты коего имѣютъ значенія $\rho l_1/L$ и O_1c_1. Если длину этой гипотенузы обозначимъ черезъ λ_1, такъ что

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{\rho l_1}{L}\right)^2 + O_1c_1^2,$$

то сможемъ написать, что

$$\Sigma \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2} M\vartheta_1^2\lambda_1^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Такъ выражается сумма живыхъ силъ звена AB въ начальный моментъ (t_1) взятаго нами промежутка времени Δt. Посмотримъ теперь, какъ выразится эта сумма въ конечный моментъ (t_2) того же промежутка. Планъ скоростей будетъ здѣсь уже другой, съ инымъ коэффиціентомъ пропорціональности, ϑ_2; измѣнится также длина l_1 отрѣзка a_1b_1, переходя въ l_2, такъ что $a_2b_2 = l_2$; измѣнится также и O_1c_1, переходя въ O_2c_2; сохранятъ же свои значенія только M, ρ и L. Поэтому, аналогично (31) можемъ написать, что

$$\Sigma \frac{mv_2^2}{2} = \frac{1}{2} M\vartheta_2^2 \left[\left(\frac{\rho l_2}{L}\right)^2 + O_2c_2^2\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Положивъ снова

$$\left(\frac{\varrho l_2}{\mathfrak{L}}\right)^2 + O_2c_2^2 = \lambda_2^2,$$

где λ_2 представитъ собою, аналогично прежнему, гипотенузу прямоугольнаго треугольника съ катетами $(\varrho l_2/\mathfrak{L})$ и O_2c_2, можемъ написать, что

$$\Sigma \frac{mv_2^2}{2} = \frac{1}{2} M \vartheta_2^2 \lambda_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Сопоставляя (32) и (34), можемъ написать, что приращеніе живой силы звена AB за промежутокъ времени Δt, равный $(t_2 - t_1)$, выражается такъ:

$$\Sigma \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} M (\vartheta_2^2 \lambda_2^2 - \vartheta_1^2 \lambda_1^2). \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Это выраженіе написано нами для звена AB. Написавъ теперь рядъ такихъ же выраженій для всѣхъ остальныхъ движущихся звеньевъ даннаго механизма и сложивъ ихъ, получимъ полное приращеніе живой силы всего механизма, равное работѣ $\mathfrak{L}$ дѣйствующихъ силъ за то же время Δt. Поэтому получаемъ:

Для звена AB: $\Sigma_{AB} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} M_{AB} \vartheta_2^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{2} M_{AB} \vartheta_1^2 \lambda_1^2,$

для звена BC: $\Sigma_{BC} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} M_{BC} \vartheta_2^2 \lambda_2'^2 - \frac{1}{2} M_{BC} \vartheta_1^2 \lambda_1'^2,$

для звена CD: $\Sigma_{CD} \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} M_{CD} \vartheta_2^2 \lambda_2''^2 - \frac{1}{2} M_{CD} \vartheta_1^2 \lambda_1''^2,$

. . . . . .

. . . . . .

для всего мех-зма: $\Sigma \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \vartheta_2^2 \Sigma M \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \vartheta_1^2 \Sigma M \lambda_1^2,$ (36)

такъ что теорема живыхъ силъ, примѣненная къ сколь-угодно сложному плоскому механизму, приводитъ къ весьма простому

уравненію:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\vartheta_2^2 \Sigma M\lambda_2^2 - \frac{1}{2}\vartheta_1^2 \Sigma M\lambda_1^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

По поводу полученныхъ уравненій (36) и (37) необходимо, во избѣжаніе недоразумѣній, замѣтить слѣдующее:

1) Для плана скоростей, соотвѣтствующаго начальному моменту (t_1) взятаго нами промежутка времени Δt, коэффиціентъ пропорціональности его ϑ_1, — нѣкоторая опредѣленная угловая скорость, — остается однимъ и тѣмъ же для всѣхъ отрѣзковъ типа ($a_1 b_1$), изображающихъ въ этомъ планѣ звена (AB) взятаго механизма. Въ виду этого факторъ ϑ_1^2 оказался общимъ множителемъ у всѣхъ слагаемыхъ правой части уравненія (36), относящихся къ начальному моменту (t_1), и его оказалось возможнымъ вынести за знакъ суммы, относящейся къ первому плану, построенному для момента (t_1).

2) То же замѣчаніе имѣетъ силу и для второго плана скоростей, соотвѣтствующаго конечному моменту (t_2) взятаго промежутка времени Δt; здѣсь общимъ множителемъ у всѣхъ слагаемыхъ, относящихся къ этому моменту (t_2), явился факторъ ϑ_2^2, — квадратъ нѣкоторой угловой скорости ϑ_2, служащей коэффиціентомъ пропорціональности для второго плана скоростей.

3) Массы M звеньевъ, вообще говоря, различны; мѣняются отъ момента къ моменту и отъ звена къ звену величины λ упомянутыхъ выше гипотенузъ. Въ силу этого всѣ факторы типа $M\lambda^2$ пришлось оставить подъ знаками соотвѣтственныхъ суммъ.

4) Величина $\mathfrak{L}$, входящая въ уравненіе (37), есть работа силъ дѣйствующихъ и силъ сопротивленій. Работа силъ инерціи будетъ равна $(-\mathfrak{L})$ и выразится, слѣдовательно, второй частью уравненія (37) съ измѣненными на обратные знаками ея членовъ.

Если массы и размѣры звеньевъ механизма извѣстны и имѣется возможность построить планы скоростей этого механизма для начальнаго и конечнаго моментовъ какого-либо промежутка времени Δt, то объ суммы $\Sigma M\lambda_1^2$ и $\Sigma M\lambda_2^2$ можно будетъ получить помощью весьма простыхъ геометрическихъ построеній. Опредѣливъ полную работу $\mathfrak{L}$ всѣхъ дѣйствующихъ силъ за взятое время Δt и зная ϑ_1, сможемъ, на основаніи (37), опредѣлить ϑ_2, а вмѣстѣ съ этимъ и скорости всѣхъ точекъ механизма въ концѣ взятаго промежутка Δt. Этого вопроса мы коснемся еще разъ въ дальнѣйшемъ, при разборѣ основныхъ задачъ.

По поводу подсчета и построенія гипотенузъ λ необходимо замѣтить то же, что мы имѣли уже случай подчеркнуть по поводу нахожденія центра качаній помощью плана ускореній, а именно: такъ какъ величина λ опредѣляется, вообще говоря, изъ уравненія

$$\lambda^2=\left(\frac{\varrho l}{\mathfrak{L}}\right)^2+Oc^2,$$

то величины ϱ и $\mathfrak{L}$ должны быть выражены въ тѣхъ же единицахъ, въ какихъ берутся по чертежу плана скоростей величины l и Oc. Если, напримѣръ, измѣряя l и Oc для какого-либо звена въ планѣ скоростей въ миллиметрахъ, мы получи-

и $l = 20\,mm$ и $Oc = 20\,mm$, а $\varrho = 20\,cm$ и $\mathfrak{L} = 2\,mt$, то, согласно указанному, величина λ определится по формуле

$$\lambda^2 = \left(\frac{200.20}{2000}\right)^2 + 20^2 = 2^2 + 20^2 = 404\,mm^2,$$

такъ что для этого случая

$$\lambda = \sqrt{404} \cong 20{,}1\,mm.$$

Нетрудно убѣдиться, что представленіе о планѣ скоростей, какъ о жесткомъ рычагѣ съ точкой опоры въ полюсѣ плана, цѣликомъ примѣнимо и здѣсь. Дѣйствительно, согласно преобразованіямъ, выполненнымъ на стр. 395, можно написать, что живая сила системы нашего механизма въ какой-либо моментъ его движенія,—напримѣръ, изображенный на фиг. 155,— выражается черезъ

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v_1^2 = \tfrac{1}{2}\vartheta_1^2 \Sigma m r_1^2,$$

при чемъ суммованіе распространяется на всѣ отрѣзки, изображающіе въ планѣ скоростей звенья нашего механизма. Но такъ какъ выраженіе $\Sigma m r_1^2$, взятое для каждаго такого звена, представляетъ собою моментъ инерціи его, J_{o_1}, относительно полюса плана скоростей, O_1, то живая сила нашего механизма для взятаго момента выразится еще черезъ

$$\tfrac{1}{2}\vartheta_1^2 \Sigma J_{o_1},$$

гдѣ ΣJ_{o_1} представитъ собою сумму моментовъ инерціи всѣхъ отрѣзковъ, изображающихъ въ планѣ скоростей взятый механизмъ, при чемъ всѣ моменты берутся относительно одной и той же точки,—полюса O_1 плана; иные-

ми словами, ΣJ_{o_1} представляетъ собою моментъ инерціи фигуры, изображающей въ планѣ скоростей нашъ механизмъ, относительно полюса этого плана; будучи помноженъ на $\frac{1}{2}\vartheta_1^2$, онъ и даетъ величину живой силы механизма въ данный моментъ.

Очевидно, однако, что если бы упомянутую фигуру плана скоростей мы приняли за жесткій рычагъ съ точкой опоры въ полюсѣ плана и стали бы подсчитывать величину живой силы этого рычага при вращеніи его около этой опорной точки съ угловой скоростью ϑ_1, то оказалось бы, что эта живая сила выражается произведеніемъ изъ $\frac{1}{2}\vartheta_1^2$ на моментъ инерціи системы этого рычага относительно точки опоры, т.-е. какъ разъ на величину ΣJ_{o_1}, какъ это слѣдуетъ изъ извѣстной теоремы динамики системы, согласно коей живая сила системы, вращающейся около неподвижной оси съ нѣкоторой угловой скоростью, выражается произведеніемъ изъ половины квадрата этой угловой скорости на моментъ инерціи системы относительно оси вращенія ея. Въ нашемъ случаѣ точка опоры рычага, т.-е. полюсъ плана, и служитъ центромъ (осью) вращенія его. Такимъ образомъ, надо признать, что упомянутое представленіе о фигурѣ плана скоростей, какъ о нѣкоторомъ рычагѣ, находитъ себѣ примѣненіе и здѣсь.

Итакъ, примѣняя принципъ д'Аламбера и начало Лагранжа къ какому-либо одному моменту движенія даннаго механизма, мы получаемъ уравненіе моментовъ всѣхъ силъ, считая въ томъ числѣ и силы инерціи, относительно

полюса плана скоростей; принимая же оба эти начала къ какому-либо конечному промежутку времени и выполняя интеграцію получаемаго такимъ путемъ уравненія работъ, приходимъ къ уравненію живыхъ силъ (37), устанавливающему связь между работой Σ силъ дѣйствующихъ и силъ сопротивленій и приращеніемъ запаса живой силы. Само собою разумѣется, что въ эту работу Σ нужно было бы включать какъ работу полезныхъ сопротивленій, такъ и работу вредныхъ (силъ трения), но обычно эту послѣднюю учитываютъ уже впослѣдствіи, послѣ опредѣленія всѣхъ силъ инерціи, когда, слѣдовательно, получается возможность выясненія всѣхъ силъ опорныхъ сопротивленій и, значитъ, вычисленія всѣхъ вредныхъ работъ. Такимъ образомъ, порядокъ учета величинъ силъ и скоростей представляется слѣдующимъ:

Предположивъ, что вредныя сопротивленія отсутствуютъ, мы подсчитываемъ, при помощи теоремы моментовъ, величины соотвѣтственныхъ результирующихъ силъ инерціи; получивъ ихъ, вычисляемъ значенія опорныхъ сопротивленій, что дастъ возможность внести должныя поправки какъ въ величинахъ силъ полезныхъ сопротивленій (если это возможно), такъ и въ величинахъ результирующихъ силъ инерціи. Выяснивъ, наконецъ, всѣ эти опорныя сопротивленія и подсчитавъ работу ихъ за взятый промежутокъ времени, составляемъ уравненія живыхъ силъ и опредѣляемъ скорости точекъ механизма. Обычно, однако, принимая во вниманіе неизбѣжность погрѣшностей и неточностей при пользованіи графическимъ методомъ, ограничиваются лишь первымъ приближеніемъ въ рѣшеніи поставленнаго вопроса.

§ 19. Примѣненіе уравненія моментовъ къ рѣшенію вопроса объ опредѣленіи ускореній точекъ даннаго механизма.

Въ настоящемъ параграфѣ мы разберемъ вопросъ объ опредѣленіи ускореній точекъ системы, движущейся подъ воздѣйствіемъ данныхъ силъ при извѣстныхъ, притомъ, начальныхъ данныхъ. Путь къ разрѣшенію этого вопроса указывается выведенной выше теоремой моментовъ, причемъ, однако, уравненіе (26), ее выражающее, должно быть соотвѣтствующимъ образомъ преобразовано.

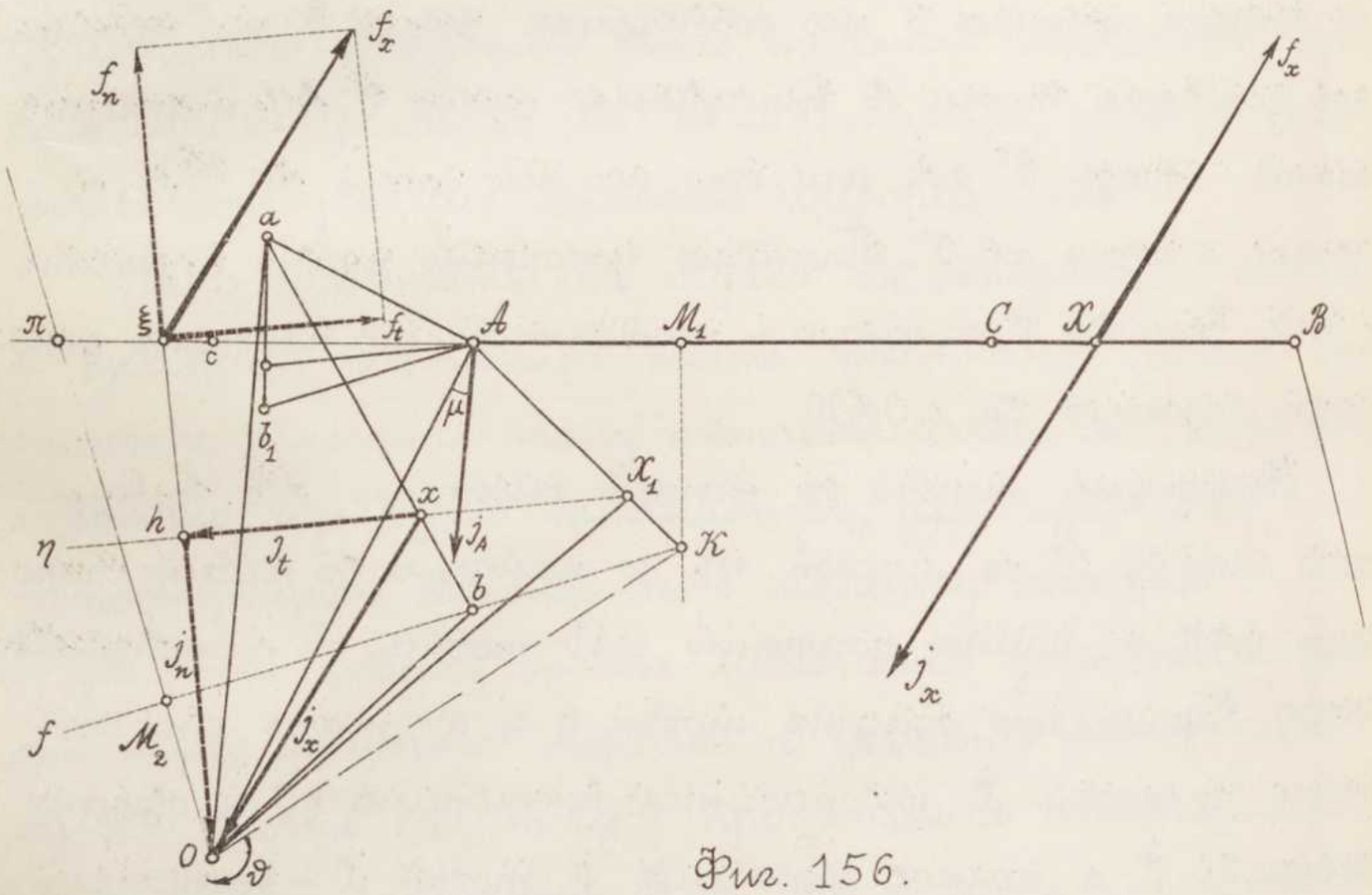
Надо замѣтить, что задачи объ опредѣленіи скоростей и ускореній различныхъ точекъ механизма особенно упрощаются благодаря тому обстоятельству, что, какъ это извѣстно изъ курса кинематики, для опредѣленія соотвѣтствующихъ какому-либо моменту движенія скоростей и ускореній любыхъ точекъ механизма достаточно дать для этого момента скорость и ускореніе какой-либо одной точки его; тогда простѣйшія геометрическія построенія позволятъ намъ безъ всякихъ затрудненій опредѣлить скорости и ускоренія и всѣхъ остальныхъ точекъ, — средства для этого, какъ извѣстно, даются планами скоростей и ускореній. Согласно этому соображенію, мы и постараемся преобразовать уравненіе (26) въ новое, такое, неизвѣстнымъ въ которомъ служило бы именно ускореніе какой-либо одной точки нашего механизма; тогда задача окажется разрѣшенной вполнѣ.

Предположимъ, такимъ образомъ, что у насъ имѣется нѣкоторый механизмъ, составленный изъ ряда звеньевъ, двигающихся каждое по своему опредѣленному закону: Выдѣлимъ одно изъ этихъ звеньевъ; пусть это будетъ звено AB (фиг. 156), и пусть полное ускореніе точки A, j_A, образуетъ нѣкоторый уголъ μ съ радіусомъ кривизны OA, такъ что, если угловую скорость вращенія этого радіуса OA вокругъ центра O мы обозначимъ черезъ ϑ, то нормальное ускореніе точки A выразится черезъ $\vartheta^2 . AO$, тангенціальное — черезъ $\vartheta^2 . aA$ или, что то же, черезъ $AO . \frac{d\vartheta}{dt}$, а полное — черезъ $aO . \vartheta^2$. Планомъ ускореній пусть служитъ ΔOab. Если бы ϑ оставалась постоянной, то планомъ ускореній служилъ бы ΔOAK.

Выдѣлимъ теперь въ нашей системѣ AB какую-либо точку X съ массой m и найдемъ въ планѣ скоростей $OA\Pi$ и планѣ ускореній Oab точки, ей соотвѣтствующія. Пусть это будутъ точки ξ и x, такъ что скорость v_x точки X изобразится векторомъ ξO и будетъ равна $\overline{\xi O} . \vartheta$, а полное ускореніе j_x точки X — векторомъ xO и будетъ равно $\overline{xO} . \vartheta^2$. Извѣстно въ то же время, что прямая ξO опредѣляетъ собою направленіе нормали къ траекторіи точки X Поэтому, разложивъ векторъ xO по этому направленію ξO нормали и по направленію $x\eta$, перпендикулярному къ ξO, найдемъ, что тангенціальное ускореніе j_t точки X изобразится векторомъ $x\eta$ и будетъ равно $\overline{x\eta} . \vartheta^2$, а нормальное j_n изобразится векторомъ ηO и будетъ равно $\overline{\eta O} . \vartheta^2$

Сила инерціи f_x нашей точки X выразится черезъ

$(-mj_x)$ и будетъ направлена въ сторону, обратную направленію полнаго ускоренія j_x, какъ это и изображено на фиг. 156. Согласно требованію теоремы моментовъ, переносимъ теперь эту силу инерціи f_x въ планъ скоростей, приложивъ ее тамъ въ точкѣ ξ, соотвѣтствующей точкѣ X, и раскладываемъ эту полную силу инерціи f_x на нормальную силу инерціи f_n, идущую, очевидно, по $O\xi$ и, значитъ, проходящую своимъ



Фиг. 156.

направленіемъ черезъ полюсъ O плана скоростей, и на тангенціальную силу инерціи f_t, перпендикулярную къ $O\xi$. Направленія силъ f_n и f_t будутъ, очевидно, прямопротивоположны направленіямъ ускореній j_n и j_t. Посмотримъ теперь, какъ выразится моментъ такъ перенесенной частичной силы инерціи f_x относительно полюса O плана скоростей.

Такъ какъ моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ слагающихъ, то моментъ силы f_x относительно

центра O, — обозначимъ его черезъ $m(f_x)_o$, — выразится, согласно тому же обозначенію, такъ:

$$m(f_x)_o = m(f_n)_o + m(f_t)_o \quad \ldots \quad (a)$$

Замѣчая теперь, что направленіе нормальной силы инерціи f_n, послѣ переноса силы инерціи f_x въ планъ скоростей, оказывается проходящимъ черезъ точку O, — теперешній центръ моментовъ, — заключаемъ, что моментъ ея относительно этого центра моментовъ O, обозначенный нами черезъ $m(f_n)_o$, будетъ равенъ нулю, т.-е.

$$m(f_n)_o = 0.$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (a) значительно упрощается, принимая видъ

$$m(f_x)_o = m(f_t)_o \quad \ldots \quad (a')$$

Нетрудно усмотрѣть, что, согласно чертежу, — см. фиг. 156, — моментъ $m(f_t)_o$ выражается черезъ $f_t \times \overline{\xi O}$ или, что то же, черезъ $(-m j_t . \overline{\xi O})$. Замѣчая теперь, что тангенціальное ускореніе j_t точки x по плану ускореній $Oa'b$ выражается черезъ $\vartheta^2 . \overline{xh}$, заключаемъ, что упомянутый моментъ выразится еще черезъ $(-m . \vartheta^2 . \overline{xh} . \overline{\xi O})$. Вслѣдствіе этого уравненіе (a') принимаетъ видъ

$$m(f_x)_o = -m . \vartheta^2 . \overline{xh} . \overline{\xi O} \quad \ldots \quad (b)$$

Итакъ, оказывается, что моментъ полной силы инерціи f_x, перенесенной въ планъ скоростей, относительно полюса этого плана равенъ моменту одной лишь тангенціальной силы инерціи f_t, взятому относительно того же полюса. Такъ какъ это замѣчаніе, очевидно, имѣетъ силу и для всѣхъ прочихъ точекъ системы AB и для всѣхъ частичныхъ силъ инерціи этой системы, то можно считать установленнымъ, что

После переноса всѣхъ частичныхъ силъ инерціи въ планъ скоростей, всѣ они дадутъ моментъ лишь отъ своихъ тангенціальныхъ слагающихъ $(-mj_t)$, ибо моменты всѣхъ нормальныхъ силъ инерціи $(-mj_n)$ относительно полюса плана скоростей равны каждый нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что, будемъ ли мы подсчитывать сумму моментовъ всѣхъ силъ инерціи f_x или только однихъ тангенціальныхъ силъ инерціи f_t, результатъ получится одинъ и тотъ же, а такъ сумма моментовъ силъ инерціи f_x относительно полюса O равна моменту m_g результирующей силы инерціи f_S, перенесенной въ планъ скоростей, относительно той же точки O, то можно сказать еще, что

> моментъ результирующей силы инерціи относительно полюса плана скоростей равенъ суммѣ моментовъ тангенціальныхъ силъ инерціи относительно того же полюса.

Аналитически это заключеніе приводитъ къ ряду слѣдующихъ очевидныхъ соотношеній:

$$m(f_S)_o = \Sigma m(f_x)_o = \Sigma m(f_t)_o = -\Sigma m.\vartheta^2.\overline{xh}.\overline{\xi 0} = -\vartheta^2 \Sigma m.\overline{xh}.\overline{\xi 0} \quad . \quad . \quad (38)$$

Таково выраженіе момента силъ инерціи въ случаѣ неравномѣрнаго вращенія радіуса-вектора AO, т.-е. при $\vartheta \neq const$. Замѣтивъ это, посмотримъ, какъ выразится моментъ силъ инерціи въ случаѣ $\vartheta = const$. Планъ ускореній изображается здѣсь треугольникомъ OAK. Точка X_1 его, соотвѣтствующая какой-либо точкѣ X системы, будетъ, какъ извѣстно, лежать на одномъ перпендикулярѣ къ $\xi 0$ съ точкой x плана Oab, такъ что точка X_1 лежитъ на перпендикулярѣ

xh. Полное ускореніе точки x въ этомъ случаѣ, при $\vartheta = \text{const}$, изображается векторомъ $x_1 0$, а тангенціальное – векторомъ $x_1 h$; что же касается нормальнаго ускоренія, то оно выражаетъ-ся здѣсь тѣмъ же векторомъ $h0$, что и при $\vartheta \neq \text{const}$.

Очевидно, далѣе, что, если бы теперешнюю силу инерціи $\mathfrak{F}_x$, равную $(-m.\overline{x_1 0}.\vartheta^2)$, мы перенесли въ точку ξ плана скоростей, то, разложивъ эту силу инерціи опять на нормальную силу инерціи $\mathfrak{F}_n$, равную $(-m.\overline{h0}.\vartheta^2)$, и тангенціальную силу инер-ціи $\mathfrak{F}_t$, равную $(-m.\overline{x_1 h}.\vartheta^2)$, мы нашли бы, что моментъ этой перенесенной силы инерціи $\mathfrak{F}_x$ относительно полюса 0 опять ока-зался бы равнымъ моменту одной лишь тангенціальной сла-гающей $\mathfrak{F}_t$ и, значитъ, выразился бы черезъ $(-\overline{\xi 0}.m.\overline{x_1 h}.\vartheta^2)$. Обо-значивъ теперешнюю, при $\vartheta = \text{const}$, результирующую силу инер-ціи черезъ $\mathfrak{F}_g$, можемъ опять, согласно сказанному выше, на-писать, что моментъ этой результирующей $\mathfrak{F}_g$ относитель-но полюса 0 равенъ суммѣ моментовъ тангенціальныхъ силъ инерціи $\mathfrak{F}_t$ относительно того же центра 0, что приводитъ, въ результатѣ, къ формулѣ

$$m(\mathfrak{F}_g)_0 = \Sigma m(\mathfrak{F}_x)_0 = \Sigma m(\mathfrak{F}_t)_0 = \Sigma(-\overline{\xi 0}.m.\overline{x_1 h}.\vartheta^2) = -\vartheta^2 \Sigma m.\overline{\xi 0}.\overline{x_1 h} \quad . \quad (39)$$

Постараемся теперь установить связь между момен-тами (38) при $\vartheta \neq \text{const}$ и (39) при $\vartheta = \text{const}$. Выполнить это можно при помощи очевиднаго соотношенія между векто-рами xh и $x_1 h$, съ которыми мы уже встрѣчались раньше и которое имѣетъ видъ:

$$\overline{xh} = \overline{x_1 h} + \overline{x x_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Помноживъ всѣ члены этого равенства на $(-m.\xi 0.\vartheta^2)$, получаемъ весьма важное соотношеніе

$$-m.\overline{\xi 0}.\vartheta^2.\overline{xh} = -m.\overline{\xi 0}.\vartheta^2.\overline{x_1 h} = -m.\overline{\xi 0.\vartheta^2}.\overline{x x_1} \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Написавъ такія соотношенія для всѣхъ точекъ системы AB и просуммировавъ ихъ, получаемъ соотношеніе

$$-\vartheta^2 \Sigma m.\overline{\xi 0}.\overline{xh} = -\vartheta^2 \Sigma m.\overline{\xi 0}.\overline{X_1 h} - \vartheta^2 \Sigma m.\overline{\xi 0}.\overline{xX_1},$$

что, въ видуъ (38) и (39), можетъ быть переписано иначе такъ:

$$m(f_s)_0 = m(F_s)_0 - \vartheta^2 \Sigma m.\overline{\xi 0}.\overline{xX_1}. \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Итакъ, оказывается, что моментъ результирующей силы инерціи f_s въ случаѣ $\vartheta \neq const$ равенъ моменту результирующей силы инерціи F_s, имѣющей мѣсто при $\vartheta = const$, сложенному съ нѣкоторымъ поправочнымъ членомъ, равнымъ $(-\vartheta^2 \Sigma m.\overline{\xi 0}.\overline{xX_1})$.

Ради сокращенія письма, этотъ поправочный членъ будемъ въ дальнѣйшемъ иногда обозначать черезъ $\mathcal{R}$, такъ что

$$\mathcal{R} = -\vartheta^2 \Sigma m.\overline{\xi 0}.\overline{xX_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

а уравненіе (40) перепишется короче такъ:

$$m(f_s)_0 = m(F_s)_0 + \mathcal{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40')$$

Чтобы выяснить себѣ, что собственно представляетъ собою этотъ поправочный членъ, мы преобразуемъ его, руководясь слѣдующими разсужденіями:

Составимъ ΔAab_1 изъ ускореній тангенціальныхъ ускореній системы AB при переходѣ отъ $\vartheta = const$ къ $\vartheta \neq const$ и въ полученной такимъ образомъ системѣ отрѣзка ab_1 опредѣляемъ точку x_1, соотвѣтствующую точкѣ x. Соединивъ эту точку x_1 съ вершиной A, получаемъ векторъ $x_1 A$, какъ извѣстно, равный и параллельный вектору xX_1 и, значитъ, перпендикулярный къ $\xi 0$. Вслѣдствіе этого, уравненіе (40) перепишется теперь такъ:

$$m(f_s)_0 = m(F_s)_0 - \vartheta^2 \Sigma m.\overline{\xi 0}.\overline{x_1 A},$$

или, что удобнѣе для дальнѣйшаго:

$$m(\mathfrak{f}_s)_0 = m(\mathfrak{F}_s)_0 + \Sigma(-m\vartheta^2 . \overline{x_1 A} . \overline{\xi 0}), \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

такъ что выраженіе (e) поправочнаго члена перепишется теперь такъ:

$$\mathfrak{R} = \Sigma(-m\vartheta^2 . \overline{x_1 A} . \overline{\xi 0}) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathfrak{f})$$

Присмотримся ближе къ составу члена $\mathfrak{R}$. Прежде всего, замѣчаемъ, что векторъ $x_1 A$ представляетъ собою, въ масштабѣ ϑ^2, добавочное тангенціальное ускореніе, появляющееся при переходѣ отъ $\vartheta = \text{const}$ къ $\vartheta \neq \text{const}$; это добавочное тангенціальное ускореніе равно $\overline{x_1 A} . \vartheta^2$. Помноживъ его на массу m точки x, соотвѣтствующей точкѣ x_1, и приписавъ къ полученному произведенію знакъ минусъ, получимъ величину $(-m\vartheta^2 . \overline{x_1 A})$, представляющую собою, очевидно, не что иное, какъ добавочную тангенціальную силу инерціи, возникающую при переходѣ отъ $\vartheta = \text{const}$ къ $\vartheta \neq \text{const}$.

Замѣчая теперь, что $x_1 A \perp \xi 0$ и что точка ξ плана скоростей соотвѣтствуетъ точкѣ x_1 системы ab_1, и перенося въ точку ξ эту добавочную силу инерціи $(-m\vartheta^2 . \overline{x_1 A})$, направленную, очевидно, по Ax_1, мы получимъ, очевидно, что моментъ этой, такъ перенесенной, силы инерціи относительно полюса 0 плана скоростей выразится черезъ $\overline{\xi 0} . (-m\vartheta^2 . \overline{x_1 A})$, т.-е. черезъ $(-m\vartheta^2 . \overline{x_1 A} . \overline{\xi 0})$.

Таковъ моментъ добавочной тангенціальной силы инерціи точки x данной системы относительно полюса 0.

Написавъ такія же выраженія моментовъ добавочныхъ тангенціальныхъ силъ инерціи для всѣхъ остальныхъ точекъ данной системы AB и просуммировавъ ихъ, получимъ сумму

$$\Sigma(-m\vartheta^2 . \overline{x_1 A} . \overline{\xi 0}),$$

согласно (f), равную какъ разъ поправочному члену $\mathfrak{R}$. Итакъ, оказывается, что этотъ членъ $\mathfrak{R}$ представляетъ собою сумму моментовъ всѣхъ добавочныхъ тангенціальныхъ силъ инерціи, перенесенныхъ каждая въ свою соотвѣтствующую точку плана скоростей, относительно полюса 0 этого плана.

Выраженіе (f) поправочнаго члена можно значительно преобразовать, принявъ во вниманіе то обстоятельство, что треугольникъ Aab_1 плана добавочныхъ тангенціальныхъ ускореній подобенъ треугольнику $0A\pi$ плана скоростей,— соотвѣтственныя стороны ихъ взаимно перпендикулярны.

Замѣтивъ это, возьмемъ выраженіе $(-m\vartheta^2.\overline{x_1A}.\overline{\xi 0})$,—слагаемое суммы (f), относящееся къ точкѣ X, и постараемся преобразовать его. Помножая и дѣля его на $\overline{\xi 0}$, получаемъ, что

$$-m\vartheta^2.\overline{x_1A}.\overline{\xi 0}=-m\vartheta^2\overline{\xi 0}^2\frac{x_1A}{\xi 0}. \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Такъ какъ точки x_1 и ξ суть точки, другъ другу соотвѣтствующія, то, на основаніи подобія треугольниковъ Aab_1 и $0A\pi$, можемъ написать, что

$$\frac{x_1A}{\xi 0}=\frac{aA}{A0},$$

что, согласно начальному условію, равно $tg\,\mu$, т.-е. $\frac{1}{\vartheta^2}.\frac{d\vartheta}{dt}$, такъ что

$$\frac{x_1A}{\xi 0}=\frac{aA}{A0}=tg\mu=\frac{1}{\vartheta^2}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

Въ виду этого (g) переписывается такъ:

$$-m\vartheta^2.\overline{x_1A}.\overline{\xi 0}=-m\vartheta^2\overline{\xi 0}^2.\frac{aA}{A0}=-m\vartheta^2\overline{\xi 0}^2tg\mu=-m\overline{\xi 0}^2.\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Написавъ такія выраженія для всѣхъ точекъ системы AB и суммируя ихъ, находимъ, что

$$\mathfrak{R}=\Sigma(-m\vartheta^2.\overline{x_1A}.\overline{\xi 0})=-\vartheta^2\frac{aA}{A0}\Sigma m.\overline{\xi 0}^2=-\frac{d\vartheta}{dt}\Sigma m.\overline{\xi 0}^2. \quad . \quad (i)$$

Посмотримъ теперь, что представляетъ собою сумма $\Sigma m.\overline{\xi 0}^2$, входящая въ составъ полученнаго выраженія.

Черезъ m мы обозначили массу точки X, а черезъ $\xi 0$ — разстояніе отъ полюса 0 до точки ξ, соотвѣтствующей въ системѣ плана скоростей точкѣ X системы AB. Если, поэтому, мы снабдимъ всѣ точки системы $A\pi$ массами соотвѣтствующихъ имъ точекъ системы AB, то $\Sigma m.\overline{\xi 0}^2$ представитъ собою не что иное, какъ моментъ инерціи отрѣзка $A\pi$, снабженнаго массами звена AB, относительно полюса 0; этотъ моментъ инерціи мы будемъ обозначать черезъ $J_{A\pi/0}$, такъ что можно будетъ написать, что

$$\Sigma m.\overline{\xi 0}^2 = J_{A\pi/0}. \qquad (k)$$

Въ силу этого выраженіе (i) поправочнаго члена перепишется еще такъ:

$$\mathfrak{R} = -\vartheta^2 . \frac{aA}{A0} . J_{A\pi/0} = -\frac{d\vartheta}{dt} J_{A\pi/0} \qquad (42)$$

Сопоставляя полученное выраженіе съ выраженіемъ момента силъ, вращающихъ тѣло вокругъ неподвижной оси, — этотъ моментъ, какъ извѣстно, равенъ произведенію изъ углового ускоренія такъ вращающагося тѣла на моментъ инерціи его относительно оси вращенія, — заключаемъ, что поправочный членъ $\mathfrak{R}$ представляетъ собою моментъ всѣхъ силъ, вращающихъ отрѣзокъ $A\pi$, снабженный массами звена AB, вокругъ неподвижной оси 0 и сообщающихъ ему при этомъ угловое ускореніе $d\vartheta/dt$, при чемъ моментъ этотъ берется со знакомъ минусъ. Иными словами, членъ $\mathfrak{R}$ представляетъ собою моментъ силъ инерціи системы $A\pi$, снабженной массами звена AB и какъ бы качающейся вокругъ оси 0 подъ воздѣйствіемъ силъ, извнѣ на нее дѣйствующихъ.

Дальнѣйшія преобразованія члена R сводятся къ болѣе удобному выраженію момента инерціи $J_{A\pi/0}$. Проще всего выразить его черезъ моментъ инерціи $J_{AB/C}$ звена AB относительно центра тяжести его C. Преобразованіе подобнаго рода было уже выполнено нами выше, при разборѣ теоремы живыхъ силъ, —см. стр. 395–397,— почему мы изложимъ его здѣсь лишь вкратцѣ, ограничиваясь лишь самымъ необходимымъ.

Мы имѣемъ, что

$$J_{A\pi/0} = \Sigma m.\overline{\xi 0}^2.$$

Пусть центръ тяжести системы AB лежитъ въ точкѣ C, которой въ системѣ $A\pi$ пусть соотвѣтствуетъ точка c, служащая, слѣдовательно, центромъ тяжести отрѣзка $A\pi$. Пусть длина отрѣзка AB есть $\mathfrak{L}$, а отрѣзка $A\pi - l$. Тогда, выдѣливъ въ этихъ двухъ системахъ пару соотвѣтствующихъ другъ другу точекъ (X, ξ), можемъ написать, что для нея имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\overline{\xi c} = XC.\frac{l}{\mathfrak{L}}.$$

По извѣстной теоремѣ Динамики системы можемъ написать, что

$$J_{A\pi/0} = J_{A\pi/c} + M.\overline{Oc}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Далѣе,

$$J_{A\pi/c} = \Sigma m.\overline{\xi c}^2 = \Sigma m.\overline{XC}^2.\frac{l^2}{\mathfrak{L}^2} = \frac{l^2}{\mathfrak{L}^2}\Sigma m.\overline{XC}^2 = \frac{l^2}{\mathfrak{L}^2}J_{AB/C} = \frac{l^2}{\mathfrak{L}^2}M\rho^2_{AB}, \quad . \quad (m)$$

гдѣ черезъ ρ_{AB} обозначенъ радіусъ инерціи звена AB. Теперь уравненіе (l) можетъ быть переписано такъ:

$$J_{A\pi/0} = \frac{Ml^2\rho^2_{AB}}{\mathfrak{L}^2} + M.\overline{Oc}^2 = M\left(\frac{l^2\rho^2_{AB}}{\mathfrak{L}^2} + \overline{Oc}^2\right) = M\lambda^2, \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

гдѣ черезъ λ обозначена гипотенуза прямоугольнаго треугольника съ катетами $\frac{l\rho_{AB}}{\mathfrak{L}}$ и Oc, такъ что

$$\lambda^2 = \left(\frac{l\varphi_{AB}}{L}\right)^2 + \overline{Oc}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

Въ виду (n) выраженіе (42) поправочнаго члена $\mathcal{R}$ принимаетъ видъ

$$\mathcal{R} = -\vartheta^2 \frac{aA}{AO} M\lambda^2 = -\frac{d\vartheta}{dt} M\lambda^2$$

или, что то же, но болѣе удобно, видъ

$$\mathcal{R} = -M\lambda^2\vartheta^2 \frac{aA}{AO} = -M\lambda^2 \frac{d\vartheta}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Въ болѣе расширенной формѣ выраженіе это, согласно (p), переписывается такъ:

$$\mathcal{R} = -M\vartheta^2 \frac{aA}{AO}\left[\left(\frac{l\varphi_{AB}}{L}\right)^2 + \overline{Oc}^2\right] = -M\frac{d\vartheta}{dt}\left[\left(\frac{l\varphi_{AB}}{L}\right)^2 + \overline{Oc}^2\right] \quad . \quad . \quad (44)$$

Возвращаясь снова къ уравненію (40') и принимая во вниманіе только что полученныя выраженія (43) и (44), можемъ теперь написать, что

$$m(f_S)_0 = m(\mathcal{F}_S)_0 - M\lambda^2\vartheta^2 \frac{aA}{AO} = m(\mathcal{F}_S)_0 - M\lambda^2 \frac{d\vartheta}{dt}, \quad . \quad . \quad (45)$$

или, въ болѣе полной формѣ,

$$m(f_S)_0 = m(\mathcal{F}_S)_0 - M\vartheta^2 \frac{aA}{AO}\left[\left(\frac{l\varphi_{AB}}{L}\right)^2 + \overline{Oc}^2\right] = m(\mathcal{F}_S)_0 - M\frac{d\vartheta}{dt}\left[\left(\frac{l\varphi_{AB}}{L}\right)^2 + \overline{Oc}^2\right] \ldots (46)$$

Итакъ, моментъ силъ инерціи въ случаѣ $\vartheta \neq \text{const}$ равенъ моменту силъ инерціи при $\vartheta = \text{const}$ плюсъ моментъ отъ добавочныхъ тангенціальныхъ силъ инерціи, появляющихся при переходѣ отъ $\vartheta = \text{const}$ къ $\vartheta \neq \text{const}$. Отсюда вытекаетъ заключеніе, весьма важное въ практическомъ отношеніи, а именно:

Вмѣсто того, чтобы подсчитывать величину момента дѣйствительной результирующей силы инерціи f_S, наблюдаемой при дѣйствительной $\vartheta \neq \text{const}$, можно ограничиться:

1) подсчетомъ момента результирующей силы инерціи $\mathcal{F}_S$, имѣющей мѣсто при $\vartheta = \text{const}$, и

2) подсчетомъ момента R добавочныхъ тангенціальныхъ силъ инерціи, появляющихся при переходѣ отъ $\vartheta = const$ къ $\vartheta \neq const$.

Первый изъ этихъ моментовъ получается весьма просто, ибо при нахожденіи его приходится пользоваться планомъ OAK ускореній системы AB при $\vartheta = const$, получаемымъ весьма легко. Второй же изъ этихъ моментовъ, R, требуетъ для своего подсчета лишь пары несложныхъ геометрическихъ построеній. Вопросъ о нахожденіи $m(\frac{1}{R})$ разрѣшается такимъ путемъ весьма удобно и просто. Замѣтимъ, наконецъ, что при подсчетѣ величинъ λ слѣдуетъ принимать во вниманіе всѣ замѣчанія, сдѣланныя по аналогичному поводу въ концѣ предыдущаго параграфа.

Итакъ, вопросъ о составѣ момента результирующей силы инерціи даннаго одного звена AB, при любой перемѣнной угловой скорости его ϑ, разрѣшается вполнѣ. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію этого же вопроса примѣнительно къ случаю уже цѣлаго плоскаго механизма, предполагая этотъ послѣдній составленнымъ изъ ряда звеньевъ, сопряженныхъ другъ съ другомъ.

Положимъ, такимъ образомъ, что нашъ механизмъ $OABO_1$ имѣетъ въ точкѣ D отвѣтвленіе, состоящее изъ звена-шатуна DE, шарнирно соединеннаго въ точкѣ D съ звеномъ AB и въ точкѣ E съ кривошипомъ EO_2 (фиг. 157 на стр. 418). Пусть точка A обладаетъ тангенціальнымъ ускореніемъ $(j_t)_A$, равнымъ $aA.\vartheta^2$ и изображаемымъ векторомъ aA. Такимъ образомъ, радіусъ кривизны OA вращается вокругъ центра O неравномѣрно и въ данный моментъ обладаетъ угловой скоростью $\vartheta \neq const$ и угловымъ ускореніемъ $d\vartheta/dt$, равнымъ $\vartheta^2 tg\mu$

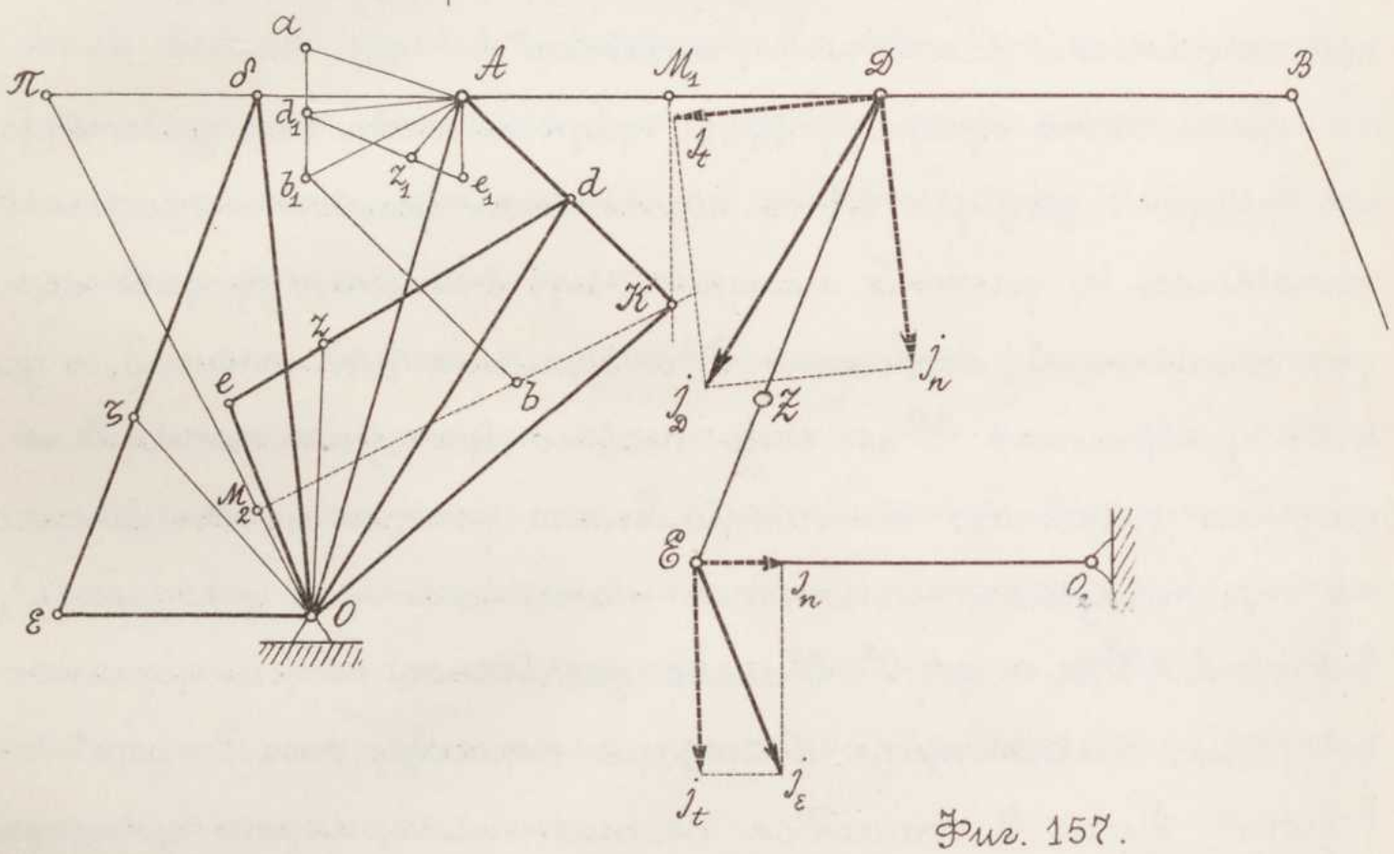
и отличным отъ нуля. Посмотримъ, какъ при такихъ условіяхъ изобразится моментъ всѣхъ силъ инерціи этого звена DE, перенесенныхъ въ планъ скоростей, относительно полюса O этого плана.

Мы установили, что переносъ силъ инерціи въ планъ скоростей ведетъ къ тому, что моментъ результирующей силы инерціи выражается суммой моментовъ однихъ тангенціальныхъ силъ инерціи. Присмотримся нѣсколько ближе къ составу этихъ силъ и постараемся установить связь между ними и тангенціальной силой инерціи точки A.

Аналогично предыдущему, предполагаемъ, что дѣйствительное вращеніе радіуса OA съ перемѣнной угловой скоростью ϑ составилось въ данный моментъ изъ вращенія съ той же, но уже постоянной, скоростью ϑ и вращенія перемѣннаго, съ угловымъ ускореніемъ $\frac{d\vartheta}{dt}$. Отъ перваго вращенія точка A не получила никакого тангенціальнаго ускоренія, отъ второго же она получила нѣкоторое тангенціальное ускореніе $(j_t)_A$, равное $AO\frac{d\vartheta}{dt} = a_t.\vartheta^2$. Таково добавочное тангенціальное ускореніе, появляющееся благодаря переходу отъ $\vartheta = \text{const}$ къ $\vartheta \neq \text{const}$. Пока ϑ остается постояннымъ, планъ ускореній системы AB представляется треугольникомъ OAK, и, найдя въ немъ точку d, соотвѣтствующую точкѣ D, мы найдемъ, что, при $\vartheta = \text{const}$, полное ускореніе j_D точки D звена DE выразится векторомъ dO и будетъ равно $\vartheta^2.dO$.

Сообщая теперь точкѣ A добавочное тангенціальное ускореніе $a_t.\vartheta^2$, мы, какъ это было показано въ § 20 кинематики, вызываемъ у всѣхъ точекъ системъ AB, DE и другихъ, съ ними сочлененныхъ, появленіе добавочныхъ тангенціальныхъ ускореній, при чемъ планъ этихъ добавочныхъ тан-

генціальныхъ ускореній для системы AB изобразится треугольникомъ Aab_1, подобнымъ плану скоростей $0A\pi$. Для того, чтобы построить планъ добавочныхъ тангенціальныхъ ускореній для системы DE, строимъ сначала планъ скоростей ея, для чего опредѣляемъ въ системѣ отрѣзка $A\pi$ точку δ, соотвѣтствующую точкѣ D, а затѣмъ проводимъ лучъ $\delta\varepsilon \parallel DE$ и лучъ $0\varepsilon \parallel 0_2E$; пересѣченіе этихъ лучей дастъ точку ε,—третью вершину Δ-ка $0\delta\varepsilon$ — плана скоростей системы DE.



Фиг. 157.

Далѣе, добавочное тангенціальное ускореніе точки D изобразится вектором d_1A, гдѣ d_1 есть точка плана добав. танг. ускореній Aab_1, соотвѣтствующая точкѣ D; равно оно будетъ $\vartheta^2 . d_1A$. Такъ какъ $\Delta Aab_1 \sim \Delta 0A\pi$ и точка d_1 соотвѣтствуетъ, очевидно, точкѣ δ, то, обозначая тангенціальное ускореніе точки D при $\vartheta = const$, т.-е. слагающую ускоренія $d0.\vartheta^2$ по направленію касательной къ траекторіи точки D, черезъ $(j_t)_2$ и помѣчая добавочное танг. ускореніе, появляющееся у этой точки благодаря сообщенію дополн танг. ускоренія $aA.\vartheta^2$, зна-

комъ Δ, можемъ написать, что добавочное тангенціальное ускореніе точки D

$$\Delta(j_t)_D = \overline{d_1A}.\vartheta^2 = \frac{d_1A}{aA}.\vartheta^2.\overline{aA} = \frac{\delta O}{AO}(j_t)_A = \overline{\delta O}.\frac{(j_t)_A}{AO} = \overline{\delta O}.\frac{d\vartheta}{dt}. \quad . \quad . \quad (q)$$

Планъ добавочныхъ тангенціальныхъ ускореній системы DE построится, согласно общему правилу, такъ: изъ d_1 проводимъ лучъ $d_1e_1 \perp \delta\varepsilon$, т.-е. звену DE, а изъ A проводимъ лучъ $Ae_1 \perp O\varepsilon$, т.-е. отрѣзку O_2E. Искомый планъ изобразится треугольникомъ Ad_1e_1.

Такимъ образомъ, измѣненіе тангенціальнаго ускоренія точки E изобразится векторомъ e_1A и будетъ равно $e_1A.\vartheta^2$, такъ что, аналогично (q), можно будетъ написать, что

$$\Delta(j_t)_E = \overline{e_1A}.\vartheta^2 = \frac{e_1A}{aA}.\vartheta^2.\overline{aA} = \frac{\varepsilon O}{AO}(j_t)_A = \overline{\varepsilon O}.\frac{(j_t)_A}{AO} = \overline{\varepsilon O}.\frac{d\vartheta}{dt}. \quad . \quad . \quad (r)$$

Точно такъ же напишутся выраженія добавочныхъ тангенціальныхъ ускореній всѣхъ остальныхъ точекъ системы DE; всѣ ихъ легко выразить помощью радіусовъ-векторовъ плана скоростей $O\delta\varepsilon$ системы DE, радіуса кривизны AO и тангенціальнаго ускоренія $(j_t)_A$ точки A.

При $\vartheta = const$ планъ ускореній системы AB изображается треугольникомъ OAK, а полное ускореніе точки D — векторомъ dO. Нетрудно теперь, имѣя $(j_D)_{\vartheta=const}$, опредѣлить и $(j_E)_{\vartheta=const}$, для чего можемъ использовать пріемъ, данный въ курсѣ кинематики; намъ придется по данному ускоренію j_D точки D отрѣзка DE опредѣлить ускореніе j_E точки E. Положимъ, что мы это выполнили, и пусть найденное такимъ образомъ ускореніе точки E выражается векторомъ eO; равно оно будетъ $eO.\vartheta^2$. Тогда планъ ускореній системы DE изобразится треугольникомъ Ode, но надо помнить, что это будетъ

планъ лишь для случая $\vartheta = \text{const}$, о чемъ, впрочемъ, будетъ напоминать планъ OAK.

Чтобы перейти къ случаю дѣйствительнаго, перемѣннаго ϑ, надо точкѣ A сообщить дополнительное тангенціальное ускореніе $(j_t)_1$, равное $aA.\vartheta^2$. На нормальныхъ ускоренiяхъ точекъ системъ AB и DE это добавленіе не отразится совсѣмъ, на тангенціальныхъ же скажется вполнѣ опредѣленными измѣненіями всѣхъ ихъ, а именно: всѣ тангенціальныя ускоренія системы AB получатъ добавочныя танг. ускоренія, охватываемыя треугольникомъ Aab_1, а всѣ танг. ускоренія системы DE добав. танг. ускоренія, опредѣляемыя помощью плана ихъ,-треугольника Ad_1e_1. Такимъ образомъ, мы имѣемъ всѣ данныя для того, чтобы составить себѣ представленіе объ ускоренiяхъ системы DE при $\vartheta \neq \text{const}$. Но для насъ важно не это; гораздо болѣе цѣннымъ является то обстоятельство, что при учетѣ моментовъ силъ инерціи звена DE мы получаемъ возможность выдѣлить всѣ члены, зависящіе отъ углового ускоренія $d\vartheta/dt$ радіуса AO. Для этого будемъ разсуждать такъ:

Моментъ результирующей силы инерціи звена DE при дѣйствительномъ движеніи точки A, т.-е. при $\vartheta \neq \text{const}$, будетъ, по общему правилу, равенъ суммѣ моментовъ всѣхъ тангенціальныхъ силъ инерціи этого звена DE при $\vartheta \neq \text{const}$. Но каждая изъ этихъ танг. силъ инерціи при $\vartheta \neq \text{const}$ составится, очевидно,

1) изъ тангенціальной силы инерціи, имѣющей мѣсто при $\vartheta = \text{const}$, и

2) изъ добавочной танг. силы инерціи, появляющейся вслѣдствіе перехода $\vartheta = \text{const}$ въ $\vartheta \neq \text{const}$.

Тангенціальныя силы первой категоріи, при $\vartheta = const$, опредѣляются изъ плана ускореній Ode, имѣющаго мѣсто именно при $\vartheta = const$. Сумма моментовъ ихъ относительно полюса O плана скоростей $Od\varepsilon$ дастъ собою, очевидно, моментъ результирующей силы инерціи звена $D\varepsilon$, наблюдаемый при $\vartheta = const$.

Тангенціальныя силы второй категоріи, опредѣляемыя помощью плана ихъ, — треугольника Ad_1e_1, — будучи перенесены въ планъ скоростей, дадутъ моменты, сумму коихъ можно подсчитать или путемъ, аналогичнымъ тому, какой мы примѣнили выше, — см. стр. 415 и пред., — или, что гораздо проще, при помощи выраженій (q) и (r).

