

И

ТЕОРІЯ БАЛЛИСТИКИ,

СОДЕРЖАЩАЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКАГО АНАЛИЗА КЪ ОПРЕ-
ДѢЛЕНІЮ РАЗЛИЧНЫХЪ ОБСТОЯТЕЛЬСТВЪ, СОПРОВОЖ-
ДАЮЩИХЪ ДВИЖЕНІЕ ТЯЖЕЛЫХЪ ТѢЛЪ, БРОШЕННЫХЪ
КАКОЮ НИБУДЬ СИЛОЮ,

составленная

Р. 263494 ✓
Экстраординарнымъ Профессоромъ Анкудовичемъ,
для руководства въ старшемъ Офицерскомъ классѣ
Артиллерійскаго Училища.

ПРОВЕРЕНО
1912

—

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Печатано въ Типографіи Штаба Отдельнаго Корпуса
Внутренней Стражи.

1836.

Фундаментальная

02484

№ 360.

Отдѣлъ

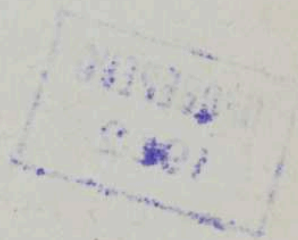
III.

Библиотеки ИМПЕРАТОРСКАГО Мо-
сковскаго Техническаго Училища.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлены были
въ Ценсурный Комитетъ *три* экземпляра. С. Пе-
тербургъ. 19 Февраля, 1856 года.

Ценсоръ П. Корсаковъ.



48190

О Г Л А В Л Е Н І Е.

	Стр.
Предварительныя понятія	1
ГЛАВА I. О ПАРАБОЛИЧЕСКОМЪ ДВИЖЕНІИ ТѢЛЪ, БРОСАЕМЫХЪ ИЗЪ АРТИЛ- ЛЕРІЙСКИХЪ ОРУДІЙ.	
Путь брошеннаго тѣла въ пустотѣ есть парабола.	
Выводъ общихъ формулъ параболическаго движенія	4
О горизонтальной дальности полета снарядовъ . .	15
О наибольшей высотѣ полета снарядовъ	23
Объ углѣ возвышенія орудія	26
α) Первое положеніе предмета, когда онъ находится выше горизонта дула орудія. .	27
β) Второе положеніе предмета, когда онъ будетъ ниже горизонта орудія	30
γ) Третіе положеніе предмета, когда онъ находится на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ	32
Примѣчательное свойство, относительно суммы двухъ угловъ бросанія, принадлежащихъ одина- кому заряду	33
О силѣ бросанія снарядовъ, или начальной ихъ скорости зависящей отъ силы пороха	37
О времени полета снарядовъ	43

О скорости, съ которою снарядъ ударяетъ въ предметъ.	44
Формулы для рѣшенія задачъ, относящихся къ Артиллерійскому прицѣлу.	46
Таблицы, показывающія высоты привѣснаго прицѣла у легкихъ, батарейныхъ и осадныхъ мѣдныхъ пушекъ и единогого, при различномъ углѣ прицѣливанія и углѣ возвышенія и склоненія мѣстности	57
Вычисленіе рикошетныхъ выстрѣловъ по параболической Теоріи.	59

ГЛАВА II. О движеніи тяжелыхъ тѣлъ въ воздушномъ пространствѣ.

Недостатки параболической Теоріи	77
Общіе законы сопротивленія жидкихъ тѣлъ. Сопротивленіе на прямыя поверхности. Причины несогласія выводовъ находимыхъ по Теоріи и по опытамъ.	79
Сопротивленіе жидкости на кривыя поверхности тѣлъ вращенія, движущихся по направленію своей оси.	96
Правила, извлеченныя Гютономъ изъ опытовъ, касательно сопротивленія оказываемаго воздухомъ на движущіяся тѣла	101
Таблица составленная Гютономъ и показывающая сопротивленія воздуха, найденныя по опытамъ при различныхъ скоростяхъ.	106
Приложеніе предъидущей Теоріи сопротивленія къ прямолинейному движенію снарядовъ въ воздухъ	114

Таблица показывающая поперечники, средний вѣсъ и плотности ядеръ, бомбъ и гранатъ. . .	122
О вертикальномъ движеніи тяжелыхъ тѣлъ въ воздухъ въ двухъ случаяхъ, когда онѣ свободно падаютъ и когда брошены будутъ снизу вверхъ	133
Таблица показывающая самыя большія оконча- тельные скорости нашихъ снарядовъ свободно падающихъ въ воздухъ	140
Вычисленіе прицѣльных выстрѣловъ.	153
Вычисленіе отлогихъ рикошетныхъ выстрѣловъ въ сопротивляющемся воздухъ.	170

О навѣсныхъ выстрѣлахъ.

I) Выводъ общихъ формулъ для вычисленія навѣсныхъ выстрѣловъ	186
II) Свойства кривой линіи полета въ воздухъ .	200
III) Построеніе кривой линіи полета, и составле- ніе таблицъ для употребленія при бросаніи бомбъ	212
IV) Объ углѣ возвышенія, соответствующемъ са- мой большой горизонтальной дальности бро- санія	241
Таблица составленная Гютономъ, по способу Нью- тона, и показывающая углы возвышенія, подъ коими происходитъ самая большая дальность полета	249
V) Уравненіе кривой линіи описываемой снаря- домъ, брошеннымъ подъ небольшимъ угломъ возвышенія	252
Вычисленіе рикошетныхъ выстрѣловъ отлогихъ и крутыхъ по предъидущей Теоріи	261

ГЛАВА III. О разныхъ способахъ опредѣ-
лять начальную скорость, бро-
саемыхъ изъ орудій снарядовъ.

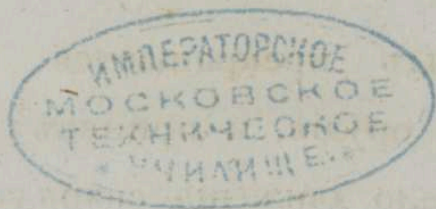
1) Опредѣленіе начальной скорости по способу Робинса и Гютона	271
Опредѣленіе длины сильѣйшаго заряда или тако- го, который сообщаетъ ядру самую большую начальную скорость	288
Таблица вычисленная Гютономъ и показывающая въ калибрахъ длины сильѣйшихъ зарядовъ, и соотвѣтствующія начальные скорости ядеръ	291
2) Опредѣленіе начальной скорости изъ дальности полета снарядовъ, по способу Ломбара	295
Таблица начальныхъ скоростей соотвѣтствующихъ разнымъ зарядамъ, для 12-ти фунтовой пушки, для $\frac{1}{2}$ пудоваго единорога и для 18-ти фунто- вой пушки.	300
3) Опредѣленіе начальной скорости по способу Маттея	305
4) Приблизительный способъ опредѣлять началь- ную скорость бомбъ изъ замѣченныхъ, по выстрѣлѣ, горизонтальной дальности и времени ихъ полета.	307
5) О балистическомъ маятникѣ	309
О центрѣ тяжести и центрѣ качанія балисти- ческаго маятника.	315
Вычисленіе скорости ядра	319
Вычисленіе скорости ядра изъ отдачи пушки.	337
Результаты, найденныя по опытамъ Гютона	345
Прибавленіе первое къ § 101.	349
Таблицы составленныя для бросанія бомбъ изъ	

VII

Стран.

5-ти и 2 хъ пудовыхъ мортирь, возвышенныхъ на 45 градусовъ.	353
Прибавленіе второе. О способъ интерполаци и приложеніи онаго къ составленію таблицъ до практики Артиллерійской касающихся . . .	359
Таблицы составленныя для бросанія гранатъ изъ $\frac{1}{2}$ пудовыхъ и 6-ти фунтовыхъ мортирь, воз- вышенныхъ на 45 градусовъ	372





ТЕОРІЯ

БАЛИСТИКИ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ.

§ 1. *Балистика* есть наука о движеніи тяжелыхъ тѣлъ, брошенныхъ по какому ни есть направленію.

Балистика получила свое названіе отъ машинъ, употребляемыхъ въ древнія времена для метанія на дальное разстояніе камней, зажигательныхъ тѣлъ, копьевъ и проч. и именуемыхъ *балистами*. Но когда извѣстнымъ сдѣлалось употребленіе пороха, то сіе названіе перешло къ Теоріи бросанія изъ Артиллерійскихъ орудій снарядовъ, произведеннаго дѣйствіемъ воспаленнаго въ самыхъ орудіяхъ порохового заряда.

§ 2. Предположивъ, что дѣйствіе пороховой

силы на снарядъ прекращается при вылетѣ его изъ жерла орудія, и принявъ точку сего вылета за начало движенія снаряда, Балистика представляетъ слѣдующій вопросъ : *опредѣлить вѣсть обстоятельства движенія тяжелаго тѣла, брошеннаго по извѣстному направленію съ данною скоростію.*

Поелику сіе движеніе можетъ быть изслѣдуемо въ двухъ разныхъ случаяхъ, или въ безвоздушномъ пространствѣ, или въ воздухѣ, противящемся движущемуся тѣлу, то рѣшеніе предложенной задачи можетъ быть двоякое. Въ первомъ случаѣ мы должны послѣдовать Теоріи Галилея, который, открывъ законъ свободного паденія тяжелыхъ тѣлъ, приложилъ оный къ метательному ихъ движенію; и по соединеніи движенія, сообщеннаго тѣлу, съ движеніемъ происходящимъ отъ дѣйствія тяжести онъ первый доказалъ, что тяжелое тѣло, брошенное въ безвоздушное пространство по какому либо направленію, кромѣ вертикальнаго, описываетъ параболу. Прежде сего, весьма полезнаго во многихъ отношеніяхъ открытія, хотя древніе Философы знали изъ наблюденій, что движеніе падающихъ тѣлъ, ускоряется по мѣрѣ ихъ

удаленія отъ начала паденія, но никто изъ нихъ не могъ показать той пропорціи, по коей возрастаетъ скорость сего движенія; также извѣстно имъ было, что тѣла верженныя въ воздушномъ пространствѣ, по какому ни есть невертикальному направленію, описываютъ кривую, но не зная законовъ свободнаго паденія тѣлъ, они не въ состояніи были опредѣлить видъ и свойство сей кривой. Первые Артиллеристы полагали, что путь, описываемый полетомъ ядра, состоитъ изъ трехъ частей; изъ коихъ первая, принадлежащая начальному сообщенному движенію, называемому *порывистымъ* составляетъ прямую линію; вторая, средняя, происходящая отъ сообщеннаго же движенія, но довольно измѣненнаго уже дѣйствіемъ тяжести, образуетъ кривую; а третія часть собственно принадлежащая, по ихъ мнѣнію, дѣйствію тяжести, преодолевавшему поступательное дѣйствіе ядра, составляетъ также, какъ и первая, прямую линію. Тарталія Италіанскій Математикъ первый, сколько извѣстно, началъ утверждать, что никакая часть линіи, описываемой движущимся ядромъ, не бываетъ прямая

и доказаль, что самая большая горизонтальная дальность выстрѣла происходитъ, въ безвоздушномъ пространствѣ, при возвышеніи орудія въ 45 градусовъ.



Г Л А В А I.

О ПАРАБОЛИЧЕСКОМЪ ДВИЖЕНІИ ТѢЛЪ, БРОСАЕМЫХЪ ИЗЪ АРТИЛЛЕРІЙСКИХЪ ОРУДІЙ.

Путь брошеннаго тѣла въ пустотѣ есть парабола. Выводъ общихъ формулъ параболическаго движенія.

§ 3. Сначала мы займемся изложеніемъ параболической Теоріи, изъ которой можно вывести нѣкоторыя полезныя заключенія, относительно выстрѣловъ изъ мортиръ, и которая основывается на томъ предположеніи, что воздухъ не представляетъ никакого сопротивленія движенію брошеннаго тѣла, а для сего вообразимъ себѣ безвоздушное пространство, и положимъ, что тяжелое тѣло будетъ брошено изъ точки А (Фигура 1) по направленію АВ со скоростію, которую означимъ чрезъ u . Если сіе направленіе не будетъ вертикальное, то

верженное тѣло, покоряясь силѣ тяжести, безпрестанно влекущей его внизъ, останется на линіи АВ, одно только мгновеніе; удаляясь же болѣе и болѣе отъ сей прямой, и перемѣняя въ каждое мгновеніе направленіе своего движенія, опишетъ сложнымъ движеніемъ нѣкоторую кривую линію АМС, которой видъ требуется опредѣлить.

Отнесемъ движущееся тѣло къ тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ АХ, АУ и АZ, проходящимъ чрезъ точку бросанія А, и пусть ось АУ будетъ вертикальная; а прочіе двѣ АХ и АZ горизонтальныя. Сіи оси составляютъ взаимное пресѣченіе горизонтальной плоскости ХАЗ съ двумя вертикальными ХАУ и ЗАУ; положеніе М движущагося тѣла, соотвѣтствующее времени, которое мы означимъ чрезъ t , находится посредствомъ разстояній онаго до трехъ сихъ плоскостей, или посредствомъ координатъ $АР = x$, $РQ = z$ и $MQ = y$. Назовемъ g дѣйствіе тяжести на поверхности земли, или ту скорость, которую свободно падающее тѣло приобретаетъ во время одной секунды. По причинѣ, что протяженіе кривыхъ, описываемыхъ брошенными снарядами, обыкновенно бываетъ

очень мало въ сравненіи съ окружностію земли, и при есмь снарядъ не восходитъ до той высоты, гдѣ усиліе тяжести примѣтно перемѣняется, то и можно принимать тяжесть g , на всемъ пространствѣ пробѣгаемаго тѣломъ пути, постоянною и дѣйствующею по прямымъ параллельнымъ между собою линіямъ. Теперь возьмемъ въ разсмотрѣніе общія дифференціальныя уравненія $\frac{d^2 x}{dt^2} = X$, $\frac{d^2 y}{dt^2} = Y$ и $\frac{d^2 z}{dt^2} = Z$, кои относятся къ опредѣленію всѣхъ обстоятельствъ свободнаго движенія тѣла, подверженнаго непрерывному дѣйствию силъ, данныхъ въ каждое мгновеніе по величинѣ и по направленію (Механика Франкера, чл. 163 и проч.). Поелику въ изслѣдываемомъ нами движеніи, дѣйствуетъ на тѣло одна лишь тяжесть g , которой направленіе вертикальное и параллельное оси y , и коей слагающія параллельныя осямъ x и z равны нулю, то замѣняя, въ общихъ уравненіяхъ движенія, силы X , Y и Z относительно параллельныхъ осямъ координатъ x , y и z , частными силами, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g;$$

здѣсь передъ количествомъ g знакъ *минусъ* поставленъ по той причинѣ, что тяжесть имѣетъ направленіе противоположное положительнымъ ординатамъ y , взятымъ вверхъ отъ горизонтальной плоскости XAZ .

Первые интегралы сихъ уравненій даютъ:

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dz}{dt} = c'', \quad \frac{dy}{dt} = c' - gt;$$

гдѣ c , c' , c'' суть постоянныя величины, получаемыя чрезъ интеграцію. Раздѣливъ первое изъ послѣднихъ трехъ уравненій на второе, получимъ $c''dx = c'dz$, потомъ взявъ интеграль будемъ имѣть $c''x = cz$; здѣсь постоянная величина не прибавлена, поелику должно быть въ одно время $z = 0$, $x = 0$. Уравненіе первой степени $c''x = cz$, въ отношеніи къ координатамъ x и z , показываетъ, что проекція кривой AMC на горизонтальной плоскости XAZ , есть прямая линія AC . Посему сія кривая вся заключается въ одной плоскости перпендикулярной къ плоскости XAZ , слѣдовательно въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ ось y и содержащей въ себѣ направленіе метанія AB .

§ 4. Если примемъ сію плоскость за плоскость координатъ x и y (фиг. 2), то въ отношеніи къ оной будемъ имѣть только два уравненія :

$$\frac{dx}{dt} = c, \frac{dy}{dt} = c' - gt. \dots (1),$$

коихъ интегралы суть

$$x = ct, y = c't - \frac{1}{2}gt^2 \dots (2);$$

здѣсь постоянныя величины не прибавлены, потому что когда $t = 0$, то $x = 0$ и $y = 0$. Для опредѣленія постоянныхъ величинъ c и c' , надлежитъ прибѣгнуть къ условіямъ начального движенія.

Но дифференціальное отношеніе $\frac{dx}{dt}$ выражаетъ въ каждое мгновеніе скорость движущагося тѣла по направленію оси x разложенную; дифференціальное отношеніе $\frac{dy}{dt}$ выражаетъ также скорость тѣла по направленію оси y разложенную (Мех. Франкера чл. 166); и такъ, если тѣлу сообщена будетъ начальная скорость $= u$ въ направленіи вертикальномъ, тогда для $t = 0$ будетъ $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = u$; въ слѣдъ за симъ изъ уравненій (1) найдутся $c = 0$, $c' = u$, и уравненія (1) и (2) примутъ видъ :

$$\frac{dy}{dt} = u - gt, \quad y = ut - \frac{1}{2}gt^2;$$

помощію коихъ можно вывести различныя обстоятельства движенія тѣла, брошеннаго съ низу вверхъ и обратно. Не входя въ подробное разсматриваніе сего движенія, которое изложено въ основаніяхъ Механики, мы займемся изслѣдованіемъ движенія въ общемъ случаѣ, когда тѣло брошено будетъ по направленію АВ, составляющему съ осью x или съ горизонтомъ уголъ $= \theta$. Въ практическихъ дѣйствіяхъ величина сего угла, опредѣляется наклоненіемъ оси канала орудія къ горизонту, допуская при семъ, что снарядъ вылетаетъ изъ жерла по направленію самой оси. Въ общемъ семъ случаѣ слагающія скорости, произшедшія отъ разложенія начальной скорости u бросанія, будутъ $u \cos \theta$ по направленію горизонтальной оси x , и $u \sin \theta$ по направленію вертикальной оси y ; а поелику первая изъ оныхъ опредѣляетъ величину $\frac{dx}{dt}$, вторая величину $\frac{dy}{dt}$ когда $t=0$, то по причинѣ уравненій (1) будемъ имѣть $c = u \cos \theta$ и $c' = u \sin \theta$: по сему уравненія (1) и (2) обратятся въ слѣдующія:

$$\frac{dx}{dt} = u \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = u \sin \theta - gt \dots (a)$$

$$x = u \cos \theta \cdot t, \quad y = u \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \dots (b)$$

изъ послѣднихъ двухъ уравненій первое относится къ равномерному движенію, второе же къ равно-переменному движенію; изъ сего заключаемъ, что брошенное тѣло совершаетъ равномерное движеніе въ направленіи горизонтальномъ, а равно-переменное въ направленіи вертикальномъ.

Исключивъ время t между уравненіями (b), получимъ уравненіе кривой линіи или пути брошеннымъ тѣломъ пробѣгаемаго (траекторіи), которое будетъ:

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g x^2}{2 u^2 \cos^2 \theta} \dots (c)$$

можно сократить сіе уравненіе, поставивъ вмѣсто u^2 равную величину $2gh$, и означивъ чрезъ $h = \frac{u^2}{2g}$ ту высоту, съ которой тѣло должно упасть въ безвоздушномъ мѣстѣ, дабы пріобрѣсть въ концѣ паденія скорость $= u$; и получимъ:

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{x^2}{4h \cos^2 \theta} \dots (d)$$

§ 5. Уравненіе (c) или (d), изображаетъ свой-

ство параболы; въ самомъ дѣлѣ отнесемъ кривую къ системѣ косоугольныхъ координатъ z и w , считая ихъ отъ точки бросанія A по продолженію вертикальной линіи Ay , протянутой въ низъ и по направленію линіи сообщеннаго движенія AE . Для какой ни есть точки M сей кривой новые координаты будутъ $AQ=z$ и $MQ=w$, и продолживъ линію MP до пресѣченія съ AB , получимъ изъ треугольника APB :

$$AP=AB \cos \angle BAP \text{ или } x=w \cos \theta,$$

$$MP=BP-PM \text{ или } y=w \sin \theta - z.$$

Теперь поставивъ величины, найденныя для x и y въ уравненіе (d), оно по надлежащемъ сокращеніи переменится въ слѣдующее:

$$w^2 = 4hz,$$

которое показываетъ, что отношеніе между новыми координатами для каждой точки кривой линіи полета выражается уравненіемъ параболы, отнесенной къ сопряженнымъ ея діаметрамъ. Но извѣстно, что одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ, параллельный оси параболы, а другой касательной къ ней, то изъ сего заключаемъ, что парабола, по коей брошенное тѣло совершаетъ свой полетъ, имѣтъ ось вертикальную, и что направленіе бросанія AB

составляет касательную къ сей кривой (*).

(*) Сіе последнее уравненіе въ отношеніи косоугольныхъ координатъ и прежнія [a], [b] и [c] въ отношеніи прямоугольныхъ координатъ могутъ быть выведены, не прибѣгая къ интеграціи общихъ уравненій криволинейнаго движенія тѣла, непосредственно слѣдующимъ образомъ.

Пусть тѣло брошено будетъ изъ А [фиг. 5] по направленію АС со скоростію равною u : сперва докажемъ, что путь, имъ описываемый, заключается въ одной вертикальной плоскости, проходящей чрезъ направленіе метанія. Для сего положимъ, что линія АВ, взятая на сѣмъ направленіи, означаетъ то пространство, которое бы прошло тѣло въ первое мгновеніе, повинувся одной только силѣ бросанія; а вертикальная линія АР представляетъ ту высоту, на которую тяжесть склонила бы сѣе тѣло къ низу въ то же мгновеніе. Построивъ параллелограммъ на линіяхъ АВ и АР, брошенное тѣло получитъ движеніе, по діогонали сего параллелограмма, и въ концѣ перваго мгновенія придетъ въ точку І. Въ слѣдующее мгновеніе, сѣе тѣло, сѣи бы на него не дѣйствовала тяжесть, прошло бы по продолженію діогонали АІ пространство $ID=AI$; но сложнымъ движеніемъ, производимымъ поступательною силою и вертикальнымъ дѣйствіемъ тяжести, оно опишетъ діогональ ІО новаго параллелограмма, построеннаго на линіяхъ ІD и ІQ пропорціональныхъ сѣмъ силамъ, и въ концѣ втораго мгновенія придетъ въ О. Подобное сѣму происходитъ съ движущимся тѣломъ, и въ слѣдующія за тѣмъ безконечно малыя промежутки времени. А какъ рядъ всѣхъ діогоналей, кои очевидно безконечно суть малы, составляетъ кривую; при сѣмъ, каждый параллелограммъ имѣетъ двѣ сѣмъжныя

§ 6. Уравненія (а), (b) и (с) заключаютъ въ себѣ все, что только при метательномъ движеніи знать потребно, а именно: 1) начальную

стороны, содержащіяся въ вертикальной плоскости, которая принадлежитъ предшествующему параллелограмму; то изъ сего заключаемъ, что кривая линія полета вся заключается въ одной вертикальной плоскости, проходящей чрезъ направленіе меганія. Чтобы опредѣлить уравненіе сей кривой, означимъ чрезъ θ уголъ бросанія ВАС [фиг. 2], то есть, тотъ уголъ, который первоначальное направленіе движенія составляетъ съ горизонтомъ; и разложимъ начальную скорость u на двѣ другія, на одну горизонтальную, которая будетъ $= u \cos \theta$, и на другую вертикальную, которая будетъ $= u \sin \theta$. Горизонтальная скорость движущагося тѣла не терпитъ никакого измѣненія отъ тяжести, направленной съ верху въ низъ, и потому остается у него неизмѣнною вовсе время движенія; вертикальная же скорость, будучи прямо противоположна дѣйствию тяжести, которое означимъ чрезъ g , уменьшается во время t количествомъ $= gt$, равнымъ той скорости, которая сообщается свободно падающему тѣлу въ сіе время [Мех. Франкера ч. 1. 156]. Следовательно по истеченіи времени t , вертикальная скорость движущагося тѣла, приводится къ $u \sin \theta - gt$, между тѣмъ какъ горизонтальная скорость постоянно равна $u \cos \theta$. Сіи два выраженія заключаются въ вышенайденныхъ уравненіяхъ [а]. Впрочемъ брошенное тѣло, не бывъ подверженнымъ дѣйствию тяжести, двигалось бы по данному ему направленію АВ, описывая въ равныя времена равныя пространства; и прошло бы въ извѣстное время t пространство $AB = ut$. Но въ сіе время тяжесть, отвлекая его безире-

скорость и бросанія снарядовъ, по коей определяется сила и величина порохового заряда;
2) уголь θ , на сколько должно возвысить ору-

станно отъ сего направленія, заставляетъ оное равно-ускореннымъ движеніемъ приблизиться къ поверхности земли на разстояніе $BM = \frac{1}{2}gt^2$, равное пространству описываемому свободно падающимъ тѣломъ во время t [Мех. Франкера ч. I. 156]; по сему, проведши прямую MQ параллельную AB , и изобразивъ AQ чрезъ z и MQ чрезъ ω , будемъ имѣть два уравненія $\omega = ut$, $z = \frac{1}{2}gt^2$, между коими исключивъ время t , получимъ уравненіе, между косоугольными координатами z и ω кривой линіи полета, слѣдующаго вида:

$$\omega^2 = \frac{2u^2z}{g}, \text{ или } \omega^2 = 4hz,$$

когда, для краткости, сделаемъ $u^2 = 2gh$, и чрезъ $h = \frac{u^2}{2g}$

означимъ высоту, соотвѣтствующую скорости u . И такъ сія кривая имѣетъ такое свойство, что квадраты ея ординатъ пропорціональны соотвѣтствующимъ абсциссамъ; слѣдовательно она есть парабола.

Что касается до уравненій [b], определяющихъ въ известное мгновеніе положеніе движущагося тѣла, въ отношеніи горизонтальной линіи AC и вертикальной линіи AD , онѣ найдутся изъ прямоугольнаго треугольника APB и найденныхъ предъ симъ выраженій $AB = ut$, $BM = \frac{1}{2}gt^2$; и будетъ:

$$AP = AB \cos \theta, \text{ или } x = u \cos \theta \cdot t$$

$$PM = PB - MB, \text{ или } y = u \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2,$$

то есть, брошенное тѣло совершаетъ движеніе, равномерное въ направленіи горизонтальномъ, а равно-перемѣнное въ направленіи вертикальномъ.

діє; 3) время t , употребляемое снарядомъ на прохожденіе своего пути; и 4) горизонтальное и вертикальное разстоянія x и y отъ точки метанія А, опредѣляющіе положеніе того предмета, въ который хотять попасть.

О горизонтальной дальности полета снаряда.

§ 7. Для точекъ, въ которыхъ кривая линія полета встрѣчаетъ горизонтъ, опредѣляемый точкою метанія А, должно быть $y=0$; по поставленіи сей величины въ уравненіе (с), получимъ $x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta} = 0$; отсюда будемъ имѣть

двѣ величины $x=0$, и $x = \frac{2u^2}{g} \sin \theta \cdot \cos \theta$. или

$$x = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta = c \dots \dots (e)$$

Изъ коихъ первая показываетъ точку метанія А, а вторая опредѣляетъ горизонтальное разстояніе $AC=c$ перваго паденія ядра отъ ору-

Наконецъ исключивъ, между послѣдними двумя уравненіями, время t получимъ уравненіе [с]

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta},$$

или, по поставленіи $u^2 = 2gh$, уравненіе [d]

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{x^2}{4h \cos^2 \theta}$$

дія: разстояніе сіе пазывають *распространеніємъ* параболы или *горизонтальною дальностію* выстрѣла. Для построенія онаго, должно взять отъ А, по вертикальной линіи Ау, часть $AD = \frac{2u^2}{g} = 4h$ (§ 4), потомъ опустить изъ точки D на направленіе метанія АВ перпендикуляръ DE, и изъ точки E на AC перпендикуляръ EC; тогда будетъ $AC = AE \cos \theta = AD \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{2u^2}{g} \sin \theta \cdot \cos \theta$.

§ 8. Уравненіе $s = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta$ показываетъ, что величина *s* или горизонтальная дальность бросанія увеличивается, по мѣрѣ какъ величины *u* и $\sin 2\theta$ увеличиваются. Первая изъ сихъ величинъ изображаетъ начальную скорость, зависящую отъ величины заряда, и естественно, что при сильнѣйшемъ зарядѣ дальность полета должна увеличиваться; вторая же показываетъ, что при одинакомъ зарядѣ сія дальность будетъ тѣмъ больше, чѣмъ $\sin 2\theta$ больше. Но какъ самый большій синусъ равенъ $\sin 90^\circ$, то есть: когда $2\theta = 90$ градусамъ или $\theta = 45$ градусамъ, то сіе доказываетъ, что при одинаковомъ зарядѣ, по Теоріи параболической, самый даль-

ний выстрѣлъ происходитъ при возвышеніи орудія на 45 градусовъ. Въ семь случаѣ мы имѣемъ $\sin 2\theta = 1$, и $c = \frac{u^2}{g} = 2h$, то есть: самый дальній выстрѣлъ вдвое больше той высоты, которая соотвѣтствуетъ начальной скорости брошеннаго тѣла. Впрочемъ дальность каждаго выстрѣла, произведеннаго не подъ 45 градусами, равна дальности выстрѣла, произведеннаго подъ 45 градусами, помноженной на синусъ двойнаго угла бросанія.

263494 Пробныя мортирки, употребляемыя для узнанія доброты пороха, ставятся обыкновенно подъ угломъ возвышенія въ 45 градусовъ и это не безъ причины, ибо ошибки, какія только въ мѣрѣ угловыхъ возвышеній могутъ вкрасться около сего числа градусовъ, производятъ малѣйшую перемену въ дальности выстрѣла. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіе $c = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta$ допустимъ, что сдѣлана въ величинѣ θ ошибка на весьма малое количество $d\theta$, и захотимъ послѣ сего узнать, какая выйдетъ ошибка въ дальности выстрѣла c , то стоитъ только взять дифференціалъ сего уравненія,

принявъ θ и c переменными, и мы получимъ:

$$dc = \frac{2u^2}{g} \cos 2\theta. d\theta;$$

изъ сего видно, что погрѣшность dc получается тѣмъ меньшею, чѣмъ уголъ возвышенія θ ближе подходитъ къ 45 градусамъ или уголъ 2θ къ 90 градусамъ. Слѣдовательно самыя малыя ошибки выходятъ при 45 градусахъ.

§ 9. Относительно времени, которое употребляетъ снарядъ на совершеніе всего полета, опредѣляемаго горизонтальною дальностію паденія, получимъ изъ уравненій (b), полагая въ нихъ $x=c, y=0$ и сокращая послѣднее на t , слѣдующія.

$$c = u \cos \theta. t, u \sin \theta = \frac{1}{2} g t \dots (f),$$

изъ коихъ, по исключеніи начальной скорости u , будемъ имѣть еще:

$$ctg \theta = \frac{1}{2} g t^2 \dots (g).$$

§ 10. Предъидущія формулы § 7-го и 9-го, хотя собственно относятся къ движенію тѣлъ въ безвоздушномъ пространствѣ, но онѣ выгодно могутъ быть употреблены въ дѣло и при медленномъ движеніи тѣлъ въ воздухѣ, не опасаясь большой отъ того погрѣшности; потому что тогда, какъ то послѣ узнаемъ, сопротивленіе воздуха, которое зависитъ отъ величины

вѣса и скорости движущагося тѣла, слабое лишь вліяніе имѣеть на измѣненіе полета медленно движущагося тѣла, и слѣдовательно истинный его полетъ близко будетъ подходить къ тому, каковой по вычисленію, на Теоріи параболической основанному, быть долженъ. Симъ образомъ для практическаго бросанія снарядовъ, особливо бомбъ, коихъ вѣсъ значителенъ и движеніе произведено небольшимъ зарядомъ, сообщающимъ бомбъ начальную скорость въ 200, 300 и 400 футовъ въ одну секунду, смотря по меньшему или большему калибру оной, можно вывести изъ выше предложенныхъ основаній приблизительно слѣдующія правила.

1) При одинаковомъ зарядѣ, самый дальній выстрѣлъ происходитъ подъ угломъ возвышенія орудія на 45 градусовъ (§ 8).

2) При одинаковомъ зарядѣ можно бросить бомбу на одно и то же разстояніе подъ двумя разными углами возвышенія. Ибо для дальности бросанія s и начальной скорости u , имѣемъ $s = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta$ (§ 7), но $\sin 2\theta = \sin (180 - 2\theta)$, и такъ два угла возвышенія, подъ которыми

дальность паденія остается та же, будутъ θ и $90^\circ - \theta$; вмѣстѣ они составляютъ прямой уголъ или 90 градусовъ; разность между каждымъ изъ нихъ и среднимъ угломъ возвышенія равнымъ 45° есть та же и равна $45^\circ - \theta$; таковыя суть углы 20° и 70° , 43° и 47° и проч.

3) При одинаковомъ зарядѣ, но при различныхъ углахъ возвышенія, горизонтальныя дальности полетовъ относятся, какъ синусы удвоенныхъ угловъ возвышенія. Ибо для двухъ разныхъ угловъ θ и θ' , означивъ соотвѣтствующія имъ дальности чрезъ s и s' , будемъ имѣть по § 7, слѣдующую пропорцію $s : s' = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta : \frac{u^2}{g} \sin 2\theta'$, или $s : s' = \sin 2\theta : \sin 2\theta'$. И такъ дальность выстрѣла подъ угломъ 15° или 75° въ половину меньше самаго дальняго выстрѣла соотвѣтствующаго 45° , потому, что сии дальности относятся между собою, какъ $\sin 30^\circ : \sin 90^\circ$, то есть, какъ 1 : 2; слѣдовательно дальность выстрѣла подъ угломъ въ 15° или 75° равна $\frac{u^2}{2g} = h$ (§ 8), то есть. равна высотѣ, принадлежащей начальной скорости брошеннаго тѣла.

4) При постоянномъ углѣ возвышенія, но

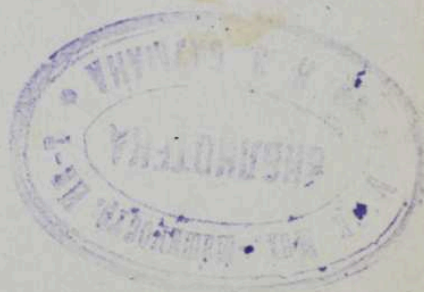
при различной величинѣ зарядовъ, дальности полетовъ пропорціональны квадратамъ начальныхъ скоростей, а начальные скорости пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ дальностей; что явствуетъ изъ уравненія (е) § 7.

Чтобы опредѣлить начальную скорость, соответствующую извѣстному заряду, дѣлаютъ напередъ одинъ или нѣсколько пробныхъ выстрѣловъ подѣ небольшимъ угломъ возвышенія, дабы брошенное тѣло, сколько можно менѣе времени подвержено было сопротивленію воздуха, потомъ взявъ изъ нихъ среднюю дальность полета, вставляють оную вмѣсто s въ уравненіи $s = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta$; тогда по извѣстнымъ величинамъ s и θ , опредѣляютъ величину u

или начальную скорость $= \sqrt{\frac{cg}{\sin 2\theta}}$. Зная величину u , можно съ помощію уравненія

$s = \frac{u^2}{g} \sin 2\theta$, при одинаковомъ зарядѣ для всѣхъ

желаемыхъ разстояній опредѣлить углы возвышенія орудія, или отыскать то разстояніе, на которое выстрѣленное изъ орудія тѣло, полетитъ при направленіи орудія подѣ произвольнымъ угломъ возвышенія. Разысканія, къ по-



слѣднимъ двумъ случаямъ относящіяся, еще могутъ быть произведены по тройному правилу, основываясь на вышеприведенномъ выводѣ, что дальности полетовъ одинакимъ зарядомъ произведенныя, находятся въ отношеніи синусовъ, удвоенныхъ угловъ возвышенія. По сему-то основанію составлены Белидоромъ для практическаго употребленія таблицы, кои помѣщены въ его книгѣ подъ заглавіемъ *Le bombardier français* и показываютъ, на какой уголъ должно возвысить мортиру, чтобы брошенная бомба съ извѣстною силою, полетѣла на желаемое разстояніе; и обратно, на какое разстояніе падаетъ бомба, будучи брошена изъ мортиры подъ извѣстнымъ возвышеніемъ и съ извѣстною силою. Впрочемъ можно обойтись безъ сихъ таблицъ, замѣняя ихъ обыкновенными тригонометрическими таблицами синусовъ; съ другой стороны онѣ имѣютъ тотъ важный недостатокъ, что могутъ служить въ практическомъ употребленіи только при выстрѣлахъ малымъ зарядомъ производимыхъ, потому что правило, по которому составлены сіи таблицы, предполагаетъ движеніе въ безвоздушномъ пространствѣ.

5) Поелику время горѣнія бомбовыхъ трубокъ, предполагая ихъ равно-качественными, пропорціонально длинѣ оныхъ, то соотвѣтственно тому времени, какъ долго бомба остается на пути, ею пробѣгаемомъ, располагають и длину каждой трубки. Но изъ найденныхъ уравненій въ § 9 слѣдуетъ:

α) Что при различныхъ зарядахъ или начальныхъ скоростяхъ, но равныхъ углахъ возвышенія, длины трубокъ, или пропорціональныя имъ времена полета бомбъ, относятся какъ корни квадратные изъ дальностей (g);

β) Что при одинакихъ дальностяхъ, но при разныхъ зарядахъ, длины трубокъ или времена полета бомбъ относятся, какъ корни квадратные изъ тангенсовъ угловъ возвышенія (g);

γ) И что, наконецъ, при одинакихъ зарядахъ длины трубокъ или времена полета бомбъ относятся, какъ синусы угловъ возвышенія (f)...

О наибольшей высотѣ полета снарядовъ.

§ 11. Поелику ось параболы, описываемой тѣломъ, вертикальная, то явствуетъ, что вершина сей кривой есть самая возвышенная надъ горизонтомъ точка, соотвѣтствующая срединѣ горизонтальной дальности АС или хорды

перпендикулярной къ оси. Но сія дальность $= \frac{u^2}{g} \cdot \sin 2\theta$, и такъ поставивъ половину оной равную $\frac{u^2}{2g} \sin 2\theta = \frac{u^2}{g} \sin \theta \cdot \cos \theta$, вмѣсто количества x , въ общее уравненіе (§ 4).

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta},$$

будемъ имѣть по надлежащемъ сокращеніи.

$$y \text{ или } DE = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \theta \dots (h),$$

что опредѣляетъ самую большую высоту DE (Фиг. 4), на которую можетъ подняться въ своемъ полетѣ брошенное тѣло. Изъ сего видно, что самыя большія высоты полетовъ, при одинакихъ зарядахъ, пропорціональны квадратамъ синусовъ угловъ возвышеній; а при одинаковомъ возвышеніи, пропорціональны квадратамъ начальныхъ скоростей.

Когда уголъ бросанія предположится въ 45 градусовъ, тогда будетъ $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$, и слѣдовательно $DE = \frac{u^2}{4g} = \frac{1}{4} AC$ (§ 8); сіе показываетъ, что въ такомъ случаѣ наибольшая высота равна $\frac{1}{4}$ горизонтальной дальности.

Слѣдую правилу, предложенному въ основаніяхъ дифференціального исчисленія, касательно

наибольшихъ и наименьшихъ величинъ, наибольшая высота DE найдется также, взявъ дифференціалъ ординаты y зависимо отъ x въ общемъ уравненіи (с), и уравнивъ оный нулю; ибо сія ордината должна быть искомою наибольшею. Симъ образомъ будемъ имѣть :

$$dy = dx \cdot \operatorname{tg} \theta - \frac{2g x dx}{2u^2 \cos^2 \theta} = 0,$$

отсюда $x = \frac{u^2}{g} \sin \theta \cdot \cos \theta = AE$; и по введеніи послѣдней сей величины въ общее уравненіе, получимъ $y = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \theta = DE$, тоже что и выше.

§ 12. Имѣя координаты AE и DE вершины D параболы, мы получимъ уравненіе ея въ отношеніи къ сей вершинѣ и оси, поставивъ въ общемъ уравненіи $y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta}$, въ коемъ координаты x, y относятся къ какой ни есть точкѣ m кривой; величины :

$$x = AP = AE - PE = AE - MQ = \frac{u^2}{g} \sin \theta \cos \theta - y',$$

$$y = MP = DE - DQ = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \theta - x',$$

въ которыхъ x' и y' суть новые координаты точки же m , въ отношеніи къ вершинѣ D и оси

DE ; и чрезъ то оно приметъ, по сокращеніи, слѣдующій видъ :

$$y'^2 = \frac{2u^2}{g} \cos^2 \theta. x';$$

таково есть искомое уравненіе параболы, коей параметръ равенъ $\frac{2u^2}{g} \cos^2 \theta...$

Сбъ уголъ возвышенія орудія.

§ 13. Пусть будетъ предметъ В, въ которой должно попасть бомбою, брошенною изъ точки А (фиг. 5, 6 и 7), съ извѣстною начальною скоростію, соотвѣтствующею данному заряду; горизонтальное разстояніе АЕ и вертикальное разстояніе ВЕ, по коимъ опредѣляется положеніе предмета отъ точки метанія А, суть даны или могутъ быть найдены по извѣстнымъ тригонометрическимъ правиламъ : назвавъ первое чрезъ a , а второе чрезъ b , и поставивъ сіи величины въ уравненіе (d) § 4. на мѣсто общихъ координатъ x и y , будемъ имѣть слѣдующее :

$$b = atg\theta - \frac{a^2}{4h \cos^2 \theta},$$

изъ котораго требуется опредѣлить уголъ бросанія θ . Для сего сдѣлавъ $tg\theta = z$, и замѣтивъ

что $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{1 + z^2}$, будемъ имѣть, по поставленіи сихъ величинъ и по уничтоженіи знаменателя, уравненіе :

$$a^2 z^2 - 4ahz = a^2 - 4bh \dots (i),$$

которое есть второй степени и даетъ

$$z \text{ или } \operatorname{tg} \theta = \frac{2h \pm 1}{a} \sqrt{4h^2 - a^2 - 4bh} \dots (k).$$

Предметъ В, по которому стрѣляютъ, можетъ имѣть три различныя положенія въ отношеніи точки метанія А; можетъ онъ находиться или выше горизонта опредѣляемаго сею точкою, какъ показываетъ фигура 5, или ниже, какъ на фиг. 6; или на самомъ семъ горизонтѣ, какъ на фиг. 7. Мы приложимъ послѣднее уравненіе къ каждому изъ сихъ трехъ случаевъ.

а) *Первое положеніе предмета, когда онъ находится выше горизонта дула орудія фиг. 5.*

Въ семъ случаѣ тѣло, коимъ намѣреваются попасть въ данный предметъ, можетъ быть пущено по двумъ разнымъ направленіямъ; одно изъ нихъ составляетъ съ горизонтомъ

АЕ уголъ САЕ, котораго тангенсъ $= \frac{2h}{a} +$

$\frac{1}{a} \sqrt{4h^2 - 4bh - a^2}$, а другое уголъ С'АЕ, котораго

тангенсъ $= \frac{2h}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{4h^2 - 4bh - a^2}$. При семъ, дабы вопросъ былъ возможенъ, необходимо должно быть подъ корнемъ количество $4h^2 - 4bh$ больше или по крайней мѣрѣ $= a^2$. Ибо если будетъ $4h^2 - 4bh < a^2$ или $2h < b + \sqrt{b^2 + a^2}$, то есть наибольшая горизонтальная дальность, соотвѣтствующая данному заряду (§ 8), меньше суммы разстояній ВЕ и АВ предмета отъ горизонта и отъ орудія, тогда $tg\theta$ сдѣлается количествомъ не возможнымъ; а слѣдовательно ни подъ какимъ угломъ возвышенія нельзя будетъ добросить снарядъ дожелаемаго предмета. Если будетъ $4h^2 - 4bh = a^2$ или $2h = b + \sqrt{b^2 + a^2}$, тогда $\sqrt{4h^2 - 4bh - a^2} = 0$ уничтожится, и получится для $tg\theta$ одна только величина $= \frac{2h}{a}$, показывающая, что въ такомъ случаѣ можно попасть въ предметъ, стрѣляя не болѣе какъ подъ однимъ угломъ возвышенія, опредѣляемымъ изъ уравненія $tg\theta = \frac{2h}{a} = \frac{b + \sqrt{b^2 + a^2}}{a}$.

Примѣръ 1. Положимъ, что тѣломъ, брошеннымъ со скоростію $= 360$ футамъ, требуется попасть въ предметъ В, который находится

отъ горизонта орудія на высотѣ $BE=120$ фут.
и удаленъ отъ него въ направленіи горизон-
тальномъ на разстояніе $AE=1800$ фут.

Въ семъ предположеніи будемъ имѣть $a=1800$,
 $b=120$, $h=\frac{u^2}{2g}=\frac{(360)^2}{2 \cdot 32}=2025$. Поставивъ сіи

величины въ уравненіе $tg\theta=\frac{2h}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{4h(hb)-a^2}$,
получимъ :

$$tg\theta=4,18971 \text{ и } tg\theta'=0,31029;$$

и взявъ логарифмы сихъ послѣднихъ коли-
чествъ, кои будутъ :

$\log tg\theta=0,6221839$, и $\log tg\theta'=9,4917678-10$,
по таблицамъ тригонометрическимъ не трудно
будетъ отыскать два угла, соответствующіе
симъ логарифмамъ; одинъ изъ нихъ будетъ
 $=76^\circ 34\frac{1}{2}'$, а другой $=17^\circ 14\frac{1}{3}'$. Подъ каж-
дымъ изъ сихъ угловъ можно понасть въ пред-
метъ.

Примѣръ 2. Если со скоростью $=320$ фут.
въ одну секунду, надобно будетъ стрѣлять по
предмету удаленному отъ орудія на 2880 фут.
и находящемуся на высотѣ 304 фут., то най-
дется $4h^2-4bh-a^2=0$, $tg\theta=\frac{2h}{a}=1,11111$, а изъ

сего уголъ $\theta=48^{\circ} 1'$, подъ которымъ должно быть брошено тѣло, дабы достигло даннаго предмета....

Примѣръ 3. Если при той же скорости $=320$ фут, и при томъ же горизонтальномъ разстояніи $=2880$ фут. предметъ будетъ возвышеніе показаннаго числа $=304$ фут., тогда количество $4h^2 - 4bh - a^2$ сдѣлается отрицательнымъ и корень изъ него невозможнымъ; слѣдовательно, при такомъ положеніи предмета въ разсужденіи орудія, нельзя будетъ попасть въ оный, не увеличивъ пороховаго заряда.

β) Второе положеніе предмета, когда оный будетъ ниже горизонта орудія фиг. 6.

Чтобы приложить уравненіе (к) ко второму случаю, стоитъ только въ ономъ перемѣнить знакъ количества b , потому что перпендикуляры, идущіе отъ предмета до горизонта, обращены въ семъ случаѣ въ противную сторону, и будетъ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2h}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{4h^2 + 4bh - a^2};$$

отсюда видно, что одинакіе выстрѣлы, по данному предмету, могутъ быть производимы подъ двумя разными углами возвышенія, изъ коихъ

одинъ имѣеть своимъ тангенсомъ величину

$$\frac{2h}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{4h^2 + 4bh - a^2}, \text{ а другой величину}$$

$$\frac{2h}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{4h^2 + 4bh - a^2}. \text{ При семъ замѣтитъ}$$

должно, что дабы выстрѣлъ даннымъ заря-

домъ дѣйствительно могъ быть произведенъ,

надлежитъ, чтобъ количество $4h^2 + 4bh$ было

больше или по крайней мѣрѣ $= a^2$, а слѣдова-

тельно, чтобы было $2h$ было $>$ или $= \sqrt{b^2 + a^2} - b$,

то есть, наибольшая горизонтальная дальность,

соотвѣтствующая данному заряду, больше или

равна разности между разстояніями АВ и ВЕ

предмета отъ горизонта и отъ орудія. Впро-

чемъ въ предположеніи $4h^2 + 4bh = a^2$ или $2h$

$= \sqrt{b^2 + a^2} - b$, можно попасть въ предметъ не

болѣе какъ только подъ однимъ угломъ, коего

$$\text{тангенсъ} = \frac{2h}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - b}{a}.$$

Въ случаѣ $4bh > a^2$, количество $\sqrt{4h^2 + 4bh - a^2}$

больше будетъ $2h$, и слѣдовательно величина

$$\text{тангенса} = \frac{2h}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{4h^2 + 4bh - a^2} \text{ сдѣлается от-}$$

рицательною; а сіе ведетъ къ заключенію, что

тогда одинъ изъ выстрѣловъ долженъ быть на-

правленъ подъ горизонтъ АЕ...

Напослѣдокъ, въ случаѣ $4bh=a^2$ или $2h=\frac{a^2}{2b}$, одинъ изъ выстрѣловъ сдѣлается горизонтальнымъ; ибо тогда получаемъ $tg\theta=\frac{2h}{a}+\frac{2h}{a}$, или $tg\theta=\frac{4h}{a}=\frac{a}{b}$ и $tg\theta'=0$; послѣднее уравненіе предполагаетъ уголъ $\theta'=0$, что и подтверждаетъ сказанное нами.

γ) Третье положеніе предмета, когда онъ находится на одной съ орудіемъ горизонтѣ фиг 7.

Когда предметъ В разсматривается на горизонтѣ, проходящемъ чрезъ точку метанія А, тогда вертикальное онаго разстояніе $BE=b=0$, и уравненіе (к) перемѣняется въ слѣдующее:

$$tg\theta=\frac{2h}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{4h^2-a^2};$$

которое показываетъ, что для возможныхъ выстрѣловъ должно быть $2h>$ или $=a$, и что въ томъ случаѣ, когда $2h=a$, выстрѣлъ можетъ быть произведенъ только подъ однимъ угломъ, коего тангенсъ, равный $\frac{2h}{a}=1$, показываетъ, что сей уголъ $=45$ градусамъ (§ 8).

Приимчателное свойство относительно сум-

мы двухъ угловъ бросанія, принадлежащихъ одинакому заряду.

§ 14. Сумма двухъ угловъ бросанія $\angle A E = \theta$ и $\angle C' A E = \theta'$ (Фиг. 5, 6 и 7), принадлежащихъ одинакому заряду, имѣетъ примѣчательное свойство, которое просто выводится изъ выраженій

$$\text{опредѣляющихъ } \operatorname{tg} \theta = \frac{2h + \sqrt{4h^2 - 4bh - a^2}}{a}$$

$$\text{и } \operatorname{tg} \theta' = \frac{2h - \sqrt{4h^2 - 4bh - a^2}}{a}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, будемъ имѣть очевидно:

$$\operatorname{tg} (\theta + \theta') = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \theta'}{1 - \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{tg} \theta'} = -\frac{a}{b};$$

сія величина $\operatorname{tg} (\theta + \theta')$, въ томъ случаѣ, когда предметъ находится выше горизонта или когда количество b положительно, есть отрицательная. А какъ отрицательному тангенсу соотвѣтствуетъ тупой уголъ, или уголъ больше 90 градусовъ, и такъ сдѣлавъ $\theta + \theta' = 90^\circ + \alpha$, гдѣ прибавокъ α требуется еще опредѣлить, потомъ взявъ тангенсъ обѣихъ частей сего равенства, получимъ:

$$\operatorname{tg} (\theta + \theta') = \operatorname{tg} (90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha = -\frac{a}{b}, \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a};$$

Изъ сего видно, что α есть уголъ $\angle B A E$, составляемый горизонтальною линіею и прямою, проведенною отъ предмета къ дулу орудія. Та

же величина $\operatorname{tg} (\theta + \theta')$ въ томъ случаѣ, когда предметъ находится ниже горизонта, или когда количество b отрицательно, есть положительная; по сему сдѣлавъ $\theta + \theta' = 90^\circ - \alpha$, найдемъ подобно предъидущему, что α есть также уголь BAE , составляемый горизонтальною линіею и прямою, проведенною отъ предмета къ дулу орудія. Наконецъ въ томъ случаѣ, когда предметъ находится на горизонтѣ, или когда $b = 0$, величина $\operatorname{tg} (\theta + \theta') = \text{безконечному числу}$, и $\theta + \theta' = 90^\circ$, такъ что одинъ изъ двухъ угловъ возвышенія, служитъ другому дополненіемъ къ 90° . Сличивъ между собою результаты сихъ трехъ случаевъ, заключаемъ, что сумма двухъ угловъ возвышенія, соотвѣтствующихъ тому же заряду, употребляемому для обстрѣливанія предмета, даннаго положеніемъ, равняется прямому углу, *плюсъ* или *минусъ* углу составляемому горизонтальною линіею и прямою, проведенною отъ предмета къ орудію, смотря по тому, будетъ ли предметъ находится выше или ниже горизонта орудія. А когда предметъ будетъ на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ, оба угла возвышеній, составляютъ вмѣстѣ прямой уголь.

Изъ уравненія $tg (\theta + \theta') = -\frac{a}{b}$ или уравненія $\frac{tg\theta + tg\theta'}{1 - tg\theta \cdot tg\theta'} = -\frac{a}{b}$, зная одинъ уголъ возвышенія, легко найдется и другой; и будетъ относительно искомага угла, на примѣръ θ' , $tg\theta' = \frac{a + b \cdot tg\theta}{a \cdot tg\theta - b}$.

Не забывая при семъ удержать приличный положенію предмета знакъ количества b .

Въ практическихъ дѣйствіяхъ, изъ двухъ угловъ возвышенія θ и θ' мортиры, употребляють большій уголъ, бросая бомбы въ непріятельскіе корабли, въ крѣпости для разрушенія сводовъ, потолковъ и проч., а меньшій употребляютъ, бросая бомбы при осадахъ и оборонахъ крѣпостей въ плацдармы, въ бастіоны, въ траншеи на батареи и вообще во всѣхъ мѣстахъ, гдѣ бываетъ собрано много людей, дабы онѣ, восходя не высоко на своемъ полетѣ вверхъ, при паденіи врывались не глубоко въ землю, и чрезъ то разрывомъ своимъ наносили людямъ сильнѣйшій вредъ.

§ 15. Изслѣдуемъ еще сумму угловъ, составляемыхъ прямою АВ, проведенною отъ точки метанія къ предмету, съ двумя направленіями

АС и АС', по которымъ брошенный съ равною скоростью снарядъ достигаетъ предмета В. Положивъ $\angle EAC = \theta$ и $\angle EAC' = \theta'$, мы уже нашли въ предыдущемъ параграфѣ, что тангенсъ послѣдняго угла θ' равенъ $\frac{a + b \operatorname{tg} \theta}{a \operatorname{tg} \theta - b}$; по сему относительно угла С'АН, который составляетъ дополненіе онаго къ 90° , будетъ

$$\operatorname{tg} \angle C'AH = \frac{a \operatorname{tg} \theta - b}{a + b \operatorname{tg} \theta};$$

но уголъ САВ $= \angle CAE - \angle BAE = \theta - \alpha$, и при семъ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, то будемъ имѣть

$$\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{a \operatorname{tg} \theta - b}{a + b \operatorname{tg} \theta};$$

изъ сего явствуетъ, что $\angle C'AH = \angle CAB$, и сумма $\angle C'AB + \angle CAB = \angle HAV$...

Подобнымъ образомъ найдется и при положеніи предмета ниже горизонта, что сумма $\angle C'AB + \angle CAB = \angle HAV$ (фиг. 6). Слѣдовательно сумма угловъ составляемыхъ прямою, проведенною отъ предмета къ орудію, съ двумя направленіями, по которымъ одинакіе выстрѣлы производятся въ тотъ же предметъ, равняется углу, заключающемуся между сею прямою и вертикальною линіею. И такъ въ томъ случаѣ, когда два разныя направленія сли-

ваются въ одно, сей уголъ дѣлится имъ на двѣ равныя части.

О силѣ бросанія снарядовъ или начальной ихъ скорости, зависящей отъ силы пороха.

§ 16. Когда извѣстны уголъ бросанія и положеніе предмета, то изъ уравненія (§ 13)

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \theta - 4ahtg\theta = -a^2 - 4bh,$$

которое даетъ

$$h = \frac{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}{4(atg\theta - b)} = \frac{a^2}{4\cos^2 \theta(atg\theta - b)},$$

получимъ начальную скорость (§ 4)

$$u = \sqrt{2gh} = \frac{a}{2\cos\theta} \sqrt{\frac{2g}{atg\theta - b}} \dots\dots(1):$$

въ случаѣ предмета, находящагося ниже горизонта орудія, сія скорость будетъ

$$u = \frac{a}{2\cos\theta} \sqrt{\frac{2g}{atg\theta + b}},$$

а въ случаѣ предмета, находящагося на одномъ горизонтѣ съ орудіемъ, будетъ

$$u = \sqrt{\frac{ag}{\sin(2\theta)}}.$$

Уравненіе (1), относящееся къ первому положенію предмета, когда онъ находится надъ горизонтомъ дула орудія показываетъ, что должно быть $\operatorname{tg}\theta > \frac{b}{a}$; въ противномъ случаѣ начальная скорость сдѣлается невозможною. Въ

случаѣ $tg\theta = \frac{b}{a}$ начальная скорость становится бесконечною, слѣдовательно также невозможною. Въ уравненіи, принадлежащемъ ко второму положенію, подобное замѣчаніе имѣетъ мѣсто, когда направленіе метанія простирается подъ горизонтъ АЕ (фиг. 6), ибо въ такомъ случаѣ $tg\theta$ будетъ отрицательный. Уравненіе, относящееся къ третьему положенію предмета, ни чѣмъ не различно отъ найденнаго (е) въ (§ 7).

Если орудіе наведено будетъ постоянно подъ угломъ возвышенія $\theta = 45^\circ$, тогда будемъ имѣть

$$\left. \begin{array}{l} \text{При 1-мъ положеніи предмета } u = a\sqrt{\frac{g}{a-b}} \\ \text{— 2-мъ } u = a\sqrt{\frac{g}{a+b}} \\ \text{— 3-мъ } u = \sqrt{ag} \end{array} \right\} (m).$$

Примѣръ 4. Извѣстны уголъ возвышенія $= 40$ градусамъ, отстояніе предмета отъ орудія $= 1500$ фут., и высота предмета $= 240$ фут.; требуется найти начальную скорость снаряда или силу пороховаго заряда.

Условія сіи даютъ $a = 1500$, $b = 240$, $\theta = 40^\circ$; при семъ принявъ $g = 32$ фут. Русскимъ и употребивъ логарифмы для вычисленія скорости по формулѣ

$$u = \frac{a}{2\cos\theta} \sqrt{\frac{2g}{atg\theta - b}} = \frac{4a}{\cos\theta \sqrt{atg\theta - b}}$$

Будемъ имѣть

$\log 4a$. . .	3,7781513	$\log a = \dots\dots\dots$	3,1760913
ариф. допол. $\log \cos\theta$. . .	0,1157460	$\log tg\theta = 9,9238135-10$	
ариф. допол. $\frac{1}{2}\log atg\theta - b$. . .	8,4959875-10	$\log(atg\theta) = 3,0999048$	
сумма	2,3898848 = $\log u$	$atg\theta = 1258,65$	
		$b = 240$	
отсюда	$u = 245,4$ фут.	$atg\theta - b = 1018,65$	

и такъ искомая начальная скорость, съ которою должно бросить снарядъ, составляетъ около 245 футовъ въ одну секунду.

Если понадобится бы еще знать второй уголъ возвышенія θ' , подъ которымъ бы, при той же начальной скорости, брошенный снарядъ достигнулъ даннаго предмета, то оный найдется изъ уравненія $\theta + \theta' = 90^\circ + \alpha$ (§ 14), опредѣляя напередъ $tg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{25}$ и $\alpha = 9^\circ 5' 25''$, а потомъ $\theta' = 59^\circ 5' 25''$.

Примръ 2. Если на разстояніи 1500 фут. предметъ находится ниже горизонта орудія на 240 фут., и при семъ удерживается тотъ же уголъ возвышенія 40° , то по поставленіи сихъ величинъ въ уравненіе $u = \frac{4a}{\cos\theta \sqrt{atg\theta - b}}$, получимъ начальную скорость $u = 202, 3$ фут. Второй уголъ возвышенія θ' , подъ которымъ сна-

рядъ достигаетъ даннаго предмета, будучи брошенъ съ такою же скоростію, найдется изъ уравненія $\theta + \theta' = 90^\circ - \alpha$ (§ 13); и будетъ $\theta' = 40^\circ 54' 35''$.

Примѣръ 3. Если орудіе наведено будетъ подъ угломъ 45° , то вычисленіе сдѣлается проще и найдется, по даннымъ величинамъ въ предыдущихъ примѣрахъ, что при первомъ положеніи предмета начальная скорость $= 239$ фут., при 2-мъ $= 203$, 4 фут., при 3-мъ равна 219 фут.

§ 17. Хотя формула (1) не даетъ истинной начальной скорости снаряда, когда онъ движется въ сопротивляющейся срединѣ, однако съ пользою можетъ служить къ сравненію скоростей, произведенныхъ двумя зарядами пороха, мало между собою различающимися; и въ особенности къ сравненію скоростей или силы одинакихъ величинъ зарядовъ, но разнаго качества пороха. На примѣръ, при употребленіи пробной мортирки, которая ставится подъ угломъ въ 45 градусовъ возвышенія, въ безвоздушномъ пространствѣ, для горизонтальной дальности a паденія, получается начальная скорость $u = \sqrt{ga} = \sqrt{32,214 \cdot a}$. Но въ воздухѣ хотя

и должно быть необходимо $u > \sqrt{ga}$, однако безъ чувствительной погрѣшности принять можно, что начальныя скорости, пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ дальностей a . И такъ, когда при испытаніи двухъ сортовъ пороха, 9 золотниковъ перваго, бросать ядро на разстояніе a , и столько же золотниковъ втораго, бросать то же самое ядро на разстояніе A , то безъ ошибки заключить можно, что сила перваго пороха или начальная скорость снаряду имъ сообщаемая, относится къ силѣ или къ начальной скорости втораго, какъ $\sqrt{a} : \sqrt{A}$. Справедливость сего заключенія явствуется еще изъ того, что при весьма малой скорости ядра, которое бросается съ малымъ количествомъ пороха, описываемая имъ кривая линія, почти не отходить отъ параболы.

§ 18. Въ случаѣ горизонтальной дальности $AK=c$ (фиг. 5 и 6) имѣемъ уравненіе (§ 16)

$$u^2 = \frac{cg}{\sin 2\theta};$$

въ случаѣ же предмета В, коего положеніе опредѣляется разстояніями a и b , имѣемъ, при тѣхъ же количествахъ u и θ или для кривой АВК, проходящей чрезъ сей предметъ и имѣющей горизонтальное распростра-

неніе $= c$, уравненіе (§ 16) $u' = \frac{ag}{2\cos^2\theta(atg\theta \mp b)}$
отсюда по сравненіи и надлежащемъ сокраще-
ніи получимъ, по даннымъ количествамъ a, b и
 θ , горизонтальное распространеніе

$$c = \frac{a^2 tg\theta}{atg\theta \mp b} = \frac{a^2}{a \mp b \cotg\theta} \dots (n),$$

потомъ и начальную скорость

$$u = \sqrt{\frac{cg}{\sin 2\theta}},$$

по которой можно будетъ судить о величинѣ
порохового заряда.

Если уголь возвышенія $\theta = 45^\circ$, то будемъ
имѣть:

$$c = \frac{a^2}{a \mp b}, \quad u = \sqrt{cg};$$

не забывая при семъ, что два знака $-$ и $+$
предполагаютъ предметъ находящимся, или вы-
ше или ниже горизонта.

Сія формулы могутъ быть съ пользою упо-
требляемы при небыстрыхъ движеніяхъ бом-
бы (§ 9), бросаемою разными небольшими за-
рядами подъ постояннымъ угломъ возвышенія
мортиры, и по предметамъ не находящимся на
одномъ горизонтѣ съ оною. Если чрезъ опыты
и чрезъ вычисленіе составлена будетъ таблица,

содержащая въ себѣ, при томъ же возвышеніи
мортиры, различныя горизонтальныя дальности
паденія бомбы и соотвѣтствующія величины
пороховыхъ зарядовъ или начальныя скорости,
сообщаемыя ими бомбѣ, тогда съ помощію
таковой таблицы и формулы (п) безъ большаго
труда можно будетъ знать всегда тотъ зарядъ,
который слѣдуетъ употребить, дабы добросить
бомбу до предмета, находящагося выше или
ниже горизонта орудія.

О времени полета снарядовъ.

§ 19. Время движенія снаряда отъ точки
метанія А до предмета В найдется изъ уравне-
ній (b) § 4. Ибо положивъ $x=a$, $y=b$ полу-
чимъ изъ перваго, время

$$t = \frac{a}{u \cos \theta} \text{ въ секундахъ;}$$

или исключивъ между оными скорость u , бу-
демъ имѣть $\frac{1}{2}gt^2 = atg\theta - b$ и

$$t = \sqrt{\frac{2(atg\theta - b)}{g}} \dots\dots (o),$$

что выражаетъ время въ секундахъ, употребле-
емое тѣломъ на достиженіе предмета.

Въ послѣднемъ уравненіи количество b бы-
ваетъ или положительнымъ, или отрицатель-
нымъ или равнымъ нулю, смотря потому, на-

ходится ли предметъ выше или ниже горизонта орудія, или на самомъ сѣмъ горизонтѣ. Если уголъ возвышенія θ предположится равнымъ 45° , тогда будетъ

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}(a-b)}, \text{ и } t = \sqrt{\frac{2a}{g}} \text{ когда } b=0.$$

Изъ уравненія (о), помощію какихъ либо трехъ данныхъ изъ четырехъ количествъ t , a , $tg\theta$ и b , найдется четвертое. На примѣръ, зная время полета, уголъ бросанія и одно изъ двухъ разстояній a и b , найдемъ и другое

$$a = \frac{\frac{1}{2}gt^2 + b}{tg\theta}, \quad b = atg\theta - \frac{1}{2}gt^2;$$

а въ случаѣ предмета, разсматриваемаго на горизонтѣ, горизонтальное разстояніе будетъ

$$a = \frac{gt^2}{2tg\theta}.$$

По извѣстному времени, употребляемому тѣломъ на пробѣжаніе своего пути, и углу возвышенія, найдется начальная скорость бросанія изъ уравненія

$$t = \frac{a}{u \cos \theta}, \text{ которая будетъ}$$

$$u = \frac{a}{t \cos \theta}.$$

О скорости, съ которою снарядъ ударяетъ въ предметъ.

§ 20. Скорость снаряда въ каждой точкѣ

пути имъ описываемаго, направлена бываетъ по касательной линіи, и равна корню квадратному изъ суммы квадратовъ, составляющихъ скоростей, взятыхъ въ горизонтальномъ и вертикальномъ направленіяхъ (Мех. Франкера чл.

