

Механика

УДК 534.11

Методика моделирования колебаний подвижной балки с применением библиотеки Project Chrono

С.А. Дергачев

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Methodology for modeling oscillations of a moving beam using the Project Chrono library

S.A. Dergachev

Bauman Moscow State Technical University

Решена актуальная задача разработки составной части нового программного комплекса, предназначенного для моделирования процессов взаимодействия упругодеформируемых конструкций с потоком несжимаемой среды. Разработана и верифицирована методика моделирования динамики балочной конструкции, предназначенная для решения сопряженных задач гидроупругости. Описан алгоритм методики и программный модуль, реализованный на языке C++, использующий библиотеку с открытым исходным кодом Project Chrono, содержащую математические модели и алгоритмы решения систем уравнений, необходимые для моделирования динамики механизмов с упругими звеньями. Приведены результаты расчета четырех модельных задач в сравнении с данными, полученными другими методами математического моделирования, такими как аналитическое решение свободных колебаний консольно закрепленной балки и решение задач с помощью метода конечных элементов в программном пакете Solid Works Simulation. Показано, что разработанная методика обеспечивает численную сходимость результатов рассмотренных методов при повышении дискретизации расчетной схемы.

EDN: IGYVOJ, <https://elibrary/igyvoj>**Ключевые слова:** динамика балочной конструкции, метод конечных элементов, Project Chrono, Solid Works Simulation, методика моделирования

The current task of developing an integral part of a new software package designed to simulate the interaction of elastically deformable structures with the flow of an incompressible medium is being solved. In this paper, a method for modeling the dynamics of a girder structure is developed and verified, designed to solve related problems of hydroelasticity. The algorithm of the technique and the software module implemented in C++ are described, using the open source library Project Chrono, which contains mathematical models and algorithms for solving systems of equations necessary for modeling the dynamics of mechanisms with elastic links. The results of calculations of four model problems are presented in comparison with the results obtained by other mathematical modeling methods

such as the analytical solution of free vibrations of a cantilevered beam and the solution of problems using the finite element method in the Solid Works Simulation software package. It is shown that the developed technique ensures numerical convergence of the results of the considered methods with increasing discretization of the computational scheme.

EDN: IGYVOJ, <https://elibrary/igyvoj>

Keywords: beam structure dynamics, finite element method, Project Chrono, Solid Works Simulation, modeling methodology

Моделирование взаимодействия конструкций с потоком жидкости или газа в условиях, когда сжимаемостью рабочей среды можно пренебречь, является актуальной задачей при проектировании авиационной, автомобильной, морской техники и энергетического оборудования [1–4]. Возможная схема организации вычислительного комплекса для определения параметров движения механизма в потоке несжимаемой среды с использованием метода вихревых петель приведена в работе [5].

Однако для указанных задач, обозначаемых как FSI (Fluid Structure Interaction), не всегда можно считать звенья механизма абсолютно жесткими [1]. Обтекаемые тела часто должны быть схематизированы как объемные упругие тела, оболочки, балки и др. При математическом моделировании сопряженных задач гидроупругости требуется согласованное упорядоченное решение гидродинамической и механической подзадач. Для внедрения в такой программный комплекс подсистем решения механической подзадачи удобно, если соответствующие библиотеки имеют открытый исходный код и обладают возможностями моделирования тел методом конечных элементов [6]. Использование открытого программного обеспечения предоставляет пользователям широкие возможности по верификации и модификации разрабатываемых приложений.

В программном комплексе [5] использована библиотека с открытым исходным кодом Project Chrono (PC) [7], активно применяемая для решения задач FSI [8–10]. В ней имеются средства моделирования динамики упругих конструкций методом конечных элементов, однако нет данных об их верификации. В связи с этим необходимо оценить точность моделирования упругих элементов конструкций с помощью библиотеки PC.

Так как целевым объектом решения сопряженной задачи гидроупругости часто является тело большого удлинения [4, 11–13], выполним моделирование и верификацию динамики малых поперечных пространственных колеба-

ний балки с различными условиями закрепления.

Цель работы — оценить точность решения, получаемого с помощью библиотеки PC для ее дальнейшего применения при моделировании механики в сопряженных задачах гидроупругости.

Чтобы достичь поставленной цели, сформирована и верифицирована подсистема решения механической подзадачи моделирования динамики балки на базе библиотеки с открытым исходным кодом PC, для ее реализации в составе комплекса моделирования сопряженной задачи гидроупругости. Выполнено сравнение результатов расчета с данными, полученными в коммерческом программном пакете Solid Works Simulation (SWS) [14] и аналитическим путем.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрены четыре модельные задачи (рис. 1, *a–d*), где балка имеет следующие безразмерные параметры: постоянное квадратное поперечное сечение со стороной $a = 0,01$ и длину $L = 1,6$. Материал балки — однородный изотропный с плотностью $\rho = 3125$ и модулем Юнга $E = 6 \cdot 10^9$. Все задачи решены без учета демпфирования.

При решении задач с помощью библиотеки PC, как показано на рис. 2, использована конечно-элементная модель балки, состоящая из инерционных элементов 1, связанных балочными элементами 2.

В библиотеке PC движение балки описывается относительно инерциальной мировой системы отсчета положением центров масс m_i и ориентацией системы координат инерционных элементов J_i в трехмерной постановке. Моделирование процессов осуществляется в режиме гладких тел (без учета касательных сил при контакте тел).

