

Авиационная и ракетно-космическая техника

УДК 629.7.042.2.001.24:622.998

Математическое моделирование теплового состояния герметизированных отсеков самолета

В.Н. Николаев

ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С.А. Чаплыгина»

Mathematical modeling of the thermal condition of pressurized aircraft compartments

V.N. Nikolayev

Chaplygin Siberian Scientific Research Institute of Aviation

Разработан метод определения теплового состояния приборных герметизированных отсеков самолета, основанный на использовании математической модели их теплового состояния. Математическая модель отсека с системой кондиционирования воздуха представлена системой уравнений сотовой теплоизолированной обшивки, обыкновенных дифференциальных уравнений конвективного теплообмена внутренней поверхности теплоизоляции обшивки и конструкций отсека, бортового оборудования, воздуха и переноса энтальпии из системы кондиционирования воздуха. При параметрической идентификации параметров отсеков и системы кондиционирования разработаны методы решения прямой и обратной задач теплообмена и определения доверительных интервалов оценок параметрической идентификации. Доверительные интервалы оценок коэффициентов нелинейной математической модели теплового состояния отсека определены по методу проецирования совместной доверительной области оценок на координатные оси пространства коэффициентов. Исследования проведены в соответствии с Нормами летной годности. Получены потребные характеристики системы кондиционирования воздуха и толщины сотовой теплоизоляции отсека.

EDN: DOILLK, <https://elibrary/doiilk>

Ключевые слова: тепловое состояние отсека, математическая модель, параболическая краевая задача, разрывные коэффициенты, интегральное усреднение, стохастические дифференциальные уравнения

A method for determining the thermal state of the instrument pressurized compartments of the aircraft, based on the use of a mathematical model of the thermal state of the compartments, has been developed. The mathematical model of the air-conditioning compartment is represented by a system of equations of honeycomb thermally insulated skin, ordinary differential equations of convective heat transfer of the inner surface of the thermal insulation of the skin and compartment structures, on-board equipment, air and enthalpy transfer from the air conditioning system. With parametric identification of the parameters of compartments and the air conditioning system, methods developed for solving the direct and

inverse problem of heat transfer and determining confidence intervals for parametric identification estimates. Confidence intervals for estimating the coefficients of the nonlinear mathematical model of the thermal state of the compartment are determined by the method of projecting the joint confidence region of estimates onto the coordinate axes of the coefficient space. The research is carried out in accordance with the Airworthiness Standards. The required characteristics of the air conditioning system and the thickness of the honeycomb thermal insulation of the compartment were obtained.

EDN: DOILLK, [https://elibrary/doillk](https://elibrary.doillk)

Keywords: thermal state of the compartment, mathematical model, parabolic boundary value problem, discontinuous coefficients, integral averaging, stochastic differential equations

Математическая модель теплового состояния герметизированных отсеков сверхзвукового пассажирского самолета описывает процесс передачи теплоты по конструкциям самолета, тепловыделения или теплопоглощения бортовым оборудованием, системами кондиционирования воздуха (СКВ) и вентиляции [1–4].

Параметрическая идентификация математической модели теплового состояния герметизированных отсеков относится к решению некорректных задач механики вязкоупругих сред [5] при использовании методов численного анализа математических моделей [6].

Применение теплоизолированных сотовых конструкций фюзеляжа является перспективным направлением в области авиационной техники [1, 7, 8].

Критерии оптимизации теплофизических характеристик герметизированных отсеков определены в соответствии с Нормами летной годности АП 25 [9].

Цель исследования — разработка метода оптимизации толщины теплоизолированных сотовых конструкций фюзеляжа, температуры и расхода воздуха систем кондиционирования и вентиляции герметизированных отсеков самолета.

Математическая модель теплового состояния отсеков самолета. Для решения задачи оптимизации толщины сотовых конструкций в герметизированных отсеках необходимо определить тепловое состояние отсеков. Математическую модель теплоизолированных приборных герметизированных отсеков с СКВ представим уравнениями теплообмена между обшивкой и воздухом в теплоизолированных отсеках с учетом теплоотдачи бортового оборудования, а также переноса теплоты из СКВ в отсеки.

Уравнения теплообмена многослойной гетерогенной сотовой конструкции обшивки для граничных условий третьего рода запишем в

виде уравнений теплопроводности, описывающих процесс передачи теплоты в гетерогенной структуре. Теплопроводность гетерогенной структуры будет равна таковой для сотовой конструкции, вычисленной для граничных условий первого рода параболической краевой задачи с разрывными коэффициентами.

Указанные уравнения имеют следующий вид [10, 11]:

$$C_{cv}(x)T_{cvt} = (\lambda_{cv}(x)T_{cvx})_x, \quad (1)$$

$$0 < x < l_{hon}, \quad 0 < t \leq t_k;$$

$$\lambda_{cv}(x)F_{cv}^{in}T_{cvx} = \alpha_{cv}^{out}(t)F_{cv}^{in}[T_{cv}^{out}(t, x) - T_e(t)] + Q_{cv}^{out}, \quad x = 0; \quad (2)$$

$$\lambda_{cv}(x)F_{cv}^{in}T_{cvx} = \alpha_{cv}^{in}(t)F_{cv}^{in}[T_{air}^{pr}(t) - T_{cv}^{in}(t, x)] + Q_{cv}^{in}, \quad x = l; \quad (3)$$

$$T_{cv}(0, x) = T_0(x), \quad 0 < x < l_{hon}, \quad (4)$$

$$C_{cv}(x) = \begin{cases} C_{hon} & \text{при } x \in hon; \\ C_{air} & \text{при } x \in air; \end{cases}$$

$$\lambda_{cv}(x) = \begin{cases} \lambda_{hon} & \text{при } x \in hon; \\ \lambda_{air} & \text{при } x \in air, \end{cases}$$

где $C_{cv}(x)$ — объемная теплоемкость сотовой конструкции обшивки, определяемая теплоемкостями дюралюминия C_{hon} и воздуха C_{air} ; T_{cvt} и T_{cvx} — первая производная температуры сотовой конструкции T_{cv} по времени t и x ; λ_{cv} — теплопроводность сотовой конструкции, определяемая теплопроводностями дюралюминия λ_{hon} и воздуха λ_{air} ; l_{hon} — толщина сотовой конструкции; $(T_{cvx})_x$ — вторая производная T_{cv} по x ; F_{cv}^{in} — площадь сотовой конструкции при наружном и внутреннем теплообмене; α_{cv}^{out} и α_{cv}^{in} — коэффициент теплоотдачи наружной и внутренней поверхности сотовой конструкции; T_{cv}^{out} и T_{cv}^{in} — температура наружной и внутренней поверхности сотовой конструкции; T_e — температура восстанов-

ления; Q_{cv}^{out} и Q_{cv}^{in} — тепловая энергия внешних и внутренних источников; T_{air}^{pr} — температура воздушной среды в герметизированном отсеке или его части; l — толщина сотовой конструкции.

