

ТЕХНОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

621.088

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ И СКАЛЯРНО-ВЕКТОРНЫХ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ

Канд. техн. наук, проф. А.В. СКВОРЦОВ, асп. Д.А. СКВОРЦОВА, асп. Д.А. ЧМЫРЬ

В связи с развитием компьютерных CALS/ИПИ-технологий особое значение приобретает обеспечение качества и точности деталей и сборочных единиц. Существующая методика расчета векторных размерных цепей не обеспечивает точности, т.к. не соответствует положениям теории вероятности. Аналитическая теория суммирования реальных векторных погрешностей с систематической и случайной составляющей не разработана. Предлагаемая методика статистических испытаний показывает, что наличие постоянной составляющей резко изменяет полигон и гistogramмы распределения производственной погрешности.

In connection with development of computer CALS technologies special value will be given to the support of quality and accuracy of details and assembly units. The existing design procedure of vector sized chains does not provide accuracy since mismatches positions of probability theory. The analytical summation theory of true vector errors from systematic and casual component is not developed. The offered technique of statistical trials shows that the presence of a constant component sharply changes polygon and the histograms of the output error distribution.

При проектировании и изготовлении изделий машиностроения в условиях складывающихся рыночных отношений значительное место отводится качеству и точности деталей и сборочных единиц. Точность размерных связей обеспечивается расчетом и анализом соответствующих размерных цепей. В настоящее время в техническую практику внедрены методы расчета линейных и угловых цепей, которые определены в действующих методических указаниях [1].

В РД 50-635-87 приведены методы расчета размерных цепей применительно к линейной теории обеспечения точности. Однако применение данной теории к расчету векторных и скалярно-векторных размерных цепей приводит при теоретико-вероятностном суммировании к существенным погрешностям.

Согласно принятому определению [2] под векторной погрешностью понимают погрешность, которая характеризуется числовым значением и направлением в пространстве, т.е. вектором. Плотность распределения векторных погрешностей описывается не одномерным законом нормального распределения Гаусса, а двух- и трехмерными функциями. Двухмерное распределение определяется законом Релея

$$\varphi(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}},$$

где $\varphi(r)$ — функция плотности, r — случайная величина, σ — дисперсия.

Все составляющие звенья векторной размерной цепи представляют собой векторные величины. В скалярно-векторных размерных цепях часть составляющих звеньев образуют векторные, а другая часть — скалярные (одномерные) величины.

В промышленности расчет векторных и скалярно-векторных размерных цепей проводится по принятым рекомендациям [2], которые основаны на теории, предложенной Шевелевым А.С. [3]. Основным достоинством этой теории является разделение векторной погрешности $\bar{\rho}$ на систематическую $\bar{\varepsilon}_{\text{const}}$ и случайную $\bar{\varepsilon}_{\text{var}}$ составляющие (рис. 1). Составная векторная погрешность — это сумма систематической и случайной погрешностей (A). Систематическая векторная погрешность характеризуется постоянным или закономерно изменяемым модулем и направлением в пространстве. Случайная векторная погрешность имеет случайные значения модуля и направления. Систематическая погрешность присуща биению шпинделя практически любого станка, а случайная составляющая определяется другими характеристиками технологической системы (ТС) при обработке (отклонениями припуска, вариациями механических свойств материала, колебаниями ТС). Допуск замыкающего звена согласно этой теории рассчитывается по формуле

$$\rho_{\Delta} = k_0 \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j, \quad (1)$$

где ρ_{Δ} — допуск замыкающего звена; ρ_j — допуск j -го составляющего звена; k_0 — вероятностный коэффициент расчетного допуска замыкающего звена (коэффициент суммирования), который рассчитывается по достаточно сложной формуле. Однако расчет по (1) не соответствует положениям теории вероятности, поскольку средние квадратические отклонения рассчитываются методом не простого, а квадратического суммирования [1].

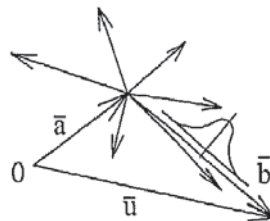


Рис. 1. Схема составной векторной погрешности.

