

Син
ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛЪ

при Библиотецѣ ИМПЕРАТОРСКАГО Мос-
ковского Техническаго училища

№

29

43

81

133998

ДОМ
ВЫДАЕТСЯ

Н. И. Мерцаловъ.

Отечественна
Московского
ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

Динамика

механизмовъ.

Проектъ 1875

Выпускъ III.

(Листы Ia—I3a).

~~ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛЪ~~
~~Библиотека ИМПЕРАТОРСКАГО Мос-~~
~~ковского Техническаго училища~~

№ 29

Прозер. 1935

БИБЛИОТЕКА
ИМПЕРАТОРСКАГО
МОСКОВСКАГО
ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

II. Трение качения.

§1. Общія соображенія. Связь трения качения съ трениемъ скольжения. Соображенія Рейнольдса. Коэффициентъ трения качения.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда оси мгновеннаго вращенія въ относительномъ движеніи двухъ данныхъ тѣлъ приходятся на поверхности соприкосновения ихъ, когда, иными словами, оба тѣла оскерены по положенію этого движенія, мы должны были бы получить чистое качение одного тѣла по другому. Податливость матеріаловъ, изъ которыхъ выполнены оба тѣла, переводитъ, однако, это качение, — чистое качение, — въ качение, сопровождаемое скольженіемъ, при чемъ ходъ явленія представляется здѣсь въ фактическихъ чертахъ:

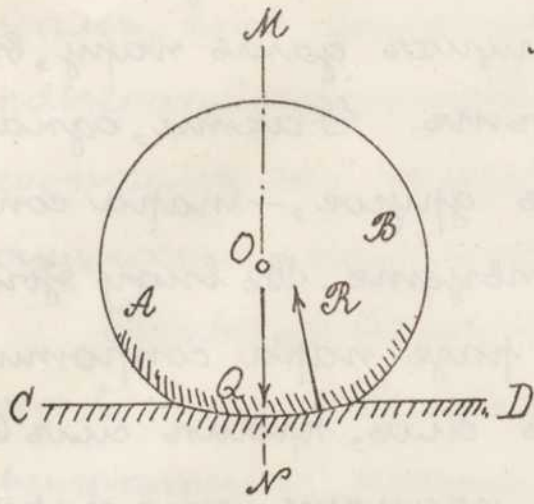
Пусть на горизонтальной плоскости лежитъ круглое тѣло, — нѣкоторый цилиндръ, — находящееся, такимъ образомъ, все время подъ дѣйствіемъ вертикальной силы, — силы тяжести. Опытъ показываетъ, что для возможности каченія такого цилиндра къ нему нужно приложить известную пару, создать известный добавочный крутящій моментъ, величина коего, для возможности равномернаго каченія цилиндра по плоскости, должна быть вполне определенной, при чемъ этотъ мо-

ментъ долженъ воздѣйствовать на тѣло непрестанно. Пока этотъ крутящій моментъ остается меньше упомянутой определенной величины, каченія не будетъ; при равенствѣ этихъ факторовъ получается равнолѣтрное каченіе; когда же, наконецъ, моментъ станетъ возрастать дальше, получится ускоренное каченіе.

Все это указываетъ на существованіе въ данной системѣ (цилиндръ — плоскость) нѣкотораго вполнѣ определенного пассивнаго момента сопротивленія, равнаго, очевидно, тому вѣнъшнему, прилагаемому нами моменту, который долженъ дѣйствовать на цилиндръ при равнолѣтрномъ каченіи этого послѣдняго, и этому вѣнъшнему моменту противоположнаго. Пока вѣнъшній моментъ, прилагаемый нами, остается меньшимъ этого пассивнаго момента сопротивленія, каченія быть не можетъ; въ случаѣ равенства ихъ получимъ равнолѣтрное каченіе и, наконецъ, если вѣнъшній моментъ больше момента сопротивленія, будетъ имѣть мѣсто ускоренное каченіе. Такимъ образомъ, величину этого пассивнаго момента сопротивленія можно определить путемъ прямого опыта: для этого нужно лишь опредѣлить, каковъ великъ тотъ моментъ, который вызываетъ равнолѣтрное каченіе, — моментъ сопротивленія будетъ ему равенъ.

Итакъ, сопротивленіе каченію выражается

уже не силой, какъ это имѣло мѣсто въ случаѣ ско-
женія, а парой. Появленіе ея стараются обыкно-
венно объяснить такъ: въ виду того, что матеріа-



Фиг. 1.

лы какъ цилиндра AB (фиг. 1), такъ и плоскости CD , по которой онъ катится, сжимаемы, цилиндръ AB , обладающій известнымъ вѣсомъ и налегши на плоскость, отчасти деформируется самъ, отчасти деформируетъ плоскость, — самъ онъ въ мѣстѣ

соприкосновения нѣсколько сплющится, а на плоскости образуетъ подъ собою нѣкоторое желобообразное вдавленіе. Кажалось бы вполне естественнымъ, что, въ виду полной симметріи деформированныхъ частей обоихъ тѣлъ относительно вертикальной діаметральной плоскости MN , въ которой, очевидно, лежитъ сила тяжести цилиндра Q , равнодѣйствующая R въсѣхъ силъ упругости, вызванныхъ здѣсь, будетъ лежать въ той же плоскости MN и дѣйствовать по той же прямой, но какой дѣйствуетъ сила Q , но лишь прямо ей противоположно. А такъ какъ по величинѣ эти двѣ силы должны быть между собою равны, ибо всякое дѣйствіе равно противодействию, то можно было бы ожидать, что двѣ эти силы, какъ равныя и направленныя по одной и той же прямой въ разныя стороны, взаимно уничтожаются. Слѣ-

довательно, о появлении пары сопротивления говорить здесь не приходится, но силы R и Q , как это ясно из сказанного, никакой пары дать не могут, а других сил, могущих дать пару, в рассматриваемой системе нет. Факты, однако, как мы видели, говорят другое, — пара сопротивления, несомненно, существует. Ввиду этого рассуждают дальше так: раз пара сопротивления существует, а других сил, кроме сил Q и R , здесь нет, то и надо принять, что пару сопротивления и дают именно две эти силы, которая, в силу такого заключения, и необходимо предположить действующими не по одной и той же прямой MM' , а расположенными так, что сила R , хотя и лежит в плоскости того же поперечного сечения AB , что и сила Q , но отходит от этой последней вперед, по направлению движения, как это и изображено на фиг. 1. Сила R может быть несколько наклонена к вертикали MM' , и вертикальная составляющая ее и может вместе с силой Q образовать пару, которая будет в состоянии противодействовать внешней паре, нами к телу прикладываемой.

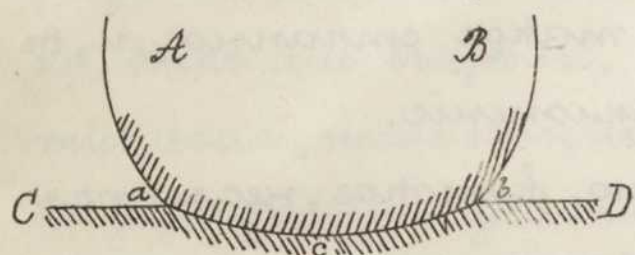
Приведенное объяснение основывается, как мы видим, на предположении, что результирующая всех сил сопротивления опорной поверхности не проходит через середину дуги сопри-

костовенія, т.-е. черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія, и представляетъ собою, въ сущности, лишь перифразировку этого предположенія; оно говоритъ намъ, что дѣло можно объяснить отклоненіемъ равнодѣйствующей, но не говоритъ самаго главнаго; почему же происходитъ такое странное и, въ сущности, необъяснимое отклоненіе.

Приведенному объясненію, которое, несмотря на всю его очевидную несостоятельность, можно встрѣтить почти во всехъ курсахъ механики, слѣдуетъ, во всякомъ случаѣ, предпочесть объясненіе, данное Осборномъ Рейнольдсомъ и приводимое нами ниже, — оно касается самой сущности вопроса и нуждается лишь въ аналитической обработкѣ для того, чтобы его можно было признать окончательнымъ. Рейнольдсъ заданъ цѣлью доказать, что треніе каченія можетъ быть сведено на треніе скольженія, и ходъ разсужденій его былъ таковъ:

Допустимъ, что на горизонтальной плоскости лежитъ некоторое твердое тѣло, ограниченное криволинейной поверхностью, — ради определенности разсужденій предположимъ, что оно представляетъ собою цилиндръ. Такъ какъ материалы цилиндра и плоскости абсолютной твердостью не отличаются, то въ мѣстѣ соприкосновенія поверхности будутъ вынуждены нѣсколько сдѣформироваться, — цилиндръ здѣсь сплю-

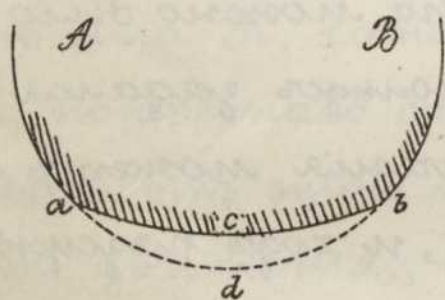
щится, а плоскость вдавится (фиг. 2), и не трудно убедиться, что частицы каждой поверхности, приходящаяся на этих деформированных участках, испытывают при этом деформировании некоторые перемещения одна относительно другой, а именно:



Фиг. 2.

но: поверхность цилиндра в месте соприкосновения испытывает сжатие, а поверхность плоскости — растяжение. Действительно,

поверхность цилиндра до момента соприкосновения была строго цилиндрической; с наступлением же соприкосновения участка adb (фиг. 3), входящий в соприкосновение с плоскостью, несколько сплющивается,



Фиг. 3.

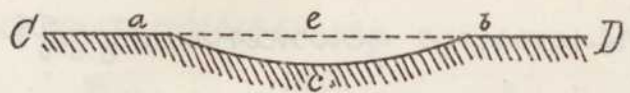
приобретая меньшую кривизну, и дуга adb переходит теперь в дугу acb , очевидно, более короткую, чем дуга adb . Вследствие этого, частицы поверхности цилиндра,

располагавшиеся раньше по всей дуге adb , теперь, по наступлении соприкосновения, расположились по дуге acb , более короткой, откуда следует, что все эти частицы, по необходимости, сблизилась, и, значит, на этом участке произошло сжатие материала.

Подобным же образом оказывается, что частицы плоскости, располагавшиеся раньше на

прямолинейномъ участкѣ ae , улягутся теперь по дугѣ $асв$ (фиг. 4), т.-е. будутъ вынуждены раздвинуться, вслѣдствіе чего участокъ ae плоскости претерпитъ здѣсь растяжение.

Пока цилиндръ лежитъ на плоскости неподвижно, между силами упругости и весомъ цилиндра существуетъ равновѣсіе. Но

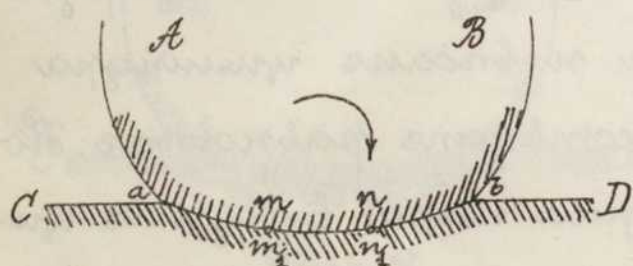


Фиг. 4.

предположимъ, что некоторая пара выводитъ цилиндръ изъ состоянія покоя и заставляеъ его катиться по плоскости. Ясно, что въ такомъ случаѣ начнутъ подвергаться деформированію все новыя и новыя участки поверхностей цилиндра и плоскости, а одновременно съ этими частями участковъ, претерпѣвшихъ деформациіи, а теперь одинъ за другимъ возвращающихся въ свое начальное состояніе, станутъ уходить на свои прежнія мѣста, которыя они занимали передъ деформированіемъ ихъ участковъ, такъ что, въ концѣ концовъ, работы на произведение этихъ упругихъ деформаций отъ насъ не потребуется совсѣмъ, — ту работу, которую потребуетъ на свою деформацию одинъ участокъ, подвергнущійся ей, отдастъ намъ равный ему другой, уже претерпѣвшій деформацию и вернувшійся въ начальное состояніе. Такимъ образомъ, затрата работы, всегда имѣющая мѣсто при каченіи, не имѣетъ никакой связи съ выполненіемъ указанныхъ деформаций. Эта работа,

какъ это впервые подмѣтилъ Рейнольдсъ, уходитъ на преодоленіе работы тренія скольженія, илѣющаго здѣсь мѣсто.

Дело въ томъ, что кусокъ mn поверхности цилиндра, выйдя изъ соприкосновенія съ плоскостью,



Фиг. 5.

непрерывно долженъ будѣтъ удлиниться, ибо во время соприкосновенія онъ былъ сжатъ (фиг. 5). Съ другой стороны, совпадавшій съ нимъ во время соприкосно-

венія кусокъ m_1n_1 плоскости, выйдя изъ соприкосновенія, непрерывно сожмется, ибо раньше онъ былъ растянутъ. Значитъ, какъ только при касаніи цилиндра наступитъ такой моментъ, когда элементы mn поверхностей выйдутъ изъ соприкосновенія, то какъ плоскость, такъ и цилиндръ въ этихъ мѣстахъ ихъ будутъ стремиться принять свою прежнюю форму, т.-е. кусокъ mn цилиндра будетъ растягиваться, а кусокъ m_1n_1 плоскости будетъ сжиматься, сокращаясь, вслѣдствіе чего каждый два такихъ элемента будутъ вынуждены скользить другъ относительно друга. То же самое придется повторить относительно всѣхъ другихъ элементовъ, находящихся въ данный моментъ въ соприкосновеніи. Что же касается элементовъ, лежащихъ впереди b и илѣющихъ войти своевременно въ сопри-

косновение, то въ нагаль его одни изъ нихъ, — элементы поверхности цилиндра, — должны будутъ сокращаться, а друге, — элементы плоскости, — растягиваться, что, понятно, опять ведетъ къ относительному скольженію ихъ одного по другому.

Заключение очевидно: разъ при качении цилиндра происходитъ такое относительное скольжение частей поверхности цилиндра и плоскости, то на выполнение его, т.-е. на преодоление сопротивления этому скольжению, нужно затратить известную работу, которую придется, поэтому, къ катящемуся цилиндру постоянно подводить; подводъ этотъ и будетъ выполнять прилагаемая нами къ цилиндру и вращающая его пара. Если работа этой пары, считываемая, какъ известно, произведениемъ изъ момента ея на угловую скорость вращения, будетъ меньше сопротивления скольжению, то движения не будетъ; при равенствѣ этихъ работъ можетъ имѣть мѣсто равномерное качение, и, наконецъ, при перевѣсѣ первой будетъ имѣть ускоренное качение цилиндра. Если же въ некоторый моментъ вращающая пара, приводившая цилиндръ въ движение, прекратитъ свое дѣйствіе, то цилиндръ станетъ дальнѣе катиться замедленно, при чемъ это качение его будетъ длиться до тѣхъ поръ, пока запасъ живой силы, бывшій

у него въ моментъ прекращенія дѣйствія вѣдущей пары, не истратится на преодоленіе работы тренія каченія и другихъ сопротивленій. Въ моментъ полного исчерпанія этого запаса цилиндръ прекратитъ свое каченіе и остановится.

Итакъ, трата работы, наблюдаемая при каченіи тѣла, обуславливается скольженіемъ элементовъ поверхности одного тѣла по поверхности другого, — таково заключеніе, къ которому пришелъ Рейнольдсъ. Это заключеніе, являясь, по существу, совершенно вѣрнымъ, могло бы привести къ ряду важныхъ результатовъ, если бы аналитическая обработка его не была сопряжена съ огромными и пока непреодолимыми трудностями. Хотя картина явленія каченія представляется совершенно ясно, но мы, тѣмъ не менѣе, на основаніи представленія Рейнольдса, не имѣемъ возможности изучить ни одного изъ факторовъ каченія, т.-е. распределенія давленія по поверхности соприкосновенія, величина работы тренія на различныхъ участкахъ и прог.; изслѣдованія Рейнольдса, не могущія дать числовыхъ указаній, важны лишь въ томъ отношеніи, что могутъ дать базисъ для дальнѣйшихъ аналитическихъ изысканій и выкладокъ, а также для некоторыхъ общихъ практическихъ соображеній, не могущихъ, однако, быть обоснованными на цифровыхъ данныхъ.

Такова причина, почему угетъ сопротивленія казенію производится на практикѣ и при расчётахъ преимущественно въ первомъ изъ приведенныхъ нами толкованій, — это сопротивление оцѣнивается извѣстнымъ моментомъ M , всегда противодействующимъ казенію и, значитъ, действующимъ всегда въ сторону, обратную смыслу казенія. Моментъ M , несомненно, является, между прочимъ, функцией нагрузки Q на цилиндръ или, скажемъ точнее, — силы Q , нормальной къ поверхности казенія:

$$M = \varphi(Q), \dots \dots \dots (1')$$

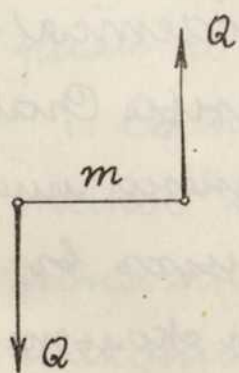
и, по аналогіи съ угетомъ сопротивленія скольженію, гдѣ сила тренія F , представляющая собою силу, сопротивляющуюся скольженію, предполагается прямопропорціональной нагрузкѣ:

$$F = fQ,$$

такъ что коэффициентъ f представляетъ собою постоянное отвлеченное число, — моментъ сопротивленія казенію M предполагается также прямопропорціональнымъ первой степени нагрузки:

$$M = mQ, \dots \dots \dots (1)$$

при чемъ коэффициентъ пропорціональности m представляетъ собою также некоторое постоянное число, но уже не отвлеченное, а именованное, ибо онъ опредѣляетъ собою длину плеча той пары, которая, будучи составлена изъ двухъ силъ Q , имѣетъ моментъ, равный M (фиг. 6). Въ



Фиг. 6.

виду этого коэф-тъ m , называемый коэффициентом трения качения, долженъ быть задаваемъ всегда въ тѣхъ или другихъ единицахъ длины, — сантиметрахъ, дюймахъ и т. п. Отсюда, далѣе, становится яснымъ, почему нельзя сравнивать между собою коэффициенты трения скольжения, f , и трения качения, m , — они представляютъ собою величины различныхъ измѣреній.

Замѣтимъ, что формула (1) представляетъ собою лишь весьма грубое приближеніе къ истиннѣ и оцѣнивается моментъ M съ малой степенью точности, но на практикѣ пользуются исключительно этой формулой въ виду удобствъ, представляемыхъ ею, особенно же въ виду простоты состава ея; — мы видимъ, что эта формула построена по типу всякихъ моментовъ вообще, этой формулой, въ силу необходимости, будемъ пользоваться въ дальнѣйшемъ и мы.

Считаемъ уместнымъ подчеркнуть еще разъ то обстоятельство, что въ то время, какъ коэффициентъ трения скольжения, f , есть число отвлеченное, коэффициентъ трения качения, m , есть число именованное и выражается въ тѣхъ или другихъ единицахъ длины. Сравненіе обоихъ треній можетъ быть выполнено лишь путемъ сравненія работъ, потребленныхъ въ этихъ двухъ случаяхъ движенія, — при скольженіи работа трения скольжения въ единицу вре-

мени выразится через fQv , где Q есть нагрузка скользящего тела, а v — его скорость; при качении же работа трения качения выразится через $M\omega$, т.-е. через $mQ\omega$, где Q есть нагрузка катящегося тела, а ω — угловая скорость вращения его. При одной и той же нагрузке Q оказывается возможным сравнивать количества fv и $m\omega$, а никак не f и m .

Это сравнение показало бы нам, что работа, потребляемая на качение тела, во большинстве случаев значительно меньше работы, расходуемой на скольжение его, если только, — и это нужно иметь в виду, — скользящая и катящаяся тела имеют сухие поверхности соприкосновения; во слугать же, если бы эти послѣднія оказались смазанными, приведеннаго выше заключенія сдѣлать было бы нельзя, и во некоторыхъ случаяхъ движение съ качениемъ потребовало бы затратъ большаго количества работы, чѣмъ скольженіе, но мы заранее оговорились, что будемъ, при нашихъ разсужденіяхъ, иметь в виду одни лишь сухія тела, — о такихъ телахъ мы говоримъ и теперь.

Во точки зрѣнія представленія Рейнольдса, такое преимущество каченія является вполне понятнымъ. Дѣйствительно, предположимъ, что некоторое круглое тело продвинулось на какое-либо разстояніе в одинъ разъ скользя

по опорной поверхности, а другой раз — катясь. В первом случае скольжение будет много больше, чем на всем этом пути s , во втором же случае путь, пройденный глыбой скольжением, будет меньше лишь некоторой малой долей этого расстояния s . На самом деле, мы видели, что качение сводится также к скольжению, но к скольжению поверхностей, деформированных путем нажатия: так, за время прохождения качением пути ae (фиг. 4), скольжение будет много больше, говоря суммарно, лишь на пространстве $[(adb - acb) - (acb - aeb)] = adb - aeb$, но никак не на всем участке ae . А так как эта разность, при скольжении твердых материалов, оказывается всегда очень малой, то будет весьма малым как скольжение, так и работа, потребная на него.

Таковы соображения, скрыто лежащая в основании общераспространенного мнения о преимуществах качения перед скольжением, — мнение, выражаемого лапидарно в форме, по существу, неточной и неправильной, — обыкновенно говорящее, что «трение качения меньше трения скольжения». Вышеприведенные соображения достаточно ясно показывают, как нужно понимать такое утверждение, — дело здесь не в трении, а в работе трения.

Преимущество качения перед скольжением

было создано съ незапамятныхъ временъ, — непосредственный опытъ указалъ людямъ преимущественную выгоду катенія, и при перемѣщеніи тяжестей издавна пользовались катками, подкладываемыми подъ грузы или подъ платформы, ихъ несущія; пользуясь такими катками, придавая имъ различныя выгибныя формы, и мы, — подшипники и подпятники на шарикахъ, платформы вращающихся крановъ на коническихъ роликкахъ и т.п. детали пользуются въ наше время повсемѣстнымъ и вполне заслуженнымъ распространениемъ.

Рядъ соображеній, приведенныхъ выше, позволяетъ намъ разобратся во всѣхъ вопросахъ, гдѣ приходится сталкиваться съ трениемъ катенія. Необходимо помнить всегда лишь то, что катеніе представляетъ собою непрерывный рядъ поворотовъ тѣла около мгновенныхъ осей вращенія, лежащихъ на поверхности соприкосновенія, въ виду чего для возможности катенія необходимо обезпечить возможность вращенія (поворота) тѣла около каждой такой оси; необходимо, иными словами, чтобы обстоятельства дѣла позволили катящемуся тѣлу имѣть на себѣ въ каждый отдельный моментъ такую неподвижную ось, — неподвижную прямую, лежащую, въ то же время, и на опорной поверхности. Очевидно, что это требование сводится къ тому,

чтобы трение между поверхностями было настолько велико, чтобы катящееся тело, подведя такую ось — прямую къ совпадению съ опорной поверхностью, могло, благодаря трению, получить и обезпечить неподвижность этой прямой за все время τ своего вращения около нея. Если же трение окажется здѣсь слишкомъ малымъ для того, чтобы указанная прямая могла задержаться на опорной поверхности, то качения не будетъ. Разбору ряда вопросовъ на трение качения мы отводимъ отдельной параграфъ курса.

§ 2. Движение цилиндра по плоскости. Движение телъ же къ подъ воздействиемъ силъ вѣшнихъ и силъ внутреннихъ. Случай буссованія.

Установивъ основныя положенія для учета сопротивленія качению, разберемъ теперь рядъ задачъ, въ которыхъ приходится сталкиваться съ сопротивленіями трения обоихъ родовъ и учитывать ихъ совместно. Прежде всего разберемъ задачу о движеніи тяжелаго цилиндра на наклонной плоскости.

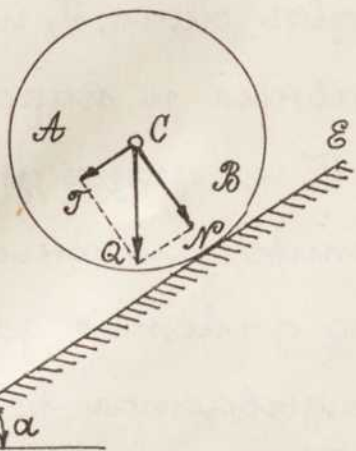
Пусть некоторый цилиндръ A вѣса Q (фиг. 7) находится на плоскости DE , составляющей съ горизонтомъ уголъ α . Положимъ, что поперечное сѣченіе цилиндра, проходящее черезъ центръ тяжести C его, совпадаетъ съ плоскостью гертежа, и пусть ось цилиндра горизонтальна, такъ что цилиндръ

касается плоскости DE также по горизонтальной прямой, проходящей через точку касания B и представляющей собою ось мгновенного вращения для рассматриваемого момента. Разложимъ силу Q , — вѣсъ цилиндра, — на силу T , параллельную плоскости DE , и на силу N , ей нормальную, такъ что связь между этими силами и силой Q представляется соотношеніями:

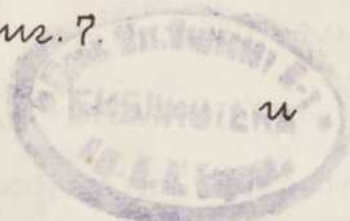
$$T = Q \sin \alpha \dots \dots (1)$$

$$N = Q \cos \alpha \dots \dots (2)$$

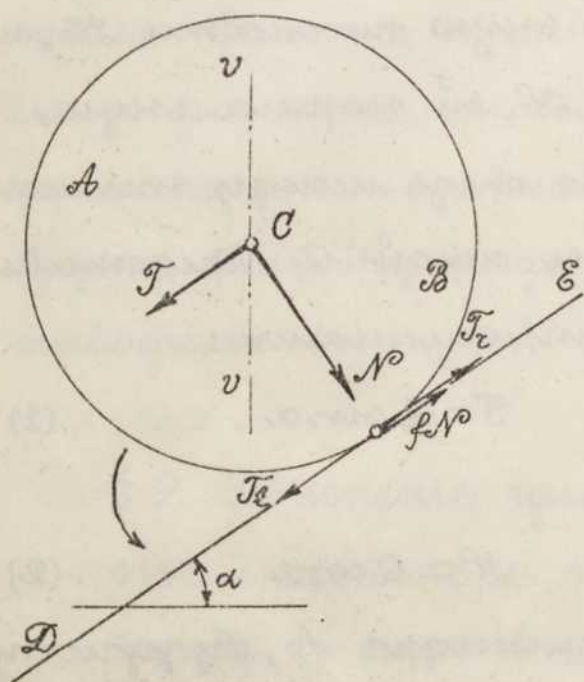
Такимъ образомъ, если цилиндръ A , будучи положенъ указаннымъ образомъ на плоскость DE , будетъ затѣмъ предоставленъ самому себѣ, то единственной активной внешней силой, могущей не только вызвать движение цилиндра и поддерживать затѣмъ это движение по его возникновеніи, является слагающая T силы тяжести, параллельная плоскости DE . Что же касается силы N , то она обусловливаетъ собою возникновение проявляющася здѣсь треній, и, такимъ образомъ, если цилиндръ будетъ скользить по плоскости, то сопротивление тренія скольженія выразится силой Nf ; если же онъ будетъ по плоскости катиться, то пара сопротивленія каченію выразится черезъ mN . Замѣтимъ, наконецъ, что си-



Фиг. 7.



мы Q , N и T можно считать приложенными въ центрѣ тяжести C цилиндра, совпадающаго съ геометрическимъ центромъ взятаго нами кругового сѣченія. Замѣтивъ это, приложимъ въ точку касанія сѣченія AB съ плоскостью двѣ силы, T_1 и T_2



Фиг. 8.

(фиг. 8), равныя и параллельныя силѣ T , но другъ другу прямопротивоположныя. Въ виду этого дѣйствіе данной силы T оказывается возможнымъ замѣнить дѣйствіемъ пары (T, T_2) съ плечомъ, равнымъ радиусу r цилиндра, и силѣ T_1 , приложенной въ точку касанія цилиндра съ плоскостью.

Пара (T, T_2) будетъ стремиться вращать цилиндръ, т.-е. катить его по плоскости, а сила T_1 будетъ заставлятъ его скользить по ней внизъ, и мы можемъ составить себѣ совершенно ясное представленіе о тѣхъ условіяхъ, соблюденіе коихъ необходимо 1) для того, чтобы цилиндръ скользилъ по плоскости, и 2) чтобы онъ по ней катился.

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ цилиндръ не сможетъ катиться по плоскости, а будетъ по ней скользить.

Разъ казеніе моста шить не будетъ, то это будетъ значить, что моментъ сопротивленія

качеству больше момента, стремящегося вращать тело; замечая, что этот последний момент выражается через T_z , заключаем, что условие невозможности качения изображается неравенством

$$T_z < mN \dots \dots \dots (3)$$

или, что то же, неравенством

$$T < \frac{m}{z} N \dots \dots \dots (4)$$

Условие возможности скольжения выразится неравенством

$$T_z > fN, \dots \dots \dots (5)$$

выражающим ту мысль, что сила, могущая заставить тело скользить по плоскости, превосходит сопротивления трения скольжения, проявляющиеся здесь. Замечая, что $T_z = T$, можем переписать неравенство (5) так:

$$T > fN \dots \dots \dots (6)$$

Соединяя неравенства (4) и (6) вместе, получим неравенство

$$fN < T < \frac{m}{z} N \dots \dots \dots (7)$$

Средний член этого неравенства можно выбросить, соединив крайние знаки неравенства, после чего получим неравенство

$$fN < \frac{m}{z} N$$

Замечая, что $N > 0$, и сокращая на N , найдем неравенство, представляющее собою иско-
мое условие:

$$f < \frac{m}{z}, \dots \dots \dots (8)$$

Таково условие того, чтобы цилиндр не мог катиться по плоскости, но скользить по ней мог.

Само собою разумеется, что соблюдения условия (8) еще мало для того, чтобы цилиндр АВ под влиянием одной лишь слагающей T своего веса стал скользить по плоскости; для этого необходимо еще, чтобы плоскость была несамотормозящей, т.-е. чтобы удовлетворялось условие

$$\alpha > \varphi, \dots \dots \dots (9)$$

где φ есть угол трения. Разъ условие (9) обеспечено, то при соблюдении условия (8) цилиндр катиться по плоскости не сможет, — онъ будетъ по ней скользить.

Если условие (8) соблюдается, такъ это $f < \frac{m}{z}$, но плоскость самотормозяща, такъ это $\alpha < \varphi$, то цилиндръ не сможет ни катиться по плоскости, ни скользить по ней, т.-е. онъ останется спокойно лежать на плоскости. Таковы, следовательно, условия равновѣсія цилиндра на плоскости.

Если, наконецъ, $f > \frac{m}{z}$, то каженіе будетъ возможнымъ, если только удовлетворяется условие

$$Tz > mN$$

или

$$Q \sin \alpha \cdot z > mQ \cos \alpha,$$

откуда и получаемъ искомое дополнительное условие возможности качения:

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{m}{c} \dots \dots \dots (9'')$$

Имѣя въ виду, что при данныхъ условияхъ, какими являются въ каждомъ отдельномъ случаѣ матеріалы цилиндра и плоскости, отъ насъ зависитъ лишь выборъ того или другого радиуса r , мы всегда можемъ обезопасить себя какъ по отношенію къ каченію, такъ и скольженію, смотря по тому, что для насъ является желательнымъ въ данномъ случаѣ. Такъ, если цилиндръ долженъ по плоскости скользить, то, выбравъ такую плоскость, чтобы $\alpha > \varphi$, мы должны затѣмъ подобрать такое значеніе радиуса r , чтобы удовлетворилось условіе (8): $f < \frac{m}{c}$. Если же цилиндръ долженъ по плоскости катиться, то какъ уголъ α плоскости, такъ и радиусъ r цилиндра должны быть подобраны такъ, чтобы были удовлетворены условія: $\operatorname{tg} \alpha > \frac{m}{c}$ и $f > \frac{m}{c}$. Только такимъ образомъ можно обезпечить цилиндру возможность каченія при всякихъ силахъ, на него въ точкѣ C дѣйствующихъ. Это обезпеченіе является весьма важнымъ въ практическомъ отношеніи, ибо дастъ возможность перемѣщать грузы по плоскости помощью одного цилиндра A или нѣсколькихъ путемъ каченія, что можетъ okazaться весьма выгоднымъ; радиусъ r въ такихъ случаяхъ нельзя выбирать слишкомъ малымъ, — низшій размѣръ его дается условіемъ: $f \geq \frac{m}{c}$.

Если плоскость DE оказывается горизонтальной, то слагающая T силы тяжести, параллельная плоскости, обращается в нуль, и в таком случае, для возможности движения цилиндра, необходимо приложить к нему некоторую силу извне; обыкновенно это достигается путем снабжения цилиндра шипами, вкладываемыми затем в подшипники, прикрепленные к платформе, несущей на себе груз. К этой платформе и прилагается затем некоторая сила, позволяющая перемещать всю эту систему. Таким образом, и в этом случае можно предположить, что сила T , параллельная плоскости, имеет своей точкой приложения опять тот же центр C . Условие скольжения выразилось бы опять неравенством $f < \frac{m}{\varepsilon}$, а качение было бы обеспечено при удовлетворении условия $f > \frac{m}{\varepsilon}$, и раз мы обеспечили себя достаточно большим радиусом τ , удовлетворяющим последнему условию, то можем затем быть уверены, что качение будет иметь место всегда, раз сила тяги будет достаточною для этого, и сомнительными будут лишь те случаи, когда во время движения происходят изменения коэффициентов f и τ , переводящих знак $>$ в знак $<$; в таких случаях качение прекращается, и начинается скольжение, которое и будет

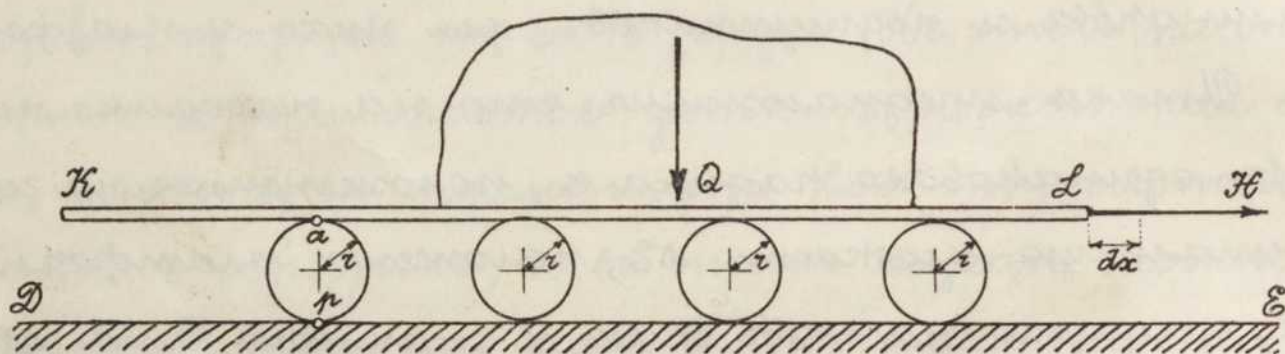
продолжаться до тех поръ, пока не возобновятся нормальныя, какальныя условія движенія, — тогда качение возобновится. Къ этому вопросу мы вернемся еще разъ, а теперь разберемъ вопросъ о перемещеніи грузовъ какъ помощью катковъ, такъ и помощью тележекъ, гдѣ цилиндрическіе катки используются и сопрягаются съ платформами, несущими на себѣ грузы, при помощи шинъ у цилиндровъ и подшипниковъ для нихъ у платформъ.

Итакъ, предположимъ, что на нѣсколько катковъ одинаковаго радиуса r , положенныхъ на горизонтальную плоскость DE , положена платформа KL , несущая на себѣ грузъ Q , — см. фиг. 9 на стр. 24. Радиусы r предположимъ подобранными такъ, чтобы въ данномъ случаѣ оказалось возможнымъ качение, т.-е. чтобы было удовлетворено условіе $\mu > \frac{m}{2r}$, какъ это было указано выше. Предположимъ теперь, что платформа KL приводится въ равномерное движеніе горизонтальной силой H . Разъ движеніе протекаетъ равномерно, то работа движущей силы H будетъ равна работѣ сопротивленій, а эти послѣднія окажутся сопротивленіями каченія катковъ какъ по плоскости DE , такъ и по перемещающейся относительно нихъ платформѣ KL . Подсчитаемъ работу силы H и этихъ сопротивленій за время dt перемещенія платформы на разстояніе dx .

Работа силы H выразится через

$$L_H = H dx \dots \dots \dots (a)$$

Обозначим коэф-т трения качения для катков и плоскости DE через m_1 , а для катков и платформы — через m_2 . Материалы плоскости DE и платформы могут быть разными, и тогда будут разными и коэффициенты m , — такой именно случай и предположен нами.



Фиг. 9.

Согласно основным положениям, моменты сопротивления качению выразятся так:

1) для катков и плоскости DE через

$$M_1 = m_1 Q,$$

и 2) для тех же катков и платформы KL через

$$M_2 = m_2 Q,$$

при этом оба момента берутся суммарно, учитывая сопротивление качению сразу всех n катков, примененных во рассматриваемом случае, т.-е. полагая, что каждый из n катков нагружен грузом Q/n , можем считать сопротивление качению такого отдельного катка через $m \cdot Q/n$, что для n катков и даст написанные выше формулы.

Такимъ образомъ, общій моментъ M , необходимый для поворачиванія катковъ, изобразится суммой моментовъ M_1 и M_2 , т.-е. будетъ равенъ

$$M = M_1 + M_2 = (m_1 + m_2)Q, \dots\dots\dots (б)$$

Для подсчета работы тренія каченія, относительно коего намъ извѣстенъ лишь моментъ сопротивленія его, необходимо имѣть еще условную скорость вращенія катковъ, которому и пренаѣствуетъ этотъ моментъ.

Центръ (ось) мгновеннаго вращенія каждаго катка лежитъ въ точкѣ ρ касанія его съ плоскостью DE . Такъ какъ каченіе катка сводится къ повороту его вокругъ полюса мгновеннаго вращенія, то за время dt точка a катка продвинется, повернувшись около полюса ρ съ угловой скоростью ω , на разстояніе $2r \cdot \omega dt$, а такъ какъ перемѣщеніе платформы за то же время dt , равно, понятно, перемѣщенію точки a и обозначено нами черезъ dx , то мы находимъ для этого элементарнаго перемѣщенія dx выраженіе:

$$dx = \omega \cdot 2r \cdot dt, \dots\dots\dots (в)$$

въ виду чего работа L_x силы H выразится такъ:

$$L_x = H \cdot \omega \cdot 2r \cdot dt. \dots\dots\dots (д).$$

Если угловая скорость вращенія катковъ равна ω , то работа момента M въ единицу времени выразится черезъ $M\omega$, а за время dt — черезъ $M\omega \cdot dt$, въ виду чего работа сопротивленій, L_w , выразится такъ:

$$L_w = M \omega dt \dots \dots \dots (e)$$

Такъ какъ, при равномерности движения платформы, должно имѣть мѣсто равенство работъ L_{xc} и L_w , то изъ (d) и (e) и находимъ условие такой равномерности:

$$H \cdot 2r \cdot \omega dt = M \cdot \omega dt, \dots \dots \dots (f)$$

откуда, после очевидныхъ упрощений, и получается величина силы H , нужной для равномернаго движения платформы:

$$H = \frac{M}{2r}; \dots \dots \dots (g)$$

подставивъ вмѣсто M его выраженіе, данное въ (b), можемъ дать выраженію (g) видъ:

$$H = \frac{m_1 + m_2}{2r} Q \dots \dots \dots (h)$$

Многая материалы платформы, но оставляя тотъ же грузъ Q и тоже материалы плоскости DE и катковъ и находя соотвѣствующіе значенія усилий тѣмъ H , дающія равномерное движеніе платформы, можно опредѣлить величины коэффициентовъ тренія каченія m_1 , а затѣмъ и m_2 . Это обычный путь для опредѣленія этихъ величинъ. Въсь платформы можно включить въ въсь груза Q .

Если бы мы пожелаемъ принять во вниманіе еще и въсь катковъ, q , оказывающій вліяніе на увеличеніе момента тренія каченія катковъ по плоскости DE , но не по плоскости платформы, то должны были бы написать, что теперь

$$M_1' = m_1(Q + q)$$

для сопротивления качению по плоскости DE , и

$$M_2 = m_2 Q$$

для качения платформы относительно катков. Тогда общий момент сопротивления выразится через

$$M' = M_1' + M_2 = m_1 Q + m_2 Q + m_1 q = M + m_1 q,$$

после чего уравнение работы ($\mathcal{F}$) перенесется в данном случае так:

$$\mathcal{H}' \cdot 2r \cdot \omega dt = M' \omega dt,$$

откуда

$$\mathcal{H}' = \frac{M'}{2r} = \frac{M}{2r} + \frac{m_1 q}{2r} = \mathcal{H} + \frac{m_1 q}{2r} \dots \dots \dots (к).$$

Здесь под $\mathcal{H}'$ подразумевается новая горизонтальная сила, отличная от прежней; поправка равна $m_1 q / 2r$.

По поводу уравнения (к) можно заметить еще следующее:

Если бы катков не было, и груз нужно было бы перемещать по плоскости (горизонтальной) простым скольжением, то необходимая для этого горизонтальная сила $\mathcal{H}_1$ выразилась бы так:

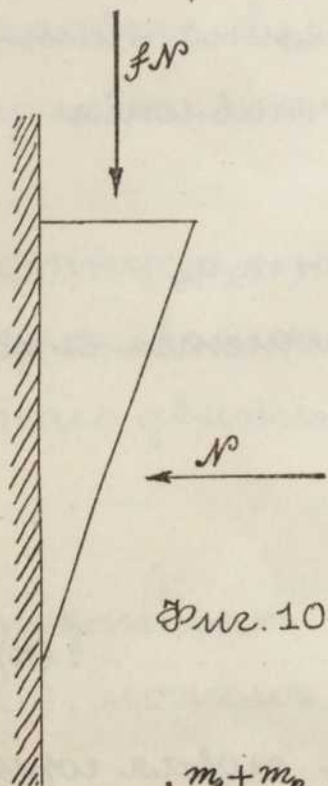
$$\mathcal{H}_1 = f Q,$$

где f есть коэффициент трения скольжения. Если бы теперь оказалось, что

$$f < \frac{m_1 + m_2}{2r},$$

то, очевидно, применение катков было бы невы-

годо, но для перемещения груза простым скольжением потребовалась бы меньшая сила, H_1 , — см. формулу (h), — только при помощи катков.



