

P1.2007

НА ДОМ
НЕ ВЫДАЕТСЯ

Тук В
Начальная
алгебра.
часть I
Москва
1869г

P. 1.2007.

Г. 469

НАЧАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Д. Гика.



12007 ✓

Провер. 1935

ПРОВЕРЕНО

Часть I.

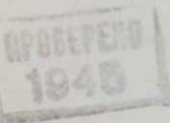
алгебраическія количества и дѣйствія надъ ними.

1869.

МОСКВА.

Въ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФИИ (Катковъ и К^о),
на Страстномъ бульварѣ.

1869.



Цѣль Алгебры состоитъ въ опредѣленіи общихъ способовъ находить неизвѣстное по извѣстному и это составляетъ теорію уравненій. Для рѣшенія общихъ вопросовъ должно умѣть представлять величины въ общемъ видѣ, въ видѣ количествъ алгебраическихъ и научиться производить надъ послѣдними всѣ ариѳметическія дѣйствія. Въ силу этого предлагаемый курсъ Алгебры раздѣляется на двѣ части: первая заключаетъ ученіе объ общихъ (алгебраическихъ) количествахъ и дѣйствіяхъ надъ ними, вторая — ученіе объ уравненіяхъ.

Общность есть первое достоинство всякаго мышленія и поэтому Алгебра, какъ наука доводящая методы мышленія до полнаго обобщенія, играетъ важнѣйшую роль въ умственномъ развитіи юношества. Но общность есть всегда результатъ отвлеченности, вслѣдствіе чего ученіе объ алгебраическихъ количествахъ представляется развитіемъ ряда послѣдовательныхъ отвлеченій, цѣль которыхъ есть достиженіе полнаго обобщенія въ разсужденіяхъ и выводахъ. Такой взглядъ былъ причиною изложенія ученія о количествахъ какъ теоріи обобщеній ариѳметическихъ понятій и повлекъ за собою развитіе въ первой части настоящей книги слѣдующихъ пяти основныхъ отвлеченій:

1. Отвлечение отъ числа единицъ мѣры, неразрывно связаннаго съ ариѳметическимъ представленіемъ величины. Осуществленіе этого отвлечения достигается замѣною чиселъ алгебраическими количествами, число единицъ которыхъ произвольно, и служить къ обобщенію вопросовъ съ ихъ рѣшеніями, такъ что въ одномъ общемъ вопросѣ заключается множество ему подобныхъ.

2. Отвлечение отъ ариѳметическаго понятія о сложеніи, разумѣя въ Алгебрѣ подъ словомъ сложить не только сложить но и вычесть, введеніемъ чиселъ и количествъ отрицательныхъ; вслѣдствіе этого отвлечения два разные вопроса съ ихъ рѣшеніями заключаются въ одномъ общемъ.

3. Отвлечение отъ ариѳметическаго понятія объ умноженіи, давая этому дѣйствію въ Алгебрѣ болѣе общее опредѣленіе, по которому возможны множители, а слѣдовательно и дѣлители отрицательные. Этимъ отвлеченіемъ достигается возможность производить дѣйствія надъ количествами во всѣхъ случаяхъ, при существованіи втораго отвлечения, по которому буквенный множитель есть на столько же положительный на сколько и отрицательный.

4. Отвлечение отъ ариѳметическаго понятія о степени, введеніемъ показателей дробныхъ, отрицательныхъ и ирраціональных.

5. Отвлечение отъ необходимости чтобы подъ кореннымъ знакомъ четной степени было положительное количество, введеніемъ мнимыхъ выраженій.

Вслѣдствіе двухъ послѣднихъ отвлеченій алгебраическая формула достигаетъ полной общности и получаетъ смыслъ при всякомъ значеніи буквъ въ нее входящихъ.

Въ гимназическихъ курсахъ Алгебры обыкновенно принято знакомить при самомъ началѣ учащихся съ указанными отвлеченіями, условнымъ введеніемъ отрицательныхъ чиселъ, дробныхъ, отрицательныхъ и ирраціональных показателей и проч. и излагать ученіе о количествахъ, дѣйствіяхъ надъ ними и уравненіяхъ вмѣстѣ, перемѣшивая эти предметы между собою и говоря о первыхъ по мѣрѣ встрѣчающейся необходимости при рѣшеніи уравненій.

Такой системой дѣлается уступка стремленію узнать результаты науки въ кратчайшее время и съ наименьшимъ трудомъ, стремленію извлечь практическую пользу, въ ущербъ теоретическимъ взглядамъ и умственному развитію учащагося.

Соображенія и опытъ показали мнѣ что при такой системѣ въ умѣ учащагося рождаются шаткія, хотя и достаточныя для пракческаго примѣненія, представленія объ отвлеченіяхъ, вслѣдствіе неполноты этихъ теорій и нѣтъ возможности усвоить ихъ вдругъ начинающему съ достаточной ясностью и понять пользу обобщеній, ими производимыхъ; знанія дѣлаются механическими, безотчетными.

Отъ разбросанности частей мысль не можетъ услѣдить причины принятаго распредѣленія предметовъ; строй логической послѣдовательности теряется и неумолимая строгость науки, которую можно справедливо назвать истинной логикой, слабѣетъ.

Сказанное обусловливаетъ собою потребность въ первыхъ отсутствія въ изложеніи понятій неопредѣленныхъ,

нарушающихъ полноту теорій (напр. понятіе объ отрицательномъ количествѣ, условномъ прини́маніи его меньшимъ нуля и пр.); вовторыхъ разграниченія теорій между собою, достигаемаго отдѣльнымъ изложеніемъ каждаго предмета, и въ третьихъ теоретическаго порядка въ изложеніи, которымъ послѣдовательность предметовъ должна дѣлаться слѣдствіемъ необходимости.

Желаніе удовлетворить этимъ условіямъ въ связи съ общимъ взглядомъ на ученіе объ алгебраическихъ количествахъ, какъ на теорію обобщенія арифметическихъ понятій, было причиною изданія этого курса и опредѣлило методъ принятаго въ немъ изложенія.

ОГЛАВЛЕНИЕ 1-й ЧАСТИ.

	<i>Стран.</i>
ВВЕДЕНИЕ. Опреѣленіе величины, числа, измѣренія и единицы мѣры.....	1
Отвлеченіе отъ рода и числа единицъ мѣры; обобщеніе производимое этимъ отвлеченіемъ.....	2
Зависимыя и независимыя между собою величины. Предметъ Алгебры и ея раздѣленіе.....	6
Истины лежащія въ основаніи ученія о величинахъ....	9
Упражненія на первое алгебраическое отвлеченіе....	10
ГЛАВА I. Объ алгебраическомъ языкѣ. Означеніе чиселъ буквами; знаки дѣйствій; знаки сравненія; скобки...	12
Формулы и вычисленіе числового значенія ихъ.....	20
Упражненія на употребленіе алгебраическаго языка....	22
ГЛАВА II. Алгебраическія количества и члены ихъ; классификація количествъ.....	26
Измѣреніе членовъ; количества однородныя; высшіе и низшіе члены.....	28
Члены подобные, приведеніе ихъ.....	29
Упражненія на алгебраическія количества и приведеніе подобныхъ членовъ.....	30
ГЛАВА III. Цѣлыя, раціональныя количества и дѣйствія надъ ними. Сложеніе и вычитаніе мономовъ и полиномовъ.	32
Упражненія на сложеніе и вычитаніе.....	36
Умноженіе мономовъ.....	—
Упражненія на умноженіе мономовъ.....	39
Умноженіе полиномовъ, (Аналогія ариѳметическаго и алгебраическаго умноженія).....	—
Упражненія на умноженіе полиномовъ.....	46
Возведеніе въ степень; степень произведенія и степени; квадратъ бинома и полинома; кубъ бинома; произведеніе суммы двухъ членовъ на разность ихъ.....	48

	<i>Стран.</i>
Упражненія на возведеніе въ степень.....	54
Дѣленіе мономовъ; случаи невозможности его. Нулевой показатель; цѣль его употребленія....	55
Упражненія на дѣленіе мономовъ.....	57
Дѣленіе полиномовъ, располагая члены ихъ по нисходя- щимъ и восходящимъ степенямъ главной буквы. Случаи невозможности дѣйствія. Случай коэффициентовъ полиномовъ. (Аналогія алгебраическаго и ариѳметиче- скаго дѣленія).....	58
Упражненія на дѣленіе полиномовъ.....	72
Извлеченіе корня; корень произведенія и степени. Квад- ратный корень полинома. Случаи невозможности из- влеченія корня	73
Упражненія на извлеченіе корней.....	80
Дѣлимость количествъ; дѣлимость степеней и двучленовъ. Способы непосредственнаго составленія частныхъ нѣ- которыхъ дѣленій. (Общіе признаки дѣлимости чиселъ).	80
Упражненія на дѣлимость количествъ.....	94
Разложеніе количествъ на производителей.....	95
Упражненія на разложеніе на производителей.....	98
Теорія общаго большаго дѣлителя количествъ.....	99
Упражненія на нахожденіе общаго большаго дѣлителя..	111
ГЛАВА IV. Дробныя, раціональныя количества и дѣйствія надъ ними. Алгебраическія дроби и происхожденіе ихъ; увеличеніе и уменьшеніе дробей; сокращеніе; приведеніе къ общему знаменателю.....	113
Сложеніе и вычитаніе дробей; умноженіе; возведеніе въ степень; дѣленіе; извлеченіе корня и исключеніе цѣ- лаго количества изъ дроби.....	121
Дѣйствія надъ дробными количествами и распро- страненіе правилъ дѣйствій надъ цѣлыми количествами на количества дробныя.....	127
Упражненія на дробныя, раціональныя количества	131
ГЛАВА V. Цѣлыя и дробныя ирраціональныя количества и дѣйствія надъ ними. Коренныя количества и проис- хожденіе ихъ, числа и количества несоизмѣримыя. Количества ирраціональныя. Приближенія и ихъ пре- дѣлы. Сокращеніе коренныхъ количествъ и приведе- ніе ихъ къ общему коренному показателю.....	135

Сложеніе и вычитаніе коренныхъ количествъ; умноженіе ихъ; возведеніе въ степень; дѣленіе и извлеченіе корня.	144
Дѣйствія надъ ирраціональными количествами и распространеніе правилъ дѣйствій надъ раціональными количествами на количества ирраціональныя.	147
Преобразованіе ирраціональныхъ дробей	151
Упражненія на ирраціональныя количества	161
ГЛАВА VI. Отрицательныя алгебраическія количества и дѣйствія надъ ними. Нуль какъ начало счета; (абсолютный и условный; опредѣленный и неопредѣленный). Общее понятіе о нулѣ количества	
Слагаемыя и вычитаемыя числа и количества; вычитаніе большаго количества изъ меньшаго; возможность всякаго вычитаемого количества и всякой разности при общемъ понятіи о нулѣ	165
Слагаемыя и вычитаемыя величины. Частные случаи когда вычитаемыя количества имѣютъ смыслъ ограниченный или вовсе теряютъ его. Условно отрицательныя величины	171
Обобщеніе понятія о сложеніи, положительныя и отрицательныя числа и количества. Положительныя и отрицательныя величины	180
Дѣйствія надъ отрицательными числами и количествами; сложеніе и вычитаніе ихъ. Сравненіе отрицательныхъ чиселъ и количествъ съ положительными и между собою. Умноженіе	185
Обобщеніе понятія объ умноженіи; множители отрицательные; общее опредѣленіе умноженія; измѣненіе произведенія, въ зависимости отъ производителей. Возведеніе въ степень; дѣленіе; измѣненіе частнаго; извлеченіе корня	191
Цѣль и польза двухъ послѣднихъ обобщеній; примѣръ обобщенія теоремъ и ихъ доказательствъ	201
Упражненія на отрицательныя количества	205
ГЛАВА VII. Обобщеніе понятія о степени. Дробные показатели степени и корня	
Распространеніе правилъ дѣйствій съ показателями цѣлыми на дробные показатели	212
Отрицательные показатели степени и корня	217

Распространеніе правилъ дѣйствій съ положительными показателями на показатели отрицательные.....	222
Ирраціональные показатели степени и корня.....	227
Распространеніе правилъ дѣйствій съ раціональными показателями на показатели ирраціональные.....	228
Употребленіе дробныхъ и отрицательныхъ показателей при дѣйствіяхъ надъ полиномами.....	231
Упражненія на обобщеніе показателей.....	233
ГЛАВА VIII. Обобщеніе понятія о корнѣ четной степени.	
Мнимыя количества. Основанія условныхъ правилъ дѣйствій надъ ними.....	237
Сложеніе и вычитаніе мнимыхъ количествъ; умноженіе ихъ; возведеніе въ степень; дѣленіе и извлеченіе корня..	240
Общій видъ мнимаго корня дѣйствительнаго количества. Общій видъ всякаго количества.....	246
Упражненія на мнимыя количества.....	248
Отвѣты и рѣшенія задачъ.....	250

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. Математика есть наука о величинахъ. *Величиною* называется все, что можетъ быть больше или меньше (что можетъ увеличиваться и уменьшаться). Напр. длина комнаты — есть величина, потому что она можетъ быть больше или меньше. Вѣсъ, время, пространство, сила и проч. суть тоже величины, по сказанной причинѣ.

§ 2. Величины называются *однородными*, если одна изъ нихъ можетъ быть принята за часть другой. Напр. цѣна куска золота и цѣна книги — однородны; вѣсъ куска золота и вѣсъ книги — также однородны и пр. Но вѣсъ золота и цѣна книги суть разнородныя величины, потому что цѣна книги не можетъ быть частью вѣса золота и обратно.

§ 3. Чтобы получить ясное понятіе о величинѣ (представить ее себѣ), нужно сравнить ее съ однородной ей извѣстной величиной и узнать, изъ сколькихъ извѣстныхъ величинъ, или изъ сколькихъ частей извѣстной величины состоитъ неизвѣстная.

Самое понятіе о величинѣ (точное представленіе о ней) называется *числомъ*. Сравненіе неизвѣстной величины съ извѣстной того же рода называется *измѣреніемъ*.

Извѣстная же величина, употребляемая для полученія понятія о неизвѣстной того же рода, называется *единицею мѣры*. Напр. для полученія понятія о длинѣ комнаты, нужно сравнить ее съ аршиномъ (пзмѣрить длину); полагая, что аршинъ уложился пять разъ въ раз-

сматриваемой длинѣ, получимъ понятіе о ней. Длина комнаты есть данная величина; сравненіе ея съ аршиномъ — измѣреніе; аршинъ — единица мѣры; пять аршинъ — число.

Между величинами существуютъ такія, о коихъ нельзя составить точнаго понятія по той причинѣ, что нѣтъ способа ихъ измѣренія, т. е. нельзя представлять эти величины числами. Напр. храбрость, умъ, память, радость, суть величины; ибо онѣ могутъ быть болѣе и мѣнѣе; можно сказать, одинъ человекъ храбрѣе, умнѣе другаго; память или радость одного болѣе, чѣмъ другаго; но нельзя сказать, человекъ въ 2, $2\frac{1}{2}$ раза храбрѣе, умнѣе другаго, или во сколько разъ память и радость болѣе, ибо это величины, которыхъ нельзя измѣрить и по сему нельзя найти числа ихъ представляющія.

§ 4. Чтобы имѣть понятіе о величинѣ, нужно, чтобы она была измѣрена единицею, которая намъ вполнѣ извѣстна. Въ самомъ дѣлѣ не достаточно знать, что такая-то величина равна 5, надобно прибавить названіе единицъ, напр. 5 аршинамъ. Число, сопровождаемое названіемъ единицъ, называется *именованнымъ числомъ*; 12 фунтовъ, $1\frac{3}{4}$ копейки, 6, 35 рублей и проч. суть именованные числа. Если же при числѣ нѣтъ наименованія единицъ, то оно называется *отвлеченнымъ числомъ*; потому что мы отвлекаемся въ немъ отъ единицы мѣры (не обращаемъ на нее вниманія). Итакъ, какъ въ именованномъ, такъ и въ отвлеченномъ числѣ, — показано число единицъ, изъ котораго оно состоитъ. Но родъ единицъ и ихъ названіе означено только въ именованномъ числѣ, въ отвлеченномъ же предполагается единица мѣры всякаго рода. Напр. 5 аршинъ и 5: въ каждомъ изъ этихъ чиселъ показано, сколько заключается единицъ; но въ числѣ 5 не показано, какихъ единицъ; по сему можно полагать, что единица мѣры есть аршинъ, сажень, фунтъ, пудъ и проч. Въ Арифметикѣ, какъ извѣстно, рассматриваются числа именованные и отвлеченныя отъ единицы мѣры.

§ 5. Точно такъ, какъ полагають въ числѣ отвлеченномъ въ Ариѳметикѣ единицу мѣры произвольной (отвлекаются отъ единицы мѣры), можно отвлекаться и отъ числа этихъ единицъ, принимая не только единицу мѣры, но и число этихъ единицъ произвольнымъ и означая число уже не цифрами, а словами, напр., число данное, число, показывающее отношеніе искомага къ данному, число искомое; или, для краткости, какими либо условными значками. Такія числа, отвлеченныя отъ числа единицъ, употребляются въ Алгебрѣ, какъ увидимъ въ нижеслѣдующихъ примѣрахъ 1 и 2, помѣщенныхъ для уясненія, какого рода вопросы рѣшаются въ Алгебрѣ и какую цѣль имѣетъ употребленіе чиселъ отвлеченныхъ отъ числа единицъ.

Отвлекаясь отъ числа единицъ, можно при этомъ не отвлекаться отъ рода ихъ; какъ напр. числа: искомое число пудовъ, данное число аршинъ и проч.; число единицъ неизвѣстно, родъ же ихъ опредѣленъ — пуды, аршины и проч. Или можно отвлекаться и отъ рода и отъ числа единицъ напр. говоря: искомое число, данное число и проч.

Ясно, что число, отвлеченное отъ единицы мѣры, есть болѣе общее именованнаго, т. е. что именованное можетъ въ частномъ случаѣ заключаться въ отвлеченномъ того же числа единицъ; напр. число 5 можетъ означать и 5 аршинъ и 5 пудовъ и проч., и въ случаѣ, если единица есть аршинъ, число 5 сдѣлается именованнымъ—5 аршинъ. Все, что относится къ числу 5, относится и къ числу 5 аршинъ, потому что оно заключается въ 5. Въ Ариѳметикѣ все, что относится къ отвлеченнымъ числамъ, прилагается и къ именованнымъ. Ученіе объ именованныхъ числахъ есть частный случай ученія объ отвлеченныхъ; первое заключается въ послѣднемъ. Такимъ же образомъ число, отвлеченное отъ единицы мѣры и отъ числа единицъ, можетъ быть всякимъ отвлеченнымъ отъ единицы мѣры и всякимъ именованнымъ числомъ. Свойства и зависимость этихъ чиселъ принадлежать всѣмъ числамъ вообще. Числа, въ Алгебрѣ употребляемые, суть числа общаго вида и слѣдовательно Ариѳметика есть частный видъ Алгебры, она заключается въ послѣдней.

§ 6. Примѣръ 1. Раздѣлить 265 рублей между тремя лицами такъ, чтобы второе получило 15 рублями болѣе перваго, а третье 25 руб. болѣе втораго.

Рѣшеніе. Еслибы извѣстна была часть одного, напр. перваго, то остальные части легко найти; часть втораго найдется, когда къ части перваго придадимъ 15 руб.; часть третьяго получится, придавая къ части втораго 25 руб. или къ части перваго 40 рублей.

Слѣдовательно 265 руб. состоитъ изъ три раза взятой части перваго, увеличенной 15 руб. и 40 руб., или 265 руб. состоитъ изъ тройной части перваго и 55 руб. Поэтому тройная часть перваго должна равняться 265 руб. безъ 55 руб. или 210 рублямъ. Часть же перваго равняется трети 210 руб. или 70 руб.

Такъ какъ первый имѣетъ 70 руб., то второй будетъ имѣть 70 сложенное съ 15, или 85 руб., третій 85 сложенное съ 25, или 110 руб. — Эти три суммы вмѣстѣ составляютъ 265 руб., что доказываетъ вѣрность рѣшенія.

Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ данныя числа 265 руб., 15 руб. и 25 руб. суть именованныя; въ нихъ показаны единицы мѣры — рубли. Но очевидно, не будь 265, 15 и 25 рублями, а пудами, аршинами и т. д. вообще, будь единица мѣры произвольная (какаянибудь), искомыя числа: 70, 85 и 110 остались бы неизмѣнными, только единица мѣры была бы въ нихъ произвольная. Задача обратилась бы въ слѣдующую, отвлеченную отъ единицы мѣры:

Раздѣлить число 265 на три части такъ, чтобы вторая была болѣе первой 15 единицами, а третья болѣе второй — 25 единицами.

Послѣдняя задача есть болѣе общая первой, потому что она рѣшаетъ вопросъ для произвольной единицы мѣры, слѣдовательно и для единицъ мѣры 1-й задачи. Посему 1-я задача заключается въ послѣдней и есть частный случай ея.

Еслибы въ разсмотрѣнной задачѣ данныя числа были другія; то и результатъ былъ бы другой, т. е. искомыя числа измѣнились бы. Но способъ разсужденій, кото-

рымъ доходимъ до результата, остался бы тотъ же. Дѣйствительно, полагая число единицъ въ каждомъ изъ данныхъ чиселъ произвольнымъ, какимъ нибудь, примѣръ 1-й приметъ слѣдующій видъ, отвлеченный отъ рода и числа единицъ:

Раздѣлить данное число на три части такъ, чтобы часть вторая была болѣе первой извѣстнымъ числомъ единицъ, а часть третья была бы болѣе второй другимъ даннымъ числомъ единицъ. Ясно, что результатъ рѣшенія не можетъ быть найденъ, потому что онъ зависитъ отъ числа единицъ, въ данныхъ числахъ заключающихся; но способъ рѣшенія найдется разсужденіями подобными произведеннымъ въ первомъ случаѣ.

Рѣшеніе. Если бы число единицъ въ первомъ изъ искомымъ чиселъ было извѣстно, то вторая и третья часть легко найдется: вторая получится чрезъ придачу къ первой части числа единицъ, которымъ она болѣе первой, третья получится чрезъ придачу ко второй части числа единицъ, которымъ она болѣе второй или чрезъ придачу къ первой числа единицъ, которымъ вторая часть болѣе первой и третья болѣе второй вмѣстѣ.

Слѣдовательно, данное число состоитъ изъ три раза взятой части первой, увеличенной два раза взятымъ избыткомъ второй части надъ первой и разъ взятымъ избыткомъ третьей части надъ второй.

Отнявъ два раза взятый избытокъ второй части надъ первой и избытокъ третьей части надъ второй, получимъ тройное первое число. Раздѣляя его на 3, найдемъ первое. Тогда второе и третье найдется по сказанному. Изъ этихъ разсужденій выводимъ способъ рѣшенія задачи. Отъ даннаго числа нужно отнять двойной избытокъ второй части надъ первой и избытокъ третьей надъ второй; раздѣливъ полученное число на 3, получимъ первое изъ искомымъ чиселъ; придавая къ нему

избытокъ втораго надъ первымъ, получимъ второе иско-
мое число; придавая къ послѣднему избытокъ третьяго
надъ вторымъ, получимъ третье.

Такимъ образомъ способъ рѣшенія предложенной и
всякой ей подобной задачи найденъ, хотя самый резуль-
татъ неизвѣстенъ.

Эта задача есть общій видъ двухъ первыхъ, потому что рѣ-
шаетъ вопросъ для всякой единицы мѣры и для всякаго числа
единицъ данныхъ чиселъ, слѣдовательно и для числа единицъ
данныхъ чиселъ въ двухъ первыхъ задачахъ.

§ 7. Примѣръ 2. Дана сумма двухъ неизвѣстныхъ
чиселъ и разность ихъ; опредѣлить способъ нахожде-
нія неизвѣстныхъ.

Рѣшеніе. Данная сумма заключаетъ въ себѣ большее
и меньшее изъ искомыхъ чиселъ. Но большее равно
меньшему, увеличенному данной разностью, слѣдова-
тельно данная сумма состоитъ изъ двойнаго меньшаго
числа, увеличеннаго данной разностью; отнявъ отъ сум-
мы разность, получимъ двойное меньшее; раздѣливъ
пополамъ, найдемъ меньшее.

Придавъ къ суммѣ разность, получимъ двойное боль-
шее; раздѣливъ пополамъ, найдемъ большее.

Слѣдовательно способъ опредѣленія двухъ чиселъ по
суммѣ и разности ихъ такой: для полученія большаго
должно къ суммѣ придать разность и раздѣлить попо-
ламъ; для полученія меньшаго — отъ суммы отнять раз-
ность и раздѣлить пополамъ.

По этому способу рѣшимъ задачу: сумма двухъ чиселъ
равна 243; разность ихъ 13; найти неизвѣстныя числа?
Меньшее равно 100; большее 113.

§ 8. Величины называются *зависимыми между собою*,
если съ измѣненіемъ одной изъ нихъ, другія тоже из-
мѣняются. Напр. мѣсто, занимаемое домомъ, есть вели-
чина зависящая отъ высоты и длины его. Длина же дома
есть независимая величина отъ высоты его.

Въ примѣрѣ § 6, искомыя части 265 р. суть величины зависимыя отъ данныхъ 265 р., 15 р. и 25 р.; ибо съ измѣненіемъ данныхъ чиселъ, искомыя тоже измѣняются.

Въ примѣрѣ § 7, искомыя зависимы отъ данной суммы и данной разности, по той же причинѣ.

§ 9. Главный предметъ Алгебры состоитъ въ томъ, чтобы находить общіе способы опредѣленія по даннымъ числамъ (извѣстнымъ) другія искомыя (неизвѣстныя), зависящія отъ первыхъ, при чемъ въ задачѣ должно быть сказано, какимъ образомъ неизвѣстныя зависятъ отъ извѣстныхъ. Такъ въ примѣрѣ § 6 сказано, что сумма трехъ искомыхъ чиселъ должна равняться 265 руб. и указано, на сколько второе болѣе перваго и третье болѣе втораго. Въ примѣрѣ § 7 сказано, что сумма искомыхъ чиселъ равна данному числу и разность ихъ предполагается извѣстною.

§ 10. Чтобы находить способы опредѣленія неизвѣстныхъ по извѣстнымъ, отъ которыхъ онѣ зависятъ, казалось бы, нѣтъ надобности отвлекаться отъ числа единицъ, способъ рѣшенія примѣровъ § 6 и 7 могъ бы быть найденъ разсужденіями надъ числами, не отвлеченными отъ числа единицъ (ариѳметическими). Но результаты разсужденій будутъ числа, не показывающія дѣйствій, которыми они найдены, и не сохраняютъ въ себѣ чиселъ данныхъ, отъ коихъ они зависятъ. Если же самыя дѣйствія не производить надъ данными числами, а указывать знаками; то въ большей части вопросовъ результаты будутъ очень сложны, разсужденія утомительны и наконецъ, чтобы знать способъ опредѣленія неизвѣстныхъ задачи, должно помнить всѣ цифры, входящія въ результатъ, что невозможно.

Эти-то затрудненія и заставили употреблять числа, отвлеченныя отъ числа единицъ, числа алгебраическія.

§ 11. При опредѣленіи способовъ рѣшенія вопросовъ, подобныхъ указаннымъ въ § 6 и § 7, гдѣ употребляютъ алгебраическія числа, мысль теряется въ многословіи, посему въ Алгебрѣ, для простоты, слова, означающія числа, дѣйствія надъ ними и ихъ зависимость, замѣняютъ условными знаками и буквами, что составляетъ особый алгебраическій языкъ, доставляющій большую простоту разсужденіямъ.

Въ первой части этой книги изложено ученіе объ алгебраическихъ знакахъ или алгебраическомъ языкѣ, количествахъ, знаками изображенныхъ, или алгебраическихъ количествахъ и дѣйствіяхъ надъ ними. — Во второй части, составляющей главный предметъ Алгебры, изложено ученіе о способахъ рѣшенія алгебраическихъ вопросовъ, или ученіе объ уравненіяхъ.

Первая часть есть общая Ариѳметика, вторая же собственно Алгебра.

Алгебра, служащая основаніемъ всѣхъ нашихъ знаній, получила начало по всему вѣроятію у Индѣйцевъ и Грековъ, отъ которыхъ Арабы заимствовали потомъ свои знанія. — Древнѣйшіе памятники суть слѣдующіе: у Грековъ неопредѣленный анализъ александрійскаго ученаго Діофанта, жившаго въ IV вѣкѣ послѣ Р. Х., дошедшій до насъ отъ Арабовъ, которые переводили греческихъ писателей на свой языкъ.

У Индѣйцевъ два знаменитые памятника Алгебры, дошедшіе до насъ тоже въ арабскихъ переводахъ, сдѣланныхъ въ IX вѣкѣ, и изданные въ Лондонѣ Колебромъ, Тайлоромъ и Страемъ въ 1813 и 1817 годахъ: Algebra сочиненіе Brahme-gupta и Bija Ganita сочиненіе Bhascara Acharya, послѣдняго сочиненія есть персидскій переводъ XVII вѣка. Brahme-gupta жилъ въ VII вѣкѣ нашей эры и упоминаетъ о своемъ предшественникѣ Aryabhata, которому приписываютъ рѣшеніе уравненія съ двумя неизвѣстными въ цѣлыхъ числахъ; Діофантъ рѣшилъ это уравненіе только для нѣкоторыхъ случаевъ, индѣйскіе математики знали общій способъ рѣшенія.

Эти два сочиненія заключаютъ въ себѣ между прочимъ рѣшеніе квадратнаго уравненія съ одной неизвѣстной и нѣкоторыхъ уравненій высшихъ степеней, приводимыхъ къ квадратнымъ, способъ по одному рѣшенію неопредѣленнаго уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными находить остальные (основанный на общемъ большемъ дѣлителѣ). Послѣдній во-

прось рѣшенъ былъ Эйлеромъ, послѣ чего въ индѣйскихъ источникахъ было найдено его рѣшеніе.

Отъ Арабовъ, заимствовавшихъ цифры и десятичную систему счета вмѣстѣ съ Алгеброй у Индѣйцевъ и потомъ переведшихъ греческихъ писателей, замѣчательно дошедшее до насъ въ подлинникѣ и спискахъ сочиненіе по Алгебрѣ Mahammed-ben-Musa, изданное на арабскомъ и англійскомъ языкахъ въ 1831 г. Розеномъ въ Лондонѣ. Сочиненіе это писано въ царствованіе Халифа Al-Mamun въ IX вѣкѣ, заключаетъ въ себѣ рѣшеніе уравненій первой и второй степени и нѣсколько задачъ исключенія неизвѣстныхъ.

Въ Европу Алгебра была введена только въ началѣ XIII столѣтія, сначала въ Италію, пизанскимъ купцомъ Леонардомъ Фибонати (Leonard filius Bonacio) который въ 1202 году написалъ сочиненіе Abbasus, найденное въ манускриптахъ XIV вѣка во Флоренціи. Это сочиненіе показываетъ, что Фибонати заимствовалъ большую часть въ немъ изложеннаго изъ индѣйскихъ и арабскихъ источниковъ, собранныхъ имъ во время путешествій; оно изложено въ 15 главахъ, изъ коихъ первыя 14 заключаютъ Ариметику, по новой для того времени въ Европѣ индѣйской системѣ счисленія, теперь употребляемой, и Геометрію; послѣдняя же глава (публикованная въ первый разъ вполнѣ въ 1835 году Libri) раздѣляется на три части: въ первой — пропорціи, во второй нѣкоторые геометрическіе вопросы и въ третьей собственно Алгебра т. е. рѣшеніе уравненій первой и второй степени и рѣшеніе нѣкоторыхъ уравненій высшихъ степеней, приводимыхъ къ квадратнымъ; послѣднее заимствовано Фибонати отъ индѣйскихъ писателей.

Изъ Италіи алгебраическія знанія распространились по всей Европѣ.

Слово Алгебра есть арабское, происхожденіе его объясняется различно. Такъ нѣкоторые полагаютъ, что оно происходитъ отъ арабскаго слова *gebera*, которое значитъ — связать, соединить (Hist. des Mathem. par Montucla томъ I стр. 382); другіе переводятъ слово Алгебра словомъ возстановленіе, чѣмъ указывается на переходъ количества, которое было отрицательнымъ и дѣлается положительнымъ, будучи перенесено или возстановлено въ другой части уравненія (Hist. des Sciences Mathem. en Italie Libri томъ II стр. 80). Производятъ также слово Алгебра отъ слова альджебрату, что значитъ воссоединеніе раздѣльныхъ частей (уравненіе) (Исторія среднихъ вѣковъ Вебера). У Арабовъ Алгебра называлась тоже *Almucabalah*, что значитъ сравненіе; это названіе встрѣчается и у Фибонати.

§ 12. Истины бываютъ двухъ родовъ: однѣ очевидныя сами по себѣ, другія дѣлающіяся очевидными только послѣ разсужденій, основанныхъ на первыхъ истинахъ.

Истины, очевидныя сами по себѣ, не допускающія сомнѣнія въ своей справедливости, называются *аксіомами*.

Истины, дѣлающіяся очевидными послѣ разсужденій, основанныхъ на аксіомахъ, называются *теоремами*.

Разсужденія же, производимыя для обнаруженія справедливости теоремъ, суть *доказательства* ихъ.

Главнѣйшія аксіомы, на которыхъ основаны доказательства теоремъ, относящихся къ величинамъ, суть слѣдующія:

1. Величина равна самой себѣ.
2. Двѣ величины, равныя порознь одной и той же третьей, равны между собою.
3. Цѣлое болѣе своей части.
4. Величина равна всѣмъ частямъ своимъ, вмѣстѣ взятымъ.
5. Если къ равнымъ величинамъ придадимъ по равной или отнимемъ отъ нихъ равныя, то получимъ тоже равныя величины.
6. Если равныя величины повторимъ равное число разъ или возьмемъ равныя доли ихъ, то получимъ равныя величины.

Проблемою или *задачею* называется вопросъ, отвѣтъ на который основанъ на доказанныхъ теоремахъ; этотъ отвѣтъ есть рѣшеніе проблемы или задачи.

Упражненія.

1. Найти способъ дѣленія числа на двѣ части такъ, чтобы одна часть была болѣе другой даннымъ числомъ единицъ.
2. Найти способъ дѣленія числа на три части, изъ коихъ вторая часть была бы болѣе первой даннымъ числомъ единицъ, а третья была бы равна второй.
3. Найти способъ дѣленія числа на двѣ части, изъ коихъ одна была бы въ-пятеро болѣе другой.

4. По данной суммѣ искомага числа съ пятой долею его, какимъ способомъ найти число?

5. Года старшаго брата извѣстны и если бы ему было тремя годами болѣе, то онъ былъ бы вдвое старѣе младшаго. — Какъ найти года младшаго?

6. Какъ найти дѣлимое, по частному, дѣлителю и остатку?

7. Какъ найти дѣлителя, по дѣлимому частному и остатку?

8. Если сумма рублей въ двухъ кошелькахъ, увеличенная избыткомъ числа рублей одного изъ нихъ надъ другимъ, извѣстна; какъ узнать сколько рублей въ томъ, въ которомъ больше?

9. Одинъ человекъ имѣетъ данное число рублей долга; взявъ извѣстное число рублей для уплаты части долга, на дорогѣ встрѣтилъ пріятеля, которому отдалъ изъ этой части извѣстное число рублей, остальное внесъ въ счетъ долга. — Спрашивается, какъ найти способъ опредѣленія оставшагося послѣ сего долга?

10. Если извѣстна цѣна фунта каждаго изъ трехъ сортовъ чаю, число фунтовъ двухъ сортовъ и цѣна всего чаю; какимъ способомъ найти, сколько фунтовъ третьяго сорта.

ГЛАВА I.

Объ алгебраическомъ языкѣ.

§ 1. Въ Алгебрѣ, для сокращенія рѣчи, вмѣсто словъ, выражающихъ числа, напр. данное число, число, которымъ искомое должно увеличить, искомое число, данная сумма, данная разность и проч. употребляютъ *буквы французской или латинской азбуки*.

Для означенія извѣстныхъ чиселъ — *первыя буквы: a, b, c, d....* и проч., для искомыхъ (неизвѣстныхъ) — *последнія: x, y, z*.

Каждая буква можетъ содержать произвольное число единицъ, только въ томъ же вопросѣ разныя числа $\neq$ 30 бражаются разными буквами.

Если числа имѣютъ что либо общее между собою, отличное отъ другихъ чиселъ, употребляемыхъ въ томъ же вопросѣ; то, чтобы помнить это общее свойство, означаютъ ихъ тою же буквою съ значками, поставленными подъ буквами, напр. $a_1, a_2, a_3, \dots$, или такимъ образомъ: a', a'', a''' и т. д.

Иногда употребляютъ и буквы греческой азбуки α, β, γ и проч. для означенія чиселъ.

Начало употребленія буквъ, служащихъ для выраженія собою чиселъ, обыкновенно приписываютъ французскому математику XVI столѣтія Viète (Viète жилъ отъ 1540 до 1603 г.) Этотъ математикъ употреблялъ прописныя буквы.

Но уже въ древности есть слѣды обозначенія чиселъ буквами, такъ Аристотель (въ IV столѣтїи до Р. Х.) въ своей Физикѣ означаетъ силу, массу, и проч. буквами α, β, γ .

Фибонати въ своемъ Abbasus XIII. ст. для означенія чиселъ неизвѣстныхъ, а также и тѣхъ, коимъ не хочетъ давать опре-

дѣленнаго числоваго значенія, употребляетъ частію линіи и слова, частію-же буквы, надъ коими и производитъ дѣйствія, какъ это теперь дѣлается.

Паціоли (Pacioli), италіянскій математикъ, прежде Bieta означалъ иногда числа буквами въ сочиненіи *Divina proportione*. 1509 года.

§ 2. Слова, означающія дѣйствія, которыя должно про-
извести надъ числами, замѣняются тоже знаками, назы-
ваемыми *знаками дѣйствій*.

Слово *сложить* означаютъ знакомъ $+$, поставленнымъ
между складываемыми числами и произносятся — *плюсъ*;
такимъ образомъ $31 + 7 + 2$ показываетъ, что нужно
взять сумму чиселъ 31, 7 и 2.

Слово *вычесть* означается знакомъ $-$, произносимымъ
минусъ. Напр. $31 - 12$ значитъ, что нужно вычесть изъ
31 число 12.

Слово *умножить* означаютъ знакомъ $\times$, поставлен-
нымъ между перемножаемыми числами, или точкою, про-
износя *умноженное*. Напр. $2 \times 5 \times 3$ означаетъ, что 2
умножено на 5 и все умножено на 3 или такимъ обра-
зомъ 2. 5. 3.

Слово *дѣлить* замѣняютъ двумя точками, между дѣли-
мымъ и дѣлителемъ поставленными, или подписываютъ
дѣлителя подъ дѣлимымъ, проводятъ между ними чер-
ту и произносятся — *дѣленное*. Напр. $\frac{8}{5}$ или $8 : 5$ озна-
чаетъ 8 дѣленное на 5.

Слова *плюсъ* и *минусъ* суть латинскія и значатъ больше и
меньше. Знаки $(+)$ и $(-)$ впервые были употребляемы для озна-
ченія дѣйствій сложенія и вычитанія знаменитымъ италіян-
скимъ математикомъ и художникомъ Leonard de Vinci, жив-
шимъ въ XVI столѣтіи.

§ 3. Когда число, означенное буквою, должно быть
умножено на нѣкоторое данное число, то ставятъ это число
передъ буквою безъ всякаго знака. Напр. $\frac{3}{4}a$ означаетъ,

что число, буквою a означенное, должно быть помножено на $\frac{3}{4}$.

Число, на которое буква должна быть помножена, называется *коэффициентомъ* или *предстоящимъ*, ибо оно ставится передъ буквою.

Название коэффициентъ происходитъ отъ латинскаго слова *conficere*, что значить составлять, собирать.

§ 4. Если два числа, означенныя буквами, должны быть перемножены между собою, то ставятъ ихъ рядомъ безъ знака между ними. Напр. ab — означаетъ, что число a помножено на число b .

§ 5. Если какая либо буква должна быть помножена сама на себя нѣсколько разъ, то произведеніе означаютъ, ставя по правую сторону буквы, надъ нею число, показывающее сколько разъ она взята множителемъ. Этотъ указатель называется *показателемъ* или *экспонентомъ*, а самое произведеніе *степенью*. Напр. вмѣсто $aaaa$ — пишутъ a^4 ; число 4 есть показатель, онъ показываетъ четвертую степень a . Вторая и третья степень называются *квадратомъ* и *кубомъ*. Такъ квадратъ a есть a^2 ; кубъ a есть a^3 .

Если буква не имѣетъ показателя, ее нужно разсматривать какъ имѣющую показателемъ единицу; потому что буква взята множителемъ одинъ разъ. Напр. a все равно что a^1 .

Показатель единица не пишется надъ буквою, а только подразумевается.

Вмѣсто того чтобъ сказать, число a взято производителемъ два, три, четыре раза, говорятъ a квадратъ, a четвертой и проч.

Это обозначеніе введено въ употребленіе французскимъ математикомъ XVI вѣка Декартомъ.

Древніе Греки составляли степени чрезъ перемноженіе, такъ шестая степень названа у Діофанта кубомъ куба. Индѣйцы и

Арабы составляли степени одну изъ другой возведеніемъ въ степень, какъ это и теперь дѣлается, такъ въ Bramegupta und Bhascara Algebra шестая степень названа квадратомъ куба. У Китайцевъ вторая степень названа Fang (квадратъ), третья Ping-fang (квадратъ, въ коемъ множится два раза), четвертая степень названа квадратомъ, въ коемъ множится три раза и проч.

Названіе экспонентъ происходитъ отъ латинскаго слова expro — что значить выставять на показъ.

§ 6. *Корнемъ* изъ даннаго числа называется число, которое нѣсколько разъ само на себя умноженное, даетъ данное.

Корень квадратный числа есть число, которое разъ само на себя умноженное даетъ данное. Напр. квадратный корень 9 есть 3, ибо 3×3 равно 9.

Корень кубическій есть число, которое два раза само на себя умноженное, даетъ число данное. Напр. кубическій корень 27 есть 3, ибо $3 \times 3 \times 3$ равно 27, 9 умноженное на 3 равно 27 и т. д.

Дѣйствіе, употребляемое для отыскиванія корня, называется *извлеченіемъ корня*.

Вмѣсто того, чтобы сказать, найти число, которое само на себя умноженное одинъ, два, три раза даетъ число a ; говорятъ: извлечь корень квадратный, кубическій, четвертой степени изъ числа a и означаютъ это требо-

ваніе такимъ образомъ послѣдовательно: $\sqrt[2]{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[4]{a}$,

гдѣ знакъ $\sqrt{\quad}$ называется *кореннымъ знакомъ* или *радикаломъ*; числа 2, 3, 4 и т. д. надъ этимъ знакомъ поставленныя и показывающія, сколько разъ искомое число должно быть взято производителемъ, для полученія даннаго числа, называются *показателями корня*.

Для простоты показатель корня 2 не пишется, а только подразумѣвается.

Знакъ $\sqrt{\quad}$ есть искаженное изображеніе буквы r — первой латинскаго слова radix (корень). Во многихъ сочиненіяхъ XVI столѣтія корень означали просто этою буквою.

Слово радикаль происходитъ отъ radix.

§ 7. Для означенія словъ: болѣе, менѣе, равно, часто встрѣчаемыхъ, употребляютъ слѣдующія знаки, называемыя *знаками сравненія*.

Слово *равно*, означаютъ знакомъ $=$, называемымъ *знакомъ равенства*. Напр. $5 + 3 - 4 = 4$ означаетъ, что 5 сложенное съ 3 безъ 4 равно 4.

Слова *болѣе*, *менѣе* — означаютъ знакомъ $>$, отверстіе коего обращено къ большей изъ величинъ, называемымъ *знакомъ неравенства*. Напр. $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ поставлено вмѣсто $\frac{3}{4}$ болѣе $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3} < \frac{5}{7}$ вмѣсто словъ $\frac{1}{3}$ менѣе $\frac{5}{7}$.

Вмѣсто слова *не болѣе*, употребляютъ знакъ $\nlessgtr$, *не менѣе* — знакъ $\lessgtr$. Напр. x не болѣе 5 изображаютъ такимъ образомъ: $x \nlessgtr 5$, число a не менѣе числа b такимъ образомъ: $a \lessgtr b$.

§ 8. Слова, означающія, что дѣйствіе должно быть произведено надъ суммою или разностью, замѣняютъ *скобками*, въ которыя сумму или разность заключаютъ. Напр. вмѣсто того чтобы сказать, сумма a и b помножена на c , пишутъ $(a + b)c$ и произносятъ: сумма a плюсъ b помножена на c .

Вмѣсто того чтобы сказать, изъ d вычтена сумма квадрата a и куба b , пишутъ $d - (a^2 + b^3)$ и произносятъ: d минусъ сумма a квадратъ плюсъ b кубъ.

Выраженіе $a - (b + a^2c - d)$ означаетъ, что изъ a должно вычесть $b + a^2c - d$.

Выраженіе $(a + b^2 - c)(b + d) - e$ показываетъ, что нужно изъ произведенія $a + b^2 - c$ и $b + d$ вычесть e .

При дѣленіи скобки употребляются только въ случаѣ, если дѣленіе означается двумя точками, поставленными между дѣлимымъ и дѣлителемъ. Напр. $(3a^2 - c) : (e - f)$ или $(a - bc) : d$.

Если же частное изображается въ видѣ дроби, т. е.

когда дѣленіе означается чертою, между дѣлимымъ и дѣлителемъ поставленной, то скобокъ не употребляютъ, ибо черта замѣняетъ ихъ. Напр. $\frac{3a^2 - c}{e - f}$, $\frac{a + bc}{d}$.

Черта ставится только подъ тѣми буквами, которыя должны дѣлиться на выраженіе подъ чертою. Напр. выраженіе $\frac{a + bc}{d}$ означаетъ, что a , сложенное съ произведеніемъ b на c , должно быть дѣлено на d .

Выраженіе $a + \frac{bc}{d}$ означаетъ, что a должно быть сложено съ частнымъ отъ дѣленія произведенія bc на d .

При извлеченіи корня, вмѣсто скобокъ употребляютъ черту, проводимую надъ всѣмъ выраженіемъ, изъ котораго корень извлекается. Напр.

$$\sqrt[3]{a^2 + bc + ed}; \sqrt[5]{a + b - c}.$$

При возведеніи въ степень произведенія или степени, ихъ тоже заключаютъ въ скобки. Такъ abc и a^2 въ пятой степени означаютъ такъ: $(abc)^5$ и $(a^2)^5$ и производятъ: произведеніе a , b и c въ пятой степени, квадратъ a въ пятой степени.

Буквенныя выраженія, заключенныя въ скобки, могутъ быть изображены безъ скобокъ, и это дѣйствіе называется освобожденіемъ ихъ отъ скобокъ, *раскрытіемъ скобокъ*.

Смотря по роду дѣйствій, освобожденіе отъ скобокъ различно, посему объ этомъ предметѣ будетъ сказано при изложеніи дѣйствій, производимыхъ надъ буквенными выраженіями, въ главѣ III.

Употребленіе скобокъ получило начало въ срединѣ XVI столѣтія.

§ 9. Буквами и знаками замѣняются слова, и такимъ образомъ составляется особый алгебраическій языкъ,

отличающийся краткостью и тѣмъ сообщающій простоту разсужденіямъ, которыми находятъ способы рѣшенія алгебраическихъ вопросовъ. Для примѣра выразимъ и найдемъ способъ рѣшенія задачъ § 6 и § 7 (введенія) на алгебраическомъ языкѣ.

Нѣкоторые слѣды употребленія алгебраическаго языка уже встрѣчаются у древнихъ, какъ это было замѣчено въ § 1-мъ; но только въ сочиненіяхъ XVI столѣтія алгебраическія обозначенія окончательно вводятся, хотя не въ томъ видѣ, какъ это теперь дѣлается. Для примѣра приведемъ формулы, выраженные знаками первыхъ временъ введенія алгебраическаго языка.

Примѣры начала XVI столѣтія:

$$\frac{1}{8} \text{ се} . \text{се} . e \frac{1}{2} \text{ си} . e \frac{1}{4} . \text{се} . m 5 . \text{со};$$

въ этомъ выраженіи *се* есть сокращенное слово *senso* (квадратъ неизвѣстнаго); *e* — замѣняетъ знакъ +; *си* — сокращенное *sibo* (кубъ неизвѣстнаго); *m* замѣняетъ знакъ —; *со* — сокращенное *cosa* (первая степень неизвѣстнаго).

Указанная формула на нашемъ языкѣ есть

$$\frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2 - 5x.$$

Точно также формула

$3 . R . 85 . m . \frac{1}{2} . \text{си} . \text{си} .$ есть $3\sqrt{85} - \frac{1}{2} x^6$, ибо знакъ *R* есть нашъ $\sqrt{\quad}$.

Примѣры середины XVI столѣтія. Въ нихъ встрѣчаемъ употребленіе показателей и скобокъ; такъ выраженіе:

$2^2 m 20^1 p 22$ есть $2x^2 - 20x + 22$, ибо знаки 2 и 1 суть показатели неизвѣстнаго, *m* и *p* — знаки — и +.

Выраженіе

$R . c . L R . q . 4352 p . 16 L m . R . c . L . R . q . 4352 . m . 16 L$

есть $\sqrt[3]{(\sqrt{4352} + 16)} - \sqrt[3]{(\sqrt{4352} - 16)}$, ибо знаки *c* и *q* суть показатели кореннаго знака *R* и означаютъ 3 и 2, знаки *L* и *L* замѣняютъ скобки.

§ 10. Раздѣлить данное число на три части такъ, чтобы часть вторая была болѣе первой извѣстнымъ числомъ единицъ, а часть третья была бы болѣе второй другимъ даннымъ числомъ единицъ.

Означимъ (по § 1) слово — данное число — буквою a ; число единицъ, на которое вторая часть болѣе первой — чрезъ b ; число единицъ, на которое третья болѣе второй — чрезъ c . Задача выразится такимъ образомъ: раздѣлить число a на три части такъ, чтобы часть вторая была болѣе первой числомъ b , а часть третья была бы болѣе второй числомъ c .

Рѣшеніе. Означимъ (§ 1) первую часть чрезъ x ,
 вторая будетъ » $x + b$,
 третья » » $x + b + c$,
 слѣдовательно сумма трехъ частей есть $3x + 2b + c$. Эта сумма должна равняться a , что по § 5 изображается такимъ образомъ:

$$3x + 2b + c = a,$$

откуда заключаемъ, что $3x$ равно a безъ $2b$ и безъ c (ибо $3x$ вмѣстѣ съ $2b$ и съ c равно a), что выразится такимъ образомъ:

$$3x = a - 2b - c,$$

а такъ какъ x есть треть $3x$, то

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}.$$

Это первая часть; вторая получится, придавая къ первой b ; третья — придавая ко второй c ; означая вторую часть чрезъ y , третью чрезъ z , получимъ:

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}; \quad y = \frac{a - 2b - c}{3} + b; \quad z = \frac{a - 2b - c}{3} + b + c.$$

Этотъ результатъ есть выраженіе на алгебраическомъ языкѣ способа рѣшенія задачи: чтобы найти первую часть, должно отнять отъ числа даннаго удвоенное число единицъ, на которое вторая превышаетъ первую, и число единицъ, на которое третья превышаетъ вторую, потомъ разность раздѣлить на 3; часть вторую получимъ, придавая къ первой число единицъ, на которое

вторая превышает первую; третью—придавая ко второй число единиц, на которое третья превышает вторую.

§ 11. Дана сумма двухъ неизвѣстныхъ чиселъ и разность ихъ, опредѣлить способъ нахождения неизвѣстныхъ.

Означимъ данную сумму чрезъ a , данную разность чрезъ b , тогда задача приметъ такой видъ:

Сумма двухъ чиселъ есть a , разность ихъ b ; какъ найти эти числа?

Рѣшеніе. Означая большее чрезъ y , меньшее чрезъ x , замѣтимъ, что a равно x и y , что выразится такимъ образомъ:

$$a = x + y;$$

но большее равно меньшему, увеличенному разностью, т. е. $y = x + b$; слѣдовательно $a = x + x + b$ или $a = 2x + b$, откуда $2x = a - b$; но x вдвое меньше $2x$, слѣдова-

тельно $x = \frac{a - b}{2}$; придавъ къ суммѣ разность, полу-

чимъ двойное большее, т. е. $a + b = 2y$; раздѣливъ пополамъ, найдемъ большее $y = \frac{a + b}{2}$. Найденный резуль-

татъ $x = \frac{a - b}{2}$; $y = \frac{a + b}{2}$ есть выраженіе на алге-

браическомъ языкѣ способа рѣшенія задачи: чтобы найти меньшее число, должно отъ суммы отнять разность и раздѣлить пополамъ; большее—къ суммѣ придать разность и раздѣлить пополамъ.

§ 12. Выраженія, подобныя найденнымъ въ §§ 10 и 11, показывающія дѣйствія, которыя должно произвести надъ данными количествами для полученія искомыхъ (т. е. выражающія на языкѣ алгебраическомъ способъ рѣшенія задачъ), называются *общими формулами* или общими рѣшеніями, хотя они и не суть рѣшенія, а только указываютъ способъ, которымъ рѣшеніе можетъ быть найде-

но, но получаютъ послѣднее названіе какъ окончательный результатъ разсужденій. Выраженія § 10:

$$x = \frac{a-2b-c}{2}; y = \frac{a-2b-c}{2} + b; z = \frac{a-2b-c}{2} + b + c$$

и § 11:

$$x = \frac{a-b}{2}; y = \frac{a+b}{2}$$

суть общія формулы, или общія рѣшенія.

§ 13. Чтобы общую формулу примѣнить къ рѣшенію задачи, должно вмѣсто буквъ, въ нее входящихъ, поставить цифры, буквамъ соотвѣтствующія, и произвести надъ ними знаками указанныя дѣйствія. Это называется *опредѣленіемъ числоваго значенія формулы*.

Изъ слѣдующихъ двухъ примѣровъ, уже разсмотрѣнныхъ во введеніи (§§ 6 и 7), видно, какъ числовое значеніе формулы опредѣляется.

1. Раздѣлить 265 руб. между тремя лицами такъ, чтобы второе получило 15 руб. болѣе перваго, а третье 25 руб. болѣе втораго.

Полагая въ общихъ формулахъ:

$$x = \frac{a-2b-c}{3}; y = \frac{a-2b-c}{3} + b; z = \frac{a-2b-c}{3} + b + c,$$

$a = 265$ руб., $b = 15$ руб., $c = 25$ руб. и вставляя вмѣсто буквъ цифры, получимъ:

$$x = \frac{265 - 2 \cdot 15 - 25}{3}; y = \frac{265 - 2 \cdot 15 - 25}{3} + 15;$$

$$z = \frac{265 - 2 \cdot 15 - 25}{3} + 15 + 25;$$

производя знаками указанныя дѣйствія, найдемъ:

$$x = 70; y = 85; z = 110.$$

2. Сумма двухъ чиселъ равна 243, разность ихъ 13; найти неизвѣстныя числа.

Полагая въ общихъ формулахъ:

$$x = \frac{a - b}{2}; \quad y = \frac{a + b}{2},$$

$a = 213$, $b = 13$ и вставляя вмѣсто буквъ цифры, получимъ:

$$x = \frac{213 - 13}{2}; \quad y = \frac{213 + 13}{2},$$

производя знаками указанныя дѣйствія, найдемъ:

$$x = 100; \quad y = 113.$$

У п р а ж н е н і я.

1. Выразить число, большее a числомъ b , и число, меньшее a числомъ b .

Какъ представится каждое изъ этихъ чиселъ, если b будетъ равно 6.

2. Выразить число, большее a въ b разъ, и число, меньшее a въ b разъ.

3. Сумма двухъ чиселъ равна a , одно изъ нихъ есть b ; какъ представится другое?

4. Разность двухъ чиселъ есть a , меньшее равно b ; какъ представится большее?

5. Разность двухъ чиселъ есть a , большее равно b ; какъ представится меньшее?

6. Длина стола равна a футамъ, ширина 7-ю футами менѣе; какъ выразить ширину стола?

7. Фунтъ чаю стоитъ a руб.; выразить цѣну 10 и m фунтовъ, цѣну 10-й доли и m -й доли фунта.

8. Если n -я доля цѣны одной книги есть 7 коп., другой p коп.; какъ выразить цѣну каждой книги и число копѣекъ, на которое цѣна 2-й больше цѣны первой?

9. Въ предыдущей задачѣ выразить во сколько разъ цѣна второй книги больше цѣны первой?

10. Если n есть цѣлое четное число; какъ выразить слѣдующее за n четное и нечетное и предшествующее ему?

11. Употребляя коэффициенты и показатели, представить въ болѣе простомъ видѣ выраженіе

$$aaabbbcc + aaabbbcc + aaabbbcc,$$

и выраженіе

$$a^5aab^2b + a^5aab^2b + a^5aab^2b + a^5aab^2b + a^5aab^2b + \dots,$$

гдѣ a^5aab^2b повторяется m разъ.

12. Выразить сумму и разность квадратовъ чиселъ a и b ; сумму и разность кубовъ a и единицы.

13. Выразить сумму и разность квадратныхъ корней чиселъ a и b и сумму и разность корней m -й степени.

14. Изъ пяти книгъ во второй въ a разъ больше строкъ, чѣмъ въ первой; въ третьей въ a разъ болѣе, чѣмъ во второй и т. д. до пятой, въ которой въ a разъ болѣе, чѣмъ въ четвертой. Какъ выразить число строкъ во всѣхъ пяти книгахъ, если въ первой x строкъ?

15. Число стеколъ въ каждомъ окнѣ равно числу оконъ въ комнатѣ. Какъ выразить число оконъ, если число стеколъ во всѣхъ окнахъ равно a ?

16. Выразить, что разность n -хъ степеней чиселъ a и b равна пятой доли суммы кубическихъ корней c и d .

17. Выразить, что частное дѣленія квадрата a на кубъ b не болѣе произведенія корня седьмой степени изъ d и половины c , увеличеннаго единицею, и не менѣе утроеннаго квадратнаго корня изъ произведенія h самаго на себя.

18. Выразить, что выраженіе $a + \frac{b}{c}$ возведено въ 17-ю и въ m -ю степени.

19. Какое различіе между выраженіями:

a) $a - b + c$ и $a - (b + c)$.

b) $\left(\frac{k}{e} + \frac{g}{h}\right)^2$ и $\frac{k}{e} + \left(\frac{g}{h}\right)^2$.

c) $(a + b + c)(a - d + f)$, $(a + b + c)a - d + f$ и $a + b + ca - d + f$.

d) между выражениями: $\frac{a^2b+c}{h}-l$; $\frac{a^2b+c-l}{h}$; $\frac{a^2b}{h}+c-l$;

e) между выражениями: $\sqrt[5]{a+b-c}$; $\sqrt[5]{a+b-c}$;

f) между выражениями: $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ и $\frac{\sqrt[m]{a}}{b}$.

20. Что означает выражение

$$[a+b]c - [d(k+l-f) - \sqrt{e}]^3.$$

21. Определить числовое значение выражений:

a) $\left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\frac{c}{d} - k\right)$, полагая

$$a=6; b=2; c=9; d=3; k=0,05.$$

b) $(a^2b - d^3ef) \frac{g}{h} - l$, полагая

$$a=3; b=2; d=1; e=8; f=\frac{1}{2}; g=13; h=26; l=3,5.$$

c) $\{x\sqrt{x^2-8y} + y\sqrt{x^2+8y}\}k^2$, полагая

$$x=5; y=3; k=2.$$

22. Выразить частное дѣленія разности корней пятой степени изъ количествъ p и q , увеличенной кубомъ суммы количествъ x и y , на сумму кубовъ x и y .

23. Выразить результатъ отъ умноженія произведенія a и суммы квадратовъ x , y , z , и на m -ю долю произведенія корня n -й степени изъ p и разности кубовъ количествъ $x-y$ и $x+y$.

24. Выразить частное дѣленія корня m -й степени изъ квадрата числа 721, въ которомъ цифры 7, 2, 1 означены буквами a , b , c , на разность квадратовъ x и y , умноженную на $a+b-\sqrt{3}$.

25. Выразить на алгебраическомъ языкѣ задачу первую введенія, полагая данное число равнымъ a , число единицъ, которымъ одна часть болѣе другой, равнымъ b ;

повторить рассужденія, произведенныя для рѣшенія ея, на буквахъ и найти формулы, выражающія рѣшеніе.

По полученнымъ формуламъ рѣшить ту же задачу, полагая $a = 312$; $b = 2$.

26. То же сдѣлать для задачи второй, полагая данное число равнымъ a ; число, которымъ вторая часть болѣе первой, равнымъ b .

Потомъ положить $a = 74$; $b = 5$.

27. То же для задачи третьей, полагая данное число равнымъ a . Потомъ $a = 120$.

28. Для задачи четвертой, полагая данную сумму равной a . Потомъ $a = 120$.

29. Для задачи пятой, полагая года старшаго брата равными a . Потомъ $a = 23$.

30. Для задачи шестой, полагая дѣлителя a , частное b , остатокъ v .

Потомъ $a = 5$; $b = 3$; $v = 2$.

31. Для задачи седьмой, полагая дѣлимое k , частное b , остатокъ v .

Потомъ $k = 17$; $b = 3$; $v = 2$.

32. Для задачи восьмой, полагая данную сумму числа руб. и избытка равною a .

Потомъ $a = 30$.

33. Для задачи девятой, полагая число руб. долгу равнымъ a ; взятое имъ число руб. для уплаты долга равнымъ b ; число рублей отданныхъ пріятелю c .

Потомъ $a = 75$; $b = 23$; $c = 7$.

34. Для задачи десятой, полагая цѣну фунта чаю перваго сорта a ; втораго — a_1 ; третьяго — a_2 ; число фунтовъ перваго сорта b ; втораго b_1 ; цѣну всего чаю k .

Потомъ $a = 3$; $a_1 = 2,5$; $a_2 = 4$; $b = 10$; $b_1 = 7$; $k = 55,5$ р.

ГЛАВА II.

Объ алгебраическомъ количествѣ и членахъ его.

§ 1. *Алгебраическимъ* или *буквеннымъ количествомъ* называется всякое буквенное выраженіе, въ коемъ буквы означаютъ числа, знаки — дѣйствія, которыя надъ числами должно произвести. Напр. $ab + c - d$ есть алгебраическое количество; оно означаетъ, что число, выраженное буквою a , помножено на число b , къ произведенію придано c и изъ суммы вычтено d .

Членами алгебраическаго количества называются части его, отдѣленные одна отъ другой знаками $+$ и $-$.

Напр. ab , c , d , суть члены алгебраическаго количества $ab + c - d$.

Члены называются *положительными*, если имѣютъ предъ собою знакъ $+$, и *отрицательными*, съ знакомъ $-$. Напр. c есть положительный членъ, d отрицательный.

Алгебраическое количество, состоящее изъ одного члена, называется *одночленомъ* или *мономомъ*. Напр.

$$3abc; \frac{2}{5}d^2c; \frac{a}{b}; a\sqrt{c}$$

суть одночлены или мономы.

Изъ двухъ членовъ — *двучленами* или *биномами*. Напр.

$$3abc - \frac{2}{3}a; \frac{a}{b} + d; a\sqrt{c} - d$$

суть биномы или двучлены.

Изъ трехъ членовъ — *тричленами* или *триномами*. Напр.

$$3a + 2b - d; \quad a\sqrt{b} + g - \frac{a}{b}$$

суть триномы или тричлены.

Алгебраическія количества, имѣющія болѣе трехъ членовъ, называются вообще *многочленами* или *полиномами*. Напр.

$$ab + c^2 + d^3 + g; \quad \sqrt{a} + \frac{a}{b} - d + f$$

суть многочлены или полиномы.

Греческія слова: *мономъ*, *биномъ*, *триномъ* и *полиномъ*, значать: *одночленъ*, *двучленъ*, *тричленъ* и *многочленъ*, послѣдовательно.

§ 2. Алгебраическія количества раздѣляются на *раціональныя* и *ирраціональныя*, *цѣлыя* и *дробныя*.

Количества называются *раціональными*, если не содержатъ кореннаго знака, и *ирраціональными*, если содержатъ его. Напр.

$$a + \frac{b}{c} - d^2 + abc$$

есть раціональное алгебраическое количество;

$$a\sqrt{e} + \frac{e}{d} - f$$

ирраціональное.

Количества называются *цѣлыми*, если не содержатъ знака дѣленія, и *дробными*, если содержатъ этотъ знакъ. Напр.

$$3a + b - cd^2$$

есть цѣлое раціональное алгебраическое количество;

$$a\sqrt{e} + c - d^3$$

цѣлое ирраціональное;

$$\frac{a}{b} + cd^2$$

дробное, раціональное;

$$\frac{a}{b} \sqrt{c} = \frac{d + f - \sqrt{g}}{l}$$

дробное ирраціональное.

Слова раціональный и ирраціональный суть латинскія и происходят отъ существительнаго *ratio* или прилагательнаго *rationalis*; первое означаетъ счетъ и разумъ, второе — счетный и разумный. — Эти названія вовсе несвойственны сказаннымъ количествамъ; логичнѣе было-бы назвать ихъ выразимыми и невыразимыми безъ кореннаго знака (какъ это дѣлали Греки).

§ 3. Сумма показателей всѣхъ буквъ, входящихъ въ одинъ членъ цѣлаго раціональнаго алгебраическаго количества, называется *измѣреніемъ* этого члена. Напр. членъ abc — третьяго измѣренія, потому что каждая изъ трехъ буквъ имѣетъ показателемъ единицу, которая подразумевается; a^5b — шестаго измѣренія; c^3b^{12} — двадцать перваго измѣренія.

Цѣлое раціональное алгебраическое количество называется *однороднымъ*, если всѣ члены его одного измѣренія. Напр. $a^5b + c^3d^3 - e^2f^4$ — однородно, ибо измѣреніе всѣхъ трехъ членовъ одинаково и равно 6.

Въ неоднородномъ цѣломъ раціональномъ алгебраическомъ количествѣ членъ, коего измѣреніе есть наибольшее, называется *членомъ высшаго измѣренія*; а тотъ коего измѣреніе наименьшее — *членомъ низшаго измѣренія*. Напр. въ выраженіи $a^5b^2 + c^3 - ef$; членъ a^5b^2 есть членъ высшаго измѣренія, ef — низшаго.

Членъ цѣлаго раціональнаго алгебраическаго количества, въ которомъ есть буква, входящая въ степени высшей, нежели въ остальные члены, называется *высшимъ членомъ* алгебраическаго количества относительно этой буквы. Членъ, въ коемъ буква входитъ въ степени низшей нежели въ остальные или не входитъ — *низшимъ* по этой буквѣ. — Напр. въ выраженіи $a^5b^2c + a^2bc^2 + a^3c^4$ членъ a^5b^2c есть высшій, членъ a^2bc^2 — низшій по буквѣ a ; членъ a^3c^4 — высшій, a^5b^2c — низшій по буквѣ b .

Можетъ случиться въ томъ же количествѣ нѣсколько членовъ высшаго измѣренія, высшихъ и низшихъ членовъ по той же буквѣ. Напр. въ выраженіи

$$a^5b^2 + a^5c^3 - a^3c^4d - ef + gh + ab^3 - ac^2$$

члены высшаго измѣренія: a^5c^3 ; a^3c^4d ;

— низшаго — ef ; gh ;

члены высшіе по буквѣ a : a^5b^2 ; a^5c^3 ;

— низшіе по той же буквѣ: ef ; gh .

