

ЖУКОВСКИЙ, Н. Е., проф.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

ЧАСТЬ I. СТАТИКА И ГРАФОСТАТИКА.

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ.
(2-е ПОСМЕРТНОЕ).

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ
ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА
В. П. ВЕТЧИНКИНА И Н. Г. ЧЕНЦОВА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО.

Москва — 1924 г.

Государственное Техническое Издательство.

МОСКВА, Ильинка, Юшков пер., д. 6. Тел. 2-56-34.

ИНЖЕНЕРНО-ПРОМЫШЛЕННАЯ БИБЛИОТЕКА.

(Названия без звездочек — имеются в продаже,
названия со звездочками — находятся в печати).

Цены объявлены в золотом исчислении.

- Александров, В. А., проф. Электрическое оборудование современных автомобилей и мотоциклов. П. 1924 г. Ц. 3 р.
- Его же. Практические работы по электротехнике. М. 1923 г. 511 стр. 340 рис. Ц. 7 р. 20 к.
- Анисимов, Н. И., инж. Плотины водоудержательные и водоподъемные. (Конспект лекций). Ч. I. Водоудержательные плотины. М. 1923 г. 68 стр. 94 рис. Ц. 1 р.
- Аппель. Элементы математич. анализа. Часть I. Функции одного независимого переменного. Под редакц. проф. И. И. Привалова. М. 1924 г. 220 стр. 105 рис. Ц. 3 р. 20 к.
- Баранов, А. А., инж.-техн. Сушка тканей. М. 1923 г. 20 стр. 4 диагр. Ц. 55 к.
- Баумгартен, Ф. Р. Психотехника. Б. 1922 г., 246 стр. 110 рис. Ц. 2 р. 75 к.
- Берлов, М. Н., проф. Детали машин. Вып. I. Болтовые и клиновые соединения. П. 1921 г. 116 стр. Ц. 4 р. 70 к.
- Его же. Детали машин. Вып. II. Клепка балок и колонн. М. 1922 г. 69 стр. Ц. 2 р. 60 к.
- Его же. Детали машин. Вып. IV. Передаточные механизмы. М. 1922 г. 64 стр. 12 табл. Ц. 3 р. 65 к.
- Его же. Детали машин. Вып. X. Графостатика. Ч. I. М. 1922 г. 100 стр. Ц. 4 р. 40 к.
- Будников, П. П., проф. Глина и глиняные изделия, глазури, фарфоровые краски и стекло. М. 1923 г. 99 стр. Ц. 80 к.
- Его же. Техно-химический анализ. М. 1923 г. 151 стр. Ц. 1 р. 20 к.
- Бурданов, А. А., инж. Из практики с центробежными насосами. Руководство для инженеров, техников и студентов. М. 1923 г. 170 стр. 103 рис. 12 табл. Ц. 1 р. 90 к.
- Бухонов, И., инж. Угарное и вигоневое прядение. Производство одежной и гигроскопической ваты. М. 1923 г. 80 стр. Ц. 1 р. 30 к.
- Ванков, С. Н., проф. О нормализации металлообработ. промысл. М. 1921 г. 24 стр. Ц. 11 к.
- Васильев, Н. А., проф. Сельфактор (для гладкой и пушистой пряжи). М. 1922 г. 179 стр. 138 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Визент, И. Успехи радиотелеграфии. М. 1923 г. 36 стр. 22 рис. Ц. 45 к.
- Вичнелъ, Г. Руководство к универсальной счетной таблице. М. 1922 г. 26 стр. 1 табл. Ц. 44 к.
- Винтерботтом, Д. Расчеты по хлопкопрядению и стоимости пряжи. Перев. с англ. инж.-мех. И. И. Брандта, под ред. проф. А. Н. Державина. М. 1921 г. 272 стр. 48 рис. Ц. 3 р.
- Гавриленко, А. И., проф. Механическая технология металлов. Обработка металлов резанием. Ч. IV. М. 1920 г. 619 стр. 864 рис. Ц. 5 р.
- Гипплер, В., инж. Токарное дело и его инструменты в современных производствах. Б. 1923 г. 379 стр. 319 рис. Ц. 5 р. 20 к.
- Глебов, С. Ф., инж. Процесс резания, как единая эмпирич. формула. М. 1923 г. 42 стр. 8 рис. Ц. 44 к.
- Гофмейстер, Г. Проектирование, изготовление и применение кузнечных штампов. Перев. под ред. проф. А. И. Сидорова. Б. 1922 г. 32 стр. 206 рис. Ц. 66 к.
- Демьянов, Н. Я., проф. Органическая химия. Часть 2-я. М. 1924 г. Изд. 2-е. 144 стр.
- Дрейер, Л. В., инж. Электрическое освещение фабрично-заводских зданий. М. 1922 г. 39 стр. 22 рис. Ц. 45 к.
- Жуковский, Н. Е., проф. Теоретическая механика (кинематика). М. 1922 г. 177 стр. 177 рис. Ц. 3 р. 25 к.
- Его же. Заметки по вариационному исчислению. М. 1923 г. 20 стр. 12 рис. Ц. 33 к.
- Зуев, М. Д., проф. Свекло-сахарное производство. Дефекация и сатурация. М. 1922 г. 580 стр. Ц. 4 р. 55 к.
- Ирион, Е., инж. Новейшие испытательные машины. Б. 1920 г. 80 стр. 62 рис. Ц. 80 к.
- Кацельсон, М. Н. Приготовление синтетических химико-фармацевтических препаратов. Практические работы для химиков, медиков и фармацевтов. Под ред. проф. Чичибабина. М. 1923 г. 299 стр. 69 рис. Ц. 3 р. 60 к.
- Нашкаров, Н. А., проф. Графические таблицы для расчета железобетонных сооружений. М. 1923 г. 34 стр. 14 табл. 8 черт. Ц. 65 к.
- Нестер, Е. А., проф. Курс паровозов с атласом. М. 1922 г. 554 стр. Ц. 5 р. 85 к.
- Нирилов, Г. М., инж. Районные отопительно-силовые станции. М. 1923 г. 49 стр. 40 рис. Ц. 95 к.

Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

Р. С. Ф. С. Р.

Научно-Технический Отдел В. С. Н. Х.

Б. Серия 4.

Инженерно-Промышленная Библиотека.

№ V—2.

Шереметев

ЖУКОВСКИЙ, Н. Е., проф.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

ЧАСТЬ I.

СТАТИКА и ГРАФОСТАТИКА.

Издание 7-ое.

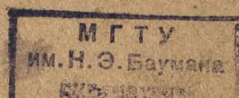
(2-е посмертное).

Под редакцией преподавателей Высшего Технического Училища В. П. Ветчинкина и Н. Г. Ченцова.



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО.

Москва—1924 г.



*Перепечатка без разрешения
Гостехиздата не допускается.*

Статика.

Предисловие к пятому изданию.

В этом издании, по возможности, исправлены некоторые недочеты прежних (литографированных) изданий моего курса „Теоретической механики“ и сделаны следующие прибавления:

В главе о графостатике обстоятельнее изложен метод Кремона, при чем указан простой способ определять направления действующих по звеньям сил.

В кинематике прибавлено понятие о поворотном ускорении и об ускорении точек неизменяемой фигуры, лежащих на одной прямой.

В динамике подробнее изложено о колебаниях маятников и несколько видоизменено изложение статьи об ударе.

Кроме того, добавлено несколько новых задач.

Н. Жуковский.

1915 г. Август.

Предисловие к 7-му изданию.

Лекции по механике, читанные проф. Н. Е. Жуковским в Высшем Техническом Училище, литографировались студентами много раз, начиная с 1870-х годов. Содержание их в значительной степени менялось, и на внешность издания не обращалось большого внимания. Курс „Теоретической механики“ в том объеме, как печатается теперь, впервые был отлитографирован в 1906 году Студенческой Издательской Комиссией при В. Т. У. Это литографированное издание было переиздано затем еще три раза без всяких перемен.

Когда Студенческое Издательское Общество при В. Т. У. задумало в 1914 году выпустить курс лекций по „Теоретической механике“ печатным изданием, то, по предложению Н. Е. Жуковского, В. П. Ветчинкин выполнил подготовительную работу, состоявшую в просмотре издания 1906 года, в исправлении опечаток и в мелких редакционных изменениях текста, а также во введении некоторых дополнений, а именно:

1) в статике была добавлена глава о фермах и их графическом расчете (способы Риттера, Кульмана, Кремона) по стенограмме лекций Н. Е. Жуковского, записанных В. П. Ветчинкиным;

2) в кинематике был добавлен параграф о поворотном ускорении в случае плоского движения, а также добавлены некоторые теоремы о проекциях ускорения;

3) в динамике отмечены аналогии между вращательным и поступательным движениями и сделаны небольшие добавления о колебательном движении (часовой балансир).

Все эти изменения и добавления были приняты Н. Е.

При подготовке 2-го печатного издания (6-го с 1906 г.), печатание которого Государственным Техническим Издательством началось еще при жизни Н. Е. Жуковского († 17 марта 1921 г.), в динамике был значительно расширен отдел о колебательном движении и развиты подробнее замечания об аналогиях между поступательным и вращательным движениями. Кроме того, были сделаны некоторые редакционные изменения в порядке изложения кинематики плоского движения, а также в изложении теории удара.

Ныне выпускаемое третье печатное издание „Теоретической механики“ является повторением предыдущего с мелкими редакционными изменениями в тексте и с заменой некоторых неудовлетворительных чертежей новыми.

Замечание на стр. 100, часть текста и примечание на стр. 146—148 с фигурами 169, 170, 173 и 174 введены редакцией; также изменено редакцией решение задачи на расчет фермы с балками на стр. 148—152.

В. П. Ветчинкин,

Н. Г. Ченцов.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Введение	11

СТАТИКА.

§§	
1. О силах	13
2. Начала статики	15

Сложение и разложение сил.

3. Сложение сил, направленных по одной прямой	19
4. Сложение сил, направления которых пересекаются в одной точке	20
5. Аналитическое определение величины и направления равнодействующей силы	24
6. Разложение силы на несколько пересекающихся сил	27
7. Сложение параллельных сил	28
8. Разложение данной силы на две параллельные	31
9. Сложение многих параллельных сил. Понятие о центре параллельных сил	32

Моменты сил.

10. Определения	34
11. Теорема Вариньона о моментах относительно точки	35
12. О равновесии рычага	39
13. Аналитическое выражение момента силы относительно начала координат, помещенного в центре моментов	40
14. Моменты сил относительно оси	40
15. Теорема Вариньона о моментах относительно оси	41
16. Аналитическое определение момента силы относительно осей координат	44
17. Аналитическое определение координат центра параллельных сил	45

Центр тяжести.

18. Координаты центра тяжести	48
---	----

I. Центр тяжести линий.

19. Центр тяжести периметра треугольника	53
20. Центр тяжести части периметра правильного многоугольника	53
21. Центр тяжести дуги круга	55

II. Центр тяжести площадей.

22. Центр тяжести площади треугольника	55
23. Центр тяжести трапеции	56
24. Центр тяжести площади произвольного четырехугольника	58
25. Центр тяжести кругового сектора	59
26. Центр тяжести кругового сегмента	60

§§	Стр.
III. Центр тяжести поверхностей.	
27. Центр тяжести боковой поверхности прямой призмы	61
28. Центр тяжести боковой поверхности пирамиды	61
29. Центр тяжести полной поверхности трехгранной пирамиды	62
30. Центр тяжести поверхности шарового сегмента и шарового пояса	64

IV. Центр тяжести объемов.	
31. Центр тяжести объема призмы	64
32. Центр тяжести объема пирамиды	65
33. Центр тяжести объема параллельно усеченной пирамиды	66
34. Нахождение центра тяжести полной трехгранной пирамиды по способу Пуансо	70
35. Центр тяжести объема шарового сектора	72
36. Центр тяжести объема шарового сегмента	73
37. Теоремы Гульдена	73

Теория пар.

38. Равнодействующая и момент пары	75
39. Эквивалентность пар	80
40. Сложение пар	83
41. Общие теоремы о сложении сил	86

О равновесии.

42. Условия равновесия свободного тела, когда силы лежат в одной плоскости	90
43. Равновесие несвободного тела, когда все силы, действующие на тело, и все силы сопротивления лежат в одной плоскости	92
44. О равновесии твердого тела, на которое действуют силы, расположенные как нибудь в пространстве	103
45. Условия равновесия несвободного тела	105
46. Равновесие тяжелого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость	113

Момент устойчивости.

47. Определение	118
48. Признак устойчивости Мебиуса для тела, находящегося в равновесии под действием параллельных сил	120

Теория весов.

Весы обыкновенные.

49. Чувствительность весов	122
--------------------------------------	-----

Весы десятичные.

50. Определение	124
51. Десятичные весы первого рода	124
52. Десятичные весы второго рода	125

Другие типы весов.

53. Весы Роберваля	126
54. Весы для взвешивания пряхи	128
55. Безмен	129

О трении.

§§	Стр.
56. Определения	129
57. Законы трения	129
58. Угол трения	131
59. Трение второго рода	131

ГРАФОСТАТИКА.

60. Определение	132
61. Свойство силового многоугольника	132
62. Свойства нитяного многоугольника	136
63. Разложение сил	139
64. Графические условия равновесия	140
65. Приложение графостатики к решению задач	141
66. Отыскание центра тяжести плоских фигур	142
67. О равновесии ферм	144
68. Способ Риттера	152
69. Способ Кульмана	155
70. Способ вырезания узлов	157
71. Диаграммы Кремона	158

ВВЕДЕНИЕ.

Механика есть наука о равновесии и движении физических тел. В зависимости от того, с какой точки зрения рассматриваются в ней эти вопросы, она делится на три части: статику, кинематику и динамику.

В статике исследуются вопросы о равновесии тел и о замене одних сил другими, производящими то же действие.

В кинематике рассматривается движение тел с геометрической стороны, не обращая внимания на причины, производящие движение, т.-е. на силы. Это есть геометрия, в которой к пространственным представлениям присоединено понятие времени.

В динамике рассматривается движение физических тел, при чем обращается внимание на силы, его производящие, и на влияние количества материи (массы) рассматриваемых тел на движение. Здесь решаются вопросы об определении сил, производящих данное движение тел, или, наоборот, об определении движения, происходящего от данных сил.

Иногда механику разделяют на две части: кинематику и кинетику, при чем в последнюю включают статику и динамику. Кинематика для своего изложения не требует никаких новых начал и опирается на аксиомы геометрии,—она является звеном, соединяющим механику с геометрией. Для изложения же кинетики необходимо принять без доказательства несколько основных начал или законов механики.

В механике изучаются вопросы о равновесии и движении твердых, жидких и газообразных тел. Но эти тела при их рассмотрении в механике идеализируют, т.-е. принимают за абсолютные те свойства тела, которые в природе имеют место только до некоторой степени. Так, твердое тело в механике рассматривается, как абсолютно твердое, т.-е. такое, расстояния между частицами которого не могут изменяться. Капельная жидкость рассматривается, как тело абсолютно несжимаемое, и т. д. Способ идеализирования предметов изучения есть общий способ научного исследования; он объясняется тем, что мы не можем сразу охватить все свойства предмета и сосредоточиваем свое внимание лишь на главнейших из них.

Кроме таких идеализированных тел, в механике, для упрощения ее изложения, рассматривается еще физическое тело, размеры которого во всех направлениях исчезающе малы. Такое тело называется материальной точкой. Если переходить к материальной точке посредством воображаемого деления тела на части, все более и более мелкие, то в пределе полу-

чается материальная точка с исчезающе малою массою; если же вообразить, что количество материи в теле не изменяется, а размеры его убывают до беспрельдно малых, то получается фиктивное тело, представляющее материальную точку с конечною массою. Механическое осуществление материальной точки с конечною массою мы имеем в центре тяжести твердого тела, так как будет показано, что сила, приложенная в центре тяжести свободного твердого тела, сообщает ему одно и то же движение, как бы ни изменялась форма тела, лишь бы количество материи в теле сохранялось одно и то же. Отсюда заключаем, что движение центра тяжести данного тела не изменилось бы, если бы мы все тело сжали в одну материальную точку той же массы. Это значит, что центр тяжести свободного твердого тела с механической точки зрения тождествен с материальною точкою конечной массы.

Всякое тело можно рассматривать, как состоящее из соединения материальных точек. При таком воззрении тело называется системою материальных точек. Твердое тело представляет так называемую неизменяемую систему. В теоретической механике изучаются вопросы о равновесии и движении различных систем материальных точек, но в элементарном курсе теоретической механики, который мы будем изучать теперь, рассматриваются вопросы только о равновесии и движении материальной точки и неизменяемой системы (твердого тела).

СТАТИКА.

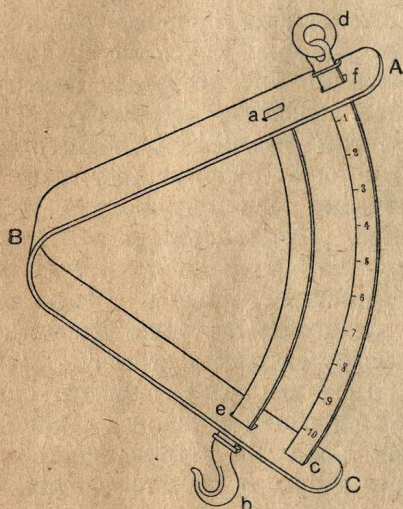
§ 1. О силах. Силами называются причины, приводящие физические тела в движение или изменяющие уже имеющееся движение их. Силы происходят от взаимодействия одних тел на другие. Силы могут быть разнообразны. Но в механике не занимаются исследованием природы различных сил и считают тождественными все те силы, которые сообщают одному и тому же физическому телу одно и то же движение. Это воззрение позволяет нам составить реальное представление о силах. Всякую неизвестную причину, приводящую в движение тела, мы отождествляем с воздействием наших собственных усилий на это тело, при которых оно получает такое же движение. Будем сначала рассматривать твердые тела и посмотрим, каким образом мы можем приводить их в движение. Чтобы сделать это вполне определенным способом, мы привязываем к некоторому месту в теле нить и натягиваем ее в какую-нибудь сторону с известным усилием. Место прикрепления нити может быть уменьшаемо, и мы можем мысленно представить себе одну материальную точку, на которую непосредственно действует весьма тонкая нить. Такая точка называется точкою приложения силы, направление нити называется направлением силы, а усилие, с которым нить натянута, даст нам величину силы. Если мы будем действовать натянутой нитью на центр тяжести свободного твердого тела, то увидим, что он придет в движение по направлению нити. Так как этот случай, по сказанному во введении, соответствует случаю действия силы на материальную точку конечной массы, то можно сказать, что *направлением силы*, действующей на свободную материальную точку, *называют направление той прямой, по которой эта точка начинает двигаться от действия силы.*

Точное определение величины силы получим, установив понятие о равных и кратных силах. Равными мы называем такие две силы, которые, действуя на одну и ту же точку приложения в одном и том же направлении, сообщают телу одинаковое движение; n — кратной силою называем мы одновременное действие на одну и ту же точку приложения в одном и том же направлении n равных сил.

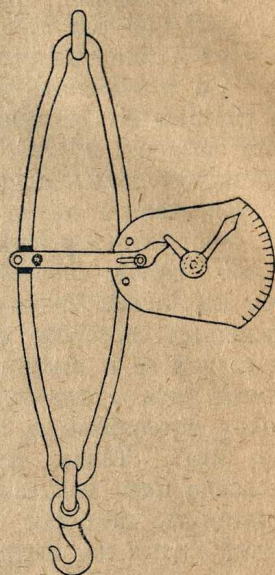
Величина силы определяется из сравнения данной силы с силой, принятой за единицу. Принимая за единицу силы натяжение нити грузом в один килограмм, мы будем звать силою в n килограммов силу натяжения нити, происходящую от одновременного воздействия на нить n грузов в один килограмм, т.-е. груза в n килограммов.

Для практического определения величины силы употребляются приборы, называемые динамометрами. На фиг. 1 представлен динамометр Пон-

селе. Он состоит из пружины ABC, к которой прикреплены две дуги ab и cd. Первая дуга присоединена к пружине неподвижно в точке a и проходит сквозь другой конец в отверстие e; вторая же дуга неподвижно укреплена в точке c и проходит через другой конец пружины в отверстие f. В точке d прикреплено кольцо, в точке b крючек. Закрепив кольцо динамометра и привешивая на крючек грузы в 1, 2, 3, 4,... килограммов, мы будем наносить против точки f на дуге cd деления, отмечая их соответственными цифрами 1, 2, 3, 4,... Для определения неизвестной силы, мы, укрепив кольцо динамометра, тянем неизвестной силой за крючек; тогда деления у f укажут нам величину силы в килограммах. В этом динамометре мы пользуемся тем началом, что две силы, порознь уравнивающие третью, равны между собою. Сначала некоторый определенный груз, стягивающий до некоторой степени пружину



Фиг. 1.



Фиг. 2.

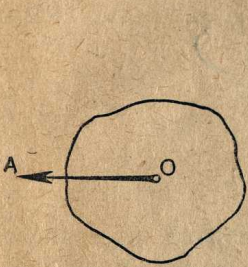
жину ABC, уравнивается ее упругостью, потом пружина, стягивающаяся до той же степени, что и под действием груза, уравнивает собою неизвестную силу; следовательно, величина неизвестной силы равна величине груза.

Для измерения больших сил употребляется обыкновенно динамометр Реньо (фиг. 2). Он имеет в своей конструкции ту же основную мысль, что и динамометр Понселе; только в нем пружина имеет иную форму, и деления указываются стрелкой, соединенной с пружиной посредством особой системы рычагов, которыми стрелка, передвигающаяся по циферблату с легким трением, толкается вперед, но не идет назад, когда сила перестает действовать.

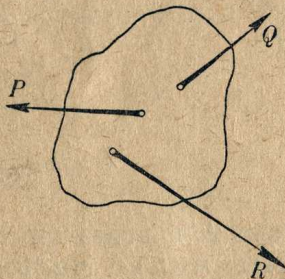
Сила представляется обыкновенно графически; для этого через точку O (фиг. 3) приложения силы проводят в сторону ее направления линию OA и откладывают на этой линии длину OA, выражающую величину силы в каком-либо условном масштабе. В геометрии называют вектором отрезок прямой, данной по величине и направлению. Так как сила выра-

жается подобным отрезком OA , то можно сказать, что с геометрической точки зрения сила есть вектор. Если на тело действует одновременно несколько сил P, Q, R (фиг. 4), то такое собрание сил называется системой сил. Одна сила, сообщаящая твердому телу то же движение, какое сообщает ему данная система сил, называется равнодействующей этой системы сил. Две системы сил, сообщаящие одному и тому же телу одно и то же движение, называются эквивалентными. Если одна сила вместе с данною системою сил находится в равновесии на теле, то ее зовут уравновешивающею данною системою сил; если же две системы взаимно уравновешиваются, то одна относительно другой называется уравновешивающею системою сил.

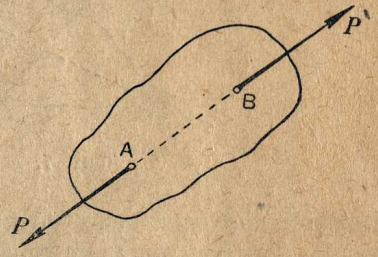
§ 2. Начала статики. Изложение статики развивается логическим путем, опираясь на несколько простых истин, которые принимают без доказательств. Эти истины называются началами статики. Мы принимаем следующие начала:



Фиг. 3.



Фиг. 4.

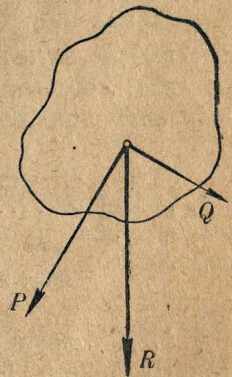


Фиг. 5.

I. Две равные силы, направленные в противоположные стороны по линии, соединяющей точки их приложения, уравновешиваются на твердом теле (фиг. 5).

II. Действие сил не изменится, если прибавить к ним или отнять от них систему сил, находящуюся в равновесии на теле. Здесь под словами «действие не изменится» подразумевается, что состояние покоя или движения тела от прибавления или вычитания сил не изменится, т.-е. если прежде было равновесие, то оно не нарушится, а если прежде было движение, то оно и останется совершенно таким же.

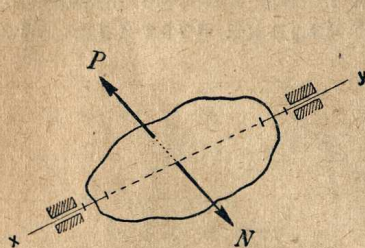
III. Две силы, действующие на одну и ту же точку приложения под углом, имеют равнодействующую, которая проходит через ту же точку приложения и лежит внутри угла, образованного силами (фиг. 6). В случае равенства сил равнодействующая делит угол между ними пополам.



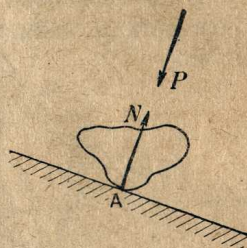
Фиг. 6.

IV. Механический эффект связей, стесняющих свободу движения тела, может быть заменен действием сил. При связях без трения силы, развиваемые связями, таковы: неподвижная точка может развить всякую силу, проходящую через эту точку; неподвижная ось в теле может развить всякую силу, проходящую через эту ось; неподвижная ось, вдоль

которой тело может скользить, может развить всякую силу, проходящую через эту ось и нормальную к ней; неподвижная поверхность, по которой может скользить точка тела, может развить всякую силу, нормальную к поверхности и проходящую через точку опоры; неподвижная точка, на которую опирается поверхность тела, может развить всякую силу, проходящую через точку опоры и нормальную к поверхности тела. Если на несвободное тело действует сила, а связи могут развить равную и противоположно направленную силу сопротивления, то произойдет равновесие. В противном случае будет движение. На фиг. 7 на твердое тело действует сила P , направление которой проходит через неподвижную ось xy . Так как эта ось может развить равную и противоположно направленную силу N , то будет равновесие. На фиг. 8 на тело действует сила P , направление



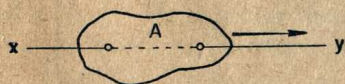
Фиг. 7.



Фиг. 8.

которой проходит через точку опоры A и нормально к опорной поверхности тела. Так как опорная поверхность может развить равную и противоположную силу N , то произойдет равновесие.

V. Если тело находится в равновесии, то равновесие не нарушается от прибавления к нему новых связей; если же тело находится в движении, то движение не изменится от прибавления новых связей без трения, согласных с движением. Поясним последнее примером. Тело A (фиг. 9) движется прямолинейно по направлению, указанному стрелкой. В этом теле мы можем всегда взять в указанном направлении ось xy и поместить на нее две точки тела, которые могут по ней скользить без трения. Очевидно, что от прибавления этой новой связи движение тела не изменится.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

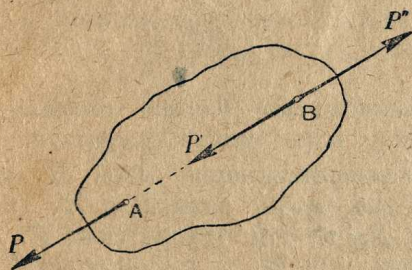
VI. Действие равно противодействию. Этот замечательный закон был указан Ньютоном. Его удобно формулировать для двух материальных точек. Две материальные точки действуют друг на друга по прямой, их соединяющей, силами, равными и направленными в противоположные стороны. Если материальная точка A (фиг. 10) действует на материальную точку B с силою P , направленную по AB , то материальная точка B будет, в свою очередь, действовать на материальную точку A с силою P' , которая равна P и направлена в прямопротивоположную сторону.—Так как действия друг на друга двух физических тел слагаются из взаимодействия материальных то-

чек, составляющих эти тела, то вследствие указанного закона два тела дают всегда друг на друга равными и противоположно направленными силами.— В начале четвертом указывались силы сопротивления связей, действующие на опирающееся о них твердое тело; но по закону действия, равного противодействию, давление тела на удерживающие его связи равно и противоположно этим силам сопротивления.

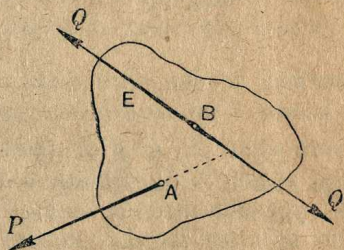
Из вышеизложенных начал статики мы можем вывести несколько простых следствий.

1. Пусть на тело в какой-либо точке A действует сила P (фиг. 11). На ее продолжении возьмем произвольную точку B . К этой точке по противоположным направлениям приложим силы P' и P'' , равные силе P , отчего, по началу второму, действие данной силы не изменится. Заметим теперь, что силы P и P'' , по началу первому, взаимно уничтожаются, и мы можем отбросить их. Тогда будем иметь силу P' , производящую на тело то же действие, что и сила P .

Отсюда правило: точку приложения силы, действующей на твердое тело, можно переносить по направлению силы, не уничтожая и не изменяя дей-



Фиг. 11.

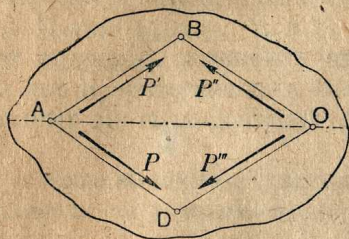


Фиг. 12.

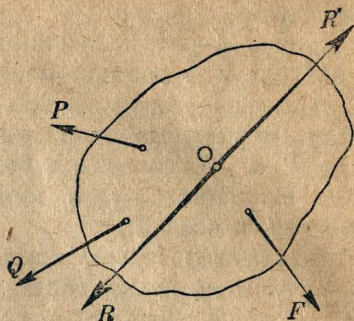
ствия силы. Обнаружим, что иной замены одной силы другою, производящую то же действие, быть не может. Положим, что сила P , приложенная к твердому телу в точке A , может быть заменена силой Q , приложенной в точке B (фиг. 12). Взявши силу $Q' = Q$, приложенную в точке B и направленную в сторону, противоположную силе Q , мы должны получить равновесие сил P и Q' (равновесие будет потому, что сила P заменяется силой Q , а сила Q' уравнивает силу Q). Это не может иметь места, если силы P и Q' не направлены по одной прямой, так как в противном случае всегда можно найти на направлении силы Q' такую точку E , через которую не проходит направление силы P . Сделав эту точку E неподвижной, мы не нарушим равновесия (начало пятое); но при этом силу Q' можно отбросить, а сила P не проходит через неподвижную точку E и не даст равновесия при связях без трения. Таким образом, необходимо, чтобы сила Q' была направлена по продолжению силы P . Переносим силу Q' в точку A , будем иметь равновесие двух сил, приложенных к одной точке и направленных в противоположные стороны. Это требует, чтобы $Q' = P$. Итак, сила $Q = P$ и лежит на продолжении силы P , что и требовалось доказать.

2. Положим, что в теле имеем ромб (фиг. 13), по сторонам которого действуют равные силы P, P', P'', P''' , направления которых указаны на

рисунке. Складывая силы P и P' , приложенные к точке A , получим равнодействующую, которая, по началу третьему, пойдет по направлению AO , деля угол BAD пополам. Складывая же силы P'' и P''' , получим точно такую же равнодействующую, которая пройдет от O к A . Обе равнодействующие взаимно уничтожаются, и ромб останется в равновесии. Это следствие будет нам необходимо при доказательстве параллелограмма сил.



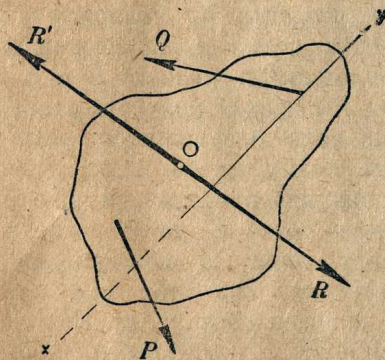
Фиг. 13.



Фиг. 14.

Докажем теперь, что сила, уравнивающая данную систему сил, будучи взята в противоположную сторону, есть равнодействующая.

Пусть силы P , Q и F (фиг. 14) уравниваются силой R' , приложенной в точке O . Прибавим в точке O две равные силы R и R' . Так как сила R' уравнивает силы P , Q и F , то эти четыре силы P , Q , F и R' , по второму началу, можно отбросить. Тогда у нас останется одна сила R , которая и будет равнодействующей. Не всякая, однако, система сил имеет равнодействующую силу.



Фиг. 15.

Опираясь на начала четвертое и пятое, мы докажем, что две непараллельные и непересекающиеся силы не имеют равнодействующей.

Докажем это способом доказательства от противного. Пусть (фиг. 15) на тело действуют две силы, P и Q , непараллельные и непересекающиеся между собою. Допустим, что какая-нибудь сила R будет их равнодействующей. Возьмем силу R' , прямо противоположную R , и приложим ее к телу в точке O , на которую действует сила R . Тогда силы P , Q и R' должны взаимно уравниваться на основании предыдущего следствия. Мы всегда можем через точку приложения силы Q и направление силы R провести ось

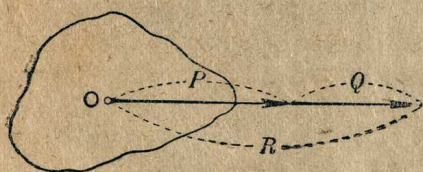
ху так, что она не пересечет направление силы P . Делая, на основании начала пятого, эту ось неподвижной, мы не нарушим равновесия. Но при этом условии действие сил Q и R , на основании начала четвертого, уничтожится, и у нас останется одна сила P , которая будет двигать тело около оси ху. Это показывает, что предположение о существовании равнодей-

ствующей для сил P и Q приводит к противоречию; следовательно, силы P и Q равнодействующей вовсе не имеют. Это значит, что одной силой две такие силы уравновесить нельзя, т.-е. невозможно, употребив только одну силу, прекратить движение тела, вызванное двумя вышеуказанными силами P и Q .

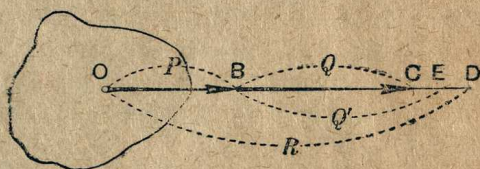
Сложение и разложение сил.

§ 3. Сложение сил, направленных по одной прямой. Сложить несколько сил значит заменить их одною силою, равнодействующею. Мы увидим, однако, что не всякая система сил имеет равнодействующую, т.-е. не всякую систему сил можно сложить в одну силу.

Начнем исследование вопроса о сложении сил с простейших случаев. Если несколько сил действуют по одной прямой линии, то все их точки приложения могут быть перенесены в одну точку приложения. Таким образом, мы получим силы, действующие на одну и ту же точку тела. Пусть силы P и Q (фиг. 16) действуют на точку O данного тела по одному направлению.



Фиг. 16.

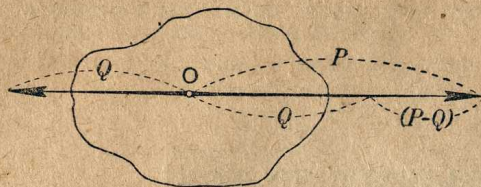


Фиг. 17.

1) Положим, что силы эти соизмеримы, и некоторая сила f , представляющая их общую меру, содержится n раз в силе P и n' раз в силе Q . Иначе говоря, $P = nf$, а $Q = n'f$. На точку O будут одновременно действовать n и n' сил f , т.-е. $(n + n')$ сил f . Это даст силу $R = (n + n')f$. Раскрывая скобки и заменяя nf и $n'f$ через P и Q , получим $R = P + Q$, откуда следует, что равнодействующая двух сил, действующих по одной прямой в одну сторону, равна их сумме и действует в ту же сторону.

2) Положим, что силы P и Q несоизмеримы. Покажем, что и в этом случае равнодействующая R (фиг. 17) не может быть ни больше, ни меньше суммы $P + Q$, т.-е. должна быть равна ей. Пусть, напр., сила $R > P + Q$. Разделим силу P на такие равные части, чтобы каждая из них была менее $R - (P + Q)$, т.-е. менее CD . Тогда, по крайней мере, одна из точек деления упадет между C и D — напр., в точке E . Взяв силу $Q' = BE$, соизмеримую с P , и сложив ее с этой силой P , получим равнодействующую $(P + Q')$. Таким образом, мы видим, что при замене Q большею силою Q' , равнодействующая все-таки будет менее R . Следовательно, наше предположение, что $R > P + Q$, несправедливо. То же самое можно сказать о предположении $R < P + Q$. Таким образом, надо принять, что $R = P + Q$.

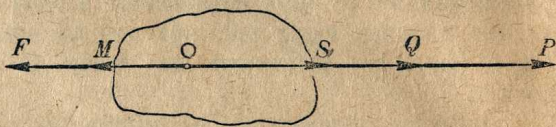
Допустим теперь, что силы P и Q действуют в разные стороны на тело в точке приложения O , при чем сила P больше силы Q . Разложим большую силу на две силы Q и $(P - Q)$. Две силы Q , действующие по разным направлениям на точку приложения O , уравниваются по началу первому и по началу второму могут быть отброшены. Тогда у нас останется одна сила $(P - Q)$ (фиг. 18).



Фиг. 18.

Отсюда следует, что *равнодействующая двух сил, направленных по одной прямой в противоположные стороны, равна их разности и действует в сторону большей силы.*

3. Обращаемся теперь к общему случаю и предположим, что на точку O тела действуют несколько сил по одной прямой, при чем (фиг. 19) три силы P , Q , S действуют в одну сторону, а F и M действуют в противоположную сторону. Заменяем сначала силы P , Q и S их равнодействующей $(P + Q + S)$ и силы F и M их равнодействующей $(F + M)$.



Фиг. 19.

Таким образом, мы получим две силы, действующие в противоположные стороны по одной прямой. Отсюда следует, что общая равнодействующая всех данных сил R , выразится так:

$$(P + Q + S) - (F + M) = P + Q + S - F - M.$$

В случае, если R положительна, она направлена в сторону сил P , Q и S , а если R отрицательна, то она направлена в сторону F и M . Если мы условимся к силам, направленным в одну сторону, приписывать знак $(+)$, а к силам, направленным в противоположную сторону, приписывать знак $(-)$, то можем выразить найденный результат в такой форме:

Равнодействующая сил, направленных по прямой линии, равна алгебраической сумме слагаемых сил.

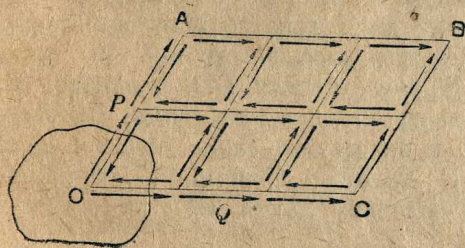
§ 4. Сложение сил, направления которых пересекаются в одной точке. Если направления сил пересекаются в одной точке, то мы можем перенести точки приложения сил в точку их пересечения и получить систему сил, действующих на одну точку.

Рассмотрим сначала простейший случай сложения сил пересекающихся в одной точке, а именно сложение двух сил. Докажем, во-первых, что равнодействующая двух пересекающихся сил направлена по диагонали параллелограмма, на них построенного. Доказательство первое (о направлении равнодействующей) распадается в свою очередь на два: для соизмеримых и несоизмеримых сил. Начнем с нахождения направления равнодействующей двух соизмеримых сил.

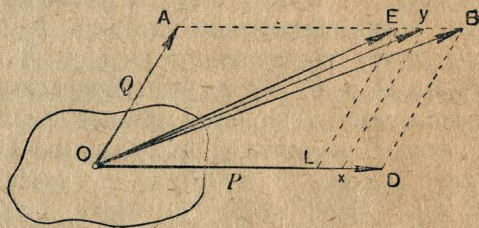
Положим, что мы имеем две соизмеримые силы P и Q (фиг. 20), приложенные к телу в точке O . На основании третьего начала заключаем,

что эти силы могут быть заменены равнодействующей, проходящей через точку O и лежащей внутри угла AOC . Положим, во-первых, что некоторая сила f есть общая мера для P и Q и содержится в силе P два раза, а в силе Q три раза, так что $P = 2f$ и $Q = 3f$. Разделим наш параллелограмм на шесть одинаковых ромбов линиями, параллельными его сторонам. Разложим силу P на две силы f , действующие по сторонам ромбов, а силу Q на три такие же силы f . Приложим, на основании вышеуказанного, к каждому из ромбов по четыре взаимноуравновешивающихся силы f . Такое прибавление не изменит равнодействующей (начало второе), но, благодаря ему, все силы f , кроме тех, которые действуют по сторонам AB и BC , уничтожаются. Значит, мы получим те же силы P и Q , только перенесенные в точку B . Равнодействующая этих сил должна, по началу третьему, пройти через точку B . Но так как это будет та же самая равнодействующая, которая прежде проходила через точку O , то она должна быть направлена по диагонали OB , ибо точку приложения силы можно переносить только по направлению силы. Таким образом, требуемое доказано.

Положим теперь, что силы P и Q несоизмеримы. Чтобы убедиться, что равнодействующая и в этом случае пойдет по диагонали, употребим



Фиг. 20.

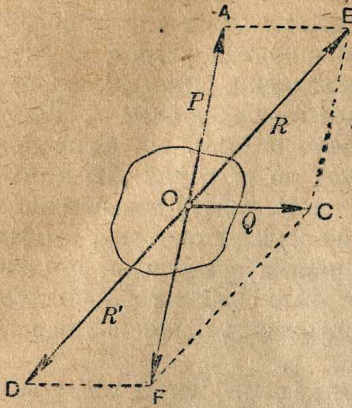


Фиг. 21.

доказательство от противного, т.е. покажем, что иначе, т.е. ни ниже, ни выше диагонали, она пойти не может. Положим (фиг. 21), что равнодействующая их пойдет не по диагонали OB , а выше ее, напр., по прямой OE . Проведем $EL \parallel AO$ и разделим силу Q на такие равные части, чтобы каждая из них была менее LD . Отложим на линии OD от точки O столько таких частей, чтобы конец последней части попал между L и D в некоторую точку x . Тогда силы Q и Ox будут соизмеримы, и потому равнодействующая их пойдет по направлению диагонали Oy . Слагаем теперь силы Ox , Q и xD . Это сложение может быть сделано двумя способами. Во-первых, можно сложить сначала силы xD и Ox ; тогда получится сила P ; потом к силе P прибавить силу Q , вследствие чего получится равнодействующая R , направленная, в силу предположения, по диагонали OE . Во-вторых, можно сперва сложить силы Q и Ox , как силы соизмеримые, и получить силу R' , направленную по диагонали Oy ; потом к силе R' прибавить силу xD , перенеся ее в точку O ; тогда, очевидно, получим прежнюю равнодействующую R ; но теперь она, по третьему началу, должна лежать внутри угла $\angle ODB$, и, следовательно, не может быть направлена по OE . Таким образом, приходим к заключению, что одна и та же сила одновременно имеет два направления, что невозможно. Следовательно, наше предположение о том, что

сила R пойдет выше диагонали OB , неверно. К такому же невозможному заключению придем, если положим, что сила R пойдет ниже диагонали OB .

Если сила R не может пойти ни выше, ни ниже диагонали OB , то следовательно, она пойдет по самой диагонали OB .



Фиг. 22.

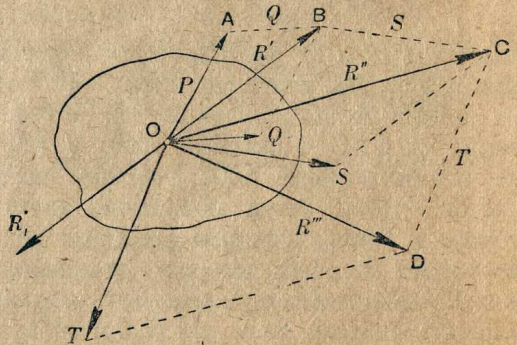
Теперь посмотрим, какова будет величина равнодействующей силы для двух сил P и Q , направления которых пересекаются. Приложим к силам P и Q (фиг. 22) силу R' , равную равнодействующей R и направленную в сторону, противоположную этой равнодействующей,—по линии OD . Эта сила уравновесит силы P и Q . Таким образом, точка O под действием сил P , Q и R' будет находиться в равновесии; поэтому каждая из трех названных сил будет уравнивать две другие; а следовательно, чтобы найти равнодействующую двух сил Q и R' , мы должны направить ее в сторону, противоположную уравнивающей P , т.е. по OF . С другой сто-

роны, равнодействующая сил Q и R' будет направлена по диагонали параллелограмма, построенного на Q и R' . В этом параллелограмме мы знаем сторону Q , т.е. OC , направление силы R' , т.е. стороны OD , и направление диагонали OF . По этим данным легко построить параллелограмм. Проводим из точки C прямую CF параллельно OD и определяем таким образом точку F пересечения CF с OF , а из точки F приводим прямую FD , параллельную OC . Зная точку D , будем знать величину линии OD , выражающей неизвестную силу R' . Из чертежа видно, что $OD \neq CF \neq OB$, откуда $OB = OD = R' = R$.

Итак, равнодействующая двух сил, действующих под углом на одну и ту же точку тела, выражается по величине и направлению диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых силах. Это правило носит название *правила параллелограмма сил*.

Как скоро найдено правило для сложения двух пересекающихся сил, то сейчас же получается способ сложения скольких бы то ни было сил, пересекающихся в одной точке.

Пусть на точку O данного тела (фиг. 23) действуют силы P , Q , S , T , при чем эти силы могут быть в разных плоскостях. Заметим, что каждая пара пересекающихся сил может быть заменена ее равнодействующей, от чего действие всей системы сил не изменится. В самом деле, пусть равнодействующая сил P и Q есть R' . К точке O приложим две равные силы R' и R'' , из которых одна будет равнодействующая,



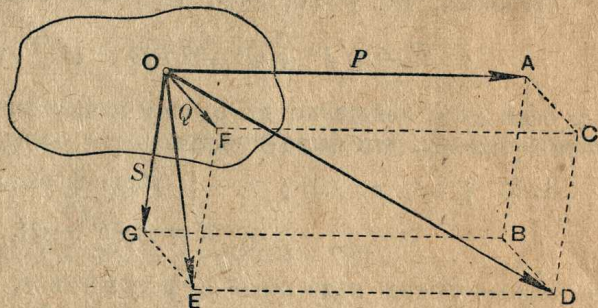
Фиг. 23.

а другая, R' , будет направлена по обратному направлению. По началу второму от этого прибавления действие сил P и Q не изменится; по тому же началу силы R'_1 , P и Q , как взаимно уравновешивающиеся, могут быть отброшены; тогда останется одна равнодействующая R' , которая и должна затем быть сложена с силами S и T . Складываем эту равнодействующую R' сначала с силою S . Получим силу R'' , которую затем надо сложить с T . Равнодействующая R''' , полученная от этого последнего сложения, и будет равнодействующей всей системы сил. Рассматривая фигуру 23, замечаем что сила R''' есть замыкающая сторона разомкнутого многоугольника $OABCD$, остальные стороны которого равны и параллельны силам P , Q , S и T . При этом направление силы R''' , так же, как в геометрии направление замыкающей стороны OD , берется обратно направлению сторон разомкнутого многоугольника. Многоугольник $OABCD$ называется силовым многоугольником, а все правило сложения нескольких сил, пересекающихся в одной точке, называется *правилом силового многоугольника*. Правило это гласит:

Равнодействующая нескольких сил действующих на одну точку приложения под разными углами, выражается по величине и направлению замыкающей стороной разомкнутого многоугольника, остальные стороны которого равны и параллельны слагаемым силам. Сложение векторов по правилу многоугольника называется их геометрическим сложением, а вектор, представляющий замыкающую сторону, называется геометрической суммой данных векторов. Пользуясь этим термином, можно сказать, что равнодействующая сила есть геометрическая сумма всех слагаемых сил. Это означает так: $\vec{R}''' = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} + \vec{T}$.

В частном случае, когда слагаемых сил три, правило сложения может быть выражено в ином виде. Пусть на точку O действуют силы P , Q и S . Строим на них параллелепипед $OABGCD$ (фиг. 24) и утверждаем,

что наша равнодействующая выражается диагональю OD . Действительно, складывая Q и S , получим по правилу параллелограмма равнодействующую OE ; складывая же OE с силою P , найдем общую равнодействующую $OD = R$. Таким образом, в случае трех сил равнодействующая выражается диагональю параллелепипеда, построенного на слагаемых силах. Не



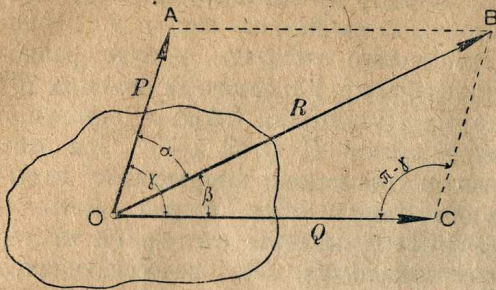
Фиг. 24.

трудно заметить, что это правило заключается в правиле многоугольника, так как равнодействующая OD есть замыкающая сторона разомкнутого многоугольника $OACD$, стороны которого равны и параллельны слагаемым силам.

§ 5. Аналитическое определение величины и направления равнодействующей силы. Рассматриваем сначала две силы P и Q , действующие на точку приложения O под углом γ (фиг. 25). Назовем равнодействующую

через R , а углы, которые она образует с P и Q , через α и β . Построив параллелограмм $OABC$, найдем из треугольника OBC , что

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2 PQ \cos (\pi - \gamma).$$



Фиг. 25.

Но

$$\cos (\pi - \gamma) = -\cos \gamma,$$

и тогда

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2 PQ \cos \gamma,$$

откуда

$$R = +\sqrt{P^2 + Q^2 + 2 PQ \cos \gamma} \quad (1).$$

Кроме того, для определения углов α и β из того же треугольника OBC найдем пропорцию:

$$\frac{\sin \alpha}{Q} = \frac{\sin \beta}{P} = \frac{\sin (\pi - \gamma)}{R},$$

или

$$\frac{\sin \alpha}{Q} = \frac{\sin \beta}{P} = \frac{\sin \gamma}{R} \quad \dots \dots \dots (2).$$

Отсюда имеем, что

$$\sin \alpha = \frac{Q}{R} \sin \gamma, \quad \sin \beta = \frac{P}{R} \sin \gamma.$$

Заметим, что в формуле (1) перед корнем берется знак (+), потому что по этой формуле определяется лишь абсолютная величина силы R ; вопрос же о направлении этой силы решается по формуле (2). Рассмотрим частные случаи.

Положим, что $\gamma = 0$; тогда $\cos \gamma = 1$; а из формулы (1) будем иметь:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 PQ} = \sqrt{(P + Q)^2} = P + Q,$$

т.е. если силы действуют по одному направлению, то их равнодействующая равна сумме их, что было выведено нами раньше.

Если $\gamma = \pi$, то $\cos \gamma = -1$; тогда формула (1) примет вид:

$$R = \pm (P - Q),$$

где перед скобкою надо взять верхний знак, если $P > Q$; если же, наоборот, имеем $P < Q$, то надо взять перед скобкою нижний знак, потому что формула (1), как было сказано выше, дает абсолютную величину силы R . Таким образом, мы получили, что равнодействующая двух сил, действующих в противоположные стороны, равна их разности, что уже было доказано ранее.

Положим, что силы P и Q взаимно перпендикулярны; тогда $\gamma = 90^\circ$, $\cos \gamma = 0$ и формула (1) дает:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Перейдем теперь к определению величины и направления равнодействующей трех взаимно-перпендикулярных сил. Пусть такие силы будут

X, Y, Z (фиг. 26). Построим на них прямоугольный параллелепипед $OABCDEFG$ и назовем его диагональ через R , а углы, которые она образует с направлениями сторон, через α, β, γ . Известно, что диагональ прямоугольного параллелепипеда равна квадратному корню из суммы квадратов трех его измерений, и, так как эта диагональ представляет равнодействующую, то

$$R = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \dots \dots \dots (3).$$

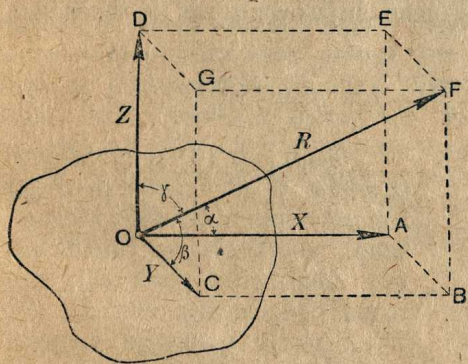
Для определения углов α, β, γ замечаем, что сила X есть не что иное, как проекция силы R на направление силы X ; поэтому находим:

$$X = R \cos \alpha, \quad Y = R \cos \beta, \quad Z = R \cos \gamma,$$

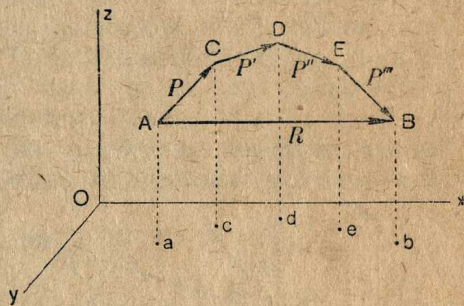
откуда получаем:

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R} \dots \dots \dots (4).$$

Переходим теперь к общему случаю сложения многих сил, пересекающихся в одной точке. Сюда отнесем также случай сложения трех сил, когда на них нельзя построить прямоугольный параллелепипед. Возьмем прямо-



Фиг. 26.



Фиг. 27.

угольные оси координат x, y, z (фиг. 27). Назовем величины слагаемых сил через:

$$P, P', P'', \dots,$$

а углы, которые они образуют с осями координат, через.

$$(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma'), (\alpha'', \beta'', \gamma'').$$

При этом через $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ обозначаются углы с осью Ox , через $\beta, \beta', \beta'', \dots$ — с осью Oy , а через $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots$ — с осью Oz . Назовем через R равнодействующую сил $P, P', P'', \dots$ и через λ, μ, ν углы, которые она образует с осями координат. Построим силовой многоугольник $ACDEB$, проведем его замыкающую сторону R и спроектируем ее на оси координат. На основании теоремы аналитической геометрии, гласящей, что проекция замыкающей стороны разомкнутого многоугольника равна алгебраической сумме проекций его сторон, мы можем написать три следующие равенства:

$$\begin{aligned} R \cos \lambda &= P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots \\ R \cos \mu &= P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \dots \\ R \cos \nu &= P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots \end{aligned}$$

Для сокращения введем знак Σ (греческая буква сигма), которым будем обозначать сумму членов известного, рассматриваемого нами, вида. Тогда можно написать, что

$$R \cos \lambda = \Sigma P \cos \alpha, \quad R \cos \mu = \Sigma P \cos \beta, \quad R \cos \nu = \Sigma P \cos \gamma. \quad (5).$$

Для определения R из формул (5) возводим их в квадрат и складываем:

$$R^2 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu) = (\Sigma P \cos \alpha)^2 + (\Sigma P \cos \beta)^2 + (\Sigma P \cos \gamma)^2.$$

В аналитической геометрии доказывается, что

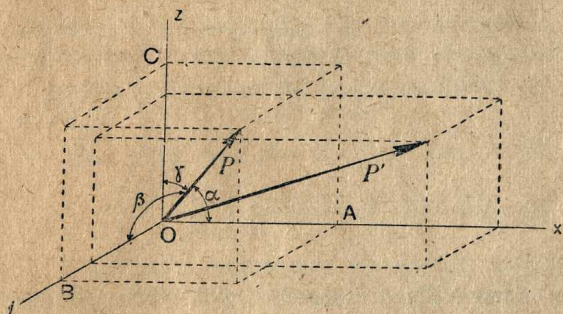
$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

а поэтому

$$R = \sqrt{(\Sigma P \cos \alpha)^2 + (\Sigma P \cos \beta)^2 + (\Sigma P \cos \gamma)^2}. \quad (6).$$

Здесь при корне всегда берется знак (+), потому что эта формула определяет лишь абсолютную величину равнодействующей силы, направление же этой силы выражается углами λ, μ, ν , которые считают от 0° и до 180° . Зная R , найдем из формулы (5) следующие выражения для определения равнодействующей:

$$\cos \lambda = \frac{\Sigma P \cos \alpha}{R}, \quad \cos \mu = \frac{\Sigma P \cos \beta}{R}, \quad \cos \nu = \frac{\Sigma P \cos \gamma}{R}. \quad (7).$$



Фиг. 28.

