Расчет и конструирование машин

УДК 539.374

Конфигурационная модель продольного изгиба

К.И. Романов

Замечательная кривая, овал Кассини применена с целью моделирования конструкций противоударного назначения. На основе энергетического метода получена характеристика кольца с учетом ползучести материала.

Ключевые слова: время, перемещение, кривизна, момент, мощность.

The remarkable curve — Cassini oval is used to model the designs for shock-proof purposes. On the basis of the energy method the ring characteristic has been obtained taking into account the material creep.

Keywords: time, displacement, curvature, moment, capacity.

В значительном числе работ, в частности, в статье [1], рассмотрены приложения строительной механики неупругих систем к задачам технологии защитных противоударных сооружений. Ниже предложена модель обжатия кольца, форма которого в различные моменты времени задается овалом Кассини.

В декартовых координатах уравнение овала Кассини определяется уравнением [2]

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2c^2\left(x^2-y^2\right)=a^4-c^4, \tag{1}$$

где x и y — координаты; a и c — постоянные.

Рассмотрим расчетную схему кольца радиусом R, сжатого силами P по вертикальному диаметру $x=0$. Применим операционную схему ис-

РОМАНОВ
Константин Игоревич
доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

следования катастрофы, т. е. положим в уравнении (1), что

$$a = R, \text{ а } c = c(t),$$

где t — время.

Тогда уравнение (1) при $x = 0$ приводит к соотношениям

$$y = \sqrt{R^2 - c^2};$$
$$\lambda = R - \sqrt{R^2 - c^2}, \qquad (2)$$

где λ — половина относительного сближения точек приложения сил.

В общем случае, т. е. при любых x

$$y^2 = -c^2 - x^2 + \sqrt{\left(c^2 + x^2\right)^2 + R^4 - c^4 - x^4 + 2c^2x^2};$$

$$\frac{ydy}{dx} = -x + 2c^2x\left[\left(c^2 + x^2\right)^2 + R^4 + 2c^2x^2 - c^4 - x^4\right]^{-1/2};$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = -1 + 2c^2R^4 \times$$
$$\times\left[\left(c^2 + x^2\right)^2 + R^4 + 2c^2x^2 - c^4 - x^4\right]^{-3/2}.$$

При $x = 0$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = 0$, поэтому [3]

$$\chi = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left|2c^2 - R^2\right|}{R^2\sqrt{R^2 - c^2}} = \frac{R^2 - 2c^2}{R^2\sqrt{R^2 - c^2}}.$$

Исследование характерных точек показывает, что при $c = 0$: $y = R$, $\chi = 1/R$, $\lambda = 0$ и при $c = R$: $y = 0$, $\chi \to \infty$, $\lambda = R$ овал превращается в лемнискату Бернулли.

В точке $x = 0$, $\lambda_* = R(1 - \sqrt{2}/2)$, $c_* = \sqrt{2}R/2$ имеет место фазовый переход, в котором $\chi = 0$, касательная к овалу становится горизонтальной и начинается ускоренная деформация кольца вплоть до полного исчерпания несущей способности.

Скорость изменения кривизны в точке $x = 0$ задается по формуле

$$\dot{\chi} = -\frac{2c\dot{c}}{R^2}\frac{1}{\left(R^2 - c^2\right)^{1/2}}\left(2 - \frac{1}{2}\frac{R^2 - 2c^2}{R^2 - c^2}\right). \qquad (3)$$

Решение задачи изгиба [4] связывает изменение кривизны с изгибающим моментом

$$\dot{\chi} = \frac{k}{J_n^n} M^n,$$

где J_n — обобщенный момент инерции; k и n — постоянные в уравнении состояния нелинейно-вязкого материала; n — нечетное число.

Удельная мощность, рассеиваемая кольцом

$$w = M\dot{\chi} = J_n \dot{\chi}^{\frac{n+1}{n}} / k^{\frac{1}{n}},$$

в точке коллокации ($x = 0$), с учетом равенства (3) эквивалентна к внутренней диссипативной функции

$$w = \frac{J_n}{k^{1/n}}\left\{-\frac{2c\dot{c}}{R^2\left(R^2 - c^2\right)^{1/2}} \times \right.$$
$$\left.\times\left[2 - \frac{R^2 - 2c^2}{2\left(R^2 - c^2\right)}\right]\right\}^{\frac{n+1}{n}}. \qquad (4)$$

Подставим w в выражение, описывающее внутренний диссипативный потенциал,

$$W = \int_0^{S_1} wds,$$

где W — диссипативный потенциал, характеризующий систему; ds — элемент длины дуги кольца; s — полная его длина.

Тогда получим приближенно

$$W = wS$$

где приближенно $S = 2\pi R$.

С учетом равенства (4) внутренний диссипативный потенциал

$$W = \frac{J_n 2\pi R}{k^{1/n}} \left[-\frac{2c\left(3R^2 - 2c^2\right)}{R^2\left(R^2 - c^2\right)^{3/2}} \right]^{\frac{n+1}{n}} \dot{c}^{\frac{n+1}{n}}$$

определяет форму кольца в различные моменты времени на основе энергетического равенства

$$W = 2P\dot{\lambda}.$$

Здесь в соответствии с формулой (2)

$$\dot{\lambda} = \frac{c\dot{c}}{\left(R^2 - c^2\right)^{1/2}}.$$

Отсюда следует

$$\dot{c} = \frac{kP^n c^n R^n \left(R^2 - c^2\right) R^2 \left(R^2 - c^2\right)^{3/2}}{J_n^n \pi^n \left[-2c\left(3R^2 - 2c^2\right)\right]^{n+1}}.$$

Решение задачи можно представить в форме

$$I_n(c / R) = \frac{kP^n c^n R^{n+1}}{2^{n+1} \pi^n J_n^n} t,$$

где интеграл

$$I_n = \int_0^{c/R} \frac{c}{R} \frac{\left(3 - \frac{2c^2}{R^2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{c^2}{R^2}\right)^{\frac{3+2n}{2}}} d\left(\frac{c}{R}\right)$$

можно преобразовать к виду

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^{\chi} \left(3 - 2\chi\right)^{n+1} \left(1 - \chi\right)^{-\frac{3+2n}{2}} d\chi.$$

Литература

1. *Tomita Y., Shindo A., Kim Y.S., Michiura K.* Deformation benaviour of elastic — plastic tubes under external pressure and axial load // Int.J. of Mech. Sci. 1986. V. 28. N 5. P. 263—274.
2. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. М.: ООО «Большая Медведица». 1998. 864 с.
3. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1990. 528 с.
4. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

Статья поступила в редакцию 22.12.2011