P2.4247

# КИНЕМАТИКА МЕХАНИЗМОВЪ.

(Прикладная механика ч. I).

## КУРСЪ ЛЕКЦІЙ,

читанныхъ въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ

ПРОФЕССОРОМЪ

**Н. И. Мерцаловымъ.**

ОБРАБОТАЛЪ И ИЗДАЛЪ

**М. И. Фелинскій.**

Общія кинематическія свѣдѣнія. Кинематика плоскихъ механизмовъ. Кинематика пространственныхъ механизмовъ.

*Съ 416 чертежами въ текстѣ и 3 таблицами.*

СКЛАДЪ ИЗДАНІЯ

въ Техническомъ Книжномъ магазинѣ СИЛА

**инж. Н. М. Щапова**

Москва, Новобасманная ул., 17.

1916.

ПРОВЕРЕНО 1945

ПРОВЕРЕНО 1952

Типо-литографія Т-ва И. Н. КУШНЕРЕВЪ и К°. Пименовская ул., с. д
Москва—1916.

# ОГЛАВЛЕНІЕ.


*Стр.*

Предисловіе . . . . . VII
Введеніе . . . . . IX

## I. Общія кинематическія свѣдѣнія.

§ 1. Движеніе твердаго тѣла параллельно плоскости . . . . . 1
§ 2. Перемѣщеніе плоскаго контура по плоскости . . . . . 3
§ 3. Движеніе прямого отрѣзка въ плоскости. Полюсъ мгновеннаго вращенія . 5
§ 4. Планы скоростей. Діаграммы скоростей . . . . . 9
§ 5. Различные случаи заданія движенія . . . . . 19
§ 6. Огибаемыя и огибающія. Свойства общей нормали . . . . . 22
§ 7. Неподвижная и подвижная полодіи . . . . . 25
§ 8. Нахожденіе траекторій точекъ системы по полодіямъ . . . . . 29
§ 9. Построеніе подвижной полодіи . . . . . 32
§ 10. Обращеніе движенія. Взаимность полодій . . . . . 36
§ 11. Примѣры опредѣленія полодій помощью обращенія движенія . . . . . 40
§ 12. Прямолинейное движеніе точекъ механизма. Перегибы траекторій. Геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ данный моментъ на перегибахъ своихъ траекторій. Поворотный кругъ . . . . . 48
§ 13. Положеніе поворотнаго круга въ системѣ. Примѣры опредѣленія его . 55
§ 14. Свойства поворотнаго круга. Центръ ускореній. Главныя его свойства. 61
§ 15. Связь между полюсомъ мгновеннаго вращенія, кругомъ кривизны и кругомъ поворота . . . . . 74
§ 16. Теорема Савари . . . . . 79
§ 17. Частные случаи нахожденія центра ускореній . . . . . 102
§ 18. Планы ускореній . . . . . 108
§ 19. Разборъ случая движенія отрѣзка по траекторіямъ его концовъ . . . 118
§ 20. Построеніе плановъ ускореній системы отрѣзка *AB*, движущагося по траекторіямъ его концовъ . . . . . 136
§ 21. Треугольникъ дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній. Общая теорема о дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореніяхъ и планѣ ихъ. Графическій пріемъ опредѣленія радіусовъ кривизны траекторій точекъ плоскодвижущейся системы . . . . . 153
§ 22. Частные случаи примѣненія общихъ построеній, данныхъ въ §§ 20—21. 162

## II. Теорія механизмовъ.

### 1. Плоскіе механизмы.

#### A. Шарнирный четыреугольникъ и частные виды его.

§ 23. Опредѣленіе механизма и назначеніе его. Общее рѣшеніе задачи преобразованія движенія . . . . . 169

Стр.

§ 24. Кинематическія пары. Дѣленіе ихъ на низшія и высшія. Обратимость низшихъ паръ. Переходъ вращательныхъ паръ въ поступательныя . . 175
§ 25. Кинематическая цѣпь. Механизмъ. Составленіе механизма изъ вращательныхъ паръ. Теорема Грасгофа . . . . . 187
§ 26. Модификаціи шарнирнаго четыреугольника помощью замѣны одной вращательной пары поступательной . . . . . 196
§ 27. Механизмъ M поставленъ на звено $d$,—механизмъ обыкновенной паровой машины . . . . . 207
§ 28. Механизмъ M поставленъ на звено $b$,—механизмъ качающейся паровой машины . . . . . 210
§ 29. Механизмъ M поставленъ на звено $a$,—механизмъ Витворта . . . . . 216
§ 30. Механизмъ M поставленъ на муфту $C$ . . . . . 223
§ 31. Четырехзвенные механизмы съ двумя поступательными парами. Общія соображенія . . . . . 223
§ 32. Механизмъ съ поступательными парами $A$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $OO_1$. Муфта Ольдгэма. Станокъ Ліонардо-да-Винчи . . . . . 231
§ 33. Механизмъ съ поступательными парами $A$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $OA$. Механизмъ двойного ползуна . . . . . 239
§ 34. Механизмъ съ поступательными парами $A$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $AB$. Эллипсографъ . . . . . 241
§ 35. Механизмъ съ поступательными парами $O$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $OO_1$ . . . . . 243
§ 36. Переходъ черезъ мертвыя положенія . . . . . 246

### B. Передача движенія.

§ 37. Разборъ общей задачи о передачѣ движенія . . . . . 257

#### a) Преобразованіе вращательнаго движенія около одной оси во вращательное же около другой.

§ 38. Общая теорія некруглыхъ колесъ. Построеніе полодій . . . . . 261
§ 39. Опредѣленіе профилей зубцовъ некруглыхъ полодій. Методы Poncelet и Reuleaux. Методъ, основанный на теоремѣ Savary. Теорема Камуса. 277
§ 40. Круглыя зубчатыя колеса. Общія соображенія. Циклическіе и эвольвентные профили . . . . . 291
§ 41. Детали профилированія зубцовъ круглыхъ зубчатыхъ колесъ . . . . . 305
§ 42. Коловратныя машины. Рядовыя соединенія зубчатыхъ колесъ. Счетчики. 324

#### b) Преобразованіе вращательнаго движенія въ движеніе колебательное и въ движеніе прямолинейно-поступательное.

§ 43. Эксцентрики и кулаки . . . . . 334
§ 44. Направляющіе механизмы, точные и приближенные. Графическій методъ построенія направляющихъ механизмовъ . . . . . 348

#### c) Преобразованіе вращательнаго движенія вокругъ одной неподвижной оси во вращательное движеніе около подвижной другой.

§ 45. Эпициклическія соединенія зубчатыхъ колесъ. Планетное колесо Уатта. Механизмъ для измѣненія угловыхъ скоростей. Парадоксъ Фергюссона. 366

## 2. Пространственные механизмы.

### A. Четырехшарнирный пространственный механизмъ и частные виды его.

§ 46. Четырехшарнирный сферическій механизмъ. Шарниръ Гука. Муфта Губэ . . . . . 382

### B. Передача движенія между непараллельными осями.

*Стр.*

§ 47. Передача движенія между непараллельными и пересѣкающимися осями. Коническія колеса. Фрикціонная и зубчатая коническая передача . . 393

§ 48. Передача движенія между непараллельными и непересѣкающимися осями. Гиперболоидальныя колеса. Винтовыя колеса. Червячная передача . . . . . 408

### C. Трехзвенная винтовая цѣпь.

§ 49. Общая теорія трехзвенной винтовой цѣпи. Частные случаи . . . . . 422

## III. Дополненія.

Къ § 4. Опредѣленіе направленія нормалей къ траекторіямъ точекъ и направленія скоростей ихъ при помощи плана скоростей . . . . . 427

Къ § 5. Различные случаи заданія движенія . . . . . 428

Къ § 6. Составленіе плановъ скоростей сложныхъ механизмовъ . . . . . 429

Къ § 12—13. Построеніе поворотнаго круга въ обращенномъ движеніи. Примѣры . . . . . 430

Къ § 14. Дополнительныя указанія по вопросу о нахожденіи центра ускореній и объ опредѣленіи направленія ускореній различныхъ точекъ движущейся системы. Разложеніе ускореній. Геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ одними лишь нормальными ускореніями . . . . . 433

Къ § 15. Дополнительныя замѣчанія по поводу уравненія (33) . . . . . 437

Къ § 16. Иное доказательство теоремы Савари . . . . . 438

Къ § 17. Частные случаи опредѣленія положенія центра ускореній. Случай нахожденія точки *A* на окружности поворотнаго круга . . . . . 440

Къ § 22. Частные случаи примѣненія общихъ построеній, данныхъ въ §§ 20—21 . . . . . 445

---

Таблица I. Направляющій механизмъ академика П. Л. Чебышева. Полодіи этого механизма и вычерчиваніе ихъ.

Таблица II. Станокъ Ліонардо-да-Винчи и муфта Ольдгэма. Чертежи станка Ліонардо-да-Винчи.

Таблица III. Коловратныя машины.

# ПРЕДИСЛОВІЕ.

Кинематика механизмовъ, изложенію основъ и главнѣйшихъ приложеній коей посвящена настоящая книга, представляетъ собою первую часть курса Прикладной Механики, читаемаго въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ профессоромъ Н. И. Мерцаловымъ. Въ основаніе текста настоящаго изданія положены краткія записки по этому курсу, составленныя мною на лекціяхъ Н. И. Мерцалова, читанныхъ имъ въ осеннихъ семестрахъ 1909—1911 годовъ. Подробная разработка и составленіе всего текста выполнены мною по указаніямъ и подъ общей редакціей профессора Мерцалова.

Задержка въ печатаніи послѣднихъ выпусковъ книги, вызванная цѣлымъ рядомъ непредвидѣнныхъ затрудненій, значительно осложнившихъ всю работу по веденію изданія, повлекла за собою необходимость пополненія основного текста рядомъ дополнительныхъ замѣчаній, выдѣленныхъ въ особый отдѣлъ, помѣщенный въ концѣ книги подъ общимъ заглавіемъ «Дополненія». Изученіе этой дополнительной части слѣдуетъ вести параллельно съ изученіемъ основного текста. Весь этотъ дополнительный матеріалъ будетъ введенъ въ основной текстъ при слѣдующемъ изданіи настоящей книги.

Такъ какъ одной изъ основныхъ задачъ, къ разрѣшенію коихъ посильно стремился составитель курса при выработкѣ текста, являлось, между прочимъ, достиженіе такой ясности въ изложеніи матеріала и иллюстрированіи чертежами, которая дѣлала бы невозможнымъ возникновеніе какихъ-либо сомнѣній и колебаній при изученіи курса, и такъ какъ, съ другой стороны, о степени приближенія къ такому идеалу судить труднѣе всего именно составителю, то я и обращаюсь ко всѣмъ, кому придется изучать или читать эту книгу, съ просьбой не отказать мнѣ въ любезномъ сообщеніи указаній на тѣ дефекты въ изложеніи или въ иллюстраціонной части, кои будутъ замѣчены при чтеніи; за всѣ эти указанія я былъ бы глубоко благодаренъ, главнымъ образомъ, потому, что они значительно облегчили бы мою работу по выработкѣ текста слѣдующаго изданія.

Считаю своимъ долгомъ принести мою сердечную благодарность Учебному Комитету Императорскаго Техническаго Училища и инженеру Н. М. Щапову, оказавшимъ мнѣ существенную помощь въ дѣлѣ

покрытія части расходовъ по изданію и тѣмъ обезпечившихъ возможность доведенія его до конца.

Глубокую благодарность приношу директорамъ Т-ва М. Г. Кувшиновъ и К° Г. Н. Шолматову, В. В. Попову и К. С. Ненюкову за ту неизмѣнную благожелательность и отзывчивость, съ которой они относились ко мнѣ во всѣ, даже наиболѣе острые, моменты веденія настоящаго изданія.

Съ чувствомъ искренней признательности я буду всегда вспоминать о томъ внимательномъ и высоко предупредительномъ отношеніи, которымъ я пользовался со стороны Н. П. Барышникова (завѣдующаго типографіей Т-ва И. Н. Кушнеревъ и К°) и А. В. Петрова (завѣдующаго наборной той же типографіи); установившіяся между нами добрыя отношенія значительно облегчили тотъ трудъ, который пришелся на мою долю въ дѣлѣ печатанія этой книги.

Справедливость требуетъ отмѣтить то искусство, съ которымъ наборщики той же типографіи И. И. Прохоровъ и В. А. Андреевъ († ) выполнили наборъ первыхъ двухъ выпусковъ настоящаго изданія. Для характеристики высокихъ достоинствъ ихъ работы можно указать, напримѣръ, на тотъ фактъ, что И. И. Прохоровъ, набравъ текстъ страницъ 81 — 95, сдѣлалъ при этомъ *всего двѣ ошибки*, и это при всемъ разнообразіи и обиліи вошедшихъ въ эту часть текста формулъ, шрифтовъ и знаковъ.

Недостатокъ бумаги, начавшій сказываться уже съ лѣта 1915 года, не далъ мнѣ возможности отпечатать все изданіе на бумагѣ одного и того же качества, и послѣдніе листы (съ 23-го) пришлось печатать на бумагѣ, значительно уступающей по своимъ качествамъ бумагѣ первыхъ листовъ, хотя и лучшей изъ имѣвшихся на рынкѣ въ январѣ 1916 г. Такъ какъ въ то же время крашеной бумаги въ продажѣ не имѣлось уже совсѣмъ, то таблицы II и III пришлось отпечатать на слоновой бумагѣ, что, конечно, нѣсколько отразилось на красотѣ отпечатковъ.

Оригиналы всѣхъ чертежей курса были выполнены лично мною; клише съ нихъ были исполнены цинкографіями Т-ва И. Н. Кушнеревъ и К° (№№ 1—104 и таблица I), Шереръ и Набгольцъ (№№ 105—344) и Вишневскаго (№№ 345—416 и таблицы II и III).

Всѣ замѣчанія и запросы относительно настоящаго изданія прошу направлять по адресу: Москва, Новобасманная, 17, Книжный складъ инж. Н. М. Щапова, для передачи мнѣ.

**М. Фелинскій.**

Москва,
февраль 1916 г.

# ВВЕДЕНІЕ.

Прикладная Механика, какъ это видно изъ самаго названія, занимается приложеніемъ нашихъ знаній о соотношеніяхъ между силами природы къ изысканію способовъ пользованія этими силами въ нашихъ цѣляхъ. Эти способы пользованія силами и цѣли, имѣющіяся въ виду при этомъ, можно раздѣлить на двѣ группы. Въ одной мы пользуемся извѣстными силами для того, чтобы устранить нежелательное дѣйствіе другихъ силъ. Перекидывая, напримѣръ, мостъ черезъ рѣку, мы устраняемъ нежелательное дѣйствіе тяжести; возводя зданіе, устраняемъ нежелательное дѣйствіе температуры и другихъ атмосферическихъ дѣятелей, и т. д. Здѣсь наши знанія о молекулярныхъ силахъ сцѣпленія, упругости и т. п. даютъ намъ возможность избѣжать вреднаго для насъ дѣйствія другихъ силъ. Та часть Прикладной Механики, которая занимается изысканіемъ этихъ способовъ устраненія извѣстныхъ дѣйствій внѣшнихъ факторовъ, называется вообще Строительной Механикой.

Другая группа способовъ пользованія силами носитъ гораздо болѣе активный характеръ. Тутъ мы заставляемъ силы производить движеніе въ опредѣленномъ, желательномъ для насъ, направленіи, совершать извѣстную, нужную намъ, работу. Орудія, при помощи которыхъ мы производимъ эти дѣйствія, называются машинами, а та часть Прикладной Механики, которая занимается изслѣдованіемъ этой второй группы способовъ пользованія силами, называется Машиностроеніемъ. Уже изъ самой сущности задачи, которую мы ставимъ себѣ при такомъ пользованіи силами, вытекаетъ опредѣленіе машины, данное впервые, какъ это ни странно, только въ 60-ыхъ годахъ прошлаго столѣтія извѣстнымъ Reuleaux и формулируемое такъ:

*Машиной называется система тѣлъ, при помощи которыхъ данныя силы производятъ движеніе только въ заранѣе опредѣленныхъ направленіяхъ,—всѣ же другія дѣйствія силъ устраняются соотвѣтственнымъ сопротивленіемъ этой совокупности тѣлъ.*

Какъ видимъ, и это опредѣленіе есть собственно описаніе, но такое, которое хорошо формулируетъ сущность рѣшаемой нами при помощи машинъ задачи. Замѣтимъ, что изъ приведеннаго опредѣленія непосредственно вытекаетъ подраздѣленіе науки о машинахъ на соотвѣтственные отдѣлы. Во-первыхъ, основнымъ требованіемъ является произведеніе заранѣе опредѣленнаго движенія, а такъ какъ всякое слож-

ное движеніе, какъ извѣстно, можно составить изъ нѣсколькихъ простыхъ, то на первомъ планѣ появляется вопросъ: какой комбинаціей простѣйшихъ движеній можно воспроизвести требуемое движеніе?—Поэтому первымъ и основнымъ отдѣломъ науки машиностроенія будетъ отдѣлъ *кинематическій*, въ которомъ разсматриваются, во-первыхъ, способы воспроизведенія простѣйшихъ движеній, а затѣмъ—различныя ихъ комбинаціи.

Далѣе, силы, производя при помощи машины опредѣленныя движенія, совершаютъ нужную намъ работу. Но эта работа является результатомъ не свободнаго дѣйствія силъ, а принужденнаго. Устраняя нежелательныя для насъ движенія при помощи сопротивленія частей машины, мы должны ожидать извѣстной потери въ дѣйствіи силъ. Слѣдовательно, здѣсь является вопросъ, какимъ образомъ свести эту потерю на минимумъ, т.-е. является вопросъ объ экономическомъ коэффиціентѣ машины и о вредныхъ сопротивленіяхъ. Рѣшенію этого вопроса посвящается второй отдѣлъ науки о машиностроеніи, носящій обыкновенно названіе Общей Теоріи Машинъ, а такъ какъ различныя потери въ дѣйствіяхъ силъ несомнѣнно зависятъ отъ природы самихъ силъ, то этотъ отдѣлъ естественно распадается на группы, сообразно съ особыми свойствами вводимыхъ силъ; такимъ образомъ, частью этого отдѣла явится, напримѣръ, Термодинамика.

Наконецъ, требованіе устраненія нежелательныхъ дѣйствій силъ порождаетъ вопросъ о достаточной сопротивляемости частей машинъ этимъ, такъ сказать, вреднымъ дѣйствіямъ силъ, и, такимъ образомъ, является третій отдѣлъ науки о машиностроеніи: Ученіе о прочности частей машинъ.

Каждый изъ этихъ отдѣловъ представляетъ одинаковую важность для инженера, но каждый имѣетъ свои особенности для изученія и пользованія выводами,—особенности, на которыхъ мы нѣсколько остановимся.

Первый, *кинематическій*, отдѣлъ выдѣлился въ особую науку сравнительно недавно. Извѣстно, что еще Амперъ настаивалъ на выдѣленіи изъ механики особой отрасли, занимающейся исключительно изслѣдованіемъ движеній, *безъ разсмотрѣнія силъ, ихъ производящихъ*, и указывалъ на важное значеніе этой отрасли для потребностей практической механики. И дѣйствительно, инженеру, прежде всего, приходится рѣшать вопросъ объ относительныхъ движеніяхъ частей машины, производящихъ въ совокупности желательное движеніе, а для рѣшенія этого вопроса вовсе не нужно принимать во вниманіе, какія силы заставляютъ механизмъ двигаться. Вопросъ этотъ въ весьма большомъ числѣ случаевъ машиностроенія является даже первенствующимъ; такъ, напримѣръ, во всѣхъ машинахъ, обрабатывающихъ дерево или металлы, гдѣ требуется куску матеріала придать опредѣленную форму при помощи извѣстнаго инструмента, мы, прежде всего, должны рѣшить вопросъ объ относительномъ движеніи этого инструмента,—именно та-

комъ, чтобы онъ могъ придать обрабатываемому куску заданную форму. Точно такъ же при устройствѣ ткацкихъ станковъ прежде всего требуется, при помощи извѣстной комбинаціи движеній, рѣшить сложную задачу объ относительномъ движеніи нитей основы и утка съ цѣлью воспроизведенія даннаго узора ткани; всѣмъ извѣстно, какія остроумныя и въ высшей степени сложныя комбинаціи движеній встрѣчаются, напримѣръ, въ новѣйшихъ Жакардовыхъ машинахъ, работающихъ съ нѣсколькими челноками. Въ этомъ случаѣ, какъ и во многихъ другихъ, ему подобныхъ, вопросъ о силахъ, производящихъ движеніе,—даже вопросъ объ экономичности,—отступаютъ на второй планъ. Легко, однако, видѣть, что разъ мы опускаемъ на время вопросъ о силахъ и разсматриваемъ только движеніе, наше изслѣдованіе пріобрѣтаетъ чисто геометрическій характеръ, и Амперъ былъ вполнѣ правъ, когда назвалъ эту новую отрасль Прикладной Механики *геометріей четырехъ измѣреній*, гдѣ четвертымъ измѣреніемъ является элементъ времени.

Слѣдовательно, первый основной отдѣлъ Прикладной Механики обладаетъ тѣмъ преимуществомъ, какимъ обладаетъ геометрія въ частности и чистая математика—вообще. Этимъ преимуществомъ является наибольшая легкость и доступность для изученія,—ибо при этомъ не требуется ни сложныхъ опытовъ, ни кропотливыхъ наблюденій,—и строгая доказательность положеній и выводовъ.—Далѣе, въ самомъ пользованіи результатами наблюдается полное тождество съ геометріей: подобно тому, какъ въ геометріи мы, обладая нѣкоторой долей воображенія, при помощи комбинаціи извѣстныхъ пространственныхъ соотношеній можемъ создавать новыя формы и à priori заключать о новыхъ соотношеніяхъ, такъ и здѣсь для творчества требуется только воображеніе и способность къ комбинированію, такъ что рѣшеніе кинематическихъ вопросовъ, по существу, не отличается отъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

Ошибочнымъ, конечно, являлось бы предположеніе, что рѣшеніе это можно подвесть подъ извѣстныя формулы или даже облегчить его введеніемъ разныхъ условныхъ обозначеній для механизмовъ, какъ полагалъ, напримѣръ, тотъ же Reuleaux. Обозначенія эти скорѣе даже мѣшаютъ успѣшному ходу творческаго процесса, ибо вмѣсто непосредственной наглядности является отвлеченная условность, а только интуиція и можетъ создать здѣсь что-либо новое. Въ дѣйствительности хорошее воображеніе и способность къ комбинаціи встрѣчаются далеко не рѣдко, и потому вовсе не удивительно, что творчество въ этой области машиностроенія развито весьма сильно. Стоитъ только посмотрѣть, какая масса всевозможныхъ механизмовъ для полученія различныхъ случаевъ движенія патентируется ежегодно, чтобы убѣдиться въ справедливости сказаннаго. Почему же, однако, не всѣ эти механизмы, а только ничтожно малая часть ихъ вводится потомъ въ дѣйствительную жизнь и пріобрѣтаетъ, такъ сказать, права гражданства? Въ большинствѣ случаевъ эти механизмы бываютъ вѣдь весьма остроумны

съ кинематической точки зрѣнія и тѣмъ не менѣе примѣненія на практикѣ не имѣютъ.

Отвѣтъ на поставленный нами вопросъ даютъ намъ другіе отдѣлы науки о машиностроеніи, и, прежде всего, *общая теорія машинъ*. Механизмъ, совершенный съ точки зрѣнія кинематики, можетъ оказаться на дѣлѣ никуда не годнымъ по своей неэкономичности, и указанія, необходимыя для построенія механизмовъ, удовлетворительныхъ съ этой точки зрѣнія, долженъ бы намъ давать второй отдѣлъ машиностроенія.

Однако здѣсь дѣло обстоитъ гораздо сложнѣе: теперь въ наше изслѣдованіе мы должны ввести вопросъ о силахъ, и задача наша сразу становится труднѣйшей.—Изъ исторіи развитія теоретической механики извѣстно, какъ трудно поддаются изученію даже рудиментарныя силы: такъ, напримѣръ, у древнихъ геометрія стояла на очень высокой степени развитія, а тѣмъ не менѣе они не имѣли хотя бы самаго отдаленнаго понятія, напримѣръ, о принципѣ инерціи или о принципѣ независимости дѣйствія. Нуженъ былъ необыкновенный геній Галилея, чтобы положить начало выясненію этихъ основныхъ принциповъ. Галилей изучалъ преимущественно дѣйствія силъ тяжести, что значительно упрощало дѣло въ виду нѣкоторыхъ спеціальныхъ условій этого дѣйствія. Въ машиностроеніи же мы имѣемъ дѣло не съ простымъ дѣйствіемъ тяжести, а съ несравненно болѣе сложными явленіями молекулярныхъ силъ. Изслѣдованіе этихъ силъ и дѣйствій, ими производимыхъ, сопряжено съ очень трудными опытами, да и опыты зачастую мало помогаютъ дѣлу, такъ какъ, въ виду совмѣстности существованія силъ, сущность дѣйствія каждой отдѣльной силы ускользаетъ отъ нашего наблюденія, и нужно обладать геніальными способностями, чтобы быть въ состояніи усмотрѣть главное въ явленіи и отвлечься отъ всего частнаго и побочнаго. Въ этомъ обстоятельствѣ и коренится причина такого медленнаго развитія этого отдѣла ученія о машинахъ; потому-то такъ несовершенна въ большинствѣ случаевъ теорія относящихся сюда явленій. Такъ, напримѣръ, объ одномъ изъ самыхъ важныхъ факторовъ въ вопросѣ объ экономичности механизма, а именно *о треніи*, мы знаемъ очень мало,—мы, напримѣръ, до сихъ поръ не можемъ опредѣленно сказать, зависитъ ли треніе твердыхъ тѣлъ отъ относительной ихъ скорости или нѣтъ.

Въ термодинамикѣ, правда, благодаря геніямъ Mayer'a, Clausius'a и Carnot, мы имѣемъ рядъ опредѣленныхъ указаній, которыми долженъ руководствоваться инженеръ при построеніи относящихся сюда машинъ, но практическое выполненіе указанныхъ ими идеальныхъ конструкцій весьма затруднительно именно въ силу весьма малыхъ нашихъ знаній о дѣйствіи молекулярныхъ силъ. Изслѣдованіе Carnot появилось въ 1824 году, работа Mayer'a—въ 1842 году, однако приблизиться, хотя бы нѣсколько, къ теоретическимъ требованіямъ удалось только въ самое послѣднее время, благодаря энергіи извѣстнаго инженера Diesel'я,—

нуженъ былъ упорный многолѣтній трудъ, нужна была большая изобрѣтательность въ конструкціи, чтобы достигнуть полученнаго имъ, хотя въ дѣйствительности и небольшого, приближенія къ научнымъ требованіямъ.

Итакъ, этотъ отдѣлъ механики представляетъ огромныя и непреодолимыя трудности какъ для теоретической его разработки, такъ и для практическаго использованія добытыхъ результатовъ; и только въ немногихъ случаяхъ онъ даетъ намъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ на вопросъ о пригодности того или другого механизма.

Если мы обратимся къ третьему основному отдѣлу ученія о машиностроеніи,—къ *ученію о прочности частей машинъ*,— то и здѣсь встрѣтимся съ такими же, если не большими, трудностями. Правда, здѣсь мы имѣемъ дѣло съ опредѣленнымъ классомъ явленій, а именно—*съ явленіями упругости;* однако явленія эти довольно сложны, и, хотя нѣкоторыя предположенія о сущности дѣйствія силъ упругости мы и можемъ сдѣлать, однако въ случаяхъ, представляющихся намъ въ дѣйствительности, мы наталкиваемся часто на такія сложныя комбинаціи этихъ силъ, что теоретически въ нихъ разобраться бываетъ невозможно, и мы бываемъ принуждены прибѣгать въ такихъ случаяхъ къ болѣе или менѣе произвольнымъ, упрощающимъ дѣло предположеніямъ. Но даже и при такомъ пріемѣ нахожденіе рѣшенія удается намъ только въ немногихъ, наиболѣе простыхъ и въ дѣйствительности рѣдко имѣющихъ мѣсто случаяхъ. Тѣмъ не менѣе получаемые такимъ образомъ выводы мы примѣняемъ къ сложнымъ явленіямъ, гораздо чаще встрѣчающимся, стараясь поправить неточности введеніемъ опытныхъ коэффиціентовъ. Такой путь, конечно, мало раціоналенъ, ибо самый видъ соотношенія можетъ вовсе не подходить къ данному случаю, а коэффиціенты эти дѣла совсѣмъ не поправляютъ,—поправленная при ихъ помощи формула будетъ выражать соотношенія только для тѣхъ опытовъ, изъ которыхъ эти коэффиціенты выведены, что, понятно, большого интереса представить не можетъ. Обыкновенно руководствуются аналогіями съ механизмами, испытанными уже раньше, но и этотъ путь, по весьма понятнымъ причинамъ, представляется также мало раціональнымъ. Тѣмъ не менѣе, вслѣдствіе необыкновенныхъ трудностей дѣла, приходится мириться съ этими мало научными пріемами.

Итакъ, намъ представляется теперь вполнѣ понятнымъ, почему только немногіе изъ всѣхъ изобрѣтаемыхъ механизмовъ удерживаются въ дѣйствительности. Вслѣдствіе несовершенства Общей теоріи машинъ и Ученія о достаточной прочности частей механизма нельзя съ полной опредѣленностью сказать въ каждомъ данномъ случаѣ, пригоденъ или нѣтъ тотъ или иной новый механизмъ. Мы еще не обладаемъ достаточнымъ запасомъ свѣдѣній и знаній по части вредныхъ сопротивленій,—запасомъ, настолько достаточнымъ, чтобы устранить,—по возможности, заранѣе,—ихъ дѣйствіе; мы еще не можемъ распоряжаться

силами такъ, какъ распоряжаемся геометрическими формами,—мы вынуждены пробовать и испытывать. Но если дѣло обстоитъ такимъ именно образомъ, то тѣмъ нужнѣе становится для насъ обладаніе возможно болѣе богатымъ запасомъ придуманныхъ механизмовъ, и богатство творчества въ кинематической области является однимъ изъ необходимыхъ условій успѣшной борьбы инженера съ вредными сопротивленіями. Мы будемъ поступать въ этомъ случаѣ такъ, какъ поступаетъ сама природа: она производитъ массу сѣмянъ, но только ничтожно малая часть ихъ выдерживаетъ борьбу съ вредными вліяніями, такъ что необходимымъ условіемъ успѣшности борьбы и служитъ именно это богатство произведенія.

# КИНЕМАТИКА МЕХАНИЗМОВЪ.

I. Общія кинематическія свѣдѣнія.

II. Теорія механизмовъ.

III. Дополненія.

только величину, но и направленіе ускореній соотвѣтствующихъ точекъ, при чемъ всѣ эти направленія шли отъ точекъ $c$ плана къ вершинѣ его $S$. Во избѣжаніе всякихъ недоразумѣній, мы будемъ строить въ дальнѣйшемъ планы ускореній такъ:

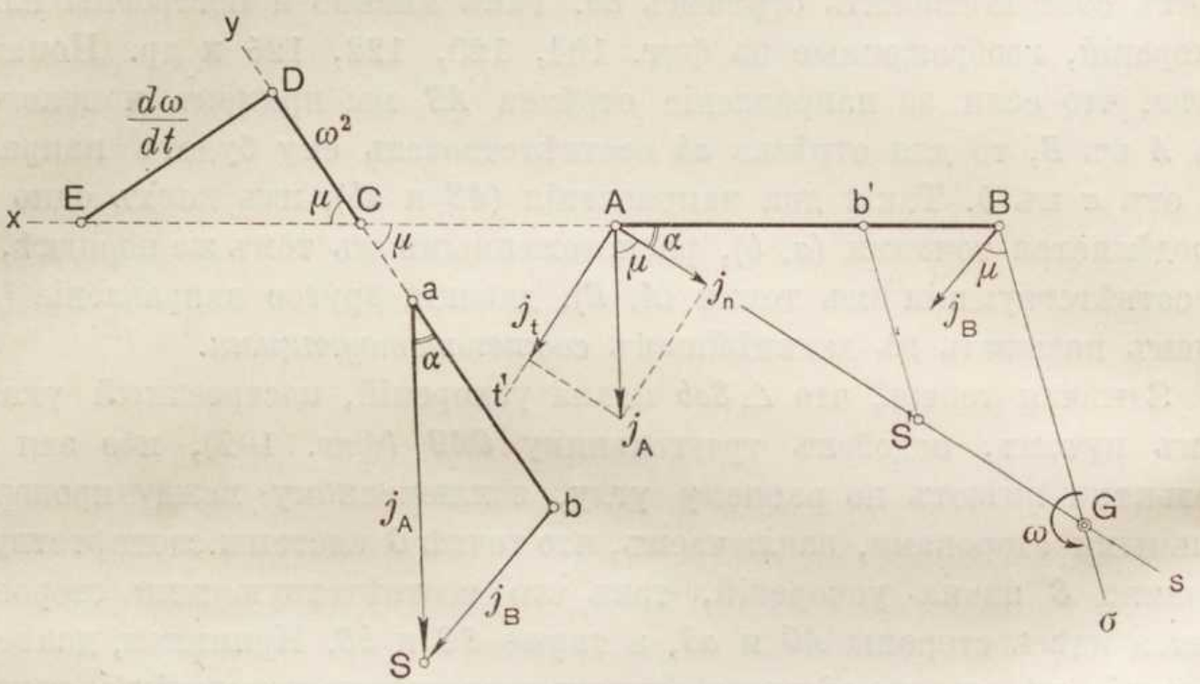
Пусть ускоренія $j_A$ и $j_B$ точекъ $A$ и $B$ системы отрѣзка $AB$ намъ извѣстны какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Опредѣляемъ по этимъ даннымъ векторы $aS$ и $bS$, имѣющіе изображать эти ускоренія, и, принявъ какую-либо точку $S$ плоскости за вершину плана ускореній, откладываемъ при ней эти векторы $aS$ и $bS$ такъ, чтобы *стрѣлки, указывающія направленія этихъ векторовъ, смотрѣли въ эту вершину* $S$. Соединивъ теперь другіе концы, $a$ и $b$, этихъ векторовъ прямой $ab$, получаемъ $\triangle Sab$, могущій быть принятымъ за *планъ ускореній* данной намъ системы $AB$, при чемъ точкѣ $A$ системы будетъ соотвѣтствовать точка $a$ плана, а точкѣ $B$—точка $b$, такъ что отрѣзку $AB$ будетъ соотвѣтствовать отрѣзокъ $ab$. Такъ именно и построены планы ускореній, изображенные на фиг. 104, 120, 122, 125 и др. Понятно, далѣе, что если за направленіе отрѣзка $AB$ мы примемъ направленіе отъ $A$ къ $B$, то для отрѣзка $ab$ соотвѣтствовать ему будетъ направленіе отъ $a$ къ $b$. Такія два направленія ($AB$ и $ab$), изъ коихъ одно ($ab$) опредѣляется точками ($a$, $b$), расположенными въ томъ же порядкѣ, что и соотвѣтствующія имъ точки ($A$, $B$), дающія другое направленіе ($AB$), будемъ называть въ дальнѣйшемъ *соотвѣтствующими*.

Замѣчая теперь, что $\triangle Sab$ плана ускореній, построенный указаннымъ путемъ, подобенъ треугольнику $GAB$ (фиг. 102), ибо эти треугольники имѣютъ по равному углу, заключенному между пропорціональными сторонами, заключаемъ, что точкѣ $G$ системы соотвѣтствуетъ вершина $S$ плана ускореній, такъ что соотвѣтствующими сторонами явятся здѣсь стороны $AG$ и $aS$, а также $BG$ и $bS$. Принимая, далѣе, во вниманіе, что сторона $aS$ плана, будучи параллельна ускоренію $j_A$ точки $A$, наклонена къ соотвѣтствующей ей сторонѣ $AG$ подъ угломъ $\mu$ и что направленія $aS$ и $AG$ являются соотвѣтствующими другъ другу, заключаемъ, что подъ тѣмъ же угломъ $\mu$ будутъ наклонены другъ къ другу какъ стороны $bS$ и $BG$, такъ и стороны $ab$ и $AB$, и что, кромѣ того, *соотвѣтствующія направленія системъ* $Sab$ *и* $GAB$ *образуютъ другъ съ другомъ всегда одинъ и тотъ же уголъ, равный* $\mu$. Такимъ образомъ, уголъ между соотвѣтствующими другъ другу направленіями $ab$ (замыкающей стороны плана ускореній) и $AB$ всегда равенъ $\mu$ и, значитъ, никогда не можетъ быть больше $90^0$; предѣльнымъ его значеніемъ является $90^0$. Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что если мы, построивъ планъ ускореній данной намъ системы, обнаружимъ, что уголъ между какими-либо двумя соотвѣтственными направленіями,—напримѣръ, между $ab$ и $AB$,—оказывается бо́льшимъ прямого, то это показываетъ, что или неправильно построенъ планъ ускореній, или что неправильно взяты эти соотвѣтствующія направленія. Этимъ критеріемъ правильности построенія плановъ ускореній нужно пользоваться всегда.

Послѣ этихъ необходимыхъ замѣчаній вернемся къ выдѣленнымъ нами треугольникамъ $Sab$ и $GAB$.

Очевидно, что, если бы мы перенесли $\triangle Sab$ параллельно самому себѣ такъ, чтобы точка $a$ его совпала съ точкой $A$, затѣмъ повернули весь этотъ треугольникъ на уголъ $\mu$ такъ, чтобы сторона $ab$ легла вдоль отрѣзка $AB$,—точка $b$ при этомъ окажется лежащей по ту же сторону отъ точки $(a, A)$, что и точка $B$,—и, наконецъ, помножили этотъ такъ перенесенный и повернутый треугольникъ въ отношеніи $AB : ab$, то получили бы треугольникъ $GAB$,—вершина $S$ пришла бы теперь въ точку $G$. Это замѣчаніе позволяетъ намъ по ускореніямъ $j_A$ и $j_B$ точекъ $A$ и $B$ нашей системы $AB$ опредѣлять положеніе центра ускореній ея, $G$; поступать при этомъ приходится такъ:

Пусть движеніе данной системы опредѣляется движеніемъ принадлежащаго ей отрѣзка $AB$ (фиг. 104) по траекторіямъ его концовъ, и



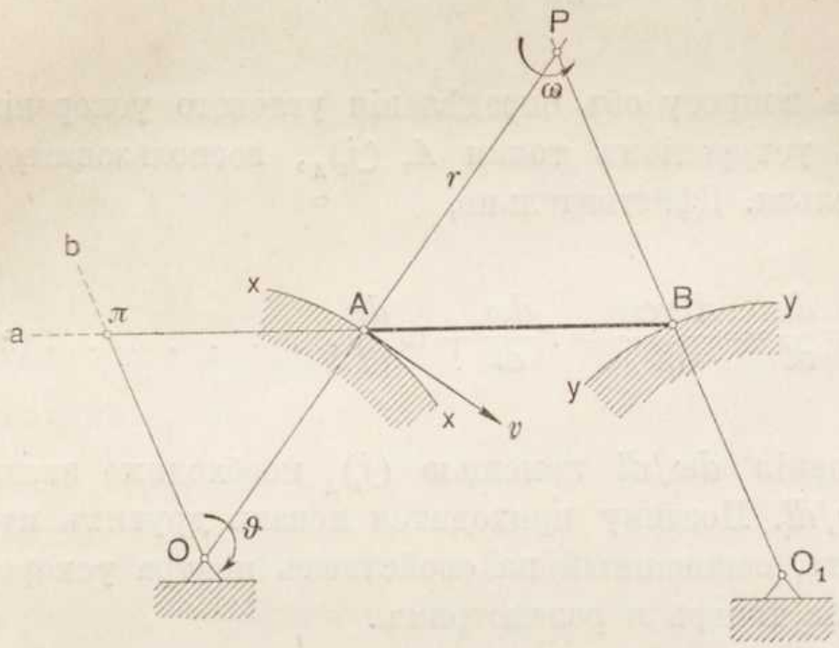

Фиг. 104.

пусть планъ ускореній этой системы представляется треугольникомъ $Sab$, такъ что полное ускореніе $j_A$ точки $A$ изображается векторомъ $aS$, а $j_B$—векторомъ $bS$. Согласно сказанному выше, заключаемъ, что уголъ $bCB$ между соотвѣтственными направленіями $ab$ и $AB$ равенъ $\mu$.

Переносимъ теперь треугольникъ $Sab$ параллельно самому себѣ такъ, чтобы вершина $a$ его совпала съ точкой $A$, послѣ чего поворачиваемъ его на уголъ $\mu$, чтобы точка $b$ пришла на самоё прямую $AB$, занявъ здѣсь на ней нѣкоторое положеніе $b'$; такимъ образомъ, треугольникъ $Sab$ займетъ теперь положеніе $S'Ab'$. Множимъ теперь этотъ треугольникъ въ отношеніи $AB / ab$, что выполняемъ графически, проводя черезъ точку $B$ лучъ $B\sigma \parallel b'S'$ до встрѣчи въ точкѣ $G$ съ прямой $AS'$ или ея продолженіемъ. Такъ полученная точка $G$ и представитъ собою искомый центръ ускореній системы $AB$, ибо

$$\angle(GA, j_A) = \mu = \angle(GB, j_B).$$

Въ заключеніе настоящаго параграфа разберемъ вопросъ объ опредѣленіи угловыхъ ускореній плоскодвижущихся системъ при помощи плановъ ускореній ихъ; предварительно, однако, имѣя въ виду дальнѣйшее, коснемся вкратцѣ вопроса объ опредѣленіи угловыхъ скоростей системы помощью плановъ скоростей.




Фиг. 105.

Угловой скоростью $\omega$ системы отрѣзка $AB$ мы называемъ мгновенную угловую скорость вращенія ея вокругъ полюса мгновеннаго вращенія $P$ (фиг. 105). Пусть точка $A$ нашей системы движется въ данный моментъ по круговой дугѣ центра $O$ и радіуса $OA$, а точка $B$—по круговой же дугѣ центра $O_1$ и радіуса $O_1B$, и пусть, кромѣ того, радіусъ-векторъ $OA$ вращается вокругъ $O$ съ угловой скоростью $\vartheta$. Связь между $\omega$ и $\vartheta$ можно установить, замѣтивъ, что линейная скорость $v$ точки $A$ выражается двояко, а именно:

$$v = PA \cdot \omega = r\omega = \vartheta \cdot OA; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

отсюда находимъ, что

$$\omega = \frac{\vartheta \cdot OA}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (l)$$

гдѣ черезъ $r$ обозначенъ радіусъ-векторъ $PA$, величина, по существу своему, перемѣнная.

Такъ какъ полюсъ $P$ зачастую выходитъ изъ предѣловъ чертежа, то отношеніе $OA/r$ слѣдуетъ замѣнить какимъ-либо другимъ, болѣе удобнымъ въ практическомъ отношеніи. Для этого лучше всего обратиться къ помощи плана скоростей. Замѣтивъ, что нормалью къ траекторіи точки $A$ является прямая $OA$, а у точки $B$—прямая $O_1B$, проводимъ черезъ точку $O$ лучъ $Ob \parallel O_1B$ до пересѣченія въ точкѣ $\pi$ съ прямой $BA$ (или ея продолженіемъ $Aa$). Треугольникъ $OA\pi$, такъ полученный, можетъ быть принятъ за планъ скоростей системы $AB$, при чемъ точка $\pi$ его будетъ соотвѣтствовать точкѣ $B$. Такъ какъ

$$\triangle OA\pi \sim \triangle PAB,$$

то

$$\frac{OA}{r} = \frac{\pi A}{AB},$$

въ виду чего соотношеніе ($l$) приметъ болѣе удобный видъ

$$\omega = \vartheta \cdot \frac{\pi A}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

Перейдемъ теперь къ вопросу объ опредѣленіи углового ускоренія $d\omega/dt$. Тангенціальнымъ ускореніемъ точки $A$, $(j_t)_A$, воспользоваться для этого опредѣленія нельзя. Дѣйствительно,

$$(j_t)_A = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dr}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots (n)$$

и, значитъ, для опредѣленія $d\omega/dt$ помощью $(j_t)_A$ необходимо знать величину производной $dr/dt$. Поэтому приходится искать другихъ путей, и одинъ изъ пріемовъ, основанный на свойствахъ центра ускореній и плана ускореній, мы теперь и разсмотримъ.

Выше,—см. стр. 67 и слѣд.,—было разъяснено, что, если мы *перенесемъ вращеніе изъ полюса* $P$ *въ центръ ускореній* $G$ и разложимъ полное дѣйствительное ускореніе $j_A$ какой-либо точки $A$ на нормальное ускореніе $j_n$ этого новаго вращательнаго движенія и тангенціальное $j_t$, какъ это и выполнено на фиг. 104, то, согласно формуламъ (27) и (28),—см. стр. 70 и 71,—можно будетъ написать, что

$$j_n = GA \cdot \omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

и

$$j_t = GA \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія $d\omega/dt$ достаточно знать величины $j_t$ и $GA$. Формула (28) указываетъ, что, прежде всего, нужно тѣмъ или инымъ путемъ найти положеніе центра ускореній $G$. Соединивъ его прямой съ точкой $A$, полное ускореніе $j_A$ которой намъ извѣстно, разлагаемъ это ускореніе $j_A$ на нормальное, $j_n$, идущее по $AG$ (всегда отъ $A$ къ $G$), и тангенціальное $j_t$, перпендикулярное къ $AG$. Опредѣливъ теперь величину этого тангенціальнаго ускоренія $j_t$ и раздѣливъ его на $GA$, найдемъ искомое угловое ускореніе $d\omega/dt$, ибо, согласно (28), имѣемъ, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{j_t}{GA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (p)$$

Надо замѣтить, что опредѣленіе $d\omega/dt$ можно выполнить, и не имѣя точки $G$. Для этого будемъ разсуждать такъ:

Такъ какъ $\triangle Sab \sim \triangle GAB$, то имѣемъ соотношеніе

$$\frac{GA}{AB} = \frac{Sa}{ab},$$

откуда и находимъ, что

$$GA = \frac{Sa \cdot AB}{ab} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (q)$$

Что касается слагающихъ ускореній $j_n$ и $j_t$, то полученіе ихъ можетъ быть выполнено и безъ помощи центра ускореній $G$, если мы замѣтимъ, что

$$\angle GAB = \angle Sab = \alpha,$$

при чемъ этотъ уголъ $\alpha$ извѣстенъ намъ по треугольнику $Sab$. Такимъ образомъ, отложивъ на $AB$ при точкѣ $A$ уголъ $\alpha$ (въ должную сторону отъ $AB$) и опредѣливъ такимъ образомъ направленіе $AS'$ луча $AG$, разлагаемъ $j_A$ по направленію $AS'$ и направленію $At'$, ему перпендикулярному. Опредѣливъ такимъ путемъ $j_t$ и подставивъ вмѣсто $GA$ его выраженіе $(q)$, получимъ, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{j_t \cdot ab}{Sa \cdot AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (r)$$

Вопросъ, такимъ образомъ, разрѣшается вполнѣ.

Опредѣленіе $d\omega/dt$ можетъ быть, однако, произведено еще проще, если мы воспользуемся для него формулой (25),—стр. 66,—говорящей намъ, что

$$tg\mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Угломъ $\mu$ является здѣсь острый уголъ, образуемый направленіями отрѣзковъ $ab$ и $AB$, т.-е. уголъ $bCB$ или равный ему уголъ $xCy$ (фиг. 104). Пусть $\omega$ намъ извѣстно. Тогда, согласно (25), получаемъ:

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega^2 tg\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (t)$$

Это соотношеніе показываетъ, что *векторъ, изображающій угловое ускореніе* $d\omega/dt$, *представляетъ собою катетъ прямоугольнаго треугольника съ противолежащимъ ему угломъ* $\mu$, *при чемъ другимъ катетомъ, прилежащимъ углу* $\mu$, *является векторъ, изображающій въ томъ же масштабѣ величину* $(\omega^2)$.

Такимъ образомъ, построеніе вектора $d\omega/dt$ будетъ выполнено такъ:

Продолживъ прямую *ba* до пересѣченія въ *C* съ прямой *BA* и опредѣливъ такимъ путемъ уголъ $\mu$, откладываемъ на какой-либо его сторонѣ,—напримѣръ, на *Cy*,—векторъ *CD*, изображающій въ какомъ-либо масштабѣ величину $(\omega^2)$. Возставивъ теперь въ точкѣ *D* перпендикуляръ къ *Cy* и продолживъ его до пересѣченія въ *E* съ прямой *Ax*, опредѣлимъ такимъ путемъ векторъ *DE*, дающій собою угловое ускореніе $d\omega/dt$ въ томъ же масштабѣ, въ какомъ векторъ *CD* изображаетъ величину $(\omega^2)$.

Вопросъ о знакѣ величины $d\omega/dt$ разрѣшается или помощью графика угловыхъ скоростей $\omega$ или, проще, путемъ сопоставленія направленія, по которому идетъ $j_t$, съ направленіемъ вращенія вокругъ *P*, т.-е. вокругъ *G*. Намѣтивъ приблизительно мѣсто точки *G*, ставимъ вокругъ нея стрѣлку, идущую въ ту же сторону, что и стрѣлка вокругъ полюса *P*. Если теперь $j_t$ будетъ имѣть направленіе, *согласное* съ этой стрѣлкой, то ему слѣдуетъ приписать знакъ *плюсъ*; въ обратномъ случаѣ придется приписать минусъ.

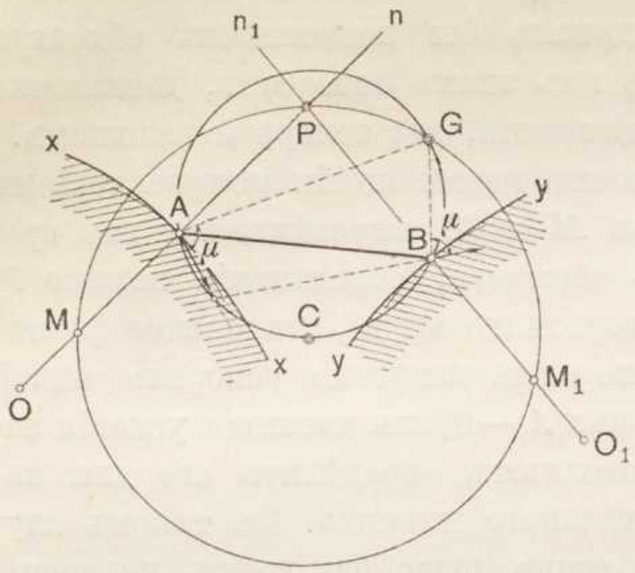
Этими соображеніями мы и закончимъ статью о планахъ ускореній и перейдемъ къ изслѣдованію основного случая плоскаго движенія, того именно, когда движеніе системы опредѣляется движеніемъ принадлежащаго ей отрѣзка *AB* по траекторіямъ его концовъ. Это изслѣдованіе дастъ намъ матеріалъ для установленія основаній графическаго метода нахожденія ускореній точекъ системы *AB* при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ начальныхъ данныхъ.

## § 19. Разборъ случая движенія отрѣзка по траекторіямъ его концовъ.

Рядъ заключеній, приведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, даетъ намъ возможность детально, съ точки зрѣнія опредѣленія скоростей и ускореній, изслѣдовать различные случаи плоскаго движенія, и одинъ изъ подобныхъ анализовъ мы произведемъ въ настоящемъ параграфѣ, взявъ для разбора случай движенія отрѣзка по траекторіямъ его концовъ. Случай этотъ мы разберемъ сначала въ общемъ его видѣ, а затѣмъ разсмотримъ тѣ частныя его модификаціи, съ которыми чаще всего приходится встрѣчаться на практикѣ. При этомъ мы получимъ возможность вывести рядъ заключеній и построеній, кои затѣмъ и будутъ положены въ основаніе общей теоріи динамическаго изслѣдованія механизмовъ, подробно разбираемой въ одной изъ главъ курса «Динамики механизмовъ», непосредственно примыкающаго къ курсу, излагаемому нами теперь.

Итакъ, пусть намъ данъ нѣкоторый подвижной отрѣзокъ *AB* (фиг. 106). При его движеніи концы *A* и *B* его описываютъ нѣкоторыя опредѣленныя траекторіи,—кривыя *xx* и *yy*. Полюсъ мгновеннаго вращенія найдется въ точкѣ пересѣченія нормалей къ этимъ кривымъ, проведенныхъ въ точкахъ ихъ *A* и *B*. Какъ извѣстно, направленія нор-

малей совпадаютъ съ направленіями радіусовъ кривизны, такъ что, если центры кривизны траекторій, соотвѣтствующіе точкамъ $A$ и $B$ ихъ, обозначимъ черезъ $O$ и $O_1$, то радіусы кривизны $OA$ и $O_1B$ будутъ направлены по нормалямъ $An$ и $Bn_1$, проведеннымъ въ тѣхъ же точкахъ $A$ и $B$. Такимъ образомъ, полюсъ мгновеннаго вращенія $P$ будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія радіусовъ $OA$ и $O_1B$ (или ихъ продолженій). Обозначимъ эти радіусы кривизны $OA$ и $O_1B$ черезъ $\varrho$ и $\varrho_1$. Поворотный кругъ можно найти при помощи уравненія (33), устанавливающаго связь между разстояніями точки,—положимъ, $A$,— до центра кривизны ея траекторіи ($=\varrho$), полюса ($=AP$) и круга кривизны ($=AM$), считая это послѣднее по тому же направленію $AO$. Это уравненіе, какъ мы знаемъ, имѣетъ видъ



Фиг. 106.

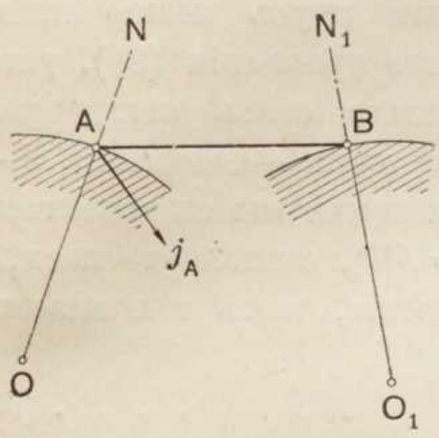
$$AP^2 = AM.\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

и даетъ, такимъ образомъ, возможность по двумъ изъ входящихъ въ него факторовъ опредѣлить третій. Принимая въ данномъ случаѣ извѣстными какъ $AP$ и $\varrho$, такъ и $BP$ и $\varrho_1$, сможемъ помощью этого уравненія опредѣлить двѣ точки, $M$ и $M_1$, поворотнаго круга, вмѣстѣ съ полюсомъ $P$ опредѣляющія его вполнѣ. Пусть это будетъ кругъ $C$. Если бы теперь ускореніе $j_A$ точки $A$ было намъ извѣстно по величинѣ и направленію, то, пользуясь пріемами, данными въ одномъ изъ предыдущихъ параграфовъ, мы могли бы найти на этомъ кругѣ $C$ центръ ускореній $G$, послѣ чего оказалось бы возможнымъ вполнѣ опредѣлить ускоренія всѣхъ остальныхъ точекъ системы отрѣзка $AB$. Вопросъ объ ускореніяхъ точекъ данной системы былъ бы, такимъ образомъ, исчерпанъ *). Такъ просто обстоитъ дѣло до тѣхъ поръ, пока построеніе круга $C$ остается выполнимымъ и, вообще, возможнымъ. Легко, однако, убѣдиться на дѣлѣ, что по мѣрѣ того, какъ, сообразно съ перемѣщеніемъ отрѣзка $AB$, полюсъ $P$ начинаетъ отходить все дальше и дальше, удаляясь въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ даже въ безконечность, а сплошь и рядомъ выходя изъ рамокъ чертежа (фиг. 107), построеніе круга $C$ оказывается все болѣе и болѣе затруднительнымъ, зачастую

*) Подобное же построеніе имѣло бы мѣсто и въ томъ случаѣ, если бы отрѣзокъ $AB$ опирался на кривую $yy$ не своей точкой $B$, а какой-нибудь кривой $ss$, жестко съ отрѣзкомъ скрѣпленной. Кривая $ss$ служила бы, такимъ образомъ, огибаемой, а $yy$— огибающей. Нахожденіе точки $M_1$ могло бы быть выполнено здѣсь помощью теоремы Савари, при посредствѣ формулы (39).

невозможнымъ, вслѣдствіе чего примѣненіе указаннаго выше непосредственнаго способа опредѣленія ускореній является уже невозможнымъ, и для достиженія поставленной цѣли необходимо имѣть какой-нибудь другой способъ, который давалъ бы возможность обходить представившееся затрудненіе. Одинъ изъ этихъ способовъ, достаточно простой, основанный на обращеніи движенія, мы теперь и изложимъ.

Пусть нашъ отрѣзокъ $AB$ при своемъ перемѣщеніи по траекторіямъ занялъ такое положеніе, что нормали $AN$ и $BN_1$ пересѣкаются внѣ предѣловъ чертежа (фиг. 107). Такимъ образомъ, опредѣленіе полюса $P$, а вмѣстѣ съ этимъ и проведеніе поворотнаго круга, становится фактически невозможнымъ. Допустимъ, что намъ извѣстно ускореніе одной только точки $A$,—пусть частныя условія заданія позволяютъ опредѣлять его для каждаго отдѣльнаго момента. Въ такомъ случаѣ достаточно было бы имѣть ускореніе еще одной точки системы,—напримѣръ, точки $B$,—чтобы, согласно пункту 2 параграфа 17 (стр. 105), найти центръ ускореній $G$, или, что еще проще, обойтись и безъ этого, построивъ, согласно сдѣланнымъ выше указаніямъ, планъ ускореній по типу фиг. 101 (стр. 108). Такимъ образомъ, вопросъ сводится къ изысканію такого способа, который давалъ бы возможность по данному $j_A$ опредѣлять ускореніе $j_B$ точки $B$ для любого положенія отрѣзка $AB$. Такъ формулируется содержаніе представившейся намъ задачи; излагаемый ниже пріемъ даетъ вполнѣ точный и исчерпывающій отвѣтъ на нее.

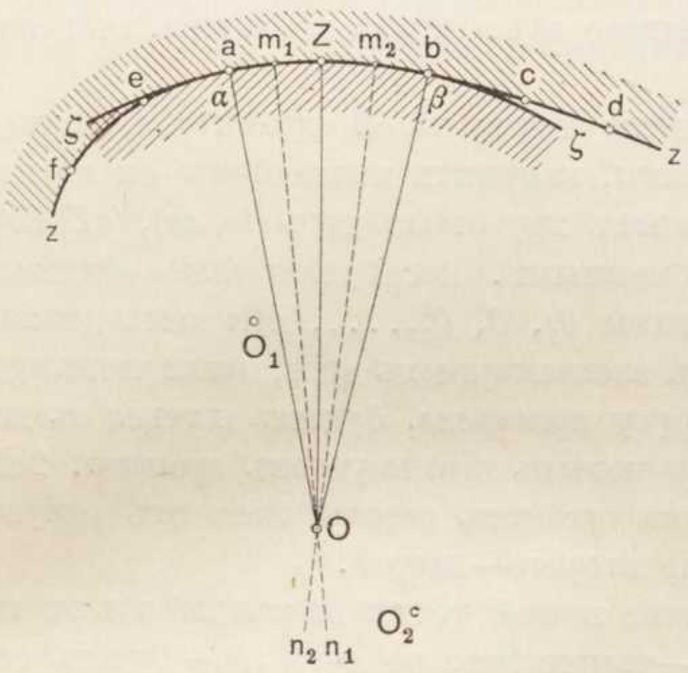


Фиг. 107.

Итакъ, пусть намъ данъ отрѣзокъ $AB$, перемѣщающійся такъ, что концы $A$ и $B$ его описываютъ траекторіи $xx$ и $yy$ (фиг. 106). Пусть, далѣе, условія заданія таковы, что позволяютъ опредѣлять въ любой моментъ движенія скорости и ускоренія одной лишь точки $A$; для непосредственнаго опредѣленія скоростей и ускореній другихъ точекъ,—въ томъ числѣ и точки $B$,—данныхъ не имѣется. Кривыя $xx$ и $yy$ предположимъ вполнѣ намъ извѣстными въ томъ смыслѣ, что намъ будутъ извѣстны какъ ихъ положеніе, такъ и теченіе,—радіусы кривизны, центръ кривизны и другіе геометрическіе ихъ факторы предполагаемъ извѣстными для каждаго ихъ элемента.

Замѣтивъ это, предположимъ, что мы застаемъ отрѣзокъ въ положеніи $AB$ (фиг. 107). Пусть центры кривизны траекторій $xx$ и $yy$ въ точкахъ $A$ и $B$ ихъ находятся соотвѣтственно въ $O$ и $O_1$. Хотя роль и значеніе центровъ кривизны въ дѣлѣ изученія свойствъ кривыхъ линій намъ уже извѣстны изъ курса анализа, тѣмъ не менѣе мы, имѣя въ виду особую важность этихъ точекъ въ данномъ случаѣ, разсмотримъ теперь, болѣе или менѣе детально, тѣ ихъ свойства, коими придется пользоваться при дальнѣйшихъ нашихъ изслѣдованіяхъ.

Мы знаемъ, что изъ всѣхъ круговъ, касательныхъ къ данной кривой въ данной ея точкѣ, кругъ кривизны имѣетъ наиболѣе тѣсное съ нею соприкосновеніе, имѣя здѣсь съ ней два общихъ безконечно-малыхъ элемента. Замѣтивъ это, предположимъ, что на нѣкоторой кривой $zz$ (фиг. 108) мы выдѣлили два рядомъ лежащихъ безконечно-малыхъ элемента $aZ$ и $Zb$. Чтобы найти центръ окружности, проходящій черезъ крайнія точки этихъ элементовъ,—$a$, $Z$ и $b$,—проведемъ хорды $aZ$ и $Zb$ и изъ серединъ $m_1$ и $m_2$ этихъ послѣднихъ возставимъ къ нимъ перпендикуляры $m_1n_1$ и $m_2n_2$; тогда точка $O$ пересѣченія этихъ нормалей и опредѣлитъ собою положеніе центра кривизны нашей кривой для взятаго нами безконечно малаго участка $aZb$ ея. Такъ какъ, очевидно, $aO = ZO = bO$, то окружность $\zeta\zeta$, описанная изъ центра $O$ радіусомъ $aO$, пройдетъ черезъ точки $a$, $Z$ и $b$, при чемъ, съ ошибкой до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ, можно утверждать, что элементъ $aZ$ кривой $zz$ сольется съ соотвѣтствующимъ ему элементомъ $\alpha Z$ окружности $\zeta\zeta$ круга кривизны, а элементъ $Zb$ кривой $zz$—съ элементомъ $Z\beta$ окружности $\zeta\zeta$. Это сліяніе элементовъ явится полнымъ въ предѣлѣ, когда точки $a$, $Z$ и $b$ окажутся смежными, рядомъ лежащими. Въ дальнѣйшемъ, ради простоты разсужденій, будемъ предполагать, что каждый изъ взятыхъ нами элементовъ кривой $zz$ сливается съ соотвѣтствующимъ ему элементомъ окружности $\zeta\zeta$ круга кривизны $O$, такъ что $aZ$ сливается съ $\alpha Z$, а $Zb$—съ $Z\beta$. Такимъ образомъ, точка $a$ слилась съ точкой $\alpha$, а точка $b$—съ точкой $\beta$.



Фиг. 108.

Предположимъ теперь, что нѣкоторая матеріальная точка, двигаясь по кривой $zz$, какъ по своей траекторіи, въ направленіи $fad$ (фиг. 108), пришла въ нѣкоторый моментъ въ точку $a$ этой кривой. Двигаясь дальше, она въ очередной безконечно-малый промежутокъ времени $dt$ пройдетъ элементъ $aZ$ своей траекторіи, а, значитъ, вмѣстѣ съ этимъ, и совпадающій съ нимъ элементъ $\alpha Z$ окружности круга кривизны $O$.

Выйдя изъ $Z$, наша точка въ теченіе слѣдующаго безконечно-малаго промежутка времени $dt$ пройдетъ элементъ $Zb$ своей траекторіи, а вмѣстѣ съ нимъ и элементъ $Z\beta$ окружности круга кривизны $O$. Такимъ образомъ, можно принять, что наша точка, вступивъ, при своемъ движеніи по кривой $zz$, въ точку $a(\alpha)$, будетъ затѣмъ, въ теченіе двухъ очередныхъ безконечно-малыхъ промежутковъ времени $2dt$, перемѣ-

щаться одновременно какъ по кривой $zz$, такъ и по окружности круга кривизны $O$, и пройдетъ, такимъ образомъ, два общихъ ихъ элемента $(aZ, \alpha Z)$ и $(Zb, Z\beta)$.

То же замѣчаніе имѣетъ силу и для всѣхъ остальныхъ элементовъ кривой $zz$, и мы можемъ поэтому сказать, что передъ тѣмъ, какъ вступить въ точку $a$, наша точка въ теченіе предыдущихъ $2dt$ прошла два смежныхъ элемента своей траекторіи,—элементы $fe$ и $ea$ (фиг. 108),—которые можно принять принадлежащими въ то же самое время и окружности здѣшняго круга кривизны, имѣющаго центръ гдѣ-либо въ $O_1$. Подобнымъ же образомъ, выйдя изъ $b$, наша точка въ теченіе двухъ очередныхъ промежутковъ времени, $2dt$, пройдетъ два слѣдующихъ смежныхъ элемента своей траекторіи, $bc$ и $cd$, совпадающіе съ элементарными участками проходящаго здѣсь круга кривизны, съ центромъ гдѣ-либо въ $O_2$, и т. д.

Итакъ, дѣйствительное движеніе точки по ея траекторіи можно, съ какой угодно степенью точности, замѣнить движеніемъ ея по непрерывному ряду паръ элементарныхъ круговыхъ дугъ $(fe, ea)$, $(aZ, Zb)$, $(bc, cd)$,...., принадлежащихъ смежнымъ, послѣдовательно смѣняющимъ другъ друга кругамъ кривизны $O_1$, $O$, $O_2$,...., при чемъ движеніе точки по каждой парѣ такихъ элементарныхъ дугъ, принадлежащей какому-либо одному и тому же кругу кривизны, будетъ длиться въ теченіе двухъ смежныхъ безконечно-малыхъ промежутковъ времени, $2dt$; въ теченіе перваго изъ нихъ точка пройдетъ первый элементъ окружности круга кривизны, въ теченіе второго—второй.

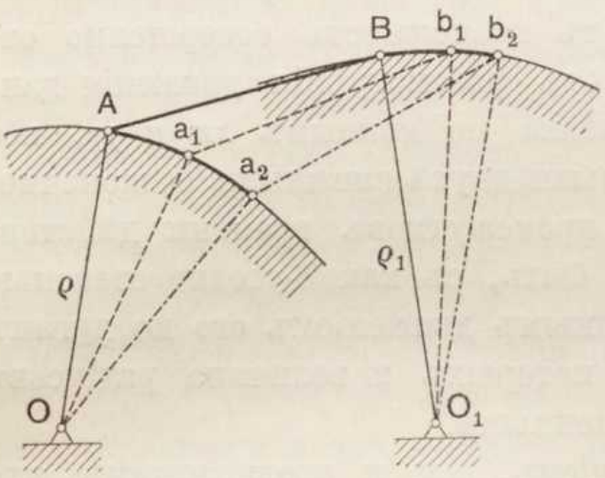
Ясно, кромѣ того, что движеніе нашей точки по каждой изъ этихъ элементарныхъ круговыхъ дугъ,—напримѣръ, по дугѣ $a\beta$,—будетъ совершаться съ той же скоростью, съ какой оно протекаетъ въ дѣйствительности по совпадающей съ ней элементарной дугѣ $(ab)$ траекторіи, ибо обѣ эти дуги проходятся точкой одновременно. Отсюда слѣдуетъ, что движеніе нашей точки по всему комплексу элементарныхъ круговыхъ дугъ $(\alpha\beta)$, замѣняющему собою дѣйствительную траекторію $zz$ нашей точки, будетъ совершаться съ тѣми же скоростями, а значитъ, и ускореніями, съ какими выполняется и дѣйствительное движеніе точки по ея траекторіи.

Это замѣчаніе очень важно, ибо позволяетъ свести изученіе даннаго движенія точки по данной кривой $zz$ на изученіе ряда элементарныхъ круговыхъ движеній, непрерывно смѣняющихъ другъ друга и совершающихся каждое вдоль пары элементарныхъ дугъ окружности соотвѣтствующаго круга кривизны, имѣющаго вполнѣ опредѣленный центръ и радіусъ, при чемъ скорости и ускоренія такого подставного движенія (комплекса круговыхъ движеній) будутъ оставаться тѣми же (какъ по величинѣ, такъ и по направленію), какими онѣ оказываются въ дѣйствительности, при заданномъ движеніи точки.

Замѣтивъ все это, предположимъ, что въ разсматриваемый моментъ мы застаемъ нашъ отрѣзокъ $AB$ въ положеніи, изображенномъ на

фиг. 107. Пусть центры кривизны траекторій $xx$ и $yy$ въ точкахъ $A$ и $B$ ихъ находятся соотвѣтственно въ точкахъ $O$ и $O_1$. Давъ точкѣ $A$ какое-либо безконечно-малое перемѣщеніе $\delta s$, мы тѣмъ самымъ вызовемъ также безконечно-малое перемѣщеніе $\delta s_1$ точки $B$, и несомнѣнно, что перемѣщеніе $\delta s$ точки $A$ всегда можно подобрать такъ, чтобы какъ оно, такъ и соотвѣтствующее ему перемѣщеніе $\delta s_1$ не вышли изъ предѣловъ тѣхъ дугъ, на протяженіи коихъ траекторіи точекъ сливаются съ окружностями здѣшнихъ круговъ кривизны.

Предположимъ теперь, что въ теченіе перваго промежутка времени $dt$ точка $A$ совершила безконечно-малое перемѣщеніе $Aa_1$, а въ теченіе второго—также безконечно-малое перемѣщеніе $a_1a_2$ (фиг. 109); соотвѣтствующими перемѣщеніями точки $B$ пусть являются перемѣщенія $Bb_1$ и $b_1b_2$. Согласно сказанному выше, общее (за время $2dt$) перемѣщеніе $Aa_2$ точки $A$ можно подобрать такимъ, чтобы какъ оно, такъ и соотвѣтствующее ему перемѣщеніе $Bb_2$ не вышли изъ предѣловъ тѣхъ общихъ дугъ, кои имѣются у траекторій $xx$ и $yy$ съ кругами $O$ и $O_1$. Пусть перемѣщенія $Aa_2$ и $Bb_2$ удовлетворяютъ этому основному требованію. Въ такомъ случаѣ можно будетъ сказать, что за время $2dt$ нашъ неизмѣняемый отрѣзокъ перемѣщается такъ, что конецъ его продвигается по круговой дугѣ $Aa_1a_2$ опредѣленнаго центра $O$ и радіуса $OA = \varrho$, а конецъ $B$—по своей, также круговой, дугѣ $Bb_1b_2$ опредѣленнаго центра $O_1$ и радіуса $O_1B = \varrho_1$, какъ это и изображено на фиг. 109.

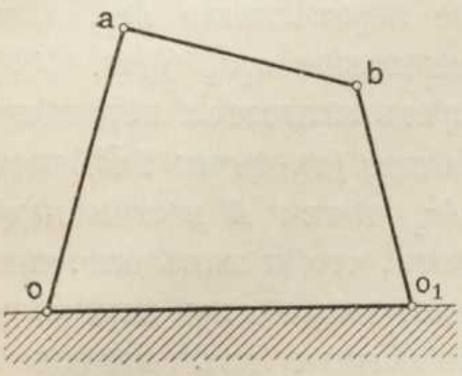



Фиг. 109.

По истеченіи этого времени $2dt$ каждая изъ этихъ точекъ, перемѣщаясь дальше по своей траекторіи, перейдетъ на окружность слѣдующаго, смежнаго круга кривизны съ отличнымъ уже отъ перваго центромъ и радіусомъ; по этой окружности точка будетъ перемѣщаться въ теченіе двухъ слѣдующихъ промежутковъ времени $(2dt)_1$; затѣмъ она перейдетъ на окружность слѣдующаго круга кривизны и т. д. Сообразно съ этимъ, дѣйствительное перемѣщеніе нашего отрѣзка по кривымъ $xx$ и $yy$ можно разсматривать, какъ рядъ послѣдовательныхъ проскальзываній его по окружностямъ послѣдовательныхъ круговъ кривизны, при чемъ каждое изъ этихъ скольженій будетъ длиться лишь два безконечно-малыхъ промежутка времени.

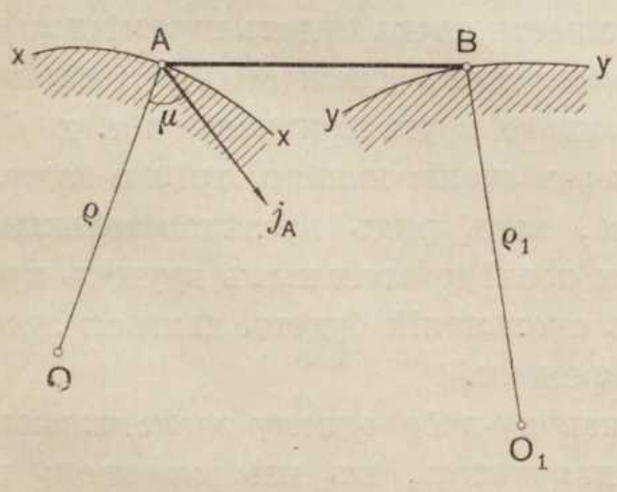
Присматриваясь детальнѣе къ какому-либо одному элементарному проскальзыванію подобнаго рода,—напримѣръ, къ изображенному на фиг. 109,—можемъ сказать, что въ теченіе двухъ промежутковъ времени $2dt$, пока концы отрѣзка $AB$ двигаются по окружностямъ $O$ и $O_1$, это движеніе его можно уподобить движенію звена $ab$ въ такъ назы-

ваемомъ шарнирномъ четыреугольникѣ $oabo_1$ (фиг. 110): въ теченіе двухъ смежныхъ безконечно-малыхъ промежутковъ времени ($2dt$) точки $A$ и $B$ нашего отрѣзка $AB$ (фиг. 109) движутся такъ, какъ если бы онѣ были соединены неизмѣняемыми стержнями $OA$ и $O_1B$ съ неподвижными центрами $O$ и $O_1$, вокругъ которыхъ эти стержни вращаются.—Детальному изученію движенія шарнирныхъ четыреугольниковъ типа $aobo_1$ (фиг. 110) въ разныхъ его модификаціяхъ будетъ посвящена отдѣльная глава. Отмѣтимъ кстати, что указанное разбиваніе даннаго движенія на рядъ элементарныхъ и замѣна этихъ послѣднихъ нѣкоторыми круговыми движеніями, вполнѣ опредѣленными, несомнѣнно, весьма значительно упрощаетъ анализъ даннаго движенія, могущаго имѣть иногда весьма прихотливый характеръ; предлагаемый методъ даетъ возможность совершенно отвлечься отъ разсмотрѣнія движенія даннаго отрѣзка по кривымъ $xx$ и $yy$, ибо для каждыхъ двухъ смежныхъ безконечно-малыхъ промежутковъ времени дѣйствительное перемѣщеніе отрѣзка можетъ быть, съ какой-угодно степенью точности, замѣнено вполнѣ опредѣленнымъ движеніемъ его по дугамъ двухъ круговъ, положеніе центровъ которыхъ и величина радіусовъ являются, при этомъ, вполнѣ опредѣленными.



Фиг. 110.

Согласно съ такимъ представленіемъ, мы и предположимъ, что разсмотрѣнію нашему подлежитъ тотъ участокъ движенія отрѣзка $AB$, когда этотъ послѣдній, въ теченіе двухъ смежныхъ безконечно малыхъ промежутковъ времени, $2dt$, движется такъ, что концы $A$ и $B$ его перемѣщаются по окружностямъ круговъ кривизны $O$ и $O_1$ (фиг. 111), радіусы $OA$ и $O_1B$ коихъ намъ извѣстны и равны соотвѣтственно $\rho$ и $\rho_1$. По условію, ускореніе $j_A$ точки $A$ извѣстно намъ какъ по величинѣ, такъ и по направленію, и требуется найти ускореніе еще одной точки системы $AB$,—за нее мы выбрали точку $B$, такъ что искомымъ является $j_B$. Опредѣленіе его можно выполнить различно; мы примѣнимъ весьма простой искусственный пріемъ, состоящій въ слѣдующемъ:



Фиг. 111.

*Сообщимъ всей системѣ* шарнирнаго *четыреугольника* $OABO_1$, т.-е. какъ отрѣзку $AB$, такъ и неподвижной плоскости, несущей на себѣ точки $O$ и $O_1$, *добавочное движеніе, обратное движенію точки* $B$ и, значитъ, совершающееся въ каждый моментъ со скоро-

стями, равными скоростямъ точки $B$, но имъ прямопротивоположными. Чтобы разобраться въ получающемся такимъ образомъ новомъ, результирующемъ движеніи, представляющемъ сочетаніе заданнаго движенія (фиг. 111) съ движеніемъ, обратнымъ движенію точки $B$, обратимся къ схемѣ, представленной на фиг. 112; схема эта удобна тѣмъ, что даетъ расчлененіе разсматриваемаго движенія по отдѣльнымъ моментамъ $(dt)_1$ и $(dt)_2$ его. Разсмотримъ каждый изъ этихъ моментовъ отдѣльно.

Къ концу перваго промежутка времени $(dt)_1$ система $AB$ перешла въ положеніе $a_1b_1$, такъ что точка $A$ перемѣстилась по круговой дугѣ $Aa_1$ изъ своего начальнаго положенія $A$ въ новое $a_1$; одновременно съ этимъ точка $B$ перешла по круговой дугѣ $Bb_1$ изъ $B$ въ $b_1$. Такъ какъ дуги $Aa_1$ и $Bb_1$ безконечно малы, то ихъ можно принять совпадающими съ хордами $Aa_1$ и $Bb_1$ и сказать, что точки $A$ и $B$ перешли въ ихъ новыя положенія $a_1$ и $b_1$, перемѣщаясь по прямымъ $Aa_1$ и $Bb_1$. Утвержденіе это будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше промежутокъ $(dt)_1$, и становится вполнѣ точнымъ въ предѣлѣ, при $dt = 0$, когда хорды $Aa_1$ и $Bb_1$ переходятъ въ касательныя въ точкахъ $A$ и $B$. Обратимъ теперь вниманіе на точку $B$ и обозначимъ направленіе $Bb_1$ стрѣлкой $s_1$.

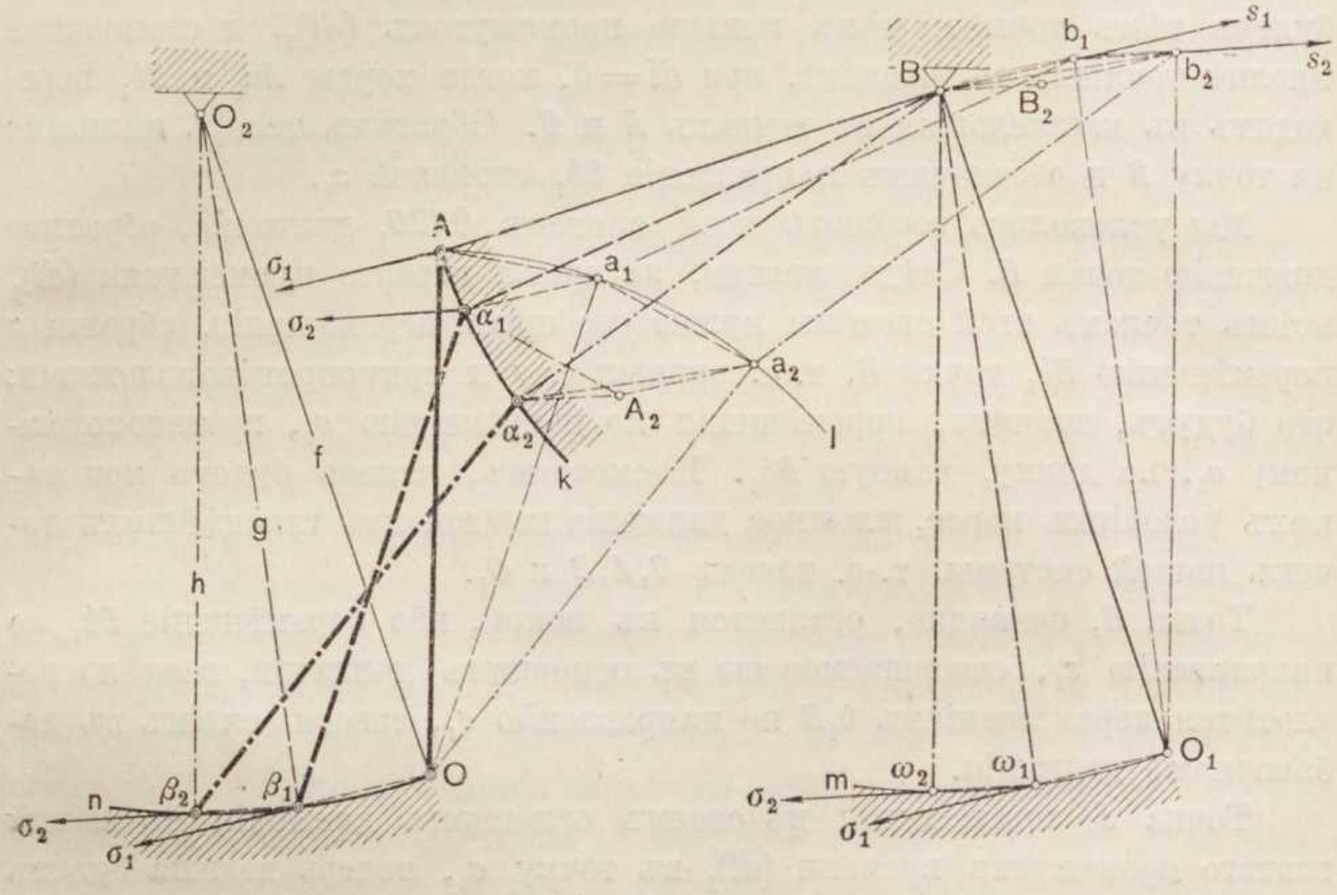
Мы условились сообщать всей системѣ $OABO_1$ движеніе, обратное движенію точки $B$. Слѣдовательно, за время перваго промежутка $(dt)_1$ всѣмъ точкамъ этой системы нужно сообщить перемѣщенія, обратныя перемѣщенію $Bb_1$ точки $B$, т.-е. равныя ему и прямопротивоположныя; это будутъ, значитъ, перемѣщенія по направленію $\sigma_1$, противоположному $s_1$, на длину, равную $Bb_1$. Посмотримъ, каково будетъ при такихъ условіяхъ новое, сложное движеніе каждой изъ главнѣйшихъ точекъ нашей системы, т.-е. точекъ $O, A, B$ и $O_1$.

Точка $B$, очевидно, останется въ покоѣ, ибо перемѣщеніе $Bb_1$ по направленію $s_1$, совершаемое ею въ основномъ движеніи, всецѣло поглотится перемѣщеніемъ $b_1B$ по направленію $\sigma_1$, совершаемымъ въ добавочномъ движеніи.

Точка $A$, приходящая въ своемъ основномъ движеніи въ концѣ взятаго промежутка времени $(dt)_1$ въ точку $a_1$, теперь должна будетъ испытать еще добавочное перемѣщеніе, равное и параллельное перемѣщенію $b_1B$. Такимъ образомъ, мѣсто точки $A$ въ концѣ времени $(dt)_1$ найдемъ, сложивъ геометрически дѣйствительное перемѣщеніе $Aa_1$ съ дополнительнымъ перемѣщеніемъ $a_1\alpha_1$, равнымъ и параллельнымъ $b_1B$. Такимъ образомъ, въ концѣ промежутка $(dt)_1$ точка $A$ окажется въ $\alpha_1$, и траекторіей теперешняго сложнаго движенія ея окажется хорда $A\alpha_1$. Попутно замѣтимъ слѣдующее: разъ $a_1\alpha_1 \# b_1B$, то и $b_1a_1 \# B\alpha_1$; а такъ какъ, вслѣдствіе неизмѣняемости системы $BA$, имѣемъ $b_1a_1 = BA$, то и оказывается, что $B\alpha_1 = BA$, какъ этого и слѣдовало ожидать.

Перейдемъ теперь къ точкѣ $O$. Собственной скорости эта точка не имѣетъ; поэтому новое положеніе ея получимъ, перемѣстивъ ее по направленію $\sigma_1$ на величину $O\beta_1$, равную $b_1B$. Такъ какъ $O\beta_1 \# a_1\alpha_1$, то $Oa_1 \# \beta_1\alpha_1$, и, значитъ, $\beta_1\alpha_1 = OA$, какъ и должно быть, ибо точка $\beta_1$

есть перемѣстившаяся точка $O$, точка $\alpha_1$—перемѣстившаяся точка $A$, а отрѣзокъ $AO$ своей величины не мѣняетъ.—Далѣе, если изъ $O$ проведемъ лучъ $Of \parallel O_1B$, а изъ $\beta_1$—лучъ $\beta_1 g \parallel O_1 b_1$, и продолжимъ эти лучи до пересѣченія въ нѣкоторой точкѣ $O_2$, то, въ виду равенства треугольниковъ $O_2O\beta_1$ и $O_1Bb_1$, получимъ, что $O_2O = O_2\beta_1 = O_1B = \varrho_1$. Положеніе этой точки $O_2$, играющей въ дальнѣйшемъ весьма важную роль, находится, какъ видимъ, очень просто: замѣчая, что вершина $O_2$ треугольника $O_2O\beta_1$ повернута относительно основанія его $O\beta_1$ въ сторону, противоположную той, по какую лежитъ вершина $O_1$ треугольника $O_1Bb_1$ относительно своего основанія $Bb_1$, мы для нахожденія точки $O_2$ проводимъ изъ $O$ лучъ $Of \parallel O_1B$ и откладываемъ на немъ отъ точки $O$ отрѣзокъ $OO_2$, равный $O_1B$, т.-е. $\varrho_1$, по направленію $O_1B$, идущему отъ центра $O_1$ кривизны дѣйствительной траекторіи $yy$ къ точкѣ $B$.




Фиг. 112.

Наконецъ, что касается точки $O_1$, собственной скорости, подобно точкѣ $O$, не имѣющей, то новое положеніе ея, $\omega_1$, получимъ, продвинувъ ее по направленію $\sigma_1$ на величину $O_1\omega_1$, равную $b_1B$. Въ виду соотношенія $b_1B \# O_1\omega_1$ находимъ, что $B\omega_1 \# b_1O_1$, откуда вытекаетъ, что $B\omega_1 = BO_1$. Понятно, также, что $OO_1 = \beta_1\omega_1$.

Итакъ, въ концѣ перваго промежутка времени $(dt)_1$ наша система $OABO_1$ въ новомъ своемъ, искусственномъ движеніи окажется въ положеніи $\beta_1\alpha_1 B\omega_1$ (фиг. 112), при чемъ соотвѣтствующія точки этихъ системъ расположатся такъ: точки $\beta_1$ и $O_1$ будутъ находиться на одномъ и томъ же разстояніи $\varrho_1$ отъ нѣкоторой опредѣленной точки $O_2$ неподвижной плоскости; точка $B$ будетъ оставаться на томъ же мѣстѣ, на ка-

комъ она находилась въ началѣ разсматриваемаго промежутка, т.-е. останется неподвижной; точки $a_1$ и $A$ окажутся отстоящими отъ $B$ на одномъ и томъ же разстояніи $AB$, и, наконецъ, точки $\omega_1$ и $O_1$ будутъ находиться на одномъ и томъ же разстояніи, равномъ $\rho_1$, отъ одной и той же, теперь неподвижной, точки $B$.

Перейдемъ теперь ко второму промежутку времени, $(dt)_2$, въ теченіе коего точка $B$ въ основномъ своемъ движеніи переходитъ изъ положенія $b_1$ въ положеніе $b_2$, двигаясь по круговой дугѣ $b_1b_2$. По малости этой дуги, ее, подобно предыдущему, можно принять совпадающей съ ея хордой $b_1b_2$ и сказать, что точка $B$ перешла изъ положенія $b_1$ въ положеніе $b_2$, пройдя по направленію $b_1b_2$, обозначенному стрѣлкой $s_2$, путь, равный $b_1b_2$. Въ виду этого мы и должны теперь всей нашей системѣ $OABO_1$, занимающей къ началу промежутка времени $(dt)_2$ положеніе $\beta_1a_1B\omega_1$, придать, въ дополненіе къ основнымъ перемѣщеніямъ ея, еще перемѣщеніе, равное $b_1b_2$, но ему прямопротивоположное, иначе говоря, перемѣщеніе, равное $b_2b_1$ и совершающееся по направленію $\sigma_2$, обратному $s_2$. Не трудно сообразить, къ какимъ результатамъ приведетъ это насъ.