Вынужденная конвекция снаружи герметизированного отсека и граничные условия третьего рода. Коэффициент теплоотдачи наружной поверхности сотовой конструкции определяется следующими выражениями [10]:

• для ламинарного пограничного слоя при числе Рейнольдса $Re_{out}^* < 1 \cdot 10^6$

$$\alpha_{cv}^{out} = 3,26 (Re_{out}^*)^{-0,5} (Pr_{out}^*)^{-0,666} \rho_v^* c_p^* V_{air}^{out};$$

• для турбулентного пограничного слоя при числе Рейнольдса $1 \cdot 10^6 \leq Re_{out}^* \leq 1 \cdot 10^9$

$$\alpha_{cv}^{out} = 0,181 (\lg Re_{out}^*)^{-2,584} (Pr_{out}^*)^{-2/3} \rho_v^* c_p^* V_{air}^{out},$$

где Pr_{out}^* — число Прандтля при температуре воздуха T^* ; ρ_v^* и c_p^* — плотность и удельная теплоемкость воздуха за бортом при температуре T^* ; V_{air}^{out} — воздушная скорость полета.

Температура воздуха

$$T^* = T_{air}^{out} + 0,72 (T_e - T_{air}^{out}),$$

где T_{air}^{out} — температура воздуха за бортом за пределами теплового пограничного слоя.

Число Рейнольдса

$$Re_{out}^* = V_{air}^{out} \rho_v^* L_{cv}^{out} / \mu_{air}^*.$$

Здесь L_{cv}^{out} — характерный размер для наружной поверхности обшивки, принимаемый равным расстоянию от носовой точки фюзеляжа до середины рассчитываемого отсека или его части; μ_{air}^* — динамическая вязкость воздуха,

$$\mu_{air}^* = 0,1222229 \cdot 10^{-6} + 0,682674 \cdot 10^{-8} T^* - 0,313155 \cdot 10^{-11} (T^*)^2. \quad (5)$$

Критерий Прандтля

$$Pr_{out}^* = c_p^* \mu_{air}^* / \lambda_{air}^*,$$

где λ_{air}^* — теплопроводность воздуха,

$$\lambda_{air}^* = 0,141483 \cdot 10^{-2} + 0,896161 \cdot 10^{-4} T^* - 0,204759 \cdot 10^{-7} (T^*)^2. \quad (6)$$

Плотность воздуха за бортом

$$\rho_v^* = 3,4826 \cdot 10^{-3} p_{air}^{out} / T^*,$$

где p_{air}^{out} — давление воздуха за бортом.

Температура восстановления

$$T_e = T_{air}^{out} [1 + M^2 r (k - 1) / 2],$$

где M — число Маха на внешней границе пограничного слоя; r — коэффициент восстановления температуры, для ламинарного пограничного слоя $r = \sqrt{Pr_{out}^*}$, для турбулентного — $r = \sqrt[3]{Pr_{out}^*}$; k — отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме, $k = c_p / c_v$.

Вынужденная конвекция в герметизированном отсеке и граничные условия третьего рода. Коэффициент теплоотдачи внутренней поверхности сотовой конструкции определяется следующими выражениями [11]:

• для ламинарного пограничного слоя при числе Рейнольдса $Re_{in} < 4 \cdot 10^4$

$$\alpha_{cv}^{in} = 0,66 \lambda_{air} Re_{in}^{0,5} Pr_{in}^{0,43} / L_{cv}^{in}; \quad (7)$$

• для ламинарного пограничного слоя при числе Рейнольдса $Re_{in} \geq 4 \cdot 10^8$

$$\alpha_{cv}^{in} = 0,037 \lambda_{air} Re_{in}^{0,8} Pr_{in}^{0,43} / L_{cv}^{in}, \quad (8)$$

где L_{cv}^{in} — характерный размер, принимаемый, как и L_{cv}^{out} , равным расстоянию от начала отсека до середины его рассчитываемой части.

Число Рейнольдса

$$Re_{in} = \rho_{air} W_{air} L_{cvin} / \mu_{air}, \quad (9)$$

где ρ_{air} и W_{air} — плотность и скорость потока воздуха в отсеке; $\rho_{air} W_{air} = J_W$ — массовая скорость, принимаемая по результатам эксперимента.

Теплопроводность λ_{air} и динамическая вязкость μ_{in} в формулах (7)–(9) вычисляются по выражениям (6) и (5) соответственно при температуре воздуха в отсеке T_{air} .

Процесс переноса теплоты через герметизированную теплоизолированную перегородку между герметизированным теплоизолированным и негерметизированным нетеплоизолированным отсеками представим в виде одномерных уравнений теплопроводности

$$C_{bl}(x) T_{blt} = (\lambda_{bl}(x) T_{blx})_x, \quad (10)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq t_k;$$

$$\lambda_{bl}(x) F_{bl}^{upr} T_{blx} = \alpha_{bl}^{upr}(t) F_{bl}^{upr} [T_{bl}(t) - T_{air}^{upr}(t, x)], \quad x = 0; \quad (11)$$

$$\lambda_{bl}(x) F_{bl}^{pr} T_{blx} = \alpha_{bl}^{pr}(t) F_{bl}^{pr} [T_{air}^{pr}(t) - T_{bl}(t, x)], \quad x = l; \quad (12)$$

$$T_{bl}(0, x) = T_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (13)$$

где C_{bl} — объемная теплоемкость перегородки; T_{blt} — первая производная температуры перегородки T_{bl} по времени t ; T_{blx} и $(T_{blx})_x$ — первая и вторая производная T_{bl} по x ; λ_{bl} — теплопроводность перегородки; F_{bl}^{upr} и F_{bl}^{pr} — площадь перегородки, участвующая в конвективном теплообмене со стороны негерметизированного и герметизированного отсека; α_{bl}^{upr} и α_{bl}^{pr} — коэффициент теплоотдачи поверхности перегородки со стороны негерметизированного и герметизированного отсека; T_{air}^{upr} — температура воздушной среды в негерметизированном отсеке или его части; T_{air}^{pr} — температура воздушной среды в герметизированном отсеке или его части.

Процесс теплопередачи бортового оборудования представим в виде обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего конвективно-радиационный теплообмен с окружающими конструкциями:

$$T_{mt} = \alpha_{airm}(t) F_{airm} / C_m [T_{air}^{pr}(t) - T_m] + \sum_m g_{jm} / C_m T_j^A(t) / T_{ms}^A - \frac{c_0 \varepsilon_m F_m}{C_m T_m^A} + \frac{Q_m}{C_m}, \quad (14)$$

где T_{mt} — первая производная температуры m -го бортового оборудования T_m по времени t ; α_{airm} — коэффициент теплоотдачи m -го бортового оборудования; F_{airm} — площадь m -го бортового оборудования при конвективном теплообмене; C_m — теплоемкость m -го бортового оборудования; g_{jm} — коэффициент радиационного теплообмена системы j -й элемент отсека — m -й блок бортового оборудования; T_j — температура j -го элемента отсека; T_{ms} — эталонная температура; c_0 — постоянная Стефана — Больцмана; ε_m — коэффициент черноты излучения m -го блока; F_m — площадь m -го бортового оборудования при радиационном теплообмене; Q_m — энергия тепловыделения или теплопоглощения m -м бортовым оборудованием от системы кондиционирования и преобразованная из электрической энергии.