Формулы (5) и (7) можно вывести и не прибегая к силовому многоугольнику. Можно, напр., поступить так: положим, для большего удобства, что точки приложения сил $P, P', P'', \dots$ лежат в начале координат. Разлагаем силу P по правилу прямоугольного параллелепипеда на три силы OA, OB, OC (фиг. 28), направленные по осям координат. Эти силы, как видно из чертежа, будут

$P \cos \alpha, P \cos \beta, P \cos \gamma$. Также разлагаем все другие силы $P', P'', \dots$. Мы получим таким образом три системы сил:

$$\begin{aligned} \text{по оси } Ox: & \quad P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots \\ \text{по оси } Oy: & \quad P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \dots \\ \text{по оси } Oz: & \quad P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + \dots \end{aligned}$$

Заменяя каждую из этих систем одной силой, получим три силы X, Y, Z , направленные по трем осям координат:

$$X = \Sigma P \cos \alpha, \quad Y = \Sigma P \cos \beta, \quad Z = \Sigma P \cos \gamma \quad (8).$$

Слагаем теперь эти три силы по правилу прямоугольного параллелепипеда; тогда получим равнодействующую R , величина и направление которой

дятся по формулам (3) и (4). Подставляя в эти формулы X , Y , Z из формулы (8), получим формулы (6) и (7). Силы X , Y , Z , определяющиеся формулой (8), называются составляющими по осям координат данной системы сил, так как, слагаясь, они дают равнодействующую данной системы сил. Углы равнодействующей λ , μ , ν с осями координат Ox , Oy , Oz , выражаются так:

$$\cos \lambda = \frac{X}{R}, \quad \cos \mu = \frac{Y}{R}, \quad \cos \nu = \frac{Z}{R};$$

но, так как X , Y и Z представляют собою суммы сил, направленных по осям координат:

$$X = \Sigma P \cos \alpha, \quad Y = \Sigma P \cos \beta, \quad Z = \Sigma P \cos \gamma,$$

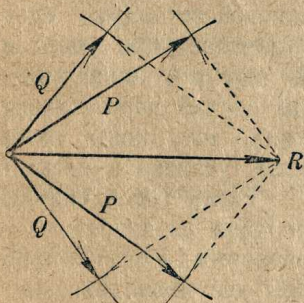
то мы найдем, что

$$\cos \lambda = \frac{\Sigma P \cos \alpha}{R},$$

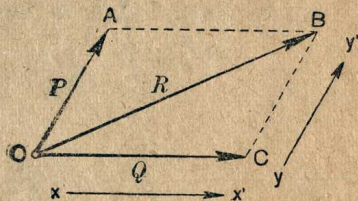
и т. д., т.-е. мы пришли к известному уже результату.

§ 6. Разложение силы на несколько пересекающихся сил. Разложить данную силу значит заменить ее системой сил, ее составляющих или слагающих. Вопрос о разложении одной силы на несколько сил, пересекающихся в одной точке, есть вопрос неопределенный, так как существует бесчисленное множество разомкнутых многоугольников, которые имеют одну и ту же замыкающую сторону. Этот вопрос становится определенным лишь тогда, когда имеется достаточно данных, ограничивающих число способов разложения. В случае разложения одной силы на две мы, обыкновенно, имеем дело с одной из следующих четырех задач:

I. Разложить данную силу R на две слагаемые, имеющие данные величины P и Q (фиг. 29). Из концов силы R проводим дуги радиусами



Фиг. 29.



Фиг. 30.

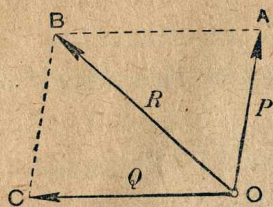
P и Q и соединяем точки их пересечения с концами силы R . Получаются две точки пересечения дуг, а следовательно, и два решения. Правда, разница между ними будет лишь в том, что в одном случае сила P получается наверху и Q внизу, а в другом — наоборот. Решение возможно, если

$$P + Q \geq R.$$

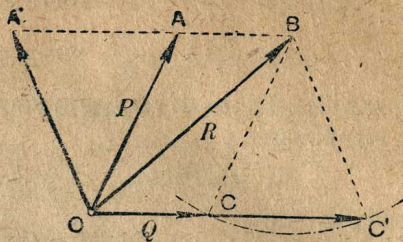
II. Разложить данную силу R на две силы, направления которых, xx' и yy' , даны (фиг. 30). Проводим из концов O и B силы R линии OA

и BC параллельно $уу'$, затем BA и OC параллельно $хх'$. Получим параллелограмм $OABC$, в котором $OA = P$ и $OC = Q$ суть искомые силы.

III. Разложить данную силу R на две силы, из которых одна имеет данную величину P и данное направление (фиг. 31). Чтобы решить эту



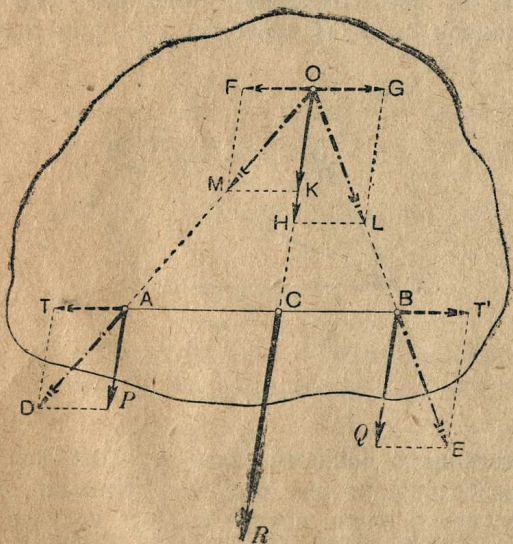
Фиг. 31.



Фиг. 32.

задачу, нужно по стороне $OA = P$ и по диагонали R найти другую сторону параллелограмма. Для этого точку A соединяем с точкой B и проводим $BC \parallel AO$ и $OC \parallel AB$. Сторона OC и будет равна искомой силе Q .

IV. Разложить данную силу R на две силы, из которых одна дана по величине, а другая по направлению (фиг. 32). Из точки B в конце силы R проводим радиусом, равным силе P , дугу CC' и определяем точки ее пересечения, C и C' , с направлением другой силы Q , потом строим параллелограммы $OABC$ и $OA'BC'$. Находим два решения: 1) сила P направлена по OA и $Q = OC$; 2) P направлена по OA' и $Q = OC'$.



Фиг. 33.

§ 7. Сложение параллельных сил. Из того допущения, что пересекающиеся силы имеют равнодействующую, следует, что и параллельные силы имеют ее, так как они представляют частный случай пересекающихся сил, именно тот, когда точка пересечения удалена в бесконечность.

Рассмотрим сначала сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону. Пусть даны две параллельные силы P и Q (фиг. 33). Соединив точки их приложения прямою, прикладываем к точкам A и B равные силы $AT = S$ и $BT' = S'$, направленные в противоположные стороны по линии AB ; на такое прибавление мы имеем право по вышеизложенным началам, первому

и второму. Слагаем силы P и S по правилу параллелограмма и получаем равнодействующую AD ; так же поступаем с силами Q и S' , от сложения которых получаем равнодействующую BE . Полученные равнодействующие

AD и BE продолжаем до пересечения их между собою в точке O и переносим в нее точки приложения найденных равнодействующих. Затем проводим линии

$$FG \parallel AB \text{ и } OK \parallel AP \parallel BQ$$

и по направлениям названных линий разлагаем перенесенные силы $OM = AD$ и $OL = BE$.

Получаем:

$$\triangle MOF = \triangle DAT \text{ и } \triangle LOG = \triangle EBT'.$$

$$OF = AT = S = S' = BT' = OG, MF = OK = P \text{ и } LG = OH = Q.$$

Отбросив равные силы OF и OG, получим силы P и Q, направленные по линии OC; слагаясь эти силы дадут искомую равнодействующую R, равную $P + Q$. Точка приложения силы R может быть перенесена из точки O в точку C. Определим теперь место точки C на прямой AB. Имеем:

$$\triangle MOK \propto \triangle AOC \text{ и } \triangle HOL \propto \triangle COB,$$

откуда следует, что

$$OC : AC = OK : MK = P : R \text{ и } OC : CB = OH : HL = Q : R;$$

поэтому

$$P \cdot AC = R \cdot OC; Q \cdot CB = R \cdot OC.$$

Вторые части этих равенств равны; следовательно, равны и первые, т.-е.

$$P \cdot AC = Q \cdot CB,$$

или, что все равно:

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}.$$

Но в виду того, что сумма предыдущих так относится к сумме последующих, как один из предыдущих к своему последующему, имеем:

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{CB+AC}.$$

Принимая во внимание, что

$$P + Q = R \text{ и } CB + AC = AB,$$

найдем окончательно:

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Таким образом, мы получим следующее правило сложения двух параллельных сил, направленных в одну сторону:

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, равна сумме слагаемых сил и направлена в ту же сторону, как и слагаемые силы; точка же приложения равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внутренним образом с отношением, обратно пропорциональном их величинам.

Дадим еще другое доказательство правила сложения параллельных сил, направленных в одну сторону, рассматривая эти силы, как предельный случай сил пересекающихся. Это доказательство было предложено

Вариантом. Пусть P и Q (фиг. 34) будут две силы, приложенные к точкам A и B и пересекающиеся между собою в точке O . Переносим точки приложения этих сил из A и B в точку O и складываем их по правилу параллелограмма. Мы найдем равнодействующую R , которая определится, как сторона треугольника, по формуле

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \gamma},$$

где γ есть угол между направлениями данных сил. Точку приложения найденной равнодействующей переносим из O в точку C на прямой AB . Далее, из треугольника OMF найдем пропорцию

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Помножив оба члена второй части этого равенства на OC , получим

$$\frac{P}{Q} = \frac{OC \cdot \sin \alpha}{OC \cdot \sin \beta}.$$

Опустим из точки C перпендикуляры CD и CE на направления сил P и Q , обозначив их через p и q ; из прямоугольных треугольников OCD и OCE получим:

$$\begin{aligned} OC \cdot \sin \alpha &= q, \\ OC \cdot \sin \beta &= p, \end{aligned}$$

так что:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

Предположим, что точка пересечения O удаляется на бесконечно большое расстояние от точки C . Вследствие этого силы P и Q станут в пределе параллельными, угол γ обратится в нуль, и мы получим:

$$\cos \gamma = \cos 0^\circ = 1,$$

и в таком случае:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ} = P + Q.$$

Кроме того, в пределе прямые CD и CE составят одну прямую, а $\triangle ACD$ и $\triangle CBE$ (фиг. 35) сделаются подобными; из подобия их найдем:

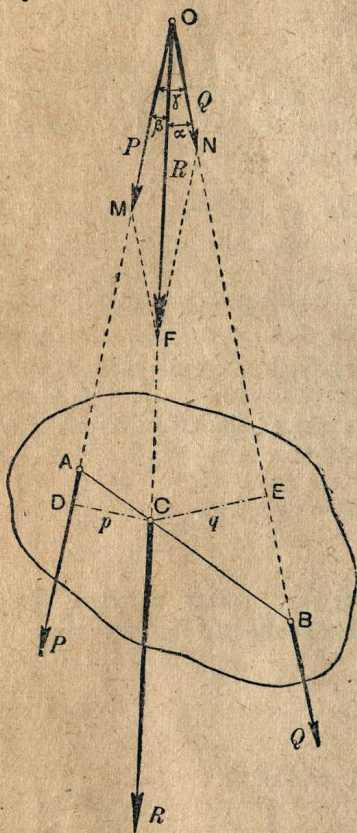
$$\frac{q}{p} = \frac{CB}{AC},$$

но выше мы имели, что

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p},$$

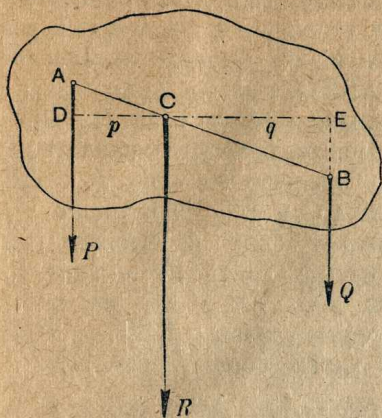
а потому:

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC}.$$



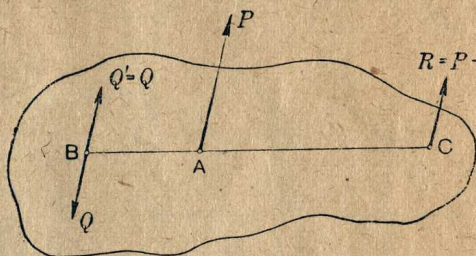
Фиг. 34.

т.-е. пришли к тому же результату, что и в предыдущем доказательстве.



Фиг. 35.

Обратимся теперь к сложению параллельных сил, направленных в разные стороны. Пусть имеем силы P и Q (фиг. 36), направленные в разные стороны. Разлагаем большую силу P на две параллельные силы, направленные в ту же



Фиг. 36.

сторону, что и P . Одну из этих сил, Q' , берем так, чтобы она проходила через точку B и равнялась силе Q ; тогда другая сила $R = P - Q$ пройдет через точку C, положение которой определится из пропорции:

$$\frac{Q}{P - Q} = \frac{AC}{AB}.$$

Но силы Q и Q' уничтожаются, как равные и противоположные, и у нас остается только сила R , которая и представит собою равнодействующую сил P и Q . На основании предыдущего имеем:

$$R = P - Q;$$

кроме того,

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Мы получили, следовательно, такое правило: *Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в разные стороны, равна их разности и направлена в сторону большей силы; точка приложения равнодействующей силы лежит за большою силою и делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внешним образом на части, обратно пропорциональные слагаемым силам.*

§ 8. Разложение данной силы на две параллельные. Вопрос о разложении данной силы R на две параллельные силы, P и Q , есть вопрос неопределенный. Он становится определенным тогда, когда дается одно из расстояний: AC , BC или AB (фиг. 37), и одна из слагаемых сил P или Q , или же когда даны два расстояния, например, AB и BC . Вопрос этот решается помощью уравнений:

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

и

$$R = P \pm Q.$$

равнодействующая их будет равна $(P' + P'')$ и пройдет через точку F, удовлетворяющую известной пропорции:

$$\frac{P'}{FB} = \frac{P''}{AF}.$$

Потом, соединив точки F и C прямою FC, слагаем силы $(P' + P'')$ и P''' , от чего получится равнодействующая $(P' + P'' + P''')$, имеющая точку приложения в G, которая удовлетворяет известной пропорции:

$$\frac{P' + P''}{GC} = \frac{P'''}{FG}.$$

Наконец, соединив точку G с D прямою GD, слагаем силу P^{IV} с силою $(P' + P'' + P''')$; получим равнодействующую $(P' + P'' + P''' + P^{IV})$, проходящую через точку H, удовлетворяющую пропорции:

$$\frac{P' + P'' + P''' + P^{IV}}{HD} = \frac{P^V}{GH}.$$

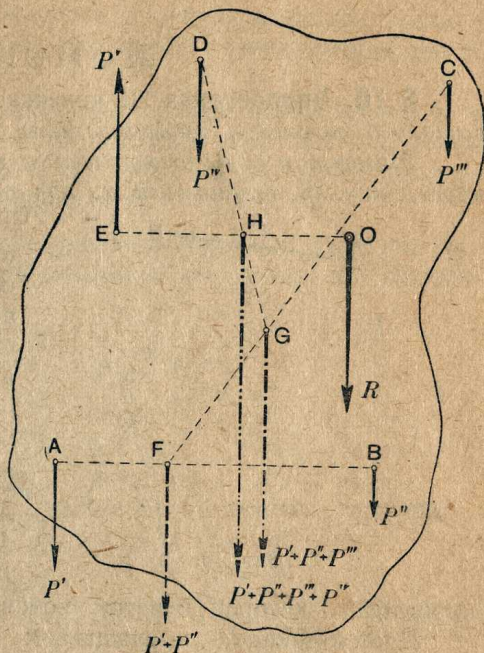
Сложив эту равнодействующую с силою P^V , направленной в противоположную сторону, получим общую для всех сил равнодействующую

$$R = P' + P'' + P''' + P^{IV} - P^V.$$

Эта равнодействующая пройдет через точку O, которая будет удовлетворять следующей пропорции:

$$\frac{P' + P'' + P''' + P^{IV}}{EO} = \frac{P^V}{HO}.$$

Конечно, равнодействующая R может быть приложена не только к точке O, но и ко всякой другой точке, лежащей по направлению силы R . Но точка приложения O обладает особым свойством, которое состоит в следующем: если мы изменим направление всех данных параллельных сил P' , P'' , P''' , P^{IV} , P^V , не изменяя параллельности их между собою, величины их и точек приложения, то получим новую равнодействующую, равную по величине прежней, и притом проходящую непременно через ту же точку O, через которую проходила и прежняя. Таким образом, точка O может быть принята за точку приложения равнодействующей параллельных сил P' , P'' , P''' , P^{IV} , P^V , каково бы ни было их направление. Такую точку называют *центром параллельных сил*. Из сказанного следует, что место центра параллельных сил зависит только от величины слагаемых сил и от точек их приложения. Центру параллельных сил дают такое определение: *центр параллельных сил есть точка приложения равнодействующей*



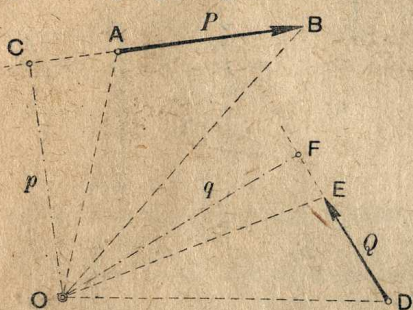
Фиг. 39.

этих сил, обладающая тем свойством, что она остается точкою приложения, как бы ни были направлены слагаемые силы, раз их величина, параллельность и точки приложения не изменяются.

Моменты сил.

§ 10. Определения. В механике рассматривается «момент силы относительно точки» и «момент силы относительно оси».

Моментом силы относительно точки называется произведение силы на перпендикуляр, опущенный из данной точки на направление данной силы.



Фиг. 40.

Так, например, моментом силы P (фиг. 40) относительно точки O будет произведение силы P на перпендикуляр p , опущенный из O на направление силы P . Момент силы P обозначается символом $m(P)$, а потому мы можем написать равенство:

$$m(P) = P \cdot p \dots (9)$$

Соединяя начало и конец силы P , точки A и B , с точкою O , получим треугольник AOB , двойная площадь которого равна Pp , т.-е. моменту силы P . Точка O ,

относительно которой берется момент силы, называется *центром момента*.

Произведениям, выражающим собою моменты сил, приписываются знаки: положительный или отрицательный. Знак момента определяется двояко.

1) Воображают, что плоскость чертежа укреплена в центре момента, и смотрят, в какую сторону данная сила будет вращать эту плоскость около центра момента. Если данная сила будет вращать плоскость чертежа по направлению движения часовой стрелки (или по солнцу), то моменту приписывают знак плюс; если же она будет вращать ее против движения часовой стрелки (или против солнца), то — знак минус¹⁾. В нашем случае (фиг. 40)

$$m(P) = + P \cdot p,$$

$$m(Q) = - Q \cdot q.$$

2) Воображают наблюдателя стоящим в центре момента и смотрящим на силу: если она идет вправо от него, то момент ее положителен, а если влево, то — отрицателен.

Итак, моменты сил имеют и величину, и знак. Если сила берется в килограммах, а перпендикуляр, опущенный из центра на направление ее, в метрах, то момент выражается в килограммометрах. Так как величина

¹⁾ Отметим, что одно и то же вращение плоскости около какой-либо ее точки будет казаться нам происходящим по часовой стрелке или против нее в зависимости от того, с какой стороны плоскости мы будем наблюдать ее движения (напр., сверху или снизу). Происходящая отсюда неопределенность в знаке моментов не имеет значения. Знак моментов нам нужен лишь для того, чтобы иметь возможность отличать друг от друга вращения, происходящие в разные стороны. При геометрическом изображении момента относительно точки — вектором, подобно тому как это будет объяснено в § 38 относительно момента пары, направление вращения вполне учитывается направлением вектора, и необходимость приписывать моментам относительно точки знаки отпадает.

момента зависит только от P и p , то момент силы не изменится от перенесения точки приложения силы по ее направлению.

Рассмотрим, в каком случае момент силы равен нулю. Положим, что $m(P) = 0$. Это значит, что произведение $P \cdot p = 0$; но это может быть только тогда, когда или $P = 0$, или $p = 0$; для разъяснения последнего вообразим, что направление силы постепенно приближается к центру моментов; тогда p будет все уменьшаться и, когда направление силы пройдет через центр момента, p обратится в нуль.

Итак, момент силы относительно некоторого центра равен нулю, если сила равна нулю или если направление силы проходит через центр момента. (Мы будем рассматривать момент относительно точки почти исключительно для сил, расположенных в одной с нею плоскости).

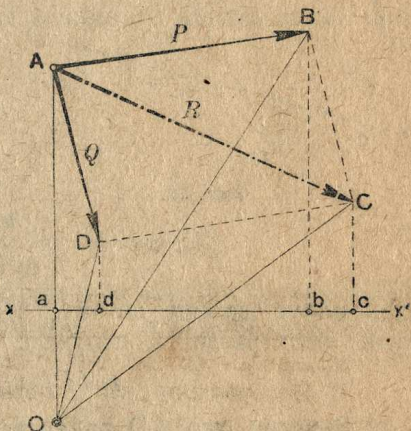
§ 11. Теорема Вариньона. *Момент равнодействующей силы относительно точки равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки¹⁾.*

Докажем эту теорему сначала для того случая, когда нам даны две слагаемые силы, действующие под углом на одну и ту же точку тела. Предположим, что имеем две такие силы: P и Q (фиг. 41); слагая их, получим равнодействующую; пусть она будет R . Центром моментов пусть будет какая-нибудь точка O . Соединив точку O с вершинами параллелограмма, построенного на данных силах P и Q , мы получим:

$$m(P) = 2 \text{ площ. } \triangle OAB,$$

$$m(Q) = 2 \text{ площ. } \triangle OAD,$$

$$m(R) = 2 \text{ площ. } \triangle OAC.$$



Фиг. 41.

Проведем линию xx' , перпендикулярную к AO , и спроектируем на нее точки B , D и C , обозначая эти проекции соответствующими малыми буквами. Принимаем линию AO за основание треугольников OAB , OAD и OAC ; тогда высоты этих треугольников будут: ab , ad , ac . Вследствие этого предыдущие равенства примут такой вид:

$$m(P) = 2 \text{ площ. } \triangle OAB = OA \cdot ab,$$

$$m(Q) = 2 \text{ площ. } \triangle OAD = OA \cdot ad,$$

$$m(R) = 2 \text{ площ. } \triangle OAC = OA \cdot ac.$$

Складывая два первых равенства, получим:

$$m(P) + m(Q) = OA(ab + ad).$$

Заметим, что ad есть проекция AD на прямую xx' . Но линия AD , по свойству параллелограмма, равна и параллельна BC ; следовательно, и проекция линии AD равна проекции линии BC , т.-е. $ad = bc$. Мы можем поэтому заменить в нашей сумме ad через bc ; тогда получим:

$$m(P) + m(Q) = OA(ab + bc).$$

¹⁾ Предполагается, что как силы, так и центр моментов лежат в одной плоскости.

Из чертежа видно, что

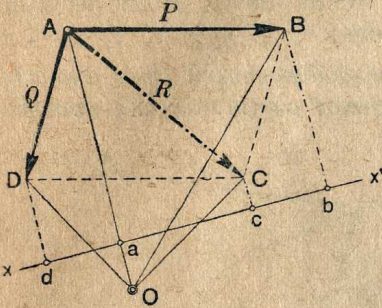
$$ab + bc = ac;$$

подставив это в предыдущее равенство, получим, что

$$m(P) + m(Q) = OA \cdot ac = m(R).$$

Следовательно, теорема доказана.

Мы доказали теорему для случая моментов с одинаковыми знаками, но она имеет место и в том случае, когда моменты сил имеют разные знаки. Докажем это.



Фиг. 42.

Положим, что момент силы P положителен, а момент силы Q отрицателен (фиг. 42). Складываем силы P и Q по правилу параллелограмма; получим равнодействующую R . Соединим вершины параллелограмма A , B , C и D с точкою O , которую мы принимаем за центр моментов. Проводим линию xx' , перпендикулярную к линии OA , и на нее проектируем стороны параллелограмма. Основываясь на предыдущем, можем написать, что:

$$m(P) = AO \cdot ab,$$

$$m(Q) = -AO \cdot ad;$$

знак минус введен потому, что $m(Q)$ отрицателен. Взяв алгебраическую сумму этих равенств, получим:

$$m(P) + m(Q) = AO(ab - ad).$$

Заметим, что AD равна и параллельна BC ; следовательно, проекция BC также равна проекции AD , и мы можем заменить ad через bc . Получим:

$$m(P) + m(Q) = AO(ab - bc).$$

Но

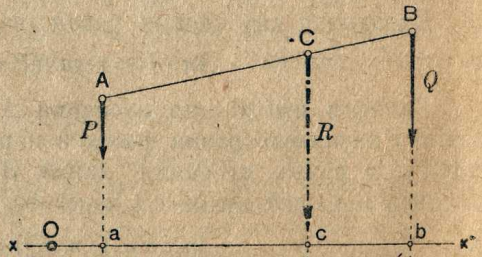
$$ab - bc = ac;$$

подставляя это значение в предыдущее равенство, получим:

$$m(P) + m(Q) = OA \cdot ac = m(R).$$

Таким образом, теорема Вариньона справедлива и в рассмотренном случае.

Если силы параллельны, то сумма моментов сил относительно точки и в этом случае равняется моменту равнодействующей. Пусть имеем две силы P и Q (фиг. 43), параллельные, направленные в одну сторону и приложенные к точкам A и B , их равнодействующую R , приложенную к точке C , и центр моментов O . Через точку O проводим



Фиг. 43.

прямую xx' так, чтобы она была перпендикулярна к направлению данных сил P и Q . Тогда будем иметь, что

$$\begin{aligned} m(P) &= P \cdot Oa, \\ m(Q) &= Q \cdot Ob. \end{aligned}$$

Складывая эти два равенства, получим:

$$m(P) + m(Q) = P \cdot Oa + Q \cdot Ob.$$

Из чертежа видно, что

$$\begin{aligned} Oa &= Oc - ac, \\ Ob &= Oc + bc. \end{aligned}$$

Подставляя в найденное уравнение вместо Oa и Ob найденные величины, получим:

$$m(P) + m(Q) = P(Oc - ac) + Q(Oc + bc) = Oc(P + Q) - P \cdot ac + Q \cdot bc.$$

Но из пропорции, выведенной нами при сложении параллельных сил, имеем:

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC} = \frac{bc}{ac},$$

следовательно:

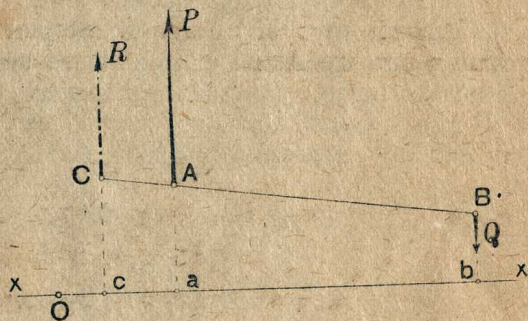
$$P \cdot ac = Q \cdot bc,$$

а потому имеем:

$$m(P) + m(Q) = Oc(P + Q) = Oc \cdot R = m(R).$$

Докажем ту же теорему для того случая, когда направления параллельных сил прямо противоположны; пусть имеем две силы P и Q (фиг. 44), параллельные, направленные в разные стороны и приложенные к точкам A и B , их равнодействующую R , приложенную к точке C , и центр моментов O . Проводим через него прямую xx' , перпендикулярную к направлению данных сил, и назовем точки пересечения этой прямой с направлением данных сил через a , b , c ; тогда получим:

$$\begin{aligned} m(P) &= -P \cdot Oa, \\ m(Q) &= Q \cdot Ob, \\ m(R) &= -R \cdot Oc. \end{aligned}$$



Фиг. 44.

От сложения первых двух равенств получим:

$$m(P) + m(Q) = Q \cdot Ob - P \cdot Oa.$$

Но

$$\begin{aligned} Ob &= Oc + cb, \\ Oa &= Oc + ac. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в уравнение, получим:

$$m(P) + m(Q) = Q \cdot Oc - P \cdot Oc + Q \cdot bc - P \cdot ac.$$

Но из пропорции

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC} = \frac{bc}{ac}$$

имеем, что

$$P \cdot ac = Q \cdot bc.$$

Следовательно:

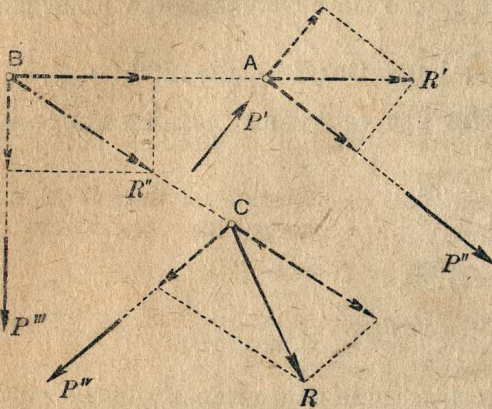
$$m(P) + m(Q) = (Q - P) \cdot Oc = -(P - Q) \cdot Oc = -Oc \cdot R = m(R),$$

что и требовалось доказать.

Далее, положим, что имеем несколько сил $P^I, P^{II}, P^{III}, P^{IV}$ (фиг. 45), лежащих в одной плоскости. Вообще говоря, данные силы могут быть заменены

одной равнодействующей; в частном же случае сложение их может повести к получению двух равных и параллельных сил, направленных в разные стороны, — иначе говоря к так-называемой паре сил, о которой мы скажем впоследствии. Теперь же пусть R будет равнодействующая всех данных сил $P^I, P^{II}, P^{III}, P^{IV}$; докажем, что и в этом случае теорема Вариньона справедлива, т.-е. что

$$m(R) = m(P^I) + m(P^{II}) + m(P^{III}) + m(P^{IV}).$$



Фиг. 45.

Заметим, что для доказательства *нет надобности*, чтобы силы $P^I, P^{II}, P^{III}, P^{IV}$ пересекались в одной точке. Продолжая направления сил P^I и P^{II} до пересечения в точке A , переносим в нее эти силы и складываем их по правилу параллелограмма; получаем равнодействующую R' (если направления сил P^I и P^{II} не пересекаются, то складываем эти силы по правилу, выведенному для сил параллельных). Далее, если сила R'' будет равнодействующей сил R' и P^{III} , а R — сил R'' и P^{IV} (она же будет и равнодействующей всех данных сил $P^I, P^{II}, P^{III}, P^{IV}$), то, по доказанному, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} m(R') &= m(P^I) + m(P^{II}), \\ m(R'') &= m(R') + m(P^{III}), \\ m(R) &= m(R'') + m(P^{IV}). \end{aligned}$$

Сложив полученные равенства и сделав приведение подобных членов, получим:

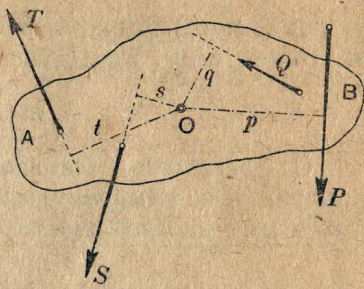
$$m(R) = m(P^I) + m(P^{II}) + m(P^{III}) + m(P^{IV}). \quad (10)$$

Следовательно, требуемое доказано. Так как момент силы равен нулю, когда центр моментов лежит на направлении силы, то из доказанной теоремы вытекает следующее важное следствие:

Если центр моментов лежит на направлении равнодействующей, то сумма моментов всех слагаемых сил относительно этого центра равна нулю.

§ 12. О равновесии рычага. Применим теорему Вариньона к равновесию рычага. Условимся называть рычагом тело, вращающееся на неподвижной оси, под влиянием сил, действующих в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Предположим, что имеем рычаг АВ (фиг. 46) с осью, перпендикулярной к плоскости чертежа и пересекающей ее в точке О. Пусть P , Q , S и T будут силы, действующие в этой плоскости на рычаг, а R — их равнодействующая. Чтобы рычаг был в равновесии, равнодействующая R непременно должна пройти через точку О. Если же она не пройдет через нее, то рычаг в равновесии не будет, — под действием этой силы он будет вращаться в ту или другую сторону около точки О. Выразим аналитически, что сила R проходит через точку О. Приняв эту точку за центр моментов заключаем, что в таком случае должно удовлетворяться требование: $m(R) = 0$. Но R есть равнодействующая, и потому, по теореме Вариньона, момент силы R может быть заменен алгебраической суммой моментов слагаемых сил:



Фиг. 46.

$$m(R) = m(P) + m(Q) + m(S) + m(T),$$

а в таком случае требование $m(R) = 0$ выразится иначе, так:

$$m(P) + m(Q) + m(S) + m(T) = 0,$$

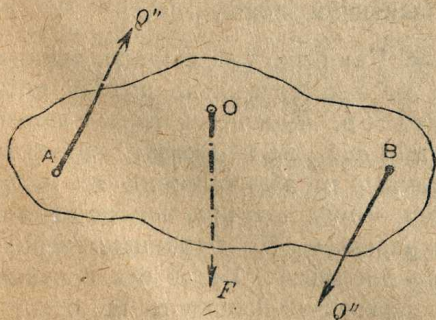
т.е. для равновесия рычага необходимо, чтобы алгебраическая сумма моментов действующих сил относительно неподвижной точки О равнялась нулю. Таким образом, мы получили самую общую формулу, выражающую условие равновесия рычага. Если бы мы пожелали представить эту формулу со знаками моментов, какие имеют место у нас на чертеже, то, опустив из точки О на направления сил P , Q , S , и T перпендикуляры p , q , s , t , получили бы:

$$P.p - Q.q - S.s + T.t = 0,$$

или

$$P.p + T.t = Q.q + S.s.$$

Отсюда видим, что сумма моментов сил, вращающих рычаг в одну сторону, равна сумме моментов сил, вращающих рычаг в другую сторону.



Фиг. 47.

Мы предположили, что силы P , Q , S и T имеют равнодействующую R , но может случиться, что сложение их приведет к паре сил (Q' , Q'') (фиг. 47); тогда для доказательства, что условие равновесия рычага и для этого случая останется прежним, добавим какую-нибудь силу F , проходящую через неподвижную ось, отчего действие сил Q' и Q'' , по началу четвертому, не изменится. Складывая силы F и Q' , мы получим их равнодействующую,

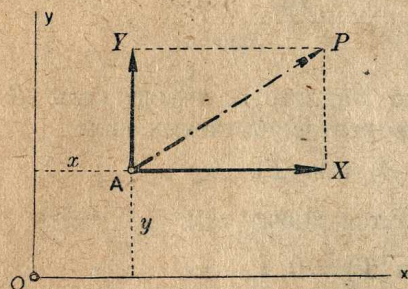
которую складываем с силою Q'' ; получим тогда силу R , которая для равновесия необходимо должна пройти через точку O ; момент силы R , как проходящей через центр моментов, должен быть равен нулю; в то же время, момент силы R , как равнодействующей, должен равняться сумме моментов сил слагающих, т.-е.

$$m(R) = \Sigma m(P) + m(F),$$

где под $\Sigma m(P)$ подразумевается сумма моментов всех данных сил. Но $m(F)$, как момент силы, проходящей через центр моментов, равен нулю, а потому

$$m(R) = \Sigma m(P) = 0 \dots \dots \dots (11)$$

Следовательно, условие равновесия рычага и в этом случае остается прежнее, т.-е. алгебраическая сумма моментов всех данных сил относительно неподвижной точки должна равняться нулю.



Фиг. 48.

§ 13. Аналитическое выражение момента силы относительно начала координат, помещенного в центре моментов. Пусть в плоскости чертежа дана сила P (фиг. 48) с точкою приложения A и центр моментов O . Примем точку O за начало прямоугольных осей координат xu и разложим силу P на две силы X и Y , направления которых параллельны осям координат. По теореме Вариньона имеем:

$$m(P) = m(X) + m(Y).$$

Пусть координаты точки A суть x и y ; тогда по предыдущему:

$$m(X) = y \cdot X \qquad m(Y) = -x \cdot Y.$$

Подставляя величину моментов сил X и Y в выражение $m(P)$, находим

$$m(P) = y \cdot X - x \cdot Y \dots \dots \dots (12)$$

Эта формула и представляет аналитическое выражение момента сил относительно начала координат, помещенного в центре моментов. Отсюда видно, что момент силы может быть определен аналитическим путем по координатам точки приложения и по составляющим силам.

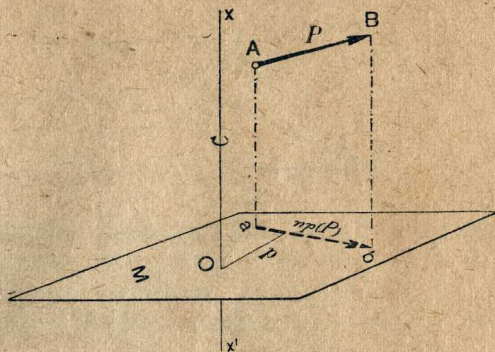
§ 14. Моменты сил относительно оси. Как было уже сказано, моменты сил берутся не только относительно точки, но и относительно прямой, которая в таком случае называется осью моментов. Моментом силы относительно оси называется произведение проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, на перпендикуляр, опущенный на эту проекцию из точки пересечения оси с плоскостью. Так, например, чтобы получить момент силы P (фиг. 49) относительно оси xx' , проводим плоскость M , перпендикулярную к xx' , и данную силу P проектируем на эту плоскость. Пусть эта проекция будет ab . Из точки O , в которой ось xx' пересекает плоскость M , опустим на направление ab перпендикуляр и обозначим его через p . Произведение

проекция силы P , т.-е. ab , на перпендикуляр p и даст нам момент силы P относительно оси xx' . Условимся обозначать его через $m_x(P)$; тогда можно будет написать:

$$m_x(P) = \text{пр}(P) \cdot p \dots \dots \dots (13')$$

Условимся считать положительным направлением оси xx' ее направление от x' к x . Зная это, перейдем к определению знака момента. Для определения знака момента существуют два способа:

1) Положим, что глаз наблюдателя помещается на положительной стороне оси, и наблюдатель смотрит, в какую сторону сила стремится вращать тело, имеющее неподвижную осью ось моментов; если он увидит, что сила стремится вращать тело по направлению движения часовой стрелки или по солнцу, то моменту силы надо приписать знак плюс, в противном случае знак минус. На нашем чертеже момент силы P имеет значение положительное.



Фиг. 49.

2) Пусть наблюдатель, расположенный по оси моментов так, что голова его направлена в положительную сторону оси, смотрит на силу по направлению перпендикуляра на нее—в данном случае перпендикуляра p . Тогда, если сила будет идти вправо от наблюдателя, то момент ее положителен, а если же влево, то отрицателен.

Заметим, что для наблюдателя, смотрящего на плоскость с положительного конца оси, знак момента проекции силы относительно центра моментов O будет тот же, что и знак момента силы P относительно оси xx' . Так как с перенесением точки приложения силы P по ее направлению проекция $P=ab$ и перпендикуляр p не изменяются, то и моменты сил также не изменяются при этом перенесении.

Посмотрим теперь, когда момент силы P равен нулю, т.-е. когда $\text{пр}(P) \cdot p = 0$. Это может быть только в двух случаях: или когда $p = 0$, или когда $\text{пр}(P) = 0$; первое возможно тогда, когда сила P пересекает ось, ибо только в таком случае проекция ее пройдет через точку O ; второе же—тогда, когда сила или параллельна оси, или равна нулю. Вообще, можно сказать, что момент силы относительно оси равен нулю, когда сила проходит через ось, включая сюда и предельный случай прохождения через бесконечно удаленную точку оси, т.-е. когда сила P параллельна оси xx' .

Посмотрим теперь, когда момент силы P равен нулю, т.-е. когда $\text{пр}(P) \cdot p = 0$. Это может быть только в двух случаях: или когда $p = 0$, или когда $\text{пр}(P) = 0$; первое возможно тогда, когда сила P пересекает ось, ибо только в таком случае проекция ее пройдет через точку O ; второе же—тогда, когда сила или параллельна оси, или равна нулю. Вообще, можно сказать, что момент силы относительно оси равен нулю, когда сила проходит через ось, включая сюда и предельный случай прохождения через бесконечно удаленную точку оси, т.-е. когда сила P параллельна оси xx' .

§ 15. Теорема Вариньона. Момент равнодействующей силы¹⁾ относительно оси равен алгебраической сумме моментов слагающих сил относительно той же оси.

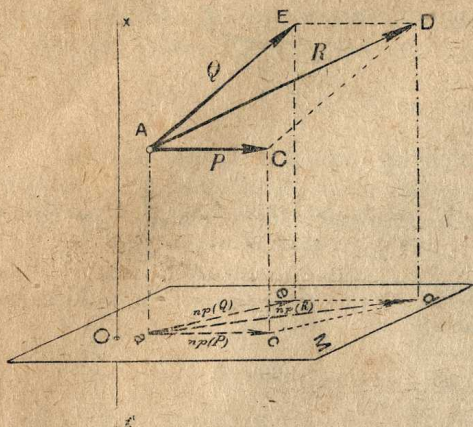
Предположим, что дана ось моментов xx' (фиг. 50) и перпендикулярная к ней плоскость M . Пусть также даны в пространстве силы P и Q —

¹⁾ Если система сил может быть приведена к одной равнодействующей.

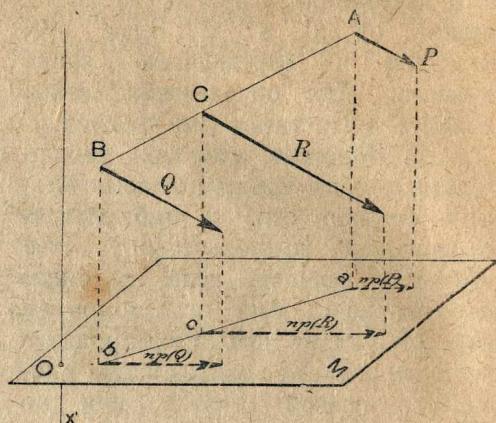
пересекающиеся. Складывая их по правилу параллелограмма, получим равнодействующую R . Докажем, что

$$m_x(R) = m_x(P) + m_x(Q).$$

Для этого проектируем параллелограмм $AEDC$ на плоскость M ; получаем на ней четырехугольник $aedc$, и нетрудно заметить, что он представляет собою



Фиг. 50.



Фиг. 51.

тоже параллелограмм, а потому на ac и на ae мы можем смотреть, как на две силы, лежащие в одной плоскости, а на ad , — как на их равнодействующую. Взяв для этих сил моменты относительно точки O , получим:

$$m(ac) + m(ae) = m(ad).$$

но

$$m(ac) = m_x(P),$$

$$m(ae) = m_x(Q),$$

$$m(ad) = m_x(R);$$

следовательно:

$$m_x(R) = m_x(P) + m_x(Q).$$

Подобное же рассуждение одинаково распространяется и на случай двух параллельных сил P и Q (фиг. 51). Пусть равнодействующая их будет R . Проектируя P , Q и R на плоскость M , получим силы; $\text{пр}(P)$, $\text{пр}(Q)$ и $\text{пр}(R)$, приложенные в точках a , b , c и между собою параллельные. Так как $P + Q = R$, то, помножив обе части этого равенства на $\cos \alpha$, где α есть угол, образуемый силами P , Q и R с плоскостью M , получим:

$$P \cdot \cos \alpha + Q \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \alpha,$$

но

$$P \cdot \cos \alpha = \text{пр}(P),$$

$$Q \cdot \cos \alpha = \text{пр}(Q),$$

$$R \cdot \cos \alpha = \text{пр}(R);$$

следовательно

$$\text{пр}(P) + \text{пр}(Q) = \text{пр}(R).$$

Кроме того, имеем

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC}.$$

Помножив оба члена первого отношения на $\cos \alpha$, а оба члена второго отношения на $\cos \beta$, где β есть угол, который делает прямая АВ с плоскостью М, получим:

$$\frac{P \cdot \cos \alpha}{Q \cdot \cos \alpha} = \frac{CB \cdot \cos \beta}{AC \cdot \cos \beta},$$

но

$$CB \cdot \cos \beta = cb, \quad AC \cdot \cos \beta = ac;$$

следовательно

$$\frac{\text{пр}(P)}{\text{пр}(Q)} = \frac{bc}{ac}.$$

Отсюда видим, что сумма проекций параллельных сил P и Q равна проекции R и что проекции сил обратно пропорциональны плечам bc и ac . Значит, проекция силы R есть равнодействующая проекций сил P и Q . Взяв теперь моменты сил $\text{пр}(P)$, $\text{пр}(Q)$ и $\text{пр}(R)$ относительно точки O , можем написать следующее равенство:

$$m[\text{пр}(P)] + m[\text{пр}(Q)] = m[\text{пр}(R)];$$

но

$$m[\text{пр}(P)] = m_x(P),$$

$$m[\text{пр}(Q)] = m_x(Q),$$

$$m[\text{пр}(R)] = m_x(R);$$

следовательно,

$$m_x(P) + m_x(Q) = m_x(R).$$

Таким образом, для сил параллельных теорема Вариньона также справедлива:

Докажем теперь теорему Вариньона для скольких угодно и как угодно направленных сил. Положим, что даны силы P, P', P'' и P''' . Допускаем, кроме того, что последовательное сложение приводит к одной равнодействующей. Пусть R' будет равнодействующая сил P и P' ; и R'' — равнодействующая сил R' и P'' ; равнодействующая же сил R'' и P''' будет, по предположению, R . По доказанному выше, имеем право написать следующие равенства:

$$m_x(R') = m_x(P) + m_x(P'),$$

$$m_x(R'') = m_x(R') + m_x(P''),$$

$$m_x(R) = m_x(R'') + m_x(P''');$$

сложив их, получим:

$$m_x(R) = m_x(P) + m_x(P') + m_x(P'') + m_x(P'''),$$

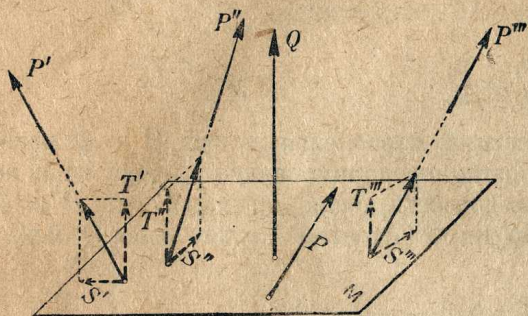
что и требовалось доказать.

Мы до сих пор предполагали, что силы P, P', P'', P''' допускают последовательное сложение. Может, однако, случиться, что данная система сил последовательного сложения не допускает. Нетрудно доказать, что, если такая система сил приводится к одной равнодействующей, то, приведенная

выше, в начале § — а, формулировка теоремы Вариньона остается справедливой. В общем же случае, когда система не допускает существования одной равнодействующей, а приводится, как мы сейчас увидим, к двум равнодействующим, теорема Вариньона изменяется так:

Сумма моментов слагаемых сил равна сумме моментов двух равнодействующих.

Пусть мы имеем силы P, P', P'', P''' (фиг. 52); выбираем какую-нибудь плоскость так, чтобы направления данных сил пересекались с нею. Переносим точки приложения данных сил на плоскость и каждую силу разлагаем на две так, чтобы одна из них пошла по плоскости, а другая — по перпендикуляру к плоскости. Тогда мы получим две группы сил: одна группа будет заключать в себе силы $S', S'', S''', \dots$, направленные по плоскости, а другая — силы $T', T'', T''', \dots$, направленные перпендикулярно к той же плоскости. Складывая каждую группу сил отдельно по известным уже правилам, мы



Фиг. 52.

получим две равнодействующие P и Q . Так как P и Q являются каждая равнодействующей своей группы слагаемых сил, которые допускают последовательное сложение, то имеем:

$$\begin{aligned} m_x(P) &= m_x(S') + m_x(S'') + m_x(S''') + \dots = \Sigma m_x(S), \\ m_x(Q) &= m_x(T') + m_x(T'') + m_x(T''') + \dots = \Sigma m_x(T). \end{aligned}$$

Сложив эти два равенства, получим:

$$m_x(P) + m_x(Q) = \Sigma m_x(S) + \Sigma m_x(T).$$

Вторая часть полученного равенства представляет сумму моментов всех данных сил; обозначив ее через $\Sigma m_x(F)$, имеем:

$$m_x(R) + m_x(Q) = \Sigma m_x(F) \quad (13)$$

Если силы P и Q пересекаются, то они могут, слагаясь в свою очередь, дать общую равнодействующую R . Тогда

$$m_x(P) + m_x(Q) = m_x(R);$$

следовательно:

$$m_x(R) = \Sigma m_x(F) \quad (14).$$

Таким образом, очевидно, что формула (14) есть только частный случай формулы (13), выражающей теорему Вариньона для какой угодно системы сил.

§. 16. Аналитическое определение момента силы относительно осей координат. Положим, что на точку M (фиг. 53), координаты которой относительно прямоугольных осей будут x, y, z , действует сила P . Разложим

эту силу по правилу параллелепипеда на три силы X , Y , Z , направления которых параллельны осям координат. Определим моменты силы P относительно осей Ox , Oy и Oz . По теореме Вариньона имеем:

$$m_x(P) = m_x(X) + m_x(Y) + m_x(Z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Так как сила X параллельна оси Ox , то

$$m_x(X) = 0;$$

момент же Y относительно оси Ox выразится так:

$$m_x(Y) = -Y \cdot z,$$

потому что сила Y , как параллельная оси Oy , на плоскость yz проектируется в натуральную величину, и ее проекция отстоит от точки O на расстоянии z ; отрицательным же момент будет потому, что, если смотреть на плоскость yz по направлению xO , то увидим, что сила вращает плоскость по направлению, обратному движению часовой стрелки. Точно так же найдем, что момент силы Z относительно оси Ox выразится так:

$$m_x(Z) = Z \cdot y.$$

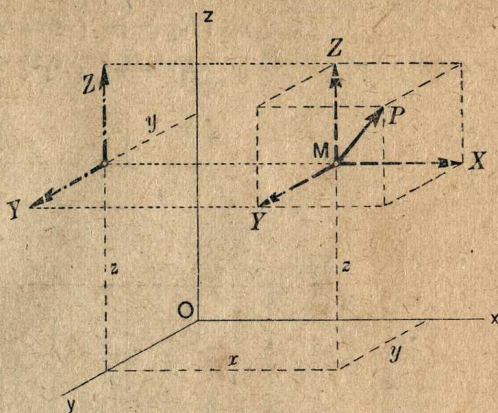
Подставляя в равенство (a) вместо $m_x(X)$, $m_x(Y)$ и $m_x(Z)$ соответственно равные им величины: 0 , $(-z \cdot Y)$ и $y \cdot Z$, найдем, что

$$m_x(P) = y \cdot Z - z \cdot Y.$$

Понятно, что таким же точно путем можно найти моменты сил P и относительно других осей координат, а именно:

$$\left. \begin{aligned} m_x(P) &= y \cdot Z - z \cdot Y, \\ m_y(P) &= z \cdot X - x \cdot Z, \\ m_z(P) &= x \cdot Y - y \cdot X. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

§ 17. Аналитическое определение координат центра параллельных сил. Теория моментов позволяет определить координаты центра параллельных сил. Мы видели, что центр параллельных сил есть точка приложения равнодействующей, остающаяся точкой приложения при всяком направлении параллельных сил, если только при этом не изменяется ни величина их, ни точка приложения. Чтобы отыскать эту точку, отнесем данное тело к прямоугольным осям координат x , y , z (фиг. 54). Положим, что на данное тело действуют параллельные силы P , P' , P'' , P''' , ... Назовем координаты точек приложения каждой силы через (x, y, z) , (x', y', z') , ..., а координаты центра параллельных сил через $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Равнодействующая паралл-



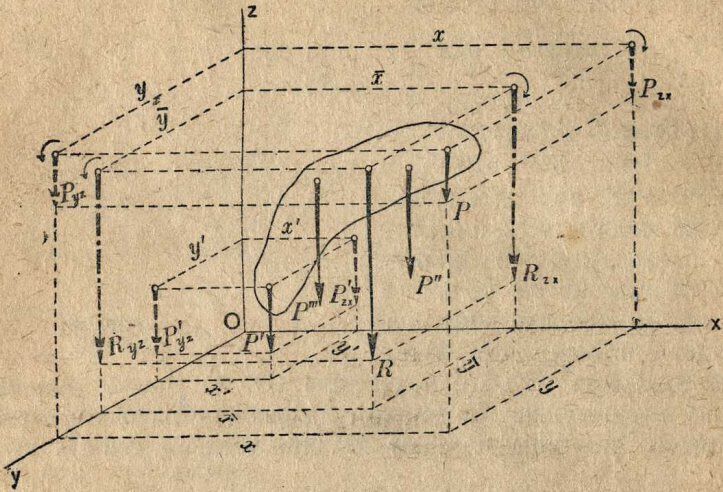
Фиг. 53.

лельных сил будет, положим, R . Так как координаты центра параллельных сил не изменяются от перемены направления сил, то предположим, что все силы $P, P', P'', P''', \dots$ параллельны оси Oz . На основании теоремы Вариньона о моментах относительно оси, мы можем написать:

$$m_x(R) = m_x(P) + m_x(P') + \dots \dots \dots (14')$$

$$m_y(R) = m_y(P) + m_y(P') + \dots \dots \dots (14'')$$

$$m_z(R) = m_z(P) + m_z(P') + \dots \dots \dots (14''')$$



Фиг. 54.

Уравнение (14''') обращается в данном случае в тождество, потому что моменты всех сил относительно этой оси при взятом направлении сил $P, P', P'', P''', \dots$ равны нулю. Теперь определим моменты сил $P, P', P'', P''', \dots$ относительно осей Ox и Oy . Чтобы определить моменты этих сил относительно оси Ox , проводим плоскость yz , перпендикулярную к оси Ox , и проектируем на нее силы $P, P', P'', P''', \dots$ и силу R . Пусть расстояния этих проекций от точки O будут $y, y', y'', y''',$ и $\bar{y}$. Чтобы получить выражения моментов, нужно проекцию каждой силы помножить на соответствующий перпендикуляр; что касается знака, то получаемым произведениям в данном случае нужно приписывать знак минус, так как, смотря по направлению xO , увидим, что силы стремятся вращать тело около оси xO против часовой стрелки. Таким образом найдем:

$$m_x(P) = -P.y, \quad m_x(P') = -P'.y', \quad m_x(P'') = -P''.y'', \dots$$

$$m_x(R) = -R.\bar{y},$$

что, в виду уравнения (14'), даст:

$$-R.\bar{y} = \Sigma (-P.y) = -\Sigma (P.y),$$

или, после перемены знаков:

$$R.\bar{y} = \Sigma (P.y) \dots \dots \dots (15).$$

Обратимся теперь к определению моментов тех же сил относительно оси Oy . Для этого проводим плоскость xz , перпендикулярную к оси Oy , находим проекции на эту плоскость сил $R, P, P', P'', P''', \dots$ и опускаем на них перпендикуляры из точки O , — пусть они будут: $x, x', x'', x''', \dots$. Множа затем проекции сил на эти перпендикуляры, получаем искомые моменты со знаками плюс, ибо силы вращают тело по часовой стрелке:

$$m_y(R) = R \cdot X, \quad m_y(P) = P \cdot x, \quad m_y(P') = P' \cdot x', \dots,$$

что, в виду уравнения (14''), даст:

$$R \cdot \bar{x} = \Sigma(P \cdot x) \dots \dots \dots (15'').$$

Определяя из (15') и (15'') координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$, находим:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(P \cdot x)}{R},$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(P \cdot y)}{R}.$$

Что касается определения координаты $\bar{z}$, то при том направлении сил, которое мы взяли, координаты этой определить нельзя, и, чтобы определить ее, надо предположить, что все силы $R, P, P', P'', P''', \dots$ стали параллельны какой-нибудь другой оси, — например, оси Ox , — и приложить теорему Вариньона к оси Oy ; тогда получим:

$$R \cdot \bar{z} = \Sigma(P \cdot z),$$

откуда

$$\bar{z} = \frac{\Sigma(P \cdot z)}{R}.$$

Заметив, что $R = \Sigma P$, заменяем в выведенных формулах R равною ей величиною ΣP ; тогда получим следующие три формулы координат центра параллельных сил:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(P \cdot x)}{\Sigma P}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma(P \cdot y)}{\Sigma P}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma(P \cdot z)}{\Sigma P} \dots \dots \dots (16).$$

Эти формулы выражают расстояния центра параллельных сил от соответственных плоскостей координат. Мы видим, что для нахождения каждого расстояния нужно каждую силу умножить на расстояние точки приложения ее от соответственной плоскости координат, сложить все эти произведения и разделить на сумму всех сил. Так, например, расстояние точки приложения силы R от плоскости yz будет

$$\bar{x} = \frac{P \cdot x + P' \cdot x' + P'' \cdot x'' + P''' \cdot x''' + \dots}{P + P' + P'' + P''' + \dots} = \frac{\Sigma(P \cdot x)}{\Sigma P}.$$

Центр тяжести.