Очевидно, что точка $B$ снова останется въ покоѣ, ибо, испытывая въ прямомъ движеніи перемѣщеніе $b_1b_2$ въ направленіи $s_2$, она получитъ въ добавочномъ движеніи перемѣщеніе $b_2b_1$ въ направленіи $\sigma_2$, противоположномъ $s_2$.

Далѣе, точка $A$, находящаяся теперь въ $a_1$, должна будетъ испытать одновременно два перемѣщенія: 1) перемѣщеніе отъ основного движенія, равное и параллельное перемѣщенію $a_1a_2$, и 2) перемѣщеніе добавочнаго движенія, равное и параллельное перемѣщенію $b_2b_1$. Такимъ образомъ, новое положеніе точки $A$ получимъ, сложивъ геометрически перемѣщеніе $a_1A_2 \# a_1a_2$ съ перемѣщеніемъ $A_2a_2 \# b_2b_1$; это сложеніе ихъ дастъ перемѣщеніе $a_1a_2$ сложнаго движенія, такъ что мѣстомъ точки $A$ въ концѣ второго промежутка времени $(dt)_2$ явится точка $a_2$. Не трудно, аналогично предыдущему, убѣдиться, что и здѣсь $Ba_2 = BA$, какъ это и должно быть по самому существу дѣла.

Что касается точки $O$, находящейся въ началѣ второго промежутка $(dt)_2$ въ $\beta_1$, то къ концу его она перемѣстится по направленію $\sigma_2$ на величину $\beta_1\beta_2$, равную $b_2b_1$. Въ виду равенства треугольниковъ $\beta_2\beta_1O$, $a_2A_2a_2$ и $BB_2b_2$, соотвѣтствующія стороны коихъ расположены параллельно, легко показать, что $a_2\beta_2 = AO$. Кромѣ того, соединивъ $\beta_2$ съ $O_2$, находимъ, что $\beta_2O_2 = \beta_1O_2 = OO_2 = \rho_1 = b_2O_1$.

Наконецъ, точка $\omega_1$ переходитъ въ $\omega_2$, при чемъ $\omega_1\omega_2 \# b_2b_1$ и $B\omega_1 = B\omega_2 = BO_1$, а, кромѣ того, $\beta_2\omega_2 = \beta_1\omega_1 = OO_1$.

Такимъ образомъ, къ концу второго промежутка времени наша система въ своемъ новомъ, искусственномъ движеніи займетъ положеніе $\beta_2a_2B\omega_2$. Присмотримся теперь нѣсколько ближе къ полученнымъ результатамъ и постараемся выяснить на основаніи ихъ характеръ полученнаго нами новаго движенія, для чего разсмотримъ теперешнее движеніе каждой точки отдѣльно.

Точка $B$ въ продолженіе всего взятаго нами промежутка времени $[(dt)_1 + (dt)_2]$,—ради сокращенія письма, этотъ промежутокъ въ дальнѣйшемъ будемъ обозначать прямо черезъ $2dt$, полагая, иначе говоря, $(dt)_1 = (dt)_2 = dt$,—будетъ оставаться въ покоѣ.

Точка $A$ за это же время совершитъ перемѣщеніе $A\alpha_1\alpha_2$. Такъ какъ точки $A$, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ его находятся на одномъ и томъ же разстояніи, равномъ $AB$, отъ точки $B$, теперь неподвижной, и такъ какъ пути $A\alpha_1$ и $\alpha_1\alpha_2$ безконечно малы, то и можно принять, что теперешняя траекторія $A\alpha_1\alpha_2$ точки $A$ представляетъ собою дугу окружности съ центромъ въ $B$. Итакъ, за взятое время $2dt$ точка $A$ будетъ двигаться по дугѣ $Ak$ окружности, описанной изъ центра $B$ радіусомъ $BA$.

На основаніи соображеній, аналогичныхъ вышеприведеннымъ, можемъ установить, далѣе, что въ новомъ движеніи нашей системы точка $O_1$ будетъ перемѣщаться по окружности центра $B$ и постояннаго (за время $2dt$) радіуса $BO_1 = \varrho_1$, а точка $O$—по дугѣ $On$ окружности неподвижнаго центра $O_2$ и постояннаго (за время $2dt$) радіуса $O_2O$, равнаго $\varrho_1$. Отмѣтимъ еще разъ, что положеніе этого центра $O_2$ опредѣляется путемъ проведенія луча $Of \parallel O_1B$ и отложенія на немъ отъ точки $O$ отрѣзка $OO_2$, равнаго $\varrho_1$, въ направленіи, обратномъ $BO_1$.

Сопоставляя это движеніе точки $O$ съ прежнимъ, дѣйствительнымъ движеніемъ точки $B$ по дугѣ $Bb_1b_2$, видимъ, что движеніе точки $O$ совершается какъ бы по той же дугѣ $Bb_1b_2$, но лишь повернутой около $B$ на $180^0$ и перенесенной затѣмъ параллельно самой себѣ до совпаденія точки $B$ съ точкой $O$,—центръ $O_1$ дуги $Bb_2$ попадетъ при этомъ въ $O_2$, а сама дуга $Bb_2$ сольется съ дугой $O\beta_1\beta_2$; въ этомъ именно смыслѣ и можно сказать, что точка $O$ описываетъ траекторію, *обратную траекторіи точки* $B$. Очевидно, кромѣ того, что движеніе точки $O$ по теперешней траекторіи ея $O\beta_2$ будетъ совершаться со скоростями, равными скоростямъ дѣйствительнаго движенія точки $B$ по траекторіи $Bb_2$ ея, но имъ прямопротивоположными. Дѣйствительно, если $Bb_1 = ds_1$, то $O\beta_1 = -ds_1$; поэтому для перваго промежутка времени $dt$ скорость $v_1$ точки $B$ и скорость $w_1$ точки $O$ выразятся такъ: $v_1 = ds/dt$ и $w_1 = -ds/dt$, откуда и слѣдуетъ, что $w_1 = -v_1$. Для слѣдующаго момента имѣемъ аналогично, что $w_2 = -v_2$.

Но разъ такъ, разъ скорости точки $O$ равны скоростямъ точки $B$, но имъ прямопротивоположны, то и измѣненія $\Delta w$ этихъ скоростей $w$ за какое-либо время $\Delta t$ будутъ равны измѣненіямъ $\Delta v$ скоростей $v$ за то же время и опять имъ прямопротивоположны. Отсюда, очевидно, слѣдуетъ, что

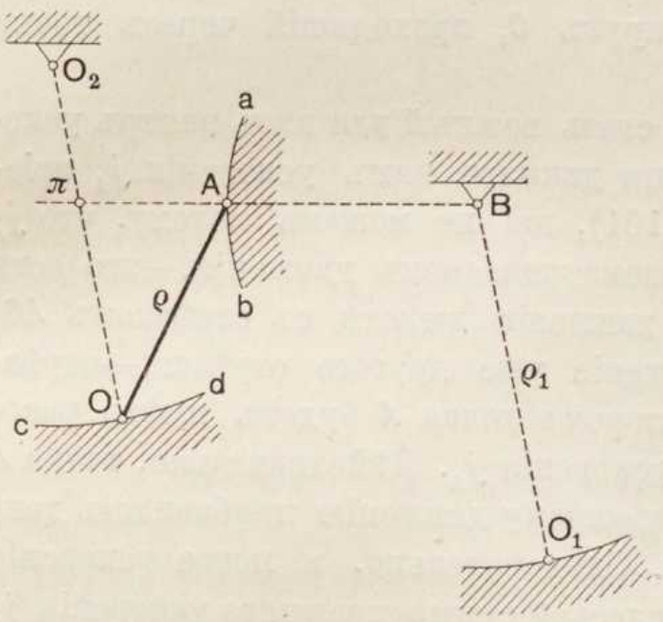
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\Delta w}{\Delta t},$$

что въ предѣлѣ, при $\Delta t = 0$, и даетъ намъ равенство

$$j_B = -j_O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41).$$

Это соотношеніе чрезвычайно важно; оно показываетъ, что отысканіе ускоренія $j_B$ въ дѣйствительномъ движеніи системы $AB$ можетъ быть замѣнено отысканіемъ ускоренія $j_O$ точки $O$ въ новомъ, искусственномъ движеніи нашей системы, ибо, отыскавъ это $j_O$ и взявъ его съ обратнымъ знакомъ, т.-е. взявъ ускореніе, равное $j_O$, но ему прямопротивоположное, мы и получимъ искомое ускореніе $j_B$. Дальнѣйшія выкладки покажутъ, что отысканіе этого ускоренія $j_O$ производится весьма просто и удобно для всѣхъ положеній отрѣзка $AB$,—даже и тогда, когда полюсъ $P$ дѣйствительнаго движенія системы $AB$ уходитъ въ безконечность.

Итакъ, вопросъ объ опредѣленіи $j_B$ свелся къ вопросу объ опредѣленіи $j_O$ въ новомъ, искусственномъ движеніи системы $AB$; разрѣшеніемъ этого новаго вопроса мы теперь и займемся, для чего обратимся къ детальному разсмотрѣнію полученнаго нами искусственнаго движенія системы $AB$. Представляется оно теперь такъ: точка $B$ остается неподвижной, точка $A$ движется по круговой дугѣ $ab$ центра $B$ и радіуса $BA$, а точка $O$—по круговой дугѣ $cd$ центра $O_2$ и радіуса $O_2O$, равнаго $\varrho_1$ (фиг. 113); о движеніи точки $O_1$, нами также выясненномъ, мы упоминать не будемъ, ибо никакой роли въ дальнѣйшемъ она не играетъ. Замѣчая теперь, что точки $A$ и $O$ принадлежатъ системѣ отрѣзка $AO$, величина коего остается въ продолженіе всего этого времени $2dt$ неизмѣнной, ибо $AO = \varrho$, — радіусу кривизны траекторіи точки $A$,— заключаемъ, что наше новое искусственное движеніе сводится къ движенію постояннаго по своей длинѣ (для $2dt$) отрѣзка $AO = \varrho$ по траекторіямъ его концовъ,—окружностямъ центровъ $O_2$ и $B$ и радіусовъ $O_2O = \varrho_1$ и $AB$. И вотъ оказывается, что это послѣднее движеніе весьма удобно для отысканія въ немъ, согласно (41), ускоренія точки $O$ уже обычнымъ порядкомъ, помощью поворотнаго круга, строящагося здѣсь очень удобно при посредствѣ теоремы, упоминавшейся нами въ началѣ этого параграфа и выражаемой соотношеніемъ (33)




Фиг.113.

$$AP^2 = \varrho \,.\, AM, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

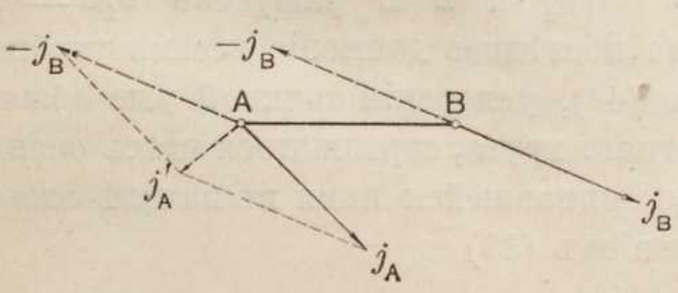
гдѣ $\varrho$ есть радіусъ кривизны траекторіи точки $A$, $P$—полюсъ, а $M$—точка поворотнаго круга, лежащая въ пересѣченіи его съ радіусомъ $\varrho$ или съ его продолженіемъ.

Въ данномъ случаѣ радіусы кривизны траекторій точекъ $A$ и $O$ намъ извѣстны—это $BA$ и $O_2O = O_1B = \varrho_1$. Найдемъ полюсъ разсматриваемаго движенія. Онъ будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія нормалей къ траекторіямъ точекъ $A$ и $O$; этими нормалями будутъ служить здѣсь радіусы $O_2O$ и $BA$ (или продолженіе этого послѣдняго $A\pi$). Въ пересѣченіи ихъ,—въ точкѣ $\pi$,—и будетъ лежать искомый полюсъ. Получивъ его, найдемъ необходимые намъ отрѣзки типа $AP$,—это будутъ отрѣзки $A\pi$ и $O\pi$, и теперь соотношеніе (33), примѣненное два раза,—къ точкѣ $A$ и къ точкѣ $O$ нашего отрѣзка $AO$,—перепишется такъ:

$$\left.\begin{aligned} A\pi^2 &= AB \,.\, AM_1, \\ O\pi^2 &= OO_2 \,.\, OM_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33')$$

гдѣ черезъ $M_1$ и $M_2$ обозначены точки поворотнаго круга, лежащія въ пересѣченіи его съ радіусами $BA$ и $O_2O$. Написанныя соотношенія дадутъ намъ возможность найти отрѣзки $AM_1$ и $OM_2$, а, слѣдовательно, двѣ точки $M_1$ и $M_2$ поворотнаго круга. Такъ какъ третья точка его у насъ уже есть,—это полюсъ $\pi$,—то искомый поворотный кругъ будетъ вполнѣ опредѣленъ,—это будетъ кругъ $C$, проходящій черезъ точки $M_1$, $\pi$ и $M_2$ (см. ниже, фиг. 118).

Теперь на немъ нужно найти столь важный для насъ центръ ускореній $G$. Построить его при помощи даннаго намъ ускоренія $j_A$ пріемомъ, приведеннымъ выше (стр. 101), мы не можемъ потому, что $j_A$ не есть ускореніе точки $A$ въ разсматриваемомъ движеніи,—это есть ускореніе точки $A$ въ прямомъ ея движеніи вмѣстѣ съ отрѣзкомъ $AB$, мы же разсматриваемъ здѣсь движеніе уже другого отрѣзка,—отрѣзка $AO$,—движеніе составное, въ которомъ точка $A$ будетъ имѣть ускореніе, уже отличное отъ прежняго ускоренія $j_A$. Дѣйствительно, точка $A$ движется теперь такъ, что къ ея прежнему движенію прибавилось движеніе, обратное движенію точки $B$. Слѣдовательно, и новое ускореніе точки $A$, $j_A'$, будетъ равно геометрической суммѣ прежняго ускоренія $j_A$ и ускоренія $(-j_B)$, равнаго и обратнаго ускоренію $j_B$ точки $B$ въ прямомъ ея движеніи (фиг. 114).



Фиг. 114.

Такимъ образомъ, способъ нахожденія центра $G$ по данному ускоренію $j$ какой-нибудь точки системы, изложенный выше (см. стр. 102), въ данномъ случаѣ непримѣнимъ,—требующееся здѣсь ускореніе $j_A'$ точки $A$ намъ неизвѣстно. Поэтому остается примѣнить способъ непосредственнаго подсчета угла $\mu$, образуемаго векторомъ $PG$ съ діаметромъ $PK$ (ср. фиг. 66 и др.).

Обозначимъ мгновенную угловую скорость вращенія системы

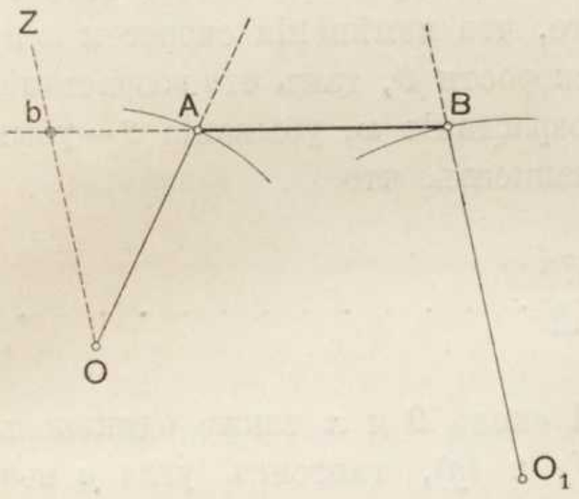
отрѣзка $AO$ около полюса $\pi$ черезъ $\omega$. Тогда, согласно форм. (25), тангенсъ этого угла $\mu$ выразится такъ:

$$tg\mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Посмотримъ теперь, какъ выражается эта угловая скорость $\omega$ по другимъ угловымъ скоростямъ, относящимся къ прямому движенію отрѣзка $AB$. Для этого примемъ во вниманіе, что скорость точки $O$ въ новомъ, подставномъ движеніи равна и противоположна скорости точки $B$ въ прямомъ движеніи отрѣзка $AB$:

$$v_O = -v_B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Пусть въ прямомъ движеніи отрѣзка $AB$ звено $OA$ вращается около центра $O$ съ угловой скоростью $\vartheta$. Тогда, проводя $OZ \parallel O_1B$ до пересѣченія съ $AB$ въ точкѣ $b$ (фиг. 115), найдемъ, согласно ур. (3) § 4, что скорости точекъ $A$ и $B$ выражаются при этомъ такъ:



Фиг. 115.

$$v_A = OA \cdot \vartheta \quad \ldots\ldots (b)$$

$$v_B = Ob \cdot \vartheta \quad \ldots\ldots (c')$$

Треугольникъ $OAb$, такъ полученный, служитъ планомъ скоростей для отрѣзка $AB$, какъ это было уже нами показано въ § 4. Но если сравнить этотъ планъ-треугольникъ $OAb$ съ треугольникомъ $OA\pi$ (фиг. 113), построеннымъ нами для полученія полюса мгновеннаго вращенія системы отрѣзка $AO$, то окажется, что эти два треугольника другъ другу равны, почему точка $\pi$ оказывается соотвѣтствующей точкѣ $b$, и скорость $v_B$ выражается, слѣдовательно, такъ:

$$v_B = O\pi \cdot \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Обращаясь теперь къ треугольнику $\pi AO$ (фиг. 113), гдѣ $\pi$ есть полюсъ мгновеннаго вращенія для системы отрѣзка $AO$, можемъ написать, что скорость точки $O$ выражается такъ:

$$v_O = \omega \cdot \pi O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

Но такъ какъ, согласно съ $(a)$:

$$v_O = -v_B,$$

то изъ $(c)$ и $(d)$ получаемъ

$$\omega \,.\, \pi O = - O\pi \,.\, \vartheta, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (e)$$

а такъ какъ

$$\pi O = - O\pi,$$

то соотношеніе $(e)$ принимаетъ видъ

$$\omega \,.\, \pi O = \vartheta \,.\, \pi O,$$

откуда

$$\omega = \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (f)$$

Итакъ, угловая скорость вращенія отрѣзка $OA$ около полюса $\pi$ въ подставномъ движеніи равна угловой скорости вращенія звена $AO$ около центра $O$ въ прямомъ движеніи отрѣзка $AB$ и, сверхъ того, имѣетъ одинаковое съ ней направленіе, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться путемъ непосредственнаго сопоставленія фигуръ 113 и 115. Изъ того же равенства $(f)$ слѣдуетъ, кромѣ того, что измѣненія скорости $\omega$ протекаютъ одинаково съ измѣненіями скорости $\vartheta$, такъ что возрастаніе $\vartheta$ влечетъ за собою точно такое же возрастаніе $\omega$, убываніе $\vartheta$—убываніе $\omega$. Въ виду этого можно также написать, что

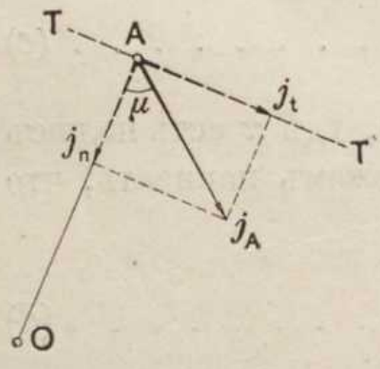
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (g)$$

т.-е. что угловыя ускоренія вращеній около $O$ и $\pi$ также одинаковы.

Теперь, согласно уравненіямъ $(f)$ и $(g)$, тангенсъ угла $\mu$ выразится такъ:

$$tg\,\mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\vartheta^2} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (h)$$

Присмотримся ближе къ этому уравненію. Мы говорили, что ускореніе $j_A$ точки $A$ въ прямомъ движеніи отрѣзка $AB$ дано намъ и по величинѣ, и по направленію. Разложимъ его на ускоренія по нормали къ траекторіи точки $A$ (по $OA$) и по касательной $OT$ (фиг. 116). Въ этомъ случаѣ, какъ это доказывается въ механикѣ, оба эти ускоренія выразятся такъ:




Фиг. 116.

$$\left.\begin{aligned} j_n &= \frac{v^2}{\varrho}, \\ j_t &= \frac{dv}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (k)$$

гдѣ $v$ есть скорость точки $A$, т.-е. $v_A$, а $\varrho$—радіусъ кривизны ея тра-

ектоpіи, т.-е. $OA$. Но мы видѣли выше, что скорость $v_A$ точки $A$ выражается черезъ $OA.\vartheta$:

$$v_A = OA.\vartheta = \varrho\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (l)$$

Такъ какъ радіусъ кривизны $OA = \varrho$ въ теченіе взятыхъ нами двухъ промежутковъ времени остается постояннымъ, то, относя ур-ія $(k)$ именно къ этимъ элементамъ времени, можемъ написать:

$$j_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{v_A^{\,2}}{\varrho} = \frac{\varrho^2\vartheta^2}{\varrho} = \varrho\vartheta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

$$j_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\varrho\vartheta) = \varrho\frac{d\vartheta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots (n)$$

Подсчитаемъ теперь величину тангенса угла между полнымъ ускореніемъ $j_A$ и нормальнымъ ускореніемъ $j_n$, т.-е. $tg$ угла $j_A A j_n$. Имѣемъ:

$$tg\, j_A A j_n = \frac{j_n j_A}{A j_n} = \frac{j_t}{j_n} = \left(\varrho\frac{d\vartheta}{dt}\right) : (\varrho\vartheta^2) = \frac{1}{\vartheta^2}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}.$$

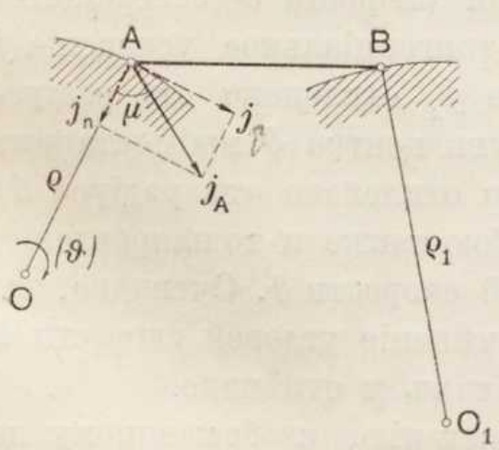
Сравнивая полученное выраженіе съ выраженіемъ $(h)$, находимъ, что

$$tg\, j_A A j_n = tg\,\mu,$$

а такъ какъ эти углы не могутъ превосходить $90^0$, то равенство тангенсовъ ведетъ здѣсь къ равенству угловъ, и мы получаемъ, что

$$\angle\mu = \angle j_A A j_n.$$

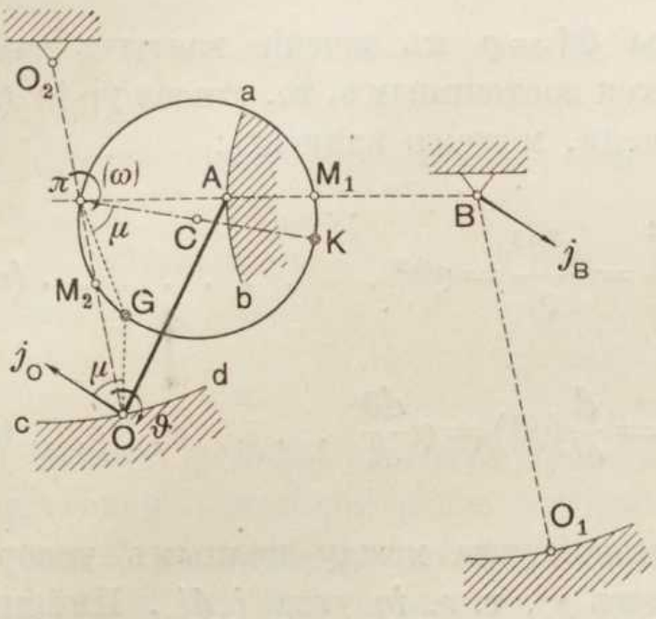
Такимъ образомъ оказывается, что уголъ $\mu$ и подсчитывать нечего,—онъ равенъ углу $j_A A j_n$, т.-е. углу между направленіемъ ускоренія $j_A$ точки $A$ въ прямомъ движеніи отрѣзка $AB$ и радіусомъ кривизны траекторіи $xx$ въ той же точкѣ $A$ ея. Оба эти направленія могутъ быть, по условію, получены прямо по чертежу, почему уголъ $\mu$ можно считать извѣстнымъ для каждаго положенія точки $A$ (фиг. 117).



Фиг. 117.

Итакъ, уголъ $\mu$, понадобившійся намъ для опредѣленія положенія точки $G$ на поворотномъ кругѣ $C$ (фиг. 105), извѣстенъ. Поэтому, проводя черезъ полюсъ $\pi$ діаметръ поворотнаго круга $\pi CK$ (фиг. 118) и откладывая на немъ отъ полюса $\pi$ въ надлежа-

щую сторону уголъ $\mu$, найдемъ въ пересѣченіи второй стороны этого угла съ окружностью поворотнаго круга **C** искомый центръ ускореній **G** подставного движенія отрѣзка **AO**. Для безошибочнаго опредѣленія стороны, въ которую слѣдуетъ откладывать отъ діаметра $\pi K$ уголъ $\mu$, удобнѣе всего пользоваться приводимымъ ниже простымъ пріемомъ, основывающимся на слѣдующихъ очевидныхъ соображеніяхъ:




Фиг. 118.

Выше (см. стр. 66, строка 9 сн.) было указано, что уголъ $\mu$ нужно откладывать въ сторону вращенія, если $\omega$ увеличивается, и противъ вращенія, если $\omega$ убываетъ. Принимая во вниманіе, что при возрастаніи $\omega$ измѣненіе ея происходитъ въ сторону вращенія, а при убываніи—противъ вращенія, можемъ сказать еще, что уголъ $\mu$ нужно откладывать въ ту сторону, въ какую происходитъ измѣненіе угловой скорости. Въ случаяхъ, аналогичныхъ разбираемому нами теперь, такая формулировка основного правила оказывается, какъ увидимъ ниже, болѣе удобной, чѣмъ приведенная на стр. 66.

Замѣтивъ это, обратимся къ фиг. 117 и разложимъ полное ускореніе $j_A$ точки **A** въ дѣйствительномъ вращеніи системы **AO** вокругъ центра **O** на нормальное ускореніе $j_n$ и тангенціальное $j_t$. Очевидно, что характеръ движенія точки **A** опредѣляется направленіемъ тангенціальнаго ускоренія $j_t$: если $j_t$ направлено согласно съ направленіемъ вращенія системы **AO**, то угловая скорость $\vartheta$ ея будетъ возрастать, если же $j_t$ направлено противъ вращенія **AO**, то $\vartheta$ будетъ убывать. Короче говоря, измѣненіе угловой скорости $\vartheta$ совершается въ ту же сторону, въ какую направлено тангенціальное ускореніе $j_t$ или, что то же, въ какую полное ускореніе $j_A$ отклонено отъ радіуса кривизны **OA**. Такимъ образомъ, если вокругъ центра **O** мы поставимъ стрѣлку, указывающую сторону, въ какую отклонено отъ радіуса **OA** ускореніе $j_A$, то эта стрѣлка опредѣлитъ собою также и то направленіе, въ которомъ совершается измѣненіе угловой скорости $\vartheta$. Очевидно, что въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 117, измѣненіе угловой скорости $\vartheta$ совершается по часовой стрѣлкѣ, какъ это тамъ и отмѣчено.

Переходя теперь къ искусственному движенію, изображенному на фиг. 118, и замѣчая, что какъ сами вращенія вокругъ $\pi$ и **O**, такъ и ихъ измѣненія, протекаютъ совершенно одинаково, заключаемъ, что для опредѣленія того направленія, въ которомъ происходитъ измѣненіе угловыхъ скоростей $\omega$ вращенія около $\pi$, надо у этой точки $\pi$ поставить

ту же стрѣлку, какая для скоростей $\vartheta$ поставлена нами вокругъ $O$. Въ случаѣ фиг. 118 вокругъ точки $\pi$ придется поставить стрѣлку ↻.

Опредѣливъ такимъ образомъ и отмѣтивъ то направленіе, въ которомъ протекаютъ измѣненія угловыхъ скоростей $\omega$, мы откладываемъ теперь уголъ $\mu$ отъ діаметра $\pi K$ въ сторону, указываемую стрѣлкой, поставленной вокругъ $\pi$. Поставленный нами вопросъ разрѣшенъ такимъ образомъ вполнѣ, и правило, которымъ нужно руководствоваться при отложеніи угла $\mu$, можетъ быть, какъ мы теперь видимъ, сформулировано такъ:

*Ставимъ вокругъ $O$ стрѣлку, указывающую сторону, по какую отклонено отъ радіуса $OA$ ускореніе $j_A$ точки $A$ въ дѣйствительномъ движеніи системы $AB$. Ставимъ теперь такую же стрѣлку вокругъ полюса $\pi$ и откладываемъ уголъ $\mu$ при діаметрѣ $\pi K$ въ сторону, указываемую этой стрѣлкой.*

Правило это, весьма простое и удобозапоминаемое, механически разрѣшаетъ вопросъ объ отложеніи угла $\mu$ во всѣхъ случаяхъ, могущихъ здѣсь представиться, сколь бы сложны они ни были.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію нужнаго намъ ускоренія точки $O$. Прежде всего замѣтимъ, что полное ускореніе точки $A$, въ виду соотношеній $(m)$ и $(n)$, можетъ быть выражено такъ:

$$j_A = \sqrt{j_n^2 + j_t^2} = \sqrt{\varrho^2\vartheta^4 + \varrho^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2} = \varrho\sqrt{\vartheta^4 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2} \quad \ldots \quad (p)$$

Ускореніе $j_O$ для движенія отрѣзка $AO$ выразится черезъ

$$j_O = k \cdot GO,$$

гдѣ $k$ есть факторъ пропорціональности, согласно (29) выражающійся черезъ

$$k = \sqrt{\vartheta^4 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2},$$

гдѣ $\vartheta$ есть угловая скорость вращенія около полюса $\pi$. Такимъ образомъ,

$$j_O = GO\sqrt{\vartheta^4 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2} \quad \ldots \quad (q)$$

Сопоставляя соотношенія $(p)$ и $(q)$, находимъ пропорцію:

$$j_O : j_A = GO : \varrho,$$

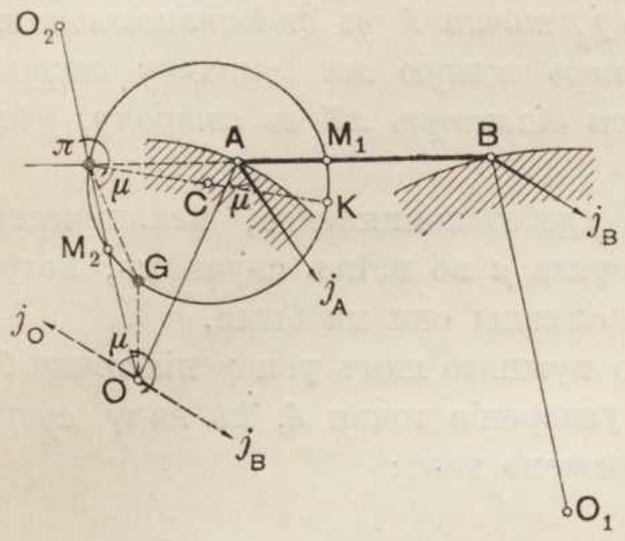
такъ что

$$j_O = j_A \cdot \frac{GO}{\varrho} \quad \ldots \quad (42)$$

Направлено оно будетъ подъ угломъ $\mu$ къ вектору $GO$ (фиг. 118). Итакъ, величина и направленіе ускоренія $j_O$ опредѣлены вполнѣ. Но, какъ мы говорили, ускореніе $j_B$ точки $B$ равно и прямопротивоположно ускоренію $j_O$,—см. ур. (41). Поэтому окончательно находимъ

$$j_B = -j_A \frac{GO}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Такимъ образомъ, проводя изъ точки $B$ прямую параллельно прямой $Oj_O$ и откладывая по ней векторъ $j_O$ въ сторону, обратную вектору $j_O$, найдемъ искомое ускореніе $j_B$ точки $B$ и по величинѣ, и по направленію.




Фиг. 119.

Задача, поставленная нами, разрѣшена вполнѣ: мы получили недостававшее намъ ускореніе точки $B$ отрѣзка $AB$, что даетъ возможность по этимъ полнымъ ускореніямъ $j_A$ и $j_B$ построить планъ ускореній системы $AB$ или найти центръ ускореній ея.

Всѣ построенія, за исключеніемъ чисто служебныхъ, второстепенныхъ, приведены на фиг. 119.

## § 20. Построеніе плановъ ускореній системы отрѣзка $AB$, движущагося по траекторіямъ его концовъ.

Хотя построеніе, приведенное въ предыдущемъ параграфѣ, и разрѣшаетъ вполнѣ вопросъ о нахожденіи $j_B$, тѣмъ не менѣе пользованіе имъ особенно удобнымъ признать нельзя, отчасти потому, что это построеніе требуетъ большого числа служебныхъ построеній, какъ-то: проведенія круга черезъ три данныя точки, построенія угловъ, равныхъ данному и т. д., а отчасти потому, что оно не даетъ сразу плана ускореній для даннаго момента движенія,—построеніе плана приходится выполнять особо. Является поэтому необходимымъ упростить данное выше построеніе въ томъ именно направленіи, чтобы оно сразу давало намъ планъ ускореній и позволяло при этомъ обходиться какъ безъ построенія поворотнаго круга искусственнаго движенія, такъ и безъ нахожденія центра ускореній его. Выводомъ такого именно упрощеннаго построенія мы теперь и займемся, при чемъ будемъ исходить изъ общаго построенія, приведеннаго на фиг. 119 и повтореннаго здѣсь на фиг. 120.

Прежде всего, нетрудно убѣдиться, что нахожденіе центра $G$ мо-

жетъ быть выполнено безъ участія круга $C$; для этого будемъ разсуждать такъ:

Уголъ $K\pi G$, какъ мы знаемъ, равенъ $\mu$. Соединивъ точку $G$ съ точкой $M_1$ помощью прямой $GM_1$, а точку $K$,—полюсъ поворота въ искусственномъ движеніи,—съ точками $M_1$ и $M_2$ помощью прямыхъ $KM_1E$ и $KM_2F$, заключаемъ, что уголъ $KM_1G$, какъ опирающійся на дугу $KLG$, равенъ также $\mu$. Замѣчая, далѣе, что отрѣзокъ $\pi K$ представляетъ собою діаметръ круга $C$ и что на этотъ діаметръ $\pi K$ опираются углы $\pi GK$, $\pi M_1K$ и $\pi M_2K$, заключаемъ, что всѣ эти углы прямые. Отсюда нетрудно усмотрѣть, что точку $G$ можно получить, вообще говоря, и безъ помощи поворотнаго круга $C$, поступая такъ: опредѣляемъ обычнымъ порядкомъ точки $M_1$ и $M_2$ и проводимъ черезъ нихъ прямыя $EM_1r \perp AB$ и $FM_2s \perp OO_2$; въ точкѣ пересѣченія этихъ прямыхъ $M_1r$ и $M_2s$ получаемъ точку $K$,—полюсъ поворота искусственнаго движенія. Проводя теперь прямую $\pi D$ подъ угломъ $\mu$ къ діаметру $\pi K$ и опуская на эту прямую изъ такъ полученной точки $K$ перпендикуляръ $Km$, находимъ въ пересѣченіи $Km$ съ $\pi D$ точку $G$, уже безъ помощи поворотнаго круга $C$.— Нетрудно, далѣе, показать, что векторъ, изображающій въ нѣкоторомъ опредѣленномъ масштабѣ искомое ускореніе $j_B$ точки $B$, мы можемъ получить, и не находя точки $G$. Будемъ разсуждать такъ:

Обозначимъ угловую скорость звена $AO$ во вращеніи его вокругъ $O$ черезъ $\vartheta$. Тогда, какъ извѣстно, нормальное ускореніе $j_n$ точки $A$ выразится въ функціи $\vartheta$ такъ:

$$j_n = \vartheta^2 \cdot AO, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

что указываетъ намъ на то, что въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ это нормальное ускореніе, по величинѣ своей и направленію, изобразится векторомъ $AO$. Посмотримъ теперь, какими векторами изобразятся въ томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$ какъ тангенціальное ускореніе $j_t$ точки $A$, такъ и полное $j_A$.

Разложивъ полное ускореніе $j_A$ на нормальное $j_n$ и тангенціальное $j_t$,—см. фиг. 116 на стр. 125,—и помня, что въ данномъ случаѣ уголъ $(j\ ,\ AO)$ равенъ $\mu$, можемъ написать, что

$$j_t = j_n \operatorname{tg}\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b')$$

$$j_A = j_n / \cos\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c')$$

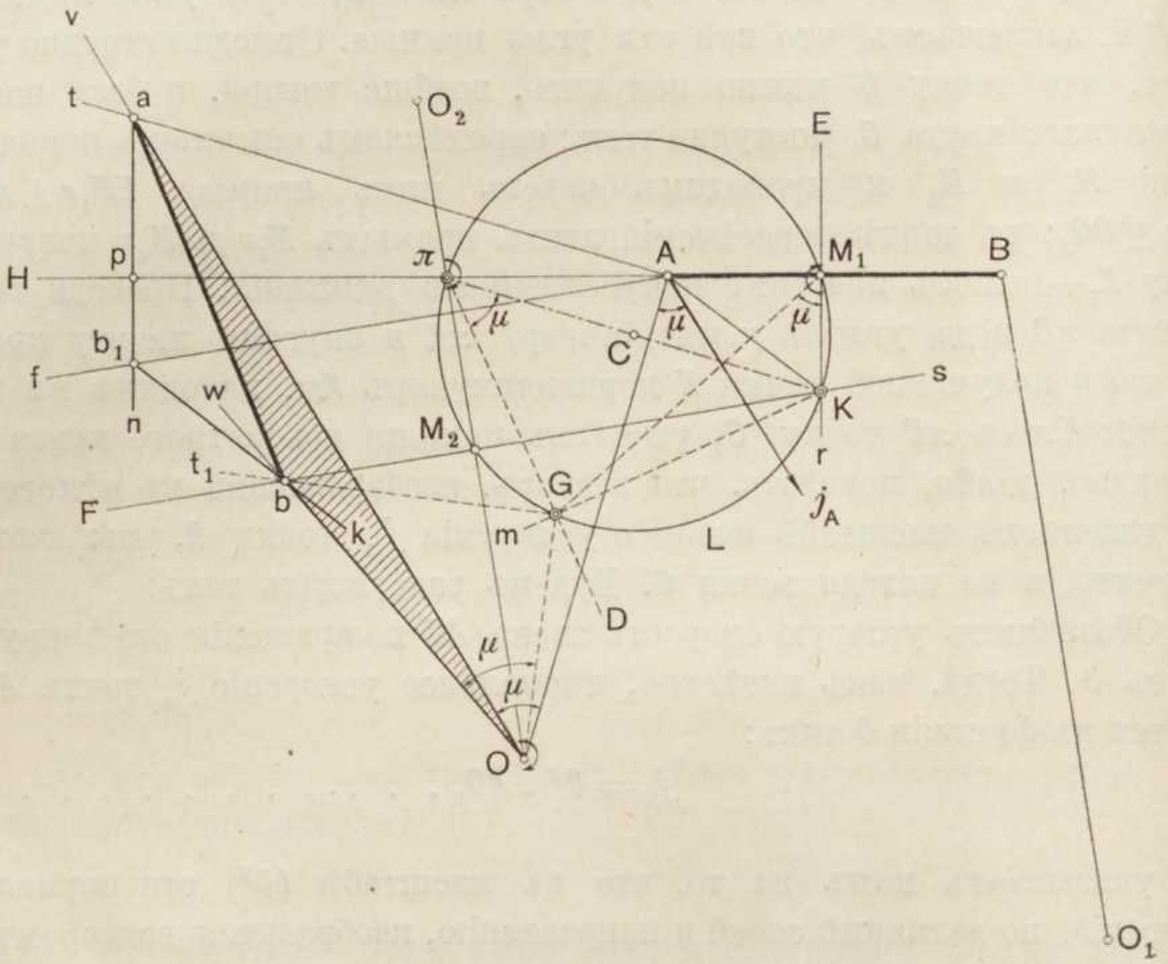
Въ виду соотношенія $(a)$ заключаемъ, что ускоренія $j_t$ и $j_A$ выразятся иначе еще такъ:

$$j_t = \vartheta^2 \cdot AO \operatorname{tg}\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b'')$$

$$j_A = \vartheta^2 \cdot AO / \cos\mu, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c'')$$

откуда слѣдуетъ, что въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ эти ускоренія выразятся векто-

рами $AO\,tg\mu$ и $AO\,/\,cos\mu$. Чтобы построить эти векторы при векторѣ $AO$, замѣтимъ, что если $AO$ примемъ за катетъ нѣкотораго прямоугольнаго треугольника съ прямымъ угломъ у $A$ и острымъ, равнымъ $\mu$, у $O$, то $AO\,tg\mu$ будетъ служить другимъ катетомъ того же треугольника, а $AO\,/\,cos\mu$—гипотенузой его. Для построенія этого треугольника проводимъ лучъ $At$, перпендикулярный вектору $AO$ и, значитъ, касательный




Фиг. 120.

къ траекторіи точки $A$, и лучъ $Ov$, параллельный полному ускоренію $j$ и, значитъ, наклоненный къ $AO$ подъ угломъ $\mu$. Пересѣченіе этихъ лучей $At$ и $Ov$ даетъ точку $a$,—третью вершину упомянутаго треугольника, опредѣляющую искомые вектора.

Дѣйствительно, изъ прямоугольнаго треугольника $OAa$ находимъ соотношенія

$$aA = AO\,tg\mu,$$

$$aO = AO\,/\,cos\mu.$$

Помножая эти уравненія на $\vartheta^2$, получаемъ соотношенія:

$$aA\,.\,\vartheta^2 = \vartheta^2\,.\,AO\,tg\mu = j_t, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$aO\,.\,\vartheta^2 = \vartheta^2\,.\,AO\,/\,cos\mu = j_A, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

показывающія, что тангенціальное ускореніе $j_t$ точки $A$ и полное $j_A$ могутъ быть въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ изображены векторами $aA$ и $aO$; согласно разложенію $j_A$ на $j_n$ и $j_t$, приведенному на фиг. 116, направленія этихъ векторовъ идутъ отъ точки $a$ къ точкамъ $A$ и $O$. Разсмотримъ теперь, какими векторами изобразятся въ томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$ ускоренія точки $B$,—полное, нормальное и тангенціальное.

Соединивъ прямой линіей точки $O$ и $G$ и принимая во вниманіе, что между величинами полныхъ ускореній $j_A$ и $j_B$ существуетъ, какъ было показано въ предыдущемъ параграфѣ, соотношеніе

$$j_B : j_A = GO : AO$$

можемъ написать, что

$$j_B = j_A \,.\, GO \,/\, AO.$$

Помня теперь, что, согласно $(c)$,

$$j_A = \vartheta^2 \,.\, aO,$$

можемъ переписать выраженіе для $j_B$ такъ:

$$j_B = j_A \,.\, GO \,/\, AO = \vartheta^2 \,.\, aO \,.\, GO \,/\, AO = \vartheta^2 \,.\, GO \,.\, aO \,/\, AO = \vartheta^2 \,.\, GO \,/\, cos\mu \,. \quad . \quad (d)$$

Это соотношеніе показываетъ, что отрѣзокъ изображающій ускореніе $j_B$ въ масштабѣ $\vartheta^2$, имѣетъ длину, равную $GO \,/\, cos\mu$, и, значитъ, представляетъ собою гипотенузу прямоугольнаго треугольника съ катетомъ $GO$ и прилежащимъ къ нему острымъ угломъ $\mu$. Отсюда вытекаетъ слѣдующее простое построеніе этого отрѣзка:

Проводимъ лучъ $Gt_1$, перпендикулярный къ $GO$, и лучъ $Ow$, наклоненный къ $GO$ подъ угломъ $\mu$. Пересѣченіе этихъ лучей $Gt_1$ и $Ow$ даетъ точку $b$, опредѣляющую искомый отрѣзокъ $bO$, ибо изъ получившагося здѣсь прямоугольнаго треугольника $ObG$ находимъ, что

$$bO = GO \,/\, cos\mu,$$

вслѣдствіе чего

$$bO \,.\, \vartheta^2 = \vartheta^2 \,.\, GO \,/\, cos\mu = j_B.$$

Итакъ, отрѣзокъ $bO$ опредѣляетъ собою, въ масштабѣ $(\vartheta^2)$, величину ускоренія $j_B$. Нетрудно усмотрѣть, что онъ даетъ собою и направленіе этого ускоренія, ибо, согласно общей схемѣ,—см. фиг. 119,—направленіе $j_B$ образуетъ съ лучемъ $OG$ уголъ $(180^0 — \mu)$, Итакъ, направленіемъ ускоренія $j_B$ является направленіе $bO$, отъ $b$ къ $O$. Отсюда слѣдуетъ, что отрѣзокъ $bO$, такъ нами полученный, можетъ быть принятъ за векторъ, изображающій собою ускореніе $j_B$ какъ по величинѣ,—въ масштабѣ $(\vartheta^2)$,—такъ и по направленію.

Итакъ, въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ ускоренія $j_A$ и $j_B$ изображаются векторами $aO$ и $bO$. Отсюда слѣдуетъ, что планъ ускореній системы $AB$ получимъ, соединивъ точки $a$ и $b$ прямой и выдѣливъ такимъ путемъ $\triangle Oab$. На фиг. 120 этотъ планъ ускореній, ради ясности чертежа, заштрихованъ.

Обратимъ теперь вниманіе на точку $b$. Нетрудно убѣдиться, что эта точка лежитъ на прямой $KM_2F$, перпендикулярной къ $O\pi$ въ точкѣ $M_2$. Дѣйствительно, такъ какъ

$$\angle \pi GK = 90^0 = \angle bGO$$

и

$$\angle K\pi G = \mu = \angle bOG,$$

то треугольники $\pi GK$ и $bOG$ подобны, откуда слѣдуетъ, что

$$OG : \pi G = bG : GK \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Обратимъ теперь вниманіе на $\triangle\triangle O\pi G$ и $bKG$. Въ нихъ углы $\pi GO$ и $bGK$ равны, ибо

$$\angle \pi GO = \angle bGO + \angle \pi Gb = 90^0 + \angle \pi Gb = \angle \pi Gb + \angle \pi GK = \angle bGK.$$

Кромѣ того, стороны, эти углы заключающія, въ виду $(e)$, пропорціональны. Отсюда слѣдуетъ, что эти треугольники подобны. Замѣчая теперь, что $bG \perp GO$, а $KG \perp \pi G$, т.-е. что двѣ стороны одного изъ этихъ треугольниковъ перпендикулярны соотвѣтствующимъ сторонамъ другого, заключаемъ, что и третьи стороны ихъ, $bK$ и $\pi O$, будутъ также взаимно-перпендикулярны. Замѣчая, наконецъ, что точка $K$ принадлежитъ прямой $KM_2F$, также перпендикулярной къ $\pi O$, заключаемъ, что прямая $bK$ сливается съ прямой $KM_2F$, и, значитъ, точка $b$, дѣйствительно, лежитъ на лучѣ $KM_2F$, проведенномъ перпендикулярно къ $\pi O$ черезъ точку $M_2$.

Теперь становится яснымъ, что для того, чтобы, при опредѣленіи вектора $bO$, не быть вынужденнымъ обращаться къ посредничеству центра ускореній $G$, необходимо и достаточно имѣть длину $Kb$, ибо, получивъ точку $K$ и отложивъ на лучѣ $KM_2F$ отрѣзокъ, равный $Kb$, мы и получимъ точку $b$. Опредѣлить эту длину $Kb$ можно весьма просто, помощью слѣдующаго весьма несложнаго геометрическаго построенія:

Мы видѣли, что $\triangle O\pi G \sim \triangle bKG$, вслѣдствіе чего можно написать, что

$$bK : O\pi = bG : OG.$$

Замѣчая теперь, что $\triangle OaA \sim \triangle ObG$, можемъ написать, что

$$aA : OA = bG : OG.$$

Сопоставляя два эти соотношенія, находимъ соотношеніе

$$bK : O\pi = aA : OA, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

откуда и находимъ, наконецъ, что

$$bK = aA \,.\, O\pi \,/\, OA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Составъ правой части полученнаго соотношенія указываетъ на весьма простой графическій способъ построенія отрѣзка $bK$, а именно:

Проводимъ черезъ точку $a$ лучъ $an \perp BAH$, а черезъ точку $A$—лучъ $Af \perp O\pi$ и, значитъ, $\parallel KM_2F$. Пусть эти лучи $an$ и $Af$ пересѣкаются въ точкѣ $b_1$. Сравнимъ теперь такъ опредѣлившійся $\triangle Aab_1$ съ треугольникомъ $OA\pi$. Такъ какъ $aA \perp OA$, $ab_1 \perp A\pi$ и $b_1A \perp O\pi$, то эти $\triangle\triangle$, въ силу перпендикулярности своихъ сходственныхъ сторонъ, подобны, въ виду чего можно написать соотношеніе:

$$b_1A : O\pi = aA : OA.$$

Сопоставляя его съ соотношеніемъ $(f)$, находимъ, что

$$bK = b_1A.$$

Замѣчая, кромѣ того, что

$$bK \parallel b_1A,$$

ибо лучи $Ab_1f$ и $KbF$ перпендикулярны къ одной и той же прямой $O\pi$, заключаемъ, что

$$bK \# b_1A.$$

Соединивъ теперь прямыми точки $b_1$ и $b$, $A$ и $K$, найдемъ, что

$$b_1b \# AK.$$

Отсюда вытекаетъ весьма простое построеніе какъ вектора $Kb$, такъ, значитъ, и вектора $bO$, дающаго ускореніе $j_B$ въ томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$, въ какомъ векторъ $aO$ даетъ ускореніе $j_A$. Построеніе это интересно и важно, главнымъ образомъ, потому, что позволяетъ опредѣлять $j_B$ уже *безъ всякаго участія круга* $C$ *и центра* $G$. Оно, слѣдовательно, имѣетъ такой видъ:

Опредѣливъ обычнымъ путемъ точку $K$, проводимъ изъ точки $A$ лучъ $At \perp OA$, а изъ точки $O$—лучъ $Ov \parallel Aj_A$ (фиг. 120). Пересѣченіе этихъ лучей опредѣляетъ собою точку $a$, дающую векторъ $aA$, который

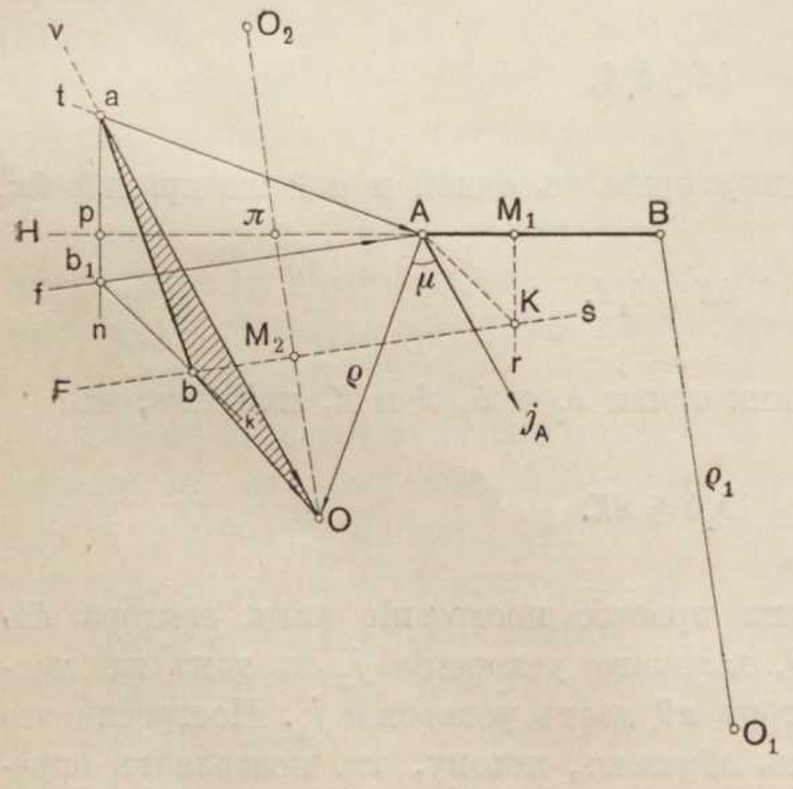
въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ изображаетъ полное ускореніе $j_A$ точки $A$, такъ что

$$j_A = aA \,.\, \vartheta^2.$$

Проводимъ теперь черезъ точку $a$ лучъ $an \perp BA$ и ведемъ его до пересѣченія въ $b_1$ съ лучемъ $Af$, перпендикулярнымъ къ $O\pi$, и, наконецъ, соединивъ прямой линіей точки $A$ и $K$, проводимъ черезъ точку $b_1$ лучъ $b_1k$, параллельный $AK$. Тогда пересѣченіе лучей $b_1k$ и $KM_2r$ и дастъ собою точку $b$, опредѣляющую искомый векторъ $bO$.—Все построеніе, какъ видимъ, выходитъ очень простымъ, а кромѣ того, оно обладаетъ тѣмъ цѣннымъ свойствомъ, что сразу даетъ и планъ ускореній взятой системы $AB$, начерченный въ масштабѣ $(\vartheta^2)$. Точкѣ $A$ системы будетъ соотвѣтствовать точка $a$ этого плана, а точкѣ $B$—точка $b$, такъ что отрѣзку $AB$ будетъ соотвѣтствовать въ этомъ планѣ ускореній отрѣзокъ $ab$. Ясно, кромѣ того, что если бы мы пожелали опредѣлить положеніе центра ускореній $G_1$ дѣйствительнаго движенія системы $AB$, то для этого достаточно было бы построить на отрѣзкѣ $AB$ треугольникъ $G_1AB$, подобный треугольнику $Oab$; точка $G_1$ его, соотвѣтствующая точкѣ $O$, и представила бы собою искомый центръ ускореній дѣйствительнаго движенія.

Будучи освобождено отъ всѣхъ излишнихъ теперь частей, каковы: окружность $C$ и рядъ прямыхъ $GO$, $Gb$ и т. д., наше построеніе представляется въ видѣ, изображенномъ на фиг. 121.

Итакъ, полное ускореніе $j_B$ точки $B$ въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ изображается векторомъ $bO$, направленнымъ отъ $b$ къ $O$. Замѣчая, далѣе, что нормаль къ траекторіи точки $B$ въ данный моментъ изображается радіусомъ - векторомъ $O_1B$ и что лучъ $OO_2 \parallel O_1B$, заключаемъ, что лучъ $M_2F$ параллеленъ касательной къ траекторіи точки $B$ въ разсматриваемый моментъ. Поэтому, разлагая векторъ $bO$ по направленіямъ $bM_2K$ и $M_2O$, взаимно перпендикулярнымъ, получимъ векторы $bM_2$ и $M_2O$, изъ коихъ первый, $bM_2$, изображаетъ тангенціальное ускореніе точки $B$, $(j_t)_B$, а второй, $M_2O$,—нормальное ускореніе ея, $(j_n)_B$. Такимъ образомъ, можемъ написать, что




Фиг. 121.

$$(j_t)_B = \vartheta^2 \,.\, bM_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

и направлено отъ $b$ къ $M_2$, и

$$(j_n)_B = \vartheta^2 \,.\, M_2O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

и направлено отъ $M_2$ къ $O$.

---

О томъ, что векторъ $M_2O$ долженъ изображать собою въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ нормальное ускореніе $(j_n)_B$ точки $B$, можно было заключить и ранѣе, принявъ во вниманіе то соотношеніе, изъ коего опредѣляется величина этого отрѣзка $M_2O$. Дѣйствительно, положеніе точки $M_2$ на лучѣ $OO_2$ опредѣляется изъ соотношенія

$$O\pi^2 = OO_2 \,.\, M_2O = M_2O \,.\, \varrho_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (l)$$

Принимая теперь во вниманіе, что скорость $v_B$ точки $B$ выражается, при посредствѣ плана скоростей $OA\pi$, соотношеніемъ

$$v_B = O\pi \,.\, \vartheta,$$

заключаемъ отсюда, что

$$O\pi = v_B / \vartheta.$$

Подставляя это значеніе вектора $O\pi$ въ $(l)$, получаемъ соотношеніе

$$\frac{v_B^{\,2}}{\vartheta^2} = M_2O \,.\, \varrho_1,$$

откуда и находимъ, что

$$\frac{v_B^{\,2}}{\varrho_1} = M_2O \,.\, \vartheta^2.$$

Такъ какъ $v^2{}_B / \varrho_1$ есть нормальное ускореніе точки $B$, то мы и получаемъ то же соотношеніе

$$(j_n)_B = M_2O \,.\, \vartheta^2,$$

какое дано выше въ формулѣ $(k)$.

Прежде чѣмъ идти дальше, необходимо замѣтить еще одно обстоятельство, имѣющее весьма важное значеніе для послѣдующихъ изслѣдованій, а именно:

Пусть въ данный моментъ линейная скорость точки $A$ равна $v_A$, а радіусъ кривизны траекторіи ея равенъ $\varrho = OA$. Ясно, что нормальное ускореніе $j_n$ этой точки $A$ будетъ оставаться однимъ и тѣмъ же, равнымъ $v_A{}^2 / \varrho$, независимо отъ того, какое значеніе $v_A'$ будетъ имѣть скорость точки $A$ въ слѣдующій моментъ,—иначе говоря, независимо отъ того, какое значеніе имѣетъ тангенціальное ускореніе этой точки, $dv_A / dt$. То же замѣчаніе имѣетъ силу и для нормальнаго ускоренія

точки $B$. Дѣйствительно, скорость $v_B$ точки $B$ вполнѣ и единственнымъ образомъ опредѣляется по скорости $v_A$, ибо

$$v_B = v_A \cdot \frac{O\pi}{OA}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

и, значитъ разъ скорость $v_A$ точки $A$ въ данный моментъ извѣстна и извѣстны величины отрѣзковъ $O\pi$ и $OA$, то будетъ вполнѣ извѣстна и скорость $v_B$, соотвѣтствующая взятому моменту. Далѣе, нормальное ускореніе точки $B$, $(j_n)_B$, выразится черезъ

$$(j_n)_B = \frac{v_B^2}{\varrho_1} = \frac{v_A^2}{\varrho_1}\left(\frac{O\pi}{OA}\right)^2$$

и, значитъ, опять-таки отъ тангенціальнаго ускоренія точки $A$ зависѣть не будетъ. Очевидно, что оно зависитъ лишь отъ нормальнаго ускоренія $(j_n)_A$ точки $A$, при чемъ зависимость эта выражается такъ

$$(j_n)_B = \frac{v_A^2}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_1}\left(\frac{O\pi}{OA}\right)^2 = (j_n)_A \cdot \frac{\varrho}{\varrho_1}\left(\frac{O\pi}{OA}\right)^2 \quad \ldots\ldots (44$$

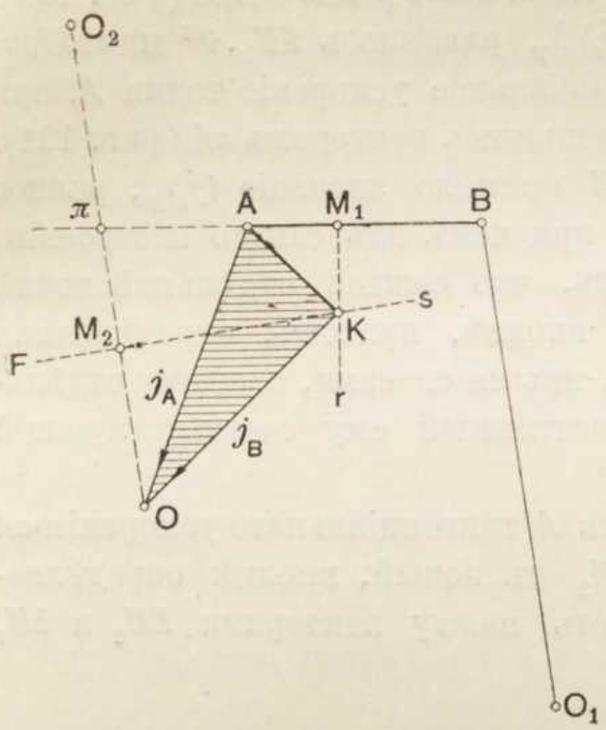
На очереди стоитъ выясненіе зависимости между тангенціальными ускореніями точекъ $A$ и $B$, но мы предварительно, имѣя въ виду дальнѣйшее, разсмотримъ, какъ измѣняется и какой видъ принимаетъ данное выше общее построеніе ускоренія $j_B$ въ томъ частномъ случаѣ движенія системы $AB$, когда радіусъ-векторъ $OA$ вращается равномѣрно.

Итакъ, предположимъ, что угловая скорость $\vartheta$ вращенія радіуса $O$ есть величина постоянная:

$$\vartheta = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

Въ такомъ случаѣ полное ускореніе $j_A$ точки $A$ сводится только къ нормальному, тангенціальное же ускореніе $(j_t)_A$ ея будетъ теперь равно нулю. Въ этомъ случаѣ уголъ $\mu$ равенъ нулю, такъ что полное ускореніе направится по вектору $AO$ и имъ же въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ и изобразится. Въ виду равенства $\mu = 0$ лучъ $Ov$, на которомъ лежитъ точка $a$ плана ускореній, пойдетъ по прямой $OA$, а сама точка $a$, а вмѣстѣ съ ней и точка $b_1$, придутъ въ точку $A$, съ которой и сольются, такъ что $\triangle Aab_1$ въ этомъ частномъ случаѣ обратится въ точку $A$. Далѣе, лучъ $b_1k$, проводимый параллельно $AK$, въ виду совпаденія точекъ $b_1$ и $A$, сольется съ самой этой прямой $AK$, въ силу чего точка $b$ пересѣченія луча $b_1k$ съ перпендикуляромъ $M_2K$ придетъ теперь въ точку $K$. Вслѣдствіе этого, полное ускореніе точки $B$ изобразится теперь, въ масштабѣ $(\vartheta^2)$, векторомъ $KO$, идущимъ отъ $K$ къ $O$, а планъ ускоре

ній—треугольникомъ $OAK$ (фиг. 122). Замѣчая, далѣе, что векторъ $OO_2$ параллеленъ радіусу кривизны $O_1B$, т.-е. нормали къ траекторіи точки $B$, и что прямая $M_2K$, будучи перпендикулярна къ $O_1B$, параллельна касательной къ траекторіи точки $B$, можемъ получить векторы, изображающіе тангенціальное и нормальное ускореніе точки $B$ въ масштабѣ $(\vartheta^2)$, разлагая векторъ $KO$ по направленіямъ $KM_2$ и $M_2O$. Такимъ образомъ обнаружится, что нормальное ускореніе точки $B$, $(j_n)_B$, изображается въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ векторомъ $M_2O$, направленнымъ отъ $M_2$ къ $O$, а тангенціальное, $(j_t)_B$, въ томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$,—векторомъ $KM_2$, идущимъ отъ $K$ къ $M_2$.—Итакъ, въ случаѣ $\vartheta = const$, имѣемъ, что




Фиг. 122.

$$(j_n)_B = M_2O \cdot \vartheta^2 \quad \ldots\ldots \quad (p)$$

и

$$(j_t)_B = KM_2 \cdot \vartheta^2 \quad \ldots\ldots \quad (q)$$

Если мы сопоставимъ теперь фиг. 122 съ фиг. 121, то, согласно сказанному выше, должны будемъ признать, что векторъ $KM_2$ фигуры 121 представляетъ собою то тангенціальное ускореніе, которое имѣла бы точка $B$, если бы радіусъ-векторъ $OA$ вращался около своего центра $O$ съ постоянной угловой скоростью $\vartheta$. Въ дѣйствительномъ движеніи отрѣзка $AB$, когда векторъ $OA$ вращается съ перемѣнной угловой скоростью $\vartheta$ и когда точка $A$ обладаетъ тангенціальнымъ ускореніемъ, равнымъ $aA \cdot \vartheta^2$ (фиг. 121), тангенціальное ускореніе точки $B$ оказывается равнымъ $bM_2 \cdot \vartheta^2$ и въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ изображается векторомъ $bM_2$, идущимъ отъ $b$ къ $M_2$, такъ что здѣсь

$$(j_t)_B = bM_2 \cdot \vartheta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

Для того, чтобы отмѣтить разницу между ускореніями $(j_t)_B$ въ приведенныхъ двухъ случаяхъ,—при $\vartheta = const$ и при $\vartheta \neq const$,—мы условимся отмѣчать тангенціальное ускореніе точки $B$ при $\vartheta = const$, т.-е. при равномѣрномъ вращеніи радіуса-вектора $OA$, знакомъ $[(j_t)_B]_0$, а при неравномѣрномъ вращеніи радіуса-вектора $OA$, когда $\vartheta$ перемѣнно, просто знакомъ $(j_t)_B$. Въ виду этого соотношенія $(q)$ и $(r)$ переписываются такъ:

$$[(j_t)_B]_0 = KM_2 \cdot \vartheta^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

при $\vartheta = const$, и

$$(j_t)_B = bM_2 \cdot \vartheta^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

при $\vartheta \neq const$.

Весь матеріалъ, нужный для рѣшенія вопроса о зависимости $(j_t)_B$ оть $(j_t)_A$ у насъ теперь подготовленъ, и разсмотрѣніемъ этого вопроса мы теперь и займемся. Будемъ разсуждать такъ:

Пока тангенціальное ускореніе точки $A$ было равно нулю (фиг. 122), тангенціальное ускореніе точки $B$, $[(j_t)_B]_0$, равнялось $KM_2 . \vartheta^2$ и изображалось векторомъ $KM_2$; когда же тангенціальное ускореніе точки $A$, при $\vartheta = const$, стало равнымъ $aA . \vartheta^2$, изобразившись векторомъ $aA$ (фиг. 121), то тангенціальное ускореніе точки $B$ приняло значеніе $(j_t)_B$, равное $bM_2 . \vartheta^2$ и изобразилось векторомъ $bM_2$, при чемъ изъ самаго построенія, приведеннаго на фиг. 121, вытекаетъ, что каждой отдѣльной точкѣ луча $At$ соотвѣтствуетъ только одна, вполнѣ, притомъ, опредѣленная по своему положенію, точка $b$ луча $KF$; иными словами, каждому отдѣльному вектору $aA$ соотвѣтствуетъ единственный ему соотвѣтствующій векторъ $bM_2$.

Такимъ образомъ, сообщеніе точкѣ $A$ тангенціальнаго ускоренія $aA$ влечетъ за собою переходъ вектора $KM_2$ въ новый, вполнѣ опредѣляемый по $aA$, векторъ $bM_2$. Зависимость между векторами $KM_2$ и $bM_2$ установить нетрудно, замѣтивъ, что

$$bM_2 = bK - M_2K \quad . . . . . (s)$$

Такъ какъ, согласно общему правилу учета направленія векторовъ,

$$M_2K = -KM_2 ,$$

то соотношенію $(s)$ можетъ быть данъ другой, болѣе удобный для насъ, видъ:

$$bM_2 = bK + KM_2 \quad . . . . . (t)$$

при чемъ, замѣтимъ,—и это самое существенное,—что векторы $bM_2$ и $KM_2$ смотрятъ каждый въ точку $M_2$, т.-е. такъ, какъ направлены соотвѣтствующія ускоренія $j_t$, а векторъ $bK$ смотритъ изъ $b$ въ полюсъ поворота $K$.

Помножая теперь всѣ члены соотношенія $(t)$ на $\vartheta^2$, находимъ соотношеніе

$$bM_2 . \vartheta^2 = bK . \vartheta^2 + KM_2 . \vartheta^2, \quad . . . . . (t')$$

переходящее, въ виду $(r)$, въ соотношеніе

$$(j_t)_B = bK . \vartheta^2 + KM_3 . \vartheta^2 \quad . . . . . (t'')$$

и, наконецъ, въ виду (46), въ соотношеніе

$$(j_t)_B = [(j_t)_B]_0 + bK . \vartheta^2 \quad . . . . . (u)$$

Посмотримъ теперь, что представляетъ собою членъ $bK.\vartheta^2$. Принимая во вниманіе, что, согласно соотношенію ($g$),—см. стр. 141,—

$$bK = aA.O\pi \,/\, OA,$$

можемъ, послѣ помноженія обѣихъ частей этого равенства на $\vartheta^2$, написать, что

$$bK.\vartheta^2 = aA.\vartheta^2.O\pi \,/\, OA = (j_t)_A.O\pi \,/\, OA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

Но такъ какъ

$$(j_t)_A = OA.\frac{d\vartheta}{dt},$$

то ($v$) переписывается еще такъ:

$$bK.\vartheta^2 = OA.\frac{d\vartheta}{dt}.\frac{O\pi}{OA} = O\pi.\frac{d\vartheta}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Въ виду ($v$) формула ($u$) можетъ быть переписана такъ:

$$(j_t)_B = [(j_t)_B]_0 + (j_t)_A.\frac{O\pi}{OA} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Такова искомая связь между тангенціальными ускореніями точекъ $A$ и $B$. Формула (48), ее выражающая, можетъ быть истолкована такъ:

*Тангенціальное ускореніе точки $B$, обусловленное появленіемъ у точки $A$ тангенціальнаго ускоренія $(j_t)_A$, равнаго $aA.\vartheta^2$, равно тангенціальному ускоренію той же точки $B$ при $\vartheta = const$, т.-е. $[(j_t)_B]_0$, сложенному съ тангенціальнымъ ускореніемъ точки $A$, взятымъ въ отношеніи $O\pi$ къ $OA$.*

Та же формула ($u$), въ виду (47), можетъ быть переписана такъ:

$$(j_t)_B = [(j_t)_B]_0 + O\pi.\frac{d\vartheta}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

или, что будетъ удобнѣе для дальнѣйшихъ выводовъ, такъ:

$$(j_t)_B = KM_2.\vartheta^2 + O\pi.\frac{d\vartheta}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Уравненіями (48—50) и геометрическими соотношеніями ($s-t$), ихъ давшими, можно воспользоваться для полученія еще одного рѣшенія вопроса объ опредѣленіи $j_B$ по данному $j_A$. Идея этого рѣшенія крайне проста и заключается въ слѣдующемъ:

Искомое полное ускореніе $j_B$ точки $B$, будучи разложено по нормали

и касательной къ траекторіи ея, даетъ намъ слагающія ускоренія: нормальное $(j_n)_B$ и тангенціальное $(j_t)_B$. Оставляя пока въ сторонѣ вопросъ объ опредѣленіи $(j_n)_B$, разрѣшаемый, какъ это будетъ показано ниже, весьма просто, и обращаясь къ $(j_t)_B$, замѣчаемъ, что это тангенціальное ускореніе можетъ быть опредѣлено при помощи формулы (48), а затѣмъ и построено помощью геометрическихъ соотношеній, давшихъ эту формулу. Найдя $(j_t)_B$, а затѣмъ и $(j_n)_B$, получимъ искомое $j_B$, и, такимъ образомъ, поставленный вопросъ будетъ разрѣшенъ вполнѣ. Посмотримъ теперь, какъ эта идея осуществляется на практикѣ, и разберемъ сначала вопросъ объ опредѣленіи и построеніи вектора, изображающаго $(j_B)$. Будемъ разсуждать такъ:

Пусть радіусъ-векторъ **OA** вращается вокругъ центра **O** неравномѣрно, и пусть въ разсматриваемый моментъ угловая скорость его равна $\vartheta$, а угловое ускореніе.... $d\vartheta / dt$. Отсюда слѣдуетъ, что какъ тангенціальное ускореніе точки **A**, $(j_t)_A$, такъ и нормальное, $(j_n)_A$, будутъ извѣстны вполнѣ, ибо, какъ извѣстно,

$$(j_t)_A = aA \cdot \vartheta^2 = OA \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

и

$$(j_n)_A = OA \cdot \vartheta^2,$$

и, кромѣ того, направленія обоихъ этихъ векторовъ будутъ извѣстны также вполнѣ.

Получивъ $(j_t)_A$, можемъ опредѣлить второй членъ правой части уравненія (48), т.-е. членъ $(j_t)_A \cdot O\pi / OA$, ибо отношеніе $O\pi / OA$ будетъ намъ извѣстно вполнѣ. Надо замѣтить, что этотъ членъ опредѣлится не только по величинѣ своей, но и по направленію, ибо векторъ, его представляющій, долженъ быть перпендикуляренъ къ $O\pi$, т.-е. къ радіусу $O_1B$,—этотъ векторъ идетъ въ ту или другую сторону по прямой $sKM_2F$. Изъ этихъ очевидныхъ соображеній слѣдуетъ, что членъ $(j_t)_A \cdot O\pi / OA$ можетъ быть представленъ въ данномъ, заранѣе выбранномъ масштабѣ нѣкоторымъ векторомъ, величина и направленіе коего оказываются вполнѣ опредѣленными.

Перейдемъ теперь къ первому члену правой части уравненія (48), а именно, къ члену $[(j_t)_B]_0$. Это есть то тангенціальное ускореніе, которымъ обладала бы въ разсматриваемый моментъ точка **B**, если бы радіусъ-векторъ **OA**, вращавшійся дотолѣ съ перемѣнной угловой скоростью и въ данный моментъ имѣвшій угловую скорость $\vartheta$, сталъ съ этого момента двигаться уже съ постоянной угловой скоростью, равной именно этой скорости $\vartheta$. А въ такомъ случаѣ ясно, что опредѣленіе этого ускоренія $[j_t)_B]_0$ никакихъ затрудненій не представляетъ, ибо можетъ быть выполнено помощью построенія, изображеннаго на фиг. 122, и такъ какъ это ускореніе будетъ намъ извѣстно какъ по величинѣ, такъ и по направленію, то можно будетъ построить въ лю-

бомъ, заранѣе выбранномъ масштабѣ и векторъ, это ускореніе изображающій.

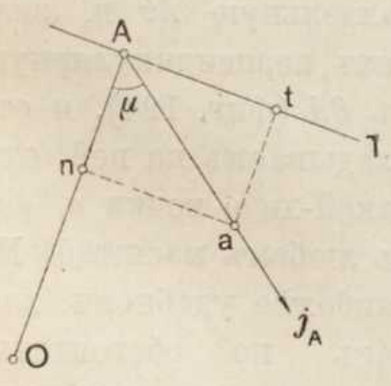
Построивъ оба упомянутыя выше ускоренія, т.-е. $(j_t)_A . O\pi \,/\, OA$ и $[(j_t)_B]_0$, въ какомъ-либо одномъ и томъ же масштабѣ и замѣчая, что сумма этихъ векторовъ даетъ собою векторъ, изображающій въ томъ же масштабѣ искомое тангенціальное ускореніе $(j_t)_B$ точки $B$ при дѣйствительной, перемѣнной угловой скорости $\vartheta$ точки $A$, заключаемъ, что построеніе вектора, изображающаго $(j_t)_B$, можетъ быть выполнено такъ:

Вычерчиваемъ нашъ механизмъ въ положеніи, соотвѣтствующемъ разсматриваемому моменту; угловая скорость $\vartheta$ радіуса-вектора $OA$ и ускореніе $j_A$ точки $A$, этому моменту соотвѣтствующія, будутъ, по условію, извѣстны намъ вполнѣ. Предположивъ теперь сначала, что угловая скорость $\vartheta$ звена $AO$ не мѣняется и остается все время равной $\vartheta$, выполняемъ построеніе, изображенное на фиг. 122, и опредѣляемъ, такимъ образомъ, отрѣзокъ $KM_2$, который, будучи взятъ въ натуральную величину и помноженъ на $\vartheta^2$, и дастъ собою $[(j_t)_B]_0$, т.-е. тангенціальное ускореніе точки $B$ въ случаѣ $\vartheta = const.$ Такимъ образомъ, это ускореніе будетъ извѣстно намъ какъ по величинѣ, такъ и по направленію (отъ $K$ къ $M_2$), и, значитъ, первый членъ правой части уравненія (48) будетъ опредѣленъ вполнѣ.

Никакихъ затрудненій не представитъ опредѣленіе и второго члена той же правой части уравненія (48), т.-е. члена $(j_t)_A . O\pi \,/\, OA$. Прежде всего, ясно, что разъ ускореніе $j_A$ дано какъ по величинѣ, такъ и по направленію, то будетъ вполнѣ извѣстнымъ по величинѣ и направленію и тангенціальное ускореніе той же точки $A$, т.-е. $(j_t)_A$. Опредѣлить его удобнѣе всего графическимъ путемъ, использовавъ для этого построеніе, приведенное на фиг. 121 и дающее $(j_t)_A$ въ функціи угловой скорости $\vartheta$, ибо

$$(j_t)_A = aA . \vartheta^2.$$

Если точка $a$ оказывается лежащей въ предѣлахъ чертежа и занимаетъ удобное положеніе, то, послѣ опредѣленія истинной длины отрѣзка $aA$ и помноженія его на $\vartheta^2$, вопросъ объ опредѣленіи $(j_t)_A$ можетъ почитаться разрѣшеннымъ вполнѣ.




Фиг. 123.

Если точка $a$ выходитъ изъ предѣловъ чертежа, что имѣетъ мѣсто при достаточно большихъ для этого значеніяхъ угла $\mu$ и радіуса-вектора $OA$, то упомянутый выше графическій подсчетъ величины $(j_t)_A$ приходится производить косвеннымъ путемъ, основываясь на слѣдующихъ простыхъ соображеніяхъ:

Пусть извѣстно направленіе $Aj_A$ (фиг. 123) полнаго ускоренія $j_A$ точки $A$, — уголъ $\mu$ этого ускоренія съ радіусомъ-векторомъ $AO$ извѣстенъ, по условію, для каждаго момента. Отло-

жимъ на лучѣ $Aj_A$ какой-либо отрѣзокъ $Aa$ и разложимъ его по взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ $AT$ и $AO$, что дастъ намъ слагающіе отрѣзки $At$ и $An$. Ясно, что

$$tg\mu = \frac{At}{An}.$$

Замѣчая, съ другой стороны, что

$$\frac{(j_t)_A}{(j_n)_A} = tg\mu,$$

такъ что

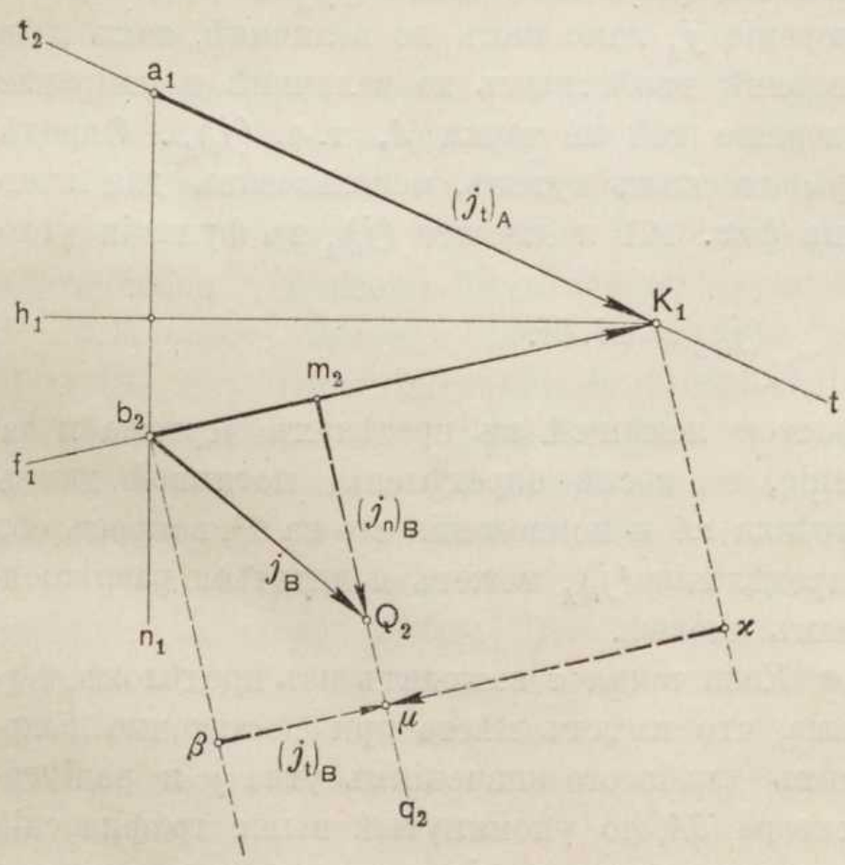
$$(j_t)_A = (j_n)_A tg\mu = \vartheta^2 . AO\, tg\mu,$$

находимъ, что

$$(j_t)_A = \vartheta^2 . AO . \frac{At}{An} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Измѣривъ отрѣзки $At$ и $An$ и опредѣливъ истинную величину отрѣзка $AO$, мы, послѣ помноженія выраженія $(AO . At / An)$ на $\vartheta^2$, получаемъ $(j_t)_A$.

Опредѣливъ, такимъ образомъ, какъ $[(j_t)_B]_0$, такъ и $(j_t)_A$, можемъ приступить къ самому построенію искомаго ускоренія $(j_t)_B$, при чемъ руководствоваться придется даннымъ выше основнымъ уравненіемъ (48). Это построеніе можно вести такъ:




Фиг. 124.

Проводимъ гдѣ-либо въ сторонѣ отъ вычерченной нами схемы нашего механизма въ разсматриваемомъ его положеніи прямую $tt_2$, параллельную $At$ и, значитъ, перпендикулярную къ $OA$ (фиг. 124), и откладываемъ на ней, отъ какой-либо точки $a_1$ ея, въ любомъ масштабѣ M, наиболѣе удобномъ для насъ по обстоятельствамъ дѣла, отрѣзокъ $a_1K_1$, изображающій $(j_t)_A$, такъ что

$$(j_t)_A = \mathrm{M} . a_1K_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (w)$$

Отрѣзокъ $a_1K_1$ надо откладывать отъ точки $a_1$ такъ, чтобы направленіе вектора $a_1K_1$, такимъ образомъ получаемаго, было одинаково съ направленіемъ $aA$ тангенціальнаго ускоренія $(j_t)_A$, изображаемаго теперь этимъ векторомъ $a_1K_1$.

Проводимъ теперь черезъ полученную такимъ образомъ точку $K_1$ лучъ $K_1h_1 \parallel AB$, а черезъ точку $a_1$—лучъ $a_1n_1 \perp K_1h_1$, т.-е. $\perp AB$. Если теперь черезъ точку $K_1$ проведемъ лучъ $K_1f_1 \parallel Af$ и, значитъ, $\perp O_1B$, то точка $b_2$ пересѣченія лучей $a_1n_1$ и $K_1f_1$ опредѣлитъ собою векторъ $b_2K_1$, дающій собою въ томъ же масштабѣ M, выбранномъ выше, ускореніе $(j_t)_A . O\pi / OA$, т.-е. второй членъ правой части основного уравненія (48). Доказать это нетрудно, замѣчая, что треугольникъ $K_1a_1b_2$ подобенъ треугольнику $Aab_1$ (фиг. 121) и, значитъ, треугольнику $OA\pi$, вслѣдствіе чего можно написать, что

$$b_2K_1 : a_1K_1 = O\pi : OA,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$b_2K_1 = a_1K_1 . O\pi / OA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x)$$

Помножая обѣ части этого уравненія на M и принимая во вниманіе соотношеніе $(w)$, находимъ, что

$$b_2K_1 . M = M . a_1K_1 . O\pi / OA = (j_t)_A . O\pi / OA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Итакъ, векторъ $b_2K_1$ представляетъ собою, въ масштабѣ M, ускореніе $(j_t)_A . O\pi / OA$. Направленіе этого вектора $b_2K_1$ идетъ, согласно сказанному выше по поводу вектора $bK$ (фиг. 121), отъ $b_2$ къ $K_1$, и это направленіе слѣдуетъ отмѣтить у конца $K_1$ стрѣлкой, смотрящей въ точку $K_1$.

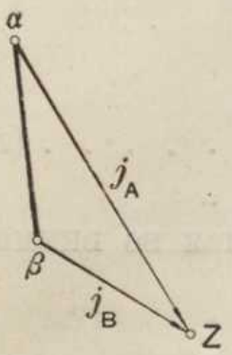
Переходимъ теперь къ ускоренію $[(j_t)_B]_0$. Замѣчая, что оно извѣстно намъ какъ по величинѣ, такъ и по направленію, — оно идетъ по $KF$, отъ $K$ къ $M_2$ (фиг. 122), — опредѣляемъ въ масштабѣ M длину $l_1$ вектора, это ускореніе представляющаго, и откладываемъ полученный отрѣзокъ на лучѣ $K_1f_1$ (фиг. 124) такъ, чтобы векторъ, имъ изображаемый, оказался выходящимъ изъ точки $K_1$; направленіе его должно быть одинаково съ направленіемъ $KM_2$, отъ $K$ къ $M_2$. Тогда конецъ его, несущій на себѣ стрѣлку направленія, и опредѣлитъ собою точку $m_2$, дающую векторъ $b_2m_2$, изображающій въ томъ же масштабѣ M дѣйствительное тангенціальное ускореніе точки $B$, $(j_t)_B$; направленіе этого вектора идетъ отъ $b_2$ къ $m_2$. Отложеніе вектора $l_1$, ради наглядности, показано на томъ же чертежѣ (фиг. 124) пунктирнымъ векторомъ $\varkappa\mu$, равнымъ и параллельнымъ вектору $K_1m_2$; векторъ $\beta\mu \# b_2m_2$ даетъ $(j_t)_B$, какъ это и помѣчено на чертежѣ.

Теперь уже нетрудно опредѣлить въ томъ же масштабѣ M и полное ускореніе $j_B$ точки $B$, для чего можно поступить такъ:

Угловая скорость $\vartheta_1$ системы $BO_1$ извѣстна,—она равна $\vartheta . O\pi / OA$, гдѣ $\vartheta$ есть угловая скорость системы $AO$. Въ виду этого нормальное

ускореніе точки $B$, $(j_n)_B$, выразится черезъ $\vartheta^2 . BO_1$, гдѣ $BO_1 = \varrho_1$ есть дѣйствительная длина (въ натуральную величину) радіуса кривизны точки $B$, изображаемаго въ масштабѣ нашего чертежа отрѣзкомъ $BO_1$. Что касается направленія этого нормальнаго ускоренія, то оно также извѣстно вполнѣ, ибо идетъ отъ $B$ къ центру кривизны $O_1$. Поэтому, опредѣливъ отрѣзокъ $l_2$, дающій въ масштабѣ M это нормальное ускореніе $(j_n)_B$, проведя черезъ точку $m_2$ (фиг. 124) лучъ $m_2 q_2 \parallel BO_1$, т.-е. $\perp b_2 K_1$, и отложивъ на этомъ лучѣ $m_2 q_2$, отъ точки $m_2$ его, отрѣзокъ $l_2$ въ сторону, указываемую направленіемъ $BO_1$, получаемъ отрѣзокъ $m_2 Q_2$, изображающій ускореніе $(j_n)_B$ какъ по величинѣ (въ масштабѣ M), такъ и по направленію (отъ $m_2$ къ $Q_2$).

Сложивъ геометрически оба полученные нами вектора $b_2 m_2$ и $m_2 Q_2$, получимъ векторъ $b_2 Q_2$, дающій уже полное ускореніе $j_B$ точки $B$ какъ по величинѣ (въ масштабѣ M), такъ и по направленію (отъ $b_2$ къ $Q_2$). Такимъ образомъ, получаемъ, что



Фиг. 125.

$$j_B = \mathrm{M} . b_2 Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (y)$$

Нетрудно построить теперь и планъ ускореній для системы отрѣзка $AB$, для чего при какой-либо точкѣ $Z$ плоскости строимъ векторы $\alpha Z$ и $\beta Z$ (фиг. 125), изображающіе $j_A$ и $j_B$ въ масштабѣ M. Соединивъ затѣмъ прямой линіей точки $\alpha$ и $\beta$, получаемъ планъ ускореній системы $AB$ въ видѣ треугольника $Z\alpha\beta$; масштабъ его равенъ M.