Процесс теплоотдачи конструкций отсеков представим в виде обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего конвективно-радиационный теплообмен

$$T_{rt} = \alpha_{airr}(t) F_{airr} / C_r [T_{air}^{pr}(t) - T_r] + \sum_r g_{jr} / C_r T_j^A(t) / T_{ms}^A - c_0 \varepsilon_r F_r / C_r T_r^A + Q_r / C_r, \quad (15)$$

где T_{rt} — первая производная температуры r -й конструкции T_r по времени t ; α_{airr} , C_r и Q_r — коэффициент теплоотдачи, теплоемкость и энергия тепловыделения r -й конструкции соответственно; F_{airr} — площадь r -й конструкции при конвективном теплообмене; g_{jr} — коэффициент радиационного теплообмена системы j -й элемент отсека — r -я конструкция; ε_r — коэффициент черноты излучения r -й конструкции; F_r — площадь r -й конструкции при радиационном теплообмене.

Теплообмен воздушной среды в теплоизолированном герметизированном отсеке представим в виде обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего конвективный теплообмен между внутренней поверхностью теплоизоляции обшивки, бортового оборудования, конструкций и воздухом в отсеке, а также перенос теплоты из системы кондиционирования воздуха в отсек:

$$T_{air}^{prt} = \alpha_{cv}^{in}(t) F_{cv}^{inpr} / C_{air} [T_{cv}^{inpr}(l_{cv}^{pr}, t) - T_{air}^{pr}] + \alpha_{blpr}(t) F_{bl}^{pr} / C_{air} [T_{bl}^{pr}(l_{bl}^{pr}, t) - T_{airpr}] + \sum_r \{ \alpha_{airr}(t) F_{airr} / C_{air} [T_r(t) - T_{air}^{pr}] + Q_r / C_{air} \} + \sum_p \{ \alpha_{air}^{pr}(t) F_{air}^{pr} / C_{air} [T_p(t) - T_{air}^{pr}] + Q_p / C_{air} \} + \sum_m \{ \alpha_{airm}(t) F_{airm} / C_{air} [T_m(t) - T_{airpr}] + Q_m / C_{air} \} + \sum_j \{ \alpha_{airj}(t) F_{airj} / C_{air} [T_j(t) - T_{air}^{pr}] + c_p G_{stm} / C_{air} (T_{stm} - T_{air}^{pr}) \}, \quad (16)$$

где T_{air}^{prt} — первая производная температуры T_{air} по времени t ; T_{cv}^{inpr} — температура внутренней поверхности сотовой конструкции обшивки; G_{stm} и T_{stm} — расход и температура воздуха, вытекающего из СКВ и (или) из системы обеспечения теплового режима.

Теплоемкость воздуха

$$C_{air} = c_p (\rho_{air} G_{stm} \Delta t + \rho_{air} V_{air}),$$

где c_p — удельная теплоемкость воздуха; Δt — интервал дискретизации времени при решении системы дифференциальных уравнений; V_{air} — объем воздуха в отсеке.

Коэффициенты теплоотдачи поверхностей α_{cv}^{out} , α_{cv}^{in} , α_{bl}^{upr} , α_{bl}^{pr} , α_{airm} и α_{airr} в уравнениях (2), (3), (11), (12), (14)–(16) вычисляют-

ся с помощью методов, описанных в работах [10–13].

Коэффициенты радиационного теплообмена в уравнениях (14) и (15) определяются методом Монте-Карло [14].

Алгоритм решения прямой задачи теплового состояния сотовой конструкции обшивки. Для решения прямой задачи теплового состояния сотовой конструкции фюзеляжа рассмотрим математическую модель теплообмена в гетерогенной структуре (1)–(4), (10)–(13) как параболическую краевую задачу с разрывными коэффициентами. Описание и физические свойства гетерогенных структур приведены в работе [15].

Теплообмен в гетерогенной структуре описывается параболическим уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (17)$$

где T — температура сотовой конструкции; a_{ij} — коэффициенты, являющиеся липшиц-непрерывными по x функциями в подобластях $G^{(k)}$, $k=1, \dots, M$; $Q_T = (0, t_k)G$.

Применительно к сотовой панели коэффициенты a_{ij} представляют собой коэффициенты температуропроводности

$$a_{ij}(t, x) = \begin{cases} \lambda_{cv}(x) & \text{при } i = j; \\ C_{cv}(x) & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Коэффициенты a_{ij} разделяются поверхностями в областях Γ , которые в каждой ячейке являются границами раздела между воздухом и каркасом из углепластика:

$$\mu \sum_i \xi_i^2 < \sum_{i,j} a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j < \eta \sum_i \xi_i^2, \quad (18)$$

где μ — непрерывная функция температуры воздуха на границе раздела между воздухом и каркасом на $[0, T]$; ξ_i и ξ_j — нормальные случайные величины сетки с узлами $t_i = t + ih$ ($i = 0, \dots, N$) и $t_j = t + jh$ ($j = 0, \dots, M$); η — непрерывная функция температуры поверхности каркаса на границе раздела между воздухом и каркасом на $[0, T]$.

Также искомая функция должна удовлетворять условию

$$T|_{t=0} = \varphi(x). \quad (19)$$

В работе [16] доказано существование обобщенных решений краевых задач (17) и (18).

Причем эти решения можно аппроксимировать решениями соответствующих краевых задач с коэффициентами, которые являются приближениями исходных разрывных коэффициентов. Например, можно получить приближенное решение исходной задачи, решая задачу со сглаженными коэффициентами.

Будем статистически оценивать решение задачи со сглаженными коэффициентами с помощью метода, основанного на численном решении стохастических дифференциальных уравнений, получая оценки приближенного решения исходной краевой задачи с разрывными коэффициентами.

Для сглаживания коэффициентов будем использовать интегральное усреднение [16, 17]

$$f^{(p)}(x) = \rho^{-3} \int_{|x-y| < \rho} \omega_p(|x-y|) f(y) dy, \quad (20)$$

где ρ — радиус усреднения; ω_p — бесконечно дифференцируемое финитное ядро, такое, что $\omega_p(|\xi|) = 0$ при $|\xi| \geq \rho$ и

$$\int_{|\xi| \leq \rho} \omega_p(|\xi|) d\xi = 1.$$

Здесь и далее символ $|a|$ обозначает евклидову норму вектора a .