Допуск замыкающего звена при расчете по вероятностному способу равен

$$T_{\Delta} = t_{\Delta} \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^2 \lambda_i^2 T_i^2},$$

где t_{Δ} — коэффициент риска; λ_i — коэффициент, отражающий зависимость отклонений от закона распределения.

Наличие постоянной составляющей, характерной для конкретного метода обработки, резко изменяет полигон и гистограммы распределения конкретной производственной погрешности по отношению к теоретическому виду закона Релея. Аналитическая теория суммирования реальных векторных погрешностей, имеющих как систематическую, так и случайную составляющую, до настоящего времени не разработана. Поэтому расчет скалярных и скалярно-векторных размерных цепей при таких функциях распределения случайных величин целесообразно вести методом статистических испытаний на персональном компьютере.

Пусть дана векторная размерная цепь, состоящая из n звеньев, также известны значения модуля составной векторной погрешности, закон распределения значений случайной составляющей векторной погрешности и значения систематической составляющей векторной погрешности. Необходимо вычислить реальную составную векторную погрешность,

суммарную векторную погрешность по полученным данным построить полигоны графиков и оценить влияние различных условий испытаний

$$\overline{A} = \overline{\varepsilon_{\text{const}}} + \overline{\varepsilon_{\text{var}}},$$

где $\overline{A}$ — составная векторная погрешность, $\overline{\varepsilon_{\text{const}}}$ — систематическая составляющая векторной погрешности, $\overline{\varepsilon_{\text{var}}}$ — случайная составляющая векторной погрешности;

$$A_x = a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2,$$

$$A_y = a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2,$$

здесь A_x, A_y — проекции вектора $\overline{A}$ на оси OX, OY соответственно; a — длина вектора $\overline{\varepsilon_{\text{const}}}$; b — длина вектора $\overline{\varepsilon_{\text{var}}}$; φ_1 — угол между $\overline{\varepsilon_{\text{const}}}$ и OX ; φ_2 — угол между $\overline{\varepsilon_{\text{var}}}$ и OY .

Для моделирования необходимо задать интервал и шаг изменения a , а также задать закон распределения b (закон распределения Гаусса, закон Релея, закон равной вероятности). Значения φ_1 и φ_2 задаются случайным образом.

$$\text{Длина вектора } |\overline{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

Для вычисления интервала, в котором будут задаваться значения длины вектора $\overline{\varepsilon_{\text{var}}}$, необходимо:

- 1) задать значения $|\overline{A}|, a, \varphi_1$ и φ_2 ;
- 2) вычислить координаты конца вектора $\overline{\varepsilon_{\text{const}}}$:

$$x_a = a \cos \varphi_1$$

$$y_a = a \sin \varphi_1$$

где x_a, y_a — координаты конца вектора $\overline{\varepsilon_{\text{const}}}$;

- 3) вычислить координаты конца вектора $\overline{\varepsilon_{\text{var}}}$.

Координаты (x_b, y_b) конца вектора $\overline{\varepsilon_{\text{var}}}$ будут вычисляться, как координаты одной из точек пересечения окружности радиуса $R = |\overline{A}|$ и прямой, проходящей через точку с координатами (x_a, y_a) под углом φ_2 .

Чтобы определить координаты (x_b, y_b) , необходимо решить следующие уравнения:

$$y_b - y_a = \operatorname{tg} \varphi_2 (x_b - x_a), \quad (2)$$

$$x_b^2 + y_b^2 = R^2, \quad (3)$$

где (2) — уравнение прямой, а (3) — уравнение окружности:

$$x_b^2 + (\operatorname{tg} \varphi_2 (x_b - x_a) + y_a)^2 = R^2,$$

$$x_b^2 + y_a^2 + 2y_a \operatorname{tg} \varphi_2 (x_b - x_a) + \operatorname{tg}^2 \varphi_2 (x_b - x_a)^2 = R^2,$$

$$x_b^2 + y_a^2 + 2y_a x_b \operatorname{tg} \varphi_2 - 2y_a x_a \operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2 (x_b^2 - 2x_b x_a + x_a^2) - R^2 = 0,$$

$$x_b^2 + y_a^2 + 2y_a x_b \operatorname{tg} \varphi_2 - 2y_a x_a \operatorname{tg} \varphi_2 + x_b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - 2x_b x_a \operatorname{tg}^2 \varphi_2 + x_a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - R^2 = 0,$$