Выдѣлимъ въ системѣ $D\varepsilon$ какую-либо точку Z, а въ системахъ плановъ Ad_1e_1 и $Od\varepsilon$ — ей соотвѣтствующія точки z_1 и z. Векторъ z_1A будетъ, какъ извѣстно, перпендикуляренъ вектору zO, вслѣдствіе чего моментъ дополнительной тангенціальной силы инерціи точки Z, получаемый послѣ переноса этой силы, равной $(-m.\overline{z_1A}.\vartheta^2)$, въ точку z и помноженія на плечо zO, выразится черезъ

$$-m.\overline{z_1A}.\vartheta^2.\overline{zO}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (s)$$

Но по аналогіи съ (q) и (r) можемъ написать, что

$$\overline{z_1A}.\vartheta^2 = \overline{zO}.\frac{d\vartheta}{dt} = \overline{zO}\,\frac{(j_t)_A}{AO} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (t)$$

Въ виду этого моментъ (s) добав. тан. силы инерціи точки Z, перенесенной въ планъ скоростей, выразится такъ:

$$-m.\overline{z_1A}.\vartheta^2.\overline{zO} = -m.\overline{zO}.\frac{d\vartheta}{dt} = -m.\overline{zO}^2.\frac{(j_t)_A}{AO}.$$

Сумма же всѣхъ этихъ моментовъ дополнительныхъ тангенціальныхъ силъ инерціи выразится, слѣдовательно, такъ:

$$\Sigma(-m.\overline{z_1A}.\vartheta^2.\overline{zO}) = -\frac{d\vartheta}{dt}\Sigma m.\overline{zO}^2 = -\frac{(j_t)_A}{AO}\Sigma m.\overline{zO}^2. \quad . \quad . \quad (47)$$

Замѣчая теперь, что

$$\Sigma m.\overline{\zeta O}^2 = J_{\delta\varepsilon/O}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

можемъ написать, что

$$\Sigma(-m.\overline{z_1 A}.\vartheta^2.\overline{\zeta O} = -\frac{d\vartheta}{dt} J_{\delta\varepsilon/O} = -\frac{(j_t)_A}{AO} J_{\delta\varepsilon/O} \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Но, аналогично прежнему, обозначивъ длину отрѣзка $\mathcal{D}\mathcal{E}$ черезъ $\mathcal{L}_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$, а отрѣзка $\delta\varepsilon$ — черезъ $l_{\delta\varepsilon}$, предположивъ, затѣмъ, что центръ тяжести системы $\mathcal{D}\mathcal{E}$ лежитъ въ точкѣ $C_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$, а системы $\delta\varepsilon$ — въ точкѣ $c_{\delta\varepsilon}$, соотвѣтствующей точкѣ $C_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$, обозначивъ, наконецъ, массу звена $\mathcal{D}\mathcal{E}$ черезъ $M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$, а радіусъ инерціи его — черезъ $\rho_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$, можемъ написать, что

$$J_{\delta\varepsilon/O} = \Sigma m.\overline{\zeta O}^2 = M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}.\overline{Oc}_{\delta\varepsilon}^2 + J_{\delta\varepsilon/c_{\delta\varepsilon}} = M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}.\overline{Oc}_{\delta\varepsilon} + \Sigma m.\overline{\zeta c}_{\delta\varepsilon}^2 = M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}\overline{Oc}_{\delta\varepsilon}^2 + \Sigma m.\overline{ZC}_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2\left(\frac{l_{\delta\varepsilon}}{l_{\mathcal{D}\mathcal{E}}}\right)^2 =$$

$$= M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}.\overline{Oc}_{\delta\varepsilon}^2 + \left(\frac{l_{\delta\varepsilon}}{l_{\mathcal{D}\mathcal{E}}}\right)^2 \Sigma m.\overline{ZC}_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2 = M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}.\overline{Oc}_{\delta\varepsilon}^2 + \left(\frac{l_{\delta\varepsilon}}{l_{\mathcal{D}\mathcal{E}}}\right)^2 J_{\mathcal{D}\mathcal{E}/c_{\delta\varepsilon}} = M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}.\overline{Oc}_{\delta\varepsilon}^2 + \left(\frac{l_{\delta\varepsilon}}{l_{\mathcal{D}\mathcal{E}}}\right)^2 M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}.\rho_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2 =$$

$$= M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}\left[\overline{Oc}_{\delta\varepsilon}^2 + \rho_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2\left(\frac{l_{\delta\varepsilon}}{l_{\mathcal{D}\mathcal{E}}}\right)^2\right] = M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}.\lambda_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

гдѣ

$$\lambda_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2 = \overline{Oc}_{\delta\varepsilon}^2 + \rho_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2.\frac{l_{\delta\varepsilon}^2}{l_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Подсчетъ искомой суммы моментовъ всѣхъ дополнительныхъ тангенціальныхъ силъ инерціи теперь никакихъ трудностей не представитъ: согласно формуламъ (11) и (50), можемъ написать, что

$$\Sigma(-m.\overline{z_1 A}.\vartheta^2.\overline{\zeta O}) = -\frac{(j_t)_A}{AO} M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}\lambda_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2 = -\frac{d\vartheta}{dt} M_{\mathcal{D}\mathcal{E}}\lambda_{\mathcal{D}\mathcal{E}}^2, \quad . \quad . \quad (52)$$

гдѣ $\lambda_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$ дается формулой (51). Таково выраженіе искомой суммы.

Что касается суммы моментовъ тангенціальныхъ силъ инерціи 1ой категоріи, имѣющихъ мѣсто при $\vartheta = const$, то она, представитъ собою, очевидно, не что иное, какъ моментъ результирующей силы инерціи звена $\mathcal{D}\mathcal{E}$ при $\vartheta = const$, могущей быть вычисленной обычнымъ путемъ; для чего придется взять планъ

ускореній системы DE въ случаѣ $\vartheta = const$, — онъ представится треугольникомъ Ode; найти въ немъ точку, соотвѣтствующую центру тяжести отрѣзка DE и т. д.; шаблонъ такого подсчета выяснены нами выше, при разборѣ теоремы о центрѣ качанія. Обозначимъ величину результирующей силы инерціи звена DE при $\vartheta = const$ черезъ $(\mathfrak{F}_s)_{DE}$, а моментъ ея, послѣ переноса въ планъ скоростей (въ точку его, соотвѣтствующую центру качанія системы DE при $\vartheta = const$), черезъ $m(\mathfrak{F}_s)_{DE}$.

Такимъ образомъ, если моментъ дѣйствительной результирующей силы инерціи системы DE при $\vartheta \neq const$ обозначимъ черезъ $m(f_s)_{DE}$, то, на основаніи вышесказаннаго, получаемъ возможность написать уравненіе:

$$m(f_s)_{DE} = m(\mathfrak{F}_s)_{DE} - \frac{d\vartheta}{dt} M_{DE} \lambda^2_{DE}, \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

гдѣ $M_{DE} \lambda^2_{DE} = J_{DE/O}$.

Если бы къ звену AB было пристегнуто еще нѣсколько звеньевъ FG, HK, ..., каждое изъ коихъ имѣетъ отвѣтвленія, аналогичныя DE, — какія-либо звенья MN, PQ, .. (фиг. 158), то, примѣняя къ каждому изъ нихъ разсужденія, аналогичныя приведеннымъ выше по поводу звена DE, мы получили бы рядъ уравненій:

$$m(f_s)_{AB} = m(\mathfrak{F}_s)_{AB} - \frac{d\vartheta}{dt} M_{AB} \lambda^2_{AB},$$

$$m(f_s)_{DE} = m(\mathfrak{F}_s)_{DE} - \frac{d\vartheta}{dt} M_{DE} \lambda^2_{DE},$$

$$m(f_s)_{FG} = m(\mathfrak{F}_s)_{FG} - \frac{d\vartheta}{dt} M_{FG} \lambda^2_{FG},$$

$$m(f_s)_{HK} = m(\mathfrak{F}_s)_{HK} - \frac{d\vartheta}{dt} M_{HK} \lambda^2_{HK},$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

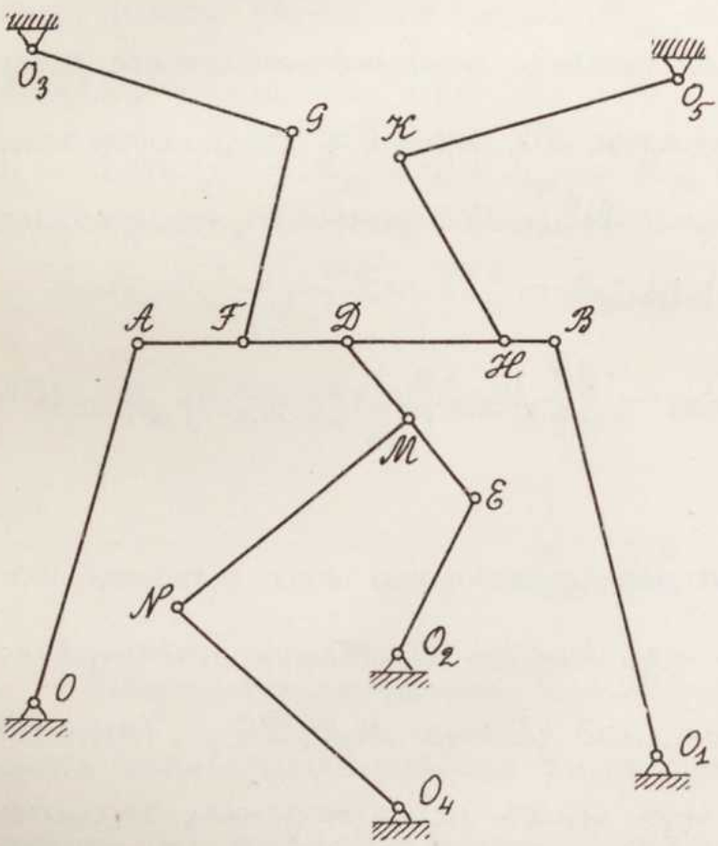
суммованіе которыхъ и дастъ намъ общее уравненіе:

$$\Sigma m(\mathfrak{f}_s)_{\vartheta=\text{const}} = \Sigma m(\mathfrak{F}_s)_{\vartheta=\text{const}} - \frac{d\vartheta}{dt}\Sigma M\lambda^2 \ldots \quad (54)$$

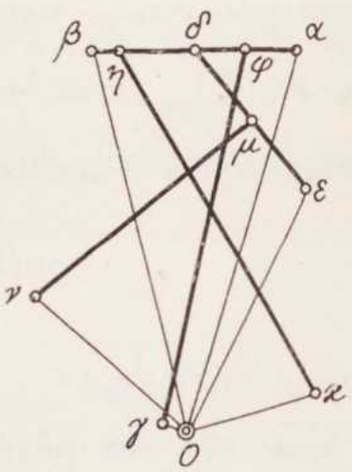
или, что то же, уравненіе

$$\Sigma m(\mathfrak{f}_s)_{\vartheta=\text{const}} = \Sigma m(\mathfrak{F}_s)_{\vartheta=\text{const}} - \frac{d\vartheta}{dt}\Sigma J \quad (55)$$

гдѣ сумма ΣJ представляетъ собою не что иное, какъ сумму моментовъ инерціи отрѣзковъ $\alpha\beta, \delta\varepsilon, \ldots$, изображающихъ въ планѣ скоростей звенья механизма и снабженныхъ массами



Фиг. 158.



Фиг. 159.

этихъ послѣднихъ, при чемъ всѣ эти моменты инерціи предполагаются взятыми относительно одной и той же точки,— полюса плана скоростей. Сумму этой можно дать весьма наглядное толкованіе, если принять во вниманіе слѣдующее:

Предположимъ, что въ системѣ плана скоростей мы построили фигуру $\kappa\alpha\beta\ldots\gamma$ (фиг. 159), соотвѣтствующую данному намъ механизму въ конфигураціи его для даннаго момента (фиг. 158),

и снабдим каждый из векторов ея, изображающих отдельныя звенья, массами соотвѣтствующаго ему звена. Если станемъ считать теперь фигуру, такъ нами полученную въ планѣ скоростей, т.-е. фигуру $\kappa\alpha\beta\ldots\gamma$, жесткой, если, какъ и раньше, будемъ считать ее жесткимъ рычагомъ съ точкой вращенія (опоры) въ полюсѣ 0, то будетъ ясно, что моментъ инерціи такого жесткаго рычага относительно точки 0, будучи равенъ суммѣ моментовъ инерціи отдѣльныхъ частей его ($\alpha\beta$, $\delta\varepsilon$, $\eta\kappa$, ...) относительно той же точки 0, и выразится какъ разъ черезъ ΣJ. Въ силу этихъ соображеній, а также ради сокращенія письма, этотъ моментъ инерціи фигуры плана скоростей относительно полюса его 0 будемъ обозначать черезъ $\mathcal{J}_0$ и это обозначеніе введемъ въ общую формулу (55). Замѣтимъ, кстати, что сумму моментовъ силъ инерціи механизма при дѣйствительномъ движеніи его, т.-е. при $\vartheta \neq const$, обозначенную нами выше черезъ $\Sigma m(\mathfrak{f}_s)_{\vartheta \neq const}$, мы обозначали раньше черезъ $\Sigma m_{\mathfrak{F}}$ (см. стр. 383) и будемъ, ради сокращенія письма, обозначать такъ и теперь. Вслѣдствіе этого уравненіе (55) переписывается теперь такъ:

$$\Sigma m_{\mathfrak{F}} = \Sigma m(\mathfrak{F}_s)_{\vartheta=const} - \mathcal{J}_0 \frac{d\vartheta}{dt}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Вернемся теперь къ основному уравненію моментовъ (26). Подставивъ вмѣсто $\Sigma m_{\mathfrak{F}}$ выраженіе ея, даваемое этимъ уравненіемъ, находимъ, послѣ очевидныхъ преобразованій, новое уравненіе, замѣняющее (56) и практически весьма удобное:

$$\Sigma m_{\mathfrak{P}} + \Sigma m(\mathfrak{F}_s)_{\vartheta=const} - \mathcal{J}_0 \frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Первый членъ лѣвой части этого уравненія, $\Sigma m_{\mathfrak{P}}$, предѣставляетъ собою, какъ извѣстно, сумму моментовъ всѣхъ дѣйствую-

гощихъ силъ, перенесенныхъ каждая въ свою точку плана скоростей, соотвѣтствующую точкѣ приложенія ея въ механизмѣ, при чемъ моменты берутся относительно полюса плана скоростей.

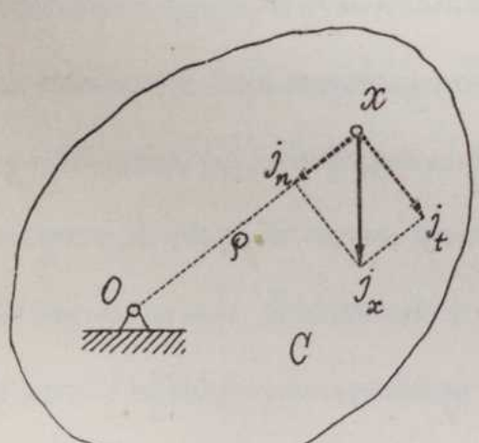
Второй членъ, $\Sigma m(\bar{J}_S)_{\vartheta=const}$, представляетъ собою сумму моментовъ всѣхъ результирующихъ силъ инерціи отдѣльныхъ звеньевъ нашего механизма, получающихся при $\vartheta = const$, т.-е. при равномѣрномъ вращеніи радіуса кривизны AO. Подсчетъ этихъ результирующихъ силъ инерціи, согласно сказанному выше, долженъ быть производимъ такъ: предположивъ, что, при данной величинѣ своей угловой скорости ϑ, основной кривошипъ AO, приводящій въ движеніе весь нашъ механизмъ, вращается въ данный моментъ равномѣрно, вызывая соотвѣтствующія этому случаю движенія остальныхъ звеньевъ, строимъ планъ ускореній для такого равномѣрнаго движенія кривошипа ($\vartheta = const$); съ этой цѣлью строимъ, прежде всего, планъ ускореній для системы AB для случая $\vartheta = const$, — это будетъ нѣкоторый треугольникъ OAK (фиг. 157); далѣе, опредѣливъ ускореніе $\bar{a}O$ начальной точки D слѣдующаго, ближайшаго, звена DE, находимъ обычнымъ пріемомъ ускореніе другой крайней точки его E, послѣ чего строимъ планъ ускореній Ode этой системы DE, соотвѣтствующій, значитъ, случаю $\vartheta = const$ (радіусы кривизны DO_3 и EO_2 будутъ вращаться, вообще говоря, неравномѣрно. но это, какъ видимъ, никакого значенія въ данномъ случаѣ не имѣетъ). Совершенно такимъ же путемъ опредѣляемъ планы ускореній всѣхъ остальныхъ звеньевъ, исходя все время изъ плана AOK и, значитъ, постоянно предполагая $\vartheta = const$, т.-е. что кривошипъ AO вращается равномѣрно.

Построивъ такимъ путемъ общій планъ ускореній всего нашего механизма, соотвѣтствующій равномѣрному вращенію основного кривошипа OA, опредѣляемъ ускоренія центровъ тяжести всѣхъ этихъ звеньевъ и, значитъ, получаемъ возможность опредѣлить величины и направленія результирующихъ силъ инерціи звеньевъ нашего механизма, равно какъ и положенія центровъ качанія ихъ. Найдя теперь въ планъ скоростей точки, соотвѣтствующія центрамъ качанія, что выполняется весьма просто помощью пріемовъ, указанныхъ выше, въ § 15 (стр. 370 и слѣд.), и перенеся въ нихъ параллельно самимъ себѣ полученныя результирующія силы инерціи, находимъ, наконецъ, сумму моментовъ ихъ относительно полюса O, — это и будетъ наша сумма $\Sigma m(\mathfrak{F}_p)_{\vartheta=\text{const}}$.

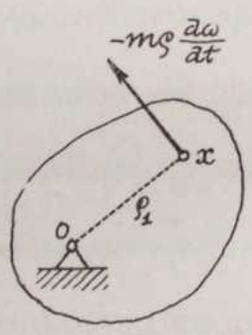
Построивъ теперь въ планъ скоростей фигуру, соотвѣтствующую нашему механизму въ данный моментъ, снабдивъ точки ея массами соотвѣтствующихъ точекъ механизма и опредѣливъ моментъ инерціи J_0 такой фигуры относительно полюса O, что выполняется путемъ опредѣленія всѣхъ l, $\mathfrak{L}$, φ и $\overline{Oc}$ и помощью ряда простѣйшихъ геометрическихъ построеній, — получаемъ, послѣ помноженія на $d\vartheta/dt$, послѣдній, третій, членъ уравненія моментовъ (57), опредѣляющагося, такимъ образомъ, вполнѣ. Полученнымъ уравненіемъ можно пользоваться, въ цѣляхъ изслѣдованія механизма и др., различно; между прочимъ, какъ это будетъ разъяснено въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ, имъ можно пользоваться для опредѣленія углового ускоренія $d\vartheta/dt$ основного звена AO при воздѣйствіи на этотъ механизмъ ряда данныхъ дѣйствующихъ силъ $\mathfrak{P}$, Q, $\mathfrak{R}$ и др.

Не надо думать, что приведенныя выше разсужденія имѣютъ силу и значеніе лишь для звеньевъ AB, DE и др., движущихся подобно шатуну,—выведенныя формулы примѣнимы одинаково и ко всякимъ кривошипамъ и коромысламъ AO, BO_1, EO_2, KO_5 и др. (фиг. 158), ибо движеніе кривошипа AO можно разсматривать опять-таки, какъ движеніе шатунообразное, если принимать, что движеніе отрѣзка AO опредѣляется движеніемъ одной точки его, A, по окружности центра O и радіуса OA, а другой, O, по окружности того же центра O и радіуса, равнаго нулю. Тѣмъ не менѣе, во избѣжаніе возможныхъ недоразумѣній, мы коснемся этого вопроса нѣсколько подробнѣе, при чемъ будемъ разсматривать кривошипъ, какъ нѣкоторое твердое тѣло, вращающееся около неподвижной оси. Такое представленіе, болѣе наглядное, чѣмъ упомянутое выше, представитъ удобство еще въ томъ отношеніи, что позволитъ весьма просто учитывать вліяніе силъ инерціи маховиковъ, шкивовъ и другихъ, имъ подобныхъ, деталей.

Предположимъ, такимъ образомъ, что въ составъ нашего механизма входитъ нѣкоторое твердое тѣло C, могущее вращаться вокругъ неподвижной оси O (фиг. 160). Полюсъ мгновеннаго вращенія этой системы будетъ, очевидно, все время оставаться совпадающимъ съ неподвижной точкой O. Кромѣ того, къ той



Фиг. 160



Фиг. 161

же точкѣ O сведется и поворотный кругъ системы C ($d=0$, ибо $u=0$, а $d=u/\omega$); вслѣдствіе этого въ той же точкѣ O окажется лежащимъ и центръ ускореній G, каковы бы ни были угловыя скорость и ускореніе системы C. Очевидно,—замѣтимъ кстати, что если бы система C сидѣла на томъ же валу, который приводится во вращеніе кривошипомъ AO, и, притомъ, оказалась бы жестко съ этимъ кривошипомъ связанной, то ω совпадала бы съ ϑ; вообще же, въ виду посадки системы C на другія оси, отличныя отъ C, угловая скорость ея будетъ отлична отъ ϑ, и въ общемъ случаѣ система C будетъ вращаться неравномѣрно, съ угловымъ ускореніемъ $d\omega/dt$.

Выдѣлимъ въ нашей системѣ какую-либо точку X съ массой m и обозначимъ полное ускореніе ея черезъ j_x. Такъ какъ радіусъ-векторъ XO служитъ въ то же время и радіусомъ кривизны къ траекторіи точки X, то, разлагая j_x на нормальное ускореніе j_n, идущее по XO, и тангенціальное j_t, перпендикулярное къ XO, можемъ написать, что

$$j_t = \rho \, d\omega/dt,$$

гдѣ черезъ ρ обозначена длина вектора XO. Отсюда слѣдуетъ, что нормальная сила инерціи точки X выразится черезъ $(-mj_n)$, а тангенціальная, f_t, черезъ $(-mj_t)$, т.-е. черезъ $(-m\rho \, d\omega/dt)$.

Замѣтивъ это, переносимъ всѣ силы инерціи, согласно теоремѣ моментовъ, въ планъ скоростей и подсчитываемъ ихъ моменты. Пусть въ системѣ плана скоростей нашей точкѣ X соотвѣтствуетъ точка x, при чемъ, очевидно,

луч xo будет параллелен XO. Вследствіе этого нормальная сила инерціи, $(-mj_n)$, дастъ моментъ, равный нулю, тангенціальная же сила $(-m\varrho\, d\omega/dt)$ дастъ моментъ $(-m\varrho\, d\omega/dt).\varrho_1$, гдѣ черезъ ϱ_1 обозначено разстояніе xo (фиг. 161).

Замѣчая теперь, что $\varrho_1 = \varrho . l/\mathfrak{L}$, гдѣ $\mathfrak{L}$ есть длина какого-либо отрѣзка системы C, а l — длина соотвѣтствующаго ему въ системѣ плана c, при чемъ, очевидно, отношеніе $l/\mathfrak{L}$ есть число постоянное, равное, положимъ, q, такъ что

$$l/\mathfrak{L} = q = \text{const}$$

и

$$\varrho_1 = q\varrho,$$

заключаемъ, что моментъ силы инерціи точки x будетъ равенъ

$$-m\varrho . \frac{d\omega}{dt} \times q\varrho = -mq\varrho^2 \frac{d\omega}{dt}.$$

Написавъ подобныя же выраженія для моментовъ силъ инерціи всѣхъ остальныхъ точекъ системы C и просуммировавъ ихъ, найдемъ, что для тѣла C сумма моментовъ силъ инерціи его относительно полюса плана скоростей выражается черезъ $\Sigma(-mq\varrho^2\, d\omega/dt)$ или, такъ какъ для всѣхъ точекъ тѣла C факторы q и $d\omega/dt$ остаются постоянными, черезъ $-q\, d\omega/dt\, \Sigma m\varrho^2$. Замѣчая теперь, что сумма $\Sigma m\varrho^2$ представляетъ собою моментъ инерціи тѣла C относительно оси вращенія его O, — обозначимъ этотъ моментъ инерціи черезъ J, такъ что

$$J = \Sigma m\varrho^2,$$

— заключаемъ, что упомянутый моментъ силъ инерціи тѣла C относительно полюса плана скоростей, — обозначимъ его черезъ m_o, — выразится такъ:

$$m_0 = -qJ\frac{d\omega}{dt}.$$

Если въ механизмѣ имѣется рядъ системъ, подобныхъ С, т.-е. вращающихся каждая около своей неподвижной оси, то сумма моментовъ силъ инерціи всѣхъ ихъ относительно полюса О плана скоростей выразится такъ:

$$\Sigma m_0 = -\Sigma qJ\frac{d\omega}{dt}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Величины q, J и $d\omega/dt$ отъ системы къ системѣ мѣняются, почему ни одной изъ нихъ нельзя вывести изъ подъ знака суммы.

Сумму (58) можно подсчитать при любомъ значеніи ϑ, а значитъ, и при $\vartheta = const$. Благодаря этому, получается возможность разбить сумму $\Sigma m(\mathcal{F}_s)_{\vartheta=const}$ моментовъ силъ инерціи всѣхъ безъ исключенія звеньевъ механизма, какъ качающихся, такъ и вращающихся, на двѣ части: на сумму $\Sigma(m_к)_{\vartheta=const}$ моментовъ силъ инерціи всѣхъ качающихся частей механизма и на сумму $\Sigma(m_0)_{\vartheta=const}$ для всѣхъ вращающихся частей, т.-е. можно написать, что

$$\Sigma m(\mathcal{F}_s)_{\vartheta=const} = \Sigma(m_к)_{\vartheta=const} + \Sigma(m_0)_{\vartheta=const}. \quad . \quad . \quad (59)$$

Обѣ суммы, стоящія въ правой части этого уравненія, будутъ подсчитаны въ предположеніи $\vartheta = const$. Очевидно, что для той изъ системъ, которая жестко соединена съ кривошипомъ AO, будемъ имѣть $d\omega/dt = d\vartheta/dt = 0$; у прочихъ системъ $d\omega/dt$ будутъ отличны отъ нуля

Полученное соотношеніе (59) можно было бы ввести въ общее уравненіе (57), но, ради простоты дальнѣйшихъ вычисленій, мы не станемъ имѣнять его; нужно лишь всегда имѣть въ виду, что полный составъ суммы $\Sigma m(\mathcal{F}_s)_{\vartheta=const}$

дается уравненіемъ (59).

Такимъ образомъ, общее уравненіе моментовъ, имѣющее видъ:

$$\Sigma m_{\mathfrak{P}} + \Sigma m\,(\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}})_{\vartheta=\text{const}} - \mathfrak{J}_0\, d\vartheta/dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

можно оставить въ этомъ же видѣ. Ради большей ясности, напомнимъ еще разъ, что

1) членъ $\Sigma m_{\mathfrak{P}}$ представляетъ собою сумму моментовъ всѣхъ силъ (дѣйствующихъ и сопротивленій), перенесенныхъ въ планъ скоростей;

2) членъ $\Sigma m\,(\mathfrak{F}_{\mathfrak{s}})_{\vartheta=\text{const}}$ представляетъ собою сумму моментовъ всѣхъ силъ инерціи всѣхъ безъ исключенія звеньевъ механизма, какъ качающихся, такъ и вращающихся, вычисленную въ предположеніи равномѣрнаго вращенія кривошипа AO, т.-е. при $\vartheta = \text{const}$;

3) членъ $(-\mathfrak{J}_0\, d\vartheta/dt)$ представляетъ собою сумму моментовъ всѣхъ дополнительныхъ силъ инерціи, появляющихся въ механизмѣ вслѣдствіе сообщенія кривошипу AO дополнительнаго углового ускоренія $d\vartheta/dt$; при этомъ членъ $\mathfrak{J}_0$ представляетъ собою моментъ инерціи жесткаго рычага, изображающаго въ планѣ скоростей нашъ механизмъ со всѣми его частями, какъ качающимися, такъ и вращающимися, относительно полюса плана скоростей.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ рѣшенію ряда важнѣйшихъ задачъ динамики механизмовъ; основными уравненіями являются уравненія (37) и (57), данныя выше. Сначала мы разберемъ задачу объ опредѣленіи скоростей точекъ механизма, движущагося подъ дѣйствіемъ ряда данныхъ силъ.

§ 20. Опредѣленіе скоростей точекъ механизма, движущагося подъ воздѣйствіемъ данныхъ силъ.

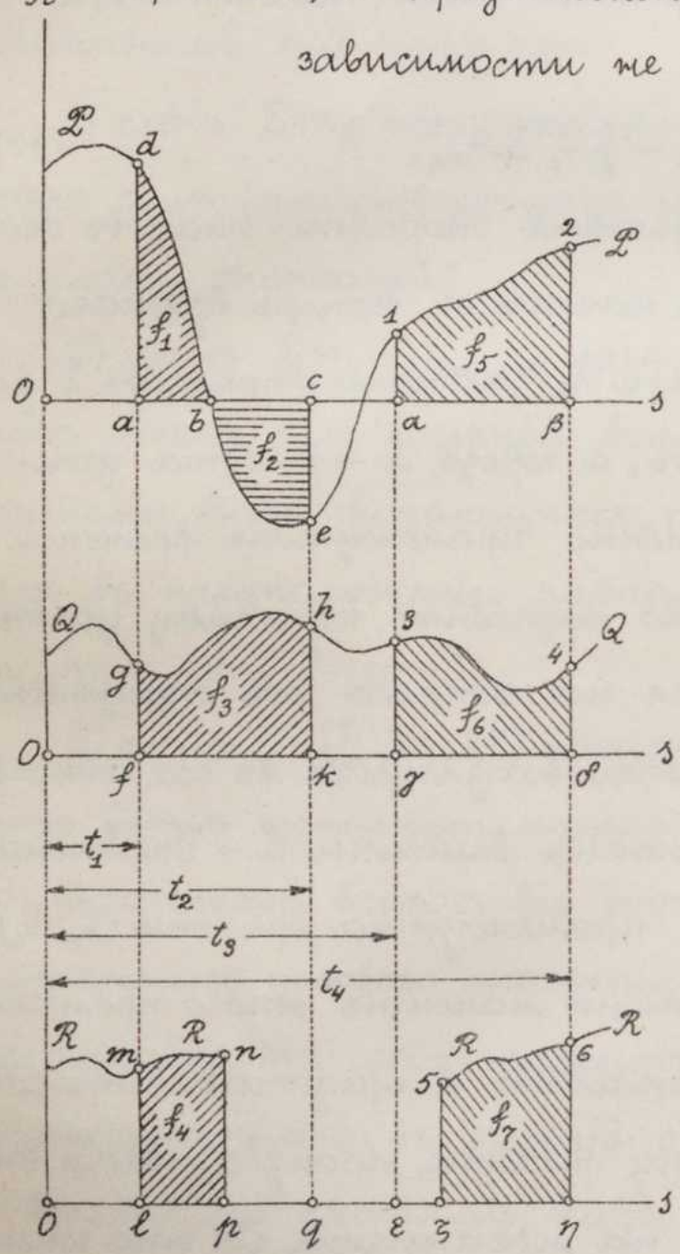
Задача эта вполнѣ разрѣшается помощью общаго уравненія живыхъ силъ (37), приведеннаго выше, на стр. 399, и имѣющаго видъ

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\vartheta_2^2 \Sigma M\lambda_2^2 - \tfrac{1}{2}\vartheta_1^2 \Sigma M\lambda_1^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

гдѣ черезъ ϑ_1 и ϑ_2 обозначены угловыя скорости плановъ скоростей нашего механизма въ началѣ и концѣ взятаго промежутка времени, черезъ λ_1 и λ_2 значенія отрѣзковъ λ для этихъ же крайнихъ моментовъ, а черезъ $\mathcal{L}$ — работа дѣйствующихъ силъ за этотъ именно промежутокъ времени. Присмотримся теперь нѣсколько подробнѣе къ этому уравненію и, прежде всего, остановимся на вопросѣ объ опредѣленіи значеній различныхъ факторовъ, входящихъ въ его составъ.

Сначала займемся подсчетомъ величины $\mathcal{L}$. — Уравненіе (37) написано для извѣстнаго промежутка времени $(t_2 - t_1)$, гдѣ черезъ t_1 обозначенъ начальный моментъ этого промежутка, а черезъ t_2 — конечный, и количество $\mathcal{L}$ представляетъ собою не что иное, какъ величину работы, произведенной всѣми силами, дѣйствующими на механизмъ, за это именно время $(t_2 - t_1)$. Такъ какъ діаграммы, изображающія ходъ измѣненій этихъ силъ въ зависимости отъ перемѣщеній точекъ приложенія ихъ, обычно бываютъ извѣстны, то подсчетъ величины $\mathcal{L}$ для любого промежутка времени никакихъ трудностей не представитъ. На самомъ дѣлѣ, пусть на нашъ механизмъ воздѣйствуютъ нѣкоторыя три силы, P, Q и R, — законъ измѣненія величины коихъ, въ зависимости отъ пе-

перемѣщеній ѣ точки приложенія ихъ (въ направленіи ихъ дѣйствія), дается діаграммами фиг. 162. Силы эти, такимъ образомъ, предполагаются зависящими отъ положеній механизма, т.-е. функціями конфигураціи его частей, но отъ времени, по предположенію нашему, они ни въ какой зависимости не находятся, — обстоятельство это было выяснено въ свое время достаточно подробно.



Фиг. 162.

Посмотримъ теперь, какъ выразится работа $\mathfrak{L}$ всѣхъ этихъ силъ за взятый промежутокъ времени (t_2-t_1). Пути ему соотвѣтствуютъ отрѣзки ac, fk и lq осей абсциссъ, по которымъ мы откладываемъ пути ѣ точекъ приложенія нашихъ силъ $\mathfrak{P}$, Q и R. Тогда, согласно установленнымъ нами общимъ положеніямъ учета работъ помощью подобныхъ діаграммъ, скажемъ, что работа силы $\mathfrak{P}$ за время (t_2-t_1) выражается площадью $(+adb)+(-bce)=f_1-f_2$; работа силы Q за то же время — площадью f_3, и, наконецъ, работа силы R — площадью f_4, произведенной лишь на участкѣ lp, ибо на участкѣ pq и дальше, до z, сила R остается равной нулю. Отсюда слѣдуетъ, что за взятое время (t_2-t_1) работа $\mathfrak{L}$ выразится такъ:

$$\mathfrak{L}_{1,2} = \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_4.$$

Подобнымъ же образомъ, за время отъ t_3 до t_4 наши силы выполнятъ работу

$$\mathfrak{L}_{3,4} = \mathfrak{f}_5 + \mathfrak{f}_6 + \mathfrak{f}_7.$$

Вопросъ этотъ можно считать, такимъ образомъ, исчерпаннымъ. Переходимъ къ учету другихъ факторовъ.

Уравненіе (37), будучи написано въ раскрытой формѣ, принимаетъ видъ:

$$\mathfrak{L}_{1,2} = \frac{1}{2}\vartheta_2^2 \Sigma M\left(\frac{\varrho^2 l_2^2}{\mathfrak{L}^2} + \overline{O_2 c_2}^2\right) - \frac{1}{2}\vartheta_1^2 \Sigma M\left(\frac{\varrho^2 l_1^2}{\mathfrak{L}^2} + \overline{O_1 c_1}^2\right). \quad (37')$$

Обратимся къ разсмотрѣнію суммъ, стоящихъ въ круглыхъ скобкахъ полученнаго уравненія.

Если данная деталь движется подобно шатуну, т.-е. не имѣетъ неподвижной оси вращенія, то факторы $\overline{Oc}$, вообще говоря, всегда будутъ отличны отъ нуля.

Для всѣхъ деталей, вращающихся около неподвижныхъ осей, отрѣзки $\overline{Oc}$ будутъ отличны отъ нуля, если центры тяжести этихъ деталей не лежатъ на этихъ осяхъ, и будутъ равны нулю, если центры тяжести приходятся на осяхъ вращенія; въ этомъ послѣднемъ случаѣ для каждой такой детали пара соотвѣтствующихъ ей членовъ, участвующихъ въ уравненіи (37'), пишется въ формѣ

$$\frac{1}{2}\vartheta_2^2 M\frac{\varrho^2 l_2^2}{\mathfrak{L}^2} - \frac{1}{2}\vartheta_1^2 M\frac{\varrho^2 l_1^2}{\mathfrak{L}^2},$$

что сводится къ разности

$$\frac{M\varrho^2}{2\mathfrak{L}}\left(\vartheta_2^2 l_2^2 - \vartheta_1^2 l_1^2\right)$$

ибо масса M, радіусъ инерціи ϱ и длина $\mathfrak{L}$ звена останутся для обоихъ моментовъ одними и тѣми же.

Наконецъ, что касается угловыхъ скоростей ϑ_1 и ϑ_2, то всегда одна изъ нихъ, ϑ_1, соотвѣтствующая начальному моменту t_1, дается, а неизвѣстной является ϑ_2, соотвѣтствующая конечному моменту t_2. Уравненіе (37) показываетъ, что для опредѣленія ϑ_2 можно пользоваться соотношеніемъ

$$\vartheta_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{L} + \frac{1}{2}\vartheta_1^2 \Sigma M \lambda_1^2}{\frac{1}{2}\Sigma M \lambda_2^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

непосредственно получаемъ изъ (37). При извѣстныхъ намъ значеніяхъ всѣхъ факторовъ, входящихъ въ составъ подкоренного количества, величина ϑ_2 опредѣляется вполнѣ.

Если въ начальный моментъ t_1 механизмъ нашъ оставался еще въ покоѣ, такъ что начальная угловая скорость ϑ_1 равна нулю, то уравненіе (60) даетъ для опредѣленія ϑ_2 уравненіе:

$$\vartheta_2 = \sqrt{\frac{2\mathfrak{L}}{\Sigma M \lambda_2^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Мы условимись разумѣть подъ ϑ угловую скорость плана скоростей, соотвѣтствующаго данному моменту,—коэффиціентъ пропорціональности этого плана. Проще всего, конечно, выбирать масштабы плановъ такъ, чтобы ϑ была равна какъ разъ угловой скорости звена AO, которое мы будемъ называть кривошипомъ; тогда $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$, представятъ собою угловыя скорости этого кривошипа при движеніи механизма подъ дѣйствіемъ всѣхъ силъ, на него дѣйствующихъ.

Рядъ значеній ϑ, полученныхъ такимъ путемъ, дастъ намъ картину измѣненій угловой скорости кривошипа AO въ зависимости отъ измѣненія работы $\mathfrak{L}$ всѣхъ уга-

ствующихъ здѣсь силъ, т.-е. отъ измѣненій въ положеніи точекъ приложенія этихъ силъ, отъ конфигураціи этихъ точекъ, но никакъ не отъ времени. Это становится вполнѣ понятнымъ, если мы вспомнимъ, съ одной стороны, что кривыя хода силъ, изображенныя на фиг. 162, даютъ измѣненія ихъ въ зависимости отъ перемѣщенія точекъ приложенія этихъ силъ, а съ другой, что сами эти силы предположены функціями однихъ лишь положеній механизма, но никакъ не времени. Такимъ образомъ, вопросъ объ измѣненіи скоростей ϑ со временемъ остается пока еще не разсмотрѣннымъ, и мы разрѣшимъ его въ одномъ изъ дальнѣйшихъ параграфовъ. Теперь же, въ порядкѣ изложенія матеріала нашего курса, перейдемъ къ разбору вопроса объ опредѣленіи угловыхъ ускореній кривошипа $A0$ въ зависимости отъ измѣненія силъ, дѣйствующихъ на данный механизмъ.

§ 21. Опредѣленіе ускореній точекъ механизма, движущагося подъ воздѣйствіемъ данныхъ силъ.

Вопросъ объ ускореніяхъ точекъ механизма разрѣшается помощью основного уравненія (57), — см. стр. 423, — имѣющаго видъ:

$$\Sigma m_x + \Sigma m(\mathfrak{F}_s)_{\vartheta=\text{const}} - \mathfrak{I}_0 \, d\vartheta/dt = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Отсюда прямо находимъ, что для даннаго положенія механизма, которому соотвѣтствуютъ извѣстныя значенія дѣйствующихъ силъ $(\mathfrak{P})$ и нѣкоторая опредѣленная угловая скорость ϑ кривошипа $A0$, вычисленная по спосо-

бу, указанному въ предыдущемъ параграфѣ, угловое ускореніе $d\vartheta/dt$ этого кривошипа выражается такъ:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Sigma m_{\mathfrak{F}} + \Sigma m(\mathfrak{F}_s)_{\vartheta=\text{const}}}{\mathfrak{J}_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Вторая сумма, стоящая въ числителѣ, подсчитывается для даннаго положенія механизма въ предположеніи $\vartheta = \text{const}$ и при томъ именно значеніи ϑ, которое соотвѣтствуетъ этому именно положенію.

Въ начальный моментъ движенія, когда механизмъ только начинаетъ двигаться подъ воздѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, — иными словами, въ послѣдній моментъ покоя, — угловая скорость ϑ_0 кривошипа $A0$ равна нулю. Такъ какъ при $\vartheta = \text{const} = \vartheta_0 = 0$ механизмъ стоитъ, и всѣ угловыя ускоренія, а вмѣстѣ съ ними и силы инерціи, остаются равными нулю, то будетъ равна нулю и вторая сумма, стоящая въ числителѣ, ибо она даетъ сумму моментовъ силъ инерціи именно при $\vartheta = \vartheta_0 = 0$ (въ данномъ случаѣ). Поэтому для начальнаго момента движенія уравненіе (62) принимаетъ весьма простой видъ:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Sigma m_{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{J}_0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

гдѣ, напомнимъ, черезъ $d\vartheta/dt$ обозначено угловое ускореніе кривошипа $A0$ въ начальный моментъ движенія, черезъ $\Sigma m_{\mathfrak{F}}$ — сумма моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ и сопротивленій, перенесенныхъ извѣстнымъ образомъ въ планъ скоростей, а черезъ $\mathfrak{J}_0$ — моментъ инерціи фигуры, изображающей въ планѣ скоростей нашъ механизмъ, относительно полюса этого плана. Имѣя это начальное угловое ускореніе кри-

вошипа AO, мы вычислимъ по нему начальныя угловыя ускоренія всѣхъ звеньевъ, пользуясь треугольникомъ aAb_1 измѣненій угловыхъ ускореній. Замѣчая, далѣе, что начальная угловая скорость ϑ_0 звена AO равна нулю, заключаемъ, что будутъ равны нулю начальныя угловыя скорости всѣхъ остальныхъ звеньевъ, а значитъ, и начальныя нормальныя ускоренія всѣхъ точекъ. Мы, такимъ образомъ, лишній разъ убѣждаемся, что въ моментъ пуска въ ходъ механизма всѣ точки его обладаютъ одними лишь тангенціальными ускореніями.

Начиная съ слѣдующаго момента въ системѣ появляются уже и нормальныя ускоренія, подсчетъ каждаго изъ которыхъ можетъ быть выполненъ помощью обычной формулы:

$$j_n = v^2/\varrho,$$

гдѣ v есть линейная скорость точки, а ϱ — радіусъ кривизны ея траекторіи.

Что касается тангенціальныхъ ускореній, то они будутъ получены помощью общей формулы (62) обычнымъ путемъ. Пусть, напримѣръ, требуется опредѣлить тангенціальное ускореніе какой-либо точки механизма въ нѣкоторый моментъ движенія, когда механизмъ находится въ какомъ-либо данномъ положеніи. Тогда, прежде всего, опредѣляемъ угловую скорость ϑ кривошипа, соотвѣтствующую этому положенію; затѣмъ, предположивъ ее постоянной, подсчитываемъ значеніе суммы $\Sigma m(\mathfrak{F}_s)_{\vartheta=\text{const}}$, вычисляемъ Σm_φ и $\mathfrak{J}_0$ и подсчитываемъ по этимъ даннымъ значеніе углового ускоренія $d\vartheta/dt$ кривошипа AO, которымъ этотъ послѣдній обладаетъ при данной конфигураціи механизма и данныхъ силахъ, на механизмъ дѣйствующихъ. По вели-

чинъ $d\vartheta/dt$ строимъ треугольникъ $Aa b_1$ измѣненій тангенціальныхъ ускореній и находимъ добавочное тангенціальное ускореніе заданной точки, которое, наконецъ, и прибавляемъ къ тому тангенціальному ускоренію, которая она имѣла бы при данномъ постоянномъ ϑ.- Вопросъ оказывается разрѣшеннымъ вполнѣ.

Итакъ, для каждаго изъ положеній механизма угловое ускореніе $d\vartheta/dt$ основного кривошипа AO можетъ быть найдено вполнѣ точно, и мы, такимъ образомъ, можемъ подсчитать рядъ значеній этого ускоренія для различныхъ положеній механизма. Тѣмъ не менѣе остается невыясненнымъ еще одинъ вопросъ, а именно,- вопросъ о зависимости этихъ ускореній отъ времени, т.-е. о ходѣ измѣненій ихъ съ временемъ. Разсмотрѣніемъ какъ этого вопроса, такъ и вопроса объ измѣненіи скорости ϑ со временемъ, мы теперь непосредственно и займемся.

§ 22. Опредѣленіе зависимости угловыхъ скоростей ϑ и угловыхъ ускореній $d\vartheta/dt$ кривошипа AO отъ времени.

Ради простоты разсужденій, предположимъ, что данный намъ механизмъ имѣетъ въ числѣ своихъ звеньевъ нѣкоторый кривошипъ AO, вращающійся вокругъ неподвижной оси O, и допустимъ, что мы опредѣлили рядъ значеній ϑ и $d\vartheta/dt$ этого кривошипа, соотвѣтствующихъ ряду послѣдовательныхъ, заранѣе выбранныхъ положеній механизма. Остается неизвѣстной только зависимость этихъ факторовъ отъ времени, т.-е. ходъ измѣненій ихъ съ време-

нем. Определить эту зависимость необходимо, ибо только по выяснении ея можно будет составить себе полное представление о движении нашего механизма. Для решения поставленной задачи будем рассуждать так:

Назовем угол отклонения кривошипа от начального положения его через α. Тогда можем написать, что угловая скорость ϑ кривошипа выражается так:

$$\vartheta = \frac{d\alpha}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Отсюда находим, что

$$dt = \frac{d\alpha}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta} . d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Поэтому, вообще,

$$t = \int \frac{1}{\vartheta} d\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

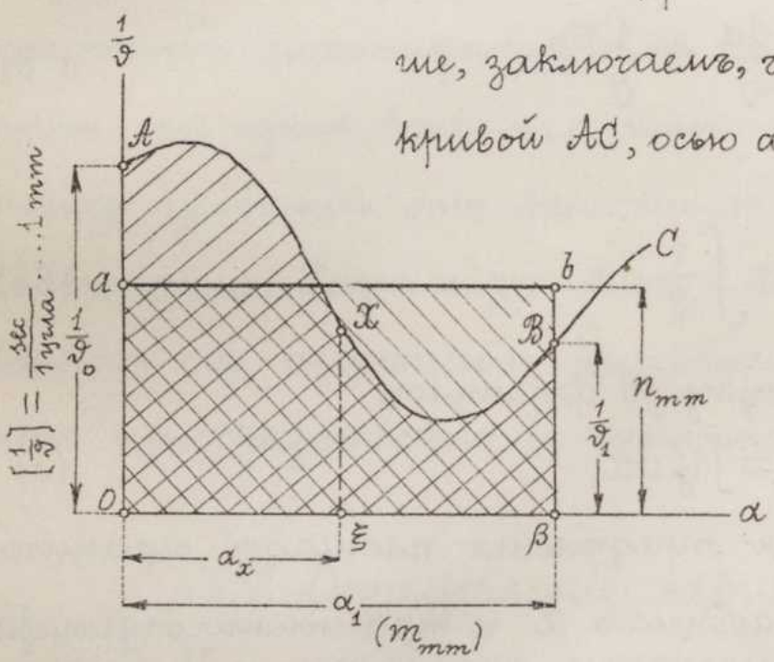
Сопоставляя эту формулу с формулой

$$s = \int y \, dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

служащей в геометрии для определения площадей, ограниченных кривой $y = f(x)$, осью абсцисс x и крайними ординатами y_1 и y_2, заключаем, что время t может быть определено, как площадь, ограниченная кривой, ординатами коей служат величины $1/\vartheta$, обратныя угловым скоростям кривошипа, осью абсцисс α и крайними ординатами. Сообразно с этим, для определения t можно поступать так:

Некоторую прямую $O\alpha$ (фиг. 163) принимаем за ось абсцисс и станем откладывать по ней в некотором определенном масштабе углы α поворота кривошипа AO, считая от некоторого начального положения его, изображенного нами точкой O. Так как теперь величины ϑ можно

считать извѣстными для каждаго положенія механизма, т.-е. для каждаго угла отклоненія кривошипа AO, то будетъ извѣстна для каждаго отклоненія α_x кривошипа и соотвѣтствующая величина $1/\vartheta$; откладывая ее въ видѣ ординаты, въ масштабѣ, положимъ, sec/1 угла . . . 1 mm, при концѣ ξ соотвѣтствующей абсциссы α_x, получимъ нѣкоторую точку X; рядъ такихъ точекъ, соединенныхъ непрерывной линіей, дастъ намъ кривую измѣненій величины $1/\vartheta$ въ зависимости отъ измѣненія угла α. Пусть это будетъ нѣкоторая кривая $AXBC$ (фиг. 163). Согласно сказанному выше, заключаемъ, что площадь, ограниченная кривой AC, осью абсциссъ 0α и какими-либо двумя ординатами, дастъ собою время, нужное для того, чтобы скорость, дававшая крайнюю лѣвую ординату, перешла въ скорость, дававшую крайнюю правую. Такъ, напримѣръ, пусть въ начальный моментъ угловая скорость кривошипа AO была равна ϑ_0, а при отклоненіи кривошипа на уголъ α_1 оказалась равной ϑ_1. Пусть, далѣе, величина $1/\vartheta_0$ въ нѣкоторомъ масштабѣ изображается ординатой $0A$, а величина $1/\vartheta_1$ — ординатой βB. Тогда можно будетъ сказать, что время, потребовавшееся механизму для того, чтобы скорость ϑ_0 перешла въ ϑ_1, дается площадью $0AXB\beta$. Пусть, спрямивъ эту площадь,



$[\alpha] = 1$ угла . . . . 1 mm.

Фиг. 163.

мы нашли, что она равна площади прямоугольника $0a\beta\beta$ съ основаніемъ 0β, равнымъ $m \times (1 \text{ угла})$, и высотой $0a$, равной $n \times (\sec / 1 \text{ угла})$; тогда и окажется, что площадь 0β равна $mn \sec$, и, значитъ, упомянутый переходъ потребовалъ $mn \sec$.

Произведя подобный подсчетъ для ряда абсциссъ a_x, найдемъ времена, требующіяся для перехода однихъ скоростей въ другія, и, значитъ, выяснимъ связь скоростей ϑ съ временемъ. Такъ какъ, далѣе, для каждаго положенія кривошипа можно опредѣлить и величину углового ускоренія $d\vartheta/dt$, то значитъ, можно будетъ теперь же выяснить связь съ временемъ и для этого фактора.

Изложенный способъ является, однако, непримѣнимымъ тамъ, гдѣ ϑ мало или равно нулю, — въ этихъ случаяхъ ординаты $1/\vartheta$ становятся очень большими или даже безконечно-большими; пользованіе графическимъ методомъ здѣсь крайне затрудняется. Въ этихъ случаяхъ удобнѣе обратиться къ использованію угловыхъ ускореній $d\vartheta/dt$, что выполняется такъ:

Несомнѣнно, что угловое ускореніе $d\vartheta/dt$ всегда представляетъ собою нѣкоторую функцію угловой скорости ϑ, такъ что всегда можно написать, что

$$\frac{d\vartheta}{dt} = f(\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$dt = \frac{d\vartheta}{f(\vartheta)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

такъ что

$$t = \int \frac{1}{f(\vartheta)} d\vartheta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66')$$

что можно переписать иначе такъ:

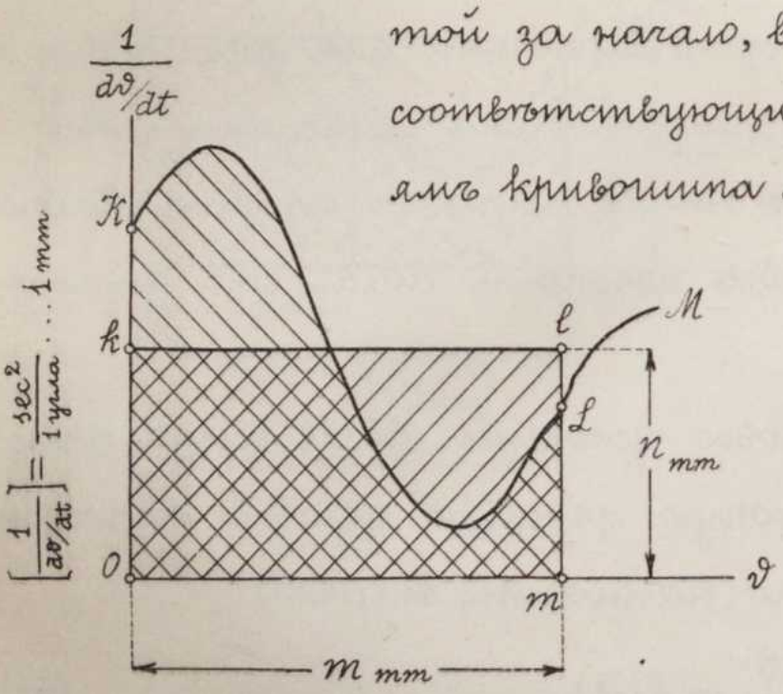
$$t = \int \frac{1}{d\vartheta/dt}\, d\vartheta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Сопоставляя это выраженіе съ формулой площади:

$$s = \int y\, dx,$$

видимъ, что и въ этомъ случаѣ время можетъ быть выражено площадью, ограниченною осью абсциссъ ϑ, крайними ординатами и кривой, абсциссами которой служатъ угловыя скорости ϑ кривошипа, а ординатами — величины $1/\frac{d\vartheta}{dt}$, обратныя угловымъ ускореніямъ. Такимъ образомъ, въ данномъ случаѣ вычисленіе t можетъ быть произведено такъ:

Принимая за ось абсциссъ прямую $O\vartheta$ (фиг. 164), откладываемъ по ней, начиная отъ какой либо точки O, принятой за начало, величины угловыхъ скоростей, соотвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ кривошипа AO. Ординатами будутъ служить величины $\frac{1}{d\vartheta/dt}$, обратныя угловымъ ускореніямъ, соотвѣтствующимъ тѣмъ же положеніямъ кривошипа. Соединяя концы такъ отложенныхъ ординатъ непрерывной линіей, получимъ кривую KLM, которая и можетъ служить въ цѣляхъ опредѣленія искомаго времени. Такъ, напримѣръ, время, нужное для того, чтобы угловая скорость ϑ кривошипа достигла величины Om, опредѣлится площа-



Фиг. 164.

дью $OK2m$. Если прямоугольникъ, равновеликій ей, при одномъ и томъ же основаніи Om, равномъ m мм, т.-е. $m \frac{\text{един. угла}}{\text{sec}}$, имѣетъ высоту Ok, равную n мм, т.-е. $n \frac{\text{sec}^2}{\text{един. угла}}$, то ясно, что площадь этого прямоугольника будетъ равна mn sec,—таково будетъ искомое время.

Что касается масштабовъ, то надо замѣтить, что измѣреніе ϑ есть (единица угла/sec), а измѣреніе углового ускоренія $d\vartheta/dt$ есть (един. угла/sec^2), въ виду чего измѣреніе величины $\frac{1}{d\vartheta/dt}$ есть (sec^2/един. угла), какъ это и было написано выше. За единицу угла,—подъ этимъ угломъ здѣсь разумѣется уголъ поворота кривошипа AO, обозначенный нами выше черезъ α,— берется обычно уголъ въ $180°/\pi$, равный $57°17'$....

Замѣтимъ кстати, что основное уравненіе (66) можетъ быть получено еще такъ:

Имѣемъ тождество

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Отсюда находимъ, что

$$dt = d\vartheta . \frac{dt}{d\vartheta} = d\vartheta . \frac{1}{d\vartheta/dt},$$

послѣ чего оказывается, что

$$t = \int \frac{1}{d\vartheta/dt} d\vartheta,$$

—получается то же уравненіе (66).

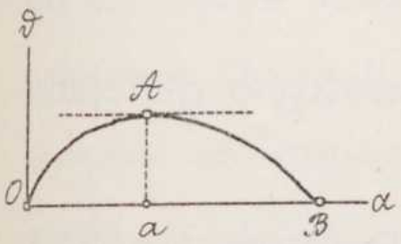
Изложенные пріемы подсчета t важны въ томъ отношеніи, что позволяютъ намъ весьма просто и достаточно точно выяснить вопросъ о продолжительности такъ называемаго періода пуска въ ходъ, т.-е. промежутка времени, требующагося механизму для того, чтобы онъ, выйдя въ нѣкоторый начальный моментъ изъ начальнаго состоянія, сталъ, наконецъ, двигаться установившимся движеніемъ, т.-е. правильно-періодически. Весьма любопытными являются во-

просы о продолжительности пуска въ ходъ у двигателей аэропланныхъ типовъ, съ винтами, у пароходныхъ машинъ и Т.д.

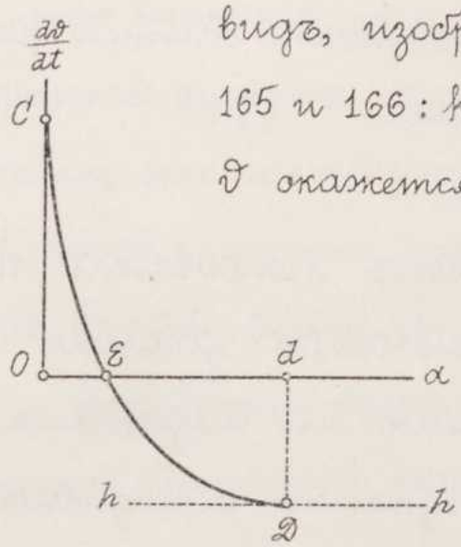
Въ трехъ послѣднихъ параграфахъ мы намѣтили главнѣйшія задачи изслѣдованія механизма, а именно: задачи объ опредѣленіи скоростей и ускореній механизма, подчиненнаго дѣйствію данныхъ силъ, а также задачу объ опредѣленіи зависимости этихъ двухъ факторовъ (скоростей и ускореній) отъ времени. Задачи эти имѣли своей цѣлью изслѣдованіе какъ періода пуска въ ходъ, такъ и періода установившагося движенія. Хотя для практики наибольшій интересъ представляетъ изслѣдованіе періода установившагося движенія, тѣмъ не менѣе изслѣдованіе періода пуска въ ходъ также можетъ имѣть огромный практическій интересъ, если мы имѣемъ дѣло съ проектируемой машиной, ибо всегда очень важно знать, пойдетъ ли, вообще говоря, наша машина, можетъ ли она двигаться установившимся движеніемъ. Отвѣтъ на этотъ вопросъ дается теоремой живыхъ силъ и даваемой ею діаграммой скоростей. Дѣло въ томъ, что въ періодѣ пуска въ ходъ угловыя скорости ϑ кривошипа, по самому существу дѣла, должны все время возрастать отъ нуля до нѣкоторой опредѣленной величины, т.-е. должны быть все время отличными отъ нуля (не считая, конечно, начальнаго момента, когда механизмъ только трогается съ мѣста). Значитъ, разъ діаграмма скоростей показываетъ намъ, что во время періода пуска въ ходъ въ нѣкоторомъ положеніи механизма (не въ начальномъ) угловая скорость ϑ кривошипа принимаетъ нулевое

значеніе, то отсюда будетъ слѣдовать, что механизмъ, дойдя до этого положенія, изъ него уже затѣмъ выйти не сможетъ и остановится; въ этотъ моментъ прекращается не только періодъ пуска въ ходъ, но и, вообще, самое движеніе механизма.