Фиг. 10.

Далее, при

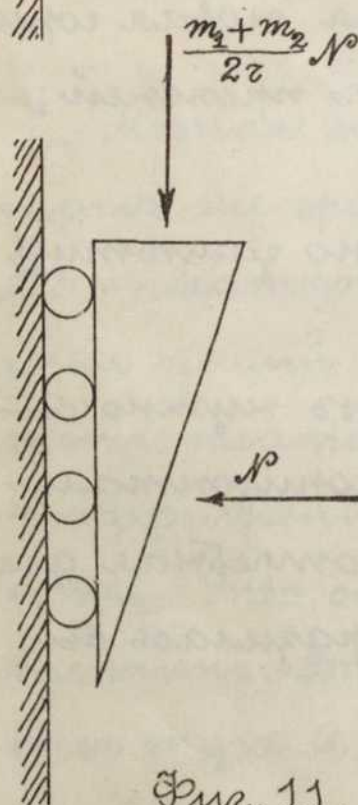
$$f = \frac{m_1 + m_2}{2r}$$

характер перемещения был бы безразличен, но силы H и H_1 оказались бы в этом случае равными.

Наконец, при

$$f > \frac{m_1 + m_2}{2r}$$

катки были бы выгоднее.



Фиг. 11.

Получно заметим следующее.

Пусть нам дана некоторая деталь, скользящая по другой и прижимаемая к ней нормальным усилием N (фиг. 10). Сопротивление перемещению ее составит силой fN .

Но пусть теперь между этими деталями введен ряд катков одного и того же радиуса r , — см.

Фиг. 11. На основании соотноше-

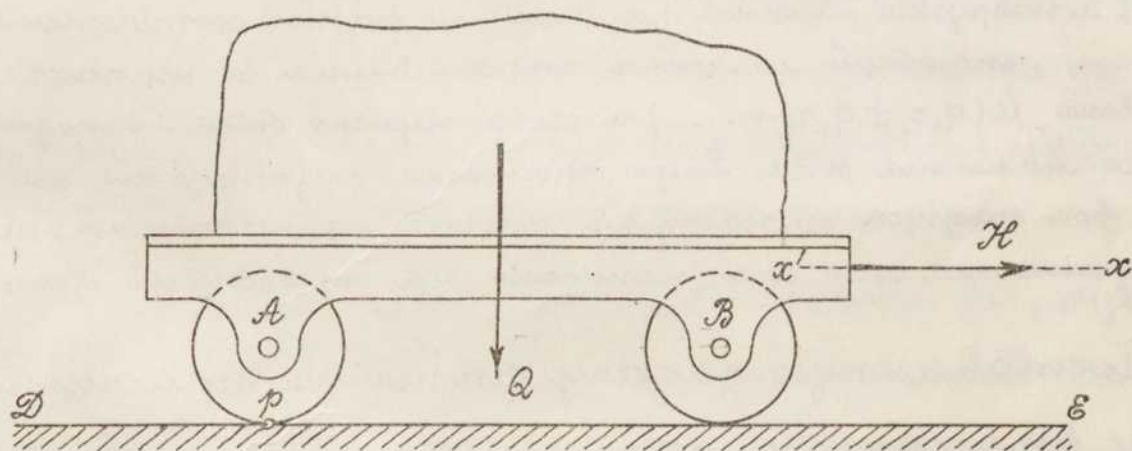
ния (g) заключаем, что теперь движение с катками будет эквивалентно движению скольжения с коэф-том f_1 , равным $\frac{m_1 + m_2}{2r}$.

Таким образом, если $f_1 < f$, то применение катков будет выгодным, и т.п.

Разсмотрим теперь другой случай применения катковъ, а именно, катковъ, снабженных шинами, при чемъ платформа снабжена подшипниками для этихъ шинъ, — это будетъ такимъ образомъ, случай перемѣщенія груза помощью тележки.

Пусть имѣется такая тележка, схематически изображенная на фиг. 12. Сопротивленія движению сведутся здѣсь

1) къ сопротивленію тренія каченія при ка-



Фиг. 12.

ченіи катковъ (колесъ) по плоскости DE, и

2) къ сопротивленію тренія скольженія въ шинахъ A и B катковъ. Предположимъ, что радиусы колесъ одинаковы и равны каждаго R; радиусы шинъ предположимъ также одинаковыми и равными каждаго r.

Сила H, тянущей тележку, приходится преодолевать сопротивленіе каченію, моментъ коего суммарно выражается здѣсь черезъ mQ , и сопротивленіе вращенію шинъ въ ихъ осяхъ, —

моментъ этого послѣдняго сопротивленія суммарно выразится черезъ μQz .

Если колесо (катковъ) всего 4, то нагрузка каждого равна $\frac{1}{4}Q$; моментъ сопротивленія каченію для каждого колеса будетъ равенъ $\frac{1}{4}mQ$, а для четырехъ колесъ, т.-е. суммарно, выразится черезъ mQ , какъ мы и искали выше. Что касается тренія въ шинахъ, то мы принимаемъ силу тренія пропорціональной нагрузкѣ шина, а коэф-тъ пропорціональности полагаемъ равнымъ μ ; поэтому сила тренія на поверхности шина будетъ для каждого изъ нихъ равна $\frac{1}{4}\mu Q$, а такъ какъ нѣго каждой такой силы равно z , то моментъ каждой будетъ равенъ $\frac{1}{4}\mu Qz$; для всѣхъ четырехъ шинъ моментъ тренія на нихъ выразится, следовательно, черезъ $4 \times \frac{1}{4}\mu Qz = \mu Qz$, какъ это и принято выше.

Если бы діаметры шинъ были разными и равны $2r_1, 2r_2, \dots$, а нагрузки также разными и равны соответственно $q_1, q_2, \dots$, то общій моментъ сопротивленія въ шинахъ былъ бы равенъ $\mu(q_1 r_1 + q_2 r_2 + \dots)$ и его и нужно было бы подставить вмѣсто момента μQz . Ради простоты разсужденій мы полагаемъ всѣ радіусы и нагрузки шинъ одинаковыми; тогда и получимъ то, что было написано на предыдущей страницѣ.

Поставленную задачу рѣшимъ помощью принципа возможныхъ перемѣщеній. Пусть вертикальная горизонтальная сила приложена къ обѣимъ тележкамъ, несущей на себѣ подшипники для шинъ А и Б. Позицію приложения этой силы можно взять вдоль направленія $x'x$ гдѣ-нибудь, — пусть это будетъ точка С обѣимъ. Предположивъ, что подъ воздействием силы H тележка движется равномерно, напишемъ условіе равновѣсія, представляющее здѣсь собою равенство между работами силъ H и Q и всѣхъ силъ сопротивленій, входящихъ въ составъ нѣкоторыхъ моментовъ.

Пусть за время dt тележка продвинулась

на расстояние dx . В таком случае сила H произведет работу $H dx$ или $H dx$, но действительное перемещение dx является одним из возможных dx , а точка C приложения силы H и проходит как раз этот путь dx . Такой же путь dx пройдет и обойма тележки, и сиденье на ней подшпунники, и, значит, продвигаемые или шины и оси колес. Но каждое колесо перемещается по горизонтальной плоскости, касаясь по ней, т.-е. поворачиваясь во каждый данный моментъ вокругъ соответствующаго этому моменту полюса мгновеннаго вращения P съ некоторой угловой скоростью, которую мы обозначимъ черезъ ω . Поэтому линейная скорость оси колеса A , при вращении ея вокругъ полюса P , будетъ равна $\omega \cdot AP = R\omega$, а путь, пройденный осью A за время dt , выразится черезъ $R\omega dt$. А такъ какъ этотъ путь есть dx , то мы получаемъ равенство:

$$dx = R\omega dt \dots\dots\dots (\alpha)$$

Всегодствие этого работа L_x силы H выразится черезъ:

$$L_x = H dx = H dx = H R\omega dt \dots\dots\dots (\beta)$$

Такъ какъ при равенстве радиусовъ колесъ угловая скорость вращения ихъ около полюса P одна и та же, равная ω , то работа нашихъ паръ сопротивления, mQ и μQr , за единицу времени выразится черезъ $mQ\omega$ и $\mu Qr\omega$, а за время dt — черезъ $mQ\omega dt$ и $\mu Qr\omega dt$. Въ виду равенства ра-

боть действующей силы H и моментов сопротивления имеем уравнение:

$$H dx = H R \omega dt = m Q \omega dt + \mu Q r \omega dt.$$

После необходимых упрощений получаем соотношение

$$H R = m Q + \mu Q r, \dots \dots \dots (\gamma)$$

говорящее намъ, что моментъ силы H , приложенной къ подшпунника шина B (или A) на высоту оси этого шина, т.-е. на высоту R надъ плоскостью AB , относительно мгновенной оси вращения, для возможности равнолѣтнаго движенія тележки долженъ быть равенъ суммѣ моментовъ сопротивления каченію и тренія въ шинахъ. Если

$$H R < Q(m + \mu r), \dots \dots \dots (\delta)$$

то каченіе будетъ невозможно, — моменты сопротивления будутъ настолько велики, что преодолѣютъ моментъ движущей силы и не позволяютъ ей вращать колеса тележки. Отсюда, однако, вовсе не слѣдуетъ, что вся система тележка будетъ оставаться неподвижной, — здѣсь возможно еще скольженіе тележки, и возможность этого выражается неравенствомъ:

$$H > f Q \dots \dots \dots (\epsilon)$$

Сопоставляя неравенства (δ) и (ϵ) , получимъ условіе того, чтобы тележка не катилась, а скользила по плоскости, при чемъ колеса ея вращающіяся не будутъ совѣсть. Это условіе скольженія тележки выразится, слѣдовательно, такъ:

$$fQ < H < \frac{m + \mu r}{R} Q.$$

Взявъ крайніе члены и сокративъ на Q , приходимъ къ заключенію, аналогичному съ предыдущимъ: скольжение тележки по плоскости, при чемъ вращенія колесъ не будетъ, произойдетъ тогда, когда удовлетворяется условіе:

$$f < \frac{m + \mu r}{R} \dots \dots \dots (5)$$

Следовательно, если R взято столь малымъ, что это неравенство можетъ удовлетвориться, то качение колесъ по плоскости окажется невозможнымъ, и тележка будетъ двигаться такъ, какъ если бы шипы колесъ ея оказались наглухо зацементированными въ ихъ подшипникахъ, — тележка станетъ скользить всеми своими колесами по опорной поверхности.

Вопросъ этотъ имѣетъ большое практическое значеніе; такъ, при конструированіи тележекъ крановъ, где колеса имѣютъ всегда очень малые радіусы, необходимо проверить всегда, будетъ ли тележка скользить или катиться. Практика даетъ массу случаевъ, когда экипажъ, влекомый вѣншиной силой, движется такъ, что колеса его не вертятся, а скользятъ. Эти явленія можно, наприимѣръ, наблюдать зимой, когда экипажу приходится двигаться по снегу или льду; въ этихъ случаяхъ очень часто коэф-тъ f тренія колесъ по снегу меньше величины, указывающей на возможность качения.

занной въ выраженіи (3). Будутъ ли, однако, колеса вертѣться или станутъ скользить, а экипажъ, влекомый вѣншей силой, будетъ продолжать двигаться по ея направленію, и вся разнища будетъ сводиться къ тому, что въ одномъ случаѣ колеса будутъ имѣть относительное движеніе (относительно экипажа), а въ другомъ не будутъ, и въ послѣднемъ случаѣ весь экипажъ составитъ съ своими колесами какъ бы одно жесткое тѣло, скользящее по плоскости подъ дѣйствіемъ данной вѣншей силы.

Посмотримъ теперь, какъ будетъ обстоять дѣло, если силами, имѣющими приводить систему тѣлѣжки въ движеніе, являются силы внутреннія, какъ это имѣетъ мѣсто во всѣхъ самодвигающихся экипажахъ, каковы паровозъ, автомобиль, трамвай и проч.

Изъ теоретической механики извѣстно, что система, находящаяся подъ дѣйствіемъ однихъ внутреннихъ силъ, будетъ двигаться такъ, что центръ тяжести (массы ея) будетъ или перемѣщаться прямолинейно и равномерно, или же будетъ все время оставаться въ покоѣ.

Давленія пара, газа (въ цилиндрахъ паровыхъ и газовыхъ двигателей), электромагнитныя воздѣйствія въ электромоторахъ, представляють собою силы внутреннія, не могущія

самостоятельно измѣнить равномерное движеніе центра тяжести или покойное состояніе его, почему, следовательно, въ случаѣ желанія измѣнить скорость движенія или остановить систему, уже двигающуюся, одними внутренними силами обойтись нельзя, ибо никакихъ измѣненій въ состояніи центра тяжести эти внутреннія силы вызвать не могутъ.

Во этихъ случаяхъ приходится прибѣгать уже къ внешнимъ силамъ или сопротивленіямъ, которыя и слѣдуетъ подбирать и принимать такъ, чтобы данная система, подчиняясь совокупному дѣйствію внутреннихъ силъ и внешнихъ силъ (или сопротивленій) могла перемѣститься своимъ центромъ тяжести такъ, какъ это нужно для насъ. Таковыми внешними силами являются:

- 1) сила тяжести,
- 2) сопротивленіе воздуха при движеніи экипажа, и
- 3) сопротивленіе тренія колесъ при каченіи ихъ по опорной поверхности, — по рельсамъ, мостовой и т. д.

Первая изъ этихъ силъ, — сила тяжести, — въ случаѣ движенія системы по горизонтальной плоскости, — а эти случаи мы и будемъ разбирать въ дальнѣйшемъ, — прямо на это движеніе вліять не можетъ; въ указанномъ случаѣ ее

придется иметь въ виду лишь при учетъ сопротивлений тренія. Если опорная плоскость окажется наклоненной къ горизонту, то сила тяжести дастъ еще слагающую, параллельную плоскости и представляющую собою активную силу или помогающую движению системы или ему сопротивляющуюся.

Второй силой, — силой сопротивления воздуха, — будемъ пренебрегать по сравнительной малости ея въ обыкновенныхъ условіяхъ.

Третья сила, — сила сопротивления тренія скольженія, — и является, при горизонтальной опорной поверхности той силой, которой и пользуются на практикѣ въ указанныхъ выше случаяхъ.

Въ горныхъ желѣзныхъ дорогахъ, гдѣ этой одной силы тренія оказывается недостаточно, приходится вводить недостающія сопротивления путемъ введенія зубчатыхъ рельсовъ и соотвѣствующихъ имъ колесъ на паровозъ, вращаемыхъ силой упругости пара.

Отъ этихъ общихъ соображеній перейдемъ къ непосредственному учету условій, при которыхъ система можетъ или не можетъ двигаться подъ воздействием этихъ внутреннихъ силъ. Возьмемъ наиболее сложный случай, могущій здѣсь встрѣтиться, — случай паровоза, вѣсомъ Q , идущаго тащить за собою рядъ.

вагоновъ. Пусть движеніе поезда должно совершаться по горизонтальной плоскости.

Колеса паровоза приводятся во вращеніе путемъ непрерывнаго воздѣйствія пара на поршни; помощью ряда промежуточныхъ механизмовъ давленіе пара передается на пальцы кривошиповъ, — этими кривошипами служатъ здѣсь нѣкоторые радіусы колесъ, и это давленіе пара на поршни мы можемъ замѣнить нѣкоторыми тангенціальными усилиями, ведущими пальцы кривошиповъ. Каждое такое тангенціальное усилие, — будемъ обозначать его черезъ t , — будетъ величиной перемѣнливой, зависящей отъ положенія пальца кривошипа, потому будетъ перемѣнливъ и моментъ l , вращающій колесо и, слѣдовательно, являющійся здѣсь единственнымъ дѣйствующимъ факторомъ, долженствующимъ преодолевать моменты остальныхъ сопротивленій.

Предположимъ, ради простоты разсужденій, что тангенціальныя усилия, исходящія отъ обоихъ цилиндровъ, расположенныхъ по разнымъ сторонамъ паровоза, замѣнены однимъ усилиемъ T , дѣйствующимъ касательно къ окружности ведущаго колеса радіуса R , такъ что активнымъ моментомъ, стремящимся катить колеса по рельсамъ, является перемѣнливый по величинѣ моментъ

$$M = IR \dots \dots \dots (11)$$

Посмотримъ теперь, при какихъ условіяхъ этотъ моментъ не будетъ въ состояніи сдвинуть съ мѣста паровозъ. Для этого подсчитаемъ моменты всѣхъ сопротивленій, имѣющихъ здѣсь мѣсто.

Прежде всего, имѣемъ пару сопротивленія каченію паровоза; согласно основнымъ положеніямъ, она выразится черезъ mQ .

Далѣе, пара сопротивленія скольженію (вращенію) шиповъ въ ихъ гнездахъ выразится черезъ μQr , гдѣ μ есть некоторый коэффициентъ тренія въ шипѣ, а r — радиусъ шипа.

Необходимо, наконецъ, преодолѣть сопротивленіе вагоновъ; его мы полагаемъ приведеннымъ къ некоторой силѣ P_1 , дѣйствующей на шестъ, равномъ радиусу колесъ вагоновъ S , — ради простоты, будемъ считать всѣ эти радиусы одинаковыми. Такимъ образомъ, моментъ сопротивленія вагоновъ выразится черезъ $P_1 S$.

Строго говоря, это послѣднее сопротивленіе слѣдовало бы подсчитывать для каждаго вагона отдельно, но, имѣя въ виду разрѣшенный поставленный вопросъ ошмартно, мы предположимъ это сопротивленіе выраженнымъ такъ, какъ это указано выше.

Такимъ образомъ, моментъ L_w всѣхъ со-

противлений выражается суммой

$$L_w = mQ + \mu Qz + P_1 g,$$

и условие невозможности качения выразится неравенством

$$M < L_w, \dots \dots \dots (\alpha)$$

показывающим, что движущий момент в эвольвенте не может преодолеть суммы моментов всех сопротивлений. Неравенство (α) в раскрытой форме представляется так:

$$M < mQ + \mu Qz + P_1 g. \dots \dots \dots (12)$$

Такое условие, при соблюдении которого колеса паровоза не смогут катиться по рельсам. Но если они не смогут катиться, то могут скользить по рельсам, буксовать, при этом паровоз будет или оставаться на месте, или если весь поезд был до того недвижим, или двигаться равномерно, будучи подталкиваемым сзади вагонами, движущимися по инерции, если поезд был в движении. Условием скольжения колес является условие того, чтобы ведущая пара M могла преодолеть пару сопротивлений скольжения колес по рельсам и шин по в подшпикниках, поэтому оно и будет иметь вид:

$$M > Q\mu z + fQR. \dots \dots \dots (13)$$

Соединяя неравенства (12) и (13) в одно, получаем условие буксования, т.-е. условие того, чтобы колеса паровоза не могли катиться по

рельсамъ, а лишь скользним по нимъ, вращаясь около своихъ осей:

$$Q\mu r + fQR < M < mQ + \mu Qr + P_1s. \dots \dots (14).$$

Соединяя крайніе члены, получимъ неравенство

$$Q\mu r + fQR < mQ + \mu Qr + P_1s,$$

откуда, по сокращеніи равныхъ членовъ, и получаемъ искомое условіе въ формѣ неравенства

$$f < \frac{mQ + P_1s}{R} \dots \dots \dots (15)$$

При этомъ условіи колеса паровоза будутъ скользить по рельсамъ, но самъ онъ двигаться не будетъ. Это явленіе можно часто наблюдать въ случаѣ дождливой погоды: паръ продолжаетъ вертѣть колеса, но коэффициентъ тренія f ихъ о рельсы оказывается удовлетворяющимъ условію (15), т.-е. слишкомъ малымъ, и колеса будутъ теперь вертѣться на одномъ мѣстѣ.

Хотя наше разсмотрѣніе было выполнено лишь въ общихъ чертахъ, суммарно, но изъ него слѣдуетъ, что когда отъ дождя, мороза, снѣга и другихъ причинъ понижаются коэффициенты тренія f , тогда поездъ (или трамвай) останавливается, но колеса его продолжаютъ вертѣться, оставаясь на одномъ мѣстѣ, и никакое увеличеніе внутреннихъ силъ и момента ихъ не дастъ движенія впередъ. Въ этихъ слу-

тая же остается лишь одно средство сдвинуть паровозъ съ мѣста или заставить его двигаться съ желаемымъ ускореніемъ, это — увеличить понизившійся до такихъ нежелательныхъ размѣровъ коэффициентъ тренія f , что и достигается посыпкой рельсовъ пескомъ.

Въ заключеніе настоящаго параграфа разсмотримъ вкратцѣ случай движенія поезда по наклонной плоскости, уголъ коей съ горизонтомъ обозначимъ черезъ i . Вѣсъ вагоновъ пусть равенъ W , такъ что вѣсъ всего поезда, съ паровозомъ, будетъ равенъ $(Q + W)$. Пусть поездъ взбирается по рельсамъ вверхъ. Сила тяжести въ-са его, параллельная плоскости и сопротивляющаяся этому движенію его, равна $(Q + W) \sin i$. Моментъ сопротивленія, даваемый ею, равенъ $(Q + W) \sin i \cdot \varrho$, послѣ чего ур-іе (12), дополненное на этотъ добавочный моментъ, будетъ писаться такъ:

$$Q\mu r + fQR < M < mQ + \mu Qr + P_1\varrho + (Q + W)\varrho \sin i,$$

откуда и получаемъ условіе невозможности качения колесъ, буксованія и сползанія поезда внизъ:

$$f < \frac{mQ + \varrho[P_1 + (Q + W)\sin i]}{QR}$$

Легко сообразить, что условіе предѣльнаго уклона дается уравненіемъ: $(Q + W)\varrho \sin i = fQR - mQ - P_1\varrho$, откуда и получаемъ значеніе угла i_0 предѣльнаго уклона:

$$\sin i_0 = \frac{fQR - mQ - P_1\varrho}{(Q + W)\varrho}.$$

Часть третья.

Устойчивость машины во время ея хода.

§ 1. Общія соображенія.

Всякая машина, будетъ ли это двигатель или орудіе, непременно должна имѣть неподвижныя части, назначеніемъ которыхъ является воспріятіе на себя, а затѣмъ уравновѣшеніе своимъ сопротивленіемъ, всѣхъ тѣхъ лишнихъ, нежела- тельныхъ или силъ, которыя, проявляясь при ра- ботѣ машины одновременно съ желательными, са- ми по себѣ въ ней не уравновѣшиваются. Не оста- навливаясь здѣсь на разъясненіи этого, почти се- виднаго положенія, соприкасающагося съ некото- рыми интересными вопросами механики, мы при- нимаемъ его за основной фактъ, но при этомъ должны оговориться, что неподвижность эта должна пониматься лишь относительно, — все упомянутыя части должны быть неподвижны не въ абсолютномъ пространствѣ, а только по отношенію къ движущимся частямъ нашей ма- шины. Такимъ образомъ, хотя кривошипный ме- ханизмъ паровоза и рама его перемѣщаются вмѣстѣ со всѣмъ паровозомъ поступательно по одному и тому же направленію, но рама паро- воза по отношенію къ кривошипному механиз- му его является неподвижной, совершенно такъ же, какъ станокъ и фундаментъ паровой ма-

шины являются неподвижными по отношению ко вся кривошипному механизму, — характеръ отношения между этими двумя факторами машины является въ обоихъ случаяхъ однимъ и тѣмъ же, вполне подходящю для данное машинное опредѣленіе.

Эта неподвижность должна быть обезпечиваема самымъ тщательнымъ образомъ и на практикѣ выполняется почти всегда по одному и тому же шаблону, помощью пассивныхъ силъ, проявляющихъ свое дѣйствіе лишь въ нужный моментъ, — силъ тренія. Съ этой цѣлью части машины, долженствующія оставаться относительно неподвижными, связываются болтами или какъ-нибудь иначе съ нѣкоторымъ массивнымъ тѣломъ, — фундаментомъ, — стараясь, при этомъ, на поверхности соприкосновенія этихъ частей съ фундаментомъ вызвать наибольшія возможные въ данныхъ условіяхъ силы тренія; эти послѣднія, такимъ образомъ, и принимаютъ на себя сопротивленіе всякому перемѣщенію машины относительно фундамента. Такимъ образомъ, всѣ нежелательныя силы будутъ восприниматься теперь системой [станина — фундаментъ], и необходимая неподвижность будетъ, следовательно, осуществлена постольку, поскольку фундаментъ будетъ способенъ, безъ вреда для

своей цѣлости, воспринимать и заглушать дѣйствіе упомянутыхъ лишнихъ силъ.

Эта роль фундамента является на практикѣ особенно затруднительной и серьезной тогда, когда эти подвѣсающія уравновѣженію силы оказываются перемѣнными какъ по величинѣ своей, такъ и по направленію. Если онѣ дѣйствуютъ периодически, то воздѣйствіе ихъ на систему (станина — фундаментъ) будетъ равносильно периодически повторяющимся ударамъ, толчкамъ, благодаря силамъ тренія, быть переданными на фундаментъ. Периодичность ударовъ повлечетъ за собою колебаніе, дрожжаніе всей системы, и все это, въ концѣ концовъ, можетъ кончиться разрушеніемъ какъ частей машины, такъ и фундамента. Въ виду этого къ обезпеченію цѣлости машины и фундамента должны быть приняты все мѣры; особенное же вниманіе должно быть обращено на изысканіе способовъ противодѣйствія периодически дѣйствующимъ силамъ, и въ настоящей главѣ мы и рассмотримъ нѣкоторые изъ этихъ способовъ, наипаче рѣшенія представляющіеся здѣсь задачь, по необходимости, лишь общими чертами. Прежде всего присмотримся ближе къ силамъ, проявляющимъ свое дѣйствіе въ нашихъ машинахъ.

Наши стационарные машины-двигатели

почти всегда передают работу пара (или газа) на главный валъ, на которомъ сидятъ разнгины вращающіяся части, какъ-то: маховикъ, шкивы и т. п. Пока вся эта система остается неподвижной, на подшипники вала передается давленіе, равное вѣсу всей этой системы, и только. Но какъ только начнется вращеніе, то къ этому давленію и къ давленію отъ полезныхъ окрестныхъ усилий присоеди- нятся еще давленія, обусловливаемыя силами инерціи вращающихся частей, достигающія иногда, какъ это мы покажемъ ниже, громадныхъ величинъ, а самое главное, периодически, за каждый оборотъ вала, мѣняющія свое направление. Получится, очевидно, рядъ периодически повторяющихся ударовъ со всеми ихъ вредными послѣдствіями.

Аналитическая механика даетъ намъ указаніе на то, какъ можно избѣжать этихъ ударовъ и даже всякаго вообще дополнительнаго давленія на опоры вала, а именно, тамъ указывается, что, въ случаѣ отсутствія вѣшнихъ силъ, т.-е. при равнолѣтномъ вращеніи системы, это дополнительное давленіе отъ силъ инерціи обращается въ нуль, если ось вращенія тела будетъ совпадать съ одной изъ главныхъ осей центральнаго эллипсоида инерціи этого тела, т.-е. если эта ось

есть такъ называемая естественная ось вращения.

Насаживаемыя на валъ вращающіяся части нашихъ машинъ выполняются обыкновенно въ видѣ тѣла вращения, такъ что ось вращения каждаго такого тѣла, являясь осью симметріи его, въ случаѣ однородности тѣла проходитъ черезъ центръ тяжести его и является одной изъ главныхъ осей центральнаго эллипсоида инерціи этого тѣла. Следовательно, посадивъ такое тѣло на валъ такъ, чтобы ось вращения тѣла совпала съ осью вала, и начавъ вращать валъ, мы получили вращеніе тѣла вокругъ главной оси инерціи его. Какъ было уже указано выше, такое вращеніе, каковъ бы велико оно ни было, никакихъ дополнительныхъ давлений отъ силъ инерціи на подшипники не дастъ.

Не то, однако, будетъ, если центръ тяжести тѣла, насаживаемаго на валъ, не приходится на ось вращения его, это почти всегда имѣетъ мѣсто на практикѣ, въ виду неоднородности строенія тѣла и неизбежныхъ несовершенствъ и изъяновъ при его изготовленіи. Въ этомъ случаѣ геометрическая ось вращения тѣла уже не будетъ служить главной осью инерціи, и, при посадкѣ тѣла на валъ, когда оси вала и тѣла обыкновенно приводятся въ

совпадение, тело окажется сидящим на валу эксцентрично, — центр тяжести его не будет лежать на перпендикулярной оси вращения, а в то же время эта последняя не будет теперь служить главной осью инерции тела, вследствие чего тело при вращении станет оказывать на вал и на подшипники дополнительные давления от сил инерции, достигающих, при более или менее значительных числах оборотов, весьма больших значений. Для лучшей иллюстрации сказанного, подождем на одном простом примере, какие дополнительные давления от сил инерции развиваются, например, в случаях такого быстрого вращения, какое имеет место в паровых турбинах.

Пусть весь вращающийся диск турбины) есть P кг, угловая скорость ω , а расстояние центра тяжести тела от оси вращения вала $= r$. Предполагая всю массу тела сосредоточенной в центр тяжести его, найдем, что центробежная сила инерции этого последнего, — назовем ее через F , — выразится так:

$$F = \frac{P}{g} \omega^2 r.$$

Пусть n , — число оборотов вала, — равно 20 000 в минуту. Тогда

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{1}{\text{сек}} = \frac{20'000 \pi}{30} \text{ сек}^{-1} \approx 2100 \text{ сек}^{-1}.$$

Выражая g в $\text{см}/\text{сек}^2$, а r — в см , и замечая, что $g = 981 \text{ см}/\text{сек}^2$, имеем, что

$$F = P_{\text{кг}} \times \frac{2100^2}{981} r_{\text{см}} \approx (4500 P_{\text{кг}} r_{\text{см}}) \text{ кг}.$$

Итакъ, при такомъ числѣ оборотовъ центробѣжная сила инерціи груза въ $(4500 \times z_{\text{см}})$ разъ больше веса груза P . Пусть $P = 10 \text{ кг} = 24 \text{ фунт} = 0,6 \text{ пуда}$, а $z = 1 \text{ мм} = 0,1 \text{ см}$. Тогда

$F = (10 \times 4500 \times 0,1) \text{ кг} = 4500 \text{ кг} = 4,5 \text{ тн} = 270 \text{ пуд.}$, при вѣсѣ P груза всего въ 10 кг, т.-е. въ 24 фунта и эксцентриситетъ $z = 1$ миллиметру.

Если мы примемъ во вниманіе еще то обстоятельство, что направленіе этой силы F относительно станины и фундамента будетъ вращаться 20 000 разъ въ минуту, то объ эффектѣ ударнаго дѣйствія такой силы на всю систему говорить не приходится, — онъ понятенъ самъ собою.

Примѣровъ подобнаго рода можно подобрать очень много. Такъ, напримѣръ, все вагонные скакы, т.-е. оси съ насаженными на нихъ на каждой изъ нихъ вагонными колесами, предназначенныя къ обслуживанію составовъ скорыхъ поездовъ, гдѣ, следовательно, число оборотовъ въ минуту достигаетъ 300-400, всегда должны быть центрированы возможно тщательнѣе. Вычисленія, подобныя приведеннымъ выше, показываютъ, что при такихъ числахъ оборотовъ центробѣжная сила инерціи можетъ достигать нѣсколькихъ (3-5) тоннъ. Эффектъ дѣйствія этой силы нетрудно предвидѣть: при каждомъ оборотѣ колеса эта сила будетъ

прижимать колесо къ рельсу въ тотъ моментъ, когда центръ тяжести придется внизу, а черезъ полъ-оборота, когда ц. т. окажется вверху, она будетъ стремиться это колесо отъ рельса оторвать. Значитъ, периодически, со скоростью нѣсколькихъ сотъ разъ въ минуту, будетъ происходить то приложеніе силы къ рельсу, то освобожденіе рельса отъ нея. Въ результатъ этого, рельсы будутъ испытывать рядъ быстро сменяющихся одинъ за другимъ ударовъ, весьма сильныхъ и какъ бы производимыхъ быстро работающимъ тяжелымъ молотомъ: легко сообразить, сколь разрушительнымъ для рельсовъ и полотна является быстрое движеніе подвижного состава, снабженнаго такими вагонными скатами. Вотъ почему требуется и всегда выполняется тщательная центровка этихъ и иныхъ подобныхъ деталей.

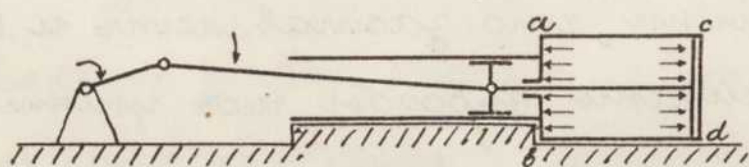
Мы не будемъ разсматривать здѣсь способовъ выполненія такой центровки, — это дело специальныхъ курсовъ; укажемъ лишь, что она, или, какъ увидимъ, своей главной цѣлью приведеніе центра тяжести на ось вращенія и совмѣщеніе съ этой послѣдней одной изъ главныхъ осей инерціи, выполняется, вообще говоря, путемъ снятія нѣкоторыхъ массъ съ однихъ нѣкоторыхъ деталей и прибавленія ихъ въ другихъ; иногда удается ограничиться лишь одной изъ этихъ операций. Нисже мы дадимъ другое рѣшеніе этой задачи, гдѣ увидимъ, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ, и, при томъ, наиболее опасныхъ,

при больших малых оборотах, — возможно обойтись и без математически точной центровки; помощью очень простого способа в этих случаях возможно достичь вполне достаточной плавности хода и почти полного отсутствия ударных эффектов, при несомненной в то же время наличности эксцентриситета.

Таким образом, можно сказать, что с силами инерции вращающихся тел так или иначе справиться можно, в том смысле, что систему, в которой они проявляются, можно обезопасить тем или другим способом против вредного их действия и, значит, в дальнейшем с ними уже не считаться. Посмотрим теперь, как обстоять дело с такими машинами, где имеются качающиеся части, как это имеет место, например, в кривошипных механизмах. Подробно мы разберем этот вопрос в одном из дальнейших параграфов, теперь же коснемся его лишь вскользь, в общих чертах. Разберем сущность действия сил в этих механизмах.

Пусть имеется кривошипный механизм обыкновенной паровой машины (фиг. 13). Возьмем его в положении, близком к мертвому, как это изображено на чертеже: поршень, двигаясь вправо, почти дошел до своего правого мертвого положения. Пар действует на поршень с силой pF , где p есть давление на единицу площади поршня, а F — площадь

поршня, направленной, какъ показано на чертежѣ, слева направо ($\rightarrow$); съ такой же силой pF , но лишь противоположно направленной, паръ давитъ на переднюю крышку ab цилиндра, справа налево ($\leftarrow$), вслѣдствіе чего крышка ab , а за ней и станина, пошатся съ силой pF , такъ же влево, по стрелкѣ $\leftarrow$. Но такъ какъ для сообщенія движенія кривошипу надо преодолѣть его силы инерціи, то часть давленія $\rightarrow$ на поршень пойдѣтъ



Фиг. 13.

на уравновѣшеніе этихъ силъ инерціи, въ результатѣ чего давленіе на поршень въ мертвомъ его положеніи окажется уже не pF , а меньше, положимъ, p_1F , гдѣ $p_1 < p$. Отсюда слѣдуетъ, что въ моментъ перехода черезъ мертвое положеніе передняя крышка, а вслѣдствіе съ ней и вся станина, окажутся подъ дѣйствіемъ силы $(p-p_1)F$, и, значитъ, машина въ этотъ моментъ испытаетъ толчокъ по направленію воздѣйствія на переднюю крышку, т.-е. справа налево $\leftarrow$.

Легко убѣдиться, что черезъ полъ-оборота, въ моментъ перехода черезъ лѣвое мертвое положеніе, задняя крышка cd , а вслѣдствіе съ ней опять вся станина, испытаютъ толчокъ съ силой $(p-p_1)F$, направленный на заднюю крышку, $\rightarrow$. Отсюда выходитъ, что при непрерывной работѣ машины станина будетъ испытывать

ударъ при каждомъ переходѣ механизма черезъ мертвыя положенія, попеременно то въ одну сторону, то въ другую. Получается полная аналогія тому, что мы имѣемъ выше, при общемъ разсмотрѣніи вращательнаго движенія массъ. Ближайшіе изслѣдованія показываютъ, что толчки эти въ быстроходныхъ машинахъ, гдѣ силы инерціи шатуннаго механизма достигаютъ большой величины, оказываются весьма сильными, что заставляетъ и въ этихъ случаяхъ изыскивать способы ихъ уничтоженія или, по крайней мѣрѣ, сведенія до минимума.

Появленіе толчковъ въ кривошипномъ механизмѣ весьма наглядно объясняется также при помощи такъ называемаго закона сохранения движенія центра тяжести, о которомъ мы имѣемъ случай говорить въ статьѣ о треніи каченій. Этотъ законъ гласитъ, что, если въ свободной системѣ матеріальныхъ точекъ дѣйствуютъ одни лишь внутреннія силы, то ускореніе центра тяжести такой системы всегда равно нулю, такъ что центръ тяжести или будетъ оставаться въ покоѣ, или въ начальномъ моментѣ дѣйствія внутреннихъ силъ система была въ покоѣ, или же будетъ двигаться равномерно прямолинейно, если системѣ была сообщена какая-либо начальная скорость. Этотъ законъ легко объясняется отсюда ружья

и откатъ пушки послѣ выстрѣла. Въ обыкновенной паровой машинѣ можно наблюдать явленія, подобныя откату пушки. Дѣйствительно, силой, вызывающей движеніе поршня, является давленіе пара, но эту силу можно считать силой внутренней; слѣдовательно, паровая машина работаетъ подѣ воздействиемъ внутреннихъ силъ.

Далѣе, система паровой машины представляетъ собою соетаніе двухъ тѣлъ: одного, не мѣняющаго своей конфигураціи при движеніи поршня, — станины со всеми малыми прикрѣпленными къ ней частями, — и другаго, составнаго, свою конфигурацію мѣняющаго, — или является кривошипный механизмъ. Система двухъ сложныхъ тѣлъ, какъ мы видѣли, находится подѣ дѣйствіемъ внутреннихъ силъ; значитъ, центръ тяжести ея долженъ или оставаться въ покоѣ или двигаться прямолинейно и равномерно. Въ данномъ случаѣ онъ, очевидно, долженъ бы все время оставаться въ покоѣ. Но если центръ тяжести станины все время остается въ покоѣ, то центръ тяжести кривошипнаго механизма, при движеніи поршня и измѣненіи вида соетане ния (шатунъ — кривошипъ), неизменно долженъ перемѣщаться, ибо конфигурація, расположеніе его частей, при этомъ движеніи непрерывно мѣняется, при чемъ нетрудно убедиться, что это перемѣщеніе центра тяжести

кривошипного механизма будетъ согласно съ движеніемъ поршня (съ направленіемъ его). Въ то же время общій центръ тяжести долженъ остаться въ покое; отсюда слѣдуетъ, что центръ тяжести перваго тѣла, — станины и проч. — также долженъ соответственно перемѣститься въ сторону, обратную движенію поршня, на столько, чтобы общій центръ тяжести остался на мѣстѣ.

Такимъ образомъ, при движеніи кривошипнаго механизма паровой машины центръ тяжести станины, а значитъ, вместе съ нимъ и вся машина (всѣ неподвижныя части ея) будутъ стремиться перемѣститься при каждомъ ходѣ поршня въ сторону, обратную движенію поршня. Поэтому, подвѣсивъ нашу машину такъ, чтобы она могла свободно перемѣщаться по направленію движенія поршня, и пустьъ ее въ ходъ, мы увидимъ бы, что при каждомъ ходѣ поршня она совершаетъ перемѣщеніе, казаніе, въ сторону, противоположную ходу поршня, такъ что такая подвѣшенная машина стала бы качаться подобно маятнику, то въ одну сторону, то въ другую, при чемъ періодъ качаній ея строго совпадалъ бы съ періодомъ хода поршня. Такое же качательное движеніе мы получили бы, поставивъ машину на платформѣ на колесахъ, могущую двигаться въ

въ направленіи движенія поршня; въ это время сдвигать трансформаторъ, влѣсть со всей машиной, прокатывалась бы на известное разстояніе то въ одну сторону, то въ другую.

Ставя машину на фундаментъ и закрывая ее тамъ, мы, конечно, имеемъ ее возможности перемѣщаться, но стремленіе къ перемѣщенію въ сторону, обратную направленію движенія поршня, она, понятно, сохраняетъ и здѣсь; не имѣя, однако, возможности осуществить его, она испытываетъ при каждомъ ходѣ поршня толчокъ, направленный противоположно этому ходу. Этотъ толчокъ будетъ переданъ, конечно, и фундаменту и будетъ вызывать во всей системѣ (машина - фундаментъ) повышеніе напряженій, периодически, при томъ, имѣющагося и, следовательно, крайне нежелаемое. Толчки эти могутъ достигать весьма большой силы, особенно въ быстроходныхъ машинахъ; они могутъ измѣняться иногда цѣлыми формами, что, конечно, заставляетъ въ подобныхъ случаяхъ серьезно отнестись къ вопросу о ихъ погашеніи, и о нѣкоторыхъ способахъ къ этому мы поговоримъ въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ.

Этими общими соображеніями относительно значенія силы инерціи въ вопросѣ объ устойчивости системы мы пока и ограничимся;

другихъ видовъ силъ инерціи, съ которыми приходится имѣть дѣло въ машиностроеніи, въ частности курсъ касаться не будетъ и въ отдельныхъ параграфахъ подробнѣе разберемъ вопросъ о обезпеченіи системъ отъ вреднаго дѣйствія упомянутыхъ выше силъ инерціи, рассмотримъ его сначала для случая эксцентричнаго вращенія массъ, а затѣмъ для случая перемѣтно-возвратнаго движенія ихъ.

§ 2. Устойчивость системъ, быстро вращающихся вокругъ неподвижной оси. Гибкіе валы. Критическая угловая скорость.