Оценка решения краевой задачи для параболического уравнения с разрывными коэффициентами на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Решение параболического уравнения можно представить в виде математического ожидания функционала решения стохастических дифференциальных уравнений [17]. Это можно использовать для получения статистических оценок решений параболических уравнений с помощью численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Приближенное решение задачи таким способом может быть получено в одной или нескольких точках внутри области, что часто бывает достаточным для практического применения. При этом нет необходимости строить сетку по пространственным переменным и решать большие системы линейных алгебраических уравнений. Метод статистического моделирования легко распараллеливается с высокой эффективностью. Поэтому для решения задачи можно использовать суперкомпьютерную технику. Этот метод [18] применен для оценки решения параболического уравнения со сглажен-

ными коэффициентами, полученными на основе интегрального усреднения (20).

Приближенное решение уравнения (17) будем находить путем решения уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^{(p)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (21)$$

где $a_{ij}^{(p)}$ — сглаженные коэффициенты уравнения (17) в окрестности Γ .

Граничное условие, соответствующее сглаженным коэффициентам, имеет вид

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij}^{(p)} n_i \frac{\partial T}{\partial x_j} + \eta(t, x) T + \gamma(t, x) \right) \Big|_{x \in \partial G} = 0. \quad (22)$$

Для точки $(t, x) \in Q_T$ определяем случайный процесс X_* , который начинает движение из точки x в момент времени t и является решением векторного стохастического дифференциального уравнения [19, 20]

$$X_v = x + \int_{T-t}^v \mathbf{b}(X_r, r) dr + \int_{T-t}^v \boldsymbol{\sigma}(X_r, r) dW_r + \int_{T-t}^v \mathbf{n}^A(X_r, r) d|k_r|,$$

где W_* — d -мерный винеровский процесс [16]; $\mathbf{n}^A$ — нормализованный вектор внутренней конормали, т. е. $\mathbf{n}^A = \mathbf{A}\mathbf{n}/|\mathbf{A}\mathbf{n}|$;

$$|k_v| = \int_t^v 1_{\partial G}(X_r) d|k_r|$$

— неотрицательный случайный процесс, который растет только тогда, когда процесс X_* достигает границы; $\boldsymbol{\sigma}$ — матрица размера 3×3 , такая, что, $2\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^{(p)}$,

$$\mathbf{A}^{(p)} = (a_{ij}^{(p)});$$

$$\mathbf{b} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i1}^{(p)}}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i2}^{(p)}}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_{i3}^{(p)}}{\partial x_i} \right)^T.$$

Введем следующие обозначения: E_{tx} — математическое ожидание относительно вероятностной меры P_x , соответствующей случайному процессу, исходящему из точки x в момент времени t ; 1_S — функция множества S .

Таким образом, можно получить оценки решения задачи (21), (22), (19) путем численного моделирования траектории процесса X_* . Согласно модифицированному методу Эйлера, приближенные траектории X_* рассчитываются по формуле [21]

$$x_{i+1} = x_i + hb(x_i, t_i) + \sqrt{h} \boldsymbol{\sigma}(x_i, t_i) \zeta_i + (\Delta_{i+1} K) \mathbf{n}_i^A,$$

$$t_{i+1} = t_i + h;$$

$$\Delta_{i+1} K = \left[d(x_i + hb(x_i, t_i) + \sqrt{h} \boldsymbol{\sigma}(x_i, t_i) \zeta_i) \right]^-;$$

$$K = x_i + hb(x_i, t_i) + \sqrt{h} \boldsymbol{\sigma}(x_i, t_i) \zeta_i.$$

Здесь h — шаг интегрирования; $\mathbf{n}_i^A$ — единичный вектор внутренней конормали в точке x_i , если x_i находится на ∂G ; $[a]^- = \max\{0, -a\}$; $d(x)$ — неположительная вещественная функция, удовлетворяющая для любой точки $x \notin G$ уравнению

$$x = \rho(x) + d(x) \mathbf{n}^A(\rho(x)),$$

где $\rho(x)$ — проекция точки $x \notin G$ на $\bar{G}^*$ в направлении конормали; $\mathbf{n}^A(\rho(x))$ — единичный вектор внутренней конормали в $\rho(x)$; $d(x) = 0$, если $x \in \bar{G}$.

Чтобы получить приближенное решение (оценку) задачи (21), (22), (19), необходимо вычислить определенные на сетке по времени функции

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0; \\ \exp \left[\sum_{k=0}^{i-1} \eta(t_k, x_k) 1_{\partial G}(x_k) \Delta_{k+1} K \right] & \text{при } i \geq 1; \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 0; \\ \sum_{k=0}^{i-1} [\gamma(t_k, x_k) 1_{\partial G}(x_k) \Delta_{k+1} K] y_k & \text{при } i \geq 1. \end{cases}$$

Оценка решения задачи (13), (14), (8) имеет вид

$$\hat{T}(t, x) = E_{(t_k - t)x} [\varphi(x_N) y_N + z_N],$$

где

$$N = \frac{t_k - t}{h}.$$

Алгоритм решения прямой задачи теплового состояния внутренних элементов отсеков. Уравнения (14)–(16), описывающие теплообмен внутренних элементов отсеков, составляют жесткую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Эту систему уравнений в общем виде можно записать как

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= F(\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\Theta})), \quad t \in (0, t_t); \\ \mathbf{Y}_t &= \mathbf{Y}_0, F, \quad \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^S; \quad \boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^r, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathbf{Y}$ — вектор параметров теплового состояния отсека, $\mathbf{Y} = [T_{cv}, T_{bl}, T_m, T_r, \dots]^T$; $\mathbf{Y}_t$ — вектор первых производных вектора $\mathbf{Y}$ по време-

ни t ; $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_5]^T$ — вектор коэффициентов модели.

Для решения системы уравнений (23) воспользуемся численной схемой Розенброка второго порядка аппроксимации для неавтономных систем [22]

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + a\mathbf{K}_1 + (1-a)\mathbf{K}_2;$$

$$\mathbf{K}_1 = h(\mathbf{I} - ah\mathbf{\Psi}_Y(\mathbf{Y}_n, t_n, \mathbf{\Theta}))^{-1} \mathbf{\Psi}(\mathbf{Y}_n, t_n + ah, \mathbf{\Theta});$$

$$\mathbf{K}_2 = h(\mathbf{I} - ah\mathbf{\Psi}_Y(\mathbf{Y}_n, t_n, \mathbf{\Theta}))^{-1} \times \\ \times \mathbf{\Psi}(\mathbf{Y}_n, t_n + a\mathbf{K}_1, t_n + 2ah, \mathbf{\Theta});$$

$$a = 1 - 1/\sqrt{2},$$

где $\mathbf{Y}_n$ и $\mathbf{Y}_{n+1}$ — решение системы, полученной на n -й и $(n+1)$ -й итерациях; $\mathbf{\Psi}$ — правая часть системы; $\mathbf{\Psi}_Y$ — матрица Якоби; $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Алгоритм параметрической идентификации математической модели теплового состояния сотовой конструкции обшивки. Решение обратной задачи, т. е. оценивание коэффициентов $\mathbf{\Theta}$ модели (1)–(4), (10)–(13), сводится к минимизации суммы квадратов невязок между заданными по принятому критерию значениями $\hat{\mathbf{Y}}$ и соответствующими значениями $\hat{\mathbf{Y}}(t, \mathbf{\Theta})$, полученными в ходе расчетов по уравнениям модели

$$\Phi(\mathbf{\Theta}) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(t_k, \mathbf{\Theta}))^T (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k(t_k, \mathbf{\Theta})), \quad (24)$$

где t_k — k -й момент времени, $k = 1, \dots, N$.