Надо, однако, замѣтить, что это построеніе плана ускореній $Z\alpha\beta$ никакого особеннаго значенія для динамическихъ изысканій не имѣетъ, какъ это будетъ разъяснено въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ; тамъ будетъ показано, что пользованіе планомъ $Z\alpha\beta$ можетъ быть, съ удобствомъ для дѣла, замѣнено пользованіемъ планомъ $OAK$ (фиг. 122) и треугольникомъ $a_1 b_2 K_1$ (фиг. 124). Поэтому самостоятельный интересъ и значеніе имѣетъ лишь построеніе этого треугольника $a_1 b_2 K_1$. Особенную важность оно пріобрѣтаетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда, при наличности точекъ $M_1$ и $M_2$, вслѣдствіе ограниченности размѣровъ чертежа и значительности угла $\mu$, начало $a$ вектора $aA$ на чертежѣ не получается. Приведенное выше построеніе и удобно именно тѣмъ, что, въ виду полнаго произвола въ выборѣ масштаба M, позволяетъ намъ подобрать его (масштабъ) такъ, чтобы весь этотъ треугольникъ $a_1 b_2 K_1$ умѣстился на чертежѣ вполнѣ. Надо, кстати, указать, что построеніе, приведенное на фиг. 124, не представляетъ собою ничего новаго; это—то же построеніе треугольника $Aab_1$ (фиг. 121), лишь произведенное въ иномъ масштабѣ.

Вопросъ объ опредѣленіи $j_B$ въ общемъ случаѣ движенія системы $AB$ можетъ, такимъ образомъ, почитаться разрѣшеннымъ вполнѣ; рядъ частныхъ случаевъ, могущихъ здѣсь представиться, будетъ разсмотрѣнъ въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ.

## § 21. Треугольникъ дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній. Общая теорема о дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореніяхъ и планѣ ихъ. Графическій пріемъ опредѣленія радіусовъ кривизны траекторій точекъ плоскодвижущейся системы.

Прежде чѣмъ перейти къ разсмотрѣнію вопроса о примѣненіи общихъ построеній, данныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, къ нѣсколькимъ наиболѣе важнымъ частнымъ случаямъ, мы обратимся еще разъ къ общему построенію, приведенному на фиг. 121, и разсмотримъ свойства выдѣлившагося тамъ треугольника $Aab_1$. Предварительно замѣтимъ слѣдующее:

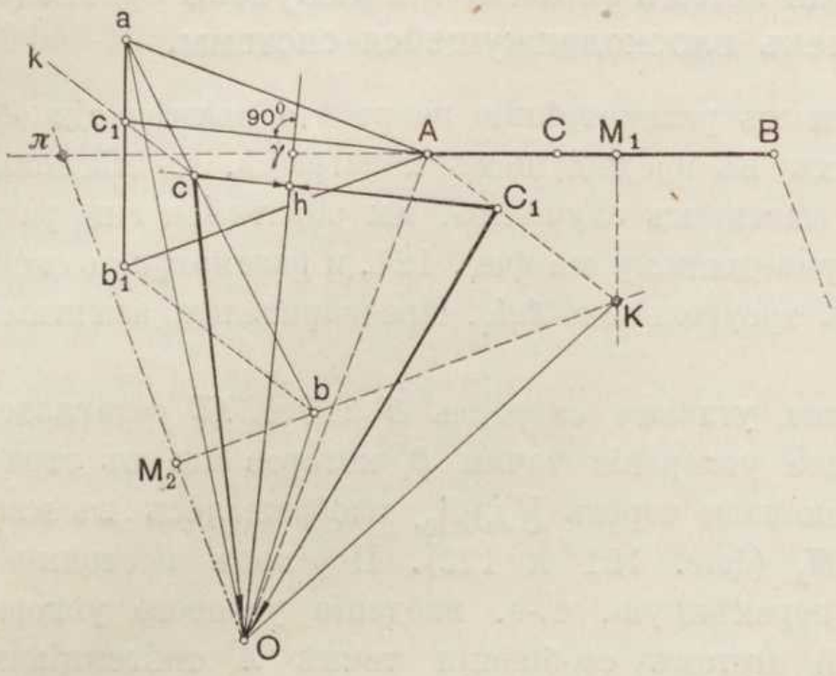
Мы видѣли, что, пока угловая скорость $\vartheta$ звена $AO$ оставалась постоянной, тангенціальное ускореніе точки $B$, которое мы въ этомъ случаѣ символически обозначали черезъ $[(j_t)_B]_0$, изображалось въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ векторомъ $KM_2$ (фиг. 121 и 122). Переводъ постоянной угловой скорости $\vartheta$ въ перемѣнную, т.-е. введеніе углового ускоренія $d\vartheta / dt$, выполняемый путемъ сообщенія точкѣ $A$ тангенціальнаго ускоренія $(j_t)_A$, гдѣ

$$(j_t)_A = aA \cdot \vartheta^2 = AO \cdot d\vartheta / dt,$$

отражается на движеніи точки $B$ тѣмъ, что тангенціальное ускореніе ея, дотолѣ бывшее равнымъ $KM_2 \cdot \vartheta^2$, переходитъ въ тангенціальное ускореніе $bM_2 \cdot \vartheta^2$, получая, такимъ образомъ, приращеніе, изображаемое векторомъ $bK$ или, что то же, векторомъ $b_1A$, и равное $b_1A \cdot \vartheta^2$. Такимъ образомъ, обращаясь къ треугольнику $Aab_1$, видимъ, что сторона $aA$ его представляетъ собою (въ масштабѣ $\vartheta^2$) вводимое нами измѣненіе тангенціальнаго ускоренія точки $A$, бывшаго раньше (при $\vartheta = const$) равнымъ нулю, а теперь ставшаго равнымъ $aA \cdot \vartheta^2$. Подобнымъ же образомъ, сторона $b_1A$ того же треугольника $Aab_1$ даетъ собою, въ томъ же масштабѣ $\vartheta^2$, измѣненіе тангенціальнаго ускоренія точки $B$, бывшаго до того (при $\vartheta = const$) равнымъ $KM_2 \cdot \vartheta^2$, а теперь, при $\vartheta \neq const$, ставшаго равнымъ $bM_2 \cdot \vartheta^2$. Если принять, что точка $a$ этого треугольника $Aab_1$ соотвѣтствуетъ точкѣ $A$ системы $AB$, а точка $b_1$—точкѣ $B$, то систему отрѣзка $ab_1$ можно будетъ признать соотвѣтствующей системѣ $AB$ въ томъ смыслѣ, что измѣненіе тангенціальнаго ускоренія любой точки $C$ системы $AB$, вызванное и обусловленное придачей точкѣ $A$ тангенціальнаго ускоренія $aA$, изобразится въ масштабѣ $\vartheta^2$ векторомъ $c_1A$, соединяющимъ точку $c_1$ системы $ab_1$, соотвѣтствующую точкѣ $C$ системы $AB$, съ вершиной $A$ этого треугольника. Доказать справедливость этого положенія можно такъ:

Возьмемъ какую-либо точку $C$ системы $AB$ (фиг. 126) и посмотримъ, какъ измѣнится тангенціальное ускореніе ея при сообщеніи точкѣ $A$ добавочнаго тангенціальнаго ускоренія $aA$,—масштабъ $(\vartheta^2)$ будемъ вездѣ подразумѣвать. Построивъ, прежде всего, планъ скоростей системы $AB$,—

это будетъ $\triangle OA\pi$,—находимъ въ немъ точку $\gamma$, соотвѣтствующую точкѣ $C$ и, значитъ, опредѣляемую изъ соотношенія




Фиг. 126.

$$AC : AB = A\gamma : A\pi = q \ldots (a)$$

Такимъ образомъ нормаль къ траекторіи точки $C$ имѣетъ направленіе, параллельное вектору $\gamma O$. Построимъ теперь планы ускореній системы $AB$ какъ для случая $\vartheta = const$, — это будетъ $\triangle OAK$, — такъ и для случая $\vartheta \neq const$ (треугольникъ $Oab$) и отыщемъ въ нихъ точки $c$ и $c$, соотвѣтствующія точкѣ $C$; положеніе этихъ точекъ опредѣлится изъ пропорцій:

$$AC_1 : AK = AC : AB = ac : ab = A\gamma : A\pi = q.$$

Такимъ образомъ, при $\vartheta = const$ полное ускореніе точки $C$ изображается векторомъ $C_1O$, а при $\vartheta \neq const$—векторомъ $cO$.

Такъ какъ направленіе $\gamma O$ нормали къ траекторіи точки $C$ совершенно не зависитъ ни отъ скорости этой точки, ни отъ ускоренія ея $j_c$ и опредѣляется одними лишь геометрическими условіями движенія,—мѣстомъ точки $C$ въ системѣ $AB$ и траекторіями конечныхъ точекъ $A$ и $B$,—то оно останется однимъ и тѣмъ же какъ при $\vartheta = const$, такъ и при $\vartheta \neq const$. Далѣе, замѣчая, что нормальное ускореніе точки, совершенно не завися отъ тангенціальнаго ускоренія ея, зависитъ лишь отъ значенія скорости ея въ данный моментъ, заключаемъ, что разъ скорость точки $C$ въ разсматриваемый моментъ имѣетъ значеніе $v_c$, то какъ нормальное ускореніе точки $C$, равное $v_c^2 / \varrho_c$, такъ и векторъ, изображающій его въ масштабѣ $\vartheta^2$, въ обоихъ случаяхъ окажутся одними и тѣми же. Отсюда вытекаетъ, что проекція вектора $C_1O$ на нормаль $\gamma O$ въ точности равна проекціи на ту же нормаль вектора $cO$,—въ обоихъ случаяхъ получается одинъ и тотъ же векторъ $hO$, изображающій въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ нормальное ускореніе $(j_n)_c$ точки $C$. Такимъ образомъ, перпендикуляры, опущенные на нормаль $\gamma O$ изъ точекъ $C_1$ и $c$, сливаются въ одну прямую $chC_1$, перпендикулярную къ $\gamma O$, а такъ какъ эта прямая $C_1hc$ занимаетъ вполнѣ опредѣленное положеніе, ибо представляетъ собою перпендикуляръ, опущенный изъ точки $C_1$ вполнѣ опредѣленнаго плана $OAK$ на постоянную же прямую $\gamma O$, соотвѣтствую-

щую точкѣ $C$, то можно заключить, что *всѣ точки с различныхъ плановъ* $Oab$, *соотвѣтствующихъ различнымъ тангенціальнымъ ускореніямъ* $aA$, *лежатъ на перпендикулярѣ* $C_1h$, *представляющемъ собою*, такимъ образомъ, *геометрическое мѣсто* этихъ *точекъ* $c$, *соотвѣтствующихъ* въ различныхъ планахъ ускореній *точкѣ* $C$ *системы* $AB$.

Разъ прямая $C_1ch$ перпендикулярна $O\gamma$, то $[(j_t)_C]_0$, т.-е. тангенціальное ускореніе точки $C$ при $\vartheta = const$, выражается въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ векторомъ $C_1h$, направленнымъ отъ $C_1$ къ $h$; что же касается $(j_t)_C$, имѣющаго мѣсто при $\vartheta \neq const$, то въ томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$ оно изобразится векторомъ $ch$, идущимъ отъ $c$ къ той же точкѣ $h$. Выходитъ, такимъ образомъ, что сообщеніе точкѣ $A$ тангенціальнаго ускоренія $aA$ вызвало для точки $C$ переходъ тангенціальнаго ускоренія $C_1h$ въ новое, $ch$,—иными словами, обусловило измѣненіе первоначальнаго тангенціальнаго ускоренія $C_1h$ на величину $cC_1$, ибо, согласно правилу сложенія векторовъ, можемъ написать соотношеніе

$$ch = C_1h + cC_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Значитъ, измѣненіе $aA$ вызвало вполнѣ опредѣленное соотвѣтствующее ему измѣненіе $cC_1$. Нетрудно видѣть, что это измѣненіе $cC_1$ можно получить и безъ помощи плана $Oab$, а лишь съ помощью основного плана $OAK$, соотвѣтствующаго случаю $\vartheta = const$, и, затѣмъ, треугольника $Aab_1$. Доказать это можно такъ:

Проведемъ черезъ точку $c$ (фиг. 126) прямую $ck \parallel bb_1$, и пусть пересѣченіе ея съ прямой $ab_1$ треугольника $Aab_1$ даетъ точку $c_1$. Очевидно, что $cc_1 \parallel bb_1 \parallel KA$ и $ac_1 : ab_1 = ac : ab = AC_1 : AK = AC : AB = q$. Далѣе, изъ подобія треугольниковъ $abb_1$ и $acc_1$ вытекаетъ, что $c_1c : b_1b = ac : ab = AC_1 : AK$; но $b_1b \neq AK$; поэтому получаемъ соотношеніе $c_1c : AK = AC_1 : AK$, изъ котораго явствуетъ, что $c_1c = AC_1$, а такъ какъ, по условію, $c_1c \parallel AC_1$, то $c_1c \neq AC_1$ вслѣдствіе чего, наконецъ,

$$c_1A \neq cC_1.$$

Такъ какъ векторъ $cC_1$ представляетъ собою измѣненіе тангенціальнаго ускоренія точки $C$, вызванное появленіемъ у точки $A$ добавочнаго тангенціальнаго ускоренія $aA$, то и оказывается, что это измѣненіе тангенціальнаго ускоренія точки $C$, съ другой стороны, изображается векторомъ $c_1A$, соединяющимъ точку $c_1$ системы $ab_1$, соотвѣтствующую въ ней данной точкѣ $C$, съ вершиной $A$ треугольника $Aab_1$. Такимъ образомъ, вмѣсто того, чтобы, для опредѣленія $(j_t)_C$, строить планъ ускореній для дѣйствительнаго $\vartheta \neq const$, можно воспользоваться для той же цѣли планомъ $OAK$, дающимъ ускореніе $C_1h$, равное $[(j_t)_C]_0$, и треугольникомъ $Aab_1$, дающимъ измѣненіе $c_1A$ этого ускоренія $ch$, что и требовалось доказать.

Итакъ, векторы типа $c_1A$, соединяющіе точки $c_1$ системы $ab_1$, соот-

вѣтствующія въ ней точкамъ $C$ данной системы $AB$, представляютъ собою дополнительныя тангенціальныя ускоренія, испытываемыя точками системы $AB$ при сообщеніи точкѣ $A$ дополнительнаго тангенціальнаго ускоренія $aA$. Такова причина, почему $\triangle Aab_1$ носитъ названіе *треугольника дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній системы* $AB$. Замѣтимъ, кстати, что, такъ какъ $c_1A \parallel cC_1$, а $cC_1 \perp \gamma O$, то $c_1A \perp \gamma O$, что указываетъ на то обстоятельство, что векторы плана скоростей ($\gamma O$) и треугольника дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній ($c_1A$), соотвѣтствующіе одной и той же точкѣ ($C$) системы $AB$ и, значитъ, соотвѣтствующіе другъ другу, взаимно перпендикулярны. Къ такому же заключенію придемъ, замѣтивъ, что $\triangle\triangle Aab_1$ и $OA_1$ другъ другу подобны въ силу перпендикулярности соотвѣтственныхъ сторонъ; отсюда слѣдуетъ, что всѣ векторы этихъ двухъ треугольниковъ, соотвѣтствующіе другъ другу, также взаимно перпендикулярны.

Итакъ, оказывается, что *треугольникъ дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній подобенъ треугольнику плана скоростей*. Къ тому же результату придемъ и другимъ путемъ, если станемъ разбирать вопросъ объ измѣненіи тангенціальныхъ ускореній системы въ зависимости отъ измѣненія тангенціальнаго ускоренія одной изъ ея точекъ съ болѣе общей точки зрѣнія,—нетрудно показать, что, каково бы ни было это измѣненіе, а всѣ *дополнительныя тангенціальныя ускоренія*, имъ вызванныя, *будутъ* всегда *выражаться* и охватываться *планомъ, подобнымъ плану скоростей*. Доказать правильность этого общаго положенія, этой *общей теоремы о планѣ дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній*, можно помощью слѣдующихъ простыхъ разсужденій:

Пусть движеніе какой-либо системы задается движеніемъ нѣкотораго принадлежащаго ей прямого отрѣзка $AB$ (фиг. 106) и пусть, при этомъ, угловая скорость радіуса вектора $AO$, будучи перемѣнной, равна въ данный моментъ $\vartheta$, такъ что точка $A$ въ этотъ моментъ уже обладаетъ нѣкоторымъ тангенціальнымъ ускореніемъ $j_t$, равнымъ $AO \cdot d\vartheta / dt$. Предположимъ теперь, что мы сообщаемъ этой точкѣ $A$ нѣкоторое новое, дополнительное тангенціальное ускореніе, не затрагивая, при этомъ, ни скорости ея $v$, ни нормальнаго ускоренія $j_n$, и посмотримъ, какъ это отразится на ускореніяхъ другихъ точекъ взятой системы $AB$.

Чтобы разобраться въ этомъ важномъ вопросѣ, предположимъ, что разстояніе точки $A$ отъ полюса $P$, т.-е. $AP$, равно $r$, а угловая скорость вращенія системы $AB$ вокругъ этого полюса равна $\omega$, такъ что линейная скорость $v$ точки $A$ выражается такъ

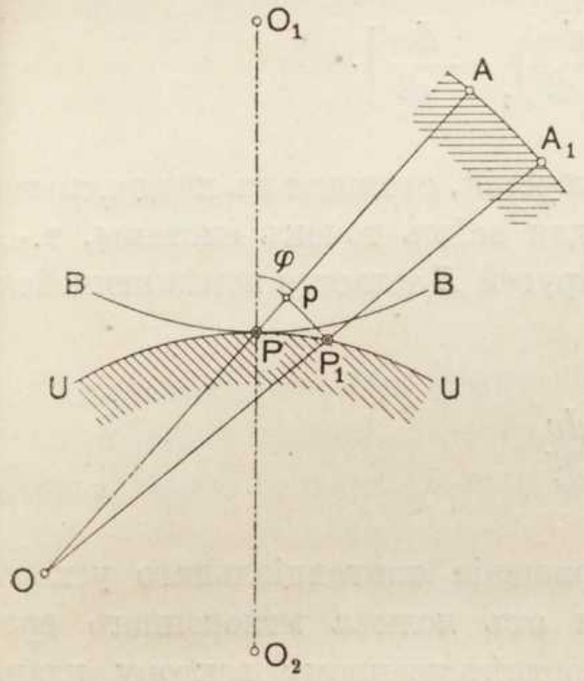
$$v = r\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Полагая, ради общности разсужденій, что какъ $r$, такъ и $\omega$ пред-

ставляютъ собою величины перемѣнныя, заключаемъ, что тангенціальное ускореніе точки $A$, равное $dv/dt$, выразится такъ:

$$j_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = \omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Производную $dr/dt$ легко опредѣлить помощью слѣдующаго геометрическаго построенія: пусть $U$ (фиг. 127) есть неподвижная полодія, $B$ — подвижная, точка касанія ихъ въ данный моментъ, $P$,—полюсъ мгновеннаго вращенія, этому моменту соотвѣтствующій, $A$ — мѣсто данной точки $A$ въ этотъ моментъ; въ слѣдующій моментъ точка $A$ займетъ нѣкоторое положеніе $A_1$, полюсъ перейдетъ въ $P_1$, такъ что центромъ кривизны траекторіи точки $A$ окажется нѣкоторая точка $O$ пересѣченія сосѣднихъ нормалей $APO$ и $A_1P_1O$; наконецъ, пусть $O_1O_2$ есть общая нормаль къ полодіямъ. Проведя радіусомъ $OP_1$ дугу $P_1p$, можемъ написать, что приращеніе $Pp$ радіуса вектора $AP$, положительное или, какъ на чертежѣ, отрицательное,—обозначимъ его черезъ $dr$,—выразится такъ:



Фиг. 127.

$$dr = Pp = PP_1 \sin PP_1p = PP_1 \sin\varphi = u\,dt \sin\varphi = \omega d . \sin\varphi\, dt,$$

откуда и получается, что

$$\frac{dr}{dt} = \omega d . \sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

Вслѣдствіе этого уравненіе $(\gamma)$ переписывается теперь такъ:

$$i_t = \frac{dv}{dt} = \omega^2 d . \sin\varphi + r\frac{d\omega}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

Выше было указано, что точкѣ $A$ мы сообщили только нѣкоторое дополнительное *тангенціальное* ускореніе, не затронувъ ни линейной скорости ея $v$, ни нормальнаго ускоренія $j_n$. Отсюда слѣдуетъ, что останутся незадѣтыми также факторы $\omega$ и $d$, а измѣнится лишь угловое ускореніе системы $AB$, бывшее дотолѣ равнымъ $d\omega/dt$, а теперь перешедшее въ новое, $(d\omega/dt)_1$. Такимъ образомъ, теперешнее танген-

ціальное ускореніе, которое мы обозначимъ черезъ $(dv/dt)_1$ и которое будетъ отлично отъ $(\varepsilon)$, напишется такъ:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = \omega^2 d.\sin\varphi + r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_1, \quad \ldots\ldots\ldots (\zeta)$$

ибо $d$, $\omega$ и $\varphi$ остаются прежними. Такимъ образомъ, добавочное тангенціальное ускореніе, сообщенное нами точкѣ ***A***, выразится, согласно $(\varepsilon)$ и $(\zeta)$, такъ:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 - \frac{dv}{dt} = r\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_1 - \frac{d\omega}{dt}\right].$$

Такъ какъ разность угловыхъ ускореній, стоящая въ квадратныхъ скобкахъ, сохраняетъ свое значеніе для всѣхъ точекъ системы, т.-е. при переходѣ отъ точки ***A*** къ любой другой ***Z*** остается немѣняющейся, то отсюда слѣдуетъ, что разность

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 - \frac{dv}{dt}$$

тангенціальныхъ ускореній, т.-е. приращеніе тангенціальнаго ускоренія, пропорціальна разстоянію $r$ точки отъ полюса мгновеннаго вращенія и, значитъ, пропорціональна соотвѣтственному вектору плана скоростей. Замѣчая, вдобавокъ, что какъ сами тангенціальныя ускоренія, такъ и приращенія ихъ, т.-е. дополнительныя тангенціальныя ускоренія, *нормальны* къ радіусамъ-векторамъ $r$, а значитъ, и къ соотвѣтствующимъ имъ векторамъ плана скоростей, заключаемъ, что и замыкающая плана дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній окажется перпендикулярной къ соотвѣтствующей ей замыкающей плана скоростей и, значитъ, къ дающему эту послѣднюю отрѣзку ***AB***.

Слѣдуетъ подчеркнуть, что это заключеніе одинаково примѣнимо ко всѣмъ случаямъ движенія отрѣзка ***AB*** и не зависитъ отъ величины имѣвшагося до того тангенціальнаго ускоренія точки ***A***: будетъ ли оно равно нулю или отлично отъ него, но разъ мы сообщимъ точкѣ ***A*** нѣкоторое дополнительное тангенціальное ускореніе, то всѣ остальныя точки этой системы тотчасъ же претерпятъ измѣненія своихъ тангенціальныхъ ускореній, вполнѣ опредѣленныя и обнимаемыя своимъ планомъ, какъ видимъ, подобнымъ плану скоростей и лишь повернутымъ относительно него на прямой уголъ.—Теорема о планѣ дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній является, такимъ образомъ, доказанной вполнѣ. Распространеніе ея на механизмы сколь угодно сложнаго состава никакихъ трудностей не представляетъ и будетъ разсмотрѣно въ одномъ изъ послѣдующихъ параграфовъ, а теперь, въ порядкѣ изложенія нашего курса, мы обратимся къ разсмотрѣнію вопроса объ опредѣленіи

ускореній любыхъ точекъ системы при помощи плановъ $OAK$ (при $\vartheta = const$) и $Aab_1$ (доп. танг. уск.).

Въ основаніе рѣшенія этого вопроса слѣдуетъ положить основное уравненіе (55), имѣющее видъ:

$$ch = C_1h + cC_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Было доказано, что

$$cC_1 \# c_1A,$$

—см. фиг. 126. Поэтому (55) переписывается такъ:

$$ch = C_1h + c_1A.$$

Помножа... всѣ члены этого соотношенія на $\vartheta^2$, получаемъ уравненіе

$$ch.\vartheta^2 = C_1h.\vartheta^2 + c_1A.\vartheta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\eta)$$

Такъ какъ $(ch.\vartheta^2)$ представляетъ собою тангенціальное ускореніе точки $C$ при $\vartheta = const$, т.-е. $(j_t)_C$, а $(C_1h.\vartheta^2)$—тангенціальное ускореніе точки $C$ при $\vartheta = const$, т.-е. $[(j_t)_C]_0$, то уравненіе $(\eta)$ принимаетъ видъ:

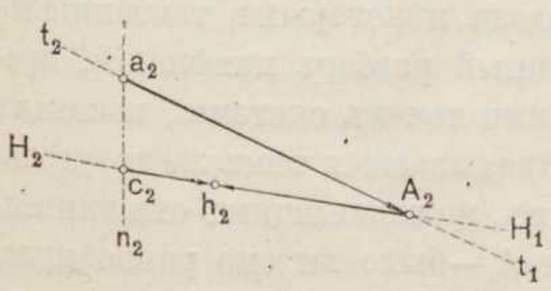
$$(j_t)_C = [(j_t)_C]_0 + c_1A.\vartheta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\vartheta)$$

Для установленія связи между $(j_t)_C$ и $(j_t)_A$, множимъ и дѣлимъ членъ $c_1A.\vartheta^2$ на $aA$; тогда получаемъ, что

$$(j_t)_C = [(j_t)_C]_0 + aA.\vartheta^2.c_1A/aA = [(j_t)_C]_0 + (j_t)_A.c_1A/aA \quad \ldots (54)$$

Это основное соотношеніе позволяетъ намъ строить тангенціальныя ускоренія любыхъ точекъ $C$ системы $AB$; поступать при этомъ приходится совершенно аналогично тому, что было выполнено для точки $B$, а именно:

Гдѣ-либо въ плоскости чертежа проводимъ прямую $t_1t_2$ (фиг. 128), перпендикулярную радіусу $AO$, и откладываемъ на ней векторъ $a_2A_2$, изображающій въ какомъ-либо масштабѣ M, наиболѣе удобномъ для насъ, данное намъ тангенціальное ускореніе точки $A$, т.-е. $(j_t)_A$. Пусть этотъ векторъ своимъ направленіемъ смотритъ въ точку $A_2$. Теперь изъ другого конца его, $a_2$, проводимъ лучъ $a_2n_2 \perp AB$, а изъ точки $A_2$—лучъ $A_2H_2 \perp \gamma O$, гдѣ $\gamma O$ есть нормаль къ траекторіи точки $C$. Пересѣченіе этихъ двухъ лучей $a_2n_2$ и $A_2H_2$ даетъ точку $c_2$, опредѣляющую




Фиг. 128.

векторъ $c_2A_2$, соотвѣтствующій вектору $c_1A$ (фиг. 126) или, что то же, вектору $cC_1$. Наконецъ, отъ точки $A_2$ откладываемъ въ должномъ направленіи векторъ $A_2h_2$, изображающій въ томъ же масштабѣ M тангенціальное ускореніе $[(j_t)_C]_0$; конецъ $h_2$ его и опредѣлитъ векторъ $c_2h_2$, дающій своимъ направленіемъ (отъ $c_2$ къ $h_2$) и величиной (въ масштабѣ M) тангенціальное ускореніе точки $C$ при $\vartheta = const$, такъ что

$$(j_t)_C = c_2h_2 . \mathrm{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\varkappa)$$

Это построеніе можетъ быть выполнено и при помощи плана дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній $Aab_1$ (фиг. 126), для чего въ системѣ основанія $ab_1$ его слѣдуетъ отыскать точку $c_1$, соотвѣтствующую $C$, и, затѣмъ, на векторѣ $c_1A$ отложить, въ масштабѣ $(\vartheta^2)$, векторъ, изображающій $[(j_t)_C]_0$.

Пристраивая у точекъ $h_2$ вектора, изображающія нормальныя ускоренія точекъ $C$, получимъ полныя ускоренія этихъ точекъ; для точки $B$ эта операція показана на фиг. 124.—Вопросъ объ опредѣленіи ускореній различныхъ точекъ системы, при указанныхъ выше начальныхъ данныхъ, можетъ быть признанъ разрѣшеннымъ вполнѣ.

Соображенія, изложенныя выше, позволяютъ установить тотъ фактъ, что для опредѣленія ускореній точекъ системы при $\vartheta = const$ построеніе соотвѣтствующаго плана ускореній $Oab$ (фиг. 126) является совершенно излишнимъ, ибо опредѣленіе всѣхъ ускореній можетъ быть выполнено при помощи плана $OAK$ (для $\vartheta = const$) и треугольника $Aab_1$, *измѣняющагося подобно самому себѣ при различныхъ тангенціальныхъ ускореніяхъ* $aA$.

Если точка $C$ лежитъ внѣ прямой $AB$, то для правильнаго нахожденія въ системѣ $ab_1$ $\triangle$-ка $Aab_1$ соотвѣтствующей ей точки $c_1$, надо помнить лишь, что вершина $A$ этого треугольника, очевидно, соотвѣтствуетъ полюсу мгновеннаго вращенія $P$ данной системы $AB$, что явствуетъ изъ того соображенія, что полюсъ $P$ опредѣляется пересѣченіемъ прямыхъ $OA$ и $O_1B$, а эти прямыя перпендикулярны сторонамъ $aA$ и $b_1A$ треугольника $Aab_1$, опредѣляющимъ своимъ пересѣченіемъ вершину $A$.

Слѣдуетъ замѣтить еще одно, весьма важное, обстоятельство, а именно: если бы точка $A$, предъ сообщеніемъ ей дополнительнаго тангенціальнаго ускоренія $aA.\vartheta^2$, уже обладала нѣкоторымъ тангенціальнымъ ускореніемъ $(j_t)_A$, то непосредственный разборъ измѣненій, претерпѣваемыхъ тангенціальными ускореніями точекъ системы, показалъ бы намъ, что всѣ эти измѣненія опять охватываются тѣмъ же треугольникомъ $Aab_1$, совершенно, такимъ образомъ, не зависящимъ отъ тангенціальнаго ускоренія, имѣвшагося у точки $A$,—было ли оно равно нулю или нѣтъ, а измѣненія тангенціальныхъ ускореній всѣ будутъ даваться векторами, соединяющими соотвѣтствующія точки системы $ab_1$ съ вершиной $A$ и, замѣтимъ еще разъ, всегда направленными отъ этихъ соотвѣтствующихъ точекъ къ вершинѣ $A$.

Въ заключеніе настоящаго параграфа разсмотримъ весьма важный въ практическомъ отношеніи вопросъ о *графическомъ способѣ опредѣленія радіусовъ кривизны траекторій точекъ плоско-движущейся системы при помощи плановъ скоростей и ускореній.* Пусть, такимъ образомъ, требуется опредѣлить радіусъ кривизны $\rho$ траекторіи какой-либо точки $C$ (фиг. 126) системы $AB$. Будемъ разсуждать такъ:

Извѣстно, что $j_n = v^2 / \rho$, откуда слѣдуетъ, что

$$\rho = \frac{v^2}{j_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\lambda)$$

Если бы намъ были извѣстны векторы, изображающіе въ тѣхъ или иныхъ масштабахъ скорость $v$ и нормальное ускореніе $j_n$ взятой точки $C$, то $\rho$ можно было бы опредѣлить помощью этого уравненія ($\lambda$). Эти векторы можно получить изъ плановъ скоростей и ускореній, замѣтивъ слѣдующее:

Пусть угловая скорость вращенія вектора $AO$ есть $\vartheta$. Строимъ планъ скоростей $OA\pi$ системы $AB$ и находимъ въ немъ точку $\gamma$, соотвѣтствующую точкѣ $G$. Тогда можно написать, что скорость $v$ точки $C$ выражается такъ:

$$v = \gamma O . \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mu)$$

Обратимся теперь къ нормальному ускоренію $j_n$ точки $C$. Надо замѣтить, что оно, вообще говоря, совершенно не зависитъ отъ того, обладаетъ ли точка $A$ какимъ-либо тангенціальнымъ ускореніемъ или нѣтъ. Поэтому, ради простоты построеній, мы и предполагаемъ, что $(j_t)_A = 0$, т.-е. что $\vartheta = const$, такъ что планомъ ускореній явится треугольникъ $OAK$. Найдя въ немъ точку $C_1$, соотвѣтствующую точкѣ $C$, опускаемъ изъ нея перпендикуляръ $C_1 h$ на $\gamma O$. Тогда и окажется, что

$$j_n = hO . \vartheta^2 . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\nu)$$

Сопоставляя соотношенія ($\mu$) и ($\nu$) съ уравненіемъ ($\lambda$), находимъ, что

$$\rho = \frac{\gamma O^2 . \vartheta^2}{hO . \vartheta^2} = \frac{\gamma O^2}{hO} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\xi)$$

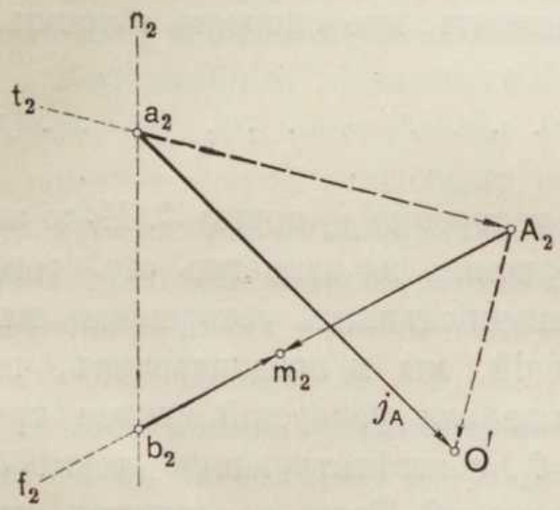
Оказывается, такимъ образомъ, что *отрѣзокъ $\gamma O$ является среднимъ пропорціональнымъ между отрѣзкомъ $hO$, изображающимъ нормальное ускореніе точки $C$, и искомымъ радіусомъ кривизны $\rho$ траекторіи точки $C$.* Построеніе $\rho$, вытекающее отсюда, настолько просто, что въ дальнѣйшихъ поясненіяхъ не нуждается.

Чтобы покончить съ вопросомъ объ опредѣленіи ускореній точекъ системы, мы разсмотримъ еще нѣсколько частныхъ случаевъ, нѣкоторые изъ коихъ, какъ, напримѣръ, случай паровой машины, имѣютъ огромное практическое значеніе.

## § 22. Частные случаи примѣненія общихъ построеній, данныхъ въ §§ 20—21.

Въ настоящемъ параграфѣ мы разберемъ нѣсколько наиболѣе важныхъ примѣровъ и случаевъ примѣненія построеній, данныхъ въ двухъ предыдущихъ параграфахъ. Прежде всего разберемъ тотъ, когда требуется, чтобы *построеніе* ускоренія *было выполнено при той же точкѣ, ускореніе коей ищется.* Пусть, такимъ образомъ, извѣстны всѣ обстоятельства движенія точки $B$, и ищется $j_A$, при чемъ построеніе $j_A$ требуется произвести именно у точки $A$. Тогда поступаемъ такъ:

По условію, намъ извѣстны какъ $\vartheta_B$, такъ и $j_B$. По $\vartheta_B$ находимъ $\vartheta_A$. Опредѣливъ, помощью обычнаго построенія (фиг. 122) отрѣзокъ $KM_2$, подсчитываемъ тангенціальное ускореніе точки $B$ при $\vartheta = const$, т.-е. $[(j_t)_B]_0$, равное $KM_2 . \vartheta_A^2$, и откладываемъ его въ нѣкоторомъ масштабѣ M въ видѣ вектора $A_2m_2$. Далѣе, по данному полному ускоренію $j_B$ опредѣляемъ дѣйствительное тангенціальное ускореніе $(j_t)_B$ и находимъ векторъ $b_2m_2$, изображающій его въ томъ же масштабѣ M, послѣ чего откладываемъ его при той же точкѣ $m_2$ такъ, чтобы онъ легъ по той же прямой $A_2f_2$ и чтобы конецъ его, снабженный стрѣлкой, указывающей направленіе, смотрѣлъ и пришелся въ точку $m_2$; тогда начало его опредѣлитъ точку $b_2$. Дальнѣйшее понятно само собою: черезъ точку $b_2$ проводимъ лучъ $b_2n_2 \perp AB$ (фиг. 129), а черезъ точку $A_2$—лучъ $A_2t_2 \perp AO$; пересѣченіе этихъ двухъ лучей даетъ точку $a$, опредѣляющую векторъ $a_2A_2$, который и представитъ собою, въ томъ же масштабѣ M, тангенціальное ускореніе точки $A$, $(j_t)_A$.



Фиг. 129.

Что касается полнаго ускоренія $j_A$, то его найдемъ, опредѣливъ нормальное ускореніе точки $A$, $(j_n)_A$, равное $v_A^2 / \varrho_A$, и векторъ $A_2O'$, изображающій это нормальное ускореніе въ томъ же масштабѣ M. Отложивъ его въ должномъ направленіи у точки $A_2$, получимъ точку $O'$, вмѣстѣ съ $a_2$ опредѣляющую векторъ $a_2O'$, дающій полное ускореніе $j_A$ въ масштабѣ M.—Имѣя векторы, изображающіе $j_A$ и $j_B$, сможемъ построить планъ ускореній системы $AB$, и задача окажется разрѣшенной вполнѣ.

Разсмотримъ теперь весьма важный *вопросъ объ ускореніяхъ системы въ начальный моментъ движенія*, когда $\vartheta$, угловая скорость радіуса-вектора $AO$, равна еще нулю; разрѣшается онъ такъ:

Пусть, такимъ образомъ, $\vartheta = 0$, такъ что и $\vartheta_1$, угловая скорость

радіуса-вектора $BO_1$, также равна нулю, но угловое ускореніе $d\vartheta / dt$ системы $AO$ уже отъ нуля отлично. Такіе случаи наблюдаются въ тѣ моменты, когда система подъ воздѣйствіемъ данныхъ силъ вынуждена выйти изъ состоянія покоя и начинаетъ двигаться. Уравненія динамики даютъ вполнѣ опредѣленную зависимость между этимъ угловымъ ускореніемъ $d\vartheta / dt$, величинами силъ, дѣйствующихъ на систему, и массами, входящими въ ея составъ, и для начальнаго момента эта величина $d\vartheta / dt$ является величиной, каждый разъ вполнѣ опредѣленной и могущей, въ зависимости отъ условій заданія, имѣть самыя различныя значенія, включая сюда и нулевое. Для общности разсужденій предположимъ, что $d\vartheta / dt$ отъ нуля отлично.

Прежде всего, слѣдуетъ замѣтить, что, въ виду условій $\vartheta = 0$ и $\vartheta_1 = 0$, будутъ равны нулю и нормальныя ускоренія точекъ $A$ и $B$, ибо

$$(j_n)_A = \vartheta^2 . AO$$

и

$$(j_n)_B = \vartheta_1^2 . BO_1,$$

при чемъ $AO$ и $BO_1$ нулю не равны.—Итакъ, *для начальнаго момента* имѣемъ, что

$$(j_n)_A = 0$$

и

$$(j_n)_B = 0.$$

Перейдемъ теперь къ подсчету тангенціальныхъ ускореній, предположивъ, такимъ образомъ, что величина углового ускоренія $d\vartheta / dt$ намъ дана.

Основное уравненіе ($t''$), имѣющее видъ

$$(j_t)_B = bK . \vartheta^2 + KM_2 . \vartheta^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (t'')$$

дать отвѣта на поставленный вопросъ не можетъ, такъ какъ векторъ $bK$ при $\vartheta = 0$ обращается, какъ это будетъ показано ниже, въ безконечность, такъ что уравненіе ($t''$) для начальнаго момента принимаетъ видъ:

$$(j_t)_B = \infty . 0 + 0.$$

Раскрытіе получающейся такимъ образомъ неопредѣленности можетъ быть выполнено при помощи уравненія (47), позволяющаго написать, что

$$bK . \vartheta^2 = O\pi \cdot \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

и переводящаго уравненіе ($t''$) въ уравненіе

$$(j_t)_B = O\pi \cdot \frac{d\vartheta}{dt} + KM_2 . \vartheta^2 \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

Отсюда явствуетъ, что въ начальный моментъ, при $\vartheta = 0$,

$$(j_t)_B = O\pi \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Для того же начальнаго момента имѣемъ, согласно общему закону,

$$(j_t)_A = OA \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Такъ какъ нормальныя ускоренія точекъ $A$ и $B$, какъ было показано выше, равны въ начальный моментъ нулю, а тангенціальныя отличны отъ нуля и выражаются соотношеніями (53) и (54), то ясно, что въ начальный моментъ движенія системы полныя ускоренія точекъ $A$ и $B$ представляются одними лишь тангенціальными ускореніями ихъ, такъ что для начальнаго момента имѣемъ соотношенія

$$j_A = (j_t)_A = OA \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

и

$$j_B = (j_t)_B = O\pi \cdot \frac{d\vartheta}{dt},$$

указывающія, между прочимъ, что эти ускоренія выражаются произведеніями изъ углового ускоренія $dv/dt$ на векторы плана скоростей, соотвѣтствующіе разсматриваемымъ точкамъ системы.

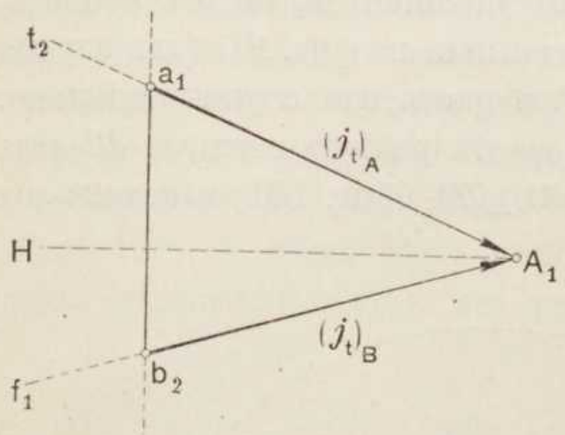
Если теперь мы примемъ во вниманіе, что точки $A$ и $B$ нашей плоскодвижущейся системы выдѣлены въ ней произвольно, то станетъ возможнымъ распространить вышеприведенныя заключенія, имѣющія силу для этихъ точекъ, и на всѣ остальныя точки системы и сказать, вообще, что

*въ начальный моментъ движенія ускоренія всѣхъ точекъ данной плоскодвижущейся системы представляютъ собою лишь тангенціальныя ускоренія ихъ и выражаются произведеніями изъ углового ускоренія $dv/dt$ на соотвѣтственные векторы плана скоростей.*

Нормальныя ускоренія для этого момента, какъ, вообще, и для всякаго другого съ $\vartheta = 0$, будутъ равны нулю.

Общее построеніе, приведенное на фиг. 121, дать отвѣта на поставленный вопросъ не можетъ, что видно изъ слѣдующихъ соображеній: уголъ $\mu$ равенъ здѣсь 90°, ибо точка $A$ обладаетъ, по условію, однимъ лишь тангенціальнымъ ускореніемъ; такимъ образомъ, лучъ $Ov$, параллельный $Aj_A$, становится перпендикуляренъ къ $OA$ и параллеленъ лучу $At$, вслѣдствіе чего векторъ $aA$, а вмѣстѣ съ нимъ и вектора $b_1A$ и $bK$, становятся безконечно большими. Это именно обстоятельство и заставило насъ вмѣсто уравненія ($t''$) использовать уравненіе (50), какъ объ этомъ и было упомянуто выше.

Построеніе, данное на фиг. 124, примѣнимо здѣсь вполнѣ. Дѣйствительно, векторъ $a_1A_1$, изображающій тангенціальное ускореніе точки $A$, $(j_t)_A$, отличное отъ нуля, будетъ вполнѣ опредѣленъ; вслѣдствіе этого явится вполнѣ опредѣленнымъ и векторъ $b_2A_1$. Относительно же вектора $A_1m_2$, изображающаго тангенціальное ускореніе точки $B$ при $\vartheta = const$, т.-е. $[(j_t)_B]_0$, заключаемъ, что такъ какъ эта угловая скорость $\vartheta$ равна здѣсь нулю, то и это тангенціальное ускореніе будетъ также равно нулю,—система $AB$ двигаться не будетъ совсѣмъ. Къ тому же результату придемъ, разсматривая построеніе, изображенное на фиг. 122; изъ него явствуетъ, что при $\vartheta = 0$ тангенціальное ускореніе $[(j_t)_B]_0$, равное $KM_2 . \vartheta^2$, также равно нулю.




Фиг. 130.

Такимъ образомъ, точка $m_2$ фиг. 124 сливается здѣсь съ вершиной $A_1$, и искомое ускореніе $(j_t)_B$ изобразится векторомъ $b_2A_1$. Такъ какъ нормальныя ускоренія точекъ системы равны здѣсь нулю, то планъ ускореній нашей системы въ начальный моментъ движенія изобразится треугольникомъ $A_1a_1b_2$ (фиг. 130).

---

Въ заключеніе настоящаго параграфа разберемъ *построеніе* $j_B$ *въ тѣхъ случаяхъ, когда траекторія точки* $B$ *представляетъ собою прямую линію*, а траекторія точки $A$ остается, попрежнему, криволинейной; при этомъ, ради простоты разсужденій, предположимъ, что точка $A$ движется по круговой траекторіи неподвижнаго центра $O$ и постояннаго радіуса $OA$. Никакихъ осложненій такое предположеніе не вноситъ. Радіусъ кривизны траекторіи точки $B$, $\varrho_1$, въ этомъ случаѣ все время остается равнымъ безконечности, а такъ какъ положеніе точки $M_2$ (см., напр., фиг. 121) на векторѣ $O\pi O_2$ опредѣляется соотношеніемъ

$$O\pi^2 = OM_2 . OO_2$$

или, что то же, соотношеніемъ

$$OM_2 = \frac{O\pi_2}{OO_2},$$

то, въ виду условія

$$OO_2 = \varrho_1 = \infty,$$

находимъ, что здѣсь все время

$$OM_2 = \frac{O\pi^2}{\infty} = 0,$$

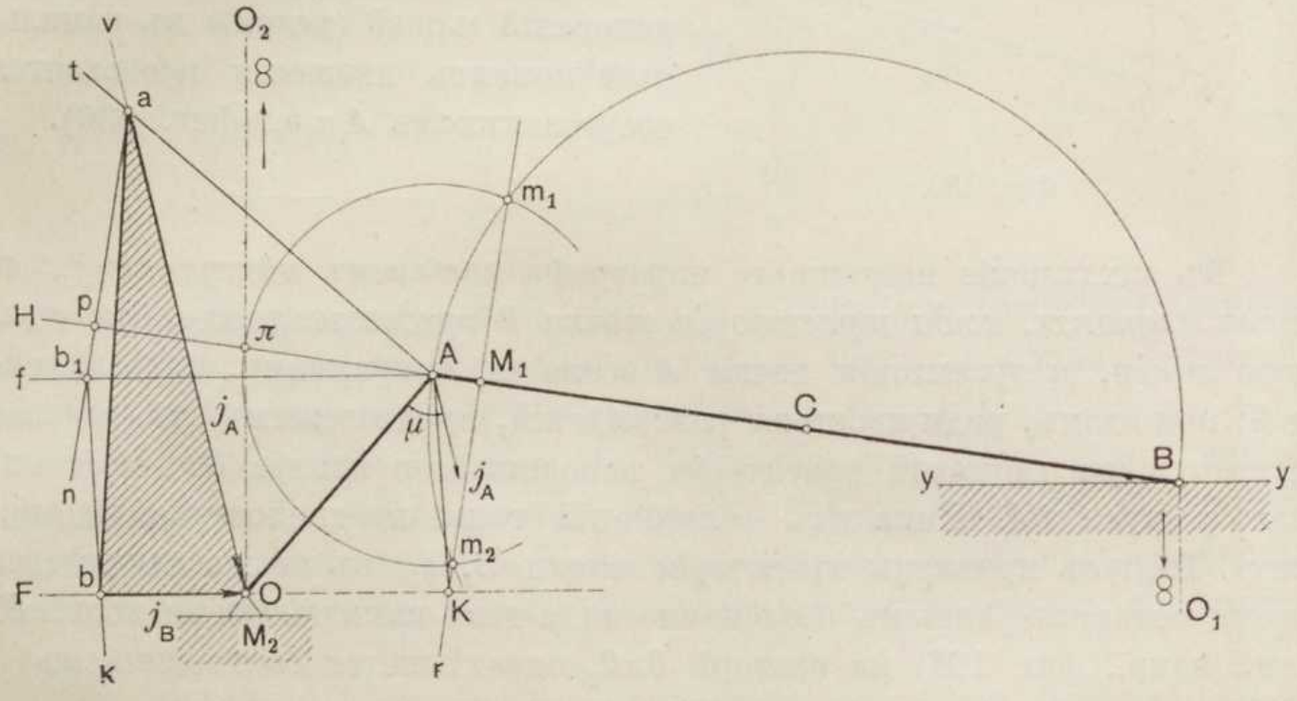
такъ что въ этомъ частномъ случаѣ точка $M_2$ все время остается совпадающей съ центромъ $O$ кривизны траекторіи точки $A$.

Пусть движеніе точки $B$ протекаетъ по прямой $yy$ (фиг. 131—134). Такъ какъ эта прямая остается все время неподвижной, то будетъ оставаться неизмѣннымъ направленіе нормали къ ней (прежнее $BO_1$). Въ виду этого лучъ $O\pi O_2$, параллельный этой нормали, будетъ все время оставаться неподвижнымъ и перпендикулярнымъ къ прямой $yy$ (фиг. 131 и слѣд.).

Далѣе, въ виду совпаденія точки $M_2$ съ точкой $O$, прямая $FM_2K$ (фиг. 121), какъ перпендикулярная къ прямой $O\pi O_2$, будетъ здѣсь все время неподвижной и параллельной прямой $XY$.

Построеніе, какъ видимъ, нѣсколько упрощается, но, въ общемъ, повторяетъ собою общія построенія, приведенныя на фиг. 121 (для случая $\mu \neq 0$) и фиг. 122 (для случая $\mu = 0$). Разберемъ эти случаи отдѣльно.

Пусть $\mu \neq 0$, такъ что угловая скорость радіуса-вектора $AO$ есть величина перемѣнная. Проводимъ лучъ $At \perp OA$ (фиг. 131) и ведемъ его




Фиг. 131.

до пересѣченія съ лучомъ $Ov$, параллельнымъ $Aj_A$, въ точкѣ $a$. Такимъ образомъ опредѣляется векторъ $aO$, дающій въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ ускореніе $j_A$. Опускаемъ теперь изъ точки $a$ перпендикуляръ $an$ на прямую $BA$ (или на продолженіе ея $AH$) и ведемъ его до пересѣченія съ лучомъ $Af$, параллельнымъ $FM_2$, т.-е. $yy$, въ нѣкоторой точкѣ $b_1$.

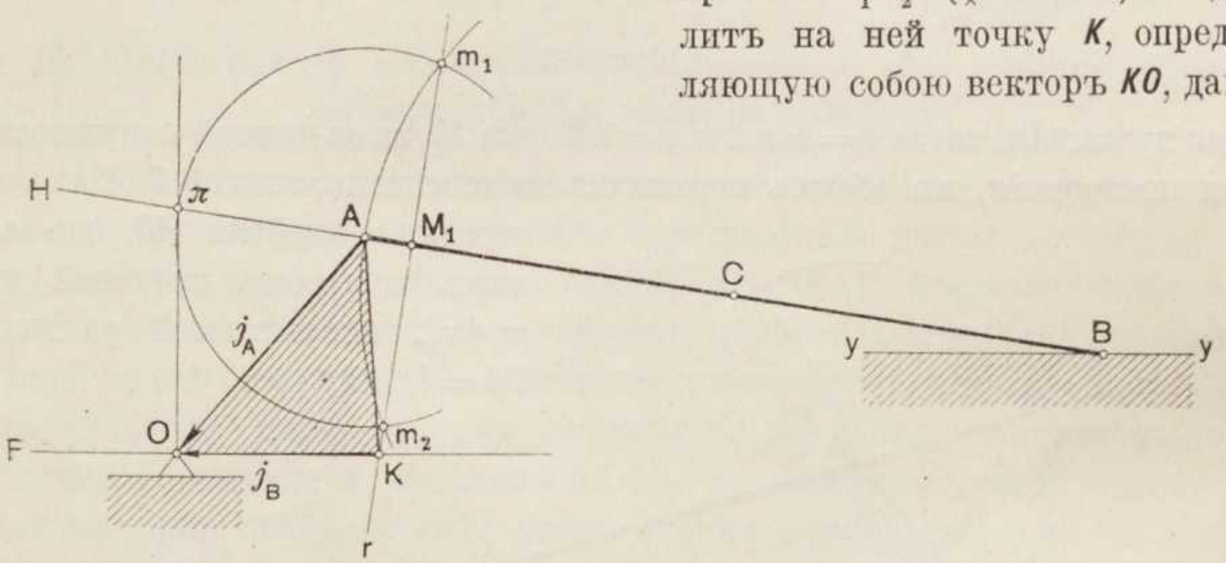
Опредѣляемъ теперь положеніе полюса поворота $K$. Онъ лежитъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ $FM_2$ и $M_1r$, изъ коихъ послѣдняя перпендикулярна къ $AB$ и проходитъ черезъ точку $M_1$, опредѣляемую изъ соотношенія $A\pi^2 = AM_1 . AB$. Положеніе этой точки можно опредѣлять или путемъ непосредственнаго подсчета или графически. Въ послѣднемъ случаѣ, почти исключительно примѣняемомъ на практикѣ, удобнѣе всего пользоваться построеніемъ, изображеннымъ на фиг. 74—75,

а именно: на отрѣзкѣ $AB$, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность и радіусомъ $A\pi$ изъ центра $A$ засѣкаемъ на ней точки $m_1$ и $m_2$. Точка пересѣченія прямой $AB$ съ прямой $m_1m_2$ и представитъ собою искомую точку $M_1$.

Замѣчая, далѣе, что для опредѣленія положенія точки $K$ намъ нуженъ перпендикуляръ $M_1r$ къ $AB$, возставленный изъ $M_1$, а не сама точка $M_1$, и что такой перпендикуляръ какъ разъ представляется упомянутой прямой $m_1m_2$, заключаемъ, что искомая точка $K$ лежитъ въ пересѣченіи прямой $m_1m_2$ съ прямой $FO$ (прежней $FM_2$).

Найдя помощью такого построенія положеніе полюса $K$, соединяемъ его прямой линіей съ точкой $A$ и изъ точки $b_1$ ведемъ лучъ $b_1k \parallel AK$ до пересѣченія съ прямой $FO$ въ нѣкоторой точкѣ $b$, опредѣляющей собою векторъ $bO$, дающій искомое полное ускореніе $j_B$ въ масштабѣ $(\vartheta^2)$. Сообразно съ этимъ, планъ ускореній системы $AB$ представится треугольникомъ $Oab$.—Вопросъ разрѣшается вполнѣ.

При $\mu = 0$, т.-е. при $\vartheta = const$ и, значитъ, равномѣрномъ вращеніи радіуса-вектора $OA$, построеніе ведется согласно общей схемѣ, данной на фиг. 122, съ тѣмъ лишь упрощеніемъ противъ нея, что прямая $FM_2K$ будетъ оставаться здѣсь все время неподвижной и параллельной $XY$; прямая $m_1m_2$ (фиг. 132) выдѣлитъ на ней точку $K$, опредѣляющую собою векторъ $KO$, даю-




Фиг. 132.

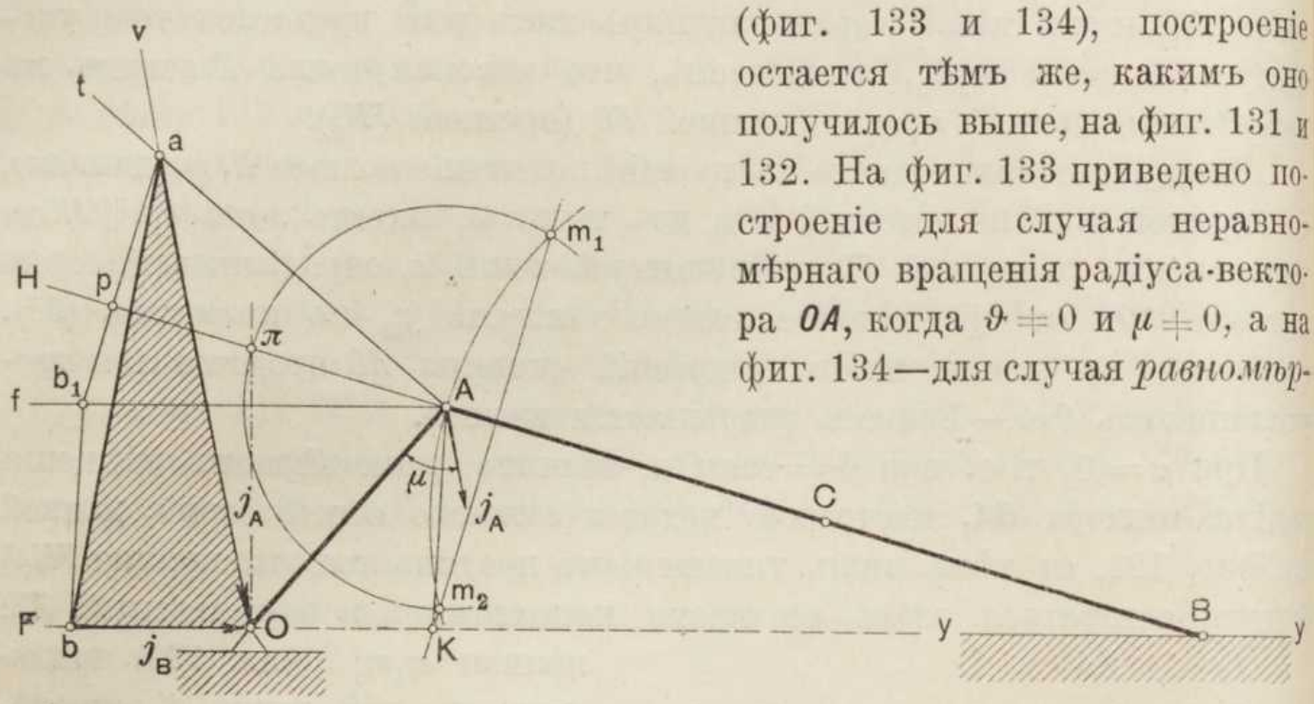
щій ускореніе $j_B$ въ масштабѣ $(\vartheta^2)$. Ускореніе $j_A$ будетъ даваться въ томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$ векторомъ $AO$, такъ что планъ ускореній въ этомъ случаѣ изобразится треугольникомъ $OAK$.

Согласно общимъ положеніямъ, установленнымъ въ предыдущихъ параграфахъ, пользованіе планомъ $Oab$ (фиг. 131), относящимся къ случаю $\vartheta \neq 0$, можетъ быть замѣнено использованіемъ плана $AOK$ (фиг. 132) для $\vartheta = 0$ и треугольника $Aab_1$ дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореній (фиг. 131). Построеніе этихъ двухъ плановъ особенно упрощается благодаря тому обстоятельству, что ускореніе точки $B$ будетъ все время тангенціальнымъ и постояннымъ по направленію,—оно все время будетъ оставаться параллельнымъ прямой $yy$. Напомнимъ, что векторы $bO$ и $KO$ имѣютъ направленія къ точкѣ $O$ каждый, а векторъ $b_1A$—къ точкѣ $A$.

Никакихъ затрудненій не представитъ и построеніе плана танген-

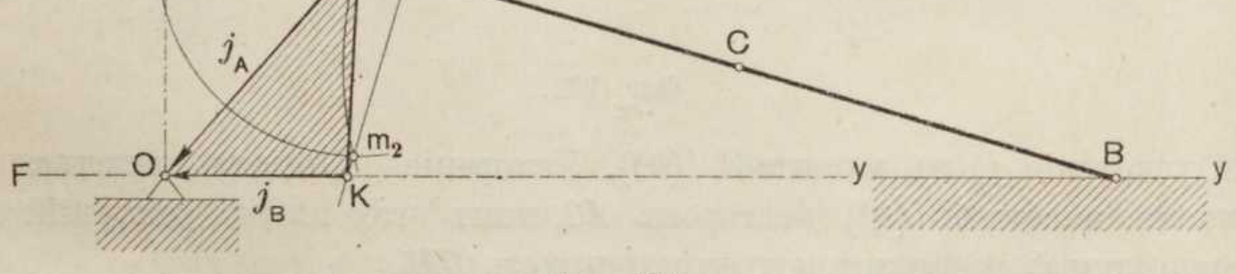
ціальныхъ ускореній въ масштабѣ **M**, данное въ предыдущемъ параграфѣ; получится планъ, подобный треугольнику $Aab_1$ и соотвѣтственно ему расположенный; сторона $b_2K_1$ его (см. фиг. 124) будетъ здѣсь все время сохранять одно и то же направленіе, параллельное *yy*.

Въ томъ случаѣ, когда прямая *XY* проходитъ черезъ самую точку *O* (фиг. 133 и 134), построеніе остается тѣмъ же, какимъ оно получилось выше, на фиг. 131 и 132. На фиг. 133 приведено построеніе для случая неравномѣрнаго вращенія радіуса-вектора *OA*, когда $\vartheta \neq 0$ и $\mu \neq 0$, а на фиг. 134—для случая *равномѣр-*




Фиг. 133.

*наго* вращенія, когда $\vartheta = const$ и $\mu = 0$. Точка $M_1$, за ея полной ненужностью для построенія, на обоихъ чертежахъ не отмѣчена; точкой *C* обозначена середина отрѣзка *AB*; она служитъ центромъ круговой дуги $m_1Am_2$, описываемой радіусомъ $CA = {}^1/_2 AB$.




Фиг. 134.

Фиг. 133 и 134 даютъ построеніе ускоренія $j_B$ для обычнаго *механизма паровой машины*.

Замѣна плана *Oab* планами *OAK* и $Aab_1$ производится на общихъ основаніяхъ, равно какъ и построеніе плана тангенціальныхъ ускореній.

---

Этими соображеніями мы закончимъ общую кинематическую часть нашего курса и перейдемъ теперь къ слѣдующей части его, излагающей *теорію механизмовъ*.

# II. Теорія механизмовъ.

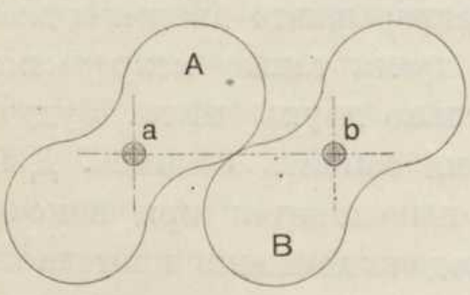
Въ настоящей главѣ мы изложимъ сначала теорію такихъ механизмовъ, движеніе звеньевъ коихъ можетъ быть представлено совершающимся въ одной и той же плоскости,—такіе механизмы будемъ называть *плоскими механизмами*; затѣмъ разберемъ, по необходимости, лишь въ общихъ чертахъ и вкратцѣ, механизмы, у которыхъ движеніе звеньевъ отлично отъ плоскаго,—это будутъ такъ называемые *пространственные механизмы*.

## 1. Плоскіе механизмы.

### A. Шарнирный четыреугольникъ и частные виды его.

### § 23. Опредѣленіе механизма и назначеніе его. Общее рѣшеніе задачи преобразованія движенія.

*Механизмомъ* мы называемъ *парное* сочетаніе твердыхъ тѣлъ, каждое изъ которыхъ имѣетъ свое *опредѣленное* движеніе,—опредѣленное въ томъ смыслѣ, что если одному изъ тѣлъ, составляющихъ механизмъ,—одному звену его,—дадимъ нѣкоторое опредѣленное перемѣщеніе, то всѣ остальныя тѣла, этотъ механизмъ составляющія, испытаютъ перемѣщенія, также вполнѣ опредѣленныя. Такъ, напримѣръ, если нѣкоторая система *A* насажена на ось *a*, около которой и можетъ вращаться (фиг. 135), и если этимъ своимъ вращеніемъ она вызываетъ движеніе другого тѣла *B*, допустимъ, также вращательное около нѣкоторой оси *b*, при чемъ опредѣленному повороту тѣла *A* вокругъ оси *a* соотвѣтствуетъ также вполнѣ опредѣленный поворотъ тѣла *B* около оси *b*, то эти два тѣла, *A* и *B*, составятъ механизмъ. Подобное движеніе тѣла *B* можетъ быть осуществлено, напримѣръ, такъ: на тѣло *A* насаживается нѣкоторый профиль, который и ведетъ соотвѣтствующій ему профиль, принадлежащій тѣлу *B*. Такимъ образомъ, никакого произвола въ движеніяхъ тѣлъ, составляющихъ механизмъ, быть не должно. Разъ, однако, этотъ произволъ наблюдается, разъ при нѣкоторомъ опредѣленномъ перемѣщеніи одного звена другія звенья (одно или нѣсколько) могутъ быть перемѣщаемы произвольно, то въ такихъ случаяхъ о механизмѣ говорить не приходится; для полученія механизма необходимо



Фиг. 135.

въ этихъ случаяхъ позаботиться объ устраненіи неопредѣленности, имѣющей здѣсь мѣсто, и только достигнувъ этого, получимъ механизмъ. Примѣръ послѣдняго рода представляютъ такъ называемыя пятизвенныя цѣпи, о которыхъ будемъ говорить подробно въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ.

Создавая механизмъ, мы имѣемъ въ виду помощью даннаго намъ опредѣленнаго движенія получить нѣкоторое другое, также вполнѣ опредѣленное и заранѣе намъ заданное, могущее имѣть характеръ, одинаковый съ даннымъ или отъ него отличный. Такъ, напримѣръ, *колебательное прямолинейное* движеніе можемъ преобразовать во *вращательное* помощью такъ называемаго *механизма паровой машины*; вращеніемъ одного вала можемъ вызвать вращеніе другого, произвольно относительно перваго расположеннаго, при помощи шарнира Гука, и т. д. Такимъ образомъ, *задачей каждаго механизма*, для выполненія которой онъ только и создается, *является преобразованіе одного движенія въ другое*. Сообразно съ этимъ каждый механизмъ долженъ состоять minimum изъ *двухъ* тѣлъ, каждое изъ которыхъ будетъ имѣть свое собственное движеніе: одно изъ этихъ тѣлъ приноситъ съ собою движеніе, подлежащее преобразованію, а другое воспринимаетъ уже преобразованное движеніе и передаетъ его дальше. Самый процессъ преобразованія движенія осуществляется весьма различно; для этого между упомянутыми двумя тѣлами могутъ быть вводимы нѣкоторыя промежуточныя тѣла, но во многихъ случаяхъ, какъ это мы увидимъ въ дальнѣйшемъ, оказывается возможнымъ обойтись и безъ нихъ, ограничиваясь только упомянутыми двумя тѣлами, соотвѣтственнымъ образомъ приспособленными.

Легко видѣть, что эти два тѣла, каждое изъ которыхъ имѣетъ свое собственное абсолютное движеніе, не могутъ быть связаны другъ съ другомъ наглухо, такъ какъ въ такомъ случаѣ оба они могли бы двигаться только однимъ и тѣмъ же движеніемъ; тѣла эти могутъ воздѣйствовать другъ на друга лишь *путемъ непосредственнаго соприкосновенія*, которое, притомъ, для возможности непрерывнаго движенія всей этой системы, *должно поддерживаться* все время также *непрерывно*.

Случай передачи движенія помощью только двухъ тѣлъ, будучи наиболѣе простымъ, является въ то же время самымъ общимъ. Дѣйствительно, если преобразованіе движенія выполняется при помощи промежуточныхъ звеньевъ, то, очевидно, передача движенія протекаетъ послѣдовательно, отъ одного звена къ другому; а въ такомъ случаѣ всю систему звеньевъ, весь разсматриваемый механизмъ, можно разбить на пары твердыхъ тѣлъ, подобныхъ парѣ, выше нами упомянутой. Такимъ образомъ, въ вопросѣ о преобразованіи движеній основнымъ случаемъ является тотъ, когда одно тѣло, одаренное даннымъ движеніемъ, должно, путемъ постояннаго соприкосновенія съ другимъ тѣломъ, вызывать этимъ самымъ нѣкоторое опредѣленное движеніе этого послѣдняго, безъ всякаго, притомъ, участія промежуточныхъ

звеньевъ. Этотъ общій случай мы теперь вкратцѣ и разберемъ, ограничиваясь, притомъ, только случаемъ плоскаго движенія, какъ наиболѣе важнымъ и почти исключительно встрѣчающимся на практикѣ.

Итакъ, пусть нѣкоторое тѣло $A$ обладаетъ даннымъ абсолютнымъ движеніемъ, которое мы символически обозначимъ черезъ $(\alpha)$, и пусть, при этомъ своемъ движеніи, оно, путемъ непрестаннаго соприкосновенія съ другимъ тѣломъ $B$, должно сообщать ему извѣстное абсолютное движеніе $(\beta)$. Оба движенія принимаемъ плоскими и совершающимися въ одной и той же плоскости. Въ такой общей формѣ вопросъ этотъ ставится въ теоретической механикѣ и разрѣшается тамъ слѣдующимъ простымъ путемъ:

Прежде всего находимъ *относительное движеніе* этихъ тѣлъ, одного относительно другого. Для этого, предполагая оба соприкасающіяся тѣла движущимися каждое своимъ движеніемъ, сообщаемъ всей системѣ этихъ двухъ тѣлъ общее движеніе $(-\alpha)$ или $(-\beta)$, смотря по тому, которое изъ тѣлъ намъ желательно сдѣлать неподвижнымъ. Пусть намъ нужно найти относительное движеніе тѣла $B$. Въ такомъ случаѣ тѣло $A$ должно оставаться неподвижнымъ, чего и достигаемъ, сообщая системѣ движущихся тѣлъ $A$ и $B$ общее движеніе, противоположное движенію $(\alpha)$ тѣла $A$. Обозначимъ это добавочное движеніе черезъ $(-\alpha)$. Тогда тѣло $A$, обладающее движеніемъ $[(\alpha)-(\alpha)]$, остановится; тѣло же $B$, участвуя теперь въ двухъ движеніяхъ, своемъ $(\beta)$ и добавочномъ $(-\alpha)$, станетъ двигаться нѣкоторымъ сложнымъ движеніемъ $[(\beta)-(\alpha)]$, которое и окажется относительнымъ движеніемъ его по отношенію къ тѣлу $A$.

Это новое, сложное движеніе тѣла $B$, по правиламъ кинематики, сведется къ послѣдовательному вращенію тѣла $B$ около мгновенныхъ центровъ вращенія, съ опредѣленными угловыми скоростями. Геометрическое мѣсто этихъ центровъ и опредѣлитъ собою *неподвижную полодію* разсматриваемаго относительнаго движенія. Далѣе, по правиламъ, изложеннымъ въ предыдущихъ параграфахъ, найдемъ подвижную полодію того же движенія, и теперь, перекатывая подвижную полодію по неподвижной съ нѣкоторыми опредѣленными угловыми скоростями, и получимъ требуемое относительное движеніе $[(\beta)-(\alpha)]$ тѣла $B$. Итакъ, это движеніе тѣла $B$ сводится къ *перекату* найденныхъ нами полодій, одной по другой. Обратно, можемъ сказать, что если мы выполнимъ обѣ полодіи матеріально и одну изъ нихъ, неподвижную, скрѣпимъ наглухо съ находящимся въ покоѣ тѣломъ $A$, а подвижную прикрѣпимъ соотвѣтственно къ тѣлу $B$, то опредѣленный *перекатъ подвижной полодіи по неподвижной* и дастъ намъ требуемое относительное движеніе тѣла $B$, т.-е. движеніе $[(\beta)-(\alpha)]$.

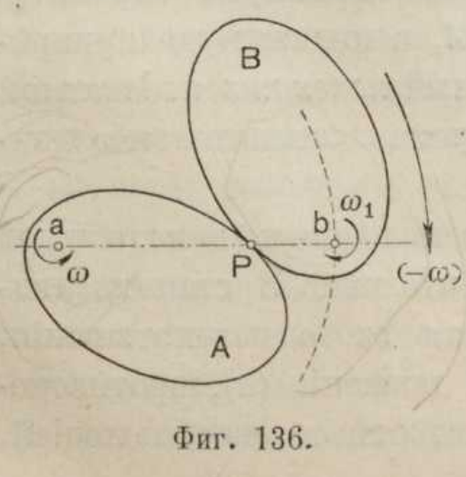
Начнемъ теперь перекатывать подвижную полодію по неподвижной съ упомянутыми угловыми скоростями, такъ что тѣло $B$ станетъ двигаться движеніемъ $[(\beta)-(\alpha)]$. Не останавливая этого перекатыванія, сообщимъ всей системѣ $(A-B)$ одно и то же движеніе $(\alpha)$, противоположное прибавленному выше. Тогда тѣло $A$, вмѣстѣ со своей полодіей,

станетъ двигаться движеніемъ ($\alpha$), а тѣло $B$, какъ это не трудно видѣть,—движеніемъ ($\beta$). А такъ какъ относительное движеніе тѣла $B$ по отношенію къ тѣлу $A$ осталось тѣмъ же самымъ, то остались тѣми же самыми и обѣ полодіи, продолжающія, попрежнему, перекатываться одна по другой. Такимъ образомъ выходитъ, что если мы будемъ двигать тѣло $A$ движеніемъ ($\alpha$), а тѣло ($B$)—движеніемъ ($\beta$), то обѣ вышеупомянутыя полодіи будутъ *перекатываться* одна по другой *безъ всякаго скольженія*. Обратное заключеніе, очевидно, будетъ таково: если одно изъ тѣлъ, напримѣръ, $A$, будемъ двигать движеніемъ ($\alpha$), а полодіи, наглухо связанныя каждая со своимъ тѣломъ, станемъ *катить* одну по другой *безъ всякаго скольженія*, то тѣло $B$ станетъ двигаться непремѣнно своимъ движеніемъ ($\beta$). Задача преобразованія движенія будетъ, такимъ образомъ, разрѣшена.

Итакъ, оказывается, что преобразованіе движенія ($\alpha$) въ движеніе ($\beta$), помощью только двухъ тѣлъ, вполнѣ возможно,—для этого нужно *опредѣлить обѣ полодіи относительнаго движенія* одного тѣла относительно другого, *связать ихъ* наглухо *съ тѣлами*, *обезпечить каченіе* этихъ *полодій* (это условіе является необходимымъ) и *начать*, затѣмъ, *двигать тѣло* $A$ надлежащимъ и даннымъ для него *движеніемъ* ($\alpha$); тогда тѣло $B$ станетъ двигаться требуемымъ отъ него движеніемъ ($\beta$), и вопросъ будетъ исчерпанъ.

Тѣла $A$ и $B$, какъ мы указывали, будутъ все время *соприкасаться* другъ съ другомъ. Очевидно, что если очертанія ихъ окажутся въ точности *совпадающими* съ очертаніями полодій, то движеніе ихъ сведется просто къ каченію ихъ одного по другому; таковы, напримѣръ, случаи фрикціонныхъ передачъ, каченія вагонныхъ колесъ по рельсамъ и т. д. Но, обыкновенно, очертанія тѣлъ бываютъ *отличны* отъ очертаній полодій; въ виду этого, при совмѣстномъ движеніи этихъ двухъ тѣлъ будетъ имѣть мѣсто, кромѣ каченія, еще и *скольженіе*, которое будетъ сказываться тѣмъ сильнѣе, чѣмъ дальше отъ полюса будутъ находиться части тѣлъ $A$ и $B$, находящіяся въ данный моментъ въ соприкосновеніи.

Для лучшей иллюстраціи сказаннаго разберемъ одинъ случай преобразованія движенія, по условіямъ своего заданія представляющій наибольшую важность для практики,—съ нимъ приходится встрѣчаться почти постоянно. Это—*случай передачи вращенія отъ одной* неподвижной *оси къ другой*, ей параллельной и также неподвижной.



Фиг. 136.

Пусть абсолютное вращеніе тѣла $A$ есть вращательное около нѣкоторой неподвижной оси $a$ съ угловой скоростью $\omega$, и пусть это тѣло $A$ своимъ вращеніемъ должно вызывать вращеніе другого тѣла $B$ вокругъ другой неподвижной оси $b$, параллельной прежней, съ угловой скоростью $\omega_1$ (фиг. 136). Скорости $\omega$ и $\omega_1$ могутъ быть одинаковы или различны, постоянны или перемѣнны, — это для насъ не важно. По общему плану, опредѣляемъ относительное движеніе тѣла $B$ относительно тѣла $A$.

Для этого обоимъ тѣламъ придаемъ движеніе, направленное противъ дѣйствительнаго движенія тѣла *A*, т.-е. придаемъ имъ вращеніе около оси *a* съ угловой скоростью $(-\omega)$. Тѣло *A* послѣ этого остановится, а новое абсолютное движеніе тѣла *B* составится теперь изъ вращенія около оси *b* со скоростью $\omega_1$ и вращенія около *a* со скоростью $(-\omega)$. Ось *b* станетъ вращаться около оси *a* съ угловой скоростью $(-\omega)$, а тѣло *B*, двигаясь вмѣстѣ съ этой своей осью *b*, будетъ продолжать вращаться около нея съ прежней угловой скоростью $\omega_1$. Два эти вращенія можемъ сложить, — кинематика даетъ намъ правила для сложенія какихъ-угодно движеній въ плоскости или въ пространствѣ. Въ данномъ случаѣ приходится складывать два вращенія, совершающіяся въ одной и той же плоскости. Сумма ихъ сведется къ вращенію около нѣкотораго полюса *P*, опредѣленнымъ образомъ расположеннаго въ той же плоскости, съ нѣкоторой угловой скоростью $(\omega \pm \omega_1)$,—выборъ того или другого знака зависитъ отъ направленія вращенія $\omega_1$. Ставя тѣло *B* въ различныя положенія, найдемъ рядъ полюсовъ *P*,—геометрическое мѣсто ихъ, опредѣляющее собою неподвижную полодію этого движенія.

Подвижную полодію того же движенія найдемъ, обративъ предыдущее движеніе,—это будетъ неподвижная полодія въ движеніи тѣла *A* относительно *B*. Такимъ образомъ, относительное движеніе тѣла *B* будетъ выполняться каченіемъ подвижной полодіи по неподвижной, съ вполнѣ опредѣленными угловыми скоростями.

Легко теперь перейти къ дѣйствительнымъ абсолютнымъ движеніямъ данныхъ тѣлъ. Прежде всего, осуществляемъ матеріально обѣ полодіи и скрѣпляемъ ихъ жестко съ тѣлами,—неподвижную съ неподвижнымъ тѣломъ *A*, а подвижную—съ подвижнымъ *B*. Сообщаемъ теперь всей этой системѣ движеніе, противоположное отнятому, т.-е. вращеніе $\omega$. Тогда тѣло *A* вмѣстѣ со своей полодіей станетъ вращаться около оси *a* съ угловой скоростью $\omega$, а тѣло *B*, также со своей полодіей,—около оси *b* съ угловой скоростью $\omega_1$. А такъ какъ относительное движеніе этихъ тѣлъ осталось то же, то остались тѣми же и полодіи этого относительнаго движенія, которыя, слѣдовательно, могутъ продолжать перекатываться, поддерживая упомянутое относительное движеніе. Такимъ образомъ, обѣ полодіи, перекатываясь одна по другой, будутъ вращаться въ то же время, вмѣстѣ со своими тѣлами, каждая около своей оси и со своей угловой скоростью,—первая около оси *a* со скоростью $\omega$, а вторая около оси *b* со скоростью $\omega_1$, и, значитъ, если мы тѣмъ или другимъ способомъ *обезпечимъ каченіе полодій* и станемъ вращать тѣло *A*, вмѣстѣ съ его полодіей около оси *a* съ надлежащей угловой скоростью $\omega$, то тѣло *B*, вмѣстѣ съ его полодіей, будетъ вращаться около оси *b* съ угловой скоростью $\omega_1$.

Такимъ образомъ, требуемая передача вращенія оказывается вполнѣ осуществимой. Все сводится, какъ видимъ, къ *опредѣленію полодій* относительныхъ движеній данныхъ двухъ тѣлъ и къ *обезпеченію качения* этихъ полодій,—скольженію мѣста быть не должно. Съ опредѣленіемъ полодій мы уже знакомы; что же касается обезпеченія каченія ихъ, то, какъ это будетъ показано ниже, оно достигается путемъ привлеченія къ участію нѣкоторыхъ огибаемыхъ и огибающихъ. Вопросъ оказывается исчерпаннымъ, и въ дальнѣйшемъ мы будемъ излагать лишь детали примѣненія этого способа въ различныхъ частныхъ случаяхъ,—сущность же способа будетъ вездѣ оставаться одной и той же.

Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что способъ преобразованія движенія помощью полодій примѣнимъ на практикѣ далеко не всегда. Изъ предыдущаго мы знаемъ, что полодіи не всегда бываютъ сомкнутыми и достаточно удобно малыми,—онѣ могутъ представлять собою кривыя разомкнутыя, удаляющіяся въ безконечность даже при конечныхъ пе-

ремѣщеніяхъ движущихся тѣлъ. Понятно, что манипулированіе съ такими полодіями представляетъ весьма значительныя неудобства, заставляющія иногда отказываться отъ пользованія ими и искать другихъ путей для достиженія поставленной цѣли. Здѣсь можетъ оказать существенную помощь введеніе соотвѣтственно устроенной системы промежуточныхъ звеньевъ, и, если эти звенья удастся подобрать соотвѣтствующимъ образомъ, такъ что помощью ихъ требуемое преобразованіе будетъ точно выполняемо, то вопросъ можно будетъ считать разрѣшеннымъ.

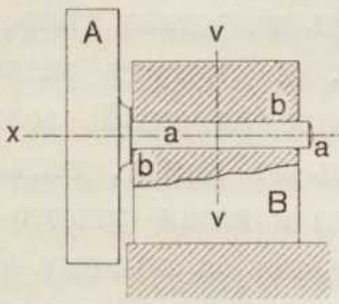
Замѣны подобнаго рода оказываются во многихъ случаяхъ весьма цѣлесообразными и выгодными, давая возможность полученія компактныхъ и простыхъ устройствъ вмѣсто громоздкихъ и тяжелыхъ, которыя иногда влечетъ за собою примѣненіе полодій. Легко видѣть, что, по существу, оба эти пріема преобразованія движеній являются эквивалентными, почему въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ слѣдуетъ выбирать и примѣнять наиболѣе простой и удобный.

Въ дальнѣйшемъ мы подвергнемъ болѣе или менѣе детальному разсмотрѣнію рядъ наиболѣе простыхъ, основныхъ, механизмовъ, при чемъ сначала разберемъ механизмы плоскіе, гдѣ входящія въ составъ механизма тѣла движутся плоскими движеніями, а затѣмъ механизмы пространственные. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ будемъ имѣть дѣло какъ съ примѣненіемъ полодій, такъ и съ введеніемъ промежуточныхъ тѣлъ. Послѣдній случай мы разберемъ теперь же, въ очередномъ параграфѣ, взявъ для разсмотрѣнія случай, когда число промежуточныхъ тѣлъ сводится къ единицѣ, а всѣ движенія сводятся къ вращеніямъ около нѣкоторыхъ центровъ. Это—случай такъ называемаго шарнирнаго четырехугольника, отчасти извѣстнаго уже намъ изъ предыдущаго. Для полученія его примѣнимъ, однако, другой, болѣе плодотворный и простой методъ,—методъ составленія механизма изъ кинематическихъ паръ. Къ разъясненію этого метода мы теперь непосредственно и приступимъ.

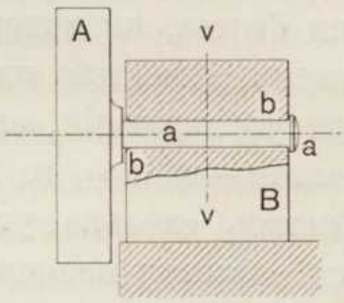
Въ заключеніе настоящаго параграфа необходимо замѣтить еще слѣдующее: полнаго рѣшенія вопроса о преобразованіи одного движенія въ другое теорія механизмовъ не даетъ и дать не можетъ; она беретъ на себя лишь разработку *схемы* механизма, совершенно отвлекаясь отъ вопроса о массахъ тѣлъ, составляющихъ механизмъ; поэтому теорія механизмовъ или, вѣрнѣе, *кинематика механизмовъ*, совершенно не разбираетъ какъ вопроса о силахъ, проявляющихся при работѣ механизма на практикѣ, такъ и непосредственно связаннаго съ нимъ вопроса о прочности частей механизма; эти вопросы передаются для разрѣшенія отчасти *динамикѣ механизмовъ*, составляющей вторую часть нашего курса, а отчасти трактуются въ другихъ спеціальныхъ курсахъ машиностроенія; вопросъ о прочности частей механизма относится къ ученію о сопротивленіи матеріаловъ и т. д. Въ кинематикѣ механизмовъ намѣчается только *схема* требуемаго механизма, осуществленіе же его требуетъ примѣненія данныхъ изъ другихъ областей машиновѣдѣнія.

## § 24. Кинематическія пары. Дѣленіе ихъ на низшія и высшія. Обратимость низшихъ паръ. Переходъ вращательныхъ паръ въ поступательныя.

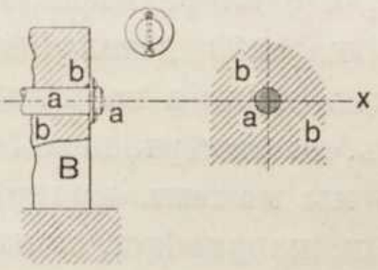
Опредѣляя механизмъ, мы указывали, что каждое изъ тѣлъ, его составляющихъ, имѣетъ вполнѣ опредѣленное движеніе относительно другихъ тѣлъ, входящихъ въ составъ того же механизма; согласно съ этимъ заключаемъ, что каждая точка этого тѣла, при относительномъ движеніи этого послѣдняго, будетъ описывать свою собственную, вполнѣ опредѣленную и единственную траекторію. Опредѣленность въ движеніи этихъ тѣлъ,—будемъ называть ихъ деталями механизма,—достигается тѣмъ, что всѣ нежелательныя движенія каждой детали устраняются соотвѣтственнымъ сопротивленіемъ другихъ деталей. Такъ, если тѣло *A* должно вращаться вокругъ оси *xx*, фиксированной въ тѣлѣ *B* (фиг. 137), то этого движенія достигнемъ, снабжая тѣло *A* цилиндрическимъ шипомъ *a*, а тѣло *B*—соотвѣтствующей этому шипу цилиндрической же втулкой *b* съ этою же самой осью *xx* (фиг. 137); но такъ какъ шипъ могъ бы вылѣзть изъ втулки, то, во избѣжаніе этого, онъ и снабжается или заплечиками (*cc* на фиг. 138), или шайбой со




Фиг. 137.

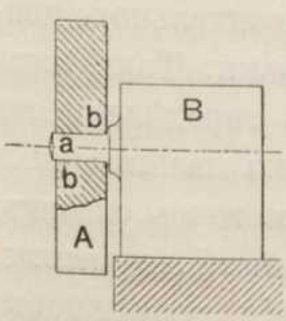



Фиг. 138.




Фиг. 139.

шпилькой (фиг. 139). Введеніемъ этихъ добавочныхъ сопротивленій мы достигли нашей цѣли вполнѣ: тѣло *A* можетъ двигаться только единственнымъ образомъ относительно тѣла *B*,—оно получило возможность исключительно только вращаться около оси *xx*, фиксированной въ тѣлѣ *B*. Тѣлу *B* мы можемъ дать какое угодно сложное движеніе, но каково бы оно ни было, а относительное движеніе тѣла *A*, движущагося вмѣстѣ съ *B* и имъ увлекаемаго, останется все тѣмъ же вращеніемъ около оси *xx*, перемѣщающейся вмѣстѣ съ *B*.




Фиг. 140.

Вполнѣ понятно, что шипомъ мы могли бы снабдить тѣло, *B* а втулкой для него—тѣло *A*, какъ это изображено на фиг. 140; результатъ получился бы тотъ же, что и въ приведенномъ выше основномъ случаѣ, изображенномъ на фиг. 137,—тѣло *A* опять станетъ вращаться около оси *xx*, фиксированной въ тѣлѣ *B*. Аналогично прежнему шипъ, во избѣжаніе слѣзанія втулки съ него, придется снабдить или заплечиками, или шайбой съ шпилькой. Имѣя въ виду дальнѣйшее, будемъ придерживаться представленія, иллюстрируемаго фигурами 137—139.