Общія соображенія, высказанныя нами по поводу вращенія массъ, посаженныхъ на валъ, эксцентрично, показали намъ, какія огромныя давленія отъ силъ инерціи возникаютъ въ случаяхъ весьма быстраго вращенія такихъ массъ: оказалось, что существованіе даже малѣйшаго эксцентриситета является въ такихъ случаяхъ весьма нежелательнымъ, что, понятно, и привело къ заключенію о необходимости самой тщательной центрировки. На практикѣ, однако, оказывается, что математически-точная центрировка, въ сущности, недостижима уже по однимъ техническимъ условіямъ посадки каждой такой

вращающаяся части на валу. На самом деле, допустимъ, что мы, принявъ во вниманіе все обстоятельства дѣла, центрировали какой-либо шкивъ вполне точно, — приведемъ центръ тяжести его на геометрическую ось, добившись, кроме того, совпаденія ея съ одной изъ свободныхъ осей вращенія. Усаживая такой шкивъ на валъ, мы, по необходимости, должны закрепить его тамъ помощью шпонки, и воѣ этотъ-то процессъ заковки шпонки и является обыкновенно разрушающимъ плоды всякаго потраченного на выверку шкива трудовъ, — сильные удары молотка легко могутъ перекосить шкивъ и сместить ось его съ оси вала. Въ результатъ — неизбежное появленіе эксцентриситета со всеми его вредными послѣдствіями.

Самая центровка производится путемъ добавленія или отнятія нѣкоторыхъ массъ въ определенныхъ мѣстахъ вращающагося тѣла. Это иногда оказывается также невозможнымъ по самымъ условіямъ дѣла. Такъ, напримеръ, въ циркулярныхъ пилахъ никакихъ прибавокъ или приливокъ дѣлать нельзя; центровку можно выполнить здѣсь только путемъ высверливанія отверстій въ должныхъ мѣстахъ. Но иногда случается, что это оказывается также невозможнымъ, — можетъ случиться, что въ томъ мѣстѣ, гдѣ должна быть высверлена дыра, этого не позволяеѣ сдѣлать закалка, и т.д.

Мы уже не упоминаем о техъ, всегда возможныхъ, случаяхъ частичнаго поврежденія вращающагося тѣла, которое неизбежно влечетъ за собою немедленное появленіе эксцентриситета, — поломка зуба циркулярной пилы, лопатки паровой турбины и т. п., является факторомъ, угрожающимъ уже самому существованію машины.

Такимъ образомъ, центрировка системы зачастую не можетъ дать ни требуемой точности, ни желаемыхъ результатовъ. Приходится искать другихъ способовъ обезпеченія правильности и безопасности работы машины, и одинъ изъ нихъ мы теперь и рассмотримъ. Оказывается, что для достиженія полной устойчивости весьма быстро вращающейся системы, обладающей извѣстными эксцентриситетомъ, ее необходимо сажать на гибкій и, по возможности, тонкій валъ, — жесткіе, негибкіе валы въ такихъ случаяхъ недопустимы.

Валы, о которыхъ идетъ рѣчь, обязаны передавать работу, а, кроме того, имъ приходится выдерживать рядъ различныхъгибающихъ моментовъ, почему въ обыкновенныхъ условияхъ мы и рассчитываемъ такіе валы не только на крученіе, но и на гибаніе.

Если мы рассчитаемъ валъ на одно лишь крученіе, то увидимъ, что, даже при допущеніи

малых напряжений на кручение, валъ выходитъ, вообще говоря, очень тонкимъ, особенно въ случаяхъ большого числа оборотовъ, т.-е. при большомъ ω . Но это совершенно меняется, если мы, вдобавокъ, поджимаемъ его еще на изгибъ, т.-е. если мы поставимъ себя задачей подыскать такіе размеры его, чтобы онъ, передавая крутящій моментъ, въ то же время не могъ сгибаться сколько-нибудь заметно. Въ такихъ случаяхъ валъ выходитъ очень солиднымъ и тяжелымъ, и стробы прогиба его спускаются уже до какихъ-нибудь десятыхъ долей миллиметра. О прогибахъ такихъ валовъ не можетъ быть и речи, и единственнымъ средствомъ для достиженія спокойнаго хода машины является строгая центрировка сажаемыхъ на валъ массъ. Но если этой центрировки выполнить нельзя, если центръ тяжести вращающейся системы не совпадаетъ съ осью, а скорость вращения велика, то наиболее действительнымъ средствомъ предупрежденія роковыхъ послѣдствій, которыя влекутъ за собою существованіе эксцентриситета, будетъ предоставленіе валу возможности свободно прогибаться, для чего мы и рассчитываемъ его только на кручение.

Есть еще другое, также довольно действительное средство обезопасенія системы, — мы оставляемъ валъ непрогигающимся, т.-е.

расчитываемъ его на крученіе и на изгибъ, но за-
държаемъ подвижными подшипниками, давая
имъ возможность качаться; качающимся выпол-
няется обыкновенно только одинъ подшипникъ, дру-
гой же остается неподвижнымъ. Иногда оба
указанные приема совмѣщаются: валъ гнѣбѣся
гнѣбкимъ, а подшипники качающимися. Въ нашемъ
курсѣ мы разберемъ случай гнѣбкого вала и
неподвижныхъ подшипниковъ, давно разобранный
Фёррельемъ, второго же приема касаться не
будемъ, чтобы не затривать вопроса чисто ана-
литическими выкладками.

Итакъ, мы подвергнемъ разсмотрѣнію слу-
чай быстро вращающейся системы, сидящей эксцен-
трично на очень гнѣбкомъ валу, — такіе случаи мы
имѣемъ въ паровыхъ турбинахъ Лавала, имѣющихъ
огромныя числа оборотовъ, отъ 15'000 до 30'000 въ
минуту. Пусть это вращающееся тѣло и пред-
ставляетъ собою дискъ такой турбины. Это предпо-
ложеніе мы делаемъ исключительно ради опреде-
ленности схематическаго чертежа, — форма вра-
щающагося тѣла, въ сущности, значенія здѣсь
не имѣетъ.

Пусть эта система вращается равномер-
но, такъ что въ каждый данный моментъ су-
ществуетъ равенство между моментами враща-
ющимъ и моментами сопротивленія. Возьмемъ
нашу систему въ какой-нибудь моментъ ея

вращения и посмотримъ, что здѣсь происходитъ. Напомнимъ, что валъ предполагается гибкимъ, а подшипники неподвижными. Прежде всего обратимъ вниманіе на валъ.

По условію, валъ, на которомъ сидитъ и вращается съ которымъ вращается дискъ турбины, есть

тѣло гибкое, — предполагается, что мы рассчитали его только

на кручение,

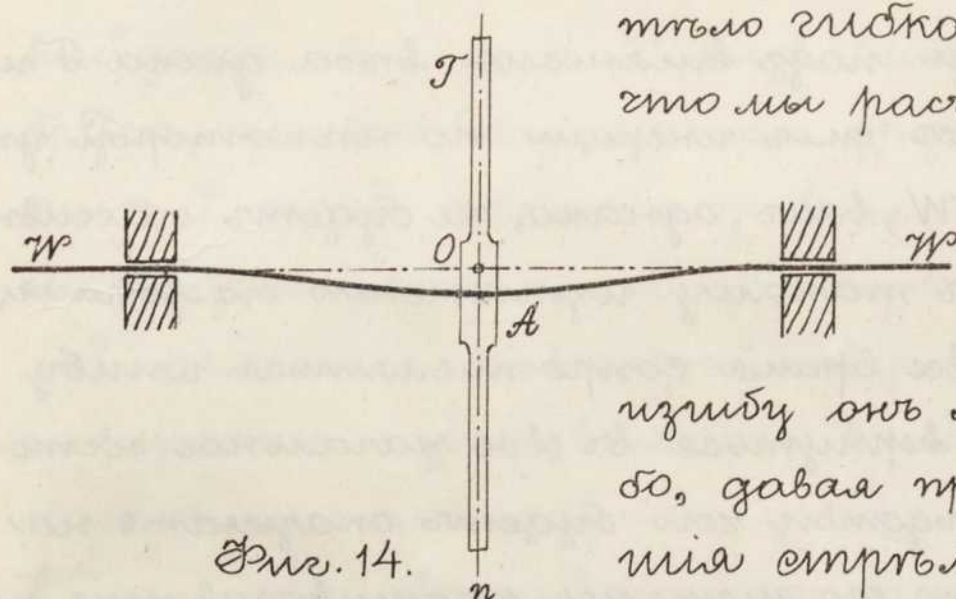
въ виду чего со-

противляется

изгибу онъ можетъ очень сла-

бо, давая при этомъ боль-

шія стрѣлы прогиба.

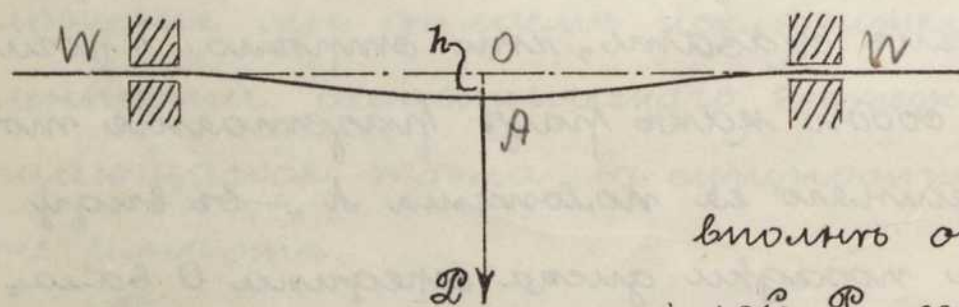


Фиг. 14.

Пусть дискъ T турбины (фиг. 14) сидитъ на такомъ валу WW и, во время своего вращенія, заставляетъ его, изогнувшись, принять стационарную форму WAW . Предположивъ, ради простоты, что место посадки диска приходится на середину разстоянія между опорами, въ которой точкѣ O , можемъ сказать, что стрѣла прогиба представить собою какъ разъ разстояніе точки O до теперешняго ея положенія A , — въ виду симметричной посадки диска середина O вала, при возрастающемъ прогибаніи его подъ дѣйствіемъ силы, перпендикулярной къ прямой WOW , будетъ перемѣщаться по перпендикуляру On , возставленному въ точкѣ O прямой WOW , и каса-

тельная къ упругой линіи WAW въ точку пересѣ-
ченія ея съ перпендикуляромъ On будетъ всегда
параллельна оси WOW . Итакъ, стрѣла прогиба
есть въ данномъ случаѣ разстояніе между на-
чальнымъ положеніемъ середины вала, O , и те-
перешнимъ, A .

Изогнувшись подъ вліаніемъ вѣса диска T и
центробѣжныхъ силъ инерціи по нѣкоторой упру-
гой линіи WAW , валъ, однако, не будетъ пассивно
относиться къ такому измѣненію его формы;
— онъ будетъ все время сопротивляться изгибу
и стремиться вернуться въ свое начальное состо-
яніе WOW , вслѣдствіе чего будетъ оказывать на
нагружающую его систему противодавленіе въ
направленіи AO ; величину этого противодавле-
нія легко подсчитать, пользуясь данными тео-
ріи сопротивленія матеріаловъ, при чемъ мы раз-
суждаемъ такъ: для того, чтобы вызвать въ упру-
гомъ брускѣ при данныхъ условіяхъ изгибъ со стрѣ-
лою прогиба h ,



надо нагрузить
его нѣкоторой

вполнѣ определенной си-
лой P , при чемъ окажется

Фиг. 15.

са, что стрѣла прогиба

h будетъ прямо пропорціональна величинѣ того
груза:

$$P = kh,$$

при этом коэффициент пропорциональности, k , зависящий от материала бруса (вала) и размеров его, будет величиной, при данных условиях постоянной. Изогнувшись по некоторой определенной упругой линии, вал придет в состояние равновесия, а в таком случае выйдет, что сила P , вызвавшая такой изгиб бруса, уравновешивается другой силой, равной силе P , но ей прямопротивоположной, и нетрудно видеть, что этой уравновешивающей силой является равнодействующая всех сил упругости изогнувшегося вала. Отсюда вытекает, что равнодействующая сила упругости вала, уравновешивающая внешнюю нагрузку на него, т. е. сила реакции упругого вала, выражается произведением $k \times h$ и направлена прямопротивоположно этой нагрузке. Эта равнодействующая сила упругости и представляет собою ту силу, с которой вал, подвергавшийся изгибу, сопротивляется получившемуся изгиблению его формы.

Возвращаясь къ нашему валу, принавлену носить изгиба форму WAW (фиг. 15), при этом стрела прогиба есть $h = AO$ (фиг. 14, 15), заключаемъ, что равнодействующая сила упругости F , сопротивляющаяся изгибу вала и, следовательно, воздѣйствующая на дискъ T , выражается такъ:

$$F = k \times AO,$$

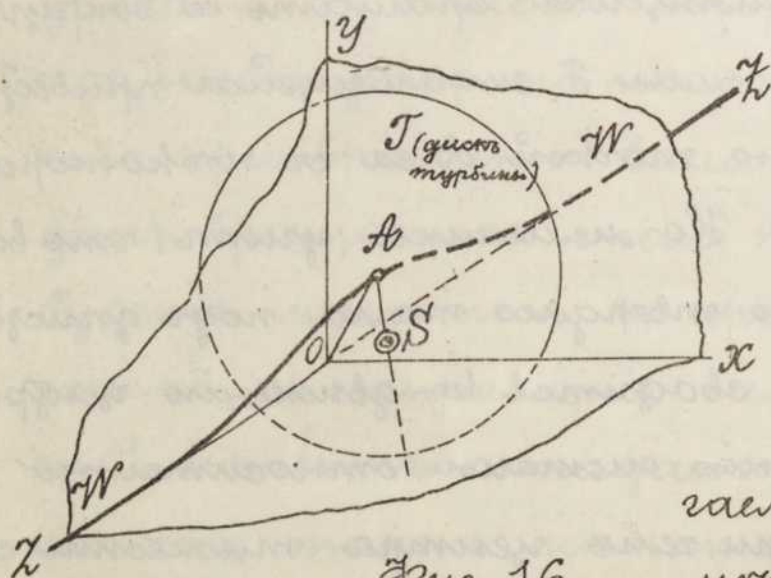
где коэффициент пропорциональности k представляет собою некоторую постоянную величину. Будем называть силу F силой реакции упругого вала. Направлена она будет от A к O и будет воздѣйствовать на систему диска T въ смыслѣ возвращенія вала въ начальное, несогнутое его положеніе WOW . Замѣтимъ, что при вращеніи вала, когда векторъ AO будетъ вращаться около точки O прямой WOW , будетъ мѣняться въ пространствѣ, вмѣстѣ съ этимъ, и направленіе силы F , въ каждый данный моментъ совпадающее съ направленіемъ AO ; можетъ также мѣняться во время этого вращенія и величина ея въ зависимости отъ величины нагрузки вала. Такимъ образомъ надо признать, что сила реакціи согнутого вала F , вообще говоря, переменна какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

На систему нашего диска дѣйствуютъ, съ одной стороны, некоторыя внѣшнія силы, дающія определенную пару L , а съ другой — сила тяжести диска, Q , приложенная въ центръ тяжести его, и силы воздѣйствія внѣшнихъ связей, — силы упругости согнутого вала, сводящіяся, какъ мы видѣли, къ одной силѣ $F = k \times AO$. Силой тяжести Q диска, по ея относительной малости, можно пренебречь и изъ внѣшнихъ силъ оставить, такимъ образомъ, одну эту силу реакціи

вала, F . Замѣтимъ, такимъ образомъ, реакцію связей этой силой упругости F и включивъ ее въ число силъ, воздѣйствующихъ на систему, можно будетъ разсматривать ее затѣмъ, какъ совершенно свободную и находящуюся подъ дѣйствіемъ нѣкоторой пары L , стремящейся вращать ее вокругъ точки A , и нѣкоторой силы F , стремящейся привести систему къ совпаденію точкой A ея съ нѣкоторой постоянной точкой O . Но механика учитъ, что всякое движеніе свободного твердаго тѣла подъ дѣйствіемъ силъ, паръ и т. д., сводится къ движенію центра тяжести и къ движенію системы относительно центра тяжести, при чемъ центръ тяжести свободного твердаго тѣла движется, какъ матеріальная точка, въ которой сосредоточена вся масса тѣла и на которую дѣйствуютъ равнодѣйствующая всѣхъ вѣнущихъ силъ, перенесенныхъ въ этотъ центръ тяжести; само же твердое тѣло, кромѣ поступательнаго движенія влѣсть со своимъ центромъ тяжести, еще вращается вокругъ него такъ, какъ будто бы центръ тяжести представлялъ собою неподвижную точку, и тѣло находилось подъ дѣйствіемъ пары, полученной при перенесеніи всѣхъ силъ въ центръ тяжести. Примѣнимъ эти положенія механики къ нашему случаю.

Мы имѣемъ дискъ T турбины, находящійся подъ воздѣйствіемъ нѣкоторой пары съ моментомъ L , стремящейся вращать его вокругъ оси

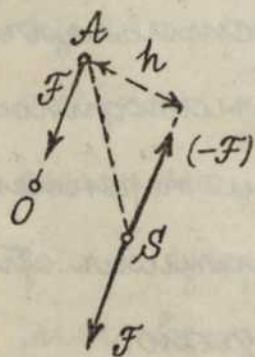
WAW некоторым определенным образом, и силы реакции упругого вала, $\vec{F}$, приложенной в точку A и действующей по направлению AO. Заметьте, что $\vec{F}$, проведенный через точку O плоскость, перпендикулярную прямой WAW, принимаем точку O за начало координат, ось WOW



Фиг. 16.

— за ось z -ось, а упомянутую плоскость — за координатную плоскость yox , при этом ось ox располагается произвольно, — например, горизонтально (фиг. 16).

При таком выборе и расположении координатной системы, точка A, — теперешнее положение точки O, — придется также в плоскости yox , и в этой же плоскости окажется лежащей и сила $\vec{F}$ реакции вала, направленная по прямой AO от A к O. Положим, далее, что центр тяжести диска T лежит в той же плоскости yox , в некоторой точке S, лежащей в той же прямой AO.



Фиг. 17.

Согласно требованиям теоремы, перенесем все силы в центр тяжести S. При этом окажется следующее:

Внешние силы (давление пара и проч.), дающая пару L, по перенесении их в центр тяжести S,

дадутъ опять ту же пару L , и только, ибо, по законамъ статики, пара можетъ быть переносима въ плоскости ея безъ всякаго измѣненія какъ величины ея момента, такъ и направленія вращенія; никакихъ новыхъ паръ или силъ при этомъ не получится.

Переносимъ теперь въ центръ тяжести S силу реакціи F , приложенную въ точку A и направленную по AO . При этомъ переносѣ мы получили силу F , приложенную въ точку S , и пару $(F, -F)$ съ моментомъ h (фиг. 17). Эту пару $(F, -F)$ слѣдовало бы зафигуровать прибавить къ существующей уже парѣ L , но въ данномъ случаѣ, въ виду крайней малости момента $(F \times h)$ ея, эту пару можно прямо отбросить, исключить ее изъ разсмотрѣнія. Что моментъ ея, — точнее говоря, момента h , — малъ, видно изъ того соображенія, что центрированіе системъ, предназначенныхъ къ весьма быстрому вращенію, выполняется всегда настолько точно, насколько это, вообще, возможно при нашихъ средствахъ; почему мы вправѣ предположить, что и въ разсматриваемомъ случаѣ центрировка выполнена весьма тщательно, и оставшійся эксцентриситетъ такъ малъ, что устраненіе его лежитъ уже внѣ предѣла точности нашихъ инструментовъ. Вполнѣ, поэтому, позволительно считать момента h упомянутой пары величиной весьма малой, что, въ свою очередь, ведетъ къ тому, что мо-

ментъ пары ($F, -F$) оказывается также весьма малымъ, представляющимъ, сравнительно съ моментомъ L въходящей пары, величину, которой можно смело пренебречь.

Такимъ образомъ, малъ дискъ можно считать находящимся подъ дѣйствіемъ одной лишь пары L , стремящейся вращать его въ определенномъ направлении, и силы F , равной ($k \cdot AO$), приложенной въ центръ тяжести S и направленной въ каждый данный моментъ параллельно AO , при чемъ въ центръ тяжести предполагается приложенной вся масса диска m .

Движеніе диска можно представить себѣ совершающимся такъ: подъ дѣйствіемъ пары L дискъ вращается вокругъ своего центра тяжести S , перемѣщаясь, въ свою очередь, подъ вліяніемъ силы F . Такимъ образомъ, движеніе диска определится вполне, если определится движеніе центра тяжести S . Выясненіемъ этого послѣдняго движенія мы теперь и займемся.

Такъ какъ сила F перемѣнна какъ по величинѣ, такъ и по направленію, то точка S подъ вѣдѣйствіемъ ея, несомненно, опишетъ некоторую криволинейную траекторію, видъ коей можно определить такъ:

Обозначимъ координаты центра тяжести въ выбранной нами системѣ координатъ черезъ ξ и η (фиг. 18); эти величины ξ и η будутъ, несомнен-

но, величинами переменными, ибо центр тяжести постоянно перемещается. Силы, действующие на β , сводятся к одной лишь силе F , параллельной AO . Разлагая ее по осям Ox и Oy , находим выражения для проекций ее, F_x и F_y :

$$F_x = F \cos(F, Ox) = F \cos \beta \sin \varphi = F \cos \varphi,$$

$$F_y = F \cos(F, Oy) = F \cos(90^\circ - \beta \sin \varphi) = F \cos(90^\circ - \varphi) = F \sin \varphi$$

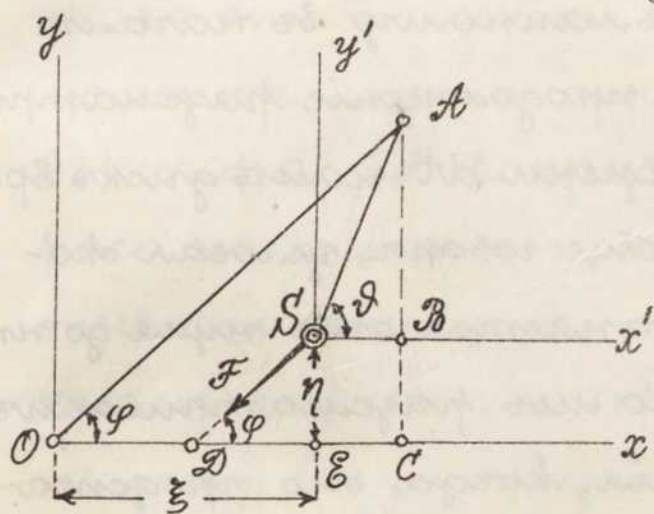
Замечая, что, по условию,

$$F = k \times AO, \dots \dots (1)$$

находим, что проекции F_x и F_y выразятся иначе так:

$$F_x = F \cos \varphi = k \cdot AO \cos \varphi = k \cdot OC = k x_A, \dots \dots (2)$$

$$F_y = F \sin \varphi = k \cdot AO \sin \varphi = k \cdot AC = k y_A, \dots \dots (3)$$



Фиг. 18.

где через x_A и y_A обозначены координаты OC и AC точки A . Уравнения (2) и (3) дают возможность написать общие уравнения движения точки S :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -F_x = -k x_A, \dots \dots (4)$$

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -F_y = -k y_A, \dots \dots (5)$$

где через m обозначена вся масса диска, сосредоточенная в центре тяжести его β . Знак минус мы поставили для того, чтобы отнестись к стремлению силы F сократить расстояние AO , т.е. уменьшить координаты как точки A , так и точки O (по абсолютной величине).

Въ виду того, что въ правыхъ частяхъ полученныхъ уравнений стоятъ переменныя, отличныя отъ переменныхъ, стоящихъ въ лѣвыхъ частяхъ, интеграція уравнений (4) и (5) въ томъ видѣ, какъ они написаны, нельзя; предварительно необходимо установить связь между координатами (ξ, η) точки S и координатами (x_A, y_A) точки A , что мы теперь и займемся.

По предположенію, сдѣланному въ началѣ нашихъ разсужденій, въ продолженіе разсматриваемого промежутка времени dt нашъ дискъ вращается равномерно; вообще говоря, угловая скорость вращенія диска мѣняется отъ нуля до нѣкотораго максимума, но мы разсматриваемъ тотъ участокъ движенія, когда оно представляется установившимся и протекаетъ равномерно; за время всего движенія диска такихъ промежутковъ можетъ быть нѣсколько, — они соответствуютъ моментамъ наступленія равенства между работами силъ движущихъ и силъ сопротивленія.

Далѣе, нашъ дискъ можно разсматривать вращающимся около центра S . Но каждое плоское движеніе системы, какъ это имѣетъ мѣсто и въ данномъ случаѣ, всегда можно охарактеризовать движеніемъ какого-либо прямолинейнаго отрезка, произвольно въ систему выдѣленнаго, но жестко и неизмѣнимо съ ней связаннаго.

Въ данномъ случаѣ за такой отръзокъ мож-
но взять отръзокъ SA , представляющій собою раздѣ-
леніе между двумя постоянными точками на-
шей системы, а именно, между центромъ тяже-
сти S ея и точкой A скръпленія ея съ осью WAW ,
и движеніе системы вокругъ S , т.-е. вращеніе ея
вокругъ центра тяжести, можно охарактеризо-
вать вращеніемъ вектора SA около точки S ,
такъ что положеніе системы въ каждый данный
моментъ можно опредѣлить угломъ поворота
вектора SA вокругъ центра S отъ некото-
раго начальнаго положенія его. Условимся отчи-
тывать эти углы отъ направленія Ox (горизон-
тальнаго) или, конкретнѣе, отъ оси Sx' , парал-
лельной Ox , и предположимъ, что этотъ уголъ
равенъ въ данный моментъ ϑ . Принимая те-
перь во вниманіе, что за взятый промежутокъ
времени вращеніе совершается равномерно, съ
постоянной угловой скоростью ω , можемъ ска-
зать, что

$$\vartheta = \omega t, \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ t есть время, протекшее съ момента на-
ступленія равномернаго вращенія, въ который
векторъ SA , предположимъ, совпадалъ съ осью Sx' .

Установивъ соотношеніе (6), легко выяснитъ
связь между координатами (ξ, η) точки S и
 (x_A, y_A) точки A . Дѣйствительно, изъ прямоугло-
наго при B треугольника ASB , имѣемъ, что

$$AB = SA \sin \vartheta = SA \sin \omega t,$$

$$SB = SA \cos \vartheta = SA \cos \omega t.$$

Обозначая эксцентриситет SA системы через e , — для данного диска, насаженного на свою ось вращения, это будет величина постоянная, — можем далее написать:

$$AB = e \sin \omega t,$$

$$SB = e \cos \omega t.$$

Замечая теперь, что координаты x_A и y_A точки A могут быть выражены так:

$$x_A = OC = O\xi + \xi C = O\xi + SB = \xi + e \cos \omega t,$$

$$y_A = AC = AB + BC = e \sin \omega t + \eta,$$

можем дать уравнения (4) и (5) виду:

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -kx_A = -k(\xi + e \cos \omega t), \dots \dots \dots (7)$$

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -k y_A = -k(\eta + e \sin \omega t) \dots \dots \dots (8)$$

Уравнения (7) и (8) даны какъ Фöppl'емъ, такъ и Н. Е. Жуковскимъ.

Таковы дифференциальныя уравнения движения точки S , центра тяжести нашей системы; интеграція ихъ дастъ намъ возможность вполне выяснитъ характеръ и всѣ особенности этого движения. Уравнения эти представляютъ собою линейныя уравнения второго порядка, но со второй частью, — въ составъ ихъ входятъ функции независимаго перемѣннаго. Прежде всего, приведемъ ихъ къ виду безъ второй части. Преобразуемъ сперва уравненіе (7). Въ составъ его, какъ видимъ, входитъ

вторая производная функции ξ , сама эта функция ξ и функция $\cos \omega t$. Если принять во внимание, что косинус после двух дифференцирований опять дает косинус, то, значит, подставив вместо ξ какую-нибудь функцию $a \cos \omega t$, можно заглянув подобрать этот коэффициент так, чтобы член $(-k \epsilon \cos \omega t)$ пропал. Полагая, что частный интеграл уравнения (7) имеет вид

$$\xi = a \cos \omega t.$$

Отсюда, далее, находим

$$\frac{d\xi}{dt} = -a\omega \sin \omega t$$

и

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega t.$$

В виду этого уравнение (7) можно быть переписано так:

$$-ma\omega^2 \cos \omega t = -ka \cos \omega t - k \epsilon \cos \omega t.$$

Сокращая на $(-\cos \omega t)$, находим соотношение

$$ma\omega^2 = ka + k \epsilon,$$

так что

$$a(m\omega^2 - k) = k \epsilon,$$

в силу чего значение a , необходимое для желаемого нам преобразования уравнения (7), есть

$$a = \frac{k \epsilon}{m\omega^2 - k} = \frac{\epsilon}{\frac{m\omega^2}{k} - 1} \dots \dots \dots (9')$$

То же самое получим и для уравнения (8). Полагая, что частный интеграл этого уравнения есть

$$\eta = \phi \sin \omega t,$$

вместо ξ в него

$$\frac{d\eta}{dt} = b\omega \cos \omega t$$

и

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -b\omega^2 \sin \omega t,$$

и уравнение (8) принимает вид:

$$-mb\omega^2 \sin \omega t = -kb \sin \omega t - ke \sin \omega t.$$

Сокращая на $(-\sin \omega t)$, находим уравнение

$$mb\omega^2 = ka + ke,$$

откуда и получается значение b , необходимое для тождества:

$$b = \frac{ke}{m\omega^2 - k} = \frac{e}{\frac{m\omega^2}{k} - 1},$$

что, согласно (9'), показывает, что эта функция b есть наше прежнее a :

$$b = a = \frac{ke}{m\omega^2 - k} \dots \dots \dots (9)$$

Итак, частные интегралы уравнений (7) и (8) имеют вид:

$$\xi = a \cos \omega t,$$

$$\eta = a \sin \omega t,$$

при чем коэффициент a определяется соотношением (9). В силу этого, подставив в (7) и (8) вместо ξ и η новые переменные X и Y , где

$$\xi = X + a \cos \omega t, \dots \dots \dots (10)$$

а

$$\eta = Y + a \sin \omega t, \dots \dots \dots (11)$$

получим уравнения без вторых частей. Действительно, из (10) находим, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dX}{dt} - a\omega \sin \omega t,$$

а

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - a\omega^2 \cos \omega t.$$

Въ виду этого уравнение (7) переносится такъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - ma\omega^2 \cos \omega t = -kx - ka \cos \omega t - ke \cos \omega t.$$

Въ силу (α) и (9'), члены съ $\cos \omega t$ выпадаютъ, и мы получаемъ простое линейное дифференціальное уравнение второго порядка, но уже безъ второй части:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \dots \dots \dots (12)$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что уравнение (8) послѣ подстановки (11) приметъ видъ:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky. \dots \dots \dots (13)$$

Полученныя уравнения (10)–(13) показываютъ, что движеніе центра тяжести β (ξ, η) можетъ быть вполне определено движеніемъ нѣкоторой точки Γ съ координатами (x, y): каждому определенному значенію координатъ ея x и y , соответствующему нѣкоторому моменту t , будутъ соответствовать вполне определенные значенія координатъ ξ и η центра тяжести. Посмотримъ, что это за точка и какова связь ея съ точкой β .

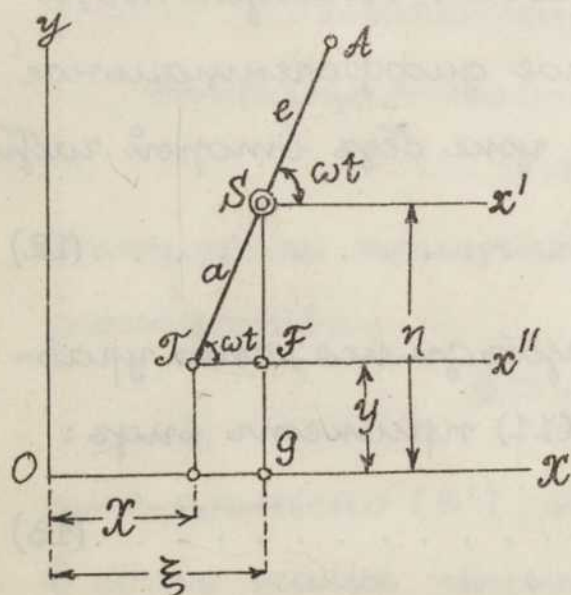
Уравнения (10) и (11) показываютъ, что эта точка Γ лежитъ на прямой $A\beta$ на разстояніи a отъ β . Дѣйствительно, фаза вектора $A\Gamma$ равна, какъ видимъ, ωt ; значитъ, она та же, что и у вектора $A\beta$, откуда заключаемъ, что $A\Gamma$ совпадаетъ съ $A\beta$, составляя съ ней, такимъ образомъ, одну прямую. Далее, чтобы опредѣлить

расстояние между точками S и T , подставляя в это выражение его

$$ST = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

вместо величинных сюда разностей выражения их $a \cos \omega t$ и $a \sin \omega t$, из (10) и (11), и тогда увидим, что $ST = a$.

Итак, точка S принуждена все время находиться на расстоянии a от точки T ; значит, она движется по окружности, описанной из T этим радиусом a . Это дви-



Фиг. 19.

жение точки S происходит равномерно, с угловой скоростью ω , на это указывает присутствие $\cos \omega t$, — проекция точки S на ось Tx'' , параллельную Ox , движется гармонически, как это указывается уравнением (10): из него имеем, что $\xi - x = a \cos \omega t$, но $\xi - x = TF$, где F есть проекция точки S на прямую Tx'' ; таким образом, $TF = a \cos \omega t$, а это и есть уравнение гармонического движения точки F ; отсюда, наконец, следует, что точка S движется по своей окружности равномерно.

Что же касается точки T , — центра окружности, описываемой вокруг нее точкой S , — то она движется по закону, выражаемому уравнениями (12) — (13). Выяснить смысл их нетрудно. Прежде всего мы замечаем, что точка T , вообще говоря,

движется по эллипсу, что можно вывести из значений частных интегралов этих уравнений: положив

$$X = c \cos nt,$$

$$Y = d \sin nt,$$

где c и d суть некоторые постоянные, а $n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, найдем, что эти значения переменных X и Y удовлетворяют уравнениям (12) и (13), и теперь очевидно, что точка $T(X, Y)$ движется по эллипсу с полуосями c и d , ибо, исключая параметр nt , получаем обыкновенное уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1.$$

Нетрудно, далее, показать, что точка T движется под действием некоторой силы K , пропорциональной расстоянию OT точки T от центра O , т. е. выражаемой через

$$K = -k \cdot OT, \dots \dots \dots (14)$$

причем направлена она должна быть от T к O , в сторону уменьшения координат, на что показывает знак минус в уравнениях (12) — (13). Действительно, взяв проекции силы K на оси Ox и Oy , находим

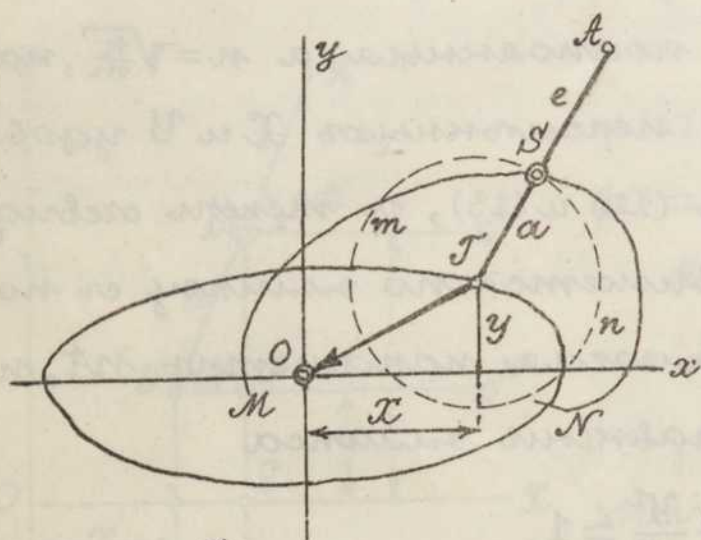
$$K_x = +K \cos(K, Ox) = -k \cdot OT \cos(OT, Ox) = -k \cdot OT \cos \varphi = -kX,$$

а так как

$$K_x = m \frac{d^2 X}{dt^2},$$

то мы и получаем наше уравнение (12). Подобным же образом убедимся, что удовлетворяется при этом предположении и уравнение (13).

Итакъ, точка T движется, какъ некоторая точка, притягиваемая центромъ O съ силой, пропорциональной разстоянію OT ; траекторіей точки T является эллипсъ съ центромъ O . Что же ка-



Фиг. 20.

сается центра тяжести S , то онъ, какъ мы уже указывали, будетъ описывать около центра T окружность постояннаго радиуса a , перемещающаяся при этомъ съ постоянной угловою скоро-

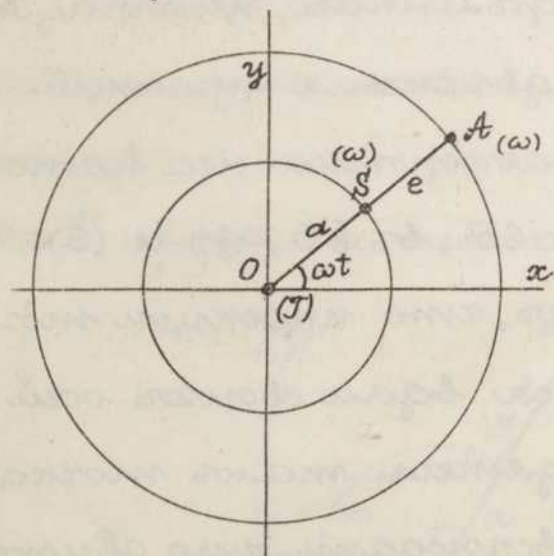
стью ω . Если бы точка T была неподвижна, то точка S двигалась бы по неподвижной окружности mn (фиг. 20). При подвижной же точкѣ T она будетъ двигаться по некоторой кривой $M\mathcal{S}N$, отличной отъ окружности, но при этомъ будетъ въ каждый данный моментъ оставаться на разстояніи a отъ этой подвижной точки T .

Итакъ, движеніе центра тяжести S оказывается тѣсно связаннымъ съ движеніемъ точки T . Это послѣднее не представляетъ, однако, для насъ чего-либо незнакомаго;— съ подобнымъ движеніемъ, но только не въ плоскости, а по прямой, мы уже встрѣчались при разборѣ движенія точки по плоскости при наличности тренія и подѣ влияніемъ упругой пружины, воздѣйствіе которой на точку мы считали пропорциональнымъ разстоянію

твѣла отъ некотораго опредѣленнаго центра. Въ данномъ случаѣ уравненія движенія проекцій точки T по осямъ оказываются тѣми же, которыя были получены на стр. 65, въ § 3, — ур-іе (8). Мы видимъ, такимъ образомъ, что проекціи точки T на оси Ox и Oy движутся вдоль своихъ осей по тому же закону, что и взятая тамъ точка M . Въ виду этого можемъ утверждать, что движенія этихъ проекцій будутъ аналогичны движенію точки M , а это указываетъ, что, въ силу наличности внутренняго и внѣшняго тренія колебанія проекцій точки, совершаемыя или вдоль своихъ осей относительно центра O притяженія, будутъ очень быстро затухать; значитъ, окажется быстро затухающимъ и движеніе самой точки T , и она въ некоторый моментъ окажется находящейся въ равновѣсіи въ области равновѣсія, при чемъ, по наличіи этой послѣдней, можно положить, что она ограничивается самой точкой O .

Итакъ, точка T , понуждаемая некоторой силой K совершать некоторое эллиптическое движеніе, будетъ съ теченіемъ времени разнѣсри этого своего эллипса уменьшаться, движеніе ея будетъ неуклонно затухать, пока, наконецъ, не прекратится совсѣмъ, — въ этотъ моментъ точка T окажется совпавшей съ началомъ O . Что касается диска, то центръ тяжести его, не переставая описывать вокругъ T окружность радіуса

а, будетъ продолжать это движеніе и теперь,



Фиг. 21.

такъ что картина движенія представится теперь въ такомъ свѣтъ: центръ тяжести S системы будетъ описывать окружность радиуса a вокругъ неподвижной точки O , съ которой совпала точка T , при чемъ точка S

будетъ двигаться по этой окружности съ постоянной угловою скоростью ω ; система же диска будетъ вращаться около своего центра тяжести S также съ постоянной угловою скоростью ω , такъ что точка A будетъ также описывать окружность постоянного радиуса $(a+e)$ вокругъ того же центра O , при чемъ точки O , S и A будутъ постоянно находиться на одной и той же прямой OA (фиг. 21).

Большого приобритенія это заключеніе для насъ не представляетъ; оно показываетъ только



Фиг. 22.

только то, что ось вала WAW будетъ теперь

описывать некоторое тело вращенія, образъ какъ-бы некоторую пучность (фиг. 22), наибольшее (экваторіальное) сѣченіе которой представитъ собою окружность центра O и радиуса OA , равнаго $(a+e)$. Параметрами движенія си-

стены являются здесь величины k, e, m и ω , входящая въ составъ формулы (9). Посмотримъ, не дастъ-ли него новаго разсмотрѣнiя этихъ факторовъ.

Что касается величинъ k, e и m , то все это суть величины постоянныя, со временемъ не мѣняющіяся. Дѣйствительно, k есть нѣкоторый постоянный коэффициентъ, зависящій отъ разноровъ вала и степени упругости его матеріала; далѣе, эксцентриситетъ e обуславливается погрѣшностями центрировки и дальнѣйшему уменьшенію и измѣненію не подлежитъ; наконецъ, что касается m , массы вращающагося диска, то со временемъ она не мѣняется.

Остается факторъ ω , — угловая скорость вращенія диска вокругъ оси. Это есть величина, по существу своему переменная, могущая принимать самыя разнообразныя значенія, отъ нуля до сколь-угодно большихъ разноровъ, — мы можемъ считать ее постоянной лишь за отдельные промежутки времени, при установившейся движеніи, — объ этомъ было сказано уже раньше. Между всѣми этими значеніями скорости ω особый интересъ приобретать тѣ, которыя обращаются въ нуль знаменателя выраженія (9) для a , т. е. тѣ, для которыхъ

$$m\omega^2 - k = 0 \dots \dots \dots (15)$$

Такимъ значеніемъ является, следовательно,

значение

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \dots \dots \dots (16)$$

Так как величины, стоящая под знаком корня, представляют собою величины действительныя и положительныя, то условная скорость ω_k , определяемая этимъ соотношениемъ, представляет собою величину действительную; положительна же она по самому своему смыслу, почему передъ корнемъ и подразуывается одинъ лишь знакъ плюсъ.

