

262513

Н. И. Мерцаловъ,

ад.-проф. Императорскаго Техническаго Училища.

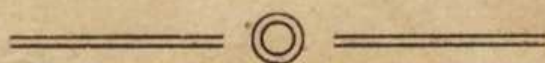
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА.

Часть I.

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВЪ.

Вып. IV (временный),

съ приложеніемъ литографированнаго атласа съ 93 чертежами.





Классификація механізмівъ.

Высшими кинематическими парами, какъ мы знаемъ, будутъ такія, въ которыхъ соприкосновеніе элементовъ происходитъ только по линиямъ или точкамъ. При изслѣдованіи механизмовъ, составленныхъ изъ такихъ паръ, приходится держаться иного порядка изложенія, нежели при разсмотрѣніи низшихъ паръ. Тамъ, въ виду ограниченнаго числа самихъ паръ, можно было до извѣстной степени систематически исчерпать наиболѣе важныя ихъ комбинаціи, здѣсь же, при безграничномъ числѣ какъ самихъ паръ, такъ и ихъ комбинацій, нельзя произвести подобный систематическій обзоръ механизмовъ, какъ возможныхъ сочетаній изъ тѣхъ или другихъ винтовыхъ паръ. Является поэтому необходимость заранѣе положить въ основу изложенія болѣе или менѣе искусственную классификацію механизмовъ, а такъ какъ во всякомъ механизмѣ движеніе какого-либо звена должно передаваться въ опредѣленномъ видѣ другимъ звеньямъ, то на этомъ основаніи въ основу классификаціи можно положить именно *характеръ* передачи движенія; механизмъ здѣсь разсматривается, какъ преобразователь даннаго движенія въ желаемое для насъ. Преобразование это можетъ заключаться какъ въ измѣненіи направленія движенія, такъ и въ измѣненіи его скорости; при этомъ измѣненные факторы движенія (скорость и направленіе) могутъ оставаться или въ постоянномъ отношеніи съ основными, или въ переменномъ; можно, напримѣръ, передавать вращеніе отъ одной оси къ другой въ сторону, скажемъ, противоположную и съ отношеніемъ скоростей постояннымъ или переменнымъ по извѣстному заранѣе данному закону.

Далѣе можно различать, происходитъ ли передача при помощи непосредственнаго соприкосновенія двухъ звеньевъ, или при помощи промежуточныхъ звеньевъ. Такъ, напримѣръ, въ кривошипномъ механизмѣ вращательное движеніе кривошипа передается въ видѣ возвратнаго поступательнаго движенія ползуна (т.-е. отношеніе и скоростей и направленій здѣсь переменны), но не непосредственно, а при помощи промежуточнаго звена—шатуна.

Эти признаки характера передачи, т.-е. отношеніе факторовъ движенія, а также отсутствіе или существованіе промежуточныхъ звеньевъ, и положены въ основу классификаціи англійскаго ученаго Виллиса, коей мы, по примѣру проф. Д. С. Зернова, и будемъ придерживаться въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Механизмы раздѣлены Виллисомъ на три класса. Къ *первому* отнесены тѣ, въ которыхъ передача происходитъ *непосредственнымъ* *соприкосновеніемъ*; ко *второму*—механизмы съ передачей движенія при помощи *промежуточныхъ твердыхъ* и къ *третьему*—*жидкихъ и гибкихъ тѣлъ*.

Каждый классъ дѣлится на три отдѣла, сообразно тому, каковы отношенія факторовъ движенія: въ *первомъ отдѣлѣ* отношенія направлений и скоростей—*постоянны*, во *второмъ*—отношеніе скоростей *переменно*, и въ *третьемъ*—*мѣняется и то, и другое отношеніе*.

Согласно такой классификаціи, прежде всего мы обратимся къ механизмамъ, передающимъ движеніе *непосредственнымъ* *соприкосновеніемъ* и съ *постояннымъ* отношеніемъ какъ между направленіями, такъ и между скоростями движеній.

Передача движенія непосредственнымъ прикосновеніемъ.

Отдѣлъ I. Отношенія между скоростями и направленіями постоянны.

Цилиндрическая фрикціонная передача.

Здѣсь важнѣйшими являются механизмы для передачи вращательнаго движенія между двумя какими-либо осями. Разсмотримъ, какъ можно устроить такую передачу въ случаѣ параллельныхъ осей. Пусть имѣются двѣ параллельныя оси *A* и *B* (фиг. 1). Пусть, далѣе, система, связанная съ осью *A*, вращается съ угловою скоростью ω , система же, связанная съ осью *B*, должна вращаться со скоростью ω_1 ; пусть, наконецъ, отношеніе этихъ скоростей не мѣняется, такъ что

$$\frac{\omega}{\omega_1} = n = \text{const} \dots \dots \dots (1)$$

Вращенія около параллельныхъ осей суть движенія, параллельныя плоскости; поэтому рассмотримъ какое-либо плоское сѣченіе обѣихъ системъ, сдѣланное перпендикулярно къ направленію осей. Предположимъ, что направленія вращеній системъ *A* и *B* противоположны, т.-е. вращеніе системы *A* противъ часовой стрѣлки съ угловою скоростью ω должно передаться системѣ *B* вращеніемъ по часовой стрѣлкѣ и съ заданной угловою скоростью ω_1 , гдѣ $\omega : \omega_1 = n$, причемъ *n* заранѣе дано. Это число *n* называется *передаточнымъ числомъ*.

Предположимъ, что мы уже устроили систему, удовлетворяющую предъявленнымъ условіямъ, и теперь рассмотримъ, какъ движется система *A* относительно системы *B*. Для этого придаемъ обѣимъ системамъ вращательное движеніе около *B* со скоростью ω_1 , но направлен-

ное въ сторону, противоположную дѣйствительному вращенію системы *B*. Тогда, очевидно, система *B* придетъ въ покой, а получаемое абсолютное движеніе системы *A* и дастъ намъ ея движеніе относительно *B*.

Система *A* имѣетъ теперь 2 движенія: она вращается около оси *B* съ угловой скоростью ω_1 , а около оси *A*—со скоростью ω . Вслѣдствіе перваго изъ этихъ вращеній ось *A* будетъ описывать около оси *B* цилиндрическую поверхность и, слѣд., въ плоскомъ сѣченіи—кругъ центра *B*. Въ каждый данный моментъ оба вращенія—около *A* и около *B*—можно замѣнить однимъ около нѣкоторой промежуточной оси *P*, положеніе которой относительно прежнихъ осей находится по общимъ правиламъ сложения вращательныхъ движеній между параллельными осями; точка *P* будетъ дѣлить разстояніе между *A* и *B* на части, обратно-пропорціональныя угловымъ скоростямъ, такъ какъ точка *P* должна удовлетворять соотношенію

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{n} \dots \dots \dots (2)$$

вращеніе же около этой точки *P* будетъ, конечно, въ ту же сторону, что и оба составныхъ.

Такъ какъ разстояніе *AB* между осями не мѣняется, а отношеніе *AP:BP* есть величина постоянная, какъ это ясно изъ равенства (2), гдѣ *n* величина постоянная, то и разстояніе точки *P* (въ плоскости сѣченія) отъ *B* будетъ постояннымъ:

$$BP = const = AB \frac{\omega}{\omega + \omega_1} = AB \frac{n}{n + 1} \dots \dots \dots (3)$$

Такимъ образомъ, неподвижной полоидой плоской системы *A* въ ея движеніи относительно *B* будетъ окружность центра *B* и радіуса *BP*.

Не трудно видѣть, что подвижной полоидой будетъ окружность центра *A* радіуса *AP*.

Такимъ образомъ, движеніе системы *A* относительно *B* приводится къ каченію одной окружности по другой въ плоскости сѣченія или, — въ пространствѣ, — къ каченію одного цилиндра по другому. Если мы выполнимъ въ дѣйствительности оба цилиндра такъ, чтобы они плотно прикасались другъ къ другу и не могли бы имѣть относительнаго скольженія, то при вращеніи одного изъ нихъ около *A* съ угловой скоростью ω , мы получимъ вращеніе другого около *B* съ угловой скоростью ω_1 , гдѣ ω_1 выразится въ видѣ $\omega_1 = \frac{\omega}{n}$; на самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе тренія цилиндра *A* будетъ увлекать за собою цилиндръ *B*, и такъ какъ скольженія, по нашему предположенію, нѣтъ, то относительное движеніе цилиндровъ будетъ каченіемъ одного по другому, цилиндры же эти построены именно для даннаго опредѣленнаго отношенія $\frac{\omega}{\omega_1}$.

Пользуясь такимъ методомъ, мы можемъ, слѣдовательно, устроить пе-

редачу вращательныхъ движеній съ постояннымъ отношеніемъ скоростей; передачи такого вида называются *цилиндрическими фрикціонными передачами*.

Итакъ, чтобы построить такую передачу между данными осями *A* и *B* при опредѣленномъ отношеніи и направленіи скоростей, надо раздѣлить разстояніе *AB* на части *AP* и *PB*, находящіяся между собою въ отношеніи, обратномъ отношенію скоростей, выполнить круглые цилиндры радіусовъ *AP* и *PB*, насадить ихъ на оси *A* и *B*, устроить плотное соприкосновеніе между ними, для чего потребуется нажатіе ихъ другъ на друга, съ опредѣленнымъ усиліемъ, зависящимъ, конечно, отъ относительнаго тренія матеріаловъ, изъ которыхъ сдѣланы цилиндры; нажатіемъ этимъ мы и устраняемъ относительное скольженіе цилиндровъ.

Въ указанномъ видѣ передача примѣняется довольно часто; но такъ какъ при ея примѣненіи приходится считаться съ нажатіемъ осей другъ къ другу, часто совершенно нежелательнымъ, то эту фрикціонную передачу замѣняютъ зацѣпленіемъ.

Замѣна катящихся цилиндрическихъ поверхностей скользящими.

Представимъ себѣ въ системѣ *A* (фиг. 2) нѣкоторую цилиндрическую поверхность, профиль которой пусть будетъ *MM*, а въ системѣ *B* также цилиндрическую поверхность съ профилемъ *NN*, находящуюся въ соприкосновеніи съ первой; вращая *A*, мы при помощи давленія поверхности *MM* на поверхность *NN* можемъ заставить вращаться и систему *B*. Спрашивается теперь, какое соотношеніе должно существовать между этими двумя профилями, чтобы вращеніе около *A* съ угловой скоростью ω могло передаться *B* со скоростью ω_1 , при чемъ должно быть выполнено условіе: $\omega : \omega_1 = n$, гдѣ *n*—данное число.

Система *B* должна вращаться со скоростью ω_1 ; поэтому, если мы въ какой-нибудь моментъ придадимъ обѣимъ системамъ еще общее вращеніе около оси *B* со скоростью ω_1 , направленной, однако, въ противоположную сторону, то система *B* должна придти въ покой; система *A*, а, слѣд., и профиль *MM*, въ этотъ моментъ будутъ вращаться около полюса *P*, находимаго указаннымъ выше способомъ. Но профиль *MM*, по условію, долженъ находиться въ соприкосновеніи съ профилемъ *NN*, допустимъ, въ данный моментъ въ точкѣ *K*; а такъ какъ, съ другой стороны, система *B* должна оставаться въ покой, то для того, чтобы при своемъ вращеніи около *P* этотъ профиль *MM* не стремился сдвинуть профиля *NN*, движеніе точки *K* его въ этотъ моментъ должно происходить по касательной къ профилю *NN* въ той же точкѣ *K*, а это будетъ выполнено, если нормаль къ обоимъ профилямъ въ точкѣ *K* будетъ проходить черезъ полюсъ *P*.

Приведенное разсужденіе остается справедливымъ для всякаго момента; поэтому отсюда вытекаетъ, что профиль *NN* долженъ служить огибающей профили *MM* при движеніи системы *A* относительно *B*.

Итакъ, задаваясь какимъ-нибудь профилемъ *MM* въ системѣ *A*, для данной опредѣленной передачи мы найдемъ соотвѣтствующій ему, или, какъ говорятъ, *сопряженный* ему профиль въ системѣ *B* въ видѣ огибающей профили *MM* при каченіи полоиды, связанной съ осью *A*, по полоидѣ, связанной съ *B*. Устроивъ, далѣе, цилиндрическія поверхности *MM* и *NN* съ направляющими, параллельными осямъ, мы приобрѣтемъ возможность передать вращеніе около оси *A* вращеніемъ около оси *B* съ желаемымъ отношеніемъ скоростей. При этомъ вращеніи поверхности *MM* и *NN* будутъ находиться въ соприкосновеніи, и общая нормаль ихъ въ точкѣ соприкосновенія пройдетъ черезъ полюсъ *P*, *вполнѣ и единственно* опредѣляемый на линіи *AB* для данной передачи.

Относительное движеніе профили *MM* по *NN* при вращеніи обѣихъ системъ будетъ, какъ это мы знаемъ изъ свойствъ огибающихъ и огибаемыхъ, сопровождаться скольженіемъ. Такъ какъ угловая скорость вращенія *MM* около полюса *P* для данной передачи при вращеніяхъ въ противоположныя стороны системъ *A* и *B* выразится черезъ $(\omega + \omega_1)$, то скорость скольженія въ данный моментъ будетъ равна $p \cdot (\omega + \omega_1)$, гдѣ черезъ *p* обозначена длина нормали *KP*.

Не трудно, подобно вышеизложенному, разобрать и тотъ случай, когда вращенія около оси *A* и *B* должны оба совершаться въ одну сторону съ сохраненіемъ, попрежнему, постояннаго отношенія между угловыми скоростями: $\omega : \omega_1 = n$, гдѣ и *n* дано.

Положимъ, что $\omega > \omega_1$; тогда полюсъ мгновеннаго вращенія въ движеніи *A* относительно *B* найдется по общимъ правиламъ въ точкѣ *P* на продолженіи линіи *AB* (внѣ отрѣзка *AB*) въ сторону *A* (фиг. 3), при чемъ разстоянія *PA* и *PB* должны удовлетворять соотношенію:

$$PA : PB = \omega : \omega_1.$$

Полоидами будутъ здѣсь опять окружности центровъ *A* и *B* и радіусовъ *AP* и *BP*; только одна изъ нихъ, *A*, будетъ находиться теперь внутри другой, *B*. Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ случаѣ передачи вращенія въ противоположную сторону, можно представить себѣ два профили, связанные съ этими полоидами, выполнить по нимъ цилиндрическія поверхности, при помощи которыхъ и осуществится наша передача. Опять, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, профили должны находиться въ указанномъ соотношеніи, т.-е. одинъ изъ нихъ долженъ представлять собою огибающую положеній второго въ относительномъ движеніи полоиды, принадлежащей первому профилю, по полоидѣ, принадлежащій второму. Разница будетъ здѣсь только въ скорости относительнаго скольженія профилей, и не трудно видѣть, что въ этомъ случаѣ она выразится въ видѣ $p \cdot (\omega - \omega_1)$, гдѣ черезъ *p* мы попрежнему

обозначили отрезокъ общей нормали отъ полюса до точки прикосновенія; вторымъ же факторомъ произведенія взята разность $(\omega - \omega_1)$, — разность потому, что *относительная* скорость вращенія здѣсь равна *разности* (а въ первомъ случаѣ—*суммѣ*) угловыхъ скоростей обѣихъ системъ.

Графическое построение профиля, сопряженного данному.

Разсмотримъ теперь вообще, какъ по данному профилю находится графически профиль, ему сопряженный. Построение, какъ это слѣдуетъ изъ приведенныхъ выше соображеній, сводится къ отысканію огибающей по данной огибаемой, и его можно выполнить по нѣсколькимъ методамъ, точнымъ или приближеннымъ; ниже мы приводимъ два очень удобные метода, достаточно точные и несложные; одинъ изъ нихъ предложенъ *Poncelet*, а другой — *Reuleaux*. Основой какъ для того, такъ и для другого служить свойство огибающей имѣть съ огибаемой общую нормаль въ точкѣ соприкосновенія, проходящую черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія.

Способъ Poncelet. Пусть профиль M принадлежитъ полоидѣ O (фиг. 4); вращенія системъ указаны стрѣлками, и вращеніемъ O противъ стрѣлки часовъ требуется передать вращеніе O_1 по стрѣлкѣ. Последовательность точекъ соприкосновенія полоиды O въ движеніи этой системы относительно O_1 будетъ, очевидно, идти по стрѣлкѣ часовъ, т.-е. точками соприкосновенія будутъ послѣдовательно служить, напр., точки $1, 2, 3, 4$ и т. д. Соотвѣтствующія имъ точки полоиды O_1 найдемъ, отложивъ дуги:

$$\smile P2' = \smile P2, \smile 2'1' = \smile 21, \smile P3' = \smile P3, \smile 3'4' = \smile 34,$$

и т. д., что мы можемъ сдѣлать достаточно точно циркулемъ, если только дуги возьмемъ достаточно малыми, что и дастъ намъ возможность принимать ихъ за отрезки прямыхъ. Опустимъ теперь изъ точекъ $(1, 2, 3...)$ нормали на профиль M ; этотъ профиль M мы можемъ разсматривать, какъ огибающую окружностей, описанныхъ изъ точекъ $1, 2, 3...$ радіусами, равными нормалямъ, и, значить, касающихся профиля M ; но нормали, опущенныя на искомую огибающую профиля M изъ точекъ $1', 2', 3', ...$ должны быть равны нормалямъ изъ точекъ $1, 2, 3, ...$ на M ; слѣдовательно, искомая огибающая представляетъ собою огибающую окружностей, описанныхъ изъ точекъ $1', 2', 3', ...$ радіусами, равными соотвѣтственнымъ нормалямъ профиля M . Чѣмъ больше мы возьмемъ точекъ $1, 2, 3, ...$, а, слѣд., и точекъ $1', 2', 3', ...$, т.-е. иными словами, чѣмъ ближе эти точки другъ къ другу, тѣмъ точнѣе можно построить сопряженный профиль, и при достаточномъ числѣ взятыхъ точекъ, а также при правильности построенія нормалей, откладыванія равныхъ дугъ, дуги окружностей, описанныхъ изъ центровъ $1', 2', 3'$ и др., какъ бы сольются въ одну непрерывную кривую.

Само собою разумѣется, что для построения безразлично, будутъ ли полоиды окружностями или какими-нибудь другими кривыми.

Огибающую можно вычертить еще по точкамъ: такъ, напр., пусть величина нормали изъ точки 1 намъ извѣстна; значитъ, извѣстна величина нормали изъ точки $1'$ на искомую огибающую; стоитъ теперь только опредѣлить направленіе этой нормали, и мы получимъ одну изъ точекъ огибающей; направленіе же мы можемъ получить на основаніи того соображенія, что нормаль изъ точки (1) на M дѣлаетъ съ касательной въ точкѣ (1) такой же уголъ, какой должна дѣлать нормаль изъ точки ($1'$) на искомую огибающую M_1 съ касательной въ точкѣ ($1'$) полоиды O_1 —обѣ касательныя и обѣ нормали должны совпасть въ тотъ моментъ, когда обѣ полоиды коснутся одна другой въ точкѣ ($1, 1'$).

Способъ Reuleaux, излагаемый ниже, особенно удобенъ для разбираемаго нами теперь случая передачи вращенія *съ постояннымъ отношеніемъ скоростей*, слѣд., при полоидахъ—*окружностяхъ*; огибающая строится здѣсь по точкамъ. Способъ этотъ основанъ на отысканіи мѣста точекъ соприкосновенія профиля M (фиг. 5) съ сопряженнымъ ему профилемъ въ системѣ O_1 при вращеніи обѣихъ системъ, одной около O , другой около O_1 —съ требуемымъ отношеніемъ скоростей, т.-е. при каченіи полоидъ O и O_1 другъ по другу.

Возьмемъ на полоидѣ O какую-нибудь точку X и опустимъ изъ нея на профиль M нормаль XU . Въ тотъ моментъ, когда при вращеніи системъ O и O_1 профиль M коснется точкой Y соответствующаго ему профиля системы O_1 , нормаль XU , какъ мы знаемъ, пройдетъ черезъ P , т.-е. точка X придетъ въ точку P линіи OO_1 , но точка Y , какъ связанная неразрывно съ системой O , все время будетъ находиться на окружности центра O и радіуса OY , и, слѣд., мы найдемъ положеніе точки Y въ моментъ соприкосновенія профилей на пересѣченіи окружностей: одной—изъ O радіуса OY , и другой—изъ P радіуса XU . Именно въ этой точкѣ пересѣченія этихъ двухъ окружностей, точкѣ (yy_1), и совпадетъ точка Y профиля M съ соответствующей ей точкой Y_1 профиля M_1 , сопряженнаго съ M .

Въ свою очередь, точка Y_1 будетъ во все время находиться на окружности центра O_1 и радіуса O_1Y_1 ; точкѣ X въ первомъ ея положеніи соответствуетъ въ системѣ O_1 точка X_1 , отстоящая (считая по полоидѣ O_1) на дугу $PX_1 =$ дугѣ PX ; отъ этой точки X_1 искомая точка Y_1 находится на разстояніи, равномъ XU . Поэтому начальное положеніе точки Y_1 , соответствующее первому положенію точки Y , мы найдемъ въ точкѣ пересѣченія окружностей: одной изъ O_1 радіуса O_1 (yy_1), а другой—изъ X_1 радіуса, равнаго XU . Пусть это будетъ точка Y_1 .

Эта точка Y_1 есть одна изъ точекъ искомаго профиля M_1 , сопряженнаго заданному M , соответствующая одной изъ точекъ этого послѣдняго—точкѣ Y .

Поступая подобнымъ же образомъ, мы для каждой точки профиля M найдемъ соответствующую ей точку профиля M_1 , да кромѣ того,

опредѣлимъ мѣсто ихъ совпаденія при вращеніи системъ O и O_1 , т.-е. опредѣлимъ геометрическое мѣсто точекъ взаимнаго соприкосновенія профилей при движеніи обѣихъ системъ; это геометрическое мѣсто представится въ видѣ нѣкоторой кривой $(yy_1)P(kk_1)$. Кривая эта носитъ названіе *линии зацепленія*.

Способъ *Reuleaux*, хотя и болѣе сложный, чѣмъ способъ *Poncelet*, даетъ возможность, кромѣ непосредственнаго нахождения точекъ сопряженнаго профиля, M_1 , еще найти совокупность послѣдовательныхъ точекъ соприкосновенія обоихъ профилей. Не трудно убѣдиться, что точка соприкосновенія на профилѣ, принадлежащемъ системѣ *ведущей*, будетъ постепенно *удаляться* отъ центра (оси) вращенія этой системы; и, наоборотъ, на профилѣ *ведомой* системы точка прикосновенія будетъ *приближаться* къ центру вращенія системы. Если теперь въ ведущей системѣ мы возьмемъ какой-нибудь произвольный профиль, то, примѣняя къ нему сказанное, получимъ возможность судить о томъ, какая часть взятаго профиля можетъ служить намъ для передачи, — стоитъ лишь при этомъ помнить послѣдовательность точекъ соприкосновенія какъ полоидъ, такъ и профилей.

На практикѣ для этихъ профилей M берутъ по большей части нѣкоторыя опредѣленные кривыя, наприм., циклическія, эвольвентныя и др.

Циклическіе профили. обладаютъ однимъ весьма любопытнымъ свойствомъ, а именно, — если для одного профиля взята циклическая кривая, то сопряженнымъ профилемъ будетъ также циклическая кривая. Это есть такъ называемая теорема *Камуса*, которую мы и докажемъ ниже въ самомъ общемъ видѣ.

Какая-либо *циклическая* кривая есть, какъ мы знаемъ, траекторія точки, связанной съ какой-нибудь окружностью, катящейся по другой окружности. Въ данномъ случаѣ за профиль ведущей системы можно взять циклическую кривую, образованную при каченіи какой-либо окружности по полоидѣ ведущей системы; отыскивая затѣмъ сопряженный профиль въ ведомой системѣ, намъ придется убѣдиться, что этотъ сопряженный профиль окажется также циклической кривой, образованной тою же точкой той же окружности, но при каченіи этой послѣдней уже по второй полоидѣ. Мы обобщимъ эту теорему тѣмъ, что вмѣсто окружностей возьмемъ три какія-нибудь кривыя. Двѣ изъ нихъ, O и O_1 (фиг. 6), пусть служатъ полоидами двухъ системъ; пусть, далѣе, нѣкоторая третья кривая O_2 катится одинъ разъ по полоидѣ O_1 , другой — по O . Нѣкоторая точка X , связанная съ кривой O_2 , при каченіи O_2 по O , опишетъ въ системѣ полоиды O нѣкоторую опредѣленную кривую; эту кривую — траекторію точки X — мы можемъ построить по способу *Poncelet*, — а именно: отмѣчаемъ на кривой O_2 рядъ точекъ $A, B, \dots$ служащихъ послѣдовательными точками соприкосновенія кривой

O_2 при качении ея по O ; соединяемъ эти точки съ нашей точкой X ; далѣе на кривой O находимъ точки $A_1, B_1, \dots$, соотвѣтствующія точкамъ $A, B, \dots$, для чего придется отложить дуги: $\smile PA_1$, равную $\smile PA$, $\smile A_1B_1$, равную $\smile AB$, и т. д.; затѣмъ изъ полученныхъ точекъ $A_1, B_1, \dots$, описываемъ окружности радіусами $AX, BX, \dots$ (такъ какъ нормали на траекторію точки X изъ точекъ $A_1, B_1, \dots$ должны быть равны $AX, BX, \dots$); наконецъ, подыскиваемъ огибающую этихъ окружностей, — она и будетъ траекторіей точки.

Но если теперь мы станемъ отыскивать для этой кривой ея огибающую при качении O по O_1 , то, какъ и выше, должны будемъ отложить дуги $PA_2, A_2B_2, \dots$, соотвѣтственно равныя дугамъ $BA_1, A_1B_1, \dots$ (эти послѣднія, въ свою очередь, равны дугамъ $PA, AB, \dots$), затѣмъ изъ полученныхъ точекъ $A_2, B_2, \dots$, какъ изъ центровъ, описать окружности радіусами, равными нормалямъ на траекторію изъ точекъ $A_1, B_1, \dots$, т.-е. радіусами AX, BX , и проч., и, наконецъ, вычертить огибающую этихъ окружностей. Очевидно, что построение этой искомой огибающей выполнѣ тождественно съ построениемъ траекторіи точки X при качении O_2 по O .

Слѣдовательно, вообще, если мы имѣемъ въ системѣ O нѣкоторую кривую, какъ траекторію точки X при качении кривой O_2 , связанной съ этой точкой, по полюиду системы O_1 , то огибающей этой траекторіи при движеніи системы O_1 относительно системы O будетъ траекторія точки X , образованная при качении той же кривой O_2 , но уже по полюиду, принадлежащей системѣ O . Соотношеніе это носитъ названіе теоремы Камуса.

Примѣняя эту теорему къ нашему частному случаю круговыхъ полюидъ, находимъ, что если въ системѣ O_1 (ведущей) мы взяли за профиль кривую AX (фиг. 7), образованную точкой нѣкоторой окружности O_2 при качении ея по O_1 , т.-е. *гипоциклоиду*, то сопряженнымъ ему профилемъ будетъ *эпициклоида* BX , образованная точкой X при качении O_2 по O .

Выполненіе на чертежѣ гипо- и эпициклоидъ можетъ быть ведено или по методу *Poncelet*, или же по точкамъ. Чтобы найти, напр., точку гипоциклоиды, соотвѣтствующую прикосновенію окружности O_2 (фиг. 8) съ окружностью O_1 въ точкѣ A первой, откладываемъ, какъ всегда, дугу PA_1 , равную дугѣ PA ; затѣмъ изъ точки A_1 , какъ изъ центра, описываемъ окружность радіусомъ AX и ищемъ, на какомъ разстояніи отъ центра O_1 будетъ находиться точка X въ моментъ соприкосновенія окружностей точками A и A_1 ; такъ какъ въ этотъ моментъ точка A окружности O_2 будетъ имѣть то же значеніе, что теперь точка P , то искомое разстояніе найдемъ, отойдя отъ P по окружности O_2 на дугу PY , равную AX , т.-е. засѣкая изъ центра P дугу радіусомъ PY , равнымъ AX . Точка Y находится на такомъ разстояніи отъ центра O_1 , на какомъ, очевидно, будетъ точка X въ моментъ соприкосновенія окружностей точками A и A_1 ; проводя по-

этому изъ центра O_1 окружность радіусомъ O_1Y , найдемъ въ пересѣченіи ея съ окружностью, описанною изъ A_1 радіусомъ

$$A_1X_1 = AX,$$

искомую точку X_1 гипоциклоиды; прямая же A_1X_1 будетъ служить нормалью къ гипоциклоидѣ въ этой точкѣ.