§ 18. Координаты центра тяжести. Займемся теперь вопросом о притяжении твердого тела землею. Опыт показывает, что направление силы притяжения земли бывает всегда перпендикулярно к поверхности земли, за которую принимают свободную поверхность воды в ее бассейнах: морях, озерах и т. п. Так как эта последняя поверхность на протяжении малых своих участков очень близко подходит к плоскости, то с очень малой степенью погрешности можно сказать, что силы притяжения земли на различные части тела не очень больших размеров все будут параллельны между собою. Это же самое можно выразить еще так: земля притягивает частицы тела силами, которые направлены приблизительно к центру ее. Что действительно эти силы не проходят через земной центр, можно видеть из того обстоятельства, что нормали к поверхности земли не пересекаются в центре, ибо земля не есть в строгом смысле шар, а эллипсоид вращения. Так как силы притяжения сходятся в точке, отстоящей каждый раз от земной поверхности на огромном расстоянии (около 6000 вер.), то можем считать их параллельными, если само тело невелико.

Равнодействующая всех сил притяжения земли на различные части тела называется весом тела. Центр этих параллельных сил притяжения называется *центром тяжести*. Силы тяжести, действующие на частицы тела, пропорциональны массам этих частиц; следовательно, центр тяжести тела определяется только тем, что все силы, действующие на частицы, пропорциональны их массам. Положение центра тяжести тела не изменилось бы, если бы изменилась сила притяжения земли. Мы можем сказать, что центр тяжести тела есть центр параллельных сил, пропорциональных массам материальных точек, составляющих тело. В этом смысле, вместо термина центр тяжести, вводят для той же точки еще другой термин: *центр инерции*.

Положим, что тело представляет систему конечного числа материальных точек, вес которых обозначим через $P, P', P'', P''', \dots$, а координаты через $(x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), \dots$. Зная, что центр тяжести системы материальных точек будет центром параллельных сил $P, P', P'', P''', \dots$, заключаем, что координаты центра этих параллельных сил будут не что иное, как координаты центра тяжести. Если назовем координаты центра тяжести через x, y, z , то найдем, что

$$\bar{x} = \frac{\sum (P \cdot x)}{\sum P}; \quad \bar{y} = \frac{\sum (P \cdot y)}{\sum P}; \quad \bar{z} = \frac{\sum (P \cdot z)}{\sum P}.$$

Если тело представляет непрерывное соединение материальных точек, т. е. сплошную массу, то для определения веса этого тела его нужно разбить на весьма малые объемы и определить вес каждого из этих объемов, рассматривая каждый из них отдельно, как материальную точку. Если тело для всех равных объемов имеет равные веса, то говорят, что тело однородно. *Плотностью* такого тела или весом единицы объема называется отношение веса к соответствующему объему. Если тело однородно и объем его будет V , а вес P , то плотность γ этого тел выразится так:

$$\gamma = \frac{P}{V}.$$

Если же тело неоднородно, то это значит, что при равных объемах частей тела веса получаются неравные и, следовательно, в различных своих точках тело будет обладать различной плотностью. Чтобы найти плотность неоднородного тела в данной точке M , поступают так: внутри тела выделяют ограниченный какой-либо замкнутой поверхностью объем, внутри которого лежала бы точка M . Назовем этот объем через ΔV , а через ΔP назовем вес материи, заключающейся во взятом объеме; тогда отношение $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ и принимается за среднюю плотность для рассматриваемого объема ΔV . Переходя к пределу, т.е. предполагая, что объем ΔV приближается к нулю, а точка M постоянно остается внутри ограничивающей его поверхности, получим некоторую определенную величину $\lim \frac{\Delta P}{\Delta V}$, которую мы называем *плотностью тела в данной точке M* и обозначим γ_M . Отсюда следует, что вес малой части тела у точки M есть:

$$\Delta P = \gamma_M \Delta V.$$

В дальнейшем мы будем, главным образом, определять центры тяжести тел, имеющих постоянную плотность, т.е. тел однородных.

Перейдем теперь к вопросу об определении координат центра тяжести сплошного тела. Для этого разбиваем тело на весьма малые элементы, в виде весьма небольших прямоугольных параллелепипедов со сторонами, параллельными осям координат. Назовем объем каждого параллелепипеда через ΔV , а плотность его через γ . Обозначим, далее, через $(x, x', x'', \dots)$, $(y, y', y'', \dots)$, $(z, z', z'', \dots)$ координаты, соответствующие точкам приложения сил тяжести каждого параллелепипеда, и предположим, что вес каждого параллелепипеда сосредоточен в его центре; тогда тело можно будет рассматривать, как собрание бесчисленного множества материальных точек, при чем вес каждой выразится так:

$$P = \gamma \Delta V.$$

Подставляя это значение P в формулы для координат центра параллельных сил:

$$\bar{x} = \frac{\sum (P \cdot x)}{\sum P}, \quad \bar{y} = \frac{\sum (P \cdot y)}{\sum P}, \quad \bar{z} = \frac{\sum (P \cdot z)}{\sum P},$$

получим новые формулы, выражающие координаты центра тяжести тела:

$$\bar{x} = \frac{\sum (x \cdot \Delta V \cdot \gamma)}{\sum (\Delta V \cdot \gamma)}, \quad \bar{y} = \frac{\sum (y \cdot \Delta V \cdot \gamma)}{\sum (\Delta V \cdot \gamma)}, \quad \bar{z} = \frac{\sum (z \cdot \Delta V \cdot \gamma)}{\sum (\Delta V \cdot \gamma)}.$$

Если тело однородно, то для всех бесконечно малых элементов ΔV плотность γ будет одинакова; в таком случае γ можно вынести за знак суммы как в числителе, так и в знаменателе и сократить; тогда получим:

$$\bar{x} = \frac{\sum (x \cdot \Delta V)}{\sum (\Delta V)}, \quad \bar{y} = \frac{\sum (y \cdot \Delta V)}{\sum (\Delta V)}, \quad \bar{z} = \frac{\sum (z \cdot \Delta V)}{\sum (\Delta V)}.$$

Но $\sum (\Delta V)$ представляет собою объем данного тела, который мы обозначили через V ; тогда получим формулы в окончательном виде:

$$\bar{x} = \frac{\sum (x \cdot \Delta V)}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\sum (y \cdot \Delta V)}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\sum (z \cdot \Delta V)}{V}.$$

Центр тяжести такого однородного тела называется *центром тяжести объема*.

Кроме центра тяжести объема рассматривают еще центр тяжести *поверхности и линии*. При этом принимают, что эти поверхности и линии непрерывно и равномерно покрыты материальными точками. Положим, что мы определяем центр тяжести поверхности. Разделим ее на бесконечно малые элементы площади ΔS . Пусть *поверхностная плотность*, т.е. отношение веса ΔP такого элемента к самому элементу площади ΔS , будет:

$$\gamma' = \frac{\Delta P}{\Delta S},$$

отсюда

$$\Delta P = \gamma' \Delta S.$$

Тогда координаты центра тяжести поверхности выразятся так:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(x \cdot \Delta S \cdot \gamma')}{\Sigma(\Delta S \cdot \gamma')}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma(y \cdot \Delta S \cdot \gamma')}{\Sigma(\Delta S \cdot \gamma')}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma(z \cdot \Delta S \cdot \gamma')}{\Sigma(\Delta S \cdot \gamma')}.$$

Пусть γ' для всех элементов одинаково, а $\Sigma(\Delta S)$ —площадь всей поверхности—пусть равняется S ; тогда:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(x \cdot \Delta S)}{S}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma(y \cdot \Delta S)}{S}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma(z \cdot \Delta S)}{S},$$

где x, y, z представляют координаты элементов площадей ΔS .

Совершенно так же определяется и центр тяжести линии. Положим, что *линейная плотность*, т.е. отношение веса ΔP бесконечно малого элемента линии к длине этого элемента ΔL , есть γ'' ; тогда вес элемента будет $\Delta P = \gamma'' \cdot \Delta L$. Координаты центра тяжести линии выразятся так:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(x \cdot \Delta L \cdot \gamma'')}{\Sigma(\Delta L \cdot \gamma'')}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma(y \cdot \Delta L \cdot \gamma'')}{\Sigma(\Delta L \cdot \gamma'')}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma(z \cdot \Delta L \cdot \gamma'')}{\Sigma(\Delta L \cdot \gamma'')}.$$

В этих формулах γ'' сократится, если материальная линия однородна; что же касается $\Sigma \Delta L$, то это есть длина всей линии, которую мы обозначим через L . Вследствие этого вышенаписанные формулы примут вид:

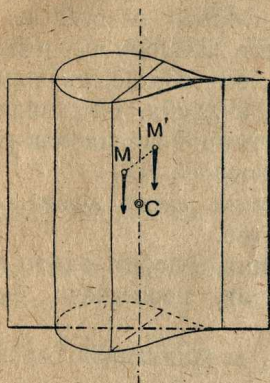
$$\bar{x} = \frac{\Sigma(x \cdot \Delta L)}{L}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma(y \cdot \Delta L)}{L}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma(z \cdot \Delta L)}{L}.$$

Для определения центра тяжести служат следующие вспомогательные теоремы:

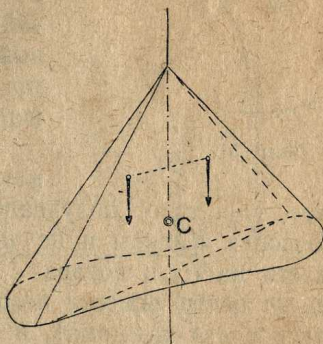
I. Если тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести лежит на этой плоскости.

Когда говорится, что тело имеет плоскость симметрии, то под этим подразумевают, что оно расположено относительно этой плоскости таким образом, что каждой материальной точке по одну сторону плоскости симметрии соответствует равная ей по весу точка, помещенная по другую сторону и притом так, что линия, соединяющая эти две точки, перпендикулярна к плоскости симметрии и делится ею пополам. Если возьмем точку М

(фиг. 55) и найдем соответствующую ей симметричную точку M' , то на них будут действовать равные силы тяжести; если их сложить, то в силу их равенства равнодействующая окажется приложенной в середине линии MM' , и, значит, точка приложения равнодействующей будет лежать в плоскости симметрии. То же самое получим и для всех остальных точек такого симметричного тела. Отыскивая теперь центр всех этих параллельных сил, видим, что он так же будет лежать опять в плоскости симметрии,—в какой-нибудь точке ее C ; следовательно, это и будет центр тяжести, который, таким образом, и лежит в плоскости симметрии.



Фиг. 55.



Фиг. 56.

II. Если тело симметрично относительно оси, то центр тяжести лежит на этой оси.

Осью симметрии называется прямая линия, обладающая тем свойством, что каждой точке тела по одну сторону ее соответствует другая, равная ей по весу, расположенная по другую сторону так, что линия, соединяющая эти точки, проходит через ось, перпендикулярна к ней и делится ею пополам. Возьмем две такие симметричные точки (фиг. 56); складывая силы тяжести, действующие на них, заменяем их одной, равной их сумме; сила эта будет приложена к середине линии, соединяющей две данные точки, а следовательно, пройдет через ось симметрии. Понятно, что, заменяя силы, действующие на каждые две симметричные точки, мы получим ряд равнодействующих, которые окажутся приложенными в точках, расположенных по оси симметрии. Складывая эти силы, получим общую равнодействующую, приложенную в какой-нибудь точке C этой же оси. Тогда эта точка C , будучи центром параллельных сил, действующих на тело, и будет его центром тяжести.

III. Если тело симметрично относительно точки, то центр тяжести лежит в центре симметрии.

Центр симметрии есть такая точка в теле, что всякой материальной точке M (фиг. 57) соответствует другая точка M' , равная ей по весу и расположенная так, что линия, соединяющая эти точки, проходит через центр симметрии и делится им пополам. Равнодействующая двух сил тяжести этих точек пройдет, очевидно, через середину линии, соединяющей эти точки, т. е. через центр симметрии. Так как это рассуждение мы можем

применить к каждой паре точек, получая каждый раз равнодействующую, проходящую через центр симметрии, то равнодействующая проходит через центр симметрии O , а потому центр тяжести лежит в центре симметрии O .

Основываясь на этих трех теоремах, можно определить центр тяжести некоторых тел.

Центр тяжести *материальной прямой* лежит в ее середине.

Центр тяжести *параллелограмма* лежит в точке пересечения его диагоналей, которая будет в то же время центром симметрии параллелограмма. Последнее следует из того, что в параллелограмме каждому элементу площади найдется другой, ему соответствующий и равный ему по весу, а линия, соединяющая такие два элемента, делится пополам как-раз в точке пересечения диагоналей.

Центр тяжести *шара* лежит в его геометрическом центре.

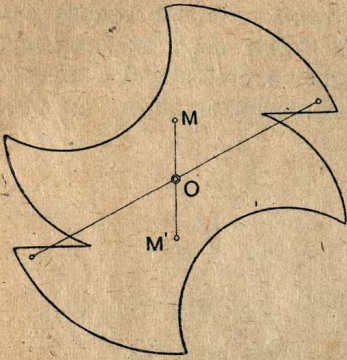
Кольцо, т.е. тело, полученное от вращения фигуры около оси, лежащей в плоскости фигуры и не пересекающей эту последнюю, будет иметь центр тяжести на оси кольца.

В *конусе* центр тяжести лежит на линии, соединяющей середину основания конуса с его вершиной, и т. п.

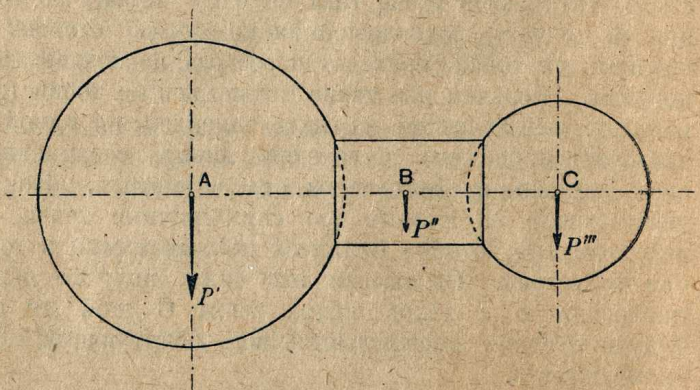
IV. Если тело состоит из нескольких частей, то центр тяжести его может быть определен, как центр тяжести нескольких материальных точек, которые мы получаем, сосредоточивая вес каждой отдельной части данного тела в ее центре тяжести.

Для доказательства возьмем тело ABC (фиг. 58), состоящее, положим, из шара, цилиндра со сферическими выемками на концах и еще другого шара, меньшего, чем первый. Огнем центр тяжести всей этой системы. Притяжение земли на первый шар сведется к одной силе P' , которая действует на центр тяжести его A . Точно так же все действие земного притяжения на цилиндр приведет к одной силе P'' , действующей на центр тяжести цилиндра, — в точке B . Наконец, на меньший шар будет действовать сила P''' , приложенная в центре его C . Очевидно, что отыскание центра тяжести этих трех тел сводится к отысканию равнодействующей трех сил P' , P'' и P''' .

Пользуясь изложенными четырьмя теоремами, можно отыскивать центры тяжести различных фигур.



Фиг. 57.



Фиг. 58.

I. Центр тяжести линий.

§ 19. Центр тяжести периметра треугольника. Дан треугольник ABC (фиг. 59). Разделим стороны его AB, BC и AC пополам. Очевидно, что центр тяжести каждой из них лежит на ее середине, так что можно принять, что веса сторон треугольника будут приложены в точках a, b и c, — серединах его сторон. Эти силы P , P' и P'' будут по величине пропорциональны длинам сторон. Соединим точки a, b и c между собою и сложим силы P и P'' ; равнодействующую их назовем через R' . Она пройдет через точку M. Эта точка находится на том месте линии ac, которое удовлетворяет пропорции

$$P'' : P = aM : Mc.$$

Из подобия треугольников ABC и abc имеем:

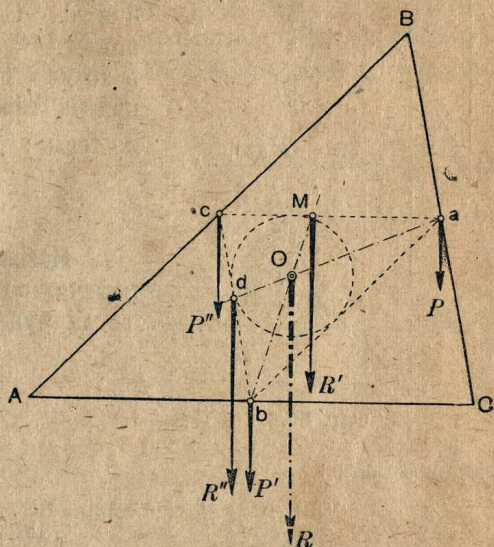
$$AB : BC = ab : bc,$$

но

$$AB : BC = P'' : P,$$

следовательно:

$$aM : Mc = ab : bc.$$



Фиг. 59.

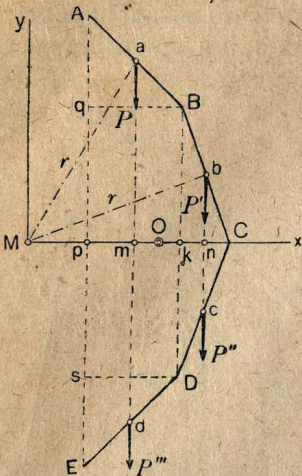
Последняя пропорция показывает, что, если соединим точку M с b, то линия Mb разделит угол abc пополам. Действительно, Mb делит сторону ac на части, пропорциональные двум другим сторонам, а это и есть свойство биссектрисы. Сложив потом силу R' с P' , получим равнодействующую, точка приложения которой будет лежать где-нибудь на линии bM. Отсюда заключаем, что центр тяжести лежит на линии, делящей угол при вершине b пополам.

Складывая силы P' и P'' , мы можем применить то же самое рассуждение; тогда увидим, что центр тяжести лежит на линии ad, делящей угол cab пополам. Если это так, то центр тяжести должен лежать на пересечении биссектрис Mb и ad, — в точке O, представляющей собою, очевидно, центр круга, вписанного в треугольник abc.

Итак, центр тяжести периметра треугольника лежит в центре круга, вписанного в треугольник, вершины которого лежат на серединах сторон данного треугольника.

§ 20. Центр тяжести части периметра правильного многоугольника. Возьмем часть периметра ABCDE (фиг. 60) правильного многоугольника и проведем прямую MC, которая бы разделила эту часть периметра на две симметричные части. Пусть M будет центр круга, вписанного в многоугольник. Так как MC есть ось симметрии, то искомый центр тяжести будет лежать на ней, — где-нибудь в точке O. Определим расстояние MO, — координату

нату центра тяжести. Для этого воспользуемся выведенными выше формулами, определяющими координаты центра тяжести; при этом оси координат возьмем так, чтобы линия MC была осью x , а ось y была бы к ней перпендикулярна; за начало координат примем точку M . Вместо каждой линии



Фиг. 60.

AB , BC , CD и DE возьмем материальные точки, равные этим линиям по весу и помещенные в серединах сторон. Такие точки будут: a , b , c и d . Соединив a с d и b с c , найдем, что линии ad и bc пересекают ось симметрии MC в точках m и n . Теперь определим координату центра тяжести O . Положим, что она равняется x ; тогда:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma (P \cdot x)}{\Sigma P}.$$

Назовем через γ'' линейную плотность, т.-е. количество веса, приходящегося на единицу длины. Тогда будем иметь, что

$$\begin{aligned} P &= AB \cdot \gamma'', & P' &= CD \cdot \gamma'', \\ P' &= BC \cdot \gamma'', & P'' &= DE \cdot \gamma''; \end{aligned}$$

следовательно:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma (P \cdot x)}{\Sigma P} = \frac{AB \cdot \gamma'' \cdot Mm + BC \cdot \gamma'' \cdot Mn + CD \cdot \gamma'' \cdot Mn + DE \cdot \gamma'' \cdot Mm}{(AB + BC + CD + DE) \cdot \gamma''};$$

$$\bar{x} = \frac{AB \cdot Mm + BC \cdot Mn + CD \cdot Mn + DE \cdot Mm}{AB + BC + CD + DE} \dots \dots \dots (a).$$

Соединив M с a и опустив из B перпендикуляр Bq на AE , получим, что треугольник qAB подобен треугольнику Mam , так как стороны их взаимно перпендикулярны. Из подобия их следует, что

$$\frac{AB}{Aq} = \frac{r}{Mm},$$

где $r = Ma$ есть радиус вписанного в данный многоугольник круга. Взяв произведение крайних и средних, имеем

$$AB \cdot Mm = r \cdot Aq.$$

Так же найдем:

$$BC \cdot Mn = Mb \cdot Bk = r \cdot qp,$$

и т. д. Подставляя эти выражения в формулу (a), находим

$$\bar{x} = \frac{r \cdot (Aq + qp + ps + sE)}{AB + BC + CD + DE}.$$

Называя данный периметр через L , а хорду AE через d , получим:

$$\bar{x} = \frac{r \cdot d}{L}.$$

Отсюда следует, что *расстояние центра тяжести части периметра правильного многоугольника от центра вписанной окружности есть четвертая пропорциональная к радиусу этой окружности, хорде части периметра и величине периметра*. Это и есть формула центра тяжести правильного многоугольника.

§ 21. Центр тяжести дуги круга. Возьмем часть круга с центром в точке М (фиг. 61) и радиусом МА = r. Назовем угол АМС через α. Дугу круга можно рассматривать, как предел части периметра правильного многоугольника при возрастании числа сторон его до бесконечности. Обозначив центр тяжести буквою О, можем, на основании предыдущей формулы, написать:

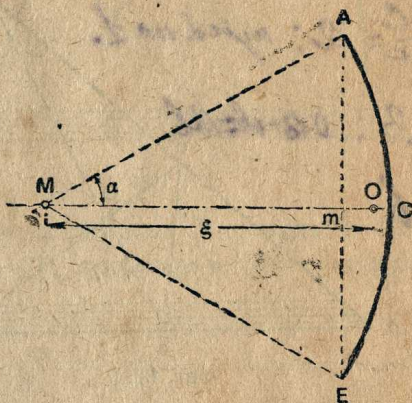
$$MO = x = \frac{r \cdot d}{L} = \xi,$$

где x есть искомая координата центра тяжести, d — хорда АЕ и L — дуга АСЕ. В пределе r не изменится; d есть 2Аm, а Ам = r · sin α, поэтому

$$d = 2r \sin \alpha;$$

L в пределе обратится в дугу круга, значит:

$$L = r \cdot 2\alpha,$$



Фиг. 61.

при чем α берется не в градусах, а в долях радиуса. Таким образом, в пределе

$$x = \frac{r \cdot 2r \sin \alpha}{r \cdot 2\alpha} = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

В частном случае для полуокружности, когда α = π/2, имеем sin α = 1, тогда

$$x = r \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2r}{\pi}, \text{ и, приняв } \pi = \frac{22}{7}, \text{ имеем}$$

$$x = \frac{7}{11}r.$$

Эта последняя формула дает расстояние центра тяжести полуокружности от центра круга.

II. Центр тяжести площадей.

§ 22. Центр тяжести площади треугольника. Разобьем площадь данного однородного треугольника ABC (фиг. 62) на бесконечно тонкие полоски, параллельные стороне AC. Эти полоски мы можем рассматривать, как линии, равномерно покрытые массой; следовательно, силы тяжести, действующие на каждую такую полоску, имеют равнодействующую, проходящую через середину этой полоски, почему точка приложения общей равно-

действующей должна лежать где-нибудь на линии Bb, проходящей через середины всех полосок, т.-е. соединяющей вершину B с серединой основания b.

Повторяя то же рассуждение относительно стороны AB, найдем, что центр тяжести находится где-то на линии Cc, соединяющей вершину C с серединой основания AB. Следовательно, центр тяжести площади треугольника должен лежать в точке O, на пересечении линий Bb и Cc. Определим теперь, где лежит эта точка O. Для этого соединяем b с c, тогда получим два подобных треугольника BOC и cOb. Из подобия их можно вывести пропорцию:

$$BO : Ob = BC : bc.$$

Но так как из подобия треугольника ABC и Acb имеем

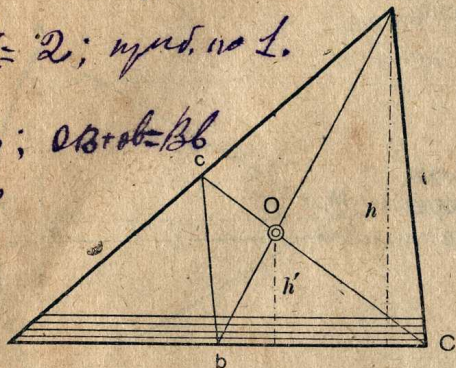
$$\frac{BC}{bc} = \frac{AB}{Ac} = \frac{2}{1},$$

то и

$$\frac{BO}{Ob} = \frac{2}{1},$$

или

$$BO = 2Ob.$$



Фиг. 62.

Если к обоим частям этого равенства прибавим по Ob, то получим:

$$BO + Ob = Bb = 2 Ob + Ob = 3 Ob,$$

откуда

$$Ob = \frac{1}{3} Bb,$$

т.-е. центр тяжести площади треугольника лежит на одной трети от основания на линии, соединяющей середину основания треугольника с противоположной вершиной.

Если на основание AC опустим перпендикуляры из вершины B и из центра тяжести O, то, называя длины их через h и h', получаем

$$h' = \frac{1}{3} h.$$

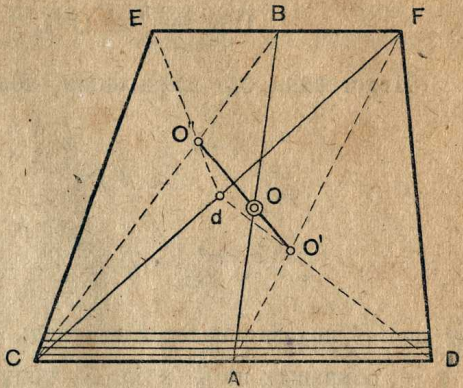
Следовательно, положение центра тяжести мы можем определить еще следующим образом:

Центр тяжести площади треугольника лежит на линии, соединяющей вершину с серединой противоположной стороны, на одной трети высоты от основания.

§ 23. Центр тяжести трапеции. Разбивая площадь данной трапеции CEFD (фиг. 63) на бесконечно тонкие полоски, параллельные стороне CD, мы убеждаемся, что центр тяжести должен лежать на линии AB, соединяющей середины параллельных сторон, ибо центр тяжести каждой отдельной полоски лежит на середине ее. Разобьем затем диагональ CF трапецию на два треугольника CEF и CFD. Центр тяжести первого треугольника лежит

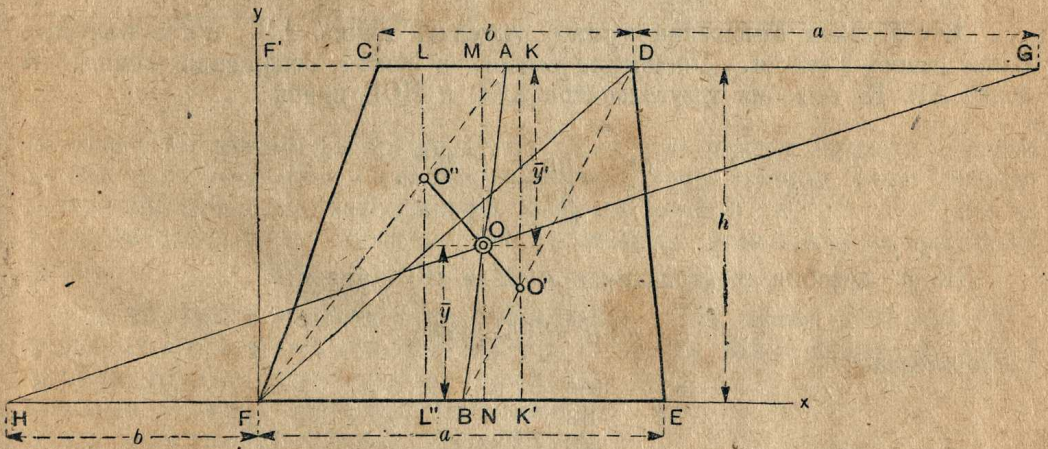
в точке O'' , а второго—в точке O' ; положение точек O' и O'' определяется теоремой § 22. Значит, общий центр тяжести должен лежать одновременно на линии AB и на линии $O'O''$; следовательно, он лежит в точке их пересечения O .

Существует еще другой способ нахождения центра тяжести площади трапеции. Обозначим нижнее основание трапеции через a (фиг. 64), а верхнее через b . Откладываем от точки D до G , так что $DG=a$, и расстояние b от точки F до H , так что $FH=b$; соединим точки G и H линией GH . Точно так же соединяем середины оснований,—точки A и B . Пересечение AB с GH и дает точку O —центр тяжести площади трапеции. Чтобы



Фиг. 63.

доказать это, назовем через y расстояние центра тяжести O от прямой FE а через y' —расстояние центра тяжести O от CD , и назовем высоту трапеции



Фиг. 64.

через h . Пусть центры тяжести треугольника FDE и FCD лежат в O' и O'' . Определим теперь координаты центра тяжести относительно линий FE — (y) и CD — (y') по формулам:

$$\bar{y} = \frac{\sum (\Delta S \cdot y)}{S} \text{ и } \bar{y}' = \frac{\sum (\Delta S \cdot y')}{S},$$

при чем за ось x примем сначала FE , а потом $F'G$, начало же координат отнесем сначала в точку F , а затем в F' . Тогда получим:

$$\bar{y} = \frac{\sum (\Delta S \cdot y)}{S} = \frac{\text{пл. FDE} \cdot O'K' + \text{пл. FCD} \cdot O''L'}{\text{пл. FDE} + \text{пл. FCD}},$$

$$\bar{y}' = \frac{\sum (\Delta S \cdot y')}{S} = \frac{\text{пл. FDE} \cdot O'K + \text{пл. FCD} \cdot O''L}{\text{пл. FDE} + \text{пл. FCD}}.$$

Но

$$\text{пл. FDE} = a \cdot \frac{h}{2}, \quad \text{пл. FCD} = b \cdot \frac{h}{2},$$

$$O'K' = \frac{h}{3} = O''L, \quad O'K = \frac{2h}{3} O'L'.$$

Подставляя эти выражения, получим:

$$\bar{y} = \frac{a \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} + b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2h}{3}}{S},$$

$$\bar{y}' = \frac{b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} + a \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2h}{3}}{S},$$

где под S подразумевается площадь всей трапеции FCDE. Берем отношение $\bar{y}$ к $\bar{y}'$; сокращая на $\frac{h^2}{3}$ и на S , получим:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{y}'} = \frac{\frac{a}{2} + b}{\frac{b}{2} + a} \dots \dots \dots (a)$$

Вот в каком отношении нужно разделить линию АВ, чтобы получить место центра тяжести. Посмотрим теперь, в каком отношении линия GH делит АВ. Из подобия треугольников AOG и HOB имеем:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{HB}{AG} = \frac{\frac{a}{2} + b}{\frac{b}{2} + a}.$$

Но из подобия треугольников AOM и BON имеем:

$$\bar{y} : \bar{y}' = OB : OA;$$

следовательно:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{y}'} = \frac{HB}{AG} = \frac{\frac{a}{2} + b}{\frac{b}{2} + a}.$$

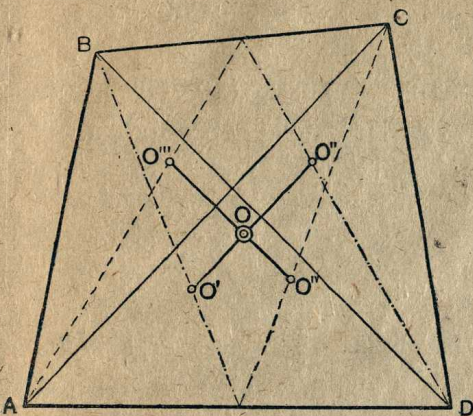
Итак, точка О есть действительно центр тяжести площади трапеции, так как она удовлетворяет формуле (a).

В предельном случае, когда $b=0$, трапеция переходит в треугольник, и $\bar{y} = \frac{1}{2} \bar{y}'$.

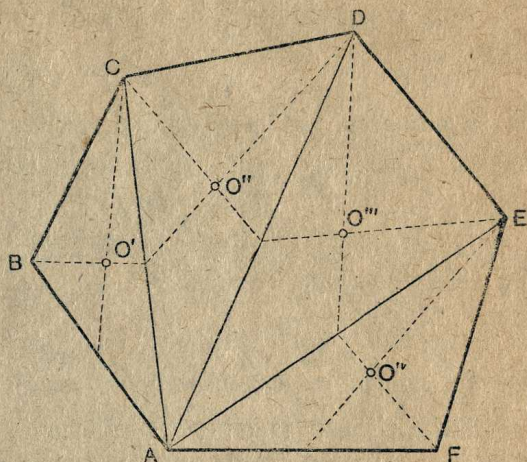
§ 24. Центр тяжести площади произвольного четырехугольника. Для определения центра тяжести площади произвольного четырехугольника поступают следующим образом: разбивают данный четырехугольник ABCD (фиг. 65) на два треугольника ABD и DBC диагональю BD и отыскивают их центры тяжести по известным правилам. Положим, центр тяжести треугольника ABD лежит в точке О', а треугольника DBC—в точке О''. Потом тот же четырехугольник разбиваем на два треугольника диагональю AC и так же, как

и прежде, определяем центры тяжести новых треугольников O''' и O^{IV} . Значит, общий центр тяжести должен лежать одновременно на линиях $O'O''$ и $O'''O^{IV}$; следовательно, он лежит в точке их пересечения O .

Если бы был дан какой-нибудь многоугольник $ABCDEF$ (фиг. 66) и требовалось бы определить центр тяжести его площади, то для этого его



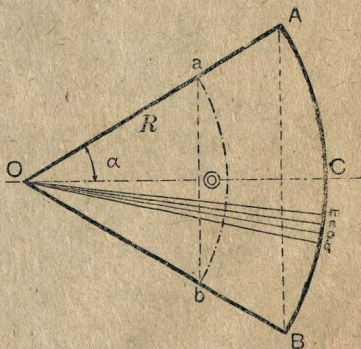
Фиг. 65.



Фиг. 66.

пришлось бы разбить на треугольники, определить центры тяжести каждого из них и сосредоточить в найденных центрах веса, которые будут пропорциональны площадям треугольников. Получим точки O' , O'' , O''' , O^{IV} и т. д., и задача сведется к отысканию центра тяжести нескольких материальных точек.

§ 25. Центр тяжести кругового сектора. Дан сектор AOB (фиг. 67), и требуется определить его центр тяжести. Проводим радиус, перпендикулярный к хорде AB ; он будет осью симметрии для площади сектора; следовательно, искомый центр тяжести будет лежать где-нибудь на нем. Разобьем дугу AB на очень малые равные части mn , pr , rq ,... и соединим все полученные точки деления дуги AB с центром O ; тогда наш сектор разобьется на весьма малые секторы, которые в пределе, при бесконечном возрастании числа делений, можно рассматривать, как прямолинейные равнобедренные треугольники. Центры тяжести всех этих треугольников, как легко видеть, расположены равномерно по дуге круга, описанного из центра O радиусом, равным $\frac{2}{3}R$; полученная таким образом дуга ab будет покрыта равномерно точками, равными по весу, потому что площади малых секторов равны, и вопрос теперь сводится к отысканию центра тяжести материальной дуги ab .



Фиг. 67.

Но расстояние центра тяжести дуги от центра круга определяется по известной формуле

$$\bar{x} = r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

где для нашего случая

$$r = Oa = \frac{2}{3} R,$$

и потому искомый центр тяжести отстоит от центра круга на расстоянии

$$\bar{x} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Это и есть искомая формула. В частном случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$, сектор обращается в полукруг, и центр тяжести его определяется по формуле:

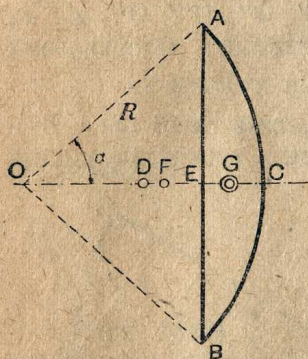
$$\bar{x} = \frac{2}{3} R \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi},$$

или, полагая $\pi \cong \frac{22}{7}$, получим:

$$\bar{x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R \cdot 7}{22} = \frac{14}{33} R.$$

Значит, центр тяжести полукруга лежит на расстоянии $\frac{14}{33} R$ от центра круга.

§ 26. Центр тяжести кругового сегмента. Центр тяжести кругового сегмента ACB (фиг. 68) будет лежать на среднем радиусе OC, а именно, где-нибудь на линии EC, — в точке G. Назовем расстояние его от центра круга через x . На основании теоремы IV центр тяжести сектора можно определить по центрам тяжести составляющих этот сектор треугольника AOB и сегмента ACB. Для этого сосредоточим вес площадей треугольника и сегмента в их центрах тяжести D и G. Если площадь сегмента назовем через S , то можем написать:



Фиг. 68.

$$\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{Sx + \frac{1}{2} R \cos \alpha \cdot \frac{2}{3} R \sin \alpha \cdot \frac{2}{3} R \cos \alpha}{2 R \alpha \cdot \frac{R}{2}},$$

где α выражена в долях радиуса. Преобразовывая последнее равенство, получим:

$$\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha = Sx + \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha;$$

отсюда определим $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{2 R^3 \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{3 S} = \frac{2 R^3 \sin^3 \alpha}{3 S}.$$

Но $2 R \sin \alpha = AB = d$, так что

$$R \sin \alpha = \frac{d}{2}.$$

Подставляя вместо $R \sin \alpha$ его выражение по d , найдем окончательно, что

$$\bar{x} = \frac{d^3}{12 S}.$$

Это и есть искомая формула, определяющая центр тяжести площади сегмента.

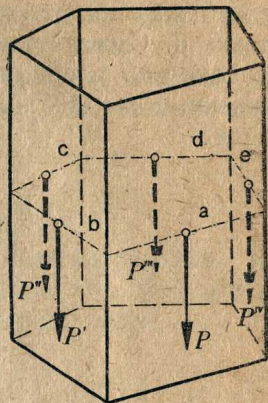
III. Центр тяжести поверхностей.

§ 27. Центр тяжести боковой поверхности прямой призмы. Определим центр тяжести граней данной призмы (фиг. 69) и сосредоточим вес каждой в ее центре тяжести. Силы, действующие на эти точки, будут пропорциональны площадям граней. Назовем эти силы через P, P', P'', P''' и P^{IV} . Они относятся между собою, как соответствующие площади граней. Но, так как во всех гранях можно за основание граней принять боковое ребро, то эти площади относятся, как стороны какого-нибудь перпендикулярного сечения, — например, среднего, — ибо именно эти стороны и служат высотами граней. Поэтому:

$$P:P':P'':P''':P^{IV} = a:b:c:d:e,$$

где $a, b, c, \dots$ суть стороны перпендикулярного среднего сечения. Кроме того, точки приложения сил $P, P', P'', \dots$, лежат на сторонах этого среднего сечения (так как призма прямая); следовательно, названные силы можно рассматривать, как веса сторон материального многоугольника $abcde$.

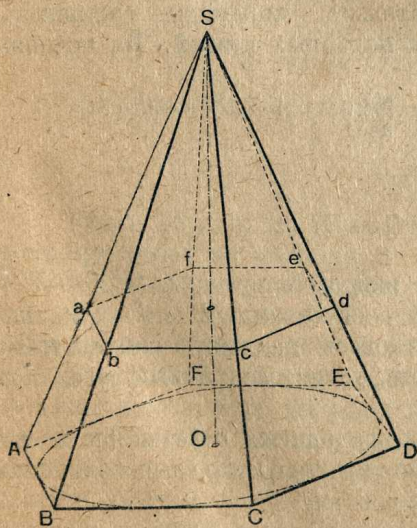
Это показывает, что отыскание центра параллельных сил $P, P', P'', \dots$, (т.-е. центра тяжести боковой поверхности прямой призмы) тождественно с нахождением центра тяжести периметра многоугольника $abcde$. Отсюда видно, что *центр тяжести боковой поверхности прямой призмы лежит в центре тяжести периметра среднего перпендикулярного сечения.*



Фиг. 69.

§ 28. Центр тяжести боковой поверхности пирамиды. Правило, которое мы выведем для определения центра тяжести боковой поверхности пирамиды, приложимо только к пирамиде, основание которой есть многоугольник, описанный около круга, а высота проходит через центр этого круга, в частности — к правильной пирамиде.

На расстоянии одной трети от основания данной пирамиды (фиг. 70) проведем сечение, перпендикулярное к высоте. Положим, сечение это будет $abcde$. На серединах его сторон будут лежать центры тяжести треугольников ASB, BSC, CSD, DSE , и т. д. Так как все треугольники имеют общую апофему, то их площади будут относиться, как основания AB, BC, CD, DE , и т. д., или как ab, bc, cd, de и т. д. Это показывает, что

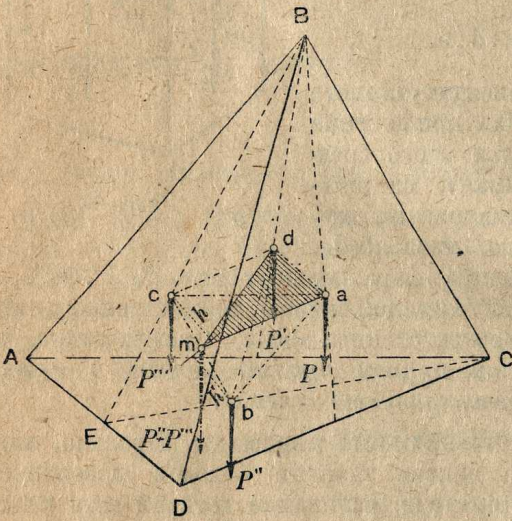


Фиг. 70.

Центр тяжести всей боковой поверхности пирамиды будет лежать в центре тяжести периметра сечения, проведенного перпендикулярно к высоте на расстоянии одной трети высоты от основания.

§ 29. Центр тяжести полной поверхности трехгранной пирамиды. Дана пирамида $BACD$ (фиг. 71) и требуется определить центр тяжести полной ее поверхности. Определим центр тяжести всех ее граней. Центр тяжести грани ABD лежит на линии, соединяющей вершину B с серединою основания AD , на расстоянии одной трети ее от основания, — в точке c . Точно так же центр тяжести грани ACD лежит в точке b , BDC — в точке a и ABC — в точке d . Сосредоточиваем в каждом центре веса граней, — они будут пропорциональны площадям этих граней; именно, в точке c прилагаем сосредоточенный вес P''' , в точке b — вес P'' , в a — вес P и в точке d — вес P' ; притом:

$$\frac{P'''}{P''} = \frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } ACD} \dots \dots \dots (a)$$



Фиг. 71.

Соединим теперь точки a, b, c, d между собою прямыми; получим пирамиду $bacd$, подобную пирамиде $BACD$. Чтобы доказать это подобие, заметим, что ребро BC параллельно ребру bc , $AB \parallel ab$, $CD \parallel cd$, и т. д. Докажем сначала параллельность BC и bc . Мы видим, что

$$cE : cB = 1 : 2 \text{ и } bE : bC = 1 : 2;$$

следовательно:

$$cE : cB = bE : bC;$$

отсюда заключаем, что $bc \parallel BC$. Точно так же обнаружим параллельность остальных ребер большой и малой пирамиды; следовательно, пирамиды составлены из подобных граней. Из подобия

следует, что:

$$\frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } ACD} = \frac{\text{пл. } abd}{\text{пл. } acd},$$

значит:

$$\frac{P'''}{P''} = \frac{\text{пл. } abd}{\text{пл. } acd}.$$

Складывая силы P''' и P'' , находим равнодействующую $(P''' + P'')$, приложенную в некоторой точке m . Сложим ее с силами P и P' . Равнодействующая всех этих сил R будет действовать на какую-нибудь точку плоскости amd . Докажем, что эта плоскость делит двугранный угол при ребре ad пополам.

Посмотрим, в каком отношении должны находиться отрезки bm и mc . Силы P'' и P''' делят cb на части, обратно пропорциональные величинам этих сил, т. е.

$$P''' : P'' = bm : mc.$$

Но по условию

$$P''' : P'' = \text{пл. ABD} : \text{пл. ACD} = \text{пл. abd} : \text{пл. acd};$$

следовательно:

$$bm : mc = \text{пл. abd} : \text{пл. acd}.$$

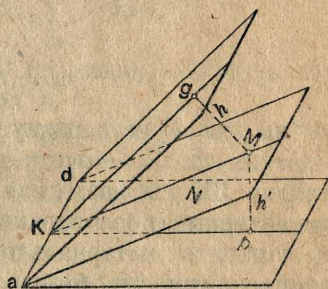
Обнаружим теперь, что именно эта пропорциональность имеет место тогда, когда двугранный угол при ребре ad разделен пополам.

Действительно, когда этот угол разделен пополам, то мы получаем две пирамиды: $bamd$ и $camd$, имеющие равные основания mad . Объемы таких пирамид относятся, как высоты, т.-е.

$$\frac{\text{объем пирамиды } camd}{\text{объем пирамиды } bamd} = \frac{h}{h'} = \frac{mc}{bm} \dots \dots \dots (b)$$

С другой стороны, эти пирамиды могут быть рассматриваемы, как имеющие общую вершину m , но разные основания: acd и abd . При рассматриваемом положении вершины m , высоты пирамид будут равны, так как угол при ребре ad , по допущению, разделен пополам.

В самом деле, положим, что нам дан двугранный угол, разделенный плоскостью N пополам (фиг. 72). Возьмем какую-нибудь точку M на плоскости N и опустим из нее перпендикуляры h и h' на стороны двугранного угла. Проведя через h и h' плоскость, найдем, что она будет перпендикулярна к ad и пересечет грани двугранного угла по линиям rk и gk , и угол gKr будет линейным углом двугранного. Так как двугранный угол разделен пополам, то угол gKM равен углу MKr ; поэтому прямоугольные треугольники MgK и MrK равны, а следовательно $Mg = Mr$ или $h = h'$. Пирамиды $camd$ и $bamd$, как имеющие равные высоты, будут относиться, как площади оснований, т.-е.:



Фиг. 72.

$$\frac{\text{объем пирамиды } camd}{\text{объем пирамиды } bamd} = \frac{\text{пл. cad}}{\text{пл. bad}}.$$

Сравнивая эту пропорцию с пропорцией (b), видим, что:

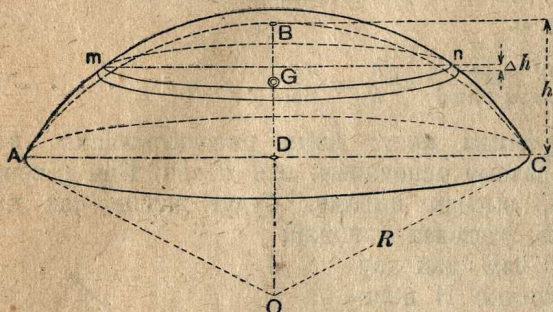
$$\frac{mb}{mc} = \frac{\text{пл. abd}}{\text{пл. cad}}.$$

Таким образом мы убеждаемся, что если плоскость mad делит двугранный угол при ребре ad пополам, то mb и mc будут относиться, как площадь bad к площади cad , что на самом деле мы и имеем. Поэтому заключаем, что плоскость amd действительно делит этот двугранный угол пополам и что на ней в каком-нибудь месте лежит точка приложения общей равнодействующей R , а следовательно, и центр тяжести. Но то же самое можно сказать и относительно плоскостей, делящих пополам другие двугранные углы при ребрах малой пирамиды. Так как центр тяжести есть одна точка и так как, с другой стороны, он должен, как мы доказали, находиться на каждой из этих шести плоскостей, то эти шесть плоскостей должны, в свою очередь, пересекаться в одной точке, которая и будет центром тяжести. Известно, что

центр шара, вписанного в пирамиду, лежит в точке пересечения плоскостей, делящих двугранные углы при ребрах пирамиды пополам. Отсюда получаем теорему:

Центр тяжести полной поверхности трехгранной пирамиды лежит в центре шара, вписанного в малую трехгранную пирамиду, вершины которой лежат в центрах тяжести площадей граней данной пирамиды.

§ 30. Центр тяжести поверхностей шарового сегмента и шарового пояса. Разделим стрелку сегмента BD (фиг. 73), равную h , на бесконечно



Фиг. 73.

большое число равных частей Δh , и через точки деления проведем плоскости, параллельные основаниям сегмента. Поверхность сегмента разделится, таким образом, на бесконечно тонкие пояса, при чем поверхности этих поясов будут равны, потому что поверхность всякого такого пояса, например, mn , выражается так:

$$mn = 2\pi R \cdot \Delta h;$$

но так как R есть радиус большого круга, то для всех поясов он один и тот же, а Δh —высоту пояса—мы брали равною для всех поясов (так как стрелку BD мы разделили на равные части); поэтому поверхности всех этих элементарных поясов равны. При весьма малом Δh мы можем каждый пояс mn заменить материальною окружностью, при чем центр тяжести каждой такой окружности будет в ее геометрическом центре. Поэтому отыскание центра тяжести поверхности сегмента приведет к отысканию центра тяжести стрелки BD, равномерно покрытой материальными точками. Этот центр тяжести, очевидно, будет лежать на середине стрелки BD,—в точке G. Называя расстояние центра тяжести от центра круга через $\bar{x}$, имеем:

$$\bar{x} = OB - BG = R - \frac{h}{2}.$$

Этот же вывод справедлив и для поверхности шарового пояса, вырезанного двумя параллельными плоскостями.

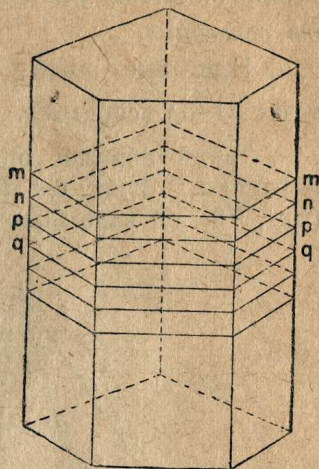
В частном случае, когда $h = R$, то

$$\bar{x} = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

IV. Центр тяжести объемов.

§ 31. Центр тяжести объема призмы. Пусть мы имеем призму (фиг. 74). Плоскостями, параллельными основанию, ее можно разбить на несколько весьма тонких призмочек $m, n, p, \dots$, равных по высоте. При увеличении числа делений до бесконечности центр тяжести каждой такой призмочки

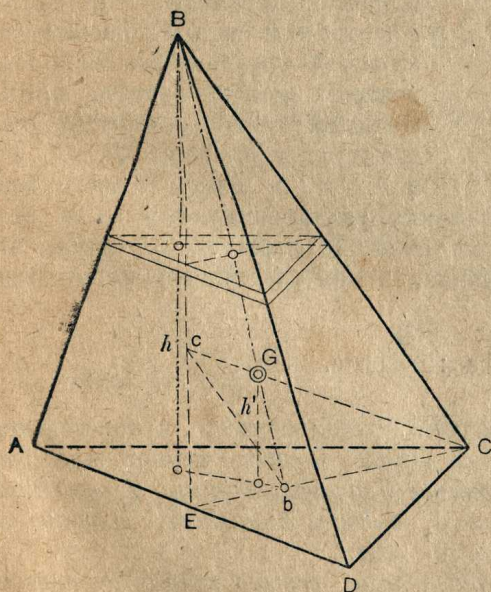
можно рассматривать, как центр тяжести площади этого многоугольника. Сосредоточим веса всех этих многоугольных пластинок в их центрах тяжести; так как центры тяжести верхнего и нижнего оснований лежат на той же прямой, на которой лежат центры тяжести всех пластинок, то заключаем, что центр тяжести призмы лежит на линии, соединяющей центры тяжести верхнего и нижнего оснований. Эту прямую можно рассматривать, как материальную линию, равномерно покрытую материальными точками, а потому центр тяжести объема всякой призмы лежит на середине линии, соединяющей центры тяжести площадей верхнего и нижнего оснований.



Фиг. 74.

§ 32. Центр тяжести объема пирамиды.

Разделим данную пирамиду $BACD$ (фиг. 75) на бесконечно тонкие слои плоскостями, параллельными основанию ACD . Каждый слой может быть заменен материальной точкой, помещенной в центре его тяжести, так что, как это легко сообразить, искомый центр тяжести надо искать на линии, соединяющей вершину B с центром тяжести площади основания b .



Фиг. 75.

Деля данную пирамиду на бесконечно тонкие слои плоскостями, параллельными грани ABD , найдем, что центр тяжести должен лежать на линии Cc .

Значит, искомый центр тяжести должен одновременно лежать на линиях Bb и Cc , т.-е. он лежит на их пересечении, — в точке G .

Определим теперь положение точки G . Из подобия треугольников Gcb и GCB имеем пропорцию:

$$\frac{BG}{Gb} = \frac{BC}{cb} = \frac{BE}{ce} = \frac{3}{1}.$$

Отсюда

$$\frac{BG}{Gb} = 3,$$

или

$$BG = 3Gb.$$

Прибавляя к обеим частям по Gb , имеем:

$$BG + Gb = 3Gb + Gb = 4Gb;$$

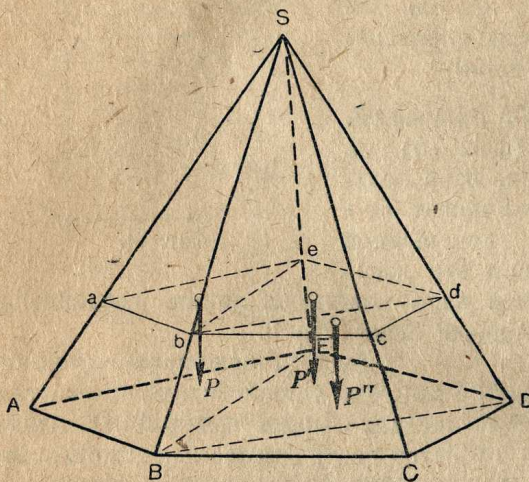
следовательно

$$Gb = \frac{Bb}{4},$$

т.-е. центр тяжести объема пирамиды лежит на линии, соединяющей центр тяжести площади ее основания с вершиною, на $\frac{1}{4}$ длины ее, считая от основания.

