

И.Т.У.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ

Провер. 1935

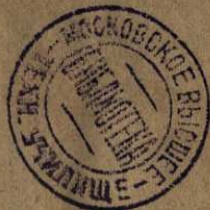
ЛѢКЦІИ

проф. Н.А.Шапошникова

курса I общ. кл.

1893-94г.

ПРОВЕРЕНО
1952



119
124110

54/5

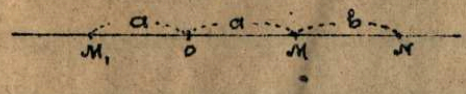
Визначі лекції розглянуто: Н. Шенюк

Введение

Определение положения точки на оси и правило знаков Декарта.

Для того чтобы определить положение точки M на оси, проводят через данную точку линию называемую осью абсцисс, берут на ней точку O , которую принимают за начало счета и определяют расстояние точки M от O . Это расстояние, выраженное как количество, называется абсциссой точки M . Возмем абсолютную величину расстояния M от O через a , т.е. $MO = a$ (фиг. 1). Значит

фиг. 1



a — есть только число, а не количество, которое по определению знаменита-

го алгебрисма Коши¹ выражается обою абсолютную величину, сопровождаемую знаком ее направления. Идея же о направлении здесь явится, если мы будем рассматривать линию как движение какой либо точки. В данном случае OM есть путь движения точки от O к M . Для определе-

1) Коши французский математик род. в Париже в 1789 г. ум. 1857 г. Его сочинение „Memoire sur l'etheorie des ondes“ где он изложил теорию волнообразного движения света вышедшее в 1815 г. открыло ему двери в академию наук

ния этого приближения, а равно и для более точного определения положения точки M на оси, вводится правило знаков, которое состоит в том, что расстояния, измеряемые вправо от точки O , принятой за начало, считаются положительными, а измеряемые влево отрицательными. Таким образом OM будет положительным, а OM_1 — отрицательным. Называя абсциссы точки M и M_1 через x и x' , а абсолютные величины OM и равной ей OM_1 через a , получим

$$x = +a \text{ и } x' = -a$$

где $(+a)$ и $(-a)$ суть координаты

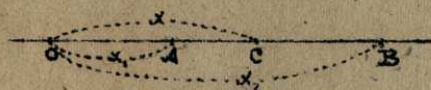
Во внешней математике определение линии есть только что приведенное и потому для выражения ее в ее абсолютной величине придается также знаки $(+)$ или $(-)$, смотря потому, применит ли движение точки слева направо или справа налево. В первом случае она будет положительной, а во втором отрицательной. Например линия $MN = +b$, а $NM = -b$ (рис. 1). Считая ось абсцисс с левой стороны на правую, всякому отрезку придается знак $(+)$ если он беретя вправо и $(-)$ если он беретя влево. Это правило называется правилом знаков Декарта.

Задача На оси даны точки A и B (рис. 2) найти

точку C так, чтобы OC относился к OB как $m:n$?

Эту задачу можно решить так, чтобы получить общую формулу. $AB = x_2 - x_1$, где x_2 будет абсцисса точки B , а x_1 — абсцисса точки A , тогда $OC:CB = m:n$

рис. 2



или $OC:(OC+CB) = m:(m+n)$

но $OC+CB = AB = x_2 - x_1$, и имеем: $OC:(x_2 - x_1) = m:(m+n)$

откуда

$$OC = \frac{m(x_2 - x_1)}{m+n}$$

OC может быть положительная и отрицательная.

Назовем эту величину x искою абсциссу, — тогда $x = x_1 + OC$ или подставляя величину OC , получим самую абсциссу искою точки C

$$x = x_1 + \frac{m(x_2 - x_1)}{m+n} = \frac{mx_1 + nx_1 + mx_2 - mx_1}{m+n} = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

Формула эта всегда имеет в действительности

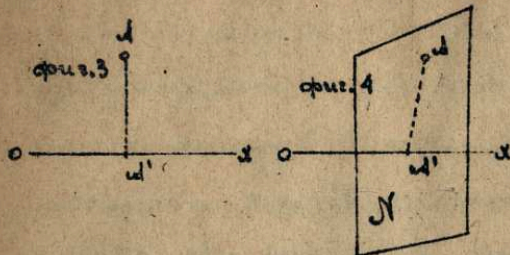
когда $m=n$ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

О проекциях

Аналитическая геометрия была создана французскими философами и учеными Декартом (1596 — 1650), но для изучения ее надо предварительно познакомиться с методами проекций, введенными французскими математиками Понселе.

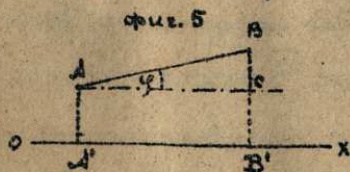
Вспомогательная линия OX и прямая OX , на-

звательно ось проекций, требуется найти проекцию точки A на этой оси.



Если точка A и ось OX находятся на одной плоскости (фиг. 3), то надо опустить из A перпендикуляр на OX и точка пересечения их A' будет проекцией точки A . Если ось OX и точка A лежат в разных плоскостях (это понимать можно так: образовать, что прямая находится в плоскости чертежа, а точка — нет), то через A (фиг. 4) проводим плоскость N перпендикулярную к оси; точка A' пересечения этой плоскости с осью OX и будет проекцией точки A ; если мы точку A' соединим с A , то линия AA' будет перпендикулярна к OX .

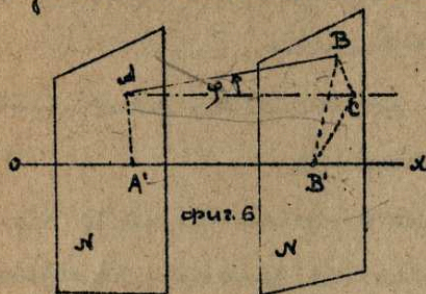
Чтобы найти проекцию прямой линии надо найти проекции крайних ее точек и считать направление проекции от проекции начала линии до проекции конца ее (фиг. 5). Так $A'B'$ есть проекция линии AB , когда линия и ось проекций лежат в одной плоскости; на фиг. 6



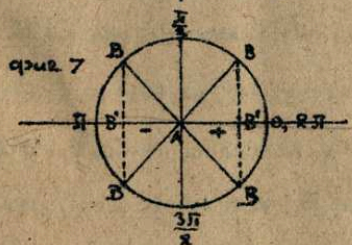
и ось проекций лежат в одной плоскости; на фиг. 6

и ось проекций лежат в одной плоскости; на фиг. 6

представлены случай нахождения проекции линии AB , когда эта линия и ось проекций не лежат в одной плоскости. В обоих случаях проекция положительна, так как идет в направлении огиба направо. Если через начало



и линии AB проведем линию AC параллельно OA вправо и угол между AC и AB , отсчитываемый по направлению обратно часовой стрелки, назовем через φ , то $\angle \varphi$ будет называться углом отклонения линии от оси проекций. Между углом φ и направлением линии AB , а следовательно и знаками $(+)$ и $(-)$ проекции существует строгое соотношение. Если $\varphi < \frac{\pi}{2}$ или $\varphi < 2\pi$, но $> \frac{3}{2}\pi$, то B' будет вправо от A' (где A' считается за начало линии $A'B'$) и проекция будет положительна. Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$ но $< \pi$ или $\varphi > \pi$ но $< \frac{3}{2}\pi$ то B' будет влево от A' и проекция будет отрицательна. Если



$\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ то проекция будет равна 0. На фиг. 7 показаны эти положения.

Теорема I Проекция линии на ось равна
ся произведению проектируемой линии на
косинус угла отклонения

Теорема эта определяет не только абсолютную
величину проекции но и знак ее.

В зависимости от угла отклонения φ прое-
ктируемая линия AB может располагаться во
всех четырех квадрантах, т.е. φ может быть
1) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; 3) $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ и 4) $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$.

Во всех этих случаях доказательство будет
несколько отличаться одно от другого и так как
теорема I имеет всеобщее значение, то мы
и разберем все 4 случая

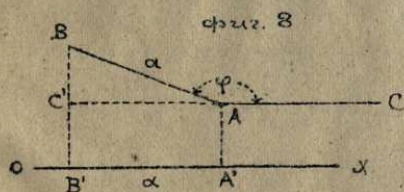
Случай 1 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Для доказательства приме-
нем AB параллельно Ox до пересечения с BB' в то-
чке C (фиг. 5), тогда $AC = A'B'$ как стороны паралле-
лельных между параллельными. Из прямоуголь-
ного треугольника ABC имеем $AC = AB \cdot \cos \varphi$ и $AB \cdot \cos \varphi = A'B'$.
Обозначим через a абсолютную величину AB ,
через α - проекцию и $\varphi < \angle CAB$. Так как $A'B'$ выра-
жает абсолютное значение $A'B$, а α - положитель-
но ибо $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и проекция направлена слева направо,
то и α может заменить $A'B'$ на том же основании,
что абсолютные величины можно заменить только

положительными числами. Обозначим длину

$$a = a. \cos \varphi$$

Если бы AB и OX не лежали в одной плоскости, то пришлось бы линию AB проецировать до встречи с плоскостью N в точку C (фиг. 2) и соединить C с B' , $AC = A'B'$, как отрезки прямых между параллельными плоскостями. Остальное доказательство осталось то же самое. Величина a есть число, а не количество, т. е. направление, а следовательно и знак определяет угол φ

Случай 2. $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ Через точку A проводим линию AC вправо (фиг. 3). Угол отклонения φ , отскиты важный по направлению обратно каловой стрелки будет $> \frac{\pi}{2}$ и $< \pi$. Занеим линию AC проецируем вправо до встречи с BB' в точку C' . Из прямо



угольного треугольника $BA'C'$, имеем $AC = A'B' = A'B$. $\cos BAC'$; Обозначим проек $A'B'$ через a , где a само по себе отрицательно

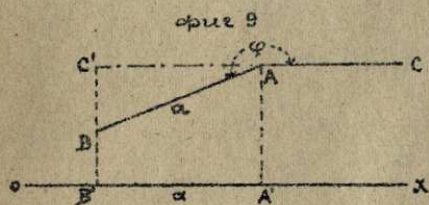
Пребуется поставить перед a знак $(-)$, чтобы аднать a положительной и тогда только можно будет заменить абсолютную величину aB' . AB заменим абсолютной величиной a и

$\angle BAC'$ через $(\pi - \varphi)$ тогда имеем:

$$-\alpha = \alpha \cos(\pi - \varphi) = -\alpha \cos \varphi,$$

$$\alpha = \alpha \cos \varphi$$

Случай 3 $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$ Рассмотрим угол отклонения



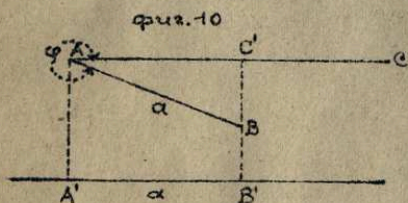
φ линии AC и BB' продолженные до взаимной встречи в O' ; из $\triangle O'AB$ имеем $C'A = A'B' = AB \cos \angle O'AB$.

замкнутая дуга $A'B'$ через $-\alpha$ (на том же же основании как и во 2 случае) AB через α и угол $O'AB$ через $(\varphi - \pi)$ имеем:

$$-\alpha = \alpha \cos(\varphi - \pi) = \alpha \cos(\pi - \varphi) = -\alpha \cos \varphi$$

$$\alpha = \alpha \cos \varphi$$

Случай 4 $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$ Построим угол отклонения и продолжим BB' до



пересечения с AC имеем прямоугольный треугольник $C'AB$ (фиг. 10). Из него выводим $AC' = A'B' = AB \cos \angle C'AB$

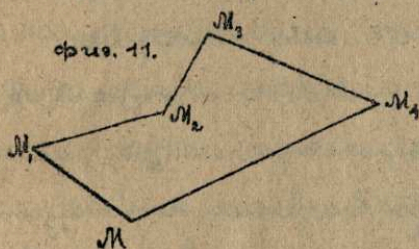
Всякая такая замена, что и ранее, имеем:

$$\alpha = \alpha \cos(2\pi - \varphi) = \alpha \cos \varphi$$

Рассмотрим частные случаи этой теоремы: когда

$\varphi = 0$, то $\cos \varphi = 1$ и $A'B' = AB$; когда $\varphi = \pi$, то $\cos \varphi = -1$ и $A'B' = -AB$; когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3}{2}\pi$, то $\cos \varphi = 0$ и проекция $AB = 0$

Если отъ многоугольника отнимемъ какую нибудь сторону, то получится ломаная линия, которая называется разорваннымъ многоугольникомъ, а отнятая линия — замыкающей стороной, такъ многоугольникъ $M_1 \dots M_n$



фиг. 11.

(фиг. 11) безъ стороны M_1M_4 будетъ разорваннымъ, а M_1M_4 — замыкающей стороной. Относительно этой стороны разорванного

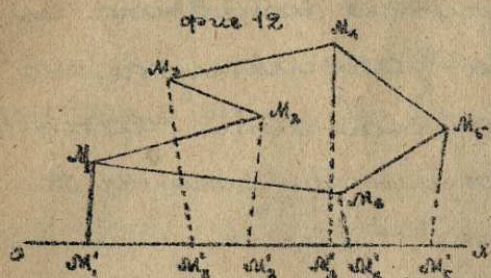
многоугольника и замыкающей стороны вводится условие: направление стороны многоугольника читается въ одну сторону, а направление замыкающей — въ другую.

Определение Проекция ломаной линии равна алгебраической суммѣ проекцій составляющихъ ея частей ломаной.

Теорема 2. Сумма проекцій сторонъ разорванного многоугольника равна проекции замыкающей стороны.

Проектируемъ разорванный многоугольникъ $M_1, M_2, \dots, M_n$ на ось проекцій ox (т.е. не вѣз стороны многоугольника находится въ одной плоскости съ линіей ox , то и не вѣз проектирующія линіи на

свертывается в линию на перпендикулярном. Складываясь в эту сторону



смысл в эту сторону проекция линии $M_1 M_2$ и $M_2 M_3$ в алгебраическом смысле, т.е. с учетом направления. Имеем

$$M_1' M_2' + (-M_2' M_3') = M_1' M_3';$$

То $M_1' M_2$ складывается проекцию линии $M_2 M_3$, имеем $M_1' M_2' + M_2' M_3' = M_1' M_3'$ и т.д. Мы видим, что сумма проекций зависит лишь от начала и конца и совсем не зависит от промежуточных точек. Опоясав сферой проекций разноточного многоугольника $M_1, \dots, M_n$ будем иметь сумму $M_1' M_n'$, т.е. проекцию замыкающей стороны $M_1 M_n$. Обозначив стороны разноточного многоугольника последовательно через $a, a_1, a_2, \dots, a_n$, а углы отклонения этих сторон через $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ будем иметь

$$a \cos \varphi + a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 + \dots + a_n \cos \varphi_n = A \cos \varphi,$$

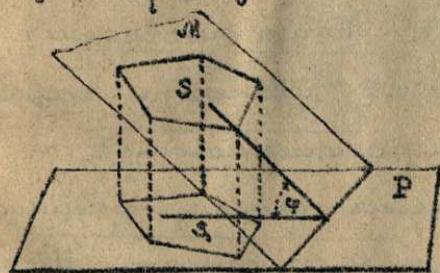
где A — замыкающая сторона, а φ — угол отклонения ее. Если мы будем рассматривать замкнутый многоугольник, то сумма проекций всех его сторон на ось равно 0, при условии, если мы примем направление всех сторон

одинаковое, т. е. конец одной стороны служит началом другой. Эта теорема есть следствие предыдущей. Мы уже видели, что сумма проекций зависит лишь от начала и конца ломаной и совсем не зависит от промежуточных точек. В замкнутой многоугольной ломаной начало и конец совпадают в одну точку и проекция или обращается в точку, т. е. равна по величине 0. Выразая это равенство символически, имеем

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \cos \varphi_i = 0$$

Проекция площадей

Возьмем в пространстве площадь, ограниченную произвольным контуром, и проектируем эту площадь на данную плоскость проекций



на данную плоскость проекций P (рис. 13). Чтобы получить проекцию рассматриваемой площади, рассмотрим

это из всех точек ее контура опущены перпендикуляры на плоскость P подошвы этих перпендикуляров ограничат на плоскости P площадь, которая и будет проекцией данной площади. Пусть величина данной площади будет

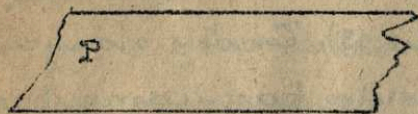
S , а величина площади ее проекции S_1 и площади той плоскости M , в которой лежит данная площадь S делится ее плоскостной проекцией P углом φ , тогда можно доказать, что $S_1 = S \cos \varphi$.

Теорема Проекция площади равна проектируемой площади, умноженной на $\cos$ угла, образуемого ее плоскостью с плоскостью проекции

Для доказательства мы напомним ее рассмотрение простейших случаев

I Рассмотрим вначале проекцию площади треугольника, одна из сторон которого параллельна плоскости проекции; пусть это будет сторона AB треугольника ABC . Тогда проведем через AB плоскость параллельную плоскости P , и возведем проекцию площади ABC на эту вспомогательную плоскость. Очевидно, что такая проекция будет равна проекции на плоскости P . Чтобы получить эту проекцию, опустим из точки C (рис. 14) перпендикуляр на плоскость, параллельную плоскости P и соединим его паденью C_1 с A и B . Треугольники ABC , будет

рис. 14



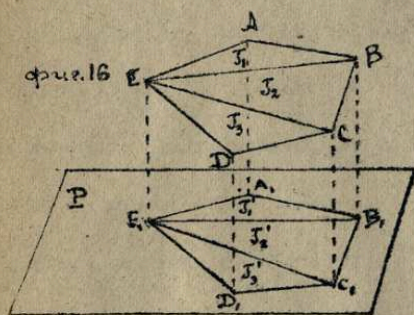
сторона AB треугольника ABC . Тогда проведем через AB плоскость параллельную плоскости P , и возведем проекцию площади

ABC на эту вспомогательную плоскость. Очевидно, что такая проекция будет равна проекции на плоскости P . Чтобы получить эту проекцию, опустим из точки C (рис. 14) перпендикуляр на плоскость, параллельную плоскости P и соединим его паденью C_1 с A и B . Треугольники ABC , будет

треугольника ABC . Проведем из данной точки B и C , до встречи в точке D и соединим точку D с точкой A ; мы получим треугольник ADC , проекцией которого очевидно будет $A_1D_1C_1$, следовательно мы можем написать что $A_1D_1C_1 = ADC \cdot \cos \varphi$, подобно этому треугольник DAB , есть проекция $D_1A_1B_1$; следовательно $D_1A_1B_1 = DAB \cdot \cos \varphi$ вычитая из первого равенства второе, получим

$$B_1A_1C_1 = BAC \cdot \cos \varphi$$

III. Докажем далее ту же теорему для площади произвольного многоугольника. Помогим,



это площадь данного многоугольника есть S (фиг. 16); разделим его диагоналями проведенными из одной вершины, на треугольники и по-

скольку все эти треугольники обозначим по порядку: $T_1, T_2, T_3, \dots$, тогда будем иметь $S = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$; проектируем все эти площади на плоскость проекций и назовем через S_1 проекцию площади многоугольника, а через $T'_1, T'_2, T'_3, \dots$ проекции площадей треугольников $T_1, T_2, \dots$ тогда очевидно будем иметь $S_1 = T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n$.

При этом для проекций площадей треугольников
имеем по доказанному, что $S'_1 = S_1 \cos \varphi$; $S'_2 = S_2 \cos \varphi$... Сум-
мируя все эти равенства, имеем

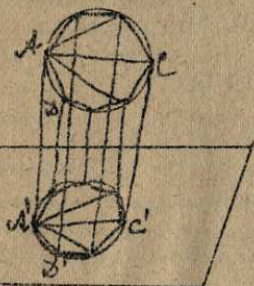
$$S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n = \cos \varphi (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \text{ или}$$

$$S' = S \cdot \cos \varphi$$



IV. Наконец легко будет доказать эту теорему

фиг. 17



для произвольной криволи-
нейной площади (фиг. 17).

Рассмотрим произволь-
ную криволинейную площадь
 S и ее проекцию S_1 . Впи-
шем в контур площади S произвольный много-

угольник, который также проектируем на плос-
кость проекций; он имеет, очевидно, проекцию
многоугольника, вписанного в контур площади S_1 .
Площадь многоугольника вписанного в S обозна-
чим через Q , а площадь многоугольника, вписан-
ного в S_1 , который есть проекция Q через Q_1 , то-
гда будем иметь $Q_1 = Q \cdot \cos \varphi$. Это равенство все-
гда будет верно, каково бы ни было число сторон
вписанного многоугольника. Представим, что чи-
сло сторон вписанного многоугольника возра-
стает до ∞ и что каждая из сторон стре-
мится согнуться бесконечно малой, тогда предель-

площади Q будет площадь S , а предвѣтъ площади Q будетъ S_1 ; и по способу предвѣтовъ заключаемъ, что такое же равенство будетъ существовать и между предвѣтами; следовательно въ предвѣтъ получимъ

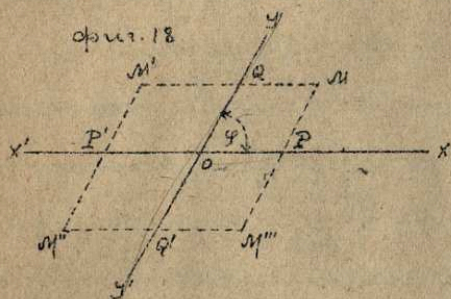
$$S_1 = S \cos \varphi$$

Такимъ образомъ наша теорема доказана вполне.

Определение положенія точки на плоскости

I Координаты прямоугольныя

Способомъ имѣемъ систему прямыхъ пересѣкающихся линій xx' и yy' (фиг. 18), называемыхъ осями координатъ.



Прямая xx' носитъ названіе оси $x^{\text{вз}}$ или осью абсциссъ, а прямая yy' - оси $y^{\text{вз}}$ или осью ординатъ. Пересѣченіе

ихъ даетъ точку O принимаемую за начало координатъ. Уголъ φ , считаемый въ направленіи обратномъ часовой стрѣлкѣ - координатнымъ угломъ.

Съ помощью этихъ данныхъ положеніе любой точки на плоскости можно точно определить. Черезъ какую нибудь точку M проводимъ линіи MQ параллельно оси $x^{\text{вз}}$ и PM параллельно оси $y^{\text{вз}}$, тогда величинами и направленіями этихъ линій точка M

вполне определяется. Линии эти определяющие положение точки называются ее координатными и символически точка ее координатными обозначается так: $M(x, y)$, где x , — обозначается всегда абсциссу точки, а y , — ее ординату. Координаты должны быть всегда действительны и могут изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; при этом абсциссы, направленные по отрезку Ox и ординаты по отрезку Oy имеют знак $(+)$, а абсциссы, направленные по Ox' и ординаты по Oy' — отрицательны и сопровождаются знаком $(-)$. Положительные абсолютные величины абсциссы точек M, M', M'', M''' равны a и абсолютные величины ординаты — b , тогда их координаты точек $M(a, b), M'(-a, b), M''(-a, -b)$ и $M'''(a, -b)$.

Равно, если даны координаты точки, то ее можно построить. Дана точка $M'(-2, 3)$, откладываем по линии Ox две единицы в данном масштабе и из конца отложенной линии проводим вверх перпендикуляр $F'M'$ (фиг. 18) и на ней откладываем величину, равную 3 единицам; точка M' и будет искома.

Если угол φ острый или тупой, то система координат называется косугольной и если $\angle \varphi$

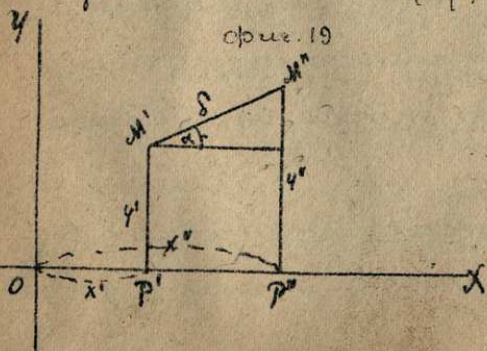
прямой, то получится система прямоугольных. Три последних системы много соотношения выстраиваются гораздо проще, чем при косугольной. Она собственно и была предложена Декартом. Три не только линии MP и MQ будут перпендикулярны к осям координат.

Разберем некоторые частные случаи построения точки

- 1) Точка лежит на оси x^b , как P и P' , тогда ее координаты будут $x = \pm a, y = 0$
- 2) Точка лежит на оси y^b , как Q и Q' , тогда $x = 0, y = \pm b$
- 3) Точка лежит в начале координат $x = 0, y = 0$

Разсмотрим теперь, как выражаются аналитически (с помощью координат) свойства прямой линии. 1) величина, 2) направление и 3) положение на плоскости.

Рассмотрим линию MM' , отнесенную к прямоугольным



координатами (фиг. 19). Из M проведем линию MN параллельно оси x^b ; из $\Delta MM'N$ определим величину MM'

$$(MM')^2 = \delta^2 = (MN)^2 + (M'N)^2$$

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ откуда } \delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Направление линии MM' вполне характеризуется углом α и из того же треугольника $MM'N$ имеем

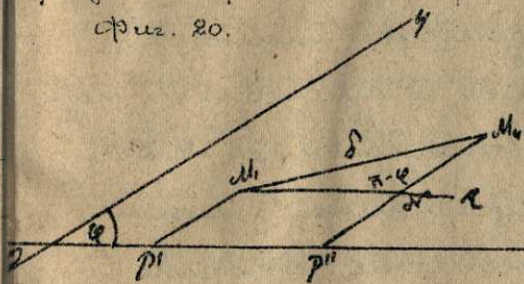
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M'N}{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Положение на плоскости определяется положениями точек M и M' .

Задача 1 Даны прямоугольные координаты двух точек на плоскости, найти расстояние между ними.

Сейчас мы рассмотрим расстояние между двумя точками, без прямоугольных осей координат рассмотрим теперь более общий случай, когда

фиг. 20.



оси косоугольны (фиг. 20).

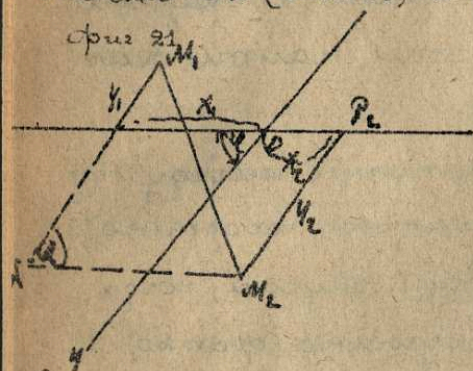
Имеем точку $M'(x_1, y_1)$ и $M''(x_2, y_2)$. Расстояние $M'M'' = \delta$. Линия $M'N$ параллельна оси X и угол $M'NM''$ равен $(\pi - \varphi)$,

так как он есть дополнение угла φ до π , ибо они имеют параллельные стороны, но направления в разные стороны. Из $\triangle M'NM''$ имеем $\delta^2 = M'N^2 + M''N^2 - 2M'N \cdot M''N \cos M'NM''$ или подставляя значения $M'N$, $M''N$ и $\angle M'NM''$ имеем

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \varphi$$

так как $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$.

Для того, чтобы показать, что выведенная формула разности остается та же самая при любых расположениях осей и точек, разберем следующий случай. Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ по системе прямоугольных координат, у которой за положительное направление оси $X^{вз}$ считаем Ox (вправо) и за положительное направление оси $y^{вз}$ — Oy (вниз).



Строим координаты точек и соединяем точки линией M_1M_2 ; величину ее обозначим через d . Проведем линию M_1P .

Вниз до пересечения в точке N с линией NM_2 параллельной оси $X^{вз}$; или из треугольника M_1, N, M_2 с $\angle M_1NM_2 = \varphi$; из этого треугольника имеем такое косинусовское соотношение сторон

$$d^2 = M_1N^2 + M_2N^2 - 2M_1N \cdot M_2N \cdot \cos \varphi, N M_2$$

Выразим M_1N и M_2N через координаты точек M_1 и M_2 , присем, по правилу, абсолютных величин будем считать только положительными

$$M_2N = OP_1 + OP_2 = x_1 - x_2$$

перед x_2 ставим $(-)$ для того чтобы считать x_2 количеством положительным

$$M, N = M, P_1 + P, N = -y_1 + y_2$$

Заметьте, что $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$ подставив эти значения в формулу расстояния, получим:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) \cos \varphi = \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_2 - y_1) \cos \varphi \end{aligned}$$

Если примем $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. прямоугольные оси координат, то будем иметь $\cos \varphi = 0$ и

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

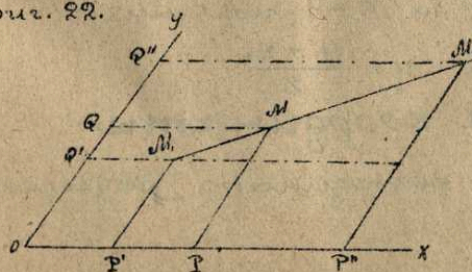
Если одна из точек поместим M , совпадает с началом координат то $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ и тогда расстояние выразится так:

$$\delta^2 = x_2^2 + y_2^2$$

Формула эта дает расстояние точки от начала координат.

Задача 2 Даны координаты двух точек на плоскости, найти координаты точки, делящей прямую, соединяющую две данные точки в данном отношении $m:n$.

фиг. 22.



Пусть две данные точки будут $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (фиг. 22), поместим координаты косоугольными и построим точки M_1 и M_2

по данным координатам. Пусть точка M будет исконая, тогда, по условию, должны иметь $M_1M: M_2M = m:n$, координаты точки M обозначим через x и y . Проведем через точки M_1 , M и M_2 или, параллельные оси координат и определим точки P' , P и P'' в которых они пересекаются ось абсцисс; будем иметь $\frac{M_1M}{M_2M} = \frac{P'P}{P''P} = \frac{m}{n}$. Проверка, что отыскание точки P сводится к такому выражению на разделение расстояний между точками P' и P'' в отношении $m:n$. Эта задача решена нами раньше. Также как точка P имеет ту же абсциссу, как точка M то по выше приведенной формуле будем иметь

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \quad \text{и} \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

выражение для y уже получили, проведе через точки M_1 , M и M_2 параллели оси абсцисс. Если отношение $\frac{m}{n}$ выразим через K , то формулы примут такой вид:

$$x = \frac{x_1 + Kx_2}{K+1} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + Ky_2}{K+1}$$

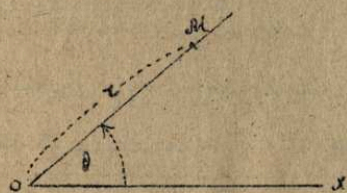
В частном случае, когда $K=1$, имеем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Полярные координаты

Из различных систем координат разберем еще одну - полярную.

Возьмем на плоскости постоянную точку O , которая будет называться полюсом, проведем через нее постоянную прямую Ox , называемую полярной осью; для определения положения точки M (рис. 23) соединим ее с полюсом и изм-

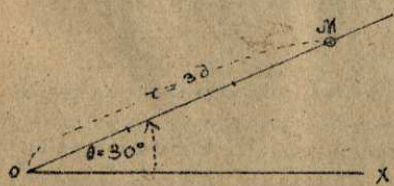


ерим угол $MOx = \theta$, а также абсолютную величину $OM = r$. Если эти две вели-

чины будут известны, то положение точки на плоскости будет вполне определено. Величинами θ и r называются поэтому полярными координатами точки M .

Угол θ называется полярным углом или амплитудой; величина r — радиусом вектора. Угол θ считается от линии Ox в одну сторону против часовой стрелки от $0 - 2\pi$. Радиус вектор r измеряется от 0 до $+\infty$. Чтобы по данным ко-

рис. 24



ординатных точки M (рис. 24) построить эту точку, поступим так: Положим дано $\theta = 30^\circ$ и $r = 3$ дюйма, тогда стро-

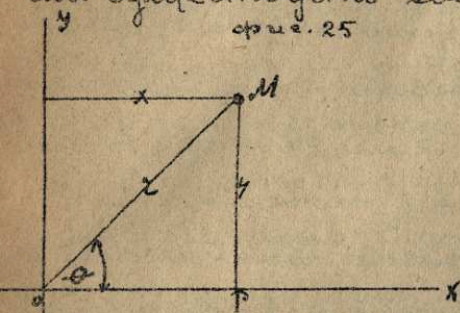
им полярный угол $= 30^\circ$ на оси Ox при точке O и

на другой стороне его OM откладываем OM равный радиусу вектору $r = \rho$. Точка M и будет искомого

Соотношение между прямоугольными и полярными координатами

Между прямоугольными и полярными координатами существуют соотношения, которые позволяют

рис. 25



одни заменить другими.

Примем начало координат O — полюс (рис. 25) и пополюсному отложим

по Ox ось x и по Oy ось y .

тогда, соединив точку O с M получим ее полярные координаты: $\angle MOx = \theta$ и $OM = r$. Из прямоугольного треугольника OMP находим

$$x = r \cdot \cos \theta ; \quad y = r \cdot \sin \theta$$

Возведем эти формулы в квадрат и сложим их, имеем $x^2 = r^2 \cos^2 \theta$; $y^2 = r^2 \sin^2 \theta$; $x^2 + y^2 = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2$ откуда $r = \sqrt{x^2 + y^2} \dots \dots (1)$

Разделив y на x , получим

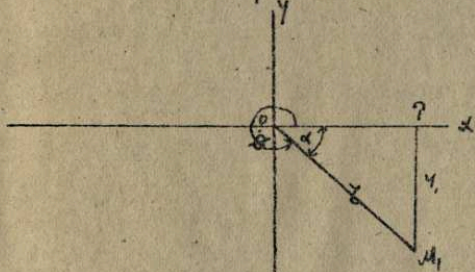
$$\tan \theta = \frac{y}{x} \dots \dots (2)$$

Эти две формулы показывают соотношение между прямоугольными и полярными координатами и дают возможность одну заменить другой

Радиус r принимаюте абсолютной величиной, вследствие этого по формулам $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$, $\cos \theta$ и $\sin \theta$ имеют те же знаки, как x и y .

эти знаки определяют четверть, в которой лежит конец дуги. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит теперь во 4-й четверти; разберем соотношение

фиг. 26



между координатами, определяющими ее во прямой и полярной системах. (фиг. 26).

Из $\triangle POM_1$ имеем

$OP = OM_1 \cos \alpha$; $M_1P = OM_1 \sin \alpha$; $x = r \cos(2\pi - \theta) = r \cos \theta$ и $-y = r \sin(2\pi - \theta) = -r \sin \theta$; $y = r \sin \theta$. Возведя в квадраты полученные результаты в квадрате и сложив, имеем $r = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$; разделим формулы x и y на другую получим

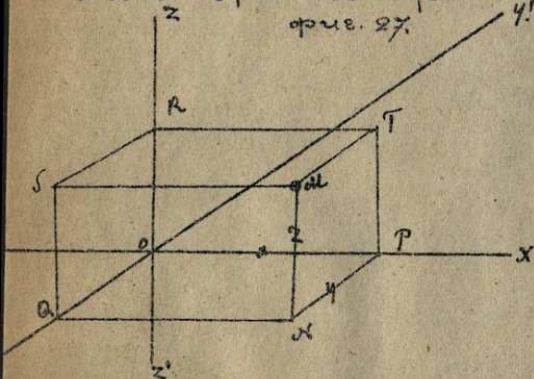
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-y}{x} = -\operatorname{tg} \theta; \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

Определение положения точки
в пространстве

1. Координаты прямоугольные

Для определения положения точки в пространстве, ее относят к трем взаимно перпендикулярным или во общем случае произвольно расположенным пересекающимся плоскостям.

даны. Эти плоскости пересекаются в одной точке по трем взаимно перпендикулярным, называемым осями координат. Общая точка пересечения трех плоскостей есть начало координат. При плоскостях пересечения образуются восемь октантов. Чтобы представить три плоскости координат на чертеже, покажем, что одна из этих плоскостей совпадает с плоскостью чертежа, другую плоскость, которая пересекается с плоскостью чертежа по прямой ZZ' , а с третьей пересекающейся с плоскостью чертежа по прямой XX' , — по прямой YY' , (рис. 27). Прямые XX' , YY' и ZZ' суть оси координат. Эти три плоскости для краткости будем называть плоскостью XOY — плоскостью XY , плоскостью XOZ — плоскостью XZ и плоскостью YOZ — плоскостью YZ . При начале координат O мы имеем 8 октантов, а именно углы $OXYZ$, $OX'YZ$, $OXY'Z$ и $OX'Y'Z$, а другие четыре под плоскостью XY . Пусть M будет произвольная точка в пространстве



М будет произвольная точка в пространстве

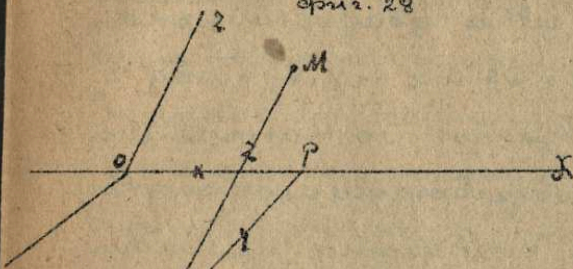
Через эту точку проведем три плоскости, параллельные плоскостям координат; эти три плоскости вместе с плоскостями координат ограничат параллелепипед, который будет косой если ее координаты образуют острые или тупые углы.