С помощью библиотеки PC сформирована объектная структура цифровой модели балки, показанная на рис. 3. Использован объект *chrono::ChSystemSMC my_system*. Инерционные и балочные элементы математической модели балки добавлены в сеточную модель (объект

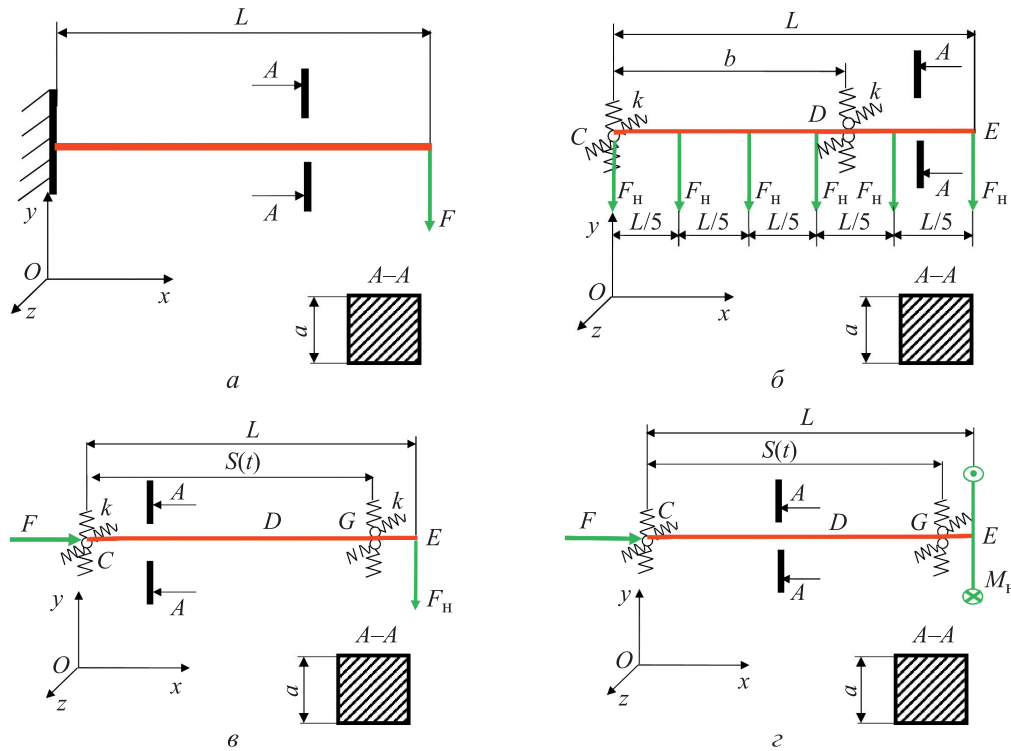


Рис. 1. Расчетные схемы для первой (а), второй (б), третьей (в) и четвертой (г) модельных задач

my_mesh класса *chrono::fea::ChMesh my_mesh*). Для описания количества балочных элементов предназначена переменная *nel*. Изгиб балки смоделирован перемещением некоторых ее узлов (точек).

Количество узлов выбрано равным $nel + 1$. Принято, что указанные узлы расположены вдоль балки равномерно (с постоянным шагом). Эти узлы — объекты *nodei* в библиотеке PC — имеют тип *chrono_types::make_shared<:: chrono::fea::ChNodeFEAxyzrot>*.

Узлы *nodei* последовательно добавлялись в сеточную модель балки *my_mesh* функцией *AddNode*, а также в вектор узлов *node*. Далее между каждой соседней парой узлов задавался балочный элемент *belement* класса *chrono::fea::ChElementBeamEuler*. Таким образом, всего в сеточную модель *my_mesh* балки

добавлялось *nel* балочных элементов. Добавление осуществлялось функцией *AddElement*. Упругие характеристики балочных элементов задавались через класс *chrono::fea::ChBeamSectionEulerAdvanced*. Параметры балки и ее элементов приведены с табл. 1.

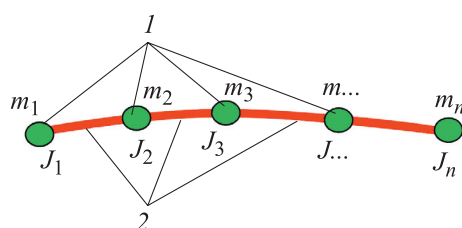


Рис. 2. Конечно-элементная модель балки, построенная с помощью библиотеки PC

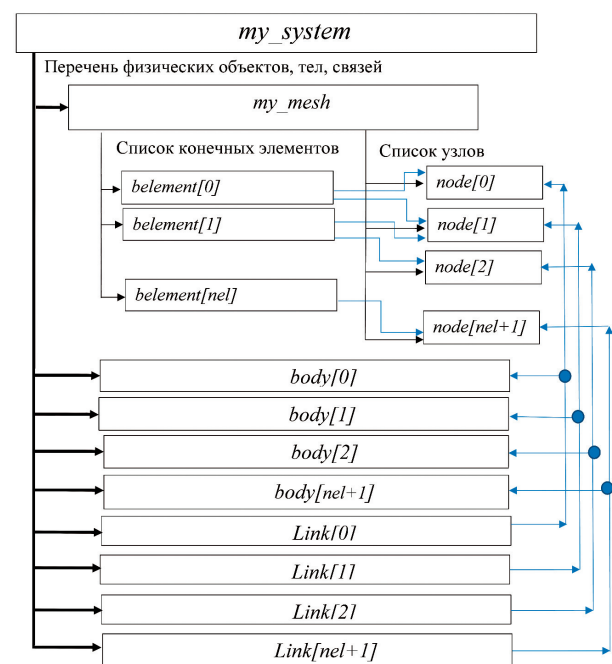


Рис. 3. Объектная структура цифровой модели балки в среде PC

Таблица 1

Параметры балки

Параметр	Функция (переменная)	Значение
Сторона квадратного поперечного сечения	<i>double AAA</i>	0,01
Длина балки	<i>double Len</i>	1,6
Плотность материала балки	<i>double Ro</i>	3125
Определение типа сечения балочных элементов (прямоугольное с соответствующими сторонами)	<i>SetAsRectangularSection</i>	AAA, AAA
Модуль Юнга балочных элементов	<i>SetYoungModulus</i>	$6 * 1e9$
Модуль сдвига балочных элементов	<i>SetGshearModulus</i>	$0,3 * 6 * 1e9$
Плотность балочных элементов	<i>SetDensity</i>	0
Показатель (Релея) демпфирования балочных элементов	<i>SetBeamRaleyghDamping</i>	0