Сравнивая это построение съ построениемъ, даннымъ *Reuleaux* для нахождения *линии зацепленія*, видимъ, что точка X_1 будетъ соприкасаться съ соотвѣтствующей точкой сопряженного профиля (при вращеніи системъ O и O_1) какъ разъ въ точкѣ Y , что указываетъ намъ на то обстоятельство, что въ случаѣ *циклическаго профиля линіей зацепленія* будетъ служить сама вспомогательная окружность O_2 .

Совершенно такъ же чертимъ и эпициклоиду, служащую сопряженнымъ профилемъ.

Эвольвентный профиль. Эвольвентой окружности, какъ извѣстно, называется траекторія точки, лежащей на касательной къ окружности при каченіи этой касательной по окружности. Если касательная AB (фиг. 9) катится по окружности O , то точка B описываетъ кривую, называемую *эвольвентой* (линія B_0BB_1). Въ каждый данный моментъ касательная служитъ, конечно, нормалью къ эвольвентѣ, и притомъ, по самому способу образованія кривой, разность между длинами радіусовъ-векторовъ эвольвенты P_1B_1 и PB равна дугѣ PP_1 окружности O ; такимъ образомъ длина $PB = \text{дугѣ } PB_0$.

Какую-нибудь другую окружность, концентричную съ первой, касательная пересѣкаетъ всегда подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться изъ равенства треугольниковъ OPC и OP_1C_1 , и такъ какъ $CP = C_1P_1$, то разность между длинами C_1B_1 и CB равна дугѣ PP_1 . Обратно мы можемъ замѣтить, что если данная кривая имѣетъ нормальми прямыя, пересѣкающія окружность подъ постояннымъ угломъ, то такая кривая служитъ эвольвентой для круга, концентричнаго съ первымъ. Дѣйствительно, прямыя, пересѣкающія окружность подъ постояннымъ угломъ, являются непремѣнно касательными къ окружности, концентричной съ данной, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться изъ чертежа; а, слѣд., всѣ нормали кривой служатъ касательными къ нѣкоторой окружности. Взявъ какую-нибудь точку B кривой и ея нормаль PB , мы, очевидно, можемъ заставить точку B проходить послѣдовательно всѣ точки кривой, катя нормаль по окружности.

Возьмемъ, переходя къ зацепленію, въ системѣ O_1 окружность O_2 , концентричную съ полоидой O_1 (фиг. 10), а за ведущій профиль возьмемъ эвольвенту окружности O_2 . Нормали къ этой эвольвентѣ пересѣкаютъ полоиду O_1 подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Въ моментъ соприкосновенія точки B съ соотвѣтствующей точкой профиля нормаль AB

должна будетъ пройти черезъ точку P соприкосновенія полоидъ, и, слѣдовательно, она совпадаетъ съ касательной PT , проведенной изъ точки P къ окружности O_2 , и такъ какъ это справедливо для какой угодно нормали, то *линіей зацепленія будетъ служить здѣсь касательная изъ P къ окружности O_2* . Отсюда слѣдуетъ, что въ профилѣ, сопряженномъ съ профилемъ BB_0 , нормали къ нему будутъ пересѣкать соотвѣтственную полоиду также подъ постояннымъ угломъ, равнымъ, конечно, первому; другими словами, этотъ сопряженный профиль будетъ эвольвента окружности, концентричной съ полоидой O и касающейся PT , т.-е. кривая, образованная точкой E при каченіи касательной PT_1 по окружности O_3 .

Цилиндрическія зубчатые колеса.

Перейдемъ теперь къ дѣйствительному выполненію передачи. Профили цилиндрическихъ тѣлъ, при помощи которыхъ мы устраиваемъ передачу, имѣютъ въ дѣйствительности опредѣленную длину въ радіальномъ направленіи, находясь частью между окружностью полоиды и центромъ, частью—внѣ полоиды. Чтобы устроить непрерывную передачу, придется взять рядъ такихъ цилиндрическихъ тѣлъ съ образующими, параллельными осямъ, и съ профилями, имѣющими найденныя выше соотношенія. Тогда мы получимъ рядъ зубцовъ, принадлежащихъ той и другой системѣ (фиг. 11, 12). Если мы мысленно проведемъ полоиду, принадлежащую системѣ O (въ дѣйствительности, конечно, невыполняемую), то, какъ сказано, она раздѣлитъ каждый зубецъ на двѣ части (въ радіальномъ направленіи): на n_1h_1 и h_1m_1 (фиг. 112), первая изъ нихъ, лежащая внѣ полоиды, называется *головкой* зубца, вторая—*основаніемъ* или *ножкой* зубца. Окружность радіуса On , гдѣ n —крайняя внѣшняя точка рабочаго профиля, принято называть окружностью *вершинъ*; точно такъ же окружность, проходящую черезъ крайнія внутреннія точки,—окружностью *основаній*. Длина дуги ab измѣряетъ *толщину* зубца.

Очертанія зубцовъ обыкновенно бываютъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину дуги ab , хотя, собственно говоря, если движеніе совершается всегда въ одну сторону, по правиламъ, изложеннымъ выше, слѣдуетъ строить только рабочій профиль, напр., $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\epsilon\zeta$, $\eta\zeta$, и т. д.; стороны же нерабочія могутъ быть ограничены и другими какими-нибудь кривыми, лишь бы не затруднялась правильная смѣна зубцовъ и правильность зацепленія вообще.

Размѣръ ac , считая по полоидѣ, называется *шириною впадины*. Расстояніе между рабочими профилями пары смежныхъ зубцовъ, считая опять по полоидѣ, называется *шагомъ зацепленія*; такъ, напр., дуга a_1d_1 есть шагъ зацепленія. Шагъ зацепленія у обоихъ колесъ долженъ

быть одинаковъ, иначе мы не получимъ непрерывной передачи съ желаемымъ отношеніемъ скоростей.

Какъ не трудно видѣть, d_1 и d , a_1 и a , ..., должны быть соотвѣтственными точками обѣихъ полоидъ, а потому дуга ad равна дугѣ a_1d_1 и т. д.

Назовемъ черезъ z и z_1 соотвѣтственно числа зубцовъ той и другой системъ, а радіусы полоидъ черезъ R и R_1 . Тогда, какъ мы знаемъ,

$$R : R_1 = \omega_1 : \omega$$

или

$$R\omega = R_1\omega_1.$$

Если шагъ зацѣпленія равенъ t , то получаемъ

$$2\pi R = zt$$

и

$$2\pi R_1 = z_1t$$

откуда

$$\frac{R}{R_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega}; \dots \dots \dots (1)$$

называя же числа оборотовъ въ минуту черезъ n и n_1 , имѣемъ:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60},$$

въ виду чего ур—ніе (1) перепишется еще разъ такъ:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{n_1}{n} \dots \dots \dots (2)$$

откуда видно, что числа зубцовъ обратно пропорціональны числамъ оборотовъ.

Размѣры зубцовъ выражаются обыкновенно въ доляхъ шага зацѣпленія t ; такъ, всю высоту зубца (фиг. 12) берутъ равной $0,7t$, при чемъ высота головки, n_1h_1 , берется равной $0,3t$, а ножки, h_1m_1 , — $0,4t$; толщина зубца берется различно, — въ металлическихъ передачахъ она берется въ $\frac{19}{40}t$, такъ что ширина впадины достигнетъ $\frac{21}{40}t$; длина b зубца, т.-е. размѣръ его въ осевомъ направленіи, берется различно, въ зависимости отъ разныхъ условій, часто берется равнымъ $2t$ и больше (подробности указаны въ курсѣ деталей машинъ).

Дугу, на которую прокатятся одна по другой полоиды, пока одна пара зубцовъ находится въ зацѣпленіи, принято называть дугой зацѣпленія. Очевидно, что дуга зацѣпленія должна быть больше шага за-

утолщенія, иначе произошло бы, что одна пара зубцовъ уже вышла изъ зацепленія, а другая еще не вошла; передача въ этомъ случаѣ не могла бы быть непрерывной.

Для плавности передачи и для уменьшенія изнашиванія зубцовъ выгодно, чтобы одновременно въ зацепленіи находилось возможно большее число зубцовъ—требованіе, часто невыполнимое; чтобы судить о достоинствѣ передачи съ этой стороны, нужно умѣть опредѣлять, сколько паръ зубцовъ будутъ находиться одновременно въ зацепленіи. Зная профили и шагъ зацепленія, не трудно рѣшить эту задачу. Для этого сначала найдемъ, гдѣ началось соприкосновеніе пары зубцовъ, т.-е. гдѣ крайняя точка X профиля на ведомомъ колесѣ (фиг. 13) вступила въ соприкосновеніе съ соотвѣтствующей ей точкой на ведущемъ колесѣ; если линія зацепленія уже начерчена, напр., по методу *Reuleaux* (на чертежѣ это линія rPq), то, проводя изъ центра O окружность радиуса OX (окружность вершинъ), въ пересѣченіи ея съ линіей зацепленія найдемъ точку X_1 ,—положеніе точки X въ моментъ начала соприкосновенія; замѣчая, кромѣ того, что профиль XP своего положенія относительно полойды O не мѣняетъ, ибо онъ связанъ съ ней неизмѣнно, заключаемъ, что въ указанный моментъ точка P занимала положеніе p_1 , гдѣ

$$p_1X_1 = PX;$$

итакъ, теперь мы знаемъ, что точка P профиля, приходящаяся на полойдѣ, въ моментъ начала соприкосновенія находилась въ p_1 , а въ такомъ случаѣ дуга p_1P представитъ собою часть дуги зацепленія за время прикосновенія пары зубцовъ передъ линіей центровъ O_1O .

Указанную часть дуги зацепленія можно, впрочемъ, опредѣлить еще проще, проведя къ точкѣ X профиля PX нормаль Xp къ нему до пересѣченія съ соотвѣтствующей полойдой въ точкѣ p ; эта точка p въ моментъ начала зацепленія придется на линіи центровъ въ точкѣ P , потому что въ этотъ моментъ линія Xp , какъ общая нормаль въ точкѣ касанія огибающей и огибаемой, должна пройти черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія, т.-е. черезъ точку P ; какъ мы говорили раньше, точка профиля PX , совпадающая теперь съ P , въ этотъ моментъ придется въ p_1 , а если такъ, то $\triangle PXp = \triangle P_1X_1P$ (по двумъ сторонамъ: $X_1p_1 = XP$, $X_1P = Xp$, и высотѣ изъ X и X_1 на O); значитъ хорды p_1P и Pp равны, а поэтому равны и дуги p_1P и Pp .

Подобнымъ же образомъ найдемъ конецъ зацепленія, проводя изъ O_1 окружность вершинъ для другого колеса O_1 до пересѣченія съ линіей зацепленія въ точкѣ X'_1 ; найдемъ также и здѣсь, что за линіей центровъ дугой зацепленія служитъ нѣкоторая опредѣленная дуга Pp_2 ; такимъ образомъ, вся дуга зацепленія равна суммѣ дугъ Pp_1 и Pp_2 одной полойды O_1 , т.-е. равна дугѣ p_1p_2 . Теперь можно узнать, сколько разъ шагъ зацепленія содержится въ дугѣ зацепленія; частное и укажетъ намъ, сколько зубцовъ находится одновременно въ соприкосно-

веніи. Стараются, обыкновенно, достигнуть того, чтобы въ соприкосновеніи было одновременно, по крайней мѣрѣ, *двѣ пары* зубцовъ, т.-е. чтобы дуга зацѣпленія была не меньше двухъ шаговъ зацѣпленія.

Циклическое зацѣпленіе. Мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ линіей зацѣпленія будетъ служить дуга вспомогательной окружности. Вспомогательная окружность O_2 (фиг. 14) можетъ намъ служить, очевидно, только для образованія головки зубца колеса O_1 , давая для него *эпициклоиду*, и ножки зубца колеса O ,—давая *гипоциклоиду*. Чтобы получить головку второго зубца и ножку перваго, беремъ еще одну вспомогательную окружность O_3 , которая при каченіи по O дастъ *эпициклоиду*—профиль головки зубца колеса O , а при каченіи по O_1 ,—*гипоциклоиду*—профиль, служащій, по теоремѣ *Камуса*, профилемъ, сопряженнымъ эпициклоидѣ; по этой гипоциклоидѣ мы и очертимъ ножку зубца колеса O_1 . Колесо O , какъ видно изъ чертежа, ведущее; поэтому соприкосновеніе какой-нибудь пары зубцовъ начинается въ тотъ моментъ, когда профиль ведомаго колеса, PX_1 , вступаетъ своей крайней точкой X_1 на линію зацѣпленія, т.-е. на окружность O_2 . Проводя поэтому изъ O_1 окружность вершинъ радіусомъ O_1X_1 до пересѣченія съ O_2 передъ линіей центровъ въ точкѣ X'_1 , находимъ, такимъ образомъ, начало соприкосновенія.

Такъ какъ профиль X_1P есть эпициклоида, образованная каченіемъ O_2 по O_1 , то положеніе точки P профиля въ моментъ начала соприкосновенія найдемъ, отложивъ по полоидѣ O_1 дугу Pp_1 , равную дугѣ PX'_1 . Дуга Pp_1 есть часть дуги зацѣпленія до линіи центровъ и, какъ видимъ, она равна части линіи зацѣпленія до линіи центровъ.

Подобнымъ же образомъ мы найдемъ конецъ зацѣпленія въ точкѣ X' окружности O_3 , проведя окружность вершинъ для второго колеса радіусомъ OX до пересѣченія съ окружностью O_3 , а затѣмъ, какъ и выше, опять найдемъ, что часть дуги зацѣпленія Pp_2 для соприкосновенія за линіей центровъ равна дугѣ PX'_1 , такъ что получаемъ, что *въ случаѣ циклическаго зацѣпленія дуга зацѣпленія равна линіи зацѣпленія*.

При данномъ шагѣ зацѣпленія, величина котораго, какъ мы говорили уже, обуславливается требованіями прочности на изломъ и проч., и при данной высотѣ головки зубца (а эта высота, какъ извѣстно, обыкновенно выражается въ доляхъ шага), для плавности зацѣпленія выгодна возможно большая длина линіи X'_1PX' , такъ какъ эта линія равна дугѣ зацѣпленія; длина же этой линіи будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше радіусы вспомогательныхъ окружностей O_2 и O_3 , какъ это можно легко видѣть непосредственно изъ чертежа. Однако, здѣсь является другое неудобство: мы, на основаніи предыдущаго, знаемъ, что если діаметръ вспомогательной окружности равенъ радіусу полоиды, то гипоциклоида, по которой очерчено основаніе зубца у колеса O (фиг. 15), обращается въ этомъ случаѣ въ прямую линію, совпадаю-

щую съ радіусомъ большей окружности, проходящемъ черезъ разсматриваемую точку меньшей; если очертанія зубца будутъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину толщины зубца, то, какъ это ясно видно изъ самаго чертежа, въ такомъ случаѣ получается *утоненіе* зубца въ его основаніи, что, конечно, вредно отзывается на прочности зубца. Еще большее утоненіе мы получимъ, если возьмемъ *діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной*, какъ это можно непосредственно видѣть, вычерчивая для этого случая гипоциклоиду. Кромѣ того, здѣсь является еще одно неудобство: *дѣйствительно работать приходится только очень малой части ножки зубца*.

Чтобы отыскать вообще, какая часть ножки (или головки) одного зубца работаетъ съ соотвѣтствующей головкой (или основаніемъ) другого, поступаемъ такъ: находимъ, какъ раньше, точку X_1' линіи зацѣпленія, гдѣ начинается соприкосновеніе зубцовъ (фиг. 16) (профили на чертежѣ изображены соприкасающимися на линіи центровъ въ точкѣ P); та точка профиля зубца колеса O , которая соприкасалась съ крайней точкой X_1 сопряженнаго профиля въ моментъ начала зацѣпленія, теперь, когда профили касаются другъ друга въ P , занимаетъ, очевидно, положеніе X_2 , гдѣ X_2 есть точка пересѣченія окружности радіуса OX_1' съ профилемъ XPY въ его настоящемъ положеніи. Часть PX_2 профиля и есть та часть ножки зубца X , которая работала со всей головкой зубца X_1 за время отъ начала соприкосновенія въ точкѣ X_1' до соприкосновенія на линіи центровъ въ точкѣ P .

Эта часть, какъ видимъ, тѣмъ меньше, чѣмъ больше радіусъ окружности O_2 ; на части PX_2 , какъ видимъ, сосредоточивается все передаваемое колесомъ O давленіе за время работы передъ линіей центровъ. Поэтому при небольшой длинѣ PX_2 естественно ожидать быстрого изнашиванія (истиранія) зубца въ этой части для тѣхъ передачъ, гдѣ имѣемъ дѣло съ болѣе или менѣе значительными давленіями, какъ это и бываетъ въ большей части случаевъ машиностроенія.

Подобнымъ же образомъ можно найти ту часть профиля у зубца X_1 колеса O_1 , которая работаетъ съ головкой зубца колеса O , и она также была бы тѣмъ меньше, чѣмъ больше радіусъ вспомогательной окружности O_3 . Отсюда становится понятнымъ, почему въ обыкновенномъ машиностроеніи избѣгаютъ брать діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной, внутри которой она должна катиться для образованія профиля.

Въ случаѣ, если при выбранномъ шагѣ зацѣпленія (выборъ его, какъ мы уже указывали, зависитъ обыкновенно отъ условій прочности передачи) дуга зацѣпленія получается очень короткая, такъ что въ соприкосновеніи находится только пара зубцовъ, наиболѣе рациональнымъ слѣдуетъ признать здѣсь увеличеніе радіусовъ полоидъ, если только ничто не мѣшаетъ намъ увеличить разстояніе между осями передачи. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда приходится дорожить мѣстомъ,

какъ, напр., во многихъ грузоподъемныхъ машинахъ, или когда усилія, передаваемые колесами, не особенно значительны, берутъ діаметры вспомогательныхъ окружностей и больше радіусовъ начальныхъ окружностей. Тогда, замѣтивъ, что часть профиля X_2Y (фиг. 17), совершенно не работаетъ, а потому можетъ быть очерчена по любой кривой, лишь бы она не мѣшала свободному движенію вершины X_1 сопряженного зубца, можемъ основаніе зубца 2 нѣсколько усилить. Мы сказали, что кривая, по которой можно очертить зубецъ, должна быть такова, чтобы не мѣшала свободному движенію вершины X_1 ; а для этого указанная кривая должна не заходить за геометрическое мѣсто вершинъ X_1 въ движеніи системы O_1 относительно O . Это геометрическое мѣсто легко построить слѣдующимъ образомъ: откладываемъ по обѣимъ полоидамъ O и O_1 дуги: $\smile P1 = \smile P1'$, $\smile 12 = \smile 1'2'$, $\smile 23 = \smile 2'3'$ и т. д., затѣмъ изъ точекъ 1, 2, 3... описываемъ дуги радіусами X_11' , X_12' , X_13' ...; огибающая этихъ дугъ и будетъ траекторіей точки X_1 въ относительномъ движеніи,—она и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ; легко видѣть, что она должна пройти черезъ точки X_2 и X_1 . Такимъ образомъ, точка X_1 за линію X_2X_1 не зайдетъ, а слѣдовательно, начиная отъ точки X_2 , мы имѣемъ возможность вмѣсто крутой кривой профиля, X_2Y , взять любую, болѣе пологую, напр., X_2C , лишь бы она вся лежала внѣ кривой X_2X_1 . Очерчивая теперь зубецъ по кривой X_2C , мы, какъ легко видѣть изъ сравненія усиленного такимъ образомъ зубца съ прежнимъ неусиленнымъ, значительно увеличиваемъ его прочность, нисколько въ то же время не рискуя правильностью зацѣпленія.

Нужно также замѣтить, что иногда бываетъ нежелательнымъ брать вспомогательныя окружности слишкомъ малаго радіуса, потому, что это можетъ повести къ тому, что мы не будемъ въ состояніи выполнить нашу передачу.

Дѣйствительно, пусть намъ требуется устроить передачу съ даннымъ шагомъ зацѣпленія (величина его, какъ мы уже указывали, опредѣляется изъ расчетовъ прочности зубцовъ) и данными полоидами, радіусы которыхъ опредѣлятся изъ величины шага и числа зубцовъ (изъ урн—іа $2\pi R = \pi t$); обыкновенно знаемъ также и высоту головки зубца, находящуюся, какъ извѣстно, въ опредѣленномъ соотношеніи съ величиною шага, или же задаемся величиной дуги зацѣпленія, всегда не меньшей длины шага зацѣпленія; въ этомъ послѣднемъ случаѣ при выбранныхъ вспомогательныхъ окружностяхъ мы можемъ опредѣлить высоту головки зубца, и именно слѣдующимъ образомъ: откладываемъ на вспомогательныхъ окружностяхъ O_2 и O_3 такія двѣ дуги PK и PK_1 (фиг. 18), чтобы онѣ въ суммѣ дали дугу зацѣпленія и чтобы точка K отъ полоиды O_1 , а точка K_1 отъ полоиды O находились на одинаковомъ разстояніи, если эти разстоянія считать по соотвѣтствующимъ радіусамъ полоидъ O и O_1 ; такимъ образомъ $KX_1 = K_1X$; построивъ теперь дугу K_1Y эпициклоиды каченіемъ O_3 по O , найдемъ, очевидно, положеніе рабочаго профиля зубца ведущаго колеса O въ моментъ конца

зацепленія; построивъ затѣмъ эпициклоиду KY_1 , опредѣлимъ положеніе профиля зубца ведомаго колеса O_1 въ моментъ начала зацепленія. Отрѣзки KX_1 и K_1X будутъ высотами головокъ зубцовъ; зацепленіе начнется въ точкѣ K и окончится въ точкѣ K_1 .

Очевидно, что дуга XU , равно какъ и X_1Y_1 , должна быть меньше половины толщины зубца, потому что зубецъ обыкновенно бываетъ симметриченъ относительно радіуса, проведеннаго черезъ середину толщины его, а головка не оканчивается остреемъ, а если бы XU вышло больше половины толщины зубца, что, какъ видно изъ чертежа, можетъ случиться при маломъ радіусѣ окружности O_3 , то заданное зацепленіе невозможно было бы выполнить съ такою вспомогательною окружностью. Подобнымъ образомъ можно было бы рѣшить вопросъ при данной высотѣ головки (и данномъ, конечно, шагѣ); въ этомъ случаѣ пришлось бы повѣрить, достаточна ли величина дуги зацепленія.

Иногда, хотя и очень рѣдко въ обыкновенномъ машиностроеніи, встрѣчаются случаи *неодинаковой высоты головокъ* на томъ и другомъ колесѣ; въ такихъ случаяхъ намъ даются или высоты зубцовъ (ихъ головокъ), или же даются части дуги зацепленія до и послѣ линіи центровъ (каждая, конечно, отдѣльно); рѣшеніе этого вопроса будетъ вестись по вышеприведеннымъ указаніямъ.

Можетъ встрѣтиться и отсутствіе головки на одномъ колесѣ (и, значитъ, ножки на другомъ), слѣдовательно, профилированіе будетъ ведено здѣсь *при одномъ вспомогательномъ кругѣ* (объ этомъ см. ниже) или несимметричное строеніе зубца; въ каждомъ такомъ отдѣльномъ случаѣ вопросъ о возможности зацепленія рѣшить не трудно.

Для полученія возможности зацепленія, когда мѣстомъ дорожатъ, а радіусовъ полоидъ увеличить нельзя, является, какъ мы видѣли, необходимость брать вспомогательныя окружности съ діаметрами, большими радіусовъ полоидъ; а въ нѣкоторыхъ грузоподъемныхъ машинахъ встрѣчается даже *предѣльный случай циклическаго зацепленія*, а именно случай, когда *вспомогательныя окружности совпадаютъ съ полоидами*; въ этомъ случаѣ профилемъ основанія зубца является *точка самой полоиды*, сопряженнымъ же съ нимъ профилемъ, профилемъ головки зубца другого колеса, будетъ эпициклоида, образованная этой точкой при каченіи полоиды по другой полоидѣ. При этомъ способѣ профилированія возможнымъ бываетъ осуществленіе зацепленія съ весьма малымъ числомъ зубцовъ, доходящимъ, напр., до четырехъ на меньшемъ колесѣ. На чертежѣ (фиг. 19) схематически представлено такое зацепленіе. PY_1 есть эпициклоида, образованная точкой окружности O при каченіи ея по O_1 ; PX —эпициклоида, описанная точкой полоиды O_1 при каченіи ея по O ; двѣ эти эпициклоиды и дадутъ профили обѣихъ головокъ у сопряженныхъ зубцовъ; основанія же зубцовъ обратились здѣсь въ *точки полоидъ*. Проводя окружность вершинъ для

того и другого колеса, найдемъ линію зацѣпленія K_1PK ; на части KP точка P зубца XC , лежащая на полоидѣ O_1 , работаетъ съ эпициклоидой Y_1P ; далѣе, на части PK_1 ; работаетъ головка PX того же зубца XC съ точкой P зубца Y_1C_1 . Основанія зубцовъ, какъ профили не работающіе, могутъ быть ограничены произвольными кривыми, лишь бы эти кривыя, какъ объ этомъ мы уже говорили выше, не заходили за соотвѣтственныя траекторіи точекъ Y_1 и X , т.-е. не вызывали защемленія зубцовъ. (Какъ мы знаемъ, траекторіи эти суть траекторіи ихъ въ относительномъ движеніи какъ O_1 по O , такъ и O по O_1 .)

Легко видѣть, что въ такомъ зацѣпленіи будетъ имѣть мѣсто сильное изнашиваніе зубцовъ около точекъ P , такъ какъ за все время зацѣпленія передъ линіей центровъ давленіе на зубецъ колеса O сосредоточивается въ одной (или почти въ одной) точкѣ; то же самое имѣетъ мѣсто для зубца колеса O_1 за время зацѣпленія за линіей центровъ. Благодаря этому обстоятельству зубцы быстро теряютъ правильность своей формы, что и принуждаетъ насъ по возможности избѣгать такихъ зацѣпленій и употреблять ихъ только въ исключительныхъ случаяхъ.

Мало употребительно въ машиностроеніи профилированіе съ однимъ вспомогательнымъ кругомъ и прямолинейнымъ профилемъ на одномъ колесѣ. Въ этомъ случаѣ вспомогательная окружность O_3 (фиг. 20) имѣетъ діаметръ PO_1 , равный радіусу полоиды O_1 . Колесо O_1 имѣетъ только рабочее основаніе зубца, которое тогда профилируется, конечно, по радіусу PO_1 ; колесо же O имѣетъ рабочій профиль головки—эпициклоиду PX . Проводя окружности вершинъ для колеса O до пересѣченія съ O_3 , допустимъ, въ точкѣ K_1 , получаемъ линію зацѣпленія PK_1 ; мы видимъ, что въ этомъ случаѣ, при ведущемъ колесѣ O , зацѣпленіе все будетъ происходить за линіей центровъ. Проводя далѣе окружность центра O_1 и радіусъ O_1q_1 до пересѣченія съ профилемъ PY_1 въ точкѣ C , найдемъ рабочую часть PC профиля PY_1 ; осталъная же часть CY_1 работать не будетъ совсѣмъ.

Рѣдко употребляется теперь и такъ называемое *цѣвочное зацѣпленіе*, представляющее частный случай циклическаго. Здѣсь за профиль, обыкновенно на ведомомъ колесѣ, принимаютъ окружность нѣкотораго радіуса PK_1 , такъ что зубцы на этомъ колесѣ будутъ представлять собою круглые цилиндры, называемые *цѣвками* (фиг. 21). Профиль на ведущемъ колесѣ O найдется, какъ огибающая окружности PK_1 при каченіи полоиды O_1 по O . При этомъ каченіи точка P —центръ окружности PK_1 , опишетъ эпициклоиду PE , и огибающей будетъ поэтому кривая, параллельная эпициклоидѣ PE и отстоящая отъ нея на разстояніи радіуса PK_1 ; обозначимъ эту кривую черезъ AX .

Линію зацѣпленія мы построимъ обыкновеннымъ пріемомъ; такъ, чтобы найти, гдѣ будетъ имѣть мѣсто соприкосновеніе точки A зубца съ цѣвкой, проводимъ въ точкѣ A зубца нормаль къ его профилю до пересѣченія съ эпициклоидой PE въ точкѣ B , или, иначе говоря, отыскиваемъ на PE такое положеніе центра круга PK_1 , при которомъ по-

слѣдній касается профиля въ точкѣ A ; теперь находимъ дѣйствительное положеніе цѣвки въ моментъ соприкосновенія ея съ точкой A профиля, проведя изъ центра O полоиды окружность радіуса OB до пересѣченія съ полоидой O_1 въ точкѣ B_1 ; дѣйствительное же положеніе точки A въ этотъ моментъ найдемъ, описавъ изъ O окружность радіуса OA до пересѣченія съ окружностью цѣвки въ точкѣ A_1 , которая и будетъ, такимъ образомъ, одной изъ точекъ линіи зацѣпленія. Дугу зацѣпленія можемъ найти, если проведемъ изъ крайней точки X профиля зубца нормаль къ профилю до пересѣченія ея съ полоидой въ точкѣ K ; тогда PK и будетъ дугою зацѣпленія; эта послѣдняя должна быть больше шага зацѣпленія, сообразно чему и выбираютъ высоту зубца. Зацѣпленіе такого рода употребляется теперь рѣдко; ведущимъ дѣлаютъ зубчатое колесо.