Будем применять итерационный алгоритм минимизации, использующий производные функции $\Phi(\mathbf{\Theta})$, для чего воспользуемся вариантом стохастического квазиградиентного алгоритма с переменной метрикой [23], в котором приближения к точке минимума строятся по правилу

$$\mathbf{\Theta}^{k+1} = \mathbf{\Theta}^k - \rho_k \mathbf{H}^k \nabla^k \Phi, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\mathbf{H}^k$ — случайная квадратная матрица размера $l \times l$; $\nabla^k \Phi$ — градиент целевой функции в точке $\mathbf{\Theta}^k$; ρ_k — параметр шага.

Последовательность матриц $\mathbf{H}^k$ вычисляется по схеме

$$\mathbf{H}^0 = \mathbf{I};$$

$$\mathbf{H}^{k+1} + (\mathbf{I} - \mu_k \nabla^{k+1} \Phi \cdot (\Delta^{k+1} \mathbf{\Theta})^T) \mathbf{H}^k;$$

$$\Delta^{k+1} \mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}^{k+1} - \mathbf{\Theta}^k.$$

Здесь μ_k — параметр, выбираемый из соотношения

$$\mu_k = \mu / |\nabla^{k+1} \Phi| \cdot |\Delta^{k+1} \mathbf{\Theta}|,$$

где μ — константа, $0 < \mu < 1$.

На каждом шаге алгоритма происходит автоматическая подстройка параметра шага ρ_k . Если $\Phi(\mathbf{\Theta}^{k+1}) > \Phi(\mathbf{\Theta}^k)$, то $\rho_{k+1} = \rho_k / \gamma$, где $\gamma > 1$ — фиксированный параметр. Если $\Phi(\mathbf{\Theta}^{k+1}) < \Phi(\mathbf{\Theta}^k)$, то выполняется следующая последовательность действий

$$\rho_{ki} = \rho_k^i \gamma; \quad \mathbf{\Theta}^{(k+1)i} = \mathbf{\Theta}^k - \rho_{ki} \mathbf{H}^k \nabla^k \Phi$$

и вычисление

$$\Phi(\mathbf{\Theta}^{(k+1)i}), \quad i = 0, 1, \dots$$

Эти действия проводятся до тех пор, пока убывает функция $\Phi(\mathbf{\Theta})$, и выполняются условия

$$\rho_{\min} \leq \rho_{ki} \leq \rho_{\max}, \quad i < i_{\max},$$

где $\rho_{\min}$ и $\rho_{\max}$ — минимальная и максимальная длина шага; $i_{\max}$ — заданное максимальное число итераций по увеличению шага.

Значения $\mathbf{\Theta}^{k+1}$ и ρ_{k+1} полагаются равными значениям $\mathbf{\Theta}^{(k+1)i}$ и ρ_{ki} , которые равны минимальному из полученных значений $\Phi(\mathbf{\Theta})$.

Алгоритм параметрической идентификации математической модели теплового состояния внутренних элементов отсеков. Тепловое состояние внутренних элементов отсеков описывают обыкновенные дифференциальные уравнения (14)–(16).

Как отмечено в работе [23], для минимизации функции (24) целесообразно использовать композицию метода наискорейшего спуска [24], квазиньютоновского метода Бroyдена — Флетчера — Гольдфарба — Шэнно [25] и метода Ньютона [26], реализуемые в соответствии с формулой

$$\mathbf{\Theta}_{j+1} = \mathbf{\Theta}_j + a_j \cdot S(\mathbf{\Theta}_j), \quad (25)$$

где a_j — коэффициент, характеризующий длину шага на j -й итерации; S — параметр, указывающий направление поиска вектора $\mathbf{\Theta}_0$ действительных значений коэффициентов $\mathbf{\Theta}$.

Очередное направление S поиска j -го вектора $\mathbf{\Theta}$ в этом алгоритме определяется из системы уравнений

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{\Theta}_j) \cdot S(\mathbf{\Theta}_j) = -\nabla \Phi(\mathbf{\Theta}_j), \quad (26)$$

где $\nabla^2 \Phi(\mathbf{\Theta}_j)$ — матрица Гессе размера $r \times r$, представляющая собой квадратную матрицу вторых частных производных функции Φ по

вектору Θ ; $\nabla\Phi(\Theta_j)$ — градиент функции Φ в текущей точке Θ_j .

Начальная матрица $\nabla^2\Phi(\Theta_j)$ в уравнении (26) принята единичной.

Для решения системы уравнений (26) матрицу $\nabla^2\Phi(\Theta_j)$ представляют в факторизованной форме

$$\nabla^2\Phi(\Theta_j) = L(\Theta_j)D(\Theta_j)L^T(\Theta_j), \quad (27)$$

где $L(\Theta_j)$ — нижнетреугольная матрица с единичной диагональю; $D(\Theta_j)$ — диагональная матрица.

Матрицы $L(\Theta_j)$ и $D(\Theta_j)$ получают разложением Холецкого матрицы $\nabla^2\Phi(\Theta_j)$ по алгоритму, описанному в работе [25].

Для минимизации функции (24) квазиньютоновским методом Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шэнно очередное направление поиска Θ_j определяют из системы уравнений (26).

Для оценивания матрицы Гессе вторых частных производных в этом алгоритме используют формулу Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шэнно [25].

В процессе минимизации с использованием квазиньютоновского алгоритма на каждой итерации требуются вычисления градиента функции $\nabla^2\Phi(\Theta_j)$. Компоненты градиента функции (26) определяют по формуле

$$\partial\Phi/\partial\vartheta_1 = 2 \sum_{k=1}^N (Y_k - \hat{Y}_k(t_k, \Theta))^T \partial\hat{Y}_k(t_k, \Theta) / \partial\vartheta_1, \quad (28)$$

где $\partial\hat{Y}_k(t_k, \Theta) / \partial\vartheta_1 = H_{1k}$ — производные от решения уравнений (14)–(16) по ϑ_1 , называемые функциями чувствительности [25].

