Пр.-доц. Н. И. Мерцаловъ.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ИЗДАНІЕ
Общества взаимопомощи студентовъ математиковъ.

МОСКВА.
Типо-литографія В. Рихтеръ, Тверская, Мамоновскій пер., с. д.
1911.

Пр.-доц. Н. И. Мерцаловъ.

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

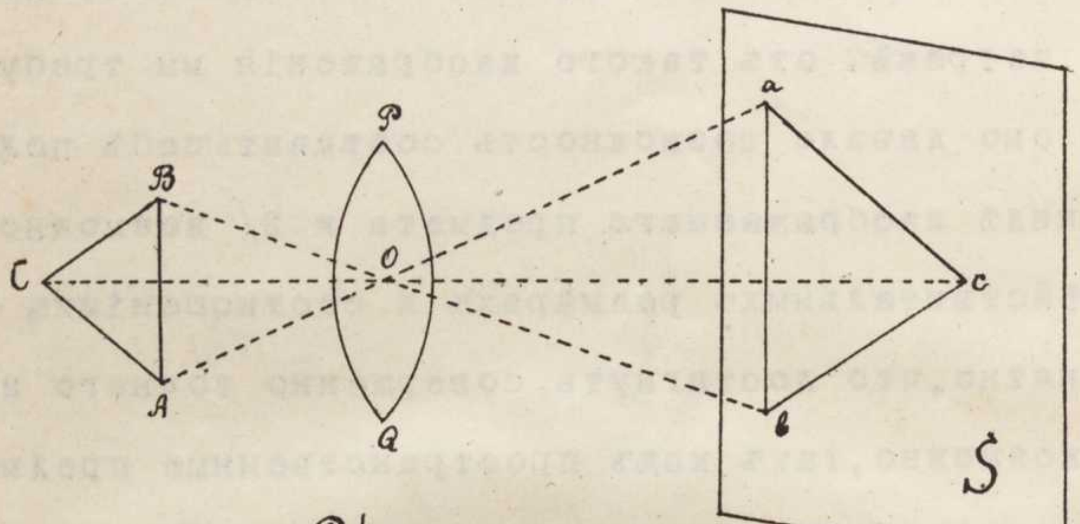
ИЗДАНІЕ
Общества взаимопомощи студентовъ математиковъ.

МОСКВА.
Типо-литографія В. Рихтеръ, Тверская, Мамоновскій пер., с. д.
1911.

В В Е Д Е Н І Е.

Весьма часто бываетъ нужно имѣть - для техническихъ или иныхъ цѣлей - изображеніе пространственнаго предмета на плоскомъ четрежѣ. отъ такого изображенія мы требуемъ: 1/ чтобы оно давало возможность составить себѣ полное понятіе о видѣ изображаемаго предмета и 2/ возможность судить о дѣйствительныхъ размѣрахъ и соотношеніяхъ его частей. Понятно, что достигнуть совершенно точнаго изображенія невозможно, такъ какъ пространственные предметы вообще не могутъ быть совмѣщены съ плоскостью; существуютъ однако способы, пользуясь которыми можно построить изображенія, дающія возможность судить, съ достаточной для практическихъ приложеній точностью, о видѣ и размѣрахъ изображеннаго предмета. Изученіемъ этихъ способовъ и занимается наука, извѣстная подъ именемъ Н А Ч Е Р Т А - Т Е Л Ь Н О Й Г Е О М Е Т Р І И.

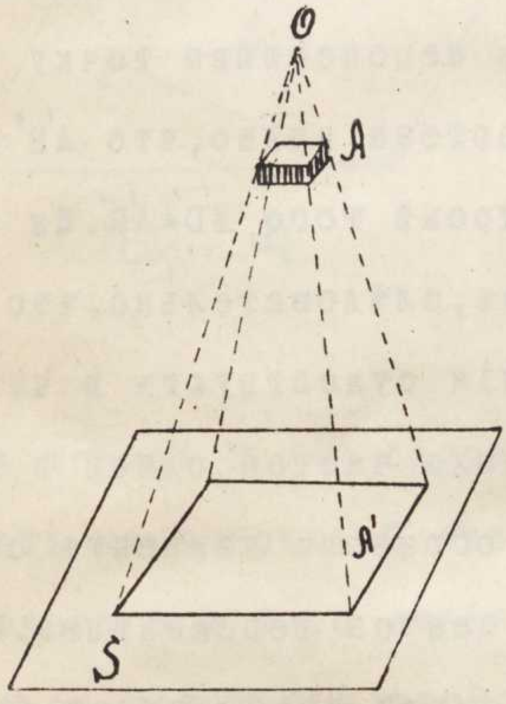
Первое непосредственное понятіе о предметѣ мы получаемъ, разсматривая его глазами: можно поэтому принять, что способъ полученія изображеній, подобный тому, какимъ они получаются въ нашемъ глазу, будетъ наилучшій. Глазъ мы можемъ приближенно разсматривать, какъ нѣкоторую линзу, дающую дѣйствительное изображеніе предмета на экранѣ. Роль линзы здѣсь играетъ хрусталикъ, роль экрана - сѣтчатая оболочка глаза - ретина, малую часть которой мы можемъ разсматривать, какъ плоскую. При этихъ допущеніяхъ построеніе изображенія въ глазу сведется къ извѣстному изъ элементарной физики построенію изображенія въ двояко-выпукломъ стеклѣ.



Черт. 1.

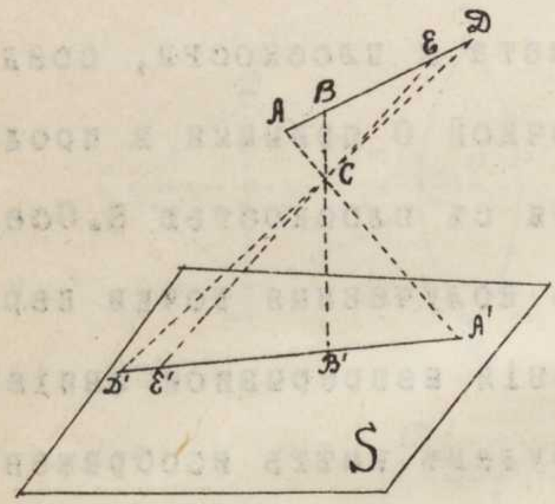
Пусть A, B, C (черт. 1) будутъ какія-нибудь три точки предмета. PQ- линза, S-плоскость изображенія. Построеніе изображенія предмета ABC будетъ всего проще, если воспользоваться свойствами оптическаго центра чечевицы, именно тѣмъ, что лучъ, проходящій черезъ этотъ центръ, не измѣняетъ своего направленія. Пусть на чертежѣ точка O изображаетъ оптическій центръ чечевицы PQ. Проведемъ черезъ точки A, B, C и точку O лучи AO, BO, CO и найдемъ ихъ точки пересѣченія a, b, c съ плоскостью S. Соединивъ эти точки a, b, c, мы получимъ изображеніе предмета ABC. Такимъ именно способомъ получаются изображенія въ глазу. Мы замѣчаемъ, что для его построенія нужно точки предмета соединить съ одной и той же точкой O и продолжить лучи до пересѣченія съ плоскостью, на которой мы хотимъ получить изображеніе предмета. Этимъ способомъ мы и будемъ пользоваться, и, исходя изъ него, получимъ еще нѣсколько способовъ построенія изображеній.

Возьмемъ предметъ А (черт. 2) и плоскость S. Выбираемъ какую-нибудь точку О внѣ предмета и плоскости, соединяемъ всѣ точки предмета съ точкой О прямыми и продолжаемъ эти прямыя до пересѣченія съ плоскостью S. Соединивъ полученныя точки пересѣченія непрерывной линіей, мы будемъ имѣть изображеніе предмета А – А′, построенное по указанному способу. Этотъ способъ называется способомъ или методомъ центральной перспективы. Точка О называется центромъ перспективы, плоскость S – картинной плоскостью или плоскостью изображенія, самое изображеніе А′ – центральной перспективой предмета А.



Черт. 2.

Мы видимъ, что методъ центральной перспективы весьма близко подходитъ къ способу полученія изображеній въ нашемъ глазу. Наглядность его очевидна; первое наше требованіе выполнено. Надо еще только разсмотрѣть, даетъ ли этотъ методъ возможность судить по изображенію о дѣйствительныхъ размѣрахъ предмета. Не трудно видѣть, что измѣренія предмета, вообще говоря, искажаются въ изображеніи.

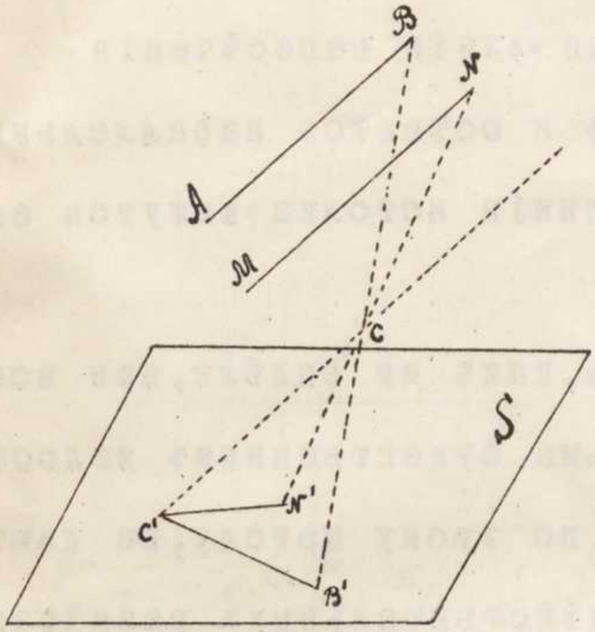


Черт. 3.

Возьмемъ на прямой AD (чер.3) два равныхъ отрѣзка AB и ED и построимъ ихъ изображенія на плоскости S, принимая за центръ перспективы точку C. Изъ чертежа видно, что $A'B' \neq AB$, и кромѣ того $E'D' \neq A'B'$. Мы замѣчаемъ, слѣдовательно, что искаженія существуютъ и что онѣ неодинаковы даже для различныхъ частей одной и той же прямой, что они существеннымъ образомъ зависятъ отъ положенія предмета относительно центра перспективы. Отрѣзокъ AB, находящійся ближе къ центру, изобразился больше отрѣзка ED, хотя въ дѣйствительности величина обоихъ отрѣзковъ одинакова. Изъ ежедневнаго опыта мы знаемъ, что такой же недостатокъ присущъ и нашему глазу.

Покажемъ теперь, что и углы предмета въ такомъ изображеніи искажаются. Достаточно для этой цѣли показать, что параллельныя прямыя въ центральной перспективѣ изображаются сходящимися.

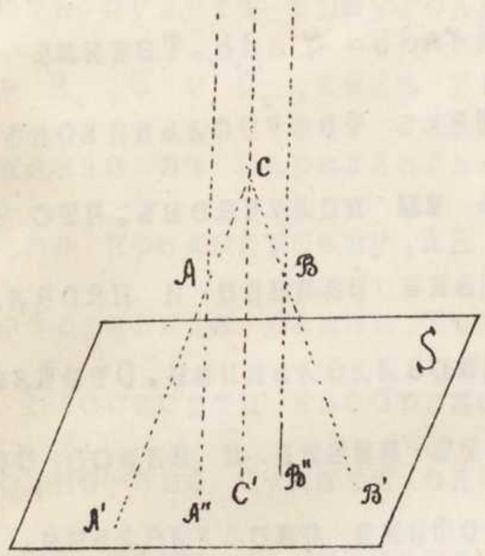
Возьмемъ въ пространствѣ двѣ параллельныя прямыя AB и MN. (черт.4) и построимъ ихъ изображенія на плоскости S, принимая за центръ перспективы точку С. Параллельныя прямыя можно разсматривать сходящимися въ безконечно-удаленной точкѣ. Чтобы получить изображеніе этой точки, проведемъ через С прямую AB MN. Точка С будетъ изображеніемъ безконечно-удаленной точки, въ которой сходятся прямыя AB и MN. Построивъ изображенія точекъ В и N-точки B и N и соединивъ ихъ съ точкой С, мы олучимъ изображенія прямыхъ АВ и MN. Такъ какъ точка С лежитъ на конечномъ разстояніи отъ точекъ В и N, то линіи ВС и NC будутъ непараллельными. Такое искаженіе свойственно и глазу, въ чемъ легко убѣдиться, смотря, напримѣръ, на рельсы желѣзной дороги: онѣ кажутся намъ сходящимися.



Черт. 4.

До сихъ поръ мы предполагали, что плоскость линій АВ и MN непараллельна плоскости изображенія. Легко видѣть, что, если существуетъ параллельность обѣихъ плоскостей, то искаженія не будетъ и параллельныя линіи дадутъ и параллельныя изображенія. Въ самомъ дѣлѣ: пусть линіи АВ и MN параллельны плоскости S. Тогда и линія СС S AB MN: точка С находится въ безконечности, вслѣдствіе чего и прямыя $B'C'$ и $N'C'$ будутъ также параллельны. Это же свойство принадлежитъ и глазу. Въ этомъ легко убѣдиться, смотря на стѣну: вертикальныя линіи пересѣченія стѣнъ, параллельныя ретинѣ, такъ и остаются параллельными въ глазу, а горизонтальныя линіи потолка кажутся сходящимися.

Методъ центральной перспективы, какъ мы видѣли, при всей его наглядности, обладаетъ весьма существеннымъ недостаткомъ: изображенія, построенныя по этому методу, не даютъ никакой возможности судить о дѣйствительныхъ размѣрахъ предмета. Искаженія изображеній неодинаковы даже по одной и той же прямой и при томъ существенно зависятъ отъ положенія центра перспективы относительно изображаемаго предмета. Намъ нужно найти такой способъ изображенія, въ которомъ искаженія были-бы по крайней мѣрѣ подчинены одному простому закону. Какъ мы видѣли, этому мѣшаетъ вліяніе разстоянія центра перспективы отъ различныхъ точекъ предмета. Это вліяніе можно исключить, удаляя центръ перспективы въ безконечность. При такомъ выборѣ центра перспективы разстоянія различныхъ точекъ предмета отъ центра перспективы будутъ разниться другъ отъ друга на величины, исчезающе малыя въ сравненіи со всѣмъ разстояніемъ: лучи перспективы сдѣлаются параллельными, и мы получимъ методъ, производный отъ метода центральной перспективы. Представимъ это на чертежѣ. Пусть A и B (черт. 5) - двѣ точки предмета, A' и B'-ихъ изображенія при центрѣ перспективы C в плоскости изображенія S. Предположимъ, что центръ перспективы удаляется въ безконечность по направленію CC'; тогда прямыя AA' и BB' будутъ стремиться къ параллельности между собой и съ линіей CC'; въ предѣлѣ онѣ станутъ параллельными и изображеніями ихъ будутъ точки A'' и B''. Эти точки часто носятъ названіе к о с о у г о л ь н ы х ъ п р о е к ц і й точекъ A и B.



Черт. 5.

Въ методѣ центральной перспективы искаженія касались и размѣровъ и угловъ предмета. Параллельныя и равныя части прямыхъ изображались сходящимися и разной длины. Посмотримъ, какъ изобразятся такія линіи въ нашемъ производномъ методѣ, въ методѣ к о с о у г о л ь н ы х ъ п р о э к ц і й.

Возьмемъ двѣ прямыя AB и A_1B_1 такъ, чтобы $AB \# A_1B_1$ и пусть ab и a_1b_1 суть изображенія этихъ линій по методу косоугольныхъ проекцій причемъ плоскость изображеній есть S, а направленіе лучей перспективы указано

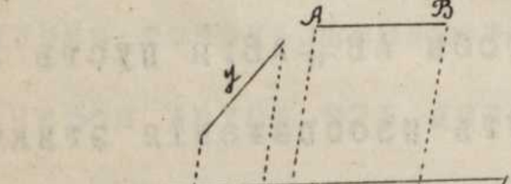
Черт. 6.

стрѣлкой (черт.6).

Проведемъ $ad \# AB$ $a_1d_1 \# A_1B_1$. Тогда очевидно $a_1d_1 \# ad$. Далѣе замѣтимъ, что пл.$(aA, bB) \parallel$ пл.(a_1A_1, b_1B_1). Отсюда слѣдуетъ, что $ab \parallel a_1b_1$, слѣдовательно $\sphericalangle dab = \sphericalangle d_1a_1b_1$ и $\sphericalangle adb = \sphericalangle a_1d_1b_1$. Такимъ образомъ $\Delta adb = \Delta a_1d_1b_1$. Изъ равенства этихъ треугольниковъ заключаемъ, что $ab = a_1b_1$. Такимъ образомъ мы получаемъ, что при методѣ косоугольныхъ проекцій отрѣзки равные и параллельные изображаются также равными и параллельными. Отрѣзокъ, вдвое большій другого отрѣзка, будетъ имѣть и вдвое большее изображеніе, если только эти отрѣзки параллельны.

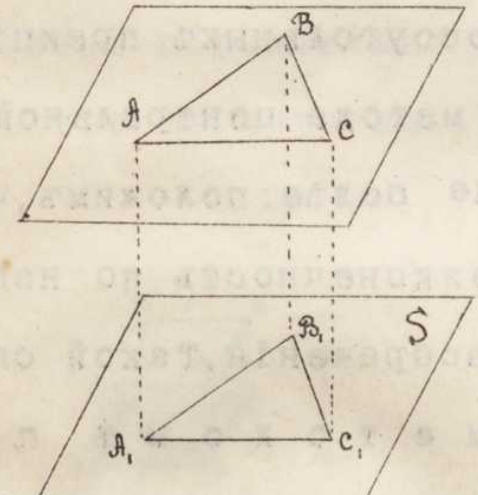
Пусть дана линія AB и ея изображеніе ab. Понятно, что отношеніе $\frac{ab}{AB}$ будетъ постоянно для всѣхъ направленій, параллельныхъ направленію AB. Это отношеніе называется м а с ш т а б о м ъ даннаго направленія. Пусть, напримѣръ, AB =10 ст. ab=5 ст. Тогда масштабъ направленія AB есть $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Легко видѣть, что направленія, параллельныя плоскости изображенія, не искажаются. Въ самомъ дѣлѣ: пусть AB параллельна плоскости изображенія S (черт.7). Тогда по извѣстной теоремѣ стереометріи $AB \# A_1B_1$; всякій отрѣзокъ y, параллельный плоскости S, изобразится отрѣзкомъ $y_1 = y$; вообще, всѣ фигуры, лежащія въ плоскостяхъ, параллельныхъ плоскости S, изобразятся безъ искаженія. Докажемъ, что углы, плоскости которыхъ параллельны пло-



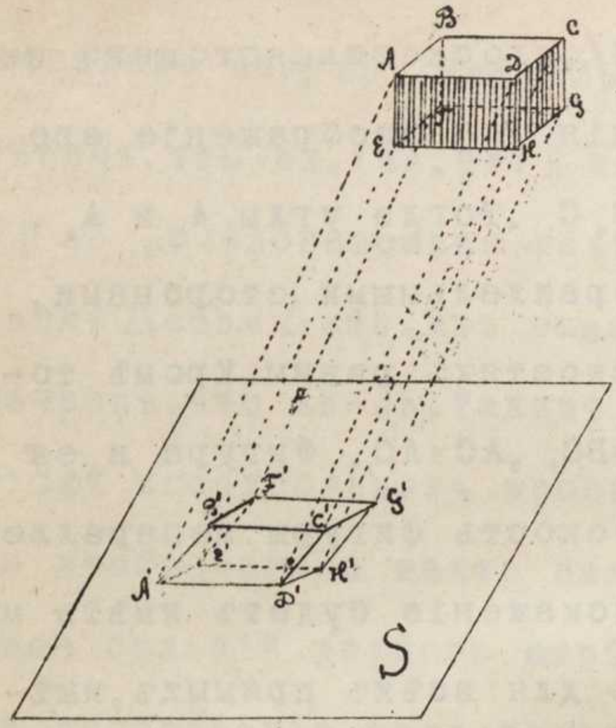
Черт. 7.

скости S ,изображаются въ натуральную величину.Пусть данъ треугольникъ ABC /черт.8/,плоскость котораго параллельна плоскости изображенія S ; изображеніе его пусть будетъ треугольникъ $A_1B_1C_1$.Тогда углы A и A_1 , B и B_1 ,C и C_1 ,какъ углы съ параллельными сторонами, лежащіе въ параллельныхъ плоскостяхъ равны.Кромѣ того,по предыдущему,$AB = A_1B_1$,$BC=B_1C_1$,$AC=A_1C_1$. Фигура и ея изображеніе равны.Если-же плоскость фигуры непараллельна плоскости изображенія,то искаженіе будетъ имѣть мѣсто,но оно будетъ одинаковымъ для всѣхъ прямыхъ,имѣющихъ данное направленіе,и,зная масштабъ искаженій, мы можемъ судить объ истинныхъ измѣреніяхъ изображаемаго предмета.



Черт. 8.

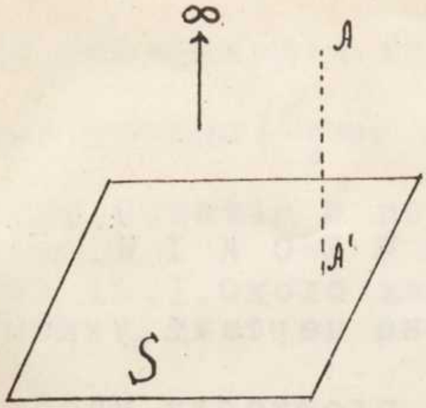
Теперь намъ ясенъ путь,по которому происходитъ построеніе изображеній при методѣ косоугольныхъ проекцій.Для построенія нужно черезъ всѣ точки предмета провести лучи,параллельные одному и тому же направленію, по которому центръ перспективы былъ удаленъ въ безконечность и найти точки ихъ пересѣченія съ плоскостью изображенія.Такъ,напр., построено изображеніе $A'B'C'D'E'F'G'H'$ параллелепипида $ABCDEFGH$. Разсматривая это изображеніе /черт.9/, мы видимъ,что оно достаточно наглядно;кромѣ того мы уже знаемъ,что искаженія измѣреній легко поддаются учету.Уже отсюда



Черт. 9.

видно,что методъ косоугольныхъ проекцій имѣетъ громадное преимущество передъ методомъ центральной перспективы: онъ даетъ возможность судить о размѣрахъ предмета,будучи въ то же время нагляднымъ.

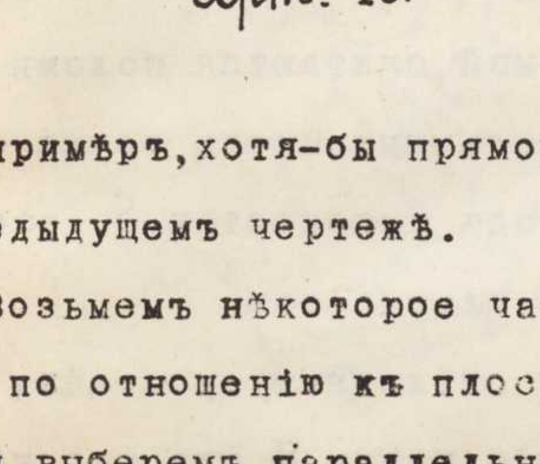
До сихъ поръ мы ничего не говорили о томъ направленіи, по какому центръ перспективы удаляется въ безконечность. Способъ полученія изображеній при такомъ выборѣ центра мы называли способомъ или методомъ косоугольныхъ прекцій,разсматривая его,какъ частный случай метода центральной перспективы.Специализируемъ его еще болѣе: положимъ,что центръ перспективы удаляется въ безконечность по направленію перпендикулярному плоскости изображенія.Такой способъ называется **способомъ** или **методомъ прямоугольныхъ,простыхъ, ортогональныхъ проекцій**,такъ какъ лучи перспективы при этомъ способѣ перпендикулярны къ плоскости изображенія. Этотъ методъ употребляется чаще всего въ практическихъ приложеніяхъ начертательной геометріи. На чертежѣ это представится такъ. /черт. 10 / изображеніе точки А есть основаніе A' перпендикуляра,опущеннаго изъ точки А на плоскость изображенія S. Къ этому методу должны мы примѣнить оба наши критерія. Какъ методъ,производный отъ метода косоуголь-



Черт. 10.

ныхъ проекцій, онъ безъ сомнѣнія даетъ возможность судить объ истинныхъ размѣрахъ предмета по его изображенію. Но мы еще не знаемъ, достаточно ли нагляденъ этотъ методъ. Для выясненія этого вопроса, намъ нужно построить изображеніе какого-нибудь предмета, напримѣръ, хотя-бы прямоугольнаго параллелепипеда, какъ на предыдущемъ чертежѣ.

Возьмемъ нѣкоторое частное расположеніе параллелепипеда по отношенію къ плоскости изображенія: одну изъ его граней выберемъ параллельно плоскости изображенія, какъ это представлено на чертежѣ 11.



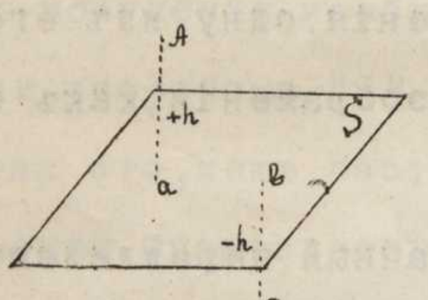
Черт. 11.

Пусть данный параллелепипедъ есть параллелепипедъ ABCDA'B'C'D' /черт. 11 /, причемъ грани A'B'C'D' и ABCD параллельны плоскости S. Тогда всѣ ребра: AA', BB', CC', DD' изобразятся на плоскости S просто точками a, b, c, d. Рельефъ изображенія исчезъ, такъ какъ одно измѣреніе сократилось въ точку. Мало того, по чертежу мы совсѣмъ не можемъ судить о величинѣ исчезнувшаго измѣренія. Необходимо дополнить этотъ методъ такъ, чтобы чертежъ давалъ исчезнувшія линіи непосредственно. Средствъ для такого дополненія существуетъ нѣсколько;изъ нихъ мы разсмотримъ два.

ГЛАВА I.

МЕТОДЪ ТОПОГРАФИЧЕСКІЙ.

Исчезнувшее измѣреніе можно дать на чертежѣ,указывая разстоянія его крайнихъ точекъ отъ плоскости изображенія.Плоскость эта обыкновенно считается горизонтальной и разстоянія точекъ,лежащихъ надъ ней,считаются положительными,лежащихъ подъ ней-отрицательными.Пусть точка А / черт. 12 /лежитъ на высотѣ h надъ плоскостью S ,точка B -на такомъ же разстояніи подъ плоскостью.

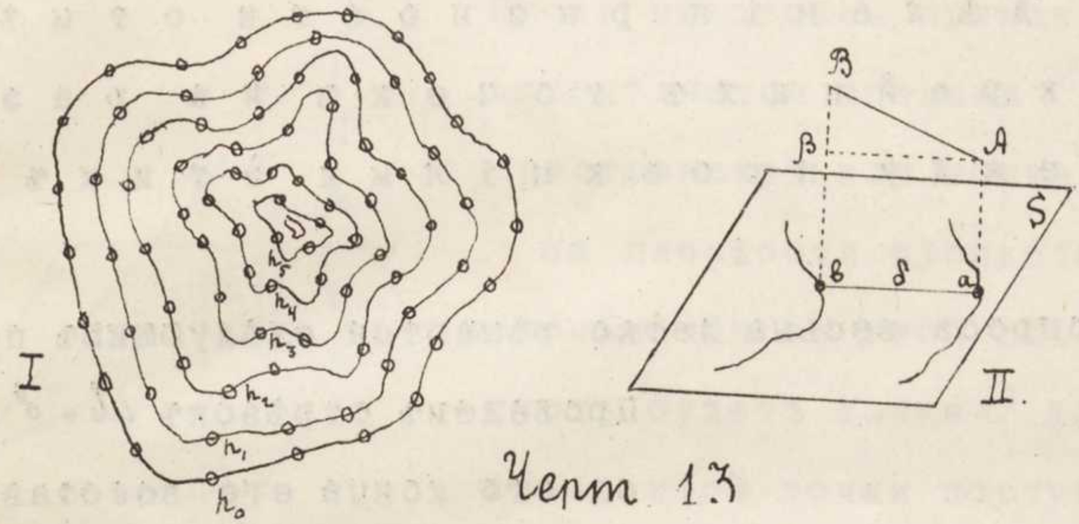


Черт. 12.

Согласно сдѣланному условію, разстояніе точки B отъ плоскости мы назовемъ $-h$.Это записывается такъ: $A(+h)$, $B(-h)$ и читается:точка $a(+h)$,точка $b(-h)$.

Точка a называется проекціей точки A ,величина h-ея отмѣткой.Поэтому говорятъ ,что точка A задана своей проекціей a и отмѣткой h.Такой способъ заданія точекъ примѣняется при топографической съемкѣ мѣстности и поэтому называется топографическимъ.Съемка угломѣрными инструментами или мензулой даетъ ортогональныя проекціи точекъ мѣстности на какую-нибудь горизонтальную плоскость,выбранную за плоскость изображенія.Отмѣтивъ на планѣ высоты точекъ надъ этой плоскостью,найденныя,напримѣръ,при помощи нивеллира и соединивъ точки съ равными высотами кривыми,мы по-

получимъ планъ мѣстности,дающій понятіе и о ея рельефѣ. Кривыя,соединяющія точки съ равными высотами,называются линіями уровня (lignes de niveau) ,горизонталями,или изогипсами.Понятіе о подобномъ планѣ можно получить изъ чертежа 13,I.Около каждой горизонтали ставится



Черт 13

общая отмѣтка ея точекъ.

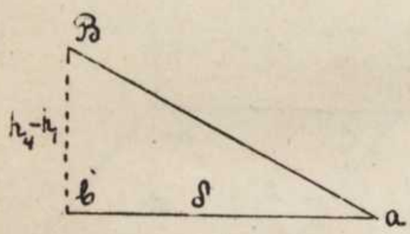
Пусть на планѣ даны двѣ точки : $a(h_1)$ и $b(h_4)$ и требуется найти разстояніе между ними.Для рѣшенія этого вопроса обращаемся къ перспективному чертежу 13,II.Изъ точекъ a и b,изображающихъ наши точки $a(h_1)$ и $b(h_4)$,возставимъ перпендикуляры aA и bB,равные соотвѣтственно h_1 и h_4.Точки A и B будутъ имѣть проекціи a и b и отмѣтки h_1 и h_4,то-есть, будутъ данныя.Проведемъ прямую $A\beta \| ab$,до пересѣченія съ bB въ точкѣ β.Находимъ:

$$Aa = \beta b \quad , \quad A\beta = ab = \delta$$

$B\beta = Bb - \beta b = Bb - Aa = h_4 - h_1$;изъ треугольника $AB\beta$ имѣемъ: $AB = \sqrt{\delta^2 + (h_4-h_1)^2}$, то-есть,разстояніе между двумя точками,заданными своими проекціями и отмѣтками,равно корню квадратному изъ суммы квадратовъ разстоянія между проекціями этихъ точекъ и разности ихъ отмѣтокъ. Изъ того же треугольника $AB\beta$ имѣемъ:

$$tg \measuredangle \beta AB = \frac{B\beta}{A\beta} = \frac{h_4 - h_1}{\delta},$$ то-есть, тангенсъ угла наклоненія линіи AB къ плоскости равенъ частному отъ дѣленія разности отмѣтокъ двухъ крайнихъ точекъ на разстояніе между проекціями этихъ точекъ.

Оба эти вопроса весьма легко рѣшаются слѣдующимъ построеніемъ:



Черт. 14.