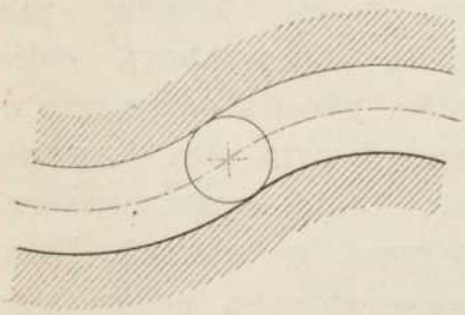
Всматриваясь въ тѣ приспособленія, помощью которыхъ мы достигли своей цѣли и обезпечили упомянутое вращеніе около *xx*, видимъ, что для этого намъ понадобились двѣ детали,—шипъ *a* и втулка для него *b*. Только благодаря наличности этихъ двухъ деталей и осуществляется желательное намъ движеніе, которое, притомъ, нисколько не измѣнитъ своего характера, какія бы тѣла мы ни прикрѣпляли къ шипу или втулкѣ,—относительное движеніе ихъ остается тѣмъ же, что и относительное движеніе шипа и втулки. Слѣдовательно, *характеръ движенія опредѣлился* въ данномъ случаѣ *парой деталей* (шипъ—втулка), а вовсе не тѣлами, воедино съ этими деталями скрѣпленными. Пара этихъ деталей, правильно выбранная и сконструированная, вполнѣ обезпечиваетъ требуемое движеніе соединенныхъ съ ними наглухо любыхъ твердыхъ тѣлъ.

Въ каждомъ механизмѣ всегда можно указать присутствіе цѣлаго ряда паръ, подобныхъ вышеприведенной,—въ однѣхъ изъ нихъ обнаружится, напримѣръ, наличность вращательнаго движенія, осуществленнаго, допустимъ, опять при помощи шипа и втулки; въ другихъ обнаружится поступательное, выполняемое, положимъ, помощью нѣкотораго ползуна и его направляющихъ; въ третьихъ, быть можетъ, найдемъ винтовое, осуществляемое помощью пары (винтъ—гайка) и т. д. Очевидно, что ни размѣры, ни форма, ни матеріалъ твердыхъ тѣлъ, несущихъ на себѣ детали разсматриваемой пары, не могутъ оказывать никакого вліянія на характеръ движенія, ею опредѣляемый; если это будетъ, напримѣръ, пара (винтъ—гайка), то какъ къ винту, такъ и къ гайкѣ мы можемъ прикрѣплять сколько угодно и какія угодно тѣла, и, если, напримѣръ, винтъ остается неподвижнымъ, а по нему будетъ скользить и подниматься гайка, то всѣ тѣла, скрѣпленныя съ винтомъ, будутъ, очевидно, оставаться неподвижными, а тѣла, скрѣпленныя съ гайкой, будутъ вмѣстѣ съ ней двигаться винтовымъ движеніемъ. Такимъ образомъ, характеръ механизма и его сущность опредѣляются вовсе не твердыми тѣлами, входящими въ его составъ, а видомъ и свойствами паръ, помощью которыхъ осуществляются относительныя движенія этихъ тѣлъ. Помощью данныхъ двухъ тѣлъ можемъ осуществить столько различныхъ относительныхъ движеній, сколькими различными парами мы ихъ сопряжемъ; но сколько бы тѣлъ мы ни сопрягали одной и той же парой, мы всегда получимъ только одно движеніе, ею обусловливаемое.

Пары деталей, опредѣляющія собою характеръ относительнаго движенія двухъ тѣлъ, называются *кинематическими парами*. Такъ какъ кинематическая пара обладаетъ тѣмъ же свойствомъ опредѣленности относительнаго движенія тѣлъ, ее составляющихъ,—такъ называемыхъ *элементовъ* ея,—что и всякій механизмъ вообще, то можемъ сказать, что *кинематическая пара представляетъ собою простѣйшій механизмъ*.

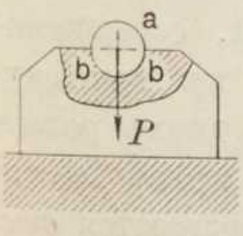
*Элементы кинематической пары*, для обезпеченія возможности непрестаннаго движенія одного элемента относительно другого, а также

для выполненія своего назначенія,—ограничивать движеніе другъ друга, *должны находиться между собою въ постоянномъ соприкосновеніи.* Нарушеніе этого соприкосновенія, дѣлая элементы паръ свободными въ ихъ движеніяхъ, разрушало бы механизмъ, почему противъ подобныхъ нарушеній слѣдуетъ принимать соотвѣтствующія мѣры, сводящіяся, вообще, къ тому, что одному элементу пары даются очертанія, обезпечивающія лишь опредѣленныя, желательныя для насъ движенія другого элемента; иными словами, *первый элементъ долженъ быть ограниченъ поверхностью, огибающей всѣ возможныя положенія другого тѣла.* Такъ, напримѣръ, если одна деталь имѣетъ форму шара и въ относительномъ движеніи ея центръ этого шара долженъ описывать нѣкоторую опредѣленную кривую, то вторую деталь можно выполнить въ видѣ желоба, огибающаго всѣ положенія шара (фиг. 141). Подобнымъ же образомъ втулка *b* очерчивается поверхностью, огибающей всѣ положенія шипа *a* въ его относительномъ движеніи и т. д. Такія пары можно называть *геометрически замкнутыми.*



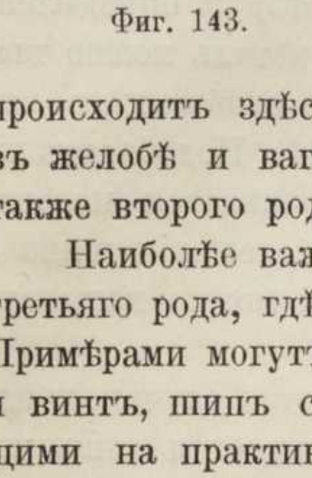
Фиг. 141.

На практикѣ, впрочемъ, довольно часто встрѣчаются случаи, когда построеніе упомянутой огибающей поверхности выполняется лишь частично, вслѣдствіе наличности нѣкоторыхъ добавочныхъ условій, дѣлающихъ присутствіе нѣкоторыхъ частей этой поверхности излишнимъ,—обезпеченіе механизма отъ всѣхъ нежелательныхъ движеній, т.-е. обезпеченіе желательнаго относительнаго движенія, достигается безъ ихъ участія. Это—случаи такъ называемаго *силового замыканія паръ.* Примѣромъ можетъ служить движеніе шипа вала мельничнаго колеса въ открытомъ подшипникѣ (фиг. 142). Несмотря на то, что огибающей всѣхъ положеній цилиндрическаго шипа является здѣсь также цилиндрическая поверхность втулки, въ данномъ случаѣ можно ограничиться лишь половиной этой послѣдней,—полуцилиндромъ *bb.* Невозможность какихъ-либо иныхъ, кромѣ вращенія, движеній вала обезпечивается постоянно имѣющейся здѣсь нагрузкой шипа силами, достигающими весьма значительныхъ размѣровъ и мало отклоняющимися отъ вертикали; это будутъ части вѣсовъ вала, колеса и воды въ ковшахъ, и силы сопротивленія со стороны машинъ и станковъ, приводимыхъ этимъ колесомъ въ движеніе. Соприкосновеніе будетъ поддерживаться здѣсь все время, безъ перерывовъ. Въ машиностроительной практикѣ такихъ случаевъ можно встрѣтить весьма много. Относительно всѣхъ нихъ можно сказать, вообще, что отнятіе нѣкоторыхъ геометрическихъ связей мы восполняемъ введеніемъ нѣкоторыхъ силъ,—результатъ получается такой же, какъ и въ случаѣ полнаго использованія цѣлой огибающей поверхности.

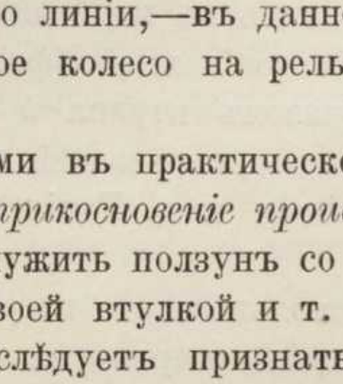



Фиг. 142.

Соприкосновеніе элементовъ пары можетъ происходить различно, въ зависимости отъ характера соприкасающихся поверхностей; такимъ образомъ, оно можетъ происходить или *въ* одной *точкѣ*, или *по* какой-либо *линіи*, или, наконецъ, *по* цѣлой *поверхности*. Коническій маятникъ, представляющій собою массивный, полый внутри, конусъ, опирающійся своей вершиной на остреё (фиг. 143), можетъ служить примѣромъ пары перваго рода,—соприкосновеніе происходитъ здѣсь въ одной точкѣ. Примѣръ пары второго рода можетъ представить собою призма вѣсовъ совмѣстно съ лежащей подъ нею подушкой (фиг. 144); соприкосновеніе происходитъ здѣсь по линіи,—въ данномъ случаѣ по прямой. Шаръ въ желобѣ и вагонное колесо на рельсѣ представляетъ собою пары также второго рода.



Фиг. 143.



Фиг. 144.

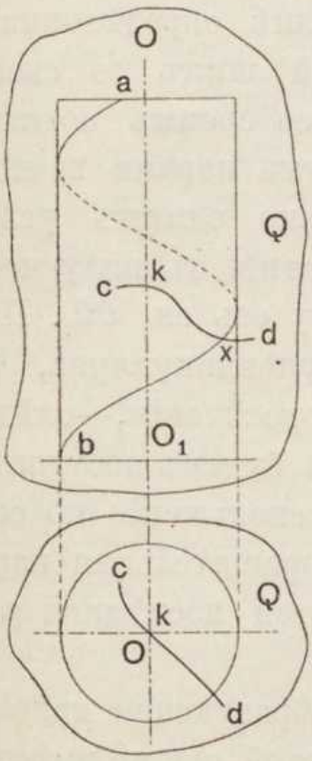
Наиболѣе важными въ практическомъ отношеніи являются пары третьяго рода, гдѣ *соприкосновеніе происходитъ* по цѣлой *поверхности*. Примѣрами могутъ служить ползунъ со своими направляющими, гайка и винтъ, шипъ со своей втулкой и т. п. Строго говоря, существующими на практикѣ слѣдуетъ признать только пары третьяго рода, такъ какъ у паръ первыхъ двухъ родовъ, въ дѣйствительныхъ условіяхъ работы механизмовъ, соприкосновенія въ одной математической точкѣ или по геометрической линіи быть не можетъ,—усилія, проявляющія свое дѣйствіе въ мѣстахъ соприкосновенія элементовъ этихъ паръ, неизбѣжно деформируютъ соприкасающіяся ихъ части, извращая тѣмъ самымъ характеръ соприкосновенія переводомъ его въ касаніе по поверхностямъ; кромѣ того, при относительномъ перемѣщеніи элементовъ, въ мѣстахъ соприкосновенія ихъ неизбѣжно будетъ происходить при этомъ усиленное истираніе и снашиваніе поверхностей, совершенно неустранимое и сводящее пары первыхъ двухъ родовъ къ третьему. Этимъ и объясняется тотъ фактъ, что парами первыхъ двухъ родовъ пользуются сравнительно рѣдко, отдавая, въ общемъ, преимущество парамъ третьяго рода. Пары первыхъ двухъ родовъ называются *высшими*, третьяго рода—*низшими*. Связь между этими двумя видами паръ, какъ это показываетъ ближайшее разсмотрѣніе вопроса, существуетъ въ томъ именно смыслѣ, что высшія пары могутъ быть замѣняемы низшими и обратно. Не останавливаясь здѣсь на разборѣ этого вопроса, укажемъ лишь, что съ нѣкоторыми случаями подобной замѣны мы встрѣтимся въ дальнѣйшемъ,—напримѣръ, въ статьѣ о зубчатыхъ колесахъ. Въ нашихъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы будемъ встрѣчаться почти исключительно съ парами низшими, почему постараемся теперь же болѣе детально ознакомиться съ ними.

Къ категоріи низшихъ мы отнесли всѣ тѣ кинематическія пары,

элементы коихъ во время относительнаго движенія соприкасаются другъ съ другомъ по цѣлымъ поверхностямъ; иными словами, поверхности, ограничивающія элементы низшихъ паръ, при относительномъ движеніи этихъ элементовъ, вполнѣ опредѣленномъ и единственномъ, будутъ скользить одна по другой, оставаясь, въ то же время, вплотную прилегающими одна къ другой. Заранѣе, поэтому, можно сказать, что произвольными эти поверхности быть не могутъ,—онѣ, какъ видимъ, должны обладать *свойствомъ совмѣщаемости своихъ элементовъ въ направленіи относительнаго движенія одной детали по другой.*

Ближайшій анализъ, котораго мы здѣсь приводить не станемъ, ибо особеннаго интереса онъ для насъ не представляетъ, показываетъ, что такими поверхностями являются, вообще говоря, *правильныя винтовыя поверхности постояннаго шага.* Образованіе ихъ удобнѣе всего представлять себѣ такъ:

Беремъ нѣкоторую неподвижную ось $OO_1$, проходящую черезъ данное тѣло $Q$ (фиг. 145), и какую-либо кривую $cd$ (образующую), которую затѣмъ и заставляемъ одной какой-либо точкой ея $k$ скользить по оси $OO_1$ съ постоянной линейной скоростью $v$, сохраняя въ то же время постоянный наклонъ ея къ оси $OO_1$; одновременно съ этимъ вращаемъ кривую $cd$ вокругъ $OO_1$ также равномѣрно, съ постоянной угловой скоростью $\omega$. Тогда и окажется, что кривая $cd$, при такомъ сложномъ своемъ движеніи, образуетъ нѣкоторую правильную винтовую поверхность съ осью $OO_1$ и шагомъ $h$, равнымъ $2\pi v / \omega$. Траекторіей каждой точки $x$ этой кривой будетъ служить правильная винтовая кривая $(ab)$, всѣми своими точками лежащая на кругломъ цилиндрѣ съ осью $OO_1$ и радіусомъ $\rho$, равнымъ разстоянію точки $x$ отъ оси $OO_1$.



Фиг. 145.

Полученная указаннымъ выше путемъ винтовая поверхность раздѣлитъ тѣло $Q$ на двѣ части и будетъ служить поверхностью стыка ихъ. Очевидно, что одна изъ этихъ частей тѣла $Q$ будетъ ограничена винтовой поверхностью, тождественной съ полученной, а другая—дополнительной къ ней, также винтовой, поверхностью, причемъ выпуклости первой будутъ покрыты вогнутыми частями второй и т. п. Если теперь одной изъ этихъ частей,—назовемъ ее черезъ $A$,—сообщимъ соотвѣтствующее данному случаю винтовое движеніе, оставляя вторую, $B$, неподвижной, то увидимъ, что $A$ станетъ двигаться такъ, что принадлежащая ей винтовая поверхность станетъ скользить по дополняющей ее винтовой поверхности части $B$, причемъ соприкосновеніе между ними прерываться не будетъ, а поверхностью соприкосновенія будетъ служить все та же прежняя винтовая поверхность. Такія

свойства выдѣлившихся указаннымъ путемъ частей $A$ и $B$ тѣла $Q$ даютъ намъ право признать ихъ *элементами низшей кинематической пары* ($A$, $B$), осуществляющей упомянутое винтовое движеніе.

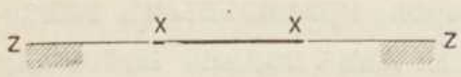
Итакъ, въ общемъ случаѣ, когда факторы $v$ и $\omega$ отличны отъ нуля, соприкасающіяся поверхности низшихъ паръ будутъ ограничены двумя дополняющими другъ друга *винтовыми* поверхностями, такъ что *низшей* парой будетъ *винтовая* пара; элементы ея носятъ названія *винта* и *гайки*. Данными, опредѣляющими винтовую пару, являются, очевидно, *положеніе оси* $OO_1$ въ пространствѣ и *величина шага*. Образующей винтовыхъ поверхностей на практикѣ берется обыкновенно прямая; въ зависимости отъ наклона ея къ оси $OO_1$ винта можемъ получить или *прямоугольную* нарѣзку, или *остроугольную*.

Частными случаями винтовой пары являются пара *вращательная* и пара *поступательная*. Первая изъ нихъ получается тогда, когда образующая кривая имѣетъ *только вращеніе* около оси $OO_1$, скольженія же по оси нѣтъ ($v = 0$). Очевидно, что каждая точка подвижного элемента будетъ описывать здѣсь окружность вполнѣ опредѣленнаго центра и радіуса. Такимъ образомъ, цилиндрическій шипъ со своей втулкой, коническій шипъ со втулкой, пята вала со своимъ подпятникомъ и т. п.,—всѣ эти кинематическія пары будутъ парами вращательными. Вращательная пара опредѣляется только однимъ условіемъ,—*положеніемъ оси вращенія* $OO_1$ въ пространствѣ, въ виду чего для заданія такой пары достаточно дать только одну ось ея, $OO_1$. Понятно, что, если плоскость чертежа этой оси перпендикулярна, то достаточно задать на этой плоскости точку ихъ пересѣченія,—слѣдъ оси $OO_1$ на плоскости чертежа. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ поступать именно такъ.—Замѣтимъ, наконецъ, что такъ какъ скольженія по оси нѣтъ, и, значитъ, $h = 0$, то можно сказать, что вращательная пара есть тотъ частный случай винтовой, когда шагъ этой послѣдней равенъ нулю.

*Поступательная* пара получается тогда, когда образующая кривая только *скользитъ* по оси $OO_1$, но вращенія вокругъ этой оси не имѣетъ совсѣмъ ($\omega = 0$). Каждая точка подвижного элемента описываетъ при этомъ прямолинейную траекторію, параллельную оси $OO_1$, въ виду чего поверхностями соприкосновенія паръ будутъ служить здѣсь *цилиндрическія поверхности*. Движеніе будетъ поступательнымъ прямолинейнымъ, протекающимъ параллельно оси $OO_1$, т.-е. параллельно образующимъ цилиндра. Примѣрами подобнаго движенія могутъ служить: движеніе поршневого штока въ сальникѣ, ползуна въ направляющихъ, плоскаго золотника по своему зеркалу и т. д. Поступательная пара опредѣлится, очевидно, только однимъ заданіемъ, а именно, *направленіемъ поступательнаго движенія*.

Замѣчая, что траекторіей каждой точки $X$ подвижного элемента поступательной пары является прямая $zz$, принадлежащая неподвижному элементу и идущая параллельно направленію поступательнаго

движенія, и что, съ другой стороны, прямая $xx$, принадлежащая системѣ подвижного элемента, несущая на себѣ эту точку $X$ и параллельная тому же направленію, при движеніи этого элемента будетъ, очевидно, скользить вдоль этой прямой $zz$ (направляющей), совпадая съ ней въ каждый отдѣльный моментъ всѣми своими точками, заключаемъ, что поступательную пару можно задать, давъ, съ одной стороны, прямую $zz$, принадлежащую одному элементу ея и идущую параллельно направленію поступательнаго движенія, а, съ другой, скользящую вдоль нея прямую $xx$, принадлежащую другому элементу (фиг. 146).



Фиг. 146.

Такъ именно мы и будемъ задавать въ дальнѣйшемъ всѣ поступательныя пары, съ коими придется имѣть дѣло.— Замѣтимъ, наконецъ, что въ поступательной парѣ вращенія нѣтъ ($\omega = 0$), но что, въ то же время, $v \neq 0$; отсюда слѣдуетъ, что $h = \infty$. Такимъ образомъ, поступательную пару можно опредѣлить, какъ винтовую съ безконечно большимъ шагомъ.

Этими тремя парами область низшихъ паръ исчерпывается вполнѣ. Частные виды винтовой пары, т.-е. пара вращательная и пара поступательная, являются наиболѣе распространенными на практикѣ, и безъ нихъ не обходится, вообще говоря, ни одинъ механизмъ. Ниже мы покажемъ, что эти два вида низшихъ паръ самостоятельными считать нельзя,—между ними существуетъ связь, вполнѣ опредѣленная, которую мы въ дальнѣйшемъ и выяснимъ, — а теперь остановимся немного на двухъ заслуживающихъ вниманія свойствахъ низшихъ паръ.

Прежде всего отмѣтимъ, что точки тѣлъ, неизмѣнно соединенныхъ съ подвижнымъ элементомъ низшей пары, при движеніи его описываютъ траекторіи того же рода, что и траекторіи точекъ, лежащихъ на поверхности этого элемента, такъ что въ общемъ случаѣ вся система, несущая въ себѣ подвижной элементъ пары, будетъ двигаться винтовымъ движеніемъ, имѣющимъ ту же ось $OO_1$ и тотъ же шагъ $h$, что и винтовая поверхность стыка; въ случаѣ вращательнаго движенія вся система будетъ вращаться около той же оси $OO_1$ съ той же угловой скоростью $\omega$, что и любой элементъ подвижной винтовой поверхности; въ случаѣ поступательнаго вся система будетъ перемѣщаться также прямолинейно поступательно, параллельно оси $OO_1$.

Отсюда, въ свою очередь, можемъ заключить, что, желая осуществить для даннаго тѣла какое-либо изъ этихъ трехъ движеній, намъ совершенно излишне заботиться о построеніи матеріальной траекторіи для каждой точки даннаго тѣла. Для этого можемъ поступить гораздо проще: задавшись тѣмъ или другимъ движеніемъ, могущимъ быть осуществленнымъ при помощи низшихъ паръ, строимъ пару, удовлетворяющую данному заданію, и соединяемъ затѣмъ неподвижный элементъ ея съ тѣломъ, которое должно оставаться неподвижнымъ, а подвижный элементъ—съ подвижнымъ тѣломъ. Тогда, на основаніи предыдущаго, сможемъ заключить, что движущееся тѣло будетъ выполнять то

самое движеніе, какое выполняетъ подвижной элементъ пары; задача, такимъ образомъ, будетъ выполнена.

Элементы пары, удовлетворяющей поставленнымъ требованіямъ, могутъ быть выполняемы какъ отдѣльно отъ тѣлъ, къ которымъ ихъ придется затѣмъ прикрѣплять наглухо, такъ и въ самихъ этихъ тѣлахъ; легко видѣть, что разницы между этими двумя способами осуществленія заданнаго движенія нѣтъ никакой. Такимъ образомъ, если, напримѣръ, требуется, чтобы одно тѣло перемѣщалось правильнымъ винтовымъ движеніемъ относительно другого, и если намъ задано положеніе оси винта и шагъ его, то въ одномъ тѣлѣ мы выполняемъ одинъ элементъ винтовой пары, удовлетворяющей даннымъ требованіямъ, а въ другомъ—другой. Сопрягая ихъ должнымъ образомъ, осуществимъ требуемое движеніе.

Размѣры соприкасающихся поверхностей не играютъ, при этомъ, никакой роли,—это очевидно изъ предыдущаго,—и ихъ мы подбираемъ, руководясь соображеніями прочности, удобства и обезпеченія требуемаго движенія. Такъ, напримѣръ, вращательное движеніе вокругъ нѣкоторой оси, осуществляемое помощью пары (шипъ — втулка), будетъ оставаться однимъ и тѣмъ же совершенно независимо отъ того, какой діаметръ дадимъ мы шипу; важно лишь одно,—чтобы оставалась сохраненной данная ось. Для поступательнаго движенія важно сохраненіе направленія его, а вовсе не размѣры или расположеніе элементовъ его въ пространствѣ, и т. д.

Остается разрѣшить еще одинъ вопросъ, являющійся весьма существеннымъ въ теоріи паръ вообще и въ данный моментъ имѣющій для насъ важное значеніе. Дѣло въ томъ, что, осуществляя данное движеніе помощью кинематической пары, мы соединяли неподвижное тѣло съ неподвижнымъ элементомъ пары, а подвижное—съ подвижнымъ, но вмѣстѣ съ этимъ оставалось совершенно неопредѣленнымъ, который изъ элементовъ построенной пары слѣдуетъ считать неподвижнымъ и какой—подвижнымъ. Отвѣтъ на этотъ вопросъ непосредственно дается самимъ способомъ образованія этихъ элементовъ, разсмотрѣннымъ нами выше. Дѣйствительно, изъ этого способа, прежде всего, слѣдуетъ, что относительное движеніе элемента $A$, т.-е. движеніе его по неподвижному элементу $B$, будетъ въ точности повторять собою относительное движеніе элемента $B$, ибо какъ то, такъ и другое представляютъ собою одно и то же винтовое движеніе,—съ одной и той же осью $OO_1$ и однимъ и тѣмъ же шагомъ $h$. Отсюда слѣдуетъ, что для полученія винтового движенія при этихъ условіяхъ совершенно безразлично, какой элементъ пары ($A$, $B$) оставлять неподвижнымъ,—$A$ или $B$; оба элемента являются вполнѣ равноправными и равноцѣнными.

Это свойство низшихъ паръ называется *свойствомъ обратимости*; высшія пары такимъ свойствомъ не обладаютъ.

Обратимость низшихъ паръ является весьма цѣннымъ ихъ свойствомъ, давая намъ полный произволъ въ пользованіи элементами

этихъ паръ; мы получаемъ возможность осуществлять заданное движеніе наиболѣе удобнымъ для насъ образомъ,—у насъ есть возможность выбора, не обусловливаемая рѣшительно никакими добавочными условіями.

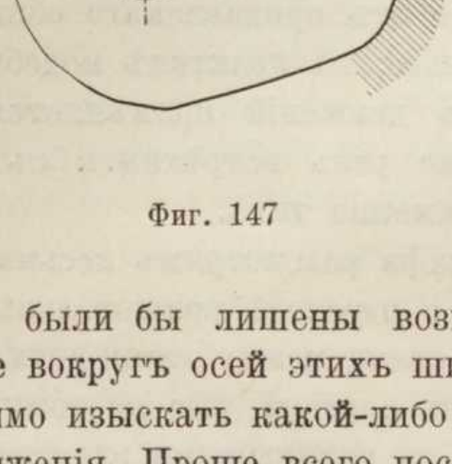
Этими соображеніями мы закончимъ общій обзоръ свойствъ низшихъ паръ. Какъ видимъ, помощью низшихъ паръ можно осуществлять *только три* рода относительнаго движенія,—поступательное, вращательное и винтовое съ постояннымъ шагомъ; положеніе осей обоихъ послѣднихъ движеній вполнѣ опредѣляется положеніемъ неподвижныхъ элементовъ относительнаго движенія, осуществляемаго помощью этихъ паръ. Если, далѣе, обоимъ элементамъ пары, а значитъ, и соединеннымъ съ ними тѣламъ, сообщимъ какое-либо общее движеніе, то заставимъ элементъ, бывшій до того подвижнымъ, и всѣ тѣла, съ нимъ наглухо соединенныя, совершать новое, сложное движеніе; неподвижный элементъ будетъ совершать, понятно, лишь одно новое, сообщаемое нами, движеніе. Новыя движенія подвижного элемента могутъ быть весьма различны, въ зависимости отъ придаваемаго общаго движенія и имѣющагося уже относительнаго; на практикѣ подобный способъ осуществленія такихъ сложныхъ движеній примѣняется весьма часто,—въ дальнѣйшемъ мы нѣсколько разъ встрѣтимся съ нѣкоторыми составными движеніями такого именно типа.

Въ заключеніе настоящаго параграфа разсмотримъ весьма важный въ практическомъ отношеніи вопросъ о переходѣ вращательныхъ паръ въ поступательныя. О существованіи связи между этими двумя видами низшихъ паръ можно было заключить à priori уже по тому одному, что траекторіями точекъ, связанныхъ съ подвижными элементами вращательныхъ паръ, являются окружности постояннаго для каждой точки центра и радіуса, а въ случаѣ поступательныхъ паръ—прямыя линіи, а такъ какъ прямую можно разсматривать какъ окружность безконечно-большого радіуса, т.-е. какъ частный случай окружности, то и поступательную пару можно разсматривать какъ частный случай вращательной. Мы и разсмотримъ поставленный вопросъ именно съ этой точки зрѣнія.

Пусть у насъ имѣется какая-нибудь вращательная пара,—напримѣръ, пара, изображенная на фиг. 139. Неподвижнымъ элементомъ является, положимъ, втулка *b*, высверленная въ какомъ-нибудь твердомъ тѣлѣ *B*, а подвижнымъ—вращающійся внутри нея шипъ *aa*. Въ сѣченіи плоскостью, перпендикулярной оси вращенія *xx*, получимъ кругъ радіуса *OK* и центра *O*, представляющій собою сѣченіе вращающагося шипа, и неподвижную плоскую фигуру *KD* съ соотвѣтствующимъ этому шипу круглымъ вырѣзомъ, изображающую собою сѣченіе тѣла *B* и втулки *bb* (фиг. 147).

Станемъ теперь увеличивать радіусъ *OK* сѣченія шипа; площадь сѣченія начнетъ постепенно увеличиваться, и шипъ будетъ требовать для себя все большей и большей втулки (фиг. 148), въ виду чего изъ тѣла *B* придется, при выполненіи этихъ втулокъ, вырѣзывать все бо́ль-

шіе и бо́льшіе куски, пока, наконецъ, размѣры шипа не окажутся настолько большими, что тѣло уже не будетъ въ состояніи охватить весь шипъ кругомъ,—это случится, напримѣръ, для шипа съ радіусомъ *ON* и бо́льшими. Для достиженія обхвата такихъ большихъ шиповъ пришлось бы развивать все больше и больше размѣры уже самого тѣла *B*, какъ это, напримѣръ, помѣчено пунктиромъ на фиг. 148. Увеличеніе это, еще возможное при небольшихъ размѣрахъ шиповъ, становится фактически невозможнымъ уже при сколько-нибудь значительныхъ, и, слѣдовательно, придерживаясь этого способа, мы, при большихъ діаметрахъ

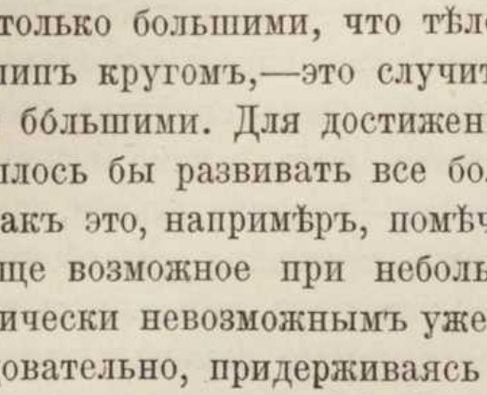



Фиг. 147

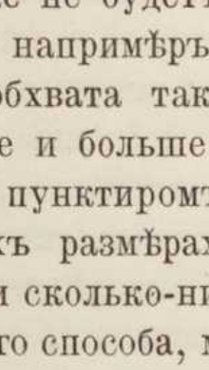



Фиг. 148.

шиповъ, были бы лишены возможности осуществлять вращательное движеніе вокругъ осей этихъ шиповъ, почему для подобныхъ случаевъ необходимо изыскать какой-либо другой способъ обезпеченія вращательнаго движенія. Проще всего поступать такъ: отказываясь отъ полнаго обхвата шипа, мы вытачиваемъ въ тѣлѣ только ту часть втулки, какую можно выполнить, не увеличивая, въ то же время, размѣровъ тѣла, и *обезпечиваемъ скольженіе* шипа по ея поверхности при помощи какихъ-либо спеціальныхъ приспособленій, вводя, напримѣръ, силовое замыканіе, или, что удобнѣе всего, задаваясь соотвѣтствующимъ профилемъ поверхностей касанія, съ выступами, охватывающими ихъ закраинами, и т. д. (фиг. 149). Удачно и въ полномъ соотвѣтствіи съ условіями заданія выбранный профиль поверхности соприкосновенія разрѣшаетъ задачу вращенія шипа вполнѣ, давая тѣмъ самымъ возможность избѣжать обхвата всего шипа.



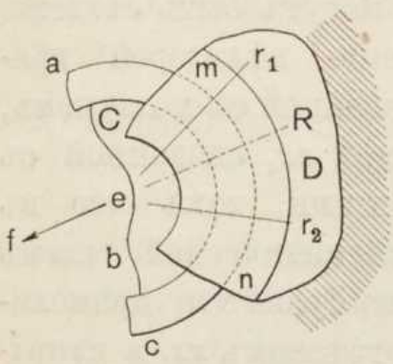

Фиг. 149.



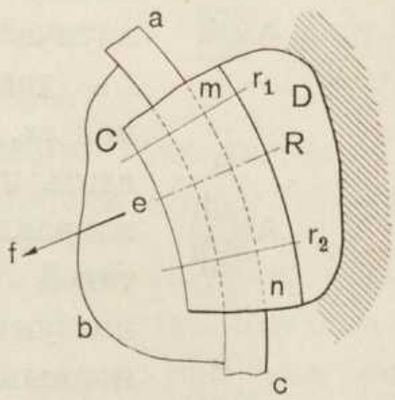
На практикѣ, при большихъ діаметрахъ шиповъ, никогда не приходится встрѣчаться съ полными вращеніями вокругъ нихъ (на $360^0$); въ этихъ случаяхъ шипъ совершаетъ только качанія вокругъ оси втулка, такъ что какой-либо радіусъ *OR*, неизмѣнно

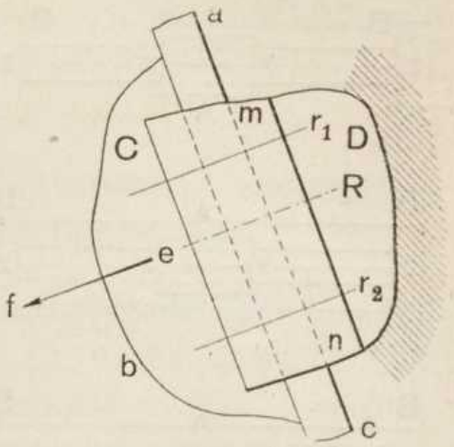
съ шипомъ связанный, качается между крайними своими положеніями $Or_1$ и $Or_2$ (фиг. 149). Весь уголъ качанія $r_1Or_2$ является обыкновенно вполнѣ опредѣленнымъ и постояннымъ. При этихъ условіяхъ часть шипа *abcd* остается совершенно неиспользовываемой, почему ее, безъ всякаго ущерба для движенія шипа, можно отбросить, ограничившись лишь частью *amnc*, какъ это схематически показано на фиг. 150. Такъ всегда въ подобныхъ случаяхъ на практикѣ и поступаютъ.

Станемъ теперь увеличивать размѣры шипа еще дальше, оставляя поверхность скольженія все время *внутри* даннаго тѣла; для этого




Фиг. 150.



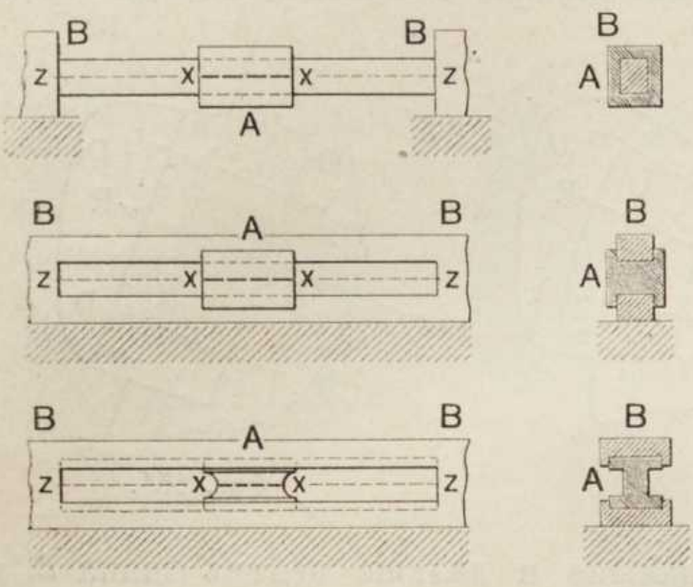




Фиг. 151.

придется удалять наружу все дальше и дальше центръ шипа *C*, и пусть это удаленіе его происходитъ по направленію *ef*. Ясно, что дуга *amnc*, потребная для обезпеченія качанія шипа, станетъ, при этомъ, все больше и больше выпрямляться (фиг. 150), переходя, наконецъ, въ предѣлѣ, когда центръ шипа удалится въ безконечность по направленію *ef*, и, значитъ, радіусъ шипа сдѣлается *безконечно большимъ*, въ *прямую amnc* (фиг. 151). Всѣ радіусы *OR* и крайніе радіусы $Or_1$ и $Or_2$ станутъ параллельны другъ другу, и траекторіи всѣхъ точекъ шипа, бывшія до того дугами концентрическихъ окружностей, обратятся въ прямыя линіи, перпендикулярныя радіусамъ *OR*, $Or_1$ и т. д., т.-е. перпендикулярныя тому направленію *ef*, по какому удалился въ безконечность центръ *O*. Шипъ *A* станетъ, такимъ образомъ, двигаться поступательно то въ одну, то въ другую сторону, скользя по поверхности втулки; эта послѣдняя обратилась, какъ видимъ, въ направляющія, а самый шипъ *A*—въ ползунъ. Такимъ образомъ, данная *вращательная пара перешла въ поступательную помощью увеличенія шипа до безконечно-большихъ размѣровъ*, и можно сказать, что если въ какомъ-нибудь механизмѣ мы обнаруживаемъ поступательную пару, то ползунъ ея есть часть нашего шипа *A*, а направляющія—часть его втулки, развившейся до безконечно-большихъ размѣровъ. Направленіе поступательнаго перемѣщенія ползуна (шипа) *A* обусловливается направленіемъ, по которому удалился въ безконечность центръ *O*. Выбирая это послѣднее надлежащимъ образомъ, можемъ получить желаемое направленіе поступательнаго движенія, задаваемое, напримѣръ, двумя данными точками или долженствующее совершаться подъ извѣст-

нымъ, заранѣе заданнымъ, угломъ къ другому извѣстному направленію и т. д.

Въ конструктивномъ отношеніи внѣшній видъ поступательныхъ паръ особеннаго разнообразія не представляетъ, какъ объ этомъ можно судить по фиг. 152, изображающей главнѣйшія типическія формы этихъ паръ, выполняемыя на практикѣ; во всѣхъ какъ этихъ, такъ и всякихъ другихъ, поступательныхъ парахъ всегда можно обнаружить присутствіе направляющихъ *BB* и ползуна *A*, скользящаго вдоль нихъ. Согласно сказанному выше, всѣ эти случаи кинематически могутъ быть сведены къ движенію нѣкоторой прямой *xx*, связанной съ ползуномъ, вдоль прямой *zz*, связанной съ направляющими, такъ что въ такой кинематической схемѣ ползунъ изобразится прямолинейнымъ отрѣзкомъ *xx*, а направляющія—прямой *zz* (фиг. 150). Еслибы оказалось, что направляющія обладаютъ нѣкоторымъ собственнымъ движеніемъ,—напримѣръ, вращеніемъ вокругъ какой-либо неподвижной точки *C*,—то то же самое движеніе раздѣлила бы какъ прямая *zz*, такъ и скользящій по ней отрѣзокъ *xx*, который, слѣдовательно, былъ бы вынужденъ выполнять одновременно два эти движенія; въ приведенномъ примѣрѣ онъ долженъ былъ бы скользить вдоль прямой *zz* и, вмѣстѣ съ ней, вращаться вокругъ центра *C*. Такое усложненіе дѣла никакихъ трудностей съ кинематической стороны не представляетъ.




Фиг. 152.

Итакъ, поступательную пару можно разсматривать, какъ частный случай вращательной, когда радіусъ шипа увеличивается до безконечно большихъ размѣровъ. Отъ всего шипа остается лишь часть, достаточная для выполненія заданнаго движенія тѣла *A*, и движеніе, затѣмъ, обезпечивается тѣмъ или другимъ способомъ: силовымъ замыканіемъ пары, выборомъ соотвѣтственныхъ профилей и т. д., соотвѣтственно условіямъ заданія. Направленіе поступательнаго движенія можетъ быть взято сообразно условіямъ заданія. Въ дальнѣйшемъ мы не одинъ разъ будемъ примѣнять эту замѣну паръ съ цѣлью преобразованія того или другого даннаго механизма. Формула этой замѣны, согласно сказанному, изобразится такъ: *шипъ* вращательной пары *замѣняемъ ползуномъ, а втулку—направляющими*. Замѣчая, кромѣ того, что производимая нами замѣна касается только подвергаемыхъ ей паръ, но никоимъ образомъ не можетъ затрагивать звеньевъ механизма, заключаемъ, что при замѣнѣ слѣдуетъ строго слѣдить за тѣмъ, чтобы *все то, что было*

*жестко соединено съ шипомъ, послѣ замѣны оказалось бы опять жестко соединеннымъ съ ползуномъ;* подобнымъ же образомъ, все, соединенное воедино съ втулкой, должно оказаться соединеннымъ воедино съ направляющими.—Напомнимъ, наконецъ, что въ кинематическихъ схемахъ замѣны шипъ замѣняется прямолинейнымъ отрѣзкомъ $xx$, а втулка—совпадающей съ нимъ прямой $zz$. Направленіе удаленія оси шипа въ безконечность выбирается сообразно съ обстоятельствами заданія.

Этимъ краткимъ абрисомъ теоріи кинематическихъ паръ мы закончимъ настоящій параграфъ и теперь перейдемъ къ изученію механизмовъ, составленныхъ при участіи этихъ паръ.

## § 25. Кинематическая цѣпь. Механизмъ. Составленіе механизма изъ вращательныхъ паръ. Теорема Грасгофа.

Предположимъ, что у насъ имѣется нѣсколько кинематическихъ паръ,—безразлично какихъ, высшихъ или низшихъ; обозначимъ ихъ черезъ $(A, a)$, $(B, b)$, $(C, c)$,.... $(Z, z)$, при чемъ буквами $A$, $a$, $B$,...., обозначены, попрежнему, элементы этихъ паръ. Будемъ теперь соединять эти элементы попарно твердыми тѣлами, прикрѣпляя наглухо къ каждому твердому тѣлу по два элемента, принадлежащіе двумъ разнымъ парамъ. Такимъ образомъ, получимъ рядъ различныхъ сочетаній этихъ элементовъ; напримѣръ, можемъ составить сочетаніе

$$A,\ (a-C),\ (c-B),\ (b-K),\ (k-P),\ldots.,\ (N-z),\ Z,$$

или

$$a,\ (A-k),\ (K-N),\ (n-B),\ldots.,\ (s-Z),\ z,$$

и т. д. Совокупность парныхъ сочетаній элементовъ данныхъ намъ паръ называется, вообще, *кинематической цѣпью.* Система, составленная изъ двухъ элементовъ, входящихъ въ парное сочетаніе, и твердаго тѣла, ихъ сопрягающаго, называется *звеномъ кинематической цѣпи.* Очевидно, что въ каждомъ звенѣ существенными являются не форма его, не матеріалъ и другіе подобные факторы, а исключительно лишь поверхности, принадлежащія элементамъ различныхъ паръ, вошедшихъ въ составъ даннаго звена. Въ цѣпяхъ, приведенныхъ выше, крайніе элементы ($A$ и $Z$, $a$ и $z$, и т. д.) остались свободными,—такія цѣпи называются *открытыми* кинематическими цѣпями. Если же мы соединимъ другъ съ другомъ и эти элементы, то получимъ *замкнутыя* цѣпи. Если въ какой-либо замкнутой кинематической цѣпи каждое звено можетъ имѣть только опредѣленное движеніе относительно другихъ звеньевъ, составляющихъ данную цѣпь, то эта цѣпь получаетъ, вообще, названіе *цѣпи принужденнаго движенія.* Названіе механизма она получаетъ тогда, когда звенья ея начинаютъ выполнять совершенно опредѣленныя движенія относительно пространства, насъ окру-

жающаго. Этой опредѣленности можемъ достигнуть, укрѣпляя неподвижно относительно этого пространства одно звено цѣпи и давая какому-либо звену цѣпи движеніе, относительно этого пространства совершенно опредѣленное. Движенія остальныхъ звеньевъ относительно окружающаго цѣпь пространства должны быть совершенно опредѣленными, и мы получимъ механизмъ.

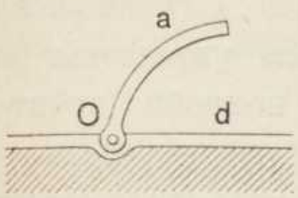
Въ обыкновенныхъ условіяхъ работы механизмовъ опредѣленность движеній относительно пространства достигается путемъ неподвижнаго относительно того же пространства укрѣпленія одного звена, почему мы только этотъ случай и будемъ разсматривать, *называя*, такимъ образомъ, *механизмомъ замкнутую кинематическую цѣпь принужденнаго движенія, одно звено которой сдѣлано неподвижнымъ, обращено*, какъ говорятъ, *въ стойку*. Дѣлая въ данномъ механизмѣ неподвижными послѣдовательно одно звено его за другимъ, или ставя, какъ говорятъ, механизмъ на различныя его звенья, мы получимъ столько механизмовъ, сколько въ этой цѣпи имѣется звеньевъ, причемъ можемъ получать механизмы того же рода, что и раньше, но иногда могутъ получаться новые, совершенно отличные отъ прежнихъ. Такую именно операцію мы и продѣлаемъ въ дальнѣйшемъ съ однимъ простымъ механизмомъ,—постановка его каждый разъ на новое звено будетъ имѣть своимъ результатомъ полученіе все новыхъ и новыхъ механизмовъ.

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній перейдемъ къ изученію простѣйшихъ механизмовъ, при чемъ, прежде всего, изучимъ механизмы плоскіе; изученію механизмовъ пространственныхъ посвятимъ отдѣльную главу въ концѣ курса. Въ виду этого ограниченія, въ составъ механизмовъ, о которыхъ будетъ идти рѣчь въ ближайшихъ параграфахъ, будутъ входить только пары вращательныя и пары поступательныя, при чемъ всѣ движенія будемъ предполагать совершающимися въ плоскостяхъ, параллельныхъ нѣкоторой направляющей плоскости. Въ виду этого оси всѣхъ вращательныхъ паръ будутъ перпендикулярны этой плоскости и, значитъ, параллельны другъ другу; поступательныя же движенія будутъ параллельны этой плоскости. Такъ какъ вращательныя пары являются болѣе общими, нежели поступательныя, то мы начнемъ наши изслѣдованія съ механизмовъ, составленныхъ изъ вращательныхъ паръ.

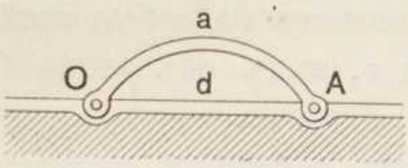
Приступая къ составленію простѣйшихъ механизмовъ изъ вращательныхъ паръ, сталкиваемся, прежде всего, съ вопросомъ, каково должно быть *наименьшее число* вращательныхъ паръ, при которомъ помощью ихъ можно получить механизмъ. Легко видѣть, что одна вращательная пара (фиг. 153), строго говоря, механизма не даетъ,—кинематической цѣпи здѣсь нѣтъ,—и если мы назвали ее простѣйшимъ механизмомъ, то лишь въ томъ смыслѣ, что на подобныя пары тѣлъ мы можемъ расчленить любой механизмъ, составленный изъ вращательныхъ паръ.

Если въ тѣлѣ *a* мы высверлимъ гнѣздо для шипа *A*, укрѣпивъ

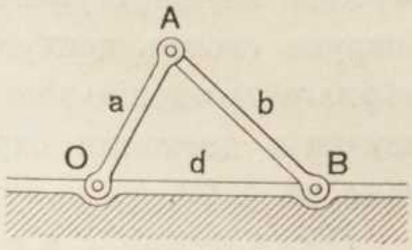
этотъ послѣдній въ неподвижномъ тѣлѣ *d* (фиг. 154), то получимъ замкнутую кинематическую цѣпь съ двумя парами, — но это, въ сущности, будетъ одна жесткая, неизмѣняемая система, такъ какъ звено *a* двигаться не можетъ совсѣмъ. Такимъ образомъ, двѣ вращательныя пары механизма не даютъ.




Фиг. 153.

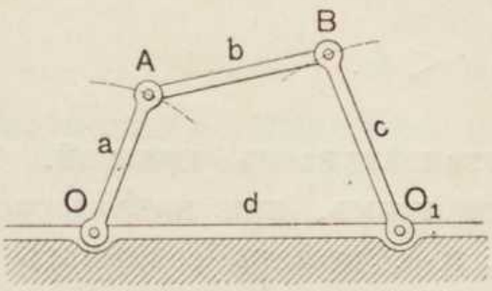



Фиг. 154.

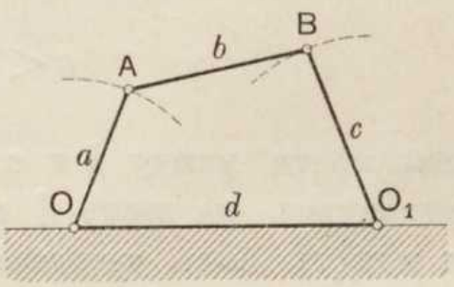



Фиг. 155.

Легко убѣдиться, что три вращательныхъ пары, образуя жесткую систему, механизма также не даютъ (фиг. 155), и только четыре вращательныхъ пары (фиг. 156) даютъ вполнѣ опредѣленный механизмъ. Дѣлая звено *d* его неподвижнымъ, — обращая его въ стойку или, какъ говорятъ иначе, *ставя механизмъ на это звено*,—получимъ при какомъ-либо движеніи одного звена вполнѣ опредѣленныя движенія остальныхъ звеньевъ. Это будетъ такъ называемый *шарнирный четыреугольникъ*, играющій какъ въ этомъ основномъ видѣ, такъ и въ видѣ различныхъ своихъ модификацій, весьма важную роль въ маши-




Фиг. 156.




Фиг. 157.

ностроеніи вообще. Схематически онъ изображается такъ, какъ это показано на фиг. 157. Буквами *a*, *b*, *c* и *d* обозначены длины звеньевъ, т.-е. разстоянія между центрами сосѣднихъ вращательныхъ паръ, элементы коихъ входятъ въ составъ каждаго отдѣльнаго звена. Иногда, ради краткости письма, этими же буквами будемъ обозначать и самыя звенья вообще, безъ отношенія къ ихъ длинѣ. Подробному изученію модификацій четырехшарнирнаго механизма мы посвятимъ рядъ дальнѣйшихъ параграфовъ.

Итакъ, наименьшее число вращательныхъ паръ, помощью которыхъ можно устроить механизмъ, равно четыремъ. Механизмы съ пятью вращательными парами мы разсмотримъ только вскользь; механизмовъ съ бо́льшимъ числомъ вращательныхъ паръ касаться не будемъ совсѣмъ.

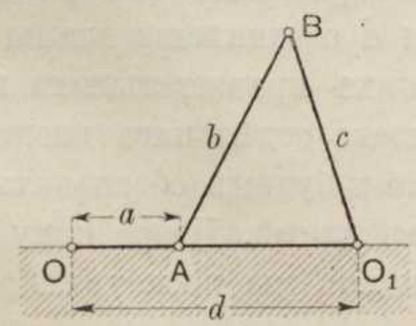
Съ шарнирнымъ четыреугольникомъ мы уже имѣли случай встрѣчаться въ статьѣ о планѣ скоростей (стр. 18). Все движеніе сводится здѣсь къ движенію отрѣзка **AB** постоянной длины концами его по дугамъ окружностей, описанныхъ радіусами **OA** и $O_1B$ изъ центровъ **O** и $O_1$ (фиг. 157). Всѣ кинематическія особенности движенія этого отрѣзка изучены уже нами подробно. Звенья *a* и *c* могутъ вращаться вокругъ своихъ центровъ и равномѣрно, и неравномѣрно. Случай равномѣрнаго вращенія звена *a* влечетъ за собою извѣстныя упрощенія въ изученіи движенія отрѣзка *c*, какъ объ этомъ было подробно трактовано въ § 20.

Если звенья *a* и *c* могутъ совершать *полные обороты* около своихъ центровъ **O** и $O_1$, то они носятъ названіе *кривошиповъ*, если же не могутъ, то *коромысловъ*. Звено *b*,—нашъ неизмѣняющій своей длины отрѣзокъ, скользящій по двумъ круговымъ дугамъ,—носитъ, вообще, названіе *шатуна*. Представляетъ значительный интересъ рѣшеніе вопроса о томъ, когда звено *a* (или *c*) можетъ совершать полный оборотъ около своего центра, т.-е. когда оно можетъ быть кривошипомъ. Отвѣтъ на это даетъ такъ называемая *теорема Грасгофа*, къ разбору которой мы теперь и приступимъ.

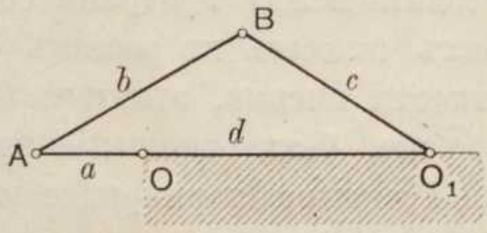
Пусть у насъ имѣется нѣкоторый шарнирный четыреугольникъ $OABO_1$ (фиг. 157). Обозначимъ длины звеньевъ его, какъ это помѣчено на чертежѣ, черезъ $a$, $b$, $c$, $d$, и пусть въ данномъ случаѣ между этими длинами существуютъ соотношенія

$$a < b \quad \text{и} \quad c < d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Зависимости между $b$ и $c$ не устанавливаемъ никакой. Ставимъ нашъ механизмъ на звено $d$ и разсмотримъ, при какихъ условіяхъ звено $a$ можетъ быть *кривошипомъ*, т.-е. можетъ совершать *полный* оборотъ вокругъ своего центра **O**. Если это звено $a$ есть кривошипъ, то мы получаемъ возможность построить два треугольника,—одинъ со сторонами $(d-a)$, $b$ и $c$ (фиг. 158), и другой со сторонами




Фиг. 158.




Фиг. 159.

$(d+a)$, $b$ и $c$ (фиг. 159). Первый изъ нихъ получается тогда, когда звено $a$, при своемъ вращеніи, приходитъ въ совпаденіе со звеномъ $d$, а второй—тогда, когда это звено приходитъ въ совпаденіе съ продол-

женіемъ звена $d$. Для возможности построенія этихъ треугольниковъ необходимо выполненіе условій, извѣстныхъ изъ курса начальной геометріи:

$$d-a\geqq b-c, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$d-a\leqq b+c, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

для случая, изображеннаго на фиг. 158, и

$$d+a\geqq b-c, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

$$d+a\leqq b+c, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

для случая, изображеннаго на фиг. 159. Условія $(\beta)$ и $(\gamma)$ можно отбросить, такъ какъ они всегда удовлетворяются сами собой; дѣйствительно, путемъ переноса членовъ съ минусами въ другія части неравенствъ, получаемъ соотношенія, имѣющія силу всегда:

$$d\leqq a+b+c \quad \text{и} \quad b\leqq d+a+c.$$

Существенными, поэтому, являются соотношенія $(\alpha)$ и $(\delta)$. Первому изъ нихъ можно дать видъ:

$$d+c\geqq b+a, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha')$$

второе же можно оставить безъ перемѣны:

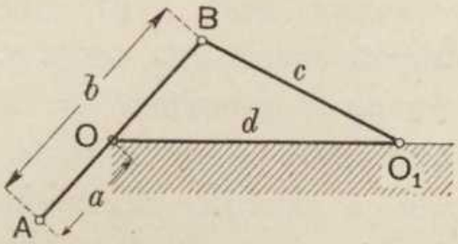
$$d+a\leqq b+c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

Если $d\geqq b$, то оба неравенства могутъ быть удовлетворены при $c\geqq a$. Если же $d\leqq b$, то они удовлетворяются опять при $c\geqq a$. Такимъ образомъ, звено $a$, совершающее полный оборотъ вокругъ своего центра $O$, при наличности условій (60) должно быть *наименьшимъ*. Въ виду этого, условія $(\alpha')$ и $(\delta)$ могутъ быть прочитаны, вообще, такъ: *при условіяхъ, выраженныхъ уравненіями (60), наименьшее звено a шарнирнаго четыреугольника можетъ быть кривошипомъ тогда, когда сумма его съ наибольшимъ звеномъ меньше суммы двухъ другихъ звеньевъ* или равна ей. Это и есть **теорема Грасгофа.**

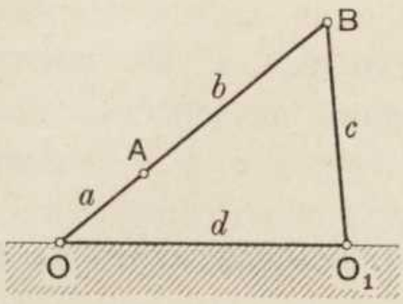
Легко подобнымъ же образомъ разобраться въ другихъ могущихъ встрѣтиться на практикѣ сочетаніяхъ звеньевъ различной длины. Изложенный пріемъ не является единственнымъ,—изслѣдованіе можно вести другими путями; результаты, конечно, будутъ получаться тѣ же.

Такимъ образомъ, вмѣсто треугольниковъ $ABO_1$ (фиг. 158) и $ABO_1$ (фиг. 159), можно разсматривать треугольники $OBO_1$ (фиг. 160) и $OBO_1$ (фиг. 161), получаю-

щіеся при углахъ наклона звена $a$ къ звену $b$, равныхъ нулю и 180°. Въ результатѣ разсмотрѣнія ихъ получимъ тѣ же соотношенія ($\alpha'$) и ($\delta$).

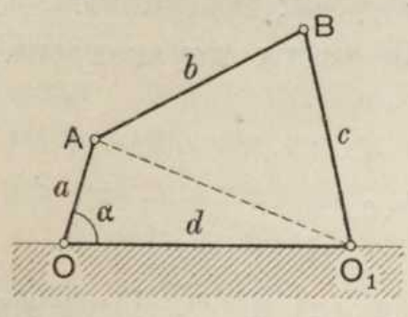



Фиг. 160.




Фиг. 161.

Весьма удобнымъ является пріемъ, основанный на слѣдующихъ очевидныхъ соображеніяхъ: пусть $OABO_1$ (фиг. 162) есть какой-либо шарнирный четыреугольникъ, поставленный на звено $d$. Если звено $a$ есть кривошипъ, то уголъ $\alpha$, образуемый имъ съ постояннымъ направленіемъ $OO_1$, будетъ принимать всѣ значенія отъ 0° до 360°. Это обстоятельство даетъ возможность привлечь къ изслѣдованію тригонометрическія функціи такимъ образомъ: проводимъ діагональ четыреугольника, $AO_1$; изъ треугольниковъ $OAO_1$ и $ABO_1$, получаемыхъ такимъ путемъ, находимъ очевидныя соотношенія:




Фиг. 162.

$$AO_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad\ \cos\alpha,$$

$$b + c \geqq AO_1 \geqq b - c.$$

Отсюда находимъ

$$\frac{a^2 + d^2 - (b-c)^2}{2ad} \geqq \cos\alpha \geqq \frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2ad} \quad \ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

Уголъ $\alpha$, какъ мы указывали, можетъ принимать различныя значенія отъ 0° до 360°; въ виду этого $\cos\alpha$ будетъ принимать всѣ значенія отъ $(+1)$ до $(-1)$. Лѣвая дробь неравенствъ ($\varepsilon$) должна быть, вообще, больше всѣхъ возможныхъ значеній $\cos\alpha$; значитъ, она должна быть *больше* и *наибольшаго* его значенія (или равна ему). Подобное же разсужденіе показываетъ, что правая дробь должна быть *меньше наименьшаго* значенія $\cos\alpha$ (или равна ему). Обѣ дроби, очевидно, представляютъ собою величины постоянныя, почему только и становятся возможными подобныя разсужденія. Имѣя ихъ въ виду, можемъ написать соотношенія такого рода:

$$\frac{a^2 + d^2 - (b-c)^2}{2ad} \geqq +1$$

и

$$\frac{a^2 + d^2 - (b+c)^2}{2ad} \leqq -1.$$

Отсюда находимъ соотношенія

$$d - a \geqq b - c$$

и

$$d + a \leqq b + c,$$

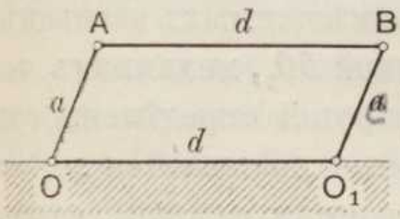
представляющія собою уже знакомыя намъ неравенства ($\alpha$) и ($\delta$). Въ дальнѣйшемъ анализъ остается тотъ же. Изложенный способъ съ удобствомъ можетъ быть примѣняемъ въ самыхъ разнообразныхъ случаяхъ сочетанія звеньевъ четыреугольника.

Спрашивается теперь, не можетъ ли быть кривошипомъ, одновременно съ $a$, и звено $c$, при соблюденіи тѣхъ же условій (60). Анализъ, подобный предыдущему, показываетъ, что для этого должны быть удовлетворены условія:

$$d+c \leqq a+b,$$

$$d+a \geqq b+c,$$

что, при $d \geqq b$ или $d \leqq b$, удовлетворяется при $c \leqq a$. Значитъ, звено $c$ должно быть или меньше $a$, или равно ему. Но меньше $a$ оно быть не можетъ, ибо наименьшимъ звеномъ является именно $a$; значитъ, оно должно быть въ такомъ случаѣ равно $a$. Поэтому, звенья $a$ и $c$ могутъ быть одновременно кривошипами лишь въ томъ случаѣ, когда длины ихъ равны ($a = c$). Это обстоятельство, въ свою очередь, влечетъ за собою равенство звеньевъ $d$ и $b$,—иначе оба соотношенія ($\alpha'$) и ($\delta$) одновременно удовлетворены быть не могутъ. Механизмъ въ этомъ частномъ случаѣ принимаетъ видъ, изображенный на фиг. 163,—противоположныя звенья его равны и параллельны. Въ такомъ видѣ этотъ механизмъ, называемый *параллельнымъ кривошипомъ*, примѣняется въ паровозахъ, гдѣ помощью звена **AB**, называемаго въ этомъ случаѣ *спарникомъ*, ведущее колесо сопрягается съ другими колесами. Легко видѣть, что звенья **OA** и $\boldsymbol{O_1B}$ въ этомъ случаѣ будутъ вращаться съ одинаковыми угловыми скоростями. Дѣйствительно, обозначивъ угловыя скорости вращенія этихъ звеньевъ черезъ $\vartheta_a$ и $\vartheta_c$, имѣемъ для скоростей $v_A$ и $v_B$ точекъ **A** и **B** выраженія:

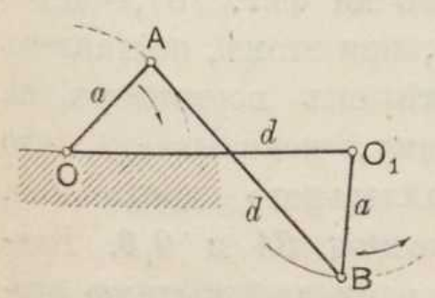


Фиг. 163.

$$v_A = a \,.\, \vartheta_a,$$

$$v_B = c \,.\, \vartheta_c.$$

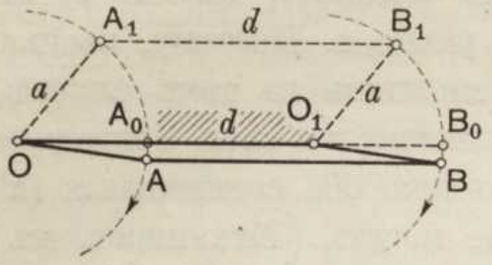
Замѣчая, что, въ виду параллельности звеньевъ **OA** и $\boldsymbol{O_1B}$, прямая **Dx** плана скоростей **DBA** (фиг. 18, стр. 18) пойдетъ по **DA** и съ ней сольется, заключаемъ, что скорость $v_B$ точки **B** выразится здѣсь черезъ $\boldsymbol{OA} \,.\, \vartheta_a$, но $v_B = \boldsymbol{O_1B} \,.\, \vartheta_c$; отсюда имѣемъ соотношеніе $\boldsymbol{OA} \,.\, \vartheta_a = \boldsymbol{O_1B} \,.\, \vartheta_c$, дающее, въ виду равенства $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{O_1B}$, равенство $\vartheta_a = \vartheta_c$.



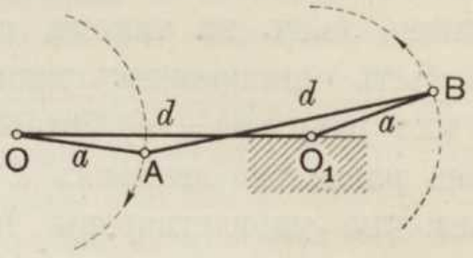
Фиг. 164.

При томъ же равенствѣ звеньевъ, что и въ случаѣ параллельнаго кривошипа, можетъ получиться еще другой механизмъ, въ которомъ звенья $a$ и $c$ располагаются по разныя стороны звена $d$ (фиг. 164). Такой механизмъ носитъ названіе *симметричнаго* или *антипа-*

*раллельнаго кривошипа*. Вращеніе кривошиповъ $OA$ и $O_1B$ совершается здѣсь въ различныя стороны. Легко убѣдиться, что параллельный кривошипъ во время своего движенія можетъ непосредственно переходить въ антипараллельный. Дѣйствительно, положимъ, что въ случаѣ параллельнаго кривошипа (фиг. 165) движущимъ звеномъ является звено $OA$. При вращеніи его наступитъ моментъ, когда оси звеньевъ $OA$, $AB$ и $O_1B$ совпадутъ съ направленіемъ звена $OO_1$. При дальнѣйшемъ вращеніи звена $OA$ кривошипъ $O_1B$ можетъ или продолжать вращеніе въ *прежнемъ* направленіи (фиг. 165),—и механизмъ останется параллельнымъ кривошипомъ, — или начать вращеніе въ *обратную* сторону (фиг. 166), послѣ чего изъ параллельнаго кривошипа онъ перейдетъ

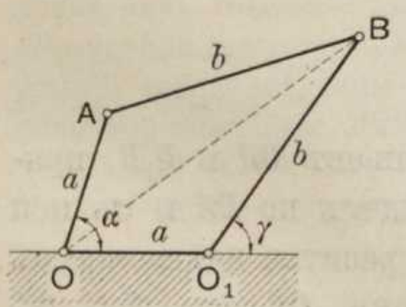



Фиг. 165.




Фиг. 166.

въ симметричный. Слѣдовательно, въ положеніи совмѣщенныхъ звеньевъ, когда звенья $OA$ и $O_1B$ вытягиваются вдоль прямой $OO_1$, механизмъ теряетъ свою сущность,—онъ лишается свойства строгой опредѣленности относительнаго движенія звеньевъ. Такое положеніе называется *мертвымъ положеніемъ*, и нужна, такъ сказать, посторонняя помощь, чтобы движеніе продолжало носить прежній характеръ. Легко, конечно, видѣть, что и для антипараллельнаго кривошипа положеніе совмѣщенныхъ звеньевъ есть также мертвое положеніе: онъ можетъ перейти въ параллельный кривошипъ. Разбору способовъ, помощью которыхъ получается возможность *перехода мертвыхъ положеній съ сохраненіемъ прежняго движенія* мы отведемъ отдѣльный параграфъ, а теперь, продолжая разсмотрѣніе свойствъ шарнирнаго четыреугольника, разберемъ еще одинъ предѣльный случай его,—случай такъ называемаго *двойного кривошипа* (фиг. 167) или *механизма Сильвестра*.




Фиг. 167.

Этотъ механизмъ получается тогда, когда звенья, лежащія рядомъ, оказываются попарно равными, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 167,—здѣсь $a = d$ и $b = c$; механизмъ, при этомъ, поставленъ на одно изъ меньшихъ звеньевъ,—на чертежѣ онъ поставленъ на звено $a$. Анализъ, подобный вышеприведенному, показываетъ, что *этотъ механизмъ*, подобно механизму параллельнаго кривошипа, *имѣетъ два кривошипа*; ими служатъ здѣсь звенья $OA$ и $O_1B$. Ближайшее разсмотрѣніе вопроса выясняетъ еще одну любопытную особенность этого механизма, а именно: оказывается, что звено $OA$ совер-

шаетъ два оборота въ то самое время, пока звено $O_1B$ совершаетъ одинъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, выведемъ связь между угломъ $\alpha$ отклоненія звена $a$ и угломъ $\gamma$ отклоненія звена $O_1B$. Соединяя точки $O$ и $B$ прямой, получаемъ два равныхъ треугольника $OAB$ и $OBO_1$. Такъ какъ уголъ $BOO_1$ равенъ $^1/_2\alpha$, а уголъ $OBO_1$ равенъ $(\gamma - {}^1/_2\alpha)$, то изъ треугольника $OBO_1$ можемъ получить соотношеніе

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\gamma - {}^1/_2\alpha)}{\sin {}^1/_2\alpha},$$

откуда находимъ далѣе:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\gamma\cos {}^1/_2\alpha - \cos\gamma\sin {}^1/_2\alpha}{\sin {}^1/_2\alpha} = \sin\gamma\,\mathrm{cotg}\,{}^1/_2\alpha - \cos\gamma.$$

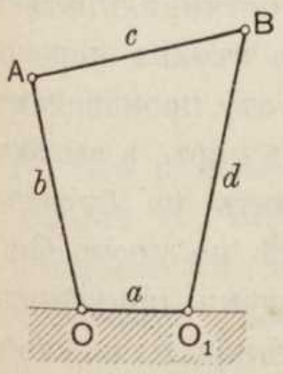
Отсюда опредѣляемъ $\mathrm{cotg}\,{}^1/_2\alpha$:

$$\mathrm{cotg}\,{}^1/_2\alpha = \frac{\frac{a}{b} + \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Легко убѣдиться, что при $\alpha = 0$ имѣемъ, какъ это и должно быть, $\gamma = 0$; при $\alpha = \pi$ находимъ $\cos\gamma = -a/b$, такъ что соотвѣтствующій уголъ $\gamma$ будетъ заключаться между $^1/_2\pi$ и $\pi$; наконецъ, при $\alpha = 2\pi$ получаемъ $\gamma = \pi$, что и доказываетъ вышеприведенное положеніе.

Для подобныхъ механизмовъ мертвыя положенія получаются тогда, когда движеніе получается отъ большаго звена $O_1B$. При совмѣщеніи $OA$ съ $OO_1$, а $AB$ съ $O_1B$, оба совпавшія звенья ($AB$, $O_1B$) могутъ вращаться вокругъ центра $O_1$, какъ одно, звено же $OA$ (подвижное, совпавшее съ неподвижнымъ $OO_1$), можетъ, при этомъ, оставаться неподвижнымъ. Легко, далѣе, убѣдиться, что если механизмъ поставимъ на звено $O_1B$, то звено $OA$ явится кривошипомъ, а звено $AB$—коромысломъ; при движеніи отъ $OA$ получимъ мертвыя положенія того же характера, что и выше.

Если бы взятый нами четыреугольникъ $OAB$ (фиг. 157) мы поставили на звено $b$, то, при наличности тѣхъ же данныхъ (60), наименьшее звено $a$ могло бы быть кривошипомъ при тѣхъ же условіяхъ, что и раньше. Звено $c$ опять кривошипомъ быть не сможетъ и будетъ только коромысломъ. Такимъ образомъ, при условіяхъ (60) звено $a$ является кривошипомъ независимо отъ того, на которое изъ звеньевъ, $b$ или $d$, мы ставимъ нашъ механизмъ, — звено $a$ является въ данномъ случаѣ кривошипомъ какъ по отношенію къ звену $b$, такъ и къ звену $d$. Нетрудно, далѣе, усмотрѣть, что, при неподвижномъ звенѣ $a$, оба звена, $b$ и $d$, будутъ кривошипами, — оба будутъ имѣть возможность совершать полные обороты около неподвижныхъ въ этомъ случаѣ центровъ $A$ и $O$ (фиг. 168). При неподвижномъ звенѣ $c$ оба эти звена будутъ только коромыслами.



Фиг. 168.

Сказанное станетъ очевиднымъ, если мы обратимъ вниманіе на

то обстоятельство, что, при вращеніи звена $a$, оно будетъ образовывать со звеньями $b$ и $d$ послѣдовательно всѣ углы отъ $0^0$ и до $360^0$, такъ что относительно звена $a$ звенья $b$ и $d$ будутъ совершать полные обороты, очевидно, одновременно, но съ различными угловыми скоростями. Поэтому, поставивъ механизмъ на звено $a$, увидимъ, что звенья $d$ и $b$ сдѣлаются кривошипами.

Вопросъ объ угловыхъ скоростяхъ и ускореніяхъ звена $AB$ разрѣшается согласно общимъ указаніямъ, приведеннымъ въ концѣ § 18,—см. стр. 113 и слѣд. Не представляетъ никакихъ затрудненій и опредѣленіе этихъ элементовъ и для звена $BO_1$.

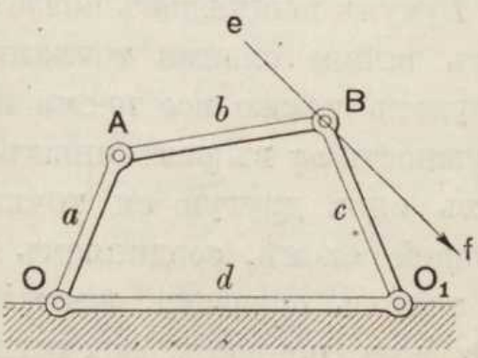
Этими замѣчаніями мы закончимъ разсмотрѣніе общихъ свойствъ шарнирнаго четыреугольника и перейдемъ къ изученію различныхъ модификацій его, могущихъ быть полученными какъ помощью замѣны вращательныхъ паръ поступательными, такъ и другими способами.

## § 26. Модификаціи шарнирнаго четыреугольника помощью замѣны одной вращательной пары поступательной.

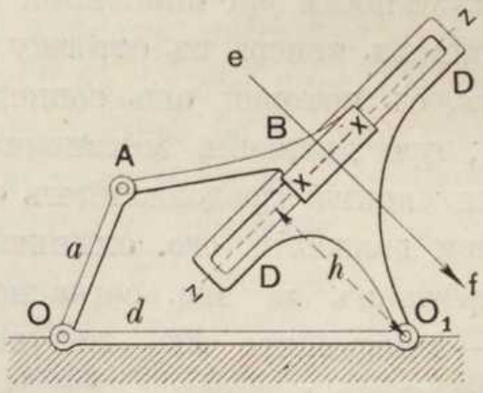
Шарнирный четыреугольникъ, представленный въ общемъ видѣ на фиг. 157, можно ставить на различныя его звенья. Такимъ путемъ мы получимъ четыре механизма, ничѣмъ особеннымъ, строго говоря, другъ отъ друга не отличающихся,—вся разница будетъ сводиться къ тому, что въ однихъ изъ нихъ, быть можетъ, окажутся возможными полныя круговыя движенія одного или двухъ звеньевъ, въ другихъ подобныя движенія будутъ невозможны,—и только. Сущность же механизма, сводящаяся къ осуществленію движенія нѣкотораго отрѣзка постоянной длины по нѣкоторымъ двумъ вполнѣ опредѣленнымъ *круговымъ дугамъ конечныхъ радіусовъ*, остается ненарушаемой, въ виду чего подобныя преобразованія особеннаго интереса, вообще, не имѣютъ. Гораздо болѣе важными въ практическомъ отношеніи и интересными въ теоретическомъ представляются тѣ измѣненія шарнирнаго четыреугольника, которыя получаются путемъ *замѣны вращательныхъ паръ поступательными*. Основанія и условія этой замѣны разобраны нами въ одномъ изъ предыдущихъ параграфовъ, почему останавливаться на нихъ мы теперь не будемъ; напомнимъ только, что втулка переходитъ въ направляющія, а шипъ—въ ползунъ. Замѣну эту произведемъ сначала для одной изъ имѣющихся здѣсь вращательныхъ паръ, а затѣмъ для двухъ; замѣны трехъ и четырехъ паръ производить не будемъ, ибо получаемые такимъ путемъ механизмы на практикѣ не употребляются никогда. Тамъ, гдѣ это будетъ цѣлесообразно, будемъ примѣнять пріемъ полученія новыхъ механизмовъ путемъ постановки каждаго основного на различныя его звенья. Такимъ путемъ мы получимъ возможность изучить кинематическія свойства четырехшарнирнаго механизма во всѣхъ его модификаціяхъ, находящихъ примѣненіе на практикѣ. Начнемъ съ замѣны одной пары.

Допустимъ, что у насъ имѣется обыкновенный четырехшарнирный механизмъ $OABO_1$ (фиг. 169). Такъ какъ онъ составленъ изъ четырехъ вращательныхъ паръ,—$O$, $A$, $B$ и $O_1$,—то, казалось бы, замѣна поочереди каждой изъ нихъ парой поступательной дастъ намъ въ результатѣ также четыре новыхъ механизма, другъ отъ друга вполнѣ отличныхъ. Нетрудно, однако усмотрѣть, что механизмовъ, различныхъ по самому существу своему, между ними окажется только д в а. Дѣйствительно, механизмъ съ замѣненной парой $O$ повторитъ собой механизмъ съ замѣненной парой $O_1$,—это будетъ какъ бы одинъ и тотъ же механизмъ, лишь повернутый во второмъ случаѣ вокругъ вертикальной оси на 180°; точно такъ же механизмъ съ замѣненной парой $A$ явится повтореніемъ механизма съ замѣненной парой $B$. Отсюда слѣдуетъ, что разсматриваніе всѣхъ четырехъ получающихся здѣсь новыхъ механизмовъ является излишнимъ,—для насъ вполнѣ достаточно разсмотрѣть только два, по существу своему совершенно отличные другъ отъ друга, а именно: 1) механизмъ съ замѣненной парой $B$ и 2) механизмъ съ замѣненной парой $O_1$. Разсмотримъ сначала первый изъ нихъ.

Предположимъ, что шипъ вращательной пары $B$ принадлежитъ звену $b$, а втулка—звену $c$. Остановивъ механизмъ въ какомъ-нибудь положеніи,—напримѣръ, въ изображенномъ на чертежѣ (фиг. 169),—производимъ замѣну, предполагая, что центръ вращательной пары $B$ удалился въ безконечность по направленію $ef$. Согласно общей формулѣ, данной нами выше, шипъ пары $B$ замѣняемъ ползуномъ, а втулку—направляющими, причемъ съ ползуномъ соединяемъ жестко все то, что было раньше жестко соединено съ шипомъ, а съ направляющими—все




Фиг. 169.

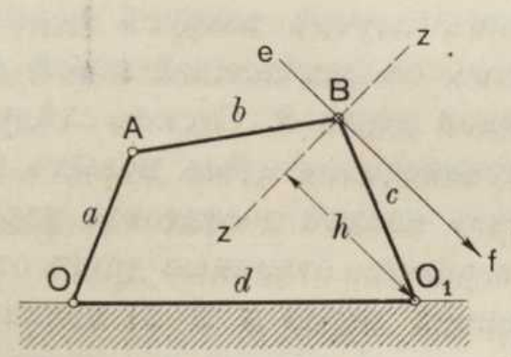



Фиг. 170.

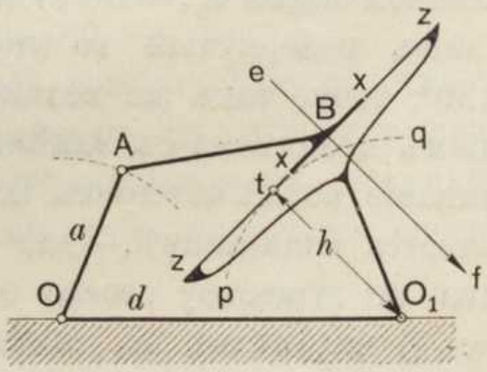
то, что раньше было наглухо соединено съ втулкой. Предположивъ, что прямая $zz$, перпендикулярная прямой $ef$ и дающая собою направленіе ползанія въ данный моментъ, проходитъ черезъ центръ пары $B$, и произведя указанную замѣну, получаемъ вмѣсто механизма $OABO_1$, изображеннаго на фиг. 169, новый механизмъ $OA(B, DD)O_1$ (фиг. 170), въ которомъ мѣсто вращательной пары $B$ замѣняетъ теперь поступательная пара $(B, DD)$; ползунъ $B$ ея теперь соединенъ наглухо съ тѣломъ звена $b$, а направляющія $(DD)$—съ тѣломъ звена $c$.

Кинематическая схема этого механизма можетъ быть получена

помощью слѣдующихъ очевидныхъ соображеній: замѣняя вращательную пару *B* поступательной (фиг. 171) и удаляя центръ ея въ безконечность по направленію *ef*, замѣняемъ шипъ, вдѣланный въ звено *b*, отрѣзкомъ *xx* прямой, перпендикулярной къ прямой *ef*, а втулку, принадлежащую звену *c*—прямой *zz*, совпадающей съ *xx* (фиг. 172). Теперь соединяемъ наглухо отрѣзокъ *xx* съ звеномъ *b*, а прямую *zz*—съ звеномъ *c*. Тогда окажется слѣдующее: прямая *zz*, будучи соединена наглухо съ звеномъ *c*, должна будетъ раздѣлять и повторять его дви-




Фиг. 171.



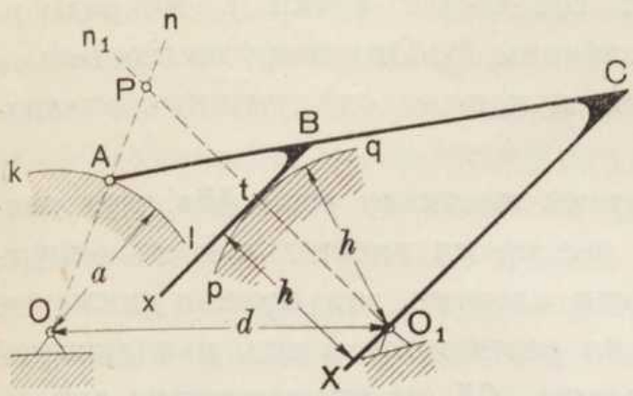

Фиг. 172.

женіе, т.-е. должна будетъ вращаться вокругъ того же центра $O_1$, около котораго вращалось раньше звено *c*. Очевидно, что, при этомъ своемъ вращеніи прямая *zz* будетъ все время оставаться на одномъ и томъ же разстояніи отъ этого центра $O_1$, равномъ $h$,—длинѣ перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ центра $O_1$. Такимъ образомъ, при движеніи полученнаго нами механизма, прямая *zz* будетъ все время касаться окружности *pq*, описанной изъ центра $O_1$ радусомъ $h$ (фиг. 172).

Перейдемъ теперь къ отрѣзку *xx*. Будучи вынужденъ ползать вдоль прямой *zz*, съ которой онъ совпадаетъ всѣми своими точками, этотъ отрѣзокъ, при движеніи механизма, будетъ также все время касаться собою или своимъ продолженіемъ окружности *pq* въ различныхъ, непрерывно, при движеніи его, смѣняющихъ одна другую ея точкахъ. Съ этимъ отрѣзкомъ *xx* мы, согласно общей схемѣ, соединяемъ наглухо звено *b*,—теперешнее *AB*,—получая, такимъ образомъ жесткій, неизмѣняющій своей величины, уголъ *ABx* или, попросту, жесткую, неизмѣняемую систему *ABx* (фиг. 173); нѣкоторая вполнѣ опредѣленная точка *A* этой системы, при движеніи этой послѣдней, скользитъ по окружности *kl* центра *O* и радіуса $OA = a$, а прямая *Bx*, принадлежащая этой же системѣ и также вполнѣ опредѣленная, все время касается окружности *pq* центра $O_1$ и радіуса $h$. Такимъ образомъ, движеніе звена *AB* нашего механизма представляетъ собою не что иное, какъ движеніе нѣкоторой плоской жесткой системы *ABx*, опредѣляемое движеніемъ принадлежащихъ этой системѣ и занимающихъ въ ней вполнѣ опредѣленное относительное положеніе точки *A* и прямой *Bx*.

Полюсъ *P* мгновеннаго вращенія системы *ABx* найти нетрудно, если мы примемъ во вниманіе, что точка *A* представляетъ собою огибаемую,

для которой огибающей служитъ окружность $kl$, а прямая $Bx$, какъ огибаемая, движется, скользя и катясь по своей огибающей,—окружности $pq$. Точкой касанія первой пары этихъ огибаемыхъ и огибающихъ служитъ сама точка $A$, точку же касанія второй пары назовемъ черезъ $t$ (фиг. 173). Тогда общими нормалями, проведенными въ точкахъ касанія, окажутся прямая $OAn$ и $O_1tn_1$; пересѣченіе ихъ и опредѣлитъ собою искомый полюсъ $P$.



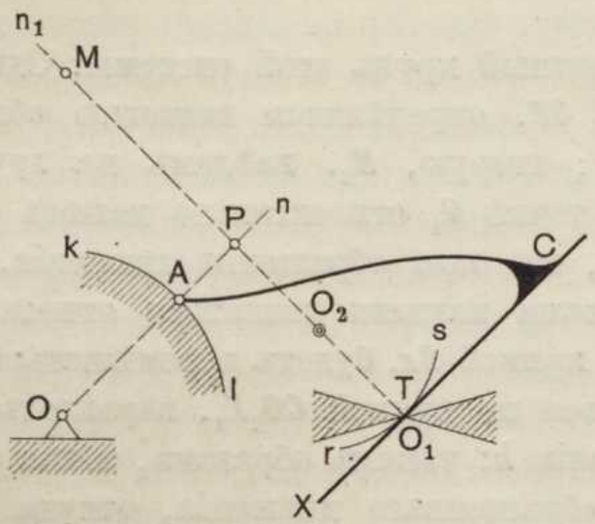

Фиг. 173.

Весьма просто построится и планъ скоростей системы $ABx$. Для этого соединимъ прямой точки $A$ и $t$, а изъ какой-либо точки $\pi$ плоскости проводимъ лучи $\pi\alpha \parallel OA$ и $\pi\tau \parallel O_1t$; затѣмъ изъ какой-либо точки $\tau$ луча $\pi\tau$ проводимъ лучъ $\tau\alpha \parallel tA$; пересѣченіе лучей $\tau\alpha$ и $\pi\alpha$ опредѣлитъ собою точку $\alpha$, соотвѣтствующую точкѣ $A$ нашей системы $ABx$. Проводя теперь черезъ точку $\tau$ прямую $\xi\tau\beta \parallel xtB$, а черезъ точку $\alpha$ прямую $\alpha\beta \parallel AB$ до пересѣченія въ точкѣ $\beta$ съ прямой $\xi\tau\beta$, получаемъ въ планѣ скоростей систему $\alpha\beta\xi$, соотвѣтствующую данной намъ системѣ $ABx$.

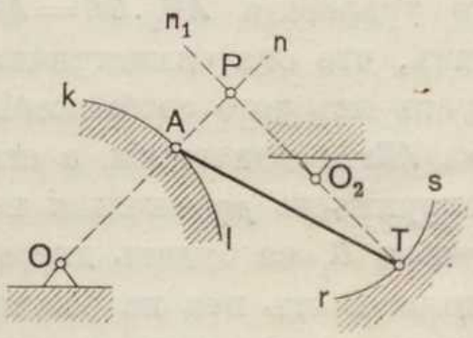
Нетрудно построить и поворотный кругъ этой системы. Одна изъ его точекъ $M$, лежащая на лучѣ $OP$, опредѣлится помощью обычнаго нашего уравненія $AM_1 . OA = AP^2$; вторую, $M_2$, найдемъ на лучѣ $O_1t$, замѣтивъ, что она симметрична точкѣ $O_1$ относительно полюса $P$. Это явствуетъ изъ того соображенія, что при обращеніи движенія, когда система $ABx$ остановится, а станина начнетъ двигаться относительно нея, окружность $pq$, скользя по прямой $Bx$, будетъ перемѣщаться такъ, что центръ $O_1$ ея будетъ двигаться по прямой $CO_1X_1$, параллельной $Bx$ и отстоящей отъ нея на разстояніи $h$; такимъ образомъ, точка $O_1$ принадлежитъ поворотному кругу обращеннаго движенія, откуда и слѣдуетъ, что точка $M_2$, симметричная точкѣ $O_1$ относительно полюса $P$, принадлежитъ поворотному кругу прямого движенія.—По тремъ точкамъ $P$, $M_1$ и $M_2$ можно построить искомый поворотный кругъ, помощью котораго по данному ускоренію точки $A$ опредѣлится положеніе центра ускореній разсматриваемой системы, затѣмъ ускореніе точки $t$, а за нимъ угловое ускореніе прямой $Bx$, что и дастъ намъ угловое ускореніе вращенія системы $zO_1$ (бывшаго звена $c$) вокругъ центра $O_1$. Вопросъ о движеніи системы $AEz$ будетъ, такимъ образомъ, разрѣшенъ вполнѣ, но, конечно, только для тѣхъ случаевъ, когда поворотный кругъ является вполнѣ доступнымъ и построеніе его оказывается возможнымъ. Въ противномъ случаѣ приходится отъ использованія его отказаться и для разрѣшенія вопроса объ ускореніяхъ системы прибѣгнуть къ помощи искусственнаго пріема построенія плановъ ускореній, разработаннаго въ предыдущихъ параграфахъ. Если бы мы по-

желали построить планъ ускореній для системы отрѣзка $At$, жестко связаннаго съ системы $ABx$ и составляющаго часть ея, то встрѣтились бы съ тѣмъ затрудненіемъ, что ни траекторія точки $t$, ни радіусъ кривизны ея въ точкѣ $t$ намъ неизвѣстны *). Это затрудненіе весьма просто и исчерпывающе разрѣшается помощью слѣдующихъ очевидныхъ соображеній:

Прямая $Bx$, принадлежащая системѣ жесткаго угла $ABx$, при движеніи его перемѣщается, оставаясь все время касательной къ окружности $pq$ радіуса $h$ и центра $O_1$; иными словоми, эта прямая движется, оставаясь во все время движенія на разстояніи $h$ отъ неподвижной точки $O_1$. Отсюда слѣдуетъ, что прямая $CX$, принадлежащая той же системѣ $ABx$ и, значитъ, жестко съ ней связанная, и отстоящая отъ нея на разстояніи $h$ въ сторону центра $O_1$, будетъ при движеніи системы $ABx$ все время проходить черезъ эту неподвижную точку $O_1$. Это обстоятельство позволяетъ намъ замѣнить схему, изображенную на фиг. 173, болѣе простой схемой, обходящейся безъ окружности $pq$ и изображенной здѣсь на фиг. 174: движеніе системы $ABx$ можетъ быть, какъ видимъ, задано движеніемъ прежней точки $A$ по окружности $kl$ и новой, вполнѣ опредѣленной, прямой $CX$, принадлежащей той же системѣ $ABx$; эта прямая $CX$ движется, все время проходя (проскальзывая) черезъ одну и ту же неподвижную точку $O_1$, такъ что огибаемой является здѣсь эта прямая $CX$, а огибающей—эта точка $O_1$. Полюсъ мгновеннаго вращенія будетъ лежать въ той же, прежней, точкѣ $P$, ибо общія нормали $On$ и $O_1n_1$ остаются прежними ($CX \parallel Bx$).