Кривыя измѣненій ϑ и $d\vartheta/dt$ могутъ имѣть здѣсь видъ, изображенный на фиг. 165 и 166: кривая OAB скоростей ϑ окажется, въ концѣ концовъ, подходящей къ оси $O\alpha$ и въ нѣкоторый моментъ B ее пересѣкающей; кривая же CD угловыхъ ускореній $\frac{d\vartheta}{dt}$

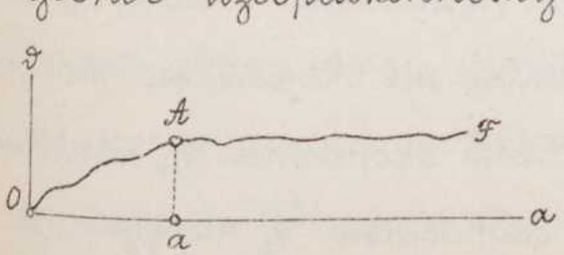


Фиг. 165.



Фиг. 166.

укажетъ, что эти ускоренія все время убывали, приняли нулевое значеніе въ моментъ E, соотвѣтствующій максимальной скорости ϑ_x въ моментъ a (тотъ же, что и E), и дальше продолжали убывать, достигнувъ отрицательнаго максимума въ точкѣ D, въ моментъ d, соотвѣтствующій B. Само собою разумѣется, что видъ кривыхъ ϑ и $d\vartheta/dt$ можетъ быть и отличенъ отъ приведенныхъ выше, но сущность дѣла останется той же: разъ кривая скоростей ϑ имѣетъ теченіе, подобное изображенному на фиг. 165, машина не пойдетъ,



Фиг. 167.

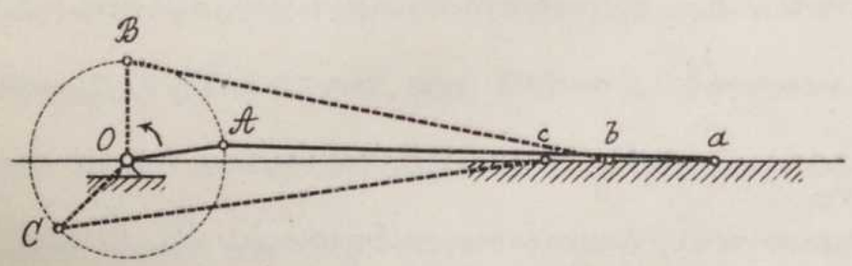
—для возможности правильнаго непрерывнаго хода ея необходимо, чтобы кривая ϑ за періодъ пуска имѣла видъ, подобный кривой OA

на фиг. 167; за точкой A начинается періодъ правильнаго непрерывнаго движенія нашей машины, изображаемый кривой AF.

Этими бѣглыми замѣчаніями мы и закончимъ разборъ вопроса объ опредѣленіи скоростей и ускореній и перейдемъ къ вопросу объ обезпеченіи правильной періодичности въ ходѣ машины и возможно большей равномѣрности вращенія ея коренного вала.

§ 23. Подсчетъ маховика помощью діаграммы тангенціальныхъ усилій.

Движеніе машины мы называемъ установившимся тогда, когда наступаетъ періодичность возврата скоростей, т.-е. когда скорости точекъ механизма повторяются при переходѣ механизма черезъ одни и тѣ же положенія. Такимъ образомъ, если у насъ имѣется, допустимъ, механизмъ обыкновенной паровой машины, изображенный на фиг. 168, то движеніе ея можно будетъ признать



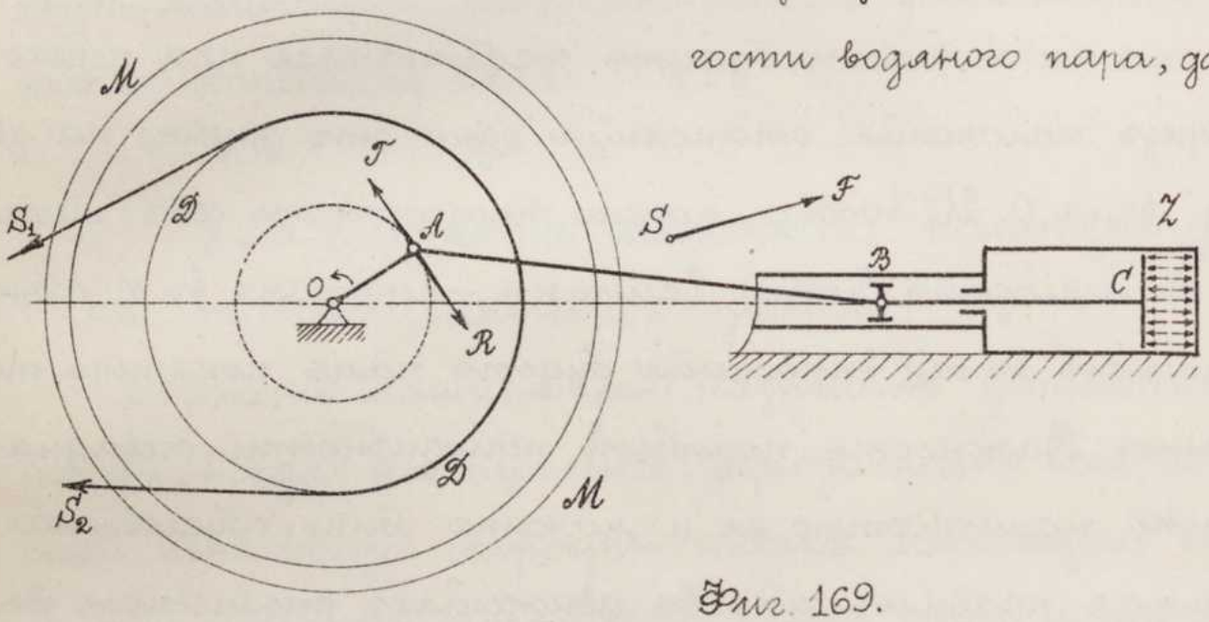
Фиг. 168.

установившимся или, какъ говорятъ иначе, правильно-періодическимъ лишь тогда, когда во время его окажется, что каждый переходъ механизма черезъ положеніе OAa сопровождается каждый разъ одной и той же скоростью точки A, одной и той же величиной угловой скорости ω_A кривошипа OA, одной и той же линейной скоростью v_A ползуна a и т. д.; каждый переходъ черезъ положеніе OBb — одной и

той же скоростью пальца кривошипа B, одной и той же скоростью v_b ползуна b и т. д. Въ этихъ простѣйшихъ случаяхъ говорятъ, что періодъ дѣйствія нашей машины равенъ одному обороту коренного вала O. Иногда встрѣчаются періоды иной величины; такъ, напримѣръ, въ четырехтактныхъ двигателяхъ внутренняго сгоранія періодъ равенъ двумъ оборотамъ,—это значитъ, что въ такихъ механизмахъ одни и тѣ же скорости будутъ наблюдаться при переходѣ его черезъ положенія, отстоящія одно отъ другого на два оборота вала O. И, вообще, можно представить себѣ механизмъ съ періодомъ любой величины,—періодомъ въ n оборотовъ,—смыслъ этого выраженія будетъ намъ понятенъ теперь вполнѣ. Важность подобной періодичности очевидна, ибо только наличностью ея и можетъ быть обусловлена необходимая правильность въ движеніяхъ различныхъ звеньевъ и деталей машины.

Условія періодичности были въ главныхъ чертахъ разсмотрѣны нами въ введеніи къ настоящему курсу,—см. стр. 7–9; сводятся они, какъ извѣстно, къ требованію, чтобы въ теченіе каждаго полнаго періода работа силъ движущихъ была въ точности равна работѣ сопротивленій, полезныхъ и вредныхъ. Въ дальнѣйшемъ мы и будемъ предполагать, что силы, дѣйствующія въ данной машинѣ, этому условію удовлетворяютъ, такъ что машина эта можетъ двигаться періодически, и вопросъ о движеніи ея могъ бы почитаться исчерпаннымъ, если бы обычно къ каждой машинѣ—двигателю не предъявлялось одного весьма существеннаго требованія, а именно,—требованія равномѣрности

вращенія коренного вала. Разсмотрѣнію этого требованія мы отведемъ какъ текущій параграфъ нашего курса, такъ и слѣдующій. При этомъ, ради большей наглядности, предположимъ, что разсмотрѣнію нашему подлежитъ нѣкоторый паровой двигатель простѣйшаго кривошипнаго типа, схематически изображенный на фиг. 169. Силами, въ немъ дѣйствующими, являются силы упругости водянаго пара, дающія



Фиг. 169.

на поршень и заставляющія его перемѣщаться внутри цилиндра Z. Помощью кривошипнаго механизма OABC это прямолинейно-возвратное движеніе поршня преобразовывается въ непрерывное вращательное движеніе кривошипа и, значитъ, наглухо связаннаго съ нимъ главнаго, „коренного", вала O. Обычно на этотъ валъ наглухо насаживается ременной шкивъ D, передающій работу на пріемный раздаточный фабричный валъ, либо на валъ машины-орудія (напр. станка для обработки металловъ и т. п.), динамомашины, насоса или какого-либо другого пріемника и преобразователя энергіи. Передача эта можетъ быть выполнена помощью безконечнаго ремня или какъ-нибудь иначе, но въ какой бы формѣ мы ее ни выполнили, а при этомъ всегда

приходится считаться съ тѣмъ основнымъ требованіемъ, что, для возможности полученія наибольшаго полезнаго эффекта, пріемный валъ машины-орудія всегда долженъ вращаться съ нѣкоторой опредѣленной постоянной угловой скоростью. Такъ, напримѣръ, токарный станокъ будетъ работать наиболѣе продуктивно лишь при нѣкоторой опредѣленной скорости рѣзца относительно обтачиваемаго предмета, въ силу чего измѣненія этой скорости являются неэкономичными и, значитъ, нежелательными. Отсюда слѣдуетъ, что эти скорости должны быть постоянными, вслѣдствіе чего должна оставаться постоянной и скорость вращенія пріемнаго вала. Подобнымъ же образомъ, валъ динамомашины, вырабатывающей токъ опредѣленной силы и напряженія, долженъ быть вращаемъ съ опредѣленнымъ числомъ оборотовъ въ единицу времени и, при томъ, непремѣнно равномѣрно, ибо каждое колебаніе угловой скорости его сейчасъ же повлечетъ за собою колебаніе напряженія въ сѣти, обслуживаемой этой динамо, и т. д. Если теперь принять во вниманіе, что передача отъ постоянной скорости къ подобной осуществляется легко, а отъ перемѣнной къ постоянной лишь съ большими затрудненіями практическаго характера, то и станетъ понятнымъ, почему отъ каждой машины-двигателя требуютъ, чтобы коренной валъ ея вращался какъ можно равномѣрнѣе, и въ этомъ отношеніи машина-двигатель тѣмъ ближе будетъ подходить къ идеалу, чѣмъ равномѣрнѣе будетъ вращаться во время работы ея коренной валъ.

Нетрудно сообразить, чѣмъ можетъ быть вызываема

и чѣмъ обусловливается неравномѣрность вращенія вала двигателя. Дѣло въ томъ, что система коренного вала движется подъ воздѣйствіемъ, съ одной стороны, ряда силъ дѣйствующихъ, а съ другой – силъ различныхъ сопротивленій. Ясно, что равномѣрное вращеніе кривошипа можетъ имѣть мѣсто только тогда, когда въ каждый отдѣльный моментъ имѣетъ мѣсто равенство между моментами этихъ силъ. Обычно такого равенства не наблюдается, и за одинъ промежутокъ времени преобладаютъ силы дѣйствующія, а за другой – силы сопротивленія; ясно, что въ первомъ случаѣ система вала будетъ ускорять свое вращеніе, а во второмъ – замедлять его Такимъ образомъ, появляется вопросъ о регулированіи вращенія коренного вала, и сформулировать этотъ вопросъ можно такъ:

Имѣется нѣкоторый кривошипный механизмъ, система коего находится подъ воздѣйствіемъ ряда силъ дѣйствующихъ и силъ сопротивленій, вызывающихъ движеніе этого механизма и вращеніе его коренного вала. Принимая, что силы, дѣйствующія на систему вала, даютъ, вообще говоря, пару, отличную отъ нуля, и, значитъ, вращаютъ валъ неравномѣрно, мы и ставимъ себѣ задачей обезпеченіе равномѣрности этого вращенія, если не совершенной, то, по крайней мѣрѣ, такой, чтобы колебанія угловой скорости ϑ_0 вала не превосходили извѣстной величины. Разрѣшеніемъ этой задачи мы теперь и займемся.

Прежде всего, выяснимъ, какимъ образомъ можно выразить и опредѣлить формулой отклоненія угловой скорости вала отъ нормы. Надо сказать, что въ число начальныхъ

данныхъ, полагаемыхъ въ основу расчета двигателя, всегда входитъ число n оборотовъ коренного вала въ минуту, которое онъ долженъ дѣлать при выполненіи задаваемой заранѣе работы. По этому числу n нетрудно вычислить ту постоянную угловую скорость ϑ_0, съ которой долженъ былъ бы вращаться валъ данной машины, если бы онъ могъ вращаться равномѣрно. Эта скорость ϑ_0, называемая средней угловой скоростью, можетъ быть подсчитана по извѣстной формулѣ:

$$\vartheta_0 = \frac{\pi n}{30}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Предположимъ, что требованіе періодичности нашей машиной выполняется вполнѣ. Въ такомъ случаѣ окажется, что въ теченіе каждаго отдѣльнаго періода скорости вала будутъ колебаться между нѣкоторыми предѣлами, которые мы обозначимъ черезъ Ω_M и ω_m, гдѣ Ω_M есть наивысшая скорость, наблюдаемая въ каждомъ періодѣ, а ω_m — наименьшая, наинизшая. На эти-то предѣльныя скорости мы и накладываемъ теперь требованіе, чтобы разность ихъ $(\Omega_M - \omega_m)$, т.-е. размахъ, амплитуда колебаній скоростей вала не превосходила опредѣленной малой доли отъ средней скорости ϑ_0, т.-е. чтобы существовало соотношеніе:

$$\Omega_M - \omega_m = \varepsilon \vartheta_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

гдѣ ε есть нѣкоторая малая дробь, называемая коэффиціентомъ неравномѣрности; она представляетъ собою число отвлеченное и задается заранѣе, сообразно съ условіями работы машины. Такъ, для лѣсопилокъ ε принимается равнымъ $1/20$, для фабричныхъ машинъ — $(1/40 - 1/50)$, для динамомашинъ — $(1/200 - 1/250)$, и т.д.

Далѣе, условно принимается, что

$$\Omega_м + \omega_т = 2\vartheta_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

т.-е. что средняя ариѳметическая изъ крайнихъ угловыхъ скоростей системы вала равна какъ разъ средней угловой скорости ϑ_0. Это предположеніе, въ общемъ, достаточно близко къ истинѣ.

Перемножая соотношенія (68) и (69), получаемъ формулу

$$\Omega_м^2 - \omega_т^2 = 2\varepsilon\vartheta_0^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

которой намъ придется воспользоваться въ дальнѣйшемъ.

Ясно, что, разъ валъ долженъ вращаться возможно равномѣрнѣе, то это иными словами значитъ, что угловое ускореніе этого вала, $d\vartheta/dt$, должно оставаться, вообще говоря, очень малымъ (по абсолютной величинѣ) и лишь незначительно отличающимся отъ нуля. Это обстоятельство даетъ намъ указаніе на тотъ путь, которымъ нужно идти для достиженія намѣченной цѣли. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Выше, опредѣляя угловое ускореніе $d\vartheta/dt$ кривошипа AO, мы пришли къ формулѣ:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Sigma m_x + \Sigma m(\mathfrak{F}_s)_{\vartheta=\text{const}}}{J_0}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Подъ J_0 здѣсь разумѣется моментъ инерціи фигуры, изображающей въ планѣ скоростей нашъ механизмъ, причемъ моментъ этотъ вычисляется относительно полюса плана скоростей. Представимъ себѣ теперь, что массы, связанныя во-едино съ валомъ, какъ-то: шкивы, маховики и т. д., выдѣлены нами въ отдѣльную группу, и моментъ инерціи этой группы (опять относительно полюса плана скоростей) мы обозначили черезъ J_0, а моментъ инерціи всего оставша

гося (кривошипнаго механизма и проч.) — черезъ i_0, такъ что имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\mathcal{J}_0 = J_0 + i_0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Нетрудно видѣть, что, при одномъ и томъ же значеніи ϑ величина дроби, стоящей въ правой части соотношенія (62), будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ, при одномъ и томъ же i_0, больше J_0, т.-е. чѣмъ больше моментъ инерціи частей, сидящихъ на валу, и, очевидно, это J_0 всегда можно подобрать настолько большимъ, что величина $d\vartheta/dt$ окажется равна любой малой дроби δ, заранѣе выбранной. Такимъ образомъ, средство для уменьшенія углового ускоренія $d\vartheta/dt$ коленного вала найдено, — оно состоитъ въ посадкѣ на валъ деталей, настолько массивныхъ, чтобы моментъ инерціи ихъ J_0 имѣлъ значеніе, достаточное для полученія желательно малой величины ускоренія $d\vartheta/dt$. Ясно, наконецъ, что нулемъ все время $d\vartheta/dt$ оставалось бы тогда, если бы или $\mathcal{J}_0$ было безконечно большимъ, или числитель дроби (62) оставался бы все время равнымъ нулю; ни того, ни другого осуществить на практикѣ нельзя, почему о полной равномѣрности хода не приходится даже и говорить. Конечно, въ отдѣльные моменты движенія ускореніе $d\vartheta/dt$ можетъ принимать нулевыя значенія; это будетъ въ тѣ моменты, когда ϑ переходитъ черезъ maximum или minimum своихъ значеній, что будетъ для тѣхъ положеній кривошипа, когда числитель дроби (62) обращается въ нуль.

Массы, насаживаемыя на валъ для полученія должной величины $d\vartheta/dt$, могутъ имѣть различныя внѣшнія формы; удобнѣе всего, однако, давать имъ такія формы, при

которыхъ ось вращенія ихъ, т.-е. ось вала, оказалась бы совпадающей съ одной изъ свободныхъ осей инерціи насаживаемаго нами тѣла. Такихъ формъ существуетъ безконечно много, ибо все это будутъ формы, симметричныя относительно осей инерціи. Самой простой для практическаго исполненія является цилиндрическая форма, и мы обычно выполняемъ нашу деталь, называемую маховикомъ, въ видѣ круглаго массивнаго кольца цилиндрической формы, а сопряженіе его съ валомъ устанавливаемъ помощью ряда спицъ, соединяющихъ это кольцо съ втулкой, наглухо закрѣпляемой на валу помощью шпонки. При расчетахъ, особенно приблизительныхъ, подсчету подвергается одинъ лишь этотъ ободъ, спицы же и втулка изъ разсмотрѣнія исключаются. Приведемъ теперь одинъ изъ распространеннѣйшихъ способовъ подсчета размѣровъ этого обода, — одинъ изъ способовъ расчета маховиковъ. Основанъ онъ на слѣдующихъ очевидныхъ соображеніяхъ:

Среди сопротивленій, которыя приходится преодолѣвать дѣйствующимъ силамъ при работѣ ихъ въ движущейся машинѣ, видную роль играетъ внѣшнее сопротивленіе, для преодолѣнія работы котораго и предназначается наша машина. Предположивъ, что оно приложено къ окружности ременного шкива $\mathfrak{B}$ (фиг. 169), можемъ написать его выраженіе въ функціи натяженій S ремня, а именно:

$$r = S_2 - S_1,$$

гдѣ S_2 есть натяженіе ведущей части ремня, а S_1 — ведомой. Воздѣйствіе этого усилія r передается черезъ си-

стему шкива, вала и кривошипа на палецъ этого послѣдняго, вызывая здѣсь появленіе тангенціальнаго сопротивленія R, величину коего можно найти, замѣчая, что моментъ этой силы R долженъ быть въ точности равенъ моменту сопротивленія r. Такимъ образомъ, имѣетъ мѣсто уравненіе

$$R.\overline{AO} = r.\rho_D,$$

гдѣ ρ_D есть радіусъ шкива D, т.-е. плечо силы r, а $\overline{AO}$ – плечо силы R. Отсюда находимъ, что

$$R = r.\frac{\rho_D}{AO}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Такъ выражается дѣйствительное тангенціальное сопротивленіе, дающее моментъ, равный моменту внѣшняго сопротивленія и противодѣйствующее вращенію системы вала O. Это усиліе, будучи направлено перпендикулярно радіусу AO пальца кривошипа и, значитъ, касательно къ окружности, описываемой пальцемъ A кривошипа, называется поэтому тангенціальнымъ и можетъ или все время оставаться постояннымъ, или же мѣняться; ради простоты разсужденій мы предположимъ его постояннымъ.

Если въ планъ скоростей плечо AO изображается отрѣзкомъ ao, то сопротивленіе R, будучи перенесено въ планъ скоростей, дастъ моментъ $(-R.ao)$, входящій въ составъ общей суммы Σm_x, представляющей сумму моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на нашу систему; замѣтимъ, что знакомъ минусъ мы снабдили этотъ моментъ потому, что онъ противодѣйствуетъ вращенію системы AO. Такимъ образомъ, можно написать, что

$$\Sigma m_x = -R.\overline{ao} + \Sigma_1 m_x,$$

гдѣ сумма $\Sigma_1 m_x$ представляетъ собою сумму моментовъ всѣхъ дѣйствующихъ силъ, за исключеніемъ силы полезнаго сопротивленія R, моментъ которой выдѣленъ отдѣльно.

Предположимъ теперь, что нашъ механизмъ, снабженный уже маховикомъ, движется подъ воздѣйствіемъ ряда силъ. Зависимость между этими силами и силами инерціи, возникающими здѣсь при движеніи механизма, для какого-либо изъ его положеній, — положимъ, для изображеннаго на фиг. 169, — можетъ быть выражена уравненіемъ:

$$\Sigma_1 m_x + \Sigma m (\mathcal{F}_s)_{\vartheta=const} - R \cdot \overline{ao} - J_o \, d\vartheta/dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Оказывается, такимъ образомъ, что, при наличности даннаго полезнаго сопротивленія R, кривошипъ AO вращается неравномѣрно, — угловое ускореніе $d\vartheta/dt$ его можетъ быть опредѣлено изъ уравненія (73). Возникаетъ, такимъ образомъ, вопросъ, при какомъ же значеніи тангенціальнаго сопротивленія кривошипъ могъ бы вращаться равномѣрно, съ постоянной угловой скоростью ϑ_o, желательной намъ и задаваемой заранѣе, — см. ур. (67) на стр. 453. Назовемъ величину этого идеальнаго тангенціальнаго сопротивленія, подставляемаго теперь вмѣсто дѣйствительнаго тангенціальнаго сопротивленія R, черезъ t. Будучи приложено въ той же точкѣ A, что и сила R, оно дастъ моментъ $(-t \cdot \overline{ao})$, вслѣдствіе чего уравненіе (73) перепишется теперь такъ:

$$\Sigma_1 m_x + \Sigma m (\mathcal{F}_s)_{\vartheta_o} - t \cdot \overline{ao} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Членъ $(-J_o \, d\vartheta/dt)$ выпадаетъ, ибо кривошипъ предполагается теперь вращающимся равномѣрно, такъ что $d\vartheta/dt = 0$. Сумма $\Sigma m (\mathcal{F}_s)_{\vartheta=const}$ переходитъ въ сумму $\Sigma m (\mathcal{F}_s)_{\vartheta_o}$, ибо те-

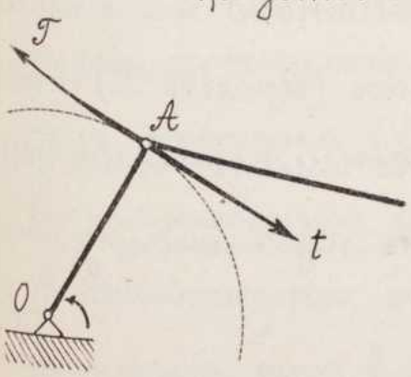
перь угловая скорость ϑ постоянна и равна ϑ_0.

Изъ (74) опредѣляется величина этого идеальнаго тангенціальнаго сопротивленія t, а именно:

$$t = \frac{\Sigma_1 m_x + \Sigma m (\mathcal{F}_s)_{\vartheta_0}}{\overline{AO}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Принимая во вниманіе, что каждая изъ суммъ, стоящихъ въ числителѣ, не представляетъ собою постоянной величины, а мѣняется отъ одного положенія къ другому, заключаемъ, что будетъ перемѣннымъ и это сопротивленіе t. Величину его можно опредѣлить для каждаго положенія механизма помощью ряда простыхъ геометрическихъ построеній и ариѳметическихъ подсчетовъ, предполагая все время, при опредѣленіи величины силъ инерціи $\mathcal{F}_s$, что угловая скорость кривошипа AO постоянна и равна ϑ_0.

Очевидно, что, разъ кривошипъ AO, испытывая на себѣ, при своемъ вращеніи, воздѣйствіе сопротивляющагося этому вращенію момента $(t \times AO)$, тѣмъ не менѣе вращается равномѣрно, то это значитъ, что этотъ сопротивляющійся моментъ $(t \times AO)$ уравновѣшивается нѣкоторымъ другимъ моментомъ, понуждающимъ кривошипъ ко вращенію, равнымъ $t \times AO$, но ему прямопротивоположнымъ. Можно представить себѣ, что этотъ дѣйствующій, вращающій моментъ дается нѣкоторой силой $\mathcal{T}$, равной сопротивленію t, ему противоположной и приложенной въ одной съ t точкѣ A (фиг. 170). Такого именно представленія о составѣ этого вращающаго, активнаго момента мы и будемъ



Фиг. 170.

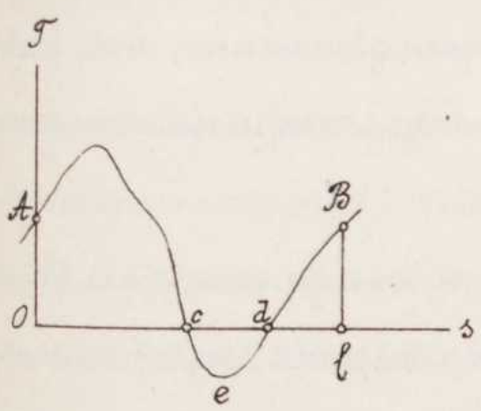
придерживаться въ дальнѣйшемъ. Принимая теперь во вниманіе, что вращеніе системы кривошипа вызывается и обусловливается воздѣйствіемъ на нашъ механизмъ всего комплекса силъ дѣйствующихъ и силъ инерціи, за исключеніемъ полезнаго сопротивленія R, теперь въ наше разсмотрѣніе не входящаго, можемъ сказать, что воздѣйствіе это, въ случаѣ равномѣрнаго вращенія кривошипа съ постоянной угловой скоростью ϑ_0, сводится къ появленію нѣкоторой опредѣленной силы T, приложенной въ точкѣ A перпендикулярно къ AO и, дающей, такимъ образомъ, моментъ $T \times AO$, вращающій систему кривошипа. Иными словами, сила T представляетъ собою давленіе, оказываемое механизмомъ на палецъ кривошипа при вращеніи этого послѣдняго съ постоянной угловой скоростью ϑ_0 подъ воздѣйствіемъ всѣхъ силъ, проявляющихъ свое дѣйствіе въ механизмѣ (за вычетомъ сопротивленія R). Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы имѣть дѣло со всѣмъ комплексомъ силъ, дѣйствующихъ на механизмъ, мы можемъ теперь, при разборѣ условій движенія кривошипа, ограничиться изслѣдованіемъ воздѣйствія на него этой тангенціальной силы T, ибо оказывается, что дѣйствіе этой силы на систему кривошипа AO вполнѣ эквивалентно дѣйствію на эту систему всего комплекса силъ дѣйствующихъ (кромѣ R) и силъ инерціи. Эта сила T называется тангенціальнымъ усиліемъ и, будучи равна по своей величинѣ идеальному сопротивленію t, такъ что

$$T = t,$$

выражается помощью уравненія (75), а именно:

$$T = \frac{\Sigma_1 m_x + \Sigma m (\mathfrak{F}_s)_{\vartheta_0}}{\overline{ao}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Непосредственный подсчетъ значеній T для разныхъ положеній кривошипа показываетъ, что, при движеніи этого послѣдняго съ постоянной угловой скоростью ϑ_0, величина T постоянной не остается, а отъ одного положенія кривошипа къ другому мѣняется. Согласно составу числителя дроби, стоящей въ правой части уравненія (76), можно сказать, что тангенціальное усиліе T представляетъ собою перемѣнную величину, зависящую какъ отъ положеній кривошипа, а значитъ, и механизма (членъ $\Sigma_1 m_x$), такъ и отъ величины угловой скорости ϑ_0 (членъ $\Sigma m (\mathfrak{F}_s)_{\vartheta_0}$). Нетрудно изобразить графически измѣненіе тангенціальныхъ усилій T при движеніи кривошипа. Для этого поступаемъ такъ:



Фиг. 171.

Дѣлимъ окружность, описываемую пальцемъ A кривошипа, на n равныхъ частей (12, 16, 24 и т. д.), беремъ положенія кривошипа, соотвѣтствующія моментамъ перехода пальца A черезъ точки дѣленія, и опредѣляемъ для каждаго изъ такъ выдѣлившихся n положеній кривошипа соотвѣтствующее значеніе T, пользуясь формулой (76). Представивъ себѣ теперь, что нѣкоторый отрѣзокъ $0l$ прямой $0s$ (фиг. 171) представляетъ собою выпрямленную окружность $(2\pi . \overline{OA})$, описываемую пальцемъ A кривошипа, дѣлимъ его на n равныхъ частей и принимаемъ, что каждая изъ точекъ дѣленія отрѣзка $0l$ соотвѣтствуетъ одной изъ точекъ дѣленія окружности (OA).

Возставляя теперь въ точкахъ дѣленія отрѣзка Ol перпендикуляры, откладывая на нихъ соотвѣтствующія значенія усилій T и соединяя концы получаемыхъ такимъ образомъ векторовъ непрерывной линіей, получаемъ нѣкоторую кривую $AcedB$, весьма наглядно изображающую ходъ измѣненій тангенціальнаго усилія T при непрерывномъ вращеніи кривошипа. Такъ какъ усилія T, опредѣляемыя по формулѣ (76), могутъ получаться какъ положительными, такъ отрицательными, то надо помнить, что положительными мы считаемъ тѣ изъ нихъ, которыя помогаютъ движенію кривошипа и, значитъ, направлены согласно соотвѣтствующей линейной скорости v_A пальца A, а отрицательными — тѣ, которыя этому движенію препятствуютъ и которыя, слѣдовательно, направлены противоположно скорости v_A. Положительныя значенія T, содѣйствующія движенію, мы, какъ всегда, откладываемъ вверхъ отъ оси Os, а отрицательныя — внизъ.

Положимъ, что въ нашемъ случаѣ оказалось, что кривая тангенціальныхъ усилій имѣетъ теченіе, изображенное на фиг. 171; мы видимъ, такимъ образомъ, что на участкѣ Oc тангенціальныя усилія, будучи положительными, все время помогали движенію, въ точкѣ c, какъ и дальше, въ точкѣ $\bar{a}$, обращаясь въ нуль, на участкѣ $c\bar{a}$, будучи отрицательными, препятствовали вращенію кривошипа, и, наконецъ, на участкѣ $\bar{a}l$, какъ положительныя, все это время поддерживали движеніе. Участковъ съ отрицательными тангенціальными усиліями, подобныхъ участку $c\bar{a}$, можетъ быть не одинъ, а нѣсколько, что зависитъ отъ характера

измѣненій движущихъ силъ (P) и силъ инерціи ($F_в$). Поэтому надо признать, что наличность большаго или меньшаго числа участковъ съ отрицательными тангенціальными усиліями ничего ненормальнаго собою не представляетъ и никакихъ недоразумѣній вызывать не должна.

Необходимо замѣтить, что, въ силу равенства усилій t и T, кривая AB даетъ въ то же время и ходъ идеальныхъ тангенціальныхъ сопротивленій t, такъ что площадь ($0Ac - cde + dBl$) представляетъ собою работу этихъ сопротивленій t за одинъ оборотъ вала. Принимая теперь во вниманіе, что, при наличности этихъ сопротивленій t кривошипъ вращается равномѣрно и что періодъ дѣйствія нашей машины равенъ одному обороту коренного вала, можемъ заключить, что за время каждаго такого періода приращеніе живой силы машины будетъ равно нулю, откуда непосредственно слѣдуетъ, что за каждый оборотъ вала (за каждый періодъ) работа дѣйствующихъ силъ P (безъ R) будетъ равна работѣ идеальныхъ тангенціальныхъ сопротивленій t или, что то же, работѣ тангенціальныхъ усилій T. Такимъ образомъ, оказывается, что площадь, образуемая кривой $Ace dB$, должна быть въ точности равна суммѣ площадей, изображающихъ работы всѣхъ дѣйствующихъ силъ (безъ R) за одинъ періодъ.

Строго говоря, работа силъ P, кромѣ преодолѣнія работы сопротивленій t, уходитъ еще на работу треній въ шарнирахъ, въ ползунѣ и проч., но мы, вообще говоря, при расчетахъ маховиковъ этихъ работъ во вниманіе не принимаемъ, хотя привлеченіе ихъ къ учету никакихъ

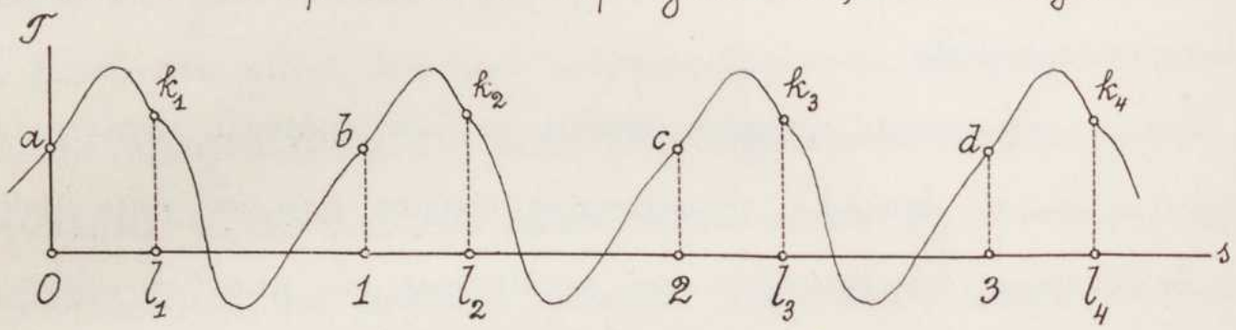
особыхъ трудностей собою бы не представило.

Упомянутое выше равенство площадей позволяетъ намъ весьма удобно и точно выполнять провѣрку правильности построенія кривой Г. Надо только помнить, что сравненіе этихъ площадей надо выполнять всегда для полнаго періода, а не для частей его. Дѣло въ томъ, что за доли періода работы эти, вообще говоря, будутъ неодинаковы, ибо, хотя, по предположенію нашему, кривошипъ вращается равномѣрно и его живая сила никакихъ измѣненій не претерпѣваетъ, но прочія части машины, какъ-то: шатунъ, ползунъ и др., движутся переменнымъ движеніемъ, въ виду чего живая сила ихъ будетъ испытывать то приростъ, то убыль, и, значитъ, часть работы силы P будетъ, вообще говоря, уходить на эти измѣненія живыхъ силъ, что, конечно, будетъ нарушать равенство между упомянутыми работами, и только за каждый цѣлый періодъ общее приращеніе живой силы становится равнымъ нулю и даетъ возможность работамъ силъ P и Г точно сравняться между собою. Очевидно, что при данныхъ условіяхъ приростъ живой силы за одинъ періодъ работы цѣликомъ исчерпывается общей убылью ея за тотъ же періодъ, такъ что доля работы силъ P, ушедшая на нѣкоторыхъ участкахъ періода на покрытіе убыли живой силы, будетъ возвращена машинѣ на остальныхъ, за счетъ имѣющаго мѣсто на нихъ увеличенія живой силы, и, значитъ, за каждый полный періодъ никакой траты работы силъ P на измѣненія живой силы не потребуется: работа силъ P за одинъ періодъ будетъ, въ концѣ концовъ, цѣликомъ пере-

дани на главный валъ за время того же самаго періода,—говоря суммарно, потерь работы, по пути передачи ея отъ поршня къ кривошипу не будетъ, и вся разница будетъ сводиться лишь къ тому, что распредѣленіе работъ по путямъ точекъ приложенія дѣйствующихъ силъ и сопротивленія t будетъ различно.-Вернемся теперь къ дальнѣйшему изученію кривой тангенціальныхъ усилій.

Наша машина предположена дѣйствующей періодически; вслѣдствіе этого кривая тангенціальныхъ усилій, при непрерывномъ вращеніи кривошипа съ постоянной угловой скоростью ω_0, течетъ такъ, что рядъ подъемовъ и паденій ея, имѣющій мѣсто за время одного какого-либо періода, повторяется затѣмъ въ томъ же порядкѣ, не измѣняя величины своихъ частей, съ каждымъ новымъ періодомъ, какъ это и изображено на фиг. 172: каждый изъ отрѣзковъ 01, 12, 23, .., оси абсциссъ изображаетъ здѣсь собою въ извѣстномъ масштабѣ выпрямленную окружность пальца кривошипа; всѣ эти отрѣзки, очевидно, между собою равны, и каждый изъ нихъ даетъ собою періодъ кривой тангенціальныхъ усилій при такомъ установившемся движеніи. Оказывается, что на участкѣ 2-3 кривая течетъ совершенно такъ же, какъ она текла на предыдущемъ участкѣ 1-2 или на начальномъ 0-1. Поэтому изученіе свойствъ этой кривой на участкѣ, большемъ періода, является совершенно излишнимъ, ибо тѣ заключенія, которыя получаются при разсмотрѣніи одного такого періода, цѣликомъ приложимы къ каждому изъ остальныхъ, безъ всякихъ перемѣнъ. Такимъ образомъ, мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ лишь одного какого-либо періода дви-

жения машины и соотвѣтствующаго ему участка кривой,— напримѣръ, періода 0–1 и соотвѣтствующаго ему участка ab или періода 1–2 и участка bc и т. д. Не слѣдуетъ, однако, упускать изъ виду, что такое упрощеніе изслѣдованія возможно лишь тогда, когда движеніе машины есть движеніе установившееся и правильно-періодическое, т.-е. когда



Фиг. 172.

всѣ скорости частей ея, ускоренія ихъ и т. д., мѣняются въ каждомъ періодѣ совершенно такъ же, какъ онѣ мѣнялись въ какомъ-либо одномъ изъ нихъ, принятомъ за основной. Это обстоятельство ведетъ къ ряду слѣдующихъ весьма важныхъ заключеній:

1) Прежде всего, оказывается, что механизмъ проходитъ черезъ одни и тѣ же скорости и ускоренія въ моменты, отстоящіе другъ отъ друга на время одного оборота;

2) Въ эти же моменты,— каковы, напримѣръ, моменты $l_1, l_2, l_3, \ldots$, гдѣ $l_1l_2 = l_2l_3 = \ldots = 01$,— величины тангенціальныхъ усилій принимаютъ одни и тѣ же значенія, равныя значенію тангенціальнаго усилія въ одинъ изъ такихъ моментовъ, такъ что танг. усиліе $l_1k_1 =$ усилію $l_2k_2 = l_3k_3 = \ldots$;

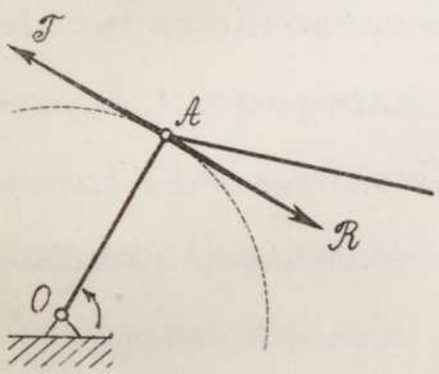
3) Въ виду тождественности частей ak_1b, bk_2c, ck_3d, .., кривой тангенціальныхъ усилій, соотвѣтствующихъ каждая новому періоду хода машины, площади, ограничиваемыя ими,

т.-е. площади типа $0ak_1b1l_10$, будутъ для каждаго періода одинаковы, а такъ какъ эти площади даютъ собою величины работы тангенціальныхъ усилій за соотвѣтствующее время, то можно поэтому сказать, что за время каждаго отдѣльнаго періода работа тангенціальныхъ усилій остается одинаковой и равной каждый разъ работѣ, выражаемой площадью $0ak_1b1l_10$, при чемъ, согласно пункту 2, ту же величину $0b$ будетъ имѣть работа каждаго періода s, откуда бы мы ни начали счетъ его, отъ 0 или отъ l_1; всегда, при произвольныхъ положеніяхъ точекъ 0 и l_1, имѣемъ, что площадь $0b$ равна площади l_1k_2, если только времена 01 и l_1l_2 равны. Это обстоятельство важно тѣмъ, что позволяетъ намъ выбирать начало 0 наиболѣе удобнымъ для насъ образомъ.

Все сказанное позволяетъ намъ ограничиться при нашихъ изслѣдованіяхъ разсмотрѣніемъ лишь какого-либо одного періода кривой тангенціальныхъ усилій, и въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить каждый разъ исключительно объ одномъ такомъ періодѣ,- напримѣръ, періодѣ 01 съ соотвѣтствующимъ ему участкомъ ab кривой тангенціальныхъ усилій.

Предположимъ, такимъ образомъ, что за время каждаго періода тангенціальныя усилія мѣняются по закону, изображаемому этой кривой ab. Величина ихъ, какъ видимъ, постоянной не остается, и, очевидно, для того, чтобы подъ дѣйствіемъ ихъ кривошипъ могъ вращаться равномѣрно, необходимо, чтобы по тому же закону ab мѣнялись и дѣйствительныя тангенціальныя сопротивленія, препятствую-

щія вращенію кривошипа. На дѣлѣ, однако, имѣетъ мѣсто нѣчто совершенно другое: тангенціальныя сопротивленія отъ внѣшнихъ силъ, сопротивляющихся вращенію кривошипа и ведомаго имъ вала, представляютъ собою усилія полезнаго сопротивленія, R, и, по условію, остаются постоянными за все время движенія механизма, такъ что кривая полезныхъ сопротивленій представляется, какъ это изображено на фиг. 134, — см. стр. 328, — прямой RR, параллельной оси абсциссъ и отстоящей отъ нея на величину силы R полезнаго сопротивленія.



Фиг. 173.

Такимъ образомъ, выходитъ, что въ то время, какъ сопротивленіе на коренномъ валу, приведенное къ пальцу кривошипа, не мѣняется, оставаясь постоянно равнымъ R, тангенціальное усиліе T со стороны механизма, заставляющее кривошипъ преодолѣвать это сопротивленіе, постоянно мѣняется по нѣкоторому опредѣленному закону. Слѣдовательно, палецъ A кривошипа въ каждый данный моментъ находится подъ дѣйствіемъ двухъ силъ, T и R, направленныхъ, вообще говоря, противоположно другъ другу и между собою неравныхъ, — равенство между ними можетъ имѣть мѣсто лишь въ отдѣльные моменты періода. Очевидно, что при такихъ условіяхъ система кривошипа равномѣрно вращаться не можетъ: въ зависимости отъ величины и направленія дѣйствующей на него результирующей тангенціальной силы $(T-R)$, — см. фиг. 173, — угловая скорость его будетъ то увеличиваться, при $T>R$, то уменьшаться, при $T<R$, колеблясь, при установившемся ходѣ машины, между извѣст-

ными предѣлами ω_{max} и ω_{min}. Такія колебанія угловой скорости вала являются, какъ мы уже говорили, совершенно нежелательными, и о способахъ уменьшенія ихъ до заранѣе поставленныхъ малыхъ размѣровъ мы и будемъ говорить въ дальнѣйшемъ. Очевидно, что, при неравномѣрномъ движеніи кривошипа истинныя тангенціальныя усилія будутъ отличны отъ идеальныхъ тангенціальныхъ усилій, имѣющихъ мѣсто при $\vartheta = \vartheta_0$, но эта разница будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ меньше эта неравномѣрность, и въ дальнѣйшемъ мы условно будемъ принимать, ради простоты изслѣдованій, что эта разница такъ мала, что ею можно пренебречь и, вмѣсто истинныхъ тангенціальныхъ усилій, имѣющихъ мѣсто при дѣйствительномъ перемѣнномъ ϑ, принимать, что на пальцѣ кривошипа дѣйствуютъ идеальныя тангенціальныя усилія T. Замѣтивъ это, продолжимъ наши изслѣдованія дальше:

Пусть нашъ механизмъ движется установившимся правильно-періодическимъ движеніемъ, періодъ коего, по предположенію нашему, равенъ одному обороту коренного вала. Пусть за одинъ такой періодъ кривая тангенціальныхъ усилій T представляется кривой $abc \ldots z$ (фиг. 174). Въ то же время кривая полезныхъ сопротивленій на валу представляется нѣкоторой прямой AB, относительно которой нетрудно показать, что, при условіи періодичности движенія и при данной кривой $abc \ldots z$, представляющей собою законъ измѣненія тангенціальныхъ усилій T, разстояніе ея отъ оси абсциссъ произвольнымъ быть не можетъ, — оно опредѣляется единственнымъ образомъ помощью слѣдующихъ очевидныхъ соображеній:

Обозначимъ точки пересѣченія кривой $ambc \ldots z$ съ прямой

AB цифрами 1,..,4. Періодъ движенія равенъ $OC=\delta$. Если въ концѣ C періода скорости массъ системы оказываются такими же, какими онѣ были въ началѣ O его, то это значитъ, что живая сила системы кривошипа съ его массами, сидящими на валу въ моменты (O) и (C) оказывается одинаковой, а приращеніе ея за весь періодъ δ равно нулю, т.-е.

$$\Sigma \frac{m}{2}(v_c^2 - v_o^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

ибо у всѣхъ этихъ массъ $v_c = v_o$. Но, по общей теоремѣ живыхъ силъ, приращеніе живой силы системы за извѣстный промежутокъ времени всегда равно алгебраической суммѣ работъ всѣхъ дѣйствующихъ здѣсь силъ и сопротивленій, выполненныхъ за то же время, т.-е.

$$\Sigma \frac{m}{2}(v_c^2 - v_o^2) = \Sigma l_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

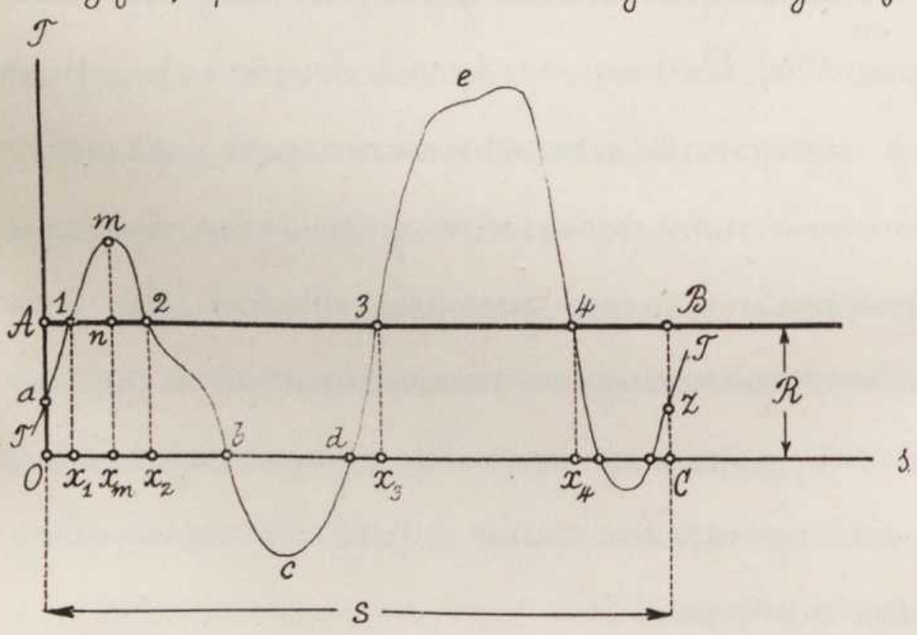
Обозначивъ работу дѣйствующихъ силъ черезъ $\mathcal{L}_1$, а работу сопротивленій черезъ $\mathcal{L}_2$, можемъ дать этому уравненію видъ:

$$\Sigma \frac{m}{2}(v_c^2 - v_o^2) = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2,$$

откуда, примѣнительно къ данному случаю, въ виду (a), находимъ равенство:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2, \quad . \quad . \quad (78)$$

говорящее, что при установившемся періодическомъ движеніи работа дѣйствующихъ силъ за каждый періодъ равна работѣ всѣхъ



Фиг. 174.

сопротивлений за тотъ же периодъ; съ этимъ результатомъ мы встрѣчались уже раньше,—см. стр. 9. Замѣчая теперь, что въ данномъ случаѣ работа $\mathfrak{L}_1$ силъ дѣйствующихъ (T) выражается площадью $Oab\ldots zC$, а работа $\mathfrak{L}_2$ сопротивленій (R) — площадью $OABC$ прямоугольника съ основаніемъ, равнымъ s-длинѣ окружности пальца кривошипа, и съ высотой, равной сопротивленію R, заключаемъ, что въ случаѣ установившагося правильно-періодическаго движенія объ эти площади должны быть одинаковы.

Допустимъ, что, планиметрировавъ площадь $Oab\ldots zC$ или подсчитавъ ее какимъ-либо другимъ путемъ, мы нашли, что она равна F. Въ такомъ случаѣ, пользуясь сдѣланнымъ выше замѣчаніемъ, можемъ весьма просто опредѣлить величину постояннаго полезнаго сопротивленія, необходимую для возможности установившагося движенія, написавъ соотношеніе:

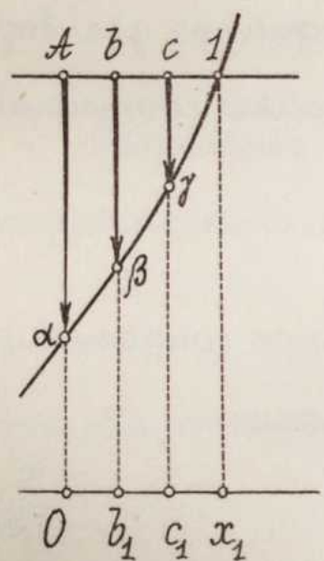
$$\text{площ.}\,Oab\ldots zC = F = R.s\,.$$

Отсюда находимъ, что искомое постоянное сопротивленіе R на пальцѣ кривошипа выражается такъ:

$$R = \frac{F}{s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Итакъ, въ то время какъ тангенціальное усиліе T со стороны механизма, дѣйствующее на палецъ кривошипа, при равномѣрномъ вращеніи системы кривошипа измѣняется по кривой $abc\ldots z$, сопротивленіе R этому вращенію, приведенное также къ пальцу кривошипа, остается постояннымъ,—законъ измѣненія его изображается прямой AB, параллельной оси Os и отстоящей отъ нея на вполнѣ опредѣленномъ разстояніи R, даваемомъ равенствомъ (79). Отсюда слѣдуетъ,

какъ мы объ этомъ уже говорили выше, что при такихъ условіяхъ о равномѣрности движенія кривошипа не можетъ быть и рѣчи, ибо равенство между противоположными по направленію силами T и R можетъ имѣть мѣсто въ данномъ случаѣ лишь въ моменты, соотвѣтствующіе точкамъ 1, 2, ..., пересѣченія кривой тангенціальныхъ усилій съ прямой полезнаго сопротивленія; въ остальные же моменты будемъ имѣть преобладаніе одной изъ этихъ силъ,—которой именно, на это укажетъ сопоставленіе кривой TT съ прямой AB. Выполняя его, видимъ, что на участкѣ Ox_1 пути пальца кривошипа преобладали силы сопротивленія R и, слѣдовательно, на всемъ этомъ участкѣ палецъ кривошипа находился подъ воздѣйствіемъ силъ, каждая изъ которыхъ была равна избытку



Фиг. 175.

сопротивленія R, дѣйствующаго противоположно скорости пальца кривошипа, надъ тангенціальнымъ усиліемъ T, дѣйствующимъ согласно этой скорости, а такъ какъ силы R остаются постоянными, характеризуясь прямой $A1$, а силы T мѣняются по закону кривой $a1$, то ясно, что избытки сопротивленій надъ усиліями характеризуются при своемъ измѣненіи отрѣзками ординатъ между кривой $a1$ и осью $A1$. Дѣйствительно, разсмотримъ нѣсколько детальнѣе этотъ участокъ $a1$, представленный на фиг. 175 въ нѣсколько большемъ масштабѣ. Выдѣливъ на пути Ox_1 пальца кривошипа двѣ какія-либо точки b_1 и c_1, проведя черезъ нихъ ординаты и назвавъ пересѣченія этихъ послѣднихъ съ кривой $a1$ и прямой $A1$ черезъ (β, γ) и (b, c), можемъ сказать,

что въ моментъ O сопротивленіе было равно OA, а тангенціальное усиліе .... Oa; значитъ, палецъ A находился подъ воздѣйствіемъ силы, равной разности этихъ силъ OA и Oa, т.-е. силы, выражаемой отрѣзкомъ Aa и направленной противъ скорости движенія пальца кривошипа. Въ моментъ b_1 палецъ кривошипа будетъ находиться подъ воздѣйствіемъ силы сопротивленія, выражаемой отрѣзкомъ bb_1 и опять направленной противъ скорости его. Въ моментъ c_1 эта результирующая сила выразится отрѣзкомъ cy и опять окажется силой сопротивленія, направленной противъ скорости пальца кривошипа. Въ моментъ x_1 обѣ силы R и T оказываются равными, и результирующая ихъ равна нулю.

Итакъ, на участкѣ Ox_1 пути пальца кривошипа результирующія силы представляютъ собою силы сопротивленія, направленныя противоположно скорости пальца A и изображаемыя отрѣзками типа bb_1, cy и т. д., т.-е. отрѣзками ординатъ, лежащими между прямой A1 и кривой a1. Отсюда вытекаетъ, что о величинѣ этихъ силъ и о ходѣ измѣненій ихъ можно составить себѣ совершенно точное представленіе, если примемъ теперь за ось абсциссъ прямую A1; тогда величина силъ дастся отрѣзками ординатъ отъ этой новой оси абсциссъ A1 до кривой a1. Это будетъ удобно еще и потому, что всѣ эти силы, являющіяся здѣсь силами сопротивленія и направленныя противъ движенія пальца кривошипа, окажутся отсчитываемыми внизъ отъ оси A1, что указано на фиг. 175 стрѣлками и является вполнѣ согласнымъ съ правиломъ отсчета силъ, принятомъ нами выше, — см. стр. 83, — ибо, если направленіе движенія точки, изображающей палецъ кривошипа, идетъ отъ A къ B, вправо, то силы, препятствующія этому

движению, согласно основным условиям, придется откладывать вниз от оси AB. На пути Ox_1 или, что то же, A1, силы сопротивления, действующия здесь на палец A, являются, действительно, отложенными вниз от новой оси абсциссъ A1B, так что выборъ этой оси является удобным и въ этом отношении.

На следующем участке x_1x_2 (фиг. 174) тангенциальныя усилия остаются все время больше силъ сопротивления R, вследствіе чего результирующия усилия (T–R) окажутся здесь действующими согласно съ направлением движения пальца кривошипа, т.-е. направленными положительно. Такъ, напримеръ, въ какой-либо моментъ x_m результирующее усилие выразится разностью отрезковъ x_mm и x_mn, изъ коихъ первый, x_mm, изображаетъ действующее здесь тангенциальное усилие, ведущее палецъ кривошипа, а второй — сопротивление R. Такимъ образомъ, это результирующее усилие изобразится здесь отрезкомъ nm ординаты между прямой A12B и заключеннымъ участкомъ 1b2 кривой TT; отрезокъ этотъ, какъ видимъ, способствуетъ движению пальца кривошипа и лежитъ выше прямой AB, т.-е. вверхъ отъ нея. Опять, значитъ, представляется возможность получать искомыя результирующия помощью участка 1b2 кривой TT, если за ось абсциссъ принять ту же прямую A12B, что и въ предыдущемъ случаѣ, — какъ и раньше, искомыя результирующия изобразятся отрезками ординатъ между осью AB и кривой 1b2, какъ по величинѣ своей, такъ и по направлению, считая это послѣднее отъ точекъ оси AB къ точкамъ кривой TT, лежащимъ съ ними на одних и тѣхъ же ординатахъ.