Применение алгоритма (25)–(28) к системе (14)–(16) и функциям чувствительности

$$\begin{aligned} Y_{t\Theta} &= f_Y Y_\Theta + f_\Theta, \\ Y_\Theta(\Theta) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

требует вычисления на каждом шаге системы уравнений размера $S \times (r+1)$.

Здесь f_Y — матрица первых частных производных f по Y размера $S \times S$; f_Θ — матрица первых частных производных f по Θ размера $S \times r$.

Матрица системы (29) содержит на главной диагонали блоки $I - ahf_Y$, а в первых S -столбцах находятся элементы, содержащие производные f_{YY} и $f_{Y\Theta}$, где f_{YY} — матрица первых частных производных по Y -элементам матрицы f_Y размера $S \times S \times S$; $f_{Y\Theta}$ — матрица первых

частных производных по Θ элементов матрицы f_Y размер $f \times S \times r$.

Описанный алгоритм исследован путем численного моделирования для заданных (эталонных) значений вектора параметров режима полета $U = [\rho_V, V_{air}^{out}, T_e]^T$ (где ρ_V — плотность воздушной среды за бортом) и искомых коэффициентов Θ_0 , которым приводились в соответствие рассчитанные по выражениям (14)–(16) и зашумленные значения вектора измерений Y . Изучались устойчивость, скорость и точность сходимости алгоритма в зависимости от формы и точности задания исходных условий и других факторов. Критериями качества являлись значения функции невязки $\Phi(\Theta)$ последней итерации и величины $(\hat{\Theta}_j - \Theta_0)/\Theta_0$, определяющие неопределенности оценок коэффициентов $\hat{\Theta}$ относительно их действительных значений Θ_0 .

По результатам моделирования сделан вывод об удовлетворительной сходимости предложенного алгоритма. Конечные результаты незначительно зависят от неопределенностей задания начальных значений Θ_{int} .

Проверка адекватности построенной модели реальным процессам выполнена по методу анализа остатков [26] как для случая аддитивных случайных некоррелированных неопределенностей, распределенных по нормальному закону, так и для случая произвольных статистических свойств вектора неопределенностей.

Результаты проверки адекватности модели приведены на рис. 1.

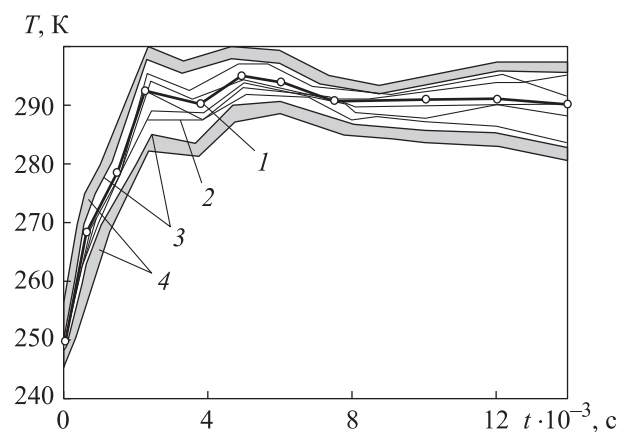


Рис. 1. Сопоставление расчетных и измеренных значений температуры T в отсеке самолета: 1 — реализация средних арифметических расчетных значений температуры; 2 — расчетные значения температуры; 3 — границы измеренных значений температуры; 4 — доверительные интервалы неопределенностей измерений

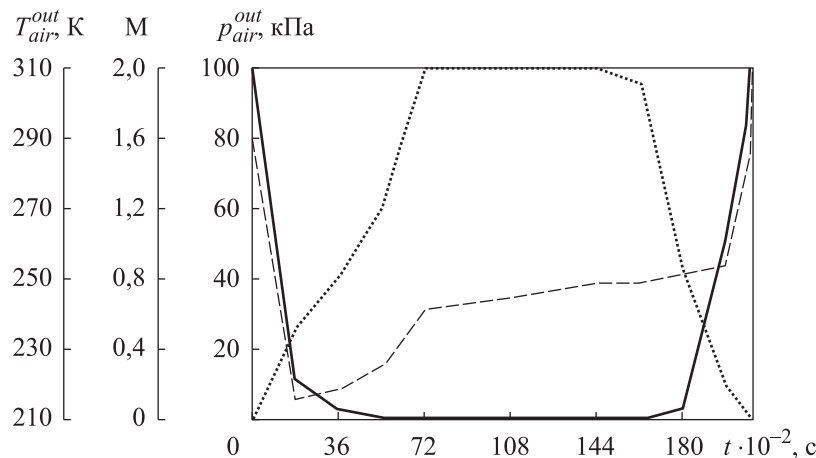


Рис. 2. Зависимости параметров режима полета и воздушной среды за бортом модели самолета от времени t :

— — давления воздуха за бортом за пределами теплового пограничного слоя p_{air}^{out} ;
 — числа Маха на внешней границе пограничного слоя M ;
 --- — температуры воздуха за бортом за пределами теплового пограничного слоя T_{air}^{out}

При определении неопределенностей получаемых оценок Θ введены [26] некоторые условные совместные доверительные интервалы $\Delta\Theta$ каждого из искоемых коэффициентов в виде проекций совместной доверительной области на соответствующие координатные оси пространства Θ , что эквивалентно замене эллиптической области на описанный вокруг нее параллелепипед.

Определение коэффициентов математической модели теплового состояния носового приборного продуваемого отсека. В качестве объекта исследования выступал сверхзвуковой самолет (рис. 2). Исследования проведены в соответствии с Нормами летной годности [9].

Параметры режима полета и воздушной среды за бортом модели применения самолета приведены на рис. 2.

Для холодного типа климата начальная температура воздуха должна соответствовать 283,15 K, для экстремального теплого сухого — 315,15 K, а температура всех элементов негерметизированных отсеков — 228,15 и 323,15 K соответственно. Температура воздуха на выходе из СКВ в полете не должна быть ниже 276,15 K и выше 333,15 K.

Расход воздуха СКВ в отсеке определяется линейной регрессией вида

$$G_{stm}(t) = \vartheta_{G0} + \vartheta_{G1} \rho_V(t) M^2(t),$$

где ϑ_{G0} , ϑ_{G1} — коэффициенты модели, которые будут оцениваться.

При оптимизации толщины сотовой конструкции обшивки, температуры и расхода воздуха СКВ в отсеке вектор коэффициентов модели имеет вид

$$\Theta = [l_{hon}, T_{stm}, \vartheta_{G0}, \vartheta_{G1}]^T$$

и включает в себя необходимые характеристики (значения толщина сотовой конструкции l_{hon} (м) температуры воздуха T_{stm} и T_{cl} (K) и коэффициенты ϑ_{G0} , ϑ_{G1} , описывающие расход воздуха СКВ G_{stm} (кг/с).