Фиг. 174.




Фиг. 175.

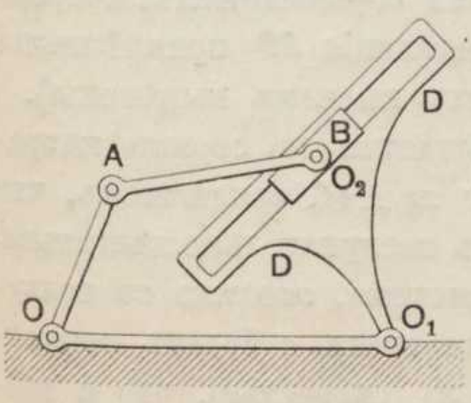
Предположимъ теперь, что въ данный моментъ прямая $CX$ касается своей огибающей,—точки $O_1$,—своей точкой $T$. Найдемъ радіусъ кри-

*) Во избѣжаніе недоразумѣній надо имѣть въ виду, что окружность $pq$ вовсе не представляетъ собою траекторіи точки $t$, какъ это иногда приходится слышать,—окружность $pq$ представляетъ собою лишь огибающую всѣхъ положеній прямой $Bx$, и только: каждая же изъ точекъ прямой $Bx$ имѣетъ свою собственную траекторію, могущую имѣть одну или нѣсколько точекъ касанія съ окружностью $pq$.

визны траекторіи этой точки $T$ для разсматриваемаго момента. Для этого замѣтимъ слѣдующее:

Если бы мы, обернувъ движеніе, сдѣлали неподвижной систему $ACX$, а станину стали бы двигать относительно нея, то точка $O_1$ станины стала бы двигаться по неподвижной теперь прямой $CX$ и, значитъ, принадлежала бы поворотному кругу этого обращеннаго движенія. Отсюда слѣдуетъ, что въ прямомъ движеніи системы $ACX$ относительно станины точка $M$, расположенная симметрично точкѣ $T$ относительно полюса $P$, принадлежитъ поворотному кругу прямого движенія. Въ силу этого можемъ написать, что $MP = PT$, такъ что $MT = 2PT$. Обозначимъ радіусъ кривизны траекторіи $T$ черезъ $\varrho$. Тогда можемъ написать, что $PT^2 = MT.\varrho = 2\varrho.PT$, откуда и находимъ, что $\varrho = {}^1/_2 PT = O_2T$, гдѣ $O_2$ есть середина отрѣзка $PT$. Итакъ, оказывается, что центръ кривизны $O_2$ траекторіи точки $T$ лежитъ въ точкѣ, дѣлящей отрѣзокъ $PT$ пополамъ. Отсюда слѣдуетъ, что движеніе системы $ACX$ *въ разсматриваемый* его *моментъ* опредѣляется движеніемъ точки $A$ ея по извѣстной уже намъ окружности $kl$ и движеніемъ точки $T$ по окружности $rs$, описанной изъ центра $O_2$ радіусомъ $O_2T = {}^1/_2 PT$. Такъ какъ точки $A$ и $T$ принадлежатъ одной и той же системѣ $ACX$, то для даннаго момента движеніе этой системы можетъ быть сведено къ движенію опредѣленнаго отрѣзка $AT$ по дугамъ упомянутыхъ окружностей (фиг. 175); примѣненіе разобраннаго нами пріема построенія плановъ ускореній теперь уже никакихъ трудностей не представитъ.—Само собою разумѣется, что для слѣдующаго момента отрѣзокъ $T$ замѣнится новымъ $AT_1$, затѣмъ, для дальнѣйшихъ моментовъ, явятся отрѣзки $AT_2$, $AT_3$, . . .; одновременно съ этимъ будетъ мѣняться какъ положеніе центра кривизны $O_2$, такъ и величина радіуса кривизны $\varrho$; несмотря на все это, движеніе для каждаго отдѣльнаго момента явится вполнѣ опредѣленнымъ и, говоря вообще, легко анализируемымъ, такъ что вопросъ объ изслѣдованіи движенія нашей системы $AB$ (фиг. 170) можно считать исчерпаннымъ окончательно.

Здѣсь будетъ умѣстно упомянуть о той, совершенно очевидной теперь, ошибкѣ, которую допускаютъ иногда при выполненіи замѣны вращательной пары парой поступательной, а именно: иногда приходится наблюдать, что къ ползуну $B$, *послѣ произведенной уже замѣны*, пристраиваютъ шипъ $O_2$, втулку же для него выполняютъ въ бывшемъ звенѣ $AB$ (фиг. 176). Легко видѣть, что, поступая такъ, мы совершенно произвольно добавляемъ къ имѣющимся въ данномъ механизмѣ четыремъ парамъ новую, пятую, переводя тѣмъ самымъ данную намъ четырехзвенную цѣпь въ пятизвенную. Подобныя ошибки, извращающія все заланіе, являются недопустимыми, и ихъ слѣдуетъ остерегаться.

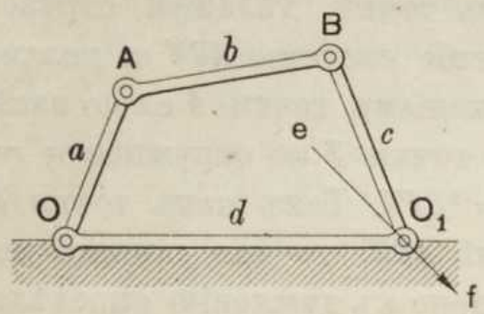



Фиг. 176.

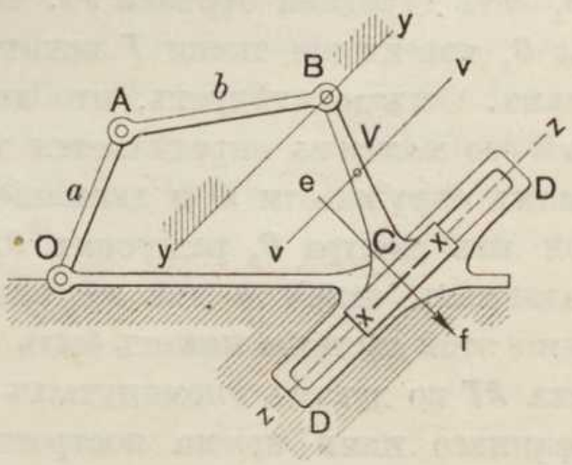
Въ виду того, что механизмъ, изображенный на фиг. 170, примѣ-

ненія на практикѣ почти не находитъ, дальнѣйшихъ модификацій его, получаемыхъ путемъ постановки его на другія звенья, разсматривать не станемъ и перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію слѣдующаго, очереднаго механизма, получаемаго изъ общаго четырехшарнирнаго механизма $OABO_1$ (фиг. 169) путемъ замѣны вращательной пары $O_1$ парой поступательной.

Предположимъ, такимъ образомъ, что у насъ имѣется обыкновенный шарнирный четыреугольникъ $OABO_1$, поставленный на звено $OO_1 = d$ (фиг. 177). Замѣнимъ вращательную его пару $O_1$ поступательной. Предположимъ, что шипъ пары $O_1$ принадлежитъ звену $c$, а втулка ея—звену $d$. Замѣтивъ это, выполняемъ замѣну: останавливаемъ механизмъ въ какомъ-нибудь положеніи $OABO_1$, затѣмъ, не мѣняя ни величины, ни положенія звена $c$, удаляемъ центръ шипа $O_1$ (фиг. 178)




Фиг. 177.




Фиг. 178.

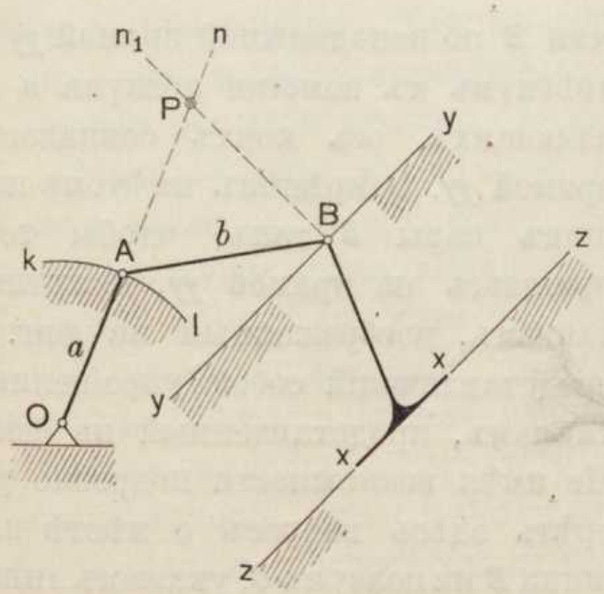
въ безконечность по какому-нибудь направленію $ef$ и замѣняемъ втулку пары $O_1$ направляющими, идущими перпендикулярно этому направленію, а шипъ—ползуномъ, скользящимъ по этимъ направляющимъ. Далѣе, согласно сдѣланнымъ раньше указаніямъ, соединяемъ наглухо съ ползуномъ все то, что раньше было соединено съ шипомъ (ползунъ представляетъ собою ничто иное, какъ часть прежняго шипа), а съ направляющими—все то, что раньше было соединено со втулкой. Поэтому ползунъ соединяемъ наглухо со звеномъ $c$, а направляющія, также наглухо, со звеномъ $d$. Получаемъ механизмъ, изображенный на фиг. 178. Здѣсь ползунъ $C$,—часть прежняго шипа звена $c$,—соединенъ, попрежнему, въ одно цѣлое съ звеномъ $c$, а направляющія $DD$ прикрѣплены наглухо къ звену $d$ (или, напримѣръ, попросту въ немъ вырѣзаны).

Замѣчая теперь, что ползунъ $C$ перемѣщается по своимъ направляющимъ $DD$ поступательно по направленію $zz \perp ef$, заключаемъ, что по тому же постоянному направленію $zz$ будетъ поступательно двигаться, вмѣстѣ съ ползуномъ, и все звено $c$, какъ система, *жестко* съ ползуномъ $C$ соединенная, такъ что каждая точка звена $c$ будетъ перемѣщаться по прямой, параллельной $zz$, съ тою же скоростью, что и ползунъ $C$. Такимъ образомъ, точка $V$ ползуна будетъ ползать по прямой $vv$, параллельной $zz$; центръ шипа пары $B$, вдѣланнаго наглухо въ звено $b$,—по прямой $yy \parallel zz$, и т. д., и можно сказать, вообще, что,

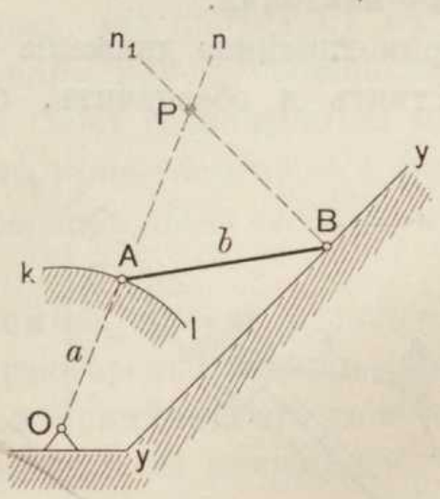
съ выполненіемъ указанной замѣны, звено $c$ теряетъ способность вращенія и сохраняетъ возможность одного лишь *поступательнаго движенія* по нѣкоторому вполнѣ опредѣленному и постоянному *направленію* $zz$. При вращеніи звена $a$ звено $c$ будетъ, слѣдовательно, двигаться поступательно, занимая послѣдовательно положенія $BC$, $B'C'$, $B''C''$ и др., представляющія собою одно и то же положеніе $BC$, лишь смѣщаемое параллельно самому себѣ по направленію $xx$. Такія особенности движенія звена $c$ позволяютъ значительно упростить въ внѣшней стороны полученный нами механизмъ (фиг. 178); это упрощеніе будетъ выполнено нами ниже, а теперь мы займемся разсмотрѣніемъ кинематической схемы этого механизма, могущей быть полученной такъ:

По условію, шипъ пары $O_1$ принадлежитъ звену $c$, а втулка—неподвижному звену $d$. Замѣняя шипъ ползуномъ, схематически изображаемымъ прямолинейнымъ отрѣзкомъ $xx$, а неподвижную втулку—неподвижными же направляющими, представляемыми неподвижной прямой $zz$, совпадающей съ отрѣзкомъ $xx$, и соединяя жестко отрѣзокъ $xx$ съ звеномъ $c$, получаемъ механизмъ, изображенный на фиг. 179 и представляющій собою схему механизма, изображенному на фиг. 178. Разберемъ этотъ схематическій механизмъ.

Прежде всего замѣчаемъ, что въ составъ этого механизма входитъ жесткая система ($B$, $xx$), движущаяся, какъ видимъ, *поступательно* по направленію $zz$, вполнѣ опредѣленному и *неизмѣнному*. Отсюда слѣдуетъ, что каждая точка этой системы перемѣщается по неподвижной прямой, проходящей черезъ какое-либо положеніе этой точки параллельно прямой $zz$, и, значитъ, траекторіей точки $B$ этой системы будетъ служить нѣкоторая вполнѣ опредѣленная прямая $yy$, параллельная прямой $zz$ и проведенная черезъ разсматривамое положеніе точки $B$.




Фиг. 179.




Фиг. 180.

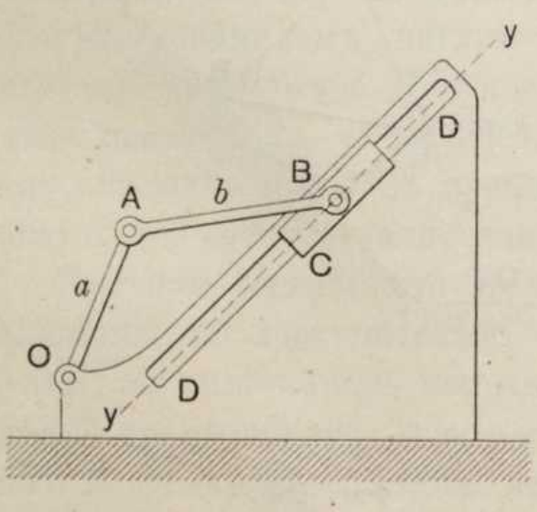
Замѣчая теперь, что та же точка $B$ принадлежитъ въ то же время и системѣ отрѣзка $AB$, неизмѣняемаго по своей величинѣ, и что точка $A$ этого же отрѣзка движется по вполнѣ опредѣленной окружности $kl$,

заключаемъ, что все движеніе полученнаго нами механизма (фиг. 178 и 179) сводится къ движенію нѣкотораго опредѣленнаго, постояннаго по своей длинѣ отрѣзка $AB$ по траекторіямъ его концовъ: окружности $kl$ центра $O$ и радіуса $a$ и неподвижной прямой $yy$ (фиг. 180). Огибаемыми являются здѣсь точки $A$ и $B$, а огибающими ихъ—окружность $kl$ (для точки $A$) и прямая $yy$ (для точки $B$), такъ что общими нормалями явятся прямыя $OAn$ и $Bn_1 \perp yy$; точка пересѣченія этихъ прямыхъ опредѣлитъ собою мѣсто полюса мгновеннаго вращенія $P$.

Наличность полюса вполнѣ разрѣшаетъ вопросъ о скоростяхъ системы $AB$; ускоренія же ея можно опредѣлять помощью поворотнаго круга, находимаго здѣсь, вообще говоря, очень просто. Дѣйствительно, первой точкой, завѣдомо на немъ лежащей, является полюсъ $P$; второй точкой является точка $B$, ибо она все время перемѣщается по неподвижной прямой $yy$. Недостающую третью,—нѣкоторую точку $M$,—найдемъ помощью обычнаго уравненія $AP^2 = AM.OA$.

Такимъ образомъ, вопросъ о скоростяхъ и ускореніяхъ системы могъ бы почитаться разрѣшеннымъ вполнѣ, если бы не существовало того затрудненія, что для цѣлаго ряда положеній отрѣзка $AB$ полюсъ $P$ выходитъ изъ предѣловъ чертежа. Въ виду этого скорости системы $AB$ обычно опредѣляются помощью плана скоростей, пристраиваемаго, напримѣръ, у точки $O$, а ускоренія—помощью плана ускореній, для построенія коего примѣняется искусственный пріемъ, подробно разработанный въ предыдущихъ параграфахъ. Ходъ построенія этого плана можно видѣть на фиг. 134 и 136,—механизмъ, изображенный на нихъ, тождественъ съ механизмомъ, схематически изображеннымъ на фиг. 180; вся разница сводится лишь къ тому, что прямолинейная траекторія одного изъ концовъ прямого отрѣзка тамъ была горизонтальна, а здѣсь у насъ—наклонна.

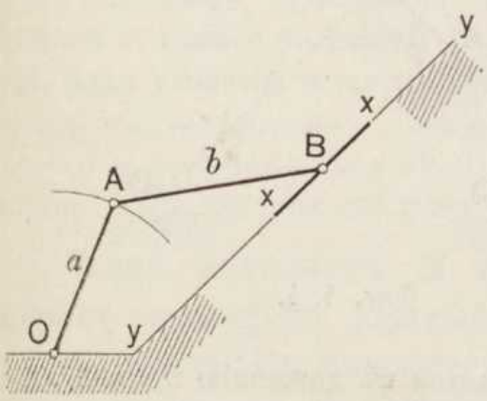
Прямолинейное движеніе точки $B$ по неподвижной прямой $yy$ можно осуществить и обезпечить, прибѣгнувъ къ помощи ползуна и направляющихъ, ось коихъ совпадаетъ съ прямой $yy$. Закрѣпивъ на этомъ ползунѣ шипъ пары $B$ такъ, чтобы точка $B$ пришлась на прямой $yy$, получимъ механизмъ, изображенный на фиг. 181 и представляющій собою упрощенный механизмъ, представленный на фиг. 178. Не имѣя возможности подробно разсмотрѣть здѣсь вопросъ о мѣстѣ посадки шипа $B$ на ползунъ $C$, укажемъ лишь, что, во избѣжаніе нежелательныхъ явленій, обусловливаемыхъ наличностью эксцентриситета, ось шипа $B$ должна совпадать съ одной изъ г л а в н ы х ъ осей центральнаго эллипсоида инерціи ползуна; всѣ три главныя оси обыкновенно служатъ осями симметріи тѣла ползуна.




Фиг. 181.

Схему механизма, изображеннаго на фигурѣ 181, получимъ, замѣняя ползунъ *C* прямолинейнымъ отрѣзкомъ *xx*, а направляющія—прямой *yy*, вдоль которой этотъ отрѣзокъ и будетъ затѣмъ ползать. Пусть точка *B* этого отрѣзка изображаетъ собою центръ шипа *B*, сидящаго на ползунѣ *C*. Тогда механизмъ (*OAB*, *xx*),—см. фиг. 182,—и представитъ собою схему механизма фиг. 181.

Здѣсь будетъ умѣстно обратить вниманіе на одно обстоятельство, въ значительной мѣрѣ могущее облегчить процессъ упрощенія и варьированія новыхъ механизмовъ, получаемыхъ путемъ замѣны паръ. Дѣло въ томъ, что механизмъ, изображенный на фиг. 181—182, можно представить себѣ полученнымъ изъ общаго механизма (фиг. 178—179) путемъ переноса ползуна *C* (*xx*) параллельно самому себѣ съ оси *zz* на ось *yy*, причемъ, какъ оказывается, на сущности механизма этотъ переносъ не отражается ничѣмъ,—звено *AB* послѣ такого переноса продолжаетъ двигаться точно такъ же, какъ оно двигалось до переноса.



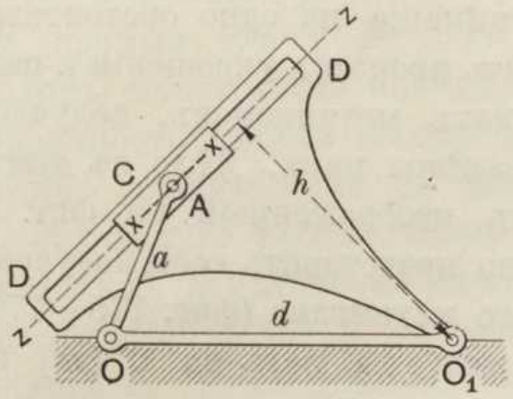
Фиг. 182.

Этотъ переносъ ползуна *C* къ точкѣ *B* (съ оси *zz* на ось *yy*) можно, однако, представить себѣ еще иначе, а именно,—его можно также разсматривать, какъ результатъ *сокращенія размѣровъ звена c* ($BO_1$) *до нуля*; можно сказать, что ползунъ *C* (*xx*) какъ бы вбираетъ въ себя звено *c*, поглощаетъ его, принимая, однако, на себя, вмѣстѣ съ тѣмъ, и всѣ другія его обязанности, а въ томъ числѣ и несеніе на себѣ шипа пары *B*. Сущность механизма отъ такого сокращенія, какъ видимъ, не страдаетъ совсѣмъ, а въ то же время механизмъ оказывается упрощеннымъ весьма замѣтно. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что, *при замѣнѣ вращательной пары парой поступательной, звено, несущее на себѣ ползунъ, можетъ быть сокращено до нуля, съ тѣмъ, однако, чтобы къ ползуну было присоединено все то, что, кромѣ него, было связано во-едино съ сокращаемымъ звеномъ*, къ которому этотъ ползунъ принадлежалъ.

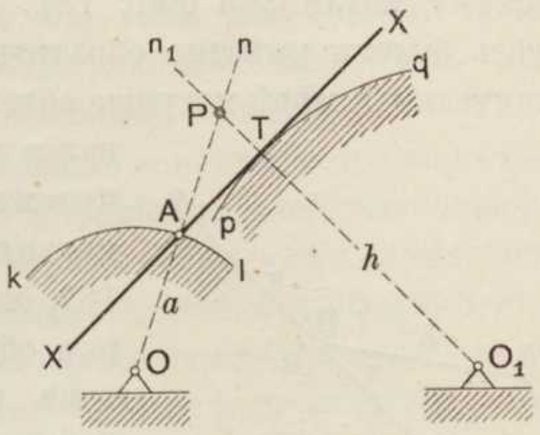
Нетрудно убѣдиться, хотя бы, напримѣръ, путемъ обращенія движенія, что пріемъ сокращенія до нуля размѣровъ звена, несущаго на себѣ ползунъ, является вполнѣ общимъ и примѣнимымъ во всѣхъ случаяхъ замѣны, независимо отъ того, движутся ли какимъ-либо движеніемъ направляющія или остаются неподвижными,—на сущность механизма, на законъ распредѣленія и измѣненія скоростей и ускореній различныхъ точекъ его и, вообще, на кинематическія и динамическія свойства механизма такое сокращеніе никакого вліянія и воздѣйствія не оказываетъ,—механизмъ измѣняетъ лишь свой внѣшній видъ, и только.

Примѣнимъ пріемъ сокращенія къ общему механизму, изображенному на фиг. 170. Здѣсь ползунъ *B* закрѣпленъ на звенѣ *AB*. Сокративъ это звено *AB*

до нуля, перенеся ползунъ, а вмѣстѣ съ нимъ и его направляющія, параллельно самому себѣ въ точку *A* и снабдивъ ползунъ шипомъ вращательной пары *A*, сидѣвшимъ до того въ звенѣ *AB*, получимъ механизмъ, изображенный здѣсь на фиг. 183. Замѣтивъ, что отрѣзокъ *xx*, изображающій этотъ ползунъ, теперь можетъ только вращаться вокругъ точки *A*, движущейся по окружности *kl*, при чемъ все время долженъ оставаться на постоянномъ разстояніи отъ точки $O_1$, равномъ $h$,

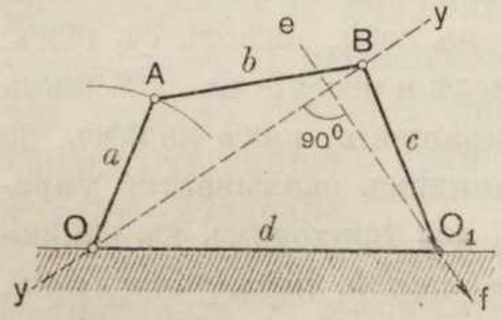



Фиг. 183.



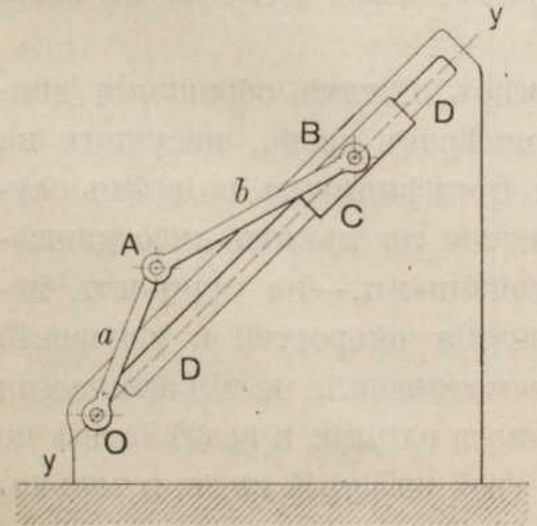

Фиг. 184.

заключаемъ, что движеніе нашего механизма сводится къ движенію прямой *XX*,—того же отрѣзка *xx*,—одной своей точкой *A* скользящей по окружности *kl* центра *0* и радіуса $a$, и въ то же время вынужденной все время касаться окружности *pq*, описанной изъ центра $O_1$ радіусомъ $h$, равнымъ разстоянію оси *XX* ползуна отъ центра $O_1$. Эта схема, изображенная на фиг. 184, можетъ быть получена и изъ общей схемы, представленной на фиг. 173, путемъ сокращенія звена *AB* до нуля. Тогда прямая *Bx* окажется перенесенной въ точку *A* той же жесткой системы, такъ что движеніе сведется къ той же схемѣ, изображенной на фиг. 188.




Фиг. 185.

Дальнѣйшему разсмотрѣнію мы подвергнемъ не общій механизмъ, изображенный на фиг. 180, и не упрощенный видъ его, представленный на фиг. 185, а частный видъ этого послѣдняго,—тотъ именно, когда ось *yy* направляющихъ проходитъ черезъ центръ *O*. Нетрудно усмотрѣть, что этотъ механизмъ получается изъ общаго механизма (фиг. 178) въ томъ случаѣ, когда направленіе *ef*, по которому центръ $O_1$ удаляется въ безконечность, перпендикулярно прямой *OB* (фиг. 185). Произведя замѣну вращательной пары $O_1$ парой поступательной и сокративъ звено $c$ до нуля, получимъ механизмъ, изображенный на фиг. 186. Звеньями этого механизма являются: звено $d$, несущее на себѣ шипъ вращательной пары *O* и направляющія *DD*, ось *yy* коихъ проходитъ черезъ центръ *O*, затѣмъ звено *OA* ($a$), звено *AB* ($b$), несущее на себѣ втулку вращательной пары *B*, шипъ




Фиг. 186.

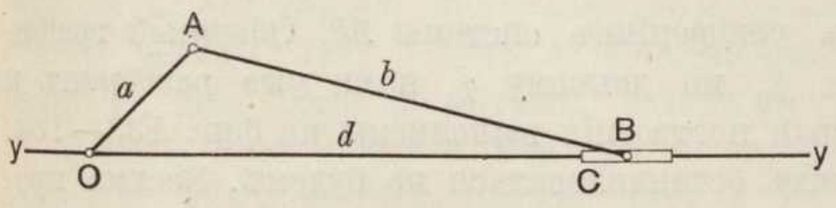
коей помѣщенъ на четвертомъ звенѣ,—ползунѣ *C*,—такъ, что ось его все время движется по прямой *yy*. Механизмъ, составленный такимъ образомъ, будемъ, ради краткости письма, называть просто *механизмомъ* **M**.

Здѣсь будетъ умѣстно, во избѣжаніе недоразумѣній, сдѣлать одно замѣчаніе относительно звена, несущаго на себѣ направляющія *DD* и шипъ пары *O* и названнаго ними звеномъ *d*. Дѣло въ томъ, что, съ замѣной вращательной пары поступательной, когда центръ $O_1$ вращательной пары удаляется въ безконечность, *звено d*, вынужденное охватывать весь шипъ $O_1$, разросшійся до безконечно-большихъ размѣровъ, *само становится безконечно-большимъ*, такъ что послѣ замѣны о звенѣ *d*, какъ о таковомъ, фактически говорить уже не приходится. Тѣмъ не менѣе, ради удобства и краткости обозначеній, мы условимся называть звеномъ *d* *ту часть дѣйствительнаго, безконечно-большого звена d, которая охватываетъ шипъ пары O и направляющія DD*. Истинной природы употребляемаго нами обозначенія упускать изъ виду не слѣдуетъ.

Ставя механизмъ **M** на различныя его звенья, получимъ четыре новыхъ механизма, каждый изъ коихъ мы и подвергнемъ детальному разсмотрѣнію. Въ очередномъ параграфѣ мы разсмотримъ тотъ случай, когда механизмъ **M** поставленъ на звено *d*.

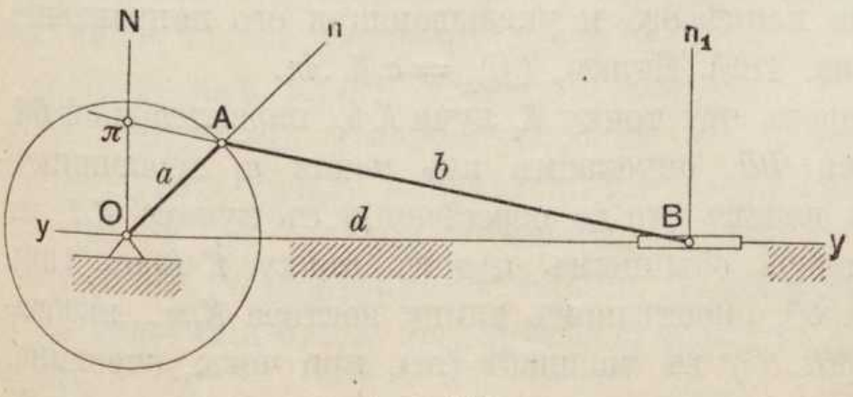
## § 27. Механизмъ M поставленъ на звено *d*,—механизмъ обыкновенной паровой машины.

Поставивъ механизмъ **M** на звено *d*, т.-е. сдѣлавъ неподвижными направлящія *DD*, получимъ механизмъ, имѣющій огромное распространеніе на практикѣ,—такъ называемый *механизмъ паровой машины*. Онъ изображенъ здѣсь на фиг. 187,—ось *yy* направляющихъ, ради удобства чертежа, расположена горизонтально. Звено *OA* носитъ названіе *кривошипа*, а звено *AB*—*шатуна*. Отношеніе длинъ ихъ, *OA* / *AB*, можетъ имѣть самыя разнообразныя значенія, но въ механизмахъ обыкновенныхъ паровыхъ машинъ оно берется равнымъ $^1/_4$—$^1/_6$.



Фиг. 187.

Кинематическая схема этого механизма изображена на фиг. 188. Все движеніе, какъ видимъ, сводится къ движенію постояннаго по своей длинѣ отрѣзка *AB* по траекторіямъ его концовъ, причемъ траекторіей точки *A* является окружность постояннаго центра *O*



Фиг. 188.

и радіуса $OA$, а точки $B$—прямая $yOy$. Полюсъ мгновеннаго вращенія системы $AB$ лежитъ въ точкѣ пересѣченія общихъ нормалей,—продолженнаго радіуса $OAn$ и прямой $Bn_1$, перпендикулярной къ $yy$. На практикѣ, однако, при опредѣленіи скоростей къ помощи этого полюса мгновеннаго вращенія обращаться обычно не приходится, ибо для цѣлаго ряда положеній шатуна $AB$ онъ удаляется изъ предѣловъ чертежа. Въ виду этого скорости точекъ шатуна $AB$ опредѣляются всегда помощью плана скоростей, при чемъ за полюсъ его обыкновенно принимается центръ $O$. Самъ планъ скоростей строится знакомымъ уже намъ путемъ: возставляя въ точкѣ $O$ перпендикуляръ $ON$ къ прямой $yOy$, находимъ точку $\pi$ пересѣченія его съ шатуномъ $AB$ или, какъ это имѣетъ мѣсто на чертежѣ, съ его продолженіемъ. Полученный такимъ путемъ $\triangle OA\pi$ и принимается за планъ скоростей системы $AB$, при чемъ точка $A$ его принимается соотвѣтствующей точкѣ $A$ системы $AB$, а точка $\pi$ его—точкѣ $B$. Если угловую скорость звена $OA$ въ разсматриваемый моментъ обозначимъ черезъ $\vartheta$, то линейная скорость точки $A$, $v_A$, выразится уравненіемъ: $v_A = \vartheta . OA$; линейная скорость точки $B$ выразится аналогично черезъ $v_B = \vartheta . O\pi$.

Что касается угловой скорости $\omega$ шатуна $AB$, т.-е. мгновенной угловой скорости вращенія его вокругъ полюса мгновеннаго вращенія, то, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться путемъ подсчета величины $v_A$, эта угловая скорость $\omega$ выразится въ функціи $\vartheta$ такъ:

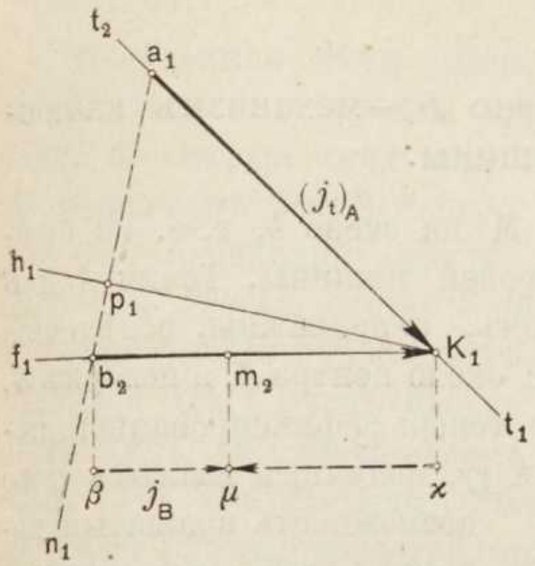
$$\omega = \vartheta \cdot \frac{AB}{\pi A}.$$

Перейдемъ теперь къ ускореніямъ системы $AB$. Обычный графическій пріемъ построенія $j_B$ по данному $j_A$ нами уже разобранъ и приведенъ въ § 20, и самыя построенія выполнены на фиг. 133—134; въ виду этого здѣсь на нихъ останавливаться не будемъ. Весьма простымъ является построеніе $j_B$ и тогда, когда точка $a$ на чертежѣ не умѣщается,—въ этомъ случаѣ поступаемъ такъ:

Проводимъ лучъ $t_1t_2$ перпендикулярно къ $OA$ и у какой-либо точки $a_1$ его откладываемъ вдоль него векторъ $a_1K_1$, изображающій въ въ какомъ-либо заранѣе выбранномъ масштабѣ $(m)$ тангенціальное ускореніе точки $A$, $(j_t)_A$, при чемъ отложеніе производимъ такъ, чтобы стрѣлка, поставленная на концѣ его и указывающая его направленіе, смотрѣла въ точку $K_1$ (фиг. 189). Итакъ, $(j_t)_A = a_1K_1 . m$.

Проводимъ теперь черезъ эту точку $K_1$ лучи $K_1h_1$, параллельный $BA$, и $K_1f_1$, параллельный оси $BO$, опускаемъ изъ точки $a_1$ перпендикуляръ $a_1n_1$ на лучъ $K_1h_1$ и ведемъ его до пересѣченія съ лучемъ $K_1f_1$ въ точкѣ $b_2$. Опредѣливъ теперь обычнымъ путемъ точку $K$ (фиг. 133), множимъ отрѣзокъ $KO$ на $\vartheta^2$, опредѣляемъ длину вектора $K_1m_2$, изображающаго эту величину $(KO . \vartheta^2)$ въ масшабѣ $(m)$, при чемъ, очевидно, $K_1m_2 = KO . \vartheta^2 / m$, и откладываемъ векторъ $K_1m_2$ на лучѣ $K_1f_1$ у точки $K_1$

такъ, чтобы стрѣлка направленія его смотрѣла въ точку $m_2$. Такимъ образомъ опредѣлится векторъ $b_2m_2$, дающій собою искомое ускореніе точки $B$, $j_B$, какъ по величинѣ ($j_B = b_2m_2 . m$), такъ и по направленію (отъ $b_2$ къ $m_2$). Все построеніе выходитъ очень простымъ потому, что полное ускореніе точки $B$, $j_B$, сводится здѣсь къ одному лишь тангенціальному $(j_t)_B$,—нормальное ускореніе $(j_n)_B$ ея равно здѣсь нулю; такое свойство движенія точки $B$ дало возможность ограничиться использованіемъ одного лишь треугольника тангенціальныхъ измѣненій.




Фиг. 189.

Далѣе, извѣстный интересъ можетъ представить обратная задача,—объ опредѣленіи $j_A$ по данному $j_B$. Построеніе, разрѣшающее этотъ вопросъ графически, является обратнымъ основному построенію, изображенному на фиг. 135, и сводится къ слѣдующему:

Пусть для разсматриваемаго момента намъ извѣстны какъ $j_B$, такъ и $\vartheta$. Такъ какъ $j_B = bO . \vartheta^2$,—см. фиг. 131, обозначеніями которой мы будемъ пользоваться въ дальнѣйшемъ,—то $bO = j_B / \vartheta^2$. Опредѣливъ такимъ образомъ величину этого отрѣзка $bO$, откладываемъ его по прямой $OB$ у точки $O$ такъ, чтобы стрѣлка, указывающая его направленіе, т.-е. направленіе ускоренія $j_B$, смотрѣла въ точку $O$, какъ это и показано на фиг. 131. Опредѣливъ теперь обычнымъ путемъ положеніе точки $K$, соединяемъ ее прямой $KA$ съ точкой $A$. Проводя теперь лучи: $Af \parallel OB$, $AH$, составляющій продолженіе прямой $BA$, и $At \perp OA$, ведемъ черезъ точку $b$ лучъ $bb_1 \parallel KA$ до пересѣченія съ лучемъ $Af$ въ точкѣ $b_1$, изъ которой, затѣмъ, ведемъ лучъ $b_1a \perp AH$ до пересѣченія съ лучемъ $Ot$ въ точкѣ $a$. Векторъ $aO$ опредѣлитъ собою полное ускореніе $j_A$ какъ по направленію (отъ $a$ къ $O$), такъ и по величинѣ ($j_A = aO . \vartheta^2$).

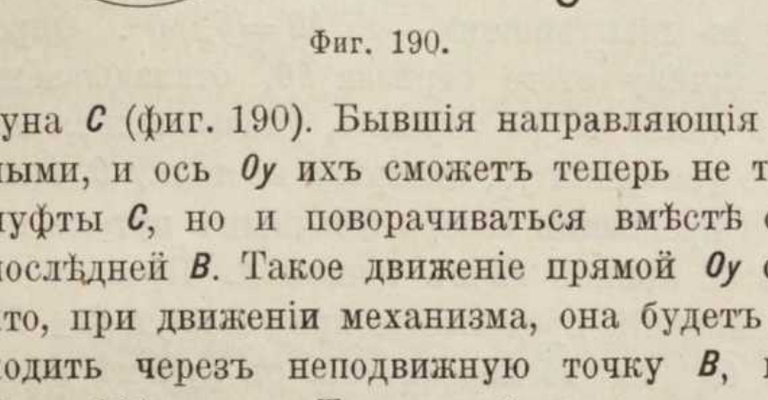
Въ тѣхъ случаяхъ, когда точка $a$ выходитъ изъ предѣловъ чертежа, можемъ свести все построеніе къ построенію треугольника, подобнаго треугольнику тангенціальныхъ измѣненій $Aab_1$, что дастъ намъ возможность получить тангенціальное ускореніе точки $A$, $(j_t)_A$. Подсчитавъ затѣмъ нормальное ускореніе ея и сложивъ ихъ геометрически, получимъ полное ускореніе точки $A$, $j_A$.

Построивъ планъ ускореній $Oab$, получаемъ сейчасъ же возможность опредѣлить угловое ускореніе $d\omega / dt$ шатуна $AB$, ибо, какъ извѣстно, уголъ между направленіями замыкающей $ab$ плана ускореній и отрѣзка $AB$, ей соотвѣтствующаго, равенъ $\mu$,—углу ускореній точекъ системы $AB$ съ радіусами-векторами, соединяющими эти точки съ центромъ ускореній $G$,—а $d\omega / dt = \omega^2 tg\,\mu$. Схема построенія приведена въ концѣ § 18.

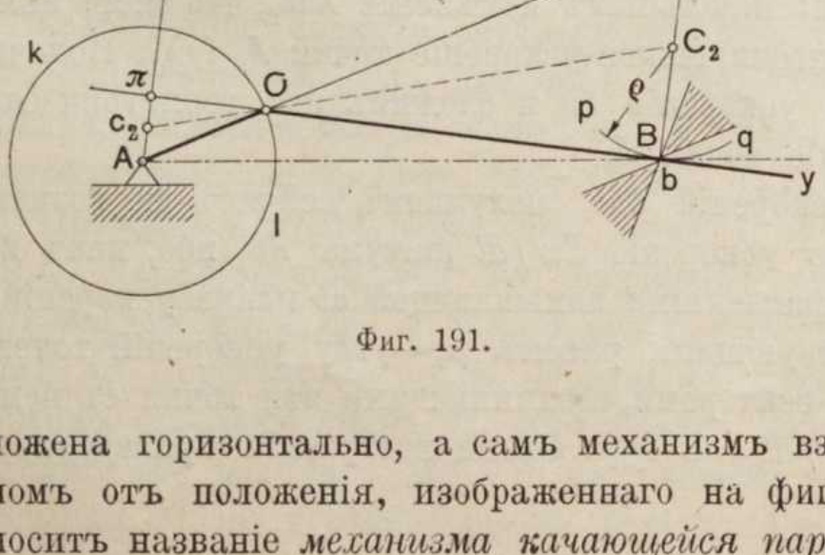
Вопросъ о движеніи шатуна *AB* можно считать, такимъ образомъ, исчерпаннымъ, и мы перейдемъ къ разсмотрѣнію слѣдующей, очередной модификаціи нашего механизма M.

## § 28. Механизмъ M поставленъ на звено *b*,—механизмъ качающейся паровой машины.

Поставимъ теперь нашъ механизмъ M на звено *b*, т.-е. на бывшій шатунъ механизма обыкновенной паровой машины. Точки *A* и *B* звена *b* станутъ теперь, такимъ образомъ, неподвижны, вслѣдствіе чего звено *a* будетъ вращаться здѣсь уже около центра *A*, а ползунъ *C*, одна точка котораго,—точка *B*,—окажется теперь зафиксированной, потеряетъ способность скольженія вдоль оси *yy*, получивъ взамѣнъ того возможность вращаться вокругъ этой неподвижной точки *B*. Такимъ образомъ, ползунъ переходитъ теперь въ муфту *C* съ осью вращенія въ *B*; осью этой муфты *C* явится, конечно, та же ось *xx* бывшаго ползуна *C* (фиг. 190). Бывшія направляющія *Oy* станутъ теперь подвижными, и ось *Oy* ихъ сможетъ теперь не только скользить вдоль оси *xx* муфты *C*, но и поворачиваться вмѣстѣ съ ней вокругъ центра этой послѣдней *B*. Такое движеніе прямой *Oy* сведется, очевидно, къ тому, что, при движеніи механизма, она будетъ вынуждена все время проходить черезъ неподвижную точку *B*, какъ это можно видѣть на фиг. 191 и др. Такимъ образомъ, все движеніе сводится здѣсь къ движенію системы прямой *Oy*, такому, что нѣкоторая вполнѣ опредѣленная точка *O* ея перемѣщается по окружности *kl* опредѣленныхъ центра *A* и радіуса *AO*, а сама эта прямая постоянно проходитъ (проскальзываетъ) черезъ также вполнѣ опредѣленную, неподвижную точку *B*. Схема эта представлена на фиг. 191, причемъ прямая *AB*, ради удобства чертежа, расположена горизонтально, а самъ механизмъ взятъ въ положеніи, отличномъ отъ положенія, изображеннаго на фиг. 190. Такой механизмъ носитъ названіе *механизма качающейся паровой машины*.




Фиг. 190.

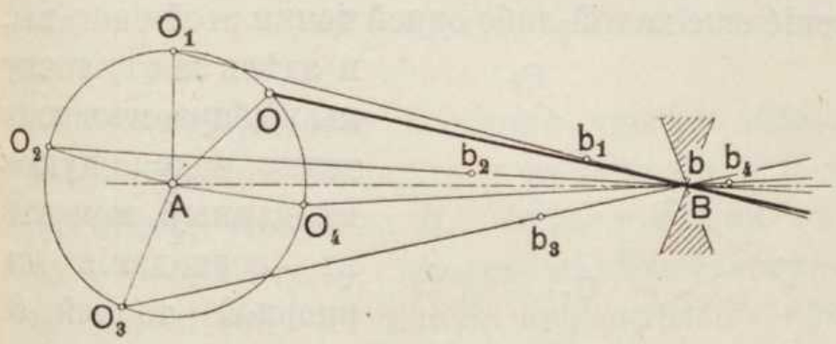



Фиг. 191.

Нетрудно усмотрѣть, что этотъ механизмъ представляетъ собою частный видъ механизма, изображеннаго на фиг. 172,—тотъ именно, когда звенья $b$ и $c$ сократились до нуля и когда, согласно схемѣ фиг. 174, точка $A$ системы $ACX$, движущаяся по окружности $kl$, легла на самое прямую $CX$.

Полученная нами схема указываетъ, что огибаемыми являются здѣсь точка $O$ и прямая $Oy$, а огибающими ихъ — окружность $kl$ и точка $B$. Отсюда слѣдуетъ, что полюсъ мгновеннаго вращенія системы $Oy$ лежитъ въ точкѣ $P$ пересѣченія продолженнаго радіуса $AOn$ и прямой $Bn_1$, перпендикулярной къ $Oy$. Обычно, однако, при опредѣленіи скоростей точекъ системы $Oy$ къ помощи полюса $P$ не обращаются и это опредѣленіе выполняютъ при посредствѣ плана скоростей, который строится здѣсь очень просто: принявъ за его полюсъ точку $A$, проводимъ лучъ $AN \perp Oy$ и ведемъ его до пересѣченія съ $Oy$ въ точкѣ $\pi$ (фиг. 191). Треугольникъ $AO\pi$, такъ полученный, и представитъ собою искомый планъ скоростей, причемъ точка $O$ его явится соотвѣтствующей для точки $O$ системы $Oy$, а точка $\pi$—для той точки $b$ системы $Oy$, которая въ данный моментъ пришла въ совпаденіе съ огибающей точкой $B$.

Въ слѣдующій моментъ точка $b$ займетъ положеніе, лежащее внѣ точки $B$; такъ, напримѣръ, въ тотъ моментъ, когда точка $O$ придетъ въ положеніе $O_1$ (фиг. 192), точка $b$ будетъ занимать положеніе $b_1$, гдѣ $O_1b_1 = Ob$; въ моментъ ($O_2$) точка $b$ займетъ положеніе $b_2$, и т. д. Нетрудно убѣдиться путемъ непосредственнаго построенія, что траекторія каждой изъ точекъ прямой $Oy$ представляетъ собою замкнутую кривую, расположенную симметрично относительно оси $AB$, при чемъ для точекъ участка прямой $Oy$, ограниченнаго точками, отстоящими отъ $O$ на $(AB - BO)$ и $(AB + BO)$, траекторіи ихъ будутъ имѣть форму восьмерки и всѣ будутъ проходить черезъ точку $B$ дважды; о видѣ и теченіи ихъ можно судить по фиг. 78 и 88 (стр. 100).

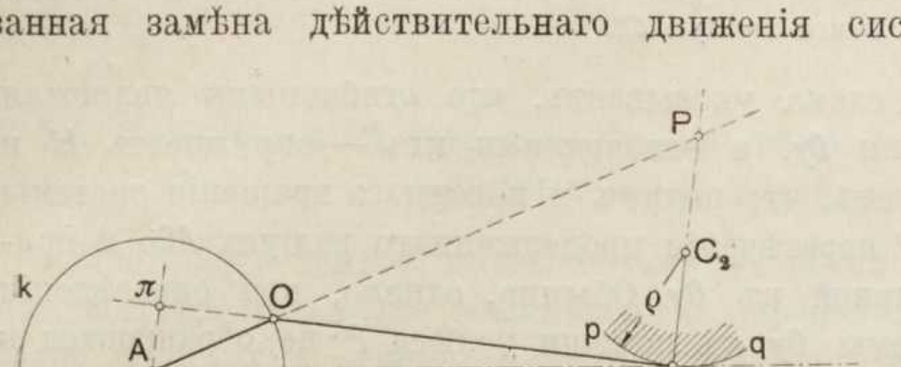


Фиг. 192.

Пусть полюсъ мгновеннаго вращенія системы $Oy$ лежитъ въ данный моментъ въ точкѣ $P$ (фиг. 191). Тогда, какъ это извѣстно изъ предыдущаго, радіусъ кривизны $\rho$ траекторіи точки $b$ на томъ участкѣ этой траекторіи, который совпадаетъ съ точкой $B$, будетъ равенъ $^1/_2\ PB$, такъ что, обозначивъ черезъ $C_2$ центръ кривизны этой траекторіи въ указанномъ мѣстѣ ея, получимъ, что $\rho = C_2B = {}^1/_2 PB$. Если точка $P$ лежитъ внѣ предѣловъ чертежа, то величину радіуса $\rho$ можно подсчитать по формулѣ $\rho = {}^1/_2 A\pi \cdot OB \,/\, O\pi$.

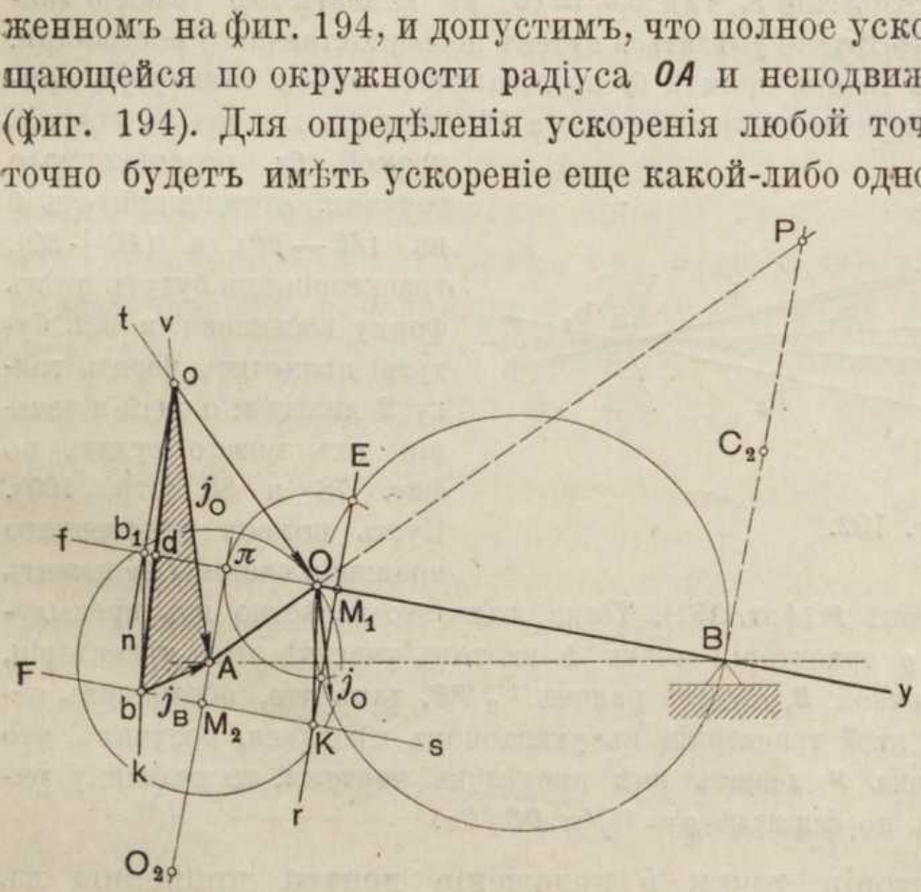
Пусть для траекторіи точки $b$ положеніе центра кривизны въ точкѣ $B$ этой траекторіи намъ извѣстно,—пусть этимъ центромъ служитъ точка $C_2$ (фиг. 191). Въ такомъ случаѣ движеніе системы $Oy$ въ данный моментъ можно представить себѣ еще, какъ движеніе нѣкотораго отрѣзка $Ob$, для этого момента вполнѣ опредѣленнаго, точка $O$ коего движется по окружности $kl$, а точка $b$ — по круговой дугѣ $pq$ центра $C_2$ и радіуса $C_2b = {}^1/_2\ PB$ (фиг. 193). Очевидно, что какъ вели-

чина отрѣзка *Ob*, такъ и положеніе центра $C_2$ и величина радіуса $\rho$ при движеніи системы *Oy* отъ момента къ моменту мѣняются, и указанная замѣна дѣйствительнаго движенія системы *Oy* движеніемъ отрѣзка *Ob* имѣетъ силу лишь для даннаго момента; тѣмъ не менѣе, при опредѣленіи ускореній точекъ системы *Oy* замѣна эта примѣняется всегда, ибо она позволяетъ намъ весьма удобно примѣнять здѣсь извѣстные намъ искусственные пріемы этого опредѣленія. Перейдемъ теперь къ болѣе детальному разсмотрѣнію обстоятельствъ движенія какъ звена *Oy* нашего механизма, такъ и муфты *C*, и, прежде всего, разсмотримъ вопросъ о построеніи ускореній точекъ системы *Oy*.




Фиг. 193.

Предположимъ, что мы застали нашъ механизмъ въ положеніи, изображенномъ на фиг. 194, и допустимъ, что полное ускореніе точки *O*, перемѣщающейся по окружности радіуса *OA* и неподвижнаго центра *A*, есть $j_O$ (фиг. 194). Для опредѣленія ускоренія любой точки системы *Oy* достаточно будетъ имѣть ускореніе еще какой-либо одной точки этой системы, и здѣсь за эту точку мы выбираемъ всегда точку, находящуюся въ данный моментъ въ совпаденіи съ опорной точкой *B*. Выборъ этотъ оправдывается тѣмъ соображеніемъ, что радіусъ кривизны траекторіи указанной точки въ точкѣ *B* этой траекторіи намъ извѣстенъ,—онъ равенъ $BC_2$, т.-е. $^1/_2\ BP$, гдѣ *P* есть полюсъ мгновеннаго вращенія системы *Oy*,—въ виду чего движеніе системы *Oy* сводится для даннаго момента къ движенію опредѣленнаго отрѣзка *OB* по траекторіямъ его концовъ,—окружностямъ центровъ *A* и $C_2$. Точку системы *Oy*, пришедшую въ данный моментъ въ совпаденіе съ точкой *B*, будемъ условно, ради сокращенія письма, называть также точкой *B*,




Фиг. 194.

а ускореніе ея будемъ обозначать черезъ $j_B$. Опредѣлимъ теперь величину этого ускоренія $j_B$, пользуясь извѣстнымъ намъ графическимъ методомъ.

Черезъ центръ $A$ проводимъ лучъ $\pi AO_2$, параллельный $BP$, т.-е. перпендикулярный къ $Oy$, и откладываемъ на немъ отъ точки $A$ въ сторону, противоположную той, по какую относительно прямой $Oy$ лежитъ центръ $C_2$, т.-е. полюсъ $P$, отрѣзокъ $AO_2$, равный радіусу кривизны $BC_2$. Если полюсъ $P$ выходитъ изъ предѣловъ чертежа, то величину $BC_2$ можно подсчитать, пользуясь соотношеніемъ, приведеннымъ уже выше, а именно: $\varrho = BC_2 = {}^1/_2\, A\pi \,.\, OB \,/\, O\pi$. — Продолживъ теперь прямую $BO$ до пересѣченія съ лучемъ $AO_2$ въ точкѣ $\pi$, находимъ теперь на лучахъ $\pi B$ и $\pi O_2$ точки $M_1$ и $M_2$. Положеніе первой изъ нихъ,— точки $M_1$, — опредѣляется обычнымъ путемъ: мы описываемъ на $OB$, какъ на діаметрѣ, окружность и засѣкаемъ на ней радіусомъ $O\pi$ изъ центра $O$ двѣ точки; прямая $Er$, соединяющая ихъ, пересѣчетъ прямую $Oy$ въ точкѣ $M_1$. Надо, однако, замѣтить, что точка $M_1$, въ сущности, намъ совершенно не нужна; зато весьма важной является прямая $Er$, ибо на ней лежитъ играющая столь важную роль въ нашемъ построеніи точка $K$. Въ виду этого точки $M_1$ можно, вообще говоря, и не отмѣчать совсѣмъ, — достаточно провести одну лишь эту прямую $Er$.

Положеніе точки $M_2$ опредѣляется изъ условія $A\pi^2 = AO_2 \,.\, AM_2$, откуда и находимъ, что $AM_2 = A\pi^2 \,/\, AO_2$. Подставляя вмѣсто $AO_2$ его выраженіе, полученное выше, находимъ, что

$$AM_2 = A\pi^2 : ({}^1/_2\, A\pi \,.\, OB \,/\, O\pi) = 2A\pi \,.\, O\pi \,/\, OB.$$

Это выраженіе особенно удобно тѣмъ, что избавляетъ насъ отъ необходимости обращаться къ помощи вспомогательнаго центра $O_2$. Надо замѣтить, что точка $M_2$, какъ лежащая съ центромъ $O_2$ по одну и ту же сторону отъ $A$, лежитъ, слѣдовательно, относительно $A$ въ сторону, обратную той, по какую относительно прямой $Oy$ лежитъ полюсъ $P$. Такъ какъ отрѣзки $A\pi$ и $O\pi$, обычно, во много разъ меньше $OB$, то точка $M_2$ лежитъ всегда в б л и з и центра $A$.

Проводимъ теперь черезъ точку $M_2$ лучъ $FM_2s$, перпендикулярный къ $\pi M_2 O_2$. Такъ какъ прямая $\pi O_2$ перпендикулярна къ $yO$, то этотъ лучъ $FM_2s$ будетъ параллеленъ $Oy$.—Пересѣченіе лучей $Fs$ и $Er$ дастъ намъ точку $K$, при чемъ, очевидно, фигура $\pi M_1 K M_2$ представитъ собою прямоугольникъ со сторонами $\pi M_1$ и $\pi M_2$. — Соединяемъ теперь точки $O$ и $K$ прямой $OK$.

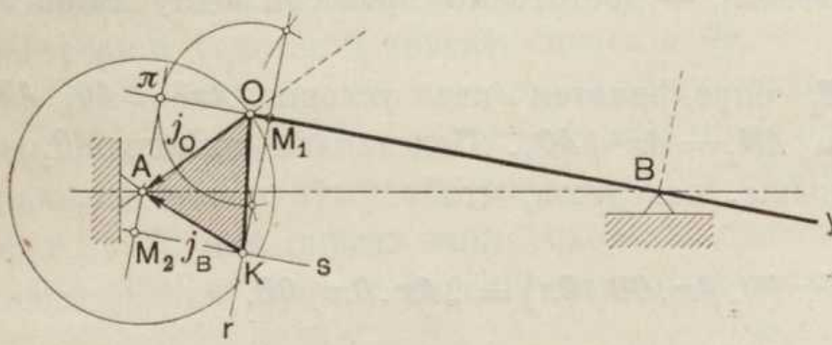
Лучъ $Of$, проводимый параллельно лучу $sF$, окажется, очевидно, продолженіемъ прямой $yO$, въ силу чего и сольется съ лучемъ $OH$, также представляющимъ собою, согласно общей схемѣ, продолженіе той же прямой $yO$.

Проводимъ теперь черезъ точку $O$ лучъ $Ot$, перпендикулярный къ радіусу $OA$, а черезъ центръ $A$—лучъ $Av$, параллельный $Oj_O$. Пересѣче-

ніе этихъ лучей даетъ точку *o*, опредѣляющую векторъ *oA*, изображающій собою полное ускореніе $j_O$ точки *O* въ томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$, въ какомъ нормальное ускореніе ея, $(j_n)_A$, изображается векторомъ *OA*, а тангенціальное, $(j_t)_A$,—векторомъ *oO*.

Опускаемъ теперь изъ точки *o* перпендикуляръ *on* на прямую *yOf*. Въ виду того, что *Or* здѣсь сливается съ *OH*, пересѣченіе лучей *on* и *Of* дастъ намъ точку $b_1$. Проводя теперь изъ $b_1$ лучъ $b_1k \parallel OK$, находимъ въ пересѣченіи его съ лучемъ *Fs* точку *b*, чѣмъ все построеніе и заканчивается, ибо векторъ *bA* и представитъ собою въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ искомое полное ускореніе $j_B$ точки *B*. Треугольникъ *Aob* можетъ быть принятъ за планъ ускореній системы *OBy*, въ виду чего заключаемъ, что уголъ между соотвѣтствующими другъ другу направленіями *ob* и *OB*, т.-е. уголъ *odt* или равный ему уголъ *bdO*, гдѣ черезъ *d* обозначена точка пересѣченія лучей *yOf* и *obk*, и есть нашъ уголъ $\mu$. Это замѣчаніе пригодится намъ въ дальнѣйшемъ, при опредѣленіи углового ускоренія системы *Oy* и муфты *C*.

Въ томъ случаѣ, когда угловая скорость $\vartheta$ радіуса *AO* есть величина постоянная, т.-е. когда этотъ радіусъ вращается равномѣрно, построеніе значительно упрощается, принимая видъ, изображенный на фиг. 195. Полное ускореніе точки *O* сведется здѣсь къ нормальному ускоренію $(j_n)_O$ и въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ изобразится векторомъ *OA*. Соотвѣтствующее этому случаю полное ускореніе точки *B* изобразится въ томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$ векторомъ *KA*, такъ что планъ ускореній представится теперь треугольникомъ *AOK*. Ради большей наглядности чертежа, треугольники плановъ ускореній какъ въ этомъ случаѣ, такъ и въ предыдущемъ, заштрихованы. Уголъ между соотвѣтствующими направленіями *OK* и *OB* опредѣлитъ собою величину угла $\mu$.

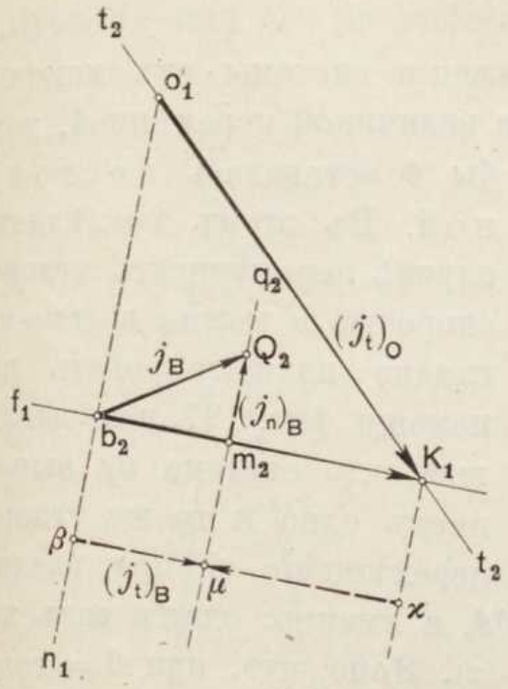



Фиг. 195.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда точка *o* выходитъ изъ предѣловъ чертежа, для полученія $j_B$ можно прибѣгнуть къ другому построенію, производному отъ основного, изображеннаго на фиг. 194, и приведенному здѣсь на фиг. 196. Построеніе это состоитъ въ слѣдующемъ:

Проводимъ лучъ $t_2t_2$ параллельно *Ot* и откладываемъ на немъ векторъ $o_1K_1$, изображающій въ какомъ-либо произвольномъ масштабѣ, заранѣе выбранномъ соотвѣтственно обстоятельствамъ дѣла, тангенціальное ускореніе точки *O*, $(j_t)_O$. Точки $o_1$ и $K_1$, этотъ векторъ ограничивающія, поставимъ на его концахъ такъ, чтобы стрѣлка, указывающая направленіе этого вектора, смотрѣла въ точку $K_1$. Проводимъ теперь черезъ $K_1$ лучъ $K_1f_1$, параллельный прямой *Oy*, а черезъ точку $o_1$—лучъ $o_1n_1$, ему перпендикулярный. Тогда точка пересѣченія

ихъ $b_2$ опредѣлитъ собою векторъ $b_2K_1$, направленный отъ $b_2$ къ $K_1$ и дающій собою въ масштабѣ чертежа измѣненіе тангенціальнаго ускоренія точки $B$, имѣющее мѣсто при сообщеніи точкѣ $O$ тангенціальнаго ускоренія $o_1K_1$. Опредѣливъ теперь непосредственнымъ построеніемъ векторъ $KM_2$ (фиг. 195) и помноживъ его на $\vartheta^2$, опредѣляемъ векторъ $K_1m_2$, изображающій это ускореніе ($KM_2 . \vartheta^2$) въ масштабѣ фиг. 196. Откладываемъ теперь этотъ векторъ $K_1m_2$ при точкѣ $K_1$ такъ, чтобы направленіе его было параллельно направленію $KM_2$ (фиг. 196). Такимъ образомъ получимъ векторъ $b_2m_2$ (или, что то же, $\beta\mu$), изображающій въ принятомъ масштабѣ тангенціальное ускореніе точки $B$, т.-е. $(j_t)_B$. Отложивъ, наконецъ, при точкѣ $m_2$ векторъ $m_2Q_2$, изображающій нормальное ускореніе точки $B$, равное $v_B^2 / \varrho = v_B^2 / BC_2$ и направленное отъ $B$ къ $C_2$, какъ къ центру кривизны, и сложивъ геометрически эти вектора $b_2m_2$ и $m_2Q_2$, получимъ векторъ $b_2Q_2$, изображающій искомое полное ускореніе $B$, $j_B$. По данному $j_O$ и найденному $j_B$ можно построить планъ ускореній, и задача будетъ, такимъ образомъ, разрѣшена вполнѣ.—Столь же просто разрѣшается здѣсь и обратный вопросъ о построеніи $j_O$ по данному $j_B$; останавливаться на этомъ вопросѣ мы не будемъ, ибо онъ рѣшается аналогично тому, какъ это сдѣлано выше, въ случаѣ обыкновенной паровой машины.



Фиг. 196.

Перейдемъ, наконецъ, къ вопросу объ *угловыхъ скоростяхъ и ускореніяхъ* муфты $C$. Такъ какъ ось муфты раздѣляетъ вращательное движеніе прямой $Oy$, то угловая скорость муфты представитъ собою не что иное, какъ угловую скорость системы $Oy$, т.-е. угловую скорость вращенія этой послѣдней вокругъ полюса мгновеннаго вращенія $P$. Обозначимъ эту мгновенную угловую скорость черезъ $\omega$ и выяснимъ зависимость ея отъ угловой скорости вращенія радіуса $OA$ вокругъ центра $A$, обозначенной нами черезъ $\vartheta$. Связь между $\omega$ и $\vartheta$ можно установить помощью выраженій линейной скорости точки $O$, ибо

$$v_O = \vartheta . OA = \omega . OP,$$

откуда и находимъ, что

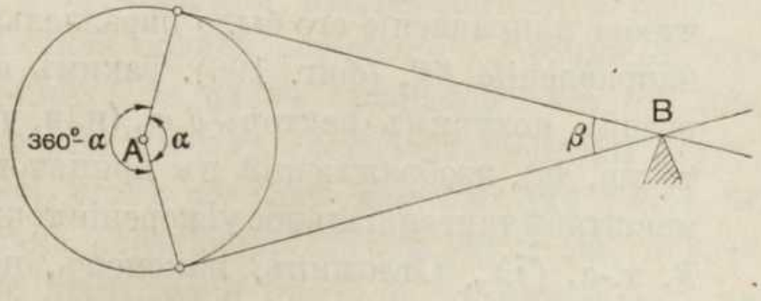
$$\omega = \vartheta . OA / OP.$$

Такъ какъ полюсъ $P$ часто выходитъ изъ предѣловъ чертежа, то неудобное въ виду этого отношеніе $OA / OP$ мы замѣняемъ отноше-

ніемъ $O\pi / OB$, равнымъ ему и всегда удобно подсчитываемымъ. Такимъ образомъ, окончательно находимъ, что

$$\omega = \vartheta . O\pi / OB.$$

Такъ какъ отношеніе $O\pi / OB$ при движеніи системы отъ момента къ моменту мѣняется, то $\omega$ будетъ всегда величиной перемѣнной, хотя бы $\vartheta$ оставалась постоянной. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ перемѣнность угловой скорости $\omega$ можно весьма наглядно иллюстрировать при помощи фиг. 197, показывающей, что система $Oy$ выполняетъ одно и то же угловое перемѣщеніе $\beta$ при различныхъ угловыхъ перемѣщеніяхъ радіуса $OA$, а именно: одинъ разъ при обходѣ угла $\alpha$, а другой — угла $(360^0 - \alpha)$. Ясно, что, при $\vartheta = const$, система $Oy$ будетъ имѣть бо́льшую (въ среднемъ) угловую скорость при обходѣ угла $\alpha$, чѣмъ угла $(360^0 - \alpha)$; дѣйствительно, здѣсь всегда $\alpha < 180^0$, вслѣдствіе чего всегда $\alpha < 360^0 - \alpha$.



Фиг. 197.

Вопросъ объ угловомъ ускореніи $d\omega / dt$ муфты $C$, т.-е. системы $Oy$, разрѣшается обычнымъ путемъ, помощью плановъ ускореній, дающихъ возможность получить уголъ $\mu$. Угловое ускореніе это опредѣляется или помощью формулы $d\omega/dt = \omega^2 tg\,\mu$ или помощью центра ускореній $G$. Подробности опредѣленія приведены выше, въ § 18.

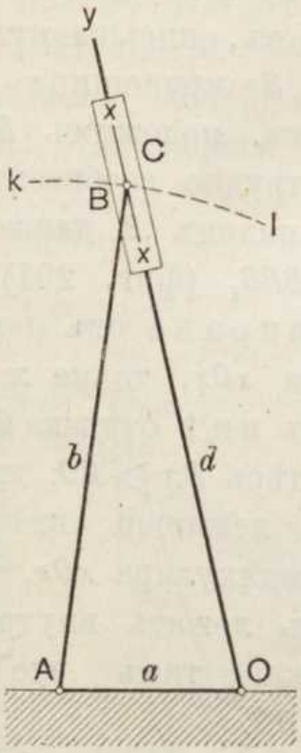
Вопросъ о движеніи механизма качающейся паровой машины можно считать, такимъ образомъ, исчерпаннымъ, и мы перейдемъ теперь къ разбору очередной модификаціи нашего основного механизма M.

## § 29. Механизмъ M поставленъ на звено $a$,—механизмъ Витворта.

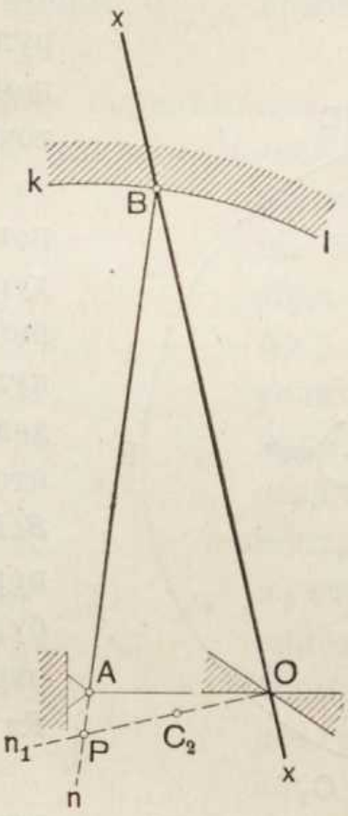
Поставимъ теперь нашъ механизмъ M на звено $OA$, т.-е. на бывшій кривошипъ $a$. Точки $A$ и $O$ его, сдѣлавшись, такимъ образомъ, неподвижными, будутъ служить теперь центрами вращенія системъ $AB$ и $Oy$. Муфта $C$ будетъ имѣть теперь двоякое движеніе, а именно: вращательное вокругъ центра $O$ вмѣстѣ съ прямой $Oy$, ибо ось $xx$ муфты вынуждена раздѣлять вращательное движеніе прямой $Oy$, и поступательное вдоль этой же прямой $Oy$, при чемъ точка $B$ прямой $xx$,—ось шипа, втулка коего принадлежитъ звену $b$,—будетъ, очевидно, перемѣщаться по окружности, описанной изъ центра $A$ радіусомъ $AB = b$ (фиг. 198). Нетрудно усмотрѣть, что такое движеніе муфты $C$ можно свести къ движенію оси $xx$ ея, такому, что одна точка этой прямой $xx$,—точка $B$,—занимающая на этой прямой вполнѣ опредѣленное положеніе, перемѣщается по окружности $kl$ центра $A$ и радіуса

$AB = b$, а самая эта прямая $xx$ все время вынуждена проходить черезъ неподвижную точку $O$ (фиг. 199).

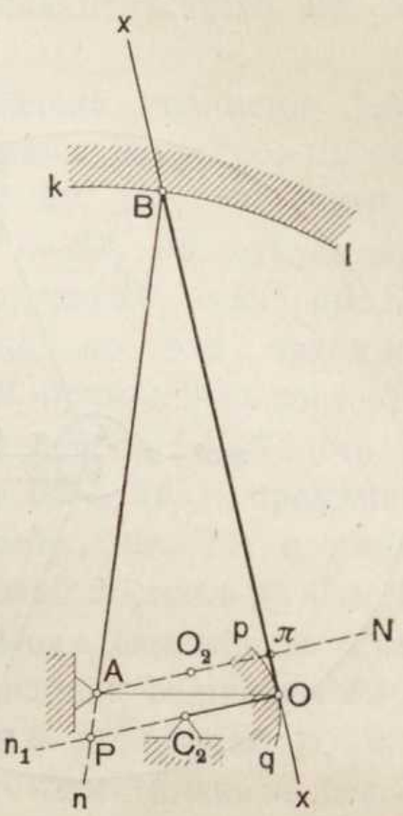
Полюсъ $P$ мгновеннаго вращенія этой системы лежитъ въ точкѣ пересѣченія нормалей $Bn$ и $On_1$, причемъ $Bn$ представляетъ собою радіусъ $AB$ или его продолженіе, а $On_1$ есть перпендикуляръ къ прямой $xx$




Фиг. 198.




Фиг. 199.




Фиг. 200.

въ точкѣ $O$ ея,—вѣрнѣе, въ той точкѣ этой прямой, которая въ данный моментъ пришла въ совпаденіе съ опорной точкой $O$; ради сокращенія письма, эту точку будемъ условно называть также точкой $O$. Аналогично случаю, разобранному въ предыдущемъ параграфѣ, заключаемъ, что центръ кривизны траекторіи этой точки $O$ лежитъ въ точкѣ $C_2$, дѣлящей отрѣзокъ $PO$ пополамъ, такъ что радіусъ кривизны траекторіи точки $O$,—обозначимъ его черезъ $\varrho$,—выразится такъ:

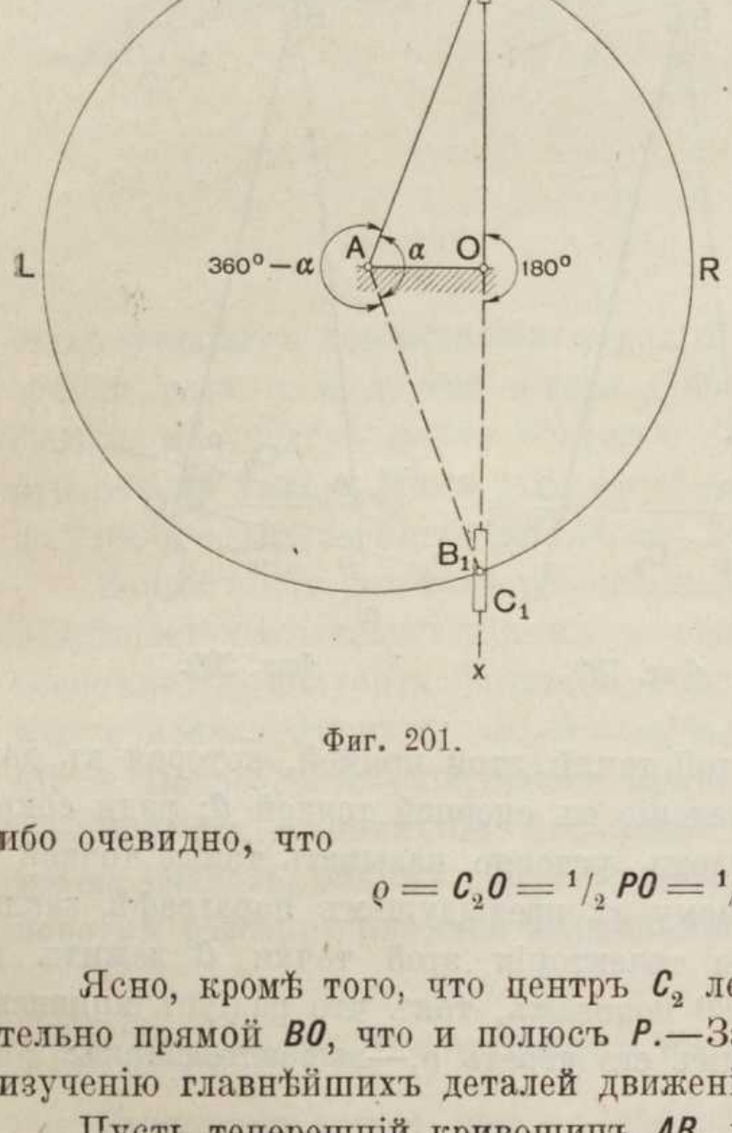
$$\varrho = C_2O = {}^1/_2\, PO.$$

Такимъ образомъ, движеніе системы $xx$ можетъ быть сведено, въ свою очередь, къ движенію нѣкотораго опредѣленнаго для даннаго момента отрѣзка $BO$, точка $B$ коего движется по окружности центра $A$ и радіуса $AB$, а точка $O$—по окружности центра $C_2$ и радіуса $C_2O = {}^1/_2\, PO$ (фиг. 200).

Планъ скоростей системы $xx$ получаемъ, проводя черезъ центръ $A$ прямую $AN$, параллельную $C_2O$ и, значитъ, перпендикулярную къ $xx$; тогда пересѣченіе ея съ $BO$ и дастъ точку $\pi$, вмѣстѣ съ точками $A$ и $B$ опредѣляющую искомый планъ. Полюсомъ его будетъ служить точка $A$; точкѣ $B$ системы $BO$ будетъ соотвѣтствовать точка $B$ плана, а точкѣ $O$—

точка $\pi$, такъ что системѣ отрѣзка $BO$ будетъ соотвѣтствовать система отрѣзка $B\pi$. Замѣтимъ, кстати, что, такъ какъ уголъ $A\pi O = 90^0$, а отрѣзокъ $AO$, равный $a$, своей величины и положенія во время движенія системы $BO$ не мѣняетъ, то точка $\pi$ все время будетъ находиться на окружности, описанной на $AO$, какъ на діаметрѣ.

Если въ точкѣ $O$ прямой $AO$ мы возставимъ къ ней перпендикуляръ $xOx$, пересѣкающій окружность, описываемую пальцемъ $B$ кривошипа $AB$ въ точкахъ, положимъ $B$ и $B_1$, то нетрудно сообразить, что пока палецъ $B$ движется по дугѣ $BRB_1$ (фиг. 201), лежащей вправо отъ перпендикуляра $xOx$, точка $\pi$ будетъ лежать внѣ отрѣзка $BO$, такъ что здѣсь $B\pi > BO$; для дуги $BLB_1$, лежащей влѣво отъ перпендикуляра $xOx$, точка $\pi$ будетъ лежать внутри этого отрѣзка, такъ что здѣсь $B\pi < BO$.




Фиг. 201.

Пользуясь подобіемъ треугольниковъ $BOP$ и $B\pi A$ (фиг. 200), можно выразить величину радіуса кривизны $C_2O = \rho$ и безъ помощи полюса $P$, ибо очевидно, что

$$\rho = C_2O = {}^1/_2\, PO = {}^1/_2\, A\pi \,.\, BO / B\pi.$$

Ясно, кромѣ того, что центръ $C_2$ лежитъ по ту же сторону относительно прямой $BO$, что и полюсъ $P$.—Замѣтивъ все это, перейдемъ къ изученію главнѣйшихъ деталей движенія системы $BO$.

Пусть теперешній кривошипъ $AB$, приводящій систему $xx$ въ движеніе, вращается вокругъ своего центра $A$ съ угловой скоростью $\vartheta$. Тогда угловая скорость $\omega$ системы $xx$, т.-е. мгновенная угловая скорость вращенія вокругъ полюса $P$, выразится въ функціи угловой скорости $\vartheta$ такъ:

Замѣчая, что

$$v_B = \omega \,.\, PB = \vartheta \,.\, AB,$$

находимъ отсюда, что

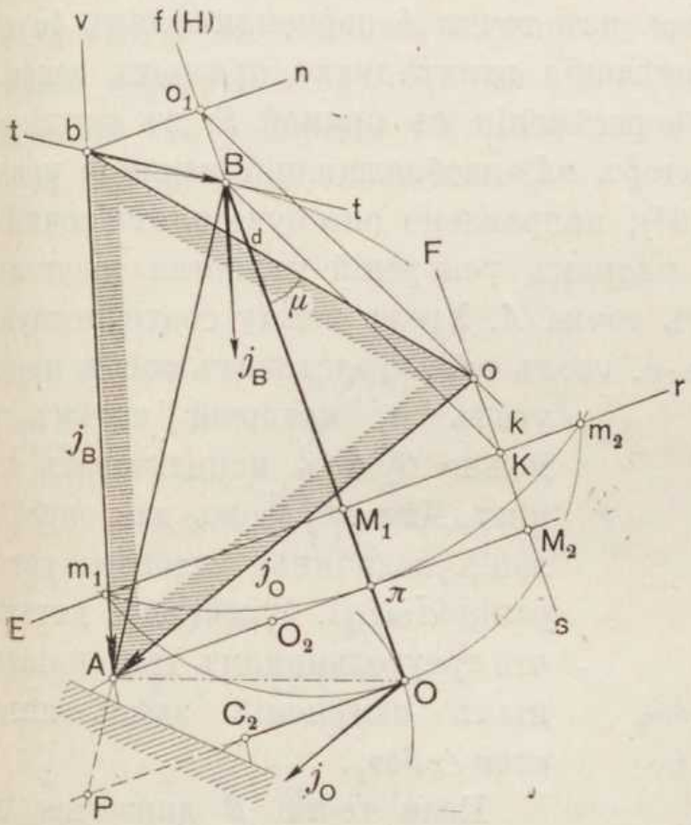
$$\omega = \vartheta \,.\, AB / PB = \vartheta \,.\, \pi B / OB.$$

Угловое ускореніе $d\omega/dt$ можно будетъ опредѣлить графически

помощью плана ускореній системы $xx$, и къ выводу построенія этого плана мы теперь непосредственно и приступимъ.

Имѣемъ, такимъ образомъ, отрѣзокъ $BO$, концы коего $B$ и $O$, движутся по своимъ траекторіямъ, окружностямъ центровъ $A$ и $C_2$ и радіусовъ $AB$ и $C_2O$ (фиг. 202),—и предположимъ, что намъ задано для разсматриваемаго момента полное ускореніе точки $B$, $j_B$. Опредѣлимъ теперь полное ускореніе точки $O$, $j_O$, примѣняя извѣстный уже намъ графическій пріемъ.

Согласно общей схемѣ, опредѣляемъ сначала положеніе точекъ $M_1$ и $M_2$. Для первой изъ нихъ, лежащей, какъ извѣстно, на самой прямой $BO$, имѣемъ соотношеніе $B\pi^2 = BM_1 \cdot BO$, откуда и находимъ, что $BM_1 = B\pi^2/BO$. Если $B\pi > BO$, то для нахожденія точки $M_1$ примѣняемъ построеніе, приведенное на фиг. 75 (стр. 79); если же $B\pi < BO$, то примѣняемъ построеніе фиг. 74, а именно: на отрѣзкѣ $BO$, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность и засѣкаемъ на ней радіусомъ $B\pi$ изъ центра $B$ двѣ точки $m_1$ и $m_2$, какъ это и выполнено на фиг. 202. Прямая $Em_1m_2r$, черезъ эти точки проведенная, и дастъ въ своемъ пересѣченіи съ прямой $BO$ искомую точку $M_1$.




Фиг. 202.

Переходимъ теперь къ опредѣленію положенія точки $M_2$. Съ этой цѣлью откладываемъ на лучѣ $A\pi$ при точкѣ $A$ отрѣзокъ $AO_2 = OC_2 = \rho$ въ сторону, обратную той, по какую относительно прямой $OB$ расположенъ полюсъ $P$. Теперь примѣняемъ соотношеніе $A\pi^2 = AM_2 \cdot AO_2$, указывающее, что

$$AM_2 = A\pi^2/AO_2 = 2A\pi^2 \cdot B\pi/A\pi \cdot BO = 2A\pi \cdot B\pi/BO.$$

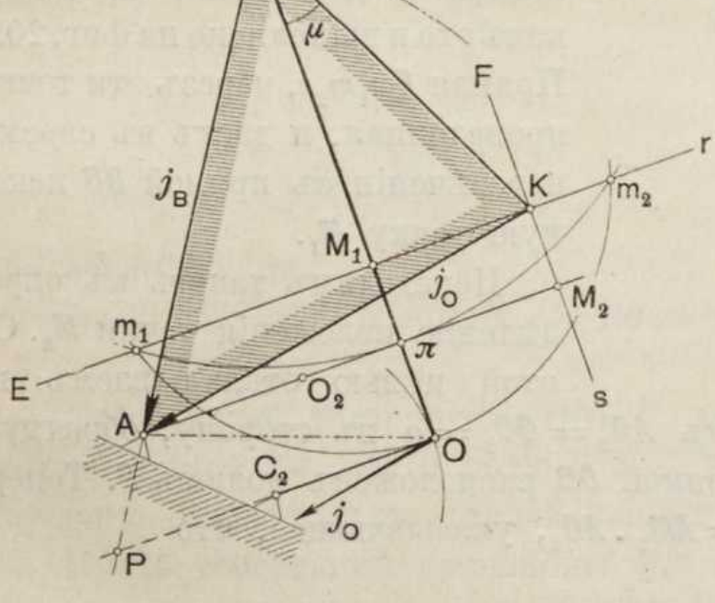
Такъ какъ точка $M_2$ должна лежать въ ту же сторону отъ точки $A$, что и центръ $O_2$, то очевидно, что отрѣзокъ $AM_2$ нужно откладывать отъ точки $A$ по лучу $A\pi$ въ сторону, обратную той, по какую относительно прямой $BO$ расположенъ полюсъ $P$.