$$\underbrace{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2)}_l x_b^2 + \underbrace{(2y_a \operatorname{tg} \varphi_2 - 2x_a \operatorname{tg}^2 \varphi_2)}_m x_b + \underbrace{y_a^2 - 2y_a x_a \operatorname{tg} \varphi_2 + x_a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 - R^2}_n = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получаем

$$x_{h,2} = \frac{-(2y_a \operatorname{tg} \varphi_2 - 2x_a \operatorname{tg} \varphi_2^2) \pm \sqrt{(2y_a \operatorname{tg} \varphi_2 - 2x_a \operatorname{tg} \varphi_2^2)^2 - 4(y_a^2 - 2y_a x_a \operatorname{tg} \varphi_2 + x_a^2 \operatorname{tg} \varphi_2^2 - R^2)(1 + \operatorname{tg} \varphi_2^2)}}{2(1 + \operatorname{tg} \varphi_2^2)},$$

$$y_{h,2} = y_a + \operatorname{tg} \varphi_2 (x_{h,2} - x_a)$$

Если $\varphi_2 < \pi/2$ или $\varphi_2 > 3\pi/2$, а также $x_a < x_{b_1}$, то $x_b = x_{b_1}$, в противном случае $x_b = x_{b_2}$.
 Если $\pi/2 < \varphi_2 < 3\pi/2$, и $x_a > x_{b_1}$, то $x_b = x_{b_1}$, в противном случае $x_b = x_{b_2}$. Если $\varphi_2 = \pi/2$ или $\varphi_2 = 3\pi/2$, и $y_a < y_{b_1}$, то $x_b = x_{b_1}$, в противном случае $x_b = x_{b_2}$, $y_b = y_a + \operatorname{tg} \varphi_2 (x_b - x_a)$

Затем вычисляем b

$$b = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Таким образом, длина вектора $\overline{\varepsilon_{\text{var}}}$ задается в интервале $[b/2; b/2]$

$$A_x' = a \cos \varphi_1 + p \cos \varphi_2,$$

$$A_y' = a \sin \varphi_1 + p \sin \varphi_2,$$

где p — вычисляемый на основе нормального распределения модуль вектора $\overline{\varepsilon_{\text{var}}}$, A_x', A_y' — реальные значения проекций вектора $\overline{A}$ на оси OX, OY соответственно. Реальная длина вектора $|\overline{A}| = \sqrt{A_x'^2 + A_y'^2}$.

Организация статистических испытаний ведется по алгоритму, приведенному на рис. 2, в следующей последовательности.

1. Задается количество звеньев n размерной цепи.
2. Выбирается закон распределения значений b (закон распределения Гаусса, закон Релея, закон равной вероятности).
3. Вычисляются n значений $A_x', A_y', |\overline{A}|$.

4. Вычисляются значения $A_{\Sigma x} = \sum_{i=1}^n A_{xi}', A_{\Sigma y} = \sum_{i=1}^n A_{yi}', |\overline{A_{\Sigma}}| = \sqrt{A_{\Sigma x}^2 + A_{\Sigma y}^2}$, где $A_{\Sigma x}, A_{\Sigma y}$ — проекции суммарного вектора $\overline{A_{\Sigma}}$ на оси OX, OY соответственно,

5. $|\overline{A_{\Sigma}}|$ — длина суммарного вектора $\overline{A_{\Sigma}}$.

6. Вычисляются k значений $A_{\Sigma x}, A_{\Sigma y}, |\overline{A_{\Sigma}}|$.

7. Задается количество делений m единичной окружности.

8. Вычисляется распределение количества попаданий значений $|\overline{A_{\Sigma}}|$ при проведении k испытаний в m окружность. Для полученного распределения вычисляются значения математического ожидания (МО), дисперсии, среднего квадратичного отклонения (СКО).

9. Вычисляется распределение количества попаданий значений $A_{\Sigma x}, A_{\Sigma y}$ при проведении k испытаний в m отрезок по осям OX, OY соответственно. Для полученных распределений вычисляются значения МО, дисперсии, СКО.