На следующем участке x_2b (фиг. 174) имѣемъ уже прео-

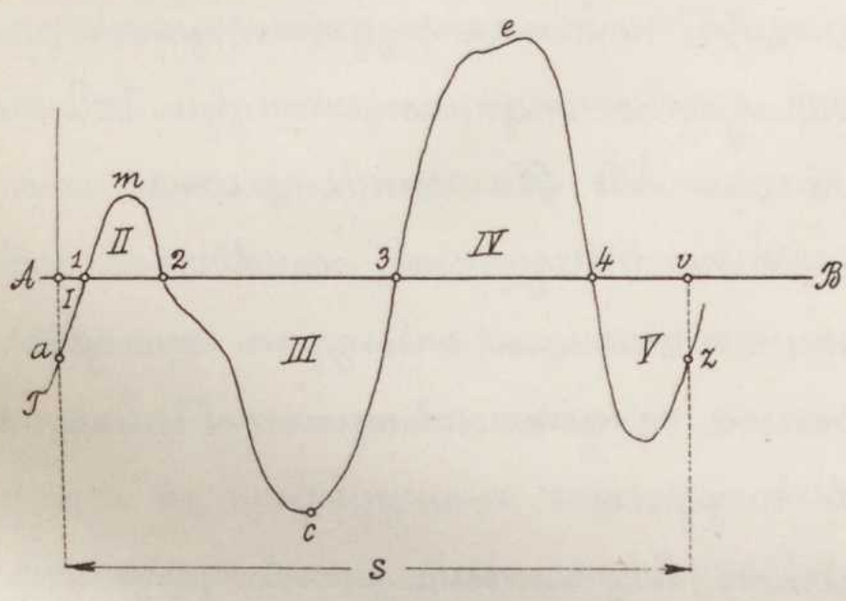
бладаніе сопротивленія R, и результирующія силы, дѣйствующія здѣсь на пальцѣ кривошипа прямопротивоположно скорости его, будутъ даны отрѣзками ординатъ между дугой $2b$ кривой $\Gamma\Gamma$ и прямой AB. Значитъ, принявъ за ось абсциссъ ту же прежнюю прямую AB, можемъ сказать, что силы, противодѣйствующія здѣсь вращенію пальца кривошипа, будутъ измѣняться по закону, изображаемому кривой $2b$, — отсчетъ ихъ будетъ вестись внизъ отъ прямой AB, что опять является вполнѣ согласнымъ съ основнымъ условіемъ счета направленій силъ.

На слѣдующемъ участкѣ bd тангенціальныя усилія Γ оказываются уже отрицательными: здѣсь они не помогаютъ движенію, а препятствуютъ ему и, значитъ, дѣйствуютъ согласно съ сопротивленіемъ R. Въ виду этого здѣшнія результирующія усилія представятся суммами постоянной ординаты R съ ординатами кривой bcd, отсчитываемыми теперь внизъ отъ оси Os. Въ концѣ концовъ, искомыя результирующія усилія на участкѣ bd изобразятся ординатами дуги bcd, отсчитываемыми отъ новой оси AB. То обстоятельство, что ихъ приходится отсчитывать внизъ отъ оси AB, вполнѣ совпадаетъ съ тѣмъ, что направлены они здѣсь противъ движенія пальца A; согласіе съ установленнымъ нами правиломъ наблюдается и здѣсь.

На слѣдующемъ участкѣ dx_3 имѣемъ преобладаніе сопротивленія R, и результирующія усилія будутъ даны ординатами дуги $d3$, идущими внизъ отъ оси AB.

На участкѣ x_3x_4 имѣемъ преобладаніе ведущихъ тангенціальныхъ усилій, и результирующія усилія окажутся опять ведущими, согласно съ чѣмъ идетъ и отсчетъ ихъ, — вверхъ отъ оси AB, и т. д.

Сопоставляя всѣ эти заключенія, видимъ, что о ходѣ измѣненій величины и направленія результирующихъ усилій (T–R), дѣйствующихъ на пальцъ кривошипа, можно судить по той же кривой тангенціальныхъ усилій a m 2 c e 4 z, если за ось абсциссъ, т.-е. за ось нулевыхъ результирующихъ усилій, взять прямую AB постояннаго внѣшняго сопротивленія, опредѣляемую по уравненію (79) на стр. 471. При этомъ всѣ ведущія усилія, стремящіяся поддерживать вращеніе вала и, значитъ, дѣйствующія по направленію скорости пальца кривошипа, окажутся отложенными вверхъ отъ прямой AB (новой оси абсциссъ), — таковы всѣ усилія на участкахъ x_1x_2 и x_3x_4, поднимающихся надъ прямой AB; эти усилія, согласно основному положенію, будутъ считаться положительными. Усилія, направленныя противоположно скорости пальца кривошипа, т.-е. сопротивляющіяся вращенію его, окажутся отложенными внизъ отъ оси AB и будутъ даны ординатами a1, 2c3, ..., соотвѣтствующими участкамъ $0x_1$, x_2x_3, ... пути пальца кривошипа; эти усилія придется считать отрицательными.



Фиг. 176.

Такимъ образомъ, ось 0s фактически является линіей, ибо она не даетъ намъ возможности составить какое-либо представленіе о ходѣ результирующихъ усилій на пальцѣ кривошипа. Естественно, въ виду приведенныхъ выше заключеній, принять теперь за ось абсциссъ прямую AB,

представляющую собою ось нулевых результирующих усилій, послѣ чего можно будетъ сказать, что за каждый періодъ движенія палецъ A кривошипа, при движеніи по своей окружности s, изображаемой отрѣзкомъ прямой AB, имѣющимъ длину s, подвергается воздѣйствію перемѣнной по величинѣ и направленію тангенціальной силы, опредѣляемой помощью кривой TT при оси AB (фиг. 176).

Такъ какъ движеніе нашей машины есть движеніе установившееся, то приращеніе живой силы нашей системы на пути s равно нулю, откуда слѣдуетъ, что работа ведущихъ результирующихъ усилій, изображаемая суммой площадокъ II и IV, расположенныхъ выше прямой AB, вверхъ отъ нея, равна работѣ сопротивляющихся результирующихъ усилій, изображаемой суммой нижнихъ площадокъ I, III и V. Въ силу этого можно написать, что

$$\text{I} + \text{III} + \text{V} = \text{II} + \text{IV}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Легко усмотрѣть, что при такихъ условіяхъ не можетъ быть и рѣчи о равномѣрности вращенія кривошипа, ибо несомнѣнно, что на участкѣ A1 своего пути кривошипъ будетъ вынужденъ, въ виду наличности противодѣйствующихъ усилій, все время больше и больше замедлять свой ходъ, вплоть до момента (1), гдѣ результирующее усиліе равно нулю. Дальше, на участкѣ (1-2) будемъ имѣть ускоренное движеніе кривошипа, на участкѣ (2-3) — опять замедленное, и т. д. Очевидно, что въ точкахъ 1 и 3 будемъ имѣть минимумы угловыхъ скоростей системы кривошипа, а въ точкахъ 2 и 4 — максимумы ихъ. Само собою разумѣется, что эти минимумы вовсе не обязаны имѣть одно и то же значеніе, одинаковое

въ обоихъ случаяхъ: если, при большемъ числѣ точекъ пересѣченія съ прямой AB, имѣется n такихъ минимумовъ, то изъ среды ихъ непремѣнно выдѣлится одинъ абсолютный минимумъ, ниже котораго скорости не опускаются на всемъ протяженіи періода. Подобнымъ же образомъ, изъ среды максимумовъ выдѣлится одинъ абсолютный максимумъ, выше коего угловыя скорости системы подниматься за весь періодъ не будутъ. Такимъ образомъ, скорости массъ системы кривошипа, при условіи установившагося движенія его, постоянными быть не могутъ,— мы видѣли, что онѣ вынуждены мѣняться, колеблясь при этомъ за время каждаго періода между нѣкоторымъ наивысшимъ максимумомъ и наинизшимъ минимумомъ.

Итакъ, разъ сопротивленіе на валу есть величина постоянная, то равномѣрности во вращеніи кривошипа ожидать нельзя,— при такихъ условіяхъ угловая скорость его будетъ все время мѣняться. Это — неустранимая особенность обыкновеннаго кривошипнаго механизма, и практика, поневолѣ, мирится съ ней, требуя, однако,

1) сведенія этой неравномѣрности къ желательно малой величинѣ, приличествующей данному случаю, и

2) обезпеченія этой малой неравномѣрности соотвѣтственнымъ устройствомъ машины, такъ, чтобы механизмъ могъ самъ, автоматически, удерживать скорости вращенія въ должныхъ предѣлахъ. Эти основные вопросы машиностроенія проще всего разрѣшаются помощью теоремы живыхъ силъ, при чемъ разсужденія можно вести такъ:

Пусть приращеніе живой силы системы за извѣстный промежутокъ времени τ равно какой-либо величинѣ F, вооб-

ность и заранѣе опредѣленной. Спрашивается, какъ достигнуть того, чтобы, несмотря на эти измѣненія живой силы, быть можетъ, весьма большія, скорости массъ системы, измѣнившись за это время настолько мало, насколько это намъ желательно. Чтобы разрѣшить этотъ вопросъ, напишемъ для системы нашего кривошипа теорему живыхъ силъ, примѣнивъ ее къ какому-либо промежутку времени τ, при чемъ скорости массъ системы въ началѣ этого промежутка будемъ отмѣчать индексами $_0$, а въ концѣ — индексами $_1$. Тогда для времени τ эта теорема дастъ уравненіе:

$$\frac{1}{2}\Sigma m(v_1^2 - v_2^2) = \mathcal{F}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Если угловыя скорости системы въ началѣ и концѣ взятаго промежутка обозначимъ черезъ ω_0 и ω_1, то, замѣчая, что линейныя скорости каждой отдѣльной массы m, сидящей на разстояніи r отъ оси вращенія, выражаются соотношеніями

$$v_0 = r\omega_0$$

и

$$v_1 = r\omega_1,$$

можемъ переписать уравненіе (c) такъ:

$$\frac{1}{2}\Sigma m(v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}\Sigma m(r^2\omega_1^2 - r^2\omega_0^2) = \frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)\Sigma mr^2 = \mathcal{F}. \quad . \quad .(d)$$

Замѣчая теперь, что Σmr^2 есть J,— моментъ инерціи системы относительно оси вращенія, можемъ переписать уравненіе (d) окончательно такъ:

$$\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)J = \mathcal{F}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

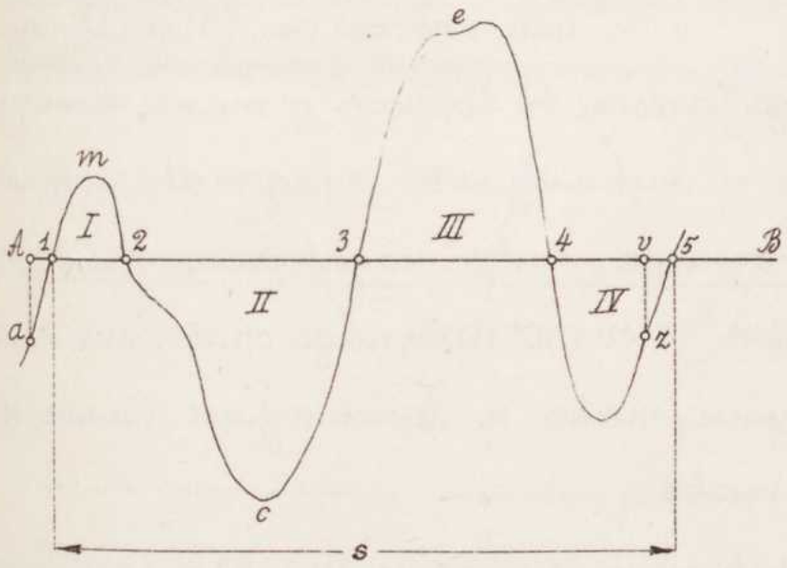
Это уравненіе важно въ томъ отношеніи, что непосредственно указываетъ намъ путь къ рѣшенію поставленнаго вопроса: если требуется, чтобы при данныхъ условіяхъ (данномъ $\mathcal{F}$) конечныя скорости ω_1 отличались отъ начальныхъ

ω_0 возможно мало, то нужно соответственно увеличивать моментъ инерціи J системы кривошипа относительно оси вала. Это увеличеніе достигается какъ увеличеніемъ массъ, такъ и удаленіемъ ихъ на достаточное разстояніе отъ оси вращенія. Полная равномѣрность вращенія, при которой для любого τ мы имѣли бы всегда равенство $\omega_1 = \omega_0$, получилась бы при $J = F/0 = \infty$, а это возможно было бы или при посадкѣ на валъ безконечно большихъ массъ или при удаленіи конечныхъ массъ на безконечно большое разстояніе отъ оси вала. Полной равномѣрности, такимъ образомъ, достичь нельзя, ибо оба вышеупомянутые способа достиженія ея практически неосуществимы, но въ то же время оказывается, что достиженіе сколь угодно малой разницы между начальной и конечной скоростями вращенія системы вполнѣ мыслимо и возможно,—для этого можетъ служить посадка на валъ достаточно большихъ массъ на достаточномъ, при томъ, разстояніи ихъ отъ оси вала. Эти массы носятъ названіе маховиковъ, и къ расчету ихъ (вычисленію должной величины момента инерціи J ихъ) мы теперь непосредственно и приступимъ.

Допустимъ, такимъ образомъ, что на коренной валъ нашего механизма посаженъ маховикъ, моментъ инерціи J котораго совершенно достаточенъ для того, чтобы скорости системы могли колебаться лишь въ предѣлахъ, нами заранѣе предуказанныхъ и, вообще говоря, весьма тѣсныхъ. Въ такомъ случаѣ, несмотря на присутствіе на валу постояннаго сопротивленія R, угловыя скорости кривошипа можно принять измѣняющимися весьма мало, т.-е. мало уклоняющимися отъ постоянства, что, въ свою очередь, позволяетъ

принять, что действительная теоретическая кривая тангенциальных усилий представляет весьма мало отличий сравнительно с прежней, идеальной, так что вполне позволительно предположить, что обе эти кривые совпадают, в виду чего мы можем и теперь пользоваться той же кривой тангенциальных усилий, с которой мы имели дело выше. Очевидно, что эта ошибка, сознательно нами допускаемая, будет тем меньше, чем больше момент инерции маховика и чем ближе вращение маховика подходит к равномерному. На этом основании мы снова обращаемся к рассмотрению идеальной кривой тангенциальных усилий, изображенной на фиг. 176 и предыдущих.

Ради удобства рассуждений, перенесем начало счета из A в точку 1, а площадку aA1 перенесем к правому концу периода, к zv, так она займет теперь там положение zv5 (фиг. 177). В то же время, попрежнему, будем иметь, что Av = s = (1, 5). Было показано, что такой перенос начала вполне допустим и возможен. Так получим кривую 1m2..4z5, изображенную на фиг. 177.

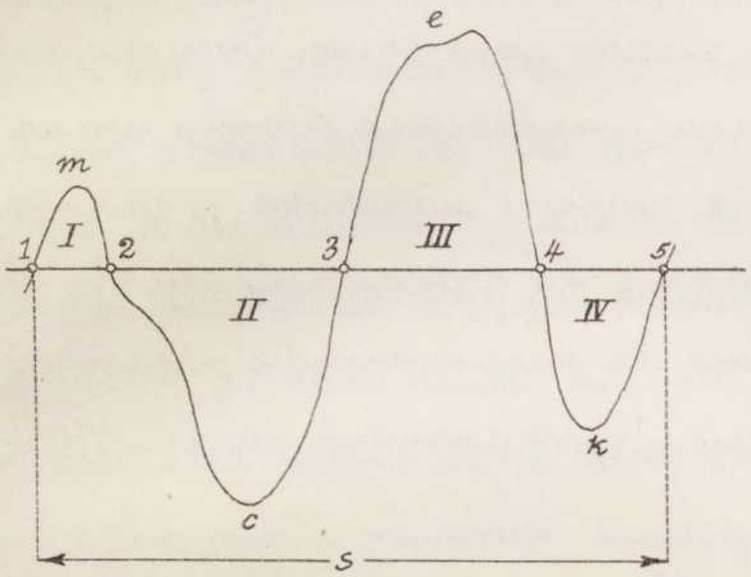


Фиг. 177.

Измерим, далее, все площадки 1m2, 2c3, ..., отмеченные у нас римскими цифрами I, II, III, ... Измерение это можно выполнить или помощью планиметра, или применяя формулу Симпсона и т. д. Повторной построения может служить то

обстоятельство, что, как это было своевременно разъяснено, сумма площадок, лежащих выше оси (1–5), должна быть равна сумме площадок, лежащих ниже ея, что, применительно к данному случаю, приводит к равенству

$$\text{I} + \text{III} = \text{II} + \text{IV}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$



Фиг. 178.

При прохождении участков (1–2) и (3–4) скорости нашей вращающейся системы все время возрастали, а на участках (2–3) и (4–5) все время убывали. Поэтому в точках (2) и (4) имеем максимумы скоростей, а в точках (3) и (5) или, что то же, (3) и (1) — минимумы их. Чтобы разобраться в вопросе о том, которые из этих максимумов и минимумов представляются абсолютными, т.-е. где лежат так называемые *maximum maximorum* и *minimum minimorum*, надо сравнить между собою как эти максимумы, так и минимумы. Самое это сравнение выполняется так:

Пусть требуется сравнить максимумы (2) и (4). Тогда рассуждаем так: приращение живой силы, ΔL, нашей системы на участке (2–4), равное $\frac{1}{2} \sum m(v_4^2 - v_2^2)$, выражается помощью соответствующих площадок так:

$$\Delta L = \text{III} - \text{II}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Если эта разность положительна, так что $\Delta L > 0$, то есть $v_4 > v_2$, и, значит, абсолютный максимум лежит в точке (4).

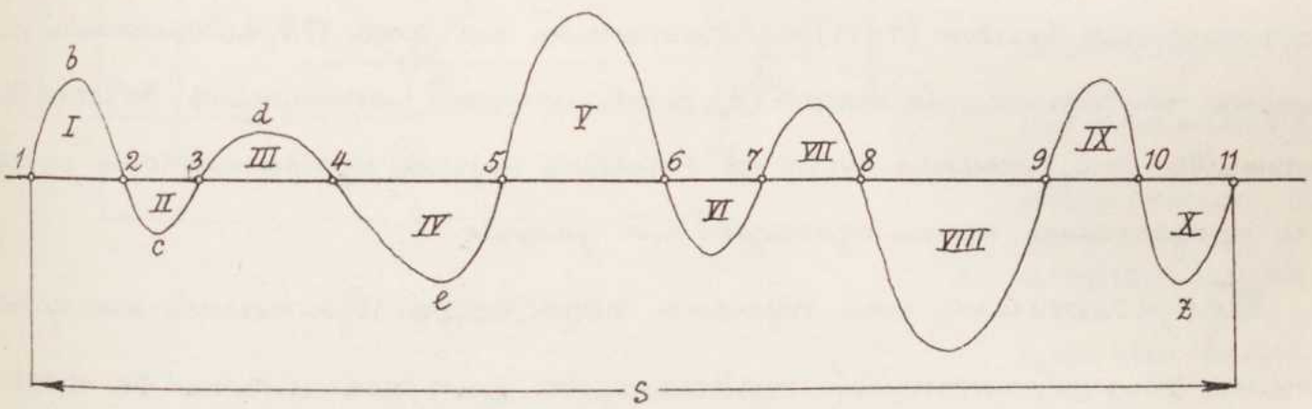
Если эта разность будетъ, наоборотъ, отрицательна, то будетъ отрицательна и $\Delta\mathfrak{L}$, и тогда $v_4 < v_2$, такъ что абсолютный максимумъ будетъ лежать въ точкѣ (2).

Совершенно такъ же сравниваются и минимумы. Такъ въ нашемъ случаѣ минимумы имѣютъ мѣсто въ точкахъ (1) и (3). Приращеніе живой силы $\Delta\mathfrak{L}$ на участкѣ (1–3), равное $\frac{1}{2}\Sigma m(v_3^2 - v_1^2)$, выразится, очевидно, такъ:

$$\Delta\mathfrak{L} = \text{I} - \text{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

Если окажется, что $\Delta\mathfrak{L} > 0$, то $v_3 > v_1$, и, значитъ, абсолютный минимумъ лежитъ въ точкѣ (1); если же $\Delta\mathfrak{L} < 0$, то $v_3 < v_1$, и точка (3) лежитъ ниже точки (1).

Никакихъ затрудненій не представитъ изслѣдованіе и болѣе сложныхъ случаевъ, подобныхъ, напримѣръ, изображенному на фиг. 179, гдѣ въ теченіе каждаго періода τ имѣетъ мѣсто пятикратный подъемъ кривой свободныхъ тангенціальныхъ усилій и пятикратное же пони-



Фиг. 179.

женіе ея. Аналогично (f), заключаемъ, что здѣсь имѣетъ мѣсто равенство:

$$\text{I} + \text{III} + \text{V} + \text{VII} + \text{IX} = \text{II} + \text{IV} + \text{VI} + \text{VIII} + \text{X} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

На участкахъ (1–2), (3–4), ..., (9–10) скорости возрастали; поэтому въ точкахъ 2, 4, 6, 8 и 10 имѣемъ рядъ относительныхъ максимумовъ. Далѣе, на участкахъ (2–3), (4–5), .., (10–11) имѣло мѣсто убываніе скоростей; въ виду этого въ точкахъ 3, 5, ..., 11 (и въ совпадающей съ ней 1) имѣлся рядъ относительныхъ минимумовъ. Для отысканія абсолютнаго максимума и абсолютнаго минимума сравниваемъ между собою сначала всѣ от-

носительные максимумы и выбираемъ наибольшій; затѣмъ сравниваемъ всѣ минимумы и выбираемъ наименьшій. Самое сравненіе производится послѣдовательно: сравниваемъ максимумъ (2) съ максимумомъ (4), затѣмъ съ максимумомъ (6), потомъ съ (8) и съ (10); затѣмъ максимумъ (4) сравниваемъ съ максимумами (6), (8) и (10), и т.д. Съ минимумами поступаемъ совершенно такъ же: сравниваемъ минимумъ (3) сначала съ (5), затѣмъ съ (7), (9) и (11); далѣе, минимумъ (5) сравниваемъ съ (7) и т.д. Схема сравненія остается прежней, а именно:

Пусть, напримѣръ, требуется сравнить максимумы (2) и (10). Теорема живыхъ силъ, примѣненная къ участку (2-10), даетъ намъ для приращенія живой силы $\Delta\mathfrak{L}$ на этомъ пути выраженіе:

$$\Delta\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2}\Sigma m\,(v_{10}^2 - v_2^2) = (\text{III} + \text{V} + \text{VII} + \text{IX}) - (\text{II} + \text{IV} + \text{VI} + \text{VIII}).$$

Если $\Delta\mathfrak{L} > 0$, то $v_{10} > v_2$; если $\Delta\mathfrak{L} < 0$, то $v_{10} < v_2$. — Точно такъ же производится сравненіе и всѣхъ другихъ максимумовъ, равно какъ и минимумовъ. Рядъ полученныхъ такимъ путемъ неравенствъ типа $v_m > v_n$ дастъ намъ возможность установить моменты абсолютныхъ максимумовъ и абсолютныхъ минимумовъ. Имѣя въ виду дальнѣйшее, предположимъ, что для кривой (1-11), изображенной на фиг. 179, абсолютный максимумъ приходится въ точкѣ (8), а абсолютный минимумъ — въ точкѣ (3). Замѣтивъ это, вернемся снова къ нашему случаю, изображенному на фиг. 178 и продолжимъ наши изслѣдованія дальше.

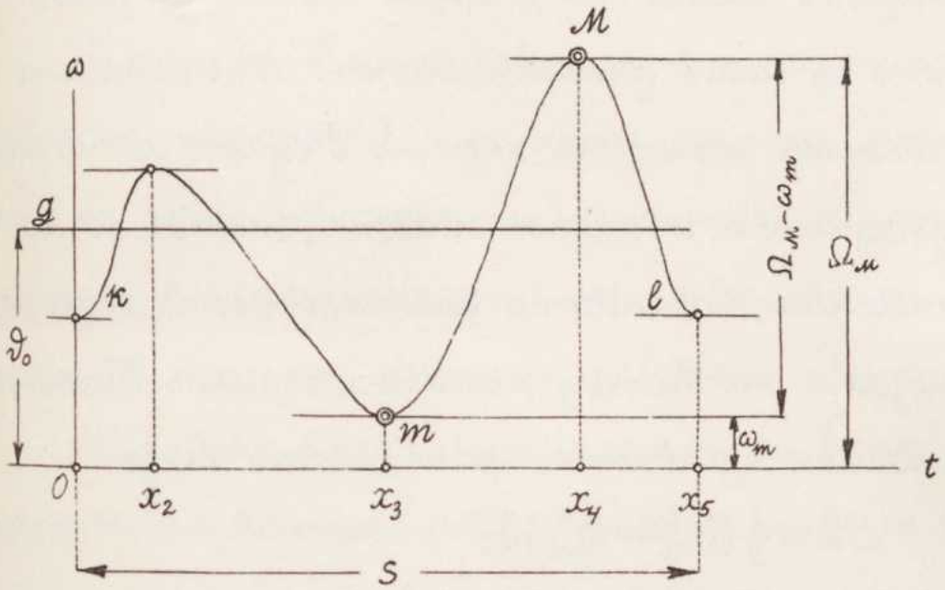
Предположимъ, что путемъ подобныхъ изысканій мы установили, что абсолютный максимумъ имѣетъ мѣсто въ точкѣ (4), — фиг. 178, — а абсолютный минимумъ — въ точкѣ (3). Въ эти моменты скорости точекъ нашей вращающейся системы достигаютъ въ моментъ (4) наибольшихъ, а въ моментъ (3) — наименьшихъ изъ всѣхъ значеній, или, вообще, въ теченіе всего періода принимаемыхъ. Такимъ образомъ, если законъ измѣненія угловыхъ скоростей вала въ системѣ координатъ (ω, t) изображается, допустимъ, кривой kl (фиг. 180), то наши крайнія скорости представятся точкой M (абсолютный максимумъ) и точкой m

абсолютный минимумъ. Обозначимъ максимальную угловую скорость системы (въ моментъ 4) черезъ Ω_M, а минимальную (въ моментъ 3) — черезъ ω_m.

Пусть коренной валъ, вращаясь равномѣрно, долженъ дѣлать n оборотовъ въ 1 минуту. Тогда средняя угловая скорость, которую мы обозначили выше черезъ ϑ_0, выразится, какъ извѣстно изъ предыдущаго, такъ:

$$\vartheta_0 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

— см. стр. 453, форм. (67).



Фиг. 180.

Въ системѣ (ω, t) равномѣрное вращеніе кривошипа съ этой постоянной угловой скоростью изобразилось бы прямой gh, параллельной оси Ot и отстоящей отъ нея на величину ϑ_0, даваемую соотношеніемъ (67).

Выше, — см. стр. 474, — было получено уравненіе (70), устанавливающее связь между этими крайними угловыми скоростями Ω_M и ω_m нашей системы. Уравненіе это имѣетъ видъ:

$$\Omega_M^2 - \omega_m^2 = 2\varepsilon\vartheta_0^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Этимъ уравненіемъ мы теперь и воспользуемся для подсчета искомаго момента инерціи нашего маховика. Дѣло въ томъ, что мы предположили, что абсолютный максимумъ

приходится въ точкѣ (4), а абсолютный минимумъ — въ точкѣ (3). Напишемъ теперь для участка (3–4) теорему живыхъ силъ, имѣя въ виду фиг. 178. Пишемъ, такимъ образомъ, что приращеніе $\Delta\mathfrak{L}$ живой силы системы за промежутокъ времени (3–4) выражается такъ:

$$\Delta\mathfrak{L}=\tfrac{1}{2}\Sigma m(v_4^2-v_3^2)=\tfrac{1}{2}\Sigma m(r^2\Omega_M^2-r^2\omega_m^2)=\tfrac{1}{2}(\Omega_M^2-\omega_m^2)\Sigma mr^2.$$

Замѣчая теперь, что Σmr^2 представляетъ собою моментъ инерціи всей вращающейся системы относительно неподвижной оси вращенія ея и что моментъ инерціи маховика обычно во много разъ превышаетъ моменты инерціи вала и другихъ вращающихся вмѣстѣ съ нимъ деталей, можно принять, что эта сумма представляетъ моментъ инерціи J одного лишь маховика. Нетрудно убѣдиться, что эта ошибка, вполнѣ сознательно нами допускаемая, повышаетъ равномѣрность хода и идетъ, такимъ образомъ, на пользу нашей машинѣ. Такимъ образомъ, вышенаписанное уравненіе принимаетъ видъ:

$$\Delta\mathfrak{L}=\tfrac{1}{2}(\Omega_M^2-\omega_m^2)J.$$

Съ другой стороны, по кривой свободныхъ тангенціальныхъ усилій $1mck5$ (фиг. 178) можемъ написать, что

$$\Delta\mathfrak{L}=\text{III}=\mathfrak{F},$$

гдѣ $\mathfrak{F}$ есть вполнѣ опредѣленная величина, получаемая путемъ непосредственнаго обмѣра или вычисленія. Такимъ образомъ получается уравненіе

$$\tfrac{1}{2}(\Omega_M^2-\omega_m^2)J=\mathfrak{F},$$

принимающее, въ виду (70), видъ:

$$\varepsilon\vartheta_0^2 J=\mathfrak{F},$$

откуда и находимъ единственно неизвѣстную здѣсь величину J:

$$J=\frac{\mathfrak{F}}{\varepsilon\vartheta_0^2}=\frac{900\,\mathfrak{F}}{\varepsilon\pi^2 n^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Въ случаяхъ болѣе сложныхъ кривыхъ ходъ подсчетовъ остается тотъ же. Такъ, напримѣръ, въ случаѣ кривой 1b...z11, изображенной на фиг. 179, абсолютный максимумъ которой приходится въ точкѣ (8), а абсолютный минимумъ – въ точкѣ (3), уравненіе живыхъ силъ, написанное для промежутка времени (3–8), имѣетъ видъ:

$$\Delta\mathfrak{L}=\tfrac{1}{2}\Sigma m(v_8^2-v_3^2)=\tfrac{1}{2}(\Omega_m^2-\omega_m^2)\Sigma mr^2=\tfrac{1}{2}(\Omega_m^2-\omega_m^2)J=\varepsilon\vartheta_0^2 J,$$

при чемъ

$$\Delta\mathfrak{L}=(\mathrm{III}+\mathrm{V}+\mathrm{VII})-(\mathrm{IV}+\mathrm{VI})=\mathfrak{F}.$$

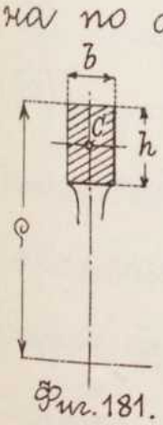
Отсюда находимъ знакомое уже намъ уравненіе

$$\varepsilon\vartheta_0^2 J=\mathfrak{F},$$

дающее для J ту же формулу (80).

Измѣривъ $\mathfrak{F}$ и задавшись ε и n, сейчасъ же опредѣляемъ соотвѣтствующее J,— моментъ инерціи маховика, который и будетъ въ состояніи держать измѣненія скоростей въ предѣлахъ, указанныхъ коэффиціентомъ ε, при данномъ числѣ n оборотовъ машины и прочихъ данныхъ условіяхъ движенія.

Маховикъ всегда выполняется въ видѣ болѣе или менѣе массивнаго кольца – обода, скрѣпленнаго съ втулкой, насаживаемой на коренной валъ и наглухо на немъ закрѣпляемой, при помощи или сплошного диска или ряда спицъ. Для упрощенія расчета массами этихъ соединительныхъ частей пренебрегаютъ и предварительный расчетъ ведутъ въ предположеніи, что вся масса M маховика равномѣрно распредѣлена по окружности радіуса ϱ, по которой размѣщены центры C тяжести поперечныхъ сѣченій обода (фиг. 181).



Фиг. 181.

Тогда $J=M\varrho^2$, откуда, задавшись тѣмъ или другимъ ϱ, удовлетворяющимъ требованіямъ прочности, опредѣляемъ соотвѣтствующую массу обода, M, что сейчасъ же даетъ возможность вычислить вѣсъ и объемъ

его. Дѣйствительно, обозначая вѣсъ обода черезъ Q, ускореніе силы тяжести (въ надлежащихъ единицахъ) — черезъ g, а вѣсъ единицы объема матеріала маховика (удѣльный вѣсъ матеріала) черезъ γ, можемъ написать, что

$$M = \frac{Q}{g}$$

или, иначе, обозначая объемъ обода маховика черезъ V, такъ что

$$Q = V\gamma,$$

имѣемъ, что

$$M = \frac{V\gamma}{g},$$

послѣ чего выраженіе момента инерціи J принимаетъ видъ:

$$J = \frac{V\gamma\rho^2}{g}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

По теоремѣ Гюйгенса имѣемъ, что

$$V = 2\pi\rho . bh,$$

въ виду чего выраженіе (81) принимаетъ видъ:

$$J = \frac{2\pi\rho^3\gamma bh}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Обратно, имѣя изъ предыдущаго J и задавшись матеріаломъ обода и размѣрами его b и h, сейчасъ же опредѣлимъ единственную неизвѣстную теперь въ (82) величину радіуса ρ, а вмѣстѣ съ этимъ и всѣ размѣры маховика. Болѣе точный расчетъ даетъ для J выраженіе

$$J = \frac{V\gamma\rho^2}{g}\left(1 + \frac{h^2}{4h^2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

Выбравъ тѣ или другіе размѣры b, h и ρ, продѣлываемъ еще разъ приближенный расчетъ: по формулѣ (83) вычисляемъ J, а по уравненію (80) опредѣляемъ соотвѣтствующій этимъ значеніямъ коэффиціентъ ε, и если онъ оказывается доста-

точнымъ, то на этомъ нашъ предварительный расчетъ можно покончить. Болѣе точную оцѣнку полученнаго такимъ путемъ значенія J можно получить помощью общаго уравненія (73), въ которомъ теперь будетъ извѣстна для каждаго положенія механизма какъ величина R тангенціальнаго сопротивленія, такъ и величина общаго момента инерціи J_0, до того, за неимѣніемъ свѣдѣній о размѣрахъ маховика, оставшаяся намъ неизвѣстной. Получается, такимъ образомъ, возможность составить таблицу значеній углового ускоренія $d\vartheta/dt$ для ряда послѣдовательныхъ положеній механизма, и если бы оказалось, что всѣ полученныя такимъ путемъ величины $d\vartheta/dt$ лишь очень мало отклоняются объ нуля, то это значило бы, что взятая величина момента инерціи J выбрана удачно; если же отклоненія эти получаются очень большими, то это указываетъ на необходимость замѣны взятаго J другимъ, и мы можемъ принять теперь это J нѣсколько, напримѣръ, бо́льшимъ прежняго; получится новая таблица значеній $d\vartheta/dt$, по данными коей можно судить о томъ, улучшилось или дѣло съ введеніемъ новой величины J или подборъ этотъ придется повторять дальше.

Для большей наглядности, таблицу значеній $d\vartheta/dt$ можно представить графически, въ видѣ нѣкоторой кривой. Очевидно, что выборъ J будетъ тѣмъ удачнѣе, чѣмъ меньше эта кривая будетъ отходить отъ оси абсциссъ.

Провѣрка и оцѣнка полученныхъ значеній J помощью уравненія (73), вообще говоря, никакихъ особыхъ затрудненій не представляетъ, ибо значенія суммъ $\Sigma_1 m_x$ и $\Sigma m(F_s)_{\vartheta_0}$

будутъ уже намъ извѣстны изъ таблицъ, служащихъ для опредѣленія t помощью уравненія (75).

Для большей точности расчетовъ, необходимо учесть еще вліяніе спицъ (или диска); этого расчета мы производить не будемъ; укажемъ лишь, что разъ выбранный нами ободъ съ размѣрами b, h и ϱ даетъ извѣстную величину коэффиціента ε, то вліяніе спицъ (или диска) скажется лишь дальнѣйшимъ уменьшеніемъ этого коэффиціента, т.-е. увеличеніемъ плавности хода, что, конечно, можно только привѣтствовать.

Замѣтимъ, наконецъ, что тангенціальныя сопротивленія R вовсе не обязаны быть непремѣнно постоянными, опредѣляемыми помощью уравненія (79) на стр. 471. Дѣло въ томъ, что отъ этихъ сопротивленій требуется, ради правильной періодичности движенія, чтобы за время каждаго періода работа ихъ была равна работѣ тангенціальныхъ усилій, и только, — никакихъ другихъ ограниченій на величины R мы наложить не можемъ. Конечно, ради упрощенія дѣла, мы приняли R постояннымъ, но его можно было бы предположить измѣняющимся по какому-угодно другому закону съ тѣмъ лишь, чтобы работа усилій R за весь періодъ удовлетворяла указанному выше условію; иными словами, нужно, чтобы площадь кривой этихъ тангенціальныхъ сопротивленій R была за каждый періодъ равновелика съ площадью тангенціальныхъ усилій T. Подсчетъ величинъ свободныхъ тангенціальныхъ усилій выполняется по тому же шаблону, что и приведенный выше; въ остальномъ никакихъ измѣненій не получимъ, и подсчетъ мо-

мента инерціи J будетъ выполненъ по тѣмъ же формуламъ (80)–(83), что и выше.

Этими замѣчаніями мы и закончимъ статью о расчетѣ маховиковъ помощью кривой тангенціальныхъ усилій. Какъ видимъ, задачей маховиковъ, для выполненія которой они только и предназначаются, является регулированіе періодическихъ колебаній угловой скорости коренного вала, обусловливаемыхъ наличностью и свойствами кривошипнаго механизма и поэтому неустранимыхъ. Маховикъ является какъ бы нѣкоторымъ запаснымъ магазиномъ, вбирающимъ въ себя избытокъ живой силы, появляющійся въ механизмѣ въ моменты ускоренія вращенія кривошипа, и отдающимъ его обратно на пополненіе убыли скорости при замедляемомъ вращеніи кривошипа. Благодаря большому моменту инерціи, маховикъ, вбирая въ себя даже значительные запасы живой силы, весьма мало, лишь въ предѣлахъ коэффиціента ε, мѣняетъ угловыя скорости своего вращенія, а вмѣстѣ съ этимъ и угловыя скорости всѣхъ остальныхъ массъ, жестко съ кореннымъваломъ связанныхъ и вмѣстѣ съ нимъ вращающихся.

Регулированіе непериодическихъ колебаній угловой скорости, зависящихъ отъ измѣненій сопротивленія R, не подчиняющихся общему правилу о равенствѣ площадей, и, значитъ, удерживаніе числа оборотовъ на одной и той же высотѣ n, маховикомъ, очевидно, выполняемо быть не можетъ; это регулированіе предоставляется другому, также весьма важному органу каждой машины-двигателя, — такъ называемому регулятору, о сущности дѣйствія

и объ основаніяхъ расчета котораго подробно говорится въ соотвѣтствующихъ главахъ спеціальныхъ курсовъ по машиностроенію. Въ нашемъ курсѣ мы этого вопроса касаться не будемъ.

Изложенный способъ расчета маховиковъ не является единственнымъ; имѣется еще одинъ, весьма простой и удобный, въ особенности для предварительныхъ расчетовъ, способъ расчета маховиковъ помощью теоремы живыхъ силъ; къ изложенію этого способа мы теперь непосредственно и приступимъ.

§ 24. Расчетъ маховиковъ помощью теоремы живыхъ силъ.

Общее уравненіе живыхъ силъ (37), приведенное на стр. 399, можетъ принимать различныя внѣшнія формы въ зависимости отъ того или другого состава даннаго механизма. Имѣя въ виду приложеніе этого уравненія къ разрѣшенію вопроса о расчетѣ маховиковъ, мы и разсмотримъ теперь, какой видъ приметъ это уравненіе, если мы, выдѣливъ систему нашего маховика, выпишемъ въ этомъ уравненіи, отдѣльно отъ другихъ членовъ, членъ, опредѣляющій собою приращеніе живой силы маховика за извѣстное время.

Маховикъ, какъ извѣстно, представляетъ собою массивный ободъ, снабженный спицами и наглухо насаживаемый на коренной валъ машины. При расчетѣ маховика спицами и втулкой его обычно пренебрегаютъ и подсчитываютъ лишь самый ободъ. Такъ какъ центръ тяжести маховика лежитъ на оси вращенія O кривошипа AO, такъ какъ, далѣе, ободъ нашего маховика изобразится въ планѣ скоростей нѣкоторымъ опредѣленнымъ круговымъ кольцомъ съ

центромъ въ полюсѣ плана скоростей, то, значитъ, центръ тяжести изображенія обода въ планѣ скоростей лежитъ въ полюсѣ этого же плана.

Замѣтивъ это, напишемъ выраженія приращенія живой силы нашего маховика за то время, пока угловая скорость ϑ кривошипа AO, а значитъ, и сопряженнаго съ нимъ маховика, перешла изъ ϑ_1 въ ϑ_2. Общее выраженіе уравненія живыхъ силъ системы нашего маховика напишется такъ:

$$\Sigma\frac{mv_2^2}{2}-\Sigma\frac{mv_1^2}{2}=\frac{1}{2}M\vartheta_2^2\left[\left(\frac{\rho l_2}{L}\right)^2+\overline{O_2c_2}^2\right]-\frac{1}{2}M\vartheta_1^2\left[\left(\frac{\rho l_1}{L}\right)^2+\overline{O_1c_1}^2\right]. \quad (a)$$

Выраженіе, стоящее въ правой части этого уравненія, можетъ быть значительно упрощено, если мы примемъ во вниманіе, что, согласно сказанному, центръ тяжести изображенія маховика все время совпадаетъ съ полюсомъ плана. Поэтому надо принять, что здѣсь

$$\left.\begin{aligned}\overline{O_2c_2}&=0,\\ \overline{O_1c_1}&=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Далѣе, предположимъ, что всѣ планы скоростей строятся въ одномъ и томъ же масштабѣ, такъ что кривошипъ AO изображается все время однимъ и тѣмъ же отрѣзкомъ ao, и, значитъ, $a_1o_1=a_2o_2=\ldots=ao$. Тогда для системы маховика отношеніе l/L будетъ сохранять все время одно и то же значеніе, равное, положимъ, β, такъ что можно написать, что

$$\frac{l_1}{L_1}=\frac{l_2}{L_2}=\ldots\ldots=\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

Въ силу соотношеній (b) и (84) общее уравненіе (a) принимаетъ теперь видъ:

$$\Sigma\frac{mv_2^2}{2}-\Sigma\frac{mv_1^2}{2}=\frac{1}{2}M\vartheta_2^2\varrho^2\beta^2-\frac{1}{2}M\vartheta_1^2\varrho^2\beta^2=\frac{1}{2}\beta^2.M\varrho^2(\vartheta_2^2-\vartheta_1^2). \quad . \quad (c)$$

Замѣчая теперь, что $M\varrho^2$ есть моментъ инерціи маховика, взятый относительно оси вращенія его, и обозначая его черезъ J, такъ что

$$M\varrho^2=J, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

можемъ дать уравненію (c) болѣе простой видъ, а именно:

$$\Sigma\frac{mv_2^2}{2}-\Sigma\frac{mv_1^2}{2}=\frac{1}{2}\beta^2J(\vartheta_2^2-\vartheta_1^2). \quad . \quad . \quad (85)$$

Такимъ образомъ, если нашъ механизмъ снабженъ маховикомъ съ моментомъ инерціи J, взятымъ относительно оси вращенія его, то, выдѣляя отдѣльно систему собственно маховика и оцѣнивая приращеніе живой силы его помощью формулы (85), можемъ переписать теперь общее уравненіе (37) такъ:

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}\vartheta_2^2\Sigma M\lambda_2^2-\frac{1}{2}\vartheta_1^2\Sigma M\lambda_1^2+\frac{1}{2}\beta^2J(\vartheta_2^2-\vartheta_1^2), \quad . \quad . \quad (86)$$

или, что то же, въ болѣе распространенной формѣ, подставляя вмѣсто λ_1 и λ_2 выраженія ихъ черезъ ϱ, l и $\mathfrak{L}$ отдѣльныхъ звеньевъ:

$$\mathfrak{L}=\frac{\vartheta_2^2}{2}\Sigma M\left[\left(\frac{\varrho l_2}{\mathfrak{L}}\right)^2+\overline{O_2c_2}^2\right]-\frac{\vartheta_1^2}{2}\Sigma M\left[\left(\frac{\varrho l_1}{\mathfrak{L}}\right)^2+\overline{O_1c_1}^2\right]+\frac{1}{2}\beta^2J(\vartheta_2^2-\vartheta_1^2). \quad (87)$$

Уравненіе живыхъ силъ, написанное въ такой именно формѣ, мы и используемъ теперь для расчета маховика.

Предположимъ, такимъ образомъ, что нашъ механизмъ долженъ двигаться такъ, чтобы коренной валъ его вращался съ коэффиціентомъ неравномѣрности ε, т.-е. чтобы существовало соотношеніе

$$\Omega_M-\omega_m=\varepsilon\vartheta_0,$$

гдѣ ϑ_0 есть средняя угловая скорость кривошипа AO, вращающаго коренной валъ. По тѣмъ же соображеніямъ, что и вы-

ше, мы, для обезпеченія желаемой равномѣрности, снабжаемъ нашъ механизмъ маховикомъ, моментъ инерціи J котораго и постараемся опредѣлить теперь, исходя изъ общаго уравненія (87).

Прежде всего, слѣдуетъ принять во вниманіе, что маховикъ обычно бываетъ настолько массивенъ, что въ уравненіи (87) вліяніе момента инерціи его J доминируетъ надъ другими моментами инерціи, стоящими подъ знакомъ суммы Σ, ибо они много меньше его. Далѣе, очевидно, что, въ присутствіи надлежаще выбраннаго маховика, скорости ϑ_2 и ϑ_1 будутъ лишь мало отличаться одна отъ другой, а еще меньше отъ средней скорости ϑ_0 (если онъ лежатъ по обѣ стороны отъ нея). Поэтому мы и замѣнимъ въ первыхъ двухъ членахъ правой части уравненія (87) скорости ϑ_2 и ϑ_1 одной и той же средней скоростью ϑ_0. Тогда уравненіе (87), вполнѣ точное, переходитъ въ новое уравненіе, уже приблизительное, но все же достаточно точное, имѣющее, такимъ образомъ, видъ:

$$\mathfrak{L}=\frac{\vartheta_0^2}{2}\left\{\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_2}{\mathfrak{L}}\right)^2+\overline{O_2c_2}^2\right]-\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_1}{\mathfrak{L}}\right)^2+\overline{O_1c_1}^2\right]\right\}+\frac{\beta^2}{2}J\left(\vartheta_2^2-\vartheta_1^2\right)\ldots(88)$$

Полученнымъ уравненіемъ можно съ удобствомъ воспользоваться для опредѣленія искомой величины J, если примѣнить его къ промежутку времени $({}_m\omega,\Omega_M)$, ибо въ такомъ случаѣ разность $(\vartheta_2^2-\vartheta_1^2)$ переходитъ въ разность $(\Omega_M^2-\omega_m^2)$, величина коей намъ извѣстна съ точностью, вполнѣ достаточной для цѣлей практики, — мы вывели выше (стр. 454, ур. (70)), что

$$\Omega_M^2-\omega_m^2=2\varepsilon\vartheta_0^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Соотвѣтственно этому, разность, стоящую въ витыхъ скобкахъ уравненія (88), придется подсчитать для того же промежутка $({}_m\omega,\Omega_M)$, такъ что уравненіе (88), будучи примѣнено теперь уже къ этому именно промежутку, принимаетъ видъ:

$$\mathfrak{L} = \frac{\vartheta_0^2}{2}\left\{\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_2}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_2 c_2}^2\right] - \Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_1}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_1 c_1}^2\right]\right\}_{\omega_m}^{\Omega_M} + \varepsilon\beta^2\vartheta_0^2 J \ldots (89)$$

Чтобы не имѣть дѣла съ этими добавочными индексами Ω_M и ω_m у витыхъ скобокъ, мы поставимъ внутри первыхъ квадратныхъ скобокъ индексъ $_M$ вмѣсто $_2$, чтобы показать, что эта сумма берется для момента (Ω_M); съ той же цѣлью замѣнимъ внутри вторыхъ квадратныхъ скобокъ индексъ (1) индексомъ $_m$, ибо эта сумма относится къ моменту (ω_m).

Кромѣ того, имѣя въ виду дальнѣйшее, разобьемъ работу $\mathfrak{L}$ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ въ нашей машинѣ, на работу $\mathfrak{L}_n$ силъ дѣйствующихъ и работу $\mathfrak{L}_w$ сопротивленія на коренномъ валу (полезнаго сопротивленія), противодѣйствующаго вращенію вала; поэтому можно написать, что

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_n - \mathfrak{L}_w \ldots \ldots \ldots \ldots (90)$$

Послѣ этого уравненіе (89), послѣ очевидныхъ преобразованій, принимаетъ видъ:

$$\varepsilon\beta^2\vartheta_0^2 J = \mathfrak{L}_n - \left[\mathfrak{L}_w + \frac{\vartheta_0^2}{2}\left\{\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_M}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_M c_M}^2\right] - \Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_m}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_m c_m}^2\right]\right\}\right] \ldots (91)$$

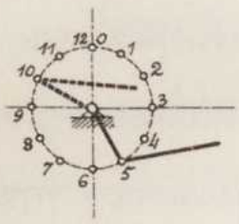
Подсчетъ правой части этого уравненія можетъ быть весьма удобно выполненъ графическимъ путемъ, помощью двухъ кривыхъ, изъ коихъ первая изображаетъ теченіе величины $\mathfrak{L}_n$, а вторая — теченіе работы $\mathfrak{L}_w$ полезныхъ сопротивленій, сложенной съ приращеніемъ живой силы механизма, оцѣниваемымъ членомъ $\frac{\vartheta_0^2}{2}\{\ldots\}$.

По тѣмъ же соображеніямъ, съ какими мы уже встрѣчались въ предыдущемъ параграфѣ, намъ для нашего изслѣдованія будетъ вполнѣ достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ какого либо одного періода нашей машины, — движеніе ея пред-

полагаемъ установившимся и правильно періодическимъ. При этомъ, какъ мы знаемъ, за каждый такой періодъ работа силъ дѣйствующихъ будетъ равна работѣ силъ сопротивленія, приращеніе же живой силы системы къ конечному моменту періода будетъ равно нулю. — Послѣ этихъ необходимыхъ предварительныхъ замѣчаній перейдемъ къ изложенію основъ предлагаемаго графическаго метода.

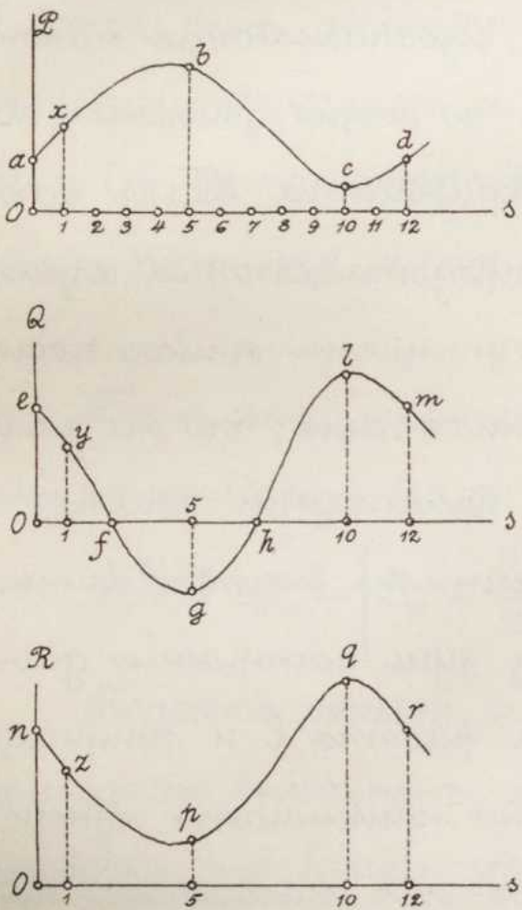
Имѣя въ виду необходимость подсчета какъ работъ l дѣйствующихъ здѣсь силъ, такъ и приращеній живыхъ силъ, мы постараемся построить кривыя, изображающія накопленіе этихъ величинъ, нарастаніе ихъ по мѣрѣ движенія механизма, т.-е. по мѣрѣ вращенія кривошипа. Такъ какъ силы, дѣйствующія въ механизмѣ, представляются функціями положеній механизма, то функціями этихъ послѣднихъ представятся и работы l этихъ силъ; то же замѣчаніе имѣетъ, очевидно, силу и для приращеній живыхъ силъ, оцѣниваемыхъ выраженіями, заключенными внутри витыхъ скобокъ уравненія (89) и др. Поэтому при построеніи діаграммъ, изображающихъ измѣненія работъ l и приращеній живыхъ силъ, за абсциссы удобно принимать пути пальца кривошипа, отсчитывая ихъ отъ начальнаго положенія его, соотвѣтствующаго начальному моменту періода и выбраннаго наиболѣе удобнымъ для дѣла образомъ. Такъ именно мы и поступимъ: предположивъ, что періодъ равенъ одному обороту коренного вала, раздѣлимъ окружность, описываемую пальцемъ кривошипа, на нѣсколько, — положимъ, 12, — равныхъ частей (фиг. 182) и, выпрямивъ ее, отложимъ ее на какой-либо прямой Os, принятой за ось

абсциссъ, отъ произвольной точки ея 0, принятой за начало координатъ, въ видѣ отрѣзка (0 – 12), – фиг. 183 и слѣд. Замѣтивъ это, перейдемъ къ построенію діаграммъ работъ.



Фиг. 182.

Пусть нашъ механизмъ находится подъ воздѣйствіемъ дѣйствующихъ силъ P и Q и, затѣмъ, тангенціальнаго сопротивленія R, и мы предположимъ, что силовыя кривыя этихъ силъ, при той же системѣ абсциссъ, представляются кривыми: abd (для силъ P), egm (для Q) и pqr (для R), – см. фиг. 183. Согласно основному требованію, сумма площадей, образуемыхъ кривыми P и Q, должна быть равна площади, образуемой кривой R. Поэтому можемъ написать, что площ. 0abd12 + площ. 0ef – площ. fhg + площ. hlm12 = площ. 0pqr12. Перейдемъ теперь къ построенію діаграммъ, изображающихъ нарастаніе работъ, считая отъ начальнаго момента 0 нашего періода, причемъ сначала построимъ діаграмму работъ силъ дѣйствующихъ P и Q, а затѣмъ, отдѣльно, діаграмму работъ сопротивленія R.



Фиг. 183.

Такъ какъ въ конечный періодъ предшествующаго періода вся работа дѣйствующихъ силъ оказалась цѣликомъ поглощенной и ушедшей на работу сопротивленія, а приращеніе живой силы системы къ этому моменту было равно нулю, то мы имѣемъ право принять, что въ начальный моментъ

взятаго нами теперь периода всѣ эти три фактора равны каждый нулю. Такимъ образомъ, въ начальный моментъ 0 работа силъ P и Q, равно какъ и работа силы R, будутъ каждая равны нулю, вслѣдствіе чего кривыя работъ этихъ силъ будутъ выходить изъ точки 0. — Итакъ, начальной точкой для кривой работъ силъ P и Q служитъ начало 0.

Переходимъ теперь къ первому изъ намѣченныхъ дальше положеній кривошипа, — къ очередному положенію 1. За время (0–1) работа силы P выражается площадью $0ax1$, а силы Q — площадью $0ey1$. Значитъ, работа l_1 дѣйствующихъ силъ P и Q за время (0–1) выразится суммой упомянутыхъ площадей, величина каждой изъ коихъ можетъ быть опредѣлена сколь угодно точно и, значитъ, можетъ быть принята извѣстной намъ вполнѣ. Итакъ,

$$l_1 = \text{площ.}\ 0ax1 + \text{площ.}\ 0ey1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Отложивъ теперь эту величину l_1 въ нѣкоторомъ заранѣе выбранномъ масштабѣ на перпендикулярѣ, возставленномъ въ точкѣ 1 (фиг. 184), получаемъ, такимъ образомъ, отрѣзокъ 1α, — ординату точки α искомой кривой.

Подобнымъ же образомъ, для момента (5) имѣемъ, что работа, совершенная силой P за время (0–5), выражается площадью $0ab5$, а силой Q — площадью $(0ef - f5g)$, такъ что общая работа силъ P и Q, совершенная ими за время (0–5), выразится такъ:

$$l_5 = \text{площ.}\ 0ab5 + \text{площ.}\ 0ef - \text{площ.}\ f5g. \quad . \quad . \quad (f)$$

Будучи отложена въ нѣкоторомъ масштабѣ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ точки (5), эта величина l_5 дастъ намъ ординату 5β точки β, соотвѣтствующей моменту (5).