Профилированіе можно выполнить точно или по методу *Poncelet*, или, какъ было указано, по точкамъ.

По методу *Poncelet* построеніе выполняется такъ: пусть имѣются полоиды O и O_1 (фиг. 22),—онѣ опредѣляются изъ условій передачи и изъ расчета прочности зубцовъ; пусть, далѣе, мы уже выбрали вспомогательныя окружности O_2 и O_3 ; какъ мы знаемъ, для полученія при точкѣ P профиля головки зубца у ведущаго колеса O_1 мы должны катить окружность O_2 по O_1 ; не вычерчивая каждый разъ положенія окружности O_2 , мы поступаемъ такъ: намѣчаемъ на O_2 рядъ точекъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ достаточно близкихъ другъ къ другу; затѣмъ дуги $P\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta \dots$ откладываемъ послѣдовательно по полоидѣ O_1 , такъ что получимъ рядъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \dots$ такихъ, что дуги $Pa_1, a_1b_1, b_1c_1, \dots$ будутъ соотвѣтственно равны дугамъ $P\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \dots$; далѣе, изъ точекъ $a_1, b_2, c_1 \dots$ описываемъ дуги окружностей соотвѣтственно радіусами $Pa, P\beta, P\gamma \dots$; огибающая этихъ окружностей и дастъ намъ искомый профиль PX_1 головки зубца; если точки $\alpha, \beta, \gamma \dots$ выбраны достаточно близко, то дуги сливаются въ одну непрерывную кривую.

Профиль основанія зубца у колеса O найдемъ, отложивъ теперь по полоидѣ O въ ту же сторону дуги, равныя $P\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta \dots$, и описавъ изъ концовъ $a, b, c \dots$ этихъ дугъ тѣми же радіусами $Pa, P\beta, P\gamma \dots$ окружности, получимъ такимъ образомъ искомый профиль PY .

Взявъ теперь по окружности O_3 въ другую сторону рядъ точекъ I, II, III, IV, ... откладываемъ на обѣихъ полоидахъ, начиная отъ точки P , въ ту же сторону, гдѣ лежатъ точки I, II, III, ... дуги, равныя $PI, I-II, II-III, \dots$ и изъ концовъ этихъ дугъ, т.-е. изъ точекъ $1, 2, 3 \dots 1_1, 2_1, 3_1 \dots$, описываемъ дуги окружностей радіусами $PI, PII, PIII \dots$ совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали для точекъ $a_1, b_1, c_1 \dots$. Такимъ образомъ мы получаемъ профили для головокъ зубцовъ колеса O и для основанія зубцовъ колеса O_1 .

Проводя теперь окружность вершинъ для колеса O , а также для колеса O_1 , найдемъ на окружностяхъ O_3 и O_2 точки K и K_1 —начало и конецъ зацѣпленія; при этомъ нужно всегда помнить, что на ведущемъ

колось точка соприкосновенія удаляется отъ центра, а на ведомомъ приближается къ центру. Ограничивъ профиль въ высоту, въ ту и другую стороны отъ полоиды, откладываяемъ на полоидахъ толщину зубца и строимъ симметрично относительно радіуса профиль, ограничивающій зубецъ съ другой стороны; затѣмъ, по шагу зацепленія, вычерчиваемъ и другіе зубцы.

Вычерчиваніе профиля по точкамъ менѣе удобно, но также достаточно просто. Для этого проводимъ черезъ тѣ же точки $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ окружности изъ центра O_1 (если хотимъ найти головку профиля зубца O_1 —фиг. 23) и на нихъ находимъ точки профиля, засѣкая соотвѣтственно изъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \dots$ дуги окружностей радіусами $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma, \dots$, какъ было указано выше. Такимъ образомъ получаемъ точки профиля $A, B, C, \dots$

Указанные способы построенія профилей неудобны, однако, тѣмъ, что требуютъ большой траты времени; поэтому, ради быстроты вычерчиванія, удобнѣе будетъ подобрать одну или двѣ окружности, которыя могли бы съ достаточной точностью замѣнить дугу эпициклоиды или гипоциклоиды. Особенно удобенъ для этого способъ *Unwin'a*, въ которомъ дуга эпициклоиды съ хорошимъ приближеніемъ замѣняется дугою окружности. Профиль головки зубца у колеса O_1 есть эпициклоида, ограниченная въ высоту окружностью вершинъ; ищемъ теперь такую окружность, которая имѣла бы съ этой эпициклоидой общую точку P и касалась бы ее, кромѣ того, въ точкѣ, лежащей отъ полоиды O_1 на разстояніи, равномъ $\frac{2}{3}$ высоты головки зубца, считая это разстояніе по радіусу полоиды. На этомъ основаніи проводимъ изъ O_1 окружность O_3 , имѣющую радіусъ, меньшій радіуса окружности вершинъ на $\frac{1}{3}$ высоты головки (фиг. 24). Пересѣченіе этой окружности съ вспомогательной окружностью O_2 даетъ точку A . Когда при каченіи O_2 по O_1 , точка P окружности O_2 придетъ на окружность O_3 , точка A совпадаетъ съ полоидой O_1 . Слѣдовательно, мы прямо можемъ найти точку N эпициклоиды, отстоящую отъ полоиды O_1 на $\frac{2}{3}$ высоты головки, если отложимъ на полоидѣ O_1 отъ точки P дугу PA_1 , равную PA , и изъ точки A_1 засѣчемъ дугою радіуса PA точку N на окружности O_3 . Теперь остается подыскать окружность, проходящую черезъ P и касающуюся эпициклоиды въ точкѣ N . Такъ какъ NA_1 есть нормаль къ эпициклоидѣ въ точкѣ N , то центръ такой окружности лежитъ гдѣ-либо на этой прямой NA_1 . Теперь мы путемъ пробъ отыскиваемъ на линіи NA_1 центръ (ω) окружности, проходящей чрезъ P и N ; этотъ центръ можно было бы найти непосредственно, возставивъ въ срединѣ отрѣзка PN къ нему перпендикуляръ и продолживъ его до пересѣченія съ NA_1 , но упомянутый способъ пробъ на практикѣ оказывается гораздо удобнѣе. Не трудно непосредственно убѣдиться, что дуга PNM этой окружности съ достаточной точностью замѣняетъ эпициклоиду.

Совершенно такимъ же образомъ находимъ приближенную дугу окружности и для основанія зубца: опять ищемъ окружность, имѣющую съ гипоциклоидой общую точку P и, кромѣ того, касающуюся ея въ точкѣ C , лежащей отъ полоиды, считая по радіусу, на разстояніи двухъ третей всей высоты основанія зубца.

Точное вычерчиваніе эпи- и гипоциклоидъ обыкновенно не выполняется, — эти кривыя съ большою степенью приближенія замѣняются дугами круговъ, приведенныхъ въ способъ *Unwin's*, и этимъ способомъ обыкновенно пользуются всегда для вычерчиванія упомянутыхъ профилей.

Замѣтимъ, наконецъ, что для очертаній другихъ зубцовъ колеса, благодаря ихъ симметріи, найти центры подходящихъ окружностей *Unwin's* очень легко.

Во многихъ машинахъ, какъ, напр., въ машинахъ для обработки металловъ, часто встрѣчается необходимость имѣть подъ рукою цѣлый рядъ (или серію) колесъ, въ которомъ каждое колесо должно правильно зацѣпляться съ любымъ другимъ колесомъ этого ряда, что дастъ намъ возможность составлять тѣ или другія комбинаціи зубчатыхъ колесъ, а, слѣд., осуществлять ту или другую передачу. Не трудно видѣть, что въ такомъ случаѣ всѣ вспомогательныя окружности, при помощи которыхъ произведены профили, должны быть одинаковаго радіуса, и, кромѣ того, шагъ зацѣпленія также долженъ быть одинаковъ.

Если бы вспомогательныя окружности были не одинаковы, то вышло бы, что какое-либо колесо A , у котораго профили произведены двумя неодинаковыми окружностями, могло бы сцѣпляться съ колесомъ B , если профили послѣдняго образованы тѣми же окружностями, равно какъ и съ колесомъ C , имѣющимъ профили того же происхожденія; но колеса B и C между собою сцѣпляться не могли бы, такъ какъ, по предположенію, окружность, производившая профиль головки колеса B (и C), разнится отъ окружности, производившей профиль ножки колеса C (и B), а между тѣмъ для зацѣпленія B съ C нужно (по теоремѣ *Камуса*), чтобы окружность, производящая профиль головки B , производила своимъ каченіемъ сопряженный профиль основанія у зубца C .

Въ такихъ смѣнныхъ колесахъ за производящую окружность берутъ окружность съ діаметромъ, нѣсколько меньшимъ радіуса меньшаго колеса; это обстоятельство представляетъ, однако, то неудобство, что въ случаѣ работы большихъ колесъ дуга зацѣпленія остается сравнительно очень малой.

Колеса съ внутреннимъ зацѣпленіемъ и циклическими профилями профилируются по тѣмъ же правиламъ, что и колеса внѣшняго зацѣпленія: выбираютъ опять двѣ вспомогательныя окружности, O_2 и O_3 (фиг. 25), и образуютъ каченіемъ O_2 по O основаніе зубца колеса O , а каченіемъ O_3 по O_1 — профиль головки у колеса O_1 . Точно такъ же окруж-

ность O_2 дастъ профиль головки у колеса O и основаніе—у колеса O_1 . Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ точка прикосновенія одновременно удаляется или приближается къ центру на обоихъ профиляхъ. Изъ самаго способа произведенія профилей видно, что *здѣсь гипоциклоида работаетъ съ гипоциклоидой и эпициклоида—съ эпициклоидой*. Линіей зацѣпленія будутъ попережнему служить части вспомогательныхъ окружностей, XP и PY , которыя мы находимъ, проводя окружности вершинъ для того и другого колеса; при этомъ всегда нужно помнить послѣдовательность точекъ соприкосновенія вспомогательной окружности при каченіи по полоидамъ, а также и то, что эти точки будутъ послѣдовательными точками соприкосновенія самихъ полоидъ; дуга зацѣпленія здѣсь также равна линіи зацѣпленія и также должна быть больше шага зацѣпленія.

Эвольвентное зацѣпленіе. Въ эвольвентномъ зацѣпленіи линіей зацѣпленія, какъ это мы уже видѣли, является прямая, касательная къ вспомогательнымъ окружностямъ. За все время работы давленіе одного зубца на другой постоянно направлено по этой прямой.

Въ практикѣ машиностроенія установилось требованіе вообще устраивать зацѣпленіе такъ, чтобы давленіе зубцовъ другъ на друга не отклонялось значительно отъ общей касательной къ полоидамъ. Въ циклическомъ зацѣпленіи это требованіе, какъ извѣстно, мы можемъ до извѣстной степени выполнить, взявъ возможно большія вспомогательныя окружности. Здѣсь, въ эвольвентномъ зацѣпленіи, требованіе это сводится къ тому, чтобы прямая зацѣпленія была наклонена къ касательной къ полоидамъ подъ небольшимъ угломъ; обыкновенно берутъ уголъ въ 15° . При данныхъ полоидахъ выборомъ этого угла вполнѣ опредѣляются вспомогательныя окружности, а слѣдовательно, и профили зубцовъ.

Построеніе, такимъ образомъ, выполняется такъ: черезъ точку P (фиг. 26) прикосновенія полоидъ проводимъ прямую PNP_1 подъ угломъ въ 75° къ линіи центровъ OO_1 ; далѣе, изъ точекъ O и O_1 опускаемъ на эту прямую перпендикуляры ON и O_1N_1 , которые и будутъ радіусами вспомогательныхъ окружностей. Точка P при каченіи касательной PN по окружности ON дастъ профиль зубца колеса O , а при каченіи PN_1 по окружности O_1N_1 —сопряженный ему профиль зубца колеса O_1 . Проведя окружности вершинъ зубцовъ для того и другого колеса, найдемъ начало и конецъ зацѣпленія въ пересѣченіяхъ K и H этихъ окружностей съ прямой PNP_1 . Далѣе находимъ рабочія части профилей, проводя черезъ K окружность радіуса OK до пересѣченія съ профилемъ $kPeC$ въ точкѣ e и окружность радіуса O_1H до пересѣченія съ профилемъ K_1PeC_1 въ точки e_1 . Рабочими будутъ части kPe перваго профиля и k_1Pe_1 второго. Остальныя части, какъ мы уже говорили, могутъ быть очерчены произвольными кривыми.

Изъ подобія треугольниковъ ONP и O_1NP видимъ, что радіусы ON и O_1N_1 вспомогательныхъ окружностей относятся между собою, какъ

радіусы полоидъ; но для радіусовъ полоидъ PO и PO_1 имѣемъ соотношеніе (обозначая PO черезъ r , а $PO_1 \dots r_1$):

$$\omega r = \omega_1 r_1, \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ ω и ω_1 суть соотвѣтственные угловыя скорости; обозначая теперь радіусы вспомогательныхъ окружностей черезъ ϱ и ϱ_1 , гдѣ $ON = \varrho$, а $O_1N_1 = \varrho_1$, будемъ имѣть

$$r : r_1 = \varrho : \varrho_1 = \omega_1 : \omega,$$

такъ что ур—іе (1) приметъ теперь видъ:

$$\varrho \omega = \varrho_1 \omega_1 \dots \dots \dots (2)$$

Представимъ себѣ окружности ON и O_1N_1 неразрывно связанными съ полоидами O и O_1 ; вмѣсто того, чтобы катить касательную PN по окружности ON для образованія профиля, мы можемъ вращать эту окружность вмѣстѣ съ системой O , и тогда точка нити, намотанной на окружность ON и натянутой въ направленіи PN , дастъ на этой системѣ очертаніе эвольвентнаго профиля.

Представимъ теперь нить продолженной и намотанной другимъ концомъ на окружности O_1N_1 ; вращаемъ систему O со скоростью ω , а систему O_1 —со скоростью ω_1 ; получаемъ каченіе полоидъ другъ по другу и, кромѣ того, сматываніе (или наматываніе) нити съ окружности ON и наматываніе (или сматываніе) на окружность O_1N_1 ; при этомъ за время t съ окружности ON смотается кусокъ нити длиною въ $\omega \cdot \varrho \cdot t$, и, какъ показываетъ ур—ніе (2), столько же наматается на окружность O_1N_1 . Точка этой нити, описывая на системѣ O профиль зуба, описываетъ въ то же время на системѣ O_1 сопряженный ему профиль, и путь ея вдоль нити за время t , равный $\omega \cdot \varrho \cdot t$, будетъ частью линіи зацѣпленія за время t ; но за тотъ же промежутокъ времени точка полоиды опишетъ дуги $\omega \cdot r \cdot t$, а такъ какъ $\varrho = r \cos \alpha$, гдѣ α есть уголъ наклона PN_1 къ касательной къ полоидамъ TT_1 , равный у насъ 15° , то получаемъ, что часть линіи зацѣпленія за время t равна части дуги зацѣпленія за то же время, умноженной на косинусъ угла между линіей зацѣпленія и касательной къ полоидамъ. То, что справедливо относительно части дуги зацѣпленія за время t , очевидно, будетъ справедливо и для всей дуги зацѣпленія; поэтому, называя черезъ Y длину линіи зацѣпленія, а черезъ S —длину дуги зацѣпленія, можемъ написать:

$$S \cos \alpha = Y \dots \dots \dots (3)$$

Эвольвентный профиль легко вообще вычертить или точно по методу *Poncelet* или по точкамъ; но и здѣсь, ради экономіи времени, употребляютъ приближенное вычерчиваніе профиля аналогично вычер-

чиванію циклическихъ профилей. Раздѣляютъ часть высоты зубца (фиг. 27), считая отъ вспомогательной окружности до окружности вершинъ, на три равныя части ($ab = bc = cd = \frac{1}{3} ad$), берутъ одну изъ точекъ дѣленія, отстоящую отъ вспомогательной окружности на разстояніи двухъ такихъ частей, — въ данномъ случаѣ это будетъ точка c , — и проводятъ изъ нея касательную cT къ вспомогательной окружности. Отрѣзокъ cT дѣлятъ на четыре равныя части, и тогда одна изъ точекъ дѣленія, точка X , отстоящая отъ точки T на одну такую часть, принимается за центръ круга радіуса Xc ; дугою psc этого круга и замѣняютъ эвольвенту. Часть профиля зубца, лежащая внутри вспомогательной окружности (часть pe), можетъ быть очерчена произвольно, лишь бы не было препятствія движенію вершины сопряженного зубца.

Эвольвентное зацѣпленіе имѣетъ ту особенность, что колеса съ эвольвентными зубцами можно нѣсколько отодвинуть одно отъ другого, и зацѣпленіе все-таки останется правильнымъ, если длина дуги зацѣпленія остается достаточной. Дѣйствительно, измѣненіе разстоянія между центрами полоидъ имѣло бы своимъ слѣдствіемъ только измѣненіе наклона линіи зацѣпленія къ линіи центровъ и увеличеніе радіусовъ полоидъ; но такъ какъ вспомогательныя окружности остались тѣ же, то отношеніе между радіусами полоидъ осталось прежнее, а слѣдовательно, и передача осталась та же. Подобнаго свойства циклическое зацѣпленіе не имѣетъ, что и представляетъ преимущество эвольвентнаго зацѣпленія передъ циклическимъ и особенное его удобство: *эвольвентное зацѣпленіе не требуетъ особенно точной установки.*

Однако, эвольвентное зацѣпленіе, въ свою очередь, имѣетъ свою невыгодную сторону, выясненную изъ опытовъ Бахомъ. Въ этомъ зацѣпленіи зубцы ограничены выпуклыми профилями, значитъ, *приходится работать выпуклой поверхности по выпуклой же*, и, какъ не трудно видѣть, соприкосновеніе въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто на меньшей поверхности (вслѣдствіе упругости матеріала и сминанія поверхностей соприкосновеніе никогда не происходитъ по линіи), нежели тогда, когда *выпуклая поверхность работаетъ съ вогнутой*; это послѣднее имѣетъ мѣсто именно въ циклическомъ зацѣпленіи (фиг. 28—29 ... $\alpha\beta < \gamma\delta$).

Въ этомъ и кроется причина большаго изнашиванія зубцовъ эвольвентнаго зацѣпленія сравнительно съ циклическимъ при всѣхъ остальныхъ равныхъ условіяхъ.

Опыты Баха надъ деревянными зубьями показываютъ, что эвольвентный профиль постепенно, путемъ истиранія, обращается въ профиль, близкій къ циклическому. На фиг. 30 представленъ одинъ такой зубъ; у него все время работала только одна сторона AB , и оказалось, что послѣ нѣкотораго промежутка времени рабочая сторона AB приняла

форму *циклическаго* очертанія, а нерабочая — сохранила *эвольвентное* (пунктиромъ выше *B* указана граница первоначальнаго эвольвентнаго профиля *BA*). Поэтому циклическое зацѣпленіе слѣдуетъ признать болѣе умѣстнымъ, особенно тамъ, гдѣ имѣетъ мѣсто болѣе или менѣе значительная угловая или окружная скорость колесъ.

Внутреннее эвольвентное зацѣпленіе не представляетъ для вычерчиванія никакихъ трудностей; вся разница состоитъ въ томъ, что обѣ вспомогательныя окружности будутъ лежать по одну сторону касательной къ полоидамъ (фиг. 31). Начало и конецъ зацѣпленія, а также соотвѣтственныя величины рабочихъ частей профилей находятся по общимъ правиламъ.

На основаніи приведенныхъ соображеній не представитъ никакихъ затрудненій вычерчиваніе *зацѣпленія зубчатой полосы съ колесомъ*. Это зацѣпленіе можетъ быть выполнено или съ циклическимъ профилемъ, или съ эвольвентнымъ. Въ первомъ случаѣ выбираемъ вспомогательныя окружности O_2 и O_3 (фиг. 32) и строимъ циклическіе профили на общихъ основаніяхъ. У зубцовъ полосы профилями будутъ служить простыя циклоиды, образованныя при каченіи вспомогательныхъ окружностей по прямой O_1O_1 , въ которую обратилась здѣсь полоида O_1 .

Иногда (теперь рѣдко) на полосѣ вмѣсто зубцовъ прилаживаютъ цѣвки. Можно устроить въ данномъ случаѣ и эвольвентное зацѣпленіе, для чего, подобно тому, какъ это мы дѣлали раньше, проводимъ прямую *PN* (фиг. 33) подъ угломъ въ 75° къ линіи центровъ; профилемъ зубца колеса будетъ эвольвента окружности *N*; для полосы же соотвѣтствующая вспомогательная окружность слилась съ прямой *NP* (центръ окружности удалился въ бесконечность); поэтому вмѣсто эвольвенты здѣсь будетъ прямая *AB*, перпендикулярная къ линіи *NP*, такъ что профили зубчатой полосы получаютъ здѣсь прямолинейное очертаніе.

Заканчивая этимъ вопросъ о цилиндрическихъ колесахъ, замѣтимъ, что въ практикѣ машиностроенія установились нѣкоторые требованія относительно наименьшаго допустимаго числа зубьевъ. Теоретическое рѣшеніе этого вопроса въ отдѣльныхъ случаяхъ особыхъ трудностей не представляетъ, но, понятно, достаточно полнымъ быть не можетъ, почему здѣсь и приходится руководствоваться данными и правилами практики. Вообще избѣгаютъ брать малое число зубцовъ, и упомянутыя выше передачи съ четырьмя зубцами на маломъ колесѣ встрѣчаются только въ видѣ исключенія въ нѣкоторыхъ небольшихъ грузоподъемныхъ машинахъ. Для передачи съ малой скоростью (въ ручныхъ воротахъ, кранахъ и проч.) не берутъ меньше 11 зубцовъ на меньшемъ колесѣ; въ передачахъ приводныхъ, — отъ паровыхъ машинъ и проч., — не берутъ меньше 24 зубцовъ.

Что касается передаточнаго числа, т.-е. отношенія чиселъ зубцовъ, то вообще нужно замѣтить, что тамъ, гдѣ рѣчь идетъ о передачѣ болѣе или менѣе значительнаго постояннаго усилія, выгодно, чтобы зубцы какъ можно скорѣе приработались другъ къ другу, а это будетъ тогда, когда работать другъ съ другомъ придется однимъ и тѣмъ же зубцамъ. Въ этомъ смыслѣ выгодны передачи $1:1$, $1:2$, $1:3\dots$; совершенно же невыгодны такія, какъ $11:17$, или, напр., $23:31$ и т. п.

Но если рѣчь идетъ о передачѣ усилія, періодически мѣняющагося, когда, напр., за одинъ оборотъ усиліе будетъ переходить черезъ *maximum* и *minimum*, тогда, очевидно, простыя передачи, каковы, напр., $1:2$, $1:4\dots$, невыгодны, потому что, въ случаѣ простыхъ отношеній, однимъ и тѣмъ же зубцамъ пришлось бы испытывать постоянно наибольшія усилія, а другимъ—наименьшія. Для болѣе равномернаго изнашивания зубцовъ, по крайней мѣрѣ, у того колеса, которому передается усиліе, выгоднѣе брать менѣе простыя отношенія, наприм., $2:5$, $3:7$ и т. д.

Коническая фрикціонная и зубчатая передача.

Мы изложили вопросъ о передачѣ вращенія между параллельными осями; допустимъ теперь, что требуется передать вращеніе отъ оси *A*—другой оси *B*, пересѣкающейся съ первой, положимъ, въ точкѣ *O* (фиг. 34). Пусть вращеніе около оси *A* совершается съ угловою скоростью ω , вращеніе же около *B* должно совершаться съ угловою скоростью ω_1 , причемъ отношеніе $\omega : \omega_1$ есть нѣкоторое постоянное число. Допустимъ, наконецъ, что оба вращенія направлены въ противоположныя стороны.

Разсмотримъ и здѣсь, подобно тому, какъ это мы дѣлали при разборѣ передачи между параллельными осями, движеніе системы *A* относительно *B*; для этого попрежнему придаемъ обѣмъ системамъ скорость вращенія около оси *B*, равную ω_1 , но направленную въ сторону, противоположную дѣйствительному вращенію около *B*. Тогда система *A* будетъ обладать сложнымъ движеніемъ: ось *A* будетъ вращаться около *B* съ угловою скоростью ω_1 , а система *A* будетъ вращаться около оси *A* со скоростью ω . Въ каждый данный моментъ оба вращенія можно представить замѣненнымъ однимъ, положеніе оси мгновеннаго вращенія и угловая скорость котораго найдутся по извѣстнымъ правиламъ механики.

Замѣтимъ, что вращенія графически обыкновенно представляютъ въ видѣ векторовъ, величина которыхъ даетъ въ извѣстномъ масштабѣ угловыя скорости, а направленіе вращенія опредѣляютъ такимъ образомъ, что наблюдатель, смотря съ конца вектора на его начало, видитъ вращеніе совершающимся по часовой стрѣлкѣ. Какъ извѣстно, въ такомъ случаѣ вращенія около пересѣкающихся осей складываются по правилу параллелограмма движенія.

Система *A*, какъ было уже указано выше, въ каждый данный моментъ участвуетъ въ двухъ вращеніяхъ: во-первыхъ — около оси *A*, и во-вторыхъ — около оси *B*, направленныхъ въ одну и ту же сторону, такъ какъ вращеніе системы *B* около ея оси было, по предположенію, направлено въ сторону, противоположную вращенію около *A*. Составное вращеніе, замѣняющее въ данный моментъ эти два вращенія, мы найдемъ, если отложимъ отъ точки *O* (фиг. 35) два вектора *OA* и *OB* въ направленіи осей вращенія, представляющіе по своей величинѣ въ заданномъ масштабѣ угловыя скорости ω и ω_1 , построимъ на нихъ параллелограммъ *OACB* и проведемъ діагональ его *OC*, — она и дастъ намъ направленіе оси и величину угловой скорости составного вращенія.

Уголъ между осями *OA* и *OB* предполагается неизмѣннымъ, поэтому ось *A*, въ движеніи системы *A* относительно *B*, опишетъ круглый конусъ. Въ каждый данный моментъ мы можемъ построениемъ параллелограмма опредѣлить положеніе оси *OC* составного вращенія (оси мгновеннаго вращенія); при этомъ мы всегда имѣемъ соотношеніе:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} = \text{const} \dots \dots \dots (1)$$

откуда при постоянствѣ угла *AOB* слѣдуетъ постоянство угла *COB*; иными словами, ось мгновеннаго вращенія будетъ лежать на кругломъ конусѣ, описанномъ діагональю *OC* около оси *OB*.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что ось мгновеннаго вращенія въ движеніи системы *B* относительно *A* будетъ лежать на конусѣ, описанномъ тою же діагональю *OC* около *OA*. Такимъ образомъ движеніе системы *A* относительно *B* можно представить каченіемъ (безъ скольженія) второго конуса по первому.