Если всю высоту пирамиды назовем через h , а через h' расстояние точки G от основания, то $h' = \frac{h}{4}$.

Таким образом определяется центр тяжести объема трехгранной пирамиды. Если бы была дана многогранная пирамида $SABCDE$ (фиг. 76), то надо было бы ее разделить на трехгранные и у каждой из них



Фиг. 76.

определить ее центр тяжести. Очевидно, что все эти центры будут лежать в одной плоскости, проведенной параллельно основанию на одной четверти высоты, считая от основания, при чем каждый из них совпадает с центром тяжести соответствующего треугольника. Так, например, центр тяжести первой пирамиды лежит в центре тяжести треугольника aeb , центр тяжести второй пирамиды находится в центре тяжести треугольника bed , а третьей—треугольника bdc . В этих центрах можно считать приложенными веса соответствующих пирамид, т.-е. силы P , P' , P'' , и т. д., и центр тяжести всей

пирамиды найдется, как точка приложения равнодействующей всех этих сил P . Для нахождения ее придется силы P сложить. Заметим, что силы P пропорциональны объемам пирамид, а при одинаковой высоте этих последних — их основаниям, т.-е.

$$P : P' : P'' = \text{bae} : \text{bed} : \text{bdc}.$$

Решение последнего вопроса сводится таким образом к определению центра тяжести площади многоугольника $abcde$. Значит, центр тяжести всей пирамиды лежит в центре тяжести площади сечения, проведенного параллельно основанию на расстоянии $\frac{1}{4}$ высоты пирамиды, считая от основания.

Легко видеть, что центр тяжести объема всякого конуса лежит на линии, соединяющей центр тяжести площади основания с вершиною, на расстоянии одной четверти ее от основания.

§ 33. Центр тяжести объема параллельно усеченной пирамиды. Положим, что мы имеем трехгранную пирамиду, усеченную параллельно основанию (фиг. 77). Назовем нижнее основание пирамиды через A , верхнее — через B , а высоту — через h . Плоскостями SLQ и SMQ разбиваем нашу пирамиду на три трехгранные пирамиды так, что при одной и той же

расстояние центра G от плоскости A (точки G и R лежат на линии GR , параллельной плоскости A), то можем написать:

$$h : x = NM : RM = 2 : 1;$$

следовательно:

$$x = \frac{1}{2} h.$$

Таким образом, центр тяжести третьей пирамиды лежит на высоте $\frac{1}{2} h$ над основанием A .

Заметив, это, обратимся теперь к определению центра тяжести усеченной пирамиды. Назовем через $\bar{z}$ расстояние искомого центра тяжести от плоскости A ; тогда, на основании предыдущих формул, можем написать:

$$\bar{z} = \frac{\Sigma(P \cdot z)}{\Sigma P},$$

где z есть расстояние каждой весомой частицы от площади A . Разделим нашу пирамиду пополам на три и в их центрах тяжести сосредоточим веса соответственных пирамид. Припоминая, что веса пропорциональны объемам, можем написать:

$$\bar{z} = \frac{A \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4} + B \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{3h}{4} + \sqrt{AB} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{2}}{V},$$

где V — объем всей пирамиды.

Назовем расстояние центра тяжести всей пирамиды от верхнего основания через $\bar{z}'$; определить эту величину можно по формуле, нам уже известной:

$$\bar{z}' = \frac{\Sigma(P \cdot z')}{\Sigma P},$$

где через z' обозначены расстояния частиц от площади B . После соответствующих подстановок найдем:

$$\bar{z}' = \frac{A \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{3h}{4} + B \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4} + \sqrt{AB} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{2}}{V}.$$

Заметим, что величину $\bar{z}$ можно получить еще из уравнения $\bar{z}' = h - \bar{z}$.

Взяв отношение $\bar{z}$ к $\bar{z}'$ и сократив на $\frac{h^2}{12}$, имеем:

$$\frac{\bar{z}}{\bar{z}'} = \frac{A + 3B + 2\sqrt{AB}}{B + 3A + 2\sqrt{AB}}.$$

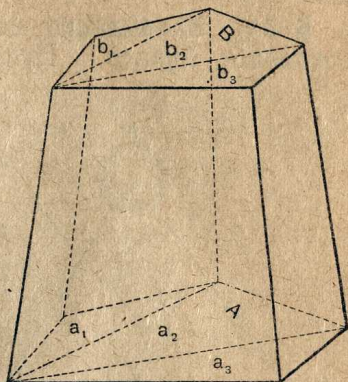
Разбивая пирамиду на слои, параллельно основаниям, убеждаемся, что ее центр тяжести лежит на прямой, соединяющей центры тяжести площадей верхнего и нижнего оснований; место же его на этой прямой определяется из полученного отношения $\bar{z}$ к $\bar{z}'$.

Для определения центра тяжести многоугольной пирамиды, усеченной параллельно основанию (фиг. 78), разбиваем ее на треугольные усеченные пирамиды. Затем, подобно предыдущему, каждую усеченную треугольную пирамиду разбиваем на три полные треугольные пирамиды. Тогда, называя площади верхних оснований треугольных усеченных пирамид через b с соответствующим индексом, а нижних — через a , найдем вообще:

$$\frac{z_s}{z'_s} = \frac{a_s + 3b_s + 2\sqrt{a_s b_s}}{b_s + 3a_s + 2\sqrt{a_s b_s}} \dots \dots \dots (E)$$

Разделим числителя и знаменателя второй части равенства (E) на a , получим:

$$\frac{z_s}{z'_s} = \frac{1 + 3 \frac{b_s}{a_s} + 2 \sqrt{\frac{b_s}{a_s}}}{\frac{b_s}{a_s} + 3 + 2 \sqrt{\frac{b_s}{a_s}}} \dots \dots \dots (F)$$



Фиг. 78.

Из геометрии известно, что

$$\frac{b_s}{a_s} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \dots = \frac{h^2}{H^2}, \dots \dots \dots (G)$$

где h и H суть расстояния сечения b_s и a_s от вершины нашей же, но дополненной пирамиды (т.-е это высоты соответственных полных пирамид). Из уравнения (G) имеем:

$$\frac{b_s}{a_s} = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_s}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_s} = \frac{B}{A}, \dots \dots \dots (H)$$

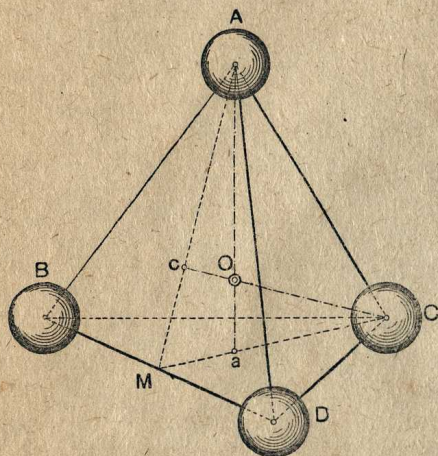
где B и A суть площади верхнего и нижнего оснований всей усеченной пирамиды. Кроме того, из уравнений (F) и (G) мы замечаем, что отношение $\frac{z}{z'}$ координат центра тяжести для любой пирамиды будет совершенно такое же, как и для первой усеченной треугольной пирамиды. Это обстоятельство показывает, что центры тяжести данных треугольных пирамид лежат в одной и той же плоскости, параллельной основанию многоугольной пирамиды и отстоящей от нижнего основания на расстоянии z . Кроме того, легко видеть, что центр тяжести всей многоугольной усеченной пирамиды будет лежать также в этой плоскости. Если в формуле (F) заменим отношение $\frac{b}{a}$ равным ему, по уравнению (H), отношением $\frac{B}{A}$, то получим

$$\frac{z}{z'} = \frac{1 + 3 \frac{B}{A} + 2\sqrt{\frac{B}{A}}}{\frac{B}{A} + 3 + 2\sqrt{\frac{B}{A}}} = \frac{A + 3B + 2\sqrt{AB}}{B + 3A + 2\sqrt{AB}}.$$

Отсюда видим, что формула, выражающая отношение расстояний центра тяжести от верхнего и нижнего оснований, для многогранной пирамиды

такая же, как и для трехгранной пирамиды. Этим обстоятельством, а также и тем, что центр тяжести, конечно, опять лежит на прямой, соединяющей центры тяжести верхнего и нижнего оснований, место его внутри пирамиды определяется вполне.

§ 34. Нахождение центра тяжести полной трехгранной пирамиды по способу Пуансо. Пусть дана полная трехгранная пирамида ABCD (фиг. 79). Найдем ее центр тяжести по способу, предложенному Пуансо.



Фиг. 79.

Приложим к каждой из вершин пирамиды по шару, весом в $\frac{1}{4}P$, веса всей пирамиды, т.-е. в $\frac{1}{4}P$, где P есть вес пирамиды, и найдем равнодействующую сил тяжести этих шариков. Находим сначала равнодействующую сил, приложенных к вершинам основания, — она равна $\frac{3}{4}P$, и точка ее приложения есть точка a плоскости BCD — центр тяжести площади треугольника BCD. Складывая силу $\frac{1}{4}P$, приложенную к точке A, с полученной равнодействующей $\frac{3}{4}P$, приложенной к точке a , получим равнодействующую всех сил, приложенных к вершинам пирамиды, при чем точка ее приложения будет лежать на прямой Aa.

Если бы мы сложили сначала силы, приложенные к грани ABD, то нашли бы, что та же равнодействующая имеет точку приложения на линии Cc, лежащей в той же плоскости AMC, что и Aa. Следовательно, искомая точка приложения равнодействующей силы лежит в пересечении прямых Aa и Cc, согласно сказанному в § 32. Точка эта, на чертеже точка O, и будет центром тяжести. Найдем теперь ее место. Из пропорции

$$OA : Oa = \frac{3}{4}P : \frac{1}{4}P = 3 : 1$$

имеем:

$$OA = 3 Oa.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства по Oa, получим:

$$Aa = 4 Oa,$$

откуда

$$Oa = \frac{1}{4} Aa.$$

Мы получили, таким образом, результат тот же, что и раньше, когда определяли центр тяжести объема трехгранной пирамиды другим способом.

§ 35. Центр тяжести объема шарового сектора. Возьмем шаровой сектор OACB (фиг. 80). Очевидно, что центр тяжести его будет лежать на среднем радиусе OC, так как этот радиус является для сектора осью симметрии, и, следовательно, остается определить только место его на этом радиусе. Разобьем площадь сегмента данного сектора на бесконечно малые

§ 36. Центр тяжести объема шарового сегмента. Эта задача решается подобно задаче об отыскании центра тяжести кругового сегмента. Очевидно, центр тяжести шарового сегмента (фиг. 81) лежит на стрелке сегмента, где-нибудь в точке G. Назовем расстояние OG через $\bar{x}$ и напишем, на основании вспомогательной теоремы (§ 35), формулу для определения центра тяжести сектора OAB:

$$\frac{3}{4} \left(R - \frac{H}{2} \right) = \frac{V \bar{x} + \left(\frac{1}{3} \pi a^2 \cdot R \cos \alpha \right) \cdot \frac{3}{4} (R \cos \alpha)}{\frac{2}{3} \pi R^2 H},$$

где V — объем сегмента, а H — высота стрелки. Упростим это выражение:

$$\frac{1}{2} \pi R^2 H \left(R - \frac{H}{2} \right) = V \bar{x} + \frac{1}{4} \pi a^2 R^2 \cos^2 \alpha.$$

Но

$$H = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha);$$

значит:

$$R - \frac{H}{2} = R - \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos \alpha = \frac{R}{2} (1 + \cos \alpha),$$

и потому

$$\frac{1}{2} \pi R^2 \cdot R(1 - \cos \alpha) \cdot \frac{R}{2} (1 + \cos \alpha) = V \bar{x} + \frac{1}{4} \pi a^2 R^2 \cos^2 \alpha,$$

или

$$\frac{1}{4} \pi R^4 (1 - \cos^2 \alpha) = V \bar{x} + \frac{1}{4} \pi a^2 R^2 \cos^2 \alpha;$$

или

$$\frac{1}{4} \pi R^4 \sin^2 \alpha = V \bar{x} + \frac{1}{4} \pi a^2 R^2 \cos^2 \alpha.$$

Но

$$R \sin \alpha = a;$$

следовательно

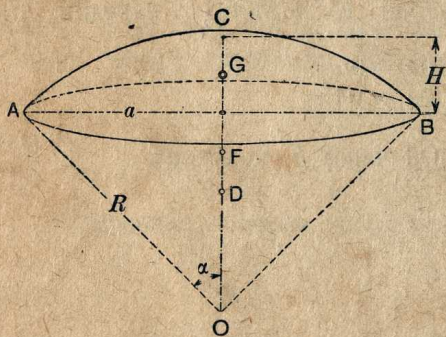
$$\frac{1}{4} \pi R^2 a^2 = V \bar{x} + \frac{1}{4} \pi a^2 R^2 \cos^2 \alpha,$$

или

$$V \bar{x} = \frac{1}{4} \pi a^2 R^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \pi a^4,$$

откуда

$$\bar{x} = \frac{\pi a^4}{4 V}.$$



Фиг. 81.

Это и есть формула, определяющая центр тяжести объема шарового сегмента. Если в нее вместо a подставить $\frac{l}{2}$, где l есть длина всей хорды AB, то получим:

$$\bar{x} = \frac{\pi \left(\frac{l}{2} \right)^4}{4 V} = \frac{\pi l^4}{64 V}.$$

В частном случае полушара имеем

$$a = R, \quad V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

и

$$\bar{x} = \frac{3}{8} R.$$

§ 37. Теоремы Гульдена. Гульден дал доказательство двух аналогичных между собою теорем, дающих возможность легко определить поверхность и объем тела, полученного от вращения плоской фигуры около оси, лежащей в ее плоскости и ее (этой фигуры) не пересекающей.

Теорема I. Поверхность, полученная от вращения плоской линии около оси, лежащей в плоскости линии и не пересекающей ее, равна длине линии, помноженной на длину окружности, которую описывает центр тяжести этой линии.

Положим, что нам дана линия АВ (фиг. 82), вращающаяся около оси zz' , и требуется определить поверхность, описываемую при вращении этой линией. Положим, что центр тяжести линии АВ помещается в точке G и расстояние его от оси zz' есть x . Разбиваем линию АВ, длину которой обозначим через L , на бесконечно малые элементы ΔL ; тогда очевидно, во-первых, что вся поверхность, полученная от вращения линии АВ, равна сумме поверхностей — поясков, описанных элементами ΔL , во-вторых, что поверхность, описанная каждым таким элементом ΔL , может быть рассматриваема, как поверхность усеченного конуса; выразится же каждая такая поверхность произведением окружности среднего сечения на длину ΔL . Если радиус среднего сечения обозначим через x , то найдем, что поверхность, описанная таким элементом, равна $2\pi x \cdot \Delta L$, а вся поверхность S , описанная линией АВ, равна

$$S = \Sigma (2\pi x \cdot \Delta L).$$

Вынося 2π , как постоянное, из-под знака суммы Σ , имеем:

$$S = 2\pi \Sigma (x \cdot \Delta L).$$

Замечая, что расстояние центра тяжести линии АВ от zz' выражается формулой:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma (\Delta L \cdot x \cdot \gamma'')}{\Sigma (\Delta L \cdot \gamma'')} = \frac{\Sigma (\Delta L \cdot x)}{L},$$

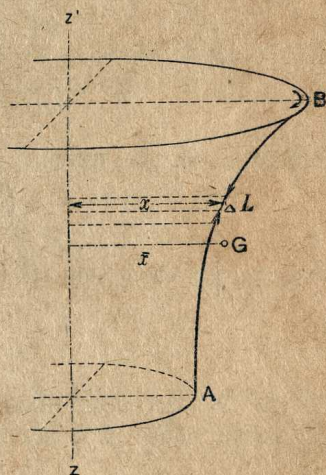
где γ'' — плотность, x — расстояние центра тяжести каждого элемента линии от оси и L — длина всей линии, находим:

$$\bar{x} L = \Sigma (\Delta L \cdot x).$$

Подставляя в выражение S вместо $\Sigma (\Delta L \cdot x)$ только что полученное его значение, имеем

$$S = 2\pi \bar{x} \cdot L,$$

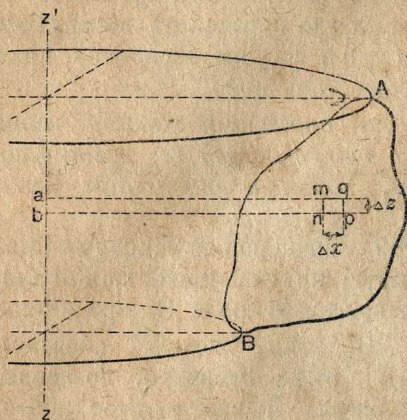
что и требовалось доказать.



Фиг. 82.

Теорема II. Объем, полученный от вращения плоской фигуры около оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равен площади фигуры, помноженной на окружность, описанную центром тяжести площади фигуры.

Положим, что нам дана плоская фигура АВ (фиг. 83) с площадью S и осью вращения zz' , и требуется определить объем полученного тела вращения,—в данном случае кольца. Раз-



Фиг. 83.

биваем площадь фигуры на бесконечное множество бесконечно малых прямоугольников $mnpq$, со сторонами Δx и Δz и площадями Δs . По краям фигуры образуются при этом незакрытые прямоугольниками бороздки, но в пределе, при увеличении числа прямоугольников до бесконечности, они исчезнут, так что в пределе объем V всего тела выразится, как предел суммы объемов, полученных от вращения всех таких прямоугольников $mnpq$. Но объем каждого такого отдельного кольца, образованного прямоугольником $mnpq$, равен разности объемов цилиндров, описанных прямоугольниками $aqrb$ и $amnb$. Назовем расстояние центра

тяжести прямоугольника $mnpq$ от оси вращения zz' через x , а объем тела, описанного им, через ΔV , тогда

$$\Delta V = \pi \cdot aq^2 \cdot pq - \pi \cdot am^2 \cdot pq;$$

но

$$aq = x + \frac{mq}{2}, \quad am = x - \frac{mq}{2};$$

следовательно, мы имеем:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi \left(x + \frac{mq}{2} \right)^2 \cdot pq - \pi \left(x - \frac{mq}{2} \right)^2 \cdot pq = \\ &= \pi \cdot pq \left[x^2 + x \cdot mq + \left(\frac{mq}{2} \right)^2 - x^2 + x \cdot mq - \left(\frac{mq}{2} \right)^2 \right] = \pi \cdot pq \cdot 2x \cdot mq, \end{aligned}$$

или

$$\Delta V = 2\pi x \cdot \Delta z \cdot \Delta x.$$

Но $\Delta z \cdot \Delta x$ есть площадь бесконечно малого элемента, которую мы обозначили через ΔS ; подставив это обозначение, получим:

$$\Delta V = 2\pi x \cdot \Delta S.$$

Объем же всего тела V выразится формулой:

$$V = \Sigma (2\pi x \cdot \Delta S) = 2\pi \cdot \Sigma (x \cdot \Delta S).$$

Определяя центр тяжести фигуры АВ, находим:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma (\Delta S \cdot x \cdot \gamma')}{S \gamma'} = \frac{\Sigma (\Delta S \cdot x)}{S},$$

откуда

$$\Sigma (\Delta S \cdot x) = S \cdot x,$$

а в таком случае

$$V = 2\pi x \cdot S.$$

Выведем для примера поверхность и объем *тора*, — тором называется кольцо, происшедшее от вращения круга около оси, лежащей в его плоскости и его не пересекающей. Поверхность тора, по первой теореме Гюльдена, выразится через

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr,$$

где r — радиус круга и R — радиус окружности, описанной центром тяжести круга. Объем же тора, по второй теореме Гюльдена, выразится через

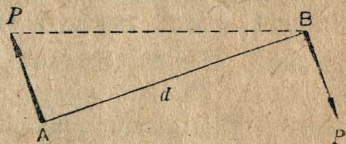
$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R.$$

Теория пар.

§ 38. Равнодействующая и момент пары. Учение о парах сил было выведено французским ученым Пуансо (1777 — 1859), издавшим в 1803 г. сочинение «*Traité élémentaire de Statique*», в котором с удивительной ясностью и изяществом изложена полная теория пар. Эта теория дала впоследствии (1834 г.) Пуансо возможность ясно и просто решить геометрически вопрос об обстоятельствах вращательного движения твердых тел, который аналитически был решен гораздо раньше (1765 г.) Эйлером.

Парю сил называются две равные и параллельные силы, направленные в противоположные стороны.

Так как за точку приложения каждой из сил, составляющих пару, можно принять какую угодно точку, лежащую на направлении силы, то две точки приложения, A и B (фиг. 84), обыкновенно берут так, чтобы соединяющая их прямая AB была перпендикулярна к направлению сил. Длину перпендикуляра AB называют *плечом пары*. Плоскость, в которой находится пара, называется *плоскостью действия пары*. Для краткости пару обыкновенно обозначают или символом (P, P') , или же $(P - P)$, как это делал Пуансо.



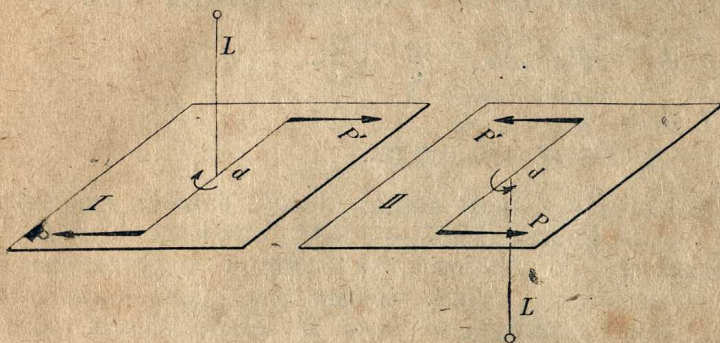
Фиг. 84.

Моментом пары сил относительно какой-либо точки ее плоскости называется произведение какой либо из сил, составляющих пару, на плечо пары, так что момент M пары (P, P') выражается через $P \cdot d$, где $d = AB$ есть плечо пары. Моменту пары приписывают знак положительный или отрицательный¹⁾, смотря по тому, в какую сторону пара стремится вращать свое плечо. Если она стремится вращать его по направлению движения часовой стрелки, то момент считается положительным; если в обратном направлении, то отрицательным.

Если мы соединим точку B с P , то нетрудно видеть, что момент пары равен двойной площади треугольника ABP , т.-е. треугольника, имеющего своей вершиной точку приложения одной силы, а основанием другую силу.

¹⁾ Подстрочное примечание к § 10 имеет силу и относительно момента пары.

Обратимся теперь к геометрическому представлению момента пары. Положим, что пара находится где-нибудь в пространстве; для получения вектора, изображающего момент пары (P, P') , условились воссоставлять к плоскости пары перпендикуляр, называемый осью пары, и откладывать на нем в каких-нибудь единицах абсолютную величину момента M пары (как известно, $M = Pd$). При этом поступают так: берут плоскость пары, проводят ось ее обыкновенно через середину плеча и на этой оси откладывают величину момента, но в такую сторону от плоскости, чтобы наблюдатель, смотря с конца вектора на основание оси, видел пару вращающейся по направлению видимого движения солнца. Поэтому на первом

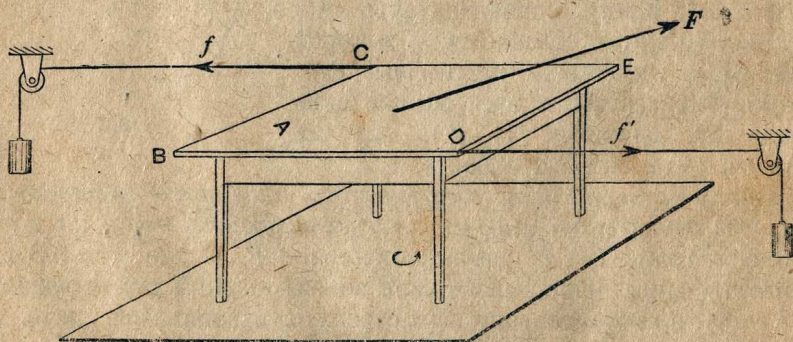


Фиг. 85.

чертеже (фиг. 85) момент надо отложить на оси над плоскостью, а на втором — под плоскостью. Итак, момент пары изображают вектором, представляющим абсолютную величину пары, т.-е. отрезком $L = P \cdot d$, отложенным на оси пары, и притом в известном, для каждого данного случая определенном, направлении.

Пары не могут быть заменены одной силой. Это свойство их может быть доказано вполне строго, и существует несколько доказательств этого предложения, из которых мы рассмотрим два ниже приводимых.

Между прочим, наглядным примером того, что пара не имеет равнодействующей, может служить следующее наблюдение:



Фиг. 86.

Положим, что мы имеем стол А (фиг. 86). Приложим в точках С и D его равные силы f и f' , направленные по параллельным ребрам ЕС и BD, но в прямо-противоположные стороны. Если теперь поставить стол

на гладкую поверхность, то на столе невозможно найти ни одной точки, прилагая к которой любую горизонтальную силу F (например, силу действия руки), мы могли бы уравновесить действие двух наших сил f и f' , — как бы ни была велика приложенная нами сила F , стол будет попрежнему вращаться под действием сил f и f' .

Теорема. *Пара не имеет равнодействующей.*

Доказательство I. Предположим, что силы P и P' (фиг. 87) неравны между собою, и пусть $P' > P$; тогда, слагая их, получим некоторую равнодействующую R , равную $P' - P$, точка приложения которой определяется из пропорции:

$$R : P = d : x,$$

где x обозначает расстояние ВС точки приложения равнодействующей от точки приложения силы P' . Из этой пропорции получаем:

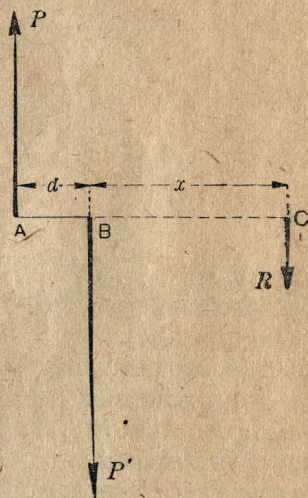
$$x = \frac{P \cdot d}{R} = \frac{P \cdot d}{P' - P}.$$

Положим теперь, что силы P' и P стремятся к равенству; тогда в пределе:

$$R = P' - P = 0$$

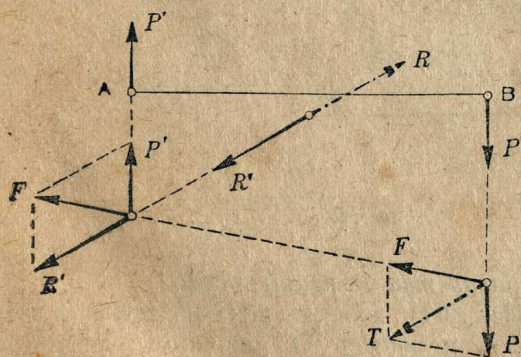
и

$$x = \frac{P \cdot d}{0} = \infty.$$



Фиг. 87.

Таким образом, мы видим что, когда силы P и P' обращаются в пару, то точка приложения равнодействующей удаляется в бесконечность, а следовательно, пара равнодействующей не имеет.

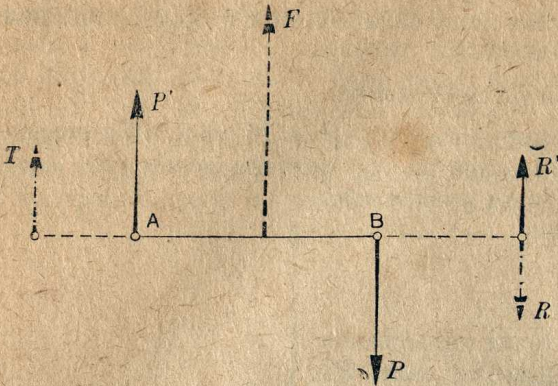


Фиг. 88.

Доказательство II. Положим, имеем пару (P, P') (фиг. 88) и допустим, что она имеет равнодействующую R , лежащую в плоскости пары. Если возьмем эту равнодействующую в прямо-противоположную сторону, то, на основании начал статики, получим уравновешивающую R' . Эта сила или будет пересекать направление сил пары (фиг. 88) или же будет ему параллельна (фиг. 89). В том и в другом случае силу R' можно сложить с одной из сил пары, например, с P' . Получим, таким образом, равнодействующую

сил R' и P' , — силу F . Эта сила F не будет уничтожать другой силы пары P , так как, в случае пересечения силы R' с P' , сила F должна также

пересечь направление силы P ; если же R' параллельна первой силе пары P' , то F не равна второй силе пары P (для уничтожения же силы P сила

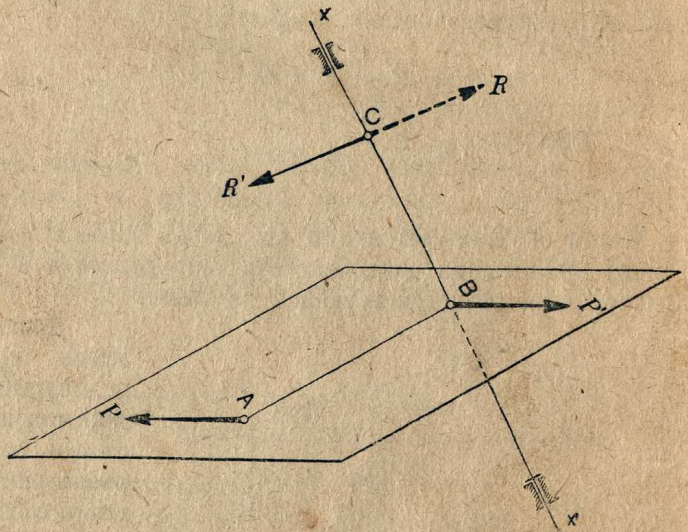


Фиг. 89.

F должна быть ей равна и прямо-противоположно направлена). Далее, слагая F со второй силой пары, мы получим некоторую общую равнодействующую силу T , действующую на тело и ничем уравновешиваемую, а в таком случае существование этой равнодействующей исключает возможность существования равновесия. Следовательно, пара равнодействующей не имеет.

Если теперь допустим, что равнодействующая R лежит не в плоскости пары, а где-либо

в пространстве (фиг. 90) то, сделав две точки этой системы (одну — C , на уравнивающей R' , другую — B , на одной из сил пары) неподвижными, увидим, что две силы, R' и P' , проходящие через эту неподвижную ось $хСВх'$, будут уничтожаться, а третья сила P всегда будет вращать это тело около оси $хСВх'$, чего в случае существования равнодействующей быть не должно и не может. Таким образом, пара не имеет уравнивающей, а следовательно, не имеет и равнодействующей.



Фиг. 90.

Теорема. Сумма моментов сил, составляющих пару, относительно всякого центра моментов равняется моменту пары ¹⁾.

Положим, имеем пару (P, P') (фиг. 91), действующую на точки A и B , и центр моментов O . Если из центра моментов O проведем перпендикуляр к направлению сил пары (пересечение будет, положим, в точках A' и B')

¹⁾ Теорема доказана здесь для центра моментов, лежащего в плоскости пары, но она имеет силу и для как угодно расположенного центра моментов. В последнем случае сумму нужно взять геометрическую.

и обозначим расстояние OB' через b и OA' через a , то, взяв моменты сил P и P' относительно центра O , получим:

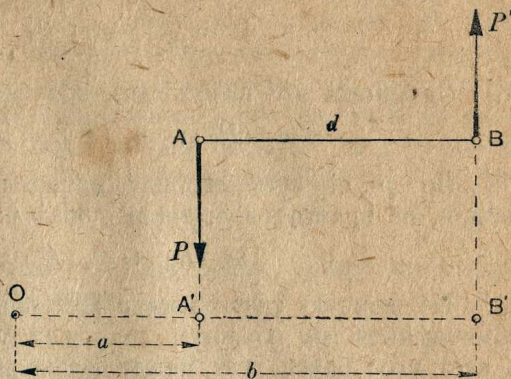
$$m(P) = P \cdot a,$$

$$m(P') = -P \cdot b;$$

следовательно,

$$\begin{aligned} m(P) + m(P') &= P \cdot a - P \cdot b = \\ &= -P(b - a) = -P \cdot d. \end{aligned}$$

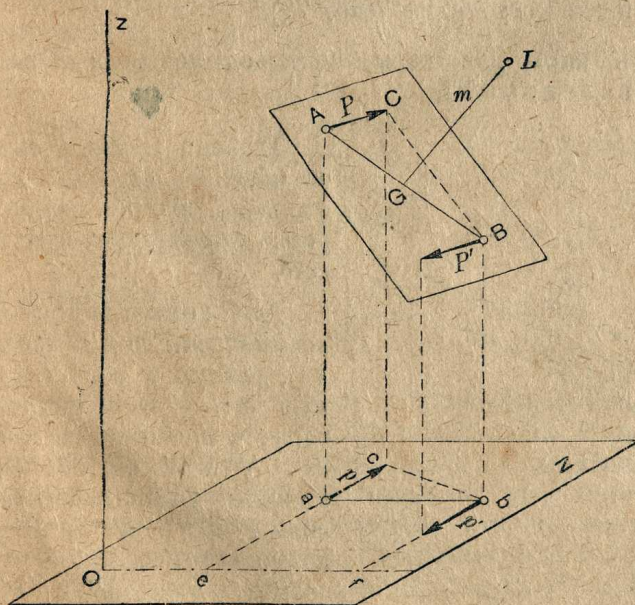
Знак момента сил получился здесь отрицательный потому, что пара (P, P') производит вращение против часовой стрелки.



Фиг. 91.

Теорема. Проекция момента пары на какую-либо ось равняется алгебраической сумме моментов сил, составляющих пару, относительно той-же оси.

Положим, что дана расположенная как-нибудь в пространстве пара сил (P, P') (фиг. 92), и некоторая ось моментов Oz .



Фиг. 92.

Проведем какую-нибудь плоскость N , перпендикулярную к этой оси Oz . Теперь строим момент данной пары, для чего определяем двойную площадь треугольника ABC и полученную величину в каких-нибудь единицах откладываем на перпендикуляре к плоскости пары (P, P') , восстановленном из середины G плеча AB . Пусть этот момент изобразится вектором GL , — назовем его через m . Обозначив угол вектора GL с осью Oz через γ , получим, что проекция момента m на ось Oz выразится через $m \cdot \cos \gamma$, и нам нужно доказать, что эта проекция момента m , т.-е. $m \cdot \cos \gamma$, равняется

моменту силы P , взятому относительно оси Oz , плюс момент силы P' , взятый относительно той же оси. Чтобы найти эти моменты, спроектируем силы P и P' на плоскость N

и обозначим через p проекцию силы P , а через p' — проекцию силы P' ; тогда эти моменты выразятся так:

$$m_z(P) = -p \cdot Oe,$$

$$m_z(P') = p' \cdot Of = p \cdot Of.$$

Складывая эти выражения, получим:

$$m_z(P) + m_z(P') = p(Of - Oe) = p \cdot ef.$$

Но $p \cdot ef$ есть двойная площадь треугольника abc , который, вообще говоря, не прямоуголен; таким образом:

$$m_z(P) + m_z(P') = 2 \text{ площ. } \triangle abc.$$

Но площадь треугольника abc равняется площади треугольника ABC , помноженной на косинус угла между плоскостью пары и плоскостью N , а этот угол равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям, т. е. нашему углу γ ; кроме того, двойная площадь треугольника ABC равна m , а потому

$$m_z(P) + m_z(P') = m \cdot \cos \gamma,$$

что и требовалось доказать.

Если бы ось Oz была перпендикулярна к плоскости пары, то мы имели бы $\cos \gamma = 1$

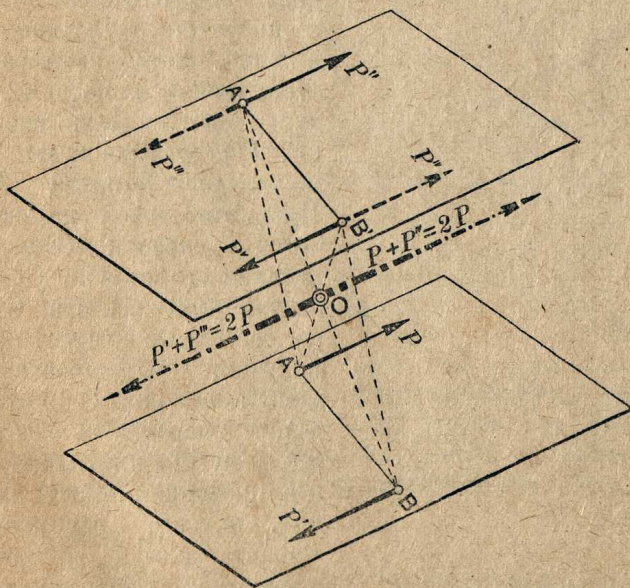
и
$$m_z(P) + m_z(P') = m,$$

что дало бы нам предыдущую теорему о сумме моментов сил пары относительно центра, лежащего в плоскости пары (стр. 78).

§ 39. Эквивалентность пар. Две пары, производящие одинаковое действие, называются эквивалентными.

Теорема I. Пару сил, не изменяя ее действия на тело, можно перемещать параллельно самой себе.

Для доказательства возьмем прямую $A'B'$ (фиг. 93), равную и параллельную плечу AB данной пары, и приложим в точках A' и B' ее по две взаимно уравновешенных силы P'' и P''' , P^{iv} и P^v , которые равны и параллельны силам P и P' . Ясно, что от прибавления этих четырех сил в действии данной пары никакого изменения не произойдет. Построим на плечах



Фиг. 93.

АВ и А'В' параллелограм и проведем диагонали его АВ' и А'В. Складывая силы P' и P'' , получаем их равнодействующую $(P' + P'')$, равную $2P$ и приложенную к точке О пересечения диагоналей А'В и АВ'. Потом, складывая силы P и P'' , получаем опять равнодействующую, равную $2P$, приложенную в той же точке О, но направленную в противоположную сторону. Таким образом, получим две равные силы, действующие на одну точку и направленные в противоположные стороны; очевидно, что эти силы взаимно уничтожаются, и от всей системы сил остаются две силы, P'' и P' , составляющие пару (P'', P') , равную паре (P, P') , но перенесенную в другое место, параллельно самой себе.

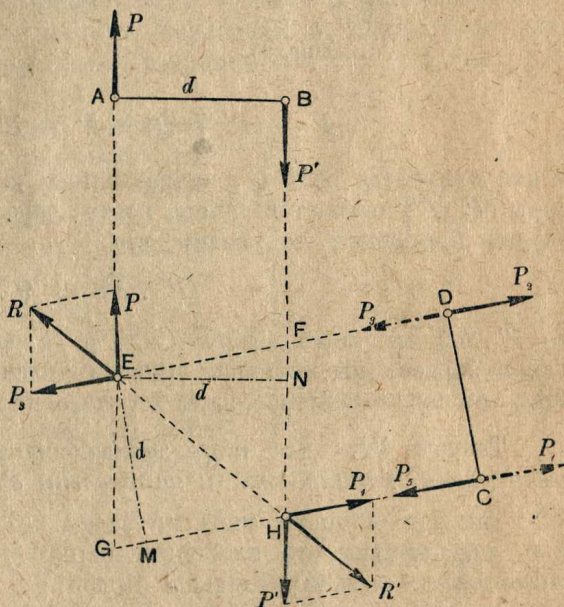
Теорема II. *Пару сил, не изменяя ее действия, можно повернуть в ее плоскости около любой точки плоскости.*

Пусть дана пара (P, P') (фиг. 94) с плечом $AB = d$, которую желают поместить так, чтобы плечо АВ заняло положение DC. Прилагаем к точкам D и C силы P_2, P_3, P_4, P_5 , равные P и направленные, как указано на чертеже. Так как эти силы попарно взаимно уничтожаются, то прибавление их действия пары (P, P') не изменит. Продолжаем направление сил P, P' и P_3, P_4 до пересечения их между собою. Получим параллелограм EFGH, который будет ромбом, потому что $\triangle EFN = \triangle EMG$, — оба имеют равные катеты: $EN = EM = d$, и равные углы: $\angle EFN = \angle EGM$.

Следовательно,

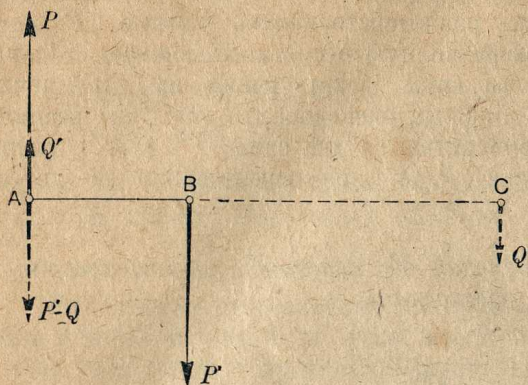
$$EG = EF = GH = FH,$$

и фигура EFGH есть ромб. Переносим теперь точки приложения сил P' и P_4 в точку Н, и точки приложения сил P и P_3 в точку Е. Складывая перенесенные силы, получим равнодействующие R' и R , которые будут, прежде всего, равны и параллельны, ибо получились от сложения равных и параллельных сил. Кроме того, как это легко видеть, направления сил R и R' будут делить углы при вершинах Е и Н ромба пополам, потому что они получаются от сложения равных сил P, P_3 и P', P_4 ; а так как диагональ ромба делит углы при его вершинах пополам, то силы R и R' , как делящие углы Е и Н пополам, будут направлены по диагонали ЕН и, значит, взаимно уничтожаются. У нас остались, таким образом, силы P_2 и P_5 , которые составляют пару (P_2, P_5) , эквивалентную данной паре (P, P') , что и требовалось доказать.



Фиг. 94.

Теорема III. Пару, не изменяя ее действия, можно заменить другой парой с другим плечом и другими силами, но с тем же моментом.



Фиг. 95.

Возьмем пару (P, P') (фиг. 95) и изменим ее так, чтобы она состояла из сил Q , меньших P . Разлагаем силу P' на две силы: одну Q , а другую $(P' - Q)$, причем силу $(P' - Q)$ прикладываем к точке А. При этом разложении будет иметь место пропорция:

$$\frac{Q}{AB} = \frac{P' - Q}{BC} = \frac{P}{AC}.$$

Силы P и $(P' - Q)$, действующие на одну точку А, складываем и находим их равнодействующую, равную:

$$P - (P' - Q) = P - P' + Q = Q = Q';$$

у нас получится сила Q' , направленная вверх. Значит, вместо прежней пары (P, P') останется теперь новая пара (Q, Q') . Если обратимся к предыдущей пропорции, то увидим, что

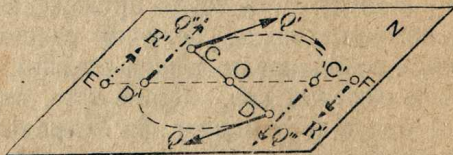
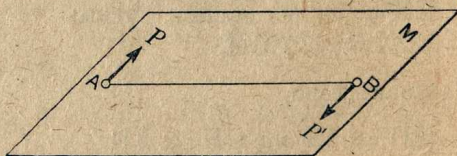
$$P' \cdot AB = Q \cdot AC;$$

но $P' \cdot AB$ есть момент пары (P, P') , а $Q \cdot AC$ есть момент пары (Q, Q') . Таким образом мы изменили величину плеча и сил, но момент пары оставили тем же, и действие пары от этого не изменилось.

Теорема IV. Две пары эквивалентны, если моменты их геометрически равны, параллельны и направлены в одну сторону.

Так как моменты пар, по условию, параллельны, то плоскости пар также должны быть параллельны. Положим, таким образом, что в параллельных плоскостях М и N (фиг. 96) находятся две пары (P, P') с плечом АВ и (Q, Q') с плечом CD. Так как моменты этих пар по условию равны, то

$$AB = Q \cdot CD.$$



Фиг. 96.

Поворачиваем пару (Q, Q') около точки О, лежащей на плече CD, так, чтобы $C'D'$, — новое положение плеча CD, — сделалось параллельным АВ.

Полученную пару (Q'', Q''') изменим так, чтобы плечо новой пары было равно плечу АВ, но момент пары при этом не изменился бы. Сделав это, получим новую пару (R, R') с плечом $EF = AB$. Так как моменты пар

(R, R') и (P, P') равны, то $R \cdot EF = P \cdot AB$, откуда $P = R$; следовательно, пара (R, R') равна и параллельна паре (P, P'). На основании первой теоремы об эквивалентности пар, пару (R, R') мы можем теперь перенести в положение (P, P'), в котором эквивалентность пар (R, R') и (P, P') очевидна, а следовательно, пары (P, P') и (Q, Q') также эквивалентны.

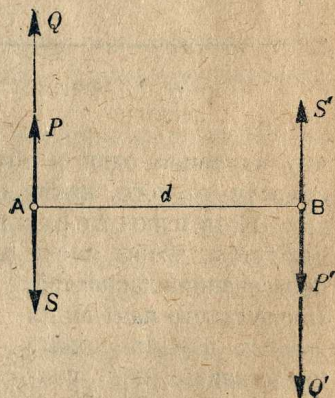
Из изложенных теорем следует, что *действие пары вполне характеризуется ее моментом*.

§ 40. Сложение пар. Сложить несколько пар значит заменить их одною равнодействующею парой, а разложить пару значит одну пару заменить несколькими парами, производящими то же самое действие.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда плоскости пар параллельны. Если плоскости пар параллельны, то все пары можно перенести в одну плоскость (на основании первой теоремы об эквивалентности пар). Положим, что плоскость, в которую переносим все пары, будет плоскостью чертежа. Далее, все пары можно изменить так, что все они будут иметь одно плечо.

Положим, что нам даны три некоторые пары, которые, после изменения их, обратились в пары (P, P'), (Q, Q') и (S, S'), имеющие общее плечо AB (фиг. 97). Сложим силы, действующие на точку A ; получаем равнодействующую R , равную $P + Q - S$. Складывая точно так же силы, действующие на точку B , получим равнодействующую R' , равную $P' + Q' - S'$. Очевидно, что $R = R'$, и потому мы получаем пару (R, R'), которая и будет равнодействующей парой. Определим ее момент. Он будет равен $R \cdot d$, где d есть плечо пары AB . Имеем:

$$m(R, R') = R \cdot d = (P + Q - S) \cdot d = P \cdot d + Q \cdot d - S \cdot d = m(P, P') + m(Q, Q') - m(S, S').$$



Фиг. 97.

Это показывает, что момент равнодействующей пары равняется алгебраической сумме моментов слагаемых пар; отсюда:

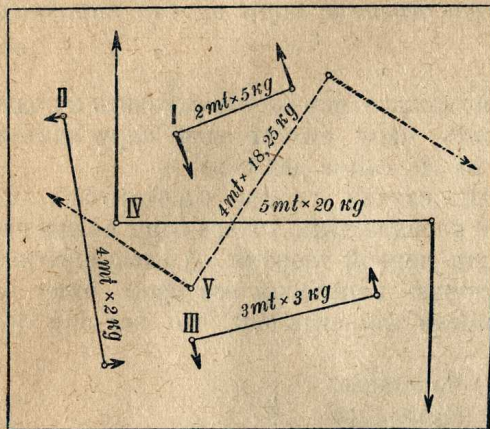
Теорема. *Несколько пар, лежащих в параллельных плоскостях, можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов этих пар.*

Слова «алгебраической сумме» показывают, что моменты надо брать с соответствующими знаками.

Чтобы представить пример на сложение пар, когда плоскости их параллельны или когда пары находятся в одной плоскости, решим следующую задачу (фиг. 98). Даны пары: плечо первой = 2 м , а сила = 5 кг ; плечо второй пары = 4 м , а сила = 2 кг ; плечо третьей = 3 м , а сила = 3 кг ; у четвертой плечо 5 м , сила = 20 кг ; притом первая, вторая и третья пары вращают тело по направлению, обратному часовой стрелке, а четвертая — по часовой стрелке. Определить равнодействующую пару.

На основании предыдущей теоремы имеем: момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар; так что, принимая во внимание, что моменты первых трех пар отрицательны, можно написать:

$$m(R, R') = -(5 \cdot 2) - (2 \cdot 4) - (3 \cdot 3) + (20 \cdot 5) = -27 + 100 = 73 \text{ kgm.}$$



Фиг. 98.

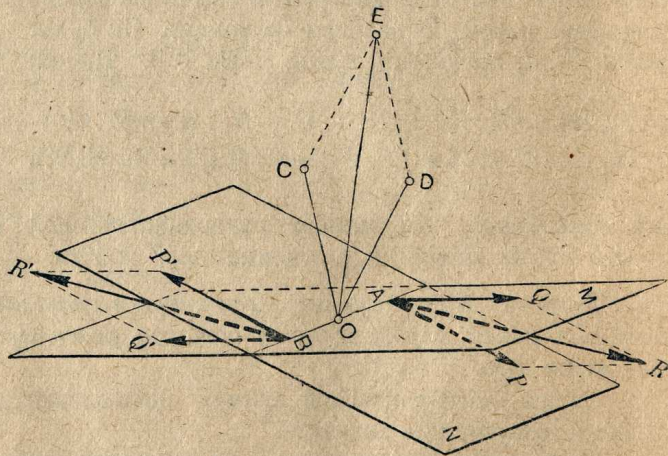
Самую же пару (R, R') можно представить себе составленной как угодно разнообразно: можно положить плечо равным, например, 1 m , а силу $= 73 \text{ kg}$, или так: плечо $= 4 \text{ m}$, а силу $= 18,25 \text{ kg}$, и т. д.

Итак, момент пары определяется двумя факторами: длиной плеча и величиной силы, на этом плече действующей, так что моменты пар приходится измерять особыми сложными единицами, составляемыми из тех или других единиц длины и веса. Таким образом, если силы выражены в kg , а плечи — в m , то моменты будут выражены в kgm — килограммометрах. Подобно этому, встречаются пудофуты и др. Понятно,

что численно один и тот же момент может выразиться различно, в зависимости от того, какие единицы длины и веса выбраны нами.

Если плоскости пар пересекаются, то для сложения пар их изменяют так, чтобы плечи их были равны и совпали бы между собою на линии пересечения плоскостей.

После такого изменения данных пар их можно представить, как указано на фиг. 99. Здесь N есть плоскость пары (P, P') , и M — плоскость пары (Q, Q') , а AB есть общее плечо обеих пар. Мы видим, что в точке A действуют силы P и Q , а в B — силы P' и Q' . Складывая эти две пары сил, получим две равнодействующие R и R' , которые будут равны, парал-



Фиг. 99.

лельны и прямопротивоположны, так как произошли от сложения равных и прямопротивоположных сил. Это показывает, что результатом сложения двух данных пар явилась третья новая пара (R, R') .

Посмотрим, какая связь существует между моментом этой новой равнодействующей пары (R, R') и моментами составляющих пар (P, P') и (Q, Q') .

Построим для этого моменты всех этих пар. Момент пары (P, P') получится, когда мы в произвольной точке O плеча AB восставим перпендикуляр к плоскости N пары и отложим на нем в некоторых единицах момент пары (P, P') , т. е. $P \cdot AB$, — иначе $P \cdot d$, где через d обозначено AB . Сделав это, получим вектор OD , равный $P \cdot d$. Моменты пар (Q, Q') и (R, R') выразятся векторами

$$\begin{aligned} m(Q, Q') &= OC = Q \cdot AB = Q \cdot d, \\ m(R, R') &= OE = R \cdot AB = R \cdot d. \end{aligned}$$

Соединим точку E с C и D и докажем, что четырехугольник $OCED$ есть параллелограмм.

Прежде всего замечаем, что в треугольниках EOD и RAP углы EOD и RAP между собою равны, как линейные углы одного и того же двугранного угла, образованного плоскостью N и плоскостью пары (R, R') (угол RAP будет линейным потому, что направления сил P и R перпендикулярны к линии пересечения плоскостей AB). Кроме того, имеем соотношения:

$$OD : OE = (P \cdot d) : (R \cdot d) = P : R = AP : AR.$$

Следовательно, треугольники EOD и RAP имеют по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами. Такие треугольники, как это известно из геометрии, подобны.

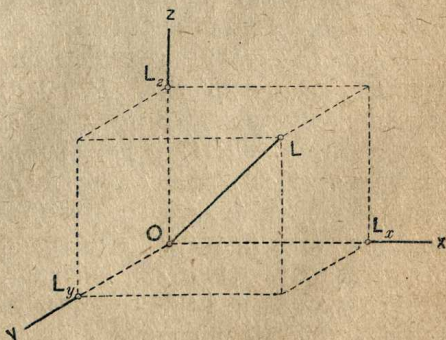
Совершенно такими же рассуждениями можно установить далее подобие треугольников EOC и AQR .

Из геометрии известно, что два четырехугольника, составленные из подобных треугольников, подобны, и потому четырехугольник $OCED$ подобен четырехугольнику $AQRP$, а так как $AQRP$ — параллелограмм, то и четырехугольник $OCED$ также параллелограмм, а вектор OE будет в нем диагональю.

Таким образом, мы доказали, что *момент равнодействующей пары выражается диагональю параллелограмма, построенного на моментах слагаемых пар.*

В частном случае, когда плоскости пар параллельны, диагональ равна сумме или разности моментов слагаемых пар. Если имеем несколько пар, плоскости которых пересекаются, и желаем их сложить, то сначала складываем первые две пары, полученную равнодействующую пару складываем с третьей парой и т. д., и, наконец, получим общую равнодействующую, момент которой будет замыкающей стороной многоугольника, остальные стороны которого равны и параллельны моментам слагаемых пар. Если имеем три пары, то сложение их моментов может производиться по правилу параллелепипеда.

Все сказанное о разложении одной силы на несколько сил, относится и к разложению одного момента пары на несколько. Например, имеем пару

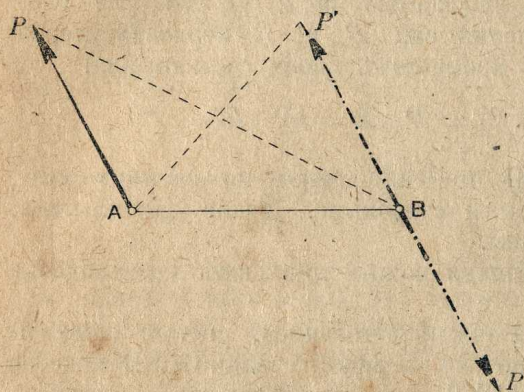


Фиг. 100.

с моментом OL (фиг. 100). Построив параллелепипед на осях координат, в котором OL была бы диагональю, увидим, что пара, момент которой есть OL , разложится на три пары с моментами OL_x , OL_y и OL_z . Понятно, что в прямоугольных координатах пара, момент которой есть OL_x , лежит в плоскости yz ; пара, момент которой есть OL_y , лежит в плоскости zx ; и, наконец, пара с моментом OL_z лежит в плоскости xy .

§ 41. Общие теоремы о сложении сил. Эти теоремы мы изложим, основываясь на следующей лемме:

Не меняя ничего в отношении данного тела к другим, его окружающим, точку приложения силы, действующей на данное тело, можно перенести во всякое другое место тела, прибавляя лишь при этом к телу еще некоторую пару.



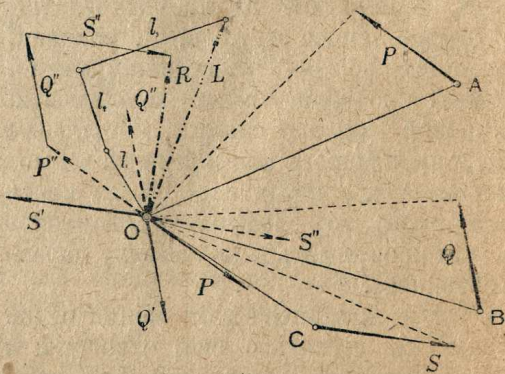
Фиг. 101.

Положим, что на тело действует некоторая сила P (фиг. 101), приложенная к точке A . Требуется, не меняя ничего в отношении данного тела к другим, его окружающим, перенести эту силу таким образом, чтобы точка приложения ее оказалась в B . Прикладываем в точке B две силы, P' и P'' , равные и параллельные силе P и направленные в противоположные стороны. Тогда увидим, что силы P и P'' составят пару (P, P'') , и, кроме нее, на тело будет действовать еще сила P' , равная прежней силе P .