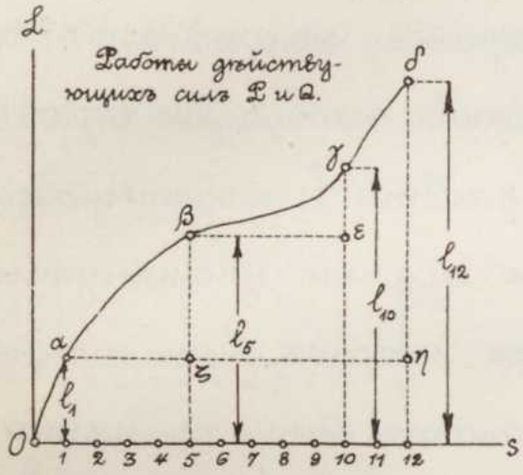
Точно такъ же для момента (10) можемъ написать, что

$$l_{10} = \text{площ. } 0ac10 + \text{площ. } 0ef - \text{площ. } fhg + \text{площ. } hl10, \quad \ldots (g)$$

что даетъ ординату $\gamma 10$ точки γ, соотвѣтствующей моменту (10). Наконецъ, въ послѣдній моментъ (12) работа l_{12} дѣйствующихъ силъ P и Q выразится такъ:

$$l_{12} = \text{площ. } 0abd12 + \text{площ. } 0ef - \text{площ. } fhg + \text{площ. } hlm12, \quad \ldots (h)$$

что даетъ конечную ординату 12δ искомой кривой.

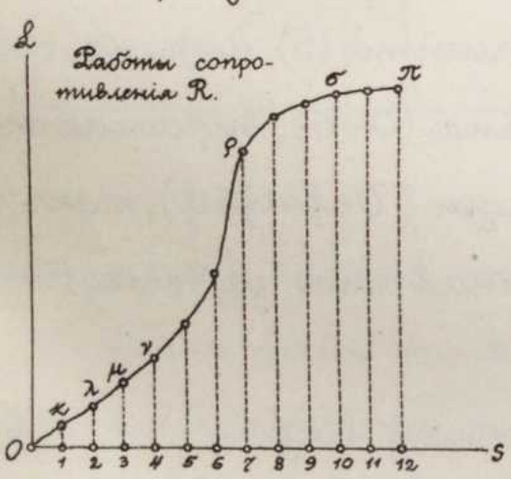


Фиг. 184.

Соединивъ полученныя такимъ путемъ точки $0, \alpha, .., \beta, .., \gamma, .., \delta$ непрерывной плавной линіей $0\alpha\beta\gamma\delta$ (фиг. 184), получимъ кривую, весьма наглядно рисующую ходъ нарастанія работы силъ P и Q. Помощью этой кривой легко опредѣлить работу, совершенную этими двумя силами за любую долю періода.

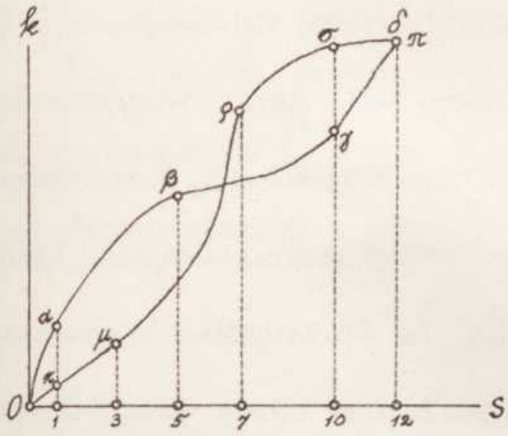
Такимъ образомъ, за время (1–5) силы P и Q произвели работу $\zeta\beta$, за время (1–12) – работу $\eta\delta$, за время (5–10) – работу $\varepsilon\gamma$, и т. д.

Перейдемъ теперь къ построенію аналогичной же кривой для работъ сопротивленія R. Это будетъ нѣкоторая кривая 0π (фиг. 185), выходящая опять изъ начала 0. Конечной точкой ея является точка π, имѣющая ординату 12π, по точности равную ординатѣ 12δ кривой 0δ (фиг. 184). Это явствуетъ изъ того соображенія, что въ конечный моментъ періода работа дѣйствующихъ силъ (за весь



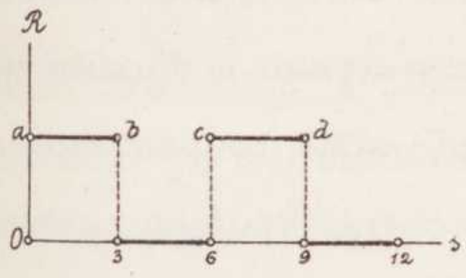
Фиг. 185.

періодъ) въ точности должна быть равна работѣ сопротивленій, совершенной за то же время. Такимъ образомъ, кривыя $O\delta$ и $O\pi$ имѣютъ, во всякомъ случаѣ, двѣ точки съ одинаковыми въ обѣихъ случаяхъ координатами; это — крайнія точки этихъ кривыхъ, т.-е. точки $(0,0)$ и (δ,π), и если бы мы наложили эти кривыя одна на другую такъ, чтобы отрѣзки (0–12) совпали своими крайними точками 0 и 12, то конечныя точки этихъ кривыхъ, т.-е. точки $(0,0)$ и (δ,π), совпали бы, какъ это и изображено на фиг. 186.

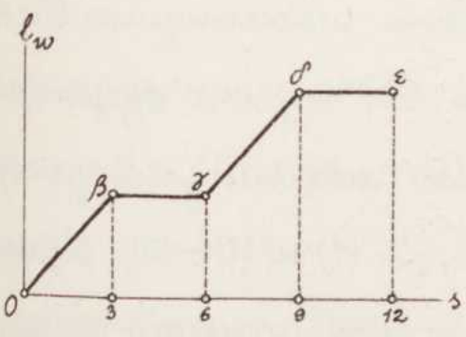


Фиг. 186.

Теченіе кривыхъ $O\delta$ и $O\pi$ можетъ быть весьма разнообразнымъ, что обусловливается характеромъ кривыхъ P, Q и R. Такъ, если силовая кривая сопротивленій R имѣетъ теченіе, изображенное на фиг. 187, то кривая работъ сопротивленій, l_w, изобразится ломаной, изображенной на фиг. 188.



Фиг. 187.



Фиг. 188.

Нетрудно привлечь теперь къ учету и приращенія живыхъ силъ механизма, имѣющія здѣсь мѣсто въ силу существованія разницы между тангенціальными усиліями и сопротивленіями или, что то же, между кривыми работъ $O\delta$ и $O\pi$. Конечно, если бы мы привлекли къ учету приращенія живыхъ силъ всего механизма, считая включеннымъ въ составъ его и маховикъ, то, прибавивъ эти приращенія къ ординатамъ кривой $O\pi$ (фиг. 185), — иначе говоря, поправивъ кри-

вую $O\Pi$ на эти приращенія живыхъ силъ, мы, понятно, пришли бы опять къ прежней кривой $O\delta$ (фиг. 184), ибо извѣстно, что для любого промежутка времени работа дѣйствующихъ силъ расходуется 1) на преодолѣніе работы сопротивленій и 2) на приращеніе живой силы системы.

Въ данномъ случаѣ, однако, весь механизмъ, приводимый въ движеніе силами P и Q, расчлененъ нами на двѣ отдѣльныхъ системы: 1) на систему маховика (съ кривошипомъ, кореннымъваломъ и проч.), и 2) на систему собственно механизма, помощью коего дѣйствующія силы приводятъ во вращеніе систему маховика. Такимъ образомъ, учетъ живыхъ силъ разбивается 1) на учетъ приращенія живой силы механизма и 2) на учетъ приращенія живой силы маховика. Теперь мы станемъ учитывать приращенія живой силы механизма и будемъ прибавлять ихъ къ соотвѣтствующимъ работамъ сопротивленія R и, такимъ образомъ, сможемъ построить кривую, учитывающую одновременно какъ работу сопротивленія R, такъ и соотвѣтственное приращеніе живой силы механизма. Для этого, согласно правилу учета работъ R, нужно будетъ подсчитывать приращенія живой силы механизма за промежутки времени $(0-1), (0-2), (0-3), \ldots, (0-11)$ и $(0-12)$. Приращенія эти будемъ вычислять согласно схемѣ, данной уравненіемъ (88), сообразно коей приращеніе живой силы механизма за какой-либо промежутокъ времени $(x \ldots y)$, — будемъ обозначать его черезъ $w_{x,y}$, — выражается такъ:

$$w_{x,y} = \frac{\vartheta_0^2}{2}\left\{\Sigma M\left[\left(\frac{\varrho l_y}{l}\right)^2 + \overline{O_y c_y}^2\right] - \Sigma M\left[\left(\frac{\varrho l_x}{l}\right)^2 + \overline{O_x c_x}^2\right]\right\}. \quad . \quad . (i)$$

Согласно сказанному выше, станемъ подсчитывать та-

кія приращенія послѣдовательно для всѣхъ промежутковъ (0–1), (0–2), . . . , начиная каждый съ момента (0). Съ этой цѣлью бросимъ планъ скоростей нашего механизма для начальнаго момента (0) и вычисляемъ помощью его сумму

$$\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_0}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_0 c_0}^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Умноживъ эту сумму на $\frac{1}{2}\vartheta_0^2$, получимъ вычитаемое нашей разности (i), примѣненной къ промежутку времени (0–1), т.-е. выраженіе

$$\frac{\vartheta_0^2}{2}\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_0}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_0 c_0}^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Составимъ теперь планъ скоростей для момента (1) и подсчитаемъ для него сумму

$$\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_1}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_1 c_1}^2\right],$$

аналогичную (k). Помноживъ полученную сумму опять на $\frac{1}{2}\vartheta_0^2$, находимъ выраженіе

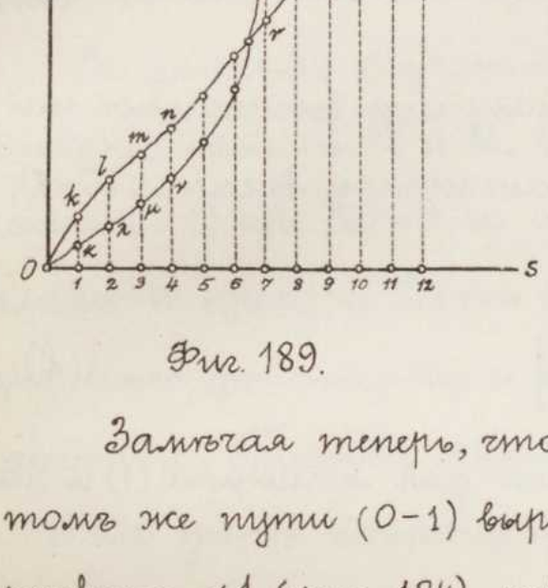
$$\frac{\vartheta_0^2}{2}\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_1}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_1 c_1}^2\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

представляющее собою уменьшаемое упомянутой разности (i). Вычитая (l) изъ (m), находимъ приращеніе живой силы механизма за время (0–1). Обозначивъ его, согласно принятому выше обозначенію, черезъ $w_{0,1}$, можемъ, такимъ образомъ, написать, что

$$w_{0,1} = \frac{\vartheta_0^2}{2}\left\{\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_1}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_1 c_1}^2\right] - \Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_0}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_0 c_0}^2\right]\right\} . \quad . \quad (n)$$

Измѣреніе величины $w_{0,1}$ то же, что и у работы. Поэтому ее можно изобразить въ томъ же масштабѣ, который примѣненъ нами на фиг. 184 и 185 для изображенія работъ,

въ видѣ нѣкотораго отрѣзка опредѣленной длины λ_1. Отложивъ этотъ отрѣзокъ по ординатѣ точки 1 отъ точки κ кривой $O\pi$ (фиг. 189), — пусть это будетъ отрѣзокъ $\varkappa k$, — найдемъ нѣкоторую точку k. Ордината $k1$ этой точки представляетъ собою алгебраическую сумму ординаты $\kappa 1$, измѣряющей собою работу сопротивленія R за время $(0-1)$, и отрѣзка kk, измѣряющаго собою приращеніе живой силы механизма за то же время $(0-1)$.



Фиг. 189.

Замѣчая теперь, что работа дѣйствующихъ силъ P и Q на томъ же пути $(0-1)$ выражается въ томъ же масштабѣ отрѣзкомъ $\alpha 1$ (фиг. 184), заключаемъ, что разность

$$\alpha 1 - k1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

ординатъ $\alpha 1$ и $k1$ и дастъ собою приращеніе живой силы маховика за то же время $(0-1)$.

Дѣйствительно, вся работа дѣйствующихъ силъ P и Q, совершенная ими за этотъ промежутокъ времени $(0-1)$ и изображаемая отрѣзкомъ $\alpha 1$ (фиг. 184), къ моменту (1) оказывается распредѣленной такъ:

1) часть ея, изображаемая отрѣзкомъ $\kappa 1$, уходитъ на преодолѣніе работы сопротивленій R,

2) другая часть, въ размѣрѣ, даваемомъ отрѣзкомъ kk, идетъ на приращеніе живой силы механизма, и, наконецъ,

3) все остающееся идетъ на приращеніе живой силы маховика.

Ясно, что это послѣднее изобразится отрѣзкомъ $\alpha 1 - (\kappa 1 + kk)$, что и даетъ выраженіе (p).

Величина kk можетъ получать какъ положительныя значенія, такъ и отрицательныя. Въ первомъ случаѣ это значитъ, что система механизма получаетъ приращеніе живой силы, увеличеніе ея, такъ что скорости точекъ ея, въ среднемъ, возрастаютъ; такъ какъ это нарощеніе запаса живой силы производится за счетъ работы силъ P и Q, подобно работѣ k1 сопротивленія R, то ясно, что отрѣзокъ kk долженъ быть прибавленъ къ отрѣзку k1. Во второмъ случаѣ отрицательное значеніе kk указываетъ на убыль живой силы механизма и, слѣдовательно, на появленіе эквивалентнаго ей количества работы, идущаго, очевидно, въ помощь работѣ дѣйствующихъ силъ, т.-е. въ погашеніе равной ему доли работы сопротивленія R; отрѣзокъ kk въ этомъ случаѣ придется откладывать внизъ отъ точки k, чтобы погасить часть работы k1, произведенной къ этому моменту (1) сопротивленіемъ R. — Въ данномъ случаѣ мы предположили, что величина kk положительна, вслѣдствіе чего и прибавили ее къ отрѣзку k1.

Перейдемъ теперь къ моменту (2). Построивъ, аналогично предыдущему, планъ скоростей для этого момента, подсчитываемъ величину $w_{0,2}$ приращенія живой силы механизма, имѣющаго мѣсто къ моменту (2), т.-е. величину

$$w_{0,2} = \frac{\vartheta_0^2}{2}\left\{\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_2}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_2 c_2}^2\right] - \Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_0}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_0 c_0}^2\right]\right\} . \quad . \quad . (q)$$

Предположимъ, что это — величина положительная, изображаемая отрѣзкомъ $l\lambda$. Прибавляя его къ ординатѣ $\lambda 2$, находимъ ординату $l2$, опредѣляющую затрату работы, идущую какъ на преодолѣніе работы сопротивленія R, такъ и на увеличеніе живой силы механизма.

Подобнымъ же образомъ поступаемъ и съ прочими моментами 3, 4, ... По фиг. 189 видно, что въ нѣкоторомъ положеніи механизма, лежащемъ между положеніями (6) и (7), приращеніе живой силы его равно нулю, а въ дальнѣйшихъ, вплоть до конца періода, это приращеніе остается все время отрицательнымъ, — здѣсь, слѣдовательно, скорости механизма, въ среднемъ, все время убываютъ, и освобождающіяся такимъ образомъ количества живой силы уходятъ все время на преодолѣніе работы сопротивленія R. Такъ, въ моментъ (7) приращеніе живой силы отрицательно и выражается отрѣзкомъ r_7, а работа сопротивленія — отрѣзкомъ φ_7; въ результатѣ получаемъ ординату r_7, оцѣнивающую собою алгебраическую сумму упомянутыхъ двухъ факторовъ.

Очевидно, что въ конечный моментъ періода, т.-е. въ моментъ (12), приращеніе живой силы механизма, $w_{0,12}$, будетъ равно нулю, ибо конфигурація его въ моментъ (12) въ точности повторяетъ собою конфигурацію въ начальный моментъ (0). Въ силу этого ордината 12π остается незатронутой.

Получается, такимъ образомъ, рядъ точекъ $0, k, l, m, \ldots, r, s, \pi$, ординаты коихъ опредѣляютъ собою количества работы, требующіяся на погашеніе работы сопротивленій R и на измѣненіе живой силы механизма. Соединивъ эти точки непрерывной плавной линіей, получаемъ кривую $0mr\pi$, показывающую ходъ измѣненій этихъ количествъ. Эта кривая $0mr\pi$ всегда имѣетъ съ кривой $0\varphi\pi$ двѣ общія точки 0 и π. Кромѣ того, нетрудно убѣдиться, что двѣ эти кривыя должны пересѣкаться еще, по крайней мѣрѣ, въ одной точкѣ. Дѣйствительно, если принять во вниманіе, что приращеніе живой силы за

полный періодъ работы механизма равна нулю, то это значитъ, что сумма положительныхъ приращеній живой силы въ точности равна (по абсолютной величинѣ) суммѣ отрицательныхъ; слѣдовательно, въ теченіе періода будутъ наблюдаться области какъ положительныхъ приращеній (отрѣзковъ типа mμ), такъ и отрицательныхъ (отрѣзковъ типа δb), а такъ первыя приращенія придется откладывать вверхъ отъ кривой 0ρπ, а вторыя — внизъ отъ нея, то отсюда слѣдуетъ, что кривая 0τsπ нѣкоторыми своими частями будетъ идти выше кривой 0ρπ, а остальными — ниже, и, значитъ, будетъ имѣть съ кривой 0ρπ, кромѣ завѣдомо общихъ точекъ 0 и π, еще, по крайней мѣрѣ, одну общую точку. Итакъ, кривыя 0ρπ и 0τsπ пересѣкаются mінімит въ трехъ точкахъ, изъ коихъ постоянное положеніе занимаютъ двѣ, — 0 и π.

Сопоставимъ теперь кривую затрачиваемыхъ работъ 0mτsπ (фиг. 189) и кривую работъ получаемыхъ, 0αβγδ (фиг. 184). Мы видѣли, что каждая изъ ординатъ кривой 0δ представляетъ собою сумму:

1) работы сопротивленія R,

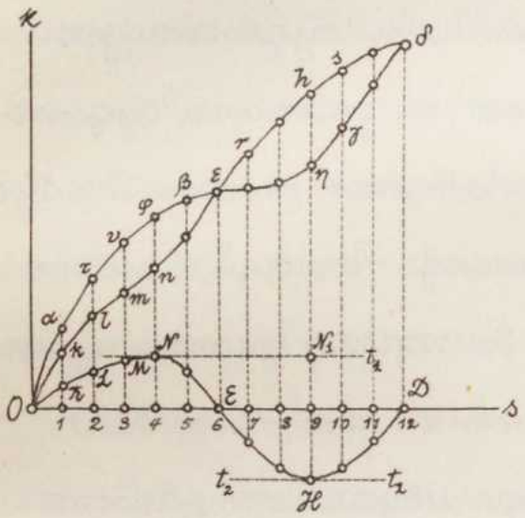
2) приращенія живой силы механизма и

3) приращенія живой силы маховика.

Въ то же время каждая изъ ординатъ кривой 0mτsπ представляетъ собою сумму первыхъ двухъ изъ этихъ факторовъ, т.-е. сумму работы сопротивленія и приращенія живой силы механизма. Отсюда слѣдуетъ, что разность соотвѣтствующихъ ординатъ кривыхъ 0δ и 0τπ будетъ представлять собою каждый разъ приращеніе живой силы маховика. Такимъ образомъ, чтобы получить ординаты кривой

изменений живой силы маховика, нужно отъ ординатъ кривой $Об$ отнимать соотвѣтственныя ординаты кривой $Оп$, что можно весьма удобно выполнить графическимъ путемъ, поступая, напримѣръ, такъ:

Вычертивъ отдѣльно кривую $Об$ работъ дѣйствующихъ силъ, вмѣстѣ съ ея системой координатъ, нанесемъ сюда же кривую $Оп$, такъ, чтобы крайнія точки ихъ совпали,—чтобы $О$ совпала съ $О$, а $п$ съ $б$ (фиг. 190). Пусть кривая $Об$ (фиг. 184) изображается теперь кривой $Оατεηγδ$, а кривая $Отгп$ (фиг. 189) — кривой $Окεhδ$. Проведемъ теперь рядъ ординатъ этихъ кривыхъ изъ точекъ 1, 2, 3, .., 11, 12 оси абсциссъ и отмѣтимъ точки пересѣченія ихъ съ нашими кривыми,—пусть это будутъ точки $α, τ, υ, φ, ..., γ, .., δ$ и $k, l, m, ..., h, .., δ$. Такъ какъ, по сказанному, ординаты кривой приращенія живыхъ силъ маховика представляются разностями ординатъ кривой $Оαβγδ$ и $Отhδ$, то эти разности получимъ, откладывая ординаты второй кривой по ординатамъ первой, внизъ отъ соотвѣтственныхъ точекъ первой кривой. Такимъ образомъ, разность ординатъ $α1$ и $k1$ найдемъ, отложивъ по $α1$, внизъ отъ точки $α$, отрѣзокъ $αK$, равный $k1$. Окажется, такимъ образомъ, что къ моменту (1) приращеніе живой силы маховика выражается отрѣзкомъ $K1$.



Фиг. 190.

Если для момента (2) ордината кривой получаемыхъ работъ есть $τ2$, а расходуемыхъ — $l2$, то разность ихъ получимъ, отложивъ по $τ2$, внизъ отъ точки $τ$, отрѣзокъ $τ2$,

равный $l2$; тогда окажется, что въ моментъ (2) приращеніе живой силы маховика выразится отрѣзкомъ $\mathfrak{L}2$.

Подобнымъ же образомъ, въ моментъ (3) это приращеніе изобразится отрѣзкомъ $M3$, при чемъ $M3 = v3 - vM$, гдѣ $vM = m3$, такъ что $M3 = v3 - m3$, и т. д.

Въ моментъ (6) это приращеніе оказывается равнымъ нулю. Дальше оказывается, что ординаты кривой Ohs превышаютъ ординаты кривой $Onyd$, но построеніе остается тѣмъ же. Такъ, напримѣръ, въ моментъ (9) искомая ордината найдется, если мы отложимъ по ординатѣ $n9$ внизъ отъ точки n отрѣзокъ nH, равный $h9$; такимъ образомъ, окажется, что для этого момента искомая ордината есть $9H$. То обстоятельство, что опредѣляемая ею точка H лежитъ ниже оси абсциссъ, т.-е. что эта ордината отрицательна, указываетъ, что приращеніе живой силы маховика къ этому моменту оказывается отрицательнымъ, такъ что угловая скорость его въ этотъ моментъ (9) убыла сравнительно съ моментомъ (0), т.-е. стала меньше начальной угловой скорости для момента (0), и мѣра этой убыли дается этой ординатой $9H$. Въ конечный моментъ (12) искомая ордината будетъ всегда равна нулю, ибо здѣсь ординаты обѣихъ нашихъ кривыхъ между собою равны. Эта ордината будетъ равна нулю также въ начальный моментъ (0).

Если теперь черезъ такъ полученныя точки $0, K, \mathfrak{L}, M, .., H$ и $\mathfrak{D}$ соединимъ непрерывной плавной линіей, то получимъ кривую $0K\mathfrak{L}HD$, дающую весьма ясное представленіе объ измѣненіяхъ живой силы маховика. Этой-то кривой и можно воспользоваться для опредѣленія момента инерціи махо-

вика, если замѣтимъ, что живая сила его выражается произведеніемъ изъ момента инерціи его на половину квадрата угловой скорости. Ясно, поэтому, что maximum угловой скорости его имѣетъ мѣсто тамъ, гдѣ наблюдается наибольшее приращеніе живой силы, а minimum — тамъ, гдѣ имѣетъ мѣсто наибольшая убыль живой силы.

Помощью кривой OD моменты максимума и минимума находятся весьма просто графическимъ путемъ,—стоитъ лишь провести крайнія горизонтальныя касательныя Mt_1 и t_2t_2. Пусть точками касанія ихъ съ кривой OD служатъ точки N и H, при чемъ допустимъ, что точка N максимума соотвѣтствуетъ положенію (4) нашего механизма, а точка H минимума — положенію (9). Тогда ясно, что отрѣзокъ N_1H, представляющій собою разстояніе между прямыми Mt_1 и t_2t_2 и, значитъ, оцѣнивающій собою превышеніе точки максимума N надъ точкой минимума H, и дастъ собою искомое значеніе величины $\varepsilon\beta^2\vartheta_0^2 J$,—см. ур.(91). Доказать это нетрудно, разсмотрѣвъ значенія ординатъ точекъ N и H.

Дѣло въ томъ, что ордината HN представляетъ собою въ нашемъ масштабѣ не что иное, какъ величину

$$(\mathfrak{L}_n)_{0,M} - \left[(\mathfrak{L}_n)_{0,M} + \frac{\vartheta_0^2}{2}\left\{\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_M}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_M C_M}^2\right] - \Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_0}{\mathfrak{L}}\right)^2 + \overline{O_0 C_0}^2\right]\right\}\right], \quad \ldots(\tau)$$

иначе говоря, величину

$$(\mathfrak{L}_n)_{0,M} - \left[(\mathfrak{L}_w)_{0,M} + w_{0,M}\right], \quad \ldots(\upsilon)$$

гдѣ членомъ $(\mathfrak{L}_n)_{0,M}$ оцѣнена работа дѣйствующихъ силъ P и Q на всемъ пути отъ начала 0 до момента максимума M, т.-е. до момента (H); подобнымъ же образомъ работа сопротивленія R на томъ же пути $(0,M)$ оцѣнена членомъ

$(\mathfrak{L}_w)_{o,m}$, а приращеніе живой силы механизма — членомъ $w_{o,m}$. Это — величина положительная.

Очевидно, далѣе, что ордината $9\mathfrak{H}$ представитъ собою въ томъ же масштабѣ величину

$$(\mathfrak{L}_n)_{o,m} - \left[(\mathfrak{L}_n)_{o,m} + \frac{\vartheta_o^2}{2}\left\{\Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_m}{l}\right)^2 + \overline{O_m c_m}^2\right] - \Sigma M\left[\left(\frac{\rho l_o}{l}\right)^2 + \overline{O_o c_o}^2\right]\right\}\right], \ldots (t)$$

т.-е. величину

$$(\mathfrak{L}_n)_{o,m} - [(\mathfrak{L}_w)_{o,m} + w_{o,m}], \quad \ldots \quad (u)$$

— смыслъ обозначеній остается прежнимъ. Величина (u) есть величина существенно отрицательная.

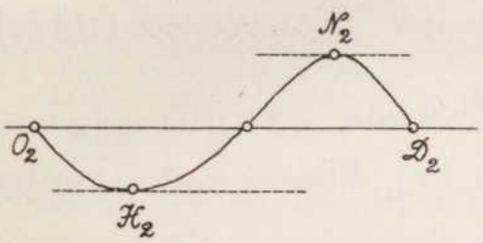
Вычтемъ теперь выраженіе (t) изъ (r). Такъ какъ отрѣзокъ $9\mathfrak{H}$ представляетъ собою нѣкоторый отрицательный векторъ, идущій внизъ отъ точки (9), то перемѣна знака его дастъ векторъ $\mathfrak{H}9$, идущій вверхъ отъ $\mathfrak{H}$, т.-е. согласно съ векторомъ $4\mathfrak{N}$, и, значитъ, разность векторовъ $4\mathfrak{N}$ и $9\mathfrak{H}$ приведется къ суммѣ векторовъ $\mathfrak{H}9$ и $4\mathfrak{N}$, т.-е. къ отрѣзку $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_1$. Съ другой стороны, въ результатѣ вычитанія получимъ правую часть уравненія (91), ибо суммы съ индексами o сократятся, оставшіяся сведутся къ разности суммъ, входящей въ (91), а разность работъ $\mathfrak{L}$ дастъ разность

$$(\mathfrak{L}_n)_{m,M} - (\mathfrak{L}_w)_{m,M},$$

т.-е. разность работъ силъ дѣйствующихъ и силъ сопротивленія за время отъ минимума m, т.-е. отъ положенія 9, до максимума M, т.-е. до положенія (4). Такъ какъ эта разность зависитъ только отъ положеній механизма и такъ какъ въ данномъ случаѣ положеніе (4) предшествуетъ положенію (9), то для подсчета ея, если бы таковой потребовалося, пришлось бы взять minimum $(9)'$ предшествующаго періо-

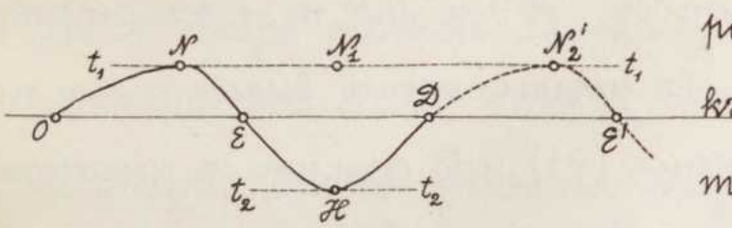
да и подсчитаемъ эту разность для промежутка (9')–(4). Это и будетъ разность $\mathfrak{L}_n - \mathfrak{L}_w$, взятая для промежутка отъ минимума (m) до максимума (M) и входящая въ уравненіе (91). Такимъ образомъ, въ результатѣ указаннаго вычитанія мы, дѣйствительно, получаемъ правую часть формулы (91).

Сказанное станетъ еще болѣе яснымъ, если вмѣсто случая, изображеннаго на фиг. 190, мы возьмемъ случай кривой $O\mathfrak{D}_2$, представленный на фиг. 191, гдѣ моментъ минимума ($\mathcal{H}_2$) предшествуетъ моменту максимума ($\mathcal{N}_2$). Тогда написаніе формулъ (r), (s), (t), (u) и (91) не представитъ рѣшительно никакихъ затрудненій.



Фиг. 191.

Повѣрка формулы (91) помощью фиг. 191 полезна еще въ томъ отношеніи, что устанавливаетъ полную независимость результатовъ отъ выбора начала, ибо очевидно, что кривая $O\mathfrak{D}$ фигуры 190 можетъ быть приведена къ типу кривой $O\mathfrak{D}_2$ фиг. 191 путемъ переноса части $O\mathcal{N}\mathcal{E}$ вправо въ положеніе $\mathfrak{D}\mathcal{N}_2'\mathcal{E}'$; такой переносъ является вполнѣ закономѣрнымъ, ибо, въ силу періодичности движенія, кривая $O\mathfrak{D}$ будетъ повторяться съ каждымъ новымъ періодомъ, безъ всякихъ измѣненій. Ясно, что величина амплитуды $\mathcal{N}_1\mathcal{H}$ отъ такого переноса не измѣняется, ибо все сводится только къ перемѣнѣ начала.



Фиг. 192.

Мы видѣли, что въ результатѣ вычитанія (t) изъ (r) получается правая часть формулы (91) или, что то же, величина $\varepsilon\beta^2\vartheta_0^2 J$, стоящая въ лѣвой части этой формулы (91). Но такъ какъ разность (t)–(r) выражается еще, въ извѣстномъ

масштабъ, отрѣзкомъ HN_1, то, обозначивъ величину HN_1 черезъ A, — это будетъ нѣкоторая опредѣленная величина, получаемая помощью кривой OD, — приходимъ къ весьма простому уравненію:

$$\varepsilon\beta^2\vartheta_0^2 J = A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

изъ котораго и находимъ J, а именно:

$$J = \frac{A}{\varepsilon\beta^2\vartheta_0^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

Дальнѣйшія вычисленія никакихъ особенностей не представляютъ. — Теперь легко усмотрѣть, что намъ, въ сущности, нѣтъ никакого дѣла до характера теченія кривой OD и, значитъ, до того, предшествуетъ ли абсолютный минимумъ абсолютному максимуму или слѣдуетъ за нимъ (въ границахъ періода). Дѣйствительно, все, какъ видимъ, сводится къ полученію отрѣзка HN_1, а величина этого отрѣзка, единственно важная для насъ, совершенно не зависитъ отъ порядка слѣдованія крайнихъ точекъ, — онъ зависитъ лишь отъ размаха кривой OD, ибо представляетъ собою амплитуду ея. Что же касается кривой OD, то она представляетъ собою элементъ постоянный, ибо является въ результатѣ вполнѣ опредѣленнаго правильно-періодическаго движенія системы; кривая эта тождественно повторяется при каждомъ новомъ періодѣ, сохраняя всѣ свои геометрическія особенности и, значитъ, амплитуду.

Уравненіе (92) можно получить еще, замѣтивъ, что размахъ колебаній живой силы опредѣляется, съ одной стороны, выраженіемъ $\varepsilon\beta^2\vartheta_0^2 J$, а съ другой — величиной A; приравнивая одну изъ нихъ другой, получимъ уравненіе (92).

Надо, однако, замѣтить, что дѣло опредѣленія момен-

та инерціи маховика еще не можетъ считаться законченнымъ вмѣстѣ съ опредѣленіемъ величины J. Дѣло въ томъ, что, при написаніи основного уравненія, приведшаго къ настоящему рѣшенію, въ интересахъ простоты и удобства была допущена нами ошибка, а именно: было предположено, что крайнія скорости коренного вала, благодаря наличности маховика, настолько мало отличаются отъ средней, что ихъ можно принять равными ей. Предположеніе это являлось необходимымъ, ибо, только сдѣлавъ его, мы могли приступить къ изложенному нами графическому пріему рѣшенія поставленной задачи. Теперь необходимо посмотрѣть, насколько велика эта ошибка, т.-е. насколько полученный маховикъ удовлетворяетъ требованіямъ равномѣрности. Съ этою цѣлью производимъ обычнымъ путемъ подсчетъ хода угловыхъ скоростей кривошипа, предположивъ теперь, что нашъ механизмъ теперь снабженъ только что подсчитаннымъ нами маховикомъ. Если колебанія угловыхъ скоростей окажутся достаточно малыми, то полученный маховикъ можно оставить; въ противномъ случаѣ его придется соотвѣтственно измѣнить.

Необходимо замѣтить, что изложенный способъ представляетъ собою, въ сущности, тотъ же способъ тангенціальныхъ усилій, лишь въ соотвѣтственно измѣненной, скрытой формѣ. Дѣло въ томъ, что, какъ это было уже показано нами достаточно ясно, приращеніе живой силы есть не что иное, какъ приращеніе работы силъ инерціи, взятое съ обратнымъ знакомъ. Слѣдовательно, всѣ кривыя приращеній живыхъ силъ представляютъ собою кривыя измѣненій работы

силъ инерціи, и если бы мы производили подсчетъ этихъ работъ обычнымъ путемъ, находя результирующія силы инерціи и подсчитывая ихъ работы, то, конечно, пришли бы сначала къ кривой тангенціальныхъ усилій, а затѣмъ къ построенію кривой работъ этихъ усилій. Результатъ получился бы тотъ же.

Изложеніемъ этихъ соображеній мы и закончимъ статью о динамическомъ изслѣдованіи механизмовъ. Мы имѣемъ теперь возможность разрѣшать всѣ вопросы, сюда относящіеся, помощью весьма простыхъ графическихъ пріемовъ; въ тѣхъ же случаяхъ, когда неизвѣстныя величины приходилось опредѣлять изъ уравненій, эти послѣднія оказывались весьма простыми уравненіями первой степени. Всѣ затрудненія оказываются затрудненіями чисто графическаго характера, вызываемыми необходимостью достаточнаго числа геометрическихъ построеній, относящихся къ ряду послѣдовательныхъ положеній механизма.

Теперь, въ порядкѣ изложенія нашего курса, переходимъ къ послѣдней, третьей части нашего курса, трактующей вопросъ объ устойчивости движенія нашихъ механизмовъ.

Часть третья.
Устойчивость машинъ во время ихъ хода.

§ 25. Устойчивость машины на фундаментѣ въ случаѣ присутствія въ составѣ данной машины кривошипныхъ механизмовъ.

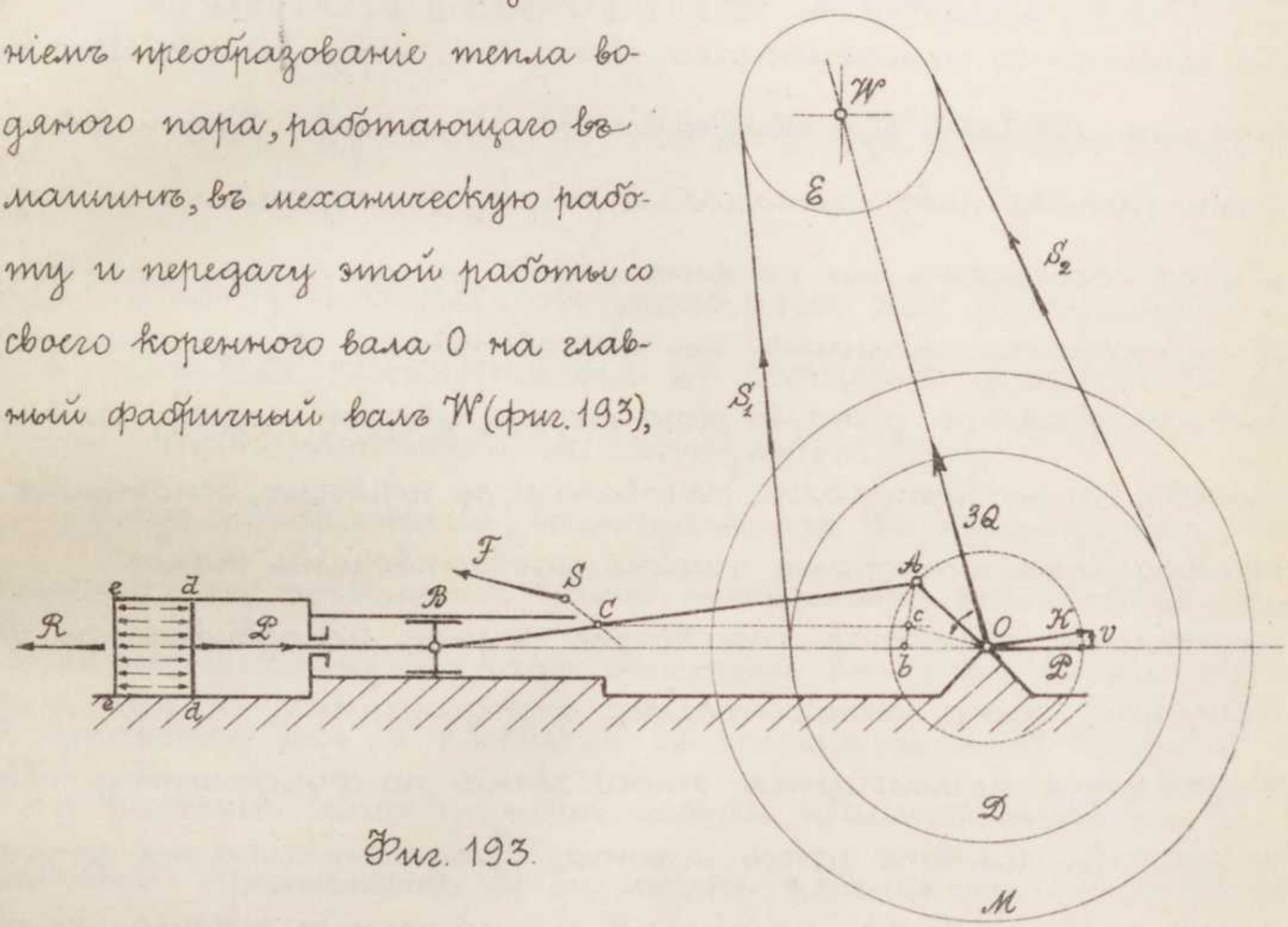
Рядъ соображеній, высказанныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, позволяетъ намъ опредѣлять для каждаго положенія механизма какъ скорости всѣхъ его точекъ, такъ и ускоренія ихъ, а вмѣстѣ съ этимъ, и силы инерціи. При расчетѣ движущихся частей нашихъ машинъ мы обязаны принимать во вниманіе наличность и силъ инерціи, что никакихъ особыхъ трудностей для насъ теперь представить не сможетъ, ибо для каждаго отдѣльнаго положенія любого изъ звеньевъ этого механизма мы имѣемъ возможность детально выяснить характеръ нагрузки его силами инерціи, т.-е. величину и направленіе ихъ; данныя, необходимыя для этого, будутъ доставлены намъ планами ускореній. Представивъ себѣ данное звено нагруженнымъ извѣстными намъ теперь силами инерціи и присоединивъ сюда другія силы, воздѣйствующія на это же звено, можемъ подсчитать размѣры этого звена, необходимые для

того, чтобы напряженія не превосходили допускаемыхъ.

Такъ разрѣшается вопросъ о вліяніи силъ инерціи на подвижныя звенья механизма. Этимъ, однако, воздѣйствіе силъ инерціи на данный механизмъ не исчерпывается. Дѣло въ томъ, что каждый механизмъ, какъ таковой, долженъ имѣть тѣ-пѣтъ двѣ неподвижныя опорныя точки, опредѣляющія собою положеніе неподвижнаго звена его, могущаго, въ свою очередь, или мѣнять свое положеніе относительно земной поверхности (локомотивъ, автомобиль, пароходъ, аэропланъ и т. д.) или же сохранять его неизмѣннымъ относительно нея (всѣ стаціонарныя машины на неподвижныхъ фундаментахъ). Это неподвижное звено, въ свою очередь, закрѣпляется, помощью болтовъ, на нѣкоторомъ основаніи, и первымъ, основнымъ требованіемъ, которому должно удовлетворять такое закрѣпленіе, является требованіе полной неподвижности упомянутаго звена относительно фундамента,—никакія относительныя перемѣщенія этого звена по фундаменту совсѣмъ не должны имѣть здѣсь мѣста. Слѣдовательно, это закрѣпленіе должно быть прочнымъ и мощнымъ настолько, чтобы быть въ состояніи успѣшно парализовать воздѣйствіе на это неподвижное звено всѣхъ силъ, стремящихся произвести смѣщеніе его относительно фундамента, считая въ числѣ этихъ силъ и силы инерціи. Посмотримъ теперь, какъ слѣдуетъ производить учетъ такихъ закрѣпленій, причемъ ограничимся разборомъ лишь одного простѣйшаго случая горизонтальной паровой машины, поставленной на неподвижномъ массивномъ фундаментѣ. Болѣе сложные случаи никакихъ особыхъ затрудненій представить не могутъ,

при изслѣдованіи ихъ придется ввести нѣкоторые новые дополнительные члены, болѣе или менѣе легко подсчитываемые; сущность же дѣла остается совершенно незатронутой.

Пусть, такимъ образомъ, у насъ имѣется нѣкоторая стаціонарная паровая машина-двигатель, снабженная маховикомъ и имѣющая своимъ назначеніемъ преобразованіе тепла водянаго пара, работающаго въ машинѣ, въ механическую работу и передачу этой работы со своего коренного вала O на главный фасичный валъ W (фиг. 193),



Фиг. 193.

помощью, напримѣръ, двухъ шкивовъ D и E и охватывающаго ихъ передаточнаго ремня, при чемъ, согласно общему требованію, предъявляемому къ передачамъ подобнаго рода, угловая скорость вала W, а значитъ, и вала O, должна или оставаться постоянной или колебаться въ весьма узкихъ предѣлахъ, заранѣе опредѣляемыхъ условіями работы даннаго двигателя и данной установки. Такимъ образомъ, моментъ, сопротивляющійся вращенію вала O, и моментъ, этотъ валъ вращающій, должны все время оставаться весьма близкими одинъ къ другому, а въ идеалѣ-равными.

Посмотримъ теперь, каковы тѣ силы, которыя, при установившемся ходѣ нашей машины, стремятся вызвать перемѣщеніе станины относительно фундамента и которыя, поэтому, должны быть приняты во вниманіе при расчетѣ болтовъ, закрѣпляющихъ станину на фундаментѣ.

Прежде всего, разсмотримъ, каковы тѣ силы, которыя нагружаютъ станину, благодаря существованіюременной передачи отъ коренного вала O къ рабочему W. Назовемъ натяженіе ведущей части ремня черезъ S_1, а ведомой — черезъ S_2, такъ что окружное усиліе Q, работающее на окружностяхъ шкивовъ, равно $S_1 - S_2$. При установившемся ходѣ машины оба эти натяженія S можно считать постоянными. Извѣстно, что при условіяхъ, близко подходящихъ къ условіямъ нашей передачи, полное давленіе какъ на валъ O, такъ и на валъ W, можетъ быть принято равнымъ $S_1 + S_2 = 3Q$ и, согласно замѣчанію, сдѣланному выше, постояннымъ. Оказывается, такимъ образомъ, что подшипникъ коренного вала O, благодаря наличностиременной передачи, нагруженъ силой $3Q$, постоянной какъ по величинѣ своей, такъ и по направленію; сила эта все время стремится оторвать станину отъ фундамента, отдѣлить ее отъ него. Поэтому фундаментные болты должны быть, прежде всего расчитаны такъ, чтобы сила тренія между опорными поверхностями станины и фундамента, вызываемая при должной затяжкѣ ихъ, была, во всякомъ случаѣ, равна горизонтальной слагающей силы $3Q$, а напряженіе на разрывъ отъ воздѣйствія силы затяжки и вертикальной слагающей силы $3Q$ не превосходило допускаемаго. Если, при горизонтальной паровой машинѣ, ось

валовъ W и O лежатъ въ одной горизонтальной плоскости, то болты придется расчитывать, очевидно, лишь на упомянутую силу тренія. Вообще говоря, расчетъ болтовъ по силѣ 3Q, посѣянной какъ по величинѣ, такъ и по направленію, никакихъ трудностей не представляетъ.

Подсчетомъ такого рода на практикѣ, обычно, и ограничиваются и затѣмъ считаютъ вопросъ исчерпаннымъ. Нетрудно, однако, усмотрѣть неправильность такого мнѣнія, для чего достаточно будетъ обратить вниманіе на эффектъ дѣйствія остальныхъ силъ, проявляющихся въ машинѣ, а именно: силъ дѣйствующихъ, приводящихъ въ движеніе поршень машины, и силъ инерціи кривошипнаго механизма. Разсмотримъ сначала вліяніе силъ дѣйствующихъ.

Мы предположимъ, что наша машина работаетъ паромъ. Такъ какъ механизмъ воздѣйствія пара на поршень разобранъ нами весьма подробно въ одномъ изъ предыдущихъ параграфовъ, то, не останавливаясь теперь на этомъ вопросѣ, мы прямо обратимся къ разбору вопроса, интересующаго насъ въ данный моментъ.

Дѣло въ томъ, что паръ, будучи впущенъ въ цилиндръ подъ поршень, оказываетъ давленіе не только на сторону dd его (фиг. 193), воспринимающую воздѣйствіе его въ этотъ моментъ, но и на стѣнки цилиндра ($ed-ed$), равно какъ и на крышку ее цилиндра, противоположную dd. Давленія на внутреннюю поверхность цилиндра ($ed-ed$), очевидно, уравновѣшиваются, равно какъ давленія на поршень dd и на крышку ее. Поэтому, если равнодѣйствующую давленій пара на сторону dd поршня, идущую, очевидно, по оси ци-

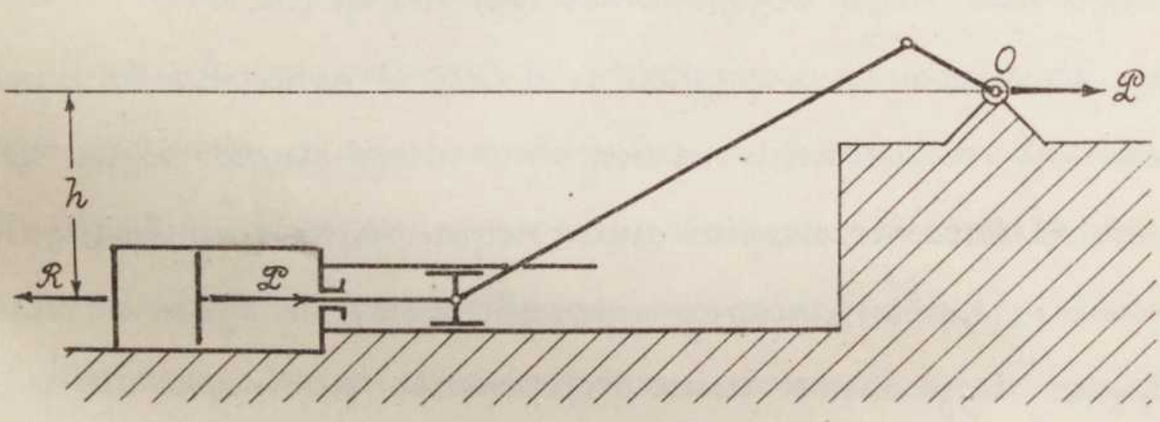
линдра и направленную въ данный моментъ, положимъ, къ ползуну B механизма, обозначимъ черезъ P (фиг. 193), то давленіе пара на крышку цилиндра будетъ равно P, но прямо ему противоположно; обозначимъ его черезъ R.

Что касается силы P, то по звеньямъ кривошипнаго механизма она передастся сначала на коренной валъ O, а съ него — на коренной подшипникъ, въ видѣ нѣкоторой силы K, параллельной шатуну BA, но горизонтальная слагающая этой силы K будетъ опять равна P, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться помощью элементарныхъ геометрическихъ построеній. Такимъ образомъ, оказывается, что въ то время, какъ задняя стѣнка ее нашей машины находится подъ воздѣйствіемъ горизонтальной силы R, направленной влѣво, коренной подшипникъ O подвергается дѣйствію горизонтальной же силы P, направленной вправо. Значитъ, станина нашей машины находится подъ воздѣйствіемъ двухъ равныхъ параллельныхъ силъ, R и P, направленныхъ въ разныя стороны; иными словами, наша станина находится подъ воздѣйствіемъ пары (R, P).

Теперь, если оси цилиндра и вала O лежатъ въ одной горизонтальной плоскости, такъ что плечо этой пары и моментъ ея равны нулю, то эта пара никакого вращающаго дѣйствія на станину производить не будетъ: силы R и P будутъ вызывать лишь эффекты растяженія и изгиба въ различныхъ частяхъ станины. Очевидно, что наличность этихъ силъ не будетъ оказывать никакого вліянія на болты станины. На нихъ здѣсь будетъ воздѣйствовать лишь вертикальная слагающая V нашей силы K, равная

$P \operatorname{tg}\alpha$, гдѣ α есть уголъ ABO наклона шатуна къ горизонту. Замѣчая, однако, что, при обычныхъ размѣрахъ нашихъ машинъ, когда отношеніе AO/AB берется равнымъ отъ $1/4$ до $1/6$, уголъ α остается очень малымъ, вслѣдствіе чего оказывается достаточно малымъ и $\operatorname{tg}\alpha$, а вмѣстѣ съ нимъ, и эта вертикальная сила $P \operatorname{tg}\alpha$, заключаемъ, что станина будетъ находиться подъ вращающимъ дѣйствіемъ лишь этой малой силы $P \operatorname{tg}\alpha$. Такъ какъ она все время остается очень малой, то ею обычно пренебрегаютъ, хотя этого дѣлать не слѣдуетъ, ибо съ каждымъ оборотомъ коренного вала эта сила два раза мѣняетъ свою величину и направленіе, а перемѣнное дѣйствіе всякой силы является, вообще, опаснымъ для механизма, и противъ него надо принять соотвѣтствующія мѣры.

Если оси цилиндра и вала, оставаясь другъ другу перпендикулярными, лежатъ въ различныхъ плоскостяхъ и если разстояніе между этими плоскостями обозначимъ черезъ h (фиг. 194), то силы R и P дадутъ здѣсь пару съ мо-



Фиг. 194.

ментомъ $L = Ph$, стремящимся вызвать вращеніе станины вокругъ одной изъ ея опорныхъ точекъ. Этому будутъ противодѣйствовать болты станины, которые поэтому и нужно

расчитать на соотвѣтствующія усилія, на нихъ при этомъ воздѣйствующія. Вертикальную слагающую $P\operatorname{tg}\alpha$, могущую достигать здѣсь значительныхъ размѣровъ, приходится принимать во вниманіе всегда.

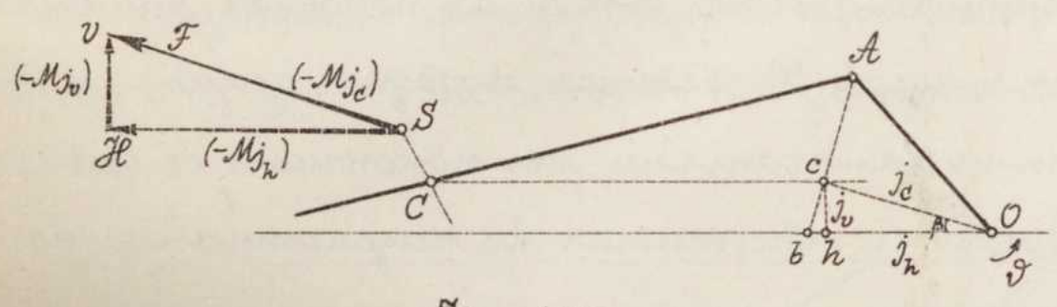
Обычно плечо h дѣлаютъ равнымъ нулю, такъ что эта сила $P\operatorname{tg}\alpha$ выходитъ очень малой, и, если ею пренебречь, то и окажется возможнымъ установить, что, при обычномъ расположеніи частей паровой машины, когда $h=0$, давленіе P пара никакого вліянія на устойчивость станины, а значитъ, и всей машины, на ея фундаментъ имѣть не можетъ, и при расчетѣ болтовъ этого давленія въ расчетъ принимать не приходится.

Всѣ эти разсужденія примѣнимы также къ любымъ другимъ двигателямъ поршневого типа, каковы: двигатели внутренняго сгоранія, водостолбовые и др. Здѣсь подъ силой P нужно разумѣть силу упругости взорвавшагося газа, давленіе неупругой жидкости и т.д. Въ паровыхъ машинахъ двойного дѣйствія силой P является свободное усиліе,—см. стр. 315 и слѣд.—Этими замѣчаніями мы покончимъ съ давленіями на поршень и обратимся къ разсмотрѣнію послѣдней категоріи силъ, нами еще не разсмотрѣнныхъ, а именно—силъ инерціи кривошипнаго механизма.

Ради простоты геометрическихъ построеній, предположимъ, что кривошипъ вращается равномѣрно; случай неравномѣрнаго вращенія подвергать особому разсмотрѣнію не стоитъ, ибо сущность изслѣдованія остается той же. Построимъ планъ ускореній системы шатуна для случая $\vartheta=\text{const}$,—пусть онъ изображается треугольникомъ Oab (фиг. 193).

Предположивъ центръ тяжести шатуна лежащимъ въ C, заключаемъ, что ускореніе его выражается черезъ $\overline{cO}.\vartheta^2$, гдѣ c есть точка плана ускореній, соотвѣтствующая точкѣ C. Если теперь массу системы шатуна AB обозначимъ черезъ M, то результирующая сила инерціи системы шатуна,—обозначимъ ее черезъ F,—выразится черезъ $(-M.\overline{cO}.\vartheta^2)$ и будетъ приложена въ центрѣ качанія S системы шатуна. Такъ какъ полное ускореніе точки C имѣетъ направленіе отъ c къ O, то сила F будетъ направлена параллельно $\overline{Oc}$, отъ O къ c.

Въ то время, какъ сила P уравновѣшивается силой R, въ системѣ нашей машины нѣтъ силы, которая могла бы уравновѣсить результирующую силу инерціи системы шатуна, F. Поэтому несомнѣнно, что эта сила инерціи F, перемѣнная какъ по величинѣ, такъ и по направленію, и является той силой, которая оказываетъ на станину наиболѣе замѣтное и серьезное воздѣйствіе, сравнительно съ другими силами, дѣйствующими на ту же станину. Присмотримся теперь нѣсколько ближе къ характеру дѣйствія этой силы инерціи F, для чего разложимъ ее на двѣ слагающихъ: горизонтальную H и вертикальную V (фиг. 195). Очевидно, что эти силы можно получить еще помощью плана ускореній Oab, разложивъ ускореніе cO на горизонтальное ускореніе $hO = j_h$ и вертикальное $ch = j_v$; тогда и окажется, что



Фиг. 195.

$$H = -Mj_h = -M.\overline{hO}.\vartheta^2 = -M.\overline{Oc}.\vartheta^2\cos\beta, \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

и

$$V = -Mj_v = -M.\overline{ch}.\vartheta^2 = -M.\overline{Oc}.\vartheta^2 \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Принимая теперь во вниманіе, что, при обычныхъ размѣрахъ нашихъ машинъ, когда отношеніе $AO : AB$ берется равнымъ $1/4 - 1/6$, угловыя отклоненія шатуна отъ оси цилиндра, BO, весьма невелики, такъ что центръ тяжести C шатуна AB, обычно лежащій на разстояніи $\frac{2}{3} AB$ отъ точки A, отходитъ отъ оси OB, какъ по одну сторону отъ нея, такъ и по другую, лишь очень мало, заключаемъ, что вертикальная слагающая V будетъ, при движеніи шатуна AB, оставаться настолько малой сравнительно съ горизонтальной слагающей H, что дѣйствіемъ ея на станину можно пренебречь. На этомъ основаніи мы ограничимся разсмотрѣніемъ вліянія одной лишь горизонтальной слагающей H. Если бы всѣ массы системы шатуна оказались сосредоточенными въ точкѣ B, то въ этой же точкѣ B лежалъ бы и центръ тяжести C системы шатуна, вслѣдствіе чего вертикальная слагающая V была бы все время равна нулю, и вся результирующая сила инерціи F свелась къ горизонтальной силѣ H, равной здѣсь $(-Mj_B)$, т.-е. $(-M.\overline{Ob}.\vartheta^2)$. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ имѣть въ виду общій случай, когда центръ тяжести C лежитъ между A и B.