Это значение ω_k является особенно интереснымъ въ виду того, что при такомъ значеніи скорости ω величина a , т.-е. расстояние центра тяжести отъ точки T или, по силѣ совпаденія точки T съ началомъ, отъ начала координатъ O , становится безконечно-большимъ, ибо при условіи (16) или, что то же, (15), изъ выраженія (9) получаемъ

$$a = \frac{ke}{m\omega_k^2 - k} = \frac{ke}{0},$$

т.-е.

$$a = \infty, \dots \dots \dots (17)$$

а это показываетъ, что центръ тяжести S долженъ удалиться отъ точки O въ безконечность, что, понятно, можетъ случиться лишь тогда, когда сломается ось, ибо при целой оси центръ тяжести S можетъ находиться только на конечномъ разстояніи отъ оси.

Такимъ образомъ, угловая скорость

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

есть скорость, опасная для цѣлости вала, — при ней валъ можетъ сломаться. Скорость эта носитъ названіе критической угловой скорости.

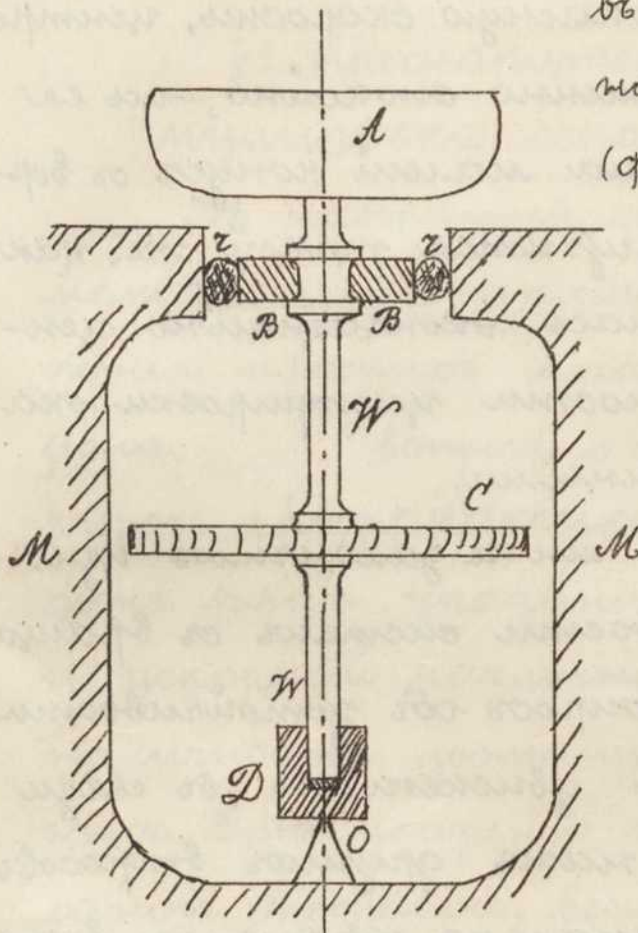
Но допустимъ, что мы быстро прошли черезъ эту скорость, такъ что валъ остался цѣлымъ, и продолжая увеличивать скорость вращенія все дальше и дальше. Ур-іе (17) показываетъ, что параллельно съ этимъ будетъ убывать и величина отрезка a , и въ предѣлахъ, при $\omega = \infty$, она обратится въ нуль, что будетъ, очевидно, соответствовать вступленію центра тяжести S въ точку O , т. е. на геометрическую ось вращенія. Следовательно, въ въ моментъ достиженія безконечно-большой скорости вращенія произойдетъ идеально-точное автоматическое центрированіе системы. На практикѣ, въ виду невозможности дать скоростямъ ω безконечно-большія значенія, такого полного совпаденія центра тяжести S съ геометрической осью WOW ожидать нельзя, но во всякомъ случаѣ можно утверждать, что чѣмъ больше ω , тѣмъ меньше отрезокъ a , и при огромныхъ числахъ оборотовъ, какія имѣютъ мѣсто въ нашихъ паровыхъ турбинахъ, этотъ отрезокъ можетъ сокращаться лишь исчезающе-малыми долями миллиметра.

Итакъ, движеніе системы, подобной нашей, будетъ происходить такъ:

Во время движения произойдет изгиб оси, все увеличивающийся, вместе со увеличением ω ; система будет испытывать все большие и большие явления, которые будут особенно опасны по мере приближения угловой скорости вращения к критической скорости ω_k . Но если мы быстро перейдем через эту критическую скорость, то система очень быстро, ибо почти обратно-пропорционально квадрату угловой скорости ω , центрируется сама и быстро успокаивается; дальнейшее движение ее будет происходить уже абсолютно спокойно, — никаких влияний, опасных для системы, самих по себе здесь возникнуть уже не может. — При останавливании системы все вышеописанные явления будут протекать в обратном порядке, и здесь придется, при приближении к ω_k , принять меры к возможно быстрейшему переходу системы через эту скорость. — Все эти заключения легко проверить на действительных устройствах этого рода, как, например, на турбинах Лаваля и проч.

Выводы, к которым мы пришли, конечно, нельзя назвать вполне точными и безупречными, ибо мы не ввели в рассмотрение как сил внутреннего и внешнего трения, так и некоторых других; но если бы мы и ввели их все, написали ряд сложных уравнений и рассмотрели их, то получили бы результаты, во многих местах своих вполне совпадающие с приведенными выше и полученными помощью примененного нами упрощенного метода.

Этот вывод, с соответственными измѣненіями, можетъ быть приложимъ и въ другихъ случаяхъ, аналогичныхъ разобранному, каковы, напримеръ, случай центрофуры. Схема устройства ее можетъ быть,



Фиг. 23.

въ общихъ чертахъ, представле-
на такъ: чаша А центрофуры
(фиг. 23) укрѣпляется на валу
W W, вращающемся въ подвиж-
ныхъ подшипникахъ В В и Д,
при чемъ для того, чтобы
дать центрофуру возмож-
ность покачиваться, подвиж-
ной, но не могущій вращать-
ся, подшипникъ В В снабжа-
ется резиновыми проклад-
ками к.к. Нижний подшип-
никъ Д (подпятникъ) мо-
жетъ свободно двигаться во-

кругъ точки О — вершины опорнаго конуса.

Такимъ образомъ, всю эту систему можемъ раз-
сматривать, какъ свободно движущуюся, но съ допол-
нительнымъ условіемъ, — въ балансъ силъ войдетъ еще си-
ла упругости резины, действующая на подшип-
никъ В В и на центрофуру. Уравненія движения та-
кой системы по вышнему своему виду будутъ нѣ-
сколько отличаться отъ написанныхъ выше, но ко-
нечные выводы будутъ тѣ же: мы опять полу-
чимъ здѣсь некоторую критическую скорость, въблизи

которой весь механизм будет очень сильно дрожать, при чем резиновые прокладки могут в некоторые моменты сплющиваться так сильно, что центрифуга станет биться об устои. Но раз мы пройдем как можно быстрее эту опасную скорость, центрифуга пойдет дальше совершенно спокойно, — ось ее OW станет описывать весьма малый конус с вершиной в O , и эффект получится такой же, как если бы центрифуга оказалась окончательно центрированной; все погрешности центрировки окажутся совершенно сглаженными.

Иными соображениями мы и закончили изложение вопроса об устойчивости систем с вращательными движениями. Вопрос об устойчивости систем с качательными движениями, в связи с рядом связанных с ним других вопросов, будет разобран в следующем, третьем, выпуске нашего курса.

Часть вторая.

Динамическое исследование плоских механизмов.

§1. Предварительныя соображенія и формулировка основных задачъ.

Въ настоящей части нашего курса мы займемся исследованиемъ динамическихъ условий движения плоскихъ механизмовъ. Кинематическая форма вопроса о движении ихъ разбрана въ курсѣ «кинematики механизмовъ», — тамъ были даны рядъ указаній для опредѣленія скоростей и ускореній различныхъ точекъ механизма, при наличности достаточнаго числа начальныхъ данныхъ. Эти указанія придется пополнить лишь одной теоремой, весьма важной для изученія плоскаго движения вообще, — такъ называемой теоремой о центрѣ качанія; въ основаніе ее лягутъ соображенія о свойствахъ центра ускореній, извѣстныя изъ кинематики.

Это динамическое исследование мы ограничимъ рассмотреніемъ двухъ задачъ, имѣющихъ наибольшую важность съ практической точки зрѣнія и представляющихъ уже при первомъ взглядѣ на работающій механизмъ, какъ извѣстную динамическую систему. Принимая во вниманіе, что движение каждой массы, входящей въ составъ механизма

вполне определяется 1) величиной ее и 2) величиной и направлением сил, на нее действующих, заключаем, что первым основным вопросом является вопрос о том, како будет двигаться механизм, раз известны массы его частей и силы, на эти части его действующие, если, при том, известны начальные данные, характеризующие состояние механизма в начальный момент. Задача эта при таких условиях является вполне определенной, ибо зная массу каждой отдельной части механизма, силы, на нее действующие, и начальные обстоятельства движения ее, мы, несомненно, помощью соответствующих теорем механики, сможем установить связь данных нам факторов как с ускорениями системы, так и с ее скоростями, и определить затем эти кинематические факторы по начальным данным.

Второй вопрос является производным от первого и может быть сформулирован при помощи следующего соображения: раз все силы, действующие на систему, даны, а массы и начальные данные известны, то движение системы будет вполне определенным, но эта определенность, очевидно, совершенно теряется, если мы одну из сил сделаем зависящей от нашего произвола и станем менять ее согласно нашим желаниям; очевидно, что при таких условиях движение системы, зави-

сащее, понятно, въ числѣ прочихъ силъ, и отъ этой
осной, выделенной нами силы, будетъ также мнѣ-
няться, и никто не смѣетъ намъ поставить грѣхъ
измѣненія одной этой силы такъ, чтобы движеніе
системы было именно такимъ, какимъ мы желаемъ
его видѣть, и вотъ вторымъ вопросомъ, имѣющимъ
первостепенное значеніе на практикѣ, и является имен-
но вопросъ о томъ, какъ, задавшись одной или нѣ-
сколькими определенными действующими силами,
отыскать недостающую одну такую, чтобы дви-
женіе какой-либо одной определенной точки меха-
низма, при воздѣйствіи на механизмъ всей системы
силъ, дополненной и этой послѣдней, оказалось
требуемымъ, — напримеръ, равномерно-кривымъ,
равномерно-замедленнымъ и проч. Геометрическая
характеристика движенія этой точки, т.-е. видъ
траекторіи, обуславливается связями, коими под-
держана точка, кинематическая же характеристика,
т.-е. законы измѣненія скоростей, ускореній и проч.,
зависитъ уже и отъ силъ, действующихъ на точку,
и вотъ мы и подбираемъ комплексъ этихъ силъ такъ,
чтобы кинематическая характеристика движенія и
была какъ разъ желаемой.

Наше изслѣдованіе будетъ выполнено припоми-
тельно, главнымъ образомъ, къ одному наиболее распро-
страненному и важному механизму. — кривошипному
механизму обыкновенной паровой машины, могущему
быть усложненнымъ путемъ ли соединенія въ одинъ

механизмъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ кривошипныхъ механизмовъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ двухъ- и многоцилиндровыхъ машинахъ, или путемъ присоединенія къ основному кривошипному механизму какихъ-либо другихъ, вспомогательныхъ, каковы, напримеръ, механизмъ воздушнаго или водяного насоса и т. д. Изученіе кривошипнаго механизма облегчается еще и тѣмъ обстоятельствомъ, что всѣ кинематическія свойства его нами изучены весьма подробно, и, касаясь ихъ, мы будемъ ограничиваться ссылками на соответствующія указанія кинематической части нашего курса. Отмѣтимъ, что примененіе нашего изслѣдованія къ кривошипному механизму вовсе не предполагаетъ собою непримѣнимости метода къ другимъ аналогичнымъ механизмамъ, — методъ изслѣдованія остается, по существу, неизмѣняемымъ, и мѣняться будетъ лишь внѣшняя форма изслѣдованія.

Оба вышеприведенные вопроса, применительно къ кривошипному механизму, могутъ быть сформулированы въ видѣ двухъ отдѣльныхъ задачъ, рѣшеніемъ коихъ мы и займемся въ слѣдующихъ параграфахъ, принимая во вниманіе слѣдующія необходимыя предварительныя соображенія и данныя:

Предположимъ, что у насъ имѣется кривошипный механизмъ обыкновенной паровой машины. Движущей силой въ немъ является упругость пара, поступающаго въ паровую камеру изъ котла.

и перемещающего поршень. Согласно тому, что было уже сказано въ введеніи въ нашъ курсъ, — см. стр. 4 и слѣдующія, — работа пара, перемещающего поршень, будетъ уходить

а) на работу полезныхъ сопротивленій,

б) на работу вредныхъ сопротивленій,

а остатокъ, если только онъ будетъ, цѣликомъ уйдетъ

с) на увеличеніе живой силы машины, т. е. на увеличеніе (въ алгебраическомъ смыслѣ) скоростей частей машины.

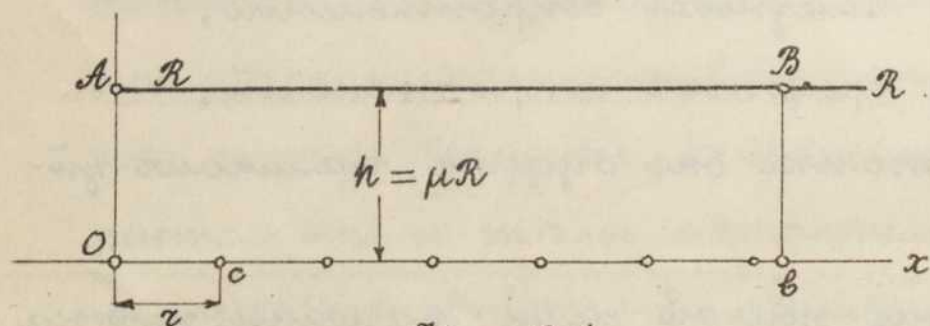
Работа полезныхъ сопротивленій будетъ выражаться во вращеніи съ извѣстной угловою скоростью ω коренного вала, на которомъ дѣйствуетъ извѣстный моментъ вѣтшиаго сопротивленія, M ; илтъя въ виду посѣдующее, удобнѣе всего приводить этотъ моментъ къ некоторой силѣ P , дѣйствующей на плечо, равномъ радиусу r окружности, описываемой пальцемъ кривошипа, такъ что мы будемъ полагать, что

$$M = Pr. \dots \dots \dots (a)$$

Кромѣ того, ради упрощенія разсужденій, будемъ предполагать, что моментъ M полезнаго сопротивленія на коренномъ валу есть величина постоянная, вслѣдствіе чего, въ виду постоянства радиуса r , будетъ также постояннымъ и усилие P полезнаго сопротивленія на коренномъ валу:

$$P = \text{const} \dots \dots \dots (1)$$

Легко построить силовую кривую, дающую ходъ изменения этой силы R . Для этого принимаемъ ка-
кую-либо прямую за ось абсциссъ Ox (фиг. 24) и будемъ
откладывать на ней пути, проходимые нашей точ-
кой приложения силы



Фиг. 24.

кой приложения силы
 R , т.-е. центромъ стве-
рения пальца криво-
шинна; это, значить,
будутъ дуги окруж-
ности, описываемой

этой точки, выпрямляемые и откладываемые отъ
какого-либо начального положения O . Такимъ образомъ,
если радиусъ r пальца кривошинна (разстояние меж-
ду центромъ вала и центромъ стегения пальца криво-
шинна) изображается отрезкомъ Oc , то вся окруж-
ность, описываемая пальцемъ кривошинна, будучи
выпрямлена, изобразится отрезкомъ $Oв$, равнымъ
 $2\pi r$, т.-е. $6,28 Oc$. Такова будетъ величина пути,
проходимого точкой приложения силы R за одинъ
оборотъ вала.

Если, далее, условимся откладывать ордина-
ты силы, воздѣйствующія на точку въ напра-
вленіи ее пути, то въ данномъ случаѣ все такія
ординаты окажутся одинаковыми и равными
каждой R , и, въ результатъ, силовая кривая полез-
наго сопротивленія R выразится прямой RR , парал-
лельной оси Ox и отстоящей отъ нея на $h = \mu R$,
гдѣ μ есть масштабъ силъ, заранее нами выбран-

ный. Мы уже указывали, что за полный оборот вала точка приложения силы R пройдет путь $Ob = 2\pi r = 2\pi Oc$. Такъ какъ сила R , будучи касательной къ окружности пальца кривошипа, все время направлена по пути точки, то работа полезного сопротивления за одинъ оборотъ вала выразится площадью прямоугольника $OABb$ и будетъ равна $Ob \times h = 2\pi r \times \mu R = \mu \cdot 2\pi r R = \mu \cdot 2\pi M$ за каждый оборотъ вала.

Что касается работы вредныхъ сопротивлений, то это есть работа силъ тренія, разбивающихся при движеніи ползуна по параллелямъ, пальца кривошипа въ его гнездо (втулку въ шатунъ) и т. п. Эти силы тренія будутъ определены, если мы будемъ знать силы нажатія однихъ деталей на другія, съ ними сопряженныя и относительно нихъ перемѣщающіяся; это будутъ такъ называемыя силы опорныхъ сопротивленій, которыя будутъ получаться путемъ разложенія силы, действующей на ту или иную деталь, на силу, нормальную къ поверхности соприкосновенія, и на силу, действующую въ другомъ, желательномъ намъ, направленіи. Эти нормальныя силы и представляютъ собою силы, равныя силамъ опорныхъ сопротивленій. Въ некоторыхъ подробностяхъ, касающихся этихъ силъ, мы встрѣтимся еще въ дальнѣйшемъ.

Что касается, наконецъ, остатка отъ работы действующихъ силъ, могущаго здѣсь оказаться, то онъ будетъ уходить на ускореніе (или замедленіе)

движения, и вопрос о пертурбациях в движении механизма, вызываемых наличием этого отбоя, составит предмет ближайшего изыскания в одной из ниже разбираемых задач.

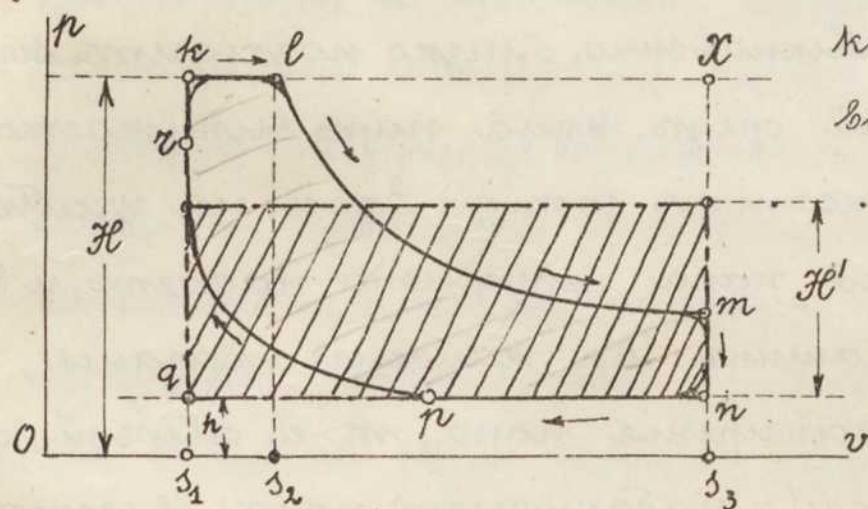
Сильнейший характер будет иметь работа сил инерции как частей, движущихся вращательно и возвратно-прямолинейно, так и кающихся (шатун); иногда эта работа будет помогать работе действующей силы, каковой является давление пара в цилиндре, иногда же будет сопротивляться. Учет этой работы можно произвести при помощи теоремы о центре качаний, которую мы и изложим в следующем параграфе.

Мы указывали, что в механизм паровой машины действующими силами являются силы упругости пара под поршнем, при чем давление пара за время полного оборота вала, — за ход поршня вперед и назад, — будет изменяться так:

1) Путь открытия паровпускного отверстия уфавливается сообщением подпоршневого пространства с котлом, откуда свежий пар и начинает поступать под поршень. Это поступание пара будет длиться некоторое время Δt , составляя так называемый период впуска пара, соответствующий части $s_1 s_2$ пути поршня (фиг. 25). Давление за период впуска будет равно давлению H пара в котле, так что силовая кривая представится на этом участке $s_1 s_2$ пути поршня отрезком kl

прямой, параллельной оси Ov абсциссы и проходящей на расстоянии $\mathcal{H}$ от нее.

Впуск свежего пара производится не за весь ход поршня s_1s_3 , а лишь за часть s_1s_2 его, ибо в противном случае, когда силовая кривая выразилась бы отрезком $k\mathcal{X}$, в конце s_3 хода поршня под поршнем оказалась бы парь весьма высокого давления $\mathcal{H}$, и при следующем затоме периода выпуска пришлось бы выпускать наружу отработавший парь весьма высокого давления $\mathcal{H}$, равного давлению пара в котле. Это было бы крайне неэкономично, ибо мы



Фиг. 25.

выпускали бы парь, не используя всего запаса энергии, в нем заключающейся. Подобного рода неэкономичное

пользование паром до-

пускается лишь там, где этого требуют особые обстоятельства, какъ это, например, имѣетъ мѣсто при трогании съ мѣста паровоза съ прицепленными къ нему поездами, — здѣсь требуется получить отъ пара за кратчайшее время максимумъ работы, которую парь можетъ дать при данныхъ условияхъ, ибо требуется сообщить всему поезду въ кратчайшее время известную желательную скорость, т.е. извѣстный запасъ живой силы. Позже, когда этотъ запасъ оказался

приобретенным и оказалась, таким образом, достигнутой известная скорость всего поезда, выпуск начинают сокращать до известных нормальных предельных, определяемых условиями работы паровоза.

Итак, можно принять, что в обычных условиях работы паровых машин период выпуска выражается лишь известной малой долей $s_1 s_2$ всего хода $s_1 s_3$ поршня.

2). Следующей фазой измѣненія состоянія пара подъ поршнемъ является расширеніе его вплоть до конца s_3 хода поршня, при чемъ въ концѣ расширения давленіе, обыкновенно, близко подходит къ давленію во внешней средѣ, куда паръ выпускается (атмосфера, конденсаторъ и т. д.) Здѣсь, на углублѣннѣ расширенія, давленіе пара непрерывно падаетъ, и въ курсѣ паровыхъ машинъ мы найдемъ указанія, что кривой lm расширения пара, т.-е. силовой кривой расширяющагося (адиабатически) пара, является равносторонняя гипербола lm (Мариоттова кривая), при чемъ асимптотами ея являются оси Ov и Op , оси абсциссъ и ординатъ.

3). По достиженіи конечной точки m кривой расширения, т.-е. въ концѣ хода, начинается выпускъ пара во внешнюю среду; онъ будетъ продолжаться не на всей прямой nq , какъ это можно было бы предположить (т.-е. не за весь обратный ходъ поршня), а лишь на части этого обратнаго хода. На практикѣ выпускъ прекращается въ

некоторой точке f , после чего начинается

4) сжатие пара, въ конецъ хода, т.-е. въ конецъ хода поршня, давление пара поднимается почти до давления въ котле; кривая сжатия fg своей конечной точкой g почти упирается въ точку k начала выпуска.

Причины такого высокого предварительного сжатия заключаются въ слѣдующемъ: по мѣрѣ приближенія поршня къ мертвому его положенію ускоренія его возрастаютъ; слѣдовательно, возрастаютъ и силы инерціи, и вотъ, во избѣжаніе удара при перемѣнѣ хода поршня мы и создаемъ передъ поршнемъ упругую паровую подушку, прекративъ выпускъ и заставляя поршень сжимать оставшіяся подъ нимъ пары и повышать, такимъ образомъ, упругость этого послѣдняго. Очевидно, что ударное дѣйствіе силъ инерціи въ конецъ хода поршня будетъ, такимъ образомъ, парализовано вполне успешно.

Причина эта должна быть признана, собственно говоря, причиной внешней; дѣйствительныя же соображенія, заставляющія насъ прекращать выпускъ пара раньше достиженія конца хода и производить сжатіе оставшагося пара, сводятся къ слѣдующему: пусть давление h выпуска равно 1 атмосфере; въ такомъ случаѣ температуру пара при этомъ давленіи, т.-е. температуру пара, находящагося подъ поршнемъ въ періодъ выпуска, можно считать равной 100°C ; въ то же время, предположивъ,

это давление в котле достигает 10 атм., и именно температуру пара в нем равной 180°C . Следовательно, впуская пар такого давления (10 атм) и такой температуры (180°C) в пространство, занимаемое паром более низкой (100°C) температуры, мы вызвали бы охлаждение этого свежего пара, т.-е. конденсацию его, и, значит, падение, понижение давления, что, понятно, является совершенно нежелательным. Средство для избежания этой вредной конденсации и дается упомянутым предварительным сжатием оставшагося под поршнем в момент IV пара: начиная с этого момента мы сжимаем этот пар, температура и давление его все больше и больше повышаются, вследствие чего конденсация свежего пара становится значительно более слабой. Степень этого предварительного сжатия в различных машинах различна, — в скоростных машинах она очень велика, так что конечное давление сжатия доходит почти до давления в котле, в тихоходных же машинах оно так далеко не идет. — Итак, прекращение выпуска и следующее затем сжатие пара производятся не только из-за желания ослабить действие сил инерции, но и из-за экономии свежего пара.

Мы разобрали все части работы диафрагмы, обойдя ее кругом, — выйдя из начала выпуска в момент выхода поршня из крайнего левого по-

положения и пройдя все стадии изменения состояния пара за полный оборот вала, мы подошли къ моменту возвращенія поршня опять въ то же крайнее положеніе. Далѣе произойдетъ снова впускъ пара, потомъ расширеніе его и т. д., — словомъ, все стадии измѣненія состоянія пара повторяются въ прежнемъ порядкѣ, такъ что при этомъ новомъ, очередномъ ходѣ поршня назадъ и впередъ діаграмма повторится, какъ и будетъ, затѣмъ, повторяться при каждомъ слѣдующемъ оборотѣ вала.

Итакъ, силовая кривая давленія P пара на поршень за одинъ полный оборотъ вала представится замкнутой кривой $kltprzk$ (фиг. 25), и представляющей собою діаграмму рабочаго цилиндра. Углы ея никогда не бываютъ на практикѣ такими острыми, какъ это изображено на чертѣжѣ, — они бываютъ всегда сглажены, скруглены, ибо мгновенности во впускѣ или выпускѣ пара на дѣлѣ быть не можетъ, — органы машины, въводящіе распределеніе пара, не могутъ работать порывисто, толчками, чтобы мгновенно открывать доступъ пара или прекращать его, да въ этомъ и не представляется никакой особой надобности.

Нетрудно подсчитать путемъ ли прямого планиметрированія или помощью приближенныхъ формулъ (Симпсона и др.) площадь, ограниченную кривой діаграммы. Площадь эта дастъ намъ въ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ единицахъ, зависящихъ

отъ масштабовъ отклонений поршня и давлений, работу пара за одинъ полный оборотъ вала при двойствѣн парѣ на одну сторону поршня. Действительно, при ходѣ поршня $s_1 s_3$ вправо, работа пара выразится площадью $s_1 z k l m n s_3$; при ходѣ же влево, $s_3 s_1$, на выпускѣ пара и на сжатіи его уйдетъ работа $n r z s_1 s_3 n$, такъ что у насъ останется для использования работа $k l m n r z k$, даваемая какъ разъ площадью, ограниченной замкнутой кривой. Эта кривая носитъ еще названіе индикаторной діаграммы и можетъ быть получена непосредственно съ рабочаго цилиндра машины помощью спеціального прибора, называемаго индикаторомъ.

Итакъ, работа пара на одной сторонѣ поршня за одинъ оборотъ вала выражается площадью индикаторной діаграммы въ единицахъ, зависящихъ отъ масштабовъ, принятыхъ при вычерчиваніи діаграммы. Опредѣливъ эту площадь, можемъ замѣнить ее площадью равновеликаго ей прямоугольника съ основаніемъ, равнымъ ходу поршня s ; высота его H' выразитъ собою среднее избыточное надъ давленіемъ n выпуска давленіе; площадь этого равновеликаго прямоугольника на фиг. 25 заштрихована. Такимъ образомъ получается представление о среднемъ индикаторномъ давленіи, — избыточномъ (H') сверхъ давленія выпуска или абсолютномъ ($H' + n$) отъ нуля давленій. Такъ какъ

H' есть давление на единицу площади поршня, то на весь поршень с площадью F давление будет равно FH' , и, значитъ, работа пара за одинъ оборотъ вала, т.-е. за полный ходъ поршня (назадъ и впередъ) выразится черезъ sFH' , гдѣ s есть ходъ поршня, равный диаметру $2r$ окружности, описываемой пальцемъ кривошипа.

Принимая теперь во вниманіе, что въ паровыхъ машинахъ паръ работаетъ и по другую сторону поршня и что измѣненія состоянія его тамъ остаются тѣми же, что и по взятую нами выше, заключаемъ, что полная работа пара по обѣ стороны поршня выразится за каждый оборотъ вала черезъ $2sFH'$, такъ что, если валъ машины дѣлаетъ n оборотовъ въ минуту, то, предположивъ работу $2sFH'$ выраженной уже въ килограммометрахъ, можемъ сказать, что наша машина даетъ работу въ $(2sFH' / 60.75)$ лошадиныхъ силъ, ибо 1 лш. сила есть работа въ 75 $\frac{\text{kgmt}}{\text{sec}}$

Мы указывали, что паръ работаетъ не на одной сторонѣ поршня, а на обѣихъ, при чемъ фазы измѣненія давления его располагаются симметрично, въ томъ смыслѣ, что если за данный ходъ поршня давление на одной сторонѣ его увеличивается по закону $k \sin t$, т.-е. если мы имѣемъ здѣсь впускъ и расширение, то на другой сторонѣ будетъ происходить процессъ $m \cos t$, т.-е. выпускъ и сжатіе,

и обратно. Такимъ образомъ, въ каждый данный моментъ действительное давление на поршень представится алгебраической суммой давлений, испытываемыхъ въ этотъ моментъ обѣими сторонами поршня. Въ виду этого можно уже заранее утверждать, что диаграмма действительныхъ давлений на поршень, — ее называютъ диаграммой свободныхъ усилий, — будетъ резко отличаться отъ диаграммы, изображенной на фиг. 25.

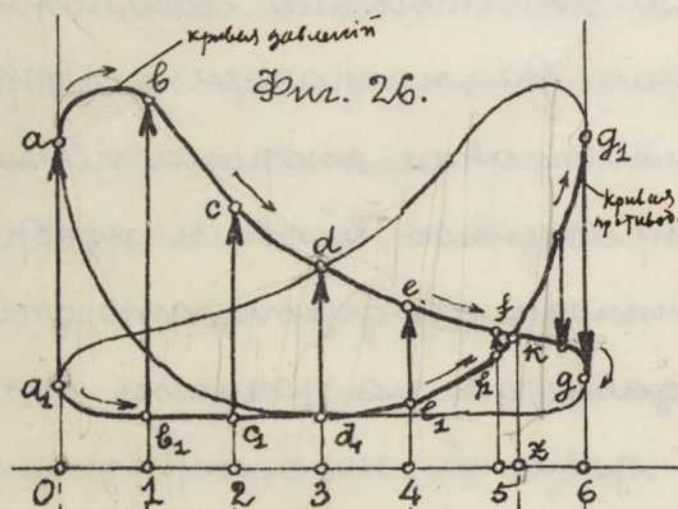
Эта диаграмма свободныхъ усилий получится, очевидно, въ результатъ суммирования диаграммъ, рисующихъ измѣненія давления по сторонамъ поршня. Чтобы произвести это суммирование, замѣтимъ, что если диаграмма, положимъ, лѣвой стороны поршня изображается замкнутой кривой adg (фиг. 26), то диаграмма правой стороны изобразится, какъ мы уже указали, симметричной ей кривой $a_1d_1g_1$. Посмотримъ, что намъ дастъ такое суммирование.

Пусть поршень идетъ вправо. По мере удаления его отъ лѣвой мертвой точки давления на лѣвую сторону его текутъ по силовой кривой $abcdefg$ (фиг. 26), на правой же стороне они будутъ измѣняться по закону, изображаемому силовой кривой $a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1$, — обѣ эти кривыя, соответствующія одному и тому же ходу поршня вправо, мы выдѣлимъ на кривыхъ болѣе толстой кривой (фиг. 26). Отличимъ выдѣлившіяся такимъ образомъ части диаграммъ стрѣлками, направленными по ходу поршня, соответствующимъ этимъ частямъ, такъ

что оба упомянутые кривые окажутся симметричными по отношению стрелок, одинаково (вправо) направленных. Теперь рассуждаем так: в момент a левая сторона поршня испытывала абсолютное (от нуля давлений) давление $0a$, направленное вправо, но в то же самое время правая сторона поршня испытывала давление, направленное влево и изображаемое отрезком $0a_1$. Отсюда следует, что действительное, свободное, давление на поршень окажется разностью этих давлений, т.-е. отрезком a_1a , и будет направлено вправо, что мы и отметили стрелкой вверх, по общему условию обозначения направления сил. Таким образом, свободное давление в этот момент окажется отрезком ординаты точки O , лежащим между соответствующими силовыми кривыми и отсчитываемым от кривой противодавлений $a_1e_1g_1$, препятствующих движению поршня, до кривой давлений adg , этому движению помогающих.

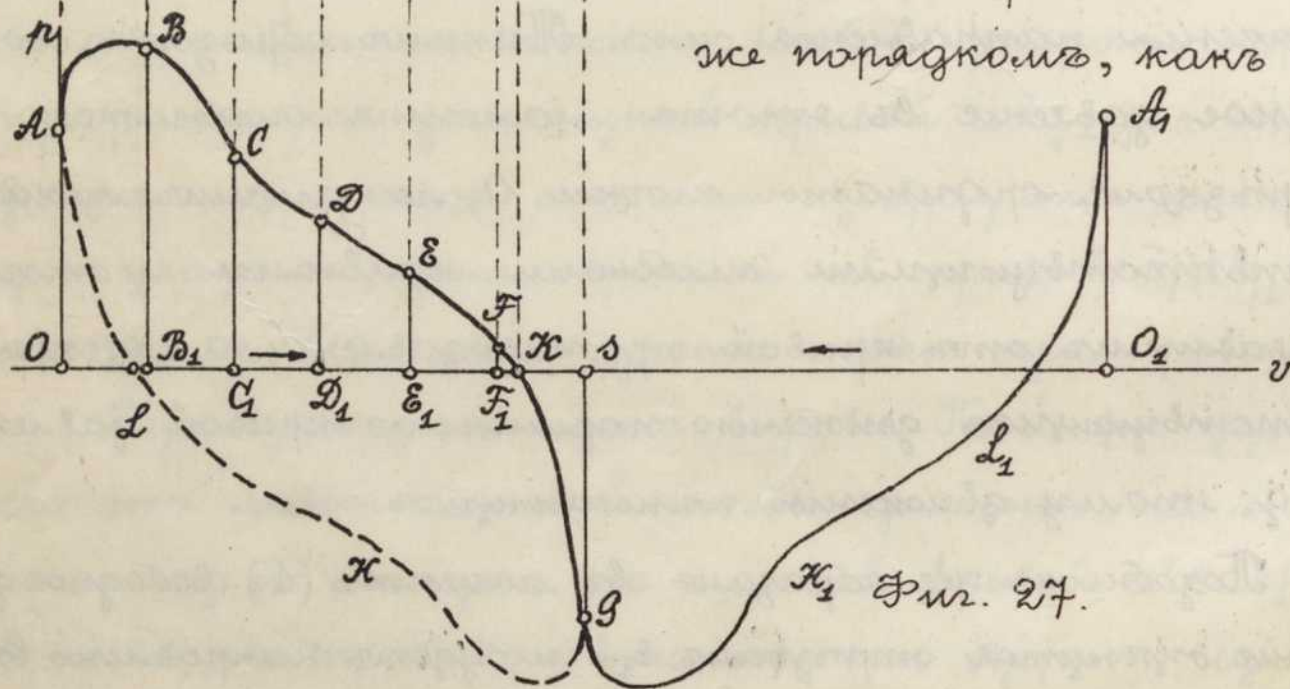
Подобным же образом в момент (1) свободное давление окажется отрезком b_1b и будет направлено вправо; в момент (4) оно окажется отрезком e_1e и будет направлено также вправо; в момент x оно окажется равным нулю, ибо в этот момент давление xk оказывается равным противодействию kx . Легко видеть, что на остальной части хода, xb , свободные давления окажутся направленными против хода поршня, ибо здесь противодействия больше давлений и

кривая противодавлений идетъ выше кривой давлений $\kappa\delta$. Такимъ образомъ, на участке $2b$ давления окажутся направленными влево, что и будетъ от-



мгено стрелками внизъ, какъ это и должно быть при отсчете этихъ свободныхъ давлений отъ кривой противодавлений до кривой давлений.

Учетъ свободныхъ давлений при ходѣ влево будетъ выполненъ совершенно такимъ же порядкомъ, какъ и при



ходѣ вправо: опять нужно будетъ выдѣлить кривую давлений и кривую противодавлений, и свободные давления определяются въ видѣ отрезковъ ординатъ, заключающихся между обѣими кривыми, причемъ направления этихъ свободныхъ давлений будутъ браться отъ кривой противодавлений къ кривой давлений.

Имѣя величины свободныхъ давленій для каждаго положенія поршня, легко построить силовую кривую этихъ давленій, для чего въ различныхъ точкахъ хода Os поршня откладываемъ на ординатахъ соответствующія этимъ точкамъ величины свободныхъ давленій. Такъ получимъ для хода поршня вправо кривую $ABDKB$, вполне определенно рисующую ходъ измѣненія давленія на поршень при этомъ движеніи его вправо (фиг. 27).

При движеніи поршня влево получимъ подобную же кривую $BHLA$; ее можно построить на отрезкѣ so , дающемъ ходъ назадъ, или же на отрезкѣ so_1 , условно изображающемъ этотъ ходъ назадъ, какъ продолженіе хода впередъ. Такимъ образомъ, поршень, а за нимъ штокъ и ползунокъ, будутъ подвержены за полный оборотъ вала давленію P пара на $нш$, измѣняющемуся по закону $ABFBH_1L_1A_1$ или, что то же, по закону, даваемому замкнутой кривой $ABFBHLA$.

Итакъ, разъ имѣются индикаторныя діаграммы какъ для передней, такъ и для задней стороны поршня, то путемъ элементарныхъ геометрическихъ построений легко получить кривую $ABFBH_1A_1$ (фиг. 27), дающую ходъ измѣненія давленія P пара за полный оборотъ коренного вала машины. Нетрудно, кроме того, видѣть, что, такъ какъ каждому положенію кривошипа можно отыскать соответствующее положеніе поршня, то для того же положенія кривошипа можно найти и соответствующее ему

давление P пара на поршень. Такимъ образомъ, при на-
личности индикаторныхъ диаграммъ вопросъ о да-
вленияхъ на поршень разрѣшается вполне.

Приведенныя выше соображенія даютъ намъ те-
перь возможность вполне опредѣленнымъ образомъ
сформулировать для кривошипнаго механизма
одну задачу, наложенная нами выше въ общихъ
чертахъ. Первая изъ нихъ заключается въ требованіи
отыскать по даннымъ силамъ, действующимъ на
механизмъ, скорости и ускоренія различныхъ точекъ
его. Применительно къ механизму паровой маши-
ны эта задача формулируется такъ:

Дается известный кривошипный механизмъ,
— размеры и массы всѣхъ частей его, — инди-
каторныя диаграммы и законъ измѣненія сопроти-
вленій на коренномъ валу и въ другихъ механиз-
махъ, соединенныхъ съ даннымъ. Требуется опре-
дѣлить движеніе его, т.-е. опредѣлить, будетъ ли
механизмъ двигаться непрерывно или же остано-
вится, и если остановится, то когда, послѣ сколь-
кихъ оборотовъ коренного вала? Очевидно, что о воз-
можности непрерывнаго движенія или остановки
даетъ представленіе законъ скоростей, дающій
ходъ измѣненія ихъ, и если окажется, что на не-
которомъ ходѣ поршня умовая скорость его ока-
жется равной нулю, то это и будетъ значить,
что вращеніе вала въ этотъ моментъ прекра-

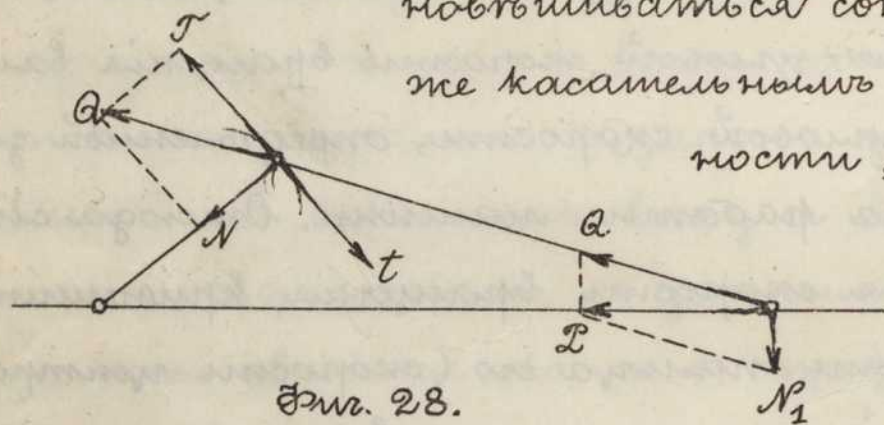
щается, и механизм останавливается.

Но эта задача, которую мы разберем лишь вкратце, не столь важна, какь создающая, уже нами сформулированная также в общих чертах: предполагая всю силу, за исключением одной, данной, подобрать эту неизвестную силу, т.е. дать закон изменения ее, — такь, чтобы движение некоторой определенной точки механизма было именно такимь, какимь мы желаемь его видать. Применительно къ кривошипному механизму эта задача имеетъ первостепенное значение, если мы примемъ во вниманіе, что коренной валъ машины-двигателя долженъ двигаться всегда возможно равномерно; машина будетъ только цѣннее, чѣмъ меньше отклоненія угловой скорости вращенія вала отъ некоторой угловой скорости, определенной заранее, по условиямъ работы машины. Отсюда следуетъ; что угловая скорость вращенія кривошипа и, значитъ, скорость пальца его (скорость центра стѣгненія втулки его), принадлежащей шатуну, должна быть величиной постоянной. Поэтому-то точкой, о которой говорится въ упомянутой выше общей задаче, является точка, принадлежащая шатуну, и, следовательно, эту задачу, применительно къ нашему механизму, можно сформулировать такъ:

Имеется кривошипный механизмъ паровой машины, на поршень которой дѣйствуетъ паръ

объяснить, подчиняющимися при своих изменениях известному закону, — выражаемому, например, кривой $A_2H_2A_1$ на фиг. 27 и т.п. Все размеры и массы частей его даны. Спрашивается, какую силу следует прилагать на пальцы кривошипа, чтобы кривошип этот вращался равномерно?