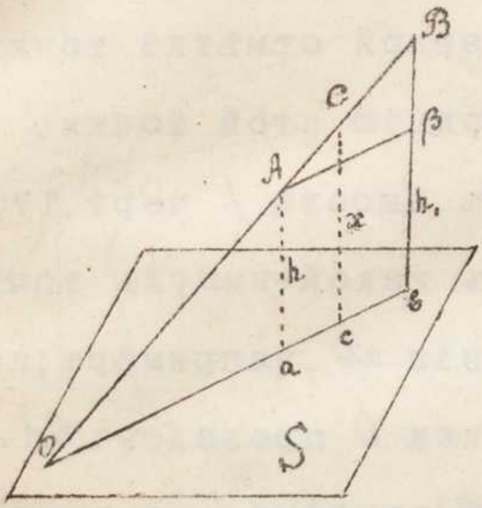
Проведемъ отрѣзокъ $ab = \delta$, изъ одного конца его возставимъ перпендикуляръ bB и отложимъ на немъ отрѣзокъ $bB = h_4 - h_1$; соединивъ точки B и a, получимъ прямоугольный треугольникъ bBa который дастъ и величину и наклоненіе отрѣзка AB/черт.14/.

Подобнымъ же образомъ можно рѣшить, напримѣръ, такую задачу: провести по склону горы дорогу такъ, чтобы уклонъ ея нигдѣ не превышалъ извѣстнаго числа градусовъ и другія подобныя задачи.

Очевидно, что прямая и ея проекція лежатъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ плоскости проекцій. Замѣтивъ это, рѣшимъ задачу о пересѣченіи прямой съ плоскостью проекцій.

Точка пересѣченія прямой съ плоскостью проекцій лежитъ на этой плоскости и сама является своей проекціей.

Проекція всякой точки прямой лежитъ на проекціи этой прямой ;если такъ,то и точка пересѣченія прямой съ плоскостью лежитъ на проекціи прямой,т.е. въ точкѣ пересѣченія прямой съ ея проекціей.Поэтому,для того,чтобы найти точку пересѣченія прямой съ плоскостью проекцій,достаточно найти точку пересѣченія этой прямой съ ея проекціей.

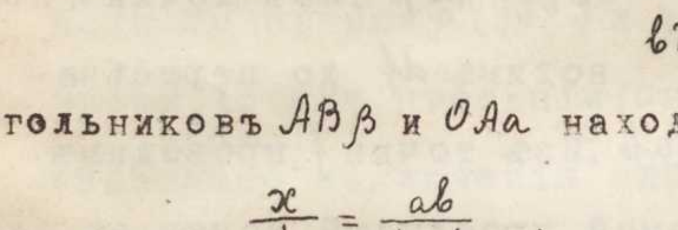


Черт. 15.

Пусть нѣкоторая прямая /черт.15/ опредѣляется точками A и B въ пространствѣ,или точками $a(h)$ и $b(h_1)$ на плоскости проекцій;точка ея пересѣченія съ этой плоскостью пусть будетъ точка O.Для опредѣленія этой точки поступаемъ такъ: проведемъ $A\beta \parallel ab$ до пересѣченія съ bB въ точкѣ β.Изъ подобія треугольниковъ $AB\beta$ и OAa находимъ,обозначая Oa буквой x.

$$\frac{x}{h} = \frac{ab}{h_1 - h}, \qquad \text{откуда} \qquad x = \frac{ab \cdot h}{h_1 - h}.$$

Для построенія этой величины графически,дѣлаемъ слѣдующее:отъ точекъ a и b откладываемъ по перпендикулярному къ ab направленію,или вообще параллельно между собой,отрѣзки h_1 и h и черезъ концы ихъ проводимъ прямую до пересѣченія съ ab въ точкѣ O. Разстояніе Oaея точки пересѣченія съ ab отъ точки a и есть искомое x.Прямыя OR ,построенныя такимъ образомъ /черт.16/ называются масштабами высотъ



Черт. 16.

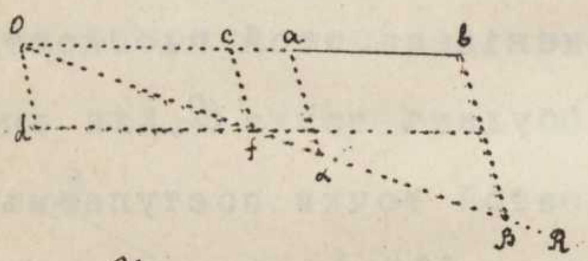
или разстояній для данной прямой,или линіями высотъ.Онѣ часто обозначаются просто буквой K .

Не трудно убѣдиться, что если точка $c(x)$ лежитъ на прямой AB, то ея отмѣтка x найдется, если проведемъ $c\gamma \parallel a\alpha \parallel b\beta$, до пересѣченія съ R. Въ самомъ дѣлѣ: изъ перспективнаго чертежа 15 имѣемъ: $\frac{Cc}{Aa} = \frac{Oc}{Oa}$, а изъ чертежа 16:

$\frac{c\gamma}{a\alpha} = \frac{Oc}{Oa}$; такъ какъ $a\alpha = Aa$, то и $Cc = c\gamma = x$.

Такимъ образомъ отмѣтка x найдена.

Рѣшимъ теперь обратную задачу: по данной отмѣткѣ точки, лежащей на прямой $a(h)\,b(h_1)$, найти проекцію этой точки. Построимъ для данной линіи масштабъ высотъ / черт.17/ и

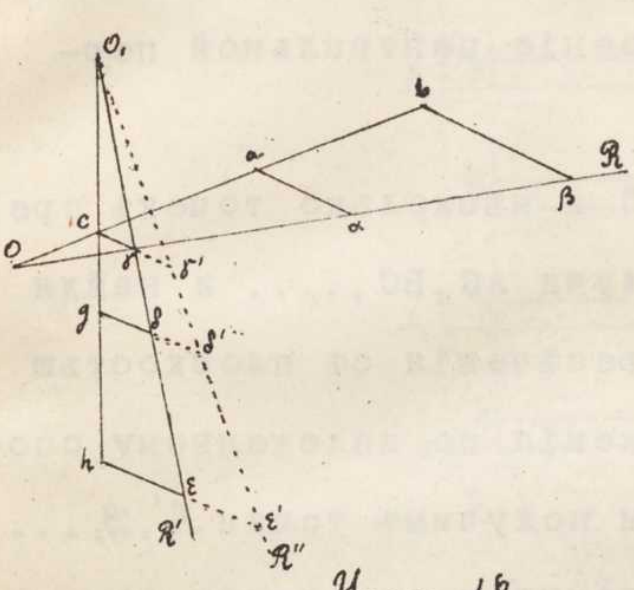


Черт. 17.

изъ какой-нибудь точки линіи ab, напримѣръ, изъ точки O проведемъ Od = данной отмѣткѣ h, и такъ, что $Od \parallel a\alpha \parallel b\beta$. Изъ точки d проводимъ df до пересѣченія съ R въ точкѣ f, причемъ $df \parallel ab$. Изъ точки f проводимъ $fc \parallel a\alpha \parallel b\beta$; точка c и будетъ искомой проекціей точки съ данной отмѣткой h. Доказательство ясно изъ предыдущей задачи. Изъ подобія треугольниковъ $Oa\alpha$ и Ocf имѣемъ:

$$\frac{Oc}{Oa} = \frac{cf}{a\alpha}, \qquad \text{откуда} \qquad Oc = \frac{Oa \cdot cf}{a\alpha}$$

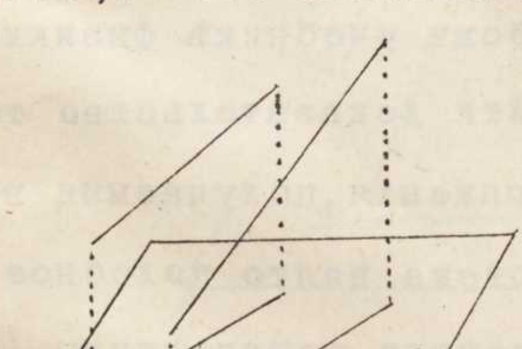
Найдемъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ, данныхъ своими проекціями и отмѣтками двухъ точекъ. Очевидно, что проекція точки пересѣченія прямыхъ лежитъ на пересѣченіи ихъ проекцій. Это-необходимое, но, какъ легко видѣть, недостаточное условіе пересѣченія. Въ самомъ дѣлѣ: точки могутъ имѣть общую проекцію, но находиться на разной высотѣ надъ плоскостью проекцій. Поэтому, если отмѣтки полученной проекціи точки пересѣченія по обѣимъ прямымъ равны, то прямыя пересѣкаются; въ противномъ случаѣ пересѣченія нѣтъ. Пусть даны прямыя $a(\ )b(\ )$ и $g(\ )h(\ )$ /черт.18/. Строимъ ихъ масштабы высотъ $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$, при чемъ отмѣтки откладываемъ всѣ по одному направленію. Точка пересѣченія проекцій с имѣетъ, какъ видно изъ чертежа, одну и ту же отмѣтку по



Черт. 18.

обѣимъ прямымъ; слѣдовательно эти прямыя пересѣкаются. Если бы прямая $g(\ )h(\ )$ имѣла другой масштабъ, то отмѣтка точки с по обѣимъ прямымъ были бы различны и линіи не пересѣкались бы. На чертежѣ этотъ масштабъ есть $\mathcal{R}''$, а отмѣтки точки с - отрѣзки $c\gamma$ и $c\gamma'$.

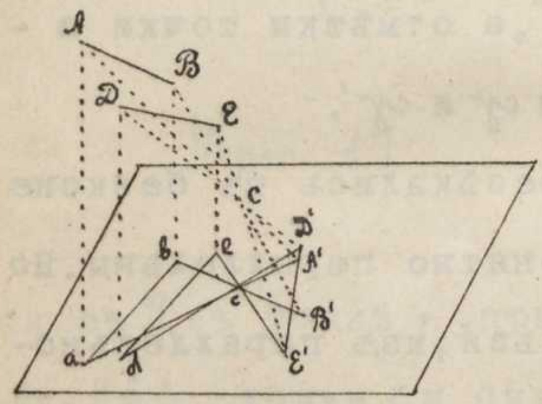
Если бы прямыя $a(\ )b(\ )$ и $g(\ )h(\ )$ пересѣкались въ безконечности, то ихъ проекціи, были бы понятно параллельны. Но обратнаго заключенія сдѣлать нельзя; изъ параллельности проекцій нельзя заключить о параллельности самихъ линій. Въ самомъ дѣлѣ: если проекціи двухъ прямыхъ параллельны, то это показываетъ, что онѣ лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ; но въ этихъ



Черт. 19.

плоскостяхъ сами линіи могутъ занимать какое угодно положеніе, какъ это показано на чертежѣ 19. Если проекціи прямыхъ параллельны, то это значитъ только, что прямыя не пересѣкаются, но двѣ линіи въ пространствѣ вообще не пересѣкаются, и изъ этого еще не слѣдуетъ, что онѣ параллельны. Говоря о центральной перспективѣ мы указывали, что для ея построенія нужно провести черезъ точки предмета лучи до пересѣченія съ плоскостью изображенія. Теперь рѣшивъ задачу о пересѣченіи прямой съ плоскостью, мы можемъ уже на самомъ дѣлѣ выполнить построеніе центральной перспективы.

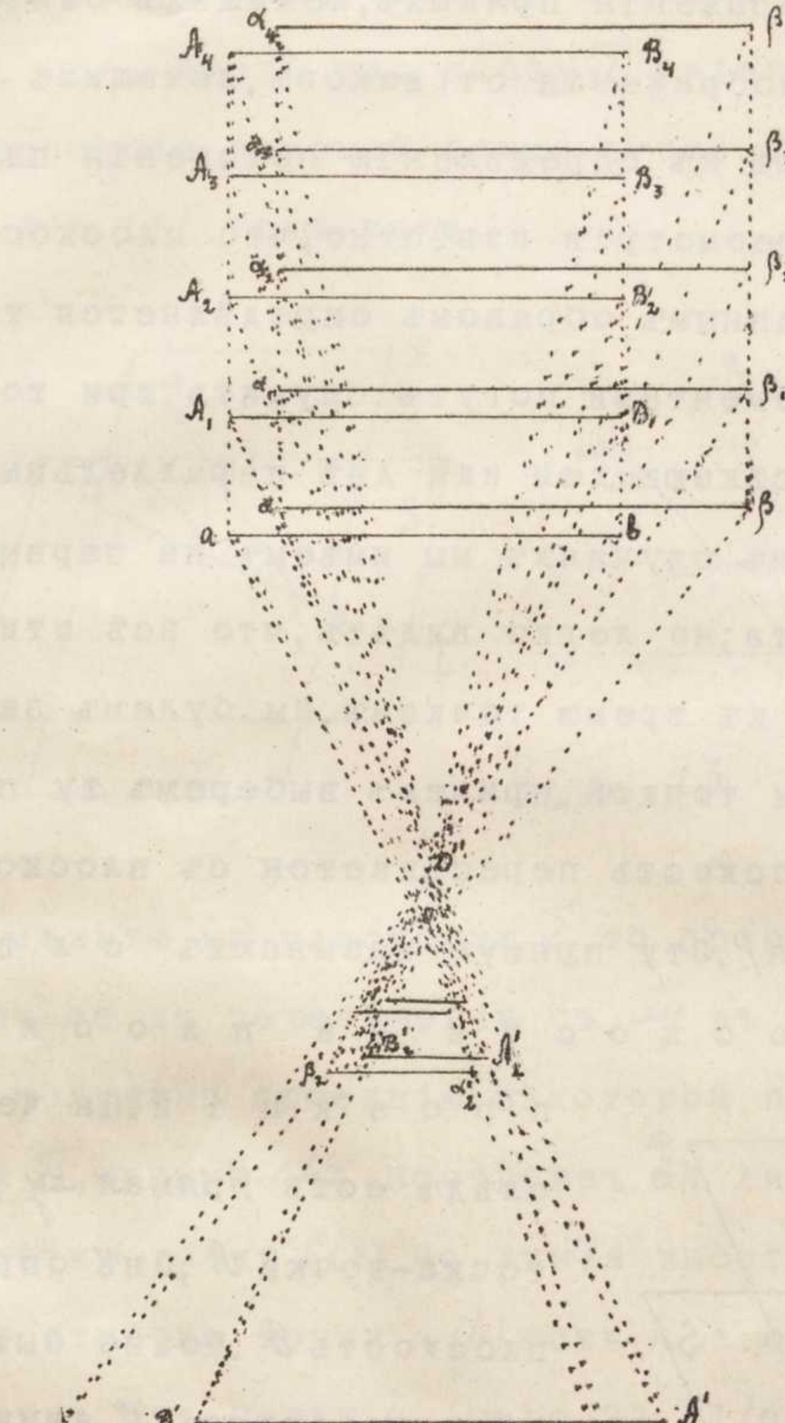
Пустъ данъ центръ перспективы C и нѣсколько точекъ предмета A, B..../черт.20/. Проведя лучи AC, BC,.... и найдя ихъ пересѣченія съ плоскостью изображенія по изложенному способу, мы получимъ точки $A', B', \ldots$ центральныя перспективы точекъ A, B,... Мы видимъ, что отрѣзокъ DE, лежащій ближе къ центру перспективы, чѣмъ отрѣзокъ AB, изобразился въ перспективѣ больше: $A'B' < D'E'$. Изображеніе получилось обратное, что свойственно и глазу. Въ любомъ учебникѣ физики можно найти доказательство того что изображенія, получаемыя въ



Черт. 20.

глазу - обратныя. Расположеніе чертежа взято подобное тому, какое существуетъ въ глазу: центръ перспективы /въ глазу - хрусталикъ/ помѣщенъ между предметомъ и плоскостью изображенія /ретиной/.

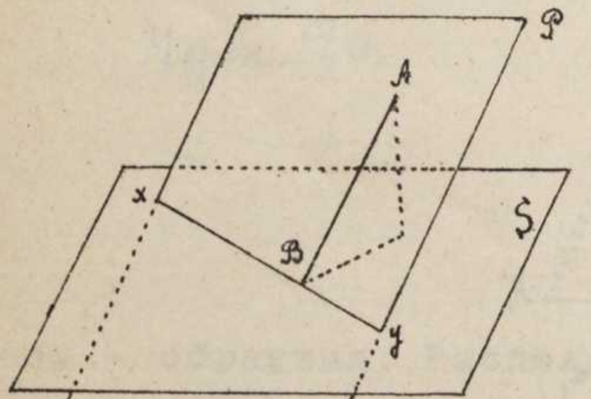
На слѣдующемъ чертежѣ /2I/ построена центральная перспектива двухъ рядовъ прямыхъ, параллельныхъ между собою и съ плоскостью чертежа. Проекціи этихъ рядовъ суть прямыя ab и $\alpha\beta$; ихъ масштабы суть прямыя $A_1B_1, A_2B_2, \ldots A_4B_4$; $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots \alpha_4\beta_4$.



Черт. 21.

Центръ перспективы данъ своей проекціей O и отмѣткой OO' Построенныя по вышеизложенному способу центральныя перспективы прямыхъ перваго пучка суть: $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$ . . . $A_4'B_4'$, перспективы прямыхъ второго пучка суть $\alpha_1'\beta_1'$, $\alpha_2'\beta_2'$ . . . $\alpha_4'\beta_4'$. Мы опять замѣчаемъ, что изображенія прямыхъ, лежащихъ ближе къ центру, больше, чѣмъ изображенія отрѣзковъ, лежащихъ дальше.

Переходимъ теперь къ опредѣленію положенія плоскости. Изъ элементарной геометріи извѣстно, что плоскость вполнѣ, и притомъ единственнымъ образомъ опредѣляется тремя элементами. Такими элементами могутъ служить три точки, точка и прямая, двѣ пересѣкающихся или двѣ параллельныхъ прямыхъ. Въ трехъ послѣднихъ случаяхъ мы имѣемъ на первый взглядъ только два элемента; но легко видѣть, что всѣ эти три комбинаціи сводятся къ тремъ точкамъ. Мы будемъ задавать плоскость прямой и точкой, причемъ выберемъ ту прямую, по которой данная плоскость пересѣкается съ плоскостью чертежа /изображенія/. Эту прямую называютъ с л ѣ д о м ъ данной плоскости на плоскости проекцій. На чертежѣ 22 слѣдъ есть прямая xy, данная точка-точка A; онѣ опредѣляютъ плоскость P. Можно было бы задать плоскость P двумя прямыми, въ ней лежащими, напримѣръ, прямыми xy и AB. Если прямая AB перпендикулярна къ слѣду плоскости, то она называется л и н і е й наибольшаго ската / ligne de la plus grande pente) для данной плоскости.

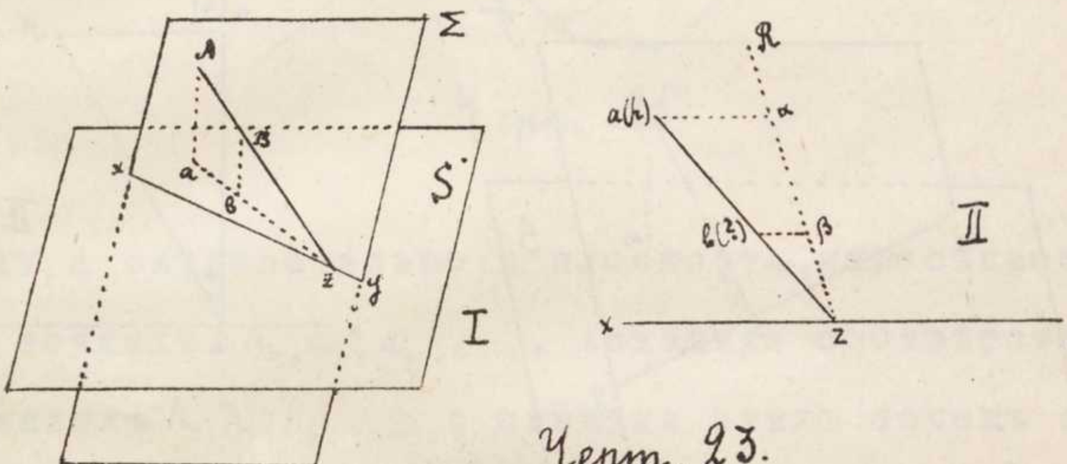


Черт. 22.

Наклонъ линіи наибольшаго ската называется и уклономъ плоскости. Масштабъ высотъ линіи наибольшаго ската называется масштабомъ высотъ плоскости.

Рѣшимъ нѣкоторыя задачи.

На плоскости, заданной слѣдомъ и точкой, взять точку /черт. 23/. Пусть плоскость Σ задана слѣдомъ xy и точкой $a(h)$. Проекція искомой точки пусть будетъ точка b /черт. 23, I и II/. Такъ какъ

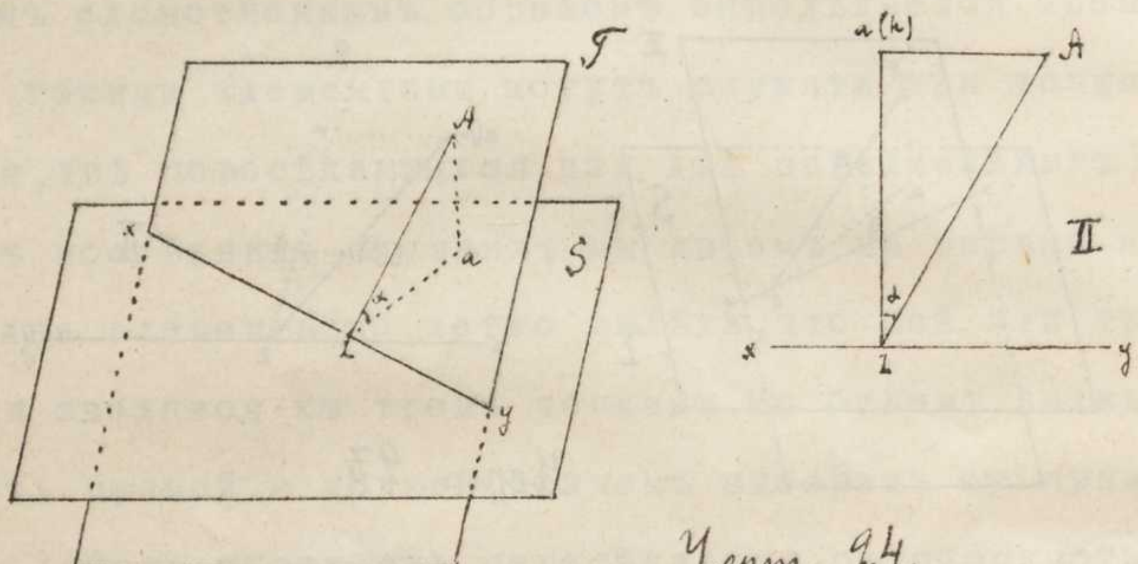


Черт. 23.

точка $b(?)$ лежитъ на плоскости Σ, то проведя прямую ab и продолживъ ее до пересѣченія съ xy въ точкѣ z /черт. 23, I и II/, мы получимъ проекцію нѣкоторой прямой, лежащей на плоскости Σ, прямую abz. Построивъ ея линію высотъ, мы найдемъ отмѣтку точки $b(?)$. Но линія высотъ строится легко, такъ какъ отмѣтка точки $a(h)$ есть h, а отмѣтка точки z есть 0. Отложивъ отъ точки a /черт. 23, II/ отрѣзокъ $a\alpha = h$ и соединивъ α съ z, мы получимъ линію высотъ R, и знакомымъ уже построеніемъ находимъ искомую отмѣтку точки $b(?)$, отрѣзокъ $b\beta$.

Понятно, что обратная задача - по данной отмѣткѣ точки, лежащей на плоскости Σ - задача неопредѣленная. Въ самомъ дѣлѣ: такихъ точекъ на плоскости Σ безконечное множество. Всѣ онѣ образуютъ прямую, параллельную плоскости S. Эта прямая называется горизонталью плоскости Σ.

Найти наклонъ плоскости Γ къ плоскости проекцій /черт. 24/ Уголъ между плоскостями равенъ, какъ извѣстно, углу между перпендикулярами къ этимъ плоскостямъ. Изъ точки A, опредѣляющей данную плоскость, опустимъ перпендикуляры на прямую xy и на плоскость S. Тогда $Al \perp xy$, $Aa \perp S \perp xy$.

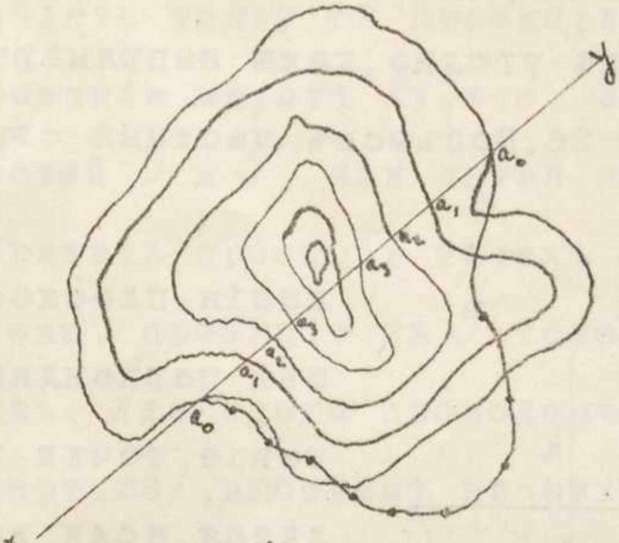


Черт. 24.

Откуда пл$(Al, Aa) \perp S$, то есть $al \perp xy$ /черт. 24, I/. Уголъ Ala легко найдемъ слѣдующимъ построеніемъ: возставимъ перпендикуляръ къ xy изъ точки a, проведемъ $Aa = h \perp al$ и проведемъ Al. Тогда $tg\alpha = \frac{h}{al}$. Уголъ α и называется наклономъ плоскостей S и Γ.

Гора задана горизонталями; построить профиль ея сѣченія какой нибудь вертикальной плоскостью /черт. 25/.

Эта задача весьма часто встрѣчается въ топографіи при проведеніи дорогъ въ гористыхъ мѣстностяхъ, при составленіи геологическихъ разрѣзовъ и т. д. Пусть гора задана горизонталями $h_0, h_1, h_2 \ldots h_n$, и пусть слѣдъ сѣкущей вертикальной плоскости есть прямая ху.



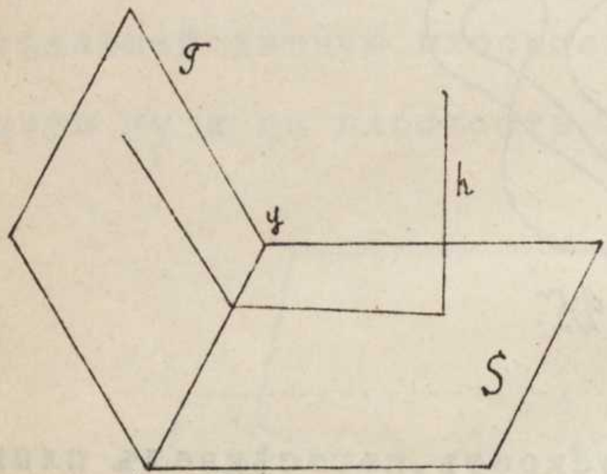
Черт. 25.

Прямая ХУ, а слѣдовательно, и плоскость, пересѣкаетъ планъ горы въ точкахъ: $a_0, a_1, a_2 \ldots$, лежащихъ соотвѣтственно на горизонталяхъ $h_0, h_1, h_2 \ldots$; отмѣтки этихъ точекъ суть h_0, $h_1, h_2 \ldots$ Возставивъ въ точкахъ $a_0, a_1, \ldots$ перпендикуляры къ прямой ХУ и отложивъ на нихъ отрѣзки, равные послѣдовательно $h_0, h_1, \ldots$, соединимъ полученныя точки кривой. Эта кривая и будетъ искомымъ профилемъ сѣченія.

ГЛАВА II.

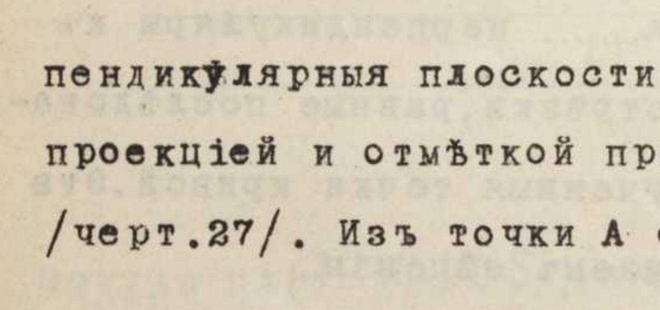
МЕТОДЪ МОНЖА.

Мы употребляли топографическій методъ для того, чтобы показать на чертежѣ исчезнувшія измѣренія предмета. Однако, этотъ методъ не единственный. Можно показывать высоты точекъ надъ плоскостью проекцій не при помощи отмѣтокъ, а какимъ-нибудь другимъ способомъ - въ наглядномъ изображенiи.Этого можно достигнуть, присоединяя другую плоскость и откладывая на ней отмѣтки точекъ /черт.26/.Эти двѣ плоскости могутъ быть расположены какъ угодно,какъ напримѣръ плоскости S и T на чертежѣ 26.Возьмемъ частный случай расположенія плоскостей,когда онѣ перпендикулярны.Положенiе точки вполнѣ опредѣлится,если извѣстно разстоянiе ея проекцiй отъ линiи пересѣченiя плоскостей и ея разстоянiе отъ одной изъ этихъ плоскостей.



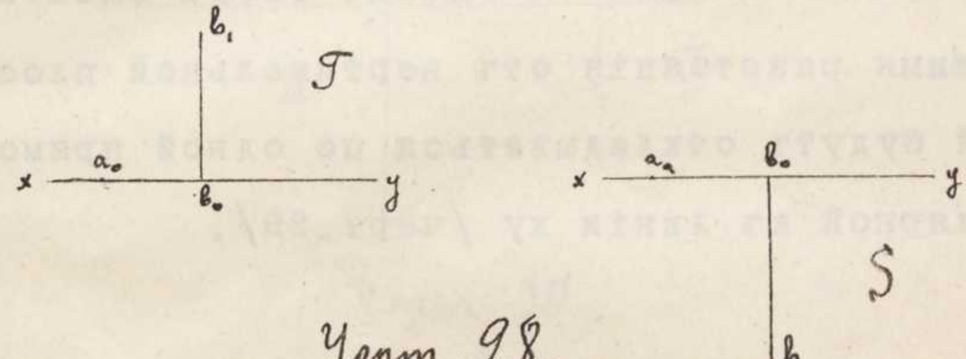
Черт. 26.

Пусть даны двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости S и T и точка А, $a(h)$ своей проекцiей и отмѣткой при нашемъ прежнемъ способѣ /черт.27/. Изъ точки А опускаемъ перпендикуляръ Аа на плоскость S и Аа$_1$ на плоскость T.Изъ точекъ а и а$_1$ опускаемъ перпендикуляръ на линiю ху. Не трудно видѣть,что ихъ подошвы сольются въ одной точкѣ линiи ху - въ точкѣ а$_0$.



Черт. 27.

Изъ чертежа видно,что $Aa=a_1a_0$=отмѣткѣ точки А,и что $Aa_1=aa_0$.Поэтому вмѣсто отмѣтки можно точку опредѣлять ея проекцiей а и разстояніемъ a_1A отъ плоскости $\mathcal{T}$, т.е. разстояніемъ отъ линіи ху ея проекціи, отрѣзкомъ aa_0. Точно также можно опредѣлять точку ея проекціи a_1 и разстояніемъ этой проекціи aa_0 отъ ху, т.е. отъ линіи пересѣченія плоскостей S и $\mathcal{T}$, или двумя проекціями a и a_1. Будемъ изображать проекціи точекъ на S на плоскости нашегочертежа, проекціи на $\mathcal{T}$ тоже, но гдѣ-ниб. въ другомъ мѣстѣ. Для этого проведемъ линіи, изображающія ху /черт.28/, выберемъ на нихъ какую-ниб. точку a_0 за начало счета и къ ней будемъ относить

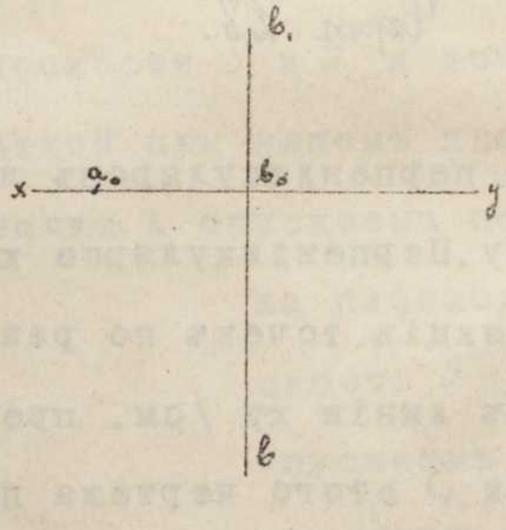


Черт. 28.