Количество статистических испытаний k задается в зависимости от точности моделирования, генерируемых датчиком равномерно распределенных случайных величин на отрезке $[0 \dots 1]$

$$\sigma^* = \frac{\lambda \Delta x}{\sqrt{k-1}} \leq [\sigma^*], \quad (4)$$

где Δx — применяемый при нахождении функции распределения элементарный диапазон размеров ($\Delta x = 0,01$); λ — параметр плотности распределения; $[\sigma^*]$ — заданная точность моделирования.



Рис. 2. Упрощенная схема алгоритма программы

Программная реализация процессов моделирования разработана с применением современного объектно-ориентированного языка программирования C#. Каждое звено рассчитываемой размерной цепи представляет собой отдельный объект, что позволяет гибко и независимо друг от друга настраивать всевозможные параметры, включая используемые при моделировании законы распределения. Реализованная в программе интеграция с MS Excel позволяет представлять полученные значения в удобном для статистического анализа виде, включая автоматизированное построение наглядных графиков.

Для каждого приведенного выше закона распределения организуется несколько комплексов испытаний (табл. 1). При проведении комплексов испытания принимались следующие значения параметров: диапазон значений n [1; 20] с шагом 1; диапазон значений a [0; 1] с шагом 0,1; значения $k = 10000, 100000, 500000, 1000000, 5000000$; значения $m = 10, 50, 100, 500, 1000$; значения $|\bar{A}| = 1, 2, 3, 5, 10$.

Таблица

Комплексы испытаний

Параметр	Состояние параметра*				
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>
n	var	const	const	const	const
a	const	var	const	const	const
k	const	const	var	const	const
m	const	const	const	var	const
$\overline{A}$	const	const	const	const	var

* const — значение параметра задается и не изменяется при проведении комплекса испытаний; var — значение параметра изменяется в соответствии с заданным законом.

Комплекс испытаний с изменением значения параметра k проводился в методических целях для проверки адекватности формулы (4).

На рис. 3 показана зависимость количества попаданий значений $\overline{A}_\Sigma$, определяемых по формуле, приведенной в п. 4 процедуры моделирования в m окружность при количестве звеньев размерной цепи n , изменяемом в диапазоне $[1 \dots 20]$ с шагом 1, при $a = 0,5$ для закона распределения Гаусса. При анализе применялось 100 окружностей с шагом, равным $0,01 \overline{A}_\Sigma$. С ростом числа звеньев размерной цепи фактический диапазон рассеяния значительно сужался по сравнению с величиной $\overline{A}_\Sigma$, $a = 0,5$. Например, можно утверждать, что с риском $p = 0,01$ фактический диапазон рассеяния при $n = 5$ равен 60% от $\overline{A}_\Sigma$, а при $n = 20$ — 33% от $\overline{A}_\Sigma$.