Для лучшего уяснения этого вопроса напомним, что кривошип будет вращаться равномерно лишь тогда, когда составляющая T действующей силы P (давления пара), доходящая до пальца кривошипа и нормальная къ радиусу r кривошипа, т.-е. идущая по касательной къ окружности пальца кривошипа (фиг. 28), будет въ каждый данный момент уравновешиваться сопротивлением t , также касательнымъ къ той же окружности, и вотъ мы и зада-



Фиг. 28.

емся вопросом о томъ, каковы должны быть эти силы t , могущия урав-

новешивать составляющія T нашей переменной силы P .

Если бы оказалось, что эти силы сопротивления t въ точности равны действительному слою полезнаго сопротивления R , то мы получили бы полную равномерность хода машины; но если бы силы t оказались переменными, будучи то больше R , то меньше, то о равномерности хода говорить при такихъ условияхъ не пришлось бы, и въ этихъ случаяхъ

является необходимость придумать какія-либо средства, могущія въ достаточной мѣрѣ обезпечить эту равномерность хода, хотя бы въ известныхъ пределах. Такой именно оборотъ дѣла и приходится наблюдать на практикѣ: силы t , уравнивающія слагающія T , оказываются неравными постояннымъ силамъ R полезнаго сопротивленія, въ виду чего кривошипный механизмъ самъ по себѣ обезпечить равномерность хода машины не можетъ никогда; для достижения известной равномерности приходится прибѣгать къ помощи маховиковъ, о чемъ мы будемъ подробно говорить въ одномъ изъ сльдующихъ параграфовъ.

Такимъ образомъ, мы, въ сущности, получили задачу об обезпеченіи равномерности хода, — задачу первостепенной важности для всякаго конструктора, которому приходится осуществлять вращательное движеніе коренного вала при помощи кривошипнаго механизма. Въ виду такого выдающагося значенія ея мы и разберемъ сначала именно ее, а затѣмъ уже разберемъ задачу о опредѣленіи скоростей и ускореній точекъ механизма при данныхъ силахъ, на него дѣйствующихъ.

Принимая, дайте, во вниманіе необходимость учета, при рѣшеніи нашей задачи, и силъ инерціи частей кривошипнаго механизма и, въ частности, шатуна его, мы изложимъ сначала такую называемую „теорему о центрѣ качанія“,

могущую помочь намъ разрѣшить поставленную нами задачу со всей желаемой и возможной точностью. Мы употребили терминъ „возможная точность“ потому, что наше изслѣдованіе будетъ имѣть своей цѣлью дать и обосновать методъ графическаго рѣшенія поставленной задачи, а никакъ не аналитическаго, представляющаго здѣсь огромныя трудности, преодоленіе коихъ вовсе не обходится какой-либо особой точностью результатовъ сравнительно съ аккуратно выполненнымъ графическимъ построениемъ. Исходной точкой разсуждений послужитъ намъ извѣстная теорема живыхъ силъ, примѣненіе коей возможно будетъ потому, что связи системы отъ времени не зависятъ, при чемъ мы будемъ предполагать движеніе механизма уже установившимся и періодическимъ, а періодъ его равнымъ времени одного полного оборота коренного вала.

Итакъ, переходимъ къ изложенію теоремы о центрѣ качанія.

§ 2. Теорема о центрѣ качанія.

Въ кинематикѣ механизмовъ было детально выяснено, что вопросъ о опредѣленіи ускореній различныхъ точекъ плоско-движущейся системы можетъ почитаться разрѣшеннымъ вполне, разъ найденъ центръ ускореній и имѣется извѣстный полный ускореніе какой-либо одной

точки системы; при этих условиях ускорения всех остальных точек системы оказывалось возможным определить также вполне, как по величине, так и по направлению. Было указано, как, помощью очень простого искусственного приема, можно обойти то неудобство, когда поворотный круг на гире не цинтуется, — в этом случае оказывалось возможным построить план ускорений, что, в свою очередь, помощью простого построения, позволяет найти положение центра ускорений и для этого случая. И в дальнейшем будем предполагать, что центр ускорений найден, и постараемся более или менее подробно выяснить ту роль, какую он играет в динамике тороидального движения вообще. Основания наших рассуждений будут таковы:

Всякое движение материальной системы можно свести на случай равновесия при помощи принципа д'Аламбера, говорящего, что

если мы представим себе данную движущуюся систему остановленной и къ действующим силам прибавим прилгествующія взятому моменту силы инерціи, то система окажется въ равновесіи.

Этот же принципъ можно выразить иначе такъ:

между силами действующими и силами инерціи въ каждый данный моментъ существуетъ равновесіе.

Такимъ образомъ, если мы желаемъ знать, какія

нагрузки, напряжения и т. д. испытывает движущаяся система, то знания учета одних только действующих сил мало, — нужно произвести еще учет сил инерции; только знание этих последних и даст нам возможность задачу динамики перевести на задачу статики и применить затемъ къ расчету системы начала теоріи сопротивленія матеріаловъ; только при этихъ условияхъ конструированіе частей машинъ можно будетъ назвать обоснованнымъ и рациональнымъ. Посмотримъ, какими образомъ удобно все это произвести этотъ учетъ силъ инерции для наиболее важнаго въ технику случая плоскаго движенія системы.

Выделимъ въ этой системѣ какую-нибудь точку Z и обозначимъ полное ускореніе ея черезъ j_z . Если массу точки Z обозначимъ черезъ m , то сила инерции точки Z , — обозначимъ эту силу черезъ f_z , — будетъ равна $m j_z$ и направлена прямо противоположно этому полному ускоренію j_z , въ виду чего эту силу и обозначаютъ обыкновенно такъ:

$$f_z = -m j_z,$$

откуда знакъ минусъ противоположность направленія ея направленію полного ускоренія. Такимъ образомъ, расчетъ силъ инерции, проекцій ихъ на какія-либо оси, моментовъ относительно различныхъ центровъ и т. т., сводится къ соот-

ответственному подгету произведений типа $(-mj_z)$, написанных для всех точек системы.

Предположим теперь, что центр ускорений $\mathcal{G}$ и прочие обстоятельства, определяющие величину ускорений отдельных точек, — каковы или угловая скорость ω , или величина и направление полного ускорения какой-либо точки и т. п. — известны. Тогда для полного ускорения j_z взятой нами точки Z получим знакомые выражения:

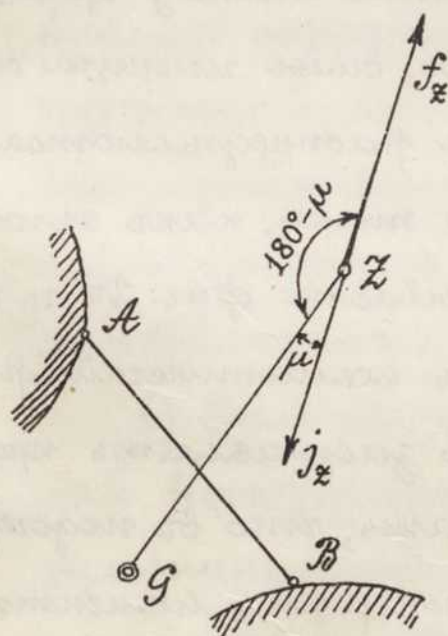
$$j_z = \mathcal{G}Z \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2},$$

— см. форм. (29), стр. 71, з. I, — или, после некоторых преобразований,

$$j_z = \mathcal{G}Z \cdot \frac{\omega^2}{\cos \mu},$$

— форм. (32), стр. 72, з. I. Таким образом, сила инерции нашей точки Z , f_z , напишется у нас так:

$$f_z = -m \cdot \mathcal{G}Z \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} = -m \cdot \mathcal{G}Z \frac{\omega^2}{\cos \mu} \dots (1)$$

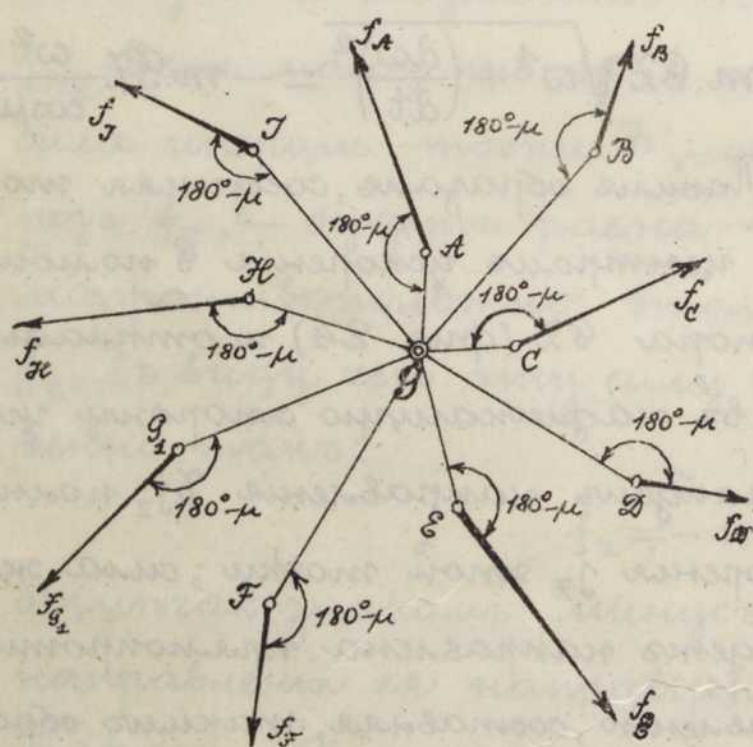


Фиг. 24.

Таким образом, соединяя точку Z с центром ускорения $\mathcal{G}$ помощью вектора $\mathcal{G}Z$ (фиг. 24) и откладывая в надлежащую сторону угол μ , найдем направление Zj_z полного ускорения j_z этой точки; сила же инерции точки Z , f_z , будет направлена прямо противоположно этому направлению, составляя, таким образом, с вектором $\mathcal{G}Z$ угол $(180^\circ - \mu)$, и будет выражена произведением $(-mj_z)$ или помощью формулы (1).

Итак, силы инерции точек системы оказываются

пропорциональными какъ массамъ точекъ, такъ и расстояніямъ этихъ точекъ до центра ускореній B , а кроме того, все опять, подобно ускореніямъ, оказываются направленными подъ однимъ и тѣмъ же угломъ ($180^\circ - \mu$) къ векторамъ, соединяющимъ точки съ центромъ ускореній и, при томъ, въ опредѣленную относительно этихъ векторовъ сторону; послѣднее обстоятельство вполне опредѣляется закономъ измѣненія угловой скорости ω , что легко сообразить на основаніи разсужденій, высказанныхъ въ свое время по аналогичному поводу при опредѣленіи направленій полныхъ ускореній j_z , — см. стр. 73—74 первой части курса; окажется, что если ω со временемъ возрастаетъ, такъ что $d\omega/dt > 0$, то силы инерціи f_z придется откладывать обратно смыслу вращенія, и наоборотъ. Такимъ образомъ, силы инерціи системы распределяются въ ней такъ, какъ это



Фиг. 25.

показываетъ фиг. 25, и уже этотъ схематическій рисунокъ заставляетъ предполагать, что въ подобной силѣ инерціи, моментовъ ихъ и прог., центру ускореній B будетъ принадлежать замѣтная роль, и мы выяснили ее теперь

путемъ непосредственныхъ вычисленій.

Полная законность, наблюдаемая какъ въ

определенности величины каждой из частицных сил инерции, такъ и въ направленіяхъ ихъ, позволяетъ предположить, что все эти силы инерции возможно просуммировать, что возможно найти некоторую результирующую силу инерции, определенную какъ по величине, такъ и по направленію, при чемъ возможно определить и точку приложенія ея. Разрешить все эти вопросы можно такъ:

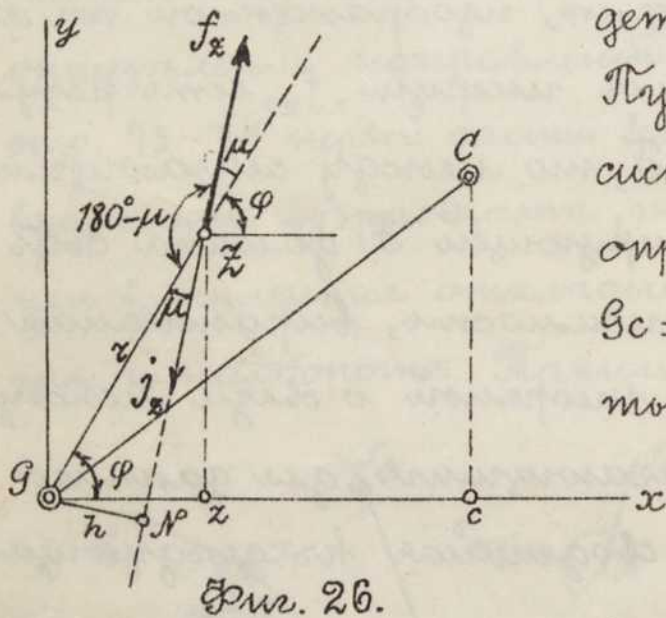
Пусть дана некоторая плоско-движущаяся система, нагруженная, кроме ряда силъ действующихъ, еще силами инерции по схеме, изображенной на фиг. 25. Если у всехъ этихъ силъ инерции, f_z , есть результирующая сила инерции F , то между слагающими силами f_z и этой результирующей F должна быть вполне определенная зависимость, выражаемая известной изъ статики теоремой о связи между равнодействующей и слагающими, для данного случая плоскаго движенія сводящейся къ слѣдующимъ требованіямъ:

1) Сумма проекцій слагающихся на каждую изъ осей координатъ должна быть равна проекціи результирующей на ту же ось, — это требованіе дастъ намъ два уравненія проекцій по двумъ осямъ координатъ. Далѣе,

2) Сумма моментовъ слагающихся относительно какой-либо точки плоскости, принятой за центръ моментовъ, должна быть равна моменту результирующей относительно той же точки; это тре-

бование дастъ намъ еще одно уравненіе, которыхъ всего получили, такимъ образомъ, три; они дадутъ намъ возможность опредѣлить величину, направленіе и точку приложения искомой результирующей.

Прежде всего условились въ выборѣ системы координатъ. За начало ея принимаемъ, ради удобства дальнейшихъ вычисленій, центръ ускореній $\mathcal{B}$, самую же систему беремъ прямоугольной, при чемъ ось x -овъ проводимъ черезъ начало $\mathcal{B}$ въ произвольномъ направленіи, — напримѣръ, горизонтально; ось y -овъ пойдеть тогда вертикально (фиг. 26).



Пустъ, далѣе, центръ тяжести системы лежитъ въ точкѣ $\mathcal{C}$, опредѣляемой координатами $\mathcal{B}\mathcal{C} = x_c$ и $\mathcal{C}\mathcal{C} = y_c$. Если координаты различныхъ точекъ системы будемъ обозначать буквами x и y , а массы

этихъ точекъ буквами m , то положеніе точки $\mathcal{C}$, т.-е. координаты x_c и y_c можно опредѣлить изъ извѣстныхъ уравненій механики:

$$\sum m x = M x_c \dots \dots \dots (2)$$

и

$$\sum m y = M y_c \dots \dots \dots (3)$$

гдѣ M есть масса движущагося тѣла. Запѣтая, что при перемѣщеніи системы перемѣщается, вообще говоря и центръ тяжести ея, можемъ считать координаты x_c и y_c центра тяжести также вели-

ликами переменными, в виду чего формулы (2) и (3) можно дифференцировать по t , и такое двукратное дифференцирование этих уравнений даст нам новые, весьма важные для механики, уравнения:

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = M \frac{d^2 x_c}{dt^2} \dots \dots \dots (2')$$

и



$$\sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = M \frac{d^2 y_c}{dt^2} \dots \dots \dots (3')$$

Заметьте это, вернемся к нашей задаче. Слагающая по осям Ox и Oy силы инерции f_z какой-либо точки Z взятой системы выразятся, очевидно, так:

$$\text{пр}_x f_z = f_z \cos(f_z, Ox) = -m j_z \cos(j_z, Ox) = -m \frac{d^2 x}{dt^2} \dots (4)$$

и

$$\text{пр}_y f_z = f_z \cos(f_z, Oy) = -m j_z \cos(j_z, Oy) = -m \frac{d^2 y}{dt^2} \dots (5)$$

Во избежание недоразумений при выводе этих формул заметим, что мы подсчитываем здесь просто проекции по осям силы f_z и ускорения j_z , в виду чего и можно принять, что $\cos(f_z, Ox)$ будет равен $\cos(j_z, Ox)$; то же имеет место и для оси Oy . Составляем теперь суммы проекций слагающих, т.е. сил инерции f_z , по осям; каждая из таких сумм даст проекцию на соответствующую ось результирующей силы инерции. Суммируя выражения типа (3) для всех точек системы, а затем и (4), находим, в виду (2') и (3'), уравнения:

$$\begin{aligned} \sum \text{пр}_x f_z &= \sum f_z \cos(f_z, Ox) = - \sum m j_z \cos(j_z, Ox) = \\ &= - \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = - M \frac{d^2 x_c}{dt^2} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\Sigma \text{пр}_y f_x &= \Sigma f_x \cos(f_x, g_y) = -\Sigma m j_x \cos(j_x, g_y) = \\ &= -\Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = -M \frac{d^2 y_c}{dt^2} \dots \dots \dots (7)\end{aligned}$$

Если бы в точке C (центр тяжести) мы сосредоточили всю массу M данного тела и подсчитали по общим формулам (4) и (5) проекции силы инерции одной этой точки C , то, очевидно, получили бы для этих проекций выражения $(-M \frac{d^2 x_c}{dt^2})$ и $(-M \frac{d^2 y_c}{dt^2})$, стоящие в правых частях только что полученных уравнений (6) и (7). Отсюда следует, что равнодействующая сила инерции, несомненно, существует и представляет собою, по величине своей, силу инерции центра тяжести в предположении, что в нем сосредоточена вся масса данного тела. Проекции этой силы инерции, — будем обозначать ее через F , — выражаются соотношениями (6) и (7).

Полученные формулы, являясь вполне общими, не дают, однако, более близких указаний на состав выражения силы F . Это могут сдѣлать более подробныя вычисления, которыя мы теперь и выполнимъ.

Обращаясь опять къ той же точке Z (фиг. 26), можемъ написать, что

$$f_x \cos(f_x, g_x) = f_x \cos(\mu + \varphi),$$

где φ есть уголъ вектора gZ съ осью x -овъ. Въслѣдствіе этого и въ виду (1) имѣемъ далѣе

$$\begin{aligned}\Sigma f_x \cos(f_x, g_x) &= \Sigma f_x \cos(\mu + \varphi) = -\Sigma m. gZ \frac{\omega^2}{\cos \mu} \cos(\mu + \varphi) = \\ &= -\frac{\omega^2}{\cos \mu} \Sigma m. gZ \cos(\mu + \varphi) \dots \dots \dots (a)\end{aligned}$$

Заметьте теперь, что

$$GZ \cos \varphi = Gz = x_z = x,$$

а

$$GZ \sin \varphi = Zz = y_z = y,$$

— точка Z есть произвольная точка системы, поэтому вместо x_z и y_z можно поставить, вообще, x и y , — находимъ далее, что

$$GZ \cos(\mu + \varphi) = GZ(\cos \mu \cos \varphi - \sin \mu \sin \varphi) = x_z \cos \mu - y_z \sin \mu, \dots (8)$$

такъ что (а) переписывается теперь такъ:

$$\begin{aligned} \sum f_z \cos(f_z, Gx) &= -\frac{\omega^2}{\cos \mu} \sum m(x_z \cos \mu - y_z \sin \mu) = \\ &= -\frac{\omega^2}{\cos \mu} (\cos \mu \sum mx - \sin \mu \sum my) = \\ &= -\frac{\omega^2}{\cos \mu} (\cos \mu \cdot Mx_c - \sin \mu \cdot My_c) = \\ &= -\frac{\omega^2}{\cos \mu} M(x_c \cos \mu - y_c \sin \mu). \dots \dots \dots (b) \end{aligned}$$

Заметьте, что для точки c соотношение (8) принимаетъ видъ

$$Gc \cos(\mu + \varphi) = x_c \cos \mu - y_c \sin \mu,$$

можемъ дать уравнению (b) видъ:

$$\sum f_z \cos(f_z, Gx) = \sum f_z \cos(\mu + \varphi) = -M \cdot Gc \frac{\omega^2}{\cos \mu} \cos(\mu + \varphi). \dots (9)$$

Такова величина проекции результирующей силы инерции F на ось x -овъ. Подобнымъ же образомъ легко получить сумму проекций силъ инерции на ось Gy :

$$\sum f_z \cos(f_z, Gy) = \sum f_z \sin(\mu + \varphi) = -M \cdot Gc \frac{\omega^2}{\cos \mu} \sin(\mu + \varphi). \dots (10)$$

Выражения (9) и (10) даютъ возможность получить величину искомой результирующей силы инерции F ; оно выразится такъ

$$F = \sqrt{[\sum f_z \cos(f_z, Gx)]^2 + [\sum f_z \cos(f_z, Gy)]^2} = -M \cdot Gc \frac{\omega^2}{\cos \mu}. \dots (11)$$

Полученное выражение уже вполне определено

указывает, что результирующая сила инерции F представляет собою силу инерции центра тяжести, вычисленную в предположении сосредоточения в центре тяжести всей массы M тела. Таким образом определяется величина этой результирующей силы инерции.

Относительно направления ее можем сказать пока лишь то, что эта сила F будет направлена прямопротивоположно ускорению j , центра тяжести. Таким образом, недостает еще указания на точку приложения этой силы инерции; получив его мы окончательно определим бы положение этой силы инерции F , ибо имеем бы 1) величину ее и 2) прямую, по которой эта сила действует; на этой прямой можно было бы выбрать какую-либо определенную точку и принять ее за точку приложения этой силы, и вопрос был бы разрешен вполнѣ. Мы теперь и займемся определением точки приложения силы инерции F , с каковой целью обратимся къ рассмотрѣнію послѣдняго, оставшагося еще неиспользованнымъ, уравненія моментовъ. Составимъ его, при чемъ за начало моментовъ возьмемъ начало системы координатъ, т.-е. точку B . Напишемъ сначала выраженіе момента одной какой-либо силы инерции, — хотя бы, напримѣръ, той же силы инерции f_x . Пусть $h = BN$ (фиг. 26) равно $BZ \sin \mu$, вслѣдствіе чего моментъ этой силы инерции f_x относи-

тельно центра $\mathcal{G}$ выразится такъ:

$$f_z \times h = -m \cdot \mathcal{G} \mathcal{Z} \frac{\omega^2}{\cos \mu} \times \mathcal{G} \mathcal{Z} \sin \mu = -m \cdot \mathcal{G} \mathcal{Z}^2 \cdot \frac{\omega^2 \sin \mu}{\cos \mu}.$$

Обозначая, ради сокращения письма, $\mathcal{G} \mathcal{Z}$ через v , можем дать этому выражению видъ:

$$f_z \times h = -m v^2 \cdot \frac{\omega^2 \sin \mu}{\cos \mu} \dots \dots \dots (c)$$

Сумма такихъ моментовъ, распространенная на все точки системы, дастъ собою моментъ результирующей. Обозначивъ этого результирующей черезъ $\mathcal{H}$, получаемъ послѣднее, третье, условіе для опредѣленія равнодѣйствующей:

$$\Sigma f_z h = \mathcal{F} \times \mathcal{H} \dots \dots \dots (12)$$

Это выраженіе, въ видѣ (c) и (11), принимаетъ видъ

$$-\Sigma m v^2 \frac{\omega^2 \sin \mu}{\cos \mu} = -M \cdot \mathcal{G} \mathcal{C} \frac{\omega^2}{\cos \mu} \times \mathcal{H} \dots \dots \dots (d)$$

Сокращая по $(-\omega^2/\cos \mu)$, находимъ болѣе простое соотношеніе для опредѣленія плеча $\mathcal{H}$:

$$\sin \mu \Sigma m v^2 = M \cdot \mathcal{G} \mathcal{C} \times \mathcal{H} \dots \dots \dots (e)$$

Сумма $\Sigma m v^2$ представляетъ собою не что иное, какъ моментъ инерціи системы относительно центра моментовъ $\mathcal{G}$. Обозначивъ этотъ моментъ черезъ $I_{\mathcal{G}}$, можемъ переписать соотношеніе (e) въ видѣ:

$$I_{\mathcal{G}} \sin \mu = M \cdot \mathcal{G} \mathcal{C} \times \mathcal{H} \dots \dots \dots (f)$$

или, обозначая $\mathcal{G} \mathcal{C}$ черезъ $\mathcal{R}$, въ видѣ

$$I_{\mathcal{G}} \sin \mu = M \mathcal{R} \mathcal{H} \dots \dots \dots (g)$$

По известной теоремѣ статики, говорящей, что моментъ инерціи около какой-либо оси (или центра) равенъ моменту инерціи относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести параллельно

данной (у насъ — относительно центра тяжести),
 ную произведение изъ массы тѣла на квадратъ
 разстоянія между осями (у насъ — разстоянія ме-
 жду центрами B и C). Такимъ образомъ, прили-
 тельно къ рассматриваемому случаю плоскаго
 движенія имѣетъ соотношение

$$J_B = J_C + MR^2,$$

поэтому выраженіе (9) переписывается такъ:

$$J_C \sin \mu + MR^2 \sin \mu = MRH,$$

откуда и получаемъ искомое выраженіе для тѣла H :

$$H = \sin \mu \left[R + \frac{J_C}{MR} \right] \dots \dots \dots (13)$$

Выраженіями (11) и (13) величина и положеніе
 результирующей силы инерціи F опредѣляются впол-
 нѣ: величина этой силы инерціи F выражается черезъ

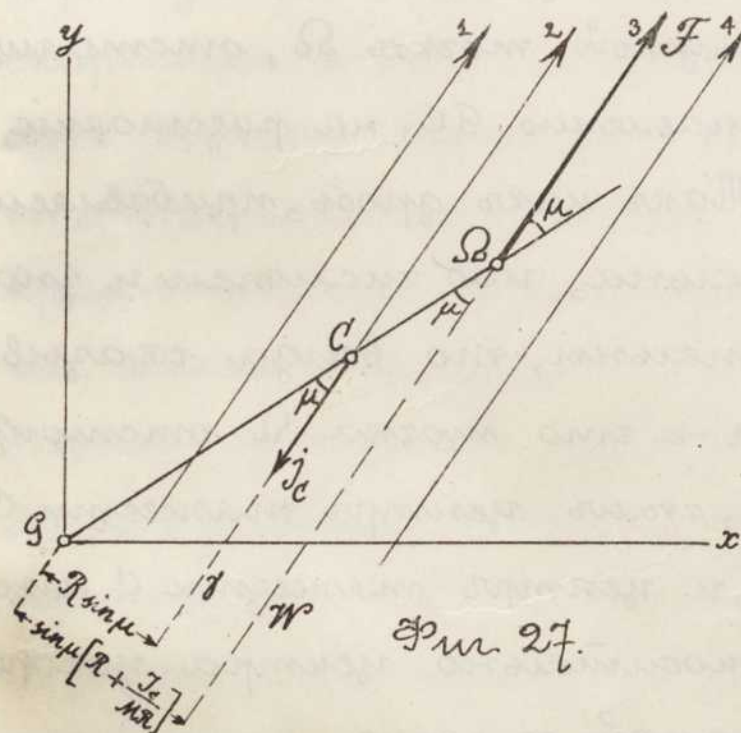
$$F = -M \cdot gC \cdot \frac{\omega^2}{\cos \mu} \dots \dots \dots (11)$$

и, следовательно, равна величинѣ силы инерціи
 центра тяжести, вычисленной въ предположеніи со-
 средоточенія въ немъ всей массы M данного тѣла.
 Направленіе этой силы инерціи F прямопротивопо-
 ложно направленію ускоренія j_C центра тяжести.
 Наконецъ, тѣло ея относительно центра ускореній
 B выражается, согласно (13), черезъ

$$H = \sin \mu \left[R + \frac{J_C}{MR} \right]$$

Посмотримъ теперь, какъ найти точку приложе-
 нія этой силы инерціи F . Для этого присмотримся
 къ полученнымъ результатамъ.

Соединимъ центръ ускорений B съ центромъ тяжести C (фиг. 27) и проведемъ прямую Cy подъ угломъ μ къ вектору BC такъ, чтобы она давала направление полного ускорения j_c точки C . Согласно сказанному выше, результирующая сила инерции F будетъ имѣть направление, обратное направлению ускорения j_c , т.-е. направление yc , и, следовательно, можетъ действовать по одной изъ прямыхъ (1), (2), (3), (4), параллельныхъ yc , въ направлении, указанномъ на нихъ стрѣлками.



Фиг. 27.

Выборъ надлежащей прямой предопредѣленъ уравненіемъ (13), дающимъ величину плеча силы инерции F относительно центра B , т.-е. дающимъ расстояние прямой, по которой действуетъ эта сила инерции, отъ цен-

тра B ; это расстояние H равно, какъ мы знаемъ, $\sin \mu \left[R + \frac{J_c}{MR} \right]$.

Если бы сила инерции F была приложена въ центръ тяжести C , то плечо ея было бы равно $BC \sin \mu$, т.-е. $R \sin \mu$, — изъ чертежа видно, что расстоянія различныхъ прямыхъ, параллельныхъ yc , отъ центра B , выражаются произведеніемъ изъ $\sin \mu$ на длину отрезка прямой BC отъ точки B до точки пересѣченія прямой BC съ той или другою параллелью.

Мы знаем, что плечо нашей результирующей силы инерции F равно $(R + \frac{J_d}{M\bar{R}}) \sin \mu$. Так как сила инерции F направлена перпендикулярно zC , то выражение плеча H ее показывает, что отрезок от точки B до точки Ω пересечения прямой, по которой действует сила инерции F , с прямой zC равен $R + \frac{J_d}{M\bar{R}}$. Итак, прямая, по которой действует сила инерции F , перескакает прямую zC , проходящую через центр ускорений B и центр тяжести C , в упомянутой точке Ω , отстоящей от начала B , по направлению zC , на расстояние $B\Omega = R + \frac{J_d}{M\bar{R}} = zC + \frac{J_d}{M\bar{R}}$. Так как дробь, прибавляемая к zC , всегда положительна, ибо числитель и знаменатель ее положительны, то всегда оказывается, что $B\Omega > zC$, т.-е. что точка Ω отстоит от точки B дальше, чем центр тяжести C , при чем и точка Ω , и центр тяжести C лежат по одну сторону относительно центра ускорений B и на одной прямой с ним.

Так определяющаяся точка Ω , занимающую в системе в каждый данный момент вполне определенное положение, ибо величины J_d , M и R являются для каждого момента вполне определенными, удобно взять за точку приложения результирующей силы F , и в таком случае величина и положение силы инерции F среди других действующих здесь сил определяется в каждый данный момент вполне: величина и направление

силы F для каждаго момента известны, известна также и точка ее приложения. Вопросъ о опредѣленіи результирующей силы инерціи разрѣшается, такимъ образомъ, вполне; остается выяснитъ роль и свойства точки Ω , — точки приложения результирующей силы инерціи F ; для этого обратимъ вниманіе на слѣдующее:

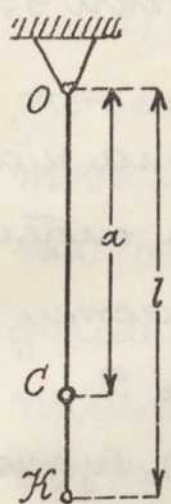
Плоское движеніе системы всегда можно представить себѣ, какъ вращеніе системы около центра ускореній $\mathcal{B}$ и параллельное перенесеніе ея со скоростью того же центра. Но въ § 14 первой части нашего курса (стр. 69—70) было указано, что это параллельное перенесеніе, являющееся здѣсь, кромѣ того, равномернымъ поступательнымъ, на девиации скоростей не вліяетъ и при разномѣрнѣйшій ускореній системы спокойно можетъ быть отброшено, — все ускоренія системы можно подсчитывать такъ, какъ если бы имѣло мѣсто только одно вращеніе системы около центра $\mathcal{B}$.

Такимъ образомъ, пока дѣло касается ускореній, а значитъ, и силъ инерціи, движеніе нашей системы можно представить себѣ, какъ послѣдовательное вращеніе ея около сдвѣгающихся другъ друга центровъ ускореній $\mathcal{B}$. Итакъ, въ каждый данный моментъ систему нашу можно разсматривать вращающейся около центра ускореній $\mathcal{B}$, — ускоренія и силы инерціи ея остаются при такомъ

настигнотомъ движеній ея тѣмъ же, какими онѣ должны быть въ действительномъ движеніи. Наша система, какъ оказывается, можетъ быть въ указанныхъ границахъ уподоблена физическому маятнику съ точкой привѣса въ центрѣ ускореній $\mathcal{B}$, — около этого центра система качается въ теченіе времени $2dt$, за которое роль центра ускореній играетъ именно взятая нами точка $\mathcal{B}$. За следующіе $2dt$ система будетъ качаться уже около другого центра ускореній $\mathcal{B}_1$, соответствующаго этому промежутку времени, и т. д. Но изъ курса физики извѣстно, что въ каждомъ физическомъ маятникѣ всегда имѣется такъ называемый центръ качаній, разстояніе коего до точки привѣса даетъ длину математическаго маятника, тождественнаго съ даннымъ физическимъ съ точки зрѣнія амплитуды и времени качанія; кромѣ того, и это самое важное, — въ этомъ центрѣ качанія можно считать приложенной результирующую всѣхъ силъ инерціи. А такъ какъ наша система, съ точки зрѣнія подгчета ускореній, а значитъ, и силъ инерціи, можетъ быть, какъ мы говорили, уподоблена физическому маятнику съ точкой привѣса въ центрѣ ускореній, то въ ней долженъ имѣться и упомянутый центръ качаній, въ которомъ, кромѣ того, должна быть приложена результирующая всѣхъ силъ инерціи.

Замѣтая, что эту результирующую силу инер-

ции F мы уже нашли, нашли также и точку ее приложения Ω , проведя теперь непосредственным вычислением само собою напрашивающееся предположение о том, не является ли выделенная и найденная нами точка Ω именно центром качания нашей системы при точке привеса B , центре качания.



Фиг. 28

Из аналитической механики известно, что каждый физический маятник может быть заменен математическим, при чем длина l последнего определяется формулой

$$l = \frac{B}{Ma}, \dots \dots \dots (15)$$

где B есть момент инерции тела физического маятника относительно точки привеса, M — масса его, a — расстояние центра тяжести маятника до точки привеса O (фиг. 28).

Далее, если на прямой OC , считая от точки привеса O , мы отложим отрезок OK , равный l , определяемой из ур-ия (15), то точка K , так получаемая, и представляет собою так называемый центр качаний данного маятника, и если мы сосредоточим в нем всю массу M тела, то и получим математический маятник, эквивалентный данному физическому с точки зрения амплитуды и времени качания.

Так как нашу систему в известном, определенном смысле можно считать физическим

маятника со точкой привеса в $\mathcal{B}$, то формула (15) должна иметь силу и для нея. Ввиду этого соображения подсчитаем длину l для нашей системы.

Момент инерции $\mathcal{B}$ есть в нашем случае момент инерции тела относительно точки $\mathcal{B}$; значит, это будет момент инерции $J_{\mathcal{B}}$.

Масса M есть масса кагающего тела и сохраним то же обозначение и для случая системы.

Наконец, расстояние a центра тяжести до точки привеса обозначено нами через R .

Ввиду этих обозначений формула (15), будучи применена к нашей системе, принимает вид:

$$l = \frac{J_{\mathcal{B}}}{MR}.$$

Полученную формулу можно преобразовать, замечая, что

$$J_{\mathcal{B}} = J_c + MR^2;$$

подстановка этого выражения в написанную выше формулу для l даст нам новую формулу для l :

$$l = \frac{J_c + MR^2}{MR} = R + \frac{J_c}{MR}, \dots \dots \dots (16)$$

что, согласно формуле (14), и есть $\mathcal{B}\Omega$, т.-е. расстояние точки приложения результирующей силы инерции F от центра Ω ; формула (16) показывает в то же время, что эта точка Ω является центром каганий данной системы: с точки зрѣнія сил инерции и ускорений, математический маятник $\mathcal{B}\Omega$, с точкой привеса в $\mathcal{B}$, и в точку Ω которого

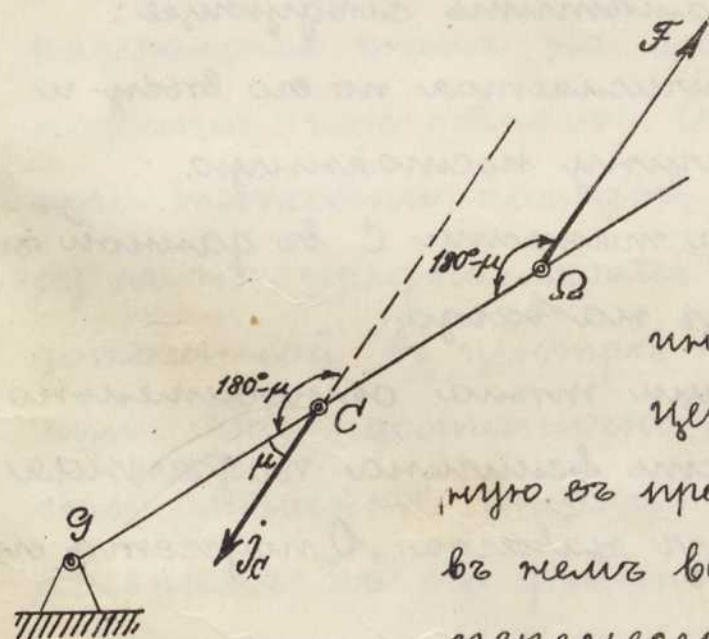
предположена сосредоточенной вся масса тела, M , будет. В точности эквивалентны нашей системе с точки зрения сил инерции и ускорений.

Итак, окончательно, мы приходим к следующему результату:

1) Всякая система, обладающая плоским движением, в течение каждого двух смежных элементов времени, $2dt$, может быть, с точки зрения определения ускорений и сил инерции, уподоблена физическому маятнику с точкой pivots в центре ускорений $\mathcal{G}$.

2) Все силы инерции плоско-движущейся системы приводятся к одной равнодействующей силе инерции $\mathcal{F}$, выражаемой через параметры системы так:

$$\mathcal{F} = -M \frac{\omega^2 R}{\cos \mu} \dots (11)$$



Фиг. 29

3) Эта равнодействующая сила инерции представляет собою не что иное, как силу инерции центра тяжести, вычисленную в предположении сосредоточения в нем всей массы тела, M , и перенесенную затем параллельно самой себе в некоторую

точку Ω прямой $\mathcal{G}\mathcal{C}$, проходящей через центр ускорений $\mathcal{G}$ и центр тяжести $\mathcal{C}$ (фиг. 29).

4) Эта точка Ω приложения равнодействующей

Всеохватная инерция представляет собою центр качания данной системы при точке прикосновения в центр ускорений Ω . При этом расстояние ΩC определяется формулой для длины математического маятника, эквивалентного данному физическому:

$$\Omega C = l = \frac{J_s}{MR} = R + \frac{J_c}{MR} \dots \dots \dots (14)$$

Иными словами, точка Ω отстоит от центра C по прямой ΩC на длину $\Omega C = J_c / MR$, при этом порядок этих трех точек таков: 1) центр ускорений Ω , 2) центр тяжести C и 3) центр качания Ω .

Что касается величин, входящих в состав выписанных основных формул (11) и (14), то относительно них можно заметить следующее:

- 1) M — масса тела, вычисляется по его весу и представляет собою величину постоянную.
- 2) Положение центра тяжести C в данной системе определяется раз навсегда.
- 3) J_c — момент инерции тела относительно его центра тяжести, — есть величина постоянная и вычисляется также раз навсегда. О подсчете его на практике см. ниже.
- 4) R , — расстояние ΩC от центра ускорений Ω до центра тяжести C , — есть величина переменная, ибо центр ускорений Ω , при движении системы, свое положение в ней меняет. Ввиду

этого будетъ меняться и положеніе центра каганій, Ω

5) Угловая скорость ω определяется условиями движенія и начальными данными; или же определяется для каждаго отдельнаго положенія системы и угла μ . Такимъ образомъ, какъ угловая скорость ω , такъ и уголъ μ представляютъ собою величины переменныя, въ виду чего будетъ переменной какъ величина результирующей силы инерціи F , такъ и направление ея и положеніе точки приложенія ея. Эта результирующая сила инерціи F подлежитъ учету при каждаго новомъ положеніи системы.

Можно замѣтить еще, что моментъ инерціи J_c можетъ быть вычисленъ приблизительно, путемъ раздробленія тѣла на малыя части, удобныя для подсчета ихъ объемовъ. Опредѣляя положеніе центра тяжести каждой такой части и зная массу ея m , предполагаемъ замѣнить эту массу сосредоточенной въ центрѣ тяжести выдѣленной части. При достаточно большомъ числѣ этихъ частей моментъ инерціи J_c получается достаточно близкимъ къ его действительному значенію, — точность такого приближительнаго подсчета можетъ быть вполне достаточной для цѣлей практики. Такъ поступаютъ, напримеръ, при подсчетѣ моментовъ инерціи шатунныхъ кривошипныхъ механизмовъ. Существуютъ также спеціальныя та-

таблицы для подсчета моментов инерции различных тел.

Итак, подсчет сил инерции в плоском движении системы никаких трудностей не представляет. Для каждого положения системы, как оказывается, существует результирующая сила инерции F , вполне определенная как по величине, так и по направлению; вполне определяется также и точка приложения ее. Имя эту результирующую силу инерции для любого положения системы, мы получаем возможность сводить рассмотрение задачи динамики, — определения всех обстоятельств движения, — на задачу статики, путем приложения к такой плоскодвижущейся системе принципа д'Аламбера в наиболее простой его форме, говорящей, что если ко всем силам, действующим на данную систему, прибавить результирующую силу инерции, то получим равновесие системы.

Ввиду этого соображения мы получаем возможность для всего комплекса сил, участвующих в плоском движении системы, т.-е. для всех действующих сил и для результирующей силы инерции F , писать обыкновенные условия равновесия, сводящиеся, ввиду плоского движения системы, к двум уравнениям проекций и одному уравнению моментов. Положение осей координат

и начала моментов можем выбирать теперь как угодно, наиболее удобным для нас образом. При этом требуется только одно: знать положение центра ускорений $\mathcal{B}$, ибо этим самым определяется фактор $R = C\mathcal{B}$ и положение центра качаний Ω .