Нарисуем этот параллелепипед, помня, что точка M находится внутри тетраэдра $Oxyz$. Проведенные нами три плоскости $MP \parallel yz$, $MQ \parallel xz$ и $MR \parallel xy$, определяют на осевых координатах три отрезка, считаемые от O . Напишем чертёж эти отрезки суть OP , OQ и OR . Очевидно, что если мы будем знать величины этих отрезков и направление, по которому каждый из них должен быть отложен на соответствующей оси, то положение точки M будет вполне определено. Действительно, отложив эти отрезки и проведя через точки P , Q и R три плоскости параллельные плоскостям координат, мы в пересечении их получим точку M . Направление этих отрезков обозначается посредством знаков $(+)$ и $(-)$, приписываемых числом, выражающему длину отрезков. При этом принимают следующие

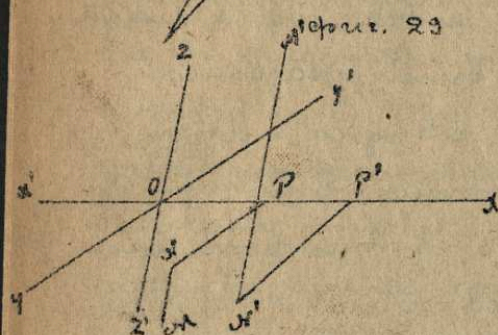
условия: числ. выражающие величину отрезка, помноженного на части Ox, Oy, Oz сопровождаются знаком $(+)$, а на части Ox', Oy', Oz' , знаком $(-)$. Приняв это во внимание, будем называть буквенно x алгебраическое количество, представляющее величину отрезка, помноженного на оси Ox с его знаком; также буквенно y - алгебраическое количество, представляющее величину отрезка, помноженного на оси Oy с его знаком, и наконец буквенно z - алгебраическое количество, представляющее величину отрезка на Oz' с его знаком. Тогда, очевидно, эти три величины будут декартовыми для определяемых положений точек в пространстве и поэтому алгебраические количества x, y, z называются координатами точки M . На наименьшем чертеже все три отрезка помечены; пусть $OP = a, OQ = b$ и $OR = c$ тогда для точки M будем иметь координаты: $x = +a, y = +b$ и $z = +c$. Заметим, что на наименьшем чертеже мы имеем $OP = MS = PR = RQ$ и так как $x = MS$ то мы можем сказать, что координата x есть расстояние точки M от плоскости yz , считаемое по направлению, параллельному оси Ox и сопровождаемое соответствующим знаком. Подобно

ну, так как $OP = OQ = RS = MT$ и $y = MT$, y есть расстояние точки M от пл. xy , взятое по направлению, перпендикулярному оси z^b с положительным знаком. Наконец $MN = OR = PQ = QS$ и $z = MN$; следовательно M от пл. xy , взятое по направлению, перпендикулярному оси z^b и сопровождаемое соответствующим знаком. Для построения прямоугольных координат данной точки нет необходимости непременно строить вышеуказанной параллелепипеда, достаточно, очевидно, построить ломаную линию $MNPO$, потому что три стороны этой линии представляют три координаты точки M , а именно: $OP = x$, $PN = y$ и $MN = z$. Поэтому, чтобы получить координаты данной точки M , проводят через нее перпендикуляр оси Oz до встречи с плоскостью xy в точке N , потом через N проводят перпендикуляр оси Oy до встречи с осью x^b таким образом получим три координаты: $OP = x$, $PN = y$ и $MN = z$. Обратно, всякую точку, координаты которой даны, можно построить тем же образом, откладывая последовательно три стороны ломаной линии $OPMN$, причем направления этих сторон указываются знаками данных координат x , y и z (фиг. 23)

Таким образом, если даны три координаты
фиг. 28



(фиг. 29): $x = +2$ $y = +3$ и $z = -1$ тогда построим прямую линию $OPMN$ и найдем плоскость OMN . Заметьте, что которые части линии положе-
ния точки в пространстве:
1) Показывая, что данная точка находится в плоскости yz , как точка S (фиг. 27) для такой точки

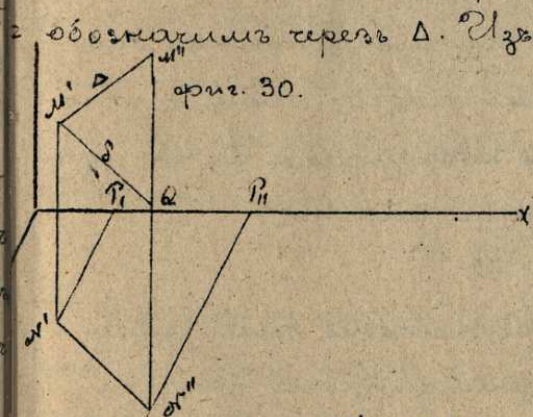


будем иметь $x = 0$, $y = b$ и $z = c$. Если точка лежит в плоскости xy , как точка N , то будем иметь: $z = 0$, $x = a$ и $y = b$ 3) Если точка лежит в плоскости xz как точка S , то для этой точки $y = 0$, $x = a$ и $z = c$ 4) Если точка лежит на оси x , как точка P , то для нее имеем: $y = 0$, $z = 0$ и $x = OP = a$ 5) Если точка лежит на оси y , как точка N , то для нее имеем: $x = 0$, $z = 0$ и $y = ON = b$ 6) Если точка лежит на оси z , как точка Q , то для нее имеем: $x = 0$, $y = 0$ и $z = OQ = c$ и т. д.

Если плоскости координат пересекаются под произвольными углами то они образуют косоугольную систему координат; в случае

нось мутая, когда три плоскости координат взаимно перпендикулярны, то они образуют систему прямоугольных осей координат. Все это было сказано о косугольных координатах применивается без всякого изменения и к прямоугольным, разница будет лишь в том, что построенный выше параллелепипед из какого состоит прямоугольных

Задача 1. Даны прямоугольные координаты двух точек в пространстве, найти расстояние между этими точками. При решении этой задачи мы будем для простоты полагать координаты прямоугольными. Пусть, координаты двух данных точек $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'', z'')$. Возьмем эти точки расстояние между ними $M'M''$



обозначим через Δ . Из данных точек M' и M'' опустим перпендикуляры на плоскость xy , $M'N'$ и $M''N''$, и потом из точек N' и N'' опустим перпендикуляры на ось x . Мы получим таким образом координаты точек M' и M'' , а именно (фиг. 30) $x' = OP'$, $y' = P'N'$ и $z' = N'M'$; $x'' = OP''$, $y'' = P''N''$ и $z'' = N''M''$

Далее через $M'N'$ и $M''N''$ проведем плоскость, которая. Геом. Лист 5.

тораз пересекется плоскости $x'y$ по линии $N'N''$ и из точки M' - линию, параллельную $N'N''$ и обозначим ее через δ , так, что $M'Q = N'N'' = \delta$. Из прямоугольного треугольника $M'M''Q$ имеем $\Delta^2 = \delta^2 + M''Q^2$, но $M''Q = z'' - z'$ так, что $\Delta^2 = \delta^2 + (z'' - z')^2$. Определим δ ; для этого рассмотрим две точки N' и N'' , координаты которых на плоскости $x'y$ будут соответственно (x', y') и (x'', y'') , поэтому δ можно определить, как расстояние двух точек N' и N'' , данных на плоскости $x'y$ по формуле уже известной, а именно

$$\delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$$

Вставив это выражение в предыдущее уравнение получим

$$\Delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$$

Эта формула определяет квадрат расстояния точек в пространстве для прямоугольных координат. Заметим частный случай: если точка M' совпадает с началом координат O , то можно положить: $x' = y' = z' = 0$, и будем иметь:

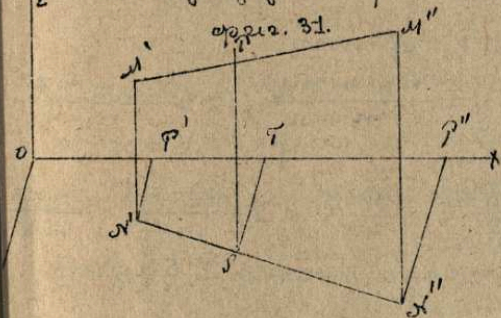
$$\Delta^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$$

Эта формула квадрата расстояния была выведена при частном расположении данных точек, тем не менее мы можем быть уверены, что она будет обща и останется без изменений, если бы данная точка не находилась

Задача 2 Даны координаты двух точек в пространстве, найти координаты точки делителей линии соединяющей данную точки в отношении $m : n$.

Эта задача решается одинаково, как при прямо-угольном, так и при косугольном координатах.

Здесь будем рассматривать косугольные координаты, чтобы получить



более общее доказательство формулы, определяющей координаты.

Пусть (фиг. 31) координаты двух данных точек бу-

дут $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'', z'')$ Возьмем косуголь- ный век, построим координаты данной точки.

Соединим точки M' и M'' прямой линией. Пусть будет некоторая точка на линии $M'M''$, тогда мы должны иметь следующую пропорцию:

$$PM' : PM'' = m : n$$

Координаты точки P обозначим через (x, y, z) и вы- кажем их через координаты данных точек.

Для этого проведем через точки $M'P$ и M'' плоскости параллельные yz и определим точки P' , T и P'' в которых они пересекаются с осью x . Тогда кон-

отрезки двух прямых между тремя параллельными плоскостями пропорциональны, то

$$P'P : PP'' = N'S : SN'' = M'P : PM'' = m : n.$$

Таким образом вопрос об отыскании $x = OS$ приводится к нахождению координат между двумя точками P' и P'' на оси x в отношении $m : n$. Эта задача решена при определении поворотов точки на оси. Так как $OP' = x'$ и $OP'' = x''$ то

$$x = \frac{nx' + mx''}{m+n} \quad \text{и} \quad y = \frac{ny' + my''}{m+n}; \quad z = \frac{nz' + mz''}{m+n}$$

Если отношение $m : n = k$ то

$$x = \frac{x' + \frac{m}{n}x''}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{x' + kx''}{1+k}; \quad y = \frac{y' + \frac{m}{n}y''}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{y' + ky''}{1+k} \quad \text{и} \quad z = \frac{z' + \frac{m}{n}z''}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{z' + kz''}{1+k}$$

Если $m = n$; то $PM' = PM''$, тогда точка P будет на середине прямой $M'M''$ и ее координаты найдутся по этим же формулам, принимая $k = 1$

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2}; \quad z = \frac{z' + z''}{2}$$

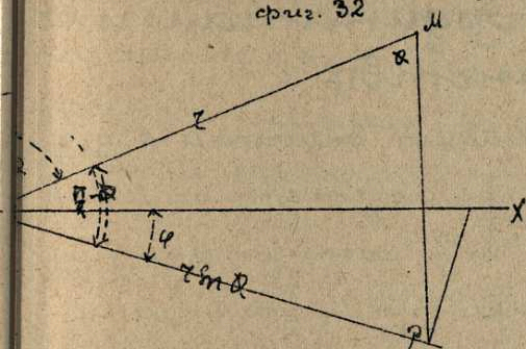
Эти формулы определяют координаты середины прямой, соединяющей две данные точки.

2) Полярные координаты в пространстве

Полярные координаты в пространстве (фиг. 32) рассматривают обыкновенно вместе с прямоугольными следующим образом: возьмем произвольную точку M и построим ее прямоугольные координаты соединив M с O , тогда ось OM

ОМ и ос Z^b провести плоскость; эта плоскость пересечет плоскость Xy по прямой ОР. Измерим $\angle$

рис. 32



$\angle \text{OP} = \varphi$, измеряющий меридиан двугранного угла, образованного плоскостями Poz и XZ

Измерим также угол $\angle OM$, который обозначим через θ , наконец измерим

расстояние $OM = z$, эти три величины φ , θ и z будут, очевидно, достаточно для определения положения точки M в пространстве и потому эти 3 величины наз. полярными координатами точки M в пространстве. Угол φ считается от положительной оси X^b в положительной стороне Y^b и может изменять для различных точек в пространстве все величины от $0 - 2\pi$. Угол θ считается от положительной оси Z^b в сторону к отрицательной оси Z^b и может изменять все величины от $0 - \pi$. Наконец расстояние z может изменять все величины от 0 до ∞ . Расстояние z назыв. радиус-вектором; угол φ называется долготой; угол θ есть полярный угол или дополнение до широты. Широтой же наз. угол $\angle MOP = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Плоскость Xy наз. плоскостью экватора, а ZOP -

полюсного меридиана.

Соотношение между прямоугольными и полярными координатами в пространстве

Нам надо свести уравнениями величинам x, y, z или величинам r, φ и θ . Возьмем прямоугольный $\triangle P Q O$, в котором $\angle O Q P$ прямой, т. е. соотношение мы будем разбирать только при прямоугольной системе координат, или же $O Q = O P \cos \varphi$, $O P = O P \sin \varphi$ или $x = O P \cos \varphi$ и $y = O P \sin \varphi$; Возьмем $\triangle O P M$, в котором $\angle O P M = \alpha$, а $\angle O M P = \theta$, так как $O Z \parallel M P$, находим, что $O P = r \sin \theta$, подставив это значение $O P$ в предыдущие уравнения будем иметь

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \dots \dots \dots (1)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \dots \dots \dots (2)$$

Возьмем еще треугольника $O M P$ выведем, что

$$z = r \cos \theta \dots \dots \dots (3)$$

Эти три уравнения дают возможность от полярных координат, перейти к прямоугольным.

Выведем теперь обратные формулы, позволяющие свести переход от декартовых координат к полярным. Возведем в квадраты и сложим (1), (2) и (3) уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \quad \text{или}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 [\sin^2 \theta (c^2 \varphi + s^2 \varphi) + c^2 \theta] = r^2$$

так как выражение стоящее в скобках $= 1$, —
на самом деле: $c^2 \varphi + s^2 \varphi = 1$, а потому $\sin^2 \theta (c^2 \varphi + s^2 \varphi)$
 $= \sin^2 \theta \cdot 1$ и наконец $[\sin^2 \theta \cdot 1 + c^2 \theta] = 1$.

Такой образ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \dots \dots \dots (4)$$

Так как в полярных координатах направление
определяется углом φ и θ , а r принимается вели-
чиной абсолютной, то и корни мы принимаем в
арифметическом смысле, не прибавая ему знака.
Будем определять теперь угол θ и φ и попытаем-
ся их определить через tg , т. е. tg точнее всего
другие тригонометрические функции определяют
углы. Для этого возведем в квадраты и сложим
уравн (1) и (2) и сумму разделим на уравн (3)

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta (c^2 \varphi + s^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \theta; \quad r \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \dots \dots (5)$$

Знаке $\operatorname{tg} \theta$ всегда соответствует знаку z так
как $\sqrt{x^2 + y^2}$ сам по себе величина абсолютная

Для уравн. (2) на (1) имеем

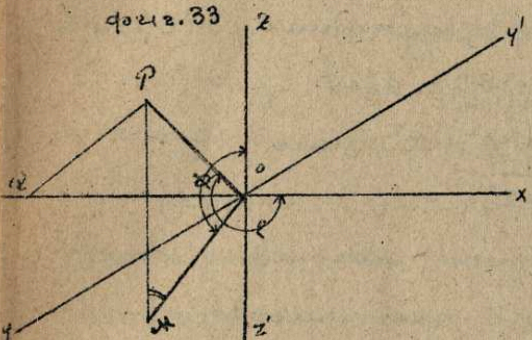
$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta \sin \varphi}{r \cos \theta \sin \theta} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots (6)$$

Такое значение $\operatorname{tg} \varphi$ определяется знаками y и x , а
именно

$$\begin{array}{cccc} \frac{+}{+} & , & \frac{+}{-} & , & \frac{-}{-} & , & \frac{-}{+} \\ \text{I} \text{ з.} & & \text{II} \text{ з.} & & \text{III} \text{ з.} & & \text{IV} \text{ з.} \end{array}$$

Преобразим эти формулы при другом повороте точки M (фиг. 33). Поворот точки M происходит

фиг. 33



в направлении третьей оси z . Проведем ее координаты $MP=z$; $PQ=y$ и $OQ=x$, а так же M с O при тем же $OM=z$; Линия OP есть

эти меридиональная ее плоскости $x'y'$

Из $\triangle OPQ$ имеем

$$OQ = -x = OP \cos[\psi - \pi] = OP \cos[\pi - \psi] = -OP \cos \psi$$

$$PQ = -y = OP \sin[\psi - \pi] = -OP \sin[\pi - \psi] = -OP \sin \psi$$

Из $\triangle POM$ имеем $OP = z \sin PMO$; но $\angle PMO + \theta = \pi$ так как $MP \parallel zz$ или $\angle PMO = (\pi - \theta)$;

$$-OP = z \sin[\pi - \theta] = z \sin \theta$$

Подставляя значение OP в предыдущие ур-ия, имеем

$$x = z \sin \theta \cos \psi$$

$$y = z \sin \theta \sin \psi$$

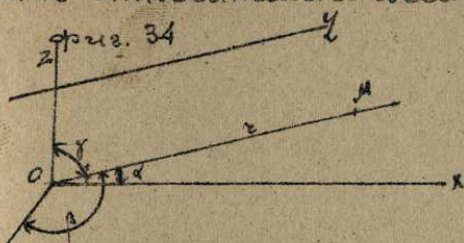
Из $\triangle MOP$ — $MP = -z = z \cos M = z \cos[\pi - \theta] = -z \cos \theta$

и наконец умножая на -1 получим $z = z \cos \theta$

Определение направления линии в пространстве

Как определить абсолютную величину линии мы уже знаем теперь постараемся определить ее направ-

ление относительно осей координат. Проведем из



какая координат (Фиг. 34) линию $OM \parallel Z$ и обозначим углы, заключаемые этой линией с осями сфера α, β, γ . Связь этих 3 углов и определяет направление прямой

точно и единственно, и следуя тому как связь двух из них может дать два решения.

Если представим себе конус с верш. по линии Ox образующей OM , то образующие его представляют геометрические места линий, заключаемых с Ox углом α . Если вообразим себе еще другой конус с верш. по той же образующей OM , то будем иметь геометрические места линий образующих с осью Oy углом β . Эти конусы могут пересекаться по двум образующим или только касаться — в первом случае будем иметь два решения, а во втором одно. Но если вообразим подобный конус с верш. Oz то вопрос будет решен вполне и определенно ибо 3 конуса могут пересекаться только по одной общей образующей. А так мы уже знаем, что связь между углами α, β и γ даст вполне определенное решение вопроса. Тем.

пункт 6.

са. Для вывода связи обратимся к методу проекций и спроектируем линию OM на оси координат и получим координаты x, y, z точки M . Обозначив длину отрезка OM через r будем иметь три соотношения

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \cos \beta$$

$$z = r \cos \gamma$$

возведем их в квадрат и сложим полученные

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Но раньше мы уже видели, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, а поэтому

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Это и есть формула связывающая углы, заключаемые прямой с осями координат

Если известны углы α и β , то γ находится по формуле

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

Эта формула дает два значения γ : 1) $\gamma < \frac{\pi}{2}$, когда перед корнем стоит (+) и 2) $\gamma = (\pi - \delta) > \frac{\pi}{2}$, когда перед корнем (-). Мы получаем две прямые, проходящие через начало O и симметричные относительно плоскости xy

Часто вместо косинусов известны только величины или пропорциональные. В этом случае определение углов примет следующий вид: по формуле $a : b : c = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$ или $\frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\cos \beta}{b} = \frac{\cos \gamma}{c} = k$

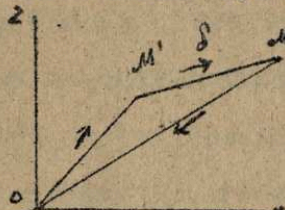
Взяв отъ этой пропорции производную, имеемъ:

$$k^2 = \frac{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

откуда $k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; а

$$\cos \alpha = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \cos \beta = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \cos \gamma = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Такъ какъ выраженіи k имеемъ два знака, то и косинусы угловъ α, β, γ имѣютъ двойной знакъ, при чемъ знакъ (+) соответствуетъ тому случаю когда мы считаемъ длину, положительную M, M_2 (рис. 35



отъ M_1 къ M_2 и знакъ (-), когда считаемъ въ обратномъ направленіи отъ M_2 къ M_1 . Этой двойственности знаковъ можно избежать

выбора значений косинусовъ слѣдующимъ образомъ. Соединимъ точки M_1 и M_2 съ O и представимъ замкнутый треугольникъ OM_1M_2 на каждой изъ осей тогда получимъ

$$x_1 + \delta \cos \alpha - x_2 = 0 \dots \dots \dots \text{на осѣ } OX$$

$$y_1 + \delta \cos \beta - y_2 = 0 \dots \dots \dots \text{на осѣ } OY$$

$$z_1 + \delta \cos \gamma - z_2 = 0 \dots \dots \dots \text{на осѣ } OZ$$

$$\text{а отсюда } \cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{\delta} \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{\delta} \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{\delta}$$

Гдѣ δ есть абсолютная величина отрезка M_1M_2

Знакъ знаковъ косинусовъ зависитъ только отъ положеній кривыхъ.

Перейдем теперь к решению изотопической задачи, от-
ражающейся на выведенных формулах.

Задача По полярному углу θ и долготы φ
определить косинусы углов α , β и γ , кото-
рые образуют радиус вектора с осями
координат?

Называя прямоугольные координаты точки M ,
лежащей на конце радиуса вектора r , через x, y, z

$$x = r \cos \alpha; \quad y = r \cos \beta; \quad z = r \cos \gamma$$

с другой стороны было выведено, что $x = r \sin \theta \cos \varphi$
 $y = r \sin \theta \sin \varphi$ и $z = r \cos \theta$, следовательно:

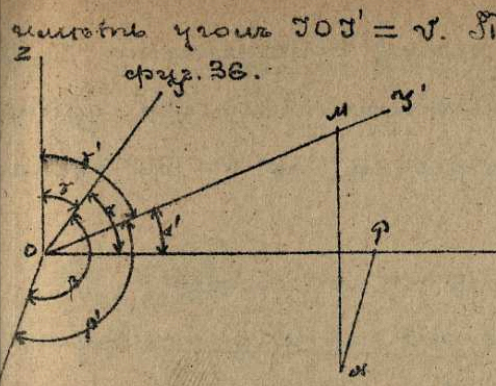
$$r \cos \alpha = r \sin \theta \cos \varphi; \quad r \cos \beta = r \sin \theta \sin \varphi; \quad r \cos \gamma = r \cos \theta$$

Сократим эти последние уравнения на r

$$\cos \alpha = \sin \theta \cos \varphi; \quad \cos \beta = \sin \theta \sin \varphi; \quad \cos \gamma = \cos \theta$$

Угол двух прямых в пространстве

Оси координат опять полагали прямоугольными,
т.е. считаем, что первая прямая образует с осью уг-
лы α, β и γ , а вторая прямая α', β', γ' . Угол между
двумя прямыми обозначим через ψ его требуется
найти. Чтобы построить этот угол, мы че-
рез начало координат проведем две прямые
параллельные двум данным прямым: OJ парал-
лельно первой прямой и OJ' - второй. Тогда будем



иметь угол $\angle OOM' = \gamma$. Прямая OM' падает в ребро $x^{\text{в}} \gamma^{\text{в}}$ угла α , а с ребро $y^{\text{в}}$ и $z^{\text{в}}$ углы β и γ . Прямая OM' падает с теми же осевыми углами α', β' и γ' (фиг. 36). Возьмем на прямой OM' произвольную точку M и пусть ее координаты будут (x, y, z)

а расстояние $OM = l$. Построим эти координаты.

Рассмотрим затем незамкнутый многоугольный контур $OPNM$ с его замыкающей стороной OM и возьмем сумму проекций сторон этого контура на какуюнибудь ось; тогда будем иметь

$$\text{пр. } OP + \text{пр. } PN + \text{пр. } NM = \text{пр. } OM$$

За ось проекций примем прямую OZ , тогда это уравнение будет очевидно: $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = l \cos \gamma$

Но сверх того мы знаем, что x, y, z могут быть рассматриваемы как проекции радиуса вектора l на оси координат; на этом основании можем написать:

$$x = l \cos \alpha', \quad y = l \cos \beta', \quad z = l \cos \gamma'$$

Подставив эти формулы в предыдущее равенство, получим

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma'$$

то есть косинус угла между двумя прямыми = сумме произведений косинусов углов, заключаемых

этими прямыми с тремя координатами. Запишем частный случай этой задачи. Если две данные прямые взаимно перпендикулярны, то $\nu = 90^\circ$ и следовательно в этом случае имеем

$$\cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' = 0$$

Это равенство выражает условие перпендикулярности двух прямых в пространстве

- Связь между площадью проекций ее на трех взаимно перпендикулярных плоскостях координат

Пусть в пространстве дана некоторая площадь S . Проецируем ее на три плоскости координат и получим, что ее проекция на плоскость Ox есть S_x . Если α есть угол образованный площадью S с плоскостью Ox , то будем иметь

$$S_x = S \cos \alpha$$

Положим теперь проекция той же площади на плоскость Oy будет S_y и если β есть угол, образованный данной площадью с плоскостью Oy , тогда будем иметь:

$$S_y = S \cos \beta$$

Наконец пусть проекция S на плоскость Oz есть S_z и γ угол, образованный площадью S с плоскостью Oz , тогда

$$S_z = S \cos \gamma$$

Через начало координат проведем прямоугольный

перпендикулярно к площади S . Эта прямая будет давать соответственно с велич. координатных углы равные α , β и γ на том основании, что угол между двумя прямыми равен углу между ними к ним перпендикулярными. (Фиг. 37). Выводить этого можно.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Если в квадраты предыдущих равенств, получим

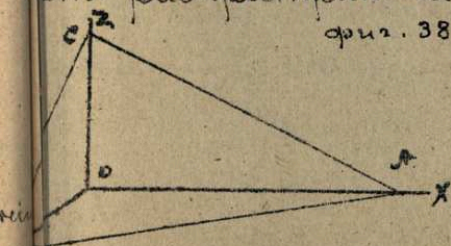
$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Так что будем иметь

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$$

но есть квадрат числа, представляющего площадь в пространстве, равен сумме квадратов чисел, выражающих проекции той же площади на трех плоскостях координат

Показано нами соотношение площадей представляет распространение теоремы Птолемея. Возвращаясь



(Фиг. 38) прямой тригонометрический угол α и проведем произвольную плоскость, перпендикулярную к ней, и

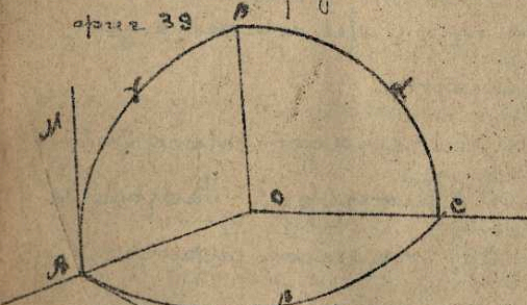
получили треугольник $OABC$. В нем площадь гра-
ни, противолежащей прямому углу, означим се-
реду S , тогда очевидно, что три грани, сходящие-
ся в вершине O , будут проекциями этой площа-
ди на три плоскости xy , yz и xz и следовательно
будут иметь по вышеказанному:

$$S^2 = (AOB)^2 + (BOC)^2 + (AOC)^2$$

Вывод общих формул сфе- рической тригонометрии

Сферическая тригонометрия имеет предметом
решение сферических треугольников. Тригонометрия
предварительно изучает свойства сферических
треугольников. Сферический треугольник есть
часть поверхности сферы заключенная между тре-
мя взаимно пересекающимися окружностями
большого круга. Рассмотрим такой треугольник

фиг. 39



(фиг. 39) на какой нибудь
сфере. Вершины треуголь-
ника пусть будут A , B и C .
Во всяком сферическом
треугольнике различают

две части: три стороны и три угла

Так стороны так и углы выражаются в градусах
и при этом сферический угол A сфериче-
ски

нейный угол, составленный из касательных AM и AN к сторонам AB и AC сферического треугольника, так что угол $A = MAN$. Треугольнику сферическому треугольнику обозначим через α, β, γ , а противолежащие стороны через a, b и c . Если мы при вершинах треугольника соединим с центром O сферы, то каждой из вершин и затем проведем при плоскости AOB , BOC и COA то получим при центре тригранник угол BOC , соответствующий рассматриваемому сферическому треугольнику. В этом тригранном угле мы рассматриваем также шесть частей, три плоские угла его составляющие и три двугранных угла. Плоские углы тригранного угла изобразятся сторонами сферического треугольника и их противолежащими, а двугранные углы имеют одинаковую меру с углами сферического треугольника. Таким образом, напр. угол $MAN = A$ изобразит меру двугранного угла BOC , потому что касательная AM и AN перпендикулярны к радиусам, то есть к ребрам двугранного угла. Таким образом в тригранном угле можно рассматривать то же шесть частей как и в сферическом треугольнике именно, три плоских его угла будут α, β и γ , а его двугранные углы будут a, b, c . Вследствие такой замены. Теорема 7.

зи существующей между сферическим треугольником и соответствующим ему тригранником углов, рассмотрение треугольника можно часто заменить рассмотрением ему соответствующего тригранника угла. Таким же свойства тригранного угла нам известны из геометрии по ограниченности, что напомним только из которых две стороны тригранного угла, выходя из посредственной стороны и углов сферического треугольника. 1) Во всяком сферическом треугольнике каждая из его сторон меньше суммы двух других и потому

$$\alpha < \beta + \gamma; \quad \beta < \alpha + \gamma; \quad \gamma < \alpha + \beta$$

2) Сумма трех сторон сферического треугольника всегда меньше 360° , так что:

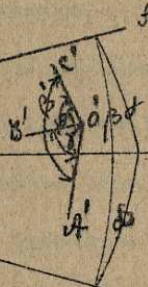
$$\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$$

3) Сумма трех углов сферического треугольника всегда больше 180° и меньше 540° , так что имеем

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

Упомянем еще о дополнительном тригранном угле (рис. 40), который получается следующим образом: возмем произвольный тригранник угол $OA'B'C'$ внутри этого угла возмем произвольную точку O' и из этой точки опустим перпендикуляры $O'A', O'B', O'C'$ на плоскости BOC, AOC и AOB тригранного угла. За-

также проведем три плоскости $o'a'o'b'$ $b'o'b'e'$ и $c'o'c'a'$
 фиг. 40



а. если получим такие же аб-
 фазы тригранный угол
 $o'a'b'e'$, который получается
 дополнительным три-
 гранным углом для
 данного тригранного угла

обозначим его углом через α', β', γ' , а его двугранный
 углы A', B' и C' . Между плоским углом и данным три-
 гранным углом и двугранным ему дополнительным
 существует простое соотношение, а именно - легко
 доказать, что плоские углы дополнительного три-
 гранного угла являются дополнительными до двух пре-
 мых двугранных углов данного тригранного. Это
 свойство выражается тремя равенствами

$$\alpha' + A = 180^\circ; \quad \beta' + B = 180^\circ; \quad \gamma' + C = 180^\circ$$

Потому как очевидно, что данный тригранный угол
 будет также дополнительным для второго три-
 гранного угла то будем иметь

$$\alpha + A' = 180^\circ; \quad \beta + B' = 180^\circ; \quad \gamma + C' = 180^\circ$$

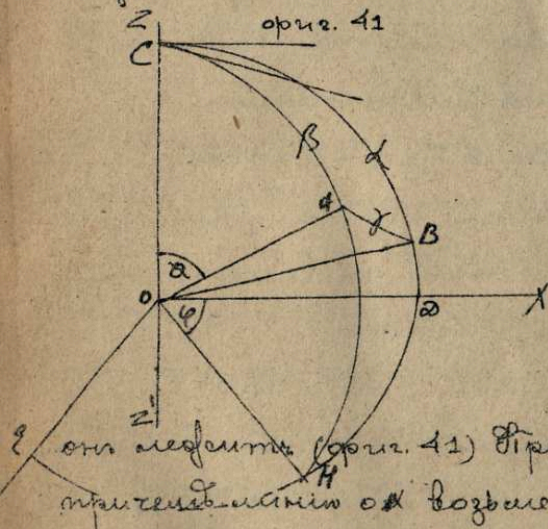
Данному тригранному углу соответствует на сфе-
 ре некоторый сферический треугольник ABC с уг-
 лами A, B, C и сторонами α, β, γ . Дополнитель-
 ному тригранному углу если его вершину поместить в

центр той же сферы будет соответствовать другой сферический треугольник, на той же сфере. Если второй сферический треугольник наз. дополнительным для первого или иногда полярным. Между сторонами и углами этих треугольников существует зависимость указанная написанными выше равенствами.

Основные формулы сферической тригонометрии

Это так называемая формула косинуса стороны т. е. формула выражающая, что равен косинус стороны во всяком сферическом треугольнике. Она называется основною потому, что как было показа-

но Лагранжем, из нее можно вывести все прочие формулы, относящиеся к сферическому треугольнику. Пусть $\triangle ABC$ есть данный сферический треугольник и O есть центр сферы на который



он лежит (ориг. 41) Примем O за начало координат и пусть ось OX возмем за ось X^v проведенную в пл. BOC перпендикулярно к OC , где OC примем за ось Z^v , а ось OY будет служить лин. OY перпенди-

$$\cos \alpha = \sin \theta \cdot \cos \varphi; \quad \cos \beta = \sin \theta \cdot \sin \varphi; \quad \cos \gamma = \cos \theta$$

и найдем

$$\cos (OA, x) = \sin \theta \cdot \cos \varphi = \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos (OB, x) = \cos (\theta - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (OA, z) = \cos \theta = \cos \beta$$

$$\cos (OB, z) = \cos \alpha$$

где θ и φ суть полярный угол и долгота дуги точки A.

Вставив эти значения в формулу $\cos \gamma$ имеем

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

Это равенство и составляет основную формулу сферической тригонометрии; она показывает, что косинус стороны сферического треугольника = произведению косинусов двух прочих сторон + произведение синусов этих сторон, умноженное на косинус угла между ними.

Формула косинуса стороны может быть написана для каждой из сторон сферического треугольника, так что имеем:

$$\left. \begin{aligned} (1) \dots \cos \alpha &= \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A \\ (2) \dots \cos \beta &= \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos B \\ (3) \dots \cos \gamma &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos C \end{aligned} \right\} \dots \dots (I)$$

Формула четырех синусов

Так называется вторая из основных формул сфе-

физической тригонометрии. Она получается из формулы 23 отбрасывая соответствующим образом. Разделив и потом вычтем два уравнения (1) и (2)

$$\cos \alpha + \cos \beta = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \gamma + (\sin \beta \cdot \cos A + \sin \alpha \cdot \cos B) \sin \gamma$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = (\cos \beta - \cos \alpha) \cos \gamma + (\sin \beta \cdot \cos A - \sin \alpha \cdot \cos B) \sin \gamma$$

Перенеся первые члены из вторых частей равенств в первые получим.

$$(\cos \alpha + \cos \beta)(1 - \cos \gamma) = \sin \gamma (\sin \beta \cdot \cos A + \sin \alpha \cdot \cos B)$$

$$(\cos \alpha - \cos \beta)(1 + \cos \gamma) = \sin \gamma (\sin \beta \cdot \cos A - \sin \alpha \cdot \cos B)$$

Перемножая эти два равенства находим.

$$(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)(1 - \cos^2 \gamma) = \sin^2 \gamma (\sin^2 \beta \cos^2 A - \sin^2 \alpha \cos^2 B)$$

или заметив, что $1 - \cos^2 \gamma = \sin^2 \gamma$ и сокращая на $\sin^2 \gamma$ имеем

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta \cdot \cos^2 A - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 B$$

Возьмем квадратно из квадратов косинусов. Тогда будем $1 - \sin^2$, получим.

$$1 - \sin^2 \alpha - 1 + \sin^2 \beta = \sin^2 \beta - \sin^2 \beta \cdot \sin^2 A - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 B$$

по сокращении имеем

$$\sin^2 \beta \cdot \sin^2 A = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 B$$

по извлечению корня получим

$$\sin \beta \cdot \sin A = \sin \alpha \cdot \sin B$$

Мы ставили знак (+) в обеих частях равенства потому что углы и стороны сферического треугольника положительны, меньшими 180° а синусы

таких дуг, как известно положительных. Последнее равенство можно написать в виде пропорции

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

которая показывает, что синусы сторон во всяком сферическом треугольнике относятся как синусы противолежащих им углов. Эту же пропорцию можно написать в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B}$$

Если возмемъ два стороны α и γ то точно также будем иметь

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$$

Объ последние пропорции можно соединить в одну запись, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C} \dots \dots \dots (II)$$

Формула косинуса угла

Рассмотрим дополнительный сферический треугольник, стороны пусть будут: α' , β' и γ' , а углы A' , B' и C' .