Передачу въ данномъ случаѣ мы можемъ осуществить подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ цилиндрической передачѣ, а именно: задавшись направленіями осей и отношеніемъ угловыхъ скоростей (или чиселъ оборотовъ), строимъ на направленіяхъ осей параллелограммъ со сторонами, пропорціональными угловымъ скоростямъ; находимъ діагональ этого параллелограмма и выполняемъ два конуса, одинъ, — описанный этой діагональю около одной оси, и другой — около другой оси; заставляемъ эти конусы плотно прижиматься другъ къ другу (вершины ихъ должны все время оставаться совпадающими), и тогда, вращая одинъ конусъ съ угловою скоростью ω , получимъ вращеніе другого съ угловою скоростью ω_1 . Возьмемъ какую-либо точку *K* соприкосновенія этихъ конусовъ (фиг. 36). Разсматривая ее, какъ принадлежащую конусу *A*, мы выразимъ ея линейную скорость въ видѣ *KE* . ω , гдѣ *KE* $\perp$ оси *OA*; при отсутствіи скольженія конусовъ другъ по другу ту же скорость должна имѣть точка *K*, если разсматривать ее, какъ принадлежащую конусу *B*, и предположивъ, что этотъ второй конусъ вращается съ какой-либо угловою скоростью ω' , мы найдемъ равенство

$$KE . \omega = KH . \omega' . \dots \dots \dots (2)$$

или

$$\frac{KE}{KH} = \frac{\omega'}{\omega} \dots \dots \dots (3)$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ *ОЕК* и *ОКН*, имѣющихъ общую гипотенузу *ОК*, принимая во вниманіе ур—ніе (3), получаемъ:

$$\frac{KE}{KH} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} \dots \dots \dots (4)$$

Сравнивая полученное ур—ніе (4) съ ур—ніемъ (1), пишемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB},$$

т.-е.

$$\omega' = \omega_1 \dots \dots \dots (5)$$

Иными словами, построивъ конусы около *A* и около *B* съ образующей *ОС* и устранивъ ихъ взаимное скольженіе, мы дѣйствительно получаемъ требуемую передачу; при этомъ угловая скорость одной системы въ ея движеніи относительно другой, выражаемая діагональю *ОС*, будетъ равна

$$\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega \cdot \omega_1 \cos \alpha},$$

гдѣ α есть уголъ между осями (выраженіе это получаемъ изъ $\triangle$ -ка *ОВС*). Обозначивъ черезъ α_1 и α_2 углы діагонали *ОС* со сторонами *ОВ* и *ОА*, можемъ ту же угловую скорость представить еще въ видѣ

$$\omega \cdot \cos \alpha_1 + \omega_1 \cos \alpha_2.$$

Для осуществленія передачи можно ограничиться выполненіемъ лишь отрѣзковъ конусовъ, и такая коническая фрикціонная передача употребляется (подобно фрикціонной цилиндрической) въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

Болѣе употребительна, какъ и въ случаѣ цилиндрической передачи, передача *зубчатая*. Представимъ себѣ шаровую поверхность, описанную изъ точки *О'* какимъ-либо радіусомъ *О'С'* (фиг. 37); эта шаровая поверхность пересѣчетъ упомянутые конусы по двумъ окружностямъ; при каченіи конусовъ другъ по другу окружности, оставаясь на сферѣ, будутъ также катиться другъ по другу; взявъ на сферѣ профиль, связанный съ одной изъ окружностей, можемъ получить сопряженный съ нимъ профиль другой окружности, катя первую окружность по второй и отыскивая на сферѣ огибающую перваго профиля. Какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ, можно взять вспомогательныя окружности, которыя своимъ каченіемъ по той и другой окружности конусовъ дадутъ сферическія эпи- и гипоциклоиды; послѣднія будутъ сопряженными

профилями головокъ и основаній зубцовъ, а сами зубцы представляются коническими поверхностями, образующія которыхъ будутъ постоянно проходить черезъ точку O' , направляющими же для нихъ будутъ служить сферическіе профили.

Не трудно найти горизонтальную и вертикальную проекціи профилей зубцовъ; ходъ построенія указанъ на чертежѣ. Даны основные конусы, вертикальныя проекціи которыхъ суть $O'C'K'$ и $O'C'M'$. Описываемъ сферу изъ вершины конусовъ (O' , O) радіусомъ, равнымъ $O'C'$, а за вспомогательную окружность для образованія профиля головки на колесѣ $O'C'K'$, беремъ на этой сферѣ окружность, проектирующуюся на вертикальную плоскость въ видѣ прямой $C'N'$, — діаметръ ея будетъ равенъ $C'N'$ и сама она (на половину) начерчена въ совмѣщеніи съ вертикальной плоскостью проекцій. При каченіи этой окружности по окружности $C'K'$ основанія конуса, или, что то же, при каченіи конуса $O'C'N'$ по конусу $O'C'K'$, точка окружности $C'N'$ образуетъ профиль головки, лежащій на сферѣ $K'C'M'$.

Чтобы построить горизонтальную проекцію этой сферической эпициклоиды, положимъ, что конусы, основной и вспомогательный, касаются другъ друга по образующей OX , $O'X'$. Замѣтимъ, что окружность основанія основного конуса проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину. Поэтому беремъ на вспомогательной окружности, начерченной въ натуральную величину на вертикальной плоскости проекцій, рядъ точекъ I, II, III, IV, V, и откладываемъ по горизонтальной проекціи основанія конуса $O'C'K'$ отъ точки X послѣдовательно дуги $X1$, 12 , 23 , равныя дугамъ $C'I$, $I II$, $II III$,; концы этихъ дугъ будутъ служить горизонтальными проекціями послѣдовательныхъ точекъ соприкосновенія окружностей.

Проведемъ теперь для начальнаго положенія конусовъ черезъ точку IV горизонтальную плоскость; слѣды ея найти легко, — стоитъ изъ точки IV совмѣщенной вспомогательной окружности опустить на прямую $C'N'$ перпендикуляръ IVp и провести черезъ основаніе его p горизонтальную прямую $a'pb'$ — эта послѣдняя прямая и будетъ вертикальнымъ слѣдомъ искомой горизонтальной плоскости; вмѣстѣ съ тѣмъ она будетъ служить вертикальной проекціей окружности, по которой плоскость пересѣкаетъ сферу. Горизонтальную проекцію той же окружности мы найдемъ, опустивъ изъ a' и b' перпендикуляры, при чемъ не слѣдуетъ забывать, что эта окружность будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину, въ видѣ окружности bea .

Теперь, аналогично тому, что мы имѣли при построеніи плоскихъ эпициклоидъ, мы можемъ сказать, что въ тотъ моментъ, когда прикосновеніе окружностей будетъ имѣть мѣсто въ точкѣ (4, 4'), точка вспомогательной окружности, прикасавшаяся къ основной въ начальный моментъ, теперь будетъ находиться на горизонтальной окружности (aeb , $a'e'b'$), причемъ разстояніе ея отъ точки (4, 4') дается непосредственно отрѣзкомъ ($C'IV$). Ищемъ теперь по правиламъ начертательной геометріи

проекціи точки, отстоящей отъ другой данной на извѣстное разстояніе и лежащей на данной горизонтальной окружности, — схема построения указана справа. Такимъ образомъ мы и находимъ точку (e, e'), которая и будетъ одной изъ точекъ искомой эпициклоиды.

Подобнымъ же образомъ отыскиваемъ и другія точки и находимъ такимъ образомъ вертикальную и горизонтальную проекціи профиля головки. Взявъ далѣе на окружности KxS толщину зубца и ширину впадины и повторяя построение, получимъ горизонтальныя и вертикальныя проекціи профилей всѣхъ зубцовъ. Сами зубцы, какъ мы уже говорили, будутъ представлять собою коническія поверхности, направляющими для которыхъ будутъ служить найденныя сферическіе профили, образующія же будутъ проходить черезъ общую вершину (O, O') конусовъ. Ограничивая зубцы по длинѣ образующихъ другой сферической поверхностью, получимъ полныя поверхности зубцовъ.

Указанное построение на практикѣ однако не примѣняется, и обыкновенно употребляется нижеприводимое, *приблизительное*. Представимъ себѣ, что мы построили еще два конуса KPC и SCM (фиг. 38), касающіеся нашей сферы по окружностямъ основаній двухъ первыхъ конусовъ (KOC и SOM); конусы эти будутъ имѣть образующую PCQ , перпендикулярную къ образующей соприкосновенія первыхъ. Если сферическіе профили не велики, т.-е., если зубцы не высоки по сравненію съ радіусомъ сферы OC , что, вообще, имѣетъ мѣсто почти всегда, то можно принять, что эти профили приблизительно совпадаютъ съ поверхностью конусовъ, касающихся сферы по окружностямъ KC и CM . Но поверхности этихъ дополнительныхъ конусовъ PKC и QCM мы можемъ развернуть на плоскости чертежа, — тогда на той же поверхности развернутся и профили, и въ такомъ случаѣ построение этихъ профилей мы можемъ свести на построение профилей у цилиндрическихъ колесъ, знакомое уже намъ, при чемъ придется считать, что полондами будутъ служить окружности Cx и Cy радіусовъ PC и QC (окружности KC и CM , развернутыя теперь на плоскости, будутъ, понятно, дугами этихъ окружностей).

Шагъ, толщина зубца и проч. будутъ, разумѣется, откладываться на окружностяхъ Cx и Cy въ дѣйствительную величину, и все построение, какъ видимъ, значительно упрощается.

Вычертивъ профили, наворачиваемъ ихъ на поверхности дополнительныхъ конусовъ PKC и QCM и строимъ зубцы совершенно такъ же, какъ и въ случаяхъ сферическихъ профилей, ограничивая ихъ однако въ длину не сферической поверхностью, а конической, какъ это видно на чертежѣ, гдѣ слѣва дана часть разрѣза колеса вертикальной плоскостью.

Назовемъ числа зубцовъ у колесъ черезъ z и z_1 , и тогда, аналогично цилиндрическимъ колесамъ, можемъ написать

$$z : z_1 = \omega_1 : \omega = R : R_1,$$

гдѣ черезъ R и R_1 обозначены соотвѣтствующие радіусы окружностей $КС$ и $СМ$. Обозначая далѣе шагъ передачи черезъ t , имѣемъ:

$$zt = 2\pi R, \quad z_1 t = 2\pi R_1.$$

Далѣе изъ чертежа имѣемъ:

$$PC = r = \frac{R}{\cos \alpha_1}, \quad CQ = r_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha_2}.$$

Углы β и β_1 секторовъ, въ которые развернутся боковыя поверхности дополнительныхъ конусовъ, опредѣляются условіями

$$r\beta = 2\pi R, \quad r_1\beta_1 = 2\pi R_1.$$

Если данъ или выбранъ шагъ зацепленія t , то, задаваясь числомъ зубцовъ, опредѣляемъ радіусы R и R_1 , проводимъ оси OP и OQ , затѣмъ проводимъ параллель оси OP на разстояніи R отъ нея и параллель оси OQ на разстояніи R_1 ; въ точкѣ ихъ пересѣченія и будетъ лежать точка C ; такимъ образомъ опредѣляется линія OC . Впрочемъ, направленіе линіи OC можно найти построеніемъ параллелограмма на осяхъ, какъ это было уже указано выше.

При обычномъ расчетѣ шагъ относится не къ окружности $СК$, какъ это мы принимали выше, а къ средней (по длинѣ зубца) окружности; и въ этомъ случаѣ радіусъ ея опредѣляется непосредственно по числу зубцовъ, а затѣмъ, зная радіусы этихъ среднихъ окружностей для обоихъ колесъ, мы опредѣляемъ направленіе OC проведеніемъ параллелей той и другой оси на разстояніяхъ, равныхъ радіусамъ, а затѣмъ находимъ и точку C , отложивъ отъ точки пересѣченія параллелей половины длины зубца по длинѣ образующей OC . Проведя прямую PCQ перпендикулярно къ OC до пересѣченія съ той и другой осью, получаемъ CP и CQ —длины образующихъ дополнительныхъ конусовъ; далѣе, изъ чертежа или вычисленіемъ опредѣляемъ радіусы R и R_1 , по числу зубцовъ находимъ шагъ зацепленія, отнесенный къ окружностямъ $СК$ и $СМ$, и такимъ образомъ получаемъ всѣ нужные для построенія профилей элементы. Для вычисленія R и R_1 имѣемъ соотношенія:

$$R = \varrho + \frac{l}{2} \sin \alpha_1$$

и

$$R_1 = \varrho_1 + \frac{l}{2} \sin \alpha_2;$$

далѣе

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = \varrho_1 : \varrho_2,$$

и, наконецъ,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

т.-е. углу между осями.

Внутренняя коническая передача не представляет послѣ сказаннаго никакихъ затрудненій; это будетъ передача вращенія между двумя пересѣкающимися осями въ одну и ту же сторону. Въ этомъ случаѣ дѣло сводится къ каченію одного конуса внутри другого (фиг. 39).

Замѣтимъ, наконецъ, что коническая передача употребляется по большей части между осями взаимно-перпендикулярными.

Скорость относительнаго скольженія какой-либо точки зубца по другому, очевидно равна произведенію изъ относительной угловой скорости вращенія на разстояніе этой точки отъ оси мгновеннаго вращенія, т.-е. она выразится такъ:

$$w = p \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos \alpha},$$

гдѣ p есть разстояніе точки отъ оси; та же величина w выразится еще такъ:

$$w = p (\omega \cos \alpha_1 \pm \omega_1 \cos \alpha_2).$$

Положивъ $\alpha = 0$, получимъ формулу для скорости скольженія въ случаѣ цилиндрической передачи:

$$w = p (\omega \pm \omega_1).$$

Знакъ *минусъ* относится къ внутренней передачѣ.

Передача между осями непараллельными и пересѣкающимися.

Пусть одна изъ такихъ осей есть ось A (фиг. 40), а другая—ось B ; положимъ далѣе, что вращеніе около A совершается съ угловою скоростью ω , а около B —со скоростью ω_1 и въ сторону, противоположную первому вращенію; пусть затѣмъ отношеніе $\omega : \omega_1$ есть величина постоянная.

Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ предыдущихъ случаяхъ, для рѣшенія этого вопроса разсмотримъ движенія системы B относительно A , для чего даемъ обѣмъ системамъ скорость около оси A , равную ω , но направленную въ обратную сторону. Система A станетъ неподвижна, система же B будетъ заразъ участвовать въ двухъ движеніяхъ: около оси A и около оси B ; это сложное движеніе и будетъ относительнымъ движеніемъ системы B . Какъ это извѣстно изъ теоретической механики, сложеніе двухъ вращательныхъ движеній около осей непараллельныхъ и непересѣкающихся приводитъ къ результирующему вращательному движенію около нѣкоторой третьей оси и къ

поступательному движенію вдоль той же оси, такъ что эта ось будетъ осью *вращенія-скольженія*; положеніе ея не трудно найти. Съ этою цѣлью проводимъ линію *MN* кратчайшаго разстоянія между осями *A* и *B* и возьмемъ на ней нѣкоторую точку *E* (что касается выбора этой точки, то объ этомъ мы скажемъ ниже); замѣняемъ теперь вращеніе около оси *A* вращеніемъ около оси, параллельной оси *A* и проходящей черезъ точку *E*; вращеніе около оси *B* подобнымъ же образомъ замѣняемъ вращеніемъ около новой оси, параллельной прежней оси *B* и проходящей черезъ ту же точку *E*. Обѣ замѣны дадутъ еще два поступательныхъ движенія, направленія коихъ будутъ лежать въ плоскости, проходящей черезъ ту же точку *E* и перпендикулярной къ *MN*, т.-е. въ плоскости, содержащей какъ направленіе *A*, такъ и направленіе *B*.

Вращенія мы откладываемъ въ этой плоскости, какъ векторы *EX* и *EY* (фиг. 41), гдѣ *EX* параллельна оси *MB* (фиг. 40), а *EY* параллельна оси *NA*, и складываемъ ихъ по правилу параллелограмма; результирующее вращеніе представится діагональю этого параллелограмма *EC*, и величина его Ω выразится черезъ ω и ω_1 такъ:

$$EC = \Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos \alpha},$$

гдѣ α обозначаетъ уголъ между осями.

Что касается поступательныхъ движеній, то каждое изъ нихъ будетъ перпендикулярно къ соотвѣтствующей оси: поступательное движеніе, получившееся при перенесеніи вращенія около *B*, будетъ перпендикулярно къ *EX*, а поступательное движеніе отъ замѣны вращенія около *A*—перпендикулярно къ *EY*; величина же cadaго выразится произведеніемъ изъ разстоянія точки *E* отъ оси на соотвѣтствующую угловую скорость. Назовемъ *EN* (фиг. 40) черезъ r_1 , а *EM*—черезъ r_2 ; обозначимъ *MN* черезъ r , такъ что

$$MN = r = r_1 + r_2;$$

поступательныя движенія (скорости ихъ) выразятся одно черезъ $r_1\omega$, а другое—черезъ $r_2\omega_1$; складывая ихъ по правилу параллелограмма, получимъ результирующее поступательное движеніе, направленіе котораго будетъ направленіемъ оси скольженія. Чтобы эта ось совпадала съ осью вращенія, необходимо, чтобы точка *E* была выбрана нѣкоторымъ опредѣленнымъ образомъ. Дѣйствительно, для совпаденія указанныхъ осей необходимо, чтобы слагающія величины $r_1\omega$ и $r_2\omega_1$, взятые въ направленіи, перпендикулярномъ къ *EC*, взаимно уничтожались; это требованіе влечетъ за собою необходимость удовлетворить уравненію:

$$r_1\omega \cdot \cos CEY = r_2\omega_1 \cos XEC \quad (1)$$

или, называя углы прямой *EC* съ осями *A* и *B* черезъ α_1 и α_2 , получимъ уравненіе:

$$r_1\omega \cos \alpha_1 = r_2\omega_1 \cos \alpha_2, \quad (2)$$

такъ какъ, далѣе, α_1 и α_2 суть вполне опредѣленные величины при данномъ отношеніи угловыхъ скоростей вращенія и, кромѣ того,

$$r_1 + r_2 = r,$$

т.-е. нѣкоторой вполне опредѣленной величиной, то r_1 или r_2 опредѣлятся единственнымъ образомъ, такъ что отсюда становится возможнымъ заключить, что точка E есть нѣкоторая вполне опредѣленная точка кратчайшаго разстоянія MN .

Такую замѣну сложнаго движенія однимъ вращательнымъ и однимъ поступательнымъ мы можемъ произвести въ каждый данный моментъ относительнаго движенія системы B ; каждый разъ мы будемъ получать новую ось EC —ось *скольженія—вращенія*. Геометрическимъ мѣстомъ этихъ осей EC будетъ служить, очевидно, поверхность, описанная прямой EC , наклоненной къ оси A подъ опредѣленнымъ угломъ α_1 и находящейся отъ нея на опредѣленномъ разстояніи r_1 . Извѣстно, что такая поверхность будетъ *однополымъ гиперболоидомъ* вращенія съ осью A .

Такимъ образомъ, *аксоидъ* въ движеніи системы B относительно A есть, слѣдовательно, *линейчатый гиперболоидъ вращенія*. Точно такъ же мы найдемъ, что аксоидомъ въ движеніи A относительно B будетъ служить гиперболоидъ, описанный прямой EC при вращеніи ея около оси B . Оба гиперболоида будутъ касаться другъ друга по прямой EC . Выполнивъ матеріально эти два гиперболоида (фиг. 42) и, нажавъ ихъ другъ на друга, мы можемъ, вращая одинъ изъ нихъ около A со скоростью ω , получить вращеніе другого около B со скоростью ω_1 , при чемъ отношеніе $\omega : \omega_1$ будетъ даннымъ числомъ. Взявъ отрѣзки этихъ гиперболоидовъ, ограниченные плоскостями, проведенными перпендикулярно къ осямъ черезъ какую-либо точку общей образующей (по которой происходитъ касаніе гиперболоидовъ), можемъ устроить зубчатую передачу, подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ коническихъ колесахъ, опять при помощи дополнительныхъ конусовъ; образующими этихъ конусовъ будутъ служить нормали къ поверхностямъ гиперболоидовъ, проведенныя въ точкахъ окружностей основаній отрѣзковъ. Развернувъ конусы, найдемъ соотвѣтствующие профили. Такъ какъ движеніе гиперболоидовъ сопровождается, какъ мы видѣли, взаимнымъ скольженіемъ вдоль линіи соприкосновенія, то подобнаго рода зубчатая передача будетъ сопровождаться бѣльшей потерей на треніе, нежели въ передачахъ цилиндрической и конической; это обстоятельство, а также и трудность выполненія, заставляютъ избѣгать на практикѣ употребленія этой гиперболоической передачи, и въ машиностроеніи она, вообще говоря, примѣненія не имѣетъ; въ виду этого больше на ней останавливаться не будемъ. Замѣтимъ только, что передачу между осями непараллельными и непересѣкающимися всегда можно выполнить при помощи двухъ коническихъ передачъ. На самомъ дѣлѣ пред-

ставимъ себѣ, что посредствующею осью для передачи служить линія кратчайшаго разстоянія MN (фиг. 40); тогда мы устраиваемъ одну передачу между осями NA и MN , а другую—между MN и MB и такимъ образомъ выполнимъ передачу между NA и MB . Можно и не брать линіи MN посредствующею осью, можно за эту ось взять прямую, соединяющую двѣ любыя точки прямыхъ NA и MB ; но передъ всѣми этими передачами передача при помощи линіи кратчайшаго разстоянія имѣетъ то преимущество, что это будетъ коническая передача при осяхъ, наклоненныхъ другъ къ другу подъ *прямымъ* угломъ. Такимъ образомъ мы всегда можемъ обойтись безъ гиперболической передачи.

Менѣе выгодна, а потому и менѣе употребительна замѣна гиперболическаго зацѣпленія такъ называемымъ *винтовымъ*; въ машиностроеніи оно употребляется почти такъ же рѣдко, какъ и гиперболическое. Возьмемъ на линіи кратчайшаго разстоянія между осями, на линіи MN (фиг. 43), какую-нибудь точку E и радіусами ME и EN опишемъ около осей B и A цилиндры PQ и RT ; оба эти цилиндра будутъ касаться другъ друга въ одной точкѣ E . Заставимъ теперь одинъ цилиндръ вращаться со скоростью ω_1 , а другой—со скоростью ω . Если мы будемъ разсматривать движеніе одного цилиндра по отношенію къ другому подобно тому, какъ мы это дѣлали выше при разсмотрѣніи гиперболическихъ колесъ, то можно замѣтить, что это относительное движеніе сопровождается скольженіемъ (какъ и въ случаѣ гиперболоидовъ), направленіе котораго найти легко. Для этого черезъ точку E проводимъ плоскость, параллельную обѣимъ осямъ; плоскость эта будетъ въ то же время касательною плоскостью къ обоимъ цилиндрамъ. Отложимъ въ этой плоскости векторъ EX , пропорціональный произведенію $r_1 \cdot \omega$, гдѣ $r = EN$ (фиг. 43 и 44), направленный противъ окружной скорости цилиндра A въ точкѣ E ; затѣмъ проводимъ векторъ EY , пропорціональный произведенію $r_2 \omega_1$, гдѣ $r_2 = EM$, и направленный по окружной скорости цилиндра B . Діагональ EK параллелограмма, построеннаго на этихъ векторахъ, и дастъ скорость относительнаго скольженія. Эту скорость мы можемъ получить еще иначе, какъ замыкающую сторону YY_0 треугольника EY_0Y , въ которомъ стороны EY и EY_0 пропорціональны окружнымъ скоростямъ цилиндровъ и отложены въ направленіи этихъ скоростей.

Ось относительнаго вращенія будетъ, какъ и прежде, опредѣляться діагональю параллелограмма, построеннаго на векторахъ, пропорціональныхъ угловымъ скоростямъ системъ и параллельныхъ осямъ A и B . Такъ какъ отношеніе угловыхъ скоростей намъ дано, а направленіе осей неизмѣнно, то діагональ параллелограмма будетъ и по величинѣ, и по направленію та же, что и въ параллелограммѣ EC (фиг. 41), построенномъ нами при разсмотрѣніи гиперболической передачи; разница будетъ въ томъ, что тамъ, благодаря выбору нѣкоторой опредѣленной

въ системѣ точки E , направленіе относительнаго скольженія совпадало съ направленіемъ оси относительнаго вращенія; здѣсь же, при произвольной точкѣ E , такого совпаденія нѣтъ.

Направленіе діагонали EK , лежащее въ плоскости, касательной къ цилиндрамъ, есть направленіе одной изъ касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку E къ обоимъ цилиндрамъ; возьмемъ эту діагональ за направленіе касательной къ винтовымъ линіямъ на томъ и на другомъ цилиндрѣ. Такія двѣ винтовыя линіи можно, очевидно, взять принадлежащими поверхностямъ двухъ сопряженныхъ зубцовъ того и другого цилиндра; теперь, слѣдовательно, зубцы будутъ обладать винтовыми поверхностями, дающими въ сѣченіи съ начальными цилиндрами наши винтовыя линіи. Проведя мысленно рядъ винтовыхъ нитокъ на поверхности того и другого цилиндра, получимъ опредѣленное число зубцовъ на томъ и другомъ колесѣ. Такъ какъ скорости точекъ начальныхъ цилиндровъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ діагонали EK , равны (по свойству параллелограмма), а прямая EK даетъ направленіе винтовыхъ нитокъ, то разстояніе между рабочими поверхностями двухъ сосѣднихъ зубцовъ, считая по поверхности цилиндровъ и въ направленіи, перпендикулярномъ къ винтовымъ линіямъ, должны быть одинаковыми на томъ и другомъ цилиндрѣ, или, иначе говоря, разстоянія между сосѣдними винтовыми нитями, которыя служатъ направляющими поверхностей зубцовъ, должны быть одинаковы. Разстоянія эти часто называютъ *поперечными шагами* зацепленія. *Окружнымъ шагомъ* называется разстояніе между двумя нитями, если считать по окружности цилиндра; окружные шаги относятся между собою, какъ окружныя скорости цилиндровъ.

Если наклонъ винтовыхъ нитокъ къ осямъ цилиндровъ назовемъ черезъ β_1 и β_2 , то уголъ KEX (фиг. 44) будетъ равенъ $\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)$, а уголъ KEU будетъ равенъ $\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right)$, такъ какъ оси соотвѣтственно перпендикулярны къ направленіямъ окружныхъ скоростей. Если цилиндръ развернуть на плоскость, такъ что (1,1) и (2,2) (фиг. 45) представятъ развернутыя окружности основаній, а (1,2) представятъ образующія, то окружный шагъ представится отрѣзкомъ cb , а поперечный—отрѣзкомъ ab ; уголъ abc , очевидно, будетъ равенъ углу между касательной къ винтовой линіи и осью цилиндра *), т.-е. углу β_1 . Мы можемъ написать:

$$ab = cb \cdot \cos \beta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и соотвѣтственно для другого цилиндра:

$$a_1 b_1 = c_1 b_1 \cdot \cos \beta_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

*) Какъ уголъ, образованный перпендикулярами къ этимъ линіямъ.

но по свойству діагонали EC_1 параллелограмма $EX_1C_1Y_1$ имѣемъ

$$\omega \sin \alpha_1 = \omega_1 \sin \alpha_2,$$

и, слѣд., первый членъ (въ скобкахъ) подъ радикаломъ равенъ

$$[\omega \cdot \sin \alpha_1 (r_1 + r_2)]^2,$$

т.-е. представляетъ при данной ω и данномъ отношеніи $\omega : \omega_1$ величину вполне опредѣленную и неизмѣняющуюся. Весь радикалъ получить наименьшее значеніе тогда, когда исчезнетъ второй членъ, т.-е. когда

$$(\omega r_1 \cos \alpha_1 - \omega_1 r_2 \cos \alpha_2)^2 = 0,$$

а это будетъ имѣть мѣсто при выполненіи условія

$$\omega r_1 \cos \alpha_1 = \omega_1 r_2 \cos \alpha_2,$$

но этимъ уравненіемъ опредѣлялись именно радіусы r_1 и r_2 горловыхъ круговъ гиперболоидовъ. Поэтому съ точки зрѣнія потери на треніе винтовья колеса въ *общемъ видѣ* менѣе выгодны, нежели когда радіусами ихъ служатъ радіусы горловыхъ круговъ.

Въ виду малаго употребленія винтового зацѣпленія въ машиностроительной практикѣ, больше мы на немъ останавливаться не будемъ, а обратимся теперь къ передачѣ, весьма часто встрѣчающейся на практикѣ, а именно къ *червячной* передачѣ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется устроить передачу между осями не пересѣкающимися, но идущими въ направленіяхъ, перпендикулярныхъ другъ къ другу, вмѣсто одного колеса берутъ винтъ и сцѣпляютъ съ нимъ колесо, сидящее на другой оси; устранивъ возможность поступательнаго движенія винта (посредствомъ шпонки и проч.), даютъ ему вращательное движеніе около его оси; тогда зубцы колеса, входящіе во впадины винтовой нарѣзки, будутъ представлять собою выступы винтовой нарѣзки гайки, соотвѣтствующей винту. Вслѣдствіе вращенія винта гайка должна получить поступательное движеніе вдоль оси винта; скорость этого поступательнаго движенія обратится въ окружную скорость колеса, и послѣднее станетъ вращаться около своей оси (фиг. 47).

Проведемъ сѣченіе черезъ ось винта перпендикулярно къ оси колеса и рассмотримъ движеніе профилей зубцовъ колеса въ этомъ сѣченіи, *предполагая, какъ всегда бываетъ въ этомъ зацѣпленіи, ведущимъ червякъ.*

Проводимъ также мысленно рядъ осевыхъ сѣченій винта; при вращеніи винта около своей оси эти сѣченія будутъ послѣдовательно, одно

за другимъ, совпадать съ плоскостью нашего чертежа; каждое изъ этихъ сѣченій представляетъ въ сущности ничто иное, какъ сѣченіе зубчатыхъ профилей, расположенныхъ вдоль прямой. Принимая теперь во вниманіе, что въ каждомъ изъ этихъ сѣченій профили передвинуты относительно профилей сосѣдняго сѣченія на нѣкоторую величину вдоль оси винта,—по самой сущности винтовой нарѣзки,—мы увидимъ, что послѣдовательное совпаденіе этихъ сѣченій съ плоскостью нашего чертежа равносильно простому передвиженію основного нашего сѣченія винта вдоль его оси, а это, въ свою очередь, равносильно тому, какъ если бы мы заставляли профили зубчатой полосы дѣйствовать на профили зубцовъ колеса, передвигая зубчатую полосу вдоль ея направленія. Слѣдовательно, мы найдемъ какъ профили винта, такъ и профили винтового колеса, въ сѣченіи, перпендикулярномъ оси колеса и проходящемъ черезъ ось винта, если выполнимъ построеніе зацѣпленія зубчатой полосы съ колесомъ. Теперь, взявъ найденный профиль полосы и зная наклонъ винтовой линіи, образуемъ поверхность нарѣзки на винтѣ движеніемъ даннаго профиля по винтовой линіи, какъ это вообще дѣлается для всякихъ винтовъ.