В реализованной программе характеристики всех балочных элементов заданы равными, однако они могут быть уникальными для каждого балочного элемента. Плотность балочных элементов принята равной нулю, т. е. они невесомые. Масса элементов балки сосредоточена в инерционных элементах, которые смоделированы объектами класса *chrono::ChBody*. Массы всех инерционных элементов балки, кроме крайних, приняты $double dm = Ro * (Len * AAA * AAA)/nel$ и заданы функцией *SetMass(dm)* класса *chrono::ChBody*. Для начального и конечного элементов балки заданы *SetMass(dm/2)*. Для задания моментов инерции элементов балки использована функция *SetInertia(Matr)*, где *Matr* — тензор инерции элементов (класса *chrono::ChMatrix33*). Диагональные элементы тензора инерции соответствуют характеристикам участка балки длиной Len/nel , недиагональные элементы тензора нулевые. Инерционные элементы связаны с точками *node[i]* связями *chrono::ChLinkMateGeneric* с параметрами *constr->SetConstrainedCoords(true, true, true, true, true, true)* (с нулевым количеством степеней свободы).

В качестве альтернативного подхода в модели можно задать ненулевую плотность балочных элементов, обнулив массы и тензоры инер-

ции инерционных элементов балки. При этом результаты моделирования почти не изменятся, однако с точки зрения последующего практического применения такого программного модуля балочную модель удобнее задавать как инерционные элементы и балочные элементы с нулевой плотностью (как это сделано в настоящей работе).

Для численного решения систем алгебраических уравнений в программе использован решатель *chrono::ChSolverMINRES* с параметрами, указанными в табл. 2.

Внешние силы и моменты, действующие на узлы балки, заданы функциями *node[yui]->SetForce(::chrono::ChVector<>mF)*, *node[yui]->SetTorque(::chrono::ChVector<>mM)* соответственно.

Упругие связи смоделированы аналогично внешним силам, действующим на узлы прямо пропорционально перемещениям элемента балки, а жесткие связи — путем фиксирования инерционных элементов *bodies[i]* в пространстве функцией *bodies[i]->SetBodyFixed(true)*.

Результаты моделирования. Модельная задача № 1. Рассмотрены колебания балки, закрепленной консольно на неподвижной опоре

Таблица 2

Параметры решателя *ChSolverMINRES* систем уравнений

Параметр	Функция	Значение
Точность решения	<i>SetTolerance</i>	$1e-12$
Использование диагонального предобуславливателя	<i>EnableDiagonalPreconditioner</i>	<i>true</i>
ведение журнала сообщений	<i>SetVerbose</i>	<i>false</i>
Точность решения при вычислении сил	<i>SetSolverForceTolerance</i>	$1e-13$

(см. рис. 1, а). На балку действует постоянная сила $F = 0,1$, приложенная к свободному концу.

Приближенное аналитическое решение с разложением по собственным формам колебаний получено с помощью приложения Wolfram Mathematica [15].

Математически малые поперечные колебания балки под действием внешней распределенной нагрузки $p(x, t)$ описываются уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho F_n \frac{\partial U}{\partial t} \right) = p(x, t), \quad (1)$$

где E — модуль упругости материала стержня; J — момент инерции; U — прогиб; ρ — плотность материала; F_n — площадь поперечного сечения; t — время.

Так как балка симметрична относительно плоскости Oxy , проекции начальных сил, перемещений и скоростей на ось Oz равны нулю. Поэтому далее в аналитическом решении будем рассматривать колебания балки только в плоскости Oxy .

Для решаемой задачи заданы начальные условия $U(x, 0) = g(x)$, $\dot{U}(x, 0) = f(x)$ и граничные $U(0, t) = 0$, $U'(0, t) = 0$, $U''(L, t) = 0$, $U'''(L, t) = 0$.

Решение уравнения (1) рассматриваем в виде произведения формы колебаний и обобщенной координаты

$$U(x, t) = W(x)\varphi(t).$$

Балочная функция для собственных форм балки

$$W(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx, \quad (2)$$

где $C_1 - C_4$ — константы.

Из граничных условий при консольном закреплении балки

$$W(0) = C_1 + C_3 = 0, \quad W'(0) = C_2 + C_4 = 0$$

находим

$$C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2.$$

Граничные условия для свободного края балки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W''(L) &= k^2 (-C_1 \cos kL - C_2 \sin kL - \\ &\quad - C_1 \operatorname{ch} kL - C_2 \operatorname{sh} kL) = 0; \\ W'''(L) &= k^3 (C_1 \sin kL - C_2 \cos kL - \\ &\quad - C_1 \operatorname{sh} kL - C_2 \operatorname{ch} kL) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Однородная система уравнений относительно неизвестных C_1, C_2 имеет нетривиальные решения, когда ее определитель равен нулю. Отсюда получаем характеристическое уравнение

$$\operatorname{ch} kL \cos kL = -1. \quad (4)$$

Так как далее будем рассматривать только низкочастотные колебания, для верификации использовано девять корней уравнения (4). Соответствующие им формы (2) найдем, задав константу $C_1 = 1$, а C_2 определим из любого из граничных условий (3).

Применяя метод Бубнова — Галеркина, получаем решение уравнения для обобщенной координаты i

$$\ddot{\varphi}_i + \omega_i^2 \varphi_i = f_i$$

в виде

$$\varphi_i = C_{5i} \cos \omega_i t + C_{6i} \sin \omega_i t + f_i / \omega_i^2.$$

Результаты решения уравнения (1) в виде ряда

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^9 \varphi_i W_i(x)$$

сравнивались с решениями, полученными методом конечных элементов.