Применимъ къ этому треугольнику формулу косинуса стороны, тогда можно написать, что

$$\cos \alpha' = \cos \beta' \cdot \cos \gamma' + \sin \beta' \cdot \sin \gamma' \cdot \cos A'$$

Но такъ какъ стороны дополнительнаго треугольника суть дополненія до 180° къ угламъ даннаго треугольника, а его углы суть дополненія до 180° къ сторонамъ

данного треугольника, то тоже равенство можно написать в виде

$$Cs(180^\circ - A) = Cs(180^\circ - B) \cdot Cs(180^\circ - C) + Sn(180^\circ - B) Sn(180^\circ - C) Cs(180^\circ - \alpha)$$

Притом, так как вообще $cs(180 - x) = -csx$ и $sn(180 - x) = snx$, то это равенство будет:

$$-CsA = csB \cdot csC - snB \cdot snC \cdot cs\alpha$$

или
$$CsA = -csB \cdot csC + snB \cdot snC \cdot cs\alpha$$

Эта формула дает косинус угла, выраженный по-мощью двугранных углов треугольника и сторон к ним прилежащих. Подобный образом для треугольника можно написать три формулы, а именно

$$\left. \begin{aligned} CsA &= -csB \cdot csC + snB \cdot snC \cdot cs\alpha \\ CsB &= -csA \cdot csC + snA \cdot snC \cdot cs\beta \\ CsC &= -csA \cdot csB + snA \cdot snB \cdot cs\gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (III)$$

Наконец, выведем последнюю общую формулу сферического треугольника, которая есть формула о котангенсах. Напишем равенство

$$cs\alpha = cs\beta \cdot cs\gamma + sn\beta \cdot sn\gamma \cdot csA$$

исключив отсюда сторону γ и введем вместо нее противоположную ей угол C , для чего заменим $cs\gamma$ его выражением по формуле (I), т. е.

$$cs\gamma = cs\alpha \cdot cs\beta + sn\alpha \cdot sn\beta \cdot csC$$

и вместо $sn\gamma$ вставим его выражение из равенства (II)

т. е.
$$sn\gamma = \frac{sn\alpha \cdot snC}{snA},$$
 получим

$$\cos \alpha = \cos \beta (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos C) + \sin \beta \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin C}{\sin A} \cdot \cos A$$

$$\cos \alpha = \cos \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos C + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin C \cdot \operatorname{ctg} A$$

или $\cos \alpha (1 - \cos^2 \beta) = \cos \alpha \cdot \sin^2 \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos C + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin C \cdot \operatorname{ctg} A$

сокращая на $\sin \beta$, имеем:

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos C + \sin \alpha \cdot \sin C \cdot \operatorname{ctg} A$$

Разделив обе части равенства на $\sin \alpha$, найдем формулу котангенса, именно:

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \beta = \cos \beta \cdot \cos C + \sin C \cdot \operatorname{ctg} A$$

Подобным образом для одного треугольника можно написать шесть уравнений, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \beta &= \operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos \beta \\ \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \alpha &= \operatorname{ctg} B \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos \alpha \\ \operatorname{ctg} \gamma \cdot \sin \alpha &= \operatorname{ctg} C \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \gamma &= \operatorname{ctg} A \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos \gamma \\ \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \gamma &= \operatorname{ctg} B \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos \gamma \\ \operatorname{ctg} \gamma \cdot \sin \beta &= \operatorname{ctg} C \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots (IV)$$

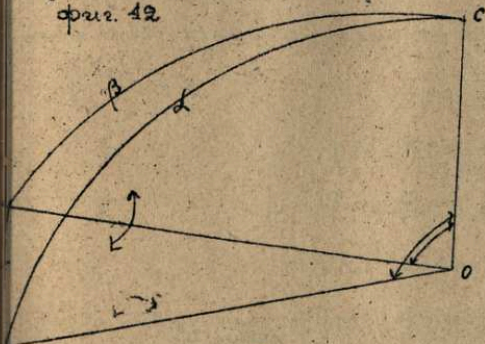
Замечание. Общие формулы (I, II, III и IV) составляют в совокупности всего 15 ур-ий для разшифровываемого сферического треугольника. В каждое из этих уравнений входят 4 элемента из 6 — $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$, принадлежащих треугольнику и потому каждое из них может служить для определения неизвестного элемента по трем данным. Число возможных сочетаний из 6 по 4 равно $C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$ и следовательно во все

денных 15 углов вводят всевозможные составные из
в частей треугольника, по 4, так что эти формулы
будут вполне достаточно для всяких случаев, кото-
рые могут представиться при решении треуголь-
ников, когда по трем данным составным нужно
определить четвертую неизвестную. Приведенные фор-
мулы равно употребляются на проктику при реше-
нии треугольников, потому что они не лишны,
кроме уг-ий (II) логарифмического вида; для этой цели
вводят из них другие формулы, вполне удобные для
логарифмических вычислений. Этих формул мы здесь
выводить не будем.

Формулы для прямоугольного сферического треугольника

Сферический треугольник может иметь не только
один, но также два и три прямых угла. Треуголь-

фиг. 42



ник ABC (фиг. 42) с двумя
прямыми углами A и B наз.
двоупрямоугольным.
Если в нем соединить его
вершины с центром сферы
 O , то получим три прямых

углов COA , COB , в которых два двугранных угла COB и
 COA будут прямыми, следовательно ребро CO будет

перпендикулярно к плоскости $\triangle AOB$. Гиббсовский угол $\angle AOC$ и $\angle BOC$, измеряются дугами $\widehat{AC} = \beta$ и $\widehat{BC} = \alpha$ будут также прямыми, а потому стороны $\alpha = \beta = 90^\circ$. Сферический угол C имеет общую меру с линейным углом $\angle AOB$, который измеряется дугой $\widehat{AB} = \gamma$, так что $C = \gamma$. Если же в сферическом треугольнике все три угла прямые, то он наз. прякопрямоугольным. В таком треугольнике все три стороны, очевидно по 90° . Остановимся на рассмотрении треугольника с одним прямым углом и пополам, что этот угол есть A , противолежащая сторона α называется гипотенузой, другие же две стороны β и γ суть катеты. Из выведенных выше формул I, II, III, IV можно легко получить более простые частные формулы прямоугольного сферического треугольника. Отсюда $A = 90^\circ$ в тех же общих формулах в которых входят этот угол, мы получим следующие новые формулы

Из ур-ий (I) получим . . . $\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma$ 1

" " (II) " $\sin \beta = \sin \alpha \cdot \sin B$ 2

" " " $\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin C$ 3

Из ур-ий (III) " $\cos B = \cos \beta \cdot \sin C$ } из ур-ий 2^ю и 3^ю 4

" " " $\cos C = \cos \gamma \cdot \sin B$ } 5

$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos \alpha$, отсюда $\cos \alpha = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$. . . 6

Из ур-ий (IV) (4) получим $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \cos \alpha \cdot \sin \beta$ и $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta$. Эти формулы преобразуем так:

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin \alpha = \cos \alpha \quad \text{или} \quad \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \tan \beta \dots \dots (7)$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin \alpha = \cos \alpha, \quad \cos \beta = \sin \alpha \cdot \tan \beta \dots \dots (8)$$

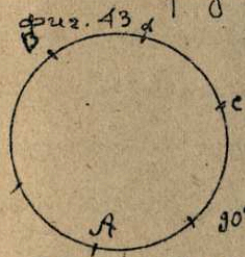
Из ур-ий (8) найдем $\sin \beta = \sin \alpha \cdot \tan \beta \dots \dots (9)$

$$\sin \beta = \sin \alpha \cdot \tan \beta \dots \dots (10)$$

Полученные 10 ур-ий будут вполне достаточно для решения прямоугольных сферических треугольников во всех возможных случаях, т.к. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$ и по двум данным всегда можно будет найти третье неизвестное.

Эти десять формул при том имеют вид удобный для логарифмических вычислений.

Примечание Означивает очень простое правило для запоминания формул прямоугольного сферического треугольника. Для этого нужно вообразить все части треугольника расположенными на окружности в том порядке как они идут в треугольнике и опуская А, как равной 90°, при этом са эти β и γ, т.е. катеты даются как их дополнения до 90°. Тогда каждой величине дан величину придают и дан противоположат. Проведено соотносит в том, что с части равен произв.



данаго котангенсовъ приращающихъ частей или $\sin$ - овъ
противоуращающихъ. Тогда

$$\cos \alpha = \cot \beta. \text{ В } \triangle OCP = \sin(90 - \beta) \cdot \sin(90 - \gamma) = \cos \beta \cdot \cos \gamma$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТЬ I

Объ уравненияхъ линіи на плоскости

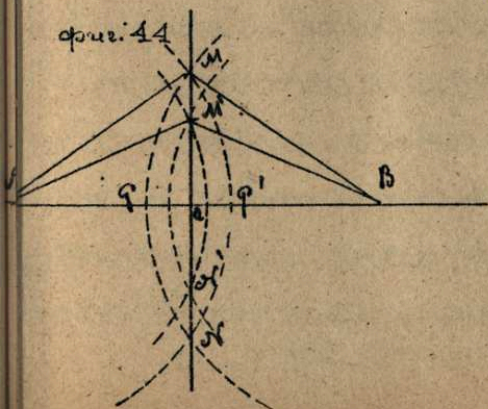
Преджде всего приступитъ къ объявлению предмета Ана-
литической Геометріи и тѣхъ вещей, которыя она пре-
судуетъ необходимо ознакомиться съ которыми основ-
ными понятіями употребляемыми въ ней и методами
анализающими ея для абстрагирования. Основаніемъ впер-
выхъ на разсмотрѣніе и примѣрахъ относящихся къ
понятію геометрическихъ линій - одному изъ важ-
нѣйшихъ понятій въ аналитической геометріи.

Понятіе о геометрическихъ линіяхъ.

Когда въ какомъ либо вопросѣ плоской геометріи опредѣ-
ляются точки, которыя по своему положенію должны удов-
летворять данному геометрическому условию и когда ока-
зывается, по свойству даннаго вопроса, что подобныя
точки могутъ быть найдены безчисленное множество,
то обыкновенно довольствуются построениемъ одной или
нѣсколькихъ точекъ и изображаютъ опредѣлить много

на котором все эти точки находятся. Таким же геометрическим местом бесчисленного множества точек обыкновенно бывает линия, прямая или кривая при чем каждая точка этой кривой удовлетворяет требуемому геометрическому условию и на оборот всякая точка, не лежащая на этой линии не будет удовлетворять тому же условию. Отсюда следует определение: Геометрическим местом называется совокупность бесчисленного множества точек, удовлетворяющих данному и вполне определенному геометрическому условию. Для того, чтобы пояснить это определение, мы приведем несколько примеров, относящихся к начальной геометрии.

Пример 1^й Геометрическое место точек равноудаленных отъ двух данных точек на плоскости, есть прямая, проходящая чрезъ середину линии, соединяющей две данные точки и къ ней перпендикулярная

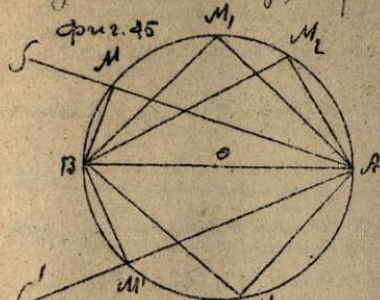


Взятый вопрос геометрическое условие, которому должны удовлетворять искомые точки, состоитъ въ томъ, что каждая изъ этихъ точек должна находиться въ

единственности радиусов от данной точки A и B (фр. 44).
 Очевидно, что множество точек удовлетворяющих
 требуемому условию; для этого стоит из точек
 A и B как из центров описать равные, но произ-
 вольные по величине радиусами две окружности MPN
 и $MP'N$, тогда две точки M и N пересечения этих двух
 окружностей, очевидно, равно удалены от точек A и B .
 Подобная пара точек можно найти бесчисленное мно-
 жество, потому что общая величина радиусов двух
 окружностей может быть взята произвольно и для
 того, чтобы две окружности пересекались, нужно толь-
 ко, чтобы величина радиуса была больше половины рас-
 стояния между точками A и B . Очевидно, далее, что
 все точки удовлетворяющие требуемому условию, т.е.
 точки равноотстоящие от A и B будут находиться
 на прямой линии MN перпендикулярной к AB и про-
 ходящей через ее середину C . Иными словами: $MA = MB$;
 $AN = NB$; $M'A = M'B$; $A'N' = N'B$.

Пример 2^й Геометрическое место вер-
 шин прямых углов прямоугольных
 треугольников построенных на общей
 гипотенузе, есть окружность, описанная
 на данной гипотенузе, как на диаметре.
 Пусть (фр. 45) данная гипотенуза есть AB . Чтобы

получить точку, принадлежащую искомого геометрическому месту стоит



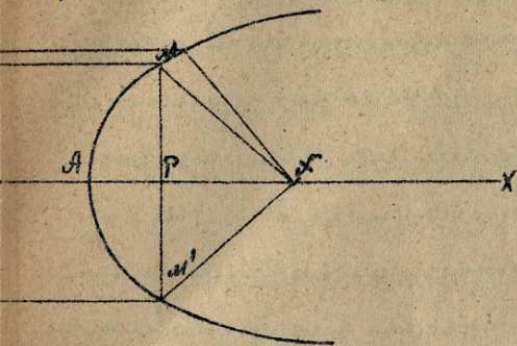
рисующему месту стоит только из точки A провести произвольную прямую AS а потом из B опустить перпендикуляр BM на эту

прямую. Попадая M этого перпендикуляра будет вершиною прямого угла прямоугольного треугольника $\triangle MBN$ построенного на гипотенузе AB . Также подобным M, можно построить, очевидно безчисленное множество; все они будут расположены на окружности, описанной на AB , как на диаметре. Это окружение будет следовательно искомым геометрическим местом.

Пример 3^й. Геометрическое место точек равноотстоящих от данной неподвижной точки и от некоторой постоянной прямой есть кривая линия, называемая параболой.

Данная точка указанная в определении, есть фокус параболы, а постоянная прямая, до которой берутся расстояния, называется направляющей или директрисой параболы. Параболу легко построить по точкам.

Точка F (фиг. 16) есть данный фокус, а прямая DD' есть данная направляющая. Проведем через фокус линию Cx перпендикулярно к направляющей DD' ; равным расстоянием CF пополам в точке A мы



зададим, что эта точка принадлежит параболу, так как ее расстояние от фокуса равно расстоянию от директрисы, т.е. $AF = AC$. Чтобы получить другие точки параболы, проведем ряд прямых линий параллельных направляющей DD' на различных расстояниях AC . Точка M есть одна из точек пересечения линии Cx в точке F и из точки F , как из центра радиусом равным CF опишем окружность. Эта окружность пересечет нашу прямую в двух точках M и M' , которые будут очевидно точками параболы. В следующем пункте определим из этой точки перпендикуляром QM $Q'M'$ на направляющую DD' мы увидим из центра, что каждой из них расстояние от фокуса $MF = M'F$ равно $CF = CA = M'A$, т.е. равно расстоянию от направляющей. Повторяя этот процесс

можно получить все точки параболы. Таким образом, мы видим, что каждая точка параболы находится на одинаковом расстоянии от фокуса F и от директрисы DD' . Это свойство параболы и является основой для ее построения. В следующем пункте мы рассмотрим, как можно построить параболу, зная только фокус и директрису.

для каждой из прямых параллельных DD' , или на каждой из них определим две точки параболы. Соединяя затем все точки непрерывной кривой, мы получим приблизительное очертание параболы. Парабола будет состоять, очевидно, из одной непрерывной дуги MM' , простирающейся до бесконечности, такая как на всякой параллели направленной DD' , если бы и чрезвычайно удаленной от нас всегда можно найти построением две точки, принадлежащие параболы. Нетрудно усмотреть, что прямая Sx будет ось параболы. Действительно из треугольников MPR и $M'PR$ видно, что $MP = M'P$ и следовательно две точки параболы, лежащие на одной из параллелей направленной DD' будут расположены симметрично относительно прямой Sx , которая поэтому есть ось параболы. Точка A , в которой ось Sx встречается кривую, есть вершина параболы. Фигура параболы, т. е. большее или меньшее отверстие, представляемое двумя ее половинами AM и AM' , соединяющимися в точке A , зависит от расстояния фокуса от направленной: чем меньше это расстояние, тем меньше отверстие параболы и тем больше это расстояние, тем больше отверстие, образуемое

кривой. Расстояние это обыкновенно обозначается буквой p , так что $CF = p$ и называется полюбвиной параметра параболы.

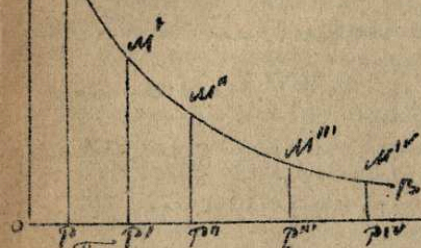
Понятие об уравнении кривой линии

Представим, что некоторая кривая заданная как метрическая линия (фиг 47), отнесенная к двум неподвижным осям координат. Это значит, что она занимает относительно этих двух осей совершенно определенные и неизменные положения.

Пусть OX и OY данные оси координат. Пусть AB часть рассматриваемой кривой.

Тогда каждая точка этой кривой будет иметь свои определенные координаты, напр. точка M имеет координаты: $x = OP$ и $y = PM$. Надем координаты и прочих точек кривой AB : M' : $x = OP'$, $y = M'P'$; M'' : $x = OP''$, $y = M''P''$ и т. д.

Представим далее, что некоторая точка этой кривой координаты которой будут означены через x и y перемещается по плоскости и описывает кривую линию AB от A к B последовательно переходя через точки M, M', M'' . Ее координаты при этом



будут измѣняться, но взаимная такая обратная зависимость между x и y будетъ со-
вѣстствовать совершенно определенному значенію y а
такъ что, когда $x = OP'$, то $y = M'P'$; $x = OP''$, $y = M''P''$ и т. д.
Отсюда заключаемъ, что эти двѣ переменныя вели-
чины x и y будутъ связаны между собой некоторой
определенной зависимостью такого рода, что когда
 x будетъ приписываться какое нибудь определенное
значеніе, то и y въ свою очередь получитъ такое
определенное ему соответствующее значе-
ніе. Словомъ x и y должны быть связаны между собой
какимъ нибудь уравненіемъ, которое до-
статочно дать величину x , когда y будетъ дано какое ли-
бо частное значеніе. Это уравненіе связывающее не-
зависимыя координаты x и y произвольной точки
кривой, называется уравненіемъ кривой или кривой линии.

Этому уравненію должны удовлетворять коорди-
наты всякой точки на кривой. Координаты x и y
произвольной точки кривой наз. текущими ко-
ординатами въ отнсіи къ координатамъ со-
бой нибудь определенной точки, или цѣннымъ впо-
срѣдствіе определенное значеніе. Изъ приведеннаго выше
разсужденія должно быть ясно, что всякой данной
кривой линии, отнесенной къ своимъ координатамъ, со-
вѣстствуетъ какое нибудь уравненіе, которое удовлетворяетъ координатамъ всякой точки на кривой.

цествует уравнение связывающее координаты x и y произвольной ее точки, оно должно быть составлено при помощи известного нам определения геометрического места. Основным уравнением кривой значит найти зависимость между координатами x и y произвольной ее точки. Никаких предположений и определенных указаний относительно того как должно поступать при составлении уравнения кривой дать нельзя. Приведем однако здесь следующую общий принцип, которому должно руководиться при этом: для того, чтобы получить уравнение кривой, должно на ней взять произвольную точку, обозначить ее координаты через x и y и выразить для этой точки, посредством некоторого свойства то геометрическое свойство, которое принадлежит всем точкам кривой и служит ей определением как геометрического места.

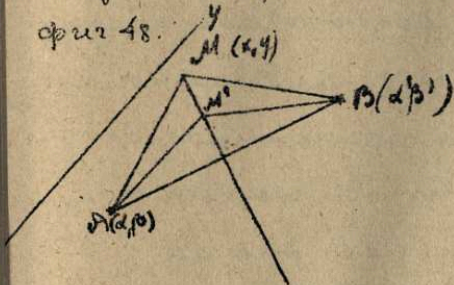
Таким образом получается некоторое уравнение, в которое необходимо должно войти координаты x и y если в этом уравнении кроме переменных x и y других переменных не входит, то оно и представляет нам соотношение между координатами x и y для произвольной точки кривой, а потому будет уравнение этой кривой. Если же в него вой-

дуги кривою x и y другие величины, также переименуем то иль надо написать из равенства посредником данного определения кривою и из которых свойству рассматриваемого кривоугольника. По условию переименования.

1 Составить уравнение геометрического места точек равноотстоящих от двух данных точек на плоскости.

Решение (рис. 48), что эти координаты косоугольны

рис. 48.



Будут две данные точки будут A и B , по условию, что координаты точки A будут $(\alpha$ и $\beta)$, а $B - (\alpha'$ и $\beta')$ Возьмем произвольную

точку геометрического места пусть она будет M и ее координаты x и y , тогда основное свойство, заключающееся в определении рассматриваемого места состоит в том, что два расстояния AM и BM должны быть равны между собой, т. е. $AM = BM$. Выразим AM и BM посредством координат по формуле определяющей расстояния между двумя точками.

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\varphi = \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2} + 2(x-\alpha')(y-\beta')\cos\varphi$$

свободив от корня раскрыв скобки и возведя в степень $(x-\alpha)$, $(y-\beta)$, $(x-\alpha')$... в квадрат получим:

$x'^2 + \alpha'^2 - 2x\alpha + y'^2 + \beta'^2 - 2y\beta + 2xy\cos\varphi - 2x\beta\cos\varphi - 2\alpha y\cos\varphi + 2\alpha\beta\cos\varphi =$
 $= x'^2 + \alpha'^2 - 2x\alpha + y'^2 + \beta'^2 - 2y\beta + 2xy\cos\varphi - 2x\beta'\cos\varphi - 2\alpha'y\cos\varphi + 2\alpha'\beta'\cos\varphi$
 сокращаем и переносим члены, содержащие x и y в
 первую часть и не содержащие во вторую

$$\begin{aligned}
 & -2x\alpha - 2y\beta - 2x\beta'\cos\varphi + 2\alpha\alpha' + 2y\beta' + 2\alpha\beta'\cos\varphi + 2\alpha'y\cos\varphi - 2\alpha y\cos\varphi = \\
 & = \alpha'^2 + \beta'^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha'\beta'\cos\varphi \text{ или}
 \end{aligned}$$

$$2\alpha[\alpha' - \alpha + (\beta' - \beta)\cos\varphi] + 2y[\beta' - \beta + (\alpha' - \alpha)\cos\varphi] = \alpha'^2 + \beta'^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha'\beta'\cos\varphi$$

Это и есть уравнение рассматриваемого геометриче-
 ского места, ибо оно выражает соотношение между
 переменными координатами x и y произвольной по-
 нятии места; и в нем, кроме этих переменных x и y
 других переменных не входит. В случае прямо-
 угольного координат $\varphi = 90^\circ$ $\cos\varphi = 0$ тогда

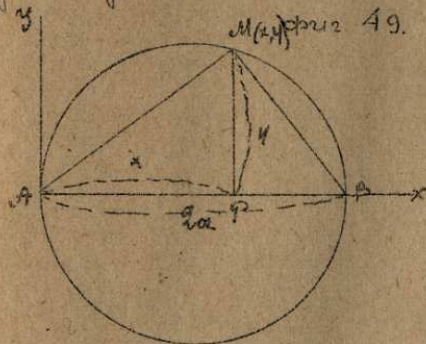
$$2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y = \alpha'^2 - \alpha^2 + \beta'^2 - \beta^2$$

Из этого примера видим, что для состав-
 ления уравнения нам вовсе не нужно было знать
 какое именно место есть рассматриваемое гео-
 метрическое место, напр в рассматриваемом
 случае нам известно, что геометрическое место
 есть прямая линия, но при составлении уравнения
 мы не принимали этого во внимание. Напротив,
 как мы увидим далее, по составленному уравне-
 нию можно будет узнать какое именно гео-
 метрическое место и какую линию прямо или криво

чно представляется.

II. Составить уравнение геометрического места точек вершин прямых углов в прямоугольных треугольниках, построенных на данной гипотенузе.

Пусть данная гипотенуза есть AB и положим, что



ея длина $AB = 2a$. Отнесем рассматриваемое геометрическое место точек к прямоугольным осям координат (фиг. 49) приняв точку A за нача-

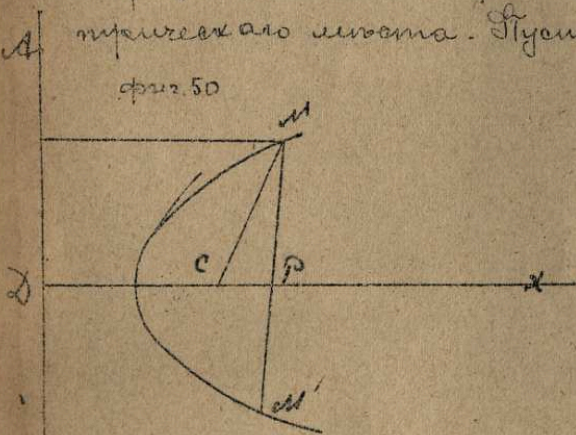
ло, а линию ABx , за ось x , ось y будет перпендикулярна к AB . Пусть M произвольная точка геометрического места, обозначим ее координаты через x и y и построим ось, приняв $x = AP$, а $y = MP$. Чтобы выразить, что треугольник AMB есть прямоугольный, в котором AB есть гипотенуза, напомним по известной теореме, что перпендикуляр MP есть средняя пропорциональная величина между отрезками гипотенузы AP и PB , т.е. что $MP^2 = AP \cdot PB$. В этом равенстве $MP = y$; $AP = x$; $PB = AB - AP = 2a - x$. Вставив эти выражения в предыдущее равенство получим $y^2 = x(2a - x)$ или $y^2 = 2ax - x^2$. Это уравнение.Geom. фиг. 49.

не и есть уравнение рассматриваемого геометрического места, потому что оно представляет зависимость между координатами x и y произвольной его точки. Если известно из геометрии, что рассматриваемое место есть круг описанный на AB , как на гипотенузу; следовательно последнее уравнение представляет круг радиуса a .

Уравнение параболы.

Определение этой кривой было дано выше, как геометрического места. Пусть AB (фиг. 50) есть направ-

фиг. 50



ляющая параболы и C фокус. Тогда если M есть произвольная точка кривой, то соединив ее с фокусом C и проведем перпендикуляр к направляющей MB или доопределим место по определению

кривой: $MC = MQ$; из прямоугольного тр-ка MPC будем иметь

$$MC = \sqrt{y^2 + (x-p)^2}; \quad MQ = DP = x; \quad CM = MQ \text{ отсюда}$$

$$\sqrt{y^2 + (x-p)^2} = x; \quad y^2 + (x-p)^2 = x^2; \quad y^2 + x^2 - 2px + p^2 = x^2$$

или

$$y^2 = 2px - p^2$$

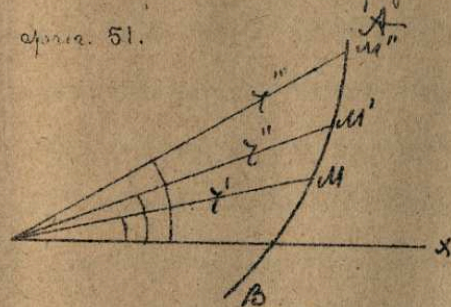
Это есть уравнение параболы, которому будут удовлетворять координаты x и y всякой точки, взятой

на параболу

Понятие об уравнении линии въ полярныхъ координатахъ

Часто точки данной кривой линии определяются по полярнымъ координатамъ. Пусть AB — некоторая

фиг. 51.



кривая линия на плоскости (фиг. 51). Возьмемъ на этой плоскости постоянную точку O и примемъ ее за полюсъ.

Проведемъ определенную пря-

мую линию OA и примемъ ее за полярную ось. Пусть будетъ полярное уравнение кривой AB относительно точки O и прямой OA вполнѣ определено и намъ известно.

Тогда каждая точка кривой AB будетъ имѣть свои определенные координаты. Такимъ образомъ точка M , взятая на этой кривой, будетъ определена полярными

уравненіемъ MOx и радиусомъ векторомъ OM . Тогда самое

лучше сказать и относительно другихъ точекъ $M_1, M_2, \dots$ этой кривой. Рассмотримъ данную перемещающуюся точку M , которая движется на плоскости и описываетъ кривую AB . Перемѣняющіяся полярныя координаты этой точки обозначимъ черезъ $(r$ и $\theta)$. При движеніи точки, ея

координаты будутъ измѣняться, но такимъ образомъ, что каждому определенному значенію одной изъ нихъ,

напр. θ , будем соответствовать совершенно определенное значение другой, в данном случае τ . Таким образом, когда $\theta = \angle M, OX$, то $\tau = OM'$ и т. д.

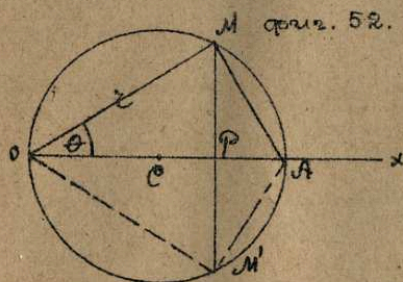
Словом, всякому определенному значению θ соответствует вполне определенное значение τ . Отсюда заключаем, что переменные θ и τ должны быть связаны между собой некоторым уравнением, которое должно дать возможность определять величины τ , соответствующие определенным значениям переменного θ . Этому уравнению должны удовлетворять полярные координаты всякой точки кривой; оно называется полярным уравнением кривой и показывает связь, существующую между полярными координатами произвольной точки кривой. Координаты τ и θ произвольной точки называются текущими. Относительно составления полярного уравнения данной кривой нельзя дать никаких общих правил или ограничивая тем, что повторим прежде всего замечание, а именно: для составления уравнения должно для произвольной точки кривой выразить алгебраическим равенством, по основному свойству, которое по определению должно принадлежать всем точкам рассматриваемой кривой, и сам в полученном уравнении кроить переменные τ и θ будут

Вводить и другие переменные величины, то можно пользоваться и помощью каких-либо свойств кривой — три в одной кривой, выводимых из ее построения.

Поясним сказанное примером.

I. Составить полярное уравнение геометрического места точек вершин прямоугольных углов, построенных на общей гипотенузе.

Мы знаем, что это геометрическое место есть окружность, но при составлении уравнения, мы будем пользоваться только тем определением, которое выражено



по заданию. Пусть (Фиг. 52) $OA = a$ — данная гипотенуза. Примем точку O за начало, а линию OA — за полярную ось и возьмем произвольную

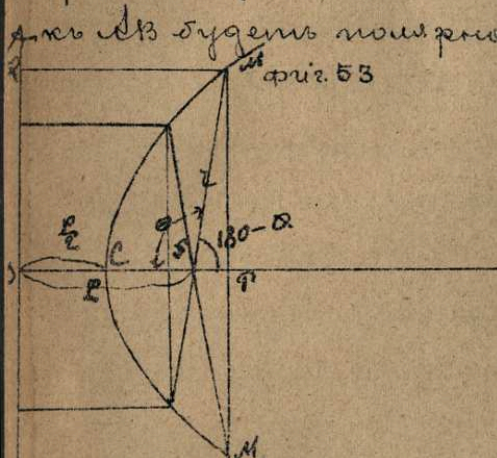
точку M рассматриваемого геометрического места. Соединим эту точку с O и A ее полярные координаты будут $OM = r$ и $\theta = \angle AOM$. Нам надо выразить, что треугольник OAM — прямоугольный. Для этого напишем соотношение между r , θ и a как частями прямоугольного треугольника его характеризующими

$$r = 2a \cos \theta$$

Это уравнение выражает зависимость между переменными координатами z и θ произвольной точки эллиптического шпата и оно есть полярное уравнение окружности.

Полярное уравнение параболы

Пусть (рис. 53) F будет фокус параболы и AB ее направляющая. Линия FA проведенная перпендикулярно



фокусу F . За нормальное направление все будет считать направлением от F к D . Если M есть произвольная точка параболы, то ее полярные координаты $MF = z$ и $\angle MFD = \theta$. Тогда по

теореме $DF = p$, или иначе по общему определению $MF = MQ$ но проведем MP перпендикулярно FA и найдем

$$z = MQ = DP = FD + FP = p + z \cos(180^\circ - \theta) = p - z \cos \theta$$

$$z = p - z \cos \theta; z(1 + \cos \theta) = p \quad \text{откуда}$$

$$z = \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

Это есть полярное уравнение параболы, так же как он выражает зависимость между координатами z и θ произвольной точки кривой

Рис. 1162. При составлении уравнения кривой всегда

надо допустить, что каждая координатная кривая имеет свое значение, так как одна и та же кривая, отнесенная к различным координатам, как мы видели, выражается разными уравнениями.

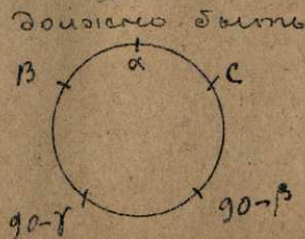
Геометрическое значение уравнения с двумя переменными

1. Координаты прямоугольные. До сих пор мы разбирали первую задачу евклидовой Геометрии — по данному геометрическому месту составить уравнение, связывающее координаты любой точки, лежащей на нем, и теперь обратимся ко второй обратной задаче: по данному уравнению связывающему переменные неизвестные, имеющие непрерывный и двойственный характер значений, найти геометрическое место точек, координаты любой из которых удовлетворяют данному уравнению. Пока ограничимся рассмотрением уравнения с двумя переменными и докажем, что оно выражает кривую или точку.

Возьмем любое уравнение: $2x - 3y = 6$, $ax^2 + bxy + c = 0$ или $x \cdot a^3 - a^2 \cdot 3n(x+b) = 0$ и будем рассуждать, переименовав x и y как координаты некоторой точки на плоскости. Прежде всего заметим, что данное уравнение неопределенное и имеет бесконечное множество решений.

и бесчисленное множество значений для x и y удовле-
творяющих рассматриваемому уравнению и
аналогично можно найти бесчисленное множество
точек на плоскости, координаты x и y
будут удовлетворять этому уравнению. В самом
деле возьмем, все координаты, дадим абсциссе
 x какое-нибудь произвольное значение, напр. $x = a$. Подста-
вим это значение $x = a$ в рассматриваемое уравнение,
найдем из него соответствующее значение y , по-
лучим $y = b$. Эти две величины x и y именно a и b
удовлетворяют, во-первых, данному уравнению и во-
вторых определяют некоторую точку на плоско-
сти. Пусть эта точка будет M . Таким обра-
зом мы нашли одну точку, координаты которой
удовлетворяют данному уравнению. Можно най-
ти и другие такие точки. Сделаем x равным дру-
гой произвольной величине, напр. $x = a'$ и подставив
ее в рассматриваемое уравнение, определим из
него опять соответствующее значение для y , полу-
чим, напр. $y = b'$. Эти две величины a' и b' и будут

Ошибочка на 8 листе, перт. № 43



ординатами другой точки M' на плоскости. Поэтому
то, таким образом можно будет построить
сколько угодно точек $M, M', M''...$ координаты кото-
рых будут удовлетворять рассматриваемому нами
уравнению

Таким образом, если при

$$x = a \text{ или } y = b \text{ и получим точку } M(a, b)$$

$$x = a' \quad " \quad y = b' \quad " \quad " \quad " \quad M'(a', b')$$

.....

Словом подобная точка, как $M, M'...$ можно найти
бесчисленное множество и координаты x и y каждой
из них удовлетворяют данному условию. Если те-
перь, вместо того, чтобы присписывать абсциссу x
совершенно произвольное значение, мы дадим ей
ряд значений весьма близко одно от другого стоя-
щих и рассмотрим, что ряд значений для

$$x = a, a', a'', a''', a''''...$$

есть ряд последовательных чисел весьма мало
одно от другого отличающихся, то и ряд соответ-
ствующих значений, полученных для y будет:

$$y = b, b', b'', b''', b''''...$$

будет также очевидно, рядов чисел весьма близ-
ких одно к другому; вследствие этого последователь-
ные точки $M, M'...$ будут расположены очень близко

одна къ другой и мы можем считать их еще ближе связанными между собою если только упомянутыми еще были процессы, на которые изливается и при переходе изъ одного значенія въ другое послѣдующее.

Такимъ образомъ мы видимъ, что возможно координаты бесчисленное множество точекъ, какъ угодно близких одна отъ другой и такихъ, что координаты каждой изъ нихъ будутъ удовлетворять данному уравненію. Если, затѣмъ, соединимъ все эти точки послѣдовательно непрерывной линіей, то получимъ некоторую кривую линію; эта кривая будетъ проходить черезъ все точки плоскости, которыя координаты удовлетворяютъ данному уравненію и наоборотъ, координаты всякой точки не взятой на этой кривой не будутъ удовлетворять данному уравненію. Кривая эта представляетъ геометрически представленіе даннаго уравненія, а данное уравненіе есть уравненіе кривой. Такимъ образомъ заключаемъ, что всякое соотношеніе между переменными x и y геометрически представляетъ кривую линію на плоскости. Изъ изложеннаго выше видимъ при томъ, какъ надо поступить для того, чтобы построить по данному уравненію кривую линію, которой уравненіе дано, т. е. какъ можно опредѣлить сколько угодно точекъ при-

аппроксимации кривой и произвольно близкими одна к другой

Для примера разберем уравнение:

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

Проведем оси координат и будем давать x^y ряд последовательных значений; вычисляя соответствующие значения y^x . Находим что

при $x=0$ имеем $y=0$, что дает точку A

" $x=1$ " $y=\frac{1}{2}$ " " " B

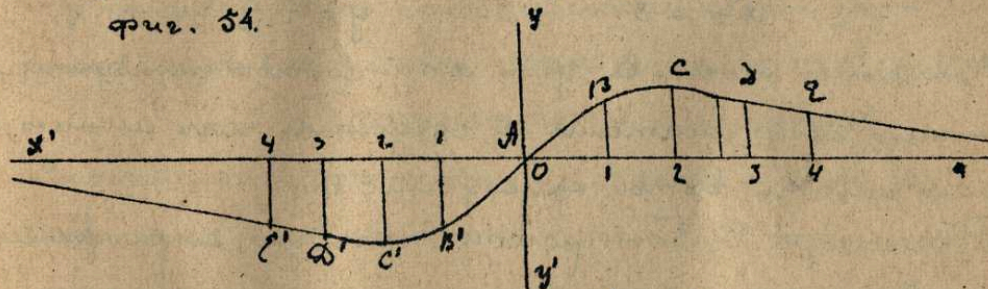
" $x=2$ " $y=\frac{2}{5}$ " " " C

" $x=3$ " $y=\frac{3}{10}$ " " " D

" $x=4$ " $y=\frac{4}{17}$ " " " E и т.д.

Строим теперь эти точки (фиг. 54) выбрав за единицу макс. произвольную длину отп. Мы видим,

фиг. 54.



эта кривая идет от точки A к B, затем переходит от B к C к D и т.д. приближаясь все ближе и ближе к оси x^y , так что когда возьмем $x=1000$, то $y=0,000001$ и т.д. Словом с увеличением x^y кривой приближается к 0 и обращает-

ся в 0 при $x = \infty$. Такая линия к которой кривая неопределинно приближается и сшивается в 0 безконечности называется асимптотой, а потому ось x' есть асимптота кривой. Чтобы форма кривой обозначилась обязательно необходимо построить возможно большее число промежуточных точек, соединяя их между точками A и B , B и C и т.д.

До сих пор мы давали x' только положительные значения, но ему можно также давать и отрицательные значения измняая как от 0 до $-\infty$, при этом y будет иметь по абсолютной величине такие же значения, как и прежде но со знаком $(-)$

так при $x = -1$ имеем $y = -\frac{1}{2}$

„ $x = -2$ „ $y = -\frac{2}{5}$

„ $x = -3$ „ $y = -\frac{3}{10}$ и т. д.