§ 4. Члены называются *подобными*, если состоятъ изъ тѣхъ же буквъ съ одинаковыми показателями. Напр. въ триномѣ $a^2b^2c - 7a^2b^2c + cd$, члены a^2b^2c и $7a^2b^2c$ суть подобные.

Алгебраическое количество съ подобными членами можетъ быть всегда представлено въ болѣе простомъ видѣ. Напр. въ полиномѣ

$$5b + 11a - 3b + 8c + 2b - d - 10b$$

ставя подобные члены рядомъ, получимъ

$$11a + 5b + 2b - 3b - 10b + 8c - d.$$

Два члена $5b$ и $2b$ составляютъ $7b$; вмѣсто того чтобы вычитать $3b$ и $10b$, можно вычесть $13b$; когда къ $11a$ прибавимъ $7b$ и потомъ вычтемъ $13b$, результатъ будетъ тотъ же, какъ если бы отняли отъ $11a$ только $6b$. Слѣдовательно данный полиномъ приметъ видъ:

$$11a - 6b + 8c - d.$$

Произведенное дѣйствіе называется *приведеніемъ* подобныхъ членовъ; оно дѣлается по слѣдующему правилу:

Составляютъ сумму коэффициентовъ положительныхъ членовъ и сумму коэффициентовъ членовъ отрицательныхъ; вычитаютъ меньшую сумму изъ большей; ставятъ передъ разностью знакъ членовъ, давшихъ большую сумму, и возмъ этой разности справа помѣщаютъ буквенное выраженіе общее всѣмъ членамъ.

Членъ, не имѣющій коэффициента, должно разсматривать какъ съ коэффициентомъ единица; потому что, очевидно, а все равно что $1a$ и $a + a = 2a$, т. е. при a коэффициентъ единица подразумѣвается.

Членъ полинома, написанный первымъ, безъ знака, должно разсматривать, какъ имѣющій знакъ $+$, потому что онъ составляетъ часть складываемыхъ членовъ.

Когда послѣ приведенія придется первымъ членомъ поставить членъ отрицательный, то знакъ нельзя не поставить; а когда хотятъ произвести показанныя знаками дѣйствія, должно перемѣнить порядокъ членовъ и поставить первымъ одинъ изъ положительныхъ.

У п р а ж н е н і я.

1. Въ слѣдующихъ алгебраическихъ количествахъ указать цѣлыя и дробныя количества, раціональныя и ирраціональныя, мономы, биномы, триномы и полиномы; прочесть каждое изъ нихъ и объяснить смыслъ всѣхъ знаковъ.

a) $5a^2 + 2ab + c^3 - ef$;

b) $abc - \frac{e^2}{c^2} + 7f - \frac{a^{12}b^{14}}{k}$;

c) $\frac{abc - e^2}{l} + f + \sqrt{kv^2 - k^2l}$;

d) $efghkl - \frac{t^2}{l}$;

e) $\frac{a + x - y^2}{g^2} + \sqrt[5]{fv}$;

f) $\frac{k^2v^{13}\sqrt[3]{b}}{f}$;

g) $\sqrt{k+l} - \frac{hfdk}{l^{15}}$.

2. Въ слѣдующихъ цѣлыхъ раціональныхъ алгебраическихъ количествахъ найти однородныя и неоднород-

ныя, указать въ каждомъ изъ нихъ члены высшаго и низшаго измѣренія, высшіе и низшіе члены по какой-либо буквѣ.

a) $a^2b + ac^2 + a^3$;

b) $c^3f + c^8l - kl + c^7f^4$;

c) $a^{12}b - 7a^{11}b^{10} - klb$;

d) $e^2g^6 + k^2l^3p^3 - p^8$.

3. Сдѣлать приведеніе слѣдующихъ количествъ:

a) $3a^7 - 2b^3 + 6 + 2a^7 - 7b^3 - 3$.

b) $5b - 3a + 203c^3 + 5 - 2b - 8a + 67c^3 + 7$.

c) $17a^2 - 20b + 37b - 29a^2 + 15c - 17l - 15c$.

d) $\frac{1}{2}a^2b - \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}x - 3b + \frac{11}{4}x + \frac{2}{3}a^2b$.

e) $a^nb^m - 9a^m + 5a^nb^m + 6a^m + 10a^nb^m$.

f) $0,5a^2b^n + \frac{3}{4}a^2b^n - \frac{1}{7}c^3d^m + 0,007x - \frac{1}{3}x + \frac{12}{14}c^3d^m$.

ГЛАВА III.

О дѣйствіяхъ надъ цѣлыми рациональными алгебраическими количествами.

0 сложении и вычитании мономовъ и полиномовъ.

§ 1. Сложение и вычитание неподобныхъ мономовъ можетъ только быть означено знаками этихъ дѣйствій. Напр.

a^4b^2 сложивъ съ c^3d , получимъ

$$a^4b^2 + c^3d.$$

Сложивъ между собою мономы:

$5a^7b^2c$, $3a^4bh$, $7cde$, k^2l , получимъ

$$5a^7b^2c + 3a^4bh + 7cde + k^2l.$$

Изъ c^8d вычтя hl^5 , получимъ

$$c^8d - hl^5.$$

§ 2. Когда мономы подобны, то поставивъ между ними знакъ дѣйствія, дѣлаютъ приведеніе по правиламъ § 4 гл. II. Напр.

$5a^2b$ сложивъ съ $7a^2b$, получимъ

$$5a^2b + 7a^2b = 12a^2b.$$

Сложивъ мономы: $12x^5$, xy , $7x^4$, $10x^4$, получимъ

$$12x^5 + xy + 7x^4 + 10x^4 = 12x^5 + xy + 17x^4.$$

Изъ $25a^2bc$ вычтя $13a^2bc$, получимъ

$$25a^2bc - 13a^2bc = 12a^2bc.$$

§ 3. При сложении и вычитании полиномовъ должно поступать, какъ при сложении и вычитании мономовъ, т. е. только означить знаками требуемыя дѣйствія, съ

тѣмъ различіемъ, что придаваемый или отнимаемый полиномъ заключаютъ въ скобки для показанія, что должно придать весь полиномъ, а не одинъ членъ его. Напр.

$$3a^2 + cd - e^2 \text{ сложивъ съ } 7a^2 + f - k^5, \text{ получимъ}$$

$$3a^2 + cd - e^2 + [7a^2 + f - k^5].$$

Вычитая изъ перваго послѣдній, получимъ

$$3a^2 + cd - e^2 - [7a^2 + f - k^5].$$

Скобки показываютъ, что должно придать или отнять не только $7a^2$, но $7a^2 + f - k^5$.

Чтобы сложить нѣсколько полиномовъ между собою, должно къ одному придать другой, къ полученной суммѣ третій и т. д. Напр., сложивъ полиномы:

$$3a^2 + b; cde + f; 4k^2 + p - c, \text{ получимъ}$$

$$3a^2 + b + (cde + f) + (4k^2 + p - c).$$

При сложеніи или вычитаніи мономовъ съ полиномами, мономы не заключаютъ въ скобки, ибо въ этомъ нѣтъ надобности. Напр. вычитая изъ полинома $3a^2 - b + d$ мономъ $5cd$, получимъ

$$3a^2 - b + d - 5cd.$$

Вычитая изъ монома полиномъ, получимъ

$$5cd - (3a^2 - b + d).$$

§ 4. Произведя сложеніе полиномовъ по сказанному, т. е. только обозначивъ это дѣйствіе, должно придаваемый полиномъ освободить отъ скобокъ. Чтобы узнать какъ это сдѣлать, положимъ, что къ какому либо полиному, который означимъ для краткости одною буквою a , нужно придать полиномъ, имѣющій положительные и отрицательные члены, напр. $b - c + d$. Складывая, получимъ $a + (b - c + d)$; знакъ $+$ передъ скобками показываетъ, что должно къ a придать $b - c + d$. Если бы къ a должно было придать только b , то результатъ былъ бы $a + b$. Если же къ a должно придать b , умень-

шенное количествомъ c , то сумма $a + b$ будетъ велика на c , и ее нужно уменьшить на c , что даетъ $a + b - c$. Но такъ какъ должно къ a прибавить не $b - c$, а это количество, увеличенное на d , то сумму $a + b - c$ должно увеличить количествомъ d , что даетъ $a + b - c + d$. Вставляя вмѣсто a данный полиномъ и замѣчая, что тѣ же разсужденія можно повторить для какаго угодно числа членовъ придаваемого полинома, заключаемъ, что для освобожденія отъ скобокъ полинома, передъ которымъ стоитъ знакъ $+$, т. е. складываемаго, должно отбросить знакъ сложения и скобки, сохраняя знаки всѣхъ членовъ, стоящихъ въ скобкахъ, безъ перемѣны.

Такъ какъ сложение всегда сопровождается освобожденіемъ отъ скобокъ и потомъ приведеніемъ членовъ суммы, если оно возможно, то обыкновенно говорятъ, что *правило сложения полиномовъ есть слѣдующее: должно приписать одинъ полиномъ къ другому, оставляя знакъ каждаго члена безъ перемѣны, потомъ сдѣлать приведеніе, если оно возможно*. Напр.

1. $5a^2b^2c + 7cde - f$ сложивъ съ $12cde + f - 10a^2b^2c + k$, получимъ

$$5a^2b^2c + 7cde - f + 12cde + f - 10a^2b^2c + k,$$

или, послѣ приведенія, $19cde - 5a^2b^2c + k$.

2. Сложить полиномы:

$$32a^5b^{11} - 12c^2 + k^6; 13a^5b^{11} + 7k^6 + 12c^2; 25a^5b^{11} + 7.$$

Складывая и раскрывая скобки, получимъ

$$32a^5b^{11} - 12c^2 + k^6 + 13a^5b^{11} + 7k^6 + 12c^2 + 25a^5b^{11} + 7,$$

дѣлая приведеніе —

$$70a^5b^{11} + 8k^6 + 7.$$

§ 5. Чтобы узнать, какъ освобождать отъ скобокъ вычитаемый полиномъ, положимъ, что изъ какаго либо

полинома, который означимъ для краткости одною буквою a , нужно вычесть полиномъ, имѣющій положительныя и отрицательныя члены, напр. $b - c + d$. Вычитая, получимъ $a - (b - c + d)$; знакъ $-$ передъ скобками показываетъ, что должно отъ a отнять $b - c + d$. Если бы нужно было отнять отъ a цѣлое b , то результатъ былъ бы $a - b$. Если же вмѣсто b нужно отнять $b - c$, то разность $a - b$ будетъ мала на c ; поэтому должно прибавить къ ней c , что даетъ $a - b + c$. Но такъ какъ дано вычесть изъ a не $b - c$, а это количество, увеличенное на d , то должно отнять еще d , и тогда получимъ $a - b + c - d$. Число a означаетъ какой угодно полиномъ; и сколько бы ни было членовъ въ вычитаемомъ полиномѣ, подобными разсужденіями дойдемъ всегда до заключенія, что для освобожденія отъ скобокъ полинома, передъ которымъ стоитъ знакъ $-$, т. е. вычитаемого, должно отбросить знакъ вычитанія и скобки, измѣняя знаки всѣхъ членовъ, въ скобкахъ стоящихъ, въ обратные.

Вычитаніе всегда сопровождается раскрытіемъ скобокъ и потомъ приведеніемъ членовъ разности, если оно возможно; посему говорятъ, что *правило вычитанія полиномовъ есть слѣдующее: должно къ уменьшаемому полиному приписать вычитаемый, перемѣнивъ въ послѣднемъ знаки всѣхъ членовъ въ обратные и потомъ сдѣлать, если можно, приведеніе*. Примѣръ.

Изъ $12a^2b^2 - 5d^6c + 32k^{12}$ вычесть $2a^2b^2 + 17d^6c - l$; вычитая и раскрывая скобки, получимъ

$$12a^2b^2 - 5d^6c + 32k^{12} - 2a^2b^2 - 17d^6c + l,$$

дѣлая приведеніе —

$$10a^2b^2 - 22d^6c + 32k^{12} + l.$$

У п р а ж н е н і я .

Раскрыть скобки въ выраженіяхъ:

1. $(7a - 5c + 3b) + (2a - 3c - 7b)$.

2. $(3a - 2b + 6) - (2a - 7b - 3)$.

3. $(a^2b - 5 + x) + (a^2b + x - c) - (2a^2b - 4)$.

4. $(5a^mb + a^nb) - (a^mb + x - a^nb) + kl$.

5. Вычестъ $a - (b - (c - d))$ изъ $2a + 3b - (2c - d)$.

6. $\{ (a^3 - (cd + f) - g) - k \} - (a^3 - (2cd - g) + 5k)$.

Объ умноженіи мономовъ.

§ 6. Согласно съ сказаннымъ въ § 5 гл. I, если число, означенное буквою, должно быть помножено само на себя, то произведение означаютъ, ставя надъ буквою число, показывающее, сколько разъ буква повторяется производителемъ. Это число есть показатель, а произведение получаетъ названіе степени. Въ каждомъ производителѣ подразумѣвается показатель единица, слѣдовательно для нахождения показателя произведенія равныхъ какой либо буквѣ производителей, нужно взять сумму показателей производителей. Напр.

$$a.a.a.a.a.a = a^6; \quad bbbbbbbb = b^7.$$

§ 7. Способъ умноженія какихъ либо мономовъ основанъ на слѣдующихъ теоремахъ, доказываемыхъ въ ариметикѣ:

ТЕОРЕМА 1. *Произведение не мѣняется отъ перемѣны мѣста производителей.*

Откуда слѣдуютъ теоремы 2-я и 3-я.

ТЕОРЕМА 2. *Множить число на произведение нѣсколькихъ чиселъ, все равно, что множить его на одного производителя, произведение на другаго, новое произведение на третьяго и т. д. до послѣдняго.*

ТЕОРЕМА 3. *Помножить произведение на какое либо число, все равно, что множить одного из производителей на это число.*

Для доказательства первого предложенія на буквахъ докажемъ слѣдующія теоремы:

1. *Произведение двухъ производителей не мѣняется отъ перемѣны мѣста производителей.*

Означая одинъ изъ производителей чрезъ a , другой чрезъ b , докажемъ, что $ab = ba$.

Положимъ, что a и b суть цѣлыя числа; тогда произведение ab , или a помноженное на b , есть a , повторенное слагаемымъ b разъ, ибо умноженіе есть сокращенное сложеніе, то есть $ab = a + a + a + \dots$, гдѣ a взято слагаемымъ b разъ. Коэффициентъ при a есть единица, а такъ какъ число этихъ единицъ есть b , то слѣдовательно и сумма коэффициентовъ равна b ; посему, дѣлая приведеніе, получаемъ: $ab = a + a + a + \dots = ba$.

Если же a и b были бы соизмѣримыя дроби, то повторяя тѣ же разсужденія относительно числителей и знаменателей, придемъ къ тому же заключенію.

2 *Произведение трехъ производителей не измѣнится, если послѣдняго сдѣлать первымъ.*

Означая производителей чрезъ a, b, c , докажемъ, что $abc = cab$. Произведение abc получимъ, если a умножимъ на b , и полученное произведение на c . Означая произведение a на b чрезъ k , имѣемъ: $abc = kc$. По доказанному предложенію $kc = ck$; слѣдовательно $abc = ck$, или, вставляя вмѣсто k равную ему величину ab , получимъ: $abc = cab$.

3. *Произведение не мѣняется отъ перемѣщенія двухъ послѣднихъ производителей между собою.*

Означая производителей чрезъ a, b, c, d, e, f, g, h , докажемъ, что $abcdefgh = abcdefgh$.

Произведение $abcdefgh$ получимъ, умножая a на b , полученное произведение на c и т. д. до конца.

Означивъ чрезъ Q произведение, получаемое при умноженіи на f предшествующаго произведенія, имѣемъ:

$$abcdefgh = Qgh, \text{ гдѣ } Q = abcdef.$$

По доказанной теоремѣ (предшествующей) $Qgh = hQg$. По теоремѣ первой $hQ = Qh$, слѣдовательно $hQg = Qhg$; посему $abcdefgh = Qhg$, или, вставляя вмѣсто Q его величину, получимъ:

$$abcdefgh = abcdefgh.$$

4. *Произведение не мѣняется отъ перемѣны мѣста производителей.*

Въ произведеніи $abcdefgh$ (по теоремѣ 3) послѣдняго производителя можно сдѣлать предпослѣднимъ, т. е. $abcdefgh = abcdefhg$; теперь въ произведеніи $abcdefgh$ опять послѣдняго производителя можно сдѣлать предпослѣднимъ т. е. $abcdefgh = abcdehf$;

слѣдовательно $abcdefgh = abcdefhg = abcdehfg$; въ произведеніи $abcdeh$ снова послѣдняго производителя можно сдѣлать предпослѣднимъ и т. д. Изъ сего слѣдуетъ, что, не измѣняя произведенія, можно послѣдняго производителя ставить на всѣ мѣста, оставляя прочихъ въ томъ же порядкѣ. Но куда бы ни былъ перемѣщенъ послѣдній производитель, новый послѣдній производитель можетъ въ свою очередь занять какое угодно мѣсто въ каждомъ изъ сихъ результатовъ. Отсюда ясно, что производители могутъ быть поставлены во всякомъ порядкѣ, не измѣняя произведенія.

Изъ послѣдней теоремы слѣдуетъ, что

5. *Множить число на произведение нѣсколькихъ чиселъ, все равно, что множить его на одного производителя, произведение на другаго и т. д. до послѣдняго.*

Ибо a умножить на bcd или на Q (означая произведение bcd чрезъ Q), все равно (по доказанному), что Q множить на a , или $aQ = Qa = bcda = abcd$; изъ послѣдняго видно, что a нужно множить на b , произведение на c , новое произведение на d .

6. *Помножить произведение на какое либо число, все равно, что множить одного изъ производителей на это число; —* ибо произведение bcd на $a = bcda = cabd = bacd = dabc$, въ коихъ должно множить: въ первомъ c на a , во второмъ b на a , въ третьемъ d на a и потомъ на остальныхъ производителей или на ихъ произведение.

Справедливость этихъ теоремъ для количествъ несоизмѣримыхъ будетъ обнаружена, если доказать первую теорему, ибо остальные, основанныя на ней, выведены независимо отъ того, соизмѣримы или несоизмѣримы производители; теорема же первая даже доказана для несоизмѣримыхъ производителей.

Пусть дано умножить $5a^3b^5c$ на $2a^2b^2d$. На основаніи второй теоремы, чтобы умножить произведение $5a^3b^5c$ на произведение $2a^2b^2d$, можно множить его на каждый производитель отдѣльно, т. е. прежде на 2, потомъ на a^2 , на b^2 и на d .

По третьей теоремѣ, чтобы произведение $5a^3b^5c$ помножить на 2, можно множить одного изъ производителей, напр. 5, на 2, что дастъ $10a^3b^5c$; это помножить на a^2 , для чего достаточно a^3 помножить на a^2 ; но $a^3 = aaa$, $a^2 = aa$, слѣдовательно $a^3a^2 = aaaaaa = a^5$; и все произведение будетъ $10a^5b^5c$; помножая его на b^2 , получимъ $10a^5b^7c$, и это наконецъ на d , найдемъ, что

$$5a^3b^5c \cdot 2a^2b^2d = 10a^5b^7cd.$$

Изъ этого примѣра видно, что для составленія произведенія мономовъ должно перемножить между собою ихъ коэффициенты; написать рядомъ всѣ буквы, въ нихъ входящія, давая каждой изъ нихъ показатель, равный суммѣ показателей ея во всѣхъ производителяхъ.

У п р а ж н е н і я.

1. $5abcd \cdot 7abcd$.

2. $3abcd \cdot 2klg$.

3. $a^2bc^3de \cdot 3a^6ec^7df$.

4. $a^m \cdot a^n$.

5. $12a^mb^pc^q \cdot 3a^qb^5c^rdf$.

6. $120a^7c^3d^2$ помножить на $13a^pc^qd^3e$, полученное произведение помножить на произведение $a^mb^nc^q$ и $3a^{12}bcd$.

Объ умноженіи полиномовъ.

§ 8. Все сказанное объ умноженіи мономовъ можетъ быть безъ перемѣны приложено и къ умноженію полиномовъ, съ тѣмъ только различіемъ, что перемножаемые полиномы заключаются въ скобки для показанія, что дѣйствіе производится надъ цѣлымъ полиномомъ, а не надъ нѣкоторыми членами его. Такъ, чтобы умножить многочленное количество само на себя нѣсколько разъ, должно, по принятому знакоположенію, написать этотъ многочленъ одинъ разъ, заключить въ скобки и поставить справа надъ скобками число, равное суммѣ показателей производителей, такое произведение называется степенью полинома. Напр. $ab + c - d^2$ помноживъ само на себя три раза, получимъ

$(ab + c - d^2)(ab + c - d^2)(ab + c - d^2) = (ab + c - d^2)^3$,
гдѣ $(ab + c - d^2)^3$ есть третья степень полинома $ab + c - d^2$, число 3 есть показатель степени; оно равно суммѣ по-

казателей производителей, ибо каждый изъ послѣднихъ есть подразумѣваемая единица.

§ 9. Чтобы найти произведеніе нѣсколькихъ полиномовъ или полиномовъ и мономовъ, должно найти произведеніе мономовъ, рядомъ съ нимъ написать всѣ полиномы, изъ коихъ каждый заключить въ скобки, и дать каждому изъ полиномовъ показатель, равный суммѣ показателей его въ множимомъ и множителѣ, потому что въ § 7 производители a , b , c предполагались какими нибудь; они могли быть многочленами, и тогда на послѣдніе распространятся разсужденія того-же параграфа. Напр. найти произведеніе многочленовъ:

$$3(a+b)^5; c-d+e; a+b.$$

Полагая $a+b=k$; $c-d+e=v$; имѣемъ производителей $3k^5$, v , k , произведеніе коихъ, по § 7, есть $3k^6v$.

Вставляя вмѣсто k и v ихъ значенія, найдемъ:

$$3(a+b)^5 \cdot (c-d+e) \cdot (a+b) = 3(a+b)^6(c-d+e).$$

Найти произведеніе количествъ:

$$17(a^2b-c); d+h+k; a^2b-c; 5cd^2e^7; f(d+h+k)^4.$$

$$\begin{aligned} 17(a^2b-c)(d+h+k)(a^2b-c)5cd^2e^7f(d+h+k)^4 = \\ = 85cd^2e^7f(a^2b-c)^2(d+h+k)^5. \end{aligned}$$

§ 10. Изъ сказаннаго видно, что при умноженіи полиномовъ, въ получаемя произведенія входятъ скобки. Чтобы узнать, какъ произведеніе освободить отъ скобокъ, рассмотримъ предварительно, какъ освободить отъ скобокъ произведеніе полинома, состоящаго изъ положительныхъ и отрицательныхъ членовъ, и монома.

Означимъ полиномъ чрезъ $a+b-c$, мономъ—чрезъ d ; произведеніе будетъ $(a+b-c)d$. Въ этомъ произведеніи требуется количество $a+b-c$ помножить на d . Если бы требовалось только a помножить на d , то произведеніе было бы ad . Если же должно a , увели-

ченное количествомъ b , помножить на d , то произведение ad будетъ мало на b , помноженное на d , или на bd ; посему къ произведению ad должно придать bd , что дастъ $ad + bd$. Но такъ какъ дано не $a + b$ помножить на d , но это количество уменьшенное на c , то произведение $ab + bd$ будетъ велико на количество c , помноженное на d , или на cd . Посему произведение $(a + b - c)d$ будетъ $ad + bd - cd$.

Теперь посмотримъ, какъ освободить отъ скобокъ произведение двухъ полиномовъ $a + b - c$ и $d + e - f$. Положимъ, что во второмъ полиномѣ дѣйствія, указанные знаками, произведены, и означимъ его буквою k , тогда произведение $(a + b - c)(d + e - f)$ выразится чрезъ $(a + b - c)k$, гдѣ $k = d + e - f$. Разсуждая по предъидущему надъ произведениемъ $(a + b - c)k$ найдемъ что оно равно $ak + bk - ck$, или вставляя вмѣсто k его величину $d + e - f$, получимъ

$$\begin{aligned} & (a + b - c)(d + e - f) = \\ & = a(d + e - f) + b(d + e - f) - c(d + e - f). \end{aligned}$$

Но произведение

$$a(d + e - f) = ad + ae - af;$$

такимъ же образомъ произведение

$$b(d + e - f) = bd + be - bf;$$

и произведение

$$c(d + e - f) = cd + ce - cf.$$

Складывая два первые полинома и вычитая изъ суммы третій, получимъ искомое произведение, освобожденное отъ скобокъ:

$$\begin{aligned} & (a + b - c)(d + e - f) = \\ & = ad + ae - af + bd + be - bf - cd - ce + ef. \end{aligned}$$

Разсматривая со вниманіемъ это выраженіе, легко видѣть, что для освобожденія отъ скобокъ произведенія какихъ либо двухъ полиномовъ, должно помножить каж-

дый членъ одного полинома на каждый членъ другаго; размыслить получаема произведенія рядомъ ставя знакъ + передъ тѣми, которыя произошли отъ перемноженія членовъ одинаковаго знака, и знакъ — передъ тѣми, которыя произошли отъ умноженія членовъ разныхъ знаковъ.

Если въ произведеніе входитъ нѣсколько производителей, изъ коихъ каждый въ первой степени, то это значитъ, что нужно перемножить всѣхъ производителей между собою, что, по § 7, можно сдѣлать, помножая одинъ полиномъ на другой, полученное произведеніе на третій и т. д. до конца; слѣдовательно можно освободить отъ скобокъ два полинома и замѣнить ихъ полученнымъ алгебраическимъ количествомъ, поставленнымъ въ скобкахъ, потомъ освободить отъ скобокъ это количество и третій полиномъ и т. д. до послѣдняго. Напр. чтобы освободить отъ скобокъ произведеніе

$$(a + b)(c - d)(e + f),$$

освободимъ отъ скобокъ произведеніе $(a + b)(c - d)$; получимъ

$$ac + bc - ad - bd;$$

данное произведеніе будетъ

$$(ac + bc - ad - bd)(e + f);$$

освобождая послѣднее отъ скобокъ, найдемъ:

$$\begin{aligned} & (a + b)(c - d)(e + f) = \\ & = ace + bce - ade - bde + acf + bcf - adf - bdf. \end{aligned}$$

Если же въ произведеніе входятъ полиномы въ разныхъ степеняхъ, то можно предварительно замѣнить каждую степень полинома произведеніемъ первыхъ степеней его и потомъ поступать по сказанному.

§ 11. Умноженіе полиномовъ всегда сопровождается раскрытіемъ скобокъ произведенія и потомъ приведеніемъ

емъ подобныхъ членовъ, если такіе есть въ произведеніи; посему обыкновенно говорятъ, что *при умноженіи полиномовъ должно слѣдовать такому правилу: перемножая два полинома между собою, множить каждый членъ одного на каждый членъ другаго, ставя знакъ + передъ произведеніями членовъ одинакаваго знака и — передъ произведеніями членовъ разныхъ знаковъ; сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ въ полученномъ количествѣ, множить его такимъ же образомъ на третій полиномъ, новое произведеніе на четвертый и т. д. до послѣдняго, дѣлая каждый разъ приведеніе, если оно возможно.*

Сказанное правило знаковъ иногда выражаютъ такимъ образомъ: членъ, имѣющій знакъ $+$, помноженный на членъ, имѣющій знакъ $+$, даетъ въ произведеніи членъ, имѣющій тоже знакъ $+$.

Членъ, имѣющій знакъ $-$, помноженный на членъ, имѣющій знакъ $-$, даетъ въ произведеніи членъ, имѣющій знакъ $+$.

Членъ, имѣющій знакъ $+$, помноженный на членъ, имѣющій знакъ $-$, даетъ въ произведеніи членъ, имѣющій знакъ $-$.

Членъ, имѣющій знакъ $-$, помноженный на членъ, имѣющій знакъ $+$, даетъ въ произведеніи членъ, имѣющій знакъ $-$.

Или сокращенно такимъ образомъ: $+$ на $+$ и $-$ на $-$ даетъ $+$; $+$ на $-$ и $-$ на $+$ даетъ $-$.

Напр. найдемъ по сказанному правилу произведеніе количествъ:

$$4a^2 + 6ab + 9b^2; 2a - 3b; 5a^3 - 2b^2.$$

Для сего умножимъ предварительно первый полиномъ на второй. Дѣйствіе обыкновенно располагается такимъ образомъ:

множимое
множитель

$$\begin{array}{r} 4a^2 + 6ab + 9b^2 \\ 2a - 3b \end{array}$$

частныя произв. $\left\{ \begin{array}{l} 8a^3 + 12a^2b + 18ab^2 \\ - 12a^2b - 18ab^2 - 27b^3 \end{array} \right.$

произведеіе $8a^3 - 27b^3.$

1-ое частное произведеіе получается, умножая каждый членъ множимаго на первый членъ множителя, наблюдая при семъ правила умноженія одночленовъ.

2-ое частное произведеіе получается отъ умноженія множимаго на второй членъ.

Произведеіе получается, взявъ сумму частныхъ произведеіей и сдѣлавъ въ ней приведеніе.

Теперь такимъ же образомъ помножимъ $8a^3 - 27b^3$ на $5a^3 - 2b^2$.

множимое
множитель

$$\begin{array}{r} 8a^3 - 27b^3 \\ 5a^3 - 2b^2 \end{array}$$

частныя произвед. $\left\{ \begin{array}{l} 40a^6 - 135a^3b^3 \\ - 16a^3b^2 + 54b^5 \end{array} \right.$

произведеіе $40a^6 - 135a^3b^3 - 16a^3b^2 + 54b^5.$

Въ этомъ произведеіи нельзя сдѣлать приведенія, ибо нѣтъ подобныхъ членовъ. Слѣдовательно

$$\begin{aligned} (4a^2 + 6ab + 9b^2)(2a - 3b)(5a^3 - 2b^2) = \\ = 40a^6 - 135a^3b^3 - 16a^3b^2 + 54b^5. \end{aligned}$$

§ 12. Иногда при умноженіи многочленовъ удобнѣе для приведенія подобныхъ членовъ въ произведеіи (чтобы ихъ не отыскивать) расположить предварительно множимое и множитель по уменьшающимся или увеличивающимся степенямъ какой либо буквы. Напр., чтобы умножить

$$2ax^2 + 3a^3 - 3a^2x \text{ на } 3ax^3 - 4a^3x - 2a^2x^2,$$

расположимъ множимое и множитель по уменьшающимся степенямъ буквы x такимъ образомъ:

$$\begin{array}{rcl} \text{множимое} & 2ax^2 - 3a^2x + 3a^3 \\ \text{множитель} & 3ax^3 - 2a^2x^2 - 4a^3x \end{array}$$

$$\text{частн. пр.} \left\{ \begin{array}{l} 6a^2x^5 - 9a^3x^4 + 9a^4x^3 \\ - 4a^3x^4 + 6a^4x^3 - 6a^5x^2 \\ - 8a^4x^3 + 12a^5x^2 - 12a^6x \end{array} \right.$$

$$\text{произведение} \quad 6a^3x^5 - 13a^3x^4 + 7a^4x^3 + 6a^5x^2 - 12a^6x.$$

Умноженіе многозначныхъ цѣлыхъ чиселъ есть частный случай умноженія полиномовъ вида $ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \dots + hx + k$, гдѣ коэффициенты $a, b, c, \dots, h, k$ соотвѣтствуютъ цифрамъ числа, x основанію счисленія 10, m числу цифръ числа; ибо всякое число напр. 21203 можетъ быть представлено въ видѣ: $2 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 3$.

Примѣръ полной аналогіи дѣйствій.

$$\begin{array}{rcl} 23103 & 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 0x + 3 \\ 21 & 2x + 1. \\ \hline 23103 & 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 0x + 3 \\ 46206 & 4x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 6x \\ \hline 485163 & 4x^5 + 8x^4 + 5x^3 + x^2 + 6x + 3. \end{array}$$

Существенное различіе этихъ дѣйствій въ томъ, что каждая цифра произведенія въ ариметическомъ умноженіи должна быть меньше 10, между тѣмъ какъ коэффициенты полинома могутъ быть произвольно велики.

Примѣръ различія дѣйствій:

$$\begin{array}{rcl} 3425 & 3x^3 + 4x^2 + 2x + 5 \\ 315 & 3x^2 + x + 5 \\ \hline 17125 & 15x^5 + 20x^4 + 10x + 25 \\ 3425 & 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 5x \\ 10275 & 9x^5 + 12x^4 + 6x^3 + 15x^2 \\ \hline 1078875. & 9x^5 + 15x^4 + 25x^3 + 37x^2 + 15x + 25. \end{array}$$

§ 13. При умноженіи мономовъ, по § 7, показатель каждой буквы произведенія равняется суммѣ показателей той же буквы производителей; слѣдовательно измѣреніе произведенія равняется суммѣ измѣреній производителей. Посему при умноженіи однородныхъ по-

линомовъ произведеніе будетъ тоже однородно и измѣреніе его равно суммѣ измѣреній производителей, ибо каждый членъ множимаго помножается на каждый членъ множителя.—Если произведеніе вышло не однороднымъ, должно заключить, что дѣйствіе произведено ошибочно.

§ 14. При умноженіи двухъ неоднородныхъ полиномовъ, произведеніе члена высшаго измѣренія множимаго на членъ высшаго измѣренія множителя даетъ членъ высшаго измѣренія произведенія, который останется не приводимымъ въ произведеніи, какъ неподобный остальнымъ членамъ, ибо ихъ измѣреніе менѣе.

Такимъ же образомъ членъ низшаго измѣренія въ произведеніи получится отъ умноженія члена низшаго измѣренія множимаго на членъ низшаго измѣренія множителя и останется не приводимымъ въ произведеніи.

§ 15. При умноженіи высшихъ по какой либо буквѣ членовъ производителей, получится высшій относительно этой буквы членъ произведенія и останется въ немъ не приводимымъ, ибо нѣтъ ему подобнаго.

Такимъ же образомъ низшій относительно буквы членъ произведенія есть произведеніе низшихъ по той же буквѣ членовъ множимаго и множителя; въ произведеніи нѣтъ ему подобнаго, посему онъ останется не приводимымъ.

У п р а ж н е н і я.

Раскрыть скобки выраженій:

1. $(3x - y)(3y - x).$

2. $(a + b - c)(a + b + c).$

3. $(a^2 + 2ax + x^2)(a^2 - 2ax - x^2).$

4. $(5ab^2 + 3a^2c - 4b^5c^2)(12ab^5 + 7a^8c^2d - 9b^7c^4).$

5. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2).$

6. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n-1} + x^n)(1 + x + x^2).$

Найти произведение многочленовъ:

7. $be - d; b^2 - cd + f; b^3 + cd^2 - fd + f^5$.

8. $a^2 + a^4 + a^6; a^2 - 1; a^8 + a^2$.

9. $2a^2b - a^2 - 4ab^2 + 2ab - a + 8b^3 - 4b^2; 2ab + a - 4b^2 + 1$.

Освободить отъ скобокъ выраженія:

10. $[(a+b)(a-b) - (c+d-e)(c+e)](a^2+b-1)$.

11. $[3a^2 + 4(ab+b^2)] + [b^2 + a(b-2a)] + [a^2 - (3b+5a)]$.

12. $[x^3 + x(y^2 + 2y^3) - 3x^4] - [(x+y)(x^2 + 2xy + y^2) - 3x^2y^2]$.

13. Выразить алгебраически число, которое, будучи дѣлено на a , даетъ въ частномъ x и въ остаткѣ h .

14. Если дѣлителя задачи 13 увеличить 5-ю, частное уменьшить 7-ю, а остатокъ оставить тотъ же, на сколько первое дѣлимое будетъ больше втораго?

15. Работникъ работалъ 5 дней по h часовъ въ день и получилъ платы по a копѣекъ за часъ, потомъ работалъ b днями больше и 2-мя часами въ день меньше, а часовая плата его была удвоена. Сколько копѣекъ долженъ получить онъ за все время работы?

16. Выразить число, состоящее изъ трехъ цифръ a , b и c въ десятичной системѣ и въ другой, коей основаніе x ; выразить число обратное.

17. Изъ пяти сочиненій первое состоитъ изъ a томовъ, второе b томами больше перваго; третье b томами больше втораго; четвертое b томами больше третьяго; пятое b томами больше четвертаго. Цѣна тома перваго сочиненія k рублей, втораго h рублями больше перваго, третьяго h рублями больше втораго и т. д. до пятого, цѣна котораго h рублями больше цѣны четвертаго.

Спрашивается, сколько нажилъ книгопродавецъ, продавъ всѣ пять сочиненій и получивъ при продажѣ p копѣекъ барыша на каждый рубль.

Возведение въ степень мономовъ; составленіе квадрата полинома; кубъ бинорма; составленіе произведенія суммы двухъ членовъ на разность ихъ.

§ 16. Если перемножаемые количества равны между собою, т. е. если количество множится само на себя нѣсколько разъ, то, какъ выше сказано, полученное произведеніе называется *степенью*; помножаемое само на себя количество — *корнемъ*; самое дѣйствіе умноженія — *возведеніемъ въ степень*. Степень называется *второю* или *квадратомъ*, если количество помножается само на себя одинъ разъ; *третьею* степенью или *кубомъ*, если помножается само на себя два раза; *четвертой* — три раза и т. д. Вообще степень называется *m-й*, если количество помножается само на себя *m — 1* разъ, или входитъ производителемъ *m* разъ.

По правиламъ умноженія легко найти всякую степень алгебраическаго количества, но существуютъ правила, облегчающія способъ находить произведеніе равныхъ производителей и раскрывать скобки его.

§ 17. Если количество однобуквенное, то степень его обозначается числомъ, поставленнымъ надъ буквою безъ скобокъ, называемымъ показателемъ. Напр. *m-я* степень *a* есть a^m .

Если же количество есть мономъ, состоящій изъ нѣсколькихъ производителей, или полиномъ, то его заключаютъ въ скобки и ставятъ справа надъ скобками показатель. Напр. возведя мономъ $3a^2bc$ и полиномъ $a^2 + 2cde - f$ въ пятую степень, получимъ

$$(3a^2bc)^5 \text{ и } (a^2 + 2cde - f)^5.$$

Точно также возведеніе въ степень степени означаютъ заключая данную степень въ скобки и ставя надъ скобками требуемый показатель степени.

Напр. возведя a^m и $(a + b)^2$ въ n -ю степень, получимъ $(a^m)^n$ и $((a + b)^2)^n$.

Изъ правилъ умноженія слѣдуетъ, что если требуется какую либо степень количества помножить на другую степень того же количества, то показатели должно сложить. Напр.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; (a + b)^n \cdot (a + b)^5 = (a + b)^{n+5}.$$

§ 18. Для раскрытія скобокъ мономовъ, возведенныхъ въ степень, поступаютъ такимъ образомъ:

Если мономъ состоитъ изъ произведенія нѣсколькихъ буквъ и цифръ, какъ напр. $(3abc)^2$, то по смыслу показателя это все равно, что $3abc \cdot 3abc$, равное $9a^2b^2c^2$; слѣдовательно для раскрытія скобокъ произведенія, возведеннаго въ степень, должно возвести въ степень каждого производителя отдѣльно.

Если мономъ есть степень, возводимая въ новую степень, напр. $(a^m)^n$.

То по выше сказанному выраженіе

$$(abcd\dots)^n = a^n b^n c^n d^n \dots$$

при всякомъ числѣ производителей.

Полагая, что число производителей есть m и что каждый изъ нихъ равенъ a , получимъ мономъ $(a^m)^n$, изображенный безъ скобокъ: $(a^m)^n = a^n a^n a^n a^n \dots$, или $= a^{n+n+n+n+\dots}$, или, такъ какъ число n повторяется m разъ, $(a^m)^n = a^{mn}$; то есть для раскрытія скобокъ степени, возведенной въ новую степень, должно перемножить показатели между собою.

§ 19. При раскрытіи скобокъ полинома, возведеннаго въ степень, существуетъ особый законъ, по которому степень полинома можетъ быть прямо составлена безъ скобокъ. — Разсмотримъ случай возведенія въ квадратъ полинома.

Квадратъ бинорма $a + b$ есть $(a + b)^2$; помножая $a + b$ на $a + b$, получимъ:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

т. е. квадратъ суммы двухъ членовъ равняется квадрату перваго члена, сложенному съ удвоеннымъ произведениемъ перваго члена на второй и съ квадратомъ втораго члена.

Напр. найдемъ квадратъ бинорма $2a + 3b^2$.

$$(2a + 3b^2)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b^2 + (3b^2)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4.$$

Квадратъ тринома $a + b + c$ получимъ, помножая $a + b + c$ на $a + b + c$.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Такимъ же образомъ найдемъ квадратъ полинома $a + b + c + d$.

$$(a + b + c + d)^2 = \\ = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА. *Квадратъ суммы всякаго числа членовъ равняется суммѣ квадратовъ всѣхъ членовъ, сложенной съ суммою удвоенныхъ произведенийъ всѣхъ членовъ, взятыхъ по два.*

Доказ. Для доказательства этой теоремы докажемъ предварительно, что если она справедлива для какого нибудь числа m членовъ, то она будетъ справедлива и для числа членовъ, единицъ большаго, то есть для $m + 1$ членовъ. — Пусть полиномъ, имѣющій m членовъ, будетъ

$$a + b + c + d + \dots + k + l + h,$$

и положимъ, что доказываемая теорема справедлива для этого полинома, т. е. что квадратъ его состоитъ изъ суммы квадратовъ всѣхъ членовъ, сложенной съ суммою удвоенныхъ произведенийъ всѣхъ членовъ, взятыхъ по два.

Прибавляя одинъ членъ къ полиному, получимъ $m + 1$ членовъ:

$$a + b + c + d + \dots + k + l + h + t;$$

докажемъ, что теорема справедлива и для этого полинома.

Означимъ сумму членовъ перваго полинома чрезъ s , тогда второй полиномъ будетъ $s + t$, а по доказанному

$$(s + t)^2 = s^2 + 2st + t^2,$$

слѣдовательно, чтобы получить квадратъ втораго полинома $(s + t)^2$, должно къ квадрату перваго s^2 прибавить удвоенное произведеніе суммы членовъ перваго полинома на членъ t , или $2st$, и квадратъ прибавленнаго члена t^2 , то есть квадратъ втораго полинома равняется суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ, сложенной съ суммою удвоенныхъ произведеній всѣхъ его членовъ, взятыхъ по два.

Теперь докажемъ справедливость теоремы для всякаго числа членовъ. — Разсматривая выраженіе (1) квадрата полинома, состоящаго изъ четырехъ членовъ, видимъ, что теорема для него справедлива; изъ этого заключаемъ (по доказанному), что она справедлива и для $4 + 1$ или для пяти членовъ. Если же теорема вѣрна для пяти членовъ, то она вѣрна и для шести членовъ и т. д., то есть теорема вѣрна для всякаго числа членовъ.

Для составленія квадрата суммы нѣсколькихъ членовъ по этому закону, должно взять сумму квадратовъ всѣхъ членовъ и сумму удвоенныхъ произведеній каждаго члена на каждый изъ послѣдующихъ, т. е. взять удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й, 3-й, и т. д. до послѣдняго, потомъ 2-го на 3-й 4-й и т. д., потомъ 3-го на 4-й 5-й и т. д. до послѣдняго. Напр. составить квадратъ $2a + c + d^3 + 3h$.

$$(2a + c + d^3 + 3h)^2 = (2a)^2 + c^2 + (d^3)^2 + (3h)^2 + 2 \cdot 2a \cdot c + 2 \cdot 2a \cdot d^3 + 2 \cdot 2a \cdot 3h + 2 \cdot c \cdot d^3 + 2 \cdot c \cdot 3h + 2 \cdot d^3 \cdot 3h,$$

или

$$(2a + c + d^3 + 3h)^2 = \\ = 4a^2 + c^2 + d^6 + 9h^2 + 4ac + 4ad^3 + 12ah + 2cd^3 + 6ch + 6d^3h.$$

§ 20. Найдемъ квадратъ разности двухъ членовъ $a - b$, для чего помножимъ $a - b$ на $a - b$;

$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

т. е. квадратъ разности двухъ членовъ равняется квадрату перваго члена, уменьшенному удвоеннымъ произведениемъ перваго члена на второй и сложенному съ квадратомъ втораго члена.

Напр.

$$(2a - 3b^2)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b^2 + (3b^2)^2 = 4a^2 - 12ab^2 + 9b^4.$$

Квадратъ тринома $a - b + c$ есть

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc.$$

Изъ правилъ умноженія полиномовъ слѣдуетъ, что квадратъ полинома, имѣющаго члены отрицательные, составляется по тому же закону, по какому и квадратъ суммы нѣсколькихъ членовъ, только знаки нѣкоторыхъ членовъ квадрата будутъ отрицательные.

Легко замѣтить, что тотъ членъ квадрата будетъ отрицательнымъ, въ который отрицательный членъ корня входитъ одинъ разъ производителемъ, ибо такой членъ произошелъ отъ умноженія членовъ корня разныхъ знаковъ (§ 11).

Членъ квадрата, содержащій два положительныхъ производителя или два отрицательныхъ, будетъ положительнымъ, ибо онъ произошелъ отъ умноженія членовъ корня одинаковыхъ знаковъ. Напр. въ выраженіи квадрата бинома $a - b$ членъ $2ab$ отрицательный, потому что въ корнѣ производитель a имѣетъ знакъ $+$, а производитель b знакъ $-$; члены a^2 и b^2 положительные, ибо въ первомъ оба производителя положительные, а во второмъ оба отрицательные. Такимъ же образомъ въ выраженіи

квадрата тринома $a - b + c$ члены a^2 , b^2 , c^2 , $2ac$ положительные, члены $2ab$, $2ac$ отрицательные.

На основаніи этого легко составить квадратъ всякаго многочлена. Напр. квадратъ

$$(2a + b^2 - c - 3d)^2 = (2a)^2 + (b^2)^2 + c^2 + (3d)^2 + 2 \cdot 2ab^2 - 2 \cdot 2ac - 2 \cdot 2a \cdot 3d - 2 \cdot b^2c - 2 \cdot b^2 \cdot 3d + 2 \cdot c \cdot 3d,$$

или

$$(2a + b^2 - c - 3d)^2 = 4a^2 + b^4 + c^2 + 9d^2 + 4ab^2 - 4ac - 12ad - 2b^2c - 6b^2d + 6cd.$$

§ 24. Помножая $a + b$ само на себя два раза, или помножая найденное выше выраженіе для квадрата $a + b$ на $a + b$, получимъ кубъ суммы двухъ членовъ, выраженный безъ скобокъ.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

следовательно

$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, то есть кубъ суммы двухъ членовъ равняется кубу перваго члена, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ втораго, плюсъ кубъ втораго члена. Напр. составимъ кубъ бинорма $2a + b^2$ по этому правилу:

$$(2a + b^2)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot b^2 + 3 \cdot 2a \cdot (b^2)^2 + (b^2)^3,$$

или

$$(2a + b^2)^3 = 8a^3 + 12a^2b^2 + 6ab^4 + b^6.$$

Помножая $(a - b)^2$, или $a^2 - 2ab + b^2$, на $a - b$, получимъ выраженіе $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ т. е. кубъ разности двухъ членовъ равняется кубу перваго члена, минусъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ втораго, минусъ кубъ втораго члена. Напр.

$$(2a - b^2)^3 = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot b^2 + 3 \cdot 2a \cdot (b^2)^2 - (b^2)^3,$$

или

$$8a^3 - 12a^2b^2 + 6ab^4 - b^6.$$

§ 22. Произведение суммы двух членов на разность их находится тоже, не перемножая данных производителей, по слѣдующему простому правилу:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

то есть произведение суммы двух членов на разность их равняется разности квадратов этих членов.

Напр. пусть дано умножить

$$3a^2 + bc \text{ на } 3a^2 - bc;$$

получимъ:

$$(3a^2 + bc)(3a^2 - bc) = (3a^2)^2 - (bc)^2 = 9a^4 - b^2c^2;$$

такимъ же образомъ

$$(5cd - f^2)(5cd + f^2) = (5cd)^2 - (f^2)^2 = 25c^2d^2 - f^4.$$

У п р а ж н е н і я.

Выразить безъ скобокъ:

1. $(3a^5c^3d^7h)^2$.
2. $(7a^2b^nc^{2r}f)^2$.
3. $(2a^7b^4c^3d^{12})^{11}$.
4. $(a^3b^rc^{k+1}e^{h-v})^3$.
5. $(a^{10}b^3c^{2r+1}d^{h-3v}f^k)^m$.
6. $(3a^2b^mc^{n-1})^{m-n}$.
7. $[(abc)^2]^{3m}$.
8. $[[[a^2b^{m-2}c^rh]^m]^{m+1}]^{m-1}$.
9. $(3ab^2 + 7)^2$.
10. $(2a^3c^n - 4)^2$.
11. $(5a^3b - 2 + ab^2)^2$.
12. $((2a - c)^2)^2$.
13. $(3a^4 - 1 + ab^2 - a)^2$.
14. $(a^mb^r - 3a + 12b^{r+1} - c^2 + d^{h+v})^2$.
15. Показать, что $(x^2 + xy - y^2)^2 - (x^2 - xy - y^2)^2 = 4xy(x - y)(x + y)$.

16. Показать, что выражение $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 8xz$ обращается въ 4 $(x + z)^2$, когда $x = y$.

Не производя умноженія, найти произведенія:

17. $(kl - 2h)(kl - 2h)(kl - 2h)$.

18. $(a^2b - c^3)(a^2b + c^3)$.

19. $(1 - c^5d)(1 + c^5d)$.

20. Раскрыть скобки выраженія $(21a^m - 2b^rc)^3$.

21. Выраженія $(17a^{m+1}b - c^{r-2})^3$.

22. На сколько квадратъ суммы двухъ чиселъ превышаетъ двойное ихъ произведеніе?

23. На сколько кубъ разности двухъ чиселъ превышаетъ разность ихъ кубовъ?

О дѣленіи мономовъ и о нулевомъ показателѣ.

§ 23. Дѣйствіе, которымъ по данному произведенію и одному изъ производителей находится другой производитель, есть *дѣленіе*. Данное произведеніе есть *дѣлимое*, данный производитель — *дѣлитель*, производитель искомый — *частное*.

Дѣлимое должно быть равно произведенію дѣлителя на частное.

При дѣленіи одного монома на другой частное будетъ тоже мономъ, потому что при умноженіи полинома на мономъ въ произведеніи получится тоже полиномъ, между тѣмъ какъ должно получиться дѣлимое, которое есть мономъ.

Еслибы частное было найдено, то чтобы получить дѣлимое, нужно было бы по правиламъ умноженія мономовъ (§ 7), перемножить коеффиціенты дѣлителя и частного, написать рядомъ всѣ буквы, въ нихъ входящія, давая каждой изъ нихъ показатель, равный суммѣ показателей ея въ дѣлитель и въ частномъ.

Слѣдовательно, чтобы по дѣлимому и дѣлителю найти частное, должно поступать по такимъ правиламъ. Коеф-

фиціентъ дѣлимаго нужно раздѣлить на коэффициентъ дѣлителя, чтобы получить коэффициентъ частнаго; написать всѣ буквы, находящіяся въ дѣлимомъ и которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ, сохраняя ихъ показатели; написать буквы, входящія въ дѣлимое и дѣлитель съ показателями, равными разности показателя каждой въ дѣлимомъ и показателя ея въ дѣлителѣ; буквы же, входящія съ равными показателями въ дѣлимое и дѣлитель, отбросить, потому что ихъ не должно быть въ частномъ. Напр.

$$20a^5c^7d^2 : 10a^3b^5d = 2a^2c^2d;$$

$$15a^2b^6c^3d : 3a^2b^3c^2d = 5b^3c;$$

$$75a^{12}b^{26}de^2hk : 3a^5b^7k = 25a^7b^{19}de^2h.$$

§ 24. Если коэффициентъ дѣлимаго не дѣлится безъ остатка на коэффициентъ дѣлителя, или если въ дѣлителѣ есть буквы, которыхъ нѣтъ въ дѣлимомъ, или если показатели нѣкоторыхъ буквъ дѣлителя болѣе показателей тѣхъ же буквъ дѣлимаго, то дѣленіе не можетъ быть произведено, т. е. частное не можетъ быть выражено въ видѣ цѣлаго алгебраическаго количества, а будетъ дробное. Напр.

$$7a^3b^2c : 3a^2bc = \frac{7a^3b^2c}{3a^2bc};$$

$$3ab : 3abc = \frac{3ab}{3abc};$$

$$5a^2b^2 : 10a^5bc = \frac{5a^2b^2}{10a^5bc}.$$

О такихъ частныхъ, называемыхъ *алгебраическими дробями*, будетъ сказано далѣе.

§ 25. Раздѣляя количество a^m на a^m и вычитая изъ показателя дѣлимаго показатель дѣлителя, получимъ a^{m-m} , или a^0 . Но дѣлимое a^m равно дѣлителю a^m , слѣдовательно частное равно единицѣ; изъ этого заклю-

чаемъ, что $a^0 = 1$, т. е. всякое количество въ степени нуля есть единица.

Къ тому же заключенію можно прійти слѣдующимъ образомъ: $a^3 = 1.a.a.a$, $a^2 = 1.a.a$, $a^1 = 1.a$, — нужно по аналогіи допустить, что a^0 означаетъ только коэффициентъ единицу.

Выраженіе a^0 называется нулевой степенью, показатель нуль — нулевымъ показателемъ. Хотя нулевая степень всякаго количества можетъ быть замѣнена единицей, но въ Алгебрѣ иногда употребляютъ такіа выраженія, съ цѣлью сохранить въ результатѣ буквы, которыя при дѣленіи сократились бы. Напр. раздѣляя

$$5a^2b^3c^{10} \text{ на } 5a^2b^2c^{10},$$

получимъ частное b , въ которое буквы a и c уже не входятъ; употребляя же нулевые показатели, получимъ: $5a^2a^3c^{10} : 5a^2b^2c^{10} = a^0bc^0$, гдѣ частное содержитъ буквы a и c .

Употребленіе нулеваго показателя даетъ возможность правило дѣленія мономовъ (§ 23) выразить проще такимъ образомъ: должно при дѣленіи монома на мономъ коэффициентъ дѣлимаго раздѣлить на коэффициентъ дѣлителя и написать всѣ буквы рядомъ, каждую съ показателемъ, равнымъ разности показателя ея въ дѣлимомъ и показателя въ дѣлителѣ.

У п р а ж н е н і я.

1. $10a^2b^3cd : 2ab$.
2. $25a^{10}b^{12}cd : 5a^2b^{11}c$.
3. $a^m : a^n$.
4. $b^{p+q} : b^q$.
5. $a^3nb^rc^4pd : a^nb^sc^3pd$.
6. $48a^5b^7c^nd^r : 3a^3b^5c^nd^5$.
7. $16a^2b^{3r}c^5d^{n-3}e^{5-s}f^{4+n} : 4b^{2r+1}c^2d^{n-5}e^{4-s}f^{3+n}$.

8. Раздѣлить $28a^7b^5c^2d^q$ на $7a^3bc^2d^{q-1}$ и полученное частное раздѣлить на $2a^2b^4d$

9. Доказать, что частныя дѣленія $10a^mb^qc$ на $2a^mb^qc$ и $25a^{m+2}b^{r-s}c^4$ на $5a^{m+2}b^{r-s}c^4$ равны между собою.

10. Доказать, что частное дѣленія $a^mb^nc^qd^r$ на $a^{m-2}b^{n-7}c^qd^{r-1}$ не измѣняется съ перемѣною числовыхъ значеній буквъ m, n, q, r .

0 дѣленіи полиномовъ.

§ 26. Дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на частное, и если въ этомъ произведеніи скобки не раскрыты и приведеніе членовъ не сдѣлано, а только означено дѣйствіе умноженія по § 9, то частное дѣленія полиномовъ и произведеній мономовъ съ полиномами найдется точно такъ же, какъ и при дѣленіи мономовъ (§ 23), т. е. должно коеффиціентъ дѣлимаго раздѣлить на коеффиціентъ дѣлителя, написать всѣ полиномы и мономы, входящіе въ дѣлимое производителями, рядомъ, давая каждому изъ нихъ показатель, равный разности показателей его въ дѣлимомъ и дѣлителѣ. Напр.

$\{10(a^2 + bc)^5(d - ef)^7(k - l)\} : 2(a^2 + bc)(k - l)$,
получимъ въ частномъ

$5(a^2 + bc)^4(d - ef)^7(k - l)^0$,
или, зная, что $(k - l)^0 = 1$,

$$5(a^2 + bc)^4(d - ef)^7.$$

§ 27. Умноженіе почти всегда сопровождается раскрытіемъ скобокъ и потомъ приведеніемъ членовъ, посему нужно умѣть находить частное по даннымъ дѣлимому и дѣлителю, выраженнымъ безъ скобокъ, и между членами которыхъ сдѣлано приведеніе.

Разсмотримъ предварительно, какъ находить частное, когда дѣлимое есть полиномъ, а дѣлитель мономъ. — Въ этомъ случаѣ частное будетъ полиномъ, потому что мо-

номъ, помноженный на мономъ, не можетъ дать въ произведеніи полинома, а даетъ тоже мономъ.

Еслибы частное было найдено, то при умноженіи каждаго члена частного на дѣлителя получили бы все члены дѣлимаго, следовательно, чтобы найти частное дѣленія полинома на мономъ, должно каждый членъ дѣлимаго дѣлить на дѣлителя отдѣльно, получатся послѣдовательно все члены частного; написавъ ихъ рядомъ, должно дать каждому знакъ одинаковый съ членомъ дѣлимаго, отъ дѣленія котораго онъ получился. Напр.

$$\{5a^2bcd - a^5cd + 10a^{12}bc^2d - 25a^{10}b^6cd\} : 5a^2cd,$$

получимъ въ частномъ

$$b - \frac{1}{5}a^3 + 2a^{10}bc - 5a^8b^6.$$

§ 28. Когда дѣлимое и дѣлитель суть полиномы, то дѣлимое есть произведеніе всехъ членовъ дѣлителя на каждый членъ частного. Между нѣкоторыми членами дѣлимаго сдѣлано приведеніе; по § 15 высшій по какойнибудь буквѣ членъ дѣлимаго произошелъ отъ умноженія высшаго члена дѣлителя на высшій по той же буквѣ членъ частного и остался въ произведеніи неприводимымъ. Посему выбирая въ дѣлимомъ высшій по какойлибо буквѣ членъ и раздѣляя его на высшій по той же буквѣ членъ дѣлителя, получимъ высшій членъ частного. Полученный высшій членъ частного будетъ имѣть знакъ +, если высшіе члены дѣлимаго и дѣлителя имѣютъ знаки одинаковые, и знакъ —, если знаки ихъ различны; это слѣдуетъ прямо изъ правила знаковъ при умноженіи (§ 11). Напр. если высшіе члены дѣлимаго и дѣлителя имѣютъ оба знакъ —, то высшій членъ частного будетъ имѣть знакъ +, потому что только отъ умноженія отрицательнаго члена дѣлителя на положительный членъ частного можетъ получиться произведеніе отрицательное. Если высшій членъ дѣлимаго имѣетъ

знакъ $+$, а высшій членъ дѣлителя знакъ $-$, то высшій членъ частнаго имѣетъ знакъ $-$, ибо отрицательный членъ дѣлителя только при умноженіи на отрицательный членъ частнаго можетъ дать положительный членъ дѣлимаго, и т. д.

Дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на каждый членъ частнаго, поэтому если помножить дѣлителя на найденный высшій членъ частнаго и потомъ полученное произведеніе вычесть изъ дѣлимаго, то получимъ въ остаткѣ новый полиномъ, который есть произведеніе дѣлителя на каждый изъ членовъ частнаго, кромѣ найденнаго.

Посему помножая дѣлителя на высшій членъ частнаго (найденный) и вычитая произведеніе изъ дѣлимаго, получимъ остатокъ, который можно разсматривать какъ новое дѣлимое.

Высшій членъ этого остатка есть произведеніе высшаго члена дѣлителя на высшій изъ всѣхъ не найденныхъ членовъ частнаго, то есть на второй членъ частнаго.

Раздѣляя высшій членъ остатка на высшій членъ дѣлителя, найдемъ второй членъ частнаго. Знакъ этого члена опредѣлится также, какъ при отысканіи перваго члена.

Помножая всего дѣлителя на второй членъ частнаго и вычитая произведеніе изъ остатка, получимъ новый остатокъ, который есть произведеніе дѣлителя на каждый изъ членовъ частнаго, кромѣ двухъ найденныхъ.

Раздѣляя высшій членъ втораго остатка на высшій членъ дѣлителя, получимъ третій членъ частнаго. Поступая такимъ же образомъ далѣе, найдемъ всѣ члены частнаго.

Когда послѣдній членъ частнаго найденъ, то умножая на него всего дѣлителя и вычитая произведеніе изъ дѣлимаго, получимъ въ остаткѣ нуль, потому что отъ дѣ-

лимаго уже отняты всѣ члены, получаемые отъ умноженія дѣлителя на каждый членъ частнаго, то есть отнято все дѣлимое. Напр.

$$\{7ab^2 - 10a^2b + 8a^3 - 3b^3\} : \{2a^2 - ab + b^2\}.$$

Высшій по буквѣ a членъ дѣлимаго есть $8a^3$, высшій по той же буквѣ членъ дѣлителя $2a^2$; $8a^3$ есть произведение $2a^2$ на высшій членъ частнаго, посему раздѣляя $8a^3$ на $2a^2$, получимъ высшій членъ частнаго:

$$8a^3 : 2a^2 = 4a.$$

Членъ $4a$ имѣетъ знакъ $+$ въ частномъ, ибо $8a^3$ и $2a^2$ суть положительные члены.

Помножая $2a^2 - ab + b^2$ на высшій членъ частнаго $4a$, получимъ $8a^3 - 4a^2b + 4ab^2$. Вычитая это произведение изъ дѣлимаго и дѣлая приведеніе, получимъ первый остатокъ

$$3ab^2 - 6a^2b - 3b^3.$$

Этотъ остатокъ есть произведеніе дѣлителя на всѣ члены частнаго, кромѣ найденнаго. — Посему чтобы получить второй членъ частнаго, раздѣлимъ высшій по буквѣ a членъ остатка $6a^2b$ на высшій членъ дѣлителя $2a^2$; частное $3b$ есть второй членъ. Этотъ членъ будетъ имѣть знакъ $-$, ибо высшій членъ остатка отрицательный, а высшій членъ дѣлителя положительный.

Помножая дѣлителя $2a^2 - ab + b^2$ на $-3b$, получимъ въ произведеніи $-6a^2b + 3ab^2 - 3b^3$; вычитая это изъ перваго остатка и дѣлая приведеніе, получимъ второй остатокъ, который равенъ нулю; изъ этого заключаемъ, что членъ $-3b$ послѣдній; итакъ

$$(7ab^2 - 10a^2b + 8a^3 - 3b^3) : (2a^2 - ab + b^2) = 4a - 3b.$$

Когда одинъ изъ остатковъ обратился въ нуль, можно еще такъ убѣдиться, что больше нѣтъ членовъ въ частномъ: остатокъ, равный нулю, есть произведеніе дѣ-

лителя на количество, составленное еще не найденными членами; — но дѣлитель только при умноженіи на нуль можетъ дать нуль въ произведеніи, слѣдовательно количество, которое должно прибавить къ частному, равно нулю, то есть частное уже все найдено.

§ 29. Для того чтобы не отыскивать высшихъ членовъ дѣлимаго и дѣлителя, обыкновенно какъ дѣлимое такъ и дѣлителя предварительно располагаютъ по уменьшающимся степенямъ какой либо буквы и производятъ дѣйствіе въ такомъ порядкѣ:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{дѣлимое. } 8a^3 - 10a^2b + 7ab^2 - 3b^3 & 2a^2 - ab + b^2 \text{ дѣлит.} \\
 \underline{-8a^3 + 4a^2b - 4ab^2} & 4a - 3b \text{ частное.} \\
 \text{1-й остат. } -6a^2b + 3ab^2 - 3b^3 & \\
 \quad \quad \quad + 6a^2b - 3ab^2 + 3b^3 & \\
 \hline
 \text{2-й остат. } & 0
 \end{array}$$

Въ этомъ примѣрѣ дѣлимое и дѣлитель расположены по уменьшающимся степенямъ буквы a , считая члены, не содержащіе этой буквы, имѣющими ее въ нулевой степени, такъ какъ $a^0 = 1$ (§ 25).

Подъ дѣлимымъ помѣщено произведеніе дѣлителя на высшій членъ частнаго, то есть на $4a$; знаки всѣхъ членовъ этого произведенія измѣнены въ обратные для вычитанія.

Подъ первымъ остаткомъ помѣщено произведеніе дѣлителя на второй членъ частнаго, съ измѣненными знаками всѣхъ членовъ въ обратные для вычитанія.

Можно также дѣлимое и дѣлителя расположить по уменьшающимся степенямъ буквы b , такимъ образомъ:

$$\begin{array}{r|l}
 \text{дѣлимое. } -3b^3 + 7ab^2 - 10a^2b + 8a^3 & b^2 - ab + 2a^2 \text{ дѣлит.} \\
 \underline{3b^3 - 3ab^2 + 6a^2b} & -3b + 4a \text{ частн.} \\
 \text{1-й остат. } 4ab^2 - 4a^2b + 8a^3 & \\
 \quad \quad \quad \underline{4ab^2 + 4a^2b - 8a^3} & \\
 \text{2-й остат. } & 0
 \end{array}$$

Буква, по степенямъ которой располагаются дѣлимое и дѣлитель, называется *главною буквою*.

§ 30. Низшій по какой либо буквѣ членъ дѣлимаго есть произведеніе низшаго по той же буквѣ члена дѣлителя на низшій членъ частнаго. Посему можно дѣлимое и дѣлителя расположить по увеличивающимся степенямъ буквы и дѣлить низшій членъ дѣлимаго на низшій членъ дѣлителя; чрезъ это получимъ низшій членъ частнаго. Раздѣляя низшій членъ перваго остатка на низшій членъ дѣлителя, найдемъ второй членъ частнаго, и т. д.

Примѣръ.

Дѣлимое.	$21 - 29x + 4x^2 + 4x^3$	$3 - 2x$ дѣлитель.
	$-21 + 14x$	$7 - 5x - 2x^2$ частн.
1-й остат.	$-15x + 4x^2 + 4x^3$	
	$15x - 10x^2$	
2-й остат.	$-6x^2 + 4x^3$	
	$6x^2 - 4x^3$	
3-й остат.	0	

§ 31. Изъ сказаннаго слѣдуетъ такое правило дѣленія полиномовъ.

Должно при дѣленіи полинома на полиномъ расположить дѣлимое и дѣлителя по уменьшающимся или по увеличивающимся степенямъ какой либо буквы. Раздѣляя первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя, получимъ первый членъ частнаго. Вычитая изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго, получимъ остатокъ, члены котораго должны быть расположены такъ же какъ и члены дѣлимаго. Раздѣляя первый членъ остатка на первый членъ дѣлителя, найдемъ второй членъ частнаго, вычитая произведеніе его на дѣ-

лителя изъ перваго остатка, получимъ второй остатокъ. Раздѣляя первый членъ втораго остатка на первый членъ дѣлителя, найдемъ третій членъ частнаго, и т. д.