167). По сіи скорости суть (§ 4) $\frac{dx}{dt} = u \cos \theta$ по

направленію горизонтальному, и $\frac{dy}{dt} = u \sin \theta - gt$

по направленію вертикальному, и такъ означивъ дѣйствительную скорость движущагося тѣла чрезъ v , будемъ имѣть

$$v = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}} = \sqrt{u^2 - 2g(usin\theta.t - \frac{gt^2}{2})},$$

или, по причинѣ $usin\theta.t - \frac{gt^2}{2} = y$ (§ 4), будетъ

$$v = \sqrt{u^2 - 2gy} = \sqrt{2g(h - y)} \dots\dots (p),$$

сдѣлавъ $y = b$ получимъ $v = \sqrt{2g(h - b)}$, то есть ту скорость, съ которою снарядъ ударяетъ въ предметъ, находящійся на возвышеніи отъ горизонта орудія равномъ b . Если предметъ будетъ ниже сего горизонта, тогда $v = \sqrt{2g(h + b)}$; если же на самомъ горизонтѣ, то $v = \sqrt{2gh} = u$, и слѣдовательно скорость паденія снаряда равна начальной скорости его верженія.

Формулы для рѣшенія задачъ, относящихся къ Артиллерійскому прицѣлу (діоптру).

§ 21. По причинѣ зазора въ орудіяхъ и другихъ обстоятельствъ, рѣдко выбрасывается снарядъ по направленію оси канала. А какъ не возможно знать напередъ, каково должно быть для каждаго бросаемаго снаряда уклоненіе отъ сей оси и въ какую сторону, то принужденными находимся предположить въ Теоріи вылетъ снаряда по самой оси канала орудія, и чрезъ то допустить полетъ онаго, совершающійся въ вертикальной плоскости, проходящій чрезъ сію ось.

Слѣдовательно навести пушку такъ, чтобы пущеннымъ изъ нея ядромъ, попасть въ желаемый предметъ, значитъ тоже, что направить вертикальную плоскость, проходящую чрезъ ось на сей предметъ, давъ притомъ оси орудія надлежащее положеніе.

Вертикальная плоскость, проходящая чрезъ ось орудія, направляется въ предметъ, употребля для сего или прицѣлъ при прицѣливаніи пушекъ и единороговъ, или треногу съ отвѣсикомъ при прицѣливаніи мортиръ. При чемъ относительно прицѣла можно замѣтить, что

когда онъ будетъ неподвижный или прикрѣпленный къ орудію такъ, что всякая линія прицѣливанія и ось канала, постоянно находятся въ одной плоскости перпендикулярной къ оси цапфъ, какъ бы орудіе на сторону наклонено ни было, тогда непремѣннымъ условіемъ должно быть то, дабы прицѣливаемое орудіе своими цапфами не наклонялось ни на которую сторону. Ибо вертикальная плоскость, проходящая чрезъ линію прицѣливанія идущую къ предмету, содержать будетъ въ себѣ ось канала только тогда, когда ось цапфъ приведется въ горизонтальное положеніе; при иномъ же положеніи сей оси, вертикальная плоскость, проходящая чрезъ линію прицѣливанія направленную къ предмету, приметъ направленіе различное отъ направленія вертикальной плоскости, проходящей чрезъ ось канала, и пресѣчетъ сію послѣднюю по отвѣсной линіи проходящей чрезъ точку, гдѣ прицѣльная линія соединяется съ осью: а поелику сіе соединеніе находится въ весьма близкомъ разстояніи отъ отверстія орудія, то предметъ, который несравненно далѣе отстоитъ отъ орудія и находится въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ

линію прицѣливанія, не будетъ уже помѣщенъ въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ ось канала, онъ тѣмъ болѣе отойдетъ отъ нея въ сторону, чѣмъ предметъ будетъ болѣе, и чѣмъ большій составитъ уголъ наклоненія, между двумя сказанными вертикальными плоскостями, который, какъ явно, увеличивается по мѣрѣ большаго склоненія оси цапфъ и болѣе-шей высоты прицѣла. Отъ чего и произойдетъ, что ядро полетитъ въ лѣво, когда цѣлено въ право; и обратно.

При употребленіи привѣснаго прицѣла не требуется необходимо, чтобы ось цапфъ была горизонтальная. Въ самомъ дѣлѣ, по свойству сего прицѣла оставаться всегда въ вертикальномъ положеніи, какъ бы орудіе на сторону наклонено ни было, всякая линія прицѣливанія, съ линіею, идущею чрезъ точку привѣса прицѣла и чрезъ верхъ мушки, всегда находится въ вертикальной плоскости. А какъ послѣдняя линія параллельна оси орудія, посему вертикальная плоскость, проходящая чрезъ линію прицѣливанія, если не пройдетъ чрезъ ось канала, то по крайней мѣрѣ пребудетъ ей параллельна, въ какомъ бы положеніи ось цапфъ

ни была. По этому для практическаго употребленія все равно, по настоящей ли вертикальной плоскости чрезъ ось канала проходящей направимъ орудіе, или по другой проходящей весьма близко и параллельной къ оной, сквозь прицѣль чрезъ верхъ мушки; ибо обѣ сіи плоскости, будучи параллельны между собою, идутъ по одному направленію и слѣдовательно ведутъ къ одному и тому же предмету.

Для возвышенія или пониженія канала орудія на дальное число градусовъ въ отношеніи къ горизонту употребляютъ квадрантъ.

§ 22. Если орудіе наводится по прицѣлу, то линія прицѣливанія ИМ (фиг. 7) съ осью ABD канала или съ линіею ей параллельною GHE, идущею чрезъ верхъ мушки къ срединѣ торельнаго пояса или къ точкѣ привѣса прицѣла, составляетъ тотъ уголъ $IHG = ICA$, на который ставится орудіе въ отношеніи къ линіи прицѣливанія. Уголъ сей называется *угломъ прицѣливанія*. Но мы видѣли въ § 5, что кривая BOF полетомъ ядра описываемая въ точкѣ бросанія, которая находится въ самомъ отверстіи орудія, имѣетъ касательною направленіе мѣтанія или ось канала AB, по сему если ли.

нія прицѣливанія не параллельна оси канала, сія кривая пресѣкаетъ оную въ двухъ точкахъ N и M, изъ коихъ одна находится близь орудія, а другая въ отдаленности есть та самая, куда ядро попасть должно, и чѣмъ выше поднимется дуло орудія, тѣмъ болѣе первая точка приблизится къ орудію, а вторая отъ онаго удалится. Различныя обстоятельства такого рода выстрѣловъ, производимыхъ по прицѣлу изслѣдованы будутъ послѣ. Между тѣмъ, мы выведемъ отношеніе между угломъ прицѣливанія, соотвѣтствующею высотой прицѣла и угломъ возвышенія.

Для сего, пусть будетъ высота IG висячаго прицѣла $=n$; разстояніе GH точки привѣса его отъ вершины мушки $=m$; уголъ прицѣливанія $\angle IGH = \angle HCB = \gamma$; и уголъ возвышенія DBP, составляемый осью канала съ горизонтомъ $=\theta$: послѣдній сей уголъ со знакомъ *минусъ* взятый, означаетъ уголъ пониженія орудія.

Изъ треугольника GHI, по сравненіи сторонъ съ синусами противоположныхъ угловъ, получимъ уравненіе $IG = \frac{GH \cdot \sin GHI}{\sin GIH}$, или

$$n = \frac{m \sin \gamma}{\sin GIH} \quad \text{Проведши же въ вертикальной}$$

плоскости GIN горизонтальную линію IK, и замѣтивъ, что прицѣль всегда пребываетъ въ вертикальномъ положеніи, будемъ имѣть уголъ $GIN = GIL + LIN = GIL + ILA - ICL = 90^\circ + \theta - \gamma$: сіе выраженіе есть общее для всѣхъ различныхъ трехъ положеній предмета въ отношеніи къ тому мѣсту, на которомъ стоитъ орудіе, и показываетъ, что если предметъ находится на одномъ горизонтѣ съ орудіемъ, тогда уголъ возвышенія θ равенъ углу прицѣливанія γ и уголъ $GIN = 90^\circ$; а если предметъ находится выше орудія, тогда $\theta > \gamma$ и уголъ GIN тупой; если же ниже, тогда $\theta < \gamma$ и уголъ GIN острый. Поставимъ теперь вмѣсто угла GIN равную величину, уравненіе $n = \frac{m \sin \gamma}{\sin GIN}$ обратится въ слѣдующее

$$n = \frac{m \sin \gamma}{\cos(\theta - \gamma)} \dots\dots (9),$$

изъ котораго, зная прицѣльный уголъ γ и уголъ возвышенія орудія $= \theta$, найдется высота n привѣснаго прицѣла, равная разстоянію отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла, умноженному на синусъ угла прицѣливанія и разделенному на косинусъ разности между угломъ возвышенія и угломъ прицѣливанія. Уголъ KIM,

2/0

составляющій сію разность и заключающійся между лучемъ зрѣнія, направленнымъ къ предмету и горизонтальною линією, можно назвать, смотря по положенію предмета, *угломъ возвышенія мѣстности* или *склоненія мѣстности*. Практически находятъ его удобно посредствомъ квадранта и чрезъ прицѣливаніе орудія поверхъ торели и мушки въ данный предметъ.

§ 23. Если, сверхъ данныхъ величинъ m и n , извѣстенъ будетъ уголъ мѣстности $\theta - \gamma = \delta$, то изъ уравненія (q), для опредѣленія величины угла прицѣливанія γ , будемъ имѣть

$$\sin \gamma = \frac{n \cos \delta}{m}.$$

Сей уголъ γ найдется также и въ томъ случаѣ, когда даны будутъ величины m , n и θ , не имѣя при семъ угла мѣстности; ибо, представивъ уравненіе (q) въ видѣ $\frac{\cos(\theta - \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{m}{n}$ или

$$\frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \gamma} + \sin \theta = \frac{m}{n}, \text{ отсюда получимъ}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{n \cos \theta}{m - n \sin \theta} \dots \dots \dots (r),$$

Помощію сего выраженія, уголъ γ выразится чрезъ слѣдующій весьма приближающійся рядъ

$$y = \frac{n}{m} \cos \theta - \frac{n^2}{2m^2} \sin 2\theta + \frac{n^3}{3m^3} \cos 3\theta - \frac{n^4}{4m^4} \sin 4\theta + \dots (*)$$

§ 24. Въ томъ случаѣ, когда линія прицѣливанія горизонтальна, будетъ $\theta = \gamma$ и уравненіе (q), приметъ простѣйшій видъ

$$n = m \sin \theta,$$

показывающій, что высота прицѣла равна разстоянію верха мушки отъ точки привѣса прицѣла, умноженному на синусъ угла прицѣливанія или возвышенія.

Послѣднее уравненіе даетъ для опредѣленія угла θ , по даннымъ величинамъ m и n , слѣдующее выраженіе

$$\sin \theta = \frac{n}{m}.$$

§ 25. Сверхъ обозначеній въ § 22, пусть будетъ горизонтальное разстояніе ВР предмета $= a$; вертикальное его возвышеніе МР $= b$; разстояніе отъ точки бросанія до предмета, или дальность ВМ $= \sqrt{a^2 + b^2} = l$; уголъ МВР, составляемый симъ разстояніемъ съ горизонтальною линіею $\angle$ и разстояніе вершины мушки до ося $= k$. Изъ треугольника ВМН, въ которомъ

(*) Смотри начертаніе прямолинейной тригонометрій.
Сочиненіе Г. Навроцкаго. § 50.

уголъ $\text{BMH} = \text{BCH} - \text{CBM} = \gamma - (\theta - \alpha)$, и уголъ
 $\text{BHC} = 90^\circ - \gamma$, пославъ пропорцію

$$\text{BM} : \text{BH} = \sin \text{BHC} : \sin \text{BMH},$$

или

$$l : k = \cos \gamma : \sin \{ \gamma - (\theta - \alpha) \},$$

получимъ

$$k \cos \gamma = l \sin \{ \gamma - (\theta - \alpha) \};$$

отсюда, по разложеніи синуса разности угловъ
 и раздѣленіи на $\cos \gamma$, будемъ имѣть

$$\text{tg} \gamma = \frac{l \sin(\theta - \alpha) + k}{l \cos(\theta - \alpha)} \quad \text{или} = \text{tg}(\theta - \alpha) + \frac{k}{l \cos(\theta - \alpha)};$$

слѣдовательно помощію сей формулы, когда
 извѣстны будутъ уголъ возвышенія и положе-
 ніе предмета, опредѣляется уголъ прицѣлива-
 нія. Далѣе уравненіе (q), разложивъ въ немъ
 косинусъ разности угловъ, даетъ.

$$n = \frac{m \text{tg} \gamma}{\cos \theta + \sin \theta \text{tg} \gamma},$$

и поставивъ на мѣсто $\text{tg} \gamma$ предъидущую вели-
 чину, получимъ въ функціи данныхъ коли-
 чествъ высоту прицѣла

$$n = \frac{m l \sin(\theta - \alpha) + m k}{l \cos \alpha + k \sin \theta} \dots\dots (s).$$

Предъидущая пропорція заключаетъ въ себѣ
 зависимость угла BMH отъ величинъ k , l и γ ,

и показываетъ, что $\sin \text{BMH} = \frac{k \cos \gamma}{l}$. Если пренебрежемъ сей весьма малый уголъ BMH или, вмѣсто его, разстояніе k оси канала отъ верха мушки, ничтожное почти въ сравненіи съ дальностію l предмета и составляющее у самыхъ большихъ орудій менѣе одного фута, то отъ формулъ, выведенныхъ въ семь параграфѣ, перейдемъ къ формуламъ (q) и (r). Ибо въ такомъ предположеніи будетъ

$$\gamma - (\theta - \alpha) = 0 \text{ или } \gamma = \theta - \alpha \text{ и } \alpha = \theta - \gamma = \delta \dots$$

§ 26. Если вмѣсто привѣснаго прицѣла будетъ неподвижный IG (фиг. 8¹), который прикрѣпляютъ къ орудію въ положеніи перпендикулярномъ къ оси, то въ случаѣ высоты его считаемой отъ точки, находящейся съ верхомъ мушки на линіи GN параллельной оси канала, какъ у нашихъ прежнихъ прицѣловъ, будемъ имѣть изъ треугольника IGН, прямоугольнаго при точкѣ G, слѣдующія, простыя формулы для опредѣленія или угла прицѣливанія или высоты прицѣла.

$$\text{tg GHI} = \frac{\text{GI}}{\text{GN}}, \text{ GI} = \text{GN} \cdot \text{tg GHI},$$

или

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{n}{m}, \quad n = m \operatorname{tg} \gamma,$$

кои, очевидно, не зависятъ отъ угла возвышенія θ .

Въ случаѣ же высоты $G'I$, считаеомой отъ верха торели или вообще отъ такой точки, которая еѣ верхомъ мушки или съ дульнымъ возвышеніемъ, когда нѣтъ ея вовсе, не находится на линіи GH параллельной оси канала, надобно изъ найденной выше высоты $GI = GH \operatorname{tg} GHI$ вычесть разность $GG' = AG - BH = R - r$ между толщиною орудія у торели и толщиною у дульнаго возвышенія вмѣстѣ съ высотой мушки; и будетъ тогда

$$n = m \operatorname{tg} \gamma - (R - r), \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{n + R - r}{m}.$$

§ 27. По формулѣ (q) вычислены слѣдующія таблицы, показывающія высоту привѣснаго прицѣла у легкихъ, батарейныхъ и осадныхъ мѣдныхъ пушекъ и единороговъ, при различномъ углѣ прицѣливанія и углѣ возвышенія мѣстности.

Углы прицѣлыванія об- щѣ угламъ мѣстности.	I. Для 24-хъ-фунтовой пуш- ки, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла $m=127,169$ дюйма, и высота прицѣла въ ли- ніяхъ, какъ показано здѣсь ниже.			II. Для 18-ти-фунтовой пуш- ки, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла $m=115,84$ дюйма, а высота прицѣла въ ли- ніяхъ, какъ показано ниже.		
	При углѣ мѣстности равномъ 0° .	При углѣ мѣстности $=5^{\circ}$.	При углѣ мѣстности $=10^{\circ}$.	При углѣ мѣстности равномъ 0° .	При углѣ мѣст- ности $=5^{\circ}$.	При углѣ мѣст- ности $=10^{\circ}$.
$0^{\circ}-30'$	11,09 линій	11,14 л.	11,27 л.	10,11 линій	10,15 л.	10,26 л.
1—..	22,19 —	22,28 —	22,54 —	20,22 —	20,29 —	20,53 —
1—30	33,29 —	33,42 —	33,80 —	30,32 —	30,44 —	30,79 —
2—...	44,38 —	44,55 —	45,06 —	40,42 —	40,58 —	41,05 —
2—30	55,47 —	55,68 —	56,32 —	50,52 —	50,72 —	51,31 —
3—...	66,55 —	66,81 —	67,58 —	60,62 —	60,86 —	61,56 —

	III. Для 12-ти-фунтовой пушки, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла $m=80,76$ дюйма, а высота прицѣла въ ли- ніяхъ, какъ показано здѣсь ниже.			IV. Для 6-ти-фунтовой пуш- ки, разстоанія отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла $m=65,85$ дюйм., а высота прицѣла въ ли- ніяхъ, какъ показано здѣсь ниже.		
	При углѣ мѣстности равномъ 0° .	При углѣ мѣст- ности $=5^{\circ}$.	При углѣ мѣст- ности $=10^{\circ}$.	При углѣ мѣстности равномъ 0° .	При углѣ мѣст- ности $=5^{\circ}$.	При углѣ мѣст- ности $=10^{\circ}$.
$0^{\circ}-30'$	7,05 линій	7,07 л.	7,15 л.	5,74 линій	5,77 л.	5,83 л.
1—...	14,10 —	14,15 —	14,31 —	11,49 —	11,54 —	11,67 —
1—30	21,15 —	21,22 —	21,47 —	17,24 —	17,31 —	17,51 —
2—...	28,19 —	28,29 —	28,62 —	22,98 —	23,07 —	23,34 —
2—30	35,23 —	35,36 —	35,77 —	28,72 —	28,83 —	29,17 —
3—...	42,27 —	42,43 —	42,92 —	34,46 —	34,59 —	34,99 —
3—30	49,31 —	49,49 —	50,06 —	40,20 —	40,35 —	40,82 —
4—..	56,34 —	56,55 —	57,20 —	45,93 —	46,11 —	46,64 —
4—30	63,37 —	63,61 —	64,34 —	51,66 —	51,86 —	52,46 —
5—...				57,39 —	57,61 —	58,28 —
5—30				63,11 —	63,35 —	64,09 —

Углы прицѣливанія общіе угламъ мѣстности.	V. У пудоваго единорога, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла $m=82,695$ дюйма, а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано ниже.			VI. Для $\frac{1}{2}$ пудоваго единорога, разстояніе отъ верха мушки до точки привѣса прицѣла $m=66, 5$ дюйма, а высота прицѣла въ линіяхъ, какъ показано здѣсь ниже.		
	При углѣ мѣстности равномъ 0°	При углѣ мѣстности $=5^{\circ}$.	При углѣ мѣстности $=10^{\circ}$.	При углѣ мѣстности равномъ 0°	При углѣ мѣстности $=5^{\circ}$.	При углѣ мѣстности $=10^{\circ}$.
$0^{\circ}-30'$	7,22 линій	7,24 л.	7,53 л.	5,78 линій	5,81 л.	5,87 л.
1— ..	14,43 —	14,49 —	14,65 —	11,57 —	11,62 —	11,75 —
1—30	21,64 —	21,73 —	21,98 —	17,56 —	17,42 —	17,62 —
2—...	28,86 —	28,97 —	29,50 —	23,14 —	23,23 —	23,49 —
2—30	36,07 —	36,21 —	36,62 —	28,92 —	29,03 —	29,56 —
3—...	43,28 —	43,44 —	43,94 —	34,70 —	34,83 —	35,23 —
3—30	50,48 —	50,67 —	51,26 —	40,48 —	40,63 —	41,10 —
4—...	57,68 —	57,90 —	58,57 —	46,25 —	46,43 —	46,96 —
4—30	64,88 —	65,13 —	65,88 —	52,02 —	52,22 —	52,82 —
5—...				57,78 —	58,00 —	58,67 —
5—30				63,55 —	63,79 —	64,55 —

Углы прицѣлѣнія об- щѣ угламъ мѣстности.	VII. Для $\frac{1}{4}$ пудоваго едино- рога, разстояніе отъ вѣрха мушки до точки прицѣла $m=55,21$ дюйма, а высота прицѣла въ ли- ніяхъ, какъ показано ниже.			VIII. Для 5-хъ-фунтоваго единорога, разстояніе отъ верха мушки до точки при- цѣла $m=37,62$ дюй- ма, а высота прицѣла въ ли- ніяхъ, какъ показано ниже.		
	При углѣ мѣстности равномъ 0° .	При углѣ мѣст- ности $=5^\circ$.	При углѣ мѣст- ности $=10^\circ$.	При углѣ мѣстности равномъ 0° .	При углѣ мѣст- ности $=5^\circ$.	При углѣ мѣст- ности $=10^\circ$.
$0^\circ-30'$	4,82 линій	4,85 л.	4,88 л.	3,28 линій	3,29 л.	3,33 л.
1—...	9,64 —	9,67 —	9,78 —	6,57 —	6,59 —	6,67 —
1—30	14,46 —	14,51 —	14,68 —	9,85 —	9,89 —	10,00 —
2—...	19,27 —	19,34 —	19,57 —	13,13 —	13,18 —	13,33 —
2—30	24,08 —	24,18 —	24,46 —	16,41 —	16,47 —	16,66 —
3—...	28,89 —	29,01 —	29,34 —	19,69 —	19,76 —	19,99 —
3—30	33,70 —	33,84 —	34,23 —	22,97 —	23,05 —	23,32 —
4—...	38,51 —	38,66 —	39,11 —	26,24 —	26,34 —	26,65 —
4—30	43,32 —	43,48 —	43,99 —	29,51 —	29,63 —	29,97 —
5—...	48,12 —	48,30 —	48,86 —	32,78 —	32,91 —	33,29 —
5—30	52,92 —	53,11 —	53,73 —	36,05 —	36,19 —	36,61 —
6—...	57,71 —	57,93 —	58,60 —	39,32 —	39,47 —	39,93 —
6—30	62,50 —	62,74 —	63,46 —	42,59 —	42,75 —	43,24 —
7—...				45,85 —	46,02 —	46,55 —
7—30				49,11 —	49,29 —	49,86 —
8—...				52,36 —	52,55 —	53,17 —
8—30				55,61 —	55,82 —	56,46 —
9—...				58,85 —	59,08 —	59,76 —
9—30				62,09 —	62,33 —	63,05 —

Посредствомъ сихъ таблицъ могутъ быть
вычислены, способомъ простой интерполяціи,
тѣ высоты прицѣла, кои принадлежатъ угламъ
не заключающимся въ таблицѣ; и обратно.

*Вычисленіе рикошетныхъ выстрѣловъ по Па-
раболической Теоріи.*

§ 28. Употребленіе рикошетныхъ выстрѣ-

ловъ при осадахъ крѣпостей состоитъ въ опредѣленіи такого заряда и въ назначеніи для орудія такого угла возвышенія, чтобы брошенное ядро, пролетѣвъ чрезъ брустверь близъ верхней точки гребня нисходящею вѣтвью своего полета, двигалось далѣе вдоль протяженія валганга и нисходящимъ своимъ полетомъ также и прыжками разрушало расположенные на немъ предметы.

Для произведенія сего дѣйствія, необходимо должно; 1) чтобы выстрѣлы произведены были вдоль по направленію валганга; 2) чтобы ядро въ своемъ полетѣ прошло возвышеннѣйшую точку, прежде достиженія бруствера; иначе оно можетъ пролетѣть чрезъ весь валгангъ, не сдѣлавъ на немъ никакого поврежденія; 3) чтобы ядро упало на землю подъ угломъ весьма острымъ, не только для того, чтобы въ оную не углублялось, но и для того, чтобы по своемъ отраженіи не дѣлало высокихъ прыжковъ и не соразмѣрныхъ съ высотой ниспровергаемыхъ предметовъ; и 4) чтобы, при сказанныхъ условіяхъ, ядру сообщена была, по возможности, большая скорость или большая сила удара.

§ 29) Принявъ въ соображеніе сіи условія; выведемъ формулы для рѣшенія важнѣйшихъ задачъ, относящихся къ рикошетной стрѣльбѣ.

Положимъ, что пушка АВ (фиг. 9) наведена по направленію прямой AS; и пусть будетъ $BP'R''$, горизонтальная линія идущая отъ жерла орудія; $BM'M''$, кривая линія описанная ядромъ, R, брустверъ чрезъ вершину M, коего проходитъ сія кривая; M'' точка, въ которой также кривая встрѣчаетъ валгангъ, изображенный горизонтальною линіею RM'' . Изъ точекъ M и M'' опустимъ на горизонтальную линію BP'' перпендикуляры MP и $M''P''$, и чрезъ вершину M' кривой проведемъ ось $M'P'$, и продолжимъ ее до пресѣченія съ направленіемъ бросанія BS въ точкѣ S. При дѣйствованіи рикошетами, какъ замѣчено выше, надобно, чтобы разстояніе BP' отъ орудія до оси параболы менѣе было разстоянія BP сего орудія до бруствера, но вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе половины сего разстоянія, и чтобы уголъ паденія ядра на валгангъ въ точкѣ M'' довольно быть острый. Въ практикѣ разстояніе BP и высоты MP и $M''P''$ почитаются извѣстнымъ: тригонометрическія измѣренія покажутъ величину линій BP и MP;

въ разсужденіи же высоты валганга $M''P''$, можно знать оную изъ обыкновенныхъ профилей укрѣпленій, и мы весьма мало ошибемся, полагая всегда точку M'' ниже точки M на 7 Футовъ Русскихъ.

Сдѣлаемъ теперь $BP'=x$, $M'P'=y$, $BP=a$, $MP=b$, $BP'=a'$, $M'P''=b'$, уголъ бросанія $SBP'=\theta$, уголъ паденія $QM''N$, составляемый касательною QM'' съ горизонтальною линіею $NM''=\theta'$. Основываясь на извѣстномъ свойствѣ параболы, что подкасательная оной вдвое болѣе абсциссы, получимъ изъ прямоугольных треугольниковъ BSP' и QNM''

$$tg\ SBP'=\frac{SP'}{BP'}=\frac{2M'P'}{BP'} \quad \text{или} \quad tg\theta=\frac{2y}{x},$$

$$\text{и} \quad tg\ QM''N=\frac{QN}{NM''}=\frac{2NM'}{NM''} \quad \text{или} \quad tg\theta'=\frac{2(y-b')}{a'-x};$$

кромя сихъ двухъ уравненій имѣемъ еще три слѣдующія § 4 (d); для точки M'

$$y=xtg\theta-\frac{x^2}{4h\cos^2\theta},$$

для точки M

$$b=atg\theta-\frac{a^2}{4h\cos^2\theta},$$

и для точки M''

$$b'=a'tg\theta-\frac{a'^2}{4h\cos^2\theta}.$$

Посредствомъ сихъ пяти уравненій, содержащихъ въ себѣ девять количествъ $x, y, a, b, a', b', \theta, \theta'$ и h можно будетъ, зная четыре изъ нихъ, опредѣлить остальные. По сему, дабы задачи предложенныя относительно рикшетной стрѣльбы были опредѣленныя, необходимо должны въ себѣ заключать четыре данныя обстоятельства; въ противномъ же случаѣ онѣ останутся неопредѣленными. Но для удобнѣйшаго рѣшенія оныхъ выведемъ сперва, изъ предъидущихъ пяти уравненій, простѣйшія другія.

Для сего между уравненіями 3-мъ и 4-мъ, исключивъ величину h , получимъ
$$\frac{x \operatorname{tg} \theta - y}{a \operatorname{tg} \theta - b} = \frac{x^2}{a};$$
 и поставивъ потомъ величину для $\operatorname{tg} \theta$, взятую изъ перваго уравненія, найдемъ

$$y = \frac{bx^2}{2ax - a^2};$$

такимъ же образомъ поступивъ съ уравненіями 3-мъ, 5-мъ и 1-мъ, получимъ

$$y = \frac{Bx'^2}{2a'x - a'^2};$$

отсюда, если сравнимъ двѣ величины найденныя для y , будемъ имѣть

$$x = \frac{ba'^2 - Ba^2}{2(ba' - ab)}.$$

Послѣ сего легко опредѣлимъ

$$tg\theta = \frac{2y}{x} = \frac{2bx}{2ax - x^2} = \frac{2b'x}{2a'x - a'^2} = \frac{ba'^2 - ba'^2}{aa'(a' - a)};$$

$$y - b' = \frac{b'(a' \cdot x)^2}{2a'x - a'^2} = \frac{b(a' \cdot x)^2}{2ax - a^2}, \text{ ибо } \frac{b}{2ax - a^2} = \frac{b'}{2a'x - a'^2};$$

$$tg\theta' = \frac{2(y - b')}{a' - x} = \frac{2b(a' \cdot x)}{2ax - a^2} = \frac{2b'(a' - x)}{2a'x - a'^2} = \frac{ba'^2 - b'a^2 - 2aa'b'}{aa'(a' - a)};$$

$$\text{и } tg\theta : tg\theta' = \frac{2bx}{2ax - a^2} : \frac{2b(a' - x)}{2a'x - a'^2} = x : a' - x,$$

также

$$tg\theta - tg\theta' = \frac{2b'x}{2a'x - a'^2} - \frac{2b'(a' - x)}{2a'x - a'^2} = \frac{2b'}{a'};$$

если между послѣднимъ здѣсь уравненіемъ и уравненіемъ 5-мъ исключимъ количество a' , то получимъ

$$h\cos^2 tg\theta' = h\cos^2 \theta tg^2 \theta - b',$$

что приводится къ слѣдующему простому уравненію

$$h\cos^2 \theta = (h - b')\cos^2 \theta'.$$

Наконецъ рѣшивъ уравненія 1-е и 3-е въ отношеніи къ x и y , получимъ извѣстныя уже выраженія (§ 11)

$$x = 2h\sin\theta \cos\theta, \text{ и } y = h\sin^2 \theta.$$

И такъ уравненія:

$$1) \quad x = \frac{ba'^2 - b'a^2}{2(ba' - ab')};$$

$$2) \quad y = \frac{bx^2}{2ax - a^2} = \frac{b'x^2}{2a'x - a'^2};$$

$$3) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{2y}{x} = \frac{ba'^2 - b'a^2}{aa'(a' - a)};$$

$$4) \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{ba'^2 + a^2b' - 2aa'b'}{aa'(a' - a)};$$

$$5) \quad y = h \sin^2 \theta \text{ и } x = 2h \sin \theta \cos \theta;$$

$$6) \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta' + \frac{2b'}{a'}, \text{ или } a' \operatorname{tg} \theta - b' = a' \operatorname{tg} \theta' + b';$$

$$7) \quad h \cos^2 \theta = (h - b') \cos^2 \theta';$$

$$\text{и } 8) \quad x \operatorname{tg} \theta' = (a' - x) \operatorname{tg} \theta$$

удобно прилагаются къ рѣшенію слѣдующихъ задачъ.

З а д а ч а I.

§ 30. Зная, разстояніе $ВР$ отъ орудія до бруствера R ; высоту $МР$ верхней точки гребня бруствера, чрезъ которую долженъ пролетѣть снарядъ; высоту $М''Р''$ валганга, на который сей снарядъ долженъ упасть; и принявъ разстояніе $ВР'$ произвольнымъ, однако большимъ чѣмъ половина разстоянія $ВР$: найти уголъ и начальную скорость бросанія, положеніе точки паденія $М''$, и уголъ паденія снаряда. Въ сей задачѣ извѣстны величины a , b , b' и x , а должно опредѣлить θ , a' , θ' и h . Но взявъ въ раз-

смотря на 2-е равенство, найдемъ сперва $y = \frac{bx^2}{2ax - a^2}$ и потомъ изъ уравненія $y = \frac{b'x^2}{2a'x - a'^2}$ получимъ

$$a' = x + x\sqrt{\frac{g-b'}{g}},$$

то есть разстояніе BP'' , опредѣляющее положеніе точки паденія снаряда на валгангъ; 3-е же

уравненіе $tg\theta = \frac{2y}{x}$ дастъ уголь возвышенія ору-

дія. Теперь зная a' и $tg\theta$, найдется уголь па-

денія θ' чрезъ пропорцію $tg\theta : tg\theta' = x : a' - x$,

которая дастъ $tg\theta' = \frac{(a' - x)tg\theta}{x}$. Что касается

до начальной скорости, которая здѣсь равна $\sqrt{2gh}$ (§ 4), она найдется, поставивъ на мѣсто количества h равную величину взятую изъ 5-го уравненія, и будетъ сія начальная скорость

$$u = \sqrt{2gh} = \frac{1}{\sin\theta} \sqrt{2gy}.$$

Для примѣра, положимъ, что разстояніе $BP = 150$ сажень или $= 1050$ футъ; высота, на которой находится точка M отъ горизонта орудія $= 30$ футамъ; высота точки M'' отъ сего же горизонта $= 23$ фута, и сверхъ того примемъ, что разстояніе BP' составляетъ $\frac{2}{3}$ отъ BP . И такъ въ семъ примѣрѣ будетъ:

$$a=1050, b=30, b'=23, x=\frac{2}{3}a=700:$$

поставивъ сіи числа въ выше найденныя фор-

$$\text{мулы, получимъ 1) } y = \frac{bx^2}{2ax - a^2} = \frac{4}{3}b = 40 \text{ фут.};$$

$$2) \log \operatorname{tg} \theta = \log \left(\frac{2y}{x} \right) = 9,0579920, \text{ что соотвѣт-}$$

$$\text{ствуетъ углу бросанія } \theta = 6^\circ 31' 11''; 3) a' = x +$$

$$x \sqrt{\frac{y - b'}{y}} = 1156,34 \text{ фута, и отсюда } PP'' = RM''$$

$$= a' - a = 106,34 \text{ фута, сіе показываетъ, что}$$

ядро упадетъ на валгангъ въ разстояніи 15 са-

женъ и 1 футъ отъ боковаго бруствера, подъ уг-

$$\text{ломъ } \theta', \text{ коего } \log \operatorname{tg} \theta' = \log \frac{(a' - x) \operatorname{tg} \theta}{x} = 8,8721825$$

соотвѣтствуетъ $4^\circ 15' 39''$; при семъ углѣ паденія

ядро удобно дѣлаетъ рикошетъ и притомъ отло-

гій. Наконецъ начальная скорость снаряда будетъ

$$u = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{2gy} = 447 \text{ футамъ въ секунду; здѣсь}$$

$$g = 32,2 \text{ фута.}$$

З а д а ч а II.

§ 31) Зная разстояніе BP , высоты MP и $M''P''$, и положеніе точки M'' на валгангѣ; найти разстояніе BP' отъ орудія до оси параболы, углы бросанія и паденія, и начальную скорость ядра.

По вопросу извѣстны величины a, b, a' и

b' ; прочія же x , θ , θ' , h , y суть искомыя. Изъ

1-го уравненія будемъ имѣть $x = \frac{ba'^2 - b'a^2}{2(ba' - ab')}$,

а изъ 2-го $y = \frac{bx^2}{2ax - a^2}$. Имѣя же x и y , полу-

чимъ, какъ и въ предъидущей задачѣ, уголь θ

возвышеніе орудія изъ уравненія $tg\theta = \frac{2y}{x}$;

уголь θ' паденія ядра изъ уравненія $tg\theta' = \left(\frac{a' - x}{x}\right)tg\theta$; и начальную скорость $u = \frac{1}{\sin\theta}$.

$\sqrt{2gy}$ или $= \frac{a}{2\cos\theta} \sqrt{\frac{2g}{atg\theta - b}}$ (§ 16).

Для примѣра положимъ, что орудіе находится на прежнемъ разстояніи 1050 футовъ, и что должно бросить ядро такъ, дабы оно пролетѣло чрезъ точку М, возвышенную на 30 футовъ отъ горизонта орудія и упало на валгангъ въ точкѣ М'', удаленной отъ боковаго бруствера на 12 сажень или 84 фута. Поскольку высота М''Р'' = 23 фута, то въ семъ примѣрѣ будетъ.

$a = 1050$, $b = 30$, $a' = 1134$, $b' = 23$:

и по симъ даннымъ найдется $x = 669,766$ фута; $y = 44,267$ фута; уголь возвышенія орудія $\theta = 7^\circ 31' 48''$; уголь паденія $\theta' = 5^\circ 14'$; скорость бросанія $u = 407$ футъ въ секунду.

З а д а ч а III.

§ 32. Зная горизонтальное разстояніе ВР, и вертикальное возвышеніе МР точки М, чрезъ которую ядро должно пройти за брустверь; также уголь паденія ядра на валгангъ и высоту М''Р'': найти уголь и скорость бросанія, также положеніе точки М'' паденіе ядра. Здѣсь данныя количества суть a, b, b' и θ' , а искомыя a', θ, h, x и y . Уравненіе 4, въ которомъ одна только неизвѣстная величина a' находится, будучи рѣшено въ отношеніи къ сей неизвѣстной, даетъ

$$a' = \frac{a}{2} \frac{(atg\theta' - 2b')}{(atg\theta' - b)} + \sqrt{\frac{a^2}{4} \left(\frac{atg\theta' - 2b'}{atg\theta' - b} \right)^2 + \frac{a^2 b'}{atg\theta' - b}}$$

или

$$a' = \frac{a}{2} \left\{ \frac{atg\theta' - 2b' + \sqrt{a^2 tg^2\theta' - 4b'(b - b')}}{atg\theta' - b} \right\}.$$

Имѣя a' , найдемъ потомъ уголь мѣтанія θ посредствомъ уравненія $tg\theta = \frac{ba'^2 - b'a^2}{aa'(a' - a)}$ или урав-

ненія $tg\theta = tg\theta' + \frac{2b'}{a'}$; и будемъ имѣть $x = \frac{ba'^2 - b'a^2}{2(ba' - ab')}$

или $= \frac{a'^2 tg\theta}{2(a' tg\theta - b')}$; величина h опредѣлится изъ

уравненія $x = 2hsin\theta.cos\theta$, такъ что скорость

$$\text{бросанія будетъ } u = \sqrt{\frac{gx}{\sin\theta\cos\theta}}.$$

Для примѣра положимъ, что чрезъ точку М, возвышенную на 60 футовъ отъ горизонта орудія, должно пройти ядро и упасть на валгангъ, возвышенный на 54 фута, подъ угломъ въ 5°; при семъ разстояніе орудія до бруствера = 1200 фут. Мы имѣемъ здѣсь $a = 1200$, $b = 60$, $b' = 54$, $\theta' = 5^\circ$; по подставленіи сихъ величинъ въ составленные для сего случая уравненія, найдемъ $a' = 1275,08$ фут. $x = 846$ фут.; уголъ бросанія $\theta = 9^\circ 46'$; начальную скорость ядра $u = 390$ футамъ въ секунду. Разстояніе $a' = 1275,08$ фут. показываетъ, что ядро упадетъ на валгангъ подъ угломъ = 5° на разстояніи 70 футовъ отъ боковаго бруствера.

З а д а ч а IV.

§ 33. Зная скорость ядра, высоту бруствера, чрезъ который должно перебросить ядро, высоту валганга, на который оно должно упасть, и уголъ паденія онаго на валгангъ; опредѣлить уголъ возвышенія орудія и то разстояніе, на которомъ должно построить батарею.

При семъ вопросъ извѣстны величины h , b , b' и θ' , а неизвѣстны a' , a , θ , x и y . Изъ урав-

невія 7-го будемъ имѣть для искомаго угла мѣтанія:

$$\cos\theta = \cos\theta' \sqrt{\frac{h-b'}{h}};$$

имѣя θ , найдемъ изъ уравненія 6-го

$$a' = \frac{2b'}{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta'} = \frac{2b' \cos\theta \cdot \cos\theta'}{\sin(\theta - \theta')},$$

что опредѣляетъ положеніе точки M'' : послѣ сего уравненіе $x = 2h \sin\theta \cdot \cos\theta$, даетъ разстояніе батареи до оси параболы; уравненіе $y = h \sin^2\theta$ покажетъ величину y ; и наконецъ изъ уравненія

$$y = \frac{bx^2}{2ax - a^2}$$

найдется требуемое разстояніе a

отъ батареи до бруствера, которое будетъ

$$a = x + x \sqrt{\frac{y-b}{y}}.$$

Для примѣра положимъ, что снарядъ, брошенный изъ точки В, со скоростію 400 футовъ въ одну секунду, долженъ быть перенесенъ чрезъ верхнюю точку М гребня бруствера, возвышенную на 60 футовъ, и упасть въ точкѣ M'' на валгангъ, возвышенномъ на 54 фута; и пусть уголъ паденія будетъ $= 5^\circ$. Слѣ-

довательно здѣсь мы имѣемъ $h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(400)^2}{60}$

$=2666\frac{2}{3}$, $b=60$, $b'=54$, $\theta'=5^\circ$; вставивъ сіи

величины въ уравненія, составленныя для сего случая, будемъ имѣть по порядку:

1) $\log \cos \theta = \log \left\{ \cos \theta' \sqrt{\frac{h-b'}{h}} \right\} = 9,9939018$, что

соотвѣтствуетъ углу возвышенія орудія $\theta=9^\circ$

$34'45''$; 2) $\log a' = \log \left\{ \frac{2b' \cos \theta \cdot \cos \theta'}{\sin (\theta - \theta')} \right\} = 3,1234684$, и

$a'=1328,82$ Футовъ; 3) $\log x = \log (2h \sin \theta \cos \theta)$

$=2,9420805$, и отсюда разстояніе батареи до

оси параболы $x=875,146$ Футовъ; 4) $\log y = \log$

$(h \sin^2 \theta) = 1,8683288$ и $y=73,85$ Футовъ; 5) на-

конецъ разстояніе, на которомъ нужно построить

батарею, будетъ $a=x+x\sqrt{\frac{y-b}{y}}=1254,15$ Футовъ,

и разстояніе отъ боковаго бруствера до точки

паденія $M''=a'-a=74,67$ Футовъ.

З а д а ч а V.

34. Извѣстны, высота гребня бруствера $=b$, высота валганга $=b'$, уголъ паденія ядра на валгангъ $=\theta'$ и разстояніе точки паденія отъ боковаго бруствера $=k$: найти уголъ и скорость бросанія, также и то разстояніе, на которомъ должно расположить батарею.

Послику по заданію должно быть $a' - a = k$ или $a' = a + k$, то поставивъ сію величину въ уравненіе 4-е, потомъ уничтоживъ знаменателя и сокративъ, будемъ имѣть для опредѣленія разстоянія a отъ батареи до бруствера слѣдующее 2-й степени уравненіе.

$$(ktg\theta' + b' - b)a^2 - \{2(b - b') - ktg\theta'\}ka = bk^2,$$

которое, будучи рѣшено, дастъ

$$a = \frac{k}{2} \left\{ \frac{2b - (2b' + ktg\theta') \pm \sqrt{(2b' + ktg\theta')^2 - 4bb'}}{ktg\theta' + b' - b} \right\},$$

и слѣдовательно

$$a' = a + k = \frac{k}{2} \left\{ \frac{ktg\theta' \pm \sqrt{(2b' + ktg\theta')^2 - 4bb'}}{ktg\theta' + b' - b} \right\}$$

послѣ сего посредствомъ уравненія 6-го найдется уголъ бросанія θ , а изъ уравненія 7-го

найдется величина $h = \frac{b' \cos^2 \theta'}{\sin(\theta + \theta') \sin(\theta - \theta')}$, опре-

дѣляющая начальную скорость бросанія

$$u = \cos \theta' \sqrt{\frac{2gb'}{\sin(\theta + \theta') \sin(\theta - \theta')}}.$$

§ 35. Предъидущія вычисленія, равномерно принадлежатъ рикошетнымъ выстрѣламъ отлогимъ и крутымъ, и ясно показываютъ, какъ должно поступать при рѣшеніи иныхъ вопросовъ предложенныхъ по сему предмету при

какихъ либо данныхъ условійхъ. Такъ на примѣръ, послѣку существеннымъ условіемъ отлѣгкихъ рикошетныхъ выстрѣловъ должно быть то, дабы ядро совершало вдоль всего валганга не высокое движеніе, то сіе условіе будетъ выполнено, когда ядро пролетѣвъ гребень бруствера весьма близко къ оному, падаетъ на валгангъ около его середины, то есть, между 20 и 30 саженьями отъ боковаго бруствера: ибо тогда ядро быстро совершая низкій полетъ свой по всему протяженію валганга, можетъ встрѣтить всѣ предметы, на немъ расположенные. Уголъ возвышенія орудія, или пороховаго заряда, разстояніе отъ орудія до бруствера, служащія для произведенія сего дѣйствія, опредѣляется изъ задачъ 2-й и 5-й.

При всѣхъ задачахъ, касающихся до рикошетныхъ выстрѣловъ, какъ скоро опредѣленъ будетъ уголъ θ возвышенія орудія, величины a и b , опредѣляющія положеніе точки m будутъ извѣстны, то узнаемъ и высоту прицѣла помощію уравненій (q) и (s). Если чрезъ вычисленіе найдется, что сія высота менѣе самой высоты прицѣла, тогда по оному можно будетъ навести орудіе, имѣя прицѣльнымъ пред-

метомъ верхъ бруствера; въ противномъ же случаѣ должно употребить квадрантъ для возвышенія орудія на надлежащее число градусовъ.

§ 36. Здѣсь надлежало бы показать дѣйствіе рикошета въ отношеніи къ углу отраженія, сравнивая его съ угломъ паденія, и опредѣлить ту скорость, которую ядро сохраняетъ послѣ каждаго рикошета: но кромѣ того, что изслѣдованіе сего рода не принесло бы важной пользы для практики, оно должно быть основано на предположеніяхъ произвольныхъ и всегда невѣрныхъ. Ибо при семъ надлежало бы знать: жесткое ли или упругое движущееся тѣло, и сколь велика его упругость? какова отражающая поверхность, или неупругая или упругая и въ какой степени?) Какая связь и сѣяніе между частицами земли, однородная ли она или разнородная? и проч. Всѣ сіи обстоятельства, какъ видно, подлежатъ многообразнымъ соединеніямъ, и могутъ перемѣнить уголъ и скорость отраженія до безконечности. Принявъ только одно обстоятельство въ соображеніе, мы не избѣгнемъ затрудненій при разысканіи точныхъ выводовъ; то какихъ должно ожидать

въ то время, допустивъ опъя всѣ. И такъ до-
вольствуемся только замѣчаніемъ, что для спо-
собствованія ядру сдѣлать рикошетъ, уголъ па-
денія онаго долженъ быть весьма острый, не
превышающій 8 или 10 градусовъ. Уголъ сей
тѣмъ острѣе выходитъ, каковъ бы притомъ
уголъ мѣтанія ни былъ, чѣмъ ближе точка па-
денія находится къ вершинѣ кривой описанной
ядромъ; и вообще разность между угломъ мѣ-
танія и угломъ паденія увеличивается, по мѣ-
рѣ большаго возвышенія точки паденія надъ
горизонтомъ орудія, такъ что, когда избирает-
ся положеніе оси параболы, какъ въ задачѣ
4-й, то надлежитъ тѣмъ болѣе оную прибли-
зить къ брустверу, чѣмъ оцъ возвышеніе.
Причина сего явствуется изъ уравненія $\cos\theta'$
 $= \cos\theta \sqrt{\frac{h}{h-b'}}$, послѣку при томъ же уголъ θ
и той же величины h , съ увеличиваніемъ коли-
чества b' или высоты валганга, уголъ паденія
 θ' уменьшается.

Г Л А В А II.

О ДВИЖЕНІИ ТЯЖЕЛЫХЪ ТѢЛЪ ВЪ ВОЗДУШНОМЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

Недостатки Параболической Теоріи.

§ 37. Сопротивленіе воздуха на бросаемые снаряды, которое досель не было принято въ разсужденіе, производитъ значительныя перемѣны въ выводахъ Теоріи, нами изложенной. Если снарядъ движется въ воздушномъ пространствѣ, то хотя бы онъ и тяжестію побуждаемъ не былъ, не можетъ пробѣжать равномернымъ движеніемъ той прямой линіи, по которой брошенъ; ибо воздухъ противопоставляющій сопротивленіе движенію онаго, истребляетъ въ каждое мгновеніе часть его скорости. По сей самой причинѣ движеніе равномерно ускорительное, происходящее отъ тяжести, получаетъ также нѣкоторыя перемѣны: какъ то, 1) путь полета ядра не есть парабола; сія кривая можетъ произойти только отъ равномернаго движенія, соединеннаго съ равномерно ускорительнымъ движеніемъ. 2) При извѣстномъ углѣ возвышенія орудія и извѣстной силѣ бросанія, дальность выстрѣла всегда бываетъ

меньше той, которая находится изъ выше предложенныхъ уравненій. 3) Самая возвышенная точка кривой, описанной снарядомъ, не соответствуетъ срединѣ горизонтальной дальности: она находится ближе къ точкѣ паденія, нежели къ точкѣ бросанія. 4) Уголъ паденія въ концѣ горизонтальной дальности всегда болѣе угла бросанія. 5) Наибольшая горизонтальная дальность полета происходитъ при углѣ возвышенія меньшемъ, нежели въ 45 градусовъ, и при томъ значительно меньшемъ, когда снарядъ бросается съ сильною скоростію. 6) Два угла, подъ которыми брошенный снарядъ попадаетъ въ тотъ же предметъ, находящійся на горизонтѣ батареи, не составляютъ взаимнаго дополненія къ 90 градусовъ; болѣе изъ нихъ различается менѣе отъ 45 градусовъ, нежели меньшій. 7) Наконецъ разности, о которыхъ здѣсь говоримъ, становятся болѣе значительными, чѣмъ брошенный снарядъ получаетъ большую скорость и чѣмъ поверхность онаго болѣе въ отношеніи къ его массѣ. Для опредѣленія оныхъ изслѣдуемъ сперва дѣйствіе сопротивленія жидкостей на тѣла.

Общія законы сопротивленія жидкостей. *(по Насонову)*

§ 38. Поелику тѣло, движущееся въ покоящейся жидкости, въ каждое мгновеніе принуждено бываетъ раздвигать частицы оной и сообщать имъ движеніе, то необходимо скорость сего тѣла постепенно должна уменьшаться: ибо по свойству недѣятельности (инерціи) общей всѣмъ частямъ матеріи, частицы жидкости пріобрѣтаютъ движеніе не иначе, какъ убавивъ оное въ дѣйствующемъ на нихъ тѣлѣ, и сіе уменьшеніе бываетъ тѣмъ больше, чѣмъ онѣ терпятъ большую перемѣну и чѣмъ число оныхъ значительнѣе.

Сначала примемъ, что тѣло движется въ неупругой жидкости со скоростью v , и что передняя его поверхность, которою ударяетъ частицы жидкости, есть плоская и перпендикулярная къ направленію движенія; означимъ величину сей поверхности чрезъ A . Въ мгновеніе $= dt$, тѣло пройдетъ безконечно малое пространство $= vdt$ и сдвинетъ съ мѣста объемъ $Avdt$ жидкости: посему назвавъ D плотность ссей жидкости, количество $ADvdt$ изобразить ея массу, которая приводится въ движеніе въ мгновеніе dt . Впрочемъ частицы жидкости уxo-

дять къ сторонамъ тѣла, и слѣдовательно не
бываютъ побуждаемы впередъ и безпрестанно
давимы, какъ принято при нашемъ изъясненіи;
но предположеніе сіе хотя и несовершенно
точное, однако ведетъ къ приближенію, на ко-
торомъ принуждены остановиться въ Теоріи
весьма трудной и допускающей многія обстоя-
тельства, коимъ нельзя дать постояннаго пра-
вила. И такъ означивъ чрезъ M массу тѣла;
котораго поверхность A противопологается
прямому удару жидкости, и чрезъ dv мгновенное
уменьшеніе скорости, причиненное сопроти-
вленіемъ сей жидкости, то количество движенія
тѣла до удара будетъ $=Mv$, скорость его по-
слѣ удара $=v-dv$, которая есть общая и ча-
стицамъ $ADvdt$ жидкости; и отсюда сумма ко-
личествъ движенія двухъ массъ послѣ удара
будетъ $=(v-dv)(M+ADvdt)$. Но по началамъ
Механики, сія сумма должна быть равна коли-
честву движенія тѣла прежде удара, слѣдова-
тельно получимъ уравненіе:

$$Mv=(v-dv)(M+ADvdt),$$

которое по надлежащемъ сокращеніи перемѣ-
нится въ слѣдующее.

$$Mdv=ADv^2dt.$$

Изъ сего уравненія найдется величина простой

силы сопротивленія, или укосняющая сила

$$R = \frac{dv}{dt} = \frac{AD}{M} v^2,$$

и отсюда произведеііе $MR = ADv^2$ изобразить величину сопротивленія на тѣло, котораго масса $= M$ и прямая поверхность, подверженная дѣйствию жидкости $= A$. Слѣдовательно сопротивленіе, ощущаемое тѣломъ со стороны одной и той же жидкости, пропорціонально квадрату скорости. Вообще оно пропорціонально плотности жидкости, умноженной на величину ударяемой плоскости и на квадратъ скорости.

Выраженіе $MR = ADv^2$, къ которому достигли при томъ предположеніи, что тѣло движется, а жидкость находится въ покоѣ, равномерно имѣетъ мѣсто, допуская на оборотъ жидкость движущуюся съ скоростью v , а тѣло пребывающимъ въ покоѣ. Потому, что въ обоихъ случаяхъ передняя плоскость тѣла бываетъ поражена частицами жидкости съ одинаковымъ усиліемъ.

§ 39. Когда жидкость въ косвенномъ направленіи встрѣчаетъ плоскую поверхность A , тогда сопротивленіе не измѣряется уже предъидущей величиною. Ибо если назовемъ α уголь

ударенія жидкости и разложимъ косвенную скорость v на двѣ такія, изъ ксихъ бы одна была нормальная къ ударяемой плоскости, а другая направленная по сей плоскости, то послѣдняя не произведетъ никакого сопротивленія, между тѣмъ какъ первая равная $v \sin \alpha$ окажетъ полное свое дѣйствіе. Слѣдовательно, поставивъ въ выраженіи прямого сопротивленія вмѣсто v величину $v \sin \alpha$, получимъ сопротивление на косую плоскость

$$MR' = ADv^2 \sin^2 \alpha;$$

и такъ при всѣхъ къ сопротивленію принадлежащихъ одинакихъ обстоятельствахъ, прямое сопротивление жидкости относится къ косвенному дѣйствующему на ту же поверхность, какъ квадратъ радіуса къ квадрату синуса ударенія.

Поелику косвенное сопротивление приводится къ силѣ, побуждающей тѣло по направленію CR (фиг. 10), перпендикулярному къ ударяемой поверхности AB и наклонному къ направленію движенія CD , то по сей причинѣ послѣдуетъ не только уменьшеніе скорости движущагося тѣла, но въ тоже время и уклоненіе онаго отъ направленія движенія. Ибо разложивъ сію силу

$=ADv^2 \sin^2 \alpha$ на двѣ такія, изъ коихъ бы одна прямо-противоположна была направленію движенія, а другая перпендикулярна къ сему направленію, найдется что первая $=ADv^2 \sin^2 \alpha$, а вторая $=ADv^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$; послѣдняя уменьшаетъ скорость поступательнаго движенія, а первая перемѣняетъ направленіе онаго. Отъ непрерывно возобновляемой такой перемѣны въ направленіи движенія, тѣло, кромѣ уклоненія своего въ сторону съ надлежащаго пути, приметъ еще и вращательное движеніе.

§ 40. Когда разсматривается движеніе въ совершенно-упругой жидкости, то надобно удвоить выше найденныя величины сопротивленія. Дѣйствительно въ семъ случаѣ частицы жидкой массы $ADvdt$ отражаются отъ ударяющей плоскости и получаютъ скорость гораздо большую противъ остающейся скорости тѣла $v - dv$, и если назовемъ u сію неизвѣстную скорость, то подобно предъидущему, основываясь на равенствѣ между количествами движенія до удара и послѣ удара, будемъ имѣть

$$Mdv = ADvdt. u.$$

Но при соудареніи совершенно упругихъ тѣлъ, также и живыя силы прежде и послѣ удара

должны быть равны, следовательно получимъ еще уравненіе

$$Mv^2 = M(v - dv)^2 + ADv dt. u^2,$$

которое приводится къ

$$2Mv dv = ADv dt. u^2.$$

Сей выводъ, сравненный съ предъидущимъ даетъ $u = 2v$, и $Mdv = 2ADv^2 dt$, или

$$MR = 2ADv^2,$$

что и надлежало доказать.

Въ случаѣ же жидкости совершенно упругой, сопротивленіе заключаться будетъ между двойнымъ и одинакимъ сопротивленіемъ для неупругихъ жидкостей найденнымъ.

§ 41. Чтобы привести первую изъ найденныхъ величинъ сопротивленія къ извѣстнымъ мѣрамъ, то означивъ чрезъ h высоту соотвѣтствующую скорости v , будетъ имѣть $v^2 = 2gh$ и $MD = 2ARgh$. Но количество $2Ah$ выражаетъ объемъ призмы, которой основаніе A , а высота $2h$, посему $2DAh$ будетъ масса жидкой призмы, имѣющей основаніемъ ударяющую плоскость A , а высотой двойную ту высоту h , съ коей тяжелое тѣло должно упасть въ безвоздушномъ мѣстѣ для пріобрѣтенія скорости v движущагося тѣла, количество же $2ADgh$ изобразить

вѣсь сей призмы. Въ совершенно упругихъ жидкостяхъ мѣрою сопротивленія должно принимать двойной вѣсь той же призмы, то есть $MR=4ADg^h$.

Всѣ почти ученые согласно принимаютъ въ своихъ вычисленіяхъ, что сопротивленіе жидкостей пропорціонально квадратамъ скоростей, касательно же совершенной величины онаго, то находятъ ее несовмѣстною съ выше найденными по Теоріи выводами для неупругихъ жидкостей, такъ что предъидущую Теорію можно употреблять только для одного сравненія сопротивленій, а для настоящаго измѣренія она недостаточна, потому что многія обстоятельства упущены въ ней, которыя однакожь требуютъ великаго вниманія. Невтонъ былъ первый, который занимаясь изслѣдованіемъ движенія тѣлъ въ сопротивляющихся срединахъ нашель, что сопротивленіе воздуха при быстрыхъ движеніяхъ не должно быть пренебрегаемо, и что оно въ четверо меньше противу того, что даетъ теоретическій выводъ для сей жидкости; и вообще онъ заключилъ, что сопротивленіе жидкости, равно вѣсу столба оной, имѣющаго основаніемъ давимую плос-

кость, а выотою такое разстояніе, съ котораго тяжелое тѣло свободно падая въ безвоздушномъ пространствѣ пріобрѣтаетъ одинакую скорость съ движущимся тѣломъ. Сдѣланные имъ опыты достаточно подтвердили сіе заключеніе (*Principes de math. livre II, sect. VII*) Прежде сего препятствіе отъ воздуха въ движеніи тѣлъ почиталось ничтожнымъ, и казалось что воздухъ, котораго плотность есть въ нѣсколько тысячъ разъ менѣе плотности брошаемыхъ изъ орудій тяжелыхъ тѣлъ, не можетъ чувствительно перемѣнить параболическаго движенія, которое по сей причинѣ и было упорно защищаемо многими артиллерійскими писателями, а въ особенности Блонделемъ, Белидоромъ и Галлеемъ.

§ 42. Слѣдуя опытамъ Боссю, кавалера Борда и Гютона, находимъ Теорію Невтона не совсемъ вѣрною въ практикѣ; и въ особенности при весьма быстрыхъ движеніяхъ величина сопротивленія, опредѣляемая вѣсомъ жидкой призмы, у коей основаніе есть давимая плоскость, а высота равна той высотѣ, съ которой должно упасть тяжелое тѣло, дабы пріобрѣсть скорость движущейся плоскости, многимъ менѣе истинной величины. А потому положимъ,

что неопредѣленная высота жидкой призмы, которой вѣсомъ измѣряется сопротивленіе, относится къ высотѣ $2h = \lambda : 1$, гдѣ количество λ означаетъ такое число, которое предоставляется опредѣлить опытомъ: сія высота будетъ равна $2\lambda h$, а вѣсъ жидкой призмы $= 2\lambda ADgh$. Слѣдовательно сопротивленіе на плоскую поверхность изобразится формулою.

$$MR = 2\lambda ADgh \text{ или } MR = \lambda ADv^2 \dots (t), \text{ ибо } v^2 = 2gh.$$

Въ случаѣ плоскости, наклоненной къ направленію движенія будемъ имѣть сопротивленіе: $MR' = 2\lambda ADgh \sin^2 \alpha$ или $MR' = \lambda ADv^2 \sin^2 \alpha \dots (u)$.

По изслѣдованіямъ Невтона коэффициентъ $\lambda = \frac{1}{2}$ какъ для неупругихъ, такъ и упругихъ жидкостей.

§ 43. Многія причины, коимъ нельзя дать постояннаго правила, различно измѣняютъ найденное въ § 38 количество сопротивленія. Мы представимъ здѣсь главнѣйшія изъ нихъ:

1) Поелику каждая частица жидкости, ударяемая тѣломъ, приводитъ въ движеніе въ тоже самое время великое множество другихъ частицъ, окружающихъ оную, сіи же послѣднія сообщаютъ движеніе по разнымъ направленіямъ

и прочимъ частицамъ, съ ними соприкосновеннымъ, и т. д., то изъ сего ясно видно, что нѣкоторая часть жидкости будетъ совращена съ направленія перпендикулярнаго удара и встрѣтитъ плоскость въ косвенномъ направленіи, или совсѣмъ не доходя до плоскости уклонится въ стороны тѣла и не окажетъ на него надлежащаго дѣйствія. Сіе разнообразное движеніе частицъ, отличное отъ предположеннаго нами въ § 38, должно ошутительно перемѣнить количество сопротивленія, опредѣляемаго формулою $MR=ADv^2$. Но гдѣ должно начинаться совращеніе частицъ? на какое разстояніе онѣ совращаются, и ускоряется ли движеніе ихъ по сторонамъ тѣла? по какому закону ускоряется сіе движеніе? и проч... Все это намъ неизвѣстно.

2) При большемъ протяженіи плоскости, частицы жидкости встрѣчаютъ болѣе препятствій для уклоненія своего въ стороны тѣла; такъ что дѣйствительное сопротивленіе противъ плоскостей разной величины, вмѣсто того, чтобы быть пропорціональнымъ протяженію оныхъ, находится нѣсколько въ большемъ отношеніи, чѣмъ отношеніе плоскостей. Послед-

нее отношеніе имѣло бы мѣсто тогда, когда бы каждый слой жидкости, послѣ сообщеннаго ему удара движущейся плоскостію, тотчасъ отъ нея былъ отдѣленъ и не препятствовалъ непосредственному дѣйствію на слѣдующій слой, ибо тогда сопротивленіе пропорціонально было бы числу частицъ, поражаемыхъ въ одно время. Но таковое предположеніе, какъ замѣчено выше, допущено быть не можетъ.

Опыты, произведенные кавалеромъ Борда совершенно подтвердили непропорціональность сопротивленій плоскостямъ различной величины. По его изслѣдованіямъ, квадратная плоскость, имѣющая въ сторонѣ 4 Парижскихъ дюйма и движущаяся со скоростію 25,47 Парижскихъ футовъ въ секунду выдерживаетъ отъ воздуха сопротивленіе равное вѣсу воздушнаго столба, у котораго основаніе есть сія плоскость, а высота $\equiv 16,1$ футовъ, вмѣсто 10,74 футовъ высоты, соотвѣтствующей скорости 25,47 футовъ; квадратная же плоскость, имѣющая въ сторонѣ 6 Парижскихъ дюймовъ и побуждаемая съ такою же скоростію испытываетъ сопротивленіе равное вѣсу воздушнаго столба, у котораго основаніе есть сія плоскость, а высота $\equiv 17,6$

фут.; и для квадратной плоскости, косей стороны $\equiv 9$ дюймамъ, при той же скорости, высота воздушнаго столба измѣряющаго сопротивленіе, равна 19,1 фута. Изъ сего заключаемъ, что сопротивленіе воздуха на плоскія поверхности увеличивается въ отношеніи большемъ, чѣмъ отношеніе самыхъ поверхностей; ибо найденныя здѣсь сопротивленія на три квадратныя плоскости не относятся просто, какъ числа 16 : 36 : 81 изображающія ихъ площади, но какъ 16. 16, 4 : 36. 17, 6 : 81. 19, 1. Сверхъ того по опытамъ сего испытателя оказалось также, что плоскія поверхности одинакой величины, но разнаго вида, подвержены бываютъ не равнымъ сопротивленіямъ, и что сіи сопротивленія на круговыя плоскости получаются меньшими. Въ самомъ дѣлѣ кругъ, имѣя въ діаметрѣ $4\frac{1}{2}$ Парижскихъ дюйма, и различаясь весьма мало отъ квадрата, коего сторона равна 4-мъ дюймамъ, при скорости 12,9 фута въ одну секунду претерпѣваетъ сопротивленіе $\equiv 0,03613$ Парижскихъ фута, между тѣмъ квадратъ при такой же скорости претерпѣваетъ сопротивленіе $\equiv 0,0383$ Парижскихъ фута. И такъ не возможно составить общаго правила для опредѣ-

ленія сопротивленія жидкостей на прямыя поверхности; скорость движенія, величина и видъ ихъ, также большая или меньшая плотность жидкости, разнообразно измѣняютъ сіе сопротивленіе. Опытами дознано, что въ тонкихъ и упругихъ жидкостяхъ сопротивленіе оказывается немного меньшимъ, нежели какъ бы по отношенію плотностей слѣдовало.

3) Мы нашли по Теоріи, что сопротивленія жидкости при косвенныхъ движеніяхъ и при равныхъ прочихъ обстоятельствахъ уменьшаются въ отношеніи квадратовъ синусовъ угловъ ударенія. Но какъ правило сіе выведено было изъ того предположенія, что сопротивленіе производится единообразно во всѣхъ точкахъ ударяемой плоскости, и что оно зависитъ отъ числа частицъ, встрѣчаемыхъ ею въ каждое мгновеніе, чего однако въ самомъ дѣлѣ не бываетъ, ибо частицы жидкости въ сторонѣ острого угла, составляемаго плоскостію съ направлениемъ движенія, находятъ болѣе препятствія для свободнаго своего уклоненія, нежели въ сторонѣ тупаго, то по сей причинѣ изъ многихъ опытовъ и найдено, что сопротивленія, по обыкновенному правилу вычисляемыя, всегда быва-

ютъ меньше дѣйствительныхъ, и что онѣ тогда только довольно близко подходятъ къ истиннымъ, когда углы ударенія не менѣе 60 град.