Оценки коэффициентов модели для температуры и расхода хладагента соответственно равны

$$\Theta = [0,06 \ 275,7 \ 0,002 \ 0,001]^T.$$

Вектор неопределенностей оценок коэффициентов Θ при доверительной вероятности $\beta = 0,99$

$$P_D = [0,008 \ 3,7 \ 0,0008 \ 0,00007]^T.$$

Выводы

1. Предложен теоретический метод определения требуемых значений толщины теплоизоляции в приборных герметизированных теплоизолированных отсеках с СКВ на основе разработанной математической модели теплового состояния отсеков сверхзвукового самолета.

2. В качестве методов параметрической идентификации модели теплового состояния отсеков при проектировании предложено применять композицию метода наискорейшего

спуска, метода Ньютона и квазиньютоновского метода Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шэнно, для решения прямой задачи сотовых конструкций — метод, основанный на численном решении стохастических дифференциальных уравнений, а для решения жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений — неявный метод Розенброка второго порядка.

3. В качестве методов параметрической идентификации модели теплового состояния

отсеков при проектировании предложено использовать вариант стохастического квазиградиентного алгоритма с переменной метрикой и композицию метода наискорейшего спуска, метода Ньютона и квазиньютоновского метода Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шэнно.

4. Проведена проверка адекватности модели по анализу остатков.

5. Исследования проведены в соответствии с Нормами летной годности [9].

Литература

- [1] Latsuzbaya V., Middendorf P., Völkle D. et al. Improving the thermal properties of aircraft cabin interiors with the integration of vacuum insulation panels. *CEAS Aeronaut. J.*, 2022, vol. 13, no. 6, pp. 705–718, doi: <https://doi.org/10.1007/s13272-022-00590-6>
- [2] Алексеев В.А., Малоземов В.В. *Обеспечение теплового режима радиоэлектронного оборудования космических аппаратов*. Москва, МАИ, 2001. 51 с.
- [3] Meseguer J., Perez-Grande I., Sanz-Andres A. *Spacecraft thermal control*. Elsevier, 2012. 412 p.
- [4] Gilmore D.G. *Spacecraft thermal control handbook*. AIAA, 2002. 836 p.
- [5] Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. Некорректные задачи в механике (реологии) вязкоупругих сред и их регуляризация. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2010, т. 16, № 1, с. 117–143.
- [6] Галанин М.П., Савенков Е.Б. *Методы численного анализа математических моделей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 591 с.
- [7] Reznik S.V., Novikov A.D. Comparative analysis of the honeycomb and thin-shell space antenna reflectors. *MATEC Web Conf.*, 2017, art. 01012, doi: <https://doi.org/10.1051/mateconf/2017920101292>
- [8] Nouri N., Panerai F., Tagavi K.A. et al. Evaluation of the anisotropic radiative conductivity of a low-density carbon fiber material from realistic microscale imaging. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2016, vol. 95, pp. 535–539, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.12.004>
- [9] *Авиационные правила. Часть 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории*. Москва, Межгосударственный авиационный комитет, 2004. 236 с.
- [10] Воронин Г.И. *Системы кондиционирования воздуха на летательных аппаратах*. Москва, Машиностроение, 1973. 443 с.
- [11] Gusev S.A., Nikolayev V.N. *Heat condition compartments of aircraft with a honeycomb structure*. Lambert, 2017. 113 p.
- [12] Малоземов В.В., Кудрявцева Н.С. *Системы терморегулирования космических аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1995. 107 с.
- [13] Дульнев Г.Н., Польщиков Б.В., Потягайло А.Ю. Алгоритмы иерархического моделирования процессов теплообмена в сложных радиоэлектронных комплексах. *Радиоэлектроника*, 1979, № 11, с. 49–54.
- [14] Николаев В.Н., Гусев С.А., Махоткин О.А. Математическая модель конвективно-лучистого теплообмена продуваемого теплоизолированного негерметичного отсека летательного аппарата. В: *Прочность летательных аппаратов. Расчет на прочность элементов авиационных конструкций*. Вып. 1. Новосибирск, СибНИА, 1996, с. 98–108.
- [15] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. Москва, Наука, 1967. 736 с.
- [16] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Москва, Наука, 1988. 336 с.
- [17] Гихман И.И., Скороход А.В. *Введение в теорию случайных процессов*. Москва, Наука, 1977. 568 с.

- [18] Gusev S.A. Application of SDEs to estimating solutions to heat conduction equations with discontinuous coefficients. *Numer. Analys. Appl.*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 122–134, doi: <https://doi.org/10.1134/S1995423915020044>
- [19] Saisho Y. Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary. *Probab. Th. Rel. Fields*, 1987, vol. 74, pp. 455–477, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00699100>
- [20] Tanaka H. Stochastic differential equations with reflected boundary condition in convex regions. *Hiroshima Math. J.*, 1979, vol. 9, pp. 163–177.
- [21] Costantini C., Pacchiarotti P., Sartoretto F. Numerical approximation for functionals of reflecting diffusion processes. *SIAM J. Appl. Math.*, 1998, vol. 58, no. 1, pp. 73–102, doi: <https://doi.org/10.1137/S0036139995291040>
- [22] Артемьев С.С., Демидов Г.В., Новиков Е.А. Минимизация овражных функций численным методом для решения жестких систем уравнений. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1980. 13 с.
- [23] Gusev S.A., Nikolayev V.N. Optimization parameters of air-conditioning and heat insulation systems of a pressurized cabins of long-distance airplanes. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 302, art. 012042, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/302/1/012042>
- [24] Васин В.В. Модифицированный метод наискорейшего спуска для нелинейных негладких операторных уравнений. *Доклады Академии наук*, 2015, т. 462, № 3, с. 264–267, doi: <https://doi.org/10.7868/S0869565215150086>
- [25] Gill P., Murray E. Quasi-Newton methods for unconstrained optimization. *JIMA*, 1972, vol. 9, no 1, pp. 91–108.
- [26] Himmelblau D.M. *Applied nonlinear programming*. McGraw-Hill, 1972. 498 p.