Для моделирования балки в трехмерной постановке при расчете переходного режима вынужденных колебаний тела в среде SWS использованы объемные конечные элементы. В качестве решателя выступал Intel Direct Sparse. Количество частот выбрано равным 20, как предлагает программный комплекс по умолчанию. Количество конечных элементов — 7771. Шаг интегрирования по времени (далее шаг интегрирования) Δt принят равным 0,001 и 0,0002.

Определенные численным методом в среде SWS перемещения свободного края балки по оси Ox y_{SWS} на графике оказались визуально неотличимыми от результатов, полученных аналитическим методом y_a . По оси Oz перемещения элементов балки не возникали, что также подтверждает корректное решение задачи.

Для сравнения результатов аналитического и численного (в среде SWS) решений задачи использована погрешность, приведенная к высоте сечения: $(y_{\text{SWS}} - y_a)/a$. Результаты моделирования с шагом интегрирования $\Delta t = 0,001$ и $0,0002$ приведены на рис. 4. Видно, что при уменьшении шага интегрирования сходимость численного метода с аналитическим возрастает. При этом шаг интегрирования $\Delta t = 0,0002$ бли-

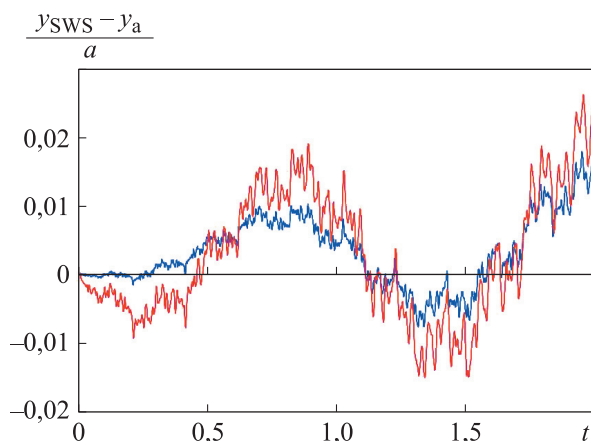


Рис. 4. Зависимости погрешности $(y_{\text{SWS}} - y_a)/a$ от времени t , полученные при моделировании в среде SWS с шагом интегрирования $\Delta t = 0,001$ (—) и $0,0002$ (—)

зок к встроенным программным ограничениям пакета для данной задачи (максимальное число шагов). Далее в качестве результатов расчета в среде SWS будут выступать данные, полученные при $\Delta t = 0,001$.

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений динамики выполнено методом Hilbert-Huang Transform (HHT) и неявным методом Эйлера. Встроенный в PC метод Рунге — Кутты применить не удалось. Используются четыре варианта интегрирования со следующими параметрами:

1) решатель `chrono::ChTimestepper::Type::EULER_IMPLICIT`, шаг интегрирования $\Delta t = 0,001$, задаваемый функцией `SetTimestep(0.001)`, число балочных элементов $nel = 20$;

2) решатель `chrono::ChTimestepper::Type::EULER_IMPLICIT`, $\Delta t = 0,0001$, задаваемый функцией `SetTimestep(0.0001)`, $nel = 20$;

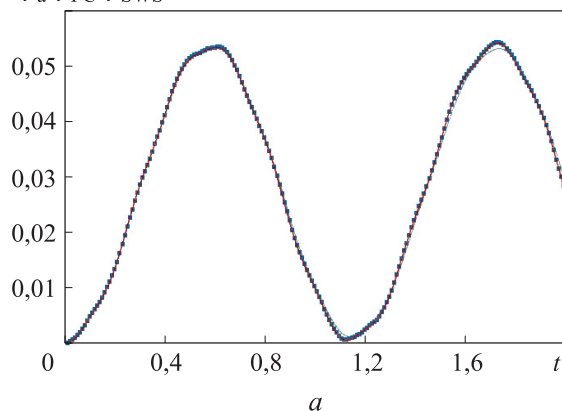
3) решатель `chrono::ChTimestepper::Type::HHT`, $\Delta t = 0,001$, параметры `SetAlpha(-0.0)`, `SetMaxiters(6)`, `SetAbsTolerances(1e-12)`, `SetVerbose(true)`, `SetStepControl(false)`, `SetTimestep(0.001)`, $nel = 20$;

4) решатель `chrono::ChTimestepper::Type::EULER_IMPLICIT`, $\Delta t = 0,001$, параметр `SetTimestep(0.001)`, число балочных элементов $nel = 10$.

Перемещения свободного края балки, полученные путем аналитического расчета y_a и численного моделирования в средах SWS y_{SWS} и PC y_{PC} , показали хорошее совпадение (рис. 5, а). Для сравнения результатов моделирования в средах PC и SWS использована погрешность, приведенная к высоте сечения, $(y_{\text{PC}} - y_{\text{SWS}})/a$ (рис. 5, б). Моделирование в среде SWS выполнено с шагом интегрирования $\Delta t = 0,001$.

Анализ результатов решения модельной задачи № 1 позволил сделать следующие выводы. Все рассмотренные методы дают принципиально корректное решение с погрешностями, не превышающими 15 % высоты поперечного сечения балки. Амплитуда колебаний свободного края балки составила 530 % высоты ее поперечного сечения, поэтому для инженерных расчетов погрешность 15 % является достаточной. С увеличением дискретизации все методы позволяют повышать точность вычислений и снижать погрешность (1,5 и 3,0 %

$y_a, y_{\text{PC}}, y_{\text{SWS}}$



$(y_{\text{PC}} - y_{\text{SWS}})/a$

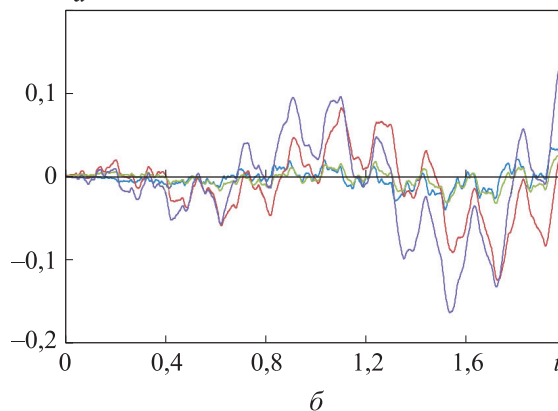


Рис. 5. Результаты решения модельной задачи № 1:

а — зависимости перемещений свободного края балки от времени t , полученные путем аналитического расчета y_a (—) и численного моделирования в средах PC y_{PC} (—) и SWS y_{SWS} (—■);

б — зависимости погрешности расчета $(y_{\text{PC}} - y_{\text{SWS}})/a$ от времени t для первого (—), второго (—), третьего (—) и четвертого (—) вариантов интегрирования

высоты поперечного сечения для SWS и PC соответственно).