Знание центра ускорений во вопросе о плоско-м движении системы выяснено достаточно, — помощью его определяется величина и положение столь важной для решения этого вопроса результирующей силы инерции $\mathcal{F}$.

На этом мы и закончим изложение теории о центре качания и перейдем къ изсѣдованію и разсмотрѣнію поставленных нами и сформулированных выше главнѣйшихъ задачъ динамическаго изсѣдованія движения плоскихъ механизмовъ.

§ 3. Построеніе диаграммы тангенціаль-ныхъ усилий.

Первой изъ задачъ этого изсѣдованія, разсмѣтрѣнимъ коею мы теперь займемся, является, какъ мы указывали, слѣдующая:

Имѣется кривошипный механизмъ обыкновенной паровой машины, на поршень коего действуют некоторыя силы P , измѣняющіяся по закону, представляемому кривою свободныхъ усилий. Спрашивается, какова должна быть тан-

тангенциальная сила, прилагаемая на палец кривошипа, чтобы он вращался равномерно?

Эти силы t , должны действовать касательно к окружности, описываемой пальцем кривошипа, не могут быть постоянными при произвольном законе изменения силы P ; поэтому эти силы t придется определять для ряда последовательных положений кривошипа, что, значит, даст возможность построить для этих сил их силовую кривую, иначе называемую кривой тангенциальных усилий. Посмотрим теперь, под воздействием каких сил будет находиться система шатуна в каждый данный момент.

1) Прежде всего, на поршень действует сила P окружности пара; величина этой силы для любого момента дается кривой давлений в цилиндре.

2) Далее имеем силы N и N_1 опорных сопротивлений, нормальных к поверхностям, по которым скользят концы B и C шатуна (рис. 30), т.е. к окружности радиуса AB и к прямой AC .

3) Далее, на точку B действует искомая тангенциальная сила t , нормальная в каждый данный момент к своему радиусу-вектору AB , и, наконец,

Система шатуна находится под воздействием сил инерции масс его.

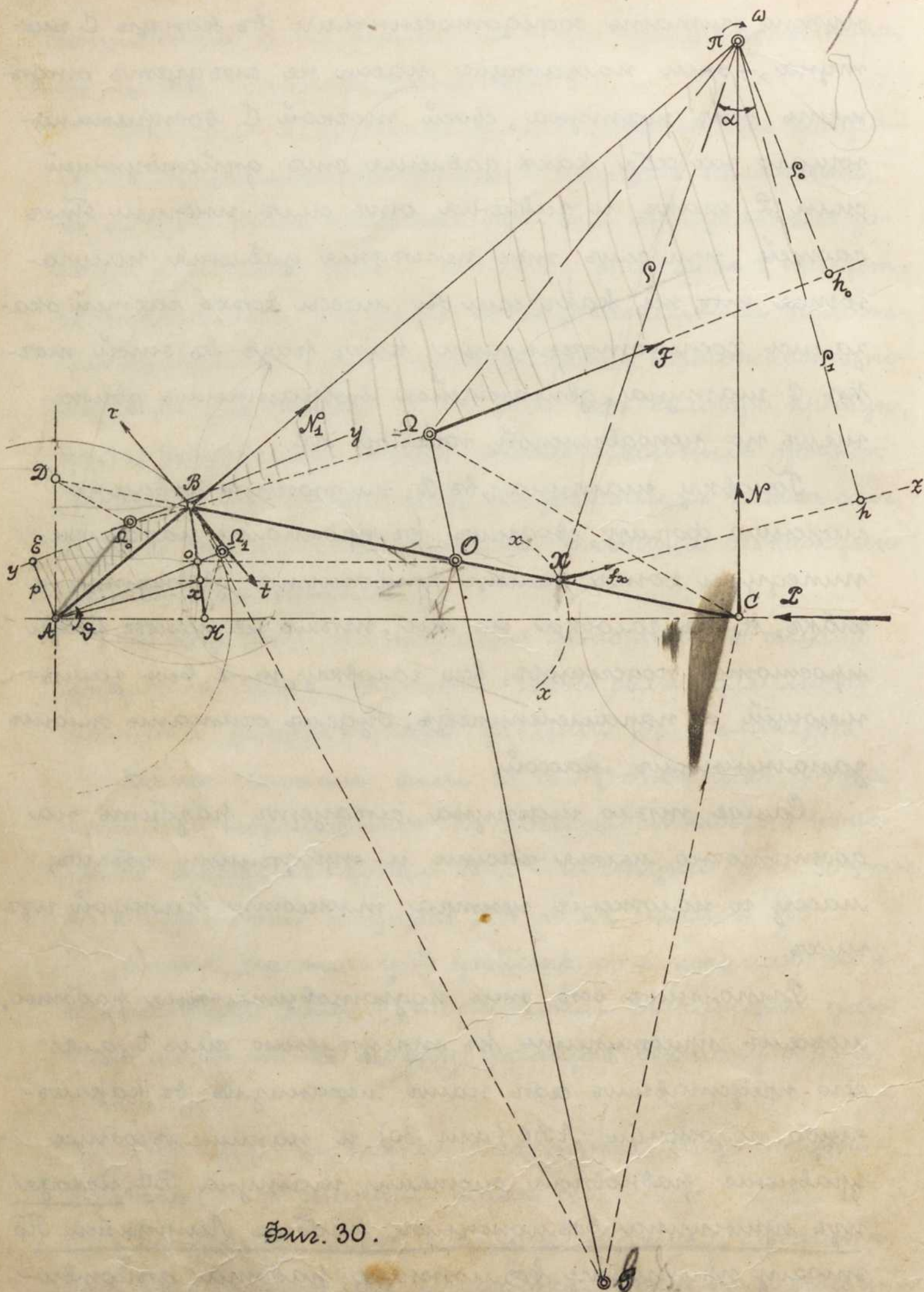
По поводу масс системы шатуна следует заметить, что массы штока, поршня и пальца

нужно считать сосредоточенными в центре C шатуна, — эти ползающие массы не стремятся оторваться от шатуна, своей точкой C воспринимая на себя как давления от действующей силы P , так и давления от сил инерции этих частей, при этом эти последние давления получаются все же, как если бы массы всех частей оказались сосредоточенными как раз в этой точке C шатуна, двигающейся обратным движением по неподвижной прямой AC .

Головку шатуна, в B , имеющую довольно сложную форму, сводим к простому параллелепипеду, и хотя палец кривошипа движется не так, как головка, но мы, тем не менее, ради простоты подсчетов, всю головку, т.-е. весь занимающий ее параллелепипед, будем считать сплошь заполненным массой.

Самое тело шатуна следует разбить на достаточно мелкие части и определить объем, массу и положение центра тяжести каждой из них.

Выполнив все эти подготовительные работы, можем приступить к определению сил t , для чего представим себе наш механизм в каком-либо положении ABC (фиг. 30) и напишем общее уравнение равновесия системы шатуна BC , исходя из принципа возможных работ Лагранжа. По этому принципу возможная работа действи-



Фиг. 30.

тельных сил и возможная работа сил инерции да-
ютъ всегда въ суммѣ нуль. Такъ какъ связи системы
отъ времени не зависятъ, — измѣненіями разнородъ
частей механизма въ зависимости отъ измѣненій
температуры и давленій на нихъ мы пренебрегаемъ, —
то действительныя перемѣщенія оказываются здѣсь
одними изъ возможныхъ, почему мы и полагаемъ воз-
можность написать здѣсь сумму элементарныхъ ра-
ботъ всехъ силъ, считая въ томъ числѣ и силы инер-
ции, при чемъ каждую изъ этихъ работъ будемъ
подсчитывать въ направленіи действительнаго пере-
мѣщенія точки приложения рассматриваемой рабо-
тающей силы. Выпишемъ эти работы отдѣльно.

Элементарная работа дѣйствующей силы P за время
 dt выразится черезъ

$$+ P v_c dt, \dots \dots \dots (a)$$

ибо элементарное перемѣщеніе ds точки C мата, въ
которой приложена эта сила P , выражается такъ:

$$ds = v_c dt,$$

гдѣ v_c есть линейная скорость поршня. Черезъ выраже-
ніемъ (a) работы мы ставимъ знакъ плюсъ для пока-
занія того, что это есть работа дѣйствующей силы.

Работы опорныхъ сопротивленій N и N_1 будутъ
равны каждая нулю, ибо эти силы N и N_1 нормаль-
ны къ поверхностямъ, по которымъ движутся то-
чки, находящіяся подъ воздѣйствіемъ этихъ силъ.

Далѣе, работа тангенціальнаго сопротивленія t
выразится черезъ $-(t \cdot v_s dt)$, а такъ какъ здѣсь

$v_B = r\vartheta$, где ϑ есть угловая скорость кривошипа, то эта работа выразится через

$$-tr\vartheta dt, \dots \dots \dots (b)$$

при чем мы поставили впереди минус для того, чтобы указать, что это есть работа сопротивляющейся, уравновешивающей силы, по самому смыслу своему противоположная работе действующей силы P .

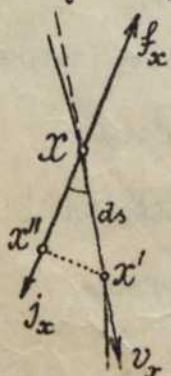
Подсчитаем, наконец, работу всех сил инерции. Для этого подытаем выражение работы одной какой-либо силы инерции, а затем просуммируем такие выражения по всем массам системы. Итак, берем какую-либо точку X шатуна; пусть масса ее равна m ; если ускорение точки X обозначим через j_x , то сила инерции точки X , f_x , выразится через $(-mj_x)$. Точка X перемещается по своей собственной траектории xx , почему работа силы инерции f_x выразится произведением из f_x на проекцию перемещения ds этой точки по направлению силы f_x , т.-е. произведением

$$f_x \cdot ds \cos(ds, f_x).$$

Заметьте, что

$$ds = v_x dt,$$

где v_x есть скорость точки X , и что проекция перемещения ds на направление силы f_x выразится еще через $ds \cdot \cos \angle X'XX''$, т.-е. через $ds \cos(v_x, j_x)$, ибо v_x направлено по ds , а f_x — противоположно j_x , как это изображено на чертеже,



можно сказать, что элементарная работа силы инерции f_x точки x выразится через

$$f_x \cdot v_x dt \cdot \cos(v_x, j_x),$$

т.-е. через

$$-mj_x v_x \cos(v_x, j_x) dt.$$

Взяв сумму таких выражений для всей системы матуна $\mathcal{B}$, получим выражение элементарной работы всех сил инерции матуна в виде

$$\Sigma[-mj_x v_x \cos(v_x, j_x) dt],$$

т.-е. в виде

$$-dt \Sigma mj_x v_x \cos(v_x, j_x) \dots \dots \dots (c)$$

В виду этого уравнение работ для системы матуна составит путем приравнения нулю суммы выражений (a), (b) и (c), и мы получим это уравнение в виде

$$+Pv dt - tr \vartheta dt - dt \Sigma mj_x v_x \cos(v_x, j_x) = 0 \dots \dots \dots (d)$$

Сокращая на dt и перенося члены со минусами в правую часть, находим уравнение:

$$Pv_c = tr \vartheta + \Sigma mj_x v_x \cos(v_x, j_x) \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение (d) и вытекающие из него уравнения (1) и следующая можно было бы и не писать в такой форме, а просто написать уравнение моментов и т. д., но мы написали и вывели уравнение (d) в такой общей форме потому, что эта форма сохраняется и тогда, когда к кривошипному механизму оказываются присоединены еще и другие механизмы, — например, механизмы насосов и т. д. В таком случае уравнение (d) пополнится членами вида $[-dt \Sigma m'j' v' \cos(v', j')]$,

но свой прежний видъ сохранить, — одинъ такой сложный механизмъ мы разберемъ ниже, по выполненіи разсмотрѣнія взятаго нами простѣйшаго механизма. После этого замѣчанія, обратимся къ разсмотрѣнію уравненія (1) и разберемъ, какъ оно строится и рисуется графически.

Планъ скоростей кривошипнаго механизма строится путемъ продолженія прямой BC до пересѣченія ея въ D съ перпендикуляромъ AD къ оси AC , возмѣщеннымъ изъ точки A этой оси. Тогда скорость v_c точки C шатуна выразится черезъ

$$v_c = AD \cdot \dot{\varphi}, \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ $\dot{\varphi}$ есть угловая скорость вращенія кривошипа.

Строимъ теперь планъ ускореній системы шатуна. Такъ какъ, по основному предположенію, $\dot{\varphi} = \text{const}$, то этотъ планъ представится треугольникомъ ABK , при чемъ ускореніе точки B изобразится векторомъ BA и будетъ равно $BA \cdot \dot{\varphi}^2$, ускореніе точки C — векторомъ KA и будетъ равно $KA \cdot \dot{\varphi}^2$, а ускореніе какой-либо точки X системы шатуна — векторомъ xA и будетъ равно $xA \cdot \dot{\varphi}^2$, при чемъ точка x представляетъ собою точку системы отрезка BK , соответствующую точке B . Если XA точка X лежитъ на BC , то соответствующая ей точка x опредѣлится, какъ извѣстно, путемъ проведенія прямой Xx параллельно AC до пересѣченія съ BK въ некоторой точкѣ x , — это и будетъ точка, соответствующая точкѣ X системы шатуна.

Итак, ускорение j_x точки X , лежащей, предположим, на прямой BC , изобразится вектором xA и будет равно $xA \cdot \vartheta^2$, так что сила инерции $(-mj_x)$ точки X выразится иначе через $(-m \cdot xA \cdot \vartheta^2)$. Эту силу, согласно уравнению (1), надо умножить на скорость v_x точки и на cos угла между v_x и j_x , и, затем, составить подобные же выражения для всей системы, взять сумму их. Так мы и сделаем.

Пусть полюс мгновенного вращения лежит в π , — см. фиг. 30 на 136 стр. В таком случае скорость v_x точки X выразится через

$$v_x = \varrho \omega,$$

где ϱ есть πX , — расстояние точки X от полюса мгновенного вращения, а ω — мгновенная угловая скорость вращения около этого полюса π , одинаковая для всех точек системы шатуна BC .

Угол между скоростью v_x и ускорением j_x , очевидно, равен углу между перпендикулярами к векторам, изображающим эти величины, т.е. углу между радиусом-вектором πX , нормальным к v_x , и перпендикуляром πh , опущенным из полюса π на направление Xx силы инерции f_x точки X . Обозначим этот угол через α . В таком случае фактор $m j_x v_x \cos(v_x, j_x)$, стоящий под знаком суммы в уравнении (1), перепишется так:

$$m j_x v_x \cos(v_x, j_x) = m \cdot xA \cdot \vartheta^2 \cdot \varrho \omega \cdot \cos \alpha,$$

вследствие чего вся сумма изобразится через

$$\omega \sum m \cdot xA \cdot \vartheta^2 \cdot \varrho \cos \alpha \dots \dots \dots (e)$$

Заметьте теперь, что

$$g \cos \alpha = \pi h = g_1,$$

— плечу силы инерции f_x относительно полюса мгновенного вращения π , можем переписать сумму (e) в виде

$$\omega \sum m \cdot x A \cdot \vartheta^2 g_1 \dots \dots \dots (f)$$

Итак, под знаком суммы оказался моментъ силы инерции одной из точек катуны, взятый относительно полюса мгновенного вращения π , и, значитъ, вся сумма выражения (f) представляет собою сумму моментовъ всѣхъ частныхъ силъ инерции относительно полюса π . Но, согласно теоремѣ о центрѣ качаній, эту сумму моментовъ представляется возможнымъ замѣнить моментомъ результирующей силы инерции F , взятымъ относительно того же центра моментовъ, т.-е. относительно полюса м.в. π . Сила инерции F , приложенная въ центръ качанія Ω , выражается такъ: мы сосредотачиваемъ въ центрѣ тяжести O катуны всю массу M системы катуны и множимъ ее на ускореніе того же центра тяжести, j_0 , т.-е. на $OA \cdot \vartheta^2$, гдѣ O есть точка отръзка BK , соответствующая центру тяжести O катуны, послѣ чего получимъ такъ силу F , имѣющую направленіе AO , обратное направленію OA ускоренія j_0 , переносимъ въ центръ качанія Ω параллельно самой себѣ, т.-е. параллельно вектору AO .

Такимъ образомъ, моментъ всѣхъ силъ инер-

ции шатуна относительно полюса π , т.-е. моментъ результирующей силы инерции F относительно π , выразится через $M \cdot OA \cdot \dot{\vartheta}^2 \cdot \varrho_0$, где ϱ_0 есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ полюса π на прямую, по которой дѣйствуетъ сила инерции F . Въ виду этого выражение (f) переписывается такъ:

$$\omega \cdot M \cdot OA \cdot \dot{\vartheta}^2 \cdot \varrho_0 = \omega \cdot M j_0 \varrho_0 \dots \dots \dots (g)$$

Неудобная для насъ величины ω и ϱ_0 можно исключить при помощи подобныхъ фигуръ, зная имѣющихся. Угловая скорость ω выражается черезъ угловую скорость $\dot{\vartheta}$ при помощи соотношенія

$$v_B = AB \cdot \dot{\vartheta} = \omega \cdot \pi B = r \dot{\vartheta},$$

откуда

$$\omega = \frac{r \dot{\vartheta}}{\pi B} \dots \dots \dots (h)$$

Далѣе, отыскивая въ планѣ скоростей ABB точку Ω_0 , соответствующую центру качанія Ω , какъ некоторой точке, принадлежащей системѣ шатуна, мы должны были бы на основаніи DB построить $\triangle DB \Omega_0$, подобный $\triangle$ -ку $CB \Omega$, при чемъ эту точку пришлось бы отыскивать по ту сторону отъ DB , по какую точка Ω лежитъ относительно шатуна CB , т.-е. если Ω лежитъ по ту же сторону отъ BC , что и полюсъ π , то Ω_0 будетъ лежать по ту же сторону отъ BD , что и полюсъ A на скоростей, — точки A и π одна другой соответствуютъ. Легко видѣть, что $A \Omega_0 \parallel \pi \Omega$, ибо $\triangle A \Omega_0 B \sim \triangle \pi \Omega B$.

Проводимъ теперь черезъ точку Ω_0 прямую yy

параллельно результирующей силе инерции $F_{ин}$, то то же, вектору OA , и опускаем на эту прямую yy из центра A перпендикуляр $A\varepsilon = r$. Так как $A\Omega_0 \parallel \pi\Omega$, затем $yy \parallel \Omega h_0$ и, наконец, $A\varepsilon \parallel \pi h_0$, — два этих отрезка перпендикулярны каждой из одной из двух параллельных линий yy и Ωh_2 , — то треугольники $A\varepsilon\Omega_0$ и $\pi h_0\Omega$ подобны, вследствие чего можем написать, что

$$A\varepsilon : \pi h_0 = A\Omega_0 : \pi\Omega;$$

а так как треугольники $A\Omega_0 B$ и $\pi\Omega B$ подобны, ибо точки Ω и Ω_0 , A и π , суть точки соответственные, то

$$A\Omega_0 : \pi\Omega = AB : \pi B = r : \pi B,$$

так что, обозначив $A\varepsilon$ через r , имеем

$$r : \varphi_0 = r : \pi B,$$

вследствие чего множитель $\omega\varphi_0$, входящий в состав выражения (g), может быть представлен иначе так:

$$\omega\varphi_0 = \frac{r\vartheta \cdot \varphi_0}{\pi B} = \frac{r}{\varphi_2} \cdot \vartheta \varphi_2 = r\vartheta, \dots \dots \dots (k)$$

поэтому это выражение (g) переписывается так:

$$\omega M j_0 \varphi_0 = M j_0 r \vartheta. \dots \dots \dots (l)$$

Ввиду соотношений (2), (g) и (l), уравнение (1) переписывается так:

$$P \cdot A \vartheta \vartheta = t r \vartheta + M j_0 r \vartheta,$$

что, по сокращении на ϑ , дает окончательное уравнение для определения неизвестной силы t :

$$P \cdot A \vartheta = t r + M j_0 r. \dots \dots \dots (3)$$

Полученное уравнение можно интерпретировать

такъ: если силу P , действующую на ползунъ C , перенести параллельно самой себѣ въ точку D плана скоростей, соответствующую точку C , а результирующую силу инерціи F , приложенную въ центръ качанія Ω , перенести также параллельно самой себѣ въ точку Ω_0 плана скоростей, соответствующую центру качанія Ω , то моментъ действующей силы P относительно полюса A плана скоростей, т.-е. $P \cdot AD$, будетъ равенъ суммѣ моментовъ силы тангенціального сопротивленія t и результирующей силы инерціи F , взятыхъ относительно того же полюса A плана скоростей, при чемъ силы t и F предположены перенесенными въ планъ скоростей указанными выше способами.

Во избежаніе недоразумѣній отмѣтимъ, что переносъ силы t въ планъ скоростей, при взятіи построеній этого послѣдняго, является уже выполненнымъ, ибо точка B приложения силы t является въ то же время точкой плана скоростей, соответствующей точкѣ B шатуна.

Такимъ образомъ, весь процессъ опредѣленія неизвѣстнаго тангенціального усилія t , вызывающаго при данныхъ условіяхъ равномерное вращеніе кривошипа, можетъ быть вкратцѣ охарактеризованъ такъ:

Имѣется кривошипный механизмъ $ABCD$ (см. фиг. 30 на 136 стр.); въ точку C его, по направленію CA (или AC , — это зависитъ отъ фазы хода),

действует сила P , изгибающаяся по известному закону, данному заранее. При движении механизма развиваются, кроме того, силы инерции, которые, как мы видели выше, возможно просуммировать и свести къ некоторой вполне определенной силе инерции F , результирующей для всех частных сил инерции, имеющей своей точкой приложения центр качания системы шатуна, Ω . При таких условиях тангенциальное сопротивление t , могущая поддерживать равномерное вращение кривошипа, определяется так:

Строим план скоростей $A\Omega B$ для системы шатуна и находимъ въ немъ точки D, Ω_0, B , соответствующія точкамъ C, Ω, B приложения силъ P, F и t . Въ такъ полученные точки D, Ω_0 и B плана скоростей переносимъ затѣмъ параллельно самимъ себѣ все эти силы P, F и t , — каждую въ свою точку: P въ D , F въ Ω_0 и t въ B , — и определяемъ плечи ихъ $p, A\Omega$ и z относительно полюса A плана скоростей. Пишемъ затѣмъ уравненіе моментовъ всехъ перенесенныхъ силъ относительно полюса плана скоростей, принимая во вниманіе и знаки этихъ моментовъ, согласно общему правилу, по которому считаемъ положительными тѣ моменты, кои стремятся вращать систему по часовой стрѣлкѣ, — отрицательными же — противъ нея. Такимъ образомъ, въ данномъ случаѣ для определения силы t по-

получится простое уравнение 1^{ой} степени относительно t :

$$-L \cdot AD + t\tau + Fp = 0,$$

сводящееся къ нашему уравнению (3). Величина результирующей силы инерции F , какъ известно, равна Mj_0 , направление же ее также вполне определено для каждаго положенія механизма.

Само собою разумеется, что планъ скоростей, ADB , вовсе не обязательно пристраивать къ схемѣ механизма, какъ это, напримеръ, выполнено на фиг. 30; его можно построить и едѣ-либо отдѣльно, какъ это и выполнено на фиг. 31. Ходъ разсуждений остается при этомъ, понятно, тотъ же: если полюсъ плана скоростей есть точка a_0 , а точки, соответствующія точкамъ C , Ω и B , будутъ представлены точками a_0^C , Ω_0 и b_0 , то переносъ силъ L , F и t въ эти точки дастъ возможность составить уравненіе, аналогичное уравненію (3) и дающее то же значеніе для t , что и уравн. (3). Дѣйствительно, если планъ скоростей, такъ нами отдѣльно построенный, будетъ тождественъ съ прежнимъ планомъ ADB , что будетъ тогда, когда масштабы скоростей будутъ въ обоихъ случаяхъ одинаковы, такъ что, напримеръ, $v_c = AD \cdot \vartheta = a_0 \cdot \vartheta$, откуда $AD = a_0$, и т. д., то новое уравненіе моментовъ будетъ тождественно съ (3). Если же новый планъ будетъ построенъ въ иномъ масштабѣ, такъ что $v_c = AD \cdot \vartheta = a_0 \cdot \vartheta_0$, то это сведется и

къ тому, что плечи AD , p и z измѣнятся теперь въ одномъ и томъ же отношеніи ϑ_0/ϑ одновременно, что, очевидно, на величину t не отразится нисколько. Действительно, определяя t изъ (3), находимъ:

$$t = \frac{P \cdot AD - M_0 \cdot p}{z},$$

откуда заключаемъ, что вѣлѣсто AD , p и z можно подставить отрезки $n \cdot AD$, $n \cdot p$, $n \cdot z$, где n есть произвольное число, — на величину силы t такое измѣненіе плечъ въ одномъ и томъ же отношеніи n не отражается ничѣмъ.

Во многихъ положеніяхъ механизма центръ ускореній ϑ удаляется изъ предполагаз гертежа, и въ такихъ случаяхъ отысканіе положенія центра качанія Ω прямымъ путемъ фактически становится невозможнымъ. Тѣмъ не менѣе отысканіе въ планѣ скоростей точки Ω_0 , соответствующей центру качанія Ω , можетъ быть выполнено всегда при помощи слѣдующихъ очевидныхъ соображеній:

Система шатуна BC въ планѣ ускореній ABK (фиг. 30) изображается системой отрезка BK , такъ что каждой точкѣ шатуна соответствуетъ единственная, вполне определенная точка отрезка BK . Если теперь этотъ отрезокъ BK мы снабдимъ по всей длинѣ его массой такъ, чтобы соответственная точка шатуна BC и отрезка BK оказались снабженными однимъ и тѣмъ же массой, и определимъ центръ

каганія Ω_1 этого матеріальнаго отръзка BK , то, очевидно, эта точка Ω_1 будетъ соответствующею для центра каганія Ω шатуна BC , при чемъ роль центра ускореній для отръзка BK будетъ играть полюсъ A плана ускореній; подобнымъ же образомъ центръ тяжести такого матеріальнаго отръзка BK придется въ точку O , соответствующую центру тяжести O шатуна BC . Такъ какъ точки Ω и Ω_1 соответственны, то треугольники $B\Omega C$ и $B\Omega_1 K$ подобны, а такъ какъ треугольникъ $B\Omega C$ подобенъ треугольнику $B\Omega_0 D$ плана скоростей, гдѣ Ω_0 есть точка этого плана, соответствующая центру каганія Ω , то, окончательно,

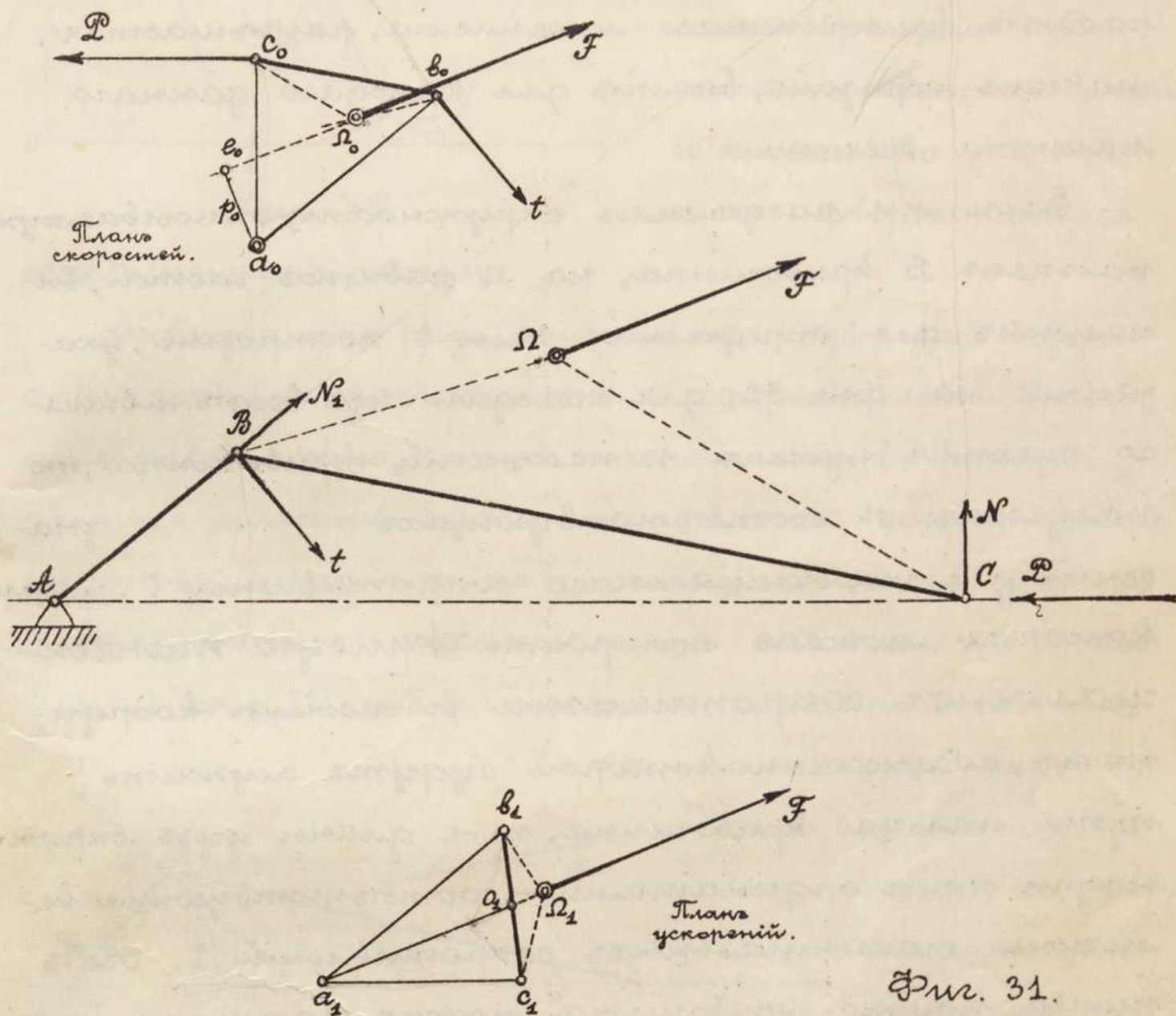
$$\triangle B\Omega_0 D \sim \triangle B\Omega_1 K.$$

Такимъ образомъ, обращаясь къ центру ускореній Ω , въ сущности, незачѣмъ, — для нахождения нужной намъ точки Ω_0 плана скоростей достаточно снабдить отръзокъ BK массой шатуна такъ, какъ это было указано выше, опредѣлить положеніе центра каганія его Ω_1 , принявъ центръ ускореній его лежащимъ въ полюсѣ A плана ускореній, и на отръзкѣ BD плана скоростей построить треугольникъ $B\Omega_0 D$, подобный поугиблившемуся треугольнику $B\Omega_1 K$. При этомъ надо внимательно слѣдить за тѣмъ, чтобы точка Ω_0 занимала въ планѣ скоростей такое же положеніе относительно отръзка DB и полюса A плана, какое центръ каганія Ω занимаетъ въ системѣ шатуна

относительно шатуна BC и полюса мгновенного вращения Π ; иными словами, если центр качания Ω лежит по ту же сторону относительно шатуна BC , что и полюс мгновенного вращения Π , то в плане скоростей точка Ω_0 будет лежать по ту же сторону относительно отрезка BC , по какую относительно него лежит полюс A плана скоростей, и обратно.

Таким образом, уравнение (3) может быть получено так: строим план скоростей $a_0c_0b_0$ данного кривошипного механизма и план ускорений его, $a_1b_1c_1$ (фиг. 31), — одинаковыми буквами, с различными знаками, обозначены соответствующие точки. Оба плана строим отдельно от схемы данного механизма. Снабдив отрезок b_1c_1 массами шатуна, находим центр качания Ω_1 такого материального отрезка b_1c_1 , принимая за центр ускорений его полюс a_1 плана ускорений. Находим, далее, в плане скоростей точку Ω_0 , соответствующую точке Ω_1 системы отрезка b_1c_1 , и переносим в нее результирующую силу инерции, F , равную Mj_0 , параллельно ее действительному направлению, т.-е. параллельно a_1o_1 , где точка o_1 есть центр тяжести материального отрезка b_1c_1 . Далее, в точках c_0 и b_0 переносим, опять параллельно самим себе, силы P и t , и носитель этого оказывается, что, для возможности равномерного вращения криво-

воинна, сумма моментов такъ перенесенныхъ силъ F , P и t относительно полюса a_0 плана скоростей должна быть равна нулю, что приводитъ къ уравнению: $-P \cdot a_0 c_0 + t \cdot a_0 b_0 + F \cdot p_0 = 0$, аналогичному ур-ию (3). Отсюда находимъ исконое t .



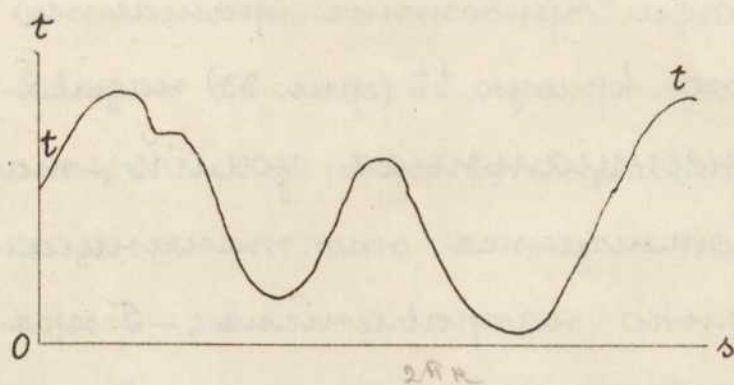
Фиг. 31.

Что касается силъ N и N_1 нормальныхъ сопротивлений, то они, давая, очевидно, моменты, равные каждый нулю, въ уравнение моментовъ не войдутъ; для опредѣленія ихъ придется написать уравнения проекцій на оси x и y и решить ихъ.

Такимъ образомъ, при извѣстныхъ L и F мы определяемъ сначала тангенціальное усилие t , затѣмъ, изъ уравненія проекцій на ось x , силу N_1 и, наконецъ, изъ уравненія проекцій на ось y , силу N . Вопросъ о величинѣ всѣхъ силъ, участвующихъ въ работѣ кривошипнаго механизма, разрѣшается, такимъ образомъ, вполне для каждаго даннаго момента времени.

Если мы разделимъ окружность, описываемую пальцемъ B кривошипа, на n равныхъ частей, выполнимъ для опредѣленія силы t построение, указанное на фиг. 31, для каждаго изъ выдѣлившихся такимъ путемъ n положеній кривошипа, то получимъ n соответствующихъ значений для тангенціального сопротивленія t , изъ которыхъ можемъ построить кривую тангенціальныхъ сопротивленій въ системѣ координатъ, абсциссами которой будутъ служить пути пальца кривошипа, т.-е. длины дугъ окружности его, а ординатами — соответствующія величины тангенціальныхъ сопротивленій t . Сеть путей пальца кривошипа можно начинать отъ любого положенія кривошипа, — напримеръ, отъ мертваго и т.п. Отложивъ, такимъ образомъ, для n положеній кривошипа, n значений t , т.-е. n ординатъ, и соединяя свободные концы этихъ ординатъ непрерывной кривой, мы и получимъ кривую идеальныхъ тангенціальныхъ усилий, tt ,

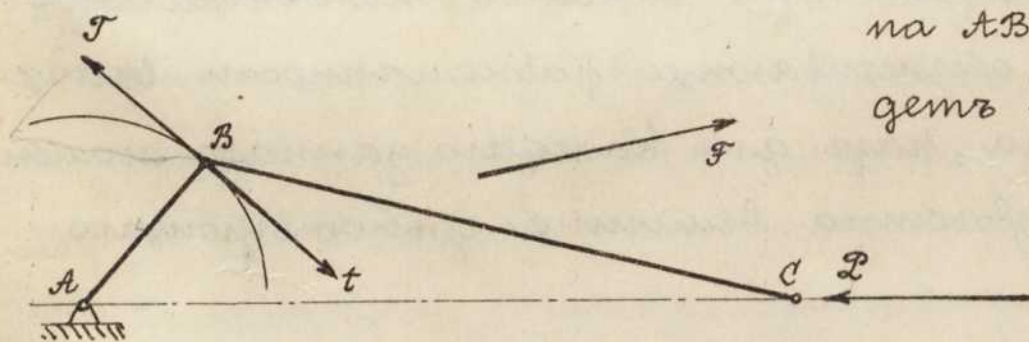
подобная изображенной на фиг. 32. Усилия, даваемые этой кривой, и представляют собою то тангенциальное сопротивление, которая должны были бы быть при-



Фиг. 32.

совершенно равномерно.

Очевидно, что раз кривошип, подвергаясь воздействию таких тангенциальных сопротивлений, вращается равномерно, то это значит, что в каждый данный момент это тангенциальное сопротивление уравновешивает собою тангенциальное же давление T , оказываемое механизмом на палец криво-



Фиг. 33.

на AB около оси A будет возможно лишь тогда, когда момент действующей на

него силы T будет равен моменту сопротивления t , взятому относительно того же центра моментов. Возьмем за этот центр точку A, имеем условие равномерного вращения кривошипа: $T \cdot AB = t \cdot AB$, откуда и находим, что в таком случае должно иметь место равенство $t = T$.

Отсюда заключаемъ, что кривая tt представляет собою въ то же время кривую тангенциальныхъ давлений, оказываемыхъ механизмомъ на палецъ кривошипа въ томъ случаѣ, когда кривошипъ вращается равномерно. Въ виду этого кривую tt (фиг. 33) называютъ иначе кривой тангенциальныхъ усилий, — тангенциальное усилие T отличается отъ тангенциального сопротивления t только направлениемъ, — T прямо противоположно t и равно ему.

Если бы у насъ имѣлась не паровая машина, а какой-либо другой двигатель, то вся разница съ предыдущимъ свелась бы къ иному закону измѣненія свободнаго давления P на ползунъ C , и только. Самый же ходъ разсуждений остался бы прежнимъ. Не внесено было бы въ него никакихъ измѣненій и въ томъ случаѣ, если бы сила P измѣнялась по любому произвольному закону, — мы всегда можемъ подсчитать искомое тангенциальное сопротивление, обеспечивающее равномерность вращенія кривошипа, разъ для каждаго даннаго момента намъ извѣстна величина дѣйствующаго усилия P .

Само собою разумѣется, что заданіе движенія точки B можетъ быть и другимъ, — можетъ быть представлено, напримеръ, требованіе, чтобы точка B вращалась равномерно ускоренно или какъ-нибудь иначе. Въ такихъ случаяхъ центръ ускореній, а вѣдъ за этимъ и центръ качаній, окажутся

занимающими иныя положенія, отличныя отъ положеній, занимаемыхъ при равномерномъ вращеніи, но на ходъ рѣшенія задачи о опредѣленіи тангенціальныя усилий T это обстоятельство не повліяло бы нисколько, — мы опять получили бы уравненіе моментовъ, аналогичное ур-ію (3), изъ котораго получили бы нужное намъ значеніе t , а зна-читъ, и T .

Отмѣтивъ, наконецъ, что для простаго кривошипнаго механизма къ уравненію работъ прибѣгать, въ сущности, незачѣмъ, — можно удовлетво-ряться уравненіемъ моментовъ всѣхъ силъ отно-сительно полюса мгновеннаго вращенія P , посиль-его, пользуясь подобіемъ треугольниковъ, получаю-щихся въ системѣ шатуна и въ планѣ скоростей, можно будетъ замѣнить тѣ или другіе неу-добные отрезки другими, болѣе удобными; ре-зультатъ, понятно, получится бы тотъ же, что и при помощи уравненія работъ, и если мы и воспользовались все-таки именно этимъ уравне-ніемъ работъ, то только потому, что оно явля-ется самымъ общимъ, одинаково применимымъ во всѣхъ, сколь-угодно запутанныхъ, случаяхъ сложныхъ системъ, давая всегда вполне точный и опредѣленный отвѣтъ.

Итакъ, предположивъ, что коренной валъ кри-вошипнаго механизма вращается равномерно,

мы вывели, что тангенциальные усилия будут зависеть при этом по некоторой определенной кривой, называемой кривой тангенциальных усилий. Эти усилия появляются в результате воздействия на механизм как действующей силы P , так и сил инерции кагающихся и ползающих масс механизма. При этом известно, что силы P зависят по закону, даваемому некоторой также вполне определенной кривой, — это может быть кривая свободных усилий или какая-либо другая. Относительно упомянутой выше кривой тангенциальных усилий необходимо обратить внимание на следующее весьма важное обстоятельство:

Принимая во внимание, что работа действующих сил уходит на работу сопротивлений, вредных и полезных, и на увеличение живой силы масс системы, и предположив, что движение машины есть движение установившееся, — машина работает правильно периодически, при чем период равен времени полного оборота кривошипа; заключаем, что за время кагдого такого периода увеличение живой силы будет равно нулю. Отсюда следует, что за кагдый период работа сил действующих будет в точности равна работам как тангенциальных сопротивлений, так и сопротивлений сил трения. Заключая, далее, что при написании уравнения работ мы не принимали во внимание работы вредных со-

противлений, т.-е. работы трения, — мы указывали, что работы нормальных сил, N и N_1 будут равны нулю, ибо эти силы нормальны къ поверхностямъ соприкосновения, но это правильно лишь по отноше-
 нию къ силамъ N и N_1 , но является совершенно не-
 правильнымъ по отношению къ вызываемымъ этими силами силами трения, — мы приходимъ къ заклю-
 ченію, что при такомъ предположеніи работа дей-
 ствующихъ силъ P за каждый оборотъ машины
 будетъ равна работѣ тангенціальнымъ сопроти-
 вленийъ за то же время, что сводится оконча-
 тельно къ тому, что площади кривой свободныхъ
 усилий P и кривой тангенціальнымъ усилий
 t , взятыхъ для одного оборота кривошипа,
 при одинаковыхъ масштабахъ усилий и путей, бу-
 дутъ другъ другу равны. За части періода эти
 работы, вообще говоря, будутъ неодинаковы, ибо,
 хотя, по предположенію, кривошипъ и вращает-
 ся равномерно, но зато какъ шатунъ, такъ и
 ползунъ съ соединенными съ ними наглухо мас-
 сами, движутся неравномерно, въ виду чего жи-
 вая сила ихъ будетъ испытывать то приростъ,
 то убыль, и, значитъ, часть работы силъ P будетъ
 уходить на это измѣненіе живыхъ силъ; при
 указанныхъ условіяхъ приращенія живой силы за
 одинъ періодъ работы машины цѣлкомъ погер-
 паются убылями ея за тотъ же періодъ, такъ
 что, въ сущности, работы со стороны силъ P на

такія измѣненія живой силы, въ сущности, не требуются совсѣмъ: доля работы, употребляемая за некоторое время на покрытие убыли живой силы, будетъ машинно возвращена обратно за счетъ положительной замѣлы увеличения живой силы. Въ виду эта работа силы L за одинъ оборотъ кривошипа будетъ, въ концы концовъ, цѣлкомъ передана на главный валъ за одинъ же оборотъ его, — потеря работы, говоря суммарно, по пути передачи ее отъ поршня къ кривошипу не будетъ, и вся разниа въ этихъ работахъ будетъ сводиться лишь къ тому, что распределение работъ по соответствующимъ другъ другу участкамъ хода поршня и пальца кривошипа будетъ различно. X

Нетрудно разобратся въ вопросъ объ опредѣленіи тангенціальнаго усиія и въ томъ случаѣ, когда механизмъ представляетъ собою сколь угодно сложную кинематическую цѣть, на одно или на несколько звеньевъ которой дѣйствуютъ различныя силы, законъ измѣненія которыхъ предполагается, при этомъ, извѣстнымъ. Помощью того же уравненія работъ мы получимъ снова простое уравненіе первой степени, изъ котораго и сможемъ опредѣлить искомую тангенціальную силу t для любого положенія механизма и, значитъ, сможемъ построить и кривую тангенціальнаго усиія.