Что касается зубчатого колеса, то для точнаго выполненія зубцовъ лучше всего сдѣлать фрезъ, имѣющій форму червяка, и этимъ фрезомъ нарѣзать зубцы: при вращеніи фрезы около оси острия его ребра будутъ врѣзываться въ тѣло цилиндра, изъ котораго должно быть сдѣлано колесо и который посаженъ на ось, перпендикулярную къ первой, и такимъ образомъ винтовые нарѣзки мало-по-малу оставятъ какъ бы слѣды на поверхности цилиндра въ видѣ точныхъ зубцовъ колеса.

Чтобы имѣть на чертежѣ профили поверхности зубца колеса въ различныхъ точкахъ, мы можемъ поступить такимъ образомъ: проводимъ рядъ вспомогательныхъ сѣченій, параллельныхъ главному, которое мы выше рассматривали; тогда отъ поверхности винтовой нарѣзки червяка останутся на каждой изъ плоскостей этихъ сѣченій слѣды опять въ видѣ профилей зубцовъ полосы. Ищемъ далѣе для каждой изъ полосъ сопряженные профили на колесѣ, предполагая полосу движущейся вдоль своего направленія; найденные профили и будутъ профилями поверхностей зубцовъ колеса, лежащими въ проведенныхъ нами сѣченіяхъ.

Возьмемъ для червяка, какъ это часто берутъ на практикѣ, трапециoidalный профиль; тогда въ главномъ сѣченіи мы будемъ имѣть эвольвентное зацѣпленіе зубчатой полосы съ колесомъ.

На чертежѣ *bkNp* есть профиль червяка; окружность червячнаго колеса и представляетъ собою полоиду плоской системы *O*; прямая *AB*, касательная къ окружности, является полоидой для системы, принадлежащей зубчатой полосѣ.

Въ точкѣ *N* касанія полоидъ проводимъ прямую, нормальную къ профилю *kp*, и отыскиваемъ вспомогательную окружность *aa*, развертывающей которой будетъ служить профиль *lq* зубцовъ колеса въ этомъ

главномъ сѣченіи. Шагъ зацѣпленія получается изъ расчета прочности зубцовъ, подобно тому, какъ мы это имѣли въ другихъ передачахъ. Зная шагъ и помня, что размѣры профилей, какъ въ радіальномъ, такъ и въ окружномъ направленіяхъ, даются обыкновенно въ частяхъ шага, вычерчиваемъ полные профили зубцовъ, находимъ длины линіи и дуги зацѣпленія, а также опредѣляемъ рабочую часть какъ профили lq , такъ и профили kr , пользуясь при этомъ обыкновенными, изложенными выше приемами.

Будемъ считать нашъ червякъ однооборотнымъ, — иными словами, шагъ винтовой нарѣзки его будетъ равенъ шагу зацѣпленія. Такъ какъ шагъ зацѣпленія считается вдоль AB , то мы описываемъ прямою AB цилиндрическую поверхность около оси O_1 червяка, на этой поверхности опредѣляемъ винтовую линію bc , имѣющую шагъ, равный шагу зацѣпленія, и беремъ ее за направляющую при образованіи профилемъ $bknpr$ поверхности винтовой нарѣзки. Считая сдѣланное нами сѣченіе за вертикальную проекцію, вычертимъ еще горизонтальную проекцію червяка; въ такомъ случаѣ мы увидимъ, что различныя винтовые линіи, описанныя точками профили при его движеніи по направляющей bc , изобразятся въ горизонтальной проекціи окружностями, изъ коихъ на чертежѣ показаны лишь тѣ, которыя соотвѣтствуютъ крайнимъ точкамъ p и k и средней N . Проведемъ теперь вертикальное сѣченіе IV , параллельное главному, и найдемъ профили впадины на червякѣ. Такъ какъ сѣченіе это параллельно вертикальной плоскости проекцій, то вертикальная проекція профили и дастъ намъ его истинный видъ. Находимъ эту проекцію: беремъ произвольную точку x_1 на вертикали, проходящей чрезъ точку пересѣченія плоскости съ среднею окружностью, такъ что точка (x, x_1) будетъ представлять собою точку пресѣченія плоскости IV съ средней винтовой линіей. Проводимъ теперь черезъ точку x_1 вертикальную проекцію средней винтовой линіи, т.-е. пристраиваемъ при x_1 кривую, тождественную съ bc , или же просто строимъ гдѣ-нибудь эту кривую и отыскиваемъ на ней точку x_1 , соотвѣтствующую точкѣ x .

Чтобы найти другія точки профили, напр., точку, соотвѣтствующую P_v , можемъ провести чрезъ P_v слѣдъ осевого сѣченія винта, т.-е. прямую O_1P_v , продолжить его до пересѣченія съ среднею окружностью въ точкѣ y , найти на вертикальной проекціи средней винтовой линіи, проведенной черезъ x_1 , точку y_1 , соотвѣтствующую y , и теперь, по свойству образованія винтовой поверхности, можемъ сказать, что точка этой поверхности, представляемая горизонтальной проекціей P_v , находится въ такомъ же разстояніи отъ горизонтальной плоскости, проведенной черезъ (yy_1) , въ какомъ точка p профили kNp находится отъ прямой ON (движеніемъ этого профили и образована винтовая поверхность). Проводя поэтому горизонталь y_1y_2 черезъ точку y_1 , находимъ на вертикали, проходящей черезъ P_v , точку P_{v1} , находящуюся въ указанномъ разстояніи отъ y_1y_2 и служащую вертикальной проекціей для P_v .

Подобнымъ же образомъ находимъ проекціи и другихъ точекъ профиля, т.-е. проводимъ черезъ горизонтальную проекцію z какой-либо точки окружности O_1z , которая будетъ служить горизонтальной проекціей винтовой линіи, соотвѣтствующей точкѣ z . Опредѣляемъ далѣе относительное положеніе точки z на образующемъ профилѣ, для чего изъ точки пересѣченія окружности (O_1z) съ (O_1K_1) проводимъ вертикаль до пересѣченія съ профилемъ. Далѣе проводимъ осевое сѣченіе, т.-е. соединяемъ O_1 съ z ; на средней винтовой линіи получаемъ точку y_3 (не показанную на чертежѣ), отыскиваемъ соотвѣтствующую ей вертикальную проекцію и заканчиваемъ построеніе совершенно такъ же, какъ мы это сдѣлали для точки P_v . Теперь беремъ этотъ профиль и отыскиваемъ ему сопряженный по общимъ правиламъ (по методу *Reuleaux*), при чемъ профиль этотъ рассматриваемъ принадлежащимъ зубчатой полосѣ AB , сдѣпляющейся съ колесомъ радіуса ON ; замѣтимъ при этомъ, что такъ какъ профиль впадины уже не будетъ симметричнымъ, то придется отыскивать сопряженные профили отдѣльно какъ для $k_2x_1P_{v1}$, такъ и для S_at_a . Шагъ зацѣпленія остался тотъ же, что и въ главномъ сѣченіи, но ширина впадины, считая по AB , будетъ теперь другая, сообразно чему нѣсколько измѣнится теперь и толщина профиля зубца. Высота зубца въ радіальномъ направленіи можетъ быть опредѣлена изъ того обстоятельства, что зубцы колеса обыкновенно ограничиваются линіей CD ; разстояніе точки пересѣченія IV съ CD отъ оси O и служитъ ограниченіемъ профилей въ радіальномъ направленіи для рассматриваемаго сѣченія. Безъ труда находимъ линію зацѣпленія и рабочія части профилей.

Проведя нѣсколько такихъ сѣченій, мы будемъ въ состояніи опредѣлить вполне видъ зубцовъ колеса, равно какъ величины рабочихъ частей для различныхъ сѣченій, т.-е. опредѣлимъ дѣйствіе винта на зубцы колеса; соотвѣтственно этому будемъ имѣть представленіе и о работѣ нарѣзки.

Относительно связи между шагомъ зацѣпленія и шагомъ винта можно сказать, что послѣдній бываетъ или равенъ первому, или вдвое, втрое, ... въ n разъ больше его; въ первомъ случаѣ мы имѣемъ однооборотный червякъ, во второмъ — двухъ-, трехъ-, ... n — оборотный. Если у насъ имѣется однооборотный червякъ, а колесо имѣетъ z зубцовъ, то очевидно, что при одномъ оборотѣ червяка колесо сдѣлаетъ $\frac{1}{z}$ -ую часть оборота, повернувшись на одинъ зубецъ; при двухъ-оборотномъ червякѣ колесо повернется (за время одного оборота червяка) уже на 2 зубца, т.-е. сдѣлаетъ $\frac{2}{z}$ часть оборота, и, вообще, повернется на $\frac{n}{z}$ часть оборота при n -оборотномъ червякѣ. Отсюда видно, что червячная передача можетъ служить для преобразованія быстрого вращательнаго движенія въ медленное. Задавшисъ передаточнымъ числомъ

и выбравъ опредѣленный типъ червяка (одно-, двухъ- ... оборотный), находимъ число зубцовъ на колесѣ; далѣе изъ расчета прочности опредѣляемъ шагъ зацѣпленія, а по шагу и числу зубцовъ находимъ радіусъ R колеса, ибо мы имѣемъ

$$zt = 2\pi R.$$

Если червякъ n -оборотный, то шагъ нарѣзки равенъ $n \cdot t$. Выбираемъ уголъ наклона β нарѣзки на среднемъ цилиндрѣ и опредѣляемъ средній радіусъ червяка r (соотвѣтствующій AB на чертежѣ); для этого воспользуемся соотношеніемъ

$$nt = 2\pi r \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Профилируемъ, какъ указано, червякъ и колесо сначала въ главномъ сѣченіи, а затѣмъ, такъ какъ всѣ размѣры червяка извѣстны, находимъ профили зубцовъ колеса и въ другихъ сѣченіяхъ; все это позволитъ намъ составить полное представленіе о работѣ червяка. *Ведущимъ всегда бываетъ червякъ.* При маломъ углу наклона винтовой нарѣзки, меньшемъ, такъ наз. *угла тренія*, колесо не въ состояніи привести червякъ во вращеніе, каковымъ обстоятельствомъ приходится часто пользоваться въ машиностроеніи (напр., при конструированіи подъемныхъ механизмовъ и проч.).

Винтообразныя зубчатые поверхности иногда употребляются и въ простой цилиндрической передачѣ. Представимъ себѣ цилиндръ (аксоидъ), принадлежащій какому-либо изъ колесъ, раздѣленнымъ на двѣ половины плоскостью, перпендикулярной къ оси цилиндра. Оставляя въ этой плоскости профили зубцовъ на мѣстѣ, строимъ винтовые линіи (на той и другой половинѣ) одного и того же шага, но противоположнаго направленія: одна правая, другая лѣвая. Взявъ ихъ за направляющія, описываемъ имѣющимися профилями винтовые поверхности, которыя и будутъ служить теперь зубцами (фиг. 48).

Колесо такого рода можно разсматривать, какъ состоящее изъ ряда тонкихъ дисковъ съ одними и тѣми же зубцами, но только сдвинутыхъ по отношенію другъ къ другу такъ, что соотвѣтствующія точки зубцовъ лежатъ на винтовыхъ линіяхъ.

На чертежѣ 48 изображена половина одного такого зуба въ проекціи его на среднюю плоскость, а также проекція того же зуба (цѣлаго) на плоскость, перпендикулярную средней (т.-е. проходящую параллельно оси колеса); контуры зуба на этой плоскости представляются винтовыми линіями.

Зацѣпленіе выбрано *циклическое* и указана линія зацѣпленія APA_1 . Ведущимъ предположено разсматриваемое колесо O . Такъ какъ каждое

сѣченіе, параллельное средней плоскости, изобразится въ проекціи на эту плоскость въ натуральную величину, и такъ какъ каждое такое сѣченіе, какъ мы указали выше, представляетъ собою какъ бы тонкое колесо, тождественное съ среднимъ сѣченіемъ, но только сдвинутое по отношенію къ нему на нѣкоторый уголъ, то ясно, что дуга PA_1 представляетъ въ данный моментъ проекцію на среднюю плоскость линіи соприкосновенія пары сопряженныхъ зубцовъ.

Не трудно видѣть, что въ данный моментъ соприкосновеніе въ средней плоскости дошло уже до полоиды: въ сѣченіи, соотвѣтствующемъ точкѣ A_1 , соприкосновеніе только начинается, въ сѣченіяхъ же, лежащихъ дальше отъ средняго, соприкосновенія еще нѣтъ. При дальнѣйшемъ вращеніи колеса точка соприкосновенія будетъ постепенно удаляться отъ полоиды, дальнѣйшія сѣченія будутъ вступать въ соприкосновеніе; въ нѣкоторый моментъ соприкосновеніе въ среднемъ сѣченіи прекратится, постепенно оно будетъ прекращаться на дальнѣйшихъ, а линія соприкосновенія все будетъ укорачиваться и въ послѣдній моментъ обратится въ точку (съ той и другой стороны).

Для этой пары зубцовъ соприкосновеніе началось также въ точкѣ средняго сѣченія, затѣмъ стала увеличиваться линія соприкосновенія, какъ это не трудно видѣть.

Такимъ образомъ, въ данномъ зацѣпленіи мы имѣемъ постепенное увеличеніе, а затѣмъ постепенное же уменьшеніе длины линіи соприкосновенія, между тѣмъ какъ въ простыхъ цилиндрическихъ колесахъ длина линіи соприкосновенія всегда равна длинѣ зубцовъ; это обстоятельство приводитъ насъ къ заключенію того рода, что въ рассматриваемыхъ нами колесахъ съ угловыми зубцами имѣются болѣе выгодныя условія работы, чѣмъ въ простыхъ цилиндрическихъ, такъ какъ зубецъ не сразу подвергается дѣйствию полной нагрузки, а постепенно.

Кромѣ того, если мы черезъ γ обозначимъ уголъ, на который является сдвинутымъ крайнее сѣченіе относительно средняго, а, слѣдовательно, дуга полоиды, соотвѣтствующая этому углу, будетъ равна γR , то не трудно видѣть, что продолжительность зацѣпленія пары зубцовъ выразится теперь величиной $(\sigma + \gamma R)$, гдѣ черезъ σ мы обозначили дугу зацѣпленія для простыхъ цилиндрическихъ колесъ съ тѣми же профилями. Что касается угла β наклона винтовой линіи, то онъ связанъ, какъ это можно видѣть изъ чертежа, съ половиной ширины колеса $\frac{b}{2}$ и съ дугой γR соотношеніемъ:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\gamma R}.$$

Выбравъ уголъ γ , получаемъ изъ этого уравненія уголъ β и такимъ образомъ вполне опредѣлимъ видъ зубцовъ.

Изъ чертежа понятно, что если бы въ нашей парѣ колесъ вращеніе совершалось въ другую сторону (ведущимъ было бы колесо O_1),

то соприкосновение началось бы въ обоихъ крайнихъ сѣченіяхъ и кончилось бы въ среднемъ. Точно такъ же легко видѣть, что соотвѣтствующія винтовые линіи на обоихъ колесахъ противоположны, т.-е. правой винтовой линіи на одномъ колесѣ соотвѣтствуетъ лѣвая на другомъ и обратно.

Коловратныя машины.

Къ числу вопросовъ объ отысканіи сопряженныхъ профилей относятся вопросы о построеніи профилей въ *коловратныхъ* машинахъ. Эти машины предназначаются для перемѣщенія жидкихъ тѣлъ и въ частности употребляются также, какъ вентиляторы. Мы ниже рассмотримъ только одинъ изъ наиболѣе распространенныхъ, а именно, такъ называемый *вентиляторъ Рута*. Онъ состоитъ изъ двухъ крыльевъ, заключенныхъ въ кожухъ и плотно прилегающихъ какъ къ кожуху, такъ и другъ къ другу (фиг. 49). Оба крыла вращаются съ одинаковою угловою скоростью, но въ обратныя стороны. При этомъ, какъ не трудно видѣть, какая-либо жидкость (или воздухъ) будетъ всасываться въ одинъ конецъ кожуха и нагнетаться въ другой. Полоидами для системъ обоихъ крыльевъ будутъ здѣсь двѣ равныя окружности O_1 и O (фиг. 50). Для профиля выступа крыла *Рута* бралъ часть окружности, описанной изъ нѣкоторой произвольной точки O_2 , лежащей на радіусѣ OP , радіусомъ O_2N , гдѣ точки M и N суть концы дугъ PN и PM , равныхъ каждая $\frac{1}{8}$ части всей окружности O ; такимъ образомъ точки M и N *Рута* взялъ постоянными, и профиль, такимъ образомъ, занимаетъ по полоидѣ четверть ея длины.

Чтобы найти профиль впадины, соотвѣтствующей этому профилю выступа, ищемъ огибающую кривой NKM (дуги окружности) при каченіи полоиды O по O_1 . Беремъ какую-нибудь точку x кривой профиля, проводимъ нормаль къ нему, т.-е. соединяемъ точку x съ центромъ O_2 . Пусть эта прямая пересѣкаетъ полоиду O въ точкѣ P_1 ; откладываемъ теперь по другой полоидѣ, считая отъ точки P , дугу PP_2 , равную дугѣ PP_1 . Далѣе, при точкѣ P_2 мы должны построить векторъ, наклоненный къ окружности полоиды O_1 подъ тѣмъ же угломъ α , что и векторъ xP_1 — къ окружности O . Пусть это будетъ векторъ P_2p . Отложивъ теперь на немъ, считая отъ точки P_2 , длину x_2P_2 , равную xP_1 , получимъ точку x_2 , одну изъ точекъ профиля впадины. Итакъ,

$$\angle x_2P_2y = \alpha = \angle xP_1z,$$

и прямая yP_2T есть касательная къ полоидѣ O_1 въ точкѣ P_2 . Опустимъ теперь изъ точки x_2 перпендикуляръ x_2y на эту касательную yT и, продолживъ его по другую сторону касательной, отложимъ $yx_3 = yx_2$. Соединивъ полученную точку x_3 съ P_2 , находимъ, что

$$\triangle x_2P_2y = \triangle x_3P_2y;$$

значить, имѣемъ;

$$x_3 P_2 = x_2 P_2 = x P_1,$$

при чемъ отрѣзокъ $x_3 P_2$ наклоненъ къ касательной въ P_2 подъ тѣмъ же угломъ α , что и $x P_1$ къ касательной въ P_1 .

Вслѣдствіе равенства полоидъ мы можемъ заключить, что различныя точки x_3 , какъ и различныя x , находятся всѣ на окружности, центръ коей O_3 лежитъ отъ P на такомъ же разстояніи, что и O_2 , и радіусъ которой равенъ радіусу $O_2 x$. Поэтому нахожденіе точекъ профиля впадины сводится къ слѣдующему: проводимъ изъ центра O_3 , гдѣ $PO_3 = PO_2$, окружность того же радіуса, что и NKM ; какую-нибудь точку ея x_3 соединяемъ съ центромъ O_3 , проводимъ въ точку пересѣченія радіуса $x_3 O_3$ съ окружностью O_1 , т.-е. въ точку P_2 , радіусъ $O_1 P_2$, а изъ x_3 проводимъ параллель ему $x_3 x_2$ и на этой параллели отрѣзкомъ, равнымъ $P_2 x_3$, изъ центра P_2 засѣкаемъ точку x_2 , которая и будетъ одной изъ точекъ искомаго профиля.

Какъ видно изъ построенія, профиль пересѣчетъ полоиду въ тѣхъ же точкахъ, что и вспомогательныя окружности, т.-е. въ точкахъ, находящихся другъ отъ друга на разстояніи четверти длины полоиды.

Выполнивъ построеніе профиля, сопряженнаго съ профилемъ NKM , чертимъ далѣе профиль выступа въ видѣ окружности, тождественной съ окружностью NKM , и затѣмъ ограничиваемъ соотвѣтственно все крыло, пристраивая еще профиль впадины и выступа. Другое крыло, конечно, будетъ ограничено тождественнымъ контуромъ.

Отд. 2. Отношеніе между скоростями переменнo, — направленіями постоянно.

Некруглыя колеса.

Разсмотримъ теперь передачу вращенія около двухъ параллельныхъ осей съ *переменнымъ* отношеніемъ скоростей. Замѣтимъ, что на практикѣ передачи эти употребляются рѣдко, а потому мы остановимся на нихъ лишь вкратцѣ.

Допустимъ, что у насъ имѣются двѣ оси (фиг. 51), A и B , въ опредѣленномъ разстояніи другъ отъ друга, и пусть вращеніе около A съ угловою скоростью ω требуется передать вращеніемъ около B съ угловою скоростью ω_1 , при чемъ отношеніе $\frac{\omega}{\omega_1}$ должно быть нѣкоторой функціей, $f(\varphi)$, угла поворота системы A . Вращенія имѣютъ совершаться въ противоположныя стороны.

Опредѣлимъ, какъ и прежде, движеніе системы B относительно A , придавъ обѣимъ системамъ еще общее вращеніе около оси A со скоростью ω ; тогда система A остановится, а система B будетъ имѣть два

вращенія, которыя мы въ каждомъ данномъ положеніи оси B при вращеніи около A замѣняемъ однимъ мгновеннымъ вращеніемъ около оси, лежащей на плоскости AB , параллельной имъ, и, какъ извѣстно, дѣлящей разстояніе AB на части, обратно пропорціональныя ω и ω_1 . Въ плоскомъ сѣченіи, совпадающемъ, напр., съ плоскостью чертежа, оси спроектируются въ точки A и B . Полоиду въ движеніи плоской системы B относительно A мы найдемъ слѣдующимъ образомъ.

Проводимъ черезъ точку A какой-нибудь векторъ APB подъ угломъ φ къ линіи AB , на немъ отъ точки A откладываемъ AB_1 , равное AB , и дѣлимъ AB_1 внутреннимъ образомъ въ отношеніи

$$\frac{PA}{PB_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = f(\varphi);$$

при данномъ углу φ величина $f(\varphi)$ будетъ вполне определенной и извѣстной. Такимъ образомъ мы получимъ точку P , которая и будетъ одной изъ точекъ полоиды.

Далѣе нужно найти, какъ обыкновенно, полоиду въ движеніи A относительно B . Такъ какъ разстояніе между осями есть величина постоянная и такъ какъ точка P постоянно должна находиться на AB , то отсюда слѣдуетъ, что два соотвѣтственные радіуса r и r_1 въ суммѣ должны давать AB , т.-е. должны удовлетворять условію

$$r + r_1 = AB.$$

Если вектору $AP = r$ соотвѣтствуетъ въ другой полоидѣ векторъ $BP_1 = r_1$, то углы, образуемые ими съ осью AB , т.-е. углы $P_1BA = \varphi_1$ и $PAB = \varphi$, должны быть таковы, чтобы векторы PA и BP_1 при вращеніи системы A со скоростью ω и системы B со скоростью ω_1 , одновременно могли вступить на линію AB . Это условіе можно выразить такъ: элементарное вращеніе $d\varphi$ за промежутокъ времени dt выразится въ видѣ

$$d\varphi = \omega \cdot dt;$$

для вращенія $d\varphi_1$ имѣемъ аналогично

$$d\varphi_1 = \omega_1 \cdot dt$$

(для того же промежутка времени dt). Эти два соотношенія приводятъ насъ къ ур—нію

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = f(\varphi),$$

откуда находимъ ур—ніе

$$d\varphi_1 = f(\varphi) \cdot d\varphi,$$

опредѣляя изъ котораго φ_1 , получаемъ:

$$\varphi_1 = \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi.$$

Выполнивъ интегрированіе, опредѣлимъ отсюда уголъ φ_1 , соответствующій данному φ , а этимъ опредѣлится точка полоиды P_1 , — для полученія ея придется на сторонѣ угла φ_1 отложить отъ точки B отръзокъ BP_1 .

Кривыя, построенныя такимъ образомъ, и будутъ полоидами. Не трудно, кромѣ того, убѣдиться, что дуга P_0P_1 равна дугѣ P_0P , и радіусъ векторъ BP_1 дѣлаетъ съ кривою такой же уголъ, какъ и векторъ PA . На самомъ дѣлѣ, на основаніи вышеприведенныхъ соображеній, мы можемъ теперь написать, что

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{r},$$

что даетъ намъ

$$r d\varphi = r_1 d\varphi_1 \dots \dots \dots (1)$$

Уголъ вектора BP_1 съ кривою, т.-е. съ касательною къ кривой въ крайней точкѣ вектора, который мы назовемъ черезъ ψ_1 , опредѣляется изъ условія

$$tg\psi_1 = \frac{r_1 d\varphi_1}{dr_1} \dots \dots \dots (2)$$

а уголъ между векторомъ AP и кривою—условіемъ

$$tg\psi = \frac{r d\varphi}{dr} \dots \dots \dots (3)$$

при чемъ если dr_1 положительно, то dr , по построенію кривыхъ, отрицательно, но по абсолютной величинѣ равно dr_1 . Принимая во вниманіе равенство (1), мы получаемъ изъ ур—ній (2) и (3) слѣдующее:

$$tg\psi = tg\psi_1, \dots \dots \dots (4)$$

т.-е.

$$\psi = \psi_1 \dots \dots \dots (5)$$

Далѣе мы имѣемъ для элементовъ дуги ds и ds_1 выраженія:

$$ds = \frac{1}{\sin\psi} \cdot r d\varphi \dots \dots \dots (6)$$

и аналогично

$$ds_1 = \frac{1}{\sin\psi_1} \cdot r_1 d\varphi_1; \dots \dots \dots (7)$$

сравнивая которыя, въ виду ур—ній (1) и (5), находимъ:

$$ds = ds_1, \dots \dots \dots (8)$$

т.-е. всякій элементъ дуги между двумя бесконечно-близкими радіусами одной полоиды равенъ элементу дуги другой полоиды, заключенному между соотвѣтственными радіусами другой.

Кривыя будутъ катиться одна по другой *безъ скольженія*, если мы начнемъ вращать систему *A* со скоростью ω , а *B* — со скоростью ω_1 . Здѣсь, однако, далеко не всегда можно устроить фрикціонную передачу вслѣдствіе того, что кривыя могутъ имѣть угловатые выступы и т. п. формы, при которыхъ нельзя увлечь одну систему другой лишь помощью силы тренія.

Зубчатая передача можетъ быть устроена всегда и устраивается совершенно такъ же, какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ: беремъ опять нѣкоторый произвольный профиль въ одной системѣ и находимъ сопряженный ему въ другой, катя одну полоиду по другой, — здѣсь удобнѣе всего примѣнить методъ *Poncelet*, годный, какъ было сказано, для всякихъ полоидъ.

Примѣромъ некруглыхъ колесъ могутъ служить *эллиптическія* колеса. Представимъ себѣ два одинаковыхъ эллипса, посаженныхъ на осяхъ, проходящихъ черезъ ихъ фокусы *F* и *f*₁ (фиг. 52). Разстояніе между осями равной большой оси эллипсовъ:

$$Ff_1 = MN = mn;$$

кромѣ того,

$$PF = Pf \text{ и } PF_1 = Pf_1.$$

Не трудно видѣть, что расположенные такимъ образомъ эллипсы, если ихъ вращать около ихъ осей, будутъ катиться одинъ по другому.

Взявъ на одномъ изъ нихъ точку *P*₁, а на другомъ — точку *P*₂ такъ, чтобы дуга *PP*₁ была равна дугѣ *PP*₂, вслѣдствіе тождества эллипсовъ получаемъ:

$$FP_2 = fP_1,$$

а такъ какъ

$$FP_2 + F_1P_2 = 2a = fP_1 + f_1P_1,$$

то и

$$F_1P_2 = f_1P_1,$$

а значитъ

$$f_1P_1 + FP_2 = 2a = Ff_1,$$

Далѣе, линія *TP*₂*T*, касательная въ точкѣ *P*₂, образуетъ съ векторомъ *FP*₂ уголъ *FP*₂*T* = μ такой же, какой образуетъ касательная въ *P*₁, прямая *tP*₁*t*, съ векторомъ *f*₁*P*₁, т.-е. уголъ

$$\angle FP_2T = \mu = \angle f_1P_1t;$$

на самомъ дѣлѣ, въ силу тождественности эллипсовъ, заключаемъ, что углы FP_2T и fP_1t , какъ углы между соотвѣтственно-равными векторами FP_2 и fP_1 и касательными TT и tt , равными между собою; углы же fP_1t и f_1P_1t равны между собою по свойству эллипсовъ: $\angle FP_2T = \angle fP_1t = \mu$.