При этомъ относительно знаковъ должно слѣдовать такому правилу:

Когда первый членъ дѣлимаго или одного изъ остатковъ имѣетъ знакъ одинаковый съ первымъ членомъ дѣлителя, то должно получаемому отъ дѣленія ихъ члену частнаго давать знакъ $+$; если же знаки разные, то $-$.

Это правило знаковъ какъ и при умноженіи выражаютъ иногда такимъ образомъ:

При дѣленіи $+$ на $+$ и $-$ на $-$ даютъ $+$; $+$ на $-$ и $-$ на $+$ даютъ $-$.

Приложимъ правило дѣленія къ примѣрамъ.

Примѣръ 1.

$$\{11a^2b^3 - 4a^4b - 3ab^4\} : \{3ab + 2a^2 - b^2\}.$$

Располагаемъ дѣлимое и дѣлителя по буквѣ a :

Дѣлимое.	$-4a^4b + 11a^2b^3 - 3ab^4$	$2a^2 + 3ab - b^2$ дѣлит.
	$4a^4b + 6a^3b^2 - 2a^2b^3$	$-2a^2b + 3ab^2$ част.
1-й остат.	$6a^3b^2 + 9a^2b^3 - 3ab^4$	
	$-6a^3b^2 - 9a^2b^3 + 3ab^4$	
2-й остат.	0.	

Примѣръ 2.

$6x^6 - 24x^2y^4 - 72xy^5 - 54y^6$	$3x^3 + 6xy^2 + 9y^3$
$-6x^6 - 12x^4y^2 - 18x^3y^3$	$2x^3 - 4xy^2 - 6y^3$
$-12x^4y^2 - 18x^3y^3 - 24x^2y^4 - 72xy^5 - 54y^6$	
$12x^4y^2 + 24x^2y^4 + 36xy^5$	
$-18x^3y^3 - 36xy^5 - 54y^6$	
$18x^3y^3 + 36xy^5 + 54y^6$	
0.	

Примѣръ 3.

$$\begin{array}{r|l}
 a^5 - b^5 & a - b \\
 - a^5 + a^4b & a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\
 \hline
 a^4b - b^5 & \\
 - a^4b + a^3b^2 & \\
 \hline
 a^3b^2 - b^5 & \\
 - a^3b^2 + a^2b^3 & \\
 \hline
 a^2b^3 - b^5 & \\
 - a^2b^3 + ab^4 & \\
 \hline
 ab^4 - b^5 & \\
 - ab^4 + b^5 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Примѣръ 4.

Дѣлимое и дѣлитель расположены по возрастающимъ степенямъ буквы x .

$$\begin{array}{r|l}
 9-27x-24x^2+21x^3-35x^4-9x^5+10x^6 & 1-3x-2x^2 \\
 -9+27x+18x^2 & 9-3x^2+12x^3-5x^4 \\
 \hline
 -3x^2+21x^3-35x^4-9x^5+10x^6 & \\
 3x^2-9x^3-6x^4 & \\
 \hline
 12x^3-41x^4-9x^5+10x^6 & \\
 -12x^3+36x^4+24x^5 & \\
 \hline
 -5x^4+15x^5+10x^6 & \\
 5x^4-15x^5-10x^6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

§ 32. Во время самаго дѣйствія дѣленія можно мѣнять главную букву, по возрастающимъ или уменьшающимся степенямъ которой располагаемъ дѣлимое и дѣлителя, принимая напримѣръ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ букву a за главную, потомъ въ первомъ остаткѣ букву b и раздѣляя высшій по буквѣ b членъ остатка на высшій по той же буквѣ членъ дѣлителя, потому что каждый остатокъ можно разсматривать какъ новое дѣлимое. Такъ въ примѣрѣ второмъ предыдущаго параграфа дѣлимое и дѣлитель расположены по уменьшающимся степенямъ

буквы x ; найдя высшій членъ частнаго $2x^3$ по этой буквѣ и получивъ первый остатокъ, можно разсматривать его какъ новое дѣлимое и, принимая за главную букву y , дѣлить высшій по этой буквѣ членъ перваго остатка — $54y^6$ на высшій по той же буквѣ членъ дѣлителя $9y^3$; чрезъ это получимъ второй членъ частнаго — $6y^3$; помножая на него дѣлителя и вычитая изъ перваго остатка, получимъ второй остатокъ, въ которомъ за главную букву можно снова принять или x или y и найти третій членъ; такимъ образомъ

$$\begin{array}{r|l}
 6x^6 & -24x^2y^4 - 72xy^5 - 54y^6 \\
 - 6x^6 & -12x^4y^2 - 18x^3y^3 \\
 \hline
 & -12x^4y^2 - 18x^3y^3 - 24x^2y^4 - 72xy^5 - 54y^6 \\
 & \quad + 18x^3y^3 + 36xy^5 + 54y^6 \\
 \hline
 & -12x^4y^2 - 24x^2y^4 - 36xy^5 \\
 & \quad 12x^4y^2 + 24x^2y^4 + 36xy^5 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 3x^3 + 6xy^2 + 9y^3 \\
 2x^3 - 6y^3 - 4xy^2
 \end{array}$$

На томъ же основаніи можно въ томъ же дѣленіи, переходя отъ дѣлимаго къ первому остатку, ко второму, третьему и т. д. опредѣлять то высшіе члены по какой либо буквѣ, то низшіе по той же или по другой буквѣ, т. е. можно одинъ остатокъ расположить по возрастающимъ степенямъ какой нибудь буквы, другой по уменьшающимся степенямъ той же или другой буквы. Эти замѣчанія бываютъ иногда полезны.

§ 33. Въ разсмотрѣнныхъ примѣрахъ послѣдній остатокъ равнялся нулю, т. е. находилось частное, которое выражалось въ видѣ цѣлаго алгебраическаго количества и при умноженіи на дѣлителя давало дѣлимое. Въ этихъ случаяхъ говорятъ, что дѣленіе возможно и совершается безъ остатка. Но при дѣленіи двухъ произвольно взятыхъ цѣлыхъ алгебраическихъ количествъ, дѣлимое бываетъ рѣдко произведеніемъ дѣлителя на цѣлое алгебра-

ическое количество, поэтому ни одинъ изъ остатковъ не можетъ быть равенъ нулю. Въ этихъ случаяхъ говорятъ, что дѣленіе невозможно, и изображаютъ частное въ видѣ дроби, написавъ дѣлителя подъ дѣлимымъ и проводя между ними черту.

Дѣленіе невозможно въ слѣдующихъ случаяхъ:

1. Если высшій членъ дѣлимаго не дѣлится на высшій членъ дѣлителя, или если низшій членъ дѣлимаго не дѣлится на низшій членъ дѣлителя; потому что высшій и низшій члены дѣлимаго должны быть произведеніями двухъ высшихъ и двухъ низшихъ членовъ дѣлителя и частнаго. Напр. $2a^5b + 3a^2b^2 + 7b^5$ не дѣлится на $5a^3b - 3b$, ибо $2a^5b$ не дѣлится на $3a^3b$; $7b^5$ не дѣлится на $3b$, и частное есть $\frac{2a^5b + 3a^2b^2 + 7b^5}{5a^3b - 3b}$.

2. Если дѣлитель содержитъ букву, которой нѣтъ въ дѣлимомъ; потому что на какой бы цѣлый многочленъ не былъ помноженъ дѣлитель, буква эта останется въ произведеніи, и слѣдовательно дѣлимое не получится. Напр. частное отъ дѣленія $4a^2 + 3ab - b^2$ на $2a + bc$ есть $\frac{4a^2 + 3ab - b^2}{2a + bc}$.

3. Если дѣлимое есть мономъ, а дѣлитель полиномъ; дѣленіе невозможно, потому что произведеніе полинома на мономъ или полиномъ есть тоже полиномъ, а не мономъ. Напр. частное $2a^2b$ и $ab + b$ есть $\frac{2a^2b}{ab + b}$.

§ 34. Каждый изъ остатковъ, получаемыхъ при дѣленіи, можетъ быть рассматриваемъ какъ новое дѣлимое; посему въ случаѣ если ни одинъ изъ сказанныхъ признаковъ не обнаруживаетъ невозможности дѣленія при началѣ дѣйствія, то во время самаго дѣйствія одинъ изъ остатковъ обнаружить это или обратится въ нуль.

Дѣйствительно располагая дѣлимое и дѣлителя по уменьшающимся степенямъ главной буквы, высшій показатель этой буквы въ послѣдовательныхъ остаткахъ постоянно уменьшается; посему или дойдемъ до остатка, равнаго нулю, или до такого, въ коемъ показатель главной буквы въ высшемъ членѣ будетъ менѣе показателя той же буквы высшаго члена дѣлителя; тогда высшій членъ остатка не дѣлится, и дѣленіе не возможно.

Примѣръ. $(a^4b^2 - 3a^3b - 4b^5) : (a^2 + 2b)$.

Указанные признаки не обнаруживаютъ невозможности дѣленія, посему нужно производить оное.

Дѣлимое.	$a^4b^2 - 3a^3b - 4b^5$	$a^2 + 2b$ дѣлитель
	$-a^4b^2 - 2a^2b^3$	$a^2b^2 - 3ab - 2b^3$ частн.
1-й остат.	$-3a^3b - 2a^2b^3 - 4b^5$	
	$3a^3b + 6ab^2$	
2-й остат.	$-2a^2b^3 + 6ab^2 - 4b^5$	
	$2a^2b^3 + 4b^4$	
3-й остат.	$6ab^2 + 4b^4 - 4b^5$	

Третій остатокъ обнаруживаетъ невозможность дѣленія, потому что показатель буквы a члена $6ab^2$ этого остатка есть единица, а показатель той же буквы высшаго члена дѣлителя есть 2.

Если дѣлимое и дѣлитель расположены по восходящимъ степенямъ главной буквы, то степень низшаго члена послѣдовательныхъ остатковъ увеличивается, и невозможность дѣленія обнаруживается на основаніи слѣдующаго: послѣдній членъ дѣлимаго есть произведеніе послѣдняго члена дѣлителя на послѣдній членъ (т. е. высшій) частного, въ случаѣ если дѣленіе возможно; посему показатель главной буквы послѣдняго члена дѣлимаго равняется суммѣ показателей той же буквы высшихъ членовъ дѣлителя и частного, или показатель этой буквы высшаго члена частного равняется разности

показателей ея послѣднихъ членовъ дѣлимаго и дѣлителя. Зная изъ этого показатель главной буквы высшаго члена частнаго, должно производить дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится членъ съ показателемъ главной буквы, равнымъ или большимъ сказаннаго. Если при этомъ остатокъ не есть нуль, то дѣленіе невозможно.

Примѣръ. Дѣлимое.	$4 + 4a^3 + 2a^4$	$2 + a^2$ дѣлитель
	$-4 - 2a^2$	$2 - a^2$ частное
1-й остат.	$-2a^2 + 4a^3 + 2a^4$	
	$2a^2 + a^4$	
2-й остат.	$4a^3 + 3a^4$	

Второй остатокъ показываетъ невозможность дѣленія, потому что буква a высшаго члена частнаго не можетъ имѣть показатель большій 2-хъ.

§ 35. При дѣленіи полиномовъ, содержащихъ главную букву (букву, по степенямъ которой располагають дѣлимое и дѣлителя) въ нѣсколькихъ членахъ съ тѣмъ же показателемъ, принимаютъ такіе члены за одинъ членъ, отдѣливъ въ нихъ главную букву съ тѣмъ же показателемъ слѣдующимъ образомъ: если напр. данный полиномъ содержитъ три члена $a^3b^2 - 2a^3b + 5a^3b^3$, гдѣ буква a есть главная, то можно изобразить эти члены такъ: $(b^2 - 2b + 5b^3)a^3$, ибо, производя умноженіе, получимъ данные члены полинома; все это принимаютъ за одинъ членъ, и триномъ $b^2 - 2b + 5b^3$ разсматривають какъ коэффициентъ при a^3 .

Сдѣлавъ это въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, производять дѣленіе какъ въ обыкновенныхъ случаяхъ, ибо правило дѣленія полиномовъ относительно членовъ, содержащихъ высшія степени главной буквы, сохраняется и въ случаѣ если ея коэффициенты будутъ полиномы. Только для полученія коэффициентовъ главной буквы частнаго, дол-

жно на сторонѣ дѣлить коэффициентъ высшаго члена дѣ-
лимаго на коэффициентъ высшаго члена дѣлителя, если
они суть многочлены, принимая при семъ другую букву
за главную; такія дѣленія называются *частными*.

Примѣръ.

$$(4a^4b^2 - 4a^4bc + a^4c^2 - a^2b^4 - 2a^2b^3c - a^2b^2c^2 + \\ + 2ab^5 + 2ab^4c - b^6): \\ (2a^2b - a^2c - ab^2 - abc + b^3).$$

Отдѣливъ a^4 въ трехъ первыхъ членахъ дѣлимаго, a^2 въ
трехъ слѣдующихъ и a въ двухъ предпоследнихъ, будемъ
разсматривать дѣлимое какъ четырехчленное количество.
Такимъ же образомъ отдѣливъ a^2 въ дѣлителѣ въ пер-
выхъ двухъ членахъ и a въ двухъ предпоследнихъ, при-
мемъ дѣлителя за тричленъ. Дѣйствіе располагаютъ слѣ-
дующимъ образомъ:

дѣлимое. $\left\{ \begin{array}{l} 4b^2 \\ -4bc \\ +c^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^4 \\ -b^4 \\ -2b^3c \\ -b^2c^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^2+2b^5 \\ +2b^4c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a-b^6 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2b \\ -c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^2-b^2 \\ -bc \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a+b^3 \end{array} \right\}$	дѣлитель.
произведе- ніе для вы- читанія съ жестк. знаками. $\left\{ \begin{array}{l} +2b^3 \\ +b^2c \\ -bc^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^3-2b^4 \\ +b^3c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^2 \\ +b^3c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2b \\ -c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^2+b^2 \\ +bc \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a-b^3 \end{array} \right\}$	частное.	
1-й остат. $\left\{ \begin{array}{l} 2b^3 \\ +b^2c \\ -bc^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^3-3b^4 \\ -b^3c \\ -b^2c^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^2+2b^5 \\ +2b^4c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a-b^6 \end{array} \right\}$	1-е частное дѣленіе. $\begin{array}{r} 4b^2-4bc+c^2 \quad \quad 2b-c \\ \hline 4b^2+2bc \quad \quad 2b-c \\ \hline -2bc+c^2 \\ 2bc-c^2 \\ \hline 0 \end{array}$			
произведе- ніе съ из- мѣнен. знаками. $\left\{ \begin{array}{l} +b^4 \\ +2b^3c \\ +b^2c^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^2-b^5 \\ b^4c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a \end{array} \right\}$	2-е частное дѣленіе. $\begin{array}{r} 2b^3+b^2c-bc^2 \quad \quad 2b-c \\ \hline 2b^3+b^2c \quad \quad b^2+bc \\ \hline 2b^2c-bc^2 \\ -2b^2c+bc^2 \\ \hline 0 \end{array}$				
2-й остат. $\left\{ \begin{array}{l} -2b^4 \\ +b^3c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a^2+b^5 \\ +b^4c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} a-b^6 \end{array} \right\}$	3-й остат. $\begin{array}{r} -b^5 \\ -b^4c \end{array} \quad \quad a+b^6$				
произведе- ніе съ из- мѣнен. знаками. $\left\{ \begin{array}{l} -b^5 \\ -b^4c \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 \end{array} \right\}$	3-й остат. $\begin{array}{r} -b^5 \\ -b^4c \end{array} \quad \quad a+b^6$					

Вертикальныя черты въ дѣлимомъ и дѣлителѣ замѣняютъ скобки. Члены, поставленные въ вертикальныхъ столбцахъ слѣва черты, суть многочленные коэффициенты соотвѣтственныхъ степеней буквы a , стоящихъ справа черты.

Раздѣляя коэффициентъ a^4 , —высшей степени a въ дѣлимомъ, на коэффициентъ a^2 , высшей степени a въ дѣлителѣ (1-е частное дѣленіе), получаемъ коэффициентъ высшаго члена частного. Помножая на этотъ членъ всѣ члены дѣлителя кромѣ высшаго (извѣстно, что произведеніе его на высшій членъ частного даетъ высшій членъ дѣлимаго), подписывая члены съ одинаковыми степенями буквы a подъ соотвѣтствующими членами дѣлимаго съ обратными знаками и потомъ дѣлая приведеніе, получимъ первый остатокъ, съ которымъ поступаемъ такимъ же образомъ.

Частное и каждый изъ остатковъ располагаютъ точно такъ же, какъ дѣлимое и дѣлителя.

Дѣленіе многозначнаго цѣлаго числа на многозначное есть частный случай дѣленія полинома вида

$$Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Fx^3 + Gx^2 + Hx + K$$

на полиномъ

$$ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + fx^3 + gx^2 + hx + k \text{ при } x = 10.$$

Коэффициенты $a, b, \dots, f, g, h, k$, суть цифры дѣлителя, n число цифръ его.

Коэффициенты $A, B, \dots, F, G, H, K$ суть только въ частномъ случаѣ цифры дѣлимаго, тогда m есть число цифръ дѣлимаго, и дѣленіе алгебраическое представляетъ полную аналогію съ дѣленіемъ ариѳметическимъ.

Вообще же коэффициенты $A, B, \dots, F, G, H, K$ суть нѣкоторыя цѣлыя числа, опредѣляемые слѣдующимъ образомъ по дѣлителю, частному и остатку ариѳметическаго дѣленія: изобразивъ частное въ видѣ алгебраическаго количества вида

$$a_1x^{p-1} + b_1x^{p-2} + \dots + h_1x + k_1,$$

гдѣ $a_1, b_1, \dots, h_1, k_1$ суть цифры частного, p число ихъ, $x = 10$, помножимъ его на полиномъ дѣлитель и къ произведенію придадимъ остатокъ ариѳметическаго дѣленія; чрезъ это получится дѣлимый полиномъ съ его коэффициентами, который обратится въ дѣлимое число при $x = 10$.

Различіе дѣйствій ариѳметическаго и алгебраическаго дѣленія произойдетъ только въ томъ, что коэффициенты каждаго изъ остатковъ алгебраическаго дѣленія могутъ быть больше 10, между тѣмъ какъ цифры остатковъ ариѳметическаго дѣленія необходимо меньше 10.

Примѣръ полной аналогіи дѣйствій:

$$\begin{array}{r|l}
 485163 & 23103 \\
 46206 & 21 \\
 \hline
 23103 & \\
 23103 & \\
 \hline
 0. & 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 4x^5+8x^4+5x^3+x^2+6x+3 \\
 -4x^5-6x^4-2x^3-0x^2-6x \\
 \hline
 2x^4+3x^3+x^2+0.x+3 \\
 -2x^4-3x^3-x^2-0.x-3 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2x^4+3x^3+x^2+0.x+3 \\
 2x+1 \\
 \hline
 2x+1
 \end{array}$$

Примѣръ различія дѣйствій:

$$\begin{array}{r|l}
 78322 & 321 \\
 642 & 243 \\
 \hline
 1412 & \\
 1284 & \\
 \hline
 1282 & \\
 963 & \\
 \hline
 319 & 319.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 6x^4+16x^3+19x^2+10x+322 \\
 -6x^4-4x^3-2x^2 \\
 \hline
 12x^3+17x^2+10x+322 \\
 -12x^3-8x^2-4x \\
 \hline
 9x^2+6x+322 \\
 -9x^2-6x-3 \\
 \hline
 319.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 3x^2+2x+1 \\
 2x^2+4x+3 \\
 \hline
 2x^2+4x+3
 \end{array}$$

У п р а ж н е н і я.

1. $(4a^3b^4 - 6a^5b^3 + 2a^3b^2) : 2a^3b^2$.
2. $(a^3 - 2ab^2 + b^3) : (a - b)$.
3. $(a^3 - 2a^2b - 3ab^2) : (a + b)$.
4. $(3x^3 + 4abx^2 - 4a^3b^3 - 6a^2b^2x) : (x + 2ab)$.
5. $(x^6 - 4x^4 + 6x^2 - 3) : (x^2 - 1)$.
6. $(2a^7b - 5a^6b^2 - 11a^5b^3 + 5a^4b^4 - 26a^3b^5 + 7a^2b^6 - 12ab^7) : (a^4 - 4a^3b + a^2b^2 - 3ab^3)$.
7. $((a^2 - bc)^3 + 8b^3c^3) : (a^2 + bc)$.
8. $(1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6) : (1 - 3x + 3x^2 - x^3)$.
9. $(64x^6 - y^6) : (2x - y)$.
10. $(a^6 - b^6) : (a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)$.
11. $(40an^4 + 49a^3n^3 - 65a^2n^3 - 25a^4n + 6a^5 - 25a^5) : (5an^2 + 3a^3 - 8a^2n - 5n^3)$.
12. $((a^3 + b^3)^2 + 2a^2b(a^3 - a^2b - b^3)) : (a^2 + b^2)$.
13. $(x^2 - x - 1)(2x^2 + 3)(x^2 + x - 1)(x - 4) : (x^4 - 3x^2 + 1)$.

14. $(a^2b - bx^2 + a^2x - x^3) : (x + b)(a - x)$.

15. $(y^{pq} - 1) : (y^q - 1)$.

16. Раздѣлить произведеніе количествъ $a^2 + ax + x^2$ и $a^3 + x^3$ на $a^4 + a^2x^2 + x^4$.

17. Доказать посредствомъ дѣленія, что произведеніе количествъ $6x^2 - 4xy - y^2$ и $12x^2 - 5xy - 3y^2$ есть $72x^4 - 78a^3y - 10x^2y^2 + 17xy^3 + 3y^4$.

18. Во сколько разъ разность кубовъ количествъ $2x^2 - 3x$ и $a^2 - b$ превышаетъ разность ихъ самихъ.

19. При дѣленіи нѣкотораго количества на произведеніе полиномовъ $x^3 - x^2 + 1$ и $x^2 - 1$, получается въ частномъ разность перваго полинома безъ втораго, а въ остаткѣ сумма ихъ. Найти это количество.

20. $(6a^2b + 11abc - 3a^2c - 4ab^2 - 6b^2c) : (2ab + 3bc - ac)$.

21. $(12a^3b^2 - 27a^3c^2 + 2a^2b^2c + 3a^2bc^2 - 6ab^2c + 9abc^2 - b^2c^2) : (2a^2b + 3a^2c + bc)$.

22. $(4a^3b^2 - a^3c^2 - 16a^2b^3 + 4a^2b^2c + 2a^2bc^2 - 2a^2c^2 + 32ab^4 - 8ab^3c - 4ab^2c^2 + 2abc^3 - ac^4 - 32b^5 + 16b^4c + 8b^3c^2 - 4b^2c^3) : (2ab + ac - 4b^2 + c^2)$.

23.
$$\left. \begin{array}{ccc|ccc} a^3 & x^5 + 3a^4 & x^4 + a^4b & x^3 - 3a^6 & x^2 + a^7 & x - 3a^5b^3 \\ -3a^2b & -5a^3b & -4a^3b^2 & + 5a^5b & + a^5b^2 & + 2a^3b^4 \\ +3ab^2 & +2a^2b^2 & -2a^2b^3 & +10a^3b^3 & +2a^4b^3 & +3a^2b^6 \\ -b^3 & -3ab^3 & +3ab^4 & -3a^2b^4 & -6a^3b^4 & -2ab^7 \\ & +3b^4 & +4b^5 & +ab^5 & -2a^2b^5 & \\ & & & -5b^6 & +2ab^6 & \\ & & & & +b^7 & \end{array} \right\} \text{дѣленіе.}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} a^2 & x^3 + 2a^3 & x^2 - a^4 & x + 3a^2b^3 & & \\ -2ab & -4b^3 & -a^2b^2 & -2ab^4 & & \\ +b^2 & & +b^4 & & & \end{array} \right\} \text{дѣленіе.}$$

Объ извлеченіи корня изъ мономовъ. Корень квадратный полиномовъ.

§ 36. Дѣйствіе, которымъ по данному произведенію равныхъ производителей и по числу, показывающему сколь-

ко ихъ, находится производитель, называется *извлеченіемъ корня*.

Произведеніе равныхъ производителей называется *степенью*, искомымъ производитель — *корнемъ*; слѣдовательно извлеченіе корня есть опредѣленіе корня по степени.

Это дѣйствіе, какъ выше сказано, изображается кореннымъ знакомъ $\sqrt{}$, который ставится съ лѣвой стороны количества, изъ коего должно извлечь корень. — Надъ этимъ знакомъ помѣщаютъ число, показывающее сколько равныхъ производителей, или какая степень находится подъ кореннымъ знакомъ. Напр. $\sqrt[3]{}$ означаетъ, что подъ кореннымъ знакомъ находится кубъ и называется *кубическимъ корнемъ*, число 3 — *показателемъ корня*; $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[n]{}$ означаютъ, что подъ кореннымъ знакомъ находится четвертая, пятая, n -я степень искомаго количества, числа 4, 5, n суть показатели корня.

§ 37. Извлеченіе корня изъ мономовъ основано на слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ.

1. Для извлеченія корня изъ произведенія должно извлечь его изъ каждаго производителя отдѣльно, то есть корень изъ произведенія равняется произведенію корней изъ производителей; потому что извлеченіе корня есть дѣйствіе обратное возведенію въ степень, при возведеніи же въ степень произведенія по § 18 возводятъ каждаго производителя отдѣльно. Напр.

$$\sqrt[5]{a^{40}b^{20}} = \sqrt[5]{a^{40}} \sqrt[5]{b^{20}},$$

ибо

$$\left(\sqrt[5]{a^{40}} \sqrt[5]{b^{20}}\right)^5 = \left(\sqrt[5]{a^{40}}\right)^5 \left(\sqrt[5]{b^{20}}\right)^5 = a^{40}b^{20}.$$

2. Для извлеченія корня изъ степени однобуквеннаго количества должно показателя степени дѣлить на показателя корня, потому что по § 18 при возведеніи степени въ новую степень, должно показателей пере-

множить между собою. Напр. $\sqrt[5]{a^{10}} = a^2$, ибо $(a^2)^5 = a^{10}$;
 $\sqrt[5]{b^{20}} = b^4$, ибо $(b^4)^5 = b^{20}$.

Каждый цѣлый мономъ можетъ состоять только изъ произведенія коэффициента и разныхъ степеней однобуквенныхъ количествъ, посему для извлеченія корня изъ монома должно извлечь корень изъ коэффициента и раздѣлить показателя каждой буквы на показателя корня. Напр.

$$\sqrt[5]{32a^{10}b^{20}} = \sqrt[5]{32} \sqrt[5]{a^{10}} \sqrt[5]{b^{20}} = 2a^2b^4,$$

$$\sqrt[5]{64a^{12}b^2c^{10}} = 8a^6bc^5, \quad \sqrt[3]{27x^{27}y^{24}z^3} = 3x^9y^8z.$$

Корня нельзя извлечь изъ монома, если нельзя извлечь корня изъ его коэффициента, или если показатель одной изъ буквъ монома не дѣлится на показателя корня. Напр.

$$\sqrt[5]{7a^2b}, \sqrt[5]{5a^2}, \sqrt[5]{c}.$$

Выраженія такого рода не могутъ быть представлены безъ кореннаго знака и называются *ирраціональными, неизвлекаемыми*.

§ 38. При извлеченіи корня изъ полинома, возведеннаго въ степень, или изъ произведенія степеней мономовъ и полиномовъ, когда при возведеніи въ степень раскрытіе скобокъ не произведено, а дѣйствіе только означено по § 18, должно поступать какъ и при извлеченіи корня изъ мономовъ на тѣхъ же основаніяхъ, т. е. должно извлечь корень изъ коэффициента и дѣлить показателя cadaго полинома на показателя корня. Напр.

$$\sqrt{4(a+b)^2(c^2f-d)^4} = 2(a+b)(c^2f-d)^2,$$

$$\sqrt[5]{243(a+b^2c)^5(d+e-k)^{25}} = 3(a+b^2c)(d+e-k)^5,$$

$$\sqrt[6]{a^{12}(c+d)^{36}} = a^2(c+d)^6.$$

§ 39. Если же въ степени полинома, стоящей подъ кореннымъ знакомъ, раскрытіе скобокъ произведено, то въ большинствѣ случаевъ трудно прямо найти корень, степень котораго находится подъ кореннымъ знакомъ.

Разсмотримъ способъ опредѣленія членовъ полинома по квадрату его, въ коемъ раскрытіе скобокъ сдѣлано, т. е. способъ извлеченія квадратнаго корня.

Данный квадратъ по теоремѣ § 19 содержитъ сумму квадратовъ всѣхъ членовъ искомаго корня, увеличенную суммою удвоенныхъ произведеній членовъ корня, взятыхъ по два.

Высшій по какой нибудь буквѣ членъ квадрата есть квадратъ высшаго по той же буквѣ члена корня.

Посему выбирая въ квадратѣ высшій по какой либо буквѣ членъ и извлекая изъ него квадратный корень, получимъ высшій по той же буквѣ членъ корня.

Вычитая изъ даннаго квадрата квадратъ найденнаго высшаго члена корня, получимъ первый остатокъ.

Первый остатокъ содержитъ въ себѣ удвоенное произведеніе найденнаго высшаго члена корня на сумму всѣхъ остальныхъ еще ненайденныхъ членовъ его, сумму удвоенныхъ произведеній ненайденныхъ членовъ корня, взятыхъ по два, и сумму квадратовъ ненайденныхъ членовъ корня.

Высшій членъ остатка есть удвоенное произведеніе высшаго члена корня на второй членъ его, т. е. на высшій изъ всѣхъ еще ненайденныхъ членовъ корня, потому что каждый членъ остатка есть произведеніе двухъ членовъ корня; произведеніе же двухъ высшихъ членовъ есть очевидно высшій членъ остатка.

Посему раздѣляя высшій членъ перваго остатка на удвоенный высшій (найденный) членъ корня, найдемъ второй членъ его.

Вычитая изъ перваго остатка квадратъ втораго члена

корня и удвоенное произведение двухъ найденныхъ членовъ, получимъ второй остатокъ.

Второй остатокъ содержитъ удвоенное произведение высшаго члена корня на сумму ненайденныхъ членовъ его, второго члена корня на ту же сумму, сумму удвоенныхъ произведений ненайденныхъ членовъ корня и суммѣ квадратовъ послѣднихъ.

Высшій членъ второго остатка есть удвоенное произведение высшаго члена корня (найденнаго) на высшій изъ всѣхъ еще ненайденныхъ членовъ его.

Посему раздѣляя высшій членъ второго остатка на удвоенный высшій членъ корня, получимъ третій членъ.

Продолжая поступать такимъ же образомъ, найдемъ всѣ члены корня.

Когда послѣдній членъ корня найденъ, то вычитая изъ остатка квадратъ этого члена и сумму удвоенныхъ произведений его на каждый изъ остальныхъ членовъ корня, получимъ въ остаткѣ нуль, ибо отъ даннаго квадрата отняты уже всѣ члены послѣдовательно, то есть отнять весь квадратъ.

§ 40. Изъ § 20 видно, что если знаки всѣхъ членовъ корня переменить въ обратные, то квадратъ этого корня не измѣнится, потому что знакъ члена квадрата, содержащаго два произволителя одинакаго знака, есть $+$, а содержащаго два произволителя разныхъ знаковъ $-$. Посему извлекая квадратный корень изъ высшаго члена квадрата, можно получаемый высшій членъ корня считать или положительнымъ или отрицательнымъ.

Принимая высшій членъ положительнымъ и раздѣляя для полученія второго, третьяго и т. д. членовъ корня высшій членъ перваго, второго и т. д. остатковъ на удвоенный высшій членъ корня, должно получаемый членъ считать имѣющимъ знакъ одинаковый съ знакомъ высшаго члена остатка, отъ дѣленія котораго членъ корня получается.

Принимая высшій членъ отрицательнымъ и раздѣляя для полученія втораго, третьяго и т. д. членовъ корня высшій членъ перваго, втораго и т. д. остатковъ на удвоенный высшій членъ корня, должно получаемый членъ считать имѣющимъ знакъ различный съ знакомъ высшаго члена остатка, отъ дѣленія котораго членъ корня получается.

Отсюда видно, что когда по квадрату полинома требуется найти корень, то члены корня опредѣляются, знаки же ихъ зависятъ отъ знака одного изъ членовъ его.

§ 41. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что при извлеченіи квадратнаго корня изъ полинома должно расположить квадратъ по уменьшающимся степенямъ какой либо буквы и извлечь корень изъ перваго члена его, получимъ первый членъ корня. Вычитая квадратъ перваго члена корня изъ полинома, получимъ первый остатокъ. Раздѣляя первый членъ этого остатка на удвоенный первый членъ корня, получимъ второй членъ корня. Вычитая изъ перваго остатка удвоенное произведение двухъ первыхъ членовъ корня и квадратъ втораго члена, получимъ второй остатокъ. Раздѣляя первый членъ втораго остатка на удвоенный первый членъ корня, получимъ третій членъ корня и т. д. Дѣйствіе кончается, когда въ остаткѣ получимъ нуль.

Принимая первый членъ корня положительнымъ, знаки остальныхъ членовъ его опредѣляются по такому же правилу знаковъ, какъ и при дѣленіи (§ 31).

Примѣръ 1-й.

		корень.
квадратъ	$9a^4 - 12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$ $- 9a^4$	$3a^2 - 2ab + 5b^2$
1-й ост.	$-12a^3b + 34a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$ $12a^3b - 4a^2b^2$	$[6a^2 - 2ab][- 2ab]$
2-й ост.	$30a^2b^2 - 20ab^3 + 25b^4$ $- 30a^2b^2 + 20ab^3 - 25b^4$	$6a^2 - 4ab + 5b^2$ $\times 5b^2$
3-й ост.	0	

Во всѣхъ этихъ случаяхъ корень изъ такого полинома называется ирраціональнымъ, неизвлекаемымъ.

У п р а ж н е н і я.

1. $\sqrt[m]{a^{mn}}$.
2. $\sqrt[m]{a^{mn}b^{mp}}$.
3. $\sqrt{64x^4m^6}$.
4. $\sqrt[5]{32a^{20}b^{10}c^5}$.
5. $\sqrt{956484a^{10}b^4}$.
6. $\sqrt[3]{27a^9b^{27}c^3}$.
7. $\sqrt{4096a^{2m+2p}b^2}$.
8. $\sqrt[m]{x^{2m+mn}y^{qm}z^{5mn}}$.
9. $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$.
10. $\sqrt{f^6 + 6f^3x^4 + 9x^8}$.
11. $\sqrt{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$.
12. $\sqrt{25a^4b^2 - 30a^3b^3 + 29a^2b^4 - 12ab^5 + 4b^6}$.
13. $\sqrt{x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 - 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6}$.
14. $\sqrt{(a-2b)^2x^4 - 2a(a-2b)x^3 + (a^2 + 4ab - 6a - 8b^2 + 12b)x^2 - (4ab - 6a)x + 4b^2 - 12a + 9}$.
15. $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$.
16. $\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$.
17. $\sqrt[3]{1 + 3x + 3x^2 + x^3}$.
18. $\sqrt[3]{x^6 - 6cx^5 + 12c^2x^4 - 8c^3x^3}$.

О дѣлимости цѣлыхъ алгебраическихъ количествъ.

§ 43. Алгебраическія количества называются *кратными* между собою, если одно изъ нихъ дѣлится на всѣ остальные. Напр. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $a + b$; $a^2 + 2ab + b^2$

суть кратныя количества, ибо первое дѣлится на второе и третье.

Когда цѣлое алгебраическое количество не имѣетъ цѣлаго дѣлителя, кромѣ единицы и самаго себя, то оно называется *первоначальнымъ* или *простымъ* количествомъ. Напр. $a - b^2$; $x^2 - x + 1$ суть первоначальныя количества, ибо не имѣютъ дѣлителей, кромѣ единицы и самаго себя. Въ противномъ случаѣ количество называется *составнымъ*.

Два или нѣсколько цѣлыхъ количествъ называются *первыми между собою*, или *взаимно простыми*, если не имѣютъ общихъ цѣлыхъ дѣлителей, кромѣ единицы. Напр. $a^2 - b^2$ и $4a^2 - 9b^2$ суть количества первыя между собою, ибо $a^2 - b^2$ имѣетъ дѣлителями $a - b$ и $a + b$; $4a^2 - 9b^2$ имѣетъ дѣлителями $2a - 3b$ и $2a + 3b$. Въ противномъ случаѣ количества называются *непервыми между собою*.

§ 44. Опредѣленіе дѣлителей или производителей алгебраическихъ количествъ основано на слѣдующихъ признакахъ дѣлимости.

ТЕОРЕМА 1. Если нѣсколько алгебраическихъ количествъ имѣютъ общій множитель или дѣлитель, то и сумма или разность ихъ имѣетъ тотъ же множитель или дѣлитель.

Доказ. Означивъ для краткости алгебраическія количества буквами $A, B, C, \dots$, положимъ, что каждое изъ нихъ дѣлится на количество D и отъ дѣленія происходятъ частныя $q, q_1, q_2, \dots$, послѣдовательно; тогда

$$A = Dq; \quad B = Dq_1; \quad C = Dq_2, \dots,$$

и сумма

$$A + B + C + \dots = Dq + Dq_1 + Dq_2 + \dots,$$

или

$$A + B + C + \dots = D [q + q_1 + q_2 + \dots]$$

очевидно дѣлится на D .

Такимъ же образомъ можно доказать предложеніе для разности напр. количества A и суммы остальныхъ.

Примѣръ.

Количества $a^3 + b^3$ и $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ дѣлятся на $a + b$, посему и сумма ихъ $2a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2b^3$ и разность второго безъ перваго $3a^2b + 3ab^2$ тоже дѣлится на $a + b$.

ТЕОРЕМА 2. Если сумма или разность двухъ количествъ дѣлится на какое либо количество и одно изъ нихъ дѣлится, то и другое должно дѣлиться.

Доказ. Означая количества чрезъ A и B , положимъ, что A дѣлится на D и частное этого дѣленія пусть будетъ q ; сумма $A + B$ тоже дѣлится на D и частное этого дѣленія означимъ чрезъ k ; тогда

$$A = Dq; \quad A + B = Dk;$$

нужно доказать, что количество B дѣлится на D .

Отнимая отъ двухъ равныхъ количествъ $A + B$ и Dk по A , получимъ равныя: $B = Dk - A$, или $B = Dk - Dq$; количества Dk и Dq дѣлятся на D , слѣдовательно и разность ихъ B (по теоремѣ 1) тоже дѣлится на D .

Такимъ же образомъ, полагая

$$A = Dq; \quad B - A = Dh$$

и придавая къ $B - A$ и Dh по A , получимъ $B = Dh + A$, или $B = Dh + Dq$; но Dh и Dq дѣлятся на D , слѣдовательно и сумма ихъ B (по теоремѣ 1) тоже дѣлится на D .

Примѣръ.

Количество $a^3 + a^2c - abc + a^2b - b^2c - bc^2$ дѣлится на $a^2 - bc$, и часть его $a^2b - b^2c$ тоже дѣлится на $a^2 - bc$, посему и другая часть $a^3 + a^2c - abc - bc^2$ должна дѣлиться на $a^2 - bc$.

ТЕОРЕМА 3. Произведеніе нѣсколькихъ количествъ дѣлится на какое либо количество, если одно изъ нихъ дѣлится.

Доказ. Означая количества буквами A, B, C и полагая, что B дѣлится на количество D , докажемъ, что произведеніе ABC тоже дѣлится на D .

Пусть частное отъ дѣленія B на D есть q , то есть $B = Dq$; тогда $ABC = ADqC$ очевидно раздѣлится на D .

Слѣдствіе 1. *Всякая степень дѣлится на свой корень, ибо корень есть производитель своей степени.*

Въ этихъ случаяхъ, не производя дѣленія, легко составить частное, зная, какъ составляются степени (§§ 19 и 20).

Примѣры.

Если замѣтимъ, что дѣлимое есть квадратъ дѣлителя, то частное равно дѣлителю:

$$1. [a^2 + 2ab + b^2] : [a + b] = a + b.$$

$$2. [4a^4c^2 + 12a^2c^4 + 9c^6] : [2a^2c + 3c^3] = 2a^2c + 3c^3.$$

$$3. [a^2 - 2ab + b^2] : [a - b] = a - b.$$

$$4. [4a^2 - 12ax + 9x^2] : [2a - 3x] = 2a - 3x.$$

$$5. [a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc] : [a + b + c] = a + b + c.$$

$$6. (4a^2 + c^2 + d^6 + 9h^2 + 4ac + 4ad^3 + 12ah + 2cd^3 + 6ch + 6d^3h) : (2a + c + d^3 + 3h) = 2a + c + d^3 + 3h.$$

Если дѣлимое есть кубъ дѣлителя:

$$1. [a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3] : [a + b] = [a + b]^3 : [a + b] = [a + b]^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$2. [a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3] : [a - b] = [a - b]^3 : [a - b] = [a - b]^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$3. [8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3] : [2a - b] = [2a - b]^3 : [2a - b] = [2a - b]^2 = 4a^2 - 4ab + b^2.$$

Слѣдствіе 2. *Степень какого либо количества дѣлится на меньшую степень того же количества.*

Примѣры.

Дѣлимое кубъ, дѣлитель квадратъ того же количества:

$$1. (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a^2 + 2ab + b^2) = (a + b)^3 : (a + b)^2 = a + b.$$

$$2. (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a^2 - 2ab + b^2) = \\ = (a - b)^3 : (a - b)^2 = a - b.$$

$$3. (x^3 + 3x - 3x^2 - 1) : (x^2 - 2x + 1) = (x - 1)^3 : (x - 1)^2 = \\ = x - 1.$$

ТЕОРЕМА 4. Если полиномъ, расположенный по степенямъ какой либо буквы, дѣлится на количество, не зависящее отъ этой буквы, то коэффициентъ каждой степени этой буквы долженъ отдѣльно дѣлиться на это количество.

Доказ. Пусть $Ma^m + Na^p + Pa^r + \dots$ будетъ частное отъ дѣленія полинома A , расположеннаго по степенямъ буквы a , на количество F , не содержащее a ; тогда $A = MFa^m + NFa^p + PFa^r + \dots$

Но такъ какъ F не заключаетъ въ себѣ a , то нельзя сдѣлать приведеніе между членами, слѣдовательно каждый коэффициентъ сохраняетъ производителя F и дѣлится на него по теоремѣ 3.

Примѣръ.

Полиномъ $(x^2 + 2xy + y^2)a^3 - (x^4 - y^4)a^2 + (xy + y^2)a + x^3 + x^2y^2 - x^2 + x^2y + xy^3 - xy$ дѣлится на $x + y$, поэтому необходимо каждый изъ коэффициентовъ степени a долженъ дѣлиться на $x + y$.

Слѣдствіе. Чтобы найти частное дѣленія полиномовъ, изъ коихъ дѣлимое расположено по буквъ, которой нѣтъ въ дѣлителѣ, должно только раздѣлить каждый изъ коэффициентовъ дѣлимаго на дѣлителя отдѣльно.

Такъ частное дѣленія указанныхъ полиномовъ есть $(x + y)a^3 - (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)a^2 + ay + x^2 + xy^2 - x$.

ТЕОРЕМА 5. Если дѣлимое и дѣлитель дѣлятся на какое либо количество, то и остатокъ дѣленія тоже раздѣлится на это количество.

Доказ. Означимъ дѣлимое чрезъ A , дѣлителя чрезъ B ; пусть остатокъ дѣленія A на B есть R , а частное Q ; тогда $A = BQ + R$.

Если A и B дѣлятся на какое либо количество, то (по теоремѣ 3) и BQ дѣлится на это количество, ибо B дѣлится. Если же A и BQ дѣлятся, то (по теоремѣ 2) и R должно тоже дѣлиться.

Примѣръ.

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ дѣлится на $a - b$,

$a^2 - b^2$ тоже дѣлится на $a - b$,

посему и остатокъ дѣленія $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ на $a^2 - b^2$, равный $4ab^2 - 4b^3$, долженъ дѣлиться на $a - b$.

ТЕОРЕМА 6. *Отъ дѣленія полинома, расположеннаго по степенямъ какой либо буквы x , на двучленъ вида $x - a$, получается въ остаткъ то количество, въ которое обратится данный полиномъ, если въ немъ поставитъ a вмѣсто x .*

Доказ. Пусть X есть полиномъ, расположенный по уменьшающимся степенямъ x . Означимъ чрезъ Q частное дѣленія X на $x - a$ и чрезъ R остатокъ, тогда

$$X = Q(x - a) + R.$$

Это равенство должно существовать при всякомъ числовомъ значеніи x , слѣдовательно и при $x = a$; количество R не содержитъ x , какъ остатокъ дѣленія на $x - a$, и по этому R одинаково при всякомъ значеніи x . При $x = a$ количество $x - a = 0$, слѣдовательно и $Q(x - a) = 0$; посему, означая чрезъ A количество, въ которое обратится полиномъ X при $x = a$, получимъ $A = R$, то есть при всякомъ x

$$X = Q(x - a) + A.$$

Примѣръ.

Остатокъ дѣленія полинома

$y^5 + by^4 - b^2y^3 - ay^2 + ab^2$ на $y - b$ есть $b^5 + b^5 - b^5 - ab^2 + ab^2$, или b^5 .

Слѣдствіе 1. *Если полиномъ, расположенный по степенямъ x , обращается въ нуль при частномъ значеніи $x = a$, то онъ дѣлится на $x - a$; ибо въ этомъ случаѣ остатокъ дѣленія необходимо равенъ нулю.*

Примѣръ.

Полиномъ $x^5 + kx^4 - k^2x^3 - kx^2 + nk^2 - k^5$ обращается въ нуль при $x = k$ и посему дѣлится на $x - k$.

Слѣдствіе 2. Если полиномъ, расположенный по степенямъ x , не обращается въ нуль при частномъ значеніи $x = a$, то онъ не дѣлится на $x - a$; ибо въ этомъ случаѣ остатокъ дѣленія необходимо равенъ количеству, въ которое обращается полиномъ при $x = a$.

Примѣръ.

Полиномъ $5x^4 + 3x^2 - 2x + 8$ не обращается въ нуль при $x = 2$, посему не дѣлится на $x - 2$, и остатокъ дѣленія будетъ $5 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 8 = 96$.

На основаніи этой теоремы легко составить остатокъ дѣленія указаннаго полинома на $x - a$, не производя дѣйствія; частное же этого дѣленія можетъ быть составлено по закону, который обнаружится, производя дѣйствіе на самомъ дѣлѣ.

Пусть полиномъ дѣлимый есть

$$Ax^m + Bx^{m-1} - Cx^{m-2} - Dx^{m-3} + \dots - Hx + K,$$

гдѣ буквы $A, B, C, D, \dots, H, K$ суть коэффициенты разныхъ степеней x , имѣющіе предъ собою знаки $+$ или $-$.

Дѣл. $Ax^m + Bx^{m-1} - Cx^{m-2} - Dx^{m-3} + \dots - Hx + K$ на $x - a$ дѣл.

$$-Ax^m + Aax^{m-1}$$

1-й ост. { <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Aa</td> <td style="padding: 5px;">$x^{m-1} -$</td> <td style="padding: 5px;">$Cx^{m-2} - \dots$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$+B$</td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$-Aa$</td> <td style="padding: 5px;">$x^{m-1} + Aa^2$</td> <td style="padding: 5px;">x^{m-2}</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$-B$</td> <td style="padding: 5px;">$+Ba$</td> <td></td> </tr> </table>	Aa	$x^{m-1} -$	$Cx^{m-2} - \dots$	$+B$			$-Aa$	$x^{m-1} + Aa^2$	x^{m-2}	$-B$	$+Ba$		2-й ост. { <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Aa^2</td> <td style="padding: 5px;">$x^{m-2} -$</td> <td style="padding: 5px;">$Dx^{m-3} + \dots$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$+Ba$</td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$-C$</td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$-Aa^2$</td> <td style="padding: 5px;">$x^{m-2} + Aa^3$</td> <td style="padding: 5px;">x^{m-3}</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$-Ba$</td> <td style="padding: 5px;">$+Ba^2$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$+C$</td> <td style="padding: 5px;">$-Ca$</td> <td></td> </tr> </table>	Aa^2	$x^{m-2} -$	$Dx^{m-3} + \dots$	$+Ba$			$-C$			$-Aa^2$	$x^{m-2} + Aa^3$	x^{m-3}	$-Ba$	$+Ba^2$		$+C$	$-Ca$		3-й ост. { <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">Aa^3</td> <td style="padding: 5px;">$x^{m-3} + \dots - Hx + K$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$+Ba^2$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$-Ca$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$-D$</td> <td></td> </tr> </table>	Aa^3	$x^{m-3} + \dots - Hx + K$	$+Ba^2$		$-Ca$		$-D$		и т. далѣе. <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$Ax^{m-1} + Aa$</td> <td style="padding: 5px;">$x^{m-2} + Aa^2$</td> <td style="padding: 5px;">$x^{m-3} + Aa^3$</td> <td style="padding: 5px;">$x^{m-4} + \dots$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$+B$</td> <td style="padding: 5px;">$+Ba$</td> <td style="padding: 5px;">$+Ba^2$</td> <td style="padding: 5px;">$+Ba^3$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$-C$</td> <td style="padding: 5px;">$-Ca$</td> <td style="padding: 5px;">$-Ca^2$</td> <td style="padding: 5px;">$-Ca^3$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$+D$</td> <td style="padding: 5px;">$+Da$</td> <td style="padding: 5px;">$+Da^2$</td> <td style="padding: 5px;">$+Da^3$</td> </tr> </table>	$Ax^{m-1} + Aa$	$x^{m-2} + Aa^2$	$x^{m-3} + Aa^3$	$x^{m-4} + \dots$	$+B$	$+Ba$	$+Ba^2$	$+Ba^3$	$-C$	$-Ca$	$-Ca^2$	$-Ca^3$	$+D$	$+Da$	$+Da^2$	$+Da^3$
Aa	$x^{m-1} -$	$Cx^{m-2} - \dots$																																																							
$+B$																																																									
$-Aa$	$x^{m-1} + Aa^2$	x^{m-2}																																																							
$-B$	$+Ba$																																																								
Aa^2	$x^{m-2} -$	$Dx^{m-3} + \dots$																																																							
$+Ba$																																																									
$-C$																																																									
$-Aa^2$	$x^{m-2} + Aa^3$	x^{m-3}																																																							
$-Ba$	$+Ba^2$																																																								
$+C$	$-Ca$																																																								
Aa^3	$x^{m-3} + \dots - Hx + K$																																																								
$+Ba^2$																																																									
$-Ca$																																																									
$-D$																																																									
$Ax^{m-1} + Aa$	$x^{m-2} + Aa^2$	$x^{m-3} + Aa^3$	$x^{m-4} + \dots$																																																						
$+B$	$+Ba$	$+Ba^2$	$+Ba^3$																																																						
$-C$	$-Ca$	$-Ca^2$	$-Ca^3$																																																						
$+D$	$+Da$	$+Da^2$	$+Da^3$																																																						

Разсматривая со вниманіемъ частное этого дѣленія, легко замѣтить, что оно расположено по уменьшающимся степенямъ буквы x , высшая степень которой есть $m-1$. Коэффициентъ перваго члена частнаго есть коэффициентъ перваго члена дѣлимаго. Чтобы получить коэффициентъ втораго члена частнаго, должно помножить коэффициентъ перваго на a и къ произведенію придать или отъ него отнять коэффициентъ втораго члена дѣлимаго, смотря по знаку послѣдняго. Чтобы получить коэффициентъ третьяго члена частнаго, должно составленный коэффициентъ втораго помножить на a и къ произведенію придать или отъ него отнять коэффициентъ третьяго члена дѣлимаго, и т. д. продолжать до полученія коэффициента при нулевой степени x .

Если дѣлимое не содержитъ нѣкоторыхъ степеней x , нужно дополнить его недостающими степенями, давая послѣднимъ коэффициентъ равный нулю.

Примѣръ.

Найти частное дѣленія полинома $3x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 12$ на $x - 3$. Написавъ дѣлимое въ такомъ видѣ:

$$3x^5 - 4x^4 + 0.x^3 + 2x^2 + 0.x - 12$$

и составляя частное по сказанному закону, получимъ

$$3x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 47x + 141.$$

Остатокъ дѣленія есть 411.

ТЕОРЕМА 7. *Разность цѣлыхъ и равныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на разность ихъ корней.*

Доказ. Означимъ чрезъ a и b два какія либо количества и докажемъ, что разность m -хъ степеней ихъ $a^m - b^m$ дѣлится на $a - b$.

Раздѣляя $a^m - b^m$ на $a - b$, получимъ:

Дѣлимое.	$a^m - b^m$	$a - b$ Дѣлитель.
	$-a^m + ba^{m-1}$	$a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + b^{m-1}$
1-й остат.	$a^{m-1}b - b^m$	
	$-a^{m-1}b + a^{m-2}b^2$	
2-й остат.	$a^{m-2}b^2 - b^m$	
	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	
посл. ост.	$a^0b^m - b^m$	

Дѣлимое и остатки суть биномы, второй членъ коихъ есть $-b^m$; въ первомъ же членѣ показатель буквы a уменьшается единицей отъ cadaго остатка къ слѣдующему, а показатель буквы b увеличивается единицей. Дѣлитель содержитъ букву a въ первой степени, и дѣленіе можно продолжать до тѣхъ поръ, пока въ одномъ изъ остатковъ буква a будетъ входить въ нулевомъ показателѣ; этотъ остатокъ есть $a^0b^m - b^m$, или нуль. Слѣдовательно $a^m - b^m$ всегда дѣлится на $a - b$.

Частное легко составить, не производя дѣленія и замѣчая, что показатели буквы a идутъ въ частномъ, уменьшаясь единицей, а показатели буквы b , увеличиваясь единицей; послѣдній членъ есть b^{m-1} , потому что онъ долженъ быть такой, чтобы при умноженіи его на второй членъ дѣлителя получился послѣдній членъ дѣлимаго — b^m .

Примѣры.

1. $[a^3 - b^3] : [a - b] = a^2 + ab + b^2$.

2. $[a^7 - b^7] : [a - b] = a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$.

3. $[9a^2 - 25b^2] : [3a - 5b] = 3a + 5b$, потому что $9a^2 - 25b^2 = (3a)^2 - (5b)^2$.

4. $[64a^6 - 729b^6] : [2a - 3b] = 32a^5 + 48a^4b + 72a^3b^2 + 108a^2b^3 + 162ab^4 + 243b^5$, потому что $64a^6 - 729b^6 = (2a)^6 - (3b)^6$.

ТЕОРЕМА. 8. Разность целых и равных степеней двух количеств дѣлится на сумму ихъ корней, если степень четная, и не дѣлится при нечетной степени.

Доказ. Употребляя означенія предшествующей теоремы, докажемъ, что $a^m - b^m$ дѣлится на $a + b$ при m четномъ и не дѣлится при m нечетномъ.

дѣл.	$a^m - b^m$	$a + b$ дѣлитель.
	$-a^m + a^{m-1}b$	$a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - a^{m-4}b^3 + \dots - b^{m-1}$
1-й	$-a^{m-1}b + b^m$	
	$a^{m-1}b - a^{m-2}b^2$	
2-й	$a^{m-2}b^2 - b^m$	
	$-a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3$	
3-й	$-a^{m-3}b^3 + b^m$	
	$\dots \dots \dots$	
	$\dots \dots \dots$	
посл.	$\pm a^0 b^m - b^m$	

Дѣлимое и остатки суть биномы, второй членъ коихъ есть b^m , въ первомъ же членѣ показатель буквы a уменьшается единицей отъ каждаго остатка къ слѣдующему, а показатель буквы b увеличивается единицей; членъ этотъ отрицательный, когда изъ показателя буквы a вычитается нечетное число, какъ въ первомъ, третьемъ и т. д. остаткахъ, и положительный, когда изъ показателя этой буквы вычитается число четное, какъ во второмъ, четвертомъ и т. д. остаткахъ. Послѣдній остатокъ будетъ $a^0 b^m - b^m$, или нуль, при m четномъ, и $-a^0 b^m - b^m$, или $-2b^m$, при m нечетномъ. Слѣдовательно $a^m - b^m$ всегда дѣлится на $a + b$, если m четное, и никогда не дѣлится на это количество, если m нечетное.

Частное дѣленія легко составить какъ и въ первомъ случаѣ.

Примѣры.

1. $\{a^2 - b^2\} : \{a + b\} = a - b.$

2. $[a^4 - b^4] : [a + b] = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3.$

$$3. (a^{10} - b^{10}) : (a + b) = a^9 - a^8b + a^7b^2 - a^6b^3 + a^5b^4 - a^4b^5 + a^3b^6 - a^2b^7 + ab^8 - a^9.$$

$$4. [16x^4 - y^8] : [2x + y^2] = [(2x)^4 - (y^2)^4] : [2x + y^2] = 8x^3 - 4x^2y^2 + 2xy^4 - y^6.$$

$$5. [a^8b^8 - 81] : [a^2b^2 + 3] = [(a^2b^2)^4 - 3^4] : [a^2b^2 + 3] = 3a^6b^6 - 3a^4b^4 + 9a^2b^2 - 27.$$

ТЕОРЕМА 9. Сумма цѣлыхъ и равныхъ степеней двухъ количествъ дѣлится на сумму ихъ корней, когда степень нечетная, и не дѣлится при четной степени.

Доказ. Разсужденіями, подобными произведеннымъ въ предшествующей теоремѣ, легко обнаружить, что $a^m + b^m$, раздѣленное на $a + b$, даетъ въ остаткѣ количество — $a^0b^m + b^m$, или нуль, при m нечетномъ, и количество $a^0b^m + b^m$, или $2b^m$, при m четномъ, чѣмъ теорема и доказывается.

Частное дѣленія при m нечетномъ есть

$$a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \dots + b^{m-1}.$$

Примѣры.

$$1. [a^3 + b^3] : [a + b] = a^2 - ab + b^2.$$

$$2. [a^5 + b^5] : [a + b] = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4.$$

$$3. [a^9 + b^9] : [a + b] = a^8 - a^7b + a^6b^2 - a^5b^3 + a^4b^4 - a^3b^5 + a^2b^6 - ab^7 + b^8.$$

$$4. [27k^3 + l^6] : [3k + l^2] = [(3k)^3 + (l^2)^3] : [3k + l^2] = 9k^2 - 3kl^2 + l^4.$$

Такимъ же образомъ доказывается слѣдующая

ТЕОРЕМА 10. Сумма цѣлыхъ и равныхъ степеней двухъ количествъ никогда не дѣлится на разность ихъ корней, то есть $a^m + b^m$ не дѣлится на $a - b$, и остатокъ дѣленія есть $2a^m$.

Признаки дѣлимости чиселъ, излагаемые въ Ариѳметикѣ, суть частные случаи выше изложенныхъ признаковъ дѣлимости алгебраическихъ количествъ.

Выведемъ изъ доказанныхъ теоремъ общіе признаки дѣлимости чиселъ по какой либо системѣ счисленія.

Пусть N есть цѣлое число, написанное по системѣ счисленія, основаніе коей есть цѣлое число b . Раздѣлимъ число N , начиная отъ правой руки къ лѣвой, на классы въ m цифръ каждый, кромѣ послѣдняго, въ коемъ можетъ оставаться меньше m цифръ. Принимая каждый классъ за отдѣльное число, означимъ первое изъ этихъ чиселъ справа чрезъ A , второе чрезъ B , третье чрезъ C и такъ далѣе. Число N представится въ такомъ видѣ:

$$N = A + Bb^m + Cb^{2m} + Db^{3m} + \dots \quad (1)$$

[Напримѣръ если $N = 37549127$ при основаніи $b = 10$, и мы раздѣлили бы число N на классы по 3 цифры каждый, кромѣ послѣдняго, въ коемъ двѣ цифры, то $37549127 = 127 + 549 \cdot 10^3 + 37 \cdot 10^6$].

Это выраженіе числа N можно представить въ одномъ изъ слѣдующихъ трехъ видовъ.

1.
$$N = A + b^m (B + Cb^m + Db^{2m} + \dots).$$

Откуда видно, что всякое число p , дѣлящее какую либо степень основанія b^m и слѣдовательно дѣлящее $b^m(B + Cb^m + Db^{2m} + \dots)$, (по теоремѣ 3) раздѣлитъ N , если будетъ дѣлится A (теорема 1), и если N дѣлится, то A необходимо должно тоже дѣлится (теорема 2).

Изъ Ариѳметики извѣстно, что число дѣлится только на производители своихъ и на различныя произведенія изъ нихъ составленныя, слѣдовательно только тогда найдется степень основанія b^m , дѣлящаяся на число p , когда p состоитъ изъ однихъ простыхъ производителей, входящихъ въ b . Изъ сего заключаемъ:

1. *При всякой системѣ счисленія число дѣлится на дѣлителя, состоящаго изъ простыхъ производителей, входящихъ въ основаніе, если первый классъ справа, разный по числу цифръ меньшей степени основанія, дѣлящейся на дѣлителя, дѣлится на него.*

При системѣ счисленія, коей основаніе равно 10, этотъ выводъ легко примѣнить къ нахожденію признаковъ дѣлимости на 2, на 5 и на всевозможныя произведенія, составленныя изъ 2-хъ и 5-ти.

Примѣръ.

Число 32 состоитъ изъ простыхъ производителей 2 2.2.2.2; чтобы найти признакъ дѣлимости чиселъ на 32, найдемъ меньшую степень 10, дѣлящуюся на 32; эта степень есть 5-я, изъ чего заключаемъ, что всякое число дѣлится на 32, если классъ въ 5 цифръ справа, т. е. до десятковъ тысячъ включительно, дѣлится на 32.

2. Выраженію 1-му для N можно дать еще такой видъ:

$$N = A + B + C + D + \dots + b^m B + b^{2m} C + b^{3m} D + \dots - B - C - D - \dots,$$

или такой видъ:

$$N = A + B + C + D + \dots + B(b^m - 1) + C(b^{2m} - 1) + D(b^{3m} - 1) + \dots;$$

количества $b^m - 1$, $b^{2m} - 1$, $b^{3m} - 1$... могутъ быть представлены въ такомъ видѣ: $b^m - 1^m$, $b^{2m} - 1^{2m}$, $b^{3m} - 1^{3m}$...

Каждое изъ послѣднихъ количествъ дѣлится на $b^m - 1^m$ (теорема 7), или на $b^m - 1$; слѣдовательно все количество $B(b^m - 1) + C(b^{2m} - 1) + D(b^{3m} - 1) + \dots$ дѣлится на $b^m - 1$, ибо каждый членъ его дѣлится.

Означая частное этого дѣленія чрезъ Q , получимъ:

$$B(b^m - 1) + C(b^{2m} - 1) + D(b^{3m} - 1) + \dots = Q(b^m - 1);$$

вставляя, имѣемъ:

$$N = A + B + C + D + \dots + Q(b^m - 1).$$

Изъ этого выраженія видно, что всякое число p , дѣлящее $b^m - 1$, какую либо степень основанія безъ единицы, или всякое число p , дающее въ остаткѣ дѣленія какой нибудь степени основанія b^m единицу и слѣдовательно дѣлящее $Q(b^m - 1)$ (по теоремѣ 3), раздѣлитъ N , если будетъ дѣлить сумму классовъ $A + B + C + D + \dots$ (теорема 1), и обратно если N дѣлится, то сумма $A + B + C + D + \dots$ необходимо должна тоже дѣлиться (теорема 2).

Докажемъ, что если p есть число взаимно простое съ основаніемъ b , то всегда найдется такая степень b , которая, будучи уменьшена единицею, дѣлится на p безъ остатка. Отъ послѣдовательнаго дѣленія на p степеней $b^0, b^1, b^2, b^3, \dots, b^{p-1}$, получится p остатковъ, изъ коихъ каждый меньше p , и ни одинъ не можетъ быть равенъ нулю, ибо p взаимно простое съ b и посему ни одну степень b дѣлить не можетъ. Слѣдовательно тотъ же остатокъ долженъ получиться по крайней мѣрѣ два раза. Пусть при дѣленіи b^n и b^{n+k} на p , гдѣ n и $n+k$ суть числа меньшія p , получаютъ остатки равные r , то есть пусть $b^n = pq + r$ и $b^{n+k} = pq_1 + r$, гдѣ q и q_1 суть частныя дѣленія b^n и b^{n+k} на p ; слѣдовательно разность b^{n+k} и b^n будетъ

$$b^{n+k} - b^n = pq_1 - pq,$$

или

$$b^n(b^k - 1) = p(q_1 - q);$$

изъ послѣдняго равенства видно, что вторая часть его дѣлится на p , слѣдовательно $b^n(b^k - 1)$ должно тоже дѣлиться на p ; но b^n число простое съ p , посему $b^k - 1$ дѣлится на p ; то есть существуетъ всегда b^k , степень b , при дѣленіи коей на число p , простое съ b , получится въ остаткѣ единица.

Изъ сего заключаемъ:

2. При всякой системѣ счисленія число дѣлится на дѣлителя, взаимно простаго съ основаніемъ, если сумма всѣхъ классовъ числа, изъ коихъ каждый (кромя послѣдняго) по числу цифръ равенъ меньшей степени основанія, дающей единицу въ остаткѣ дѣленія на дѣлителя, дѣлится на него.

При системѣ счисленія, коей основаніе равно 10-ти, этотъ выводъ легко примѣнить къ нахожденію признаковъ дѣлимости

на 3, 9, 27 и вообще на всякое число, не содержащее произведений 2 и 3.

Примѣры.

Число 37 не содержитъ произведений 2 и 3, посему чтобы найти признакъ дѣлимости чиселъ на 37, найдемъ меньшую степень 10-ти, дающую при дѣленіи ея на 37 въ остаткѣ единицу; эта степень есть 3-я; изъ чего заключаемъ, что всякое число дѣлится на 37, если сумма классовъ о трехъ цифрахъ дѣлится на 37.

3. Наконецъ выраженіе 1-е для N можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$N = A + C + \dots - B - D - \dots + Bb^m + Cb^{2m} + Db^{3m} + \dots + B - C + D + \dots,$$
 что можно изобразить и такъ:

$$N = (A + C + \dots) - (B + D + \dots) + B(b^m + 1) + C(b^{2m} - 1) + D(b^{3m} + 1) + \dots,$$
 гдѣ количества $b^m + 1$, $b^{2m} - 1$, $b^{3m} + 1$, ... можно изобразить такъ: $b^m + 1^m$, $b^{2m} - 1^{2m}$, $b^{3m} + 1^{3m}$...; каждое изъ послѣднихъ количествъ дѣлится на $b^m + 1^m$ (теоремы 8 и 9), слѣдовательно все количество $B(b^m + 1) + C(b^{2m} - 1) + D(b^{3m} + 1) + \dots$ дѣлится на $b^m + 1^m$, или на $b^m + 1$; означая частное этого дѣленія чрезъ Q , получимъ:

$$B(b^m + 1) + C(b^{2m} - 1) + D(b^{3m} + 1) + \dots = Q(b^m + 1),$$

или вставляя, найдемъ:

$$N = (A + C + \dots) - (B + D + \dots) + Q(b^m + 1).$$

Изъ этого выраженія видно, что всякое число p , дѣлящее какую либо степень основанія, увеличенную единицей, и слѣдовательно (по теоремѣ 3) дѣлящее $Q(b^m + 1)$, раздѣлитъ N , если будетъ дѣлить $(A + C + \dots) - (B + D + \dots)$, сумму четныхъ классовъ безъ суммы нечетныхъ (теорема 1), и обратно, если N дѣлится, то $(A + C + \dots) - (B + D + \dots)$ необходимо должно тоже дѣлиться.