Итак, точку приложения силы P можно перенести в любую другую точку B , присоединяя еще пару, момент которой равен двойной площади треугольника ABP , т.е. треугольника, имеющего вершину в новой точке приложения силы, а основанием — самую силу P , — и тело после этого переноса будет вести себя совершенно так же, как оно вело себя до переноса.

Теорема I. *Всякую систему сил можно заменить одной силой, проходящей через данную точку приложения, и одной парой.*

Положим, что мы имеем в пространстве несколько сил: P , Q и S , точки приложения которых пусть лежат в A , B и C (фиг. 102). Возьмем произвольную точку O , перенесем в нее все силы (на основании предыдущей леммы) и сложим все эти силы по правилу многоугольника; получим равнодействующую R . Но при перенесении сил P в точку O , мы должны

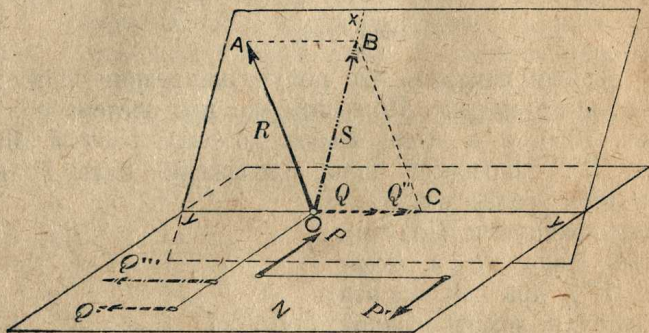


Фиг. 102.

прибавить пару (P, P') ; вектор, изображающий момент ее l_1 , получим, составив перпендикуляр в произвольной точке плоскости $АРО$ и отложив на нем длину, пропорциональную площади треугольника $АОР$, так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца полученного вектора на его основание, видел пару вращающуюся по солнцу. Таким же образом получим векторы, изображающие моменты l_2 и l_3 пар, которые получаются от перенесения сил Q и S в точку O . Слагая эти векторы, получим вектор, дающий момент L равнодействующей пары. Проведя плоскость, перпендикулярную к этому вектору L , получим возможность построить в этой плоскости самую равнодействующую пару. Таким образом, оказывается, что всякую систему сил можно заменить одной силой, приложенной в данной точке, и одной парой.

Теорема II. *Всякую систему сил можно заменить двумя силами, из которых одна имеет данную точку приложения и данное направление.*

Положим, что мы желаем заменить данную систему сил двумя силами, из которых одна имеет точку приложения O (фиг. 103) и направление Ox . Заменяем всю систему сил силою R , проходящею через данную точку O и парой (P, P') , плоскость которой N можно принять проходящею через ту же точку. Проводим через направление R и Ox плоскость, которая пересечет плоскость N , положим, по линии $уу$. Повертывая пару (P, P') в плоскости N так, чтобы сила P приняла направление Oy , получим пару (Q, Q') . Затем, проведя из A линию AB параллельно Oy и, далее, BC параллельно OA , получим на Oy отрезок OS . Наконец, изменяем пару (Q, Q') так, чтобы сила Q переменилась в Q'' ; тогда получим новую пару (Q'', Q''') . Теперь мы получили, что на точку O действуют силы R и Q'' . Складывая их и помня, что фигура $OABC$ есть параллелограмм, получим равнодействующую S и, кроме того, у нас остается еще сила Q''' . Таким образом, всю систему сил мы заменили двумя силами, из которых одна, S , имеет данное направление и данную точку приложения.



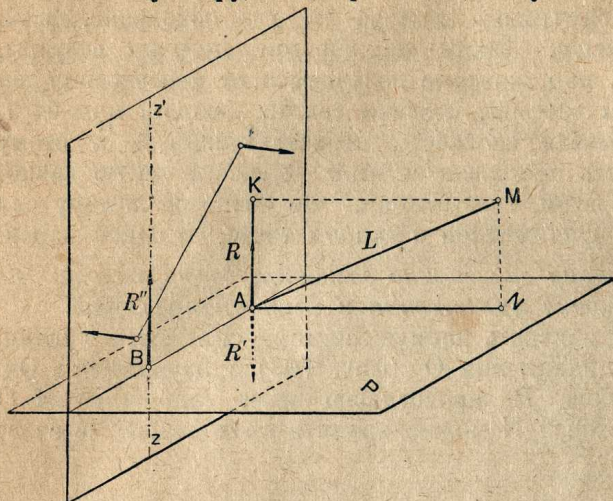
Фиг. 103.

Доказанное справедливо для какой-угодно системы сил.

Теорема III. *Всякую систему сил можно заменить силой и парой, момент которой направлен по силе; при этом момент пары будет иметь наименьшую величину.*

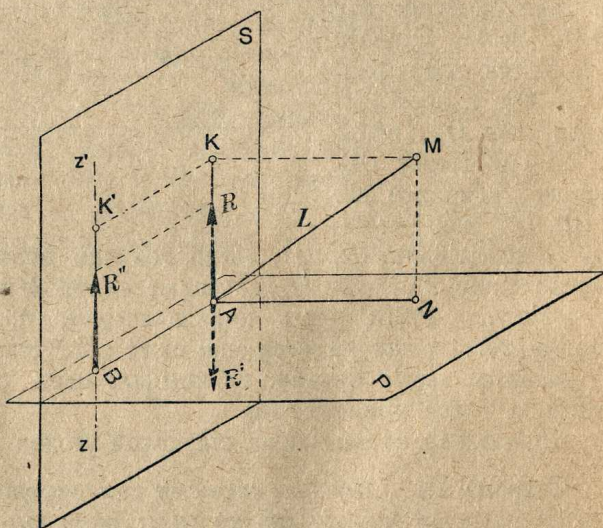
Положим, что на основании предыдущих теорем мы привели всю данную систему к одной силе R (фиг. 104), проходящей через точку A , и к паре, момент которой изображается вектором $L = AM$. Разлагаем этот вектор на два так, чтобы один из них, AK , был направлен по силе R , а другой, AN , — перпендикулярно к силе R . Поворачиваем теперь пару с моментом

AN так, чтобы одна из сил этой пары имела направление, прямопротивоположное R . Изменив затем плечо полученной пары так, чтобы силы, составляющие эту пару, были равны R , получим новую пару (R' , R'') с плечом



Фиг. 104.

Теперь докажем, что полученная таким образом пара будет иметь наименьший момент. Положим, что вся система сил приведена к одной силе R'' (фиг. 105) и к паре момент который, равный BK' , направлен по этой же силе R'' . Перенесем точку приложения силы R'' из B в A , руководствуясь при этом ранее изложенными правилами. Получим тогда силу R и пару (R', R'') , при чем все эти силы будут лежать в одной плоскости S ; вектор, изображающий момент пары (R', R'') , пусть будет AN , при чем он будет перпендикулярен к плоскости S . Но, кроме этого вектора AN , у нас есть еще вектор BK' , дающий собою момент заданной уже нам пары. Так как выбор точки, из которой имеет быть восстановлен вектор, всецело зависит от нас, то мы и выбираем для этого вектора BK' новое основание, — точку A .



Фиг. 105.

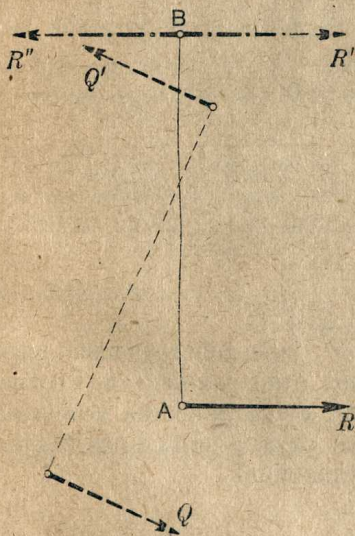
(гипотенуза больше катета). Поэтому эта новая равнодействующая пара имеет момент больше первого, и это будет иметь место для всякой точки А.

Итак, пара, момент которой направлен по силе, будет иметь наименьший момент. Теорема эта принадлежит французскому ученому Пуансо.

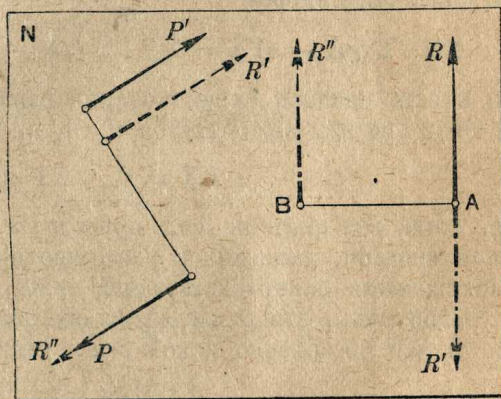
Вышеприведенные теоремы дают возможность установить признак существования равнодействующей силы, заключающийся в следующем:

Для того, чтобы система сил имела равнодействующую, необходимо и достаточно, чтобы, по приведении всей этой системы к силе и паре, мы получили силу, лежащую в плоскости пары или ей параллельную, — иначе, чтобы вектор, изображающий момент пары, и сила были взаимно перпендикулярны.

Обнаружим сначала необходимость этого признака, т.-е., докажем, что при существовании равнодействующей условия теоремы всегда удовлетворяются. Положим, что система сил имеет равнодействующую R (фиг. 106), проходящую через точку А и лежащую в плоскости чертежа. Перенесем эту силу R в произвольную точку той же плоскости В. Тогда получим силу R' , равную и параллельную силе R и пару (R, R'') , при чем вся эта система сил лежит в одной и той же плоскости. Заменяя пару (R, R'') , какой-либо другой парой (Q, Q') с тем же самым моментом, мы должны будем плоскость последней непременно сохранять параллельной плоскости первоначальной пары (R, R'') , а, следовательно, параллельной равнодействующей силе R ; отсюда приходим к заключению, что полученная система сил всегда будет удовлетворять указанному признаку.



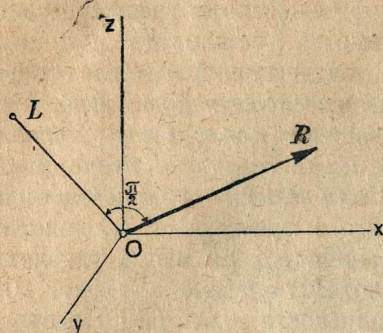
Фиг. 106.



Фиг. 107.

Докажем теперь достаточность признака, т.-е., что при существовании его равнодействующая будет существовать всегда. Пусть вся система сил привелась к силе R (фиг. 107) и к паре (P, P') , плоскость N которой проходит через силу R . (Если бы плоскость пары была параллельна силе, то ее можно было бы перенести так, чтобы она проходила через силу R). Изменяем плечо пары (P, P') так, чтобы силы ее стали равны R . Получим, таким образом, пару (R', R'') ; затем, соответственно ее поворачивая, поместим ее так, чтобы сила R' прошла через точку А и направилась в сторону, обратную силе R . Тогда силы R и R' , как равные и взаимнопротивопо-

ложные, уничтожаются и у нас остается только одна сила R'' , равная и параллельная прежней, R ,—она и будет равнодействующей. Следовательно, предложение доказано.



Фиг. 108.

Выразим, наконец, в аналитической форме условие существования равнодействующей. Известно, что условие это есть перпендикулярность R и L (фиг. 108), т.-е. косинус угла между R и L должен равняться нулю. Выразится это уравнением:

$$\cos(R, L) = 0.$$

Заменяя $\cos(R, L)$ через косинусы углов направлений R и L с осями координат, получим:

$$\begin{aligned} \cos(R, L) &= \cos(R, x) \cos(L, x) + \cos(R, y) \cos(L, y) + \cos(R, z) \cos(L, z) = \\ &= \frac{R_x}{R} \cdot \frac{L_x}{L} + \frac{R_y}{R} \cdot \frac{L_y}{L} + \frac{R_z}{R} \cdot \frac{L_z}{L} = \frac{R_x \cdot L_x + R_y \cdot L_y + R_z \cdot L_z}{R \cdot L} = 0. \end{aligned}$$

Но по свойствам вопроса R и L конечны; следовательно, условие сводится к уравнению:

$$R_x \cdot L_x + R_y \cdot L_y + R_z \cdot L_z = 0,$$

или после подстановок:

$$\Sigma X \cdot \Sigma (yZ - zY) + \Sigma Y \cdot \Sigma (zX - xZ) + \Sigma Z \cdot \Sigma (xY - yX) = 0.$$

Это и есть признак существования равнодействующей силы. Легко заметить, что этот признак выполняется и тогда, когда

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

т.-е. когда вся система сил приводится к одной равнодействующей паре. Таким образом, написанное равенство представляет одновременно и признак существования равнодействующей силы, и признак существования равнодействующей пары, что и следовало ожидать, так как случай пары представляет нам случай бесконечно малой силы, бесконечно удаленной.

О равновесии.

§ 42. Условия равновесия свободного тела, когда силы лежат в одной плоскости. Примем за плоскость сил плоскость xy (фиг. 109.) Положим, что даны силы $P, P_1, P_2, \dots$ и точки их приложения $A, B, C, \dots$... Спрашивается, в каком случае свободное тело, на которое действуют эти силы, будет в равновесии?

На основании теорем об эквивалентности сил всю систему заменяем одной силой, проходящей через точку O , и парой. Переносим для этого все силы в точку O и прибавляя соответствующие пары, получим ряд сил $P', P'_1, P'_2, \dots$, и ряд пар $(P, P''), (P_1, P''_1), (P_2, P''_2), \dots$ Складывая все силы

по правилу многоугольника, получим равнодействующую силу R . Сложив затем алгебраически моменты всех данных пар, получим момент M равнодействующей пары. Но равнодействующая сил, лежащих в одной плоскости, равна, как известно, корню квадратному из суммы квадратов проекций всех сил на ось Ox плюс сумма квадратов всех сил на ось Oy , т.-е.

$$R = \sqrt{(\sum \text{пр}_x P)^2 + (\sum \text{пр}_y P)^2}.$$

Потом складываем все пары. Тогда получим равнодействующую пару, момент которой равен M , при чем:

$$M = m(P, P'') + m(P_1, P''_1) + m(P_2, P''_2) + \dots$$

Но момент пары (P, P'') равен двойной площади треугольника AOD , значит, он равен моменту силы P относительно центра моментов O , т.-е.

$$m(P, P'') = m(P).$$

Так же точно находим, что

$$m(P_1, P''_1) = m(P_1); \quad m(P_2, P''_2) = m(P_2); \dots;$$

следовательно:

$$M = m(P) + m(P_1) + m(P_2) + \dots;$$

короче:

$$M = \sum m(P).$$

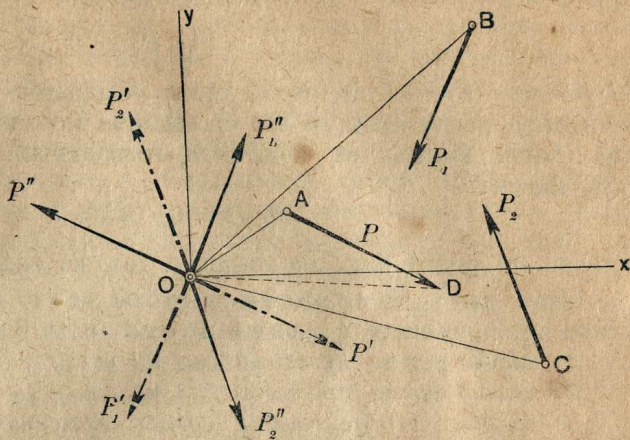
Таким образом, все силы приводятся к одной равнодействующей силе

$$R = \sqrt{(\sum \text{пр}_x P)^2 + (\sum \text{пр}_y P)^2}$$

и к одной равнодействующей паре, момент которой есть:

$$M = \sum m(P).$$

Так как сила никогда не может уравновесить пары (ибо в противном случае вышло бы, что пара, имея уравновешивающую, имеет и равнодействующую, чего быть не может), то необходимо, чтобы при равновесии сила и пара уничтожались каждая отдельно. Но сила только тогда не производит никакого действия на свободное тело, когда она равна нулю. Что касается пары, то она может уничтожаться тогда, когда или плечо ее равно нулю, или когда составляющие ее силы равны нулю. Но и в том и в другом случае, очевидно, момент пары должен быть равен нулю.



Фиг. 109.

Таким образом, для равновесия необходимо, чтобы были удовлетворены условия:

$$R = \sqrt{(\sum \text{пр}_x P)^2 + (\sum \text{пр}_y P)^2} = 0 \quad (a)$$

$$\sum m(P) = 0 \quad (b)$$

Но условие (a) требует, чтобы сумма квадратов двух действительных количеств была равна нулю, а это требование может быть удовлетворено только тогда, когда каждое из количеств, возводимых в квадрат, есть нуль, т.-е. когда имеем:

$$\sum \text{пр}_x P = 0, \quad \sum \text{пр}_y P = 0.$$

Условие (b) может быть оставлено в том же виде.

Итак, для равновесия свободного тела, находящегося под действием сил, лежащих в одной плоскости, необходимо:

- 1) чтобы сумма проекций сил на ось x равнялась нулю;
- 2) чтобы сумма проекций сил на ось y равнялась нулю и
- 3) чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно начала координат также равнялась нулю.

Уравнения равновесия могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{пр}_x P &= 0 \\ \sum \text{пр}_y P &= 0 \\ \sum m(P) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Заметим, что выведенные уравнения не зависят от положения начала координат, так что для того, чтобы тело осталось в равновесии, эти уравнения необходимо должны удовлетворяться при как угодно расположенных осях координат.

Уравнения равновесия можно написать и в аналитической форме, введя в них проекции сил и координаты точек приложения этих сил. Положим, что на тело действуют силы $P, P_1, P_2, \dots$. Обозначим проекции этих сил относительно осей так: проекции сил $P, P_1, P_2, \dots$ на ось x через $X, X_1, X_2, \dots$, а проекции тех же сил на ось y — через $Y, Y_1, Y_2, \dots$. Координаты точек приложения обозначим соответственно через $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, и т. д. Тогда, припоминая аналитическое выражение момента силы относительно начала координат

$$m(P) = yX - xY$$

и, заменяя $\text{пр}_x P$ через X , $\text{пр}_y P$ через Y , и т. д., представим формулы (17) в виде:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum (yX - xY) = 0 \quad (18)$$

Заметим, что в большинстве случаев выгоднее пользоваться уравнениями (17), определяя все требуемые величины геометрически из чертежа.

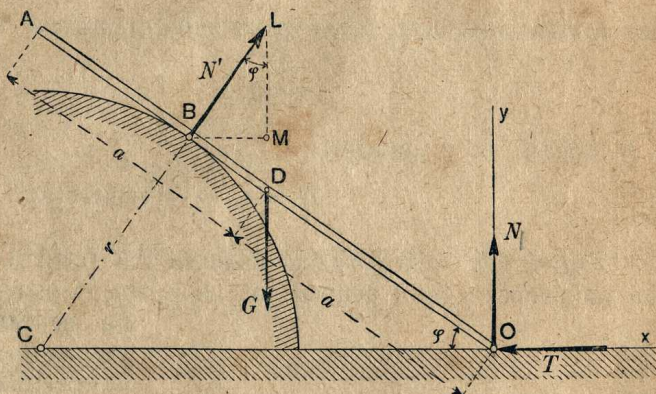
§ 43. Равновесие несвободного тела, когда все силы, действующие на тело, и все силы сопротивления лежат в одной плоскости. Несвободным телом называется тело, которое не может двигаться по всем направлениям, как, например, тело, имеющее одну неподвижную точку, тело, опирающееся на неподвижную поверхность или линию и т. п.

На основании четвертого начала статики препятствия, стесняющие свободу движения, могут быть заменены силами, прибавив которые к телу, можем затем рассматривать это тело уже, как свободное, находящееся под действием всех сил как данных, так и добавленных сил реакции связей. Если тело имеет неподвижную точку, то к силам, на него действующим, надо прибавить еще силу, проходящую через эту точку. Если тело опирается одною точкою на поверхность или линию, то нужно прибавить силу сопротивления, перпендикулярную к этой поверхности или линии. Если тело своею поверхностью соприкасается с неподвижной точкой другого тела, то надо прибавить силу, перпендикулярную к поверхности первого тела. При соединив такие силы сопротивления, можно рассматривать тело, как свободное, и написать для него условия равновесия, уже как бы для тела свободного. Давления тела на препятствия, стесняющие движения, будут прямо противоположны силам воздействия этих препятствий на тело, — по закону действия равного противодействия.

Решим для примера несколько задач.

Задача I. Дан стержень АО (фиг. 110), опирающийся на цилиндр и на плоскость пола. Определить давление в точках О и В и силу T , удерживающую стержень в равновесии.

Обозначим силу тяжести стержня через G , силу сопротивления пола стержню в точке О через N , а силу сопротивления цилиндра — через N' . Длина стержня ОА пусть равна $2a$; пусть $СВ = r$ есть радиус цилиндра; угол наклоения стержня к полу равен φ , а горизонтальная сила, удерживающая стержень в равновесии, равна T . Примем точку О за на-



Фиг. 110.

чало координат, а линию СО за ось x ; за ось y примем линию Оу, перпендикулярную к ОС в точке О.

Составим уравнения равновесия сил G , N , N' и T . Для этого определяем проекции всех сил на оси Ох и Оу и составляем суммы проекций сил на эти оси. Берем сумму проекций всех сил P на ось Ох, т.-е. $\sum \text{пр}_x P$. Имеем:

$$\text{пр}_x G = 0, \quad \text{пр}_x N = 0,$$

$$\text{пр}_x T = -T \text{ и } \text{пр}_x N' = N' \sin \varphi,$$

где $\text{пр}_x N'$ получается из $\triangle BML$, в котором угол $BLM = \varphi$. Сумма проекций этих сил на ось Ох должна быть равна нулю; следовательно, должно существовать соотношение:

$$-T + N' \sin \varphi = 0 \dots \dots \dots (c)$$

Составим сумму проекций всех сил P на ось Oy , т.е. $\Sigma \text{пр}_y P$, имеем:

$$\begin{aligned}\text{пр}_y G &= -G, & \text{пр}_y N &= N, \\ \text{пр}_y T &= 0 & \text{и} & \text{пр}_y N' = N' \cos \varphi.\end{aligned}$$

Уравнение $\Sigma \text{пр}_y P = 0$ представится в следующем виде:

$$-G + N + N' \cos \varphi = 0. \quad (d)$$

Далее, сумма моментов относительно точки O должна быть равна нулю, т.е. должно удовлетворяться условие $\Sigma m(P) = 0$. Так как:

$$\begin{aligned}m(G) &= -G \cdot a \cos \varphi, & m(N) &= 0, \\ m(T) &= 0, & m(N') &= N' r \operatorname{ctg} \varphi,\end{aligned}$$

то оно сведется к уравнению:

$$-G \cdot a \cos \varphi + N' \cdot r \operatorname{ctg} \varphi = 0. \quad (e)$$

Из уравнения (c), (d) и (e) определим N' , N и T . Из уравнения (e) имеем:

$$N' = \frac{G \cdot a \cos \varphi}{r \operatorname{ctg} \varphi} = \frac{G \cdot a}{r} \sin \varphi.$$

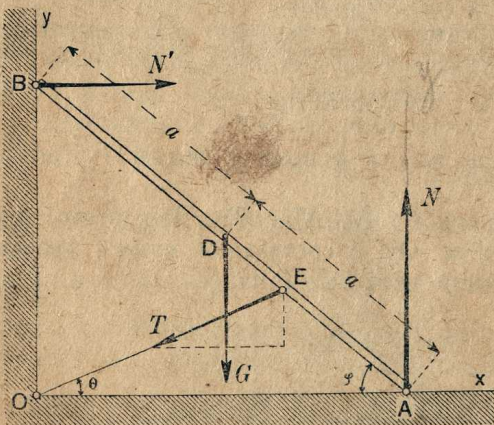
Подставляя величину N' в уравнение (c), найдем выражение для T :

$$T = \frac{G \cdot a}{r} \sin^2 \varphi,$$

а N найдем из уравнения (d):

$$N = G - \frac{G \cdot a}{r} \sin \varphi \cos \varphi = G \left(1 - \frac{a}{r} \sin(2\varphi) \right)$$

Задача II. Пусть дана палочка AB (фиг. 111), длина которой $= 2a$; она опирается одним концом, A , на горизонтальную плоскость, а другим, B , на вертикальную стену, при чем удерживается в данном положении натяжением нити OE . Определить давления в точках A и B и натяжение нити.



Фиг. 111.

На данную палочку будут действовать: 1) горизонтальная сила N' — сопротивления в точке B ; 2) сила G — вес палочки, приложенный в середине ее ($AD = DB = a$); 3) сила T — натяжения нити, которою точка E палочки AB соединена с точкой O , и 4) N — вертикальная сила реакции в точке A . Углы наклона палочки и нити, φ и θ , даны.

На основании сказанного о несвободном теле, сопротивление N будет перпендикулярно к плоскости пола, точно так же, как сила N' будет перпен-

дикулярна к стене. Если к силе G прибавить эти силы, т.-е. N и N' , и силу натяжения нити T , то палочку можно будет разсматривать, как свободное тело, и тогда для него можно будет написать уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma \text{пр}_x P &= 0, \\ \Sigma \text{пр}_y P &= 0, \\ \Sigma m(P) &= 0.\end{aligned}$$

Определим сначала, чему равна сумма проекций всех сил на ось Ox .

Имеем:

$$\begin{aligned}\text{пр}_x N &= 0; \quad \text{пр}_x G = 0; \\ \text{пр}_x T &= -T \cos \Theta; \quad \text{пр}_x N' = N'.\end{aligned}$$

Мы получим, таким образом, уравнение:

$$N' - T \cos \Theta = 0. \quad (f)$$

Также найдем, что сумма проекций всех сил на ось Oy будет $(-G + N - T \sin \Theta)$, и соответствующее уравнение напишется в виде:

$$-G + N - T \sin \Theta = 0. \quad (g)$$

Теперь определим сумму моментов всех сил, $\Sigma m(P)$, относительно начала координат. Имеем:

$$\begin{aligned}m(N) &= -N \cdot 2a \cos \varphi, \\ m(N') &= N' \cdot 2a \sin \varphi, \\ m(G) &= G \cdot a \cos \varphi, \\ m(T) &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение моментов всех действующих сил выразится так:

$$-N \cdot 2a \cos \varphi + N' \cdot 2a \sin \varphi + G \cdot a \cos \varphi = 0,$$

или

$$-2N \cos \varphi + 2N' \sin \varphi + G \cos \varphi = 0. \quad (h)$$

Определим N и N' из уравнений (f) и (g) :

$$N' = T \cos \Theta \quad (k)$$

$$N = G + T \sin \Theta \quad (l)$$

Вставив полученные величины в уравнение моментов (h) , получим:

$$-2G \cos \varphi - 2T \sin \Theta \cos \varphi + 2T \cos \Theta \sin \varphi + G \cos \varphi = 0,$$

или

$$2T(\cos \Theta \sin \varphi - \sin \Theta \cos \varphi) = G \cos \varphi,$$

или

$$2T \sin(\varphi - \Theta) = G \cos \varphi,$$

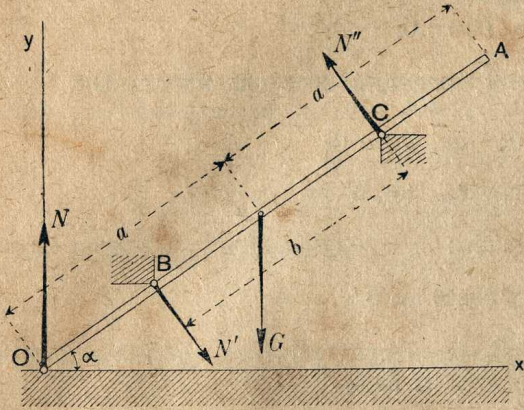
откуда, наконец,

$$T = -\frac{G \cos \varphi}{2 \sin(\varphi - \Theta)},$$

После чего для N и N' получим выражения:

$$N' = \frac{G \cos \varphi \cos \theta}{2 \sin (\varphi - \theta)},$$

$$N = G + \frac{G \cos \varphi \sin \theta}{2 \sin (\varphi - \theta)}.$$



Фиг. 112.

Задача III. Стержень OA (фиг. 112) длиною в $2a$ опирается концом O на горизонтальный пол и поддерживается в равновесии двумя подпорками B и C , из которых первая расположена сверху, а вторая снизу. Определить давление стержня на пол и подпорки, если вес его равен G , угол наклона стержня к полу равен α , а расстояние между подпорками B и C равно b .

Возьмем начало координат в точке O , ось Oy вертикально, а ось Ox — горизонтально.

Составим суммы проекций всех сил на оси Ox и Oy и приравняем их нулю. Находим:

$$N' \sin \alpha - N'' \sin \alpha = 0, \dots \dots \dots (m)$$

$$N - N' \cos \alpha + N'' \cos \alpha - G = 0. \dots \dots \dots (n)$$

Далее приравниваем нулю сумму всех моментов относительно начала координат, т.-е. пишем:

$$m(N) + m(N') + m(N'') + m(G) = 0.$$

Находим:

$$m(N) = 0; \quad m(N') = N' \cdot OB;$$

$$m(N'') = -N'' \cdot OC; \quad m(G) = G \cdot a \cos \alpha;$$

следовательно, уравнение с моментами выразится в виде:

$$N' \cdot OB - N'' \cdot OC + G \cdot a \cos \alpha = 0. \dots \dots \dots (p)$$

Из уравнения (m) , сокращая на $\sin \alpha$, который отличен от нуля, получим:

$$N' = N''.$$

Зная это, находим из уравнения (n) :

$$N = G.$$

Вынося в уравнении (p) N' за скобку, получим:

$$N'(OB - OC) + G \cdot a \cos \alpha = 0,$$

или

$$-N' \cdot b + G \cdot a \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$N' = N'' = \frac{G \cdot a \cos \alpha}{b}.$$

Задача IV. Имеется плоскость $ОВ$ (фиг. 113), наклоненная под углом 120° к горизонтальному полу. На эту плоскость и пол опирается стержень AB , наклоненный под углом 30° к горизонту и удерживаемый нитью OC , наклоненной тоже под углом 30° . Определить силу давления стержня в точках A и B и силу натяжения нити T , если вес стержня равен G , а длина его $2a$.

Пусть в точках A и B силы сопротивления пола и стены будут N и N' . Примем точку O за начало координат, линию OA за направление оси Ox ; тогда ось Oy будет перпендикулярна к AO в точке O .

Мы имели следующие общие уравнения равновесия:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(yX - xY) = 0,$$

где ΣX и ΣY суть суммы проекций сил на оси Ox и Oy , $\Sigma(yX - xY)$ суть сумма моментов действующих сил относительно начала координат. Составим теперь уравнения равновесия для силы G и сил сопротивления N , N' и T .

Для этого сначала определим проекции всех сил на оси Ox и Oy и координаты их точек приложения. Имеем, прежде всего,

$$1) \quad \text{пр}_x G = 0, \quad \text{пр}_y G = -G.$$

Для нахождения координат точки D приложения силы G , соединяем O с D тогда, принимая во внимание, что треугольник AOB — равнобедренный, иб; углы A и B оба равны 30° , из прямоугольного треугольника AOD имеем

$$DA = OA \cos 30^\circ.$$

Но

$$DA = a, \quad \text{а } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

поэтому

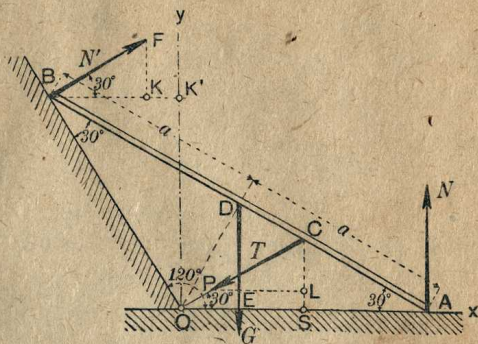
$$OA = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Координаты точки D будут:

$$x_D = OE, \quad y_D = ED.$$

Координата $OE = OA - EA$; но $OA = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, отрезок же EA , как катет прямоугольного треугольника EAD , равняется гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего угла, т.-е.

$$EA = DA \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Фиг. 113.

Заменяв OA и EA их выражениями, получим:

$$OE = x_D = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a - 3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Координата $y_D = ED$ найдется подобным же образом, как катет треугольника AED :

$$ED = y_D = AD \cdot \sin 30^\circ = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}.$$

2) Проекция силы N на ось Ox , в виду их взаимной перпендикулярности, равна нулю; проекция же ее на ось Oy , в виду их параллельности, равняется самой силе N , т.е.

$$\text{пр}_x N = 0, \quad \text{пр}_y N = N.$$

Точка A приложения силы N , как лежащая на оси Ox , будет иметь координату x_A , равную OA , а y_A будет равняться нулю. Таким образом, координаты точки A будут:

$$x_A = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad y_A = 0.$$

3) Проекции силы N' на оси координат найдем из треугольника BKF : проекция на ось Ox будет равняться BK , а на ось Oy — будет KF . Найдем их величины:

$$BK = N' \cos 30^\circ = N' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$KF = N' \sin 30^\circ = N' \cdot \frac{1}{2},$$

так что

$$\text{пр}_x N' = \frac{N' \sqrt{3}}{2}, \quad \text{пр}_y N' = \frac{N'}{2}.$$

Координаты точки B будут:

$$x_B = -BK', \quad y_B = OK'.$$

Величины их найдутся, как катеты прямоугольника OBK' . Имеем:

$$x_B = -BK' = -OB \cdot \sin BOK',$$

но $OB = OA = x_A$, как стороны равнобедренного треугольника, а потому

$$x_B = -BK' = -\frac{2a}{\sqrt{3}} \sin 30^\circ = -\frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Из того же треугольника имеем:

$$y_B = OK' = OB \cdot \cos BOK' = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cos 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a.$$

4) Наконец, проекции силы T на оси координат будут:

$$\text{пр}_x T = -PL = -T \cos CPL = -T \cos 30^\circ = -T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{пр}_y T = -CL = -T \sin CPL = -T \sin 30^\circ = -\frac{T}{2}.$$

Координаты точки C , — точки приложения силы T , — будут:

$$x_c = OS, \quad y_c = CS.$$

Из ряда прямоугольных треугольников имеем:

$$x_c = OS = OC \cdot \cos 30^\circ = OD = AO \cdot \sin 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Теперь найдем y_c . Видим, что

$$x_c = CS = OS \cdot \text{tg } 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}.$$

Итак,

$$x_c = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y_c = \frac{a}{3}.$$

Найдя проекции всех сил и координаты точек их приложения, можем составить такую таблицу ¹⁾:

	y	X	x	Y
G	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$-G$
N	0	0	$\frac{2a}{\sqrt{3}}$	N
N'	a	$\frac{N'\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{N'}{2}$
T	$\frac{a}{3}$	$-\frac{T\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$-\frac{T}{2}$

Теперь составим уравнения проекций и моментов. Так как суммы проекций всех сил на оси Ox и Oy должны равняться нулю, то пишем:

$$\frac{N'\sqrt{3}}{2} - \frac{T\sqrt{3}}{2} = 0, \dots \dots \dots (q)$$

$$-G + N + \frac{1}{2}N' - \frac{1}{2}T = 0. \dots \dots \dots (r)$$

¹⁾ Буквы X и Y , поставленныеверху таблицы, обозначают проекции сил на оси координат, а x и y — координаты точек приложения сил.

Уравнение моментов выразится так:

$$G \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} - N \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} + a \cdot \frac{N\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{N'}{2} - \frac{a}{3} \cdot \frac{T\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{T}{2} = 0.$$

В этом уравнении два последних члена сокращаются так, что оно принимает вид:

$$G \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} - N \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} + N' \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + N' \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = 0. \quad \dots \dots (s)$$

Из уравнения (q) находим, что

$$N' = T.$$

Из уравнения (r) находим:

$$N = G.$$

Подставив в уравнение (s) вместо N равную ему величину G , а вместо N' величину T , решим его относительно T ; получим:

$$T = \frac{3}{4} G.$$

Итак, мы нашли, что

$$N = G \text{ и } N' = T = \frac{3}{4} G.$$

Замечание. Задачи III и IV можно решить быстрее, если заметить, что силы, действующие на палочки, в обоих задачах приводятся к двум парам.

В задаче III имеем $N \neq G$, $N' \neq N''$, а потому уравнение моментов будет.

$$Ga \cos \alpha - Nb = 0.$$

Отсюда найдем сразу

$$N = \frac{Ga \cos \alpha}{b}.$$

В задаче IV будем иметь $N \neq G$, $N' \neq T$, и плечи: $EA = a \cos 30^\circ$, $BO = \frac{a}{\cos 30^\circ}$.

Поэтому уравнение моментов представится в виде:

$$T \frac{a}{\cos 30^\circ} - Ga \cos 30^\circ = 0.$$

Отсюда находим:

$$T = N = G \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4} G.$$

Сравнивая эти решения с решениями, приведенными выше, можно видеть, в подтверждение сказанного в конце § 42, насколько удобнее составлять уравнение моментов непосредственно по чертежу, не пользуясь общим уравнением моментов $\Sigma(yX - xY) = 0$ относительно начала координат, для составления которого приходится определять координаты точек приложения сил.

Докажем теперь одну теорему, которой часто бывает удобно пользоваться при решении задач на равновесие.

Теорема. Если сумма моментов сил, действующих на тело в одной плоскости относительно трех центров в этой плоскости, не лежащих на одной прямой, равняется нулю, то тело находится в равновесии.

Пусть A , B и C (фиг. 114) будут три данных центра, а $P, P_1, P_2, \dots$ — действующие силы, обладающие тем свойством, что суммы моментов их относительно трех центров A, B, C равны нулю, т.-е.

$$\begin{aligned}\Sigma m_A(P) &= 0, \\ \Sigma m_B(P) &= 0, \\ \Sigma m_C(P) &= 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим первое равенство:

$$\Sigma m_A(P) = 0.$$

Оно показывает, что равнодействующая всех сил, R , или проходит через точку A , или равна нулю. Если равнодействующая R равна нулю, то тело в равновесии, и желаемое доказано.

Но положим, что R не равна нулю, а проходит через точку A . Обратимся тогда к равенству:

$$\Sigma m_B(P) = 0.$$

Из него следует, что равнодействующая R проходит через точку B , следовательно, сила R должна быть направлена по линии AB , соединяющей центры A и B . Но если мы утверждаем, что

$$\Sigma m_C(P) = 0.$$

то, прилагая сюда теорему Вариньона, имеем:

$$\Sigma m_C(P) = R \cdot h = 0,$$

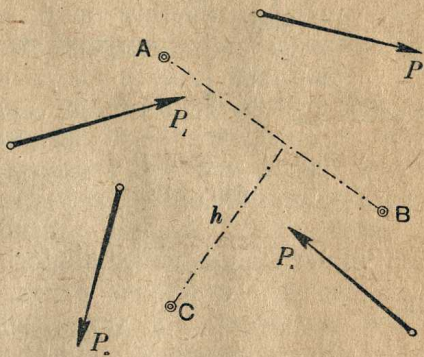
где h — величина перпендикуляра, опущенного из C на AB . Так как точки A, B и C не лежат на одной прямой, то h ни в каком случае не может равняться нулю, и потому, для удовлетворения условия $R \cdot h = 0$, необходимо, чтобы

$$R = 0,$$

т.-е. чтобы равнодействующая всех действующих сил равнялась нулю, а это возможно только в случае равновесия, что и требовалось доказать.

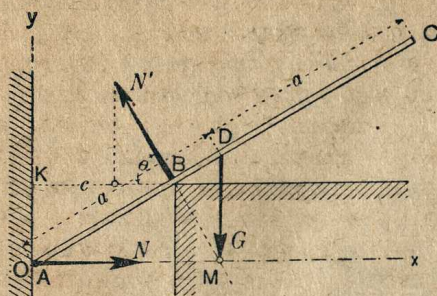
Решим этим способом одну задачу о равновесии.

Задача. Однородный брусок AC (фиг. 115), длиной $2a$ и весом G , опирается в точке A на вертикальную стену Oy , а в точке B — на неподвижную опору, отстоящую от стены на расстоянии $KB = c$. Определить N и N' — давления в точках A и B , а также угол γ AC .



Фиг. 114.

Приняв за три центра моментов точки А, В и М, напомним:



Фиг. 115.

$$\Sigma m_A(P) = 0, \dots (t)$$

$$\Sigma m_B(P) = 0, \dots (v)$$

$$\Sigma m_M(P) = 0, \dots (x)$$

Условие (t) дает нам:

$$- N' \frac{c}{\sin \theta} + G \cdot a \sin \theta = 0, \dots (y)$$

Условие (v) дает:

$$- N \cdot c \operatorname{ctg} \theta + G \left(a - \frac{c}{\sin \theta} \right) \sin \theta = 0,$$

или

$$- N \cdot c \operatorname{ctg} \theta + G(a \sin \theta - c) = 0, \dots (z)$$

Наконец, из условия (x) находим:

$$m_M(N) = 0.$$

Последнее условие показывает, что при равновесии направление силы N должно проходить через точку М; вследствие чего можем написать:

$$AD \cdot AB = AM^2,$$

или

$$a \frac{c}{\sin \theta} = a^2 \sin^2 \theta, \dots (u)$$

Из уравнения (u) находим, что

$$\sin \theta = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}.$$

Далее, из уравнения (y) получаем:

$$N' = G \frac{a \sin^2 \theta}{c} = G \sqrt[3]{\frac{a}{c}}.$$

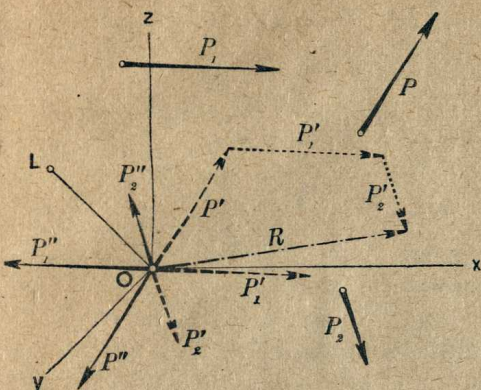
Наконец, из уравнения (z) находим:

$$\begin{aligned} N &= G \frac{a \sin \theta - c}{c \operatorname{ctg} \theta} = G \left(\frac{a}{c} \sin \theta - 1 \right) \operatorname{tg} \theta = \\ &= \frac{G \left[\sqrt[3]{\left(\frac{a}{c} \right)^2} - 1 \right] \sqrt[3]{\frac{c}{a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a} \right)^{2/3}}} = \frac{G \left[\sqrt[3]{\frac{a}{c}} - \sqrt[3]{\frac{c}{a}} \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a} \right)^{2/3}}} = G \sqrt[3]{\frac{a}{c}} \frac{\left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^{2/3} \right]}{\left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^{2/3} \right]^{\frac{1}{2}}} = \\ &= G \sqrt[3]{\frac{a}{c}} \left[1 - \left(\frac{c}{a} \right)^{2/3} \right]^{\frac{1}{2}} = G \sqrt[6]{\left(\frac{a}{c} \right)^{2/3} - 1}. \end{aligned}$$

§ 44. О равновесии твердого тела, на которое действуют силы, расположенные как-нибудь в пространстве. Положим, что мы имеем в пространстве тело, на которое действуют произвольные и произвольно

расположенные силы P, P_1, P_2 (фиг. 116). Требуется определить условия равновесия такого тела.

Отнесем тело к произвольно расположенным прямоугольным осям координат и перенесем все силы в начало координат. При этом перенесении необходимо, как известно, прибавить некоторые пары. Складывая все эти пары, получим некоторую равнодействующую пару, момент которой пусть будет L , а складывая все перенесенные силы, получим некоторую равнодействующую силу R . Определим эти две величины. Величина равнодействующей



Фиг. 116.

шей R выразится через проекции действующих сил на оси координат, как нам это уже известно, так:

$$R = \sqrt{[\sum \text{пр}_x P]^2 + [\sum \text{пр}_y P]^2 + [\sum \text{пр}_z P]^2}.$$

Если обозначим моменты слагаемых пар через $l, l_1, l_2 \dots$, то получим, на основании правила сложения моментов пар, что момент равнодействующей пары, L , выразится так:

$$L = \sqrt{[\sum \text{пр}_x l]^2 + [\sum \text{пр}_y l]^2 + [\sum \text{пр}_z l]^2} = \\ = \sqrt{[\sum m_x(P)]^2 + [\sum m_y(P)]^2 + [\sum m_z(P)]^2}.$$

Так как сила не может уравновесить пары, то для равновесия необходимо, чтобы сила R и пара L порознь уничтожались. Сила уничтожается только тогда, когда она равна нулю. Пара уничтожается или тогда, когда входящие в ее состав силы равны нулю, или когда плечо пары равно нулю. В последнем случае пара приводится к двум силам, равным и направленным по одной и той же линии в прямопротивоположные стороны. В этих только двух случаях и получим, что $L = 0$. Таким образом, имеем:

$$R^2 = [\sum \text{пр}_x P]^2 + [\sum \text{пр}_y P]^2 + [\sum \text{пр}_z P]^2 = 0$$

и

$$L^2 = [\sum m_x(P)]^2 + [\sum m_y(P)]^2 + [\sum m_z(P)]^2 = 0.$$

Не трудно видеть, что эти два уравнения заключают в себе шесть условий равновесия. Так как сумма квадратов действительных количеств может быть равна нулю только тогда, когда равно нулю в отдельности каждое слагаемое, то из этих двух уравнений мы и получим следующие шесть условий равновесия свободного твердого тела:

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| 1. $\sum \text{пр}_x P = 0,$ | 4. $\sum m_x(P) = 0,$ |
| 2. $\sum \text{пр}_y P = 0,$ | 5. $\sum m_y(P) = 0,$ |
| 3. $\sum \text{пр}_z P = 0,$ | 6. $\sum m_z(P) = 0.$ |

Аналитически эти условия равновесия выразятся так:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \Sigma X = 0, & 4. \quad \Sigma(yZ - zY) = 0, \\ 2. \quad \Sigma Y = 0, & 5. \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \\ 3. \quad \Sigma Z = 0, & 6. \quad \Sigma(xY - yX) = 0. \end{array}$$

Эти условия равновесия могут быть сформулированы так:

Теорема. Для равновесия свободного твердого тела необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на прямоугольные оси координат равнялись нулю, и чтобы суммы моментов всех сил относительно каждой из осей координат также равнялись нулю.

Замечание. Выведенные шесть уравнений необходимы и достаточны для существования равновесия свободного твердого тела, т.-е., если они имеют место, то тело находится в равновесии, и обратно. Это рассуждение приложимо для как угодно расположенных в пространстве систем прямоугольных осей координат. Отсюда следует, что условия равновесия, удовлетворенные на данных осях, должны удовлетворяться на любых других.

Моменты сил относительно осей координат легко определяются по формулам:

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

хотя в большинстве случаев удобнее употреблять геометрический способ. Так, например, для определения моментов относительно оси Ox проводят плоскость, перпендикулярную к этой оси, и проектируют на нее все силы; потом опускают на эти проекции перпендикуляры из точки пересечения оси Ox с плоскостью и умножают каждую из проекций на длину соответствующего перпендикуляра, приписывая этому произведению знак плюс или минус соответственно направлению, по которому силы вращают тело около оси Ox .

Частные случаи. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи равновесия, когда всех шести условий не нужно, а достаточно только некоторых из них, потому что остальные удовлетворяются сами собою.

1. Все силы лежат в одной плоскости. Положим, что все силы лежат в плоскости xu ; тогда проекции всех сил на ось Oz будут равны нулю, и, кроме того, координата $z = 0$; следовательно, уравнения (3), (4) и (5) удовлетворяются тождественно сами собой, и условиями равновесия окажутся уравнения:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Это те же уравнения, которые мы вывели и прежде для сил, расположенных в одной плоскости. Перемена знака в третьем из полученных уравнений произошла от того, что для осей пространства направление вращения считается положительным тогда, когда оно берется от положительной оси x к положительной оси y , а для осей плоскостей — наоборот.

2. Все силы проходят через одну точку. Примем эту точку за начало координат; тогда ее можно будет рассматривать, как точку приложения всех сил, и потому в уравнениях моментов можно положить:

$$x = y = z = 0.$$

При этом все эти уравнения (4), (5) и (6) удовлетворяются тождественно, и у нас останутся только три первых условия.

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

3. Все силы параллельны между собою. Направим ось x параллельно данным силам; тогда проекции сил на оси y и z будут равны нулю, т.-е. мы получим: все $Y = 0$ и все $Z = 0$, а потому уравнения (2), (3) и (4) удовлетворяются тождественно, и у нас останутся три условия равновесия:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma z X = 0, \quad \Sigma y X = 0.$$

4. Все силы параллельны одной плоскости, но не лежат в одной плоскости. Положим, что все силы параллельны плоскости xy ; тогда все $Z = 0$, следовательно, третье условие равновесия удовлетворяется тождественно, и останутся только пять условий:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, & \Sigma Y &= 0, \\ \Sigma z Y &= 0, & \Sigma z X &= 0, & \Sigma (xY - yX) &= 0. \end{aligned}$$

§ 45. Условия равновесия несвободного тела. Если мы имеем несвободное тело, то, согласно четвертому началу статики, вопрос о его равновесии можно решить, рассматривая тело, как свободное, если только прибавить к числу действующих сил еще силы сопротивления препятствий, стесняющих свободу тела.

Напомним, как определяется по четвертому началу направление сил реакции связей. Если тело имеет одну несвободную точку, то нужно прибавить силу, проходящую через эту точку. Если точка тела должна оставаться постоянно на линии или поверхности, то сила сопротивления остается постоянно нормальной к этой линии или поверхности. Если тело соприкасается с некоторой неподвижной поверхностью только в одной точке, то сила, заменяющая сопротивление поверхности, должна быть взята проходящей через точку соприкосновения и направленной по нормали к этой поверхности.

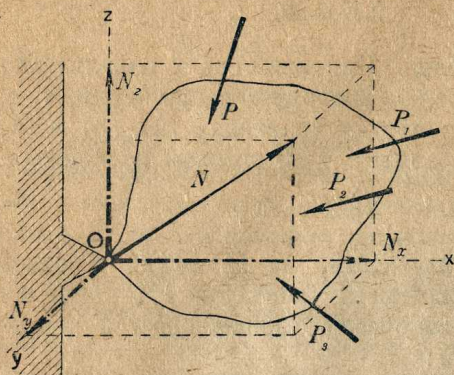
После этих общих соображений посмотрим, как решаются различные задачи, сюда относящиеся.

1. Определить условия равновесия тела, имеющего одну неподвижную точку.

Возьмем начало координат именно в этой неподвижной точке O (фиг. 117). Пусть на тело действует ряд сил P . Действие неподвижной точки заменим силою ее сопротивления N ; в нашем случае она проходит через начало координат O . Назовем проекции силы N на оси координат через N_x , N_y и N_z и напомним условия равновесия, прибавляя к силам P еще силу N , т.-е. рассматривая тело, как совершенно свободное; тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} 1. \quad \Sigma X + N_x &= 0, & 4. \quad \Sigma (yZ - zY) &= 0, \\ 2. \quad \Sigma Y + N_y &= 0, & 5. \quad \Sigma (zX - xZ) &= 0, \\ 3. \quad \Sigma Z + N_z &= 0, & 6. \quad \Sigma (xY - yX) &= 0. \end{aligned}$$

Заметим приэтом, что через ΣX , ΣY и ΣZ мы обозначили только суммы проекций всех данных сил P , проекции же силы сопротивления N пишем



Фиг. 117.

отдельно; в условиях же моментов отдельные слагающие силы N отсутствуют потому, что сила N проходит через начало координат и, следовательно, моменты ее относительно осей координат будут равны нулю. Первые три уравнения определяют величину и направление силы сопротивления N , последние же три собственно и выражают условия равновесия несвободного тела, имеющего одну неподвижную точку. Таким образом, имеем:

Теорема. Для равновесия несвободного тела, имеющего одну неподвижную

точку, необходимо, чтобы сумма моментов относительно осей координат равнялась нулю. Необходимость этого условия равновесия очевидна, впрочем, сама собою. Если все силы перенесем в точку O и заменим их одной силой и парой, то силы уничтожаются сопротивлением неподвижной точки, и для равновесия необходимо только одно: чтобы моменты составляющих пар в плоскостях координат равнялись нулю, т.-е.

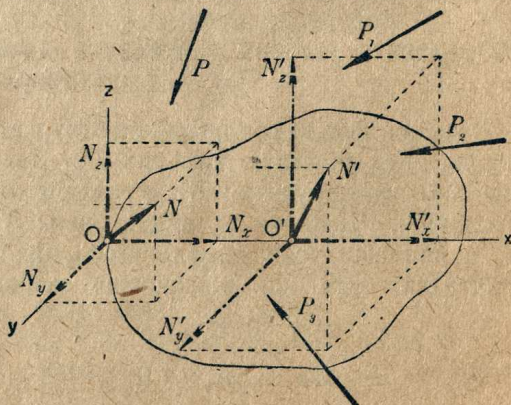
$$L_x = 0, \quad L_y = 0, \quad L_z = 0,$$

или

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

II. Определить условия равновесия тела, имеющего две неподвижные точки.

Отнесем данное тело к прямоугольным осям координат, при чем за начало координат возьмем одну из этих неподвижных точек O (фиг. 118), а ось Ox проведем так, чтобы она прошла через другую неподвижную точку. Мы можем определить условия равновесия взятого тела, как свободного, если к действующим силам P прибавим сопротивления N и N' . Разложим силу N на составляющие, направленные по осям координат: N_x , N_y и N_z , а силу N' разложим на N'_x ,



Фиг. 118.

N'_y и N'_z . Уравнения равновесия взятого нами тела напишутся, следовательно, так:

$$\begin{aligned}\Sigma X + N_x + N'_x &= 0, \\ \Sigma Y + N_y + N'_y &= 0, \\ \Sigma Z + N_z + N'_z &= 0, \\ \Sigma(yZ - zY) + m_x(N) + m_x(N') &= 0, \\ \Sigma(zX - xZ) + m_y(N) + m_y(N') &= 0, \\ \Sigma(xY - yX) + m_z(N) + m_z(N') &= 0,\end{aligned}$$

Заметим теперь, что моменты сил N и N' относительно оси Ox равны нулю, так как силы проходят через эту ось; затем, момент силы N относительно оси Oy также равен нулю; что же касается момента силы N' относительно оси Oy , то он выразится так:

$$m_y(N') = m_y(N'_x) + (m_y(N'_y) + m_y(N'_z)),$$

но

$$m_y(N'_x) = 0, \quad m_y(N'_y) = 0,$$

а

$$m_y(N'_z) = -N'_z \cdot OO'.$$

Если назовем OO' через a , то найдем, что

$$m_y(N'_z) = -aN'_z.$$

Далее момент силы N относительно оси Oz равен нулю, а

$$m_z(N') = m_z(N'_x) + m_z(N'_y) + m_z(N'_z).$$

Но

$$m_z(N'_x) = 0, \quad m_z(N'_y) = aN'_y, \quad m_z(N'_z) = 0.$$

Приняв все это во внимание, найдем, что условия равновесия данного тела выразятся следующими уравнениями:

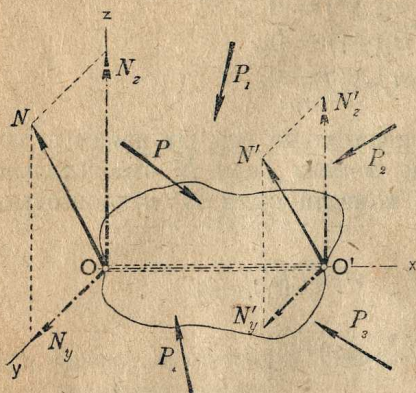
$$\begin{aligned}1. \Sigma X + N_x + N'_x &= 0, & 4. \Sigma(yZ - zY) &= 0, \\ 2. \Sigma Y + N_y + N'_y &= 0, & 5. \Sigma(zX - xZ) - aN'_z &= 0, \\ 3. \Sigma Z + N_z + N'_z &= 0, & 6. \Sigma(xY - yX) + aN'_y &= 0.\end{aligned}$$

Из этих шести уравнений лишь одно четвертое не зависит от сил сопротивления, а потому оно и служит выражением условия, стесняющего внешние силы для того, чтобы было равновесие. Остальные же пять уравнений служат для определения сил N_x, N_y, N_z и N'_x, N'_y, N'_z , при чем силы N_x и N'_x не могут быть определены каждая в отдельности; они могут быть определены только в виде их суммы из первого уравнения. Остальные же силы, перпендикулярные к оси Ox , могут быть определены вполне. Таким образом имеем:

Теорема. Для равновесия твердого тела, имеющего две неподвижные точки, необходимо, чтобы сумма моментов всех внешних сил относительно оси, проходящей через эти точки, равнялась нулю; иначе говоря, требуется, чтобы равнодействующая проходила через неподвижную ось.