4) Мы видѣли въ § 38, что сопротивленіе, встрѣчаемое тѣломъ со стороны одной и той же жидкости, пропорціонально квадрату скорости. Опыты удостовѣряютъ, что сей законъ менѣе отступаетъ отъ истины, нежели предшествующіе. Если же онъ погрѣшаетъ, то не въ иномъ какомъ либо отношеніи, какъ употребляя его для сравненія дѣйствій сопротивленія между скоростями весьма много различающимися, то есть: между скоростію тихаго движенія и между скоростію чрезвычайно быстраго движенія; и находимъ для послѣдняго сопротивленіе слишкомъ малое, если оно выводится посему правилу изъ сопротивленія противопологаемаго жидкостію медленно движущемуся тѣлу. Впрочемъ все сіе зависитъ еще отъ свойства жидкости: если она упругая, то выводы тѣмъ ближе подойдутъ къ истиннымъ, чѣмъ упругость значительнѣе; ибо, по мѣрѣ большей степени упругости, частицы жидкости скорѣе усиливаются возстановить между собою равновѣсіе, разстроенное ударомъ,

и удобнѣе текутъ къ задней сторонѣ движущагося тѣла. Но при семъ входятъ въ разсмотрѣніе слѣдующія два обстоятельства; 1-е поелику упругая жидкость есть также и сжимаемая, то можетъ случиться при очень быстрыхъ движеніяхъ, что частицы оной, не успѣвъ уйти къ сторонамъ тѣла, сгустятся на передней части его, и чрезъ то увеличатъ плотность, а слѣдовательно и сопротивленіе жидкости; 2-е скорость движенія можетъ быть столь велика что жидкость въ то же мгновеніе не успѣетъ слѣдовать за движущимся тѣломъ и наполнить пустого пространства имъ оставляемаго: явно, что въ такомъ случаѣ, если жидкость есть воздухъ, кромѣ увеличиванія сопротивленія, причиняемаго большею плотностію, тѣло должно еще преодолевать все давленіе атмосферы. Скорость, необходимая для произведенія сего дѣйствія по крайней мѣрѣ должна быть болѣе 1300 Англійскихъ футовъ въ секунду; ибо предположивъ среднее давленіе атмосферы равномѣрное вѣсу ртутнаго столба въ 30 Англійскихъ дюймовъ высоты или вѣсу водянаго столба въ 33,965 Англійс. фута высоты, и воду въ $8\frac{1}{3}$ раза тяжелѣе воздуха, то высота атмосферы

по всюду столь же плотной, какъ и на поверхности земли, равна будетъ $33,965 \times 83\frac{2}{3} = 28304,2$ Футовъ. Но воздухъ, подобно всякой тяжелой жидкости, истекающей изъ сосуда малымъ отверстіемъ, бросается въ пустое пространство со скоростію, которую бы тяжелое тѣло пріобрѣло, падая съ сей высоты, слѣдовательно, при среднемъ давленіи атмосферы, таковая скорость составлять будетъ около 1350 Англійскихъ Футовъ въ секунду. Вообще зависимо отъ различнаго состоянія воздуха, какъ то его давленія и температуры, она измѣняться можетъ отъ 1300 до 1400 Футовъ. И такъ, если скорость движущагося тѣла будетъ равна или болѣе той, съ которою воздухъ стремится замѣстить пустое пространство, тогда не одно сопротивленіе, но и давленіе атмосферы замедляетъ движеніе онаго, и очевидно, что въ случаѣ меньшей скорости тѣло должно преодолевать часть сего давленія. Сіе количество, выражающееся разностію между давленіями жидкости на переднюю и заднюю стороны, движущагося тѣла пропадаетъ, когда плотность жидкости единообразна кругомъ тѣла. Но сіе имѣетъ мѣсто въ случаѣ медленнаго лишь движе-

ніа, или когда упругость жидкости столь велика, что равновѣсіе нарушенное ударомъ тѣла тотчасъ возстановляется между частицами оной. Въ такомъ только случаѣ можно въ точности допустить законъ сопротивленія пропорціональнаго квадратамъ скоростей. Во всякомъ же иномъ случаѣ, плотность жидкости на передней части движущагося тѣла измѣняется вмѣстѣ со скоростію его, и слѣдовательно тѣло должно проходить какъ будто бы средину неодинакой плотности; но такое предположеніе отвергаетъ единообразную плотность, для коей выведено правило сопротивленія пропорціональнаго квадратамъ скоростей, и проч. Мы не думаемъ останавливаться болѣе на семъ предметѣ, о которомъ дальнѣйшія изслѣдованія открыли бы новыя еще затрудненія; а довольствуемся замѣчаніемъ, что для начертанія полной и достаточной Теоріи о сопротивленіи жидкостей, необходимо нужно принять въ разсмотрѣніе всѣ обстоятельства въ предъидущихъ параграфахъ упоминаемыя; какъ единственное средство для полученія общаго закона, изъ котораго можно было бы вывести всѣ частные случаи, и для составленія формулы сопротив-

ленія, прилагаемой ко всѣмъ степенямъ скорости тѣла, и ко всѣмъ степенямъ плотности и упругости жидкости.

§ 44. Изъ того начала, что сопротивленіе жидкости на плоскость, наклоненную къ направленію движенія, пропорціонально квадрату синуса угла паденія, легко вывести сопротивленіе на какія либо кривыя поверхности. Но мы исключительно здѣсь рассмотримъ тѣла вращенія, движущіяся по направленію своей оси, потому что поверхность таковыхъ тѣлъ со всѣхъ сторонъ единообразна и симметрически расположена противъ дѣйствія жидкости, слѣдственно боковыя силы, перпендикулярныя къ направленію движенія, взаимно уничтожаются, и сопротивленіе жидкости отнюдь не перемѣняетъ направленія движенія, но только одну скорость оныхъ. И такъ положимъ, что ADB (фиг. 11) будетъ кривая, производящая тѣло вращенія, на которое должно сыскать сопротивленіе: при чемъ ось вращенія AB составляетъ направленіе движенія. Если ADB полукругъ, то явно, что тѣло вращенія будетъ шаръ, но для общаго исчисленія мы представимъ чрезъ ADB , какую ни есть кривую.

Между прочимъ не бесполезно знать ту часть поверхности, которая поражается частицами жидкости, и отличить оную отъ остальной части тѣла: сія часть, на которую жидкость оказываетъ свое усиліе, происходитъ отъ обращенія дуги кривой AMD, простирающейся отъ точки А до D, ~~гдѣ кривая начинается~~ ~~склоняться къ оси~~ и гдѣ касательная параллельна сей оси. Примемъ теперь ось вращенія за ось абсциссъ, и означимъ координаты AP и PM точки М относительно чрезъ x и y , при чемъ проведемъ ординату mp , безконечно близкую къ MP; то будетъ $Pp=dx$, $mn=dy$ и $Mm=ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Сей элементъ Mm дуги при обращеніи около оси АВ произведетъ поясъ, коего поверхность $=2\pi yds$; здѣсь количество π означаетъ отношеніе окружности къ діаметру круга. А какъ всѣ части сего пояса поражаются частицами жидкости подъ одинаковымъ

угломъ mMn , коего синусъ $=\frac{dy}{ds}$ а косинусъ $=\frac{dx}{ds}$, по сему означивъ скорость движущагося

тѣла чрезъ v , массу его чрезъ M , плотность жидкости чрезъ D , и поставивъ въ выраженіе

(u) величину $2\pi y ds$ вмѣсто A и $\frac{dy}{ds}$ вмѣсто $\sin \alpha$

найдется сопротивленіе, выдерживаемое поясомъ по прямой MC нормальной къ Mm , равнымъ $\lambda D v^2 \cdot 2\pi y ds \cdot \frac{dy^2}{ds^2} = 2\pi \lambda D v^2 \cdot \frac{y dy^2}{ds}$, и отсюда

сопротивленіе по направленію движенія CE

равнымъ $2\pi \lambda D v^2 \cdot \frac{y dy^3}{ds} \cos ECR = 2\pi \lambda D v^2 \cdot y \frac{dy^2}{ds} \sin$

$mMn = 2\pi \lambda D v^2 \cdot \frac{y dy^3}{ds}$ интеграль послѣдняго выраже-

нія, то есть $2\pi \lambda D v^2 \int y \frac{dy^3}{ds^2}$, изобразить сопротив-

леніе претерпѣваемое поверхностію, произведенною обращеніемъ дуги AM ; а распространивъ сей интеграль до предѣла D , будемъ имѣть сопротивленіе MR , которое жидкость противопоставляетъ движенію тѣла.

§ 45. Сдѣлаемъ примѣненіе сей формулы къ шару, какъ такому тѣлу, которое болѣе всѣхъ другихъ употребительно въ Артиллеріи. Означивъ радіусъ онаго чрезъ r , будетъ уравненіе производящаго круга, отнесенное къ концу діаметра $y^2 = 2rx - x^2$. Взявъ дифференціаль, найдется $y dy = (r - x) dx$; но $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{r dx}{y}$,

сѣдовательно будемъ имѣть $\frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r}$, и

$$\frac{ydy^3}{ds^2} = ydy \frac{dy^2}{ds^2} = \frac{(r-x)^3 dx}{r^2};$$

отсюда

$$\int \frac{ydy^3}{ds^2} = -\frac{(r-x)^4}{4r^2} + c.$$

Но при положеніи $x=0$, интегралъ сей долженъ быть равенъ нулю, сѣдовательно постоянная $c = \frac{1}{4}r^2$, и

$$\int \frac{ydy^3}{ds^2} = \frac{1}{4}r^2 - \frac{(r-x)^4}{4r^2}$$

Симъ образомъ искомое сопротивленіе на неопредѣленный сегментъ МАМ' будетъ

$$MR = 2\pi\lambda Dv^2 \int \frac{ydy^2}{ds} = 2\pi\lambda Dv^2 \left\{ \frac{1}{4}r^2 - \frac{(r-x)^4}{4r^2} \right\}$$

А дабы получить сопротивленіе на переднюю половину шара или на цѣлый шаръ, что все равно, должно въ найденномъ интегралѣ сдѣлать $x=r$, и будетъ тогда $MR = \frac{1}{2}\pi\lambda Dv^2 r^2$.

Но перпендикулярное сопротивленіе, которому подвергается большой кругъ шара, равно $\pi\lambda Dv^2 r^2$, потому что площадь сего круга $= \pi r^2$; то изъ сего заключаемъ, что сопротивленіе встречаемое шаромъ въ половину меньше со-

противленія, встрѣчаемаго цилиндромъ движущимся съ такою же скоростью, какъ и шаръ, по направленію своей оси, и имѣющимъ равную съ нимъ массу и тотъ же въ основаніи діаметръ. Сдѣлавъ, какъ прежде, $v^2 = 2gh$, будемъ имѣть касательно шара

$$MR = \frac{1}{2}\pi\lambda Dv^2r^2 = \pi\lambda Dghr^2 \dots (v)$$

и касательно цилиндра, котораго основаніе есть большой кругъ шара, $MR' = \pi\lambda Dv^2r^2 = 2\pi\lambda Dghr^2$

Укосняющая сила, или сила сопротивленія, отнесенная къ единицѣ массы шара будетъ

$$R = \frac{\pi\lambda Dghr^2}{M}, \text{ или } R = \frac{\pi\lambda Dv^2r^2}{2M}.$$

По Невтонову положенію $\lambda = \frac{1}{2}$ и сопротивленіе на шаръ равно $\frac{1}{2}\pi Dghr^2$, то есть равно вѣсу жидкаго цилиндра, имѣющаго основаніемъ большой кругъ шара, а высотой половину той высоты, съ которой тѣло въ безвоздушномъ мѣстѣ упасть должно, дабы пріобрѣсть скорость шара.

§ 46. Пусть будетъ для 2-го примѣра прямой конусъ ABC (фиг. 12), движущійся по направленію своей оси AD. Чтобы опредѣлить сопротивленіе на круглую его поверхность, то возьмъ вершину A за начало координатъ и сдѣ-

лавъ $AD=h$, $BD=r$, $AB=l=\sqrt{r^2+h^2}$, надлежить въ общую формулу $2\pi\lambda Dv^2 \int \frac{ydy^3}{ds^2}$ (§ 43) по-

ставить $y=\frac{rx}{h}$, $dy=\frac{r dx}{h}$ и $ds=\frac{l dx}{h}$, кото-

рая обратится въ $2\pi\lambda Dv^2 \int \frac{r^4}{h^2 l^2} x dx = 2\pi\lambda Dv^2$

$\frac{r^4 x^2}{2h^2 l^2} + C$; здѣсь C означаетъ постоянную при-

даваемую къ интегралу. Распространивъ величину его на всю боковую поверхность конуса отъ $x=0$, до $x=h$, получимъ искомое сопроти-

вленіе на сей конусъ $\pi\lambda Dv^2 \frac{r^4}{l^2}$, которое от-

носится къ сопротивленію $\pi\lambda Dv^2 r^2$, встречаемому его основаніемъ, какъ квадратъ радіуса основанія къ квадрату бока конуса.

Въ случаѣ конуса DAD' (фиг. 11) вписаннаго въ полушаръ $DMAM'D'$ и движущагося какъ и шаръ по направленію оси CA , будетъ $h=r$, $l^2=2r^2$ и слѣдовательно сопротивленіе на конусъ $=\frac{1}{2}\pi\lambda Dv^2 r^2$, то есть равное сопротивленію на шаръ.

§ 47. Гютонъ изъ опытовъ своихъ, при помощи баллистическаго отвѣса и вращательной машины Робинса, извлекъ касательно сопро-

тивленія воздуха на тѣла слѣдующія правила (*).

1) При равныхъ скоростяхъ сопротивленія относятся почти, какъ поверхности тѣлъ подобнаго вида, и нѣсколько въ большемъ отношеніи при большихъ поверхностяхъ. По опытамъ оказалось, что при скоростяхъ простирающихся отъ 300 до 2000 футовъ въ секунду, сопротивленія на три ядра, имѣющія въ діаметръ одно два дюйма, 2-е 2,78 дюйма и 3-е 3,55 дюйма, находятся въ большемъ отношеніи противу поверхностей ихъ; однакоже разность между отношеніемъ сопротивленій и отношеніемъ поверхностей или квадратовъ діаметровъ, такъ малозначительна, что въ большей части вычисленійхъ, относящихся къ Артиллеріи и къ другимъ практическимъ занятіямъ, вообще оба сіи отношенія можно почитать равными.

2) Сопротивленіе на одну и ту же поверхность тѣла при различныхъ скоростяхъ въ движеніяхъ медленныхъ, почти пропорціонально квадрату скорости, увеличиваясь однако же не много болѣе противу сего отношенія при постепенномъ возрастаніи скорости.

(*) Nouvelles experiences d'artillerie par Charles Hutton traduit de l'anglais par O. Terquem. Seconde partie 1826.

3) Круглыя и угловатыя поверхности тѣлъ, подвержены меньшему сопротивленію, нежели плоскія поверхности равнаго діаметра. Не должно однако же изъ того заключить, что чѣмъ острѣе поверхность, тѣмъ меньшему она подвержена сопротивленію, ибо выпуклая поверхность полушара встрѣчаетъ меньшее сопротивленіе, нежели остроконечная поверхность вписаннаго въ немъ конуса.

4) Когда заднія части движущихся тѣлъ имѣютъ различные виды, то и сопротивленія различны, хотя бы переднія части оныхъ были совершенно подобны и равны; что происходитъ безъ сомнѣнія отъ различныхъ давленій воздуха на заднія части. Такъ напримѣръ, переднее основаніе движущагося въ воздухъ цилиндра встрѣчаетъ меньшее сопротивленіе, нежели совершенно равныя основанія конуса и полушара; основаніе полушара встрѣчаетъ меньшее сопротивленіе, нежели равное основаніе конуса; выпуклая поверхность полушара встрѣчаетъ меньшее сопротивленіе, нежели цѣлый шаръ, имѣющій съ онымъ одинакій радіусъ; и проч.

5) Сопротивленіе на основаніе полушара от-

носится къ сопротивленію на выпуклую его поверхность или на шаръ, почти какъ $2\frac{2}{5} : 1$, вмѣсто отношенія $2 : 1$ доставляемаго Теоріею (§ 45). Сопротивленіе на основаніе конуса, котораго высота равна діаметру основанія, относится къ сопротивленію на выпуклую его поверхность почти $= 2,3 : 1$, что равно простому отношенію между бокомъ и радіусомъ основанія, вмѣсто квадратнаго отношенія доставляемаго Теоріею (§ 46).

§ 48. Слѣдующая таблица составленная Гютономъ показываетъ, при различныхъ скоростяхъ простирающихся отъ 5 до 2000 Футовъ въ секунду, 1) соотвѣтственные сопротивленія воздуха на ядро въ 2 дюйма въ діаметрѣ, найденныя по опытамъ и выраженныя въ унціяхъ Англійскаго вѣса *avoir du poids*; 2) сопротивленія на то же ядро, вычисленныя по обыкновенной Теоріи предложенной Невтономъ, или по формулѣ (v) $\pi \lambda D g \frac{r^2 v^2}{2g}$, которая по поставленіи численныхъ величинъ $\lambda = \frac{1}{2}$, $\pi = 3,1416$, $Dg = 1\frac{1}{5}$ унцій = удѣльному вѣсу воздуха, $v = 1$ дюйму $= \frac{1}{12}$ фута, $g = 16$ футамъ, приводится къ $\frac{1}{4888} v^2$ или $\frac{(3v)^2}{44000}$; 3) переменныя ве-

личины коеффиціента λ , опредѣляющія отно-
шеніе между высотой воздушнаго столба, дав-
леніемъ коего измѣряется сопротивленіе, и
между высотой соотвѣтствующею скорости
ядра; 4) степени скорости, соотвѣтствующія
истиннымъ сопротивленіямъ; онѣ находятся,
сравнивая сопротивленіе найденное по опытамъ
и принадлежащее скорости 100 футовъ, съ
каждымъ изъ послѣдующихъ сопротивленій,
принадлежащихъ скоростямъ 200, 300, 400 и
проч футовъ; 5) истинныя сопротивленія, най-
денныя по опытамъ и выраженныя въ фун-
тахъ Англійскаго торговаго вѣса *avoir du poids*
и 6) сіи же сопротивленія въ Русскихъ фун-
тахъ выраженныя (*).

(*) 1 Англійскій торговый фунтъ *avoir du poids* = 1,1083
Русск. фунта = 106,396 золот.

Ско- рости въ се- кунду.	Сопроти- вленія по опытамъ найден- ныя.	Сопроти- вленія по Теоріи вычис- лен- ныя.	Вели- чины коэф- фициен- та. λ	Степени скорости соответ- ствующія ис- тиннымъ сопроти- вленіямъ.	Сопроти- вленія по опытамъ найден- ныя и вы- ражен- ныя въ фунтахъ (avoir du poids .	Сопроти- вленія по опытамъ найден- ныя и въ Русскихъ фунтахъ выражен- ныя.
Фунты	Унціи	Унціи				
5...	0,006 ..	0,005...	0,60...			
10 ..	0,026...	0,021...	0,61..			
15...	0,058..	0,046 ..	0,62 .			
20...	0,103...	0,082..	0,63..			
25...	0,163..	0,128..	0,63..			
30...	0,237...	0,184...	0,64...			
40...	0,427...	0,329 ..	0,65..			
50 ..	0,676...	0,511...	0,66 ..			
100...	2,78...	2,046...	0,68..		0,174...	0,193 ..
200...	11,54..	8,18...	0,69..	2,028...	0,709..	0,786 ..
300..	25,8 ..	18,4...	0,71...	2,028...	1,612...	1,787...
400..	46,5...	32,7...	0,72..	2,052...	2,906..	3,221...
500...	74,4...	51,2...	0,73...	2,042..	4,650...	5,154..
600..	110,4...	73,6...	0,75 .	2,055...	6,900..	7,647...
700..	156,0...	100,2 ..	0,78...	2,069 ..	9 750...	10,806 ..
800..	212,0..	130,9..	0,81...	2,084...	13,250...	14,685...
900...	280,3..	165,7...	0,84..	2,099...	17,519...	19,416...
1000 .	362,1..	204,6...	0,88..	2,115...	22,625...	25,075...
1100..	456,9...	247,6...	0,92...	2,128...	28,556...	31,649...
1200 ..	564,4...	294,6 ..	0,96...	2,158...	35,275..	39,095...
1300 .	685,3...	345,7...	0,99...	2,146...	42,706...	47,331..
1400...	811,5 ..	401,0...	1,01..	2,151...	50,719...	56,212...
1500...	947,1..	460,1...	1,03...	2,153 .	59,194..	65,695...
1600 ..	1086,9...	525,7...	1,04..	2,152..	67,931...	75,288. .
1700..	1228,4...	591,2 ..	1,03...	2,150..	76,775...	85,090..
1800...	1368,6...	662,8...	1,02...	2,145...	85,557...	94,804..
1900..	1505,7 ..	738,5..	1,01..	2,141 ..	94,106...	104,298...
2000 ..	1637,8..	818,3..	1,00...	2,136 ..	102,362...	113,448...

Изъ сей таблицы видно, что въ началѣ при весьма малыхъ скоростяхъ коэффициентъ со-
противленія λ не много болѣе $\frac{3}{5}$; съ возраста-

ніємъ же скорости постепенно увеличивается, но только дотолѣ, пока скорость равна будетъ 160 футовъ въ секунду. Тогда пустота позади движущагося ядра, образовавшаяся совершенная (§ 43. чл. 4), и коэффициентъ дѣлается наибольшимъ и равнымъ 1,04. Послѣ того коэффициентъ сей постепенно убываетъ и дѣлается равнымъ 1-цѣ при скорости 2000 футовъ въ секунду. То же самое имѣетъ мѣсто и въ отношеніи къ показателямъ степеней сопротивленія, наибольшій изъ нихъ соотвѣтствуетъ скорости въ 1500 футовъ и равенъ 2,153 или почти $=2\frac{2}{3}$; среднее между ими арифметическое число равно 2,104 или почти $=2\frac{1}{10}$. Вотъ способъ опредѣлять по порядку сихъ показателей: означивъ данныя двѣ скорости чрезъ v и v' , соотвѣтствующія сопротивленія чрезъ s и s' , и неизвѣстнаго показателя степеней отъ v и v' , пропорціональных симъ сопротивленіямъ чрезъ x , будемъ имѣть $v^x : v'^x = s : s'$ или $\left(\frac{v'}{v}\right)^x = \frac{s}{s'}$; отсюда по взятіи логарифма, получимъ $x \log\left(\frac{v'}{v}\right) = \log\left(\frac{s'}{s}\right)$ и

$$x = \frac{\log S' - \log S}{\log \left(\frac{v'}{v} \right)}.$$

Дабы приложить сію формулу къ выводамъ заключающимся въ предъидущей таблицѣ, то начавъ со скорости 100 футовъ $=v$ и соотвѣтственнаго сопротивленія 2,78 $=s$, будемъ имѣть, для слѣдующихъ по порядку взятыхъ скоростей, частное $\frac{v'}{v} = 2, 3, 4$ и проч. и $s' = 11, 34; 25, 8;$ и проч.

§ 49. Зная изъ таблицы сопротивленіе воздуха на ядро въ 2 дюйма въ діаметрѣ, движущееся съ извѣстною скоростію, можно будетъ опредѣлить сопротивленіе на другое какое либо ядро, движущееся съ такою же скоростію. Ибо какъ сопротивленія при равныхъ скоростяхъ относятся какъ поверхности ядеръ (§ 47), или какъ квадраты ихъ діаметровъ, то означивъ чрезъ k діаметръ даннаго ядра, чрезъ s сопротивленіе встрѣчаемое ядромъ въ 2 дюйма въ діаметрѣ и соотвѣтствующее опредѣленной скорости, найдется по пропорціи $4 : k^2 = s : \frac{1}{4} k^2 s$ сопротивленіе, соотвѣтствующее той же самой скорости и претерпѣваемое ядромъ, коего діаметръ $= k$ дюймамъ, равное $\frac{1}{4} k^2 s$. Напримѣръ,

дабы найти сопротивленіе на 24-хъ фунтовое ядро, брошенное со скоростью 2000 футовъ въ секунду, надлежитъ въ послѣднее выраженіе поставить діаметръ сего ядра $k=5,797$, дюйма, и $s=113,448$ фунта=сопротивленію, которое встрѣчаетъ ядро въ 2 дюйма въ діаметръ при скорости 2000 футовъ; и будетъ искомое сопротивленіе $=\frac{1}{4}(5,7972)^2 \cdot 113,448=955$ фунтамъ.

§ 50. Мы замѣтили въ § 43 чл. 4, что ядро претерпѣваетъ два различныя сопротивленія: одно происходитъ собственно отъ недѣятельности (инерціи) частицъ воздуха, коимъ брошенное ядро безпрестанно передаетъ часть количества своего движенія, и ясно видно, что въ семъ отношеніи разсматриваемое сопротивленіе, должно измѣняться пропорціонально квадратамъ скоростей; другое же происходитъ отъ неравнаго давленія атмосферы на переднюю и заднюю стороны движущагося ядра и увеличивается постепенно и правильно по мѣрѣ того, какъ скорость возрастаетъ, увѣличивается однако же дотолѣ, пока скорость будетъ равна или больше той, съ которою воздухъ низвергается въ пустоту, и тогда для всѣхъ высшихъ скоростей становится уже оно постояннымъ, Сии

обстоятельства ясно показываютъ, почему сопротивленія выведенныя изъ опытовъ безпрерывно возрастають гораздо въ большемъ отношеніи, чѣмъ отношеніе квадратовъ скоростей, до извѣстнаго только предѣла, и почему нѣтъ никакой степени скорости съ показателемъ цѣлымъ и никакого одночленнаго выраженія, которое было бы пропорціонально сопротивленіямъ. Правда, что одночленное количество $\frac{v^{2,1}}{5700}$ опредѣляетъ довольно точно всѣ сопротивленія, но по причинѣ дробнаго показателя 2,1 сія формула неудобоприлагаема къ изчисленіямъ, необходимо заключающимъ въ себѣ выраженія дифференціаловъ и интеграловъ.

И такъ надлежитъ прибѣгнуть къ двучленному выраженію или къ формулѣ $mv^2 + nv = s$, содержащей двѣ цѣлыя степени скорости 1-ю и 2-ю, умноженныя на неопредѣленные коэффициенты т. п. Чтобы найти численное ихъ значеніе, мы поставимъ вмѣсто v частныя двѣ скорости, взятыя изъ предъидущей таблицы. По не многимъ испытаніямъ найдется, что скорости 1200 и 1800 наилучше удовлетворяють предположенной цѣли. Слѣдовательно, сдѣлавъ

сперва $v=1200$ и $s=39,095$ фунта; потомъ $v=1800$ и $s=94,804$ фунта, будемъ имѣть для опредѣленія величинъ m и n слѣдующія два уравненія:

$$1200^2 m + 1200 n = 39,095$$

$$1800^2 m + 1800 n = 94,804;$$

которыя, по раздѣленіи 1-го на 1200 и 2-го на 1800, перемѣняется въ

$$1200 m + n = 0,03257916,$$

$$1800 m + n = 0,05266888 :$$

отсюда удобно найдутся $m=0,0000334828$, $n=-0,00760027$ и общая формула выражающая сопротивленіе, въ фунтахъ приметъ видъ

$$0,00003348 v^2 - 0,007600 v = s (*),$$

но сопротивленія вычисленныя по сей формулѣ, согласуются съ настоящими только при скоростяхъ, кои больше 400 футовъ, для меньшихъ же скоростей формула

$$0,0000196 v^2 = s$$

доставляетъ величины болѣе сходныя съ ис-

(*) Сію формулу, выражалъ въ Англійскихъ фунтахъ, чрезъ раздѣленіе членовъ оной на 1,10857 (примѣчаніе къ § 48), приведемъ къ $0,00003026 v^2 - 0,007 v$, то есть къ той формулѣ, которую Гютонъ вывелъ другимъ образомъ, но болѣе сложнымъ, нежели показанный. Смотри *Nouvelles experiences d'Artillerie par Charles Hutton. Seconde partie. p. 149*

тинными сопротивленіями; она выводится, поставляя въ общее уравненіе $m v^2 = s$, соответственныя величины заимствованныя изъ таблицы, 1) $v=100$ и $s=0,193$; 2) $v=200$ и $s=0,786$; 3) $v=300$ и $s=1,787$; и потомъ между произшедшими выводами $m = \frac{s}{v^2} = 0,0000193$; $m=0,0000196$; и $m=0,0000198$, опредѣляя средній $0,0000196$.

§ 51. Предъидущая формула $0,00003348 \cdot v^2 - 0,007600 \cdot v = s$ даетъ сопротивленіе на ядро, котораго діаметръ $= 2$ дюймамъ. Чтобы распространить оную на ядро, котораго діаметръ $= k$ дюймамъ, то по правилу § 49 должно умножить первую часть равенства на $\frac{k^2}{4}$; и будетъ требуемое сопротивленіе.

$s = (0,00000837 \cdot v^2 - 0,0019 \cdot v) k^2$,
или въ случаѣ количества k , выражаемаго въ фунтахъ

$$s = (0,00120538 \cdot v^2 - 0,27361 \cdot v) k^2$$

такимъ же образомъ, если формулу $0,0000196 \cdot v^2 = s$, годящуюся лишь для малыхъ скоростей, умножимъ на $\frac{k^2}{4}$, получимъ сопротивленіе противъ ядра, котораго діаметръ $= k$ дюймамъ равное

$$s=0,0000049 \ v^2 k^2,$$

что приводится, въ случаѣ діаметра k выражаемаго въ футахъ, къ

$$s=0,0007056 k^2 \nu^2,$$

означивъ плотность воздуха чрезъ D , плотность ядра чрезъ D' и замѣтивъ при семъ, что всѣ кубическаго фута воздуха при 62 градусахъ температуры по Фаренгейтову термометру и при среднемъ давленіи атмосферы равенъ 0,083053 Русск. фунта, будемъ имѣть всѣ кубическаго фута воды, выраженный въ сихъ фун. равный $\frac{1}{D} 0,083053$, всѣ ядра въ

сихъ же футахъ равный $\frac{1}{6} \pi k^3 D' \frac{1}{D} 0,083053$

Если послѣднимъ симъ количествомъ раздѣлимъ ту и другую величину сопротивленія, выраженного таковымъ же всомъ, то получимъ отношеніе укоснительной силы R сопротивленія къ дѣйствию тяжести g : оно будетъ относительно большихъ скоростей

$$\frac{R}{g} = (0,02771853 \nu^2 - 6,2918 \nu) \frac{D}{kD'},$$

и

$$R = (0,02771853 \nu^2 - 6,2918 \nu) \frac{Dg}{kD'} \dots (w),$$

относительно же малыхъ скоростей

$$\frac{R}{g} = 0,0162258 \frac{Dv^2}{kD'}$$

и

$$R = 0,0162258 \frac{Dg v^2}{kD'} \dots\dots (x).$$

Приложеніе предыдущей Теоріи къ прямолинейному движенію снарядовъ въ воздухъ.

§ 52. Хотя воздухъ оказываетъ на движущіяся тѣла вообще два дѣйствія, уменьшаетъ ихъ скорость и перемѣняетъ направленіе ихъ движенія (§ 39), но здѣсь мы будемъ разсуждать только о движеніи оныхъ по прямой линіи, или по кривой линіи, но весьма мало различающейся отъ прямой. Притомъ же, какъ предположеніе сіе особливо допущено быть можетъ въ случаѣ быстрого полета снарядовъ, пробѣгающихъ небольшія пространства, ибо тогда тяжесть не успѣваетъ значительно искривить путь оныхъ, то и представимъ себѣ, что ядро, коего діаметръ $= k$, описываетъ прямую или кривую линію APB (фиг. 12) и въ началѣ движенія своего въ точкѣ A имѣетъ скорость $= a$, а по истеченіи времени t , пробѣжавъ пространство $AP = x$, въ точкѣ P получаетъ скорость $= v$. Сверхъ того примемъ, что

движеніе онаго не нарушается никакою другою силою, кромѣ сопротивленія отъ воздуха.

По началамъ Динамики будемъ имѣть для опредѣленія различныхъ обстоятельствъ сего

движенія слѣдующія уравненія $v = \frac{dx}{dt}$ $\theta = \frac{dv}{dt}$, и

по исключеніи dt , $v dv = \theta dx$, въ которыхъ

количество θ выражаетъ ускорительную или

укоснительную силу непрерывно дѣйствующую

на движущееся тѣло по направленію касатель-

ной РК. А какъ въ разсматриваемомъ нами

движеніи таковая сила происходитъ только отъ

сопротивленія воздуха, которая найдется если

сіе сопротивленіе, равное вѣсу воздушнаго стол-

ба, имѣющаго основаніемъ большой кругъ ша-

ра, а высотой въ λ разъ взятую высоту

$\frac{v^2}{2g}$ соотвѣтствующую скорости v , раздѣлимъ

на массу ядра (§ 45), то означивъ плотность

воздуха чрезъ D , плотность ядра чрезъ D' и

замѣтивъ притомъ, что вѣсъ воздушнаго стол-

ба равенъ его объему $\frac{\pi k^2}{4} \frac{\lambda v^2}{2g}$ умноженному на

относительную тяжесть воздуха Dg , и масса

ядра равна его объему $\frac{1}{6} \pi k^3$ умноженному на

D' , будемъ имѣть укоснительную силу сопротивленія

$$\theta = R = \frac{\frac{\pi k^2}{4} \frac{\lambda v^2}{2g} Dg}{\frac{1}{6} \pi k^3 D'} = \frac{3\lambda D v^2}{4kD'};$$

и сдѣлавъ для краткости количество $\frac{3\lambda D}{4kD'}$, выражающее законъ сопротивленія воздуха и входящее во всѣ вычисленія бросаемыхъ снарядовъ, равнымъ c , будетъ

$$R = cv^2 \dots (y).$$

Поставивъ сію величину въ уравненіе $v dv = \theta dx$ получимъ $v dv = -cv^2 dx$ или $\frac{dv}{v} = -c dx$; здѣсь

отрицательный знакъ взять потому, что скорость убываетъ по мѣрѣ увеличиванія пространства x . Интеграль послѣдняго уравненія даетъ $\lg v = -cx + C$; постоянная C , придаваемая къ сему интегралу найдется по условію, что въ началѣ движенія должно быть вдругъ $x = 0$, и $v = a$; но тогда $C = \lg a$ и уравненіе превратится въ $\lg a - \lg v = cx$ или въ

$$\lg \left(\frac{a}{v} \right) = cx.$$

Логарифмы, получаемые чрезъ сіи вычисленія суть гиперболическіе (Неперовыя); въ системѣ

онихъ основаніе, которое назовемъ e , есть число 2,718281828, к-го обыкновенный логарифмъ $\equiv 0,43429448 \equiv \text{Log } e \equiv$ модулю, на который должно помножить гиперболическій логарифмъ, чтобы получить табличный. И такъ переходя отъ послѣдняго логарифмическаго выраженія къ численному получимъ

$$\frac{a}{v} \equiv e^{cx} \dots\dots (z);$$

при чемъ количество e^{cx} найдется по обыкновенной системѣ логарифмовъ, относительно которыхъ будетъ $\text{Lg } e^{cx} \equiv cx \text{Lg } e \equiv cx \cdot 0,43429448 (*)$. Посредствомъ уравненія (z) , зная начальную скорость снаряда опредѣлимъ и ту остающуюся скорость, которую онъ будетъ имѣть, пробѣжавъ данное пространство; обратно зная скорость, которую снарядъ сохраняетъ, пробѣжавъ известное пространство, опредѣлимъ и ту скорость, которую онъ имѣлъ въ началѣ сего пространства. Ибо въ первомъ случаѣ будетъ $v \equiv a e^{-cx}$, а во второмъ $a \equiv v e^{cx}$, что касается до потерянной скорости, причиненной снаряду сопротивленіемъ воздуха на пространство x ,

(*) Чтобы отличить обыкновенные логарифмы отъ гиперболическихъ, первые сопровождаемы будутъ знакомъ L а вторые знакомъ l .

то она равна $a - v = a - \frac{a}{e^{cx}} = a \left(\frac{e^{cx} - 1}{e^{cx}} \right)$.

Впрочемъ изъ того же уравненія, когда извѣстны будутъ начальная скорость снаряда $= a$, остающаяся его скорость $= v$ и пространство имъ пройденное $= x$, найдется коэффициентъ сопротивленія λ заключающійся въ количествѣ c ; ибо по правилу рѣшенія неопредѣленно-степенныхъ уравненій будемъ имѣть c или $\frac{3\lambda D}{4kD'}$

$$\frac{L\left(\frac{a}{v}\right)}{xLe} \text{ и отсюда } \lambda = \frac{4kD'}{3DxLe} L\left(\frac{a}{v}\right).$$

§ 53. А дабы по извѣстнымъ двумъ скоростямъ въ началѣ и въ концѣ движенія ядра опредѣлить время его полета; также по извѣстной начальной скорости ядра опредѣлить время, употребляемое имъ на пробѣжаніе даннаго пространства, то въ выше найденное уравненіе $dv = -cv dx$ вставимъ величину $dx = v dt$, и тогда оно преобразуется въ

$$\frac{dv}{v^2} = -c dt;$$

отсюда, по взятіи интеграла, получимъ $\frac{1}{v} = ct + C$. Для опредѣленія постоянной C имѣемъ

условіе, что когда $t=0$, то $v=a$; по сему бу-

детъ $C = \frac{1}{a}$ и

$$\frac{1}{v} = ct + \frac{1}{a} \dots\dots (a'),$$

а отсюда найдется $c = \frac{a-v}{e^{cx}}$. Поставивъ вмѣсто количества v найденную предъ симъ величину $= ae^{-cx}$, будемъ имѣть по надлежащемъ сокращеніи.

$$t = \frac{e^{cx} - 1}{ac} \dots\dots (b').$$

Помощію послѣднихъ двухъ уравненій рѣшаются два сказанныя предложенія.

Изъ уравненія (b') можно вывести начальную скорость ядра, когда извѣстно будетъ время, употребляемое имъ на совершеніе даннаго пространства; также можно опредѣлить пространство, пройденное ядромъ, когда при извѣстной начальной его скорости дано будетъ и время, употребляемое имъ на совершеніе своего полета: въ первомъ случаѣ начальная скорость

$$a = \frac{e^{cx} - 1}{ct},$$

во второмъ случаѣ пространство

$$x = \frac{L(cat - 1)}{cLe}.$$

§ 54. Уравненія $\frac{a}{v} = e^{cx}$ и $\frac{1}{v} = \frac{1}{a} + ct$, въ кото-
рыхъ $c = \frac{3\lambda D}{4kD'}$, ясно показываютъ, что если
ядра разной величины, но при постоянной плот-
ности, брошены будутъ съ равною скоростью,
то или на одномъ и томъ же разстояніи или
въ одно и тоже время, меньшія ядра теряютъ
большую часть своей скорости, нежели боль-
шія ядра, и что послѣднія летятъ далѣе, чѣмъ
первыя. А поелику количества движенія отно-
сятся какъ произведенія изъ массъ или вѣсовъ
на скорости, то по причинѣ большаго вѣса и
большей скорости большія ядра производятъ
значительнѣйшее пораженіе.

Поставивъ діаметръ k' большаго ядра въ урав-
неніе 2-е, которое даетъ $v = \frac{a}{1+act}$ и сдѣлавъ

$c' = \frac{3\lambda D}{4k'D'}$, найдемъ, что при постоянной на-
чальной скорости $= a$ и той же плотности $= D'$,
по истеченіи времени t , скорость большаго
ядра, превышаетъ скорость меньшаго, количе-

$$\text{ствомъ} = \frac{a}{1+ac't} - \frac{a}{1+act} = \frac{a^2 t (c - c')}{(1+ac't)(1+act)}.$$

Изъ тѣхъ же уравненій еще происходитъ, что при всѣхъ прочихъ равныхъ обстоятельствахъ, сказанная потеря скорости оказывается большею въ ядрахъ менѣе плотныхъ.

§ 55. Въ выраженіи $c = \frac{3\lambda D}{4kD'}$ вмѣсто содержанія плотностей D и D' атмосфернаго воздуха и ядра можно принимать содержаніе ихъ удѣльныхъ тяжестей, ибо $\frac{D}{D'} = \frac{Dg}{D'g}$. Если ядра чугуныя, какъ-то обыкновенно у большихъ орудій бываетъ, то удѣльная тяжесть оныхъ есть отъ 7,09 до 7,207 и средняя между ими $D'g = 7,149$, то есть во столько нашъ чугунъ тяжелѣе воды; но удѣльная тяжесть воздуха $Dg = 0,0012$ (по Гютону), слѣдовательно при стрѣляніи изъ орудій чугунными ядрами можно взять постоянно

$$\frac{D'}{D} = 5957,5.$$

Что касается до бомбъ и гранатъ, то не можетъ быть назначена для всѣхъ ихъ одинакая удѣльная тяжесть. А для найденія оной, должно взять вѣсъ пустой, не осмоленной гранаты или бомбы, и присоединить къ оному вѣсъ всыпаемаго въ ея пустоту пороха и вѣсъ снаряженной ея трубки; послѣ чего совокупный

вѣсь раздѣлить на весь объемъ, занимаемый гранатою или бомбою, изображая при томъ сей объемъ въ кубическихъ футахъ; частное, которое покажетъ число фунтовъ въ кубическомъ футѣ снаряженной гранаты, раздѣлить еще на вѣсь воды въ кубическомъ футѣ, то есть на 69,2108, чрезъ что и получится удѣльная тяжесть гранаты или бомбы.

Таблица показывающая поперечники, средний вѣсъ и плотности ядеръ, бомбъ и гранатъ.

Наименованія снарядовъ.	Поперечники въ футахъ.	Средній вѣсъ въ торговыхъ фунтахъ.	Плотности въ отношеніи къ водѣ или величинны для D' .	Плотности въ отношеніи къ воздуху, или величинны для $\frac{D'}{D}$.	Логарифмы количества D' .	Логарифмы количества $\frac{D'}{D}$.	Логарифмы поперечниковъ k .
Ядра.	3 ф.	0,24053...	$3\frac{1}{2}$..				9,3808080
	6..	0,30283...	$7\frac{1}{8}$..				9,4811989
	12...	0,38158...	$14\frac{1}{4}$..				9,5815856
	18...	0,43758..	$21\frac{1}{2}$...	7,149...	5957,5...	0,8542453...	9,6410575
	24...	0,48508..	29 ..				9,6840191
	30...	0,52150...	$36\frac{1}{2}$...				9,7172543
	36..	0,55517..	1 п. $4\frac{1}{2}$ ф.				9,7444260
Бомбы и гранат.	3 ф.	0,25892...	$5\frac{5}{8}$..	5,10047..	4250,4...	0,7076102...	9,4131656
	6	0,32617...	$5\frac{8}{9}$..	4,68029..	3900,2..	0,6702728..	9,5134440
	$\frac{1}{4}$ пу.	0,38900...	$11\frac{1}{2}$...	5,17134..	4309,5..	0,7136051..	9,5899496
	$\frac{1}{2}$..	0,49392..	$22\frac{5}{8}$..	5,18159..	4317,8..	0,7144463..	9,6936566
	1 ..	0,62400...	1 п. $4\frac{1}{4}$ ф.	5,02559..	4188,0..	0,7011871..	9,7951840
	2..	0,79058..	2.. 7..	4,85858..	4048,8..	0,6865094..	9,8979458
	5..	1,07892...	5.. 20..	4,85573..	4028,1..	0,6842824..	0,0529895
Ружейной пул.	0,05208...	5,553 з.	11,352..	9460..	1,0550724..	3,9758911...	8,7166710

§ 56. Хотя въ предыдущихъ вычисленіяхъ, предполагающихъ сопротивленія пропорціональнымъ квадратамъ скоростей, коэффициентъ λ не бываетъ постояннымъ въ продолженіе движенія тѣла (§ 48), но относя его величину къ среднему сопротивленію, заключающемуся между тѣми, которыя соотвѣтствуютъ крайнимъ двумъ скоростямъ наибольшей и наименьшей, тогда не удаляясь много отъ истины, можно почитать оный во все время движенія неизмѣняемымъ. Ибо начиная по средней скорости, всѣ сопротивленія, выведенныя для большихъ скоростей будутъ менѣе, а для меньшихъ скоростей болѣе, чѣмъ дѣйствительныя; слѣдовательно недостатокъ первыхъ будетъ вознагражденъ избыткомъ другихъ, и цѣлый выводъ достаточно приблизится къ истинному. На примѣръ положимъ, что 12-ти-фунтовое ядро брошено съ начальною скоростью $a=1400$ футовъ въ секунду; сыщемъ то разстояніе, на которомъ скорость сія приведена будетъ къ $v=1100$ футовъ. Поелику въ семъ вопросѣ крайнимъ скоростямъ 1400 и 1100 принадлежитъ по таблицѣ сопротивленія (§ 48) 56,212 и 31,649, между которыми среднее $=43,930$, то коэффи-

ціентъ λ , соотвѣтствующій сему послѣднему, заключающемуся въ таблицѣ между ближайшими сопротивленіями 39,095 и 47,331, противъ коихъ находятся коэффициенты 0,96 и 0,99, очевидно по правилу пропорціональности промежуточныхъ разностей будетъ равенъ 0,98.

Имѣя сей коэффициентъ, который въ разсчитываемомъ нами движеніи можетъ уже почесться постояннымъ, сверхъ того, зная поперечникъ 12 фунт. ядра $k=0,38158$ фута и количество

$\frac{D'}{D}=5957,5$, мы найдемъ, вычисливъ

величину $\frac{1}{c}=\frac{4kD'}{3\lambda D}$, разстояніе § 52 (z).

$$x=\frac{La-Lv}{cLe}=745,8 \text{ фута};$$

на которомъ ядро потеряетъ 300 футъ отъ сообщенной ему скорости.

Въ случаѣ скоростей не превосходящихъ 400 футовъ въ секунду, количество c въ предъидущихъ формулахъ постоянно можно брать

равнымъ $0,0162258 \frac{Dg}{kD'}$ (§ 51), или въ широтѣ С. Петербурга, гдѣ дѣйствіе тяжести $g=32,214$

фута, равнымъ $0,52269792 \frac{D}{kD'}$

§ 57. Поскольку при определении разных случаевъ движенія ядра, не всегда предполагаются данными обѣ крайнія скорости наибольшая и наименьшая, дабы посредствомъ ихъ возможно было имѣть значеніе коэффициента λ , необходимаго для достиженія къ точнымъ выводамъ, тогда, если скорость движущагося снаряда будетъ значительна, мы употребимъ выраженіе укосительной силы сопротивленія (w)

$$R=0,02771853 \frac{Dg v^2}{kD'} - 6,2918 \frac{Dg v}{kD'},$$

и приложимъ оное къ рѣшенію вопросовъ изслѣдованныхъ въ предыдущихъ уже параграфахъ. Для сего сдѣлавъ $0,02771853 \frac{Dg}{kD'} = m$ и $6,2918 \frac{Dg}{kD'} = n$, и поступивъ подобно сказанному въ § 52, будемъ имѣть, по известной формулѣ $v dv = \theta dx$, уравненіе

$$v dv = -(mv^2 - nv) dx,$$

изъ котораго по сокращеніи и отдѣленіи переменныхъ величинъ получимъ

$$dx = - \frac{dv}{mv - n};$$

взявъ теперь интеграль, который будетъ

$x = \frac{1}{m} l(mv - n) + C$, и опредѣливъ постоянную

C при условіи $x=0$ и $v=a$, сверхъ того замѣнивъ гиперболическій логарифмъ обыкновеннымъ, найдется

$$x = \frac{1}{mLe} L \left(\frac{ma - n}{mv - n} \right),$$

и сдѣлавъ для краткости $\frac{n}{m} = \frac{6,2918}{0,02771853}$

$= 226,9889 = q$, будетъ пространство выраженное въ функціи скорости

$$x = \frac{1}{mLe} L \left(\frac{a - q}{v - q} \right) \dots (c')$$

отсюда, зная начальную скорость $v=a$ и пространство $=x$, найдемъ остающуюся скорость ядра

$$v = \frac{a + q(e^{mx} - 1)}{e^{mx}};$$

и обратно зная остающуюся скорость и пространство, найдемъ начальную скорость

$$a = q + (v - q)e^{mx}.$$

Выведемъ еще формулы для рѣшенія, по сему предмету, иныхъ задачъ зависящихъ отъ времени t .

Мы имѣемъ $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dv}{v(mv - n)}$; отсюда по известному правилу интегрированія алгебраиче-

скихъ соизмѣримыхъ дробныхъ функцій, легко найдется

$$t = -\frac{1}{n} \int \left(\frac{mv - n}{v} \right) + C;$$

постоянная C опредѣлится по условію, предполагающему въ началѣ движенія $t=0$ и $v=a$, и будетъ очевидно

$$t = \frac{1}{nLe} L \left\{ \left(\frac{a-q}{v-q} \right) \frac{v}{a} \right\} \dots (d'),$$

что опредѣляетъ время, по истеченіи котораго начальная скорость a , движущагося ядра приведена будетъ къ скорости b . Изъ сего уравненія по даннымъ количествамъ a и t получится.

$$v = \frac{aqe^{nt}}{q + a(e^{nt} - 1)};$$

и по даннымъ количествамъ v и t получится

$$a = \frac{qv}{v - (v - q)e^{nt}}.$$

Потомъ поставивъ въ уравненіе (d') вмѣсто количества v равную величину $\frac{a + q(e^{mx} - 1)}{e^{mx}}$, бу-

демъ имѣть

$$t = \frac{1}{nLe} L \left\{ 1 + \frac{q}{a} (e^{mx} - 1) \right\} \dots (e'),$$

и отсюда найдемъ

$$a = \frac{q(e^{mx} - 1)}{e^{nt} - 1}, \text{ и } x = \frac{1}{mLe} L \left\{ 1 + \frac{a}{q}(e^{nt} - 1) \right\}.$$

§ 58. Чтобы показать приложение выведенныхъ формулъ, то положимъ, 1) что требуется найти скорость свинцовой пули въ $\frac{3}{4}$ дюйма въ діаметръ, на разстояніи отъ начала движенія $x=100$ футовъ и при начальной скорости бросанія $a=1670$ футъ. Сей примѣръ взять изъ книги *Nouveaux principes d'Artillerie par Robins, commentés par Euler*, Глава II, предложеніе II.

Скорость сія найдется посредствомъ формулы

$$v = \frac{a + q(e^{mx} - 1)}{e^{mx}},$$

въ которой, дабы имѣть количество $m = 0,0277185 \frac{Dg}{kD'}$, то надлежитъ замѣтить, что плотность или удѣльная тяжесть свинца $D' = 11,352$, діаметръ пули $k = \frac{3}{4}$ дюйма $= \frac{1}{16}$ фута, тяжесть $g = 32,18$ фута, плотность воздуха $D = 0,0012$ и множитель $q = 226,9889$. Вставивъ въ формулу приведенныя здѣсь числа, получимъ $L(e^{mx}) = mxLe = 0,0655193$, отсюда e^{mx}

$\approx 1,16284$; следовательно искомая скорость

$$v = \frac{1670 + 226,988 \cdot 0,16284}{1,16284} \approx 1468 \text{ футъ,}$$

которая немного различается отъ скорости 1425 фут. найденной по опытамъ Робинса, а впрочемъ по замѣчанію Эйлера не вѣрной, ибо вычисленіе оной основано было на предложеніяхъ не совсѣмъ справедливыхъ.

Въ семъ вопросѣ время t , употребляемое пулею на прохожденіе 100 футъ упомянутаго разстоянія, найдется прямо посредствомъ формулы (e'), то есть

$$t = \frac{1}{nLe} L \left(\frac{a + q(e^{mx} - 1)}{a} \right),$$

въ которую поставивъ данныя числа, будемъ имѣть

$$L(nLe) = 9,1723741 - 10, \quad L \left(\frac{a + q(e^{mx} - 1)}{a} \right) \\ = L \left(\frac{1706,965}{1670} \right) = 0,0095076 \text{ и } Lt = L(0,0095076)$$

$= 9,1723741 - 10 = 8,8056968 - 10$; отсюда $t = 0'',064$, что почти составляетъ $\frac{2}{31}$ секунды: сіе время есть то же самое, которое Робинсъ нашелъ изъ своихъ опытовъ.

Если въ представленномъ примѣрѣ станемъ

выводить скорость v изъ обыкновенной формулы (§ 52) $v = \frac{a}{e^{cx}}$ и притомъ согласно съ Невтоновымъ положеніемъ сдѣлаемъ $\lambda = \frac{1}{2}$, то получимъ $v = 1569$ футовъ; но сей выводъ весьма много отдаленъ отъ истиннаго.

2) Даны начальная скорость 12-ти фунтоваго ядра $a = 1400$ футъ и остающаяся его скорость $v = 1100$ футъ, найти соотвѣтствующее разстояніе x и время t .

Во первыхъ разстояніе найдется по формулѣ (с'), въ которой вычисливъ по логарифмамъ

количество $\frac{1}{mLe} = \frac{kD'}{0,0277185DgLe}$ заключающее

въ себѣ діаметръ 12-ти-фунтоваго ядра (§ 55 табл.) $k = 0,38158$ фута, отношеніе $\frac{D}{D'} = 5957,5$,

дѣйствіе тяжести $g = 32,214$ и модуль $Le = 0,4342945$, будетъ $L \left(\frac{1}{mLe} \right) = 3,7680504$. Но

$L \left(\frac{a-v}{v} \right) = 0,1282824$, слѣдовательно

$Lx = 3,7680504 - L(0,1282824) = 2,8762475$; сему логарифму соотвѣтствуетъ число $x = 752$ фута, таково есть искомое разстояніе почти

одинаковое съ найденнымъ въ § 56 по другому способу.

Послѣ чего по формулѣ (e') или прямо по формулѣ (d'), которая даетъ въ числахъ

$$L \left\{ \left(\frac{a-q}{v-a} \right) \frac{v}{a} \right\} = 0,0235471, L \left(\frac{1}{mLe} \right) = 3,7680504$$

и арифметическое дополненіе $Lq = 7,6439953$, будемъ имѣть

$$Lt = L(0,0235471) + 3,7680504 + 7,6439953 - 10 = 9,7839831 - 10$$

и отсюда искомое время $t = 0'', 608$ почти $= \frac{3}{5}$ секунды.

3) Сыщемъ пространство пробѣгаемое 12-ти фунтовымъ ядромъ въ продолженіе 1 секунды, бросивъ его съ начальною скоростію 1425 футовъ въ секунду.

Для сего должно взять въ разсмотрѣніе формулу

$$x = \frac{1}{mLe} L \left(1 + \frac{a}{q} (e^{nt} - 1) \right), \text{ въ которой будемъ имѣть, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ, } L \frac{1}{mLe} = 3,7680504 :$$

при семъ найдется

$$L(e^{nt}) = ntLe = qt.mLe = 0,0387217; e^{nt} = 1,09326;$$

$$L \left(1 + \frac{a}{q} (e^{nt} - 1) \right) = 0,2001585; \text{ и слѣдовательно}$$

$$L \left(1 + \frac{a}{q} (e^{nt} - 1) \right) = 0,2001585; \text{ и слѣдовательно}$$

тѣльно

$Lx=3,7680504-L(0,2001581)=3,0694236;$
отсюда искомое пространство $x=1173$ фута.

Въ концѣ сего пространства остающаяся
скорость ядра, по формулѣ $v=\frac{aent}{1+a(e^{ent}-1)}$, бу-
детъ $v=982,8$ фута въ секунду.

Рѣшая сей вопросъ по обыкновенной фор-
мулѣ (§ 53) $x=\frac{L(1-act)}{cLe}$, и полагая согласно
съ положеніемъ Ломбарда коэффициентъ $\lambda=\frac{3}{5}$
(Traité du mouvement des projectiles par Lom-
bard, p. 100), будемъ имѣть пространство
 $x=1255$ футъ, а остающуюся скорость
 $v=\frac{a}{1-act}=1111$ футъ. Но по причинамъ преж-
де сказаннымъ, оба сіи вывода допущены быть
не могутъ; при томъ же если сравнить коеф-
фициентъ $\lambda=\frac{3}{5}$ съ табличнымъ (§ 48), то ясно
видно, что онъ служить только для весьма ти-
хихъ движеній.

4) Найти скорость, которую 5-ти-пудовая
бомба, брошенная съ начальною скоростью
 $a=400$ футовъ въ секунду, будетъ имѣть на
разстояніи $x=2800$ футовъ отъ начала движе-
нія.

Въ семь случаѣ медленнаго движенія мы употребимъ формулу $v = \frac{a}{e^{cx}}$, относительно коей будетъ $c = 0,52269792 \frac{D}{kD'}$ (§ 56); поперечникъ бомбы $k = 1,07892$; отношеніе $\frac{D'}{D} = 4028,1$; $L(e^{cx}) = cxLe = 0,146253$; и слѣдовательно $Lv = La - L(e^{cx}) = 2,4558070$: отсюда получимъ остающуюся скорость $v = 286$ футовъ.

Что касается до времени t , которое употребитъ бомба для движенія своего, приданныхъ въ предложенномъ вопросѣ обстоятельствахъ, то легко найдемъ оное посредствомъ формулы (b'), и будетъ $t = \frac{e^{cx} - 1}{ac} = 8''$, з. Замѣтимъ еще, что отношеніе между укоснительною силою сопротивленія и между тяжестью при скорости движенія 5 пудовой бомбы въ 400 футовъ, по § 51, есть $\frac{R}{g} = 0,5974$; при скорости въ 300 футовъ есть $\frac{R}{g} = 0,3360$; при скорости въ 200 футовъ $= 0,1493$, при скорости во 100 футовъ $= 0,0373$; при скорости же въ 500 футовъ $= 0,9334$.

§ 59. Изслѣдуемъ вертикальное движеніе тяжелыхъ тѣлъ въ воздухѣ въ двухъ различныхъ

случаяхъ, когда онѣ свободно падаютъ и когда брошены будутъ снизу вверхъ, принимая при семъ сопротивленіе пропорціональнымъ квадратамъ скоростей.

Въ такомъ случаѣ когда тѣло падаетъ, дѣйствуютъ на него безпрерывно двѣ противоположныя силы, ускорительная сила тяжести и ускорительная сила сопротивленія. Очевидно, что первая должна быть принимаема нѣсколько меньшею нежели тяжесть въ пустотѣ; и дабы сравнить оную съ сею послѣднею, то означивъ первую чрезъ g , вторую чрезъ G , объемъ тѣла чрезъ v , плотность его чрезъ D' , плотность воздуха чрезъ D и замѣтивъ еще, что вообще тѣло, заключающееся въ какой либо жидкости теряетъ столько вѣсу, сколько вѣситъ вытесненная имъ жидкость, будемъ имѣть вѣсъ или движущую силу онаго въ воздухѣ равную $GVD' - GVD$; и если раздѣлимъ сію величину на массу тѣла, которая равна VD' , то получимъ тяжесть, которою тѣло побуждается въ воздухѣ, равную

$$g = G \left(1 - \frac{D}{D'} \right).$$

Впрочемъ относительно всѣхъ снарядовъ коли-

чество $\frac{D}{D'}$ столь мало (§ 55), что дозволяется оное пренебречь и предположить $g=G$. Теперь въ разсужденіи укоснительной силы сопротивленія, предположеннаго нами пропорціональнымъ квадратамъ скоростей, мы знаемъ уже, что величина оной по истеченіи времени t изображается cv^2 . Въ семъ выраженіи постоянный коэффициентъ c , вообще зависитъ отъ вида тѣла, его плотности, также плотности среды, и для сферическихъ тѣлъ онъ равенъ $\frac{3\lambda D}{4kD'} (\S 52)$

Симъ образомъ въ общихъ уравненіяхъ $\theta dt = dv$ и $v dv = \theta dx$, въ коихъ количество x означаетъ пространство и v скорость движенія, ускорительная сила $\theta = g - cv^2$, по постановленіи которой будемъ имѣть

$$dt = \frac{dv}{g - cv^2} \text{ и } dx = \frac{v dv}{g - cv^2}.$$

Первое изъ сихъ уравненій приведенное, чрезъ разложеніе второй части на простыя дроби, къ виду

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left\{ \frac{dv}{\sqrt{g} + v\sqrt{c}} + \frac{dv}{\sqrt{g} - v\sqrt{c}} \right\},$$

ведетъ къ интегралу $t = \frac{1}{2\sqrt{gc}} \ln \left(\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{c}}{\sqrt{g} - v\sqrt{c}} \right) + C;$

а второе очевидно имѣеть интеграломъ $x = -\frac{1}{2c} l(g - cv^2) + C'$. Для опредѣленія постоянныхъ C и C' положимъ, что тѣло въ началѣ своего движенія не получаетъ никакого побужденія, тогда будетъ вдругъ $t=0$, $x=0$ и $v=0$, а въ слѣдствіе сего $C=0$ и $C' = \frac{1}{2c} l(g)$; чрезъ что общія выраженія времени и пространства въ функціи скорости перемѣнятся въ

$$t = \frac{1}{2\sqrt{gc}} l \left(\frac{1 + v\sqrt{\frac{c}{g}}}{1 - v\sqrt{\frac{c}{g}}} \right) \dots (1)$$

и

$$x = -\frac{1}{2c} l \left(1 - \frac{cv^2}{g} \right) \dots (2),$$

переходя отъ гиперболическихъ его логарифмовъ къ числамъ, и означая чрезъ e основаніе оныхъ, получимъ

$$\frac{1 - v\sqrt{\frac{c}{g}}}{1 + v\sqrt{\frac{c}{g}}} = e^{-2t\sqrt{gc}} \dots (3), \text{ и } 1 - \frac{cv^2}{g} = e^{-2cx};$$

отсюда найдется скорость въ каждое мгновеніе

$$v = \sqrt{\frac{g}{c}} \left(\frac{e^{2t\sqrt{gc}} - 1}{e^{2t\sqrt{gc}} + 1} \right) \dots (4)$$

и скорость соответственная высотѣ

$$v = \sqrt{\frac{g}{c}} \sqrt{1 - e^{-2cx}} \dots (5)$$

Послѣ сего поставивъ въ уравненіе (1), кото-

рому можно дать видъ $t = \frac{1}{2\sqrt{gc}} \left\{ 2l \left(1 + v \sqrt{\frac{c}{g}} \right) \right.$

$\left. - l \left(1 - \frac{cv^2}{g} \right) \right\}$, вмѣсто v величину въ x , по-

лучимъ время паденія тѣла съ данной высоты

$$t = x \sqrt{\frac{c}{g}} + \frac{1}{\sqrt{gc}} l \left(1 + \sqrt{1 - e^{-2cx}} \right) \dots (6).$$

Но по сравненіи выраженій (4) и (5) имѣемъ

$$\sqrt{1 - e^{-2cx}} = \frac{e^{2t\sqrt{gc}} - 1}{e^{2t\sqrt{gc}} + 1}$$

и

$$1 + \sqrt{1 - e^{-2cx}} = \frac{2e^{2t\sqrt{gc}}}{e^{2t\sqrt{gc}} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(1 + e^{-2t\sqrt{gc}} \right)},$$

то поставивъ сію величину въ уравненіе (6) и опредѣляя потомъ x , найдется высота соответствующая времени паденія.

$$x = t \sqrt{\frac{g}{c}} + \frac{1}{c} l \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2t\sqrt{gc}} \right) \dots (7).$$

§ 60. Мы усматриваемъ въ уравненіяхъ (3)

и (5), что съ увеличиваніемъ времени или пространства, проходимаго падающимъ тѣломъ, неопредѣленно-степенныя количества въ нихъ заключающіяся, постепенно уменьшаются и дѣлаются почти ничтожными по истеченіи болѣе или менѣе значительнаго времени, смотря какъ коэффициентъ $2\sqrt{gc}$ будетъ больше или меньше; но тогда сіи уравненія даютъ $v' = \sqrt{\frac{g}{c}}$.

И такъ движеніе падающихъ тѣлъ въ однородной жидкости сначала будучи переменное, потомъ по прошествіи нѣкотораго времени становится почти единообразнымъ и совершающимся со скоростію $v' = \sqrt{\frac{g}{c}}$, которая вообще въ отношеніи къ снарядамъ есть (§ 51 и 52)

$$v' = \sqrt{\frac{4kD'g}{3\lambda D}} = \sqrt{\frac{kD'}{0,0162258 \cdot D}}$$

или

$$v' = 7,85049 \sqrt{\frac{kD'}{D}} \dots (f'),$$

а въ отношеніи же къ ядрамъ

$$v' = 605,94 \sqrt{k} \dots (g');$$

то есть самыя большія или окончательныя единообразныя скорости, какія могутъ пріобрѣсти снаряды нисходя въ воздухъ, относятся

между собою какъ корни квадратныя изъ произведеній ихъ діаметровъ на плотности, и при постоянной плотности относятся какъ корни квадратныя изъ діаметровъ. Хотя по всей строгости нисходящіе снаряды никогда не достигаютъ сихъ скоростей въ конечное время или по совершеніи конечнаго пути, однако онѣ весьма близко къ нимъ подходятъ чрезъ довольно короткое время, что вскорѣ мы и увидимъ.

Уравненіе $v' = \sqrt{\frac{g}{c}}$ или $cv^2 = g$ и общее

значеніе количества c показываютъ, 1) что при всѣхъ прочихъ равныхъ обстоятельствахъ, плотнѣйшія тѣла падаютъ въ воздухѣ скорѣе; въ пустомъ же мѣстѣ всѣ онѣ падаютъ съ равною скоростью; 2) что тяжелое тѣло, во время своего нисхожденія въ воздухѣ, тогда только, достигаетъ самой большой единообразной скорости, когда укоснительная сила сопротивленія сдѣлается равною тяжести, или когда полное сопротивленіе равно будетъ вѣсу тѣла. Ибо какъ скоро сіе послѣдуетъ, тогда постоянныя ускоренія, сообщаемыя тѣлу въ каждое мгновеніе тяжестию, безпрестанно уничтожаться будутъ противоположною силою со-

противленія сравнившеюся уже съ тяжестию, и сего довольно, чтобы скорость осталась постоянною и движеніе единообразнымъ.

§ 61. Посредствомъ формулъ (f') и (g') составлена слѣдующая таблица, въ которой показаны 1) самыя большія окончательныя скорости нашихъ снарядовъ свободно падающихъ въ воздухѣ, и 2) высоты, соотвѣтствующія симъ скоростямъ въ безвоздушномъ пространствѣ, вычисленныя по формулѣ $h = \frac{v'^2}{2g} = \frac{v'^2}{64,428}$

Названіе снарядовъ.		Окончательныя единообразныя скорости v' въ футахъ.	Высоты h соотвѣтственныя скоростямъ v' въ футахъ.
Я д р а.	3 фунт.	297	1370.
	6	334	1730.
	12	374	2175.
	18	401	2494.
	24	421	2753.
	30	438	2972.
	36	451	3164.