В программном модуле PC решатель ННТ при шаге интегрирования $\Delta t = 0,001$ имеет точность, аналогичную получаемой с помощью метода Эйлера при $\Delta t = 0,0001$, что обусловлено особенностями алгоритмов, реализованных в указанных решателях.

При решении задач, связанных с перемещениями и колебаниями конструкций, с помощью программного пакета SWS удалось получить результаты с достаточной для инженерных расчетов точностью. С использованием объемных конечных элементов наибольшая погрешность по сравнению с приближенным аналитическим решением не превышает 3 % высоты поперечного сечения балки или 0,55 % амплитуды колебания свободного края балки.

С помощью программного модуля PC получены результаты с погрешностями по сравнению с приближенным аналитическим решением, не превышающими 15 % высоты поперечного сечения балки или 3 % амплитуды колебания ее свободного края.

Модельная задача № 2. В трехмерном пространстве в инерциальной системе отсчета $Oxyz$ рассмотрены колебания балки, закрепленной на пружинах (см. рис. 1, б). К шести точкам балки приложены сосредоточенные постоянные силы $F_n = -0,1$, направленные вдоль оси y (вниз). Точки приложения указанных сил расположены равномерно вдоль ее длины с постоянным шагом $L/5$. В инерциальной системе отсчета балка закреплена двумя шарнирными упругими опорами к основанию в плоскости Oxy , одна из которых связана с ее концом в точке C , вторая опора — скользящая в точке D на удалении b от точки C . Расстояние между опорами $b = 1,0$. Свободный край балки обозначен точкой E . Коэффициент жесткости пружин упругих опор $k = 100$. Балочная модель аналогична модели, описанной в задаче № 1.

Приближенное аналитическое решение этой задачи затруднительно, вследствие чего результаты расчета с помощью PC сравнивались только с данными, полученными в среде SWS.

Особенностью расчетной схемы с использованием PC являлось то, что при расположении скользящей опоры между узлами балки сила реакции от нее распределена между ближайшими узлами пропорционально соотношению расстояний до инерционных узлов.

Результаты моделирования перемещения точек балки C , D и E , полученные в средах SWS и PC, приведены на рис. 6, а–г. При моделировании использованы четыре варианта интегрирования со следующими параметрами:

1) решатель *EULER_IMPLICIT*, шаг интегрирования $\Delta t = 0,001$, число балочных элементов $nel = 10$ (см. рис. 6, а);

2) решатель *EULER_IMPLICIT*, $\Delta t = 0,001$, $nel = 20$ (см. рис. 6, б);

3) решатель *EULER_IMPLICIT*, $\Delta t = 0,0001$, $nel = 20$ (см. рис. 6, в);

4) решатель ННТ, $\Delta t = 0,001$, $nel = 20$ (см. рис. 6, г).

Анализ результатов решения модельной задачи № 2 позволил заключить следующее. Увеличение числа конечных элементов (на которые разбивалась балка) и уменьшение шага интегрирования при моделировании с помощью PC сближает результаты с данными, полученными в среде SWS. Результаты расчета с решателем *EULER_IMPLICIT* лучше, чем с ННТ сходятся с результатами, полученными в программном пакете SWS. Для моделирования балки с помощью решателя *EULER_IMPLICIT* шага интегрирования $\Delta t = 0,001$ оказывается достаточно. Уменьшение количества балочных элементов в 2 раза заметно увеличивает погрешность.

Модельная задача № 3. Рассмотрена задача с продольным движением балки (см. рис. 1, в). Количество балочных элементов $nel = 20$, количество инерционных элементов — 21. В момент времени $t = 0$ конечная точка E находится в скользящей опоре F , причем $S(t) = L$. К противоположному краю балки (точке C), связанному с опорой упругим подвесом в плоскости Oyz , приложена сила вдоль оси Ox $F = 20$. Точка D балки расположена так, чтобы $CD/CE = 3/5$. После преодоления точкой C балки расстояния $x_1 = 0,6$ сила F становится равной 0. Кроме того, к точке E приложена постоянно действующая сила $F_n = 0,1$, направленная в противоположную сторону от оси Oy (вниз). Жесткость упругих опор $k = 1000$.

После преодоления точкой C балки расстояния $x_2 = 1,4$ вдоль оси Ox осуществляется остановка движения балки в этом направлении путем вычитания из скоростей движения всех инерционных элементов балки скорости движения точки C вдоль оси Ox .