Для определенности разсуждений разберемъ какой-либо сложный механизмъ, — хотя бы, напримеръ, механизмъ, изображенный на фиг. 34. Механизмъ этотъ состоитъ изъ обыкновеннаго кривошипнаго механизма ABC , помощью рычага DE сопряженнаго съ направляющимъ механизмомъ Чебышева, $MEHN$, точка K звена EH котораго въ известныхъ пределахъ движется почти прямолинейно, почти не отходя отъ некоторой прямой KL , служащей, въ то же время, осью, допустимъ, насоснаго цилиндра W .

Пусть на ползунъ C действуетъ все время некоторая сила P , изменяющаяся по какому-либо закону, заранее намъ данному; эта сила можетъ представлять собою или свободное усилие, если имеемъ случай паровой машины, или, вообще, некоторое усилие, перемещающее поршень, если имеемъ, вообще, некоторый источникъ энергiи. Для насъ важно лишь то, чтобы намъ былъ известенъ законъ изменения силы P , т.-е. чтобы величина и направление давления на ползунъ были известны для каждаго даннаго момента.

Пусть, далее, вдоль стержня KL , представляющаго собою штокъ поршня насоса W и перемещающагося вдоль оси цилиндра W , почти не отклоняясь отъ нея, действуетъ все время сила R полезнаго сопротивленiя, изменяющаяся также по вполне определенному закону, данному намъ заранее. Такимъ образомъ, силы P и R будутъ дей-

ствовать каждая все время или по своему собственному направлению или по прямо ему противоположному.

Далѣе, нашъ механизмъ, во время движенія его, находится подъ воздѣйствіемъ ряда силъ инерціи кажающихся частей: BC , DE , EH , ME и HN , изъ коихъ двѣ послѣднія представляютъ собою коромысла, вращающіяся около осей M и N . Что касается силъ инерціи ползающихъ по KL частей, то ее можно или включить въ составъ силы R или, при малыхъ массахъ и скоростяхъ поршня и штока, прямо отбрасывать. Мы предположили ее слишкомъ большой для того, чтобы ее можно было пренебречь и включили ее въ составъ силы R .

Наконецъ, на пальцы B кривошипа AB приложена некоторая тангенціальная сила сопротивленія t , принимающая въ каждый моментъ такое значеніе, что угловая скорость ϑ кривошипа оказывается постоянной. Сила t есть, какъ мы знаемъ, сила перемѣнная, которую придется опредѣлять для каждаго новаго положенія механизма, и на выбранномъ частномъ примѣрѣ мы и познакомились съ методомъ опредѣленія ея, одинаково приложимымъ ко всякимъ механизмамъ вообще.

Напишемъ примѣнительно къ нашему механизму уравненіе работъ для всѣхъ силъ, считая въ томъ числѣ и силы инерціи, при чемъ всѣ эти

работы подсчитаемъ для одного и того же, произволь-
но выбраннаго, безконечно-малаго промежутка време-
ни dt .

Элементарныя работы силъ P , t и R за время dt
выразятся черезъ

$$+ P v_c dt, \dots \dots \dots (\alpha)$$

$$- t v_b dt \dots \dots \dots (\beta)$$

и

$$- R v_k dt, \dots \dots \dots (\gamma)$$

при чемъ у работы (α) силы P знакъ плюсъ поста-
вленъ для того, чтобы отнѣсѣть, что это есть ра-
бота силы дѣйствующей; работы (β) и (γ) предсто-
вятъ собою работы сопротивленій, что и отнѣсе-
но постановкой впереди ихъ знака минусъ. За-
мѣчая, что скорость v_c имѣетъ направленіе, совпа-
дающее съ направленіемъ дѣйствія силы P , дѣйствующей
на точку C , а скорости v_b и v_k противоположны
направленіямъ силъ, дѣйствующихъ на точки B
и K , можемъ перефразировать правило знаковъ ра-
ботъ еще и такъ: если направленіе силы совпада-
етъ съ направленіемъ скорости точки, т.-е. съ на-
правленіемъ перемѣщенія точки, то работа счи-
тается положительной, что и отнѣсается зна-
комъ плюсъ, и обратно.

Кромѣ работъ трехъ упомянутыхъ силъ, мы
имѣемъ еще работы силъ инерціи всѣхъ движущих-
ся частей; подготомъ ихъ мы теперь и займемся.
Начнемъ съ кривошипа AB , затѣмъ разберемъ рыча-
ги DE и EH , коромысла EM и HN и, наконецъ, штокъ
 KL (фиг. 34 на 165 стр.)

Кривошип AB , по условию, вращается равномерно; отсюда следует, что все ускорения точек его суть ускорения нормальные и, при том, не меняющаяся с течением времени. Все они будут направлены к центру вращения A по радиусам-векторам, соединяющим точки кривошипа с центром A . Отсюда следует, что силы инерции масс кривошипа будут при этих условиях направлены по тем же радиусам-векторам, соединяющим точки с центром A , но прямо противоположно ускорениям, т. е. от A . Так

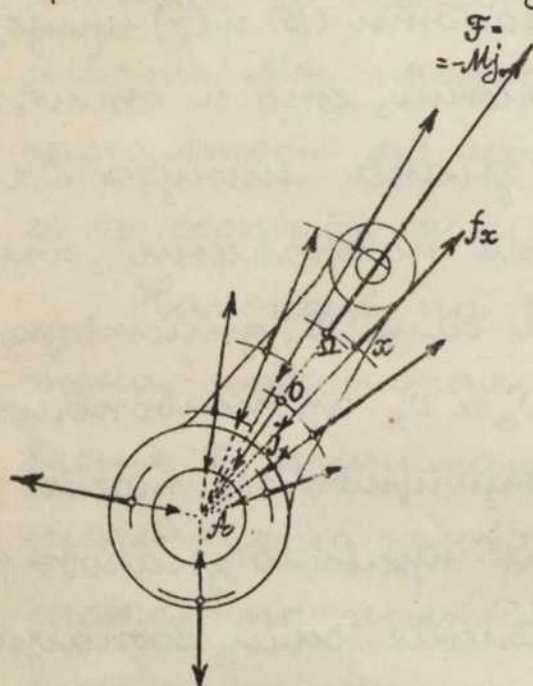
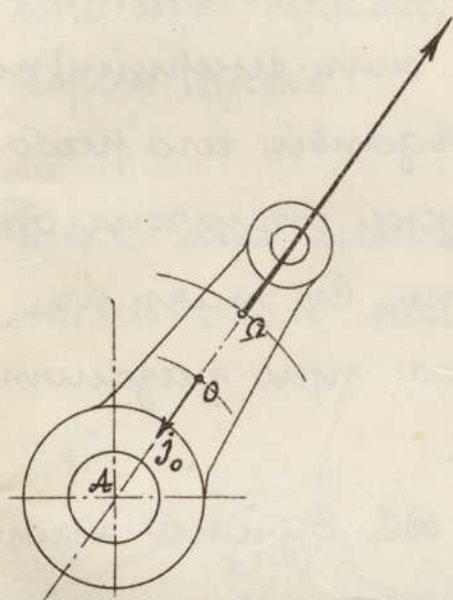


Fig. 35

как точки приложения этих сил инерции, как точки кривошипа, движутся по концентрическим окружностям центра A , вследствие чего перемещения точек будут все время перпендикулярны направлению действующих на них сил инерции, — они направлены по радиусам этих

окружностей), то работа каждой отдельной силы инерции, возникающей в системе кривошипа, будет равна нулю, вследствие чего будет равна нулю и сумма всех работ сил инерции кривошипа. То же заключение будет иметь силу и для каждой системы, равномерно вращающейся вокруг оси, — сумма работ сил инерции ее всегда будет равна нулю.

Къ тому же заключенію придемъ и помощью теоремы о центрѣ казанія. Принимая во вниманіе, что, при равномерномъ вращеніи кривошипа, роль центра ускореній играетъ центръ вращенія A , — ускоренія всѣхъ точекъ, какъ нормальныя, j_n , выражаются здѣсь черезъ $\vartheta^2 r$, т.-е. пропорціональны разстояніямъ точекъ отъ центра A , — замѣтая далѣе, что, при неизмѣнности расположенія массъ системы, центръ тяжести O будетъ сохранять въ ней одно и то же положеніе, находясь все время на разстояніи AO отъ центра вращенія и перемѣщаясь по окружности радиуса AO (фиг. 36), заключаемъ,



Фиг. 36.

что и центръ казанія Ω своего положенія въ системѣ мѣнять не будетъ и, значитъ, при вращеніи системы будетъ перемѣщаться по окружности радиуса $A\Omega$. Въ немъ будетъ приложена результирующая сила инерціи F , равная произведенію изъ массы системы M на ускореніе j_0 центра тяжести O ея, равное $\vartheta^2 \varrho$, гдѣ $\varrho = AO$. Такъ какъ ускореніе j_0 , какъ нормальное, направлено по радиусу-вектору AO , соединяющему центръ тяжести O съ центромъ вращенія A , отъ O къ A , то сила инерціи F будетъ направлена по тому же радиусу-вектору AO , но обратно j_0 , т.-е. отъ A къ O ; значитъ, эта результирующая сила инерціи направлена по радиусу $A\Omega$ окружности, описываемой при вращеніи кривошипа центромъ казанія Ω , какъ

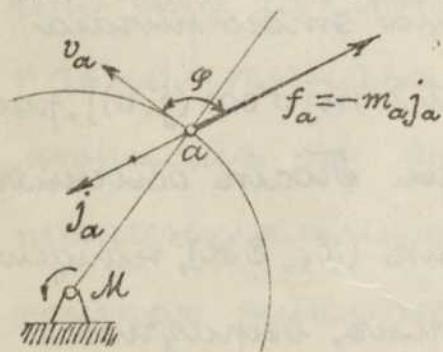
тожкой приложения силы инерции F . Следовательно, перемещения точки Ω приложения силы инерции F оказываются перпендикулярными къ направлению самой силы F , вследствие чего работа результирующей силы инерции F , а, значитъ, и работа всехъ силъ инерции кривошипа, будутъ равны нулю. Необходимо помнить, что это заключение имѣетъ силу лишь для случая равномернаго вращенія кривошипа. При неравномерномъ же вращеніи его, вследствие возникновения тангенціальныхъ ускореній, все силы инерции окажутся наклоненными къ элементамъ окружностей (тутамъ точки приложения силъ инерции) подъ углами, отличными отъ 90° , вследствие чего работы силъ инерции будутъ здѣсь уже отличны отъ нуля, и ихъ придется подсчитать. Съ такимъ именно случаемъ мы встрѣтились при разсмотрѣніи движенія коромысла EM и HN .

Перейдемъ теперь къ шатуну BC . Сумма элементарныхъ работъ силъ инерции выразится для него, какъ мы вывели уже раньше, — см. стр. 139, форм. (с), — черезъ $(-dt \sum m j_x v_x \cos(v_x, j_x))$ или, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, черезъ

$$-\omega \cdot M j_0 \cdot \varrho_0 dt, \dots \dots \dots (8)$$

гдѣ ω есть мгновенная угловая скорость вращенія около полюса P шатуна, $M j_0$ — величина результирующей силы инерции F , приложенной въ центръ качанія его Ω , а ϱ_0 — плечо этой результирующей силы инерции относительно полюса мгновеннаго вра-

такъ и по направленію. Значитъ, вращеніе коромысла протекаетъ маятникообразно и, при томъ, неравно-
мѣрно, и въ каждыя коромысла полныя ускоренія то-
чекъ его уже не направлены по векторамъ, соединя-
ющимъ эти точки съ центромъ вращенія, но, въ силу
наличности тангенціальнаго ускоренія, составля-
ютъ съ этими векторами углы, отличные отъ ну-



Фиг. 42.

ля. Отсюда заключаемъ, что силы инерціи будутъ образовывать съ пе-
реносченіями точекъ углы, отлич-
ные отъ 90° ($180^\circ > \varphi > 90^\circ$), вслѣдствіе
чего работа силъ инерціи будетъ
уже отлична отъ нуля

Для коромысла ME , полюсъ м. в. котораго ле-
житъ въ M , центръ вращенія его, работа силъ
инерціи $(-dt \sum m_j v \cos(v, j))$ выразится черезъ

$$-\omega''' M''' j_o''' \xi_o''' dt, \dots \dots \dots (\eta)$$

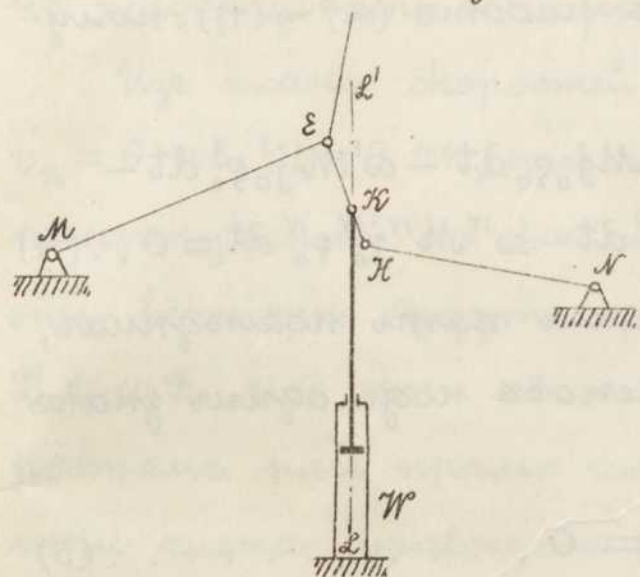
гдѣ ω''' есть мгновенная угловая скорость вращенія
около центра M , $(-M''' j_o''')$ результирующая сила инер-
ціи, F_{ME} , приложенная въ центръ качанія коромысла
 Ω_{ME} , а ξ_o''' есть плечо этой результирующей силы инер-
ціи F_{ME} относительно полюса м. в. M этого коромысла.

Для коромысла HE (фиг. 39) работа силъ инерціи
выразится, аналогично коромыслу ME , черезъ

$$-\omega^{IV} M^{IV} j_o^{IV} \xi_o^{IV} dt. \dots \dots \dots (\theta)$$

Переходимъ, наконецъ, къ штокъ KL насоса (фиг. 41).
По нашему предположенію онъ движется, почти не
сходя съ оси LL' насоснаго цилиндра W , т.-е. облада-

есть возвратнымъ поступательнымъ движениемъ по прямой LL' , вслѣдствіе чего силы инерціи его будутъ направлены по той же прямой LL' и для всѣхъ точекъ его будутъ имѣть одну и ту же величину. Поэтому результирующая сила инерціи $F_{к\ell}$ выразится, какъ и въ случаѣ ползуна паровой машины, произведениемъ изъ массы $M_{к\ell}$ штока и связанныхъ съ нимъ наглухо частей на ускореніе какой-либо точки



Фиг. 43.

его, — хотя бы той же точки K , въ которой штокъ соединенъ съ рычагомъ EN ; это ускореніе j_k легко найти помощью плана ускореній, какъ это будетъ показано ниже. Такъ какъ эта результирующая сила инерціи дѣйствуетъ

по той же прямой LL' , то и сопротивленіе R , то ее можно прямо прибавить къ этому усилію R и подсчитывать здѣсь работу уже не силы R , а силы $(R + F_{к\ell})$, и элементарная работа этой силы выразится, очевидно, черезъ $-(R + F_{к\ell})v_k dt$, гдѣ черезъ v_k обозначена скорость точки K , одинаковая для всѣхъ массъ системы штока KL . Если силы инерціи $F_{к\ell}$ по тѣмъ или инымъ причинамъ оказываются малыя настолько, что или, сравнительно съ R , можно пренебречь, то расчетъ работы ведется здѣсь на одну силу R ; въ противномъ же случаѣ необходимо принять во вниманіе и силы $F_{к\ell}$. Мы предположимъ, что силы инерціи $F_{к\ell}$ ма-

мы настолько, что ими можно пренебречь.

Напишем теперь общее уравнение элементарных работ нашего механизма. Какъ мы уже видели, алгебраическая сумма всехъ элементарныхъ работъ какъ силъ действующихъ, такъ и силъ инерции, равна нулю, вѣдущаго къ, суммируя все выражения производящихся здѣсь элементарныхъ работъ (α) — (η), получаемъ уравнение:

$$+ P v_d dt - t v_B dt - R v_K dt - \omega M j_o \varphi_o dt - \omega' M' j'_o \varphi'_o dt - \\ - \omega'' M'' j''_o \varphi''_o dt - \omega''' M''' j'''_o \varphi'''_o dt - \omega^{IV} M^{IV} j^{IV}_o \varphi^{IV}_o dt = 0 \dots (4)$$

или, сокращая на dt и собирая пять послѣднихъ, одинаково построенныхъ, членовъ подъ одинъ знакъ суммы, уравнение:

$$P v_d - t v_B - R v_K - \sum \omega M j_o \varphi_o = 0, \dots \dots \dots (5)$$

при чемъ сумма $\sum$ распространена на все подвижныя звенья механизма, представляя собою сумму работъ всехъ силъ инерции всего механизма.

Уравнение (5) легко можно преобразовать къ виду, болѣе удобному для практическаго использования его и для опредѣленія изъ него единственной неизвѣстной величины t — силы тангенциальнаго сопротивления. Для этого обратимся къ плану скоростей, помѣщенному на той же фиг. 134 (стр. 165).

Для построения этого плана проводимъ изъ полюса π его лучи πc и πb , перпендикулярные къ траекторіямъ точекъ B и C шатуна въ точкахъ B и C ихъ, такъ что $\pi c \perp AB$, а $\pi b \parallel AB$. Затѣмъ изъ некоторой точки b на луча πb проводимъ $bc \parallel \pi c$ и получимъ точку c , соответствующую точкѣ C шатуна; точка b соответствуетъ точкѣ B . Эту точку b выбираемъ такъ, чтобы действительная скорость v_B оказалась равной $\theta \times \pi b$, гдѣ θ есть угловая скорость плана относительно его полюса π . Тогда v выразится черезъ

пс. θ и т.д. Далее, найдя на bc точку d , соответствующую точке D и проведя $de \parallel DE$ и $pe \parallel ME$, найдем точку e , соответствующую точке E , а проводя, затем, $eh \parallel EH$ и $ph \parallel NH$, найдем точку h , соответствующую точке H . Находя на eh точку k , соответствующую точке K , определим весь план скоростей данного механизма: система шатуна BC изобразится системой отрезка bc , $DE - de$, $EH - eh$, коромысла ME и NH - отрезками pe и ph .

Посмотрим теперь, какъ помощью этого плана можно преобразовать и истолковать наше полное ур-ие (5).

Изъ плана скоростей находимъ, что $v_d = \theta \cdot \pi c$, $v_B = \theta \cdot \pi b$, $v_K = \theta \cdot \pi k$, при чемъ векторы πc , πb и πk перпендикулярны къ своимъ скоростямъ; въ виду этого эти векторы будутъ перпендикулярны и къ силамъ P , t и R , ибо эти послѣднія направлены или по скоростямъ или прямо или противоположно. Первые три члена уравнения (5) перемножатся, следовательно, такъ:

$$+ P \cdot \pi c \cdot \theta - t \cdot \pi b \cdot \theta - R \cdot \pi k \cdot \theta \dots \dots \dots (A)$$

Посмотримъ, какъ выразятся остальные. Возьмемъ сначала шатунъ BC . Членъ уравнения (5), относящийся къ шатуну, есть $(-Mj_o \varphi_o \omega)$. Обозначимъ результирующую силу инерции $(-Mj_o)$, ради краткости и удобства письма, черезъ F_{BC} . Плечо этой силы инерции F_{BC} относительно полюса P есть φ_o , сама же она приложена въ точку Ω_{BC} - центръ качанія шатуна BC (фиг. 30). Очевидно, что $\omega \varphi_o$ есть v_{h_o} - скорость точки h_o , проходящей перпендикуляра φ_o . Найдемъ въ системѣ плана скоростей точку, соответствующую этой точке h_o . Для этого находимъ въ немъ сначала точку Ω_o (фиг. 30 на 136 стр.), соответствующую

центру качанія Ω , затѣмъ черезъ Ω_0 проводимъ прямую yy , параллельную Ωh_0 и опускаемъ изъ полюса плана перпендикуляръ p на эту прямую; подомъ этого перпендикуляра, точка ε , и будетъ соответствующей для упомянутой точки h_0 . Действительно, $\triangle A B \Omega_0 \sim \triangle B \Omega \pi$, ибо точка Ω_0 , по условію, соответствуетъ точке Ω , при чемъ $A \Omega_0 \parallel \pi \Omega$. Такъ какъ, далее, $yy \parallel \Omega h_0$ и $A \varepsilon \perp yy$, то $A \varepsilon \parallel \pi h_0$, и, значитъ, $\triangle A \Omega_0 \varepsilon \sim \triangle \pi \Omega h_0$, такъ что точка ε и является соответствующей для точки h_0 .

Все это построение относится къ фиг. 30. Проглаемъ его и для разбираемаго нами механизма (фиг. 34): находимъ въ планѣ скоростей точку $\Omega''_{\text{вс}}$, соответствующую центру качанія $\Omega_{\text{вс}}$, проводимъ черезъ нее прямую $\Omega''_{\text{вс}} 1 \parallel \Omega_{\text{вс}} F_{\text{вс}}$, и опускаемъ на нее изъ полюса π перпендикуляръ; подомъ этого перпендикуляра, точка 1, и представляетъ собою точку, соответствующую точке h_0 , — основанію перпендикуляра ϱ_0 , опущеннаго изъ полюса $\mathbb{P}$ на направленіе результирующей силы инерціи шатуна, $F_{\text{вс}}$. Теперь можемъ написать, что $\varrho_0 \omega = \theta. \pi 1$, ибо и правая, и левая часть этого равенства представляютъ собою выраженіе скорости одной и той же точки h_0 системы шатуна. Послѣ этого членъ $(-\omega. M j_0. \varrho_0)$ перепишется иначе черезъ $(-M j_0. \theta. \pi 1)$ или черезъ $\theta. \pi 1. F_{\text{вс}}$ (B)

Замѣчая теперь, что произведеніе $F_{\text{вс}}. \pi 1$, гдѣ $\pi 1 \perp F_{\text{вс}}$, есть не что иное, какъ моментъ результи-

рующей силы инерции $F_{\text{вс}}$ относительно полюса π плана, полученный в том же предположении, что сила инерции $F_{\text{вс}}$ проходит теперь через точку $\Omega''_{\text{вс}}$ этого плана, соответствующую центру качания $\Omega_{\text{вс}}$. Принимая во внимание это обстоятельство, можем истолковать механизм получения упомянутого члена ур-ия (5), в его преобразованном виде, так: находим в плане скоростей точку $\Omega''_{\text{вс}}$ системы отрезка вс , соответствующую центру качания $\Omega_{\text{вс}}$, переносим в нее, параллельно ее прежнему направлению, результирующую силу инерции $F_{\text{вс}}$ и опускаем на прямую, по которой действует теперь так перенесенная сила инерции $F_{\text{вс}}$, из полюса π плана скоростей перпендикуляр $\pi 1$. Тогда неудобный для нас фактор $\omega \vartheta_0$ замкнется фактором $\vartheta \cdot \pi 1$, — удобства такой замены не замедлят обнаружиться.

Так же разсуждения применимы и ко всем остальным звеньям нашего механизма. Таким образом, для рычага ДЭ имеем в уравнении (5) член $(-\omega' M'_{\text{ж}} \vartheta'_0)$ или, проще, член $F_{\text{дэ}} \cdot \omega' \vartheta'_0$, при чем через ϑ'_0 обозначено плечо этой силы $F_{\text{дэ}}$ относительно полюса м. в. P_1 .

В системе плана (π) рычаг ДЭ изображается отрезком де . Повторив применительно к ДЭ все разсуждения по поводу рычага вс , придет к результатам, аналогичным с прежними, — окажется, что фактор $\omega' \vartheta'_0$, дающий собою скорость подшибы перпендикуляра ϑ'_0 , можно будет замкнуть через $\vartheta \cdot \pi 2$, где точка 2 есть подшиба перпен-

дикуляра $\pi 2$, опущенного из полюса π на прямую, по которой будет действовать сила F_{ze} после переноса ее в точку Ω''_{ze} системы de , соответствующую центру качания Ω_{ze} рычага DE . Таким образом, упомянутый член замкнется через $(-M'j'_0) \cdot \pi 2 \cdot \theta$ или, короче, через

$$F_{ze} \cdot \pi 2 \cdot \theta \dots \dots \dots (C)$$

Подобным же образом окажется, что член $(-\omega'' M'' j''_0 \vartheta''_0)$, относящийся к рычагу $E\mathcal{H}$, замкнется через $(-M'' j''_0) \cdot \pi 3 \cdot \theta$ или, что то же, через

$$F_{ze} \cdot \pi 3 \cdot \theta, \dots \dots \dots (D)$$

причем для возможности такого преобразования мы поступим так: надели в системе eh план скорости точку Ω''_{ze} , соответствующую центру качания Ω_{ze} системы $E\mathcal{H}$, перенесли в $\mathcal{H}$ точку Ω''_{ze} результирующую силу инерции F_{ze} параллельно ее прежнему направлению и опустили на нее, после этого переноса, перпендикуляр $\pi 3$, после чего указанный член замкнется членом (D).

Последние два члена уравнения (5), относящиеся к коромыслам $N\mathcal{H}$ и $M\mathcal{E}$, замкнутся членами $(-M''' j'''_0) \omega''' \vartheta'''_0$, или

$$F_{nh} \cdot \pi 4 \cdot \theta, \dots \dots \dots (E)$$

и $(-M^{IV} j^{IV}_0) \omega^{IV} \vartheta^{IV}_0$, или

$$F_{me} \cdot \pi 5 \cdot \theta \dots \dots \dots (F)$$

После всех этих преобразований окажется возможным, после подстановок (A)–(F), значительно упростить основное уравнение (5), которое,

носить все эти подстановки примет вид:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}.\pi c - t.\pi b - \mathcal{R}.\pi k - Mj_o.\pi 1.\theta - M'j_o'.\pi 2.\theta - \\ & - M''j_o''.\pi 3.\theta - M'''j_o'''.\pi 4.\theta - M''''j_o'''.\pi 5.\theta = 0 \dots (6) \end{aligned}$$

Выполненные нами преобразования центы, какъ видимъ, въ томъ отношеніи, что все различные факторы типа $(\omega \mathcal{S}_o)$ позволили замѣнить факторами типа $\pi n.\theta$, при чемъ множитель θ у всехъ факторовъ оказывается незначащимся; благодаря этому обстоятельству представляется возможность сократить все уравненіе (6) на θ , после чего получится весьма простое и легко истолковываемое уравненіе 1-ой степени для опредѣленія t , а именно:

$$\mathcal{L}.\pi c - t.\pi b - \mathcal{R}.\pi k - \sum Mj_o.\pi n = 0, \dots (7)$$

откуда t и опредѣляется.

Легко видѣть, что каждый членъ этого уравненія представляетъ собою моментъ входящей въ составъ его силы относительно полюса плана скоростей, при условіи, конечно, перенесенія всехъ силъ въ систему плана указаннымъ выше способомъ. Что касается знаковъ, то не нужно забывать, что въ начальномъ уравненіи (5) они были разставлены исключительно ради возможности отличить одни силы отъ другихъ. Уравненіе же моментовъ (7) ясно указываетъ, что въ такомъ отношеніи силъ надобности нѣтъ и что все сводится къ известному уравненію моментовъ, лишь примененному къ силамъ, перенесеннымъ въ планъ скоростей, при чемъ за начало моментъ

товъ взять полюсъ Π плана скоростей. Переносъ каждой силы совершается параллельно ея прежнему направлению въ точку плана, соответствующую точку приложения ея въ основномъ механизме. Пусть этихъ переносовъ мы и составляемъ уравненіе моментовъ всѣхъ перенесенныхъ силъ относительно полюса плана, при чемъ удобнѣе и проще всего каждому моменту, независимо отъ характера силы, его дающей, но въ зависимости отъ направления вращенія его вкругъ полюса плана, приписывать тотъ или другой знакъ, условившись, напримѣръ, моменты, дѣйствующіе по стрѣлкѣ часовъ, считать положительными, и обратно. Такъ составленное уравненіе моментовъ сейчасъ же дастъ намъ не только величину тангенціального усилия, но и знакъ, т.-е. направленіе его, и вопросъ будетъ, такимъ образомъ, разрѣшенъ вполне.

Все сказанное позволяетъ намъ сформулировать общее правило для графическаго опредѣленія величины и направленія тангенціальнаго сопротивленія t , могущаго обезпечить равномерное вращеніе кривошипа; правило это выражается такъ:

1) Находимъ въ планѣ скоростей механизма точки, соответствующія точкамъ приложения дѣйствующихъ силъ и центрамъ качанія всѣхъ подвижныхъ звеньевъ механизма;

2) переносимъ въ эти точки все силы, — какъ силы дѣйствующія, такъ и силы инерціи, — каждую силу въ прилежествующую ей точку; переносить силы слѣдуетъ параллельно прежнимъ ихъ направленіямъ;

3) подсчитываемъ моменты всего такъ перенесенныхъ силъ относительно полюса плана скоростей, приписывая каждому моменту знакъ сообразно направленію дѣйствія его, и, наконецъ,

4) пользуясь полученными такими путемъ выраженіями моментовъ, составляемъ изъ нихъ уравненіе моментовъ, изъ коего и определяемъ затѣмъ величину и направленіе искомага тангенціального усилія t .

Все построеніе выходитъ весьма простымъ и удобнымъ. Единственное затрудненіе, могущее встрѣтиться при гертеевскомъ выполненіи этого построенія, состоитъ въ томъ, что при некоторыхъ положеніяхъ механизма центръ ускореній S системы шатуна, положеніемъ своимъ представляющій положеніе центра качаній Ω , можетъ удалиться изъ предѣловъ гертеева. Въ этихъ случаяхъ можно выйти изъ такъ представившагося затрудненія помощью указаній, сдѣланныхъ по аналогичному поводу при изслѣдованіи движенія системы шатуна (стр. 136_a и слѣд.): какъ и тамъ, строимъ планъ ускореній, отыскиваемъ въ немъ

отрезки, соответствующие различным звеньям механизма, снабжаем их, затем, массами дающих их звеньев и находим центры качения для всех так получившихся материальных отрезков, — каждый из этих материальных отрезков представит собою уменьшенное в известном отношении соответствующее звено механизма, — уменьшение это относится лишь к геометрическим размерам звеньев, не затрагивая масс отдельных точек. Пол центра ускорений для всех этих так полученных отрезков будет, очевидно, играть роль плана ускорений. Определяя в каждом отрезке центр тяжести его, мы тем самым определим в известном масштабе, одинаковом для всех отрезков, ускорения j_0 центров тяжести полученных отрезков как по величине, так и по направлению; умножая каждое j_0 на массу M соответствующего звена, получим результирующую силу инерции этого звена как по величине, так и по направлению, — направление ее будет противоположно направлению j_0 ускорения центра тяжести; точкой приложения будет служить центр качения отрезка.

Получив помощью плана ускорений положения ~~всех~~ центров качения для отрезков плана ускорений, изображающих звенья, и

принимая во внимание, что каждый такой центр каганія, какъ точка, принадлежащая системе отсчета, соответствуетъ центру каганія основного звена, имѣемъ возможность построить положенія этихъ центровъ каганія и въ системѣ планъ скоростей, — точнее говоря, можемъ найти въ планѣ скоростей точки, соответствующія центрамъ каганія отсчетовъ. планъ скоростей, какъ точка, принадлежащая системамъ этихъ отсчетовъ. Опредѣливъ въ планѣ скоростей все эти точки, перенесемъ въ нихъ соответственныя результирующія силы инерціи ($-Mj_0$) и подсчитываемъ моменты ихъ. Переносъ затѣмъ все остальные действующія силы, считая въ томъ числѣ и искомое тангенціальное усиліе, опредѣляемъ моменты и для нихъ (неизвѣстными будетъ одинъ лишь моментъ тангенціального ускоренія) и составляемъ обычное уравненіе моментовъ, изъ котораго и опредѣляемъ единственно неизвѣстную намъ величину тангенціального ускоренія t какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Вопросъ, такимъ образомъ, исчерпывается вполне.

Помощью плана ускореній нахожденіе результирующихъ силъ инерціи выполняется весьма просто. Особенно удобнымъ оказывается то обстоятельство, что такъ получаемыя результирующія силы инерціи F , направленія

коихъ всеъ выходятъ изъ начала тѣхъ ускореній, оказываются расходящимися по лугамъ, проводимымъ изъ этого начала, почему перестаютъ въ другихъ точкахъ не мочь, а это обуславливаетъ собою ясность и четкость всего построения.

Вопросъ объ опредѣленіи тангенціальнаго сопротивленія разрѣшается, такимъ образомъ, вполне: для каждаго положенія механизма мы можемъ опредѣлить величину t того тангенціального сопротивленія, которое должно быть приложено къ пальцу кривошипа для того, чтобы кривошипъ вращался равномерно. Было уже указано, что такъ опредѣлявшаяся величина тангенціального сопротивленія даѣтъ въ то же время величину тангенціального усилия, съ которымъ самъ механизмъ, при данныхъ действующихъ въ немъ силахъ и при данной скорости вращенія кривошипа, действуетъ на палецъ кривошипа. Такимъ образомъ, мы получаемъ возможность судить и объ этихъ тангенціальнахъ усилияхъ, каждое изъ которыхъ равно и прямо противоположно опредѣленному нами тангенціальному сопротивленію, а опредѣливъ эти тангенціальныя усилия для ряда послѣдовательныхъ положеній механизма, сможемъ построить и весьма важную для дальнѣйшаго кривую тан-

тангенциальных усилий. Для определенности построения поступаем так: делим окружность, описываемую пальцем кривошипа, на n равных частей (12, 16, 24 и т. д.), вычерчиваем и соответствующих положений механизма, все планы скоростей и ускорений, и составляем для каждого положения уравнение моментов относительно полюса шана скоростей; из этого уравнения и определяем величину t тангенциального усилия, соответствующего взятому положению кривошипа. Приняв затем некоторый отрезок длиной l за длину окружности пальца кривошипа, делим его на n равных частей и на ординатах из этих точек деления откладываем соответствующие значения тангенциальных усилий. Соединяя концы этих ординат непрерывной кривой, получаем весьма важную на практике кривую истинных тангенциальных усилий, позволяющую нам с желаемой степенью точности решить вопрос об обеспечении равномерности вращения кривошипа, столь важной на практике. К разбору этого вопроса мы теперь непосредственно и приступим.

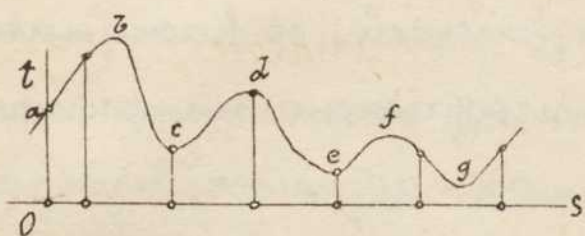
X

§ 4. Регулирование хода машины при помощи маховиковъ. Расчетъ маховиковъ помощью кривой тангенциальныхъ усилий.

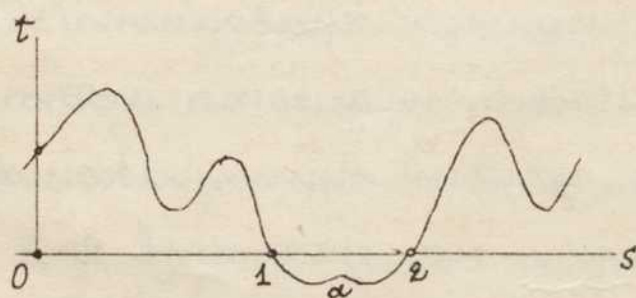
Въ предыдущемъ параграфѣ было детально разъяснено, какими образомъ, при помощи плановъ скоростей и ускорений, при каждомъ положеніи кривошипнаго механизма, усложненнаго любыми комплексами вспомогательныхъ механизмовъ, можно найти величину и направление тангенциальнаго усилия, съ которымъ движущійся механизмъ действуетъ на палецъ кривошипа касательно къ окружности, описанной пальцемъ. При этомъ въ основаніе всѣхъ разсужденій было положено предположеніе, что при движеніи механизма кривошипъ его вращается все время равномерно.

Въ случаѣ кривошипнаго механизма кривая тангенциальныхъ усилий, какъ показываютъ непосредственныя построенія ея, изображается не прямой линіей, какъ это изображено на фиг. 38 и 39 (стр. 90, листъ 6) и какъ это можно было бы предположить при наличности равномернаго вращенія кривошипа, но всегда представляется волнообразной кривой, подобной изображеннымъ на фиг. 44 и 45. Усилия t не всегда остаются положительными, т.-е. направленными въ сторону движенія

пальца кривошипа, — иногда, какъ это имѣетъ мѣсто на фиг. 45 на участке 1—2 пути пальца кривошипа, эти усилия оказываются направленными отрицательно, т.-е. прямопротивоположно направлению скорости пальца кривошипа. Наличиемъ такихъ впадинъ типа 1 и 2 суждаться нечего, —



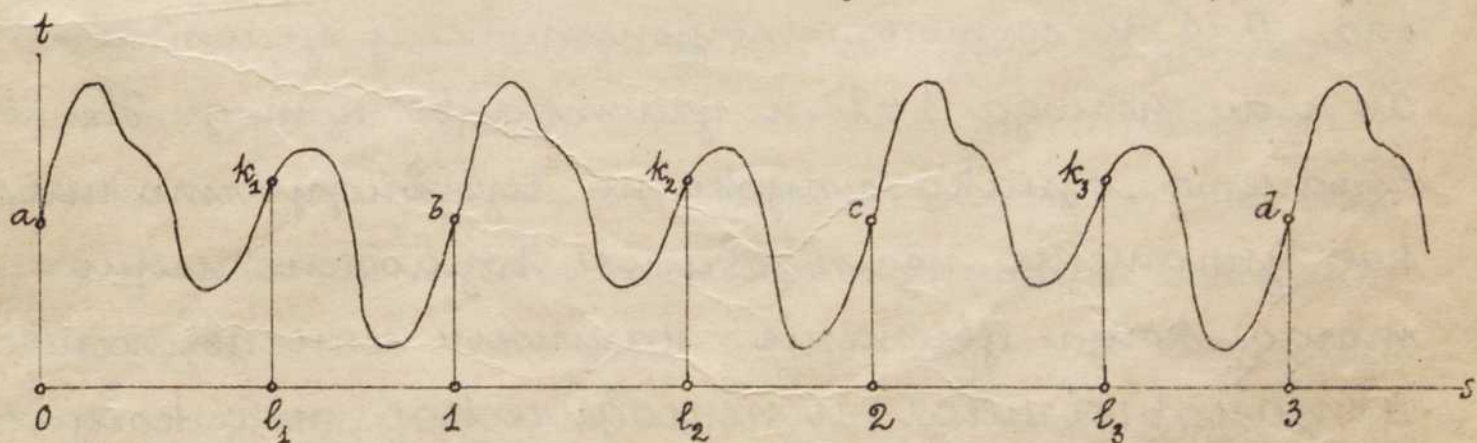
Фиг. 44.



Фиг. 45.

какъ про-
сто истощиваются и
эти, сравнительно редкіе, случаи течения кривой тангенциальныхъ усилий. За нормальный типъ этой кривой будемъ принимать кривую $a d g$, изображенную на фиг. 44.

Предположимъ, кромѣ того, что движеніе механизма есть движеніе установившееся и, при томъ, периодическое, съ периодомъ, равнымъ времени одного оборота кривошипа. При такомъ предположеніи окажется, что кривая танг. усилий течетъ такъ, что рядъ подъемовъ и паденій ея,



Фиг. 46.