Если p число простое съ основаніемъ b , и b^m наименьшая степень, дающая въ остаткѣ дѣленія на p единицу, есть четная и равная $2n$, то легко доказать, что $b^n + 1$ необходимо раздѣлится на p , потому что $b^{2n} - 1 = (b^n - 1)(b^n + 1)$; $b^{2n} - 1$ дѣлится на p , слѣдовательно и $(b^n - 1)(b^n + 1)$ должно на p дѣлиться; но $b^n - 1$ не дѣлится на p , ибо меньшая степень основанія безъ единицы, дѣлящаяся на p , есть $2n$, то есть $b^n - 1$ не содержитъ произвѣдителя p ; посему $b^n + 1$ должно содержать этого произвѣдителя и слѣдовательно дѣлиться на p .

Изъ сего заключаемъ:

3. При всякой системѣ счисленія число дѣлится на столько съ основаніемъ дѣлителя, отъ дѣленія на котораго степеней основанія, меньшая степень, дающая въ остаткѣ единицу, есть четная; въ случаѣ если сумма всѣхъ четныхъ классовъ безъ суммы не четныхъ, изъ коихъ каждый классъ (кромя послѣдняго) по числу цифръ равенъ половинѣ показателя четной степени основанія, дающей въ остаткѣ единицу, на него дѣлится.

Этотъ выводъ часто даетъ болѣе простой признакъ дѣлимости чѣмъ 2-ой.

Найдемъ при системѣ счисления, коей основаніе 10, признакъ дѣлимости чиселъ на 7. Меньшая степень числа 10, дающая при дѣленіи на 7 въ остаткѣ единицу есть шестая; слѣдовательно дѣлимость числа на 7 зависитъ отъ дѣлимости на 7 суммы классовъ о 6 цифрахъ, по 2-му выводу. Но какъ степень 6 четная, то можно примѣнить 3-й выводъ, изъ коего заключаемъ, что число дѣлится на 7, если сумма нечетныхъ классовъ о 3-хъ цифрахъ, умноженная суммою четныхъ классовъ о 3-хъ цифрахъ, дѣлится на 7.

Вообще когда дано число признаки дѣлимости на которое требуется опредѣлить, должно прежде всего отдѣлить отъ него производителей, входящихъ въ основаніе счисления; если окажется, что число состоитъ только изъ этихъ производителей, то должно примѣнить 1-й выводъ для опредѣленія признаковъ дѣлимости на это число.

Если кромѣ простыхъ множителей, входящихъ въ основаніе, есть другіе множители въ числѣ, то число разлагаютъ на два множителя, изъ коихъ одинъ есть произведение производителей основанія, и опредѣляютъ признаки дѣлимости на каждого отдѣльно:— на перваго, по 1-му выводу, а на втораго, какъ ниже сказано.

Если число взаимно простое съ основаніемъ, то прилагаютъ 2-й выводъ, при чемъ коль скоро замѣтятъ, что меньшая степень основанія, дающая въ остаткѣ дѣленія на это число единицу, четная, то признакъ дѣлимости найдется по 3-му выводу.

Всѣ эти случаи встрѣчаются въ послѣдовательности при опредѣленіи признаковъ дѣлимости на слѣдующія числа:

250, 333, 52, 44, 231.

У п р а ж н е н і я.

1. Доказать, что количество $a^2(x+y)(x-y) - x^2 + y^2$ дѣлится на $x^2 - y^2$.

2. $(x+y)^7 + 5a^2(x^2 + 2xy + y^2)$ дѣлится на $x^2 + y^2 + 2xy$.

3. Не производя дѣйствія составить частное дѣленія $x^9 - y^9$ на $x - y$.

4. Не производя дѣйствія составить частное дѣленія $81x^4 - a^8b^2$ на $3x + a^2b^2$.

5. Не производя дѣйствія составить частное дѣленія $(x+p)^m - (y+q)^m$ на $x+p - y-q$.

6. Не производя дѣйствія составить частное дѣленія $(a^2 + 2ab)^3 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ на $a^2 + 2ab + x + y$.

7. Доказать, что $27a^3 - 8b^6$ не дѣлится на $3a + 2b^2$ и найти дѣлителей этого бинома.

8. Найти необходимое и достаточное условіе для дѣлимости бинома $x^m - a^m$ на $x^n - a^n$.

9. Доказать, что количество $32x^5 + (2a^2 + 3c)^5$ дѣлится на $2x + 2a^2 + 3c$, и составить частное этого дѣленія.

10. Определить степень m , при которой количество $27x^m + (x + y - 2)^m$ дѣлится на $4x + y - 2$.

11. Раздѣлить полиномъ $a^3y^4 + 2a^4y - 2b^4y + a^2 + 3a^2by^4 + 3ab^2y^4 + b^3y^4 + b^2$ на $a^2 + b^2$, замѣчая, что дѣлитель не содержитъ буквы y .

12. Доказать, что полиномъ $4ax^3 - 7a^2x^2 - 6a^3x + 9a^4$ дѣлится на $x - a$, и составить частное дѣленія.

13. Доказать, что полиномъ $x^qy^r + y^qz^r + z^qx^r - x^ry^q - y^rz^q - z^rx^q$ дѣлится на произведеніе $(x - y)(x - z)(y - z)$.

14. Доказать, что полиномъ $x^py^qz^r + y^pz^qx^r + z^px^qy^r - x^ry^qz^p - y^rz^qx^p - z^rx^qy^p$ дѣлится на произведеніе $(x - y)(x - z)(y - z)$.

15. Извѣстно, что многочлены $Ax^5 - Bx^4 + Cx^3 + Dx + H$ и $x - 2k$ дѣлятся на нѣкоторое количество; доказать, что и многочленъ $32Ak^5 - 16Bk^4 + 8Ck^3 + 2Dk + H$ дѣлится на тоже количество.

16. Доказать, что полиномъ $7x^7 + 3x - 4x^5 + 2x^2 - 8$ не дѣлится на $x - 3$; составить частное и остатокъ этого дѣленія.

О разложеніи цѣлыхъ алгебраическихъ количествъ на производителей.

§ 45. Чтобы разложить полиномъ на производителей, должно прежде всего собрать множителей, общихъ всѣмъ членамъ его, перемножить ихъ между собою и на полученное произведеніе раздѣлить все количество; тогда

получится частное, въ которомъ не будетъ ни одного множителя, общаго всѣмъ членамъ полинома. Это частное заключаютъ въ скобки, а внѣ скобокъ ставятъ общаго дѣлителя въ видѣ множителя.

Примѣръ 1.

Чтобы отдѣлить общаго множителя членовъ бинома $14a^5b^2 - 2a^3b^3$, замѣчаемъ, что множители обоихъ членовъ его суть 2, a^3 , b^2 , произведеніе ихъ есть $2a^3b^2$, частное дѣленія $14a^5b^2 - 2a^3b^3$ на $2a^3b^2$ равно $7a^2 - b$; посему

$$14a^5b^2 - 2a^3b^3 = 2a^3b^2(7a^2 - b).$$

Примѣръ 2.

Полиномъ $12a^2b^2c - 3a^5bd + 15a^6b^3c^2 - 3a^2b$; общіе множители всѣхъ его членовъ суть 3, a^2 , b , произведеніе ихъ есть $3a^2b$, частное дѣленія даннаго полинома на это произведеніе есть $4bc - a^3d + 5a^4b^2c^2 - 1$; слѣдовательно

$$\begin{aligned} 12a^2b^2c - 3a^5bd + 15a^6b^3c^2 - 3a^2b &= \\ &= 3a^2b(4bc - a^3d + 5a^4b^2c^2 - 1). \end{aligned}$$

Отдѣливъ одночленнаго множителя, должно многочленное количество разложить на его множителей, если это возможно. Для сего отыскиваютъ количество, на которое этотъ многочленъ дѣлится, и, произведя дѣленіе, замѣняютъ его произведеніемъ дѣлителя на частное.

При отысканіи такого дѣлителя часто можно пользоваться признаками дѣлимости § 44, какъ это показано въ слѣдующихъ примѣрахъ.

$$1. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$2. a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + b^{m-1}).$$

$$3. 4c^4 - 9d^6 = (2c^2)^2 - (3d^3)^2 = (2c^2 - 3d^3)(2c^2 + 3d^3).$$

Эти разложенія основаны на томъ, что каждый изъ биномовъ $a^3 - b^3$; $a^m - b^m$; $(2c^2)^2 - (3d^3)^2$ есть разность цѣлыхъ и равныхъ степеней количествъ и дѣлится на

разность ихъ корней (по §§ 44, теорема 7), посему разность корней есть одинъ производитель; раздѣляя же на него биномъ, получимъ другой.

$$4. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$5. a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4).$$

6. $128x^7 + 1 = (2x + 1)[(2x)^6 - (2x)^5 + (2x)^4 - (2x)^3 + (2x)^2 - (2x) + 1] = (2x + 1)(64x^6 - 32x^5 + 16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 2x + 1)$, ибо сумма нечетныхъ равныхъ степеней дѣлится на сумму корней (§ 44, теорема 9).

$$7. x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^5 = (x - a)(x^4 + a^2x^2 + a^3x + a^4),$$

$$8. 3x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = (x - 2)(3x^2 + 2x - 2);$$

ибо выраженіе 7 при $x = a$ обращается въ нуль и слѣдовательно дѣлится на $x - a$; выраженіе 8 при $x = 2$ обращается въ нуль и посему дѣлится на $x - 2$ (§ 44 теорема 6).

9. Триномъ $7a^4bc - 14a^3b^2c + 7a^2b^3c$ имѣетъ общимъ множителемъ членовъ своихъ $7a^2bc$, посему можетъ быть представленъ въ такомъ видѣ: $7a^2bc(a^2 - 2ab + b^2)$; но $a^2 - 2ab + b^2$ есть квадратъ $a - b$ и дѣлится на свой корень, частное дѣленія есть $a - b$, слѣдовательно

$$7a^4bc - 14a^3b^2c + 7a^2b^3c = 7a^2bc(a - b)(a - b) = 7a^2bc(a - b)^2.$$

10. $24a^5b^2 + 81a^2b^5$; отдѣля общаго одночленного множителя, получимъ $3a^2b^2(8a^3 + 27b^3)$; но $8a^3 = (2a)^3$, $27b^3 = (3b)^3$, посему $8a^3 + 27b^3$ дѣлится на $2a + 3b$; раздѣляя, найдемъ частное $4a^2 - 6ab + 9b^2$; слѣдовательно $24a^5b^2 + 81a^2b^5 = 3a^2b^2(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

11. $6y^2z + 9yz^2 + 2py + 3pz$; общій множитель двухъ членовъ перваго и третьяго есть $2y$, втораго и четвертаго $3z$, посему

$$\begin{aligned} 6y^2z + 9yz^2 + 2py + 3pz &= 2y(3yz + p) + 3z(3yz + p) = \\ &= (2y + 3z)(3yz + p). \end{aligned}$$

12. $4ax^3 - 7a^2x^2 - 6a^3x + 9a^4 = a(4x^3 - 7ax^2 - 6a^2x + 9a^3)$, но выраженіе $4x^3 - 7ax^2 - 6a^2x + 9a^3$ обращается въ

нуль при $x=a$, посему дѣлится на $x-a$, и частное дѣленія есть $4ax^2 - 3a^2x - 9a^3$, слѣдовательно $4ax^3 - 7a^2x^2 - 6a^3x + 9a^4 = a(x-a)(4ax^2 - 3a^2x - 9a^3)$.

13. $2a^4b^4px^2 - 14a^4b^4px + 20a^4b^4p - 2px^2 + 14px - 20p = 2p(a^4b^4x^2 - 7a^4b^4x + 10a^4b^4 - x^2 + 7x - 10)$; въ первыхъ трехъ членахъ выраженія въ скобкахъ можно взять a^4b^4 общимъ множителемъ, получимъ $a^4b^4x^2 - 7a^4b^4x + 10a^4b^4 - x^2 + 7x - 10 = a^4b^4(x^2 - 7x + 10) - x^2 + 7x - 10 = a^4b^4(x^2 - 7x + 10) - (x^2 - 7x + 10)$ (ибо при вычитаніи знаки переменяются въ обратные) $= (a^4b^4 - 1)(x^2 - 7x + 10)$, гдѣ производитель $a^4b^4 - 1 = (ab)^4 - 1^4 = [(ab)^2 - 1][(ab)^2 + 1]$; но $[(ab)^2 - 1] = (ab - 1)(ab + 1)$, слѣдовательно $a^4b^4 - 1 = (a^2b^2 + 1)(ab + 1)(ab - 1)$. Производитель $x^2 - 7x + 10$ обращается въ нуль при $x=5$, слѣдовательно дѣлится на $x-5$, и частное дѣленія есть $x-2$, посему $x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$.

Вставляя, получимъ:

$$2a^4b^4px^2 - 14a^4b^4px + 20a^4b^4p - 2px^2 + 14px - 20p = 2p(a^2b^2 + 1)(ab + 1)(ab - 1)(x - 5)(x - 2).$$

У п р а ж н е н і я.

Разложить слѣдующія количества на производители:

1. $12x^4 - 12x^3y + 3x^2y^2$.

2. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

3. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$.

4. $4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$.

5. $a^2(a+b)^2 + b(a+b)^2 + ab(a+b)^2$.

6. $(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3)$.

7. $5a^3 - 5b^3$.

8. $a^2x^4 + a^5x$.

9. $a^{16} - b^{16}$.

$$10. a^6 - b^6.$$

$$11. x^2 - ax + ab - bx.$$

$$12. a^4 + a^2 - 2.$$

$$13. x^4 + 2ax^3 - a^4 - 2a^3x.$$

$$14. x^3(y^2 - z^2) + y^3(z^2 - x^2) + z^3(x^2 - y^2).$$

$$15. [(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + 4abcd]^2 - 4[(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab]^2.$$

Объ общемъ большемъ дѣлителѣ цѣлыхъ алгебраическихъ количествъ.

§ 46. Общимъ большимъ дѣлителемъ цѣлыхъ алгебраическихъ количествъ называется произведение всѣхъ простыхъ численныхъ и буквенныхъ производителей или дѣлителей, общихъ всѣмъ этимъ количествамъ.

Теорія общаго большаго дѣлителя чиселъ основана на слѣдующихъ двухъ теоремахъ, доказываемыхъ въ Ариѳметикѣ:

1. *Всякое число можетъ быть разложено на простыхъ производителей своихъ только однимъ образомъ.*

2. *Всякое число можетъ дѣлиться только на своихъ производителей.*

Эти же теоремы лежатъ въ основѣ теоріи общаго большаго дѣлителя алгебраическихъ количествъ, но справедливость ихъ для послѣднихъ не была доказана до 1827 года, когда французскій Математикъ Lefebure-de-Fourcy далъ эти доказательства въ сочиненіи *Traité sur le plus grand commun diviseur et la theorie de l'élimination*.

Легко замѣтить, что самое опредѣленіе общаго большаго дѣлителя предполагаетъ, что алгебраическое количество можетъ только однообразно разлагаться на простыхъ производителей своихъ, ибо въ противномъ случаѣ понятіе объ общемъ большемъ дѣлителѣ было бы неопредѣленно.

На основаніи второй теоремы можно общій большій дѣлитель опредѣлить еще такимъ образомъ: количество, дѣлящее всѣ данныя количества и дающее частныя взаимно простыя. Я предпочелъ сдѣланное выше опредѣленіе, по причинѣ большей простоты его.

§ 47. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что общій большій дѣлитель нѣсколькихъ мономовъ найдется, взявъ произведеніе общаго большаго дѣлителя численныхъ коеф-

фиціентовъ ихъ и общихъ всѣмъ имъ буквѣ, съ наименьшимъ показателемъ каждой въ мономахъ.

Примѣръ. Общій большій дѣлитель мономовъ $65a^5b^2c$, $30a^7b^3$, $45a^4b^{14}d$ получимъ, найдя по правиламъ Ариѳметики общаго большаго дѣлителя коеффиціентовъ 65, 30, 45, который есть 5, и помножая его на буквы a и b , общія всѣмъ мономамъ, взявъ букву a съ показателемъ 4, а b съ показателемъ 2. Такимъ образомъ большій дѣлитель есть $5a^4b^2$.

§ 48. Общій большій дѣлитель полиномовъ, легко разлагающихся на простыхъ производителей своихъ (по § 45), или полиномовъ, въ коихъ это разложеніе уже произведено, найдется точно такъ же, какъ и для мономовъ.

Примѣръ 1.

полин. $\begin{cases} (1) 3a^2x - 3a^3 + 3bx - 3ab, \\ (2) 15a^2x - 30abx + 15b^2x - 15a^3 + 30a^2b - 15ab^2 \end{cases}$
обращаются въ нуль при $x=a$ и слѣдовательно дѣлятся на $x-a$; пользуясь этимъ, разложимъ ихъ на производителей по § 45.

Они представляются въ такомъ видѣ:

$$1. 3(x-a)(a^2+b),$$

$$2. 3 \cdot 5(x-a)(a-b)^2.$$

Общіе производители ихъ суть 3 и $x-a$, слѣдовательно общій большій дѣлитель есть $3(x-a)$, или $3x-3a$.

Примѣръ 2.

полиномы $\begin{cases} 1) a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\ 2) 6a^4 - 6b^4, \\ 3) 2a^2 - 4ab + 2b^2. \end{cases}$

1-й полиномъ есть кубъ количества $a-b$;

2-й, по отдѣленіи множителя 6, разложится на производителей $a-b$, $a+b$ и a^2+b^2 ;

3-й, по отдѣленіи множителя 2, есть квадратъ $a-b$; т. е.

1. $(a - b)^3$;

2. $6(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$;

3. $2(a - b)^3$;

слѣдовательно общій большій дѣлитель ихъ есть $a - b$.

§ 49. Общій же способъ опредѣленія общаго большаго дѣлителя полиномовъ основанъ на слѣдующихъ двухъ теоремахъ.

ТЕОРЕМА 1. *Общій большій дѣлитель двухъ количествъ не измѣнится, если одно изъ нихъ умножить или раздѣлить на количество первое съ другимъ.*

Доказ. Если P и Q суть данныя количества, общій большій дѣлитель коихъ требуется найти, то по опредѣленію общій большій дѣлитель P и Q есть произведение производителей, находящихся въ P и Q ; если одно изъ нихъ P помножимъ или раздѣлимъ на количество первое съ Q , то отъ этого прибавятся къ P или уничтожатся въ P производители, которыхъ въ Q нѣтъ, и слѣдовательно общіе ихъ производители останутся тѣ же, а посему и общій большій дѣлитель не измѣнится.

ТЕОРЕМА 2. *Общій большій дѣлитель двухъ полиномовъ дѣлимаго и дѣлителя одинаковъ съ общимъ большимъ дѣлителемъ дѣлителя и остатка, получаемого отъ ихъ дѣленія.*

Доказ. Пусть P и Q суть данныя полиномы, F частное дѣленія P на Q , R остатокъ; тогда

$$P = QF + R.$$

Всякій производитель или дѣлитель, общій P и Q , принадлежитъ и R (теорема 5 § 44); всякій производитель или дѣлитель общій Q и R принадлежитъ и P (теорема 1 § 44); слѣдовательно общіе производители P и Q одинаковы съ общими производителями Q и R , или общій большій дѣлитель P и Q одинаковъ съ общимъ большимъ дѣлителемъ Q и R .

§ 50. Приступимъ теперь къ отысканію способа опредѣленія общаго большаго дѣлителя двухъ полиномовъ P и Q .

Общій большій дѣлитель этихъ полиномовъ можетъ содержать производителями мономы и полиномы, общіе P и Q . Отдѣлимъ въ полиномахъ P и Q производителей мономовъ отъ полиномовъ. Каждый производитель мономомъ полинома P или Q есть дѣлитель или производитель каждаго члена полинома; слѣдовательно для отдѣленія мономовъ въ P и Q , найдемъ общаго большаго дѣлителя всѣхъ членовъ каждаго изъ полиномовъ отдѣльно по § 47. Пусть p есть общій большій дѣлитель членовъ P , q общій большій дѣлитель членовъ Q . Раздѣляя P на p и Q на q , получимъ частныя A и B , изъ коихъ каждое не содержитъ производителей мономовъ; такъ что

$$P = pA, \quad Q = qB.$$

Производители мономы, общіе P и Q , суть общіе p и q ; производители полиномы, общіе P и Q , суть общіе A и B ; слѣдовательно общій большій дѣлитель полиномовъ P и Q есть произведеніе общаго большаго дѣлителя p и q на общій большій дѣлитель полиномовъ A и B .

Общій большій дѣлитель мономовъ p и q найдется по § 47, послѣ чего останется опредѣлить общаго большаго дѣлителя двухъ полиномовъ A и B , члены коихъ суть первые между собою.

Примѣръ.

$$P = 6a^2bx^6 - 20a^2bx^4 + 30a^2bx^2 + 16a^2bx,$$

$$Q = 4a^5bcx^5 - 8a^5bcx^4 - 24a^5bcx^2 + 52a^5bcx + 24a^5bc.$$

Общій большій дѣлитель p и q , или $2a^2bx$ и $4a^5bc$, есть $2a^2b$; слѣдовательно это есть произведеніе мономовъ, входящихъ въ общій большій дѣлитель P и Q , послѣ чего остается опредѣлить общаго большаго дѣлителя полиномовъ

$$A = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8,$$

$$B = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6.$$

§ 51. Для опредѣленія общаго большаго дѣлителя двухъ полиномовъ A и B , несодержащихъ одночленныхъ производителей, рассмотримъ предварительно случай, когда полиномы содержатъ только одну букву x , какъ напр. полиномы A и B въ примѣрѣ предшествующаго параграфа.

Расположимъ для сего полиномы A и B по уменьшающимся степенямъ буквы x , и пусть степень полинома A относительно этой буквы не меньше степени полинома B .

Если A дѣлится на B , то B и есть общій большій дѣлитель, ибо тогда всѣ производители B заключаются и въ A , посему должно прежде всего дѣлить A на B .

Если A не дѣлится на B , то B не есть общій большій дѣлитель полиномовъ; для отысканія его должно рассмотретьъ слѣдующіе два случая отдѣльно:

1. Отъ дѣленія A на B получается остатокъ R , котораго степень меньше степени B , тогда общій большій дѣлитель A и B одинаковъ съ общимъ большимъ дѣлителемъ B и R (теорема 2 § 49), и вопросъ сводится на опредѣленіе общаго большаго дѣлителя полиномовъ B и R степени меньшей относительно x .

2. Дѣленіе A на B не возможно, если коэффициентъ высшаго по буквѣ x члена полинома A , или одного изъ остатковъ дѣленія, не дѣлится на коэффициентъ высшаго члена B . Чтобы сдѣлать дѣленіе возможнымъ, помножимъ весь полиномъ A на коэффициентъ высшаго члена полинома B , или на одного изъ производителей этого коэффициента, такъ чтобы коэффициенты высшихъ членовъ стали кратными. Отъ этого умноженія общій большій дѣлитель не измѣнится, потому что множитель

этотъ есть первый съ B , такъ какъ B не имѣетъ числовыхъ производителей (теорема 1 § 49).

Послѣ этого получимъ первый остатокъ дѣленія; съ этимъ остаткомъ и каждымъ изъ послѣдующихъ, получаемыхъ при дѣленіи на B , поступимъ такъ же, какъ съ полиномомъ A , въ случаѣ если коэффициентъ высшаго члена остатка не дѣлится на коэффициентъ высшаго члена B , т. е. помножимъ весь остатокъ на какое либо число, дабы коэффициенты стали кратными. Такое умноженіе можно сдѣлать, ибо общій большій дѣлитель A и B одинаковъ съ общимъ большимъ дѣлителемъ B и остатка (теорема 2 § 49); общій же большій дѣлитель B и остатка не измѣнится, если остатокъ помножимъ на числовой множитель (теорема 1 § 49).

На томъ же основаніи, если во время дѣленія A на B получимъ остатокъ, имѣющій общаго числоваго производителя, то его можно для простоты отбросить, безъ вліянія на общаго большаго дѣлителя (теорема 1 § 49).

Такимъ образомъ продолжимъ вычисленіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ остатка R , котораго степень меньше степени B ; тогда общій большій дѣлитель A и B одинаковъ съ общимъ большимъ дѣлителемъ полиномовъ B и R низшей относительно x степени.

Въ обоихъ случаяхъ вопросъ сводится на опредѣленіе общаго большаго дѣлителя B и R .

Если полиномъ R имѣетъ числовыхъ производителей, то должно исключить ихъ, раздѣляя весь полиномъ на общаго большаго дѣлителя его коэффициентовъ, ибо B не имѣетъ числовыхъ производителей (теорема 1 § 40). Послѣ чего для отысканія общаго большаго дѣлителя B и R , не содержащихъ числовыхъ производителей, поступаемъ такъ же, какъ съ полиномами A и B , т. е. раздѣлимъ B на R и замѣнимъ ихъ новыми полиномами низшей степени R и остаткомъ дѣленія B на R .

Такъ какъ степени послѣдовательныхъ остатковъ будутъ постоянно уменьшаться, то необходимо дойдемъ до остатка, не содержащаго x . Если этотъ остатокъ будетъ нуль, то предшествующій ему есть общій большій дѣлитель полиномовъ A и B . Если же независящій отъ x остатокъ не будетъ нуль, а какое либо число, то полиномы A и B не имѣютъ общаго дѣлителя (суть первые между собою), потому что всякій дѣлитель, общій полиномамъ A и B , долженъ дѣлить и послѣдній остатокъ и слѣдовательно можетъ быть только числомъ, что невозможно, ибо A и B не имѣютъ числовыхъ дѣлителей (дѣлители эти уже исключены).

Примѣръ 1.

$$A = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 8,$$

$$B = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6.$$

1-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - & 10x^3 & +15x + 8 & \left| \begin{array}{l} x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6 \\ 3 \end{array} \right. \\ -3x^5 + 6x^4 + 18x^3 - 12x^2 - 39x - 18 & & & \\ \hline & +6x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 24x - 10 & & \end{array}$$

Раздѣляя остатокъ на общаго большаго дѣлителя его коэффициентовъ 2, получимъ полиномъ $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5$, на который будемъ дѣлить дѣлителя.

2-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 6x^4 - 18x^3 + 12x^2 + 39x + 18 & \left| \begin{array}{l} 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5 \\ x - 5 \end{array} \right. \\ -3x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 5x & & & \\ \hline & -10x^4 - 12x^3 + 24x^2 + 44x + 18 & & \\ & - 5x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 22x + 9 & & \\ & -15x^4 - 18x^3 + 36x^2 + 66x + 27 & & \\ & +15x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 60x - 25 & & \\ \hline & & + 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 & \\ & & & x^3 + 3x^2 + 3x + 1. \end{array}$$

Первый остатокъ раздѣленъ на 2 и помноженъ на 3, для того чтобы коэффициенты дѣлились, во второмъ остаткѣ отброшенъ производитель 2.

3-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l}
 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5 & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 -3x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 3x & 3x - 5 \\
 \hline
 -5x^3 - 15x^2 - 15x - 5 & \\
 +5x^3 + 15x^2 + 15x + 5 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Общій большій дѣлитель A и B есть

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

§ 52. Теперь рассмотримъ, какъ найти общаго большаго дѣлителя нѣсколькихъ полиномовъ, содержащихъ только одну букву.

Пусть требуется найти общаго большаго дѣлителя полиномовъ A , B , C и D . Общій большій дѣлитель двухъ полиномовъ A и B найдется по § 51; означимъ его чрезъ d , гдѣ d есть произведеніе общихъ производителей A и B . Общій большій дѣлитель d и C пусть будетъ d_1 , гдѣ d_1 есть произведеніе общихъ производителей d и C , или общихъ A , B и C ; слѣдовательно d_1 есть общій большій дѣлитель полиномовъ A , B , C . Найдя общаго большаго дѣлителя d_1 и D и означая его чрезъ d_2 , замѣтимъ, что d_2 есть произведеніе общихъ производителей d_1 и D , или общихъ A , B , C и D ; слѣдовательно d_2 и есть искомый общій большій дѣлитель полиномовъ A , B , C , D . Точно также найдется общій большій дѣлитель какого угодно числа полиномовъ, содержащихъ только одну букву.

Примѣръ.

$$A = x^5 + x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 10,$$

$$B = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5,$$

$$C = x^3 - 3x^2 - 5x + 15.$$

Чтобы найти общаго большаго дѣлителя этихъ полиномовъ, найдемъ предварительно общаго большаго дѣлителя A и B по § 51.

1-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 10 & x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 \\
 -x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 5x & x + 3 \\
 \hline
 3x^4 - x^3 - 17x^2 + 5x + 10 & \\
 -3x^4 + 6x^3 + 12x^2 - 30x + 15 & \\
 \hline
 5x^3 - 5x^2 - 25x + 25 & \\
 x^3 - x^2 - 5x + 5 &
 \end{array}$$

2-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x + 5 & x^3 - x^2 - 5x + 5 \\
 -x^4 + x^3 + 5x^2 - 5x & x - 1 \\
 \hline
 -x^3 + x^2 + 5x + 5 & \\
 x^3 - x^2 - 5x - 5 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Слѣдовательно $d = x^3 - x^2 - 5x + 5$ есть общій большій дѣлитель A и B .

Опредѣлимъ общаго большаго дѣлителя d и C .

1-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - x^2 - 5x + 5 & x^3 - 3x^2 - 5x + 15 \\
 -x^3 + 3x^2 + 5x - 15 & 1 \\
 \hline
 2x^2 - 10 & \\
 x^2 - 5 &
 \end{array}$$

2-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 - 5x + 15 & x^2 - 5 \\
 -x^3 + 5x & x - 1 \\
 \hline
 -3x^2 + 15 & \\
 -x^2 + 5 & \\
 -x^2 - 5 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$d_1 = x^2 - 5$ есть общій большій дѣлитель полиномовъ A , B и C .

§ 53. Теперь рассмотримъ случай, когда полиномы A и B содержатъ двѣ буквы, напริมѣръ x и y .

Располагая A и B по уменьшающимся степенямъ одной изъ этихъ буквъ, напимѣръ x , замѣтимъ, что коэффициенты разныхъ степеней этой буквы могутъ быть мономы или полиномы, содержащiе букву y , но независящiе отъ x .

Общiй большiй дѣлитель A и B можетъ содержать производителями полиномы, независимые отъ x и зависящие отъ этой буквы, общiе обоимъ полиномамъ, ибо производителей мономовъ въ A и B нѣтъ (§ 50). Отдѣлимъ въ A и B этихъ производителей. Каждый производитель полинома A или B , независимый отъ x , есть дѣлитель или производитель каждаго изъ коэффициентовъ разныхъ степеней x (теорема 4 § 44); слѣдовательно для отдѣленiя производителей въ A и B , найдемъ общаго большаго дѣлителя коэффициентовъ разныхъ степеней x каждаго изъ данныхъ полиномовъ (по § 52), ибо эти коэффициенты полиномы, зависящiе отъ одной буквы y . Пусть a есть общiй большiй дѣлитель коэффициентовъ A , b общiй большiй дѣлитель коэффициентовъ B . Раздѣляя A на a и B на b , получимъ частныя A_1 и B_1 , изъ коихъ каждое не содержитъ производителей, независимыхъ отъ x , такъ что $A = aA_1$ и $B = bB_1$.

Производители, независящiе отъ x и общiе A и B , суть общiе a и b ; производители, зависящiе отъ x и общiе A и B , суть общiе A_1 и B_1 ; слѣдовательно общiй большiй дѣлитель A и B есть произведенiе общаго большаго дѣлителя a и b на общiй большiй дѣлитель A_1 и B_1 .

Общiй большiй дѣлитель a и b найдется по § 51, послѣ чего остается опредѣлить общаго большаго дѣлителя двухъ полиномовъ A_1 и B_1 , не содержащихъ производителей, независимыхъ отъ x .

Къ A_1 и B_1 можно приложить всѣ разсужденiя, произведенныя надъ полиномами, содержащими одну букву;

только все, что было сказано относительно числовых коэффициентов и числовых множителей, на которые помножается или дѣлится дѣлимое или остатокъ, предлагается теперь къ буквеннымъ множителямъ мономамъ или полиномамъ, содержащимъ только одну букву y .

Примѣръ.

$$A = (y^2 + 4y + 4)x^2 - (2y^3 + 6y^2 + 4y)x + (y^4 + 2y^3),$$

$$B = (y^2 - 4)x^2 - (2y^3 + 2y^2 - 4y)x + (y^4 + 2y^3).$$

Общій большій дѣлитель полиномовъ

$$\left. \begin{array}{l} y^2 + 4y + 4, \\ 2y^3 + 6y^2 + 4y, \\ y^4 + 2y^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{найдется по § 52;} \\ \text{онъ есть } y + 2. \end{array}$$

Общій большій дѣлитель полиномовъ

$$\left. \begin{array}{l} y^2 - 4, \\ 2y^3 + 2y^2 - 4y, \\ y^4 + 2y^3, \end{array} \right\} \text{есть тоже } y + 2;$$

слѣдовательно $y + 2$ есть производитель искомага общаго большаго дѣлителя A и B , независимый отъ x ; раздѣляя на него оба полинома, получимъ:

$$A_1 = (y + 2)x^2 - (2y^2 + 2y)x + y^3,$$

$$B_1 = (y - 2)x^2 - (2y^2 - 2y)x + y^3.$$

1-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} (y+2)x^2 - (2y^2+2y)x + y^3 & (y-2)x^2 - (2y^2-2y)x + y^3 \\ (y^2-4)x^2 - (2y^3-2y^2-4y)x + y^4-2y^3 & y+2 \\ \hline -(y^2-4)x^2 + (2y^3+2y^2-4y)x - y^4-2y^3 & \\ \hline 4y^2x-4y^3 & \\ x-y & \end{array}$$

Въ этомъ дѣленіи все дѣлимое помножено на коэффициентъ высшаго члена дѣлителя $y-2$. Въ первомъ остаткѣ общій производитель $4y^2$ отброшенъ.

2-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l}
 (y-2)x^2 - (2y^2 - 2y)x + y^3 & x - y \\
 \hline
 -(y-2)x^2 + (y^2 - 2y)x & (y-2)x - 1 \\
 \hline
 & -y^2x + y^3 \\
 & - (x - y) \\
 & (x - y) \\
 \hline
 & 0.
 \end{array}$$

Общій производитель y^2 перваго остатка дѣленія отброшенъ.

Общій большій дѣлитель A_1 и B_1 есть $x - y$, следовательно общій большій дѣлитель A и B есть $(x - y)(y + 2)$, или $xy - y^2 + 2x - 2y$.

§ 54. Общій большій дѣлитель нѣсколькихъ полиномовъ, содержащихъ двѣ буквы, найдется точно такъ же, какъ въ § 52, зная какъ опредѣлять общаго большаго дѣлителя двухъ полиномовъ, зависящихъ отъ двухъ буквъ.

Точно такъ же, какъ сдѣланъ переходъ отъ общаго большаго дѣлителя нѣсколькихъ полиномовъ, содержащихъ одну букву, къ общему большому дѣлителю двухъ и нѣсколькихъ полиномовъ, содержащихъ двѣ буквы, перейдемъ отъ послѣдняго къ общему большому дѣлителю двухъ полиномовъ A и B , содержащихъ три буквы и т. д.; т. е. если A и B содержатъ три буквы, то должно расположить эти полиномы по уменьшающимся степенямъ одной изъ нихъ, найти общаго большаго дѣлителя коеффиціентовъ степеней этой буквы, содержащихъ только двѣ остальные буквы въ каждомъ изъ полиномовъ, и раздѣлить ихъ на этихъ большихъ дѣлителей, послѣ чего получимъ полиномы A_1 и B_1 , содержащіе только производителей, зависящихъ отъ буквы, по степенямъ которой расположены полиномы. Съ A_1 и B_1 должно поступать какъ и прежде.

Переходя такимъ же образомъ къ полиномамъ, содержащимъ четыре, пять и т. д. буквъ, заключаемъ, что при всякомъ числѣ буквъ общій большій дѣлитель двухъ и всякаго числа полиномовъ можетъ быть найденъ.

Примѣръ.

Полиномы содержатъ четыре буквы:

$$A = 6c^2 + 9cd - 2c - 3d,$$

$$B = 6ac + 10bc + 9ad + 15bd.$$

Располагая ихъ по уменьшающимся степенямъ буквы c , получимъ:

$$A = 6c^2 + (9d - 2)c - 3d,$$

$$B = (6a + 10b)c + 9ad + 15bd.$$

Коеффиціенты полинома A суть первые между собою; общій большій дѣлитель коеффиціентовъ полинома B , т. е. полиномовъ:

$6a + 10b$ и $9ad + 15bd$, есть $3a + 5b$; раздѣляя на него коеффиціенты B , получимъ

$$A_1 = 6c^2 + (9d - 2)c - 3d,$$

$$B_1 = 2c + 3d.$$

1-е дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} 6c^2 + (9d - 2)c - 3d & 2c + 3d \\ -6c^2 - 9dc & 3c - 1. \\ \hline -2c - 3d & \\ +2c + 3d & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Общій большій дѣлитель полиномовъ A и B есть $2c + 3d$.

У п р а ж н е н і я.

Найти общаго большаго дѣлителя количествъ:

1. $3822x^4yz$; $4312y^3z$; $420xz^3$ и $28z^2$.

2. $x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ и $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.

3. $x^3 - 4; x^2 + x - 2.$
4. $3x^3 - 13x^2 + 23x - 21; 6x^3 + x^2 - 44x + 21.$
5. $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x - 44; x^3 - 8x^2 + 19x - 14.$
6. $6x^4 + x^3 - x; 4x^3 - 6x^2 - 4x + 3.$
7. $2a^2bc^5 - 11a^2bc^2 - 9a^2b; 4a^2c^5 + 11a^2c^4 + 81a^2.$
8. $12ab^5 - 8ab^4 - 22ab^3 - 6ab^2 - 6ab - 2a; 400a^2b^4 + 200a^2b^3 - 1800a^2b^2 + 300a^2b - 500a^2.$
9. $x^3 - x^2 - x + 1; x^4 - 2x^3 + 2x - 1; x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$
10. $5x^4 + 25x + 20; x^3 + 2x^2 - 8x; 2x^2 + 14x + 24.$
11. $x^3 + 1; x^3 + mx^2 + mx + 1.$
12. $x^5 - y^5; x^2 - y^2.$
13. $x^3 + ax^2 - axy - y^3; x^4 + 2x^3y - a^2x^2 + x^2y^2 - 2axy^2 - y.$
14. $2x^3 + (2a - 9)x^2 - (9a + 6)x + 27; 2x^2 - 13x + 18.$
15. $a^3x^3 - a^2bx^2y + ab^2xy^2 - b^3y^3; 2a^2bx^2y - ab^2xy^2 - b^3y^3.$
16. $4a^5x^3y + 4b^5x^3y; 2a^4xy^2 - 2b^4xy^2; 10a^3x + 10b^3x.$
17. $x^2 - 2a^2 - ax; x^2 - 4a^2; x^2 - 6a^2 + ax; x^2 - 8a^2 + 2ax.$

ГЛАВА IV.

О дробныхъ рациональныхъ алгебраическихъ количествахъ и дѣйствіяхъ надъ ними.

§ 1. Всякое алгебраическое количество, которое содержитъ знакъ дѣленія и не можетъ быть безъэтого знака представлено, называется *дробнымъ*. Такъ выраженіе

$\frac{a}{b} + c^2$ есть дробное алгебраическое количество.

Когда при дѣленіи дѣлимое не дѣлится на дѣлителя, то частное изображаютъ въ видѣ дробнаго алгебраическаго количества, написавъ дѣлителя подъ дѣлимымъ и проведя между ними черту, показывающую, что дѣлимое должно быть раздѣлено на дѣлителя. Такъ дѣленіе $a^2b + 2ab^2 + c$ на $a^3 + a^2b - d$ не возможно, и частное изображается въ видѣ дробнаго алгебраическаго количе-

ства $\frac{a^2b + 2ab^2 + c}{a^3 - a^2b - d}$.

Частное невозможнаго дѣленія, такъ изображенное, называется *алгебраическою дробью*, дѣлимое называется *числителемъ*, дѣлитель — *знаменателемъ*.

Всякое дробное алгебраическое количество содержитъ между членами своими алгебраическія дроби, напр. ко-

личество $\frac{a}{b} + c^2$ имѣетъ первымъ членомъ своимъ алге-

браическую дробь $\frac{a}{b}$.

Дѣйствія надъ алгебраическими количествами приводятся къ дѣйствіямъ надъ ихъ членами (глава III). По этому дѣйствія надъ дробными алгебраическими количествами зависятъ отъ свойствъ и дѣйствій надъ алгебраическими дробями, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и обратимся.

Свойства алгебраическихъ дробей.

§ 2. Дробь алгебраическая отличается отъ арифметической тѣмъ, что числитель и знаменатель ея могутъ быть не только цѣлыми, но и дробными числами, ибо каждая буква, входящая въ алгебраическое количество, можетъ означать всякое цѣлое и дробное число.

ТЕОРЕМА 1. *Алгебраическая дробь увеличивается, если увеличить ея числителя или уменьшить знаменателя, и обратно.*

Доказ. Отъ увеличенія дѣлимаго частное увеличится, отъ увеличенія дѣлителя оно уменьшится; дробь же есть частное, числитель — дѣлимое, знаменатель — дѣлитель.

Изъ этого же видно, что и обратно дробь уменьшится отъ уменьшенія числителя или отъ увеличенія знаменателя. Напр.

$$\frac{a+c}{b} > \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b+c} < \frac{a}{b}; \quad \frac{a-c}{b} < \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b-c} > \frac{a}{b}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если къ числителю и знаменателю дроби придать поровну, то она увеличится, когда числитель меньше знаменателя, уменьшится, когда числитель больше знаменателя, и останется безъ переменны, когда числитель равенъ знаменателю, и обратно.*

Доказ. Положимъ, что дробь есть $\frac{a}{b}$. Придавая къ числителю и знаменателю количество c , получимъ дробь

$\frac{a+c}{b+c}$. Полагая, что число единиц или частей единиц въ a и b извѣстно и что цѣлое или дробное частное $\frac{a}{b}$ есть число q , будемъ производить дѣленіе $a+c$ на $b+c$. Раздѣляя a на b (т. е. низшій по буквѣ c членъ дѣлимаго на низшій по той же буквѣ членъ дѣлителя), получимъ первый членъ частнаго q ; помножая дѣлителя на q , получимъ $bq+cq$; вычитая это изъ дѣлимаго и замѣчая, что $a=bq$, получимъ первый остатокъ $c-cq$. Дѣлимое $a+c$ равно дѣлителю $b+c$, помноженному на частное q и сложенному съ остаткомъ, то есть $a+c = (b+c)q + c - cq$, или, отнимая остатокъ $c - cq$ отъ обоихъ равныхъ количествъ, получимъ равныя: $a+cq = (b+c)q$, откуда слѣдуетъ, что $a+cq$ есть произведение $b+c$ на q ; посему частное дѣленія $a+cq$ на $b+c$ равно q , или $\frac{a+cq}{b+c} = q = \frac{a}{b}$.

Изъ этого видно, что дробь $\frac{a}{b}$ равна $\frac{a+cq}{b+c}$, а не $\frac{a+c}{b+c}$.

Если $q < 1$, т. е. если дробь $\frac{a}{b}$ есть правильная, то $a+cq < a+c$, и слѣдовательно числитель дроби $\frac{a+c}{b+c}$ больше числителя дроби $\frac{a+cq}{b+c}$; посему дробь $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a+cq}{b+c}$, или $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$.

Если $q > 1$, т. е. если дробь $\frac{a}{b}$ есть неправильная, то $a+cq > a+c$; посему $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a+cq}{b+c}$, или $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.

Если $q = 1$, т. е. если дробь $\frac{a}{b}$ равна единице (числитель равен знаменателю), то

$$\frac{a + cq}{b + c} = \frac{a + c}{b + c} = \frac{a}{b}.$$

Изъ этой теоремы слѣдуетъ обратная. Если отъ числителя и знаменателя отнять поровну, то дробь уменьшится, когда числитель меньше знаменателя, увеличится, когда онъ больше знаменателя, и останется безъ перемѣны, когда числитель равенъ знаменателю; то есть $\frac{a-c}{b-c} < \frac{a}{b}$, если $\frac{a}{b}$ правильная дробь; $\frac{a-c}{b-c} > \frac{a}{b}$, если $\frac{a}{b}$ дробь неправильная, и $\frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{b}$, если $\frac{a}{b} = 1$.

ТЕОРЕМА 3. Дробь не измѣнится, если помножить или разделить числителя и знаменателя ея на одно и тоже число.

Доказ. Полагая, что число единиц или частей единицы въ числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ извѣстно,

получимъ отъ дѣленія числителя на знаменателя цѣлое или дробное частное q . Дѣлимое a равно дѣлителю b , помноженному на частное q , т. е. $a = bq$; посему a , помноженное на m , равно bq , помноженному на m , или

$$am = qbm;$$

откуда видно, что am есть произведение q на bm , слѣдовательно

$$\frac{am}{bm} = q, \text{ или } \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что и обратно числителя и знаменателя можно дѣлить на тоже число, не измѣняя дроби, то

$$\text{есть } \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}.$$

Сокращеніе алгебраическихъ дробей.

§ 3. Сократить дробь, значить привести ее въ простѣйшій видъ, не измѣняя дроби.

Для сего поступаютъ такимъ образомъ: если общіе производители числителя и знаменателя очевидны, то раздѣляютъ на каждого изъ нихъ какъ числителя, такъ и знаменателя, отъ чего дробь упростится, но не измѣнится, на основаніи теоремы 3-ей § 2. Или, что тоже самое, опускаютъ въ числитель и знаменатель произво- дителей общихъ обоимъ, сохраняя въ каждомъ только тѣ, которыхъ нѣтъ въ другомъ.

Примѣры.

$$1. \frac{12a^3b^4c^8}{48a^5b^7c^2} = \frac{12a^3b^4c^6}{4 \cdot 12 \cdot a^3a^2 \cdot b^4b^3c^2} = \frac{c^6}{4 \cdot a^2b^3};$$

$$2. \frac{a^3b^5}{3a^2b^3 - a^3b^2c^3 + a^2b^2} = \frac{a^2 \cdot ab^2 \cdot b^3}{(3b - ac^3 + 1)a^2b^2} = \frac{ab^3}{3b - ac^3 + 1};$$

$$3. \frac{abc}{a^2b^3c + a^2bc^3} = \frac{1 \cdot abc}{ca^2b(b^2 + c^2)} = \frac{1}{a(b^2 + c^2)};$$

$$4. \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2b - b^3} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{b(a^2 - b^2)} = \frac{(a+b)(a+b)}{b(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{b(a-b)};$$

потому что $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$,
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$$5. \frac{3m^3n + 3m^2n}{6m^3n^2 + 6mn^2} = \frac{3m^2n(m+1)}{6mn^2(m^2-1)} = \frac{m(m+1)}{2n(m^2-1)}; \text{ но}$$

$$m^2 - 1 = (m-1)(m+1), \text{ посему } \frac{m(m+1)}{2n(m^2-1)} =$$

$$= \frac{m(m+1)}{2n(m+1)(m-1)} = \frac{m}{2n(m-1)}.$$

$$6. \frac{4x^2 - 12ax + 9a^2}{8x^3 - 27a^3}. \text{ Въ этой дроби числитель есть}$$

квадратъ $2x-3a$; знаменатель равняется $(2x)^3 - (3a)^3$ и посему дѣлится на $2x-3a$ (теорема 7 § 44); частное дѣленія есть $4x^2 + 6ax + 9a^2$, слѣдовательно

$$\frac{4x^2 - 12ax + 9a^2}{8x^3 - 27a^3} = \frac{(2x - 3a)^2}{(2x - 3a)(4x^2 + 6ax + 9a^2)} = \frac{2x - 3a}{4x^2 + 6ax + 9a^2}.$$

Если общіе производители числителя и знаменателя не очевидны, то для сокращенія дроби должно числителя и знаменателя ея раздѣлить на ихъ общаго большаго дѣлителя; чрезъ это дробь получить простѣйшій видъ, потому что всѣ общіе производители разомъ сократятся, и не измѣнится на основаніи теоремы 3 § 2.

Этотъ способъ есть общій способъ сокращенія дробей.

Примѣры.

$$1. \frac{a^2 - 3ab + ac + 2b^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}.$$

Общій большій дѣлитель числителя и знаменателя этой дроби есть $a - b + c$.

Раздѣляя на него оба многочлена, получимъ сокращенную дробь $\frac{a - 2b}{a + b - c}$.

$$2. \frac{9a^3 - 12a^2b + 24ab^2 - 7b^3}{12a^2 + 5ab - 3b^2}.$$

Общій большій дѣлитель есть $3a - b$; сокращенная дробь $= \frac{3a^2 - 3ab + 7b^2}{4a + 3b}$.

$$3. \frac{6a^3 - 6a^2y + 2ay^2 - 2y^3}{12a^2 - 15ay + 3y^2} = \frac{2(3a^3 - 3a^2y + ay^2 - y^3)}{3(4a^2 - 5ay + y^2)}.$$

Общій большій дѣлитель есть $a - y$, сокращенная дробь $= \frac{6a^2 + 2y^2}{12a - 3y}$.

$$4. \frac{54a^2b - 24b^3}{45a^3b + 3a^2b^2 - 9ab^3 + 6b^4} = \frac{2(9a^2 - 4b^2)}{15a^3 + a^2b - 3ab^2 + 2b^3}.$$

Общій произвождитель числителя и знаменателя $3b$ въ послѣдней дроби отброшенъ.

Раздѣляя числителя и знаменателя ея на ихъ общаго большаго дѣлителя $3a + 2b$, получимъ сокращенную дробь

$$\frac{6a - 4b}{5a^2 - 3ab + b^2}.$$

Приведеніе алгебраическихъ дробей къ общему знаменателю.

§ 4. Чтобы привести дроби къ общему знаменателю, должно помножить числителя и знаменателя каждой на произведеніе знаменателей остальныхъ дробей; тогда знаменатели всѣхъ дробей будутъ равные, такъ какъ въ каждый изъ нихъ войдетъ произведеніе всѣхъ знаменателей; дроби же не измѣнятся на основаніи теоремы 3 § 2. Напр.

приводя дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ къ общему знаменателю, получимъ $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Если же знаменатели имѣютъ общихъ произвождителей, то нужно приводить ихъ къ наименьшему общему знаменателю. Для этого составляется произведеніе всѣхъ высшихъ степеней каждаго изъ произвождителей знаменателей, которое будетъ наименьшимъ количествомъ, дѣлящимся на каждаго знаменателя, ибо содержитъ всѣхъ произвождителей его. Потомъ числителя и знаменателя каждой дроби помножаютъ на частное, получаемое отъ раздѣленія полученнаго количества на знаменателя этой дроби. Или, что тоже самое, множатъ числителя и знаменателя каждой дроби на произвождителей, которыхъ не достаетъ въ ея знаменателѣ противъ знаменателей остальныхъ дробей, при чемъ нужно предварительно разложить знаменателей на произвождителей.

Примѣры.

$$1. \frac{a^2b}{1-m^2}; \frac{a^2}{1-2m+m^2}.$$

Такъ какъ $1-m^2=(1-m)(1+m)$, а $1-2m+m^2=(1-m)^2=(1-m)(1-m)$, то дроби можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{a^2b}{(1-m)(1+m)}; \frac{a^2}{(1-m)(1-m)};$$

помножая числителя и знаменателя первой на $1-m$, а второй на $(1+m)$, получимъ

$$\frac{a^2b(1-m)}{(1-m)^2(1+m)} \text{ и } \frac{a^2(1+m)}{(1-m)^2(1+m)},$$

или

$$\frac{a^2b-a^2bm}{1-m-m^2+m^3} \text{ и } \frac{a^2+a^2m}{1-m-m^2+m^3}.$$

$$2. \frac{a^2}{a+b}; \frac{b}{a^2-b^2}; \frac{c}{a-b}.$$

Помножая числителя и знаменателя первой дроби на $a-b$, а третьей на $a+b$, получимъ:

$$\frac{a^3-a^2b}{a^2-b^2}; \frac{b}{a^2-b^2}; \frac{ac+bc}{a^2-b^2}.$$

$$3. \frac{M}{12a^5x-12a^4bx}; \frac{N}{18a^4bx+18a^3b^2x} \text{ и}$$

$$\frac{P}{24a^4x^2-24a^2b^2x^2}.$$

Эти дроби можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{M}{2^2 \cdot 3a^4x(a-b)}; \frac{N}{2 \cdot 3^2a^3bx(a+b)}; \frac{P}{2^33a^2x^2(a+b)(a-b)};$$

помножая числителя и знаменателя первой на $2 \cdot 3b(a+b)x$, или на $6abx+6b^2x$, второй на $2^2 \cdot a(a-b)x$, или на $4a^2x-4abx$, и третьей на $3a^2b$, получимъ:

$$\frac{6abxM + 6b^2xM}{72a^6bx^2 - 72a^4b^3x^2}; \frac{4a^2xN - 4abxN}{72a^6bx^2 - 72a^4b^3x^2};$$

$$\frac{3a^2bp}{72a^6bx^2 - 72a^4b^3x^2}.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей.

§ 5. Положимъ, что даны три дроби, приведенныя къ общему знаменателю: $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$, $\frac{c}{m}$; требуется сложить

первую со второй и изъ полученной суммы вычесть третью. Полагая, что число единиц или частей единицы въ числителяхъ и общемъ знаменателѣ этихъ дробей извѣстно, означимъ цѣлое или дробное частное дѣленія a на m чрезъ q , b на m чрезъ q_1 и c на m чрезъ q_2 ;

тогда $\frac{a}{m} = q$; $\frac{b}{m} = q_1$; $\frac{c}{m} = q_2$,

или $a = qm$; $b = q_1m$; $c = q_2m$, откуда

$$a + b - c = qm + q_1m - q_2m = m(q + q_1 - q_2),$$

т. е. $a + b - c$ есть произведение количества m на количество $q + q_1 - q_2$, слѣдовательно

$$\frac{a + b - c}{m} = q + q_1 - q_2,$$

или

$$\frac{a + b - c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m};$$

откуда слѣдуетъ, что для сложения или вычитания дробей должно привести ихъ къ общему знаменателю и произвести сложение или вычитание числителей, написавъ подъ полученной суммой или разностью общаго знаменателя.

Примѣры.

$$1. \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

$$2. \frac{a}{x^n} - \frac{c}{x^{n+s}} + \frac{d}{x^{n+1+s}} = \frac{ax^{1+s}}{x^{n+1+s}} - \frac{cx}{x^{n+1+s}} + \\ + \frac{d}{x^{n+1+s}} = \frac{ax^{1+s} - cx + d}{x^{n+1+s}}.$$

Когда сложение или вычитание производится надъ дробью и цѣлымъ количествомъ, то цѣлое количество принимаютъ за дробь съ знаменателемъ равнымъ единицѣ. Напр.

$$a + \frac{c}{d} = \frac{a}{1} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{d} + \frac{c}{d} = \frac{ad+c}{d}.$$

Умноженіе алгебраическихъ дробей.

§ 6. Положимъ, что требуется перемножить дроби: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$. Полагая $\frac{a}{b} = q; \frac{c}{d} = q_1; \frac{e}{f} = q_2$, или $a = bq; c = dq_1; e = fq_2$, получимъ $a.c.e. = bq.dq_1.fq_2 = qq_1q_2.bdf$; слѣдовательно ace есть произведение qq_1q_2 на bdf , по сему $qq_1q_2 = \frac{ace}{bdf}$, или $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$.

Изъ этого слѣдуетъ, что произведение дробей найдется, раздѣляя произведение ихъ числителей, на произведение знаменателей.

Примѣры.

$$1. \frac{25x^{3n-1}}{3a^{n-m}} \cdot \frac{12a^{n+m}}{5x^{n+1}} = 20a^{2m}x^{2n-2}.$$

$$2. \frac{7a^5 - 3c^2}{2ab - c^3} \cdot \frac{7a^5 + 3c^2}{2ab - c^3} = \frac{49a^{10} - 9c^4}{4a^2b^2 - 4abc^3 + c^6}.$$

$$3. \frac{3a^7b - 5a^3c}{2a + 3b^2} \cdot \frac{3a^7b + 5a^3c}{2a - 3b^2} = \frac{9a^{14}b^2 - 25a^6c^2}{4a^2 - 9b^4}.$$

Произведение числителей примѣровъ 2-го и 3-го и знаменателей 3-го можетъ быть найдено не производя умноженія, на томъ основаніи, что произведение суммы

двухъ количествъ на разность ихъ даетъ разность квадратовъ этихъ количествъ.

Если нужно умножить дробь на цѣлое количество или цѣлое количество на дробь, то цѣлое количество разсматриваютъ какъ дробь съ знаменателемъ равнымъ единицѣ. Напр.

$$\frac{a^2-b}{cd} (a-b) = \frac{a^2-b}{cd} \cdot \frac{a-b}{1} = \frac{(a^2-b)(a-b)}{cd} =$$

$$= \frac{a^3 - ab - a^2b + b^2}{cd}.$$

Возведеніе алгебраическихъ дробей въ степень.

§ 7. Для возведенія въ степень дроби, должно возводить въ эту степень отдѣльно числителя и знаменателя ея, потому что степень дроби есть произведеніе производителей, равныхъ этой дроби, и число коихъ равно числу единицъ въ показателѣ степени; при умноженіи же дробей должно перемножить числители между собою, знаменателей между собою и первое произведеніе сдѣлать числителемъ, а второе знаменателемъ.

Примѣры.

$$1. \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots = \frac{aaaa\dots}{bbbb\dots} = \frac{a^m}{b^m}.$$

$$2. \left(\frac{a^2+b}{cd}\right)^3 = \frac{a^6+3a^4b+3a^2b^2+b^3}{c^3d^3}.$$

$$3. \left[\frac{a+b-c+d}{2a-3b}\right]^2 =$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac+2ad-2bc+2bd-2cd}{4a^2-12ab+9b^2}.$$

Дѣленіе алгебраическихъ дробей.

§ 8. Пусть дано раздѣлить $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$. Приводя эти дроби къ общему знаменателю, получимъ $\frac{ad}{bd}$ и $\frac{bc}{bd}$. Ча-

стное не измѣнится отъ умноженія дѣлимаго и дѣлителя на bd ; слѣдовательно

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad \cdot bd}{bd} : \frac{bc \cdot bd}{bd},$$

или

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc = \frac{ad}{bc}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что при дѣленіи дроби на дробь должно числителя дѣлимаго умножить на знаменателя дѣлителя, знаменателя дѣлимаго на числителя дѣлителя, и первое произведеніе сдѣлать числителемъ, а второе знаменателемъ.

Примѣры.

$$1. \frac{2a^2x - 2b^2x}{5ab} : \frac{4ab^2 - 4b^3}{15ax} = \frac{3x^2(a+b)}{2b^3}.$$

$$2. \frac{5a^4 + 3a^3c}{2a^5 + b^2} : \frac{2a^5 + b^2}{3a^7} = \frac{15a^{11} + 9a^{10}}{4a^{10} + 4a^5b^2 + b^4}.$$

Для раздѣленія цѣлаго количества на дробь и дроби на цѣлое, должно подразумѣвать въ знаменателѣ цѣлаго количества единицу.

$$3. (a^2 - b^2) : \frac{ab + b^2}{2a} = \frac{a^2 - b^2}{1} : \frac{ab + b^2}{2a} = \frac{2a^2 - 2ab}{b}.$$

$$4. \frac{3a^2 + b^2}{2a} : (3a^2 + b^2) = \frac{1}{2a}.$$

Извлеченіе корня изъ алгебраическихъ дробей.

§ 9. Для извлеченія корня изъ дроби, должно извлечь его отдѣльно изъ числителя и знаменателя, потому что извлеченіе корня есть дѣйствіе обратное возведенію въ степень, а при возведеніи въ степень дроби возводятъ числителя и знаменателя ея отдѣльно.

Примѣры.

$$1. \sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a}{b},$$

ибо возводя $\frac{a}{b}$ въ n -ю степень, получимъ $\frac{a^n}{b^n}$.

$$2. \sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{x^4 + 4ax^2 + 4a^2}} = \frac{a - b}{x^2 + 2a}.$$

$$3. \sqrt{\frac{a^2x^2 + 2ab^2x^3 + b^4x^4}{a^{2m} + 2a^mx^m + x^{2m}}} = \frac{ax + b^2x^2}{a^m + x^m}.$$

Замѣчаніе. Корень какой либо степени изъ дроби, коей числитель или знаменатель неполная степень, есть количество ирраціональное.

Выраженіе алгебраической дроби въ видѣ цѣлаго количества и дроби.

§ 10. Представить дробь въ видѣ цѣлаго количества и дроби возможно только для такой дроби, высшій по какой либо буквѣ членъ числителя которой дѣлится на высшій по той же буквѣ членъ знаменателя, или низшій членъ числителя дѣлится на низшій членъ знаменателя.

Въ первомъ случаѣ должно дѣлить числителя на знаменателя до тѣхъ поръ, пока получится остатокъ, котораго высшій членъ не дѣлится на высшій членъ дѣлителя. Тогда этотъ остатокъ нужно приписать къ частному, провести подъ нимъ черту и подписать дѣлителя.

Примѣры.

$$1. \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 2}{x^2 - 2x + 3} = x - 1 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 3}.$$

$$2. \frac{x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6}{x^3 + 4x^2 - 3x + 2} = x - 2 + \frac{6x^2 - 4x + 10}{x^3 + 4x^2 - 3x + 2}.$$

Во второмъ случаѣ дѣленіе производятъ до тѣхъ поръ, пока низшій членъ остатка не будетъ дѣлиться на низшій членъ дѣлителя, или, если этого не случится (гл. III § 34), то опредѣляютъ произвольное число членовъ частнаго, и дѣленіе получаетъ тогда названіе *безконечнаго*.

Примѣры.

$$1. \frac{2a - a^2 + a^3}{2 - a} = a + \frac{a^3}{2 - a}.$$

$$2. \frac{1 - 4x + x^2 + x^3}{1 - 3x + x^2} = 1 - x + \frac{-3x^2 + 2x^3}{1 - 3x + x^2} = \\ = 1 - x - 3x^3 + \frac{-7x^3 + 3x^4}{1 - 3x + x^2} =$$

и т. д.

Останавливаемся на второмъ, третьемъ и т. д. остаткахъ, ибо очевидно, что дѣленіе есть безконечное.

$$3. \frac{1}{1 - b} = 1 + \frac{b}{1 - b} = 1 + b + \frac{b^2}{1 - b} = \\ = 1 + b + b^2 + \frac{b^3}{1 - b} = \dots = 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 + \dots \\ \dots + b^{n-1} + \frac{b^n}{1 - b}.$$

Легко повѣрить эти выраженія дроби, полагая $b = \frac{1}{2}$.

$$4. \frac{4}{1 - x} = 4 + \frac{4x}{1 - x} = 4 + 4x + \frac{4x^2}{1 - x} = \\ = 4 + 4x + 4x^2 + \frac{4x^3}{1 - x} = \dots = 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 + 4x^4 + \dots \\ \dots + 4x^{n-1} + \frac{4x^n}{1 - x}.$$

Эти выраженія можно тоже повѣрить, полагая $x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 5. \quad \frac{a}{1-x} &= a + \frac{ax}{1-x} = a + ax + \frac{ax^2}{1-x} = \\
 &= a + ax + ax^2 + \frac{ax^3}{1-x} = \dots = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \dots \\
 &\quad \dots + ax^{n-1} + \frac{ax^n}{1-x}.
 \end{aligned}$$

Для повѣрки положимъ $a = 1$; $x = \frac{1}{10}$.

О дѣйствіяхъ надъ дробными алгебраическими количествами.

§ 11. Всякое дробное алгебраическое количество имѣть членами своими дробь и цѣлыя количества; посему принимая цѣлые члены за дробь, знаменатель коихъ единица, и приводя ихъ къ общему знаменателю, обратимъ алгебраическое количество въ дробь, съ которой будемъ поступать по сказанному.

$$\begin{aligned}
 1. \quad &\left[\frac{5}{2} x^2 + 3ax - \frac{7}{3} a^2 \right] \cdot \left[2x^2 - \frac{a^2}{2} \right] = \\
 &= \left[\frac{15x^2 + 18ax - 14a^2}{6} \right] \cdot \left[\frac{4x^2 - a^2}{2} \right] = \\
 &= \frac{60x^4 + 72ax^3 - 74a^2x^2 - 18a^3x + 14a^4}{12} = \\
 &= 5x^4 + 6ax^3 - \frac{74}{12} a^2x^2 - \frac{3}{2} a^3x + \frac{7}{6} a^4. \\
 2. \quad &\left[\frac{a^2}{b^2} - \frac{7c^2}{2a^4b^2} + c \right] \cdot \left[\frac{a^2}{b} - \frac{2c^3}{d} \right] = \\
 &= \left[\frac{2a^6 - 7c^2 + 2a^4b^2c}{2a^4b^2} \right] \cdot \left[\frac{a^2d - 2bc^3}{bd} \right] = \\
 &= \frac{2a^8d - 7a^2c^2d + 2a^6b^2cd - 4a^6bc^3 + 14bc^5 - 4a^4b^3c^4}{2a^4b^3d} = \\
 &= \frac{a^4}{b^3} - \frac{7}{2} \frac{c^2}{a^2b^3} + \frac{a^2c}{b} - 2 \frac{a^2c^3}{b^3d} + 7 \frac{c^5}{a^4b^2d} - 2 \frac{c^4}{d}.
 \end{aligned}$$

$$3. \left[\frac{5}{2} ab - \frac{1}{3} c^2 \right]^2 = \left[\frac{15ab - 2c^2}{6} \right]^2 =$$

$$\frac{225a^2b^2 - 60abc^2 - 4c^4}{36} = \frac{25}{4} a^2b^2 - \frac{5}{3} abc^2 - \frac{c^4}{9}.$$

$$4. \left[\frac{3}{2} x^3 - \frac{5}{4} x^2 - 8x + 9 \right] : \left[\frac{1}{2} x - 1 \right] =$$

$$= \left[\frac{6x^3 - 5x^2 - 32x + 36}{4} \right] : \left[\frac{x - 2}{2} \right] =$$

$$= 2 \left[\frac{6x^3 - 5x^2 - 32x + 36}{4(x - 2)} \right] = \frac{6x^3 - 5x^2 - 32x + 36}{2(x - 2)}.$$

Общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя есть $x - 2$; раздѣляя ихъ на $x - 2$, получимъ сокращенную дробь

$$\frac{6x^2 + 7x - 18}{2} = 3x^2 + \frac{7}{2}x - 9.$$

$$5. \left[\frac{a}{b} + \frac{fd}{2c} - 3ac + 7 \right] : \frac{3c}{d} =$$

$$= \left[\frac{2ac + bfd - 6abc^2 + 14bc}{2bc} \right] : \frac{3c}{d} =$$

$$= \frac{(2ac + bfd - 6abc^2 + 14bc)d}{6bc^2} = \frac{ad}{3bc} + \frac{fd^2}{6c^2} - ad + \frac{7d}{3c}.$$

$$6. \left[\frac{a^2x^3}{bd} + \frac{abx^2}{c^2d} - \frac{acx^2}{d^2} - \frac{b^2x}{cd^2} + \frac{a^2x}{bc} - \frac{a}{d} \right] : \left[\frac{ax}{c} - \frac{b}{d} \right] =$$

$$= \left[\frac{a^2x^3c^2d + ab^2x^2d - abc^3x^2 - b^3cx + a^2cd^2x - ac^2db}{bc^2d^2} \right] :$$

$$: \left[\frac{adx - bc}{cd} \right] =$$

$$= \frac{(a^2c^2dx^3 + ab^2dx^2 - abc^3x^2 - b^3cx + a^2cd^2x - ac^2db)cd}{(adx - bc)bc^2d^2} =$$

$$= \frac{a^2c^2dx^3 + ab^2dx^2 - abc^3x^2 - b^3cx + a^2cd^2x - ac^2db}{(adx - bc)bcd}.$$

Общій большій дѣлитель числителя и знаменателя дроби есть $adx - bc$; раздѣляя на него числителя и знаменателя, получимъ сокращенное частное дѣленія:

$$\frac{ac^2x^3 + b^2x + acd}{bcd} = \frac{acx^2}{bd} + \frac{bx}{cd} + \frac{a}{b}.$$

$$\begin{aligned} 7. \left[\frac{a^3}{b} - ac - \frac{a}{d} + \frac{bc}{ad} + \frac{a}{bc} - \frac{1}{a} \right] : \left[\frac{a}{b} - \frac{c}{a} \right] = \\ = \frac{(a^4dc - a^2c^2bd - a^2bc + b^2c^2 + a^2d - bcd)}{(a^2 - bc)cd} = \\ = \frac{a^2dc - bc + d}{cd} = a^2 - \frac{b}{d} + \frac{1}{c}, \end{aligned}$$

ибо общій дѣлитель есть $a^2 - bc$.

$$\begin{aligned} 8. \sqrt{x^4 - ax^3 + \frac{1}{4}a^2x^2} &= \frac{\sqrt{4x^4 - 4ax^3 + a^2x^2}}{\sqrt{4}} = \\ &= \frac{2x^2 - ax}{2} = x^2 - \frac{ax}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \frac{4a}{3c} + \frac{4b^2}{9c^2}} &= \frac{\sqrt{9a^2c^2 - 12ab^2c + 4b^4}}{\sqrt{9b^2c^2}} = \\ &= \frac{3ac - 2b^2}{3bc} = \frac{a}{b} - \frac{2b}{3c}. \end{aligned}$$

§ 12. Приводя дробныя алгебраическія количества къ общему знаменателю и производя надъ ними дѣйствія какъ надъ дробями, можно всегда достигнуть желаемаго результата; но получаемыя при семъ дробнѣ требуютъ часто сокращенія, какъ мы выше видѣли, что усложняетъ дѣйствіе. Посему въ случаѣ если полиномы сложные, то не приводя дробныхъ количествъ къ общему знаменателю, производятъ надъ ними дѣйствія по тѣмъ-же правиламъ, какъ и для цѣлыхъ количествъ, т. е. приводятъ дѣйствія надъ полиномами къ дѣйствіямъ надъ ихъ цѣлыми или дробными членами мономами, на томъ основаніи, что правила дѣйствій съ цѣлыми полиномами были найдены разсужденіями надъ буквенными количествами, въ коихъ каждый членъ, означенный буквою, могъ быть всякимъ и цѣлымъ и дробнымъ числомъ. Только при дѣленіи и

извлеченіи корня должно располагать полиномы по степенямъ той буквы, которая не входитъ въ знаменателя; если-же такой не найдется, какъ въ примѣрѣ 7 дѣленія § 11-го, то дѣйствіе производить по § 11.