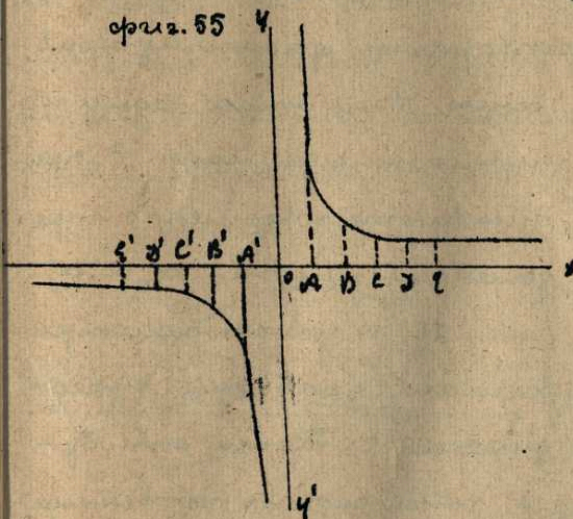
Построив точки в xy и $x'Oy'$, соответствующие этим координатам и соединив их линией, будем иметь часть кривой $OB'C'D'$...

Пример 2 Построить кривую, выражаемую уравнением: $x \cdot y = 4$.

Определив отсюда y мы найдем $y = \frac{4}{x}$. Теперь будем принимать x всевозможные значения от 0 до ∞ . Тогда будем иметь: при $x = 0$, $y = \infty$; $x = 1$ $y = 4$... точка A , $x = 2$, $y = 2$... B ; $x = 3$, $y = \frac{4}{3}$... C

$x = 4, y = 1 \dots D; x = 5, y = \frac{1}{5} \dots H$. Построим теперь эти точки (рис 55). Видим что кривая изъ со идеѣ

рис. 55



приближаясь к оси $x^{\text{ой}}$ и при $x = \infty$ сливается с осью. Ось $x^{\text{овы}}$ будетъ асимптотой кривой.

Если $x^{\text{ой}}$ будетъ отрицательная величина, измѣняя ея отъ 0 до $-\infty$ то y будетъ принимать также абсолютные значения, но

только отрицательныя. Отсюда следуетъ что кривая въ унѣ $y'Ox'$ будетъ расположена также, какъ и въ унѣ xOy . Эта кривая состоящая изъ двухъ бесконечно длинныхъ ветвей называется гиперболой.

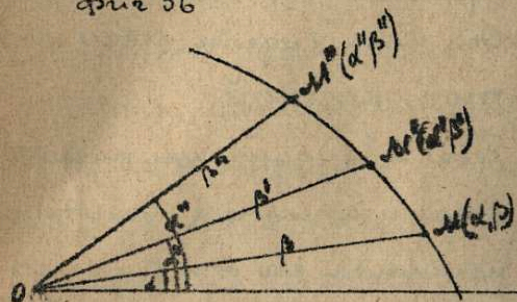
2. Координаты полярныя

Вообразимъ какое угодно уравненіе между двумя переменными r и θ , которыя пусть будутъ полярными координатами некоторой точки на плоскости, напримеръ

$$r = a \cos \theta; r = a(1 - \cos \theta); r = 2 + 3 \cos 2\theta \text{ и т. д.}$$

Решаемъ данное нами уравненіе будетъ неопредѣленное и потому можно найти безчисленное множество

ство значений для τ и θ , удовлетворяющая этому условию. Знаке говоря, можно найти на плоскости безчисленное множество точек, полярные координаты которых будут удовлетворять данному уравнению. Для этого одну из переменных, напр. θ , приписывают совершенно определенным значениям: $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ (фиг. 56) и из рассмотренных уравнений определяют соответствующие значения τ . Пусть они будут $\beta, \beta', \beta'' \dots$. Тогда каждая пара соответственных значений для θ и τ , как α и β, α' и $\beta' \dots$ дает точку на плоскости. Пусть O есть полюс, Ox — полярная ось.

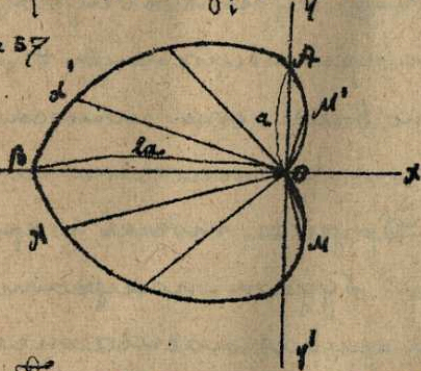


При $\theta = \alpha$ имеем $\tau = \beta$, что дает точку $M(\alpha, \beta)$
 „ $\theta = \alpha'$ „ $\tau = \beta'$ „ „ „ „ $M'(\alpha', \beta')$
 „ $\theta = \alpha''$ „ $\tau = \beta''$ „ „ „ „ $M''(\alpha'', \beta'')$

Если значения приписываемые θ , т.е. числа $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ будут весьма близки одно к другому, то очевидно, то очевидно, что и соответственные значения τ , т.е. числа $\beta, \beta', \beta'' \dots$ будут также весьма близки одно к другому, а потому эти точки на плоскости точки M, M', M'' и т.д. весьма близки одна к другой. При этом мы можем представить эти точки

этим угодно близкими между собою, для чего мы должны будем еще более уменьшать промежутки между числами $\alpha, \alpha', \alpha''$... Соединяя полусекмины точки непрерывного ряда, мы получим кривую или дугу. Эта прямая будет проходить через все точки плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, называемому полярным уравнением кривой и обратно координаты всякой точки, взятой на этой кривой будут удовлетворять данному уравнению и кривая в этом случае есть геометрическое представление данного уравнения.

фиг 57



длиноты всякой точки, взятой на этой кривой будут удовлетворять данному уравнению и кривая в этом случае есть геометрическое представление данного уравнения.

Построим на примерах кривую представленную уравнением вида

$$\tau = a(1 - \cos \theta)$$

Пусть будет O полюс (фиг 57) и OX полярная ось. При $\theta = 0$, $\tau = 0$, это значит что кривая начинается в точке O, т.е. в полюсе. Если θ увеличивается, то $\cos \theta$ уменьшается, а τ в этом случае увеличивается. Когда до $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим $\tau = a$, что дает точку A. Если θ увеличивается, то $\cos \theta$ будет во 2-й четверти, т.е. отрицательным, вследствие чего будем иметь

и постоянно увеличивающиеся. Когда $\theta = \pi$ то $r = 2a$,
 это дает точку В. Построим еще точки. Теперь
 вместо того, чтобы увеличивать θ дадим будем
 приписывать ему отрицательные значения от 0 до $-\pi$.
 При этом замечая, что так как θ входит в
 уравнение $r = 2a \cos \theta$, а $\cos$ отрицательной дуги равен
 $\cos$ положительной, то следовательно, при измене-
 нии θ от 0 до $-\pi$ радиус вектора будет поучать
 тоже самые величины, как и при изменении θ от
 0 до π . Отсюда заключаем, что выйдя от полюса
 и полярной оси OX кривая будет расположена как
 и вверху от полярной оси OX . Другая точка у кри-
 вой не будет так как состав будет поучать
 одни и тоже величины. Эта кривая называется
 кардиой

Предмет аналитической гео- метрии и способы измѣдованія, ею употребляемые

Въ начальной геометрии изучаются только три фи-
 гуры и протавления, которые могут быть измѣре-
 ны помощью циркуля и линейки. Итакъ въ геометрии
 разсматриваются только двѣ простыя линіи
 прямая и окружность круга и только такіе фи-
 гуры, которые происходят отъ сочетанія этихъ

двух простейших линий. В аналитической Геометрии при изучении линий на плоскости не ограничиваются прямою и кругом, здесь всякая кривая линия, определенная, как геометрическое место точек может быть предметом изучения.

Для того чтобы изобразить определенную таким образом кривую и открыть ее свойства в аналитической геометрии составляют ее уравнение. Уравнение это показывая зависимость существующую между координатами всякой точки, взятой на кривой линии, выражает закон течения кривой. Вмѣсто разсмотрѣнія самой кривой линии на чертежѣ изучаютъ ее уравнение и изыскуютъ его различные формы, при этомъ всякое свойство, принадлежащее уравнению кривой выражаетъ собой некоторое свойство самой кривой. Всякое преобразование приходящее къ уравнению даетъ соответствующее построение, относящееся къ кривой линии изображенной на чертежѣ.

Такимъ образомъ въ аналитической геометрии изображение свойствъ кривой линии сводится къ изученію свойствъ ее уравнения. Изученіе кривыхъ линий ведется много алгебраическими путями, при этомъ, собственно говоря да-
же не столько необходимо прибѣгать къ помощи чертежа; если мы только не имѣемъ чертѣки будемъ обра-
щались. Геом.

щатся к термину то только для того, чтобы облегчить
себе работу воображения, или для того, чтобы сократить
некоторые выводы. Необходимо прибавить однако, что е-
либы всякая кривая линия должна была быть определена
как геометрическое место, то само кривое, подлежа-
щее изучению, было бы по необходимости ограничено и им
должны бы были изучать кривые линии по мере, того, как
они встречаются бы в различных вопросах и приложениях
математики. Но мы знаем, что всякое произвольно
написанное уравнение с двумя неизвестными X и Y или
 x и y представляет некоторую кривую линии и так
как число возможных уравнений бесконечно, то за-
ключая, что число кривых линий, которое могут
быть рассматриваемы в аналитической геометрии,
также бесконечно, чтобы установить некоторый пор-
ядок в изучении бесчисленного множества кривых ли-
ний нам необходимо будет разделить их на клас-
сы по виду уравнений. Таким образом уравнение кривой,
таким образом, конечно, его изображение и таким
образом вообще образа и образа кривой, представля-
емой этим уравнением. Простейшими линиями и
высшими с ними наиболее важными для приложе-
ний математики оказываются те, которые выра-
жаются уравнением первой и второй степени между

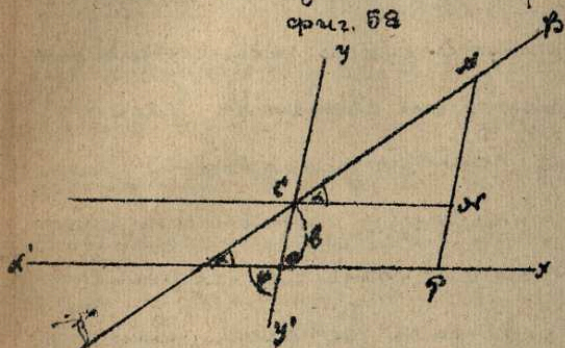
прямоугольными координатами x и y . Изучение этих линий, называемых линиями первого и второго порядка и являющихся главными образцами наших кривых. Кроме этих кривых линии второго порядка мы будем рассматривать еще и другие кривые линии, представляющие некоторую важность для прикладных частей математики. И так предмет аналитической геометрии на плоскости состоит в изыскании свойств различных кривых линий, при чем самое изыскание ведется путем аналитическим — помощью уравнений, представляющих эти линии. В аналитической геометрии на плоскости изыскивают 3 главных вопроса, найти уравнение линии заданной как геометрическое и наоборот кривую линию, выраженную данными уравнением и наконец найти соотношение между геометрическими свойствами фигуры и аналитическими уравнениями.

Простейшие уравнения прямой, эллипса, параболы, гиперболы в прямоугольных координатах
Уравнения прямой линии

1) Координаты косугольные. Рассмотрим произвольную прямую AB (рис 53) отнесенную к данным координатам, пусть она будет косугольна. Попо-

бжение прямой AB определяется относительно всей системы осей двумя величинами: углом α , который прямая составляет с осью x^R , и отрезком OC , который она отсекает на оси ординат. Угол α для различных прямых может иметь различные значения от 0° до 360° . Отрезок на оси ординат, OC может быть положительным и отрицательным. Величине этого отрезка с его знаком будем обозначать через b .

фиг. 53



Составить уравнение прямой значит найти соотношение

между координатами произвольной ее точки. Возьмем произвольную точку M на этой прямой пусть ее координаты будут x и y . Проведем через точку O линию параллельную оси x^R . Из $\triangle MCN$, где $\angle MCN = \alpha$, $\alpha < \angle CMN = \angle MCy = \angle NCy - \angle NCM = 90 - \alpha$, имеем $MN : CN = \sin \alpha : \sin (90 - \alpha)$ или

$$(y - b) : x = \sin \alpha : \sin (90 - \alpha) \text{ откуда } y = \frac{\sin \alpha}{\sin (90 - \alpha)} x + b$$

Это и есть уравнение прямой. Обозначим $\frac{\sin \alpha}{\sin (90 - \alpha)}$ через k где k для направления данной прямой есть постоянная величина, зависящая только от α и называется угловым параметром, а b наз. линейным параметром. Таким образом уравне-

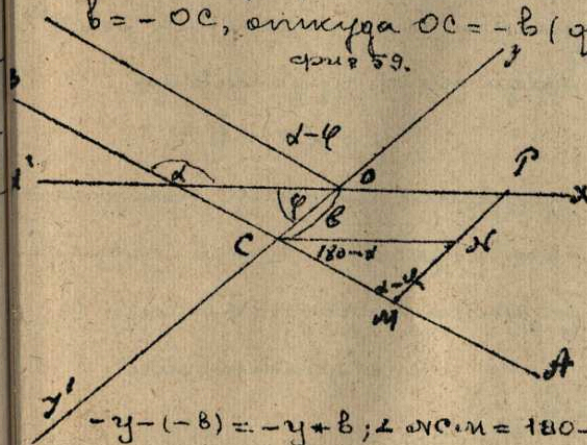
не прямой или будем иметь в таком виде

$$y = kx + b$$

Найденное нами соотношение существует в том же самом виде для координат x и y любой точки прямой.

Запомним, что при составлении уравнения прямой мы брали $\alpha < \varphi$ и откладывали b по положительной оси y . Но уравнение прямой получается одно и то же при каком угодно α и всяком b . Действительно, пусть $b = -OC$, откуда $OC = -b$ (рис. 59). Взяв произвольную

рис. 59.



точку M , построим ее координаты x и y . Будем поступать по предельному случаю.

В $\triangle MCO$ найдем $MO:OC = \sin \angle MCO: \sin \angle MOC$; но $OC = OB = y$ и $MO = MP + PO = MP - OC =$

$-y - (-b) = -y + b$; $\angle MCO = 180^\circ - \angle OCB = 180^\circ - \alpha$; $\angle MOC = \angle COB = \alpha - \varphi$ откуда при делении абсолютных величин получим

$$(y - b) : (-x) = \sin(180^\circ - \alpha) : \sin(\alpha - \varphi)$$

Так как $\sin(180^\circ - \alpha) : \sin(\alpha - \varphi) = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} \neq -\frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} = -k$ то следовательно $(y - b) : (-x) = -k$ или

$$y = kx + b$$

Запомним некоторые частные случаи: 1) Если $k = 0$

ния проходит через начало координат, то для нас отсюда $b=0$ и ее уравнение обратится в $y=kx$

2) Если прямая параллельна оси абсцисс (рис 60), то для нас $\alpha=0$ и $\sin \alpha=0$, а следовательно условной параметр может быть равен 0 потому уравнение будет

$$y=b$$

3) Если прямая совпадает с осью x^0 , то и b и k обращаются в 0 и уравнение будет: $y=0$. - Это ось x^0 или абсцисс.

4) Чтобы получить ур-е линии параллельной оси y^0 надо надо уравнение

$$y=kx+b$$

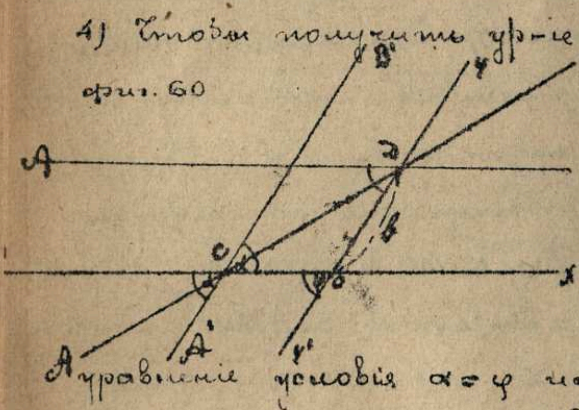
сделать сначала некоторое преобразование при непосредственном подстановлении в

уравнение условия $\alpha=\varphi$ имеем неопределенность

$$k = \frac{\sin \varphi}{0} = \infty$$

Понимаем, что α (рис. 60) при непрерывном вращении около неподвижной точки O примет в положении $A'B'$ параллельную ось y^0 , тогда разстояние всех точек

$A'B'$ от y^0 будет одинаково и пусть оно равно некоторой a . Из $\triangle OCD$ имеем $\frac{OD}{CO} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = k$, но $\frac{OD}{CO} = \frac{b}{-a}$ и следовательно $\frac{b}{-a} = k$, или $b = -ak$. и подставив значение b в уравнение $y=kx+b$ имеем



есть $y = kx - ak$ или $\frac{y}{k} = x - a$. Это равенство существует при всяком положении линии AB при вращении ее, а следовательно должно существовать и в пределе, т.е. когда $\lim k = \infty$, то $\lim \frac{y}{k} = 0$ и уравнение обращается в $x - a = 0$ или $x = a$, что и есть уравнение параллельной оси y .

3) Для оси y $y' - a = 0$ и уравнение оси ординат будет $x = 0$.

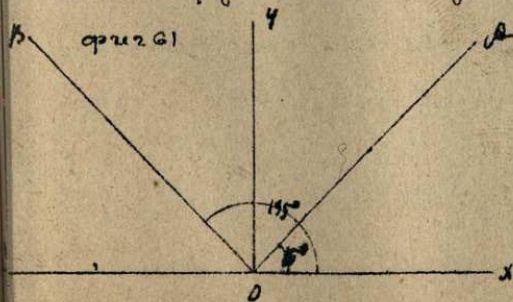
Координаты прямоугольные. Если прямая отнесена к прямоугольным координатам, то $\alpha = 90^\circ$. В этом случае y любой параметр прямой будет:

$$k = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

2) так, при прямоугольных координатах угловой параметр прямой выражается тангенсом угла наклона прямой к оси x . так что уравнение прямой сохранит прежний вид $y = kx + b$ и будет

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$$

Специальные случаи 1) Прямая проходит через начало координат 0 и дает с осью x угол в 45° , то



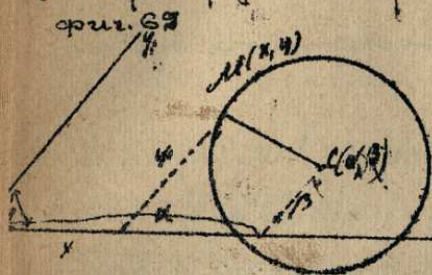
для нас $b = 0$, а $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и уравнение будет $y = x$.

2) Если прямая (прямая 61) проходит через начало координат 0 и дает с осью

т.е. угол φ в 135° , то для него $\sin \varphi = 0$, а $\tan 135^\circ = -1$. Поэтому его уравнение будет: $y = -x$

Уравнение круга

Самое общее уравнение круга получается тогда, когда примем его координаты координатными и возьмем центр круга в произвольной точке плоскости. По-



ложение круга будет совершенно определено, если да-
ны координаты его центра
и величина радиуса. Пусть
(фиг. 62) координаты центра

C будут $(\alpha$ и $\beta)$ и радиус круга R . Возьмем на круге произвольную точку M , координаты которой x и y

Возьмем по известной нам формулу квадраты расстояния точки M от центра C , будем иметь

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

этот квадрат расстояния имеет величину посто-
янную и всегда должен быть равен R^2 . Это самое
общее уравнение круга. Круге также приписывается раз-
матривать при прямоугольных осей координат.

Если же координаты прямоугольны то $\varphi = 90^\circ$ и $\cos \varphi = 0$
тогда уравнение круга будет

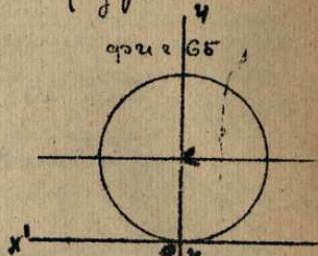
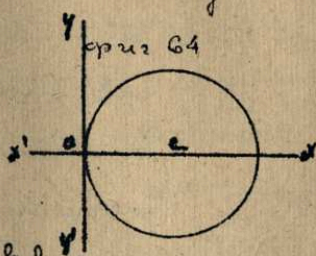
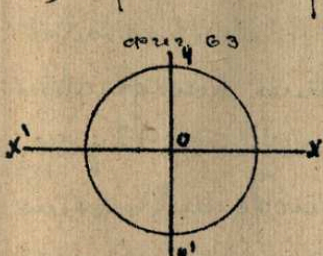
$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Частные случаи: 1) Если $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то центр кру-

из насадится въ началѣ координатъ (фиг. 63) въ такомъ случаѣ имѣемъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$; уравненіе круга будетъ:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

2) Начало координатъ насадится на окружности



(фиг. 64), а за ось x' возьмемъ діаметръ, проходящій чрезъ эту точку. Въ данномъ случаѣ имѣемъ координаты центра $\alpha = R$, $\beta = 0$, поэтому уравненіе круга будетъ $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ или по упрощеніи

$$x^2 + y^2 = 2Rx$$

3) Начало координатъ насадится на окружности, а діаметръ, проходящій чрезъ эту точку, взять за ось y' . Въ этомъ случаѣ имѣемъ: $\alpha = 0$, $\beta = R$ и уравненіе круга принимаетъ слѣдующій видъ

$$x^2 + y^2 = 2Ry$$

Эти уравненія наглядно показываютъ, что форма уравненій кривой насадится въ зависимости отъ системы координатъ и выбора расположенія кривой относи-
тельно системы.

Уравненіе параболы

Опредѣленіе параболы, какъ симметрическаго имѣетъ
одною осью.

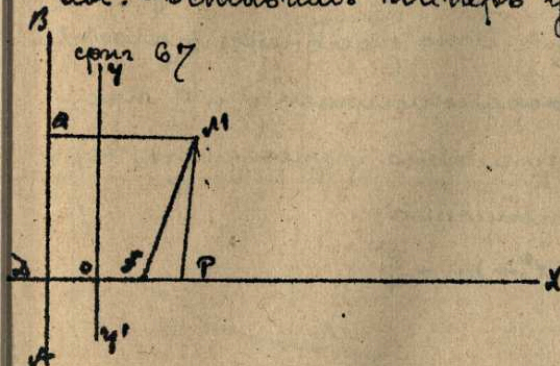
точнее было уже дано. Было указано также, как
строить параболу по точкам. Параболу также
можно начертить непрерывным движением. Пусть
ВВ (ориг 66) будет направляющая, а F фокус на-

А) работи. Прикосновение ребра линейки к направляющей AB и укреплении неподвижно в этой положении. К ребру линейки прикосновения прямо угловый треугольник, катет которого GM может свободно скользить по линейке. Возьмем нить, длина которой была бы равна ду-

полю катушку DM и один конец этой нити укрепим неподвижно в точке F другой же конец прикрепим к вершине F треугольника. Перемещая затем треугольник по линейке, будем натягивать нить помощью карандаша, приложенная острей карандаша к катушке DM . Острей будем, очевидно описывать дугу параболы. В самом деле возмем треугольник в каком нибудь его положении, напр. $H'D'G'$, тогда нить примет форму $D'M'F$ и острей карандаша нанесем на нить ее будем касаться в точке M' . Легко видеть, что точка M' принадлежит параболы той

ее расстояние от направляющей и от фокуса равны.
 $M'F = (D'M' + M'F) - D'M' = D'M' - D'M' = M'M'$

Перевернув треугольник и снова применив к нему MQ к направляющей, мы, очевидно, можем тем же способом нарисовать и другую половину параболы. Оставшимся теперь уравнение параболы. Пусть



это направляющая парабо-
 лы и точка F ее фокус
 (рис. 67) Тогда, если M есть
 текущая точка кривой, то
 соединив ее с фокусом и
 проведем перпендикуляр к

направляющей MQ , мы должны иметь по определе-
 нию параболы: $MF = MQ$. Из точки F опустим пер-
 пендикуляр FD на направляющую AB . Мы знаем уже
 что Dx есть ось кривой. Для получения более кратко-
 го уравнения кривой всегда бывает выгодно ее ось при-
 нять за одну из осей координат. Поэтому здесь
 линию Dx примем за ось абсцисс. Разделим линию

DF пополам точкою O , такъ что будем иметь: $OF = OD$

Точка O есть, очевидно, точка параболы и притом
 ее вершина. Мы примем точку O за начало право-
 угольных координат. При выбранном такимъ об-
 разом осяхъ координат получается самый простой

вид: уравнения параболы. Полагая, что $FD = p$, тогда $OF = OD = \frac{p}{2}$. Координаты текущей точки M означим ее — x и y , координаты фокуса F будут $\frac{p}{2}$ и 0. По формуле, определяющей расстояние между двумя точками имеем: $MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$. С другой стороны $MF = FD = x + \frac{p}{2}$ и по равному свойству параболы получим равенство: $\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$. Это уравнение представляет соотношение между координатами x и y произвольной точки параболы. Его можно упростить, возведя обе части в квадрат, получим:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

или по сокращении

$$y^2 = 2px$$

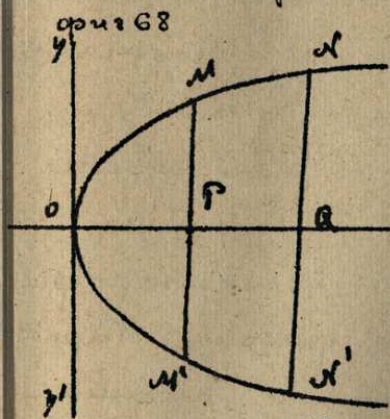
Это и есть уравнение параболы, обращенной к положительной оси. Коэффициент $2p$ есть данная величина и наз. — параметром кривой

Исследование формы параболы по ее уравнению

Важно замечено: чтобы исследовать кривую линии, т.е. определить ее фигуру, и размеры, а также ее положение относительно в аналитической геометрии достаточно иметь ее уравнение.

Возьмем произвольные, оси координат Ox и Oy (рис. 68) Рисуем данное уравнение относительно y^2

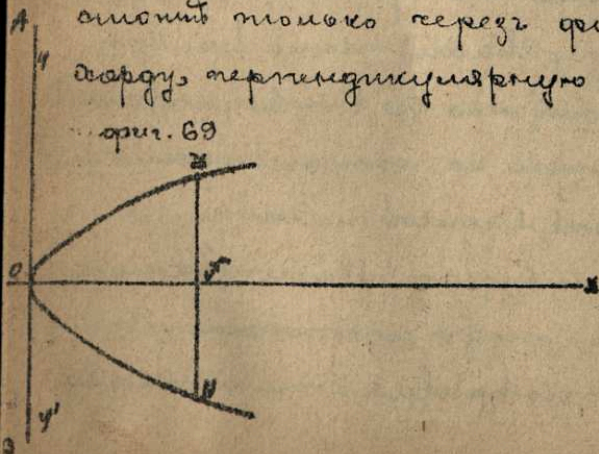
$y^2 = 2px$, $y = \pm \sqrt{2px}$. Отсюда видно, что если полагать $x = 0$, то $y = 0$, следовательно наша кривая проходит через начало координат. Если возьмем $x < 0$, то y будет мнимое количество. Это значит, что по одну сторону от Oy точки кривой не существует. Будем полагать $x > 0$. Возьмем какое нибудь значение для x , пусть, напр., $x = OP$. Тогда по данному уравнению мы получим соответствующую величину для y^2 и следовательно, что для y^2 мы получим два равных, но с обратными знаками величины. Из этого мы докажем, что все точки кривой, подобно точкам M и M' будут расположены симметрично относительно оси x , а следовательно ось x есть ось кривой. Вследствие этого достаточно ради нарисовать часть кривой находящуюся над осью x , вторая же часть может быть построена по симметрии ее относительно оси x . Для верней части кривой будем иметь



$y = +\sqrt{2px}$. Если x , идя от 0 будет увеличиваться, тогда, очевидно, y будет тоже постоянно увеличиваться, это значит, что кривая от точки 0

существует. Будем полагать $x > 0$. Возьмем какое нибудь значение для x , пусть, напр., $x = OP$. Тогда по данному уравнению мы получим соответствующую величину для y^2 и следовательно, что для y^2 мы получим два равных, но с обратными знаками величины. Из этого мы докажем, что все точки кривой, подобно точкам M и M' будут расположены симметрично относительно оси x , а следовательно ось x есть ось кривой. Вследствие этого достаточно ради нарисовать часть кривой находящуюся над осью x , вторая же часть может быть построена по симметрии ее относительно оси x . Для верней части кривой будем иметь

идет вправо эллипсу, постоянно поднимаясь
над осью X^1 . При этом увеличивая x до cs мы ви-
дим, что и y будет увеличиваться до $+cs$, остава-
ясь всегда двойственным. Отсюда заключаем
что кривая имеет одну непрерывную ветвь, кото-
рая удаляясь от оси X^1 , простирается в бесконечность.
Если бы величина p была дана числом и если бы x и y
мы стали приписывать на самом деле числовое
значение, то мы могли бы построить на чертеже
своего угодно точки кривой. Соединив нас непрерыв-
ной линией, мы получили бы ветвь параболы. Пара-
бола может иметь отверстие больше или мень-
шее смотря по величине $2p$. Если больше $2p$, то
отверстие растет и увеличивается, то есть больше
отверстия параболы. Когда парабола дана, то ее на-
раметры легко определить и построить. Для этого
относительно точки середины фокуса параболы F проведем
вертикаль, перпендикулярную оси. Величина ее и будет рав-
на параметру. Пусть AB
(рис. 69) направляющая, F
фокус. Определим коорди-
наты точки A : они будут:
 $x = FO = \frac{p}{2}$; $y = AF = \sqrt{2px}$; под-
ставив вместо x под кор-

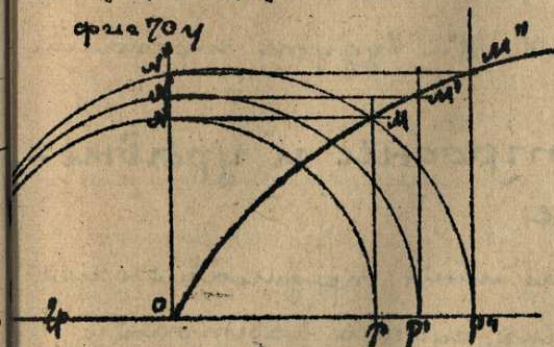


иметь его величину $\frac{p}{2}$ получим $2F = p$. $2F = 2M = 2p$, т. е. параметру параболы.

Уравнение $y = \sqrt{2px}$ называется уравнением параболы отнесенной к вершине и оси.

Из уравнения параболы, отнесенной к вершине и к оси, вытекает способ построения ее по точкам (фиг. 70). Уравнение $y = \sqrt{2px}$ показывает, что каждая ордината есть величина средняя пропорцио-

фиг. 70 y



нальная между постоян-
ного диаметра $2p$ и абсциссы x . Отложим на оси Ox в отрицательную сторону $OA = 2p$ и введем затем произ-
вольную абсциссу $OP = x$ или

на линии OP , как на диаметр опишем окружность, которая пересечет ось y -ю в точке N . Затем, прове-
дя в точке P перпендикуляр к оси x -ю из точки N
проведем еще параллель EN . Эта параллель пересечет
перпендикуляр в точке M , которая будет правой
вершиной параболы. В самом деле в круге ENP
по известной теореме геометрии имеем:

$$ON = MP = \sqrt{ON \cdot OP} = \sqrt{2px} = y$$

Так как абсцисса $OP = x$ была взята произвольно,
то повторяя тоже построение при других абсцис-

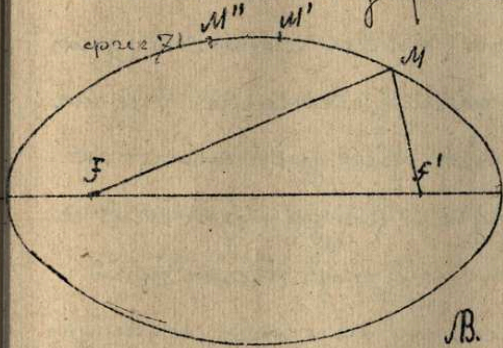
сам, можно построить сколько угодно точек на-
рабона, производимых близлежащих одна к другой; для эго
нам надо будетъ описывать различные окружно-
сти, центры которых находимся бы на оси Ox и
которые проходили бы чрезъ точку A . Эти окружно-
сти пересекутся ось $x^{\text{в}} \text{ в } O$ точками $P, P', P'' \dots$ а ось $y^{\text{в}} \text{ в } O$
точками $M, M', M'' \dots$ Чрезъ точки $P, P', P'' \dots$ проведемъ пер-
пендикуляры Ox , а чрезъ $M, M', M'' \dots$ параллели той же
оси. Точки пересеченія $M, M', M'' \dots$ будутъ точками
на рабона.

Эллипсъ, его построение и уравне- нiе

Эллипсомъ называется кривая линия, представляющая
геометрическое мнѣсто точекъ, сумма разстоянiй
которыхъ отъ двухъ данныхъ неподвижныхъ точекъ по-
стоянна и равна данной длинѣ.

Две построенныя точки, которые употребляются въ
опредѣленiи, называются фокусами эллипса. Для то-
го, чтобы получить общее понятiе о фигурѣ эллип-
са укажемъ прежде всего какъ можно начертить
эту кривую непрерывнымъ движенiемъ карандаша.
Пусть $F \text{ и } F'$ (рис. 71) суть два данныя фокуса и $2a$
данная длина равная $2a$. Сумма разстоянiй кажда-
го точки эллипса отъ двухъ фокусовъ $F \text{ и } F'$ постоянна

быть равна $2a$. Возьмем возможно тонкую, гибкую и не растяжимую нить, длина которой равна была бы $2a$ и закрепим оба конца ее неподвижно



в фокусах F и F' . Натянем эту нить карандашом так, чтобы она образовала ломаную линию FMF' , при этом острѣе карандаша будет нахо-

диться в точке M . Эта точка, очевидно, будет принадлежать эллипсу потому что сумма ее расстояний от двух фокусов, т. е. $MF + MF'$ составляет полную длину нити и следовательно равна данной длине $2a$. Если теперь, удерживая нить в натянутом положении будем двигать карандаш то острѣе его, очевидно, будет описывать дугу эллипса $MM'M''$... и может таким образом начертить эллипс. Из этого способа черчения эллипса можно заметить непосредственно, что эллипс есть непрерывная выпуклая и замкнутая кривая линия, касающаяся на растянутой окружности. Если же расстояние между фокусами F и F' обозначим через $2c$, то непременно должно быть $2c < 2a$ иначе эллипс был бы невозможен. Три точки

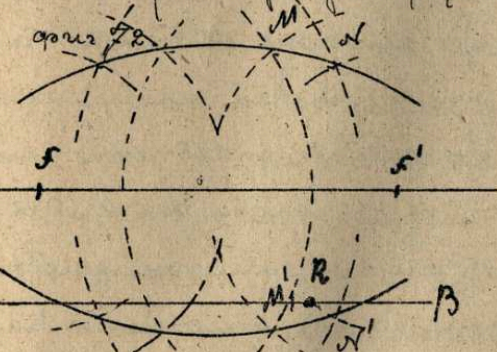
Анан. Ресм.

Лист 14

очевидно, что фигура эллипса тем больше будет растянута, тем больше будет $2c$ сравнительно с $2a$ или все равно, тем больше отношение отрезков $\frac{c}{a}$ к единице. Наоборот, тем меньше будет $2c$ сравнительно с $2a$, т. е. тем меньше будет правильная дробь $\frac{c}{a}$ тем ближе фигура эллипса будет подходить к фигуре круга. Когда наконец соединим оба фокуса F и F' в одну точку, так как это будет $2c = 0$ и отношение $\frac{c}{a} = 0$, то эллипс очевидно обратится в круг радиуса a и точка в которой совпадают оба фокуса будет центром круга. Отношение отрезков $2c$ и $2a$, т. е. дробь $\frac{c}{a}$ есть число отвлеченное всегда меньшее единицы оно называется эксцентриситетом эллипса. По величине эксцентриситета ясно видно можно судить о фигуре эллипса. Описанный способ черчения эллипса непрерывным движением карандаша употребляется в различных искусствах и применяется когда надо начертить эллипс на доске. Во всех же случаях когда требуется большая точность и когда надо начертить эллипс на бумаге употребляется другой способ, а именно строит эллипс по точкам. Этот последний способ состоит в следующем построении водородно большого

исла точек эллипса, расположенных весьма близ-
ко друг к другу. Совокупность этих точек со-
ставит пунктирное изображение эллипса. Тригономет-
рическое построение эллипса по точкам мы дадим там
вопервых, что, руководствуясь определением эллип-
сической кривой мы сможем построить сколько угодно то-
чек, принадлежащих ей. Пусть (рис. 72) F и F' два

данные фокуса, расстояние
между ними $FF' = 2c$ и
пусть $2a = 2a$ есть дан-
ная сумма расстояний от
эллипса от данных
фокусов. Возьмем на ли-



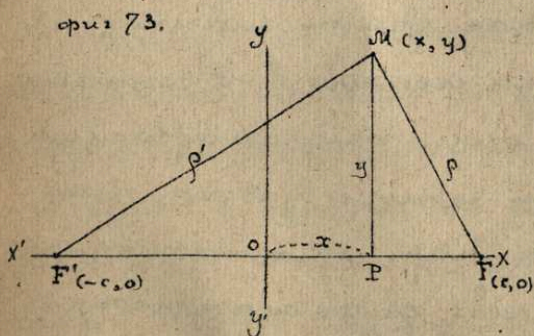
нии из произвольной точки R и затем из фоку-
са F' радиусом равным FR а из фокуса F радиусом
равным $F'R$ опишем две окружности. Эти две
окружности пересекутся в точках M и M' , кото-
рые будут, очевидно принадлежать эллипсу, ибо
сумма их расстояний от фокусов F и F' состав-
ит $2a$. Подобным паре точек, принадлежащих
эллипсу сможем построить сколько угодно, так-
же для получения другой пары точек можно
изменить величину радиусов двух окружностей,
табы и их сумма все таки равная $2a$

Пусть первый из радиусов будет равен $a + \alpha$, тогда второй должен быть равен: $2a - (a + \alpha) = a - \alpha$. Для того, чтобы было возможно образовывать треугольники $\triangle MF'F$, итаке наоборот, для того, чтобы две эллиптические окружности пересеклись, необходимо:

- 1) Чтобы сумма двух сторон $MF + MF'$ была больше третьей стороны FF' , т.е. чтобы $2a$ было больше $2c$.
- 2) Чтобы разность сторон MF и MF' была бы меньше FF' . Первое из этих условий мы покажем выполненным. Второе же условие требует, чтобы разность $a + \alpha - (a - \alpha) < 2c$, т.е. чтобы $\alpha < c$. Отсюда видно, что для получения точек эллипса должен быть больший радиус меньше $(a + c)$, а меньший радиус больше $(a - c)$. Наибольшего значения для каждого радиуса будет $a + c$, а наименьшего $a - c$.