имеющийся почти за время одного какого-либо периода, повторяется затемъ въ томъ же порядкѣ, не измѣняя величины своихъ частей, съ каждымъ новымъ периодомъ, какъ это изображено на фигурѣ 46, гдѣ отрезки $01, 12, 23, \dots$ оси абсциссъ, изображающіе каждый въ известномъ масштабѣ выпрямленную окружность пальца кривошипа и поэтому другъ другу равные, и даютъ собою периодъ кривой тангенса угла при такомъ установившемся движеніи, — на участкѣ 2-3 кривая течетъ, какъ видимъ, совершенно такъ же, какъ она текла на предыдущемъ участкѣ 1-2 или на начальномъ 0-1. Поэтому изученіе свойствъ этой кривой на участкѣ, большемъ периода, является совершенно излишнимъ, ибо то, что получается при разсмотрѣніи одного такого периода, целикомъ можетъ быть приложено къ каждому изъ остальныхъ безъ всякихъ перемѣнъ. Такимъ образомъ мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ лишь одного какого-либо периода движенія машины и соответствующаго ему участка кривой, — наприимръ, периода 0-1 и соответствующаго ему участка ab , или периода 1-2 и участка bc и т. д. Следуетъ, однако, указать изъ виду, что такое упрощеніе изслѣдованія возможно лишь тогда, когда движеніе машины есть движеніе установившееся и периодическое, т.-е. когда

все скорости частей ее, ускорения их и т. д., повторяются въ каждомъ періодѣ совершенно такъ же, какъ они повторялись въ какомъ-либо одномъ изъ нихъ, принятомъ за основной. Это обстоятельство ведетъ къ слѣдующимъ весьма важнымъ заключеніямъ:

1) Оказывается, прежде всего, что механизмъ проходитъ черезъ одни и тѣ же скорости (и ускорения) въ моменты, отстоящіе другъ отъ друга на время одного оборота;

2) Въ эти же моменты, — каковы, напримеръ, моменты $l_1, l_2, l_3, \dots$, где $l_1 l_2 = l_2 l_3 = \dots = 01$, — величины тангенціальныя усиія принимаютъ одни и тѣ же значенія, равныя значенію тангенціального усиія въ одномъ изъ такихъ моментовъ, такъ что усиіе $l_1 k_1 = l_2 k_2 = l_3 k_3 = \dots$;

3) Въ виду тождественности частей ak_1b , $b k_2 c$, $ck_3 d$, ..., кривой танг. усиій, соответствующихъ каждому новому періоду хода машины, площади, ограничиваемыя ими, т.-е. площади типа $ak_1b \Delta l_1 O$, будутъ для каждого періода одинаковы, а такъ какъ эти площади даютъ собою величины работы танг. усиій за соответствующее время, то можно поэтому сказать, что за время каждого отдельнаго періода работа танг. усиій остается одинаковою и равнойъ каждый разъ работѣ, выражаемой площадью $ak_1b \Delta l_1 O$, при чемъ, согласно

пункту 2, ту же величину $O\delta$ будетъ имѣть работа
каждаго періода δ , откуда бы мы ни начали счетъ
его, — отъ O или отъ ℓ_1 ; всегда, при произвольномъ по-
ложеніяхъ точекъ O и ℓ_1 , имѣемъ, что площадь $O\delta$
= площади $\ell_1 k_2$, если только времена $O1$ и $\ell_1 \ell_2$ рав-
ны. Это обстоятельство позволяетъ намъ выбирать
начало сета O наиболѣе удобнымъ для насъ обра-
зомъ. — Все сказанное позволяетъ намъ ограничить-
ся разсмотрѣніемъ какого-либо одного періода кри-
вой тангенціальнаго усилия, и въ дальнѣйшемъ мы
будемъ говорить каждый разъ исключительно объ
одномъ такомъ періодѣ, — применительно къ фи-
гурѣ 46 это будетъ періодъ $O1$ съ соответству-
ющимъ ему участкомъ ab кривой тангенціаль-
наго усилия.

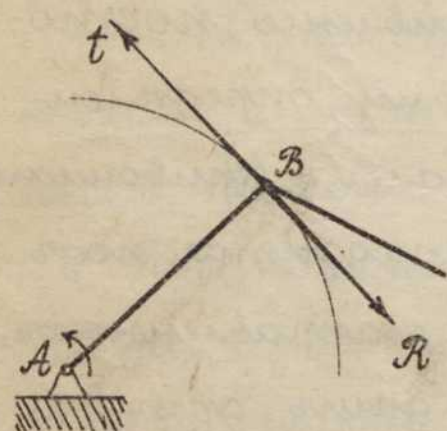
Предположимъ, такимъ образомъ, что за вре-
мя каждого періода танг. усилия мѣняются по
закону, изображаемому этой кривой ab . Величи-
на ихъ, какъ видимъ, постоянной не остается,
и, очевидно, для того, чтобы подъ дѣйствіемъ ихъ
кривошипъ могъ вращаться равномерно, необхо-
димо, чтобы по тому же закону ab мѣнялись
и тангенціальныя сопротивленія, препятствующія
вращенію кривошипа. На дѣлѣ, однако,
имѣетъ мѣсто нѣчто совершенно другое: тан-
генціальныя сопротивленія отъ вѣнчиковъ силъ,
сопротивляющихся вращенію кривошипа и ве-
домаго или вала, представляющія собою уси-

ля полезного сопротивления, R , по условию, — см. стр. 91_a и слѣд., — остаются постоянными за все время движения механизма, такъ что кривая полезныхъ сопротивленийъ представляется, какъ это изображено на фиг. 24, стр. 92_a, прямой RR , параллельной оси абсциссъ и отстоящей отъ нея на величину силы R полезного сопротивления.

Такимъ образомъ выходитъ, что въ то время, какъ сопротивление на коренномъ валу, приведенное къ пальцу кривошипа, не мѣняется, оставаясь постоянно равнымъ R , тангенціальное усилие t со стороны механизма, заставляющее кривошипъ преодолевать это сопротивление, постоянно мѣняется по некоторому определенному закону. Слѣдовательно, палецъ кривошипа въ каждый данный моментъ находится подъ дѣйствіемъ двухъ силъ, t и R , направленныхъ, вообще говоря, противоположно другъ другу и другъ другу неравныхъ, — равенство между ними можетъ имѣть мѣсто лишь въ некоторые отдѣльные моменты. Отсюда слѣдуетъ, что при такихъ условіяхъ кривошипъ равномерно вращаться не можетъ, — въ зависимости отъ величины и направленія воздѣйствующей на него результирующей силы $(t - R)$, ^(фиг. 47) (уговая скорость его будетъ то увеличиваться, если $t > R$, то уменьшаться при $t < R$, колеблясь, при установившемся ходѣ машины, между извѣстными

предельными $\omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$. Такие колебания угловой скорости вала, какъ мы уже говорили, являются совершенно нежелательными, и о способъ уменьшения ихъ до желательно малыхъ размаховъ мы и будемъ говорить въ дальнѣйшемъ; предварительно же обратимъ вниманіе на слѣдующее:

Пусть нашъ механизмъ движется установившимся периодически движениемъ, съ периодомъ, равнымъ времени одного оборота коренного вала. Пусть за одинъ такой оборотъ (или периодъ) кривая тангенціальнаго усилия представляется кривой $abc...z$ (фиг. 48). Въ то же время кривая полезнаго сопротивленія на валу



Фиг. 47.

представится прямой AB .

Обозначимъ точки пересѣченія кривой $abc...z$ съ прямой AB цифрами 1, 2, 3, ..., 9, 10. Периодъ движения равенъ $OC = \delta$. Если въ концѣ C периода скорости массъ системы

оказываются такими же, какими они были въ началѣ его O , то это значитъ, что живая сила системы (кривошипъ, валъ съ его массой) въ моменты O и C оказывается одинаковой, а приращеніе ея за весь периодъ δ равно нулю, т.-е.

$$\sum \frac{m}{2} (v_c^2 - v_o^2) = 0, \dots \dots \dots (a)$$

ибо у всѣхъ этихъ массъ $v_c = v_o$. Но, по общей теоремѣ живыхъ силъ, приращеніе живой силы системы за известный промежутокъ време-

ни всегда равно алгебраической сумме работъ
всѣхъ дѣйствующихъ здѣсь силъ и сопротивле-
ній, выполненныхъ за то же время, т.-е.

$$\sum \frac{m}{2} (v_c^2 - v_o^2) = \sum \ell, \dots \dots \dots (1)$$

или, обозначивъ работу дѣйствующихъ силъ черезъ
 L_1 , а работу сопротивлений — черезъ L_2 , получаемъ
уравнение

$$\sum \frac{m}{2} (v_c^2 - v_o^2) = L_1 - L_2,$$

откуда, применительно къ данному случаю, въ ви-
ду (а), находимъ равенство

$$L_1 = L_2, \dots \dots \dots (2)$$

говорящее, что при установившемся периодиче-
скомъ движеніи работа дѣйствующихъ силъ
за каждый періодъ равна работѣ всѣхъ сопроти-
вленій за тотъ же періодъ; съ этимъ результатомъ
мы встрѣгались уже раньше, — см. стр. 9, листъ 1.

Замѣтая теперь, что въ данномъ случаѣ работа
 L_1 силъ дѣйствующихъ (t) выражается площадью
abc...z, а работа L_2 силъ сопротивленія (R) — пло-
щадью OABC прямоугольника, построеннаго на томъ
же основаніи b (длины окружности пальца крив-
вошипа, въ известномъ масштабѣ) и имѣющаго
своей высотой сопротивленіе R , заключаемъ, что въ
случаѣ установившагося периодическаго движенія
обѣ эти площади должны быть равновелики.

Такимъ образомъ, спланиметрировавъ площадь
Oabc...zC или подчитавъ ее какимъ-либо дру-
гимъ образомъ, — пусть она оказалась равной F , —

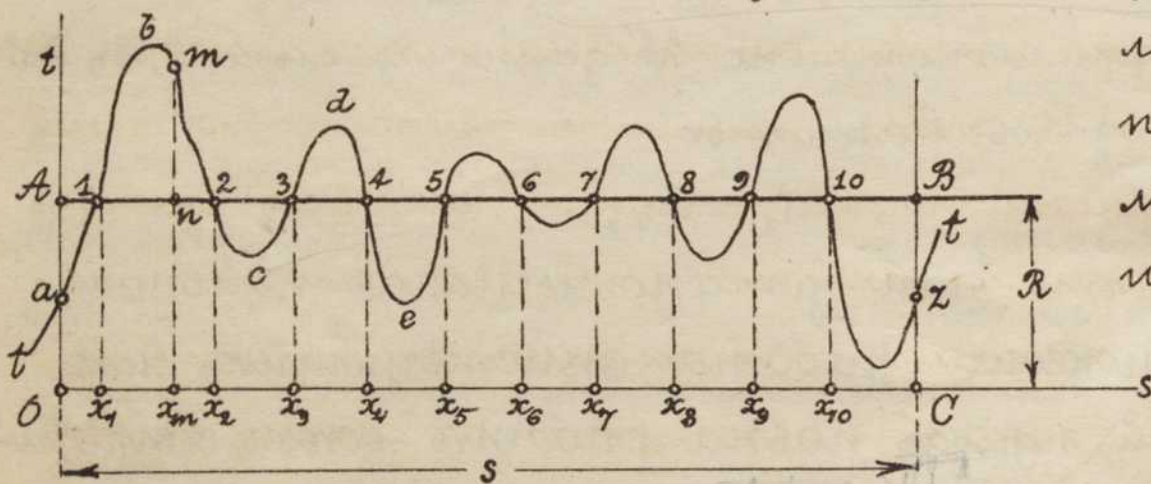
можно определить необходимую для возможности установившегося движения величину внешнего постоянного сопротивления R из уравнения:

$$\text{мощность } 0ab\epsilon \dots zCO = F = R \times s,$$

откуда

$$R = \frac{F}{s} \dots \dots \dots (3)$$

Итак, в то время как тангенциальное усилие t со стороны механизма, действующее на па-



Фиг. 48.

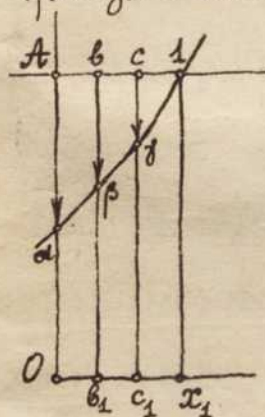
леу кривошипа, при равномерном вращении этого последнего изгибается по кривой $abc \dots z$,

сопротивление R этому вращению, приведенное к пальцу кривошипа, изгибается по закону, даваемому прямой AB , т. е. остается постоянным.

Отсюда следует, как мы об этом уже говорили, что при таких условиях о равномерности вращения кривошипа не может быть и речи, ибо равенство между противоположными друг другу по направлению силами t и R может существовать в данном случае лишь в моменты, соответствующие точкам 1, 2, ..., 9, 10 пересечения кривой тангенциальных усилий с прямой полезного сопротивления; во остальные же моменты

мы при равномерном вращении кривошипа мы будем иметь преобладание одной из этих сил, — которой именно, на это укажет соотношение кривой tt с прямой AB .

Таким образом, является очевидным, что на участке Ox_1 пути пальца кривошипа преобладали силы сопротивления R и, следовательно, на этом участке палец кривошипа находился под воздействием сил, каждая из которых была равна избытку сопротивления R , действующего противоположно скорости пальца кривошипа, над тангенциальным усилием t , действующим согласно этой скорости. А так как силы R остаются постоянными, характеризуясь прямой $A1$, а силы t меняются по закону кривой $a1$, то ясно, что избытки сопротивлений над усилиями при своем изменении характеризуются отрезками ординат между кривой $a1$ и осью $A1$.



Фиг. 49.

Действительно, рассмотрим этот участок $a1$ (фиг. 49) подробнее. Выделим на пути Ox_1 пальца кривошипа две какие-либо точки b_1 и c_1 , проведем через них ординаты и назовем пересечения этих ординат с $a1$ и $A1$ через β, γ и b, c , можем сказать, что в момент O сопроти-

вление было равно OA , а танг. усилие — равно Oa ; значит, палец находился под воздействием сил, выражаемой отрезком Aa и направленной против скорости движения пальца кривошипа. В

моментъ v_1 пальца кривошипа будетъ, очевидно, находиться подъ воздействиемъ силы сопротивленія, выражаемой отрезкомъ $в\beta$ и опять направленной противъ скорости его. Въ моментъ c_1 эта результирующая сила выразится отрезкомъ $с\gamma$ и опять окажется силой сопротивленія, направленной противъ скорости пальца кривошипа. Въ моментъ x_1 оба силы R и t оказываются равными, и результирующая ихъ равна нулю.

Итакъ, на участкѣ Ox_1 пути ^{пальца кривошипа)} (Результирующая силы представляются силами сопротивленія, направленными противоположно скорости пальца и изображаемыми отрезками типа $в\beta$, $с\gamma$ и т. д., т.-е. отрезками ординатъ между прямой $A1$ и кривой $a1$. Отсюда выходитъ, что о величинѣ этихъ силъ и объ измѣняемости ихъ можно составить себѣ совершенно точное представление, если принять теперь за ось абсциссъ прямую $A1$; тогда величина силъ дастся отрезками ординатъ отъ этой новой оси абсциссъ $A1$ до кривой $a1$. Это будетъ удобно еще и потому, что все эти силы, являющіяся здѣсь силами сопротивленія и направленныя противъ движенія пальца кривошипа, окажутся отсчитываемыми внизъ отъ оси $A1$, что указано на фиг. 49 стрѣлками и является вполне согласнымъ съ правиломъ счета силъ, положеннымъ въ основаніе разсужденій, приведенныхъ на стр. 83 (листъ 6): ибо, если направленіе

движения точки, изображающей палец кривошипа, идет от A к B , вправо, то силы, препятствующия этому движению, согласно основнымъ условиямъ, придется откладывать внизъ отъ оси AB . На участкѣ Ox_1 или, что то же, $A1$, силы сопротивленія, дѣйствующія здѣсь на палецъ, являются, дѣйствительно, отклоненными внизъ отъ новой оси абсциссъ $A1B$, такъ что выборъ этой оси является удобнымъ и въ этомъ отношеніи.

На слѣдующемъ участкѣ x_1x_2 тангенціальныя усилія остаются все время больше силъ сопротивленія R , вслѣдствіе чего результирующія усилія $(t-R)$ окажутся здѣсь дѣйствующими согласно съ направлениемъ движения пальца кривошипа, т.-е. направленными положительно. Такъ, напримеръ, въ какой либо моментъ x_m результирующее усиліе выразится разностью отрезка x_mt , изображающаго дѣйствующее здѣсь тангенціальное усиліе, и отрезка x_mR , изображающаго сопротивленіе R (фиг. 48), т.-е. изобразится отрезкомъ nt ординаты между прямой $A12B$ и здѣшнимъ участкомъ 162 кривой tt . Опять представляется возможность все эти результирующія брать помощью участка 162 кривой tt , если за ось абсциссъ принять ту же прямую $A12B$, что и въ предыдущемъ случаѣ, — результирующія силы определяются отрезками ординатъ между AB и 162 какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

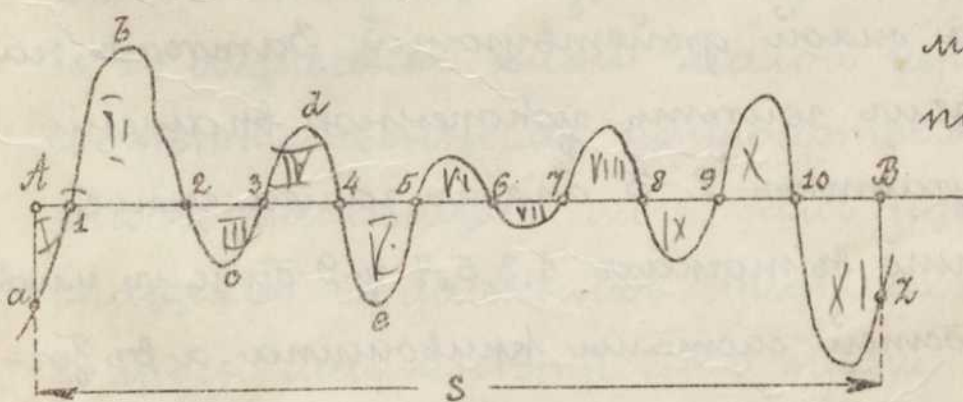
На сходящемся участке x_2x_3 имеем преобладание сопротивления R , и результирующая сила, действующая здесь на палец кривошипа противоположно скорости его, могут быть даны отрезками ординат между дугой 2с3 кривой tt и прямой $A23B$. Значит, приняв за ось абсцисс ту же прежнюю прямую AB , можем сказать, что силы, противодействующие вращению пальца кривошипа, будут измеряться по закону, даваемому кривой 2с3, — отсчет их будет вестись вниз от оси AB , что опять является вполне согласным с основным условием оета направлений сил.

На сходящемся участке x_3x_4 получаем преобладание тангенциальных усилий, при этом течение результирующих сил, действующих здесь согласно движению пальца, можно будет проследить по участку кривой 3д4, приняв за ось абсцисс ту же прямую AB ; эти результирующие придется отсчитывать вверх от оси AB .

На сходящемся участке x_4x_5 имеем перевес сопротивлений R ; результирующие усилия будут определяться кривой 4е5 и отсчитываться вниз от оси абсцисс AB , и т. д.

Сопоставляя все эти заключения, видим, что о ходе изменения величины и направления результирующих усилий ($t - R$), действующих на палец кривошипа, можно судить по той

же кривой тангенциальных усилий $abc\dots 10z$, если за ось абсцисс, т.-е. ось нулевых результирующих усилий, взять прямую AB постоянного внешнего сопротивления, определяемую уравнением (3) на стран. 190. При этом все усилия, стремящиеся поддерживать вращение вала и, значит, движущаяся по направлению скорости пальца кривошипа, окажутся отложенными вверх от прямой AB , новой оси абсцисс, — таковы все усилия на участках $x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6, \dots$, выдающихся над прямой AB ; эти усилия, согласно основному положению, будут считаться положительными. Усилия, направленные противоположно скорости пальца кривошипа, т.-е., сопротивляющиеся вращению его, окажутся отложенными вниз от оси AB и будут даны участками $a1, 2c3, 4e5$ и т.д., соответствующими участкам Ox_1, x_2x_3, x_4x_5 и т.д. пути пальца кривошипа; эти усилия придется считать отрицательными. В таком случае



Фиг. 50.

можно сказать, что палец кривошипа, при своем движении по окружности S , подвергается воздействию переменных

по величине и направлению сил, определяемых кривой $abc\dots 10z$ при оси абсцисс AB (фиг. 50).

Такъ какъ въ В скорости системы пальца кривошипа, по условію, тѣ же, что и въ А, и, значитъ, приращеніе живой силы его на пути δ равно нулю, то отсюда, въ свою очередь, слѣдуетъ, что сумма работъ силъ положительныхъ, т.-е. сумма верхнихъ мощадокъ ($I + III + V + VII + IX$), равна суммѣ работъ сопротивленій, т.-е. суммѣ нижнихъ мощадокъ (~~I~~ + II + IV + VI + VIII + X), такъ что можно написать, что

$$I + III + V + VII + IX = \text{~~I~~} + II + IV + VI + VIII + X \dots (4)$$

Правильность этого соотношенія основывается на томъ соображеніи, что приращеніе живой силы системы на пути АВ равно здѣсь нулю въ силу періодичности движенія.

Легко усмотрѣть, что при такихъ условіяхъ о равномерности вращенія кривошипа не можетъ быть и рѣчи, ибо несомненно, что на участкѣ А1 своего пути кривошипъ будетъ вынужденъ все время замедлять свой ходъ, — здѣсь сопротивленіе беретъ верхъ надъ силой дѣйствующей. Затѣмъ, на участкѣ 1-2 будетъ имѣть ускоренное вращеніе кривошипа, на участкѣ 2-3 опять замедленное и т.д. Очевидно, что въ точкахъ 1, 3, 5, 7 и 9 будетъ имѣть минимумы скоростей системы кривошипа, а въ точкахъ 2, 4, 6, 8 и 10 — максимумы ихъ, при чемъ всѣ эти минимумы вовсе не обязаны имѣть одно и то же значеніе, одинаковое для всѣхъ нихъ, — изъ среды ихъ непременно выдѣлится одинъ абсолютный мини-

мум, ниже коей скорости не спускаются на всем протяжении периода; подобным же образом из среды максимумов выдвинется один абсолютный максимум, выше коей скорости системы подниматься за весь период не будут. Таким образом, скорости масс системы кривошипа, при условии установившегося движения его, постоянными быть не могут, — мы видим, что они вынуждены меняться, колеблаться при этом за каждый оборот вала между некоторыми максимумом и минимумом.

Итак, раз сопротивление на валу есть величина постоянная, то о равномерности вращения кривошипа говорить не приходится: при таких условиях условная скорость его все время будет меняться. Это — неустрашимая особенность обыкновенного кривошипного механизма, и практика, поневоле, мирится с ней, требуя, однако, 1) сведения этой неравномерности к желаемой малой величине, приличествующей данному отдельному случаю, и 2) обеспечения этой малой неравномерности соответственным устройством машины, так, чтобы механизм мог сам удерживать скорости вращения в должных пределах. Эти основные вопросы машиностроения проще всего разрешаются при помощи теоремы живых сил, при чем разсуждения можно вести так:

Пусть приращение живой силы системы за известный промежуток времени τ равно какой-

либо величины $\mathcal{F}$, вполне и заранее определенной. Спрашивается, как достигнуть того, чтобы, несмотря на это изнѣженіе живой силы, быть может, весьма большое, скорости массъ системы изнѣжились за это время настолько мало, насколько это намъ желательно. Чтобы разобратъся въ этомъ вопросѣ, напишемъ теорему живыхъ силъ для взятаго промежутка времени τ , приведемъ скорости массъ системы въ начало этого промежутка будемъ отнѣсать индексами 0, а въ конецъ — индексами 1. Тогда для времени τ получимъ уравненіе:

$$\sum \frac{m}{2} (v_1^2 - v_0^2) = \mathcal{F}. \dots \dots \dots (b)$$

Если условныя скорости системы въ начало и конецъ взятаго промежутка обозначимъ черезъ ω_0 и ω_1 , то, замѣтая, что для каждой отдельной массы m , сидящей на разстояніи r отъ оси вращенія, можемъ написать, что $v_0 = r\omega_0$ и $v_1 = r\omega_1$, въ силу чего уравненіе (b) переписывается теперь такъ:

$$\sum \frac{m}{2} (v_1^2 - v_0^2) = \sum \frac{m}{2} (r^2 \omega_1^2 - r^2 \omega_0^2) = \frac{1}{2} (\omega_1^2 - \omega_0^2) \sum m r^2 = \mathcal{F}.$$

Замѣтая теперь, что $\sum m r^2$ есть J , — моментъ инерціи системы относительно оси вращенія, можемъ переписать уравненіе (b) окончательно такъ:

$$\frac{1}{2} (\omega_1^2 - \omega_0^2) J = \mathcal{F} \dots \dots \dots (c)$$

Это уравненіе очень важно, ибо указываетъ намъ путь къ рѣшенію поставленнаго вопроса: если требуется, чтобы конечныя скорости ω_1 отличались отъ начальныхъ ω_0 возможно мало, то мы

должны соответственно увеличивать J , момент инерции системы кривошипа относительно оси вала, а это увеличение достигается как увеличением масс, так и удалением их на достаточное расстояние от оси вращения. Полная равномерность, при которой мы иными бы всегда $\omega_1 = \omega_0$, получилась бы при $J = \frac{F}{\sigma} = \infty$, а это возможно было бы или при посадке на вал безконечно больших масс или при удалении конечных масс, связанных жестко с валом, на безконечно большое расстояние от оси вала. Таким образом, о полной равномерности вращения говорить не приходится, ибо оба вышеупомянутые способа достижения ее неосуществимы, но в то же время оказывается, что достижение сколь угодно малой разницы между начальной и конечной скоростями системы вполне возможно, — для этого может служить посадка на вал достаточно больших масс на достаточно, при том, расстоянии их от оси вала. Эти массы носят название маховиков и к расчету их мы теперь и можем приступить.

X Расчет маховика

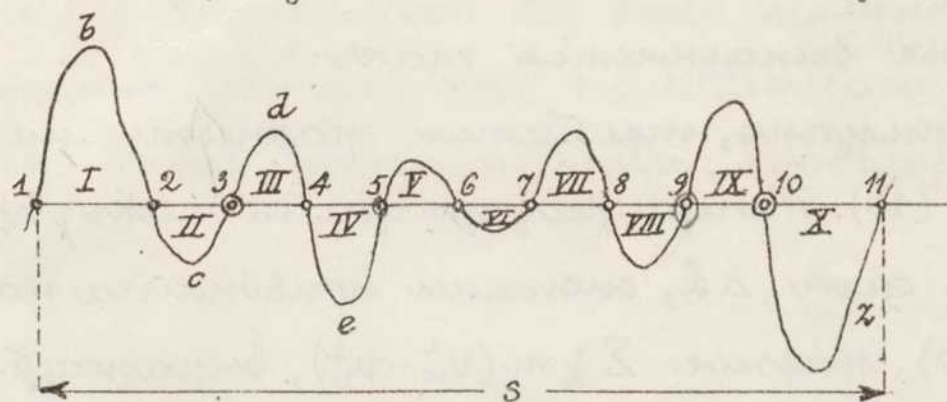
Допустим, таким образом, что на коренной вал нашего механизма посажен маховик, момент инерции коего совершенно достаточен для того, чтобы скорости системы могли колебаться лишь в пределах, нами заранее предугаданных и, вообще говоря, весьма тесных. В таком

слугать, несмотря на присутствие на валу постоянного сопротивления R , условия скорости кривошипа можно при-
нимать измѣняющимися весьма мало, т.-е. мало измѣ-
няющимися отъ постоянства, что, въ свою очередь, по-
зволяетъ принять, что действительная теперешняя
кривая тангенциальныхъ усилий сравнительно съ преж-
ней, идеальной, измѣнилась также очень мало, такъ
что вполне позволительно предположить, что обѣ эти
кривыя совпадаютъ и что мы можемъ и теперь
пользоваться той же кривою тангенциальныхъ уси-
лий, о которой было говорено выше. Очевидно, что эта
ошибка, сознательно нами допускаемая, будетъ темъ
меньше, темъ больше моментъ инерціи маховика и
темъ ближе вращеніе кривошипа подходитъ къ рав-
номерному. Итакъ, мы снова обращаемся къ раз-
смотрѣнію идеальной кривой тангенциальныхъ уси-
лий, изображенной на фиг. 50 и 51.

Ради удобства разсужденій перенесемъ начало
счета изъ A въ точку 1 (фиг. 50), а площадку aA_1
перенесемъ къ правому концу, къ x_B , такъ что она
займетъ тамъ теперь положеніе x_{B11} . Въ то же вре-
мя, попрежнему, будемъ имѣть, что $AB = OC = 1,11 =$
 $x_1 x_{11} = \delta$. Было показано, что такой переносъ начала
вполне допустимъ и возможенъ. Такъ получимъ
кривую, изображенную на фиг. 51.

Измѣримъ, дайте, все площадки $1b_2, 2c_3, \dots$,
отмѣченные у насъ римскими цифрами I, II, III,
Измѣреніе это можно выполнить или съ помощью

миллиметра или путем прямого подсчета помощью формулы Симпсона и т. д. Проверкой измѣрѣ-



Фиг. 51.

ния может случиться то обстоятельство, что, какъ мы уже видѣли выше, сумма площадей, лежащихъ выше

оси 1-11, должна быть равна сумме площадей, лежащихъ ниже ея, такъ что должно всегда существовать равенство

$$I + III + V + VII + IX = II + IV + VI + VIII + X.$$

Такъ какъ за періоды времени (1, 2), (3-4), ..., скорости системы возрастали, а за періоды (2, 3), (4, 5), ..., убывали, то въ точкахъ 2, 4, 6, 8 и 10 мы имѣемъ рядъ относительныхъ максимумовъ, а въ точкахъ 3, 5, 7, 9 и 11 рядъ относительныхъ минимумовъ. Спрашивается теперь, какіе же изъ нихъ представляются крайними, т. е. абсолютными, — иначе ихъ называютъ „максимумъ максимумъ“ и „минимумъ минимумъ“.

Для этого придется сравнить между собою по очереди какъ все максимумы, такъ, затѣмъ, и все минимумы: сначала сравниваемъ максимумъ (2) съ максимумами (4), (6), (8), (10), затѣмъ максимумъ (4) съ максимумами (6), (8), (10) и т. д. Такимъ путемъ выясняется абсолютный максимумъ. Такъ же поступаемъ съ минимумами: сначала сравниваемъ минимумъ

(3) со минимумами (5), (7), (9) и (11), затемъ минимумъ (5) со минимумами (7), (9) и (11), и т.д. Самый процессъ сравненія выполняется такъ:

Пусть, напримеръ, требуется сравнить максимумы (2) со (10). Тогда рассуждается такъ: приращение живой силы, ΔL , системы кривошипа на участке (2-10), равное $\sum \frac{1}{2} m (v_{10}^2 - v_2^2)$, выражаеяся, со другой стороны, разностью

$$\Delta L = (\text{III} + \text{V} + \text{VII} + \text{IX}) - (\text{II} + \text{IV} + \text{VI} + \text{VIII}).$$

Если эта разность положительна, то будетъ положительнымъ и приращение ΔL живой силы, а это показываетъ, что въ такомъ случае $v_{10} > v_2$, т.-е. это максимумъ (10) выше максимума (2).

Если же эта разность, наоборотъ, будетъ отрицательна, то ΔL будетъ также отрицательнымъ, и тогда $v_2 > v_{10}$, т.-е. максимумъ (10) будетъ ниже максимума (2), и т.д.

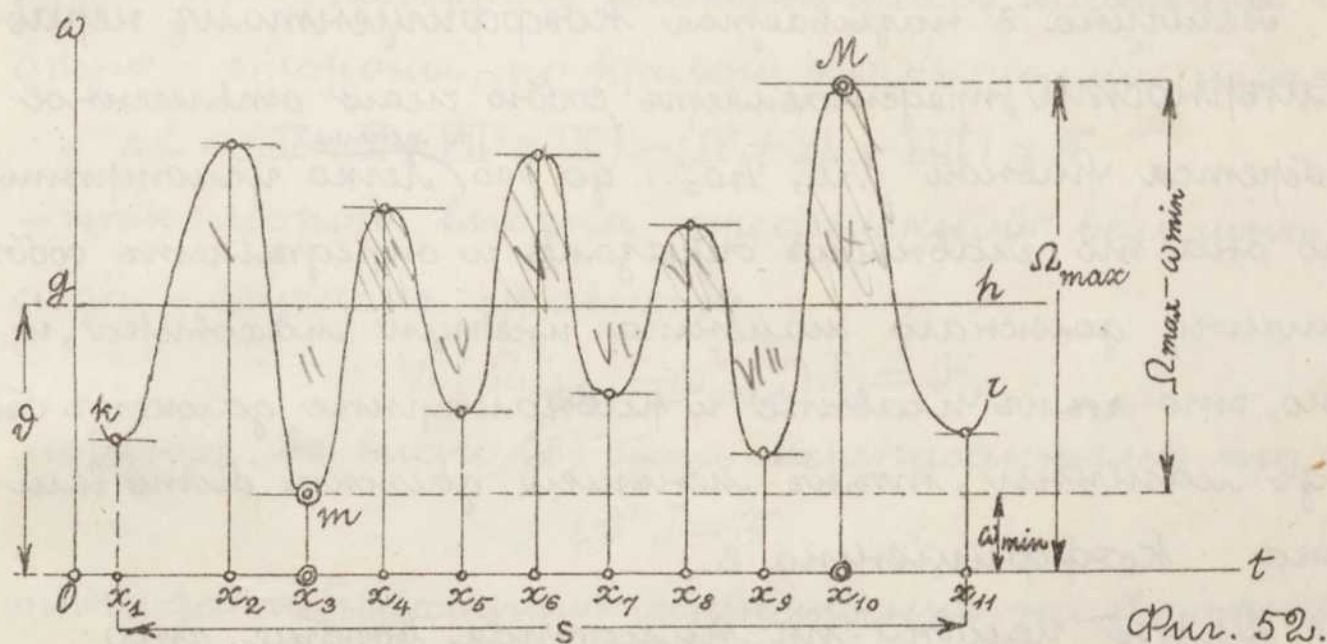
Совершенно такъ же сравниваются и минимумы. Сравнимъ, напримеръ, минимумы (5) и (9). Приращение ΔL живой силы, равное $\frac{1}{2} \sum m (v_9^2 - v_5^2)$, выражается еще такъ:

$$\Delta L = (\text{V} + \text{VII}) - (\text{VI} + \text{VIII}).$$

Если $\Delta L > 0$, то $v_9 > v_5$ и, значитъ минимумъ (5) лежитъ ниже минимума (9); если же $\Delta L < 0$, то все $v_9 < v_5$, и минимумъ (5) лежитъ выше минимума (9).

Выполнивъ все эти сравненія, найдемъ такъ или иначе абсолютный максимумъ и абсолют-

ный минимум. Пусть это будут максимум (10) и минимум (3), отмеченные на фиг. 51 двойными кружками. В эти моменты скорости системы достигают наибольшего и наименьшего из всех значений, или, вообще, принимаемых,



Фиг. 52.

такъ это, если законъ измѣненія угловыхъ скоростей кривошипа въ системе (ω, t) выражается, допустимъ, кривою $k\lambda$ (фиг. 52), то это будутъ наивысшій максимум M и наинизшій минимум m . Обозначимъ величины ихъ черезъ $\Omega_{\max}$ и $\omega_{\min}$.

Пусть коренной валъ долженъ, вращаясь равномерно, дѣлать n оборотовъ въ 1 минуту. Тогда средняя угловая скорость, которую мы будемъ обозначать черезъ ϑ , выразится, какъ извѣстно, такъ:

$$\vartheta = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \dots \dots \dots (5)$$

Въ системе (ω, t) равномерное вращение кривошипа съ этой постоянной угловой скоростью ϑ изобразилось бы прямой $g\eta \parallel Ot$ (фиг. 52)

Далее всегда ставится условие, чтобы размах измѣненія угловыхъ скоростей, т.-е. амплитуда ($\Omega_{\max} - \omega_{\min}$) не превосходилъ известной малой доли ε этой средней скорости ϑ , т.-е. чтобы

$$\Omega_{\max} - \omega_{\min} = \varepsilon \vartheta. \dots \dots \dots (6)$$

Величина ε называется коэффициентомъ неравномерности, представляетъ собою число отвлеченное и берется равной $1/20, 1/30, \dots$ до $1/60$ ^{и меньше} (Легко усмотрѣть, что она то, главнымъ образомъ и определяетъ собою величину должнаго момента инерціи маховика, и ясно, что чемъ плавнѣе и равномернѣе долженъ быть ходъ машины, тѣмъ меньшей должна быть величина коэффициента ε).

Далее условно принимается, вообще, что

$$\frac{1}{2}(\Omega_{\max} + \omega_{\min}) = \vartheta, \dots \dots \dots (7)$$

т.-е. что средняя арифметическая изъ крайнихъ угловыхъ скоростей системы равна какъ разъ средней угловой скорости ϑ . Это предположеніе, въ общемъ, достаточно близко къ истинѣ.

Переходя къ уравненіямъ (6) и (7), находимъ новое соотношеніе

$$\frac{1}{2}(\Omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \varepsilon \vartheta^2, \dots \dots \dots (8)$$

которымъ теперь и воспользуемся для подсчета искомаго момента инерціи маховика.

Мы предположимъ, что абсолютный максимумъ приходится въ точку (10), а абсолютный минимумъ — въ точку (3). Напишемъ теперь для участка (3—10) теорему живыхъ силъ согласно фиг. 51.

Получим, таким образом, что приращение ΔL кинетической энергии системы за промежуток времени (3-10) выражается так:

$$\Delta L = \sum \frac{m}{2} (v_{10}^2 - v_3^2) = \frac{1}{2} \sum m (r^2 \Omega_{\max}^2 - r^2 \omega_{\min}^2) = \\ = \frac{1}{2} (\Omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) \sum m r^2 = \frac{1}{2} (\Omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) J,$$

где J есть момент инерции масс маховика. С другой стороны, по кривой танг. усилий имеем

$$\Delta L = (\text{III} + \text{V} + \text{VII} + \text{IX}) - (\text{IV} + \text{VI} + \text{VIII}) = F,$$

— некоторой вполне определенной величины. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{1}{2} (\Omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) J = F,$$

которое, в виду (8) может переписываться так:

$$\varepsilon \vartheta^2 J = F, \dots \dots \dots (9)$$

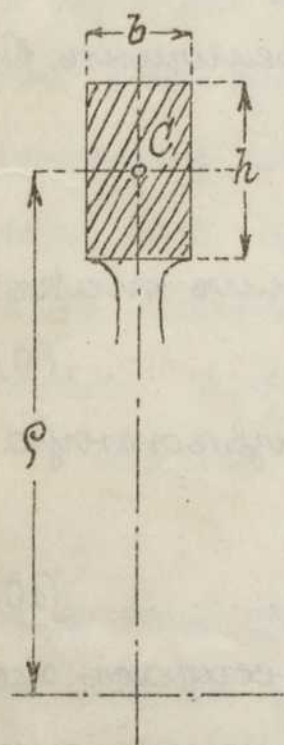
откуда и находим единственно неизвестную здесь величину J :

$$J = \frac{F}{\varepsilon \vartheta^2} = \frac{900 F}{\varepsilon \pi^2 n^2} \dots \dots \dots (10)$$

Изменив F и задавшись ε и n , сейчас же определим соответствующее J , — момент инерции маховика, который и будет в состоянии держать изменения скоростей в пределах, указанных коэффициентом ε , при данном числе оборотов n машины и данных прочих условиях движения.

Маховик выполняется всегда в виде более или менее массивного кольца — обода, скрепленного с втулкой, закрепляемой наглухо на валу, при помощи или сплошного диска или ступицы. Для простоты расчета массы M этих

соединительных звеньев пренебрегают и предварительный расчет ведут в предположении, что вся масса M маховика равномерно распределена по окружности радиуса ϱ , по которой разбиты центры тяжести поперечных сечений обода (фиг. 53). Тогда $J = M\varrho^2$, откуда, задавшись каково-либо ϱ , определяем соответствующую массу обода, M , что сейчас же дает возможность вычислить



вращ и объем его. Действительно, обозначая вращ обода через ϑ , ускорение силы тяжести в надлежащих единицах — через g , а вращ единицы объема материала маховика (удельный вращ материала) через γ , можем написать, что $M = \vartheta/g$, или иначе, обозначая объем маховика (обода) через V , имеем, что

$$M = V\gamma/g, \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{и, значит, } J = \frac{1}{g} V\gamma\varrho^2 \dots \dots \dots (12)$$

По теореме Гюльдена имеем, что $V = 2\pi\varrho \times b \times h$, в виду чего (12) принимает вид:

$$J = \frac{1}{g} 2\pi\varrho^3 \gamma b h \dots \dots \dots (13)$$

Обратно, имея из предыдущего J и задавшись материалом обода и размерами его b и h , сейчас же определим единственно неизвестную в (13) величину радиуса ϱ , а значит, и все же размеры маховика. Более точный расчет дает для J выражение

$$J = \frac{1}{g} V\gamma\varrho^2 \left(1 + \frac{h^2}{4\varrho^2}\right) \dots \dots \dots (14)$$

Выбравъ тѣ или другіе размеры b, h и g , определяемъ еще разъ пробный расчетъ: по формуле (14) определяемъ J , а по ур. (10) соответствующій этимъ значеніямъ коэффициентъ ε , и если онъ оказывается достаточнымъ, то на этомъ расчетѣ можно кончить.

Если желательно произвести вполне точный расчетъ, то придется учесть еще вліяніе ступи (или диска); мы этого расчета производить не будемъ, укажемъ лишь, что разъ выбранный нами ободъ съ размерами b, h и g даетъ известную величину коэффициента ε , то вліяніе ступи или диска скажется уменьшеніемъ этого коэффициента, т.е. увеличеніемъ плавности хода, что, конечно, можно только приветствовать. !!!

Этимъ замѣчаніями мы и закончимъ главу о расчетѣ маховиковъ. Какъ видимъ, задачей ихъ, для выполненія которой они только и применяются, является регулированіе періодическихъ колебаній скорости вращенія, зависящихъ отъ свойствъ кривошипнаго механизма вообще и поэтому иныхъ путей неустранимыхъ. Маховикъ является какъ бы ^{аккумуляторомъ} ~~накапителемъ~~, собирающимъ въ себя избытокъ живой силы, появляющійся въ моменты ускоренія вращенія кривошипа, и отдающимъ его обратно на пополненіе убыли скорости при замедляемомъ вращеніи кривошипа. Благодаря большой своей массѣ, маховикъ, собирая въ себя

даже значительные запасы живой силы, весьма мало, въ пределах коэффициента ε , мѣняетъ угловую скорость своего вращенія, а значитъ, влѣстѣ съ этимъ, и всѣхъ массъ, жестко съ кореннымъ валомъ связанныхъ и влѣстѣ съ нимъ вращающихся.

Регулированіе неперіодическихъ колебаній угловой скорости, зависящихъ отъ измѣненія полезнаго сопротивленія R на коренномъ валу или отъ измѣненія закона движущихся силъ, т.-е. удерживаніе числа оборотовъ на той же высотѣ n , маховикомъ, очевидно, выполняемо быть не можетъ; это регулированіе представляется дѣломъ, также весьма важному, органу каждой машины — двигателя, — такоу называемому регулятору, о сущности дѣйствія котораго и объ основаніяхъ расчета мы будемъ говорить въ одной изъ дальнѣйшихъ статей нашего общаго курса.