Приложимъ это къ разсмотрѣннымъ примѣрамъ § 11-го.

Примѣръ 2.

$$\left[\frac{a^2}{b^3} - \frac{7c^2}{2a^4b^2} + c \right] \cdot \left[\frac{a^2}{b} - \frac{2c^3}{d} \right] = \frac{a^4}{b^4} - \frac{7a^2c^2}{2a^4b^3} + \frac{a^2c}{b} - \frac{2a^2c^3}{b^3d} + \frac{14c^5}{2a^4b^2d} - \frac{2c^4}{d} = \frac{a^4}{b^4} - \frac{7c^2}{2a^2b^3} + \frac{a^2c}{b} - \frac{2a^2c^3}{b^3d} + \frac{7c^5}{a^4b^2d} - \frac{2c^4}{d}.$$

Примѣръ 3.

$$\left[\frac{5}{2} ab - \frac{1}{3} c^2 \right]^2 = \left(\frac{5}{2} ab \right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} ab \cdot \frac{1}{3} c^2 + \left(\frac{1}{3} c^2 \right)^2 = \frac{25}{4} a^2b^2 - \frac{5}{3} abc^2 + \frac{1}{9} c^4.$$

Примѣръ 6.

Располагаемъ дѣлимое и дѣлителя по уменьшающимся степенямъ буквы x .

$$\begin{array}{l} \text{дѣл.} \quad \frac{a^2x^3}{bd} + \frac{abx^2}{c^2d} - \frac{acx^2}{d^2} - \frac{b^2x}{cd^2} + \frac{a^2x}{bc} - \frac{a}{d} \bigg| \frac{ax}{c} - \frac{b}{d} \text{ дѣлит.} \\ \hline \quad - \frac{a^2x^3}{bd} + \frac{acx^2}{d^2} \qquad \qquad \frac{acx^2}{bd} + \frac{bx}{cd} + \frac{a}{b} \text{ част.} \\ \hline 1\text{-й} \quad \frac{abx^2}{c^2d} - \frac{b^2x}{cd^2} + \frac{a^2x}{bc} - \frac{a}{d} \\ \quad - \frac{abx^2}{c^2d} + \frac{b^2x}{cd^2} \\ \hline 2\text{-й} \quad \frac{a^2x}{bc} - \frac{a}{d} \\ \quad - \frac{a^2x}{bc} + \frac{a}{d} \\ \hline 3\text{-й} \quad 0. \end{array}$$

Примѣръ 9.

квадр.	$\frac{a^2}{b^2} - \frac{4a}{3c} + \frac{4b^2}{9c^2}$	$\frac{a}{b} - \frac{2b}{3c}$ корень.
	$-\frac{a^2}{b^2}$	
1-й остатокъ	$-\frac{4a}{3c} + \frac{4b^2}{9c^2}$	$\frac{2a}{b} - \frac{2b}{3c}$
	$\frac{4a}{3c} + \frac{4b^2}{9c^2}$	$x - \frac{2b}{3c}$
2-й остатокъ	0.	

Упражненія.

1. Найти условія, при которыхъ дробь $\frac{a}{b-c}$ увеличится, уменьшится и останется безъ перемѣны, если числителя и знаменателя ея уменьшить на h .

Сократить слѣдующія дроби, не прилагая теоріи общаго большаго дѣлителя.

2. $\frac{12a^3x^4 + 2a^2x^5}{18ab^2x + 3b^2x^2}$.

3. $\frac{5a^2 + 5ax}{a^2 - x^2}$.

4. $\frac{a^3 - x^3}{(a-x)^2}$.

5. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

6. $\frac{a^3 - 2a^2}{a^2 - 4n + 4}$.

7. $\frac{1 - a^2}{(1 + ax)^2 - (a + x)^2}$.

8. $\frac{(x-y)^4 - x^4 + y^4}{x^3 - y^3 - (x-y)^3}$.

9. $\frac{a^5 - a^4b - ab^4 + b^5}{a^4 - a^3b - a^2b^2 + ab^3}$.

Сократить слѣдующія дроби съ приложеніемъ теоріи
общаго большаго дѣлителя.

$$10. \frac{60a^2b^2 - 138ab^3 + 72b^4}{72a^3b^2 - 204a^2b^3 + 264ab^4 - 180b^5}.$$

$$11. \frac{9a^3 + 75a^2b - 197ab^2 + 57b^3}{9a^5 + 183a^4b + 688a^3b^2 - 2476a^2b^3 + 631ab^4 + 741b^5}.$$

Произвести знаками указанныя дѣйствія въ слѣдую-
щихъ дробяхъ:

$$12. \frac{1}{6a^3b} + \frac{3}{2} + \frac{n}{4a^2b} + \frac{p}{18a^2b^3}.$$

$$13. \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} - 3, 2.$$

$$14. \frac{2a+3x}{2a-3x} + \frac{2a-3x}{2a+3x} + 2x.$$

$$15. \frac{2}{x} - \frac{3}{2x-1} - \frac{2x-3}{4x^2-1}.$$

$$16. \frac{2}{x+a} + \frac{3a}{(x+a)^2} + \frac{3a-2x}{x^2-2ax+3a^2}.$$

$$17. \frac{x^2+2x+3}{x^3-1} + \frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

$$18. \frac{x^{3n}}{x^n-1} - \frac{x^{2n}}{x^n+1} - \frac{1}{x^n-1} + \frac{1}{x^n+1}.$$

$$19. \frac{1}{a(a-b)(a-c)} - \frac{1}{b(b-c)(a-b)} + \frac{1}{c(a-c)(b-c)}.$$

$$20. \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(a-b)(c-b)} - \frac{c}{(a-c)(c-b)}.$$

$$21. \frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)} - \frac{ab-c^2}{(a+c)(b+c)}.$$

$$22. \frac{2m^2}{3,5a^2} \cdot \frac{0,7x}{ma^3} \cdot \frac{51a^2}{m^2}.$$

$$23. \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + 1 \right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + 1 \right).$$

$$24. \left(\frac{0,4a^3b^4}{2\frac{2}{3}a^2b^4} \right)^2.$$

$$25. \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} \cdot \frac{a + b}{a - b} \left(\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \right)^2.$$

$$26. \frac{a^3 - x^3}{a^2x^2 - x^4} : \frac{a^2 + ax + x^2}{ax^2 + x^3}.$$

$$27. \left(\frac{2a + b}{a + b} - 1 \right) : \left(1 - \frac{b}{a + b} \right).$$

$$28. \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{2}{p + q} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right] : (p + q)^2.$$

29. Повѣрить формулу

$$\frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{(p + q)^2} \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right] + \frac{2}{(p + q)^3} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right].$$

30. Повѣрить пропорцію

$$\frac{\frac{c}{a + b} - \frac{c}{a + 2b}}{\frac{c}{a + 2b} - \frac{c}{a + 3b}} = \frac{\frac{c}{a + b}}{\frac{c}{a + 3b}}.$$

31. Повѣрить формулу

$$\frac{\frac{m^2 + n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} = \frac{m^2 - n^2}{m^3 + n^3} = m.$$

32. Повѣрить формулу

$$\sqrt{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{x^4 + 4ax^2 + 4a^2}} \cdot (x^2 + 2a) = a - b.$$

33. Повѣрить формулу

$$\sqrt{\frac{a^2x^2 + 2ab^2x^3 + b^4x^4}{a^{2m} + 2a^mx^n + x^{2n}}} : (a + b^2x) = \frac{x}{a^m + x^n}.$$

Представить слѣдующія дроби въ видѣ цѣлаго количества съ дробью.

$$34. \frac{1}{1 + b}.$$

$$35. \frac{a}{1+x}.$$

$$36. \frac{1+x}{1-x}.$$

Произвести знаками указанные дѣйствія въ слѣдующихъ дробныхъ количествахъ, не приводя членовъ ихъ къ общему знаменателю.

$$37. \left[\frac{a^2}{b^3} + \frac{2c^3d^4}{b^5} - \frac{7c^2}{2a^4b^2} \right] \times \left[\frac{a^2}{b^3} - \frac{2c^3d^4}{b^5} + \frac{7c^2}{2a^4b^3} \right].$$

$$38. \left[\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + \frac{77}{8}x^3 - \frac{43}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + 27 \right] : \left[\frac{1}{2}x^2 - x - 3 \right].$$

$$39. \left[\frac{78b^3}{a^8} - \frac{174b^4}{a^5} - \frac{295b^5}{a^2} + 2ab^6 + 28a^4b^7 \right] : \left[\frac{6b^2}{a^3} - 18b^3 - 7a^3b^4 \right]$$

$$40. \sqrt{\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^{6p}} - \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}} - \frac{2^5a^{m-1}b^xc}{d^{3p}} + a^{2n}b^{4n-2}d^6 + \frac{2^6}{3}a^nb^{x+2n-1}d^3 + \frac{2^{10}b^{2x}}{9}}.$$

ГЛАВА V.

О цѣлыхъ и дробныхъ ирраціональныхъ алгебраическихъ количествахъ и о дѣйствіяхъ надъ ними.

§ 1. Всякое алгебраическое количество, которое содержитъ коренной знакъ и не можетъ быть безъ этого знака представлено, называется *ирраціональнымъ* или *невыразимымъ*. Выраженія $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a + \sqrt[5]{3c} - \sqrt{7k}$ суть ирраціональныя.

Когда нельзя извлечь корня какой либо степени изъ данного алгебраическаго количества, то искомый корень изображаютъ въ видѣ ирраціональнаго алгебраическаго количества, поставивъ слѣва его коренной знакъ требуемой степени и проведя черту этого знака надъ всемъ количествомъ, для показанія, что должно извлечь корень изъ всего количества. Такъ нельзя извлечь корня квадратнаго изъ выраженія $a^2b + 2ac + d^2$, потому онъ изображается въ видѣ ирраціональнаго алгебраическаго количества $\sqrt{a^2b + 2ac + d^2}$. Невозможный корень, такъ изображенный, называется *кореннымъ количествомъ*, или *радикаломъ*.

Всякое ирраціональное количество содержитъ между членами своими коренныя количества, или радикалы. Напр. $a + \sqrt[5]{3c} - \sqrt{7k}$ имѣетъ членами своими радикалы пятой и второй степени.

Дѣйствія надъ алгебраическими количествами приводятся къ дѣйсвіямъ надъ ихъ членами (гл. III). Посе-

му дѣйствія надъ ирраціональными количествами зависать отъ свойствъ и дѣйствій надъ коренными количествами, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и обратимся.

Коренныя количества и свойства ихъ.

§ 2. *Общей мѣрой* двухъ чиселъ называется число, содержащееся въ каждомъ изъ нихъ цѣлое число разъ. Напр. числа $\frac{2}{5}$ и 3 имѣютъ общей мѣрой $\frac{1}{5}$ долю единицы, ибо $\frac{1}{5}$ содержится 2 раза въ $\frac{2}{5}$ и 15 разъ въ 3.

ТЕОРЕМА 1. *Отношеніе двухъ чиселъ, имѣющихъ общую мѣру, выражается или цѣлымъ числомъ, или конечной дробью.*

Доказ. Если A и B имѣютъ общую мѣру k , которая содержится m разъ въ A и n разъ въ B , то $A = mk$, и $B = nk$, откуда $\frac{A}{B} = \frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}$.

Если m дѣлится на n , то отношеніе A и B есть число цѣлое; если же m не дѣлится на n , то это отношеніе есть конечная дробь.

§ 3. Два числа, имѣющія общую мѣру, называются *соизмѣримыми между собою*; въ противномъ же случаѣ *несоизмѣримыми между собою*.

Число, имѣющее общую мѣру съ единицею, или не имѣющее ея, называется просто *соизмѣримымъ* или *несоизмѣримымъ*.

Слѣдствіе 1. *Всякое соизмѣримое число есть или цѣлое, или конечная дробь, ибо, по теоремѣ § 2, если A имѣетъ общую мѣру съ единицей, то отношеніе $\frac{A}{1}$, или просто A , есть число цѣлое, или конечная дробь.*

Слѣдствіе 2. *Всякое число, невыражающееся въ видѣ цѣлаго числа, или конечной дроби, есть число несоизмѣримое, какъ напримѣръ дробь періодическая.*

§ 4. ТЕОРЕМА 2. *Если корень изъ цѣлаго числа не есть число цѣлое, то онъ не можетъ быть и дробью.*

Доказ. Полагая, что цѣлое число Q не имѣетъ цѣлаго корня n -й степени и что $\sqrt[n]{Q} = \frac{a}{b}$, гдѣ $\frac{a}{b}$ есть дробь не сократимая, т. е. неимѣющая общихъ производителей въ числитель и знаменатель (это допустить можно, потому что еслибы были общіе производители, то ихъ можно было бы отбросить, т. е. сократить дробь); возводя дробь $\frac{a}{b}$ въ n -ю степень, получимъ $\frac{a^n}{b^n}$; но если a и b не имѣютъ общихъ производителей, то a^n и b^n тоже ихъ не имѣютъ, и слѣдовательно дробь $\frac{a^n}{b^n}$ не сократима и посему не можетъ быть равна цѣлому числу Q .

ТЕОРЕМА 3. *Корень несократимой дроби можетъ быть найденъ только тогда, когда его можно извлечь изъ числителя и знаменателя отдельно.*

Доказ. Полагая, что $\frac{P}{Q}$ есть несократимая дробь и что $\sqrt[n]{\frac{P}{Q}} = \frac{a}{b}$, гдѣ $\frac{a}{b}$ есть тоже дробь несократимая, получимъ $\frac{P}{Q} = \frac{a^n}{b^n}$. Такъ какъ обѣ дроби несократимы, то для существованія послѣдняго равенства необходимо, чтобы было $P = a^n$, $Q = b^n$, т. е. необходимо, чтобы P и Q имѣли корнями n -й степени количества a и b .

Слѣдствіе 1. *Корень изъ цѣлаго числа, которое не есть степень другаго цѣлаго числа, равная показателю кореннаго знака, не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ*

числомъ, ни дробью и слѣдовательно, по § 3, есть число несоизмѣримое.

Слѣдствіе 2. Корень изъ несократимой дроби, числитель или знаменатель которой не суть степени цѣлыхъ чиселъ, есть число несоизмѣримое.

Напр. $\sqrt[3]{21}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{\frac{10}{27}}$; $\sqrt{\frac{5}{36}}$ суть несоизмѣримыя числа.

§ 5. Несоиэмѣримые корни изъ чиселъ, не выразимы безъ кореннаго знака, посему также они называются числами ирраціональными, или коренными ариѳметическими количествами.

Алгебраическое коренное количество можетъ быть соизмѣримымъ или несоизмѣримымъ: — это зависитъ отъ числоваго значенія буквъ, стоящихъ подъ кореннымъ знакомъ; но по причинѣ произвольнаго значенія этихъ буквъ, оно не можетъ быть выражено безъ кореннаго знака и посему называется невыразимымъ, ирраціональнымъ. Напримѣръ $\sqrt[3]{a}$: если a есть число, представляющее собою третью степень другаго числа, то $\sqrt[3]{a}$ есть соизмѣримое количество, въ противномъ же случаѣ несоизмѣримое. Но число единицъ въ a произвольное, посему для всякаго числа единицъ $\sqrt[3]{a}$ не можетъ быть представленъ безъ кореннаго знака и слѣдовательно есть ирраціональное количество.

§ 6. ТЕОРЕМА 1. Когда корень изъ цѣлаго числа не можетъ быть точно опредѣленъ, то онъ всегда можетъ быть выраженъ дробью, произвольно мало разнящеюся отъ истиннаго корня.

Доказ. Пусть P есть число, изъ котораго нельзя извлечь корня n -й степени.

Означимъ чрезъ a произвольное, очень большое число, и положимъ, что корень числа Pa^n заключается между

цѣлыми числами b и $b + 1$, т. е. что $\sqrt[n]{Pa^n} > b$ и $\sqrt[n]{Pa^n} < b + 1$, или $a\sqrt[n]{P} > b$ и $a\sqrt[n]{P} < b + 1$, или $\sqrt[n]{P} > \frac{b}{a}$ и $\sqrt[n]{P} < \frac{b+1}{a}$; т. е. $\sqrt[n]{P}$ заключается между дробями $\frac{b}{a}$ и $\frac{b+1}{a}$, и слѣдовательно дробь $\frac{b}{a}$ отличается отъ

$\sqrt[n]{P}$ менѣе чѣмъ на $\frac{1}{a}$, или менѣе чѣмъ на произвольно малую дробь, ибо a есть число произвольно большое. Напр. $\sqrt{2}$ не можетъ быть найденъ точно; приближенные же величины его суть: 1,41 съ точностью до $\frac{1}{100}$, 1,414213562 съ точностью до $\frac{1}{10000000000}$ и проч.

Изъ этого же предложенія слѣдуетъ, что можно съ произвольной точностью найти корень несократимой дроби, когда онъ не можетъ быть точно опредѣленъ.

Напр. $\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{5^2}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{5} \cdot 3,16...$

Вообще $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \sqrt[n]{\frac{AB^{n-1}}{B^n}} = \frac{1}{B} \sqrt[n]{AB^{n-1}}$, гдѣ AB^{n-1}

есть число цѣлое.

Число, отличающееся отъ неизвлекаемаго корня менѣе чѣмъ на данную дробь, называется *приближеніемъ* корня. Напр. числа 1,41, 1,4142 и пр. суть приближенія $\sqrt{2}$ съ извѣстной точностью.

Такимъ же образомъ, обращая простую дробь въ періодическую и ограничиваясь извѣстнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, получимъ различныя приближенія данной простой дроби.

Когда приближеніе, измѣняясь, приближается безпредѣльно къ постоянному количеству, такъ что разность

между ними можетъ быть сдѣлана какъ угодно малой, то постоянное количество называется *предѣломъ приближенія*.

Такъ по мѣрѣ увеличенія числа десятичныхъ знаковъ періодической дроби $0,33333\dots$, она все ближе и ближе подходитъ къ простой дроби $\frac{1}{3}$, и разность между ними можетъ быть сдѣлана менѣе $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д., слѣдовательно дробь $\frac{1}{3}$ есть предѣлъ $0,33333\dots$, и вообще всякая періодическая дробь имѣетъ предѣломъ своимъ дробь простую, отъ которой періодическая произошла.

Равнымъ образомъ по мѣрѣ увеличиванія числа десятичныхъ знаковъ въ приближеніи корня, разность приближенія и корня дѣлается все менѣе и менѣе и можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго числа, то есть приближеніе все болѣе подходитъ къ корню, никогда не достигая его; посему истинный корень, не выразимый безъ кореннаго знака, называется предѣломъ своего приближенія. Такъ $\sqrt{2}$ есть предѣлъ дроби $1,41421\dots$

Если чрезъ A означимъ предѣлъ какого либо приближенія, а чрезъ α разность предѣла A и приближенія, то послѣднее изобразится чрезъ $A - \alpha$, гдѣ α можетъ быть сдѣлано меньше всякаго произвольно малаго числа.

§ 7. ТЕОРЕМА 1. *Корень не измѣнится, если показателя кореннаго знака и показателя подкореннаго количества умножить или раздѣлить на одно и то же число.*

Доказ. Пусть P есть какое либо подкоренное количество и m число, на которое помножается показатель кореннаго знака n и показатель r подкореннаго количества P . Докажемъ, что $\sqrt[n]{P^r}$ равняется $\sqrt[n \cdot m]{P^{r \cdot m}}$.

Означимъ приближеніе $\sqrt[n]{P^r}$ чрезъ Q , избытокъ корня надъ его приближеніемъ чрезъ α , чрезъ Q_1 и α_1 соотвѣтственные числа для $\sqrt[mn]{P^{rm}}$; тогда имѣемъ: $\sqrt[n]{P^r} = Q + \alpha$, $\sqrt[mn]{P^{rm}} = Q_1 + \alpha_1$, или $(Q + \alpha)^n = P^r$, $(Q_1 + \alpha_1)^{mn} = P^{rm}$.

Возводя $(Q + \alpha)^n$ и P^r въ m -ю степень, получимъ $(Q + \alpha)^{mn} = P^{rm}$; сравнивая это съ выраженіемъ $(Q_1 + \alpha_1)^{mn} = P^{rm}$, видимъ, что $(Q + \alpha)^{mn} = (Q_1 + \alpha_1)^{mn}$, или $Q + \alpha = Q_1 + \alpha_1$, или $\sqrt[n]{P^r} = \sqrt[mn]{P^{rm}}$.

Изъ этого же слѣдуетъ, что можно дѣлитель показателя кореннаго знака и показателя подкореннаго количества на тоже число.

ТЕОРЕМА 2. *Если два приближенія равны, то и предѣлы ихъ равны.*

Доказ. Пусть A и B суть предѣлы двухъ равныхъ приближеній, α и β соотвѣтствующіе избытки предѣловъ надъ приближеніями. Тогда приближенія будутъ $A - \alpha$ и $B - \beta$.

Если A не равно B , но на примѣръ $A > B$, то разность $A - B = R$. По условію $A - \alpha = B - \beta$; отнимая отъ этихъ равныхъ количествъ по B и придавая по α , получимъ равныя, т. е. $A - \alpha - B + \alpha = B - \beta - B + \alpha$, или $A - B = \alpha - \beta$, слѣдовательно и $\alpha - \beta = R$; т. е. разность между α и β должна оставаться постоянно равной количеству R , при всѣхъ измѣненіяхъ α и β ; но этого быть не можетъ, потому что α и β могутъ быть сдѣланы менѣе всякаго числа и слѣдовательно разность ихъ можетъ быть сдѣлана меньше R .

Къ подобному же противорѣчію приводитъ предположеніе, что $A < B$; посему $A = B$.

Слѣдствіе 1. *Всякое приближеніе имѣетъ только одинъ предѣлъ, ибо по доказанному предѣлы равныхъ приближеній, или одного и того же приближенія, равны.*

Слѣдствіе 2. *Приближеніе корня не можетъ быть періодической дробью, ибо полагая, что корень есть предѣлъ періодической дроби, найдемъ простую дробь, отъ коей получилась данная періодическая, и которая будетъ тоже предѣломъ періодической дроби; оба предѣла равны по сказанному, слѣдовательно корень равенъ простой дроби, чего быть не можетъ по § 4.*

Напр. чѣмъ съ большей точностью будетъ вычисленъ $\sqrt{2}$, тѣмъ будетъ болѣе десятичныхъ знаковъ, но періодъ получиться никогда не можетъ.

Сокращеніе коренныхъ количествъ.

§ 8. *Чтобы сократить коренное количество, то есть представить въ простѣйшемъ видѣ, не измѣняя его, должно показателя корня и подкореннаго количества дѣлить на ихъ общаго большаго дѣлителя, по теоремѣ § 7.*

Примѣры.

$$1. \sqrt[12]{a^3b^6} = \sqrt[12]{(ab^2)^3} = \sqrt[4]{ab^2};$$

$$2. \sqrt[14]{(a+b)^7} = \sqrt{a+b};$$

$$3. \sqrt[6]{\frac{a^2b^4}{9q^8}} = \sqrt[6]{\left(\frac{a^2}{3q^4}\right)} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{3q^4}};$$

$$4. \sqrt[15]{(a^2+b)^{10}c^5} = \sqrt[3]{(a^2+b)^2c}.$$

Если показатели подкореннаго количества не имѣютъ общаго произвѣдителя, то подкоренное количество разлагаютъ на произвѣдителей такъ, чтобы степень одного дѣлилась на показателя корня, и потомъ извлекаютъ изъ него корень, оставляя другого подъ кореннымъ знакомъ, на томъ основаніи, что корень изъ произведенія равенъ произведенію корней изъ произвѣдителей (§ 37 гл. III), такимъ образомъ коренное количество упростится.

Примѣры.

$$1. \sqrt{a^{13}} = \sqrt[5]{a^{10}a^3} = a^2\sqrt[5]{a^3}.$$

$$2. \sqrt{162a^3b^5c^9} = \sqrt{2abc \cdot 81a^2b^4c^8} = 9ab^2c^4\sqrt{2abc}.$$

$$3. \sqrt[7]{(a^2+bc)^{10}c^9} = \sqrt[7]{(a^2+bc)^7c^7 \cdot (a^2+bc)^3c^2} = \\ = (a^2+bc)c\sqrt[7]{(a^2+bc)^3c^2}.$$

$$4. \sqrt[m]{a^{2m+3}(c^2-f)^{m+p}} = \sqrt[m]{a^{2m}(c^2-f)^m \cdot a^3(c^2-f)^p} = \\ = a^2(c^2-f)\sqrt[m]{a^3(c^2-f)^p}.$$

Приведеніе коренныхъ количествъ къ общему показателю корня.

§ 9. Для приведенія коренныхъ количествъ къ одному показателю, должно помножить показателя кореннаго знака и показателя подкореннаго количества каждаго радикала на произведеніе показателей остальныхъ радикаловъ, ибо показатели всѣхъ коренныхъ знаковъ будутъ общіе, такъ какъ въ каждый изъ нихъ войдетъ произведеніе всѣхъ показателей, радикалы-же не измѣнятся на основаніи теоремы § 7. Напр. приводя радикалы $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b^r}$, $\sqrt[p]{c}$, къ общему показателю корня, получимъ:

$$\sqrt[mnp]{a^{np}}; \sqrt[mnp]{b^{rmp}}; \sqrt[mnp]{c^{mn}}.$$

Если-же показатели корней имѣютъ общихъ производителей, то нужно приводить ихъ къ наименьшему общему показателю; при этомъ поступаютъ съ показателями корней точно также, какъ съ знаменателями дробей, приводимыхъ къ общему знаменателю, т. е. показателя корня и подкореннаго количества множатъ на производителей, которыхъ не достаетъ въ показатель корня радикала противъ показателей корней остальныхъ радикаловъ.

Примѣры.

1. $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt[8]{cd}$; приведа ихъ къ общему показателю, получимъ $\sqrt[8]{a^2}$; $\sqrt[8]{b^4}$; $\sqrt[8]{cd}$.

2. $\sqrt[6]{a^2b+c}$; $\sqrt[12]{bc-d}$; $\sqrt[100]{a^2b}$; все равно что $\sqrt[2.3]{a^2b+c}$, $\sqrt[2.3]{bc-d}$; $\sqrt[2.5^2]{a^2b}$; помножая показателя корня и подкореннаго количества въ первомъ радикалѣ на 2.5^2 , или на 50, во второмъ на 5^2 , или на 25, и въ третьемъ на 3, получимъ:

$$\sqrt[300]{(a^2b+c)^{50}}; \sqrt[300]{(bc-d)^{25}}; \sqrt[300]{a^6b^3}.$$

3. $\sqrt[m]{a+b}$, $\sqrt[m^2+m]{c}$, $\sqrt[m-1]{d}$; помножая показателя корня и подкореннаго количества въ первомъ радикалѣ на $(m+1)(m-1)$, или на m^2-1 , во второмъ на $m-1$, и въ третьемъ на $m(m+1)$, получимъ:

$$\sqrt[m(m^2-1)]{(a+b)^{m^2-1}}; \sqrt[m(m^2-1)]{c^{m-1}}; \sqrt[m(m^2-1)]{d^{m^2+m}}.$$

Сложеніе и вычитаніе коренныхъ количествъ.

§ 10. Сложеніе и вычитаніе коренныхъ количествъ только обозначается знаками этихъ дѣйствій. Напр. $\sqrt[5]{a^2}$ слагая съ $\sqrt[3]{b}$ и изъ суммы вычитая $\sqrt[n]{(a+b)}$, получимъ въ результатъ $\sqrt[5]{a^2} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[n]{(a+b)}$.

При этомъ если складываемыя и вычитаемыя количества имѣютъ раціональнаго или ирраціональнаго общаго производителя, то его можно взять общимъ множителемъ въ результатъ. Такъ:

$$1. \sqrt{3a^2bc} - \sqrt{3b^3c} = a\sqrt{3bc} - b\sqrt{3bc} = (a-b)\sqrt{3bc}.$$

$$2. \sqrt{\frac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}} - \sqrt{\frac{a^2cd^2}{bc^2}} = \left[\frac{a^2}{b} + \frac{ac}{d} - \frac{ad}{c} \right] \sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Умноженіе коренныхъ количествъ.

§ 11. При умноженіи коренныхъ количествъ приводятъ ихъ къ общему показателю корня, перемножаютъ между собою подкоренныя количества и произведеніе помѣщаютъ подъ общій коренной знакъ.

Дѣйствительно, $\sqrt[n]{a}$ помноживъ на $\sqrt[n]{b}$, получимъ $\sqrt[n]{ab}$, ибо корень изъ произведенія равняется произведенію корней изъ производителей.

Примѣры.

$$1. \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \cdot \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$$

$$2. \sqrt[12]{\frac{a}{bc}} \cdot \sqrt[8]{\frac{a^m}{b}} = \sqrt[24]{\frac{a^2}{b^2 c^2}} \cdot \sqrt[24]{\frac{a^{3m}}{b^3}} = \sqrt[24]{\frac{a^{3m+2}}{b^5 c^2}}.$$

$$3. \sqrt[3]{\frac{a^2 b - c}{d}} \cdot \sqrt[12]{\frac{5(a^2 b - c)}{efd}} = \sqrt[12]{\frac{(a^2 b - c)^4}{d^4}} \cdot \sqrt[12]{\frac{5(a^2 b - c)}{efd}} = \\ = \sqrt[12]{\frac{5(a^2 b - c)^5}{d^5 e f}}.$$

Возведеніе коренныхъ количествъ въ степень.

§ 12. Для возведенія корня въ какую либо степень, должно возвести въ эту степень подкоренное количество.

Такъ $\sqrt[m]{a^p}$ возведя въ степень n , получимъ $[\sqrt[m]{a^p}]^n = \sqrt[m]{a^{pn}}$, ибо $[\sqrt[m]{a^p}]^n = \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[m]{a^p} \dots$, гдѣ $\sqrt[m]{a^p}$ повторяется производителемъ n разъ; произведя же умноженіе по § 11, получимъ:

$$[\sqrt[m]{a^p}]^n = \sqrt[m]{a^p \cdot a^p \cdot a^p \dots} = \sqrt[m]{a^{pn}}.$$

Примѣръ.

$$1. [\sqrt[5]{a^2 b c}]^3 = \sqrt[5]{a^6 b^3 c^3} = a \sqrt[5]{a b^3 c^3}.$$

$$2. \left[\sqrt[7]{\frac{(a+b)^2 k}{3a^6}} \right]^4 = \sqrt[7]{\frac{(a+b)^8 k^4}{81a^{24}}} = \frac{(a+b)}{a^3} \sqrt[7]{\frac{(a+b)k^4}{81a^3}}.$$

$$3. \left[\sqrt[n]{\frac{(a^2-c)^3 f^m}{a^p c^q}} \right]^r = \sqrt[n]{\frac{(a^2-c)^{3r} f^{mr}}{a^{pr} c^{qr}}}.$$

Составляя послѣдовательныя степени $\sqrt{a}$, получихъ слѣдующіе результаты:

$$(\sqrt{a})^2 = a; (\sqrt{a})^3 = a\sqrt{a}; (\sqrt{a})^4 = a^2; (\sqrt{a})^5 = a^2\sqrt{a}$$

и т. д., то есть четныя степени раціональны, а нечетныя суть произведенія корня на раціональныя количества.

Составляя послѣдовательныя степени $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ и т. д., можно видѣть, что нѣкоторые изъ нихъ суть раціональныя.

Дѣленіе коренныхъ количествъ.

§ 13. При дѣленіи корней приводятъ дѣлимое и дѣлителя къ общему показателю корня, раздѣляютъ подкоренное количество дѣлимаго на подкоренное количество дѣлителя и помѣщаютъ полученное частное подъ общій коренной знакъ.

Дѣйствительно, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, ибо при извлеченіи корня изъ дроби $\frac{a}{b}$, должно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно и раздѣлить первый изъ нихъ на второй (§ 9 глав. III).

Примѣры.

$$1. \sqrt[3]{a^2 b c} : \sqrt[5]{a b^2 c^3} = \sqrt[15]{a^{10} b^5 c^5} : \sqrt[15]{a^3 b^6 c^9} = \sqrt[15]{\frac{a^7}{b c^4}}.$$

$$2. \sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}.$$

$$3. 4\sqrt[3]{12a} : 2\sqrt{3a} = 4\sqrt[6]{12^2 a^2} : 2\sqrt[6]{3^3 a^3} = 2\sqrt[6]{\frac{16}{3a}}.$$

$$4. \sqrt[2n]{\frac{a^m b}{c^2 d}} : \sqrt[3n]{\frac{a^{m-1} c^3}{d^5}} = \sqrt[6n]{\frac{a^{3m} b^3}{c^6 d^3}} : \sqrt[6n]{\frac{a^{2m-2} c^6}{d^{10}}} = \\ = \sqrt[6n]{\frac{a^{m+2} b^3 d^7}{c^{12}}}.$$

$$5. c\sqrt{a^2 - x^2} : \sqrt{a+x} = c\sqrt{a-x}.$$

$$6. \sqrt{a^2 - z^2} : a - z = \sqrt{a^2 - z^2} : \sqrt{(a-z)^2} = \sqrt{\frac{a+z}{a-z}}.$$

Извлеченіе корней изъ коренныхъ количествъ.

§ 14. Для извлеченія изъ корня новаго корня, должно перемножить показатели корней между собою.

Такъ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$, ибо возводя $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$ въ n -ю степень и сокращая, получимъ $\sqrt[p]{a}$.

Примѣры.

$$1. \sqrt[5]{\sqrt[7]{a^6 b^3 c^5}} = \sqrt[5 \cdot 7]{a^6 b^3 c^5} = \sqrt[35]{a^6 b^3 c^5}.$$

$$2. \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2 b^4}{c^2}}} = \sqrt[3 \cdot 2]{\frac{a^2 b^4}{c^2}} = \sqrt[3]{\frac{a b^2}{c}}.$$

$$3. \sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}} = \sqrt[pqr]{a}.$$

$$4. \sqrt[p]{\sqrt[r]{\frac{3^p a^{2p}}{b^{3p} r^p}}} = \sqrt[p \cdot r]{\frac{3^p a^{2p}}{b^{3p} r^p}} = \sqrt[r]{\frac{3 a^2}{b^3 r}}.$$

О дѣйствіяхъ надъ многочленными ирраціональными алгебраическими количествами.

§ 15. Всякое многочленное ирраціональное количество можетъ имѣть членами своими цѣлыя и дробныя раціональныя количества—мономы и количества коренныя; по-сему дѣйствія надъ ними приводятся къ дѣйствіямъ надъ ихъ раціональными и ирраціональными членами—монома-

ми, какъ и для полиномовъ раціональныхъ, на томъ основаніи, что правила дѣйствій надъ полиномами были выведены въ главѣ III разсужденіями надъ количествами, въ коихъ каждый членъ означался буквою, которая можетъ быть всякимъ количествомъ. До сихъ поръ мы предполагали эти члены цѣлыми и дробными, раціональными, соизмѣримыми; но полагая, что они могутъ означать и количества коренныя, въ частномъ случаѣ несоизмѣримыя, можемъ повторить надъ ними тѣже разсужденія и распространить правила дѣйствій на всякое количество цѣлое и дробное, раціональное и ирраціональное.

Для распространенія правила умноженія алгебраическихъ количествъ на количества ирраціональныя, должно доказать для послѣднихъ справедливость предложенія, — что произведеніе двухъ производителей не мѣняется отъ перемѣны ихъ мѣста, потому что это предложеніе было доказано, полагая производителей соизмѣримыми, между тѣмъ какъ ирраціональное количество можетъ быть и несоизмѣримымъ. Пусть

$\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ суть два несоизмѣримые корня, R и R_1 ихъ приближенія, x и y разности между приближеніями и корнями; тогда получимъ $R = \sqrt{a} - x$, $R_1 = \sqrt{b} - y$, то есть $\sqrt{a}$ есть предѣлъ R , $\sqrt{b}$ есть предѣлъ R_1 ; изъ этого слѣдуетъ, что $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ есть предѣлъ $R \cdot R_1$, ибо по мѣрѣ уменьшенія x и y разность между $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $R \cdot R_1$ уменьшается и можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою. Такимъ же образомъ $\sqrt{b} \cdot \sqrt{a}$ есть предѣлъ $R_1 \cdot R$. Но R и R_1 суть соизмѣримыя количества, посему $R \cdot R_1 = R_1 \cdot R$. Изъ чего слѣдуетъ (по теор. 2 § 6), что предѣлы этихъ равныхъ произведеній равны, то есть

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{a}.$$

Разсужденіями, подобными произведеннымъ въ § 7 гл. III, распространимъ это предложеніе на произвольное число несоизмѣримыхъ коренныхъ производителей, и слѣдовательно предложеніе, что произведеніе не мѣняется отъ перемѣны мѣста производителей, вѣрно для цѣлыхъ и дробныхъ раціональныхъ и ирраціональныхъ производителей.

Примѣры.

1. Вычитаніе.

$$\begin{aligned}
 & [16\sqrt[4]{6ab} - \sqrt[5]{9c^3} + 3\sqrt[3]{7a} - \sqrt{10}] - \\
 & - [3\sqrt[4]{6ab} + 2\sqrt[4]{10} - 8\sqrt[5]{9c^3} - 5\sqrt[3]{7a}] = 16\sqrt[4]{6ab} - \sqrt[5]{9c^3} + \\
 & + 3\sqrt[3]{7a} - \sqrt{10} - 3\sqrt[4]{6ab} - 2\sqrt[4]{10} + 8\sqrt[5]{9c^3} + 5\sqrt[3]{7a} = \\
 & = 13\sqrt[4]{6ab} + 7\sqrt[5]{9c^3} + 8\sqrt[3]{7a} - \sqrt{10} - 2\sqrt[4]{10}.
 \end{aligned}$$

2. Умноженіе.

$$\begin{aligned}
 & [2\sqrt{7} - 5\sqrt{6}] \cdot \left[\frac{3\sqrt{7}}{2} - 2\sqrt{6} \right] = 2\sqrt{7} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} - \\
 & - 5\sqrt{6} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} - 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{6} + 5\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 81 - \frac{23}{2}\sqrt{42}.
 \end{aligned}$$

3. Умноженіе.

$$[c\sqrt{a} + d\sqrt[5]{b}] \cdot [c\sqrt{a} - d\sqrt[5]{b}] = [c\sqrt{a}]^2 - [d\sqrt[5]{b}]^2 = c^2a - d^2\sqrt[5]{b^2}.$$

4. Умноженіе.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[m]{c} + \sqrt[p]{d} = \sqrt[m]{(a + \sqrt[n]{b})(c + \sqrt[p]{d})} = \\
 & = \sqrt[m]{a \cdot c + c \cdot \sqrt[n]{b} + a \sqrt[p]{d} + \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[p]{d}} = \\
 & = \sqrt[m]{ac + c\sqrt[n]{b} + a\sqrt[p]{d} + \sqrt[n]{b^p d^p}}.
 \end{aligned}$$

5. Сложеніе дробей.

$$\begin{aligned}
 & \frac{3\sqrt[3]{a^2} - 5\sqrt{cd}}{3} + \frac{13\sqrt[6]{a^4b^3} - \sqrt[6]{a^4c^3d^3} + \frac{5}{3}cd}{\sqrt{b} + \sqrt{cd}} = \\
 & = \frac{(3\sqrt[3]{a^2} - 5\sqrt{cd})(\sqrt{b} + \sqrt{cd})}{3(\sqrt{b} + \sqrt{cd})} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3 \left(13 \sqrt[6]{a^4 b^3} - \sqrt[6]{a^4 c^3 d^3} + \frac{5}{3} cd \right)}{3 (\sqrt{b} + \sqrt{cd})} = \\
 & = \frac{3 \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b} - 5 \sqrt{cd} \cdot \sqrt{b} + 3 \sqrt[3]{a^2} \sqrt{cd} - 5 \sqrt{cd} \cdot \sqrt{cd}}{3 \sqrt{b} + 3 \sqrt{cd}} + \\
 & + \frac{39 \sqrt[6]{a^4 b^3} - 3 \sqrt[6]{a^4 c^3 d^3} + 5 cd}{3 \sqrt{b} + 3 \sqrt{cd}} = \frac{42 \sqrt[6]{a^4 b^3} - 5 \sqrt{bcd}}{3 \sqrt{b} + 3 \sqrt{cd}}.
 \end{aligned}$$

6. Умноженіе дробей.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{a}}{\frac{1}{2\sqrt[3]{a}} - \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} &= \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 - (\sqrt[3]{a})^2}{\frac{1}{2\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[3]{a} - (\sqrt{a})^2} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} - \sqrt[3]{a^2}}{\frac{1}{2} - \sqrt{a^2}} = 1.
 \end{aligned}$$

7. Возведеніе въ квадратъ.

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{2} - \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} \right]^2 &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 + (\sqrt{a})^2 + (\sqrt[3]{a})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a} + \\
 &+ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{a} - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \\
 &= \frac{1}{4} + a + \sqrt[3]{a^2} - \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} - 2 \sqrt[6]{a^5}.
 \end{aligned}$$

8. Возведеніе въ кубъ.

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 &= (\sqrt{2})^3 + 3 (\sqrt{2})^2 \sqrt{3} + 3 \sqrt{2} (\sqrt{3})^2 + \\
 &+ (\sqrt{3})^3 = 11 \sqrt{2} + 9 \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

9. Дѣленіе.

$$(\sqrt{ab} + \sqrt{af}) : \sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{f}.$$

10. Дѣленіе.

$$\begin{array}{l|l}
 \text{дѣлим.} & a^3 - 2\sqrt[4]{a^2b^3} - a^2\sqrt[6]{a^3b^2} + 2b\sqrt[12]{b} \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{a} - \sqrt[3]{b} \text{ дѣлитель} \\ a^2\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{b^3} \text{ част.} \end{array} \right. \\
 & -a^3 + a^2\sqrt[6]{a^3b^2} \\
 \hline
 1 \text{ ост.} & -2\sqrt[4]{a^2b^3} + 2b\sqrt[12]{b} \\
 & 2\sqrt[4]{a^2b^3} - 2b\sqrt[12]{b} \\
 \hline
 2 \text{ ост.} & 0
 \end{array}$$

11. Извлеченіе квадратнаго корня.

$$\begin{array}{l|l}
 \sqrt{a^7 + 2a^5\sqrt[6]{a^5} + 2a^4b\sqrt{a} + a^4\sqrt[3]{a^2} + 2a^3b\sqrt[3]{a} + a^2b^2} & a^3\sqrt{a} + a^2\sqrt[3]{a} + ab \\
 -a^7 & \\
 \hline
 2a^5\sqrt[6]{a^5} + a^4\sqrt[3]{a^2} + 2a^4b\sqrt{a} + 2a^3b\sqrt[3]{a} + a^2b^2 & 2a^3\sqrt{a} + a^2\sqrt[3]{a} \\
 -2a^5\sqrt[9]{a^5} - a^4\sqrt[3]{a^2} & a^2\sqrt[3]{a} \\
 \hline
 2a^4b\sqrt{a} + 2a^3b\sqrt[3]{a} + a^2b^2 & 2a^5\sqrt[6]{a^5} + a^4\sqrt[3]{a^2} \\
 -2a^4b\sqrt{a} - 2a^3b\sqrt[3]{a} - a^2b^2 & 2a^3\sqrt{a} + 2a^2\sqrt[3]{a} + ab \\
 \hline
 0. & ab \\
 & 2a^4b\sqrt{a} + 2a^3b\sqrt[3]{a} + a^2b^2
 \end{array}$$

Преобразование ирраціональныхъ дробей.

§ 16. Частное невозможнаго дѣленія ирраціональныхъ количествъ представляютъ въ видѣ ирраціональной дроби, которую подвергаютъ разнымъ преобразованіямъ. Разсмотримъ часто употребляемые случаи преобразованія дробей съ ирраціональными знаменателями въ равныя имъ дроби съ знаменателями раціональными.

Если знаменатель дроби есть произведеніе раціональнаго количества на радикаль, то она можетъ быть представлена въ видѣ $\frac{A}{k\sqrt[p]{p}}$, гдѣ A произвольное раціональное или ирраціональное количество, k и p раціональныя, $\sqrt[p]{p}$ ирраціональное. Помножая числителя и знаменателя

этой дроби на $\sqrt[m]{p^{m-1}}$, получимъ: $\frac{A}{k\sqrt[m]{p}} = \frac{A\sqrt[m]{p^{m-1}}}{k\sqrt[m]{p^m}} = \frac{A\sqrt[m]{p^{m-1}}}{kp}$; эта дробь равна данной, и знаменатель ея рациональный.

Примѣръ 1. $\frac{a+b}{k\sqrt{3cd}}$; множитель числителя и знаменателя этой дроби, дѣляющій знаменателя ея рациональнымъ, есть $\sqrt{3cd}$, и

$$\frac{a+b}{k\sqrt{3cd}} = \frac{(a+b)\sqrt{3cd}}{k(\sqrt{3cd})^2} = \frac{a\sqrt{3cd}+b\sqrt{3cd}}{3cdk}.$$

Примѣръ 2. $\frac{a^2}{3\sqrt[3]{b-c}}$; множитель есть $\sqrt[3]{(b-c)^2}$, и

$$\frac{a^2}{3\sqrt[3]{b-c}} = \frac{a^2\sqrt[3]{(b-c)^2}}{3(b-c)}.$$

Примѣръ 3. $\frac{1+\sqrt[14]{a}}{\sqrt[7]{c^2d}}$; множитель есть $\sqrt[7]{(c^2d)^6}$, и

$$\text{дробь } \frac{1+\sqrt[14]{a}}{\sqrt[7]{c^2d}} = \frac{c\sqrt[7]{c^5d^6} + c\sqrt[14]{ac^{10}d^{12}}}{c^2d}.$$

§ 17. Если знаменатель дроби есть сумма двухъ радикальныхъ количествъ второй степени, то эта дробь представится въ видѣ $\frac{A}{a\sqrt{p}+b\sqrt{q}}$; если же знаменатель есть разность ихъ, то дробь приметъ видъ $\frac{A}{a\sqrt{p}-b\sqrt{q}}$.

Въ первомъ случаѣ знаменатель будетъ рациональнымъ, если помножимъ числителя и знаменателя дроби на $a\sqrt{p} - b\sqrt{q}$, а во второмъ, если помножимъ на

$a\sqrt{p} + b\sqrt{q}$; ибо произведение суммы $a\sqrt{p} + b\sqrt{q}$ на разность $a\sqrt{p} - b\sqrt{q}$ есть разность квадратов $(a\sqrt{p})^2 - (b\sqrt{q})^2$, или $a^2p - b^2q$, рациональное количество. Такъ

$$\frac{A}{a\sqrt{p} + b\sqrt{q}} = \frac{A(a\sqrt{p} - b\sqrt{q})}{a^2p - b^2q}; \quad \frac{A}{a\sqrt{p} - b\sqrt{q}} = \frac{A(a\sqrt{p} + b\sqrt{q})}{a^2p - b^2q}.$$

Примѣры.

1. $\frac{a}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$; множитель есть $\sqrt{8} + \sqrt{5}$, и

$$\frac{a}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} = \frac{a(\sqrt{8} + \sqrt{5})}{8 - 5} = \frac{a\sqrt{8} + a\sqrt{5}}{3}.$$

2. $\frac{2}{\sqrt{27} + 4}$; множитель $\sqrt{27} - 4$, и $\frac{2}{\sqrt{27} + 4} = \frac{2\sqrt{27} - 8}{11}.$

3. $\frac{3}{\sqrt{2} + 1}$; множитель $\sqrt{2} - 1$, и $\frac{3}{\sqrt{2} + 1} = 3\sqrt{2} - 3.$

4. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; множитель $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, и

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}.$$

5. $\frac{3a^2}{\sqrt{5} - 1}$; множитель $\sqrt{5} + 1$, и

$$\frac{3a^2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{3a^2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{3a^2\sqrt{5} + 3a^2}{4}.$$

6. $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; множитель $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, и

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a - b} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b}.$$

§ 18. Если знаменатель дроби есть сумма или разность радикальных количествъ какихъ либо степеней,

то дробь будет вида $\frac{A}{a\sqrt[m]{p}+b\sqrt[m]{q}}$ или вида $\frac{A}{a\sqrt[m]{p}-b\sqrt[m]{q}}$, потому что еслибы показатели обоихъ радикаловъ были различны, то можно было бы привести ихъ къ общему показателю m .

Разсмотримъ какъ найти множителя, дѣлающаго знаменателя дроби $\frac{A}{a\sqrt[m]{p}-b\sqrt[m]{q}}$ раціональнымъ. Возводя радикалы знаменателя въ степень m , получимъ два раціональные количества: $(a\sqrt[m]{p})^m = a^m p$ и $(b\sqrt[m]{q})^m = b^m q$, слѣдовательно и разность ихъ $a^m p - b^m q$ есть количество раціональное.

Полагая для простоты $a\sqrt[m]{p} = h$, $b\sqrt[m]{q} = l$, найдемъ $a\sqrt[m]{p} - b\sqrt[m]{q} = h - l$; и слѣдовательно $(a\sqrt[m]{p})^m - (b\sqrt[m]{q})^m = a^m p - b^m q = h^m - l^m$. Будемъ $h^m - l^m$ дѣлить на $h - l$; на основаніи теор. 7. § 44. гл. III, это дѣленіе всегда возможно, и частное его есть $h^{m-1} + h^{m-2}l + h^{m-3}l^2 + h^{m-4}l^3 + \dots + hl^{m-2} + l^{m-1}$, или, вставляя вмѣсто h и l ихъ величины и замѣчая, что произведеніе частнаго на дѣлителя равно дѣлимому, получимъ:

$a^{m-1}\sqrt[m]{p^{m-1}} + a^{m-2}b\sqrt[m]{p^{m-2}q} + a^{m-3}b^2\sqrt[m]{p^{m-3}q^2} + \dots$
 $\dots + ab^{m-2}\sqrt[m]{pq^{m-2}} + b^{m-1}\sqrt[m]{q^{m-1}}$, помноженное на $a\sqrt[m]{p} - b\sqrt[m]{q}$, равно $a^m p - b^m q$.

Слѣдовательно если помножимъ числителя и знаменателя дроби на найденное частное, то знаменатель будетъ раціональное количество; такъ

$$(I) \frac{A}{a\sqrt[m]{p}-b\sqrt[m]{q}} = \frac{A(a^{m-1}\sqrt[m]{p^{m-1}}+a^{m-2}b\sqrt[m]{p^{m-2}q}+\dots+b^{m-1}\sqrt[m]{q^m})}{a^m p - b^m q}.$$

Для преобразования дроби $\frac{A}{a\sqrt[m]{p} + b\sqrt[m]{q}}$ въ случаѣ m четнаго, должно числителя и знаменателя множить на частное дѣленія $(a\sqrt[m]{p})^m - (b\sqrt[m]{q})^m$ на $a\sqrt[m]{p} + b\sqrt[m]{q}$, ибо разность цѣлыхъ и равныхъ степеней двухъ количествъ при m четномъ, всегда дѣлится на сумму ихъ корней (гл. III. § 44. теор. 8); частное найдется какъ и прежде; оно есть $a^{m-1}\sqrt[m]{p^{m-1}} - a^{m-2}b\sqrt[m]{p^{m-2}q} + \dots$
 $\dots + ab^{m-2}\sqrt[m]{pq^{m-2}} - b^{m-1}\sqrt[m]{q^{m-1}}$,
 слѣдовательно, когда m четное,

$$(II) \frac{A}{a\sqrt[m]{p} + b\sqrt[m]{q}} = \frac{A(a^{m-1}\sqrt[m]{p^{m-1}} - a^{m-2}b\sqrt[m]{p^{m-2}q} + \dots + b^{m-1}\sqrt[m]{q^{m-1}})}{a^m p - b^m q}.$$

Когда въ выраженіи $\frac{A}{a\sqrt[m]{p} + b\sqrt[m]{q}}$ число m нечетное, то множитель числителя и знаменателя найдется, раздѣляя $(a\sqrt[m]{p})^m + (b\sqrt[m]{q})^m$ на $a\sqrt[m]{p} + b\sqrt[m]{q}$, ибо, по теор. 9 гл. III. § 44, сумма двухъ цѣлыхъ и равныхъ степеней количествъ, при m нечетномъ, всегда дѣлится на сумму ихъ корней, и частное есть

$$a^{m-1}\sqrt[m]{p^{m-1}} - a^{m-2}b\sqrt[m]{p^{m-2}q} + \dots$$

$$\dots - ab^{m-2}\sqrt[m]{pq^{m-2}} + b^{m-1}\sqrt[m]{q^{m-1}};$$

слѣдовательно, при m нечетномъ,

$$(III) \frac{A}{a\sqrt[m]{p} + b\sqrt[m]{q}} = \frac{A[a^{m-1}\sqrt[m]{p^{m-1}} - a^{m-2}b\sqrt[m]{p^{m-2}q} + \dots + b^{m-1}\sqrt[m]{q^{m-1}}]}{a^m p + b^m q}.$$

Если дроби будутъ вида $\frac{A}{\sqrt[m]{p} - \sqrt[m]{q}}$ или $\frac{A}{\sqrt[m]{p} + \sqrt[m]{q}}$, то должно въ выраженіяхъ (I), (II) и (III) принимать $a=1$ и $b=1$.

Полагая въ выраженіяхъ (I) и (II) $m=2$, получимъ выведенныя выше выраженія для квадратныхъ корней (§ 17).

Примѣры.

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{c} - \sqrt[4]{d}}$; полагая въ формулѣ (I) $A=1$; $m=4$;

$a=1$; $b=1$; $p=c$; $q=d$, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{c} - \sqrt[4]{d}} = \frac{\sqrt[4]{c^3} + \sqrt[4]{c^2d} + \sqrt[4]{cd^2} + \sqrt[4]{d^3}}{c - d}.$$

2. $\frac{a - x^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x^2}}$; приводя радикалы къ общему показателю, получимъ $\frac{a - x^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x^2}}$; полагая въ формулѣ (I)

$A=a - x^2$; $m=4$; $a=1$; $b=1$; $p=a$; $q=x^2$, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{a - x^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{x^2}} &= \frac{(a - x^2) [\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2x^2} + \sqrt[4]{ax^4} + \sqrt[4]{x^6}]}{a - x^2} = \\ &= \sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{ax} + x\sqrt[4]{a} + x\sqrt{x}. \end{aligned}$$

3. $\frac{1}{\sqrt[7]{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt[7]{2} - \sqrt[7]{1}}$; полагая въ формулѣ (I)

$A=1$; $m=7$; $a=1$; $b=1$; $p=2$; $q=1$, получимъ:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{2} - \sqrt[7]{1}} = \frac{\sqrt[7]{2^6} + \sqrt[7]{2^5} + \sqrt[7]{2^4} + \sqrt[7]{2^3} + \sqrt[7]{2^2} + \sqrt[7]{2} + \sqrt[7]{1}}{2 - 1}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt[7]{2} - 1} = \sqrt[7]{2^6} + \sqrt[7]{2^5} + \sqrt[7]{2^4} + \sqrt[7]{2^3} + \sqrt[7]{2^2} + \sqrt[7]{2} + 1.$$

4. $\frac{\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{c}}$; полагая въ формулѣ (III)

$A = \sqrt{a}$; $m = 3$; $a = 3$; $b = 2$; $p = b$; $q = c$,

получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{c}} &= \frac{\sqrt{a}[3^2\sqrt[3]{b^2} - 3 \cdot 2\sqrt[3]{bc} + 2^2\sqrt[3]{c^2}]}{3^3b + 2^3c} = \\ &= \frac{\sqrt{a}[9\sqrt[3]{b^2} - 6\sqrt[3]{bc} + 4\sqrt[3]{c^2}]}{27b + 8c}. \end{aligned}$$

5. $\frac{3a\sqrt{5} - c}{2\sqrt[6]{2} + \sqrt[6]{2^3}}$; приводя радикалы къ общему показателю, получимъ

$\frac{3a\sqrt{5} - c}{2\sqrt[6]{2^2} + \sqrt[6]{2^3}}$; полагая въ формулѣ (II)

$A = 3a\sqrt{5} - c$; $m = 6$; $a = 2$; $b = 1$; $p = 2^2$; $q = 2^3$,

получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{3a\sqrt{5} - c}{2\sqrt[6]{2^2} + \sqrt[6]{2^3}} &= \\ &= \frac{(3a\sqrt{5} - c)[2^5\sqrt[6]{(2^2)^5} - 2^4\sqrt[6]{(2^2)^4 2^3} + 2^3\sqrt[6]{(2^2)^3 (2^3)^2} - \\ &\quad - 2^2\sqrt[6]{(2^2)(2^3)^3} + 2\sqrt[6]{2^2 (2^3)^4} - \sqrt[6]{(2^3)^5}]}{2^6 \cdot 2^2 - 2^3}, \text{ или} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3a\sqrt{5} - c}{2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} &= \\ &= \left(\frac{3a\sqrt{5} - c}{31} \right) [8\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{32} + 16 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}]. \end{aligned}$$

6. $\frac{a - 1}{\sqrt[8]{3a} + \sqrt[8]{2}}$; приводя радикалы къ общему показателю, получимъ

$\frac{a - 1}{\sqrt[8]{3a} + \sqrt[8]{2^4}}$; полагая въ формулѣ (II)

$A=a-1$; $m=8$; $a=1$; $b=1$; $p=3a$; $q=2^4$, получимъ:

$$\begin{aligned} & \frac{a-1}{\sqrt[8]{3a} + \sqrt[8]{2^4}} = \\ &= \frac{(a-1) [\sqrt[8]{3^7 a^7} - \sqrt[8]{3^6 a^6 2^4} + \sqrt[8]{3^5 a^5 (2^4)^2} - \sqrt[8]{3^4 a^4 (2^4)^3} + \\ &+ \sqrt[8]{3^3 a^3 (2^4)^4} - \sqrt[8]{3^2 a^2 (2^4)^5} + \sqrt[8]{3a (2^4)^6} - \sqrt[8]{(2^4)^7}] = \\ &= \frac{(a-1) [\sqrt[8]{3^7 a^7} - \sqrt[4]{3^3 a^3 \cdot 2^2} + 2\sqrt[8]{3^5 a^5} - 2\sqrt{6a} + 2\sqrt[8]{3^3 a^3} - \\ &- 2^2 \sqrt[4]{3a 2^2} + 2^3 \sqrt[8]{3a} - 2^3 \sqrt{2}] = (a-1) [\sqrt[8]{2187 a^7} - \sqrt[4]{108 a^3} + \\ &+ 2\sqrt[8]{243 a^5} - 2\sqrt{6a} + 2\sqrt[8]{27 a^3} - 4\sqrt[4]{12a} + 8\sqrt[8]{3a} - 8\sqrt{2}]} \\ & \quad 3a - 16 \end{aligned}$$

§ 19. Разсмотримъ еще преобразование дроби, имѣющей знаменателемъ тричленное ирраціональное количество съ радикалами второй степени, въ равную ей дробь съ раціональнымъ знаменателемъ.

Такъ преобразуемъ дробь вида $\frac{A}{a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}}$. Разсматривая два члена знаменателя, напр. два первые $a\sqrt{p} + b\sqrt{q}$, какъ одинъ членъ, помножимъ числителя и знаменателя дроби на разность $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} - c\sqrt{r}$; получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{A}{a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}} &= \frac{A(a\sqrt{p} + b\sqrt{q} - c\sqrt{r})}{(a\sqrt{p} + b\sqrt{q})^2 - c^2 r} = \\ &= \frac{A_1}{a^2 p + 2ab\sqrt{pq} + b^2 q - c^2 r}, \end{aligned}$$

гдѣ $A_1 = A(a\sqrt{p} + b\sqrt{q} - c\sqrt{r})$.

Въ знаменателѣ послѣдней дроби только одинъ членъ ирраціональный; означая сумму трехъ раціональных

членовъ чрезъ H , т. е. полагая $a^2p + b^2q - c^2r = H$, гдѣ H рациональное количество, получимъ:

$$\frac{A}{a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}} = \frac{A}{H + 2ab\sqrt{pq}}.$$

Помножая числителя и знаменателя этой дроби на разность $H - 2ab\sqrt{pq}$ (какъ въ § 12), имѣемъ:

$$\frac{A}{a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}} = \frac{A_1 (H - 2ab\sqrt{pq})}{H^2 - 4a^2b^2pq}, \text{ гдѣ знаменатель рациональный.}$$

Слѣдовательно, вставляя вмѣсто A_1 и H ихъ величины, получимъ дробь преобразованную, т. е. получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{A}{a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}} &= \\ &= \frac{A(a\sqrt{p} + b\sqrt{q} - c\sqrt{r})(a^2p + b^2q - c^2r - 2ab\sqrt{pq})}{(a^2p + b^2q - c^2r)^2 - 4a^2b^2pq}. \end{aligned}$$

Подобнымъ же образомъ можно преобразовать дробь указаннаго вида и въ томъ случаѣ, если нѣкоторые изъ членовъ знаменателя отрицательные, съ тѣмъ только различіемъ, что придется иногда числителя и знаменателя дроби множить не на разность членовъ знаменателя, а на сумму ихъ, какъ это видно ихъ ниже помѣщенныхъ примѣровъ.

Примѣръ 1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}; \text{ помножая числителя и знаменателя на } \\ 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1, \text{ получимъ:} \\ \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}{(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 1} = \frac{A_1}{8 + 4\sqrt{6} + 3 - 1} = \frac{A_1}{2(5 + 2\sqrt{6})}; \end{aligned}$$

помножая числителя и знаменателя на $5 - 2\sqrt{6}$ и потомъ вставляя вмѣсто A_1 его величину, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1} &= \frac{A_1}{2(5 + 2\sqrt{6})} = \frac{A_1(5 - 2\sqrt{6})}{2(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} = \\ &= \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)(5 - 2\sqrt{6})}{2} = \\ &= 5\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2} - 2\sqrt{12} - \sqrt{18} - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Примѣръ 2.

$$\frac{2130}{4\sqrt{5} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}; \text{ помножая числителя и знаменателя}$$

на $4\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$, получимъ:

$$\frac{2130(4\sqrt{5} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(4\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^2 - 2} = \frac{A_1}{90 - 16\sqrt{15}} = \frac{A_1}{2(45 - 8\sqrt{15})};$$

помножая числителя и знаменателя на $45 + 8\sqrt{15}$ и вставляя вмѣсто A_1 его величину, найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{A_1(45 + 8\sqrt{15})}{2(45 - 8\sqrt{15})(45 + 8\sqrt{15})} &= \frac{A_1(45 + 8\sqrt{15})}{2 \cdot 1065} = \\ &= (4\sqrt{5} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2})(45 + 8\sqrt{15}). \end{aligned}$$

Примѣръ 3.

$$\frac{16b^2 + a^4 - 10a^3 - 8a^2b + 9a^2 + 24ab}{2\sqrt{a+b} - \sqrt{a} + a};$$

помножая числителя и знаменателя на $2\sqrt{a+b} - \sqrt{a} - a$, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{(2\sqrt{a+b} - \sqrt{a})^2 - a^2} &= \\ &= \frac{A_1}{5a + 4b - a^2 - 4\sqrt{a^2 + ab}} = \frac{A_1}{H - 4\sqrt{a^2 + ab}}; \end{aligned}$$

помножая числителя и знаменателя на $H + 4\sqrt{a^2 + ab}$, имѣемъ:

$A_1 (H + 4\sqrt{a^2 + ab})$; вставляя вмѣсто A_1 и H ихъ величины, найдемъ:

$$\frac{16b^2 + a^4 - 10a^3 - 8a^2b + 9a^2 + 24ab}{2\sqrt{a+b} - \sqrt{a} + a} =$$

$$= (2\sqrt{a+b} - \sqrt{a} - a)(5a + 4b - a^2 - 4\sqrt{a^2 + ab}).$$

У п р а ж н е н і я.

Произвести знаками указанные дѣйствія въ слѣдующихъ ирраціональныхъ количествахъ.