Уравнение эллипса

Положим (рис 73) что F и F' два данных фокуса эллипса и расстояние $FF' = 2c$.



Пусть M есть произвольная точка кривой. Соединим ее с фокусами обозначим расстояния MF и MF' через r и r' , по определению эллипса должны иметь $r + r' = 2a$, где $2a$ равно

длина большой полуоси.

данной дуги. Для составления уравнения эллипса эллипс FF' примем за ось x -ов, а начало координат поместим в точку O , взятой в середине FF' , так что $OF = OF' = c$. Ось y -ов будет перпендикулярна оси x -ов. Таким образом оси координат примем так эллипса. При таком выборе получится самое простое уравнение эллипса. Координаты произвольной точки M эллипса будут x и y , а координаты фокуса F будут $(c, 0)$. Поэтому имеем

$$r = \sqrt{FP^2 + MP^2} = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

Для фокуса F' координаты будут $(-c, 0)$ поэтому имеем

$$r' = \sqrt{(F'P)^2 + MP^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Сумма $r + r'$ должна быть равна $2a$, следовательно

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Это уравнение представляет зависимость между координатами произвольной точки кривой, поэтому представим в простейшем виде, освободив его от радикала. Напишем его в виде.

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат получим

$$c^2 + x^2 - 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 + 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

по сокращении имеем

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

Возведем обе части в квадрат получим

$$a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2xc + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 + 2a^2xc \text{ по упрощении}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \text{ или}$$

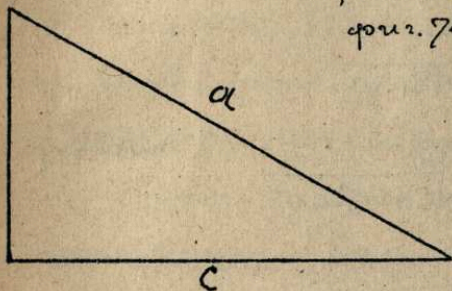
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Заметим, что $a > c$ и поэтому разность $a^2 - c^2$ — положительная величина, приравняем ее b^2 , так что

$$a^2 - c^2 = b^2$$

Величину b можно построить по теореме Пифагора как катет прямоугольного треугольника гипотенуза которого равна a , а другой катет c (рис. 74)

рис. 74



Этим образом b будет известная и постоянная величина, где дан

но эллипса и мы можем ввести b в уравнение как параметр, тогда уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Уравнение эллипса по его уравнению

Уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ решим относительно y ка: $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$; $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ и по извлечении корня

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Из уравнения мы видим, что одному значению x соответствует 2 значения y ка, равные по аб-

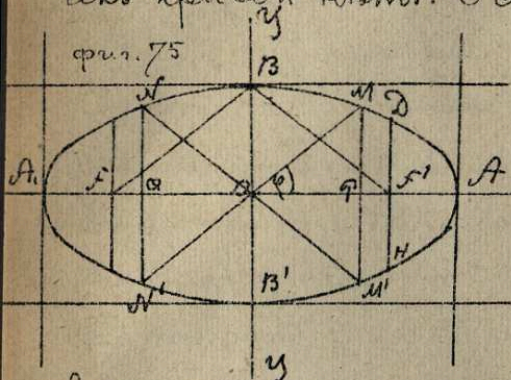
ратными знаками; отсюда заключаем, что кривая расположена симметрично относительно оси $x^{\text{в}}$ и каждой точке кривой над осью соответствует точка под осью, имеющая ту же абсциссу и равную по противоположному ординату. Значит из уравнения мы видим, что величина абсциссы не может быть больше a и меньше $(-a)$, так как только при условии $a^2 - x^2 \geq 0$ корни будут действительными и существование точки возможным. Это условие выполняется при условии $a \geq x \geq (-a)$. Так как x входит в квадрат, то величина корней для положительных и отрицательных абсцисс остается одна и та же, а потому одной и той же ординате будут соответствовать две равные по противоположные абсциссы и кривая будет расположена симметрично также и относительно оси $y^{\text{в}}$.

Найдем теперь точки кривой импозитивные предельные абсциссы $a, -a$, а также $x = 0$. Из уравнения

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

при подстановке $x = a$ и $x = -a$ имеем $y = 0$, т. е. в этих точках кривая пересекает ось $x^{\text{в}}$. Это точки A и A' на рис. 75 и как видно от точки A , так и видно от A' точки кривой идут. Пусть теперь $x = 0$, тогда $y = \pm b$. Отсюда

от O по оси y^b OB и OB' равны, в полученных точки кривой B и B' , в которых кривая пересекает ось y^b и касательные точки B так же и такие точки B' той же кривой есть. Оси x^b и y^b будут осами кривой. Если в точках A , A' , B , B' возставим перпендикуляры к осям то получим касательные к кривой в этих точках. Эти касательные в пересечении



себя дадут прямоугольники внутри которых и будут заключаться ^{всё} точки кривой.

Если x будем увеличивать, то по уравнению видно, что при этом y уменьшается по абсолютной величине и стало быть от точки B в правую сторону кривая пойдет приближаясь к оси x^b . Возьмем произвольный x , положим OP , т. е. $x = OP$, найдем соответствующую величину y^a , построим эту величину как ординату MP и другую $M'P$ ей равную, но по знаку противоположную. В эти точки M, M' суть точки кривой, при том $MP = M'P$. Если в любую сторону от оси y^b отложим $OQ = OP$ и возставим перпендикуляры из точки Q к оси x^b и отложим на нем $NQ = N'Q = MP = M'P$, то по-

иными две точки кривой M и M' симметричны съ то-
чкой M и M' относительно оси y .⁶²

Не трудно доказать, что точка O будет центром
эллипса, действительно, соединив точку O съ точками
 M и M' и увидимъ, что два треугольника MOF и $M'OQ$
равны, откуда слѣдуетъ, что углы MOF и QOM' равны,
а потому линия MMO' есть прямая. (Сверая того изво-
димъ: $OM = OM'$ и такъ какъ M есть произвольная точка
эллипса, то следовательно произвольная хорда эллип-
са, то следовательно произвольная хорда эллипса MM'
и проведенная черезъ точку O , дѣлится этою точкою
пополамъ, значитъ, точка O есть центръ эллипса и
все хорды проходящія чрезъ нее дѣлятся ею попо-
ламъ.

Вспомнимъ это изслѣдованіе фигуры эллипса раз-
смотрѣнимъ, какъ измѣняется въ немъ радиусъ, прове-
денный черезъ центръ къ различнымъ точкамъ кривой
при переходѣ отъ точки A къ B . Пусть $OP = x$ и $MP = y$
и $OM = z$ тогда имѣемъ: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Но по уравне-
нію эллипса эллипса $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$. Вставивъ веши-
тину y^2 въ уравненіе z , получимъ $z = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)} =$
 $\sqrt{b^2 + x^2 (1 - \frac{b^2}{a^2})}$. Если какъ $b < a$, то $\frac{b}{a}$ или $\frac{b^2}{a^2}$ менше
1, поэтому $(1 - \frac{b^2}{a^2}) > 0$. При переходѣ точки A къ B
 x постоянно увеличивается его при $x = a$ будетъ
анал. Геометр.

$$z_{\max} = \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{a^2}(a^2 - a^2)} = \sqrt{b^2 + a^2(1 - \frac{c^2}{a^2})} = a$$

Фокусы эллипса находятся на большой оси, при этом $OF = OF' = c$. Соединив F и F' с B в Δ^{km} BOF имеем

$$BF^2 = b^2 + c^2$$

По той же причине, что $a^2 - c^2 = b^2$ $BF = a$ отсюда следует, что если даны оси эллипса, то, чтобы построить фокусы, надо по концы B малой оси отложить дугу радиусом a , точки пересечения этой дуги с большой осью будут фокусы. И так как $c^2 = a^2 - b^2$ и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ значит эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Если b эллипса $b=a$ то $\varepsilon=0$ эллипс обратится в окружность. Действительно возведем уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а так как $b=a$ то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ даем $x^2 + y^2 = a^2$, а это есть уравнение круга, которого центр в начале координат и радиус $= a$. При этом $\varepsilon=0$.

Следовательно можно сказать, что круг есть частный случай эллипса, у которого эксцентриситет равен 0.

Выпишем теперь параметры входящие в уравнение эллипса и добавим еще один параметр дадим полное уравнение.

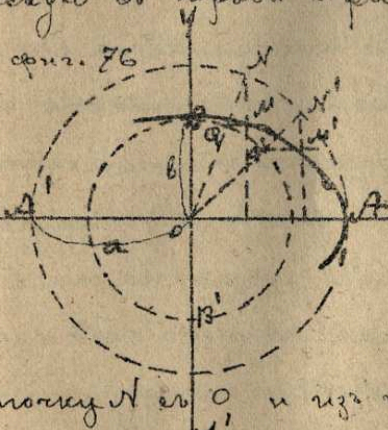
a - большая полуось, b - малая полуось, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ эксцентриситет. ε - величина отвлеченная и всегда мень-

шае 1. Новый параметр будет $\frac{1}{2}$ хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к оси $x^{\text{в}}$ ка фиг. 75 этот параметр $2\overline{F_1} = p$. p определим из уравнения эллипса $y_f = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b}{a} \sqrt{b^2} = \frac{b^2}{a}$ и так

$$p = \frac{b^2}{a}$$

Построение эллипса по точкам, выходящее из его уравнения

Напишем уравнение эллипса: $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Возьмем (фиг. 76) две прямоугольные координаты. Из центра O радиусами b опишем окружности из той же точки опишем еще другую окружность concentрическую с первой и радиуса $= a$. Возьмем затем произвольную абсциссу OP и из точки P возставим перпендикуляр к оси $x^{\text{в}}$. Пусть N есть точка встроки этого перпендикуляра с окружностью радиуса a . Соединив



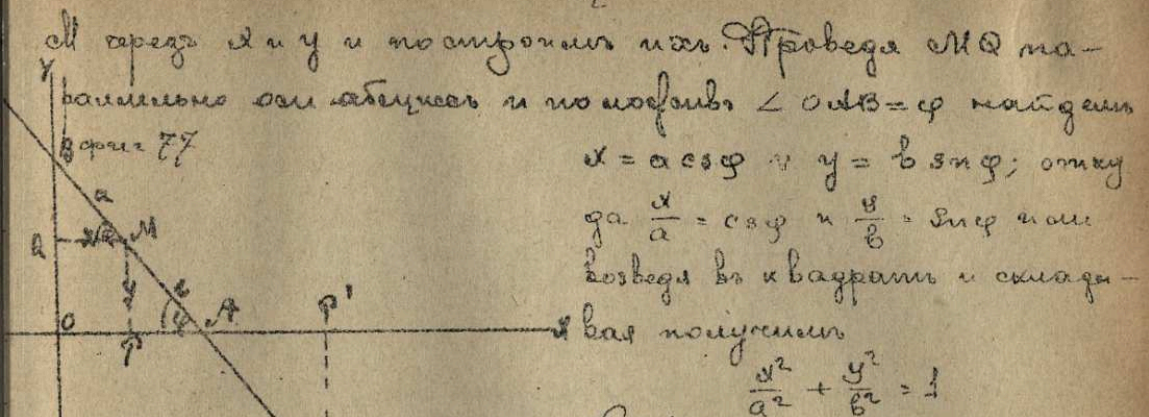
точку N с O и из точки Q пересечения линии ON с окружностью радиуса b проведем параллель QM оси $x^{\text{в}}$ тогда точка встроки этой параллели с перпендикуляром NP , будет точкою эллипса M . В самом деле пусть $OP = x$ и так как $ON = a$, то из треугольника ONP найдем: $PN = \sqrt{a^2 - x^2}$. Затем так как $QO = b$

тогда точка встроки этой параллели с перпендикуляром NP , будет точкою эллипса M . В самом деле пусть $OP = x$ и так как $ON = a$, то из треугольника ONP найдем: $PN = \sqrt{a^2 - x^2}$. Затем так как $QO = b$

то написавъ пропорцію $MP:OQ = MP:ON$ или $MP:b = \sqrt{a^2 - x^2}$:
а отсюда найдемъ $MP = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. И такъ имеемъ
что $MP = y$, а потому точка M есть точка эллипса.
Такимъ образомъ точки для построения эллипса полу-
чить можно угодно. Насертежемъ обозначены точки
 M, M', M'' принадлежатъ эллипсу. Соединивъ нас
непрерывною кривою, мы получимъ дугу кривой въ
другую сторону можно построить по симметрии или
также по точкамъ.

Свойства эллипса, служащее основаниемъ для устройства эллип- сографа.

Возьмемъ двѣ прямоугольныя оси координатъ Ox и Oy
(рис. 77) предположимъ, что прямая линія въ имѣетъ по-
стоянную величину и перемещается на плоскости
такъ что одинъ ее концы ее A скользитъ по оси x^b , а другой
концы ее B перемещается въ то же время по оси y^b .
Мы докажемъ, что всякая точка прямой AB будетъ
описывать некоторый эллипсисъ, при томъ эллип-
сисъ, чей центръ находится въ O и чей оси
совпадаютъ съ осями координатъ. Чтобы дока-
зать это, возьмемъ произвольную точку M и попо-
лосимъ, что разстояніе $AM = b$ и $BM = a$. Эти разсто-
янія помножимъ обозначимъ координаты точки

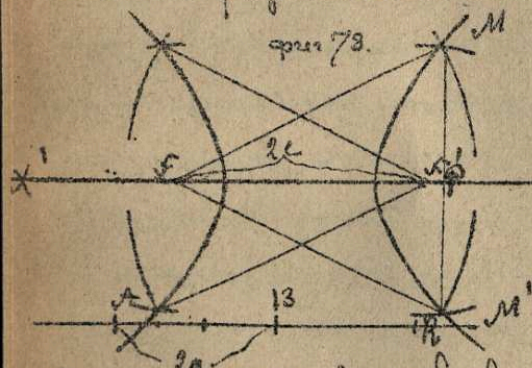


Получим самую точную формулу
 для x и y в точке M . Пусть $MB = a$
 и $MA = b$. Мы найдем две точки M $x = a \cos \varphi$ $y = b \sin \varphi$
 $\frac{x}{a} = \cos \varphi$; $\frac{y}{b} = \sin \varphi$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

На основании этого свойства движения точки M
 можно было бы устроить сначала две оси x и y
 с помощью непрерывного движения, который пона-
 зывается эллипсографом. По осям Ox и Oy помещают
 две металлические планочки, третьей линейку про-
 извольной длины AB , которую можно перемещать так
 что постоянная ее точка A движется вдоль по оси
 Ox , а другая точка B по оси Oy . Точка M в кото-
 рой укреплена карандаш можно брать в какой-
 угодно месте линейки и таким образом можно
 дать произвольные a и b эллипса в произволь-
 ной форме.

Гипербола

Гиперболой называется кривая, представляющая геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная и равная данной длине. Эти постоянные точки, указанные в определении, называются фокусами гиперболы. Хотя гипербола, подобно эллипсу, может быть начерчена непрерывными движениями карандаша, но такое черчение кривой на практике не удобно, ее удобнее строить по точкам. Пусть (рис. 78) F и F' две данные фокусы гиперболы и пусть $2a$ разстояние $FF' = 2a$. Положим также, что $2b$ есть данная длина. Расстояние разностей каждой точки гиперболы от фокусов F и F' должно быть равно $2a$. Руководясь данными определением мы можем построить сколько угодно точек гиперболы. Для этого на продолжении линии FF' возьмем произвольную точку R и из точки F как из центра, радиусом FR а из F' радиусом равным



из R отложим две окружности, положим, что эти окружности пересекутся в двух точках M и M' . Легко видеть, что эти точки будут принадлежать гиперболе.

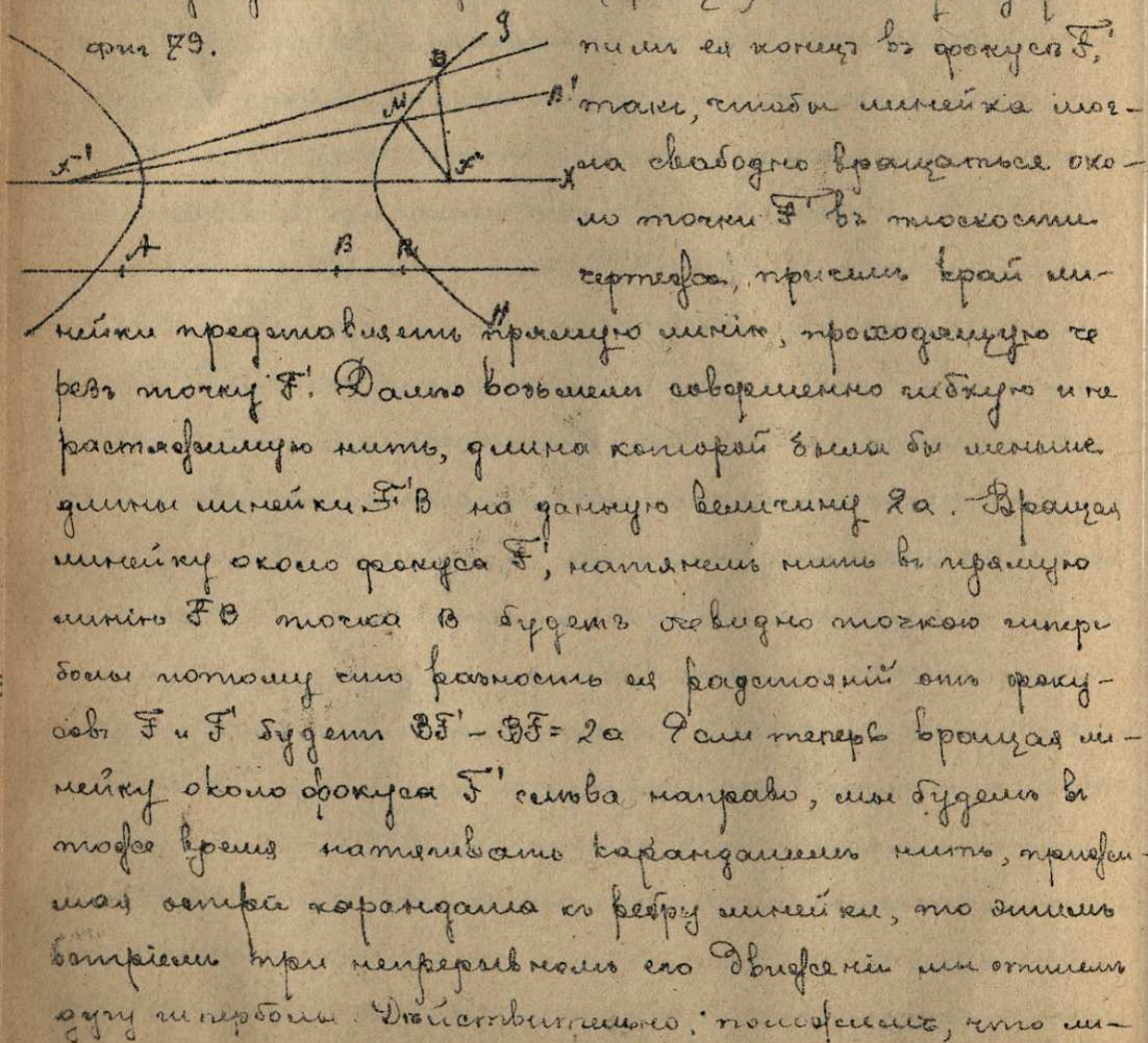
считываемой нами гиперболам. В самом деле, для точки M будем иметь, что разность ее расстояний от фокусов F и F' будет: $MF - MF' = AR - BR = AB = 2a$. То же будем иметь для точки M' . Подобным же образом, принадлежащий гиперболе можно построить еще — ко угодно, так что всякая постройка точки K на предположенном, т. е. известном величину радиуса — сферах окружностей, будем иметь всегда в пересечении этих окружностей точки параболы. Соединив две точки M и M' полученный из равенства треугольников $M'FR$ и MFR , что $MR = M'R$ и что MM' перпендикулярна к xx' ; кроме того из равенства треугольников FMM' и $F'M'$ имеем, что углы MFx и $M'Fx$ равны между собой. Следовательно две точки M , M' расположены симметрично относительно прямой xx' которая пошому есть ось гипербола. Не трудно заметить, что мы можем получить еще новый ряд точек гипербола, если повторяя предыдущее построение, будем отсчитывать окружности большего радиуса от фокуса F' , а меньших от фокуса F и считать отстоять точки пересечения таких окружностей, разность радиусов которых равна $AB = 2a$.

Полнота точек таким образом построенных определить другую ветвь гипербола, кото-

рав будет расположена относительно фокуса F' точно также, как первая относительно F

Построение гиперболы непрерывным движением

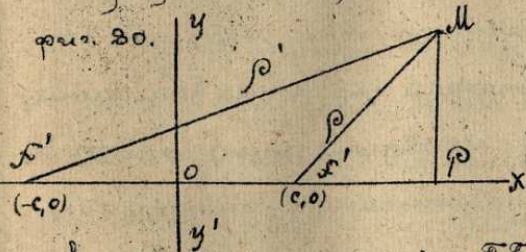
Дугу гиперболы можно построить также непрерывным движением. Возьмем (рис 29) линейку и укре-
 фиг 29.



нейко приняла положение $F'B'$, тогда нить натянутая острым карандашом в точке M будет иметь вид кривой линии $B'MF'$. Тогда M будет точкой гиперболической. В самом деле для нас разность расстояний от фокусов будет $MF' - MF = B'F' - (B'M + MF) = 2a$. При непрерывном движении линейки острый карандаш будет описывать дугу гиперболы FMH . Чтобы описать другую ветвь, нужно переместить линейку, удерживая ее конец в фокусе F и потом точно также вращать ее около фокуса F .

Уравнение гиперболы

Пусть (фиг. 89) F и F' два фокуса гиперболы, расстояние между ними $FF' = 2a$; тогда, если M есть текущая точка гиперболы, то соединив ее с фокусами F и F' получим два радиуса r и r' . По определению кривой должно иметь место $r' - r = 2a$, где $2a$ есть данная длина, при чем



должно быть соблюдено условие, что $a < c$. Чтобы составить уравнение кривой примем линию FF' за ось x' , а середину линии FF' за начало координат O при чем будем иметь, что $OF = OF' = c$. Координаты точки M пусть будут x и y . Таким образом за ось координат мы примем ось кривой, при этом уравне-

ние гипербола получается в самом простом виде. Запишем, что координаты точки F будут $(c, 0)$, а потому r как расстояние между двумя точками равняется $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Значит координаты фокуса F' будут $(-c, 0)$, а потому расстояние $r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. По данному свойству гиперболы имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Это и есть уравнение гиперболы. Сравним его с уравнением эллипса, которое было выведено тем же путем, но в котором было выражено, что сумма

$$r + r' = 2a$$

имеем значит, что уравнение гиперболы отличается тем, что в нем перед вторым радикалом стоит знак минус. Если же второй радикал мы перенесем во вторую часть и $2a$ в первую и затем возведем обе части в квадрат, то разность между уравнениями эллипса и гиперболы уничтожится совсем. Отсюда заключаем, что не повторяя предыдущего вычисления, достаточно для освобождения уравнения эллипса от радикалов мы можем прямо написать уравнение гиперболы в окончательном виде,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

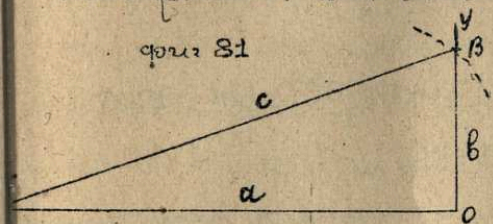
Это уравнение по виду совершенно одинаково с найденным выше уравнением эллипса, но тем не менее

различіе между уравненіем эллипса и уравненіем гиперболы чрезвычайно значительно. Это различіе заключается въ томъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, т.е. въ гиперболѣ $a < c$ посылу и $a^2 < c^2$. Чтобы убедиться въ этомъ разсмотримъ $\triangle F'MF'$, въ немъ разность двѣхъ сторонъ менѣе третьей и, следовательно $r' - r < 2a$ но $r' - r = 2a$, значитъ $2a < 2c$ или $a < c$, посылу $a^2 < c^2$ или $a^2 - c^2 < 0$. Выводъ этого намъ будетъ удобно написать наше уравненіе въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Положимъ теперь, что $c^2 - a^2 = b^2$. Величину b легко построить. Для этого взавъ прямой уголъ yox (черт. 81)

черт. 81



отложимъ отъ точки O длину $OA = a$ изъ точки A радиусомъ равнымъ c отложимъ дугу, которая перес-

екетъ Oy въ точку B ; тогда въ треугольникѣ OAB катетъ OB будетъ $\sqrt{c^2 - a^2} = b$. Такимъ образомъ величина b будетъ известна и уравненіе гиперболы приметъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Если сравнить это уравненіе съ уравненіемъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то увидимъ, что уравненіе гиперболы получается изъ уравненія эллипса замѣною b^2 на $-b^2$ или b на $b\sqrt{-1}$. Это замѣнаніе очень важно, потому что на

основании, то можно вывести следующие для вычисления
помогут его уравнения прямо применить к гипер-
боле, заменив только в полученных результатах
 b^2 на $-b^2$. Уравнение гиперболы можно написать еще
в следующем виде, помня о освобождении
предыдущего уравнения от знаменателя.

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -b^2 a^2$$

Если, решив это уравнение относительно y , то
найдем, что

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Это есть третий вид того же уравнения. Всего эти
три вида представляют гиперболу, отнесенную к
центру и осям.

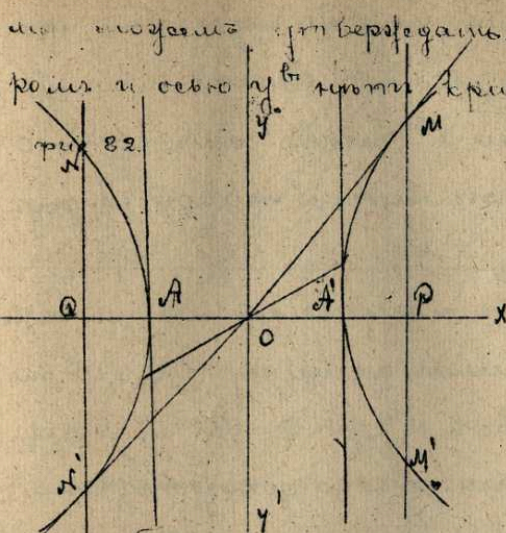
Использование фигуры гиперболы по
ее уравнению

Решив уравнение гиперболы относительно y получили

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Отсюда видно, что если считать $x=0$, то получили
уменьшим, и что если x будет увеличиваться от
 $x=0$ до $x=a$, то y^2 останется минимальным пока $x < a$.

Когда возведем $x=a$, то найдем $y=0$. Построим
точку определенную этими двумя координатами
для этой точки отложим $OA=a$; точка A будет точкой
кривой. Проведем через A перпендикуляр к оси x^2



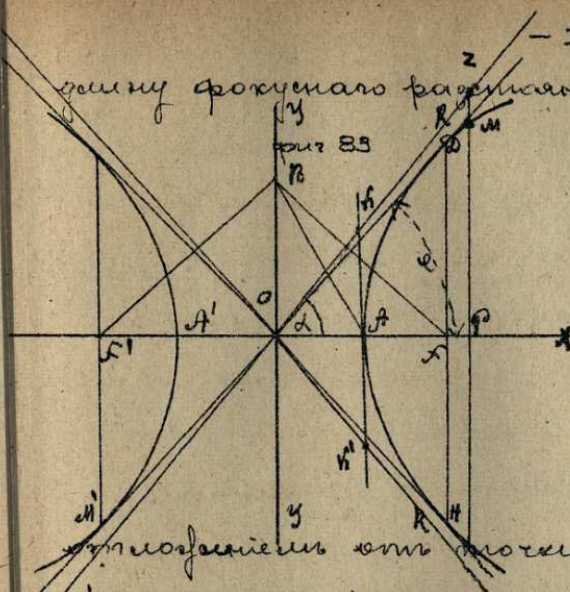
те мерсду перпендикуляр-
ой. Если зотом x будет
увеличива-ая по абсолют-
ной величине, то и y будет
также увеличиваться. Воз-
мем какой нибудь $x = OP$ и
вспомогат. для него соотвѣст-
ствующій y который будет
имѣть два значенія, равныя

но с обратными знаками; из этого заключаем, что
все x^2 есть с кривой и две вер. точки кривой будут
расположены симметрично относительно этой оси
подобно точкам M и M' . Вспомогат. x можно увели-
чивать до $\pm \infty$. Из этого заключаем, что эти точ-
ки A и B правую сторону кривой идут постепенно
удливаясь от оси x и придут кривая в бесконечность
также как с увеличением x , y увеличивалась по
бесконечности, оставаясь действительными. Если
 x будет принимать отрицательные значения от
0 до $-\infty$, то замечая, что x в уравнении входит в
квадрат, можно смело сказать, что y при отрица-
тельных значениях x принимает такие же значения
как и при положительных. Отсюда следует,
что по одну сторону оси y^2 находится группа точек

кривой и при том же точно такая же как и по правую сторону относительно оси xy . Вспомогательного, если мы отложим на оси x ⁶ величину от точки O до $O' = OA = a$, то A' будет точка кривой с другой вершиной.

По симметрии мы можем начертить такую же кривую. При этом, если возьмем абсциссу $OQ = OR$, то получим две ординаты кривой $AQ = A'R = MP$ и точки M и M' будут точки пересечения. Легко доказать, что точка O есть центр кривой. Соединим O с M и M' , получим два равных треугольника OMP и $OM'A$ и из их равенства заключаем, что в них углы при точке O равны; следовательно линия MM' есть прямая, причем $M'O = OM$. Таким образом мы видим, что MM' есть произвольная хорда пересечения, проходящая через точку O и эта хорда делится точкой O пополам; отсюда заключаем, что всякая хорда кривой проведенная через точку O , делится ею пополам; следовательно точка O есть центр кривой.

Отложим по оси xy от центра O величину $OB = OB' = b$ (рис. 83). Величина $BB' = 2b$ называется мнимой осью пересечения. Иногда ось z называется перескакивающей осью BB' перескакивающей. Чтобы получить фокусы, отложим от точки O главной оси в обе стороны



длину фокусного расстояния c примем $c > a$, так что $OF = OF' = c$. Соединив A и B получим из прямоугольного $\triangle OAB$: $AB = \sqrt{b^2 + a^2}$ но $c^2 - a^2 = b^2$, отсюда $c^2 = a^2 + b^2$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Следовательно $AB = 0$ или $OF = OF' = AB$ так что два фокуса получаются

отношением от точки O в обе стороны длины a , c/b отношение фокусного расстояния к м.п. осей, т.е. $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы. Пусть $\frac{c}{a} = \varepsilon$. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Орда проходящая через фокус и перпендикулярная м.п. осей наз. параметром гиперболы $DM = 2p$; $DF = p$ есть полупараметр. Выпишем полупараметр и форму выразить посредством a и b из уравнения гиперболы. В данном случае $a = OF = c$, энд. $y = DF = p = \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2}$ или $p = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{b^2} = \frac{b^2}{a}$. Рассмотрим произведение радиуса проведенного из центра к различным точкам гиперболы. Пусть $OM = r$, тогда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $r = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2})x^2 - b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - b^2}$, но $\frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2$ энд. $r = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 - b^2}$. Видно, что если x будет увеличиваться и следовательно точка M будет перемещаться по гиперболе вправо, тогда r увели-

увеличиваясь до ∞ . Рассмотрим угол между осью x^b и z , т. е. угол $\angle MOx = \varphi$. В $\Delta^{MO} MPO$ имеем $y = x \operatorname{tg} \varphi$
 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ или $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Отсюда видно
 что если x будет увеличиваться до ∞ , то $\frac{a^2}{x^2}$ бу-
 дут стремиться к 0 а $\operatorname{tg} \varphi$ к $\frac{b}{a}$. означим пре-
 делную величину φ через α , будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \text{ при } x = \infty.$$

Угол α будет всегда меньше α , но может при-
 ближаться к нему как угодно близко. Построим
 прямую, которая составит с осью x^b угол α и
 пройдет через центр O — эту ось из точки A
 возставим перпендикуляр к прямой OA и от-
 ложим длину $AK = b$. Соединим точку O с K эта
 прямая и будет искомая. Действительно в ΔOAK
 имеем: $\operatorname{tg} \angle AOK = \frac{b}{a}$. Также как гипербола распо-
 ложена симметрично относительно оси x^b , то со-
 ответственно выше оси x^b будет существовать
 точно такая же прямая. Таким образом получим еще
 отложим $AK' = b = AK$ и точку O соединим с то-
 чкою K' . Вторая ветвь гиперболы расположена в
 углу SOB , образованном продолжением прямой
 OA и OB . В двух же верхних углах SOA и $S'OB'$
 есть точки гиперболы. Прямая RS и RS' называ-
 ются асимптотами гиперболы

Напишем для уравнения: прямая RS' имеет с осью X^b угол α и проходит через начало координат, следовательно ее уравнение будет $y = x \operatorname{tg} \alpha$ или $y = \frac{b}{a} x$.

Прямая RS' имеет с осью X^b угол β ($\pi - \alpha$) и ее уравнение $y = x \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = - \operatorname{tg} \alpha \cdot x$ или $y = - \frac{b}{a} x$.

Уравнение двух асимптот можно написать вместе

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Слова „асимптота“ означают приближающаяся. Название это дано этим прямым потому что гиперболам по мере их продолжения в бесконечность все более и более приближаются к этим прямым, так что разностные гиперболам от асимптоты можно считать сколько угодно малыми и обращаются в 0 или в предель. И так, гипербола приближается к асимптотам неопределенно но никогда не достигает их. Чтобы еще более лучше возвести уравнение кривой, применим относительно y

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

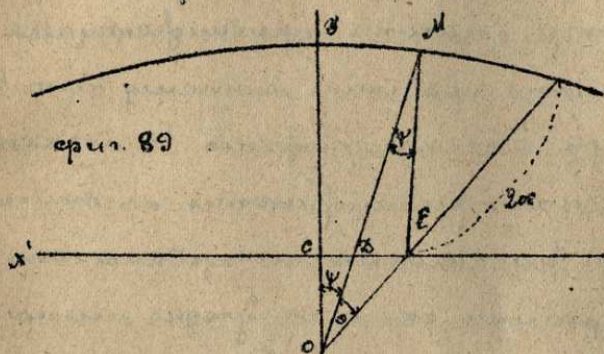
Получим, что мы разаматривали асимптоту $S'R$. Уравнение этой асимптоты $y = \pm \frac{b}{a} x$. Возьмем на верхней части этой кривой точку M (фиг. 34) и построим MP продолжив ее до встречи с осью X^b . Точка P .

Это и есть уравнение конхоиды, которое, как мы видели, будет четвертой степени. Определив отсюда

$$y - h = \pm \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

мы найдем, что при $x = \infty$ $y = h$. Это показывает нам, что AB есть асимптота конхоиды.

Конхоида была найдена Фиконедом и построена им для разделения угла на три равные части. Это деление получается так (рис. 89). Опустим из точки E на одной из



сторон данного угла COE перпендикуляр EC на другую сторону и примет точку O за полюс

линии CE за направляющую конхоиды, по радиусу которой $a = 2 OE$. Если после этого соединим точку O с точками M , то получим угол $COM = \psi$, который будет искомым, т. е. $\frac{1}{3}$ данного

Для доказательства помним из треугольника OME

$$ME = OM \cos \psi = a \cos \psi = 2 OE \cos \psi$$

Далее из $\triangle OME$ имеем пропорцию $\frac{ME}{OE} = \frac{\sin \theta}{\sin \psi}$

или $2 \cos \psi = \frac{\sin \theta}{\sin \psi}$. Отсюда $\sin \theta = 2 \sin \psi \cos \psi = \sin 2\psi$

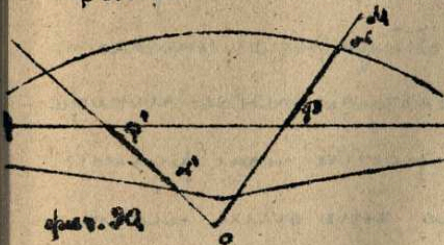
или $\theta = 2\psi$, т. е. $\psi = \frac{1}{3} COE$. Это и требовалось доказать

Построение консоиды непрерывным движением.

Для построения консоиды берем линейку AB и укрепим ее неподвижно на поверхности цилиндра (фиг. 20)

В точке O , конец консоиды укрепим конец сферы OM , так, чтобы она свободно могла вращаться около точки O ; на конец этой сферы надеваем трубку, величина которой должна равняться

фиг. 20



данной длины a . Трубку

однаем на сферу так

чтобы конец ее B упирался

в линейку AB на другом же

конец ее A укрепим карандаш.