III. Определить условия равновесия тела, две точки которого лежат на неподвижной прямой и могут перемещаться, скользя по этой прямой.

Расположим оси координат так, чтобы начало оказалось в одной из скользящих точек тела O (фиг. 119), а ось Ox направим так, чтобы она



Фиг. 119.

проходила через другую точку O' , т.е. предположим, что тело скользит по оси Ox . В нашем случае, чтобы иметь возможность рассматривать тело, как свободное, мы должны прибавить силы сопротивления N и N' , перпендикулярные к оси Ox . Разложим силы N и N' : силу N на N_y и N_z , а силу N' — на N'_y и N'_z ; при этом первые, очевидно, будут направлены по осям Oy и Oz , а вторые будут им параллельны.

Напишем теперь шесть уравнений равновесия, при чем под знак Σ введем только проекции и выражения моментов всех данных сил, проекции же и выра-

жения моментов неизвестных отдельно. Имеем таким образом:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\Sigma X = 0$, | 4. $\Sigma(yZ - zY) = 0$, |
| 2. $\Sigma Y + N_y + N'_y = 0$, | 5. $\Sigma(zX - xZ) - aN'_z = 0$, |
| 3. $\Sigma Z + N_z + N'_z = 0$, | 6. $\Sigma(xY - yX) + aN'_y = 0$, |

где a обозначает расстояние OO' между точками O и O' . Уравнения (2), (3), (5) и (6) служат для определения четырех сил сопротивления N_y , N_z , N'_y и N'_z ; первое же и четвертое уравнения суть уравнения, стесняющие внешние силы для того, чтобы могло существовать равновесие. Из этих двух уравнений мы находим:

Теорема. Для равновесия тела, имеющего две неподвижные точки, могущие скользить по данной прямой, необходимо, чтобы сумма проекций всех внешних сил на эту прямую равнялась нулю, и чтобы сумма моментов тех же сил относительно этой прямой равнялась также нулю.

IV. Определить условия равновесия тела, три точки которого могут скользить по данной плоскости.

Примем плоскость xy за плоскость, по которой скользят три ножки стола O , A и B (фиг. 120). Точку O возьмем за начало координат, прямую OA — за ось Ox . Расстояние точки A от начала координат назовем через a расстояние же точки B от осей Ox и Oy обозначим соответственно через s и b . Присоединим теперь к внешним силам P еще силы сопротивления плоскости xy , — пусть эти силы будут N , N' и N'' . Они будут приложены в точках O , A , B и, на основании сказанного о силах сопротивления без трения, будут перпендикулярны к плоскости xy .

Напишем теперь шесть уравнений равновесия свободного тела:

1. $\Sigma X = 0$,
2. $\Sigma Y = 0$,
3. $\Sigma Z + N + N' + N'' = 0$,
4. $\Sigma(yZ - zY) + m_x(N) + m_x(N') + m_x(N'') = 0$,
5. $\Sigma(zX - xZ) + m_y(N) + m_y(N') + m_y(N'') = 0$,
6. $\Sigma(xY - yX) + m_z(N) + m_z(N') + m_z(N'') = 0$.

Теперь определим моменты сил N , N' и N'' относительно осей Ox , Oy и Oz . Моменты силы N , как проходящей через начало координат, равны нулю, так что:

$$m_x(N) = 0, \quad m_y(N) = 0, \quad m_z(N) = 0.$$

Моменты силы N' относительно осей Ox и Oz равны нулю, так как сила N' проходит через ось Ox и параллельна оси Oz , т. е.

$$m_x(N') = 0, \quad m_z(N') = 0.$$

Моменты же силы N' относительно оси Oy будут:

$$m_y(N') = -N'a.$$

Моменты силы N'' относительно осей Ox и Oy будут:

$$m_x(N'') = N''c, \quad m_y(N'') = -N''b.$$

Моменты относительно оси Oz : $m_z(N'') = 0$, так как сила N'' параллельна оси Oz .

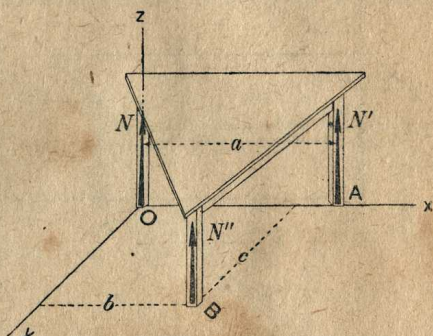
Подставляя полученные величины в вышеписанные уравнения равновесия, получим:

1. $\Sigma X = 0$,
2. $\Sigma Y = 0$,
3. $\Sigma Z + N + N' + N'' = 0$,
4. $\Sigma(yZ - zY) + N''c = 0$,
5. $\Sigma(zX - xZ) - N'a - N''b = 0$,
6. $\Sigma(xY - yX) = 0$.

Мы видим, что уравнения (3), (4) и (5) дают возможность определить силы сопротивления N , N' и N'' ; условия же, стесняющие внешние силы, выразятся уравнениями (1), (2) и (6). Таким образом получаем:

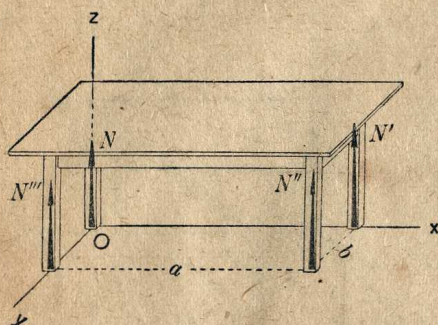
Теорема. Для равновесия тела, имеющего три точки, могущие скользить по данной плоскости, необходимо, чтобы сумма проекций всех внешних сил на две оси координат, лежащие в этой плоскости, равнялась нулю и чтобы сумма моментов тех же сил относительно оси, перпендикулярной к этой плоскости, равнялась также нулю.

Решая уравнения (3), (4) и (5) относительно N , N' и N'' , мы, очевидно, найдем для этих сил совершенно определенные значения. Однако,



Фиг. 120.

Этот же самый вопрос относительно давлений в случае, когда тело имеет четыре точки, могущие скользить по данной плоскости, является уже неопределенным, потому что и в этом случае, как и в предыдущем, число условий, которым для равновесия должны удовлетворять внешние силы, остается то же самое, — три и, следовательно, из остальных трех уравнений придется определять четыре неизвестных давления. То же самое может быть сказано и для того случая, когда тело имеет несколько точек, могущих скользить по данной плоскости. Как пример неопределенности



Фиг. 121.

подобной задачи в статике, приведем задачу об определении давлений на четыре ножки стола, когда на нем лежит какой-нибудь груз.

Пусть имеем стол (фиг. 121), ножки которого расположены так, что концы их лежат в вершинах прямоугольника со сторонами a и b . Прибавив в надлежащем месте силы сопротивления, можем рассматривать стол, как тело свободное, и написать для него уравнения равновесия. Оси координат расположим, как показано на чертеже. Уравнения равновесия напишутся так:

1. $\sum X = 0$,
2. $\sum Y = 0$,
3. $\sum Z + N + N' + N'' + N''' = 0$,
4. $\sum (yZ - zY) + (N'' + N''')b = 0$,
5. $\sum (zX - xZ) - (N' + N'')a = 0$,
6. $\sum (xY - yX) = 0$.

Условиями, стесняющими внешние силы для возможности равновесия, являются уравнения (1), (2) и (6); уравнения же (3), (4) и (5) дают связь между данными силами и силами сопротивления. Система этих трех уравнений неопределенна, потому что приходится из трех уравнений определять четыре неизвестных.

Найдя из уравнения (5) сумму (N' и N''), подставляем полученное значение ее в уравнение (3), после чего сможем определить сумму ($N + N'''$). Из уравнения (4) найдем затем ($N'' + N'''$). Положим, мы нашли, что:

$$N' + N'' = M; \quad N + N''' = M_1; \quad N'' + N''' = M_2.$$

Будем считать силу N' известной и по ней определим все остальные силы N , N'' и N''' . Находим:

$$\begin{aligned} N'' &= M - N'; \\ N''' &= M_2 - (M - N'); \\ N &= M_1 - M_2 + (M - N'). \end{aligned}$$

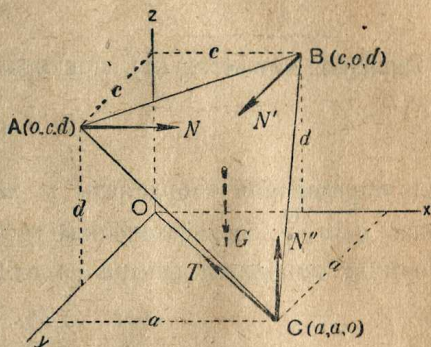
Силе N' можно давать только положительные значения и притом такие, чтобы силы N , N'' и N''' вышли также положительными.

На практике наша задача не имеет никакой неопределенности; решая же ее по правилам статики абсолютно твердого тела, мы полу-

чаем неопределенный ответ. Происходит это от того, что эта задача не относится к статике абсолютно твердого тела, — она должна быть отнесена к задачам теории упругости, где она и решается вполне определенно.

Раньше мы рассмотрели несколько задач, относящихся к тому случаю равновесия, когда все силы, действующие на тело, и все силы сопротивления лежат в одной плоскости. Решим теперь задачу на тот случай равновесия, когда на тело действуют силы, не расположенные в одной плоскости.

Задача. Однородная треугольная пластинка ABC (фиг. 122), имеющая равные стороны $AC = BC$, опирается вершиною C на горизонтальный пол, а вершинами A и B на вертикальные стены, пересекающиеся под прямым углом. Точка C привязана к вершине O трехгранного угла, образованного плоскостями пола и стен, нитью CO , которая делит угол xOy пополам. Определить силу натяжения нити T , и силы сопротивления N , N' и N'' , развиваемые стенами и полом в точках A , B и C .



Фиг. 122.

Дано: вес пластинки G (он приложен к центру тяжести) и координаты точек A , B и C . Координаты эти обозначены на чертеже при каждой из точек.

Пишем шесть условий равновесия. Имеем первое:

$$1. \quad \text{пр}_x N + \text{пр}_x N' + \text{пр}_x N'' + \text{пр}_x G + \text{пр}_x T = 0.$$

Но

$$\text{пр}_x N = N, \quad \text{пр}_x N' = 0, \quad \text{пр}_x N'' = 0, \quad \text{пр}_x G = 0, \quad \text{пр}_x T = -\frac{T}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти величины в написанное уравнение, получим первое условие в виде:

$$N - \frac{T}{\sqrt{2}} = 0. \quad (1)$$

Таким же способом находим, что выражение суммы проекций всех сил на ось Oy , будучи приравнено нулю, дает:

$$N' - \frac{T}{\sqrt{2}} = 0. \quad (2)$$

Рассматривая проекции всех сил на ось Oz , получим:

$$N'' - G = 0. \quad (3)$$

Теперь перейдем к составлению уравнений моментов. Имеем:

$$4. \quad m_x(N) + m_x(N') + m_x(N'') + m_x(G) + m_x(T) = 0. \quad (4)$$

Определяем моменты каждой отдельной силы:

$$m_x(N) = 0, \quad m_x(N') = -N'd, \quad m_x(N'') = N''a, \quad m_x(G) = \bar{y}Z - \bar{z}Y,$$

где $\bar{y}$, $\bar{z}$ означают координаты центра тяжести; но

$$Y = 0, \quad Z = -G,$$

следовательно:

$$m_x(G) = -G\bar{y}$$

и, наконец,

$$m_x(T) = 0.$$

Уравнение моментов (4), при этих значениях самих моментов, напишется так:

$$-N'd + N''a - G\bar{y} = 0.$$

Для определения координаты $\bar{y}$ вес пластинки G разложим на три равные веса $g = \frac{G}{3}$, сосредоточенные соответственно в точках А, В и С. Применяя формулу координат центра параллельных сил, находим:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P} = \frac{g(y + y' + y'')}{3g},$$

где y , y' и y'' суть координаты точек приложения сил; подставляя их значения, равные соответственно c , 0 и a , получим:

$$\bar{y} = \frac{c + a}{3}.$$

Подставляя это значение в уравнение моментов (4), получим:

$$-N'd + N''a - \frac{1}{3}G(a + c) = 0 \quad (4')$$

Совершенно так же найдем сумму моментов всех сил относительно оси Оу и получим:

$$Nd - N''a - \frac{1}{3}G(a + c) = 0 \quad (5)$$

Здесь моменты имеют обратные знаки по той причине, что все рассматриваемые в данной задаче силы относительно оси Оу вращают в сторону обратную той, в которую вращают относительно оси Ох. Наконец, пишем последнее уравнение:

$$6. \quad m_x(N) + m_x(N') + m_x(N'') + m_x(G) + m_x(T) = 0.$$

Но

$$m_x(N) = -Nc, \quad m_x(N') = N'c, \quad m_x(N'') = 0, \quad m_x(G) = 0, \quad m_x(T) = 0.$$

Подставив эти значения, получим уравнение (6) в таком виде:

$$-Nc + N'c = 0 \quad (6)$$

Решая полученные шесть уравнений, находим из уравнений (1) и (2):

$$N = \frac{T}{\sqrt{2}} = N'.$$

Из уравнения (3) находим:

$$N'' = G.$$

Вставив в уравнение (4) вместо N' и N'' равные им величины, получим:

$$-\frac{T}{\sqrt{2}}d + Ga - \frac{1}{3}(a + c)G = 0,$$

или

$$-3Td + \sqrt{2}[3Ga - G(a + c)] = 0,$$

откуда

$$3Td = G\sqrt{2}(2a - c),$$

или, окончательно:

$$T = G \frac{\sqrt{2}(2a - c)}{3}.$$

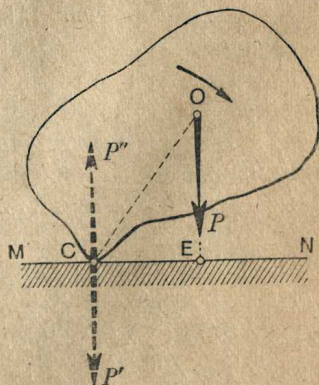
Подставив значение T в выражение для N и N' , имеем:

$$N = N' = G \frac{2a - c}{3}.$$

§ 46. Равновесие тяжелого тела, опирающегося на горизонтальную плоскость. Определим условия равновесия тяжелого тела, опирающегося на неподвижную горизонтальную плоскость одной, двумя или тремя точками.

Первый случай. Тело имеет одну точку опоры. Положим, что мы имеем тело, опирающееся на горизонтальную плоскость MN (фиг. 123) одной точкой C , и пусть центр тяжести этого тела находится в O , а вся действующая на тело система сил приведена к силе веса тела, P , приложенной в центре тяжести тела. Перенеся силу P в точку C , получим силу P' и пару (P, P'') . Сила P уничтожается сопротивлением плоскости, и у нас остается только пара (P, P'') , которая и стремится вращать тело по направлению стрелки. Значит, для равновесия этого тела необходимо, чтобы действие пары уничтожилось, а для этого надо, чтобы момент ее был равен нулю, т.е. чтобы удовлетворялось условие:

$$P \cdot CE = 0,$$



Фиг. 123.

что возможно только при $CE = 0$, а это показывает, что точки C и O должны лежать на одной вертикальной линии, проходящей через точку опоры.

Итак, для равновесия тяжелого тела, имеющего одну неподвижную точку, необходимо, чтобы центр тяжести его лежал на вертикальной линии, проходящей через точку опоры.

Равновесие подобного тела представляет три случая, а именно: равновесие тела может быть устойчивое, неустойчивое и безразличное.

Устойчивым равновесием называется такое положение тела, когда при малом отклонении от этого положения тело опять возвращается в прежнее положение.

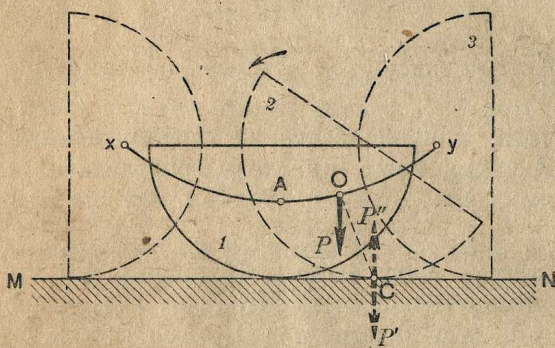
Неустойчивым равновесием называется такое положение тела, когда тело при малом отклонении стремится еще более отклониться от первоначального положения.

Наконец, безразличным называется такое равновесие, когда тело при малом отклонении от положения равновесия остается в том положении, в какое его отклонили.

Докажем теперь теорему, что устойчивое равновесие бывает тогда, когда центр тяжести занимает самое низкое место; неустойчивое, когда центр тяжести занимает самое высокое место; безразличное, когда при малом отклонении тела высота его центра тяжести не меняется.

Рассмотрим случай, когда центр тяжести занимает самое низкое место. Допустим, что данное тело есть полушар (фиг. 124), и пусть положение его равновесия есть положение (1).

Центр тяжести полушара находится от геометрического центра на расстоянии $\frac{3}{8}$ радиуса, положим в точке А; тогда точка А, при качении сегмента по плоскости, описывает поверхность ху, обращенную выпуклою своею стороной к плоскости MN. Когда тело выйдет из положения равновесия, то центр тяжести займет место выше прежнего (что ясно из фиг. 124).



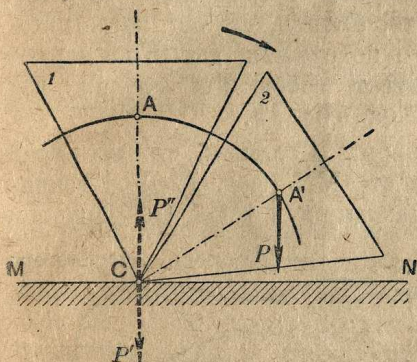
Фиг. 124.

В кинематике будет доказано, что прямая, соединяющая какую-нибудь точку тела с точкой соприкосновения его с поверхностью, по которой оно катится, будет нормальна к поверхности, описанной рассматриваемой точкой тела. Заметим кстати, что при качении одного тела по другому линия, представляющая путь, пройденный какой-либо точкой тела при таком движении, называется рулеттой этой точки. Положим, что центр тяжести переместился из А в О; тогда точка опоры будет находиться в С и, соединив С с О, на основании вышесказанного, получим, что СО будет нормалью к поверхности ху в точке О ее.

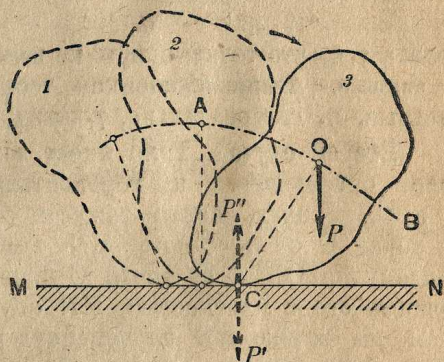
В этом случае нормаль отходит влево от перпендикуляра, восстановленного в точке С. Перенесем силу Р, приложенную в центре тяжести, в точку С; тогда получим силу Р', уничтожающуюся сопротивлением плоскости, и пару (Р, Р''), старающуюся повернуть тело по направлению стрелки, т.-е. привести в прежнее положение. Таким образом, видим, что равновесие будет устойчивое.

Рассмотрим второй случай, когда центр тяжести занимает самое высокое положение в теле, имеющем неподвижную точку опоры; примером может служить конус, поставленный вершиной на плоскость MN (фиг. 125). Поверхность, описываемая центром тяжести A при поворачивании конуса около его вершины, остающейся неподвижной в точке C , т.-е. поверхность рулетт будет поверхностью сферы, проведенной радиусом AC из центра C , находящегося в точке опоры.

Положим, что центр тяжести переместился в A' . В центре тяжести A' действует поперечному вся сила P — вес нашего конуса; перенесем ее в точку C , тогда получим силу P' , уничтожающуюся сопротивлением плоскости, и пару (P, P'') , которая стремится вращать тело все время по направлению, указанному стрелкой; поэтому тело упадет. Следовательно, равновесие в этом случае может быть только неустойчивое.



Фиг. 125.



Фиг. 126.

Рассмотрим еще случай, когда центр тяжести занимает самое высокое место, но точка опоры может перемещаться. Дадим нашему телу (фиг. 126) ряд различных положений; тогда увидим, что центр тяжести будет описывать некоторую поверхность, обращенную вогнутою стороною к плоскости MN , и центр тяжести во всяком другом положении тела, кроме данного, A , будет занимать положение ниже A . Выше мы заметили, что, если центр тяжести при его движении соединять с точкою опоры, то будет получаться прямая, нормальная к поверхности, описываемой центром тяжести. Поэтому, если центр тяжести переместится в новое положение O , то нормаль к поверхности AB из точки O в пересечении ее с плоскостью MN и даст как раз точку опоры C . В данном случае нормаль отходит вправо от перпендикуляра, восстановленного к плоскости MN из точки C .

В центре тяжести O действует сила P , — весь вес нашего тела. Перенесем ее в точку C ; тогда получим силу P' , уничтожающуюся сопротивлением плоскости, и пару (P, P'') , которая старается вращать тело все время по направлению стрелки. Поэтому тело упадет, и, следовательно, рассматриваемый случай есть случай равновесия неустойчивого.

Наконец, случай безразличного равновесия являет нам шар, лежащий на горизонтальной плоскости (фиг. 127), где центр тяжести перемещается по горизонтальной линии, т.-е. с изменением положения тела высота его центра тяжести над поверхностью MN не изменяется. Линия, соединяю-

щая центр тяжести с точкою опоры, будет перпендикулярна к плоскости MN; следовательно, сила P , действующая в центре тяжести O , будучи перенесена

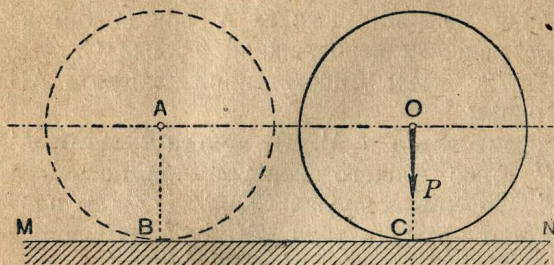
в C , уничтожается, не давая никакой пары. Теорема, таким образом, доказана.

В элементарной физике говорят, что, если центр тяжести находится ниже точки опоры, то равновесие устойчивое; если выше, то неустойчивое; если же центр тяжести совпадает с точкою опоры, то безразличное; но эти три случая суть частные случаи предыдущей теоремы, те, именно, случаи, когда пред-

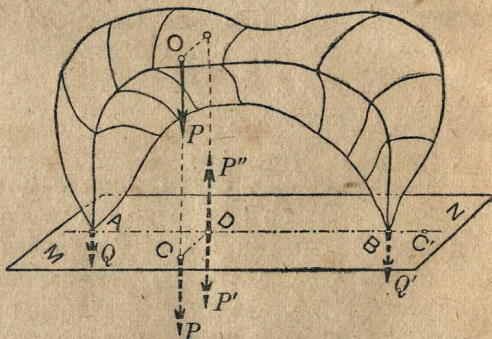
полагается, что точка опоры не изменяет своего положения, как это и делают в физике. Вышеизложенная теорема охватывает собою эти случаи, как частные, и, следовательно, должна быть признана общей.

Второй случай. Тело имеет две точки опоры. Положим, что мы имеем тело, опирающееся на горизонтальную плоскость MN (фиг. 128) в точках A и B , и пусть центр тяжести этого тела находится в точке O . Опустим из точки O на плоскость MN перпендикуляр OC , а из точки C пересечения его с плоскостью MN опустим на линию AB перпендикуляр CD . Легко видеть, что сила P , как сила, перпендикулярная к горизонтальной плоскости MN, лежит в вертикальной плоскости, проходящей через точку O и прямую CD . Эту силу P можно из O перенести в точку C , а оттуда в точку D посредством пары (P, P'') . Полученная таким образом в точке D сила P разлагается на силы Q и Q' , действующие в точках опоры A и B по направлению перпендикулярному к плоскости MN и уничтожающиеся сопротивлением этой плоскости; таким образом у нас остается только одна пара (P, P'') . Для равновесия, следовательно, необходимо, чтобы момент этой пары был равен нулю, т.е. чтобы $P \cdot DC = 0$, иными словами, чтобы DC равнялось нулю. Таким образом, для равновесия тяжелого тела, имеющего две неподвижные точки, необходимо, чтобы центр тяжести его лежал в вертикальной плоскости, проходящей через прямую, соединяющую две точки опоры.

При этом заметим, что, если бы точка D попала не между A и B , а вне их, — в какую-нибудь точку C' , — то, разлагая силу P' , попрежнему, на две, мы нашли бы, что сила, действующая на точку B , уничтожается сопротивлением плоскости, сила же, действующая на точку A , окажется направленной кверху и будет стараться все время вращать тело около центра B , а потому равновесия в этом случае не будет.



Фиг. 127.

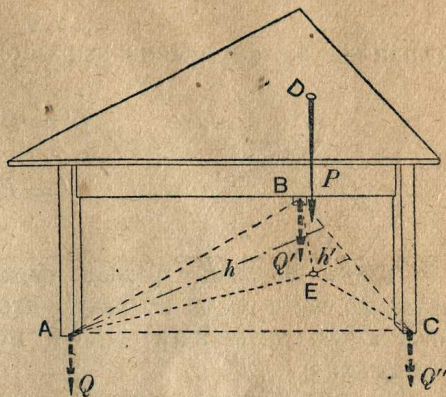


Фиг. 128.

Третий случай. Тело имеет три точки опоры. Здесь для равновесия необходимо, чтобы проекция центра тяжести на горизонтальную плоскость попала бы внутрь треугольника, образуемого линиями, соединяющими точки опоры.

Возьмем, например, стол на трех ножках (фиг. 129); тогда треугольник ABC и будет этим опорным треугольником. Точка E пусть будет проекцией центра тяжести. Силу P всегда можно разложить на три силы Q , Q' и Q'' , действующие в точках A, B и C. Эти силы уничтожаются сопротивлением плоскости, и тело будет в равновесии. Определим величины этих сил Q , Q' и Q'' .

Соединим вершины треугольника ABC с проекцией центра тяжести E и докажем, что



Фиг. 129.

$$\frac{Q}{\text{пл. } \triangle ECB} = \frac{Q'}{\text{пл. } \triangle EAC} = \frac{Q''}{\text{пл. } \triangle EAB}.$$

Из точек A и E опустим перпендикуляры h и h' на прямую BC и напомним, что момент равнодействующей P относительно оси BC (обозначим ее через z) равен сумме моментов слагаемых сил, т.-е. что

$$m_z(P) = m_z(Q) + m_z(Q') + m_z(Q'').$$

Посмотрим, чему равняются все эти слагающие моменты. Так как силы Q' и Q'' проходят через ось, то моменты их относительно этой оси равняются нулю; что же касается моментов сил P и Q , то они выразятся так:

$$\begin{aligned} m_z(Q) &= -Qh, \\ m_z(P) &= -Ph'. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения моментов сил Q и P , получим:

$$Ph' = Qh,$$

откуда

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{h'}.$$

Помножив числителя и знаменателя второй части на $\frac{1}{2}BC$, получим:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot h}{\frac{1}{2}BC \cdot h'},$$

но произведения $\frac{1}{2}BC \cdot h$ и $\frac{1}{2}BC \cdot h'$ представляют собою площади треугольников ABC и EBC, так что будем иметь:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle EBC};$$

отсюда

$$Q = P \frac{\text{пл. } \triangle EBC}{\text{пл. } \triangle ABC}.$$

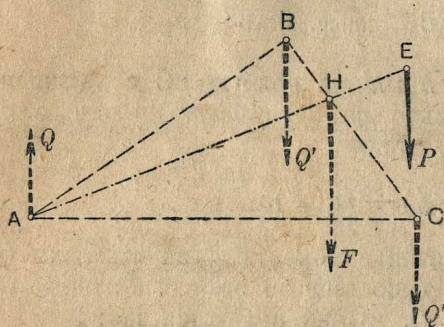
Подобными же формулами выразятся и силы Q' и Q'' :

$$Q' = P \frac{\text{пл. } \triangle EAC}{\text{пл. } \triangle ABC},$$

$$Q'' = P \frac{\text{пл. } \triangle EAB}{\text{пл. } \triangle ABC}.$$

Таким образом, всякая сила, приложенная к вершине, составляет такую же часть силы P , какую площадь малого треугольника, прилежающего к противоположной стороне, составляет от площади всего треугольника.

Положим теперь, что E попадет вне треугольника ABC (фиг. 130). Тогда силу P можно разложить на две силы, Q и F , действующие на точки



Фиг. 130.

А и Н, при чем сила Q будет направлена вверх. Силу F можно разложить на Q' и Q'' , действующие в точках В и С, направленные вниз и уничтожающиеся сопротивлением плоскости; сила же Q будет двигать тело, стараясь все время вращать его около оси BC и, значит, равновесия не будет.

Итак, в данном случае для равновесия тела, имеющего три точки опоры, необходимо, чтобы проекция центра тяжести на горизонтальную плоскость находилась внутри треугольника, образованного линиями, соединяющими точки опоры.

Выведенное нами условие равновесия тела, имеющего три точки опоры, остается справедливым и для тела, имеющего сколько бы то ни было точек опоры, лишь бы их было не менее трех.

Момент устойчивости.

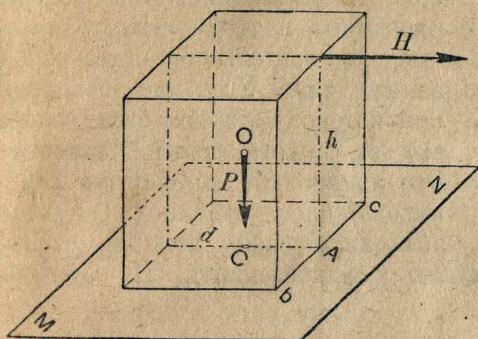
§ 47. Определение. Предположим, что мы имеем какой-нибудь параллелепипед. Пусть центр тяжести его находится в точке O (фиг. 131); в этой точке можно считать приложенным вес параллелепипеда P . Пусть далее на это тело действует горизонтальная сила H , которая стремится опрокинуть его, вращая около ребра bc . Спрашивается, как велика должна быть эта сила, чтобы она могла опрокинуть параллелепипед, т.-е. повернуть его около неподвижной оси bc .

Для равновесия такого тела необходимо, чтобы сумма моментов всех действующих сил относительно оси bc равнялась нулю, т.е. необходимо, чтобы:

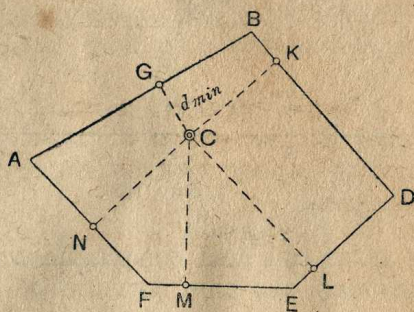
$$-P \cdot d + H \cdot h = 0,$$

или

$$H = \frac{P \cdot d}{h}.$$



Фиг. 131.



Фиг. 132.

Если сила H будет больше, чем $\frac{P \cdot d}{h}$, то она опрокинет тело; если же сила H будет меньше $\frac{P \cdot d}{h}$, то она опрокинуть тела не сможет. Таким образом, тело будет тем устойчивее, чем больше произведение Pd и чем меньше h . Произведение Pd называется моментом устойчивости. Следовательно: *моментом устойчивости называется произведение из веса тела на перпендикуляр, опущенный на сторону основания из проекции центра тяжести на плоскость основания.*

Если проекция центра тяжести отстоит от сторон основания на различных расстояниях, то за расчетный перпендикуляр d следует принять наименьший из перпендикуляров, опущенных из точки C на стороны основания. Например, на фигуре 132 за перпендикуляр надо принять $CG = d_{min}$, и тогда

$$H = \frac{P \cdot d_{min}}{h} = \frac{P \cdot CG}{h} \quad ^1).$$

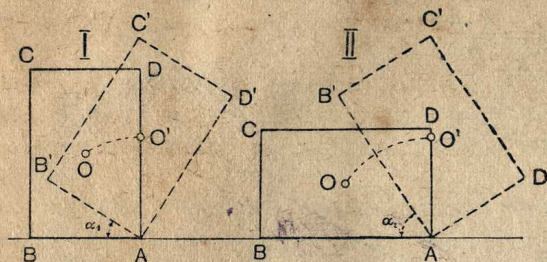
Из сказанного видно, что горизонтальная сила, которую надо употребить, чтобы опрокинуть тело, должна быть пропорциональна моменту устойчивости и обратно пропорциональна высоте точки приложения этой силы от опорной горизонтальной плоскости.

¹⁾ Если контур данного тела криволинейный, то надо опустить перпендикуляры на касательные к кривой, проведенные в различных ее точках, и выбрать из этих перпендикуляров наименьший.

Если геометрические связи препятствуют опрокидыванию тела в некоторых направлениях (напр., пианино, приставленное к стене, может опрокинуться лишь внутрь комнаты), то плечом момента устойчивости будет служить наименьшее из расстояний d до прямых, около которых тело может опрокинуться. Если, напр., тело с основанием $ABDEF$ (фиг. 132) может опрокидываться только около ребер DE и EF , то в момент устойчивости нужно вводить не плечо $d_{min} = CG$, а плечо CM .

Необходимо заметить, что «момент устойчивости» еще не характеризует вполне «устойчивости» тела по отношению к опрокидыванию. Всем известно, что предметы, хотя и тяжелые, но высокие, опрокидываются весьма легко, тогда как предметы низкие опрокинуть довольно трудно, хотя момент устойчи-

вости у последних может быть и меньше, чем у первых. Дело здесь в том, что тело окончательно опрокидывается лишь тогда, когда проекция центра тяжести его выйдет за пределы периметра основания тела. Угол же наклона, при котором это делается, зависит от высоты центра тяжести. Это ясно видно из фигуры 132':



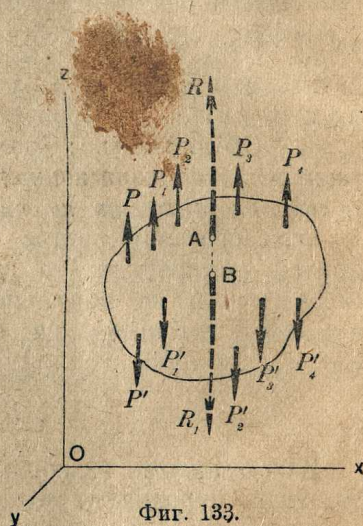
Фиг. 132'.

он далее сам стал опрокидываться; низкий же параллелепипед (II) следует наклонить для этого значительно больше.

§ 48. Признак устойчивости Мебиуса для свободного тела, находящегося в равновесии под действием параллельных сил. Вообразим свободное твердое тело (фиг. 133), находящееся под действием постоянных по величине сил, имеющих постоянные точки приложения в теле и направленных в ту или другую сторону параллельно некоторой данной прямой в пространстве. Проведем ось Oz прямоугольной системы координат параллельно направлению упомянутой прямой и условимся называть буквами Z с соответственными значками проекции сил P на ось Oz , а через z с соответственными значками — координаты точек приложения этих сил. При этом силы $P, P_1, P_2, \dots$, направленные вверх, будут иметь положительные проекции, а силы $P', P'_1, P'_2, \dots$, направленные вниз, — отрицательные.

Признак Мебиуса состоит в следующем. Если $\sum Zz > 0$, то равновесие будет устойчивое; если же $\sum Zz < 0$, то равновесие будет неустойчивое¹⁾.

Чтобы доказать высказанное положение, заметим, что при равновесии тела силы $P, P_1, P_2, \dots$, действующие вверх, параллельно оси Oz , должны приводиться к равнодействующей R , которая должна быть равна равнодействующей R_1 сил $P', P'_1, P'_2, \dots$, действующих вниз, при чем обе силы R и R_1 должны быть направлены в противоположные стороны по прямой AB , соединяющей их точки приложения A и B .



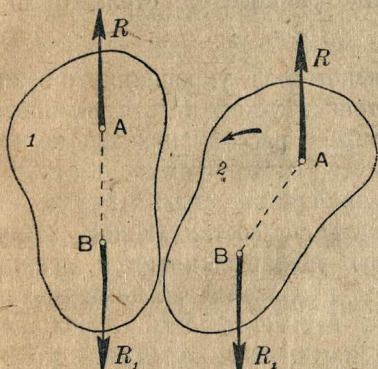
Фиг. 133.

¹⁾ Суммирование распространяется здесь на все действующие на тело силы.

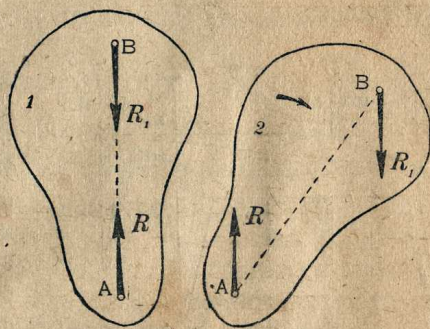
Приэтом может быть два случая: 1) точка А находится выше точки В, и силы R и R_1 стремятся разъединить точки А и В; 2) точка А лежит ниже точки В, и силы R и R_1 стремятся сблизить точки А и В.

В первом случае равновесие будет устойчивое, потому что тело при выходе из положения равновесия, будет находиться под действием пары (R, R_1) , стремящейся вернуть его в положение равновесия, как это видно на фигуре 134а.

Во втором случае равновесие будет неустойчивое, потому что при выходе из положения равновесия тело будет находиться под действием пары (R, R_1) , стремящейся все более и более удалять тело от положения равновесия, как это видно на фигуре 134б.



Фиг. 134а.



Фиг. 134б.

Посмотрим теперь, как выражается аналитически то условие, что точка А занимает более высокое положение, нежели точка В. Назовем через $\bar{z}$, $\bar{z}'$ координаты точек А и В и пишем известные формулы координат центра параллельных сил:

$$\bar{z} = \frac{P \cdot z + P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2}{R},$$

$$\bar{z}' = \frac{P_3 \cdot z_3 + P_4 \cdot z_4 + P_5 \cdot z_5}{R_1}.$$

Замечая, что $R = R_1$, составляем разность:

$$\bar{z} - \bar{z}' = \frac{P \cdot z + P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 - P_3 \cdot z_3 - P_4 \cdot z_4 - P_5 \cdot z_5}{R}.$$

Подставляем сюда:

$$P = Z; P_1 = Z_1; P_2 = Z_2;$$

$$P_3 = -Z_3; P_4 = -Z_4; P_5 = -Z_5;$$

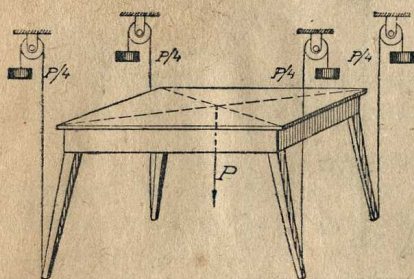
получаем:

$$\bar{z} - \bar{z}' = \frac{\Sigma Z z}{R}.$$

Если $\Sigma Z z > 0$, то $\bar{z} > \bar{z}'$ и равновесие устойчиво; если же $\Sigma Z z < 0$, $\bar{z} < \bar{z}'$, и равновесие неустойчиво, что и требовалось доказать.

Для несвободного твердого тела признак устойчивости Мебиуса не имеет силы. Напр., для стола с положенными на него грузами будем иметь $\sum Zz < 0$, но равновесие будет устойчивое. Причина этого заключается в том, что силы, действующие на ножки стола от земли, нельзя считать за постоянные; при стремлении стола наклониться, положим влево, давление на левые ножки возрастает, а на правые уменьшается. Благодаря этому точка приложения равнодействующей опорных реакций перемещается в теле, и указанные выше соображения относительно неравенств $\sum Zz \geq 0$ утрачивают свою силу.

Если бы мы сделали стол свободным в пространстве, напр., подвесив его за ножки к 4 нитям, перекинутым через блоки и имеющим на свободных концах грузы $\frac{P}{4}$ (фиг. 135), то положение равновесия стола было бы неустойчивое.



Фиг. 135.

Примером тела, укрепленного в неподвижной точке, устойчивость равновесия которого может рассматриваться по признаку Мебиуса, служит компасная стрелка. В ней вертикальные силы (вес и пара от вертикальной составляющей земного магнетизма) уравниваются реакцией шпильки и небольшим эксцентриситетом стрелки, а горизонтальные силы представляют пару сил, взаимно уравнивающихся в положениях равновесия стрелки.

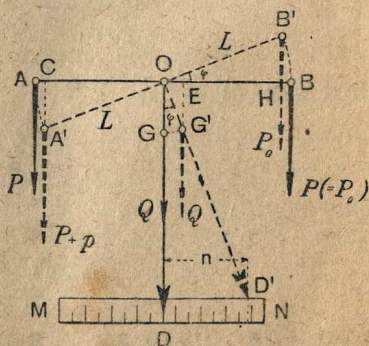
Выбор между устойчивым и неустойчивым положением может быть сделан по признаку Мебиуса.

Теория весов.

Весы обыкновенные.

§ 49. Чувствительность весов. Допустим, что АВ (фиг. 136) есть коромысло весов. Пусть затем А и В будут точки привеса, точка О — точка опоры, G — центр тяжести коромысла, P — вес каждой чашки, Q — вес коромысла, OD — стрелка, MN — шкала с делениями, показывающими отклонения стрелки от вертикального положения OD. Если весы устроены правильно, то коромысло АВ при равных нагрузках примет горизонтальное положение. Надо заметить, что точка привеса А и В и точка опоры О должны быть на одной прямой.

Если на одну из чашек весов, например, на А, положим какой-нибудь груз p , то вся



Фиг. 136.

система выйдет из первоначального положения равновесия, и весы через некоторое время после более или менее долгого качания, придут в равновесие, коромысло весов примет некоторое новое положение равновесия $A'B'$

Для этого положения равновесия необходимо, чтобы соблюдалось условие:

$$m(P_0) + m(Q) + m(P + p) = 0.$$

За центр моментов примем точку O . Тогда:

$$m(P + p) = -(P + p) \cdot OC,$$

но OC , из треугольника OCA' , выражается через $A'O \cdot \cos A'OC$. Обозначим $A'O (= AO)$ через L и угол $A'OC$, — угол отклонения коромысла, — через φ ; тогда:

$$OC = L \cos \varphi,$$

$$m(P + p) = -(P + p) \cdot L \cos \varphi,$$

$$m(P_0) = P_0 \cdot OH = P \cdot L \cos \varphi,$$

$$m(Q) = Q \cdot OE = Q \cdot \delta \sin \varphi,$$

где $\delta = OG' = OG$, и, следовательно:

$$P \cdot L \cos \varphi + Q \cdot \delta \sin \varphi - P \cdot L \cos \varphi - p \cdot L \cos \varphi = 0,$$

или

$$Q \cdot \delta \sin \varphi = p \cdot L \cos \varphi,$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p \cdot L}{Q \cdot \delta}.$$

Помножим последнюю формулу на l — длину стрелки OD — получим:

$$l \operatorname{tg} \varphi = \frac{p \cdot L \cdot l}{Q \cdot \delta};$$

но $l \operatorname{tg} \varphi = n$; следовательно:

$$n = \frac{p \cdot L \cdot l}{Q \cdot \delta}.$$

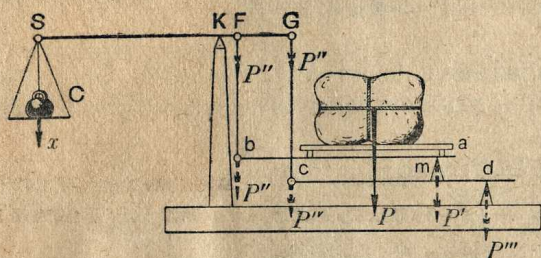
Это и есть формула, определяющая чувствительность весов. Она дана Эйлером. Из нее видно, что чувствительность весов:

1. Прямо пропорциональна длине коромысла.
2. Прямо пропорциональна длине стрелки.
3. Обратно пропорциональна расстоянию центра тяжести коромысла от точки опоры (близость эта имеет, впрочем, некоторый предел).
4. Обратно пропорциональна весу коромысла.

Было бы ошибочно думать, что, чем длиннее коромысло, тем точнее происходит взвешивание. Слишком длинные коромысла также обладают недостатком, — они прогибаются.

Десятичные весы.

§ 50. Определение. Кроме обыкновенных весов, весьма часто употребляются десятичные или мостовые весы. Десятичными они называются потому, что на них данный груз, положенный на платформу весов, уравновешивают на чашке гирей, в десять раз меньшую по весу, вследствие чего эти весы особенно удобны для взвешивания больших грузов. Мы рассмотрим десятичные весы двух родов.



Фиг. 137.

§ 51. Десятичные весы первого рода. К короткому плечу KG (фиг. 137) подвешены два стержня Fb и Gc, соединенные шарнирами с рычагами ba и cd, точки опоры которых лежат в a и d. На рычаг ab опирается платформа, на которую кладут взвешиваемый груз P. К длинному плечу KS привешена чашка C, на которую кладут гири до тех

пор, пока не наступит равновесие. Рычаг SKFG рассчитывается таким образом, чтобы вес гирь, положенных на чашку, равнялся $\frac{1}{10} P$, и чтобы равновесие не зависело от положения груза на платформе. Это требование удовлетворяется, когда

$$SK = 10 FK, \quad \dots \dots \dots (1),$$

и когда

$$KG : KF = dc : dm \quad \dots \dots \dots (2).$$

Докажем теперь, что при существовании указанной пропорции:

- 1) во время колебания коромысла платформа ab будет передвигаться параллельно самой себе, т.е., если она сначала лежала горизонтально, то и при всяком наклонении коромысла она останется горизонтальной, и
- 2) груз, положенный на произвольную точку платформы ab, будет производить на коромысло то же самое действие, как если бы он был приведен непосредственно к точке F коромысла, т.е., что положение груза на платформе не имеет никакого значения.

Положим, что $KG = n \cdot KF$; тогда в силу сделанного нами предположения $dc = n \cdot dm$. Пусть при отклонении коромысла точка F проходит s дюймов; тогда на столько же дюймов и в ту же сторону подвинется и конец b стержня Fb и рычага ab. Очевидно, что другая точка коромысла, точка G, пройдет ns дюймов; то же пространство пройдет и конец c стержня cd; точка же m этого рычага пройдет пространство, в n раз меньшее, т.е. s дюймов. Но вместе с этой точкой передвигается и второй конец a рычага ab. Таким образом, выходит, что оба конца этого рычага или платформы передвигаются на s дюймов так, что платформа, находящаяся в равновесии в горизонтальном положении, при вращении коромысла SKG около точки K, будет опускаться или подниматься, оставаясь при этом в горизонтальном положении. В аналитической механике будет показано, что этот

кинематический признак является признаком одинакового действия груза, где бы он ни был положен на платформу; но теперь мы обнаружим это последнее обстоятельство с помощью элементарной статики.

Разложим силу P на две параллельные силы, P'' и P' , приложенные в точках a и b . Силу P'' , действующую на точку b , можно перенести в точку F . Силу P' разлагаем тоже на две силы P''' и P^{IV} , действующие в точках d и c . Сила P''' уничтожается сопротивлением опоры. Силу P^{IV} перенесем в точку G , при чем заметим, что величина силы P^{IV} может быть найдена из пропорции:

$$P^{VI} : P' = dm : dc.$$

Отсюда

$$P^{IV} = \frac{P' \cdot dm}{dc} \dots \dots \dots (3)$$

Назовем через x вес гири, положенной на чашку; для [равновесия необходимо, чтобы сумма моментов всех сил, взятых относительно оси, проходящей через K , равнялась нулю, т.-е., чтобы

$$m_K(x) + m_K(P'') + m_K(P^{IV}) = 0,$$

или

$$-x \cdot KS + P'' \cdot KF + P^{IV} \cdot KG = 0.$$

На основании пропорции (2)

$$KG : KF = dc : dm \dots \dots \dots (2)$$

это уравнение можно переписать в виде:

$$-x \cdot KS + P'' \cdot KF + P^{IV} \cdot KF \frac{dc}{dm} = 0,$$

или, в виду уравнения (3):

$$-x \cdot KS + P'' \cdot KF + P' \frac{dm}{dc} \cdot KF \cdot \frac{dc}{dm} = 0.$$

Отсюда находим:

$$(P'' + P') \cdot KF = x \cdot KS,$$

или

$$P \cdot KF = x \cdot KS,$$

откуда, принимая во внимание, что

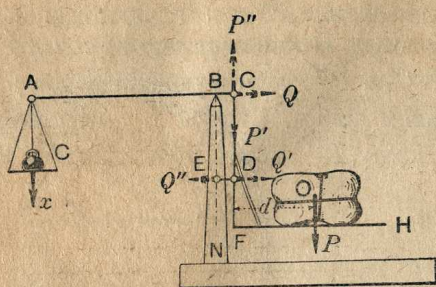
$$KF = \frac{1}{10} \cdot KS,$$

получим:

$$x = \frac{1}{10} P.$$

§ 52. Десятичные весы второго рода. Имеем столбик BN (фиг. 138), опирающийся на подставку; к этому столбику на шарнирах прикреплен рычаг AC , один конец которого в 10 раз более другого. На конце рычага A привешивается чашка, на которую кладут гири. На другом конце рычага, в точке C , прикреплен стержень, соединенный с платформой FH , на которую

кладут груз P . Стержень CF и столбик BN соединены маленьким рычагом DE , посредством шарниров D и E . Условие правильности этих весов состоит



Фиг. 138.

в том, чтобы четырехугольник $BCDE$ представлял собою всегда параллелограмм, а при горизонтальности рычага AC — прямоугольник. Так как стержень с платформой составляет одно целое, то силу P из точки O можно перенести в точку C посредством силы P' , равной P , и пары (P, P'') .

Заменяем пару (P, P'') эквивалентной ей парой (Q, Q'') с плечом CD , при чем одну из сил этой пары, Q , приложим в точке C и направим по BC , а силу Q'' — в точке D и направим по

по DE . Две пары эквивалентны тогда, когда их моменты равны, т.-е. когда:

$$Q \cdot CD = P \cdot d,$$

так что сила Q связана с P условием:

$$Q = \frac{P \cdot d}{CD}.$$

Сила Q старается растянуть рычаг AC и уничтожается сопротивлением точки опоры B ; равным образом и сила Q'' , сжимающая рычаг ED , уничтожается сопротивлением точки опоры E . Остается только сила P' . Если вес гири на чашке C обозначим x , то для равновесия необходимо, чтобы сумма моментов сил P' и x , относительно точки опоры B рычага CA равнялась нулю, т.-е., чтобы

$$x \cdot AB = P' \cdot BC,$$

отсюда

$$x = P' \cdot \frac{BC}{AB},$$

но, так как P' и P равны и $BC:AB = 1:10$, то получаем, что на этих весах также соблюдается условие:

$$x = \frac{1}{10} P.$$

§ 53. Весы Роберваля. В 1667 году французский ученый Роберваль представил в Парижскую академию наук изобретенные им особого устройства весы, которые долго потом рассматривались, как механический парадокс, ибо на них, кажущимся образом, равные грузы уравнивались на неравных плечах. Это кажущееся противоречие было разъяснено лишь в 1803 году знаменитым математиком Пуансо при помощи введенного им в науку учения о парах.

Схема весов Роберваля такова: берется параллелограмм $ABCD$ (фиг. 139); составляющие его стороны соединены шарнирами; точки E и F неподвижны. К параллелограмму AC перпендикулярно к сторонам AD и BC прикре-

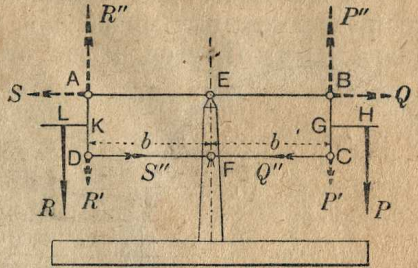
плюются два стержня GH и KL. Докажем, что, в каком бы месте стержней ни были приложены силы P и R , в случае равновесия они будут непременно равны.

Перенесем силу P в точку B; тогда мы получим силу P' , равную P , и пару (P, P'') . Эту пару заменяем эквивалентной ей парой (Q, Q'') ; тогда имеем:

$$Q \cdot BC = P \cdot GH,$$

откуда

$$Q = P \cdot \frac{GH}{BC}.$$



Фиг. 139.

Силу R точно также перенесем в точку A; получим силу R' , равную R , и пару (R, R'') , которую заменим парой (S, S'') , эквивалентную первой, и потому:

$$S \cdot AD = R \cdot KL,$$

откуда

$$S = R \cdot \frac{KL}{AD}.$$

Силы Q и S могут быть перенесены в точку опоры E, где они и уничтожаются. Точно так же силы Q'' и S'' уничтожаются сопротивлением неподвижной точки F. Поэтому для равновесия необходимо только, чтобы

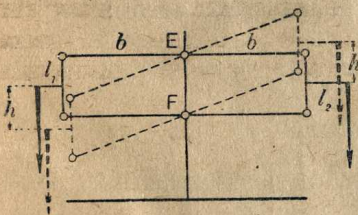
$$P' \cdot BE = R' \cdot AE \text{ или } P' \cdot b = R \cdot b$$

т.-е., чтобы

$$P' = R' \text{ или } P = R.$$

Следовательно, если рычаг находится в равновесии, то:

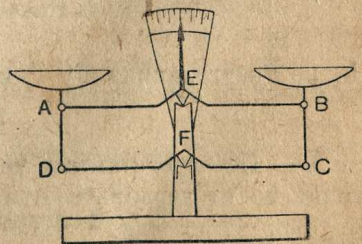
$$P = R.$$



Фиг. 140.

Описанный прибор представляет, так называемый, парадокс Роберваля. Парадоксальность заключается в том, что этот механизм ошибочно принимают за рычаг. Разница между ними состоит в том, что в данном механизме пространства h (фиг. 140), проходимые точками приложения грузов, в силу самого устройства механизма одинаковы при всякой длине плеч, в рычаге же при различных длинах плеч эти пространства различны.

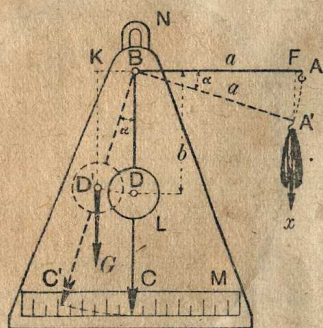
Весы Роберваля имеют следующее устройство (фиг. 141): в прямоугольнике, описанном выше, вместо ручек GH и KL приделывают чашки: В точке E верхний стержень AB прорезывается призмой, ребро которой покоится на подставке, в точке же F приделывают осо-



Фиг. 141.

бое приспособление для того, чтобы рычаг мог свободно поворачиваться в плоскости ABCD, но не мог отходить вправо или влево.

§ 54. Весы для взвешивания пряжи. Существенную часть прибора составляет ломаный рычаг ABC (фиг. 142), части которого AB и BC составляют прямой угол. Рычаг этот может вращаться около оси В, перпендикулярной к плоскости чертежа. На часть ВС рычага насаживается массивная пластинка L, служащая для того, чтобы рычаг под влиянием собственного веса возвращался в первоначальное положение ABC. На конце А рычага имеется крючок, на который и подвешивается пряжа.