1. $7\sqrt{48} - 4, 2\sqrt{27} + 6, 9\sqrt{12}.$

2. $2x^2\sqrt{9k^6x} + k^3\sqrt{5} - 3k^2x^2\sqrt{k^2x}.$

3. $(4m^2 - n^2)\sqrt[4]{2m^{11}n} - 4m^4\sqrt[4]{2m^3n} + \frac{9m}{8n} \left(\frac{4mn^3}{3} \right)^2 \sqrt[4]{\frac{2n}{m}}.$

4. $4\sqrt{8} \left[3,9 + 1\frac{49}{90} \right] - 6\sqrt{\frac{7}{12} \left(\frac{1}{1,5} \right)^2} \cdot 42 - 4\sqrt{10\frac{8}{9}}.$

5. $3a\sqrt{ab^2\sqrt[4]{a}} + \sqrt{4a^3b + \sqrt[4]{\frac{1}{a^3}a^2b^2}} +$

$$+ 1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}a^4b^2\sqrt{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{4a}}}} + \frac{a^2b}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{8b}\sqrt{\frac{a}{a^4}}}$$

6. $3a^2\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{a^2}{x}} - 3(ax - x^2)\sqrt{\frac{1}{a^2 - x^2}} - 2a\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{(a+x)^2}} +$

$$+ 4x\sqrt{\frac{a^4 - x^4}{(a^2 + x^2)(a+x)^2}}.$$

7. $2\sqrt{5} \cdot 7\sqrt{500} \cdot \frac{\sqrt{2}}{700}.$

8. $1,5\sqrt{0,5} \cdot \frac{1}{3}\sqrt[4]{2} \cdot 4\sqrt[4]{6} \cdot 2\sqrt{3}.$

$$9. a^m \sqrt[m]{a^3 b^4} \cdot \sqrt{ab^5} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^8}{b^4}} \cdot \sqrt[m]{\frac{1}{a^3 b^4}}.$$

$$10. \sqrt[3]{9} : \sqrt[3]{10}.$$

$$11. 10 \frac{a^2}{b^3} : \sqrt{5ab^2}.$$

$$12. 3a^2 x^4 \sqrt[4]{6 \frac{x^{10}}{a^7}} : \frac{x}{a} \sqrt[6]{\frac{3a^2}{x^{15}}}.$$

$$13. (5 + 2\sqrt{3a})(5 - 2\sqrt{3a})(a^2 - \sqrt[6]{b}).$$

$$14. \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right)^3.$$

$$15. (\sqrt[m]{x^p} - \sqrt[n]{y^q})^2.$$

$$16. \sqrt[6]{a^3 b (7 + 4\sqrt{3})} \cdot a \sqrt[3]{a \sqrt{3ab} - 2a \sqrt{ab}}.$$

$$17. \left[\frac{3}{x^4} \sqrt{\frac{2}{x^{13}}} - 9x^2 \sqrt{8x^{18}} \right] : \frac{1}{x^3} \sqrt[12]{4x^3}.$$

$$18. \sqrt{a^{16} - a^4 x^2} : 4(a^2 + x).$$

$$19. \sqrt{a \sqrt[4]{\frac{3b^{40}c^{24}}{a^{20}}}}.$$

$$20. \sqrt{a^5 \sqrt[3]{\frac{2}{x^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{5a^{40}}{x^{12}}}}.$$

$$21. (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} + 1).$$

$$22. (\sqrt{x^3} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{y^3}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

$$23. \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{a^2 x^2} + \sqrt[3]{a^4} : (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}).$$

$$24. \sqrt{x^2 + x\sqrt{x} - \frac{13}{12}x + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\sqrt{x}}.$$

$$25. \sqrt{4a - 12\sqrt{a}\sqrt[3]{b} + 9\sqrt[3]{b^2} + 16\sqrt{a}\sqrt[4]{c} - 24\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{c} + 16\sqrt{c}}.$$

26. Во что обратится выражение $\frac{1 - ax}{1 + ax} \sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}}$,

если положить $x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$.

27. Во что обратится выражение $2(uv - \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{v^2 - 1})$,

полагая $2u = x + \frac{1}{x}$; $2v = y + \frac{1}{y}$.

28. Во что обратится выражение $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, пола-

гая $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$.

29. Во что обратится выражение $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$,

полагая $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$.

Сдѣлать знаменателей слѣдующихъ дробей рациональ-
ными.

30. $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

31. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$.

32. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}$.

33. $\frac{\sqrt{a}}{b + \sqrt{c}}$.

34. $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{x}{y}}}$.

$$35. \frac{1}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}.$$

$$36. \frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}.$$

$$37. \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2}}.$$

$$38. \frac{1}{2\sqrt[5]{a} - 1}.$$

$$39. \frac{2}{3 + \sqrt[7]{2}}.$$

$$40. \frac{c}{\sqrt[8]{2} + a\sqrt{b}}.$$

$$41. \frac{7}{\sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

$$42. \frac{2\sqrt{6} + 3\sqrt{10}}{3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

$$43. \frac{(f^2 - hg^2 - m)\sqrt{m} - 2gm\sqrt{h}}{f + g\sqrt{h} + \sqrt{m}}.$$

ГЛАВА VI.

Объ отрицательныхъ алгебраическихъ количествахъ и о дѣйствіяхъ надъ ними.

Нуль, какъ начало счета.

§ 1. Въ Ариѳметикѣ словомъ нуль и знакомъ 0 означается отсутствіе величины и всякой ея части; изъ этого слѣдуетъ, что величины меньшей нуля быть не можетъ. Напр. въ комнатѣ находится нуль людей,—это значитъ, что нѣтъ людей въ комнатѣ; вѣсъ тѣла равенъ нулю, — значитъ тѣло не имѣетъ вѣса и пр.

Нуль, означающій отсутствіе величины, называется *нулемъ абсолютнымъ* (ариѳметическимъ); величины меньшей абсолютнаго нуля быть не можетъ.

Абсолютный нуль есть начало счета частей разсматриваемой величины, которыя измѣряются однородной съ этой величиною единицею мѣры.

Напр. принимая за единицу мѣры людей человѣка, опредѣляютъ число людей находящихся въ комнатѣ, говоря: одинъ, два, три человѣка, — это значитъ, что въ комнатѣ находится одной, двумя, тремя единицами мѣры больше абсолютнаго нуля людей, и слѣдовательно нуль есть начало счета людей.

Принимая за единицу мѣры вѣса фунтъ, опредѣляютъ вѣсъ тѣла, говоря: одинъ, два, три фунта,—это значитъ, что вѣсъ разсматриваемаго тѣла одной, двумя, тремя единицами мѣры больше абсолютнаго нуля вѣса, и слѣдовательно нуль есть начало счета вѣса и проч.

§ 2. Всякое алгебраическое количество представляет собою какую либо величину, напр. вѣсъ, плотность, температуру, часть времени, часть пространства и проч.

Въ Алгебрѣ, разсматривая какое либо количество, не говорить, какую величину оно представляет: это значить, что величина, представляемая алгебраическимъ количествомъ, полагается произвольной, какой нибудь, т. е. такое количество представляет собою всякую величину, точно такъ же какъ въ Ариѳметикѣ число отвлеченное представляет собою всякое именованное число, состоящее изъ столькихъ же единицъ.

Между величинами существуютъ такія, у которыхъ нѣтъ ни начала ни конца, какъ напр. пространство, время, окружность круга и проч. Для такихъ величинъ нельзя принимать за начало счета отсутствіе величины, и слѣдовательно указанный въ § 1-мъ способъ счета частей величинъ къ нимъ не примѣняется.

Посему въ Алгебрѣ, гдѣ количество должно представлять собою всякую величину, слѣдовательно и величину, неимѣющую ни начала ни конца, подъ словомъ нуль и знакомъ 0 разумѣютъ не отсутствіе величины, какъ въ Ариѳметикѣ, а только начало счета частей ея, и такой нуль, въ отличіе отъ нуля абсолютнаго (ариѳметическаго), называется *нулемъ условнымъ* (алгебраическимъ).

Нуль условный есть собственно произвольная часть разсматриваемой величины, принятая за начало счета, т. е. можно условиться считать части величины откуда угодно.

Напр. высоты горъ считаются отъ уровня моря: высота уровня моря есть условный нуль, т. е. начало счета высотъ. Можно было бы принять за начало счета высоту другую высоту, напр. дно какого либо моря.

За начало счета градусовъ термометра принимаютъ произвольную на немъ точку, которая есть нуль услов-

ный, начало счета градусовъ. Въ разныхъ термометрахъ мѣсто нуля градусовъ различно.

Долготы мѣсть на земной поверхности считаются отъ главнаго меридіана, долгота коего есть нуль условный, или начало счета долготъ. Въ разныхъ странахъ разные меридіаны принимаются за главные, и слѣдовательно начало счета долготъ различно.

Часы въ гражданской жизни считаются отъ полуночи до полудня и отъ полудня до полуночи, слѣдовательно полночь есть начало счета одной половины сутокъ, полдень — начало счета другой половины, и суть нули условные. Астрономы же считаютъ часы отъ полудня до полудня, и слѣдовательно у нихъ полдень есть начало счета часовъ цѣлыхъ сутокъ.

Года считаются у насъ отъ Рождества Христова, и слѣдовательно время Рождества Христова есть начало счета лѣтъ, или нуль условный. У разныхъ народовъ начало счета лѣтъ различно.

Разстоянія городовъ, мѣсть и проч. считаются отъ разныхъ произвольныхъ пунктовъ, принимаемыхъ за начало счета разстояній, или за нули условные и т. д.

§ 3. Въ частномъ случаѣ нуль условный, или начало счета, можетъ совпадать съ нулемъ абсолютнымъ. Напр. можно начать счетъ людей, находящихся въ комнатѣ, счетъ фунтовъ, которые вѣситъ тѣло, съ произвольнаго числа людей, числа фунтовъ: но обыкновенно считаютъ съ нуля абсолютнаго, и въ этомъ случаѣ нуль условный совпадаетъ съ нулемъ абсолютнымъ.

Но вообще разсматривая какое либо алгебраическое количество, которое представляетъ собою всякую величину, должно для общности за начало счета единицъ его принимать нуль условный, означающій нѣкоторую произвольную часть этой величины.

§ 4. Произвольная часть величины, принимаемая за

нуль условный, можетъ для разныхъ величинъ имѣть или *опредѣленное*, или *неопредѣленное* число единицъ.

Такъ, условившись считать людей, находящихся въ комнатѣ, съ 10-ти, 20-ти человѣкъ, мы принимаемъ 10-ть, 20-ть человѣкъ за нуль условный; число единицъ такого нуля опредѣленно: оно равно 10-ти, 20-ти.

Но для величинъ, неимѣющихъ ни начала ни конца, число единицъ нуля неопредѣленно; въ этомъ случаѣ нужно принимать число единицъ нуля произвольнымъ, т. е. величина, представляемая такимъ нулемъ, заключаетъ въ себѣ всякое число единицъ.

Такъ время есть величина, неимѣющая ни начала ни конца; за начало счета единицъ времени, дней, принимается у насъ время Рожденія Христа; — это время есть нуль условный, содержащій въ себѣ неопредѣленное число дней. Дѣйствительно, время Рожденія Христа можетъ само считаться отъ времени другаго событія, бывшаго прежде или послѣ него. Когда событіе, отъ котораго начнемъ считать, будетъ мѣняться, то и число единицъ времени Рождества Христова будетъ тоже мѣняться. Но такъ какъ не сказано, отъ какого событія должно считать единицы послѣдняго времени, то слѣдовательно выборъ такого событія полагается произвольнымъ, т. е. всякое событіе принимается за начало счета, а посему и число единицъ нуля условнаго должно принимать произвольнымъ, т. е. этотъ нуль есть величина, заключающая въ себѣ неопредѣленное число единицъ.

§ 5. Разсматривая въ Алгебрѣ количество, которое должно представлять собою всякую величину, слѣдовательно и величину, неимѣющую ни начала ни конца, единицы коей считаются отъ нуля условнаго, неопредѣленнаго числа единицъ, должно для общности принимать, что нуль условный разсматриваемаго количества представляетъ величину, заключающую въ себѣ неопредѣ-

ленное число единиц. Въ частномъ же случаѣ число единицъ, представляемое величиною, принятою за нуль, можетъ быть опредѣленное.

Слагаемыя и вычитаемыя числа и количества.

§ 6. Величина способна измѣняться, т. е. увеличиваться и уменьшаться, ибо величиною называется все, что можетъ быть увеличено или уменьшено (§ 1 введенія).

При каждомъ измѣненіи величины, отъ котораго она увеличивается, къ количеству, представляющему ее, прибавляется новое слагаемое количество.

При каждомъ измѣненіи величины, отъ котораго она уменьшается, отъ количества, представляющаго ее, отнимается новое вычитаемое количество.

Въ первомъ случаѣ начальная величина и количество, ей соотвѣтствующее, увеличиваются, во второмъ—уменьшаются.

На этомъ основаніи члены каждаго алгебраическаго количества бываютъ двухъ родовъ: одни слагаемые, имѣющіе предъ собою знакъ плюсъ (называемые положительными членами), другіе вычитаемые, имѣющіе предъ собою знакъ минусъ (называемые членами отрицательными).

Если примемъ за начало счета частей величины нуль условный, то ясно, что могутъ быть величины, меньшія нуля, ибо самъ нуль есть величина. Посему изъ нуля условнаго можно вычитать другія величины, и количества $0 - 5$, $0 - a$, или просто $- 5$, $- a$, могутъ имѣть смыслъ въ Алгебрѣ: они означаютъ величину, пятью и вообще a единицами меньшую условнаго нуля, и суть количества *вычитаемыя* изъ него.

Въ Ариѳметикѣ вычитаемое, взятое отдѣльно, не можетъ имѣть смысла: оно имѣетъ смыслъ только въ связи съ уменьшаемымъ, т. е. когда есть изъ чего вычитать,

ибо тамъ за нуль принимается отсутствіе величины, а отъ ничего нельзя ничего отнять.

Въ Алгебрѣ же вычитаемыя количества употребляются отдѣльно и имѣютъ смыслъ, потому что за начало счета единицъ алгебраическаго количества принимается нуль условный. Такимъ образомъ всякое количество, предшествуемое знакомъ вычитанія, минусомъ, есть вычитаемое изъ нуля условнаго.

Въ противоположность этому количество, неимѣющее предъ собою знака вычитанія, минуса, рассматривается въ Алгебрѣ, какъ *слагаемое* съ нулемъ условнымъ, и знакъ сложенія предъ нимъ подразумѣвается. Такъ напр. количества $5, a, 2b$ имѣютъ одно значеніе съ количествами $0+5, 0+a, 0+2b$, или съ количествами $+5, +a, +2b$.

Изъ этого слѣдуетъ, что всякое алгебраическое количество или число можетъ быть рассматриваемо или какъ слагаемое, или какъ вычитаемое, точно такъ же какъ и члены этого количества.

§ 7. Въ Ариметикѣ вычитаніе возможно только въ томъ случаѣ, если вычитаемое меньше уменьшаемаго. Въ Алгебрѣ же вычитаніе возможно и тогда, когда вычитаемое больше уменьшаемаго, ибо за начало счета единицъ количества принимается нуль условный. Дѣйствительно, пусть изъ количества a нужно вычесть количество b , которое больше a на d ; разность $a-b$ можетъ быть представлена въ видѣ $a-(a+d)$, потому что $b=a+d$; но $a-(a+d)=a-a-d$, или $a-(a+d)=0-d$, слѣдовательно $a-b=0-d$, или просто $-d$. Эта разность со знакомъ минусъ, результатъ недоконченнаго вычитанія, есть количество вычитаемое изъ нуля условнаго.

§ 8. Количество вычитаемое, взятое отдѣльно (не предшествуемое уменьшаемымъ), какъ вычитаемое изъ нуля условнаго, имѣетъ смыслъ только тогда, когда число единицъ, заключающихся въ немъ, меньше числа еди-

ницъ, содержащихся въ части величины, принятой за нуль условный.

Точно также разность вычитанія большого количества изъ меньшаго возможна только въ томъ случаѣ, если вычитаемое превышаетъ уменьшаемое на число единицъ, меньшее нуля условнаго.

Но, согласно съ сказаннымъ въ § 5, рассматривая въ Алгебрѣ количества, представляющія собою всякую величину, должно для общности полагать, что нуль условный представляетъ величину, заключающую въ себѣ всякое число единицъ; слѣдовательно изъ такого нуля можно вычитать всякое количество, а посему всякое вычитаемое количество, взятое отдѣльно, т. е. всякое количество со знакомъ минусъ имѣетъ смыслъ въ Алгебрѣ, точно такъ же какъ и всякая разность двухъ количествъ.

Въ частномъ же случаѣ, когда извѣстно, какую величину представляетъ количество, и когда нуль условный совпадаетъ съ нулемъ абсолютнымъ (§ 3), или когда число единицъ нуля этой величины опредѣленно (§§ 4 и 5), смыслъ вычитаемыхъ количествъ и указанныхъ разностей или вовсе теряется, или ограниченный, какъ это будетъ объяснено примѣрами въ слѣдующихъ параграфахъ.

Слагаемая и вычитаемая величины.

§ 9. Количества и члены ихъ суть слагаемая или вычитаемая; соотвѣтственно этому величины и части ихъ, этими количествами представляемая, называются тоже *слагаемыми* или *вычитаемыми величинами*.

Всякая величина и часть ея называется слагаемою величиною, если она представляется слагаемымъ количествомъ, — и вычитаемою, если она представляется вычитаемымъ количествомъ.

Когда по смыслу вопроса одна изъ двухъ величинъ

должна вычитаться изъ другой, то та изъ коей должно вычесть есть слагаемая, ибо представится слагаемымъ количествомъ, другая же вычитаемая, ибо представится вычитаемымъ количествомъ.

Примѣръ 1.

Пусть разсматриваемая величина есть высота поднятія птицы, считаемая отъ высоты уровня моря, которая принимается за начало счета высотъ, или за 0 высотъ. Высота уровня моря можетъ считаться отъ всякой другой высоты, лежащей выше или ниже уровня.

Положимъ, что эта высота считается отъ произвольной другой высоты, лежащей ниже уровня моря. Тогда высота поднятія птицы, находящейся надъ уровнемъ, представится въ видѣ слагаемаго количества (въ видѣ количества со знакомъ $+$) и есть слагаемая величина. Отъ всякаго повышенія или пониженія птицы начальная высота будетъ мѣняться и къ количеству, представляющему эту высоту, прибавится или отъ него отнимется новое количество. Такимъ образомъ всякое повышение представится въ видѣ слагаемаго количества и есть слагаемая величина, а всякое пониженіе представится въ видѣ вычитаемого количества и есть вычитаемая величина.

Еслибы птица вначалѣ находилась на высотѣ, одинаковой съ высотой уровня моря, то мы бы сказали, что высота поднятія птицы есть нуль, и всякое повышеніе ея опять представили бы въ видѣ количества слагаемаго съ нулемъ, а пониженіе въ видѣ количества, вычитаемого изъ нуля; — въ первомъ случаѣ повышеніе есть слагаемая величина съ высотой уровня моря, во второмъ случаѣ пониженіе есть вычитаемая величина изъ этой высоты.

Если бы наконецъ птица находилась вначалѣ ниже уровня моря, тогда высота ея поднятія, представится въ видѣ вычитаемого количества (въ видѣ количества со знакомъ $-$) и будетъ вычитаемая величина; всякое по-

вышеніе птицы представится слагаемымъ количествомъ и есть слагаемая величина, а всякое пониженіе — вычитаемымъ количествомъ и есть вычитаемая величина.

Слѣдовательно полагая, что высота уровня моря считается отъ произвольной другой высоты, лежащей ниже уровня, должно всякую высоту, взятую отъ уровня моря или откуда нибудь вверхъ, считать слагаемою, а взятую внизъ, — вычитаемою высотой, точно такъ же какъ и всякое измѣненіе высоты.

Если положимъ, что высота уровня считается отъ другой высоты, лежащей выше этого уровня, то произойдетъ обратное: должно будетъ всякую высоту, взятую отъ уровня или откуда нибудь внизъ, считать слагаемою, а всякую высоту, взятую вверхъ, — вычитаемою высотой, ибо первая представится слагаемымъ количествомъ, а вторая вычитаемымъ. Точно также должно будетъ считать всякое пониженіе слагаемымъ, а всякое повышеніе вычитаемымъ.

Отъ нашего произвола зависитъ считать высоту моря отъ высоты, лежащей выше или ниже его, и посему отъ нашего произвола зависитъ, какія изъ высотъ назвать слагаемыми и какія вычитаемыми; но только если однѣ изъ нихъ примемъ за слагаемыя (напримѣръ тѣ, которыя считаются вверхъ), то другія, считаемыя въ обратную сторону, будутъ необходимо вычитаемыя.

Если, условившись принимать высоты, считаемыя на примѣръ вверхъ, за слагаемыя, скажемъ, что высота птицы есть $+ 5$ футовъ, $+ a$ футовъ, или просто 5 футовъ, a футовъ, то это значитъ, что птица находится на 5 футовъ и вообще на a футовъ выше уровня моря; если же скажемъ, что высота птицы есть $- 5$, $- a$ футовъ, то это значитъ, что птица находится на 5 , на a футовъ ниже уровня моря.

Если птица находилась на высотѣ $+ 20$ ф., или 20 ф.,

и потомъ понизилась на $+23\text{ ф}$, то разность $20-23=-3$ показываетъ, что птица послѣ пониженія находится на 3 фута ниже уровня моря.

Число единицъ нуля разсматриваемой величины неопредѣленно, и посему всякое вычитаемое количество и всякая разность имѣетъ смыслъ, когда величина, представляемая количествомъ, есть высота (§ 8).

Примѣръ 2.

Разсматриваемая величина есть время совершенія какого либо событія, считаемое отъ Рождества Христова, которое принимается за начало счета времени.

Время Р. Х. можетъ считаться отъ всякаго иного событія, бывшаго прежде или послѣ Р. Х.

Положимъ, что время Р. Х. считается отъ произвольнаго событія, бывшаго прежде него, тогда время совершенія событія, слѣдующаго за Р. Х., представится слагаемымъ количествомъ и есть слагаемая величина.

Всякая часть времени, слѣдующая за временемъ совершенія этого событія, есть слагаемая, а всякая предшествующая — вычитаемая величина.

Если событіе совершилось во время Р. Х., то говорить, что время его совершенія есть нуль, и опять всякая часть времени, слѣдующая за нимъ, есть слагаемая, а предшествующая — вычитаемая величина.

Если бы событіе совершилось прежде Р. Х., то количество, представляющее время совершенія событія, было бы вычитаемое (со знакомъ минусъ), и опять всякая часть времени, слѣдующая за временемъ совершенія событія, будетъ слагаемая, а предшествующая — вычитаемая величина.

Такимъ образомъ всякая часть времени, взятая отъ Р. Х. или отъ другаго времени впередъ, есть слагаемая, а взятая назадъ — вычитаемая.

Еслибы мы приняли, что время Р. Х. считается отъ произвольнаго событія, которое совершилось послѣ него

или которое еще совершится, то нужно будетъ обратно, всякую часть времени, взятую отъ какого либо момента назадъ, считать слагаемою, а взятую впередъ — вычитаемою, ибо первыя времена представляются слагаемыми количествами, а вторыя вычитаемыми.

Слѣдовательно отъ насъ зависить, какія части времени считать слагаемыми и какія вычитаемыми; но только если условимся всякое время, взятое впередъ, считать слагаемымъ, то необходимо время, взятое назадъ, будетъ вычитаемое и обратно.

Если, условившись считать времена, взятые напр. впередъ, за слагаемыя, скажемъ, что событіе совершилось въ 1835 году, или въ $+ 1835$ году, то это значить, что оно совершилось 1835 лѣтъ послѣ Р. Х.; если же скажемъ, что событіе совершилось въ $- 85$ -мъ году, то это значить, что оно совершилось за 85 лѣтъ до Р. Х.

Если одно событіе было въ $+ 75$ -мъ году, другое за 135 лѣтъ ранѣе, то разность $75 - 135 = - 60$ показываетъ, что второе событіе совершилось 60-ю годами ранѣе Р. Х.

Когда количества представляютъ времена, то всякое отрицательное количество имѣетъ смыслъ, ибо число единицъ начала счета времени неопредѣленно.

§ 10. Все, сказанное о высотѣ и времени и о счетѣ ихъ частей, прилагается безъ измѣненія ко всѣмъ величинамъ, неимѣющимъ ни начала ни конца.

Такъ, принимая за начало счета разстояній произвольное мѣсто, разстояніе коего можетъ считаться откуда угодно, всякое число верстъ, взятое по извѣстному направлению отъ этого мѣста, будемъ принимать за слагаемое, а взятое по противоположному — за вычитаемое или обратно.

Принимая за начало счета температуръ произвольную температуру, при которой тѣло до извѣстной степени

расширено, будемъ считать всякое измѣненіе температуры, производящее большее расширение, за слагаемое, меньшее за вычитаемое или обратно.

За начало счета долготъ примемъ какую либо долготу и будемъ считать всякую долготу, взятую на востокъ, заслагаемую, на западъ — за вычитаемую или обратно и проч.

Если количества представляютъ собою части указанныхъ величинъ, то всякое вычитаемое количество и всякая разность этихъ количествъ возможна, ибо нули этихъ величинъ неопредѣленны.

§ 11. Разсмотримъ теперь величины, имѣющія начало, или нуль абсолютный, т. е. не безконечныя величины, и разберемъ слѣдующіе два случая отдѣльно.

1-й случай. Величина имѣетъ начало, или нуль абсолютный, отъ котораго условились считать части этой величины, т. е. нуль условный совпадаетъ съ нулемъ абсолютнымъ (§ 3).

Количество вычитаемое, взятое отдѣльно, не имѣетъ смысла для такихъ величинъ, точно также какъ и разность вычитанія большаго количества изъ меньшаго.

Но части этихъ величинъ суть тоже слагаемыя и вычитаемыя, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

Разсматриваемая величина есть толщина книги, считаемая отъ отсутствія этого измѣренія, т. е. отъ нуля абсолютнаго. Нельзя сказать толщина книги есть — 3 линіи, — a линій; но всякое утолщеніе книги есть слагаемая величина, утоненіе ея — вычитаемая.

Подобно сему плотность тѣла, влажность воздуха, число людей въ комнатѣ находящихся и проч., считаемая отъ отсутствія плотности, отсутствія влаги, отсутствія людей, или — отъ нуля абсолютнаго, не могутъ быть представлены вычитаемыми количествами, отдѣльно взятыми, но измѣненія ихъ могутъ быть слагаемыя и вычитаемыя.

2-й случай. Разсматриваемая величина имѣетъ начало, или нуль абсолютный; но условились считать части ея не отъ нуля абсолютнаго, а отъ нуля условнаго, не совпадающаго съ нулемъ абсолютнымъ, т. е. отъ опредѣленнаго нуля (§ 8).

Вычитаемое количество имѣетъ смыслъ до извѣстнаго предѣла, до тѣхъ поръ, пока оно меньше части величины, принятой за нуль условный, ибо количество — a , или $0 - a$, возможно только, пока 0 больше a .

Такимъ же образомъ разность вычитанія большаго количества изъ меньшаго имѣетъ смыслъ только до тѣхъ поръ, пока вычитаемое превышаетъ уменьшаемое на количество, меньшее части величины, принятой за нуль условный.

Примѣръ.

Разсматриваемая величина есть количество людей, находящихся въ комнатѣ, и за начало счета людей принято не отсутствіе лицъ въ комнатѣ, т. е. не нуль абсолютный, а 10-ть человѣкъ, нуль условный; если скажемъ: $+ 5$ человѣкъ, это будетъ значить, считая отъ нуля абсолютнаго, 15 человѣкъ; $- 7$ человѣкъ значить (отъ абсолютнаго нуля) 3 человѣка и проч. Но нельзя сказать въ комнатѣ находится — 17 человѣкъ, ибо 17 превышаетъ нуль условный.

§ 12. Вычитаемое количество, взятое отдѣльно, теряетъ смыслъ, когда части соотвѣтствующей ему величины считаются отъ нуля абсолютнаго; но для нѣкоторыхъ величинъ въ этомъ случаѣ придается вычитаемымъ количествамъ условное значеніе, основанное на ихъ свойствахъ, одинаковыхъ съ свойствами величинъ, не имѣющихъ начала.

Примѣръ 1.

Капиталъ какого либо лица есть величина, имѣющая началомъ отсутствіе денегъ, и посему вычитаемое коли-

чество, взятое отдѣльно, не имѣетъ смысла, если оно представляетъ собою извѣстное число рублей, считае-
мыхъ отъ нуля абсолютнаго. Нельзя сказать: человѣкъ
имѣетъ — 33 рубля, — 70 рублей.

Долгъ есть тоже величина, имѣющая началомъ отсут-
ствіе долга, и посему вычитаемое количество, взятое
отдѣльно, не имѣетъ смысла, если оно представляетъ
извѣстное число рублей долга, считае-
мыхъ отъ нуля абсолютнаго. Нельзя сказать: человѣкъ имѣетъ — 78 руб.,
— a руб. долга.

Чтобы придать вычитаемымъ количествамъ смыслъ въ
этомъ случаѣ, условились разсматривать обѣ величины,
капиталъ и долгъ, какъ одну, за начало счета частей
которой принимается отсутствіе капитала и долга, и это
означается нулемъ.

Каждый капиталъ представляется слагаемымъ количе-
ствомъ и называется слагаемою величиною, а каждый
долгъ — вычитаемымъ количествомъ и называется вычи-
таемою величиною, или обратно; на томъ основаніи, что
по свойству величинъ всякій новый капиталъ долженъ
придаваться къ начальному капиталу, а всякій долгъ —
отниматься отъ него, или обратно; точно такъ же какъ къ
начальному времени всякое слѣдующее за нимъ время дол-
жно придаваться, — а предшествующее — отниматься.

Кромѣ того человѣкъ, имѣющій только извѣстное число
рублей долга, бѣднѣе человѣка, неимѣющаго ни долга
ни капитала; на этомъ основаніи можно разсматривать
всякій долгъ какъ капиталъ, меньшій нуля, точно такъ
же какъ вычитаемое время принимается меньшимъ нуля
времени.

Такимъ образомъ 0 рублей есть отсутствіе капитала
и долга; + 10, + 100 руб. есть 10, 100 руб. капитала;
— 10, — 100 руб. есть 10, 0 руб. долга, или обратно.

Примѣръ 2.

Сила, дѣйствующая по извѣстному направленію (напр. сила притяженія, вѣсъ и проч.) есть величина, имѣющая началомъ отсутствіе дѣйствія силы по этому направленію; и посему вычитаемое количество, взятое отдѣльно, не имѣетъ смысла въ томъ случаѣ, когда оно представляетъ собою силу, дѣйствующую по сказанному направленію.

Сила, дѣйствующая по противоположному направленію, есть тоже величина, имѣющая началомъ отсутствіе дѣйствующей по этому направленію силы, и представляющее ее вычитаемое количество, взятое отдѣльно, снова не имѣетъ смысла.

Принимая за начало счета силъ, дѣйствующихъ по двумъ противоположнымъ направленіямъ, отсутствіе дѣйствія силъ по обоимъ направленіямъ, рассматриваютъ объ величины какъ одну, считая всякую силу, дѣйствующую по одному направленію, слагаемою, а дѣйствующую по противоположному — вычитаемою; на томъ основаніи, что всякая сила слагается съ силою, дѣйствующею по одному съ нею направленію, и вычитается изъ силы, дѣйствующей по противоположному направленію.

При томъ сила произведетъ большее дѣйствіе на тѣло, неподверженное дѣйствію силъ ни по ея направленію, ни по противоположному, нежели на тѣло, подверженное дѣйствію силы, направленной въ противоположную сторону; посему можно принять, что эта послѣдняя уменьшаетъ нуль силъ.

Такъ если сказано, что на тѣло отъ *A* къ *B* дѣйствуетъ сила, равная нулю, то это значитъ, что тѣло не подвержено дѣйствію силы ни отъ *A* къ *B*, ни отъ *B* къ *A*.

Если сказано, что на тѣло отъ *A* къ *B* дѣйствуетъ сила $+5$, $+a$ фунтовъ, это значитъ, что сила дѣйствуетъ по направленію отъ *A* къ *B*.

Если же сказано, что сила, дѣйствующая отъ A къ B , равна — 5, — a фунтамъ, это значить, что дѣйствіе силы направлено отъ B къ A .

Обобщеніе понятія о сложеніи. Положительныя и отрицательныя числа и количества.

§ 13. Выше было объяснено, что алгебраическія количества и ихъ члены суть слагаемыя и вычитаемыя; но въ Алгебрѣ принимаютъ всякое количество и всякій членъ его за слагаемое, съ цѣлью придать большую общность алгебраическимъ вопросамъ и ихъ рѣшеніямъ, какъ это видно изъ слѣдующаго примѣра.

Въ Ариѳметикѣ, чтобы выразить, во что обратилась данная величина послѣ своего измѣненія, нужно, чтобы было извѣстно:

- 1) Сколько единицъ заключается въ данной величинѣ и на сколько единицъ она измѣнилась.
- 2) Увеличилась или уменьшилась данная величина отъ этого измѣненія.

Примѣръ.

Птица находилась на высотѣ 100 футовъ, и потомъ высота эта увеличилась на 17 футовъ. Спрашивается, какая будетъ измѣненная высота поднятія птицы.

Здѣсь дано число единицъ (100) высоты начальнаго поднятія птицы и число единицъ (17), на которое эта высота измѣнилась, кромѣ того сказано, что высота увеличилась послѣ измѣненія; посему измѣненная высота будетъ $100+17$ ф., или 117 ф.

Еслибы при тѣхъ же данныхъ было сказано, что начальная высота уменьшилась на 17 ф., то измѣненная высота была бы $100-17$ ф., или 83 фута.

§ 14. Въ Алгебрѣ же, условившись употреблять буквы вмѣсто цифръ, нѣтъ надобности знать, сколько единицъ заключается въ данной величинѣ и на сколько единицъ

она измѣнилась, — это число единицъ можетъ оставаться произвольнымъ (§ 5 введенія); нужно только, чтобы было извѣстно, увеличилась ли или уменьшилась данная величина послѣ своего измѣненія.

Въ этомъ случаѣ разсмотрѣнный примѣръ будетъ:

Птица находилась на высотѣ a футовъ, и потомъ высота эта увеличилась на b ф.; спрашивается, какая будетъ измѣненная высота поднятія птицы.

Число единицъ въ a и b произвольно; но такъ какъ сказано, что начальная высота увеличилась, то измѣненная высота будетъ $a + b$.

Еслибы при тѣхъ же данныхъ было сказано, что начальная высота уменьшилась на b футовъ, то измѣненная высота была бы $a - b$.

Рѣшеніе $a + b$, какъ отвлеченное отъ числа единицъ, представляетъ рѣшеніе всѣхъ задачъ, подобныхъ разсмотрѣнной въ ариѳметическомъ примѣрѣ, разнящихся между собою числомъ единицъ въ двухъ данныхъ числахъ; оно показываетъ, что когда начальная высота увеличилась послѣ своего измѣненія, то для полученія измѣненной высоты должно къ начальной придать число единицъ, на которое она измѣнилась.

Точно также рѣшеніе $a - b$ представляетъ рѣшеніе всѣхъ задачъ, подобныхъ разсмотрѣнной въ ариѳметическомъ примѣрѣ, разнящихся между собою числомъ единицъ въ двухъ данныхъ числахъ; оно показываетъ, что если начальная высота уменьшилась послѣ своего измѣненія, то для полученія измѣненной высоты должно отъ начальной отнять число единицъ, на которое она измѣнилась.

Изъ этого видно, что отвлекаясь отъ перваго условія, нужнаго для рѣшенія ариѳметической задачи, т. е. отъ числа единицъ данныхъ чиселъ, мы множество задачъ заключаемъ въ одной.

Подобнымъ же образомъ, чтобы сдѣлать алгебраическое рѣшеніе еще болѣе общимъ и заключить оба случая, — когда начальная величина увеличилась отъ своего измѣненія и когда она уменьшилась, — въ одномъ вопросѣ, въ Алгебрѣ отвлекаются и отъ втораго условія, нужнаго для рѣшенія ариѳметической задачи, отвлекаются отъ необходимости знать, увеличилась ли или уменьшилась данная величина послѣ своего измѣненія, т. е. предполагаютъ въ задачѣ и это условіе произвольнымъ.

Рѣшеніе такой отвлеченной, общей задачи можетъ быть выражено на основаніи ниже изложенныхъ новыхъ условій, вводящихъ въ Алгебру отрицательныя числа и количества.

§ 15. Въ Алгебрѣ условились разсматривать всѣ члены алгебраическаго количества, и положительные и отрицательные, какъ слагаемые другъ съ другомъ.

Такъ условились разсматривать разность $a - b$ какъ сумму, происходящую отъ сложенія a съ $(-b)$, и $a - b$ представляютъ въ видѣ $a + (-b)$; полагая $a - b = a + (-b)$, говорятъ: къ a прибавить $(-b)$, вмѣсто того чтобы сказать: изъ a вычесть b .

Такимъ же образомъ полиномъ $a^2b - c + d^3 - k - l$ можетъ быть представленъ въ видѣ $a^2b + (-c) + d^3 + (-k) + (-l)$, гдѣ всѣ члены слагаемые.

Совокупность чиселъ $10 - 3 + 5 - 8 + 2$ можетъ быть представлена въ видѣ суммы $10 + (-3) + 5 + (-8) + 2$.

Точно также условились количество, вычитаемое изъ нуля условнаго (количество, имѣющее предъ собою знакъ минусъ), разсматривать какъ слагаемое съ нулемъ условнымъ. Такъ $0 - a$, или $-a$, представляютъ въ видѣ $0 + (-a)$, или $+(-a)$; $0 - 3$, или -3 , означаютъ чрезъ $0 + (-3)$, или $+(-3)$.

Такое условіе даетъ возможность принимать всякое алгебраическое количество и всякій членъ его за слагае-

мое, а полиномъ — за сумму слагаемыхъ, но только слагаемые могутъ имѣть или знакъ плюсь (+), или знакъ минусъ (—).

Необходимой принадлежностью алгебраическаго количества и члена его, или необходимой принадлежностью каждаго слагаемаго дѣлается знакъ плюсь или минусъ.

Количество слагаемое, имѣющее знакъ плюсь (+), называется *положительнымъ количествомъ*.

Количество слагаемое, имѣющее знакъ минусъ (—), называется *отрицательнымъ количествомъ*.

Въ числѣ, разсматриваемомъ въ Ариѳметикѣ, принимается въ соображеніе только число единицъ и долей единицы, въ немъ содержащихся. Въ Алгебрѣ же принимается въ соображеніе кромѣ того и знакъ количества.

Число единицъ и долей, входящихъ въ алгебраическое количество, не зависимо отъ его знака, называется *абсолютнымъ значеніемъ количества*.

§ 16. Отвлекаясь отъ числа единицъ количества, означаютъ его буквою, и это даетъ возможность выражать рѣшенія вопросовъ для всякаго числа единицъ, содержащихся въ данныхъ числахъ.

Подобно этому отвлекаются и отъ знака количества, т. е. полагаютъ знакъ его произвольнымъ, означая буквою количество вмѣстѣ съ его знакомъ. Такъ a можетъ означать и $+a$, и $-a$, т. е. можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ количествомъ. — Это даетъ возможность выражать рѣшенія вопросовъ для каждаго изъ двухъ случаевъ, — и когда количество прибавляется, и когда оно отнимается отъ другаго количества, — какъ это видно изъ примѣра, разсмотрѣннаго въ § 13 и представленнаго въ слѣдующемъ общемъ видѣ, отвлеченномъ отъ числа единицъ данныхъ чиселъ и отъ условія, увеличилась ли или уменьшилась данная величина послѣ своего измѣненія.

Птица находилась на высотѣ a футовъ, и потомъ высота эта измѣнилась на b ф.; спрашивается, какая будетъ измѣненная высота поднятія птицы.

Рѣшеніе есть $a + b$, гдѣ b можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ количествомъ.

Это рѣшеніе показываетъ, что должно къ начальной высотѣ прибавить число единицъ, на которое она измѣнилась, для полученія высоты измѣненной.

При этомъ если высота увеличилась послѣ своего измѣненія, то b будетъ положительное; если же она уменьшилась, то b будетъ отрицательное, и мы получимъ $a + (-b) = a - b$.

Такимъ образомъ два вопроса и два рѣшенія заключаются въ одномъ общемъ вопросѣ и въ одномъ рѣшеніи.

Положительныя и отрицательныя величины.

§ 17. Условившись считать всякое количество и всякій членъ его слагаемымъ и полагая, что знакъ дѣйствія принадлежитъ самому числу и количеству, которыя могутъ быть и положительными, и отрицательными, не дѣлаютъ соотвѣтственно этому различія между слагаемыми и вычитаемыми величинами: всѣ они принимаются за слагаемыя, только величины, представляемыя положительными слагаемыми, называются *положительными величинами*, а представляемыя отрицательными слагаемыми — *отрицательными величинами*.

Счетъ частей величины отъ начала счета производится двоякимъ образомъ, по двумъ противоположнымъ направлѣніямъ, однѣ изъ нихъ называются положительными, противоположныя имъ — отрицательными.

Напр. всякая высота, взятая вверхъ, и всякое повышение суть положительныя величины; всякая же высота, взятая внизъ, и всякое пониженіе — отрицательныя ве-

личины, или обратно; при этомъ пониженіе называется тоже отрицательнымъ повышеніемъ.

Часть времени, взятая впередъ, есть положительная величина, — взятая назадъ — отрицательная, или обратно. Прошедшее время называется тоже отрицательнымъ будущимъ.

Всякое ускореніе есть положительная величина, замедленіе — отрицательная, или обратно. Замедленіе называется тоже отрицательнымъ ускореніемъ.

Если назовемъ имущество положительною величиною, долгъ будетъ отрицательною, и называется также отрицательнымъ имуществомъ.

Называя силу притяженія положительною величиною, сила отталкивательная будетъ отрицательною, и называется также отрицательнымъ притяженіемъ и т. д.

О дѣйствіяхъ надъ отрицательными числами и количествами.

§ 18. Въ главѣ III были разсмотрѣны дѣйствія, производимыя надъ алгебраическими количествами; но буквы послѣднихъ означали числа положительныя. Вводя въ Алгебру отрицательныя числа и полагая, что каждая буква алгебраическаго количества можетъ означать не только положительное, но и отрицательное число, нужно было бы при производствѣ дѣйствій надъ буквенными количествами различать случаи, когда число, означенное буквою, положительное и когда отрицательное.

Такъ можно найти частное дѣленія $2a^2$ на a , если a положительное: оно есть $2a$; но нельзя дѣлить $2a^2$ на a , когда a отрицательное, ибо что значить узнать, сколько разъ — a заключается въ $2a^2$?

Изъ слѣдующихъ параграфовъ будетъ видно, что вводя въ Алгебру новое обобщеніе понятія объ умноженіи, можно будетъ распространить правила дѣйствій надъ числами и количествами положительными на числа и ко-

личества отрицательныя, и тогда не будетъ надобности въ указанномъ различіи случаевъ положительности и отрицательности чиселъ, означенныхъ буквами.

Сложеніе отрицательныхъ чиселъ и количествъ.

§ 19. Если складываемыя количества всѣ отрицательны, то изъ понятія о суммѣ, какъ о совокупности всѣхъ единицъ и долей слагаемыхъ, слѣдуетъ, что должно сложить абсолютныя значенія всѣхъ слагаемыхъ и поставить передъ суммою знакъ минусъ, ибо всѣ единицы и доли единицъ отрицательны.

Такъ сумма отрицательныхъ количествъ $-a, -b, -c$ есть $-(a + b + c)$.

Сумма чиселъ $-5, -3, -9$ есть $-(5 + 3 + 9) = -17$.

Если одни изъ слагаемыхъ положительны, а другія отрицательны, то составивъ сначала сумму всѣхъ положительныхъ слагаемыхъ и означивъ ее чрезъ A , потомъ составивъ сумму всѣхъ отрицательныхъ, которая пусть будетъ B , опредѣлимъ сумму $A + (-B)$.

Согласно съ сказаннымъ въ § 15, придать къ A отрицательное количество $-B$ все равно, что вычесть изъ A абсолютное значеніе отрицательнаго количества B , т. е. $A + (-B) = A - B$; при этомъ если случится, что вычитаемое B больше уменьшаемаго A , то (§ 7) должно изъ B вычесть A и поставить предъ разностью знакъ минусъ. И такъ чтобы найти сумму какихъ либо положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, должно найти сумму положительныхъ и сумму абсолютныхъ значеній отрицательныхъ, потомъ вычесть изъ большей суммы меньшую и поставить въ разности знакъ большей суммы.

Примѣры.

Сумма количествъ $+a, -b, +b^2, -k, +l$ есть $(a + b^2 + l) - (b + k)$.

Сумма чиселъ $+5, -4, +9, -20, +3$ есть $(5 + 9 + 3) - (4 + 20) = 17 - 24 = -7$.

§ 20. Сумму положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ можно найти еще другимъ способомъ, отличающимся отъ предыдущаго порядкомъ вычисленія.

Въ § 15 было сказано, что сумма количествъ $+a, -b, +c, -d$, т. е. $a + (-b) + c + (-d)$ тождественна съ выраженіемъ $a - b + c - d$; на этомъ основаніи, чтобы найти сумму чиселъ $+5, -4, +9, -20, +3$, или чтобы найти сумму $5 + (-4) + 9 + (-20) + 3$, представимъ ее въ видѣ количества $5 - 4 + 9 - 20 + 3$ и произведемъ въ немъ дѣйствія, указанные знаками. Вычтя 4 изъ 5, получимъ $+1$; $+1 + 9 = +10$; $+10 - 20 = -10$; $-10 + 3 = -7$, т. е. сумма положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ найдется, написавъ всѣ числа рядомъ съ ихъ знаками и производя послѣдовательно указанные этими знаками дѣйствія, дѣлая при этомъ въ случаѣ надобности вычитаніе по § 7.

§ 21. Въ Ариѳметикѣ разсматриваются только положительные числа, и посему подъ словомъ сложить тамъ разумѣютъ всегда увеличить, такъ что сумма необходимо больше каждаго изъ слагаемыхъ. Въ Алгебрѣ же придать положительное число къ положительному значить придать абсолютное его значеніе, а придать отрицательное—значить вычесть абсолютное его значеніе. Въ первомъ случаѣ сумма больше слагаемаго, а во второмъ меньше; посему такая сумма называется *алгебраическою суммою*, въ отличіе отъ первой, называемой *суммою ариѳметической*.

Въ ариѳметической суммѣ разсматриваютъ только абсолютныя значенія чиселъ, въ суммѣ же алгебраической разсматриваютъ числа съ ихъ знаками.

Если въ алгебраической суммѣ измѣнить знаки всѣхъ членовъ въ обратные, то и знакъ суммы измѣнится,

потому что отъ этой переменны сумма положительныхъ членовъ станетъ отрицательной, и обратно. Напр.

$$\begin{aligned} 4 - 6 - 7 + 9 - 6 &= -6 \\ -4 + 6 + 7 - 9 + 6 &= +6. \end{aligned}$$

Вычитаніе отрицательныхъ чиселъ и количествъ.

§ 22. Вычесть одно количество изъ другого значить по данной суммѣ, называемой уменьшаемымъ и одному изъ слагаемыхъ, — вычитаемому, найти другое слагаемое, — разность. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что алгебраическая сумма вычитаемого и разности должна равняться уменьшаемому.

Пусть теперь изъ количества a требуется вычесть отрицательное количество $-b$; означая искомую разность $a - (-b)$ буквою x , получимъ по сказанному $x + (-b) = a$, или (по § 15) $x - b = a$; придавъ къ обѣимъ частямъ равенства количество b , получимъ $x = a + b$, слѣдовательно искомая разность

$$a - (-b) = a + b;$$

т. е. *вычесть отрицательное количество значить придать его абсолютное значеніе.*

Примѣры.

$$20 - (-5) = 20 + 5 = 25.$$

$$-20 - (-5) = -20 + 5 = -15.$$

$$(a - b) - [-(k + l)] = a - b + k + l.$$

$$(a^2b - ab^2) - [a^3b + (-a) - (-b)] = a^2b - ab^2 - a^3b - (-a) + + (-b) = a^2b - ab^2 - a^3b + a - b.$$

§ 23. Изъ сказаннаго видно, что вычесть положительное количество или число значить уменьшить, вычесть же отрицательное — значить увеличить, и это составляетъ существенное отличіе арифметическаго вычитанія отъ алгебраическаго.

Сравненіе отрицательныхъ чиселъ и количествъ съ положительными и между собою.

§ 24. Если вычитаемое количество меньше уменьшаемаго, то разность положительна; если же вычитаемое больше уменьшаемаго, то разность отрицательна (§ 7). На этомъ основаніи всякое количество a больше b , когда разность $a - b$ положительна, и обратно.

Откуда слѣдуетъ:

1. *Всякое положительное число больше отрицательнаго, ибо разность ихъ положительна.*

Такъ $1 > -8$, ибо разность $1 - (-8) = 1 + 8 = 9$ положительна.

2. *Отрицательное число больше, когда его абсолютное значеніе меньше, и обратно.*

Такъ $-3 > -10$, ибо разность $-3 - (-10) = -3 + 10 = +7$ положительна.

3. *Ноль больше всякаго отрицательнаго числа.*

Такъ $0 > -7$, ибо разность $0 - (-7) = +7$ положительна.

Изъ этого слѣдуетъ, что если напишемъ всѣ положительныя и отрицательныя числа въ такомъ порядкѣ:

$$-n, -(n-1), -(n-2), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1, n.$$

гдѣ буквою n означено произвольно большое число, то всякое число, взятое въ этомъ ряду, больше каждаго изъ предшествующихъ ему чиселъ и меньше каждаго изъ слѣдующихъ за нимъ.

Чтобы выразить, что a положительное, обыкновенно употребляютъ формулу $a > 0$, а формулой $a < 0$ выражаютъ, что a отрицательное.

Въ Ариѳметикѣ разсматривается только одинъ рядъ чиселъ $1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n$ съ промежуточны-

ми дробями; въ Алгебрѣ же кромѣ этого ряда разсматривается еще рядъ отрицательныхъ чиселъ

$$-1, -2, -3, \dots, -(n-2), -(n-1), -n$$

съ промежуточными дробями.

Умноженіе отрицательныхъ чиселъ и количествъ.

§ 25. Изъ Ариѳметики извѣстно, что умножить на цѣлое число значитъ взять множимое слагаемымъ столько разъ, сколько во множителѣ заключается единицъ; а умножить на дробь значитъ взять такую часть множимаго, какая часть единицы заключается во множителѣ.

Такъ помножить 5 на $\frac{3}{4}$ значитъ взять $\frac{3}{4}$ отъ 5, ибо во множителѣ находится $\frac{3}{4}$ единицы.

Если множимое отрицательное число, а множитель положительное, то на основаніи сказанныхъ опредѣленій легко произвести умноженіе.

Такъ по первому опредѣленію произведеніе отъ умноженія -4 на $+3$ получимъ, взявъ -4 слагаемымъ 3 раза, т. е. (§ 19)

$$-4 \times 3 = (-4) + (-4) + (-4) = -12.$$

По второму опредѣленію произведеніе -5 на $\frac{2}{3}$ найдется, взявъ $\frac{2}{3}$ отъ -5 ; $\frac{1}{3}$ отъ -5 есть $-\frac{5}{3}$ (потому что $-\frac{5}{3}$, помноженные на 3, даютъ по предъидущему -5), слѣдовательно искомое произведеніе -5 на $\frac{2}{3}$ есть $-\frac{10}{3}$.

Такимъ же образомъ если b цѣлое число, то по первому опредѣленіи,

$(-a) \cdot b = (-a) + (-a) + (-a) + (-a) \dots = -ab$,
гдѣ слагаемое $(-a)$ повторяется b разъ.

По второму опредѣленію $(-a) \cdot \frac{b}{c}$ найдется, раздѣляя $-a$ на c , что даетъ $-\frac{a}{c}$ (ибо при умноженіи $-\frac{a}{c}$ на c получимъ снова $-a$); потомъ помножая $-\frac{a}{c}$ на b , по первому опредѣленію найдемъ $-\frac{ab}{c}$, т. е.

$$(-a) \cdot \frac{b}{c} = -\frac{ab}{c}.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что при умноженіи отрицательнаго количества или числа на положительное, должно перемножить абсолютныя значенія ихъ и взять полученное произведеніе со знакомъ минусъ, точно такъ же какъ и при умноженіи отрицательнаго члена на положительный.

$$[-(a^2 + b)] \cdot (a^2 - b) = -[(a^2 + b)(a^2 - b)] = -(a^4 - b^2).$$

$$\left[-\left(\frac{k+l}{2} \right) \right] \cdot \frac{2k-2l}{k^2-l^2} = -\frac{2(k^2-l^2)}{2(k^2-l^2)} = -1.$$

Обобщеніе понятія объ умноженіи. Отрицательные множители.

§ 26. Указанныя въ § 25 опредѣленія умноженія не примѣнимы къ умноженію на числа и количества отрицательныя, ибо что значить повторить число слагаемымъ — 3 раза? или взять $-\frac{2}{3}$ числа?

Въ Алгебрѣ каждый буквенный множитель можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ, и чтобы разяснить,

какой можно дать смысл умноженію въ случаѣ отрицательнаго множителя, замѣтимъ слѣдующее.

Пусть требуется помножить число 4 на разность $5-3$; умноженіе можно произвести двоякимъ образомъ: вычесть изъ 5 число 3 и потомъ помножить 4 на 2, или помножить 4 на 5 и 4 на 3, и изъ перваго произведенія вычесть второе.

Послѣдній способъ умноженія употребляется въ буквенныхъ количествахъ; такъ $a \cdot (b - c) = ab - bc$, т. е. должно умножить множимое на уменьшаемое и изъ полученнаго произведенія вычесть произведеніе множимаго на вычитаемое.

Отрицательное количество есть вычитаемое изъ нуля условнаго, слѣдовательно помножить на отрицательное количество — a все равно, что помножить на разность $0 - a$; послѣднее умноженіе должно по сказанному произвести такимъ образомъ: помножить множимое на 0, получимъ 0, и изъ нуля вычесть произведеніе множителя на a . Изъ этого вытекаетъ такое опредѣленіе умноженія на отрицательное количество: умножить на отрицательное количество значитъ умножить на абсолютное значеніе его и полученное произведеніе вычесть изъ нуля.

Пусть на основаніи этого опредѣленія требуется умножить положительное количество на отрицательное, $+a$ помножить на $-b$; помножая a на b получимъ $+ab$, вычитая это произведеніе изъ нуля, найдемъ:

$$(+a) \cdot (-b) = 0 - (+ab) = -ab,$$

т. е. произведеніе положительнаго количества на отрицательное есть отрицательное, точно такъ же какъ и произведеніе положительнаго члена на отрицательный.

Пусть дано умножить отрицательное количество на отрицательное, $(-a)$ на $(-b)$.

Помножая — a на b , получимъ по § 25 — ab ; вычитая это изъ нуля, имѣемъ:

$$(-a)(-b) = 0 - (-ab) = 0 + ab = +ab,$$

т. е. произведеніе отрицательнаго количества на отрицательное есть положительное, точно такъ же какъ и произведеніе отрицательнаго члена на отрицательный.

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что при умноженіи отрицательныхъ количествъ должно перемножить ихъ абсолютныя значенія и взять произведеніе со знакомъ плюсъ, если производители имѣютъ одинакіе знаки, и со знакомъ минусъ, если знаки ихъ разные, точно такъ же какъ и при умноженіи отрицательныхъ членовъ.

Примѣры.

$$(+7) \cdot (-3) = -21; (-5) \cdot (-8) = +40;$$

$$-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot +\frac{a+b}{2} = -\left(\frac{a+b}{2}\right)^3;$$

$$-\frac{2a^2}{3} \cdot -(7c^3 + 1) = +\frac{2a^2}{3}(7c^3 + 1).$$

§ 27. Чтобы сдѣлать всѣ случаи умноженія на положительные и отрицательныя числа и количества вытекающими изъ одного опредѣленія, Коши даетъ слову множить такое общее значеніе: *множить одно количество на другое значитъ дѣйствовать съ множимымъ точно такъ же, какъ дѣйствуютъ съ единицею, чтобы получить множителя.*

Такъ число 7 есть единица, повторенная слагаемымъ 7 разъ; посему чтобы умножить 3 на 7, должно сложить 3 также 7 разъ.

Число $\frac{3}{4}$ есть единица, раздѣленная на 4 равныя части, изъ которыхъ одна взята 3 раза; посему чтобы умножить 5 на $\frac{3}{4}$, должно раздѣлить 5 на 4 равныя части

и результатъ дѣленія $\frac{5}{4}$ повторить 3 раза; произведеніе будетъ $\frac{15}{4}$, или, что одно и то же, $\frac{3}{4}$ отъ 5.

Число — 3 есть единица, взятая съ обратнымъ знакомъ и повторенная 3 раза; посему чтобы умножить $+2$ на — 3, должно $+2$ взять съ обратнымъ знакомъ, будетъ — 2, и повторить 3 раза; произведеніе есть — 6.

Такимъ же образомъ чтобы умножить — 2 на — 3, должно — 2 взять съ обратнымъ знакомъ, будетъ $+2$, и повторить 3 раза; получимъ $+6$.

— $\frac{2}{3}$ есть единица, взятая съ обратнымъ знакомъ, раздѣленная на 3 равныя части и потомъ повторенная 2 раза; посему чтобы умножить — 2 на — $\frac{2}{3}$, должно — 2 взять съ обратнымъ знакомъ, получимъ $+2$, раздѣлить на 3, и результатъ дѣленія $+\frac{2}{3}$ повторить 2 раза, получимъ $+\frac{4}{3}$.

Лакроа опредѣляетъ умноженіе такъ: это есть дѣйствіе, посредствомъ котораго произведеніе составляется изъ множимаго такъ, какъ множитель составленъ изъ единицъ.

§ 28. Изъ Ариѳметики извѣстно, что произведеніе увеличивается съ увеличеніемъ производителей; это свойство произведенія несправедливо для отрицательныхъ количествъ, что легко видѣть изъ слѣдующаго.

Если одинъ изъ производителей положительный, а другой отрицательный, то произведеніе увеличивается съ увеличеніемъ отрицательнаго производителя, и уменьшается съ увеличеніемъ положительнаго.

Дѣйствительно, при умноженіи должно перемножить абсолютныя значенія производителей и взять полученное произведеніе со знакомъ минусъ; но такъ какъ отрицательный производитель увеличивается съ уменьшеніемъ

своего абсолютнаго значенія, то отъ этого абсолютное значеніе произведенія уменьшится, и слѣдовательно самое произведеніе увеличится; положительный же производитель увеличивается съ увеличеніемъ своего абсолютнаго значенія, отъ этого абсолютное значеніе произведенія будетъ больше, а самое произведеніе уменьшится.

Такъ $(-5) \cdot (+3) = -15$; $(-4) \cdot (+3) = -12$; множимое $-4 > -5$, и произведеніе $-12 > -15$.

$(-5)(+3) = -15$; $(-5) \cdot (+4) = -20$;

множитель $+4 > +3$, а произведеніе $-20 < -15$.

Если оба производителя отрицательны, то произведеніе уменьшается съ увеличиваніемъ каждаго изъ производителей; ибо каждый изъ производителей дѣлается больше съ уменьшеніемъ своего абсолютнаго значенія, отъ чего абсолютное значеніе произведенія уменьшается, и такъ какъ оно положительное, то и самое произведеніе уменьшается. Такъ

$(-3) \cdot (-5) = +15$; $(-2) \cdot (-5) = +10$;

производитель $-2 > -3$, произведеніе $+10 < +15$.

Возведеніе отрицательныхъ чиселъ и количествъ въ степень.

§ 29. Если дано нѣсколько отрицательныхъ количествъ перемножить между собою, то, руководствуясь правиломъ знаковъ § 25, легко составить искомое произведеніе. Такъ произведеніе трехъ количествъ $(-a)(-b)(-c)$ найдется, если помножимъ $(-a)$ на $(-b)$ и полученное произведеніе на $(-c)$ такимъ образомъ:

$$(-a)(-b)(-c) = (+ab)(-c) = -abc.$$

Произведеніе четырехъ количествъ

$$\begin{aligned} (-a)(-b)(-c)(-d) &= (+ab)(-c)(-d) = \\ &= (-abc)(-d) = +abcd. \end{aligned}$$

Произведеніе пяти количествъ
 $(-a)(-b)(-c)(-d)(-e) = (abcd)(-e) = -abcde$ и т. д.

Изъ этихъ умноженій легко замѣтить, что произведе-
 ніе нѣсколькихъ отрицательныхъ количествъ найдется,
 перемноживъ абсолютныя значенія производителей и
 поставивъ предъ полученнымъ произведеніемъ знакъ $+$,
 если число производителей четное, и знакъ $-$, если
 оно нечетное.

§ 30. Возвести количество въ степень значитъ взять
 его производителемъ столько разъ, сколько въ показа-
 тель степени находится единицъ. Основываясь на этомъ
 опредѣленіи и принимая въ соображеніе сказанное въ § 29
 о составленіи произведенія отрицательныхъ количествъ,
 заключаемъ:

*Что четная степень отрицательнаго количества най-
 дется, взявъ требуемую степень абсолютнаго значенія ко-
 личества со знакомъ плюсъ.*

Такъ $(-3)^2 = +9$; $(-3)^4 = +81$; $(-a)^6 = +a^6$;
 $(-a)^{10} = +a^{10}$; $[-(a+b)]^{20} = +(a+b)^{20}$.

*Нечетная степень отрицательнаго количества найдет-
 ся, взявъ требуемую степень абсолютнаго значенія ко-
 личества со знакомъ минусъ.*

Такъ $(-5)^3 = -125$; $[-(a+b)]^3 = -(a+b)^3$.

Принимая въ соображеніе, что всякая степень поло-
 жительнаго количества положительна, изъ сказаннаго
 заключаемъ, что четная степень всякаго количества по-
 ложительна, а нечетная имѣетъ знакъ корня.

Дѣленіе отрицательныхъ чиселъ и количествъ.

§ 31. Дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію: въ
 немъ по данному произведенію, дѣлимому, и одному изъ
 производителей, дѣлителю, опредѣляется другой произво-
 дитель, частное; поему дѣлимое должно всегда равнять-
 ся дѣлителю, помноженному на частное. Изъ этого слѣ-

дуетъ, что при дѣленіи отрицательныхъ количествъ должно абсолютное значеніе дѣлимаго раздѣлить на абсолютное значеніе дѣлителя и взять частное со знакомъ плюсъ, если дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинакіе знаки, и со знакомъ минусъ, если знаки ихъ различны, точно такъ же какъ и при дѣленіи членовъ алгебраическихъ количествъ.

Примѣры.

$$(+5) : (+3) = +\frac{5}{3}; (-3) : (-7) = +\frac{3}{7}.$$

$$(-8) : (+2) = -4; (+8) : (-2) = -4.$$

$$[-(a+b)^2] : [-(a+b)] = a+b.$$

$$[(a^2-b^2)] : [-(a+b)] = -(a-b) = b-a.$$

§ 32. Изъ Ариѳметики извѣстно, что частное увеличивается съ увеличеніемъ дѣлимаго и уменьшается съ увеличеніемъ дѣлителя; это свойство частнаго несправедливо для отрицательныхъ количествъ, что легко видѣть изъ слѣдующаго.

Если дѣлимое отрицательное, а дѣлитель положительный, то частное увеличивается и съ увеличеніемъ дѣлимаго, и съ увеличеніемъ дѣлителя, ибо отрицательное дѣлимое увеличивается съ уменьшеніемъ своего абсолютнаго значенія, а отъ этого абсолютное значеніе частнаго будетъ меньше, самое же частное увеличится, такъ какъ оно имѣетъ отрицательный знакъ. Положительный дѣлитель увеличится съ увеличеніемъ своего абсолютнаго значенія; отъ этого абсолютное значеніе частнаго уменьшится, а само частное увеличится.

Такъ $(-20) : (+2) = -10$; $(-10) : (+2) = -5$; дѣлимое $-10 > -20$, частное $-5 > -10$.
 $(-20) : (+4) = -5$; $(-20) : (+5) = -4$; дѣлитель $+5 > +4$, частное $-4 > -5$.

Если дѣлимое и дѣлитель отрицательны, то частное уменьшается съ увеличеніемъ дѣлимаго и увеличивается

съ увеличеніемъ дѣлителя, ибо въ первомъ случаѣ абсолютное значеніе дѣлимаго дѣлается меньше, отъ чего положительное частное уменьшается; во второмъ абсолютное значеніе дѣлителя дѣлается меньше, отъ чего положительное частное увеличивается.

Такъ $(-20) : (-2) = +10$; $(-10) : (-2) = +5$;
дѣлимое $-10 > -20$, частное $+5 < +10$.

$(-20) : (-4) = +5$; $(-20) : (-2) = +10$;
дѣлитель $-2 > -4$, частное $+10 > +5$.

Если дѣлимое положительное, а дѣлитель отрицательный, то частное уменьшается съ увеличеніемъ дѣлимаго и съ уменьшеніемъ дѣлителя, ибо въ первомъ случаѣ абсолютное значеніе дѣлимаго увеличивается, отъ чего абсолютное значеніе частнаго будетъ больше, а самое частное меньше; во второмъ абсолютное значеніе дѣлителя уменьшается, отъ чего абсолютное значеніи частнаго увеличивается, а самое частное уменьшается, ибо оно отрицательно.

Такъ $(+20) : (-2) = -10$; $(+40) : (-2) = -20$;
дѣлимое $+40 > +20$, частное $-20 < -10$.

$(+20) : (-5) = -4$; $(+20) : (-4) = -5$;
дѣлитель $-4 > -5$, частное $-5 < -4$.

§ 33. Свойство частнаго не измѣняться отъ умноженія дѣлимаго и дѣлителя на одно и то же число справедливо для отрицательныхъ и для положительныхъ количествъ, ибо дѣлимое всегда равно дѣлителю, умноженному на частное

Полагая, что A и B суть количества, кои оба или одно изъ нихъ есть отрицательное, и что частное дѣленія A на B есть Q , которое тоже можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, имѣемъ $A : B = Q$; помножая A и B на количество a положительное или отрицательное, получимъ то же частное, ибо $A = B \cdot Q$, слѣдовательно $A \cdot a = B \cdot Q \cdot a$, откуда $A \cdot a : B \cdot a = Q$.

Примѣръ.

$$-\frac{20}{2} = -10; \text{ помножая на 3, получимъ}$$

$$-\frac{60}{6} = -10, \text{ — частное то же самое.}$$

Извлеченіе корня изъ отрицательныхъ чиселъ и количествъ.

§ 34. Извлеченіе корня есть дѣйствіе, обратное возведенію въ степень: здѣсь по степени, стоящей подъ кореннымъ знакомъ, находится корень. Изъ § 30 о возведеніи въ степень отрицательныхъ количествъ слѣдуетъ, что *нечетный корень изъ отрицательнаго количества найдется, взявъ корень изъ абсолютнаго значенія его со знакомъ минусъ*. Такъ

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ ибо } (-3)^3 = -27; \sqrt[5]{-a^{10}} = -a^2, \text{ ибо}$$

$$(-a^2)^5 = -a^{10};$$

$$\sqrt[3]{-[a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3]} = \sqrt[3]{-(a+b)^3} = -(a+b), \text{ ибо}$$

$$[-(a+b)]^3 = -(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3);$$

$$\sqrt[3]{-(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)} = \sqrt[3]{-(a-b)^3} = -(a-b) = b-a,$$

ибо $(b-a)^3 = b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3 =$

$$-(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3).$$

Принимая въ соображеніе, что нечетный корень изъ положительнаго количества всегда положительный, заключаемъ, что *нечетный корень изъ какого нибудь количества имѣетъ знакъ степени*.