положенія подошвъ перпендикуляровъ изъ проекцій точекъ на линію ху. Перпендикулярно къ линіи ху мы будемъ искать проекціи точекъ по разстояніямъ этихъ проекцій отъ линіи ху /см. предыдущій черт./ Взявъ на плоскости S этого чертежа проекцію какой нибудь точки b и проведя $bb_0 \perp xy$, мы отложимъ на нашемъ чертежѣ S отрѣзокъ a_0b_0, затѣмъ проведемъ $bb_0 \perp xy$ и, отложивъ надлежащую величину, найдемъ b на чертежѣ S; далѣе на чертежѣ $\mathcal{T}$ отложимъ $a_0b_0 = a_0b_0$ на черт. S /и въ ту же сторону/, проведемъ $b_0b_1 \perp xy$ и отложимъ b_0b_1 въ плоскости $\mathcal{T}$ или, что все тоже, отмѣтку при b на плоск. S /черт.27/.

При всѣхъ выгодахъ изложеннаго способа, онъ неудобенъ на практикѣ, такъ какъ для высотъ и для горизонтальныхъ разстояній точекъ отъ плоскостей проекціи приходится имѣть два отдѣльныхъ чертежа.

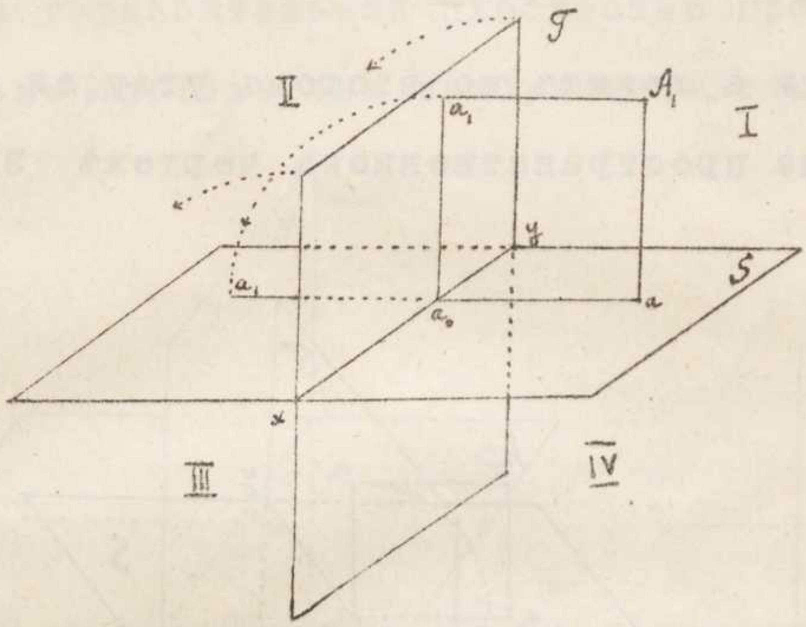
Изобрѣтатель Начертательной Геометріи, Гаспаръ Монжъ /Gaspard Monge/, въ своемъ сочиненіи "Géometrie déscriptive", изданномъ въ 1798 году, предложилъ способъ наложенія этихъ линій на плоскость, устраняющій это неудобство. Способъ его состоитъ въ томъ, что обѣ линіи xy совмѣщаются такъ, чтобы точки a_0 на обѣихъ линіяхъ совпали. Тогда высоты и горизонтальныя разстоянія отъ вертикальной плоскости проекцій будутъ откладываться по одной прямой, перпендикулярной къ линіи xy /черт.29/.



Черт. 29.

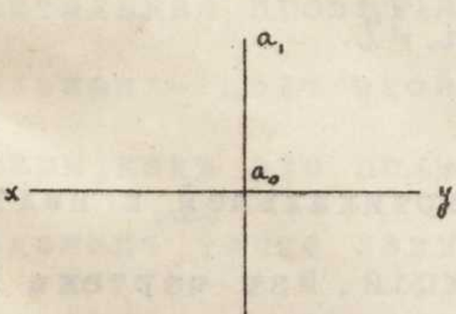
Такимъ образомъ мы чертежомъ опредѣлили положеніе точки B пространства. Отъ горизонтальной плоскости S она находится на разстояніи $b_0 b_1$, отъ вертикальной T -на разстояніи $в_0 в$.Ея проекціи занимаютъ положенія $в$ - на плоскости S и $в_1$ на плоскости T.

Такой способъ совмѣщенія можно разсматривать,какъ вращеніе плоскости T около линіи ху,какъ оси, до совпаденія ея съ плоскостью S /черт.30/.



Черт. 30

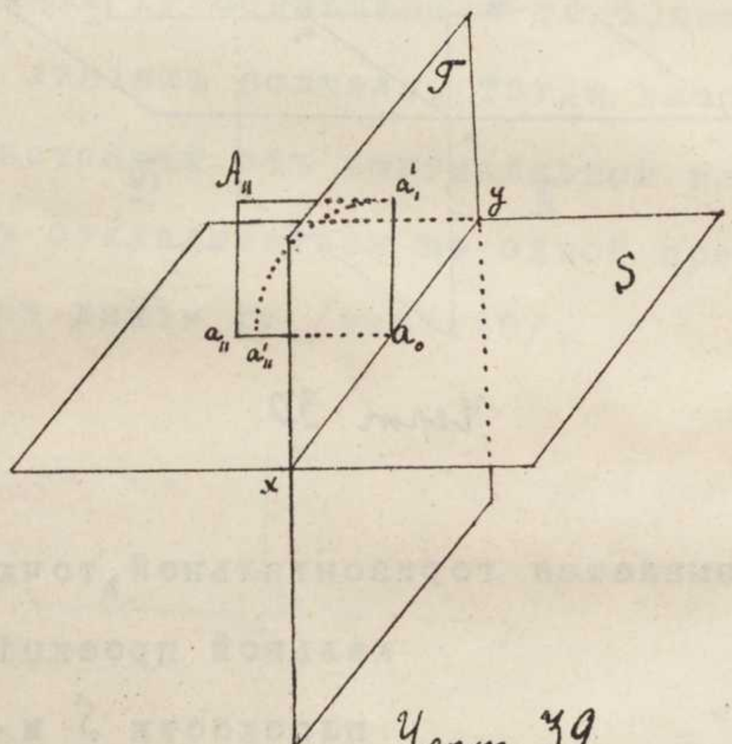
Точка а называется горизонтальной,точка a_1 - вертикальной проекціей точки A_1; плоскости S и T- соотвѣтственно горизонтальной и вертикальной плоскостями проекцій.Точка A_1 лежитъ,какъ говорятъ, надъ горизонтальной и передъ вертикальной плоскостью проекцій.На совмѣщенномъ чертежѣ она изобразится такъ: /черт.31/. Плоскости проекцій раздѣ-



Черт. 31.

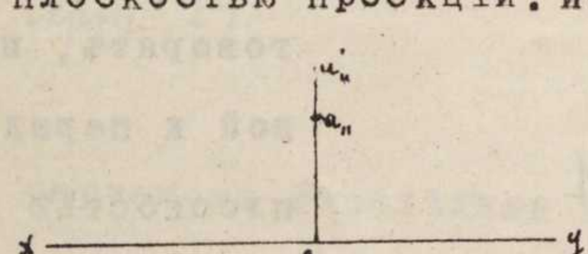
ляютъ пространство на четыре угла,порядокъ которыхъ обозначается римскими цифрами такъ же,какъ въ тригонометрiи обозначаются квадранты круга. Покажемъ каковы будутъ проекцiи точекъ, лежащихъ въ различныхъ углахъ.Для перваго угла это сдѣлано уже на чертежѣ 30.

Пусть точка A_{II} лежитъ во второмъ углу;ея положенiе показано на пространственномъ чертежѣ 32.



Черт. 32.

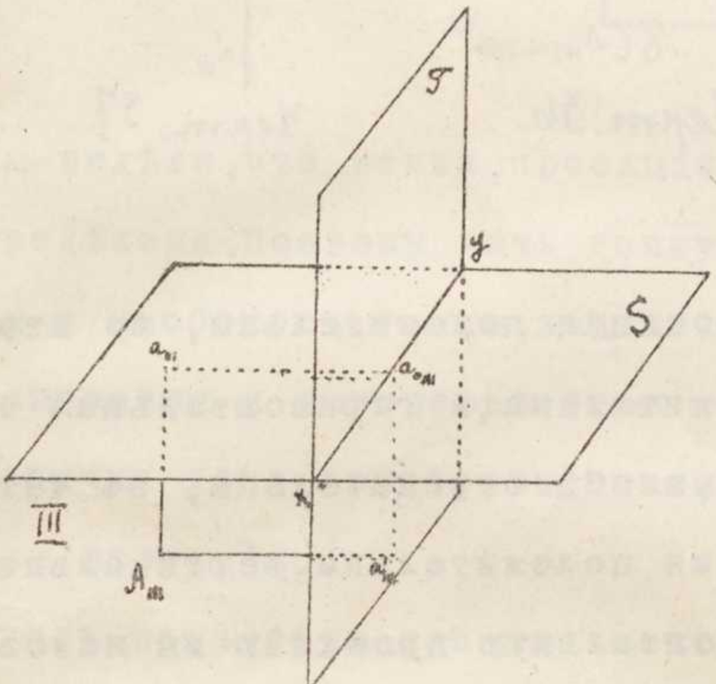
Мы скажемъ,что она лежитъ за вертикальной и надъ горизонтальной плоскостью проекцiй. Изъ чертежа по-



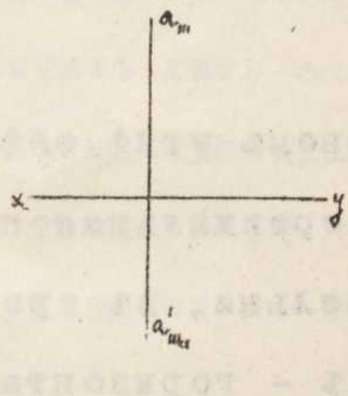
Черт. 33.

нятно,что будетъ въ совмѣщеніи:точка A_{II} своими проекціями изобразится такъ,какъ показано на чертежѣ 33-ьемъ.

Положеніе точки въ 3-ьемъ углу опредѣлится тѣмъ,что она,какъ показано на чертежѣ 34,лежитъ за вертикальной и подъ горизонтальной плоскостью проекцій.На совмѣщенномъ чертежѣ она изобразится такъ,что гори-



Черт. 34.

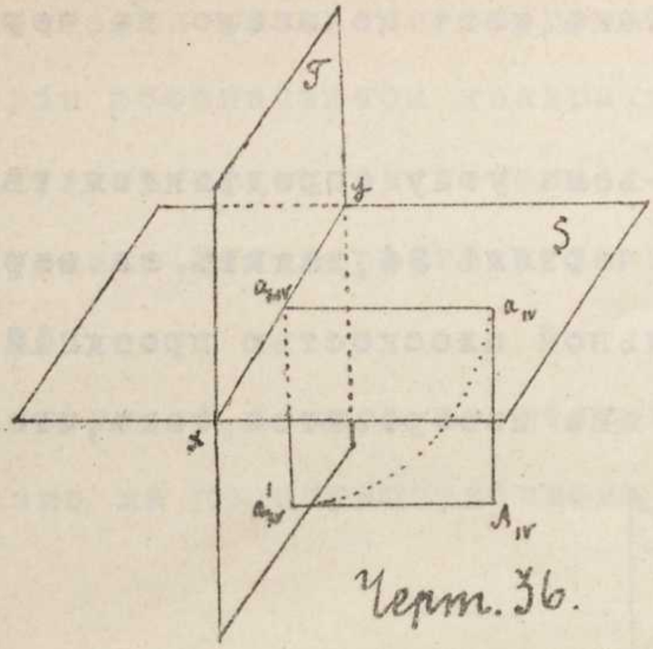


Черт. 35.

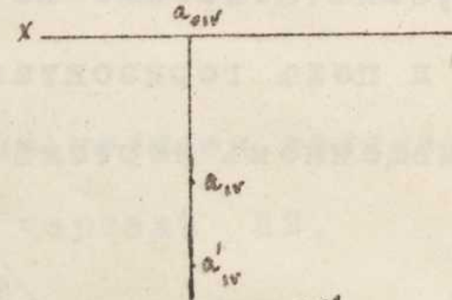
зонтальная проекція упадетъ надъ линіей xy,а вертикальная - подъ этой линіей.Проекціи помѣняются мѣстами,какъ это показано на чертежѣ 35.

Наконецъ,если точка лежитъ въ 4-омъ углѣ,то она находится подъ горизонтальной и передъ вертикальной плоскостью проекцій. Положеніе ея изобразится на чертежѣ 36, совмѣщеніе на чертежѣ 37.

Для того,чтобы запомнить,какъ расположена точка,находящаяся въ какомъ-нибудь углѣ,мы будемъ приписывать проекціямъ знакъ и условимся говорить,что въ

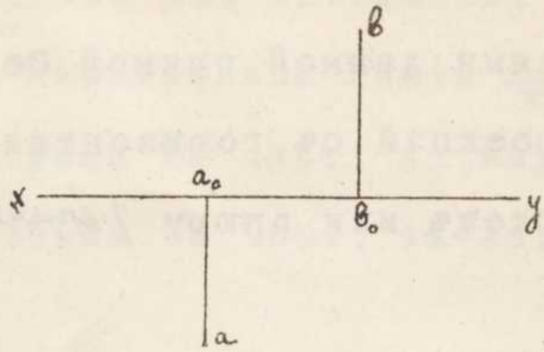


Черт. 36.



Черт. 37.

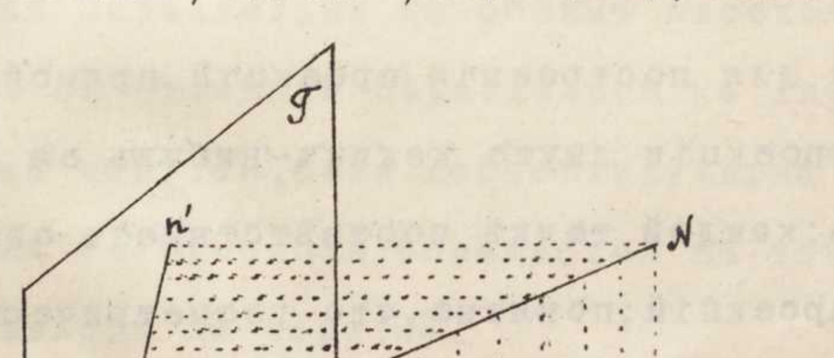
первомъ углѣ обѣ проекціи положительны, во второмъ - вертикальная положительна,а горизонтальная отрицательна, въ третьемъ обѣ отрицательны, въ четвертомъ - горизонтальная положительна,вертикальная отрицательна. Горизонтальную проекцію мы назовемъ положительной,если она лежитъ передъ вертикальной плоскостью проекцій;вертикальную - если она лежитъ надъ горизонтальной плоскостью. Не трудно замѣтить, что знакъ горизонтальной проекціи мѣняется,какъ знакъ косинуса, знакъ вертикальной - какъ знакъ синуса.Этимъ правиломъ и можно руководствоваться. Если точка лежитъ на одной изъ плоскостей проекціи, то очевидно,что одна изъ ея проекцій лежитъ на линіи xy;такъ какъ разстояніе точки отъ плоскости проекцій равно нулю,а именно это разстояніе и дается разстояніемъ ея проекціи отъ линіи xy.Такъ на чертежѣ 38 точка,проекціи которой суть a и a_o,лежитъ на горизонтальной, точки съ проекціями b и b_0 — на вертикальной плоскости проекцій.



Черт. 38.

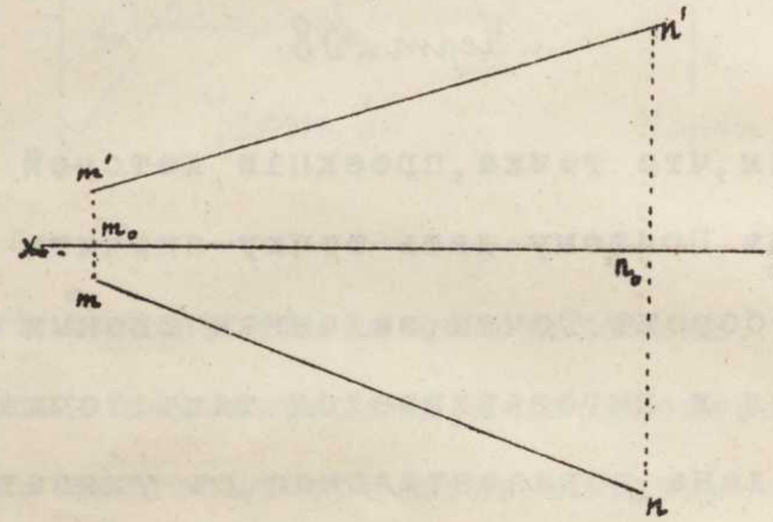
Мы видѣли, что точка, проекціи которой заданы, вполнѣ опредѣлена. Поэтому дать точку — значитъ дать ея проекціи и наоборотъ. Точка, заданная своими проекціями, записывается и выговаривается такъ: точка $/a, a_1/$, гдѣ безъ значка дана горизонтальная, съ указателемъ — вертикальная проекція.

Пусть намъ даны двѣ плоскости проекцій S и T и нѣкоторая прямая MN /черт. 39/. Проектируя всѣ точки этой



Черт. 39.

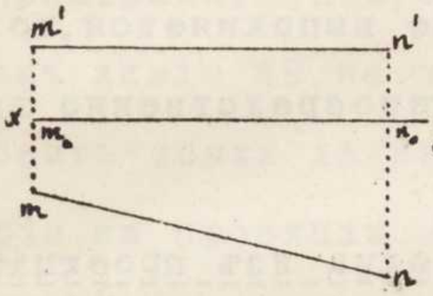
прямой на обѣ плоскости, соединяя полученныя точки, мы будемъ имѣть на плоскостяхъ проекцій двѣ прямыя, которыя называюься соотвѣтственно горизонтальной и вертикальной проекціями данной прямой. Совмѣщая вертикальную плоскость проекцій съ горизонтальной, мы получимъ проекціонный чертежъ или эпюру /épure /данной прямой /черт. 40/.



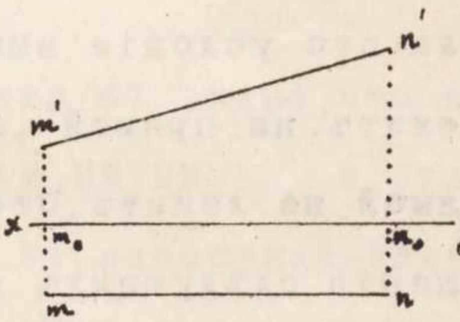
Черт. 40.

Понятно, что для построенія проекцій прямой достаточно знаніе проекціи двухъ какихъ-нибудь ея точекъ. Въ самомъ дѣлѣ: каждой точкѣ соотвѣтствуетъ одна и только одна пара проекцій; понятно, что геометрическому мѣсту этихъ точекъ соотвѣтствуетъ одна и только одна пара геометрическихъ мѣстъ проекцій. Эти мѣста суть прямыя и потому для ихъ опредѣленія надо ~~знать~~ двѣ проекціи, т.е. двѣ точки на самой прямой. Прямая же опредѣляется вполнѣ двумя точками.

Разсмотримъ частные случаи положенія прямой относительно плоскостей проекцій. Если прямая не параллельна ни одной изъ плоскостей проекцій, то ея проекціи не параллельны линіи xy, какъ это показано на черт. 40. Если прямая параллельна одной изъ плоскостей проекцій, то одна изъ ея проекцій параллельна линіи xy. Напримѣръ, прямая, проекціи которой даны на черт. 41, параллельна горизонтальной, изображаемая на черт. 42 - вертикальной плоскости проекцій.

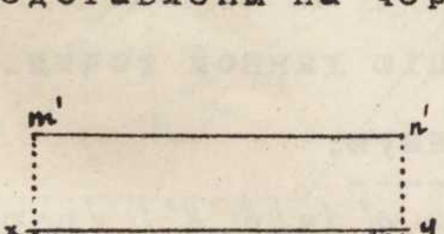


Черт. 41.

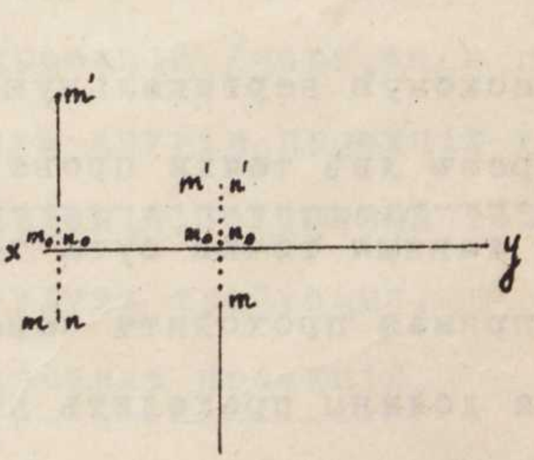


Черт. 42.

Если прямая параллельна къ обѣимъ плоскостямъ проекцій, то обѣ ея проекціи параллельны къ линіи xy, какъ напримѣръ, на черт. 43, если перпендикулярна къ одной изъ нихъ то одна ея проекція обращается въ точку. Такія прямыя представлены на черт. 44.



Черт. 43.



Черт. 44.

Легко видѣть, что имѣютъ мѣсто и обратныя заключенія.

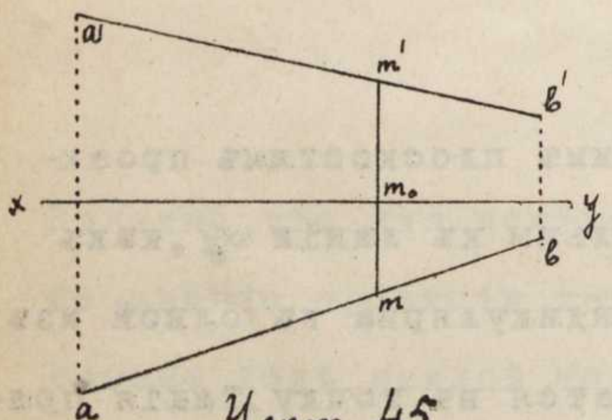
Разобравъ опредѣленіе прямой линіи ея проекціями, перейдемъ теперь къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ.

Задача. Опредѣлить, лежитъ ли данная точка на данной прямой.

Для рѣшенія этого вопроса замѣтимъ, что проекціи всѣхъ точекъ прямой лежатъ на одноименныхъ проекціяхъ прямой; если это условіе выполняется для данной точки, то она лежитъ на прямой, если не выполняется, то точка на прямой не лежитъ. Отсюда непосредственно вытекаютъ рѣшенія слѣдующихъ задачъ:

I. На данной прямой взять точку, одна изъ проекцій которой дана.

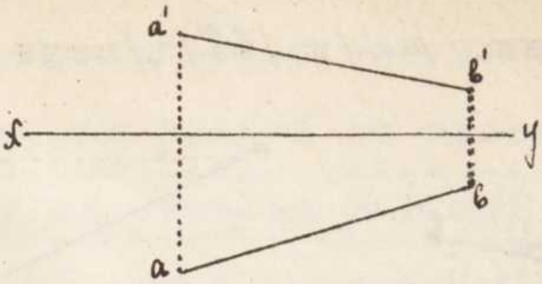
Пусть дана прямая $/ab, a'b'/$ /черт. 45/ и горизонтальная проекція m нѣкоторой точки, лежащей на этой прямой. Другая ея проекція должна, по предыдущему, лежать на другой проекціи прямой; а потому, проведя $mm_0m' \perp xy$ до пересѣченія въ m' съ $a'b'$, получимъ точку m' - искомую вертикальную проекцію данной точки.



Черт. 45.

2. Черезъ двѣ точки провести прямую.

Пусть данныя точки суть точки $/a, a'/$ и $/b, b'/$ /черт. 46/. Если прямая проходитъ черезъ данныя точки, то ея проекціи должны проходить черезъ одноименныя проекціи этихъ точекъ. Прочертивъ прямыя ab и $a'b'$, мы получимъ проекціи прямой, проходящей черезъ точки $/a, a'/$ $/b, b'/$, а слѣдовательно, опредѣлимъ и самую прямую.



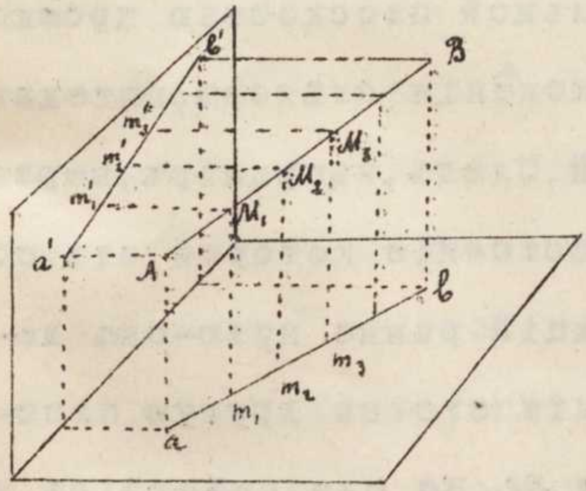
Черт. 46.

3. Данный отрѣзокъ прямой раздѣлить на равныя или пропорціональныя части.

Изъ пространственнаго чертежа 47 видно, что если мы раздѣлимъ линію АВ на части AM_1, M_1M_2, M_2M_3 ...... и будемъ проектировать точки дѣленія, то по извѣстной теоремѣ стереометріи, ея проекціи ab и $a'b'$ раздѣлятся на части am_1, m_1m_2, m_2m_3 . . . . . $a'm_1', m_1'm_2'$ . . . . такъ что

$$AM_1 : M_1M_2 : M_2M_3 : \ldots = am_1 : m_1m_2 : \ldots\ldots : a'm_1' : m_1'm_2' : \ldots\ldots$$

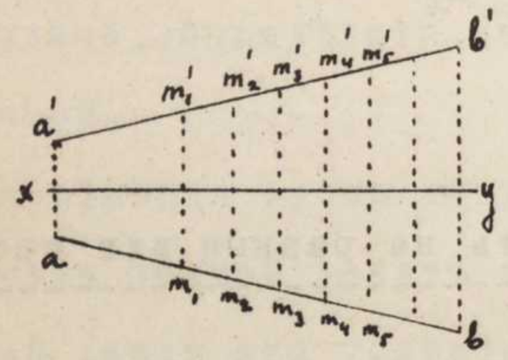
и наоборотъ, если раздѣлить въ какомъ-нибудь отношеніи проекціи прямой, то и прямая раздѣлится соотвѣтственными точками въ томъ же отношеніи. Поэтому, для наложенія точекъ, дѣлящихъ данную прямую въ данномъ отношеніи, достаточно раздѣлить въ данномъ отношеніи одну изъ ея проекцій /черт.48/ и построить другія проекціи точекъ дѣленія. Полученныя точки и будутъ требуемыя.



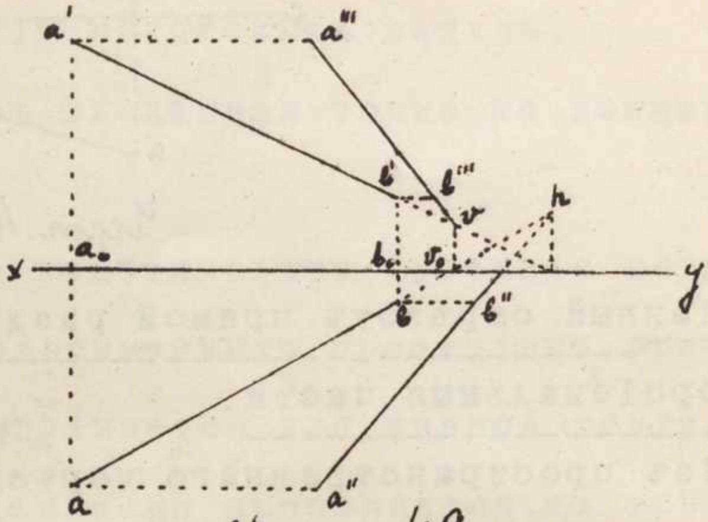
Черт. 47.

4. Найти слѣды прямой на плоскостяхъ проекцій.

Слѣдомъ прямой на плоскости называется точка ея пересѣченія съ этой плоскостью. Припомнимъ, какъ въ топографическомъ методѣ находились такія точки. Пусть прямая задана двумя точками: (aa') и (bb'), /черт. 49/. Построимъ



Черт. 48.



Черт. 49.

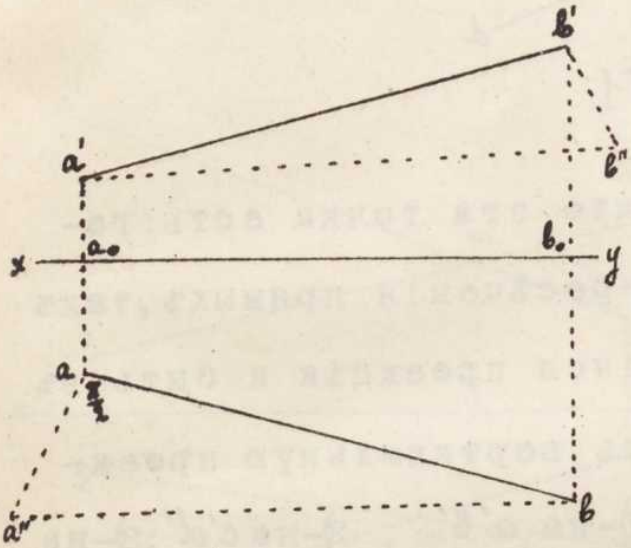
для нея линіи высотъ на обѣихъ плоскостяхъ проекцій, сначала на вертикальной. Для этого отъ точекъ a' и b' по какому-нибудь одному направленію отложимъ $a'a''' = aa_0$ и $b'b''' = bb_0$ и проведемъ прямую $a'''b'''$ до пересѣченія съ прямой $a'b'$ въ точкѣ v. Эта точка и будетъ слѣдомъ прямой на вертикальной плоскости или вертикальнымъ слѣдомъ. Точно такъ же найдемъ и горизонтальный слѣдъ-точку h, которая въ данномъ случаѣ лежитъ за вертикальной плоскостью проекціи. Существуетъ другой способъ нахожденія слѣдовъ, вытекающій изъ слѣдующихъ разсужденій. Слѣдъ, напримѣръ, вертикальный, есть точка прямой, разстояніе которой отъ соотвѣтствующей плоскости проекцій равно нулю-онъ лежитъ въ этой плоскости. Проекція его на другую плоскость лежитъ, очевидно, на линіи xy. Но она вмѣстѣ съ тѣмъ должна лежать и на горизонтальной проекціи прямой, т.е. на пересѣченіи ея съ линіей xy. Поэтому, продолживъ горизонтальную проекцію ab до пересѣченія съ xy въ точкѣ v_0 и возставивъ перпендикуляръ v_0v до пересѣченія съ

$a'b'$ въ точкѣ v', получимъ вертикальный слѣдъ-точку $/v_0, v/$.

Подобнымъ же образомъ найдется и горизонтальный слѣдъ h.

5. Найти углы наклоненія прямой къ плоскостямъ проекцій и истинную величину ея отрѣзка $/ab, a'b'/$.

Пусть прямая задана двумя точками $/aa'/$ и $/bb'/$ /черт.50/.