Названіе сна- рядовъ.		Окончатель- ныя едино- образныя скорости v' въ футахъ.	Высоты h соответствен- ныя скоро- стямъ v' въ футахъ.
Бомбы и гранаты.	3 фунт.	260	1053.
	6	280	1217.
	$\frac{1}{4}$ пуда.	321	1604.
	$\frac{1}{2}$	363	2040.
	1	401	2500.
	2	444	3062.
	5	517	4157.
Картечныя пули.	1 No.	161	404.
	5	192	570.
	7	212	700.
	9	244	926.
Ружейная пуля.		174	471.

(*)

Помощію сей таблицы легко увѣриться, что высота и время потребныя для того, дабы падаю-

(*) Гранитный камень въсомъ въ 1 фунтъ, сферическаго вида и плотности=2,5 имѣетъ поперечникъ $h=2,673$ дюйма и нисходя въ воздухъ получаетъ окончательную единообразную скорость $v'=169$ футъ въ секунду; въсомъ въ 3 фунта имѣетъ поперечникъ $h=3,855$ дюйма и окончательную скорость $v'=204$ фута въ секунду; а въсомъ въ 6 фунтовъ

щій въ воздухѣ снарядъ пріобрѣтъ скорость немного различающуюся отъ единообразной скорости, не бываютъ очень значительны. Ибо взявъ, примѣрно, вмѣсто окончательной скорости 244 фута, которая принадлежитъ картечной пулѣ No. 9, нѣсколько меньшую скорость $v=240$ футовъ, то по формуламъ (1) и (2) предъидущаго параграфа найдется время $t=18'',2$ и высота $x=3157$ футовъ. Вообще если сдѣлаемъ $v=v'-\delta$, и при семъ замѣтимъ, что $v'=\sqrt{\frac{g}{c}}$ и $\frac{1}{2c}=h$, то упомянутыя формулы примутъ видъ

$$t=\frac{h}{v'Le} L\left(\frac{2v'}{\delta}-1\right) \text{ и } x=\frac{h}{Le} L\left(\frac{v'^2}{2\delta v'-\delta^2}\right);$$

въ случаѣ же весьма малой величины δ въ сравненіи съ v' , можно принять $x=\frac{h}{Le} L\left(\frac{v'}{2\delta}\right)$.

§ 62. Остается теперь разсмотрѣть движеніе тѣла, брошеннаго вертикально снизу вверхъ. Въ такомъ случаѣ тяжесть и сопротивленіе

имѣютъ $h=4,857$ дюйма и $v'=229$.

Узнаемъ послѣ, что предъидущія окончательныя единообразныя скорости суть предѣлы скоростей, пріобрѣтаемыхъ падающими тѣлами при паденіи ихъ движеніи, которое особливо происходитъ отъ выстрѣловъ, называемыхъ въ Артиллеріи вертикальными выстрѣлами (feu verticaux).

воздуха дѣйствуютъ въ противоположную сторону движенія, которое сообщено тѣлу: по сему удержавъ прежнія обозначенія, будемъ имѣть $\theta = -(g + cv^2)$, поставивъ сію величину въ общію равненія движенія $\theta dt = dv$ и $v dv = \theta dx$, кои даютъ

$$dt = -\frac{dv}{g + cv^2} \text{ и } dx = -\frac{v dv}{g + cv^2}$$

и взявъ потомъ интегралы, получимъ

$$t = -\frac{1}{\sqrt{gc}} \cdot \text{Arc} \left(tg = v \sqrt{\frac{g}{c}} \right) + C, \text{ и } x = -\frac{1}{2c} l (g + cv^2) + C'.$$

Для опредѣленія постоянныхъ C и C' , означимъ скорость бросанія чрезъ a и примемъ, что въ началѣ движенія будетъ вдругъ $t = 0$, $x = 0$ и $v = a$; тогда по условію сему найдется $C = \frac{1}{\sqrt{gc}}$.

$\text{Arc} \left(tg = a \sqrt{\frac{c}{g}} \right)$ и $C' = \frac{1}{2c} l (g + ca^2)$. Сіи величины, будучи вставлены въ предъидущія уравненія, перемѣнятъ ихъ въ

$$t = \frac{1}{\sqrt{gc}} \left\{ \text{Arc} \left(tg = a \sqrt{\frac{c}{g}} \right) - \text{Arc} \left(tg = v \sqrt{\frac{c}{g}} \right) \right\}$$

$$x = \frac{1}{2c} l \left(\frac{1 + \frac{c}{g} a^2}{1 + \frac{c}{g} v^2} \right)$$

отсюда изъ перваго уравненія опредѣливъ скорость въ какое либо мгновеніе, легко найдется изъ втораго и соотвѣтствующее пространство.

Очевидно, что брошенное тѣло поднимается вверхъ дотолѣ, пока скорость его v не сдѣлается равною нулю: назвавъ h самую большую высоту восхожденія и уравнивъ въ послѣднихъ выраженіяхъ количество v нулю, получимъ какъ сію высоту, такъ и соотвѣтственное ей время посредствомъ уравненій

$$h = \frac{1}{2cLe} L\left(1 + \frac{c}{g}a^2\right) \dots (8)$$

и

$$t = \frac{1}{\sqrt{cg}} \cdot \text{Arc}\left(\text{tg} = a \sqrt{\frac{c}{g}}\right) \dots (9),$$

изъ коихъ первое ведетъ къ явному заключенію, что при всѣхъ прочихъ равныхъ обстоятельствахъ плотнѣйшія тѣла восходятъ до большей высоты; второе же показываетъ, что съ увеличиваніемъ начальной скорости a отъ 'нуля до безконечности, время восхожденія t увеличивается только отъ нуля до предѣла $t = \frac{1}{\sqrt{cg}} \times \frac{1}{4}$ окружности круга, котораго радіусъ $= 1$.

Сей предѣлъ $t = \frac{\pi}{2\sqrt{cg}}$ составляетъ наибольш-

шее время вертикальнаго восхожденія тѣлъ въ воздухъ, которое относительно снарядовъ находится пропорціональнымъ корню квадратному изъ произведенія ихъ поперечниковъ на плотности и при равныхъ плотностяхъ пропорціональнымъ корню квадратному изъ поперечниковъ (§ 52).

Обращая уравненія (8) и (9) и выводя изъ нихъ a , найдется начальная скорость, которая должна быть сообщена снаряду, дабы онъ поднялся на данную высоту h , равная

$$a = \sqrt{\frac{g}{c}} \sqrt{e^{2ch} - 1} \dots (10),$$

а начальная скорость, соотвѣтствующая извѣстному времени восхожденія, равная

$$a = \sqrt{\frac{g}{c}} \operatorname{tg} (t\sqrt{cg}) \dots (11),$$

если послѣднюю величину поставимъ въ уравненіе (8), то получимъ еще

$$h = \frac{1}{cLe} \operatorname{Lsec} (t\sqrt{cg}) \dots (12)$$

и отсюда

$$t = \frac{1}{\sqrt{cg}} \cdot \operatorname{Arc} (\cos e^{-ch}) \dots (13).$$

§ 63. Найденныя формулы въ двухъ предположеніяхъ вертикальнаго восхожденія и нисхож-

денія тѣль въ воздухѣ, можно связать между собою и между прочими вывести формулу для вычисленія начальной скорости a , съ которою бросается снарядъ прямо вверхъ, если при семъ замѣчено будетъ время, употребляемое имъ для совершенія всего полета при восхожденіи и нисхожденіи своемъ. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіе (5) поставимъ вмѣсто x самую большую высоту (8) $h = \frac{1}{2c} l (1 + \frac{c}{g} a^2)$, соответствующую начальной скорости a , и при томъ замѣтимъ, что $\sqrt{1 - e^{-2cx}} =$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{c}{g} a^2}} = \frac{a \sqrt{\frac{c}{g}}}{\sqrt{1 + \frac{c}{g} a^2}}, \text{ то найдется вре-}$$

мя, которое употребить снарядъ для нисхожденія съ сей высоты, посредствомъ выраженія

$$\frac{1}{\sqrt{cg}} l \sqrt{1 + \frac{c}{g} a^2} + \frac{1}{\sqrt{cg}} l \left(1 + \frac{a \sqrt{\frac{c}{g}}}{\sqrt{1 + \frac{c}{g} a^2}} \right)$$

$$\text{или } \frac{1}{\sqrt{cg}} l \left(a \sqrt{\frac{c}{g}} + \sqrt{1 + \frac{c}{g} a^2} \right); \text{ потомъ при-}$$

соединивъ сіе время къ тому, которое онъ для восхожденія употребляетъ (9), и сумму уравнивъ времени T изъ опыта замѣченному, бу-

демъ имѣть для отысканія начальной скорости a уравненіе.

$$T = \frac{1}{\sqrt{cg}} \left\{ l \left(a \sqrt{\frac{c}{g}} + \sqrt{1 + \frac{c}{g} a^2} \right) + \text{Arc} \left(\text{tg} a \sqrt{\frac{c}{g}} \right) \right\}$$

которое приводится къ простѣйшему виду, сдѣлавъ $a \sqrt{\frac{c}{g}} = \text{tg} 2\alpha$ или $\text{Arc} \left(\text{tg} a \sqrt{\frac{c}{g}} \right) = 2\alpha$, ибо тогда будетъ

$$a \sqrt{\frac{c}{g}} + \sqrt{1 + \frac{c}{g} a^2} = \frac{\sin 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos(90^\circ + 2\alpha)}{\sin(90^\circ + 2\alpha)} = \frac{2\sin^2(45^\circ + \alpha)}{2\sin(45^\circ + \alpha)\cos(45^\circ + \alpha)} = \text{tg}(45^\circ + \alpha) \text{ и}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{cg}} \left\{ 2\alpha + \frac{1}{Le} \text{Ltg}(45^\circ + \alpha) \dots (h') \right\}.$$

Изъ сего уравненія сыскавъ чрезъ испытаніе длину дуги a , для которой обѣ части равенства сдѣлались бы равными, получимъ начальную скорость

$$a = \sqrt{\frac{g}{c}} \text{tg} 2\alpha \dots (i'),$$

потомъ и ту скорость, которую тѣло пріобрѣтаетъ при возвращеніи своемъ къ точкѣ бросанія. Сія послѣдняя есть менѣе первой, ибо исключивъ между уравненіями (2) и (8) количество $x = h$, будемъ имѣть очевидно

$$\frac{a}{\sqrt{1 + \frac{c}{g} a^2}}.$$

§ 64. Сравнимъ высоту и время вертикальнаго восхожденія тѣла, найденныя въ предыдущемъ вопросѣ, съ тѣми, которыя выводятся въ предположеніи точнѣйшаго выраженія ускоряющей силы сопротивленія $R = m\nu^2 - n\nu$ (§ 56). Очевидно, что тогда уравненія движенія будутъ

$$dx = -\frac{\nu d\nu}{m\nu^2 - n\nu + g} \text{ и } dt = -\frac{d\nu}{m\nu^2 - n\nu + g},$$

которыя при положеніи $\nu = z + \frac{n}{2m}$ и $g - \frac{n^2}{4m} = \alpha$

преобразуются въ

$$dx = -\frac{z dz}{mz^2 + \alpha} - \frac{n}{2m} \frac{dz}{mz^2 + \alpha} \text{ и } dt = -\frac{dz}{mz^2 + \alpha}.$$

Взявъ интегралы сихъ уравненій, будемъ имѣть

$$x = -\frac{1}{2m} l(mz^2 + \alpha) - \frac{n}{2m\sqrt{\alpha m}} \text{Arc}\left(tg = z\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\right) + C$$

и

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\alpha m}} \text{Arc}\left(tg = z\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\right) + C',$$

отсюда по постановленіи $z = \nu - \frac{n}{2m}$ получимъ

$$x = -\frac{1}{2m} l(m\nu^2 - n\nu + g) - \frac{n}{2m\sqrt{\alpha m}} \text{Arc}\left(tg = \frac{2m\nu - n}{2\sqrt{\alpha m}}\right) + C$$

и

$$t = -\frac{1}{\sqrt{m\alpha}} \text{Arc}\left(tg = \frac{2m\nu - n}{2\sqrt{\alpha m}}\right) + C'$$

Но въ началѣ движенія имѣемъ $t=0$, $x=0$, и $v=a$ —начальной скорости, слѣдовательно поставивъ сіи величины въ послѣднія уравненія для x и t , будемъ имѣть

$$0 = -\frac{1}{2m} l (ma^2 - na + g) - \frac{n}{2m\sqrt{am}} \cdot \text{Arc} \left(tg = \frac{2ma-n}{2\sqrt{am}} \right) + C$$

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{am}} \cdot \text{Arc} \left(tg = \frac{2ma-n}{2\sqrt{am}} \right) + C',$$

вычитая сіи уравненія изъ предшествующихъ и полагая $v=0$, что соотвѣтствуетъ наибольшей высотѣ h восхожденія тѣла, получимъ сію высоту

$$h = \frac{1}{2mle} l g \left(\frac{ma^2 - na + g}{g} \right) + \frac{n}{2m\sqrt{am}} \cdot \text{Arc} \left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g-na} \right) \dots (14),$$

и соотвѣтствующее время восхожденія

$$t = \frac{1}{\sqrt{am}} \cdot \text{Arc} \left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g-na} \right) \dots (15).$$

Если начальная скорость a бесконечно великая, тогда изъ послѣдняго уравненія опредѣлится предѣлъ наибольшаго времени для вертикальнаго восхожденія тѣла; который будетъ

$$t = \frac{1}{\sqrt{am}} \cdot \text{Arc} \left(tg = \frac{2\sqrt{am}}{n} \right) \dots (16).$$

§ 65. Здѣсь предложимъ нѣкоторые примѣры для предъидущихъ формулъ.

1) Вычислимъ высоту вертикальнаго восхожденія 24 фунтоваго ядра, брошеннаго съ на-

чальною скоростью $a=1600$ футъ въ секунду.

Для сего возьмемъ формулу:

$$h = \frac{1}{2mLe} Lg^{\frac{ma^2 - na + g}{g}} + \frac{n}{2m\sqrt{am}} \cdot \text{Arc}(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g - na}),$$

для коей помощію таблицы § 55 удобно найдется (§ 57), $Lm = 6,4913538-10$ и $Ln = 8,8468935-10$; послѣ чего по порядку будемъ имѣть

$$L.ma^2 = 2,8995938 \dots \dots \dots ma^2 = 793,585$$

$$L.na = 2,0510135 \dots \dots \dots na = 112,464$$

$$g = 32,214$$

$$ma^2 - na + g = 713,335$$

$$Lg^{\left(\frac{ma^2 - na + g}{g}\right)} = 1,3452489$$

$$LL^{\left(\frac{ma^2 - na + g}{g}\right)} = 0,1288026$$

$$L.(2mLe) = 6,4301681-10 \left. \vphantom{L.(2mLe)} \right\} \begin{array}{l} \text{при чемъ } LLe = \\ L(0,43429448) = \\ 9,6377843-10. \end{array}$$

$$L.\left\{\frac{1}{2mLe} \cdot L\left(\frac{ma^2 - na + g}{g}\right)\right\} = 3,6986345$$

$$\text{отсюда 1-й членъ } \frac{1}{2mLe} \cdot L\left(\frac{ma^2 - na + g}{g}\right) = 4996,1 \text{ фута.}$$

Относительно 2-го члена, въ которомъ $Lm =$

$$gm - \frac{n^2}{4}, \text{ будетъ}$$

$$Lgm = 7,9993985-10 \dots \dots \dots gm = 0,00998616$$

$$L.\frac{n^2}{4} = 7,0917270-10 \dots \dots \dots \frac{n^2}{4} = 0,00123517$$

$$gm - \frac{n^2}{4} = Lm = 0,00875099$$

$$\left. \begin{aligned} L\sqrt{am} &= 8,9710286-10 \\ L2a &= 3,5051500 \end{aligned} \right\}$$

$$L.2a\sqrt{am}=2,4761786;$$

но $na=112,464$, посему будетъ $na-2g=48,036$
и $L(na-2g)=1,6815668$; а чрезъ то найдется

$$Lg \left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{na-2g} = 0,7946118: \right.$$

логарифму сего тангенса, соотвѣтствуетъ дуга

$$= 80^{\circ}65'1''; \text{ и такъ будемъ имѣть } Arc\left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g-na} \right.$$

$$= 180^{\circ}, - 80^{\circ}65'1'' = 99^{\circ}6'59'' = 1,7298073 \text{ въ ча-}$$

стяхъ табличнаго радіуса, который равенъ 1-цѣ.

Послѣ чего найдется

$$L. Arc\left(2g = \frac{2a\sqrt{am}}{2g-na} \right) = 0,2379977$$

$$L\left(\frac{n}{2m\sqrt{am}} \right) = 3,0832697$$

$$L. \frac{n}{2m\sqrt{am}} Arc\left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g-na} \right) = 3,3212674$$

отсюда 2-й членъ формулы будетъ

$$\frac{n}{2m\sqrt{am}} \cdot Arc\left(tg = \frac{2a\sqrt{am}}{2g-na} \right) = 2095,4 \text{ фута...}$$

сложивъ его съ первымъ, получимъ требуемую
высоту $h=7091,5$ фута $=1013$ сажень.

Въ безвоздушномъ пространствѣ сія высота

$h = \frac{a^2}{2g} = 39734 \text{ фута} = 5676 \text{ сажень,}$ которая около 6-ти разъ болѣе предъидущей.

Въ предложенномъ примѣрѣ, вычисляя высоту h по формулѣ (8) § 62, и полагая при семъ въ выраженіи количества $c = \frac{3\lambda D}{4kD'}$, коэффициентъ $\lambda = \frac{3}{5}$ (по Ломбару), а слѣдовательно $Lc = 6,1941293 - 10$, найдется $h = 8305 \text{ футъ} = 1186\frac{3}{7} \text{ сажени.}$

2) Вычислимъ еще время для всего вертикальнаго восхожденія 24 фунтоваго ядра, брошеннаго съ прежнею начальною скоростію $a = 1600 \text{ футъ.}$

Если взять формулу (15), въ которой какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ будетъ

$$L. \text{Arc} \left(t g = \frac{2a\sqrt{am}}{2g - na} \right) = 0,2379977$$

и

$$L. \sqrt{am} = 8,9710286 - 10,$$

то найдется $Lt = 1,2669691$ и отсюда время $t = 18'',49$. Въ безвоздушномъ же пространствѣ сіе время $t = \frac{a}{g} = 49'',67$.

Но время восхожденія сего ядра до безконечно большой высоты, брошеннаго съ безко-

нечно великою скоростью, по формулѣ (16), въ которой $Arc \left(tg = -\frac{2\sqrt{am}}{n} \right) = 110^{\circ}35'28'' = 1,9301790$ въ частяхъ табличнаго радіуса, будетъ $t=20'',6$.

Если же взять формулу (9) § 61 для вычисления времени въ данномъ примѣрѣ, то найдется, при положеніи $c = \frac{gD}{20kD'}$, сіе время $t=18''$,

24 то же, что и выше. Самое большое время для вертикальнаго восхожденія 24 фунтоваго ядра, когда его скорость бросанія $a=\infty$, будетъ

(§ 62) $t = \frac{\pi}{2\sqrt{cg}} = 22'',1$; здѣсь количество $\pi =$

3,14159265 и $L\pi = 0,4971499$.

Вычисленіе прицѣльныхъ выстрѣловъ.

§ 66. Хотя найденныя въ параграфахъ 51 и 52 формулы не показываютъ свойства кривой, полетомъ ядра описываемой, но онѣ могутъ служить съ пользою для опредѣленія многихъ обстоятельствъ, касающихся до прицѣльныхъ выстрѣловъ, или такихъ когда линія прицѣливанія направляется прямо въ предметъ, въ который попасть желаемъ. Въ самомъ дѣлѣ, поелику при выстрѣлахъ сего рода уголь состав-

ляемый линією прицѣливанія съ осью канала обыкновенно бываетъ невеликъ, то кривая линія пробѣгаемая ядромъ столь мало разнству-етъ отъ дальности его полета, или прямой линіи, проведенной отъ отверстія орудія къ предмету, что можно безъ чувствительной по-грѣшности почесть ихъ равными; и слѣдова-тельно опредѣливъ одно изъ оныхъ, можно безъ ошибки въ практическомъ употребленіи брать ее и за другую. И такъ пусть количество x представляетъ часть кривой ВОМ (фиг. 8), описанной полетомъ ядра отъ орудія до пред-мета М, который находится на пресѣченіи сей кривой съ прицѣльною линією ІНМ; и назо-вемъ начальную скорость ядра $= a$: въ слѣдствіе основаній, кои предложены въ § 53, будемъ имѣть время потребное для пробѣжанія про-странства x

$$t = \frac{e^{cx} - 1}{ac}.$$

Но то же время t , другимъ образомъ можно еще изобразить; въ самомъ дѣлѣ продолживъ ABCD ось орудія до пресѣченія съ вертикальною РМ проходящею чрезъ предметъ, часть DM сей вертикальной будетъ высота, съ коей ядро,

побуждаемое тяжестью, упадетъ въ то самое время, въ которое оно переносится отъ В къ М. А какъ сія высота при малыхъ углахъ прицѣливанія, кои здѣсь преимущественно допускаются, бываетъ невелика, то рассматриваемое время паденія снаряда съ высоты DM въ воздухъ почти будетъ такое же, какъ и въ безвоздушномъ пространствѣ; слѣдовательно по извѣстному закону движенія свободно падающихъ тѣлъ въ пустотѣ будемъ имѣть $DM = \frac{1}{2}gt^2$, и

$$t = \sqrt{\frac{2DM}{g}}.$$

Теперь если проведемъ горизонтальную линію ВР и примемъ разстояніе ВМ отъ середины отверстія орудія до предмета, равнымъ пространству x пробѣгаемому снарядомъ, то изъ рассматриванія треугольниковъ ВРМ и ВРD, очевидно найдется $DM = PD - PM = BP \cdot \operatorname{tg} DBP = BP \cdot \operatorname{tg} MBP = MB \cdot \cos MBP (\operatorname{tg} DBP - \operatorname{tg} MBP) = x \cos \alpha (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \alpha)$ или $DM = \frac{x \sin(\theta - \alpha)}{\cos \theta}$, гдѣ количества α , θ удерживаютъ то же значеніе, какъ и въ параграфахъ 22 и 25. Вставивъ послѣднюю величину въ предъидущее выраженіе для t , получимъ

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g} \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \theta}};$$

и если вмѣсто угла $DBM = \theta - \alpha$, возьмемъ прицѣльный уголъ $BSH = GHI = \gamma$ (§ 22) весьма немного отъ онаго различающійся, то будемъ имѣть

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g} \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \theta}}.$$

По уравненіе $\theta - \alpha = \gamma$ показываетъ, что когда предметъ находится на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ, или близъ сего горизонта такъ, что уголъ α равенъ будетъ или нулю или по своей малости можетъ быть отброшенъ, тогда $\theta = \gamma$

и слѣдовательно $t = \sqrt{\frac{2x}{g} \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}} = \sqrt{\frac{2x}{g} \cdot \operatorname{tg} \gamma}$. Въ

такомъ же случаѣ, когда предметъ находится столь высоко надъ горизонтомъ, что уголъ α довольно будетъ значителенъ, должно удержать прежнее уравненіе, въ которомъ кромѣ угла прицѣливанія γ входитъ еще въ разсмотрѣніе уголъ θ возвышенія орудія, изъ коихъ первый посредствомъ втораго опредѣляется чрезъ уравненіе (г) § 23 и разность между ими равна $\theta - \gamma = \alpha =$ углу мѣстности $= \delta$; зависимо отъ

сего послѣдняго $\sin \gamma = \frac{n \cos \alpha}{m}$, $\theta = \gamma + \alpha$ и $n = \frac{m \sin \gamma}{\cos \alpha}$.

Впрочемъ при дѣйствованіи изъ пушекъ и

единороговъ производятся по большей части выстрѣлы, по предметамъ находящимся на горизонтѣ, или близъ горизонта орудія, и то подъ небольшими прицѣльными углами; а потому для практическаго употребленія весьма достаточно одного послѣдняго выраженія, найденнаго для t , которое сравнивъ съ прежнимъ изображающимъ также время, получимъ уравненіе

$$\sqrt{\frac{2xtg\gamma}{g}} = \frac{e^{cx}-1}{ac},$$

которое по освобожденіи отъ корня приводится къ

$$\frac{2a^2c^2tg\gamma}{g} = \frac{(e^{cx}-1)^2}{x} \dots (k').$$

Хотя въ предшествоющемъ уравненіи, изъ котораго сіе послѣднее выведено, количество x на первой сторонѣ знака равенства означаетъ разстояніе ВМ, а на второй кривую линію ВоМ полетомъ ядра описываемую, однако же отъ сего важной ошибки послѣдовать не можетъ, ибо какъ выше уже замѣчено, сіи двѣ линіи столь мало между собою разнствуютъ, что могутъ принимаемы быть одна за другую, особенно для практики, гдѣ случаются еще и большія разности.

§ 67. Въ уравненіи (k'), не зависящемъ отъ угла возвышенія орудія надъ горизонтомъ, что въ практикѣ во многихъ случаяхъ доставляетъ важную выгоду, заключаются всѣ величины, кои при дѣйствованіи изъ орудій прицѣльными выстрѣлами знать нужно; какъ-то, 1) уголъ прицѣливанія $= \gamma$; 2) начальная скорость бросаемаго ядра $= a$; 3) отстояніе предмета, въ который понасть должно $= x$. Къ сему должно прибавить еще; 4) высоту прицѣла, которая должна соотвѣтствовать данному или найденному углу прицѣливанія, и которая находится изъ уравненія $n = t \sin \gamma$ (§ 24) или для каждаго калибра орудій по таблицамъ § 27. Если изъ трехъ первыхъ величинъ извѣстны будутъ какія либо двѣ, то третія найдется посредствомъ уравненія (k'). Но видно, что изъ онаго довольно удобно выводятся величины a и $t \sin \gamma$, рѣшеніе же его въ отношеніи къ x соединено съ немалымъ затрудненіемъ; а потому стараемся преобразовать оное въ простѣйшее, не лишая при томъ искомымъ выводовъ настоящаго ихъ значенія. Для сего возьмемъ въ соображеніе рядъ для $e^{cx} = 1 + \frac{cx}{1} + \frac{c^2 x^2}{1 \cdot 2} +$

$\frac{c^3 x^5}{1.2.3} + \dots$, который дает $e^{cx} - 1 = cx + \frac{c^2 x^2}{2} + \frac{c^3 x^3}{1.2} + \dots$ и

$$\frac{(e^{cx} - 1)}{x} = c^2 x + c^3 x^2,$$

отбросивъ при семъ всѣ послѣдующіе члены, потому что степени количества c , составляю-

щаго весьма малую дробь $= \frac{3\lambda D}{4kD'} = \frac{9.0,0012}{20. kD'}$

(при $\lambda = \frac{3}{5}$), въ каждомъ членѣ больше степеней количества x , а слѣдовательно члены ряда весьма убываютъ и уменьшеніе сіе въ настоящемъ случаѣ тѣмъ чувствительнѣе, что здѣсь дѣло идетъ о чугунныхъ ядрахъ; но

тогда будетъ $\frac{2c^2 a^2 \operatorname{tg} \gamma}{g} = c^2 x + c^3 x^2$, или

$$cx^2 + x = \frac{2a^2 \operatorname{tg} \gamma}{g} \dots (I).$$

Вотъ самое простое уравненіе, которое представилъ Ломбаръ въ сочиненіи своемъ *Traité du mouvement des projectiles*, дабы безъ большаго труда изъ онаго можно было вывести всѣ для произведенія выстрѣловъ изъ пушекъ и единороговъ нужныя величины, какъ-то :

1) Начальную скорость выстрѣливаемаго снаряда

$$a = \sqrt{\frac{gx(1+cx)}{2tg\gamma}} \dots (1).$$

2) Уголъ, составляемый линією прицѣливанія съ осью канала орудія

$$tg \gamma = \frac{gx(1+cx)}{2a^2} \dots (2).$$

3) Дальность полета, каковыя при извѣстной скорости и при извѣстномъ углѣ прицѣливанія, послѣдовать должна

$$x = \frac{1}{2c} \left\{ \sqrt{1 + \frac{8a^2 c tg\gamma}{g}} - 1 \right\} \dots (3).$$

§ 68. Здѣсь предлагается нѣсколько практическихъ примѣровъ для предъидущихъ формулъ.

1) Сыскать начальную скорость 6 фунтоваго ядра, зная изъ опытовъ, что оно будучи брошено изъ 6-ти фунтовой пушки и съ зарядомъ въ 2 фунта пороха, при углѣ прицѣливанія въ 2 градуса попадаетъ въ предметъ, отстоящій отъ орудія на 378 сажень или на 2646 ф. (*). Мы имѣемъ въ семъ примѣрѣ $x=2646$, $\gamma=2^\circ$,

(*) Смотри таблицы объ выстрѣлахъ нашихъ орудій, составленныя изъ среднихъ дальностей полетовъ, оказавшихся при опытахъ Военнымъ Ученымъ Комитетомъ произведенныхъ, и помѣщенныя въ книгѣ: Основанія Артиллерійской и Пантоной науки, часть II § 77, откуда для примѣровъ заимствованы здѣсь данныя величины.

$$Lc = L \cdot \frac{9D}{20kD'} = 6,3969495 - 10 \text{ (§ 55 табл.) и}$$

$C = 0,00024943$: вычисляя теперь формулу $a =$

$$\sqrt{\frac{gx(1+cx)}{2tg\gamma}} \text{ по логарифмамъ, будетъ}$$

$$L(1+cx) = 0,2201063$$

$$Lx = 3,4225898$$

$$L\frac{g}{2} = 1,2070147$$

$$\text{Ариом. допол. } Ltg\gamma = 1,4569162$$

$$L \cdot a^2 = 6,3066270 \text{ и } La = 3,1533135 \\ = L(1423,4);$$

следовательно начальная скорость 6-ти фунтового ядра, брошенного изъ 6-ти фунтовой пушки съ зарядомъ въ 2 фунта пороха, составляетъ около 1423 футъ въ секунду.

2) Вычислить на какое разстояніе полетитъ 6-ти фунтовое ядро съ начальною скоростью въ 1423 фута въ секунду, при углѣ прицѣливанія въ 4 градуса. Уравнивъ $a = 1423$, $\gamma = 4$ и

$$\text{вычисляя формулу } x = \frac{1}{2c} \left\{ \sqrt{\frac{8a^2c}{g} tg\gamma + 1} - 1 \right\}$$

по логарифмамъ, будемъ имѣть по порядку

$$L\left(\frac{8a^2c}{g} \cdot tg\gamma\right) = 0,9430483 \text{ и } \frac{8a^2c}{g} \cdot tg\gamma = 8,77098;$$

$$\text{следовательно } \frac{8a^2c}{g} \cdot tg\gamma + 1 = 9,77098; \sqrt{9,77098} =$$

$$3,12586 \text{ и } \sqrt{9,77098} - 1 = 2,12586. \text{ Но}$$

$$\left. \begin{array}{l} L(2,12586) = 0,3275346 \\ -L2c = -6,6979795 - 10 \end{array} \right\}$$

отсюда $Lx = 3,6295551$ и $x = 4261,4$ фут:
почти $= 609$ сажень; такова искомая дальность
полета ядра.

Подобнымъ образомъ найдется разстояніе
 $= 792$ сажень (по опытамъ $= 786$), на кото-
рое должно полетѣть 6-ти фунтовое ядро съ
такою же начальною скоростью, при углѣ при-
цѣливанія въ 6 градусовъ; и разстояніе $= 949$
сажень (по опытамъ $= 901$), на которое оно
полетитъ при углѣ прицѣливанія въ 8 граду-
совъ.

3) Ядро 12-ти фунтовое, брошенное изъ 12
фунтовой пушки съ зарядомъ въ 4 фунта по-
роха, при углѣ прицѣливанія въ 2 градуса, упа-
даетъ отъ орудія на разстояніи 397 сажень
или 2779 футъ; отыскать начальную онаго
скорость? Поскольку $x = 2779$, $\gamma = 2^\circ$ и $Lc =$

$$L\left(\frac{9 D}{20kD'}\right) = 6,2965628 - 10 \text{ (§ 55 таб.)}, \text{ то по}$$

формулѣ $a = \sqrt{\frac{gx(1+cx)}{2lgy}}$ найдется начальная
скорость 12-ти фунтоваго ядра $= 1409,6$ фута
въ секунду.

4) Требуется найти высоту прицѣла и при-

цѣльный уголъ, подъ которымъ 12-ти-фунтовое ядро, брошенное изъ 12-ти-фунтовой пушки, со скоростью 1410 футъ въ секунду, упало бы отъ орудія на разстояніи 630 сажень или 4410 футъ.

Положимъ въ семь примѣръ $x=4410$, $a=1410$ и при томъ $Lc=6,2965628-10$, то взявъ для опредѣленія угла γ формулу $tg \gamma = \frac{gx(1+cx)}{2a^2}$, будемъ имѣть по правилу логарифмическаго вычисленія

$$Lcx=9,9410014-10, -cx=0,872974;$$

потомъ

$$\begin{array}{rcl} L(1+cx) & = & 0,2725317 \\ Lx & = & 3,6444386 \\ L\frac{g}{2} & = & 4,2070147 \\ \hline \text{сумма . . .} & & 5,1239850 \\ -L(a^2) & = & -6,2984382 \\ \hline Ltg \gamma & = & 8,8255468-10, \end{array}$$

отсюда получится прицѣльный уголъ $\gamma=3^{\circ} 49'42''$, послѣ чего, или чрезъ уравненіе $n=msin\gamma$ или помощью таблицы III (§ 27), найдется соответствующая сему углу высота прицѣла $n=5,393$ дюйма.

§ 69. Сихъ примѣровъ довольно, чтобы видѣть какъ поступать должно при рѣшеніи всѣхъ случаевъ, могущихъ встрѣтиться при обыкновенномъ дѣйствованіи изъ пушекъ, а также единороговъ подъ небольшими прицѣльными углами; и въ семъ отношеніи можно для каждаго калибра орудія, при употребленіи извѣстнаго сорта пороха, составить таблицы. Для сего если неизвѣстна еще начальная скорость бросаемаго снаряда, то подъ опредѣленнымъ угломъ прицѣливанія, для котораго извѣстна будетъ и высота прицѣла, сдѣлавъ нѣсколько пробныхъ выстрѣловъ и взявъ изъ нихъ среднюю дальность полета, надлежитъ сперва по формулѣ (1) § 67 отыскать сію скорость, а потомъ по формуламъ (3) § 67 и (b') § 53, для каждаго угла прицѣливанія или высоты прицѣла найти соотвѣтствующую дальность и время полета ядра, а по формулѣ (z) или (a') § 51 и § 53 скорость его паденія, и найденныя выводы разставить въ надлежащемъ порядкѣ. Составивъ такимъ образомъ таблицы и сверхъ ихъ съ настоящими выстрѣлами нарочно для сего произведенными, увидимъ достаточное согласіе между Теоріею и практи-

кою, если только опыты произведены будутъ со всевозможнымъ тщаніемъ, какое необходимо требуется для вѣрности выстрѣловъ.

§ 70. Припомнимъ себѣ сказанное въ § 66, что если предметъ, въ который стрѣляютъ, не на самомъ горизонтѣ находится, но нѣсколько выше или ниже онаго, такъ чтобы уголъ α по своей малости могъ быть пренебреженъ, тогда найденныя предъ симъ формулы (k') и (l') столь же будутъ справедливы въ последнемъ случаѣ, какъ и въ первомъ, который даетъ $\theta = \gamma$. Но дабы въ разсужденіи сего не оставалось какого либо сомнѣнія, то вновь рѣшимъ выше представленный 4-й примѣръ вычисленія формулы

$$tg\gamma = \frac{gx(1+cx)}{2a^2}, \text{ присовокупляя къ нему то}$$

условіе, дабы предметъ возвышенъ былъ на 30 футъ отъ горизонта орудія. Величина 8,8255468, найденная въ семъ примѣрѣ для $Ltg\gamma$, будетъ въ настоящемъ случаѣ величина

выраженія $L \left(\frac{\sin\gamma'}{\cos(\alpha+\gamma')} \right)$, въ которомъ количе-

ство γ' означаетъ искомый уголъ прицѣливанія, различный отъ γ ; ибо вмѣсто уравненія $t =$

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} \cdot tg\gamma, \text{ по замѣчанію сдѣланному въ § 66,}$$

удержать должно уравненіе $t = \sqrt{\frac{2x \cdot \sin \gamma'}{g \cos \gamma'}}$ или

$$t = \sqrt{\frac{2x \cdot \sin \gamma'}{g \cos(\alpha + \gamma')}}, \text{ которое по сравненіи съ}$$

уравненіемъ $t = \frac{e^{cx} - 1}{ac}$ даетъ формулы таковыя

же, какъ и предъ симъ выведенныя, съ тою только разностию, что въ нихъ вмѣсто множителя $\text{tg} \gamma$ заключаться будетъ $\frac{\sin \gamma'}{\cos(\alpha + \gamma')}$. Итакъ получимъ

$$\frac{\sin \gamma'}{\cos(\alpha + \gamma')} = \frac{gx(1 + cx)}{2a^2} \text{ или } = \text{tg} \gamma$$

и

$$L\left(\frac{\sin \gamma'}{\cos(\alpha + \gamma')}\right) = L \text{tg} \gamma = 8,8255468 \text{ (4 прим.)}; \text{ но}$$

$$\frac{\sin \gamma'}{\cos(\alpha + \gamma')} = \frac{\text{tg} \gamma'}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \text{tg} \gamma'} = \text{tg} \gamma,$$

отсюда найдется

$$\text{tg} \gamma' = \frac{\cos \alpha \cdot \text{tg} \gamma}{1 - \sin \alpha \cdot \text{tg} \gamma} \text{ и } L \text{tg} \gamma' = L \cos \alpha + L \text{tg} \gamma + \text{ар. доп. } L(1 - \sin \alpha \cdot \text{tg} \gamma).$$

Замѣтимъ теперь, что относительно угла МВР возвышенія мѣстности, который равенъ α ,

$$\text{имѣемъ } \sin \alpha = \frac{PM}{BM} = \frac{30}{4410}, L \sin \alpha = 7,8326827 - 10,$$

$\alpha = 23'23''$ и $Lg \cos \alpha = 9,9999900 - 10$, то най-

$$L(\sin \alpha \operatorname{tg} \gamma) = L \sin \alpha + L \operatorname{tg} \gamma = 6,6582296 - 10$$

$$\sin \alpha \operatorname{tg} \gamma = 0,0004552, 1 - \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma = 0,9995448,$$

арифм. доп. $L(1 - \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma) = 0,0001977$; следовательно будемъ имѣть $L \operatorname{tg} \gamma' = 8,8257345 - 10$ и уголъ $\gamma' = 3^\circ 49' 48''$, который весьма мало различается отъ прежняго угла прицѣливанія $\gamma = 3^\circ 49' 42''$, при опредѣленіи коего не принималось въ уваженіе возвышеніе предмета надъ горизонтомъ орудія. Зная уголъ γ' , мы найдемъ

$$\text{по формулѣ (§ 22)} \quad n' = \frac{m \sin \gamma'}{\cos(\theta - \gamma')} = \frac{m \sin \gamma'}{\cos \alpha} \quad \text{или}$$

изъ таблицы III (§ 27), высоту прицѣла ему соответственную $n' = 5,395$ дюйма, которая разнится отъ найденной въ прежнемъ примѣрѣ на 0,002 дюйма; разность совершенно ничтожная, могущая причинить погрѣшность несравненно меньшую, противу обыкновенныхъ практическихъ ошибокъ.

§ 71. Если въ 1-мъ примѣрѣ вычисленія

$$\text{формулы } a = \sqrt{\frac{gx(1+cx)}{2gty}} \quad \text{предположимъ, что}$$

предметъ находится на высотѣ 50 футъ отъ горизонта орудія, то поставивъ въ ней выра-

$$\text{женіе } \frac{\sin \gamma}{\cos(\alpha + \gamma)} \quad \text{на мѣсто } \operatorname{tg} \gamma, \text{ будемъ имѣть}$$

$$a' = \sqrt{\frac{gx(1+cx)\cos(\alpha+\gamma)}{2 \sin \gamma}}$$

и

$$La' = \frac{1}{2} \left\{ L(16,107) + Lx + L(1+cx) + \text{Ариѳ. доп.} L \frac{\sin \gamma}{\cos(\alpha+\gamma)} \right\}.$$

Но для опредѣленія угла мѣстности α , имѣемъ

$$\sin \alpha = \frac{50}{2646} \text{ и } L \sin \alpha = 8,2763802 - 10; \text{ то от-}$$

сюда получится $\alpha = 1^\circ 3' 58''$ и Ариѳмет. допол.

$$L \frac{\sin \gamma}{\cos(\alpha+\gamma)} \text{ или Ариѳ. доп. } L \left(\frac{\sin 2^\circ}{\cos(3^\circ 3' 58'')} \right)$$

$= 1,4565478$. Послѣ чего не трудно будетъ

найти $La' = 3,1531293$ и начальную скорость

$a' = 1422,7$ футовъ, которая различается отъ пре-
же выведенной $a = 1423,4$ на $0,7$ футовъ: разность

не стоящая того, чтобы принимать оную во
уваженіе.

Наконецъ, когда во 2-мъ примѣрѣ третьей
формулы сверхъ данныхъ величинъ $a = 1423$ и
 $\gamma = 4^\circ$ предполагаемъ извѣстнымъ и уголъ мѣ-
стности $MVR = \alpha = 8^\circ$, тогда для опредѣленія
отстоянія обстрѣливаемаго предмета должно
взять формулу

$$x' = \frac{1}{2c} \left\{ \sqrt{\frac{8a^2c}{g} \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos(\alpha+\gamma)} + 1} - 1 \right\},$$

по которой найдется $Lx = 3,6351816$ и $x =$

4317 футъ=617 сажень, что различается отъ прежняго вывода 609 сажень количествомъ=8 сажень; но сія разность во многихъ случаяхъ дѣйствительной стрѣльбы бываетъ терпима.

Изъ сравненія послѣднихъ выводовъ съ прежними ясно видно, что если линія прицѣлива-нія будетъ не горизонтальна, но немного воз-вышена или наклонена отъ горизонта, тогда безъ опасенія можно руководствоваться пре-жними легкими формулами; ибо бесполезно бы-ло бы жертвовать простымъ вычисленіемъ для снисканія чрезъ болѣе сложныя выкладки то-ликой точности, каковой мы и въ самой прак-тикѣ никогда не встрѣтимъ.

§ 72. Въ предъидущихъ вычисленіяхъ вездѣ мы принимали прицѣльный уголъ GHI или VCH , составляемый линіею прицѣливанія IH съ осью орудія, равнымъ углу CBM , который та же ось составляетъ съ линіею BM , прове-денною отъ жерла орудія къ предмету, то есть, предполагали $\gamma = \theta - \alpha$: ибо хотя истин-ная онаго величина равна $\angle \text{CBM} - \angle \text{BMH}$ или $= \theta - \alpha - \angle \text{BMH}$, однако же уголъ BMH по отдаленности предмета бываетъ столь малъ, что онъ не перемѣняетъ величины угла $\gamma = \theta - \alpha$

въ той степени, дабы отъ того и величины предъидущихъ выражений примѣтно могли измѣниться. А чтобы имѣть нѣкоторое понятіе о величинѣ сего угла BMH , то возьмемъ въ разсмотрѣніе самый невыгодный случай, предполагая, что разстояніе $BM=100$ сажень $=700$ футъ и притомъ перпендикулярное къ BH . Если пушка будетъ 12-ти-фунтовая, то получимъ $tg BMH = \frac{BH}{BM} = \frac{0,5679}{700}$ фута и по логарифмамъ найдется $\angle BMH = 2'47''$, сей уголь при большемъ разстояніи BM и при наклонномъ положеніи орудія гораздо менѣе выходитъ.

Вычисленіе отлогихъ рикошетныхъ выстрѣловъ въ сопротивляющемся воздухѣ ().*

§ 73. Поеліку при отлогихъ рикошетныхъ выстрѣлахъ путь снаряда не слишкомъ много разнится отъ прямыхъ отстоявій рикошетируемыхъ предметовъ, то формулы, выведенныя выше для прицѣльныхъ выстрѣловъ, могутъ быть приложены и къ симъ рикошетнымъ,

(*) Касательно предѣловъ, отдѣляющихъ крутые рикошетные выстрѣлы отъ отлогихъ, а также условій для угла возвышенія, величины заряда и проч. смотри: Записки объ Артиллерійскомъ искусствѣ Г. Весселя, Часть II. страп 43—60.

бравъ за предметъ верхнюю точку гребня бруствера, съ которой ядро должно быть перенесено. Но между тѣмъ надлежитъ замѣтить, что ядро тѣмъ болѣе вреда наноситъ непріятелю, чѣмъ оно, вдоль линіи укрѣпленія, быстрѣе мчится по дугѣ мало возвышенной надъ валгангомъ. Ибо пусть RH (фиг. 13) будетъ валгангъ фаса бастіона; C вершина бруствера; MCN кривая описываемая ядромъ: если верхъ C бруствера есть точка нисходящей вѣтви сей кривой, то очевидно, что ядро, пробѣгая часть CH можетъ встрѣтить всѣ предметы, находящіеся на валгангѣ RH , коихъ высота меньше будетъ возвышенія CR бруствера надъ онымъ, и что оно поразитъ ихъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ путь CH будетъ менѣе кривъ, длиннѣе и точка паденія H отдаленнѣе отъ бруствера; слѣдовательно, какъ скоро сіи условія будутъ исполнены, то непріятель потерпитъ сильное пораженіе, даже и безъ тѣхъ рикошетовъ, которые ядра производятъ послѣ перваго паденія. Для достиженія же сего, надобно умѣть сообщить ядру такую скорость, чтобы оно, будучи брошено изъ батареи, построенной на данномъ разстояніи, перенеслось за брустверь, совер-

шая уже опускающуюся вѣтвь полета своего. Скорость сія можетъ быть или на удачу взята или опредѣлена изъ уравненія $a = \frac{c^2 x - 1}{ct}$ (§ 53), зная по предварительнымъ наблюденіямъ то время, которое ядро употребляетъ на совершеніе своего полета отъ батареи до бруствера, гдѣ оно должно продолжать движеніе свое по опускающейся вѣтви. Но какъ первое средство не весьма надежно; то лучше употребить послѣднее, по которому, когда отыщемъ скорость и прицѣльный уголъ, не трудно будетъ тогда, по соображенію, выбрать удобнѣйшую скорость для рикошетиrowанія. Ломбаръ въ своей Теоріи рикошетныхъ выстрѣловъ, основываясь на опытахъ, принимаетъ за начало вычислений, что когда пушка поставлена во 150 тузахъ отъ бруствера, тогда ядро употребляетъ 2 секунды времени на пробѣжаніе сего разстоянія, и проходя чрезъ брустверь описываетъ уже опускающуюся вѣтвь; то же происходитъ съ ядромъ въ 200 тузахъ разстоянія чрезъ $2\frac{1}{3}$ секунды, въ 250 тузахъ чрезъ $2\frac{2}{3}$ секунды, въ 300 тузахъ чрезъ 3 почти секунды. Сія практическія положенія если и не

совершенно точны, однако же могутъ руководствовать насъ въ нашихъ разысканіяхъ.

§ 74. Положимъ, для примѣра, что батарея заложена во 150 саженьяхъ отъ бруствера и что 24-хъ фунтовому ядру потребно 2 секунды времени для пробѣжанія сего разстоянія. По симъ даннымъ начальная скорость 24-хъ фунтоваго ядра найдется по формулѣ $a = \frac{ecx - 1}{ct}$,

въ которой $t=2$, $x=1050$ футъ, $Lc=L\left(\frac{9D}{20kD'}\right) = 6,1941293 - 10$ (§ 55 табл.); слѣдовательно начальная скорость 24-хъ фунтоваго ядра $a=570,5$ фута. Теперь чтобы отыскать высоту прицѣла для даннаго разстоянія=150 сажень, прицѣливая при чемъ орудіе въ верхнюю точку гребня бруствера, то изъ уравненія $tg\ \gamma = \frac{gx(1+cx)}{2a^2}$ или точнѣе изъ уравненія $tg\ \gamma =$

$$\frac{g}{2x} \left(\frac{ecx - 1}{ac} \right)^2 = \frac{g}{2} \cdot \frac{t^2}{x} \quad (\S\ 66\ \text{и}\ 67)$$

сначала будемъ имѣть прицѣльный уголъ $\gamma=3^\circ\ 30'\ 40''$, послѣ чего, посредствомъ формулы $n=m \sin \gamma$ или помощію таблицы I (§ 27), получимъ и высоту прицѣла $n=7,788$ дюйма. Но если вы-

численная сія высота окажется болѣе всей высоты употребляемаго прицѣла, то въ такомъ случаѣ должно посредствомъ квадранта возвысить орудіе отъ горизонтальнаго направленія на число градусовъ, которое находится присоединяя къ выше найденному углу прицѣливанія еще уголъ, составляемый горизонтомъ батареи съ линією проведенною отъ дула орудія къ верхней точкѣ гребня бруствера (§ 25); величину послѣдняго угла практически найти не трудно по устроенію нашихъ орудій. Положимъ, что верхъ бруствера возвышенъ на 30 футъ отъ горизонта батареи, то на разстояніи 150 сажень сей уголъ будетъ $\approx 1^{\circ} 38' 12''$, а уголъ возвышенія орудія $\theta = \gamma + \alpha = 5^{\circ} 8' 52''$. Симъ образомъ для анфилированія укрѣпленія 24-хъ фунтовою пушкою, поставленною во 150 сажняхъ отъ бруствера, надлежитъ чтобы ядро брошено было съ начальною скоростію въ 570 футъ въ секунду, возвысивъ при чемъ орудіе въ отношеніи къ горизонту на $5^{\circ} 8' 52''$. Разумѣется, что батарея должна быть расположена по линіи перпендикулярной къ продолженію анфилируемаго фаса. Стрѣляя такимъ образомъ, ядро пролетѣвъ чрезъ брустверъ неми-

нуемо продолжѣть будетъ свой полетъ нисходящею отраслюю и произведетъ полное дѣйствіе, какое только отъ онаго можно ожидать, даже не бравъ во уваженіе его рикошетовъ.

§ 75. Хотя по прежнимъ формуламъ не возможно отличить восходящей вѣтви отъ нисходящей, однако весьма простымъ вычисленіемъ удостовѣрится можно, что полетъ ядра у верхней точки гребня бруствера есть склоняющійся къ валгангу; а также узнать и то разстояніе, на которомъ ядро отъ боковаго бруствера упадетъ на валгангъ. Для сего проведемъ отъ жерла А (фиг. 14) пушки горизонтальную плоскость АВ, и примемъ, что верхъ С бруствера возвышенъ на 30 футъ отъ сей плоскости. Поелику время полета ядра отъ А къ С составляетъ двѣ секунды, то сей снарядъ достигши точки С, уклонится внизъ на 4.16,107, или 64,43 фута отъ первоначальнаго своего направленія; слѣдовательно отложивъ вертикальную линію $CF=64,43$ фута и проведя линію АС, сія послѣдняя покажетъ направленіе, по которому ядро вылетаетъ изъ пушки, а $tg FAB$

$= \frac{FB}{AB} = \frac{94,43}{1050}$ опредѣлитъ уголъ возвышенія

орудія $\theta = 5^{\circ} 8' 20''$ тотъ же самый, который предъ симъ былъ выведенъ изъ угла прицѣливанія. Проведемъ теперь прямую линію AC и положимъ, что ядро находится въ точкѣ h , отъ которой остается ему до верха бруствера пробѣжать 20 сажень: проведемъ также вертикальную линію $mhnd$, то будемъ имѣть $AC : An$, или $150 : 130 = BF : dm$; но $BC = 30$ и $BF = BC + CF = 30 + 64,43 = 94,43$ фута, слѣдовательно получится $dm = 81,84$ фута. А чтобъ получить mh , то во первыхъ сыщемъ время употребляемое ядромъ на пробѣжаніе пространства $Ah = 130$ сажень или 910 футъ съ начальною скоростію въ 570,5 фута, по формулѣ $t = \frac{ecx - 1}{ac}$, найдется логарифмъ сего времени $= 0,2340510$: но извѣстно изъ основаній Динамики, что если квадратъ времени умножить на 16,107 фута, то получится высота, съ которой тяжелое тѣло упадаетъ въ сіе время; слѣдовательно прибавляя $L(16,107)$ къ удвоенному найденному логарифму $0,2340510$, получится 1,6751167 для логарифма высоты mh , которая будетъ $= 47,33$ фута, вычтя же оную изъ $md = 81,84$ фута, будемъ имѣть $hd = 34,51$ фута. Изъ сего видно,

что точка h есть выше, нежели c на 4,5 фута, и что ядро склоняется внизъ отъ h къ c . Исслѣдуемъ еще положеніе H , движущагося ядра въ разстояніи на 20 сажень за брустверомъ, и проведемъ на семь разстояній вертикальную линію $MNHD$, которая встрѣчаетъ продолженныя прямыя AF и AC въ точкахъ M и N ; будемъ имѣть тогда $AC:AN$ или $150:170=BF:DM=107,02$ фута. А чтобы узнать высоту MN , на которую ядро при достиженіи къ H опускается внизъ отъ перваго своего направленія AM , то должно, какъ и выше, сначала сыскать время употребляемое онымъ для пробѣжанія пространства $AN=170$ сажень или 1190 футъ, съ прежнею начальною скоростію въ 570,5 фута: логарифмъ сего времени будетъ $= 0,3603084$, къ удвоенному сему логарифму, присоединя $L(16,107)$, получимъ 1,9276315 для логарифма высоты MN , которая и будетъ $= 84,65$ фута; вычтя оную изъ $MD = 107,02$ фута, найдется $HD=22, 37$ фута. И такъ если положимъ, что валгангъ RH ниже верхней точки гребня бруствера на 7 футъ, то въ семь случаевъ будетъ $RV=23$ футамъ, а слѣдовательно ядро упадетъ на валгангъ въ разстояніи

отъ бруствера нѣсколько меньшемъ, нежели 20 сажень. Сіе разстояніе приблизительно найдется равнымъ $18\frac{1}{3}$ сажени, по пропорціи $CB-DH : CR = RH : RI$ или $7,63 : 7 = 20 : 18,35$. На семь-то удаленіи ядро сдѣластъ рикошетъ и поднимется на большую или меньшую высоту, по мѣрѣ того, какъ въ точкѣ паденія отражающая поверхность будетъ наклонена въ задъ или впередъ; можетъ оно отражаясь уклониться въ право или въ лѣво, если земля будетъ поката въ ту или другую сторону. Но при всѣхъ таковыхъ отраженіяхъ весьма возможно, что ядро перенесено будетъ чрезъ предметы, которые имъ были бы опрокинуты, если бы кривая была длиннѣе или если бы первая точка паденія была отдаленнѣе отъ боковаго бруствера. Но для сего требуется, чтобы начальная скорость ядра увеличена была; примѣрно, пусть сія скорость будетъ въ 700 футъ вмѣсто 510; бравъ постоянно разстояніе $AC = 250$ сажень или 1050 футъ и высоту CB бруствера $= 30$ футъ, найдемъ по формуль $t = \frac{e^{cx} - 1}{ac}$ время употребляемое ядромъ на совершеніе пути AC , равное 1,6301 секунды; сіе

время покажетъ намъ вертикальную линію CF, содержащуюся между вершиною С бруствера и первоначальнымъ направлеіемъ AF ядра, которая=42,80 фута и даетъ BF=72,80 фута.

Послѣ чего чрезъ уравненіе $tg\theta = \frac{BF}{AB} = \frac{72,8}{1050}$,

получимъ уголъ возвышенія орудія $\theta = 3^{\circ}57'58''$, высота же прицѣла найдется равною 5,17 дюйма. А дабы увѣриться теперь, что ядро при переходѣ своемъ чрезъ точку С склоняется внизъ, то рассмотримъ вертикальную md , взятую на разстояніи 10 сажень отъ BF; произведя вычисленіе по прежнему, найдемъ $hd = 30,08$ фута, сіе показываетъ, что ядро дѣйствительно склоняется внизъ отъ h къ С. Потомъ, взявъ вертикальную DM на разстояніи 32 саж. отъ бруствера, подобнымъ образомъ, какъ выше опредѣлимъ ординату DN почти равную 23 футамъ; сіе показываетъ, что ядро упадетъ на валгангъ въ разстояніи 32 сажень отъ боковаго бруствера, и слѣдовательно можетъ произвести лучшее противъ прежняго дѣйствіе. А если бы понадобилось еще болѣе усилить начальную скорость, или уменьшить оную, смотря по протяженію валганга и по дѣйствию, которое

назначается ядру произвести, то по предыдущимъ показаніямъ сдѣлать сіе не трудно.

§ 76. Приведемъ рѣшеніе вопросовъ относительно рикошетной стрѣльбы во всеобщность, и означимъ координаты Ad и hd , какой ни есть точки кривой линіи полета чрезъ x' и y' , а уголъ бросанія ядра mAd чрезъ θ ; то будемъ имѣть очевидно $dh = md - mh$ или $y' = x' \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g t^2$. Но по предыдущему $t = \frac{e^{\alpha x'} - 1}{ac}$, следовательно уравненіе между координатами точекъ пути ядра будетъ

$$y' = x' \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{e^{\alpha x'} - 1}{ac} \right)^2 \dots (1);$$

отсюда по взятіи дифференціала, отношеніе $\frac{dy'}{dx'} = \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{a^2 c} e^{\alpha x'} (e^{\alpha x'} - 1)$; даетъ тангенсъ угла наклоненія кривой въ точкѣ h къ горизонту. Если сдѣлаемъ сей уголъ равнымъ нулю, то составится уравненіе,

$$e^{2\alpha x'} - e^{\alpha x'} = \frac{a^2 c \operatorname{tg} \theta}{g} \dots (2),$$

изъ котораго опредѣлится горизонтальное разстояніе самой высшей точки полета ядра,

$$x' = \frac{1}{\rho L e} I_{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a^2 c \operatorname{tg} \theta}{g}} \right),$$

а потомъ посредствомъ уравненія (1) и верти-

кальное возвышеніе сей точки. Но если тотъ же уголъ предположимъ равнымъ углу θ' паденія ядра въ точкѣ I на валгангъ, то для опредѣленія онаго будемъ имѣть уравненіе

$$tg\theta' = tg\theta - \frac{g}{a^2c} \cdot e^{cx''} (e^{cx''} - 1) \dots\dots (3),$$

въ которомъ количество $x'' = AI$. Кромѣ сихъ уравненій получимъ относительно верхней точки C гребня бруствера и точки I паденія ядра еще слѣдующія

$$y = xtg\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{e^{cx} - 1}{ac}\right)^2 \dots\dots (4)$$

и

$$y' = x'tg\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{e^{cx'} - 1}{ac}\right)^2 \dots\dots (5),$$

къ коимъ должно присоединить уравненіе

$$v = \frac{a}{e^{cx}} \quad (\S 52) \text{ для опредѣленія той скорости,}$$

которую ядро имѣетъ позади бруствера спускаясь къ валгангу. И такъ посредствомъ предыдущихъ уравненій можно рѣшить всѣ заданія, относительно рикошетной стрѣльбы. Въ вышепредставленномъ вопросѣ, предполагающемъ $t = 2''$ и $x = 1050$ футъ, какъ скоро найдены бу-

$$\text{дутъ начальная скорость } a = \frac{e^{cx} - 1}{ct} = 570 \text{ футъ}$$

и уголъ возвышенія $\theta' = 5^\circ 8' 20''$ изъ уравненія

(4), которое даетъ $tg\theta = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{x}$, то посредствомъ уравненія (2), получимъ горизонтальное разстояніе самой возвышенной точки полета ядра $x' = \frac{1}{cLe} L_{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a^2 ctg\theta}{g}} \right) = 759,8$ фута или 108,5 сажени; слѣдовательно сія точка находится въ $41\frac{1}{2}$ сажени отъ бруствера и возвышена отъ горизонта на 36 футовъ. Послѣ чего, когда изъ уравненія (5), въ коемъ $y' = BR = 23$ футамъ, сыщемъ $x'' = AI = 18,35$ сажени, что не иначе сдѣлается какъ по правилу ложнаго положенія, тогда чрезъ уравненіе (3) опредѣлится и величина угла паденія ядра на валгангъ $\theta' = 3^\circ 40'$; скорость же паденія сего снаряда будетъ $v = \frac{a}{e \cos \theta'} = 474$ футамъ въ секунду.

§ 77. Чтобы показать дальнѣйшее употребленіе предъидущихъ формулъ, то приложимъ ихъ къ рѣшенію еще слѣдующихъ задачъ.

1) Зная разстояніе АВ отъ батареи до бруствера, высоту СВ верхней точки гребня бруствера; высоту ВR валганга; и принявъ разстояніе АД самой возвышенной точки пути ядра

произвольнымъ, однако же большимъ чѣмъ половина разстоянія АВ: найти уголъ и скорость бросанія, разстояніе АІ точки паденія и уголъ паденія снаряда.

Въ сей задачѣ извѣстны величины x , y , y'' и x' , а должно сыскать θ , a , x'' и θ' . Но сдѣлавъ для краткости $ecx'(ecx'-1)=\beta$ и взявъ въ разсмотрѣніе уравненія (2) и (4), заключающія въ себѣ искомыя двѣ величины a и $tg \theta$, получимъ изъ оныхъ

$$tg \theta = \frac{y}{x - \frac{(ecx'-1)^2}{2c\beta}}, \text{ и } a = \sqrt{\frac{g\beta}{ctg\theta}};$$

то есть извѣстны будутъ уголъ возвышенія орудія и начальная скорость ядра. Послѣ сего, по правилу ложнаго положенія, изъ уравненія (5) найдется разстояніе x'' , опредѣляющее точку паденія снаряда на валгангъ; и посредствомъ уравненія (3) извѣстенъ будетъ и уголъ паденія θ' .

Для примѣра, положимъ, что разстояніе АВ = $x=150$ сажень или 1050 футъ, высота бруствера ВС = $y=30$ футъ, высота валганга ВR = $y''=23$ фута; и сверхъ того примемъ, что разстояніе самой возвышенной точки пути ядра $x'=\frac{2}{3}x=700$ футъ. Вставивъ сіи числа въ вы-

неприведенныя формулы, получимъ въ отношеніи къ 24-мъ фунтовому ядру; 1) уголъ возвышенія орудія $\theta = 6^\circ 33' 7''$ (по параболической теоріи найденъ $= 6^\circ 31' 11''$, § 30); 2) начальную скорость ядра $a = 481$ футъ въ секунду (по параб. теоріи $= 447$ футъ); 3) разстояніе $x'' - x = 12$ сажень, на которомъ ядро упадетъ на валгангъ отъ боковаго бруствера (по параб. теоріи $= 15$ сажень); 4) уголъ паденія $\theta' = 5^\circ 29'$ (по параб. теоріи $= 4^\circ 15' 39''$); 5) наибольшее восхожденіе ядра $y' = 42$ фута (по параб. теоріи $= 40$ футъ) и 6) скорость паденія ядра на валгангъ $v = 403$ фута.

2) Зная разстояніе $AB = x$, высоту бруствера $BC = y$, высоту валганга $BR = y''$ и разстояніе $RI = x'' - x$ точки паденія ядра; найти уголъ бросанія $= \theta$, уголъ паденія $= \theta'$ и начальную скорость ядра $= a$. Уравненіе (4) и (5), представленныя въ видѣ

$$x \operatorname{tg} \theta - y = \frac{1}{2} g \left(\frac{ecx - 1}{ac} \right)^2 \quad \text{и} \quad x'' \operatorname{tg} \theta - y'' = \frac{1}{2} g \left(\frac{ecx - 1}{ac} \right)^2,$$

будучи раздѣлены другъ на друга даютъ

$$\frac{x'' \operatorname{tg} \theta - y''}{x \operatorname{tg} \theta - y} = \left(\frac{ecx'' - 1}{ecx - 1} \right)^2;$$

но сдѣлавъ для краткости $\left(\frac{e^{cx''}-1}{e^{cx}-1}\right)^2 = \lambda$, то отсюда найдется

$$tg\theta = \frac{\lambda y - y''}{\lambda x - x''},$$

и слѣдовательно по логарифмамъ уголъ θ возвышенія орудія. Послѣ чего изъ уравненія (4) получится начальная скорость.

$$a = \frac{e^{cx}-1}{c} \sqrt{\frac{\frac{1}{2}g}{xtg\theta - y}};$$

уравненіе же (3) дастъ уголъ паденія θ' . Горизонтальное и вертикальное разстояніе наибольшаго восхожденія ядра, найдены будутъ посредствомъ уравненій (1) и (2).

Для примѣра положимъ, что батарея заложена на разстояніи 250 сажень или 1750 футъ, и что должно бросить 24-хъ-фунтовое ядро изъ орудія такъ, дабы оно пролетѣло чрезъ верхъ бруствера, возвышеннаго на 60 футъ отъ горизонта орудія, и упало на валгангъ въ разстояніи отъ боковаго бруствера на 20 сажень или 140 футъ, полагая при семъ высоту валганга въ 53 фута.

Въ семъ вопросѣ имѣемъ $x=1750$, $y=60$, $x''=1890$, $y''=53$; и по симъ даннымъ най-

дется уголъ возвышенія $\theta=5^{\circ}21'13''$, начальная скорость 24-хъ-фунтоваго ядра $a=792$ фута въ секунду, уголъ паденія онаго $\theta=3^{\circ}19'7''$, скорость паденія $v=589,5$ фута, горизонтальное разстояніе самой возвышенной точки пути ядра $x'=1333$ фута и вертикальное разстояніе сей точки $y'=68,5$ или почти $=10$ сажень.

О НАВѢСНЫХЪ ВЫСТРѢЛАХЪ.

I. Выводъ общихъ формулъ для вычисленія навѣсныхъ выстрѣловъ.

§ 78. Показанный предъ симъ способъ вычисленія всѣхъ обстоятельствъ относительно прицѣльныхъ и рикошетныхъ выстрѣловъ, не можетъ быть приложенъ къ навѣснымъ выстрѣламъ; то есть, къ такимъ, при коихъ брошенный снарядъ поднимается весьма высоко вверхъ, какъ-то обыкновенно бываетъ при бросаніи бомбъ изъ мортиръ; потому что тогда кривая линія полетомъ снаряда описываемая, столь много различается отъ прямаго отстоянія дула орудія до предмета, въ который стрѣляютъ, что никакъ не можно принять обѣ сіи линіи за равныя или почти равныя, какъ-то принято было при вышеупомянутыхъ вычи-

сленіяхъ. А потому мы постараемся вывести новыя формулы, которыя могли бы быть употреблены и для сего рода выстрѣловъ. Хотя въ семъ отношеніи открыты разные способы отличнѣйшими при томъ Геометрами, но по большей части они имѣютъ тотъ недостатокъ, что весьма сложны и для практическаго употребленія не удобны. Лучшій же способъ вычисленій сихъ предложилъ знаменитый Эйлеръ; а Лежандръ въ диссертациі своей по сему предмету, удостоенной награды отъ Берлинской Академіи наукъ въ 1782 году, усовершенствовалъ и пополнилъ оный многими полезными замѣчаніями.