Четный же корень изъ положительнаго количества можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ, ибо (по § 30) четная степень положительнаго и отрицательнаго количества положительна. На этомъ основаніи не-

редъ четнымъ корнемъ изъ положительнаго количества ставятъ оба знака $\pm$, ибо онъ имѣеть два значенія. Такъ

$$\sqrt{a^2} = \pm a, \text{ ибо } (+a)^2 = a^2 \text{ и } (-a)^2 = a^2, \text{ или } (\pm a)^2 = a^2.$$

$$\sqrt[4]{16} = \pm 2, \text{ ибо } (\pm 2)^2 = 16; \sqrt[16]{a^{32}} = \pm a^2, \text{ ибо } (\pm a^2)^{16} = a^{32}.$$

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \pm(a+b), \text{ ибо } [\pm(a+b)]^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm(a-b), \text{ ибо } [\pm(a-b)]^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\sqrt{1 + \frac{a^2}{4} + b^2 + a - 2b - ab} = \pm\left(1 + \frac{a}{2} - b\right),$$

$$\text{ибо } [\pm\left(1 + \frac{a}{2} - b\right)]^2 = 1 + \frac{a^2}{4} + b^2 + a - 2b - ab.$$

Четный корень изъ отрицательнаго количества не возможенъ, ибо четная степень положительнаго и отрицательнаго количества всегда положительна и не можетъ быть отрицательнымъ количествомъ.

Напримѣръ выраженія:

$$\sqrt{-16}; \sqrt[4]{-a}; \sqrt[8]{-(a+b)^2}; \sqrt{-\left(\frac{c}{d}\right)^4}$$

не имѣють смысла и не могутъ представлять собою ни какой величины.

Изъ сказаннаго въ §§ 2 и 3 слѣдуетъ, что число единицъ алгебраическаго количества будетъ мѣняться съ измѣненіемъ начала счета, или нуля условнаго. При этомъ можно принять такое начало счета, что количество будетъ содержать произвольное число единицъ, ибо вообще начало счета произвольно (§ 4). Такъ если высота горы, принимая за начало счета высотъ уровень моря, есть + 100 футовъ, то измѣнивъ начало счета произвольно, на примѣръ принявъ за нуль высотъ дно моря, лежащее на 500 футовъ ниже уровня, высота горы будетъ + 600 фут.; принявъ за нуль высотъ вершину другой горы, лежащей надъ уровнемъ моря на 99 футовъ, высота разсматриваемой горы будетъ + 1 ф., т. е. число единицъ количества, представляющаго ту же высоту, будетъ произвольно мѣняться съ измѣненіемъ нуля высотъ.

На томъ же основаніи всякое отрицательное количество можно сдѣлать положительнымъ и обратно, измѣняя начало счета. Такъ высота горы есть — 53 фута, считая отъ уровня моря.

Принявъ за начало счета высотъ дно моря, лежащее на 100 футовъ ниже уровня, высота той же горы будетъ $+ 100 - 53$, или $+ 47$ футовъ. Измѣняя обратнo начало счета высотъ, получимъ снова высоту той же горы, считая отъ уровня моря, $+ 47 - 100 = - 53$.

Слѣдовательно, чтобы въ ряду положительныхъ и отрицательныхъ количествъ $+a$; $-c$; $+d$; $-f$ сдѣлать всѣ количества положительными, должно измѣнить общее начало счета ихъ единицъ на число, превышающее число единицъ абсолютныхъ значеній каждаго изъ отрицательныхъ количествъ, напримѣръ на k единицъ; тогда данныя количества $k + a$; $k - c$; $k + d$; $k - f$, будутъ всѣ положительными.

Производя надъ ними дѣйствія, какъ надъ положительными количествами и потомъ полагая въ результатѣ $k = 0$, то есть переходя къ прежнему началу счета, получимъ выраженіе, представляющее результатъ дѣйствій надъ данными количествами. Отсюда могутъ быть выведены правила дѣйствій надъ отрицательными количествами.

Цѣль и польза обобщенія понятія о сложеніи и умноженіи.

§ 35. Изъ сказаннаго видно, что въ основѣ ученія объ отрицательныхъ количествахъ лежатъ слѣдующія два отвлеченія, цѣль которыхъ — обобщеніе.

1. Условіе принимать всякое количество и всякій членъ его за слагаемое, т. е. условіе отвлекаться отъ знака буквеннаго выраженія, полагая его произвольнымъ. Вслѣдствіе этого отвлеченія два ариѳметическія дѣйствія — сложеніе и вычитаніе — дѣлаются частными случаями одного общаго дѣйствія — сложенія алгебраическаго.

2. Условіе производить невозможное въ ариѳметическомъ смыслѣ дѣйствіе умноженія на отрицательное число и количество по правиламъ умноженія на отрицательный членъ, т. е. условіе отвлекаться отъ ариѳметическаго понятія объ умноженіи, давая этому дѣйствію болѣе общее опредѣленіе §§ 26-го и 27-го. Вслѣдствіе этого отвлеченія ариѳметическія дѣйствія — умноженіе, возведеніе въ степень, дѣленіе и извлеченіе корня — дѣлаются частными случаями соотвѣтствующихъ общихъ алгебраи-

ческихъ дѣйствій, ибо отъ обобщенія перваго изъ нихъ остальные тоже обобщаются.

Первое изъ этихъ отвлеченій даетъ возможность обобщать алгебраическіе вопросы и ихъ рѣшенія, какъ это было объяснено примѣромъ въ §§ 13-мъ и 14-мъ, заключая два вопроса и два рѣшенія въ одномъ общемъ вопросѣ и рѣшеніи.

Второе отвлеченіе даетъ возможность производить дѣйствія надъ буквенными количествами при рѣшеніи отвлеченныхъ по первому условію алгебраическихъ вопросовъ. Такъ при существованіи одного перваго отвлеченія нельзя было бы множить или дѣлить на буквенное количество t , ибо t можетъ быть положительнымъ, — въ этомъ случаѣ умноженіе и дѣленіе возможны, и отрицательнымъ, — въ этомъ случаѣ умноженіе, а слѣдовательно и дѣленіе, невозможны. Точно также степень или корень изъ t возможны безъ обобщенія понятія объ умноженіи, если t положительное, и невозможны, если t отрицательное.

Отрицательныя количества были въ первый разъ употреблены вмѣстѣ съ количествами мнимыми въ началѣ XVI столѣтія Карданомъ, который въ своемъ сочиненіи *Ars magna* разсматриваетъ въ уравненіяхъ корни отрицательные и мнимые, называя первые менѣе дѣйствительными, чѣмъ положительные, а вторые наименѣе дѣйствительными, софистическими.

§ 36. Кромѣ обобщенія вопросовъ и ихъ рѣшеній указанныя отвлеченія даютъ возможность обобщать теоремы, и упрощать доказательства ихъ, заключая нѣсколько теоремъ и нѣсколько доказательствъ въ одной общей теоремѣ и въ одномъ доказательствѣ.

Для показанія этого на примѣрѣ замѣтимъ, что теоремы § 44-го о дѣлимости биномовъ 7, 8, 9 и 10 и ихъ доказательства дѣлаются частными случаями 6-й теоремы того же параграфа, введеніемъ выше указанныхъ условій въ теорію отрицательныхъ количествъ.

Изъ теоремы 6-й § 44-го, какъ было сказано, вытекаютъ такія слѣдствія:

1. Если полиномъ X обращается въ нуль при $x = a$, то онъ необходимо дѣлится на $x - a$.

2. Если полиномъ дѣлится на $x - a$, то онъ обращается въ нуль при $x = a$. Отсюда прямо слѣдуютъ теоремы 7, 8, 9 и 10 § 44-го.

ТЕОРЕМА 7. Биномъ $x^m - a^m$ всегда дѣлится на $x - a$, ибо онъ обращается въ нуль при $x = a$.

ТЕОРЕМА 8. Биномъ $x^m - a^m$ дѣлится на $x + a$, когда m четное, и не дѣлится, когда m нечетное; ибо раздѣлить на $x + a$ все равно, что раздѣлить на $x - (-a)$ (§ 13, слѣдствіе условія обобщенія понятія о сложеніи). Чтобы получить остатокъ дѣленія, должно поставить $-a$ вмѣсто x . Дѣлимое будетъ тогда $(-a)^m - a^m$.

Если m четное, то $(-a)^m = a^m$; если же m нечетное, то $(-a)^m = -a^m$ (§ 30, слѣдствіе условія обобщенія понятія объ умноженіи).

ТЕОРЕМА 9. Биномъ $x^m + a^m$ дѣлится на $x + a$, когда m нечетное, и не дѣлится, когда m четное; ибо поставляя $-a$ вмѣсто x , дѣлимое будетъ $(-a)^m + a^m$; оно обращается въ нуль при m нечетномъ, и въ $2a^m$ при m четномъ.

ТЕОРЕМА 10. Биномъ $x^m + a^m$ никогда не дѣлится на $x - a$, ибо поставляя a вмѣсто x въ дѣлимое, получимъ остатокъ $2a^m$.

Законъ составленія частнаго дѣленія полинома X на $x - a$ можетъ быть выраженъ проще, сдѣлавшись тоже и закономъ составленія частнаго дѣленія на $x + a$. Высшая степень частнаго есть $m - 1$. Коэффициентъ перваго члена частнаго есть коэффициентъ перваго члена дѣлимаго. Коэффициентъ втораго члена частнаго получится, помножая коэффициентъ перваго на второй членъ дѣлителя и придавая коэффициентъ втораго члена

дѣлимаго. Коеффиціентъ третьяго члена частнаго получится, помножая найденный коеффиціентъ втораго на второй членъ дѣлителя и придавая коеффиціентъ третьяго члена дѣлимаго и т. д. Нѣтъ надобности упоминать о знакахъ: они сами опредѣляются на основаніи условій обобщенія.

По этому закону легко составить частныя дѣленія биномовъ теоремъ 7, 8, 9 и 10 § 44-го. Такъ

$$1. \frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots \\ \dots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

2. При m четномъ

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots \\ \dots - a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x - a^{m-1};$$

при m нечетномъ

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots \\ \dots + a^{m-3}x^2 - a^{m-2}x + a^{m-1} - \frac{2a^m}{x + a}.$$

3. При m четномъ

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots \\ \dots - a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x - a^{m-1} + \frac{2a^m}{x + a};$$

при m нечетномъ

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots \\ \dots + a^{m-3}x^2 - a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

$$4. \frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots$$

$$\dots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a}.$$

У п р а ж н е н і я.

1. Высота вершины горы Св. Іліи равна + 18,829 футамъ, считая отъ уровня моря; вершина Эльбруса ниже ея на 304 фута, а вершина Казбека на 2276 футовъ. Принимая за начало счета высотъ каждую изъ трехъ вершинъ послѣдовательно и полагая высоты, считаемыя вверхъ, положительными, какъ представлятся высоты вершинъ остальныхъ двухъ горъ?

2. Кеплеръ открылъ третій законъ свой 68 годами ранѣе открытія законовъ всемирнаго тяготѣнія Ньютономъ. Если примемъ первое событіе за начало счета, то время нашей эры будетъ — 1618 лѣтъ. Если примемъ второе событіе за начало счета, то время, когда Декартъ написалъ свою геометрію, будетъ — 49 лѣтъ. Определить времена совершенія трехъ событій по нашей эрѣ.

3. По нашей эрѣ Аристотель родился въ — 384 году, Архимедъ погибъ въ — 212 году, Птоломей умеръ въ + 141 году. Какъ представлятся послѣдовательно времена, на которыя должно измѣнить нашу эру, чтобы время совершенія перваго событія было + 1, втораго 0, и наконецъ третьяго — 1, и какими числами изобразятся въ каждомъ изъ трехъ случаевъ времена совершенія остальныхъ двухъ событій.

Замѣчаніе. Въ двухъ послѣднихъ задачахъ времена, взятая впередъ, считаются положительными.

4. Представить двучленъ $b^3 - a^2$ въ видѣ разности количествъ, изъ коихъ уменьшаемое есть — a^2 .

5. Представить $x^2 - y^2$ въ видѣ суммы количествъ, изъ коихъ одно содержало бы члены — $3x^2$ и — y^2 .

6. Разность высотъ двухъ башень, изъ коихъ высота одной есть h футовъ, равняется k футамъ; какъ представится высота другой башни, и какіе могутъ быть тутъ случаи?

7. Два локомотива ѣдутъ одинъ со скоростью v футовъ, другой со скоростью v_1 футовъ по дорогѣ между Москвой и Петербургомъ. Первый выѣхалъ изъ Москвы, а второй изъ Твери въ то же время и прибыли на ту же станцію чрезъ t часовъ послѣ выѣзда. Выразить разстояніе x между Москвою и Тверью для случаевъ, когда второй локомотивъ ѣдетъ въ Москву и Петербургъ, и представить оба рѣшенія въ одной формулѣ.

8. Локомотивы ѣдутъ оба къ Петербургу: одинъ выѣхалъ со станціи, лежащей на разстояніи a верстъ отъ Москвы, и имѣетъ скорость v футовъ, другой въ то же время со станціи, лежащей на разстояніи a_1 верстъ отъ Москвы, и скорость его v_1 футовъ. Выразить разстояніе между ними x по истеченіи t часовъ послѣ выѣзда для случаевъ, когда $a > a_1$ и когда $a < a_1$, и представить оба рѣшенія въ одной формулѣ.

9. 1) A имѣетъ a лѣтъ, чрезъ t лѣтъ B будетъ втрое старше A . Представить года B .

2) A имѣетъ a лѣтъ, t лѣтъ назадъ B былъ втрое старше A . Представить года B .

Оба рѣшенія заключить въ одну формулу.

Произвести указанные знаками дѣйствія въ слѣдующихъ примѣрахъ.

$$10. 7xy^2 - (-8x^2) + (-7x^2) - [-(-4xy^2)].$$

$$11. [(-4)(-2\frac{1}{2}) - (-2,7)]. - 0,6. - 0,4.$$

$$12. (-4,5 : 9)^2 - [-(-2) + (-3,5)].$$

$$13. [-2,3ax^3 - ax^3 - 4,4ax^3] : \{ -a^4x^2 - (-0,9a^4x^2) \} - 7,6a^4x^2.$$

$$14. -\frac{1}{2x^3y^2} \cdot -20x^4y^3 + \frac{(-xy)^3}{\sqrt[3]{-x^6y^9}}.$$

$$15. \frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c}{(c-b)(c-a)(x-c)}.$$

$$16. -\left(\frac{2b^2c^2}{a^2x^2}\right) : -\left(-\frac{3b.-c^3}{a}\right) \frac{b}{3a^2x^3}.$$

$$17. \sqrt[3]{\frac{-27a^5b^4}{(-a)^2(-b)^5.-a^3}}.$$

$$18. 3k^2x^2\sqrt{k^2x}-\{-[-2x^2\sqrt{9k^6x}-(-k^3\sqrt{x^5})]\}.$$

19. Показать, что $3ab^2\sqrt{x(x-a)} + 3b^3\sqrt{y(x+a)} + b^2y = 2$, при $a = 4$, $b = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{7}{2}$.

20. Въ полиномѣ $-4a^2b^4 - 12a^2b^3 + 8a^3b^2$ взять $-[-4a^2(-b^2)]$ общимъ множителемъ.

21. Найти условія, при которыхъ выраженіе $(1-m^4)^2(1-m^2)^3$ больше, меньше и равно нулю.

22. При какомъ условіи дробь $\frac{(-2)^{m-n}}{(-3)^m}$ положительна, если m четное и если нечетное.

23. Когда выраженія $-\sqrt[m]{5}$ и $\sqrt[m]{-5}$ различны и когда одинаковы.

24. Показать, что $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ дѣлится на $(a+b)(a+c)(b+c)$.

25. Доказать, что выраженіе $(ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 + (ax+by+cz)^2$ обращается въ нуль, если вмѣсто a^2 поставить $-(b^2+c^2)$, или вмѣсто x поставить $-(y^2+z^2)$.

26. Полагая $B=b^2+bc+c^2$, $C=b^2c-bc^2$, доказать, что $27C^2-4B^3$ всегда отрицательно.

ГЛАВА VII.

Обобщеніе понятія о степени. Дробные, отрицательные и ирраціональные показатели и дѣйствія надъ ними.

§ 1. Изъ понятія о степени, какъ произведеніи равныхъ производителей, слѣдуетъ, что показатель степени долженъ быть число цѣлое, положительное; ибо онъ показываетъ, сколько разъ количество, возводимое въ степень, входитъ въ нее производителемъ.

Точно также показатель кореннаго знака долженъ быть цѣлымъ и положительнымъ числомъ, ибо онъ показываетъ, сколько разъ искомый корень входитъ производителемъ въ данную степень.

Означая въ Алгебрѣ числа буквами и полагая, что каждая буква можетъ быть всякимъ числомъ цѣлымъ, дробнымъ, положительнымъ, отрицательнымъ, раціональнымъ и ирраціональнымъ, должно было бы ограничить это положеніе для буквъ, означающихъ показатели степени и кореннаго знака, и считать ихъ цѣлыми и положительными; тогда формула, содержащая буквенные показатели, получила бы смыслъ, ограниченный условіемъ цѣлости и положительности послѣднихъ.

Всякое ограниченіе не согласно съ духомъ Алгебры, цѣль которой состоитъ въ обобщеніи, ибо въ общемъ заключается частное, а не обратно.

Чтобы избѣгнуть необходимости указаннаго ограниченія, въ Алгебрѣ понятіе о степени обобщается и вво-

дятся дробные, отрицательные и ирраціональные показатели степени и коренного знака, на основаніяхъ, изложенныхъ въ слѣдующихъ параграфахъ.

Дробные показатели.

§ 2. Изъ § 37 главы III слѣдуетъ, что при извлеченіи корня изъ степени должно показателя степени раздѣлить на показателя коренного знака, и если первый не дѣлится на послѣдняго, то извлеченіе корня невозможно.

Такъ нельзя извлечь корня въ выраженіяхъ $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a}$ и вообще въ выраженіи $\sqrt[p]{a^q}$, если q не дѣлится на p ; эти количества не выразимы безъ коренного знака (ирраціональны).

Прилагая правило извлеченія корня къ случаю, когда показатель степени не дѣлится на показателя коренного знака и только означая знаками дѣйствіе дѣленія, дадимъ выраженіямъ $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[p]{a^q}$ слѣдующій видъ: $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{q}{p}}$; такой видъ ирраціональныхъ количествъ условились называть *дробною степенью* количества a ; дроби же $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{q}{p}$ — *дробными показателями*.

Такъ ирраціональныя количества $\sqrt[7]{b^4}$, $\sqrt[m]{b^2}$, $\sqrt[9]{(a+b)^7}$, будучи представлены указаннымъ образомъ безъ коренныхъ знаковъ, дадутъ послѣдовательно слѣдующія дробныя степени:

$$b^{\frac{4}{7}}, b^{\frac{2}{m}}, (a+b)^{\frac{7}{9}};$$

дроби $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{m}$ и $\frac{7}{9}$ суть дробные показатели.

Такимъ образомъ дробною степенью называется ирраціональный корень изъ степени, представленный безъ

коренного знака такъ, что вмѣсто показателя степени, стоящей подъ кореннымъ знакомъ, помѣщена дробь, числитель которой есть показатель степени, знаменатель — показатель коренного знака, и эта дробь названа дробнымъ показателемъ.

Ирраціональныя количества, состоящія изъ произведеній степеней: $\sqrt[5]{a^2b^7}$, $\sqrt[m]{a^pc^qd}$, будучи представлены безъ коренныхъ знаковъ, дадутъ слѣдующія произведенія дробныхъ степеней:

$$a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{7}{5}}; a^{\frac{p}{m}}c^{\frac{q}{m}}d^{\frac{1}{m}}.$$

Изъ опредѣленія дробной степени слѣдуетъ, что возвести количество въ дробную степень значитъ возвести это количество въ степень числителя дроби и изъ полученной степени извлечь корень, степени равной знаменателю ея. Такъ $(a^n)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{np}}$.

Дѣйствіе, обратное возведенію въ дробную степень, называется извлеченіемъ корня дробной степени. Такъ извлечь корень степени $\frac{p}{q}$ изъ a значитъ найти количество, коего дробная степень $\frac{p}{q}$ есть a ; это требова-

ніе означаютъ такъ: $\sqrt[q]{a}$, гдѣ дробь $\frac{p}{q}$ названа *дробнымъ кореннымъ показателемъ*.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что извлечь корень дробной степени изъ количества значитъ возвести это количество въ степень знаменателя дроби и потомъ извлечь корень, степени равной числителю ея.

$$\text{Такъ } \sqrt[q]{a^n} = \sqrt[p]{a^{qn}}, \text{ ибо } \left[\sqrt[p]{a^{qn}} \right]^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left[\sqrt[p]{a^{qn}} \right]^p} = a^n.$$

Два понятія: степень цѣлая и дробная—различны, и посему, означая показателя степени буквою, должно было бы различать случаи, когда степень цѣлая и когда дробная. Но въ послѣдующихъ параграфахъ будетъ доказано, что правила дѣйствій надъ цѣлыми степенями справедливы и для степеней дробныхъ, и тогда въ указанномъ различіи не будетъ надобности.

§ 3. ТЕОРЕМА 1. *Дробная степень не измѣнится, если числителя и знаменателя дробнаго показателя ея помножить или раздѣлить на то же число.*

Доказ. Означая дробную степень чрезъ $a^{\frac{p}{q}}$, гдѣ p не дѣлится на q , и чрезъ m какое либо число, докажемъ, что $a^{\frac{p}{q}}$ равно $a^{\frac{pm}{qm}}$.

По опредѣленію дробной степени

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}; \quad a^{\frac{pm}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{pm}}.$$

Вторыя части этихъ равенствъ равны, ибо корень не измѣнится, если показателя степени и кореннаго знака умножить на то же число (по теоремѣ § 7 главы V); слѣдовательно и первыя части должны быть равны, т. е.

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pm}{qm}}.$$

Если же можно числителя и знаменателя множить на то же число, не измѣняя дробной степени, то обратно, можно и дѣлить ихъ на всякое число.

На этой теоремѣ основано сокращеніе дробныхъ показателей и приведеніе дробныхъ показателей дробныхъ степеней къ общему знаменателю, при чемъ съ этими показателями поступаютъ точно такъ же какъ съ дробями.

Примѣры.

Сокращеніе показателей:

$$a^{\frac{12}{24}} = a^{\frac{1}{2}}; (a + b)^{\frac{3}{9}} c^{\frac{2}{4}} d^{\frac{32}{64}} = (a + b)^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}.$$

Дробныя степени $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{3}{8}}$, $c^{\frac{1}{4}}$ могутъ быть представле- ны въ такомъ видѣ: $a^{\frac{4}{8}}$, $b^{\frac{3}{8}}$, $c^{\frac{2}{8}}$; здѣсь знаменатели по- казателей равны.

Такимъ же образомъ $(k + l)^{\frac{5}{7}}$, $c^{\frac{3}{4}}$, $d^{\frac{1}{2}}$ представляются въ видѣ $(k + l)^{\frac{20}{28}}$, $c^{\frac{21}{28}}$, $d^{\frac{14}{28}}$.

ТЕОРЕМА 2. *Дробный корень не измѣнится, если чи- слителя и знаменателя дробнаго показателя кореннаго знака помножить или раздѣлить на то же число.*

Доказательство этой теоремы вытекаетъ изъ теоремы 1-й, ибо извлеченіе корня дробной степени есть дѣй- ствіе, обратное возведенію въ дробную степень: и если съ измѣненіемъ вида дроби степень не мѣняется, то и корень не измѣнится съ измѣненіемъ вида его пока- зателя.

На этой теоремѣ основано сокращеніе показателя ко- реннаго знака. Такъ

$$\sqrt[{\frac{20}{40}}]{a} = \sqrt[{\frac{1}{2}}]{a}; \sqrt[{\frac{2}{8}}]{bc} = \sqrt[{\frac{1}{4}}]{bc}.$$

Доказательство что съ показателями дробныхъ степеней должно дѣйствовать какъ съ показа- телями степеней цѣлыхъ.

§ 4. Умноженіе дробной степени на цѣлую или об- ратно. Дано $a^{\frac{p}{q}}$ помножить на a^r .

По опредѣленію дробной степени $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

По § 11-му гл. V-й, $\sqrt[q]{a^p} \cdot a^r = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{a^{rq}} = \sqrt[q]{a^{p+rq}}$;

слѣдовательно $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^r = \sqrt[q]{a^{p+rq}}$.

Изображая $\sqrt[q]{a^{p+rq}}$ въ видѣ дробной степени, имѣемъ:

$$\frac{p}{aq} \cdot a^r = a^{\frac{p+rq}{q}} = a^{\frac{p}{q} + r},$$

т. е. показатели производителей складываются.

§ 5. Умноженіе дробной степени на дробную. Дано $\frac{p}{aq}$ помножить на $\frac{r}{as}$.

По опредѣленію дробной степени $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$; $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$.

По § 11-му гл. V-й

$$\sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[s]{a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}};$$

слѣдовательно $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$.

Изображая $\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$\frac{p}{aq} \cdot \frac{r}{as} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}},$$

т. е. показатели производителей складываются.

§ 6. Возведеніе дробной степени въ цѣлую. Дано $a^{\frac{p}{q}}$ возвести въ n -ю степень.

По опредѣленію дробной степени, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

По § 12-му гл. V-ой, $\left[\sqrt[q]{a^p} \right]^n = \sqrt[q]{a^{pn}};$

слѣдовательно $\left[a^{\frac{p}{q}} \right]^n = \sqrt[q]{a^{pn}}.$

Изображая $\sqrt[q]{a^{pn}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$\left[a^{\frac{p}{q}} \right]^n = a^{\frac{pn}{q}} = a^{\frac{p}{q} \cdot n},$$

т. е. показатели перемножаются между собою.

§ 7. Возведеніе цѣлой степени въ дробную. Дано a^n возвести въ степень $\frac{p}{q}$.

Возвести a^n въ степень $\frac{p}{q}$ значитъ по опредѣленію

возвести a^n въ степень p и потомъ извлечь корень степени q , т. е.

$$(a^n)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{pn}}.$$

Изображая $\sqrt[q]{a^{pn}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$(a^n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{q}} = a^{n \cdot \frac{p}{q}},$$

т. е. показатели перемножаются между собою.

§ 8. Возведение дробной степени въ дробную. Дано $a^{\frac{p}{q}}$ возвести въ степень $\frac{r}{s}$.

Возвести $a^{\frac{p}{q}}$ въ степень $\frac{r}{s}$ значитъ по опредѣленію возвести $a^{\frac{p}{q}}$ въ степень r и потомъ извлечь корень степени s .

$$\text{Но по § 6-му } \left[a^{\frac{p}{q}} \right]^r = a^{\frac{pr}{q}};$$

$$\text{слѣдовательно } \left[a^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^{\frac{pr}{q}}}.$$

Изображая $\sqrt[s]{a^{\frac{pr}{q}}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$\left[a^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}},$$

т. е. показатели перемножаются между собою.

§ 9. Дѣленіе дробной степени на цѣлую. Дано $a^{\frac{p}{q}}$ раздѣлить на a^r .

По опредѣленію дробной степени $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

По § 13-му гл. V-й, $\sqrt[q]{a^p} : a^r = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[q]{a^{rq}} = \sqrt[q]{a^{p-rq}}$,
слѣдовательно $a^{\frac{p}{q}} : a^r = \sqrt[q]{a^{p-rq}}$.

Изображая $\sqrt[q]{a^{p-rq}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$\frac{p}{a^q} : a^r = a^{\frac{p-rq}{q}} = a^{\frac{p}{q}-r},$$

т. е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

§ 10. Дѣленіе цѣлой степени на дробную. Дано a^r раздѣлить на $\frac{p}{a^q}$.

По опредѣленію $\frac{p}{a^q} = \sqrt[q]{a^p}$.

По § 13-му гл. V-й, $a^r : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{rq}} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{rq-p}}$;

слѣдовательно $a^r : \frac{p}{a^q} = \sqrt[q]{a^{rq-p}}$.

Изображая $\sqrt[q]{a^{rq-p}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$a^r : \frac{p}{a^q} = a^{\frac{rq-p}{q}} = a^{r-\frac{p}{q}},$$

т. е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

§ 11. Дѣленіе дробной степени на дробную. Дано $a^{\frac{p}{q}}$ раздѣлить на $a^{\frac{r}{s}}$.

По опредѣленію $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$.

По § 13-му гл. V-й, $\sqrt[q]{a^p} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} : \sqrt[qs]{a^{qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps-qr}}$;

слѣдовательно $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[qs]{a^{ps-qr}}$.

Изображая $\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps-qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}},$$

т. е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

§ 12. Извлеченіе корня цѣлой степени изъ степени дробной. Дано извлечь корень степени n изъ $a^{\frac{p}{q}}$.

По опредѣленію $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

По § 14-му гл. V-й, $\sqrt[n]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{a^p}$;

слѣдовательно $\sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[nq]{a^p}$.

Изображая $\sqrt[nq]{a^p}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$\sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{p}{qn}} = a^{\frac{p}{q} : n},$$

т. е. должно показателя степени раздѣлить на показателя кореннаго знака.

§ 13. Извлеченіе корня дробной степени изъ степени цѣлой. Дано извлечь корень степени $\frac{p}{q}$ изъ a^n .

По опредѣленію извлечь корень степени $\frac{p}{q}$ изъ a^n значитъ возвести a^n въ степень знаменателя q и потомъ извлечь корень степени числителя p .

$(a^n)^q = a^{nq}$; слѣдовательно $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^n} = \sqrt[p]{a^{nq}}$.

Изображая $\sqrt[p]{a^{nq}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^n} = a^{\frac{nq}{p}} = a^{n : \frac{p}{q}},$$

т. е. должно показателя степени раздѣлить на показателя кореннаго знака.

§ 14. Извлеченіе корня дробной степени изъ степени дробной. Дано извлечь корень степени $\frac{p}{q}$ изъ $a^{\frac{r}{s}}$.

По опредѣленію извлечь корень дробной степени $\frac{p}{q}$ изъ $a^{\frac{r}{s}}$ значитъ возвести $a^{\frac{r}{s}}$ въ степень знаменателя q и потомъ извлечь корень степени числителя p .

Но по § 6-му $\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^q = a^{\frac{rq}{s}}$;

слѣдовательно $\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{s}}} = \sqrt[p]{a^{\frac{rq}{s}}}$.

Изображая $\sqrt[p]{a^{\frac{rq}{s}}}$ безъ кореннаго знака, имѣемъ:

$$\sqrt[p]{a^{\frac{rq}{s}}} = a^{\frac{rq}{sp}} = a^{\frac{r}{s} : \frac{p}{q}},$$

т. е. должно показателя степени раздѣлить на показателя кореннаго знака.

Примѣры.

$$1. a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{9}{12}} \cdot a^{\frac{20}{12}} = a^{\frac{29}{12}}.$$

$$2. a \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^2 = a^{\frac{3}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{6}{3}} = a^{\frac{11}{3}}.$$

$$3. \left(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{3}{12}} b^{\frac{2}{9}} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{2}{9}}.$$

$$4. a^{\frac{25}{7}} : a^2 = a^{\frac{25}{7} - \frac{14}{7}} = a^{\frac{11}{7}}.$$

$$5. \sqrt[3]{a^{\frac{6}{4}}} = a^{\frac{6}{4} : 3} = a^{\frac{1}{2}}.$$

$$6. \sqrt[{\frac{2}{3}}]{a^{\frac{4}{2}}} = a^{\frac{4}{2} : \frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{4}}.$$

$$7. \sqrt[{\frac{5}{8}}]{a^5 b^2} = a^{5 : \frac{5}{8}} b^{2 : \frac{5}{8}} = a^8 b^{\frac{16}{5}}.$$

Отрицательные показатели.

§ 15. Изъ § 23 гл. III слѣдуетъ, что при дѣленіи степени какого либо количества на другую степень того же количества, должно изъ показателя степени дѣлимаго вычесть показателя степени дѣлителя, и если первый показатель меньше втораго, то дѣленіе невозможно. Такъ нельзя раздѣлить a^2 на a^5 и вообще a^m на a^n , если m меньше n . Частныя такихъ дѣленій суть дроби $\frac{a^2}{a^5}$ и $\frac{a^m}{a^n}$; они не могутъ быть представлены безъ знака дѣленія.

Раздѣляя числителя и знаменателя каждой изъ этихъ дробей на ея числителя, т. е. числителя и знаменателя

дробь $\frac{a^2}{a^5}$ на a^2 , — дробь $\frac{a^m}{a^n}$ на a^m , и полагая, что m меньше n на p , имѣемъ:

$$a^2 : a^5 = \frac{1}{a^{5-2}} = \frac{1}{a^3} ; a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^p}.$$

Прилагая правило дѣленія и къ случаю, когда показатель дѣлимаго меньше показателя дѣлителя, получимъ:

$$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3} ; a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-p},$$

и слѣдовательно дадимъ выраженіямъ $\frac{1}{a^3}$ и $\frac{1}{a^p}$ видъ a^{-3} и a^{-p} . Такой видъ этихъ дробей условились называть *отрицательной степенью* количества a ; отрицательныя же числа -3 ; $-p$ *отрицательными показателями*.

Такъ дробь $\frac{1}{a^6}$, $\frac{1}{(a+b)^3}$, $\frac{1}{(c-d)^q}$, $\frac{1}{h^{m+n}}$, будучи представлены указаннымъ образомъ безъ знака дѣленія, дадутъ послѣдовательно слѣдующія отрицательныя степени: a^{-6} , $(a+b)^{-3}$, $(c-d)^{-q}$, $h^{-(m+n)}$, гдѣ отрицательныя числа -6 , -3 , $-q$, $-(m+n)$ суть отрицательные показатели.

Такимъ образомъ отрицательной степенью называется частное невозможнаго дѣленія единицы на степень количества, представленное этимъ количествомъ такъ, что вмѣсто показателя степени дѣлителя помѣщено отрицательное число, абсолютное значеніе коего равно показателю степени дѣлителя; это отрицательное число названо отрицательнымъ показателемъ.

Дробныя частныя дѣленія единицы на произведеніе степеней, какъ напр. $\frac{1}{a^3 b^5 c^2}$, $\frac{1}{(a+b)^5 c^m d}$, которыя можно представить въ видѣ

$\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^5} \cdot \frac{1}{c^2}$ и $\frac{1}{(a+b)^5} \cdot \frac{1}{c^m} \cdot \frac{1}{d}$, дадутъ слѣдующія произведенія отрицательныхъ степеней:

$$a^{-3} b^{-5} c^{-2} \text{ и } (a+b)^{-5} c^{-m} d^{-1}.$$

Точно также дробныя частныя

$$\frac{a}{b^2}; \frac{ab}{c^3 d^m}, \text{ или } a \cdot \frac{1}{b^2}; ab \cdot \frac{1}{c^3 d^m}$$

представятся такимъ образомъ: $ab^{-2}; abc^{-3}d^{-m}$.

Изъ опредѣленія отрицательной степени слѣдуетъ, что возвести количество въ отрицательную степень значитъ возвести это количество въ степень абсолютнаго значенія отрицательнаго числа и на полученную степень раздѣлить единицу.

$$\text{Такъ } (a^q)^{-p} = \frac{1}{a^{qp}}.$$

Дѣйствіе, обратное возведенію въ отрицательную степень, называется извлеченіемъ корня отрицательной степени. Такъ извлечь корень степени $-p$ изъ a значитъ найти количество, коего отрицательная степень есть a ; это требованіе означаютъ такъ: $\sqrt[p]{a}$, гдѣ отрицательное число $-p$ названо *отрицательнымъ кореннымъ показателемъ*.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что извлечь корень отрицательной степени значитъ извлечь корень степени абсолютнаго значенія отрицательнаго кореннаго показателя и на полученный корень раздѣлить единицу.

Такъ

$$\sqrt[p]{a^n} = \frac{1}{\sqrt[p]{a^n}}, \text{ ибо } \left(\frac{1}{\sqrt[p]{a^n}} \right)^{-p} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[p]{a^n}} \right)^p} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n.$$

Два понятія: степень отрицательная и положительная—различны, и посему означая показателя степени буквою,

должно было бы различать случаи, когда степень положительна и отрицательна. Но въ послѣдующихъ параграфахъ будетъ доказано, что правила дѣйствій надъ положительными степенями справедливы и для степеней отрицательныхъ, и тогда въ указанномъ различіи не будетъ надобности.

§ 16. ТЕОРЕМА 1. *Всякій производитель можетъ быть перенесенъ изъ числителя въ знаменатель и обратно, съ перемѣною знака показателя его степени въ противный.*

Доказ. Пусть дана дробь $\frac{a^{-m} b^n}{c^{-p} d^q}$; докажемъ, что каждаго изъ производителей a^{-m} , d^q , c^{-p} , b^n можно переносить изъ числителя въ знаменатель и обратно, съ перемѣною знака показателя.

По опредѣленію отрицательной степени $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, и посему $\frac{a^{-m} b^n}{c^{-p} d^q} = a^{-m} \cdot \frac{b^n}{c^{-p} d^q} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{b^n}{c^{-p} d^q} = \frac{b^n}{a^m c^{-p} d^q}$, гдѣ производитель a^{-m} перенесенъ изъ числителя въ знаменатель, съ перемѣною знака показателя — на +.

На основаніи этого и обратно производитель знаменателя со знакомъ показателя (+), можетъ быть перенесенъ въ числитель со знакомъ показателя (—).

Такъ производитель d^q данной дроби можетъ быть перенесенъ въ числитель, и тогда

$$\frac{a^{-m} b^n}{c^{-p} d^q} = \frac{a^{-m} b^n d^{-q}}{c^{-p}}.$$

По опредѣленію отрицательнаго показателя $c^{-p} = \frac{1}{c^p}$; слѣдовательно $\frac{1}{c^{-p}} = \frac{1}{\frac{1}{c^p}} = c^p$, и посему данная дробь

$$\frac{a^{-m} b^n}{c^{-p} d^q} = \frac{1}{c^{-p}} \cdot \frac{a^{-m} b^n}{d^q} = c^p \cdot \frac{a^{-m} b^n}{d^q} = \frac{c^p a^{-m} b^n}{d^q},$$

гдѣ производитель c^{-p} перенесенъ изъ знаменателя въ числитель, съ перемѣною знака показателя — на +.

Посему и обратно, производитель числителя со знакомъ показателя (+) можетъ быть перенесенъ въ знаменатель со знакомъ показателя (—).

Такъ перенося въ данной дроби производителя b^n , получимъ

$$\frac{a^{-m} b^q}{c^{-p} d^n} = \frac{a^{-m}}{c^{-p} d^q b^{-n}}.$$

Слѣдствіе 1. Всякую дробь можно представить безъ знаменателя, ибо стоитъ только всѣхъ производителей перенести въ числитель.

Напр. $\frac{a^2}{a^{-7} b^q g^h} = a^9 b^{-q} g^{-h}.$

ТЕОРЕМА 2 *Ирраціональный производитель можетъ быть перенесенъ изъ числителя въ знаменатель и обратно, съ перемѣною знака кореннаго показателя.*

Доказ. По опредѣленію извлеченія корня отрицательной степени $\sqrt[p]{a} = \frac{1}{\sqrt[p]{a}}$, гдѣ корень перешелъ въ знаменатель, и $-p$ измѣнилось въ $+p$.

Изъ этого слѣдуетъ, что и $\sqrt[p]{a}$ можно изъ знаменателя перенести въ числитель, измѣняя $+p$ на $-p$.

Въ выраженіи $\frac{1}{\sqrt[p]{a}}$, $\sqrt[p]{a} = \frac{1}{\sqrt[p]{a}}$; слѣдовательно

$$\frac{1}{\sqrt[p]{a}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[p]{a};$$

гдѣ корень перешелъ въ числитель,

съ перемѣною $-p$ на $+p$. Изъ этого слѣдуетъ, что и обратный переходъ возможенъ.

Примѣръ.

$$\frac{a^2b \sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b} \sqrt[c]{b}} = a^2b \sqrt[c]{ab} \sqrt[c]{b} = \frac{1}{a^{-2}b^{-1} \sqrt[c]{ab} \sqrt[c]{b}}.$$

Замѣчаніе теорема 2-я слѣдуетъ также изъ теоремы 1-й.

Доказательство, что съ показателями отрицательныхъ степеней должно дѣйствовать какъ съ показателями степеней положительныхъ.

§ 17. Умноженіе отрицательной степени на положительную и обратно. Дано a^{-p} помножить на a^q .

По опредѣленію отрицательной степени $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$;
 $\frac{1}{a^p} \cdot a^q = \frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}$ (по правиламъ дѣленія); слѣдовательно
 $a^{-p} \cdot a^q = a^{q-p} = a^{q+(-p)}$

т. е. показатели складываются.

§ 18. Умноженіе отрицательной степени на отрицательную. Дано a^{-p} помножить на a^{-q} .

По опредѣленію отрицательной степени $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$;
 $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$; $\frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}}$;
 слѣдовательно $a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^{p+q}}$.

Изображая $\frac{1}{a^{p+q}}$ безъ знака дѣленія, имѣемъ:

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = a^{-(p+q)} = a^{-p+(-q)},$$

т. е. показатели складываются.

§ 19. Возведеніе отрицательной степени въ положительную. Дано a^{-p} возвести въ степень q .

По опредѣленію отрицательной степени

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}; \left(\frac{1}{a^p}\right)^q = \frac{1}{a^{pq}}; \text{ слѣдовательно } (a^{-p})^q = \frac{1}{a^{pq}}.$$

Изображая $\frac{1}{a^{pq}}$ безъ знака дѣленія, имѣемъ:

$$(a^{-p})^q = a^{-pq} = a^{(-p) \cdot q}$$

т. е. показатели перемножаются.

§ 20. Возведеніе положительной степени въ отрицательную. Дано a^p возвести въ степень $-q$.

Возвести a^p въ отрицательную степень $-q$ значитъ по опредѣленію возвести a^p въ степень q и потомъ раздѣлить на нее единицу.

$$\text{Посему } (a^p)^{-q} = \frac{1}{a^{pq}}.$$

Изображая $\frac{1}{a^{pq}}$ безъ знаменателя, имѣемъ:

$$(a^p)^{-q} = a^{-pq} = a^{p \cdot (-q)},$$

т. е. показатели перемножаются.

§ 21. Возведеніе отрицательной степени въ отрицательную. Дано a^{-p} возвести въ степень $-q$.

Возвести a^{-p} въ степень $-q$ значитъ по опредѣленію возвести a^{-p} въ степень q и потомъ раздѣлить на нее единицу.

Но по § 19-му $(a^{-p})^q = a^{-pq}$; слѣдовательно

$$(a^{-p})^{-q} = \frac{1}{a^{-pq}}.$$

Изображая $\frac{1}{a^{-pq}}$ безъ знака дѣленія, имѣемъ:

$$(a^{-p})^{-q} = a^{pq} = a^{(-p) \cdot (-q)},$$

т. е. показатели перемножаются.

§ 22. Дѣленіе отрицательной степени на положительную. Дано a^{-p} раздѣлить на a^q .

$$\text{По опредѣленію } a^{-p} = \frac{1}{a^p}; \frac{1}{a^p} : a^q = \frac{1}{a^{p+q}};$$

слѣдовательно $a^{-p} : a^q = \frac{1}{a^{p+q}}$.

Изображая $\frac{1}{a^{p+q}}$ безъ знака дѣленія, имѣемъ:

$$a^{-p} : a^q = a^{-(p+q)} = a^{-p-(+q)}$$

т. е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

§ 23. Дѣленіе положительной степени на отрицательную. Дано a^p раздѣлить на a^{-q} .

По опредѣленію отрицательной степени

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}; a^p : \frac{1}{a^q} = a^{p+q};$$

слѣдовательно $a^p : a^{-q} = a^{p+q} = a^{p-(-q)}$,

т. е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

§ 24. Дѣленіе отрицательной степени на отрицательную. Дано a^{-p} раздѣлить на a^{-q} .

По опредѣленію отрицательной степени

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}; a^{-q} = \frac{1}{a^q}; \frac{1}{a^p} : \frac{1}{a^q} = \frac{a^q}{a^p} = a^{q-p};$$

слѣдовательно $a^{-p} : a^{-q} = a^{q-p} = a^{-p-(-q)}$,

т. е. изъ показателя дѣлимаго вычитается показатель дѣлителя.

§ 25. Извлеченіе корня положительной степени изъ степени отрицательной.

Извѣчь корень степени q изъ a^{-p} .

По опредѣленію $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$; $\sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$; слѣдовательно

$\sqrt[q]{a^{-p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$. Изображая $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ безъ знака дѣленія, имѣемъ:

$$\sqrt[q]{a^{-p}} = a^{-\frac{p}{q}} = a^{-p : q},$$

т. е. показатель степени дѣлится на показателя кореннаго знака.

§ 26. Извлеченіе корня отрицательной степени изъ степени положительной.

Извлечъ корень степени $-q$ изъ a^p .

По опредѣленію извлечъ корень степени $-q$ значитъ извлечъ корень степени q и раздѣлить на него единицу.

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}; \quad \sqrt{-q}{a^p} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}.$$

Изображая $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ безъ знака дѣленія, имѣемъ:

$$\sqrt{-q}{a^p} = a^{-\frac{p}{q}} = a^{p : (-q)},$$

т. е. показатель степени дѣлится на показателя кореннаго знака.

§ 27. Извлеченіе корня отрицательной степени изъ степени отрицательной.

Извлечъ корень степени $-q$ изъ a^{-p} .

По опредѣленію извлечъ корень степени $-q$ значитъ извлечъ корень степени q и раздѣлить на него единицу.

По § 25-му $\sqrt[q]{a^{-p}} = a^{-\frac{p}{q}}$; слѣдовательно $\sqrt{-q}{a^{-p}} = \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}}.$

Изображая $\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}}$ безъ знака дѣленія, имѣемъ:

$$\sqrt{-q}{a^{-p}} = a^{\frac{p}{q}} = a^{(-p) : (-q)},$$

т. е. снова показатель степени дѣлится на показателя кореннаго знака.

Примѣры.

1. $a^{-3} \cdot a^5 = a^{-3+5} = a^2.$

2. $a^{-5}b^3c^{-2} \cdot a^3b^{-4}c^{-7} = a^{-2}b^{-1}c^{-9}.$

3. $a^{-8} : a^{-13} = a^{-8-(-13)} = a^{13-8} = a^5.$

$$4. (a + b)^{-9} d^4 c^{-3} e^{-5} : (a + b)^4 d^{-4} c^{-2} = \\ = (a + b)^{-13} d^5 c^{-1} e^{-5}.$$

$$5. [(a - 3)^{-2}]^2 = (a - 3)^{-4}.$$

$$6. \left[(a^{-7})^3 \right]^{-2} = (a^{-21})^{-2} = a^{42}.$$

$$7. \sqrt[8]{a^{-16}} = a^{-\frac{16}{8}} = a^{-2}.$$

$$8. \sqrt[3]{a^{-6}} = a^{(-6) : (-3)} = a^2.$$

$$9. \left[\sqrt[12]{(b + c)^2} \right]^{-3} = \sqrt[12]{(b + c)^{-6}} = \sqrt[2]{(b + c)^{-1}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{(b + c)^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(b + c)}}} = \sqrt{b + c}.$$

§ 28. Выше было доказано, что съ дробными положительными показателями должно дѣйствовать такъ же, какъ съ цѣлыми положительными. Если при дѣйствіяхъ надъ отрицательными показателями положимъ, что абсолютныя значенія ихъ дробныя, то въ предшествующихъ разсужденіяхъ ничто не измѣнится; изъ этого заключаемъ, что съ дробными отрицательными показателями должно дѣйствовать такъ же, какъ и съ цѣлыми.

Примѣры.

$$1. 4a^2 b^{-3} c^{-\frac{1}{2}} : 5a^{-\frac{3}{4}} b^2 c^{-\frac{2}{3}} = 20a^{2-\frac{3}{4}} b^{-3+2} c^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = \\ = 20a^{\frac{5}{4}} b^{-1} c^{-\frac{7}{6}}.$$

$$2. 20a^{-2} b^{-\frac{3}{4}} c^{\frac{5}{6}} : 5a^{-\frac{1}{2}} b^2 c^{-\frac{3}{4}} = 4a^{-2+\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{4}-2} c^{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}} = \\ = 4a^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{11}{4}} c^{\frac{19}{12}}.$$

$$3. (a^{-5})^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{5}{2}}.$$

$$4. \sqrt{a^{-\frac{3}{4}}} = a^{-\frac{3}{8}}.$$

$$5. (a^{-\frac{10}{12}})^{-2} (b^{-\frac{3}{4}})^2 = a^{\frac{5}{3}} b^{-\frac{3}{2}}.$$

$$6. \sqrt[2]{a^{\frac{3}{2}}} = a^{-\frac{9}{4}}.$$

$$7. \sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^2} = a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Ирраціональные показатели.

§ 29. Изъ § 5 главы V-ой слѣдуетъ, что всякое ирраціональное алгебраическое количество, какъ напр. $\sqrt{a}$, можетъ быть соизмѣримымъ или несоизмѣримымъ, смотря по числовому значенію буквы a .

Если количество $\sqrt{a}$ соизмѣримо, то оно есть цѣлое число или дробь, и слѣдовательно можетъ быть показателемъ степени и кореннаго знака, по выше объясненному.

Если количество $\sqrt{a}$ несоизмѣримо, то всякое приближеніе его есть или цѣлое число, или дробь, и слѣдовательно всякое приближеніе $\sqrt{a}$ можетъ также быть показателемъ степени и кореннаго знака.

Но (по теоремѣ 1-ой § 6-го главы V-ой) приближеніе можетъ произвольно мало разниться отъ своего предѣла; на этомъ основаніи условились на мѣсто приближенія ставить показателемъ степени и кореннаго знака предѣлъ этого приближенія; такой показатель называютъ *несоизмѣримымъ показателемъ*, а дѣйствіе возведенія въ степень приближенія и извлеченія корня степени приближенія — *возведеніемъ въ несоизмѣримую степень*, и *извлеченіемъ корня несоизмѣримой степени*.

Такъ выраженія $a^{\sqrt{2}}$, $(a - b)^{\sqrt[7]{3}}$ суть несоизмѣримыя степени a и $a - b$; $\sqrt{2}$ и $\sqrt[7]{3}$ — несоизмѣримые показатели степени.

Возвести a и $a - b$ въ степени $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{7}{3}}$ значить возвести въ степень ихъ приближеній.

Выраженія $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a - b}$ суть несоизмѣримые корни; $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{7}{3}}$ — несоизмѣримые показатели коренныхъ знаковъ. Извлечь корень степени $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{7}{3}}$ значить извлечь корень степени ихъ приближеній.

Такимъ образомъ всякое ирраціональное количество, соизмѣримое и несоизмѣримое, можетъ быть показателемъ и степени, и кореннаго знака, и въ этомъ случаѣ называется вообще ирраціональнымъ показателемъ. Выраженія вида $a^{\sqrt[5]{b}}$, $\sqrt[c]{(a - b)^2}$, $(g - l)^{\sqrt[7]{b}}$ суть ирраціональные степени и корни; $\sqrt[5]{c}$, $\sqrt[c]{c}$, $\sqrt[7]{b}$ — ирраціональные показатели.

Два понятія: степень раціональная и ирраціональная — различны (въ случаѣ несоизмѣримости послѣдней, ибо тогда разумѣютъ степень приближенія); посему означая показателя степени буквою, должно было бы различать случаи, когда степень раціональна и когда ирраціональна. Но въ слѣдующемъ параграфѣ будетъ доказано, что правила дѣйствій надъ раціональными степенями справедливы и для ирраціональных, и тогда въ указанномъ различіи не будетъ надобности.

Доказательство, что съ показателями ирраціональныхъ степеней должно дѣйствовать, какъ съ показателями степеней раціональныхъ.

§ 30. Если ирраціональные буквенные показатели соизмѣримы, то они суть цѣлыя числа или дроби, и съ

ними должно дѣйствовать такъ же, какъ съ рациональными показателями.

Если же ирраціональные показатели несоизмѣримы, то должно было бы замѣнить ихъ приближеніями, кои суть тоже цѣлыя числа или дроби. Съ этими приближеніями должно дѣйствовать по общимъ правиламъ, т. е. складывать ихъ при умноженіи степеней, перемножать при возведеніи въ степень, вычитать при дѣленіи и дѣлить при извлеченіи корня.

Потомъ должно въ результатѣ замѣнить по условію сумму приближеній, ихъ произведеніе, разность и частное предѣломъ суммы, предѣломъ произведенія, разности и частного. Но предѣлъ суммы, произведенія, разности и частного есть очевидно сумма, произведеніе, разность и частное данныхъ несоизмѣримыхъ показателей; посему не замѣняя несоизмѣримыхъ показателей ихъ приближеніями, а производя дѣйствія надъ самыми предѣлами, получимъ тѣ же результаты, какіе получили бы, дѣйствуя съ приближеніями.

Такъ чтобы помножить $a^{\sqrt{2}}$ на $a^{\sqrt{3}}$, должно $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ замѣнить ихъ приближеніями h и h_1 и помножить a^h на a^{h_1} ; потомъ въ произведеніи a^{h+h_1} , замѣнить по условію сумму $h + h_1$ предѣломъ ея, который есть сумма несоизмѣримыхъ количествъ $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, то есть $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; слѣдовательно $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Извлечъ корень степени $\sqrt{2}$ изъ $a^{\sqrt{3}}$.

Замѣняя $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ ихъ приближеніями h и h_1 и производя дѣйствіе, получимъ $\sqrt[{\sqrt{2}}]{a^{h_1}} = a^{\frac{h_1}{\sqrt{2}}}$; поставляя вмѣсто $\frac{h_1}{\sqrt{2}}$ его предѣлъ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, имѣемъ:

$$\sqrt[{\sqrt{2}}]{a^{\sqrt{3}}} = a^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = a^{\sqrt{\frac{3}{2}}}.$$

Изъ этого заключаемъ, что вообще съ показателями ирраціональныхъ степеней можно дѣйствовать по общимъ правиламъ дѣйствій съ показателями степеней раціональныхъ.

При этомъ нужно замѣтить, что ирраціональные показатели могутъ быть отрицательными, ибо отрицательныя приближенія ихъ возможны.

Примѣры.

$$1. a^{\frac{3}{\sqrt{7}}} \cdot a^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = a^{\frac{3}{\sqrt{14}}}.$$

$$2. (a + b)^m \cdot (a + b)^{\sqrt{m}} = (a + b)^{m + \sqrt{m}}.$$

$$3. (a^{\sqrt{12}})^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}} = a^{\sqrt{36}} = a^6.$$

$$4. (a^{-\sqrt{5}})^2 = a^{-2\sqrt{5}}.$$

$$5. [a^{-\sqrt{m+1}}]^{-\sqrt{m+1}} = a^{(\sqrt{m+1})^2} = a^{m+1}.$$

$$6. \left(a^{\frac{\sqrt{2}}{3}} b^{-\frac{7}{\sqrt{3}}} c^{-\sqrt{c}} \right)^{-\frac{2}{3}\sqrt{3}} = a^{-\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{9}} b^{\frac{14\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}} c^{\frac{2}{3}\sqrt{c}\sqrt{3}} =$$

$$= a^{-\frac{2}{9}\sqrt{6}} b^{\frac{14}{3}} c^{\frac{2}{3}\sqrt{3c}}.$$

$$7. a^{2\sqrt{b}} : a^{\sqrt{b}} = a^{2\sqrt{b} - \sqrt{b}} = a^{\sqrt{b}}.$$

$$8. \sqrt[\sqrt{a}]{c^2 d^{\sqrt{a}}} = c^{\frac{2}{\sqrt{a}}} d^{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} = c^{\frac{2}{\sqrt{a}}} d^{-1}.$$

$$9. \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt[\frac{1}{2}\sqrt{3}]{a b^{\sqrt{2}}} \right)^{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \left(a^{\frac{\sqrt{3}}{2}} b^{-2} \right)^{\frac{3}{\sqrt{3}}} =$$

$$= a^{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}} b^{-2 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}} = a^{\frac{6}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{3}{\sqrt{3}}}} b^{-2 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}} =$$

$$= a^{\frac{6}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} b^{-2 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}} = a^{\frac{6\sqrt{3}}{2^{\frac{3}{2}}}} b^{-2 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}}.$$

Употребленіе дробныхъ и отрицательныхъ показателей при дѣйствіяхъ надъ полиномами.

§ 31. Введеніе въ Алгебру показателей дробныхъ и отрицательныхъ даетъ возможность производить дѣйствія надъ полиномами дробными и ирраціональными, какъ надъ цѣлыми и раціональными; ибо можно всѣ члены полиномовъ представить безъ коренныхъ знаковъ и знаменателей.

Дѣйствія же надъ полиномами всегда сводятся къ дѣйствіямъ надъ ихъ членами—мономами, съ дробными и отрицательными показателями коихъ должно поступать по общимъ правиламъ, согласно съ выше изложеннымъ.

Примѣры.

$$1. \left[\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right] \left[\sqrt[3]{a} + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right].$$

Изображая каждый членъ множимаго и множителя безъ кореннаго знака (по § 2), имѣемъ

$$\left[a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1 + \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \right] \left[a^{\frac{1}{3}} + 1 + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} \right];$$

перенеся въ дробныхъ членахъ знаменателя въ числитель съ переменною знаковъ у показателей (по § 15), будемъ производить умноженіе, какъ надъ цѣлыми раціональными полиномами.

$$\begin{aligned} & \left[a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1 + a^{-\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}} \right] \left[a^{\frac{1}{3}} + 1 + a^{-\frac{1}{3}} \right] = \\ & = a - a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} - 1 + a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1 + a^{-\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{3}} + \\ & + a^{\frac{1}{3}} - 1 + a^{-\frac{1}{3}} + a^{-1} - a^{-\frac{2}{3}} = a + a^{\frac{1}{3}} - 1 + a^{-\frac{1}{3}} + a^{-1}. \end{aligned}$$

Найденное произведеніе, изображенное безъ дробныхъ и отрицательныхъ показателей, есть

$$a + \sqrt[3]{a} - 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$\begin{aligned} 2. \left[\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right]^3 &= \left[a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right]^3 = \\ &= a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{3}{2}} + 3ab^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} b + a^{-\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}} = \\ &= a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{3}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} + 3a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} b^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Изображая кубъ безъ дробныхъ и отрицательныхъ показателей, имѣемъ

$$\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + 3\sqrt{\frac{a}{b}} + 3\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^3}.$$

$$\begin{aligned} 3. \left[\sqrt{a^{3p}} - \frac{1}{\sqrt{a^{3p}}} \right] : \left[\sqrt{a^p} - \frac{1}{\sqrt{a^p}} \right] &= \\ &= \left[a^{\frac{3p}{2}} - a^{-\frac{3p}{2}} \right] : \left[a^{\frac{p}{2}} - a^{-\frac{p}{2}} \right] = \\ &= \left[\left(a^{-\frac{p}{2}} \right)^3 - \left(a^{\frac{p}{2}} \right)^3 \right] : \left[a^{\frac{p}{2}} - a^{-\frac{p}{2}} \right] = \\ &= a^p + a^{\frac{p}{2}} a^{-\frac{p}{2}} + a^{-p} = a^p + 1 + a^{-p}, \text{ по теор. 7 § 44} \\ \text{гл. V-й, или } a^p + 1 + \frac{1}{a^p}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \left[(5a^2 - 41ab + 42b^2)\sqrt[12]{a} \right] : \left(\sqrt[3]{a} - \frac{7b}{\sqrt[3]{a^2}} \right) &= \\ &= \left[5a^{\frac{25}{12}} - 41a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2 \right] : \left[a^{\frac{1}{3}} - 7ba^{-\frac{2}{3}} \right]; \end{aligned}$$

дѣлим.	$\begin{array}{r} 5a^{\frac{25}{12}} - 41a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2 \\ - 5a^{\frac{25}{12}} + 35a^{\frac{13}{12}}b \\ \hline - 6a^{\frac{13}{12}}b + 42a^{\frac{1}{12}}b^2 \\ + 6a^{\frac{13}{12}}b - 42a^{\frac{1}{12}}b^2 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} a^{\frac{1}{3}} - 7ba^{-\frac{2}{3}} \\ \hline 5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b \end{array}$	дѣлит. частн.
--------	--	--	------------------

$$\text{или } 5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b = (5a - 6b)\sqrt[4]{a^3}.$$

$$5. \sqrt{\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{4y}} + \frac{2\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{xy}} = \\ = \sqrt{y^2 x^{-1} + 4^{-1} x^2 y^{-1} + 2x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{5}{4}} y^{-\frac{1}{4}}}.$$

Расположивъ подкоренное количество по уменьшающимся степенямъ буквы y , будемъ извлекать корень, какъ изъ цѣлаго рациональнаго полинома.

$$\begin{array}{r|l} y^2 x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{5}{4}} y^{-\frac{1}{4}} + 4^{-1} x^2 y^{-1} & yx^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} - 2^{-1} xy^{-\frac{1}{2}} \\ -y^2 x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} & \\ \hline -x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{4}} y^{-\frac{1}{4}} + 4^{-1} x^2 y^{-1} & 2yx^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} \\ -x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{4}} y^{-\frac{1}{4}} - 4^{-1} x^2 y^{-1} & x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} \\ \hline 0 & \hline & 2x^{-\frac{1}{4}} y^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \\ & 2yx^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} 2^{-1} xy^{-\frac{1}{2}} \\ & - 2^{-1} xy^{-\frac{1}{2}} \\ & \hline & -x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{4}} y^{-\frac{1}{4}} + 4^{-1} x^2 y^{-1}. \end{array}$$

Изображая найденный корень $yx^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} - 2^{-1} xy^{-\frac{1}{2}}$ безъ дробныхъ и отрицательныхъ показателей, имѣемъ

$$\frac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{xy} - \frac{x}{2\sqrt{y}}.$$

У п р а ж н е н і я.

Представить слѣдующія количества безъ коренныхъ знаковъ и знаменателей.

$$1. \sqrt[5]{a^2 - b} + 3\sqrt[3]{\sqrt{c}} - \sqrt[12]{3a^4 c^5}.$$

$$2. \sqrt[3]{3\sqrt{5\sqrt{2}}} - \sqrt[m]{a^2 \sqrt{b\sqrt{c^3}}} + \sqrt[n]{(a-b)^p}.$$

$$3. \sqrt[6]{\frac{a^5 b^7}{c^{12}}} + \sqrt[8]{\frac{a^6 b^4}{d^{20}}}.$$

$$4. \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a+x}} - \frac{\sqrt[3]{(a+b)^7 c^4}}{\sqrt[5]{f^2} \cdot \sqrt[6]{g^2}}.$$

$$5. \frac{\sqrt[3]{b^m}}{\sqrt{c}} - \frac{\sqrt[5]{a^{-\frac{1}{7}}}}{\sqrt[4]{c^m} \sqrt{b^{-1}}} + \frac{-m \sqrt{a^p b^{-q} r}}{\sqrt[3]{c^m} \sqrt[4]{b^{-1}}}.$$

$$6. \sqrt[0,4]{\frac{a^3 \sqrt{2a^6 b^{-3}}}{\sqrt[3]{k^{-5} l^4}}} + \sqrt[2]{\frac{a^{\frac{3}{4} \sqrt{2}} b^{\frac{1}{2} \sqrt{2}}}{c^{\frac{1}{\sqrt{8}}} d^{-\frac{1}{2}}}}.$$

Представить слѣдующія количества безъ дробныхъ и отрицательныхъ показателей.

$$7. a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{m}} x^{-2,5} + \sqrt[3]{a^{\frac{1}{7}} \sqrt{bc^{-\frac{1}{2}}}}.$$

$$8. \sqrt[3]{a^{\frac{-p}{q}} b^{\frac{-r}{c}}} + \left[(a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}} \right]^{-\frac{n}{s}}.$$

$$9. \left\{ \left[\left((a^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{v}} \right]^{\frac{1}{r}} - \left[\left((b^{-\frac{1}{p}})^{-\frac{1}{q}} \right)^{-\frac{1}{v}} \right] - \frac{1}{r} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Произвести указанные знаками дѣйствія въ слѣдующихъ примѣрахъ.

$$10. ba^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}} c^{-\frac{13}{12}}.$$

$$11. \frac{1}{3} a^{-2} b^{\frac{1}{3}} c^{-1} d^m \cdot \frac{3}{4} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{-3} d \cdot 4 ab^2 \cdot b^{-\frac{17}{6}} d^{-m}.$$

$$12. \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{a^4} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{-\frac{49}{24}}}{\sqrt[24]{a^{25}}}.$$

$$13. (a^{-2} b^3 c^{-5} f^6 x^{-1})^{-3}.$$

$$14. (a^{3m-n} f^{-2n-1} x^{-n})^{-\frac{3m}{n}}.$$

$$15. (a^2 b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{2}{5}})^{-\frac{1}{4}} + \left[(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}} \right]^{-\frac{1}{6}}.$$

$$16. (-a)^{2m} (b^{1-3m} c^{-\frac{p}{q}} d^{1+3m})^{3m+1} (-a)^{2m+1}.$$

$$17. \sqrt[6]{\frac{\sqrt[2,5]{\frac{1}{a^2 b^{10}}}}{a^{-6}}} \cdot \sqrt[2]{4a^4 b^{-3}}.$$

$$18. 5,6a^{-2,4}x^{-7} : 7a^{-\frac{52}{15}}b^3.$$

$$19. \left\{ \frac{\sqrt[5]{\sqrt{a^3}}}{(\sqrt[2]{a\sqrt{ab}})^4} \right\}^{-\frac{3}{2}} : \left\{ \frac{\sqrt[5]{a^{\frac{1}{12}}}}{(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})^{-2}} \right\}^3.$$

$$20. \left\{ \frac{\sqrt[2]{\frac{1}{b^{-2} \sqrt[4]{132} a^{47} \sqrt[4]{a^{\frac{1}{2}}}}}}{(a^5 \sqrt[3]{b} b^{-\frac{\sqrt{2}}{2}})^{-\frac{1}{\sqrt{5}}}} \right\} : \left\{ \frac{\sqrt[2]{a^{\frac{1}{3}-4} \sqrt[3]{a^{-\frac{3}{14}} b^2}}}{a^{-\sqrt{3}} b^{-\frac{4\sqrt{2}}{5}} \sqrt[5]{b^{\sqrt{2}}}} \right\}^{\sqrt{5}}.$$

$$21. \frac{\left[(x^{-\frac{1}{m}} y^{\frac{p}{q}})^{\frac{q}{p}} \right]^{m+1}}{\left[\sqrt[n]{x^{-mq}} \cdot \sqrt[r]{y} \right]^{m-1}} : \left\{ \frac{\left[\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[rq]{y} \right]^{m-1}}{-mp \sqrt{x^{-(m+1)}} \cdot \sqrt[r]{y^{\frac{1}{q}}}} \right\}^q.$$

$$22. (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}b) (ab^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}).$$

$$23. (x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + 1) (x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 1).$$

$$24. \left\{ \frac{5,4 \cdot a^{\frac{11}{4}} b^{\frac{11}{2}}}{3a^{0,5} b^{-2}} - \frac{a^3}{b^{-6} \sqrt[4]{81b^6 a^3}} \right\} \cdot \frac{5}{a^{-\frac{1}{12}} b^{-\frac{5}{6}}} \left(\frac{3a^{-2}}{2ab^4} \right)^{-2}.$$

$$25. (3a^{\frac{4-3m}{5}} bc^{m-2} + 17a^{-3} b^{m+1}) \text{ умножить на } (3a^{6-2m} b^{2m} c^{-4m} - 8a^5 b^{m-1}).$$

$$26. (a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + 1 + a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}})^2.$$

$$27. (x^{\frac{1}{2}} - 2)^4.$$

$$28. \left\{ (ad)^{\frac{1}{5}} dc^{-1} f^{-\frac{1}{5}} - (ae)^{\frac{1}{3}} cd(bg)^{-\frac{1}{3}} \right\} \text{ умножить на } \left\{ (ad)^{\frac{1}{5}} dc^{-1} f^{-\frac{1}{5}} + (ae)^{\frac{1}{3}} cd(bg)^{-\frac{1}{3}} \right\}.$$

$$29. \left\{ (a^{-\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}} + [(a^{\frac{1}{2}}b)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \left\{ (a^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}} - [(a^{\frac{1}{2}}b)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}} \right\}.$$

$$30. (x^{-1} + y^{-1}) : (x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}).$$

$$31. (a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}}b + ab^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}b^2 + b^{\frac{5}{2}}) : (a^{\frac{3}{2}} - ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b - b^{\frac{2}{3}}).$$

$$32. (a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{4}} - ca^{\frac{7}{10}}b^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}ab^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}ca^{\frac{13}{15}}b^{\frac{5}{6}}) : (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}).$$

$$33. (x^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m}{n}}) : (x^{-\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}).$$

$$34. (2x^5y^{-3} - 5x^4y^{-2} + 7x^3y^{-1} - 5x^2 + 2xy) : (x^3y^{-3} - x^2y^{-2} + xy^{-1}).$$

$$35. [a^{\sqrt{6}}b^4 + (a^{\sqrt{2}+\sqrt{6}} + a^{\sqrt{5}})b^3 + (a^{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + a^{\sqrt{4}})b^2 + (a^{2+\sqrt{2}} + a^{\sqrt{3}})b + a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + a^{\sqrt{2}} + 1 + (a^{2\sqrt{2}} + a^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{b}}] : [a^{\sqrt{2}}b^{-1} + 1].$$

$$36. \sqrt{ax - \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}x^2 + \frac{1}{9}x^3b^{-1} + 4a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}x^3 - \frac{4}{3}b^{-2}x^4 + 4b^{-3}x^5}.$$

Повѣрить формулы:

$$37. \frac{a+b+c}{a^{-1}b^{-1}+b^{-1}c^{-1}+c^{-1}a^{-1}} = abc.$$

$$38. \frac{2x^2+2}{x^4+x^2+1} + \frac{1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} + \frac{1}{x-x^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{2x^3+x^2-x+3}{x^4+x^2+1}.$$

$$39. \text{Показать, что при } x = \left[-q + (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-q - (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \text{ выражение } x^3 + 3px + 2q = 0.$$

ГЛАВА VIII.