Горизонтальная слагающая H, воздѣйствіе которой на станину мы теперь изучаемъ, за каждый оборотъ вала мѣняетъ свое направленіе два раза, величина же ея мѣняется все время, переходя отъ максимума, соотвѣтствующаго одному мертвому положенію механизма,—положимъ,

правому,—къ максимуму, соотвѣтствующему другому мертвому положенію, лѣвому. Такъ какъ величина H зависитъ отъ ϑ^2, то ясно, что при большихъ ϑ, т.-е. при большомъ числѣ оборотовъ коренного вала, крайнія, максимальныя значенія этой силы инерціи H могутъ достигать огромныхъ значеній, что, конечно, представитъ опасность для нашей машины. Дѣйствительно, дѣйствіе силы H можетъ быть уподоблено дѣйствію нѣкотораго молота, тѣмъ болѣе тяжелаго, чѣмъ больше угловая скорость ϑ, при чемъ этотъ молотъ какъ бы бьетъ по станинѣ то съ одной стороны, въ моментъ перехода черезъ одно мертвое положеніе, то съ другой, при переходѣ черезъ другое. А такъ какъ, вдобавокъ, число этихъ ударовъ можетъ достигать многихъ разъ въ секунду, то разрушительный эффектъ дѣйствія силы H становится очевиднымъ.

Допустимъ, напримѣръ, что вѣсъ шатуна равенъ 49 kg, число оборотовъ въ 1 минуту – 180, а максимальныя значенія вектора $\overline{Ob}$ равны: при переходѣ черезъ правое мертвое положеніе 40 cm, а черезъ лѣвое – 30 cm. Такъ какъ $M = P/g$, то, принимая $g = 980\ ^{cm}/_{sec^2}$, находимъ, что здѣсь $M = {}^{49}/_{980} = 0{,}05$. Далѣе, $\vartheta = {}^{\pi n}/_{30} = {}^{180\pi}/_{30} = 6\pi = 18{,}8$ и $\vartheta^2 = 354$. Поэтому максимальныя значенія H будутъ таковы:

$$H_{пр} = 0{,}05 \times 40 \times 354 = 708\ kg,$$

$$H_{лѣв} = 0{,}05 \times 30 \times 354 = 530\ kg.$$

Значитъ эффектъ горизонтальныхъ силъ инерціи будетъ здѣсь таковъ, какъ если бы при переходѣ черезъ правое мертвое положеніе станина была нагружена въ горизонтальномъ направленіи силой въ 708 kg, т.-е. въ 45 пудовъ, а

а черезъ лѣвое — въ 33 пуда. Силы эти будутъ сжимать одна другую по три раза въ секунду. Нетрудно представить себѣ, сколь опасной для скрѣпленія станины съ фундаментомъ является наличность такихъ ударныхъ дѣйствій; можно подсчитать и массы упомянутыхъ молотовъ, исходя, напримѣръ, изъ уравненія количествъ движенія.

Въ нашей машинѣ не имѣется никакихъ силъ, могущихъ противодѣйствовать дѣйствію силы инерціи H, и эту задачу приходится возлагать лишь на силы тренія, имѣющіяся на поверхности соприкосновенія станины съ фундаментомъ. Такимъ образомъ, если затяжка болтовъ настолько велика, что вызываемая ею упомянутая сила тренія оказывается превосходящей силу H или, по крайней мѣрѣ, ей равной, то станина будетъ оставаться неподвижной. Если бы, однако, эта сила тренія оказалась меньше H_{max}, то, очевидно, получилось бы движеніе станины по фундаменту, при чемъ уравненіе этого движенія, какъ нетрудно убѣдиться, имѣло бы видъ:

$$M_0 \frac{d^2x}{dt^2} = M.\overline{Ob}.\vartheta^2 \cos\beta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

гдѣ черезъ M_0 обозначена масса станины, а черезъ d^2x/dt^2 — ускореніе центра тяжести ея. Въ этомъ случаѣ станина, не будучи достаточно прочно соединена съ фундаментомъ, ходила бы по немъ, поперемѣнно, то въ одну сторону, то въ другую; характеръ этого движенія выяснится путемъ интеграціи уравненія (c).

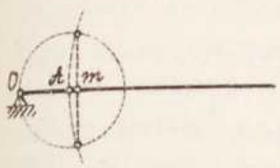
Дѣло будетъ обстоять совершенно иначе, если предварительная затяжка болтовъ оказывается настолько значительной, что вызываемая ею сила тренія совершенно па-

рализуетъ воздѣйствіе силъ инерціи; въ этомъ случаѣ станина оказывается настолько прочно соединенной съ фундаментомъ, что систему (станина + фундаментъ) можно разсматривать, какъ одно цѣлое, подверженное теперь воздѣйствію перемѣнной силы инерціи H. Учесть дѣйствіе фундамента трудно, но съ точностью, достаточной для цѣлей практики, можно представить себѣ, что онъ представляетъ собою нѣкоторую упругую систему, — балку съ защемленнымъ наглухо однимъ концомъ ея. Эта система, подвергаясь воздѣйствію силъ инерціи H, будетъ сопротивляться отклоненію ея отъ нѣкотораго средняго положенія, и величина (сила) этого сопротивленія будетъ, согласно закону Гука, пропорціональна отклоненію. Такимъ образомъ, уравненіе (c) движенія станины въ этомъ случаѣ нѣсколько измѣнится, ибо въ правой его части прибавится еще одинъ членъ, — сила K упругости фундамента и, притомъ, конечно, съ минусомъ, ибо она будетъ дѣйствовать въ сторону, противоположную силѣ инерціи H. Тогда задача, такъ поставленная, получаетъ сходство съ задачей о движеніи точки подъ воздѣйствіемъ силъ, пропорціональныхъ разстояніямъ, и силъ трепія, — задачей, весьма подробно разобранной нами въ началѣ нашего курса. Къ разсмотрѣнію полученной теперь нами задачи мы еще вернемся въ одномъ изъ дальнѣйшихъ параграфовъ нашего курса, а теперь обратимся къ дальнѣйшему разбору поставленныхъ нами выше вопросовъ.

Прежде всего, разрѣшимъ вопросъ объ опредѣленіи размѣра (діаметра) болтовъ, могущихъ закрѣпить станину на фундаментѣ настолько прочно, чтобы развиваемая здѣсь сила трепія могла противостоять си-

лами инерціи H и парализовать ихъ дѣйствіе. Будемъ разсуждать такъ:

Максимальное свое значеніе сила инерціи H принимаетъ тогда, когда кривошипъ переходитъ черезъ мертвое положеніе, лежащее въ сторону ползуна. Пусть отрѣзокъ Oh принимаетъ при этомъ значеніе Om (фиг. 196), наибольшее изъ всѣхъ, принимаемыхъ здѣсь этимъ отрѣзкомъ. Тогда находимъ, что наибольшая горизонтальная сила инерціи выражается (по абсолютной величинѣ своей) такъ:



Фиг. 196.

$$H_m = M.\overline{Om}.\vartheta^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

гдѣ M, $\overline{Om}$ и ϑ извѣстны вполнѣ. Эта-то сила H_m и должна быть преодолѣваема силой тренія, возбужденной благодаря предварительной затяжкѣ Q болтовъ. Опредѣлить эту силу Q теперь нетрудно. Обозначимъ коэффиціентъ тренія станины по фундаменту черезъ f. Тогда сила тренія, вызываемая затяжкой Q всѣхъ болтовъ, выразится черезъ Qf, вслѣдствіе чего можемъ написать уравненіе:

$$Qf = M.\overline{Om}.\vartheta^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

изъ котораго Q и опредѣлится, а именно:

$$Q = \frac{M}{f}.\overline{Om}.\vartheta^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Если число болтовъ равно n, то затяжка каждаго изъ нихъ равна Q/n. Обозначимъ напряженіе на разрывъ, вызываемое въ тѣлѣ болта такой затяжкой, черезъ Z, а діаметръ болта — черезъ d. Тогда можемъ написать, что

$$\frac{Q}{n} = Z.\frac{\pi d^2}{4}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

откуда, въ виду (f), получаемъ уравненіе, могущее служить для опредѣленія d, а именно:

$$Z.\frac{\pi d^2}{4} = \frac{M\vartheta^2}{nf}.\overline{Om}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

такъ что

$$d^2 = \frac{4M\vartheta^2.\overline{Om}}{f\pi Z}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

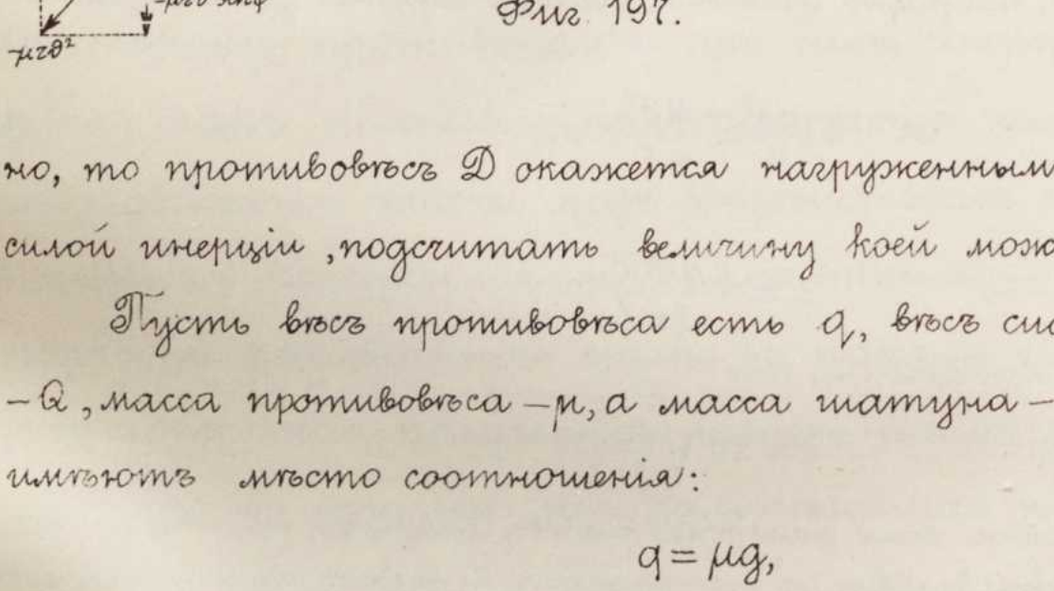
откуда находимъ окончательно, что

$$d = 2\vartheta\sqrt{\frac{M.\overline{Om}}{f\pi Z}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Таковы должны быть діаметры болтовъ, могущихъ, при общемъ числѣ своемъ n и затяжкѣ каждаго съ напряженіемъ Z, вызвать силу тренія, равную максимальной силѣ инерціи H_m. При этомъ станина окажется соединенной съ фундаментомъ настолько прочно, что относительныхъ движеній не будетъ совсѣмъ; въ этомъ случаѣ мы получимъ какъ бы одну жесткую неразрывную систему (станина + фундаментъ), которая теперь и станетъ принимать на себя дѣйствіе всѣхъ силъ инерціи кривошипнаго механизма.

Опасность отъ воздѣйствія силъ инерціи H на станину путемъ укрѣпленія болтами устраняется не вполнѣ, ибо достаточно случайнаго ослабленія затяжки, пониженія коэффиціента тренія и т. д., чтобы прочность скрѣпленія оказалась нарушенной и станина стала двигаться относительно фундамента. Поэтому приходится прибѣгать къ другимъ пріемамъ уравновѣшиванія силъ инерціи, и первымъ изъ этихъ пріемовъ мы разберемъ пріемъ посадки на кривошипъ такъ называемыхъ **противовѣсовъ**,—нѣкоторыхъ массъ, силы инерціи коихъ могли бы уравновѣшивать силы инерціи шатуна

Пріемъ этотъ состоитъ въ томъ, что на продолженіи кривошипа AO наглухо насаживается нѣкоторая масса D, вращающаяся, слѣдовательно, вмѣстѣ съ кривошипомъ. Если этотъ послѣдній вращается равномѣрно, то противовѣсъ D окажется нагруженнымъ нормальной силой инерціи, подсчитать величину коей можно такъ:



Фиг. 197.

Пусть вѣсъ противовѣса есть q, вѣсъ системы шатуна $-Q$, масса противовѣса $-\mu$, а масса шатуна $-M$, такъ что имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$q = \mu g,$$

$$Q = Mg.$$

Предположимъ, что центръ тяжести противовѣса D отстоитъ отъ центра вращенія O на разстояніе r. Тогда,

при вращеніи кривошипа съ угловой скоростью ϑ, окажется, что нормальное ускореніе центра тяжести противовѣса D равно $\vartheta^2 r$, вслѣдствіе чего нормальная сила инерціи его выразится черезъ $(-\mu\vartheta^2 r)$. Такъ какъ, при вращеніи кривошипа съ этой постоянной угловой скоростью ϑ, величина этой нормальной силы инерціи мѣняться не будетъ, направленіе же ея будетъ все время идти по радіусу OD, то и представляется возможнымъ подобрать величину этой массы μ такъ, чтобы въ моменты перехода черезъ мертвыя положенія нормальная сила инерціи $(-\mu\vartheta^2 r)$ уравновѣшивала максимальную горизонтальную силу инерціи H_m. На этомъ основаніи уравненіе для опредѣленія массы μ искомаго кривошипа можетъ быть написано такъ:

$$-M.\overline{Om}.\vartheta^2 = -\mu r\vartheta^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Сокращая по ϑ^2, находимъ еще болѣе простое уравненіе:

$$M.\overline{Om} = \mu r. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

Помножая обѣ части этого уравненія на g и помня, что $Mg = Q$, а $\mu g = q$, получаемъ уравненіе для опредѣленія вѣса q противовѣса:

$$Q.\overline{Om} = qr,$$

откуда и находимъ, наконецъ, что

$$q = Q.\frac{\overline{Om}}{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Каждому отдѣльному значенію r соотвѣтствуетъ свое, ему соотвѣтствующее, значеніе q, — выбравъ r, опредѣлимъ должное q. — Посмотримъ теперь, каково будетъ вліяніе противовѣса въ другихъ положеніяхъ кривошипа, — напримѣръ, въ положеніи, изображенномъ на той же фигурѣ 197.

Разлагая полную нормальную силу инерціи $(-\mu r\vartheta^2)$ по горизонтальному и вертикальному направленіямъ, получаемъ горизонтальную слагающую силу инерціи $(-\mu r\vartheta^2\cos\varphi)$ и вертикальную $(-\mu r\vartheta^2\sin\varphi)$, гдѣ черезъ φ обозначенъ уголъ отклоненія кривошипа AO отъ оси OB. Въ то же время горизонтальная слагающая силы инерціи системы шатуна равна $(-M.\overline{Oc}.\vartheta^2\cos\beta)$, — см. ур-іе (a), — а вертикальная равна $(-M.\overline{Oc}.\vartheta^2\sin\beta)$. Такъ какъ

$$\varphi\neq\beta,$$

а $\overline{Oc}$ перемѣнно, то горизонтальныя слагающія $(-\mu r\vartheta^2\cos\varphi)$ и $(-M.\overline{Oc}.\vartheta^2\cos\beta)$, вообще говоря, другъ другу не равны, — равенство между ними существуетъ лишь для одного изъ мертвыхъ положеній, приводящаго къ уравненію (1). Отсюда слѣдуетъ, что горизонтальное дѣйствіе силъ инерціи, всегда-ки, остается, хотя и въ значительно ослабленной степени, — горизонтальные удары по станинѣ замѣтно ослабляются.

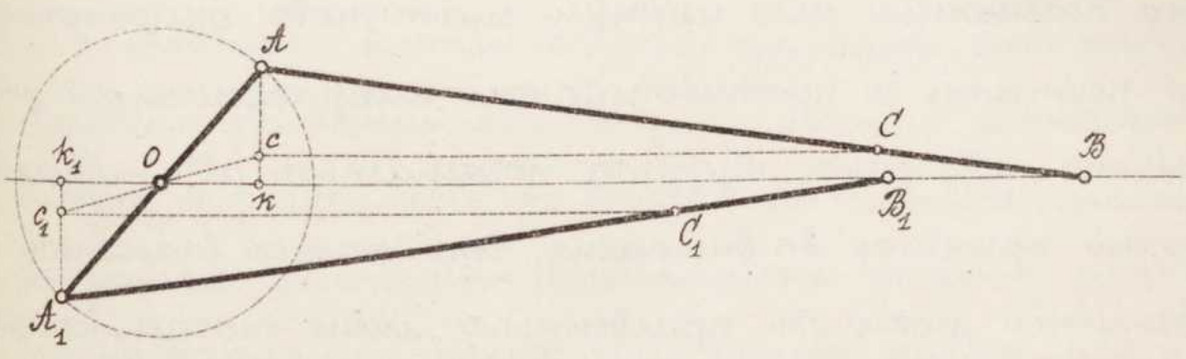
Такимъ образомъ, въ дѣлѣ ослабленія дѣйствій горизонтальныхъ силъ инерціи противовѣсъ оказываетъ весьма существенную помощь; за то онъ вводитъ новыя, дополнительныя силы инерціи, которыхъ до того не было и наличность которыхъ является, во всякомъ случаѣ, нежелательной, — мы подразумѣваемъ здѣсь вертикальныя слагающія силы инерціи противовѣса, выражающіяся черезъ $(-\mu r\vartheta^2\sin\varphi)$, перемѣнныя по своей величинѣ и при переходахъ кривошипа черезъ вертикальныя положенія могущія достигать весьма большихъ размѣровъ. Такъ какъ эти силы инерціи не уравновѣшиваются ничѣмъ, то, значитъ, при вращеніи кривошипа

онъ будутъ то прижимать станину къ фундаменту, то отта-
скивать ее отъ него, вслѣдствіе чего болты станины будутъ испы-
тывать новыя, дополнительныя напряженія на разрывъ и на
изгибъ, которыхъ до того не было, а если и были, то оказывались
лишь мало замѣтными.

Приходится, такимъ образомъ, признать, что способъ урав-
новѣшиванія силъ инерціи шатуна помощью противовѣса
является весьма несовершеннымъ, ибо, хотя противовѣсъ и мо-
жетъ предохранить станину отъ ударнаго дѣйствія гори-
зонтальныхъ слагающихъ силъ инерціи шатуна, но зато
онъ прибавляетъ новыя усилія,—вертикальныя слагающія си-
лы инерціи, до того не существовавшія.

Будучи примѣненъ въ вертикальной машинѣ, проти-
вовѣсъ могъ бы уравновѣсить вертикальныя силы инерціи ша-
туна, но зато ввелъ бы новыя горизонтальныя силы инерціи,
могущія достигать весьма значительныхъ величинъ.

Болѣе полное уравновѣшеніе силъ инерціи можетъ
быть получено и безъ противовѣсовъ, помощью спариванія
кривошиповъ подъ угломъ въ 180°. Дѣйствительно,

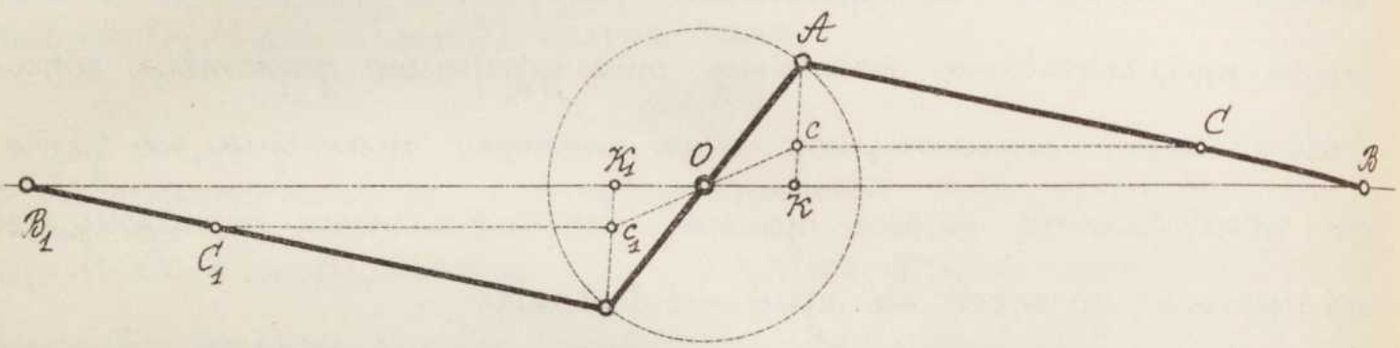


Фиг. 198.

если у насъ имѣется два тождественныхъ кривошипныхъ
механизма, OAB и OA_1B_1, кривошипы OA и OA_1 которыхъ со-
единены подъ угломъ въ 180° (фиг. 198), а ползуны ходятъ
по одну и ту же сторону относительно центра O, то, въ

виду нѣкоторой симметріи этихъ системъ относительно центра O, планы ускореній OAK и OA_1K_1 окажутся расположенными также приблизительно симметрично относительно той же точки O, такъ что OK будетъ приблизительно равно OK_1, а $Oc \sim Oc_1$.

Полное уравновѣшеніе силъ инерціи могло бы быть получено при помощи схемы, изображенной на фиг. 199; здѣсь



Фиг. 199.

механизмъ составленъ изъ двухъ тождественныхъ кривошипныхъ механизмовъ, кривошипы коихъ соединены подъ угломъ въ 180°, а ползуны расположены симметрично относительно центра O. Здѣсь всегда $OK = OK_1$, а $Oc \# Oc_1$, въ виду чего слагающія силъ инерціи шатуновъ окажутся попарно равными и противоположно направленными, — онѣ, такимъ образомъ, будутъ погашаться автоматически.

Нужно принять во вниманіе, что полное взаимное уравновѣшеніе могло бы проявиться лишь тогда, когда оба кривошипные механизма, OAB и OA_1B_1 оказались бы лежащими въ одной плоскости. Но такъ какъ осуществленіе такого сопряженія практически невозможно, и эти механизмы приходится ставить въ различныхъ плоскостяхъ, то, послѣ погашенія силъ, у насъ будутъ оста-

ваться еще нѣкоторыя пары, вращающее воздѣйствіе коихъ на станину также не слѣдуетъ упускать изъ виду.

Помощью плановъ ускореній нетрудно разобраться и во всѣхъ другихъ случаяхъ сопряженія кривошипныхъ механизмовъ, когда они оказываются наклонены другъ къ другу подъ угломъ въ 90°, 120° и др. Иногда такія сопряженія, вмѣсто погашенія силъ инерціи, ведутъ къ ихъ усиленію; это будетъ имѣть мѣсто въ тѣ моменты, когда соотвѣтствующія слагающія силы инерціи обоихъ механизмовъ будутъ одинаково направлены. Подобнымъ же образомъ легко разрѣшатся вопросы о давленіяхъ на параллели и на кривошипный подшипникъ; нужно будетъ лишь принять во вниманіе всѣ силы инерціи и точки ихъ приложенія. — Всѣ эти и имъ подобные вопросы рѣшаются помощью весьма простыхъ графическихъ построеній.

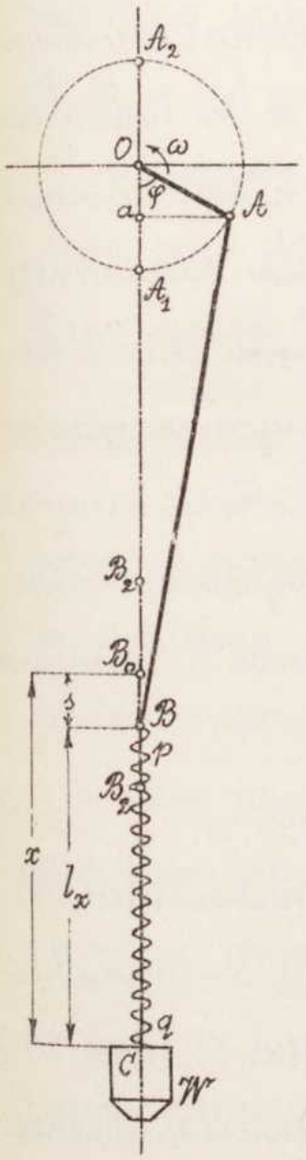
§ 26. Механизмы съ упругими звеньями. Пружинный молотъ. Критическія скорости.

Мы уже имѣли случай указать, что полное представленіе о движеніи механизма можно составить тогда, когда мы примемъ во вниманіе то обстоятельство, что въ этомъ движеніи принимаетъ участіе и основаніе его, фундаментъ, болѣе или менѣе податливый и упругій. Вопросъ этотъ мы постараемся разобрать въ ближайшемъ параграфѣ нашего курса, а теперь мы займемся разрѣшеніемъ вопроса болѣе общаго характера, а именно, вопроса о томъ, какія послѣдствія ведетъ за собою введеніе упругихъ частей въ составъ подвижныхъ частей

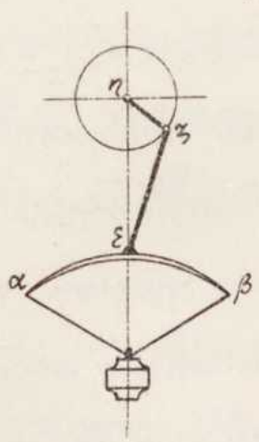
нашего механизма. Всѣ наши разсужденія, относившіяся къ механизмамъ и ихъ деталямъ, съ силами упругости не считались,—мы какъ бы предполагали, что всѣ эта тѣла представляютъ собою тѣла жесткія. Въ дѣйствительности дѣло обстоитъ иначе: всѣ наши машины и сооруженія выполняются изъ тѣлъ, болѣе или менѣе упругихъ. Конечно, упругость матеріаловъ, нами при этомъ употребляемыхъ, сравнительно очень невелика, и мы подбираемъ размѣры нашихъ деталей такъ, чтобы упругія деформаціи, или претерпѣваемыя, никогда не были особо замѣтными и не извращали кинематическаго плана движеній, нами заранѣе опредѣленнаго; тѣмъ не менѣе нельзя не признать, что силы упругости имѣютъ извѣстное вліяніе на динамическое состояніе каждаго механизма, и для того, чтобы выяснить это вліяніе возможно рельефнѣе, мы утрируемъ участіе силъ упругости, т.-е. предположимъ, что воздѣйствіе ихъ на механизмъ сказывается деформаціями, сколь угодно большими. Съ этою цѣлью удобнѣе всего предположить, что въ составъ нашего механизма, въ качествѣ одной изъ подвижныхъ частей его, входитъ нѣкоторое весьма упругое тѣло, участвующее въ общемъ движеніи. Такое предположеніе вовсе не представляетъ собою чего-либо фантастическаго, ибо подобные механизмы существуютъ на самомъ дѣлѣ, и одинъ изъ нихъ мы теперь и разберемъ. Выяснивъ движеніе такого механизма, мы сможемъ затѣмъ составить себѣ общее представленіе,—конечно, лишь качественное, а не количественное,—о томъ, что происходитъ въ каждомъ дѣй-

сительномъ механизмѣ, какъ системѣ, состоящей изъ ряда упругихъ тѣлъ. Перейдемъ теперь къ разбору движенія одного изъ такихъ механизмовъ.

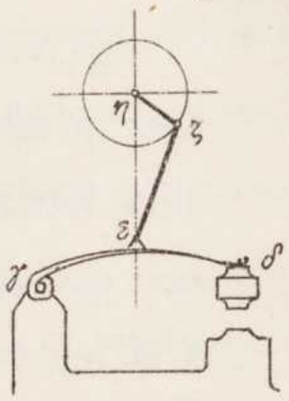
Предположимъ, что у насъ имѣется механизмъ паровой машины, OAB, расположенный такъ, что ось ползуна B, т.-е. прямая OB, вертикальна (фиг. 200). Отношеніе l/r возьмемъ достаточно большимъ, равнымъ, напримѣръ, пяти. Предположимъ теперь, что къ ползуну B, помощью пружины pq, прикрѣплено нѣкоторое тѣло W, понуждаемое этой пружиной раздѣлять извѣстнымъ образомъ движеніе ползуна B. Такой механизмъ, схематически изображенный на фиг. 200, встрѣчается довольно часто,— онъ представляетъ собою механизмъ пружиннаго молота, употребляемаго при обработкѣ металловъ.



Фиг. 200.



Фиг. 201



Фиг. 202.

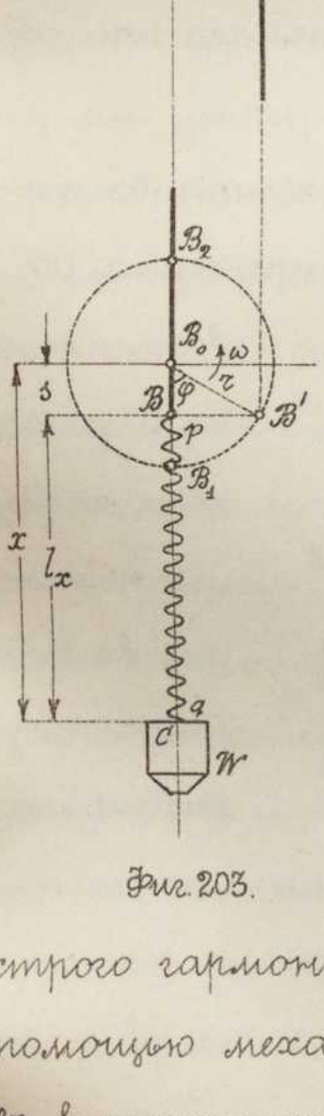
Внѣшняя форма этихъ молотовъ можетъ быть различна: иногда пружина pq выполняется въ видѣ рессоры съ двумя тягами, къ которымъ подвѣшивается бабка молота (фиг. 201). Иногда эта пружина получаетъ видъ упругой полосы $\gamma\delta$, закрѣпленной на одномъ концѣ и несущей на другомъ бабку молота (фиг. 202); полоса $\gamma\delta$ приво-

дится въ колебательное движеніе помощью кривошипнаго механизма $E\Xi\Pi$. Всѣ эти и имъ подобные механизмы, по существу своему, нисколько не разнятся отъ нашего схематическаго механизма, изображеннаго на фиг. 200, такъ какъ уравненія ихъ будутъ разниться отъ уравненія движенія механизма фиг. 200 лишь своей внѣшней формой, сущность же ихъ остается той же. Поэтому мы и ограничимся разборомъ схематическаго механизма фиг. 200.

Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію поставленной нами общей задачи, мы сначала разсмотримъ ее въ нѣсколько упрощенной формѣ, а именно, предположимъ, что точка B ползуна движется гармонически, т.-е. что пути, проходимые этой точкой B, пропорціональны косинусамъ угловъ поворота кривошипа AO, скорости — синусамъ ихъ, а ускоренія — опять косинусамъ, такъ что для точки B имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$s_B = a\cos\varphi,\ v_B = b\sin\varphi,\ j_B = c\cos\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ φ есть уголъ поворота кривошипа AO отъ начальнаго положенія A_1O, s — отклоненіе точки B отъ средней точки B_0 (фиг. 203), а a, b и c нѣкоторыя постоянныя. Такое движеніе получилось бы тогда, когда длина шатуна AB стала бы безконечно большой; однако надо замѣтить, что такое строго гармоническое движеніе могло бы быть получено еще помощью механизма двойного ползуна, какъ это было разъяснено въ кинематикѣ.



Фиг. 203.

Итакъ, мы предположили, что точка B движется гармонически. Она, следовательно, будетъ повторять движеніе точки a, проекціи на вертикальный діаметръ A_2A_1 точки A, равномѣрно движущейся по окружности центра O и радіуса $AO = r$ съ постоянной угловой скоростью ω. Поэтому точку B можно разсматривать еще, какъ проекцію на ту же прямую A_2A_1 нѣкоторой точки B', повторяющей движеніе точки A, т.-е. движущейся равномѣрно, съ той же постоянной угловой скоростью ω, по окружности центра B_0 и радіуса $B_0B_1 = OA = r$, при чемъ, очевидно, требуемое положеніе точки B' получимъ, проводя изъ B_0 радіусъ B_0B_1 параллельно OA. Ясно, что $AB' \parallel OB_0$ и что $\Delta B'B_0B$ повторяетъ собою ΔAOa. Такъ какъ уголъ $B'B_0B = \varphi$, то можно написать, что

$$B_0B = s = B_0B' \cos\varphi = r\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Такъ какъ AB' всегда равно OB_0, то механизмъ $OAB'B_0$ можно разсматривать еще, какъ механизмъ параллельнаго кривошипа съ центрами вращенія въ O и B_0; точка B будетъ, попрежнему, служить проекціей точки B' на діаметръ B_2B_1.

Мы предположили, что кривошипъ AO, а вмѣстѣ съ нимъ и кривошипъ B_0B', вращаются равномѣрно, съ постоянной угловой скоростью ω. Тогда можемъ написать, что

$$\varphi = \omega t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

гдѣ t есть время, требующееся для перехода радіуса r изъ начальнаго положенія OA_2 въ разсматриваемое OA. Поэтому соотношеніе (b) перепишется иначе еще такъ:

$$s = r\cos\omega t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Примемъ прямую OB, по которой ходитъ ползунъ B, за ось абсциссъ x, а среднее положеніе B_0 ползуна — за на-

чало этой системы, т.-е. за начало счета абсциссъ x. Тогда отклоненія b отъ начала B_0 можно будетъ обозначать черезъ x, и уравненіе (d) приметъ видъ:

$$x = r\cos\omega t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Такимъ образомъ, задача наша, въ упрощенной формѣ ея, представляется въ такомъ видѣ:

Кривошипъ AO вращается съ постоянной угловой скоростью ω, а точка B, лежащая на концѣ безконечно-длиннаго шатуна AB, движется гармонически по закону, изображаемому уравненіемъ (3). Къ ползуну B, помощью пружины pq, прикрѣплено тѣло W съ массой M, такъ что вѣсъ Q этого тѣла W выразится такъ:

$$Q = Mg. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Спрашивается, каково будетъ при этихъ условіяхъ движеніе тѣла W?

Такъ какъ тѣло W движется поступательно, то полное представленіе о движеніи всѣхъ точекъ его получимъ, выяснивъ движеніе какой-либо одной. За эту точку мы возьмемъ точку C верхней поверхности тѣла W, лежащую на пересѣченіи этой послѣдней съ вертикалью Ox. Такъ какъ движеніе точки C повторяетъ собою движеніе тѣла W, то мы и предположимъ, что въ этой точкѣ C сосредоточена вся масса M тѣла W. Тогда окажется, что точка C находится подъ воздѣйствіемъ:

1) силы тяжести Mg, направленной все время внизъ, и

2) силы упругости пружины pq. Пружина эта дѣйствуетъ такъ, что притяженіе (или отталкиваніе точки C отъ точки B происходитъ съ силой, пропорціональной изм-

нению длины пружины pq (удлинению или укорочению ея).

За начальное состояніе и начальную длину l_0 пружины мы примемъ такія, какія имѣютъ мѣсто тогда, когда пружина находится только подъ воздѣйствіемъ силы тяжести Mg; это состояніе получимъ, когда, остановивъ ползунъ B, дадимъ возможность грузу W успокоиться и всей системѣ (W+pq) придти въ равновѣсіе; силы инерціи исчезнутъ, и пружина окажется нагруженной одной лишь этой силой Mg и соотвѣтственно этой нагрузкѣ растянувшейся. Измѣненія длины l_0 и происходятъ каждый разъ вслѣдствіе вмѣшательства и участія силъ инерціи. Замѣтимъ, наконецъ, что мы пренебрегаемъ какъ собственнымъ вѣсомъ пружины и массой ея, такъ и силами тренія.

Положительнымъ направленіемъ оси x и всѣхъ другихъ векторовъ будемъ считать направленіе внизъ. Поэтому сила тяжести точки C выразится черезъ $(+Mg)$.

Предположимъ теперь, что длина пружины pq въ разсматриваемый моментъ равна l_x, такъ что удлиненіе ея выражается черезъ $(l_x - l_0)$, а возникшая благодаря этому растяженію сила упругости, притягивающая точку C къ B и стремящаяся сократить длину l_x пружины, равна $[-k_1(l_x - l_0)]$, гдѣ k_1 есть коэффиціентъ пропорціональности нашей пружины; знакъ минусъ поставленъ потому, что эта сила упругости направлена вверхъ, отъ C къ B.

Пусть абсцисса точки C равна x. Такъ какъ

$$BB_0 = s = r\cos\omega t,$$

а $BC = l_x$, то длина l_x пружины pq выразится такъ:

$$l_x = x - s = x - r\cos\omega t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Силы, воздействующія на точку C, равны $(+Mg)$ и $[-k_1(l_x - l_0)]$, такъ что уравненіе движенія точки C напишется такъ:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = +Mg - k_1(l_x - l_0). \quad . \quad . \quad . \quad . (5)$$

Въ виду (4) это уравненіе переписывается такъ:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = +Mg - k_1(x - r\cos\omega t - l_0). \quad . \quad . \quad . \quad . (e)$$

Выдѣляя постоянные члены въ отдѣльную группу, получаемъ уравненіе:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1(x - r\cos\omega t) + (Mg + k_1 l_0). \quad . \quad . \quad . (f)$$

Дѣля все на M и вводя обозначенія:

$$\frac{k_1}{M} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (6)$$

и

$$\frac{Mg + k_1 l_0}{M} = a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (7)$$

получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - r\cos\omega t) + a. \quad . \quad . \quad . \quad . (8)$$

Полученное уравненіе имѣетъ нѣкоторое сходство съ уравненіемъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + fg, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (1)$$

разобраннымъ нами въ началѣ нашего курса, — см. ур. (1) на стр. 64. Въ виду, однако, присутствія члена $(+kr\cos\omega t)$, выражающаго собою нѣкоторую силу, зависящую отъ времени, примѣнить для интеграціи уравненія (8) теорему живыхъ силъ нельзя, и приходится поступить иначе, а именно:

Положимъ, что

$$x = \xi + b\cos\omega t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

где ξ есть новое переменное, а b – некоторая постоянная величина, значение коей мы определим в дальнейшем на основании некоторых особых соображений; пока что величина b остается произвольной постоянной.

Дифференцируя соотношение (9) два раза, находим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - b\omega^2\cos\omega t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), находим уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = +b\omega^2\cos\omega t - k\xi - kb\cos\omega t + kr\cos\omega t + a$$

или, что то же, уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi + a + (b\omega^2 - kb + kr)\cos\omega t. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Так как b произвольно, то мы и выберем теперь его так, чтобы коэффициент при $\cos\omega t$ обратился в нуль, т.-е. чтобы удовлетворялось соотношение

$$b\omega^2 - kb + kr = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Очевидно, что для этого величина b должна иметь значение

$$b = \frac{kr}{k - \omega^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

При таком значении b уравнение (11) принимает весьма простой вид:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi + a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

вполне аналогичный вышеприведенному уравнению (1).

Если теперь положим, что

$$\xi - \frac{a}{k} = x_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

такъ что

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{d^2x_1}{dt^2},$$

то уравненіе (14) приметъ еще болѣе простой видъ, а именно:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-kx_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Это есть уравненіе движенія нѣкоторой точки x_1, находящейся подъ воздѣйствіемъ нѣкотораго центра, притягивающими ее съ силами, пропорціональными разстоянію (треніемъ мы пренебрегаемъ). Замѣчая теперь, что, согласно (7), величина (a) при движеніи точки не будетъ мѣнять ни величины своей, ни знака, заключаемъ, что не будетъ претерпѣвать никакихъ измѣненій и величина a/k, вслѣдствіе чего оказывается, что точка x_1 неизмѣнно связана съ точкой ξ, оставаясь все время на одномъ и томъ же разстояніи a/k отъ нея. Замѣчая теперь, согласно (16), что точка x_1 движется гармонически, заключаемъ, что такъ же гармонически будетъ двигаться и точка ξ. Посмотримъ теперь, какъ движется точка x.

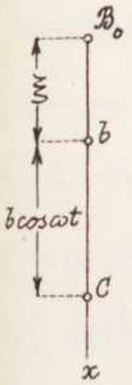
Согласно (9), имѣемъ, что

$$x=\xi+b\cos\omega t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Мы видимъ, что абсцисса x составлена изъ измѣняющейся гармонически величины ξ и нѣкотораго прибавочнаго члена $b\cos\omega t$, измѣняющагося, очевидно, также гармонически и появившагося здѣсь благодаря введенію упругой среды. Значитъ, точка x оказывается надѣленной нѣкоторымъ сложнымъ движеніемъ, составленнымъ изъ двухъ гармоническихъ движеній, одно изъ коихъ, дающее отклоненіе ξ, не зависитъ отъ угловой скорости ω кривошипа, а другое, дающее откло-

ненiе $b\cos\omega t$, очевидно, является функцiей ω.

Для того, чтобы отыскать мѣсто, занимаемое въ данный моментъ точкой C, мы должны, согласно (9), поступить такъ: опредѣливъ помощью интеграла уравненiя (14) величину ξ, соотвѣтствующую разсматриваемому моменту, опредѣляемъ затѣмъ, по извѣстнымъ b, ω и t величину $b\cos\omega t$ и откладываемъ отъ B_0 въ надлежащiя стороны отрѣзки $B_0b = \xi$ и $bC = b\cos\omega t$. Конецъ C такъ отложеннаго вектора bC и опредѣлитъ собою положенiе искомой точки C (фиг. 204). Теперь замѣтимъ слѣдующее:



Фиг. 204.

Коэффицiентъ b, какъ извѣстно, опредѣляется изъ уравненiя (13), имѣющаго видъ:

$$b = \frac{kr}{k - \omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Такимъ образомъ, если бы ω оставалась величиной постоянной, то оставалась бы постоянной и величина b, такъ что отрѣзокъ $b\cos\omega t$ измѣнялся бы по обычному гармоническому закону. Начнемъ теперь ускорять вращенiе кривошипа, т.-е. увеличивать угловую скорость ω. Тогда увидимъ, что знаменатель дроби (13) станетъ все больше и больше убывать и, наконецъ, обратится въ нуль при

$$\omega_k^2 = k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

т.-е. при

$$\omega_k = \sqrt{k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

При такомъ значенiи ω величина b, очевидно, обращается въ безконечность, вслѣдствiе чего окажется безконечно-большой и длина $b\cos\omega t$ отрѣзка BC; иными словами, это значитъ, что при такомъ значенiи b точка C удалится въ без-

конечность. Дѣло, однако, въ томъ, что точка C не является совершенно свободной,—она связана съ точкой B помощью пружины pq, и, значитъ, разстояніе между точками B и C можетъ быть только конечнымъ. Разъ, однако, точка C уходитъ въ безконечность, точка же B, колеблясь около своего средняго положенія B_0, въ безконечность уйти не можетъ, то ясно, что точка C сможетъ удалиться въ безконечность лишь тогда, когда связь ея съ точкой B будетъ уничтожена совсѣмъ, т.-е. когда лопнетъ пружина pq.—Получается, такимъ образомъ, заключеніе, весьма важное въ практическомъ отношеніи и могущее быть сформулированнымъ такъ:

Всегда, при достиженіи кривошипомъ угловой скорости ω_k, опредѣляемой изъ уравненія (18):

$$\omega_k = \sqrt{k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

пружина pq лопнетъ и механизмъ разрушится.

Замѣтимъ, кстати, что, согласно (6), величина k выражается такъ:

$$k = \frac{k_1}{M}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ черезъ k_1 обозначенъ коэффиціентъ пропорціональности нашей пружины, а черезъ M—масса бабки W нашего молота.

Тѣ же заключенія имѣютъ силу и для другихъ механизмовъ съ упругими звеньями, аналогичныхъ механизму, разобранному выше, и можно сказать, что закономѣрность движенія будетъ имѣть мѣсто лишь до тѣхъ поръ, пока угловая скорость ω нашего кривошипа будетъ оставаться отличной отъ нѣкоторой скорости ω_m, вполнѣ опредѣляемой по начальнымъ даннымъ. Но если ω подходитъ къ этой скорости ω_m, называемой критической, то меха-

низмъ неминуемо разрушается, такъ какъ упругость его частей перестаетъ удовлетворять требованіямъ прочности и цѣлости.

Предположимъ, однако, что, благодаря быстротѣ увеличенія скорости ω, намъ удалось перейти черезъ эту критическую скорость $\omega_к$ безъ всякаго вреда для механизма, и посмотримъ, что будетъ дѣлаться съ механизмомъ по мѣрѣ дальнѣйшаго увеличенія ω.

Прежде всего, замѣтимъ, что уравненіе

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

или, что то же, уравненіе

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi + a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

указываютъ на движеніе точки x_1 или ξ, тождественное съ движеніемъ маятника (или же точки, притягиваемой центромъ пропорціонально разстоянію), а мы знаемъ, что подъ вліяніемъ тренія, которымъ мы пренебрегли, — тренія внутренняго или внѣшняго, — колебанія маятника быстро затухаютъ. Такимъ образомъ, точка ξ, совершивъ нѣсколько затухающихъ колебаній, останавливается въ нѣкоторомъ положеніи, опредѣляемомъ по начальнымъ даннымъ. Замѣтивъ это, перейдемъ къ движенію точки C, положеніе которой во всякій данный моментъ опредѣляется абсциссой x, связанной съ ξ соотношеніемъ (9), согласно которому

$$x = \xi + b\cos\omega t . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Такъ какъ точка ξ, послѣ нѣсколькихъ колебаній, останавливается, то движеніе точки x, т.-е. C, опредѣляется,

главнымъ образомъ, факторомъ $b\cos\omega t$, незатухающимъ и измѣняющимся гармонически. Посмотримъ теперь, что будетъ происходить при различныхъ ω.

По уравненію (13) имѣемъ, что

$$b=\frac{kr}{k-\omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

По мѣрѣ увеличенія ω и приближенія ея къ критическому значенію ω_k, b все время возрастаетъ, и, притомъ, тѣмъ быстрѣе, чѣмъ ближе ω подходитъ къ ω_k. Законъ этихъ измѣненій можетъ быть графически представленъ равносторонней гиперболой $b(k-\omega^2)=kr=\text{const}$. Такимъ образомъ, размахи точки C будутъ все больше и больше возрастать, ибо, при замирающихъ колебаніяхъ ξ, членъ $b\cos\omega t$ при каждомъ переходѣ кривошипа черезъ вертикаль будетъ принимать значенія $(\pm b)$.

При $\omega=\omega_k=\sqrt{k}$ механизмъ подвергается риску разрушенія, такъ какъ здѣсь $b=\infty$, и точка C должна уйти въ безконечность.

Предположимъ, однако, что переходъ ω черезъ ω_k былъ такъ быстръ, что напряженія матеріала пружины не успѣли дойти до разрушающихъ, и пусть скорость ω продолжаетъ возрастать дальше. Ясно, что при $\omega^2>k$ величина b будетъ оставаться все время отрицательной, но, по мѣрѣ увеличенія ω, абсолютныя значенія b, а значитъ, и размахи величины $b\cos\omega t$, будутъ все время убывать, и значенія x станутъ все ближе и ближе подходить къ значеніямъ ξ; иначе говоря, движенія бабки W будутъ все больше и больше успокаиваться, затихать. Въ предѣлѣ, при $\omega=\infty$, найдемъ, что

$$b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

и, значитъ,

$$x = \xi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

т.-е. при $\omega = \infty$ движеніе точки C окажется подчиненнымъ одному лишь закону (14), такъ что въ этомъ предѣльномъ случаѣ точка C, совершивъ небольшое число затухающихъ колебаній, остановилась бы въ нѣкоторомъ опредѣленномъ положеніи, въ которомъ, затѣмъ, и оставалась бы дальше до тѣхъ поръ, пока не стала бы убывать скорость ω.

Такимъ образомъ, движеніе точки C, обусловливаемое, главнымъ образомъ, измѣненіями фактора $b\cos\omega t$, будетъ тѣмъ спокойнѣе и ограниченнѣе по своимъ размѣрамъ, чѣмъ меньше (по абсолютной величинѣ) этотъ факторъ, т.-е. чѣмъ больше угловая скорость ω кривошипа AO. При этомъ очевидно, что, послѣ полнаго прекращенія колебаній ξ, когда, слѣдовательно, движеніе точки C будетъ опредѣляться уже только однимъ гармоническимъ факторомъ $b\cos\omega t$, точка C будетъ колебаться столь же часто, какъ и B, но лишь съ другой амплитудой, равной, очевидно, $2b$. Такимъ образомъ, амплитуда колебаній точки C, въ конечномъ счетѣ, выражается формулой

$$2b = \frac{2kr}{k - \omega^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Мы разобрали, въ качествѣ перваго приближенія къ дѣйствительности, случай, когда точка B двигалась гармонически. Дѣйствительное движеніе точки B, при конечномъ шатунѣ, отличается отъ гармоническаго довольно

замѣтимъ, и законъ этого движенія можетъ быть полученъ такъ:

По чертежу,—см. фиг. 200,— имѣемъ, что

$$OB = Oa + aB = r\cos\varphi + \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{Aa}^2} = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi} = r\cos\varphi + l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2}. \quad (20)$$

Такъ какъ дробь r/l всегда мала,— она беретъ равной $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ и меньше,— а $\sin\varphi$ не превосходитъ единицы, то дробь $\frac{r}{l}\sin\varphi$ всегда меньше r/l, и квадратъ ея представляетъ собою величину достаточно малую, имѣющую своимъ верхнимъ предѣломъ дробь r^2/l^2, т.-е. величину $\frac{1}{16} - \frac{1}{36}$ и т.п. Замѣтивъ это, разложимъ корень по биному Ньютона, ограничиваясь при этомъ, въ виду малости дроби $\frac{r}{l}\sin\varphi$, лишь первыми двумя членами разложенія; такимъ образомъ, находимъ, что

$$OB = r\cos\varphi + l\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi\right). \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Такимъ образомъ, при $\varphi = 90°$, когда OB принимаетъ значеніе OB_0, находимъ, что

$$OB_0 = l\left(1 - \frac{r^2}{2l^2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Поэтому отрѣзокъ B_0B, обозначенный нами черезъ s, выразится такъ:

$$B_0B = s = OB - OB_0 = r\cos\varphi + l\left(\frac{r^2}{2l^2} - \frac{r^2}{2l^2}\sin^2\varphi\right) = r\cos\varphi + \frac{r^2}{2l}\cos^2\varphi.$$

Замѣчая теперь, что

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi),$$

можемъ написать, что

$$B_0B = s = r\cos\varphi + \frac{r^2}{4l}(1 + \cos 2\varphi) = \frac{r^2}{4l^2} + r\cos\varphi + \frac{r^2}{4l}\cos 2\varphi. \quad . \quad . \quad (23)$$

Таковъ приблизительный законъ движенія точки B, опредѣляющій это движеніе со второй степенью приближенія, сравнительно съ закономъ гармоническаго движенія, предположен-

нымъ выше. Прежде чѣмъ перейти къ болѣе точному изученію движенія точки C, основанному на полученномъ теперь законѣ (23), мы сдѣлаемъ небольшое отступленіе, которое въ дальнѣйшемъ дастъ намъ возможность составить на основаніи заключеній, вытекающихъ изъ закона (23), заключенія, относящіяся уже къ дѣйствительному движенію точки B. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Предположимъ, что у насъ имѣется какая-либо періодическая функція, т.-е. функція, принимающая одно и то же значеніе всякій разъ, когда къ аргументу ея мы прибавляемъ нѣкоторую опредѣленную величину, называемую періодомъ этой функціи. Такъ, напримѣръ, $\operatorname{tg} x$ есть функція періодическая, ибо $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg}(x+2\pi) = \operatorname{tg}(x+n\pi)$, такъ что періодъ функціи $\operatorname{tg} x$ равенъ π. Согласно одной изъ теоремъ анализа, данной еще Лагранжемъ и развитой затѣмъ Фурье, каждая такая періодическая функція обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что можетъ быть разложена въ рядъ по косинусамъ или синусамъ кратныхъ дугъ. Такимъ образомъ, всякая періодическая функція $f(\alpha)$ можетъ быть разложена въ рядъ такъ:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1 \cos\alpha + a_2 \cos 2\alpha + a_3 \cos 3\alpha + \ldots \ldots \quad (24)$$

Для опредѣленія коэффиціентовъ a_n даемъ параметру α послѣдовательно значенія: $0, \pi/2, \pi, \ldots$. Тогда, полагая $\alpha = 0$, находимъ, что

$$f(0) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad (k)$$

Полагая $\alpha = \pi/2$, находимъ, что

$$f(\pi/2) = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots \quad (l)$$

Полагая $\alpha = \pi$, получаемъ, что

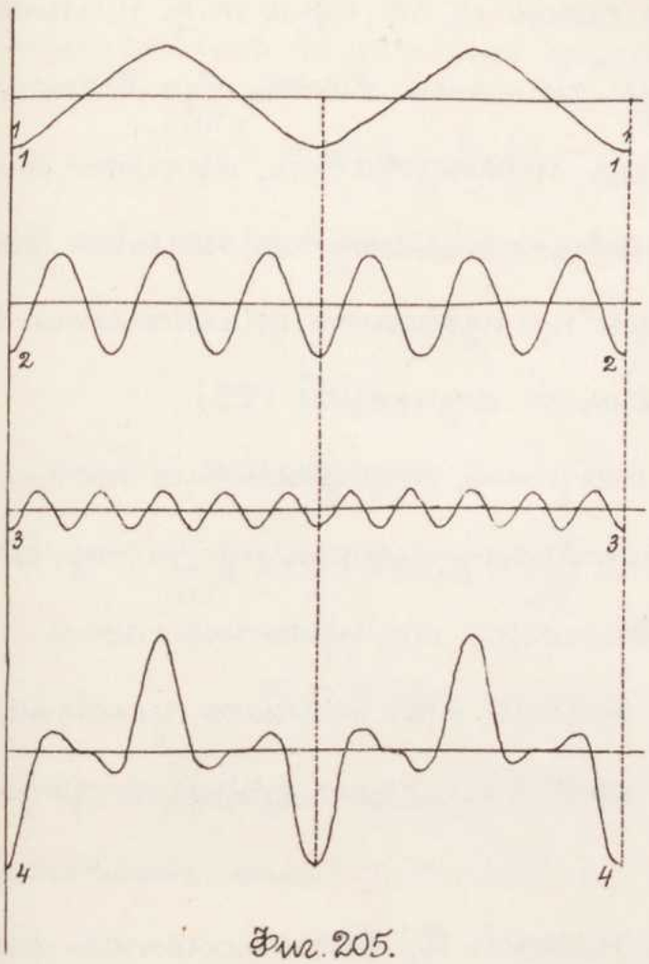
$$f(\pi) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

и т. д. Такъ какъ по данной $f(\alpha)$ всегда можно найти значенія $f(0)$, $f(\pi/2)$, $f(\pi)$ и т. д., то въ уравненіяхъ (k), (l), $(m)\ldots$, число коихъ равно n, — числу неизвѣстныхъ намъ коэффиціентовъ a_n, — лѣвыя части ихъ будутъ извѣстны, что и позволитъ намъ опредѣлить всѣ n неизвѣстныхъ величинъ a. Найдя ихъ, получаемъ возможность установить видъ ряда, изображающаго функцію (24); иными словами, можемъ опредѣлить всѣ простыя гармоническія функціи типа $a_n \cos n\alpha$, сумма коихъ даетъ намъ періодическую функцію, тождественную съ данной.

Съ разложеніями подобнаго рода приходится встрѣчаться въ ученіи о звукѣ, при разборѣ явленій сложныхъ звуковъ, разложеніи ихъ и изслѣдованіи ихъ тембровъ. Извѣстно, что всякое сложное колебаніе составляется изъ нѣкотораго основного, самаго медленнаго и дающаго наиболѣе низкій тонъ, — основной тонъ даннаго сложнаго, — и ряда верхнихъ гармоническихъ колебаній, дающихъ обертоны различной высоту и обусловливающихъ характеръ звука, тембръ его. Такимъ образомъ тембръ сложнаго звука обусловливается присутствіемъ ряда обертоновъ различной высоты, сопровождающихъ данный основной низкій.

Тотъ же принципъ разложенія сложныхъ періодическихъ движеній на рядъ простѣйшихъ гармоническихъ можетъ быть примѣненъ и ко всякимъ кривымъ, имѣющимъ періодическое теченіе. Каждую такую кривую (фиг. 205) можно представить въ видѣ суммы правильныхъ синусоидъ различной амплитуды и различныхъ временъ колебанія. Такъ, напри-

мыра, нетрудно убѣдиться, что кривая (4–4) представляетъ собою сумму кривыхъ (441), (2–2) и (3–3). Существуетъ даже спеціальный



Фиг. 205.

приборъ, – такъ называемый гармоническій анализаторъ, – который даетъ возможность подыскивать коэффиціенты ряда, изображающаго законъ даннаго колебанія.

Возвращаясь къ движенію точки В, замѣчаемъ, прежде всего, что это есть движеніе періодическое, съ періодомъ, равнымъ одному обороту кривошипа. Въ такомъ случаѣ кривая, изображающая ходъ отклоненій s этой точки В отъ средняго положенія B_0, представитъ собою кривую періодическую, и если ее изобразить въ видѣ нѣкоторой функціи F отъ угла поворота φ, то, согласно теоремѣ Фурье, можно будетъ написать, что

$$s = F(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + a_4 \cos 4\varphi + \ldots . \quad (n)$$

Первой степенью приближенія къ функціи $F(\varphi)$ служила у насъ функція $r\cos\varphi$, ибо, предположивъ движеніе гармоническимъ, мы получили, что $s = r\cos\varphi$.