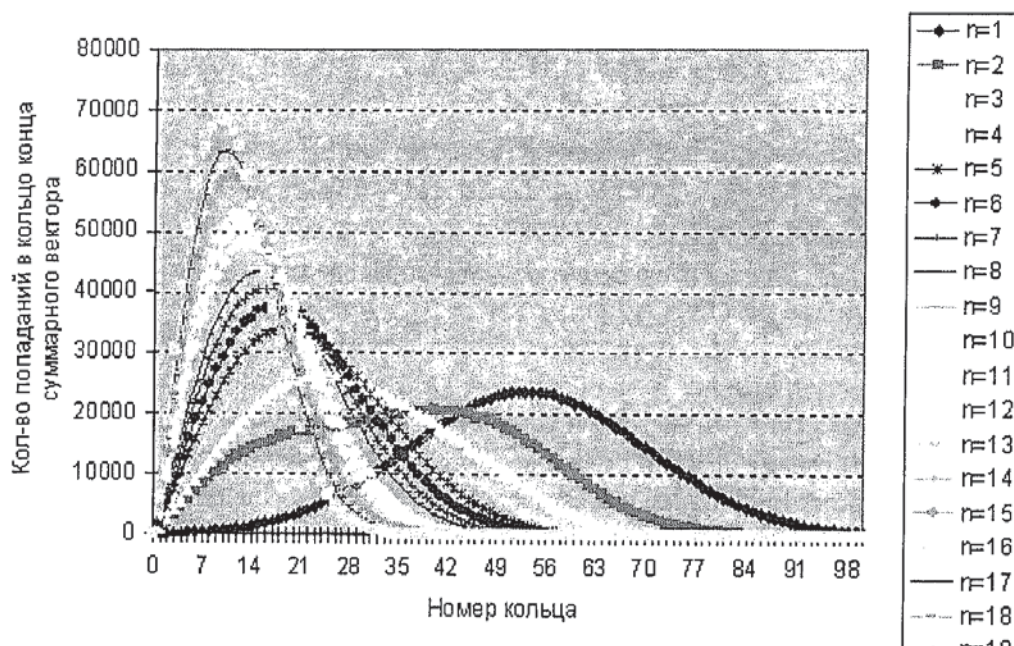


Рис. 3. Пример графиков распределения количества попаданий значений суммарного вектора $\overline{A}_\Sigma$ при проведении k испытаний в m окружность

На рис. 4 показана зависимость количества попаданий значений $A_{\Sigma x}$ в m отрезок по оси OX при количестве звеньев размерной цепи n , изменяемом в диапазоне $[1 \dots 20]$ с шагом 1, при $a = 0,5$ для закона распределения Гаусса. При анализе применялось 100 вертикальных отрезков в обе стороны с шагом, равным $0,01 |A_{\Sigma}|$. С ростом числа звеньев размерной цепи диапазон рассеяния сужается. При $n = 1$ наблюдалось бимодальное распределение с модами, расположенными в зоне 36% от $A_{\Sigma x}$. Это объясняется существенным влиянием постоянной составляющей вектора.

Для дальнейшего анализа результатов моделирования использованы графики МО и СКО для распределения количества попаданий значений $|A_{\Sigma}|$ и $A_{\Sigma x}$, построенные по двум вариантам значений b (в соответствии с законом Гаусса, с законом Релея, с законом равной вероятности) при следующих условиях испытаний: n изменяется в диапазоне $[1; 20]$ с шагом 1; $a = [0; 1]$ с шагом 0,1; $k = 1000000$; $m = 100$, $|A| = 1$.

Различные условия испытаний оказывают значительное влияние при вычислении реальных значений составной векторной погрешности и значений суммарной векторной погрешности. Проведенный анализ результатов статистических испытаний размерных цепей в зависимости от закона распределения случайной составляющей векторной погрешности показал следующие результаты.

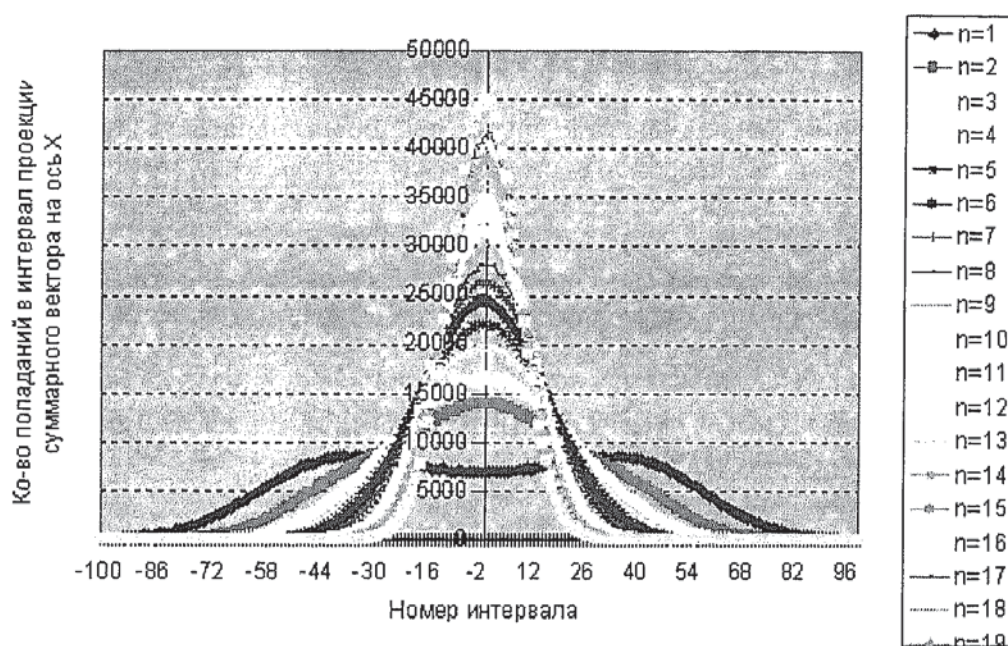


Рис. 4. Пример графиков распределения количества попаданий значений $A_{\Sigma x}$ при проведении k испытаний в m отрезок по оси Ox

На рис. 5 показана зависимость значений МО длины суммарного вектора $|A_{\Sigma}|$ при количестве звеньев размерной цепи n , изменяемом в диапазоне $[1 \dots 20]$ с шагом 1, для диапазона значений a $[0; 1]$ с шагом 0,1 для закона Релея.