Получивъ такимъ образомъ точку $M_2$, проводимъ черезъ нее прямую $FM_2s$, перпендикулярную къ прямой $A\pi M_2$ и, значитъ, параллельную прямой $BO$, ибо $A\pi \perp BO$. Пересѣченіе прямыхъ $FM_2s$ и $Er$ даетъ точку $K$, которую мы соединяемъ теперь прямой линіей съ точкой $B$.

Проводимъ теперь черезъ точку $B$ лучъ $Bt$, перпендикулярный

къ $BA$, затѣмъ, лучъ $BH$, составляющій продолженіе прямой $BO$, и лучъ $Bf$, параллельный $Fs$ и, значитъ, параллельный $BO$; отсюда слѣдуетъ, что лучи $Bf$ и $BH$ сливаются въ одинъ лучъ $Bf$, составляющій продолженіе прямой $OB$. Это обстоятельство значительно упрощаетъ все построеніе, которое представляется теперь въ слѣдующемъ видѣ:

На лучѣ $Bt$, при точкѣ $B$ его, откладываемъ векторъ $bB$, изображающій тангенціальное ускореніе точки $B$, $(j_t)_B$, въ масштабѣ $(\vartheta^2)$, такъ, притомъ, чтобы стрѣлка, указывающая направленіе этого вектора, смотрѣла въ точку $B$. Тогда векторъ $BA$ изобразитъ собою нормальное, а векторъ $bA$—полное ускореніе точки $B$ въ одномъ и томъ же масштабѣ $(\vartheta^2)$; эти два послѣднихъ ускоренія будутъ направлены оба къ точкѣ $A$. Опускаемъ теперь изъ точки $b$ перпендикуляръ $bn$ на прямую $Bf$ и изъ точки $o_1$ пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ ведемъ лучъ $o_1k$, параллельный $BK$, до пересѣченія съ прямой $Fs$ въ точкѣ $o$, которая и опредѣлитъ собою векторъ $oA$, изображающій искомое ускореніе $j_O$ точки $O$ въ масштабѣ $(\vartheta^2)$; направлено оно будетъ отъ точки $o$ къ точкѣ $A$. Такимъ образомъ, планомъ ускореній является треугольникъ $Abo$; вершиной его служитъ точка $A$. Уголъ между соотвѣтствующими направленіями $bo$ и $BO$, т.-е. уголъ $odO$, представитъ собою нашъ уголъ $\mu$, который затѣмъ и можно будетъ использовать извѣстнымъ образомъ для опредѣленія величины углового ускоренія $d\omega/dt$. Замѣтимъ, кстати, что треугольникомъ тангенціальныхъ измѣненій здѣсь является $\triangle Bbo_1$.

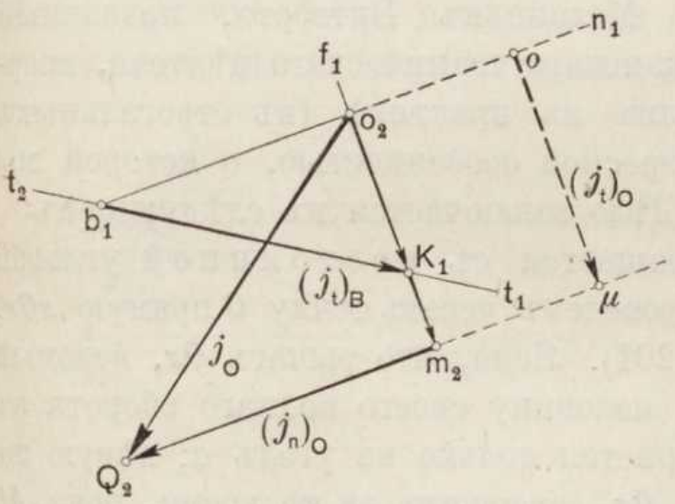



Фиг. 203.

Если точка $B$ движется по своей круговой траекторіи равномѣрно, такъ что полное ускореніе ея сводится къ нормальному и въ масштабѣ $(\vartheta^2)$ изображается векторомъ $BA$ (фиг. 203), то полное ускореніе точки $O$ изобразится векторомъ $KA$. Построеніе для этого случая дано на фиг. 203. Угломъ $\mu$ явится здѣсь уголъ $OBK$ между отрѣзкомъ $OB$ и векторомъ $BK$.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда точка $b$ удаляется изъ предѣловъ чертежа, весьма удобнымъ является построеніе второго рода, имѣющее здѣсь слѣдующій видъ: гдѣ-либо на плоскости чертежа проводимъ лучъ $t_1t_2$ перпендикулярно къ $BA$ и при какой-либо точкѣ $K_1$ его (фиг. 204) откладываемъ векторъ $b_1K_1$, изображающій $(j_t)_B$ въ какомъ-нибудь заранѣе выбранномъ масштабѣ $(m)$, при чемъ стрѣлка, указывающая направленіе этого ускоренія, должна смотрѣть въ точку $K_1$.

Проводимъ теперь черезъ точку $K_1$ лучъ $K_1f_1$ параллельно прямой $OB$, а черезъ точку $b_1$ ведемъ лучъ $b_1n_1 \perp K_1f_1$ до пересѣченія съ $K_1f_1$ въ точкѣ $o_2$. Такъ получается векторъ $o_2K_1$, дающій въ масштабѣ $(m)$ измѣненіе тангенціальнаго ускоренія точки $O$, вызванное сообщеніемъ точкѣ $B$ тангенціальнаго ускоренія $(j_t)_B$. Опредѣляемъ теперь по основному чертежу (фиг. 202) величину отрѣзка $KM_2$. При этомъ надо замѣтить, что такъ какъ фигура $\pi M_1 K M_2$ представляетъ собою прямоугольникъ, то всегда имѣетъ мѣсто равенство $M_1\pi = KM_2$, такъ что въ разсматриваемомъ случаѣ вмѣсто опредѣленія величины $KM_2$ можно удовольствоваться опредѣленіемъ вектора $M_1\pi$, при чемъ направленіе его слѣдуетъ брать всегда отъ точки $M_1$ къ точкѣ $\pi$, ибо точка $M_1$ соотвѣтствуетъ въ данномъ случаѣ точкѣ $K$, а точка $\pi$—точкѣ $M_2$. Множимъ теперь векторъ $M_1\pi$ на $\vartheta^2$ и опредѣляемъ векторъ $K_1m_2$, изображающій это ускореніе $(M_1\pi \,.\, \vartheta^2)$ въ масштабѣ $(m)$ и, значитъ, находимый помощью соотношенія $M_1\pi \,.\, \vartheta^2 = K_1m_2 \,.\, m$. Направленіе вектора $K_1m_2$ будетъ одинаково съ направленіемъ $M_1\pi$ (отъ $M_1$ къ $\pi$). Отложивъ теперь при точкѣ $K_1$ этотъ векторъ $K_1m_2$, получаемъ векторъ $o_2m_2$, дающій собою дѣйствительное тангенціальное ускореніе точки $O$, $(j_t)_O$. Откладывая теперь при точкѣ $m_2$ векторъ $m_2Q_2$, изображающій въ масштабѣ $(m)$ нормальное ускореніе точки $O$, направленное, кстати сказать, всегда отъ точки $O$ къ точкѣ $C_2$ (или къ $P$), и равное $v_O^2/OC_2$, и складывая геометрически векторы $o_2m_2$ и $m_2Q_2$, находимъ векторъ $o_2Q_2$, изображающій въ масштабѣ $(m)$ искомое полное ускореніе точки $O$, $j_O$.—Вопросъ, такимъ образомъ, разрѣшается достаточно просто.



Фиг. 204.

Не менѣе удобнымъ является въ данномъ случаѣ опредѣленіе ускореній системы $xBx$ при помощи поворотнаго круга прямого движенія и центра ускореній, ибо этотъ поворотный кругъ строится здѣсь очень просто. Дѣйствительно, первой его точкой является полюсъ мгновеннаго вращенія $P$ (фиг. 205); второй точкой является точка $t_1$, симметричная точкѣ $O$ относительно полюса $P$; что же касается третьей точки $t_2$, то она будетъ лежать на лучѣ $AB$ и опредѣлится помощью уравненія $BP^2 = BA \,.\, Bt_2$. Кругъ $Pt_1t_2$ и представитъ собою искомый поворотный кругъ прямого движенія системы $xBx$. Полюсомъ поворота служитъ точка $K$,—конецъ діаметра, проведеннаго черезъ полюсъ $P$.

Ведущимъ рычагомъ разсматриваемаго механизма бываетъ обычно рычагъ $AB$, и, если законъ движенія его данъ, то будетъ извѣстно и ускореніе точки $B$; а такъ какъ эта точка принадлежитъ въ то же

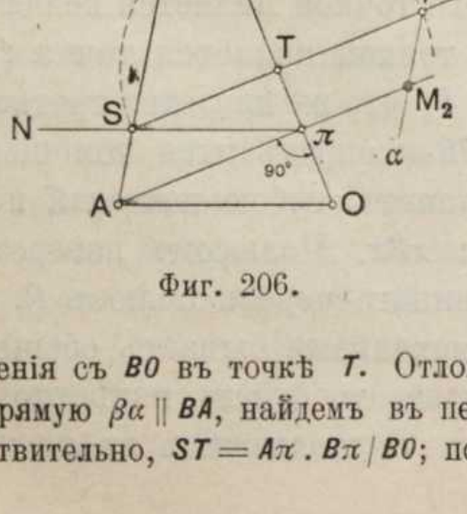
самое время и системѣ $xBx$, то будетъ, такимъ образомъ, извѣстно ускореніе одной изъ точекъ системы $xBx$, что дастъ возможность найти на кругѣ $Pt_1t_2$ положеніе центра ускореній $G$ дѣйствительнаго движенія системы $xBx$. Уголъ $KPG$ дастъ собою, затѣмъ, величину угла $\mu$, что, въ случаѣ надобности, позволитъ опредѣлить величину углового ускоренія $d\omega/dt$ системы $xBx$. Замѣтимъ, кстати, что угловая скорость $\omega$ и угловое ускореніе $d\omega/dt$ системы $xBx$ и ведомаго вычага $Oy$ тождественны, ибо рычагъ $Oy$, вдоль коего ползаетъ муфта $C$, повторяетъ угловыя перемѣщенія муфты $C$ и, значитъ, системы $xBx$.—Вопросъ, такимъ образомъ, исчерпывается вполнѣ.



Фиг. 205.

Механизмъ Витворта, названный такъ по имени извѣстнаго американскаго техническаго дѣятеля, впервые примѣнившаго этотъ механизмъ на практикѣ (въ строгальныхъ станкахъ), обладаетъ одной интересной особенностью, о которой мы здѣсь упомянемъ лишь вкратцѣ. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Пусть ведущее звено $AB$ вращается съ постоянной угловой скоростью, такъ что $\vartheta = const.$ Проведемъ черезъ точку $O$ прямую $xOx$, перпендикулярную къ $AO$ (фиг. 201). Ясно, что рычагъ $Ox$, ведомый рычагомъ $AB$, совершитъ правую половину своего полнаго оборота въ то время, какъ радіусъ $AB$ повернется только на уголъ $\alpha$; лѣвую же половину своего оборота рычагъ $Ox$ совершитъ за то время, пока $AB$ повернется на уголъ $360^0 - \alpha$. Такъ какъ здѣсь всегда имѣетъ мѣсто неравенство $\alpha < 360^0 - \alpha$, то ясно, что за время $(\alpha)$ рычагъ $Ox$ будетъ двигаться, въ среднемъ, гораздо быстрѣе, чѣмъ за время $(360^0 - \alpha)$, такъ что правое полъ-оборота будетъ выполнено быстрѣе, чѣмъ лѣвое. Нетрудно вычертить здѣсь графикъ угловыхъ скоростей такого вращательнаго движенія системы $Ox$ при данномъ законѣ вращенія радіуса $AB$.



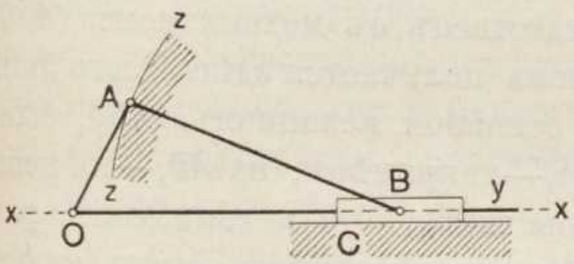
Фиг. 206.

Полученіе отрѣзка $AM_2$, опредѣляемаго данной выше формулой $AM_2 = 2A\pi \cdot B\pi / BO$, можетъ быть выполнено графически, путемъ слѣдующаго простого построенія:

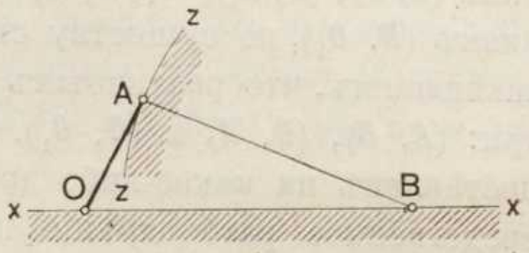
Замѣтивъ, что произведеніе $^1/_2\, A\pi . B\pi$ представляетъ собою площадь прямоугольнаго треугольника $A\pi B$, проводимъ черезъ точку $\pi$ прямую $\pi N \parallel AO$ (фиг. 206) до пересѣченія съ $AB$ въ точкѣ $S$; затѣмъ изъ точки $S$ ведемъ лучъ $ST\beta \parallel A\pi$ до пересѣченія съ $BO$ въ точкѣ $T$. Отложивъ, наконецъ, $T\beta = ST$ и проведя черезъ точку $\beta$ прямую $\beta\alpha \parallel BA$, найдемъ въ пересѣченіи ея съ лучемъ $A\pi$ искомую точку $M_2$. Дѣйствительно, $ST = A\pi \cdot B\pi / BO$; поэтому $S\beta = 2ST = AM_2$.

## § 30. Механизмъ M поставленъ на муфту *C*.

Четвертый механизмъ,—послѣдній изъ производныхъ отъ механизма M,—получимъ, поставивъ этотъ послѣдній на муфту *C*; получится механизмъ, изображенный на фиг. 207. Такъ какъ точка *B* звена *AB* будетъ теперь неподвижной, то звено *AB* станетъ вращаться около точки *B*, какъ около неподвижнаго центра, и точка *A* будетъ двигаться по окружности постояннаго центра *B* и радіуса $AB = b$. Такъ какъ, далѣе, муфта *C* остается теперь неподвижной, то будетъ оставаться неподвижной и ось ея *xx*, такъ что прямая *Oy* будетъ вынуждена теперь скользить вдоль этой неподвижной прямой *xx*, совпадая съ ней въ каждый отдѣльный моментъ всѣми своими точками, а, значитъ, и точкой *O*. Замѣчая теперь, что эта точка *O* принадлежитъ въ то же время и отрѣзку *AO*, заключаемъ, что все движеніе сводится къ движенію постояннаго по своей длинѣ отрѣзка *AO* по траекторіямъ его концовъ,—точка *A* его движется по окружности центра *B* и радіуса $BA = b$, а точка *O*—по неподвижной прямой *xx*, проходящей черезъ ту же точку *B* (фиг. 208). Нетрудно усмотрѣть, что полученный нами




Фиг. 207.




Фиг. 208.

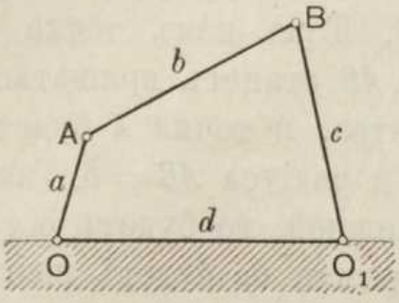
механизмъ, съ кинематической точки зрѣнія, представляетъ собою механизмъ паровой машины съ шатуномъ *AO* и кривошипомъ *BA*, и для изученія обстоятельствъ движенія его придется воспользоваться способами и методами, о которыхъ было подробно сказано выше, въ одномъ изъ предыдущихъ параграфовъ. Такимъ образомъ, полученный механизмъ ничего новаго съ кинематической стороны намъ не даетъ, и останавливаться на немъ мы больше не будемъ. Отмѣтимъ лишь еще, что на практикѣ этотъ механизмъ употребляется крайне рѣдко.

Разсмотрѣніемъ этого механизма мы и закончимъ обзоръ четырехзвенныхъ механизмовъ съ одной поступательной парой и теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію механизмовъ съ двумя поступательными парами.

## § 31. Четырехзвенные механизмы съ двумя поступательными парами. Общія соображенія.

Слѣдующую группу механизмовъ, производныхъ отъ обыкновеннаго четырехшарнирнаго механизма, получимъ, замѣняя двѣ вращательныя пары его парами поступательными. Очевидно, что пары, подлежа-

щія замѣнѣ, могутъ лежать здѣсь только или рядомъ, или одна противъ другой, по діагонали. Сообразно съ этимъ, основными типами вновь получаемыхъ механизмовъ явятся слѣдующіе два: въ одномъ замѣняющія поступательныя пары будутъ лежать рядомъ, а въ другомъ—по діагонали, другъ противъ друга. Нетрудно убѣдиться, что механизмовъ, кинематически отличныхъ другъ отъ друга, можетъ получиться при этомъ только *четыре*. Дѣйствительно, пусть намъ данъ обыкновенный четырехшарнирный механизмъ $OABO_1$, поставленный на звено $OO_1$ (фиг. 209). Посмотримъ теперь, сколько получится изъ него новыхъ механизмовъ съ двумя поступательными парами, лежащими рядомъ, и сколько съ лежащими по діагонали.



Фиг. 209.

Ясно, что, при неподвижномъ звенѣ $OO_1$, механизмовъ перваго типа, т.-е. съ двумя поступательными парами, лежащими рядомъ, можетъ получиться всего четыре,—это будутъ механизмы съ поступательными парами $(A, B)$, $(B, O_1)$, $(O_1, O)$ и, наконецъ, $(A, O)$. Замѣчая, однако, что механизмъ $(B, O_1)$, по существу своему, тождественъ съ механизмомъ $(A, O)$, заключаемъ, что различныхъ механизмовъ получается здѣсь всего лишь три: $(A, B)$, $(O, A)$ и $(O, O_1)$. Если бы основной механизмъ $OABO_1$ былъ поставленъ на какое-либо другое звено,—напримѣръ, на $AB$,—то непосредственное разсмотрѣніе показало бы намъ, что механизмовъ, различныхъ между собою, получилось бы, послѣ замѣны, опять только три, причемъ каждый изъ нихъ повторилъ бы собою одинъ изъ механизмовъ, полученныхъ выше при неподвижномъ звенѣ $OO_1$. Обстоятельство это станетъ вполнѣ понятнымъ, если мы примемъ во вниманіе, что въ шарнирномъ четыреугольникѣ всѣ его звенья эквивалентны въ томъ смыслѣ, что кинематическія свойства этого механизма не измѣняются отъ постановки на различныя звенья,—на какое бы звено мы его ни поставили, мы постоянно будемъ получать одинъ и тотъ же случай движенія нѣкотораго отрѣзка по траекторіямъ его концовъ,—нѣкоторымъ круговымъ дугамъ извѣстныхъ центровъ и радіусовъ.—Итакъ, *механизмовъ съ двумя рядомъ лежащими поступательными парами*, кинематически различныхъ между собою, можетъ быть *всего* только *три*.

Полученіе этихъ трехъ механизмовъ можетъ быть выполнено двояко: можно поступить такъ, какъ это было сдѣлано выше, т.-е. поставить механизмъ на какое-либо звено,—напримѣръ, на $OO_1$,—и замѣнять затѣмъ послѣдовательно сосѣднія пары его $(A, B)$, $(A, O)$ и $(O, O_1)$ парами поступательными; но можно поступить и иначе, прибѣгнувъ къ извѣстному намъ уже пріему постановки механизма на различныя его звенья, а именно: въ основномъ механизмѣ, поставленномъ на какое-либо звено,—напримѣръ, на $OO_1$,—замѣнить двѣ какія-либо вращательныя

пары его, лежащія рядомъ,—напримѣръ, пары $A$ и $B$,—парами поступательными и ставить затѣмъ такъ полученный механизмъ на различныя его звенья. Такъ какъ механизмъ съ поступательными парами $(A, B)$ при постановкѣ его на звено $AO$ дастъ тотъ же механизмъ, что и при постановкѣ на звено $BO_1$, то ясно, что существенно различныхъ между собою механизмовъ мы получимъ опять всего лишь три,—это будутъ механизмы съ неподвижными звеньями $OO_1$, $AO$ и $AB$ и каждый съ поступательными парами $A$ и $B$.—Нетрудно усмотрѣть, что каждому изъ этихъ механизмовъ найдется соотвѣтствующій тождественный съ нимъ механизмъ изъ числа полученныхъ пріемомъ, изложеннымъ выше.

Такъ, напримѣръ, механизмъ съ неподвижнымъ звеномъ $AB$ и поступательными парами $(O, O_1)$ повторитъ собою механизмъ съ неподвижнымъ звеномъ $OO_1$ и поступательными парами $A$ и $B$. Условно это можно обозначить такъ: $(AB, O, O_1) \equiv (OO_1, A, B)$. Продолжая эти сопоставленія, имѣемъ далѣе, что $(OO_1, A, B) \equiv (AO, B, O_1) \equiv (BO, A, O)$. Подобнымъ же образомъ окажется, что $(AB, A, O) \equiv (BO_1, B, A) \equiv (O_1O, O_1, B) \equiv$ $\equiv (OA, O, O_1)$, и т. д. По числу кинематически отличныхъ другъ отъ друга механизмовъ число группъ этихъ тождествъ равно тремъ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться послѣднимъ изъ изложенныхъ выше пріемовъ, т.-е. пріемомъ *постановки основного механизма,* преобразованнаго замѣной, *на различныя его звенья.* Получится, такимъ образомъ, три механизма, каждый изъ коихъ мы и разсмотримъ въ отдѣльномъ параграфѣ.

Переходимъ теперь къ механизмамъ съ двумя поступательными парами, расположенными *по діагонали.* Группъ, подлежащихъ здѣсь замѣнѣ, въ нашемъ основномъ механизмѣ имѣется, очевидно, всего лишь двѣ,—это будутъ группы $(O, B)$ и $(A, O_1)$,—но нетрудно убѣдиться непосредственно, что какую бы мы изъ нихъ ни взяли и на какія бы звенья полученный механизмъ ни ставили, всѣ 8 получаемыхъ такимъ образомъ механизмовъ оказались бы кинематически тождественными между собою: выяснилось бы, что всѣ они представляютъ простое повтореніе любого *одного* изъ нихъ,—напримѣръ, механизма съ поступательными парами $O$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $OO_1$. Такимъ образомъ, оказывается, что *четырехзвенныхъ механизмовъ съ двумя поступательными парами, расположенными діагонально, имѣется всего* лишь *одинъ.* Изученіе его будетъ выполнено въ отдѣльномъ параграфѣ.

Изъ всего вышеизложеннаго явствуетъ, что четырехзвенныхъ механизмовъ съ двумя поступательными парами существуетъ, вообще говоря, всего лишь *четыре,* и за нихъ мы примемъ и подвергнемъ подробному изученію слѣдующіе:

1) *механизмъ съ поступательными парами $A$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $OO_1$.*—Поставивъ его затѣмъ на бывшее звено $OA$, получимъ второй, возможный здѣсь механизмъ,—это будетъ

2) *механизмъ съ поступательными парами $A$ и $B$ и неподвижнымъ бывшимъ звеномъ $OA$.*—Сдѣлавъ въ немъ неподвижнымъ бывшее звено $AB$,

получимъ послѣдній изъ механизмовъ съ двумя рядомъ лежащими поступательными парами, а именно:

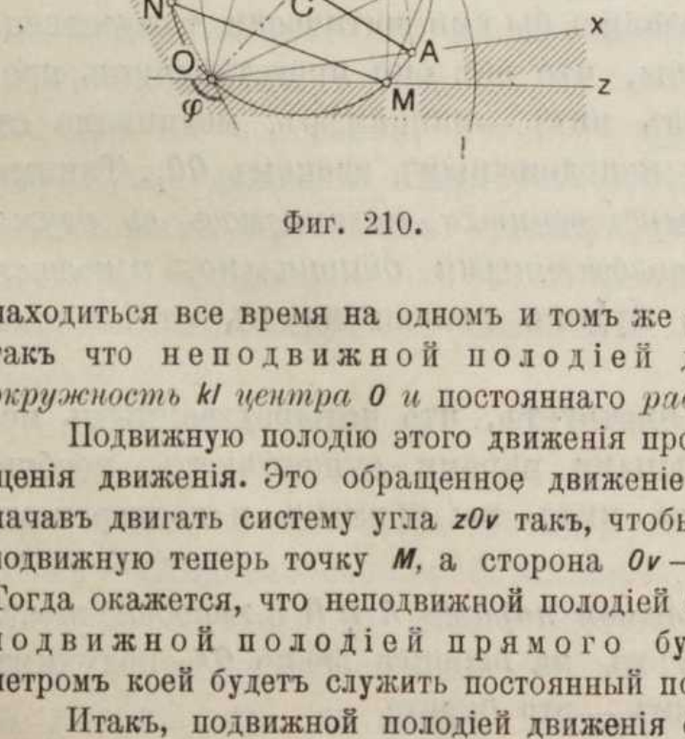
3) *механизмъ съ поступательными парами* **A** *и* **B** *и неподвижнымъ бывшимъ звеномъ* **AB**.

Четвертымъ возможнымъ механизмомъ съ двумя поступательными парами, лежащими уже по діагонали, явится

4) *механизмъ съ поступательными парами* **O** *и* **B** *и неподвижнымъ звеномъ* $OO_1$.

Ради упрощенія схемъ и облегченія изслѣдованія, мы, при изученіи механизмовъ, будемъ примѣнять вездѣ, гдѣ это будетъ возможно, пріемъ сокращенія звеньевъ до нуля, неоднократно примѣнявшійся нами въ механизмахъ съ одной поступательной парой.

Прежде чѣмъ приступить къ разсмотрѣнію упомянутыхъ четырехъ механизмовъ, мы, ради упрощенія дальнѣйшихъ изслѣдованій, разберемъ теперь нѣсколько подробнѣе, чѣмъ это было сдѣлано въ введеніи къ нашему курсу, *вопросъ о движеніи отрѣзка въ углѣ и,* обратно, *угла по концамъ отрѣзка.* Пусть, такимъ образомъ, у насъ имѣется какой-либо неподвижный уголъ **zOv** (фиг. 210), внутри коего движется нѣкоторый неизмѣнный по своей длинѣ отрѣзокъ **MN** такъ, что одинъ конецъ его, **M**, движется все время по одной и той же сторонѣ этого угла, **Oz**, а другой, **N**— по другой, **Ov**. Полюсъ мгновеннаго вращенія системы отрѣзка **MN** лежитъ въ точкѣ **P** пересѣченія нормалей $Mn_3$ и $Nn_4$,—перпендикуляровъ къ сторонамъ угла, возставленныхъ въ точкахъ **M** и **N**. Замѣчая, что въ четыреугольникѣ **PMON** противолежащіе углы **M** и **N** прямые, заключаемъ, что около него можно описать окружность, діаметромъ коей явится отрѣзокъ **OP**. При движеніи отрѣзка **MN** эта окружность также будетъ перемѣщаться, но *величины своей мѣнять* при этомъ *не будетъ,* ибо дуга **MON** ея, опирающаяся на немѣняющую своей длины хорду **MN**, должна постоянно вмѣщать все одинъ и тотъ же уголъ $MON = \varphi$. Отсюда слѣдуетъ, что будетъ оставаться постояннымъ и діаметръ этой окружности **OP**, въ силу чего полюсъ **P** будетъ находиться все время на одномъ и томъ же разстояніи **OP** отъ неподвижной точки **O**, такъ что неподвижной полодіей движенія отрѣзка **MN** окажется здѣсь *окружность kl центра* **O** *и* постояннаго *радіуса* **OP**.




Фиг. 210.

Подвижную полодію этого движенія проще всего опредѣлять здѣсь путемъ обращенія движенія. Это обращенное движеніе получимъ, остановивъ отрѣзокъ **MN** и начавъ двигать систему угла **zOv** такъ, чтобы сторона **O** его проходила черезъ неподвижную теперь точку **M**, а сторона **Ov** — также черезъ неподвижную точку **N**. Тогда окажется, что неподвижной полодіей этого обращеннаго движенія и, значитъ, подвижной полодіей прямого будетъ служить *окружность* **PMON**, діаметромъ коей будетъ служить постоянный по своей длинѣ отрѣзокъ **OP**.

Итакъ, подвижной полодіей движенія системы отрѣзка **MN** внутри угла **zOv** является окружность **PMON** постояннаго діаметра **PO**; центръ **C** этой окружности движется, очевидно, по окружности, описанной изъ **O** радіусомъ **OC**, равнымъ $^1/_2$ **OP**.

Неподвижной полодіей будетъ служить окружность центра *O* и вдвое большаго радіуса, *OP*, равнаго 2 *OC*.

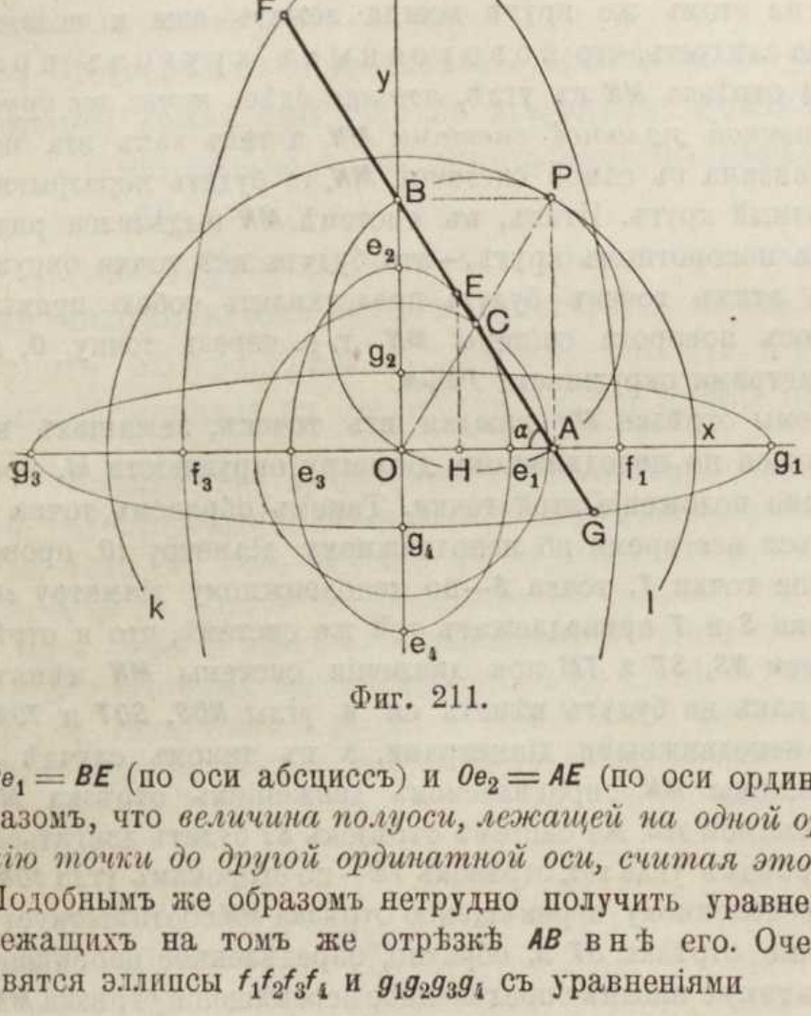
Такъ какъ концы *M* и *N* отрѣзка *MN* движутся все время по неподвижнымъ прямымъ *Oz* и *Ov*, то это значитъ, что они все время находятся на окружности поворотнаго круга, а такъ какъ на этомъ же кругѣ всегда лежитъ еще и полюсъ мгновеннаго вращенія, то отсюда слѣдуетъ, что поворотнымъ кругомъ прямого движенія, т.-е. движенія отрѣзка *MN* въ углѣ, *явится* здѣсь *тотъ же кругъ PMON, который служитъ подвижной полодіей системы MN*, а такъ какъ эта подвижная полодія неразрывно связана съ самой системой *MN*, то будетъ неразрывно связанъ съ ней и этотъ поворотный кругъ. Итакъ, въ системѣ *MN* выдѣлился рядъ точекъ, постоянно лежащихъ на поворотномъ кругѣ,—это будутъ всѣ точки окружности *PMON*. Траекторіи всѣхъ этихъ точекъ будутъ представлять собою прямыя линіи, проходящія черезъ полюсъ поворота системы *MN*, т.-е. черезъ точку *O*, и, слѣдовательно, являющіяся діаметрами окружности *PMON*.

Итакъ, при движеніи системы отрѣзка *MN* каждая изъ точекъ, лежащихъ на окружности *PMON*, будетъ двигаться по неподвижному діаметру окружности *kl*, проведенному черезъ какое-либо одно положеніе этой точки. Такимъ образомъ, точка *T* этой окружности будетъ двигаться все время по неподвижному діаметру *tO*, проведенному черезъ данное положеніе точки *T*, точка *S*—по неподвижному діаметру *sO*, и т. д. Замѣчая теперь, что точки *S* и *T* принадлежатъ той же системѣ, что и отрѣзокъ *MN*, заключаемъ, что отрѣзки *NS*, *ST* и *TM* при движеніи системы *MN* мѣнять своей величины не будутъ, какъ не будутъ мѣнять ея и углы *NOS*, *SOT* и *TOM*, образуемые выдѣленными нами неподвижными діаметрами, а въ такомъ случаѣ и окажется, что, при движеніи системы *MN*, опредѣляемомъ движеніемъ отрѣзка *MN* по сторонамъ угла *zOv*, принадлежащій той же системѣ отрѣзокъ *ST* будетъ двигаться, скользя своими концами по сторонамъ угла *sOt*, отрѣзокъ *TM*—по сторонамъ угла *tOM*, и т. д. Замѣчая теперь, что опредѣленному перемѣщенію отрѣзка *MN* соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное перемѣщеніе отрѣзка *ST* и, обратно, опредѣленное перемѣщеніе отрѣзка *ST* влечетъ за собою также вполнѣ опредѣленное перемѣщеніе отрѣзка *MN*, заключаемъ, что данное движеніе системы *MN* можетъ быть задано не только движеніемъ отрѣзка *MN* по сторонамъ угла *zOv*, но также и движеніемъ отрѣзка *ST* по сторонамъ угла *sOt*. Принимая теперь во вниманіе, что точки *S* и *T* взяты совершенно произвольно, заключаемъ, что полученный выводъ имѣетъ силу для любой другой хорды круга *C*, такъ что, вообще, можно сказать, что движеніе системы *MN*, опредѣляемое движеніемъ отрѣзка *MN* по сторонамъ угла *zOv*, можетъ быть также задано движеніемъ любой хорды *ST* круга *C*, своими конечными точками скользящей по діаметрамъ круга *kl*, проведеннымъ черезъ эти точки.

Особенно удобнымъ является сведеніе движенія системы *MN* на движеніе наибольшей хорды круга *C*,—его *діаметра*. Проведемъ какой-либо діаметръ *AB* этого круга *C*, а черезъ концы *A* и *B* его проведемъ діаметры *xAO* и *yBO*. Діаметры эти, очевидно, будутъ другъ другу перпендикулярны, ибо уголъ $BOA = 90^0$. Такимъ образомъ, данное движеніе системы *MN* можетъ быть опредѣлено и задано также движеніемъ принадлежащаго той же системѣ отрѣзка *AB*, не мѣняющаго своей длины и представляющаго собою одинъ изъ діаметровъ поворотнаго круга *C*; концы *A* и *B* этого діаметра будутъ при этомъ двигаться по двумъ неподвижнымъ діаметрамъ большого круга *kl*, — *xAO* и *yBO*. Такая редукція основного заданія,—замѣна движенія отрѣзка *MN* движеніемъ діаметра *AB*,—особенно удобна тѣмъ, что даетъ возможность весьма просто и удобно опредѣлять траекторіи любыхъ точекъ системы *MN*.

Предположимъ, такимъ образомъ, что заданное намъ движеніе системы *MN* (фиг. 210) сведено нами на движеніе отрѣзка (діаметра) *AB* внутри неподвижнаго прямого угла *xOy* (фиг. 211), и пусть *на отрѣзкѣ AB*, между точками *A* и *B*, выдѣлена какая-либо точка *E*. Спрашивается, какова будетъ и какъ расположится траекторія этой точки. Вопросъ этотъ разрѣшается проще всего аналитически,

путемъ опредѣленія уравненія этой траекторіи въ какой-либо системѣ координатъ. Въ данномъ случаѣ этой системой весьма удобно можетъ служить система двухъ взаимно-перпендикулярныхъ діаметровъ, служащихъ траекторіями точекъ $A$ и $B$, и за ось $x$-овъ мы принимаемъ діаметръ $xAO$, а за ось $y$-овъ — діаметръ $yBO$. Обозначимъ теперь уголъ $BAO$ черезъ $\alpha$ и опустимъ изъ точки $E$ перпендикуляръ $EH$ на ось $Ox$. Тогда координаты точки $E$ выразятся такъ: $OH = x = BE\cos\alpha$ и $EH = y = AE\sin\alpha$. Исключеніе параметра $\alpha$ приводитъ къ уравненію



Фиг. 211.

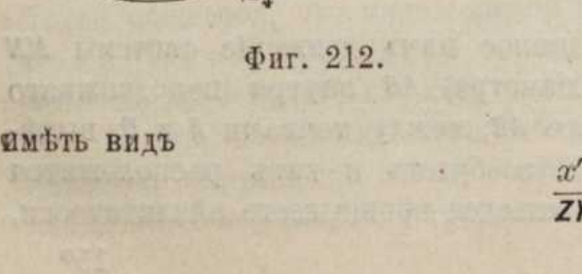
$$\frac{x^2}{BE^2} + \frac{y^2}{AE^2} = 1,$$

показывающему, что траекторіей точки $E$ служитъ эллипсъ $e_1e_2e_3e_4$ съ полуосями $Oe_1 = BE$ (по оси абсциссъ) и $Oe_2 = AE$ (по оси ординатъ). Оказывается, такимъ образомъ, что *величина полуоси, лежащей на одной ординатной оси, равна разстоянію точки до другой ординатной оси, считая это разстояніе вдоль отрѣзка* $AB$. Подобнымъ же образомъ нетрудно получить уравненія траекторій точекъ $F$ и $G$, лежащихъ на томъ же отрѣзкѣ $AB$ внѣ его. Очевидно, что этими траекторіями явятся эллипсы $f_1f_2f_3f_4$ и $g_1g_2g_3g_4$ съ уравненіями

$$\frac{x^2}{BF^2} + \frac{y^2}{AF^2} = 1 \text{ и } \frac{x^2}{BG^2} + \frac{y^2}{AG^2} = 1,$$

такъ что правило полуосей, данное выше, имѣетъ, силу и здѣсь.

Предположимъ теперь, что точка $Z$, траекторія коей отыскивается, лежитъ *внѣ отрѣзка* $AB$ (фиг. 212). Въ этомъ случаѣ вопросъ рѣшается проще всего путемъ замѣны движенія діаметра $AB$ движеніемъ того изъ діаметровъ круга $C$, который проходитъ черезъ точку $Z$. Дѣйствительно, проведемъ черезъ точку $Z$ діаметръ $XY$. Согласно сказанному выше, конецъ $X$ его будетъ двигаться по діаметру $x'XO$ большой окружности, а конецъ $Y$—по діаметру $y'YO$, и движеніе системы $AB$ можетъ быть задано движеніемъ діаметра $XY$ внутри прямого угла $x'Oy'$. Разсматриваемый случай свелся, такимъ образомъ, къ случаю, уже изслѣдованному выше, и мы можемъ сразу сказать, что точка $Z$ будетъ описывать эллипсъ, главныя оси коего расположатся по неподвижнымъ прямымъ $x'O$ и $y'O$. Уравненіе этого эллипса $z_1z_2z_3z_4$ въ системѣ $x'Oy'$ будетъ, очевидно,



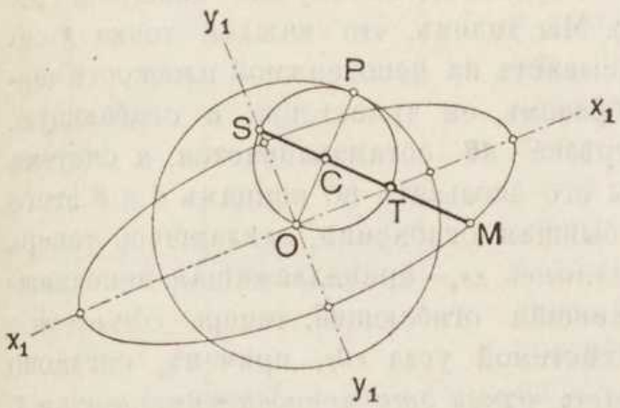
Фиг. 212.

имѣть видъ

$$\frac{x'^2}{ZY^2} + \frac{y'^2}{ZX^2} = 1.$$

Правило полуосей сохраняетъ свою силу и здѣсь, такъ что $Oz_1 = ZY$ и $Oz_2 = ZX$.

Никакихъ трудностей не представитъ опредѣленіе траекторіи и въ томъ случаѣ, когда точка лежитъ *внѣ круга* $C$. Пусть ищется траекторія такой точки $M$ (фиг. 213). Проводимъ черезъ эту точку $M$ и центръ $C$ прямую, выдѣляющую собою діаметръ $ST$ круга $C$, и черезъ концы $S$ и $T$ его проводимъ діаметры большой окружности, $x_1TO$ и $y_1SO$. Движеніе системы $AB$ опредѣлится теперь движеніемъ діаметра $ST$ по сторонамъ угла $x_1Oy_1$. Теперь можно сказать, что точка $M$ будетъ описывать эллипсъ, главныя оси коего будутъ лежать по прямымъ $x_1O$ и $y_1O$; уравненіе его будетъ имѣть видъ



Фиг. 213.

$$\frac{x_1^2}{MS^2} + \frac{y_1^2}{MT^2} = 1.$$

Правило отсчета полуосей остается въ силѣ и здѣсь. Такимъ образомъ, опредѣленіе траекторій точекъ системы $MN$ (фиг. 210) или, что то же, $AB$ (фиг. 211), никакихъ затрудненій не представляетъ. Всѣ точки будутъ описывать эллипсы съ различными осями и различно расположенные,—*общимъ* у нихъ явится только одинъ *центръ*, коимъ будетъ служить *вершина* $O$ *даннаго угла* $MON$ или $xOy$. Точки, лежащія на окружности поворотнаго круга $C$, будутъ двигаться по прямымъ,—діаметрамъ большого круга $O$. Круговымъ движеніемъ будетъ надѣлена теперь только одна точка подвижной системы,—центръ $C$ подвижной полодіи и поворотнаго круга; эта точка $C$ будетъ перемѣщаться по окружности, описанной изъ центра $O$ радіусомъ $OC$, равнымъ $^1/_2$ $OP$ (фиг. 211).

Въ виду значительныхъ удобствъ, которыя представляетъ замѣна движенія хорды $MN$ внутри угла $zOv$ (фиг. 210) движеніемъ діаметра $AB$ внутри соотвѣтствующаго ему прямого угла $xOy$ (фиг. 211), мы въ дальнѣйшемъ будемъ всегда или совершать эту замѣну въ самомъ началѣ изслѣдованія, или прямо предполагать ее уже совершенной. Поворотный кругъ представится тогда прямо кругомъ, описаннымъ на отрѣзкѣ $AB$, какъ на діаметрѣ. *Обращенное движеніе* представится, такимъ образомъ, движеніемъ системы прямого угла $xOy$ по концамъ неподвижнаго отрѣзка діаметра $AB$. При этомъ, замѣтимъ кстати, *за неподвижный отрѣзокъ* можетъ быть взятъ *любой другой діаметръ круга* $C$; система прямого угла, скользящаго своими сторонами по концамъ этого діаметра, окажется, очевидно, тождественной съ системой прямого угла $xOy$, скользящаго по концамъ отрѣзка $AB$. Это обращенное движеніе представляетъ собою нѣкоторыя интересныя особенности, выясненіемъ которыхъ мы теперь и займемся. Предварительно замѣтимъ слѣдующее:

Пусть у насъ имѣется нѣкоторая подвижная система, надѣленная какимъ-либо опредѣленнымъ плоскимъ движеніемъ, такъ что каждая точка $Z$ ея перемѣщается по своей траекторіи,—нѣкоторой вполнѣ опредѣленной кривой $zz$, лежащей въ неподвижной плоскости. Если движущуюся точку $Z$ будемъ разсматривать, какъ огибаемую, то огибающей ея придется признать ея траекторію, т.-е. неподвижную кривую $zz$. Обратимъ теперь движеніе. Тогда система, бывшая до того подвижной, остановится, а неподвижная дотолѣ плоскость станетъ перемѣщаться нѣкоторымъ вполнѣ опредѣленнымъ движеніемъ. Всѣ *бывшія огибаемыя станутъ* теперь *огибающими*, а бывшія огибающія—огибаемыми, обмѣнявшись, такимъ образомъ, взаимно своими ролями. Въ виду этого неподвижная теперь точка $Z$ представитъ собою неподвижную огибающую, а кривая $zz$—ея огибаемую и, значитъ, эта *кривая* $zz$ станетъ теперь

двигаться такъ, что, при этомъ своемъ движеніи, *будетъ все время проходить черезъ неподвижную точку Z*, свою теперешнюю огибающую.

Примѣнимъ теперь эти очевидныя соображенія къ нашему случаю движенія системы *MN* внутри угла *zOv* (фиг. 210) или, что удобнѣе, къ случаю движенія отрѣзка *AB* внутри прямого угла *xOy* (фиг. 211). Мы знаемъ, что каждая точка *X* системы *AB*, при движеніи этой послѣдней, описываетъ на неподвижной плоскости чертежа эллипсъ *xx*, представляющій, такимъ образомъ, ея траекторію и огибающую. Въ обращенномъ движеніи, когда система отрѣзка *AB* останавливается, а система прямого угла *xOy* движется такъ, что стороны его скользятъ по концамъ *A* и *B* этого неподвижнаго отрѣзка, точка *X* системы *AB*, бывшая огибаемая, сдѣлавшись теперь огибающей, остановится, а траекторія ея,—*эллипсъ xx*,—принадлежащая неподвижной плоскости, т.-е. системѣ угла *xOy*, и служившая огибающей, теперь *сдѣлается огибаемой* и станетъ двигаться вмѣстѣ съ системой угла *xOy*, причемъ, согласно сказанному выше, *постоянно будетъ проходить черезъ эту неподвижную точку X*.

Итакъ, черезъ каждую точку *X* неподвижной теперь системы отрѣзка *AB* теперь будетъ проскальзывать ея бывшая огибающая,—эллипсъ *xx*, принадлежащій подвижной системѣ угла *xOy*. Отсюда слѣдуетъ, что если мы будемъ держать противъ этой плоскости подвижнаго угла *xOy* какое-либо остреё, матеріально изображающее неподвижную точку *X*,— остреё карандаша, мѣла, какого-либо рѣжущаго орудія,— и, прижавъ это остреё къ плоскости *xOy*, станемъ эту послѣднюю двигать согласно закону обращеннаго движенія, то остреё выдѣлитъ, вырѣжетъ на этой плоскости тотъ эллипсъ *xx*, который въ прямомъ движеніи служилъ бы огибающей подвижного острея *X*. Опредѣленіе такъ получаемаго на плоскости *xOy* эллипса не представитъ никакихъ затрудненій, если мы примемъ во вниманіе тѣ основные выводы, которые были получены нами выше, при разсмотрѣніи прямого движенія.

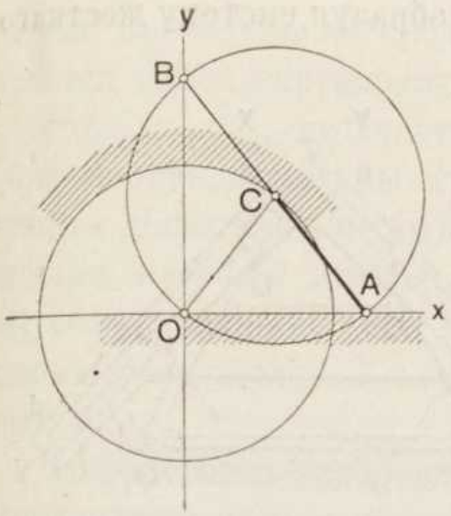
Пусть прямое движеніе системы задается движеніемъ отрѣзка *AB* внутри прямого угла *xOy* (фиг. 211). Обративъ его, получимъ движеніе системы этого прямого угла *xOy*, скользящаго своими сторонами по концамъ неподвижнаго теперь отрѣзка *AB* (фиг. 214). Положимъ, что въ системѣ этого послѣдняго нами выдѣлена нѣкоторая точка *R*. Чтобы опредѣлить тотъ эллипсъ подвижной системы *xOy*, который будетъ теперь проскальзывать черезъ эту точку, обернемъ движеніе, т.-е. вернемся къ прямому движенію, и опредѣлимъ траекторію точки *R*, принадлежащей системѣ подвижнаго отрѣзка *AB*. Для этого описываемъ на *AB*, какъ на діаметрѣ, окружность (уголъ *xOy*, опирающійся на *AB*, предположенъ нами прямымъ; если онъ отличенъ отъ прямого, то нужно описать на *AB* окружность, вмѣщающую этотъ уголъ). Соединивъ теперь точку *R* съ центромъ *C* этой окружности, опредѣляемъ лежащій на этой прямой *RC* діаметръ *ST* и прямой уголъ *sOt*, по сторонамъ коего имѣютъ скользить концы *S* и *T* діаметра *ST*. Траекторіей точки *R* будетъ, слѣдовательно, служить эллипсъ *rr* съ полуосями *RT* (по оси *sO*) и *RS* (по оси *tO*). Обернувъ движеніе, получимъ, что взятая нами точка *R* выдѣлитъ на плоскости угла *Ost* или, что то же, даннаго угла *xOy* (оба эти угла принадлежатъ одной и той же подвижной теперь плоскости *xOy*) именно этотъ эллипсъ *rr*.



Фиг. 214.

Сдѣлаемъ, наконецъ, еще одно замѣчаніе, могущее пригодиться намъ въ дальнѣйшемъ. Мы видѣли, что, при движеніи отрѣзка *AB* внутри прямого угла *xOy* (фиг. 211), центръ *C* подвижной полодіи, лежащій, какъ извѣстно, на серединѣ отрѣзка *AB*, движется по окружности, описанной изъ неподвижной точки *O* радіусомъ $OC = \frac{1}{2} AB = CA$. Въ то же время точка *A* этого отрѣзка будетъ двигаться по неподвижной прямой *xO*, а точка *B*—по также неподвижной прямой *yO*, перпендикуляр-

ной къ $xO$. Такъ какъ движеніе всякой системы можно опредѣлить и задать движеніемъ любыхъ двухъ точекъ ея, то движеніе нашей системы $AB$ можно задать не только движеніемъ точекъ $A$ и $B$ ея по прямымъ $xO$ и $yO$, но также и движеніемъ, напримѣръ, точки $C$ и какой-либо другой,—хотя бы той же точки $A$, такъ что движеніе нашей системы $AB$ опредѣлится еще движеніемъ отрѣзка $CA = {}^1/_2\ AB$, точка $C$ коего движется по окружности центра $O$ и радіуса $OC = AC$, а точка $A$—по неподвижной прямой $xAO$; точка $B$ системы $CA$ будетъ описывать при этомъ прямую $yO$, перпендикулярную къ $xO$ (фиг. 215). Такимъ образомъ, прямолинейное движеніе точки $B$ можетъ быть получено при помощи кругового движенія точки $C$ и прямолинейнаго движенія точки $A$, при чемъ должно быть $BC = CA = CO$. Остальныя точки отрѣзка $BA$ будутъ описывать эллипсы.

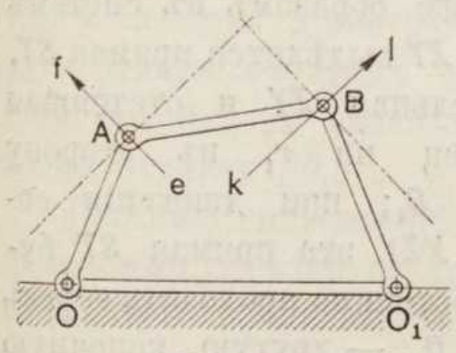


Фиг. 215.

Этимъ замѣчаніемъ мы закончимъ бѣглый обзоръ главнѣйшихъ особенностей движенія отрѣзка внутри неподвижнаго угла,—полученныя заключенія дадутъ намъ возможность сразу разобраться во всѣхъ деталяхъ движенія механизмовъ съ двумя поступательными парами; къ разсмотрѣнію этихъ механизмовъ мы теперь и перейдемъ.

## § 32. Механизмъ съ поступательными парами $A$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $OO_1$. Муфта Ольдгэма. Станокъ Ліонардо-да-Винчи.

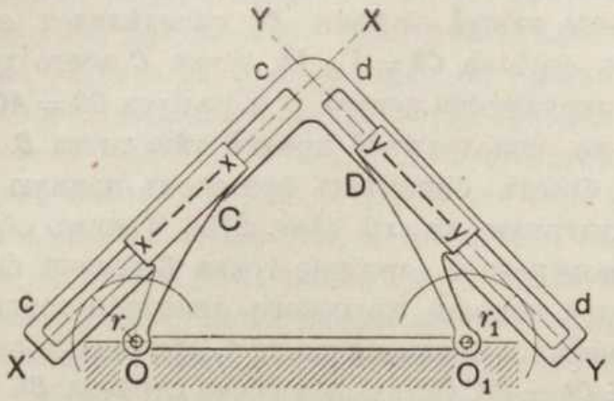
Предположимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый обыкновенный четырехшарнирный механизмъ $OABO_1$ (фиг. 216). Замѣнимъ теперь въ немъ д в ѣ рядомъ лежащихъ вращательныхъ пары его $A$ и $B$ парами поступательными. Съ этой цѣлью удаляемъ центры этихъ паръ въ безконечность по какимъ-либо направленіямъ $ef$ и $kl$. Предположивъ, что шипы этихъ паръ принадлежатъ звеньямъ $OA$ и $O_1B$, а втулки ихъ—звену $AB$, и замѣнивъ шипы ползунами $C$ и $D$, а втулки—направляющими $cc$ и $dd$, получимъ механизмъ, изображенный на фиг. 217.



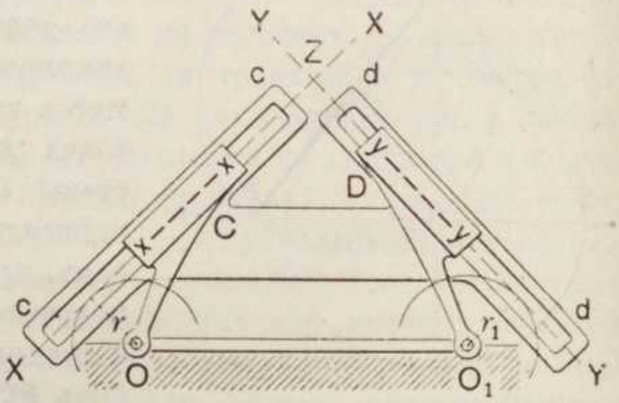
Фиг. 216.

Такъ какъ втулки паръ $A$ и $B$ были соединены другъ съ другомъ наглухо помощью звена $AB$, то теперь необходимо соединить наглухо другъ съ другомъ и замѣнившія ихъ направляющія $cc$ и $dd$; соединеніе это можно выполнить или такъ, какъ это изображено на фигурѣ 217, или по образцу фиг. 218,—результатъ получается одинъ и тотъ же. Нетрудно усмотрѣть, что ось $xx$ ползуна $C$, а вмѣстѣ съ нею и совпадающая съ ней своимъ направленіемъ ось $XX$ направляющихъ $cc$, при движеніи механизма будетъ все время касаться окружности, описанной изъ центра $O$ радіусомъ $r$, равнымъ разстоянію точки $O$ отъ этой прямой $XX$. Подобнымъ же образомъ ось $yy$ ползуна $D$ и совпавшая съ ней своимъ направленіемъ ось $YY$ направляющихъ $dd$, будутъ все время

касаться окружности, описанной изъ центра $O_1$ радіусомъ $r_1$, равнымъ разстоянію точки $O_1$ отъ прямой $YY$. Такъ какъ прямыя $XX$ и $YY$, очевидно, связаны другъ съ другомъ неразрывно, образуя систему жесткаго

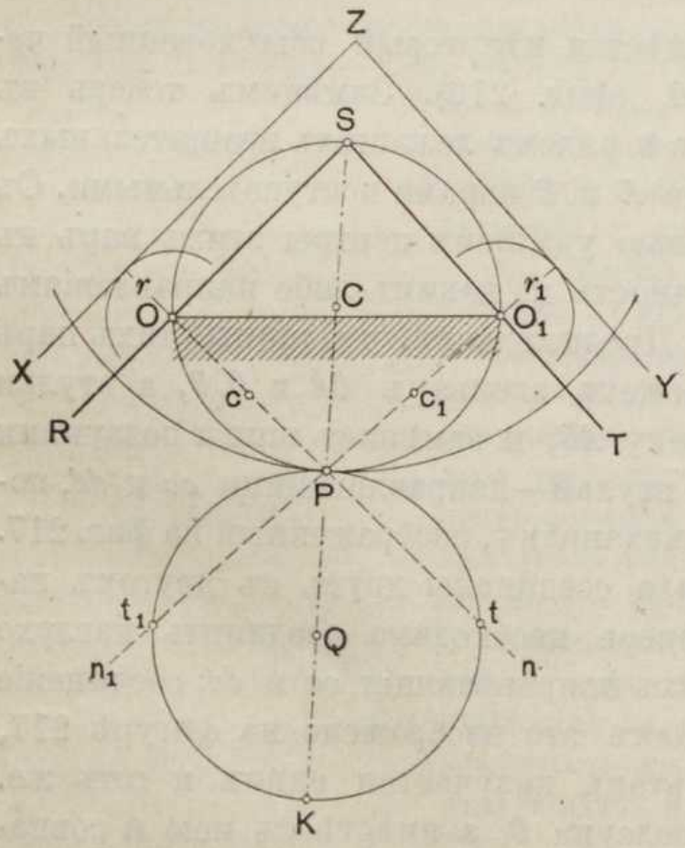



Фиг. 217.




Фиг. 218.

неизмѣняемаго угла $XZY$ (фиг. 218), гдѣ черезъ $Z$ обозначена точка пересѣченія прямыхъ $XX$ и $YY$, то все движеніе сводится къ движенію этого жесткаго угла $XZY$, такому, что одна сторона его $XZ$, все время касается окружности центра $O$ и радіуса $r$, а другая, $YZ$,—окружности центра $O_1$ и радіуса $r_1$. Очевидно, далѣе, что принадлежащая системѣ $XZ$ прямая $RS$, параллельная прямой $XZ$ и отстоящая отъ нея на разстояніи $r$ въ сторону центра $O$, при движеніи системы угла $XZY$ будетъ постоянно проходить черезъ точку $O$,—одну изъ конечныхъ точекъ неподвижнаго отрѣзка $OO_1$ (фиг. 219). Подобнымъ же образомъ въ системѣ прямой $ZY$ выдѣлится прямая $ST$, параллельная $ZY$ и отстоящая отъ нея на $r_1$ въ сторону центра $O_1$; при движеніи системы $XZY$ эта прямая $ST$ будетъ постоянно проходить черезъ точку $O_1$, — другую конечную точку того же неподвижнаго отрѣзка $OO_1$. Замѣчая, далѣе, что системы $XZ$ и $ZY$ связаны другъ съ другомъ жестко, заключаемъ, что жестко связанными окажутся также и прямыя $RS$ и $ST$, образующія, какъ видимъ, жесткій уголъ $RST$. Такимъ образомъ, все движеніе сводится къ движенію системы жесткаго угла $RST$, такому, что одна изъ сторонъ его, $RS$, будетъ постоянно проходить черезъ одну конечную точку $O$ неподвижнаго отрѣзка $OO_1$, а другая, $ST$,—черезъ другую, $O_1$ (фиг. 219).



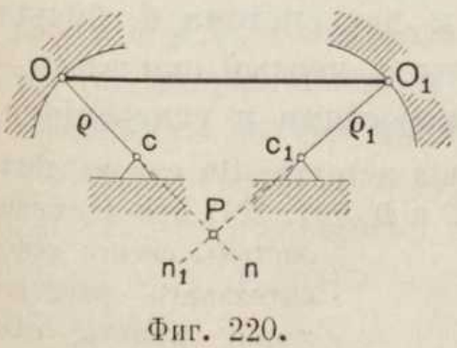

Фиг. 219.

Кинематическое изслѣдованіе такого движенія системы $RST$ никакихъ трудностей не представитъ, тѣмъ болѣе, что главнѣйшія данныя его уже приведены въ предыдущемъ параграфѣ. *Неподвижной полодіей* является здѣсь окружность $SP$ центра $C$, дуга $OSO_1$ коей, опирающаяся на отрѣзокъ $OO_1$, вмѣщаетъ данный уголъ $RST$. Такъ какъ нормали $On$ и $O_1n_1$ перпендикулярны къ прямымъ $RS$ и $ST$, то отрѣзокъ $SP$ будетъ служить діаметромъ неподвижной полодіи,—величиной постоянной. *Подвижной полодіей* явится, очевидно, окружность съ центромъ въ $S$ и радіусомъ, равнымъ $SP$, т.-е. діаметру окружности $C$. При движеніи системы угла центръ $S$ этой окружности будетъ перемѣщаться по окружности $SP$.

Что касается *поворотнаго круга*, то онъ будетъ равенъ кругу $C$ и расположится симметрично ему относительно полюса $P$. Дѣйствительно, точками, завѣдомо ему принадлежащими, являются точки $t$ и $t_1$, симметричныя точкамъ $O$ и $O_1$ относительно полюса $P$, и, затѣмъ, самъ этотъ полюсъ $P$. Отсюда слѣдуетъ, что окружность, проходящая черезъ точки $t$, $t_1$ и $P$ (окружность поворотнаго круга), будетъ симметрична окружности, проходящей черезъ точки $O$, $O_1$ и $P$. Къ тому же заключенію придемъ и другимъ путемъ, замѣтивъ, что разсматриваемое движеніе представляетъ собою обращеніе движенія отрѣзка $OO_1$ внутри неподвижнаго угла $RST$, а такъ какъ въ этомъ послѣднемъ движеніи поворотнымъ кругомъ является кругъ $C$, то въ нашемъ движеніи поворотнымъ кругомъ явится кругъ $PK$, симметричный кругу $SP$ относительно полюса $P$.

Замѣтимъ, кстати, что если уголъ $RST$ прямой, то отрѣзокъ $OO_1$ будетъ служить діаметромъ круга $C$, такъ что центръ $C$ поворотнаго круга будетъ въ этомъ случаѣ лежать посерединѣ отрѣзка $OO_1$, и радіусъ его будетъ равенъ $^1/_2\ OO_1$. Радіусъ подвижной полодіи будетъ равенъ отрѣзку $OO_1$.

Движеніе системы $RST$ нетрудно свести къ общему случаю движенія прямого отрѣзка по траекторіямъ его концовъ, если мы замѣтимъ, что центры кривизны траекторій тѣхъ точекъ системы $RST$, кои въ данный моментъ совпадаютъ съ центрами $O$ и $O_1$, лежатъ посерединѣ отрѣзковъ $PO$ и $PO_1$, въ точкахъ $c$ и $c_1$. Если точки системы $RST$, совпавшія въ данный моментъ съ опорными точками $O$ и $O_1$, мы условимся называть соотвѣтственно также черезъ $O$ и $O_1$, то можно будетъ сказать, что въ теченіе двухъ безконечно-малыхъ промежутковъ времени движеніе нашей системы жесткаго угла $RST$ сводится къ движенію отрѣзка $OO_1$ по круговымъ дугамъ центровъ $c$ и $c_1$ и радіусовъ $\rho = cO = {}^1/_2 PO$ и $\rho_1 = c_1O_1 = {}^1/_2 PO_1$ (фиг. 220).



Фиг. 220.

Для опредѣленія линейныхъ скоростей $v$ точекъ системы $RST$ необходимо имѣть законъ измѣненія угловыхъ скоростей $\omega$ этой системы;

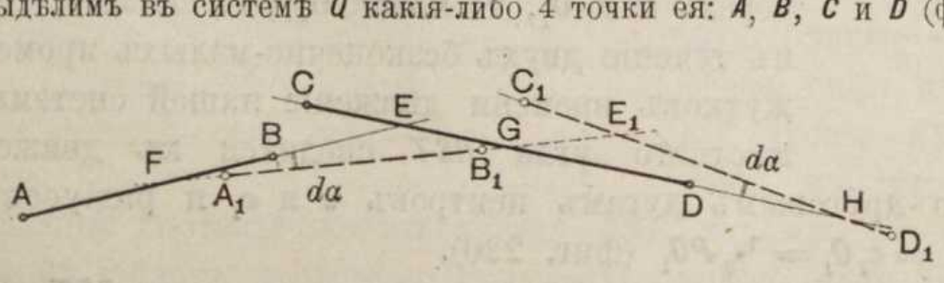
тогда всѣ $v$ опредѣлятся при помощи полюса мгновеннаго вращенія $P$. Для опредѣленія ускореній необходимо имѣть еще значенія угловыхъ ускореній $d\omega/dt$. По $\omega$ и $d\omega/dt$ опредѣлится для каждаго отдѣльнаго момента уголъ $\mu$, съ помощью котораго сейчасъ же найдемъ положеніе центра ускореній $G$, что и рѣшитъ поставленный вопросъ.

Движеніе системы жесткаго угла $RST$ отличается нѣкоторыми особенностями, выясненіемъ которыхъ мы теперь и займемся. Прежде всего, оказывается, что, какъ это было разъяснено въ предыдущемъ параграфѣ, всякая неподвижная точка $M$, могущая чертить свой слѣдъ на плоскости этого угла, вычертитъ на этой плоскости, при движеніи угла по концамъ отрѣзка, *эллипсъ*, величину и расположеніе коего легко опредѣлить, руководствуясь указаніями, данными въ предыдущемъ параграфѣ, а именно: соединивъ точку $M$ съ центромъ $C$ круга $SP$ прямой линіей, выдѣляемъ приходящійся на этой прямой діаметръ $m_1Cm_2$ круга $C$; тогда вершина $S$ угла $RST$ опредѣлитъ собою центръ искомаго эллипса, а хорды $Sm_1$ и $Sm_2$—направленія главныхъ его осей, при чемъ одной полуосью будетъ служить отрѣзокъ $Mm_1$ (для оси $Sm_2$), а другой—$Mm_2$ (для оси $Sm_1$). Само собою разумѣется, что точки, лежащія на окружности $SP$, будутъ вычерчивать на плоскости $RST$ прямыя,—діаметры подвижнаго круга центра $S$ и радіуса $SP$, т.-е. подвижной полодіи; точка $C$,—центръ неподвижной полодіи,—вычертитъ окружность подвижнаго центра $S$ и радіуса $SC$, при чемъ другихъ точекъ, могущихъ вычертить окружность, здѣсь уже не имѣется.

Прежде чѣмъ перейти къ выясненію другихъ особенностей движенія системы $RST$, обратимъ вниманіе на слѣдующее общее свойство плоскаго движенія:

Предположимъ, что въ нѣкоторой системѣ $Q$, могущей выполнять плоское движеніе, мы выдѣлили двѣ какія-либо точки ея и соединили ихъ прямой линіей. Если теперь этому прямолинейному отрѣзку, жестко, очевидно, связанному съ системой $Q$, мы сообщимъ движеніе, въ составъ котораго будетъ входить *вращеніе* съ угловой скоростью $\omega$ и угловымъ ускореніемъ $d\omega/dt$, то всякій другой прямолинейный отрѣзокъ, принадлежащій той же системѣ $Q$ и, значитъ, соединяющій другія двѣ точки ея, а вмѣстѣ съ этимъ, и вся система $Q$, будутъ выполнять *то же вращательное движеніе, что и первый отрѣзокъ*,—въ ту же сторону и съ тѣми же угловыми скоростями и ускореніями.

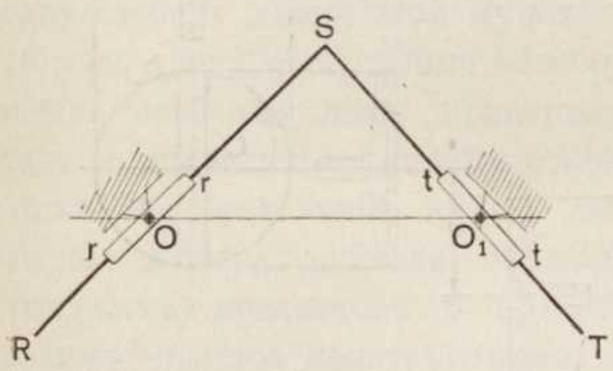
Доказать правильность этого очевиднаго положенія нетрудно. На самомъ дѣлѣ, выдѣлимъ въ системѣ $Q$ какія-либо 4 точки ея: $A$, $B$, $C$ и $D$ (фиг. 221), при движеніи системы своего относительнаго расположенія мѣнять, очевидно, не могущія; не будутъ, конечно, мѣнять его и прямые отрѣзки $AB$ и $CD$, ограниченные взятыми точками, такъ что уголъ $AED$, образованный этими отрѣзками, будетъ все время оста-




Фиг. 221.

ваться постояннымъ. Сообщимъ теперь одному изъ этихъ отрѣзковъ,—положимъ, $AB$,—нѣкоторое элементарное движеніе, въ результатѣ коего онъ за время $dt$ этого движенія перейдетъ изъ начальнаго положенія, $AB$, въ новое, $A_1B_1$, испытавъ при этомъ *угловое перемѣщеніе* $d\alpha$, такъ что можно написать, что все вращательное движеніе, имѣвшее здѣсь мѣсто, совершилось съ угловой скоростью $\omega = d\alpha/dt$ и угловымъ ускореніемъ $d\omega/dt = d^2\alpha/dt^2$. Пусть вслѣдствіе такого перемѣщенія отрѣзка $AB$ отрѣзокъ $CD$ перемѣстился въ новое положеніе $C_1D_1$. Такъ какъ уголъ $A_1E_1D_1$ равенъ углу $AED$, то изъ подобныхъ треугольниковъ $EFG$ и $E_1GH$ находимъ, что $\angle CHC_1 = d\alpha$, откуда слѣдуетъ, что отрѣзокъ $CD$ совершилъ за то же время $dt$ угловое перемѣщеніе $d\alpha$ и, значитъ, двигался съ той же (по величинѣ и направленію) угловой скоростью $\omega = dt/dt$ и угловымъ ускореніемъ $d\omega/dt = d^2\alpha/dt^2$, что и отрѣзокъ $AB$. Сказанное относительно отрѣзка $CD$ имѣетъ силу для любого другого прямого отрѣзка $XY$, соединяющаго любыя двѣ точки, $X$ и $Y$, системы $Q$, а значитъ, и для всей системы $Q$. Такимъ образомъ, для того, чтобы сообщить системѣ $Q$ вращательное движеніе съ угловой скоростью $\omega$ и угловымъ ускореніемъ $d\omega/dt$, необходимо и достаточно сообщить такое движеніе какому-либо прямому отрѣзку, принадлежащему этой системѣ. Тогда и окажется, что вся система $Q$ будетъ двигаться съ той же угловой скоростью и ускореніемъ, что и этотъ ея отрѣзокъ. Замѣтивъ это, перейдемъ къ дальнѣйшему изученію движенія системы $RST$.

Механизмъ, осуществляющій движеніе системы $RST$ (фиг. 219), выполняется на практикѣ различно; можно, напримѣръ, поступить такъ, какъ это изображено на фиг. 222, гдѣ на концахъ осей $O$ и $O_1$ представлены насаженными наглухо муфты $rr$ и $tt$, а система $RST$ выполнена въ видѣ двухъ стержней $RS$ и $ST$, жестко другъ съ другомъ связанныхъ въ неизмѣнный уголъ $RST$ и имѣющихъ ползать каждый въ своей муфтѣ. Продѣвъ эти стержни въ муфты, мы, очевидно, осуществимъ движеніе угла $RST$ по концамъ неподвижнаго отрѣзка $OO_1$, какъ это и требуется основной схемой (фиг. 219).



Фиг. 222.

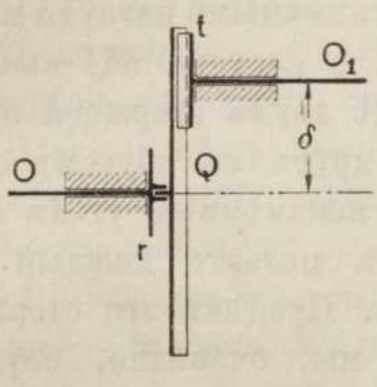
Нетрудно усмотрѣть, что полученный такимъ путемъ механизмъ можетъ быть полученъ прямо изъ основного (фиг. 217) путемъ *сокращенія звеньевъ* $OC$ и $O_1D$ *до нуля* и послѣдующей затѣмъ замѣны ползуновъ $C$ и $D$, теперь вращающихся около осей $O$ и $O_1$, муфтами $rr$ и $tt$; система направляющихъ ($cc$, $dd$) замѣняется системой $RST$ стержней, ползающихъ внутри муфтъ.

Предположимъ теперь, что одну изъ осей этого механизма (фиг. 222),—положимъ, ось $O$,—мы начали вращать съ угловой скоростью $\omega$ и угловымъ ускореніемъ $d\omega/dt$. Муфта $rr$, будучи наглухо закрѣплена на оси $O$, раздѣлитъ вращательное движеніе этой послѣдней и, въ свою очередь, принудитъ къ нему и ползающій внутри ея стержень $RS$. Итакъ, отрѣзокъ $RS$ жесткой системы $RST$ при вращеніи оси $O$ будетъ выполнять вращательное движеніе съ угловой скоростью $\omega$ и угловымъ ускореніемъ $d\omega/dt$, и, притомъ, въ ту же сторону, что и ось $O$. Согласно замѣчанію, сдѣланному выше, такое же вращательное

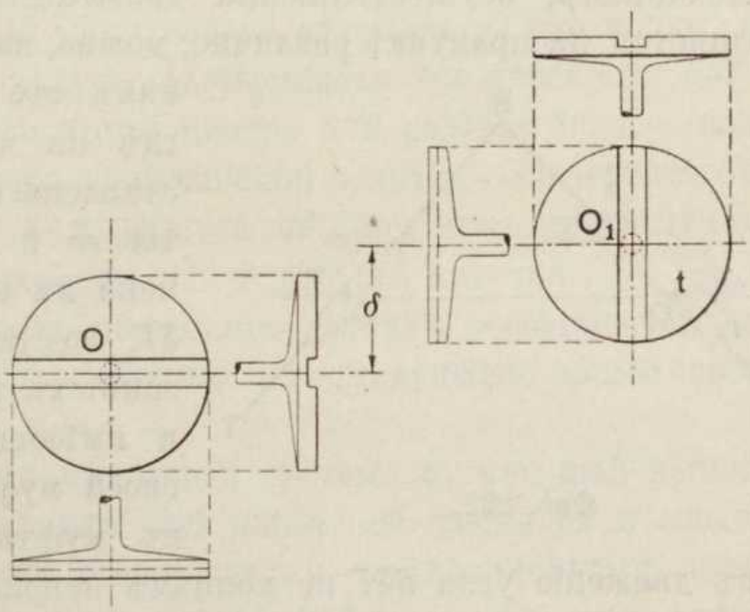
движеніе станетъ выполнять, одновременно съ *RS*, и всякій другой прямой отрѣзокъ системы *RST*, а значитъ, и самъ стержень *ST*, который, въ свою очередь, заставитъ повторять то же вращательное движеніе (въ ту же сторону и съ тѣми же скоростями) и муфту *tt*, а вмѣстѣ съ нею, значитъ, и ось $O_1$. Такимъ образомъ, механизмъ, изображенный на фиг. 222, обладаетъ тѣмъ интереснымъ свойствомъ, что *вращеніе оси O* тождественно, *безъ всякихъ измѣненій, передается на ось* $O_1$,—обѣ эти оси, *O* и $O_1$, будутъ вращаться въ одну и ту же сторону и съ одинаковыми угловыми скоростями и ускореніями.

На практикѣ этотъ механизмъ находитъ себѣ примѣненіе въ такъ называемой **муфтѣ Ольдгэма**, служащей для передачи вращенія съ одного вала на параллельный и продолжающій его другой. Муфта эта выполняется такъ:

Муфты *rr* и *tt* механизма, изображеннаго на фиг. 222, замѣняются шайбами *r* и *t*, наглухо закрѣпленными на концахъ данныхъ параллельныхъ и продолжающихъ другъ друга своими направленіями валовъ *O* и $O_1$ (фиг. 223). На каждой изъ этихъ шайбъ, со стороны, обращен-

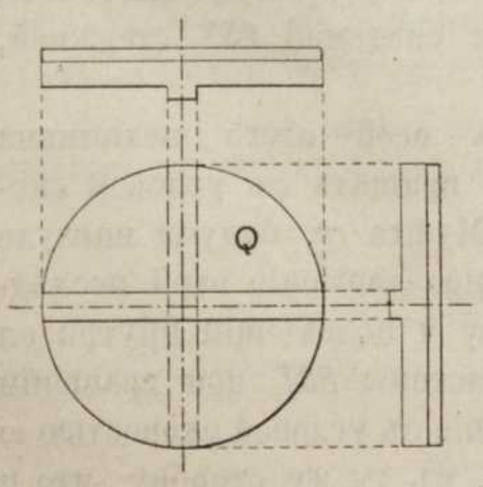



Фиг. 223.




Фиг. 224.

ной къ другому валу, дѣлается діаметральный прямоугольный вырѣзъ (фиг. 224). Чтобы соединить валы, вкладываемъ между шайбами *r* и *t* самую муфту *Q*, представляющую собою дискъ, на каждой изъ сторонъ коего имѣется по выступу, профиль коего соотвѣтствуетъ профилю вырѣза на шайбѣ; выступы эти другъ другу перпендикулярны (фиг. 225). Такимъ образомъ, введя эти выступы въ вырѣзы шайбъ и приведя систему *Q* въ движеніе, мы заставимъ каждый выступъ ползать вдоль своего вырѣза, а такъ какъ оси выступовъ образуютъ неизмѣнный уголъ (обычно прямой) и постоянно проходятъ черезъ неподвижныя




Фиг. 225.

точки $O$ и $O_1$ (отрѣзокъ $OO_1$ все время остается постояннымъ и неподвижнымъ), то, очевидно, движеніе системы муфты $Q$ сведется къ движенію системы угла $RST$ по концамъ неподвижнаго отрѣзка $OO_1$.

То обстоятельство, что уголъ $RST$ выполняется здѣсь прямымъ, для сущности дѣла значенія, какъ мы знаемъ, не имѣетъ и важно лишь въ томъ отношеніи, что позволяетъ значительно упростить процессъ опредѣленія тѣхъ эллипсовъ, кои намѣчаются на плоскости муфты $Q$ какимъ-либо прижатымъ къ ней неподвижнымъ остреемъ.

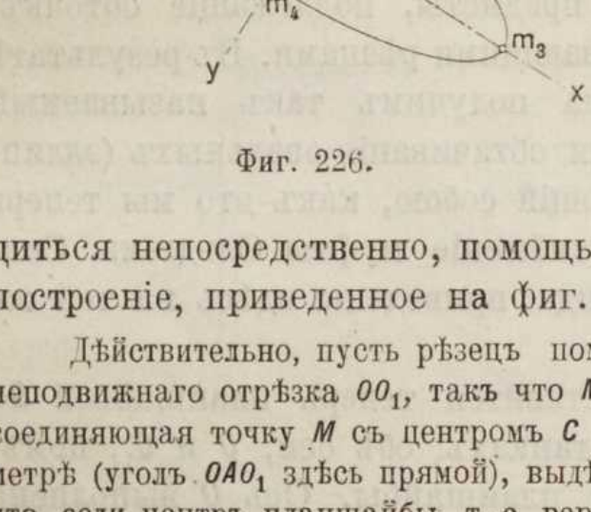
Достаточно точное представленіе о видѣ этой муфты даетъ снимокъ съ модели ея, имѣющейся въ Кабинетѣ Прикладной Механики при И. Т. У., воспроизведенный здѣсь на таблицѣ II.

Въ муфтѣ Ольдгэма валы $O$ и $O_1$ помѣщаются по разныя стороны муфты $Q$, вслѣдствіе чего обтачиваніе какихъ-либо предметовъ по эллипсу является здѣсь невыполнимымъ въ виду невозможности закрѣпленія обтачиваемаго предмета на муфтѣ $Q$,—этому будутъ мѣшать диски шайбъ и выступы муфты. Поэтому, въ интересахъ самой возможности такой обточки, оба вала $O$ и $O_1$ съ ихъ шайбами надо отвести по одну какую-либо сторону муфты $Q$; сообразно съ этимъ, перемѣстятся на одну сторону диска этой муфты и оба выступа, вслѣдствіе чего другая сторона диска совершенно освободится, и къ ней можно будетъ совершенно свободно какъ привертывать предметы, подлежащіе обточкѣ, такъ и подводить суппорты съ обтачивающими рѣзцами. Въ результатѣ этихъ преобразованій муфты Ольдгэма получимъ такъ называемый **станокъ Ліонардо-да-Винчи,** служащій для обтачиванія овальныхъ (эллиптическихъ) предметовъ и представляющій собою, какъ это мы теперь видимъ, простое конструктивное видоизмѣненіе муфты Ольдгэма. Снимокъ съ модели и чертежи общаго вида приведены здѣсь на той же табл. II.

Средняя шайба,—дискъ $Q$,—представится теперь планшайбой $QQ$ типа, употребляемаго въ токарныхъ станкахъ; обѣ оси, $O$ и $O_1$, помѣщены по одну и ту же сторону этой планшайбы. Ось $O$ выполнена сплошной и вращается въ неподвижныхъ подшипникахъ $K$ и $L$. Вторая ось $O_1$ выполняется въ видѣ достаточно широкаго полаго кольца $F$, черезъ которое и проходитъ эксцентрично первая, сплошная ось $O$. Эта полая ось $F$ вращается въ подшипникѣ $E$; геометрическая ось ея въ вертикальной проекціи изобразится точкой $O_1$, а въ горизонтальной—прямой $hh$, параллельной оси $O$ и отстоящей отъ нея на нѣкоторомъ разстояніи $d$. Какъ кольцо $F$, такъ и ось $A$ снабжены кулачками: первое кулачками прямоугольнаго профиля ($N$, $N$), а вторая—трапецоидальнаго ($M$, $M$); кулачки эти входятъ въ прорѣзы планшайбы ($N'$, $N'$) и ($M'$, $M'$), профиля коихъ соотвѣтствуютъ профилямъ кулачковъ. Прорѣзы эти, перпендикулярные другъ другу, расположены, понятно, съ задней стороны планшайбы; геометрическія оси ихъ и представятъ собою стороны прямого угла, проскальзывающія, при движеніи планшайбы, черезъ концы $O$ и $O_1$ неподвижнаго отрѣзка $OO_1$; вершина этого

прямого угла будетъ двигаться по окружности, описанной на $OO_1$, какъ на діаметрѣ.

При вращеніи оси $O$ кольцо $F$, подобно второй оси въ механизмѣ Ольдгэма, также приходитъ во вращеніе,—такое же, какое выполняетъ ось $O$,—и планшайба $QQ$ будетъ выполнять движеніе средняго диска $Q$ въ муфтѣ Ольдгэма, такъ что карандашъ, приставленный къ внѣшней сторонѣ диска $QQ$, начертитъ на ней эллипсъ; по той же причинѣ, предметъ, привернутый къ планшайбѣ, можетъ быть обточенъ по эллипсу. Эксцентриситетъ этихъ эллипсовъ можно мѣнять какъ путемъ перестановки острея на другія мѣста, такъ и путемъ измѣненія величины отрѣзка $OO_1$: подшипникъ $E$, въ которомъ вращается кольцо $F$, можетъ быть, въ извѣстныхъ, понятно, предѣлахъ, опредѣляемыхъ размѣрами внутренней полости кольца, передвигаемъ по горизонтальному направленію $xx$; въ каждомъ новомъ его положеніи его можно закрѣпить помощью винтовъ $yy$. Величина перемѣщенія этого подшипника, т.-е. оси $hh$ его, можетъ быть измѣрена помощью мѣтки $m$ на подвижномъ подшипникѣ $E$ и масштаба $n$ на неподвижныхъ направляющихъ $xx$. Установивъ рѣзецъ на разстояніи $c$ отъ $O$ (влѣво отъ $O$) и, значитъ, $c-d$ отъ $O_1$, получимъ на плоскости планшайбы $Q$ эллипсъ съ полуосями $c$ и $c-d$, какъ въ этомъ можно убѣдиться непосредственно, помощью построенія (фиг. 226), повторяющаго построеніе, приведенное на фиг. 214.



Фиг. 226.

Дѣйствительно, пусть рѣзецъ помѣщенъ въ точкѣ $M$, лежащей на продолженіи неподвижнаго отрѣзка $OO_1$, такъ что $MO = c$, а $MO_1 = c - d$, гдѣ $d = OO_1$. Прямая $MC$, соединяющая точку $M$ съ центромъ $C$ окружности, описанной на $OO_1$, какъ на діаметрѣ (уголъ $OAO_1$ здѣсь прямой), выдѣлитъ, очевидно, тотъ же діаметръ $OO_1$, такъ что, если центръ планшайбы, т.-е. вершина прямого угла, образованнаго осями вырѣзовъ, въ данный моментъ находится въ точкѣ $A$, то эллипсъ, который точка $M$ отмѣтитъ на плоскости планшайбы, будетъ имѣть своими полуосями, согласно общему правилу, отрѣзки $MO = c$ и $MO_1 = c - d$, при чемъ $MO$ будетъ служить полуосью для координатной оси $xAO_1x$, а $MO_1$—для другой координатной оси $yOAy$. При обозначеніяхъ, принятыхъ выше, находимъ, что эксцентриситетъ $e$ эллипса $m_1m_2m_3m_4$ выразится формулой

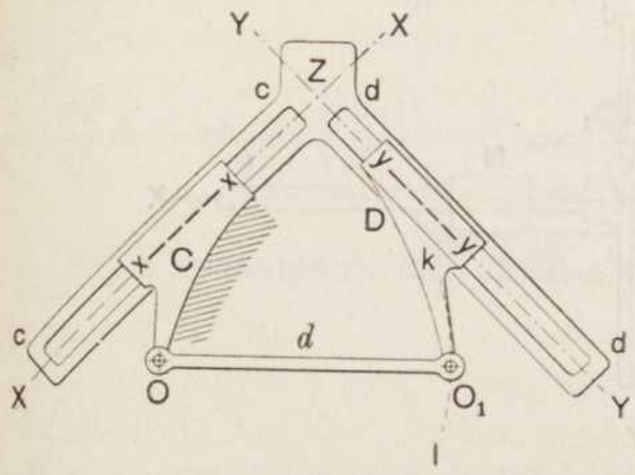
$$e = \frac{\sqrt{(2c-d)d}}{c}.$$

При $c = \frac{1}{2}d$ онъ будетъ равенъ нулю. Въ этомъ предѣльномъ случаѣ точка $M$ помѣщается противъ середины $C$ отрѣзка $OO_1$ и выдѣлитъ на планшайбѣ окружность центра $A$ и радіуса $AC = \frac{1}{2}\,OO_1$. При $c = d$, когда точка $M$ совпадаетъ съ точкой $O_1$, эксцентриситетъ будетъ равенъ единицѣ, и точка $M$ выдѣлитъ прямую $O_1Ax$. При прочихъ значеніяхъ $c$ получимъ рядъ различныхъ эллипсовъ.

Этими соображеніями мы закончимъ изученіе свойствъ полученнаго нами механизма и перейдемъ къ разсмотрѣнію слѣдующаго.