References

- [1] Latsuzbaya V., Middendorf P., Völkle D. et al. Improving the thermal properties of aircraft cabin interiors with the integration of vacuum insulation panels. *CEAS Aeronaut. J.*, 2022, vol. 13, no. 6, pp. 705–718, doi: <https://doi.org/10.1007/s13272-022-00590-6>
- [2] Alekseev V.A., Malozemov V.V. *Obespechenie teplovogo rezhima radioelektronnogo oborudovaniya kosmicheskikh apparatov* [Providing thermal conditions for radio-electronic equipment of spacecraft]. Moscow, MAI Publ., 2001. 51 p. (In Russ.).
- [3] Meseguer J., Perez-Grande I., Sanz-Andres A. *Spacecraft thermal control*. Elsevier, 2012. 412 p.
- [4] Gilmore D.G. *Spacecraft thermal control handbook*. AIAA, 2002. 836 p.
- [5] Basistov Yu.A., Yanovskiy Yu.G. Ill-posed problems of mechanics (rheology) of viscoelastic media and their regularization. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [Mechanics of Composite Materials and Structures], 2010, vol. 16, no. 1, pp. 117–143. (In Russ.).
- [6] Galanin M.P., Savenkov E.B. *Metody chislennogo analiza matematicheskikh modeley* [Methods of numerical analysis of mathematical models]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2018. 591 p. (In Russ.).
- [7] Reznik S.V., Novikov A.D. Comparative analysis of the honeycomb and thin-shell space antenna reflectors. *MATEC Web Conf.*, 2017, art. 01012, doi: <https://doi.org/10.1051/mateconf/2017920101292>
- [8] Nouri N., Panerai F., Tagavi K.A. et al. Evaluation of the anisotropic radiative conductivity of a low-density carbon fiber material from realistic microscale imaging. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2016, vol. 95, pp. 535–539, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.12.004>
- [9] *Aviatsionnye pravila. Chast 25. Normy letnoy godnosti samoletov transportnoy kategorii* [Aviation regulations. Part 25. Airworthiness standards for transport category aircraft.]. Moscow, Mezhdgosudarstvennyy aviatsionnyy komitet Publ., 2004. 236 p. (In Russ.).
- [10] Voronin G.I. *Sistemy konditsionirovaniya vozdukha na letatelnykh apparatakh* [Air conditioning systems on aircraft]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973. 443 p. (In Russ.).
- [11] Gusev S.A., Nikolayev V.N. *Heat condition compartments of aircraft with a honeycomb structure*. Lambert, 2017. 113 p.

- [12] Malozemov V.V., Kudryavtseva N.S. *Sistemy termoregulirovaniya kosmicheskikh apparatov* [Thermal control systems for spacecraft]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1995. 107 p. (In Russ.).
- [13] Dulnev G.N., Polshchikov B.V., Potyagaylo A.Yu. Algorithms for hierarchical modeling of heat exchange processes in complex radio-electronic systems. *Radioelektronika*, 1979, no. 11, pp. 49–54. (In Russ.).
- [14] Nikolaev V.N., Gusev S.A., Makhotkin O.A. Matematicheskaya model konvektivno-luchistogo teploobmena produvaemogo teploizolirovannogo nehermetichnogo отсека летательного аппарата [Mathematical model of convective-radiative heat exchange of a blown-through heat-insulated non-hermetic compartment of an aircraft]. V: *Prochnost letatelnykh apparatov. Raschet na prochnost elementov aviatsionnykh konstruktsiy*. Vyp. 1 [In: Aircraft strength. Strength calculation of aircraft structure elements. Iss. 1]. Novosibirsk, SibNIA Publ., 1996, pp. 98–108. (In Russ.).
- [15] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear parabolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 736 p.
- [16] Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsionalnogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow, Nauka, Publ. 1988. 336 p. (In Russ.).
- [17] Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Vvedenie v teoriyu sluchaynykh protsessov* [Introduction to the theory of random processes]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 568 p. (In Russ.).
- [18] Gusev S.A. Application of SDEs to estimating solutions to heat conduction equations with discontinuous coefficients. *Numer. Analys. Appl.*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 122–134, doi: <https://doi.org/10.1134/S1995423915020044>
- [19] Saisho Y. Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary. *Probab. Th. Rel. Fields*, 1987, vol. 74, pp. 455–477, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00699100>
- [20] Tanaka H. Stochastic differential equations with reflected boundary condition in convex regions. *Hiroshima Math. J.*, 1979, vol. 9, pp. 163–177.
- [21] Costantini C., Pacchiarotti P., Sartoretto F. Numerical approximation for functionals of reflecting diffusion processes. *SIAM J. Appl. Math.*, 1998, vol. 58, no. 1, pp. 73–102, doi: <https://doi.org/10.1137/S0036139995291040>
- [22] Artemyev S.S., Demidov G.V., Novikov E.A. *Minimizatsiya ovrazhnykh funktsiy chislennym metodom dlya resheniya zhestkikh sistem uravneniy* [Minimization of ravine functions by a numerical method for solving stiff systems of equations]. Novosibirsk, VTs SO AN SSSR Publ., 1980. 13 p. (In Russ.).
- [23] Gusev S.A., Nikolayev V.N. Optimization parameters of air-conditioning and heat insulation systems of a pressurized cabins of long-distance airplanes. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 302, art. 012042, doi: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/302/1/012042>
- [24] Vasin V.V. Modified steepest descent method for nonlinear irregular operator equations. *Doklady Akademii nauk*, 2015, vol. 462, no. 3, pp. 264–267, doi: <https://doi.org/10.7868/S0869565215150086> (In Russ.). (Eng. version: *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 300–303, doi: <https://doi.org/10.1134/S1064562415030187>)
- [25] Gill P., Murray E. Quasi-Newton methods for unconstrained optimization. *JIMA*, 1972, vol. 9, no 1, pp. 91–108.
- [26] Himmelblau D.M. *Applied nonlinear programming*. McGraw-Hill, 1972. 498 p.

Статья поступила в редакцию 07.07.2025

Информация об авторе

НИКОЛАЕВ Владимир Николаевич — доктор технических наук, главный научный сотрудник. ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С.А. Чаплыгина» (630051, Новосибирск, Российская Федерация, ул. Ползунова, д. 21, e-mail: nikvla50@mail.ru).

Information about the author

NIKOLAEV Vladimir Nikolaevich — Doctor of Science (Eng.), Chief Researcher. Chaplygin Siberian Scientific Research Institute of Aviation (630051, Novosibirsk, Russian Federation, Polzunova St., Bldg. 21, e-mail: nikvla50@mail.ru).

Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Николаев В.Н. Математическое моделирование теплового состояния герметизированных отсеков самолета. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 4, с. 120–132.

Please cite this article in English as:

Nikolayev V.N. Mathematical modeling of the thermal condition of pressurized aircraft compartments. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 4, pp. 120–132.



**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
предлагает читателям монографию**

«Алгоритмы управления аэрокосмическими летательными аппаратами и коррекции навигационных комплексов с использованием моделей с повышенными качественными характеристиками»

Авторы: Ху Юйхуэй, К.А. Неусыпин, М.С. Селезнева

Рассмотрены качественные характеристики математических моделей, используемые в системах управления и обработки информации различных летательных аппаратов. Представлены критерии степени управляемости и наблюдаемости переменных состояния линейных нестационарных и нелинейных систем. Изложена оригинальная концепция динамического системного синтеза, позволяющая формировать модели с желаемыми свойствами в процессе функционирования навигационных комплексов и летательных аппаратов.

Для специалистов в области систем управления и навигации.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>