При увеличении a значение МО нелинейно возрастает при достаточно малом значении производной от этой функции. Например, при $n = 1$ и $a = 0$ $MO = 1$, что говорит о полной адекватности компьютерной модели. Так, при $n = 20$ и $a = 1$, МО равно 20 % от $|A|$, а при $a = 0$ — 4% от $|A|$. Применение закона Релея для вычисления значений дает самое значительное расширение диапазона значений МО. Самый узкий диапазон дает применение закона равной вероятности.

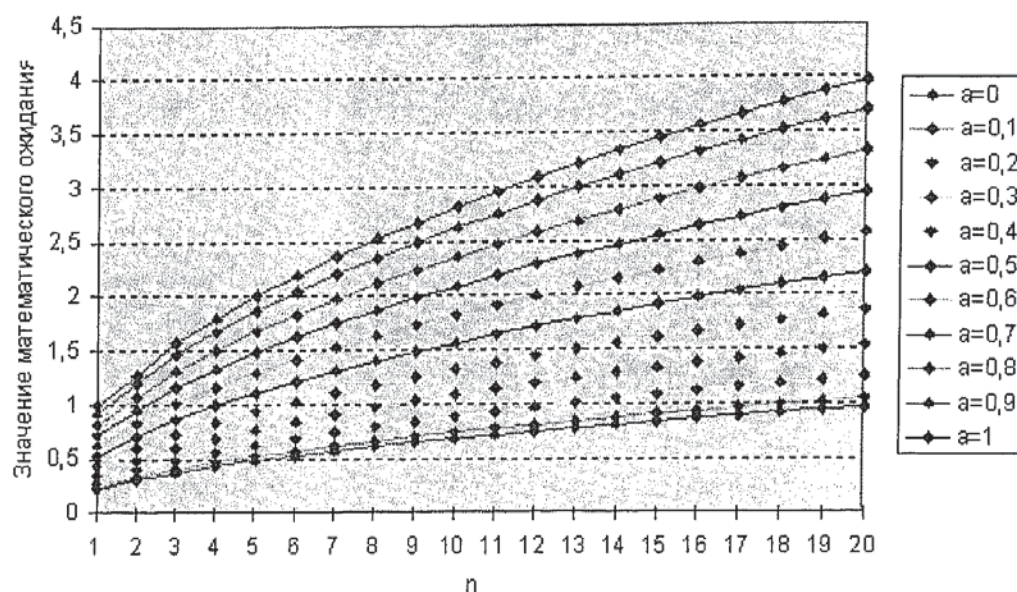


Рис. 5. Пример графиков значений МО для распределения количества попаданий значений $|\bar{A}_2|$ при применении закона Релея для вычисления b

Аналогичные графики получены для других подобных случаев: зависимости СКО от параметра a и числа звеньев размерной цепи, а также диапазонов рассеяния при различных коэффициентах риска и законах распределения случайных величин.

Разработана компьютерная программа расчета реальных векторных и скалярно-векторных размерных цепей, которая была применена для анализа точности технологических операций сборки персональных компьютеров с использованием роботов с адаптивными схватами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. РД 50-635-87. Цепи размерные. Основные понятия. Методы расчета линейных и угловых цепей. Методические указания. — М., 1987. — 46 с.
2. Цепи размерные. Методы суммирования векторных погрешностей. Рекомендации. — М.: ВНИИНМАШ, 1976. — 54 с.
3. Шевелев А. С. Теоретико-вероятностный метод расчета векторных размерных цепей. Сб. «Взаимозаменяемость и технические измерения в машиностроении» — Вып. 6. — Л.: «Машиностроение», 1972.