Вторая степень приближенія была дана уравненіемъ (23). Здѣсь мы имѣли уже, что

$$s = \frac{r^2}{4l^2} + r\cos\varphi + \frac{r^2}{4l}\cos 2\varphi . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Здѣсь имѣемъ, что $a_0 = r^2/4l$, $a_1 = r$, $a_2 = r^2/4l$.

Для случая обыкновеннаго кривошипнаго механизма уравненіе (23) даетъ точность, вполнѣ достаточную для цѣлей практики, ибо дальнѣйшіе, очередные члены съ 3φ, 4φ и т. д. имѣютъ коэффиціенты настолько малые, что эти члены, безъ всякаго ущерба для нашихъ графическихъ изслѣдованій, могутъ быть отброшены. Поэтому мы остановимся лишь на первыхъ трехъ членахъ нашего ряда (23) и будемъ производить дальнѣйшія вычисленія именно съ такъ полученной функціей (23).

Такимъ образомъ, можно сказать, что движеніе точки B можно уподобить какъ бы нѣкоторому сложному тону, который мы разлагаемъ на составляющіе его, простые тона.

Посмотримъ теперь, какъ будетъ при такихъ условіяхъ двигаться точка C, связанная съ B помощью упругой среды, — пружины pq.

Разстояніе x точки C отъ начала B_0 выражается формулой

$$x = BC + B_0B = l_x + s.$$

Въ виду (23) можемъ далѣе написать, что

$$x = l_x + \frac{r^2}{4l} + r\cos\varphi + \frac{r^2}{4l}\cos 2\varphi.$$

Полагая

$$\varphi = \omega t,$$

можемъ дать полученному уравненію видъ

$$x = l_x + \frac{r^2}{4l} + r\cos\omega t + \frac{r^2}{4l}\cos 2\omega t.$$

Отсюда вытекаетъ, что

$$l_x = x - \frac{r^2}{4l} - r\cos\omega t - \frac{r^2}{4l}\cos 2\omega t. \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Поэтому основное уравненіе движенія точки C, имѣющее,

согласно (5), видъ

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = +Mg - k_1(l_x - l_0), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

принимаетъ въ данномъ случаѣ видъ:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - k_1\left(x - \frac{r^2}{4l} - r\cos\omega t - \frac{r^2}{4l}\cos 2\omega t - l_0\right).$$

Дѣля все уравненіе на M и обозначая, какъ и раньше,

$$\frac{k_1}{M} = k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

можемъ написать, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - k\left(x - \frac{r^2}{4l} - r\cos\omega t - \frac{r^2}{4l}\cos 2\omega t - l_0\right) =$$

$$= -k\left(x - r\cos\omega t - \frac{r^2}{4l}\cos 2\omega t\right) + \frac{kr^2}{4l} + kl_0 + g.$$

Обозначивъ сумму трехъ послѣднихъ членовъ черезъ a, т.-е. положивъ, что

$$\frac{kr^2}{4l} + kl_0 + g = a$$

можемъ написать, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(x - r\cos\omega t - \frac{r^2}{4l}\cos 2\omega t\right) + a. \quad . \quad . \quad (26)$$

Интегрированіе этого уравненія будетъ возможно лишь послѣ исключенія функцій, зависящихъ отъ t. Чтобы исключить ихъ, мы, имѣя здѣсь въ виду наличность членовъ съ ωt и $2\omega t$, полагаемъ, что

$$x = \xi + b_1\cos\omega t + b_2\cos 2\omega t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

—иными словами, предполагаемъ, что колебаніе точки C (съ абсциссой x) составляется изъ колебанія точки ξ, сложеннаго съ двумя гармоническими колебаніями: $(b_1\cos\omega t)$ и $(b_2\cos 2\omega t)$.

На основаніи (27) можемъ написать, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - b_1\omega^2\cos\omega t - 4b_2\omega^2\cos 2\omega t =$$

$$= -k\xi - kb_1\cos\omega t - kb_2\cos 2\omega t + kr\cos\omega t + \frac{kr^2}{4l}\cos 2\omega t + a.$$

Отсюда получается уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi + (b_1\omega^2 - kb_1 + kr)\cos\omega t + \left(4b_2\omega^2 - kb_2 + \frac{kr^2}{4l}\right)\cos 2\omega t + a \ldots (p)$$

Пользуясь произволом въ выборѣ значеній коэффиціентовъ b_1 и b_2, подбираемъ ихъ такъ, чтобы коэффиціенты при $\cos\omega t$ и $\cos 2\omega t$ въ уравненіи (p) обратились въ нуль. Для этого, очевидно, нужно, чтобы удовлетворялись условія.

$$b_1\omega^2 - kb_1 + kr = 0. \quad \ldots \quad (28)$$

и

$$4b_2\omega^2 - kb_2 + \frac{kr^2}{4l} = 0. \quad \ldots \quad (29)$$

Отсюда находимъ нужныя намъ значенія коэффиціентовъ b_1 и b_2, а именно:

$$b_1 = \frac{kr}{k - \omega^2}. \quad \ldots \quad (30)$$

и

$$b_2 = \frac{kr^2/4l}{k - 4\omega^2} = \frac{r}{4l}\cdot\frac{kr}{k - 4\omega^2}. \quad \ldots \quad (31)$$

При такихъ значеніяхъ коэффиціентовъ b_1 и b_2 уравненіе (p) принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\xi + a, \quad \ldots \quad (32)$$

показывающій, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, что точка ξ движется затухающимъ гармоническимъ движеніемъ, прекращающимся въ силу существованія внутренняго треніа.

Принимая теперь во вниманіе, что, согласно уравненію (27), имѣющему видъ:

$$x = \xi + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

движеніе точки (x) складывается изъ движенія точки (ξ) и двухъ гармоническихъ движеній $(b_1 \cos \omega t)$ и $(b_2 \cos 2\omega t)$, заключаемъ, что, въ силу быстраго прекращенія движенія (ξ), доминирующее значеніе въ опредѣленіи движенія точки (x) принадлежитъ именно двумъ этимъ гармоническимъ движеніямъ. Поэтому критическими скоростями явятся здѣсь тѣ, при которыхъ амплитуды этихъ гармоническихъ колебаній, а значитъ, и коэффиціенты b_1 и b_2 могутъ достичь безконечно большихъ значеній. Разсмотрѣніе выраженій (30) и (31) показываетъ, что такихъ критическихъ скоростей здѣсь имѣется двѣ, а именно:

1) скорость, получаемая изъ уравненія

$$k - \omega^2 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

назвавъ эту критическую скорость черезъ ω_1, находимъ, что значеніе ея таково:

$$\omega_1 = \sqrt{k}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

2) скорость, получаемая изъ уравненія

$$k - 4\omega^2 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

обозначая эту вторую критическую скорость черезъ ω_2, находимъ, что

$$\omega_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Оказывается, такимъ образомъ, что, кромѣ критической скорости ω_1, той же, что и въ случаѣ гармоническаго движенія точки B, имѣется еще одна критическая скорость, ω_2, равная, очевидно, половинѣ первой:

$$\omega_2 = \tfrac{1}{2}\omega_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Принимая теперь во вниманіе, что колебаніе $b_1 \cos \omega t$ представляетъ собою основной тонъ, а колебаніе $b_2 \cos 2\omega t$ — его первый гармоническій, заключаемъ, что доминирующее значеніе будетъ имѣть,

въ общемъ, членъ $b_1 \cos \omega t$. Такимъ образомъ, хотя скорость ω_2 также является критической, но, все-таки, главной критической скоростью является скорость ω_1, и, значитъ, можно сказать, что, хотя первый гармонический тонъ и вводитъ элементъ неустойчивости, подвергая механизмъ риску поломки при скорости $\sqrt{k}/2$, но если мы эту скорость перейдемъ, то механизмъ сможетъ опять идти спокойно между скоростями $\sqrt{k}/2$ и $\sqrt{k}$; приближаясь къ этой своей главной критической скорости $\sqrt{k}$, механизмъ подвергается наибольшей опасности; перейдя черезъ эту скорость, механизмъ опять будетъ двигаться тѣмъ спокойнѣе, чѣмъ дальше мы уходимъ отъ этой главной критической скорости $\sqrt{k}$.

Если бы мы продолжили разложеніе корня выраженія (20) дальше, то получили бы, согласно теоремѣ Фурье, рядъ вида

$$s = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_4 \cos 4\omega t + \ldots, \quad . \quad (38)$$

приводящій къ уравненію, аналогичному съ (27) и имѣющему видъ

$$x = \xi + \beta_1 \cos \omega t + \beta_2 \cos 2\omega t + \beta_3 \cos 3\omega t + \ldots, \quad (39)$$

при чемъ ξ опредѣлялось бы по уравненію

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi + a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

и всѣ β опредѣлились бы изъ уравненій, аналогичныхъ уравненіямъ (30) и (31). Такимъ образомъ, колебаніе x оказалось бы составленнымъ изъ колебанія ξ, быстро затухающаго, и ряда гармоническихъ колебаній, основнымъ для коихъ явилось бы колебаніе $\beta_1 \cos \omega t$, остальныя же оказались бы для него верхними гармоническими. Критическими скоростями механизма явились бы тѣ угловыя скорости кривошипа, при которыхъ коэффиціенты β оказались бы принимающими безко-

нечно-большія значенія. Наибольшей изъ нихъ явилась бы скорость

$$\omega_1 = \sqrt{k},$$

соотвѣтствующая основному тону нашего механизма, т.-е. тону $\beta_1 \cos \omega t$. Остальныя критическія скорости оказываются все меньшими и меньшими и, будучи расположены въ порядкѣ своихъ гармоническихъ колебаній, даютъ убывающій рядъ:

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{k}}{2} = \frac{\omega_1}{2}\,;\ \omega_3 = \frac{\sqrt{k}}{3} = \frac{\omega_1}{3}\,;\ \omega_4 = \frac{\sqrt{k}}{4} = \frac{\omega_1}{4}\,;\ \ldots . \qquad (41)$$

Такимъ образомъ, постоянное увеличеніе угловой скорости ω кривошипа ведетъ къ тому, что мы будемъ послѣдовательно переходить черезъ рядъ критическихъ скоростей, подвергая механизмъ риску разрушенія при переходѣ черезъ каждую такую критическую скорость. Можно сказать, слѣдовательно, что гармоническіе тона оказываютъ вліяніе на движеніе механизма и вліяніе, при томъ вредное и нежелательное. Однако, надо сказать, что опасность отъ нихъ въ значительной степени умѣряется тѣмъ обстоятельствомъ, что коэффиціенты ихъ меньше, чѣмъ выше данный гармоническій тонъ, такъ что, въ общемъ, они вносятъ только извѣстную неустойчивость движенія, немедленно, однако, исчезающую послѣ перехода черезъ каждую такую критическую скорость. Самой опасной критической скоростью всегда является скорость $\sqrt{k}$ основного тона, и, если верхніе гармоническіе тона даютъ лишь болѣе или менѣе сильное дрожаніе и тряску механизма, то основная критическая скорость можетъ его разрушить. Первенствующее значеніе въ дѣлѣ погашенія дрожаній, появляющихся

при переходахъ черезъ критическія скорости, имѣютъ силы тренія, какъ внѣшняго, такъ и внутренняго. Затѣмъ, огромную и почти всегда регулирующую роль въ этомъ отношеніи играетъ то обстоятельство, что бабка W не является вполнѣ свободной въ своихъ движеніяхъ, ибо движенія ея вверхъ ограничены точкой B (если не принимать въ расчетъ, согласно фиг. 200), внизъ же они ограничены наковальней. Стало быть, все возрастающіе и усиливающіеся размахи молота W будутъ находить себѣ каждый разъ сдерживающіе ихъ предѣлы, и вотъ эти-то остановки молота у наковальни и могутъ оказаться факторами, позволяющими механизму выиграть время и безопасно переходить черезъ критическія скорости.

Между прочимъ, теперь становится яснымъ, почему въ кривошипномъ механизмѣ полезно дѣлать большимъ отношеніе l/r; дѣйствительно, чѣмъ отношеніе это больше, тѣмъ больше движеніе ползуна приближается къ гармоническому и тѣмъ меньше вліяніе верхнихъ гармоническихъ членовъ даннаго движенія.

Если бы молотъ долженъ былъ двигаться горизонтально, то изъ уравненія движенія выпала бы сила тяжести, а на мѣсто ея вошла бы сила тренія; за этимъ исключеніемъ все остальное изслѣдованіе явилось бы повтореніемъ приведеннаго выше.

Изложенныя соображенія позволяютъ намъ теперь установить нѣкоторыя основанія для расчета пружинъ рд. Прежде всего, замѣтимъ, что коэффиціентъ

пропорціональности k_1 представляетъ собою отношеніе нагрузки P къ произведенному его относительному удлиненію длины пружины λ. Такимъ образомъ, если длина пружины до нагрузки была равна l_0, послѣ же нагрузки стала равной l_1, то относительное удлиненіе длины, λ, выразится такъ:

$$\lambda = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Согласно съ этимъ, выраженіе коэффиціента k_1 принимаетъ видъ:

$$k_1 = \frac{P}{\lambda} = \frac{P l_0}{l_1 - l_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Такъ, напримѣръ, если при нагрузкѣ въ 50 kg длина нѣкоторой пружины удлиняется на $1/50$ своей величины, такъ что $\lambda = 1/50$, то

$$k_1 = 50 : 1/50 = 2500 \text{ kg}.$$

Для основного тона нашего механизма мы имѣли выраженіе критической скорости его въ видѣ

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}},$$

гдѣ черезъ M обозначена масса бабки. Задаваясь какъ этой массой M, такъ и желаемой скоростью ω_1, найдемъ соотвѣтствующее k_1, по которому и опредѣлимъ размѣры пружины. Подобнымъ же образомъ, имѣя M и k_1, опредѣлимъ величину критической скорости ω_1, которой нужно опасаться, и т. д.

Всѣ эти разсужденія, за соотвѣтственными измѣненіями, вполнѣ приложимы ко всякимъ механизмамъ, въ составъ

которыхъ входятъ упругія звенья. Въ такихъ случаяхъ всегда существуетъ рядъ опасныхъ угловыхъ скоростей коренного вала, при которыхъ детали механизма, непосредственно сопряженныя съ этими упругими звеньями, испытываютъ стремленіе къ колебаніямъ съ безконечно-большими амплитудами, вслѣдствіе чего сами эти упругія звенья, не имѣя возможности давать такія колебанія, подвергаются опасности разрушенія. Для предотвращенія этой опасности прибѣгаютъ или къ помощи особыхъ приспособленій, посторонних механизму и имѣющихъ своимъ назначеніемъ сдерживаніе колебаній въ извѣстныхъ границахъ, или къ помощью трепія. Если помощью этихъ приспособленій мы сумѣемъ перейти черезъ опасную скорость, то, при дальнѣйшемъ увеличеніи скорости вращенія коренного вала, механизмъ будетъ идти спокойно до тѣхъ поръ, пока мы не станемъ подходить къ слѣдующей, очередной критической скорости. Здѣсь повторится та же картина, опять окажутъ свое охраняющее воздѣйствіе наши вспомогательныя приспособленія, и, при дальнѣйшемъ увеличеніи скорости вращенія, механизмъ снова начнетъ двигаться вполнѣ спокойно.

Необходимо, однако, признать, что, несмотря на присутствіе упомянутыхъ предохранительныхъ приспособленій, опасность отъ критическихъ скоростей считать совсѣмъ устраненной нельзя. Дѣло въ томъ, что, при каждомъ переходѣ черезъ критическую скорость, механизмъ будетъ испытывать толчки, болѣе или менѣе сильные. Конечно, при переходахъ черезъ критическія скорости верхнихъ гармони-

ческихъ тоновъ механизма, все можетъ свестись только къ дрожанію механизма, болѣе или менѣе сильному; но переходъ черезъ главную критическую скорость всегда сопровождается толчками огромной силы, и надо признать, что многократное повтореніе такихъ переходовъ не можетъ не отзываться вредно на механизмѣ, ибо оно неминуемо способствуетъ постепенному разрушенію его, такъ какъ эти толчки вызываютъ какъ въ упругой средѣ, такъ и въ жесткихъ деталяхъ механизма, появленіе деформацій, выходящихъ за предѣлы допустимаго.

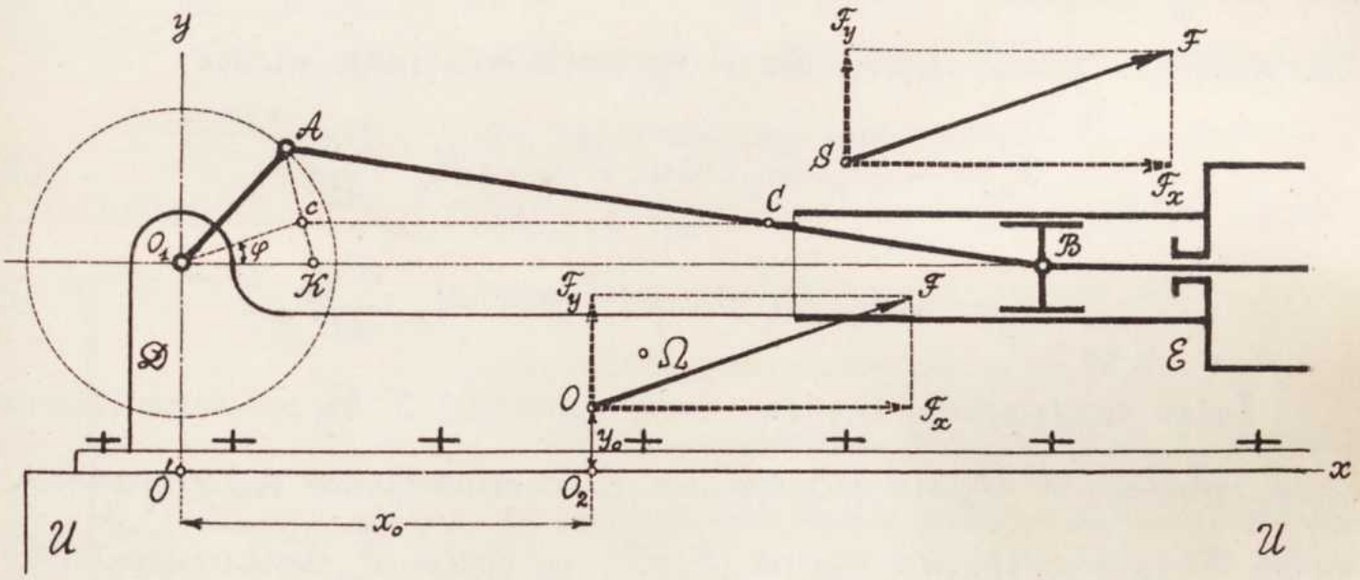
Нѣкоторые случаи поломки механизмовъ быстро идущихъ автомобилей могутъ быть хорошо объяснены теоріей критическихъ скоростей. Несомнѣнно, что, какъ при пускѣ въ ходъ двигателей автомобилей, такъ и при остановкѣ ихъ, приходится переходить черезъ критическія скорости различныхъ имѣющихся здѣсь упругихъ приспособленій и соединеній, и каждый такой переходъ неминуемо влечетъ за собою усиленное деформированіе этихъ частей, могущее, въ результатѣ, привести механизмъ къ разрушенію; очевидно, что, если въ моментъ такого перехода упругая деталь подвергнется еще нѣкоторой дополнительной деформаціи, — автомобиль можетъ испытать толчокъ, налетѣвъ на камень, попавъ въ ухабъ и т.д., — то общая, суммарная деформація можетъ оказаться выходящей за предѣлы допустимаго, и механизмъ разрушается. Такимъ образомъ, большія скорости, развиваемыя автомобилями, опасны, помимо всего прочаго, еще и тѣмъ, что держатъ всю систему въ области кри-

тическихъ скоростей и, слѣдовательно, подвергаютъ ее всѣмъ опасностямъ, съ этими областями связаннымъ.

§ 27. Критическія скорости машинъ на фундаментѣ.

Разберемъ теперь тотъ случай, когда упругая среда, не входя въ составъ движущихся частей кривошипнаго механизма, наглухо связана съ неподвижнымъ звеномъ его и, слѣдовательно, имѣетъ возможность косвенно вліять на движеніе механизма,— мы имѣемъ въ виду фундаментъ, на которомъ наглухо закрѣпляется механизмъ и который всегда нужно считать системой упругой, могущей сопротивляться попыткамъ деформированія его. Въ автомобилахъ, паровозахъ и т.п. опорные элементы двигателей, благодаря введенію рессоръ, пружинъ и т.д., обладаютъ высокой степенью упругости; фундаменты стаціонарныхъ машинъ гораздо менѣе упруги, но все-таки, съ извѣстнымъ приближеніемъ, могутъ быть принимаемы за упругія балки, защемленныя у одного конца и такъ или иначе нагруженныя на другомъ Въ виду этого можно à priori предположить, что что и для фундаментовъ, какъ системъ упругихъ, приведенныхъ въ извѣстную связь съ кривошипнымъ механизмомъ, будутъ существовать свои критическія скорости вращенія коренного вала, при которыхъ фундаментъ можетъ подвергнуться риску усиленныхъ дрожаній, сотрясеній, толчковъ и т.д., могущихъ весьма вредно отозваться на его цѣлости. Въ настоящемъ параграфѣ

мы поставимъ себѣ задачей разсмотрѣніе этого столь важнаго для техники вопроса примѣнительно къ одному простѣйшему частному случаю, тому именно, когда имѣется простая одноцилиндровая паровая машина горизонтальнаго типа, закрѣпленная помощью ряда болтовъ на неподвижномъ фундаментѣ; схематически этотъ случай изображенъ на фиг. 206. Наиболѣе ясное представленіе о движеніи фундамента можно составить, разсмотрѣвъ движеніе закрѣпленной на немъ станины, повторяющей движеніе связанной съ ней наглухо верхней поверхности фундамента.



Фиг. 206.

Съ этой цѣлью мы выяснимъ сначала всѣ силы, дѣйствующія на станину, а затѣмъ составимъ и рѣшимъ уравненіе движенія ея.

Предположимъ, такимъ образомъ, что центръ тяжести станины лежитъ въ O, а центръ тяжести шатуна – въ C. Построивъ планъ ускореній AO_1K системы шатуна и найдя въ немъ точку c, соотвѣтствующую центру тяжести C, найдемъ, что результирующая сила инерціи F системы шатуна выразится, очевидно, такъ:

$$\mathcal{F} = -M_c j_c = -M_c . \overline{cO_1} . \vartheta^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

гдѣ ϑ есть угловая скорость кривошипа AO_1, а M_c — масса системы шатуна AB. Эта результирующая сила инерціи $\mathcal{F}$ будетъ приложена въ центрѣ качанія S системы шатуна.

Возьмемъ теперь систему прямоугольныхъ осей координатъ $xO'y$ и расположимъ ее такъ, что ось x легла горизонтально по поверхности стыка станины съ фундаментомъ, а ось y прошла черезъ центръ O_1 коренного вала. Тогда, проектируя силу инерціи $\mathcal{F}$ на эти оси и помня, что проекція ускоренія j_c точки C на ось x выражается черезъ d^2x_c/dt^2, а проекція на ось y — черезъ d^2y_c/dt^2, можемъ написать, что проекціи силы инерціи $\mathcal{F}$ по осямъ $O'x$ и $O'y$ выражаются такъ:

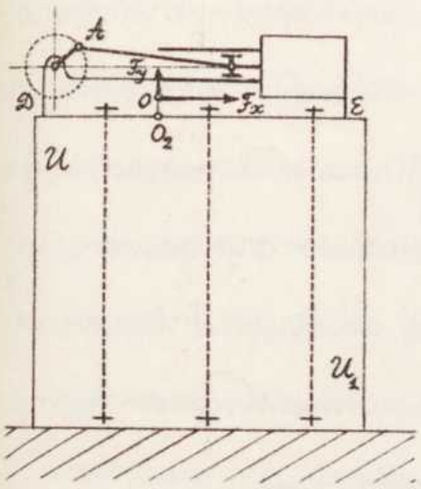
$$\mathcal{F}_x = -M_c . \overline{cO_1} . \cos\varphi . \vartheta^2 = -M_c . \frac{d^2x_c}{dt^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

$$\mathcal{F}_y = -M_c . \overline{cO_1} . \sin\varphi . \vartheta^2 = -M_c . \frac{d^2y_c}{dt^2} . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

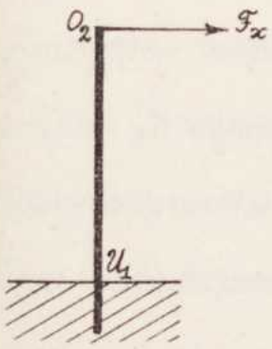
Если перенесемъ теперь силу инерціи $\mathcal{F}$ въ центръ тяжести станины O, то получимъ, что станина находится подъ воздѣйствіемъ пары $(\mathcal{F}, -\mathcal{F})$ и силы $\mathcal{F}$, приложенной теперь въ центрѣ тяжести станины. Эта пара будетъ стремиться вращать станину въ томъ или другомъ направленіи, но это вращательное дѣйствіе можно не принимать въ расчетъ совсѣмъ, такъ какъ оно будетъ парализовано сопротивленіемъ болтовъ и фундамента.

Что касается силы $\mathcal{F}$, приложенной въ центрѣ тяжести станины O, то ясно, что горизонтальная слагающая ея $\mathcal{F}_x$ будетъ стремиться сдвинуть станину въ горизонтальномъ направленіи, вертикальная же слагающая $\mathcal{F}_y$ будетъ либо отрывать станину отъ фундамента, либо прижимать

ее къ нему. Горизонтальному смѣщенію станины относительно фундамента будетъ противодѣйствовать, очевидно, сила тренія, возникающая между соприкасающимися опорными поверхностями станины и фундамента, вслѣдствіе чего горизонтальная слагающая F_x, не имѣя возможности передвинуть станину по поверхности фундамента, будетъ, черезъ посредство станины, дѣйствовать уже на самый фундаментъ $ИИ_1$, соотвѣтственно деформируя его (фиг. 207). Поэтому, если нашъ фундаментъ будемъ разсматривать, какъ балку, защемленную на концѣ $И_1$ его (фиг. 208), то воздѣйствіе горизонтальной слагающей F_x можетъ быть уподоблено изгибанію этой балки силой, перпендикулярной оси, согласно схемѣ, изображенной на фиг. 208.



Фиг. 207.



Фиг. 208.

Вертикальная слагающая F_y, по малости ея, могла бы быть совершенно не принимаема во вниманіе; тѣмъ не менѣе, ради общности выводовъ, мы учтемъ наличность и ея и составимъ уравненія движенія и по оси y. Ясно, что воздѣйствіе этой силы F_y на фундаментъ скажется или растягиваніемъ его или сжатіемъ, сопровождаемыми соотвѣтствующими деформаціями его. Перейдемъ теперь къ вопросу объ учетѣ этихъ деформацій и о вычисленіи силъ упругости фундамента, этими деформаціями вызываемыхъ.

Пусть центръ тяжести O нашей станины при покойномъ состояніи фундамента имѣетъ координаты (x_0, y_0),

а послѣ отклоненія его силой F занялъ положеніе (x_1, y_1). Въ такомъ случаѣ горизонтальное перемѣщеніе точки O оказывается равнымъ $(x_1 - x_0)$, а вертикальное... $(y_1 - y_0)$. Такъ какъ движеніе станины, наглухо закрѣпленной на фундаментѣ, можетъ быть принято за движеніе поступательныя (всѣ точки станины имѣютъ скорости равныя и одинаково направленныя), то можно сказать, что, одновременно съ точкой O и согласно съ ней перемѣстилась и вся станина, а, стало быть, какъ нижняя опорная поверхность станины, такъ и связанная съ ней верхняя поверхность фундамента. Итакъ, оказывается, что подъ дѣйствіемъ силы инерціи F верхняя поверхность фундамента перемѣстилась въ горизонтальномъ направленіи на величину $(x_1 - x_0)$, а въ вертикальномъ – на $(y_1 - y_0)$.

Первое изъ этихъ перемѣщеній можетъ быть разсматриваемо, какъ результатъ сминанія фундамента силой F_x. Такому своему деформированію фундаментъ, благодаря своей упругости, будетъ сопротивляться съ силой $[-k_x(x_1 - x_0)]$, гдѣ черезъ k_x обозначенъ коэффиціентъ пропорціональности между сминающей силой и производимой ею деформаціей. Знакъ минусъ поставленъ потому, что эта сила упругости всегда стремится къ уменьшенію деформаціи $(x_1 - x_0)$ и къ переводу ея въ нуль.

Подобнымъ же образомъ, растяженіе (или сжатіе) фундамента на величину $(y_1 - y_0)$ вызоветъ сопротивленіе со стороны силъ упругости, равное $[-k_z(y_1 - y_0)]$, гдѣ k_z есть коэффиціентъ пропорціональности при растяженіи; знакъ минусъ поставленъ по той же причинѣ, что и выше.

Такимъ образомъ, на верхнюю поверхность фундамента, а значитъ, на нижнюю поверхность станины и центръ тяжести O ея будутъ дѣйствовать еще: горизонтальная сила упругости $[-k_x(x_1 - x_0)]$

и вертикальная $[-k_z(y_1-y_0)]$.

Кромѣ всѣхъ этихъ силъ, станина, а черезъ нее и фундаментъ, будутъ находиться подъ непрестаннымъ воздѣйствіемъ силъ натяженія ремня (или каната), передающаго работу съ коренного вала машины на главный фабричный. Такъ какъ это натяженіе можно считать постояннымъ, то окажутся постоянными какъ воздѣйствія ихъ на станину и фундаментъ, такъ и деформаціи, этими силами вызываемыя. Поэтому представляется возможнымъ принять эти силы въ соображеніе уже при расчетѣ болтовъ, какъ объ этомъ было уже сказано выше. Предположивъ, что все это уже сдѣлано, мы эту силу изъ нашего теперешняго разсмотрѣнія исключимъ на томъ основаніи, что опасными для фундамента являются силы перемѣнныя, а не постоянныя.

Такимъ образомъ, выясняется, что система станины находится подъ воздѣйствіемъ ряда различныхъ силъ, а именно:

1) горизонтальной слагающей силы инерціи кривошипнаго механизма, F_x, выражаемой, согласно (b), произведеніемъ $(-M_c \cdot \overline{CO_1} \cdot \cos\varphi \cdot \vartheta^2)$,

2) вертикальной слагающей F_y той же силы инерціи, равной, согласно (c), $(-M_c \cdot \overline{CO_1} \cdot \sin\varphi \cdot \vartheta^2)$,

3) горизонтальной силы упругости фундамента, равной $[-k_x(x_1-x_0)]$,

4) вертикальной силы упругости, равной $[-k_z(y_1-y_0)]$, и, наконецъ,

5) постоянной силы натяженія передаточнаго ремня.

Первыя четыре изъ этихъ силъ отъ момента къ моменту мѣняютъ не только свою величину, но въ нѣкоторые моменты — и направленіе. Дѣйствіе ихъ, при быстрыхъ смѣнахъ этого рода, можетъ оказаться для фундамента весьма опаснымъ, въ виду чего вліяніе ихъ должно быть учтено непремѣнно. Участіе пятой, постоянной силы можетъ быть игнорировано, ибо, какъ это уже

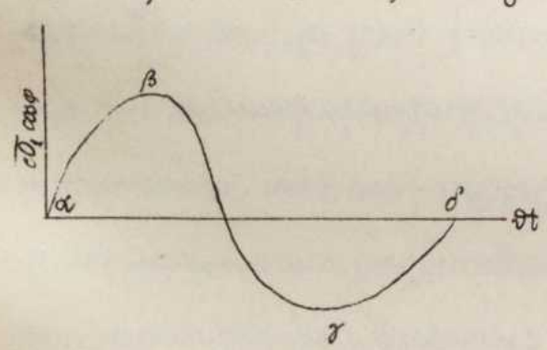
было указано, противъ дѣйствія ея можно заранѣе принять мѣры и парализовать его весьма надежно. На этомъ основаніи мы и ограничимся въ дальнѣйшемъ разсмотрѣніемъ лишь указанныхъ четырехъ силъ,—двухъ вертикальныхъ и двухъ горизонтальныхъ. Подъ дѣйствіемъ ихъ центръ тяжести станины и будетъ двигаться нѣкоторымъ вполнѣ опредѣленнымъ образомъ, и уравненіе этого движенія можетъ быть получено такъ:

При отклоненномъ положеніи станины положеніе центра тяжести ея въ данный моментъ мы опредѣлили координатами (x_1, y_1). Такимъ образомъ, проекція ускоренія его на ось x выразится черезъ d^2x_1/dt^2, а на ось y — черезъ d^2y_1/dt^2. Если массу станины обозначимъ черезъ M_0, то уравненія движенія станины по осямъ $O'x$ и $O'y$ напишутся, согласно (b) и (c), такъ:

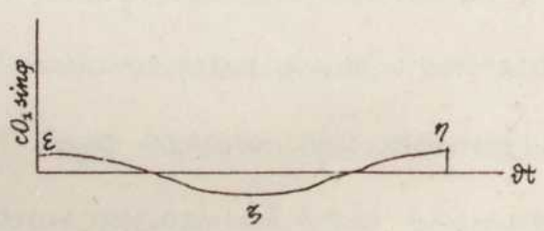
$$M_0\frac{d^2x_1}{dt^2} = \mathfrak{F}_x - k_b(x_1 - x_0) = -M_c \cdot \overline{cO_1} \cdot \cos\varphi \cdot \vartheta^2 - k_b(x_1 - x_0) \quad . \quad (44)$$

$$M_0\frac{d^2y_1}{dt^2} = \mathfrak{F}_y - k_z(y_1 - y_0) = -M_c \cdot \overline{cO_1} \cdot \sin\varphi \cdot \vartheta^2 - k_z(y_1 - y_0) \quad (45)$$

Чтобы составить себѣ наглядное представленіе о величинѣ факторовъ, стоящихъ въ правыхъ частяхъ полученныхъ уравненій, мы составимъ графики измѣненій величинъ $\overline{cO_1}\cos\varphi$ и $\overline{cO_1}\sin\varphi$ въ зависимости отъ угла AO_1B поворота



Фиг. 209.



Фиг. 210.

кривошипа, т.-е. отъ аргумента ϑt, измѣняющагося пропорціонально времени, ибо ϑ предположена постоянной. Получимъ нѣ-

которыя кривыя $\alpha\beta\gamma\delta$ для измѣненій фактора $\overline{cO_1}\cos\varphi$ и $\varepsilon\zeta\eta$ для фактора $\overline{cO_1}\sin\varphi$ (фиг. 209 и 210), имѣющія періодическое теченіе, при чемъ оказывается, что амплитуда кривой $\alpha\delta$ обычно бываетъ во много разъ больше амплитуды кривой $\varepsilon\zeta\eta$, весьма мало отходящей отъ оси абсциссъ. Въ силу этого члены типа $(-M_c \cdot \overline{cO_1}\sin\varphi \cdot \vartheta^2)$ оказываются (по абсолютной величинѣ своей) гораздо меньше членовъ типа $(-M_c \cdot \overline{cO_1}\cos\varphi \cdot \vartheta^2)$. Если къ этому прибавимъ, что y_1 лишь мало отличается отъ y_0, такъ что разность $(y_1 - y_0)$ представляетъ собою величину очень малую, то придемъ къ заключенію, что вторая часть уравненія (45) много меньше второй части уравненія (44), что показываетъ, что движеніе по оси y гораздо слабѣе движенія по оси x. Въ виду этихъ соображеній мы и ограничимся изслѣдованіемъ одного лишь движенія станины по оси x, т.-е. въ горизонтальномъ направленіи, почему мы и ограничимся разборомъ одного лишь уравненія (44).

Періодическая кривая $\alpha\delta$, изображающая ходъ измѣненій величины $\overline{cO_1}\cos\varphi$, можетъ быть представлена въ видѣ суммы ряда нѣкоторыхъ опредѣленныхъ гармоническихъ кривыхъ съ кратными аргументами ϑt, $2\vartheta t$, $3\vartheta t$ и т.д. Иными словами, имѣя въ виду періодичность функціи $\overline{cO_1}\cos\varphi$, можно представить ее въ видѣ ряда членовъ съ кратными дугами, т.-е. въ видѣ ряда

$$\overline{cO_1}\cos\varphi = a_1\cos\vartheta t + a_2\cos 2\vartheta t + a_3\cos 3\vartheta t + \ldots \quad . \quad (46)$$

Коэффиціенты a можно опредѣлить или по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ или помощью гармоническаго анализатора, о которомъ мы говорили выше. При этомъ всегда оказывается, что коэффиціенты эти убываютъ весь-

ма быстро, и уже третій коэффиціентъ a_3 получается настолько малымъ, что какъ этотъ третій членъ, такъ и всѣ дальнѣйшіе, свободно можно отбросить; ошибка, такимъ образомъ допускаемая, по малости своей не имѣетъ почти никакого вліянія на результаты нашего изслѣдованія. Поэтому мы примемъ, что

$$\overline{cO_1}\cos\varphi = a_1\cos\vartheta t + a_2\cos 2\vartheta t, \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

гдѣ коэффиціенты a_1 и a_2 представляютъ собою нѣкоторыя опредѣленныя постоянныя величины. Въ виду этого общее уравненіе (44) переходитъ въ приближенное, но, всетаки, достаточно точное уравненіе:

$$M_0\frac{d^2x_1}{dt^2} = -M_c\vartheta^2(a_1\cos\vartheta t + a_2\cos 2\vartheta t) - k_b(x_1 - x_0), \quad . \quad (48)$$

которое можно нѣсколько упростить, принявъ во вниманіе, что координата x_0, соотвѣтствующая покойному состоянію станины и фундамента, есть величина постоянная. Поэтому, раздѣливъ все уравненіе (48) на постоянную величину M_0 и введя обозначенія

$$\frac{M_c\vartheta^2}{M_0} = km, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

$$\frac{k_b}{M_0} = k. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

и

$$\frac{k_b x_0}{M_0} = A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

причемъ всѣ эти три величины k, m и A представятъ собою величины постоянныя, можемъ дать уравненію (48) болѣе простой видъ, а именно:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = km(a_1\cos\vartheta t + a_2\cos 2\vartheta t) - kx_1 + A. \quad . \quad . \quad (52)$$

или, что то же, виду:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - ma_1\cos\vartheta t - ma_2\cos 2\vartheta t) + A \quad . \quad . \quad . (53)$$

Уравнение это цѣликомъ повторяетъ собою уравнение (26) на стр. 555, полученное для случая механизма съ упругими звеньями. Интеграція его можетъ быть выполнена помощью того же пріема, что и раньше, а именно:

Полагаемъ, что

$$x_1 = \xi + b_1\cos\vartheta t + b_2\cos 2\vartheta t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

такъ что

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - b_1\vartheta^2\cos\vartheta t - 4b_2\vartheta^2\cos 2\vartheta t. \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Въ виду (54) и (55) уравнение (53) можетъ быть переписано иначе такъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = b_1\vartheta^2\cos\vartheta t + 4b_2\vartheta^2\cos 2\vartheta t - k\xi - kb_1\cos\vartheta t - kb_2\cos 2\vartheta t + \\ + kma_1\cos\vartheta t + kma_2\cos 2\vartheta t + A,$$

что приводится къ уравнению:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi + (b_1\vartheta^2 - kb_1 + kma_1)\cos\vartheta t + (4b_2\vartheta^2 - kb_2 + kma_2)\cos 2\vartheta t + A \ldots (56)$$

Для уничтоженія членовъ съ $\cos\vartheta t$ и $\cos 2\vartheta t$ необходимо удовлетвореніе условій

$$b_1\vartheta^2 - kb_1 + kma_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

и

$$4b_2\vartheta^2 - kb_2 + kma_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

откуда и находимъ должныя значенія коэф-товъ b_1 и b_2:

$$b_1 = \frac{kma_1}{k - \vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

и

$$b_2 = \frac{kma_2}{k - 4\vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

При такихъ значеніяхъ коэффиціентовъ b уравненіе (56) принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k\xi + A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

показывающій, что точка (ξ), связанная съ точкой (x) соотношеніемъ (54), будетъ, въ силу наличности треніа, двигаться по закону убывающихъ гармоническихъ колебаній и, значитъ, сможетъ колебаться сравнительно весьма мало, — черезъ короткое время она остановится, т.-е. придетъ въ состояніе покоя. Послѣ остановки точки (ξ) движеніе точки (x_1) не прекратится: согласно (54), заключаемъ, что движеніе точки (x_1) будетъ теперь представлять собою сумму двухъ гармоническихъ движеній $(b_1 \cos \vartheta t)$ и $(b_2 \cos 2\vartheta t)$. Критическими скоростями явятся здѣсь, слѣдовательно, тѣ, при которыхъ величины b обращаются въ безконечность. Найти эти скорости можно помощью соотношеній (59) и (60). Подставляя въ нихъ вмѣсто km его значеніе изъ (49), получаемъ, что

$$b_1 = \frac{a_1 M_c \vartheta^2}{M_0 (k - \vartheta^2)} = \frac{a_1 M_c}{M_0 (k/\vartheta^2 - 1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

и

$$b_2 = \frac{a_1 M_c \vartheta^2}{M_0 (k - 4\vartheta^2)} = \frac{a_1 M_c}{M_0 (k/\vartheta^2 - 4)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Ясно, что коэффиціентъ b_1 обращается въ нуль при условіи

$$\frac{k}{\vartheta^2} - 1 = 0,$$

т.-е. при

$$\vartheta_1 = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{k_b}{M_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Коэффиціентъ b_2 обращается въ нуль при

$$\frac{k}{\vartheta^2} - 4 = 0,$$

т.-е. при

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_b}{M_0}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Итакъ, колебанія станины и фундамента становятся опасными уже при $\vartheta = \vartheta_2$, т.-е. при критической угловой скорости перваго верхняго гармоническаго тона. Главную опасность представляетъ, конечно, критическая скорость ϑ_1 основного тона. Если удастся объ эти скорости пройти благополучно, то, при дальнѣйшемъ увеличеніи угловой скорости ϑ, колебанія фундамента будутъ становиться все болѣе и болѣе умѣренными, но, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться, совсѣмъ потухнуть не смогутъ никогда. Дѣйствительно, даже при $\vartheta = \infty$ имѣемъ:

$$b_1 = -\frac{a_1 M_c}{M_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

и

$$b_2 = -\frac{a_1 M_c}{4 M_0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

что показываетъ, что колебанія станины будутъ составлены изъ двухъ гармоническихъ колебаній постояннаго вида, амплитуды коихъ зависятъ уже только отъ отношенія массы кривошипа M_c къ массѣ станины M_0. Въ то же время оказывается, что всякое вліяніе коэффиціента k_b, т.-е. упругости фундамента, исчезаетъ, — станина будетъ правильно-періодически покачиваться по нѣкоторому опредѣленному сложному гармоническому закону, съ амплитудами, зависящими отъ отношенія массъ. Если бы кривошипный механизмъ имѣлъ болѣе сложный видъ и составъ, то выраженія коэффиціентовъ b получились бы болѣе сложными, но всегда можно было бы замѣтить, что въ числителяхъ получаемыхъ теперь выраженій, аналогичныхъ (66) и (67), стояли бы суммы массъ

всѣхъ подвижныхъ частей этихъ механизмовъ.

Надо, однако, замѣтить, что переходъ черезъ критическія скорости на практикѣ обычно представляется неосуществимымъ, и намъ приходится держаться вдали отъ этихъ скоростей. Дѣло въ томъ, что подходъ къ критическимъ скоростямъ всегда сопровождается дрожаніями фундамента, все болѣе и болѣе усиливающимися и, очевидно, дѣйствующими на него расшатывающимъ образомъ. Всѣ бетонныя сооруженія сопротивляются расшатыванію ихъ весьма плохо, вслѣдствіе чего допустимыми для нихъ являются колебанія лишь весьма малой амплитуды, вызываемыя угловыми скоростями, далеко не достигающими критическихъ. Такимъ образомъ, оказывается, что, въ интересахъ устойчивости фундаментовъ, ихъ нужно дѣлать всегда возможно болѣе упругими, ибо только въ этомъ случаѣ представляется возможнымъ какъ подходъ къ критическимъ скоростямъ, такъ и переходъ черезъ нихъ, долженствующій, всетаки, быть возможно быстрымъ. Дальнѣйшее увеличеніе скорости ∂ сверхъ критической будетъ вести за собою уже успокоеніе движенія и лишь правильное, ритмическое и плавное, колебательное движеніе фундамента. Такова причина, почему въ послѣднее время фундаменты особенно быстроходныхъ двигателей кривошипнаго типа стали снабжать различными упругими подкладками, подушками, пружинами и проч., имѣющими своей цѣлью переводъ мало упругой системы обычнаго глухого фундамента въ систему упругую, допускающую какъ подходъ къ критическимъ скоростямъ, такъ и переходъ черезъ нихъ.

Слѣдуетъ добавить, что въ тѣхъ случаяхъ, когда оказываются возможными достаточно большія колебанія по оси y, необходимо разсмотрѣть и изслѣдовать и уравненіе движенія по оси y, — см. ур. (45). Обычнымъ путемъ выяснились бы величины критическихъ скоростей

этого движенія, обычно имѣющія значенія, отличныя отъ ϑ_1 и ϑ_2, что дало бы намъ указаніе на наиболѣе низкія опасныя скорости. Представилось бы возможнымъ выяснить графически ту кривую, которую описываетъ въ пространствѣ центръ тяжести станины, когда она выполняетъ колебанія одновременно по обѣимъ осямъ. Аргументы составляющихъ колебаній были бы здѣсь уже отличными отъ аргументовъ составного колебанія, критическія же скорости зависѣли бы здѣсь уже не только отъ степени сопротивляемости фундамента сгибанію, но также и отъ сопротивляемости растяженію.

Нетрудно также разсмотрѣть, что внесетъ за собой противовѣсъ въ простомъ кривошипномъ механизмѣ; нужно будетъ только опредѣлить новый центръ тяжести всего механизма и разсмотрѣть его движеніе.

Въ заключеніе разберемъ вопросъ о движеніи станины, свободно поставленной на горизонтальной плоскости и не прикрѣпленной къ ней никакими болтами. Разборъ этого вопроса важенъ потому, что поможетъ намъ выяснить необходимость фундаментовъ вообще и необходимость глухого закрѣпленія станинъ на нихъ.

Представимъ себѣ, такимъ образомъ, что нѣкоторая простая паровая машина кривошипнаго типа поставлена на горизонтальную плоскость и, будучи незакрѣплена на ней, можетъ перемѣщаться по этой плоскости во всѣхъ направленіяхъ. Очевидно, что перемѣщенія нашей машины по плоскости могутъ быть такими, что скорости всѣхъ точекъ ея будутъ другъ другу равны и параллельны; иначе говоря, наша машина можетъ имѣть посту-

нательное движеніе въ направленіи, параллельномъ опорной плоскости. Въ такомъ случаѣ къ этой поступательно движущейся системѣ можно примѣнить извѣстную изъ механики теорему о движеніи центра тяжести, которая говоритъ, что, если для системы возможны поступательныя перемѣщенія, то центръ тяжести ея движется, какъ одна матеріальная точка, въ которой сосредоточена вся масса системы и на которую дѣйствуетъ результирующая изъ всѣхъ дѣйствующихъ здѣсь силъ.

Система нашей машины (фиг. 206) состоитъ изъ системы шатуна съ центромъ тяжести въ C и системы станины съ центромъ тяжести въ O. Положеніе центра тяжести любой системы опредѣляется по извѣстному соотношенію

$$\overline{x} = \frac{\Sigma m x}{M}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

двукратное дифференцированіе коего даетъ намъ выраженіе ускоренія центра тяжести, а именно:

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = \frac{1}{M} \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Найдемъ теперь координаты центра тяжести Ω всей этой системы (станина + механизмъ). Пусть координаты центра тяжести C механизма равны x_c и y_c, а центра тяжести O станины ... x_o и y_o. Тогда, согласно (e), можно написать, что

$$x_\Omega = \frac{M_c x_c + M_o x_o}{M_c + M_o}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

$$y_\Omega = \frac{M_c y_c + M_o y_o}{M_c + M_o} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{d^2x_\Omega}{dt^2} = \frac{1}{M_c + M_o}\left(M_c \frac{d^2x_c}{dt^2} + M_o \frac{d^2x_o}{dt^2}\right) . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

и

$$\frac{d^2y_\Omega}{dt^2} = \frac{1}{M_c + M_o}\left(M_c\frac{d^2y_c}{dt^2} + M_o\frac{d^2y_o}{dt^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Если бы наша система могла иметь поступательныя перемещенія по осямъ x и y, то движеніе ея совершалось бы подъ воздѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, здѣсь участвующихъ. Принимая теперь во вниманіе, что давленіе пара и силы инерціи представляютъ собою въ данномъ случаѣ силы внутреннія, а внѣшнихъ силъ здѣсь нѣтъ совсѣмъ, приходимъ къ заключенію, что центръ тяжести Ω долженъ оставаться въ покоѣ, такъ что какъ скорость, такъ и ускореніе его, остаются все время равными нулю. Такимъ образомъ, мы имѣли бы, что

$$\frac{d^2x_\Omega}{dt^2} = 0$$

и

$$\frac{d^2y_\Omega}{dt^2} = 0,$$

откуда, въ виду (h) и (k), слѣдуетъ, что

$$M_c\frac{d^2x_c}{dt^2} + M_o\frac{d^2x_o}{dt^2} = 0$$

и

$$M_c\frac{d^2y_c}{dt^2} + M_o\frac{d^2y_o}{dt^2} = 0,$$

что иначе переписывается такъ:

$$M_o\frac{d^2x_o}{dt^2} = -M_c\frac{d^2x_c}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

и

$$M_o\frac{d^2y_o}{dt^2} = -M_c\frac{d^2y_c}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

Въ правыхъ частяхъ этихъ уравненій стоятъ, очевидно, выраженія слагающихъ F_x и F_y результирующей силы инерціи

F системы шатуна, такъ что можно написать, что

$$M_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} = F_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

и

$$M_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = F_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

Такимъ образомъ, оказывается, что, если бы станина имѣла возможность совершать поступательныя перемѣщенія, то центръ тяжести ея совершалъ бы свое движеніе подъ дѣйствіемъ слагающихъ силъ инерціи системы шатуна; это движеніе центра тяжести O повторила бы, разумѣется, и вся станина. Кромѣ того, согласно (l) и (m), заключаемъ, что центръ тяжести станины O движется обратно центру тяжести C шатуна. Слѣдовательно, если центръ C движется возвратно-перемѣннымъ движеніемъ, то центръ O будетъ двигаться обратнымъ ему движеніемъ, также возвратно-перемѣннымъ, но соотвѣтственно ослабленнымъ, въ виду $M_0 > M_c$.

Наша станина можетъ совершать поступательныя перемѣщенія только по горизонтальному направленію, т.-е. по направленію оси Ox. Поэтому при движеніи кривошипнаго механизма она будетъ совершать горизонтальныя перемѣщенія подъ воздѣйствіемъ горизонтальной силы F_x; вертикальная слагающая F_y будетъ стремиться то поднимать станину надъ плоскостью, то прижимать ее къ ней. Такимъ образомъ, если бы станина лежала на фундаментѣ вольно, безъ закрѣпленія ея болтами, то, при движеніи кривошипнаго механизма, ей пришлось бы двигаться по фундаменту то въ одну сторону, то въ другую, что, конечно,

представляло бы огромныя неудобства при передачѣ работы. Поэтому это движеніе станины парализуютъ, закрѣпляя ее на фундаментѣ, возможно болѣе массивномъ. Если бы такой фундаментъ былъ совершенно податливъ, то общій центръ тяжести его со станиной сталъ бы двигаться движеніемъ, обратнымъ движенію центра тяжести шатуна и, конечно, въ виду огромнаго перевѣса въ массѣ, соотвѣтственно ослабленнымъ. Если такое движеніе является нежелательнымъ, то фундаментъ дѣлаютъ мало податливымъ, и тогда на сцену выступаютъ силы упругости его, и появляется вопросъ о критическихъ скоростяхъ, — возникаетъ, такимъ образомъ, задача, нами выше разсмотрѣнная. Подобнымъ же путемъ разрѣшится задача и объ участіи силы F_y.

Теперь становится вполнѣ очевиднымъ, что для тихоходныхъ машинъ, силы инерціи F коихъ, относительно говоря, невелики, требуются фундаменты малоупругіе, для быстроходныхъ же машинъ предпочтительны фундаменты упругіе.

Въ заключеніе настоящаго параграфа мы только намѣтимъ контуры одной изъ наиболѣе интересныхъ задачъ, здѣсь представляющихся. Дѣло въ томъ, что, при подходѣ къ критической скорости фундаментъ начинаетъ испытывать все большія и большія колебанія; на произведеніе ихъ, конечно, требуется затрата извѣстнаго количества энергіи, которую нашей системѣ можно брать только изъ общаго количества работы, производимой нашимъ двигателемъ, — очевидно, что онъ долженъ доставлять работу

не только для передачи ея на другія машины-орудія, но и на деформированіе механизма, станины и фундамента. Замѣчая теперь, что фундаментъ стоитъ на нѣкоторой опорной средѣ, иногда очень большой (въ подвижныхъ устройствахъ), а въ большинствѣ случаевъ безконечно-большой (земля) массы, заключаемъ, что колебанія фундамента будутъ передаваться въ эту опорную средуу и въ ней затухать. Такимъ образомъ, часть работы нашей машины, безспорно, будетъ, безъ всякой пользы для насъ, уходить въ эту опорную средуу; въ ней будетъ происходить волнообразное разсѣиваніе энергіи, при чемъ центромъ этого разсѣиванія будетъ служить фундаментъ. Въ нашемъ курсѣ мы ограничимся лишь сказаннымъ,—мы наметили лишь контуръ этой интересной задачи; разборомъ ея мы въ настоящемъ изданіи нашего курса заниматься не станемъ и теперь перейдемъ къ послѣднему очередному вопросу, а именно, къ вопросу о критическихъ скоростяхъ быстровращающихся системъ.

§ 28. Устойчивость системъ, быстро вращающихся вокругъ неподвижной оси. Гибкіе валы. Критическія угловыя скорости.

Наши стаціонарныя машины-двигатели почти всегда передаютъ работу пара (или газа) на главный валъ, на которомъ сидятъ различныя вращающіяся части, какъ-то: маховики, шкивы и т. п. Пока вся эта система остается неподвижной, на подшипники вала передается давленіе, равное всѣсу этой системы и только. Но какъ только начнется вращеніе, то къ этому давленію и къ давленію отъ полезныхъ окружныхъ усилій присоединяются еще давленія, обу-

словливаемыя силами инерціи вращающихся частей и достигающія иногда, какъ это мы покажемъ ниже, громадныхъ величинъ, а самое главное, періодически, за каждый оборотъ вала, мѣняющія свое направленіе. Получится, очевидно, рядъ періодически повторяющихся ударовъ, со всѣми ихъ вредными послѣдствіями.

Аналитическая механика указываетъ намъ путь, по которому мы должны идти при конструированіи и выполненіи такихъ вращающихся системъ, чтобы избѣжать этихъ ударовъ и всякаго, вообще, дополнительнаго давленія на опоры вала; съ этою цѣлью, въ случаѣ отсутствія внѣшнихъ силъ, т.-е. при равномѣрномъ вращеніи системы, необходимо располагать ось вращенія такъ, чтобы она совпадала съ одной изъ главныхъ осей центральнаго эллипсоида инерціи, т.-е. чтобы эта ось являлась естественной осью вращенія,—такъ называются главныя оси этого эллипсоида; разъ такое совпаденіе имѣетъ мѣсто, то, при равномѣрномъ вращеніи системы, дополнительное давленіе отъ силъ инерціи обращается въ нуль.

Насаживаемыя на валъ вращающіяся части нашихъ машинъ выполняются обыкновенно въ видѣ тѣлъ вращенія, такъ что ось вращенія каждаго такого тѣла, являясь осью симметріи его, въ случаѣ однородности тѣла проходитъ черезъ центръ тяжести его и является одной изъ главныхъ осей центральнаго эллипсоида инерціи этого тѣла. Слѣдовательно, посадивъ такое тѣло вращенія на валъ такъ, чтобы ось вращенія тѣла совпала съ осью вала, и начавъ вращать валъ, мы получимъ вращеніе тѣла вокругъ одной изъ

главныхъ осей инерціи его. Какъ было уже указано выше, такое вращеніе, сколь бы быстро оно ни было, никакихъ дополнительныхъ давленій отъ силъ инерціи на подшипники не дастъ.

Не то, однако, будетъ, если центръ тяжести тѣла, насаживаемаго на валъ, не приходится на оси вращенія его, что почти всегда имѣетъ мѣсто на практикѣ, въ виду неоднородности строенія тѣла и неизбѣжныхъ несовершенствъ и изъяновъ при его изготовленіи. Въ этомъ случаѣ геометрическая ось вращенія тѣла уже не будетъ служить главной осью инерціи, и, при посадкѣ тѣла на валъ, когда оси тѣла и вала обыкновенно приводятся въ совпаденіе, тѣло окажется сидящимъ на валу эксцентрично,— центръ тяжести его не будетъ лежать на теперешней оси вращенія, а въ то же время эта послѣдняя не будетъ теперь служить главной осью инерціи тѣла, вслѣдствіе чего тѣло при своемъ вращеніи станетъ оказывать на валъ и на подшипники дополнительныя давленія отъ силъ инерціи, достигающія, при болѣе или менѣе значительныхъ числахъ оборотовъ, весьма большихъ значеній. Для лучшей иллюстраціи сказаннаго, подсчитаемъ на одномъ простомъ примѣрѣ, какія дополнительныя давленія отъ силъ инерціи развиваются, напримѣръ, въ случаяхъ такого быстраго вращенія, какое имѣетъ мѣсто въ паровыхъ турбинахъ.