§ 79. Извѣстны намъ уравненіе и видъ кривой описываемой тяжелымъ тѣломъ, брошеннымъ въ безвоздушное пространство; посмотримъ возможно ли будетъ успѣть въ томъ и для кривой описываемой тяжелымъ тѣломъ въ сопротивляющейся срединѣ. Мы видѣли въ § 38, что сопротивленіе жидкости уподобляется укоснительной силѣ, коей направленіе противоположно движенію тѣла. Посему когда возьмемъ въ разсмотрѣніе сію силу, то въ изслѣдованіе обстоятельствъ движенія тѣла, брошеннаго съ

известною начальною скоростію, войдутъ двѣ непрерывно-дѣйствующія силы, тяжесть g и сопротивленіе R жидкости, изъ которыхъ первая дѣйствуетъ вертикально сверху внизъ, а вторая направлена по касательной въ каждой точки кривой линіи. Допустимъ, что послѣдняя сила ни сколько не уклоняетъ движущееся тѣло отъ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ направленіе бросанія; проведемъ въ сей плоскости горизонтальную ось Ax (фиг. 15) и вертикальную ось Ay ; и означимъ чрезъ x и y координаты, опредѣляющіе положеніе тѣла M по прошествіи времени t , а чрезъ s дугу AM симъ тѣломъ описанную. Изъ дифференціальнаго треугольника mMq , коего стороны $Mq=dx$, $mq=dy$ и $Mm=ds$, получимъ синусы угловъ, составляемы касательною въ точкѣ M съ осями Ax и Ay , относительно равными $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$; слѣд разложивъ силу R на двѣ слагающія $R \frac{dx}{ds}$ и $R \frac{dy}{ds}$ по направленію сихъ осей, будемъ имѣть для предположеннаго нами движенія, уравненія.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R \frac{dx}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - \left(R \frac{dy}{ds} + g \right),$$

которыя выводятся изъ общихъ уравненій криволинейнаго переменнаго движенія $\frac{d^2 x}{dt^2} = X$

и $\frac{d^2 y}{dt^2} = Y$ (Механика Франкера чл. 167), замѣ-

няя ускорительныя силы X и Y силами $-R \frac{dx}{ds}$

и $-\left(R \frac{dy}{ds} + g\right)$ и сопровождая послѣднія знакомъ *минусъ*, потому что онѣ стремятся уменьшить координаты x и y .

§ 80. Сопротивленіе R , какъ замѣчено въ § 38, зависитъ вообще отъ вида, величины, плотности и скорости движущагося тѣла, оно зависитъ также отъ плотности воздуха, въ которомъ движется тѣло: но можно безъ ощутительной погрѣшности принять сію плотность постоянною по всей кривой нами изслѣдуемой; слѣдовательно, предположивъ сопротивленіе пропорціональнымъ квадрату скорости, которая

равна $\frac{ds}{dt}$, будемъ имѣть $R = c \frac{ds^2}{dt^2}$; здѣсь коеф-

фициентъ c сохраняетъ то же значеніе во все время движенія, и въ отношеніи къ сферическимъ и однороднымъ тѣламъ онъ равенъ

$$(\S 52) \frac{32D}{4kD'}.$$

И такъ предыдущія уравненія движенія, по постановленіи величины $R = c \frac{ds^2}{dt^2}$, примутъ на себя видъ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g - c \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \dots (m')$$

§ 81. Изъ послѣднихъ двухъ уравненій первое интегрируется непосредственно: въ самомъ дѣлѣ по сокращеніи онаго на дифференціалъ dt , который почитается здѣсь постояннымъ, получимъ

$$\frac{\frac{d^2 x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}} = -c ds \quad \text{или} \quad d \log \left(\frac{dx}{dt} \right) = -c ds,$$

и отсюда

$$\log \left(\frac{dx}{dt} \right) = -cs + B,$$

здѣсь чрезъ B означена постоянная произвольная величина, прибавляемая къ интегралу. Назвавъ теперь e основаніе гиперболическихъ логарифмовъ и переходя отъ логарифма къ числу, будемъ имѣть

$$\frac{dx}{dt} = e^{-cs+B} = e^B \cdot e^{-cs} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = C e^{-cs}.$$

Для опредѣленія постоянной C , взятой вмѣсто e^B , должно прибѣгнуть къ начальнымъ усло-

віямъ движенія: но $\frac{d\dot{x}}{dt}$ (§ 4) виражаєть въ каждое мгновеніе скорость движущагося тѣла параллельно оси Ax разложенную, слѣдовательно означивъ начальную скорость бросанія чрезъ a и уголъ CAB , составляемый направленіемъ бросанія съ горизонтомъ чрезъ θ , то въ первое мгновеніе движенія, соотвѣтствующее точкѣ A , должно быть въ одно время $t=0$, $\dot{x}=0$, $y=0$, $s=0$ и $\frac{dx}{dt}=a\cos\theta$; по сему постоянная $C=a\cos\theta$, и

$$\frac{dx}{dt}=a\cos\theta \cdot e^{-cs} \dots (n').$$

§ 82. Если чрезъ p означимъ тригонометрическій тангенсъ угла MTP , составляемаго касательною къ кривой съ осью Ax , то будетъ

$$\frac{dy}{dx}=p \text{ и } \frac{dy}{dt}=p \cdot \frac{dx}{dt},$$

отсюда, взявъ дифференціалъ, получимъ

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + p \frac{d^2x}{dt^2};$$

вставивъ сіи величины во второе изъ уравненій (m') , оно обратится въ

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + p \frac{d^2x}{dt^2} = -g - cp \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt};$$

но первое уравненіе даетъ $p \frac{d^2 x}{dt^2} = -cp \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}$,
слѣдовательно по сокращеніи будемъ имѣть

$$\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g \dots (o').$$

Раздѣливъ теперь сей выводъ на квадратъ, найденной выше величины (п) для $\frac{dx}{dt}$, получится

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{ge^{2cs}}{a^2 \cos^2 \theta} \dots (p').$$

Сіе новое уравненіе можетъ быть интегрируемо; въ самомъ дѣлѣ, умноживъ вторую его часть на ds , а первую на $dx \sqrt{1+p^2}$, что $= \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, то будетъ

$$dp \sqrt{1+p^2} = -\frac{ge^{2cs} ds}{a^2 \cos^2 \theta},$$

а какъ перемѣнныя p и s отдѣлены въ семъ уравненіи, то по извѣстнымъ правиламъ вѣзвѣ интегралъ онаго, найдется

$$p \sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) = n - \frac{ge^{2cs}}{ca^2 \cos^2 \theta} (*) \dots (q');$$

здѣсь чрезъ n означена постоянная произвольная величина. Мы опредѣлимъ оную изъ того

[*] Чтобъ вывести сей интегралъ изъ дифференціального урав-

ненія $dp \sqrt{1+p^2} = -\frac{ge^{2cs} ds}{a^2 \cos^2 \theta}$, то явнѣ, что относитель-

условія, что въ началѣ движенія должно быть вдругъ $s=0$ и $p=tg\theta$; но тогда будетъ

$$n=tg\theta\sqrt{1+tg^2\theta}+\log(tg\theta+\sqrt{1+tg^2\theta})+\frac{g}{ca^2\cos^2\theta}.$$

Сему выраженію можно дать видъ гораздо простѣйшій и удобнѣйшій для вычисленія, въ са-

по неопредѣленно-степеннаго количества $e^{2cs} ds$ будетъ

$$\int e^{2cs} ds = \frac{e^{2cs}}{2c}. \text{ Въ разсужденіи же выраженія } dp\sqrt{1+p^2},$$

то въпервыхъ умноживъ и раздѣливъ его на $\sqrt{1+p^2}$ получимъ

$$\int dp \sqrt{1+p^2} = \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} + \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}};$$

но $\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \log [p+\sqrt{1+p^2}]$, потому что когда сдѣлаемъ

$\sqrt{1+p^2}=t-p$, отсюда по уничтоженіи корня и по взятіи дифференціала будетъ $1=t^2-2pt$, $0=tdt-pdt-tdp$

и $dp = \frac{[t-p]dt}{t}$; въ слѣдствіе же сего преобразованія полу-

чимъ

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{[t-p]dt}{t[t-p]} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log [p+\sqrt{1+p^2}].$$

Потомъ если разложимъ выраженіе $\frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}}$, на произве-

деніе множителей p и $\frac{p dp}{\sqrt{1+p^2}}$, изъ коихъ второй даетъ

$$\int \frac{p dp}{\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{1+p^2}, \text{ то чрезъ интегрированіе по частямъ}$$

или по формулѣ $\int u dv = uv - \int v du$, будемъ имѣть

момъ дѣлѣ, мы имѣемъ по началамъ Тригоно-

$$\text{метріи } \sqrt{1+tg^2\theta} = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad tg\theta\sqrt{1+tg^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\text{и } tg\theta + \sqrt{1+tg^2\theta} = \frac{\sin\theta+1}{\cos\theta} = tg(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) \quad (*), \quad \text{а}$$

$$\int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int p \cdot \frac{p dp}{\sqrt{1+p^2}} = p \sqrt{1+p^2} - \int dp \sqrt{1+p^2}.$$

Вставивъ теперь сіи величины въ выраженіе, котораго здѣсь ищемъ интегралъ, будемъ имѣть

$$\int dp \sqrt{1+p^2} = \log[p + \sqrt{1+p^2}] + p \sqrt{1+p^2} = \int dp \sqrt{1+p^2};$$

отсюда

$$\int dp \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{2} p \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2} \log[p + \sqrt{1+p^2}].$$

И такъ интегралъ вышеприведеннаго уравненія будетъ

$$\frac{1}{2} p \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2} \log(p + \sqrt{1+p^2}) = - \frac{ge^{2cs}}{2ca^2 \cos^2\theta} + \frac{n}{2}$$

или

$$p \sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) + n = \frac{ge^{2cs}}{ca^2 \cos^2\theta},$$

что и надлежало найти.

(*) Почему $\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta} = tg[45^\circ + \frac{1}{2}\theta]$, сіе видно изъ того, что

$$\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta+1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{\sqrt{(1+\sin\theta)^2}}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = \frac{\sqrt{1+\sin\theta}}{1-\sin\theta} =$$

$$\frac{\sqrt{\sin 90^\circ + \sin\theta}}{\sin 90^\circ - \sin\theta}; \text{ по но правиламъ Тригонометріи}$$

$$\frac{\sin 90^\circ + \sin\theta}{\sin 90^\circ - \sin\theta} = \frac{tg \frac{1}{2} 90^\circ + \theta}{tg \frac{1}{2} (90^\circ - \theta)} = tg(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) \cdot \cot g(45^\circ - \frac{1}{2}\theta)$$

$$\text{и } \cot g(45^\circ - \frac{1}{2}\theta) = tg\{90^\circ - (45^\circ - \frac{1}{2}\theta)\} = tg(45^\circ + \frac{1}{2}\theta),$$

слѣдовательно будетъ

$$\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta} = \sqrt{tg^2(45^\circ + \frac{1}{2}\theta)} = tg(45^\circ + \frac{1}{2}\theta).$$

слѣдовательно

$$n = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \theta) + \frac{g}{ca^2 \cos^2 \theta} \dots (r');$$

впрочемъ мы удержимъ для краткости количество n .

§ 83. Послѣ чего, если исключимъ e^{2cs} между уравненіями (p') и (q') , то будемъ имѣть

$$dx = \frac{\frac{1}{c} dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) - n} \dots (s'),$$

и по причинѣ $dy = p dx$,

$$dy = \frac{\frac{1}{c} p dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) - n} \dots (t').$$

Если бы сіи уравненія могли быть интегрируемы въ конечномъ видѣ, то получили бы x и y въ функціи количества p ; и тогда по исключеніи p имѣли бы отношеніе между x и y , то есть, уравненіе кривой линіи, которую описываетъ тѣло, движущееся въ сопротивляющейся срединѣ. Но извѣстные способы интеграціи вовсе не прилагаются къ предъидущимъ выраженіямъ, и видъ ихъ даже не подаетъ и надежды достигнуть когда либо къ требуемымъ интеграламъ. Можно еще время и скорость движущагося тѣла выразить въ функціи переменнаго количества p . Ибо изъ уравненія вышенай-

деннаго $\frac{dp}{pt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g$ имѣемъ $dt^2 = -\frac{dp dx}{g}$;

отсюда, по постановленіи на мѣсто dx равной величины (s') и по извлеченіи корня квадратнаго, получаемъ

$$dt = \frac{-dp}{\sqrt{cg} \{ n - p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2}) \}} \dots (u')$$

знакъ—поставленъ передъ корнемъ по той причинѣ, что съ увеличиваніемъ времени, уголъ, коего тангенсъ $= p$, уменьшается, такъ что дифференціалы dp и dt должны бытъ съ разными знаками. Что же касается до скорости, то означивъ оную чрезъ v , будемъ имѣть

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = (1 + p^2) \frac{dx^2}{dt^2},$$

и по причинѣ уравненія $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dp}{dt} = -g$, кото-

рое даетъ $\frac{dx}{dt} = -\frac{g dt}{dp}$, будетъ

$$v^2 = g^2 (1 + p^2) \frac{dt^2}{dp^2};$$

поставивъ вмѣсто $\frac{dt^2}{dp^2}$ равную величину взятую изъ уравненія (u') получимъ скорость выраженную въ функціи отъ p чрезъ уравненіе

$$v^2 = \frac{g'(1+p^2)}{c\{n-p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})\}} \dots (v').$$

§ 84. Для краткости сдѣлаемъ $p\sqrt{1+p^2} + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = P$, чрезъ то вышеприведенныя формулы (q') , (s') , (t') , (u') , и (v') изобразятся слѣдующимъ образомъ:

$$1) \quad P = n \frac{ge^{2cs}}{ca^2 \cos^2 \theta}, \text{ отсюда найдется}$$

$$s = \frac{1}{2c} \log \left\{ \frac{ca^2 \cos^2 \theta}{g} (n-P) \right\};$$

$$2) \quad dx = -\frac{dp}{c(n-P)} \text{ и } x = -\frac{1}{c} \int \frac{dp}{n-P} + \text{пост.} = AP;$$

$$3) \quad dy = -\frac{pdp}{c(n-P)} \text{ и } y = -\frac{1}{c} \int \frac{pdp}{n-P} + \text{пост.} = MP;$$

$$4) \quad dt = -\frac{dp}{\sqrt{cg}(n-P)} \text{ и } t = -\frac{1}{\sqrt{cg}} \int \frac{dp}{\sqrt{n-P}} + \text{постоя.}$$

$$5) \quad v^2 = \frac{g(1+p^2)}{c(n-P)};$$

здѣсь постоянныя придаваемыя къ интеграламъ найдутся изъ условій предполагающихъ, что въ началѣ движенія должно быть вдругъ $p = tg\theta$, $x=0$, $y=0$, $t=0$.

§ 85. Поелику для послѣдовательныхъ точекъ восходящей вѣтви AmD уголъ тангенса p (§ 82), начиная съ угла бросанія θ , который меньше 90° , постепенно убываетъ и въ вер-

иниѣ D, гдѣ касательная параллельна горизонту, дѣлается равнымъ нулю, то изъ сего заключаемъ, что, относительно всѣхъ точекъ восходящей вѣтви, количества p и P постоянно удерживаютъ положительную величину, и что онѣ, съ сказаннымъ уменьшеніемъ угла, постепенно убываютъ и наконецъ уничтожаются при вершинѣ или самой возвышенной точкѣ D кривой. Въ послѣднемъ же случаѣ, когда $p=0$ и $P=0$, будемъ имѣть по формуламъ (1) и (5) § 84 длину восходящей вѣтви $AmD=$

$$s = \frac{1}{2c} \log \left(\frac{cna^2 \cos^2 \theta}{g} \right)$$

и скорость въ вершинѣ

$$v = \sqrt{\frac{g}{cn}}.$$

Далѣе D, въ точкахъ нисходящей вѣтви, каждая касательная $M'T'$ составляетъ съ осью абсциссъ тупой уголъ $M'T'x$, котораго тангенсъ отрицательный и тотъ же самый, что и тангенсъ острого угла $M'T'P'$, служащаго первому дополненіемъ до 180° . По сему при последовательномъ разсматриваніи точекъ опускающейся вѣтви DBH, тангенсу p соответствуетъ отрицательный острый уголъ, который начиная съ нуля градусовъ безпрестанно увеличивается и, какъ докажется тотчасъ,

приближается къ 90° или къ прямому углу, никогда его не достигая. Впрочемъ относительно точекъ сей вѣтви формулы § 84. остаются тѣ же самыя, принимая только въ нихъ величины p и P съ противнымъ знакомъ. Ибо съ переменною знака количества p , выраженіе $P = p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2})$ обратится въ $P' = -p\sqrt{1+p^2} + \log(-p + \sqrt{1+p^2})$; но умноживъ и раздѣливъ $-p + \sqrt{1+p^2}$ на $p + \sqrt{1+p^2}$, получимъ $P' = -p\sqrt{1+p^2} + \log\left(\frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}}\right) = -p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})$, или $P' = -P$. Симъ образомъ для нисходящей вѣтви формулы примутъ видъ :

$$1) \quad s = \frac{1}{2c} \log \left(\frac{ca^2 \cos^2 \theta}{g} (n + P) \right) = \cup ADM';$$

$$2) \quad dx = \frac{dp}{c(n+P)} \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{c} \int \frac{dp}{n+P} + \text{пост.} = AP';$$

$$3) \quad dy = \frac{pdp}{c(n+P)} \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{c} \int \frac{pdp}{n+P} + \text{пост.} = M'P';$$

$$4) \quad dt = \frac{dp}{\sqrt{cg(n+P)}} \quad \text{и} \quad t = \frac{1}{\sqrt{cg}} \int \frac{dp}{\sqrt{n+P}} + \text{пост.};$$

$$5) \quad p^2 = \frac{g(1+p^2)}{c(n+P)}$$

II. Свойства кривой линии полета.

§ 86. Хотя невозможно интегрировать въ конечномъ видѣ предъидущія формулы, однако же помощію оныхъ удобно выведены быть могутъ нѣкоторые примѣчательныя свойства, относительно кривой линии полета.

По причинѣ, что кривая линія, которую бы описало въ безвоздушномъ пространствѣ брошенное тѣло, извѣстна и удобна къ построению, и что трудности встрѣчаемыя при вычисленіяхъ не позволяютъ имѣть уравненія кривой линіи полета въ сопротивляющейся средѣ, то отнесемъ сію послѣднюю къ первой и сравнимъ величины ихъ дугъ между собою. Для сего положимъ, что сопротивленіе $R = \frac{cds^2}{dt^2} = 0$; отсюда будетъ $c = 0$ и уравненіе $dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{ge^2csds}{a^2\cos^2\theta}$ (§ 82) перемѣнится въ

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{gds'}{a^2\cos^2\theta},$$

котораго интеграль будетъ

$$p\sqrt{1+p^2} + \log(\mu + \sqrt{1+p^2}) = E - \frac{2gs'}{a^2\cos^2\theta};$$

въ сіе уравненіе входитъ дуга s' различная отъ дуги s ; послѣдняя $s = AM$ принадлежитъ дѣйст-

вительной кривой линіи полета, а первая $s' = AF$ относится къ параболѣ. Обѣ сіи дуги исходятъ изъ того же начала A и оканчиваются точками M и F , въ которыхъ касательныя составляютъ съ горизонтомъ равные углы, коихъ тангенсъ $= p$; впрочемъ сіи дуги не бывають проходимы въ одно и то же время. Поелику въ точкѣ A современно $s' = 0$ и $p = tg \theta$, то найдется постоянная, прибавленная къ предъидущему интегралу,

$$E = tg \theta \sqrt{1 + tg^2 \theta} + \log (tg \theta + \sqrt{1 + tg^2 \theta}) = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \log tg (45^\circ + \frac{1}{2} \theta)$$

или, по причинѣ уравненія (r'),

$$E = n - \frac{g}{ca^2 \cos^2 \theta};$$

вставивъ сію величину на мѣсто E въ выраженіе найденнаго здѣсь интеграла, будемъ имѣть

$$p \sqrt{1 + p^2} + \log (p + \sqrt{1 + p^2}) = n - \frac{g}{ca^2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{2gs'}{a' \cos^2 \theta}$$

или

$$P = n - \frac{g}{ca^2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{2gs'}{a' \cos^2 \theta};$$

но по § 84

$$P = n - \frac{ge^{2cs}}{ca^2 \cos^2 \theta},$$

слѣдовател., сравнивъ вторыя части, получимъ

$$e^{2cs} = 1 + 2cs', \text{ и } s = \frac{1}{2c} \log (1 + 2cs').$$

Теперь предположивъ дуги s и s' отрицательными, или взявъ ихъ отъ A къ I и S на кривыхъ DAI и FAS продолженныхъ внизъ отъ точки A , будемъ имѣть

$$-s = \frac{1}{2c} \log (1 - 2cs').$$

Отсюда видно, что должно быть $s' < \frac{1}{2c}$, дабы дуга s была возможная; и что съ увеличиваніемъ дуги s' , отъ $s' = 0$ до $s' = \frac{1}{2c}$, дуга s весьма быстро возрастаетъ и при положеніи $s' = \frac{1}{2c}$ дѣлается безконечна. А какъ дуги s и s' имѣютъ одно начало и оканчиваются въ точкахъ, въ которыхъ касательныя параллельны между собою, то и заключаемъ, что когда на параболѣ FAS отложится дуга $AS = s' = \frac{1}{2c}$, тогда касательная SQ въ точкѣ g , будетъ параллельная касательной KL , соединяющей съ вѣтвью AJ въ безконечномъ удаленіи отъ A . Слѣдовательно восходящая вѣтвь JAD кривой линіи полета въ сопротивляющейся средѣ имѣть асимптоту KL , параллельную линіи QS известной положеніемъ Тангенсъ угла KGA , который

асимптота или касательная QS къ параболѣ составляетъ съ осью абсциссъ, найдется изъ

уравненія $P = n \frac{g}{ca^2 \cos^2 \theta} - \frac{2gs'}{a_2 \cos^2 \theta}$, которое,

по причинѣ $s' = -AS = -\frac{1}{2c}$, приводится къ

$P = n$ или

$$p\sqrt{1+p^2} + \log' p + \sqrt{1+p^2} = n;$$

уголъ тангенса p , приличествующій сему уравненію, будетъ предѣлъ наклоненія касательныхъ къ горизонту, проведенныхъ ко всѣмъ точкамъ восходящей вѣтви.

§ 87. Кривая линія полета еще имѣетъ со стороны нисходящей своей вѣтви другую асимптоту положеніемъ вертикальную. Дабы

доказать сіе, то въ слѣдствіе отношенія $s = \frac{1}{2c}$

$\log(1+2cs')$, въ предъидущемъ параграфѣ най-

деннаго, сначала замѣтимъ, что съ увеличива-

ніемъ параболической дуги s' , въ то же время

увеличивается и дуга s кривой линіи полета,

и что когда первая сдѣлается безконечною, тог-

да и вторая будетъ безконечная. А поелику

касательная къ параболѣ, которой ось здѣсь

вертикальна, тѣмъ ближе подходитъ къ па-

раллельности съ сею осью, чѣмъ точка ка-

санія взята далѣе отъ вершины, то изъ сего слѣдуетъ, что съ распространеніемъ нисходящей вѣтви DBH касательная, въ концѣ оной, принимаетъ направленіе постепенно приближающееся къ вертикальному положенію, и что вмѣстѣ съ симъ тангенсъ p безпредѣльно возрастаетъ до безконечности. Теперь, если перенесемъ начало координатъ въ вершину кривой и примемъ абсциссы горизонтальныя по направленію Dx' , а ординаты вертикальныя по направленію Dy' ; и когда означимъ чрезъ x' и y' координаты какой ни есть точки, относительно сего новаго начала, то по сравненію ихъ съ прежними x и y для сей же точки, будемъ имѣть $x' = x - AE$ и $y' = DE - y$; и отсюда $dx = dx'$, $dy = -dy'$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{dy'}{dx'}$ или $p = -p'$, и $\log(p + \sqrt{1+p^2}) = \log(-p' + \sqrt{1+p'^2}) = -\log(p' + \sqrt{1+p'^2})$, по причинѣ $-p' + \sqrt{1+p'^2} = \frac{1}{p' + \sqrt{1+p'^2}}$. Симъ образомъ уравненія (s') и (t') преобразуется въ

$$dx' = \frac{dp'}{c\{p'\sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}) + n\}}$$

и

$$dy' = \frac{p'dp'}{c\{p'\sqrt{1+p'^2} + \log(p' + \sqrt{1+p'^2}) + n\}}.$$

Но по причинѣ, что для точекъ нисходящей вѣтви, достаточно удаленныхъ отъ вершины, количество p или ему равное p' , можетъ быть разсматриваемо столь великимъ, какъ угодно, то безъ ощутительной погрѣшности можно въ такомъ случаѣ взять p' вмѣсто $\sqrt{1+p'^2}$ и уничтожить $\log(p' + \sqrt{1+p'^2})$ въ сравненіи съ p'^2 , ибо логарифмъ очень большаго числа, есть крайне малъ противъ сего числа; но отбросивъ и постоянную n въ отношеніи къ p'^2 , получимъ

$$dx' = \frac{dp'}{cp'^2} \text{ и } dy' = \frac{dp'}{cp'^n}$$

а по совершеніи интеграціи

$$x' = b - \frac{1}{cp'}, \text{ и } y' = b' + \frac{1}{c} \log p' :$$

сіи уравненія, въ коихъ b и b' суть постоянныя произвольныя, показываютъ, что величина ординаты y' не имѣетъ предѣла, поелику она возрастаетъ до безконечности вмѣстѣ съ p' . Но величина горизонтальной абсциссы x' имѣетъ предѣломъ постоянную b : изъ сего заключаемъ, что нисходящая вѣтвь имѣетъ вертикальную асимптоту; а именно, если отъ начала D по оси Dx' отложимъ абсциссу $DK' = b$ и чрезъ точку K' проведемъ вертикаль-

ную прямую $K'L'$, тогда вѣтвь DBII, простертая до безконечности, приблизится къ сей прямой на разстояніе меньше всякой данной величины, никогда однако же съ оною не сливаясь.

§ 88. Поставивъ также— p' на мѣсто p въ уравненіе (u'), и сдѣлавъ надлежащее сокращеніе, въ предположеніи тангенса p' весьма большаго, получимъ

$$dt = \frac{1}{\sqrt{cg}} \cdot \frac{dp'}{p'},$$

и взявъ интеграль

$$t = b' + \frac{1}{\sqrt{cg}} \log p',$$

здѣсь чрезъ b'' означена постоянная присоединяемая къ интегралу. Потомъ исключивъ $\log p'$ между симъ уравненіемъ и найденнымъ въ предыдущемъ § уравненіемъ для y' , будемъ имѣть

$$y' = t \sqrt{\frac{g}{c}} + b' - b'' \sqrt{\frac{g}{c}}$$

или

$$y' = t \sqrt{\frac{g}{c}} + \text{постоян.}$$

сіе показываетъ, что движеніе тѣла по нисходящей вѣтви до безконечности безпрестанно

стремится содѣлаться не только вертикальнымъ,

но и единообразнымъ со скоростью $= \sqrt{\frac{g}{c}}$. Точ-

но такое же выраженіе мы имѣли и для окончательныхъ единообразныхъ скоростей, вертикально падающихъ тѣлъ (§ 60). Впрочемъ мы

получили бы сей предѣлъ скорости посредствомъ уравненія (§ 85) $v^2 = \frac{g(1+p^2)}{c(n+p)}$, дѣлая въ

немъ $p = \frac{1}{0} = \text{безконечности}$. Но тогда v^2 приводится къ $\frac{0}{0}$; дифференцируя же числителя и

знаменателя, имѣли бы $\frac{gp}{c\sqrt{1+p^2}} = \frac{g}{c\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}}$, и

полагая $p = \infty$, нашли бы $v^2 = \frac{g}{c}$ и $v = \sqrt{\frac{g}{c}}$,

то есть, равно той скорости, къ которой скорость тѣла, движущагося по нисходящей вѣтви въ безконечность, болѣе и болѣе приближается никогда оной не достигая. Въ разсужденіи сихъ самыхъ большихъ окончательныхъ скоростей для нашихъ снарядовъ, смотри табл. § 61.

§ 89. По началамъ дифференціального исчисленія, общее выраженіе радіуса кривизны

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y};$$

поставивъ въ сію формулу $dy = p dx$, $d^2 y = dp \cdot dx$, $dx^2 + dy^2 = (1 + p^2) dx^2$

и $dx = -\frac{dp}{c(n-P)}$ (§ 84), получимъ величину

радіуса круга кривизны, относительно восходящей вѣтви

$$R = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{c(n-P)},$$

а относительно нисходящей вѣтви

$$R = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{c(n+P)};$$

отсюда видно, что при одинакой величинѣ тангенса p , радіусъ кривизны есть больше въ восходящей вѣтви, нежели въ нисходящей; и что когда $P = n$ онъ дѣлается безконечнымъ только въ первой вѣтви. Слѣдовательно обѣ вѣтви кривой, снарядомъ въ воздухѣ описываемой, несходны между собою бывають, но что восходящая менѣе крива, нежели нисходящая; а сіе очевидно происходитъ отъ того, что движеніе по первый быстрѣе бываетъ чѣмъ по второй, какъ - то показываетъ уравненіе

$$v^2 = \frac{g(1 + p^2)}{c(n+P)}$$

для обѣихъ вѣтвей. Въ безвоз-

душномъ же пространствѣ, по теоріи параболической, сказанныя здѣсь обстоятельства одинаковы для двухъ вѣтвей.

§ 90. Наибольшая кривизна не въ самой вершинѣ, но нѣсколько далѣе ея, на опускающейся вѣтви DM'B находится: мы опредѣлимъ такую уравнивъ дифференціалъ количества R

$$\text{нулю, то есть, } dR = d \left\{ \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{c(n+P)} \right\} = \\ \frac{1}{c} \left\{ \frac{3(n+P)pdp \cdot \sqrt{1+p^2} - (1+p^2)^{\frac{3}{2}} dP}{(n+P)^2} \right\} = 0;$$

по $dP = 2dp \cdot \sqrt{1+p^2}$ (§ 84), по сему будемъ имѣть, по постановленіи и сокращеніи,

$$3p(n+P) - 2(1+p^2)^{\frac{5}{2}} = 0,$$

откуда найдется p . Въ точкѣ наибольшей кривизны уравненіе кривой (q') приведено будетъ къ виду

$$e^{2cs} = \frac{ca^2 \cos^2 \theta}{g} (n+P)$$

или

$$e^{2cs} = \frac{2ca^2 \cos^2 \theta}{3gp} (1+p^2)^{\frac{5}{2}},$$

уравненіе же для скорости къ виду

$$v^2 = \frac{3gp}{2c\sqrt{1+p^2}}$$

Если рѣшимъ предъидущее уравненіе въ отно-

шеніи къ p , то не бравъ въ счетъ, при разложеніи членовъ онаго, степеней количества p , кои очень малы по причинѣ точки весьма близкой къ вершинѣ, найдется

$$p = \frac{2}{3n}, \text{ или точнее } p = \frac{2}{3n} - \frac{4}{9n^3},$$

когда приняты будутъ въ разсужденіе степени количества p .

§ 91. Въ предположеніи параболическаго пути, самая меньшая скорость снаряда бываетъ въ вершинѣ кривой; но при дѣйствительномъ пути въ воздухѣ, самая меньшая скорость остается у снаряда не въ самой вершинѣ, а нѣсколько далѣе оной. Въ самомъ дѣлѣ, когда снарядъ достигаетъ вершины, то движеніе его въ сей точкѣ становится горизонтальнымъ и тяжесть только что начинаетъ склонять его къ низу, сообщая ему, по направленію движенія, дѣйствіе весьма слабое сравнительно съ сопротивленіемъ на оный воздуха; а поелику съ убавленіемъ скорости, убавляется также сопротивленіе, между тѣмъ снарядъ получаетъ болѣе склонительное движеніе, по направленію коего дѣйствіе тяжести дѣлается ощутительнѣе, то и должна быть на нисходящей вѣтви

точка M' , въ которой сіе дѣйствіе и сопротивленіе между собою поравняются. Сія точка, гдѣ наименьшая скорость имѣетъ мѣсто, найдется бравъ дифференціалъ уравненія $v^2 = \frac{g(1+p^2)}{c(n+P)}$ и уравнивая оный нулю; выводъ отъ сего произшедшій будетъ

$$p(n+P) - (1+p^2)^{\frac{5}{2}} = 0:$$

отсюда выводя величину $n+P$ и подставля въ формулы 1-ю и 5-ю § 85. будемъ имѣть

$$e^{2cs} = \frac{ca^2 \cos^2 \theta}{gp} (1+p^2)^{\frac{5}{2}} \text{ и } v^2 = \frac{gp}{c\sqrt{1+p^2}}.$$

Изъ сего ясно видно, что точка M' далѣе отстоитъ отъ вершины, нежели та, въ которой наибольшая кривизна имѣетъ мѣсто.

Если рѣшимъ предшествующее уравненіе въ отношеніи къ p , то по причинѣ, что наименьшая скорость имѣетъ мѣсто близъ вершины, можно при разложеніи количествъ P и $(1+p^2)^{\frac{5}{2}}$ пренебречь высшіе степени отъ p и взять $P = 2p + \frac{p^3}{3}$ и $(1+p^2)^{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{5}{2}p^2 + \frac{5}{8}p^4$; но тогда по правилу обращенія рядовъ найдется

$$p = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3},$$

что опредѣляетъ величину тангенса въ точкѣ M' , гдѣ наименьшая скорость имѣетъ мѣсто.

III. *Построеніе кривой линіи полета, и составленіе таблицъ для употребленія при бросаніи бомбъ.*

§ 92. Показавъ главныя свойства кривой, которой, какъ мы видѣли, не возможно имѣть въ конечномъ видѣ уравненія, посмотримъ какимъ образомъ, по крайней мѣрѣ приблизительно, находится положеніе послѣдовательныхъ точекъ оной, ея изображеніе, горизонтальное распространеніе, наибольшая высота, уголъ паденія снаряда, скорость его паденія и время движенія.

Поелику выраженіе дуги s въ функціи угла α , составляемаго касательною въ концѣ оной съ горизонтомъ извѣстно, то и можно вычислить сію дугу по частямъ, бравъ ихъ при семъ столь малыми, дабы можно было почесть оныя или за прямыя линіи или точнѣе за дуги круговъ кривизны. Но тогда для каждой части дуги найдутся соотвѣтствующія части абсциссы и ординаты. Ибо пусть Δs , Δx , Δy будутъ сіи части MmM' , Mg и $M'g$ (фиг.

16) дуги абсциссы и ординаты; то въ случаѣ, когда часть кривой принимается за прямую линію, будемъ имѣть

$$\Delta x = \Delta s \cdot \cos \alpha \text{ и } \Delta y = \Delta s \cdot \sin \alpha;$$

въ случаѣ же, когда часть MmM' кривой принимается за дугу круга, будемъ имѣть изъ треугольника $MM'g$, прямоугольнаго при точкѣ G ,

$$\Delta x = MM' \cdot \cos M'Mg \text{ и } \Delta y = MM' \cdot \sin M'Mg$$

Но если означимъ чразъ α и α' углы NMg и $M'Tg$ наклоненія касательныхъ къ горизонту въ крайнихъ точкахъ дуги MmM' и проведемъ радіусы MC и MC' , то по причинѣ угла $NMM' = NM'M = \frac{1}{2}TNM = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$, будетъ уголъ наклоненія хорды MM' къ горизонту, то есть, уголъ $M'Mg = NMg - NMM' = \alpha - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$,

и хорда $MM' = 2MD = 2MC \cdot \sin \frac{1}{2}MCM' = 2MC \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$. При чемъ очевидно, что $MC : 1 =$

$\Delta s : \alpha - \alpha'$ и $MC = \frac{\Delta s}{\alpha - \alpha'}$; слѣдоват. найдется

$MM' = \frac{\Delta s}{\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$. Вставивъ въ предъ-

идущія выраженія Δx Δy , найденныя для хорды MM' и угла $MM'g$ величины, получимъ

$$\Delta x = \frac{\Delta s}{\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$$

и

$$\Delta y = \frac{\Delta s}{\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') \sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') :$$

для краткости сдѣлаемъ $\alpha - \alpha' = w$ — разности угловъ наклоненія касательныхъ, проведенныхъ къ крайнимъ точкамъ каждой части Δs кривой линіи, то будемъ имѣть $\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \alpha - \frac{1}{2} w$ и

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\sin \frac{1}{2} w}{\frac{1}{2} w} \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{2} w) \cdot \Delta s \\ \Delta y &= \frac{\sin \frac{1}{2} w}{\frac{1}{2} w} \cdot \sin(\alpha - \frac{1}{2} w) \cdot \Delta s \end{aligned} \right\} \dots\dots (w').$$

§ 93. Пусть $p = tg \alpha$ — тангенсу угла наклоненія касательной въ М; $q = tg \alpha'$ тангенсу угла наклоненія касательной въ М'; и означимъ чрезъ Q ту величину, въ которую обращается функція Р, по поставленіи въ ней q на мѣсто p . Посредствомъ уравненія (1) § 84, опредѣляющаго длину дуги s , будемъ имѣть дугу $AM = \frac{1}{2c} \log \left\{ \frac{ca^2 \cos^2 \theta}{g} (n - P) \right\}$ и $AM' = \frac{1}{2c} \log \left\{ \frac{ca^2 \cos^2 \theta}{g} (n - Q) \right\}$; отсюда $\cup AM'$, или $\cup AM$, или

$$\cup MM' = \Delta s = \frac{1}{2c} \log \left(\frac{n - Q}{n - P} \right);$$

вставивъ сію величину въ уравненіе (w') , по-

лучимъ относительно каждой части Δs кривой линіи соотвѣтствующую часть абсциссы

$$\Delta x = \frac{1}{2c} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{2}\omega) \log \left(\frac{n-Q}{n-P} \right)$$

и часть ординаты

$$\Delta y = \frac{1}{2c} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \sin(\alpha - \frac{1}{2}\omega) \log \left(\frac{n-Q}{n-P} \right).$$

Въ случаѣ угловъ α и α' , весьма мало между собою различающихся, отношеніе $\frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$ почти равно 1-цѣ и слѣдовательно, тогда безъ большей ошибки можно взять

$$\Delta x = \frac{1}{2c} \cos(\alpha - \frac{1}{2}\omega) \log \left(\frac{n-Q}{n-P} \right)$$

$$\Delta y = \frac{1}{2c} \sin(\alpha - \frac{1}{2}\omega) \log \left(\frac{n-Q}{n-P} \right).$$

Въ разсужденіи скорости движущагося тѣла, будемъ имѣть въ точкѣ М (§ 84)

$$v' = \sqrt{\frac{g}{c} \left(\frac{1+p^2}{n-P} \right)} = \sqrt{\frac{g}{c} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \sqrt{n-P}}},$$

а въ точкѣ М'

$$v'' = \sqrt{\frac{g}{c} \left(\frac{1+q^2}{n-Q} \right)} = \sqrt{\frac{g}{c} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha - \omega) \sqrt{n-Q}}};$$

взявъ среднюю между сими двумя скоростями, получимъ

$$\frac{v' + v''}{2} \text{ или } v = \sqrt{\frac{g}{c}} \left\{ \frac{1}{2 \cos \alpha \sqrt{n-P}} + \frac{1}{2 \cos(\alpha - \omega) \sqrt{n-Q}} \right\}$$

или

$$v = c \sqrt{\frac{g}{c}},$$

$$\text{здѣсь для крѣпкости } \frac{1}{2 \cos \alpha \sqrt{n-P}} + \frac{1}{2 \cos(\alpha - \omega) \sqrt{n-Q}} c$$

Наконецъ время употребляемое снарядомъ на перебѣжаніе дуги MM' будетъ

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{1}{2c} \log \left(\frac{n-Q}{n-P} \right) = \frac{1}{2c \sqrt{g}} \log \left(\frac{n-Q}{n-P} \right).$$

§ 94. Входящія въ сіи формулы логарифмы, суть Неперовыя (гиперболическіе), которые можно замѣнить логарифмами обыкновенныхъ таблицъ, раздѣляя послѣдніе на модуль $M=0,43429448$, или умножая на число 2,3025851. И такъ означивъ обыкновенные логарифмы буквою L, будемъ имѣть для опредѣленія всѣхъ обстоятельствъ движенія тѣла въ воздухѣ, слѣдующія несложныя формулы:

$$1) \quad \Delta s = \frac{1}{2cM} \cdot L \left(\frac{n-Q}{n-P} \right)$$

$$2) \quad \Delta x = \frac{1}{2cM} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega} \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{2} \omega) L \left(\frac{n-Q}{n-P} \right),$$

$$3) \Delta y = \frac{1}{2cM} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} \cdot \sin(\alpha - \frac{1}{2}\omega) L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right),$$

$$4) v = q \sqrt{\frac{g}{c}},$$

$$5) \Delta t = \frac{1}{2Mc\sqrt{gc}} \cdot \frac{1}{q} L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right);$$

въ которыхъ $c = \frac{3\lambda D}{4kD'}$, (§ 52), $n = \frac{tg\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{M} Ltg$

$(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) + \frac{g}{ca^2 \cos^2\theta}$ (§ 82), $P = p\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{M} \cdot$

$L(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{tg\alpha}{M} + \frac{1}{M} Ltg(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$, $Q =$

$q\sqrt{1+q^2} + \frac{1}{M} L(q + \sqrt{1+q^2}) = \frac{tg\alpha'}{\cos\alpha'} + \frac{1}{M} Ltg(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha')$,

$\alpha - \alpha' = \omega$, $g = 32,214$ фута.

При вычисленіи сихъ формулъ, какъ видно, необходимо должно имѣть напередъ всѣ величины

функции $P = \frac{tg\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{M} Ltg(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$, выводимыя

изъ разныхъ мало между собою различающихся величинъ, назначаемыхъ углу α . Таблица величинъ P , составленная такимъ образомъ постоянно принадлежать будетъ ко всѣмъ кривымъ, и для употребленія оной при бросаніи бомбъ, весьма достаточно имѣть вычисленную таблицу только для угловъ четверти круга отъ 5 до 5

градусовъ, начиная съ 0° , которая здѣсь и сообщается.

Таблица, показывающая величины функции P для градусовъ четверти круга отъ 5 до 5° .

Углы α	$tg \alpha \cdot sec \alpha$	$\frac{1}{M} Ltg (45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$	P
5°	0,0878229	0,0873773	0,1752002
10	0,1790471	0,1754259	0,3544730
15	0,2774014	0,2648422	0,5422436
20	0,3873290	0,3563785	0,7437075
25	0,5145135	0,4508753	0,9653888
30	0,6666667	0,5493061	1,2159728
35	0,8547956	0,6528366	1,5076322
40	1,0953665	0,7629100	1,8582765
45	1,4142136	0,8813736	2,2955872
50	1,8540393	1,0106833	2,8647226
55	2,4899000	1,1542345	3,6441345
60	3,4641016	1,3169579	4,7810595
65	5,0743358	1,5064717	6,5808075
70	8,0330856	1,7354152	9,7685008
75	14,4195366	2,0275893	16,4471259
80	32,6596102	2,4362457	35,0958559

§ 95. Имѣя послѣдовательныя величины P и зная уголъ бросанія θ и начальную скорость a , легко вычислить предъидущія формулы для всѣхъ угловъ постоянно измѣняющихся, напр. чрезъ 5 градусовъ, а слѣдовател. таковыхъ, что $\frac{1}{2} \omega = 2^\circ 30'$. Но чрезъ то со-

ставится таблица о шести столбцахъ, въ которой, начавъ вычисленіе съ угла бросанія или $\alpha = \theta$ и продолживъ оное до $\alpha = 0$ или до вершины кривой линіи, первый столбецъ будетъ заключать наклоненіе кривой въ разныхъ ея точкахъ; второй, дуги содержащіяся между каждыми послѣдовательными двумя наклоненіями; третій, величины Δx или соотвѣтствующія части абсциссы; четвертый, величины Δy или соотвѣтствующія части ординаты; пятый, скорости въ разныхъ точкахъ кривой линіи; наконецъ шестой, величины Δt . Сложивъ порознь всѣ части Δx и всѣ части Δy , получимъ горизонтальное разстояніе восходящей вѣтви и самую большую высоту полета снаряда; также сложивъ всѣ величины Δt , получимъ время восхожденія снаряда. Послѣ сего сдѣлавъ количества P , α и ω отрицательными, должно продолжить подобное же вычисленіе для послѣдовательныхъ частей нисходящей вѣтви, и начиная отъ вершины, или $\alpha = 0$, взять сумму величинъ Δy , равную упомятой наибольшей высотѣ, также и сумму соотвѣтственныхъ величинъ Δx ; то сія послѣдняя опредѣлитъ горизонтальное разстояніе нисходящей вѣтви;

пятый столбец покажетъ намъ скорость въ точкѣ паденія, а уголъ паденія извѣстенъ будетъ изъ перваго столбца; сумма же всѣхъ соотвѣтственныхъ величинъ Δt , опредѣлитъ время движенія по нисходящей вѣтви. Сложивъ найденныя горизонтальныя разстоянія для обѣихъ вѣтвей, получимъ всю горизонтальную дальность полета; сложивъ же время движенія по восходящей вѣтви со временемъ по нисходящей, получимъ все время движенія снаряда. Впрочемъ сіи выводы относятся къ тому случаю, когда предметъ, въ который должно попасть находится на одномъ съ орудіемъ горизонтѣ. Но если онъ будетъ выше или ниже сего горизонта, то стоитъ только при нисходящей вѣтви взять сумму величинъ Δy , которая равна была разности между наибольшею высотой и разстояніемъ предмета отъ горизонта (когда онъ выше); или равна наибольшей высотѣ сложенной съ разстояніемъ предмета отъ горизонта (когда онъ ниже). Тогда соотвѣтственно той или другой суммѣ, подобно предъидущему, удобно найдется горизонтальное разстояніе, время полета, скорость паденія и уголъ паденія.

§ 96. Послику величины координатъ x и y , какой либо точки кривой линіи, выведены изъ послѣдовательныхъ частей Δs , почитаемыхъ вмѣсто настоящихъ дугъ за дуги круговъ кривизны, то весьма важно знать тѣ поправки, кои необходимо должны быть отнесены къ симъ координатамъ. Для сего сыщемъ величину ξ , изъ уравненія (§ 92)

$$x = \frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega} \sum \Delta s. \cos(\alpha - \frac{1}{2} \omega) + \xi,$$

въ которомъ знакъ $\sum$ конечнаго интеграла выражаетъ сумму послѣдовательныхъ величинъ $\Delta s. \cos(\alpha - \frac{1}{2} \omega)$, происходящихъ отъ уменьшенія угла α , постоянно на одно и то же количество ω , отъ $\alpha = \theta$ до $\alpha = \theta - n\omega =$ углу, соотвѣтствующему дугѣ s ; сія сумма находится по правилу § 95, и служитъ къ опредѣленію первой приближенной величины абсциссы $x = \frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega} \sum$

$$\Delta s. \cos(\alpha - \frac{1}{2} \omega) = \frac{1}{2cM} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega} \cdot \sum \cos(\alpha - \frac{1}{2} \omega) L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$$

Взявъ разность предъидущаго уравненія, получимъ

$$\Delta \xi = \Delta x - \frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega} \cdot \Delta s. \cos(\alpha - \frac{1}{2} \omega);$$

и если переменныя x и s примемъ за функціи отъ α и разности оныхъ разложимъ, по Тайловой теоремѣ, въ рядъ, то будетъ

$$\Delta s = -\frac{ds}{d\alpha} \omega + \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \cdot \frac{\omega^2}{2} - \frac{d^3 s}{d\alpha^3} \cdot \frac{\omega^3}{2.3} + \dots$$

и

$$\Delta x = -\frac{dx}{d\alpha} \omega + \frac{d^2 x}{d\alpha^2} \cdot \frac{\omega^2}{2} - \frac{d^3 x}{d\alpha^3} \cdot \frac{\omega^3}{2.3} + \dots$$

при семъ имѣемъ

$$\cos(\alpha - \frac{1}{2}\omega) = \cos\alpha + \frac{\omega}{2}\sin\alpha - \frac{1}{1.2} \cdot \frac{\omega^2}{4}\cos\alpha - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{\omega^3}{8}\sin\alpha + \dots$$

и

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} = 1 - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{\omega^2}{4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{\omega^4}{16} - \dots$$

а уравненіе $dx = ds \cdot \cos \alpha$ даетъ

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{ds}{d\alpha} \cdot \cos \alpha;$$

$$\frac{d^2 x}{d\alpha^2} = \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \cdot \cos \alpha - \frac{ds}{d\alpha} \sin \alpha,$$

$$\frac{d^3 x}{d\alpha^3} = \frac{d^3 s}{d\alpha^3} \cos \alpha - 2 \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \sin \alpha - \frac{ds}{d\alpha} \cos \alpha,$$

$$\frac{d^4 x}{d\alpha^4} = \frac{d^4 s}{d\alpha^4} \cos \alpha - 3 \frac{d^3 s}{d\alpha^3} \sin \alpha - 3 \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \cos \alpha + \frac{ds}{d\alpha} \sin \alpha, \text{ и}$$

проч.

и такъ найдется, съ одной стороны

$$\begin{aligned} \Delta x = & -\frac{ds}{d\alpha} \left(\omega \cos \alpha + \frac{\omega^2}{2} \sin \alpha - \frac{\omega^3}{2.3} \cos \alpha - \frac{\omega^4}{2.3.4} \sin \alpha + \dots \right) \\ & + \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \left(\frac{\omega^2}{2} \cos \alpha + 2 \frac{\omega^3}{2.3} \sin \alpha - 3 \frac{\omega^4}{2.3.4} \cos \alpha + \dots \right) \\ & - \frac{d^3 s}{d\alpha^3} \left(\frac{\omega^3}{2.3} \cos \alpha + 3 \frac{\omega^4}{2.3.4} \sin \alpha + \dots \right) \\ & + \frac{d^4 s}{d\alpha^4} \left(\frac{\omega^4}{2.3.4} \cos \alpha - \dots \right) \end{aligned}$$

и проч.

а съ другой стороны

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{1}{2} \omega}{\frac{1}{2} \omega} \Delta s \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{2} \omega) &= -\frac{d}{d\alpha} s \left(\omega \cos \alpha + \frac{\omega^2}{2} \sin \alpha - \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \cos \alpha - \frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sin \alpha + \dots \right) \\ &+ \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \left(\frac{\omega^2}{2} \cos \alpha + \frac{\omega^3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\omega^4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha + \dots \right) \\ &- \frac{d^3 s}{d\alpha^3} \left(\frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \cos \alpha + \frac{\omega^4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha - \dots \right) \\ &+ \frac{d^4 s}{d\alpha^4} \left(\frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cos \alpha + \dots \right) \end{aligned}$$

и проч.

отсюда, вычитая последнее разложение изъ
предыдущаго и ограничиваясь степенью ω^4 ,
получимъ

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \left(\frac{\omega^3}{3 \cdot 4} \sin \alpha - \frac{\omega^4}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha + \dots \right) \\ &- \frac{d^3 s}{d\alpha^3} \left(\frac{\omega^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \sin \alpha - \dots \right) + \text{и проч.} \end{aligned}$$

сдѣлавъ $\xi = P\omega^2 - Q\omega^3 + R\omega^4 - \dots$, будемъ имѣть

$$\Delta \xi = \omega^2 \Delta P - \omega^3 \Delta Q + \omega^4 \Delta R - \dots$$

или

$$\Delta \xi = -\frac{dP}{d\alpha} \cdot \omega^3 + \frac{d^2 P}{d\alpha^2} \cdot \frac{\omega^4}{2} + \frac{dQ}{d\alpha} \cdot \omega^4 + \dots;$$

сравнивъ сіе выраженіе съ предшествующимъ,
получимъ для опредѣленія коэффициентовъ Р и
Q два уравненія

$$\frac{dP}{d\alpha} = -\frac{d^2 s}{d\alpha^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{3 \cdot 4}$$

и

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\alpha^2} + \frac{dQ}{d\alpha} = - \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \cdot \frac{\cos \alpha}{2.3.4} - \frac{d^3 s}{d\alpha^3} \cdot \frac{\sin \alpha}{2.3.4},$$

изъ коихъ первое, будучи интегрируемо по частямъ, даетъ

$$P = - \frac{ds}{d\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{3.4} + \frac{1}{3.4} \int ds \cdot \cos \alpha$$

или

$$P = - \frac{ds}{d\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{3.4} + \frac{x}{3.4} + \text{пост.} \dots,$$

а второе, по причинѣ $\frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\alpha^2} = - \frac{d^2 s \cos \alpha}{d\alpha^2 \cdot 2.3.4} - \frac{d^3 s}{d\alpha^3} \cdot \frac{\sin \alpha}{2.3.4}$, даетъ $\frac{dQ}{d\alpha} = 0$. Слѣд. искомая поправка

$$\xi = - \frac{\omega^2}{1.2} \left(\frac{ds}{d\alpha} \sin \alpha - x + \text{пост.} \right)$$

и первоначальное уравненіе для сей величины приметъ видъ

$$x = \frac{\sin^2 \omega}{\frac{1}{2} \alpha} \sum \Delta s \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{2} \omega) - \frac{\omega^2}{1.2} \left(\frac{ds}{d\alpha} \cdot \sin \alpha - x + \text{пост.} \dots \right);$$

а поелику мы нашли $Q=0$, то явно, что сей выводъ есть точный до количествъ помноженныхъ на весьма малозначительную величину ω^4 .

Но дифференцируя уравненіе $s = \frac{1}{2c} \log \left\{ \frac{c\alpha^2 \cos^2 \theta}{g} (n-P) \right\}$,

$$\text{будемъ имѣть } ds = - \frac{dP}{2c(n-P)} = - \frac{dp \sqrt{1+p^2}}{c(n-P)};$$

при семъ $dp = dtg \alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$ и $\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos \alpha}$; по

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{c(n-P)\cos^5 \alpha};$$

поставивъ сію величину въ выраженіе ξ , получимъ

$$\xi = \frac{\omega^2}{1.2} \left\{ \frac{tg \alpha}{c(n-P)\cos^2 \alpha} + x + \text{пост.} \right\}.$$

Постоянная заключающаяся въ скобкахъ, найдется изъ частныхъ величинъ сооветствующихъ началу движенія, $\alpha = \theta$, $x = 0$, $\xi = 0$ и

$$n - P = n - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \log tg(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) = \frac{g}{ca^2 \cos^2 \theta} (\S 82);$$

она будетъ равна $\frac{a^2 tg \theta}{g}$ и поправка для горизонтальной абсциссы дуги кривой линіи, выразится чрезъ

$$\xi = \frac{\omega^2}{1.2} \left\{ \frac{tg \alpha}{c(n-P)\cos^2 \alpha} - \frac{a^2 tg \theta}{g} + x \right\} \dots (x'),$$

не забывая при семъ перемѣнить знакъ угла α , когда абсцисса, постоянно считаемаѣ отъ точки бросанія оканчивается при нисходящей вѣтви.

§ 97. Для поясненія сказаннаго нами въ послѣднихъ параграфахъ, положимъ, что 5-типудовая бомба брошена будетъ подъ угломъ въ 45° градусовъ, (который у насъ обыкновенно употребляется) съ начальною скоростію $= 600$

футамъ въ секунду; требуется опредѣлить самую большую высоту, на которую она поднимается, горизонтальную дальность паденія, уголъ паденія, остающуюся скорость при паденіи и время, которое она употребляетъ на совершеніе своего полета.

Въ семъ вопросѣ $a=600$ фут., $\theta=45^\circ$; при чемъ изъ таблицы приложенной въ § 55. имѣемъ относительно 5-ти-пудовой бомбы, значенія величинъ $\frac{D'}{D}$ и k , кои должны быть

вставлены въ выраженіе $C=\frac{32D}{4kD'}$. Въ разсужденіи же множителя λ , который измѣняется вмѣстѣ со скоростью, то для него должно взять изъ таблицы § 48 величину, принадлежащую среднему сопротивленію выводимому изъ тѣхъ, кои соотвѣтствуютъ двумъ скоростямъ, наибольшей и наименьшей, получаемымъ бомбою во время ея полета. А послѣку начальная скорость есть самая большая, изъ всѣхъ остающихся у снаряда во время его движенія надъ горизонтомъ, самая же меньшая скорость находится по формуламъ § 91, и въ настоящемъ случаѣ почти равна 250 фут., то по правилу § 56 найдемъ $\lambda=0.725$. Потомъ вычисляя величину c по логарифмамъ, будемъ

имѣть $Lc=6,0973098-10$; и отсюда помощію таблицы § 94, которая дастъ, при угль 45° , величину $\frac{tg\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{M} Lg(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) = 2,2955872$, найдется

$$n=2,2955872 + \frac{2g}{ca^2} = 3,7260035.$$

§ 98. Слѣдующая таблица показываетъ величины коэффициента λ , для разныхъ начальныхъ скоростей 5-ти-пудовой бомбы, а также логарифмы количества $s = \frac{3\lambda D}{4kD'}$ и величины n , въ предположеніи угла возвышенія $\theta=45^\circ$.

Началь- ныя ско- рости a .	Величины коэффициента λ .	Логарифмы количества s .	Величины n
150	0,68	6,0694807-10	26,6968048
200	0,685	6,0726623...	15,9210861
250	0,69	6,0758208...	10,9527144
300	0,695	6,0789566...	8,2642299
350	0,70	6,0820698...	6,6493902
400	0,705	6,0851609...	5,6053272
450	0,71	6,0882301...	4,8922738
500	0,715	6,0912778...	4,3841949
550	0,72	6,0943043...	4,0097223
600	0,725	6,0973098...	3,7260035
650	0,73	6,1002946...	3,5060556
700	0,735	6,1032591...	3,3322070
750	0,74	6,1062035...	3,1924968
800	0,75	6,1120330...	3,0733759

§ 99. Возвратимся къ нашему вопросу и составимъ слѣдующія двѣ таблицы,

I. Для восходящей гнѣзды.

α	$L(n-P)$	$L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$	$\cos\left(\alpha-\frac{1}{2}\omega\right)L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$	$\sin\left(\alpha-\frac{1}{2}\omega\right)L\left(\frac{n-Q}{n-P}\right)$	$\frac{1}{2\cos\alpha\sqrt{n-P}}$	ϱ	$\frac{1}{\varrho}L\left(\frac{n+Q}{n-P}\right)$
45°	0,1554624	0,1158510	0,0854145	0,0782678	0,5912264	1,0688209	0,1083914
40	0,2713134	0,0747209	0,0592801	0,0454872	0,4098155	0,8874100	0,0842015
35	0,3462345	0,0536447	0,0452435	0,0288233	0,3644181	0,7742356	0,0692875
30	0,3996790	0,0415268	0,0366573	0,0190826	0,3320408	0,6964589	0,0593385
25	0,4410058	0,0335450	0,0309915	0,0128371	0,3081121	0,6401529	0,0524015
20	0,4745508	0,0283894	0,0270754	0,0085369	0,2901056	0,5982177	0,0474566
15	0,5029402	0,0248870	0,0242971	0,0053865	0,2765063	0,5666119	0,0439225
10	0,5278272	0,0224994	0,0223069	0,0029368	0,2665560	0,5427625	0,0414459
5	0,5503266	0,0209167	0,0208968	0,0009124	0,2590290	0,5253850	0,0398121
0	0,5712435						
сумма		0,3521629	0,2022706				0,5462573

II. Для нахождения степеней.

α	$L(n+P)$	$L\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$	$\cos\left(\alpha+\frac{1}{2}\omega\right)L\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$	$\sin\left(\alpha+\frac{1}{2}\omega\right)L\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$	$\frac{1}{2\cos\omega\sqrt{n+P}}$	ϱ	$\frac{1}{\varrho}L\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$
0°	0,5712455	0,0499555	0,0199565	0,0008704	0,2590290	0,5151418	0,0588885
5	0,5911986	0,0499555	0,0193454	0,0025469	0,2541128	0,5054537	0,0586055
10	0,6107109	0,0495125	0,0190756	0,0042289	0,2505541	0,5018950	0,0589298
15	0,6302496	0,0195587	0,0191029	0,0060251	0,2516776	0,5022517	0,0598848
20	0,6502795	0,0200299	0,0194221	0,0080448	0,2547085	0,5063861	0,0415144
25	0,6715018	0,0210225	0,0200456	0,0104351	0,2597102	0,5144187	0,0439311
30	0,6939008	0,0225990	0,0210027	0,0135802	0,2668111	0,5265215	0,0472967
35	0,7188035	0,0249027	0,0223458	0,0171449	0,2762055	0,5450166	0,0518655
40	0,7469672	0,0281657	0,0241414	0,0221215	0,2881571	0,5645626	0,0580194
45	0,7797112	0,0327440	0,0264980	0,0289175	0,3029955	0,5911524	0,0665484
50	0,8189352	0,0392220	0,0295508	0,0385114	0,3211004	0,6240957	0,0777805
55	0,8674757	0,0485425	0,0354759	0,0525466	0,3428547	0,6639551	0,0938375
60	0,9297796	0,0625039	0,0354759	0,0525466	0,2047715		0,6568969

Теперь, если вычисленные суммы послѣдовательныхъ измѣняющихся величинъ отъ $\alpha=45^\circ$ до $\alpha=0^\circ$, для формулъ выставленныхъ въ главѣи 4-го, 5-го и 8-го столбцевъ первой таблицы, помножить двѣ первыя 0,3521629 и 0,2022706 на постояннаго множителя $\frac{1}{2cM} \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$, а третію 0,5462573 на постояннаго множителя $\frac{1}{2M\sqrt{cg}}$, то найдется горизонтальное пространство восходящей вѣтви=3239,53 фут.=462,79 саж., самая большая высота, до коей восходить бомба=1860,68 фут.=265,81 саж., и время, въ которое она совершаетъ свой полетъ по восходящей вѣтви=9'' 91.

Переходя ко 2-й таблицѣ, когда предположимъ, что выстрѣлъ производится по предмету на одномъ горизонтѣ съ орудіемъ находящемуся, или что нисходящая вѣтвь имѣетъ одинаковую высоту съ восходящею, то въ семъ случаѣ должно взять сумму величинъ въ 5-мъ столбцѣ равную прежней 0,2022706, по коей находится самая большая высота. Но какъ точно таковая сумма не выходитъ, а иная, 0,2047713, которая нѣсколько болѣе оной ко-

личествомъ 0,0025007, по этому и другія суммы и величины при одномъ и томъ же углѣ 60 градусовъ съ нею вычисленные соразмѣрно сему количеству, должны быть уменьшены. Поелику же разность 0,0525466 въ 5-мъ столбцѣ соотвѣтствуетъ 5 градусамъ разности угловъ 60° и 55°, то найдется чрезъ пропорцію, что 0,0025007 соотвѣтствуетъ 14'17" разности между угломъ 60° и искомымъ угломъ паденія, и что сей послѣдній=59° 45' 43". Взявъ между симъ угломъ и 60° средній уголъ=59°52'52", явно что количество, на которое слѣдуетъ убавить сумму 0,2739405 въ 4-мъ столбцѣ, для горизонтальнаго распространенія нисходящей вѣтви, будетъ равно $\frac{0,0025007}{59^{\circ}52'52''} = 0,0014507$, уменьшенная же сумма=0,2724898, а искомое распространеніе равно $\frac{1}{2cM} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} 0,2724898 = 2506,62$ футъ = 358,09 саж., но выше найдено, что горизонтальное распространеніе восходящей вѣтви=3239,53 фута, слѣдовательно горизонтальная дальность полета бомбы=5746,15 фут. =820,88 саж.

Количество, на которое нужно убавить сум-

му 0,6368969 въ послѣднемъ столбцѣ, для искомаго времени полета по нисходящей вѣтви, составляетъ четвертый членъ пропорціи.

$0,0525466 : 0,0025007 = 0,0938375 : 0,0044657$, въ которой первыя два члена тѣ же, кои служили выше къ уменьшенію угла 60° при отысканіи угла паденія, а третій членъ взятъ изъ послѣдняго столбца, соотвѣтственно первому члену пропорціи или разности угловъ 60° и 55° . По сему будетъ уменьшенная сумма $= 0,6324312$, а время полета по нисходящей вѣтви $= \frac{1}{2M\sqrt{cg}} \cdot 0,6324312 = 11'',469$; но выведено

выше, что время полета по восходящей вѣтви $= 9'',91$, слѣдовательно все время, въ которое бомба совершаетъ свой полетъ, равно $21'',38$. Наконецъ когда къ первымъ двумъ членамъ предъидущей пропорціи и къ разности 0,0217343 двухъ чиселъ въ 6-мъ столбцѣ, находящихся противъ угловъ 60° и 55° , съищемъ четвертый пропорціональный членъ, вычтемъ его изъ большаго числа 0,3428547, и происшедшую разность помножимъ на $2\sqrt{\frac{g}{c}}$, то получимъ скорость бомбы при паденіи на горизонтъ $=$

346,89 фут.; ибо каждое число въ семь столб-
цѣ, будучи умножено на $2\sqrt{\frac{g}{c}}$, опредѣляетъ
скорость бомбы въ той точкѣ, гдѣ направленіе
кривой линіи съ горизонтомъ, составляетъ со-
отвѣтствующій сему числу уголъ.

Поправка касательно горизонтальной дальности=5746,15 футъ, по формулѣ (х'), находится
равною $\xi = -7,5$ футъ, которая во всякомъ
случаѣ бываетъ почти ничтожная.

Поступая такимъ образомъ и выводя подоб-
ныя величины для другихъ начальныхъ ско-
ростей, употребительныхъ при бросаніи бомбъ
и гранатъ изъ нашихъ мортиръ всѣхъ извѣст-
ныхъ калибровъ, легко составимъ таблицы, кои
и помѣщены въ концѣ § 101.