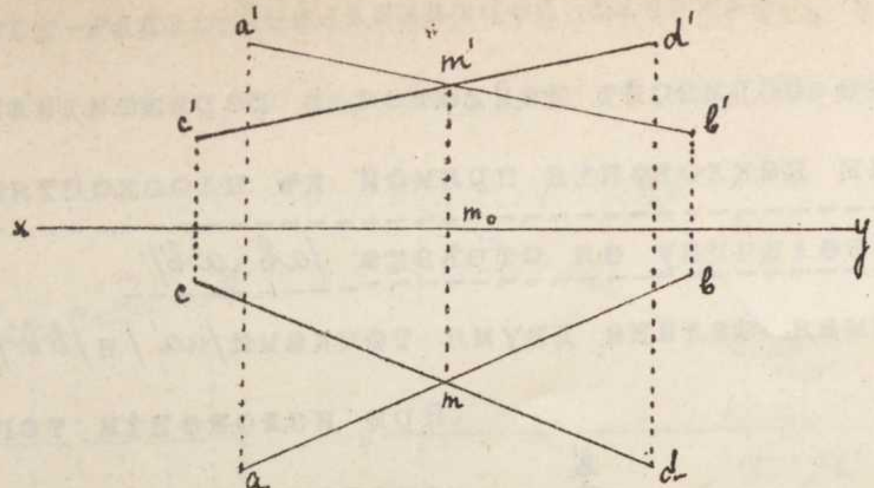
Черт. 50.

При изложеніи топографическаго метода было показано, что истинная величина и уголъ наклоненія отрѣзка къ плоскости проекцій даются треугольникомъ, у котораго одинъ катетъ есть проекція отрѣзка, а другой-разность разстояній концовъ отрѣзка отъ плоскости проекцій. Поэтому для рѣшенія задачи возставляемъ въ точкахъ a и b' перпендикуляры къ ab и $a'b'$, такіе, что $aa'' = b_0b' - a_0a'$, $b'b'' = b_0b - a_0a$. Тогда $\measuredangle b''a'b'$ будетъ равенъ углу наклоненія отрѣзка $/aa', bb'/$ къ вертикальной, $\measuredangle a''ba$ -къ горизонтальной плоскости проекцій. Отрѣзки $a''b$ и $a'b''$ представляютъ истинную величину отрѣзка $/aa', bb'/$.

Мы разсмотрѣли соотношенія, существующія между прямой и точкой; переходимъ теперь къ соотношеніямъ между прямыми. Двѣ прямыя въ пространствѣ вообще говоря не пересѣкаются; поэтому намъ нужно найти условія и точку пересѣченія двухъ прямыхъ.

Пусть это будутъ прямыя $/ab, a'b'/$ и $/cd, c'd'/$ черт.51/

Ихъ горизонтальныя проекціи пересѣкаются въ точкѣ m;

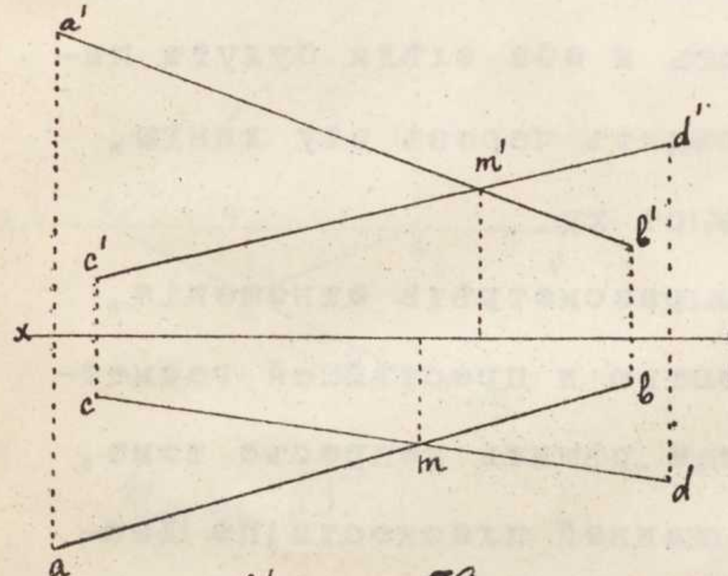


Черт. 51.

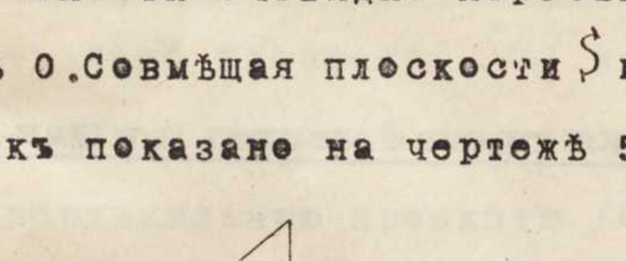
но изъ этого еще не слѣдуетъ, что эта точка есть горизонтальная проекція точки пересѣченія прямыхъ, такъ какъ прямыя могутъ имѣть пересѣкающіяся проекціи и быть въ косомъ положеніи. Будемъ искать вертикальную проекцію точки m. Она должна лежать 1)-на $a'b'$; 2)-на $c'd'$; 3)-на перпендикулярѣ къ xy, проведенномъ изъ точки m. Отсюда слѣдуетъ, что если прямыя пересѣкаются, то точки пересѣченія ихъ одноименныхъ проекцій должны лежать на одномъ перпендикулярѣ къ линіи xy. Если же это условіе не выполнено, то прямыя не пересѣкаются; такой случай данъ на черт. 52.

Задача упрощается, если какія нибудь одноименныя проекціи прямыхъ совпадаютъ. Въ самомъ дѣлѣ: пусть горизонтальныя проекціи прямыхъ $(ab, a'b')$ и $(cd, c'd')$ совпадаютъ. Тогда вертикальная проекція точки ихъ пересѣченія будетъ точка пересѣченія ихъ вертикальныхъ проекцій, а горизонтальная найдется въ пересѣченіи перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на линію xy съ горизонтальной проекціей прямыхъ.

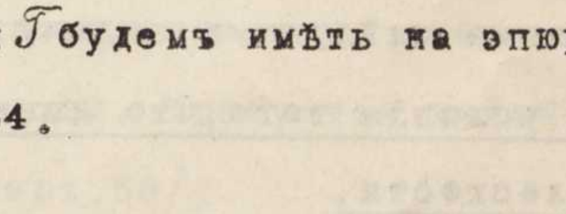
Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію плоскости. Мы будемъ задавать ее двумя пересѣкающимися прямыми и для большей простоты инаглядности чертежа,именно тѣми,по которымъ она пересѣкаетъ плоскости проекцій.Пусть наша плоскость Q /черт.53/ пересѣкаетъ плоскости проекцій по прямымъ SO и OT. Этими прямыми мы и будемъ опредѣлять положеніе плоскости Q. Онѣ называются слѣдами плоскости; SO горизонтальнымъ, OT – вертикальнымъ,соотвѣтственно тѣмъ плоскостямъ проекцій,на которыхъ слѣды получены.Слѣды плоскости очевидно пересѣкаются съ xy въ одной точкѣ O.Совмѣщая плоскости S и T будемъ имѣть на эпюрѣ, какъ показано на чертежѣ 54.



Черт. 52.



Черт. 53.



Черт. 54.

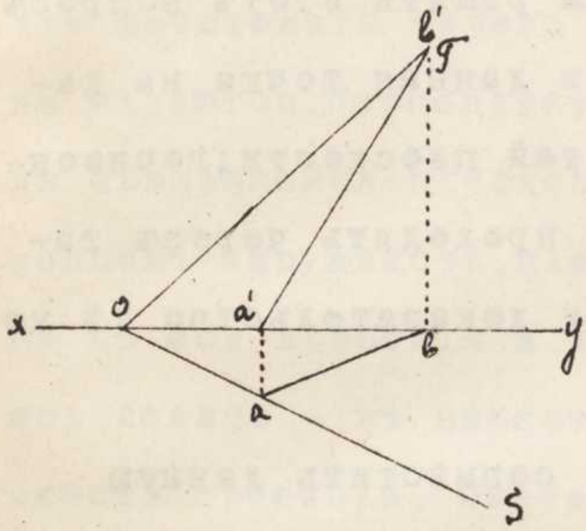
Изъ весьма простыхъ соображенiй слѣдуетъ,что если плоскость непараллельна ни одной изъ плоскостей проекцiй и не параллельна линiи xy,то оба ея слѣда непараллельны этой линiи;если плоскость параллельна одной изъ плоскостей проекцiй,то одноименный ея слѣдъ уходитъ въ безконечность,а другой становится параллельнымъ xy;если она параллельна линiи xy,то точка O удаляется въ безконечность и оба слѣда будутъ параллельны xy;если она проходитъ черезъ эту линiю, то оба ея слѣда совпадаютъ съ xy.

Теперь естественно было бы разсмотрѣть отношенiя, существующiя между плоскостью и простѣйшей геометрической формой - точкой,т.е.рѣшить вопросъо томъ, лежитъ-ли данная точка на данной плоскости;по данной проекцiи точки,лежащей въ плоскости,найти ея другую проекцiю и т. д. При изложенiи метода отмѣтокъ мы видѣли,что для рѣшенiя подобныхъ задачъ требуется проводить на плоскости прямыя,а потому сначала рѣшимъ слѣдующую задачу:

<u>Найти условiя того,что данная прямая лежитъ въ данной плоскости.</u>

Для рѣшенiя замѣтимъ,что если двѣ точки прямой лежатъ въ данной плоскости,то и вся прямая лежитъ въ этой плоскости.За такiя точки беремъ слѣды данной прямой.Они лежатъ въ плоскостяхъ проекцiй и должны лежать въ данной плоскости,слѣдовательно на ея слѣдахъ.Отсюда слѣдуетъ,что если прямая лежитъ въ плоскости,то слѣды прямой лежатъ на одноименныхъ слѣдахъ плоскости.

Теперь не трудно рѣшить задачу о проведенiи прямой на плоскости. Пусть на плоскости SOT нужно провести прямую, горизонтальная проекцiя которой есть ab /черт.55/. Проведя перпендикуляры aa' и bb' къ линiи



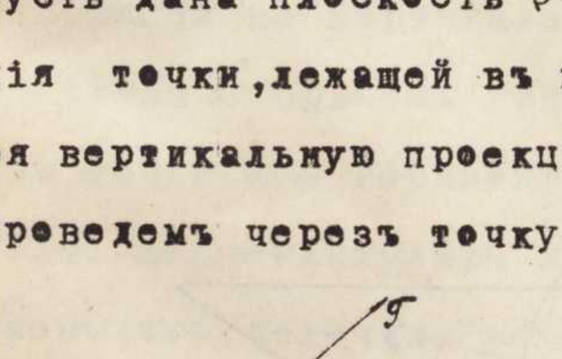
Черт. 55.

ху и соединивъ точку а' съ точкой b', получимъ вертикальную проекцiю искомой прямой. Она лежитъ въ плоскости SOT, ибо ея слѣды лежатъ на одноименныхъ слѣдахъ плоскости. Теперь у насъ все подготовлено, чтобы рѣшить задачу:

<u>По данной проекцiи точки, лежащей на данной плоскости, найти ея другую проекцiю, или что тоже, на данной плоскости взять точку.</u>

Пусть дана плоскость SOT и горизонтальная проекцiя точки, лежащей въ плоскости. Требуется найти ея вертикальную проекцiю /черт.56/.

Проведемъ черезъ точку m прямую ab, произвольно, но



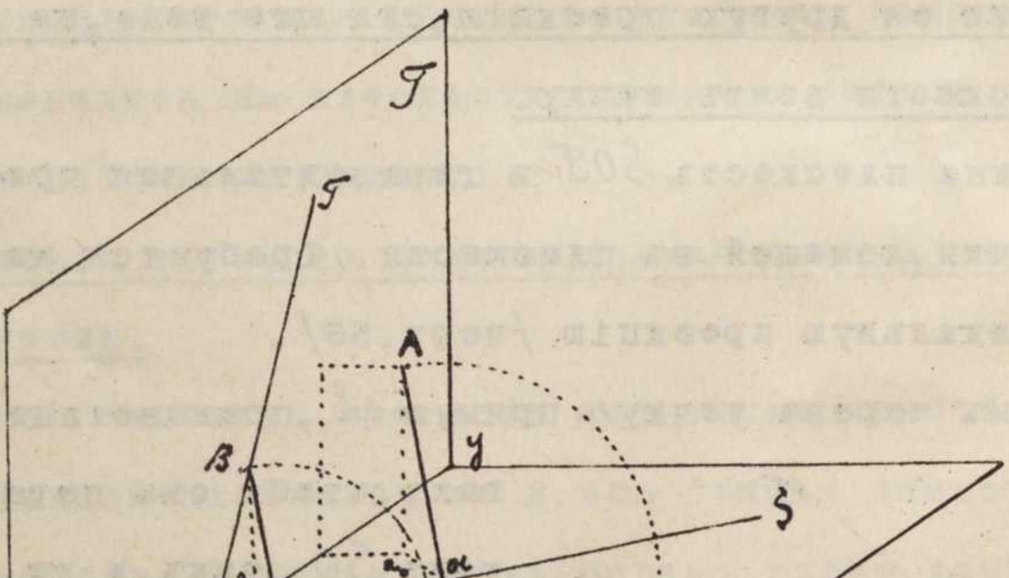
Черт. 56.

такъ, чтобы она пересѣкала какъ SO, такъ и ху, и примемъ ее за горизонтальную проекцiю нѣкоторой прямой, лежащей въ плоскости SOT. Затѣмъ извѣстнымъ уже способомъ построимъ вертикальную проекцію этой прямой - $a'b'$ и разсматривая m, какъ проекцію точки, принадлежащей линіи $(ab, a'b')$, построимъ ея вертикальную проекцію m'. Точка $/m, m'/$ будетъ искомая.

Отсюда вытекаетъ рѣшеніе вопроса: лежитъ-ли данная точка на данной плоскости? Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, достаточно посмотрѣть, лежитъ-ли данная точка на какой-нибудь прямой, лежащей въ этой плоскости; горизонтальная проекція прямой должна проходить черезъ такую-же проекцію точки. Чертежъ и доказательство тѣ же, какъ и въ предыдущей задачѣ.

Весьма часто бываетъ, что нужно совмѣстить данную плоскость, со всѣми точками и линіями на ней находящимися, съ какой нибудь изъ плоскостей проекцій.

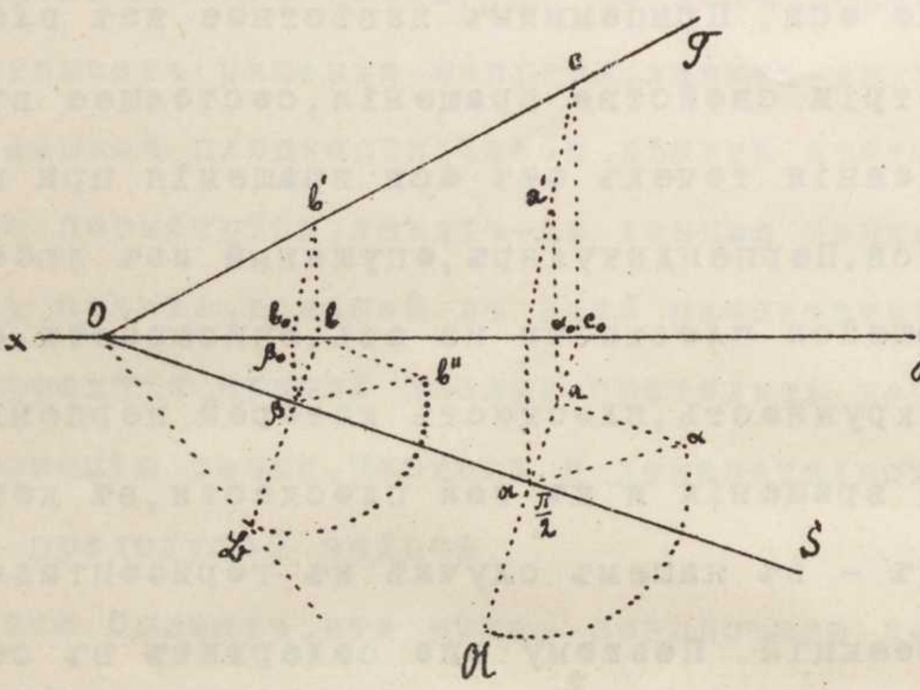
Разсмотримъ, какъ это можно сдѣлать. Пусть дана плоскость SOT и лежащая на ней точка А /черт. 57/, и



Черт. 57

пусть требуется совмѣстить эту систему съ горизонтальной плоскостью проекцій. Этого совмѣщенія можно проще всего достигнуть, вращая плоскость около $S0$, какъ около оси. Припомнимъ извѣстное изъ элементарной геометріи свойство вращенія, состоящее въ томъ, что разстоянія точекъ отъ оси вращенія при вращеніи не мѣняются. Перпендикуляръ, опущеный изъ любой точки вращающейся плоскости на ось, описываетъ своимъ концомъ окружность, плоскость которой перпендикулярна къ оси вращенія и къ той плоскости, въ которой эта ось лежитъ - въ нашемъ случаѣ къ горизонтальной плоскости проекцій. Поэтому она содержитъ въ себѣ какъ точку А, такъ и ея горизонтальную проэкцію a_0 и пересѣкается съ горизонтальной плоскостью проекцій по линіи $a\alpha \perp S0$. Направленіе $a\alpha$ мы найдемъ, опустивъ изъ точки a перпендикуляръ на $S0$. Точка А по совмѣщеніи будетъ лежать на этомъ перпендикулярѣ и упадетъ въ точку $\mathfrak{A}$ такъ, что $\alpha\mathfrak{A} = \alpha A$. Совмѣщеніе точки В, лежащей на вертикальномъ слѣдѣ плоскости, придется въ точкѣ $\mathfrak{b}$ причемъ направленіе $b\mathfrak{b}$ находится, если изъ точки b - горизонтальной проекціи точки В, опустить перпендикуляръ на $S0$, а $b\mathfrak{b} = bB$. Далѣе замѣчаемъ, что величина $\alpha\mathfrak{A} = \alpha A$, а эта послѣдняя есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, у котораго одинъ катетъ есть разстояніе точки a_0 отъ $S0$, а другой - разстояніе точки А отъ горизонтальной плоскости проекцій - той, на которую совмѣщаемъ; аналогично и для точки В.

Если теперь на условномъ,проекціонномъ чертежѣ намъ дана точка aa' , лежащая на плоскости SOT /черт.58/, то проводимъ $a\alpha \perp SO$ и строимъ прямоугольный треугольникъ на катетахъ $a\alpha$ и $a\alpha = a_0a'$. Гипотенуза его есть разстояніе точки $/a, a'/$ отъ линіи SO и при совмѣщеніи точка упадетъ на продолженіи $a\alpha$ въ точку $\mathfrak{A}$ такъ,что $\alpha\mathfrak{A} = a\alpha$.Точно так же совмѣстимъ и точку $/bb'/$,лежащую на вертикальномъ слѣдѣ плоскости SOT. Проведя черезъ ея совмѣщеніе $\mathfrak{B}$ и точку О прямую $O\mathfrak{B}T'$ получимъ совмѣщеніе слѣда OT .Уголъ SOT' равенъ очевидно углу между слѣдами плоскости /онъ изображается,понятно,не въ натуральную величину/; уголъ $b_0\beta b'' = \measuredangle a\alpha a$ будетъ угломъ наклоненія плоскости SOT къ горизонтальной плоскости проекцій.Совмѣщеніе съ вертикальной плоскостью дѣлается такимъ же способомъ. Рѣшивъ предложенную задачу,мы вмѣстѣ съ тѣмъ рѣшили

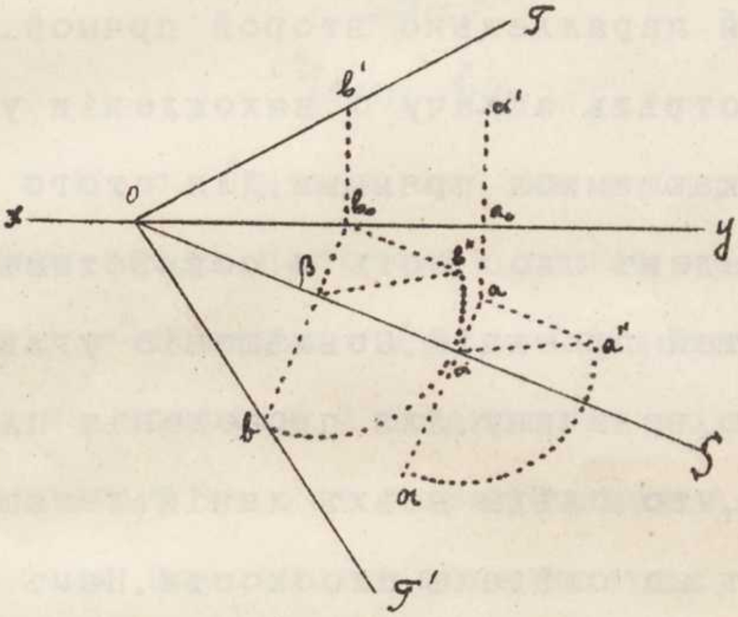


Черт. 58.

и еще двѣ: объ углѣ между слѣдами плоскости и о наклоненіи плоскости къ плоскостямъ проекцій.

Теперь мы легко можемъ рѣшить и обратную задачу: плоскость, совмѣщенную съ одной изъ плоскостей проекцій, поднять въ начальное положеніе.

Пусть плоскость съ горизонтальнымъ слѣдомъ OS совмѣщена съ горизонтальной плоскостью проекцій, причемъ ея вертикальный слѣдъ принялъ положеніе OT' /черт. 59/



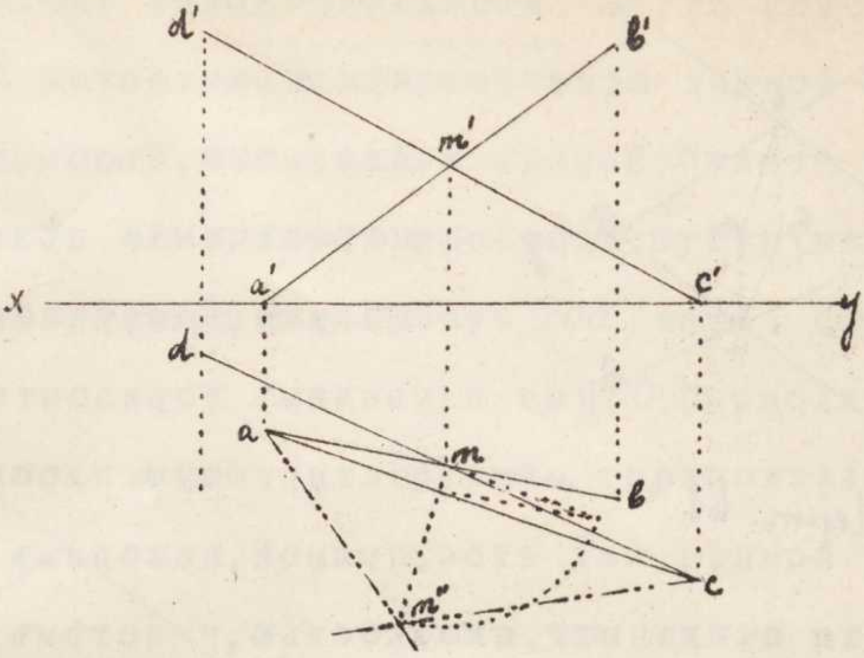
Черт. 59.

Возьмемъ на линіи OT' какую-нибудь точку b и проведемъ черезъ нее прямую $b\beta b_0 \perp SO$.

Изъ точки b_0 проведемъ $b_0b'' = b\beta$ и $\perp bb_0$. Соединимъ точки β и b'' ; затѣмъ изъ точки b_0 проведемъ линію b_0b' перпендикулярную къ ху и равную b_0b''. Точка b' и будетъ точкой вертикальнаго слѣда, который получимъ, прочертивъ ob' . Въ этомъ легко убѣдиться обратнымъ вращеніемъ. Такое же построеніе годно и для любой точки плоскости.

Теперь мы могли-бы рѣшить задачу объ углѣ между двумя плоскостями, между плоскостью и прямой. Но такъ какъ обѣ эти задачи сводятся къ нахожденію угла между двумя прямыми, то къ ней мы и приступимъ. Двѣ прямыя въ пространствѣ вообще не пересѣкаются и не образуютъ поэтому угла въ смыслѣ опредѣленія планиметріи. Въ геометріи пространства за уголъ между непересѣкающимися прямыми принимаютъ уголъ между одной изъ прямыхъ и другой, проведенной изъ какой-нибудь точки первой параллельно второй прямой. Поэтому намъ нужно разсмотрѣть задачу о нахожденіи угла между двумя непересѣкающимися прямыми. Для этого черезъ данныя прямыя проведемъ плоскость и совмѣстимъ ее съ одной изъ плоскостей проекцій. Совмѣщеніе угла дастъ намъ его истинную величину. Для проведенія плоскости пользуемся тѣмъ, что слѣды всѣхъ линій, лежащихъ на плоскости, лежатъ на слѣдахъ плоскости. Намъ нуженъ собственно одинъ только слѣдъ, какъ ось вращенія плоскости. Найдя, напримѣръ, горизонтальные слѣды данныхъ прямыхъ и прочертивъ черезъ нихъ прямую, получимъ горизонтальный слѣдъ проходящей черезъ данныя прямыя плоскости. Вращая ее около слѣда, получимъ совмѣщеніе ея съ горизонтальной плоскостью проекцій и истинную величину угла. Задачи объ углѣ между плоскостями, между прямой и плоскостью, рѣшаются по этому же плану. Итакъ пусть даны двѣ непересѣкающіяся прямыя /ab, a'b'/ и /cd, c'd'/. Точка ихъ пересѣченія пусть будетъ /m, m'/. Для упрощенія за точки /b, b'/ и /c, c'/ взяты горизон -

тальные слѣды этихъ прямыхъ /черт. 60/. Проведя че-

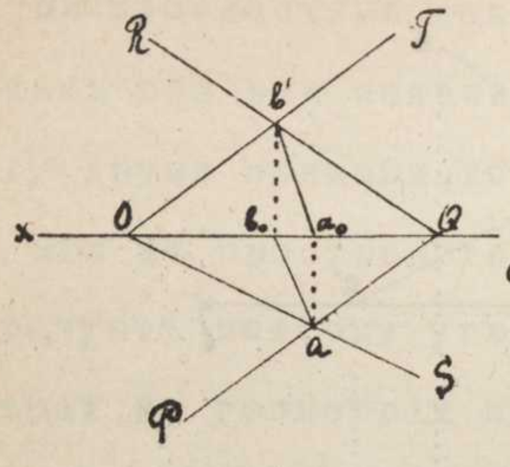


Черт. 60.

резъ точки а и с прямую ас, мы ее принимаемъ за горизонтальный слѣдъ плоскости этихъ прямыхъ и строимъ совмѣщенiе m'' точки $/m, m'/$; $am''c$ будетъ искомый.

Разбирая дальше вопросъ о взаимномъ положенiи плоскостей, переходимъ къ ихъ пересѣченiю. Замѣтимъ во-первыхъ, что если плоскости параллельны, то параллельны и ихъ слѣды, какъ линiи пересѣченiя двухъ параллельныхъ плоскостей съ третьей. Далѣе, изъ элементовъ геометрiи извѣстно, что двѣ плоскости пересѣкаются по прямой и что прямая, имѣющая двѣ общiя точки съ плоскостью, цѣликомъ лежитъ въ этой плоскости. Прямая, проходящая через точки пересѣченiя слѣдовъ вполнѣ опредѣляется ими и очевидно лежитъ въ обѣихъ плоскостяхъ; она и будетъ линiей ихъ пересѣченiя.

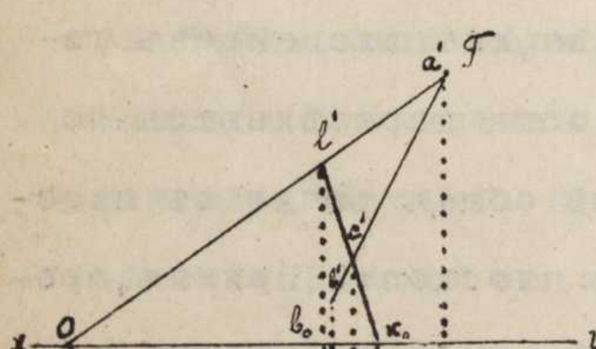
Пусть даны плоскости SOT и PQR /черт. 61/; точки пересѣченiя ихъ слѣдовъ суть $/b_0 b'/$ и $/a a_0/$. Проведя черезъ эти двѣ точки прямую $/aa'bb'/$ мы получимъ линію пересѣченія плоскостей SOT и PQR.



Черт. 61.

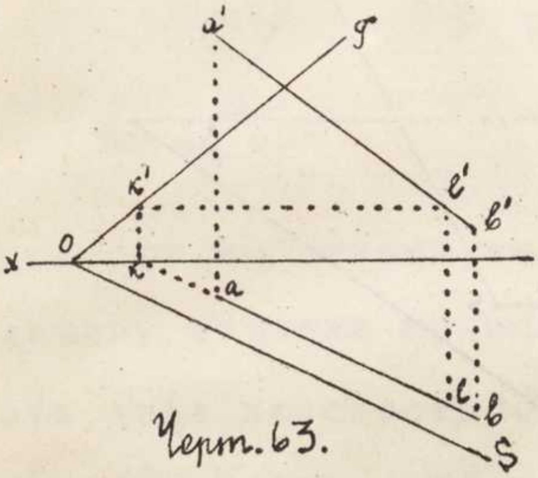
Для того, чтобы построить пересѣченіе прямой съ плоскостью, поступаемъ такъ: проводимъ горизонтально проектирующую плоскость этой прямой, находимъ линію ея пересѣченія съ данной плоскостью, а затѣмъ ищемъ точку пересѣченія полученной прямой съ данной. Эта точка и будетъ точкой пересѣченія данной прямой съ данной плоскостью. Пересѣченіе существуетъ всегда, такъ какъ эти линіи имѣютъ общую горизонтальную проекцію, если только данная прямая не параллельна плоскости. Въ послѣднемъ случаѣ ея проекціи параллельны слѣдамъ плоскости.

Пусть дана плоскость SOT и прямая $/aba'b'/$ /черт.62/.



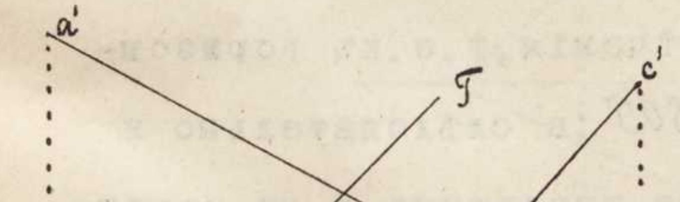
Черт. 62.

Проведемъ горизонтально-проектирующую плоскость kl_0l' этой прямой. Линія $/kk_0l_0l'/$ будетъ линіей пересѣченія этой плоскости съ плоскостью SOT. Точка $/cc'/$, въ которой пересѣкаются прямыя $/a'b'ab/$ и $/kl_0,k_0l'/$ и будетъ искомая. Разсмотримъ одинъ частный случай расположенія прямой относительно плоскости: когда одна изъ проекцій прямой параллельна соотвѣтствующему слѣду плоскости. Легко усмотрѣть, что въ этомъ случаѣ линія пересѣченія данной плоскости съ проектирующей плоскостью прямой будетъ параллельна одной изъ плоскостей проекцій. Пусть, напримѣръ, даны прямая /ав, а'в'/ и плоскость SOT /черт. 63/ такъ, что ав $\parallel SO$. Проводя проектирующую горизонтально плоскость для прямой /ав, а'в'/, видимъ, что линія ея пересѣченія съ данной плоскостью линія /кк', ℓℓ'/ - будетъ $\parallel xy$, т.е. горизонтальной плоскости проекцій. Точка пересѣченія будетъ /ℓ, ℓ'/.