Теперь будем вращать сферу OM около

точки O ; стараемся, чтобы конец B трубки постоянно

касался линейки, тогда другой конец ее A в ко-

торой укрепим карандаш, будем описывать

консоиду. Расположив трубку AB по положению $A'B'$

и опять вращая сферу OM точно так же как

и в первом случае, мы концы A' в которой укрепим

карандаш, опишем вторую ветвь консоиды.

Консоида Диоклеса

Пусть (фиг. 21) будет O точка окружности радиуса R

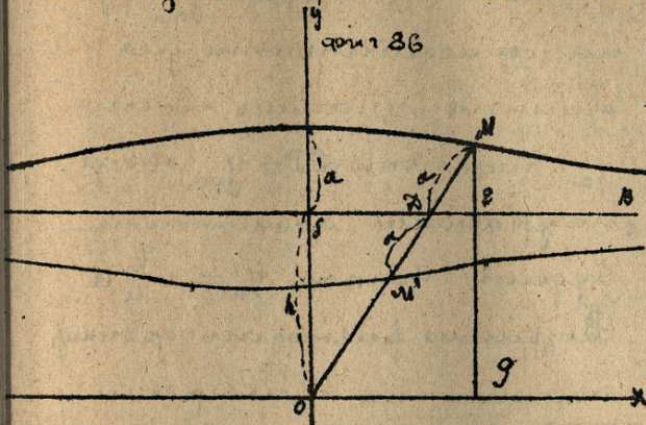
точки В возмемшим перпендикуляром α к α' , кото-
рый пересечет радиус OC в точке D ; из нея проведем
параллель α , продолжая последний, т. е. парал-
лель до пересечения с перпендикуляром возмемшим
из P в точку M . Утверждаем, что точка
 M принадлежит гиперболы. Чтобы доказать это раз-
смотрим подобные треугольники OCM и OBD из ко-
торых найдем $BD:OB = OC:OM$ или $MP:b = \sqrt{x^2 - a^2}:a$
откуда $MP = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = y$. Видим, что M действитель-
тельно есть точка гиперболы. Подобным же спосо-
бом можно найти бесчисленное множе-
ство, повторяя описанное построение при разны-
х абсциссах x . При этом ясно что эти точки
могут быть построены произвольно близко одна
от другой соединив их непрерывной кривой, мы
получим гиперболу.

Конструкция Эллипса

Возмем прямую AB и точку O . Через точку O
станем проводить в разные направления прямые
 OD и от точки D в которых эти прямые пересе-
кают AB отложим откладываем $MD = M'D = a$
(рис 36) Множество полученных точек таким обра-
зом, т. е. $M M'$ определят кривую, называемую кон-

консидой. Прямая АВ наз. направляющей консои-

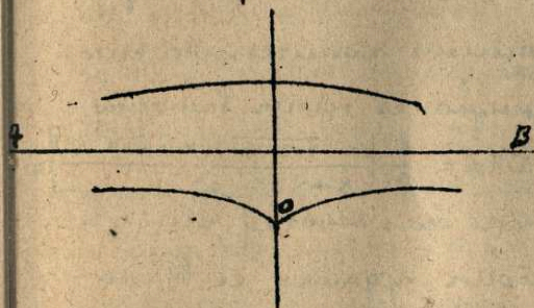
фиг. 86



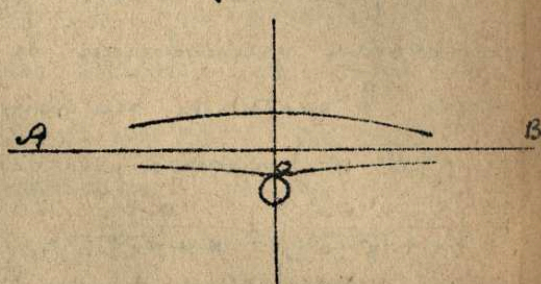
иды, а точка О полю-
сом консоиды. Видг
консоиды зависит от
двух параметров от а
и от $oc = h$. Если $a < h$
то консоида будет иметь
видг, представленный

на фиг. 86, если $a = h$, то она получит видг изоб-
раженный на фиг. 87, наконец при $a > h$ она будет
иметь видг, представленный на фиг. 88. Составим

фиг. 87



фиг. 88



уравнение консоиды, принимая за полюс О за начало ко-
ординат Декарта проведем ее абсциссы парал-
лельно направляющей консоиды (фиг. 86) Мы имеем
из треугольника OМQ, подобнаго треугольнику
ВМQ, следующую пропорцию $\frac{y-h}{a} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ или
 $(x^2+y^2)(y-h)^2 = a^2 y^2$

Она называется полным циклоидом. Проведем се-
рез ее диаметр OX , а через точку Z касательную
 DZ к кругу. Будем проводить через точку O
различные прямые OD и откладывать на них
 $OM = EZ$. Геометрическое место точек M будет ци-
клоидом. Составим уравнение циклоида, приняв за
ось x диаметр OX , а за ось y касательную к кругу
в точке O . Из $\triangle OMD$ и $\triangle OZD$ имеем

$$\frac{y}{x} = \frac{DZ}{OZ} \quad \text{или} \quad DZ = \frac{y \cdot x}{OZ}$$

Далее по теореме о касательной и секущей имеем

$$DZ^2 = EZ \cdot OD = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{4z^2 + DZ^2}$$

подставив найденную величину DZ получим

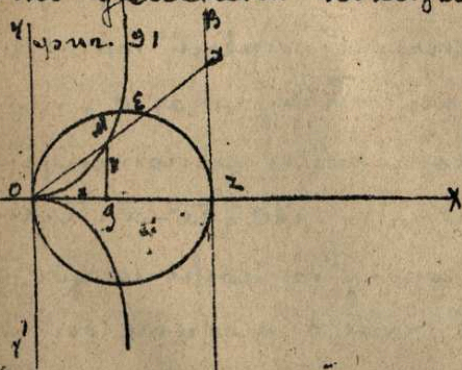
$$\frac{4z^2 y^2}{x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{4z^2 + \frac{4z^2 y^2}{x^2}} = \frac{2z \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad \text{или}$$

$$\frac{2z y^2}{x} = x^2 + y^2$$

Принимая это уравнение относительно y^2

$$y^2 = \frac{x^3}{2z - x}$$

Это уравнение показывает, что с приближением



x к $2z$ ордината циклои-
ды возрастает и при $x = 2z$
обращается в бесконечность.
Таким образом $2z$ есть
асимптота циклоида.

Циклоида была найдена

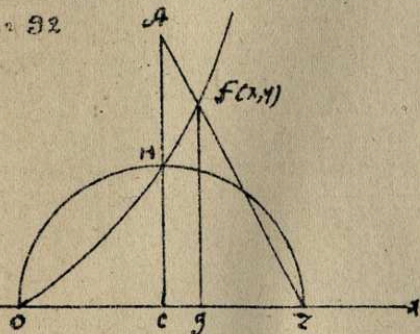
Локисом из уравнения куба. Она задана, как было

показано в приложении алгебры к геометрии, при-
надлежит к преобразимым с помощью цир-
куля и линейки. Пусть дан куб стороны кото-
рого z и требуется построить сторону куба
двойного объема, т. е. найти выражение $\sqrt[3]{2z^3}$.

Для этого проводим круг радиуса z ; из его цен-
тра O возставляем перпендикуляр $AO = 2z$ к диа-
метру OZ , соединим A с Z и проводим к постро-
енному кругу касательную, по-

мощи которой O . Пусть F
будет точка встречи ка-
сательной с прямой AZ . Сое-
диним F с O и опреде-
лим точку пересечения H

рис 32



прямых AC и OF . Отыском CH будет искомого
стороны двойного куба, т. е. линия уравнения которой
есть $\sqrt[3]{2z^3}$. Для доказательства из подобия ΔOFG с ΔOHC

найдем $\frac{FG}{OG} = \frac{OC}{OC}$ или $\frac{y}{x} = \frac{OC}{z} \dots (x)$ Далее из по-
добия треугольников ΔOFG с ΔOAH найдем

$$\frac{FG}{OZ} = \frac{AO}{OZ} \text{ или } \frac{y}{2z-x} = \frac{2z}{z} = 2$$

Выведем уравнение касательной $y^2 = \frac{x^2}{2z-x}$ по y , полу-
чим $y^2 = \frac{x^2 y}{2z-x}$ или $y^3 = x^2 \cdot \frac{y}{2z-x}$, но мы только
что вывели, что $\frac{y}{2z-x} = 2$, следовательно $y^3 = 2x^3$ или $\frac{y^3}{x^3} = 2$
но из формулы (x) видим, что $\frac{1}{x} = \frac{OC}{z}$ или

едина. Теор.

рис. 18

$\frac{y^3}{x^3} = \frac{HC^3}{z^3}$, а потому $\frac{HC^3}{z^3} = 2$, откуда $HC = \sqrt[3]{2z^3}$. Это и требовалось доказать.

Овал Кассини

Овал Кассини называется место точек, произведение расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная. Составим уравнение этой кривой (фиг. 93). Пусть F и F' будут данные точки, а m^2 — постоянная величина произведений расстояний кривой от данных точек.

Проведем ось абсцисс через точки F и F' , а ось ординат через середину линии FF' перпендикулярно оси абсцисс и поманем FF' равным $2c$, найдем

$$[FM]^2 = [MN]^2 + [FN]^2 \quad \text{и} \quad [F'M]^2 = [MN]^2 + [F'N]^2$$

Заменив абсолютными величинами положительными количествами имеем

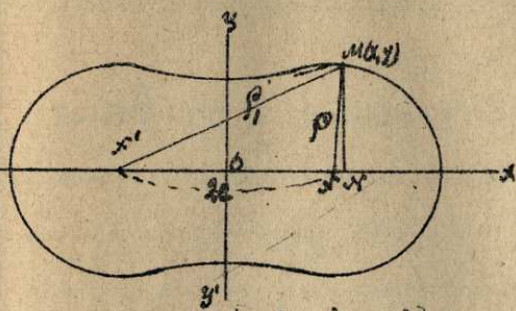
$$\rho^2 = y^2 + (x-c)^2 \quad \text{и} \quad \rho_1^2 = y^2 + [2c + (x-c)]^2 = y^2 + (x+c)^2$$

Откуда

$$\begin{aligned} \rho \cdot \rho_1 &= \sqrt{y^2 + (x-c)^2} \cdot \sqrt{y^2 + (x+c)^2} = m^2, \text{ преобразуя имеем} \\ [y^2 + (x-c)^2] \cdot [y^2 + (x+c)^2] &= [y^2 + x^2 + c^2 - 2xc] \cdot [y^2 + x^2 + c^2 + 2xc] = \\ &= [y^2 + x^2 + c^2]^2 - 4x^2c^2 = m^4 \dots \dots (p) \end{aligned}$$

Это и есть полное уравнение овала. Мы должны рассмотреть три случая: 1) Когда $m > c$ овал пересекает ось oxy , потому что минимальное $x = 0$, находим для y действительную величину

$(y^2 + c^2)^2 = m^4$; $y = \sqrt{m^2 - c^2}$. Кривая имеет вид, представленный на чертеже 93.



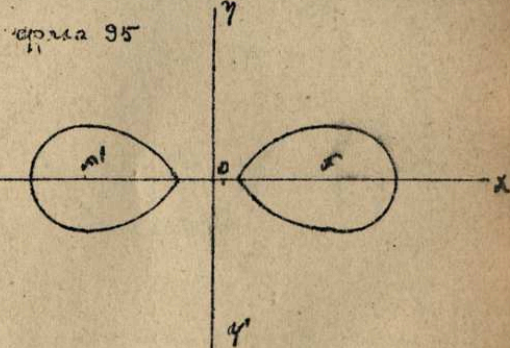
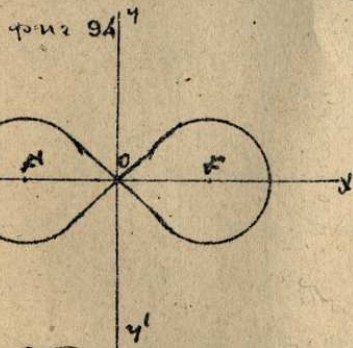
2) $m = c$ В уравнении (3) $y^2 + x^2$ будет раздвинутым как радиус, т.е. тогда можно возвести в квадрат

получим $[(y^2 + x^2) + c^2]$, получим уравнение (3) в виде

$$(y^2 + x^2)^2 + 2c^2(y^2 + x^2) + c^4 - 4x^2c^2 = c^4 \text{ или}$$

$$[y^2 + x^2]^2 + 2c^2(y^2 + x^2) - 4x^2c^2 = 0$$

Это показывает, что кривая проходит через начало координат так как уравнение удовлетворяется координатами $x=0$ и $y=0$. Кривая в этом случае имеет вид изображенный на чертеже 94 и называется лемнискатой.



3) При $c > m$ скажем, что пересечение с осью Oy, то есть что, подставив в уравнение (3) $x=0$, находим для y минимальную величину $y = \sqrt{m^2 - c^2}$. Овалы в осях

синус представляется дугой замкнутой кривой, лежащей справа и слева от OY , как это изображено на чертеже 96

Трансцендентная кривая

Перейдем теперь к описанию некоторых трансцендентных кривых, т.е. таких уравнений кривых, выражаемых не алгебраическими функциями

Синусоида и Косинусоида

Это суть кривые, выражающиеся уравнениями

$$y = a \sin x \quad \text{и} \quad y = a \cos x$$

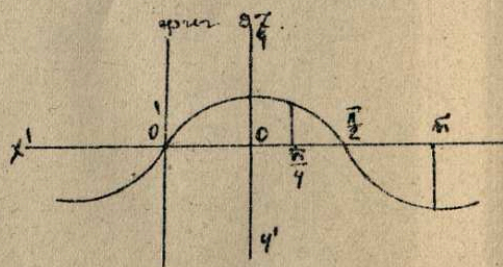
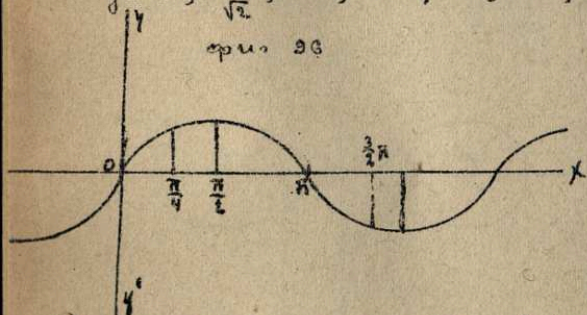
Положим $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ и т.д., а также $x =$

$-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi \dots$ найдем для синусоиды (рис 96)

$y = 0, \frac{a}{\sqrt{2}}, a, 0, -a, 0, +a \dots -\frac{a}{\sqrt{2}}, -a, 0, a, 0, -a \dots$

а для косинусоиды (рис. 97)

$$y = a, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -a, 0, a, 0 \dots -\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -a \dots$$



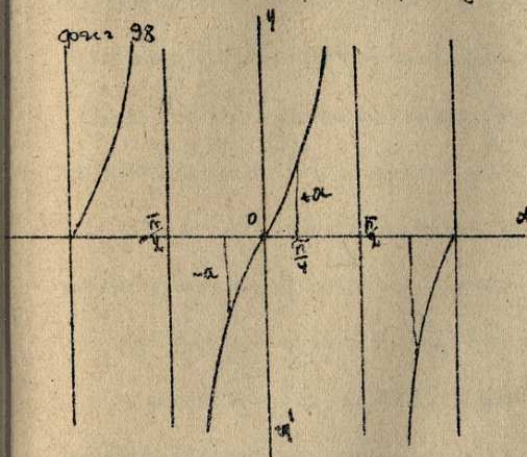
Фигуры 96 и 97 показывают, что это кривые одинаковы и имеют только разное расположение относительно осей. Если перенесем на рис. 97 кривую координат из O в O' , то получится фигура в фиг.

синус косинусом заменить α на $\alpha - \frac{\pi}{2}$, тогда получим уравнение синусоида

$$y = a \cos(x - \frac{\pi}{2}) = a \cos(\frac{\pi}{2} - x) = a \sin x$$

Кривая тангенсов

Эта кривая выражается уравнением $y = a \tan x$



Полная в данном уравнении $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \dots, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$ находим выражения для y и

$$y = 0, a, \pm \infty, -a, \mp \infty, \dots$$

Поэтому кривая имеет вид представляемый на фиг 88. Она состоит из бесконечного множества от-

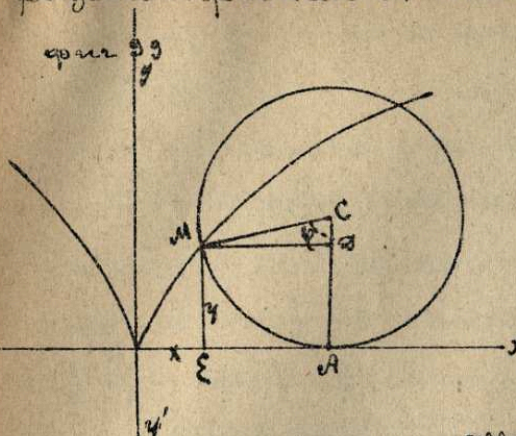
дельных ветвей, для которых прямая тангенсов все y и отсюда мы найдем на рисунке $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots$ служат асимптотами

Циклоида

Циклоида есть кривая, описанная точкой окружности, катящейся по данной прямой. Окружность называем образующей, круги циклоиды, а прямая — направляющей

Отметим циклоиду в прямоугольных Декартовых координатах, приняв направляющую за ось x , а за начало координат точку в которой

разглядываемая точка окружности прикасает-



ся к направляющей прямой. Пусть (рис 39) OM будет радиусом, на которое прокатывается круг C , при этом рассматриваемая точка этого круга займет положение

M , где дуга $OM = \rho$. Назовем через φ центральный угол измещающий дугу OM , через ψ радиус образующую круга и найдем из чертежа, что абсцисса точки M , которую обозначим через x будет равна: $x = OM - OD = OM - MD = r\psi - r\sin\varphi = r(\psi - \sin\varphi)$, а координата y той же точки будет $y = OD - CD = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi)$

Если определить из второго уравнения $\sin\varphi$ и дугу φ и подставим в первое уравнение, то найдем некоторое уравнение циклоида. Из первого уравнения

$y = r - r\cos\varphi$, т. поднимем $\cos\varphi = \frac{r-y}{r}$, а $\sin\varphi = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{r-y}{r}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{r^2 - r^2 + 2ry - y^2}}{r} = \pm\frac{\sqrt{2ry - y^2}}{r}$. Из того же уравнения имеем, что дуга $\varphi = \arccos\frac{r-y}{r}$. Откуда

$$x = r\left[\arccos\frac{r-y}{r} \pm \frac{1}{r}\sqrt{2ry - y^2}\right] \dots \dots \dots (8)$$

Это и будет уравнение циклоида; из него видно, что наибольшая величина y есть $2r$ ибо при $y > 2r$

а достигается минимумом. Поэтому значение y^a соответствует значению $x = \arcsin(-1) = \pi$. Но следует заметить, что при данном y мы получаем не одно, а бесчисленное множество значений x^a , потому что $\arcsin \frac{y}{r}$ есть функция многозначная.

Выводя для данного y^a мы можем брать все значения, заключенные в формулу $2k\pi \pm x$ где k положительное или отрицательное целое число. Таким образом уравнение (1) представляет бесконечно множество периодических повторяющихся ветвей.

Кривая логарифмическая

Она дается уравнением: $x = \lg y$ или $y = e^x$

рис. 100



Токовая положительного

$x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots + \infty, -1, -2, -3, \dots$

$\dots - \infty$ Найдем, что y в

этом случае равен: 1, e,

$e^2, e^3, \dots \infty; \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}, \dots 0$

Поскольку логарифмическая кривая будет иметь вид представленный на рис. 100. С ее x^a является ее асимптотой кривой.



Преобразование координат

Известно, что одна и та же кривая отнесенная к различным координатам будет выражаться разными уравнениями. Такою же кривою — окружностью, отнесенная к прямоугольным осям координат, при произвольном положении центра выражается уравнением:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

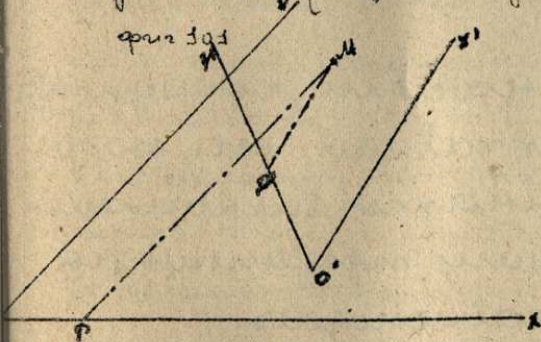
Если же окружность выражена уравнением $x^2 + y^2 = 2Rx$ — если начало координат будет помещено на окружности и за ось абсцисс будет взят диаметр. Если же начало координат совпадает с центром окружности и оси координат будут направлены по диаметрам уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Таким образом, при изменении осей координат, форма уравнения изменится и вид уравнения кривой. Относительно одной и той же координат уравнение будет другое относительно другой системы. При изыскании свойств кривых, большая или меньшая простота или уравнений играет очень важную роль. Таким образом уравнение кривой, можно легче изыскать, поэтому для каждой кривой необходимо выбирать такие оси координат, чтобы

ее уравнение можно возмоздено простой лин.
Отсюда понятна важность вопроса о преобразо-
вании координат, который заключается в следующем:
дано ур-е некоторой кривой, отнесенной
к данным осам координат, требуется составить
уравнение той же самой кривой, но отнесенному
другой системы координат, при чем положение
второй системы относительно первой известно.

Положим, что нам дано уравнение некоторой
кривой, отнесенной к осам координат Ox и Oy
и что требуется получить ур-е той же кривой
относительно новой системы осей координат
 Ox' и Oy' (черт 101). Тогда возникнет вопрос
возьмем произвольную точку M размениваемой



кривой, назовем ее коорди-
наты относительно пер-
вой системы через (x, y)
при чем $x = Or$ и $y = Mr$,
а координаты той же
точки относительно дру-

гой новой системы через (x', y') при чем $x' = Or'$ и
 $y' = Mr'$. Между этими координатами необходи-
мо существует некоторая зависимость, кото-
рая может быть обнаружена из чертежа.

Итак. Теор.

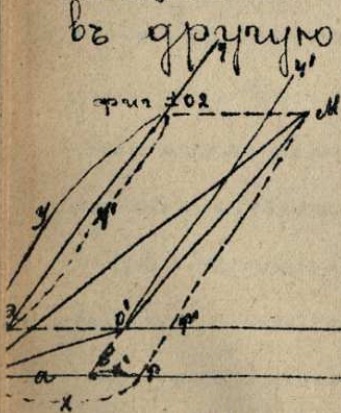
Лемма 19

Отыскивая эту зависимость, мы будем стараться старыми координатами выразить через новые и когда такие выражения будут найдены, то вставив нас в данное ур-ие кривой вместо x и y , мы получим новое ур-ие, которое выразит связь между новыми координатами x' и y' произвольной точки кривой, это уравнение будет следовательно ур-ием кривой относительно новых ее координат; отсюда видно, что решение вопроса о преобразовании пребудет вывода формул, которыми определим мы старые координаты посредством новых.

Формулы для преобразования координат

При преобразовании координат необходимо различать 3 основных случая

Случай 1 Перенесение начала координат в другую точку, оставив оси координат параллельными предшествовавшим.



Пусть данная система координат есть xOy (ф. 102) а новая $x'Oy'$; полагая, что Ox' параллельна Ox и Oy' параллельно Oy . В

этом случае, чтобы определить положение новой системы относительно старой, достаточно знать координаты нового начала O' относительно старой координат. Соединим точку O' с точками O и M и точку M с O ; рассмотрим контур OMO' с замкнутой стороной OM . Возьмем за ось проекций ось x^b , будем проектировать на нее контур OMO' минимальными параллельными оси y^b .

При этом очевидно будем иметь $pr OM = a$

$$pr OO' = a, pr OM = x, pr O'M = x'$$

и нам останется обратиться к

$$x = a + x'$$

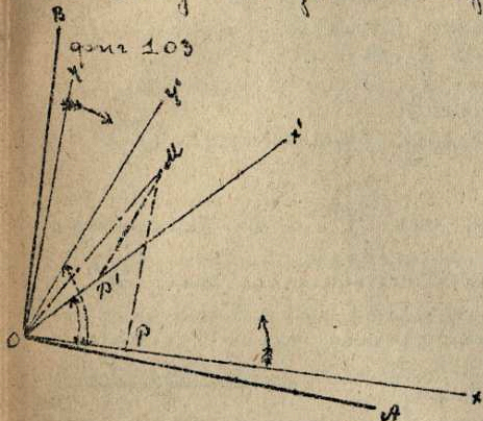
Если за ось проекций возьмем ось y^b и будем проектировать минимальными параллельными оси x^b , то согласно предыдущему получим, что тогда останется обратиться к $y = b + y'$.

Вот формулы $x = a + x'$ и $y = b + y'$ послужат для перехода от старых координат к новым в прямоугольной или криволинейной системе. Эти формулы будут справедливы при любом расположении начала старой и новой систем как оси координат или произвольные стороны, если эти стороны взаимно перпендикулярны.

Случай 2 Переход от данных осей к координатам $pr OM = pr OO' + pr OM$, но

ординатъ къ другимъ, оставивъ попрежнему, но измѣнивъ направление осей. Этотъ случай преобразования координатъ подраздѣляется на несколько случаевъ.

а) Положимъ что старыя и новыя оси координатъ косоугольны. Пусть старыя оси координатъ суть Ox и Oy (фиг. 103) и уголъ между ними $\angle xOy = \varphi$; новыя оси координатъ пусть будутъ Ox' и Oy' и уголъ между ними $\angle x'Oy'$ намъ известенъ



когда мы известны два угла $\angle x'Ox$ и $\angle y'Ox$, которыми оси другияго ось прежнему ось Ox . Эти углы считаемъ отъ положительной оси Ox въ сторону положительной оси Oy

отъ 0° до 180° . Возьмемъ за точку произвольную точку кривой M и проецируемъ ее старыми и новыми координатами, Mr параллельно Oy и Mr' параллельно Oy' . Будемъ считать старыя координаты: $Or = x$ и $Mr = y$, а новыя будутъ $Or' = x'$ и $Mr' = y'$. Чтобы открыть зависимость между старыми и новыми координатами, замѣтимъ, что имѣемъ на чертежѣ два контура OrM и $Or'M$. Эти два

мени, что или в нем отсутствуют не от-
даваемые эей, а от пастовоний или до и во
Но формулы легко преобразовать основываясь на
общей и тригонометрической теории также нарав-
дотомительного учета. Если рассмотреть, что в
первой из предыдущих формул все направ-
ленны будут относиться не к оси Ox , и к оси
 y ей перпендикулярной и отнести учет от Oy
будем производить по математическим противопо-
ложению прежнему отношению от Ox , по-
скольку прежнее условие войдет в формулу до-
полнительно к ней, и формула примет вид:

$$\alpha \sin(x, y) = \alpha' \sin(\alpha', y) + y' \sin(y', y)$$

Здесь все члены относятся к оси y в
сторону к оси x , т. е. на данном чертеже по
движению часов стрелки. Точно также, если
во второй формуле будем отсчитывать угол
от Ox , и от α и противоположно прежнему
т. е. почти по часовой стрелке, то формула примет вид:

$$y \sin(y, \alpha) = \alpha' \sin(\alpha', \alpha) + y' \sin(y', \alpha)$$

Здесь все члены относятся к оси x и в сто-
рону к оси y , т. е. на данном чертеже про-
тивоположно движению часовой стрелки. Получен-

ныя формулы применимы тогда, когда можно осуществить преобразование координат с помощью поворота осей. Иногда эти формулы приводятся к другому виду. Именно, если принять, что в старых формулах x и y означают старыя координаты φ , а новыя x' и y' относятся к оси x соответственно α и β , то математическое уравнение в полярных координатах имеет вид:

$$x \sin \varphi = x' \sin (\varphi - \alpha) + y' \sin (\varphi - \beta) \quad \text{откуда}$$

$$x = \frac{x' \sin (\varphi - \alpha) + y' \sin (\varphi - \beta)}{\sin \varphi}$$

Эта формула дает одну из старых координат, именно x , выраженную посредством новых x' и y' .

Второе уравнение получится в виде:

$$y \sin \varphi = x' \sin \alpha + y' \sin \beta \quad \text{откуда}$$

$$y = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \varphi}$$

Таким образом переход от старых формул к новым в размашиваемом случае совершается помощью выше формулы

$$x = \frac{x' \sin (\varphi - \alpha) + y' \sin (\varphi - \beta)}{\sin \varphi} \quad \text{и} \quad y = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \varphi}$$

б) Старыя оси косугольны, а новыя прямоугольны.

Этот случай можно размашивать как

частный случай относительно преобразований. Если
угол поворота равен, т. е. угол $x'Oy' = \beta - \alpha$ в пре-
образовании преобразования было произвольным,
покажем теперь его равным 90° , т. е. угол
 $\beta - \alpha = 90^\circ$ откуда $\beta = 90^\circ + \alpha$. Заменяя в пре-
образовании формула величину β найдем:

$$\sin(\varphi - \beta) = \sin(\varphi - 90^\circ - \alpha) = -\sin(90^\circ + \alpha - \varphi) = -\sin(90^\circ - (\varphi - \alpha)) = -\cos(\varphi - \alpha)$$

т. е. $\sin \beta = \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ и формулы преобразования
координат для настоящей оси x' примет
вид:

$$x = \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) - y' \cos(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} \quad \text{и} \quad y = \frac{x' \cos \alpha + y' \sin \alpha}{\sin \varphi}$$

в) Старые оси координат прямоуголь-
ны, а новые косоугольны

В этом случае будет иметь $\varphi = 90^\circ$ и
 $\sin \varphi = 1$. Формулы выше выведенные для случая
(а) обратятся при этом в следующие

$$x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \quad \text{и} \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

д) Старые и новые оси координат
прямоугольны.

Чтобы получить формулы преобразования
координат для этого случая, можно только
в последние формулы, где угол $\beta - \alpha$ обра-
зующий новые оси координат равен 90° ,
т. е. считать, $\beta - \alpha = 90^\circ$ или $\beta = 90^\circ + \alpha$. При этом бу-

где и так $\cos \beta = \cos (90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ и

$$\sin \beta = \sin (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

Подставляя формулы преобразования для рассматриваемых углов, получим

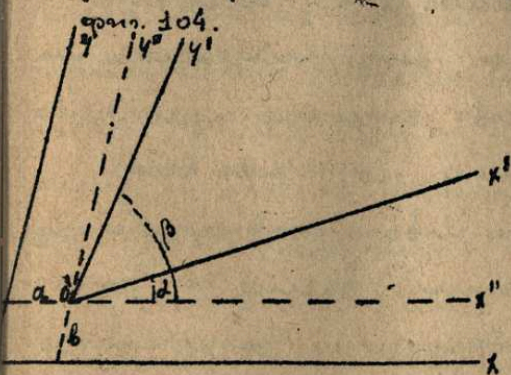
$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Задача 3 Переход от одной системы координат к другой, при этом измещается как начало так и направление осей.

Положим для общности рассмотрения, что старые оси координат OX и OY (рис. 104) образуют угол φ и что как новые так и старые оси координат взаимно перпендикулярны. Новые оси координат пусть будут Ox' и Oy' . Чтобы определить по-

ложение новых осей координат дадим координаты нового начала O' , пусть они будут (a, b) и дадим также через тот же угол, который составляет новое начало со старой осью Ox .



OX . Чтобы получить эти данные проведем через O' прямую $O'x''$, параллельную OX , тогда углы, указанные на рис.

маленький новую ось $O'x'$ ось Ox будет равен углу $x'O'x = \alpha$ и угол, образующий ось $O'y'$ с осью Ox , будет равен углу $y'O'x = \beta$. Затем из O' проведем параллель оси $y^b - O'y''$ и будем еще рассматривать вспомогательную систему осей координат $O'x''$ и $O'y''$. Полагая, что для произвольной точки M старые координаты суть (x, y) , новые (x', y') , а вспомогательные (x'', y'') . Перейдем сначала от старых осей координат к вспомогательным. На основании формул угла $I^{\text{го}}$ будем иметь

$$x = a + x'' \quad \text{и} \quad y = b + y''$$

Затем перейдем от вспомогательных осей к новым по формулам угла $II^{\text{го}}$, которые дают

$$x'' = \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi}, \quad y'' = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \varphi}$$

Подставив эти выражения в предыдущие равенства получим

$$x = a + \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi}; \quad y = b + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \varphi}$$

Эти формулы решают вопрос. В заключение сделаем замечание об одной особенности вида обрешенных формул для преобразования координат. Эта особенность заключается в том, что во выражения старых координат передвинут

новых эти последние вводятся только в первую степень. Такого рода прецизии наз. линейными илид. прецизии для преобразования координат будут линейными относительно новых координат. Самые общие прецизии для преобразования координат имеют такой образъ симуляций вида

$$x = a + cx' + dy' ; y = b + c'x' + d'y'$$

гдѣ коэффициенты c, d, c', d' имеютъ известныя величины зависящія отъ конств a, p, q . а a и b суть координаты новаго начала

Классификація кривыхъ линий

Все кривыя линии по виду ихъ уравнений раздѣляются на алгебраическія и трансцендентныя. Алгебраическими наз. кривыя линии, выражаемыя алгебраическимъ уравненіемъ, т. е. такими, въ которыхъ надъ переменными координатами x и y совершаются только алгебраическія дѣйствія, а именно: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возведеніе въ степень и извлеченіе корня. Трансцендентными же наз. тѣ, которые выражаются трансцендентнымъ уравненіемъ, т. е. такими въ которыхъ надъ переменными координатами совершаются не только алгебраическія дѣйствія, но въ кото-

факт эти перенесенные координаты сверху того под-
 знаком координата или в показателе, или под-
 знаком одной из тригонометрических или
 круговых функций. Трансцендентную функцию пред-
 ставляют кривые алгебраические но и некото-
 рые трансцендентные. Всякая кривая для триго-
 нометрии. Для классификации алгебраических кривых
 представим как уравнение освобожденным от
 знаменателей. радикалов. Первая часть уравне-
 ния будет при этом целый многочлен, содержа-
 щий x и y в различных степенях. Алгебраическая кривая
 раздвинется на порядок, присиль минимизи
 первого порядка наз. т.е. которая выражаются
 общим урав-нием 1^й степени с двумя переменными
 x и y :

$$Ax + By + C = 0$$

Мы видим, что прямая линия выражается
 урав-нием 1^й степени с двумя неизвестными x и y
 линейно.

$$y = ax + b$$

скажем теперь линия есть линия первого поряд-
 ка. Мы теперь докажем, что вся линия первого
 порядка есть прямая. Приведем минимизи
 2^й порядка наз. т.е. которая выражаются общим
 уравнением 2^й степени с двумя переменными x и y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Из этого порождку принадлежат уже рассмотренные нами кривые: круг, парабола, эллипс, гиперболы, из которых каждая выражается уравнением 2^й степени относительно x и y и слог. Все эти кривые суть линии 2^{го} порядка.

Кривыми 3^{го} порядка наз. линии представленные общим уравнением 3^{ей} степени, которое будет

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Hy + K = 0$$

Вообще кривая $n^{\text{го}}$ порядка будет кривая представленная уравнением той же степени между двумя переменными x и y при этом надо, чтобы во всех по крайней мере один элемент числа показателей при x и y в котором была бы равна n . Чтобы это условие кривой на порядок не было сильно, необходимо, чтобы кривая сохранила свой порядок во каком бы один координат она не была отнесена.

Теорема Степень уравнения кривой линии не изменится при преобразовании координат.

Положим дано уравнение $m^{\text{й}}$ степени между x и y . Оно представляет кривую $m^{\text{го}}$ порядка. Рассмотрим, что будет если этого уравнение перенесем во первую часть, а во вторую оставим 0;

тогда все члены 1^й степени будут иметь вид:
 $\Delta x^p y^q$. Здесь сумма показателей будет или ни-
 же или равна m , т. е. $p+q \leq m$. (Сумма подобны
 членов равна 0 или $\sum \Delta x^p y^q = 0$. Отнесем эту
 кривую к новым своим координатам $x' y'$ чтобы
 перейти от старым осей к новым или дол-
 жны употребить формулы

$$x = a + m'x' + n'y'$$

$$y = b + m'x' + n'y'.$$

Если мы эти формулы внесем вместо x и y
 в уравнение кривой, то мы получим уравнение
 кривой относительно новых осей координат.
 Это уравнение будет

$$\sum \Delta (a + m'x' + n'y')^p (b + m'x' + n'y')^q = 0$$

Если мы раскроем скобки, сделав указание умно-
 жение, то, так как в скобках x' и y' входят
 только в первой степени, то умножение их
 не может получить членов степени из которых
 какой-либо был бы выше $p+q$, но так как
 $p+q \leq m$, то сумма степеней нового уравнения отно-
 сительно x' и y' не может быть выше m . Это
 показывает, что при преобразовании координат
 степень уравнения кривой не может увеличиться.
 Из этого предложения следует, что степень

уравнения кривой не может и понизиться. В самом деле, если бы мы это новое координатное переменили бы опять к старому, т. е. обратили бы обратное преобразование, тогда мы должны бы из уравнения второго получить первое но если мы допустим, что степень уравнения первого ниже, то при обратном переходе, стало быть, степень уравнения должна повыситься, но мы знаем только скажем, что при преобразовании координат степень уравнения повыситься не может.