Моделирование в среде PC выполнено с помощью решателя *EULER_IMPLICIT*, реали-

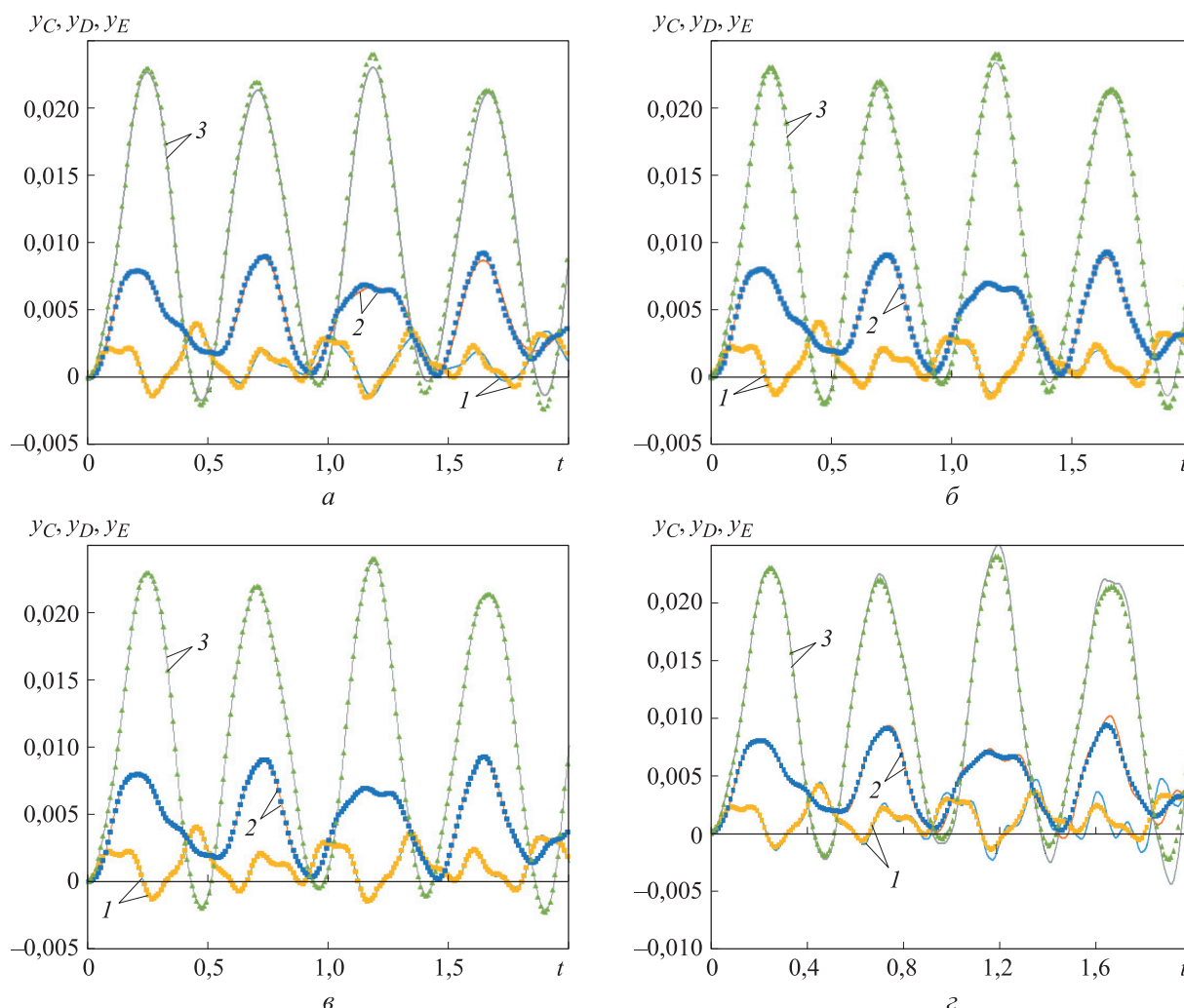


Рис. 6. Зависимости перемещений точек балки C y_C (1), D y_D (2) и E y_E (3) от времени t , полученные при решении модельной задачи № 2 в средах SWS (точки) и РС (линии) для первого (а), второго (б), третьего (в) и четвертого (г) вариантов интегрирования

зующего метод Эйлера, при шаге интегрирования $\Delta t = 0,001$ и $0,0001$. Координаты точек C , D и E по оси Oy приведены на рис. 7. Максимальная разница результатов для точки C составила $0,0026$; для точки D — $0,022$; для точки E — $0,039$.

Анализ результатов решения модельной задачи № 3 позволил заключить следующее. Решение задачи с помощью библиотеки РС является устойчивым. Схема нагружения балки близка к практическому приложению задачи гидроупругости [11]. При выполнении расчета использованы параметры интегрирования, показавшие приемлемые результаты в модельных задачах № 1 и № 2. Сравнение результатов решения задачи с шагами интегрирования $\Delta t = 0,001$ и $\Delta t = 0,0001$ выявило, что при меньшем Δt различимы более высокие частоты колебаний балки.

Модельная задача № 4. Рассмотрена задача с продольным движением балки и ее одновременным вращением вокруг оси Ox (см. рис. 1, г). Количество балочных элементов $nel = 20$, количество инерционных элементов — 21. Моменты инерции инерционных элементов вокруг продольной оси Ox заданы равными $0,003$. В момент времени $t = 0$ конечная точка E находится в скользящей опоре G , причем $S(t) = L$. К точке E приложен момент $M_n = 1$, а к противоположному краю балки (точке C), связанному с опорой упругим подвесом в плоскости Oyz , — сила вдоль оси Ox $F = 20$. Точка D балки расположена так, чтобы $CD/CE = 3/5$. После преодоления точкой C балки расстояния $x_1 = 0,6$ сила F и момент M_n становятся равными нулю. Жесткость упругих опор $k = 1000$. Параметры демпфирования упругих опор и балочных элементов заданы равными нулю.

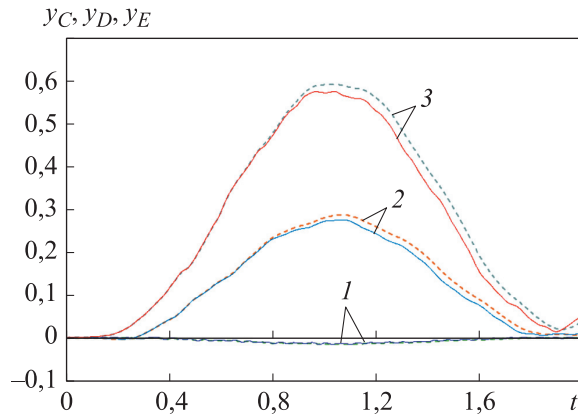


Рис. 7. Зависимости перемещений точек балки C y_C (1), D y_D (2) и E y_E (3) от времени t , полученные при решении модельной задачи № 3 в среде РС с шагом интегрирования $\Delta t = 0,001$ (штриховые линии) и $0,0001$ (сплошные линии)

После преодоления точкой C балки расстояния $x_2 = 1,4$ вдоль оси Ox осуществляется остановка движения балки в направлении оси Ox путем вычитания из скоростей движения всех инерционных элементов балки скорости движения точки C вдоль оси Ox .