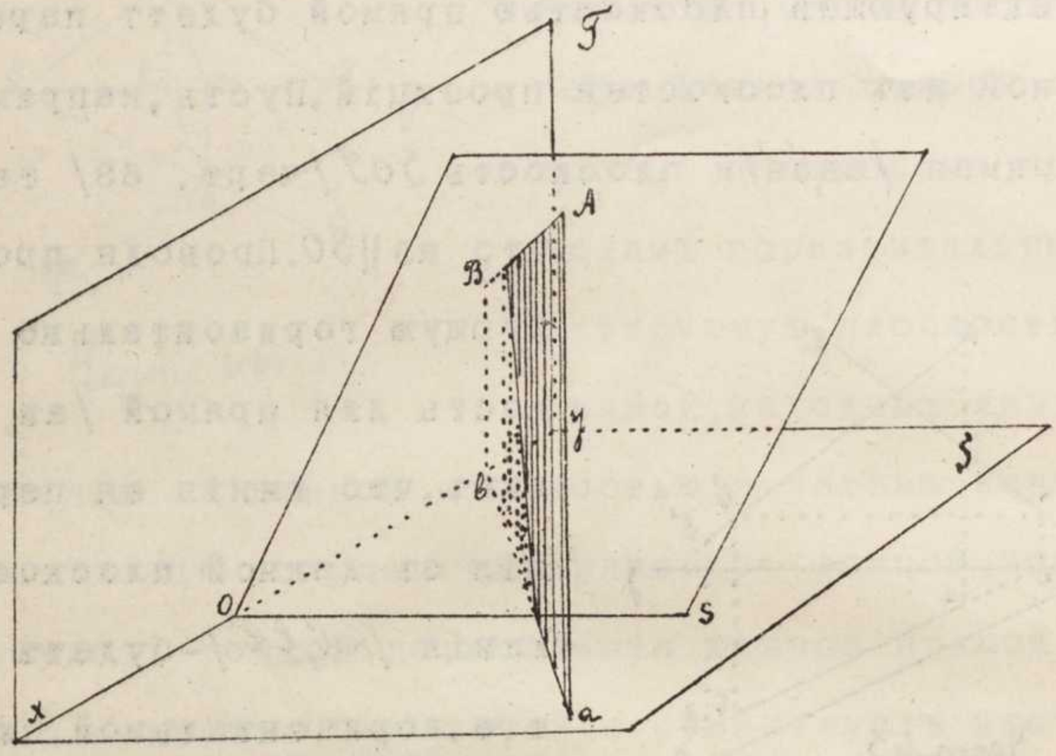
Черт. 63.

Пусть теперь горизонтальная проекція прямой $\parallel xy$. Это значитъ, что прямая параллельна вертикальной плоскости проекцій, какъ и ея горизонтально проектирующая плоскость. Линія пересѣченія этой плоскости съ плоскостью SOT и вертикальный слѣдъ послѣдней, какъ линіи пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей третьей, тоже параллельны. Ходъ построенія ясенъ; его выполненіе показано на чертежѣ 64.



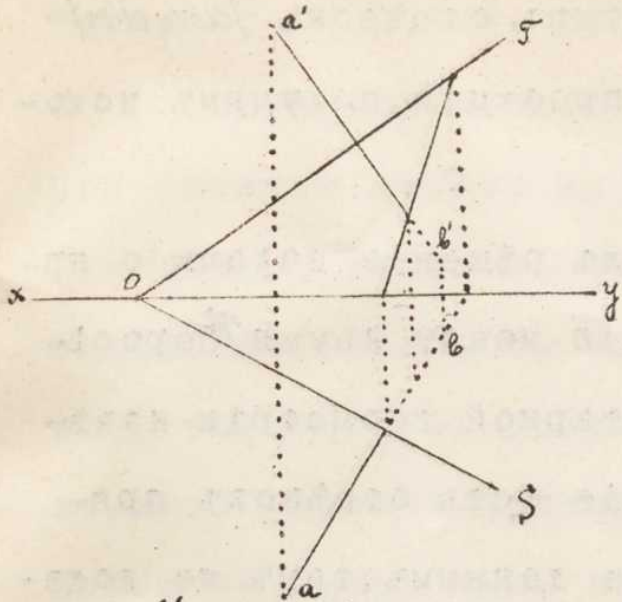
Черт. 64.

Мы видѣли уже условія параллельности прямой съ плоскостью; теперь разсмотримъ условія ихъ перпендикулярности. Пусть дана плоскость SOT /черт. 65/ и прямая АВ $\perp$ SOT. Проведемъ горизонтально-проектирующую плоскость



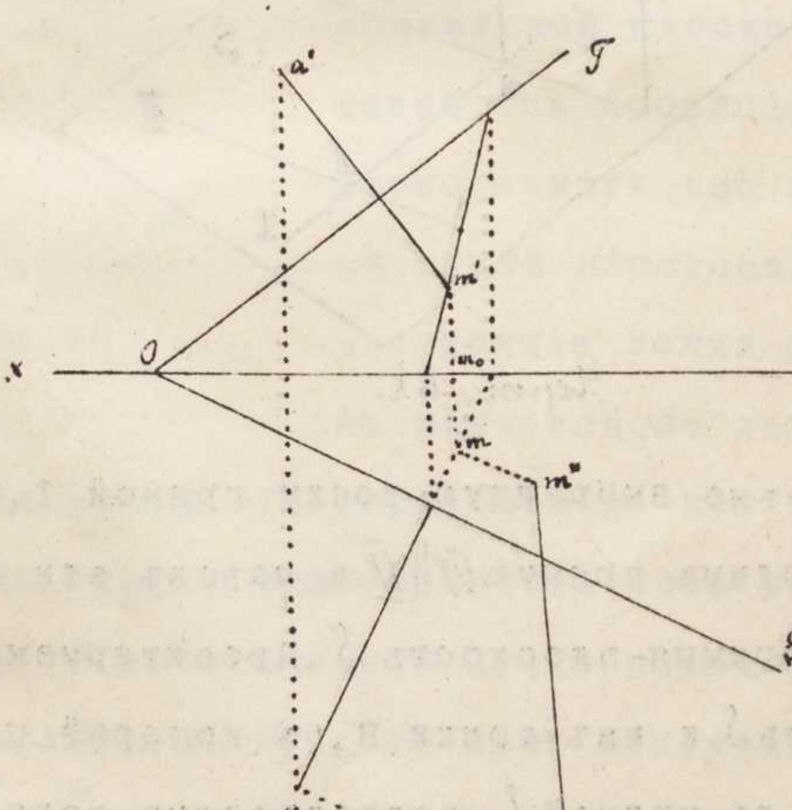
Черт. 65.

этой прямой и пусть горизонтальныя проекціи точекъ А и В суть точки a и b. Горизонтально-проектирующая плоскость содержитъ въ себѣ направленія АВ $\perp SOT$ и Аа $\perp S$- горизонтальной плоскости проекцій. Поэтому она перпендикулярна къ линіи ихъ пересѣченія, т.е. къ горизонтальному слѣду OS плоскости SOT; а слѣдовательно и ав $\perp SO$. Подобное же разсужденіе приложимо и къ вертикально-проектирующей плоскости. Отсюда слѣдуетъ, что если прямая перпендикулярна къ плоскости, то ея проекціи перпендикулярны къ соотвѣтствующимъ слѣдамъ данной плоскости. Такъ, напримѣръ, на чертежѣ 66 прямая /ав, $a'b'$/ перпендикулярна къ плоскости SOT, ибо ея проекціи перпендикулярны къ одноименнымъ слѣдамъ плоскости.



Черт. 66.

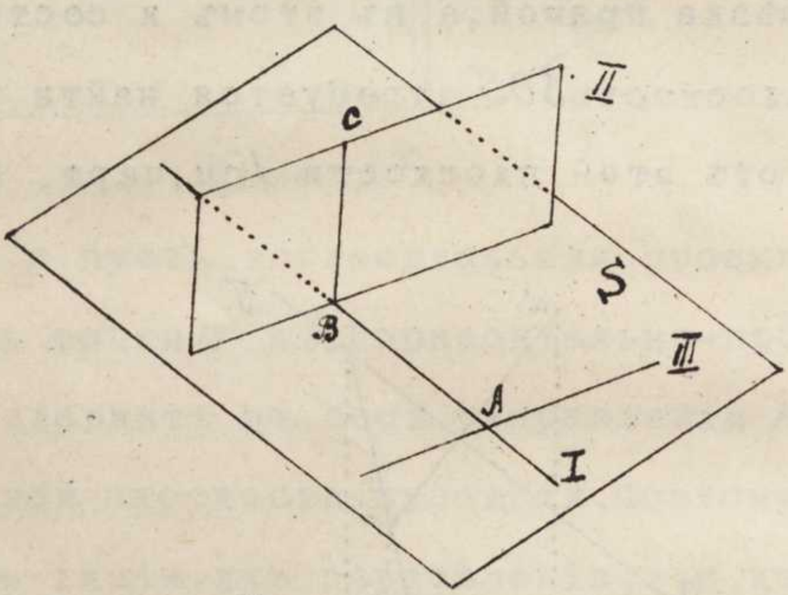
Умѣя строить прямыя перпендикулярныя плоскости, мы легко найдемъ и разстояніе точки отъ плоскости. Для этого нужно только найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на плоскость. Какъ провести прямую, перпендикулярную плоскости, мы знаемъ; знаемъ также, какъ найти истинную величину отрѣзка прямой; а въ этомъ и состоитъ задача. Пусть дана плоскость SOT; требуется найти разстояніе точки /a, a'/ отъ этой плоскости /см. черт. 67/. Проведемъ



Черт. 67.

черезъ эту точку прямую /ав, а'в'/ $\perp$ SOT.найдя точку/m,m'/ ея пересѣченія съ SOT и совмѣстивъ отрѣзокъ /am,a'm'/ съ горизонтальной плоскостью проекцій,получимъ искомое разстояніе.

Дадимъ теперь въ общихъ чертахъ рѣшеніе задачи о нахожденіи кратчайшаго разстоянія между двумя не пересѣкающимися прямыми.Изъ элементарной геометріи извѣстно,что кратчайшее разстояніе есть отрѣзокъ прямой,перпендикулярной къ обѣимъ даннымъ;тамъ же доказывается,что этому условію удовлетворяетъ единственная прямая.Пусть даны двѣ прямыя I и II /черт.68/.Че-



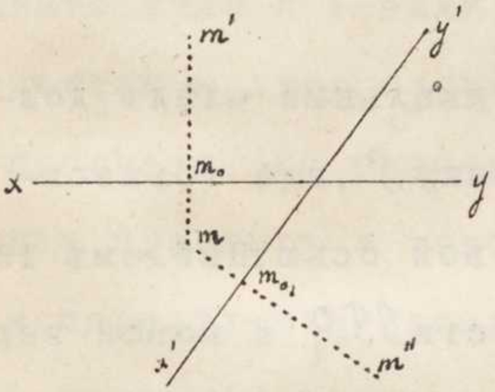
Черт. 68.

резъ произвольно выбранную точку прямой I,напримѣръ, точку А,проводимъ прямую III $\parallel$ II и черезъ эти двѣ пересѣкающіяся прямыя-плоскость S.Проектируемъ прямую II на плоскость S и изъ точки В,въ которой проекція пересѣкается съ прямой I ,возставляемъ перпендикуляръ къ плоскости S.Длина этого перпендикуляра ВС и есть искомое кратчайшее разстояніе между-прямыми I и II .

въ самомъ дѣлѣ: легко видѣть, что $BC \perp AD$ и точно также $BC \perp CN$, т.е. удовлетворяетъ условію.

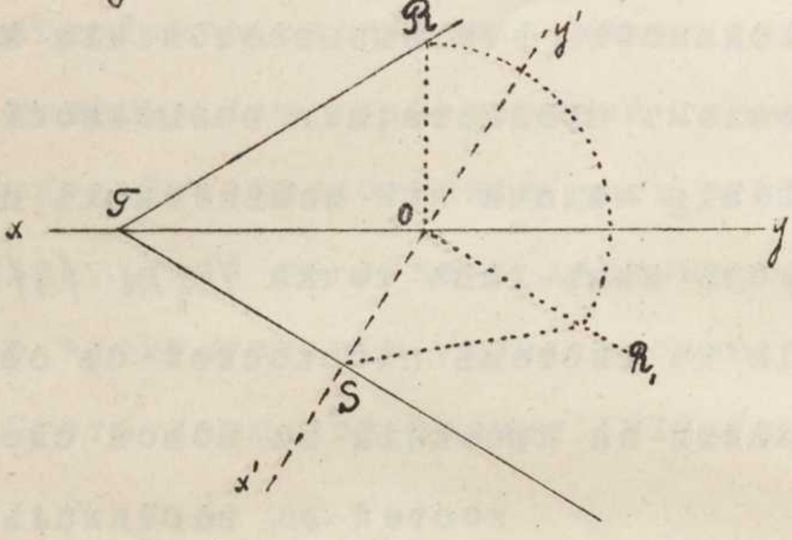
ПЕРЕМѢНА ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦІЙ.

При рѣшеніи задачъ начертательной геометріи часто приходится измѣнять ту или другую плоскость проекцій. Необходимость эта вызывается или неудобнымъ положеніемъ предмета, или возможностью болѣе легкаго рѣшенія задачи при измѣненныхъ плоскостяхъ проекцій. Пусть намъ дана точка $/m, m'/$, /черт.69/ по отношенію къ системѣ плоскостей съ осью ху; требуется найти ея проекціи въ новой системѣ плоскостей съ вертикальной плоскостью, измѣненной такъ, что линіи ея пересѣченія съ горизонтальной плоскостью, т.е. новая ось проекцій, есть $x'y'$. Легко понять, что при перемѣнѣ одной плоскости проекцій, разстояніе точки отъ другой не мѣняется. Въ данномъ случаѣ



Черт 69.

разстояніе точки отъ горизонта не измѣнилось, и т.к. разстояніеточки отъ горизонта есть разстояніеея вертикальной проекціи отъ ху, то опускаемъ изъ m перпендикуляръ на $x'y'$ и на немъ откладываемъ $m_0'm'' = m_0m'$. Точка m'' и будетъ вертикальной проекціей точки (m, m') въ новой системѣ плоскостей. Для перемѣны горизонтальной плоскости замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ разстояніе точки отъ вертикальной плоскости не мѣняется. Построеніе будетъ аналогично предыдущему. Пусть теперь дана своими слѣдами плоскость $ST\mathcal{R}$ /черт. 70/, требуется найти ея слѣды, когда измѣнена, напримѣръ, вертикальная плоскость проекцій и новая ось имѣетъ положеніе $x'y'$. Горизонтальный слѣдъ остается, оче-



Черт. 70.

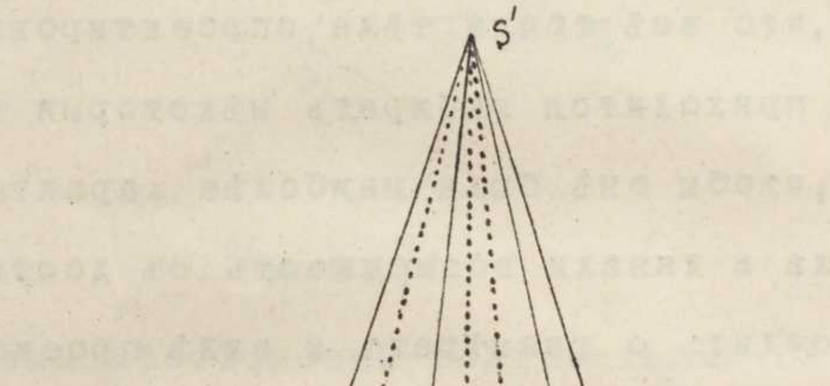
видно, на своемъ мѣстѣ; новый вертикальный слѣдъ долженъ непремѣнно пройти черезъ точку S, гдѣ горизонтальный слѣдъ пересѣкается съ новой осью. Найдемъ теперь еще одну точку, общую плоскости $ST\mathcal{R}$ и новой вертикальной плоскости. Въ старой системѣ плоскостей ее легко найти, какъ точку пересѣченія слѣда $T\mathcal{R}$ плоскости $ST\mathcal{R}$ и слѣда $\mathcal{R}O$ новой вертикальной плоскости на старой. Когда будемъ совмѣщать новую плоскость вращеніемъ около SO до совпаденія съ горизонтомъ, точка $\mathcal{R}$, очевидно, упадетъ на перпендикулярѣ изъ O къ $x'y'$ въ разстояніи $O\mathcal{R}_1 = O\mathcal{R}$ и новый вертикальный слѣдъ будетъ $O\mathcal{R}_1$. Здѣсь мы имѣли второй примѣръ употребленнаго метода вращенія, который часто бываетъ очень полезенъ при рѣшеніи задачъ начертательной геометріи. Онъ состоитъ въ томъ,что данную плоскую фигуру вращаютъ около какой нибудь оси до совпаденія съ другой плоскостью;съ неменьшимъ удобствомъ прилагается она къ формамъ трехъ измѣреній.

Особенно часто приходится мѣнять плоскости проекцій при проектированіи геометрическихъ тѣлъ,къ которому мы теперь и переходимъ.

С п р о е к т и р о в а т ь какое-нибудь тѣло значитъ найти проекціи его точекъ на обѣ плоскости Монжа.Ясно,что всѣ точки тѣла спроектировать нельзя;поэтому приходится выбирать нѣкоторыя точки и линіи такъ,чтобы онѣ были наиболѣе характерны для даннаго тѣла и давали возможность съ достаточной точностью судить о размѣрахъ и видѣ проектируемаго предмета. Мы разберемъ проектированіе только самыхъ простыхъ и наиболѣе часто встрѣчающихся тѣлъ.

Для опредѣленія проекціями многогранника нужно задать проекціи всѣхъ его реберъ или всѣхъ его вершинъ.Тутъ нужно сдѣлать одно замѣчаніе относительно того,какъ нужно исполнять чертежъ.Если взять какой нибудь сложный многогранникъ,то пересѣченія проекцій могутъ до такой степени усложнить и запутать чертежк,что онъ потеряетъ всякую наглядность.Поэтому нѣкоторыя линіи прочерчиваются пунктиромъ.Для уясненія того,какія-же именно линіи нужно прочерчивать пунктиромъ,мы вспомнимъ,что проекція есть изображеніе предмета для наблюдателя, удаленнаго въ безконечность по направленію перпендикулярному къ плоскости проекцій. Этотъ наблюдатель въ случаѣ горизонтальной проекціи увидитъ то, что находится сверху; эти линіи прочерчиваются сплошной чертой; то, что находится снизу, невидимо и чертится пунктиромъ. На вертикальной проекціи видимо - находящееся спереди, а невидимо - находящееся сзади; видимое чертится непрерывно, невидимое - пунктиромъ.

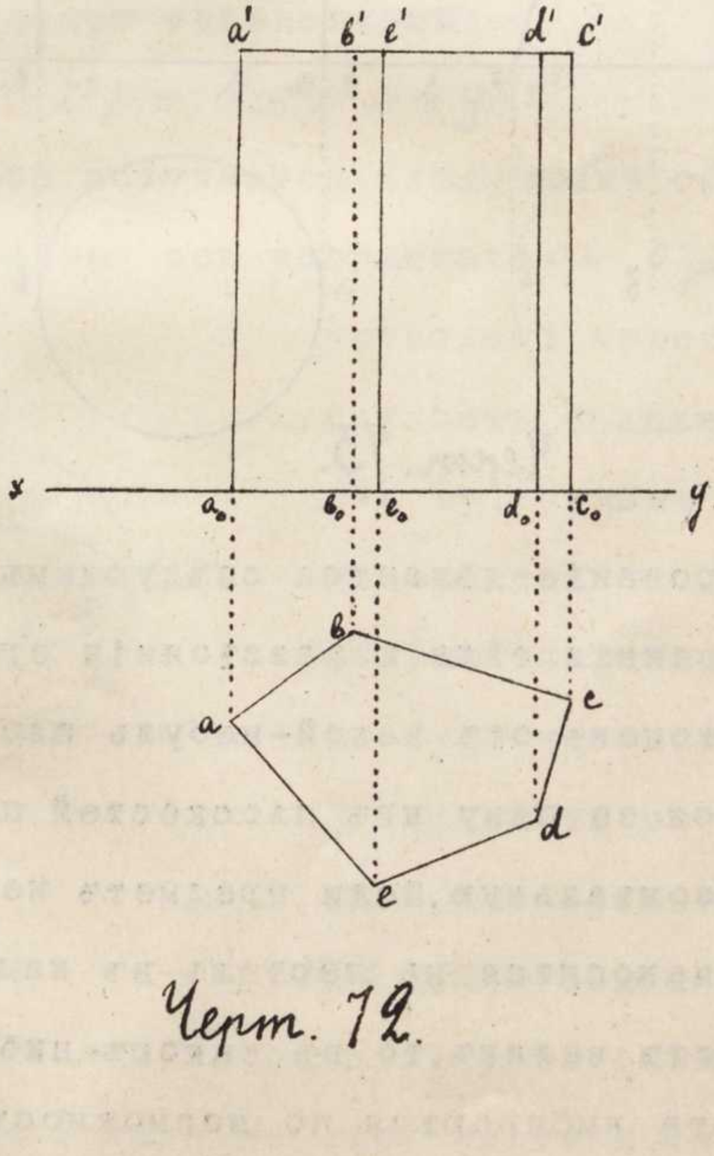
Пусть намъ нужно спроектировать шестигранную пирамиду /ss', aa', bb', cc', dd', ee', ff' /, /черт. 71/.



Черт. 71.

Плоскости проекцій выбираемъ наиболѣе удобнымъ для насъ образомъ: за горизонтальную - выбираемъ плоскость сѣченія перпендикулярнаго къ оси; вертикальную беремъ параллельно оси пирамиды. Разберемъ, что будетъ видно въ проекціяхъ. Если смотрѣть на пирамиду сверху, то видны всѣ ея ребра; ихъ проекціи чертимъ сплошной чертой. Если смотрѣть на пирамиду по направленію вертикально проектирующихъ лучей, обозначенному стрѣлкой, то видны будутъ ребра: $(as, a's')$, $(fs, f's')$, $(es, e's')$, $(ds, d's')$; ихъ проекціи на вертикальную плоскость чертимъ сплошной чертой; невидимы ребра: $(bs, b's')$ и $(cs, c's')$, проекціи которыхъ чертимъ пунктиромъ.

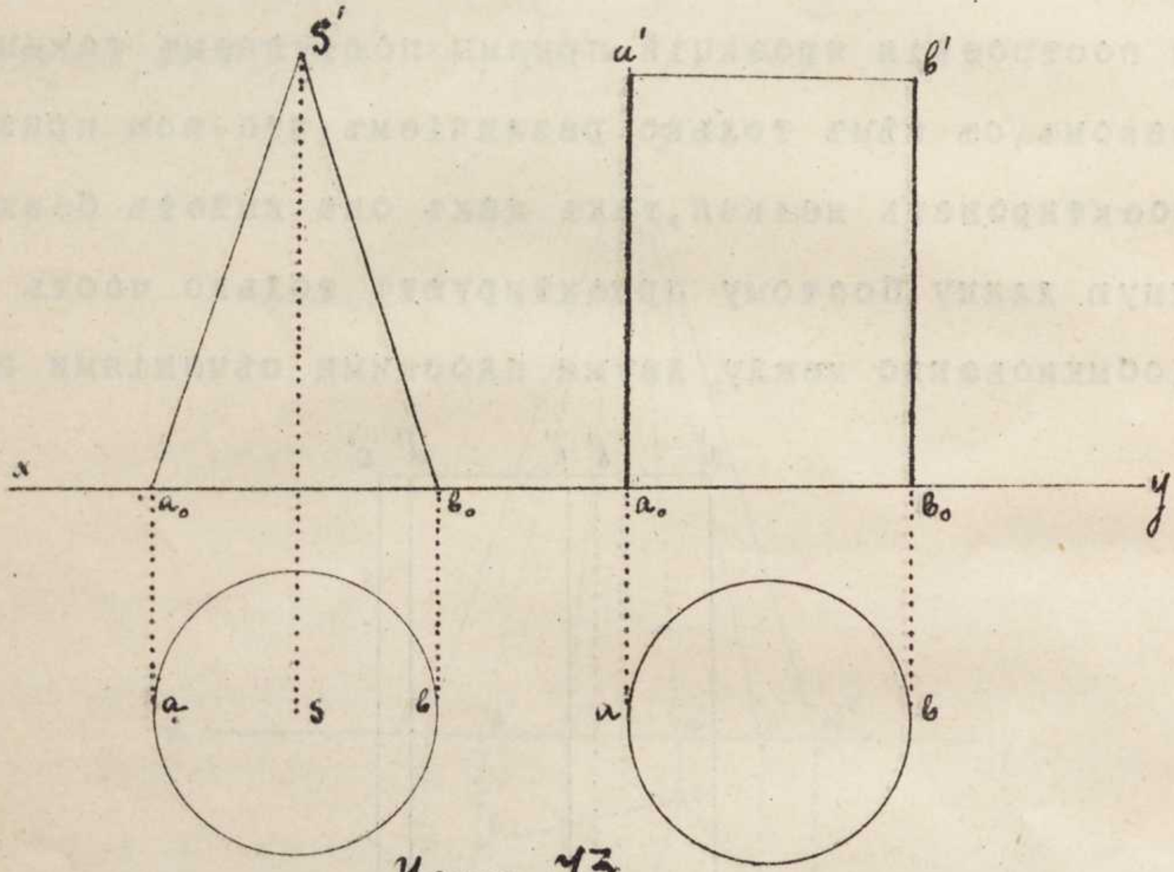
Для построенія проекцій призмы поступаемъ такимъ-же образомъ, съ тѣмъ только различіемъ, что всю призму спроектировать нельзя, такъ какъ она имѣетъ безконечную длину. Поэтому проектируютъ только часть призмы, обыкновенно между двумя плоскими сѣченіями и за



Черт. 72.

одну изъ плоскостей проекцій выбираютъ плоскость сѣченія призмы.На чертежѣ 72 изображены проекціи прямой пяти-угольной призмы.

Такъ какъ цилиндръ,конусъ и вообще круглые тѣла не имѣютъ образующихъ,или вѣрнѣе имѣютъ ихъ безконечное множество,то при проектированьи этихъ тѣлъ приходится ограничиваться ихъ основаніями и двумя крайними образующими,какъ это показано на чертежѣ 73.



Черт. 73.

Самое проектированіе дѣлается слѣдующимъ образомъ:измѣряются всѣ линіи тѣла и разстоянія его наиболѣе характерныхъ точекъ отъ какой-нибудь плоскости,которая принимается за одну изъ плоскостей проекцій,обыкновенно горизонтальную.Если предметъ небольшой,то эти величины наносятся на чертежъ въ настоящую величину,если предметъ великъ,то въ какомъ-нибудь масштабѣ.

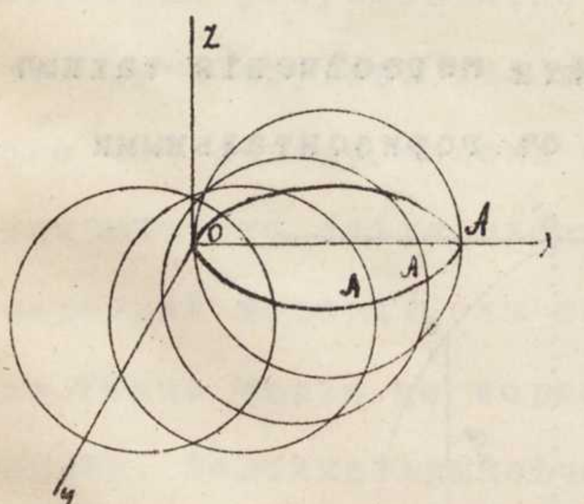
Части предмета выбираются по возможности характерныя;

практика покажетъ,какъ нкжно выбирать плоскости проекцій,что и какъ измѣрять и наносить на чертежъ.

Плоскости проекцій часто выбираются такъ,чтобы онѣ пересѣкали предметъ.Въ этомъ случаѣ проекцій предмета называются его сѣченіями:горизонтальнымъ и вертикальнымъ.При этомъ,чтобы не усложнять чертежа,придерживаются правила :то,что находится передъ плоскостью сѣченія,отбрасывается,а изображается лишь то, что находится въ самой плоскости или за нею .Для уясненія формы тѣла часто присоединяютъ къ двумъ плоскостямъ третью, къ нимъ перпендикулярную ;кромѣ того,часто даютъ цѣлый рядъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ сѣченій. Разсмотримъ въ видѣ примѣра поверхность четвертаго порядка,опредѣляемую уравненіемъ:

$$(x^2+y^2+z^2) = 4a^2x^2+4y^2z^2.$$

Эта поверхность получается слѣдующимъ образомъ:возьмемъ прямоугольныя оси координатъ Ox , Oy, Oz /черт.74/ и



Черт. 74.

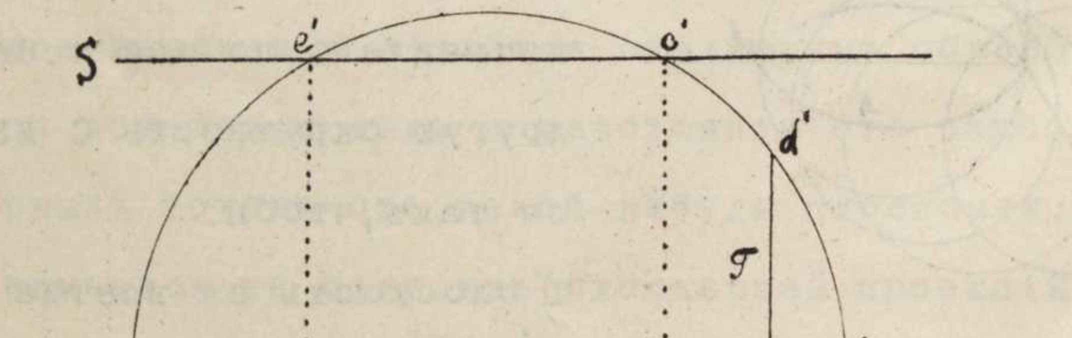
проведемъ черезъ начало окружность Е,лежащую въ плоскости ху,причемъ ея діаметръ направленъ по оси х.Заставимъ другую окружность С двигаться такъ,чтобы:

1) плоскость ея всегда оставалась параллельной плоскости zx ; 2)чтобы центръ ея всегда лежалъ въ плоскости ХУ и 3)чтобы одна и та же ея точка A всегда лежала на окружности Е.Очевидно,что

точка подвижной окружности, діаметрально-противоположная точкѣ A, при движеніи описываетъ окружность, симметричную съ окружностью C относительно начала. Поверхность, полученная такимъ образомъ, симметрична относительно всѣхъ трехъ плоскостей проекціи и имѣетъ четыре впадины; общій видъ ея будетъ данъ въ главѣ о способѣ косоугольныхъ проекцій, теперь же мы сдѣлаемъ нѣсколько ея сѣченій горизонтальными и вертикальными плоскостями.

Возьмемъ за горизонтальную плоскость проекцій плоскость XY чертежа 74, за вертикальную-плоскость ZX. Тогда направляющій кругъ и кругъ ему симметричный спроектируются въ настоящую величину, но только половины ихъ будутъ передъ вертикальной плоскостью; образующіе круги будутъ горизонтально проектироваться прямыми, параллельными оси проекцій, а вертикально - полуокружностями /нижнія ихъ части лежатъ подъ горизонтальной плоскостью/.