Такимъ образомъ векторы FP_2 и f_1P_1 суть соотвѣтственные векторы, и взятые эллипсы, прокатившись другъ по другу на дугу PP_2 , равную дугѣ PP_1 , будутъ касаться въ этотъ моментъ точками P_1 и P_2 , которыя одновременно придутъ на линію центровъ Ff_1 ; касательныя же ихъ въ точкахъ P_1 и P_2 сольются въ одну общую касательную. Отношеніе угловыхъ скоростей $\omega_1 : \omega$ равно отношенію $FP : f_1P$ и, очевидно, мѣняется отъ *maximum*'а, когда векторомъ FP будетъ на одно мгновеніе служить отрѣзокъ большой оси FN ,—до *minimum*'а, когда роль вектора FP перейдетъ на мгновеніе къ отрѣзку FM . Если эксцентриситетъ эллипса назвать черезъ e , гдѣ $e = c : a$, то *maximum* отношенія $\frac{\omega_1}{\omega}$ будетъ равенъ $\frac{a+c}{a-c}$ или $\frac{1+e}{1-e}$, а *minimum* $= \frac{1-e}{1+e}$.

Отд. 3. Отношеніе между скоростями и направленіями перемѣнно.

Кулаки и эксцентрики.

Въ машиностроеніи имѣетъ очень большое значеніе *преобразование вращательнаго движенія въ прямолинейное возвратное* или въ качательное при помощи *кулаковъ* и *эксцентриковъ*.

Пусть нѣкоторый стержень, могущій двигаться вдоль своего направленія (фиг. 53) (наприм., на каточкахъ), опирается концомъ на шайбу, сидящую на оси A .

Положимъ, что направленіе оси стержня встрѣчаетъ ось A и перпендикулярно къ ней.

При равномерномъ вращеніи шайбы (или эксцентрика) полоса будетъ двигаться, пока будутъ возрастать радіусы-векторы эксцентрика; при дальнѣйшемъ вращеніи, когда радіусы-векторы начнутъ убывать, стержень можетъ остаться на мѣстѣ (если онъ, напр., движется горизонтально), и для замыканія пары въ этомъ случаѣ придется употребить постороннюю силу, которая всегда прижимала бы стержень къ эксцентрику, т.-е. придется примѣнить такъ-называемое *силовое замыканіе пары*, напр., при помощи нѣкоторой пружины.

Законъ движенія стержня, несомнѣнно, зависитъ отъ формы эксцентрика, и, наоборотъ, для даннаго закона движенія стержня всегда можно опредѣлить форму эксцентрика.

Пусть a есть наименьшій векторъ эксцентрика, а ρ какой-нибудь другой, образующій нѣкоторый уголъ φ съ первымъ. Движеніе стержня мы начнемъ разсматривать, начиная съ того момента, когда съ на-

правленіемъ движенія стержня совпадаетъ наименьшій радіусъ эксцентрика. При поворотѣ эксцентрика на уголъ φ , стержень, очевидно, подвинется на величину x , равную $\varrho - a$.

Кривую, ограничивающую эксцентрикъ, мы можемъ выразить уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ, написаннымъ въ видѣ

$$\varrho - a = f(\varphi) \dots \dots \dots (1)$$

Мы примемъ *вращеніе эксцентрика равномернымъ*, и въ такомъ случаѣ углы поворота эксцентрика будутъ пропорціональны временамъ, т.-е. мы можемъ времена мѣрить этими углами поворота, а тогда уравненіе

$$\varrho - a = f(\varphi) = x \dots \dots \dots (1')$$

дастъ намъ зависимость пути, пройденнаго какой-либо точкой стержня, отъ времени, если за начальный моментъ мы будемъ считать моментъ наибольшаго приближенія этой точки стержня къ центру (или къ оси вращенія) эксцентрика.

Обратно, если намъ данъ законъ движенія стержня въ видѣ $x = f(t)$, то это соотношеніе можетъ быть сейчасъ же преобразовано въ полярное уравненіе для кривой, ограничивающей эксцентрикъ, а именно въ ур—ніе $\varrho - a = f(t)$. Задавшисъ величиной a , т.-е. наименьшимъ векторомъ эксцентрика, мы опредѣлимъ форму кривой, его ограничивающей.

Пусть, напр., дано, что стержень за время поворота эксцентрика отъ 0 до π долженъ двигаться равномерно; это значитъ, что пути, проходимые какой-либо точкой стержня, должны быть пропорціональны временамъ, а поэтому ур—ніе кривой, ограничивающей эксцентрикъ, изобразится въ видѣ

$$\varrho - a = k \cdot \varphi \dots \dots \dots (2)$$

это ур—ніе представляетъ собою ур—ніе *Архимедовой спирали*. Факторъ пропорціональности k мы опредѣлимъ по величинѣ хода стержня. Пусть ходъ этотъ равенъ h ; тогда при $\varphi = \pi$ имѣемъ:

$$\varrho' - a = h = k\pi, \dots \dots \dots (3)$$

откуда

$$k = h : \pi,$$

и ур—ніе кривой эксцентрика (2) приметъ окончательно видъ:

$$\varrho - a = \frac{h}{\pi} \cdot \varphi \dots \dots \dots (4)$$

Построеніе этой кривой можно выполнить такъ: задаемся наименьшимъ радіусомъ эксцентрика A_1O , равнымъ, положимъ, a ; ходъ стер-

жня попрежнему пусть равенъ h ; опредѣлимъ радіусъ-векторъ, соотвѣтствующій φ , равному π ; изъ ур—нія (3) имѣемъ, что этотъ радіусъ, который мы обозначили черезъ ρ' , равенъ $h + a$; итакъ, $\rho' = a + h$. Дѣлимъ теперь уголъ π векторами на n равныхъ частей (фиг. 54), на столько же частей дѣлимъ отрѣзокъ h и откладываемъ на векторахъ послѣдовательно отрѣзки a ; $a + \frac{h}{n}$; $a + 2 \cdot \frac{h}{n}$; $a + 3 \cdot \frac{h}{n}$; ...

Можно выполнить этотъ процессъ полученія точекъ кривой еще немного проще, а именно, описать изъ полюса O окружность радіусомъ a , какъ мы это сдѣлали на чертежѣ, раздѣлить половину ея (соотвѣтственно углу π) на n равныхъ частей и къ радіусамъ, проведеннымъ въ точки дѣленія, прибавлять послѣдовательно отрѣзки $1 \cdot \frac{h}{n}$; $2 \cdot \frac{h}{n}$; $3 \cdot \frac{h}{n}$; $4 \cdot \frac{h}{n}$; ...

Такимъ образомъ, мы получимъ рядъ точекъ, которыми имѣютъ оканчиваться векторы кривой эксцентрика,—это будетъ рядъ точекъ этой кривой. Соединяя теперь ихъ непрерывною кривою, мы получимъ Архимедову спираль, которая будетъ вычерчена тѣмъ точнѣе, чѣмъ больше взято дѣленій (чѣмъ больше n).

Если бы было поставлено требованіе, что назадъ стержень также долженъ идти равномерно, то намъ пришлось бы къ нашей кривой пристроить другую, ей симметричную, и, такимъ образомъ, эксцентрикъ былъ бы очерченъ вполнѣ. Такой эксцентрикъ обладаетъ свойствомъ *постоянной ширины*, иными словами, *любые два вектора, составляющіе продолженіе одинъ другого, напр., AO и OB , въ суммѣ даютъ постоянную величину, равную суммѣ наибольшихъ векторовъ*. На самомъ дѣлѣ, назовемъ уголъ BOA_2 черезъ α ; тогда для вектора AO , соотвѣтствующаго BO , уголъ A_1OA также равенъ α . По построенію мы имѣемъ: $BO = a + \frac{h}{\pi} \cdot \alpha$ и $AO = a + \frac{h}{\pi} (\pi - \alpha)$. Складывая, находимъ:

$$AO + BO = 2a + h = a + (a + h).$$

Легко опредѣлить, напр., форму такого эксцентрика, который заставлялъ бы нашъ стержень двигаться впередъ сначала равномерно ускореннымъ движеніемъ, а затѣмъ—равномерно замедленнымъ, такъ что въ результатѣ къ концу хода скорость стержня будетъ равна нулю. Выполнимъ это требованіе.

Пусть попрежнему наименьшій радіусъ эксцентрика равенъ a , ходъ стержня равенъ h ; значитъ, за четверть оборота эксцентрика стержень долженъ пройти путь $\frac{1}{2} h$. При равномерно ускоренномъ движеніи пространства пропорціональны квадратамъ временъ, а поэтому уравненіе кривой эксцентрика имѣетъ видъ

$$\rho - a = k\varphi^2 \dots \dots \dots (5)$$

Факторъ пропорціональности k опредѣлится, какъ и прежде, изъ условія

$$\frac{h}{2} = k \left(\frac{\pi}{2} \right)^2, \dots \dots \dots (6)$$

откуда получаемъ:

$$k = \frac{h}{2} : \frac{\pi^2}{4} = \frac{2h}{\pi^2},$$

и ур—ніе (5) получаетъ видъ:

$$\rho - a = 2h \cdot \frac{\varphi^2}{\pi^2} \dots \dots \dots (7)$$

Построеніе кривой можетъ быть ведено совершенно аналогично тому, какъ мы дѣлали въ предыдущемъ примѣрѣ. Дѣлимъ четверть окружности радіуса a (фиг. 55) на n равныхъ частей, а отрѣзокъ $\frac{1}{2}h$ — на n^2 равныхъ частей, проводимъ въ точки дѣленія окружности радіусы и прибавляемъ къ нимъ послѣдовательно: $1 \cdot \frac{h}{2n^2}$, $4 \cdot \frac{h}{2n^2}$, $9 \cdot \frac{h}{2n^2}$, ...

Дѣлаемъ мы такъ потому, что, какъ извѣстно, при равноѣрно-ускоренномъ движеніи пространства, проходимыя точкой, считая отъ начального пункта, возрастаютъ пропорціонально квадратамъ временъ. Соединивъ концы векторовъ кривою, получимъ часть очертанія эксцентрика для равноускореннаго движенія стержня.

Для построенія другой части замѣтимъ слѣдующее: если мы проведемъ какой-либо векторъ отъ кривой, а изъ центра O опишемъ окружность радіуса $a + \frac{1}{2}h$, то отрѣзокъ продолженнаго вектора между кривою и окружностью выразится въ функціи $\angle mOA = \varphi$ такъ: $mn = \left(a + \frac{h}{2} \right) - \rho$, ибо $mn = On - Om$, а $On = a + \frac{1}{2}h$ и Om обозначаемъ черезъ ρ . Принимая во вниманіе ур—ніе (7), можемъ написать:

$$mn = a + \frac{1}{2}h - \rho = a + \frac{1}{2}h - a - 2h \cdot \frac{\varphi^2}{\pi^2}$$

или

$$mn = \frac{h}{\pi} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{\frac{1}{4}\pi^2}; \dots \dots \dots (8)$$

теперь вмѣсто угла φ (угла mOA) введемъ ему дополнительный, mOB , равный поэтому $90^\circ - \varphi$; обозначимъ его черезъ ψ ; тогда $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, и ур—ніе (8) приметъ видъ

$$\begin{aligned} mn &= \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \cdot \frac{(\frac{1}{2}\pi - \psi)^2}{\frac{1}{4}\pi^2} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \left\{ \frac{\frac{1}{4}\pi^2}{\frac{1}{4}\pi^2} - \frac{\pi\psi}{\frac{1}{4}\pi^2} + \frac{\psi^2}{\frac{1}{4}\pi^2} \right\} = \\ &= \frac{h}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h}{\frac{1}{2}\pi} \cdot \psi - \frac{h}{\frac{1}{4}\pi^2} \cdot \frac{\psi^2}{2}; \end{aligned}$$

окончательно

$$mn = \frac{h}{1/2\pi} \psi - \frac{h}{1/4\pi^2} \cdot \frac{\psi^2}{2}; \dots \dots \dots (9)$$

но эта зависимость mn отъ ψ выражаетъ собою зависимость пути отъ времени въ движеніи равноѣрно-замедленномъ, если время считать углами ψ .

Дальнѣйшее построение эксцентрика будетъ, очевидно, таково: проводимъ какой-либо векторъ Ok , откладываяемъ по другую сторону вектора OB уголъ Bot , равный углу BoK , находимъ отрѣзокъ mn между кривой, раньше начерченной, и окружностью радіуса $(a - 1/2 h)$ и прибавляемъ этотъ отрѣзокъ къ радіусу Ok той же окружности, т.-е. дѣлаемъ $kl = mn$; точка l , полученная такимъ образомъ, будетъ одной изъ точекъ кривой очертанія эксцентрика.

Тотъ же результатъ получимъ, если составимъ на общихъ основаніяхъ полярное уравненіе кривой для движенія равноѣрно-замедленного. Считая уголъ φ отъ OB , получаемъ для этого случая

$$x = \alpha\varphi - \beta \cdot 1/2 \varphi^2 \dots \dots \dots (10)$$

Постоянныя α и β опредѣлимъ изъ этого условія, что при $\varphi = 0$ скорость стержня должна имѣть нѣкоторую опредѣленную величину, намъ заранѣе извѣстную; также и при $\varphi = 1/2 \pi$.

Скорость стержня выражается здѣсь такъ: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} = \alpha - \beta\varphi$; а при $\varphi = 0$ имѣемъ $v = \alpha$; но, съ другой стороны, та же скорость напишется въ видѣ $\frac{d\rho}{d\varphi}$, гдѣ ρ берется изъ прежняго уравненія

$$\rho - a = \frac{h}{1/4\pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} = \frac{2h}{\pi^2} \cdot \varphi^2,$$

при чемъ, понятно,

$$v = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)_{\varphi=1/2\pi}$$

ибо во второмъ случаѣ углы отсчитываются отъ A . Мы имѣемъ

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)_{\varphi=1/2\pi} = \left(\frac{h}{1/4\pi^2} \cdot \varphi \right)_{\varphi=1/2\pi} = \frac{h}{1/2\pi} = v = \alpha;$$

значить, получаемъ окончательно:

$$\alpha = \frac{h}{1/2\pi} \dots \dots \dots (11)$$

Постоянное β опредѣлится изъ того условія, что v при $\varphi = 1/2 \pi$ должна обращаться въ нуль, т.-е. мы имѣемъ условіе:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\varphi=1/2\pi} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

Откуда находимъ:

$$(\alpha - \beta \cdot \varphi)_{\varphi = 1/2 \pi} = 0,$$

т.-е.
$$\alpha - \beta \cdot \frac{\pi}{2} = 0; \quad \beta = \alpha : \frac{\pi}{2}$$

что, въ виду ур—нія (11), дастъ намъ

$$\beta = \frac{h}{1/4 \pi^2} \dots \dots \dots (13)$$

Теперь въ виду ур—ній (11) и (13), ур—ніе (10) можно переписать такъ:

$$x = \frac{h}{1/2 \pi} \cdot \varphi - \frac{h}{1/4 \pi^2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \dots \dots \dots (14)$$

Если требуется получить обратное движеніе стержня такого же характера, какъ прямое, то дальше мы очерчиваемъ эксцентрикъ симметричной кривой.—Эксцентрикъ такого рода имѣетъ передъ первымъ то преимущество, что переходъ отъ одного направленія движенія къ противоположному совершается безъ потери въ скорости и поэтому безъ удара (— скорость при концѣ хода равна нулю).

Если эксцентрикъ обладаетъ свойствомъ *постоянной ширины*, то вмѣсто одного ролика можно поставить два, неизмѣнно связанныхъ съ стержнемъ, и между ними помѣстить эксцентрикъ; въ этомъ случаѣ *силовое замыканіе пары* становится ненужнымъ.

Можно также вмѣсто эксцентрика сдѣлать шайбу съ желобкомъ, въ который входилъ бы роликъ отъ стержня. Желобокъ долженъ быть ограниченъ кривыми, параллельными кривой для даннаго закона движенія на радіусъ ролика.

Часто бываетъ, что центръ вращенія эксцентрика не лежитъ на линіи движенія конца стержня; подобный случай схематически представленъ на фиг. 56: здѣсь эксцентрикъ *ЕКС* вращается около оси *О*, между тѣмъ какъ стержень ходитъ въ направленіи *NB*, черезъ центръ *О* не проходящемъ. Проводимъ прямую *BN* (продолженная ось стержня *AB*) и изъ центра эксцентрика *О* проводимъ окружность, касательную къ этой прямой *BN*. Пусть точкой ихъ касанія будетъ точка *N*. Проведемъ теперь какой-нибудь радіусъ-векторъ эксцентрика *МС* и изъ точки *С* касательную *СМ* къ упомянутому выше кругу. Легко видѣть, что когда на линію движенія *AB* придетъ точка *С*, то стержень къ этому времени передвинется на разность между длинами касательныхъ *СМ* и *BN*, при чемъ эксцентрикъ повернется на уголъ *НОМ*.

Если намъ дана зависимость перемѣщенія стержня отъ времени или угловъ поворота эксцентрика, тогда мы опредѣляемъ длины ка-

сательныхъ для равныхъ угловъ поворота и безъ труда строимъ кривую эксцентрика такимъ образомъ: дѣлимъ окружность ON на n равныхъ частей, въ точкахъ дѣленія проводимъ касательныя къ этой окружности и, выбравъ наименьшую изъ нихъ, откладываемъ послѣдовательно на остальныхъ отрѣзки, возрастаніе которыхъ соотвѣтствуетъ закону движенія, совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали для возрастающихъ векторовъ эксцентрика въ случаѣ, когда центръ его лежалъ на линіи движенія.

Во всѣхъ этихъ выводахъ мы предполагали, что стержень опирается на эксцентрикъ своимъ концомъ, т.-е. опирается одной точкой. Въ дѣйствительности на концѣ стержня всегда дѣлаютъ роликъ, которымъ стержень и опирается на эксцентрикъ. Тогда роль конца стержня перейдетъ (въ плоскомъ сѣченіи) къ центру ролика; поэтому эксцентрикъ (фиг. 57) придется ограничить не той кривой AOB , которая удовлетворяетъ данному закону движенія, а кривой kI , ей параллельной и отстоящей отъ нея на величину радіуса ролика.

Не трудно также рѣшить вопросъ о формѣ эксцентрика, который долженъ дѣйствовать на полосу, соединенную со стержнемъ и обыкновенно перпендикулярную къ его длинѣ (фиг. 58). Допустимъ, что центръ эксцентрика находится на продолженіи оси стержня. Такъ какъ направленіе полосы всегда касательно къ эксцентрику и перпендикулярно къ линіи движенія стержня, то мы можемъ получить зависимость OB ,—растоянія центра O отъ полосы KM ,—отъ угловъ поворота эксцентрика, т.-е. можемъ получить законъ движенія стержня, если будемъ проводить къ эксцентрику касательныя и опускать на нихъ перпендикуляры изъ точки O .

Какой-нибудь перпендикуляръ OP , соотвѣтствующій вектору OA и образующій уголъ φ съ линіей OB , опредѣлитъ собою удаленіе конца B стержня отъ центра O . Послѣ поворота эксцентрика на уголъ φ , стержень передвинется на величину $OP - OB$. Соединивъ различные концы P перпендикуляровъ, получимъ кривую, выражающую законъ передвиженія стержня.

Обратно, если намъ дана зависимость перемѣщеній отъ угловъ поворота φ эксцентрика, то мы строимъ, какъ въ обыкновенномъ эксцентрикѣ, геометрическое мѣсто точекъ P и къ каждому вектору этого геометрическаго мѣста, въ концѣ его, возставляемъ перпендикуляръ. Огибающая этихъ перпендикуляровъ и дастъ очертанія эксцентрика, дѣйствующаго на полосу и двигающаго стержень согласно данному закону.

Къ числу подобныхъ эксцентриковъ можно отнести *круглый дискъ*, эксцентрично сидящій на оси вращенія O и заключенный въ раму, составляющую одно цѣлое съ стержнемъ (фиг. 59). Очевидно, что такой эксцентрикъ представляетъ изъ себя ничто иное, какъ механизмъ двойного ползуна, въ которомъ кривошипъ имѣетъ длину OC —разстояніе между центромъ диска C и центромъ вращенія O ; слѣдовательно,

законъ движенія стержня будетъ тотъ же, что и тамъ, т.-е. движеніе будетъ гармоническое. Въ этомъ можно убѣдиться, впрочемъ, и изъ прямого разсмотрѣнія движенія диска C . Проведемъ какую-нибудь касательную TT и изъ центра вращенія O опустимъ на нее перпендикуляръ OP . Изъ треугольника REN , гдѣ H есть точка касанія, а E —точка пересѣченія EH , параллельной OC , съ $\perp$ -омъ OP , получаемъ: $OP = OE + EP = r + EH \cos REN = r + OC \cos ROC$, обозначивъ разстояніе OC черезъ d , а уголъ ROC черезъ φ , находимъ: $PO = r + d \cos \varphi$.

Какъ видимъ, движеніе, дѣйствительно, будетъ гармоническое. *Maximum* $PO = r + d$ (при $\varphi = 0$), *minimum* $PO = r - d$ (при $\varphi = \pi$). Перемѣщеніе стержня выражается формулой вида $\Delta = d (1 - \cos \varphi)$, и поэтому ходъ стержня будетъ равенъ $2d$.

Эксцентрики или кулаки могутъ имѣть также форму цилиндровъ, срубанныхъ по нѣкоторой кривой, на которую и будетъ опираться и скользить по ней конецъ стержня, могущаго ходить въ направленіи, параллельномъ оси цилиндра (фиг. 60). Легко вычертить, напр., вертикальную проекцію кривой, по которой долженъ быть срубанъ цилиндръ, если намъ дана зависимость движенія стержня отъ времени. Представимъ себѣ круглый цилиндръ, стоящій на горизонтальной плоскости проекцій (нижнее основаніе предполагаемъ кругомъ, такъ что оно перпендикулярно оси). Дѣлимъ окружность основанія на n равныхъ частей, проводимъ черезъ полученныя точки дѣленія вертикали (образующія) и откладываемъ на нихъ отъ оси проекцій xx ординаты, измѣненіе длины которыхъ зависитъ отъ угловъ, образуемыхъ соответственными радіусами основаній съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ направленіемъ, принятымъ нами за начальное такъ же, какъ перемѣщеніе стержня зависитъ отъ времени.

Можно также развернуть цилиндръ на плоскости, раздѣлить развернутое основаніе на n равныхъ частей и въ точкахъ дѣленія возста- вить ординаты, пользуясь опять закономъ движенія стержня.

Если, напр., дано, что за поворотъ эксцентрика стержень долженъ двигаться пропорціонально квадратамъ временъ, то мы беремъ какую-нибудь ординату за наименьшую, проще всего, ординату начальной точки, и дальнѣйшія ординаты увеличиваемъ послѣдовательно на $1 \cdot \frac{h}{n^2}$, $4 \cdot \frac{h}{n^2}$, $9 \cdot \frac{h}{n^2}$ и т. д., гдѣ черезъ h обозначенъ ходъ стержня. Затѣмъ для обратнаго хода стержня, за второй поворотъ эксцентрика, строимъ кривую, требуемую заданными условіями движенія и т. д. Получимъ такимъ образомъ нѣкоторую кривую, которая, будучи на- вернута на цилиндръ, и покажетъ, какъ долженъ быть срубанъ цилиндръ для полученія требуемаго движенія.

Можно также на цилиндрѣ сдѣлать каналъ, въ который могъ бы входить роликъ отъ стержня; форма канала опредѣляется, понятно, указаннымъ выше способомъ.

Встрѣчаются эксцентрики и другихъ формъ, напр., коническіе и

т. п.; способъ очерчиванія ихъ не представляетъ никакихъ затрудненій и ведется аналогично рассмотрѣннымъ примѣрамъ.

Если стержень, опирающійся на эксцентрикъ, не двигается прямолинейно, а вращается около опредѣленнаго центра, то, по данной зависимости его качаній отъ времени, мы строимъ его положенія O_1E , O_1F , O_1K (фиг. 61), соотвѣтствующія различнымъ угламъ поворота эксцентрика. Откладывая эти углы отъ нѣкотораго вектора, принятаго за начальный, получаемъ рядъ векторовъ эксцентрика, длина коихъ, очевидно, должна быть равна соотвѣтственно OF , OK ... Такимъ образомъ мы и получимъ очертаніе нужнаго намъ эксцентрика.

Иногда предъявляется требованіе, чтобы на нѣкоторой части своего пути стержень остановился и остался нѣкоторое время въ покоѣ. Не трудно видѣть, какъ въ этомъ случаѣ долженъ быть очерченъ эксцентрикъ въ соотвѣтственной его части.

Для простаго эксцентрика кривая на этой части обратится въ окружность, описанную изъ центра эксцентрика. Переходъ отъ этой дуги окружности къ дальнѣйшей кривой слѣдуетъ сдѣлать постепеннымъ, подобравъ нѣкоторую переходную кривую.

Передача при помощи промежуточныхъ звеньевъ.

Отд. 1. Отношеніе между скоростями и направленіями постоянно.

Рядовое соединеніе зубчатыхъ колесъ.

Рядовое соединеніе зубчатыхъ колесъ является наиболѣе важнымъ въ практическомъ отношеніи примѣромъ передачи движенія при помощи промежуточныхъ звеньевъ.

Положимъ, что вращеніе отъ одной оси требуется передать другой, при чемъ передаточное число довольно велико. Какъ извѣстно, для зубчатой цилиндрической передачи большого передаточнаго числа не берутъ, а если такое будетъ задано, то передачу разбиваютъ на рядъ передачъ: колесо, сидящее на оси A (фиг. 62) и имѣющее n_1 зубцовъ, зацѣпляются съ колесомъ, сидящимъ на оси B и имѣющимъ N_1 зубцовъ; на той же оси B сидитъ колесо съ числомъ n_2 зубцовъ, — оно зацѣпляется съ колесомъ N_2 (гдѣ N_2 — число зубцовъ его) на оси C , на этой же оси C сидитъ еще колесо n_3 , зацѣпляющееся съ N_3 на оси D и т. д.

Положимъ, что движеніе передается отъ колеса A ; тогда ведущими будутъ колеса n_1 , n_2 , n_3 , ... а ведомыми N_1 , N_2 , N_3 ... При z_1 оборотахъ колеса A колесо B совершитъ $\frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, C совершитъ

$\frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, колесо D — $\frac{n_3}{N_3} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ и т. д. Вообще, число оборотовъ послѣдней оси будетъ равно числу оборотовъ первой (z_1), помноженному на дробь, числитель которой есть произведение чиселъ зубцовъ ведущихъ колесъ, а знаменатель — произведение чиселъ зубцовъ ведомыхъ колесъ.

Послѣдняя ось будетъ вращаться или въ ту же сторону, что и первая, или въ обратную, — это зависитъ отъ числа промежуточныхъ передачъ: если мы назовемъ число всѣхъ передачъ черезъ m , то можемъ написать, что число оборотовъ послѣдней оси равно

$$(-1)^m \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_3}{N_3} \cdots \frac{n_m}{N_m} z_1 \cdots \cdots \cdots (1)$$

гдѣ z_1 есть число оборотовъ первой оси, знакъ же *минусъ* будетъ указывать, что вращеніе послѣдней оси совершается въ сторону, противоположную первой.

Замѣтимъ здѣсь, что если на какой-либо оси сидитъ только одно колесо, сдѣляющее съ предшествующимъ и послѣдующимъ колесами, то вліянія на величину передаточнаго числа оно, очевидно, не имѣетъ; на самомъ дѣлѣ, это колесо мы можемъ разсматривать, какъ два одинаковыхъ колеса, посаженныхъ на одну и ту же ось; поэтому въ выраженіи (1) дробь $\frac{n_k}{N_{k-1}}$, соотвѣтствующая этому колесу, будетъ равна единицѣ; колесо это вліяетъ лишь на измѣненіе смысла вращенія.

Такимъ образомъ, разбивая передачу на рядъ передачъ, мы можемъ выполнить какое угодно передаточное число. Въ такъ называемомъ *переборѣ* токарныхъ станковъ мы имѣемъ одинъ изъ простѣйшихъ примѣровъ разбивки передачи.

Ступенчатый шкифъ S , называемый также *конусомъ* (фиг. 63), получающій свое вращеніе отъ фабричнаго вала, сидитъ вольно на шпинделѣ A передней бабки токарнаго станка, на шпинделѣ вращается и обтачиваемый предметъ. Колесо N_2 наглухо, при помощи шпонки, соединено съ осью A и, въ свою очередь, можетъ быть соединяемо при помощи выключателя, не показаннаго на чертежѣ, со шкивомъ S ; малое зубчатое колесо n_1 составляетъ одно цѣлое со шкивомъ S .