Замечание. Иногда может случиться, что уравнение данной степени представляет не одну кривую второго порядка но несколько или низших порядков. Это бывает тогда, когда первая часть уравнения представляет произведение нескольких простых многочленов напр. $(y - ax - b)(x^2 + y^2 - R^2) = 0$ Это уравнение 3-й степени, но оно не представляет кривой 3-го порядка. Действительно, произведение тогда только может быть равно 0, когда один из множителей равен 0 и слогом. мы должны написать или $(y - ax - b) = 0$ или $(x^2 + y^2 - R^2) = 0$. Предположив первое, получим: $y = ax + b$ Это представ-

даеть прямую линию. Предположив второе, получим: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Следовательно наше уравнение представляет прямую линию и круг, т. е. одну линию 1^ю порядка и другую 2^ю

Теория прямой линии

Мы видим, что всякая прямая линия представляется уравнением 1^й степени с двумя переменными x и y ; именно мы знаем, что уравнение прямой линии есть: $y = ax + b$, где $a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}$, при чем α есть угол образованный прямою со осью абсцисс, а φ - угол между осями координат b - есть отрезок, заключаемый прямою с осью ординат

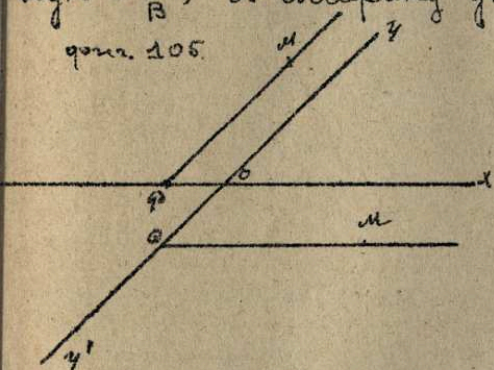
Теорема Всякое уравнение первой степени с двумя переменными x и y представляет некоторую прямую линию.

Общий вид такого уравнения следующий

$$Ax + By + C = 0$$

Здесь коэффициенты A , B и C суть данные числа положительные или отрицательные. Они могут быть в каком нибудь и нулевыми. Координаты для общности предполагаем координатными. Разсмотрим сначала частные

случае 1) Пусть $A=0$, будем иметь: $B y + C = 0$, откуда $y = -\frac{C}{B}$. Здесь y имеет величину постоянную. Относительно на оси координат это точки O длины равно $-\frac{C}{B}$, в сторону указываемую знаком. Пусть



(рис. 105) $OQ = -\frac{C}{B}$. Проведем через O параллель оси абсцисс. Для всякой точки M этой параллели будем иметь: $y = OQ = -\frac{C}{B}$; следовательно это уравнение представляет

прямую линию, параллельную к оси абсцисс
2) Пусть $B=0$, уравнение будет: $Ax + C = 0$; из него имеем $x = -\frac{C}{A}$. Здесь x равно постоянной величине. Разделим оси координат Ox и Oy и на оси абсцисс отложим от точки O длину $OQ = -\frac{C}{A}$. Через Q (рис. 105) проведем параллель оси y — Py . Для всякой точки M этой параллели будем иметь $x = OQ = -\frac{C}{A}$. Откуда, в этом случае, уравнение представляет прямую линию, параллельную к оси y . Рассмотрим общий случай и покажем, что ни A , ни B , ни C не равно нулю: $Ax + By + C = 0$

Мы докажем, что всегда существует такая прямая линия, которая будет выражать этим самым уравнением. Решив относительно y , получим

или. Или.

Лекция 21

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Сравним это уравнение с уравнением прямой, которое напишем так:

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} x + b$$

Чтобы эти два уравнения были тождественными мы должны найти во первых $\frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} = -\frac{A}{B}$ и во вторых $b = -\frac{C}{B}$. Первое равенство должно послужить для определения неизвестного угла α . Мы докажем, что угол α всегда может быть найден. Это мы и будем доказывать существование прямой линии, выражаемое данным уравнением. Будем определить α поможем для краткости $-\frac{A}{B} = a$, где a дано, и напишем: $\frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} = a$ или $\sin \alpha = a \sin(\varphi - \alpha)$ или

$\sin \alpha = a \sin \varphi \cdot \cos \alpha - a \cos \varphi \sin \alpha$; если обе части поделить на $\cos \alpha$, получим: $\tan \alpha = a \sin \varphi - a \cos \varphi \cdot \tan \alpha$ или

$$\tan \alpha = \frac{a \sin \varphi}{1 + a \cos \varphi}$$

По этой формуле всегда можно определить угол α , потому что этот угол здесь определен по $\tan \alpha$, а тангенс может принимать всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. У нас теорема доказана; последние формулы решают следующий вопрос: дано уравнение прямой линии в виде $Ax + By + C = 0$ определить угол α , заключаемый ею с осью абсцисс. Если бы в данном уравнении не было $C = 0$, то уравнение было бы: $Ax + By = 0$. В этом случае

отрезок $b = -\frac{c}{B} \geq 0$ и инт. прямая проходит через начало координат. Это и прямо видно по уравнению $Ex + By = 0$ потому что оно удовлетворяется когда $x = 0; y = 0$

Если координаты прямоугольные тогда формула superficies для определения угла α упрощается и будем иметь $\varphi = 90^\circ$ $\sin \varphi = 1$ и $\cos \varphi = 0$, следовательно

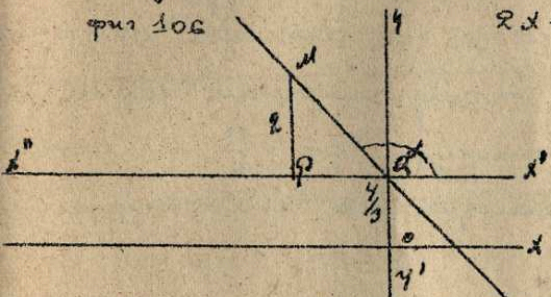
$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha = -\frac{E}{B}$$

Прямую можно построить по отрезку (b), который она делает с осью y^v и по углу α образуемому ею с осью абсцисс. Пусть дано ур-е

рис 106

$$2x + 3y - 4 = 0 \text{ отсюда}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$



Отнесем это уравнение к Декартовым координатам. Сравнив это урав-

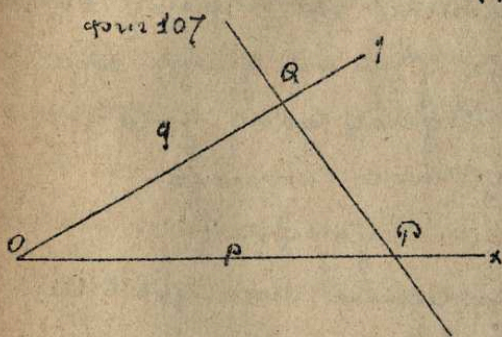
нение с ур-ием $y = ax + b$, мы видим, что $b = \frac{4}{3}$ $a = -\frac{2}{3}$ или $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$. Возьмем все координаты отложим отрезок $\frac{4}{3}$ в единицах вперед выбранного масштаба (рис. 106) от точки O , через O проведем параллель оси x^v (отрезки $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$, получим точку M . Соединим M и O , получим требуемую прямую

Вторая форма уравнения прямой

Если выразим уравнение прямой по отрезку, который она образует на оси абсцисс и по условию координатному. Это первая форма уравнения. Теперь мы составим уравнение по двум отрезкам на осях. Определим прежде отрезки.

Пусть дано $ax + by + c = 0$

Присутим это уравнение к точке p пересечения



этой прямой с осью абсцисс, т. е. выразим, что координаты будут $y=0$ и $x=p$; на чертеже $op=p$; по этому получим $ap+c=0$, откуда $p = -\frac{c}{a}$. p — есть

отрезок, отсеченный прямой на оси абсцисс с его знаком.

Присутим наше уравнение к точке q пересечения прямой с осью y . В этой точке $x=0$, $y=q$.

Будем иметь $bq+c=0$; откуда $q = -\frac{c}{b}$; q — есть отрезок, отсеченный прямой на оси ординат с его знаком.

Мы нашли, что $p = -\frac{c}{a}$; отсюда

$a = -\frac{c}{p}$; сверх того $q = -\frac{c}{b}$ отсюда $b = -\frac{c}{q}$. Вставим эти выражения в общее уравнение получим

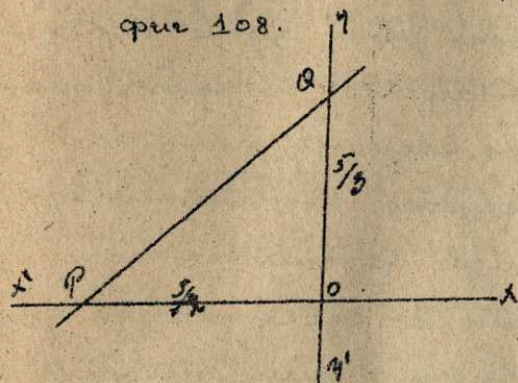
$-\frac{c}{p}x - \frac{c}{q}y + c = 0$. Сократив на c , получим

$$-\frac{x}{p} - \frac{y}{q} + 1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

Это и есть 2^е уравнение прямой

Задача 1 Построить прямую по данному ее числовому уравнению. Чтобы построить прямую достаточно определить две ее точки. Мы будем для простоты определять точки пересечения прямой с осями координат

рис 108.



Возьмем, напр., уравнение $2x - 3y + 5 = 0$. Возьмем координаты Ox и Oy (рис. 108). В точке пересечения прямой с осью x мы должны иметь $y = 0$ и наше ур-е будет: $2x + 5 = 0$,

откуда $x = -\frac{5}{2}$. Отложим эту точку. В точке пересечения прямой с осью y мы должны иметь $x = 0$ и наш ур-е будет: $-3y + 5 = 0$. Отсюда $y = \frac{5}{3}$. Отложим эту точку Q. Проведя прямую PQ, мы найдем искомую.

Задача 2 Дано ур-е: $x + 2y + 4 = 0$ Возьмем оси координат. Для точки пересечения с осью x $y = 0$. Тогда имеем $x + 4 = 0$, откуда имеем $x = -4$. Для точки пересечения с осью y имеем $x = 0$ и, следовательно, $2y + 4 = 0$. Откуда: $y = -2$.

Отмечаем (черт 109), до точки $Q - OQ = -2$ и до $P - OP = -4$ и соединив, PAQ , получим требуемую прямую. Если прямая проходит через начало координат, то для ее построения достаточно определить одну точку.

Пусть дано уравнение $2x + 3y = 0$

Возьмем ее координаты (черт 110) и произвольную абсциссу, напр $x = 1$

определим соответствующую ординату подставив $2 + 3y = 0$, откуда $y = -\frac{2}{3}$

Отметим эту точку M и соединив ее с началом

координат получим искомую прямую

Третья форма Уравнение прямой проходящей через данную точку. Пусть координаты данной точки будут (x', y') . Уравнение прямой можно считать вид $y = ax + b$ здесь a и b неизвестны. Так как прямая проходит через точку (x', y') , то координаты (x', y') должны удовлетворять ее уравнению т.е. будет

$$y' = ax' + b$$

Из одного уравнения нельзя определить две неизвестных a и b . Мы должны только поместить его одно под неизвестными так чтобы. Из него найдем $b = y' - ax'$. Вставив получим:

$$y = ax + y' - ax' \text{ или } y - y' = a(x - x'). \text{ Это}$$

будет некое уравнение. В нем условной константой a останется неизвестным, потому что задана неопределимая: через одну точку можно провести бесчисленное множество прямых.

Четвертая форма Уравнение прямой проходящей через две данные точки. Пусть координаты данных точек будут: $(x'y')$ и $(x''y'')$. Пр-я прямая, как проходящая через первую точку будет $y - y' = a(x - x')$. Здесь a неизвестно, но координаты второй точки должны удовлетворять этому уравнению т.е. $y'' - y' = a(x'' - x')$ отсюда находим $a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$.

Теперь a известно и уравнение некоей прямой будет $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$ или $\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}$.

Пятая форма или та же наз. нормальная. Уравнение прямой можно выразить не по двум перпендикулярам, опущенным из начала координат на данную прямую и по y .

мани, движением точки перпендикулярной к осей координат. Через начало координат (цент. III) проведем прямую линию, перпендикулярную к данной прямой AB . Обозначим углы, образуемые этими направлениями с осью x^b через α с осью y^b через β . Длину перпендикуляра OP обозначим через p . Очевидно, что если дана длина p и два

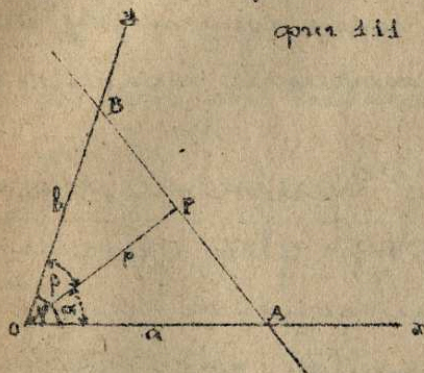


рис 111

угла α и β , найдем на нашей карте точку $\alpha + \beta = \varphi = \angle yOx$, то положение прямой AB будет вполне определено. Составим ее уравнение. Относительно точки пересечения нашей прямой с

осью координат и отрезки откладываем ее на ось x^b , с ее знаком обозначим по предельному через a , а отрезки на ось y^b через b , тогда по формулам (2) можем написать уравнение прямой AB в виде: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; но из $\triangle OPA$ мы найдем, что $p = a \sin \alpha$ откуда $a = \frac{p}{\sin \alpha}$; аналогично из $\triangle OPB$ найдем, что $p = b \sin \beta$ или $b = \frac{p}{\sin \beta}$. Подставив эти величины a и b в предыдущее уравнение прямой получим: $\frac{x}{\frac{p}{\sin \alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin \beta}} = 1$ или умножив все уравнение на p найдем уравнение прямой в 5-ю формулу

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = p \dots \dots (5)$$

Здесь p считается величиной абсолютной, т. к. направление перпендикуляра определяется углами α и β которые отсчитываются от положительных осей координат до этого перпендикуляра.

Уравнение в нормальном виде имеет более простое применение при прямоугольных осях координат. В этом случае $\beta = \alpha - 90^\circ$; $\cos \beta = \cos(\alpha - 90^\circ) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ и уравнение будет

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

Рассмотрим теперь как уравнение общего вида

$$Ax + By + C = 0$$

привести к уравнению нормальной формы

Пусть оси координат будут прямоугольными. По условию, что общее уравнение надо помножить на неизвестную пока множителя λ , чтобы получить уравнение в нормальной форме, т. е.

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

откуда найдем 3 уравнения

$$\lambda A = \cos \alpha; \quad \lambda B = \sin \alpha; \quad \lambda C = -p$$

и добавив еще уравнение $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, получим и

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

λ всегда действительно, т. к. под корнем стоит сумма квадратов, значит у λ надо брать такой знак.

чтобы удовлетворить уравнению $\lambda C = -p$, т.е. обратный
знаку C .

Уравнение общее $Ax + By + C = 0$ в нормальной форме
при прямоугольных осях координат примет, зна-
чит, вид
$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0;$$

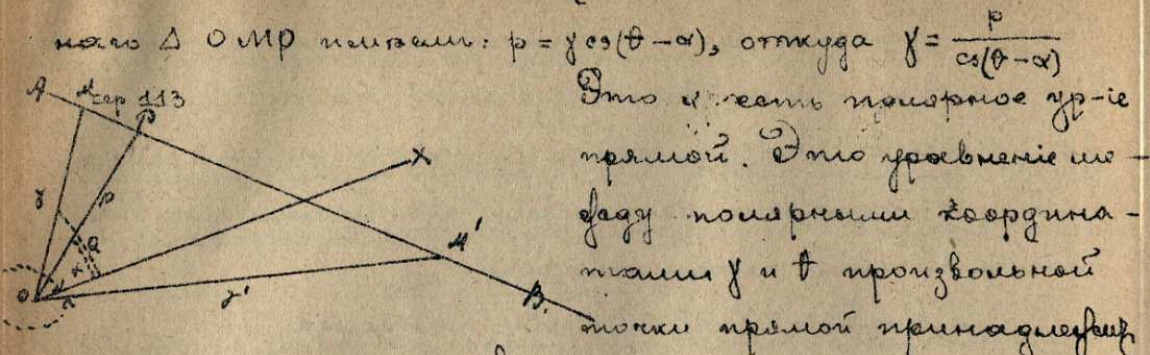
Итак, чтобы привести уравнение к нормальной
форме надо разделить его на квадратный корень.
из суммы квадратов коэффициентов при x и y , взяв
или этот корень со знаком обратным знаку
известного члена.

В случае кривоугольных координат transforma-
ция общего ур-ия $Ax + By + C = 0$ в нормальное так-
же достигается одним и тем же способом но вид мно-
жителя будет в этом случае более сложным
Сравним ур-ия $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ и $x \cos \alpha + y \cos(\varphi - \alpha) - p = 0$
находим условия $\lambda A = \cos \alpha$; $\lambda B = \cos(\varphi - \alpha)$; $\lambda C = -p$ и
и прибавив еще произвольное равенство

$$c^2 \alpha + c^2(\varphi - \alpha) - 2c \cos \alpha \cdot \cos(\varphi - \alpha) \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

можно определить множитель λ Отсюда докажем
справедливость написанной формулы

$$\begin{aligned} c^2 \alpha + c^2(\varphi - \alpha) - 2c \cos \alpha \cdot \cos(\varphi - \alpha) \cos \varphi &= c^2 \alpha + [c \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha]^2 - 2c \cos \alpha \cdot \\ c \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha &= c^2 \alpha + c^2 \varphi c^2 \alpha + 2c \cos \varphi \cos \alpha \sin \varphi \sin \alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha \\ - 2c^2 \alpha \cdot c^2 \varphi - 2c \cos \alpha \cdot c \cos \varphi \sin \alpha \sin \varphi &= c^2 \alpha [1 + c^2 \varphi] + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha = \\ c^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha &= \sin^2 \varphi (\sin^2 \alpha + c^2 \alpha) = \sin^2 \varphi \end{aligned}$$



ветви ее точками. Например, если бы мы взяли точку M' и ее полярные координаты r' и θ' то из прямоугольного треугольника OPM' найдем бы: $\rho = r' \cos(\alpha + 360^\circ - \theta')$ или $\rho = r' \cos(\alpha - \theta')$ или $\rho = r' \cos(\theta' - \alpha)$ откуда $r' = \frac{\rho}{\cos(\theta' - \alpha)}$, а это и есть тоже самое уравнение

Задача 2 Выразить условие параллельности двух прямых

Пусть уравнение двух параллельных прямых будут

$$Ax + By + C = 0 \text{ и } A'x + B'y + C' = 0$$

углы α и α' , образуемые этими прямыми с осью абсцисс, равны как соответственные, следовательно и угловые коэффициенты этих прямых должны быть равны. Пусть для первой прямой угловой коэффициент есть k , а для второй k' ; должны иметь $k = k'$ найдем k и k' для обеих прямых; для этого нужно решить данные уравнения относительно y получим $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ и $y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}$; следовательно $k = -\frac{A}{B}$ и $k' = -\frac{A'}{B'}$ и имеем $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ или $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$.

Если две прямые параллельны то их угловые коэффициенты равны или также коэффициенты при x и y в уравнениях двух прямых должны быть соответственно пропорциональны. Это и есть условие параллельности прямых.

Так прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $9x + 6y + 2 = 0$ будут параллельны

Задача 3 Составить уравнение прямой проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Пусть данная точка есть (x', y') и данная прямая

$$y = k'x + b$$

Уравнение искомой прямой как проходящей через данную точку (x', y') будет $y - y' = k(x - x')$; но по условию параллельности будет иметь $k = k'$; поэтому окончательное уравн-е будет

$$y - y' = k'(x - x')$$

Задача 4 Даны уравнения двух прямых найти координаты точки их пересечения

Пусть уравнения прямых будут

$$Ax + By + C = 0 \dots \dots \dots (I)$$

$$A'x + B'y + C' = 0 \dots \dots \dots (II)$$

Искомая точка лежит в одно и то же время на прямой (I) и прямой (II), а следовательно ее координаты должны удовлетворять обоим уравнениям.

даны удовлетворить одновременно как ур-ию I так и ур-ию II; чтобы нам найти стоит только решить эти два ур-ия, рассматривая x и y как неизвестные. Сформируем это. Умножим y , умножая на B' ур-ие I и на B ур. II получим

$$(AB' - B'A')x + B'C - B'C = 0 \text{ откуда}$$

$$x = \frac{B'C - B'C}{AB' - A'B}$$

Теперь умножая ур-ие I на A' и A вычитая из ур. II ур-ие I получим $(A'B' - A'B)y + A'C - A'C = 0$ откуда $y = \frac{A'C - A'C}{A'B' - A'B}$. Найдемные для x и y величины будут всегда возможны за исключением того случая, когда $AB' - A'B = 0$; тогда получим $x = \infty$ и $y = \infty$. В этом случае прямые пересекаются на бесконечно большом расстоянии, иначе говоря вообще не пересекаются, т. е. они параллельны. Равенство $AB' - A'B = 0$ выражает условие параллельности прямых из него получим $AB' = A'B$ или $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$.

Задача 5 Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку и через точку пересечения двух прямых, ур-ие которых даны

Дана точка (x', y') и две прямые $Ax + By + C = 0 \dots I$ и $A'x + B'y + C' = 0 \dots II$. Из двух ур-ий I и II составим механически прямую точку: умножим y'

ное уравнение на произвольный множитель λ и сложим с первым

$$Ax + By + C + \lambda(A'x + B'y + C') = 0 \dots (III)$$

Разсмотрим, что представляет уравнение III. В первом оно первой степени относительно x и y следовательно выражает прямую линию. Далее можно заметить, что эта прямая проходит через точку пересечения двух прямых I и II, следовательно удовлетворяет и уравнению II, а именно что уравнения I и II будучи в него подставлены дадут $0 + 0 \cdot \lambda = 0$. В уравнении III λ произвольно и это уравнение выражает не одну прямую а бесчисленное множество прямых, проходящих через точку пересечения прямых I и II. Определим λ по условию, что прямая III проходит через данную точку (x', y') . Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению III следовательно

$$Ax' + By' + C + \lambda(A'x' + B'y' + C') = 0$$

откуда $\lambda = \frac{Ax' + By' + C}{A'x' + B'y' + C'}$ и искомо. уравнение будет

$$Ax + By + C + \frac{Ax' + By' + C}{A'x' + B'y' + C'} \cdot (A'x + B'y + C') = 0$$

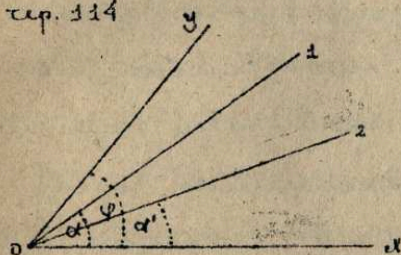
Задача 6 Даны уравнения двух прямых; определить угол, образованный этими прямыми. Уравнения двух данных прямых

линей представляется в виде:

$$y = \kappa x + b \text{ и } y = \kappa' x + b'$$

Обозначим через α и α' углы, образуемые этими прямыми с осью x через φ , угол между осями координат. Через начало проведем прямую параллельную данной на стр. 114 прямую параллельно I обозначена через 1, а параллельная II - через 2, угол между прямыми назовем через ν , будем считать $\nu = \alpha - \alpha'$. Возьмем $\operatorname{tg} \nu = \operatorname{tg}(\alpha - \alpha') =$

стр. 114



$= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha'}$ по но выведенной формуле и имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa \operatorname{tg} \varphi}{1 + \kappa \operatorname{cs} \varphi} \text{ и } \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\kappa' \operatorname{tg} \varphi}{1 + \kappa' \operatorname{cs} \varphi}$$

Вставляем найденные

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\frac{\kappa \operatorname{tg} \varphi}{1 + \kappa \operatorname{cs} \varphi} - \frac{\kappa' \operatorname{tg} \varphi}{1 + \kappa' \operatorname{cs} \varphi}}{1 + \frac{\kappa \kappa' \operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \kappa \operatorname{cs} \varphi)(1 + \kappa' \operatorname{cs} \varphi)}}$$

Упрощая будем иметь

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\kappa \operatorname{tg} \varphi + \kappa \kappa' \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{cs} \varphi - \kappa' \operatorname{tg} \varphi - \kappa \kappa' \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{cs} \varphi}{1 + \kappa \operatorname{cs} \varphi + \kappa' \operatorname{cs} \varphi + \kappa \kappa' \operatorname{cs}^2 \varphi + \kappa \kappa' \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

и наконец

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{(\kappa - \kappa') \operatorname{tg} \varphi}{1 + (\kappa + \kappa') \operatorname{cs} \varphi + \kappa \kappa'}$$

Эта формула примет вид $\operatorname{tg} \nu = \frac{\kappa - \kappa'}{1 + \kappa \kappa'}$ в частном случае, когда координаты прямоугольны, это формула упрощенная $\varphi = 90^\circ$; $\operatorname{cs} \varphi = 0$ и $\operatorname{tg} \varphi = 1$ и будем иметь

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\kappa - \kappa'}{1 + \kappa \kappa'}$$

Следствие ² Условие перпендикулярности двух прямых.

Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = 90^\circ$; $\operatorname{tg} \varphi = \infty$ и знаменатель в формуле, выражающей $\operatorname{tg} \varphi$, должен быть $= 0$, подставив вместо φ имеем $1 + (k + k') \cos \varphi + kk' = 0$ а при перпендикулярности координатных $1 + kk' = 0$

Эти два равенства и verificируют условие перпендикулярности двух прямых. Верифицирует это так: произведение tg -ов углов наклона двух прямых, взаимно перпендикулярных, должно быть равно 0, поэтому оно будет для двух прямых

$$\left. \begin{aligned} y &= kx + b \\ y &= k'x + b' \end{aligned} \right\} kk' + 1 = 0$$

Задача 7 Составить ур-ие прямой линии, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

Пусть данная точка есть $(x' y')$ а данная прямая $y = kx + b$. Уравнение искомого прямой, проходящей через данную точку, будет $y - y' = k'(x - x')$. Здесь k' неизвестно, но условие перпендикулярности двух прямых имеем $1 + (k + k') \cos \varphi + kk' = 0$, где φ есть угол между осями координат, следовательно $k' =$

$$1 + k \cos \varphi + k'(k + \cos \varphi) = 0 ; \quad k' = -\frac{k \cos \varphi + 1}{k + \cos \varphi}$$

или $k' =$

стр. 23.

Теперь κ' известно и уравнение искомого прямой будет

$$y - y' = -\frac{\kappa \cos \varphi + 1}{\kappa + \cos \varphi} (x - x')$$

Задача 8 Определить длину перпендикуляра опущенного из данной точки на прямую.

Возьмем эту задачу в предположении, что уравнение прямой AB дано в нормальной форме

$$x \cos \alpha + y \cos (\varphi - \alpha) - p = 0 \dots (1)$$

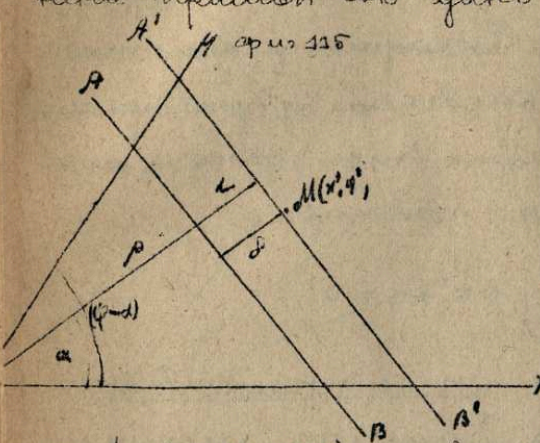
Проведем через данную точку M перпендикулярную AB и параллельную AB изобразим, что уравнение этой прямой будет

$$x \cos \alpha + y \cos (\varphi - \alpha) - (p + h) = 0 \dots (2)$$

где h расстояние между прямыми AB и $A'B'$. Так как прямая, данная уравн. 2 проходит через точку $M(x', y')$ то $x' \cos \alpha + y' \cos (\varphi - \alpha) - (p + h) = 0$ откуда

$$h = x' \cos \alpha + y' \cos (\varphi - \alpha) - p \dots (3)$$

Первая часть формулы (3) представляет искомым перпендикуляром, опущенный из точки M на прямую AB ; вторая ее часть представляет из себя часть уравн. первого в которую подставлены координаты точки M . Отсюда следует, что для решения предложенной задачи стоит только подставить



координаты данной точки в нормальное ур-е данной прямой

Если ур-е прямой дано в произвольной форме

$$Ax + By + C = 0 \dots\dots (4)$$

то для решения предложенной задачи надо это уравнение прежде привести к нормальной форме.

Во сколько случаев когда точка M лежит в плоскости координат, имеем $x' = y' = 0$ поэтому

$$h = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Задача 9 Определить точку, где пересечения, когда даны координаты его берем.

Возьмем две проекции прямоугольного сечения координат и изобразим координаты берем тогда поимеем через (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) Составим ур-е прямой проходящей через первую точку берем

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \dots\dots (1)$$

$x(y_2 - y_1) + y(x_2 - x_1) + x_2 y_1 - y_2 x_1 = 0$ Приведем это ур-е к нормальной форме:

$$\pm \frac{x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) + y_2 x_1 - x_2 y_1}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}} = 0 \dots (2)$$

Если подставить сюда вместо x и y координаты x_3 и y_3 то найдем длину перпендикуляра $\perp$ опущенного из точки (x_3, y_3) на отрезок прямой соединяющей точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) Этот перпендикуляр

каждого будет.

$$h = \pm \frac{x_2(y_2 - y_1) - y_2(x_2 - x_1) + x_2 y_1 - x_1 y_2}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}}$$

Отсюда представит базису нашего треугольника основание для нашего треугольника выразится разностью δ между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) :

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Отсюда следует, что искомая площадь будет

$$S = \frac{1}{2} h \cdot \delta = \pm \frac{1}{2} [x_2(y_2 - y_1) - y_2(x_2 - x_1) + x_2 y_1 - x_1 y_2] \text{ или}$$

$$S = \pm \frac{1}{2} [y_1(x_2 - x_1) + y_2(x_1 - x_2) + y_3(x_1 - x_2)] \dots (3)$$

Так как площадь берется по абсолютной величине, то в этой формуле следует взять такой знак, чтобы площадь была положительна. Если площадь $S = 0$, то это показывает, что три данных точки лежат на одной прямой. Отсюда получается следующий вывод, при котором три данных точки лежат на одной прямой: $y_1(x_2 - x_1) + y_2(x_1 - x_2) + y_3(x_1 - x_2) = 0$

Задача 10 Составить уравнение прямой, проходящей через две точки, лежащие на расстоянии p от начала координат.

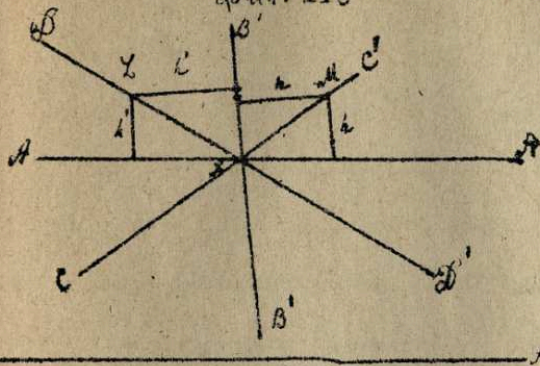
Пусть две произвольные точки принадлежат AB и $A'B'$ даны в аналитической форме:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \dots (1)$$

$$x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - p' = 0 \dots (2)$$

Если прямая CC' делит угол $B'XB'$ пополам, то

фиг. 116



длины перпендикуляров от точек L и M до прямой CC' (фиг. 116) на прямых AB и $A'B'$ между собой равны. Эти длины построены, когда подставим в первую часть ур-и

(1) и (2) координаты точки M по той же ур-е прямой CC' будет $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - p'$;

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p - (x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - p') = 0$$

Это ур-е одного биссектора. Другой будет BB' ; для него перпендикуляры должны быть равны, но если подставим координаты точки L в первую часть формулы (1) и (2), то найдем в первом случае отрицательную длину перпендикуляра, (ибо L лежит относительно BB' с той же стороны как и начало O во втором — положительную. Отсюда следует что ур-е прямой BB' можно написать так:

$$-(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = (x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - p')$$

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) + (x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - p') = 0$$

т. е. ур-е другой биссектрисы построены, следовательно любые произвольные ур-е данных прямых.

Задачи на теорию прямых линий.

Из теории прямых линий могут быть предпоставлены различные задачи, которые могут быть рассмотрены на симметризации кривых. Составим уравнение прямой по двум данным, доказать, что три точки лежат на одной прямой, доказать, что две прямые пересекаются в одной точке, найти расстояние между некоторыми параллельными линиями.

Пример 1. Провести через данную точку (x, y) прямую, которая с прямой $y = kx + b$ образует данный угол.

Пусть две координаты прямоугольные и т. е. $\angle$ данного угла. Называя данный коэффициент наклона прямой через k , имеем: $\tan = \frac{k_1 - k}{1 + k k_1}$
 $k_1 = \frac{\tan + k}{1 - \tan k}$ зная k , найдем для искомого угла $\gamma - \gamma' = \frac{\tan + k}{1 - \tan k} (\alpha - \alpha')$

Задачи второго рода Для решения задач второго рода нужно составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки и показать, что данная прямая удовлетворяет коэффициентам наклона, и т. д. или наоборот, в заданной точке провести прямую, удовлетворяющую заданному коэффициенту наклона.

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{или заменяющей ее} \quad 1 + y_1 x_1 \\ 1 + y_2 x_2 \\ 1 + y_3 x_3 \end{aligned} \right\} = 0$$

§ Наконец еще простой способ состоит в том, что размазывают координаты третьей точки и показывают, что они имеют форму

$$x_3 = \frac{mx_1 + nx_2}{m+n}; \quad y_3 = \frac{my_1 + ny_2}{m+n}, \quad \text{где } m \text{ и } n$$

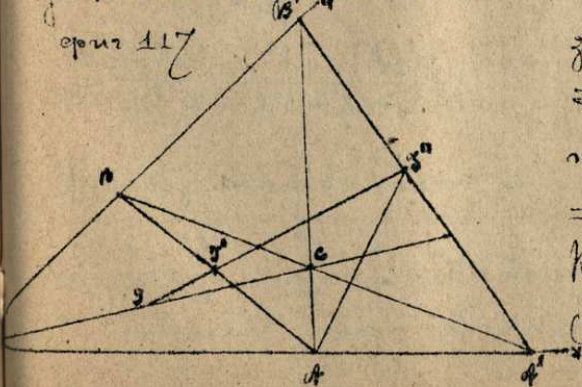
суть каких либо положительных или отрицательных количеств. Последний способ основан на формулах выражающих координаты точки, являющейся делением между двумя данными точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в отношении $m:n$

Пример 2^й Доказать, что во всяком треугольнике средние его медианы лежат на одной прямой.

Полным треугольником наз. совокупность четырех пересекающихся прямых. За все координаты возьмем Ox' и Oy' (рис. 117) Нужно дока-

рис 117

зать что три средних I' , I'' , I''' лежат на одной прямой. Пусть дано $AO = a$, $OB = b$; $OB' = b$. Координаты точки A суть $(a, 0)$ $A'(a, 0)$ $B(0, b)$ $B'(0, b)$



Координаты середины $\bar{J}$ точек (x_1, y_1) , $x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}$ и $y_1 = \frac{b}{2}$; Координаты $\bar{J}'' = (x_2, y_2)$ $x_2 = \frac{a'}{2}$ и $y_2 = \frac{b'}{2}$ координаты $\bar{J}'''$ точки пересечения, нулевого попарно предельно найти координаты точки C , но точка C есть пересечение прямой AB' и $A'B$.

$$\text{Ур. } AB': \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{Ур. } A'B: \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1.$$

Имеем эти два ур-ия $b'x + ay = ab'$, $b'x + a'y = ab$

$$y(a'b' - ab) = (a' - a)bb' \text{ откуда}$$

$$x = \frac{aa'(b' - b)}{a'b' - ab} \quad \text{и} \quad y = \frac{bb'(a' - a)}{a'b' - ab}.$$

Теперь координаты $\bar{J}'''$ известны

$$x''' = \frac{aa'(b' - b)}{2(a'b' - ab)}; \quad y''' = \frac{bb'(a' - a)}{2(a'b' - ab)}$$

Далее составим угловое коэффициент прямой $\bar{J}\bar{J}''$ и $\bar{J}\bar{J}'''$. Если эти прямые совпадают то их угловые коэффициенты равны. Угловой коэффициент определяется по ур-ию прямой проходящей через две данные точки. Это уравнение

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x') \quad \text{угловой коэффициент} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

$$\text{Угловой коэффициент прямой } \bar{J}\bar{J}''' = \frac{y''' - y'}{x''' - x'} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{bb'(a' - a)}{2(a'b' - ab)} - \frac{b}{2}}{\frac{aa'(b' - b)}{2(a'b' - ab)} - \frac{a}{2}} = \frac{\frac{a'b'b' - abb' - a'bb' + ab^2}{2(a'b' - ab)}}{\frac{aa'b' - aab' - aa'b' + a^2b}{2(a'b' - ab)}} = \frac{ab^2 - abb'}{a'b^2 - aab'} \\ & = \frac{ab(b - b')}{ab(a - a')} = \frac{b' - b}{a' - a} \end{aligned}$$

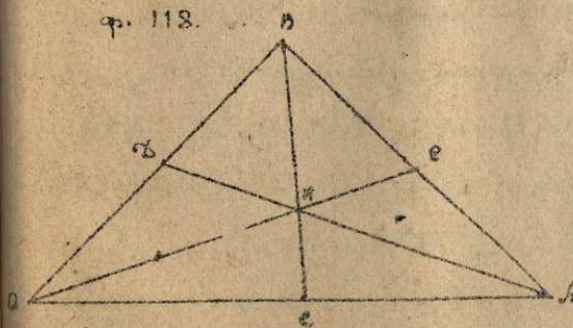
(так как угловой коэф. прямой $\bar{J}\bar{J}'' = \frac{\frac{b'}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{a'}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{b' - b}{a' - a}$. Значит середины $\bar{J}, \bar{J}'', \bar{J}'''$ лежат на одной прямой.

Задачи третьего рода. Если три прямые проходят через одну точку, то уравнения этих прямых должны быть совместны. Обратный общий способ свести такую совместность ур-ий свести к тому, что свести к определителю из всех коэффициентов всех трех уравнений. Если по вычислению этого определителя он окажется равным 0, то ур-я совместны. Но можно доказать совместность ур-ий и другими простыми способами, показывая, что одно из ур-ий есть алгебраическое следствие двух других.