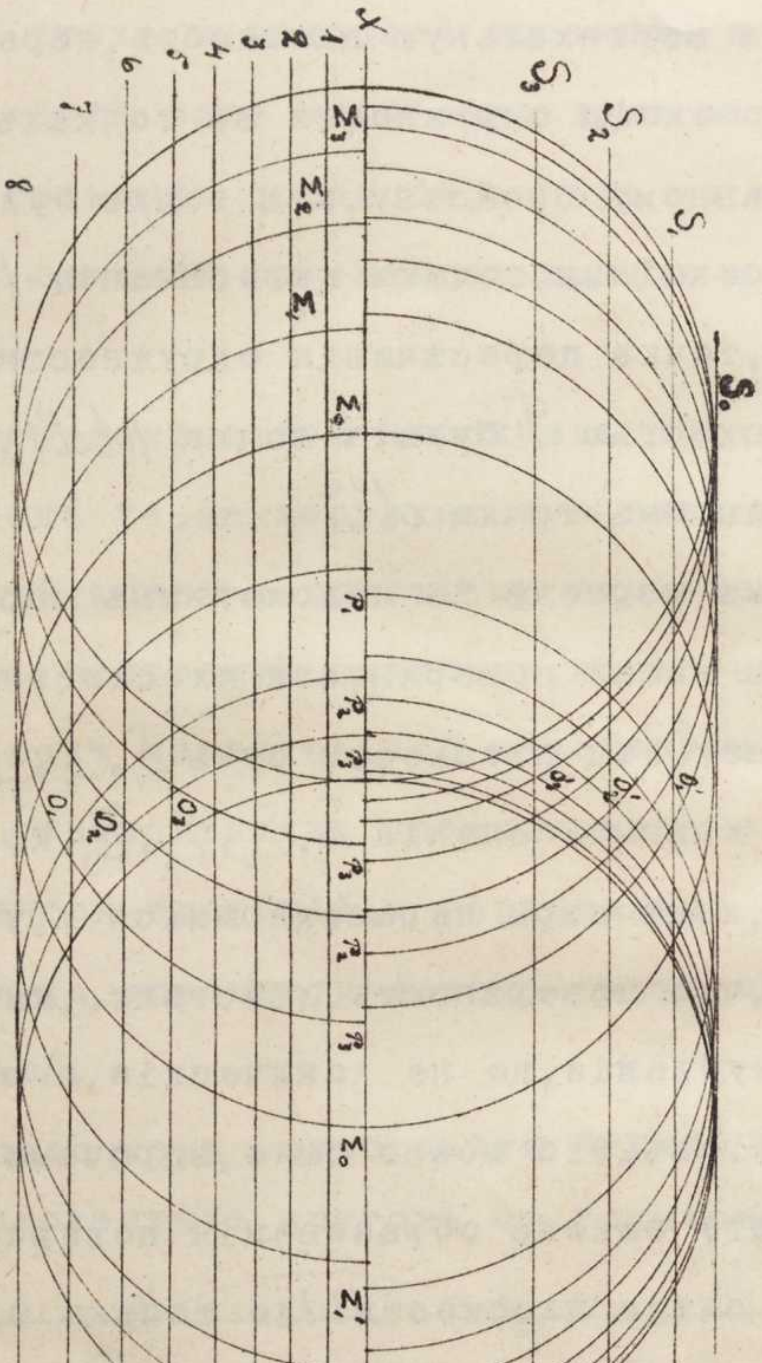
Покажемъ сначала, какъ можно найти пересѣченія такихъ образомъ расположенныхъ круговъ съ горизонтальными



Черт. 75.

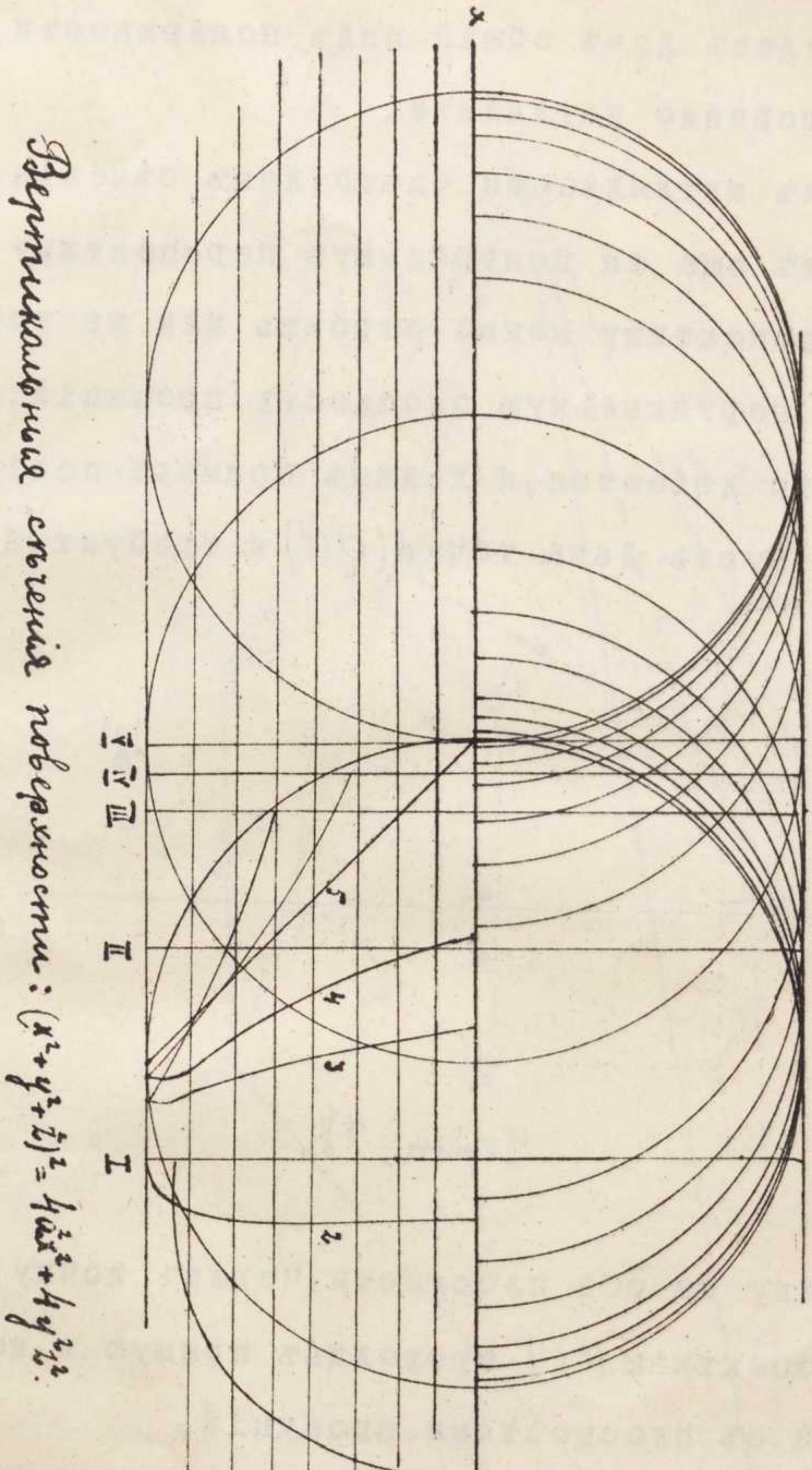
и вертикальными плоскостями. Пусть дана окружность $/ab, a_0 b_0/$, /черт.75/ и сѣкущія плоскости: горизонтальная S и вертикальная $\mathcal{T}$. Вертикальный слѣдъ плоскости S, которая, очевидно, проектируетъ лежащія въ ней точки на вертикальную плоскость, пересѣкаетъ вертикальную проекцію окружности въ точкахъ c' и e'. Согласно указанному свойству, эти точки будутъ вертикальными проекціями точекъ пересѣченія - $/ee'/$ и $/cc'/$. Также точно, точка пересѣченія окружности съ вертикальной плоскостью $\mathcal{T}$ будетъ точка $/dd'/$; совмѣщеніе ея съ горизонтомъ - точка d''.

На отдѣльномъ чертежѣ 76 изложеннымъ способомъ сдѣланы сѣченія нашей поверхности плоскостями, параллельными горизонту. Эти плоскости суть S_0, S_1, S_2, S_3, а соотвѣтствующія кривыя сѣченій $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Кривыя Σ суть не что иное, какъ пары пересѣкающихся круговъ; изъ ихъ формы видно, что поверхность, дѣйствит., имѣетъ воронкообразныя углубленія, но не коническія, а составленныя изъ дугъ круговъ. Это можно было, впрочемъ, предвидѣть уже изъ самаго закона образованія поверхности. Части кривыхъ отъ слѣда плоскости 8-8 до точекъ О суть сѣченія передней воронки, отъ точек О до точек Р-верхней воронки. Точно такія же воронки поверхность имѣет сзади и снизу. Вертикальныясѣченія поверхности показаны на чер.77. Они даютъ разрѣзы поверхности: сѣченіе I-до воронки, сѣченія 2-5-сѣченія воронок. Интересно отмѣтить, что сѣченіе 5, проходящее через точку касанія направляющих кругов, есть прямая, составляющая съ горизонтомъ уголъ въ 45°. Этотъ результатъ можно получить, аналитическимъ путемъ,



Горизонтальныя сѣченія поверхности: $(x^2+y^2+z^2)=4a^2x^2+4y^2z^2$.

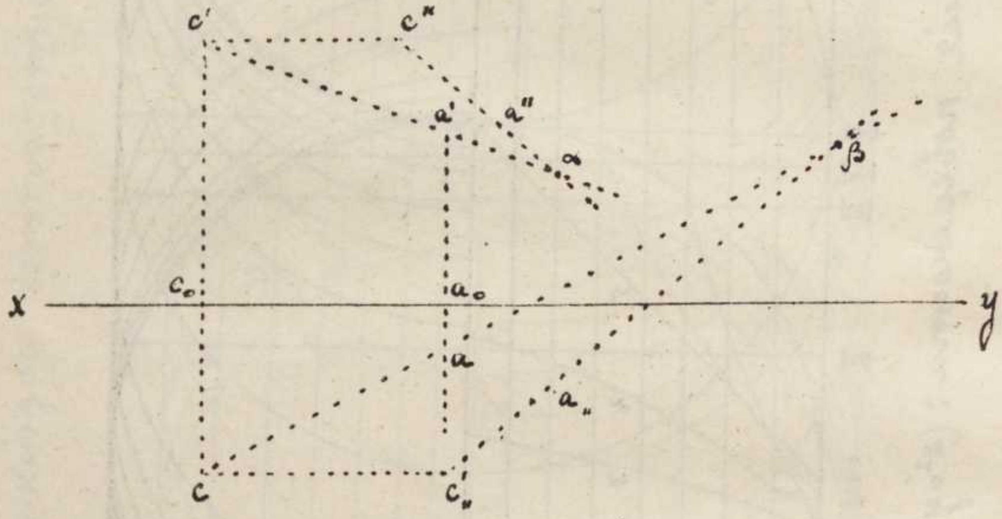
Черт. 76.


Вертикальныя сѣченія поверхности: $(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2x^2+4y^2z^2$.
x
y
I
II
III
IV
V
2
3
4
5

Черт. 77.

полагая въ уравненіи поверхности $x=0$. Такихъ прямыхъ будетъ всего четыре. Въ главѣ о косоугольныхъ проекціяхъ, гдѣ будетъ данъ общій видъ поверхности, сѣченія будутъ гораздо нагляднѣе.

Въ интересахъ наглядности часто, давъ сѣченія поверхности, строятъ еще ея центральную перспективу - общій видъ. Перспективу можно строить или на горизоталь ную, или на вертикальную плоскость проекцій; мы покажемъ, какъ это дѣлается, и дадимъ примѣръ построенія перспективы. Пусть дана точка (aa') и требуется построить

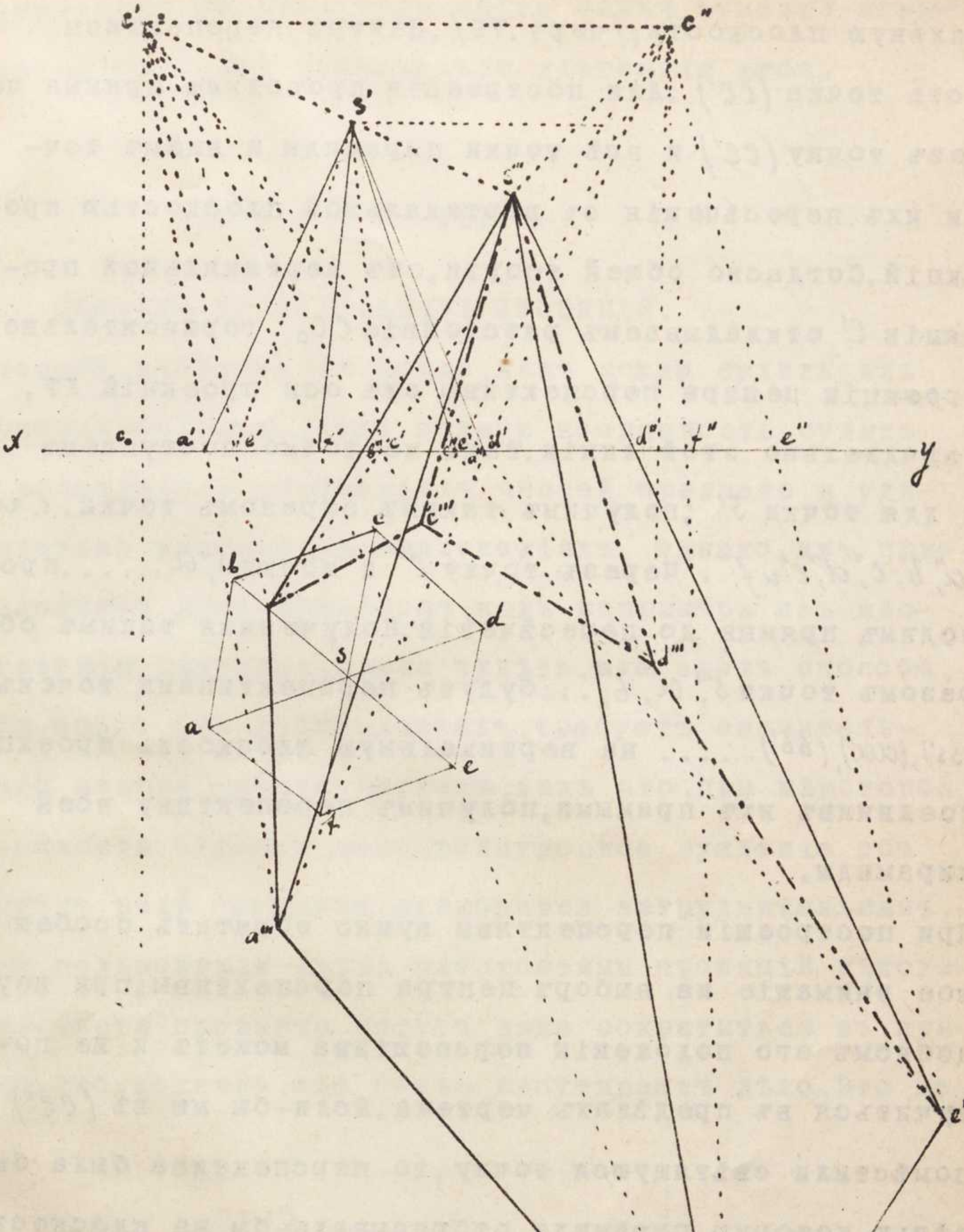


Черт. 78.

ея перспективу на обѣ плоскости. Черезъ точку (aa') и центръ перспективы (cc') проводимъ прямую и ищемъ ея пересѣченія съ плоскостями проекцій.

Полученныя точки и будутъ перспективами данной точка пересѣченія съ вертикальной плоскостью - перспективой на вертикальную плоскость, съ горизонтальной - на горизонтъ.

Этимъ способомъ построена перспектива правильной



Черт. 79.

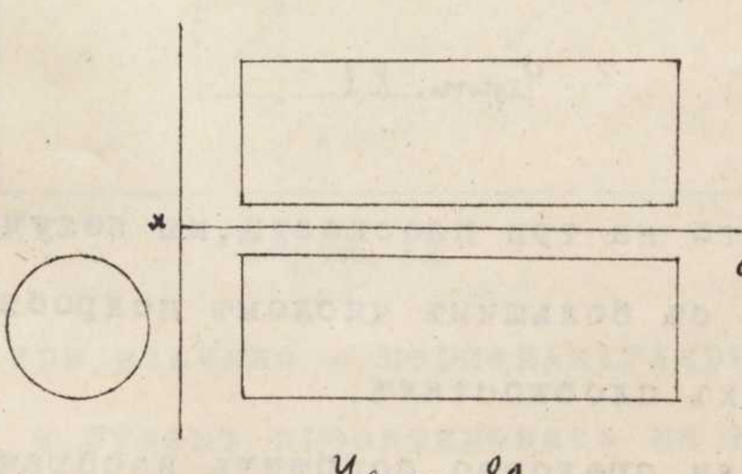
шестиугольной пирамиды $(ss'; aa'; bb'; cc'; dd'; ee'; ff')$ на вертикальную плоскость, /черт.79/. Центръ перспективы есть точка (CC'). Для построенія проводимъ прямыя черезъ точку (CC') и всѣ точки пирамиды и ищемъ точки ихъ пересѣченія съ вертикальной плоскостью проекцій. Согласно общей теоріи, отъ вертикальной проекціи C' откладываемъ разстояніе CC_0 горизонтальной проекціи центра перспективы отъ оси проекцій XY, параллельно этой линіи. Такъ же точно поступаемъ и для точки S'; получимъ такимъ образомъ точки: C'' и $s'', a'', b'', c'', d'', e''$ и f''. Через точку C'' и точки S'', a'' ...... проводимъ прямыя до пересѣченія. Полученныя такимъ образомъ точки S''', a''', b''' ... будутъ перспективами точекъ $(ss'), (aa'), (bb')$...... на вертикальную плоскость проекцій. Соединивъ ихъ прямыми, получимъ перспективу всей пирамиды.

При построеніи перспективы нужно обратить особенное вниманіе на выборъ центра перспективы; при неудобномъ его положеніи перспектива можетъ и не получиться въ предѣлахъ чертежа. Если-бы мы въ (CC') помѣстили свѣтящуюся точку, то перспектива была бы тѣнью, которую пирамида отбрасывала-бы на плоскость проекцій. Если-бы лучи были параллельны между собой, то мы бы имѣли освѣщеніе, напр., солнцемъ. Освѣщеніе параллельными лучами, наклоненными къ обѣимъ плоскостямъ проекцій подъ угломъ въ 45° употребляется при тушевкѣ и построеніи тѣней на архитектурныхъ и инженерныхъ чертежахъ. Такъ какъ діагональ куба, плоскости котораго параллельны плоскостямъ проекцій сотавляетъ съ ними углы 45°,то такая тушевка называется тушевкой параллельно діагонали куба.

ГЛАВА III.

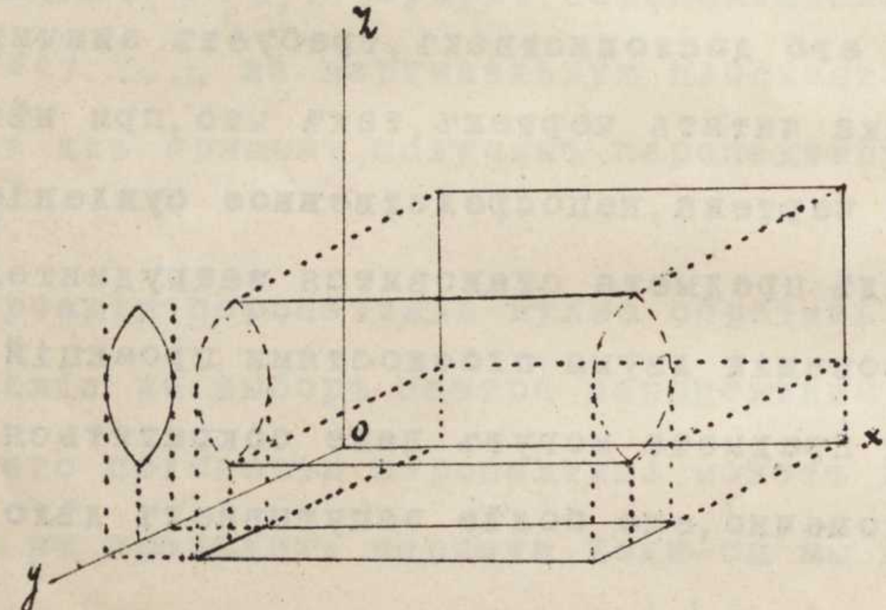
СПОСОБЪ КОСОУГОЛЬНЫХЪ ПРОЕКЦІЙ.

Способъ изображенія Монжа,какъ можно судить изъ вышеизложеннаго,даетъ полную возможность судить о размѣрахъ и отношеніяхъ частей предмета и удивительно удобенъ въ приложеніяхъ. Однако,изъ приведенныхъ выше примѣровъ,какъ напримѣръ изъ изображенія цилиндра,можно видѣть,что этотъ способъ, при всѣхъ его достоинствахъ,требуетъ значительнаго навыка читать чертежъ,такъ что,при нѣкоторой сложности чертежа,непосредственное сужденіе объ общемъ видѣ предмета становится затруднительнымъ. При пользованіи двумя плоскостями проекцій нѣкоторыя части предмета могутъ даже сократиться въ прямыя,что,конечно,еще болѣе запутываетъ дѣло.Это не-



Черт. 80

удобство можно отчасти устранить, вводя третью плоскость проекцій. Пусть, наприм., данъ прямой цилиндръ /черт.80/, ось котораго параллельна горизонту и вертикальной плоскости. Самъ онъ на обѣ плоскости спроектируется прямоугольникомъ, а основанія его - прямыми. Но эти проекціи можно свободно принять за проекціи прямоугольнаго параллелепипида, и только добавивъ третью плоскость, мы получимъ возможность показать истинный видъ основаній. Не трудно видѣть, что эти три плоскости составляютъ прямой трегранный уголъ /trièdre/, внутри котораго лежитъ нашъ цилиндръ /черт.81/.

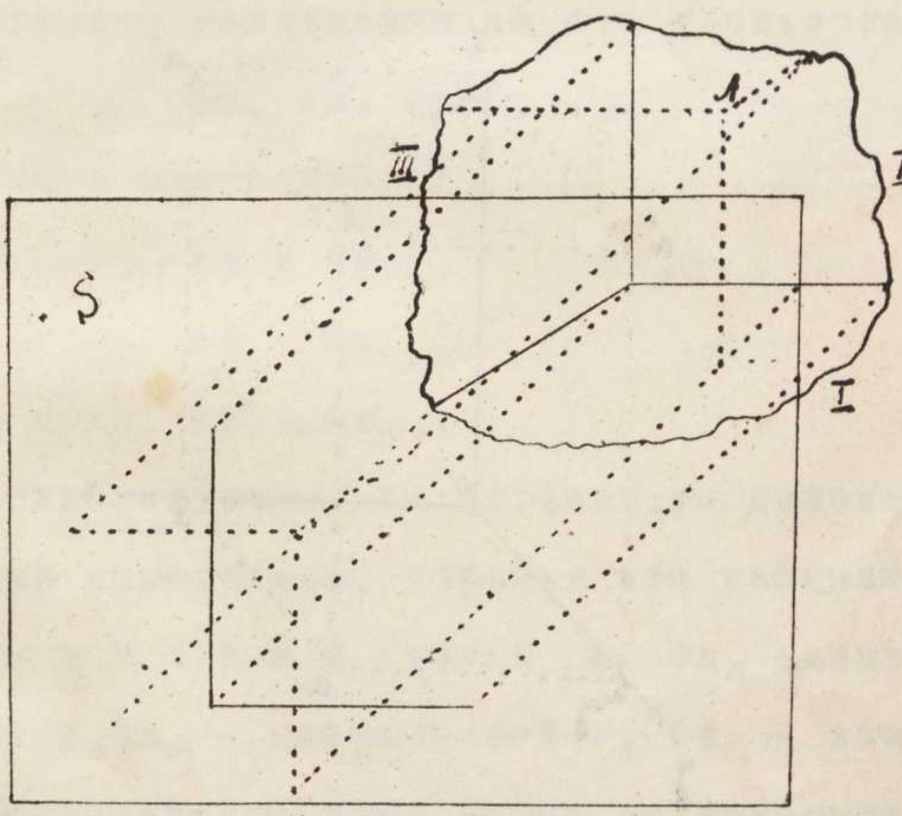


Черт. 81.

Проектируя его на три плоскости, мы получимъ изображеніе уже съ большимъ числомъ подробностей, чѣмъ при двухъ плоскостяхъ.

Итакъ, мы нашли средство сообщить изображеніямъ предметовъ большую наглядность сравнительно съ тѣми, которыя получаются при обыкновенномъ методѣ Монжа пользованія двумя плоскостями. Теперь нужно только найти способъ на одномъ чертежѣ изображать всѣ три измѣренія предмета. Такой способъ можно осуществить слѣдующимъ образомъ: спроектировать предметъ на три взаимно перпендикулярныя плоскости, а потомъ всю эту систему спроектировать на какую-нибудь плоскость косоугольно. Положеніе этой плоскости можетъ быть какое угодно; въ частномъ случаѣ, когда она параллельна одной плоскости проекцій, способъ изображенія называется СПОСОБОМЪ КОСОУГОЛЬНЫХЪ ПРОЕКЦІЙ.

Пусть намъ дана въ пространствѣ точка A /черт.82/.

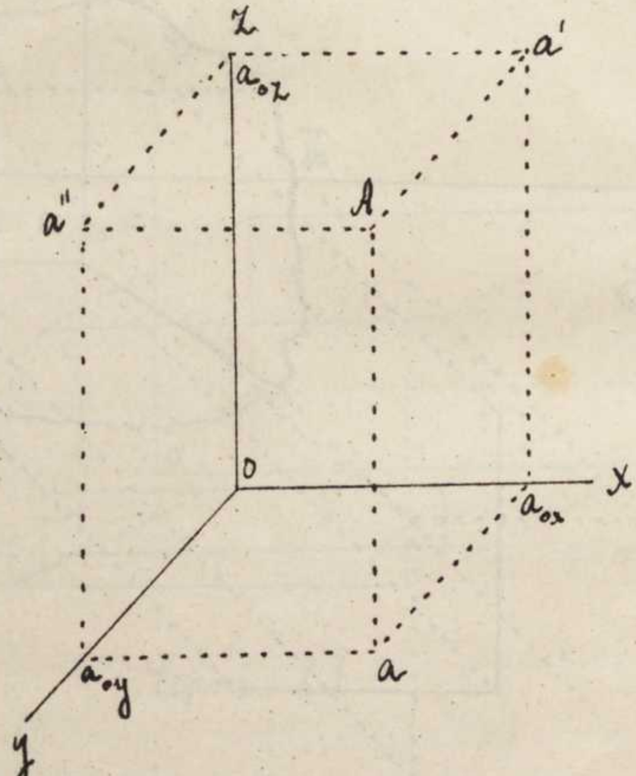


Черт. 82.

Возьмемъ три взаимно - перпендикулярныя плоскости I, II, III, и будемъ проектировать на нихъ нашу точку ортогонально, а потомъ все это спроектируемъ на плоскость $S \parallel \overline{II}$ косоугольно. У насъ получатся изображенія точки, ея проекцій и линій пересѣченія плоскостей проекцій.

При такомъ способѣ изображенія всѣ размѣры, параллельные плоскости S, изображаются въ натуральную величину; всѣ углы, лежащіе въ плоскостяхъ, параллельныхъ ей не искажаются; всѣ размѣры непараллельные ей искажаются, но такъ, что для всѣхъ параллельныхъ направленій эти искаженія одинаковы.

Вмѣсто того, чтобы изображать плоскости I, II..., мы изображаемъ линіи ихъ пересѣченія; эти линіи на-



Черт. 83.

зываются о с я м и подобно тому,какъ въ методѣ Монжа,мы называли осью проекцій линію пересѣченія плоскостей проекцій.Точку пересѣченія осей мы обозначаемъ буквой O,оси называемъ буквами x,y,z.

Очевидно,что при выборѣ плоскости S,параллельной плоскости ZOX,размѣры,отложенные по осямъ x и z не искажаются,а отложенные по оси y сокращаются въ изображеніи въ отношеніи,которое называется м а с ш т а б о м ъ оси y.

Пусть даны плоскости: XOY,YOZ,ZOX /черт.83/ и требуется опредѣлить положеніе точки A относительно этихъ плоскостей.Положеніе точки вполнѣ опредѣлено,если извѣстны разстоянія ея отъ плоскостей:

$$Aa,\ Aa',\ Aa''.$$

Но изъ чертежа видно,что

$$Aa = Oa_{oz};$$

$$Aa' = Oa_{oy};$$

$$Aa'' = Oa_{ox}.$$

Поэтому, если извѣстны эти отрѣзки,то положеніе точки вполнѣ опредѣлено. Отрѣзки эти называются к о о р д и н а т а м и точки A. Oa_{ox} называется координатой X,Oa_{oy} - координатой Y, Oa_{oz} - координатой Z, соотвѣтственно тѣмъ осямъ,на которыхъ эти отрѣзки измѣряются. Они считаются положительными: на оси x - отъ O вправо, на оси y

-отъ 0 впередъ,на оси Z - отъ 0 вверхъ;взятые въ обратную сторону,эти отрѣзки считаются отрицательными.

Положивъ теперь,что дана точка съ координатами x, y, z, и нужно найти ея изображенiе въ нашей условной системѣ осей. Для этого достаточно отложить по соотвѣтственнымъ осямъ отрѣзки x, y, z, ,т.е. на оси X отложить $Oa_{ox} = x$,затѣмъ провести изъ a_{ox} отрѣзокъ $a_{ox}a = y \parallel Oy$ и затѣмъ отъ точки А отложить $aA = z \parallel$ $\parallel OZ$. Координаты X и Z откладываются въ настоящую величину,координата у - въ извѣстномъ масштабѣ. Очевидно,что для насъ совершенно безразлично,какой именно масштабъ выбранъ для оси У,лишь - бы онъ былъ извѣстенъ;выборъ же его находится въ нашемъ распоряженiи.

Пусть нами выбранъ масштабъ 3/4 и нужно построить точку съ координатами :х = 5;у = 4;Z = 10.По ОХ отложимъ $Oa_{ox} = 5$ параллельно Оу - $a_{ox}a = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$,и параллельно о$Z$ - $aA = 10$.

Мы видѣли,что координаты опредѣляютъ точку;понятно, чтоодно или нѣсколько уравненiй между неизвѣстными х,у,Z ,опредѣляютъ геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ,координаты которыхъ удовлетворяютъ этимъ уравненiямъ.

Пусть напримѣръ даны уравненiя:

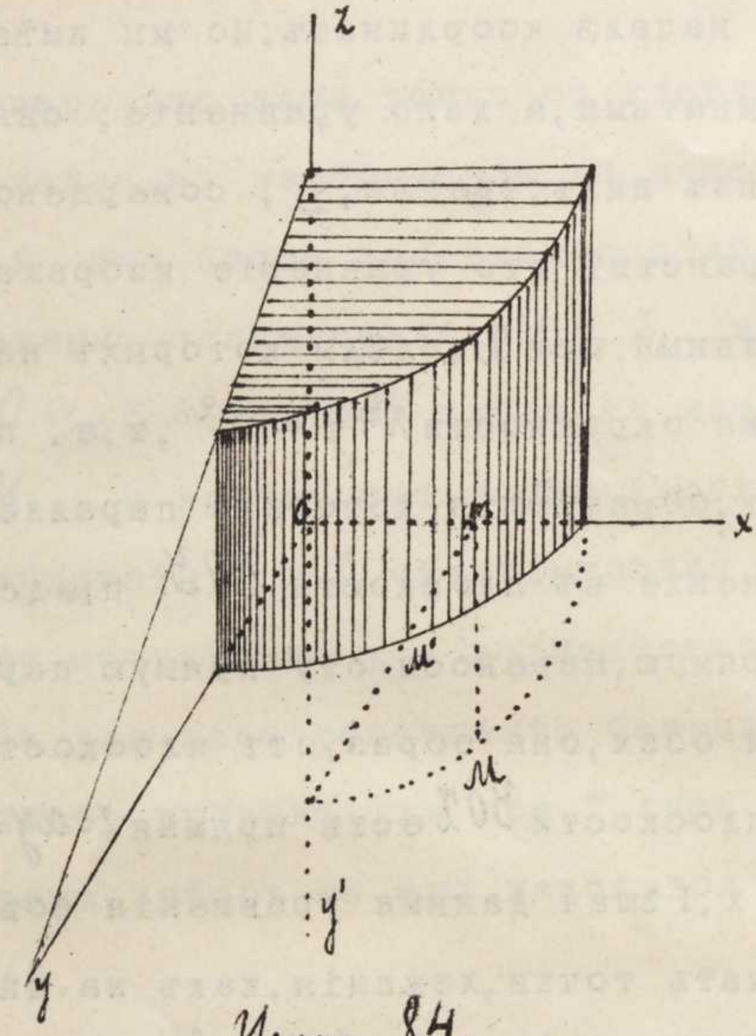
$$x^2 + y^2 = z^2 \; ; \quad z = ay + b.$$

Посмотримъ,что они изображаютъ въ пространствѣ.