Параллельно оси AA въ бабкѣ имѣется другая ось B съ парой зубчатыхъ колесъ N_1 и n_2 . Ось эта можетъ быть, смотря по надобности, удаляема или приближаема къ оси AA ; съ этою цѣлью она сдѣлана пустой и сидитъ на оси C , шипы которой, O_1 и O_2 , эксцентричны по отношенію къ оси B . Вращая рукоятку D , насаженную на шипъ O_1 , мы, очевидно, будемъ приближать или удалять ось B отъ оси A .

Если хотятъ, чтобы шпиндель AA вращался быстро, то выключателемъ соединяютъ колесо N_2 со шкивомъ S , удаляютъ вращеніемъ рукоятки D ось B отъ оси A , такъ что колеса N_1 и n_2 перестанутъ

сцѣпляться съ колесами n_1 и N_2 ; тогда шпиндель будетъ получать вращеніе непосредственно отъ вала при помощи шкива S .

Если же нужно получить медленное вращеніе шпинделя, то разъединяють колесо N_2 и шкивъ S , вращеніемъ рукоятки D заставляютъ ось B приблизиться къ оси A , пока колеса N_1 и n_2 не войдутъ въ зацѣпленіе съ колесами n_1 и N_2 ; въ этомъ случаѣ при одномъ оборотѣ шкива шпиндель сдѣлаетъ $\frac{n_1 n_2}{N_1 N_2}$ оборотовъ.

Ступенчатый шкивъ служитъ для того, чтобы можно было разнообразить число оборотовъ. При нарѣзкѣ винтовъ опредѣленнаго шага суппортъ, несущій рѣзецъ, долженъ подвигаться на нѣкоторую опредѣленную величину при каждомъ цѣломъ оборотѣ обрабатываемаго предмета.

Какъ мы знаемъ, передвиженіе суппорта производится при помощи частнаго видоизмѣненія трехзвенной винтовой цѣпи, въ которомъ одна пара превратилась во вращательную и одна—въ поступательную; при этомъ за одинъ оборотъ винта суппортъ подвинется на величину его шага h_1 . Если обрабатываемый предметъ совершаетъ z_2 оборотовъ за то время, въ какое винтъ суппорта совершаетъ z_1 оборотовъ, то рѣзецъ сдѣлаетъ нарѣзку, шагъ которой, h_2 , черезъ прежній, h_1 , выразится такъ:

$$h_2 = \frac{z_1 h_1}{z_2} \dots \dots \dots (2)$$

Чтобы имѣть возможность нарѣзать различные винты (съ разными шагами h_2), нужно, какъ показываетъ уравненіе (2), гдѣ $h_1 = const$, имѣть возможность мѣнять отношеніе $\frac{z_1}{z_2}$; это мы можемъ сдѣлать, вставляя между шпинделемъ передней бабки, отъ которой винтъ суппорта получаетъ вращеніе, и этимъ винтомъ различныя промежуточныя передачи сообразно требуемой нарѣзкѣ.

Если A есть шпиндель (фиг. 64), а B —винтъ суппорта, то при показанныхъ на чертежѣ числахъ зубцовъ колесъ шагъ нарѣзки будетъ равенъ (при одной промежуточной передачѣ, какъ это изображено на чертежѣ)

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot \frac{n_2}{N_2} \dots \dots \dots (3)$$

Имѣя рядъ смѣнныхъ колесъ (такъ наз. *серію*), мы можемъ выполнить разныя нарѣзки, а вставкой промежуточнаго колеса можемъ мѣнять направленіе вращенія винта и, слѣд., выполнять какъ правую, такъ и лѣвую рѣзку. Въ послѣднее время, однако, вмѣсто такой системы колесъ примѣняютъ иногда червячную передачу для приведенія въ движеніе суппорта. На фиг. 65 схематически представлено подобное устройство. Червякъ E сидитъ на шпинделѣ A передней бабки и при-

водитъ во вращеніе червячное колесо M , а вмѣстѣ съ нимъ колесо K_1 K_2 . На продолженіи винта суппорта B сидитъ колесо K_3 . Колеса K всѣ коническія.

Колеса K_1 и K_2 , соединенныя общей втулкой, могутъ быть немного передвигаемы вдоль оси C , и мы можемъ такимъ образомъ заставить спѣпляться съ колесомъ K_3 или колесо K_1 , или колесо K_2 ; этимъ дается возможность сообщить винту суппорта вращеніе въ ту или другую сторону.

Червячное колесо смѣнное, и по числу его зубцовъ, числу винтовыхъ нитокъ на червякѣ E и шагу винта B не трудно опредѣлить шагъ нарѣзки на обрабатываемомъ предметѣ.

Къ числу рядовыхъ соединеній относятся также различные *счетчики чиселъ оборотовъ*. Такъ, напр., для отсчитыванія единицъ, десятковъ и проч. можно употребить слѣдующее соединеніе: на ось A , непосредственно соединенную такъ или иначе съ той, число оборотовъ которой (за извѣстный промежутокъ времени) мы хотимъ сосчитать, мы насаживаемъ наглухо колесо съ *однимъ* зубцомъ; слѣдующая ось B (фиг. 66) имѣетъ колесо съ 10 впадинами, соотвѣтствующими каждая зубцу колеса A . Если на осяхъ A и B посадимъ указатели, ходящіе по циферблатамъ, то указатель, соединенный съ колесомъ A , будетъ, очевидно, показывать *десятыя* части, а указатель B —*единицы* оборотовъ, если циферблаты имѣютъ дѣленія 0, 1, 2, . . . , 8, 9.

Далѣе, на ту же ось B мы можемъ посадить еще одно колесо съ однимъ зубцомъ, подобное колесу A , а на слѣдующей оси C —колесо съ десятию впадинами; тогда указатель, соединенный съ C , будетъ давать на своемъ циферблатѣ *десятки* оборотовъ и т. д. При такомъ устройствѣ послѣ полного оборота какой-либо оси слѣдующая повернется на $\frac{1}{10}$ оборота.

Другой способъ счета оборотовъ основывается на *относительномъ движеніи двухъ колесъ, оси которыхъ совпадаютъ*.

Червякъ E (фиг. 67) сидитъ на оси B и одновременно зацѣпляется съ колесами M и N , изъ которыхъ одно, N , сидитъ *вольно* на оси A , а другое, M , съ тою же осью A соединено наглухо. Колесо N на передней сторонѣ имѣетъ два циферблата: внутренній и внѣшній; на внутренній указываетъ стрѣлка K_2 , соединенная съ осью A , а на внѣшній—стрѣлка K_1 , неподвижно укрѣпленная въ станкѣ. Вольно-сидящее колесо N имѣетъ 100 зубцовъ, колесо M —101 зубецъ. При одномъ оборотѣ червяка колесо N повернется на $\frac{1}{100}$ оборота, и, значитъ, указатель k_1 будетъ указывать на шкалѣ единицы и десятки оборотовъ червяка до 100. За 101 оборотъ червяка колесо N сдѣлаетъ $(1 + \frac{1}{100})$ оборота, колесо же M сдѣлаетъ лишь одинъ оборотъ; иными словами, оно отстанетъ отъ колеса N , и указатель k_2 подвинется относительно внутренней скалы на *одно дѣленіе*. Такимъ образомъ, на внутренней скалѣ будутъ отсчитываться сотни оборотовъ до 10.000.

Переходя къ вопросу о рядовомъ соединеніи для какого-нибудь даннаго передаточнаго числа, можемъ видѣть, что если число это не особенно сложно, то не трудно разбить его всегда на произведеніе такихъ дробей, чтобы каждая изъ нихъ не превосходила допускаемыхъ на практикѣ передаточныхъ чиселъ, а также, чтобы числители и знаменатели этихъ дробей, выражающіе числа зубцовъ колесъ, не уклонялись ни въ ту, ни въ другую сторону отъ ходовыхъ чиселъ зубцовъ (не были бы меньше 6 или больше 150 и т. д.).

Если требуется выполнить, напр., передачу $\frac{1}{60}$, то, разбивая ее на 2, съ 6-ю зубцами у каждаго изъ ведущихъ колесъ, имѣемъ:

$$\frac{1}{60} = \frac{6 \cdot 6}{2160} = \frac{6}{45} \cdot \frac{6}{48};$$

такимъ образомъ, у большихъ колесъ числа зубцовъ будутъ 40 и 48.

Если передаточное число весьма сложно или если разбить его на нѣсколько дробей по указанному выше способу почему-либо нельзя, то приходится прибѣгнуть къ приближенному способу. Можно, напри- мѣръ, вмѣсто даннаго передаточнаго числа взять въ нѣкоторыхъ слу- чаяхъ приближенное къ нему, такое, чтобы оно хорошо разлагалось на рядъ болѣе простыхъ дробей. Такимъ образомъ, передача получается приближенной.

Пусть, напр., требуется, чтобы одна стрѣлка показывала часы, а другая—совершала полный оборотъ по циферблату за время обращенія луны, равное 29 дн. 12 час. 44 мин. (приблизительно).

Обращая это число въ часы, получаемъ $\frac{42524}{60}$ часовъ. Слѣдова- тельно, въ то время, какъ одна стрѣлка (часовая) совершаетъ $\frac{1}{12}$ обо- рота, другая совершаетъ $\frac{60}{42524}$ оборота; поэтому передаточное число въ данномъ случаѣ равно

$$\frac{60}{42524} : \frac{1}{12} = \frac{720}{42524} = \frac{180}{10631}.$$

Число, стоящее въ знаменателѣ получившейся у насъ дроби, первоначальное, значитъ, разложеніе на простѣйшія дроби невозможно. Но если вмѣсто 42524 мы возьмемъ число 42525, то получимъ:

$$\frac{720}{42525} = \frac{80}{4725} = \frac{8}{75} \cdot \frac{10}{63}.$$

Такимъ образомъ путемъ пробъ всегда можно подобрать удобныя пе- редачи.

При сложныхъ передаточныхъ числахъ часто бываетъ полезно употреблять способъ *Гюйенса*, состоящій въ томъ, что данную дробь разлагаемъ въ непрерывную и находимъ рядъ подходящихъ дробей.

Пусть послѣдняя подходящая дробь есть $\frac{n}{m}$, а данная $\frac{a}{b}$; тогда, какъ извѣстно, существуетъ соотношеніе

$$am - bn = 1 \dots \dots \dots (1)$$

Если какая-либо дробь $\frac{x}{y}$ есть одна изъ дробей, близко подходящихъ къ данной $\frac{a}{b}$, то разность между ними $\left(\frac{a}{b} - \frac{x}{y}\right)$ должна быть малой величиной. Мы имѣемъ:

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{ay - bx}{by} \dots \dots \dots (2)$$

Для того, чтобы разность $\frac{a}{b} - \frac{x}{y}$ была достаточно малой, нужно, чтобы въ правой части равенства (2) числитель былъ достаточно малымъ сравнительно съ знаменателемъ, by . Пусть этотъ числитель есть k , гдѣ k —нѣкоторая величина, сравнительно съ by очень малая:

$$ay - bx = k \dots \dots \dots (3)$$

Сопоставляя равенства (1) и (3), находимъ, что можно положить $y = mk$ и $x = nk$ (послѣ умноженія обѣихъ частей рав. (1) на k), или вообще: $y = mk + \mu b$, и $x = nk + \mu a$.

Подбирая теперь числа k и μ , можемъ получить такія значенія x и y , при которыхъ дробь $\frac{x}{y}$ хорошо разлагается и достаточно близка къ $\frac{a}{b}$.

Методъ Броко, также дающій возможность получать удобныя для разложенія дроби и разбивать соотвѣтственно передачу, состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть данное передаточное число есть $\frac{m}{n}$; оно, положимъ, слишкомъ сложно и не допускаетъ разложенія. Мы попрежнему обращаемъ его въ непрерывную дробь и находимъ подходящія дроби. По свойству подходящихъ дробей мы знаемъ, что если двѣ послѣдовательныя подходящія дроби суть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то всякая дробь, заключенная между ними, будетъ болѣе сложной, чѣмъ эти двѣ. То же замѣчаніе относится вообще ко всякимъ двумъ дробямъ, удовлетворяющимъ соотношенію

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}.$$

Дробь $\frac{a+c}{b+d}$, какъ не трудно убѣдиться, находится именно въ такомъ соотношеніи съ дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Такимъ образомъ, если послѣ указаннаго обращенія въ непрерывную дробь и полученія подходящихъ эти послѣднія окажутся неудобными, то, взявъ двѣ подходящія дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, мы находимъ затѣмъ цѣлый рядъ другихъ подходящихъ дробей, интерполируя сначала между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, т.-е. составляя дробь $\frac{a+c}{b+d}$, потомъ между этой и каждой изъ дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и т. д.

Перейдемъ теперь къ тому случаю соединеній колесъ, при которомъ оси нѣкоторыхъ колесъ имѣютъ сами движеніе около неподвижной оси.

Представимъ себѣ такое соединеніе: колесо N (фиг. 68), сидящее на оси A , зацѣпляется съ колесомъ n , сидящимъ на оси B ; на той же оси B сидитъ колесо N_1 , зацѣпляющееся съ колесомъ n_1 , вольно сидящимъ на оси A . Ось B сама сидитъ на рычагѣ AB , могущемъ вращаться около A .

Пусть колесо N совершаетъ z оборотовъ; при неподвижномъ рычагѣ колесо n совершило бы z_1 оборотовъ, при чемъ

$$z_1 = \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} \cdot z.$$

Если же рычагъ совершаетъ въ то же самое время p оборотовъ въ ту же сторону, что и N , то разсмотрѣніе соотносительныхъ движеній мы можемъ свести опять къ случаю неподвижнаго рычага, если дадимъ всей системѣ скорость вращенія, равную и противоположную скорости рычага; исполнивъ это, имѣемъ

$$z_1 - p = \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} (z - p),$$

или иначе

$$z_1 - p = k (z - p),$$

гдѣ k есть передаточное число между колесами N и n_1 .

Точно такъ же, если мы имѣемъ послѣднее колесо n_1 сидящимъ не на первой оси A , а на томъ же рычагѣ AB (фиг. 69), то число оборотовъ этого колеса около его оси опредѣлится изъ того же соотношенія. Дѣйствительно, то обстоятельство, что колесо n_1 участвуетъ вмѣстѣ съ рычагомъ во вращеніи около оси A , можно разсматривать какъ вращеніе колеса около своей оси B со скоростью рычага и параллельное перенесеніе по кругу радіуса AB . Слѣдовательно, число оборотовъ колеса n_1 опредѣлится какъ сумма числа оборотовъ рычага p и числа

оборотовъ, происходящаго вслѣдствіе вращенія колеса N относительно рычага, т.-е. z_1 (кол. n_1) $= p + k(z - p)$; параллельное перенесеніе къ вращенію не прибавитъ ничего.

Если между колесами N и n_1 имѣется лишь одно колесо и если колесо N неподвижно, то, такъ какъ $N_1 = n$, мы находимъ: $z_1 = p - \frac{N}{n_1} \cdot p$, а при $N = n_1$ получимъ $z_1 = 0$, т.-е. колесо n_1 въ этомъ случаѣ будетъ лишь передвигаться параллельно самому себѣ, что, впрочемъ, въ данномъ случаѣ можно видѣть и прямо: промежуточное колесо, очевидно, нисколько не вліяетъ на отношеніе чиселъ оборотовъ, а заставляетъ лишь колесо n_1 вращаться относительно рычага въ сторону, противоположную его вращенію. Въ такомъ частномъ видѣ механизмъ носить названіе *парадокса Ферюссона*.

Если, далѣе, промежуточнаго колеса нѣтъ, и если колеса N и n_1 равны (они въ этомъ случаѣ непосредственно сцѣпляются одно съ другимъ), то, очевидно, колесо n_1 совершитъ около своей оси $2p$ оборотовъ при неподвижномъ колесѣ N въ ту же сторону, что и рычагъ. Обратно, если мы заставимъ колесо n_1 перемѣщаться параллельно самому себѣ, то колесо N совершитъ въ то же время $2p$ оборотовъ въ сторону вращенія рычага. Это соображеніе положено въ основу механизма *Уатта*, гдѣ рычагъ K (фиг. 70), качаясь около O , увлекаетъ во вращеніе рычагъ AB ; A есть ось вала, съ которымъ соединено наглухо колесо A . Тяга M берется достаточно длинной для того, чтобы при качаніи коромысла K въ небольшихъ предѣлахъ можно было предположить, что она перемѣщается параллельно самой себѣ, т.-е., иными словами, что колесо B , неизмѣнно соединенное съ этой тягой M , не имѣетъ вращательнаго движенія, а лишь одно поступательное. Легко видѣть, что при качаніи рычага AB , вызываемомъ, какъ было указано, качаніемъ коромысла K , колесо A будетъ вращаться вдвое быстрѣе рычага AB .

Наглядно можемъ представить себѣ дѣйствіе механизма, если возьмемъ два равные круга A и B (фиг. 71) и прокатимъ, положимъ, колесо B по A , положимъ, въ положеніе B . Радиусъ этого колеса BP приметъ теперь положеніе B_1P_2 , при чемъ дуга OP будетъ равна OP_2 .

Для того, чтобы этотъ радиусъ BP и при новомъ положеніи B_1 круга B сохранилъ свое направленіе, необходимо теперь повернуть колесо A на уголъ, равный углу $P_2B_1P_1 = 2\varphi$; тогда точка P_2 придетъ въ P_1 и радиусъ BP окажется въ положеніи B_1P_1 , параллельномъ прежнему. Обратно, если при своемъ вращеніи около колеса A колесо B около своей оси B вращенія имѣть не будетъ, то именно съ этой удвоенной угловой скоростью и будетъ вращаться колесо A *).

*) Механизмъ этотъ, какъ называемое *планетное колесо Уатта*, былъ примѣненъ имъ для передачи движенія отъ коромысла K паровой машины (фиг. 70) главному валу A ; обыкновеннымъ кривошипнымъ механизмомъ Уаттъ воспользоваться не могъ, такъ какъ этотъ послѣдній механизмъ былъ въ то время патентованъ.

Если при вращеніи опредѣленнаго предмета, наприм., рѣзца въ цилиндро-сверлильныхъ станкахъ, требуется имѣть еще его медленное поступательное передвиженіе, то можно примѣнить рядовое соединеніе, разобранный въ первомъ примѣрѣ. Рѣзцы s, s (фиг. 72) укрѣплены на шайбѣ E , прикрѣпленной болтами къ шайбѣ D , снабженной выступомъ, позволяющимъ ей перемѣщаться вдоль пустотѣлаго вала L , на которомъ имѣется продольный вырѣзъ, въ которомъ и скользитъ этотъ выступъ. Шайба D , кромѣ того, представляетъ собою гайку для винта A , помѣщеннаго внутри этого пустотѣлаго вала L . На этомъ же валу L сидитъ (на шпонкѣ) рычагъ M , несущій на себѣ ось съ колесами n и N_1 ; наглухо съ винтомъ A соединено колесо n_1 ; колесо N наглухо соединено съ станиной. Пустотѣлый валъ L получаетъ вращеніе отъ приводаго фабричнаго вала и заставляетъ поэтому вращаться и шайбу E съ рѣзцами s, s и рычагъ M съ его колесами. При p оборотовъ рычага винтъ сдѣлаетъ z_1 оборотовъ, гдѣ $z_1 = p - \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} \cdot p$, или $z_1 = p \left(1 - \frac{NN_1}{nn_1} \right)$, и, слѣд., если шагъ винта есть h , то рѣзецъ подвигается на $h(z_1 - p)$ или на $\left(-\frac{NN_1}{nn_1} ph \right)$.

Подобное же сочетаніе зубчатыхъ колесъ можно представить себѣ и для конической передачи—аналогично цилиндрической. Колесо N (фиг. 73) наглухо соединено съ осью A , а колесо n_1 —вольно; колеса n и N_1 вращаются около оси, сидящей на рычагѣ K , который самъ можетъ вращаться около оси A . При неподвижномъ рычагѣ K колесо n_1 , при z оборотахъ колеса N , сдѣлаетъ $\left(-\frac{NN_1}{nn_1} z \right)$ оборотовъ, и, слѣдовательно, при p оборотахъ рычага K сдѣлаетъ $z_1 = p - \frac{NN_1}{nn_1} (z - p)$ оборотовъ (передаточное число является здѣсь отрицательнымъ по смыслу передачи вращенія). Приборъ этотъ иногда употребляется въ нѣкоторыхъ прядильныхъ машинахъ.

Механизмъ можно внѣшнимъ образомъ измѣнить: колеса n и N_1 соединить въ одно ($N_1 = n$); колеса N и n_1 дѣлаются равными (фиг. 74); рычагъ K выполненъ въ видѣ цилиндрическаго зубчатаго колеса K , внутри котораго помѣщается ось колеса n . Колесо K сидитъ, конечно, на оси A вольно, точно такъ же, какъ и колесо n_1 . Для симметріи прибавляютъ еще колесо n_2 . Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ: $z + z_1 = 2p$. Измѣняя число оборотовъ колеса K , можно измѣнить и число z_1 .

Отд. 2. Отношеніе скоростей перемѣнно,—направленій постоянно.

Шарниръ Гука.

Въ порядкѣ послѣдовательности классификаціи Виллиса мы теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію передачи при посредствѣ промежуточныхъ твердыхъ звеньевъ, гдѣ отношеніе скоростей перемѣнно, а направленій—постоянно. Здѣсь мы остановимся на одномъ изъ наиболѣе употребительныхъ механизмовъ, а именно на *шарниръ Гука*.

Шарниръ Гука представляетъ изъ себя муфту для двухъ валовъ, геометрическія оси которыхъ пересѣкаются въ точкѣ O (фиг. 75). Муфта устраивается въ видѣ двухъ перекладинъ, соединенныхъ крестообразно подъ прямымъ угломъ другъ къ другу; оси перекладинъ пересѣкаются въ той же точкѣ O , въ которой пересѣкаются и оси валовъ; каждая перекладина перпендикулярна къ своему валу: $CD \perp OB$, $EF \perp OA$. Концы валовъ снабжены вилами, въ которыя и входятъ, какъ шипы, концы перекладинъ.

Механизмъ, конечно, можетъ быть видоизмѣняемъ съ внѣшней стороны; напр., вмѣсто перекладинъ берутъ иногда шарикъ (фиг. 76), въ которомъ дѣлаютъ 4 радіальныхъ углубленія; соотвѣтствующіе осямъ этихъ углубленій радіусы лежатъ въ одной плоскости, образуя притомъ 2 діаметра сферы, перпендикулярные другъ другу; центръ этой сферы долженъ лежать въ точкѣ O . Въ упомянутыя углубленія ходятъ шипики каждаго изъ валовъ. Сущность дѣйствія остается, конечно, та же, что и прежде.

При вращеніи вала A (фиг. 75) ось перекладины EF будетъ двигаться въ плоскости, перпендикулярной къ оси A , вращаясь около центра O со скоростью вращенія вала A ; точно такъ же перекладина CD во все время вращенія будетъ оставаться въ плоскости, проходящей также черезъ точку O и перпендикулярной къ оси B ; уголъ между плоскостями будетъ равенъ углу между осями. Опишемъ мысленно изъ центра O сферу какого-либо радіуса. Ось каждой изъ перекладинъ будетъ діаметромъ этой сферы. Пусть плоскости движенія этихъ діаметровъ будутъ OC_0H и OC_0KF (фиг. 77). Разсматривать движеніе цѣлыхъ діаметровъ мы не будемъ, а разсмотримъ движеніе радіусовъ OC_0 и OF_0 , представляющихъ какъ бы половины перекладинъ,—другія половины движутся совершенно такъ же, какъ эти.

Два эти радіуса OC_0 и OF_0 , движутся въ своихъ плоскостяхъ такъ, что *уголъ COF между ними всегда остается прямымъ*, такъ какъ перекладины соединены другъ съ другомъ неизмѣнно подъ прямымъ угломъ.

Начальнымъ положеніемъ радіусовъ условимся считать одно изъ тѣхъ, при которыхъ радіусы OC_0 и OF_0 лежатъ въ плоскости чертежа, перпендикулярной къ плоскости, проходящей черезъ оси A и B ; радіусъ OC_0 въ этотъ моментъ будетъ перпендикуляренъ къ этой послѣдней

плоскости (A, B), т.-е. къ обѣимъ осямъ. Пусть теперь этотъ радіусъ OC_0 передвинулся въ своей плоскости OC_0H на уголъ φ и занялъ положеніе OC ; радіусъ OF_0 также передвинется въ своей плоскости OC_0KF_0 на нѣкоторый уголъ ψ , и займетъ нѣкоторое опредѣленное положеніе OF ; при этомъ, какъ было указано, уголъ COF будетъ попрежнему прямой.

Спросимъ себя, каково соотношеніе между этими двумя углами φ и ψ . Для вывода его намъ придется воспользоваться теперь одной изъ основныхъ формулъ сферической тригонометріи, выводъ которой мы ниже и помѣщаемъ.

Пусть изъ точки O , какъ изъ центра, описана сфера радіусомъ, равнымъ единицѣ, и пусть на этой сферѣ лежитъ сферическій треугольникъ ABC (фиг. 78), дуги котораго AB , BC и AC представляютъ собою дуги большихъ круговъ. Положимъ, наконецъ, что двѣ изъ этихъ дугъ, напр., AB и AC , не превышаютъ четверти окружности большого круга, т.-е. меньше $\frac{1}{2}\pi$.

Проведемъ радіусы OA , OB и OC и два послѣдніе продолжимъ до пересѣченія въ точкахъ Q и P съ касательными, проведенными въ вершинѣ A къ сторонамъ AB и AC . Касательныя и радіусы пересѣкутся такъ, какъ это изображено на чертежѣ, только въ томъ случаѣ, если дуги AB и AC меньше $\frac{1}{2}\pi$. Такъ какъ радіусъ сферы принять за единицу, то, какъ видно непосредственно изъ чертежа: $AQ = \operatorname{tg} \angle AOB$; если же мы условимся, уголъ AOB и ему подобные измѣрять дугами, ихъ стягивающими, то предыдущее ур-ніе напишется такъ: $AQ = \operatorname{tg} \smile AB$, или, обозначая $\smile AB$ черезъ c , подобно тому, какъ это дѣлается въ плоской тригонометріи, находимъ: $AQ = \operatorname{tg} c$. Подобнымъ же образомъ мы найдемъ: $AP = \operatorname{tg} b$, $OQ = \sec c$, $OP = \sec b$.

Кромѣ того, на основаніи формулъ плоской тригонометріи, изъ треугольниковъ OPQ и APQ имѣемъ:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \alpha,$$

и

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos A.$$

Сравнивая эти выраженія между собою и съ выведенными выше равенствами, получаемъ:

$$\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = \sec^2 b + \sec^2 c - 2\sec b \cdot \sec c \cdot \cos \alpha.$$

Замѣняемъ $\sec^2 x$ черезъ $(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ и сокращаемъ:

$$\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = 1 + \operatorname{tg}^2 b + 1 + \operatorname{tg}^2 c - 2\sec b \cdot \sec c \cdot \cos \alpha,$$

или

$$- 2\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = 2 - 2\sec b \cdot \sec c \cdot \cos \alpha,$$

Дифференцируя по t ур-ніе (1), находимъ:

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos \alpha,$$

или, въ виду ур-нія (2), пишемъ:

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \omega' = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \omega \cdot \cos \alpha,$$

откуда

$$\omega' = \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} \cdot \omega \cos \alpha \dots \dots \dots (3)$$

Но изъ ур-нія (1) имѣемъ

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha,$$

иначе

$$\frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \cos^2 \alpha;$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по единицѣ, получаемъ:

$$\frac{\sin^2 \psi + \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

откуда получаемъ:

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \psi} = \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha + 1 - \sin^2 \varphi;$$

иначе:

$$\frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha},$$

и теперь ур-ніе (3) приметъ видъ:

$$\omega' = \omega \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha} \dots \dots \dots (4)$$

Формула (4) показываетъ намъ, что при равномерномъ вращеніи одного вала другой вращается неравномерно; это видно изъ того, что въ отношеніе скоростей входитъ переменная величина $\sin^2 \varphi$. При $\varphi = 0$ имѣемъ $\omega' = \omega \cos \alpha$, а при $\varphi = 1/2 \pi \dots \omega' = \frac{\omega}{\cos \alpha}$. При небольшихъ углахъ α , когда $\cos \alpha$ мало отличается отъ единицы, неравномерность выходитъ небольшая.

Представимъ себѣ теперь два вала *A* и *C* (фиг. 79), соединенные промежуточнымъ между ними валомъ *B* при помощи двухъ шарнировъ Гукъ; пусть оси обоихъ валовъ одинаково наклонены къ оси средняго.

Если вилы промежуточного вала лежатъ въ одной плоскости, то, очевидно, валъ *A* дѣйствуетъ на валъ *B* такъ же, какъ валъ *C*—на *B*, т.-е. при извѣстномъ вращеніи вала *B* валы *A* и *C* будутъ вращаться одинаково, и, слѣдовательно, если мы станемъ равномерно вращать валъ *A*, то валъ *C*, при помощи вала *B*, будетъ вращаться также равномерно и съ тою же скоростью, что и валъ *A*; понятно, что валъ *B* равномернаго вращенія имѣть не будетъ.