§ 100. Формулы § 94, по коимъ сочинены
быть могутъ подобныя таблицы, ясно показы-
ваютъ, что когда разные снаряды будутъ бро-
шены подъ тѣмъ же угломъ возвышенія θ , съ
начальными скоростями пропорціонными кор-
нямъ квадратнымъ изъ произведеній діамет-
ровъ на плотности оныхъ, тогда количество

$$n = \frac{tg \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{M} Ltg(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) + \frac{g}{ca^2 \cos^2 \theta} \quad (\S 94)$$

остается постояннымъ и въ кривыхъ линіяхъ, описываемыхъ сими снарядами, дальности, высоты и всѣ сходственныя линіи дѣлаются пропорціональными произведеніямъ изъ діаметровъ на плотности снарядовъ, а времена полета и скорости паденія пропорціональными корнямъ квадратнымъ изъ сихъ произведеній. Но изъ сего начала слѣдуетъ, что если для практическаго употребленія будетъ вычислена таблица, заключающая необходимыя обстоятельства движенія одного снаряда, бросаемаго подъ определеннымъ угломъ возвышенія съ разными употребительными начальными скоростями, тогда посредствомъ оной чрезъ сказанное сравненіе, удобно составятся таблицы и для другихъ снарядовъ, бросаемыхъ подъ тѣмъ же угломъ возвышенія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть діаметръ перваго снаряда $=k$, его плотность $=D'$, начальная скорость бросанія $=a$, соответствующая горизонтальная дальность паденія $=x$, самая большая высота полета $=y$, время всего полета $=t$, скорость при паденіи $=v$, а уголъ паденія $=\alpha$; и означимъ чрезъ k' , D'' , a' , x' , y' , t' , v' , α' подобныя же величины отнесенныя къ другому какому либо снаряду, изъ коихъ вели-

чины x', y', t', v', α' должны быть опредѣлены чрезъ предыдущія, для какой ни есть данной начальной скорости α сего снаряда. Сначала, по пропорціи $\alpha : \alpha' = \sqrt{kD'} : \sqrt{k'D''}$, найдется скорость $\alpha = \alpha' \sqrt{\frac{kD'}{k'D''}}$, а изъ таблицы, вычисленной для 1-го снаряда извѣстны будутъ и соотвѣтствующія величины x, y, t, v , сей скорости; потомъ чрезъ вышеприведенное сравненіе, получимъ

$$x' = \frac{k'D''x}{kD'}, y' = \frac{k'D''y}{kD'}, v' = v \sqrt{\frac{k'D''}{kD'}}, t' = t \sqrt{\frac{k'D''}{kD'}}$$

и $\alpha' = \alpha$. Въ случаѣ равныхъ плотностей $D' = D''$,

$$\text{сн уравниія обратятся въ } \alpha = \alpha' \sqrt{\frac{k'}{k}}, x = \frac{k'x'}{k}, \\ y' = \frac{k'y}{k}, v' = v \sqrt{\frac{k'}{k}} \text{ и } t' = t \sqrt{\frac{k'}{k}}.$$

§ 101. Симъ образомъ помощію таблицы I-й, составленной по формуламъ § 94 для 5-ти-пудовой бомбы, вычислены таблицы для бомбъ 3-хъ-пуд. и 2-хъ-пудовой и для гранатъ $\frac{1}{2}$ пудовой и 6-ти-фунтовой, бросаемыхъ подѣ угломъ въ 45 градусовъ. На примѣръ, если начальная скорость α' бросанія двухъ-пудовой бомбы = 400 фут., то найдется начальная ско-

рость 5-ти-пудовой бомбы $a=a' \sqrt{\frac{kD'}{k'D''}}=466$

фут. и соответствующія сей скорости изъ I-й таблицы отыщутся чрезъ интерполяцію величины $x=607$ саж., $y=183$ саж., $t=35$ полус., $v=312$ фут. и $\alpha=55^{\circ}46'$, помощію коихъ будемъ имѣть, относительно 2-хъ-пудовой бомбы, бросаемой съ начальною скоростью 400 Футъ въ секунду, горизонтальную дальность паденія

$x'=\frac{k'D''x}{kD'}=447$ саж., самую большую высоту

полета $y'=\frac{k'D''y}{kD'}=135$ саж., время полета

$t'=t \sqrt{\frac{k'D''}{kD'}}=30$ полусек., скорость при паденіи

$v'=v \sqrt{\frac{k'D''}{kD'}}=268$ фут., и уголъ паденія

$\alpha'=\alpha=55^{\circ}46'$

Т А Б Л И Ц А I-я.

Для пяти пудовой бомбы.

На- чаль- ная ско- рость.	Гори- зонталь- ная даль- ность полета.	Высота полета.	Время полета.	Ско- рость бомбы при падении.	Уголъ падения бомбы.
Фу- ты.	Саженъ.	Саженъ.	Полу- секун- ды.	Фу- ты.	Град. мин.
150	94	24	13	141	46°25'
200	159	42	17	180	47.. 33
250	236	63	21	215	49..
300	319	88	25	244	50.. 32
350	406	115	28	268	51.. 59
400	494	144	31	290	53.. 38
450	580	173	34	307	55.. 19
500	664	204	37	322	56.. 43
550	744	235	40	335	58.. 13
600	821	266	43	347	59.. 46
650	893	296	45	356	60.. 58
700	961	326	47	364	62.. 8
750	1025	356	49	372	63.. 19
800	1085	385	51	380	64.. 27
850	1141	414	53	387	65.. 33
900	1194	442	54	394	66.. 38
950	1243	470	56	401	67.. 41
1000	1289	497	57	408	68.. 40

ТАБЛИЦА II.
Для трехъ пудовой бомбы (*).

Началь- ная ско- рость.	Горизон- тальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость б о м б ы при паде- нии.	Уголь па- денія бомбы.
Футы.	Сажень.	Сажень.	Полусе- кунды.	Футы.	Град. мин.
150	94	24	13	139	46° 37'
200	157	42	17	177	47.. 54
250	232	62	21	211	49.. 28
300	311	87	24	238	51.. 3
350	393	113	27	261	52.. 41
400	475	140	30	281	54.. 26
450	555	169	34	297	56. 4
500	632	198	37	311	57.. 37
550	706	226	40	323	59.. 14
600	776	256	42	333	60.. 39
650	841	284	44	342	61.. 54
700	903	313	46	350	63. 9
750	959	340	48	358	64.. 22
800	1013	367	50	365	65.. 32
850	1062	393	52	372	66.. 40
900	1109	420	53	379	67.. 47
950	1152	446	55	386	68.. 49
1000	1192	451	56	392	69.. 47

(*) Въ нашу Артиллерию введенъ недавно новый калиберъ, 3-хъ пудовая мортира, для которой всѣ главнѣйшія обстоятель-ства, при бросаніи необходимыя, находятся здѣсь вычислен-ными, по даннымъ слѣдующимъ: діаметръ трехъ пудовой бомбы $k=10,6$ дюйм. $=0,88333$ фут.; всѣя оной и при томъ совсѣмъ снаряженной—около 3 пуд. 11 фут.; плотность ея въ отношеніи къ водѣ, или величина $D'=5,2448$; плотность въ отношеніи къ воздуху, или величина $\frac{D'}{D}=4370,6$; $LD'=0,7197251$; $L(\frac{D'}{D})=3,6405439$; и $Lk=9,9461246$. Сія величи-ны должны быть причислены къ таблицѣ § 55.

Т А Б Л И Ц А III-я.

Для двухъ пудовой бомбы.

Начальная скорость.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбы при падении.	Уголъ падения.
Футы.	Сажень.	Сажень.	Полу- секунды	Футы.	Град. мин
150	93	24	13	137	46° 59'
200	155	41	17	174	48.. 30
250	224	62	21	205	50.. 16
300	299	85	24	230	51.. 59
350	374	110	27	251	53.. 54
400	447	135	30	268	55.. 46
450	517	161	33	281	57.. 26
500	585	188	36	294	59.. 14
550	648	214	38	304	60.. 45
600	707	239	40	312	62.. 7
650	761	265	42	320	63.. 29
700	812	290	44	328	64.. 48
750	859	314	45	335	66.. 4
800	902	338	47	341	67.. 18
850	943	362	49	348	68.. 28
900	983	385	50	355	69.. 34
950	1021	407	51	361	70.. 35
1000	1058	430	53	367	71.. 30

Т А Б Л И Ц А IV.
Для $\frac{1}{2}$ пудовой гранаты.

Началь- ная ско- рость	Горизонт. дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбы при па- дении.	Уголъ па- дения бомбы.
Фу- ты.	Саженъ.	Саженъ.	Полу- секунды.	Фу- ты.	Град. мин.
150	89	24	13	133	47° 57'
200	144	40	17	165	50.. 24
250	205	58	20	190	52.. 13
300	266	78	23	210	54.. 35
350	326	100	26	225	56.. 43
400	381	122	29	238	58.. 52
450	433	143	31	249	60.. 47
500	480	164	33	256	62.. 28
550	524	184	35	265	64.. 7
600	563	205	37	272	65.. 41
650	599	225	38	279	67.. 13
700	632	243	40	286	68.. 39
750	663	260	42	292	69.. 57

Т А Б Л И Ц А V.
Для 6-ти-фунтовой гранаты.

Началь- ная ско- рость.	Горизонт. дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбы при па- дении.	Уголъ па- дения бомбы.
Фу- ты.	Саженъ.	Саженъ.	Полу- секунды	Фу- ты.	Град. мину.
150	82	22	12	125	49° 50'
200	129	37	16	150	52.. 38
250	176	52	19	168	55.. 39
300	215	68	22	181	58.. 4
350	260	86	24	192	60.. 54
400	296	102	26	200	63.. 3
450	328	118	28	208	65.. 9
500	356	133	30	215	67.. 8
550	382	147	33	222	68.. 56

IV. Объ уголъ возвышенія, соответствующимъ самой большой горизонтальной дальности бросанія.

§ 102. Поелику отношеніе между x и y въ точномъ видѣ изобразить не возможно, то съ-
щемъ оное по приближенію. Для сего перене-
семъ начало координатъ въ вершину D (ф. 17)
кривой и представимъ себѣ, что снарядъ бро-
шенъ въ горизонтальномъ направленіи DQ со
скоростію $= \sqrt{\frac{g}{cn}}$, которую онъ получилъ уже
въ своемъ полетѣ, достигнувъ до сей точки D
(§ 85). Означимъ сію скорость чрезъ a' , длину ду-
ги DM чрезъ s' , координаты DQ и QM чрезъ x' и
 y' , и уголъ составляемый направленіемъ вѣтви въ
точкѣ M съ горизонтальною осью DQ чрезъ α' .
Очевидно, что если въ уравненіи (p') § 82. Сдѣ-
лаемъ $\theta = 0$, и перемѣнимъ a въ a' , x въ x' , y
въ y' , s въ s' и $dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ въ $-d\left(\frac{dy'}{dx'}\right) = -dtg \alpha'$
 $= -\frac{d \alpha'}{\cos^2 \alpha'}$, то касательно предположеннаго
движенія будемъ имѣть

$$\frac{d\alpha'}{dx'} = \frac{ge^{2cs'} \cos^2 \alpha'}{a'^2}$$

или, по причинѣ $dx' = ds' \cos \alpha'$,

$$\frac{d\alpha'}{ds'} = \frac{ge^{2cs'} \cos^3 \alpha'}{a'^2}.$$

Для краткости сдѣлавъ $2c = m$ и $\frac{g}{a'^2} = N$, сіи

выраженія примутъ видъ

$$\frac{d\alpha'}{dx'} = N e^{ms'} \cos^2 \alpha' \quad \text{и} \quad \frac{d\alpha'}{ds'} = N e^{ms'} \cos^3 \alpha'.$$

изобразимъ теперь y' въ функціи отъ x' посредствомъ ряда

$$y' = Ax'^2 + Bx'^3 + Cx'^4 + Dx'^5 + \dots,$$

въ который не входитъ членъ содержащій первую степень переменнаго x' , ибо для $x' = 0$ и

$$\frac{dy'}{dx'} = tg \alpha = 0. \quad \text{Предстоящіе } A, B, C, D, \text{ сего ряда}$$

найдутся удобно чрезъ послѣдовательное дифференцированіе, ибо первый дифференціалъ даетъ

$$tg \alpha' = 2Ax' + 3Bx'^2 + 4Cx'^3 + 5Dx'^4 + \dots,$$

составляя же слѣдующіе, получимъ

$$\frac{d\alpha'}{dx' \cdot \cos^2 \alpha'} \quad \text{или} \quad Ne^{ms'} = 2A + 2 \cdot 3Bx' + 3 \cdot 4Cx'^2 + 4 \cdot 5Dx'^3 + \dots,$$

$$mNe^{ms'} \frac{ds'}{dx'} \quad \text{или} \quad \frac{mNe^{ms'}}{\cos \alpha'} = 2 \cdot 3B + 2 \cdot 3 \cdot 4Cx' + 3 \cdot 4 \cdot 5Dx'^2 + \dots,$$

$$mN \left\{ \frac{me^{ms'}}{\cos \alpha'} \cdot \frac{ds'}{dx'} + \frac{e^{ms'} \sin \alpha'}{\cos^2 \alpha'} \frac{d\alpha'}{dx'} \right\} = mN \left(\frac{m e^{ms'}}{\cos^2 \alpha'} + \right.$$

$$Ne^{2ms' \sin \alpha'} = 2. 3. 4C + 2. 3. 4. 5Dx' + \dots,$$

$$mN \left(\frac{m^3 e^{ms'}}{\cos^3 \alpha'} + 4mNe^{2ms'} \operatorname{tg} \alpha' + N^3 e^{3ms'} \cos \alpha' \right) = 2. 3. 4. 5D + \dots$$

и проч.

Отсюда при положеніи $x' = 0$, которое даетъ $s' = 0$ и $\alpha' = 0$, найдется $A = \frac{1}{2}N$,

$$B = \frac{mN}{2. 3}, C = \frac{m^3 N}{2. 3. 4}, D = \frac{m^5 N + mN^5}{2. 3. 4. 5}, E = \frac{m^4 N + 7m^3 N^3}{2. 3. 4. 5. 6},$$

$$F = \frac{m^5 N + 32m^3 N^3 - 3mN^5}{2. 3. 4. 5. 6. 7}, G = \frac{Nm^6 + 122m^4 N^2 - 33m^2 N^4}{2. 3. 4. 5. 6. 7. 8},$$

и проч.

Поставивъ сіи величины въ предъидущій рядъ и раздѣливъ на N , получимъ уравненіе

$$\frac{y'}{N} = \frac{x'^2}{2} + \frac{mx'^3}{2. 3} + \frac{m^2 x'^4}{2. 3. 4} + \frac{(m^2 + N^2)}{2. 3. 4. 5} mx'^5 + \frac{(m^2 + 7N^2)}{2. 3. 4. 5. 6} m^2 x'^6 + \frac{(m^4 + 32m^2 N^2 - 3N^4)}{2. 3. 4. 5. 6. 7} mx'^7 + \dots (1),$$

изъ котораго по извѣстной ординатѣ $DP = y'$, найдется соотвѣтствующая абсцисса нисходящей вѣтви $PM = x'$; но той же самой ординатѣ принадлежитъ и абсцисса PM' восходящей вѣтви, различающаяся отъ первой величиною и знакомъ, и такъ сдѣлавъ въ последнемъ выраженіи $-x' = x''$, будемъ имѣть для опредѣленія абсциссы PM' уравненіе

$$\frac{y'}{N} = \frac{x''^2}{2} + \frac{mx''^3}{2 \cdot 3} + \frac{m^2 x''^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(m^2 + N^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} mx''^5 + \frac{(m^2 + 7N^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} m^2 x''^6 - \frac{(m^4 + 32m^2 N^2 - 3N^4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} mx''^7 \dots (2).$$

Послѣ сего сложивъ РМ и РМ', получимъ горизонтальную хорду ММ'. Чтобы имѣть горизонтальную дальность АС, то должно въ предыдущихъ уравненіяхъ абсциссы x' и x'' отнести къ наибольшей высотѣ $y' = DB$. А какъ при точкѣ А бросанія касательная съ горизонтомъ составляетъ уголъ возвышенія равный θ , посему взявъ дифференціалъ уравненія (2) и сдѣлавъ

$$\frac{dy'}{dx''} = \operatorname{tg} \theta, \text{ получимъ } \frac{\operatorname{tg} \theta}{N} = x'' + \frac{mx''^2}{2} + \frac{m^2 x''^3}{2 \cdot 3} - \frac{(m^2 + N^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} mx''^4 + \frac{(m^2 + 7N^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} m^2 x''^5 - \dots$$

изъ сего уравненія найдется горизонтальная дальность $x'' = AB$ восходящей вѣтви, а изъ предшлѣднихъ двухъ уравненій извѣстны будутъ наибольшая высота $DB = y'$ и горизонтальная дальность $BC = x'$ нисходящей, послѣ сего сложивъ x' и x'' получимъ горизонтальную дальность $AC = x = x' + x''$, которая очевидно измѣняется зависимо отъ угла возвышенія θ , начальной скорости a и количества $m = 2c$.

§ 103. Удержавъ послѣднія два количества постоянными, изслѣдуемъ при какомъ углѣ возвышенія горизонтальная дальность бываетъ самая большая. По правилу наибольшихъ и наименьшихъ величинъ дифференцируя уравненіе $x = x' + x''$ въ отношеніи θ , будемъ имѣть

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx'}{d\theta} + \frac{dx''}{d\theta} = 0;$$

но не опасаясь ощутительной погрѣшности, можно въ уравненіяхъ (1) и (2) откинуть весьма малые члены, содержащіе степени количества $N = \frac{g}{a'^2}$ и вмѣсто оныхъ взять слѣдующія уравненія

$$\frac{a'^2 y'}{g} = \frac{x'^2}{2} + \frac{m x'^3}{2 \cdot 3} + \frac{m^2 x'^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{m^3 x'^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

и

$$\frac{a'^2 y'}{g} = \frac{x''^2}{2} + \frac{m x''^3}{2 \cdot 3} + \frac{m^2 x''^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{m^3 x''^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots,$$

въ которыхъ скорость снаряда въ вершинѣ кривой $= a'$ и наибольшая высота $= y'$, суть функціи отъ θ , и коихъ дифференціалы взятые, относительно сей переменнѣй будутъ

$$\frac{d(a'^2 y')}{g d\theta} = \left(x' + \frac{m x'^2}{2} + \frac{m^2 x'^3}{2 \cdot 3} + \frac{m^3 x'^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) \frac{dx'}{d\theta}$$

и

$$\frac{d(a'^2 y')}{g d\theta} = \left(x'' - \frac{m x''^2}{2} + \frac{m^2 x''^3}{2 \cdot 3} - \frac{m^3 x''^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) \frac{dx''}{d\theta};$$

$$\text{отсюда, по причинѣ } \frac{dx''}{d\theta} = -\frac{dx'}{d\theta} \text{ и } \frac{m x'^2}{2} + \frac{m^2 x'^3}{2 \cdot 3} +$$

$$\frac{m^3 x'^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = \frac{m x''^2}{2} - \frac{m^2 x''^3}{2 \cdot 3} + \frac{m^3 x''^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots, \text{ получимъ}$$

$$0 = (x' + x'') \frac{dx'}{d\theta},$$

$$\text{по сему } \frac{dx'}{d\theta} = 0 \text{ и } \frac{d(a'^2 y')}{d\theta} = 0. \quad \text{Слѣдовательно}$$

уравненіе, изъ котораго должно опредѣлить уголъ возвышенія для самой большой горизонтальной дальности, составляется бравъ, относительно къ Q, дифференціалъ произведенія изъ квадрата скорости въ вершинѣ на самую большую высоту и сдѣлавъ оный равнымъ нулю. Мы имѣемъ (§ 85)

$$a'^2 = \frac{g}{cn} = \frac{\frac{g}{c} \cdot \cos^2 \theta}{\frac{g}{ca^2} + \sin \theta + \cos^2 \theta \cdot \log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \theta)}$$

величина же y' въ функціи Q найдется по способу, предложенному въ предъидущемъ §. Но онъ приводитъ къ результату чрезвычайно сложному и малоприблизительному, то во избежаніе сего, полезнѣе ограничиться простѣй-

шею величиною (§ 62)

$$y' = \frac{1}{2c} \log \left(1 + \frac{ca^2 \sin^2 \theta}{g} \right),$$

опредѣляющею самую большую высоту восхожденія снаряда, брошеннаго вверхъ со скоростью $= a \sin \theta$ равною скорости бросанія въ вертикальномъ направленіи разложенной.

Симъ образомъ для опредѣленія угла, θ будемъ имѣть уравненіе

$$0 = \frac{d \left\{ \frac{\frac{g}{2c^2} \cos^2 \theta \log \left(1 + \frac{ca^2 \sin^2 \theta}{g} \right)}{\frac{\frac{g}{ca^2} + \sin \theta + \cos^2 \theta \log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \theta)}{d \theta}} \right\}}{d \theta};$$

освобождая оное отъ постояннаго множителя

$\frac{g}{2c^2}$ и сдѣлавъ для краткости $\frac{ca^2}{g} = \beta$, получимъ

дифференціалъ числителя равный

$$-2d\theta \cos \theta \sin \theta \log (1 + \beta \sin^2 \theta) + \frac{2\beta d\theta \sin \theta \cos^3 \theta}{1 + \beta \sin^2 \theta}$$

дифференціалъ знаменателя равный

$$d\theta \cos \theta - 2d\theta \sin \theta \cos \theta \log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \theta) + \frac{d\theta \cos^2 \theta}{2 \cos^2 (45^\circ + \frac{1}{2} \theta) \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \theta)}$$

или, по причинѣ $2 \cos^2 (45^\circ + \frac{1}{2} \theta) \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \theta) = 2 \sin (45^\circ + \frac{1}{2} \theta) \cos (45^\circ + \frac{1}{2} \theta) = \cos \theta$, равный

$$2d\theta \cos \theta - 2d\theta \sin \theta \cos \theta \log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} \theta);$$

отсюда дифференціалъ предложенной дроби

равный нулю, по раздѣленіи на $2a\theta\cos\theta$ и освобожденіи отъ общаго знаменателя, будетъ

$$\left\{ \frac{1}{\beta} + \sin\theta + \cos^2\theta \log t g(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) \right\} \sin\theta \log(1 + \beta \sin^2\theta) +$$

$$\frac{\beta \sin\theta \cos^2\theta}{1 + \beta \sin^2\theta} \left\{ - \cos^2\theta \log(1 + \beta \sin^2\theta) \right.$$

$\left. \left\{ 1 - \sin\theta \log t g(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) \right\} = 0, \right.$ уничтоживъ же знаменателя $1 + \beta \sin^2\theta$ и сокративъ члены, получимъ

$$\sin\theta \cos^2\theta \left\{ 1 + \beta \sin\theta + \beta \cos^2\theta \log t g(45^\circ + \frac{1}{2}\theta) \right\} -$$

$$(1 + \frac{1}{\beta} \sin\theta)(1 + \beta \sin^2\theta) \log(1 + \beta \sin^2\theta) = 0 \dots (y'),$$

сіе уравненіе, будучи рѣшено въ отношеніи къ θ или по правилу ложнаго положенія или чрезъ разложеніе въ рядъ, опредѣлитъ уголъ возвышенія, подъ коимъ происходитъ наибольшая горизонтальная дальность. Сей уголъ, какъ видно, выходитъ тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе количество

$$\beta = \frac{ca^2}{g}, \text{ то есть, чѣмъ болѣе начальная ско-}$$

рость снаряда и чѣмъ менѣе его поперечникъ и относительный его вѣсъ.

§ 104. Слѣдующая таблица составленная Гютономъ, показываетъ углы возвышенія, подъ коими происходитъ самая большая дальность полета.

Начальная скорость, раздѣленная на окончательную скорость.	Углы возвышенія.	Дальность полета, раздѣленная на высоту, принадлежащую окончательной скорости.
0,6919	44° 0'	0,4110
0,9445	43..15	0,6148
1,1980	42..39	0,8176
1,4515	41..45	1,0210
1,7050	41.. 0	1,2244
1,9585	40..15	1,4278
2,2120	39..30	1,6312
2,4655	38..45	1,8346
2,7190	38 . 0	2,0379
2,9725	37..15	2,2413
3,2260	36..30	2,4447
3,4795	35..45	2,6481
3,7330	35.. 0	2,8515
3,9865	34..15	3,0549
4,2400	33..30	3,2583
4,4935	32..45	3,4616
4,7470	32.. 0	3,6650
5,0000	31..15	3,8684

Первый столбец сей таблицы содержитъ числа или величины $\sqrt{\beta} = \frac{a}{\sqrt{\frac{g}{c}}}$, соответственныя различнымъ угламъ возвышенія θ , помещеннымъ во 2-мъ столбцѣ, и происшедшія отъ

раздѣленія начальной скорости снаряда на постоянную окончательную скорость онаго, которая показана въ таблицѣ § 61: сіи числа находятся по уравненію (y'), разрѣшивъ оное въ отноженіи β . Третій же столбецъ содержитъ числа происшедшія отъ раздѣленія самой большой дальности на высоту, которая принадлежитъ окончательной скорости, и которую также можно имѣть изъ таблицы упомянутаго параграфа. И такъ, дабы руководствоваться предложенною здѣсь таблицею, должно раздѣлить данную начальную скорость ядра на окончательную скорость онаго, и къ частному отъ сего происшедшему приискать, въ 1-мъ столбцѣ таблицы, ближайшее число; тогда соответственное число во 2-мъ столбцѣ покажетъ уголъ возвышенія, подъ коимъ происходитъ самая большая дальность, а число въ 3-мъ столбцѣ, бывъ умножено на высоту, принадлежащую окончательной скорости, опредѣлитъ сію дальность съ довольною точностію.

§ 105. Для примѣра положимъ, что требуется найти уголъ возвышенія, отъ котораго происходитъ самая большая дальность полета 5-ти пудовой бомбы, брошенной со скоростью въ 400 футовъ въ секунду.

Окончательная скорость 5-ти пудовой бомбы $\equiv 517$ фут. (табл. § 61), а высота принадлежащая сей скорости $\equiv 4157$ футъ, слѣдовател.
 $\frac{400}{517} = 0,7737$; сему частному числу, заключающемуся между числами 0,6910 и 0,9445, въ 1-мъ столбцѣ предъидущей таблицы, соотвѣтствуетъ уголь возвышенія равный $43^{\circ} 45'$. Умноживъ число 0,4775, среднее между числами 0,4110 и 0,6148 находящимися въ 3-мъ столбцѣ, на 4157 или высоту принадлежащую окончательной скорости, найдемъ самую большую дальность полета $\equiv 283$ саж. Та же 5 пудовая бомба, брошенная со скоростью въ 500 футъ въ секунду, летитъ на самое дальное разстояніе $\equiv 376$ саж., подъ угломъ возвышенія въ $43^{\circ} 11'$; брошенная же со скоростью въ 1000 футовъ летитъ на самое дальное разстояніе $\equiv 836$ саж. подъ угломъ возвышенія въ $40^{\circ} 19'$, а со скоростью въ 2000 футъ летитъ на самое дальное разстояніе $\equiv 1758$ саж. подъ угломъ возвышенія въ $34^{\circ} 36'$.

Уголъ возвышенія, соотвѣтствующій самой большой дальности полета 24-хъ фунтоваго ядра, брошеннаго со скоростью 2000 футъ въ секунду равенъ 32° .

Изъ сего видно, что параболическая теорія, по которой самая большая дальность полета постоянно выходитъ при углѣ возвышенія въ 45 градусовъ, ни мало не согласуется съ опытами, даже при выстрѣлахъ производимыхъ самыми большими бомбами и особенно при сильныхъ зарядахъ.

V. *Уравненіе кривой линіи описываемой снарядомъ, брошеннымъ подъ небольшимъ угломъ возвышенія.*

§ 406. Когда уголъ бросанія $\angle CAB = \theta$ (Фиг. 18) будетъ такъ малъ, что тѣло поднимется на небольшую высоту отъ горизонтальной оси Ax , тогда можно найти, по приближенію, уравненіе въ x и y части ADB кривой линіи, находящейся надъ сею осью. Въ самомъ дѣлѣ, поелику тогда касательная къ кривой, во всемъ пространствѣ сей части, почти горизонтальная, то будетъ количество p весьма малое, котораго презрѣвъ квадратъ получимъ $\sqrt{1+p^2} = 1$, а слѣдовательно

$$ds = dx \sqrt{1+p^2} = dx, \text{ и } s = x.$$

Впрочемъ мы дойдемъ до выводовъ гораздо точнѣйшихъ, если количество p заключающее.

ся почти между 0 и $\operatorname{tg} \theta$, относительно всехъ точекъ кривой линіи, сдѣлаемъ $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$. Но тогда

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \theta}, \quad ds = dx \sqrt{1+d^2} = \frac{dx}{\cos \frac{1}{2} \theta} \quad \text{и} \quad s = \frac{x}{\cos \frac{1}{2} \theta};$$

вводя послѣднюю величину въ уравненіе (p')

$$\S 82, \text{ и сдѣлавъ для краткости } \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \theta} = E \quad \text{и}$$

$2c = m$, будемъ имѣть

$$\frac{dp}{dx} = \frac{g e^{mEx}}{a^2 \cos^2 \theta}$$

отсюда бравъ интегралъ и выводя постоянную изъ условія $x=0$ и $p=\operatorname{tg} \theta$ для точки бросанія А, найдется

$$p = \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{m E a^2 \cos^2 \theta} (e^{mEx} - 1) \dots (z').$$

Умноживъ сіе уравненіе на dx и замѣтивъ, что $p dx = dy$, будемъ имѣть

$$dy = dx \cdot \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{m E a^2 \cos^2 \theta} (e^{mEx} dx - dx);$$

потомъ взявъ интегралъ и опредѣливъ постоянную по условію $x=0$ и $y=0$ для точки бросанія А, получимъ

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2 \theta} (e^{mEx} - mEx - 1) \dots (a'').$$

Вотъ требуемое уравненіе кривой АDB, къ которомъ первый членъ $x \operatorname{tg} \theta$ представляетъ

ординату NP прямой AC , которую бы описало брошенное тѣло, не бывъ подвержено дѣйствию тяжести, второй же членъ представляетъ, въ каждой точкѣ кривой, высоту MN , съ которой тѣло побуждаемое тяжестью нисходитъ въ сопротивляющейся срединѣ.

§ 107. Назначая переменному x различныя величины и выводя изъ уравненій (z) и (a'') , соотвѣтственные величины для y и $p = tg \alpha$, можно будетъ построить кривую ADB и опредѣлить положеніе касательной въ каждой ея точкѣ. Сія уравненія могутъ послужить и къ продолженію кривой далѣе точки B ; онѣ будутъ довольно точны, если только величина p не престанетъ быть весьма мадою, въ противномъ же случаѣ должно прибѣгнуть къ прежде выведеннымъ формуламъ § 94.

Изъ уравненія (a'') , представляя его въ видѣ

$$e^{mEx} - mEx \left(1 + \frac{mEa^2 \sin 2\theta}{2g} \right) = 1 - \frac{m^2 E^2 a^2 y \cos^2 \theta}{g},$$

для всякой данной ординаты $+y$ или $-y$, смотря потому будетъ ли предметъ выше или ниже горизонта орудія, найдется соотвѣтствующая абсцисса x по приближенію.

§ 108. Наибольшая высота полета или наи-

Большая ордината DE кривой линии находится весьма удобно; ибо въ вершинѣ D должно быть $p=0$, и такъ уравнивъ нулю выше найденное выраженіе для p , и рѣшивъ происшедшее отъ сего уравненіе въ отношеніи e^{mEx} , получимъ

$$e^{mEx} = 1 + \frac{mEa^2 \sin \theta \cos \theta}{g}, \text{ или } e^{mEx} = 1 + \frac{mEa^2 \sin 2\theta}{2g} \dots (b'').$$

и отсюда

$$x = AE = \frac{1}{mE} \log \left\{ 1 + \frac{mEa^2 \sin 2\theta}{2g} \right\};$$

поставивъ сіи величины для e^{mEx} и x въ уравненіе (a''), получимъ наибольшую ординату

$$DE = \frac{1}{mE} \left(t^g \theta + \frac{g}{mEa^2 \cos^2 \theta} \right) \log \left(1 + \frac{mEa^2 \sin 2\theta}{2g} \right) = \frac{1}{mE} t^g \theta \dots (c'').$$

§ 109. Что касается до горизонтальной дальности полета, то она найдется уравнивъ нулю величину y ; но тогда будемъ имѣть трансцендентное уравненіе

$$e^{mEx} = 1 + mEx + \frac{m^2 E^2 a^2 \sin 2\theta}{2g} \cdot x \dots (d''),$$

изъ коего не иначе, какъ по приближенію найдется численная величина $x = AB$, когда извѣстны будутъ a , c , θ . Развернувъ сіе уравненіе въ рядъ и удержавъ при семъ первыя двѣ степени отъ x , составимъ уравненіе почти

одинакое съ найденнымъ въ § 67, изъ котораго выводили разныя послѣдствія, обыкновенно случающіяся при выстрѣлахъ прицѣльныхъ и рикошетныхъ. Но для большей вѣрности въ исчисленіяхъ, здѣсь мы избѣгаемъ сего разложенія, которое ведетъ къ рядамъ мало приближительнымъ, и къ формуламъ хотя простымъ, но не точнымъ. Руководствуясь же таблицею, составленною Фонрейхомъ для послѣдовательныхъ величинъ неопредѣленно-степеннаго количества e^{mEx} , не трудно будетъ при рѣшеніи разнаго рода заданій, выложить въ числахъ всѣ формулы съ симъ количествомъ.

§ 110. Назвавъ абсциссу восходящей вѣтви, выводимую изъ уравненія (b'') , чрезъ x' и сравнивъ оную съ горизонтальною дальностію x , получимъ по надлежащемъ сокращеніи, не зависимо отъ начальной скорости a , слѣдующее простое уравненіе

$$e^{mEx'} = \frac{e^{mEx} - 1}{mEx} \dots\dots (e'^{\prime\prime}),$$

которое ведетъ къ заключенію, что абсцисса x' восходящей вѣтви болѣе одной половины горизонтальной дальности x . Въ самомъ дѣлѣ,

если разложимъ неопредѣленно-степенныя количества, заключающіяся въ семь уравненіи, въ ряды, кои будутъ сходящіеся для какихъ либо величинъ x и x' , то будемъ имѣть по сокращеніи

$$x' + \frac{mEx'^2}{1.2} + \frac{m^2E^2x'^3}{1.2.3} + \dots = \frac{x}{2} + \frac{mEx^2}{1.2.3} + \frac{m^2E^2x^3}{1.2.3.4} + \dots,$$

или

$$\left(\frac{x}{2} - x'\right) + \frac{mE}{1.2} \left(\frac{x^2}{3} - x'^2\right) + \frac{m^2E^2}{1.2.3} \left(\frac{x^3}{4} - x'^3\right) + \frac{m^3E^3}{1.2.3.4} \left(\frac{x^4}{5} - x'^4\right) + \dots = 0.$$

Дабы сумма членовъ, сходящагося сего ряда равна была нулю, должно принять $x' > \frac{x}{2}$, въ противномъ случаѣ когда будетъ $x' < \frac{x}{2}$, или $x' = \frac{x}{2}$, всѣ члены сдѣлаются положительными и приведутъ къ суммѣ не равной нулю. Бравъ логарифмъ уравненія (e''), находимъ

$$x' = \frac{1}{mE} \log \left(\frac{e^{mEx} - 1}{mEx} \right),$$

и развернувъ обыкновеннымъ образомъ въ строку

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{e^{mEx} - 1}{mEx} \right) &= \log \left(1 + \frac{mEx}{2} + \frac{m^2E^2x^2}{2.3} + \frac{m^3E^3x^3}{2.3.4} + \dots \right) \\ &= \frac{mEx}{2} + \frac{m^2E^2x^2}{2.3.4} - \frac{m^4E^4x^4}{2.2.3.3.4.4.5} + \dots, \end{aligned}$$

получаемъ

$$x' = \frac{x}{2} + \frac{mEx^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{m^3 E^3 x^4}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5} + \dots;$$

отношеніе каждаго члена, въ семъ ряду, къ своему предшествующему есть менѣе, чѣмъ произведеніе $m^2 E^2 x^2$, которое въ обыкновенныхъ случаяхъ практики, составляетъ дробь весьма малую.

§ 411. Если извѣстны горизонтальная дальность $= x$ и уголъ возвышенія $= \theta$, то изъ предъидущаго уравненія получимъ начальную скорость

$$a = \sqrt{\frac{2g}{m^2 E^2 x \sin 2\theta}} (e^{mEx} - mEx - 1) \dots (f);$$

изъ онаго же въ случаѣ данныхъ, горизонтальной дальности x и начальной скорости a , будемъ имѣть для угла возвышенія θ , чрезъ первое приближеніе, когда сдѣлаемъ $E = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \theta} = 1$ уравненіе вида

$$\sin 2\theta' = \frac{2g}{m^2 a^2 x} (e^{mx} - mx - 1),$$

а чрезъ второе приближеніе, когда сдѣлаемъ $E' = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \theta'}$,

$$\sin 2\theta'' = \frac{2g}{m^2 E'^2 a^2 x} (e^{mE'x} - mE'x), \text{ и проч.}$$

Вообще для извѣстныхъ координатъ y и x ,

опредѣляющихъ положеніе предмета и для даннаго угла возвышенія θ , будемъ имѣть изъ уравненія (a'') начальную скорость

$$a = \frac{1}{mE \cos \theta} \sqrt{\frac{g (e^{mEx} - mEx - 1)}{x \operatorname{tg} \theta - y}}.$$

§ 112. Поставляя въ уравненіе $\frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g$

(§ 82) вмѣсто dp выше приведенную величину $= -\frac{g e^{mEx} dx}{a^2 \cos^2 \theta}$ (§ 107), потомъ выведя dt , получимъ

$$dt = \frac{e^{\frac{1}{2} mEx} dx}{a \cos \theta},$$

и отсюда время движенія

$$t = \frac{e^{\frac{1}{2} mEx} - 1}{\frac{1}{2} mE a \cos \theta} \dots (g'').$$

Скорость снаряда по направленію касательной въ каждой точкѣ пути имѣетъ описываемаго равна

$$\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}} = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + p^2},$$

слѣдовательно, назвавъ оную ρ и поставивъ

вмѣсто $\frac{dx}{dt}$ равную величину $\frac{a \cos \theta}{e^{\frac{1}{2} mEx}}$, будемъ

имѣть

$$\rho = \frac{a \cos \theta}{e^{\frac{1}{2} mEx} \cos \alpha} \dots (h'').$$

§ 113. Положимъ, что всѣ ядра и зарядъ

остаются постоянными, и что изъ одного и того же орудія подъ двумя небольшими углами возвышенія θ и θ' , мало между собою различающимися, произведены два выстрѣла и для каждаго изъ нихъ найдено положеніе перваго паденія ядра. Пусть величины $x=l$, $y=h$ определяют паденіе ядра; а $x=l'$, $y=h'$ другаго ядра. Очевидно, что начальная скорость a и величина m , для сихъ двухъ выстрѣловъ, останутся неизвѣстными, и для отысканія оныхъ, будемъ имѣть два уравненія (a''),

$$h=lg\theta-\frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2 \theta}(e^{mEl}-mEl-1),$$

$$h'=l'tg\theta'-\frac{g}{m^2 E'^2 a^2 \cos^2 \theta'}(e^{mE'l'}-mE'l'-1);$$

изъ коихъ удобно исключается a , и найдется

$$(h-ltg\theta)(e^{mE'l'}-mE'l'-1)E'^2 \cos^2 \theta=(h'-l'tg\theta')e^{mEl}-mEl-1)E'^2 \cos^2 \theta' \dots (i''),$$

$$a=\frac{1}{mE \cos \theta} \sqrt{\frac{g(e^{mEl}-mEl-1)}{lg\theta-h}}.$$

Потомъ по извѣстной величинѣ $m=2c=\frac{6\lambda D}{4kD'}$

$\frac{3\lambda D}{2kD'}$, получимъ коэффициентъ сопротивленія

$$\lambda=\frac{2kmD'}{3D}.$$

Впрочемъ можно допустить $\theta'=\theta$, лишь бы

только паденія ядра были отвесены къ двумъ мѣстностямъ, дозволено между собою различающимся; тогда вмѣсто предъидущаго уравненія (i'') будемъ имѣть простѣйшее

$$(h - ltg\theta)(emEl' - mEl' - 1) = (h' - l'tg\theta)(emEl - mEl - 1).$$

§ 114. Предъидущія формулы могутъ быть приложены въ практикѣ къ выстрѣламъ прицѣльнымъ и рикошетнымъ, отлогимъ и крутымъ. Пусть горизонтальное разстояніе АВ (фиг. 14) гребня бруствера отъ орудія = x ; высота СВ сего бруствера отъ горизонта орудія = y ; горизонтальное разстояніе самой возвышенной точки пути ядра = x' ; горизонтальное разстояніе АК перваго паденія ядра на валгангъ = x'' , высота ІК = y'' ; наклоненіе кривой къ горизонту у гребня бруствера = α ; уголъ паденія ядра на валгангъ = α'' . Между этими величинами будемъ имѣть, по уравненіямъ (a''), (z') и (b''), отношенія

$$y = xtg\theta - \frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2 \theta} (emEx - mEx - 1) \dots (1),$$

$$y'' = x''tg\theta - \frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2 \theta} (emEx'' - mEx'' - 1) \dots (2),$$

$$tg\alpha = tg\theta - \frac{g}{mEa^2 \cos^2 \theta} (emEx - 1) \dots (3),$$

$$tg \alpha'' = tg \theta - \frac{g}{mEa^2 \cos^2 \theta} (e^{mEx''} - 1) \dots (4),$$

$$e^{mEx'} - 1 = \frac{mEa^2 \cos^2 \theta tg \theta}{g} = \frac{mEa^2 \sin(2\theta)}{2g} \dots (5);$$

помощью коихъ и уравненій (g'') и (h''), можно рѣшить всѣ задачи, предложенныя о рикошетной стрѣльбѣ.

§ 115. *Задача I.* Зная разстояніе АВ отъ орудія до бруствера, высоту СВ верхней точки гребня бруствера, высоту ВR валганга, и принявъ горизонтальное разстояніе Ad самой возвышенной точки пути ядра произвольнымъ, однако же меньшимъ чѣмъ половина разстоянія АВ: найти уголъ и скорость бросанія, разстояніе АК точки паденія и уголъ паденія ядра.

Въ сей задачѣ по даннымъ величинамъ x, y, y'', x' , должно опредѣлить θ, a, x'' и α'' . Взявъ въ соображеніе уравненія (1) и (5), которыя заключаютъ въ себѣ двѣ неизвѣстныя величины a и θ , и исключивъ a , будемъ имѣть

$$mE(xtg\theta - y)(e^{mEx} - 1) = (e^{mEx} - mEx - 1)tg\theta;$$

тсюда найдется

$$tg\theta = \frac{mEy(e^{mEx'} - 1)}{mEx e^{mEx'} - (e^{mEx} - 1)} \dots (6):$$

для первой приближенной величины искомага

угла θ , можно положить $E = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta} = 1$.

Начальная скорость будетъ известна посредствомъ уравненія (5), которое даетъ

$$a \sqrt{\frac{2g(e^{mEx'} - 1)}{mE \sin(2\theta)}} \dots (7);$$

за симъ по правилу ложнаго положенія изъ уравненія (2) выведемъ x'' , и вставивъ сію величину въ (4) получимъ α'' . Впрочемъ разрѣшеніе уравненія (2) сказаннымъ способомъ мы замѣнимъ другимъ простѣйшимъ и для практики весьма точнымъ. Для сего вычтемъ уравненіе (2) изъ (1) и для краткости сдѣлаемъ $y - y'' = b$, $x'' - x = \delta$ — разстоянію, на которомъ ядро упадетъ на валгангъ отъ боковаго бруса; посредствомъ чего будемъ имѣть

$$b = \delta t g \theta + \frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2 \theta} \{ e^{mEx} (e^{mE\delta} - 1) - m E \delta \};$$

разлагая количество $e^{mE\delta}$ въ рядъ по степенямъ отъ δ и сокращая на mE , получимъ

$$b = \delta t g \theta + \frac{g}{mE a^2 \cos^2 \theta} \left\{ e^{mEx} \left(\delta + \frac{mE\delta^2}{2} + \dots \right) - \delta \right\}$$

или

$$b = \left\{ \frac{g}{mE a^2 \cos^2 \theta} (e^{mEx} - 1) \cdot t g \theta \right\} \delta + \frac{g e^{mEx} \delta^2}{2 a^2 \cos^2 \theta} + \dots$$

Въ семъ ряду быстро убывающемъ, члены съ

δ^3 , δ^4 и проч., безъ ощутительной погрѣшности, можно отбросить и составитъ, для опредѣленія искомой величины δ , уравненіе второй степени.

$$\delta^2 + \frac{2a^2 \cos^2 \theta}{g e^{mEx}} \left\{ \frac{g}{mE a^2 \cos^2 \theta} (e^{mEx} - 1) - t g \theta \right\} \delta = \frac{2 b a^2 \cos^2 \theta}{g e^{mEx}},$$

которое, когда на мѣсто $t g \theta$ поставимъ равную величину взятую изъ уравненія (5), приводится къ виду

$$\delta^2 + \frac{2 \delta}{mE} (1 - e^{mE(x' - x)}) = \frac{2 b a^2 \cos^2 \theta}{g e^{mEx}},$$

отсюда

$$\delta \text{ или } x'' - x = \left(\frac{1 - e^{mE(x' - x)}}{mE} \right) \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b a^2 \cos^2 \theta}{g e^{mEx}} \left(\frac{mE}{1 - e^{mE(x' - x)}} \right)^2} \right\} \dots (8).$$

Въ частномъ случаѣ когда $y' = 0$, должно быть также $mEx \cdot e^{mEx'} - (e^{mEx} - 1) = 0$ (§ 110, e''); но тогда уравненіе (6) обращается въ неопредѣленный видъ, величина x' становится зависимою отъ x , и чтобы вопросъ сдѣлать опредѣленнымъ, то изъ четырехъ искомыхъ величинъ θ , a , x'' и a'' , должно предположить одну извѣстную.

Примѣръ для 24-хъ фунтоваго ядра: пусть разстояніе $AB = x = 150$ саж. или 1050 футъ, высота бруствера $BC = y = 30$ фут., высота вал-

ганга $BR=y''=23$ фут., и сверхъ сего примемъ,
что разстояніе самой возвышенной точки пути
ядра $x'=\frac{2}{3}x=700$ футъ.

Вычисленіе угла θ посредствомъ уравненія
(6), дѣлая въ немъ $E=1$:

$L(e^{mx}) = mxLe$; $L(e^{mx'}) = mx'Le$; Le —модулю—
 $0,43429448$; $LLe=\overline{1,6377843}$.

$m=2c$ (§ 55).... $\overline{4,4951593}$

Le $\overline{1,6377843}$

mLe $\overline{4,1329436}$; mLe $\overline{4,1329436}$

x $\overline{3,0211893}$; x' $\overline{2,8450980}$

$\overline{1,1541329}$ $\overline{2,9780416}$

$mxLe = L(e^{mx}) = 0,1426044$; $mxLe = L(e^{mx'}) = 0,0950696$

$e^{mx} = 1,588687$; mx $\overline{1,5163486}$

$e^{mx'} = 1,244714$; $\overline{1,6114482}$

$mx e^{mx'} = 0,408713$

$-(e^{mx}-1) = -0,388687$

знаменатель $= 0,020026 = z$;

m $\overline{4,4951593}$

y $\overline{1,4771212}$

$e^{mx'} - 1$ $\overline{1,3886588}$

Логар. числителя. . . . $\overline{3,3609393}$

z $\overline{-8,3015942}$

$9,0593451 = Lt g \theta$,

уголь $\theta = 6^\circ 32' 22''$

сдѣлавъ $E = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos(3^\circ 16' 11'')}$ или $LE = 0,0007075$

въ уравненіи (6) и повторивъ вычисленіе, мы найдемъ почти ту же самую величину угла θ .

Вычисленіе начальной скорости a по формуль (7):

найдено выше для $m x' Le \dots\dots\dots 2,9780416$

$E \dots\dots\dots 0,0007075$

$2,9787491$

$m E x' Le = L(e^{m E x'}) = 0,0952246$

$e^{m E x'} = 1,245158$

$g = 32,214 \dots\dots 1,5080447$; $m \dots\dots 4,4951593$

$2 \dots\dots\dots 0,3010300$; $E \dots\dots 0,0007075$

$e^{m E x'} - 1 \dots\dots 1,3894461$; $\sin(2\theta) \dots\dots 1,3546700$

$1,1985208$

$5,8505368$

$-5,8505368$

$5,3479840 = L(a^2)$

$2,6739920 = L(a)$

скорость $a = 472,06$ фут.

Вычисленіе величины $\delta = x'' - x$, по формуль (8): найдено предъ симъ

для $e^{m E x'} \dots\dots\dots 0,0952246$

также для $e \cdot m E x \dots\dots\dots 0,1428369$

$1,9523877$

$e^{m E (x' - x)} = 0,896164$;

$$1 - e^{mE}(x' - x) = 0,103836$$

$$\text{Логар. сего} \dots\dots\dots \bar{1},0163479,$$

$$mE \dots\dots\dots - 4,4958668$$

$$\text{Логар. 1-го множителя} = 2,5204811$$

$$\text{Логар. обращен. сего множ.} = \bar{3},4795189,$$

$$\text{квadrата его} \dots\dots\dots \bar{6},9590378;$$

$$2 \dots\dots\dots 0,5010300;$$

$$g' \dots\dots 1,5080447$$

$$e^{mEx} \dots\dots 0,1428369$$

$$\hline 1,6508816,$$

$$b = y - y'' = 7 \text{ фут.} \dots\dots\dots 0,8450980$$

$$a^2 \dots\dots\dots 5,3479840$$

$$\cos^2 \theta \dots\dots\dots \bar{1},9943502$$

$$\hline 1,4474800$$

$$- 1,6508816$$

$$\hline \bar{1},7965984 = \text{Лог. дроби подъ ко-}$$

$$\text{решнымъ знакомъ; величина сей дроби} = 0,626035; \text{ величина}$$

$$\sqrt{1,626035} = 1,27516; \text{ 2-й множитель} = 0,27516;$$

$$\text{Лог. 1-го множителя} = 2,5204811$$

$$\text{2-го множителя} = \bar{1},4395853$$

$$\hline 1,9600664 = L(\delta)$$

$$\delta = x'' - x = 91, 2 \text{ фут.} = 13 \text{ саж.}$$

$$x'' = 1141 \text{ фут.}$$

Вычисленіе угла паденія α'' , посредствомъ
уравненія (4):

$$mE \dots\dots\dots \bar{4},4958668$$

$$ae \dots\dots\dots \bar{1},6377843$$

$$x'' \dots\dots\dots 3,0572856$$

$$\hline \bar{1},1909367$$

$$mEx''Le = L(emEx'') = 0,4552161$$

$$emEx'' = 1,429605$$

$$g \dots\dots 1,5080447 \quad mE \dots\dots \bar{4},4958668$$

$$emEx'' - 1. \quad \bar{1},6330694; \quad a^2 \cos^2 \theta \dots 5,3423142$$

$$\hline 1,1411141$$

$$\hline 1,8381810$$

$$-1,8381810$$

$$\hline \bar{1},3029331 = \text{Лог. 2-го члена во 2 части;}$$

$$2\text{-й сей членъ} = 0,200878.$$

Найдено выше $Ltg\theta = 9,0593451$; отсюда

$$tg\theta = 0,114642$$

$$-2\text{-й членъ} = -0,200878$$

$$\hline -0,086236 = tg\alpha''$$

$$Ltg\alpha'' = 8,935689; \text{ уголъ } \alpha'' = -4^\circ 55' 43''.$$

Вычисленіе скорости паденія v по формулѣ

$$(\S 112), \quad v = \frac{a \cos \theta}{e^{\frac{1}{2} mEx''} \cos \alpha''}$$

по предыдущему

$$\frac{1}{2} mEx'' Le = 0,0776080;$$

$$\cos \alpha'' \dots 9,9983913$$

$$\hline 0,0759993; \quad a \cos \theta \dots 2,6711571$$

$$\hline -0,0759993$$

$$\hline 2,5951578 = Lv$$

$$\text{скорость } v = 393,7 \text{ фут.}$$

Вычисленіе времени достиженія снаряда до

бруствера по формулѣ (§ 112), $t = \frac{e^{\frac{1}{2}mEx} - 1}{\frac{1}{2}mEa \cos \theta}$

$$\frac{1}{2}mExLe = L(e^{\frac{1}{2}mEx}) = 0,0714184,$$

$$e^{\frac{1}{2}mEx} = 1,1787$$

$$\frac{1}{2}mE \dots\dots 4,1948368$$

$$a \cos \theta, \dots\dots 2,6711571; e^{\frac{1}{2}mEx} - 1 \dots\dots 1,2522218$$

$$\text{---} 2,8659939$$

$$\text{---} 2,6859939$$

$$Lt = 0,3862279$$

время $t = 2'', 4$.

Симъ образомъ находимъ для 24-хъ-фунтоваго ядра; 1) уголь возвышенія орудія $\theta = 6^\circ 32' 22''$ (по § 76 $= 6^\circ 33' 7''$); 2) начальную скорость $a = 472$ фут. (по § 76 $= 481$ фут.); 3) разстояніе $x'' - x = 13$ саж., на которомъ ядро упадетъ на валгангъ отъ боковаго бруствера (по § 76 $= 12$ саж.); 4) уголь паденія $\alpha'' = 4^\circ 55' 43''$ (по § 76 $= 5^\circ 29'$); 5) скорость паденія на валгангъ $v = 394$ фут. (по § 76 $= 403$ фут.); 6) время достиженія снаряда до бруствера $t = 2'', 4$.

§ 116 *Задача 2.* Даны разстояніе $AB = x$, высота бруствера $BC = y$, высота валганга $BR = y''$ и разстояніе точки паденія ядра $RI = x'' - x$; найти уголь бросанія $= \theta$, уголь паденія $= \alpha''$ и начальную скорость $= a$.

Представивъ уравненія (1) и (2) въ видѣ

$$x \operatorname{tg} \theta - y = \frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2 \theta} (e^m E x - m E x - 1),$$

$$x'' \operatorname{tg} \theta - y'' = \frac{g}{m^2 E^2 a^2 \cos^2 \theta} (e^m E x'' - m E x'' - 1),$$

и раздѣливъ одно на другое, будемъ имѣть

$$\frac{x \operatorname{tg} \theta - y}{x'' \operatorname{tg} \theta - y''} = \frac{e^m E x - m E x - 1}{e^m E x'' - m E x'' - 1} = \lambda \quad \text{для краткости}$$

отсюда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda y'' - y}{\lambda x'' - x}.$$

Послѣ сего изъ уравненія (1) получимъ начальную скорость

$$a = \frac{1}{m E \cos \theta} \sqrt{\frac{g (e^m E x - m E x - 1)}{x' \operatorname{tg} \theta - y}};$$

уравненіе (4) дастъ уголъ паденія α'' , скорость паденія найдется по формулѣ (h'') § 112.

Для примѣра положимъ, что орудіе поставлено на разстояніи 250 саж. или 1750 фут. и что должно бросить 24-хъ фунтовое ядро, которое бы пролетѣвъ чрезъ верхъ бруствера, возвышеннаго на 60 футъ отъ горизонта орудія, упало на валгангъ въ разстояніи на 20 саж. или 140 фут. отъ боковаго бруствера, полагая при семъ высоту валганга въ 53 фута. Здѣсь мы имѣемъ $x=1750$ футъ, $y=60$ футъ, $x''-x=140$ фут., $y''=53$ фут.; вставивъ сіи величины

въ предъидущія уравненія, получимъ; 1) уголъ бросанія $\theta = 5^{\circ} 37' 3''$ (по § 76 $= 5^{\circ} 21' 13''$); 2) начальную скорость $a = 733$ фут. (по § 76 $= 792$ фута); 3) уголъ паденія $\alpha'' = 3^{\circ} 17' 41''$ (по § 76 $= 3^{\circ} 19' 7''$); 4) скорость паденія на валгангъ $v = 544$ футъ (по § 76 $= 589$ футъ); 5) время достиженія снаряда до гребня бруствера $t = 2''$, 8.



Г Л А В А III.

О РАЗНЫХЪ СПОСОБАХЪ ОПРЕДѢЛЯТЬ НАЧАЛЬНУЮ СКОРОСТЬ, БРОСАЕМЫХЪ ИЗЪ ОРУДІЙ СНАРЯДОВЪ.

§ 117. Чтобы изъ предъидущей Теоріи имѣть полезное примѣненіе къ практикѣ, то должно знать, какой зарядъ соотвѣтствуетъ извѣстной начальной скорости и обратно, какая начальная скорость соотвѣтствуетъ данному заряду. Для разрѣшенія сего важнаго въ Артиллеріи вопроса, изобрѣтены разные способы болѣе или менѣе точные, изъ коихъ здѣсь рассмотримъ употребительнѣйшіе и преимущественно соображенные съ опытами; ибо законъ, по которому дѣйствуетъ упругая жидкость при сож-

женіи пороха, но нынѣ еще не совершенно изслѣдованъ посредствомъ чистаго умозрѣнія.

4) *Опредѣленіе начальной скорости по способу Робинса.*

§ 118. Извѣстны длина канала орудія, его калибръ, вѣсъ ядра, количество пороха въ зарядѣ и упругость пороховыхъ газовъ въ первое мгновеніе ихъ образованія; опредѣлить скорость, съ которою ядро выбрасывается изъ канала.

Робинсъ, рѣшая сію задачу принялъ за основаніе два начала; 1-е) что пороховые газы дѣйствуютъ на ядро только до вылета его изъ жерла; 2-е) что весь порохъ въ зарядѣ сгораетъ и превращается въ упругую жидкость прежде, нежели ядро замѣтно тронется съ своего мѣста. Рѣшеніе Робинса есть геометрическое, которое Эйлеръ, для большей ясности и простоты, переложилъ на аналитическое и съ своей стороны ввелъ многія, при выстрѣлахъ обыкновенно случающіяся и начальную скорость измѣняющія, такія обстоятельства, которыя Робинсомъ совсѣмъ выпущены были изъ виду. Пусть будетъ длина канала $AB=a$

(фиг. 19), длина пространства порохомъ занимаемаго $AC=b$; при чемъ порохъ можетъ наполнять все сіе пространство или только часть онаго. Діаметръ ядра $=k$, удѣльный его вѣсъ въ n разъ больше удѣльнаго вѣса воды взятаго за 1-цу. Наконецъ пусть будетъ упругость пороховыхъ газовъ въ пространствѣ AC , въ первое мгновеніе воспламененія всего заряда, въ m разъ болѣе давленія атмосферы; то по положенію Робинса какъ скоро все пространство наполнено порохомъ, тогда будетъ $m=1000$; но если онъ занимаетъ только часть сего пространства, величина m должна быть тогда уменьшена соотвѣтственно сей части.

Положимъ теперь, что ядро двигаясь дошло до точки M и что $CM=x$; а также скорость ядра въ M равна v . По формуламъ перемѣннаго прямолинейнаго движенія, сія скорость найдется изъ дифференціального уравненія (Механика Франкера, чл. 152)

$$v dv = \theta dx,$$

въ которомъ величина θ изображаетъ ускорительную силу, равную силѣ движущей ядро, дѣленной на его массу.

Дабы имѣть движущую сію силу, мы замѣ-

тимъ, что въ случаѣ, когда не принимаемъ въ разсужденіе вѣсъ ядра и другія препятствія немного измѣняющія его движеніе въ каналѣ орудія, то она измѣрится будетъ давленіемъ, которое пороховые газы производятъ на поверхность ядра, и которое есть тоже, что и давленіе на площадь круга равнаго съ ядромъ діаметра (*). А какъ давленіе пороховыхъ газовъ въ точкѣ М, относится къ давленію m въ точкѣ С, какъ АС: АМ, или какъ b : $b-x$ (полагая, что температура пороховыхъ газовъ пре-

(*) Въ самомъ дѣлѣ; взявъ центръ ядра за начало координатъ и ось абсциссъ x по направленію оси канала, и назвавъ давленіе пороховыхъ газовъ на 1-цу площади чрезъ p , будемъ имѣть давленіе оныхъ на каждый элементъ $2\pi y ds$ поверхности ядра, равное $2p\pi y ds$ при чемъ нормальное или проходящее чрезъ центръ ядра. Слагающая сего давленія, по направленію параллельному оси канала, будетъ $4p\pi y ds \frac{x}{k}$; но слагающая онаго перпендикулярная къ оси канала равна нулю. Интегрируя выраженіе $\frac{4p\pi y x ds}{k}$ между предѣлами $x=0$, $x=\frac{k}{2}$, и замѣчая, что $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{k dx}{2y}$, получимъ давленіе пороховой жидкости на поверхность ядра равное $\frac{p\pi k^2}{4}$, слѣдовательно тоже самое, что и давленіе оной на площадь круга, имѣющаго съ ядромъ одинаковый діаметръ.

бываетъ постоянною во время ихъ разширенія и что, такимъ образомъ, упругость оныхъ, по закону Мариотта, находится въ обратномъ отношеніи пространства или занимаемаго), то

давленіе въ точкѣ М, будетъ въ $\frac{mb}{b-x}$ разъ больше давленія атмосферы. Теперь если примемъ, что давленіе атмосферы равно вѣсу воднаго столба, котораго высота равна $h=33$ фут., то сила, съ коею ядро понуждается къ движенію въ точкѣ М, будетъ равна вѣсу воднаго столба или цилиндра, равнаго съ ядромъ діаметра, а высотой $\frac{mbh}{b-x}$, то есть, равна

$$\frac{1}{4}\pi k^2 \cdot \frac{mbh}{b-x};$$

здѣсь π означаетъ отношеніе окружности къ діаметру. Раздѣливъ сію величину на массу ядра, которая равна его вѣсу $\frac{1}{6}\pi k^3 n$ дѣленному на тяжесть g , равна $\frac{\pi k^3 n}{6g}$, будемъ имѣть ускорительную силу

$$\theta = \frac{\frac{1}{4}\pi k^2 \cdot \frac{mbh}{b-x}}{\frac{\pi k^3 n}{6g}} = \frac{3gmbh}{2kn(b-x)}$$

въ слѣдствіе коей уравненіе $v dv = \theta dx$, приметъ видъ

$$v dv = \frac{3gmbh}{2kn} \cdot \frac{dx}{b+x}$$

отсюда, взявъ интегралъ, получимъ

$$v^2 = \frac{3gmbh}{kn} \log(b+x) + C :$$

постоянная C найдется, замѣчая, что когда $x=0$ то и $v=0$, по сему будетъ

$$v^2 = \frac{3gmbh}{kn} \log\left(\frac{b+x}{b}\right)$$

и

$$v = \sqrt{\frac{3gmbh}{kn} \log\left(\frac{b+x}{b}\right)}.$$

Теперь если сдѣлаемъ $x=CB$, тогда будетъ $b+x=AB=a$, и найдется скорость, съ которою ядро выброшено будетъ изъ канала

$$v = \sqrt{\frac{3gmbh}{kn} \log\left(\frac{a}{b}\right)} \dots\dots (k').$$

§ 119. Когда зарядъ наполняетъ все пространство AC , тогда $m=1000$, но если онъ занимаетъ только часть сего пространства равную $AD=f$, тогда вмѣсто m должно поставить $\frac{mf}{b}$; ибо давленіе въ точкѣ D , которое $=m$, от-

носится къ давленію въ точкѣ С, какъ АС: АD или $b:f$, слѣдовательно и прѣч. Симъ образомъ для втораго случая предъидущая формула превратилась въ слѣдующую

$$v = \sqrt{\frac{3gmfh}{kn} \log \left(\frac{a}{b} \right) \dots (l'').}$$

По симъ формуламъ явствуетъ, что квадраты скоростей, съ коими ядра вылетаютъ изъ орудій, находятся между собою въ прямомъ отношеніи логарифмовъ $\frac{a}{b}$ или $\frac{AB}{AC}$ и длины f того пространства, которое порохъ занимаетъ, и въ обратномъ отношеніи діаметровъ ядеръ и относительно ихъ вѣсовъ.

§ 120. Чтобъ не имѣть большаго затрудненія въ опредѣленіи надлежащей длины каждаго заряда, введемъ въ предъидущія вычисленія, вмѣсто длины заряда, отношеніе его вѣса къ вѣсу ядра, и означимъ вѣсъ пороха въ зарядѣ чрезъ P , удѣльную его тяжесть чрезъ p , вѣсъ ядра чрезъ Q , то будетъ

$$P = \frac{1}{4} \pi k^2 \cdot f p; Q = \frac{1}{6} \pi k^3 n = \frac{1}{4} \pi k^2 \cdot \frac{2}{3} kn;$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{2kn}{3fp}, \text{ и } J = \frac{2knP}{3pQ}.$$

Вмѣстивъ, во 2-ю формулу (l''), сію величину, и перемѣня Неперовъ логарифмъ въ обыкно-

венный, чрезъ раздѣленіе сего послѣдняго на модуль $M=0,43429448$, получимъ

$$v = \sqrt{\frac{2gmkP}{MQp}} L\left(\frac{a}{b}\right) \dots\dots (m''),$$

гдѣ члены дробнаго количества $\frac{a}{b}$, можно по произволенію выражать или въ дюймахъ, или въ калибрахъ орудія или наконецъ въ поперечникахъ ядра.

Относительно формулы (k'') , для коей $f=b$, положимъ, что въ длинѣ канала a діаметръ k содержится i разъ, то есть, $\frac{a}{k} = i$, то будетъ

$a=ik$; но имѣемъ величину b равную $\frac{2knP}{3pQ}$,

слѣдовательно будетъ

$$\frac{a}{b} = \frac{3ipQ}{2nP},$$

и формула (k'') обратится въ

$$v = \sqrt{\frac{2ghmP}{MQp}} \cdot L\left(\frac{3ipQ}{2nP}\right) \dots\dots (n''),$$

посредствомъ коей удобно найдется начальная скорость ядра, или то пространство, которое бы оно пробѣжало равномернымъ движеніемъ въ одну секунду со скоростію, полученною имъ

отъ силы пороха при вылетѣ изъ жерла орудія.

§ 121. Въ предъидущемъ рѣшеніи выпущены многія обстоятельства, которыя порознь и не такъ важны, но въ совокупности могутъ произвести значительное измѣненіе въ найденной начальной скорости.

Первое препятствіе, противоположаемое движенію ядра по длинѣ канала, есть давленіе атмосферы со стороны отверстія орудія. По предъидущему сіе давленіе равно вѣсу водянаго столба, имѣющаго въ основаніи площадь большаго круга ядра, а высоту $h=33$ фут., то есть, равно

$$\frac{1}{4}\pi k^2 h;$$

а какъ оно противоположно давленію упругой пороховой жидкости, равному $\frac{1}{4}\pi k^2 \cdot \frac{msh}{b+x}$, то движущая сила ядра будетъ равна

$$\frac{1}{4}\pi k^2 \cdot \frac{msh}{b+x} - \frac{1}{4}\pi k^2 = \frac{1}{4}\pi k^2 \left(\frac{msh}{b+x} - h \right);$$

раздѣливъ ее на массу ядра $= \frac{1}{6}\pi k^3 n = \frac{1}{4}\pi k \cdot \frac{2}{3}kn$, будемъ имѣть, вмѣсто прежняго дифференціального уравненія (§ 118), слѣдующее

$$v dv = \frac{3gh}{2kn} \left(mf \cdot \frac{dx}{b+x} - dx \right),$$

котораго интеграль, при условіи $x=0$ и $v=0$, будетъ

$$v^2 = \frac{3gh}{kn} \left\{ mf. \log \left(\frac{b+x}{b} \right) - x \right\}.$$

Сдѣлавъ же $x=CB=a-b$, получимъ скорость ядра при вылетѣ изъ канала

$$v = \sqrt{\frac{3gh}{kn} \left\{ mf. \log \left(\frac{a}{b} \right) - (a-b) \right\}} \dots\dots (p''),$$

которая отъ прежней (l'') различается немного, ибо подъ корнемъ весьма малая величина $a-b$, не можетъ ощутительно перемѣнить большой величины $mf. \log \left(\frac{a}{b} \right)$.