Первое уравненiе извѣстно намъ изъ аналитической геометрiи; на плоскости ху оно изображаетъ кругъ съ центромъ въ началѣ координатъ. Но мы имѣемъ дѣло съ тремя координатами, а дано уравненiе, связывающее только двѣ изъ нихъ; третья, z, совершено произвольна. Въ пространствѣ это уравненiе избражаетъ всѣ прямыя, параллельныя оси Z, слѣды которыхъ на плоскости ХОУ лежатъ на окружности $x^2+y^2=r^2$, т.е. прямой, круглый цилиндръ, образующiя котораго параллельны оси Z

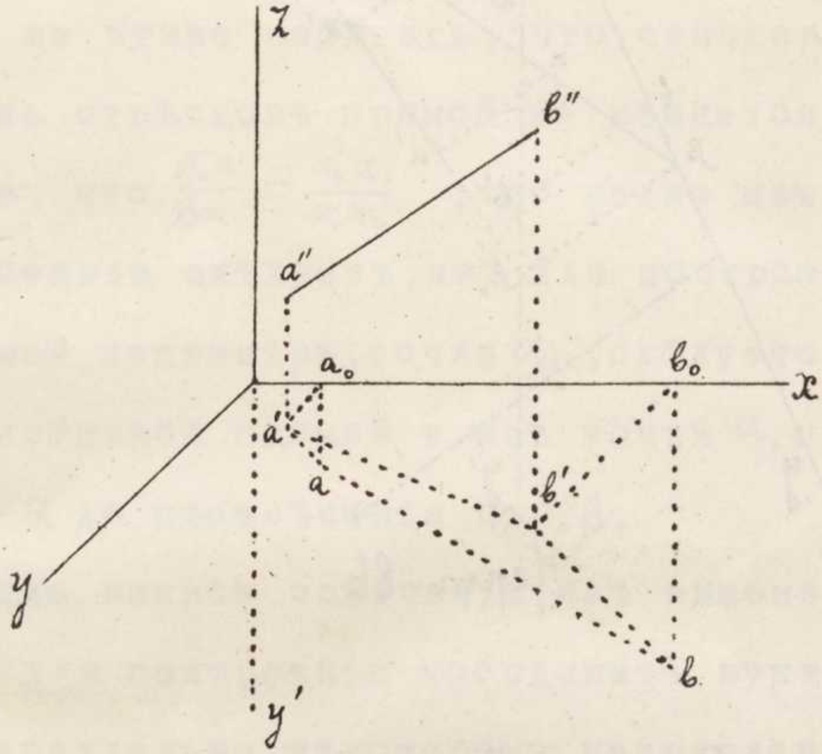
Второе уравненiе въ плоскости ZOY представляетъ нѣкоторую прямую. Перенося эту прямую параллельно самой себѣ и осих, она образуетъ плоскость, слѣдъ которой на плоскости YOZ есть прямая $z=ay+b$ параллельную оси х. Рѣшая данныя уравненiя совмѣстно, мы будемъ получать точки, лежащiя, какъ на цилиндрѣ $x^2+y^2=r^2$, такъ и на плоскости $z=ay+b$, т.е. лежащiя на линiи пересѣченiя цилиндра съ плоскостью.

Представимъ сказанное на чертежѣ. Пусть даны оси: OX, OY, OZ, /черт.84/. Для построенiя изображенiя круга мы поступимъ слѣдующимъ образомъ: проведемъ изъ точки О прямую $OY' \perp OX$, построимъ при центрѣ О радiусомъ r окружность, а затѣмъ, взявъ координаты какой-нибудь точкиокружности въ системѣ XOY', напримѣръ координаты точки М и отложивъ по оси ох координату $Om=x$ безъ измѣненiя, координату y' отложимъ отъ точки m параллельно ОУ, предварительно сокративъ ее въ отношенiи, равномъ масштабу оси ОУ. Построивъ достаточно точекъ и соединивъ ихъ, мы получимъ нѣкоторый элипсъ, который и будетъ изображеніемъ проекціи цилиндра на плоскости ХОУ. Этимъ пріе-



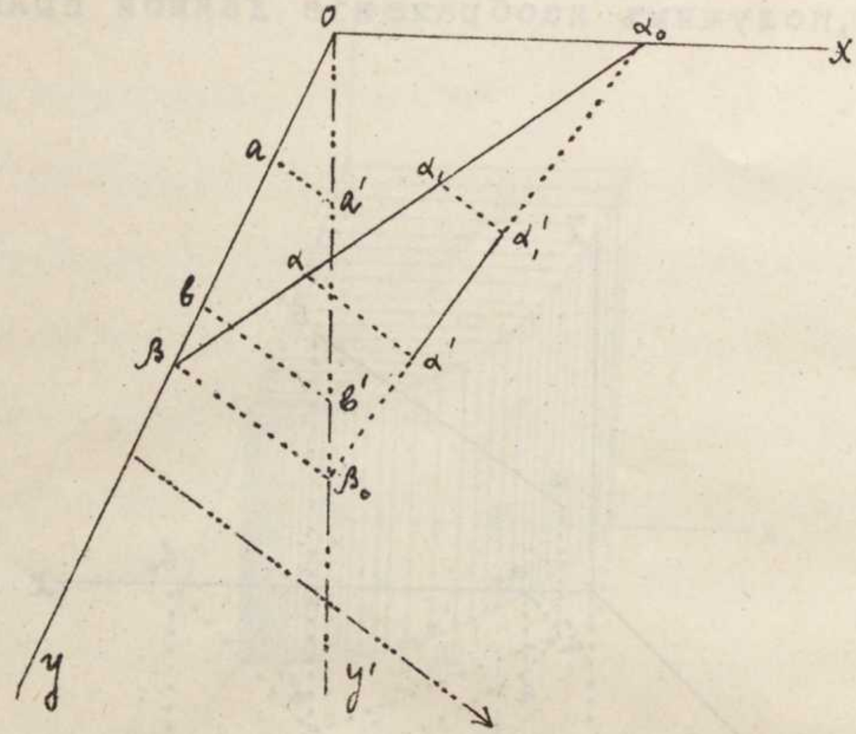
Черт. 84.

момъ мы и будемъ пользоваться при всѣхъ построеніяхъ. Прямая ОУ′ иногда называется дѣйствительной осью у. Разсмотримъ, какъ изображается прямая по этому способу. Пусть она задана двумя точками, т.е. проекціями этихъ точекъ на горизонтальную плоскость и ихъ высотами надъ этой плоскостью. Горизонтъ въ системѣ плоскостей Монжа изображается у насъ плоскостью ХОУ. Поступаемъ такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ: строимъ истинную ось ОУ′, въ системѣ координатъ ХОУ′ строимъ данныя точки, затѣмъ строимъ ихъ изображенія въ системѣ ХОУ и отъ полученныхъ точекъ откладываемъ ихъ высоты въ настоящую величину. Соединивъ ихъ концы прямой, получимъ изображеніе данной прямой /черт.85/.



Черт. 85.

Мы предполагали, что строимъ изображенія координатъ у′, пользуясь масштабомъ и откладывая каждый разъ сокращенную длину координаты. Съ помощью прочерчиванія истинной оси ОУ′ мы легко избѣгнемъ этой необходимости. Въ самомъ дѣлѣ: пусть намъ дана дѣйствительная ось ОУ′ и ея изображеніе ОУ, /чертежъ 86/. Масштабъ оси У пусть будетъ p/q. Отложимъ на ОУ′ какую-нибудь длину Оа′, на оси ОУ ея сокращенное изображеніе Оа и соединимъ точку а и а′;



Черт. 86.

мы имѣемъ:

$$\frac{Oa}{Oa'} = \frac{p}{q}.$$

Взявъ на ОУ′ какую угодно другую точку b' и проведя $bb' \parallel aa'$, получимъ b - изображеніе точки b'. Въ самомъ дѣлѣ: изъ подобія треугольниковъ Oaa' и Obb' имѣемъ:

$$Ob : Ob' = Oa : Oa' = p : q,$$

что значитъ, что Ob по сравненію съ Ob' сокращенно какъ разъ въ отношеніи $p:q$. А это и показываетъ, что точка b есть изображеніе точки b'.

Если теперь намъ дана какая-нибудь прямая въ системѣ ХОУ′, то изображеніе ея мы можемъ построить уже проще, чѣмъ раньше. Пусть дана прямая $\alpha'\alpha_1'$, въ истинной системѣ координатъ, найдя ея пересѣченіе

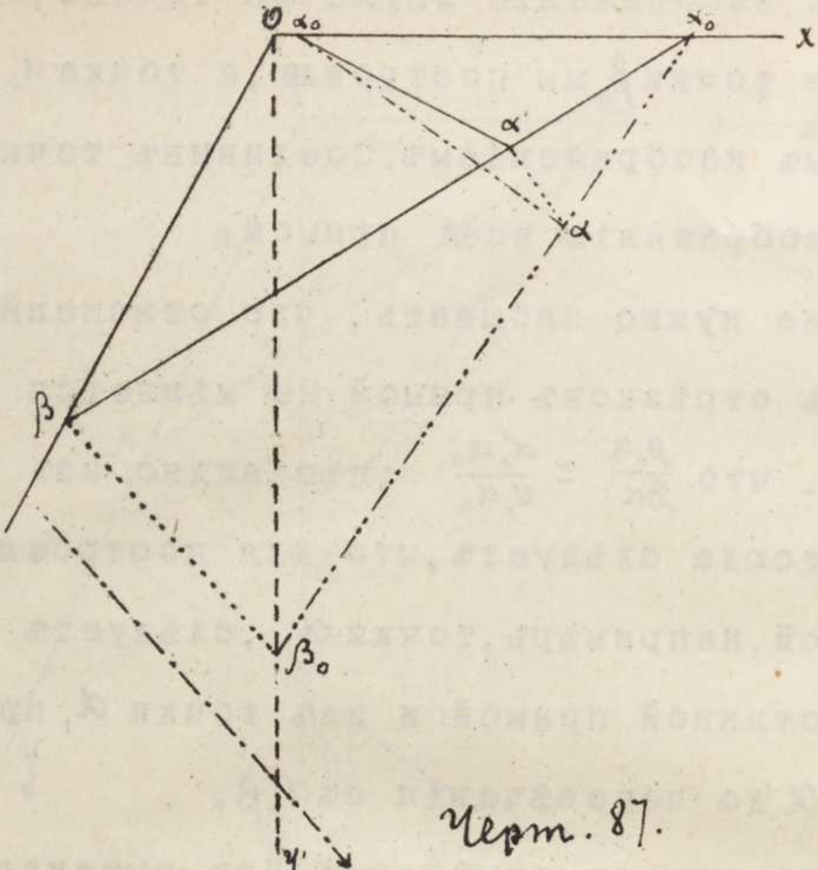
β_0 съ осью У' и α_0 съ Х и проведя $\beta_0\beta$ параллельно $\alpha\alpha'$, мы найдемъ изображенiе двухъ ея точекъ, такъ какъ изображенiе точки β_0 мы построили, а точка α_0 сама является своимъ изображенiемъ. Соединивъ точки α_0 и β, получимъ изображанiе всей прямой.

При этомъ не нужно забывать, что отношенiе двухъ какихъ-нибудь отрѣзковъ прямой не мѣняется въ изображенiи, т.е. что $\frac{\beta_0\alpha}{\beta\alpha} = \frac{\alpha_1'\alpha_0}{\alpha_1\alpha_0}$; что видно изъ самаго построенiя. Отсюда слѣдуетъ, что для построенiя изображенiя любой точки прямой, напримѣръ, точки α_1, слѣдуетъ взять эту точку на истинной прямой и изъ точки α_1 провести прямую $\alpha_1'\alpha_1 \parallel \alpha'\alpha$ до пересѣченiя съ $\alpha_0\beta$.

Дѣлаемъ одно важное замѣчанiе. Изъ вышеизложеннаго видно, что для построенiя координатъ нужно проводить отрѣзки параллельно нѣкоторому направленiю. Задавъ это направленiе, мы тѣмъ самымъ задаемъ и масштабъ оси У. Задать его можно какой-нибудь прямой, напримѣръ, прямой, отмѣченной на черт.86 стрѣлкой. Такая прямая называется масштабной прямой.

Покажемъ тепеь, что углы, вообще говоря, искажаются въ изображенiи. Для этого достаточно показать, что двѣ перпендикулярныя прямыя изображаются не перпендикулярными. Пусть даны оси ХОУ' и ихъ изображенiя ХОУ /черт.87/, прямая $\alpha_0\beta_0$ и ея изображенiе $\alpha\beta$, и наконецъ, прямая $\alpha_0\alpha \perp \alpha_0\beta_0$.

Посмотримъ, будутъ ли перпендикулярны изображенiя этихъ прямыхъ? Построимъ изображенiе прямой $\alpha_0\alpha$. Точка α_0 сама служитъ своимъ изображенiемъ; изображенiе точки α найдется, если проведемъ $\alpha\alpha' \parallel$ масштабной прямой

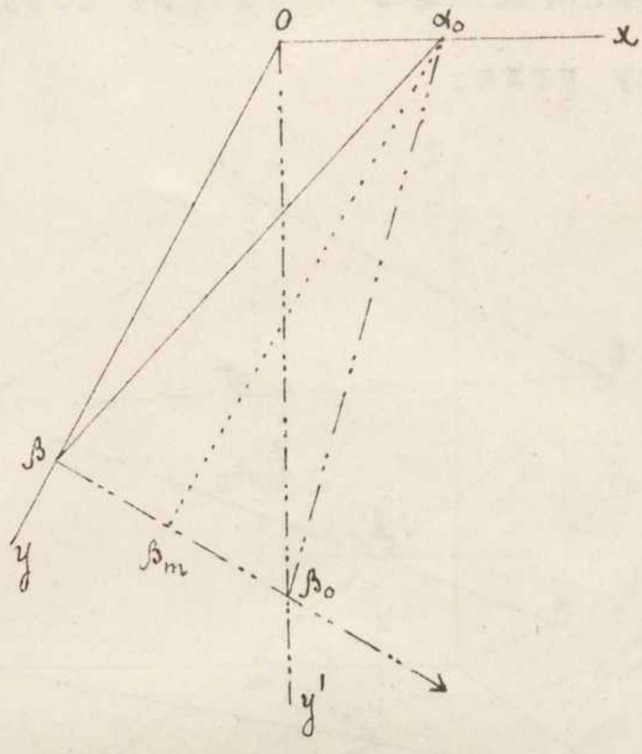


Черт. 87.

и $\alpha_0\alpha$ изобразится прямой $\alpha_0\alpha$. Такъ какъ масштабная прямая вообще не параллельна $\alpha_0\alpha$, то уголъ при α' вообще говоря, не прямой - въ изображенiи уголъ искажается, что и требовалось доказать.

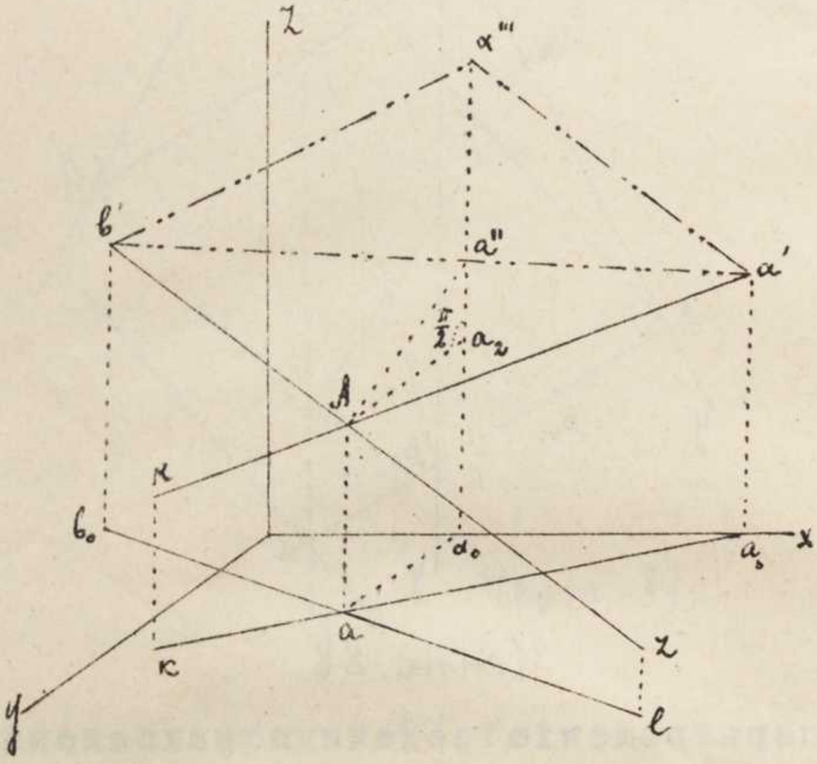
Посмотримъ, какая прямая изобразится по этому способу безъ искаженiй. Пусть даны дѣйствительныя оси и ихъ изображенiя / черт.88/ и направленiе масштабныхъ прямыхъ. Мы требуемъ, чтобы $\alpha_0\beta_0 = \alpha\beta$. Въ такомъ случаѣ треугольникъ $\alpha_0\beta_0\beta$ равнобедренный и высота его дѣлитъ основанiе, т.е. отрѣзокъ масштабной прямой $\beta_0\beta$, пополамъ. Для построенiя прямой безъ искаженiя мы поступаемъ поэтому слѣдующимъ образомъ: возставимъ перпендикуляръ $\beta_m\alpha_0$ къ срединѣ отрѣзка масштабной прямой между осями, точку α_0 соединяемъ съ точками β_0 и β; прямая

$a_0 b_0$ будетъ истинная, $a_0 b$ -изображеніе прямой безъ искаженій.



Черт. 88.

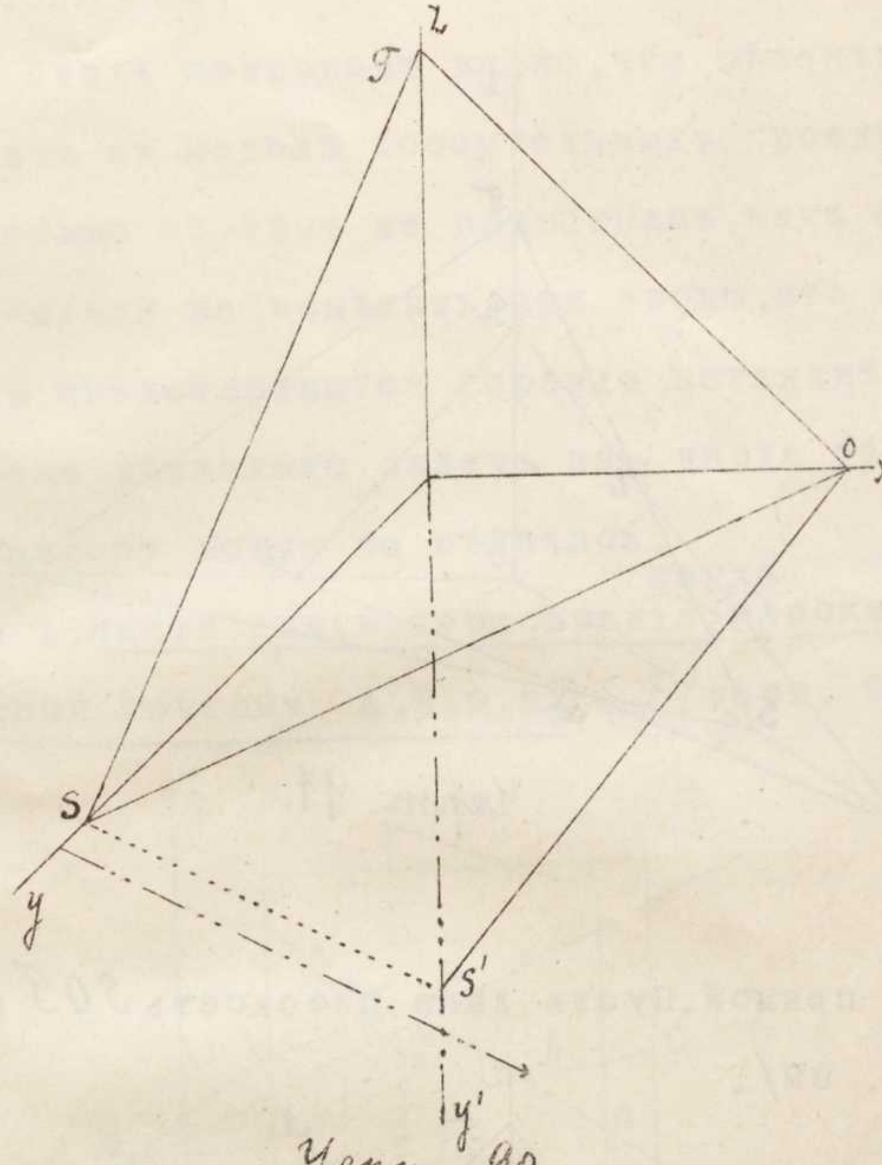
Сравнимъ теперь рѣшеніе задачи о нахожденіи угла между двумя пересѣкающимися прямыми въ методѣ Монжа и въ методѣ косоугольныхъ проекцій. Пусть такія прямыя суть Aa' и Bb' /черт. 89/, гдѣ a' и b' -ихъ слѣды на плоскости ZOX. Для нахожденія угла между ними совмѣстимъ треугольникъ $a'Ab'$ на плоскость ZOX. Пусть высота этого треугольника будетъ Aa''. Тогда, какъ мы знаемъ, вершина A при совмѣщеніи упадетъ въ a''', на разстояніи отъ $a'b'$, равномъ истинной величинѣ отрѣзка Aa''. Если точка a_2 есть проекція точки A на плоскость XOZ, то величина Aa'' опредѣлится, какъ гепотенуза треугольника $Aa''a_2$ съ прямымъ угломъ при a_2 и катетами a_2a'' и Aa_2. Первый данъ истинной величиной $/a_2a''\|OZ/$, а второй, равный aa_0 можетъ быть отыскан при помощи масштабной прямой. Найдя эту величину обычнымъ пріемомъ, строимъ треугольникъ и гепотенузу откладываемъ по $\alpha''\alpha'''$. Проведя прямыя $\alpha'''\alpha'$ и $\alpha'''b'$ получимъ совмѣщеніе и истинную величину угла.



Черт. 89

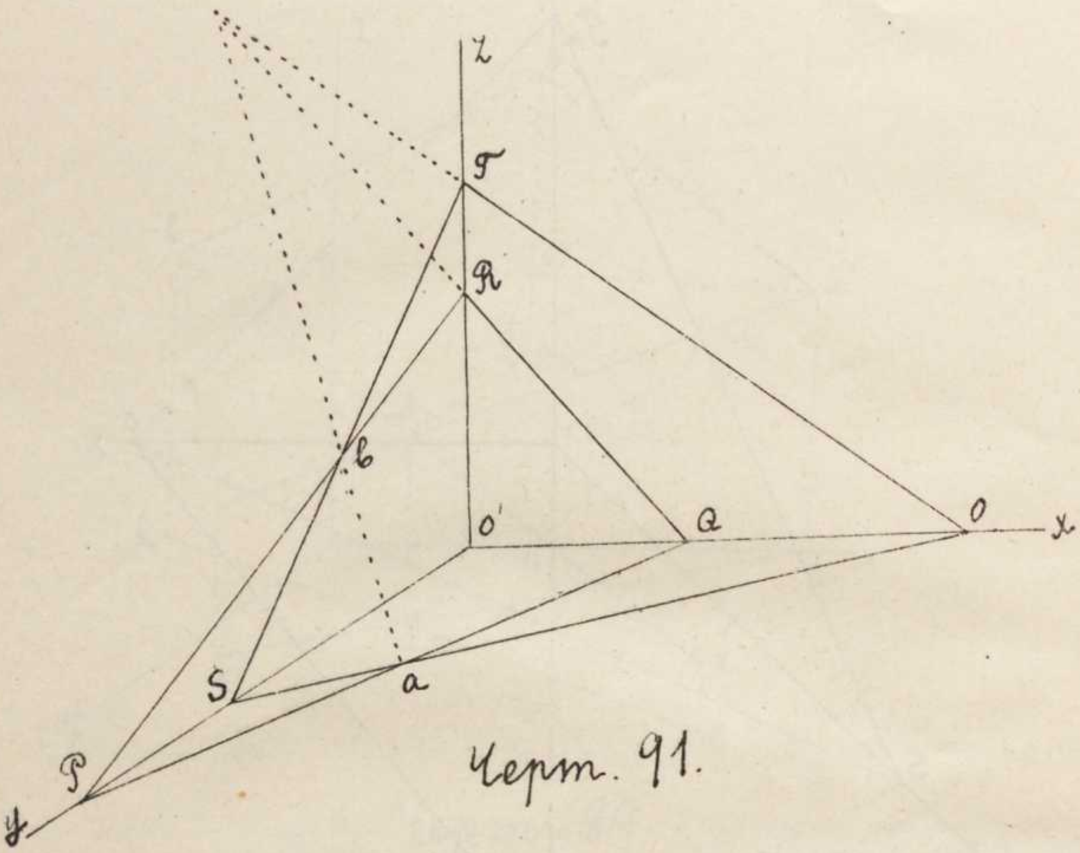
Плоскость въ этомъ методѣ такъ же, какъ и въ методѣ Монжа, изображается слѣдами; только слѣдовъ теперь будетъ не два, а три, соотвѣтственно тремъ плоскостямъ. Впрочемъ, при нѣкоторыхъ частныхъ положеніяхъ плоскость можетъ имѣть и только два слѣда, но не менѣе. Это будетъ въ томъ случаѣ, когда плоскость параллельна одной изъ плоскостей проекцій.

Пусть въ системѣ Монжа плоскость дана двумя слѣдами. Найдемъ изображенія этихъ слѣдовъ и третьяго Пусть два слѣда будутъ $S'O$ и OT /черт.90/. Слѣдъ OT и будетъ своимъ изображеніемъ. Построивъ изображеніе слѣда $S'O$-SO и соединивъ точки S и T, получимъ, очевидно, изображеніе третьяго слѣда плоскости. Читается это, какъ и въ методѣ Монжа, такъ: плоскость $SO\mathcal{T}$.



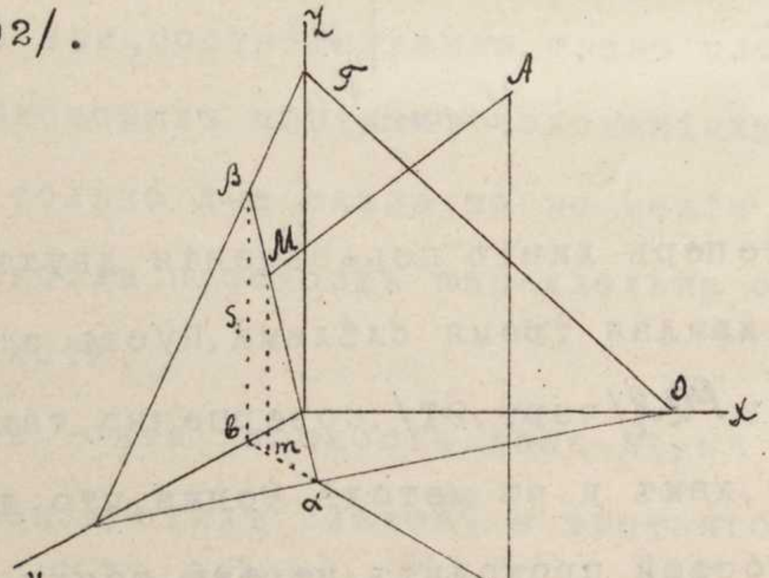
Черт. 90.

Найдемъ теперь линію пересѣченія двухъ плоскостей, заданныхъ каждая тремя слѣдами. Пусть эти плоскости будутъ $SO\mathcal{T}$ и PQR /черт. 91/. Совершенно такими же разсужденіями, какъ и въ методѣ Монжа, что линія пересѣченія плоскостей проходитъ черезъ точки пересѣченія ихъ слѣдовъ. Это будетъ линія ab; она, конечно, пройдетъ черезъ точки пересѣченія третьихъ слѣдовъ RQ и $\mathcal{T}O$. Пересѣченіе прямой съ плоскостью находится, какъ и въ методѣ Монжа, проведеніемъ проектирующей плоско-



Черт. 91.

сти этой прямой. Пусть дана плоскость SOT и прямая AB /черт. 92/.

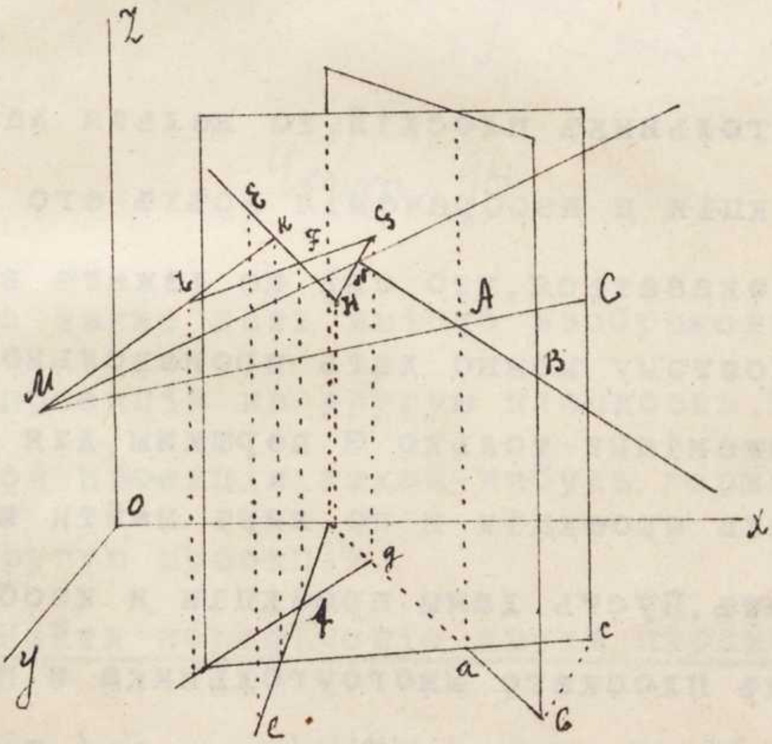


Черт. 92.

Проведя горизонтально-проектирующую плоскость этой прямой и найдя ея пересѣченіе съ плоскостью SOT, мы легко найдемъ и точку пересѣченія данной прямой AB съ плоскостью SOT.

Уже изъ этихъ примѣровъ видно, что рѣшенія различныхъ задачъ въ методѣ косоугольныхъ проекцій ведутся совершенно по тѣмъ же принципамъ, какъ и въ методѣ Монжа. Нельзя не замѣтить при этомъ, что получаемые результаты представляются гораздо нагляднѣе. Мы разсмотримъ еще нѣсколько задачъ изъ числа тѣхъ, которыя нами по способу Монжа не рѣшались.

Задача I. Найти линію пересѣченія двухъ плоскостей, данныхъ каждая тремя точками А, В, с, и D, E, F /черт. 93/.