Тотъ же результатъ получился бы у насъ, если бы къ данной системѣ мы примѣнили соотношение (1). Относя ψ къ валу *B*, а φ къ *A*, находимъ для (*A*, *B*): $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha$; пусть соотвѣтствующій уголъ поворота вала *C* равенъ φ_1 ; тогда имѣемъ: $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos \alpha_1$; здѣсь α есть уголъ между осями *A* и *B*, а α_1 —между *B* и *C*; при равенствѣ этихъ угловъ (на что было указано выше) получаемъ: $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1$, т.-е. $\varphi = \varphi_1$.

Теперь предположимъ, что вилки вала *B* перпендикулярны другъ къ другу (фиг. 80). Валъ *C* вращаться равномерно не будетъ. На самомъ дѣлѣ, изъ того же соотношенія (1) между валами *B* и *A* имѣемъ: $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha$; здѣсь ψ попрежнему есть уголъ поворота вала *B*, а φ —вала *A*. Для второй пары валовъ *B* и *C*, имѣемъ при углѣ φ_1 поворота вала *C*, $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \alpha_1$, такъ какъ теперь валъ *B* по отношенію къ *C* играетъ ту же роль, что у первой пары *A* по отношенію къ *B*. Два послѣднія ур-нія даютъ намъ соотношение $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1$; оно показываетъ намъ, что углы φ и φ_1 одинаковыми быть не могутъ никогда, за исключеніемъ того случая, когда углы α обращаются въ нуль: $\alpha = \alpha_1 = 0$; но въ этомъ послѣднемъ случаѣ всѣ три вала по существу обращаются въ одинъ.

Замѣтимъ, наконецъ, что при $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ передача при помощи шарнира Гука становится невозможной.

Отд. 3. Отношеніе скоростей и направленій перемѣнно.

Къ этому классу механизмовъ относятся такъ называемые *направляющіе* механизмы. Цѣль ихъ при помощи ряда шарнирныхъ соединеній получить прямолинейное движеніе опредѣленной точки механизма. Практическое примѣненіе эти механизмы находятъ себѣ тамъ, гдѣ по-чему-либо нежелательно устройство направляющихъ для прямолинейнаго движенія опредѣленной части механизма, подобное тому, какое имѣется въ паровой машинѣ для ползуна. Въ направляющихъ механизмахъ эта прямая получается не вслѣдствіе присутствія призматическихъ направляющихъ, а какъ *траекторія* нѣкоторой опредѣленной точки механизма.

Механизмы, относящіеся сюда, можно раздѣлить на *приближенные* и *точные*. Въ первыхъ прямая замѣняется нѣкоторой кривой траекто-

ріей, близко къ прямой подходящей и не трудно выполняемой; въ другихъ—траекторія будетъ теоретически точной прямой.

Механизмъ Эванса. Механизмъ Эванса принадлежитъ къ числу *приближенныхъ* направляющихъ механизмовъ и основанъ на томъ, извѣстномъ изъ кинематики, свойствѣ отрѣзка прямой, AB , по которому середина его, точка C (фиг. 81), при скользяніи концовъ A и B по сторонамъ прямого угла BOA описываетъ окружность центра O и радіуса OC .

Если мы возьмемъ довольно длинный стержень AB и поставимъ его подъ небольшимъ угломъ ψ къ линіи OA (фиг. 82), то при перемѣщеніи конца B стержня отъ B къ O и дальше къ B_1 на $OB_1 = OB$ получится очень малое передвиженіе точки A , могущее быть выраженнымъ въ видѣ: $AB - AB \cos \psi = a(1 - \cos \psi)$, гдѣ $a = AB$; передвиженіе конца B въ то же время выразится черезъ $a \sin \psi$, и отношеніе обоихъ перемѣщеній будетъ равно:

$$\frac{a(1 - \cos \psi)}{a \sin \psi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}.$$

Какъ видимъ, при достаточно маломъ углу ψ это отношеніе очень мало, между тѣмъ какъ въ то же самое время передвиженіе конца B , при достаточно длинномъ стержнѣ, можетъ быть достаточно велико.

Если мы соединимъ точку C , середину стержня, съ центромъ O рычагомъ CO , могущимъ вращаться около этой точки O , а конецъ A заставимъ двигаться по прямой OA , то конецъ B опишетъ прямую OB . Такъ какъ перемѣщеніе точки A мало, то вмѣсто малаго отрѣзка прямой AA_0 можно взять дугу круга достаточно большаго радіуса, для чего соединяемъ точку A рычагомъ съ нѣкоторой неподвижной точкой O_1 , находящейся на перпендикулярѣ къ OA_0 , проведенномъ изъ A_0 —средняго положенія точки A ; при этомъ A будетъ описывать малыя дуги круга радіуса O_1A ; точка B будетъ двигаться, собственно говоря, не по прямой OB , а по нѣкоторой кривой, которая можетъ однако при соотвѣтственно выбранныхъ a , ψ и радіусѣ O_1A , весьма близко подходить къ этой прямой OB ; во всякомъ случаѣ эта кривая съ этой прямой будетъ имѣть три общія точки: B , O и B_1 , гдѣ BB_1 есть весь размахъ точки B .

Съ геометрической стороны движеніе точки B будетъ движеніемъ одной изъ точекъ прямого отрѣзка AC , опирающагося своими концами на двѣ окружности радіусовъ O_1A и OC .

Разсмотрѣнный приближенный направляющій механизмъ носитъ названіе *механизма Эванса* и употребляется въ индикаторахъ,—замѣтимъ, что вмѣсто точки C можно взять и другую точку отрѣзка AB ; какъ извѣстно, при движеніи отрѣзка въ углу она опишетъ эллипсъ; найдя центръ кривизны эллипса для средняго положенія точки, замѣ-

няемъ дугу эллипса дугою окружности, имѣющей центръ въ центрѣ кривизны.

Параллелограммъ Уатта. Механизмъ Уатта, такъ же, какъ и механизмъ Эванса, принадлежитъ къ числу *приближенныхъ* направляющихъ механизмовъ. Представимъ себѣ рычагъ OA (фиг. 83) съ шарнирнымъ параллелограммомъ $ABCD$. Пусть рычагъ качается около средняго его положенія OA_0 , отклоняясь въ обѣ стороны на уголъ α . Заставимъ точку B двигаться по прямой, перпендикулярной къ OA_0 и дѣлящей стрѣлку A_0N пополамъ; при этомъ точка C опишетъ нѣкоторую кривую CC_0C_1 ; обратно, если по этой кривой мы будемъ вести точку C , то точка B будетъ двигаться по прямой. Кривую C_1C_0C мы замѣняемъ окружностью, проходящей черезъ точки C , C_0 и C_1 , т.-е. черезъ среднее и два крайнихъ положенія точки C ; центръ этой окружности будетъ лежать на линіи B_0C_0 средняго положенія точекъ B и C . Соединяемъ теперь рычагомъ точку C съ найденнымъ центромъ O_1 ; теперь при качаніи рычага OA точка B будетъ описывать уже не прямую, а нѣкоторую кривую, которая однако при соотвѣтствующемъ выборѣ элементовъ этого механизма, можетъ весьма близко подходить къ прямой. Ходъ точки B , т.-е. отрѣзокъ BB_1 , будетъ, конечно, равенъ отрѣзку AA_1 .

Нетрудно убѣдиться, что мы имѣемъ здѣсь движеніе, съ геометрической точки зрѣнія подобное движенію въ механизмъ Эванса. На самомъ дѣлѣ, продолживъ BC и провода $OK \parallel CD$, получаемъ:

$$OK = CD = const$$

и

$$CK = DO = const;$$

слѣдовательно, мы имѣемъ движеніе отрѣзка CK постоянной величины, опирающаго своими концами на окружности радіусовъ O_1C и OK и центровъ O и O_1 ; точка K будетъ описывать дугу K_1K , гдѣ K_1 лежитъ, очевидно, на продолженіи B_0C_0 и соотвѣтствуетъ точкѣ K , когда BC приметъ положеніе B_0C_0 . Обыкновенно ходъ точки B дается заранее. Имѣя его, выбираютъ длину рычага OA (часто берутъ $OA = 1,5 BB_1$), и чертятъ дугу AA_0A_1 такъ, чтобы хорда AA_1 равнялась данному ходу; находятъ затѣмъ стрѣлку ея A_0N , дѣлятъ ее пополамъ и проводятъ черезъ точку дѣленія прямую, параллельную AA_1 , которая и будетъ предполагаемой траекторіей точки B ; задаются затѣмъ длинами AB и AD и чертятъ рычагъ и параллелограммъ въ обоихъ крайнихъ положеніяхъ и въ среднемъ (т.-е. $ABCD$, $A_0B_0C_0D_0$ и $A_1B_1C_1D_1$) такъ, конечно, чтобы точка B приходилась на своей прямой. Такимъ образомъ находятъ три соотвѣтствующихъ положенія точки C , т.-е. точки C , C_0 и C_1 , и ищутъ центръ окружности, проходящей черезъ эти три точки. Затѣмъ соединяютъ точку C съ центромъ O_1 при помощи рычага, и тогда, при

качаніи рычага AO около центра O , а—рычага O_1C около O_1 , точка B приблизительно будет описывать прямую BB_0B_1 .

Замѣтимъ, что если мы соединимъ прямою OB точки O и B и опредѣлимъ точку пересѣченія этой прямой BO съ прямой CD , то точка E также будет описывать прямую,—это видно изъ того, что фигуры ODE и OAB всегда остаются подобными другъ другу; на самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ равенство отношеній:

$$DE : AB = DO : OA;$$

значить, отношеніе $DE : AB$ есть *const.*; прямыя AB и DE всегда между собою параллельны; такимъ образомъ, точки B и E будутъ всегда лежать на одной прямой съ точкой O ; поэтому если B будетъ двигаться по прямой то, въ виду постоянства отношенія $BO : EO$, точка E будетъ двигаться по прямой, параллельной первой.

Поэтому, найдя такую точку E , можно удалить части AD , AB и BC , оставивъ лишь рычаги OD , O_1C и звено CD ; точка E этого звена и будетъ описывать прямую. Механизмъ будетъ имѣть видъ, изображенный на фиг. 84.

Механизмъ Поселье. Этотъ механизмъ принадлежитъ къ разряду *точныхъ* направляющихъ механизмовъ и основанъ на такъ называемой *инверсии* или помноженіи кривыхъ.

Пусть мы имѣемъ окружность O и точку A (фиг. 85) и нѣкоторый данный по величинѣ отрѣзокъ прямой k . Проводимъ изъ точки A лучъ AL , пересѣкающій окружность O въ точкахъ B и B_1 и ищемъ на томъ же лучѣ AL такую точку C , чтобы произведеніе $AB \times AC$ равнялось данной величинѣ k^2 . Оказывается, что геометрическимъ мѣстомъ такихъ точекъ C будетъ нѣкоторая опредѣленная окружность O_1 . Дѣйствительно, подыскавъ еще такую точку C_1 , чтобы произведеніе $AB_1 \times AC_1$ равнялось опять k^2 , можемъ написать

$$AB \times AC = k^2,$$

и

$$AB_1 \times AC_1 = k^2.$$

Перемноживъ, имѣемъ:

$$(AB \times AB_1) \cdot (AC \times AC_1) = k^4.$$

Но произведеніе $(AB_1 \times AB)$ есть величина постоянная, равная AT^2 , гдѣ AT есть касательная къ кругу O изъ точки A , значить, произведеніе $AC \times AC_1$ есть также величина постоянная, что и показываетъ намъ, что точки C и C_1 лежатъ также на окружности,—это и будетъ упомянутая выше окружность O_1 . Не трудно убѣдиться въ томъ, что обѣ общія касательныя къ этимъ двумъ окружностямъ $T_0T'_0$ проходятъ черезъ ту же точку A .

Въ томъ частномъ случаѣ, когда точка A лежитъ на окружности O (фиг. 86), геометрическимъ мѣстомъ точекъ C будетъ прямая, занимающая вполне определенное (при данномъ k) положеніе относительно круга O . Дѣйствительно, если мы проведемъ черезъ A діаметръ AA_1 , возьмемъ на немъ какую-нибудь точку K такъ, чтобы произведеніе $AA_1 \times AK$ равнялось данной величинѣ, и въ этой точкѣ K возставимъ перпендикуляръ KC къ діаметру AA_1 , то для какой-нибудь точки C этого перпендикуляра, пользуясь подобіемъ треугольниковъ ABA_1 и ACK , можемъ написать:

$$\frac{AC}{AK_1} = \frac{AK}{AB},$$

откуда получаемъ:

$$AK \cdot AA_1 = AC \cdot AB,$$

что и указываетъ намъ, что точка C принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту. Такимъ образомъ, съ перемѣщеніемъ точки B по окружности O , точка C будетъ двигаться по нѣкоторой вполне определенной прямой CK . Эта идея и положена въ основу механизма *Поселье*. Здѣсь взять шарнирный ромбъ $BMCN$ (фиг. 87); точки M и N его связаны тягами AM и AN съ неподвижной точкой A , при чемъ эти рычаги AM и AN между собою равны.

Не трудно видѣть, что въ такомъ случаѣ точки A , B и C , при всѣхъ измѣненіяхъ фигуры остаются на одной прямой AC (по свойству ромба діagonalъ $BC \perp MN$ и дѣлитъ ее пополамъ, а вслѣдствіе равенства $MA = NA$, точка A всегда придется на этомъ же перпендикулярѣ BC).

Окружность изъ M радіуса MC проходитъ черезъ точку B , такъ какъ $MC = MB$; отсюда слѣдуетъ, что произведеніе $AB \cdot AC$ есть величина постоянная; дѣйствительно, упомянутая окружность M имѣетъ определенный радіусъ MC , а точка A находится въ определенномъ разстояніи MA отъ центра M этой окружности, и это послѣднее соотношеніе между окружностью M и точкой A имѣетъ мѣсто при всѣхъ положеніяхъ ромба. Такимъ образомъ у насъ имѣется постоянное по величинѣ произведеніе векторовъ AB и AC .

Заставимъ теперь конецъ одного вектора, B , описывать окружность, проходящую черезъ точку A (сравн. съ фиг. 86), тогда конецъ другого, точка C , опишетъ точную прямую. Выбираемъ за центръ этой окружности нѣкоторую точку O такъ, что

$$OB = OA,$$

соединяемъ ее рычагомъ съ точкой B и такимъ образомъ получаемъ направляющій механизмъ, носящій названіе механизма *Поселье* (1864 г.). Если BO не будетъ равно OA , то точка C будетъ описывать дугу нѣкоторой, вполне определенной въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, окружности.

Механизмъ Гарта. Въ механизмѣ Гарта, являющемся, какъ и механизмъ Поселъе, точнымъ направляющимъ механизмовъ, положены въ основу четыре стержня, соединенные шарнирами (фиг. 88); длины ихъ подбираются такъ, чтобы они составляли діагонали и бока равнобокой трапеціи $KPMN$. Возьмемъ на стержнѣ KN какую-нибудь точку A сдѣлаемъ ее неподвижной, такъ что стержень KN получитъ возможность вращенія около этой точки.

Проводимъ изъ этой точки A линію AE , параллельную NM ; точки пересѣченія ея съ діагоналями KM и PN обозначимъ черезъ B и C . Не трудно видѣть, что фигура $BСMN$ будетъ также равнобокой трапеціей. Точки B и C будутъ вполнѣ опредѣленными точками стержней KM и PN , разъ выбрана точка A ; дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$KB = \frac{KA}{KN} \cdot KM \text{ и } PC = \frac{KA}{KN} \cdot PN;$$

выбравъ точку A , мы тѣмъ самымъ задаемся длиною KA , а этимъ, въ свою очередь, опредѣляются длины KB и PC , т.-е. точки B и C .

Около трапеціи $BСMN$, какъ равнобокой, можно описать кругъ; пусть онъ пересѣчетъ прямую KN еще въ точкѣ E . Сѣкуція KBM и KNF даютъ соотношенія:

$$KF \cdot KN = KM \cdot KB = const;$$

откуда слѣдуетъ, что F есть нѣкоторая вполнѣ опредѣленная точка прямой KN . Далѣе, сѣкуція изъ точки A , AC и AE , даютъ:

$$AE \cdot AN = AC \cdot AB = const,$$

что показываетъ намъ, что, если мы соединимъ точку B рычагомъ съ неподвижной точкой O , такъ что она будетъ описывать дугу окружности радіуса OB , то точка C будетъ описывать или прямую, при $OB = OA$, или окружность. Весь механизмъ будетъ состоять только изъ пяти стержней: KN , KM , PM , PN и OB , при двухъ неподвижныхъ точкахъ O и A .

Винтовые пары.

Винтовое движеніе, какъ мы знаемъ, есть сочетаніе вращательнаго движенія около нѣкоторой оси и поступательнаго вдоль той же оси; но одно и то же вращательное движеніе, положимъ, происходящее по часовой стрѣлкѣ, можно сочетать съ поступательнымъ двояко: одинъ разъ при одномъ направленіи поступательнаго движенія, другой разъ при противоположномъ, что, въ свою очередь, обуславливаетъ различіе винтовыхъ паръ.

Пусть передъ нами находится винтовая пара; будемъ смотрѣть на нее вдоль ея оси; нарѣзка этой пары можетъ быть такова, что при

вращеніи по часовой стрѣлкѣ одного элемента относительно другого, остающагося неподвижнымъ, первый будетъ удаляться отъ насъ; такимъ образомъ здѣсь имѣемъ сочетаніе вращательнаго движенія съ поступательнымъ въ направленіи отъ насъ; такая нарѣзка, а вмѣстѣ съ ней и вся пара, называется *правой*. Но можно устроить нарѣзку такъ, что элементъ пары, вращаясь опять по часовой стрѣлкѣ, станетъ *приближаться къ намъ*,—въ этомъ случаѣ имѣемъ сочетаніе того же вращательнаго движенія съ поступательнымъ, совершающимся теперь въ другую сторону,—такая нарѣзка называется *лѣвой*.

Легко видѣть, что, если мы будемъ вращать элементъ пары *противъ* часовой стрѣлки, то въ первомъ случаѣ—въ случаѣ правой пары—элементъ будетъ приближаться къ намъ, а во второмъ—удаляться отъ насъ. При вращеніи элемента по часовой стрѣлкѣ на 360° , онъ, въ случаѣ правой нарѣзки,—удалится отъ насъ на величину h , равную *шагу* винтовой линіи (разстоянію двухъ сосѣднихъ точекъ винтовой линіи, лежащихъ на одной образующей цилиндра). Изъ самаго закона образованія винтовой линіи на поверхности круглаго цилиндра слѣдуетъ, что, въ случаѣ поворота элемента пары вообще на нѣкоторый уголъ φ , элементъ подвинется вдоль оси цилиндра на величину, равную $\varphi h : 2\pi$ или на αh , гдѣ α есть величина поворота въ частяхъ полного оборота.

При томъ же поворотѣ α элементъ лѣвой пары, имѣющей тотъ же шагъ h , подвинется на ту же величину αh , но въ другую сторону (къ намъ); если первую величину αh считать положительной, то вторую можно считать отрицательной. Такимъ образомъ является возможность алгебраически различать правыя и лѣвыя нарѣзки тѣмъ, что у первыхъ будемъ считать шагъ положительнымъ, у вторыхъ—отрицательнымъ; повороты же, какъ это принято вообще, считаются положительными въ направленіи часовой стрѣлки и отрицательными—въ обратную сторону.

Трехзвенная винтовая цѣпь.

Обратимся теперь къ сочетанію винтовыхъ паръ, ограничиваясь простѣйшими. Здѣсь, въ противоположность вращательнымъ и поступательнымъ парамъ, можно составить замкнутую цѣпь изъ паръ, оси которыхъ совпадаютъ, и именно изъ трехъ паръ. Дѣйствительно, не трудно представить себѣ винтъ a (фиг. 89), на оси котораго имѣется еще какой-нибудь винтъ; гайка b этого послѣдняго имѣетъ на своей внѣшней сторонѣ нарѣзку и служитъ такимъ образомъ въ то же время винтомъ, гайка для котораго c соединена неразрывно съ гайкой для a . Получаемъ такимъ образомъ цѣпь изъ трехъ одноосныхъ винтовыхъ паръ: $A(c, a)$, $B(b, a)$, $C(b, c)$. Разсмотримъ относительныя движенія звеньевъ этой цѣпи.

Повертываемъ a относительно c на α , гдѣ α выражено въ доляхъ π , и пусть b повернется относительно a на β , тогда относительно c оно повернется на $(\alpha + \beta)$, и, если шаги паръ мы назовемъ соотвѣтственно черезъ x , y и z , то найдемъ, что поступательное движеніе a относительно c равно αx , b относительно a равно βy ; слѣд., b относительно c подвинулось на $(\alpha x + \beta y)$; но такъ какъ оно повернулось въ то же время относительно c на $(\alpha + \beta)$, а шагъ этой пары (b, c) есть z , то поступательное перемѣщеніе b выразится въ то же время въ видѣ $z(\alpha + \beta)$, что даетъ намъ возможность написать равенство:

$$\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta)z.$$

Отсюда видимъ, что при данныхъ шагахъ, т.-е. для данныхъ винтовыхъ паръ, опредѣленному повороту a звена a относительно c соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное движеніе звена b относительно того же звена c ,—другими словами, цѣпь является вполнѣ опредѣленной.

Если механизмъ былъ поставленъ на звено c , то движеніе звена b относительно c является абсолютнымъ, и, слѣдов., при поворотѣ звена a на α , звено b повернется на $\alpha + \beta = \alpha \cdot \frac{x - y}{z - y}$ и подвинется на $(\alpha + \beta)z = \alpha z \cdot \frac{x - y}{z - y}$, какъ это видно изъ уравненія, связывающаго α и β .

Если механизмъ поставленъ на звено a , то абсолютнымъ движеніемъ звена b будетъ его движеніе относительно a . У насъ α было поворотомъ звена a относительно c , слѣд. $(-\alpha)$ являлось поворотомъ c относительно a ; поэтому теперь $(-\alpha)$ будетъ выражать абсолютный поворотъ звена c , а β —абсолютный поворотъ звена b , при чемъ α и β опять связаны прежнимъ ур—ніемъ; оно намъ даетъ

$$\beta = (-\alpha) \cdot \frac{x - z}{y - z};$$

звено c подвинется на $(-\alpha) \cdot x$, а звено b — на $\beta \cdot y$, т.-е. на

$$-\alpha y \cdot \frac{x - z}{y - z}.$$

Точно такъ же при неподвижномъ b имѣемъ абсолютный поворотъ звена a равнымъ $(-\beta)$, а звена c — равнымъ $-(\alpha + \beta)$, гдѣ α и β опять связаны приведеннымъ выше уравненіемъ; нетрудно получить теперь передвиженія a и c .

Въ такомъ общемъ видѣ механизмъ этотъ почти не имѣетъ примѣненій. Гораздо чаще встрѣчаются частные случаи этой трехзвенной винтовой цѣпи, когда какая-либо пара обращается въ поступательную или вращательную.

Предположимъ, что пара $C(b, c)$ обратилась въ поступательную пару съ направлениемъ движенія, параллельнымъ общей оси оставшихся винтовъ (фиг. 90). Поставивъ механизмъ на c , мы можемъ вращениемъ винта a передвигать взадъ и впередъ гайку b второго винта, имѣющую извнѣ направляющія, параллельныя оси винта a (поступательная пара c). Обозначимъ, какъ и прежде, шаги обоихъ винтовъ черезъ x и y ; поворотъ α звена a относительно c теперь будетъ въ то же время и поворотомъ a относительно b , такъ какъ гайка b сама вращаться не можетъ, или, другими словами, (β) ,—поворотъ b относительно a будетъ теперь равенъ $(-\alpha)$. Такимъ образомъ звено b относительно звена a подвинется на величину $(-\alpha y)$; но звено a подвинется относительно звена c (т.-е. абсолютно) на величину αx , слѣд., гайка b подвинется абсолютно на величину $\alpha(x - y)$.—Это выраженіе могло быть получено изъ найденнаго выше соотношенія:

$$(\alpha + \beta)z = \alpha z \cdot \frac{x - y}{z - y},$$

въ которомъ, примѣнительно къ рассматриваемому случаю, пришлось бы положить $z = \infty$ (для поступательной пары); произведеніе же $(\alpha + \beta)z$, обращающееся теперь въ $0 \cdot \infty$ (ибо $(\alpha + \beta)$ теперь равно нулю), попрежнему остается осевымъ перемѣщеніемъ гайки b .

Какъ показываетъ выраженіе $\alpha \cdot (x - y)$, передвиженіе гайки b можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ,—стоитъ только шаги обоихъ винтовъ, при одинаковой нарѣзкѣ (правой или лѣвой) сдѣлать мало разнящимися другъ отъ друга. Подобный механизмъ носитъ названіе *дифференціальнаго винта*, и имъ можно пользоваться для измѣренія малыхъ отрѣзковъ числомъ оборотовъ винта a , а также и во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ требуется весьма малое передвиженіе. Если теперь видоизмѣнить эту цѣпь тѣмъ, что сдѣлать нарѣзки обоихъ винтовъ противоположными, то передвиженіе гайки будетъ равно $\alpha(x + y)$. Въ такомъ измѣненномъ видѣ этотъ механизмъ употребляется для соединенія вагоновъ (фиг. 91). Здѣсь винты A и B , принадлежащіе звену a , имѣютъ: одинъ (A)—правую нарѣзку, а другой (B)—лѣвую. Гайки O и O_1 для этихъ винтовъ соединяются при помощи крюковъ соотвѣтственно съ однимъ и другимъ вагономъ. Если мы будемъ вращать звено a по часовой стрѣлкѣ (смотря со стороны O_1), то, очевидно, винтъ A будетъ входить въ гайку O , т.-е. гайка O будетъ приближаться къ серединѣ звена a ; гайка O_1 точно такъ же будетъ приближаться къ серединѣ a ; значитъ оба вагона будутъ сдвигаться на величину $(x + y)$ при одномъ оборотѣ звена a .

Второе частное видоизмѣненіе нашей трехзвенной цѣпи получимъ, если сдѣлаемъ пару $A(c, a)$, вращательной, т.-е. одинъ изъ винтовъ a обратимъ въ простой шипъ, вращающійся въ подшипникѣ неподвижнаго звена c (фиг. 92). Въ этомъ случаѣ шагъ $x = 0$, и при поворотѣ

звена a на α получаемъ поворотъ гайки b въ видѣ $\alpha \cdot \frac{y}{y-z}$, гдѣ y и z опять обозначаютъ шаги оставшихся винтовъ; передвиженіе гайки b выразится черезъ $\alpha z \cdot \frac{y}{y-z}$.

Какъ это, такъ и предыдущее выраженіе можно получить изъ выраженія $(\alpha + \beta)z = \alpha \cdot z \frac{x-y}{z-y}$, гдѣ придется положить $x = 0$.

Въ противоположность тому, что мы имѣли для предыдущаго случая (дифференціального винта), здѣсь при данномъ оборотѣ α передвиженіе можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ, если шаги x и y будутъ сдѣланы мало разнящимися одинъ отъ другого.

Если теперь пару $A(a, c)$ сдѣлаемъ вращательной, а пару $C(b, c)$ поступательной, то получимъ одно изъ наиболѣе часто встрѣчаемыхъ на практикѣ видоизмѣненій этого механизма (фиг. 93). Здѣсь при поворотѣ винта a на α гайка b будетъ подвигаться въ ту или другую сторону на величину αx , гдѣ x есть шагъ винта; другими словами, одинъ элементъ (a) винтовой пары $B(b, a)$ имѣетъ только вращательное движеніе, другой же (b)—только поступательное.

Описанный механизмъ примѣняется въ параллельныхъ тискахъ и во многихъ машинахъ по обработкѣ металловъ и дерева, тамъ, гдѣ, вообще говоря, равномерное вращательное движеніе желательно преобразовать въ равномерное же и достаточно медленное поступательное, напр., при движеніи суппорта въ такъ-называемыхъ самоточкахъ. Суппортъ въ такихъ случаяхъ имѣетъ гайку, соотвѣтствующую гайкѣ b , звено же a представляетъ шпиндель, снабженный нарезкой и вращающійся въ подшипникахъ, укрѣпленныхъ въ станинѣ (звено c) самоточки.

Разсмотрѣніемъ этого механизма мы заканчиваемъ разсмотрѣніе винтовыхъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вообще низшихъ кинематическимъ паръ.

Настоящій временный выпускъ, вмѣстѣ съ его атласомъ, подлежитъ обмѣну на послѣдній 4-ый выпускъ курса „Теоріи механизмовъ“. О выходѣ въ свѣтъ этого 4-го выпуска будетъ своевременно объявлено.