Обобщеніе понятія о корнѣ четной степени. Количества мнимыя и дѣйствія надъ ними.

§ 1. Изъ понятія о корнѣ количества, какъ объ одномъ изъ равныхъ производителей, число которыхъ равно показателю кореннаго знака, а произведеніе ихъ данному количеству, слѣдуетъ, что нѣтъ корня четной степени изъ количества отрицательнаго, и подъ кореннымъ знакомъ четной степени должно необходимо быть положительное количество. Выраженія вида $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-a^2}$ и вообще $\sqrt[2n]{-a^2}$ не имѣютъ смысла.

Означая въ Алгебрѣ числа буквами и полагая, что каждая буква можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ числомъ, должно было бы ограничить это положеніе для буквъ, входящихъ въ составъ количества, корень четной степени изъ котораго извлекается, и считать числовыя значенія буквъ такими, чтобы количество подъ кореннымъ знакомъ было положительное. Тогда формула, содержащая корни четной степени изъ буквенныхъ количествъ, получаетъ смыслъ ограниченный условіемъ положительности количества, подъ кореннымъ знакомъ стоящаго.

Для избѣжанія необходимости подобнаго ограниченія смысла формулъ и для сообщенія имъ полной общности, въ Алгебрѣ понятіе о корнѣ четной степени обобщается введеніемъ мнимыхъ количествъ, на основаніяхъ, ниже указанныхъ.

§ 2. Мысль, что отрицательное количество не имѣетъ корня четной степени, условились выражать такъ: отрицательное количество имѣетъ несуществующій корень четной степени, называемый *мнимымъ корнемъ или мнимымъ количествомъ*. Такъ вмѣсто того, чтобы сказать: $-a^2$ не имѣетъ корня 2-й, 4-й и вообще $2n$ -й степени, или выраженія вида $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a^2}$, $\sqrt[2n]{-a^2}$ не представляютъ собою никакихъ количествъ, говорятъ: $-a^2$ имѣетъ несуществующій или мнимый корень 2-й, 4-й, $2n$ -й степени, выраженія вида $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a^2}$, $\sqrt[2n]{-a^2}$ представляютъ собою несуществующія, или мнимыя количества.

Такимъ образомъ мнимымъ количествомъ называется всякій несуществующій корень четной степени изъ количества отрицательнаго; $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a^2}$, $\sqrt[2n]{-a^2}$ суть количества мнимыя, употребляемая въ Алгебрѣ подъ условіемъ, что они суть несуществующіе корни 2-й, 4-й, $2n$ -й степени изъ $-a^2$ послѣдовательно; такъ что квадратъ $\sqrt{-a^2}$, четвертая степень $\sqrt[4]{-a^2}$ и $2n$ -я степень $\sqrt[2n]{-a^2}$ есть отрицательное количество $-a^2$.

Соотвѣтственно этому говорятъ, что количество $\sqrt[2n]{a}$ есть $2n$ -й корень изъ a , при всякомъ значеніи a , и положительномъ и отрицательномъ; только если a положительное, то $\sqrt[2n]{a}$ есть дѣйствительный корень, если же a отрицательное, $\sqrt[2n]{a}$ есть мнимый (несуществующій) корень; въ послѣднемъ случаѣ онъ не представляетъ собою ни какой величины и есть только символъ отсутствія корня, для общности употребляемый.

Италіянскому математику Кардану принадлежитъ изобрѣтеніе мнимыхъ количествъ, которые онъ впервые разсматривалъ какъ корни уравненій и замѣтилъ, что эти корни бываютъ всегда сопряженными; въ его сочиненіи *ars-magna* изложены правила умноженія мнимыхъ количествъ. Но только въ первой части

Алгебры Карданова соотечественника Бомбели, изданной въ 1572 году (лѣтъ 35 послѣ открытія мнимыхъ корней) встрѣчается обстоятельное изложеніе теоріи мнимыхъ количествъ и радикаловъ общаго вида.

§ 3. Нѣтъ величины, представляемой мнимымъ количествомъ, нѣтъ и правилъ дѣйствій надъ ними, которыя были бы результатомъ необходимости; могутъ быть только правила дѣйствій условныя, отъ нашего произвола зависящія, лишь бы эти правила приносили пользу сообщеніемъ общности выводамъ и заключеніямъ; съ этой цѣлью и условились дѣйствовать надъ мнимыми количествами по правиламъ дѣйствій надъ действительными, помня только смыслъ мнимаго количества какъ несуществующаго корня четной степени изъ количества отрицательнаго, подъ кореннымъ знакомъ стоящаго. Очевидно, что только при такомъ условіи и можно производить дѣйствія надъ радикалами четной степени, при произвольномъ знакѣ подрадикальнаго количества.

§ 4. Условіе дѣйствовать надъ мнимыми количествами, какъ надъ действительными, даетъ возможность приводить всякій мнимый корень действительнаго количества къ произведенію действительнаго количества на мнимый корень изъ -1 . Такъ если β есть действительное количество, то въ выраженіи $\sqrt[2n]{-\beta^{2n}}$,
 $-\beta^{2n} = \beta^{2n}(-1)$;

посему $\sqrt[2n]{-\beta^{2n}} = \sqrt[2n]{\beta^{2n}(-1)} = \sqrt[2n]{\beta^{2n}} \cdot \sqrt[2n]{-1} = \beta \sqrt[2n]{-1}$.

Примѣры.

$$1. \sqrt{-25} = 5 \sqrt{-1}.$$

$$2. \sqrt{-5} = \sqrt{5} \sqrt{-1}.$$

$$3. \sqrt[4]{-a^8 b^2} = \sqrt[4]{a^8 b^2} \sqrt[4]{-1} = a^2 \sqrt{b} \sqrt[4]{-1}.$$

Далѣе будетъ доказано, что всякое мнимое количество можетъ быть приведено къ виду $\alpha + \sqrt{-\beta^2}$, или къ виду $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, гдѣ α и β суть действительныя ко-

личества, $\sqrt{-1}$ мнимый множитель, означающій невозможный квадратный корень изъ -1 . Посему мы ограничимся разсмотрѣніемъ дѣйствій только надъ количествами этого вида, называемыми *мнимыми количествами общаго вида*.

Сложеніе и вычитаніе мнимыхъ количествъ.

§ 5. Чтобы сложить или вычесть мнимыя количества $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ и $\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}$, складываемъ или вычитаемъ ихъ дѣйствительныя части и коэффициенты при $\sqrt{-1}$ отдѣльно, дѣлая въ результатѣ $\sqrt{-1}$ общимъ множителемъ суммы или разности его коэффициентовъ. Такъ

$$(\alpha + \beta \sqrt{-1}) + (\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}) = \alpha + \alpha_1 + (\beta + \beta_1) \sqrt{-1}.$$

$$(\alpha + \beta \sqrt{-1}) - (\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}) = \alpha - \alpha_1 + (\beta - \beta_1) \sqrt{-1}.$$

Примѣры.

$$1. \quad 5 \sqrt{-1} - 2 \sqrt{-1} = (5 - 2) \sqrt{-1} = 3 \sqrt{-1}.$$

$$2. \quad (5 + 3 \sqrt{-4}) + (2 - 5 \sqrt{-1}) = (5 + 6 \sqrt{-1}) + (2 - 5 \sqrt{-1}) = 5 + 2 + (6 - 5) \sqrt{-1} = 7 + \sqrt{-1}.$$

$$3. \quad (3 + 2 \sqrt{-8}) - (4 - 5 \sqrt{-2}) = (3 + 2\sqrt{8} \sqrt{-1}) - (4 - 5\sqrt{2} \sqrt{-1}) = 3 - 4 + (2\sqrt{8} - 5\sqrt{2}) \sqrt{-1} = -1 + 9\sqrt{2} \sqrt{-1}.$$

Умноженіе мнимыхъ количествъ.

§ 6. Чтобы помножить мнимое количество $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ на $\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}$, должно, по общимъ правиламъ этого дѣйствія, множить каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя, помня только, что квадратъ $\sqrt{-1}$ есть -1 , или что $\sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1$.

$$(\alpha + \beta \sqrt{-1})(\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}) = \alpha\alpha_1 + \alpha_1\beta \sqrt{-1} + \alpha\beta_1 \sqrt{-1} - \beta\beta_1 = \alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 + (\alpha_1\beta + \alpha\beta_1) \sqrt{-1}.$$

Примѣры.

$$1. 5\sqrt{-1} - 3\sqrt{-1} = -15(\sqrt{-1})^2 = 15.$$

$$2. (1+2\sqrt{-1})(7-4\sqrt{-1}) = 7+14\sqrt{-1}-4\sqrt{-1}+8 = \\ = 15 + 10\sqrt{-1}.$$

$$3. (\sqrt{2} - 3\sqrt{-7})(\sqrt{3} - 2\sqrt{-9}) = \\ = (\sqrt{2} - 3\sqrt{7}\sqrt{-1})(\sqrt{3} - 6\sqrt{-1}) = \\ = \sqrt{6} - 3\sqrt{21}\sqrt{-1} - 6\sqrt{2}\sqrt{-1} - 18\sqrt{7} = \\ = \sqrt{6} - 18\sqrt{7} - 3(\sqrt{21}+2\sqrt{2})\sqrt{-1}.$$

Возведение мнимыхъ количествъ въ степень.

§ 7. Возведение полинома въ цѣлую степень приводится къ возведенію въ степень членовъ его мономовъ; посему составимъ, начиная съ единицы, послѣдовательныя цѣлыя степени $\sqrt{-1}$.

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}; \quad (\sqrt{-1})^2 = -1;$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \sqrt{-1} = \sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^3 \sqrt{-1} = -(\sqrt{-1})^2 = +1;$$

$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$$

5-я степень одинакова съ 1-й; изъ этого ясно, что далѣе тѣже количества будутъ повторяться неопредѣленное число разъ, ибо каждая степень получается изъ предшествующей чрезъ помноженіе ея на $\sqrt{-1}$, т. е. при возведеніи $\sqrt{-1}$ въ цѣлую степень n , можетъ получиться только одно изъ четырехъ количествъ:

$$+1; \sqrt{-1}; -1; -\sqrt{-1};$$

и легко замѣтить, что если n дѣлится на 4, т. е. если $n = 4k$ (гдѣ k частное дѣленія), то получается первое изъ написанныхъ количествъ; если же остатки дѣленія n на 4 будутъ 1, или 2, или 3, т. е. если $n = 4k + 1$,

$4k+2$, $4k+3$, то получается второе, третье и четвертое из них соответственно; такъ что при всякомъ цѣломъ k

$$\begin{aligned}(\sqrt{-1})^{4k} &= +1; (\sqrt{-1})^{4k+1} = \sqrt{-1}; \\(\sqrt{-1})^{4k+2} &= -1; (\sqrt{-1})^{4k+3} = -\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Прилагая эти выводы, легко составить по общему правилу квадратъ и кубъ $\alpha + \beta \sqrt{-1}$.

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta \sqrt{-1})^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta \sqrt{-1} + \beta^2 (\sqrt{-1})^2 = \\&= \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta \sqrt{-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta \sqrt{-1})^3 &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta \sqrt{-1} + 3\alpha\beta^2 (\sqrt{-1})^2 + \beta^3 (\sqrt{-1})^3 = \\&= \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + (3\alpha^2\beta - \beta^3) \sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Примѣры.

$$1. \left(2\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)^{12} = \left(2\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{-1}\right)^{12} = \sqrt{-1}.$$

$$2. (2 - 3\sqrt{-1})^2 = 4 - 12\sqrt{-1} - 9 = -5 - 12\sqrt{-1}.$$

$$\begin{aligned}3. (\sqrt{2} + \sqrt{-5})^2 &= (\sqrt{2} + \sqrt{5}\sqrt{-1})^2 = \\&= 2 + 2\sqrt{10}\sqrt{-1} - 5 = -3 + 2\sqrt{10}\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

$$4. (1 + \sqrt{-3})^3 = 1 + 3\sqrt{-3} - 9 - 3\sqrt{-3} = -8.$$

Дѣленіе мнимыхъ количествъ.

§ 8. Частное дѣленія $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ на $\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}$ есть $\frac{\alpha + \beta \sqrt{-1}}{\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}}$. Помножая числителя и знаменателя этой дроби на $\alpha_1 - \beta_1 \sqrt{-1}$ (по § 17 гл. V) имѣемъ:

$$\frac{\alpha + \beta \sqrt{-1}}{\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}} = \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})(\alpha_1 - \beta_1 \sqrt{-1})}{(\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1})(\alpha_1 - \beta_1 \sqrt{-1})} =$$

$$= \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + (\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1)\sqrt{-1}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2},$$

или $\frac{\alpha + \beta \sqrt{-1}}{\alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}} = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \sqrt{-1}.$

Примѣры.

1. $\sqrt{-10} : \sqrt{-2} = \frac{\sqrt{10} \sqrt{-1}}{\sqrt{2} \sqrt{-1}} = \sqrt{5}.$

2. $3 : (2 + \sqrt{-1}) = \frac{3}{2 + \sqrt{-1}} = \frac{3(2 - \sqrt{-1})}{(2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1})} =$

$$= \frac{6 - 3\sqrt{-1}}{5} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{-1}.$$

3. $(3\sqrt{-2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{-4} + 2) : (3\sqrt{-1} - \sqrt{-2}) =$

$$= \frac{3\sqrt{2}\sqrt{-1} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{-1} + 2}{(3 - \sqrt{2})\sqrt{-1}} = \frac{(2 + 3\sqrt{2})(1 + \sqrt{-1})}{(3 - \sqrt{2})\sqrt{-1}} =$$

$$= \frac{(2 + 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{-1})\sqrt{-1}}{7} =$$

$$= -\frac{(12 + 11\sqrt{2})(\sqrt{-1} - 1)}{7} =$$

$$= \frac{12 + 11\sqrt{2}}{7} - \frac{12 + 11\sqrt{2}}{7}\sqrt{-1}.$$

Извлеченіе квадратнаго корня изъ мнимыхъ количествъ.

§ 9. Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ выраженія $\alpha + \beta\sqrt{-1}$; означая это требованіе, имѣемъ $\pm\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{-1}}.$

Последнее выраженіе можно привести къ общему виду мнимыхъ количествъ, если найдутся дѣйствительныя количества x и y , удовлетворяющія равенству:

$$\sqrt{\alpha + \beta \sqrt{-1}} = x + y \sqrt{-1}.$$

Квадраты этихъ равныхъ количествъ суть тоже количества равныя:

$$(\sqrt{\alpha + \beta \sqrt{-1}})^2 = (x + y \sqrt{-1})^2,$$

или

$$\alpha + \beta \sqrt{-1} = x^2 + 2xy \sqrt{-1} - y^2.$$

Количество $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ можетъ быть равно $x^2 + 2xy \sqrt{-1} - y^2$ только при условіи, когда дѣйствительныя части ихъ отдѣльно равны между собою, мнимыя отдѣльно, потому что дѣйствительное количество не можетъ равняться мнимому; слѣдовательно сказанное преобразование возможно, если найдутся дѣйствительныя количества для x и y , удовлетворяющія условіямъ:

$$\alpha = x^2 - y^2, \text{ и } \beta \sqrt{-1} = 2xy \sqrt{-1},$$

или условіямъ

$$\alpha = x^2 - y^2, \text{ и } \beta = 2xy.$$

Чтобы найти x и y , разность квадратовъ коихъ есть α , а удвоенное произведеніе β , найдемъ предварительно x^2 и y^2 .

Еслибы сумма квадратовъ $x^2 + y^2$ была извѣстна, то x^2 и y^2 нашлись бы, такъ какъ по суммѣ и разности количествъ легко найти ихъ (стр. 21). Вопросъ сводится на опредѣленіе суммы $x^2 + y^2$; для чего взявъ сумму квадратовъ α и β , получимъ:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2,$$

или

$$\alpha^2 + \beta^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2; \text{ откуда } x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \text{ гдѣ знакъ}$$

корня необходимо плюсь, ибо онъ выражаетъ собою сумму квадратовъ $x^2 + y^2$, которая не можетъ быть отрицательною для дѣйствительныхъ x и y .

Имѣя сумму

$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ и разность $x^2 - y^2 = \alpha$, найдемъ (стр. 21)

$$x^2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}, \quad y^2 = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2};$$

откуда

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}; \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}}.$$

Такъ какъ $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > \alpha$, то x и y возможны, ибо подкоренныя количества положительны, а по этому и рассматриваемое преобразование всегда возможно.

Изъ выраженія $\beta = 2xy$ видно, что если β положительное количество, то x и y имѣютъ одинакіе знаки; β отрицательное, знаки x и y разные. Принимая это въ соображеніе, получимъ:

когда β положительное, $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{-1}} =$

$$= \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} \sqrt{-1} \right];$$

когда β отрицательное, $\sqrt{\alpha - \beta\sqrt{-1}} =$

$$= \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} \sqrt{-1} \right],$$

или вообще, для всякаго β , $\sqrt{\alpha + \beta\sqrt{-1}} =$

$$= \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}} \sqrt{-1} \right] \quad (1)$$

Примѣры.

1. $\sqrt{\sqrt{-1}} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \right)$, полагая въ выраженіи (1) $\beta=1$, $\alpha=0$ и замѣчая, что β положительное.

2. $\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \right)$, ибо β отрицательное.

$$\begin{aligned} 3. & \sqrt{3 + 4 \sqrt{-1}} \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} + 3}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} - 3}{2}} \sqrt{-1} \right] \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{5+3}{2}} + \sqrt{\frac{5-3}{2}} \sqrt{-1} \right] = \pm (2 + \sqrt{-1}). \end{aligned}$$

§ 10. ТЕОРЕМА. Всякій мнимый корень дѣйствительнаго количества можетъ быть приведенъ къ виду $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, гдѣ α и β количества дѣйствительныя.

Доказ. По § 4-му, всякій мнимый корень, т. е. корень четной степени изъ дѣйствительнаго отрицательнаго количества, можетъ быть приведенъ къ произведенію дѣйствительнаго количества на мнимый корень изъ -1 , т. е. къ виду $A \sqrt[2n]{-1}$.

Но такъ какъ всякое четное число $2n$ можно представить въ видѣ произведенія нѣкоторой степени 2-хъ на нечетное число, т. е. $2n = 2^r k$, то $\sqrt[2n]{-1} = \sqrt[2^r k]{-1} = \sqrt[2^r]{\sqrt[k]{-1}} = \sqrt[2^r]{-1}$, ибо $\sqrt[k]{-1} = -1$, такъ какъ k нечетное; $\sqrt[2^r]{-1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{-1}}}}$; отсюда слѣдуетъ, что всякій корень четной степени изъ -1 приводится къ нѣсколькимъ квадратнымъ корнямъ.

Извлекая корень квадратный изъ $\sqrt{-1}$ получимъ (по § 9) количество вида $\alpha + \beta \sqrt{-1}$; извлекая изъ $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ снова квадратный корень, получимъ количество того же

вида и такъ далѣе дѣйствуя, найдемъ, что $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{-1}}}}$

есть количество вида $\alpha + \beta \sqrt{-1}$; слѣдовательно и всякій четный корень изъ дѣйствительнаго отрицательнаго количества можетъ быть приведенъ къ этому виду.

$$\begin{aligned} 1. \quad \sqrt[4]{-2} &= \sqrt{2} \sqrt[4]{-1} = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{-1}} \\ &= \pm \sqrt{2} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \right] = \pm \left[1 + \sqrt{-1} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sqrt[12]{-1} &= \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{-1}}} = \sqrt{\sqrt{-1}} \\ &= \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \right]. \end{aligned}$$

§ 11. На основаніи этой теоремы, если требуется произвести дѣйствіе надъ какими либо мнимыми корнями дѣйствительныхъ количествъ, должно предварительно привести каждый изъ нихъ къ виду $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ и потомъ производить требуемыя дѣйствія, какъ показано въ предшествующихъ параграфахъ; изъ которыхъ легко также замѣтить, что результатъ каждаго изъ произведенныхъ дѣйствій надъ количествами вида $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, именно результатъ сложения, вычитанія, умноженія, возведенія въ квадратъ, дѣленія и извлеченія квадратнаго корня есть количество того же вида.

Въ общей теоріи возведенія въ произвольную степень и извлеченія корня всякой степени, доказывается, что результаты этихъ дѣйствій надъ количествами вида $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ суть количества того же вида. Откуда заклю-

чаемъ, что общій видъ всѣхъ алгебраическихъ количествъ есть $\alpha + \beta \sqrt{-1}$; это общій видъ всѣхъ действительныхъ количествъ при $\beta=0$, и мнимыхъ при β , отличномъ отъ нуля.

У п р а ж н е н і я.

$$1. \sqrt{-54} + \sqrt{-24} - 6\sqrt{-\frac{2}{3}} + 4\sqrt{-\frac{3}{2}}.$$

$$2. \sqrt{-p^2q^3} + p\sqrt{-q^5} - \frac{q^2}{p}\sqrt{-p^4q} + 3pq^2\sqrt{-\frac{1}{q}}.$$

$$3. (9 + 6\sqrt{-1})(3 + 7\sqrt{-1}).$$

$$4. (2\sqrt{-3} - 5\sqrt{-4} - 7\sqrt{-2})(\sqrt{-7} - 2\sqrt{-1}).$$

$$5. (a + \sqrt{b}\sqrt{-1})(a - \sqrt{b}\sqrt{-1}).$$

6. Разложить $a^2 + b^2$ на произведение суммы двухъ количествъ на разность ихъ.

$$7. (1 - \sqrt{-1})^2.$$

$$8. (a \pm \sqrt{b}\sqrt{-1})^2.$$

9. Доказать, что при всякомъ цѣломъ n выраженіе $(\sqrt{-1})^n + (\sqrt{-1})^{n+1} + (\sqrt{-1})^{n+2} + (\sqrt{-1})^{n+3} = 0$.

$$10. (a \pm \sqrt{b}\sqrt{-1})^3.$$

11. Доказать, что одно изъ двухъ количествъ $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ и $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ есть квадратъ другаго, и что кубъ cadaго изъ нихъ есть $+1$.

$$12. \text{Доказать, что } \left(\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{-1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 = -4$$

13. $8 : (-1 + \sqrt{-3})$.

14. $(5 - \sqrt{-2}) : (1 + \sqrt{-2})$.

15. $(2\sqrt{-5} - 14 - \sqrt{15} - 7\sqrt{3}\sqrt{-1}) : (7 - \sqrt{-5})$

16. $1 : (2 + \sqrt{-3} - \sqrt{-5})$.

17. $m : (2\sqrt{a} + 3\sqrt{-b})$.

18. $\sqrt{-3 + \sqrt{-16}}$.

19. $\sqrt{\frac{25a^2d}{c^2} - \frac{4a^2b}{d} - \frac{20a^2}{c}\sqrt{-b}}$.

20. Вычислить количество $2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$, при

$x = \pm \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{-1}$.

21. $\sqrt[18]{-a}$. 22. $\sqrt[100]{-1}$. 23. $\sqrt[4]{1 + \sqrt{-1}}$.

24. Доказать, что выражение

$\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^m + \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^m$ равняется 2, когда m

делится на 3, и равняется -1 , когда m не делится на 3.

ОТВѢТЫ И РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

ВВЕДЕНИЕ (стр. 10-я и 11-я).

1. Вычитая изъ данного числа число единицъ, которымъ большая часть превышаетъ меньшую и раздѣляя разность пополамъ, найдемъ часть меньшую.

Вычитая изъ данного числа удвоенное число единицъ, которымъ 2-я часть превышаетъ 1-ю и раздѣляя разность на 3, найдемъ 1-ю часть.

3. Меньшая часть получится раздѣляя число на 6 долей.

4. Раздѣлить данную сумму на 6 долей и частное помножить на 5.

5. Должно къ годамъ старшаго прибавить 3 и сумму дѣлить пополамъ.

6. Помножить дѣлителя на частное и прибавить остатокъ.

7. Отнять отъ дѣлимаго остатокъ и разность раздѣлить на частное.

8. Раздѣлить сумму рублей въ обоихъ съ избыткомъ одного надъ другимъ пополамъ.

9. Изъ всего долга вычесть число рублей, которые онъ взялъ съ собою, и къ разности придать то, что онъ отдалъ пріятелю.

10. Должно сумму произведеній числа фунтовъ 1-го сорта на цѣну его и 2-го сорта на его цѣну вычесть изъ цѣны всего чая и разность раздѣлить на цѣну фунта 3-го сорта.

ГЛАВА I (стр. 22, 23, 24 и 25).

1. $a + b$ и $a - b$; $a + 6$ и $a - 6$. 2. ab и $\frac{a}{b}$. 3. $a - b$.
4. $a + b$. 5. $b - a$. 6. $a - 7$.
7. $10a$; ma ; $\frac{a}{10}$ и $\frac{a}{m}$ послѣдовательно.
9. $Bn \frac{pn}{7n}$ разъ.
10. Слѣдующ. четное $n + 2$; нечетное $n + 1$; предшест. четное $n - 2$; нечетное $n - 1$.
11. $3a^3b^2c^2$; ma^7b^3 .
12. Сумма квадратовъ есть $a^2 + b^2$; разность $a^2 - b^2$.
сумма кубовъ $a^3 + 1$; разность $a^3 - 1$.
13. Сумма $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; разность $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Для кор.
 m -й степени сумма $\sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b}$; разность $\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}$.
14. Въ 1-й, 2-й и т. д. послѣдовательно: x ; ax ; a^2x ;
 a^3x ; a^4x . Во всѣхъ вмѣстѣ: $x + ax + a^2x + a^3x + a^4x$.
15. $\sqrt{a}$. 16. $a^n - b^n = \frac{\sqrt[n]{c} + \sqrt[n]{d}}{5}$.
17. $\frac{b^2}{b^3} \triangleright \frac{c}{2} \sqrt[7]{d} + 1$; $\frac{a^3}{b^3} \triangleleft 3h$.
18. $\left(a + \frac{b}{c}\right)^{17}$; $\left(a + \frac{b}{c}\right)^m$.
19. Объяснимъ различіе только послѣднихъ выраже-
ній (f) для показанія, какого рода отвѣты требуются:
Выраженіе $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ показываетъ что должно извлечь корень
 m -й степени изъ частнаго дѣленія a на b . Выраженіе-же
 $\frac{\sqrt[m]{a}}{b}$ показываетъ что должно корень m -й степени изъ a
раздѣлить на b .

20. Означаетъ произведеніе суммы a и b на c безъ куба разности: уменьшаемаго произведенія d на сумму a и b безъ f , и вычитаемаго корня квадратнаго изъ e .

21. а) 5,9; б) 3,5; в) 104. 22. $\frac{\sqrt[5]{p} + \sqrt[5]{q} + (x+y)^3}{x^3 + y^3}$.

23. $a(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) \cdot \frac{\sqrt[n]{p}\{(x-y)^3 - (x+y)^3\}}{m}$.

24. $\frac{\sqrt[m]{(100a + 10b + c)^2}}{(x^2 - y^2)(a + b - \sqrt{3})}$.

25. Задача будетъ: раздѣлить a на двѣ части такъ чтобы одна часть была болѣе другой на b .

Рѣшеніе: меньшая часть есть: $\frac{a-b}{2}$; большая $\frac{a+b}{2}$.

Числовое рѣшеніе: меньшая 155; большая 157.

26. Задача будетъ: раздѣлить a на 3 части изъ коихъ 2-я былабы болѣе 1-й на b , а 3-я былабы равна 2-й.

Рѣшеніе: часть 1-я $= \frac{a-2b}{3}$; 2-я и 3-я $\frac{a-2b}{3} + b$.

Числовое рѣшеніе: 1-я часть $20\frac{1}{3}$; 2-я и 3-я $25\frac{1}{3}$.

27. Задача будетъ: раздѣлить a на двѣ части, изъ коихъ 2-я въ 5 разъ болѣе 1-й.

Рѣшеніе: меньшая часть $\frac{a}{6}$; большая $\frac{5a}{6}$.

Числовое рѣшеніе: 20 и 100.

28. Задача будетъ: найти число, которое будучи сложено съ пятой долею своею даетъ a . Рѣшеніе: $\frac{5a}{6}$.

Числовое рѣшеніе 100.

29. Задача будетъ: старшему брату a лѣтъ и еслибы ему было 3 годами болѣе, то онъ былъ бы вдвое старше младшаго. Найти года младшаго?

Рѣшеніе: младшему $\frac{a+3}{2}$ лѣтъ.

Числовое рѣшеніе: 13 лѣтъ.

30. Задача будетъ: найти число отъ дѣленія коего на a , получится частное b и остатокъ v ?

Рѣшеніе: $ab + v$. Числовое рѣшеніе: 17.

31. Задача будетъ: дѣлимое есть k , частное b , остатокъ v . Найти частное?

Рѣшеніе: $\frac{k-v}{b}$. Числовое рѣшеніе 5.

32. Задача будетъ; сумма рублей въ двухъ кошелькахъ сложенная съ избыткомъ большаго надъ меньшимъ есть a . Сколько въ большемъ?

Рѣшеніе: $\frac{a}{2}$ рублей. Числовое рѣшеніе: 15 рублей.

33. Задача будетъ; человекъ имѣетъ a рублей долгу; взявъ b рублей для уплаты части долга, на дорогѣ встрѣтилъ пріятеля, которому отдалъ c рублей, остальное внесъ въ счетъ долга. Сколько у него осталось долга?

Рѣшеніе: $a - b + c$ рублей.

Числовое рѣшеніе: 59 рублей.

34. Задача будетъ: цѣна фунта перваго сорта чая есть a рублай; втораго a_1 рублей, третьяго a_2 рублей; перваго сорта b фунтовъ, втораго b_1 фунтовъ; цѣна всего чая есть k рублей. Спрашивается: сколько фунтовъ третьяго сорта?

Рѣшеніе: $\frac{k - ab - a_1 b_1}{a_2}$.

Числовое рѣшеніе: 2 фунта.

ГЛАВА II (стр. 30 и 31).

1. Разсмотримъ только послѣднее количество (g) . Оно есть биномъ, дробный, ирраціональный; показываетъ что

изъ квадратнаго корня суммы количествъ k и l должно вычесть частное дѣленія произведенія количествъ h , f , d и k , на 15-ю степень l .

2. Разсмотримъ количество (d) . Оно есть однородное, восьмого измѣренія; высшій по буквѣ g членъ есть первый, остальные два низшіе; высшій по буквамъ k и b членъ средній, остальные два низшіе; высшій по буквѣ p членъ — послѣдній, низшій — первый.

$$3. a) 5a^7 - 9b^3 + 3. \quad b) 3b - 11a + 270c^3 + 12.$$

$$c) 17b - 12a^2 - 17l. \quad d) \frac{5}{12} a^2b + \frac{29}{12} x - 3b.$$

$$e) 16a^mb^m - 3a^m. \quad f) 1,25a^2b^n + \frac{5}{7} c^3d^m - \frac{979}{3000} x.$$

ГЛАВА III.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ (стр. 36).

1. $9a - 8c - 4b.$ 2) $a + 5b + 9.$ 3. $2x - c - 4.$
4. $4a^mb + 2a^nb - x + kl.$ 5. $a + 4b - 3c + 2d.$
6. $cd - f - 2g - 6k.$

УМНОЖЕНИЕ МОНОМОВЪ (стр. 39).

1. $35a^2b^2c^2d^2.$ 2. $6abcdklg.$ 3. $3a^8bc^{10}d^2e^2f.$
3. $a^{m+n}.$ 5. $36a^{m+q}b^p+5c^{q+r}df.$
6. $4680a^{p+m+19}b^n+1c^{2q+4}d^6e.$

УМНОЖЕНИЕ ПОЛИНОМОВЪ (стр. 46 и 47).

1. $10xy - 3y^2 - 3x^2.$ 2. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2.$
3. $a^4 - 4a^2x^2 - 4ax^3 - x^4.$
4. $60a^2b^7 + 36a^3b^5c - 48ab^{10}c^2 + 35a^9b^2c^2d + 21a^{10}c^3d -$
 $- 28a^8b^5c^4d - 45ab^9c^4 - 27a^2b^7c^5 + 36b^{12}c^6.$
5. $1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7.$

$$6. 1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + \dots + 3x^{n-2} + 3x^{n-1} + 3x^n + 2x^{n+1} + x^{n+2}.$$

$$7. b^6c - b^4c^2d + b^4cf - b^5d + b^3cd^2 - b^3df + b^3c^2d - bc^3d^3 + 2bc^2d^2f - b^2cd^3 + c^2d^4 - cd^3f - b^3cdf - bcd^2f^2 + b^2fd - cd^3f + f^2d^2 + b^3cf^5 - bc^2df^5 + bcf^6 - b^2df^5 + cd^2f^5 - df^6.$$

$$8. a^{16} - a^4.$$

$$9. 4a^3b^2 - 16a^2b^3 + 8a^2b^2 - 2a^2b + 32ab^4 - 8ab^3 - a^3 - 2a^2 - 32b^5 + 16b^4 - 4ab^2 + 2ab - a + 8b^3 - 4b^2.$$

$$10. a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - a^2cd + a^2ed + a^2e^2 + a^2b - b^3 - bc^2 - bcd + bed + be^2 - a^2 + b^2 + c^2 + cd^2 - ed - e^2.$$

$$11. 4a^2 + 5ab + 5b^2 - 2a^2 - 3b - 5a.$$

$$12. 2xy^3 - 3x^4 - 3x^2y - 2xy^2 - y^3 + 3x^2y^2.$$

$$13. ax + h. \quad 14. \text{На } 7a + 35 - 5x.$$

$$15. 2abh + 15ah - 4ab - 20a.$$

$$16. \text{Въ десятичной системѣ число есть: } 100a + 10b + c; \\ \text{число обратное: } a + 10b + 100c.$$

$$\text{По системѣ } x \text{ число есть: } ax^2 + bx + c; \\ \text{обратное: } a + bx + cx^2.$$

$$17. 5apk + 10bpk + 10aph + 30bph \text{ копѣекъ.}$$

ВОЗВЕДЕНИЕ ВЪ СТЕПЕНЬ (стр. 54 и 55).

$$1. 9a^{10}c^6d^{14}h^2. \quad 2. 49a^4b^{2n}c^4r^2. \quad 3. 2048a^{77}b^{44}c^{33}d^{132}.$$

$$4. a^9b^{3r}c^{3k+3}e^{3h-3v}. \quad 5. a^{10m}b^{3m}c^{2rm+m}d^{hm-3mv}f^{km}.$$

$$6. 3^{m-n}a^{2m-2n}b^{m^2-mn}c^{mn-m-n^2+n}. \quad 7. a^{6m}b^{6m}c^{6m}.$$

$$8. a^{2m^3-m}b^{m^4-m^2-2m^3+2m}c^{m^3r-mr}h^{m^2-m}.$$

$$9. 9a^2b^4 + 42ab^2 + 49. \quad 10. 4a^6c^{2n} - 16a^3c^n + 16.$$

$$11. 25a^6b^2 + 4 + a^2b^4 + 20a^3b + 10a^4b^3 - 4ab^2.$$

$$12. 16a^4 + 16a^2c^2 + c^4 - 32a^3c + 8a^2c^2 - 8ac^3$$

$$13. 9a^8 + 1 + a^2b^4 + a^2 - 6a^4 + 6a^5b^2 - 6a^5 - 2ab^2 + 2a - 2a^2b^2.$$

$$14. a^{2m}b^{2r} + 9a^2 + 144b^{2r+\frac{5}{2}} + c^4 + d^{2h+2v} - 6a^{m+1}b^r + 24a^mb^{2r+1} - 2a^mb^rc^2 + 2a^mb^rc^{h+v} - 72ab^{r+1} + 6ac^2 - 6ad^{h+v} - 24b^{r+1}c^2 - 2c^2d^{h+v}.$$

15. Производя дѣйствія получимъ $4x^3y - 4xy^3$ или $4xy(x^2 - y^2) = 4xy(x + y)(x - y)$.

16. Ибо онъ будетъ $4x^2 + 4z^2 + 8xy = 4(x^2 + 2xz + z^2) = 4(x + z)^2$.

17. $(kl - 2h)^3 = k^3l^3 - 6k^2l^2h + 12klh^2 - 8h^3$.

18. $a^4b^2 - c^6$. 19. $1 - c^{40}d^2$.

20. $9261a^{3m} - 2646a^{2m}b^rc - 252a^mb^{2r}c^2 - 8b^{3r}c^3$.

21. $4903a^{3m+3}b^3 - 867a^{2m+3}b^2c^{r-2} + 51a^{m+1}b^2c^{2r-4} + c^{3r-6}$.

22. На сумму квадратовъ ихъ.

23. Разность кубовъ превышаетъ кубъ разности на утроенное произведеніе чиселъ на разность ихъ.

ДѢЛЕНІЕ МОНОМОВЪ (стр. 57 и 58).

1. $5ab^2cd$. 2. $5a^8bd$. 3. a^{m-n} . 4. b^p . 5. $a^{2n}b^{r-s}c^p$.

6. $16a^2b^2d^{r-5}$. 7. $4a^2b^{r-4}c^3d^2e^4f$. 8. $2a^2$.

9. Частное обоихъ дѣленій равно 5.

10. Частное этого дѣленія a^2b^7d не содержитъ буквъ m , n , p и q и слѣдовательно не измѣнится съ ихъ перемѣною.

ДѢЛЕНІЕ ПОЛИНОМОВЪ (стр. 72 и 73).

1. $2b^2 - 3a^2b + 1$. 2. $a^2 + ab - b^2$. 3. $a^2 - 3ab$.

4. $3x^2 - 2abx - 2a^2b^2$. 5. $x^4 - 3x^2 + 3$.

6. $2a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 + 4b^4$. 7. $a^4 - 4a^2bc + 7b^2c^2$.

8. $1 - 3x + 3x^2 - x^3$.

9. $32x^5 + 16x^4y + 8x^3y^2 + 4x^2y^3 + 2xy^4 + y^5$.

10. $a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3$. 11. $2a^2 - 3an + 5n^2$.

12. $a^4 + 2a^3b - 3a^2b + b^4$. 13. $2x^3 - 8x^2 + 3x - 12$.

14. $a + x$.

15. $y^{q(p-1)} + y^{q(p-2)} + y^{q(p-3)} + \dots + y^{3q} + y^{2q} + y^q$.

16. $a + x$.

17. Должно раздѣлить произведеніе на одно изъ количествъ, получится другое.

18. Въ $4x^4 - 12x^3 + 4a^2x^2 - 4bx^2 - 6a^2x + 6bx - 2a^2b + b^2$.

19. $x^8 - 3x^7 + x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2$.

20. $3a - 2b$.

21. $6ab + bc - 9ac$.

22. $a^2b - a^2c - 4ab^2 + 2abc - ac^2 + 8b^3 - 4b^2c$.

23.
$$\left\{ \begin{array}{l|l} a & x^2 - a^2 \\ -b & -ab \\ & -b^2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} x - a^3 \\ + b \end{array} \right\}$$
.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ (стр. 80).

1. a^n . 2. $a^n b^p$. 3. $8x^2 m^3$. 4. $2a^4 b^2 c$. 5. $978a^5 b^2$.

6. $3a^3 b^3 c$. 7. $64a^{m+p} b$. 8. $x^{n+2} y^q z^{5n}$. 9. $x + 1$.

10. $f^3 + 3x^4$. 11. $x^4 - x^2 + 1$. 12. $5a^2 b - 3ab^2 + 2b^3$.

13. $x^3 - 3ax^2 + 3a^2 x - a^3$. 14. $(a - 2b)x^2 - ax + 2b - 3$.

15. $a + b$, ибо подъ корнемъ кубъ суммы двухъ членовъ.

16. $a - b$ ибо подъ кореннымъ знакомъ кубъ разности двухъ членовъ.

17. $1 + x$. 18. $x^2 - 2cx$.

ДѢЛИМОСТЬ КОЛИЧЕСТВЪ. (Стр. 94 и 95).

1. Количество можетъ быть представлено въ видѣ:
 $a^2(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2)$; последнее дѣлится на $x^2 - y^2$ по теоремѣ 1-й.

2. Дѣлимое есть: $(x - y)^7 + 5a^2(x + y)^2$; дѣлитель $(x + y)^2$, на который дѣлимое дѣлится по теоремѣ 1-й.

3. $x^8 + x^7 y + x^6 y^2 + x^5 y^3 + x^4 y^4 + x^3 y^5 + x^2 y^6 + x y^7 + y^8$ (теорема 7).

4. Дѣлимое можетъ быть представлено въ видѣ:
 $(3x)^4 - (a^2 b^2)^4$ и частное дѣленія будетъ: $27x^3 - 9a^2 b^2 x^2 + 3a^4 b^4 x - a^6 b^6$ (теорема 8)

5. $(x + p)^{m-1} + (x + p)^{m-2}(y + q) + (x + p)^{m-3}(y + q)^2 + \dots + (y + q)^{m-1}$ (теорема 7).

6. Частное дѣленія есть $a^4 + 4a^3 b + 4a^2 b^2 - a^2 x - a^2 y - 2abx - 2aby + x^2 + 2xy + y^2$ (теорема 9).

7. Дѣлимое можетъ быть представлено въ видѣ:
 $(3a)^3 - (2b^2)^3$, которое не дѣлится на $3a + 2b^2$ (теорема 8);
 дѣлитель же есть $3a - 2b^2$ (теорема 7) и частное дѣленія
 на него $9a^2 + 6ab^2 + 4b^4$.

8. m должно дѣлиться на n (теорема 7).

9. Дѣлимое есть $(2x)^5 + (2a^2 + 3c)^5$ и дѣлится на дѣ-
 лителя по теоремѣ 9-й; частное дѣленія есть:
 $16x^4 - 16x^3a^2 - 24x^3c + 16x^2a^4 + 36x^2c^2 + 4x^2a^2bc -$
 $- 16xa^6 - 54xc^3 - 72xa^4c - 108xa^2c^2 + 16a^8 + 96a^6c +$
 $+ 216a^4c^2 + 216a^2c^3 + 81c^4$.

10. Искомая степень есть 3, ибо тогда дѣлимое бу-
 деть: $(3x)^3 + (x + y - 2)^3$ и слѣдовательно дѣлится на
 $4x + y - 2$ (теорема 9).

11. Должно дѣлить каждый коэффициентъ степеней y
 отдѣльно (теорема 4); частное есть: $ay^4 + by^4 + 2a^2y -$
 $- 2b^2y + 1$.

12. На основаніи теоремы 6-й онъ дѣлится и частное
 дѣленія есть: $4ax^2 - 3a^2x - 9a^3$.

13. { На основаніи теоремы 6-й полиномъ дѣлится на
 14. { каждого производителя, слѣдовательно и на ихъ
 произведеніе.

15. Многочленъ $32Ak^5 - 16Bk^4 + 8k^3 + 2k + H$ есть оста-
 токъ дѣленія по теоремѣ 6-й и слѣдовательно по теоремѣ
 5-й дѣлителя на сказанное количество.

16. Не дѣлится по теоремѣ 6-й; частное дѣленія есть
 $7x^6 + 21x^5 + 59x^4 + 177x^3 + 531x^2 + 1595x + 4788$; оста-
 токъ дѣленія 14356.

РАЗЛОЖЕНІЕ НА ПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ (стр. 98 и 99).

1. $3x^2(2x - y)^2$. 2. $(a + b + c)(a + b - c)$.

3. Можетъ быть представленъ въ видѣ:

$[(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]$, а потомъ въ видѣ:
 $(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$.

4. Какъ въ задачѣ 3-й полиномъ будетъ:

$(a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d)$.

5. $(a+b)^4$. 6. $3(x+y)[xy+z(x+y+z)]$.

7. $5(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (по теоремѣ 7-й § 44).

8. $a^2x(a^3+x^3)=a^2x(a+x)(a^2-ax+x^2)$ (по теор. 9-й § 44).

9. $a^{16}-b^{16}=(a^8+b^8)(a^8-b^8)=$
 $(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

10. $a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=$
 $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (по теор. 7-й и 9-й § 44).

11. Полиномъ дѣлится на $x-a$ (теор. 6 § 44-й) разложение есть: $(x-b)(x-a)$.

12. Дѣлится на $a-1$ (теор. 6 § 44) разложение есть: $(a-1)(a+1)(a^2+2)$.

13. Дѣлится на x^2-a^2 (теор. 6 и 7 § 44) разложение есть: $(x-a)(x+a)^3$.

14. Дѣлится на $x-y$, $x-z$ и $y-z$; разложение есть: $(x-y)(x-z)(y-z)(xy+xz+yz)$

15. $(a-b)^2(c-d)^2(a+b)^2(c+d)^2$.

ОБЩІЙ БОЛЬШІЙ ДѢЛИТЕЛЬ (стр. 111 и 112).

1. $14z$. 2. $x+3$. 3. $x-1$. 4. $3x-7$.

5. $x-2$ 6. $2x-1$. 7. $a^2c^2+2a^2c+3a^2$.

8. $4ab^3-8ab^2+2ab-2a$.

9. x^2-2x+1 . 10. $x+4$. 11. $x+1$. 12. $x-y$.

13. $x^2+(a+y)x+y^2$. 14. $2x-9$. 15. $ax-by$.

16. $2ax+2bx$. 17. $x-2a$.

ДРОБИ (стр. 131, 132, 133 и 134).

1. Увеличится когда $b < a+c$; уменьшится когда $b > a+c$ и останется безъ перемѣны когда $b=a+c$.

2. $\frac{2a^2x}{3b^2}$.

3. $\frac{5a}{a-x}$.

$$4. \frac{(a-x)(a^2+ax+x^2)}{(a-x)^2} = \frac{a^2+ax+x^2}{a-x}.$$

$$5. \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}. \quad 6. \frac{a^2(a-2)}{(a-2)^2} = \frac{a^2}{a-2}.$$

$$7. \frac{(1-a)(1+a)}{(1+ax+a+x)(1+ax-a-x)} = \\ = \frac{(1-a)(1+a)}{(1+a)(1+x)(1-a)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

8. Обращается въ нуль при $x=y$; сокращая производителя $x-y$, получимъ: $\frac{2(xy-2x^2-y^2)}{3x}$.

9. Обращается въ нуль при $a=b$ сокращая на $a-b$, найдемъ: $\frac{a^4-b^4}{a^3-ab^2} = \frac{a^2+b^2}{a}$.

10. Общій большій дѣлитель есть: $12ab^2-12b^3$; сокращенная дробь: $\frac{5a-6b}{6a^2-7ab+15b^2}$.

11. Общій бол. дѣл. есть: $3a^2+26ab-57b^2$; сокращенная дробь: $\frac{3a-b}{3a^3+35a^2b-7ab^2-13b^3}$.

$$12. \frac{6b^2+54a^3b^3+9nab^2+2ap}{36a^3b^3}. \quad 13. \frac{4,2b^2-2,2a^2}{a^2-b^2}.$$

$$14. \frac{2(4a^2+9x^2-4a^2x-9x^3)}{4a^2-9x^2} = \frac{2(4a^2+9x^2)(1-x)}{4a^2-9x^2}.$$

$$15. \frac{2}{x(1-4x^2)}. \quad 16. \frac{18a^3}{x^4+4a^3x+3a^4}.$$

$$17. \frac{3x^2+4x+2}{x^3-1}. \quad 18. x^{2n}+2. \quad 19. \frac{1}{abc}. \quad 20. 0.$$

$$21. 0. \quad 22. \frac{2x}{15a^3m}. \quad 23. \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^2}{a^2} + 1. \quad 24. 2,6a^2.$$

$$25. \frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}. \quad 26. 1. \quad 27. 1. \quad 28. \frac{1}{p^2q^2}.$$

29. } Производя знаками указанные дѣйствія повѣ-
 30. } римъ данныя формулы, ибо получимъ тоже ко-
 31. } личество съ обоихъ сторонъ знака равенства.
 32. }
 33. }
 34. $1 - b + b^2 - b^3 + b^4 - \dots$ 35. $a - ax + ax^2 - ax^3 + \dots$
 36. $1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \dots$
 37. $\frac{a^4}{b^6} - \frac{4c^6d^8}{b^{10}} - \frac{49c^4}{4a^8b^5} + \frac{7c^5d^4}{a^4b^8} + \frac{7c^5d^4}{a^4b^7} + \frac{7a^2c^2}{2a^4b^6} - \frac{7a^2c^2}{2a^4b^5}$
 38. $3x^3 - 2x^2 + \frac{133}{4}x + 9$ 39. $\frac{13b}{a^5} + \frac{10b^2}{a^2} - 4ab^3$
 40. $\frac{3a^{m-1}c}{2d^{3p}} - a^n b^{2n-1} d^3 - \frac{2^5 b^x}{3}$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЯ КОЛИЧЕСТВА (стр. 161, 162, 163 и 164).

1. $29, 2\sqrt{3}$. 2. $k^3(2x^2\sqrt{x} + \sqrt{5})$.
 3. $m^2n^2\sqrt[4]{2m^3n}\{2n^3-1\}$.
 4. $20\frac{2}{9}\sqrt{2}$. 5. $6a\sqrt[12]{a^5}\sqrt[3]{a^2}$. 6. $\sqrt{a^2-x^2}$. 7. $\sqrt{2}$.
 8. $4\sqrt{3}\sqrt[4]{3}$. 9. $a^4b\sqrt[6]{ab}$. 10. $\sqrt[3]{0,9}$. 11. $\frac{2a}{b^3}\sqrt{5a}$.
 12. $3ax^8\sqrt[12]{\frac{24}{a}}$. 13. $25a^2-12a^3-25\sqrt[6]{b}+12a\sqrt[6]{b}$.
 14. $\frac{5}{36} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{18} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{12}$.
 15. $\sqrt[m]{x^{2p}} - 2\sqrt[mn]{x^{np}y^{mq}} + \sqrt[n]{y^{2q}}$. 16. $a^2\sqrt[3]{b}$.
 17. $3\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{x}\left\{\frac{1}{x^8} - 6x^{13}\sqrt{x}\right\}$. 18. $\frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{a^2-x}{a^2+x}}$.
 19. $\frac{b^5c^3\sqrt[8]{3}}{a^2}$. 20. $\frac{a^4}{x}\sqrt[6]{2a}\sqrt[24]{5}$. 21. $x - 2\sqrt{x+1}$.

22. $x+y$. 23. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}$. 24. $x+\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{3}$.

25. $2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b}+4\sqrt[4]{c}$.

26. Вводя $\frac{1-ax}{1+ax}$ подъ радикаль и производя требуемые знаками дѣйствія, послѣ внесенія вмѣсто x его значенія, найдемъ единицу въ результатѣ.

27. Обратится въ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. 28. Въ $a+b$.

29. Въ b . 30. Резулт. преобраз. есть $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

31. Результатъ преобразованія есть $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

32. Преобразованная дробь $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{b-c}$.

33. $\frac{b\sqrt{a}-\sqrt{ac}}{b^2-c}$. 34. $\frac{xy}{4-x}$.

35. $\frac{(a+\sqrt{b})^{n-1}}{a+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}})^{n-1}(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$.

36. Дробь преобразовывается по формулѣ (II) (стр. 155); раціональный знаменатель ея есть $a-b$.

37. Раціональный знаменатель, преобразованной по формулѣ (I) (стр. 154) дроби есть: a^3-b^4 .

38. Раціон. знаменатель, преобр. по фор.; (I) (стр. 154) дроби есть: $32a-4$.

39. Раціон. знаменатель, преобр. по фор. (III) (стр. 155), дроби есть 2189.

40. Раціон. знаменатель, преобраз. по форм. (11) стр. 155, дроби есть: $2+a^8b^4$.

41. Помножая числителя и знаменателя дроби сначала на $\sqrt{10}-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, потомъ на $9+2\sqrt{20}$, найдемъ

преобразованную дробь, рациональный знаменатель которой есть единица.

42. Рациональный знаменатель преобразованной (как и въ 41-й задачь) дроби есть 20.

43. Рациональный знаменатель преобразованной дроби есть: $(f^2 - g^2h)^2 - 2m(f^2 - g^2h) + m^2$.

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЯ КОЛИЧЕСТВА (стр. 205, 206 и 207).

1. Вершина Св. Іліи есть 0; Эльбруса — 304 фут.; Казбека — 2276 ф.

Вер. Эльбруса 0; Св. Іліи + 304 ф.; Казбека—1972 ф.

Вер. Казбека 0; Св. Іліи +2276 ф.; Эльбруса+1972 ф.

2. Время 1-го событія есть +1618 лѣтъ; 2-го +1686 л.; 3-го + 1637 л.

3. Измѣнивъ нашу эру на — 385 лѣтъ, время 1-го событія будетъ + 1; 2-го + 173; 3-го + 526. Измѣнивъ нашу эру на —212 л., время 1-го событія будетъ —172 г.; 2-го 0 и 3-го +353 г. Измѣнивъ эру на +142 г. время 1-го соб. буд. — 526; 2-го — 354; 3-го — 1.

4. $(-a^2) - (-b^3)$. 5. $(-3x^2 - y^2) + 4x^2$.

6. $h+k$; 2-я $>$ 1-й когда k положительно; 2-я $<$ 1-й когда k отрицательно.

7. Когда 2-й локомотивъ ѣдетъ въ Москву $x=vt+v_1t= (v+v_1)t$; въ Петерб. $x=(v-v_1)t$. Для обоихъ случаевъ $x=(v+v_1)t$, гдѣ v_1 положительно или отрицательно.

8. 1-й проѣхалъ во время t , $a+vt$ фут.; 2-й, a_1+v_1t .

Если $a > a_1$ то $x=a-a_1+(v-v_1)t$

$a < a_1$ $x=a_1-a+(v_1-v)t$

Вообще $x=-[a-a_1+(v-v_1)t]$.

9. Для 1-го случая года B суть $3(a+t)-t=3a+2t$.

Для 2-го случая $3(a - t) + t = 3a - 2t$; Для обоих случаев года B суть $3a + 2t$, гдѣ t положительно или отрицательно.

$$10. 3xy^2 + x^2. \quad 11. 30, 48. \quad 12. 4. \quad 13. \frac{x}{a^3}.$$

$$14. 11x. \quad 15. \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}. \quad 16. \frac{2ax}{c}.$$

$$17. -\frac{3}{a^2\sqrt{b}}. \quad 18. -2k^3x^2\sqrt{x}.$$

19. Вставляя получимъ требуемое.

$$20. -[-4a^2(-b^2)][b^2 + 3b - 2a].$$

21. Выраженіе > 0 , когда $m < 1$; равно 0, когда $m = 1$; и < 0 , когда $m > 1$.

22. При n четномъ.

23. Одинаковы, если m нечетное и различны при m четномъ.

24. Обращается въ нуль при $a = -b$; $a = -c$; и $b = -c$.

25. Выраженіе дѣлится на $a^2 + b^2 + c^2$ и на $x^2 + y^2 + z^2$, что легко видѣть раскрывъ скобки и посему обращается въ нуль когда $a^2 = -(b^2 + c^2)$ или $x^2 = -(y^2 + z^2)$.

26. Вставляя получимъ:

$27C^2 - 4B^3 = -[4(b^6 + c^6 - 2b^3c^3) + 12bc(b^4 + c^4 - 2b^2c^2) - 3b^2c^2(b^2 + c^2 - 2bc)] = -[4(b^3 - c^3)^2 + 12bc(b^2 - c^2)^2 - 3b^2c^2(b - c)^2]$, замѣчая что биномы въ скобкахъ дѣлятся на $b - c$ и слѣдовательно квадраты ихъ на $(b - c)^2$, отдѣлимъ послѣдняго производителя: $27C^2 - 4B^3 = -(b - c)^2[4b^4 + 4c^4 + 8b^2c^2 + 20b^3c + 20bc^3 + 25b^2c^2] = -(b - c)^2[2b^2 + 5bc + 2c^2]^2$, что, какъ произведеніе квадратовъ со знакомъ минусъ всегда отрицательно.

ДРОБНЫЕ, ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ
ПОКАЗАТЕЛИ (стр. 233, 234, 235 и 236).

$$1. (a^2 - b)^{\frac{1}{5}} + 3c^{\frac{1}{6}} - 3^{\frac{1}{12}} a^{\frac{1}{3}} c^{\frac{5}{12}}.$$

$$2. 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{6}} 2^{\frac{1}{12}} - a^{\frac{2}{m}} b^{\frac{1}{2m}} c^{\frac{3}{4m}} + (a - b)^{\frac{p}{n}}.$$

$$3. a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{7}{6}} c^{-2} + a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} d^{-\frac{5}{2}}.$$

$$4. a^{-\frac{1}{2}} (a + x)^{-\frac{1}{3}} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{4}{3}} f^{-\frac{2}{5}} g^{-\frac{1}{3}} (a + b)^{\frac{7}{3}}.$$

$$5. b^{-\frac{m}{3}} c^{-\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{35}} b^{-\frac{1}{8}} c^{\frac{m}{4}} + a^{-\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}} r^{-\frac{1}{m}}.$$

$$6. 2^{\frac{5}{4}} a^{15} b^{-\frac{15}{4}} k^{\frac{25}{6}} l^{-\frac{5}{8}} + a^{\frac{3}{8m}} b^{\frac{1}{m}} c^{-\frac{1}{4m}} d^{\frac{1}{m}}.$$

$$7. \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[m]{b} \sqrt[10]{x^{25}}} + \frac{1}{\sqrt[p]{\sqrt[7]{a} \cdot \sqrt{\frac{b}{\sqrt{c}}}}}.$$

$$8. \frac{1}{\sqrt[p]{\frac{a}{\sqrt[q]{\frac{b}{\sqrt[r]{c}}}}}} + \frac{1}{\sqrt[s]{\sqrt[m]{\frac{1}{\sqrt{a}}}}}.$$

$$9. \sqrt{\sqrt[r]{\sqrt[v]{\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}}}} - \frac{1}{\sqrt[r]{\frac{1}{\sqrt[v]{\frac{1}{\sqrt[q]{\frac{1}{\sqrt[p]{b}}}}}}}}.$$

$$10. b^{\frac{1}{2}}. \quad 11. a^{-\frac{1}{2}} c^{-4} d. \quad 12. 1. \quad 13. a^6 b^{-9} c^{15} f^{-18} x^3.$$

$$14. a^{3m - \frac{9m^2}{n}} f^{6m + \frac{3m}{n}} x^{3m}. \quad 15. a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{8}} c^{-\frac{1}{10}} + a^{-\frac{1}{20}}.$$

$$16. -a^{4m+1}b^{1-9m^2}c^{-\frac{p}{q}(3m+1)}d^{(1+3m)^2}. \quad 17. \frac{ab}{2}.$$

$$18. 0,8a^{\frac{41}{30}}x^{-7}b^{-3}. \quad 19. a^{-3}b^{-\frac{1}{4}}. \quad 20. 1. \quad 21. y^m.$$

$$22. a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}. \quad 23. x-2x^{\frac{1}{2}}+1.$$

$$24. -\frac{8}{3}a^{\frac{26}{3}}b^{\frac{49}{3}}.$$

$$25. 9a^{\frac{34-13m}{5}}b^{2m+1}c^{-(2+3m)}+51a^{3-2m}b^{3m+1}c^{-4m}- \\ -24a^{\frac{29-3m}{5}}b^m-136a^2b^{2m}.$$

$$26. a^{-1}x+2a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+3+2a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+ax^{-1}.$$

$$27. x^2-8x^{\frac{3}{2}}+24x-32x^{\frac{1}{2}}+16.$$

$$28. a^{\frac{2}{5}}d^{\frac{12}{5}}c^{-2}f^{-\frac{2}{5}}-a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}c^{\frac{8}{3}}d^2g^{-\frac{2}{3}}. \quad 29. a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{3}}.$$

$$30. x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}. \quad 31. a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b.$$

$$32. a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}-ca^{\frac{1}{5}}b^{\frac{1}{3}}.$$

$$33. x^{\frac{m-1}{n}}+x^{\frac{m-2}{n}}a^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{m-3}{n}}a^{\frac{1}{n^2}}+....$$

$$....+x^{\frac{1}{n^2}}a^{\frac{m-3}{n}}+x^{\frac{1}{n}}a^{\frac{m-2}{n}}+a^{\frac{m-1}{n}}.$$

$$34. 2x^2-3xy+2y^2.$$

$$35. 1+a^{\sqrt{2}}+a^{\sqrt{3}}b+a^{\sqrt{4}}b^2+a^{\sqrt{5}}b^3+a^{\sqrt{6}}b^4.$$

$$36. a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}.$$

37. } Формулы повѣряются тѣмъ, что получаются съ
38. } обѣихъ сторонъ знака равенства тѣже коли-
39. } чества.

МНИМЫЯ КОЛИЧЕСТВА (стр. 248 и 249).

1. $5\sqrt{6}\sqrt{-1}$. 2. $5pq\sqrt{q}\sqrt{-1}$. 3. $-15+81\sqrt{-1}$.

4. $-2\sqrt{21}+10\sqrt{7}+7\sqrt{14}+4\sqrt{3}-20-14\sqrt{2}$.

5. a^2+b . 6. $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$. 7. $-2\sqrt{-1}$.

8. $a^2-b \pm 2a\sqrt{b}\sqrt{-1}$.

9. Всякія четыре цѣлыя, послѣдовательныя степени $\sqrt{-1}$ даютъ: $+1$, $\sqrt{-1}$, -1 , $-\sqrt{-1}$, сумма которыхъ есть нуль.

10. $a^3-3ab \pm \{(3a^2-b)\sqrt{b}\}\sqrt{-1}$.

11. Требуемое легко доказать, возводя каждое изъ двухъ данныхъ количествъ въ квадратъ, а потомъ въ кубъ.

12. Каждое изъ 4-хъ количествъ 1-й части равенства $= -1$, слѣдовательно сумма ихъ $= -4$.

13. $-2-2\sqrt{3}\sqrt{-1}$. 14. $1-2\sqrt{2}\sqrt{-1}$.

15. $-2-\sqrt{3}\sqrt{-1}$.

16. $\frac{6+\sqrt{15}}{21} + \left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{42}\right)\sqrt{-1}$.

17. $\frac{2m\sqrt{a}}{4a+9b} - \left(\frac{3m\sqrt{b}}{4a+9b}\right)\sqrt{-1}$. 18. $1+2\sqrt{-1}$.

19. $\frac{5a\sqrt{d}}{c} - 2a\sqrt{\frac{b}{d}}\sqrt{-1}$. 20. 20. 21. $\sqrt[48]{a}\sqrt{-1}$.

22. $\pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} \right]$.

23. $\pm \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt[4]{-2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt[4]{-2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}{2}}\sqrt{-1} \right\}$.

(Знаки внутри скобокъ должно брать или всѣ верхніе, или всѣ нижніе).

$$24. \ m=3k, \ \left[\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \right)^3 \right]^k +$$

$$+ \left[\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \right)^3 \right]^k = 1^k + 1^k = 2;$$

$$m=3k+1, \ 1^k \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \right) + 1^k \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \right) = -1;$$

$$m=3k+2, \ 1^k \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \right)^2 + 1^k \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \right)^2 = -1.$$

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	Строк.	Напечатано:	Слѣдов. напечатать.
90	13 сверху	$a^0b^m+b^m$	$-a^0b^m+b^m$
94	5 снизу	$-a^8b^3$	$-a^8b^8$
95	11 сверху	$3a^2by^4+3ab^2y^4$	$a^2by^4+ab^2y^4$
98	5 снизу	$+b(a+b)^2+ab(a+b)^2$	$+b^2(a+b)^2+2ab(a+b)^2$
112	3 сверху	-44	-48
—	10 »	$5x^4$	$5x^2$
—	14 »	$-y$	$-y^4$
131	7 снизу	a^2-4n+4	a^2-4a+4
132	3 сверху	$-138ab^3$	$-132ab^3$
—	4 »	$-204a^2b^3$	$-156a^2b^3$
—	6 »	$+688a^3b^2-2476a^2b^3$	$+718a^3b^2-2216a^2b^3$
—	»	$+631ab^4+741b^5$	$+61ab^4+741b^5$
134	10 »	$-\frac{43}{4}x^2-\frac{33}{4}x$	$-\frac{91}{4}x^2-\frac{363}{4}x$
161	4 снизу	$3a^2\sqrt{\frac{\frac{1}{a}-\frac{a^2}{x}}{a+x}}$	$3a^2\sqrt{\frac{\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}}{a+x}}$
—	5 »	$+1\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$	$+1\frac{1}{2}\sqrt{\quad}$
—	6 »	$3a\sqrt{\quad}$	$3a\sqrt[3]{\quad}$
—	»	$+\sqrt{4a^3b}+\sqrt{\quad}$	$+\sqrt{4a^3b}\sqrt{\quad}$
162	8 »	$\sqrt{a^{16}-a^4x^2}$	$\sqrt{a^8-a^4x^2}$
178	1 »	есть 10,1 0 руб.	есть 10,100 руб.
223	6 »	$\frac{1}{a^{-p^q}}$	$\frac{1}{a^{-pq}}$
—	7 »	$\frac{1}{a^{-p^4}}$	$\frac{1}{a^{-pq}}$