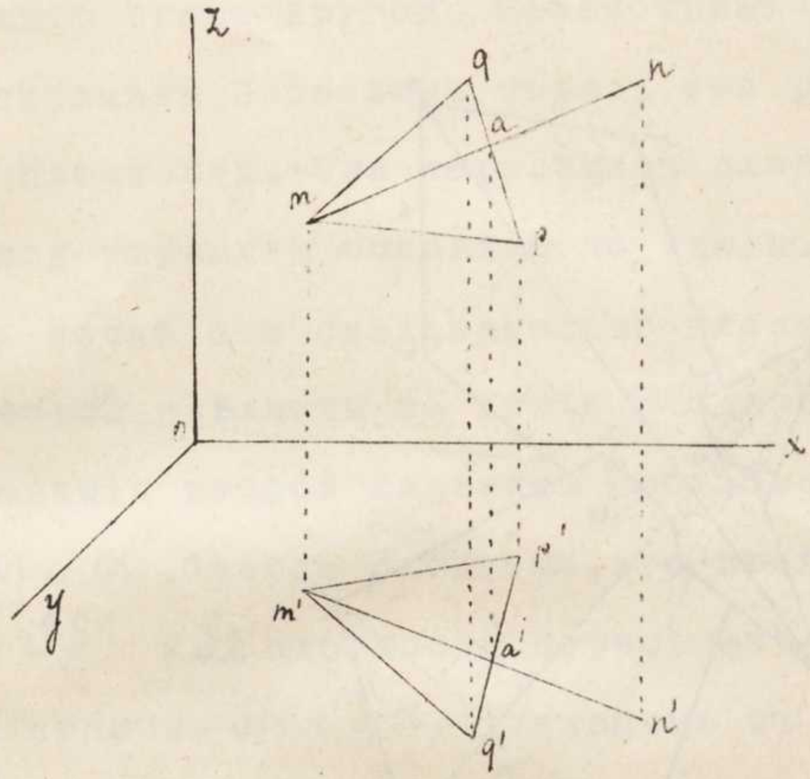
Черт. 93.

Черезъ прямую АВ проводимъ ея горизонтально-проектирующую плоскость АВав и ищемъ обычнымъ способомъ точки пересѣченія прямыхъ $\mathscr{DF}$ и $\mathscr{EF}$ съ этой плоскостью. Пусть онѣ будутъ $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$. Прямая $\mathscr{GH}$ лежитъ въ плоскости $\mathscr{DEF}$, но она лежитъ вмѣстѣ съ АВ въ плоскости АВав и поэтому имѣетъ съ АВ общую точку. Пусть эта точка будетъ $\mathscr{N}$. Эта точка $\mathscr{N}$ есть очевидно одна изъ общихъ точекъ плоскостей $\mathscr{DEF}$ и $\mathscr{ABC}$.

Воспользовавшись еще прямой АС /или ВС/, подобнымъ же образомъ найдемъ другую общую точку, М, а слѣдовательно, и общую прямую $\mathscr{MN}$. Какъ видно изъ построенія, тутъ-же рѣшается задача о пересѣченіи прямой съ плоскостью заданной тремя точками.

Задача 2. Найти изображеніе плоскаго многоугольника.

Если многоугольникъ плоскій, то нельзя дать произвольно проекціи и изображенія всѣхъ его вершинъ, ибо можетъ оказаться, что онѣ не лежатъ въ одной плоскости. Поэтому можно дать произвольно проекціями и изображеніями только 3 вершины, для остальныхъ же можно дать проекціи и по нимъ найти изображенія или наоборотъ. Пусть даны проекціи и изображенія 3-хъ вершинъ плоскаго многоугольника и пусть дана проекція 4-ой вершины (n') /черт. 94/. Тогда можно найти ея изображеніе слѣдующимъ образомъ. Соединивъ m' и n', мы получимъ проекцію діагонали многоугольника. Пусть она пересѣкаетъ проекцію $p'q'$ діагонали pq въ точкѣ a', изображеніе этой точки легко найдемъ на діагонали pq обычнымъ путемъ. Соединивъ же m съ a, найдемъ изображеніе діагонали и на ней найдемъ изображеніе вершины n многоугольника по ея проекціи n'.

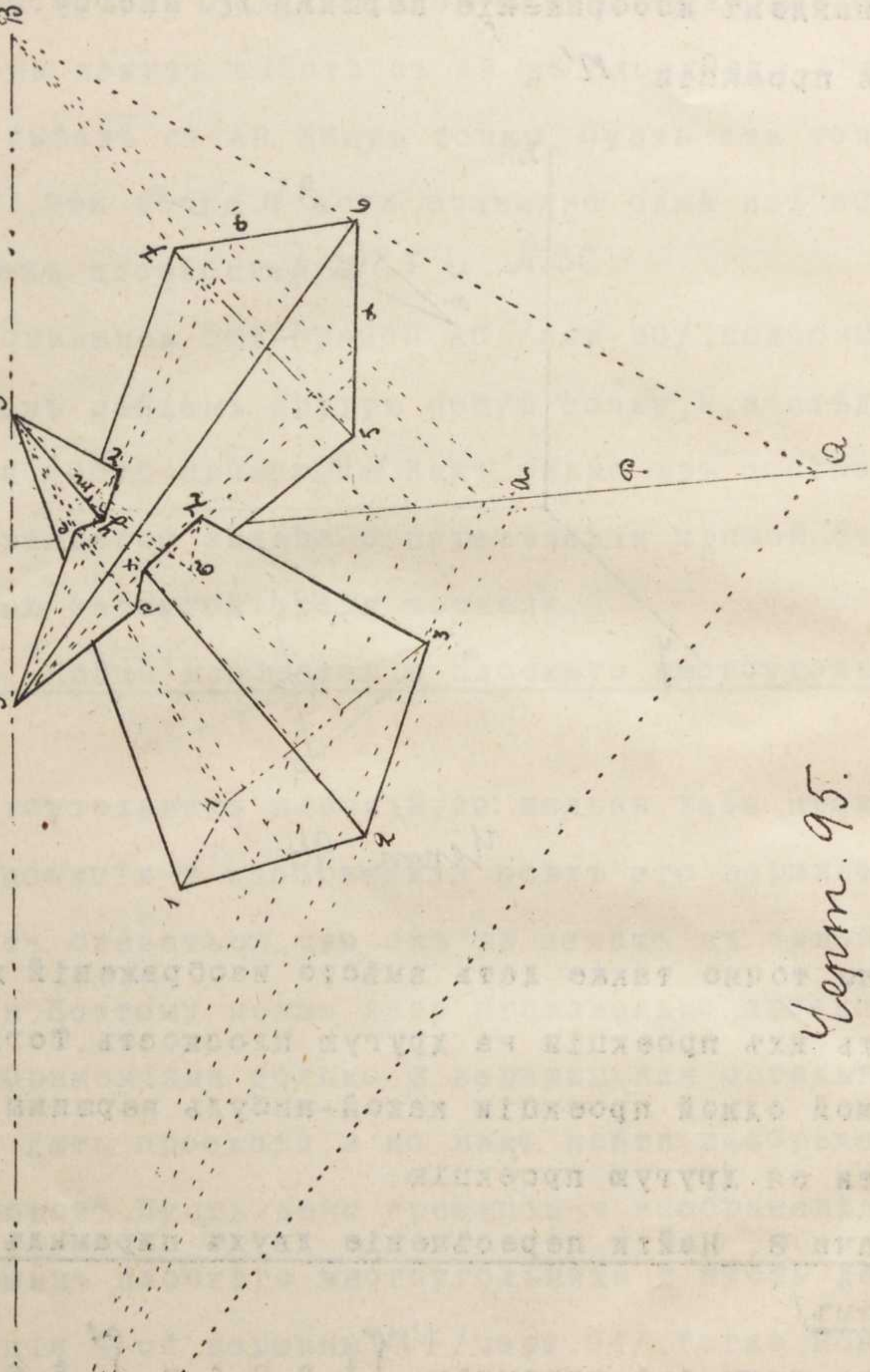


Черт. 94.

Можно точно также дать вмѣсто изображеній вершинъ дать ихъ проекціи на другую плоскость. Тогда по данной одной проекціи какой-нибудь вершины можно найти ея другую проекцію.

Задача 3. Найти пересѣченіе двухъ пирамидъ /или призмъ/.

Пусть даны двѣ пирамиды S 1,2,3,4 и S' 5,6,7. На чертежѣ 95 показаны только ихъ изображенія, проекціи же опущены. Находимъ, на основаніи предыдущаго, линію пересѣченія плоскостей ихъ основа-



Черт. 95.

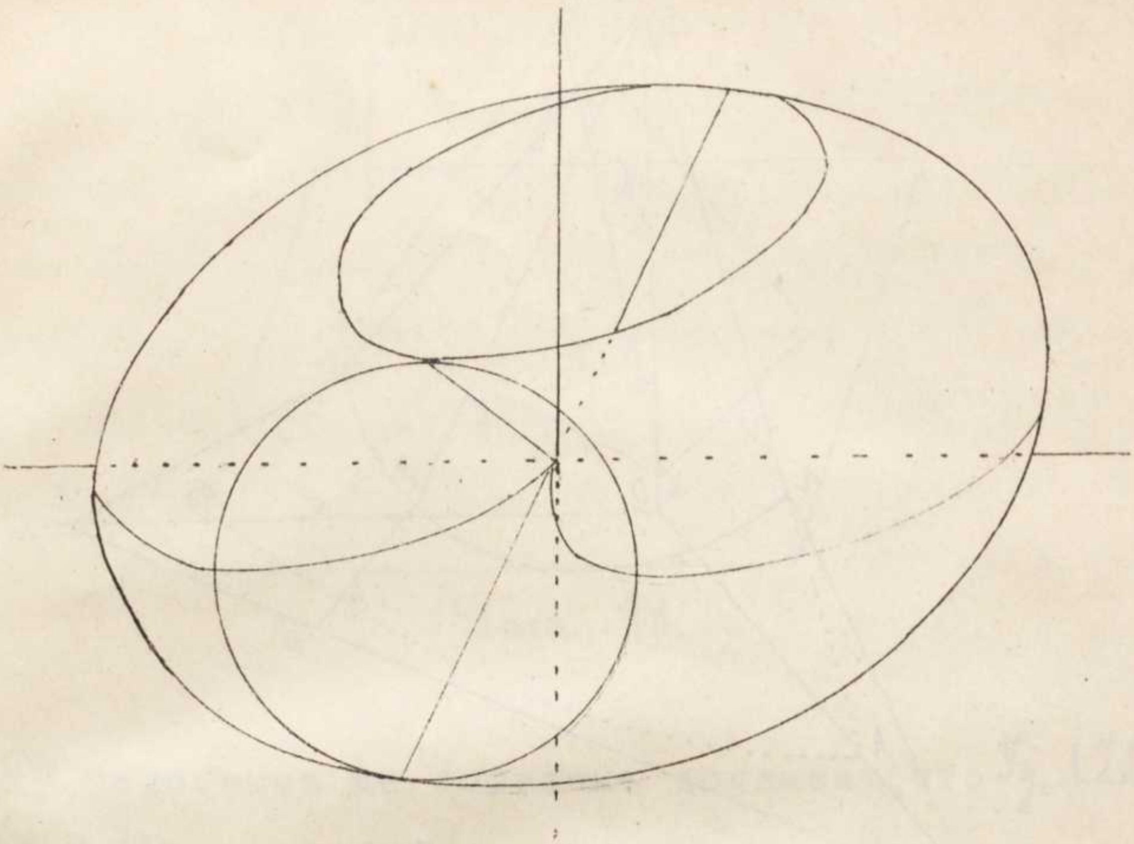
ній;пусть она будетъ PQ .Проводимъ черезъ вершины S и S' прямую и пусть она пересѣчетъ плоскости основаній соотвѣтственно въ точкахъ A и B.Теперь будемъ искать послѣдовательно,гдѣ ребра одной пирамиды встрѣчаютъ грани другой. Разсмотримъ ребра $S2$ первой пирамиды.Проведемъ черезъ это ребро и черезъ SS' плоскость. Она пересѣчетъ плоскость основанія первой пирамиды очевидно по линіи $A2$,прямую PQ – въ точкѣ a и слѣдовательно плоскость основанія второй пирамиды по линіи aB,а стороны 5, 6 и 6,7 основанія второй пирамиды соотвѣтственно въ точкахъ α и α' .Отсюда слѣдуетъ,что проведенная нами черезъ SS' и $S2$ плоскость пересѣчетъ вторую пирамиду по прямымъ $S'\alpha$ и $S_1\alpha_1$,лежащимъ въ граняхъ S'5 6 и S'6 7.Тамъ,гдѣ ребро $S2$ встрѣчаетъ эти прямыя,т.е. въ точкахъ x и y,оно встрѣтитъ и грани S' 5 6 и S'6 7 второй пирамиды. Слѣдовательно ребро $S2$ первой пирамиды,если итти отъ точки S къ $m2$, встрѣчаетъ сперва грань S' 6 7 второй пирамиды, входитъ въ точкѣ y внутрь ея и выходитъ изъ пирамиды въ точкѣ x грани S' 5 6.Подобнымъ же образомъ найдемъ точки входа и выхода ребра $S3$. Далѣе убѣждаемся,что ребра $S1$ и $S4$ лежатъ внѣ пирамиды второй.Въ свою очередь находимъ,что ребро $S'5$,если итти отъ S' къ 5,входитъ въ грань S 2 I первой пирамиды въ точкѣ r и выходитъ изъ нея въ точкѣ 5, лежащей на грани $S34$ /невидимой/.Точно также находимъ для ребра $S'7$ точку входа l и выхода m.

Ребро Sb лежитъ все внѣ первой пирамиды. Соединяя теперь точки, лежащія на однѣхъ и тѣхъ же граняхъ /напр. x и z/, найдемъ прямыя пересѣченія граней пирамиды и обходя черезъ ребра послѣдовательно отъ одной грани до другой - грани сосѣдней пирамиды, построимъ контуръ сѣченія.

Нетрудно понять, что задача о пересѣченіи коническихъ и цилиндрическихъ поверхностей между собой, рѣшается подобными же пріемами.

На чертежѣ 96 построенъ въ косоугольныхъ проекціяхъ общій видъ поверхности $x^4+y^4+z^4=4a^2x^2+4y^2z^2$, которую мы разбирали раньше въ методѣ Монжа. Изъ чертежа видно, что она имѣетъ овальную форму, какъ бы срѣзанную плоскостями сверху, снизу и съ боковъ. Изъ четырехъ ея воронокъ видны двѣ передняя и верхняя; совершенно такія же воронки имѣетъ она снизу и сзади. На чертежѣ видны и прямыя-прямолинейныя образующія воронокъ, получающіяся въ сѣченіи плоскостью ZOY.

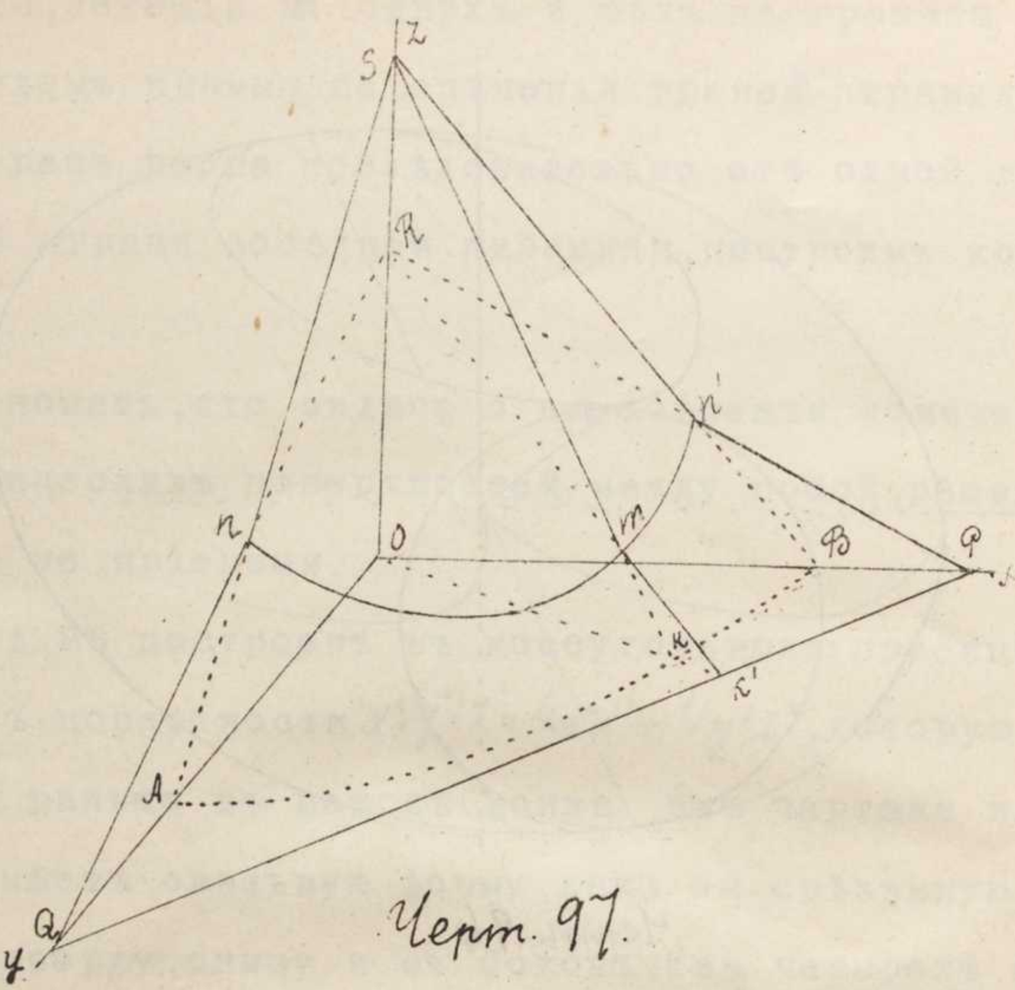
Приложимъ теперь указанный общій пріемъ нахожденія пересѣченій коническихъ поверхностей къ частному случаю, когда одинъ конусъ есть плоскость. Пусть данъ конусъ SAB /на чертежѣ показана лишь четвертая его часть, лежащаая въ положительномъ углѣ/ и плоскость PQR /черт. 97/ Проводимъ образующую Sk она лежитъ въ вертикальной плоскости SKO. Поэтому, продолживъ линію OK до пересѣченія съ PQ въ точкѣ K' и соединивъ K' съ R, въ пересѣченіи линій SK и RK' получимъ искомую точку m. Построивъ такимъ же образомъ достаточное ко-



Черт. 96.

личество точекъ и соединивъ ихъ непрерывной линіей, мы получимъ изображеніе кривой nn' пересѣченія конуса съ плоскостью. Сообразно положенію сѣкущей плоскости, кривыя могутъ получиться различныя: I. если плоскость пересѣкаетъ всѣ образующія конуса, то въ сѣченіи получимъ эллипсъ, 2. если она параллельна двумъ образующимъ, то гиперболу, 3. если параллельна одной образующей-параболу.

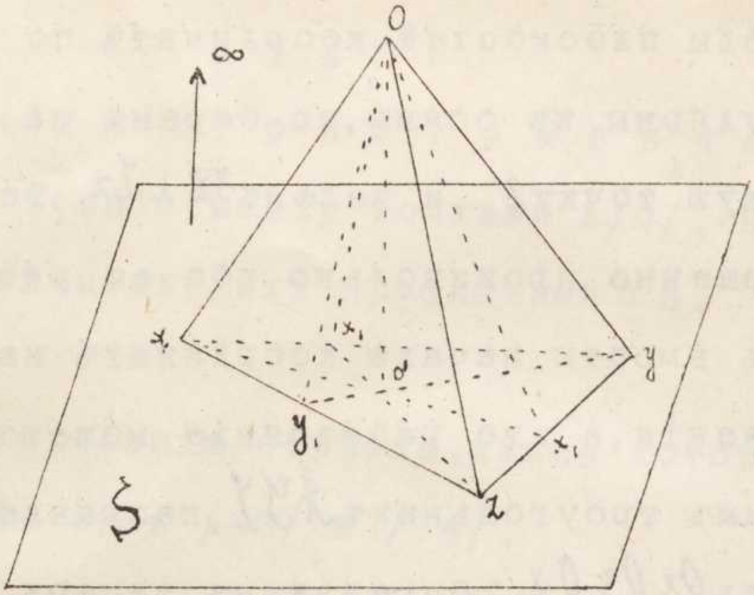
Разсмотримъ одинъ частный случай, частный пріемъ изображенія. Опишемъ точку зрѣнія по какому -нибудь направленію въ безконечность, а плоскость изображенія возьмемъ перпендикулярно къ этому направленію. Возьмемъ въ пространствѣ три оси, перпендикулярныя между



Черт. 97.

собой, причемъ ни одна изъ нихъ не параллельна плоскости изображенія, и будемъ ихъ проектировать на эту плоскость лучами, исходящими изъ нашей точки зрѣнія /черт. 98/. Полученное такимъ образомъ изображеніе осей даетъ возможность строить изображеніе каждой точки, опредѣленной относительно этихъ осей.

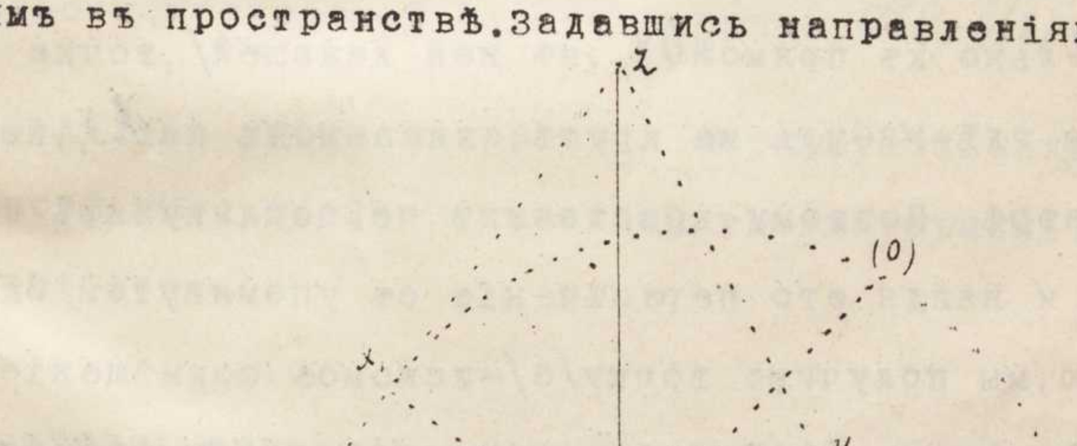
Пусть оси OX, OY, OZ даютъ на плоскости S слѣды X, Y, Z. Проекція точки ихъ пересѣченія, при ортогональномъ проектированіи, лежитъ въ точкѣ пересѣченія высотъ треугольника XYZ. Докажемъ это. Пусть проекція точки O есть точка O'. Тогда плоскость $XOO' \perp ZY$, такъ какъ содержитъ въ себѣ $OX \perp ZY$ и $OO_1 \perp ZY$. Отсюда слѣдуетъ, что



Черт. 98.

$XO_1X_1 \perp ZY$. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что $YY_1 \perp ZX$ и что $ZZ_1 \perp XY$.

Если мы имѣемъ изображенія осей и масштабы по нимъ, то можно построить любую точку, отнесенную къ этимъ осямъ въ пространствѣ. Задавшись направленіями осей



Черт. 99.

можно построить и ихъ масштабы.

Пусть даны изображенія трехъ осей: O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 /черт.99/. Такъ какъ слѣды плоскостей координатъ по доказанному перпендикулярны къ осямъ, то беремъ на продолженіи ZO_1 произвольную точку Z', и ведемъ $YX \perp Zz_1$. Точку Z можно выбрать совершенно произвольно, ибо ея разстояніе отъ O_1 зависитъ отъ высоты начала координатъ надъ плоскостью изображенія, а это разстояніе можетъ быть какое угодно. Строимъ треугольникъ XYZ, направленія высотъ котораго суть O_1x, O_1y, O_1z. Опредѣлимъ теперь OO_1, т.е. разстояніе начала отъ плоскости изображенія. Величину OO_1 мы можемъ опредѣлить, совмѣстивъ прямоугольный треугольникъ XO_1x_1 съ плоскостью S. Для этого мы замѣтимъ, что: I-совмѣщеніе точки O /начала/ должно лежать на перпендикулярѣ къ прямой Xx_1 и 2-вслѣдствіе того, что треугольникъ XOx_1 прямоугольный /вѣдь $Ox \perp$ къ пл. YOZ и слѣдовательно къ прямой Ox, въ ней лежащей/, точка O находится гдѣ-нибудь на кругѣ, описанномъ на Xx, какъ на діаметрѣ. Поэтому, возставивъ перпендикуляръ изъ O_1 къ Xx_1 и найдя его пересѣченіе съ упомянутой окружностью, мы получимъ точку /O/-искомое совмѣщеніе точки O. Отрѣзокъ /O/X дастъ, очевидно, длину отрѣзка OX. Такимъ же образомъ получимъ истинныя величины отрѣзковъ OY и OZ, изображенія которыхъ суть O_1Y и O_1Z. Взявъ отношенія $\frac{O_1x}{(O)X}, \frac{O_1y}{(O)Y}, \frac{O_1Z}{(O)Z}$ мы получимъ масштабы этихъ осей.

Изображеніе точки по даннымъ координатамъ строится точно такъ же, какъ и въ методѣ косоугольныхъ проекцій.

З А Д А Ч И.

М е т о д ъ т о п о г р а ф и ч е с к і й.

I. Найти разстояніе между точками A/0/, B/4/, если разстояніе A'B' между ихъ проекціями = 5.

2. Построить проекцію отрѣзка, длина котораго = 5, а отмѣтки концовъ суть /-3/ и / 4/.

3 Дана проекція отрѣзка a/2/, b/5/. Найти его точку x/3/.

4. Найти слѣдъ и уголъ наклоненія прямой a(1), b/4/, причемъ ab = 3.

5. Какую отмѣтку должна имѣть точка d(x), лежащая въ плоскости, проходящей черезъ 3 точки a(1), b(2), c(3)?

6. Опредѣлить уголъ наклоненія четыреугольника, даннаго своей проекціей и отмѣтками трехъ вершинъ.

Способъ Монжа.

7. Начертить проекцію точки, лежащей во второмъ углѣ, если ея разстояніе отъ плоскостей проекцій суть 2 и 3.

8 Черезъ какіе углы проходитъ прямая, если ея горизонтальная проекція || xy, а вертикальная пересѣкаетъ xy?

9 Взять слѣды и начертить проекціи прямойтакъ, чтобы

она проходила черезъ I, II и III и углы.

10.Опредѣлить истинную величину отрѣзка вращеніемъ до параллельности I-горизонту 2-вертикальной плоскости.

II.Горизонтальныя проекціи двухъ прямыхъ совпадаютъ, вертикальныя параллельны.Опредѣлить ихъ разстояніе.

I2.Построить двѣ прямыя пересѣкающіяся на горизонтѣ.

I3.Задать слѣды плоскости такъ,чтобы она была перпендикулярна къ вертикальной плоскости проекцій.

I4.Изъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ одна параллельна горизонтальной ,другая-вертикальной плоскости проекцій.Опредѣлить слѣды проходящей черезъ нихъ плоскости.

I5.Опредѣлить слѣды плоскости,проходящей черезъ двѣ параллельныя прямыя.

I6.Найти точку пересѣченія прямой съ плоскостью

I7.Отрѣзокъ данъ двумя проекціями.Найти его длину, проектируя его на новую плоскость./Перемѣна плоскостей

I8.Разсѣчь параллелепипедъ,заданный какъ- нибудь проекціями,плоскостью ⊥ къ ребру.

19. Треугольная прямая призма стоитъ на горизонтѣ. Разсѣчь ее плоскостью такъ, чтобы сѣченіе было прямоугольный равнобедренный треугольникъ.

20. Построить перспективу куба, стоящаго одной вершиной на горизонтѣ, на обѣ плоскости.

21. Освѣтить цилиндръ лучами || діагонали куба и найти его тѣнь на обѣ плоскости.

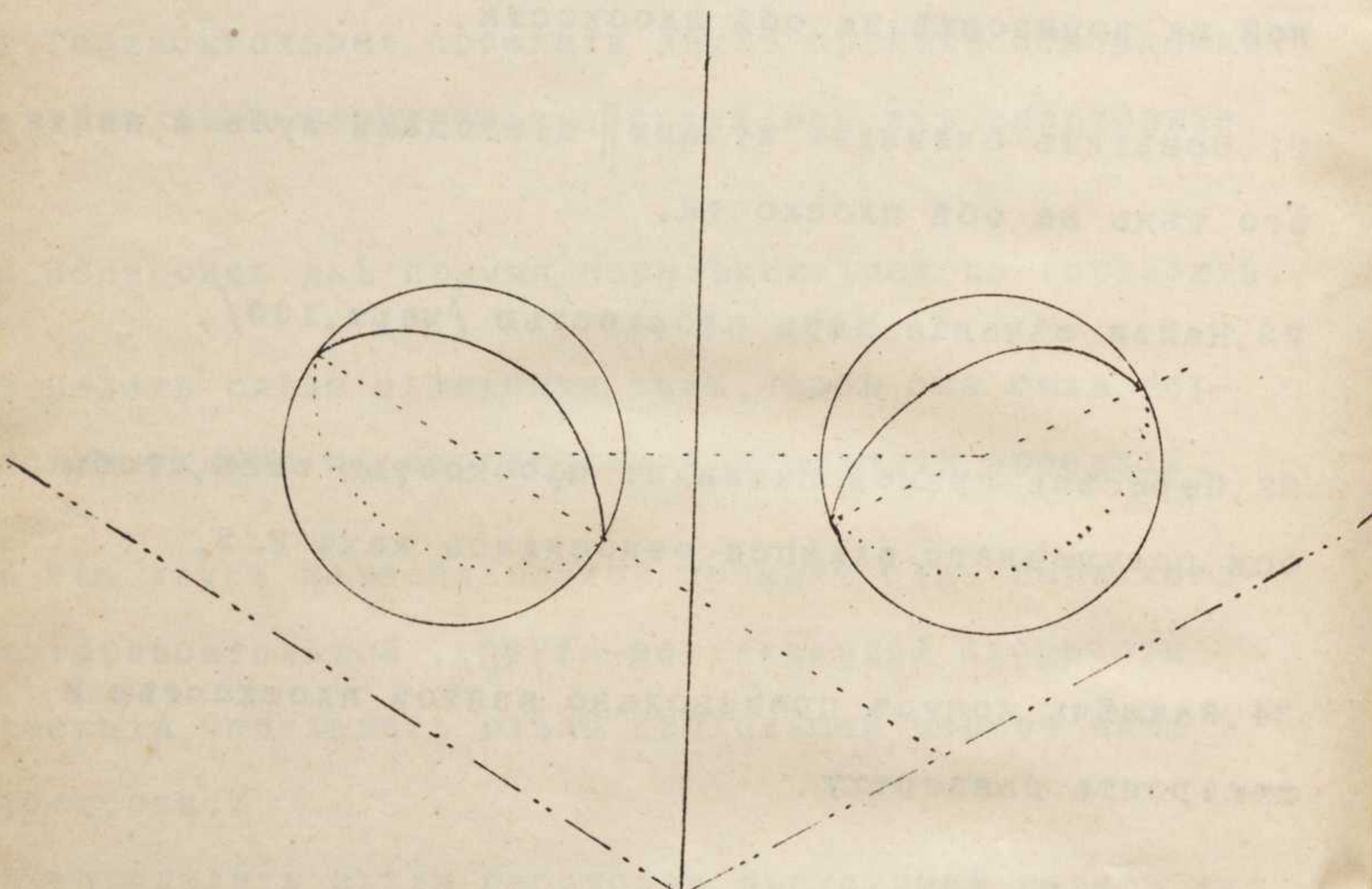
22. Найти сѣченіе шара плоскостью /черт. 100/.

23. Пересѣчь прямой цилиндръ плоскостью такъ, чтобы оси полученнаго эллипса относились какъ 3:2.

24. Разсѣчь конусъ произвольно взятой плоскостью и построить развертку.

25. Даны проекціи правильной шестигранной пирамиды. Изобразить ее въ косоугольныхъ проекціяхъ.

26. Построить въ косоугольныхъ проекціяхъ пересѣченіе куба съ прямымъ конусомъ, если грани куба || основанію конуса, а центръ куба лежитъ на оси конуса /сначала построить въ методѣ Монжа./



Черт. 100.