Моделирование в среде РС выполнено с помощью решателя *EULER_IMPLICIT* при шаге интегрирования $\Delta t = 0,001$ и $0,0001$.

На балку не действуют поперечные изгибающие силы, а продольная сила мала для возникновения потери устойчивости, поэтому деформации и перемещения в направлении осей Oy и Oz не возникают. Движение инерционных элементов заключалось в поступательном перемещении вдоль оси Ox или во вращательном вокруг оси Ox . Текущие угловые положения точек C , D и E обозначены как φ_C , φ_D и φ_E .

Упругодинамическая схема балки и условия приложения внешнего момента приводят к ее закручиванию вокруг продольной оси как твердого тела, а также к упругим относительным колебаниям инерционных элементов. При таком характере движения балочные элементы работают в основном как торсионы. Сравнение полученных результатов, показало, что шаг интегрирования почти не влияет на угловое положение средней части балки (точки D), в то время как различия полученных угловых отклонений точек C и E различимы, но по абсолютной величине значительно меньше полного значения текущих углов. Для удобства восприятия результатов рассмотрены относительные

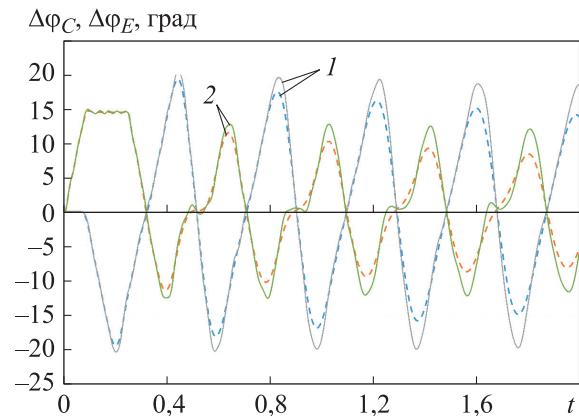


Рис. 8. Зависимости относительных угловых положений точек балки C $\Delta\varphi_C$ (1) и D $\Delta\varphi_D$ (2) от времени t , полученные при решении модельной задачи № 4 в среде РС с шагом интегрирования $\Delta t = 0,001$ (штриховые линии) и $0,0001$ (сплошные линии)

угловые положения точек C и E относительно точки D : $\Delta\varphi_C = \varphi_C - \varphi_D$ и $\Delta\varphi_E = \varphi_E - \varphi_D$.

Зависимости относительных угловых положений точек балки C $\Delta\varphi_C$ и E $\Delta\varphi_E$, полученные при решении модельной задачи № 4 с шагом интегрирования $\Delta t = 0,001$ и $0,0001$ приведены на рис. 8.

Анализ результатов решения модельной задачи № 4 позволил заключить следующее. Решение задачи с помощью библиотеки РС является устойчивым. Математическая модель балки может корректно учитывать вращательное движение вокруг продольной оси, а также скручивание. При выполнении расчета использованы параметры интегрирования, показавшие наилучшие результаты в модельных задачах № 1 и № 2. При шаге интегрирования $\Delta t = 0,0001$ различимы более высокие частоты колебаний балки, а при $\Delta t = 0,001$ амплитуда колебаний значительно уменьшается с течением времени.

Выводы

1. Исследование модельных задач показало, что библиотека РС позволяет с приемлемой точностью моделировать динамику движения балочных конструкций как отдельно, так и в составе механизмов. Погрешности в рассмотренных расчетах не превышали 4 %. При этом возможно пространственное моделирование динамики с учетом перемещения балки, ее изгибов, скручивания и вращения вокруг продольной оси.

2. Библиотека РС имеет открытый исходный код и, при необходимости, может быть доработана пользователем, или произвольным образом сопряжена с прочими библиотеками C++, или программным кодом собственной разработки.

3. Библиотека РС активно развивается сообществом пользователей. На официальном сайте регулярно появляются ее обновленные

версии с устраненными ошибками, расширенным функционалом или модификациями в части совместимости и быстродействия.

4. Балочные модели упругих конструкций можно использовать в сопряженных задачах гидроупругости, в частности совместно с методом вихревых петель.