Фиг. 142.

Кроме рычага, на оси В надето еще ушко N, за которое подвешивается при взвешивании весь прибор, и шкала М, которая под влиянием собственного веса, будучи подвешена за ушко N, всегда сохраняет одно и то же положение. На нижней стороне этой шкалы нанесены деления по прямой линии; деления эти отмечаются стрелкой С, приделанной к нижней части рычага.

Теперь допустим, что к крючку А мы привесили некоторый груз x (пряжи); от действия этой силы x конец А рычага АВ опустится, а стрелка С двинется влево и отметит некоторое деление на пиферблате. Пусть это новое положение рычага есть A'BC'. Отметим точкою D первоначальное положение центра тяжести рычага и сосредоточим в ней вес его G . При новом положении равновесия рычага пусть точка D перейдет в D'. Для равновесия рычага в его новом положении необходимо, чтобы;

$$m_B(x) + m_B(G) = 0.$$

Но

$$m_B(x) = x \cdot BF = xa \cos \alpha,$$

где $a = BA' = BA$ и α — угол отклонения рычага от первоначального положения. Затем:

$$m_B(G) = -G \cdot BK = -G \cdot b \sin \alpha,$$

где

$$b = BD' = BD;$$

следовательно:

$$x \cdot a \cos \alpha = G \cdot b \sin \alpha,$$

откуда

$$x = \frac{G \cdot b}{a} \operatorname{tg} \alpha.$$

Но из треугольника BCC' имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = CC' : BC = y : l,$$

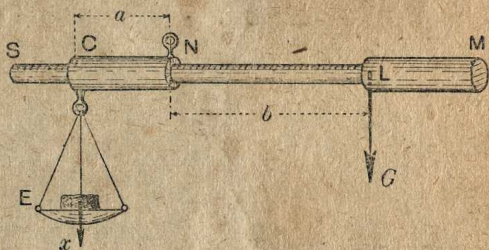
где $y = CC'$ представляет число делений, пройденных стрелкою BC при движении ее от первоначального положения C до C', а $l = BC$ есть расстояние от точки В до шкалы. Итак:

$$x = \frac{G \cdot b}{a} \cdot \frac{y}{l} = \frac{G \cdot b}{a \cdot l} \cdot y.$$

Обозначая произведение $\frac{G \cdot b}{a \cdot l} = \text{const.}$ через A получим:

$$x = A \cdot y.$$

§ 55. Безмен. Безмен представляет из себя стержень, имеющий на одном конце утолщение M (фиг. 143); вдоль этого стержня передвигается муфта C , с подвешенной к одному ее концу чашкою E и приделанным к другому ее концу кольцом N , служащим для приподнимания всего прибора. Длина муфты $= a$. Пусть точка L есть центр тяжести прибора, вес которого обозначим через G . Обозначим через b расстояние центра тяжести от точки опоры.



Фиг. 143.

При взвешивании поступают так: груз кладут на чашку E и передвигают муфту C до тех пор, пока прибор не придет в равновесие. На рычаге LS , по которому движется муфта C , нанесены деления. Для равновесия необходимо, чтобы:

$$m_N(x) + m_N(G) = 0;$$

но

$$m_N(x) = -x \cdot a; \quad m_N(G) = G \cdot b,$$

следовательно:

$$x \cdot a = G \cdot b,$$

откуда

$$x = \frac{G \cdot b}{a}.$$

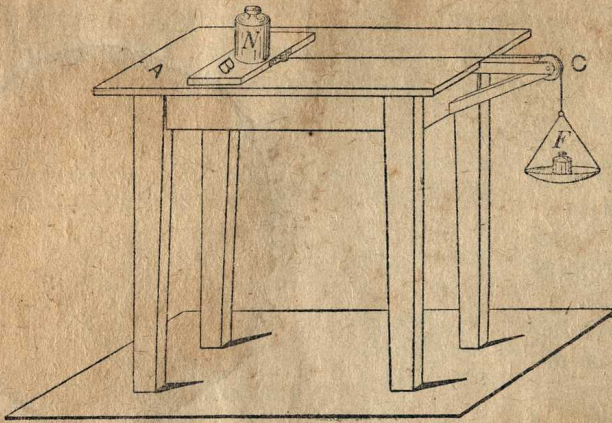
О трении.

§ 56. Определение. Трение бывает двух родов. Трение 1-го рода, или трение скольжения, развивается тогда, когда точки соприкосновения одного тела с другим скользят по последнему, а трение 2-го рода, или трение качения, развивается тогда, когда точки соприкосновения одного тела к другому не имеют относительно его скорости, и тела катятся друг по другу. Трение 2-го рода очень мало сравнительно с трением 1-го рода и может быть, при первом приближенном решении задач механики, отбрасываемо.

§ 57. Законы трения. Законы трения 1-го рода установлены опытным путем Кулоном. Их три:

1. Сила трения не зависит от величины поверхности соприкосновения трущихся тел.
2. Сила трения пропорциональна нормальному давлению.
3. Сила трения не зависит от скорости, но во время движения она менее, нежели в момент приведения тела в движение.

Для подтверждения этих законов употребляют приборы, изображенные на фигурах 144 и 145. На деревянный стол А на высоких ножках кладут доску В с грузами N. К доске привязана нить, перекинутая через



Фиг. 144.

блок С, на конце которого висит чашка с грузом F. Нагрузку увеличивают до тех пор, пока не начнется движение. Тогда вес F и даст нам величину силы трения. Для доказательства 1-го закона имеется второй стол D (фиг. 145) такой же, как первый, с тою лишь разницей, что верхняя крышка его прорезана в виде рамки, так что поверхность соприкосновения доски В со столом оказывается теперь менее, чем на первом столе. Оказывается, что для движения

доски В с прежними грузами N необходимо положить на чашку прежнюю же нагрузку F.

Второй закон оправдывается на опытах с обоими столами. Меняя груз на доске В (груз и доска В имеют вместе вес N) и подбирая соответственные нагрузки F, при которых начинается движение мы увидим, что отношение:

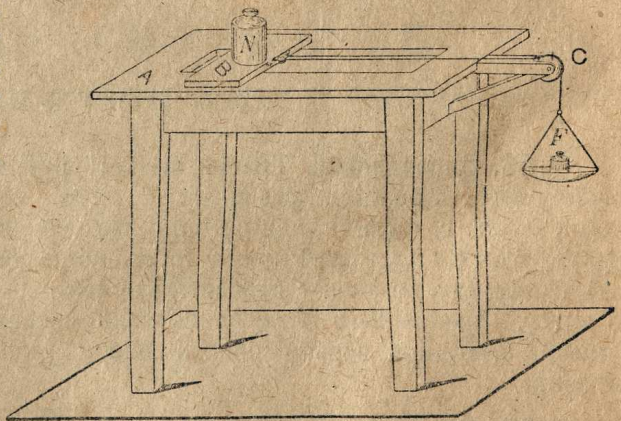
$$F : N = f \dots \dots \dots (1)$$

есть величина постоянная, зависящая только от природы трущихся тел. Эта постоянная величина называется коэффициентом трения 1-го рода, и есть число отвлеченное.

Третий закон подтверждается наблюдением закона движения доски В при грузе F, большем силы трения. При этом получается равномерно-ускоренное движение, что доказывает независимость силы трения от скорости.

Все задачи на трение первого рода решаются по тем же формулам, что и без трения, прибавляя лишь к имеющимся силам силы трения, определяемые по нормальному давлению, т.-е. полагая:

$$F = N \cdot f \dots \dots \dots (2)$$



Фиг. 145.

§ 58. Угол трения. Углом трения называют угол с горизонтом наклонной плоскости, при котором груз, положенный на плоскость, еще удерживается на ней силой трения (фиг. 146). Разложим вес тела Q на силу $N = Q \cos \alpha$, перпендикулярную плоскости и на силу $T = Q \sin \alpha$, направленную по плоскости. Для того, чтобы тело осталось в равновесии, надо, чтобы сила трения была более или равна T , т.-е.

$$F \geq T,$$

или

$$Q \cos \alpha \cdot f \geq Q \sin \alpha.$$

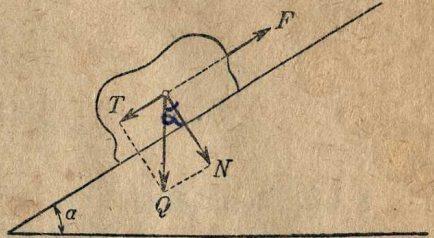
Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f.$$

Угол $\alpha = i$, при котором

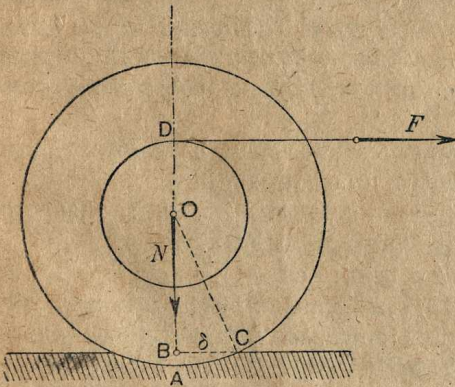
$$\operatorname{tg} i = f, \dots \dots \dots (3)$$

и называется *углом трения*. Подробности о трении можно найти в курсах Прикладной Механики.



Фиг. 146.

§ 59. Трение второго рода. Когда колесо или каток катятся по горизонтальному пути, то они выдавливают очень малое углубление в теле, по которому катятся (фиг. 147). Вследствие этого точкою опоры колеса является не нижняя точка A , а точка C , отстоящая от вертикальной линии, проведенной через центр O , на расстоянии $BC = \delta$. Пусть колесо, нагруженное весом N , катится от действия силы F натяжения шнура, намотанного на шкив радиуса OD так, что $DA = R$. Условие равновесия сил F и N при точке опоры в C —даст нам:



Фиг. 147.

$$F(R - BA) = N\delta.$$

Отсюда, пренебрегая малой величиной BA перед $R = AD$, имеем.

$$F = \delta \cdot \frac{N}{R} \dots \dots \dots (4)$$

Эта формула показывает, что трение 2-го рода прямо пропорционально нагрузке, обратно пропорционально расстоянию DA и зависит от коэффициента трения 2-го рода δ . Этот коэффициент есть число именованное и выражается в единицах длины.

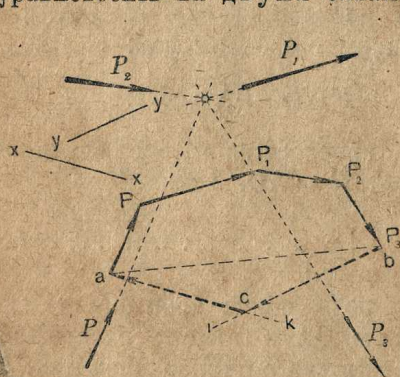
ГРАФОСТАТИКА.

§ 60. Определение. Графостатика есть отдел механики, в котором указываются способы решения задач помощью чертежа. Способы эти опираются на свойства многоугольников силового и нитяного. Этот отдел механики был исследован в первый раз профессором Цюрихского университета Кульманом. Изложим вкратце основные свойства силового и нитяного многоугольников.

§ 61. Свойства силового многоугольника. Если несколько сил действуют на одну материальную точку, то, как известно, равнодействующая выразится, по величине и направлению, замыкающей стороной разомнутого многоугольника, стороны которого равны и параллельны слагаемым силам. Многоугольник этот называется силовым. Если все силы будут уравниваться сами по себе, то многоугольник будет замкнутым. Поэтому, если имеем несколько сил, и построенный на них многоугольник оказывается замкнутым, то можно заключить, что силы, действующие на точку, уравниваются сами по себе.

При помощи силового многоугольника решаются задачи, в которых данные силы пересекаются в одной точке. Таковы три ниже приводимые.

1. Дано несколько сил, пересекающихся в одной точке: требуется уравновесить их двумя силами, имеющими данные направления.



Фиг. 148.

Пусть даны силы P , P_1 , P_2 , P_3 (фиг. 148) и направления искомых сил xx , yy . Для решения задачи строим многоугольник $aPP_1P_2P_3$ (b) и через концы его проводим линии ak и bl , параллельные данным направлениям. Пусть эти линии пересекаются в точке s ; тогда bs и sa и будут искомыми силами, потому что они имеют ту же равнодействующую, что и данные силы, — только равнодействующая эта направлена в противоположную сторону. Задача эта возможна тогда, когда xx и yy пересекаются; мы будем всегда полагать, что данные направления лежат в одной плос-

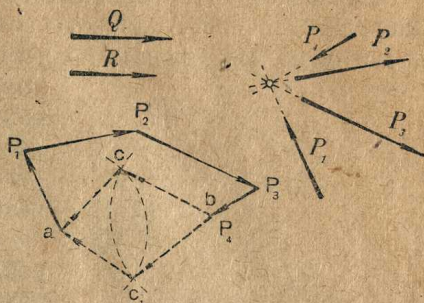
кости. Заметим, что мы всегда будем называть начало силового многоугольника через a , а конец через b .

2. Уравновесить данную систему сил, пересекающихся в одной точке, двумя силами, имеющими данную величину.

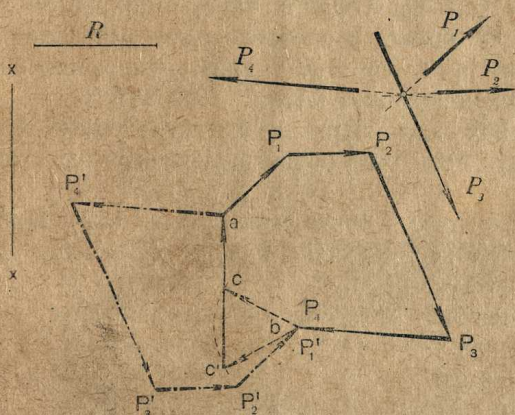
Построим из данных сил P_1, P_2, P_3, P_4 . (фиг. 149) силовой многоугольник $aP_1P_2P_3P_4b$. Из концов его, a и b , проведем данными силами, как радиусами, дуги и определим точку их пересечения c ; bc и ca и будут те направления, которые надо дать заданным по величине силам Q и R . Так как дуги кругов разных центров пересекаются вообще в двух точках, то задача имеет два решения.

3. Уравновесить систему сил, действующих на данное тело и пересекающихся в одной точке, двумя силами, из которых одна имеет данное направление, а другая — данную величину.

Построив из данных сил (фиг. 150) силовой многоугольника $P_1P_2P_3P_4b$, проводим из точки a линию, параллельную данному направлению, а из точки b силу R , как радиусом, описываем дугу, которая пересечет проведенную прямую, положим, в точке c . Соединив c и b , получим два искомые вектора, bc и ca . Но так как дуга может пересечь направление ac в двух точках (в точках c и c'), то эта задача имеет вообще два решения.



Фиг. 149.



Фиг. 150.

Заметим, что раз мы задаемся положением точки, то в каком бы порядке мы ни пользовались нашими силами для построения многоугольника, начиная с вершины a , положение точки b от этого порядка не зависит совсем, — оно определяется лишь величинами самих сил. Если, например, вместо того, чтобы строить многоугольник $aP_1P_2P_3P_4b$ в порядке P_1, P_2, P_3, P_4 , мы построили бы многоугольник $aP_4P_3P_2P_1b$ в порядке P_4, P_3, P_2, P_1 , при той же исходной точке a , то конец последней силы непременно упрется опять в ту же точку b . Форма многоугольника изменилась, но точки a и b остались те же.

Рассмотрим несколько задач, которые решаются помощью одного силового многоугольника.

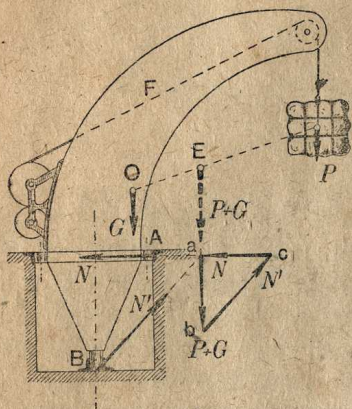
Задача 1. Определить силы сопротивления, которые развиваются в подпятнике и шейке журавля, поддерживающего некоторый груз.

Положим, что посредством журавля G (фиг. 151) поднимается груз P . Сопротивления опрокидыванию журавля развиваются станией в точках A и B .

Сопротивление в точке A будет перпендикулярно к поверхности шейки, направление же сопротивления в подпятнике B пока неизвестно. Пусть вес журавля будет G и пусть он приложен в центре тяжести O . Складываем G и P по правилу сложения параллельных сил, — получим

таким образом равнодействующую $(P + G)$, приложенную в некоторой точке E .

Перенесем точку приложения силы $(P + G)$ в точку a . Сопротивление, развиваемое точкой A , может быть перенесено также в точку a . Складывая эти две силы, мы должны получить некоторую равнодействующую, которая должна уничтожить силу сопротивления, развиваемую в точке B , — в противном случае равновесия не будет. Значит, соединив B с a , мы и получим направление сопротивления, развиваемого в точке A .



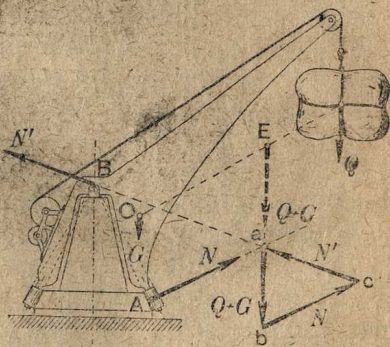
Фиг. 151.

Теперь задача приводится к следующей: данную силу $(P + G)$ нужно уравновесить двумя силами, имеющими данные направления aA и Ba . Чтобы ее решить, проводим из конца силы $(P + G)$, т. е. из точки b , прямую линию, параллельную направлению Ba , до пересечения с направлением Aa ; тогда получим замкнутый треугольник abc , где $bc = N'$ и есть сила сопротивления, развиваемая точкою b , а $ca = N$ — сила сопротивления, развиваемая точкою A .

Задача 2. Решить ту же задачу для журавля другого устройства, где стойкой служит усеченный конус, так что образующие его сходятся в вершине конуса, B .

Этот конус опирается на другой конус, в точке же B (фиг. 152) находится точка опоры. Означим через G вес журавля и через Q — вес поддерживаемого груза. Сопротивления будут развиваться в точке A , где сопротивление будет перпендикулярно конической поверхности, и в точке B ; направление сопротивления в последней пока неизвестно.

Для решения задачи поступаем совершенно так же, как и в предыдущем примере, т. е. складываем силы Q и G ; получаем равнодействующую $(Q + G)$; продолжаем направление сопротивления N , развиваемого в точке A , до пересечения в точке a с силою $(Q + G)$, и переносим в нее как сопротивление N , так и силу $(Q + G)$. Закключаем, что направление в точке B должно



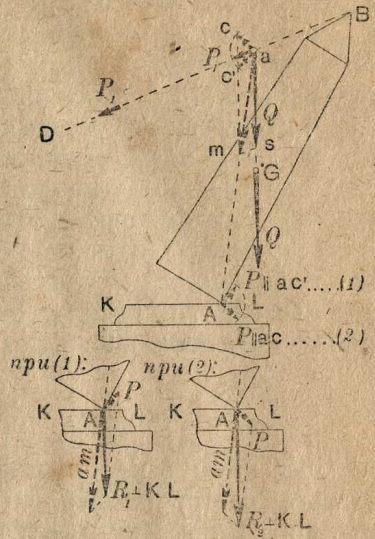
Фиг. 152.

пройти и через точку a , а потому задача сводится опять к разложению силы $(Q + G)$ на две, имеющие данные направления Aa и aB . Чтобы определить эти искомые силы, из точки b проводим параллель Aa до пересечения с направлением aB в точке c ; из полученного $\triangle abc$ имеем $bc = N$ — силе сопротивления, развиваемой в точке A , и $ca = N'$ — силе сопротивления, развиваемой в точке B .

Задача 3. Обелиск AB (фиг. 153) должен быть поставлен на пьедестал силою P , (данной по направлению и приложенной к его верхней оконечности) посредством вращения около ребра A основания обелиска. В каком

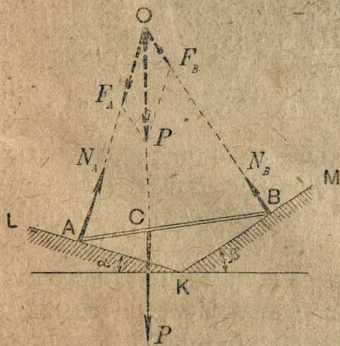
направлении должна быть приложена сила P данной величины в точке обелиска A , чтобы пьедестал KL подвергался только одной вертикальной силе давления и, таким образом, не мог бы опрокинуться.

Если продолжать направление силы Q — веса обелиска, — проходящей через центр тяжести G , до пересечения с направлением силы P_1 в точке a , то для равновесия необходимо, чтобы направление равнодействующей сил P_1 и Q прошло через точку A ; т. е. совпало бы с aA . Эту равнодействующую легко найти, если перенесем силу Q в точку пересечения a , а из конца ее s проведем линию sm , параллельную P_1 или BD , до пересечения с aA в m ; тогда sm и представит по величине силу P_1 , сила же am будет силой равнодействующей. Теперь задача сводится к следующей: требуется силу am разложить на две, из которых одна должна иметь данную величину P , а другая — вертикальное направление. Чтобы решить эту задачу, из точки m проводим вертикальную линию, а из точки a , как из центра, описываем дугу радиусом, равным силе P ; эта дуга пересечет вертикальную линию, вообще говоря, в двух точках c и c' . Соединив эти точки с точкой a , получим искомое направление ac (или ac') нашей силы P . В точке A мы должны приложить силу, которая уничтожила бы составляющую P , чтобы пьедестал подвергся одной только силе вертикального давления. Эта сила будет иметь направление, противоположное ac или ac' , и в точке A будет иметь место одно из двух сочетаний сил am и P , представленных на нашей фигуре.



Фиг. 153.

Задача 4. Неоднородная палочка AB (фиг. 154) опирается своими концами на две плоскости KL и KM , наклоненные к горизонту под углами α и β . Определить место центра тяжести этой палочки и силы сопротивления плоскостей в точках A и B .

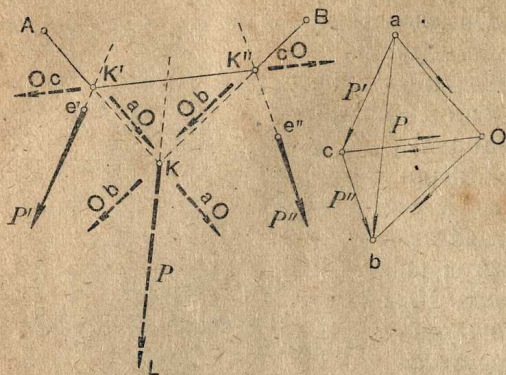


Фиг. 154.

Пусть вес палочки равен P , а силы сопротивления приложены в точках A и B и перпендикулярны к плоскостям. Продолжим направления этих сил до их пересечения в некоторой точке O . Чтобы палочка находилась в равновесии, эти силы должны уравновесить собою вес палочки P ; следовательно, направление вертикальной силы P должно пройти через точку O . Пересечение палочки с направлением силы P дает точку C , которая и будет центром тяжести палочки. Чтобы получить давления в точках A

и B , силу P нужно разложить по направлениям OA и OB ; тогда получим силы давлений F_A и F_B , а также и противоположные им силы сопротивления плоскостей N_A и N_B .

§ 62. Свойства нитяного многоугольника. Положим, что нам дано сложить две силы, P' и P'' (фиг. 155), лежащие в одной плоскости и приложенные в точках e' и e'' . Эти силы можно было бы сложить по правилу параллелограмма, перенеся их в точку их пересечения. Но мы применим новый способ, который приложим одинаково как для сил пересекающихся, так и для сил параллельных.



Фиг. 155.

Состоит он в следующем: берем на плоскости точку a , проводим через нее линию sa , параллельную силе P' , и откладываем величину as , равную P' ; из точки s проводим sb параллельно силе P'' и откладываем $sb = P''$. Соединяя a с b , получим равнодействующую P . Определим теперь точку приложения этой равнодействующей силы.

Для этого берем произвольную точку O , которая называется *полусом* силового многоугольника, и соединяем ее с вершинами силового треугольника abc . Потом берем в стороне точку A и проводим через нее $AK \parallel aO$, до пересечения с направлением силы P_1 в некоторой точке K' . — Далее, через K' проводим $K'K''$ параллельно $сО$ до пересечения с направлением P'' в точке K'' , и, наконец, через точку K'' проведем $K''B$ параллельно bO . Получим некоторый разомкнутый многоугольник $AK'K''B$, называемый нитяным многоугольником. Для определения точки приложения равнодействующей сил P' и P'' — нужно лишь продолжить крайние стороны этого многоугольника, т.е. AK' и BK'' до пересечения их между собою в точке K . Полученная точка и будет искомою точкою приложения равнодействующей; через нее проводим линию KL , параллельную ab , и отложим $KL = ab$. Таким образом, получим $KL = P$, равнодействующую сил P' и P'' , приложенную в точке K .

Докажем справедливость вышеуказанного сложения сил. Перенеся точку приложения силы P' из e' в K' , разлагаем эту силу на две слагающие, из которых одна имела бы направление AK' , а другая — $K'K''$. Разложение делается с помощью треугольника aOc ; при этом находим, что сила P' разлагается на силы aO и Oc , которые будут действовать по направлениям, указанным на чертеже стрелками.

Потом силу P'' , перенеся из точки e'' в K'' , разлагаем на две, из которых одна была бы направлена по BK'' , а другая по $K'K''$; это достигается посредством треугольника $сOb$. Искомые силы $сО$ и Ob будут действовать по направлениям, указанным на чертеже стрелками.

Таким образом, силы P' и P'' мы заменили четырьмя силами, из которых две равны между собою, — каждая из них равна Oc и действует по одной и той же прямой $K'K''$ в противоположные стороны; значит, они уничтожаются, и у нас остаются силы, действующие по направлениям aO и Ob . Перенеся последние в точку их пересечения K , можем сложить их с помощью силового многоугольника aOb , из которого видим, что равнодействующая выразится замыкающей стороною этого треугольника, т.е. длиной ab , что и требовалось доказать.

Теперь мы можем пояснить, почему многоугольник $AK'K''B$ назван нитяным.

Если предположим, что силы P' и P'' действуют не на твердое тело, а на некоторый стержневой многоугольник $AK'K''B$, закрепленный неподвижно в точках A и B , то увидим, что такой многоугольник будет находиться, на основании предыдущего, в равновесии, так как сторона $K'K''$ будет находиться в равновесии, вследствие действия на нее двух равных сил, направленных в противоположные стороны; силы же, действующие по направлениям сторон AK' и BK'' , также уничтожаются, благодаря неподвижности точек A и B . Заменяя стержневой многоугольник нитяным, увидим, что он также будет в равновесии, при чем можем определить силы действующие по сторонам этого многоугольника, как силы натяжения соответственных его сторон.

Иногда случается, что силы стараются не растянуть тело, а сжать его; тогда следует предположить, что звено представляет материальную линию, которая не может сжиматься. В первом случае, т.-е., когда сила старается разорвать звено, она называется силою растяжения, а во втором случае—силою сжатия.

Предложенный способ сложения сил будет одинаково удобно приложим, будут ли силы пересекаться, или они будут параллельны.

На фигуре 156 даны способы сложения сил параллельных, направленных в одну сторону, а на фигуре 157 — в противоположные стороны. Заметим, что нет надобности доказывать приложимость способа нитяного многоугольника для случая сложения параллельных сил; наоборот, умея складывать

их по способу нитяного многоугольника, можно доказать, что точка приложения равнодействующей двух параллельных сил делит расстояние между точками приложения составляющих обратно пропорционально этим последним.

В самом деле, из подобия треугольника $K'IK$ (фиг. 157) с треугольником abO и треугольника $K''IK'$ с треугольником cOb , можно написать:

$$\frac{K'I}{IK} = \frac{ab}{bO} = \frac{R}{bO}, \quad \frac{K'I}{IK''} = \frac{bc}{bO} = \frac{Q}{bO}.$$

Из этих равенств следует, что:

$$K'I \cdot bO = R \cdot IK, \\ K'I \cdot bO = Q \cdot IK'',$$

откуда

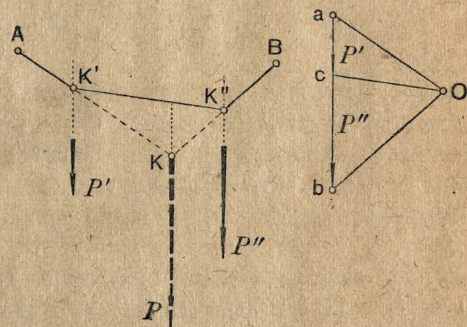
$$R \cdot IK = Q \cdot IK'',$$

или

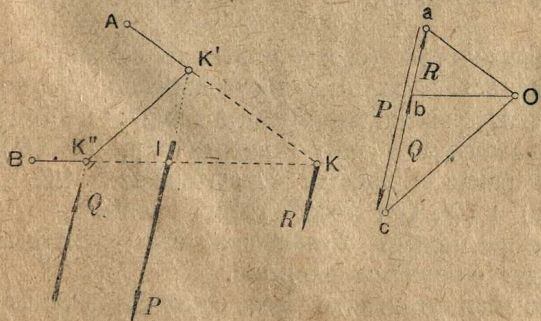
$$\frac{R}{Q} = \frac{IK''}{IK}.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$\frac{R + Q}{Q} = \frac{IK'' + IK}{IK},$$



Фиг. 156.



Фиг. 157.

или

$$\frac{P}{Q} = \frac{KK''}{IK},$$

откуда находим:

$$\frac{P}{KK''} = \frac{Q}{IK} = \frac{R}{IK''},$$

т.-е. уже известное нам соотношение между силами и расстояниями их точек приложения.

Приложим графостатическое правило сложения сил к сложению двух равных параллельных сил, направленных в противоположные стороны. Такие

силы, P' и P'' (фиг. 158), составляют пару. Приложив вышеуказанное правило, увидим, что крайние стороны нитяного многоугольника будут параллельны, но не будут лежать на одной прямой, и потому точки приложения равнодействующей отыскать нельзя, так как она находится в бесконечности. Кроме того, силовой многоугольник $асб$ — замкнут; следовательно, равнодействующая равна нулю.

Мы привели две наши силы, P' и P'' , к четырем силам, из которых две уничтожаются, как равные, противоположно направленные по $K'K''$. Остаются две силы, направленные по AK' и BK'' .

Эти силы будут равны и направлены, как указано на чертеже, так как одна из них есть $аО$, другая — $Оа(b)$. Силы эти составляют пару (Q', Q'') , которая будет эквивалентна паре (P', P'') . Докажем это.

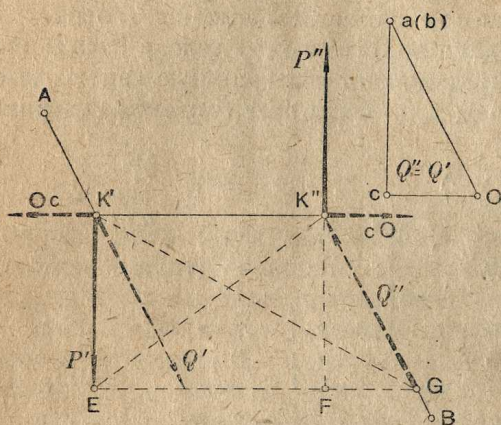
Перенесем силу P' из $с$ в K' ; из конца ее E проведем $EG \parallel K'K''$ и соединим K' с G , а K'' с E ; тогда площадь $\triangle EK'K''$ выразит собою половину момента пары (P', P'') . Покажем теперь, что площадь треугольника $GK'K''$ выражает собою половину момента пары (Q', Q'') . Для этого продолжим направление силы P'' до пересечения с EG в точке F ; тогда получим:

$$\triangle K'FG = \triangle асО,$$

так как оба треугольника имеют равные углы (соответственные стороны их параллельны) и $K''F = KE = ас$. Из равенства этих треугольников следует, что $K''G = аО$; но $аО = Q'$ и есть сила, входящая в новую пару; поэтому площадь треугольника $K'K''G$ и выражает половину момента пары (Q', Q'') . Но площадь треугольника $K'K''G$ равна площади треугольника $K'K'E$; следовательно, моменты пар (P', P'') и (Q', Q'') между собою равны.

Очевидно, что, меняя положение полюса, будем получать различные пары, но моменты их постоянно будут оставаться равными.

С помощью нитяного и силового многоугольников можно сложить сколько угодно сил, лежащих в одной плоскости. Положим, даны силы $P', P'', P''', \dots$



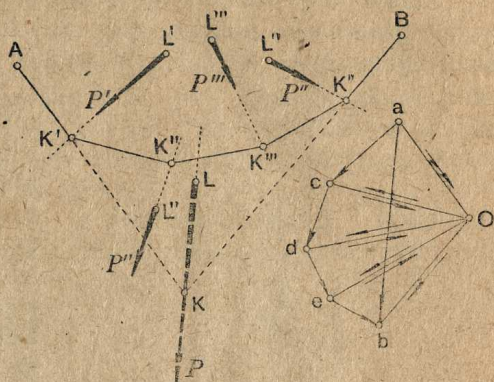
Фиг. 158.

(фиг. 159), приложенные в точках $L', L'', L''', \dots$, и требуется сложить их. Для этого составим сначала силовой многоугольник $acdeb$; затем возьмем произвольный полюс O и соединим его с вершинами этого многоугольника. Далее строим нитяной многоугольник, для чего, по правилу, берем произвольную точку A и через нее проводим линию, параллельную aO , до пересечения с направлением первой силы. Потом из полученной точки K' проводим $K'K'' \parallel Oc$ до пересечения со второй силою и т. д. Таким образом, найдем точки $K', K'', K''', \dots$, и, соединив их между собою, получим нитяной многоугольник $AK'K''K'''K^{IV}B$.

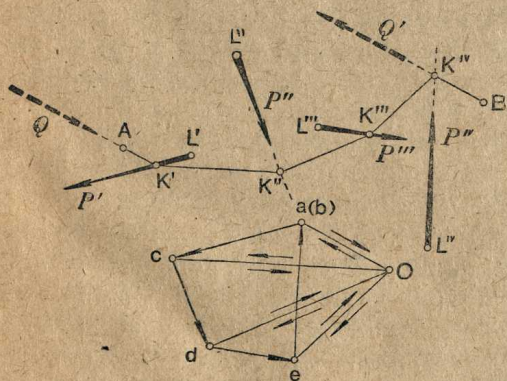
Правило, служащее для определения точки приложения равнодействующей, состоит в том, что надо продолжать крайние стороны нитяного многоугольника до их пересечения в точке K . Полученная точка и будет искомою; величина же равнодействующей определится, как замыкающая сторона aB силового многоугольника, и направление ее будет параллельно этой последней. Итак, мы определили и величину, и направление равнодействующей силы.

Для доказательства верности наших операций перенесем силы P', P'', P''', P^{IV} в точки K', K'', K''', K^{IV} и разложим каждую из них по направлению соответствующих звеньев нитяного многоугольника. Эти разложения уже сделаны помощью силового многоугольника, а именно: силу P' раскладываем на силу aO и Oc ; P'' — на силы cO и Od и т. д. Но силы, направленные по звеньям $K'K'', K''K''', K'''K^{IV}$, будут равны и противоположны, а потому взаимно уничтожаются. Останутся только силы, действующие по звеньям AK' и BK^{IV} . Точка же приложения и величина равнодействующей этих двух сил находятся именно так, как это мы сказали.

В частном случае, когда силовой многоугольник будет замкнут, вышесказанный способ приведет нас к равнодействующей паре, которою заменяется система сил. Возьмем для примера силы P', P'', P''' и P^{IV} (фиг. 160); составим силовой многоугольник, — в данном случае он будет замкнут. Поступая по вышесказанному, найдем, что вся система сил приведена к одной паре (Q, Q') , где $Q = aO = Q' = Ob$.



Фиг. 159.



Фиг. 160.

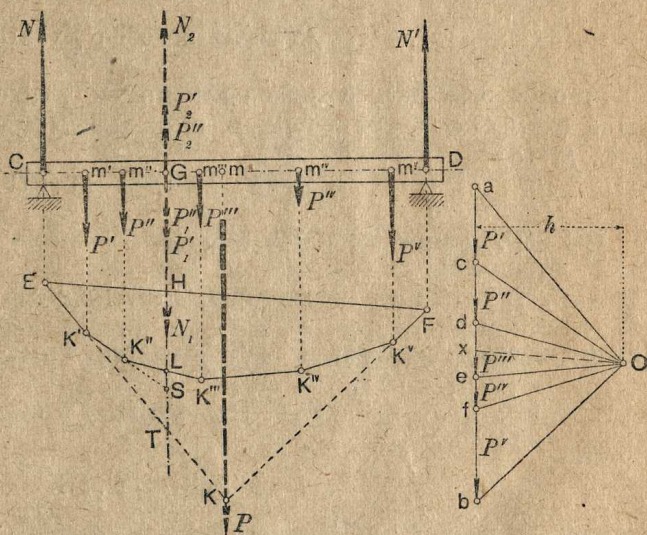
§ 63. Разложение сил. Помощью многоугольников силового и нитяного можно одну силу разложить на несколько других совершенно опреде-

2) крайние стороны нитяного многоугольника должны быть расположены по одной прямой, так как момент равнодействующей пары только тогда равен нулю, когда плечо равно нулю, т.-е. когда силы расположены по одной прямой. Рассматриваемый случай изображен на фигуре 162.

Если тело имеет неподвижную точку, лежащую в плоскости сил, то для равновесия необходимо, чтобы равнодействующая всех сил проходила через данную точку. Графостатически это приводится к тому, чтобы линия, параллельная замыкающей стороне силового многоугольника и проходящая через точку пересечения двух крайних сторон нитяного многоугольника, проходила через неподвижную точку.

§ 65. Приложение графостатики к решению задач. Исследуем вопрос с равновесия покоящегося на двух точках опоры горизонтального бруса с положенными

на него различными грузами: найдем равнодействующую всех сил, а также давление на опоры С и D (фиг. 163). Пусть силы, действующие на него, будут $P', P'', P''', P^{IV}, P^V$ и пусть они приложены в точках $m', m'', m''', m^{IV}, m^V$. Чтобы найти равнодействующую, складываем эти силы по общему правилу для чего строим силовой многоугольник. Взяв произвольный полюс О, соединяем его с вершинами многоугольника, а затем



Фиг. 163.

строим нитяной многоугольник, продолжение крайних сторон которого даст точку К приложения равнодействующей силы P , равной по величине сумме сил $P^{(n)}$. Если теперь продолжим силу P до пересечения с брусом, то получим точку m , в которой и будет приложена сила P .

Для определения давления в опорах С и D, силу P разлагаем на две силы, приложенные в точках С и D. Если определим эти силы и возьмем их в противоположные стороны, то, на основании закона: действие равно противодействию, найдем сопротивление опор. Для того, чтобы силу разложить на две такие силы, надо через точку О провести линию Ох, параллельную EF, до пересечения с прямой ab; тогда $ax = N$ есть сила давления на точку С, а $bх = N'$ есть сила давления на точку D.

Определим момент пары, ломающей брусок в данном сечении. Предположим, что требуется определить момент ломающей пары относительно сечения G. Для решения заметим, что часть бруска CG находится под действием сил N, P' и P'' . Приложим в точке G силы N_1 и N_2, P'_1 и P'_2, P''_1 и P''_2 , соответственно равные и параллельные силам N, P' и P'' , но обратные между собою; получим, таким образом, три пары $(N, N_1), (P', P'_2),$

(P'', P''_2) , равнодействующая которых и будет стремиться изломать брусок в рассматриваемом сечении G; кроме того, в точке G оказывается приложенной равнодействующая сил N_2 , P'_1 и P''_1 , которая стремится срезать его в том же сечении.

Обозначим момент пары, старающейся изломать брусок, через M , — он будет равен алгебраической сумме моментов пар (N, N_1) , (P', P'_2) и (P'', P''_2) , т.-е.

$$M = N \cdot CG - P' \cdot m'G - P'' \cdot m''G \dots \dots \dots (1)$$

Постараемся определить, чему равны эти моменты. Для этого проведем через G вертикаль и обозначим через H пересечение этой вертикали с EF, через L — пересечение с K''K''', через S — пересечение с продолжением K'K'' и через T — пересечение с EK'K. Для определения момента $N \cdot CG$ заметим, что

$$\triangle TЕН \text{ подобен } \triangle xOa.$$

Из подобия этих треугольников мы можем написать, что отношение оснований к высотам будут равны, и, если высоту треугольника xOa обозначим через h , то:

$$ax : h = N : h = HT : CG,$$

где CG есть высота $\triangle EHT$, отсюда

$$N \cdot CG = h \cdot HT.$$

Для определения момента $P' \cdot m'G$, заметим, что:

$$\triangle K'TS \text{ подобен } \triangle aOc,$$

откуда:

$$P' \cdot m'G = h \cdot TS.$$

Наконец, момент $P'' \cdot m''G$ определится из подобия треугольников K''LS и cOd, откуда

$$P'' \cdot m''G = h \cdot SL.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (1), находим:

$$M = h \cdot (HT - TS - SL) = h \cdot HL.$$

Из полученного выражения заключаем, что момент ломающей пары для какого-либо сечения измеряется вертикальной хордой нитяного многоугольника, соответствующей этому сечению, а, следовательно, — самое опасное место будет то, которому соответствует наибольшее значение хорды HL.

§ 66. Отыскание центра тяжести плоских фигур. При помощи графостатики легко отыскивать центры тяжести площадей плоских фигур; при этом данная фигура может иметь ось симметрии, но может и не иметь ее. Рассмотрим первый случай.

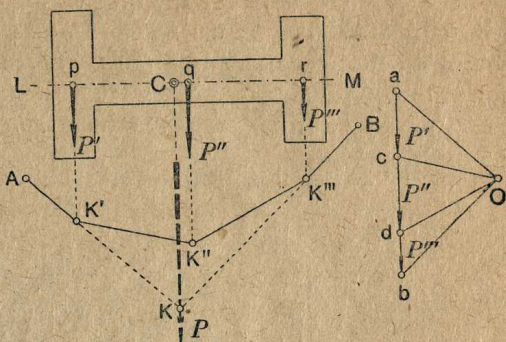
Для отыскания центра тяжести площади такого многоугольника, который имеет ось симметрии, надо разбить его на такие площади, положение центров тяжести которых известно, и сосредоточить в них соответствующие

веса. Потом сложить эти силы помощью нитяного многоугольника; продолжить крайние стороны его и через точку пересечения их провести линию, параллельную силам. Точка пересечения ее с осью симметрии и будет центром тяжести. Для примера определим центр тяжести поперечного сечения двутавровой балки.

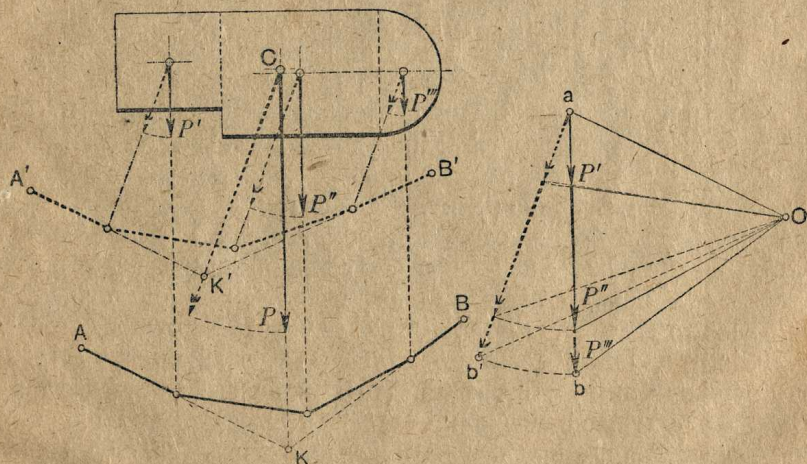
Пусть ось симметрии этой фигуры (фиг. 164) будет LM . Определим центры тяжести всех прямоугольников, составляющих фигуру; очевидно, что они будут лежать на оси симметрии. Сосредоточим в этих центрах тяжести p, q и r веса их P', P'', P''' и сложим их по правилу нитяного многоугольника. Пусть точка пересечения крайних сторон нитяного многоугольника есть точка K .

Если проведем через точку K параллель направлению сил P', P'', P''' и продолжим ее до пересечения с осью симметрии, то полученная точка C и будет центром тяжести.

Когда фигура не имеет оси симметрии (фиг. 165), то разбивают данную площадь так же, как и прежде, на несколько площадей, положение центров тяжести которых можно легко найти, сосредоточивают в них соответствующие веса, и, дав им сначала одно какое-нибудь направление, строят нитяной многоугольник, продолжив крайние стороны



Фиг. 164.



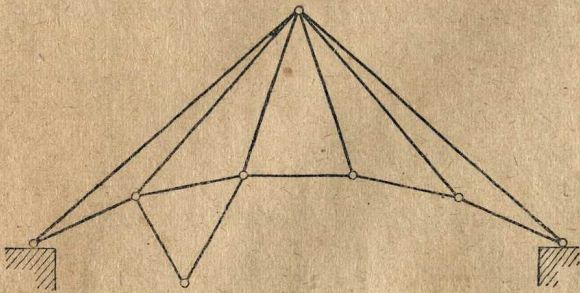
Фиг. 165.

которого, определяют точку приложения равнодействующей. На этой равнодействующей или на ее продолжении и лежит центр тяжести данной фигуры.

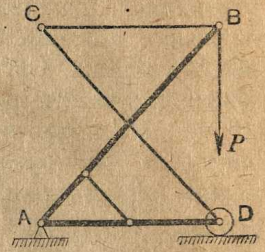
Если силам дадим какое-нибудь другое направление, то, повторив предыдущие рассуждения, придем к заключению, что центр тяжести должен лежать на линии, параллельной данным силам и проходящей через точку пересечения

крайних сторон нового нитяного многоугольника. Значит, центр тяжести должен лежать в точке пересечения этих двух линий, — в некоторой точке С.

§ 67. О равновесии ферм. Фермой называется сооружение, составленное из брусьев, соединенных с помощью шарниров. Точки соединения брусьев называются узлами. Количество шарниров в одном бруссе может быть различно, но не менее двух. На фигуре 166 мы имеем ферму, каждый брус которой несет только два шарвира. Фигура 167 представляет



Фиг. 166.



Фиг. 167.

собой ферму, число шарниров которой на некоторых брусьях более двух, — как, например, на АВ равно трем. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только того случая, когда на каждом бруссе фермы имеется только два шарвира.

Если внешние силы (включая и опорные сопротивления) приложены только в шарнирах фермы, то все брусья фермы называются стержнями. Если же на некоторые брусья действуют силы, точки приложения которых находятся не в шарнирах фермы, то эти брусья мы будем называть балками; точно также балками называются брусья фермы, на которых три и более шарниров, как представлено на фигуре 167.

Так как твердое тело под эффектом двух сил может быть в равновесии только тогда, когда силы равны, противоположны и действуют по прямой, соединяющей их точки приложения, то стержень, имея лишь две точки приложения сил (в двух шарнирах), может быть только растянут или сжат. Для балки это заключение не имеет силы, так как балка находится в равновесии под действием сил, приложенных уже не менее, чем в трех точках. Реакции шарниров, вообще говоря, не будут направлены по прямой, соединяющей шарниры. Если на балку действуют, считая и реакции шарниров, только три силы, то можно лишь утверждать, что они пересекаются все три в одной точке. Силы, действующие на балку (включая и реакции шарниров), можно разложить на слагающие, направленные по ее оси, и на слагающие, к ней перпендикулярные. Первые вызывают растяжение или сжатие балки, вторые сдвиг и изгиб балки.

Мы будем рассматривать только плоские фермы, т.-е. такие, у которых узлы, а следовательно, и все брусья находятся в одной плоскости; вместе с тем, будем принимать, что все силы, действующие на ферму, находятся в плоскости фермы.

Фермы бывают статически определенные и статически неопределенные.

Ферма называется статически определенной, если от нее нельзя отнять ни одного бруска, не лишив ее жесткости (вообще, если от нее нельзя отнять ни одной связи, не лишив ее жесткости).

Например, если ферма имеет жесткий узел, и мы, заменяя его шарниром, нарушаем жесткость фермы, то ферма статически определена.

Когда ферма имеет лишние связи, которые можно отнять, не нарушая ее жесткости, то она называется статически неопределенной. Например, шарнирный четырехугольник, перетянутый двумя диагоналями.

Оставляя в стороне рассмотрение статически неопределенных ферм, мы займемся выводом условий равновесия плоских статически определенных ферм.

Посмотрим, каково должно быть число брусьев статически определенной фермы, если число шарниров ее равно n . Представим себе, что из имеющегося у нас числа шарниров n взяты два и прикреплены на концах одного бруса. Таким образом, у нас остаются свободными $n - 2$ шарнира. Прибавление каждого нового шарнира к имеющейся у нас системе повлечет за собой прибавление двух новых брусьев. Таким образом, прибавление $n - 2$ шарниров вызовет необходимость прибавления $2(n - 2)$ брусьев, что с имеющимся у нас ранее одним бруском составит:

$$2 \cdot (n - 2) + 1 = 2n - 3.$$

Если свободная статически определенная ферма находится под действием каких-либо сил, удовлетворяющих трем условиям равновесия в плоскости, то внутренние силы, действующие в ферме (силы растягивающие, сжимающие и силы сгибающие брусья), вполне определены.

Если статически определенная ферма не свободна, то для определенности всех ее внутренних сил и опорных усилий надо, чтобы связи, стесняющие свободу ее перемещений, определялись условиями числом не более трех (трех данных параметров). Связями, стесняющими свободу движения фермы, могут быть подвижные шарниры, ролики, катящиеся по поверхности, и т. д. Например, один неподвижный шарнир и один ролик, катящийся по плоскости, или три ролика, могущие катиться по данным плоскостям.

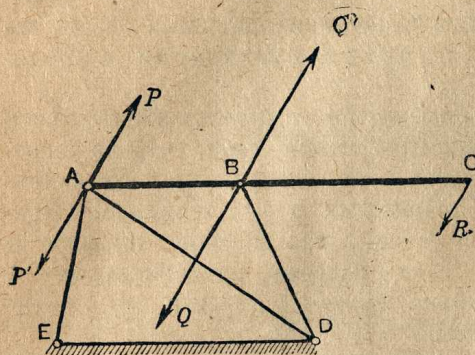
Если условий будет три, то три условия равновесия фермы, рассматриваемой как одно твердое тело, вполне определяют три силы опорных реакций. Если внешние связи делают ферму не вполне несвободной, и число параметров, их характеризующих, один или два, то между внешними силами должно быть два или одно соотношение, чтобы было равновесие. При этом, из общих условий равновесия определится одна или две силы реакций связей. Существуют общие приемы определять все силы растяжения или сжатия в стержневых статически определенных фермах. Мы дадим здесь три таких общих приема:

- I. Способ Риттера;
- II. Способ Кульмана;
- III. Способ Кремона.

Но покажем прежде, как *расчет фермы, составленной из стержней и балок, может быть сведен к расчету стержневой фермы.*

До сих пор мы рассматривали эквивалентность сил, приложенных к твердому телу, с точки зрения покоя или движения *всего тела*, как одного целого; распределения же сил внутри тела мы совершенно не касались. Между тем силы, эквивалентные с первой точки зрения, могут быть неэквивалентны относительно распределения внутренних усилий.

Пусть дается (фиг. 168) ферма $ABCDE$ с балкой ABC и неподвижным звеном ED , нагруженная силою R , приложенной к концу C балки. Если бы



Фиг. 168.

мы разложили силу R на параллельные силы P и Q , приложенные к точкам A и B балки, то такая простая замена силы R эквивалентными ей силами P и Q , не вызывая изменения реакций опор, вызвала бы изменение усилий в балке; например, при силе R , приложенной в точке C , часть BC балки подвергается сжатию, сдвигу и изгибу, а при силах P и Q не подвергается никакому усилию.

Поэтому нужно поступить иначе. Приложим в точках A и B балки по две равных и противоположных силы P и P' , Q и Q' (фиг. 168), при чем,

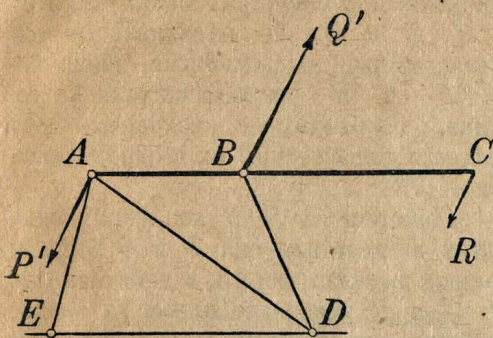
как и выше, P и Q эквивалентны R . Добавление этих сил, попарно уравновешенных в своих точках приложения, перераспределения усилий внутри тела, конечно, не вызовет. Таким образом, вместо одной силы R , в действительности приложенной к нашей ферме, мы имеем право рассматривать вполне заменяющую ее систему из пяти сил R , P' , Q' , P и Q .

На основании принципа независимости действия сил, усилие во всякой части тела от нескольких сил, приложенных к нему, складывается из усилий, вызываемых каждой силой в отдельности. Принимая это во внимание, разобьем эту систему из указанных пяти сил на две группы сил, выделив в первую группу силы R , P' и Q' , уравновешивающие друг друга на балке, а во вторую—силы P и Q ,—обе приложенные в узлах фермы, и вычислим усилия в брусках фермы от каждой группы в отдельности.

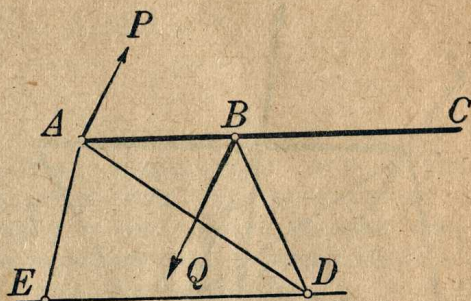
Силы R , P' и Q' (фиг. 169), будучи уравновешены на балке ABC , в случае фермы статистически определяемой, не вызовут ни каких усилий в остальных частях фермы и не окажут давления на опоры: они вызовут усилия лишь в частях той балки ABC , на которой они уравновешены. Силы второй группы— P и Q уравновешиваются реакциями опор и вызывают усилия во всех частях фермы (фиг. 170), кроме конца BC балки, который этими силами не нагружается. Так как силы P и Q приложены в узлах фермы, то усилия эти будут продольными—усилиями растяжения или сжатия, и определение их ведется по правилам расчета *стержневых* ферм.

Для отыскания усилий в брусках фермы от заданной нагрузки R , приложенной в точке C балки, нужно сложить усилия, вызванные каждой группой сил в отдельности. Тогда получим, что усилия в стержнях фермы т.е., в нашем случае, во всех брусках, кроме балки ABC , зависят лишь

от сил P и Q , приложенных в узлах; усилия в части BC балки зависят лишь от уравновешенной на балке системы трех сил R , P' , Q' , и только усилия в части AB балки слагаются из усилий, вызываемых обоими группами сил вместе.

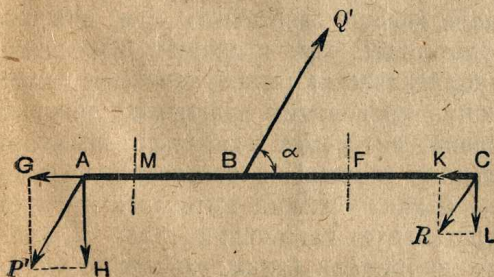


Фиг. 169.

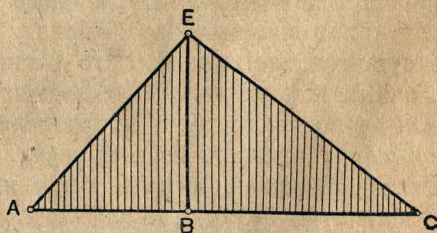


Фиг. 170.