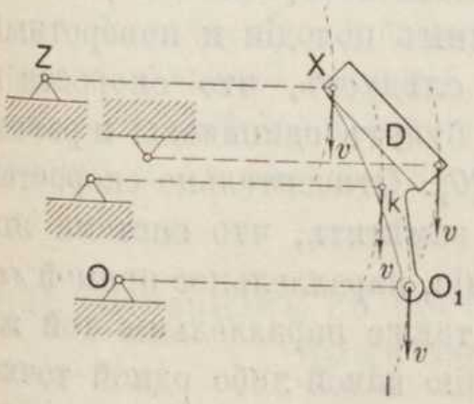
## § 33. Механизмъ съ поступательными парами *A* и *B* и неподвижнымъ звеномъ *OA*. Механизмъ двойного ползуна.

Замѣнивъ поступательными опять тѣ же вращательныя пары *A* и *B* (фиг. 216) и поставивъ полученный механизмъ на бывшее звено *AO*,— теперешнее *OC*, несущее на себѣ ползунъ *C* поступательной пары (*C*, *cc*),— получимъ механизмъ, изображенный здѣсь на фиг. 227. Звено $OO_1$ станетъ теперь вращаться около неподвижнаго центра *O*, такъ что точка $O_1$ его, принадлежащая въ то же самое время, какъ центръ вращательной пары $O_1$, и звену $O_1D$, будетъ перемѣщаться по окружности *kl* центра *O* и постояннаго радіуса $OO_1$. Посмотримъ теперь, какимъ движеніемъ при этихъ условіяхъ обладаетъ звено $O_1D$.



Фиг. 227.

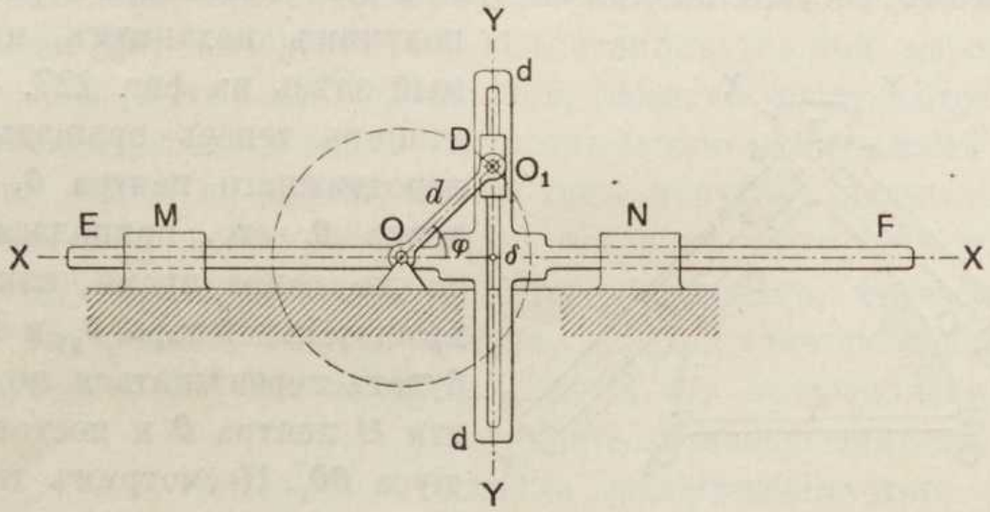
Прежде всего, очевидно, что система направляющихъ (*cc*, *dd*) можетъ двигаться *только поступательно* по направленію, опредѣляемому осью *xx* неподвижнаго теперь ползуна *C*. Что же касается ползуна *D*, то онъ можетъ перемѣщаться опять лишь *поступательно* вдоль оси *yy* направляющихъ *dd*. Отсюда слѣдуетъ, что абсолютнымъ движеніемъ системы $O_1D$ явится движеніе, составленное изъ упомянутыхъ двухъ поступательныхъ движеній, т.-е. опять нѣкоторое *поступательное движеніе*. Это значитъ, что всѣ точки системы $O_1D$ имѣютъ здѣсь одинаковыя траекторіи, проходимыя, притомъ, съ скоростями, равными между собою и параллельными. Замѣчая теперь, что траекторія одной изъ точекъ этой системы,— точки $O_1$,— намъ извѣстна вполнѣ, ибо, какъ это было показано выше, она представляетъ собою окружность радіуса $OO_1$ и центра *O*, заключаемъ, что траекторіями всѣхъ остальныхъ точекъ системы $O_1D$ явятся опять окружности того же радіуса *d* и соотвѣтственно расположенныхъ центровъ. Положеніе этихъ послѣднихъ опредѣляется помощью того соображенія, что для любой точки *X* системы $O_1D$ центръ *Z* круговой траекторіи ея расположится такъ, что всегда будетъ удовлетворено условіе $ZX \# OO_1$, гдѣ $OO_1 = d$ (фиг. 228).



Фиг. 228.

Въ томъ общемъ видѣ, какъ это изображено на фиг. 227, механизмъ нашъ примѣненія себѣ на практикѣ не находитъ, и его обычно преобразуютъ, сокращая звенья *OC* и $O_1D$ до нуля и дѣлая уголъ между осями *XX* и *YY* направляющихъ равнымъ прямому; тогда получается

механизмъ, изображенный на фиг. 229,—ради удобства чертежа, ось *XX* расположена горизонтально. Неподвижный ползунъ *C* замѣненъ теперь двумя неподвижными муфтами *M* и *N*, общая ось коихъ совпадаетъ съ осью *XX* подвижныхъ направляющихъ,—теперь стержня *EF*. Съ этимъ




Фиг. 229.

послѣднимъ жестко соединены направляющія *dd*, оставшіяся здѣсь отъ общаго механизма (фиг. 227); по нимъ ползаетъ ползунъ *D*, несущій на себѣ ось $O_1$ звена *d*, вращающагося вокругъ неподвижной оси *O*. Нетрудно сообразить, что разсматриваемый механизмъ можетъ быть полученъ прямо изъ механизма муфты Ольдгэма (фиг. 223) путемъ постановки его на муфту *rr*.

Механизмъ, изображенный на фиг. 229, получилъ названіе *механизма двойного ползуна*,—названіе, въ сущности, неудачное, ибо двойной ползунъ имѣется во всѣхъ механизмахъ съ двумя поступательными парами. Такъ какъ система ползуна *D* движется поступательно, то полюсъ мгновеннаго вращенія, а вмѣстѣ съ нимъ полодіи и поворотный кругъ, лежатъ въ безконечности, откуда слѣдуетъ, что скорости и ускоренія всѣхъ точекъ системы ползуна *D* будутъ одинаковы и равны скорости и ускоренію точки *O* кривошипа $OO_1$. Относительно скоростей и ускореній точекъ системы (*EF*, *dd*) надо замѣтить, что система эта вынуждена выполнять поступательное движеніе, параллельное прямой *xx*, такъ что всѣ скорости и ускоренія будутъ также параллельны той же оси *x* и будутъ равны скорости и ускоренію какой-либо одной точки этой системы. За эту точку удобнѣе всего взять точку пересѣченія оси *YY* съ осью *xx*, т.-е. проекцію $\delta$ точки $O_1$ на прямую *xx*. Обозначимъ отклоненіе $O\delta$ точки $\delta$ отъ неподвижной точки *O* черезъ $x$. Очевидно, что

$$O\delta = x = d\cos\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

гдѣ черезъ $\varphi$ обозначенъ уголъ отклоненія кривошипа $OO_1$ отъ его начальнаго положенія, въ которомъ онъ совпадалъ съ осью *xx*. Для опре-

дѣленія скоростей и ускореній точки $\delta$ надо имѣть зависимость угла $\varphi$ отъ времени, и пусть

$$\varphi = f(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Тогда получимъ, что

$$v = \frac{dx}{dt} = -d\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -d\sin\varphi . f'(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

и

$$j = \frac{dv}{dt} = -d\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - d\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -d\cos\varphi[f'(t)]^2 - d\sin\varphi . f''(t) \quad . \quad (d)$$

Если кривошипъ $OO_1$ вращается равномѣрно, т.-е. если

$$\varphi = at,$$

гдѣ $a = const$, такъ что $d\varphi/dt = a$ и $d^2\varphi/dt^2 = 0$, то формулы $(c)$ и $(d)$ примутъ для этого случая видъ:

$$v = -ad\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

и

$$j = -a^2 d\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

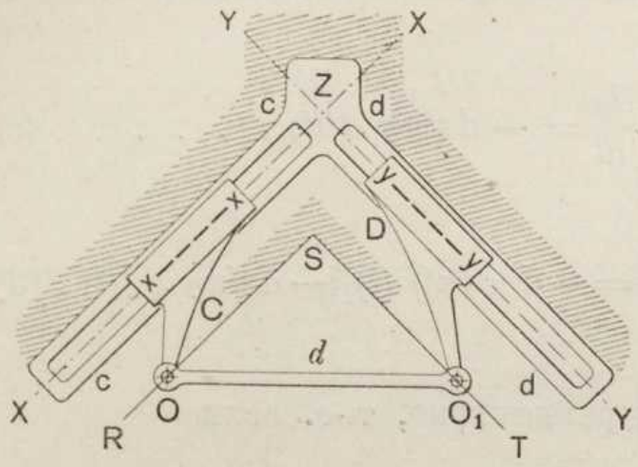
Такимъ образомъ, *при равномѣрномъ вращеніи кривошипа* $OO_1$ отклоненія $x$ точекъ системы ($EF$, $dd$) отъ точки $O$ измѣняются по гармоническому закону; аналогично измѣняются скорости и ускоренія этихъ точекъ, такъ что въ этомъ частномъ случаѣ нашъ механизмъ совершенно точно осуществляетъ гармоническія колебанія.

Очевидно, что разобранный нами механизмъ тождественъ съ механизмомъ паровой машины, имѣющей безконечно-длинный шатунъ; онъ находитъ себѣ примѣненіе въ нѣкоторыхъ типахъ малыхъ паровыхъ машинъ и въ насосахъ.

## § 34. Механизмъ съ поступательными парами $A$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $AB$. Эллипсографъ.

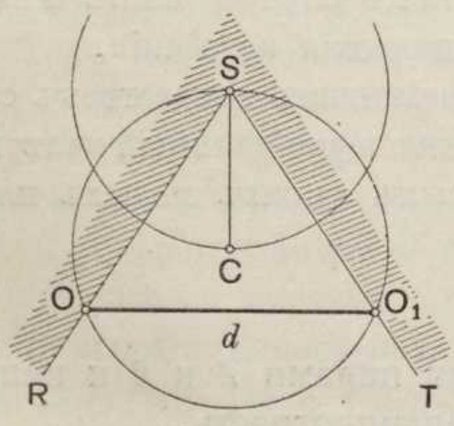
Разсмотримъ теперь послѣдній изъ механизмовъ съ двумя рядомъ лежащими парами, а именно, механизмъ съ поступательными парами $A$ и $B$ и неподвижнымъ звеномъ $AB$. Это послѣднее, послѣ замѣны вращательныхъ паръ поступательными, представитъ собою систему направляющихъ ($cc$, $dd$), жестко другъ съ другомъ соединенныхъ, какъ это было изображено на фиг. 217. Поэтому, поставивъ общій механизмъ (фиг. 217) на эту систему направляющихъ ($cc$, $dd$), замѣняющую звено $AB$, мы и получимъ требуемый механизмъ,—онъ изображенъ на

фиг. 230. Упомянутая система направляющихъ будетъ оставаться теперь неподвижной; по части *cc* ея будетъ ползать теперь ползунъ *C*, несущій на себѣ центръ *O* одной изъ вращательныхъ паръ звена $d$, а по части *dd*—ползунъ *D*, несущій центръ $O_1$ второй вращательной пары того же звена. Отсюда слѣдуетъ, что точки *O* и $O_1$ будутъ теперь двигаться по неподвижнымъ прямымъ *RS* и *ST*, первая изъ коихъ параллельна оси *XX* направляющихъ *cc*, а вторая—оси *YY* направляющихъ *dd*, а такъ какъ эти 2 прямыя, *RS* и *ST*, образуютъ неподвижный уголъ *RST*, то все движеніе сводится къ движенію постояннаго по длинѣ отрѣзка $OO_1 = d$ внутри неподвижнаго угла *RST* (фиг. 231). Движеніе это изучено нами детально въ одномъ изъ предыдущихъ параграфовъ, почему останавливаться теперь на немъ мы не будемъ; скажемъ лишь, что центръ *C* окружности, описанной на $OO_1$ и вмѣщающей уголъ *RST*, будетъ двигаться по окружности, описанной изъ центра *S* радіусомъ *SC*; точки *O* и $O_1$ будутъ двигаться по неподвижнымъ прямымъ *RS* и *ST*, а всѣ остальныя точки системы $OO_1$—по эллипсамъ, опредѣленіе коихъ, какъ мы видѣли, никакихъ трудностей не представляетъ.

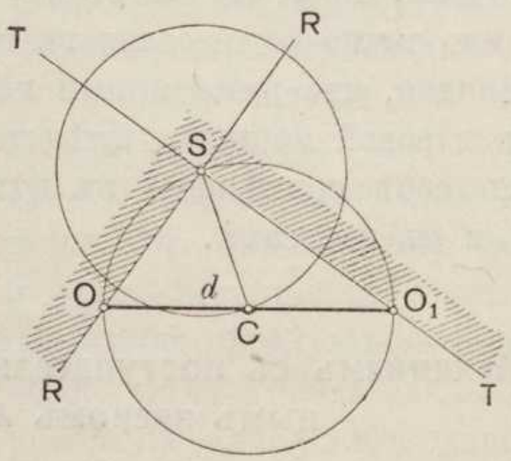



Фиг. 230.

Уголъ *RST* обычно выполняется прямымъ (фиг. 232); въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, центръ *C* помѣщается на самомъ отрѣзкѣ $OO_1$,




Фиг. 231.




Фиг. 232.

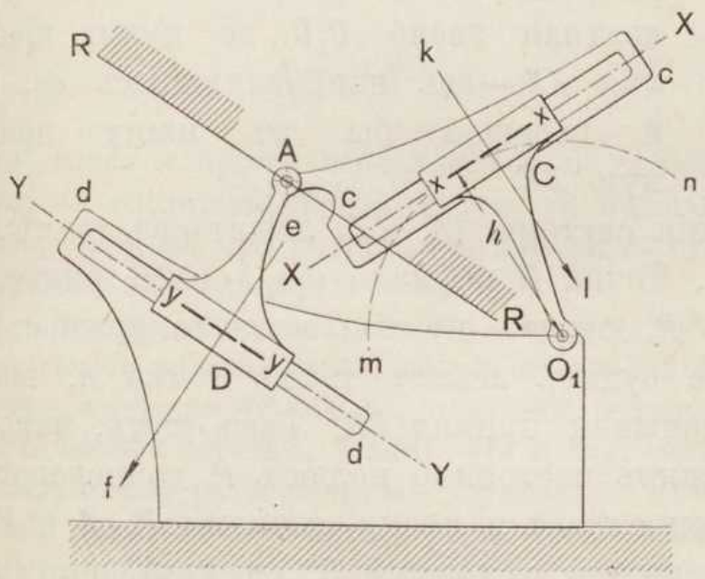
въ серединѣ его, и $SC = \frac{1}{2} OO_1$; построеніе эллиптическихъ траекторій выполняется по тѣмъ же правиламъ, что и въ общемъ случаѣ. Указанное свойство разбираемаго механизма, въ силу коего точки системы отрѣзка $OO_1$, при движеніи механизма, описываютъ на неподвижной плоскости эллипсы, дало поводъ примѣнить этотъ механизмъ на прак-

тикѣ для вычерчиванія эллипсовъ, почему онъ и получилъ названіе *эллипсографа*.

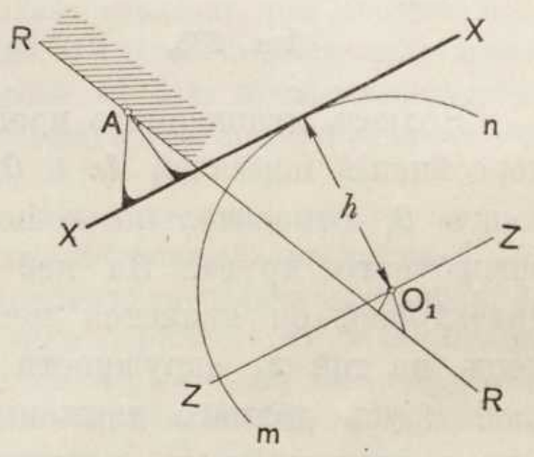
Этимъ мы и закончимъ обзоръ механизмовъ съ двумя рядомъ лежащими поступательными парами и перейдемъ теперь къ изслѣдованію механизма съ двумя поступательными парами, лежащими по діагонали.

## § 35. Механизмъ съ поступательными парами *O* и *B* и неподвижнымъ звеномъ $OO_1$.

Поставивъ общій четырехзвенный механизмъ (фиг. 209) на звено $OO_1$, замѣнимъ вращательныя пары его *O* и *B*, расположенныя по діагонали, парами поступательными. Предположивъ, что шипы этихъ паръ принадлежатъ звеньямъ *OA* и $BO_1$, а втулки ихъ—звеньямъ $OO_1$ и *AB*, и удаливъ центры *O* и *B* этихъ паръ въ безконечность по какимъ-либо направленіямъ *ef* и *kl*, замѣняемъ шипы ползунами, а втулки—направляющими; соединивъ теперь съ ползунами все то, что было соединено съ шипами, а съ направляющими все, соединявшееся съ втулками, получимъ механизмъ, изображенный на фиг. 233.




Фиг. 233.

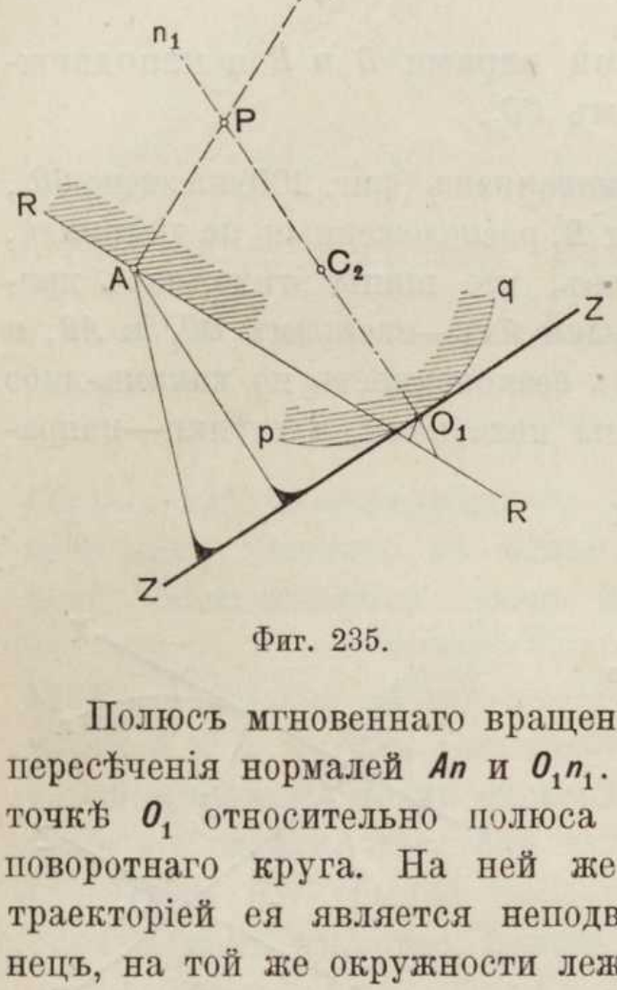



Фиг. 234.

Направляющія *dd* будутъ жестко скрѣплены съ бывшимъ звеномъ $OO_1$ и, значитъ, будутъ теперь неподвижны; вслѣдствіе этого точка *A* системы ползуна *D*, т.-е. центръ вращенія пары *A*, будетъ двигаться по прямой *RR*, параллельной оси *YY* направляющихъ *dd*. Далѣе, ось *xx* ползуна *C*, а значитъ, и совпадающая съ ней своимъ направленіемъ и скользящая вдоль нея ось *XX* направляющихъ *cc* будетъ все время касаться окружности *mn* центра $O_1$ и радіуса $h$, равнаго разстоянію точки $O_1$ до прямой *XX*, а такъ какъ точка *A* принадлежитъ системѣ направляющихъ *cc*, то и оказывается, что все движеніе сводится къ движенію нѣкоторой системы (*A*, *XX*), такому, что прямая *XX* этой системы, при движеніи этой послѣдней, остается все время касательной

къ окружности $mn$ центра $O_1$ и радіуса $h$, а точка $A$ той же системы скользитъ по неподвижной прямой $RR$ (фиг. 234).

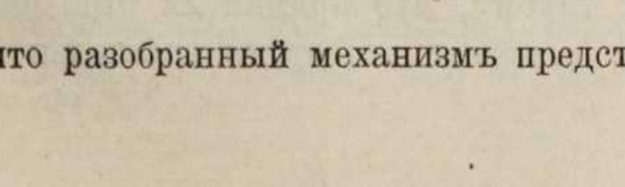
Схему эту можно упростить и дальше, замѣтивъ, что въ той же системѣ $(A, XX)$ можно выдѣлить еще прямую $ZZ$, параллельную $XX$, отстоящую отъ прямой $XX$ на разстояніе $h$ и постоянно проходящую черезъ данную неподвижную точку $O_1$. Тогда и окажется, что все движеніе можно свести еще къ движенію системы $(A, ZZ)$, точка $A$ коей скользитъ по неподвижной прямой $RR$, а прямая $ZZ$ той же системы постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку $O_1$ (фиг. 235). Нетрудно усмотрѣть, что схему эту можно было бы получить прямо изъ общаго механизма (фиг. 233), если бы мы сократили звено $O_1C$ до нуля; прямая $XX$,—ось направляющихъ $cc$,— и перешла бы въ нашу прямую $ZZ$.



Фиг. 235.

Полюсъ мгновеннаго вращенія системы $(A, ZZ)$ лежитъ въ точкѣ $P$ пересѣченія нормалей $An$ и $O_1n_1$. Точка $M$ нормали $O_1n_1$, симметричная точкѣ $O_1$ относительно полюса $P$, будетъ принадлежать окружности поворотнаго круга. На ней же будетъ лежать также точка $A$, ибо траекторіей ея является неподвижная прямая $RR$. Такъ какъ, наконецъ, на той же окружности лежитъ постоянно полюсъ $P$, то поворотный кругъ даннаго движенія опредѣлится тремя точками $P$, $A$ и $M$. Опредѣливъ на немъ положеніе центра ускореній $G$, сможемъ опредѣлить ускоренія всѣхъ точекъ системы $(A, ZZ)$.

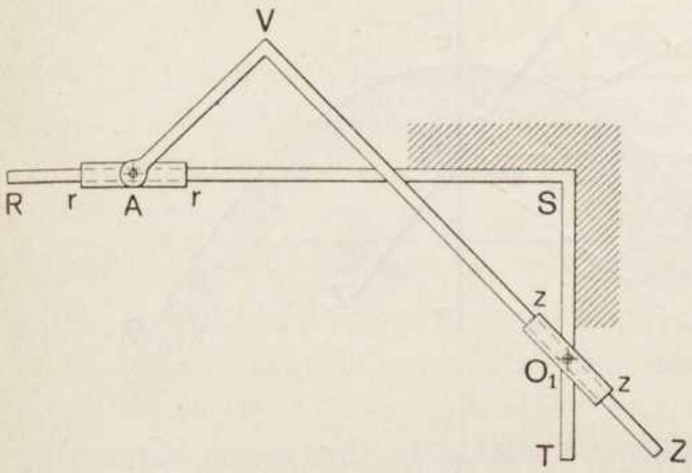
Замѣчая, далѣе, что центръ $C_2$ кривизны траекторіи той точки системы $(A, ZZ)$, которая въ данный моментъ совпала съ опорной точкой $O_1$, лежитъ посерединѣ отрѣзка $O_1P$, заключаемъ, что движеніе нашей системы въ разсматриваемый моментъ можно свести къ движенію системы отрѣзка $AO_1$, точка $A$ коего движется по неподвижной прямой $RR$, а точка $O_1$— по окружности $pq$ круга кривизны $C_2$ (фиг. 236). Сопоставляя эту схему съ схемой механизма съ одной поступательной парой $B$ (фиг. 174 и 178), заключаемъ, что только что разобранный механизмъ представляетъ собою частный случай меха-



Фиг. 236.

низма, изображеннаго на фиг. 174,—тотъ именно, когда радіусъ $OA$ обращается въ безконечность и траекторія точки $A$ становится прямолинейной.

Модель, осуществляющая общую схему нашего механизма, изображенную на фиг. 235, можетъ быть построена такъ: неподвижную систему прямой $RR$ и точки $O_1$ осуществляемъ въ видѣ системы жесткаго угла $RST$ (фиг. 237), сторона $RS$ коего будетъ служить прямолинейной траекторіей для точки $A$ подвижной системы, а на другой сторонѣ $ST$ выдѣлена точка $O_1$, черезъ которую имѣетъ постоянно проходить прямая $VZ$ подвижной системы. Эта послѣдняя осуществляется также въ видѣ жесткаго угла $AVZ$, при чемъ точку $A$, лежащую на одной сторонѣ его, снабжаемъ ползуномъ $rr$ съ осью вращенія въ $A$; направляющей для этого ползуна и будетъ служить сторона $RS$ неподвижнаго угла, проходящая черезъ точку $A$. Такимъ образомъ, при движеніи ползуна точка $A$ будетъ перемѣщаться по прямой $RS$.— Другая сторона подвижнаго угла $VZ$ скользитъ внутри муфты $zz$, вращающейся на оси, проходящей черезъ точку $O_1$ и ось муфты, такъ что прямая $VZ$ будетъ вынуждена постоянно проходить черезъ эту неподвижную точку $O_1$.



Фиг. 237.

Схема, данная на фиг. 235, осуществляется здѣсь, очевидно, вполнѣ: точка $A$ подвижной системы перемѣщается по прямой $RS$, принадлежащей неподвижной системѣ, а прямая $VZ$ той же подвижной системы постоянно проходитъ черезъ точку $O_1$ неподвижной системы. Угламъ $AVZ$ и $RST$, равно какъ отрѣзкамъ $AV$ и $SO$, можно давать самыя разнообразныя значенія, но каковы бы они ни были, характеръ движенія мѣняться не будетъ. Полодіи этого движенія находятся, вообще говоря, очень просто, но особенно просто опредѣленіе ихъ выполняется въ томъ случаѣ, когда, какъ это имѣетъ мѣсто въ модели, имѣющейся въ Кабинетѣ Прикл. Мех. при И. Т. У., углы $AVZ$ и $RST$ взяты прямыми, а отрѣзки $AV$ и $SO_1$ между собою равны,—этотъ случай и изображенъ на фиг. 237. Опредѣленіе полодій удобнѣе всего выполнить здѣсь аналитическимъ путемъ, разсуждая такъ:

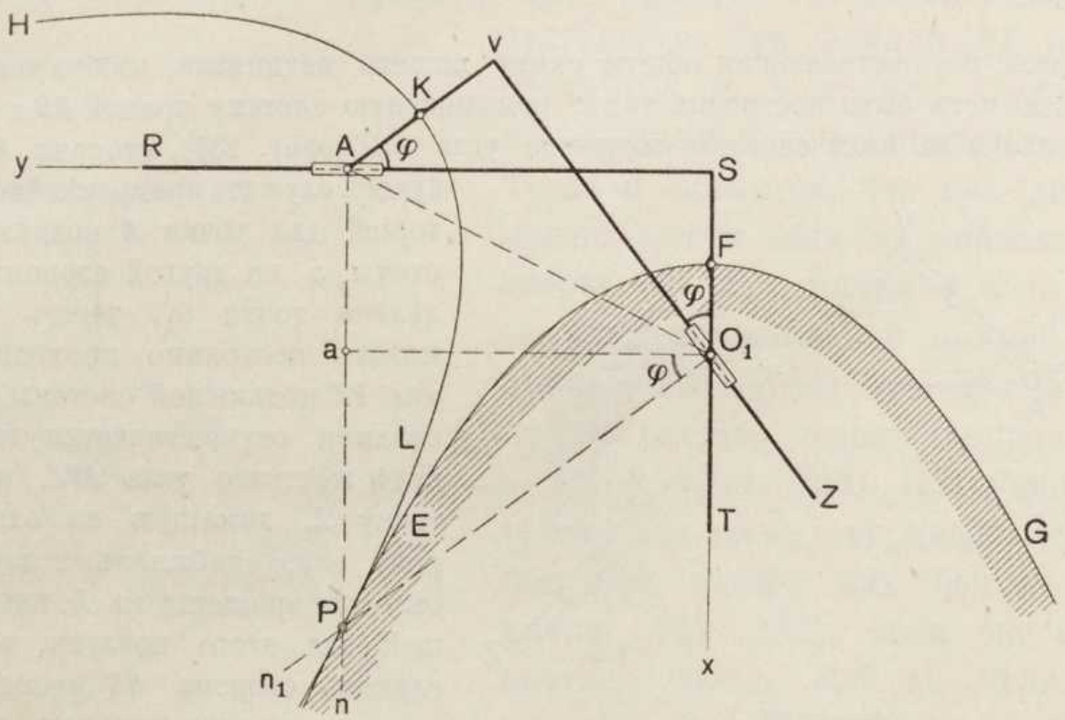
Пусть въ данный моментъ уголъ наклона стороны $AV$ подвижнаго угла къ сторонѣ $RS$ неподвижнаго равенъ $\varphi$ (фиг. 238). Очевидно, что уголъ $VO_1S$ также равенъ $\varphi$. Проводя нормали $An$ и $O_1n_1$, находимъ въ точкѣ ихъ пересѣченія полюсъ $P$ мгновеннаго вращенія системы $AVZ$. Замѣчая, что треугольники $AVO_1$ и $O_1SA$ равны и расположены симметрично, нетрудно показать, что будутъ равны и отрѣзки $PA$ и $PO_1$. Найдемъ теперь геометрическое мѣсто полюсовъ $P$. Если за ось абсциссъ $x$ возьмемъ одну изъ имѣющихся здѣсь неподвижныхъ прямыхъ,—напримѣръ, прямую $SO_1$,— а за ось ординатъ $y$—другую, прямую $SA$, то координатами точки $P$ окажутся отрѣзки $PA=x$ и $SA=y$. Проводя $O_1a \perp PA$, находимъ, что $\angle PO_1a=\varphi$, такъ что, если $SO_1=AV=p$, то $\cos\varphi=aO_1/PO_1=y/x$ и $\sin\varphi=Pa/PO_1=(x-p)/x$. Исключая параметръ $\varphi$, находимъ уравненіе

$$y^2+(x-p)^2=x^2,$$

приводящееся къ уравненію

$$y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right),$$

показывающему, что искомымъ геометрическимъ мѣстомъ будетъ служить парабола *EFG* съ осью *SX*, вершиной въ точкѣ *F* ($^1/_2 p$, 0), параметромъ $p$ и фокусомъ $O_1$.




Фиг. 238.

Для полученія подвижной полодіи обращаемъ движеніе, т.-е. останавливаемъ систему *AVZ* и начинаемъ двигать систему *RST*. Въ силу равенства угловъ *V* и *S* и отрѣзковъ *AV* и $SO_1$ заключаемъ, что это обращенное движеніе будетъ, по своему характеру, тождественно съ прямымъ движеніемъ, такъ что неподвижная полодія этого обращеннаго движенія будетъ тождественна съ неподвижной полодіей *EFG* движенія прямого и расположится соотвѣтственно ей, т.-е. представитъ собою параболу *HKL* съ осью *VA*, вершиной въ точкѣ *K*,—серединѣ отрѣзка *VA*,—параметромъ $p$ и фокусомъ *A*. Такимъ образомъ, обѣ полодіи разсматриваемаго движенія представляютъ собою одинаковыя параболы *HKL* и *EFG*, въ данный моментъ касающіяся другъ друга въ точкѣ *P*.

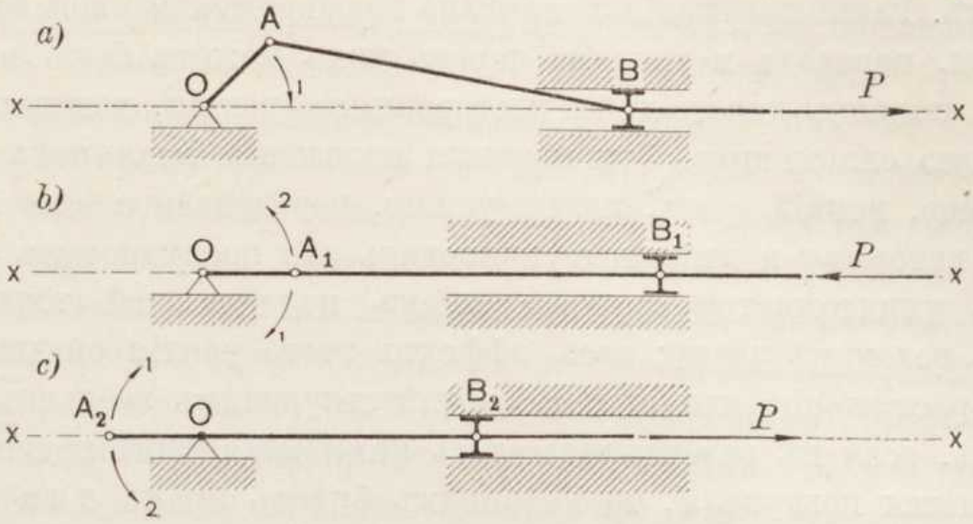
Эти замѣчаніями мы и закончимъ статью о преобразованіяхъ шарнирнаго четыреугольника, ибо дальнѣйшія его модификаціи, получаемыя путемъ замѣны трехъ и всѣхъ четырехъ вращательныхъ паръ его парами поступательными, никакого интереса не представляютъ, и теперь, въ порядкѣ изложенія нашего курса, перейдемъ къ разсмотрѣнію вопроса *о мертвыхъ положеніяхъ четырехшарнирнаго механизма* и о способахъ ихъ перехода.

## § 36. Переходъ черезъ мертвыя положенія.

Особенности мертвыхъ положеній механизма, отличающія ихъ отъ другихъ положеній его, удобнѣе всего выяснить путемъ разсмотрѣнія ставшаго классическимъ примѣра мертвыхъ положеній, наблюдаемыхъ въ механизмѣ обыкновенной паровой машины.

Предположимъ, такимъ образомъ, что у насъ имѣется механизмъ обыкновенной паровой машины *OAB* (фиг. 239а), и пусть на ползунъ его, вдоль неподвижной оси *Ox*, дѣйствуетъ движущая этотъ механизмъ

сила $P$, вообще говоря, перемѣнная какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Условимся называть ведущимъ то звено, которое непосредственно воспринимаетъ на себя воздѣйствіе движущей силы; всѣ остальные




Фиг. 239.

ныя звенья окажутся, такимъ образомъ, ведомыми. Согласно съ этимъ, въ нашемъ случаѣ ведущимъ звеномъ явится звено $B$, — ползунъ машины, — звенья же $OA$ (кривошипъ) и $AB$ (шатунъ) будутъ ведомыми.

Пока палецъ $A$ кривошипа $OA$ движется внѣ оси $Ox$, движеніе ведомыхъ звеньевъ $OA$ и $AB$ является, очевидно, вполнѣ опредѣленнымъ, но эта опредѣленность совершенно исчезаетъ въ тѣ моменты, когда кривошипъ $OA$ сливается съ осью $Ox$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, разсмотримъ положенія механизма, соотвѣтствующія этимъ моментамъ, — очевидно, что это будутъ положенія $OA_1B_1$ (фиг. 239b) и $OA_2B_2$ (фиг. 239c), въ которыхъ оси кривошипа и шатуна вытягиваются въ одну прямую, совпадающую съ прямой $Ox$, такъ что дѣйствующее усиліе $P$, передающееся на шатунъ, отъ него цѣликомъ передается на кривошипъ $OA$ вдоль оси этого послѣдняго, и, значитъ, уничтожается сопротивленіемъ опорной точки $O$. Ясно, что сдвинуть палецъ $A$ съ мѣстъ, занимаемыхъ имъ въ этихъ положеніяхъ, сила $P$ не можетъ, сколь бы велика она ни была, — въ эти моменты сила $P$ оказывается перпендикулярной къ траекторіи точки $A$; эффектъ дѣйствія этой силы сводится единственно къ продольному растяженію и сжатію ведомыхъ частей, и для того, чтобы кривошипъ могъ сдвинуться съ этихъ положеній, необходимо воздѣйствовать на него нѣкоторымъ добавочнымъ усиліемъ, могущимъ дать слагающую, перпендикулярную оси $Ox$. Очевидно, при этомъ, что кривошипъ пойдетъ въ ту сторону, въ какую подѣйствуетъ на него эта слагающая, такъ что, если кривошипъ вступилъ въ эти положенія, вращаясь, положимъ, по стрѣлкѣ (1), то сдвинуться съ этихъ положеній онъ можетъ, съ одинаковымъ удобствомъ, какъ по стрѣлкѣ (1), — въ ту же сторону, что и раньше, — такъ и по стрѣлкѣ (2), — въ сторону, противоположную прежней.

Такимъ образомъ, если ведущимъ звеномъ является ползунъ $B$, то въ механизмѣ паровой машины, разсматриваемомъ нами, можно выдѣ-

лить 2 положенія,—$OA_1B_1$ и $OA_2B_2$,—при которыхъ въ дальнѣйшемъ движеніи механизма появляется неопредѣленность: онъ можетъ или продолжать свое прежнее движеніе или замѣнить его прямо ему противоположнымъ. Такія положенія механизма называются *мертвыми*, и, какъ мы видѣли, переводъ механизма черезъ нихъ можетъ быть выполненъ лишь при помощи какого-либо посторонняго усилія, дающаго приличествующую слагающую. Эти мертвыя положенія механизма наступаютъ, вообще, всякій разъ, когда усиліе, передаваемое отъ ведущаго звена къ ведомому и имѣющее приводить это послѣднее въ движеніе, цѣликомъ уничтожается сопротивленіемъ неподвижной точки, имѣющейся въ ведомомъ звенѣ; весь эффектъ этого усилія сводится здѣсь лишь къ растяженію или сжатію соотвѣтствующихъ звеньевъ.

Итакъ, если въ разсматриваемомъ нами механизмѣ ведущимъ звеномъ является ползунъ $B$, то механизмъ будетъ имѣть д в а мертвыхъ положенія,—тѣ именно, при которыхъ палецъ кривошипа приходитъ на ось $Ox$. Но ясно, что этотъ самый механизмъ совсѣмъ не будетъ имѣть мертвыхъ положеній, если ведущимъ звеномъ явится кривошипъ $AO$,—если, напримѣръ, на валъ $O$ будетъ дѣйствовать какой-либо моментъ, сообщающій ему и наглухо закрѣпленному на немъ кривошипу $OA$ нѣкоторое вращательное движеніе. Въ этомъ случаѣ движеніе всѣхъ точекъ механизма является все время вполнѣ опредѣленнымъ,—силы, дѣйствующія на эти точки, будутъ образовывать со скоростями ихъ углы, отличные отъ прямого. Такимъ образомъ, существованіе мертвыхъ положеній зависитъ не только отъ геометрическихъ условій движенія его, т.-е. отъ его конфигураціи, состава, длинъ звеньевъ, и т. д., но еще и отъ характера воздѣйствія на него силы, движущей его, т.-е. отъ того, какое звено его является ведущимъ и какія—ведомыми. Одинъ и тотъ же механизмъ при одномъ ведущемъ звенѣ его можетъ имѣть мертвыя положенія, а при другомъ—не будетъ имѣть ихъ вовсе. Вотъ почему указаніе на существованіе мертвыхъ положеній должно быть всегда сопровождаемо указаніемъ соотвѣтствующаго ведущаго звена.

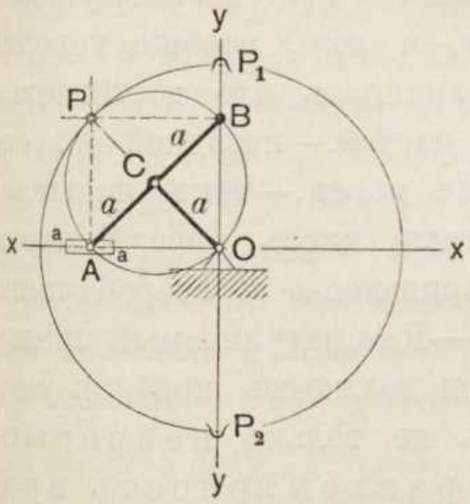
Въ вышеприведенномъ примѣрѣ переходъ черезъ мертвыя положенія могъ отразиться лишь на характерѣ движенія звеньевъ механизма, измѣняя его въ прямопротивоположную сторону; на типѣ же самого механизма переходъ этотъ не отзывался ничѣмъ,—механизмъ паровой машины такъ механизмомъ паровой машины и оставался. Бываютъ, однако, случаи, когда переходъ черезъ мертвыя положенія можетъ быть выполненъ въ сторону полнаго извращенія механизма,—механизмъ можетъ быть переведенъ въ другой, совершенно отъ него отличный, или даже, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, сведенъ къ простой одиночной вращательной парѣ, т.-е. фактически уничтоженъ. Такъ, напримѣръ, параллельный кривошипъ (фиг. 163), при любомъ ведущемъ звенѣ, $OA$ или $O_1B$, можетъ, при переходѣ черезъ мертвыя положенія, или остаться, попрежнему, параллельнымъ кривошипомъ или перейти въ совершенно другой механизмъ,—въ такъ называемый антипараллельный или сим-

метричный кривошипъ (фиг. 164). Нетрудно усмотрѣть, что антипараллельный кривошипъ, въ свою очередь, при любомъ ведущемъ звенѣ, можетъ перейти въ параллельный.

Механизмъ Сильвестра (фиг. 167) имѣетъ мертвыя положенія только тогда, когда ведущимъ звеномъ является бо̀льшее звено $O_1B$: мы видѣли, что, при совмѣщеніи звена $O_1B$ съ звеномъ $AB$, эти совпавшія звенья могутъ вращаться около центра $O_1$, какъ одно, звено же $OA$, совпавшее теперь съ $OO_1$, можетъ при этомъ оставаться совершенно неподвижнымъ, совсѣмъ не участвуя, такимъ образомъ, въ движеніи механизма; механизмъ, какъ видимъ, фактически исчезаетъ,—онъ переходитъ въ простой кривошипъ, въ простую вращательную пару.

Въ обыкновенномъ четырехшарнирномъ механизмѣ (фиг. 175), при ведущемъ звенѣ $c$, мертвыя положенія получаются тогда, когда звено $a$ совпадетъ своимъ направленіемъ съ звеномъ $b$ или его продолженіемъ (фиг. 160 и 161). Аналогичныя два мертвыхъ положенія получимъ при ведущемъ звенѣ $a$.

Механизмъ эллипсографа, въ коемъ движеніе сводится къ движенію прямого отрѣзка $AB$ внутри неподвижнаго прямого угла $xOy$ (фиг. 240), можетъ быть сведенъ къ такому механизму паровой машины, у котораго кривошипъ $OC$ равенъ шатуну $AC$; точка $B$ системы шатуна, положеніе коей опредѣляется условіемъ $AC = CB$, будетъ двигаться по прямой $yOy$, перпендикулярной къ оси $xOx$. При движущемъ звенѣ $OC$ мертвыя положенія получаются тогда, когда кривошипъ $OC$ совпадаетъ съ осью $yOy$; въ эти моменты ось шарнира $A$ будетъ совпадать съ осью $O$, и шатунъ $AC$ совпадетъ съ кривошипомъ; очевидно теперь, что, при дальнѣйшемъ вращеніи кривошипа, шатунъ, совпавшій съ нимъ, сможетъ или пройти своей точкой $A$ вправо отъ $O$ или, съ одинаковымъ правомъ, вращаться вмѣстѣ съ нимъ около оси $A$, теперь совпавшей съ $O$, причемъ ползунъ $A$ будетъ оставаться неподвижнымъ,—въ этомъ случаѣ механизмъ фактически исчезаетъ, переходя въ простую вращательную пару.



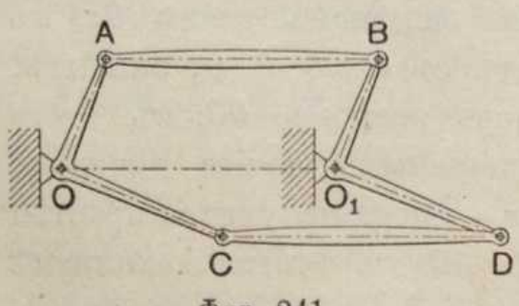
Фиг. 240.

Поставивъ этотъ механизмъ на звено $OC$, получимъ механизмъ Витворта, у котораго звено $AC$ равно разстоянію между центрами $O$ и $C$. Мертвыя положенія получаются здѣсь при ведущемъ звенѣ $Ox$, въ тѣ моменты, когда ось шарнира $A$ совпадаетъ съ осью $O$ и, значитъ, звено $AC$ совпадаетъ съ неподвижнымъ теперь звеномъ $OC$; съ этого момента звено $AC$ можетъ оставаться неподвижнымъ, и все движеніе сведется къ вращенію одного лишь звена $Ox$,—снова получится простая вращательная пара.—При движущемъ звенѣ $AC$ въ этомъ механизмѣ мертвыхъ положеній не будетъ совсѣмъ.

Изъ всего вышеизложеннаго явствуетъ, что мертвыя положенія механизма являются нежелательными и опасными, главнымъ образомъ, потому, что механизмъ можетъ или совсѣмъ не выйти изъ нихъ, т.-е. остановиться, или выйти не въ должномъ направленіи, что можетъ повлечь за собою переходъ его въ другой механизмъ, совершенно отличный отъ прежняго, а въ нѣкоторыхъ случаяхъ даже фактическое уничтоженіе механизма,—переводъ его въ простую вращательную пару. Ясно, поэтому, какое основное значеніе для конструктора имѣютъ тѣ способы и пріемы, коими обезпечивается возможность перевода механизма черезъ эти мертвыя положенія въ должномъ направленіи; разборомъ этихъ пріемовъ мы теперь и займемся.

Наиболѣе простымъ изъ нихъ является пріемъ, основанный на общемъ всѣмъ тѣламъ природы *свойствѣ инерціи:* если бы на нашъ механизмъ дѣйствовали только одни движущія усилія, а силъ сопротивленія (въ томъ числѣ и силы тренія) не было совсѣмъ, то, несомнѣнно, каждый механизмъ, разъ пущенный въ ходъ, мгновенно самъ по себѣ остановиться въ мертвомъ положеніи не могъ бы, ибо инерція его движущихся частей немедленно перевела бы его въ должномъ направленіи черезъ эти критическія положенія. Такъ какъ на дѣлѣ, при движеніи каждаго механизма, на него воздѣйствуютъ не только силы дѣйствующія, но также и силы различныхъ сопротивленій, то силы инерціи могутъ оказаться недостаточными для обезпеченія и выполненія упомянутаго перевода черезъ мертвыя положенія, и ихъ, вообще говоря, приходится соотвѣтствующимъ образомъ увеличивать, что достигается должнымъ увеличеніемъ массъ движущихся частей,—посадкой на соотвѣтствующіе валы нѣкоторыхъ добавочныхъ массъ,—такъ называемыхъ *маховиковъ.* Величина и размѣры этихъ массъ опредѣляются спеціальными подсчетами, основанія коихъ приведены во второй части нашего курса,—въ «Динамикѣ механизмовъ».—Разсматриваемый пріемъ является особенно удобнымъ потому, что, при должномъ подборѣ упомянутыхъ массъ, всегда можетъ обезпечить не только непрерывность движенія механизма, но также и равномѣрность вращенія валовъ, снабженныхъ этими массами, что иногда является весьма желательнымъ и даже необходимымъ.

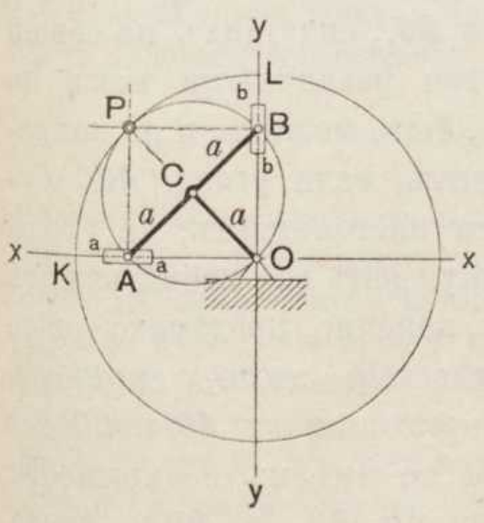
Въ тѣхъ случаяхъ, когда посадка маховиковъ является почему-либо нежелательной, приходится примѣнять другіе пріемы, простѣйшимъ изъ коихъ является *присоединеніе къ данному механизму* однотипнаго съ нимъ *другого, мертвыя положенія коего наступаютъ въ моменты, не совпадающіе съ моментами мертвыхъ положеній перваго.* Особенно часто такое соединеніе примѣняется въ параллельномъ кривошипѣ (фиг. 241) и выполняется такъ:



Фиг. 241.

Допустимъ, что у насъ имѣется параллельный кривошипъ $OABO_1$ (фиг. 241), ведущимъ звеномъ коего является одинъ изъ

кривошиповъ его,—положимъ, $OA$. Такъ какъ $OA \# O_1B$, то полюсъ системы спарника $AB$ лежитъ въ безконечности, вслѣдствіе чего линейныя скорости точекъ $A$ и $B$ оказываются также равными и параллельными; равными и одинаково направленными окажутся поэтому и угловыя скорости системъ кривошиповъ $OA$ и $O_1B$. Переходъ черезъ мертвыя положенія можетъ нарушить это равенство, ибо можетъ перевести этотъ механизмъ въ механизмъ антипараллельнаго кривошипа, въ которомъ полюсъ системы $AB$ будетъ находиться, вообще говоря, на конечномъ разстояніи отъ отрѣзка $AB$, а угловыя скорости кривошиповъ $OA$ и $O_1B$ будутъ отличаться другъ отъ друга какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Чтобы этого нарушенія не было, присоединяемъ къ данному параллельному кривошипу другой параллельный кривошипъ $OCDO_1$, имѣющій, однако, мертвыя положенія, *отличныя по времени отъ первыхъ*; при этомъ кривошипы каждой пары, сидящей на одномъ и томъ же валу, соединяемъ другъ съ другомъ наглухо, какъ это и показано на чертежѣ, при чемъ уголъ $AOC$, а значитъ, и равный ему уголъ $BO_1D$, дѣлаемъ отличнымъ отъ $0^0$ и $180^0$. Ясно теперь, что если въ этомъ новомъ двойномъ механизмѣ ведущей явится одна изъ системъ кривошиповъ $AOC$ или $BO_1D$, то движеніе его окажется непрерывнымъ, и опасность перехода въ антипараллельный кривошипъ будетъ устранена совсѣмъ. Дѣйствительно, если въ мертвомъ положеніи окажутся кривошипы $AO$ и $BO_1$ одного изъ составляющихъ механизмовъ, то кривошипы $CO$ и $DO_1$ будутъ въ положеніи, отличномъ отъ мертваго и, слѣдовательно, переведутъ первые черезъ ихъ мертвое положеніе въ опредѣленномъ и должномъ направленіи. Такую же роль сыграютъ первые кривошипы $AO$ и $BO_1$, когда въ мертвомъ положеніи окажутся вторые, $CO$ и $DO_1$. Подобное соединеніе двухъ параллельныхъ кривошиповъ примѣняется въ паровозахъ, гдѣ именно такимъ образомъ и соединяютъ двѣ (и больше) пары колесъ съ каждой стороны паровоза; уголъ $AOC$ берется здѣсь очень небольшимъ.—На нашемъ чертежѣ длины кривошиповъ $OC$ и $OA$ показаны, ради общности, разными; обычно ихъ дѣлаютъ одинаковыми.

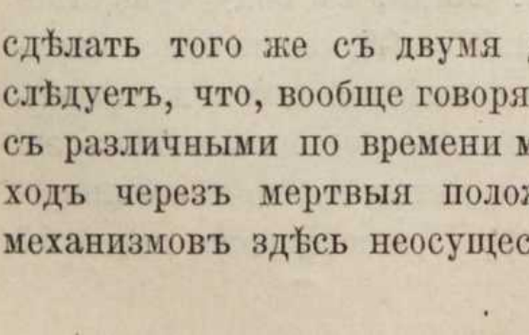


Фиг. 242.

Тѣмъ же пріемомъ можно устранить неопредѣленность, возникающую въ мертвыхъ положеніяхъ механизма эллипсографа (фиг. 240). Съ этой цѣлью въ точкѣ $B$ звена $AC$ закрѣпляемъ шипъ, втулку коего выполняемъ въ ползунѣ $bb$, двигающемся по прямой $yOy$, перпендикулярной къ прямой $xOx$. Тогда, въ виду существованія равенства $AC = CB$, можно будетъ принять, что у насъ имѣется два тождественныхъ механизма обыкновенной паровой машины съ однимъ и тѣмъ же кривошипомъ $OC$ и шатунами $CA$ и $CB$, равными между собою и соединенными въ одну жесткую систему $AB$ (фиг. 242). При ведущемъ звенѣ $OC$

мертвыми положеніями ихъ будутъ служить, какъ мы знаемъ, тѣ, при которыхъ шипы *A* и *B* ползуновъ будутъ совпадать съ центромъ *O*; но такъ какъ въ новомъ нашемъ сдвоенномъ механизмѣ эти мертвыя положенія наступаютъ въ различные моменты, то опасность извращенія механизма и перевода его въ простую вращательную пару можно считать устраненной, такимъ образомъ, вполнѣ,—остановки ползуновъ у точки *O*, при непрерывномъ вращеніи кривошипа *OC*, здѣсь быть уже не можетъ.

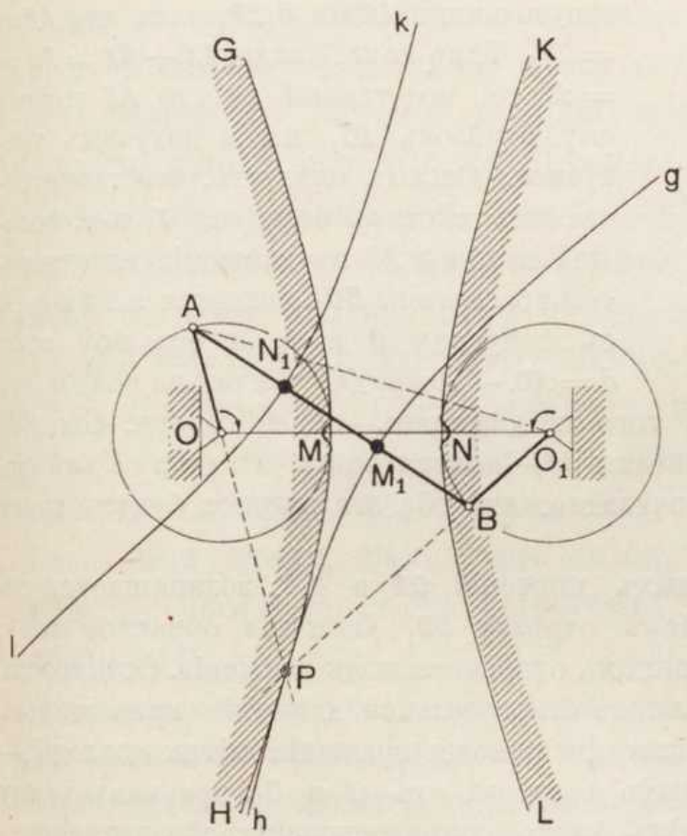
Нетрудно усмотрѣть, что непремѣннымъ условіемъ возможности примѣненія этого пріема является или *удаленіе полюсовъ* системъ обоихъ спарниковъ (или шатуновъ) *въ безконечность* по любымъ двумъ, обязательно несовпадающимъ другъ съ другомъ, направленіямъ, или, въ случаѣ нахожденія этихъ полюсовъ на конечныхъ разстояніяхъ, *сліяніе ихъ въ одинъ общій*. Примѣръ сложнаго механизма, удовлетворяющаго первому требованію, даетъ механизмъ, изображенный на фиг. 241, гдѣ полюсъ спарника *AB* удалился въ безконечность по направленію *OA*, а спарника *CD*—по направленію *OC*; примѣръ второго—механизмъ, изображенный на фиг. 242, гдѣ у обоихъ шатуновъ *AC* и *CB*, образующихъ одну и ту же неизмѣняемую систему *AB*, полюсъ мгновеннаго вращенія является, очевидно, общимъ,—онъ лежитъ въ точкѣ *P* пересѣченія радіуса *OC* съ окружностью, описанной изъ центра *O* радіусомъ *OK*, равнымъ *AB*.—Согласно съ этимъ правиломъ, заключаемъ, что антипараллельный кривошипъ не можетъ быть соединенъ съ другимъ антипараллельнымъ кривошипомъ по схемѣ, аналогичной схемѣ фиг. 241, ибо полюсы системъ обоихъ спарниковъ будутъ совпадать здѣсь лишь въ отдѣльные моменты; вообще же говоря, при каждомъ данномъ положеніи механизма они будутъ находиться въ различныхъ точкахъ плоскости, какъ это можно видѣть на фиг. 243, такъ что, при тождествѣ угловыхъ скоростей звеньевъ *OA* и *OC*, соединенныхъ въ одну жесткую систему, угловыя скорости кривошиповъ $DO_1$ и $BO_1$, сидящихъ на общей оси $O_1$, окажутся различными какъ по величинѣ, такъ, быть можетъ, и по направленію, и, значитъ, если уголъ *AOC* будетъ оставаться постояннымъ, то уголъ $DO_1B$ будетъ вынужденъ все время мѣнять (въ извѣстныхъ, конечно, предѣлахъ) свою величину. Вслѣдствіе этого, скрѣпивъ во-едино пару кривошиповъ *AO* и *OC*, мы въ то же время не имѣемъ возможности сдѣлать того же съ двумя другими кривошипами $BO_1$ и $DO_1$, откуда слѣдуетъ, что, вообще говоря, сдвоеніе антипараллельныхъ кривошиповъ съ различными по времени мертвыми положеніями невозможно, и переходъ черезъ мертвыя положенія при помощи этого пріема сдвоенія механизмовъ здѣсь неосуществимъ.



Фиг. 243.

Въ этомъ случаѣ, какъ и, вообще, во всѣхъ тѣхъ, гдѣ въ моменты мертвыхъ положеній полюсъ мгновеннаго вращенія не удаляется въ безконечность, переходъ черезъ эти критическія положенія можетъ быть обезпеченъ при помощи *полодій абсолютнаго или относительнаго движенія*. Этотъ пріемъ примѣненія полодій удобнѣе всего разобрать на примѣрѣ того же механизма антипараллельнаго кривошипа.

Предположимъ, что у насъ имѣется такой механизмъ $OABO_1$ (фиг. 244). Найдемъ для него сначала полодіи абсолютнаго движенія шатуна $AB$ (т.-е. движенія его относительно неподвижнаго звена $OO_1$ или, что то же, неподвижной плоскости чертежа), — это будутъ наши обычныя полодіи, подвижная и неподвижная. Разрѣшивъ съ ихъ помощью поставленный вопросъ, мы постараемся затѣмъ рѣшить его немного иначе, при помощи полодій относительнаго движенія звеньевъ $OA$ и $O_1B$.




Фиг. 244.

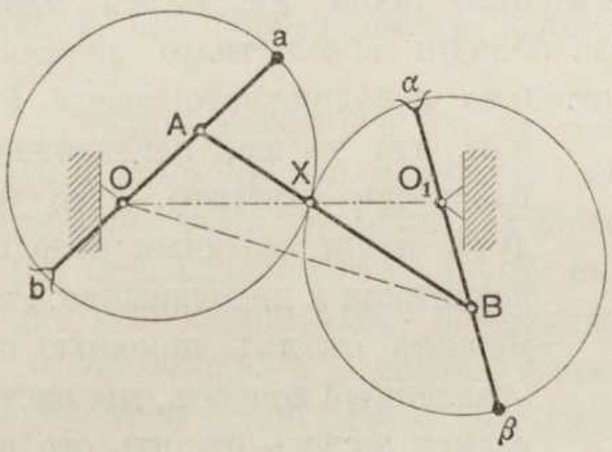
Найдемъ сначала неподвижную и подвижную полодіи даннаго движенія. Полюсъ мгновеннаго вращенія системы шатуна $AB$ будетъ лежать каждый разъ въ точкѣ пересѣченія радіусовъ $OA$ и $O_1B$ или ихъ продолженій, и пусть въ данный моментъ онъ находится въ точкѣ $P$ (фиг. 244). Въ нашемъ механизмѣ всегда имѣютъ мѣсто равенства $OA = O_1B$ и $OO_1 = AB$, что указываетъ на равенство треугольниковъ $AOO_1$ и $ABO_1$, приводящее къ равенству угловъ $OAO_1$ и $BO_1A$, откуда, далѣе, слѣдуетъ, что $\triangle PAO_1$ равнобедренный, такъ что $PA = PO_1$. Замѣчая теперь, что $PA - PO = OA = a = const$, и подставляя вмѣсто $PA$ равный ему отрѣзокъ $PO_1$, находимъ основное соотношеніе

$$PO_1 - PO = OA = a = const,$$

показывающее, что геометрическимъ мѣстомъ полюсовъ мгновеннаго вращенія системы $AB$, т.-е. неподвижной полодіей движенія этой системы, является здѣсь гипербола $GHKL$, фокусы коей расположены въ точкахъ $O$ и $O_1$, а дѣйствительная ось равна $OA = a$. Съ прямой $OO_1$ эта гипербола встрѣтится въ точкахъ $M$ и $N$, — граничныхъ точкахъ своей дѣйствительной оси, — такъ что $MN = OA = a$; эти же точки $M$ и $N$ служатъ полюсами мгновеннаго движенія для моментовъ мертвыхъ положеній: первая, — точка $M$, — для того момента, когда палецъ $A$ приходитъ на ось $OO_1$ влѣво отъ $O$, а вторая, $N$, — вправо.

Нетрудно убѣдиться, далѣе, что подвижной полодіей системы $AB$ будетъ служить такая же гипербола $ghkl$ съ дѣйствительной осью $M_1N_1 = MN = a$ и съ фокусами $A$ и $B$. Въ одномъ изъ мертвыхъ положеній совпадутъ точки $M$ и $M_1$ этихъ двухъ гиперболъ, а въ другомъ — точки $N$ и $N_1$.

Найдемъ теперь полодіи относительнаго движенія звеньевъ $OA$ и $O_1B$ и сначала опредѣлимъ полодію системы $AO$ относительно системы $O_1B$. Для этого, согласно общему правилу, сообщаемъ всей системѣ $OABO_1$ движеніе, обратное движенію кривошипа $O_1B$, послѣ чего онъ остановится, а отрѣзокъ $OA$ станетъ перемѣщаться по круговымъ дугамъ радіусовъ $O_1O$ и $BA$ и центровъ $O_1$ и $B$. Полюсъ мгновеннаго вращенія системы $OA$ будетъ лежать каждый разъ въ точкѣ $X$ пересѣченія радіусовъ $O_1O$ и $BA$ (фиг. 245), при чемъ всегда будетъ имѣть мѣсто соотношеніе $BX + XO_1 = OO_1 = AB = d = const.$ Дѣйствительно, соединивъ прямой линіей точки $O$ и $B$, найдемъ, что углы при точкахъ $A$ и $O$ равны, вслѣдствіе чего будутъ равны треугольники $AXO$ и $O_1XB$, такъ что $AX = XO_1$. Такъ какъ, далѣе, $AX + BX = AB = d$, то, подставляя вмѣсто $AX$ равный ему отрѣзокъ $XO_1$, мы и получимъ требуемое. Отсюда слѣдуетъ, что геометрическимъ мѣстомъ полюсовъ $X$, т.-е. полодіей системы $AO$ въ движеніи ея относительно системы $BO_1$, является эллипсъ съ фокусами $B$ и $O_1$ и большой осью $d = AB$. — Нетрудно убѣдиться подобнымъ же образомъ, что подвижной полодіей того же движенія,—иначе говоря, полодіей движенія системы $BO_1$ относительно системы $AO$,—явится опять эллипсъ съ фокусами $A$ и $O$ и такой же осью $d$; очевидно, что оба эти эллипса будутъ другъ другу равны.



Фиг. 245.

Получивъ обѣ полодіи относительныхъ движеній $OA$ и $O_1B$, возвращаемся къ основному движенію, для чего сообщаемъ отрѣзку $OO_1$ движеніе, обратное тому, какое онъ имѣлъ въ только что разобранномъ относительномъ движеніи. Остановивъ его такимъ образомъ, получимъ, что должное относительное движеніе кривошиповъ $AO$ и $BO_1$ можетъ быть осуществлено также при помощи вращенія обѣихъ полодій,—эллипсовъ $ab$ и $\alpha\beta$,—вокругъ неподвижныхъ фокусовъ ихъ $O$ и $O_1$, при чемъ между этими полодіями все время должно имѣть мѣсто соприкосновеніе, обезпечиваемое тѣмъ или инымъ путемъ. Въ моментъ одного мертваго положенія нашего механизма эти полодіи соприкоснутся другъ съ другомъ концами $a$ и $\alpha$ своихъ большихъ осей, а въ моментъ другого—другими концами, $b$ и $\beta$, причемъ эти соприкосновенія, какъ, впрочемъ, и всѣ остальныя соприкосновенія этихъ полодій, будутъ имѣть мѣсто на прямой $OO_1$: точка $X$ касанія обѣихъ этихъ полодій будетъ находиться все время на прямой $OO_1$, лишь перемѣщаясь по ней то въ одну сторону, то въ другую,—понятно, въ извѣстныхъ, легко опредѣлимыхъ предѣлахъ. Точки $A$ и $B$ будутъ находиться все время на одной прямой съ точкой $X$, а длина отрѣзка $AB$ будетъ оставаться все время неизмѣнной и равной $OO_1$. Очевидно, наконецъ, что

$$Ob = O_1\alpha = {}^1/_2\ (AB - OA) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (a)$$

$$Oa = O_1\beta = {}^1/_2\ (AB + OA) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (b)$$

Итакъ, неподвижной полодіей системы шатуна $AB$ (фиг. 244) служитъ гипербола $GHKL$, а подвижной, наглухо связанной съ системой $AB$, гипербола $ghkl$; при движеніи механизма вѣтвь $gh$ его подвижной полодіи будетъ катиться по неподвижной вѣтви $GH$, а вѣтвь $kl$—по неподвижной же вѣтви $KL$. При непрерывномъ вращеніи кривошипа $AO$ это каченіе будетъ совершаться также непрерывно, не прекращаясь и въ моменты мертвыхъ положеній. Такимъ образомъ, должное движеніе

шатуна $AB$ можетъ быть осуществлено не только путемъ вращенія кривошипа $AO$, но также и каченіемъ подвижной полодіи $ghkl$, связанной съ шатуномъ, по неподвижной полодіи $GHKL$, при чемъ, очевидно, послѣдній пріемъ былъ бы предпочтительнѣе потому, что при немъ никакихъ мертвыхъ положеній механизма не было бы,—переходъ черезъ нихъ ничѣмъ бы не отличался отъ перехода черезъ любое другое положеніе его и никакой неопредѣленности въ движеніе шатуна $AB$ внести бы не могъ: въ моменты этихъ мертвыхъ положеній шатунъ $AB$ былъ бы вынужденъ вращаться одинъ разъ около точки $M$ прямой $OO_1$,—съ ней въ этотъ моментъ совпала бы точка $M_1$ шатуна $AB$,—а второй—около точки $N$, съ которой здѣсь совпала бы точка $N_1$ шатуна.

Обезпечить каченіе полодій можно различно,—можно примѣнять нажимъ одной полодіи на другую, но можно пользоваться также зацѣпленіемъ, снабжая обѣ полодіи зубцами; должныя очертанія профилей этихъ зубцовъ можно получить помощью указаній, приведенныхъ ниже, въ статьѣ о зубчатой передачѣ. Принимая, однако, во вниманіе, что обѣ полодіи имѣютъ безконечно-удаленныя точки и что, вслѣдствіе этого, зацѣпленіе по всей длинѣ полодій осуществлено быть не можетъ, мы и отказываемся отъ полнаго использованія полодій и, осуществляя движеніе системы $AB$, попрежнему, при помощи рычаговъ $OA$ и $O_1D$, пользуемся этими полодіями лишь частично,—только въ тѣ моменты движенія, когда система рычаговъ оказывается несостоятельной, т.-е. въ моменты обоихъ мертвыхъ положеній. Здѣсь, очевидно, придется выдѣлить соотвѣтствующіе куски обѣихъ полодій и обезпечить каченіе ихъ или нажимомъ, или, что гораздо удобнѣе, помощью зубцовъ, расположенныхъ должнымъ образомъ на этихъ кускахъ. Обычно, однако, довольствуются лишь однимъ зубцомъ для каждаго изъ мертвыхъ положеній, т.-е. въ одной изъ системъ,—положимъ, въ подвижной системѣ $AB$,—выполняютъ въ точкахъ $N_1$ и $M_1$ ея, принадлежащихъ полодіи этой системы,—по зубцу, а въ соотвѣтствующихъ имъ точкахъ $N$ и $M$ полодіи системы $OO_1$ помѣщаютъ соотвѣтствующія этимъ зубцамъ вилки (впадины). Послѣ присоединенія къ нашему механизму этихъ зубцовъ и вилокъ для нихъ цѣль наша будетъ, очевидно, достигнута вполнѣ: нашъ механизмъ, вообще говоря, будетъ приводиться въ движеніе помощью вращенія кривошипа $AO$; но въ моменты мертвыхъ положеній, когда это вращеніе не можетъ обезпечить должнаго движенія шатуна $AB$, мы вводимъ въ игру соотвѣтствующіе этимъ моментамъ куски обоихъ полодій, обезпечивая каченіе ихъ въ эти моменты при помощи должнаго зубчатаго зацѣпленія,—система шатуна $AB$ будетъ вынуждена такимъ образомъ продолжать должное движеніе и въ эти критическіе моменты. Задача наша будетъ, такимъ образомъ, разрѣшена вполнѣ. Профиля зубцовъ могутъ быть выбраны произвольно; имъ, напримѣръ, можно дать видъ кулачковъ и т. п.; полученіе профилей соотвѣтствующихъ вилокъ никакого труда не представитъ. На фиг. 244 схематически показаны два кулачка, посаженныхъ въ точ-

кахъ $M_1$ и $N_1$ шатуна $AB$, и соотвѣтствующія имъ вилки, закрѣпленныя въ точкахъ $M$ и $N$ неподвижнаго звена $OO_1$.

Тотъ же пріемъ можетъ быть примѣненъ и въ томъ случаѣ, когда должное движеніе системы шатуна $AB$ обезпечивается помощью *полодій относительнаго движенія*. Въ нашемъ случаѣ должное движеніе шатуна $AB$ можетъ быть обезпечено, какъ мы видѣли, путемъ вращенія полодій $ab$ и $\alpha\beta$ вокругъ осей $O$ и $O_1$ (фиг. 245), съ тѣмъ лишь условіемъ, чтобы между этими полодіями постоянно поддерживалось соприкосновеніе и отсутствовало скольженіе. Какъ и выше, это соприкосновеніе и отсутствіе скольженія можетъ быть обезпечено устройствомъ зубчатой передачи, зубцы коей пришлось бы, слѣдовательно, размѣстить по всему контуру этихъ полодій—эллипсовъ. Въ виду конечныхъ размѣровъ обоихъ эллипсовъ осуществленіе такой передачи никакихъ бы трудностей не представило, но если бы мы, по тѣмъ или инымъ причинамъ, не желали этого и хотѣли, попрежнему, приводить систему $AB$ въ движеніе помощью рычаговъ $AO$ и $BO_1$, то указанной зубчатой передачей могли бы опять воспользоваться лишь въ тѣ моменты, когда рычажная система оказывается безсильной, т.-е. въ моменты мертвыхъ положеній; тогда можно пустить въ ходъ соотвѣтствующіе куски обоихъ полодій,—это будутъ, очевидно, куски ихъ у точекъ ($a$ и $\alpha$) и ($b$ и $\beta$),—при чемъ можно поступать, какъ выше: у точки, напримѣръ, $a$ полодіи $ab$ взять зубецъ или, какъ это показано на чертежѣ, кулакъ, а у точки $\alpha$ пристроить соотвѣтствующую ему вилку; для момента слѣдующаго мертваго положенія зубецъ можно закрѣпить у точки, положимъ $b$,—тогда вилку для него придется пристроить въ точкѣ $\beta$ другого эллипса,—и вопросъ будетъ, такимъ образомъ, исчерпанъ.

Такъ какъ точки ($a$, $b$) и ($\alpha$, $\beta$) лежатъ на концахъ большихъ осей нашихъ эллипсовъ, то закрѣпленіе зубцовъ и вилокъ удобнѣе всего выполнить на продолженныхъ надлежащимъ образомъ рычагахъ $OA$ и $O_1B$, какъ это показано на фиг. 245. Очевидно, что эти рычаги надо наростить еще на величину $A\alpha = B\beta = {}^1/_2(AB - AO)$ и, въ другую сторону, на такую же величину $Ob = O_1\alpha = A\alpha$.

Всѣ эти разсужденія вполнѣ приложимы ко всякимъ другимъ механизмамъ, имѣющимъ мертвыя положенія. Согласно вышесказанному, для устраненія возникающей здѣсь неопредѣленности, опредѣляемъ соотвѣтствующіе мертвымъ и ближайшимъ къ нимъ положеніямъ куски полодій абсолютнаго движенія или относительнаго,—смотря по тому, что будетъ удобнѣе,—и устраиваемъ для этихъ моментовъ соотвѣтствующее зубчатое зацѣпленіе; воздѣйствіемъ и участіемъ этого зацѣпленія переходъ черезъ мертвыя положенія будетъ обезпеченъ вполнѣ.

Такъ, напримѣръ, въ механизмѣ *эллипсографа* (фиг. 240) участки неподвижной полодіи, ближайшіе къ мертвымъ положеніямъ механизма, будутъ лежать у точекъ $P_1$ и $P_2$ вертикальнаго діаметра $yOy$; соотвѣтствующіе участки подвижной полодіи будутъ лежать у точки $B$ ея.

Поэтому для обезпеченія перехода черезъ мертвыя положенія можно поступить здѣсь такъ: конецъ $B$ шатуна $AB$ снабдить кулачкомъ, а въ точкахъ $P_1$ и $P_2$ пристроить соотвѣтствующія ему вилки. Нетрудно усмотрѣть, что шатунъ $AB$, упершись, при одномъ изъ своихъ мертвыхъ положеній въ вилку $P_1$, при дальнѣйшемъ вращеніи рычага $CO$ будетъ вынужденъ повернуться около полюса $P_1$, такъ что другой конецъ его $A$, немедленно выйдетъ изъ совпаденія съ точкой $O$, и мертвое положеніе окажется перейденнымъ и притомъ, очевидно, въ должномъ направленіи. То же будетъ имѣть мѣсто и въ другомъ мертвомъ положеніи, когда зубецъ $B$ упрется въ вилку $P_2$. Объ эти вилки схематически показаны на фиг. 240.

Тѣмъ же пріемомъ можно обезпечить переходъ черезъ мертвыя положенія и въ *механизмѣ Сильвестра* (фиг. 167). Здѣсь можно использовать полодіи относительнаго движенія звеньевъ $AO$ и $BO_1$ и, опредѣливъ участки ихъ вблизи мертвыхъ положеній, снабдить одну изъ этихъ системъ зубцами, закрѣпивъ ихъ на надлежащихъ мѣстахъ, а другую—соотвѣтствующими имъ вилками. Нетрудно разобраться подобнымъ же образомъ и во всѣхъ другихъ случаяхъ мертвыхъ положеній. Пріемъ остается тотъ же. Само собою разумѣется, что къ механизму параллельнаго кривошипа (фиг. 239) этотъ пріемъ непримѣнимъ, ибо обѣ полодіи лежатъ здѣсь въ безконечности, оказываясь, слѣдовательно, недоступными; въ этомъ случаѣ можно примѣнить пріемы, разобранные раньше.

Таковы пріемы перехода черезъ мертвыя положенія, примѣняемые въ машиностроеніи; сводятся они, въ сущности, только къ двумъ: кинематическому, прибѣгающему къ помощи полодій, а также однотипныхъ механизмовъ, и динамическому, использующему силы инерціи механизма. Выборъ между ними обусловливается исключительно условіями работы даннаго механизма и задачами, на него возлагаемыми: тамъ, гдѣ звенья механизма должны быть возможно легче, гдѣ механизмъ работаетъ съ перерывами, съ остановками, вводить маховики неудобно, во избѣжаніе лишнихъ давленій и напряженій,—въ этихъ случаяхъ гораздо удобнѣе пользованіе кинематическими пріемами, очень мало увеличивающими массы звеньевъ механизма. Обратное заключеніе также вполнѣ очевидно.

Этими замѣчаніями мы закончимъ статью объ изслѣдованіи шарнирнаго четыреугольника и перейдемъ къ разсмотрѣнію вопроса о передачѣ движенія путемъ непосредственнаго соприкосновенія помощью высшихъ паръ.

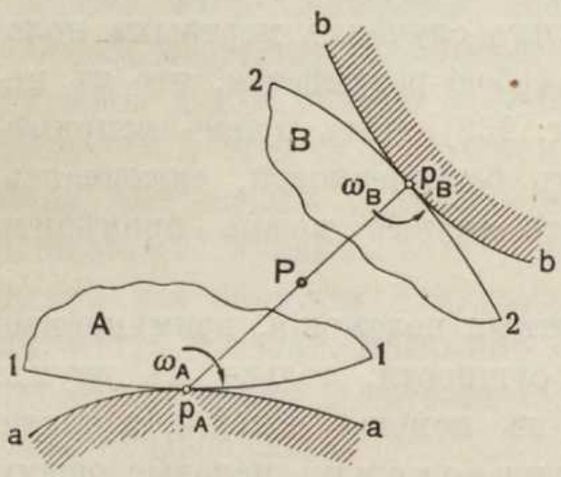
## В. Передача движенія.

### § 37. Разборъ общей задачи о передачѣ движенія.

Задача о передачѣ плоскаго движенія въ нашихъ механизмахъ, въ наиболѣе общемъ видѣ ея, можетъ быть сформулирована такъ:

имѣется нѣкоторая система *A*, обладающая даннымъ плоскимъ движеніемъ; требуется помощью этого движенія ея осуществить нѣкоторое вполнѣ опредѣленное, напередъ заданное плоское движеніе системы *B*; иными словами, требуется данное плоское движеніе системы *A* преобразовать въ желаемое плоское же движеніе системы *B*. Мы разсмотримъ сначала общее рѣшеніе этой задачи, а затѣмъ перейдемъ къ разсмотрѣнію ряда наиболѣе важныхъ частныхъ случаевъ, представляющихся на практикѣ.

Принимая во вниманіе, что всякое плоское движеніе можно задать движеніемъ (каченіемъ) подвижной полодіи по неподвижной и что, при всѣхъ возможныхъ здѣсь ограниченіяхъ относительно вида кривыхъ, могущихъ служить полодіями, число всѣхъ этихъ кривыхъ остается, все-таки, безконечно большимъ, заключаемъ, что заданій плоскаго движенія можетъ существовать безконечно много, и однимъ изъ нихъ и является данное намъ заданіе движенія системы *A*. Пусть оно опредѣляется движеніемъ подвижной полодіи (*1*, *1*) по неподвижной *aa* (фиг. 246). Требуемое движеніе системы *B* пусть является вполнѣ опредѣленнымъ и осуществляется помощью каченія подвижной полодіи (*2*, *2*) по своей неподвижной *bb*. Пусть эти движенія заданы намъ вполнѣ, такъ что всѣ обстоятельства обоихъ этихъ движеній, какъ-то: скорости $u$ перемѣщенія полюсовъ мгновеннаго вращенія, угловыя скорости $\omega$ вращенія системъ около этихъ полюсовъ, и т. д.,—все это предполагается извѣстнымъ намъ также вполнѣ. Замѣтимъ, кстати, что если бы скорости $u$ прямо даны не были, то ихъ можно было бы получить помощью извѣстной формулы $u = \omega d$, гдѣ $d$ есть діаметръ поворотнаго круга.—Поставленный вопросъ, въ сущности, крайне простой, разрѣшается такъ:



Фиг. 246.

По условію, для каждаго даннаго момента намъ извѣстны какъ положенія полюсовъ мгновеннаго вращенія обѣихъ системъ, такъ и мгновенныя угловыя скорости вращенія системъ около этихъ полюсовъ. Имѣя это въ виду, возьмемъ одинъ изъ моментовъ движенія, изображенный на фиг. 246, когда полюсами мгновеннаго вращенія служатъ точки $p_A$ и $p_B$, а угловыя скорости имѣютъ значенія $\omega_A$ и $\omega_B$. Выходитъ, такимъ образомъ, что въ данный моментъ вращеніе системы *A* около точки $p_A$ ея съ угловой скоростью $\omega_A$ должно вызвать собою вращеніе системы *B* около точки $p_B$ ея съ угловой скоростью $\omega_B$. Рѣшеніе этой задачи никакихъ трудностей представить не можетъ,—это обычная задача передачи вращенія отъ одной оси къ другой, разобранная нами въ одномъ изъ предыдущихъ параграфовъ. Разрѣшаемъ

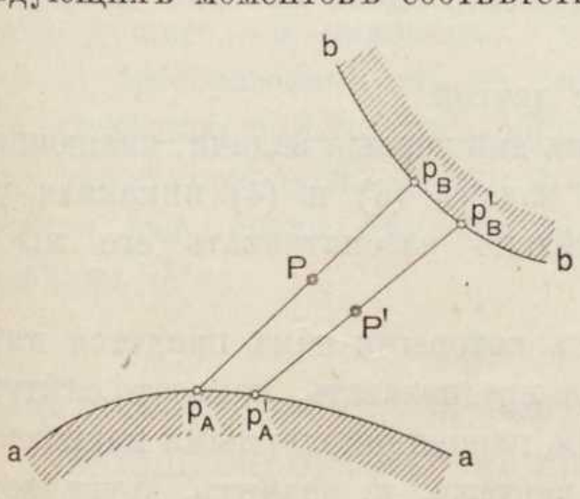
ее обычнымъ путемъ: придаемъ обѣимъ системамъ вращеніе около точки $p_A$ съ угловой скоростью $(-\omega_A)$; тогда система $A$ остановится, а система $B$ будетъ вынуждена участвовать въ двухъ вращеніяхъ, а именно: во вращеніи около $p_B$ съ угловой скоростью $\omega_B$ и во вращеніи около $p_A$ съ угловой скоростью $(-\omega_A)$; въ результатѣ, какъ извѣстно, получимъ вращеніе системы $B$ съ угловой скоростью $(\omega_B - \omega_A)$ около нѣкоторой точки $P$, лежащей на прямой $p_B p_A$, при чемъ положеніе ея на этой прямой опредѣлится обычнымъ условіемъ

$$p_A P : P p_B = \omega_B : \omega_A.$$

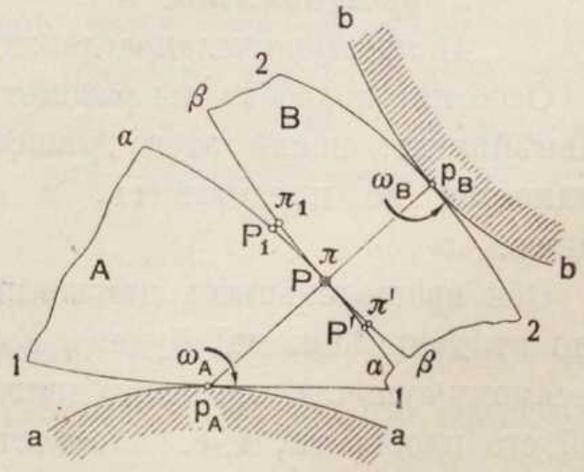
Чтобы въ дальнѣйшемъ не возвращаться къ вопросу о мѣстѣ точки $P$ при подобныхъ дѣленіяхъ, напомнимъ, что въ томъ случаѣ, когда угловыя скорости направлены въ разныя стороны, точка $P$ лежитъ между осями, внутри отрѣзка, ими опредѣляемаго; если же обѣ скорости направлены одинаково, то точка $P$ лежитъ внѣ упомянутаго отрѣзка, въ сторону оси съ большей угловой скоростью. Замѣтимъ, кстати, что направленія угловыхъ скоростей можно отмѣчать знаками + и —, при чемъ плюсомъ отмѣчается обычно направленіе, согласное съ направленіемъ хода часовой стрѣлки.

Полученная такимъ образомъ точка $P$ будетъ, очевидно, служить въ данный моментъ полюсомъ мгновеннаго вращенія въ движеніи системы $B$ относительно системы $A$ или, какъ это мы будемъ обозначать въ дальнѣйшемъ, въ движеніи $B/A$.

Переходимъ теперь къ слѣдующему моменту. Для него, по условію, будутъ извѣстны какъ полюса обѣихъ системъ $p'_A$ и $p'_B$ (фиг. 247), такъ и мгновенныя угловыя скорости вращеній около нихъ $\omega'_A$ и $\omega'_B$. Это опять даетъ намъ возможность опредѣлить полюсъ $P'$ движенія $B/A$ и для этого момента. Подобнымъ же образомъ найдемъ и для всѣхъ слѣдующихъ моментовъ соотвѣтствующіе имъ полюса $P''$, $P'''$, . . . движенія $B/A$. Соединивъ всѣ эти полюса одной непрерывной линіей, получимъ кривую $\alpha\alpha$, служащую неподвижной полодіей движенія $B/A$ (фиг. 248). Аналогично найдемъ полодію движенія $A/B$,—это будетъ нѣкоторая кривая $\beta\beta$. Скрѣпивъ теперь полодію $\alpha\alpha$ съ системой $A$, а полодію $\beta\beta$—въ системой $B$, обезпечивъ каченіе этихъ полодій и дви-




Фиг. 247.




Фиг. 248.

гая систему *A* должнымъ образомъ, т.-е. перекатывая полодію (*1*, *1*) по *aa* съ должными угловыми скоростями $\omega_A$, мы, очевидно, получимъ каченіе полодіи (*2*, *2*) по *bb* съ должными угловыми скоростями $\omega_B$, т.-е. должное, желаемое движеніе системы *B*, и, такимъ образомъ, задача будетъ разрѣшена вполнѣ.

При данныхъ, заранѣе выбранныхъ полодіяхъ движеній системъ *A* и *B*, рѣшеніе, приведенное выше, является, очевидно, единственнымъ, ибо сводится къ нахожденію полодій относительныхъ движеній *A*/*B* и *B*/*A*. Такимъ образомъ, если мы зададимся нѣкоторымъ опредѣленнымъ движеніемъ системы *B*, то рѣшеній этой задачи представится столько, сколькими способами можетъ быть задано движеніе системы *A*, а такъ это послѣднее можетъ быть выполнено безконечно-большимъ числомъ способовъ, то отсюда и слѣдуетъ, что данное желаемое движеніе системы *B* можетъ быть осуществлено также безконечнымъ числомъ способовъ и, значитъ, теоретически говоря, также безконечнымъ множествомъ механизмовъ.

Надо, однако, замѣтить, что полученное нами выше общее рѣшеніе поставленной задачи примѣненія себѣ на практикѣ не находитъ, и гораздо большее значеніе имѣетъ рѣшеніе тѣхъ частныхъ задачъ, которыя представляются при передачѣ движенія и которыя нетрудно сформулировать вполнѣ опредѣленно, замѣтивъ, что всякое плоское движеніе можно разсматривать, какъ сочетаніе нѣкотораго вращательнаго движенія съ движеніемъ поступательнымъ. Поэтому частными задачами, могущими здѣсь представиться, являются слѣдующія:

a) при помощи *вращательнаго* движенія одной системы получить
   1) *вращательное* и
   2) *поступательное* движеніе другой, а затѣмъ

b) помощью *поступательнаго* движенія одной системы получить
   3) *вращательное* и
   4) *поступательное* движеніе другой.

Особенно подробно мы разсмотримъ двѣ первыя задачи, являющіяся главнѣйшими; послѣ этого рѣшеніе задачъ (3) и (4) никакихъ уже трудностей не представитъ, и отдѣльно разсматривать его мы не будемъ.

Оси вращательныхъ движеній, съ которыми намъ придется имѣть дѣло въ дальнѣйшемъ, будемъ всегда предполагать, какъ это слѣдуетъ по самому существу плоскаго движенія, перпендикулярными направляющей его плоскости, т.-е. плоскости чертежа, и, значитъ, другъ другу параллельными; при этой передачѣ онѣ обычно остаются неподвижными, жестко скрѣпленными съ неподвижной направляющей плоскостью, въ силу чего въ этихъ случаяхъ разстояніе $d$ между осями будетъ оставаться все время неизмѣннымъ, *постояннымъ*. Этотъ основной случай мы разберемъ прежде всего, въ рядѣ ближайшихъ параграфовъ.