Пусть вѣсъ вращающагося тѣла (диска турбины) равенъ P кд, угловая скорость вращенія ея есть ω, а разстояніе центра тяжести тѣла отъ оси вращенія вала равно r. Предполагая всю массу тѣла сосредоточенной въ центрѣ тяжести его, найдемъ, что центробѣжная сила инерціи этого послѣдняго,— назовемъ ее черезъ F,— выразится такъ:

$$F = \frac{P}{g} r.$$

Пусть n,– число оборотовъ вала,– равно 20 000 въ минуту. Тогда

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{1}{sec} = \frac{20\,000\,\pi}{30}\, sec^{-1} \cong 2100\, sec^{-1}.$$

Выражая g въ cm/sec^2, а r – въ cm, и замѣчая, что $g = 981\ ^{cm}/_{sec^2}$, имѣемъ, что

$$F = P_{kg} \cdot \frac{2100^2}{981} r_{cm} \cong (4500\, P_{kg} r_{cm})\, kg.$$

Итакъ, при такомъ числѣ оборотовъ центробѣжная сила инерціи въ $(4500\, r_{cm})$ разъ больше вѣса тѣла P, выраженнаго въ kg. Пусть $P = 10\, kg = 24$ фунт. $= 0{,}6$ пуд., а $r = 1\, mm = 0{,}1\, cm$. Тогда

$$F = (10 \times 4500 \times 0{,}1)\, kg = 4500\, kg = 4{,}5\, tn = 270 \text{ пудовъ},$$

при вѣсѣ тѣла всего въ 0,6 пуда и эксцентриситетѣ r, равномъ 1 миллиметру.

Если мы примемъ во вниманіе еще то обстоятельство, что направленіе этой силы F относительно станины и фундамента будетъ мѣняться 20·000 разъ въ минуту, то о разрушительномъ вліяніи дѣйствія такой силы на всю систему говорить не приходится,– онъ понятенъ самъ собой.

Примѣровъ подобнаго рода можно подобрать очень много. Такъ, напримѣръ, всѣ вагонные скаты, т.-е. оси съ насаженными наглухо на каждой изъ нихъ вагонными колесами, предназначаемые къ обслуживанію составовъ скорыхъ поѣздовъ, гдѣ, слѣдовательно, число оборотовъ ихъ въ минуту достигаетъ 300–400,– всѣ скаты должны быть центрированы возможно тщательнѣе. Вычисленія, подобныя приведен-

ными выше, показываютъ, что, при такихъ числахъ оборотовъ, центробѣжная сила инерціи можетъ достигать нѣсколькихъ тоннъ. Эффектъ дѣйствія этой силы предвидѣть не трудно: при каждомъ оборотѣ колеса эта сила будетъ прижимать колесо къ рельсу въ тотъ моментъ, когда центръ тяжести приходится внизу, а черезъ полъ-оборота, когда центръ тяжести придется вверху, она будетъ стремиться это колесо отъ рельса оторвать. Значитъ, здѣсь будетъ происходить, со скоростью нѣсколькихъ сотъ разъ въ минуту, то приложеніе силы къ рельсу, то освобожденіе его отъ нея. Въ результатѣ рельсы будутъ испытывать рядъ быстро слѣдующихъ одинъ за другимъ ударовъ, весьма сильныхъ и какъ бы производимыхъ быстро работающимъ тяжелымъ молотомъ. Легко сообразить, сколь разрушительнымъ для рельсовъ и полотна явится быстрое движеніе подвижного состава, снабженнаго такими вагонными скатами. Вотъ почему требуется и всегда выполняется тщательная центрировка этихъ и имъ подобныхъ деталей.

Мы не будемъ разсматривать здѣсь способовъ выполненія такой центрировки,—это дѣло спеціальныхъ курсовъ; укажемъ лишь, что она, имѣя, какъ видимъ, главной своей цѣлью приведеніе центра тяжести на ось вращенія и совмѣщеніе съ этой послѣдней одной изъ главныхъ осей инерціи, выполняется, вообще говоря, путемъ снятія нѣкоторыхъ массъ съ однихъ мѣстъ детали и прибавленія ихъ въ другихъ; иногда удается ограничиться лишь одной изъ этихъ операцій. Ниже мы дадимъ другое рѣшеніе этой задачи, гдѣ увидимъ, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ и, притомъ,

наиболѣе опасныхъ,— при большихъ числахъ оборотовъ,—возможно обойтись и безъ математически точной центрировки; помощью очень простого способа въ этихъ случаяхъ возможно достичь вполнѣ достаточной плавности хода и почти полнаго отсутствія ударныхъ эффектовъ, при несомнѣнной въ то же время наличности эксцентриситета.

Возвращаясь къ вопросу о центрировкѣ вращающихся системъ, будетъ умѣстнымъ указать, что математически точная центрировка, въ сущности, невыполнима и недостижима уже по однимъ техническимъ условіямъ посадки каждой такой вращающейся детали на ея валъ. На самомъ дѣлѣ, допустимъ, что мы, принявъ во вниманіе всѣ обстоятельства дѣла, центрировали какую-либо подобную деталь,—напримѣръ, шкивъ,— вполнѣ точно, т.-е. привели центръ тяжести его на геометрическую ось, добившись, кромѣ того, совпаденія ея съ одной изъ свободныхъ осей вращенія нашего шкива. Усаживая его на валъ, мы, по необходимости, должны закрѣпить его тамъ помощью шпонки, и вотъ этотъ-то процессъ загонки ея и разрушаетъ обычно плоды всѣхъ трудовъ, затраченныхъ на выверку шкива,—сильные удары молотка могутъ перекосить шкивъ и смѣстить ось его съ оси вала. Результатомъ этого оказывается появленіе эксцентриситета со всѣми его вредными послѣдствіями, биеніе шкива и проч.

Мы указывали, что самая центрировка производится путемъ добавленія (или отнятія) нѣкоторыхъ массъ въ опредѣленныхъ мѣстахъ вращающагося тѣла. Это иногда оказывается также невозможнымъ по самимъ условіямъ дѣла. Такъ, напримѣръ, въ циркулярныхъ пилахъ никакихъ прибавокъ или примазокъ дѣлать нельзя; выполнять центрировку можно здѣсь только путемъ высверливанія отверстій въ должныхъ мѣстахъ. Но иногда случается,

что это оказывается также невозможнымъ: можетъ, напримѣръ, случиться, что въ томъ мѣсто, гдѣ слѣдовало бы произвести сверленіе, этого не позволяетъ сдѣлать закалка, и т.д. Мы уже не говоримъ о тѣхъ, всегда возможныхъ, случаяхъ частичнаго поврежденія вращающагося тѣла, которое неизбѣжно влечетъ за собою немедленное появленіе эксцентриситета; поломка зуба циркулярной пилы, лопатки паровой турбины и т.д., всегда является факторомъ, угрожающимъ уже самому существованію машины.

Такимъ образомъ, центрировка зачастую не можетъ дать ни требуемой точности, ни ожидаемыхъ результатовъ. Приходится, поэтому, искать другихъ способовъ обезпеченія правильности и безопасности работы машины, и одинъ изъ нихъ мы теперь и разсмотримъ возможно подробнѣе. Оказывается, что для достиженія полной устойчивости весьма быстро вращающейся системы, обладающей извѣстнымъ эксцентриситетомъ, ее необходимо сажать на гибкій и, по возможности, тонкій валъ, — жесткіе, (не)гибкіе валы въ такихъ случаяхъ недопустимы.

Валы, о которыхъ идетъ рѣчь, обязаны передавать работу, а, кромѣ того, имъ приходится выдерживать рядъ различныхъ сгибающихъ моментовъ, почему въ обыкновенныхъ условіяхъ мы и разсчитываемъ такіе валы не только на кручені̀е, но и на сгибаніе. Если мы разсчитаемъ валъ лишь на одно кручені̀е, то увидимъ, что, даже при допущеніи малыхъ напряженій на кручені̀е, валъ выходитъ, вообще говоря, очень тонкимъ, особенно въ случаяхъ большого числа оборотовъ, т.-е. при большой угловой скорости ω. Но дѣло совершенно мѣняется, если мы разсчитаемъ валъ не только на кручені̀е, но и на изгибъ, т.-е. если мы поставимъ себѣ задачей подыскать такіе размѣры его, чтобы онъ, передавая данный

крутящій моментъ, въ то же время не могъ сгибаться сколь-нибудь замѣтно. Въ такихъ случаяхъ валъ выходитъ очень солидными и тяжелымъ, и стрѣлы прогиба его спускаются до очень малыхъ величинъ. О прогибахъ такихъ валовъ обычно даже и не говорятъ, и единственнымъ средствомъ для достиженія спокойнаго вращенія вала является строгая центрировка массъ, сажаемыхъ на валъ. Но если этой центрировки выполнить нельзя, если центръ тяжести вращающейся системы не совпадаетъ съ осью, а скорость вращенія велика, то наиболѣе дѣйствительнымъ средствомъ предупрежденія роковыхъ послѣдствій, которыя влечетъ за собою существованіе эксцентриситета, является предоставленіе валу возможности свободно прогибаться, для чего мы въ такихъ случаяхъ расчитываемъ его только на крученіе.

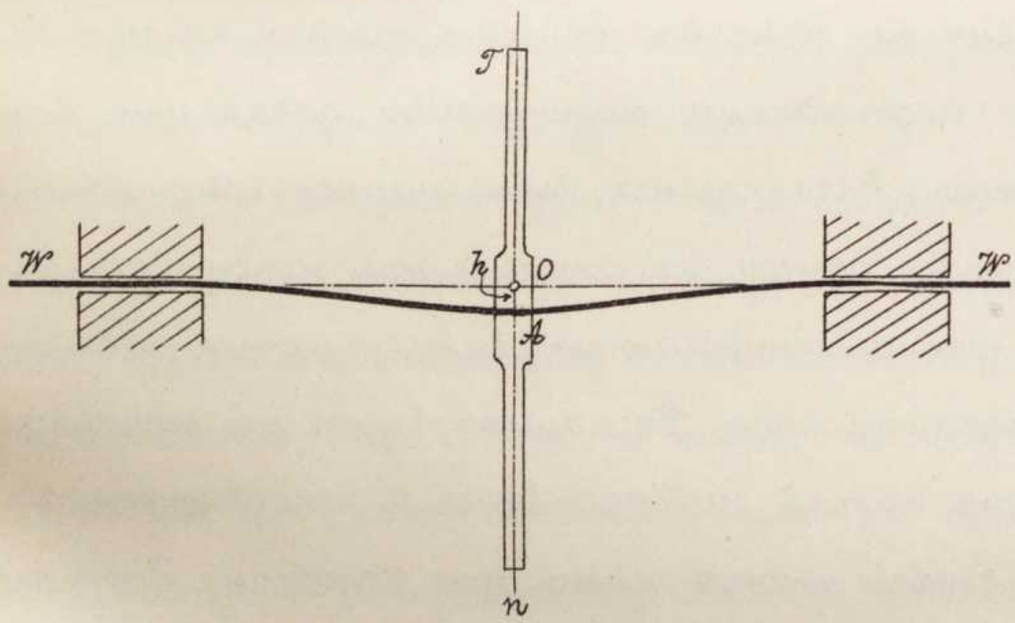
Есть еще другое, также довольно дѣйствительное, средство обезопашенія системы: мы оставляемъ валъ непрогибающимся, т.-е. расчитываемъ его какъ на крученіе, такъ и на изгибъ, но зато дѣлаемъ подвижными подшипники, давая имъ возможность качаться; качающимся выполняется обычно только одинъ подшипникъ, другой же оставляется неподвижнымъ. Иногда оба эти пріема совмѣщаются: валъ дѣлается гибкимъ, а подшипники-качающимися. Въ нашемъ курсѣ мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая гибкаго вала и неподвижныхъ подшипниковъ,—случай этотъ давно уже разобранъ Фёрр'емъ,—другихъ же случаевъ и пріемовъ касаться не будемъ, чтобы не затруднять вопроса чисто аналитическими выкладками.

Итакъ, мы подвергнемъ разсмотрѣнію случай быстровращающейся системы, сидящей эксцентрично на гибкомъ валу. Такіе случаи мы имѣемъ въ паровыхъ турбинахъ Лаваля, имѣющихъ

огромныя числа оборотовъ, отъ 15·000 до 30·000 въ минуту. Пусть это вращающееся тѣло и представляетъ собою дискъ такой турбины. Это предположеніе мы дѣлаемъ исключительно ради удобства схематическаго чертежа,—форма вращающагося тѣла здѣсь, въ сущности, значенія не имѣетъ, какъ въ этомъ можно будетъ непосредственно убѣдиться изъ дальнѣйшаго.

Пусть эта система вращается равномѣрно, такъ что въ каждый данный моментъ существуетъ равенство между моментомъ вращающимъ и моментомъ сопротивленія. Возьмемъ нашу систему въ какой-нибудь моментъ ея вращенія и посмотримъ, что здѣсь происходитъ. Напомнимъ, что валъ предположенъ гибкимъ, а подшипники — неподвижными. Прежде всего, обратимъ вниманіе на этотъ валъ.

По условію, валъ, на которомъ сидитъ и вмѣстѣ съ которымъ вращается дискъ турбины, есть тѣло гибкое,—предполагается, что мы расчитали его только на кручніе, въ виду чего сопротивляться изгибу онъ можетъ лишь очень слабо, давая при этомъ большія стрѣлы прогиба.



Фиг. 211.

Пусть дискъ Г турбины (фиг. 211) сидитъ на такомъ именно валу WW и, во время своего вращенія, заставляетъ его, изогнувшись, принять форму WAW. Предположивъ, ради простоты, что мѣсто посад-

ки диска приходится по серединѣ разстоянія между опорами, въ нѣкоторой точкѣ O, можемъ сказать, что стрѣла прогиба представитъ собою какъ разъ разстояніе h точки O до теперешняго ея положенія A, — въ виду симметричной посадки диска, середина O вала, при возрастающемъ прогибаніи его подъ дѣйствіемъ силы, перпендикулярной къ прямой WOW, будетъ перемѣщаться по перпендикуляру On, возставленному изъ точки O прямой WOW, и касательная къ упругой линіи WAW, проведенная въ точкѣ пересѣченія ея съ перпендикуляромъ On, будетъ параллельна оси WOW. Итакъ, стрѣла прогиба есть въ данномъ случаѣ разстояніе между начальнымъ положеніемъ середины вала, O, и теперешнимъ, A.

Изогнувшись подъ вліяніемъ вѣса диска Г и центробѣжныхъ силъ инерціи по нѣкоторой упругой линіи WAW, валъ, однако, не будетъ пассивно относиться къ такому измѣненію его формы, — онъ все время будетъ сопротивляться изгибу и стремиться вернуться въ свое начальное состояніе WOW, вслѣдствіе чего будетъ оказывать на нагружающую его систему противодавленіе по направленію AO. Величину этого противодавленія легко подсчитать, пользуясь данными теоріи сопротивленія матеріаловъ, при чемъ можно разсуждать такъ:

Для того, чтобы вызвать въ упругомъ брусѣ при данныхъ условіяхъ изгибъ со стрѣлой прогиба h, надо нагрузить его нѣкоторой вполнѣ опредѣленной силой P, при чемъ окажется, что стрѣла прогиба h будетъ прямопропорціональна величинѣ этого груза:

$$P = kh,$$

при чемъ коэффиціентъ пропорціональности, k, зависящій отъ матеріала бруса (вала) и размѣровъ его, будетъ представлять собою, при данныхъ условіяхъ, величину постоянную.

Изогнувшись по нѣкоторой опредѣленной упругой линіи, валъ придетъ въ состояніе равновѣсія, а въ такомъ случаѣ окажется, что сила P, вызвавшая такой изгибъ бруса, уравновѣшивается другой силой, равной P, но ей прямопротивоположной, и нетрудно сообразить, что этой уравновѣшивающей силой является равнодѣйствующая всѣхъ силъ упругости изогнувшагося вала. Отсюда вытекаетъ, что равнодѣйствующая сила упругости вала, уравновѣшивающая внѣшнюю нагрузку на него, т.-е. сила реакціи упругаго вала, выражается произведеніемъ kh и направлена прямопротивоположно этой нагрузкѣ. Эта равнодѣйствующая сила упругости и представитъ собою ту силу, съ которой валъ, подвергаемый изгибу, сопротивляется получившемуся измѣненію его формы.

Возвращаясь къ нашему валу, принявшему послѣ изгиба форму WAW (фиг. 211), при чемъ стрѣла прогиба есть $h = AO$, заключаемъ, что равнодѣйствующая сила упругости R, сопротивляющаяся изгибу вала и, слѣдовательно, воздѣйствующая на дискъ Д, выражается черезъ

$$R = k . \overline{AO},$$

гдѣ коэффиціентъ пропорціональности k представляетъ собою нѣкоторую постоянную величину. Эту силу R будемъ называть силой реакціи упругаго вала. Направлена она будетъ отъ A къ O и будетъ воздѣйствовать на систему диска Д въ смыслѣ возвращенія вала въ его начальное, несогнутое положеніе WOW. Замѣтимъ, что, при вращеніи вала, когда векторъ AO будетъ вращаться около точки O неподвижной прямой WOW, будетъ мѣняться въ пространствѣ, одновременно съ этимъ, и направленіе силы R, ибо оно въ каждый данный моментъ совпадаетъ съ направленіемъ AO; можетъ также мѣняться, во время этого вращенія, и величина ея, въ

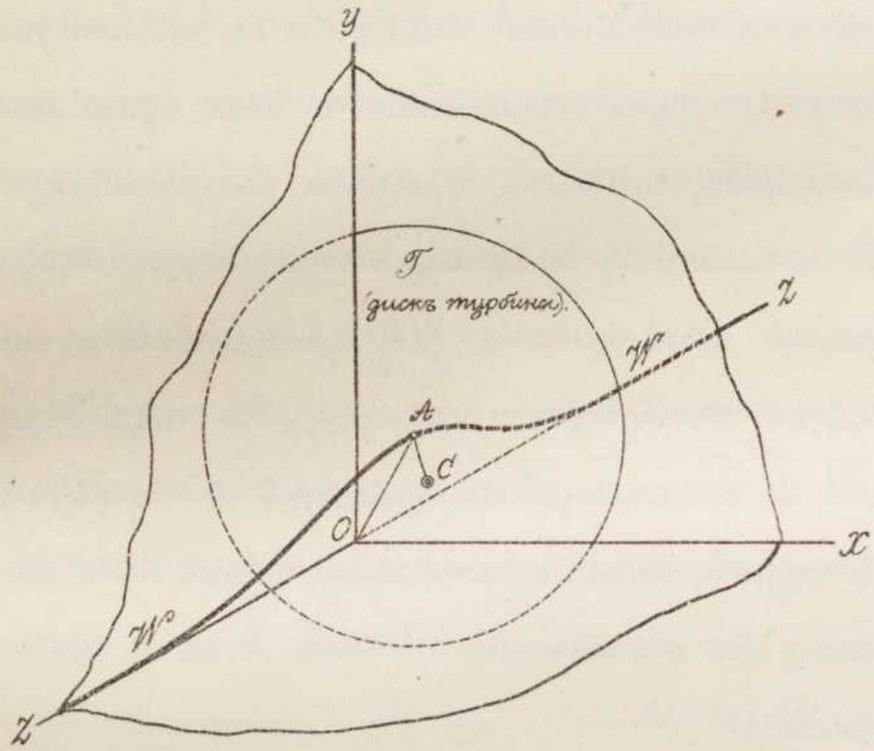
зависимости отъ величины нагрузки вала. Такимъ образомъ, надо признать, что сила реакціи R согнувшагося вала перемѣнна какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

На систему нашего диска дѣйствуютъ, съ одной стороны, нѣкоторыя внѣшнія силы, дающія нѣкоторую опредѣленную пару L, а съ другой — сила тяжести диска, Q, приложенная въ центрѣ тяжести его, и силы воздѣйствія внѣшнихъ связей, т.-е. силы упругости согнутаго вала, сводящіяся, какъ мы это видѣли, къ одной силѣ R. Силой тяжести Q диска, по относительной малости ея, можно пренебречь, послѣ чего изъ внѣшнихъ силъ останется только одна эта сила реакціи вала, R. Замѣнивъ, такимъ образомъ, реакцію связей этой силой упругости R и включивъ ее въ число силъ, воздѣйствующихъ на систему T, получаемъ возможность разсматривать ее теперь, какъ систему совершенно свободную и находящуюся подъ воздѣйствіемъ нѣкоторой пары L, стремящейся вращать ее вокругъ точки A, и, кромѣ того, нѣкоторой силы R, направленной по AO и стремящейся привести систему къ совпаденію точкой A ея съ нѣкоторой постоянной точкой O.

Механика учитъ, что всякое движеніе свободнаго твердаго тѣла подъ дѣйствіемъ силъ, паръ и т.д., сводится къ движенію центра тяжести его и къ движенію системы относительно этого центра тяжести, при чемъ центръ тяжести свободнаго твердаго тѣла движется, какъ одна матеріальная точка, въ которой сосредоточена вся масса тѣла и на которую дѣйствуетъ равнодѣйствующая всѣхъ внѣшнихъ силъ, перенесенныхъ въ этотъ центръ тяжести; само же твердое тѣло, кромѣ поступательнаго движенія вмѣстѣ со своимъ центромъ тяжести, еще вращается вокругъ него такъ, какъ если бы онъ представлялъ собою неподвижную точку, и

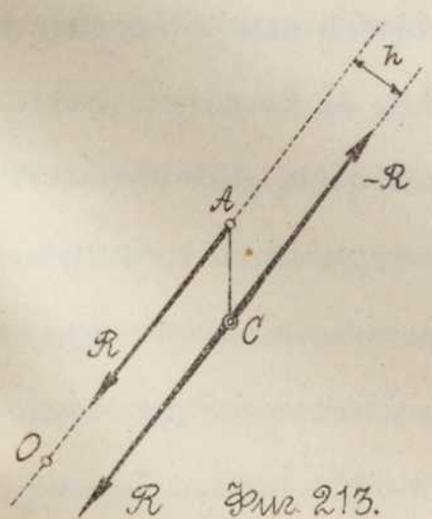
тѣло находилось подъ дѣйствіемъ пары, полученной при перенесеніи всѣхъ силъ въ центръ тяжести. Примѣнимъ эти положенія механики къ нашему случаю.

Дискъ Г нашей турбины находится подъ воздѣйствіемъ нѣкоторой пары съ моментомъ L, стремящейся вращать его вокругъ оси WAW нѣкоторымъ опредѣленнымъ образомъ, и силы R реакціи упругаго вала, приложенной въ точкѣ A и дѣйствующей по направленію AO. Замѣтивъ это, проведемъ черезъ точку O плоскость, перпендикулярную къ прямой



Фиг. 212.

WOW, принимаемъ точку O за начало координатъ, прямую WOW – за ось $z^{obъ}$, а упомянутую плоскость – за плоскость xy, причемъ ось Ox располагаемъ произвольно, – напримѣръ, горизонтально (фиг. 212). При такомъ выборѣ и расположеніи координатныхъ осей точка A, – теперешнее положеніе точки O, – придется въ плоскости xOy, и, очевидно, въ той же плоскости xOy будетъ лежать и сила R реакціи вала, направленная отъ A къ O, по прямой AO. Положимъ, далѣе, что центръ тяжести диска Г лежитъ въ той же плоскости xOy, въ нѣкоторой точкѣ C, лежащей внѣ прямой AO. Переносимъ теперь, согласно требованію теоремы, всѣ силы въ центръ тяжести C. Тогда окажется слѣдующее:



Фиг. 213.

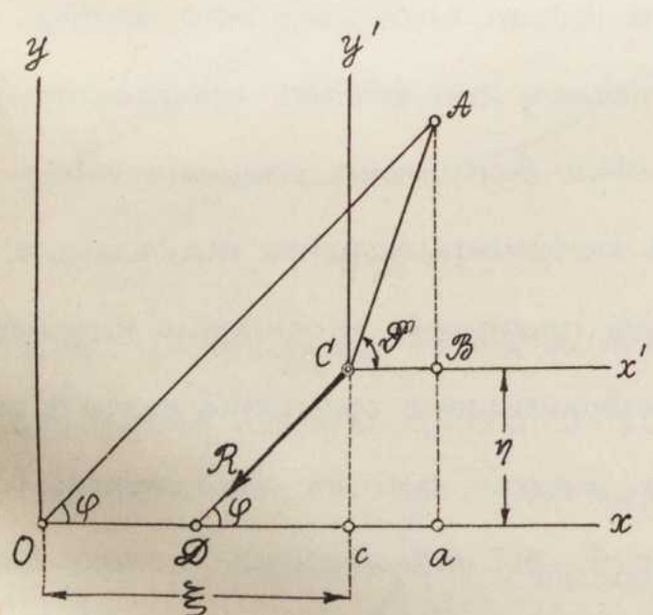
Внѣшнія силы, какъ то: давленіе пара, полезное сопротивленіе и др., дающія пару L, по перенесеніи ихъ въ центръ тяжести C, дадутъ опять ту же пару L и только, ибо, по законамъ статики, пара можетъ быть перемѣщаема въ плоскости ея безъ всякаго измѣненія какъ момента ея, такъ и направленія вращенія; никакихъ новыхъ паръ или силъ при этомъ не получится.

Переносимъ теперь въ центръ тяжести C силу реакціи R, приложенную въ точкѣ A и направленную по AO. При этомъ переносѣ получимъ силу R, приложенную въ точкѣ C, и пару $(R,-R)$ съ плечомъ h (фиг. 213). Эту пару $(R,-R)$ слѣдовало бы затѣмъ прибавить къ имѣющейся уже парѣ L, но въ данномъ случаѣ, въ виду крайней малости момента $(R\times h)$ ея, эту пару можно прямо отбросить, исключая ее изъ разсмотрѣнія совсѣмъ. Что моментъ $(R\times h)$ или, точнѣе говоря, плечо h, очень малы, видно изъ того, что центрированіе системъ, предназначаемыхъ для весьма быстраго вращенія, выполняется всегда настолько тщательно и точно, насколько это, вообще, возможно при нашихъ средствахъ, почему мы вправѣ предположить, что и въ данномъ случаѣ центрировка выполнена самымъ тщательнымъ образомъ, и оставшійся эксцентриситетъ такъ малъ, что устраненіе его лежитъ уже внѣ предѣловъ точности нашихъ инструментовъ. Вполнѣ, поэтому, позволительно считать плечо h упомянутой пары величиной весьма малой, что, въ свою очередь, ведетъ къ тому, что моментъ пары $(R,-R)$ оказывается также весьма малымъ, представляющимъ, сравнительно съ моментомъ L внѣшней пары, величину, которой можно смѣло пренебречь.

Въ результатѣ сказаннаго приходимъ къ заключенію, что дискъ T можно считать находящимся подъ дѣйствіемъ одной лишь пары L, стремящейся вращать его въ опредѣленномъ напра-

вленіи, и силы R, равной $(k \times AO)$, приложенной въ центрѣ тяжести C и направленной въ каждый данный моментъ параллельно AO, причемъ въ центрѣ тяжести C диска предполагается приложенной вся масса его m. Движеніе диска можно представить себѣ совершающимся такъ: подъ дѣйствіемъ пары L дискъ вращается вокругъ своего центра C, который, въ свою очередь, перемѣщается подъ воздѣйствіемъ силы R, постоянно мѣняющей свое положеніе въ пространствѣ, но при этомъ остающейся все время параллельной вращающемуся вектору AO. Такимъ образомъ, движеніе диска опредѣлится вполнѣ, если опредѣлится движеніе центра тяжести C. Выясненіемъ этого послѣдняго движенія мы теперь и займемся.

Такъ какъ сила R, вообще говоря, перемѣнна какъ по величинѣ, такъ и по направленію, то подъ воздѣйствіемъ ея точка C, несомнѣнно, опишетъ нѣкоторую криволинейную траекторію, видъ коей можно опредѣлить помощью слѣдующихъ простыхъ разсужденій:



Фиг. 214.

Обозначимъ координаты центра тяжести C въ выбранной нами системѣ координатъ xOy черезъ ξ и η (фиг. 214). Эти величины ξ и η, несомнѣнно, будутъ величинами перемѣнными, ибо центръ тяжести постоянно перемѣщается. Силы, дѣйствующія на центръ тяжести C, приводятся къ одной силѣ R, параллельной AO. Разлагая ее по осямъ Ox и Oy, находимъ выраженія проекцій ея R_x и R_y:

$$R_x = R \cos CDx = R \cos \varphi,$$

$$R_y = R \sin CDx = R \sin \varphi.$$

Выше, —см. стр. 592,— мы дали выраженіе для величины силы R, написавъ, что $R = k.\overline{AO}$. Теперь, чтобы отмѣтить еще и то обстоятельство, что сила R сокращаетъ разстояніе AO точки A объ центра O, т.-е. уменьшаетъ координаты точки A, мы и будемъ снабжать вышенаписанное выраженіе силы R знакомъ минусъ, т.-е. будемъ писать, что

$$R = -k.\overline{AO}.$$

Послѣ этого выраженія проекцій R_x и R_y, данныя выше, переписываются такъ:

$$R_x = R\cos\varphi = -k.AO\cos\varphi = -k.Oa = -kx_A, \quad . \quad . \quad (a)$$

$$R_y = R\sin\varphi = -k.AO\sin\varphi = -k.Aa = -ky_A. \quad . \quad . \quad (b)$$

гдѣ черезъ x_A и y_A обозначены координаты Oa и Aa точки A. Уравненія (a) и (b) даютъ теперь возможность написать общія уравненія движенія центра тяжести C, а именно:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = R_x = -kx_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

и

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = R_y = -ky_A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

причемъ черезъ m обозначена масса диска T, сосредоточенная въ центрѣ тяжести его C.

Въ виду того, что въ правыхъ частяхъ полученныхъ уравненій стоятъ перемѣнныя, отличныя отъ перемѣнныхъ, стоящихъ слѣва, интеграція этихъ уравненій въ томъ видѣ, какъ они написаны, невозможна, и предварительно нужно, установивъ связь между координатами (x_A, y_A) и (ξ, η), выразить одни черезъ другія. Выясненіемъ этой связи мы теперь и займемся.

По предположенію, сдѣланному въ началѣ нашихъ разсужденій, нашъ дискъ въ продолженіе разсматриваемаго промежутка вре-

мени τ нашъ дискъ вращается равномѣрно. Вообще говоря, угловая скорость диска есть величина перемѣнная, но мы разсматриваемъ тотъ участокъ движенія, когда оно представляется установившимся и протекаетъ равномѣрно. За время всего движенія диска такихъ промежутковъ можетъ быть нѣсколько,— они соотвѣтствуютъ тѣмъ промежуткамъ времени, въ теченіе которыхъ имѣетъ мѣсто равенство между работами силъ движущихъ и силъ сопротивленія.

Далѣе было указано, что нашъ дискъ можно разсматривать вращающимся около центра тяжести C. Но каждое плоское движеніе системы,— а такое именно движеніе имѣетъ мѣсто въ данномъ случаѣ,— можетъ быть охарактеризовано движеніемъ прямолинейнаго отрѣзка, произвольно выдѣленнаго въ данной системѣ и связаннаго съ ней жестко и неизмѣняемо. Въ данномъ случаѣ за такой отрѣзокъ можно взять отрѣзокъ CA, представляющій собою разстояніе между двумя точками нашей системы, занимающими въ постоянное положеніе, а именно, между центромъ тяжести ея C и точкой A скрѣпленія ея съ осью WAW, и движеніе системы вокругъ точки C, т.-е. вращеніе ея вокругъ центра тяжести C, можно охарактеризовать также вращеніемъ вектора CA вокругъ точки C, такъ что положеніе системы диска Г можно охарактеризовать и опредѣлить угломъ поворота вектора CA вокругъ центра тяжести C отъ нѣкотораго начальнаго положенія его. Условимся отсчитывать эти углы отъ горизонтальнаго направленія Ox или, конкретнѣе, отъ оси Cx', параллельной Ox (фиг. 214), и предположимъ, что этотъ уголъ въ данный моментъ равенъ δ. Принимая теперь во вниманіе, что за разсматриваемый промежутокъ времени система диска, по нашему предположенію, вращаясь

равномѣрно, съ постоянной угловой скоростью ϑ, можемъ сказать, что

$$\delta = \vartheta t, \quad . \quad . \quad .

что явленія, оцѣниваемыя этими уравненіями, представляютъ собою явленія одного порядка; несомнѣнно, потому, что результатъ разсмотрѣнія уравненій (70) и (71) будетъ одинаковъ съ результатомъ отъ уравненія (8),—мы опять встрѣтимся съ критическими скоростями и другими, знакомыми намъ уже деталями движенія, характеризуемаго уравненіемъ (8).

Интеграція уравненій (70) и (72) можетъ быть произведена помощью того же пріема подстановки, который мы примѣняли выше во всѣхъ аналогичныхъ случаяхъ,—см. уравненіе (9) на 543 стр. Въ данномъ случаѣ полагаемъ опять, что

$$\xi = x + b\cos\vartheta t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

$$\eta = y + b\sin\vartheta t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

гдѣ b есть нѣкоторая постоянная величина, пока намъ неизвѣстная,—мы опредѣлимъ ее на основаніи нѣкоторыхъ особыхъ соображеній. Такъ какъ, въ виду (72) и (73), имѣемъ, что

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - b\vartheta^2\cos\vartheta t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

и

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - b\vartheta^2\sin\vartheta t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

то, подставляя эти выраженія въ основныя уравненія (70) и (71), находимъ, что

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mb\vartheta^2\cos\vartheta t - kx - kb\cos\vartheta t - ke\cos\vartheta t = -kx + (mb\vartheta^2 - kb - ke)\cos\vartheta t \ldots (f)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mb\vartheta^2\sin\vartheta t - ky - kb\sin\vartheta t - ke\sin\vartheta t = -ky + (mb\vartheta^2 - kb - ke)\sin\vartheta t \ldots (g)$$

Подберемъ теперь b такъ, чтобы величина $(mb\vartheta^2 - kb - ke)$, служащая коэффиціентомъ въ членахъ съ $\cos\vartheta t$ и $\sin\vartheta t$, обратилась въ нуль. Для этого нужно удовлетвореніе условія

$$mb\vartheta^2 - kb - ke = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

показывающаго, что необходимое для этого значенія b таково:

$$b = \frac{ke}{m\vartheta^2 - k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

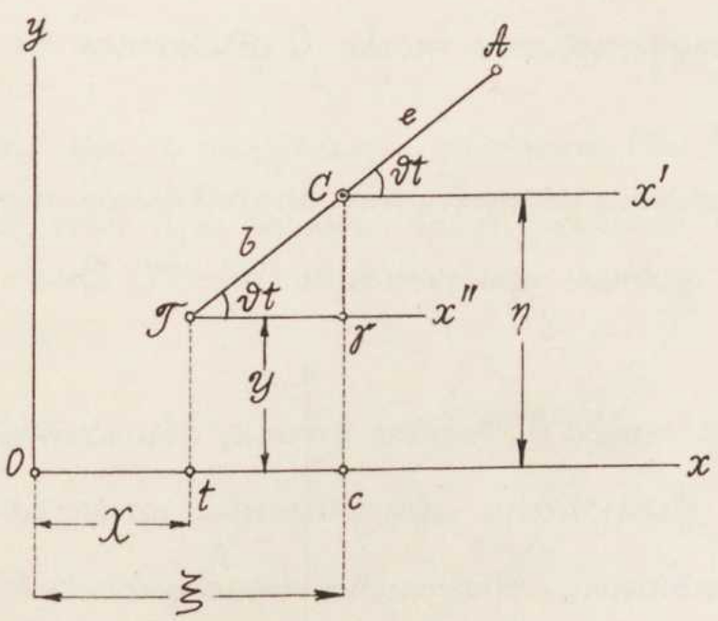
При такомъ значеніи b уравненія (f) и (g) теряютъ члены съ $\sin \vartheta t$ и $\cos \vartheta t$ и переходятъ въ весьма простыя уравненія:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

и

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Полученныя уравненія показываютъ, что движеніе центра тяжести $C(\xi, \eta)$ можетъ быть вполнѣ опредѣлено движеніемъ нѣкоторой точки T съ координатами (x, y), связанными съ координатами (ξ, η) соотношеніями (72) и (73), такъ что каждой парѣ опредѣленныхъ значеній (x, y), соотвѣтствующихъ какому-либо опредѣленному моменту τ будетъ соотвѣтствовать пара также вполнѣ опредѣленныхъ значеній координатъ (ξ, η). Посмотримъ, что это за точка $T(x, y)$ и какова ея связь съ центромъ тяжести C.



Фиг. 215.

Уравненія (72) и (73) показываютъ, прежде всего, что эта точка T лежитъ на прямой AC на разстояніи b отъ точки C. Дѣйствительно, фаза вектора AT равна, какъ видимъ, ϑt; значитъ, она та же, что и у вектора AC, откуда и заключаемъ, что AT идетъ по AC, составляя съ ней, такимъ образомъ, одну прямую (фиг. 215).

Далѣе, чтобы опредѣлить разстояніе между точками C и T под-

ставляемъ въ выраженіе его

$$CT=\sqrt{(\xi-X)^2+(\eta-Y)^2}$$

вмѣсто вошедшихъ сюда разностей значенія ихъ $b\cos\omega t$ и $b\sin\omega t$ изъ (72) и (73); тогда и получимъ, что

$$CT=b=\frac{ke}{m\vartheta^2-k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Итакъ, точка C принуждена все время находиться на разстояніи b отъ точки T. Такъ какъ b есть величина постоянная, то это значитъ, что точка C движется по окружности, описанной изъ T радіусомъ, равнымъ b. Нетрудно также убѣдиться, что это вращеніе точки C протекаетъ равномѣрно, съ угловой скоростью ϑ. Дѣйствительно, проекція точки C на горизонталь Tx'' движется гармонически, ибо изъ (72) имѣемъ, что $\xi-X=b\cos\vartheta t$, а такъ какъ $\xi-X=T\gamma$, гдѣ γ есть проекція точки C на прямую Tx'' (фиг. 215), то и получаемъ, что $T\gamma=b\cos\omega t$, а это есть уравненіе гармоническаго движенія точки γ; отсюда слѣдуетъ, что точка C движется по своей окружности равномѣрно.

Что касается точки T,—центра окружности, описываемой точкой C,—то законъ движенія ея дается уравненіями (76)–(77). Выяснить смыслъ ихъ нетрудно.

Прежде всего, замѣчаемъ, что точка T, вообще говоря, движется по эллипсу, какъ это можно заключить изъ значеній пары частныхъ интеграловъ этихъ уравненій, провѣрить пригодность которыхъ нетрудно помощью непосредственной подстановки. Положивъ, что

$$x=c\cos nt,$$
$$y=d\sin nt,$$

гдѣ c и d постоянны, а

$$n=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

найдемъ, что эти значенія перемѣнныхъ x и y удовлетворяютъ уравненіямъ (76) и (77). Исключая отсюда параметръ nt, получаемъ обыкновенное уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1$$

съ полуосями c и d. — Итакъ, точка $T(x,y)$ движется по эллипсу.

Нетрудно, далѣе, показать, что это движеніе точки T совершается подъ дѣйствіемъ нѣкоторой силы K, притягивающей T къ центру O пропорціонально разстоянію и, значитъ, выражаемой уравненіемъ

$$K=-k.OT. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

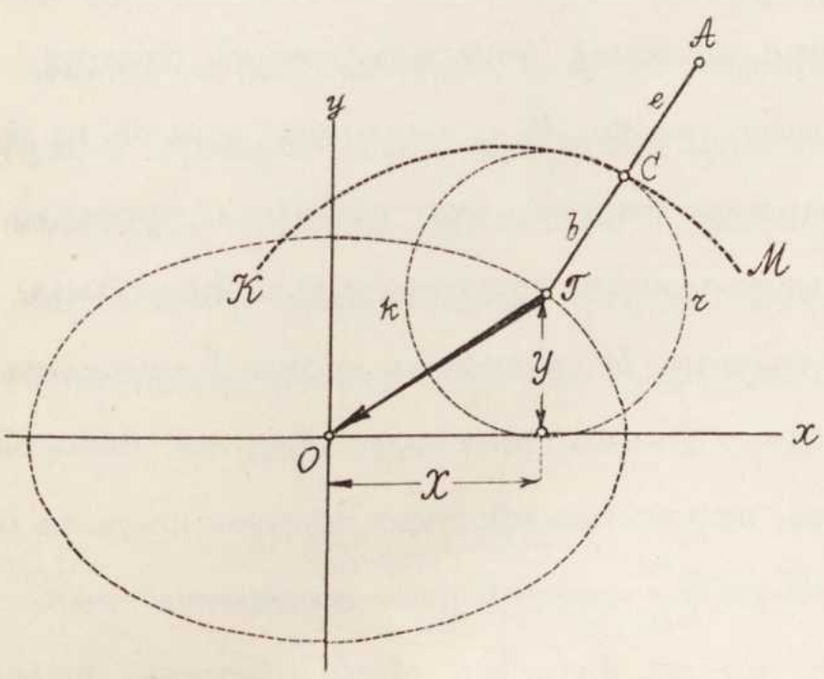
Дѣйствительно, взявъ проекцію силы K на ось Ox, находимъ, что

$$K_x=+K\cos(K,Ox)=-k.OT\cos\varphi=-kx,$$

а такъ какъ уравненіе движенія проекціи точки T на ось Ox пишется въ формѣ

$$K_x=m\frac{d^2x}{dt^2},$$

то мы и получаемъ уравненіе (76). Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что при этомъ предположеніи получается также уравненіе (77).



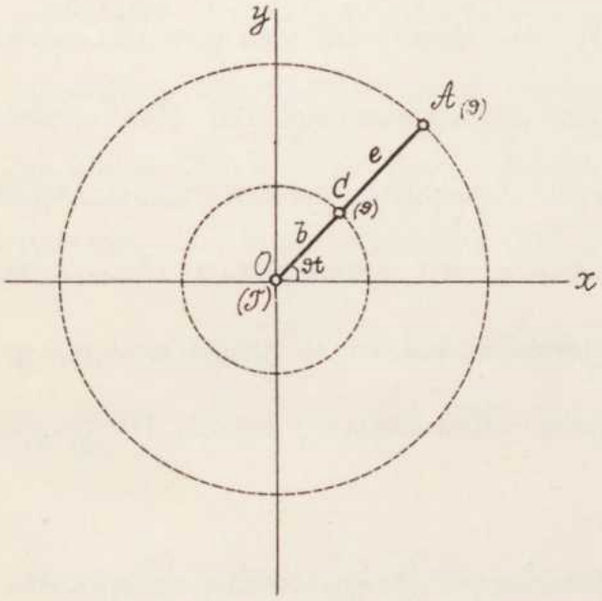
Фиг. 216.

Итакъ, точка T движется, какъ нѣкоторая точка, притягиваемая центромъ O съ силой, пропорціональной разстоянію OT; траекторіей точки T является эллипсъ съ центромъ въ O. Что касается центра тяжести C, то, какъ мы уже указывали, онъ будетъ оп-

сывать около центра Г окружность постояннаго радіуса b, при чемъ радіусъ-векторъ ГС будетъ вращаться съ постоянной угловой скоростью ϑ. Если бы точка Г была неподвижна, то точка С двигалась бы по неподвижной окружности kr (фиг. 216), при подвижной же Гочкѣ Г она будетъ двигаться по нѣкоторой кривой KCM, отличной отъ окружности, но при этомъ будетъ въ каждый данный моментъ, попрежнему оставаться на разстояніи b отъ этой подвижной точки Г.

Итакъ, движеніе центра тяжести C оказывается тѣсно связаннымъ съ движеніемъ точки Г. Это послѣднее, однако, не представляетъ для насъ чего-либо незнакомаго,—съ подобнымъ движеніемъ, но только не въ плоскости, а по прямой, мы уже встрѣчались при разборѣ движенія точки по прямой подъ дѣйствіемъ центра, притягивающаго съ силами, пропорціональными разстояніямъ: уравненія движенія проекцій точки Г по осямъ повторяютъ собою уравненіе (8) на стр. 65; мы видимъ, такимъ образомъ, что проекціи точки Г на оси Ox и Oy движутся вдоль своихъ осей по тому же закону, что и взятая тамъ точка M. Въ виду этого можемъ утверждать, что движеніе этихъ проекцій будетъ вполнѣ аналогично движенію точки M, и, значитъ, если бы не было ни внутренняго, ни внѣшняго треніа, то движенія проекцій представили бы собою незатухающія гармоническія колебанія. Такъ какъ въ дѣйствительности въ движеніи точки Г приметъ участіе и треніе, то колебанія этихъ проекцій будутъ очень быстро затухать; значитъ, окажется быстро затухающимъ и и движеніе самой точки Г, и въ нѣкоторый моментъ она окажется находящейся въ покоѣ внутри своей области равновѣсія, при чемъ, по малости этой послѣдней, можно принять, что

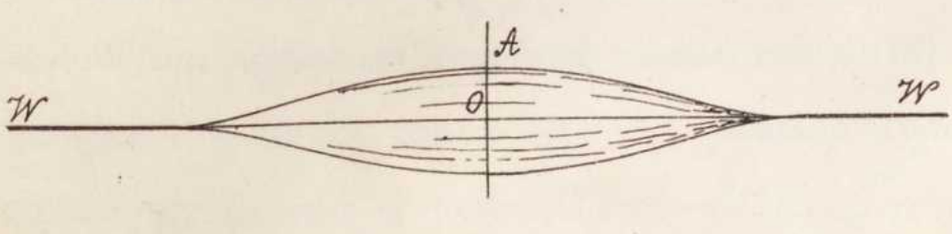
она ограничивается самой точкой O. – Итакъ, точка T, понуждаемая нѣкоторой центральной силой K совершать эллиптическое движеніе, съ теченіемъ времени будетъ постепенно уменьшать размѣры своего эллипса, т.-е. будетъ двигаться по нѣкоторой спирали; движеніе ея будетъ, слѣдовательно, неуклонно затухать, пока, наконецъ, не прекратится совсѣмъ, – въ этотъ моментъ точка T окажется совпавшей съ началомъ O. Что касается диска, то центръ тяжести его, не переставая описывать вокругъ T



Фиг. 217.

окружность радіуса b, будетъ продолжать это движеніе и теперь, такъ что картина движенія представится теперь въ такомъ видѣ:

Центръ тяжести C нашей системы будетъ описывать окружность радіуса b вокругъ неподвижной точки O, съ которой совпала точка T (фиг. 217), причемъ точка C будетъ двигаться по этой окружности съ постоянной угловой скоростью ϑ; система диска будетъ вращаться около своего центра тяжести C также съ постоянной угловой скоростью ϑ, такъ что точка A также будетъ описывать окружность радіуса (b+e) вокругъ того же центра O, причемъ точки O, C и A постоянно будутъ находиться на одной и той же прямой OA.



Фиг. 218.

Большого пріобрѣтенія это заключеніе для насъ,

однако, не представляетъ,—оно указываетъ намъ лишь на то обстоятельство, что ось WAW вала будетъ описывать теперь нѣкоторое тѣло вращенія, образуя при этомъ какъ бы нѣкоторую пустость (фиг. 218), наибольшее (экваторіальное) сѣченіе которой представитъ собою окружность центра O и радіуса OA, равнаго (b+e). Параметрами движенія системы являются здѣсь величины k, e, m и ϑ, входящія въ составъ формулы (75). Посмотримъ, не дастъ ли чего новаго разсмотрѣніе этой формулы.

Что касается величинъ k, e и m, то всѣ онѣ представляютъ собою величины постоянныя, со временемъ не мѣняющіяся. Дѣйствительно, k есть нѣкоторый постоянный коэффиціентъ, зависящій отъ размѣровъ вала и степени упругости его матеріала. Далѣе, эксцентриситетъ e обусловливается погрѣшностями и дальнѣйшему уменьшенію и измѣненію не подлежитъ. Наконецъ, масса m диска со временемъ не мѣняется.

Остался неразсмотрѣннымъ факторъ ϑ,—угловая скорость вращенія диска вокругъ его оси. По существу своему, это—величина перемѣнная, могущая принимать самыя разнообразныя значенія, отъ нуля до сколь-угодно большихъ размѣровъ; мы можемъ считать ее постоянной лишь за тѣ промежутки, когда движеніе является установившимся, какъ объ этомъ было уже сказано выше.

Между всѣми этими значеніями скорости ϑ особый интересъ пріобрѣтаютъ тѣ, при которыхъ знаменатель дроби, входящей въ уравненіе (75) обращается въ нуль, т.-е. тѣ, при которыхъ удовлетворяется условіе

$$m\vartheta^2 - k = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Такимъ значеніемъ является, слѣдовательно, значеніе

$$\vartheta_к = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Такъ какъ величины, стоящія подъ знакомъ корня, представляютъ собою величины дѣйствительныя и положительныя, то угловая скорость $\vartheta_к$, опредѣляемая по уравненію (81), представляетъ собою величину дѣйствительную; положительна же она по самому своему смыслу, почему передъ корнемъ и подразумѣвается одинъ лишь знакъ плюсъ.

Это значеніе $\vartheta_к$ является особенно интереснымъ потому, что при такомъ значеніи угловой скорости ϑ величина b, т.-е. разстояніе центра тяжести отъ точки T или, послѣ совпаденія точки T съ началомъ, отъ начала координатъ O, становится безконечно-большимъ, ибо при условіи (81) или, что то же, (80) изъ (75) получаемъ, что

$$b = \frac{ke}{m\vartheta_к^2 - e} = \frac{ke}{0}$$

т.-е.

$$b = \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ центръ тяжести C долженъ удалиться отъ точки O въ безконечность, что, понятно, можетъ имѣть мѣсто лишь тогда, когда сломается ось WAW, ибо при цѣлой оси центръ тяжести C можетъ находиться лишь на конечномъ разстояніи отъ точки O. Такимъ образомъ, угловая скорость $\vartheta_к$ представляется опасной для вала, ибо при ней валъ, будучи предоставленъ самъ себѣ, неминуемо сломается. Скорость эта носитъ названіе критической угловой скорости. Она тѣмъ больше, чѣмъ больше k и меньше m.

Но допустимъ, что мы такъ быстро перешли черезъ эту скорость, что валъ остался цѣлымъ, и продолжаемъ увеличивать скорость вращенія все дальше и дальше. Уравненіе (78) показываетъ, что это повлечетъ теперь за собою убываніе величины b, и въ предѣлѣ, при $\vartheta = \infty$

отрѣзокъ b обратится въ нуль, что, очевидно, будетъ соотвѣтствовать вступленію центра тяжести C въ точку O, т.-е. на прямую WOW,- идеальную геометрическую ось вращенія. Слѣдовательно, въ моментъ достиженія безконечно-большой скорости вращенія произойдетъ идеально-точное автоматическое центрированіе системы. На практикѣ, въ виду невозможности достичь безконечно-большихъ значеній угловой скорости ϑ, такого полнаго совпаденія центра тяжести C съ геометрической осью WOW ожидать нельзя, но, во всякомъ случаѣ, можно утверждать, что чѣмъ больше ϑ, тѣмъ меньше отрѣзокъ b, и при тѣхъ огромныхъ числахъ оборотовъ, кои имѣютъ мѣсто въ нашихъ паровыхъ турбинахъ, этотъ отрѣзокъ можетъ оцѣниваться лишь исчезающе малыми долями миллиметра, въ чемъ можно убѣдиться путемъ непосредственнаго подсчета.

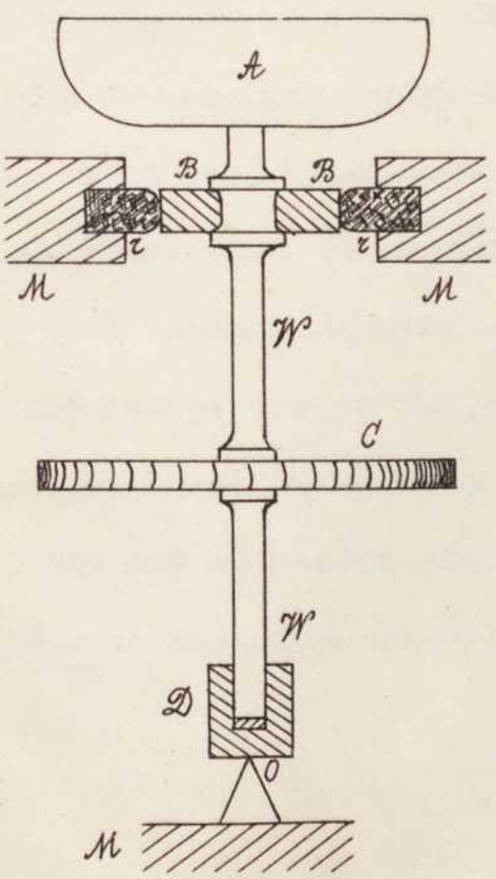
Итакъ, вращеніе системъ, подобныхъ нашей, будетъ происходить такъ:

Въ началѣ движенія произойдетъ изгибъ оси, увеличивающійся вмѣстѣ съ увеличеніемъ ϑ; система будетъ испытывать все большія и большія біенія, которыя будутъ особенно опасны по мѣрѣ приближенія угловой скорости вращенія къ критической скорости $\vartheta_к$. Но если мы, помощью какихъ-либо приспособленій, быстро перейдемъ черезъ эту критическую скорость, то система очень быстро, ибо почти обратно пропорціонально квадрату угловой скорости ϑ, центрируется сама и быстро успокаивается; дальнѣйшее движеніе ея будетъ происходить уже совершенно спокойно, ибо здѣсь не могутъ возникнуть сами по себѣ никакія вліянія, опасныя для цѣлости системы. При останавливаніи системы всѣ вышеописанныя явленія будутъ протекать въ обратномъ порядкѣ, и здѣсь придется, приближаясь къ $\vartheta_к$, принять мѣры къ возможно быстрѣйшему

переходу системы черезъ эту скорость.—Всѣ эти заключенія легко провѣрить на дѣйствительныхъ устройствахъ этого рода, каковы, напримѣръ, турбины Лаваля и проч.

Наши выводы, конечно, нельзя назвать вполнѣ точными и безупречными потому, что мы не ввели въ разсмотрѣніе какъ силъ внутренняго и внѣшняго тренія, такъ и нѣкоторыхъ другихъ; но если бы мы и ввели ихъ всѣ, написали рядъ сложныхъ уравненій и разсмотрѣли ихъ, то получили бы результаты, въ главныхъ чертахъ своихъ совпадающіе съ приведенными выше и полученными помощью примѣненнаго нами упрощеннаго метода.

Наши выводы, съ соотвѣтственными измѣненіями, могутъ быть примѣнены и въ другихъ случаяхъ, аналогичныхъ разобранному, каковъ, напримѣръ, случай центрофуги, схема устройства которой, въ общихъ чертахъ, можетъ быть представлена такъ (фиг. 219):



Фиг. 219.

Чаша A центрофуги закрѣпляется на валу WW, вращающемся въ подвижныхъ подшипникахъ BB и D, причемъ для того, чтобы дать центрофугѣ возможность покачиваться, подвижной, но не могущій вращаться, подшипникъ BB снабжается резиновыми прокладками r, r. Нижній подшипникъ (подпятникъ) D можетъ свободно двигаться вокругъ точки O,—вершины опорнаго конуса.

Такимъ образомъ, систему центрофуги A можно разсматривать, какъ свободно движущуюся, но съ дополнительнымъ условіемъ: въ балансъ силъ войдетъ еще сила упругости

резины, дѣйствующая на подшипникъ BB и на центрофугу. Уравненія движенія такой системы, по внѣшнему ихъ виду, будутъ нѣсколько отличаться отъ написанныхъ выше, но конечные выводы будутъ тѣ же: опять мы получимъ здѣсь нѣкоторую критическую скорость, вблизи которой весь механизмъ будетъ очень сильно дрожать, причемъ резиновыя прокладки могутъ въ нѣкоторые моменты сплющиваться такъ сильно, что центрофуга станетъ биться объ уборы M и M. Но разъ мы пройдемъ какъ можно быстрѣе эту опасную скорость, то центрофуга пойдетъ дальше совершенно спокойно,—ось OW ея станетъ описывать весьма малый конусъ съ вершиной въ O, и эффектъ получится такой же, какъ если бы центрофуга оказалась окончательно центрированной,—всѣ погрѣшности центровки окажутся совершенно сглаженными.

Этими соображеніями мы и закончимъ статью объ устойчивости вращательнаго движенія. Нетрудно видѣть, что задача о вращеніи системы, сидящей на гибкомъ валу, представляетъ собою лишь частный случай общей задачи о критическихъ скоростяхъ механизма. Конечно, рѣшеніе этой частной задачи, данное впервые Лаваломъ, по праву дѣлаетъ ему честь, ибо до него этимъ важнымъ вопросомъ не занимался никто. Въ настоящее время рамки задачи удалось раздвинуть весьма значительно, охвативъ всѣ вообще механизмы, приводимые во вращеніе помощью вращенія ихъ коренныхъ валовъ.

Конецъ.