Второе препятствіе, противопологаемое движенію ядра, происходитъ отъ сопротивленія воздуха, котораго вліяніе на маломъ протяженіи канала, будучи почти ничтожное, по сему и бесполезно было бы вводить оное въ вычисленіе.

§ 122. Кромѣ показанныхъ причинъ находятся и другія, кои уменьшаютъ скорость ядра:

1) Движеніе ядра по каналу замѣдляется треніемъ онаго о внутреннюю поверхность стѣны. Въ винтованныхъ ружьяхъ, въ стволѣ которыхъ пуля вгоняется силою, треніе дол-

жно быть довольно велико. Впрочемъ, предположивъ оное равнымъ вѣсу ядра, надлежало бы найденную ускорительную силу θ въ § 118 уменьшить единицею или подкоренную величину выраженія (k'') уменьшить количествомъ $= 2g (a-b)$, которое, какъ видно, не можетъ произвести въ начальной скорости замѣтной перемѣны; предположивъ же оное во сто разъ больше противу вѣса пули, и тогда количество $200g (a-b)$, по малости своей, можетъ быть презрѣно въ сравненіи съ подкоренною величиною. Въ большихъ орудіяхъ, по причинѣ зазора, треніе бываетъ не велико; но каково бы дѣйствіе онаго ни было, подвергнуть его строгому вычисленію едва ли возможно.

2) Въ то время, какъ ядро пробѣгаетъ длину канала, пороховые газы вырываются не только сквозь запаль, но также сквозь зазоръ въ орудіи, и при семъ со скоростью несравненно большею противу той, какова оными сообщается снаряду. Отъ чего остающейся части пороховыхъ газовъ упругость ослабляется, и ядро понуждается къ движенію силою меньшею противу принятой въ предшествующихъ вычисленіяхъ. Сіе обстоятельство имѣетъ большое

вліяніе на уменьшеніе скорости снаряда, и дабы вычислить эту потерю, надлежитъ знать скорость свободной пороховой жидкости. Многія есть средства опредѣлять сію скорость или по опытамъ или по Теоріи, простирающуюся, по изслѣдованіямъ Робинса и Гютона до 700 фут. въ секунду.

3) Рѣшеніе задачи предполагаетъ, что весь порохъ въ зарядѣ воспламеняется мгновенно. Но поелику на самомъ дѣлѣ сего не бываетъ, то какъ бы кратко ни было время постепеннаго воспламененія, освобождающіеся газы въ первыя мгновенія должны дѣйствовать съ меньшею силою, нежели какова допущена въ предъидущемъ рѣшеніи. Не возможно подчинить вычисленію сіе уменьшеніе; опредѣлить же ее, другаго нѣтъ средства, какъ только чрезъ сличеніе между собою выводовъ, найденныхъ по Теоріи и по опытамъ.

4) Поелику пороховые газы, находящіеся у дна канала, движутся съ меньшею скоростью, нежели тѣ, кои ближе къ ядру, у котораго движеніе ихъ есть самое быстрое, то заключаемъ, что сіи газы не вездѣ по длинѣ канала раздѣлены единообразно, но что они болѣе сжаты и плотнѣе у дна, нежели возлѣ самаго

ядра. При семъ пороховая жидкость дѣйствуетъ на ядро и его движеть не со всею свойственною ей силою и не съ полною своею скоростью, но только съ относительною или съ избыткомъ своей скорости предъ скоростью ядра; то по двумъ симъ причинамъ начальная скорость также должна получить уменьшеніе.

5) По вычисленію вся сила пороховыхъ газовъ въ сжатомъ состояніи, употреблена была только для движенія одного снаряда; однако же часть сей силы потребна и для сообщенія движенія упругимъ и не упругимъ частицамъ самаго пороха, котораго масса, сравнительно съ массою ядра, не должна быть оставлена безъ вниманія. И такъ введемъ въ вычисленіе кромѣ вѣса Q ядра, вѣсъ P пороха и картуза, въ который онъ высыпается, и примемъ, что пороховые газы единообразно раздѣлены въ томъ пространствѣ, которое они занимаютъ въ цилиндрическомъ каналѣ, и что они дѣйствуютъ съ прежнею силою $= \frac{1}{4} \pi k^2 \frac{mfh}{b+x}$ противъ площади круга, равнаго съ ядромъ діаметра. Въ семъ предположеніи центръ тяжести газовъ, коихъ масса равна P , будетъ посрединѣ длины пространства ими занимаемаго; центръ тяже-

сти всей массы $P + Q$, которая движется въ каналѣ, найдется по извѣстному правилу; и будетъ разстояніе онаго отъ дна кана-

$$\text{ла, } AN = z = \frac{Q(b+x) + P\left(\frac{b+x}{2}\right)}{Q+P} = \frac{(Q+\frac{1}{2}P)(b+x)}{Q+P};$$

отсюда, бравъ дифференціалъ въ отношеніи ко времени t , получаемъ скорость v движенія сего центра, въ функціи скорости v ядра, равную

$$\frac{(Q+\frac{1}{2}P)}{Q+P} v. \text{ Но, по основаніямъ Динамики,}$$

центръ тяжести совокупной массы, побуждаемой данными силами, движется по тому же закону, по которому двигалась бы вся сія масса, сосредоточенная въ центръ тяжести и подверженная дѣйствію тѣхъ же силъ, посему въ уравненіи $v'dv' = \theta dz$, опредѣляющемъ скорость центра тяжести ядра и пороховой жидкости, надлежитъ ускорительную силу θ уравнить

$$\frac{1}{4} \pi k^2 \cdot \frac{g f m h}{(P+Q)(b+x)}$$

или, по исключеніи величины $f = \frac{P}{\frac{1}{4} \pi k^2 \cdot p}$

(§ 120), уравнить

$$\frac{g m h P}{p (P+Q)(b+x)};$$

внося въ оное какъ сію величину, такъ и

предыдущія величины найденныя для v' и z ,
будемъ имѣть.

$$\left(\frac{Q+\frac{1}{2}P}{Q+P}\right)^2 v dv = \frac{g m h P}{p(P+Q)(b+x)} \cdot \left(\frac{Q+\frac{1}{2}P}{Q+P}\right) dx,$$

или

$$v dv = \frac{m g h P}{p(Q+\frac{3}{2}P)} \cdot \frac{dx}{(b+x)};$$

потомъ взявъ интеграль между предѣлами $x=0$
и $x=a-b$, получимъ начальную скорость ядра

$$v = \sqrt{\frac{2 m g h P}{p(Q+\frac{3}{2}P)} \cdot \log\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

§ 123. Поелику сія формула, какъ и прежняя, выведена въ предположеніе мгновеннаго воспламененія всего заряда, постоянной температуры разширяющагося газа, и съ упущеніемъ вышеприведенныхъ главныхъ обстоятельствъ, замѣтно уменьшающихъ начальную скорость ядра, то дабы могла бытъ приложеною ко всѣмъ случаямъ практики, Гютонъ изъ опытовъ своихъ находитъ, что въ оной вмѣсто количества $\frac{1}{2} P$ должно взять $\frac{1}{3} P$, то есть, одну треть вѣса пороха и картуза, въ которомъ онъ заключается, и что надлежитъ сдѣлать $m=2200$ атмосфернымъ давленіямъ. Слѣдовател. исправленная формула, которую мы можемъ употребить для нахожденія начальной скорости сна-

рядовъ, будетъ вида

$$v = \sqrt{\frac{bmghP}{\rho M(P+3Q)}} \cdot L\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot (q''),$$

или, выражая количества P и Q въ функціи отъ f и k (§ 120),

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{\rho M}} \cdot \sqrt{\frac{f}{(f + \frac{2kn}{p})}} \cdot L\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot (r'').$$

Въ сей формулѣ предполагается каналъ и камора одинакой ширины, и количество f = длинѣ заряда, занимающаго часть сей каморы; b = отстоянію центра ядра отъ дна канала; a = длинѣ канала къ каморою. При неравной же ширинѣ канала съ каморою должно сію послѣднюю превратить въ цилиндръ, равный діаметромъ калибру орудія, и высоту сего цилиндра придать какъ къ длинѣ канала, такъ и къ отстоянію центра ядра отъ каморы, для полученія величинъ a и b : при семъ величина f найдется чрезъ уравненіе (§ 120)

$$f = \frac{4P}{\pi k^2 p}.$$

§ 124. Когда $b=f$, то будемъ имѣть

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{\rho M}} \cdot \sqrt{\frac{f}{(f + \frac{2kn}{p})}} \cdot L\left(\frac{a}{f}\right) \cdot \dots \cdot (s'').$$

Сравнивая сію скорость съ предъидущею (r'')

усматриваемъ, что ядро бывъ придвинуто ближе къ пороховому заряду, во время заряжанія орудія, получаетъ по выстрѣлѣ большую начальную скорость. Впрочемъ по мнѣнію Робинса, если будетъ между зарядомъ и ядромъ пустое пространство достаточно большое, то пороховая жидкость, дѣйствуя тогда не только давленіемъ, но и ударомъ, увеличиваетъ начальную скорость въ высшей степени: по не имѣнію обстоятельныхъ опытовъ сіе мнѣніе остается пока сумнительнымъ.

§ 125. Представляя формулы (r'') и (s'') въ видѣ

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{f}{k}}{\left(\frac{f}{k} + \frac{2n}{p}\right)}} L\left(\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}\right),$$

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{f}{k}}{\left(\frac{f}{k} + \frac{2n}{p}\right)}} L\left(\frac{\frac{a}{k}}{\frac{f}{k}}\right),$$

и изображая количества f , a , b числомъ поперечникомъ ядра, будемъ имѣть вмѣсто оныхъ слѣдующія

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \sqrt{\frac{f}{\left(f + \frac{2n}{p}\right)}} L\left(\frac{a}{b}\right), \quad \text{и}$$

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \sqrt{\frac{f}{\left(f + \frac{2n}{p}\right)}} \cdot L\left(\frac{a}{f}\right),$$

или, сдѣлавъ отношеніе $\frac{2n}{p} = n'$,

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \sqrt{\frac{f}{(f+n')}} L\left(\frac{a}{b}\right) \text{ и}$$

$$v = \sqrt{\frac{bmgh}{pM}} \sqrt{\frac{f}{(f+n')}} L\left(\frac{a}{f}\right) \dots (t'').$$

Приложимъ послѣднее выраженіе къ опредѣленію длины f сильнѣйшаго заряда или тако-го, который сообщаетъ ядру самую большую начальную скорость. Очевидно, что съ прибавленіемъ пороха въ зарядъ увеличивается скорость, только до нѣкоторой степени; ибо оставивъ малую часть канала не занятою порохомъ, ядро вылетитъ изъ орудія прежде, чѣмъ пороховая жидкость успеетъ сообщить ему всю скорость; съ другой стороны весьма малый зарядъ оказываетъ на ядро лишь слабое дѣйствіе; посему дабы движеніе ядра, по возможности, было самое быстрое, то надлежитъ для f найти такую величину, чтобы величина v была самая большая (maximum) или чтобы дифференціалъ ея въ отношеніи къ f былъ равенъ нулю. И такъ возвысивъ выраженіе (t'') въ квадратъ и отбросивъ постоянные множители, получимъ чрезъ дифференцированіе количества $\frac{f}{f+n'}$.

$\log\left(\frac{a}{f}\right)$, въ отношеніи перемѣнной f ; уравненіе

$$\frac{n'}{(f+n')^2} \log\left(\frac{a}{f}\right) - \frac{1}{f+n'} = 0,$$

или

$$n' \log\left(\frac{a}{f}\right) = f + n' \dots\dots (u''),$$

изъ котораго должна быть выведена длина f сильнѣйшаго заряда. Хотя рѣшеніе сего уравненія, при частныхъ значеніяхъ для a и n' , удобно можетъ быть совершено по правилу ложнаго положенія, но чтобы имѣть общую величину f освобожденную отъ логарифма, то употребимъ для сего извѣстный рядъ

$$\log\left(\frac{a}{f}\right) = 2 \left\{ \frac{a-f}{a+f} + \frac{1}{3} \left(\frac{a-f}{a+f} \right)^3 + \dots\dots \right\},$$

въ которомъ безъ большой погрѣшности можно отбросить 2-й членъ и слѣдующіе и взять,

$\log\left(\frac{a}{f}\right) = 2 \left(\frac{a-f}{a+f} \right)$. Чрезъ что предъидущее уравненіе обратится въ

$$2 n' \left(\frac{a-f}{a+f} \right) = f + n'$$

или въ

$$f^2 + (a + 3n')f = an';$$

отсюда найдется

$$f = -\frac{1}{2}(a + 3n') + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 10an' + 9n'^2}$$

и

$$\frac{f}{a} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3n'}{a}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{10n'}{a} + \frac{9n'^2}{a^2}};$$

хотя количества f и a увеличиваются вмѣстѣ,

однако отношеніе $\frac{f}{a}$ постепенно становится

меньше. А изъ сего заключаемъ, что длина сильнѣйшаго заряда не имѣетъ постояннаго отношенія къ длинѣ канала орудія, и что чѣмъ будетъ больше длина канала, тѣмъ сравнительно меньшаго требуетъ заряда. Самая большая начальная скорость, соотвѣтствующая сему заряду найдется по формулѣ ($1''$).

§ 126. Слѣдующая таблица, вычисленная Гютономъ, содержитъ въ себѣ сіи скорости для ядеръ, бросаемыхъ изъ разныхъ орудій при длинахъ каналовъ по порядку увеличивающихся на 2 калибра, принимая при семъ діаметръ ядра почти равнымъ сему калибру, и влагая зарядъ въ орудіе безъ картуза.

Длина канала въ ка- либ- рахъ <i>a</i> .	Длина сильнѣй- шаго за- ряда въ калиб- рахъ <i>f</i> .	Частное отъ $\frac{a}{f}$.	Всѣ за- ряда въ сотыхъ доляхъ въ- са ядра.	Наиболь- шая на- чальная скорость ядра въ футахъ.
2	0,63	3,171	12	810
4	1,20	3,333	23	1122
6	1,72	3,488	33	1348
8	2,20	3,636	42	1529
10	2,64	3,788	50	1681
12	3,05	3,934	58	1813
14	3,43	4,082	65	1929
16	3,78	4,233	71	2033
18	4,11	4,380	78	2127
20	4,42	4,525	84	2213
22	4,71	4,671	90	2292
24	4,99	4,810	95	2366
26	5,25	4,952	100	2434
28	5,50	5,091	105	2498
30	5,73	5,235	109	2558
32	5,96	5,369	113	2614
34	6,17	5,510	117	2668
36	6,37	5,651	121	2719
38	6,56	5,793	125	2767
40	6,75	5,926	128	2813
42	6,93	6,061	132	2857
44	7,10	6,197	135	2899
46	7,27	6,328	138	2939
48	7,43	6,460	141	2978
50	7,58	6,596	143	3015
52	7,72	6,736	146	3051
54	7,86	6,870	149	3085
56	8,00	7,000	152	3118
58	8,13	7,134	155	3150
60	8,26	7,264	157	3181

По сей таблицѣ, если будетъ извѣстно сколько разъ калибръ орудія содержится въ длинѣ канала, и когда будетъ данъ вѣсь ядра, найдется длина и вѣсь сильнѣйшаго заряда, атакже скорость симъ зарядомъ сообщенная ядру. Въ случаѣ же, когда данная длина канала заключаться будетъ между послѣдовательными какими либо двумя числами 1-го столбца, то соотвѣтствующія числа прочихъ столбцовъ удобно найдутся по простой пропорціи. Если при извѣстной длинѣ канала орудія, вмѣсто самой большой скорости, будетъ назначена какая либо другая меньшая, то соотвѣтственный зарядъ приблизительно найдется, посплавъ пропорцію: квадратъ табличной скорости относится къ табличному заряду, какъ квадратъ заданной скорости относится къ искомому заряду (на счетъ этого правила, смотри ниже).

§ 127. Основываясь на Теоріи Робинса находится, что при всѣхъ вообще длинахъ и калибрахъ орудій, отношеніе длины сильнѣйшаго заряда къ длинѣ всего канала есть постоянно и равно

$$\frac{1}{2,71828} \text{ почти } \frac{7}{19} . \text{ Въ самомъ}$$

дѣлѣ, бравъ дифференціалъ выраженія (§ 118)

$$\sqrt{\frac{3gmh}{kn}} \cdot b \log\left(\frac{a}{b}\right), \text{ или } b \log\left(\frac{a}{b}\right),$$

которое относительно переменнѣй b должно быть наибольшимъ, и уравнивъ оный нулю, будемъ имѣть

$$db \cdot \log\left(\frac{a}{b}\right) - db = 0, \text{ и } \log\left(\frac{a}{b}\right) = 1,$$

отсюда $\frac{a}{b} = \text{числу}$, коего Неперовъ логарифмъ

равенъ 1-цѣ, то есть, $\frac{a}{b} = 2,71828$ и $\frac{b}{a}$

$= \frac{1}{2,71828}$. Но по опытамъ найдено, что тако-

ваго постояннаго отношенія длины сильнѣйшаго заряда къ длинѣ канала не бываетъ, а переменяется оно вмѣстѣ съ длиною канала.

2) *Опредѣленіе начальной скорости изъ дальности полета снарядовъ, по способу Ломбара.*

§ 128. Для опредѣленія начальной скорости дальности полета снарядовъ, бросаемыхъ подъ небольшимъ возвышеніемъ, а также при горизонтальномъ направленіи орудія, надлежитъ знать точно уголъ, составляемый первымъ направленіемъ вылета снаряда изъ отверстія съ

осью канала; ибо при выстрѣлахъ съ малымъ возвышеніемъ, каковыя обыкновенно производятся изъ пушекъ и единороговъ, малѣйшее отклоненіе снаряда, при вылетѣ его, отъ направленія оси, производитъ ощутительную перемѣну въ дальности самаго полета.

Слѣдующій способъ, выдуманный Ломбаромъ, можетъ быть съ точностію употребленъ къ опредѣленію сего отклоненія или угла вылета. Утверждаютъ въ землю вертикально два столба, одинъ Р (фиг. 20-я) у платформы подъ дуломъ А орудія, а другой Q въ разстояніи 4-хъ или немного болѣе сажень. Сему послѣднему сверхъ земли даютъ больше возвышенія, нежели первому; однако же меньше, до нѣсколькихъ дюймовъ, противъ самой нижней линіи канала при горизонтальномъ направленіи орудія, дабы выстрѣленный снарядъ, пролетая надъ онымъ, безпрепятственно перерѣзывалъ планку СВ, сдѣланную изъ нехрупкаго дерева, весьма тонкую, имѣющую отъ трехъ до 4-хъ дюймовъ ширины и вставленную на верху сего столба, который при томъ долженъ быть утвержденъ такимъ образомъ, чтобы сторона планки, обращенная къ орудію, была перпен-

дикулярна къ вертикальной плоскости выстрѣла. Чрезъ нивелированіе находятъ, какимъ количествомъ дюймовъ столбъ Q выше P. Потомъ на верху столба P проводятъ черту параллельную продольной впадинѣ столба Q, и по сей чертѣ ставятъ, въ вертикальномъ положеніи, линѣйку DE, раздѣленную на футы, дюймы и линіи. Придвинувъ къ ней дуло орудія, получаютъ требуемое разстояніе его отъ планки СВ, и вертикальное разстояніе нижней точки *m* жерла отъ верха столба P; отсюда также заключаютъ, на сколько сія точка *m* выше верха столба Q. Устроивъ все такимъ образомъ и наведши орудіе горизонтально на планку СВ, ясно видно, что поелику на разстояніи 4-хъ сажень, тяжесть не успѣетъ замѣтно склонить ядро въ низъ, то когда оно по выстрѣлѣ слѣдуетъ по оси канала, должно перерѣзать планку нижнюю своею округлостію въ точкѣ *i*, находящейся на равной высотѣ съ *m*. Но если, по какимъ либо причинамъ, ядро вылетитъ по направленію, которое будетъ или выше или ниже горизонтальной оси, тогда оно нижнею своею округлостію перерѣжетъ планку въ другой точкѣ *g*. Вымѣривъ высоту *gk* сей

точки отъ верха столба и сравнивъ оную съ известною высотой ik , получимъ разстояніе gi и слѣдственно направленіе вылета снаряда въ отношеніи къ горизонту. Потомъ изъ треугольника gim прямоугольнаго въ точкѣ i , по известнымъ сторонамъ gi и mi , найдемъ уголъ вылета m посредствомъ $tgm = \frac{gi}{mi}$. Зная ссй уголъ, сверхъ того вымѣривъ чрезъ нивелирование отстояніе перваго паденія снаряда въ l отъ орудія равное mn , и вертикальное склоненіе отъ горизонтальной линіи mn равное nl , получимъ начальную скорость снаряда по правилу § 53, опредѣляя во первыхъ, изъ треугольниковъ gim и hnm подобныхъ между собою, величину $hn = \frac{gi \times mn}{mi}$, потомъ $hl = nl \pm hn = y$, время

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \text{ и наконецъ}$$

$$a = \frac{ecx - 1}{ct} \text{ или } a = \left(\frac{ecx - 1}{c} \right) \sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Скорость $= a$, найдется также по формуль (§ 111)

$$a = \frac{1}{mE \cos \theta} \sqrt{\frac{g(e^{mEx} - mEx - 1)}{x \tan \theta - y}},$$

въ которой $\theta = \pm < hmn$, съ $+$ при возвышенномъ направленіи вылета mg , съ $-$ при

склонительномъ направленіи сего вылета;
 $x=mn$; $y=-nl$; $xtg\theta=+hn$; $xtg\theta-y=nl+hn$
 $=hl$; $m=2c=\frac{3\lambda D}{2kiv}$, (§ 55); $E=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}J}$ —почти 1-цѣ.

§ 129. Употребляя сіи формулы, мы при-
 небрегли склоненіе внизъ ядра тяжестію па
 разстояніи mg . Хотя это склоненіе почти ни-
 чтожное, но дабы увѣриться, не сдѣлаетъ ли
 оно ощутительной разности въ найденной нами
 скорости, то на основаніи единообразнаго дви-
 женія сыщемъ время, которое употребить сна-
 рядъ на прохожденіе пространства mg со ско-
 ростію выше выведенною $=a$, и весьма мало
 различающеюся отъ истинной; посредствомъ
 сего времени, которое назовемъ t' , найдется
 величина склоненія внизъ снаряда $=\frac{1}{2}gt'^2$; по-
 томъ, присоединяя оную къ gi съ надлежа-
 щимъ знакомъ, будемъ имѣть для опредѣленія
 угла вылета уравненіе.

$$tg\theta=\frac{gi\pm\text{склоненіе}}{mi},$$

гдѣ знакъ $+$ относится къ возвышенному на-
 правленію вылета, а знакъ $-$ къ склонитель-
 ному направленію. Имѣя уголъ θ легко выве-
 демъ, по предъидущимъ формуламъ, вѣрный.

шую величину начальной скорости.

§ 130. Чтобы представить примѣръ вычисленій, примемъ въ разсужденіе опыты, дѣланные во время практическихъ занятій Офицеровъ Артиллерійскаго Училища въ Красномъ селѣ въ Августъ мѣсяцъ 1832 года, для опредѣленія, по способу Ломбара, начальной скорости снарядовъ, бросаемыхъ изъ пушекъ и единороговъ разныхъ калибровъ при различныхъ зарядахъ.

Изъ 12-ти-фунтовой пушки, установленной совершенно горизонтально, выстрѣленное ядро зарядомъ въ 4 фунта пороха пробило планку, поставленную въ 28 футахъ и 2-хъ дюймахъ разстоянія отъ отверстія орудія, въ точкѣ g возвышенной на 4 дюймъ и 6 линій надъ горизонтальною линіею mi , и упало потомъ на землю въ разстояніи отъ орудія на 142 саж. 3 фута и ниже горизонтальной линіи mi на 4 фут. 6,875 дюйма.

Въ слѣдствіе данныхъ сихъ величинъ будемъ имѣть для второй формулы предъидущаго параграфа; $x=142$ саж + 3 фута = 997 фут.; $y=4$ фут. + 6,875 дюйма = 4,573 фут.; $mi=28$ фут. + 2 дюйма = 338 дюймовъ; $gi=1,6$ дюйм.

$tg\theta = \frac{1,6}{338} = 0,0047337$, $Ltg\theta = 7,6752007$, уголъ
вылета $\theta = 16'16''$; $x tg\theta = 4,7105$ футъ; $x tg\theta -$
 $y = 9,2925$ фут.

Потомъ

$$Lm = L\left(\frac{9D}{10kD'}\right) = \overline{4,5975928} \quad (\S 55 \text{ табл. })$$

$$Lx = \underline{\underline{2,9986952}}$$

$$L(mx) = \overline{1,5962880}; \quad mx = 0,39472$$

$$LLe = \underline{\underline{1,6377843}}$$

$$L(mxLe) = \overline{1,2340723}; \quad mxLe = 0,1714243$$

$$e^{mx} = 1,48397.$$

$$e^{mx} - mx - 1 = z = 0,08925$$

$$Lz = \overline{2,9506082}$$

$$Lg = 1,5080447$$

$$-L(xtg\theta - y) = \underline{\underline{-0,9681326}}$$

$$\overline{1,4905203}; \quad Lm = \overline{4,5975928}$$

$$\left. \begin{aligned} L\sqrt{\frac{g^2}{x tg\theta - y}} &= \overline{1,7452601} \\ -Lm \cos \theta &= \underline{\underline{-4,5975879}} \end{aligned} \right\}; \quad \begin{aligned} L \cos \theta &= \overline{9,9999951} \\ &\underline{\underline{4,5975879}} \\ La &= \underline{\underline{3,1476722}} \end{aligned}$$

отсюда начальная скорость $a = 1405$ футъ.

§ 131. Здѣсь прилагаются таблицы исчислен-
ныхъ начальныхъ скоростей (во время сказан-
ныхъ занятій въ Красномъ селѣ), изъ двухъ
выстрѣловъ каждымъ зарядомъ произведенныхъ,

для 12-ти фунтовой пушки, для $\frac{1}{2}$ пудоваго единорога и для 18-ти фунтовой пушки. Для орудій другихъ калибровъ опыты не были сдѣланы. Полезно было бы для практической Артиллеріи и для теоріи сей науки произвести сего рода опыты въ значительномъ числѣ для каждаго орудія, чтобы изъ многихъ частныхъ результатовъ можно было извлечь ближайшій къ истинному.

Исчисленные начальные скорости.					
Для 12 фунтовой пушки.		Для $\frac{1}{2}$ пудов. единорога.		Для 18 фунт. пушки.	
Зарядъ	скорость	Зарядъ	скорость	Зарядъ	скорость
32 зол.	380 фут.	32 зол.	300	54 зол.	472
64 —	619 —	64 —	526	1 фун.	727
1 фун.	879 —	1 фун.	560	2 —	961
$1\frac{1}{2}$ —	1034 —	$1\frac{1}{3}$ —	619	3 —	1143
2 —	1170 —	2 —	961	4 —	1223
3 —	1247 —	$2\frac{1}{2}$ —	1010	5 —	1358
4 —	1430 —	3 —	1237	6 —	1412
		4 —	1386		

§ 132. Трение воздуха о поверхность снаряда получившаго, при вылетѣ своемъ изъ канала орудія, быстрое вращательное движеніе, можетъ сдѣлать невѣрнымъ опредѣленіе начальной скорости изъ дальности полета снарядовъ, даже

тогда, когда извѣстенъ намъ истинный уголъ вылета, и когда снарядъ будетъ сферическій и однородный, или центръ его тяжести совпадаетъ съ центромъ величины. Чтобы это видѣть, пусть будетъ G (фиг. 21) центръ тяжести и величины тѣла совершенно сферическаго и однороднаго; AGB діаметръ касательный къ кривой линіи полета. Предположимъ для большей простоты, что ось вращенія, которая должна пройти чрезъ точку G , перпендикулярна къ сему діаметру. Пусть будетъ $ADBE$ сѣченіе тѣла перпендикулярное къ сей оси и DGE діаметръ онаго перпендикулярный къ AGB . Примемъ теперь, что точка G движется отъ A къ B или въ сторону показанною стрѣлкою S , и что вращеніе происходитъ въ сторону показанною стрѣлками въ A, D, B, E . Сіе вращательное движеніе сопровождается будетъ треніемъ воздуха о каждый элементъ поверхности; при томъ поелику упругая жидкость получаетъ, во кругъ движущагося тѣла, различную плотность и большую на передней поверхности нежели на задней, по сему тренію, въ разныхъ точкахъ каждаго сѣченія параллельнаго $ADBE$, будетъ различное и больше со стороны точки

В, нежели А. Слѣдовательно, если всѣ силы происходящія отъ сего тренія перенесемъ, параллельно самимъ себѣ, въ точку G, получимъ по разложеніи оныхъ по направленію GD діаметра DGE, слагаемую силу. Назовемъ эту силу чрезъ F, всѣ тѣла чрезъ P, сопротивленіе средины перенесенное въ точку G и направленное по линіи GA, діаметра AGB, чрезъ R. Равно дѣйствующая трехъ силъ F, P, R, будетъ движущею силою точки G, коей ускорительная сила найдется, раздѣля сію равно дѣйствующую на массу тѣла. Изслѣдуемъ дѣйствіе трехъ этихъ силъ на точку, при различномъ положеніи оси вращенія въ отношеніи къ горизонту.

Если примемъ, что ось вращенія вертикальная и слѣдовательно заключается въ плоскости двухъ силъ P и R, въ такомъ случаѣ сила F направлена будетъ перпендикулярно къ сей плоскости, принудитъ точку G оставить эту вертикальную плоскость, и описать двояко-кривую линію. Напротивъ того, если примемъ, что ось вращенія есть горизонтальная, сила F направлена будетъ къ вертикальной плоскости силъ P и R, сливающейся съ плоскостію сѣче-

нія $ADBE$; точка G не выйдет уже изъ сей плоскости и кривая, которую она пробѣжитъ, будетъ плоская.

§ 133. Въ последнемъ случаѣ видно, что составляющая вертикальная сила F увеличить или уменьшить вѣсъ P , смотря потому будетъ ли стрѣлка A направлена внизъ или вверхъ. При горизонтальномъ направленіи AB сила F будетъ вертикальная и увеличиваніе или уменьшеніе вѣса наибольшее. И такъ предположивъ, что выстрѣлъ произведенъ горизонтальный и что ядро получило вращеніе около горизонтальной оси перпендикулярной къ направленію выстрѣла, треніе воздуха о поверхность ядра увеличить его вѣсъ и уменьшить дальность паденія, когда передняя часть сего тѣла будетъ обращаться снизу вверхъ; напротивъ того треніе уменьшить вѣсъ и увеличить дальность паденія, когда передняя часть обращаться будетъ съ верху въ низъ. Во второмъ семъ случаѣ, часть кривой линіи полета иногда можетъ сдѣлаться выпуклою къ поверхности земли. Для сего нужно только, чтобы вращеніе было достаточно быстрое, при коемъ бы сила F сдѣлалась бы больше вѣса P ; но тогда треніе,

постепенно уменьшая скорость вращенія, наконецъ перемѣнивъ ее въ такую, при коей сила F будетъ менѣе P , и кривая линія полета сдѣлается обыкновенною вогнутою къ землѣ.

Сии разсужденія показываютъ, что независимо отъ недостатка сферичности и однородности ядра, треніе воздуха о поверхность его, послѣдовавшее отъ вращательнаго движенія полученнаго ядромъ при вылетѣ, не только можетъ уклонить центръ ядра отъ вертикальной плоскости бросанія, но измѣнить дальность паденія. Впрочемъ должно замѣтить, что ни одно изъ сихъ дѣйствій имѣть мѣста не можетъ, когда ядро обращается около діаметра AB , по направленію котораго оно движется. Ибо тогда треніе для двухъ противоположныхъ элементовъ каждаго сѣченія поверхности, перпендикулярнаго къ оси вращенія, будетъ одинаково и противоположно; слѣдовательно всѣ силы происходящія отъ тренія, будучи перенесены въ центръ тяжести, попарно въ немъ уничтожатся и не произведутъ никакой перемѣны въ движеніи сей точки.

3) *Опредѣленіе начальной скорости по способу Маттея.*

§ 134. Машина, придуманная Маттеемъ для опредѣленія начальной скорости ружейныхъ пуль и ядеръ, составляется изъ большаго горизонтальнаго круга, служащаго основаніемъ цилиндру, сдѣланному изъ картонной бумаги, и постоянно удерживающему вертикальное положеніе. Помощію особеннаго механизма, сему цилиндру сообщаютъ единообразное вращательное движеніе около его оси, и въ то же время стрѣляютъ въ него пулею или ядромъ въ горизонтальномъ направленіи, которое бы проходило чрезъ сію ось. По причинѣ вращенія цилиндра, пуля или ядро пробиваетъ его не въ точкахъ А и В (Фиг. 22) діаметра, но въ точкахъ А и D хорды; ибо въ то время какъ пуля пробѣгаетъ діаметръ АВ и достигаетъ противоположной точки В, иная точка D цилиндра, обращающагося отъ В къ С, приходитъ въ В.

Положимъ, что цилиндръ сдѣлалъ n оборотовъ во время t' секундъ, или одинъ оборотъ во время $t = \frac{t'}{n}$ секундъ, и пусть діаметръ АВ $= a$,

хорда $BD=b$; сіи величини извѣстны будутъ изъ самаго опыта. Въ треугольникѣ ABD прямоугольномъ при точкѣ D , имѣемъ

$$\sin A = \frac{b}{a},$$

отсюда $2A$ или уголъ $BoD = 2 \cdot \text{Arc} \left(\sin = \frac{b}{a} \right)$, и длина дуги

$$BD = a \cdot \text{Arc} \left(\sin = \frac{b}{a} \right).$$

Но по причинѣ единообразности вращенія, окружность $ABCD = \pi a$ должна относиться къ дугѣ BD , какъ время t цѣлаго оборота относится ко времени части BD сего оборота, то по сей пропорціи найдется время, въ которое пуля пробѣгаетъ пространство AB съ начальною скоростію v , равнымъ $\frac{t}{\pi} \text{Arc} \left(\sin = \frac{b}{a} \right)$; умноживъ сіе время на скорость v , произведение равно будетъ пространству AB или a ; слѣдовательно начальная скорость пули или ядра будетъ

$$v = \frac{\pi a}{t \cdot \text{Arc} \left(\sin = \frac{b}{a} \right)}, \text{ или } v = \frac{\pi a \pi}{t' \cdot \text{Arc} \left(\sin = \frac{b}{a} \right)}.$$

Усовершенствованная машина Гроберта для

измѣренія начальной скорости, въ случаѣ выстрѣловъ наклонныхъ къ горизонту, состоитъ изъ двухъ бумажныхъ или тафтяныхъ параллельныхъ круговъ, принимающихъ произвольное положеніе въ отношеніи къ горизонту. Подробности касающіяся до устройства и употребленія сей машины, можно почерпнуть изъ сочиненія, изданнаго самимъ изобрѣтателемъ.

4) *Приблизительный способъ опредѣлять начальную скорость бомбъ изъ замѣченныхъ, по выстрѣлѣ, горизонтальной дальности и времени ихъ полета.*

§ 135. Начальная скорость бомбы, соотвѣтствующая данному заряду, могла бы быть опредѣлена по способу предложенному въ § 63, бросая ее вверхъ вертикально и замѣчая время восхожденія и возвращенія ея назадъ. Но такое бросаніе сопряжено съ немаловажными трудностями и даже опасностями. Впрочемъ какъ начальная скорость бомбъ, при всѣхъ иныхъ равныхъ обстоятельствахъ, получается различною и познаніе оной очень рѣдко можетъ приносить пользу въ практикѣ, то достаточно будетъ слѣдующаго приблизительнаго

способа для опредѣленія сей скорости. Прежде наблюдаемъ время полета бомбы, брошенной извѣстнымъ зарядомъ, и вымѣриваемъ горизонтальную дальность сего полета. Потомъ постав-
ляемъ, на мѣсто криволинейнаго движенія бом-
бы, два прямолинейныя движенія ея проэкцій
горизонтальной и вертикальной. Въ слѣдствіе
перваго относительнаго движенія, при коемъ
дѣйствіе тяжести въ соображеніе не берется, но
одно только сопротивленіе воздуха, находимъ,
по извѣстному пространству x , описываемому
проэкціею бомбы во время t , начальную ея
скорость въ горизонтальномъ ея направленіи
почти равную (§ 53)

$$\frac{e^{cx} - 1}{ct};$$

потомъ начальную скорость по направленію
бросанія или при углѣ возвышенія θ , подъ
коимъ произведенъ выстрѣлъ, равную

$$\frac{e^{cx} - 1}{ct \cos \theta}.$$

Въ слѣдствіе же вертикальнаго относительнаго
движенія бомбы въ верхъ и въ низъ, которое
совершается во время t , зависимо отъ совокуп-
наго дѣйствія силы тяжести и сопротивленія

воздуха, сначала ищемъ по правиламъ § 63, изъ уравненія

$$t\sqrt{gc} = \alpha + \frac{1}{Le} \cdot \text{Ltg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha),$$

уголъ α ; посредствомъ котораго найдется начальная скорость бомбы въ вертикальномъ направленіи $= \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \text{tg}\alpha$, потомъ начальная скорость по направленію бросанія, равная

$$\sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \frac{\text{tg}\alpha}{\sin\theta}.$$

Если два вывода $\frac{e^x - 1}{ct \cdot \cos\theta}$ и $\sqrt{\frac{g}{c}} \cdot \frac{\text{tg}\alpha}{\sin\theta}$ найдутся немного различными, то должно взять средній между ими. Симъ образомъ составитъ таблица начальныхъ скоростей бомбъ, соответственно разнымъ зарядамъ.

5) О балистическомъ маятникѣ.

§ 136. Робинсъ изобрѣлъ балистическій маятникъ, и помощію его первый показалъ средство въ точности опредѣлять, начальную скорость снарядовъ, законы сопротивленія воздуха при быстромъ движеніи тѣлъ, и многія другія обстоятельства до стрѣльбы относящіяся. Но какъ онъ при опытахъ своихъ, со-

ставившихъ новую эпоху въ Артиллеріи, употреблялъ не ядра, а ружейныя пули, то въ послѣдствіи Лондонское Королевское общество поручило Доктору Гютону повторить сіи опыты и произвести оныя со стволами большаго калибра, нежели каковы были въ употребленіи у самаго изобрѣтателя. Результаты первыхъ опытовъ, сдѣланныхъ Гютономъ въ Вулвичѣ 1775 года, помѣщены въ транзакціяхъ Философическихъ за 1778 годъ № III. Результаты другихъ опытовъ, сдѣланныхъ имъ въ продолженіи годовъ 1783, 1784, 1785 и 1786, переведены и изданы на Французскомъ языкѣ, съ примѣчаніями, Артиллеристомъ Видлантроа (Nouvelles expériences d'Artillerie par Huton. Paris 1802). Сей ученый переводчикъ замѣтилъ совершенное согласіе между выводами найденными Гютономъ и выводами полученными, въ меньшемъ видѣ, изъ опытовъ Робинса и Дарси; изъ чего онъ заключилъ, что безъ всякаго сомнѣнія, такого же согласія должно ожидать и отъ опытовъ, произведенныхъ въ самомъ большемъ видѣ; на самомъ дѣлѣ, это подтверждено было новыми опытами, сдѣланными Гютономъ и Грегори; первымъ въ продолже-

ніи годовъ 1787, 88, 89 и 91, а вторымъ 1817 года.

§ 137. Главная цѣль опытовъ съ балистическимъ маятникомъ, клонилась, къ разрѣшенію слѣдующихъ случаевъ.

1) Сравнить скорости, сообщаемыя ядрамъ одинакими зарядами, въ орудіяхъ одинакаго вѣса и одинакаго калибра, по различной длины.

2) Сравнить скорости, сообщаемыя ядрамъ разными зарядами, въ орудіяхъ одинакаго вѣса и одинакой длины.

3) Определить наибольшую скорость, которая происходитъ, при какой либо постоянной длинѣ канала, отъ увеличиванія заряда до такой степени, каковую крѣпость стѣнъ орудія дозволяетъ.

4) Определить дѣйствіе производимое перемѣннымъ вѣсомъ орудія на скорость ядра, предполагая при семъ, что всѣ прочія обстоятельства остаются тѣ же.

5) Определить углубленіе ядеръ въ дерево и другіе предметы.

6) Сравнить дальности паденія и времена полета снарядовъ съ начальною ихъ скоростію, и отсюда вывести дѣйствіе сопротивленія воздуха и проч.

§ 138. Большая часть предъидущихъ предложеній зависитъ отъ познанія той скорости, съ которою ядро выбрасывается изъ отверстія орудія. Сія скорость бываетъ чрезмѣрно велика; ибо доходитъ до 1000, 2000 футовъ въ секунду.

Для опредѣленія оной, постараемся сперва привести ее къ другой меньшей, которая бы могла быть удобно вымѣрена. Къ сему достигнемъ, предположивъ, что ядро, брошенное съ большею скоростью, ударяетъ въ большой кусокъ дерева, отъ котораго оно не отскакиваетъ, но вдавливаясь въ оный, и вмѣстѣ съ симъ кускомъ продолжаетъ движеніе; тогда само собою явствуется, что давъ ударяемому тѣлу довольно значительную массу, можно будетъ начальную скорость ядра привести къ другой меньшей удобоизмѣряемой. Извѣстно, что въ семъ случаѣ общая скорость, съ которою движется ядро вмѣстѣ съ кускомъ дерева, относится къ скорости ядра прежде удара, какъ масса ядра относится къ совокупной массѣ ядра и куска дерева. Симъ образомъ, скорость ядра въ 1000 футовъ и болѣе, можно будетъ привести къ другой въ два или три фута

только вымѣривъ сію послѣднюю, и умноживъ ее на отношеніе соединенной массы ядра и куска дерева къ массѣ ядра, произведеніе покажетъ скорость въ мгновеніе самаго удара.

§ 139. Робинсъ придумалъ простой и остроумный способъ, для измѣренія помянутыхъ уменьшенныхъ скоростей. Въмѣсто того, чтобы оставить ударяемую массу, свободно движущеюся по направленію удара ядра, можно оную, подобно маятнику стѣнныхъ часовъ, прикрѣпить винтами къ желѣзной полосѣ (фиг. 23), привѣшенной къ горизонтальной оси вращенія. Тогда ядро, ударивъ въ предположенный нами маятникъ, приведетъ его въ движеніе, въ которомъ величина перваго размаха зависитъ будетъ отъ силы удара произведеннаго ядромъ; вымѣривъ сей размахъ, не трудно будетъ вычислить скорость каждой точки маятника. Въ самомъ дѣлѣ; на основаніи Динамики, когда тяжелое тѣло, въ слѣдствіе удара ему сообщеннаго, поднимается на данную высоту по дугѣ какой нибудь кривой, то скорость удара равна будетъ той, которую пріобрѣтаетъ тяжелое тѣло свободно падая съ сей высоты. Теперь, длина дуги, описанной центромъ качанія маят-

ника, также радіусъ сей дуги, извѣстны; слѣдов. найдется вертикальная высота, на которую поднимается центръ качанія. Зная сію высоту, получимъ, по извѣстнымъ законамъ движенія тяжелыхъ тѣлъ, ту скорость, которую ударъ сообщаетъ центру качанія. Посредствомъ же сей скорости, будемъ имѣть количество движенія всей массы послѣ удара, слѣдовательно и скорость ядра прежде удара, по извѣстному правилу моментовъ силъ. Изъ сего видно, что опредѣленіе скорости ядра, приводится къ измѣренію величины дуги, описываемой маятникомъ, получившимъ ударъ.

§ 140. Для вычисленій гораздо полезнѣе имѣть, на мѣсто дуги качанія, величину ея хорды. Сію хорду можно измѣрять различнымъ образомъ. Робинсъ, въ своихъ опытахъ, употреблялъ для этого ленту, коготорой одинъ конецъ прикрѣплялся къ нижней оконечности маятника, а другой пропускался чрезъ узенькую скважину, составляемую двумя стальными полосками подъ маятникомъ расположенными. Та часть ленты, которая, во время полуразмаха, проходила съ легкимъ треніемъ чрезъ сію скважину, опредѣляла хорду дуги качанія.

Но этотъ способъ оказался не удобнымъ, и за вѣрность онаго нельзя было ручаться; по-сему Гютопъ придумалъ надежнѣйшее средство, опредѣлять хорду дуги перваго полуразмаха, замѣчая слѣдъ, который напечатлѣвался желѣзнымъ остроконечіемъ РВ, придѣланнымъ къ нижней точкѣ маятника, на мягкомъ составѣ наполнявшимъ деревянную кругообразную выемку АВ, коей центръ находился по срединѣ оси привѣса, и верхняя поверхность боковъ оной заключала масштабъ хорды.

О центрѣ тяжести и центрѣ качанія.

§ 141. При вычисленіи скорости ядра, должно знать положеніе, какъ центра тяжести такъ, и центра качанія балистическаго маятника. Способъ, коимъ ихъ опредѣляютъ, есть слѣдующій. Центръ тяжести находятъ двумя образами: 1-й кладутъ на землю треугольную желѣзную призму АВ (фиг. 24), обращенную однимъ своимъ ребромъ вверхъ; на сіе ребро накладываютъ маятникъ CD, и приводятъ его въ горизонтальное равновѣсное положеніе; послѣ того, измѣряютъ разстояніе CE, отъ середины оси С до точки Е, соотвѣтствующей ребру призмы; оно и будетъ разстояніе центра тя-

тяжести до середины вращенія; 2-й кладутъ концы оси вращенія EF (фиг. 25) на подставки, и прикрѣпляютъ къ нижней точкѣ L маятника конецъ веревки, которую потомъ обводятъ около блока D, расположеннаго вверху, и на другомъ ея концѣ привѣшиваютъ тяжесть, содержащую маятникъ въ горизонтальномъ равновѣсномъ положеніи. Имѣя вѣсъ маятника, и длину его cL , отъ оси до точки прикрѣпленія веревки, найдется положеніе центра тяжести G, посплавъ пропорцію: вѣсъ маятника равный P, относится къ вѣсу Q, повѣшенному на концѣ веревки, какъ разстояніе cL , отъ оси вращенія до точки прикрѣпленія веревки, относится къ разстоянію отъ той же оси до центра тяжести; которое будетъ

$$cg = \frac{Q \times cL}{P}.$$

Оба способа должны дать то же положеніе центра тяжести; посему, если найденные результаты будутъ согласны между собою, то тѣмъ болѣе можно быть увѣрену въ справедливости ихъ.

§ 142. Разстояніе центра качанія s до оси привѣса EF, составляетъ длину простаго маят-

ника, совершающаго свои размахи въ одно время съ балистическимъ маятникомъ. Но мы найдемъ сію длину, когда сравнимъ ее съ известною длиною секунднаго маятника, и сочтемъ число размаховъ, дѣлаемыхъ балистическимъ маятникомъ по малымъ дугамъ въ данное время; потому, что длины простыхъ маятниковъ, находятся въ обратномъ отношеніи квадратовъ числа размаховъ совершаемыхъ въ одно и то же время. И такъ приведемъ балистическій маятникъ въ движеніе, сообщивъ ему небольшія качанія, кои почти одновременны; помощію секунднаго или полусекунднаго отвѣса, или помощію часовъ, которые вѣрно показываютъ секунды, минуты, сочтемъ число качаній, сдѣланныхъ балистическимъ маятникомъ въ продолженіе 1, 2, 3, 4, 10 минутъ и болѣе: означимъ чрезъ n найденное число качаній во время s секундъ, и чрезъ l длину секунднаго маятника. Поелику балистическій маятникъ почти можно за простой, коего длина $k=sc$, то будемъ имѣть

$$n^2 : s^2 = l : k,$$

отсюда $k = \frac{s^2 l}{n^2}$ — разстоянію отъ оси до центра качанія.

Если примемъ $s=60$ секундамъ или одной минутъ, тогда n будетъ означать число качаній, совершаемыхъ въ одну минуту; сіе число найдется, раздѣливъ число всѣхъ качаній замѣченныхъ, на число минутъ употребленныхъ на ихъ совершеніе; и будемъ имѣть

$$k = \frac{(60)^2 \cdot l}{n^2}$$

равно разстоянію GC центра качанія до оси привѣса. Длина секунднаго маятника въ широтѣ Лондона также и Вульвича, равна $39\frac{1}{8}$ дюйма; по сему будетъ относительно сей широты

$$\begin{aligned} k &= \frac{3600 \cdot 39\frac{1}{8}}{n^2} = \frac{140850}{n^2} \text{ дюймамъ} \\ &= \frac{11737,5}{n^2} \text{ футамъ;} \end{aligned}$$

въ широтѣ же С.-Петербурга, длина секунднаго маятника $= 39,1684$ дюйма $= 39\frac{1}{6}$ дюйма (*).

(*) На разныхъ широтахъ земнаго шара, мѣра тяжести, слѣдственно и длина секунднаго маятника, бываютъ различны. Если l' означаетъ длину секунднаго маятника въ широтѣ подѣ 45° , l длину такого же маятника въ друготъ какомъ либо мѣстѣ, коего широта равна ψ , то величина l найдется по формулѣ (Fraité de Mécanique par Poisson, 2-e édit.)

$$l = l' (1 - 0,002588 \cdot \cos 2\psi),$$

въ которой $l' = 0,993512$ метра $= 3,259613$ фут. На примѣръ,

Вычисленіе скорости ядра.

§ 143. Выведемъ формулу для вычисленія скорости ядра изъ разсматриванія качаній балистическаго маятника.

Пусть будетъ: вѣсъ ядра $=b$; вѣсъ балистическаго маятника $=p$; разстояніе центра тяжести сего рода маятника до оси привѣса, $cg=l$ (фиг. 26); разстояніе центра качанія онаго до той же оси, $cg=k$; разстояніе точки v , въ коей происходитъ ударъ ядра, до той же оси, $cv=i$, полагая при семъ, что ядро ударяетъ въ маятникъ въ горизонтальномъ направленіи; хорда дуги описанной остроконечіемъ гвоздя, $Ll=c$; радіусъ сей дуги, или разстояніе отъ оси до

въ широтѣ С.-Петербурга, равной $59^{\circ} 56' 31'' = \psi$, будемъ имѣть длину секунднаго маятника

$$\begin{aligned} l &= 0,993512 \overset{м}{(1 - 0,002588 \cdot \cos(119^{\circ} 53' 2''))} \\ &= 0,993512 \overset{м}{\left\{ 1 + 0,002588 \cdot \cos(60^{\circ} 6' 58'') \right\}} \\ &= 0,993512 \overset{м}{\times 1,0012895}. \end{aligned}$$

то есть,

$$l = 0,994793 \text{ метра} = 3,263816 \text{ фута} = 39,1658 \text{ дюйма} = 39 \frac{1}{8} \text{ дюйма}.$$

Также мы найдемъ дѣйствіе тяжести g на данной широтѣ, по формулѣ $g = g' (1 - 0,002588 \cos^2 \psi)$, въ которой $g' = 9,80557$ метра $= 32,17109$ фута $=$ дѣйствию тяжести подъ 45° широты. Здѣсь въ С.-Петербургѣ оно будетъ

$$g = 9,81821 \text{ метра} = 32,21257 \text{ фута}.$$

остроконечія, $cL = r$; скорость, съ которою ядро ударяетъ въ маятникъ, и которая предполагается общемою всѣмъ частицамъ онаго, равна v ; начальная скорость, отъ коей зависитъ величина полуразмаха маятника, равна ω ; m , m' , m'' , и проч. массы безконечно малыхъ частицъ, составляющихъ маятникъ; ρ , ρ' , ρ'' , и проч. соотвѣтственные разстоянія сихъ частицъ до оси вращенія; μ , μ' , μ'' , и проч. массы безконечно малыхъ частицъ ядра; λ , λ' , λ'' , и проч. соотвѣтственные разстоянія направленій скоростей ихъ до оси привѣса, прежде удара; ε , ε' , ε'' , и проч. соотвѣтственные разстоянія сихъ же частицъ до оси привѣса, послѣ удара; наконецъ дѣйствіе тяжести $= g$.

Предположивъ, что ударъ ядра сообщенъ маятнику мгновенно, тогда, по началу Динамики, предложенному Даламбертомъ (Механ. Франкера, чл. 229), будетъ слѣдовать, что впечатлѣнныя количества движенія и тѣ, кои соотвѣтствуютъ дѣйствительнымъ скоростямъ въ противную сторону взятымъ, должны составить, въ сіе мгновеніе, равновѣсіе около неподвижной оси вращенія; такъ что сумма моментовъ всѣхъ этихъ силъ, въ отношеніи ссей

оси, будетъ равна нулю, то есть (Механика Франкера. чл. 244),

$$\mu\lambda + \mu'\lambda' + \mu''\lambda'' + \dots - \mu\varepsilon^2\omega - \mu'\varepsilon'^2\omega - \mu''\varepsilon''^2\omega - \dots - mQ^2\omega - m'Q'^2\omega - m''Q''^2\omega - \dots = 0,$$

или

$$\int \mu\lambda - \omega \int \mu\varepsilon^2 - \omega \int mQ^2 = 0,$$

здѣсь $\int$, есть знакъ интеграла.

Но моментъ инерціи маятника, или $\int mQ^2 = \frac{pkl}{g}$

равенъ массѣ его, помноженной сряду на разстояніе центра качанія и на разстояніе центра тяжести до оси вращенія (Мех. Франкера, чл. 252); также моментъ инерціи ядра, или

$$\int \mu\varepsilon^2 = \frac{bki}{g},$$

означая чрезъ k' , разстояніе центра качанія ядра до оси вращенія; сверхъ то-

го, по Теоріи центра тяжести, имѣемъ $\int \mu\lambda = \frac{bi}{g}$;

то поставивъ сіи величины въ предъидущее уравненіе, получимъ

$$bvi - bik'\omega - pkl\omega = 0,$$

отсюда угловая скорость

$$\omega = \frac{bvi}{pkl + bki}.$$

§ 144. Послѣ удара, ядро присоединяется къ маятнику и перемѣняетъ положеніе его центра

качанія. А какъ разстояніе центра качанія. системы тѣлъ до оси вращенія, равно суммѣ моментовъ инерцій сихъ тѣлъ, дѣленной на сумму ихъ моментовъ, лишь бы только центръ тяжести каждаго тѣла находился въ той же вертикальной плоскости, проходящей чрезъ ось; то означивъ чрезъ z , разстояніе $си$ новаго центра качанія до оси вращенія, будемъ имѣть

$$z = \frac{pkl + bki}{pl + bi};$$

слѣдовательно скорость сего центра качанія будетъ

$$z\omega = \frac{bvi}{pl + bi}.$$

Теперь подобные треугольники CLl и CUu даютъ,

$$CL : CU = Ll : Uu$$

или

$$v : z = c : Uu = \frac{cz}{r}, \text{ равно хордѣ дуги,}$$

описанной новымъ центромъ качанія; сверхъ того, по свойству круга, имѣемъ

$$2CU : Uu = Uu : ZU$$

или

$$2z : \frac{cz}{r} = \frac{cz}{r} : ZU = \frac{c^2 z}{2r^2} = \text{обращенно-}$$

му синусу сей дуги, сдѣлавъ его равнымъ h ,

и поставивъ на мѣсто z выше найденную величину, получимъ

$$h = \frac{c^2}{2r^2} \left(\frac{pkl + bk'i}{pl + bi} \right).$$

Но скорость, съ которою центръ качанія u отходитъ отъ вертикальнаго своего положенія, и поднимается по дугѣ круга на высоту, равную обращенному синусу h сей дуги, равна той скорости, которую бы тяжелое тѣло приобрѣло, свободно падая съ этой высоты, то есть, равна $\sqrt{2gh}$; посему, другое выраженіе скорости новаго центра качанія будетъ

$$\sqrt{2gh} = \frac{c}{r} \sqrt{g \left(\frac{pkl + bk'i}{pl + bi} \right)}.$$

Сравнивъ оное съ прежнимъ, составитъ уравненіе

$$\frac{biv}{pl + bi} = \frac{c\sqrt{g}}{r} \sqrt{\frac{pkl + bk'i}{pl + bi}},$$

изъ коего найдется

$$v = \frac{c\sqrt{g}}{bir} \sqrt{(pkl + bk'i)(pl + bi)} \dots (1),$$

равно скорости, съ которою ядро ударяетъ въ маятникъ.

§ 145. Вмѣсто величины k' , заключающейся въ семъ выраженіи, можно безъ ощутительной

погрѣшности, поставить i , ибо центръ качанія ядра, коего измѣреніе очень мало, почти совпадаетъ съ центромъ тяжести. Но Гютовъ ввелъ въ сію формулу другія сокращенія, кои, не лишая оную требуемой точности, содѣлываютъ ее удобною для практики.

Для сего, развернувъ скобки подкоренной величины и разложивъ корень по степенямъ отъ b , будемъ имѣть сначала,

$$\begin{aligned}\sqrt{(plk + bk'i)(pl + bi)} &= \sqrt{p^2 l^2 k + plbki + plbki + b^2 k' i^2} \\ &= pl\sqrt{k} \sqrt{1 + \frac{bi(k+k')}{plk} + \frac{b^2 k' i^2}{p^2 l^2 k}};\end{aligned}$$

а какъ величина b , въ сравненіи съ p , почти ничтожна, при семъ величины l , k немного чѣмъ различаются отъ i и k' , то дробь $\frac{b^2 k' i^2}{p^2 l^2 k}$ крайне малую можно отбросить, и удержать выраженіе

$$pl\sqrt{k} \sqrt{1 + \frac{bi(k+k')}{plk}},$$

которое по формулѣ Ньютона Биноміи, будучи разложено въ строку, даетъ

$$pl\sqrt{k} \sqrt{1 + \frac{bi(k+k')}{plk}} = pl\sqrt{k} \left\{ 1 + \frac{bi(k+k')}{2plk} - \frac{1}{8} \frac{b^2 i^2 (k+k')^2}{p^2 l^2 k^2} \dots \right\};$$

Но здѣсь, по той же причинѣ, членъ $\frac{b^2 i^2 (k+k')^2}{8p^2 l^2 k^2}$

и слѣдующіе за нимъ, можно отбросить и взять

$$pl\sqrt{k}\left\{1 + \frac{bi(k+k')}{2plk}\right\} = \left\{pl + \frac{bi(k+k')}{2k}\right\} \sqrt{k},$$

что въ обыкновенныхъ практическихъ случаяхъ, подходитъ къ истинной величинѣ выраженія $\sqrt{(plk+bi^2)(pl+bi)}$ ближе чѣмъ на $\frac{1}{1000000}$ (*).

Но при опытахъ Гютона величина $\frac{bi(k+k')}{2k}$ обыкновенно составляла $\frac{1}{500}$ или $\frac{1}{800}$ часть произведенія pl ; при семъ разность, между

(*) Когда аналитическому выраженію, назначаемому для практическаго употребленія, предполагается дать видъ простѣйшій, чрезъ отбрасываніе у него членовъ или чрезъ посредство ипаго какого либо приѣма, измѣняющаго истинную величину онаго, то должно всегда имѣть въ виду, сколь значущи бываютъ пренебрегаемыя количества и на сколько сокращенное выраженіе отдалилось отъ истиннаго. Въ настоящемъ случаѣ, чтобы судить о степени приближенія, мы возьмемъ данныя изъ опытовъ Гютона, который нашелъ, по извѣстнымъ величинамъ b, p, i, k, l, k' , что количество $\frac{bi(k+k')}{2k}$ обыкновенно составляло $\frac{5}{500}$ или $\frac{1}{600}$ или $\frac{1}{800}$ часть количества pl , и что bi различалось отъ $\frac{bi(k+k')}{2k}$ не болѣе какъ на $\frac{1}{100}$ послѣдняго, или на $\frac{1}{50000}$ часть количества pl . По сему сдѣлавъ для перваго самаго невыгоднаго случая

$$\frac{bi(k+k')}{2k} = \frac{pl}{500}.$$

$\frac{bi(k+k')}{2k}$ и bi , не превосходила $\frac{1}{50000}$ часть того же произведенія pl ; такъ что, величина $pl+bi$ различалась отъ $pl+\frac{bi(k+k')}{2k}$ количествомъ не превышающимъ $\frac{pl}{50000}$ (*).

По сему, будемъ имѣть почти

$$v = \frac{c(pl+bi)}{bik} \sqrt{gk} :$$

и

$$\frac{bi(k+k')}{2k} - bi = \frac{pl}{50000}$$

найдется

$$\frac{bi(k+k')}{2plk} = \frac{1}{500}, \text{ и } \frac{bi}{pl} = \frac{99}{50000};$$

слѣдовательно количества $\frac{b^2 i^2 k'}{pl \cdot k}$ или $\frac{b^2 i^2}{pl^2} \cdot \frac{k'}{k}$, $\frac{1}{8} \frac{b^2 i^2 (k+k')^2}{pl^2 k^2}$,

и проч. сдѣлаются такъ малыми, что безъ малѣйшаго опасенія можно ихъ откинуть.

(*) Въ самомъ дѣлѣ, послѣду

$$\frac{bi(k+k')}{2k} = \frac{pl}{500}; \quad \frac{bi(k+k')}{2k} - bi = \frac{pl}{50000};$$

отсюда получимъ

$$bi = \frac{bi(k+k')}{2k} - \frac{pl}{50000} = \frac{pl}{500} - \frac{pl}{50000} = \frac{99 \cdot pl}{50000};$$

$$pl + \frac{bi(k+k')}{2k} = \frac{501 \cdot pl}{500} = \frac{50100 pl}{50000}$$

$$pl + bi = \frac{50099 \cdot pl}{50000};$$

и разность между послѣдними величинами равную $\frac{pl}{50000}$.

теперь поставивъ l , на мѣсто i , въ последнемъ членѣ выраженія $pl+bi$, получимъ формулу

$$v = \frac{cl(p+b)}{bir} \cdot \sqrt{gk} \dots (2),$$

годную къ употребленію во всѣхъ случаяхъ, и различающуюся отъ истинной лишь только на $\frac{1}{5000}$ долю; такъ что, при самыхъ наибольшихъ скоростяхъ, погрѣшность не болѣе будетъ одного полуфута. Замѣтимъ, что величины s , l , i , r могутъ быть выражены въ такихъ мѣрахъ, какъ заблагоразсудится, въ футахъ, или дюймахъ, и проч. но величина k должна быть выражена въ футахъ, поелику формула приспособлена къ футамъ (*).

(*) Въ уравненіи $v = \sqrt{g} \cdot \frac{lc(p+b)}{bir} \sqrt{k}$, равно какъ и во вся-

комъ другомъ, всѣ количества, одинакаго рода, должны быть отнесены къ общей ихъ мѣрѣ, следовательно выражая количество $\sqrt{g}$ въ футахъ, какъ-то обыкновенно и дѣлается, всѣ слѣдующія l , s , i , r и k должны также выражены быть въ футахъ. Однако давъ формулѣ видъ

$$v = \frac{(p+b)}{b} \cdot \frac{lc}{ir} \sqrt{gk},$$

ясно видно, что, безъ различія, тоже самое произойдетъ, въ какихъ бы мѣрахъ изображены ни были величины l , s , i , r , могущія почтеться за отвлеченныя числа, лишь-бы только всѣмъ имъ назначена была одинаковая мѣра, или футы, или

§ 146. Поелику въ продолженіе производи-
мыхъ опытовъ, съ прибавленіемъ ядра къ
маятнику, перемѣняются его вѣсъ и разстоянія
центра тяжести и центра качанія до оси при-
вѣса, то въ выраженіи (2) скорости надобно,
послѣ каждого выстрѣла, перемѣнить величи-
ны p , l и k . Для каждого слѣдующаго выстрѣ-
ла, надлежитъ величину p перемѣнить въ $p+b$;
то есть, прибавить къ оной величину b . Также
для каждого слѣдующаго выстрѣла, надлежитъ
величину l перемѣнить въ $\frac{pl+bi}{p+b} = l + \frac{b(i-l)}{p+b}$,
что почти $= l + \frac{(i-l)b}{p}$; то есть, прибавить къ
оной величину $\frac{(i-l)}{p} b$. Наконецъ, для каждого
новаго выстрѣла, надлежитъ величину k пере-

дѣймы, и проч., но величина k непремѣнно должна быть
выражена въ футахъ. Если сдѣлаемъ $\sqrt{k}=a$, такъ что фор-
мула обратится въ

$$v = \frac{(p+b)}{b} \cdot \frac{lsa \sqrt{g}}{ir},$$

тогда отъ воли всякаго зависить будетъ, чтобы выразить
одно которое иибудь изъ трехъ количествъ l , s и a , въ фу-
тахъ, а двѣ другія въ такихъ мѣрахъ, какія пазначаются
для i и r .

мѣнить въ $\frac{plk+bi^2}{pl+bi} = k + \frac{(i-k)bi}{pl+bi}$, что почти
 $= k + \frac{(i-k)b}{p}$; то есть, прибавить къ оной ве-
 личину $\frac{(i-k)b}{p}$. Симъ образомъ, три поправки,
 относительно величинъ p , l и k , производятся,
 прибавляя послѣ каждого выстрѣла.

b къ величинѣ p ,

$\frac{(i-l)}{p} b$ къ величинѣ l ,

$\frac{(i-k)}{p} b$ къ величинѣ k ;

замѣчая при семъ, что величина b очень мала
 въ сравненіи съ p .

§ 147. Мы нашли, въ § 142, разстояніе k
 центра качанія въ функціи числа n качаній
 маятника; а именно, $k = \left(\frac{60}{n}\right)^2 q$ фут, поста-
 вивъ сію величину, вмѣсто $\sqrt{k}$, въ уравненіи

$v = \frac{lc(p+b)}{bir} \sqrt{gk}$, оно сдѣлается

$$v = \frac{60 lc(p+b) \sqrt{gq}}{bir n} \dots\dots(3).$$

Помощію простой сей формулы удобно най-
 дется скорость ядра въ футахъ, выражая ко-

личества въ ней содержащіяся c , l , i , и r , или въ футахъ, или въ дюймахъ, или во всякой иной мѣрѣ, которая должна быть одна и та же для всѣхъ сихъ количествъ.