Пример 3 Доказать, что равнобедренный треугольник пересекается в одной точке.

Направим оси координат по двум сторонам треугольника (рис 118)

р. 118.



Пусть $OA = a$ и $OB = b$. Составим ур-я прямой AB

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ прямой } CD$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ и } OE$$

$$y = 0 = \frac{4a - 0}{4 - 0} (x = 0)$$

Представим их в более простом виде

$$\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 1, \quad \frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0$$

или. Если.

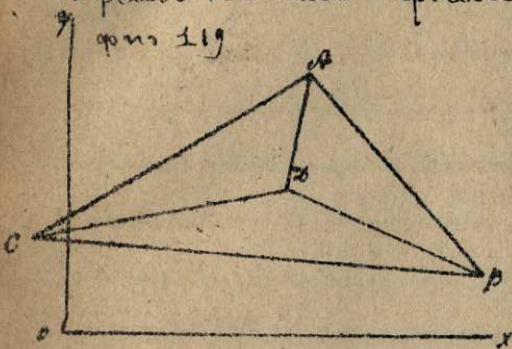
Пример 24

Мы имеем: $-\left(\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} - 1\right) + \left(\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) + \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) = 0$

Это доказывает, что одно из уравнений есть линейное интегральное уравнение. Следовательно, две прямые AB , BC , CA пересекаются в одной точке.

Пример 4 Доказать, что равнобедренный треугольник пересекается в одной точке.

Возьмем начало координат в одной из вершин данного равнобедренного треугольника ABC



(рис. 119) и напишем уравнения его сторон в нормальном виде. Пусть две стороны

этого треугольника будут $\alpha = 0$; $\beta = 0$ и $\gamma = 0$. Уравнения

равнобедренного треугольника можно было считать, считая эти уравнения

$$\beta - \alpha = 0; \quad \gamma - \beta = 0; \quad \alpha - \gamma = 0$$

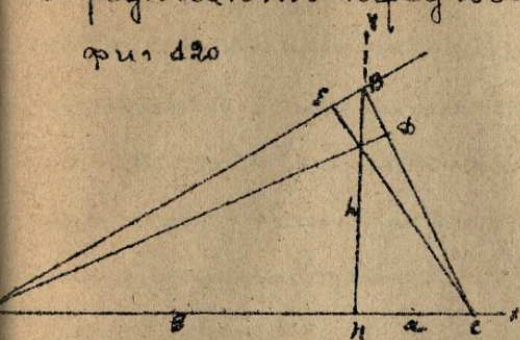
Мы имеем $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) + (\alpha - \gamma) = 0$

Итак, мы доказали, что равнобедренный треугольник пересекается в одной точке.

Пример 5 Доказать, что во всяком треугольнике три его высоты пересекаются в одной точке.

Возьмем произвольный треугольник (рис. 120) и его высоты. Пусть H — основание BC , K — основание AC , L — основание AB . Проведем AL через A , BK через B , CH через C , т.е. $AL = a$

$АН = b$, $ВН = h$ Эти три величины известны и являются определителями треугольника. Уравнение линии BC при $дво$



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$$

Прямая его ортогонально

$$y \text{ получим } y = -\frac{h}{a}x + h$$

Условий коэф-та $= -\frac{h}{a}$ Коэф-

гнтации точки $C = (a, 0)$

и $A(-b, 0)$. Уравнение линии

AB : $y - 0 = m[x - (-b)]$ или $y = m(x + b)$, где m неиз-

вестно; но по условию перпендикулярности им-

ее: $-\frac{h}{a}m + 1 = 0$, откуда $m = \frac{a}{h}$ а окончатель-

ное ур-ие AB будет: $y = \frac{a}{h}(x + b)$. Ур-ие BC будет

$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$; откуда $y = -\frac{h}{b}x + h$. Условий коэф-та $= \frac{h}{b}$

Ур-ие CE будет: $y - 0 = m'(x - a)$ или $y = m'(x - a)$. Уло-

бие перпендикулярности CE и AB дает: $\frac{h}{b}m' + 1 = 0$

откуда $m' = -\frac{b}{h}$. Окончательное ур-ие будет:

$y = -\frac{b}{h}(x - a)$. Ищем координаты точки перес-

ечения CE и AB . Имеем: $\frac{a}{h}(x + b) = -\frac{b}{h}(x - a)$

$a(x + b) = -b(x - a)$ или $ax + ab = -bx + ab$ или

$ax = -bx$ но a не равно b следовательно $x = 0$ и точка

лежит на оси координат.

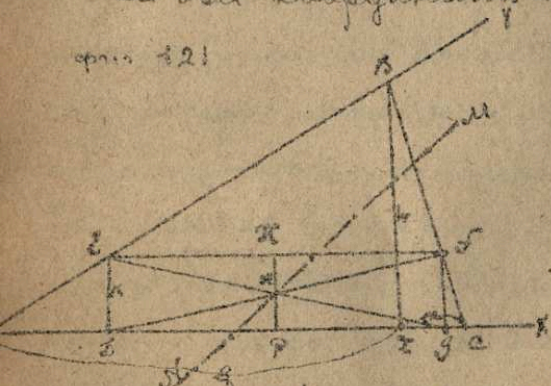
Задачи четвертого рода. Задачи четвертого рода сь определением ур-ия прямой, кас-

заданной концентрической линии, параллель-

составляется из чертёжа связи между текущими координатами. Для этого нужно выбрать переломную величину, от измерения которой зависит образование геометрического метода и выразить координаты через эту переломную и через данные параметры. Взаимосвязь между текущими и переломными величинами указывать переломную. Всема можно выбрать удобная ось за которую следует принять более характерная прямая данной фигуры.

Пример 6 Найти геометрическое место центров прямоугольников вписанных в данный треугольник.

За ось координат примем высоту BD и основание треугольника AC . Обозначим координаты пересечения диагоналей через x и y и найдем связь между ними и параметрами, определяющими $\triangle ABC$.



т. е. a, b и h ; где этого на время введем новый параметр k , выражая координату точки K и F . Стало видно, что $h = \frac{k}{2}$. Чтобы найти абсциссу H надо взять полуцелую абсциссу x и F . AB

ищем точку $Z(X_z)$ найдем когда в уравнение прямой AB подставим ординату $κ$ точки Z , а также точка $F(X_z)$ получится также из ур-ия прямой BC

$$\text{Ур-ие } AB: \dots \frac{x}{-b} + \frac{y}{h} = 1; y = \kappa; X_z = b \left[\frac{\kappa}{h} - 1 \right]$$

$$\text{" } BC: \frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1 \quad y = \kappa; X_z = a \left[1 - \frac{\kappa}{h} \right]$$

$$\bar{z} = \frac{X_z + X_z}{2} = \frac{a-b}{2} \left[1 - \frac{\kappa}{h} \right];$$

Определим κ из ур-ия $h = \frac{\kappa}{2}$ и подстав. в послед. ур-ие имеем: $\bar{z} = \frac{a-b}{2} \left[1 - \frac{2h}{h} \right]$

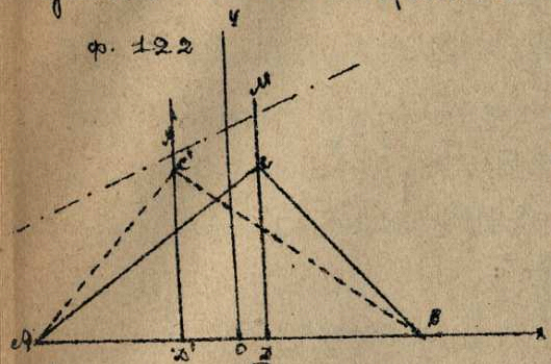
Это ур-ие геометрического места точек пересечения диагоналей прямоугольника при непрерывном процессе изгибания приведем др-е к виду $\frac{a-b}{2} \kappa + \frac{h}{2} = 1$. Это даст нам прямую MN проходящую через половину высоты точки H и половину основания AB .

Пример 7 Дано основание треугольника и сумма двух других его сторон; продолжая высоту, откладывая от нее длину одной из его двух сторон. Найти геометрическое место точек таких образом построенных?

Пусть $AB = 2a$ есть данное основание сумма двух других сторон $= m$; $2a$ и m данные

это: $AC + CB = m$ (фиг. 122) Высота тр-ка CD . Отно-
шение $DM = AC$. Найдти геометрическое место то-
чек M . Разделим AB по

ф. 122



пополам, так что $AO = BO = a$.
Примем O за начало, а OB
за ось x . Координаты то-
чек $M(x, y)$ будут $x = OD$ и
 $y = MD = AC$ следовательно

$BC = m - y$. В треугольнике ABC имеем

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \cdot AD \text{ или}$$

$$(m - y)^2 = y^2 + 4a^2 - 4a(a + x)$$

Это и есть уравнение искомого места. Раскрыв-
вая скобки получим:

$$m^2 - 2my + y^2 = y^2 + 4a^2 - 4ax \text{ или } 2my - 4ax = m^2$$

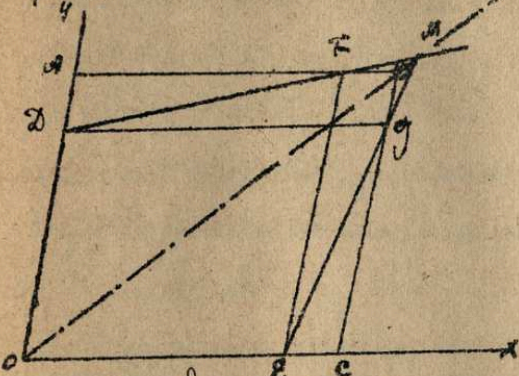
Это уравнение первой степени, и по сему иско-
мое место есть прямая линия

Пример 3 Дан параллелограмм
 $OADC$ (фиг. 123) в котором $OC = a$ и $OD = b$.
Проводим произвольные прямые $Dg \parallel OC$
и $EF \parallel OD$. Соединим прямыми то-
чки D с F и E с g . Определить ме-
сто точек пересечения прямых
 Dg и EF

Возьмем за ось координат сторону параллело-

прямых DE и OA , полагая $OE = a'$ и $OD = b'$ состав-
им урав-ия прямых EG и DF . Уравнение EG :

ф. 128



$$y - 0 = \frac{b' - 0}{a' - a'} (x - a')$$

Ур-ие DF $y - b' = \frac{b - b'}{a'} (x - 0)$

Преобразуем эти ур-ия

$$ya - ya' = b'x - a'b'$$

$$ya' - ba' = bx - b'x$$

Координаты точки M удов-

летворяют обоим ур-ям

и следовательно и тому, которое получится от сло-
жения их. Совершая это сложение находим:

$$ya - ya' + ya' - ba' = b'x - ba' + bx - b'x \quad \text{или}$$

$$ya = bx \quad \text{или} \quad y = \frac{b}{a} x$$

Это и есть искомое уравнение

Теорема круга

Будем рассматривать круг при прямоуголь-
ных осях координат. Общее ур-ие круга следующее

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

где α и β суть координаты центра, а R - радиус.
Раскрывая скобки, получим

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

Это ур-ие второй степени относительно x и y есть одна
из кривых второго порядка. Сравним это ур-ие с об-щим ур-ием
кривой 2^{го} порядка $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Из сравне-

мы видим, что для того, чтобы второе ур-ие можно представить
 круг, мы должны иметь в нем: $B=0$ и ур-ие при этом бу-
 дет $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Если для нас A , получим
 $x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{C}y + \frac{F}{A} = 0$, полагая для краткости $\frac{D}{A} = a$; $\frac{E}{C} = b$ и
 $\frac{F}{A} = c$ имеем $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Это ур-ие имеет вид
 совершенно одинаковый с первым, поэтому это ур-ие есть самый
 общий вид ур-ия второй степени, которое может пред-
 ставлять круг. Попробуем теперь, что это ур-ие нам дано прав-
 сномерным действительным и оно представлять круг, а если
 представлять то какой именно. Для этого попытаемся
 привести к первоначальному виду ур-ие круга: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$
 Для чего перенесем с вo вторую часть и в обеих частях
 равенства прибавим $\frac{a^2}{4}$ и $\frac{b^2}{4}$ получим $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 + by + \frac{b^2}{4} =$
 $= -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$ или $(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$. Теперь это ур-ие ес-
 ть ур-ие круга, у которого $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\frac{b}{2}$ и $R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$
 или $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$. Мы имеем координаты центра и ра-
 диус, но отсюда все видно, что это ур-ие не всегда будет пред-
 ставлять круг потому что радиус может получиться
 мнимым и круга не будет. Чтобы был круг нужно:
 $a^2 + b^2 > 4c$. Может еще случиться, что $a^2 + b^2 = 4c$ тогда $R=0$
 и круг обратится в точку. Из ур-ия прямо можно видеть, что
 оно представляет точку. Мы имеем $c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$. Подставив в
 ур-ие имеем: $x^2 + y^2 + ax + by + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 0$ или $(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = 0$
 Но сумма двух квадратов тогда только равна 0,

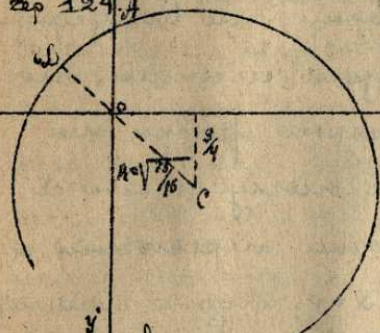
а) $A=C$, тогда.

когда каждое из комплексных возмущений в квадрате равно 0, откуда имеем $x + \frac{a}{2} = 0$ и $y + \frac{b}{2} = 0$ откуда получим $x = -\frac{a}{2}$ и $y = -\frac{b}{2}$ а эти координаты определяют одну точку.

Пример 1 Построить круг, представленный уравнением $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y - 6 = 0$

Приводим это уравнение к общему виду уравнения круга

пр 124.



т.е. к виду: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Для этого заменим данное

уравнение на 2: $x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{2}y - 3 = 0$

получим квадрат:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = 3 + 1 + \frac{9}{16}$$

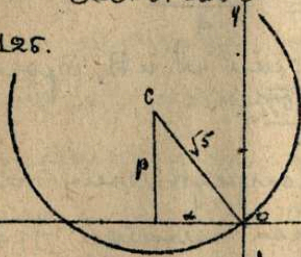
$$\text{или } (x-1) + (y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{4})^2 = \frac{73}{16} \text{ или } R = \sqrt{\frac{73}{16}}$$

переведем, что $a=1$, $b=-\frac{3}{4}$ а $R^2 = \frac{73}{16}$ или $R = \sqrt{\frac{73}{16}}$

Возьмем все координаты и по этим данным построим круг пр 124

Пример 2 Построить круг представленный уравнением $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

пр 125.



Приводим его к общему виду уравнения круга.

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 1 + 4 \text{ или}$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Значит $a=-1$, $b=2$ и $R=\sqrt{5}$. Берем все координаты и строим координаты центра и самый круг (пр 125)

справ. Тем.

Лист 25.

Пересечение круга с прямой

Иногда при построении круга нужно определить точку его пересечения с осью координат. Пусть дано

$$\text{у-е} \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Для точек пересечения с осью x^b достаточно положить $y=0$ и тогда получим в итоге точку $x^2 + ax + c = 0$ откуда найдем x для точек пересечения. Если это у-е имеет действительные корни, то получаются две точки пересечения, если корни мнимые, то круг не пересекает ось x^b , если корни равны то круг касается только одну точку с осью x^b т.е. он касается оси x^b . Для точек пересечения с

осью ординат достаточно положить $x=0$ и у-е примет вид $y^2 + by + c = 0$. Отсюда найдем y для точек пересечения. Возьмем пример 1^й (стр 124) Для пересечения с осью ординат достаточно положить $x=0$ и тогда

$$\text{получим} \quad 2y^2 + 3y - 6 = 0 \text{ или } y^2 + \frac{3}{2}y - 3 = 0 \text{ откуда}$$

$$y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 3} \text{ или } y = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

Относительно нас интересуют две точки A и B , будем писать $A_0 = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}$ и $B_0 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4}$

Сделаем общее замечание об определении точки пересечения круга с данной прямой или осью. Пользуясь, что дан круг уравнения которого:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

и прямая имеет $AX + By + C = 0$

требуется найти точки пересечения. Точка пересечения имеет в одно и то же время на кругу и на прямой, следовательно ее координаты удовлетворяют и ур-ию круга и ур-ию прямой и чтобы их найти, можно только решить эти два уравнения, рассматривая как x и y как неизвестные.

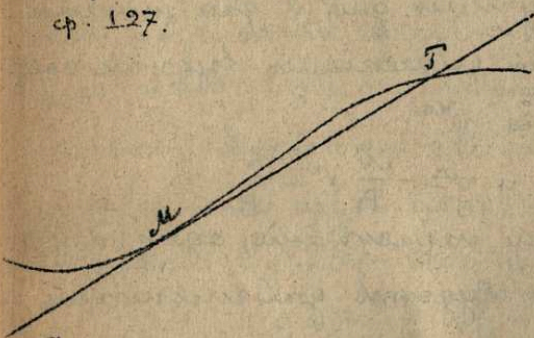
Из ур-ия прямой найдем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это выражение подставим в ур-ие круга, тогда получимся ур-ие с одним неизвестным x . Ур-ие это очевидно будет квадратное. Будем оно иметь вид $Mx^2 + Nx + P = 0$, где M, N и P известные. Решив это ур-ие мы получим для x два значения $x = x'$ и $x = x''$. Этими двумя значениями будем соответствовать два значения y

$$y' = -\frac{A}{B}x' - \frac{C}{B} \text{ и } y'' = -\frac{A}{B}x'' - \frac{C}{B}$$

Будем иметь две точки пересечения, одну (x', y') другую (x'', y'') . Эти точки будут действительными только тогда, когда x' и x'' действительны. Если x', x'' мнимы, то это значит, что прямая не пересекает круга. Можно заметить, что $x' = x''$ тогда и $y' = y''$ и получится одна точка. Это значит, что круг касается прямой, ибо он имеет одну общую точку.

Касательная линия к кругу

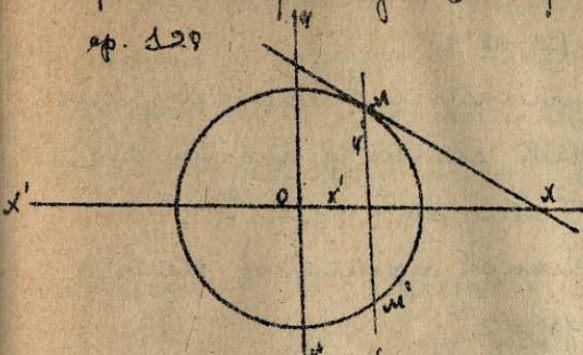
Определение касательной линии к произвольной кривой в данной точке есть предельное положение секущей, проходящей через эту точку, при предположении, что другая ее точка пересечения с кривой бесконечно приближается к первой стремясь с ней совпасть. Это определение не требует, чтобы касательная линия имела с кривой только одну общую точку. Если кривая имеет предельное положение точки, то касательная к кривой в одной точке будучи продолжена может пересечь кривую в другой точке (см. 127) руководствуясь принципом 127.



тот же определение им, следовательно уравнение касательной к кругу в данной точке. Возьмем круг с центром K радиуса r в координатах (см. 128) Уравнение его дано $x^2 + y^2 = r^2$

Дана на кругу точка M , координаты K радиуса (x', y') Проведено в этой точке касательную. Требуется составить ее уравнение. Представим, что через точку M проводим секущую MB . Эта секущая пересечет круг в другой точке B . Координаты этой точки обозначим через (x'', y'') Уравнение секущей как

прямой проходящей через две данные точки будет
 пр. 129



$$y - y' = \frac{x^2 - x'^2}{x'' - x'} (x - x')$$

Если предположим, что точка M' перемещается по кругу, совпадает наконец с точкою M , то стоящая обратится в касательную

и тогда будет иметь: $x'' = x'$ и $y'' = y'$

При этом $\tan$ угла наклона стоящей, т.е. $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ равенется 0, следовательно нельзя перейти от уравнения стоящей к уравнению касательной. Это потому, что мы до сих пор не выразили x'' и y'' , что точка M' находится на кругу. Сделаем это и представим уравнение стоящей в другом виде. Возьмем наши точки M и M' удовлетворяют уравнению круга, а по нему: $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ и $x_2^2 + y_2^2 = r^2$. Вычитая из второго первое, найдем:

$$x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0 \text{ или } (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = -(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) \text{ откуда } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$$

Потому что уравнение стоящей можно написать в таком виде: $y - y' = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'} (x - x')$

Чтобы от этого уравнения перейти к уравнению касательной, предположим, что точка M' совпадает с M , т.е. имеем $x'' = x'$ и $y'' = y'$ тогда будет

линии ур-е касательной в таком виде

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x')$$

Это ур-е можно представить в другом, более простом виде, помножив его на y' , тогда будет иметь вид $yy' - y'^2 = -xx' - x'^2$ или $xx' + yy' = x'^2 + y'^2$ но $x'^2 + y'^2 = z^2$ и ур-е касательной примет вид.

$$xx' + yy' = z^2$$

Уравнение касательной к кругу, выраженное по тг'у угла данного его со осью абсцисс

Пусть дана точка ось x и поворота, это $tg \alpha = m$

Из первого ур-е касательной мы видим что $m = -\frac{x'}{y'}$. Возьмем ур-е касательной выведем из него y , получим $y = -\frac{x'}{y'}$, $x + \frac{z^2}{y'}$ или $y = mx + \frac{z^2}{y'}$.

Выразим теперь y' через m , мы получим $-\frac{x'}{y'} = m$ откуда $x' = -my'$; сверх того $x'^2 + y'^2 = z^2$ заменив получим $m^2 y'^2 + y'^2 = z^2$ или $y'^2(m^2 + 1) = z^2$ или $y' = \frac{z}{\sqrt{m^2 + 1}}$, откуда $y = mx + \frac{z}{\sqrt{m^2 + 1}}$ и ур-е касательной будет

$$y = mx + \frac{z}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Это и есть искомое ур-е. Докажем это касательная к кругу имеет одну общую точку. Возьмем ур-е круга $x^2 + y^2 = z^2$ и ур-е касательной.

$$xx' + yy' = z^2$$

Координаты точки взятые на кругу, суть (x', y')

Будем искать координаты точки пересечения дуг окружности с прямой. Для этого, как мы знаем, нужно решить два уравнения вместе относительно x и y . Сгруппируем это. Из второго ур-я имеем

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{z^2}{y'}$$

Подставив в значение для y в первое ур-е найдем

$$x^2 + \frac{x'^2}{y'^2}x^2 - \frac{2z^2x'}{y'^2} + \frac{z^4}{y'^2} = z^2$$

Умножив на знаменатель и взяв x^2 за скобки найдем: $(y'^2 + x'^2)x^2 - 2z^2x' + z^4 - z^2y'^2 = 0$ или

$z^2x^2 - 2z^2x' + z^2(z^2 - y'^2) = 0$ сократив на z^2 и заменив, что $z^2 = y'^2 + x'^2$ получим $x^2 - 2xx' + x'^2 = 0$ или $(x - x')^2 = 0$

Отсюда одна форма $x = x'$ и $y = -\frac{x'}{y'} + \frac{z^2}{y'} = \frac{z^2 - x'^2}{y'}$ или $y = \frac{y'^2}{y'} = y'$. Получилась одна общая точка. Это пересек доказано.

Задача Провести касательную к кругу из данной точки.

Решение Это центр круга находится в каких координатах. Имеем ур-е круга:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Пусть координаты данной точки будут (h, k) Рассмотрим эту касательная проведена из координаты неизвестной точки касания означим через (x', y') Нам нужно будет найти эти координаты. Ур-е касательной линии в данной точке.

допускает вид: $x'x' + y'y' = z^2$

Для данной по условию заданной окружности найдем точку (h, k) и координаты h и k должны удовлетворять этому уравнению. Подставив найдем

$$x'h + y'k = z^2 \text{ или } hx' + ky' = z^2$$

Из этого уравнения 2 неизвестных x' и y' . Надо найти еще одно уравнение с теми же неизвестными. Для этого заметим, что точка (x', y') лежит на окружности, а по условию имеет $x'^2 + y'^2 = z^2$. Остается для определения x' и y' решить эти два уравнения относительно x' и y' . Из 1-го имеем

$$y' = \frac{z^2 - hx'}{k}$$

Подставив во второе получим:

$$x'^2 + \frac{z^2 - 2z^2x'h + h^2x'^2}{k^2} = z^2$$

или упростив знаменатель

$$k^2x'^2 + z^4 - 2z^2x'h + h^2x'^2 = k^2z^2 \text{ откуда после упро-$$

щений

$$x' = \frac{z^2h \pm (\sqrt{h^2 + k^2 - z^2})zk}{h^2 + k^2}$$

Ордината y' находится по формуле

$$y' = \frac{z^2 - hx'}{k} = -\frac{h}{k}x' + \frac{z^2}{k}$$

Полученные найденные нами для x' могут оказаться отрицательными. Это будет тогда, когда $k^2 + h^2 < z^2$. Вспомогательное какое геометрическое значение соответствует этому случаю? Рассмотрим точку из которой проводится касательная до начала координат

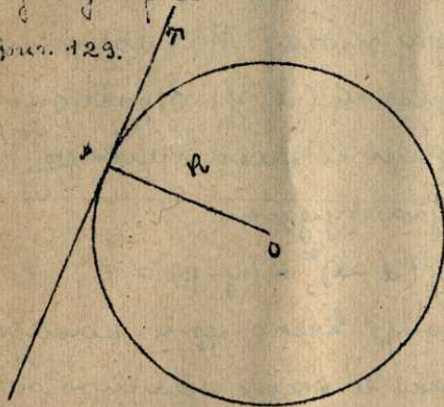
т. е. радиус вектора точки касания. Обозначим его через δ . Извѣстно, что $\delta^2 = h^2 + k^2$

Следовательно x , будет минималъ тогда, когда $h^2 + k^2 < r^2$; т. е. когда $\delta^2 < r^2$ или $\delta < r$, т. е. когда данная точка находится внутри круга. Если же $h^2 + k^2 = r^2$ тогда будетъ одно только решение и одна касательная; это потому что въ этомъ случаѣ $\delta^2 = r^2$ или $\delta = r$ и точка находится на окружности; через такую точку можно провести только одну касательную

Нормальная линия къ кругу

Нормальной линіей къ какой либо кривой называется прямая проходящая черезъ точку прикосновенія и перпендикулярная къ касательной. Составимъ ур-іе

рис. 129.



нормальной линіи къ кругу. Ур-іе этой линіи какъ прямой проходящей черезъ данную точку будетъ

$$y - y' = m'(x - x')$$

т. е. m' есть неизвестный пока

т. е. m' — тангенс угла наклона прямой

къ оси x' — m ; по условию перпендикулярности этой прямой къ касательной имѣемъ $m m' + 1 = 0$ отсюда

$$m' = -\frac{1}{m}, \text{ но } m = -\frac{x'}{y'}, \text{ следовательно } m' = -\frac{y'}{x'}$$

и ур-іе нормальной линіи будетъ:

анал. рис.

Лекція 26

$$y - y' = \frac{y'}{x'} (x - x')$$

умножая его $x'y - x'y' = y'x - x'y'$ получим

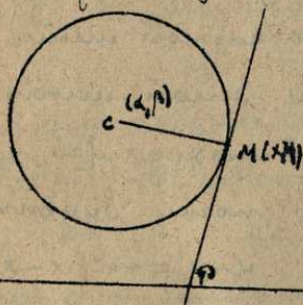
$$y = \frac{y'}{x'} x$$

Это и есть ур-е касательной. Из этого ур-я видно, что касательная имеет как одну точку касания с кругом, так и радиус, следовательно она есть радиус круга. Мы доказали тем же образом, что касательная имеет перпендикулярно к радиусу проведенному в точку касания.

Задача Составить ур-е касательной к кругу, который центр не находится в начале координат.

Решение. Примем за ось координат (т. 130) на

фиг. 130



кругу точку М; координаты которой (x, y) . Проведем радиус и касательную. Ур-е круга будет

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Проведем ур-е касательной получим рассматривая ее как прямую перпендикулярную к радиусу проведенному в точку касания. Уравнение радиуса CM как прямой проходящей через две точки будет $y - \beta = \frac{y - \beta}{x - \alpha} (x - \alpha)$ тогда уравнение этой прямой к оси x будет

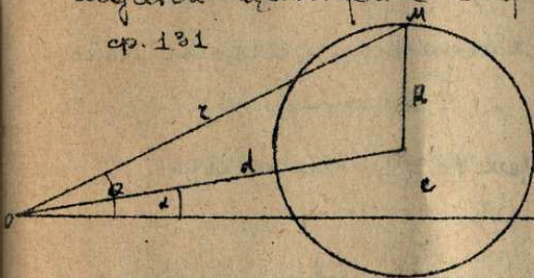
$$m' = \frac{y' - p}{x' - a}$$

Ур-е касательной к кривой прямой проходящей через данную точку будет $y - y' = m(x - x')$
но по условию перпендикулярности имеем
 $mm' + 1 = 0$, откуда $m = -\frac{1}{m'} = -\frac{x' - a}{y' - p}$ и ур-е касательной будет $y - y' = -\frac{x' - a}{y' - p}(x - x')$

Полярное ур-е круга

Составим полярное ур-е круга. Пусть O (рис. 131) полюс Ox полярная ось. Соединим C с O и пусть $OC = d$ $\angle COx = \alpha$ Эти две величины определяют положение центра C Севернее того дам радиус круга R . Воз-

сп. 131



мем на круг произвольную точку M . Ее полярные координаты будут $OM = r$ и

$\angle MOx = \theta$. Соединим M с C

Из т-ра CMC имеем

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2dr \cos(\theta - \alpha)$$

Это и есть полярное ур-е круга

Особый случай. По-

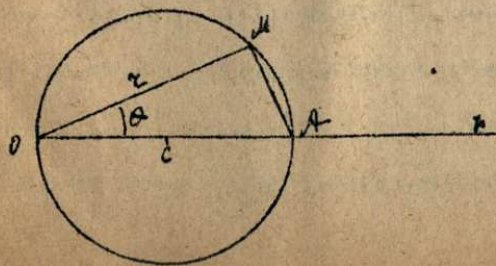
люс на окружности ди-

аметр взять за полярную

ось. В этом случае $d = R$

$\alpha = 0$ и уравнение примет

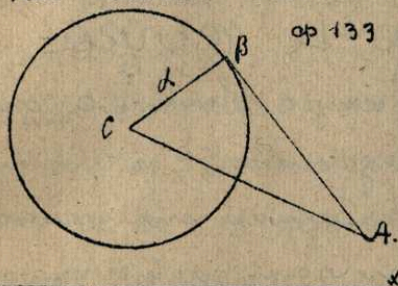
сп. 132



или $R^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta$ или $z^2 = 2zR \cos \theta$ т. е. $z = 2R \cos \theta$
 Это ур-е можно получить и прямо из эрмита $\Delta^{\text{ка}}$
 вом (фр. 132)

Радиальная ось двух кругов

Когда дано ур-е круга, то весьма легко определить
 длины касательных, проведенных к кругу из
 внешней точки способом только перемести квадрат



радиуса в первую часть
 и вставить в ур-е круга
 вместо текущих координат
 координаты внешней
 точки, тогда первая часть

ур-е будет представлять квадрат длины иско-
 мой касательной.

Из подобия из эрмита (133) имеем:

$$AB^2 = AC^2 - R^2$$

Если назовем координаты точки A через (x, y)
 а координаты центра C через (α, β) , то:

$$AC^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 \text{ следовательно}$$

$$AB^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - R^2 \dots \dots \dots (1)$$

Это и требовалось доказать. Пользуясь формулой (1)
 очень просто можно определить много точек, со-
 лежащих на той же окружности, или касательных, про-
 веденных из нее по двум данным кругам равным

между собой. Пусть ур-ие кругов будут

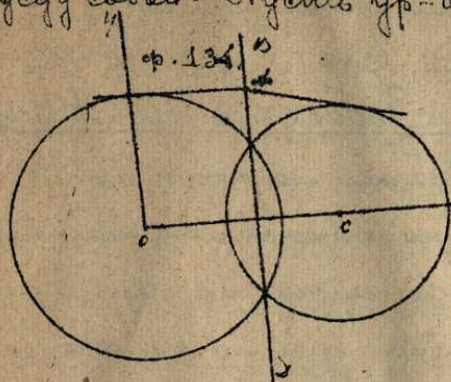
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0 \text{ и}$$

$$(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 - R_1^2 = 0$$

На основании теоремы

ур-ие искомого локанта будет:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = (x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 - R_1^2$$



Это будет некоторая прямая и до квадраты координат сокращаются. Для частного случая когда ось y' -ая проходит через центр O , а ось x' -ая через центр O_1 (р. 134) то тогда $\alpha = \beta = \beta_1 = 0$

Получим $x^2 + y^2 - R^2 = x^2 - 2\alpha x_1 + \alpha_1^2 + y^2 - R_1^2$, $x = \frac{R^2 + \alpha_1^2 - R_1^2}{2\alpha_1}$

Это и есть прямая DB перпендикулярная к OO_1 представляющая в случае пересечения кругов хорду их пересечения. Эта прямая называется радиальной осью двух кругов.

Теорема Радиальные оси трех кругов пересекаются в одной точке.

Напишем (р. 135) две сокращения, ур-ие трех данных кругов в виде:

$$C=0; C_1=0 \text{ и } C_2=0$$

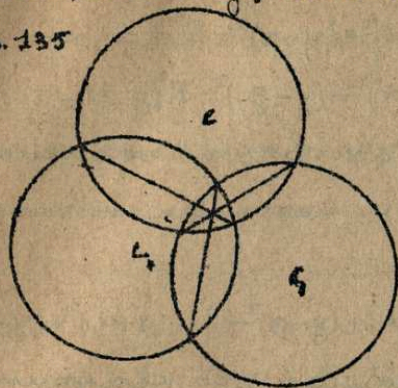
ур-ие их радиальных осей

$$C_1 - C = 0; C_2 - C_1 = 0 \text{ и } C - C_2 = 0$$

Эти три прямые или пересекутся в одной

тоже, потому, что имеем следующее:

фр. 135



$$(C_1 - C) + (C_2 - C) + (C - C_2) = 0$$

Задачи на круге

Задачи на круг могут быть предложены или на построение круга по данным условиям или на изложение теории круга или на определение

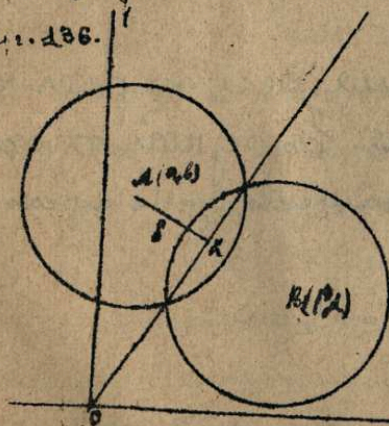
координатного места, представляющего круг:

Задача 1 Определить длину общей хорды двух кругов, выражаемых уравнениями

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{и} \quad (x-b)^2 + (y-a)^2 = r^2 ?$$

Из данных уравнений следует, что радиусы кругов одинаковы, а координаты центров имеют обратный порядок. Составим прямую уравнения радиальной оси:

фр. 136.



оси:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - (x-b)^2 - (y-a)^2 = 0$$

$$\text{или } 2x(b-a) + 2y(a-b) = 0 \text{ или}$$

$$x-y=0 \dots (1) \text{ Отсюда следует, что радиальная ось про}$$

ходит через центры обеих

координат. Далее опреде-

лим длину перпендикуляра d , опущенного из центра

круга (1) на прямую (1) Для этого (г. 136) приводим

ур-е прямой из нормированной сферы, если его на $\sqrt{1+b^2}$ и подставим $x=a$; $y=b$, получим:

$$\sin \delta = \pm \frac{a-b}{\sqrt{2}} \text{ или } \delta^2 = \frac{(a-b)^2}{2}$$

Називая исконую коорду через d , найдем

$$\frac{d}{2} = \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{2}}; \text{ откуда } d = \sqrt{4c^2 - 2(a-b)^2}$$

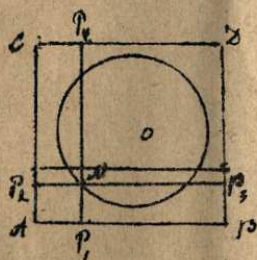
Задача 2 Внутри данного квадрата движется точка таким образом, что сумма квадратов ее расстояний от четырех сторон квадрата сохраняется постоянной величиной. Найти кривую описываемую точкой?

Решение (пер 137) $AB=a$. Пусть точка M обладает тем свойством, что сумма квадратов ее расстояний от сторон квадрата равна — постоянной величине, т.е.

$$MP_1^2 + MP_2^2 + MP_3^2 + MP_4^2 = m^2$$

где m^2 — постоянная величина. Примем начало

пер 137



координат в точку A это за ось x — AB , за ось y — AD . Координаты точки $M(x, y)$ координаты $MP_1 = y$, $MP_2 = x$, $MP_3 = a - x$ и $MP_4 = a - y$. Подставим эти вели-

чины в предыдущее уравнение:

$$y^2 + x^2 + (a-x)^2 + (a-y)^2 = m^2$$

Это и есть искомое ур-ие мнота. Раскрыв скобки получим:

$$2x^2 + 2y^2 + 2a^2 - 2ax - 2ay - m^2 = 0$$

или

$$x^2 + y^2 - ax - ay + a^2 - \frac{m^2}{2} = 0$$

Из этого ур-ия видно, что геометрическое место будет круг. Если его сравним с общим уравнением круга:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

или раскрыв скобки

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

то будем иметь $2\alpha = a$ и $2\beta = a$ откуда

$\alpha = \frac{a}{2}$ и $\beta = \frac{a}{2}$. Следовательно центр его находится в центре квадрата.



КОНЕЦ
I
ЧАСТИ