Обозначим угол между осью балки (фиг. 171) и силой Q' , а следовательно, и силами P' и R , через α и разложим силу P' на две силы, — одну, направленную по оси балки и равную AG , другую, ей перпендикулярную и равную $АН$. Тогда найдем, что сила $AG = P' \cos \alpha$ производит в части AB балки растяжение, а сила $АН = P' \sin \alpha$ ломает балку в каждом ее сечении M моментом, равным $P' \sin \alpha$. AM в направлении, обратном движению стрелки часов. Раскладывая таким же образом силу R на две: $СК$ — по оси балки и $СL$, ей перпендикулярную, получим, что сила $СК = R \cos \alpha$ производит в части балки BC сжатие, а сила $СL = R \sin \alpha$ отламывает часть балки CF в сечении F моментом, равным $R \sin \alpha$. CF в направлении движения



Фиг. 171.



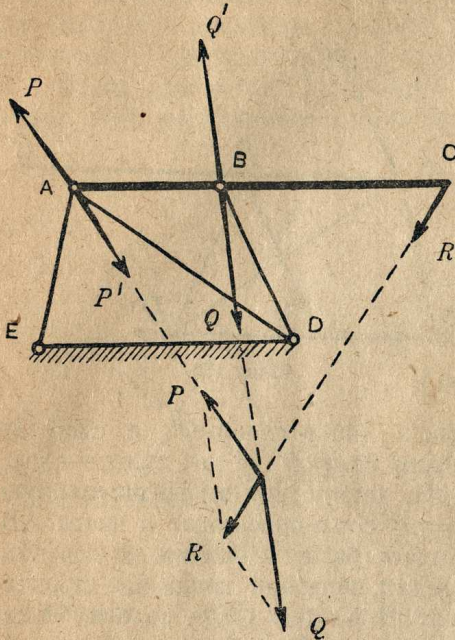
Фиг. 172.

стрелки часов. Графически ломающие моменты в различных сечениях балки представляются ординатами треугольника $ABCE$ (фиг. 172), при чем $BE = P' \sin \alpha$. $AB = R \sin \alpha$. BC .

Решив подобные задачи для всех балок, входящих в ферму (в нашей ферме имеется только одна балка), переходим затем к определению сил растяжения или сжатия стержневой фермы, в которой, кроме заданных сил, приложенных в шарнирах (таких сил в нашем примере не имеется), прибавлены ко всем шарнирам, принадлежащим балкам, указанные добавочные силы P , Q ,... и т. д. Определив все силы растяжения или сжатия в стержневой ферме, нужно в тех брусках, которые представляли из себя балки, прибавить

добавочные растяжения или сжатия от сил уравновешенных на балке, а также присоединить соответственные ломающие моменты.

Примечание. Нужно заметить, что указанный выше прием расчета фермы с балками не является единственно возможным. Можно было бы прибавлять в шарнирах балки силы P и P' , Q и Q' , не параллельные R , а как угодно направленные, лишь бы Q' , P' и R уравновешивались на балке, необходимым условием чего является пересечение их в одной точке (фиг. 173).



Фиг. 173.

Действие силы R на ферму сложится из действия сил P и Q , приложенных в узлах фермы, и действия сил P' , Q' и R , уравновешенных на балке, а потому оказывающих действие только на нее одну. Тот или другой способ раздачи силы R на шарниры, конечно, не может оказать влияния на результаты расчета. Это можно пояснить следующими соображениями.

Как бы мы ни направляли силы P и P' , Q и Q' , вся разница в них сводится лишь к разнице между продольными их слагающими, направленными по линии шарниров AB , поперечные же слагающие их, при всех указанных раздачах силы R на шар-

ниры, остаются одними и теми же, определяясь однозначно при помощи уравнений моментов. Продольные же слагающие, хотя и меняют свою величину при различных разложениях, но геометрическая (алгебраическая) сумма их остается постоянной. Но распределение продольных слагающих реакций балочных шарниров при последнем условии не может оказывать никакого влияния на величину и направление опорных реакций, а следовательно и на величину усилий во всех брусках, кроме балки. Отсюда вытекает, что при расчете стержней фермы, мы можем продольную слагающую силы R , действующую на балку, распределять между шарнирами балки, как нам удобней. В предельном случае можно было бы продольную слагающую силы $R \cos \alpha$ всю передать на любой из шарниров балки, напр. B , (фиг. 174), добавивши в нем, конечно, равную и противоположную силу. Поперечные слагающие сил, приложенных в шарнирах A и B , определяются единственным образом по правилу разложения параллельных сил и не допускают никакого произвола в раздаче.

Пример 1. Пусть дана форма (фиг. 175), бруска которой связаны шарнирами в квадрат $ABDE$ со сторонами AB , BD , DE , EA , равными a . Точка D может перемещаться по горизонтальной плоскости MM' на катке D , а шарнир точки A связан с вертикальной плоскостью. На балки фермы действуют две силы, равные R и приложенные к балке ABC в точке C и к балке BEF в точке F , при чем:

$$AB = BC = a, \quad BE = 2EF = a\sqrt{2}.$$

Сначала определяем опорные сопротивления.

Опорная реакция N , развиваемая на катке D, найдется из условия равновесия всей фермы, как рычага с точкой опоры A. Для этого напишем уравнение моментов относительно точки A:

$$m_A(N) + m_A(R_c) + m_A(R_F) = 0,$$

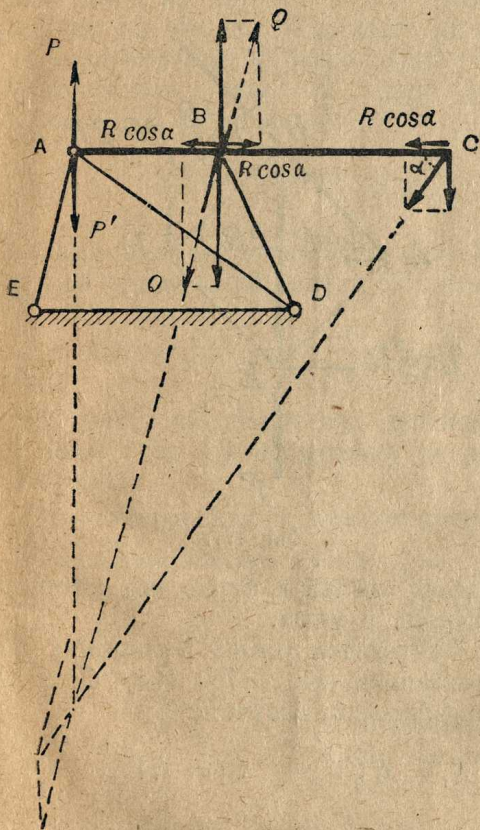
или

$$-N \cdot a\sqrt{2} + R \cdot a\sqrt{2} + R \cdot a\sqrt{2} = 0,$$

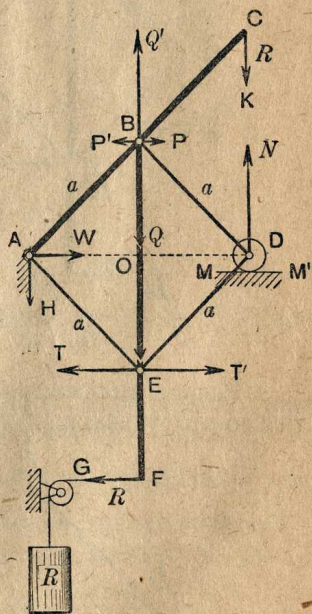
откуда:

$$N = 2R.$$

Опорную реакцию в шарнире A найдем, приравнявши нулю суммы проекций всех сил, действующих на ферму (в том числе и реакций опор), на вертикальную и горизонтальную оси. Из этих уравнений находим, что гори-



Фиг. 174.



Фиг. 175.

зонтальная составляющая опорной реакции в шарнире A равна $W = R$ и направлена вправо, а вертикальная составляющая $H = N - R = 2R - R = R$ и направлена вниз.

Добавим в точке B фермы четыре попарно равных и противоположных силы:

$$Q = Q' = 2R \quad \text{и} \quad P = P' = \frac{R}{2},$$

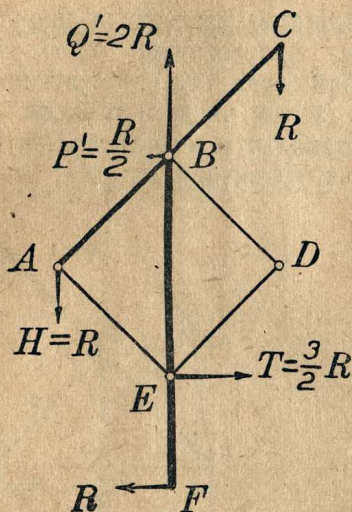
а в точке E две равные и противоположные силы:

$$T = T' = \frac{3}{2} R.$$

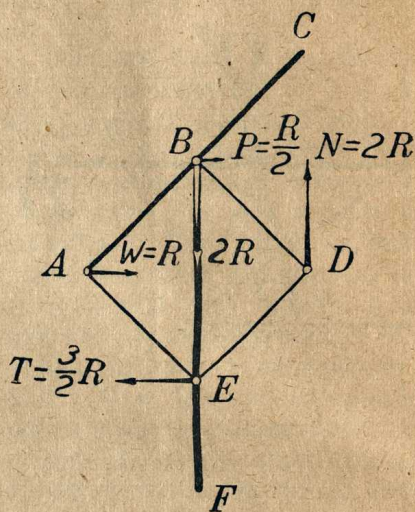
Тогда получим, что силы $H = R$, R_c и $Q' = 2R$ уравновешены на балке ABC , а силы R_F , $T' = \frac{3}{2}R$ и $P' = \frac{R}{2}$ на балке BEF (фиг. 176), и действуют только на части своих балок. Остальные же пять сил:

$$\begin{aligned} N &= 2R, & W &= R, \\ Q &= 2R, & P &= \frac{R}{2}, & T &= \frac{3}{2}R. \end{aligned}$$

приложены в узлах фермы и позволяют рассчитывать ферму, как стержневую (фиг. 177).



Фиг. 176.



Фиг. 177.

Решим сначала задачу о распределении усилий в ферме под действием только-что указанных пяти сил, приложенных в узлах.

Для нахождения усилий в стержнях BD и ED разлагаем (фиг. 178) силу $N = 2R$ по их направлениям; получаем:

$$S_1 = R\sqrt{2}, \quad S_2 = R\sqrt{2}.$$

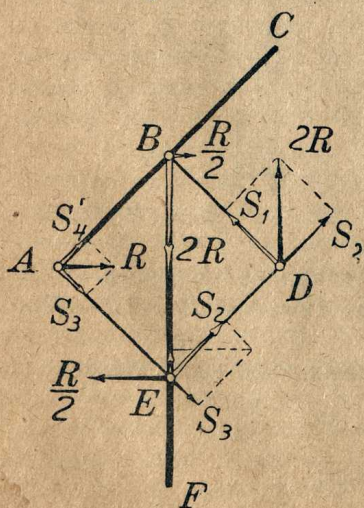
Первая сила будет сжимать стержень BD , вторая растягивать стержень ED .

Для нахождения усилий в стержне AE и части AB балки ABC разлагаем по их направлениям силу $W = R$; получаем:

$$S_3 = \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad S'_4 = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Обе силы S_3 и S'_4 будут сжимающие.

Наконец, чтобы найти усилие в бруске BE фермы, переносим силы S_2 и S_3 в точку E ,



Фиг. 178.

и проектируем все силы, действующие в узле E , на направление EB ; находим:

$$S = S_2 \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = R = \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

Сила S будет сжимать брус BE .

Для частей BC и EF балок от рассматриваемых сил, приложенных в узлах, усилий не получится.

Для стержней заданной фермы, каковыми являются здесь брусья AE , ED и DB , найденные усилия (S_1 , S_2 и S_3) являются окончательными. Для балок же ABC и BEF нужно подсчитать еще усилия от уравновешенных на них сил и добавить их к усилиям стержневой фермы.

Обращаемся к балке ABC (фиг. 179). Вертикальная сила H дает растяжение отрезка AB балки силою

$$S_4'' = R \cos 45^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Сложим эту растягивающую силу S_4'' с найденной выше силой сжатия S_4' ; получим:

$$S_4 = S_4'' - S_4' = \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R}{\sqrt{2}} = 0,$$

т.е. часть AB балки под действием данных в задаче сил не испытывает ни растяжения, ни сжатия.

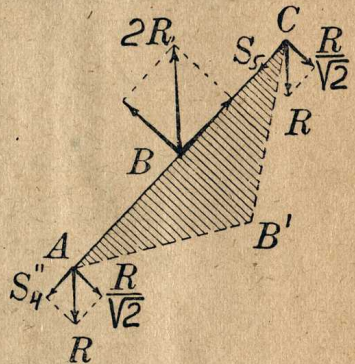
Разлагая силу R , приложенную в точке C , находим, что часть BC балки подвергается сжатию силой $S_5 = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Кроме того, балка ABC подвергается также действию поперечных срезающих усилий, равных $\frac{R}{\sqrt{2}}$, и ломающих моментов, графически представленных ломаной пунктирной линией на фиг. 179, при чем наибольший ломающий момент (в узле B фермы) равен:

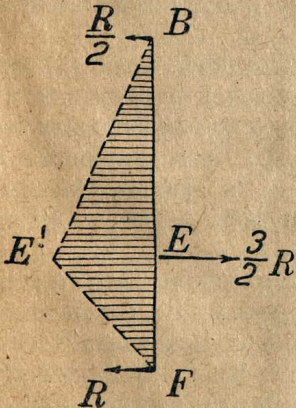
$$BB' = \frac{aR}{\sqrt{2}}.$$

Переходим к балке BEF (фиг. 180). Так как силы R_F , T' и P' , действующие на балку, перпендикулярны к оси балки, то они будут вызывать в ней лишь срезающие усилия и ломающие моменты; растяжения же или сжатия в балке от них получаться не будет. Поэтому, и при заданных

силах R_C и R_F части балки BEF будут подвергаться действию лишь тех продольных сил, которые получились от сил P и Q , приложенных в узлах, т.е. часть EF балки не будет испытывать ни сжатия, ни растяжения,



Фиг. 179.



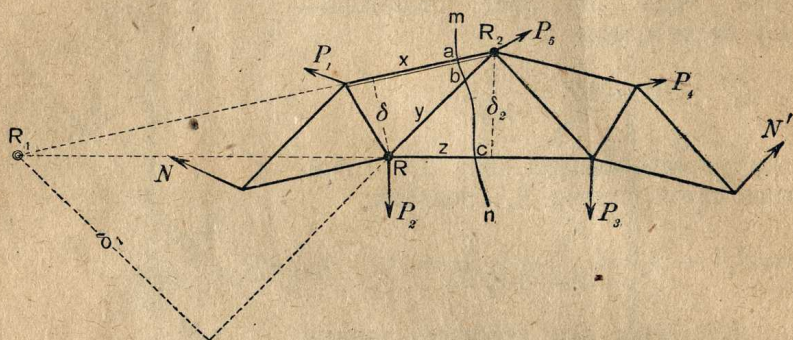
- Фиг. 180.

а часть BE будет сжиматься силою $S = \frac{R}{2}$. Величина срезающего усилия для части EF будет равна R , для части BE равна $\frac{R}{2}$. Моменты, ломающие балку BEF , графически представлены на фиг. 180, при чем наибольший ломающий момент (в узле E) равен:

$$EE' = \frac{aR}{\sqrt{2}}.$$

§ 68. Способ Риттера. Способ Риттера называется также *способом трех моментов*. Он приложим к таким фермам, которые можно разрезать контуром, пересекающим только *три звена*.

Пусть контур mnp (фиг. 181) пересекает звенья x , y , z в точках a , b и c . Считаем эти стержни в точках a , b , c перерезанными и отнимаем



Фиг. 181.

правую часть фермы. При этом, рассматривая левую часть фермы, как неизменное твердое тело, можем написать условия равновесия этого тела под эффектом всех сил, действующих на левую часть фермы, т.-е. сил N , P_1 , P_2 , а также и сил X , Y , Z , приложенных в точках a , b и c по направлению стержней.

Вначале будем считать стержни x , y и z растянутыми, полагая, что все силы идут от сечения в сторону отброшенной фермы, и в этом предположении будем придавать силам X , Y и Z знак $(+)$. При этом эффект действия отрезанной части звена направлен от контура mnp вправо. Если из уравнения для какой-либо из сил X , Y и Z получится знак $(-)$, то эффект действия отброшенной части звена направлен от контура mnp влево, и звено будет тогда сжато.

Условия равновесия в приеме Риттера выражаются тем, что сумма моментов всех сил относительно трех центров равна нулю. За эти центры принимают так называемые «*точки Риттера*», которые представляют точки пересечения попарно трех рассматриваемых стержней. Первая точка Риттера R получается от пересечения стержней y и z (не входит x), вторая — R_1 — в которую не входит y , т.-е. пересекаются x и z , третья — R_2 — в которую не входит z , а пересекаются x и y .

Пишем, что сумма моментов всех сил относительно точки Риттера R равна нулю:

$$m_R(X) + m_R(N) + m_R(P_1) + m_R(P_2) = 0.$$

Сила P_2 в нашем примере проходит через точку R , и потому момент ее равен нулю. Если из точки R опустить перпендикуляр на силу X (обозначим длину его через δ), то будем иметь:

$$m_R(X) = X\delta,$$

откуда

$$X = -\frac{m_R(N) + m_R(P_1) + m_R(P_2)}{\delta}.$$

Если вторая часть в окончательном результате будет со знаком $+$, то X представляет растяжение, в противном случае X представляет сжатие.

Точно так же, обращаясь к точкам Риттера R_1 и R_2 и обозначая расстояние их от стержней y и z через δ_1 и δ_2 , будем иметь:

$$-Y\delta_1 + m_{R_1}(N) + m_{R_1}(P_1) + m_{R_1}(P_2) = 0,$$

$$-Z\delta_2 + m_{R_2}(N) + m_{R_2}(P_1) + m_{R_2}(P_2) = 0.$$

Здесь

$$m_{R_1}(Y) = -Y\delta_1, \quad m_{R_2}(Z) = -Z\delta_2,$$

так как положительные силы Y и Z вращают около точек Риттера R_1 и R_2 против часовой стрелки. Из этих уравнений находим:

$$Y = +\frac{m_{R_1}(N) + m_{R_1}(P) + m_{R_1}(P_2)}{\delta_1}$$

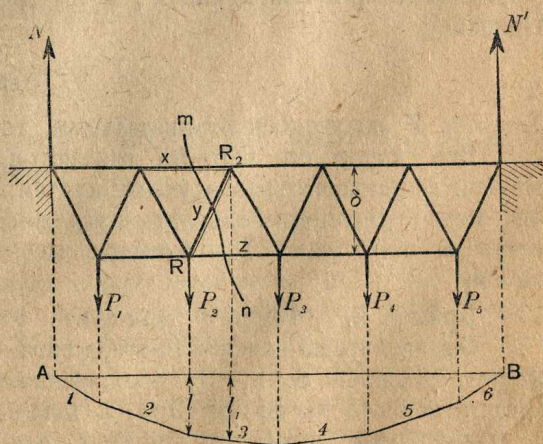
$$Z = +\frac{m_{R_2}(N) + m_{R_2}(P_1) + m_{R_2}(P_2)}{\delta_2}$$

Сила X несомненно отрицательна, так как силы N и P_1 имеют относительно точки Риттера R положительный момент; следовательно, звено x сжато. Ясно также, что сила Z положительна и звено z растянуто.

Обыкновенно тот стержень, который сжат, отмечается на ферме двойной линией.

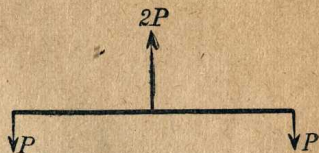
Примечание. Если из трех пересеченных стержней два стержня параллельны, то соответствующая им точка Риттера удаляется в бесконечность. В этом случае вместо приравнивания нулю суммы моментов, следует приравнять нулю сумму проекций всех сил фермы на прямую, перпендикулярную рассматриваемым (параллельным) звеньям.

Возьмем следующий пример. Дана ферма, представленная по фигуре 182. Все совершенно симметрично; налево и направо точки опоры, и здесь развиваются силы реакций N и N' . Складываем графостатическим способом силы P_1 , P_2 , P_3 , и т. д.; вычерчиваем силовой многоуголь-



Фиг. 182.

Проведем сечение $m-n$, пересекающее все три указанные бруса, и будем рассматривать отрезанную правую часть фермы. Силу P , приложенную к звену S_1 , заменим по указанному выше правилу силами $2P$ и P , которые останутся на ферме. Само же звено S_1 , рассматриваемое, как балка, будет сгибаться под эффектом сил, указанных на фигуре 185. На ролике фермы действует сила N (нормальная реакция), которую мы определим, рассматривая ферму как рычаг с точкой опоры O . Мы имеем:



Фиг. 185.

$$m_o(N) + m_o(P) = 0.$$

Подставляя, получим:

$$-N \cdot a\sqrt{3} + P(2a + \frac{1}{2}a) = 0,$$

$$N = \frac{5}{2\sqrt{3}} P.$$

Отмечаем точки Риттера R, R_1, R_2 . Для точки R пишем уравнение моментов:

$$m_R(S) + m_R(2P) + m_R(N) = 0.$$

Подставляя, имеем:

$$-S \cdot \frac{a}{2} + 2P \cdot a + \frac{5}{2\sqrt{3}} P \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0,$$

откуда

$$S = 4P + \frac{5}{2} P = \frac{13}{2} P.$$

Переходим далее к точке Риттера R_1 . Для точки R_1 уравнение моментов напишется так:

$$m_{R_1}(S_1) + m_{R_1}(2P) + m_{R_1}(N) = 0.$$

Произведя подстановку, получим:

$$S_1 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} + 2P \cdot \frac{3}{4} a - \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot P \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{4} \right) = 0;$$

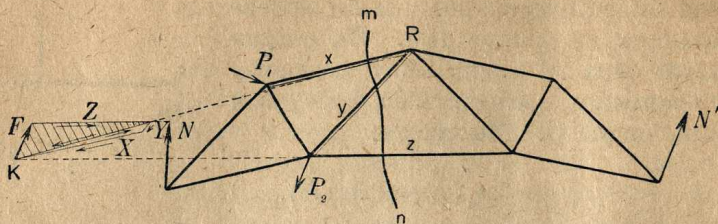
откуда:

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot P.$$

Что касается до наибольшего ломающего момента для балки S_1 , то он, как видно из фиг. 184, будет равен $M = P \cdot a$.

§ 69. Способ Кульмана. Способ Кульмана для определения натяжений звеньев шарнирной фермы точно так же, как и способ Риттера, требует проведения сечения, перерезывающего только *три звена*, но в нем не пользуются равенством нулю моментов всех сил относительно точек Риттера. Условия равновесия здесь (фиг. 186) выражаются графостатически таким образом: отыскивается с помощью графостатики равнодействующая всех внешних сил N, P_1, P_2 , действующих на отрезанную часть фермы. Пусть эта равнодействующая будет F . Продолжаем одно из рассматриваемых звеньев, напр., звено z , до пересечения в точке K с направлением равнодействующей F .

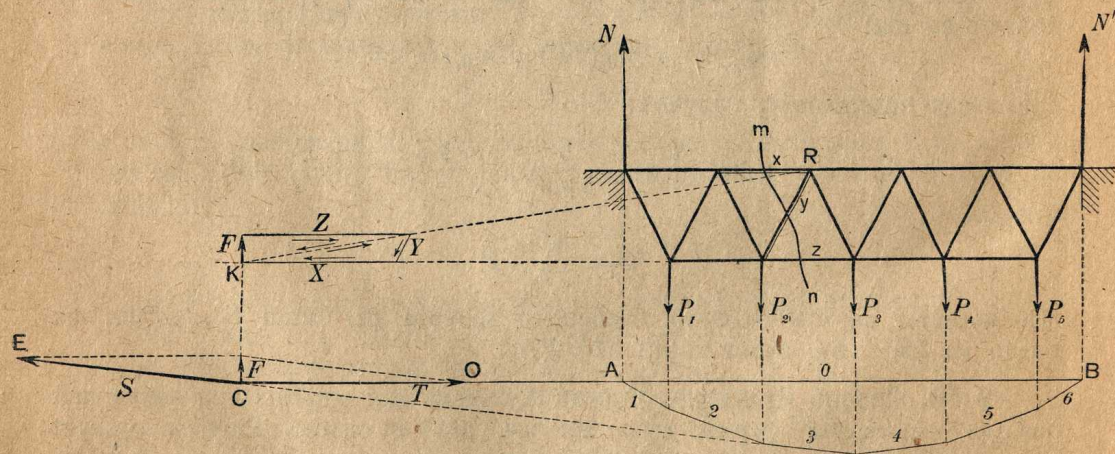
Соединяем точку K с точкою Риттера R и рассуждаем так: сила F , слагаясь с силой Z , должна дать равнодействующую непременно направленную по KR , потому что эта равнодействующая должна уничтожить равнодействующую



Фиг. 186.

сил X и Y , проходящую через точку R . Прилагаем к точке K , по направлению KR , уравнивающую сил F и Z ; тогда эта уравнивающая вместе с силами F и Z должна образовать замкнутый силовой треугольник. С другой стороны приложим равнодействующую упомянутых сил F и Z и перенесем ее в точку R по направлению KR ; так что, собственно, мы приложим в точках K и R по направлению KR две равные и противоположные силы. Перенесенная сила должна в точке R уравниваться силами X и Y и образовать с ними замкнутый силовой треугольник. Оба эти треугольника построены при точке K ; при этом построение надо начинать с треугольника, опирающегося на силу F и на фигуру заштрихованного. На чертеже видно, что звено z будет растянуто, а звенья x и y сжаты.

Пример. Возьмем ферму, представленную на фигуре 187, ту самую, которую рассматривали в примере на способ Риттера, и определим в ней



Фиг. 187.

натяжение звеньев x , y и z . Строим для нее силовой и веревочный многоугольники и проводим контур mn , пересекающий звенья x , y и z . Далее, согласно способу Кульмана, надо отыскать равнодействующую сил N , P_1 и P_2 . Это делается графостатически.

для этого на силе N замкнутый силовой треугольник I и получаем, как видно из чертежа, величины сил 1 и 2 . Из него заключаем, что звено 1 будет сжато, а звено 2 растянуто.

Переходим далее к узлу II ; проводим замкнутый контур около этого узла, пересекающий три звена, при чем сила сжатия звена 1 известна; надо будет силу P_1 и силу от звена 1 уравновесить силами от звеньев 3 и 4 . Это равновесие выражено с помощью замкнутого силового многоугольника II , в котором силы P_1 и 1 известны, а силы 3 и 4 находятся. Мы видим, что звено 4 будет сжато, а звено 3 растянуто.

Из следующих двух узлов III и IV мы можем рассматривать в данный момент только узел III , так как для узла IV имеются три неизвестных силы. Построив для узла III замкнутый силовой многоугольник, находим неизвестные силы 5 и 6 , при чем, как видно на фигуре 189 III , звено 5 сжато, а звено 6 растянуто. Если бы при построении силового многоугольника для узла III мы обходили стержни около него все по часовой стрелке, то вместо многоугольника III получили бы многоугольник III' . Но, по прежнему, звено 5 было бы сжато, а звено 6 растянуто.

Строя затем силовые многоугольники для узлов IV , V и VI , мы определяем сжатия или растяжения всех остальных соответственных им стержней фермы. При этом заметим, что в предпоследнем узле (у нас V) известны все силы, кроме одной (9), которая на силовом многоугольнике V проводится между совершенно определенными точками: концом силы 7 и началом силы P_3 . Поэтому параллельность ее звену 9 служит подтверждением, что предыдущие построения сделаны правильно. Что касается последнего узла (у нас VI), то все входящие в него силы уже найдены; они должны дать замкнутый многоугольник если предыдущие построения правильны.

Очевидно, что в способе вырезания узлов никакой трудности нет: всегда легко сообразить на какой узел перейти.

§ 71. Диаграммы Крелона. Способ вырезания узлов, весьма удобный для соображения, неудобен для чертежа. Но можно разрозненные силовые многоугольники, которые получаются в способе вырезания узлов, соединить в одну стройную фигуру, которая является *взаимной* для фигуры фермы с приложенными к ней силами. Теория взаимных фигур разработана английским физиком Клерком Максвеллем.

Крелона, знаменитый математик и профессор Римского университета, дал новое весьма изящное изложение этой теории. Его сочинение наиболее способствовало распространению учения о взаимных фигурах на континенте Европы, и потому за этими фигурами установилось название: «*диаграммы Крелона*».

Для разъяснения их возьмем ту же самую ферму, которую рассматривали в способе вырезания узлов (фиг. 190). Все внешние силы будем чертить расположенными *снаружи* фермы и обозначим их цифрами $1, 2, 3, 4, 5$. Стержни фермы, по которым также действуют силы растяжения и сжатия, будем обозначать дальнейшими нумерами: $6, 7, 8, 9, \dots, 14$ и будем как внешние силы, так и ферму рассматривать как одну общую фигуру.

В этой фигуре мы замечаем область A , ограниченную сторонами $5, 6, 1$, область B , ограниченную сторонами $1, 7, 2$, и т. д. до области E , ограниченной сторонами $4, 11, 5$. Все эти области, разграничиваясь продолжениями сил $1, 2, \dots, 5$, удаляются в бесконечность. Затем мы имеем внутренние

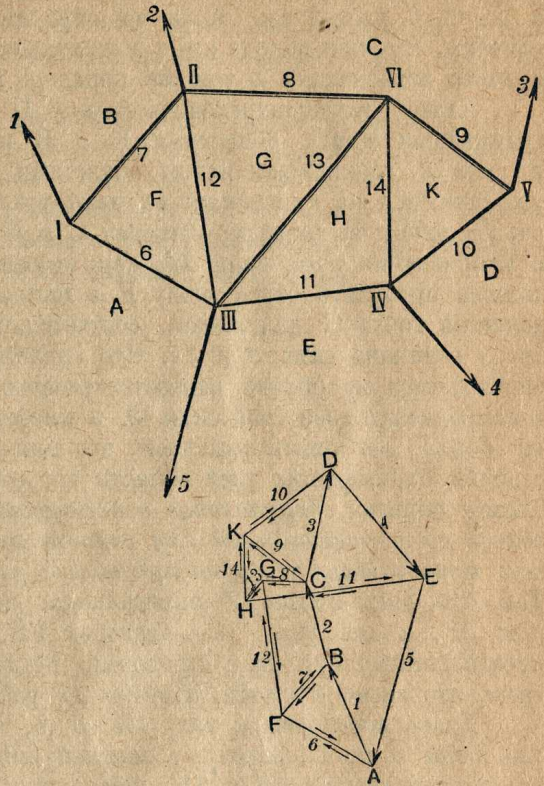
области: F, ограниченную сторонами 6, 7, 12; G (12, 8, 13); H (13, 14, 11); K (14, 9, 10). Все эти области, как внутренние, так и внешние, в дальнейших построениях имеют значение совершенно одинаковое.

Будем теперь строить другую фигуру, в состав которой войдут замкнутые силовые многоугольники, выражающие равновесие сил: 1, 7, 6; 7, 2, 8, 12,...., т.-е. всех сил, действующих в узлах фермы. Разумеется, внешние силы 1—5 должны уравновеситься между собой на ферме и, следовательно, должны образовать замкнутый силовой многоугольник; поэтому построение диаграммы Кремона всегда надо начинать с многоугольника внешних сил.

Диаграмму эту надо строить следующим образом: замечая, что сила 1 лежит на границе областей A и B, ставим в ее начале точку A и в ее конце точку B (начало и конец меряются по направлению силы, порядок же областей определяется направлением обхода). Далее через точку B проводим прямую, равную и параллельную внешней силе 2; так как на фигуре фермы сила 2 является границей областей B и C, то в конце ее на диаграмме ставим точку C. Продолжая такое

построение для всех остальных внешних сил, получим замкнутый силовой многоугольник, при чем последняя сила 5, как лежащая между областями E и A, должна соединять точки диаграммы E и A. При этом окажется, что внешние силы отложены в том порядке, как мы их встречаем, обходя кругом фермы. Обходы эти условимся всегда совершать по часовой стрелке.

Когда силовой многоугольник внешних сил вычерчен, следует приступить к вырезанию узлов фермы. Начинать надо с такого узла, в котором пересекаются лишь два стержня — две неизвестные силы. Мы начнем с узла I. Действующую на него внешнюю силу 1 на диаграмме нужно сомкнуть с силами, параллельными звеньям фермы 7 и 6. При построении диаграммы надо обратить внимание, чрез которую из двух точек — A или B — проводить упомянутые силы. Звено 7 является границей областей B и F; следовательно, силу 7 надо проводить на диаграмме от точки B до некоторой новой точки F; точно так же звено 6 является границей области A и F; следовательно, силу 6 нужно проводить от точки A до некоторой точки F. Этим обстоятельством место точки F вполне определяется, так как направления сил 7 и 6 нам известны. Таким образом, мы получаем замкнутый силовой треугольник ABF,



Фиг. 190.

который соответствует на фигуре фермы узлу I (1, 7, 6). Направление сил 7 и 6 определяется условием, чтобы все три силы (1, 7, 6), из которых сила 1 известна, шли в одном направлении по сторонам треугольника — именно, в направлении ABF. Из этого заключаем, что звено 7 будет сжато, а звено 6 растянуто. Если мы обратимся к узлу I на фигуре фермы, то заметим, что при обходе его в направлении часовой стрелки окружающие узел области встречаются в том же порядке: А, В, F.

Далее следует переходить к узлу II (7, 2, 8, 12). Для него сила 7, граничащая между областями F и В и потому отмеченная буквами FB, и сила 2, граничащая между областями В и С и отмеченная буквами ВС, уже имеются на диаграмме; их надо уравновесить силами 8 и 12. Так как сила 8 лежит на границе областей С и G, то провести ее надо через точку С в направлении к G; сила 12, как лежащая на границе областей F и G, должна проходить через точку F в направлении к G. Таким образом определяется точка G диаграммы, соответствующая области G фермы, и находится величина сила 8 и 12. Что касается до направления этих сил, то оно определяется из обхода соответствующего узлу II силового четырехугольника в направлении известной силы 2, а именно: BCGFB. Обратившись к узлу II на ферме, мы опять замечаем, что при обходе его в направлении часовой стрелки окружающие узел области встречаются в том же порядке: В, С, G, F. Таким образом, *направление действующих на узел сил можно определять, обходя соответствующий ему силовой многоугольник в том порядке, в котором встречаются области при обходе узла в направлении часовой стрелки.* Так, для узла I сила 7 определяется по величине и направлению вектором BF, а для узла II — вектором FB, что указано на диаграмме двумя поставленными при силе стрелками. Векторы CG и GF для узла II показывают, что звено 8 сжато, а звено 12 растянуто.

Далее переходим к узлу III (5, 6, 12, 13, 11), в котором известные уже силы 5, 6, 12 образуют незамкнутый многоугольник EAFG; замкнуться он должен силами 13 и 11, проходящими, на основании тех же соображений, через точки G и E и определяющими точку H диаграммы. Наконец, последняя точка K диаграммы, изображающая область K фермы, находится на пересечении сил 14 и 10, проходящих через точки H и D (это получается из рассмотрения узла IV (4, 11, 14, 10)).

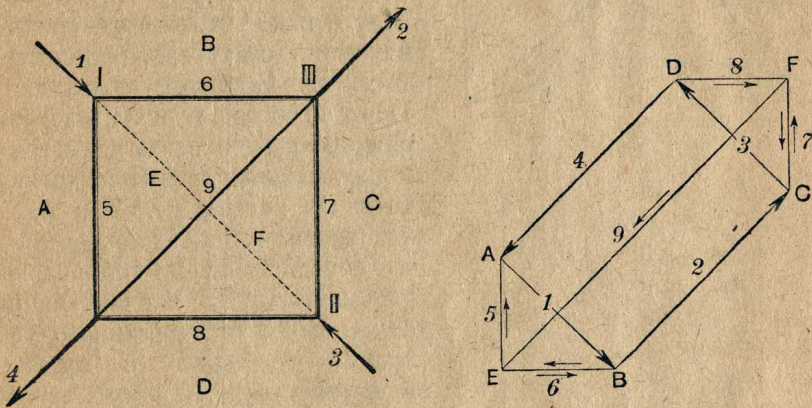
Далее следует переходить к узлу V (10, 9, 3); но для построения соответствующего ему силового треугольника достаточно соединить точку K с точкой С, так как сила 3 и сила 10 (действующая обратно прежде найденной силе 10) известны. Третья сила 9, на основании статики, должна быть выражена вектором KC, что является необходимым в том случае, когда внешние силы уравновешиваются, а не приводятся к паре; пара могла бы получиться и при замкнутом силовом многоугольнике.

Задача кончается вырезанием узла VI (9, 14, 13, 8). Силовой многоугольник, соответствующий этому узлу, уже имеется на чертеже; это будет многоугольник SKHGC. Мы видим, что в нем все силы проходят через точки, означенные буквами окружающих узел областей (границами которых служат сходящиеся в узле силы). На чертеже нам важно обратить внимание на направление стрелок; оно является вполне согласным с направлением сил и с последовательностью областей, встречающихся при обходе каждого узла.

Таким образом, ферма с действующими на нее силами и диаграмма Крелона для этой фермы являются фигурами взаимными; узлу на ферме соответствует полигон на диаграмме; сколько лучей (звеньев) сходится в узле, столько параллельных лучам сторон (сил) в полигоне. Области на ферме соответствует узел на диаграмме; сколькими сторонами ограничена область, столько параллельных сторонам лучей (сил) сходится в изображающей области точке.

Разберем несколько примеров на построение диаграмм Крелона.

Пример 1. Шарнирная ферма, имеющая форму квадрата, перетянутого диагональю, находится под действием четырех сил (1, 2, 3 и 4), приложенных к узлам, направленных в противоположные стороны по соответствующим диагоналям и попарно равных между собою, при чем силы 2 и 4 растягивают ферму, а силы 1 и 3 ее сжимают (фиг. 191).



Фиг. 191.

Увеличив масштаб сил на диаграмме вдвое против масштаба их на ферме, чертим силовой четырехугольник внешних сил, который должен быть замкнут и в нашем случае представит прямоугольник ABCD (сила 1, разделяющая области A и B, начнется в точке A и окончится в точке B диаграммы, и т. д. до силы 4, изображаемой вектором I A). Затем переходим к вырезанию узлов. Вырезаем узел I (1, 6, 5); ему соответствует замкнутый силовой треугольник, в котором сила 1 уравнивается силами 6 и 5 по направлению звеньев 6 и 5. Сила 6 должна проходить через точку B, потому что она лежит на границе областей B и E; равным образом, сила 5 должна проходить через точку A, ибо звено 5 разделяет области A и E. В пересечении сил 6 и 5 найдем точку E диаграммы, соответствующую области E фермы. Далее выгодно перейти к узлу II (3, 8, 7), т. е. уравновесить силу 3 силами 8 и 7. Это условие равновесия выразится силовым треугольником (CDE), при чем сила 8 непременно пройдет через точку D, а сила 7 пройдет через точку C. Рассматривая направление стрелок в этом треугольнике, видим, что звенья 8 и 7 будут сжаты. Остается определить силу, действующую по диагонали 9. Величина этой силы выразится отрезком прямой, соединяющей точки F и E; действительно, если будем вырезать узел III (2, 7, 9, 6), то увидим, что ему соответствует на диаграмме замкнутый силовой четыре-

угольник $BCFE$, при чем сила 9, соответствующая звену 9 между областями F и E , соединяет точки диаграммы F и E . Отметив стрелками направление сил (стрелки расположены по внешнему контуру четырехугольника $BCFE$), убеждаемся, что звено фермы 9 будет растянуто силою FE .

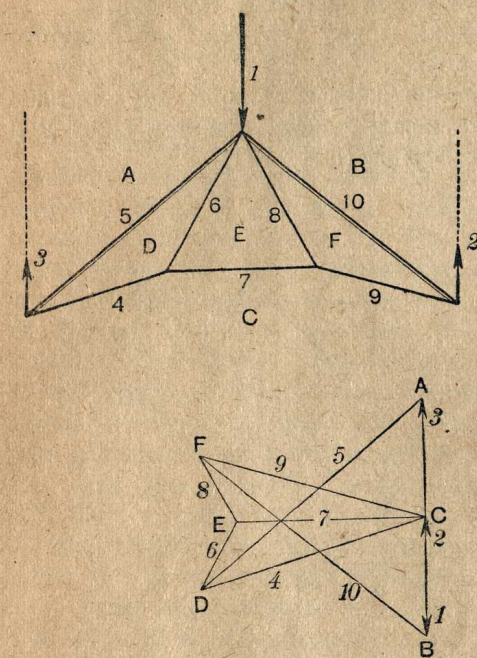
Пример 2. Определить натяжения в ферме Полонсо (фиг. 192).

Отмечая области A, B, C, D, E и F , при чем область C охватывает все бесконечное пространство между

силами 2, 9, 7, 4 и 3, считая пространство снизу и в бока. Далее строим многоугольник внешних сил, который вытянется здесь в прямую линию $ABCA$, и приступаем к вырезанию узлов. Как и в предыдущем примере, на диаграмме масштаб сил двойной.

Вырезаем узел (3, 5, 4); здесь силу 3 надо уравновесить силами 5 и 4, идущими по направлению соответственных тяг. Силы эти отделяют область D от областей A и C ; следовательно, они должны проходить через точки A и C и пересечением своим определяют новую точку D диаграммы. Так как направление силы 3 на диаграмме известно, то обходя в этом направлении треугольник CAD , найдем направления сил 5 и 4 для вырезанного узла. Мы видим, что звено 5 будет сжато, а 4—растянуто.

Переходим к узлу (4, 6, 7); в нем известная уже сила 4 должна уравновеситься силами 6 и 7, которые, проходя через точки D и C , опреде-



Фиг. 192.

ляют точку E диаграммы, изображающую область E фермы. Выполняя это построение, получим замкнутый треугольник CDE , из которого видно, что звенья 6 и 7 растянуты.

Примечание 1. Заметим, что чертить стрелки на диаграмме, изображающей сложную ферму, очень трудно, как это видно уже на простой сравнительно ферме фигуры 190; поэтому лучше их вовсе не чертить; но на фигуре фермы непременно нужно обозначать сжатые стержни двумя чертами.

Направление же действующих на узел сил лучше всего определять, обходя узел в направлении часовой стрелки и обращая внимание на последовательность встречаемых при обходе областей. При этом нет надобности искать силу, направление которой наперед известно, и от нее идти по соответствующему многоугольнику до силы искомой (в сложных фермах это требует большого внимания и ведет иногда к ошибкам).

В узле (7, 8, 9) найденную силу 7 нужно уравновесить силами 8 и 9. На основании таких же соображений построится замкнутый треугольник SFE , при чем сила 8 по величине и направлению выразится вектором EF , а сила 9—вектором FC ; звенья 8 и 9 будут растянуты.

Теперь остается только замкнуть диаграмму, т.-е. соединить точки F и B . Прямая FB будет непременно параллельна звену 10. Направление сил в треугольнике BCF характеризуется направлением силы 2 (или обходом узла 2, 9, 10), и это показывает нам, что звено 10 сжато.

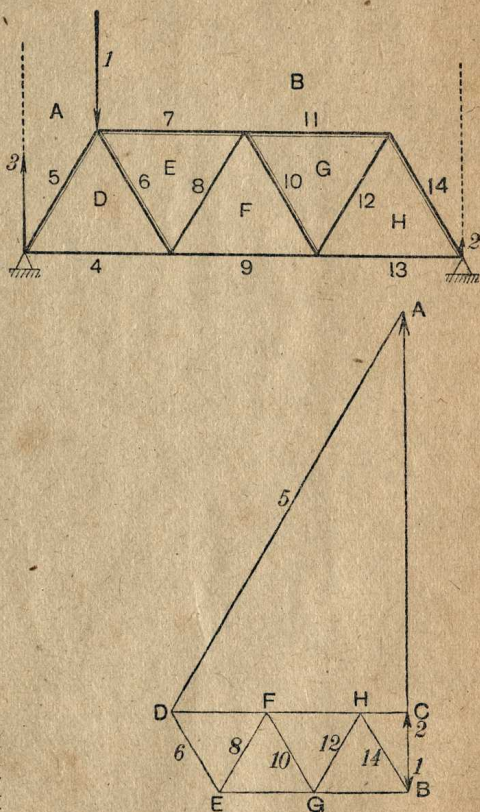
Пример 3. Мостовая ферма, нагруженная в одном месте (фиг. 193).

Воображая, что груз находится на месте силы 1 и увеличив масштаб сил вчетверо, чертим силовой многоугольник внешних сил $ABCA$, потом приступаем к вырезанию узлов, отыскивая каждый раз область, граничащую с двумя другими областями, точки которых уже имеются на диаграмме. Так, вырезая узел (3, 5, 4), изображаем на диаграмме область D , граничащую с областями C и A , при чем точки C и A уже имеются на диаграмме. Далее мы можем перейти к области E , так как на диаграмме уже имеются точки D и B —изображения соседних с E областей. Продолжая такое построение, при чем каждый раз прибавляем по одной области на ферме и по одной точке на диаграмме, получаем всю диаграмму, которая замыкается соединением точек H и B . Сжатые стержни на фигуре фермы обозначены двойными линиями.

Примечание 2. В диаграммах Кремона вполне достаточно обозначить области на фигуре фермы (с действующими на нее силами) и точки, изображающие их на диаграмме.

Действительно, внешние силы и стержни на ферме определяются двумя областями, между которыми они лежат; силы на диаграмме определяются двумя областями, изображения которых они соединяют. Узлы на ферме определяются областями, их окружающими; многоугольники сил на диаграмме определяются изображениями тех же областей и в той же последовательности.

Все остальные обозначения—сил, стержней и узлов,—давая сокращение в письме при объяснениях, являются совершенно излишними в действительных построениях, отнимают время и могут иногда давать путаницу на диаграмме. Например, на фигуре 193 на одной линии отложено по несколько сил: $1=AB$, $2=BC$, $3=CA$ на линии AB ; $4=CD$, $9=CF$ и $13=CH$ на линии CD ; $7=BE$ и $11=BG$ на линии BG . На диаграмме фигуры 193 эти цифры пропущены.



Фиг. 193.

Государственное Техническое Издательство.

МОСКВА, Ильинка, Юшков пер., д. 6. Тел. 2-56-34.

- Креутер, Ф. Расчет и возведение каменных водоудержательных плотин. Перевод инж. Н. Анисимова. М. 1923 г. 35 стр. 19 черт. Ц. 50 к.
- Крылов, А. М. Минеральные и растительные масла для поливки инструментов, смазки машин, двигателей и разных механизмов. П. 1919 г. 89 стр. 7 рис. Ц. 85 к.
- Крылов, А. П. О специальных сортах стали. М. 1922 г. 200 стр. 32 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Куколевский, И. И., проф. Сборник нормалей деталей машин. М. 1922 г. 96 табл. 97 черт. Ц. 3 р. 25 к.
- Кюн, В. О предельных допусках в машиностроении. Перевод с немецкого проф. А. Д. Гатцука. Б. 1923 г. 246 стр. Ц. 3 р.
- Левенсон, Л. Б., проф. Общая теория машин (статика и динамика машин). М. 1923 г. 192 стр. 140 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Его же. Кинематика механизмов. М. 1923 г. 200 стр. 262 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Ломоносов, Ю. В. Тяговые расчеты. Б. 1922 г. 298 стр. 121 рис. Ц. 4 р. 15 к.
- Лукьянов, П. М., инж.-техн. Производство серной кислоты методом контактного окисления. М. 1922 г. 502 стр. 166 рис. Ц. 4 р. 95 к.
- Мартенс, Л. Литые колеса для подвижного состава железных дорог. Чугунные закаленные Гриффина и стальные Девиса. М. 1923 г. 181 стр. 150 черт. Ц. 5 р. 20 к.
- Меншуткин, Б. Н., проф. Курс общей (неорганической) химии. М. 1924 г. 373 рис. Ц. 5 р.
- Мещерский, И. В., проф. Сборник задач по теоретической механике. П. 1923 г. 140 стр. 367 рис. Ц. 1 р. 60 к.
- Моск. О-во Любит. Астрономии. Астрономический календарь на 1923 год. Под ред. инж. В. Ветчинкина. П. 1923 г. 120 стр. Ц. 1 р. 25 к.
- Оппенгейм, К. А., проф. Деревянные шпалы на русских железных дорогах с точки зрения народного хозяйства. М. 1921 г. 109 стр. Ц. 1 р. 20 к.
- Его же. Успехи заграничной техники и новейшие учения в области устройства рельсового пути (за 1912—22 гг.). М. 1923 г. 288 стр. 197 рис. Ц. 4 р. 50 к.
- Орлов, М. М., проф. Лесная вспомогательная книжка для таксации и технических расчетов. М. 1922 г. 361 стр. (76 табл.). Ц. 3 р. 90 к.
- Передерий, Г. П., проф. Курс железобетонных мостов. Изд. 2-е. П. 1923 г. 512 стр. 626 рис. Ц. 7 р. 80 к.
- Перельман, И. Я., инж. Электрофикация. Программа общего курса лекций для высших технических учебных заведений. М. 1923 г. 16 стр. Ц. 28 к.
- Его же. Электрофикация сельского хозяйства. П. 1923 г. 80 стр. Ц. 95 к.
- Его же. Электрофикация мелкой и кустарной промышленности. М. 1923 г. 80 стр. 15 рис. Ц. 1 р. 10 к.
- Пуансо, Л. Начало статики. Под ред. проф. А. Н. Долгова. П. 1920 г. 213 стр. 91 рис. Ц. 1 р. 20 к.
- Слясский, Б. Таблицы для сахароваров. Б. 1922 г. 340 стр. Ц. 2 р. 50 к. в папке.
- Соловьев, С. М., проф. Основной курс низшей геодезии. Часть I. М. 1923 г., 231 стр. 253 рис. Ц. 2 р. 75 к. и ч. II (печатается).
- Его же. То же. Часть II. М. 1924 г. 322 стр. 268 рис. Ц. 4 р. 50 к.
- Сопотцо, И. Л., инж.-электрот. Электрическое оборудование трамвайных вагонов гор. ж. д. с электрич. тягой. Практическое руководство для инженеров. М. 1922 г. 96 стр. 87 рис. Ц. 1 р. 10 к.
- Сухаревский, М., проф. Взрывчатые вещества и взрывные работы. Справочное руковод. для инженеров, техников и студентов. Т. I. М. 1923 г., 916 стр. 444 рис. Ц. 8 р.
- Его же. То же. Т. II. М. 1923 г. 462 стр. 447 рис. 7 р. 50 к.
- Тейлор, Ф. Искусство резать металлы. Б. 1922 г. 356 стр. 99 рис. 11 вкладн. табл. и черт. Ц. 4 р.
- Труфанов, А. А., инж. Речная гидрология. М. 1923 г. 84 стр. 11 рис. Ц. 1 р. 30 к.
- Федорович, О. М., проф. Каменные работы. Изд. 2-е. М. 1922 г. 276 стр. 284 рис. Ц. 3 р. 90 к.
- Федоровский, Н. М., проф. Курс минералогии: Часть I-я. Генезис минералов. М. 1923 г. 200 стр. 83 рис. Ц. 2 р. 75 к.
- Его же. Часть II. Описание минералов. М. 1923 г. 175 стр. 112 рис. Ц. 1 р. 85 к.
- Его же. Часть III. Определение минералов. М. 1923 г. 174 стр. 15 рис. Ц. 1 р. 85 к.
- Хове, Г., проф. Железо, сталь и другие сплавы. Перевод с англ. И. И. Жукова. Б. 1923 г. 535 стр. 123 рис. Ц. 5 р. (в переплете).
- Худяков, П. К., проф. Геометрический метод исследования упругой линии согнутой балки. Б. 1923 г. 129 стр. 69 рис. Ц. 1 р. 10 к.

Государственное Техническое Издательство.

МОСКВА, Ильинка, Юшков пер., д. 6. Тел. 2-56-34.

- Худяков, П. И. Как рассчитывать на крепость части машин и сооружений (курс сопротивл. материалов без высшей математики). М. 1922 г. 633 стр. 256 рис. Ц. 7 р. 80 к. (в переплете).
- Хютте. Справочная книга для инженеров, архитекторов и студентов. 10-е изд. Ч. I. Б. 1921 г. 1242 стр. 732 рис. Ц. 7 р. 80 к.
- Его же. То же. Ч. II. Б. 1921 г. 1395 стр. 1330 рис. Ц. 7 р. 80 к.
- Его же. То же. Ч. III. Б. 1921 г. 1009 стр. 1058 рис. Ц. 7 р. 80 к.
- Холмогоров, И. М., проф. Машиностроительное черчение. П. 1922 г., 38 стр. 35 черт. Ц. 80 к.
- Чарновский, Н. Ф. Век машин, или столетие непрерывных успехов технического творчества. М. 1923 г. 24 стр. Ц. 33 к.
- Чечотт, Г. О., проф. Проектирование и устройство простейших сортировочных для обогащения каменных углей. М. 1923 г. 96 стр. 122 рис. Ц. 2 р. 20 к.
- Шенфер, К. И., проф. Коллекторные двигатели переменного тока. М. 1921 г. 188 стр. 190 рис. Ц. 2 р. 30 к.
- Шмидт, Гарри. Теория относительности. М. 1922 г. 160 стр. 5 рис. Ц. 65 к.
- Шмидт, О., проф. Химия для учеников. Б. 1923 г. 192 стр. 58 рис. Ц. 2 р. 50 к.
- * Берлов, М. Н., проф. Детали машин. Выпуски III, V, VI, VII, VIII и IX.
- * Броунов, П. И., проф. Метеорология.
- * Его же. Световые явления в атмосфере.
- * Велихов, П. А. Теория инженерных сооружений.
- * Виттинг. Дифференциальное и интегральное исчисление.
- * Демьянов, Н. Я., проф. Органическая химия. Ч. III.
- * Жуковский, Н. Е., проф. Теоретические основы воздухоплавания.
- * Лахтин, Н. К. и Кашкаров, Н. А., проф. Железобетон.
- * Леонтовский, П. М., проф. Маркшейдерское искусство.
- * Малер, Г., проф. Задачник по физике, с ответами. Перев. со 2-го нем. изд. под ред. проф. В. Д. Зернова.
- * Новосильцев, И. С., горн. инж. Подземная откатка подвижными двигателями.
- * Орлов, П. М., проф. Таблицы приращений прямоугольных координат.
- * Павлов, Н. Н., проф. Расчеты в технике.
- * Подольский, И. С., проф. Строительная механика. Ч. I. (Сопротивление материалов).
- * Ридлер, Лабораторное испытание автомобиля. Перев. с нем. под ред. проф. Бриллинга.
- * Соколов, П. П., проф. Номография.
- * Станкевич, И. В., проф. Теоретическая механика для высшей школы. Ч. I и II.
- * Стиль, А. Электрическая передача энергии.
- * Стрелетский, Н. С., инж. Разводные мосты.
- * Худяков, П. К., проф. Из практики русского строительства.

М. М. К. УРОЧНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ для строительных работ в метрических и русских мерах (офици. издан.), в переплете. М. 1923 г. 334 стр. Ц. 12 р.

О'Рурк, инж. ТАБЛИЦЫ УМНОЖЕНИЯ. (Карманный справочник). Незаменимое пособие в отношении быстроты вычислений при технических, коммерческих и валютных расчетах. П. 1923 г. Ц. 2 р. 50 к.

Н. Т. О.

„ГОСТЕХИЗДАТ“.

В. С. Н. Х.

ПРАВЛЕНИЕ: Москва, Ильинка, Юшков пер., 6. Тел. 2-56-34.

КНИЖНЫЕ МАГАЗИНЫ:

Москва:

Петровка, 10, тел. 1-95-34.
Разгуляй, 38/2.



Покровка, 28.
Волхонка, 6, тел. 2-70-69.

Ленинград.

Загородный, 4, тел. 1-69-37.