При семъ, вмѣсто поправки найденной въ предъидущемъ параграфѣ для величины k , нужно имѣть сообразную поправку для n . Изъ

уравненія $k = \frac{60 \cdot q^2}{n^2}$ фут. получаемъ

$$n = \frac{60 \sqrt{q}}{\sqrt{k}},$$

но величина k , при каждомъ слѣдующемъ выстрѣлѣ, обращается въ $k + \left(\frac{i-k}{pl+bi} \right) bi$; по сему величина n , соотвѣтственно обратится въ

$$\frac{60 \sqrt{q}}{\sqrt{k + \frac{(i-k)bi}{pl+bi}}},$$

и разность между двумя послѣдовательными ея состояніями, будетъ

$$\frac{60 \sqrt{q}}{\sqrt{k}} - \frac{60 \sqrt{q}}{\sqrt{k + \frac{(i-k)bi}{pl+bi}}} = \frac{60 \sqrt{q}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{60 \sqrt{q}}{\sqrt{k} \sqrt{1 + \frac{(i-k)bi}{(pl+bi)k}}}$$

или

$$n = \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{(i-k)bi}{(pl+bi)k}}}$$

Разложивъ корень изъ двучленнаго количества въ строку, равную

$$1 + \frac{(i-k)bi}{2(pl+bi)k} - \frac{(i-k)^2 b^2 i^2}{8(pl+bi)k^2} + \dots,$$

видно, что 3-й, 4-й и прочіе члены сего ряда, по своей малости, могутъ быть отброшены; и будемъ имѣть, вмѣсто предъидущей величины, почти равную ей

$$\begin{aligned} n &= \frac{n}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{i-k}{pl+bi} \right) \frac{bi}{k}} = \frac{nbi(i-k)}{2pkl + bi(i+k)} \\ &= \frac{nbi \left(i - \frac{6o^2 q}{n^2} \right)}{\frac{2 \cdot 6o^2 plq}{n^2} + bi \left(1 + \frac{6o^2 q}{n^2} \right)} \\ &= \frac{nbi (in^2 - 6o^2 q)}{2 \cdot 6o^2 plq + bi(in^2 + 6o^2 q)}, \text{ по поставле-} \end{aligned}$$

ніи, на мѣсто k , равной величины. Поправка сія, каждый разъ, должна вычитаться изъ предшествующей величины n . Въ самомъ дѣлѣ; съ удаленіемъ центра качанія отъ оси, число n качаній совершаемыхъ въ опредѣленное время,

уменьшается; но здѣсь k увеличивается количествомъ $\frac{(i-k)b_i}{pl+bi}$, следовательно n должно умень-

шиться количествомъ

$$60^2 \cdot q \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k + \left(\frac{i-k}{pl+bi} \right) bi}} \right\},$$

равнымъ почти

$$\frac{bin(in^2 - 60^2 \cdot q)}{2 \cdot 60^2 plq + bi(in^2 + 60^2 \cdot q)}.$$

Поправки, касающіяся до p и l остаются таковыми, какія показаны въ § 146, и обѣ суть придаточны.

§ 148. Теперь излѣдуемъ три или четыре обстоятельства, причиняющія, по видимому, нѣкоторую погрѣшность въ скорости вычисляемой по формулѣ (3): онѣ суть; 1) треніе концовъ оси вращенія о поверхность гнездъ, въ которыя онѣ вставляются; 2) сопротивленіе, противопологаемое воздухомъ движенію маятника; 3) время, употребляемое ядромъ для углубленія своего въ дерево; и 4) сопротивленіе, противопологаемое воздухомъ полету ядра, отъ орудія къ маятнику.

Касательно 1 ю, какъ-то, тренія концовъ оси

вращенія; замѣтимъ, что дѣйствіе онаго никогда не можетъ быть столь велико, чтобы могло имѣть надлежащую цѣну въ производимыхъ опытахъ. Въ самомъ дѣлѣ: часть тренія, которое, при всемъ тѣченіи, не можетъ быть совершенно изстреблено, не имѣетъ почти никакого вліянія на измѣненіе скорости; ибо когда съ одной стороны, дѣйствіемъ онаго, замѣдляется движеніе маятника, или уменьшается хорда с дуги качанія, то съ другой стороны уменьшается число n размаховъ въ одну минуту; при семъ оба уменьшенія, зависяція отъ одной и той же причины, почти равны между собою; а какъ количество s есть множащее въ формулѣ, n дѣлящее, посему треніе въ первомъ случаѣ уменьшаетъ скорость, а во второмъ случаѣ увеличиваетъ, или иначе сказать, дѣйствуетъ противоположно въ двухъ случаяхъ; слѣдовательно, погрѣшность выведенной формулы, почти совсѣмъ приводится въ ничтожность.

§ 149. Другая причина погрѣшности происходитъ отъ сопротивленія, причиняемаго воздухомъ движенію маятника. Сіе сопротивленіе препятствуетъ маятнику описать дугу надле-

жащей величины, такъ что, сія дуга и соотвѣтствующая хорда c , будутъ менѣе противу должныхъ. Слѣдовательно скорость ядра вычисленная по ссей хордѣ, должна вытти меншею противу той, съ которою ядро поражаетъ маятникъ; но поелику вѣсъ маятника постоянно бываетъ очень великъ, а движеніе его весьма тихое, посему сопротивленіе, противопоставляемое оному воздухомъ, должно быть крайне мало. Впрочемъ, дѣйствіе небольшого сего сопротивленія, уравнивается также, подобно дѣйствію, разсматриваемаго предъ симъ тренія; ибо оно не только уменьшаетъ хорду c дуги качанія, но въ то же время уменьшаетъ и число n размаховъ. Гютонъ чрезъ вычисленіе находитъ, что отъ вліянія сопротивленія воздуха, умалается хорда дуги качанія на $\frac{1}{4000}$ долю, всей своей длины; посему, въ случаѣ скорости ядра въ 2000 футовъ, погрѣшность не превышаетъ одного полуфута.

§ 150. Третья причина погрѣшности составленной формулы, заключается во времени, которое потребно ядру на сообщеніе своего движенія маятнику. Мы приняли за основаніе, что

сіе впечатлѣніе производится въ одно мгновеніе; чего нельзя никакъ допустить въ точности. Оно продолжается вовсе то время, которое потребно ядру для углубленія своего въ дерево. Сіе время едва ли простирается до $\frac{1}{500}$ секунды; посему можетъ быть вовсе оставлено.

Вычисленія Гютона показали, что ядро, брошенное со скоростію равною 1500 фут. въ секунду, проникнувъ на 14 дюймовъ внутрь вязоваго дерева хорошо высушеннаго и плотнаго, употребило для всего своего углубленія $\frac{1}{643}$ часть секунды. Также, что скорость сообщенная ядромъ маятнику остается та же, до какой бы глубины оно ни вдавалось въ дерево, и ни чѣмъ не разнится отъ скорости, которую бы маятникъ получилъ, если бы ядро со всѣмъ не вдавливалось въ оный; такъ, что скорость пребываетъ постоянною, будетъ ли она мгновенно сообщена, или въ нѣкоторый весьма малый промежутокъ времени Изъ всего здѣсь сказаннаго заключаемъ, что треніе на оконечностяхъ оси вращенія, сопротивленіе противуполагаемое воздухомъ качанію маятни-

ка, и время углубленія ядра, суть такія обстоятельства, которыя могутъ быть, не подвергаясь ощутительной погрѣшности, упущены изъ виду; и тогда формула (3) дастъ истинную скорость, съ которою ядро ударяетъ въ маятникъ.

§ 151. Скорость, съ которою ядро попадаетъ въ маятникъ, не есть та самая, съ которою оно вылетаетъ изъ жерла орудія. Сія послѣдняя должна быть болѣе первой, по причинѣ сопротивленія, противопологаемаго воздухомъ летящему ядру изъ отверстія орудія къ маятнику. Хотя бы этотъ путь былъ очень малъ, и упругая пороховая жидкость не переставала преслѣдовать и понуждать ядро внѣ жерла орудія до нѣкотораго разстоянія, и симъ самымъ противоборствовать сопротивленію воздуха, однако не бесполезно будетъ изслѣдовать дѣйствіе сего сопротивленія. Вѣроятно, что оно причинитъ разность между скоростію ядра, вычисленною изъ качаній маятника, и между скоростію сего ядра, вычисленною изъ качаній орудія; эта разность доставитъ намъ средство вычислить сопротивленіе воздуха, въ особенности, когда орудіе поставлено будетъ

на значительномъ разстояніи отъ маятника. Качаніе пушки опредѣлитъ начальную скорость или ту скорость, съ которою ядро выбрасывается изъ канала; а качаніе маятника покажетъ скорость, съ которою ядро достигаетъ къ нему.

Вычисленіе скорости ядра изъ отдачи пушки.

§ 152. Скорость ядра находится другимъ образомъ, замѣчая изъ опытовъ, величину дуги, описываемой подобно маятнику стѣнныхъ часовъ. Присоединяя къ пушкѣ разныя гири, можно будетъ качанія ея привести къ дугамъ удобоизмѣряемымъ; на основаніи, что дѣйствіе и противодѣйствіе всегда равны и прямопротивны, величина сихъ дугъ должна зависеть отъ скорости ядра, или отъ силы воспламененнаго пороха; посему скорость ядра, въ разсужденіи скорости центра качанія пушки, будетъ находиться въ такомъ точно отношеніи, какъ вѣсъ пушки къ вѣсу ядра. Вычисливъ скорость центра качанія, посредствомъ хорды дуги описанной отдачею пушки, мы найдемъ скорость ядра по пропорціи: вѣсъ ядра относится къ вѣсу пушки, какъ скорость пушки къ скорости ядра; полагая при этомъ, что вѣсъ

пороха не имѣетъ никакого вліянія на отдачу.

Подобно тому, какъ въ балистическомъ маятникѣ, подъ орудіемъ и на нижней его поверхности устроиваются части, которыя бы служили къ точнѣйшему опредѣленію хорды дуги, описываемой отдачею орудія по выстрѣлѣ.

§ 153. Многіе сочинители утверждаютъ, что избытокъ отдачи пушки, по выстрѣлѣ съ ядромъ предъ отдачею оной, по выстрѣлѣ безъ ядра, совершенно соотвѣтствуетъ количеству движенія, пріобрѣгаемому ядромъ, и сопротивленію имъ противопоставляемому, или что напряженіе пороховыхъ газовъ въ разсужденіи отдачи орудія, зависитъ отъ ихъ упругости, которая пребываетъ постоянною, будетъ ли орудіе заряжено съ ядромъ или безъ ядра. Они основываютъ мнѣніе свое на многихъ опытахъ. Допустивъ, что опыты ихъ произведены были съ крайнею точностію, и что заключенія выведенныя изъ оныхъ справедливы; однако, какъ испытанія сдѣланы были съ малыми снарядами и при малыхъ зарядахъ пороха, то можно еще сомнѣваться о постоянствѣ заключенія ими выведен-

наго, пока не подтвердятъ сего опыты съ большими ядрами и съ сильными зарядами пороха произведенные. Конечно, изъ сравненія скорости ядра, вычисленной по тому положенію, со скоростью вычисленною изъ качаній маятника, законъ сей долженъ быть обнаруженъ; ибо когда онъ имѣетъ мѣсто, то скорость ядра, выведенная изъ качаній орудія, превышать будетъ скорость, вычисленную изъ качаній маятника, тѣмъ количествомъ, которое принадлежитъ къ потерѣ скорости, причиненной сопротивленіемъ воздуха летящему ядру отъ отверстія орудія къ маятнику.

§ 154. Примемъ за доказанное, что дѣйствіе заряда, на отдачу орудія, зависитъ отъ упругости воспламененнаго пороха, которая пребываетъ постоянною, будетъ ли зарядъ безъ ядра или съ ядромъ, и същемъ формулу для вычисленія скорости ядра изъ замѣченной отдачи пушки. Изъ начала нами принятаго слѣдуетъ, что когда, при постоянномъ зарядѣ, возьмемъ хорду дуги отдачи, по выстрѣлѣ безъ ядра, и хорду дуги отдачи по выстрѣлѣ съ ядромъ, потомъ изъ послѣдней вычтемъ первую, то разность будетъ хордою соотвѣтствующею ко-

личеству движенія приобрѣтаемому ядромъ. Справедливость сего заключенія состоитъ въ извѣстномъ свойствѣ круга, что скорости, съ которыми тѣла восходятъ, описывая разныя дуги того же круга, пропорціональны хордамъ сихъ дугъ. Въ самомъ дѣлѣ, скорость v , съ которою тяжелое тѣло В (фиг. 27), отходитъ отъ вертикальнаго своего положенія АВ, и поднимается на высоту ВР по круговой дугѣ ВМ, равна $\sqrt{2g \cdot PB}$; также скорость v' , съ которою оно поднимается на высоту ВР' по круговой дугѣ ВМ', равна $\sqrt{2g \cdot P'B}$: отсюда получаемъ

$$v : v' = \sqrt{2g \cdot PB} : \sqrt{2g \cdot P'B} = \sqrt{PB} : \sqrt{P'B},$$

$$\text{но } PB : P'B = BM^2 : B'M'^2$$

$$\text{и } \sqrt{PB} : \sqrt{P'B} = BM : B'M',$$

и такъ сказанное предложеніе само собою явствуетъ.

Пусть хорда ВМ $= c$ и хорда ВМ' $= c'$; изъ пропорціи $v : v' = c : c'$, получимъ слѣдующую

$$v - v' : c - c' = v : c,$$

которая показываетъ, что разность хордъ имѣя, къ разности соотвѣтственныхъ имъ начальныхъ скоростей качанія маятника, такое же отношеніе, какое имѣетъ всякая хорда съ соотвѣтственною ей начальною скоростью качанія,

дѣйствительно относится къ предположенному нами количеству движенія ядра.

§ 155. И такъ, пусть количество s представляетъ разность сихъ двухъ хордъ; то есть :

s = хордъ, отъ которой зависитъ скорость ядра;

P = совокупному вѣсу пушечнаго ствола, желѣзной полосы и другихъ частей, совершающихъ вмѣстѣ съ стволомъ, качанія около оси привѣса;

b = вѣсу ядра;

l = разстоянію центра тяжести системы P , до оси вращенія;

k = разстоянію центра качанія оной до той же оси;

n = числу размаховъ, совершаемыхъ въ одну минуту;

i = разстоянію отъ оси пушки до оси вращенія;

r = радіусу дуги, коей хорда равна s ;

v = скорости ядра;

γ = начальной угловой скорости качанія системы P , и составляющей разность между угловою скоростью отдачи по выстрѣлѣ съ ядромъ; и угловою скоростью отдачи,

по выстрѣлъ безъ ядра;
 $m, m', m'', \dots$ массы безконечно малыхъ частицъ
 сей системы;
 $q, q', q'', \dots$ соотвѣтственные разстоянія ихъ до
 оси привѣса;

По симъ даннымъ и по извѣстному началу
 Динамики, предложенному Даламбертомъ, взявъ
 сумму моментовъ количествъ движенія систе-
 мы Р и ядра, съ приличнымъ ихъ знакомъ, въ
 отношеніи оси привѣса, и уравнивъ оную ну-
 лю, будемъ имѣть

$$\frac{b_{\varphi i}}{g} - \gamma \sum m q^2 = 0$$

или

$$b_{i\varphi} = \gamma P l k, \text{ ибо } \sum m q^2 = \frac{P l k}{g};$$

отсюда

$$\gamma = \frac{b_{i\varphi}}{P l k}, \text{ и } v = \frac{\gamma P l k}{b_i};$$

симъ образомъ, чтобы найти скорость ядра,
 должно знать угловую скорость γ . Умножая
 угловую скорость на разстояніе отъ центра
 качанія до оси привѣса, найдется дѣйствитель-
 ная скорость сего центра, которая будетъ

$$k\gamma = \frac{b_{i\varphi}}{P l}.$$

Далѣ, по способу изложенному въ § 144, изъ пропорціи $r : k = c : \frac{ck}{r}$, будемъ имѣть $\frac{ck}{r} =$ хордѣ дуги описанной центромъ качанія; а изъ пропорціи $2k : \frac{ck}{r} = \frac{ck}{r} : \frac{c^2 k}{2r^2}$, получимъ $\frac{c^2 k}{2r^2} =$ обращенному синусу h сей дуги. Но скорость, съ которою центръ качанія отдаляется отъ вертикальнаго своего положенія, и поднимается по дугѣ круга на высоту h , равна той скорости, которую бы тяжелое тѣло пріобрѣло, свободно, падая съ сей высоты; то есть, равна $\sqrt{2gh}$; и такъ другое выраженіе скорости центра качанія, выводимое изъ хорды c перваго полуразмаха, будетъ

$$\sqrt{2gh} = \frac{c}{r} \sqrt{gk},$$

сравнивъ оное съ прежнимъ, получимъ уравненіе

$$\frac{biv}{Pl} = \frac{c}{r} \sqrt{gk},$$

изъ котораго найдется

$$v = \frac{Plc}{bir} \sqrt{gk} \dots (4) :$$

такова есть формула для опредѣленія скорости

ядра, выраженная въ функціи разстоянія центра качанія и другихъ количествъ входящихъ въ вопросъ. Сія формула во всемъ сходствуетъ съ формулою (2) § 145, выражающею скорость ядра, и выведенною изъ качаній маятника; такъ что, если въ послѣдней поставимъ вѣсъ P , на мѣсто множителя $p + b$, выражающаго совокупный вѣсъ ядра и маятника, получимъ первую.

§ 156. Если въ предъидущемъ выраженіи (4), на мѣсто множителя $\sqrt{h}$, поставимъ величину его $= \frac{60\sqrt{q}}{n}$, какъ то было сдѣлано въ числѣ 147, то получимъ

$$v = \frac{60 Plc}{birn} \sqrt{gq} \dots\dots (5)$$

вотъ формула для опредѣленія скорости ядра, выраженная въ функціи числа размаховъ, которые дѣлаетъ пушка въ одну минуту, и другихъ количествъ принадлежащихъ къ вопросу. Изъ оной видно, что въ случаѣ количествъ P , l , b , i , r , n , постоянно сохраняющихъ ту же величину, скорости относятся между собою, какъ соотвѣтственныя ихъ хорды. По сему, когда назовемъ u , скорость соотвѣтствующую хордѣ взятой за 1-цу, то будемъ имѣть вообще $v = cu$;

то есть, скорость соответствующая всякой иной хордѣ c найдется, умножая сію хорду c на скорость u , соответствующую хордѣ $=1$ -цѣ.

Результаты, найденныя по опытамъ Гютона.

§ 157. При той же длинѣ орудія, скорости ядеръ почти пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ вѣса пороха полагаемаго въ зарядѣ. Однако при зарядахъ, коихъ вѣсъ болѣе половины вѣса ядра, сіе отношеніе скоростей не много уменьшается. Оно существовало бы и для всѣхъ зарядовъ, если бы орудія были неопредѣленной длины.

§ 158. Скорости, сообщаемыя ядрамъ одинакаго діаметра, но разнаго вѣса, при выстрѣлахъ изъ того же орудія одинаковыми зарядами, находятся въ обратномъ отношеніи корней квадратныхъ изъ вѣсовъ сихъ ядеръ.

§ 159. Съ увеличиваніемъ заряда, скорость ядра увеличивается только до нѣкотораго предѣла, различнаго для каждой длины орудія; послѣ чего, скорость постепенно уменьшается, покуда каналъ со вѣсѣмъ наполнится порохомъ. А это показываетъ, что каждая длина орудія имѣетъ свой собственный сильнѣйшій зарядъ. Таковой зарядъ бываетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ ка-

наль длиннѣе; однако онъ не увеличивается въ томъ же отношеніи, какъ длины каналовъ. Длина сильнѣйшаго заряда, считая оную въ доляхъ отъ цѣлаго канала, съ длиною сего канала, составляетъ меньшее отношеніе въ длинныхъ орудіяхъ, нежели въ короткихъ; такъ что, длины сильнѣйшихъ зарядовъ находятся почти въ обратномъ отношеніи корней квадратныхъ изъ длины частей каналовъ, остающихся предъ зарядомъ.

§ 160. При постоянномъ зарядѣ, съ увеличеніемъ длины канала (до нѣкоторой степени) увеличивается и скорость ядра. Но сіи скорости увеличиваются не пропорціонально длинамъ каналовъ, а находятся между собою нѣсколько въ меньшемъ отношеніи, нежели корни квадратныхъ изъ длинъ каналовъ, и нѣсколько въ большемъ, нежели корни кубичные изъ тѣхъ же длинъ; и кажется наблюдаютъ средину между сими двумя отношеніями.

§ 161. При томъ же орудіи и возвышеніи онаго, дальности полета ядеръ увеличиваются гораздо въ меньшемъ отношеніи, нежели начальные ихъ скорости, и почти какъ корни квадратныхъ изъ оныхъ скоростей. А потому,

соединивъ сіе отношеніе увеличиванія полета ядеръ съ отношеніемъ увеличиванія началь-
ныхъ скоростей, отъ разной длины каналовъ
происходящихъ (предъидущее заключеніе), ясно
видно, что при равныхъ зарядахъ весьма не
много мы увеличимъ дальность полета ядеръ,
увеличивъ довольно много длину орудія. Въ
самомъ дѣлѣ, дальности полетовъ ядеръ увели-
чиваются почти, какъ корни пятой степени
изъ длинъ каналовъ, каковое увеличиваніе очень
мало. Ибо увеличивъ длину канала вдвое, по-
лучимъ лишь $\frac{1}{7}$ часть прибавленія къ дальности
полета ядеръ.

§ 162. При томъ же орудіи и постоянномъ
возвышеніи онаго, времена полета ядеръ почти
пропорціональны дальностямъ оныхъ.

§ 163. Не примѣчено, чтобы большій или
меньшій вѣсъ орудія, употребленіе пыжей и
различная степень силы, которою онъ приби-
ваемы бываютъ на зарядъ и на ядро, а также
сообщеніе огня заряду въ разныхъ онаго мѣ-
стахъ, имѣли нѣкоторое вліяніе на перемѣну
скоростей или дальностей полетовъ ядеръ.

§ 164. Но небольшая прибавка въ зазоръ
орудія, причиняетъ напротивъ довольно боль-

шую потерю въ скорости ядра. Въ самомъ дѣлѣ, съ зазоромъ обыкновенно употребляемымъ и равнымъ $\frac{1}{20}$ доли калибра (*), тратится напрасну не менѣе, какъ отъ $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{3}$ силы пороха; а какъ ядра не рѣдко имѣютъ діаметръ менѣе установленнаго діаметра, то очень часто пропадаетъ напрасну половина силы пороха.

§ 165. Кажется, что сопротивленіе противупоставляемое деревомъ углубленію ядеръ не бываетъ постоянно; ибо углубленія, на которыя онѣ вдавливаются при различныхъ зарядахъ, не относятся какъ самые заряды, или, что все равно, какъ квадраты скоростей, но почти какъ логарифмы зарядовъ.

(*) Величина сего зазора принята въ Ангійской Артиллеріи; въ нашей же Артиллеріи зазоръ не бываетъ столь великъ (смотри, начальныя основанія Артиллерійскаго искусства, составл. для Юнкерскихъ классовъ Г. Бесселемъ.)

П Р И Б Л О Ж Е Н І Е КЪ § 101.

Если сравнимъ первыя двѣ таблицы, помѣщенные въ концѣ § 101, съ такого же рода таблицами, составленными Артиллерійскимъ Отдѣленіемъ Военно-ученаго Комитета, по способу Домбара, которыя можно видѣть на стр. 33 въ Запискахъ объ Артиллерійскомъ Искусствѣ, изданныхъ Г. Весселемъ, Часть II; то съ перваго взгляда представится великое несходство во всѣхъ результатахъ, а именно: при одинаковыхъ начальныхъ скоростяхъ горизонтальныя дальности, наиболшія высоты полета, времена полета бомбъ, и проч. въ тѣхъ и другихъ таблицахъ, весьма несходны между собою. Такъ на примѣръ у 5-ти-пудовой бомбы:

	По таблицѣ въ концѣ § 101.	По старой таблицѣ.
Начальная скорость...	950 фут...	950 фут.
Горизонтальная дальность полета	1243 саж. ..	2007 саж.
Высота полета	470 саж. ...	655 саж.
Время полета	28 сек. ...	35,57 сек.
Скорость бомбы при паденіи,	401 фут. ...	539 фут.
Уголъ паденія бомбы ..	67°41'	60°16'.

Такое несогласіе въ результатахъ не могло произойти отъ легкихъ перемѣнъ, введенныхъ для достиженія болѣе точности, въ Теорію навѣсныхъ выстрѣловъ нами изложенную, которая впрочемъ основана на тѣхъ же началахъ и заключаетъ въ себѣ тотъ же способъ вычисленія, коему слѣдовалъ Ломбаръ. Но ближайшемъ сравненіи формулъ, здѣсь выведенныхъ о навѣсныхъ выстрѣлахъ, съ формулами Ломбара въ его сочиненіи, *Traité du mouvement des projectiles appliqué au tir des bouches à feu* § 189 или въ книгѣ: *Основанія Артиллерійской и Понтонной науки* § 117 и проч. Часть II, найдется ошибка общія всѣмъ формуламъ, которыя были употреблены Ломбаромъ при составленіи балистическихъ таблицъ, отъ которой произошла вышепоказанная разность между численными выводами. Дабы удостовѣриться въ этомъ, стоитъ только показать ошибочность значенія, приписуемаго количеству c въ первыхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ, изъ коихъ выведены всѣ дальнѣйшія формулы для нумерическаго вычисленія; онѣ суть слѣдующія (§ 117 Основанія Артиллерійской и Понтонной науки Часть II);

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{h dx}{c ds}, \text{ и } \frac{2 d^2 y}{dt^2} = h - \frac{h dy}{c ds},$$

и предполагають величину $c = \frac{4aD}{3n}$,

Но по § 66, Основанія Артиллерійской и Понтонной науки Часть II, укосняющая сила сопротивленія воздуха по направленію движенія бомбы, въ каждой точкѣ пути, ея пробѣгаемаго, должна выражаться величиною $\frac{3n\hbar}{2aD}$,

которая въ § 117 сихъ Основаній, при изложеніи Теоріи навѣсныхъ выстрѣловъ, сдѣлана для краткости, равною $\frac{\hbar}{c}$; слѣдовательно въ

предъидущихъ уравненіяхъ и во всѣхъ формулахъ отъ нихъ происходящихъ, должно считать величину $c = \frac{2aD}{3n}$; вмѣсто которой Лом-

баръ въ вычисленіяхъ своихъ, взялъ въ два раза большую; такъ что результаты таблицъ отдалились значительно отъ истинныхъ. По этой причинѣ предлагаются здѣсь новыя баллистическія таблицы, коихъ составленіе и употребленіе, какъ прежнихъ, остается то же и подробно описано въ Запискахъ объ Артил-

лерійскомъ Искусствѣ Г. Весселя стр. 35 и проч. Часть II. При семъ надлежитъ замѣтить, что таковыя таблицы приобрѣли бы вышнюю степень точности, когда бы онѣ составлены были изъ гораздо большаго числа данныхъ, нежели по тремъ пробнымъ выстрѣламъ (смотри упомянутыя Записки объ Артиллерійскомъ Искусствѣ Г. Весселя стр. 35); и отъ зарядовъ болѣе сгѣсненыхъ между собою, на примѣръ, простирающихся въ прогрессіи $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}$ и проч. фунтовъ: и это совершенно необходимо по причинѣ быстраго и неправильнаго измѣненія дальностей полета, въ промежуткѣ отъ заряда въ 2 фунт. до заряда 7 фунт. для 5-ти-пудовой бомбы; и отъ заряда въ 1 фунтъ до заряда 4 фунт. для 2-хъ-пудовой бомбы.

Т А Б Л И Ц А I.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употреблень порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 51 сажень.

Количество пороха въ зарядъ.	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбъ при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
------------------------------	---------------------------	----------------------------------	----------------	---------------	-----------------------------	----------------------

Для пяти пудовой бомбы.

Фунты.	Футы.	Сажени.	Сажени.	Полу-секун.	Футы.	град.	мин.
2	286	296	81	24	236	50°	6'
3	377	454	131	30	280	52	53
4	480	630	191	36	316	56	9
5	564	765	243	41	338	58	38
6	627	860	282	44	352	60	25
7	677	930	312	46	360	61	36
8	715	980	335	48	366	62	29
9	750	1025	356	49	372	63	19
10	783	1065	375	50	377	64	4
11	821	1109	397	52	383	64	55
12	852	1143	415	53	387	65	35

Для 2-хъ пудовой бомбы.

1	307	310	89	24	233	52	16
2	552	650	215	38	304	60	48
3	769	875	323	46	337	66	32
4	909	990	389	50	356	69	45
5	978	1042	420	52	365	71	6

Т А Б Л И Ц А II.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 48 сажень.

Количество пороха въ зарядъ	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбъ.	Уголъ паденія бомбъ.
-----------------------------	---------------------------	----------------------------------	----------------	---------------	-----------------	----------------------

Для 5-ти пудовой бомбы.

Фунты.	Футы.	Сажени.	Сажени	Полу-секун.	Футы.	Град. мин.
2	277	281	76	23	231	49° 50'
3	366	434	124	29	275	52 31
4	466	607	183	35	312	55 46
5	547	739	233	40	334	58 8
6	608	833	271	43	348	59 58
7	657	903	300	45	357	61 8
8	694	953	322	47	363	62
9	728	997	343	48	369	62 48
10	760	1037	362	49	374	63 33
11	796	1080	383	51	379	64 22
12	826	1114	400	52	384	65 1

Для 2-хъ пудовой бомбы.

1	298	296	84	24	229	51 55
2	335	629	206	37	301	60 18
3	746	855	312	45	334	65 58
4	882	969	377	50	352	69 10
5	949	1020	407	51	361	70 34

Т А Б Л И Ц А III.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 45 сажень.

Количество пороха въ зарядъ	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета	Скорость бомбъ при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
-----------------------------	---------------------------	----------------------------------	----------------	--------------	-----------------------------	----------------------

Для 5-ти пудовой бомбы.

Фунты.	Футы.	Сажени.	Сажени	Полу-секун.	Футы.	Град мин.
2	269	267	72	22	226	49° 35'
3	354	413	117	28	270	52 7
4	451	582	174	34	307	55 21
5	530	712	223	39	330	57 37
6	589	804	259	42	344	59 26
7	636	873	288	44	354	60 38
8	672	923	309	46	360	61 29
9	704	966	328	47	365	62 14
10	735	1006	347	48	370	62 58
11	771	1050	368	50	375	63 47
12	800	1085	385	51	380	64 27

Для 2-хъ пудовой бомбы.

1	288	281	80	23	224	51 34
2	518	608	197	37	298	59 47
3	722	833	300	44	331	65 21
4	854	946	364	48	349	68 33
5	919	997	393	50	357	69 57

ТАБЛИЦА IV.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 42 сажени

Количество пороха въ зарядѣ	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбъ при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
-----------------------------	---------------------------	----------------------------------	----------------	---------------	-----------------------------	----------------------

Для 5-ти пудовой бомбы.

Фу-ты	Фу-ты.	Сажени.	Сажени.	Полу-секун.	Фу-ты.	Град мин.
2	260	252	68	22	221	49° 20'
3	342	392	111	28	264	51 45
4	436	556	165	33	302	54 51
5	512	683	211	38	325	57 5
6	569	773	247	41	340	58 48
7	614	841	274	44	349	60 6
8	649	892	295	45	356	60 57
9	681	915	315	46	361	61 41
10	710	974	332	47	366	62 22
11	745	1019	353	49	371	63 12
12	773	1053	369	50	376	63 50

Для 2-хъ пудовой бомбы.

1	279	268	75	23	220	51 16
2	501	586	188	36	294	59 16
3	698	810	289	44	328	64 46
4	825	922	350	48	344	67 53
5	888	973	380	50	353	69 18

ТАБЛИЦА V.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употреблень порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 38 сажень.

Количество пороха въ зарядъ	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета	Скорость бомбъ при падении.	Уголъ паденія бомбъ.
-----------------------------	---------------------------	----------------------------------	----------------	--------------	-----------------------------	----------------------

Для 5-ти пудовой бомбы.

Футовъ.	Футовъ.	Сажени.	Сажени	Полусекундъ.	Футовъ	Градъ мину.
2	247	231	62	21	213	48° 55'
3	325	362	111	26	256	51 15
4	414	518	152	32	295	54 3
5	487	642	196	36	318	56 21
6	541	730	229	39	333	57 57
7	584	796	256	42	343	59 16
8	617	845	276	44	350	60 10
9	647	889	294	45	356	60 54
10	676	928	312	46	360	61 34
11	709	973	331	47	365	62 21
12	735	1006	347	48	370	62 58

Для 2 хъ пудовой бомбы.

1	265	246	69	22	212	50 47
2	476	552	175	34	288	58 22
3	664	775	272	43	322	63 51
4	785	889	331	46	339	66 56
5	844	958	359	49	347	68 20

Т А Б Л И Ц А VI.

Показывающая полеты 5-ти и 2-хъ пудовыхъ бомбъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45° , когда въ зарядъ употребленъ порохъ, коего 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 24 сажени.

Количество пороха въ зарядъ.	Начальная скорость бомбъ.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость бомбъ при паденіи.	Уголъ паденія бомбъ.
------------------------------	---------------------------	----------------------------------	----------------	---------------	-----------------------------	----------------------

Для 5-ти пудовой бомбы.

Фунт.	Футы.	Сажени.	Сажени.	Полусекунд	Фунты.	Град. мину.
2	233	210	56	20	203	$48^{\circ} 30'$
3	308	333	92	25	248	50 46
4	392	480	139	31	286	53 22
5	460	597	179	35	310	55 36
6	512	683	211	38	325	57 5
7	553	749	237	40	336	58 19
8	584	796	256	42	343	59 16
9	612	838	273	43	349	60 3
10	639	877	289	45	354	60 42
11	670	920	308	46	359	61 26
12	696	956	324	47	363	62 2

Для 2-хъ пудовой бомбы.

1	251	62	62	21	205	50 18
2	451	162	162	33	281	57 28
3	628	254	254	41	316	62 53
4	742	310	310	45	334	65 52
5	798	337	337	47	341	67 15

ПРИБАВЛЕНІЕ ВТОРОЕ.

О способъ интерполяціи и приложеніи онаго къ составленію таблицъ, до практики Артиллерійской касающихся.

I. Способъ вставлять, между данными членами какого либо ряда, новые члены подверженные одинакому закону происхожденія съ первыми, называется *интерполяціею*. Для этого, разные члены ряда почитаются какъ частныя величины функціи, выражающей общій членъ, который обыкновенно бываетъ неизвѣстенъ, и коего аналитическое выраженіе должно быть выведено изъ ограниченного числа частныхъ сихъ величинъ. Но видно, что можно удовлетворить подобнымъ условіямъ, бравъ, для искомаго выраженія, многоразличныхъ видовъ функціи, которыя бы заключали число постоянныхъ произвольныхъ, достаточное для повѣрки уравненій происходящихъ отъ условій. По сему, общее рѣшеніе задачи, касательно интерполяціи, остается неопредѣленнымъ; и

приводится къ составленію уравненія кривой линіи, проходящей чрезъ данныя точки, коихъ абсциссы изображаютъ величины переменной независимой, а ординаты, величины функціи. Однако же, въ какомъ бы числѣ эти точки ни были, кривая не можетъ принять на себя опредѣленный видъ, пока онъ остается неизвѣстнымъ. Если же члены интерполируемаго ряда довольно будутъ сближены между собою, то можно принять, что искомая функція, выражающая общій членъ, разложена по восходящимъ степенямъ переменной, и что она ощути- тельно слѣдуетъ закону соизмѣримыхъ и цѣ- лыхъ функцій, имѣющихъ постоянныя разно- сти. Тогда въ разложеніи, которое будетъ схо- дящимся, можно ограничиться только нѣкото- рымъ числомъ первыхъ степеней переменной; и видъ функціи сдѣлается уже опредѣленнымъ.

И такъ положимъ, что величинамъ

$$x, x_1, x_2, x_3 \dots\dots$$

какой ни есть переменной, соответствуютъ частныя величины

$$u, u_1, u_2, u_3 \dots\dots$$

искомой функціи; и что для всякой иной вели- чины x' , имѣемъ

$$u' = a + \beta x' + \gamma x'^2 + \delta x'^3 + \dots\dots$$

требуется определить коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$, по условію, что когда перемѣнимъ x' въ $x, x_1, x_2, x_3 \dots$, величина u' сдѣлается послѣдовательно равною $u, u_1, u_2, u_3 \dots$.

Въ слѣдствіе этого условія, сдѣлавъ постановленіе, будемъ имѣть уравненія

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots, \\ u_1 &= \alpha + \beta x_1 + \gamma x_1^2 + \delta x_1^3 + \dots, \\ u_2 &= \alpha + \beta x_2 + \gamma x_2^2 + \delta x_2^3 + \dots, \\ u_3 &= \alpha + \beta x_3 + \gamma x_3^2 + \delta x_3^3 + \dots, \\ &\text{и проч.} \dots, \end{aligned}$$

которыхъ число должно быть равно числу неопредѣленныхъ коэффициентовъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и проч.; и вотъ какъ найдутся ихъ выраженія. Вычтя первое уравненіе изъ втораго, второе изъ третьяго, и т. д. и произшедшія разности, раздѣливъ соотвѣтственно на $x_1 - x, x_2 - x_1, x_3 - x_2$, и проч. получимъ

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - u}{x_1 - x} &= \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x_1^2 + x_1 x + x^2) + \dots, \\ \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} &= \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) + \dots, \\ \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} &= \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x_3^2 + x_3 x_2 + x_2^2) + \dots, \\ &\text{и проч.} \end{aligned}$$

Положивъ для краткости,

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = U, \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = U_1, \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} = U_2, \dots,$$

будемъ имѣть уравненія

$$U = \beta + \gamma(x_1 + x) + \delta(x_1^2 + x_1 x + x^2) + \dots,$$

$$U_1 = \beta + \gamma(x_2 + x_1) + \delta(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) + \dots,$$

$$U_2 = \beta + \gamma(x_3 + x_2) + \delta(x_3^2 + x_3 x_2 + x_2^2) + \dots,$$

и проч....

Вычтя опять U изъ U_1 , U_1 изъ U_2 , и т. д.

и сдѣлавъ для краткости,

$$\frac{U_1 - U}{x_2 - x} = U', \frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1} = U'_1, \text{ и проч.}$$

перейдемъ къ уравненіямъ

$$U' = \gamma + \delta(x_2 + x_1 + x) + \dots,$$

$$U'_1 = \gamma + \delta(x_3 + x_2 + x_1) + \dots,$$

и проч.....

изъ коихъ, чрезъ новое вычитаніе, найдется

$$U'_1 - U' = \delta(x_3 - x) + \dots,$$

и проч....

теперь сдѣлавъ

$$\frac{U'_1 - U'}{x_3 - x} = U'', \text{ и проч.}$$

будемъ имѣть

$$U'' = \delta + \text{и проч.}$$

Такимъ образомъ можно продолжать дѣйствіе

и далѣе. Но, для большей ясности, положимъ, что мы ограничились въ выраженіи u' четырьмя членами, и имѣемъ четыре данныя величины u, u_1, u_2, u_3 ; тогда дѣйствіе кончится послѣднимъ уравненіемъ. Взявъ изъ него величину δ , и опредѣляя величины γ, β, α посредствомъ U', U, u , найдется

$$\delta = U'',$$

$$\gamma = U' - U''(x_2 + x_1 + x),$$

$$\beta = U - U'(x_1 + x) + U''(x_2 x_1 + x_2 x + x_1 x),$$

$$\alpha = u - Ux + U'x_1 x - U''x_2 x_1 x.$$

Поставивъ сіи величины въ выраженіе отъ u' , будемъ имѣть

$$u' = u + U(x' - x) + U' \left\{ x'^2 - (x_1 + x)x' + x_1 x \right\} + U'' \left\{ x'^3 - (x_2 + x_1 + x)x'^2 + (x_2 x_1 + x_2 x + x_1 x)x' - x_2 x_1 x \right\}$$

Легко примѣтитъ, что коэффициенты величинъ U, U' и U'' разлагаются на простыхъ множителей, и что выраженіе u' можно привести къ виду

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_1) + U''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2)$$

Поступая такимъ образомъ, мы получили бы подобную формулу для какого ни есть числа данныхъ величинъ, и вообще имѣли бы,

$$u' = u + U(x' - x) + U'(x' - x)(x' - x_1) + U''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2) + U'''(x' - x)(x' - x_1)(x' - x_2)(x' - x_3) + \text{и пр.} \dots$$

полагая при семъ

$$\frac{u_1 \cdot u}{x_1 - u} = U, \frac{u_2 \cdot u_1}{x_2 - x_1} = U_1, \frac{u_3 \cdot u_2}{x_3 - x_2} = U_2, \frac{u_4 \cdot u_3}{x_4 - x_3} = U_3, \text{ и пр.,}$$

$$\frac{U_1 - U}{x_2 - x} = U', \frac{U_2 - U_1}{x_3 - x_1} = U'_1, \frac{U_3 - U_2}{x_4 - x_2} = U'_2, \text{ и пр.,}$$

$$\frac{U'_1 - U'}{x_3 - x} = U'', \frac{U'_2 - U'_1}{x_4 - x_1} = U''_1, \text{ и проч.}$$

$$\frac{U''_1 - U''}{x_4 - x} = U''', \text{ и проч.,}$$

и проч.....

Въ частномъ случаѣ, когда величины x, x_1, x_2, x_3 , и проч., суть равноразнствующія (идущія въ прогрессіи арифметической), будетъ $x_1 = x + h, x_2 = x + 2h, x_3 = x + 3h$, и проч.;

и такъ, дѣлая тогда первыя разности, между послѣдовательными величинами u, u_1, u_2, u_3 , и пр.,

$$u_1 - u = \Delta u, u_2 - u_1 = \Delta u_1, u_3 - u_2 = \Delta u_2,$$

$$u_4 - u_3 = \Delta u_3, \text{ и проч....,}$$

вторыя разности

$$\Delta u_1 - \Delta u = \Delta \Delta u = \Delta^2 u, \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta \Delta u_1 = \Delta^2 u_1,$$

$$\Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2, \text{ и проч....,}$$

третья разности

$$\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = \Delta \Delta^2 u = \Delta^3 u, \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta^3 u_1, \text{ и пр.,}$$

четвертыя разности

$$\Delta^3 u_1 - \Delta^3 u = \Delta^4 u, \text{ и проч....,}$$

предыдущія выраженія для $U, U_1, U_2, \dots$

$U', U'_1, \dots$

примутъ видъ

$$U = \frac{\Delta u}{h}, U_1 = \frac{\Delta u_1}{h}, U_2 = \frac{\Delta u_2}{h}, U_3 = \frac{\Delta u_3}{h}, \text{ и пр.},$$

$$U' = \frac{\Delta^2 u}{1.2h^2}, U'_1 = \frac{\Delta^2 u_1}{1.2h^2}, U'_2 = \frac{\Delta^2 u_2}{1.2h^2}, \text{ и пр.},$$

$$U'' = \frac{\Delta^3 u}{1.2.3h^3}, U''_1 = \frac{\Delta^3 u_1}{1.2.3h^3}, \text{ и проч.},$$

$$U''' = \frac{\Delta^4 u}{1.2.3.4h^4}, \text{ и проч.},$$

Кромѣ того, если сдѣлаемъ $x' = x + h'$, будемъ имѣть

$$x' - x = h', x' - x_1 = h' - h, x' - x_2 = h' - 2h,$$

$$x' - x_3 = h' - 3h, \text{ проч.},$$

и найденное выраженіе отъ u' получить видъ

$$u' = u + \frac{h'}{h} \Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h.2h} \Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h.2h.3h} \Delta^3 u + \dots \dots (a).$$

Вотъ формула обыкновенно употребляемая при интерполяціи (*).

II. Чтобы показать употребленіе послѣдней формулы въ Артиллеріи, приложимъ оную къ составленію таблицъ относящихся къ прицѣльнымъ выстрѣламъ; и положимъ, что изъ мно-

(*) По сему предмету см. *Traité élémentaire de calcul differ. et de calcul integ. par Lacroix*, 4. édit. n° 382 и проч.

гихъ горизонтальныхъ дальностей паденія ядра, произведенныхъ одинакимъ зарядомъ, и при каждой высотѣ прицѣла измѣняющейся постояннымъ количествомъ, составлена средняя дальность. На примѣръ (*); при горизонтальномъ направленіи оси канала получены дальности 823, 791, 838, 731, 971, 1071, 1041, 1054, 828, 1228, 1070, 828, 892, 936, 891 локтей Сафсонскихъ, и средняя $\frac{13993}{15} = 933$ лок.

При высотѣ прицѣла на одинъ дюймъ, получены дальности 1120, 1216, 1306, 1156, 1315, 1163, 1374, 1060, 1236, 1330, 1110, 1273, и средняя $\frac{14659}{12} = 1222$ лок.

При 2-хъ дюймахъ, получены дальности 1468, 1527, 1581, 1387, 1526, 1411, 1674, 1563, 1370, 1615, 1527, 1617, 1697, и средняя $\frac{19963}{13} = 1536$ лок.

При 3 хъ дюймахъ, дальности 1901, 2226, 1845, 1907, 1814, 1872, 1950, 2088, 2118, средняя $\frac{17721}{9} = 1969$ лок.

При 4-хъ дюймахъ, дальности 2002, 2181,

(*) Этотъ примѣръ взятъ изъ: *Vorlesungen über die Artillerie, von F. G. Rouvroy.*

2094, 1988, 2104, 2030, 2057, 2016, 2204,

средняя $\frac{18677}{9} = 2076$ лок.

При 5-ти дюймахъ, дальности 2241, 2440, 2065, 2147, 2532, 2323, 2217, 2372, 2505,

средняя $\frac{20842}{9} = 2316$ лок.

Наконецъ при 6-ти дюймахъ высоты прицѣла, найдены дальности 2435, 2237, 2292, 2501, 2328, 2743, 2776, 2426, 2015, 2361, 2635,

2654, 2388, и средняя $\frac{31798}{13} = 2446$ лок.

Составимъ изъ среднихъ дальностей, которыя должны быть взяты вмѣсто величинъ u , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , и проч., послѣдовательныя разности первая, вторая, третья, и проч.; что видно изъ слѣдующей таблицы.

Высо- ты при- цѣла.	Среднія дально- ности.	Пер- вая разно- сти.	Вто- рая разно- сти.	Третья разно- сти.	Четвер- тая разно- сти.	Пятая разно- сти.	Ше- стая разно- сти.
0	933						
1	1222	289					
2	1536	314	25				
3	1969	433	119	94			
4	2075	106	327	-446	-540		
5	2316	241	135	462	908	1448	
6	2446	130	-111	-246	-708	-1616	-3064

Такимъ образомъ будемъ имѣть, по принятому въ предыдущей Теоріи законоположенію, величины

$$u=933, \Delta u=289, \Delta^2 u=25, \Delta^3 u=94,$$

$$\Delta^4 u=-540, \Delta^5 u=1448, \Delta^6 u=-3064, h=1;$$

и уравненіе (а), по постановленіи этихъ величинъ, обратится въ

$$\begin{aligned} u' &= 933 + h' \cdot 289 + \frac{h'(h'-1)}{2} \cdot 25 + \frac{h'(h'-1)(h'-2)}{2 \cdot 3} \cdot 94 \\ &- \frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 540 + \frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)(h'-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 1448 \\ &- \frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)(h'-4)(h'-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 3064; \end{aligned}$$

посредствомъ коего, для всякой высоты h' прицѣла, найдется соответствующая горизонтальная дальность паденія $=u'$; и обратно, по известной дальности u' , найдется высота прицѣла. Но въ последнемъ случаѣ будемъ имѣть, для разрѣшенія, уравненіе шестой степени,

$$385h'^6 - 6831h'^5 + 4544h'^4 + 137745h'^3 + 184622h'^2 - 111779h' + 90u' - 83970 = 0.$$

Дѣлая въ семь уравненій, по порядку $u'=1000, 1100, 1200, 1300, 1400$, и проч., до 2500 лок., и разрѣшая уравненія 6-й степени, произшедшія отъ каждаго постановленія, составимъ таб-



лицу высотъ прицѣла, соответствующихъ различнымъ дальностямъ отъ 100 до 100 локтей, начиная съ разстоянія 1000 до 2500 локтей, далѣе сего предѣла формула не можетъ доставить точныхъ результатовъ: это зависитъ отъ свойства самага ряда.

III. Для 2-го примѣра, возьмемъ среднія дальности выстрѣловъ, произведенныхъ изъ $\frac{1}{2}$ пудовой и 6-ти фунтовой мортиръ, на практическомъ ученіи 1832 года въ Августъ мѣсяцъ подъ Краснымъ селомъ, въ присутствіи Офицеровъ Артиллерійскаго Училища.

Изъ $\frac{1}{2}$ пудовой мортиры, возвышенной на 45° , стрѣляли зарядами въ 12, 24, 36 и 48 золот., а изъ 6-ти фунтовой, подъ такимъ же возвышеніемъ, стрѣляли зарядами въ 3, 6, 9 и 12 золот. Проба пороха, взятая изъ 10-ти выстрѣловъ пробной мортирки, оказалась равною $42\frac{1}{2}$ сажень. Всѣ гранаты немного дополненыя пескомъ, вѣсили единообразно, а именно; 6-ти фунтовыя, по 6 фунтовъ, а полупудовыя по 22 фунта. Сверхъ того, онѣ были избраны самыхъ большихъ діаметровъ; наибольшій зазоръ у 6-ти фунтовой гранаты былъ—1,6 линіи, а у полупудовой—1,65 линіи.

Діаметры гранатъ разнились между собою не болѣе 5 точекъ. Для измѣренія діаметра гранатъ былъ употребленъ особенный инструментъ, на подобіе калибромѣра, показывавшій даже сотыя части дюйма.

Среднія дальности, взятые изъ 10-ти выстрѣловъ, отъ каждаго изъ зарядовъ 12, 24, 36 и 48 золот., коими стрѣляли изъ $\frac{1}{2}$ пудовой мортиры, найдены равными 54, 205, 350 и 470 сажень.

Среднія дальности, также взятые изъ 10-ти выстрѣловъ, отъ каждаго изъ зарядовъ 3, 6, 9 и 12 золот., коими стрѣляли изъ 6-ти фунтовой мортиры, найдены равными 47, 117, 198 и 306 сажень.

И такъ, относительно выстрѣловъ изъ $\frac{1}{2}$ пудовой мортиры, будемъ имѣть, по предъидущимъ даннымъ,

$$x=12, x_1=24, x_2=36, x_3=48,$$

$$h=x_1-x=x_2-x_1=x_3-x_2=12;$$

$$u=54, u_1=205, u_2=350, u_3=470;$$

$$\Delta u=151, \Delta^2 u=-6, \Delta^3 u=-19.$$

Теперь поставивъ найденныя величины въ уравненіе (а), получимъ слѣдующую формулу для интерполяціи,

$$u' = 54 + \frac{h'}{12} \cdot 151 - \frac{h' h' - 12}{12 \cdot 24} \cdot 6$$

$$+ \frac{h'(h' - 12)(h' - 24)}{12 \cdot 24 \cdot 36} \cdot 19,$$

въ которой величина $h' = x' - x =$ разности между зарядомъ, для коего ищется соотвѣтствующая дальность, и между первымъ даннымъ зарядомъ равнымъ 12 золот. На примѣръ, если бы понадобилось найти дальность соотвѣтствующую заряду 30 золот., то должно въ предъидущемъ выраженіи сдѣлать $h' = 30 - 12 = 18$; окончивъ вычисленіе по обыкновенію, получимъ оную $= 279$ саж. Такимъ образомъ поступая, получимъ, въ разсужденіи дальностей выстрѣловъ изъ 6-ти фунтовой мортиры, слѣдующее уравненіе

$$u' = 47 + \frac{h'}{3} \cdot 70 + \frac{h'(h' - 3)}{3 \cdot 6} \cdot 11 + \frac{h'(h' - 3)(h' - 6)}{3 \cdot 6 \cdot 9} \cdot 16.$$

Вычисливъ горизонтальныя дальности соотвѣтствующія опредѣленнымъ зарядамъ, помощію предъидущихъ уравненій, можно будетъ легко, по таблицамъ IV и V § 101, узнать и прочія необходимыя обстоятельства при бросаніи; какъ то: начальную скорость, время полета, уголъ паденія и скорость при паденіи.

На примѣръ, при зарядѣ 30 золот., которому соответствуетъ выше приведенная горизонтальная дальность паденія 279 саж. $\frac{1}{2}$ пудовой гранаты, найдется, по таблицѣ IV, начальная скорость гранаты=341 саж., высота полета=83 саж., время полета=24 полусек.; скорость при паденіи=213 фут. и уголъ паденія=57°11'. Поступая такимъ образомъ, составимъ слѣдующія двѣ таблицы.

Для полупудовой гранаты.						
Заряды.	Начальная скорость.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета.	Скорость гранаты при паденіи.	Уголъ паденія гранаты.
золотник.	футы.	сажени.	сажени.	полусекун.	футы.	град. мин.
12....	416	54	15	10	107	46 7
15....	452	91	25	13	134	48 2
18....	486	129	36	16	156	49 44
21....	219	167	47	18	174	51 5
24....	250	205	58	20	190	52 13
27....	280	242	70	22	202	53 39
30....	311	279	83	24	213	55 3
33....	341	315	96	26	222	56 20
36....	372	350	110	27	231	57 39
39....	402	383	123	29	238	58 56
42....	432	414	135	30	245	60 5
45....	461	443	147	31	250	61 8
48....	489	470	160	33	255	62 7

Для шести фунтовой гранаты.

Заряды.	Начальная скорость.	Горизонтальная дальность полета.	Высота полета.	Время полета	Скорость гранаты при падении.	Угол падения гранаты.
золот.	футы.	сажени.	сажени.	полу-секун.	футы.	град. ил.
3..	115	47	12	9	98	48
4..	138	70	18	11	116	49 9
5..	162	93	25	13	131	50 29
6..	187	117	33	15	144	51 55
7..	214	142	41	17	155	53 28
8..	243	169	50	19	165	55 12
9..	276	198	60	21	175	56 53
10..	313	230	73	22	184	58 50
11..	358	266	89	24	193	61 15
12..	416	306	107	26	202	63 42

Последнія двѣ таблицы предполагаютъ пробу пороха въ $42\frac{1}{2}$ сажени; и для такого пороха, который слабѣе или сильнѣе, онѣ не годятся. А по тому, присовокупляется здѣсь еще таблица, соответствующая пробамъ пороха, взятымъ примѣрно въ 48, 45, 42, 39 и 36 сажень, и вычисленная на основаніи пропорцій; что скорости выстрѣловъ изъ мортиръ отъ двухъ разныхъ сортовъ пороха, при равныхъ зарядахъ, относятся между собою, какъ корни квадратныя изъ дальностей полетовъ ядра пробной мортирки (Записки объ Артиллерійскомъ искусствѣ, Г. Весселя, Ч. II стр. 37). Хотя она, за исключеніемъ начальныхъ скоростей и горизонтальныхъ дальностей отъ разныхъ зарядовъ, не содержитъ въ себѣ другихъ обстоятельствъ при бросаніи, но сіи послѣдніе легко найдутся способомъ выше показаннымъ.

Таблица, показывающая начальныя скорости и горизонтальныя дальности полетовъ $\frac{1}{2}$ пудовой и 6-ти фунтовой гранатъ, отъ разныхъ зарядовъ, при возвышеніи мортиры на 45°, когда въ зарядъ употребленъ порохъ, каево 9 золотниковъ бросаютъ пробное ядро на 48, 45, 42, 39 и 36 сажень.

	Проба пороха въ 48 саж.		Проба пороха въ 45 саж.		Проба пороха въ 42 саж.		Проба пороха въ 39 саж.		Проба пороха въ 36 саж.	
	начальная скорость гранаты.	горизонтальная дальность полета.	начальная скорость гранаты.	горизонтальная дальность полета.	начальная скорость гранаты.	горизонтальная дальность полета.	начальная скорость гранаты.	горизонтальная дальность полета.	начальная скорость гранаты.	горизонтальная дальность полета.
заряды.										

Для полупудовой гранаты.

зот.	фут.	сажени	фут.	сажени	фут.	сажени	фут.	сажени	фут.	сажени
12..	123	61	119	57	115	53	111	49	107	45
15..	161	101	156	96	151	90	146	85	140	79
18..	198	142	191	135	185	128	178	120	171	112
21..	233	184	225	175	218	166	210	156	201	145
24..	266	224	257	214	248	203	239	192	230	181
27..	297	262	288	251	278	239	268	227	258	215
30..	330	302	320	290	309	277	298	264	286	249
33..	362	339	351	327	339	313	327	298	314	283
36..	395	376	383	362	370	347	356	333	342	316
39..	427	409	414	395	400	381	385	365	370	348
42..	459	441	444	427	429	411	414	395	398	379
45..	490	471	474	456	458	440	442	425	424	406
48..	520	498	503	483	486	467	468	450	450	433

Для шести фунтовой гранаты.

зо- лот.	фу- ты	са- жени	фу- ты	са- жени	фу- ты	са- жени	фу- ты.	са- жени	фу- ты.	са- жени
3..	122	54	118	50	114	46	110	42	106	38
4..	147	79	142	74	137	69	132	64	127	59
5..	172	103	167	98	161	92	155	86	149	80
6..	199	128	192	122	186	116	179	109	172	102
7..	227	154	220	148	213	144	205	134	197	126
8..	258	183	250	176	241	168	233	160	224	151
9..	293	213	284	205	274	197	264	188	254	179
10..	333	246	322	237	311	228	300	219	288	209
11..	380	284	368	274	356	264	343	254	329	243
12..	442	323	428	314	413	304	398	295	383	284

ПОГРѢШНОСТИ.

Стр.	Строк.	Напечатано.	Читай.
3	6	спизу	преодолевавшему
7	8	—	преодолевшему
8	5	—	координатъ
		$\frac{dx}{dt}=c;$	$\frac{dx}{dt}=c,$
11	5	—	въ ннзъ и по
17	6	—	вннзъ, и по
18	1	—	въ уравненіе
27	4	—	въ уравненіи
31	8	—	величины, вса
		$a^2 - 4bh...$	$-a^2 - 4bh...$
—	6	—	$2h >$
—	6	—	$\sqrt{4h^2 + 4bh - a^2}$
35	8	—	$\sqrt{4h^2 + 4bh - a^2}$
35	1	—	$u \operatorname{tg} \theta$
—	2	—	$u \operatorname{tg} \theta'$
—	2	—	$\operatorname{tg}(\theta - \theta')$
—	2	—	$\operatorname{tg}(\theta + \theta')$
—	5	—	$\frac{a}{b}$
—	5	—	$\frac{a}{b}$
42	1	—	въ числитель $ab + \operatorname{tg} \theta$
46	12	—	$a + b \operatorname{tg} \theta$
—	1	—	въ числитель ag^2
48	4	—	$a^2 g$
53	9	—	проходящій
61	9	—	проходящей
—	2	—	прицѣлла ожно
48	4	—	прицѣлла должно
53	9	—	болѣе
61	9	—	далѣе
—	2	—	$L;$
64	2	—	$\alpha;$
—	4	—	также
—	4	—	та же
—	9	—	извѣстным :
64	2	—	извѣстными :
—	4	—	въ числитель $ba'^2 - ba'^2$
—	4	—	$ba'^2 - b'a^2$
—	4	—	$\operatorname{tg} \theta' = \frac{2yb'}{a' - x} - \frac{2b(a'x)}{2ax - a^2}$
—	4	—	$\operatorname{tg} \theta' = \frac{2(y - b')}{a' - x} - \frac{2b(a' - x)}{2ax - a^2}$
—	9	—	въ числитель $b'a$
—	9	—	$b'a^2$
66	4	—	$h \cos^2 \operatorname{tg} \theta'$
—	4	—	$h \cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \theta'$
74	13	—	$\sqrt{\frac{g - b'}{g}}$
—	15	—	$\sqrt{\frac{y - b'}{y}}$
81	3	—	или
83	4	—	опредѣляется
84	8	—	опредѣлятся
		$AR = AD \nu^2$	$MR = AD \nu^2$
		$AD \nu^2 \sin^2 \alpha$	$AD \nu^2 \sin^2 \alpha$
		$MD = 2ARg^2$	$MR = 2ADg^2$

Стр.	Строч.	Напечатано.	Читай.
98	1	спизу $\frac{r dx}{r'}$	$\frac{r dx}{r'}$
99	11	въ числителѣ $(r-x)$	$(r-x)^4$
104	13	200	2000
110	6	т. п.	m и n
111	8	перемѣняется	перемѣняется
112	7	фунтахъ	футахъ
113	3	фунтахъ	футахъ
122	1	5,553 зол.	5,593 зол.
123	2	сопротивленія	сопротивленію
—	11	по средней	со средней
—	5	принадлежитъ	принадлежать
126	1	$x = \frac{1}{m} 1(mv-n) + C$	$x = -\frac{4}{m} 1(mv-n) + C$
—	10	скорость $b=a$	скорость $=a$
129	6 и 7	предложеніяхъ	предположеніяхъ
134	8	ускорительная	укоснительная
139	10	$cv^2=g$	$cv'^2=g$
147	3	$1 \left(a \sqrt{\frac{c}{g}} + \sqrt{1 + \frac{c}{g}} a^2 \right)$	$1 \left(a \sqrt{\frac{c}{g}} + \sqrt{1 + \frac{c}{g}} a^2 \right)$
150	1	Im	αm
154	8	одна	одну
155	7	вмѣсто 5-го знака $=$	$=$
160	5	каковыя	какова
164	3	и сверхъ	и сверхъ
166	1	въ знаменат. $g \cos \gamma'$	$g \cos \theta$
167	4	въ знаменат. $2g \gamma'$	$2tg \gamma'$
171	2	съ которой	за которой
175	7	точки θ	точки C
178	5	510	570
—	4	$AC=250$	$AC=150$
184	3	въ числит. } θ cv 2-го равенства }	$\theta' cv''$
186	3	$\theta=3^0 19' 7''$	$\theta'=3^0 19' 7''$
188	6	составляемы	составляемыхъ
194	7	вмѣсто 2-го знака $=$	$=$
—	9	вмѣсто 2-го знака $=$	$+$
—	13	вмѣсто 5-го знака $+$	$=$

Стр.	Строк.	Напечатано.	Читай.
197	3 снизу	$\Lambda m D$	$\Lambda M D$
200	3 —	$p\sqrt{c+p^2}$	$p\sqrt{1+p^2}$
207	10 —	въ знаменат. $\sqrt{1+p^2}$	$c\sqrt{1+p^2}$
214	3 —	$\sim \Lambda M'$, или $\sim \Lambda M$	$\sim \Lambda M' - \sim \Lambda M$,
216	4 —	краткости	краткости
217	3 —	въ знаменат. $2Mc\sqrt{gc}$	$2M\sqrt{gc}$
	6 —	$\frac{tg\alpha}{\cos\alpha}$	$\frac{tg\alpha}{\cos\alpha}$
220	10 и 9 —	которая	которая бы
224	7 —	$\frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$	$\frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$
	1 —	по	поэтому пайдется
226	2 —	$\lambda=0,725$	$\lambda=0,725$
228	3 —	во 2-мъ столбцѣ 0,3462343	0,3460343
	8 —	въ 7-мъ столбцѣ 0,5427623	0,5428623
231	9 —	въ знаменат. $59^\circ 52' 52''$	$tg(59^\circ 52' 52'')$
232	7 —	0,0217343	0,0217543
233	4 —	пропорціонными	пропорціональными
240		въ заглавіи 5-го и 6-го столбцовъ, каждой таблицы IV и V, вместо бомбы и титий гранаты	
		— во 2-мъ столбцѣ таблицы V, противъ 300 напечат. 250 читай 219	
243	5 —	всходящей,	всходящей вѣтви
246	3 —	$\frac{m^5 x'}{23,4} + \dots$	$\frac{m^5 x'}{23,4} + \dots$
	9 и 14 —	Q	θ
249	5 —	во 2-мъ столбцѣ 42.39	40.30
	6 —	въ 1-мъ столбцѣ 0,6919	0,6910
251	14 —	по самое	на самое
253	1 и 2 —	къ которомъ	въ которомъ
258	12 —	подведи 2-й множитель подъ знакъ корня	
259	7 —	§ 107	§ 106
260	7 —	паденіе ядра	паденіе одного ядра
262	4 —	въ 1-й части урavn. $e^{m\epsilon x}$	$e^{m\epsilon x'}$
263	4 —	пропущенъ знакъ = между a и корнемъ	
	4 и 7 —	$b = \delta tg\theta + \dots$	$b = -\delta tg\theta + \dots$
265	13 —	во 2-мъ урavn. $m\epsilon Le$	$m\epsilon' Le$
266	3 —	$e^{-m\epsilon x}$	$e^{m\epsilon x}$
267	3 —	αe	Le

Стр.	Строк.	Напечатано.	Читай.
270	9	снизу въ знаменат. $x'tg\theta - y$	$x'tg\theta - y$
274	3	$\frac{p\pi k^2}{4}$	$\frac{p\pi k^2}{4}$
275	4	превратился	превратится
—	11 и 12	относительно	относительныхъ
279	5	въ стволѣ	въ стволѣ
281	2	ядра	пули
282	6	700 фут.	7000 фут.
284	6	скорость v	скорость v'
285	10	въ предположеніе	въ предположеніи
286, 287 288		подъ каждымъ кореннымъ знакомъ въ числителѣ вмѣсто буквы b поставь 6	
286	10	къ каморою	съ каморою
—	11	должно	должно
293	5	дальности	изъ дальности
294	4	и вставленную	и вставленную вертикально въ впадину выдолбленную
297	4	присѣбregли	присѣбregли
299	2	4,7105 фут.	4,7195 фут.
301	15 и 16	показанною	показанною
302	2	къ вертикальной	въ вертикальной
303	2	при коемъ бы	при коемъ
304	2	перемѣнивъ	перемѣнить
312	11	большю	большою
319	7	сего рода маятника	сего маятника
—	7	$cg=l$	$CG=L$
—	9	$cg=k$	$CS=k$
—	10	$cv=i$	$CV=i$
320	4	начальная скорость	начальная угловая скорость
321	13	въ числит. $b'ki$	$b'k'i$
322	7	cu	CU
—	7	$r:z$	$r:z$
325	5	$\frac{5}{500}$	$\frac{1}{500}$
—	4	въ числит. $bi(k+k)$	$bi(k+k')$
326	4	$\frac{P_1}{50000}$	$\frac{pl}{50000}$
330	8	$k = \frac{60 \cdot q^2}{n^2}$ фут.	$k = \frac{60^2 \cdot q}{n^2}$ фут.
337	10	описываемой	описываемой отдачею пушки повышенной