Литература

- [1] Bungartz H.-J., Schafer M., eds. *Fluid-structure interaction*. Springer, 2006. 394 p.
- [2] Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. *Математическое моделирование сложных аэроупругих систем*. Москва, Физматлит, 1995. 735 с.
- [3] Garbuz M., Klimina L., Samsonov V. Wind driven plantigrade machine capable of moving against the flow. *Appl. Math. Model.*, 2022, vol. 110, pp. 17–27, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.05.035>
- [4] González E., Yáñez D.J., Del Pozo S. et al. Optimizing bladeless wind turbines: morphological analysis and lock-in range variations. *Appl. Sci.*, 2024, vol. 14, no. 7, art. 2815, doi: <https://doi.org/10.3390/app14072815>
- [5] Щеглов Г.А., Дергачев С.А. Численное моделирование динамики движения механизма в потоке несжимаемой среды с использованием метода вихревых петель. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2024, № 1, с. 21–30. EDN: FQAXEG
- [6] Co-simulation with Hexagon CAE solutions. *www.cradle-cfd.com: веб-сайт*. URL: <https://www.cradle-cfd.com/product/msc.html> (дата обращения: 19.06.2023)
- [7] ProjectChrono. An open source multi-physics simulation engine. *projectchrono.org: вебсайт*. URL: <https://projectchrono.org> (дата обращения: 19.06.2023)
- [8] Tasora A., Serban R., Mazhar H. et al. Chrono: An open source multi-physics dynamics engine. *HPCSE 2015*. Springer, 2015, pp. 19–49, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-40361-8_2
- [9] Wei Z., Edge B.L., Dalrymple R.A. et al. Modeling of wave energy converters by GPUSPH and Project Chrono. *Ocean Eng.*, 2019, vol. 183, pp. 332–349, doi: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.04.029>
- [10] Martínez-Estévez I., Domínguez J.M., Tagliaferro B. et al. Coupling of an SPH-based solver with a multiphysics library. *Comput. Phys. Commun.*, 2023, vol. 283, paper 108581. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2022.108581>
- [11] Тушев О.Н., Щеглов Г.А. Численное моделирование аэроупругой динамики воздушного старта при наличии случайного разброса параметров аэродинамического нагружения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2015, № 1, с. 22–34, doi: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2015-1-22-34>
- [12] Huynh B.H., Tjahjowidodo T., Zhong Z.W. et al. Nonlinearly enhanced vortex induced vibrations for energy harvesting. *IEEE Int. Conf. on AIM*, 2015, pp. 91–96, doi: <https://doi.org/10.1109/AIM.2015.7222514>
- [13] Жукаускас А., Улинскас Р., Катинас В. *Гидродинамика и вибрация обтекаемых пучков труб*. Вильнюс, Москлас, 1984. 312 с.
- [14] Widiyanti, Puspitasari P., Suyetno A. The development of instructional materials mechanics of materials using solidworks simulation software. *AIP Conf. Proc.*, 2016, vol. 1778, art. 030058, doi: <https://doi.org/10.1063/1.4965792>
- [15] Саусвелл Р.В. *Введение в теорию упругости для инженеров и физиков*. Москва, Иностранная литература, 1948. 676 с.

References

- [1] Bungartz H.-J., Schafer M., eds. *Fluid-structure interaction*. Springer, 2006. 394 p.
- [2] Morozov V.I., Ponomarev A.T., Rysev O.V. *Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh aerouprugikh system* [Mathematical modeling of complex aeroelastic systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1995. 735 p. (In Russ.).

- [3] Garbuz M., Klimina L., Samsonov V. Wind driven plantigrade machine capable of moving against the flow. *Appl. Math. Model.*, 2022, vol. 110, pp. 17–27, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.05.035>
- [4] González E., Yáñez D.J., Del Pozo S. et al. Optimizing bladeless wind turbines: morphological analysis and lock-in range variations. *Appl. Sci.*, 2024, vol. 14, no. 7, art. 2815, doi: <https://doi.org/10.3390/app14072815>
- [5] Shcheglov G.A., Dergachev S.A. Numerical simulation of the mechanism motion dynamics in the incompressible medium flow using the vortex loop method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2024, no. 1, pp. 21–30. EDN: FQAXEG (in Russ.).
- [6] Co-simulation with Hexagon CAE solutions. *www.cradle-cfd.com: website*. URL: <https://www.cradle-cfd.com/product/msc.html> (accessed: 19.06.2023)
- [7] ProjectChrono. An open source multi-physics simulation engine. *projectchrono.org: website*. URL: <https://projectchrono.org> (accessed: 19.06.2023)
- [8] Tasora A., Serban R., Mazhar H. et al. Chrono: An open source multi-physics dynamics engine. *HPCSE 2015*. Springer, 2015, pp. 19–49, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-40361-8_2
- [9] Wei Z., Edge B.L., Dalrymple R.A. et al. Modeling of wave energy converters by GPUSPH and Project Chrono. *Ocean Eng.*, 2019, vol. 183, pp. 332–349, doi: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.04.029>
- [10] Martínez-Estévez I., Domínguez J.M., Tagliafierro B. et al. Coupling of an SPH-based solver with a multiphysics library. *Comput. Phys. Commun.*, 2023, vol. 283, paper 108581. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2022.108581>
- [11] Tushev O.N., Shcheglov G.A. Numerical simulation of air launch aeroelasticity with random variation of aerodynamic loading parameters. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostroyeniye* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mechan. Eng.], 2015, no. 1, pp. 22–34, doi: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2015-1-22-34> (in Russ.).
- [12] Huynh B.H., Tjahjowidodo T., Zhong Z.W. et al. Nonlinearly enhanced vortex induced vibrations for energy harvesting. *IEEE Int. Conf. on AIM*, 2015, pp. 91–96, doi: <https://doi.org/10.1109/AIM.2015.7222514>
- [13] Zhukauskas A., Ulinskas R., Katinas V. *Gidrodinamika i vibratsiya obtekaemykh puchkov trub* [Hydrodynamics and vibration of streamlined bundles of pipes]. Vilnius, Mosklas Publ., 1984. 312 p. (In Russ.).
- [14] Widiyanti, Puspitasari P., Suyetno A. The development of instructional materials mechanics of materials using solidworks simulation software. *AIP Conf. Proc.*, 2016, vol. 1778, art. 030058, doi: <https://doi.org/10.1063/1.4965792>
- [15] Southwell R.V. *An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists*. Clarendon Press, 1936. 509 p. (Russ. ed.: *Vvedenie v teoriyu uprugosti dlya inzhenerov i fizikov*. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1948. 676 p.)

Статья поступила в редакцию 28.06.2025

Информация об авторе

ДЕРГАЧЕВ Сергей Александрович — кандидат технических наук, ассистент кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: sadergachev@mail.ru).

Information about the author

DERGACHEV Sergey Alexandrovich — Candidate of Science (Eng.), Assistant, Aerospace Systems Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: sadergachev@mail.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Дергачев С.А. Методика моделирования колебаний подвижной балки с применением библиотеки Project Chrono. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 3, с. 3–13.

Please cite this article in English as:

Dergachev S.A. Methodology for modeling oscillations of a moving beam using the Project Chrono library. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 3, pp. 3–13.