Болѣе рѣдкими являются тѣ случаи, когда одна изъ этихъ осей

(или объ) перемѣщается въ пространствѣ поступательно, параллельно самой себѣ и, значитъ, перпендикулярно къ плоскости движенія; изъ этихъ случаевъ мы разберемъ лишь тотъ, когда подвижной осью является одна изъ этихъ осей, при чемъ разстояніе между ними, $d$, остается опять все время п о с т о я н н ы м ъ.

Передача движенія можетъ быть выполнена весьма различно: или 1) путемъ непосредственнаго соприкосновенія тѣлъ, надѣленныхъ —одно даннымъ, а другое—уже преобразованнымъ движеніемъ, или 2) помощью промежуточныхъ вспомогательныхъ тѣлъ и системъ,— твердыхъ, гибкихъ или жидкихъ. Въ дальнѣйшемъ мы разберемъ передачу путемъ непосредственнаго соприкосновенія и, отчасти, передачу помощью твердыхъ промежуточныхъ тѣлъ; передачи при помощи жидкихъ и гибкихъ тѣлъ мы не будемъ затрагивать совсѣмъ,—вопросы этого характера удобнѣе отнести къ другимъ отдѣламъ практической механики.

Общій пріемъ осуществленія передачи движенія указанъ въ курсѣ Теоретической Механики и приведенъ нами выше, въ § 37. Рѣшеніе сводится, какъ мы видѣли, къ нахожденію полодій относительныхъ движеній и къ соотвѣтствующему перекату ихъ одной по другой. Эту общую теорію мы лишь дополнимъ въ дальнѣйшемъ нѣкоторыми соображеніями частнаго характера, примѣнительно къ тому или иному виду передачи.

Примѣнительно къ сказанному выше, наше изслѣдованіе вопроса о передачѣ движенія обоймет собою лишь слѣдующіе частные случаи преобразованія *вращательнаго* движенія вокругъ неподвижной оси:

a) преобразованіе его во *вращательное* же движеніе около другой оси, также неподвижной; затѣмъ

b) преобразованіе его въ *колебательное* около неподвижной же другой,—этотъ случай, очевидно, представляетъ собою частный случай предыдущаго,—и, наконецъ,

c) преобразованіе его въ движеніе *прямолинейно-колебательное*.

Отдѣльно разсмотримъ вопросъ о передачѣ вращательнаго движенія отъ одной неподвижной оси къ другой, подвижной, остающейся отъ первой все время на одномъ и томъ же *постоянномъ* разстояніи, равномъ $d$.

## a. Преобразованіе вращательнаго движенія около одной неподвижной оси во вращательное же около другой.

### § 38. Общая теорія некруглыхъ колесъ. Построеніе полодій.

Предположимъ, что намъ даны двѣ плоскодвижущіяся системы $A$ и $B$, которыя, при передачѣ движенія отъ одной изъ нихъ къ другой, вращаются каждая около своей неподвижной оси: $A$—около оси $O_1$, а $B$—около оси $O_2$. Допустимъ, что при этомъ оказывается, что въ то

время, какъ угловая скорость $\omega_A$ первой системы измѣняется съ временемъ по закону

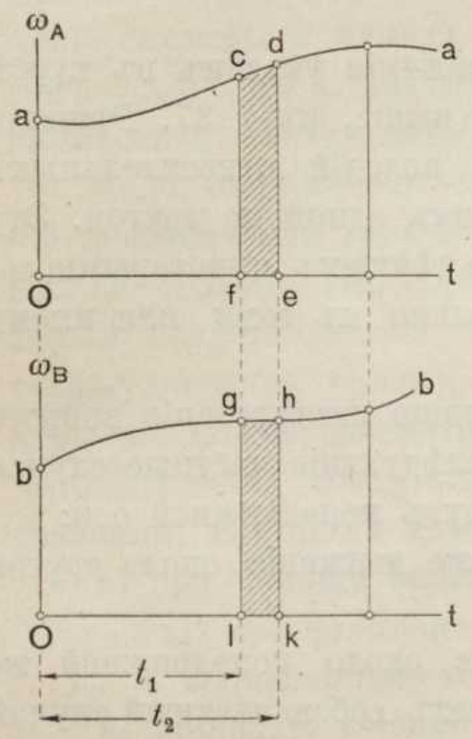
$$\omega_A = f(t), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

угловая скорость $\omega_B$ второй измѣняется по закону

$$\omega_B = F(t), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

при чемъ функція $f$ и $F$ могутъ быть какими угодно. Посмотримъ, какъ при такихъ условіяхъ будутъ строиться полодіи относительныхъ движеній, могущія осуществить желаемую передачу.

Примѣнимъ къ разрѣшенію поставленнаго вопроса, ради большей наглядности его, графическій методъ изслѣдованія, для чего изобразимъ графически теченіе обѣихъ угловыхъ скоростей $\omega$ въ системѣ координатъ $(t, \omega)$, абсциссами коей будутъ, слѣдовательно, служить времена $t$, взятыя въ какомъ-либо масштабѣ,—можно, напримѣръ, принять, что 1 $mm$ оси абсциссъ соотвѣтствуетъ $1/m$-ой долѣ секунды,—ординатами же будемъ брать угловыя скорости, соотвѣтствующія взятымъ моментамъ $(t)$ и выраженныя въ своемъ масштабѣ,—пусть 1 $mm$ оси ординатъ соотвѣтствуетъ угловой скорости $(2\pi/n) \cdot sec^{-1}$. Въ такой системѣ координатъ данные намъ законы $(a)$ и $(b)$ вращенія системъ *A* и *B* изобразятся нѣкоторыми кривыми *aa* и *bb* (фиг. 249).




Фиг. 249.

На чертежѣ 249, а также и 250, принято, что система *A* вращается по часовой стрѣлкѣ, а система *B*—противъ, такъ что, согласно общему положенію о знакахъ, ординаты кривой *bb* слѣдовало бы откладывать внизъ отъ оси *Ot*. Ради удобства чертежа мы здѣсь отъ этого правила отступили,—на фиг. 250 направленія вращенія помѣчены нами отдѣльно.

Положимъ теперь, что за время отъ $t_1$ до $t_2$ система *A* повернулась на нѣкоторый уголъ $\alpha$, а система *B*—на уголъ $\beta$. Замѣчая теперь, что угловая скорость $\omega$ выражается въ функціи угла поворота $\varphi$, вообще говоря, уравненіемъ $\omega = d\varphi/dt$, находимъ соотношенія

$$\omega_A = d\alpha/dt, \quad \omega_B = d\beta/dt,$$

показывающія, что

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \omega_A \, dt, \quad \beta = \int_{t_1}^{t_2} \omega_B \, dt, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

что, въ виду $(a)$ и $(b)$, можетъ быть переписано еще такъ:

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt, \quad \beta = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt \quad \ldots\ldots\ldots (d)$$

Если аналитическія выраженія функцій $f$ и $F$ намъ извѣстны, то углы поворота $\alpha$ и $\beta$ можно вычислить прямо, пользуясь соотношеніями $(d)$. Если же законъ измѣненія угловыхъ скоростей $\omega_A$ и $\omega_B$ данъ, какъ у насъ, двумя графиками, то величины угловъ можно получить графически, разсуждая такъ:

Положимъ, что

$$\omega_A = f(t) = y, \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

а

$$dt = dx \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

Тогда окажется, что

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} y\,dx, \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

иными словами, что

$$\alpha = \text{площади } \textit{fcde} \ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$\beta = \text{площади } \textit{lghk} \ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

Итакъ, оказывается, что во взятой нами системѣ координатъ $(t, \omega)$ уголъ поворота системы изображается площадью типа *fcde*, ограниченною, слѣдовательно, кривой угловыхъ скоростей, осью абсциссъ и двумя крайними ординатами, соотвѣтствующими начальному $(t_1)$ и конечному $(t_2)$ моментамъ разсматриваемаго поворота.

Тѣмъ обстоятельствомъ, что углы поворота выражаются здѣсь площадями, смущаться не приходится, такъ какъ измѣреніе подъинтегральныхъ величинъ формулъ $(c)$ и $(d)$, а значитъ, и измѣреніе всѣхъ интеграловъ, есть

$$\frac{1}{sec} \cdot sec = sec^0,$$

а это есть, какъ разъ, измѣреніе угла,—уголъ есть величина нулевого измѣренія, т.-е. число отвлеченное.

Пусть, напримѣръ, масштабы выбраны такъ, что 1 $mm$ оси абсциссъ соотвѣтствуетъ $^1/_{60}$ $sec$, а 1 $mm$ оси абсциссъ—угловой скорости въ $^1/_{30}$ $\pi\, sec^{-1}$. Въ такомъ случаѣ площадка въ 1 $mm^2$ соотвѣтствуетъ въ этой системѣ углу въ $\pi/1800$. Пусть, далѣе, за время отъ $t_1$ до $t_2$ площадь *fcde* кривой *aa* оказалась, послѣ измѣренія ея тѣмъ или инымъ способомъ, равной 900 $mm^2$, а площадь *lghk* кривой *bb*... 1200 $mm^2$. Тогда, припоминая, какому углу соотвѣтствуетъ въ этой системѣ площадка въ 1 $mm^2$, заключаемъ, что за указанное время система *A* повернулась на уголъ $900 \times {}^1/_{1800}\,\pi$, т.-е. на $^1/_2\,\pi$ или, что то же, на $90^0$; системы *B* за то же время повернулась на уголъ $1200 \times {}^1/_{1800}\,\pi$, т.-е. на $^2/_3\,\pi$ или на $120^0$.

Таково основное свойство кривыхъ, изображающихъ теченіе угловыхъ скоростей въ системѣ $(\omega, t)$. Выяснимъ теперь еще одно ихъ свойство, не менѣе важное.

Мы видѣли, что положеніе полюса $P$ мгновеннаго вращенія въ относительномъ движеніи нашихъ системъ опредѣляется въ каждый отдѣльный моментъ соотношеніемъ, имѣющимъ здѣсь видъ:

$$O_1P : O_2P = \omega_B : \omega_A = q.$$

Скорости $\omega$, соотвѣтствующія любому моменту $\tau$, можно опредѣлить при помощи кривыхъ $aa$ и $bb$, ибо эти скорости изображаются ординатами, этому моменту $\tau$ соотвѣтствующими. Такимъ образомъ, напримѣръ, моменту $t_1$ будутъ соотвѣтствовать ординаты $fc$ и $lg$, а моменту $t_2$— ординаты $ed$ и $kh$ (фиг. 249). Принявъ это во вниманіе, можемъ написать, что для момента (1)

$$O_1P_1 : O_2P_1 = lg : fc = q_1,$$

а для момента (2)

$$O_1P_2 : O_2P_2 = kh : ed = q_2,$$

иными словами, отношеніе $O_1P : O_2P$ равно отношенію $q$ ординатъ, соотвѣтствующихъ разсматриваемому моменту. Слѣдовательно, если мы, строя кривыя $aa$ и $bb$, будемъ попутно строить при тѣхъ же абсциссахъ кривую величинъ $q$, принимая ихъ за ординаты, гдѣ $q = \omega_B : \omega_A =$ отношенію ординатъ соотвѣтствующихъ одному и тому же моменту, то ординаты этой новой кривой $cc$ сразу будутъ давать собою величины отношеній $O_1P : O_2P$, соотвѣтствующія тѣмъ или инымъ моментамъ $\tau$, и, значитъ, будутъ опредѣлять мѣста полюсовъ $P$ на линіи пентровъ $O_1O_2$, что, конечно, въ значительной мѣрѣ будетъ способствовать скорѣйшему вычерчиванію полодій. На фиг. 250 приведены всѣ эти кривыя, при чемъ кривая $aa$ изображаетъ теченіе угловыхъ скоростей $\omega_A$, кривая $bb$—скоростей $\omega_B$, а кривая $cc$—теченіе отношеній $q$.




Фиг. 250.

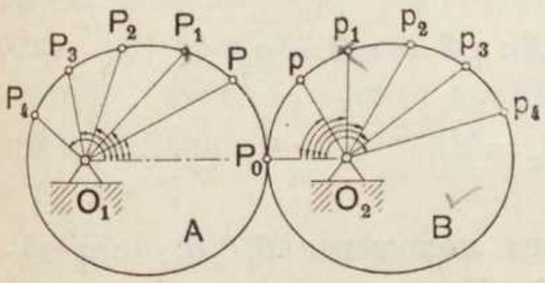
Вмѣсто кривой $cc$ можно, конечно, ограничиться просто табличкой значеній величины $q$, соотвѣтствующихъ различнымъ моментамъ движенія, но кривая $cc$ изображаетъ колебанія этой

величины гораздо нагляднѣе. Кромѣ того, эта кривая *cc* даетъ собою, въ соотвѣтствующемъ масштабѣ, законъ измѣненія угловой скорости $\omega_B$ въ томъ случаѣ, когда $\omega_A$ остается все время *постоянной* и *равной единицѣ*, т.-е. 1 $sec^{-1}$.

Согласно соотношенію $q = \omega_B : \omega_A$ заключаемъ, что величина $q$ будетъ положительной при одинаковыхъ направленіяхъ угловыхъ скоростей $\omega_A$ и $\omega_B$, и отрицательной—при разныхъ. Сообразно съ этимъ, въ первомъ случаѣ кривая *cc* должна проходить въ области положительныхъ $q$, т.-е. выше оси ординатъ, а во второмъ—ниже этой оси, въ области отрицательныхъ $q$; кромѣ того, въ первомъ случаѣ дѣленіе отрѣзка $OO_1$ будетъ выполняться внѣшнимъ образомъ, а во второмъ—внутреннимъ. Этихъ указаній слѣдуетъ придерживаться особенно строго въ тѣхъ случаяхъ, когда угловыя скорости съ теченіемъ времени мѣняютъ не только свою величину, но и направленіе,—только такимъ путемъ можно будетъ легко отдѣлить области внѣшняго дѣленія отрѣзка $OO_1$ отъ областей внутренняго.—На чертежѣ 250 приведенъ тотъ случай, когда угловыя скорости мѣняютъ свою величину, не мѣняя направленія, такъ что кривыя *aa* и *bb* оси *Ot* не пересѣкаютъ. Въ этихъ случаяхъ характеръ измѣненій $q$ является вполнѣ опредѣленнымъ,—въ данномъ случаѣ $q$ отрицательно, и дѣленіе должно быть выполняемо все время внутреннимъ образомъ. Ради удобства чертежа, кривая *cc* отношеній $q$ вычерчена здѣсь выше оси *Ot*.

Посмотримъ теперь, какъ при помощи этихъ кривыхъ получаются полодіи относительныхъ движеній, разрѣшающія, вообще говоря, вопросъ о данной передачѣ. Будемъ разсуждать такъ:

Предположимъ, что эти полодіи уже построены, и пусть въ начальный моментъ движенія, соотвѣтствующій началамъ *O* нашихъ координатныхъ системъ (фиг. 250), онѣ касаются другъ друга въ точкѣ $P_0$ (фиг. 251), служащей полюсомъ мгновеннаго вращенія для относительныхъ движеній *A*/*B* или *B*/*A*, имѣющихъ здѣсь мѣсто. Замѣтимъ, что точка $P_0$, какъ и всякій другой полюсъ относительнаго движенія, всегда будетъ лежать на линіи центровъ $O_1O_2$, при чемъ общая нормаль къ полодіямъ будетъ пересѣкать эту линію центровъ именно въ этой точкѣ $P_0$. Само собою разумѣется, что линія центровъ, вообще говоря, съ этой общей нормалью не совпадаетъ,—это совпаденіе имѣетъ мѣсто лишь въ случаѣ круглыхъ полодій, когда, какъ увидимъ ниже, $q = const$.



Фиг. 251.

Положеніе точки $P_0$ на линіи центровъ $O_1O_2$ опредѣляется изъ условій

$$O_1P_0 + P_0O_2 = O_1O_2 = d = const \quad \ldots\ldots\ldots (l)$$

и

$$O_1P_0 : P_0O_2 = b_0O : a_0O = q_0 = c_0O \quad \ldots\ldots\ldots (m)$$

По истеченіи нѣкотораго времени (0,1) полодіи коснутся другъ друга въ точкахъ, положимъ, ($P_1$, $p_1$), при чемъ, очевидно, радіусы-

векторы $O_1P_1$ и $O_2p_1$ вытянутся въ этотъ моментъ въ одну прямую $O_1O_2$, такъ что опять будетъ имѣть мѣсто соотношеніе

$$O_1P_1 + O_2p_1 = O_1O_2 = d.$$

Къ этому моменту, т.-е. за время (0,1), полодіи повернутся каждая на свой, вполнѣ опредѣленный уголъ, а именно: полодія $A$ повернется на уголъ $P_0O_1P_1$, изображаемый площадью $Oa_0a_1 1$ (см. кривую $aa$), а полодія $B$—на уголъ $P_0O_2p_1$, изображаемый площадью $Ob_0b_1 1$ (кривая $bb$). Такъ какъ величина этихъ площадокъ зависитъ отъ характера теченія кривыхъ $aa$ и $bb$, то площадки эти будутъ, вообще говоря, различны между собою, въ силу чего къ моменту (1) наши полодіи повернутся, вообще, на разные углы.

Въ указанный моментъ (1) полодіи подведутъ къ соприкосновенію свои точки $P_1$ и $p_1$, положеніе коихъ на оси $O_1O_2$ опредѣлится изъ условій

$$O_1P_1 : O_2p_1 = (\omega_B)_1 : (\omega_A)_1 = b_1 1 : a_1 1 = c_1 1 = q_1$$

и, какъ мы уже указывали,

$$O_1P_1 + O_2p_1 = O_1O_2 = d.$$

То же замѣчаніе будетъ имѣть силу и для момента (2),—здѣсь будемъ имѣть условія:

$$O_1P_2 : O_2p_2 = (\omega_B)_2 : (\omega_A)_2 = b_2 2 : a_2 2 = c_2 2 = q_2$$

и

$$O_1P_2 + O_2p_2 = O_1O_2 = d.$$

Углы поворота, считая отъ начальнаго положенія $O_1P_0O_2$, опредѣлятся теперь площадями $Oa_0a_2 2$ и $Ob_0b_2 2$. Конечно, если бы понадобилось опредѣлить углы поворота отъ векторовъ $O_1P_1$ и $O_2p_1$, совпавшихъ въ моментъ (1), то они выразились бы, очевидно, площадками $1a_1a_2 2$ и $1b_1b_2 2$, и т. д.

Все сказанное съ достаточной ясностью обрисовываетъ пріемы построенія искомыхъ полодій относительнаго движенія при помощи или уравненій ($a$) и ($b$) или изображающихъ ихъ графиковъ (фиг. 250). Строить можно или каждую изъ этихъ полодій отдѣльно или обѣ сразу, одновременно.

Въ первомъ случаѣ мы находимъ сначала полодію одного относительнаго движенія,—положимъ, $B/A$,—а затѣмъ другого, $A/B$. Поступать при этомъ приходится такъ:

Пусть ищется полодія относительнаго движенія $B/A$. Для нахожденія ея сообщаемъ обѣимъ системамъ вращеніе съ угловой скоростью $(-\omega_A)$, послѣ чего система $A$ остановится, а система $B$ будетъ

участвовать въ двухъ вращеніяхъ одновременно, а именно: во вращеніи около $O_2$ съ угловой скоростью $\omega_B$ и во вращеніи около $O_1$ съ угловой скоростью $(-\omega_A)$, и намъ придется отыскивать положеніе полюсовъ мгновеннаго вращенія для этого сложнаго движенія системы $B$. Ясно, что эти полюса будутъ лежать каждый разъ на отрѣзкѣ $O_1O_2$, вращающемся теперь около центра $O_1$ съ угловой скоростью $(-\omega_A)$. Очевидно, такимъ образомъ, что углы поворота этого отрѣзка отъ какого-либо опредѣленнаго его положенія, принятаго за начальное, можно будетъ получать при помощи кривой $aa$ (фиг. 250), мѣста же полюсовъ $P_n$ на этомъ отрѣзкѣ получимъ помощью кривой $cc$ отношеній $q$. Соединивъ всѣ такъ полученныя точки $P_n$ непрерывной плавной линіей, получимъ искомую полодію движенія $B/A$. Такъ же найдется полодія $A/B$.

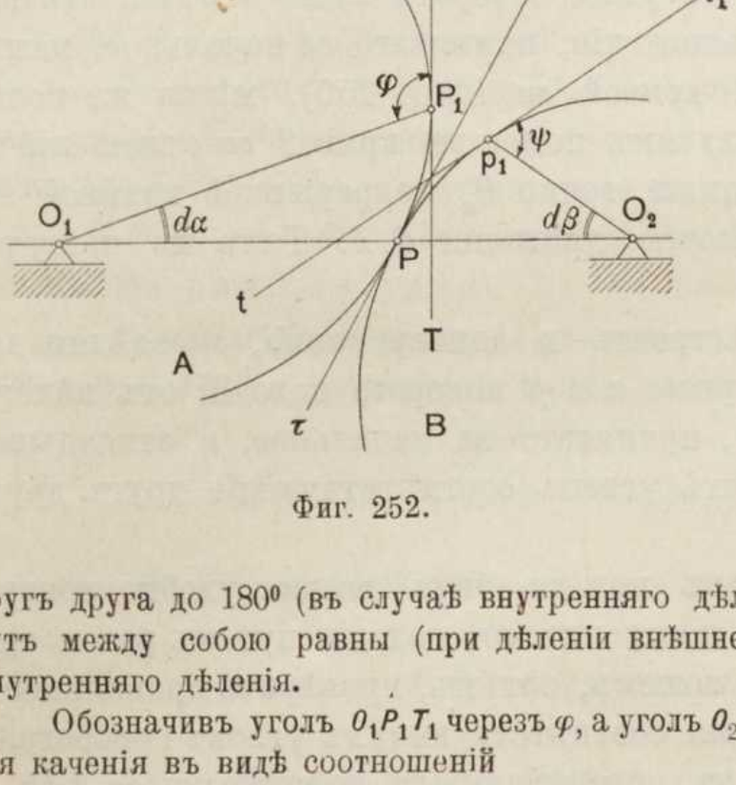
Эти же полодіи можно строить и одновременно, опредѣляя для каждаго даннаго момента $\tau$ углы $\alpha$ и $\beta$ поворота полодій отъ какого-либо опредѣленнаго положенія, принятаго за начальное, и откладывая на подвижныхъ сторонахъ этихъ угловъ соотвѣтствующіе другъ другу векторы $O_1P_n$ и $O_2p_n$.

Первый изъ этихъ пріемовъ можетъ быть весьма удобно контролируемъ при помощи второго; построивъ обѣ полодіи путемъ разсмотрѣнія относительнаго движенія, можемъ, затѣмъ, провѣрить правильность построенія помощью опредѣленія соотвѣтствующихъ угловъ поворота,—они должны быть равны угламъ, опредѣляемымъ по кривымъ $aa$ и $bb$,—и опредѣленія суммы длинъ соотвѣтствующихъ векторовъ,—сумма эта всегда должна быть равна $O_1O_2$, т.-е. $d$. Можно дѣйствовать и наоборотъ: построивъ полодіи путемъ опредѣленія угловъ и векторовъ, можно, затѣмъ, при провѣркѣ, примѣнить пріемъ разсмотрѣнія относительныхъ движеній. Результаты должны получиться одни и тѣ же.

Если бы мы пожелали убѣдиться на самомъ дѣлѣ, что полученныя нами вышеуказанными пріемами кривыя $P_0P_1P_2\ldots$ и $P_0p_1p_2\ldots$ (фиг. 251) дѣйствительно представляютъ собою полодіи относительныхъ движеній системъ $A$ и $B$, то могли бы достигнуть этого, доказавъ, что одновременное вращеніе этихъ полодій,—одной, $A$, съ угловой скоростью $\omega_A$, а другой, $B$, съ угловой скоростью $\omega_B$,—ведетъ за собою *чистое каченіе* ихъ, при полномъ отсутствіи скольженія. Показать это можно такъ:

Каченіе одной кривой по другой было бы обезпечено, очевидно, тогда, если бы оказалось, что дуги, проходимыя за одинъ и тотъ же какой-либо промежутокъ времени по обѣимъ кривымъ точкой, слѣдящей за смѣной полюсовъ, между собою равны, а касательныя, проведенныя въ соотвѣтствующихъ точкахъ кривыхъ, образуютъ съ радіусами-векторами этихъ точекъ углы или равные (въ случаѣ внѣшняго дѣленія) или дополняющіе другъ друга до $180^0$ (въ случаѣ дѣленія внутренняго).

Дѣйствительно, пусть въ данный моментъ кривыя соприкасаются въ точкѣ $P$ (фиг. 252); въ слѣдующій моментъ пусть онѣ имѣютъ соприкоснуться своими точками $P_1$ и $p_1$, сосѣдними съ $P$. Если при этомъ между кривыми имѣетъ мѣсто чистое каченіе, то дуги $PP_1$ и $Pp_1$, очевидно, будутъ равны. Кромѣ того, замѣчая, что въ моментъ ($P_1$, $p_1$) кривыя должны коснуться другъ друга точками $P_1$ и $p_1$, заключаемъ, что элементъ кривой $O_1$, лежащій у точки $P_1$, сольется въ это мгновеніе съ элементомъ кривой $O_2$, лежащимъ у точки $p_1$; иными словами, касательная $TP_1T_1$, проведенная въ точкѣ $P_1$ кривой $O_1$, должна будетъ въ упомянутый моментъ слиться съ касательной $tp_1t_1$, проведенной въ точкѣ $p_1$ кривой $O_2$, а такъ какъ въ этотъ же моментъ радіусы-векторы $O_1P_1$ и $O_2p_1$ вытянутся въ одну прямую, то и окажется, что углы, образованные этими касательными со своими радіусами-векторами, будутъ или дополнять другъ друга до 180° (въ случаѣ внутренняго дѣленія, взятомъ на чертежѣ) или будутъ между собою равны (при дѣленіи внѣшнемъ). Мы разсмотримъ лишь случай внутренняго дѣленія.




Фиг. 252.

Обозначивъ уголъ $O_1P_1T_1$ черезъ $\varphi$, а уголъ $O_2p_1t_1$ черезъ $\psi$, можемъ выразить условія каченія въ видѣ соотношеній

$$\smile PP_1 = \smile Pp_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

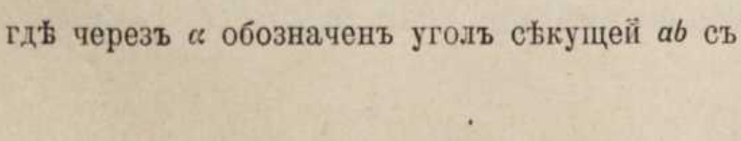
и

$$\varphi = 180^0 - \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (p)$$

Соотношеніе ($p$) сводится, очевидно, къ равенству

$$cos_1\varphi = -cos_1\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (q)$$

Посмотримъ теперь, какъ выражается, вообще говоря, *cos* угла касательной съ радіусомъ векторомъ, проведенномъ въ точку касанія. Для этого возьмемъ хотя бы на той же кривой $O_1$ двѣ безконечно-близкія точки $a$ и $b$ (фиг. 253), проведемъ радіусы-векторы ихъ $O_1a$ и $O_1b$ и соединимъ точки $a$ и $b$ сѣкущей $ab$. Пусть $O_1a > O_1b$. Тогда, засѣкая изъ центра $O_1$ дугу радіусомъ $O_1b$ и обозначивъ пересѣченіе ея съ радіусомъ $O_1a$ черезъ $h$, получимъ треугольникъ $abh$, прямоугольный при $h$, съ криволинейнымъ катетомъ $bh$. Такъ какъ этотъ послѣдній, съ точностью до безконечно малыхъ высшаго порядка, можетъ быть принятъ за перпендикуляръ, опущенный изъ точки $b$ на прямую $Oa$, то можно написать, что




Фиг. 253.

$$ha = ba\cos\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (r)$$

гдѣ черезъ $\alpha$ обозначенъ уголъ сѣкущей $ab$ съ радіусомъ векторомъ $Oa$.

Такъ какъ, далѣе,

$$ba = Oa - Ob = \Delta r,$$

а хорда $ba$ отличается отъ дуги $ba$ ($= \Delta s$) на безконечно-малую высшаго порядка, то соотношеніе ($r$) приводитъ съ слѣдующему весьма важному соотношенію между приращеніемъ $\Delta r$ радіуса-вектора и длиной $\Delta s$ дуги:

$$\Delta r = \Delta s \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (s)$$

Это равенство будетъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ ближе точка будетъ подходить къ точкѣ $a$; въ предѣлѣ, когда точка $b$ совпадаетъ съ точкой $a$, а сѣкущая $ab$ перейдетъ въ касательную въ точкѣ $a$, такъ что уголъ $\alpha$ перейдетъ въ нашъ уголъ $\varphi$, мы получимъ дифференціальное соотношеніе

$$dr = ds \cos\varphi,$$

показывающее, что, вообще,

$$\cos\varphi = \frac{dr}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (t)$$

Предположимъ теперь, что наши кривыя въ данный моментъ соприкасаются другъ съ другомъ въ точкѣ $P$ (фиг. 252). Начнемъ теперь вращать одну изъ полодій, $A$, съ угловой скоростью $\omega_A$, а другую—съ угловой скоростью $\omega_B$, и предположимъ, что черезъ безконечно-малый промежутокъ времени $dt$ въ совпаденіе придутъ точки $P_1$ и $p_1$ этихъ кривыхъ, сосѣднія съ $P$, такъ что упомянутая выше точка, слѣдящая за смѣной полюсовъ, пробѣжитъ за это время $dt$ по одной изъ полученныхъ кривыхъ элементарную дугу $P_1P = ds$, а по второй — дугу $Pp_1 = d\sigma$. Докажемъ, прежде всего, что эти дуги равны, т.-е. что $ds = d\sigma$.

За время $dt$ первая система, $A$, повернется на уголъ $PO_1P_1 = d\alpha = \omega_A dt$, а вторая, $B$, на уголъ $PO_2p_1 = d\beta = \omega_B dt$. Обозначимъ теперь векторъ $O_1P$ черезъ $r$, а векторъ $O_2P$ — черезъ $\varrho$, при чемъ, очевидно,

$$r + \varrho = d,$$

такъ что имѣетъ мѣсто равенство

$$dr = -d\varrho. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (u)$$

Кромѣ того, по опредѣленію положенія точки $P$, имѣемъ, что

$$r : \varrho = \omega_B : \omega_A,$$

откуда и находимъ, что

$$r\omega_A = \varrho\omega_B.$$

Умножая обѣ части этого равенства на $dt$, находимъ соотношеніе

$$r\omega_A dt = \varrho\omega_B dt,$$

что, въ свою очередь, приводитъ къ уравненію

$$r\,d\alpha = \varrho\,d\beta.$$

Замѣтивъ это, напишемъ выраженія длинъ дугъ $ds$ и $d\sigma$ въ полярной формѣ. Имѣемъ:

$$ds^2 = (r\,d\alpha)^2 + (dr)^2,$$

$$d\sigma^2 = (\varrho\,d\beta)^2 + (d\varrho)^2.$$

Замѣчая теперь, что, по доказанному выше, $r\,d\alpha = \varrho\,d\beta$ и $dr = -d\varrho$, получаемъ, что

$$ds = d\sigma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

что и требовалось доказать.

Далѣе, дѣля $(u)$ на $(v)$, находимъ соотношеніе

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{d\varrho}{d\sigma},$$

сводящееся, согласно формулѣ $(t)$ и чертежу (фиг. 252), къ равенству

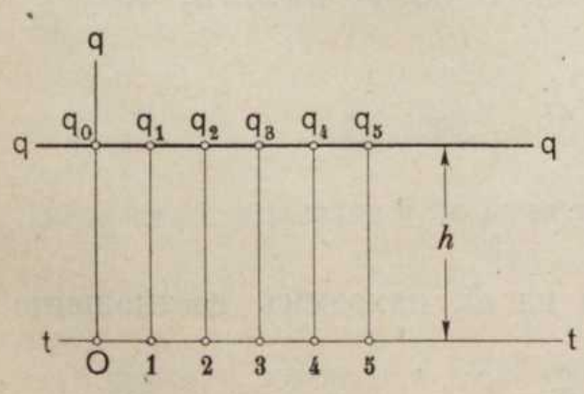
$$\cos\varphi = -\cos\psi,$$

показывающему, что

$$\varphi = 180^0 - \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (w)$$

Соотношенія $(v)$ и $(w)$ указываютъ, что, при данныхъ условіяхъ, послѣдовательныя совпаденія соотвѣтствующихъ другъ другу точекъ $P_n$ и $p_n$ нашихъ кривыхъ будутъ сопровождаться всегда равенствомъ дугъ $PP_n$ и $Pp_n$ и совпаденіемъ соотвѣтствующихъ касательныхъ $P_nT_n$ и $p_nt_n$, что и указываетъ на то, что здѣсь будетъ имѣть мѣсто только чистый перекатъ и что, значитъ, обѣ эти кривыя, дѣйствительно, представляютъ собою полодіи разсматриваемыхъ относительныхъ движеній.

Совершенно такъ же, путемъ непосредственнаго подсчета, можно убѣдиться, что, если мы обезпечимъ каченіе полученныхъ кривыхъ и станемъ затѣмъ одну, $A$, вращать съ угловой скоростью $\omega_A$, то другая, $B$, станетъ вращаться съ должной угловой скоростью $\omega_B$; наоборотъ, вращая $B$ съ угловой скоростью $\omega_B$, получимъ, при этихъ условіяхъ, вращеніе $A$ съ угловой скоростью $\omega_A$. — Поставленный вопросъ можно считать, такимъ образомъ, исчерпаннымъ вполнѣ. Перейдемъ къ другимъ.



Фиг. 254.

Если кривая $cc$ отношеній $q = \omega_B : \omega_A$ представляетъ собою прямую $dd$, параллельную оси $Ot$ (фиг. 254), то это зна-

читъ, что здѣсь $\omega_B : \omega_A = q = h = const$, и, слѣдовательно, полюсы $P_n$ будутъ дѣлить отрѣзокъ $O_1O_2$ все время въ одномъ и томъ же отношеніи $q = h : 1$, въ силу чего обѣ полодіи окажутся окружностями. Дѣйствительно, согласно обозначеніямъ фиг. 251, можемъ теперь написать, что

$$O_1P_0 : P_0O_2 = \omega_B : \omega_A = h : 1 = O_1P_1 : O_2p_1 = O_1P_2 : O_2p_2 = \ldots .$$

а такъ какъ, попрежнему,

$$O_1P_0 + P_0O_2 = O_1P_1 + p_1O_2 = O_1P_2 + p_2O_2 = \ldots = d,$$

то и оказывается, что

$$O_1P_0 = O_1P_1 = O_1P_2 = \ldots = R$$

и

$$O_2P_0 = O_2p_1 = O_2p_2 = \ldots = r.$$

Очевидно, что въ этомъ случаѣ кривыя $aa$ и $bb$ произвольными быть не могутъ, ибо ординаты одной должны быть теперь пропорціональны соотвѣтствующимъ ординатамъ другой, такъ что, если одну изъ нихъ мы выберемъ произвольно, то другая этимъ самымъ будетъ опредѣлена вполнѣ. Этотъ простѣйшій случай имѣетъ наибольшее примѣненіе на практикѣ, представляя собою случай круглыхъ зубчатыхъ колесъ. Такъ какъ здѣсь $\omega_B = q\omega_A$, гдѣ $q$ постоянно, то, очевидно, для любого промежутка времени $\Delta t$ будемъ всегда имѣть равенство $\beta = q\alpha$, показывающее, что углы поворота обѣихъ системъ за одно и то же время будутъ другъ другу пропорціональны,—отношеніе ихъ будетъ все время оставаться постояннымъ и равнымъ $q$.

Если кривая $cc$ отлична отъ прямой, то обѣ полодіи будутъ очерчены кривыми, отличными отъ окружностей; въ настоящемъ параграфѣ мы разберемъ только этотъ случай,—случай $q = const$ будетъ разсмотрѣнъ въ дальнѣйшихъ параграфахъ.

---

Если зависимость угловыхъ скоростей отъ времени дается аналитически, въ видѣ уравненій $(a)$ и $(b)$: $\omega_A = f(t)$ и $\omega_B = F(t)$, то представляется возможнымъ полученіе уравненій обѣихъ полодій въ полярной формѣ, съ полюсами въ центрахъ вращенія $O_1$ и $O_2$. Выполнить это можно такъ:

Если $\omega_A = f(t)$, то, въ виду соотношенія $\omega_A = d\alpha/dt$, имѣемъ, что $d\alpha = f(t)dt$, такъ что

$$\alpha = \int f(t)dt = \Phi_1(t) + C.$$

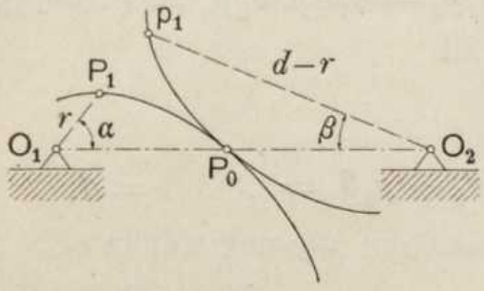
Пусть при $t = 0$ имѣемъ $\alpha = 0$ и $\Phi_1(0) = 0$; тогда произвольное постоянное $C$ также будетъ нулемъ, и можно будетъ написать, что

$$\alpha = \Phi_1(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

Пусть аналогично

$$\beta = \Phi_2(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Уравненія $(\alpha)$ и $(\beta)$ даютъ возможность написать искомыя полярныя уравненія полодій. Пусть наши полодіи, касаясь другъ друга въ нѣкоторый начальный моментъ въ точкѣ $P_0$ (фиг. 255), по истеченіи нѣкотораго времени подведутъ къ соприкосновенію свои точки $P_1$ и $p_1$, повернувшись при этомъ на углы $\alpha$ и $\beta$. Обозначимъ $O_1P_1$ черезъ $r$; тогда, очевидно, окажется, что $O_2p_1 = d - r$, гдѣ $d = O_1O_2$. Послѣ этого можно написать, что




Фиг. 255.

$$O_1P_1 : O_2p_1 = r : (d - r) = q = \omega_B : \omega_A = F(t) : f(t) = \varphi(t) \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Получаются, такимъ образомъ, два уравненія:

$$\alpha = \Phi_1(t),$$

согласно $(\alpha)$, и

$$\frac{r}{d - r} = \varphi(t),$$

согласно $(\gamma)$, при чемъ здѣсь $\alpha = \angle P_1O_1P_0$.

Исключая изъ обоихъ этихъ уравненій параметръ $t$, находимъ уравненіе

$$\frac{r}{d - r} = \psi(\alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

представляющее собою искомое полярное уравненіе полодіи, принадлежащей системѣ $A$, при полюсѣ въ $O_1$ и оси $O_1O_2$.

Полярное уравненіе полодіи системы $B$ найдемъ аналогичнымъ же путемъ, при чемъ, ради удобства вычисленій, положимъ

$$O_2p_1 = \varrho,$$

такъ что $O_1P_1 = d - \varrho$. Здѣсь, въ виду $(\gamma)$, можемъ написать, что

$$\varrho : (d - \varrho) = O_2p_1 : O_1P_1 = 1 : \varphi(t) = \xi(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Исключая теперь $t$ изъ уравненій $(\varepsilon)$ и $(\beta)$, гдѣ $\beta = \angle p_1O_2P_0$, найдемъ уравненіе

$$\frac{\varrho}{d - \varrho} = \chi(\beta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta)$$

представляющее собою искомое полярное уравненіе полодіи системы ***B***.

Нетрудно убѣдиться, что

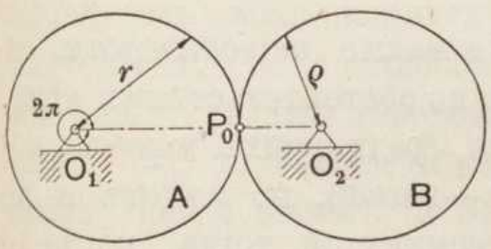
$$\psi(\alpha) \cdot \chi(\beta) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\eta)$$

*для каждой пары соотвѣтственныхъ угловъ* $\alpha$ *и* $\beta$. Эти очевидныя соображенія позволяютъ аналитически разрѣшить вопросъ *о замкнутости полодій*. Изслѣдованіе его удобнѣе всего вести такъ:

Пусть полярное уравненіе полодіи ***A*** имѣетъ видъ ($\delta$), т.-е. видъ

$$\frac{r}{d-r} = \psi(\alpha).$$

Очевидно, что замкнутой она будетъ тогда, когда радіусъ векторъ $r$, имѣвшій въ начальный моментъ движенія, при $t = 0$ и $\alpha = 0$, значеніе $O_1P_0$ (фиг. 256), опять получитъ то же значеніе $O_1P_0$ послѣ обхода угла въ $2\pi$. Оказывается, такимъ образомъ, что, при замкнутой полодіи ***A***, функція $\psi(\alpha)$ принимаетъ одно и то же значеніе какъ при $\alpha = 0$, такъ и при $\alpha = 2\pi$, откуда слѣдуетъ, что она должна представлять собою *періодическую функцію* съ періодомъ, равнымъ $2\pi$, въ виду чего можно написать, что




Фиг. 256.

$$\psi(0) = \psi(2\pi) = \psi(4\pi) = \ . \ . \ . \ . = \psi(2n\pi), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\vartheta)$$

гдѣ $n$ есть любое цѣлое число.—При соблюденіи этого условія полодія ***A*** окажется сомкнутой.

Условіемъ замкнутости полодіи ***B*** явится, аналогично предыдущему, *періодичность функціи* $\chi(\beta)$, при чемъ періодъ долженъ быть равенъ $2\pi$, такъ что опять должны будутъ имѣть мѣсто равенства:

$$\chi(0) = \chi(2\pi) = \chi(4\pi) = \ . \ . \ . \ . = \chi(2n\pi), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varkappa)$$

при чемъ въ начальный моментъ, при $\alpha = 0$, имѣемъ также $\beta = 0$.

Нетрудно убѣдиться, что одновременное сосуществованіе условій ($\vartheta$) и ($\varkappa$) вовсе не является обязательнымъ, т.-е. при сомкнутости полодіи ***A*** полодія ***B*** вовсе еще не обязана быть сомкнутой. Дѣйствительно, мы видѣли, что для каждой пары соотвѣтственныхъ угловъ $\alpha$ и $\beta$ имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{\chi(\beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\lambda)$$

По условію, при $\alpha = 0$ имѣемъ и $\beta = 0$; значитъ, прежде всего, можемъ написать, что

$$\psi(0) = \frac{1}{\chi(0)}.$$

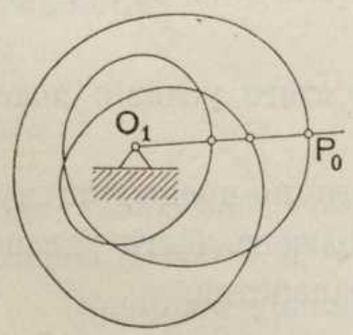
Предположимъ, что полодія **A** замкнута, и періодъ функціи $\psi$ равенъ $2\pi$, и пусть, при каждомъ поворотѣ полодіи **A** на $2\pi$, полодія **B** поворачивается на уголъ $\delta$, каждый разъ одинъ и тотъ же. Въ такомъ случаѣ будутъ имѣть мѣсто соотношенія:

$$\psi(0) = \frac{1}{\chi(0)};\ \psi(2\pi) = \frac{1}{\chi(\delta)};\ \psi(4\pi) = \frac{1}{\chi(2\delta)};\ \ldots\ldots (\mu)$$

сводящіяся, въ виду $(\vartheta)$, къ ряду равенствъ:

$$\chi(0) = \chi(\delta) = \chi(2\delta) = \ldots\ldots\ldots\ldots (\nu)$$

показывающему, что функція $\chi$ есть функція также *періодическая*, съ періодомъ, равнымъ $\delta$. Этотъ уголъ $\delta$, смотря по обстоятельствамъ дѣла, можетъ имѣть самыя разнообразныя значенія, среди коихъ можетъ, конечно, содержаться и значеніе $2\pi/n$ (гдѣ $n$—цѣлое), но можетъ и не содержаться. Ясно, что полодія **B** будетъ сомкнутой тогда, когда $\delta$ имѣетъ именно это значеніе $2\pi/n$, ибо въ этомъ случаѣ, послѣ $n$ полныхъ оборотовъ полодіи **A**, полодія **B** совершитъ одинъ полный оборотъ, при чемъ радіусъ векторъ $O_2P_0$ приметъ то же значеніе, какое онъ имѣлъ въ начальный моментъ, при $\beta = 0$.—Нетрудно разобраться въ этомъ вопросѣ и тогда, когда, при каждомъ поворотѣ полодіи **A** на $2\pi$, полодія **B** поворачивается на углы, между собою различные.



Фиг. 257.

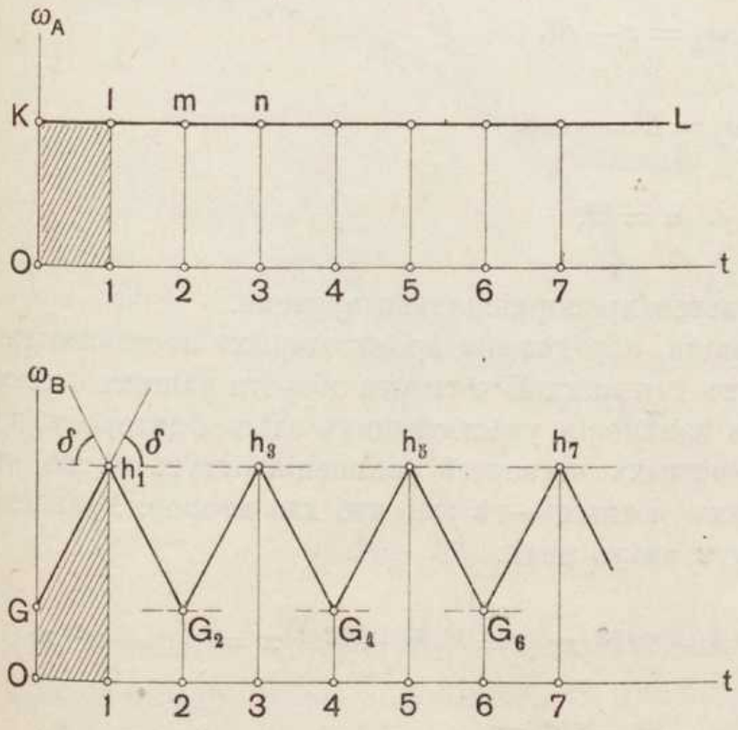
Само собою разумѣется, что періодъ функцій $\psi$ и $\chi$ можетъ быть, и не равенъ $2\pi$, а $4\pi$, $6\pi, \ldots$,—вообще, $2n\pi$, гдѣ $n$ есть нѣкоторое цѣлое число; полодіи при этомъ будутъ замкнутыми, но форма ихъ будетъ тѣмъ сложнѣе, чѣмъ больше это число $n$. Такъ, на фиг. 257 изображенъ случай замкнутой полодіи съ періодомъ $6\pi$,—начальный радіусъ $O_1P_0$ только послѣ трехъ полныхъ оборотовъ полодіи **A** принимаетъ свое начальное положеніе и значеніе $O_1P_0$.

Вопросъ о замкнутости полодій разрѣшается весьма удобно при помощи діаграммъ, дающихъ ходъ измѣненій величинъ $\omega_A$, $\omega_B$ и $q$ (фиг. 250). Нетрудно сообразить, что если для какой-либо полодіи уголъ поворота за нѣкоторое время $\Delta t = t_2 - t_1$ оказывается равнымъ $2\pi$ (или $4\pi$ или, вообще, $2n\pi$), а отношеніе $q$ въ конечный моментъ $t_2$ имѣетъ то же значеніе, какое оно имѣло въ начальный моментъ $t_1$ этого промежутка $\Delta t$, то эта полодія будетъ замкнутой, — векторъ $O_1P_0$

будетъ имѣть въ моментъ $t_2$ то же значеніе, какое онъ имѣлъ въ моментъ $t_1$.

Теперь становится вполнѣ очевиднымъ, что, въ случаѣ существованія *одновременной періодичности* обѣихъ полодій, кривыя *aa* и *bb* (фиг. 250) произвольными быть уже не могутъ, ибо разъ мы накладываемъ на нихъ условія равенства площадей, соотвѣтствующихъ какому-либо одному и тому же промежутку времени $\Delta t$, то ясно, что контуры этихъ кривыхъ должны быть очерчены такъ, чтобы поставленное требованіе удовлетворялось вполнѣ; если, при этомъ, одна изъ кривыхъ,—положимъ, *aa*,—будетъ уже задана, то кривыхъ *bb*, удовлетворяющихъ поставленному условію одновременной періодичности, можно будетъ подобрать безконечно много, такъ что для полнаго опредѣленія этой кривой *bb* необходимо, слѣдовательно, задаться еще однимъ какимъ-либо дополнительнымъ условіемъ, могущимъ окончательно выяснить видъ и теченіе ея. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему важному положенію: если дается законъ измѣненія угловой скорости одной изъ вращающихся системъ,—положимъ, угловой скорости $\omega_A$ системы *A*,—и накладывается извѣстное требованіе какъ на соотношеніе между углами поворота, такъ и на измѣненія другой угловой скорости, $\omega_B$, то тѣмъ самымъ кривая *bb* этихъ угловыхъ скоростей $\omega_B$ опредѣляется вполнѣ, и произвола въ скоростяхъ системъ не будетъ существовать уже никакого: для каждаго момента $\tau$ будетъ извѣстна какъ соотвѣтствующая угловая скорость $\omega_B$, такъ и угловое ускореніе $d\omega_B/dt$,—это послѣднее, по общему правилу, будетъ выражаться тангенсомъ угла наклона касательной къ кривой *bb* съ осью абсциссъ.

Можетъ случиться, что отъ системы будетъ требоваться періодичность движенія уже для поворотовъ, меньшихъ $2\pi$. Разсмотрѣніе всѣхъ такихъ случаевъ проще всего вести графическимъ путемъ, строя по даннымъ заданія графики угловыхъ скоростей $\omega_A$ и $\omega_B$ и изслѣдуя ихъ затѣмъ указанными выше способами.




Фиг. 258.

Такъ, напримѣръ, предположимъ, что система *A* должна все время вращаться *равномѣрно*, система же *B* должна вращаться I-ую и III-ью четверти своего оборота *равномѣрно-ускоренно*, а II-ую и IV-ую — *равномѣрно-замедленно*, при чемъ угловая скорость въ начальный моментъ равномѣрно-ускореннаго движенія должна быть равна *половинѣ* угловой скорости системы *A*. Кромѣ того, ставится еще условіе,

чтобы каждая четверть оборота системы *A* соотвѣтствовала бы по времени четверти оборота системы *B*.—Нетрудно усмотрѣть, что, при такихъ условіяхъ, кривыя $(\omega_A)$ и $(\omega_B)$ будутъ имѣть видъ, изображенный на фиг. 258: кривая $(\omega_A)$ изобразится прямой *KL*, параллельной оси абсциссъ *Ot* и отстоящей отъ этой послѣдней на разстояніи *KO*, изображающемъ $\omega_A$ въ масштабѣ, принятомъ здѣсь для ординатъ; кривая $(\omega_B)$ изобразится нѣкоторой ломаной *GH*.

Пусть полный оборотъ требуетъ времени, изображаемаго отрѣзкомъ (0—4). Въ такомъ случаѣ для каждой четверти этого времени площади должны быть равны, т.-е. должны имѣть мѣсто равенства:

$$\text{площадь } OKl1 = \text{пл. } OGh_1 1 = \text{пл. } 1lm2 = \text{пл. } 1h_1G_2 2 = \ldots = {}^1/_2\,\pi;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$GO = G_2 2 = G_4 4 = \ldots = {}^1/_2\,\omega_A = {}^1/_2\,OK$$

и

$$h_1 1 = h_3 3 = h_5 5 = \ldots = {}^3/_2\,\omega_A = {}^3/_2 OK.$$

Нетрудно, далѣе, подсчитать, что

$$tg\,\delta = d\omega_B/dt = 2\omega_A{}^2/\pi$$

для нечетныхъ четвертей оборота системы *B*; для четныхъ $tg\,\delta$ лишь перемѣнитъ знакъ, не измѣняя, однако, своей абсолютной величины.

Никакихъ затрудненій не представитъ аналитическое рѣшеніе поставленной задачи. Движеніе системъ придется разобрать по отдѣльнымъ четвертямъ. При этомъ для первой четверти уравненіе, дающее измѣненія угловой скорости $\omega_B$, будетъ имѣть видъ

$$\omega_B = a + bt,$$

для второй

$$\omega_B = c - dt,$$

и т. д. Для системы *A* получимъ

$$\omega_A = k = const,$$

такъ что здѣсь

$$\alpha = kt,$$

—уголъ поворота системы *A* измѣняется пропорціонально времени.

Произведя необходимыя интеграціи, опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ и коэффиціентовъ $a$, $b$ и др., получимъ для каждой четверти оборота нашихъ системъ рядъ уравненій, характеризующихъ измѣненія участвующихъ здѣсь факторовъ, при чемъ окажется, что для всѣхъ нечетныхъ четвертей уравненія будутъ тѣ же, что и для первой четверти, а для всѣхъ четныхъ—тѣ же, что для второй. Уравненія для нечетныхъ четвертей будутъ имѣть видъ:

$$\omega_A = k = const;\ \alpha = kt;\ \omega_B = {}^1/_2 k + 2tk^2/\pi;\ \beta = {}^1/_2 kt + k^2t^2/\pi = {}^1/_2 a + \alpha^2/\pi;$$

$$d\omega_B/dt = 2k^2/\pi;$$

полярное уравненіе нечетныхъ четвертей полодіи *A* представится въ видѣ:

$$r = d(\pi + 4\alpha) : (3\pi + 4\alpha).$$

Для четныхъ четвертей найдемъ:

$$\omega_A = k;\ \alpha = kt;\ \omega_B = {}^3/_2 k - 2tk^2/\pi;\ \beta = {}^3/_2 kt - k^2t^2/\pi = {}^3/_2\alpha - \alpha^2/\pi;$$

$$d\omega_B/dt = -2k^2/\pi;$$

полярное уравненіе четныхъ четвертей полодіи **A** будетъ имѣть видъ:

$$r = d(3\pi - 4\alpha) : (5\pi - 4\alpha).$$

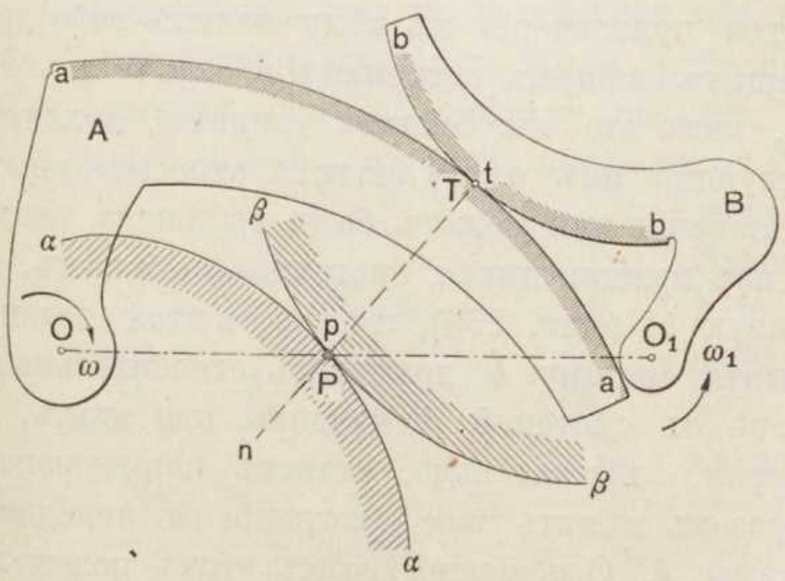
Нетрудно получить полярное уравненіе и для полодіи системы **B**.

Подробности всѣхъ сюда относящихся вычисленій можно найти въ III временномъ (литографированномъ) выпускѣ настоящаго курса (Москва, 1911 г.), на стр. 70—79.

Этими соображеніями по поводу опредѣленія полодій въ общемъ случаѣ разсматриваемой передачи мы и ограничимся; указаній, приведенныхъ выше, вполнѣ достаточно для того, чтобы имѣть возможность разобраться во всѣхъ случаяхъ, могущихъ встрѣтиться на практикѣ.

## § 39. Опредѣленіе профилей зубцовъ некруглыхъ полодій. Методы Poncelet и Reuleaux. Методъ, основанный на теоремѣ Savary. Теорема Камуса.

Предположимъ, что заданная намъ передача вращенія отъ одной неподвижной оси **O** къ другой, также неподвижной, приводится къ каченію полодій относительнаго движенія $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, одной по другой (фиг. 259); первая изъ этихъ полодій пусть принадлежитъ системѣ **A**, вращающейся вокругъ оси **O**, а вторая—системѣ **B**, вращающейся вокругъ оси $O_1$. Сама передача можетъ быть осуществлена, какъ мы знаемъ, путемъ вращенія системы **A** съ должной угловой скоростью $\omega$ и одновременнымъ каченіемъ полодіи $\alpha\alpha$ по полодіи $\beta\beta$; тогда и окажется, что система **B** будетъ вращаться около оси $O_1$ съ должной угловой скоростью $\omega_1$. Такимъ образомъ, если бы мы пожелали для осуществленія разсматриваемой передачи воспользоваться найденными полодіями, то должны были бы, прежде всего, обезпечить каченіе и невозможность скольженія. Достигнуть этого можно было бы, конечно, должнымъ нажатіемъ одной полодіи на другую; но, не говоря уже о томъ, что такое нажатіе, въ большинствѣ случаевъ, является




Фиг. 259.

нежелательнымъ,—хотя бы, напримѣръ, потому, что оно вызываетъ добавочныя давленія въ опорныхъ подшипникахъ, усиленное изнашиваніе трущихся частей и т. д.,—оно зачастую представляется прямо неосуществимымъ, ибо можетъ привести къ остановкѣ движенія. Дѣло въ томъ, что наши полодіи, для возможности передачи, выполняются въ видѣ нѣкоторыхъ цилиндровъ, съ образующими, параллельными осямъ вращенія, и съ направляющими—полодіями; но такъ какъ эти послѣднія могутъ имѣть самую разнообразную форму,—онѣ могутъ быть снабжены различными клиновидными выступами, такими же впадинами, могутъ имѣть видъ, подобный изображенному на фиг. 257, и т. д.,—то, при каченіи ихъ, можетъ произойти заклиниваніе, ущемленіе одной полодіи другою и, вслѣдъ за этимъ, прекращеніе движенія. Въ виду этого, обезпеченіе каченія полодій помощью нажатія примѣняется на практикѣ весьма рѣдко, лишь въ исключительныхъ случаяхъ, и, притомъ, только при наиболѣе простыхъ формахъ полодій,—круговыхъ и близкихъ къ нимъ. Опредѣленіе полодій относительнаго движенія является, такимъ образомъ, лишь первой стадіей рѣшенія поставленнаго вопроса, далеко еще не исчерпывающей его,—отъ непосредственнаго пользованія полодіями и, значитъ, матеріальнаго ихъ осуществленія приходится, какъ мы указывали, отказаться; но такъ какъ каждая передача, подобная нашей, въ концѣ-концовъ сводится, все-таки, къ каченію полодій, то второй стадіей рѣшенія и явится изысканіе тѣхъ способовъ, кои позволили бы намъ осуществить это каченіе полодій, не выполняя ихъ матеріально и, значитъ, разсматривая ихъ теперь просто, какъ нѣкоторыя математическія кривыя. Наиболѣе простымъ является привлеченіе къ дѣлу какихъ-либо другихъ кривыхъ, принадлежащихъ нашимъ системамъ и отличныхъ отъ полодій. Такими кривыми, какъ это мы сейчасъ увидимъ, являются о г и б а е м ы я и соотвѣтствующія имъ о г и б а ю щ і я относительныхъ движеній, и сущность пользованія ими можетъ быть выяснена такъ:

Выдѣлимъ въ одной изъ вращающихся системъ,—положимъ, въ системѣ $B$,—нѣкоторую кривую $bb$ (фиг. 259), жестко съ этой системой связанную, и станемъ двигать систему $B$ должнымъ относительнымъ движеніемъ ея $B/A$. Вмѣстѣ съ системой $B$ придетъ, при этомъ, въ движеніе и кривая $bb$, которая, слѣдовательно, станетъ непрерывно и вполнѣ опредѣленнымъ образомъ мѣнять свое положеніе въ неподвижной теперь плоскости системы $A$. Огибающей всѣхъ этихъ положеній кривой $bb$ явится нѣкоторая кривая $aa$, принадлежащая системѣ $A$; съ кривой $bb$, какъ съ своей огибаемой, скользящей и катящейся по ней, эта кривая будетъ имѣть въ каждый отдѣльный моментъ соприкосновеніе въ нѣкоторой точкѣ, вполнѣ для этого момента опредѣленной, и мы предположимъ, что въ разсматриваемый моментъ наши кривыя соприкоснулись своими точками $T$ и $t$, слившимися здѣсь въ одну точку $(T, t)$; полодіи $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ пусть въ этотъ моментъ соприкасаются своими точками $P$ и $p$, сливающимися въ одну точку $(P, p)$, предста-

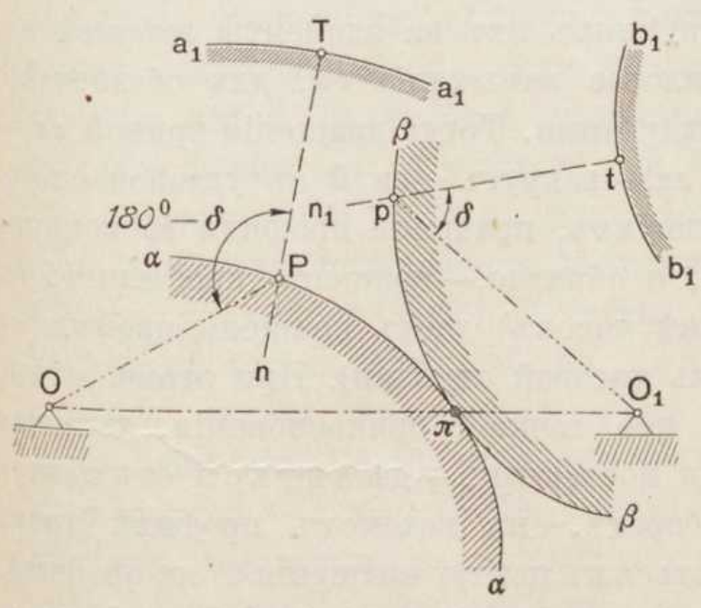
вляющую собою полюсъ мгновеннаго вращенія и занимающую на прямой $OO_1$ положеніе, вполнѣ и единственнымъ образомъ опредѣляемое соотношеніемъ

$$OP : O_1P = \omega_1 : \omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

—ради сокращенія письма, двойная точка $(P, p)$ обозначена здѣсь прямо черезъ $P$.

Согласно основному свойству огибаемыхъ и огибающихъ, можемъ, далѣе, установить, что общая нормаль къ огибаемой $bb$ и огибающей $aa$, проведенная въ точкѣ касанія ихъ $(T, t)$, пройдетъ черезъ полюсъ $(P, p)$. Это обстоятельство указываетъ намъ, что точки $T$ и $t$ представляютъ собою вполнѣ опредѣленныя точки кривыхъ $aa$ и $bb$. Дѣйствительно, мы видѣли, что точки $P$ и $p$ занимаютъ на своихъ полодіяхъ мѣста вполнѣ опредѣленныя; вполнѣ опредѣленными явятся поэтому какъ нормаль $nPT$, проведенная изъ точки $P$ къ кривой $aa$, такъ и нормаль $npt$, проведенная изъ точки $p$ къ кривой $bb$; отсюда, наконецъ, слѣдуетъ, что вполнѣ опредѣленными явятся и точки пересѣченія этихъ нормалей со своими кривыми, т.-е. точки $T$ и $t$, причемъ, очевидно, каждой точкѣ $t$ огибаемой будетъ соотвѣтствовать единственная точка $T$ огибающей, и, кромѣ того, для каждой такой пары соотвѣтственныхъ точекъ имѣетъ мѣсто равенство $PT = pt$, гдѣ черезъ $P$ и $p$ обозначены тѣ точки полодій, кои сливаются въ полюсъ мгновеннаго вращенія въ тотъ моментъ, когда точка $t$ приходитъ въ совпаденіе съ точкой $T$. Отсюда вытекаетъ слѣдующее очевидное заключеніе, которымъ намъ придется воспользоваться въ дальнѣйшемъ, а именно:

Предположимъ, что въ какой-либо изъ предшествовавшихъ моментовъ наши полодіи касались другъ друга въ нѣкоторой точкѣ $\pi$,—отмѣтимъ кстати, что, по свойству полодій, здѣсь будетъ имѣть мѣсто равенство: $\smile \pi P = \smile \pi p$ (фиг. 260); пусть наша огибаемая занимала




Фиг. 260.

въ этотъ моментъ положеніе $b_1b_1$. Проведемъ теперь черезъ точки $P$ и $p$ нормали $nPT$ (къ огибающей) и $n_1pt$ (къ огибаемой). Въ тотъ моментъ, когда полодія $\beta\beta$, катясь по $\alpha\alpha$, коснется ея въ точкѣ $(P, p)$, огибаемая коснется своей огибающей $aa$ въ точкѣ $(T, t)$; отсюда слѣдуетъ, что отрѣзки $PT$ и $pt$ этихъ нормалей, будучи ограничены точками, другъ другу соотвѣтствующими, между собою равны, углы же $OPT$ и $O_1pt$ или дополняютъ другъ друга до $180^0$ (если $P$ лежитъ внутри отрѣзка $OO_1$) или равны (если $P$ лежитъ внѣ этого отрѣзка);

кромѣ того, очевидно, что огибающая $aa$ коснется въ своей точкѣ $T$ окружности, описанной изъ центра $P$ радіусомъ $PT$, а огибаемая своей точкой $t$—окружности, описанной изъ центра $p$ радіусомъ $pt$, равнымъ $PT$. Это замѣчаніе, указывающее намъ пріемъ, помощью коего для каждой данной точки $t$ огибаемой можемъ найти соотвѣтствующую ей точку огибающей, пригодится намъ впослѣдствіи, когда мы будемъ разбирать методъ Poncelet построенія огибающей для данной огибаемой.

Вернемся теперь къ основному нашему чертежу (фиг. 259). Изъ него явствуетъ, что, съ точки зрѣнія осуществленія желаемаго относительнаго движенія $B/A$, для насъ совершенно безразлично, какъ выполнять его въ разсматриваемый моментъ, перекатывая ли полодію $\beta\beta$ по полодіи $\alpha\alpha$ или заставляя огибаемую $bb$ катиться и скользить по огибающей $aa$,—какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ движеніе системы $B$ сведется къ мгновенному вращенію около одного и того же полюса $P$ съ одной и той же угловой скоростью $(\omega + \omega_1)$.

То же заключеніе будетъ имѣть силу для всѣхъ другихъ моментовъ, такъ что можно сказать, вообще, что для движенія $B/A$ перекать полодіи $\beta\beta$ по полодіи $\alpha\alpha$ оказывается эквивалентнымъ каченію-скольженію огибаемой $bb$ по огибающей $aa$, а такъ какъ заданная передача можетъ быть, какъ мы знаемъ, осуществлена вращеніемъ системы $A$ съ угловыми скоростями $\omega$ и, одновременно съ этимъ, каченіемъ полодіи $\beta\beta$ по полодіи $\alpha\alpha$, то можно сказать, что та же передача можетъ быть осуществлена еще путемъ того же вращенія системы $A$ съ угловыми скоростями $\omega$ и сопровождающаго его каченія-скольженія огибаемой $bb$ по огибающей $aa$.

Это обстоятельство указываетъ, что заданная передача можетъ быть осуществлена такъ: системамъ $A$ и $B$ придаемъ видъ рычаговъ, вращающихся каждый вокругъ своей оси,—$A$ около $O$, а $B$ вокругъ $O_1$; затѣмъ въ одной изъ системъ матеріально выполняемъ огибающую $aa$, а въ другой—огибаемую $bb$, и, принявъ ихъ за элементы высшей кинематической пары, вводимъ силовое замыканіе ея, для обезпеченія постояннаго соприкосновенія между ними. Тогда вращенія кривой $aa$,—будемъ называть ее *профилемъ* $aa$,—вокругъ оси $O$ съ угловой скоростью $\omega$ вызоветъ, при этихъ условіяхъ, вращеніе профиля $bb$ вокругъ оси $O_1$ съ угловой скоростью $\omega_1$, и обратно,—вращеніе профиля $bb$ съ угловой скоростью $\omega_1$ (по стрѣлкѣ часовъ) дастъ вращеніе профиля $aa$ съ угловой скоростью $\omega$ (противъ часовой стрѣлки). При этомъ можно будетъ установить тотъ фактъ, что точка соприкосновенія, лежащая на ведущемъ профилѣ, будетъ постепенно удаляться отъ центра вращенія этой системы, и наоборотъ,—на ведомомъ профилѣ точка соприкосновенія будетъ приближаться къ центру вращенія этого профиля.

Надо, однако, замѣтить, что опредѣленіе огибающаго профиля $aa$ еще не вполнѣ разрѣшаетъ поставленную задачу о передачѣ и осуществленіи заданнаго движенія. Дѣло въ томъ, что, хотя одна пара со-

пряженныхъ профилей и можетъ обезпечить непрерывное вращеніе системъ $A$ и $B$,— съ этимъ случаемъ передачи мы встрѣтимся ниже, при разсмотрѣніи такъ называемыхъ *коловратныхъ машинъ*, гдѣ каждый изъ профилей представляетъ собою замкнутую кривую,— но при этомъ приходится считаться съ тѣмъ усложняющимъ все дѣло обстоятельствомъ, что нѣкоторыя части профилей, иногда весьма значительныя, удаляются очень далеко отъ полюсовъ мгновеннаго вращенія, что, въ случаѣ большихъ нагрузокъ можетъ повести къ усиленному изнашиванію профилей и, значитъ, нарушенію правильности передачи. Поэтому передачу необходимо устраивать такъ, чтобы работающій профиль находился за все время своего касанія на *близкомъ* разстояніи отъ полюсовъ. Очевидно, что обойтись при этомъ лишь одной парой профилей ($aa$ и $bb$) становится невозможнымъ, и приходится, послѣ окончанія зацѣпленія между профилями $aa$ и $bb$, вводить въ зацѣпленіе пару другихъ, новыхъ профилей $a_1a_1$ и $b_1b_1$, затѣмъ пару третьихъ, и т. д.,—вообще, оказывается необходимымъ выдѣлить въ нашихъ системахъ рядъ соотвѣтствующихъ профилей, постепенно входящихъ въ зацѣпленіе. Присоединивъ сюда еще рядъ профилей для обезпеченія вращенія въ обратную сторону, увидимъ, что каждая пара сосѣднихъ кривыхъ одной и той же системы опредѣлитъ собою то, что называется *зубцомъ*, сама же система дастъ собою *зубчатое колесо*, круглое или некруглое, что будетъ зависѣть отъ вида полодіи. Профиля зубцовъ одного колеса могутъ быть, какъ видимъ, выбраны совершенно произвольно; профиля другого явятся вполнѣ опредѣленными.—Вернемся теперь снова къ нашему общему случаю одной пары соотвѣтственныхъ кривыхъ,—огибающей $aa$ и огибаемой $bb$ (фиг. 259).

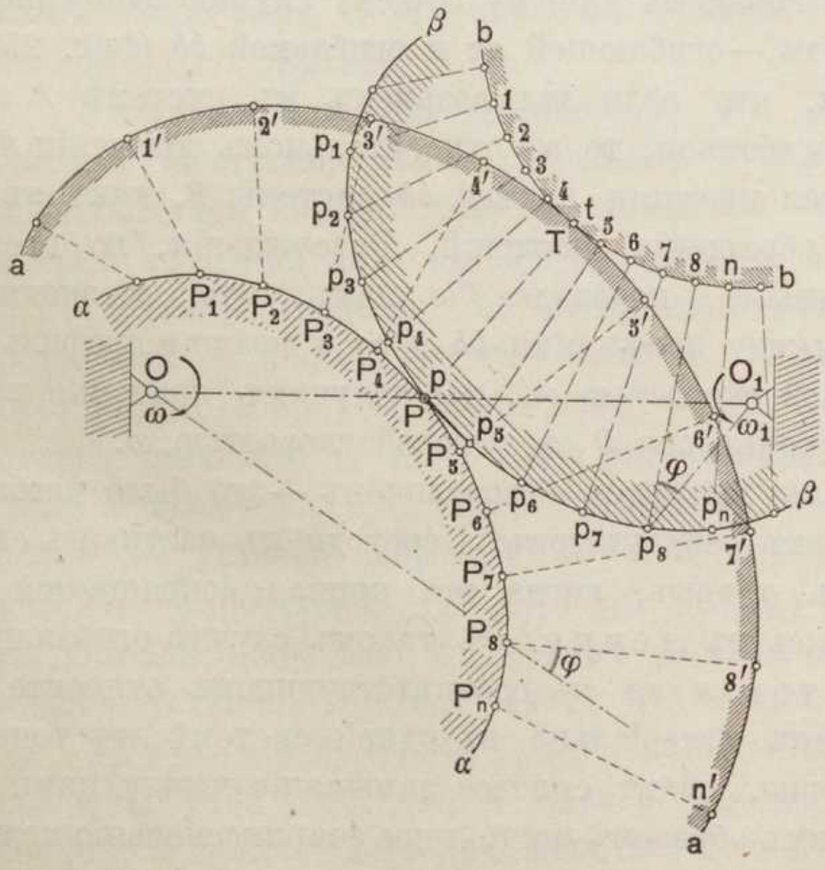
Нетрудно убѣдиться, что если мы возьмемъ въ системѣ $A$ эту кривую $aa$ въ качествѣ огибаемой, то въ относительномъ движеніи $A/B$ огибающей для нея явится прежняя кривая $bb$ системы $B$, какъ это и слѣдуетъ по принципу обращенія движеній. Разсужденія, во всемъ подобныя вышеприведеннымъ, показали бы намъ, что, обезпечивъ теперь соприкосновеніе между профилями $bb$ и $aa$ и вращая профиль $bb$ вокругъ оси $O_1$ съ угловой скоростью $\omega_1$, мы получимъ вращеніе профиля $aa$ и системы $A$ вокругъ оси $O$ съ угловой скоростью $\omega$.

Видъ кривой $bb$ былъ для насъ безразличенъ,—это было необходимо для полученія общихъ результатовъ. Переходя къ частнымъ случаямъ, упомянемъ лишь о томъ, когда эта кривая сокращается до размѣровъ нуля, обращаясь въ точку. Въ такомъ случаѣ огибающей для нея явится траекторія ея въ соотвѣтствующемъ относительномъ движеніи. Выполнивъ матеріально въ одной системѣ эту точку, а въ другой—ея траекторію, введя силовое замыканіе между ними и, значитъ, обезпечивъ такимъ образомъ постоянное соприкосновеніе между ними, и вращая одну изъ системъ съ данной угловой скоростью, получимъ вращеніе другой съ желаемой угловой скоростью.—Вмѣсто одной точки можемъ взять въ системѣ нѣсколько; тогда для каждой изъ

нихъ придется опредѣлить въ другой системѣ ея огибающую, и дальше дѣйствовать согласно сказанному выше. Результатъ получится тотъ же, что и раньше.—Никакихъ трудностей не представитъ разборъ и всѣхъ другихъ частныхъ случаевъ, почему на нихъ мы останавливаться больше не будемъ и перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вопроса о нахожденіи огибающихъ по заданнымъ огибаемымъ.

Изъ всѣхъ способовъ, примѣняемыхъ при разрѣшеніи этого вопроса, самымъ простымъ является, конечно, способъ непосредственнаго нахожденія, который мы уже примѣнили выше, при нахожденіи огибающей *aa* для данной огибаемой *bb* (фиг. 259). Онъ сводится къ перемѣщенію всей огибаемой вмѣстѣ съ системой, ее несущей, и въ этомъ и заключается главное препятствіе къ успѣшному примѣненію его на практикѣ: кривая *bb* можетъ имѣть восьма сложную и неудобную для черченія ея форму, дѣлающую многократное перечерчиваніе ея затруднительнымъ; чертежъ очень усложняется и, наконецъ, малѣйшая чертежная ошибка сейчасъ же весьма замѣтно отражается на результатѣ. Поэтому для полученія огибающихъ пользуются другими способами, изъ коихъ мы остановимся на такъ называемыхъ *методѣ Poncelet* и *методѣ Reuleaux*. Сущность перваго изъ нихъ,—метода Poncelet,—состоитъ въ слѣдующемъ:

Предположимъ, что требуемое вращеніе системы ***B*** можетъ быть осуществлено помощью полодій $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ (фиг. 261), и пусть въ системѣ ***B*** выдѣленъ какой-либо произвольный профиль *bb*. Требуется отыскать для него въ системѣ ***A*** огибающую для относительнаго движенія ***B*** / ***A***, вполнѣ намъ извѣстнаго и опредѣленнаго, получаемаго, какъ мы знаемъ, путемъ остановки полодіи $\alpha\alpha$ и перекатыванія по ней полодіи $\beta\beta$. Пусть въ данный моментъ объ полодіи касаются другъ друга въ точкѣ ***P***. Намѣтимъ теперь на полодіи $\alpha\alpha$, по обѣ стороны отъ полюса ***P***, рядъ точекъ $P_1$, $P_2$, . . . , $P_n$, близкихъ одна къ другой настолько, чтобы дуги опредѣляемыя каждой парой сосѣднихъ точекъ, возможно меньше отличались отъ стягивающихъ ихъ хордъ. Каждая




Фиг. 261.

изъ этихъ точекъ $P_x$ будетъ служить въ соотвѣтствующій моментъ переката полодіи $\beta\beta$ полюсомъ мгновеннаго вращенія системы $B$. Замѣтивъ это, опредѣлимъ на подвижной теперь полодіи $\beta\beta$ тѣ точки ея, которыя въ свое время, при перекатѣ этой полодіи, будутъ совпадать съ выдѣленными нами точками $P_x$ и, значитъ, будутъ опредѣлять собою полюса мгновеннаго вращенія. Для этого придется отложить по кривой $\beta\beta$ дуги, равныя соотвѣтственнымъ дугамъ, выдѣленнымъ на полодіи $\alpha\alpha$; такимъ образомъ, мы отложимъ дугу $Pp_4$, равную дугѣ $PP_4$, $\smile p_4p_3 = \smile P_4P_3$, $\smile p_3p_2 = \smile P_3P_2$, . . . ; $\smile Pp_5 = \smile PP_5$, . . . Такимъ путемъ мы выдѣлимъ на полодіи $\beta\beta$ рядъ точекъ $p_m$, соотвѣтствующихъ точкамъ $P_m$ кривой $\alpha\alpha$, и, при каченіи полодіи $\beta\beta$, каждая изъ этихъ точекъ $p_m$ въ должный моментъ придетъ въ совпаденіе съ соотвѣтственной точкой $P_m$, образуя полюсъ, этому моменту приличествующій.

Проведемъ теперь черезъ такъ полученныя точки $p_m$ нормали $p_1 1$, $p_2 2$, . . . къ заданному намъ профилю $bb$ и будемъ разсуждать такъ:

Въ тотъ моментъ, когда при каченіи полодіи $\beta\beta$ точка $p_1$ придетъ въ совпаденіе съ точкой $P_1$, общая нормаль, проведенная черезъ полюсъ $(P_1, p_1)$, этому моменту соотвѣтствующій, должна будетъ пойти по нормали $p_1 1$ и съ ней слиться, ибо прямая $p_1 1$ и представляетъ собою нормаль, проведенную къ огибаемой $bb$ изъ точки, служащей въ указанный моментъ полюсомъ мгновеннаго вращенія, а въ моментъ касанія, согласно фиг. 259, общая нормаль $n(T, t)$ сливается съ этой нормалью $pt$. Такъ какъ, кромѣ того, отрѣзокъ $PT$ нормали къ огибающей равенъ отрѣзку $pt$ нормали къ огибаемой, то, описавъ изъ центра $P_1$ дугу радіусомъ, равнымъ $p_1 1$, сможемъ сказать, что эта дуга будетъ касательна къ искомой огибающей, причемъ точкой касанія ихъ будетъ служить точка, соотвѣтствующая точкѣ $1$.

Аналогично заключаемъ, что въ моментъ совпаденія точекъ $p_2$ и $P_2$, когда, слѣдовательно, полюсомъ будетъ служить точка $(p_2, P_2)$, отрѣзокъ общей нормали между полюсомъ и точкой касанія будетъ равенъ отрѣзку $p_2 2$, откуда слѣдуетъ, что искомая огибающая должна коснуться также круговой дуги, описанной изъ центра $P_2$ радіусомъ, равнымъ $p_2 2$. На томъ же основаніи утверждаемъ, что та же искомая огибающая коснется также круговыхъ дугъ, описанныхъ изъ $P_3$ радіусомъ $p_2 3$, изъ $P_4$—радіусомъ $p_4 4$, . . . , изъ $P_n$—радіусомъ $p_n n$. Проведя всѣ эти круговыя дуги и нѣкоторую кривую $aa$, *касательную* къ всѣмъ нимъ, мы и получимъ такимъ нутемъ искомую огибающую,—ею будетъ служить полученная нами кривая $aa$. Точки касанія ея съ этими круговыми дугами,—пусть это будутъ точки $1'$, $2'$, $3'$, . . . , $n'$,—будутъ соотвѣтствовать точкамъ $1$, $2$, $3$, . . . , $n$ огибаемой $bb$.

Никакихъ затрудненій не представитъ построеніе этой огибающей и по точкамъ.

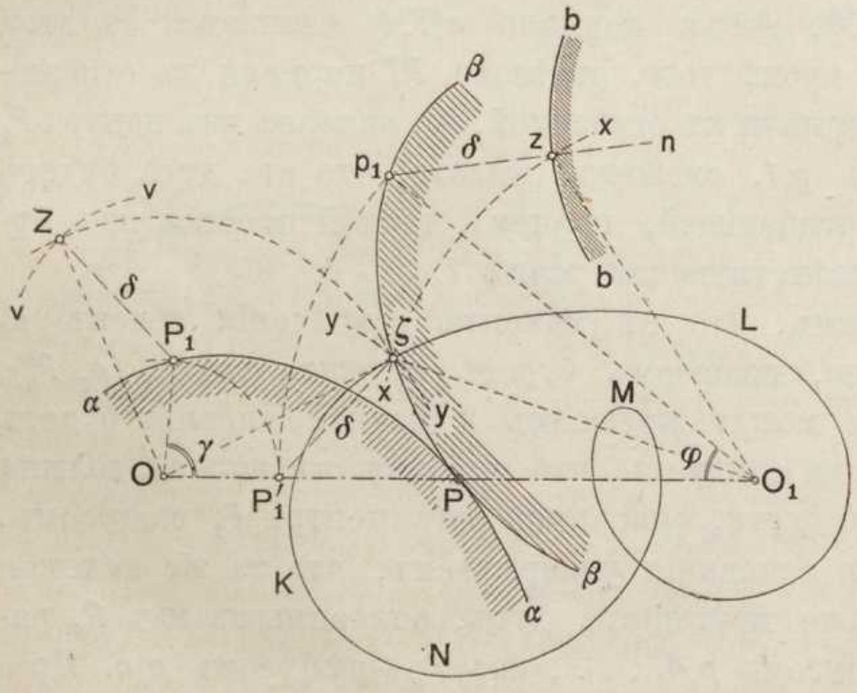
Пусть, напримѣръ, на кривой $aa$ требуется найти точку $8$, соотвѣтствующую точкѣ $8'$ кривой $bb$. Ясно, что въ моментъ совпаденія

точекъ $p_8$ и $P_8$ нормаль $p_8 8$ совпадетъ съ нормалью $P_8 8'$, а отрѣзокъ $O_1 p_8$ вытянется въ одну прямую съ отрѣзкомъ $OP_8$,— сумма этихъ двухъ отрѣзковъ равна $OO_1 = const.$ Отсюда слѣдуетъ, что уголъ $OP_8 8'$ въ суммѣ съ угломъ $O_1 p_8 8$, обозначеннымъ нами черезъ $\varphi$, долженъ дать $180^0$, и, слѣдовательно, положеніе точки $8'$, соотвѣтствующей точкѣ $8$, получимъ, построивъ на прямой $OP_8$, у точки $P_8$ ея, уголъ $\varphi$ и отложивъ на другой сторонѣ его отрѣзокъ $P_8 8'$, равный отрѣзку $p_8 8$. Ясно, что, при каченіи полодіи $\beta\beta$ по полодіи $\alpha\alpha$, точка $8$ огибаемой въ моментъ $(P_8, p_8)$ сольется именно съ этой точкой $8'$ огибающей $\alpha\alpha$.—Такое же построеніе будетъ имѣть силу для любой другой точки $n$ огибаемой $bb$.

Если $OP_m$ оказывается больше отрѣзка $OO_1$, т.-е. если имѣетъ мѣсто внѣшнее дѣленіе, то вмѣсто угла $\varphi$ придется брать его дополненіе до $180^0$,— на этихъ деталяхъ мы останавливаться здѣсь не будемъ.

Таковъ методъ Понселе, весьма простой и наглядный. Онъ одинаково примѣнимъ ко всякимъ полодіямъ, сколь бы сложную форму онѣ ни имѣли. Огибающая $\alpha\alpha$, получаемая по этому методу, выходитъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ больше мы беремъ точекъ $P_m$, чѣмъ ближе одна къ другой лежатъ эти точки и, что важнѣе всего, чѣмъ точнѣе опредѣляются нормали $p_m m$, и, если эти условія выполнены достаточно точно, то дуги окружностей, описанныхъ изъ центровъ $P_m$, весьма отчетливо выдѣлятъ искомую огибающую.

Нѣсколько болѣе сложнымъ представляется *методъ Reuleaux*, позволяющій строить огибающую по точкамъ. Основная идея этого метода заключается въ томъ, что мы, взявъ какую-либо точку $z$ заданнаго огибаемаго профиля $bb$ (фиг. 262), опредѣляемъ затѣмъ ту точку неподвижной плоскости, въ которой взятая нами точка совпадетъ въ свое время съ соотвѣтствующей ей точкой $Z$ искомаго огибающаго профиля $\alpha\alpha$; послѣ этого получается возможность найти положеніе этой точки $Z$ и въ разсматриваемый моментъ. Осуществляется эта идея такъ:




Фиг. 262.

Пусть въ системѣ $B$ нами выдѣлена нѣкоторая кривая $bb$, принимаемая нами за огибаемую, на которой мы затѣмъ намѣчаемъ нѣкорую точку $z$. Пусть полодіями относительныхъ движеній служатъ кривыя $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, соприкасающіяся въ разсматриваемый моментъ въ

точкѣ $P$. Проводимъ теперь черезъ эту точку $z$ нормаль $nz$ къ кривой $\beta\beta$ и предположимъ, что она пересѣкаетъ полодію $\beta\beta$ въ точкѣ $p_1$. Такимъ образомъ, въ моментъ соприкосновенія огибаемой $bb$ съ ея огибающей точками ихъ $z$ и $Z$ полюсомъ будетъ служить эта точка $p_1$, и положеніе ея на линіи центровъ $OO_1$ въ моментъ касанія $(z, Z)$ опредѣлимъ, засѣкая изъ центра $O_1$ дугу радіусомъ $O_1p_1$; пересѣченіе ея съ $OO_1$ и дастъ точку $P_1'$,—полюсъ мгновеннаго вращенія для указаннаго момента $(z, Z)$; съ нимъ въ этотъ моментъ и совпадетъ наша точка $p_1$.

Взятая нами точка $z$ профиля $bb$ принадлежитъ системѣ $B$ и, слѣдовательно, раздѣляя вращеніе этой послѣдней вокругъ центра $O_1$, движется по окружности $xx$, описанной изъ центра $O_1$ радіусомъ $O_1z$. Отсюда слѣдуетъ, что въ тотъ моментъ, когда точка $p_1$ придетъ въ $P_1'$, точка $z$ окажется лежащей въ точкѣ $\zeta$ пересѣченія окружности $xx$ съ окружностью $yy$, описанной изъ центра $P_1'$ радіусомъ $\delta$, равнымъ отрѣзку $p_1z$. Полученная точка $\zeta$ представляетъ собою мѣсто точки $z$ въ моментъ $(z, Z)$, когда, слѣдовательно, огибаемая $bb$ своей точкой $z$ коснется огибающей въ точкѣ $Z$ этой послѣдней.

Нахожденіе этой точки $Z$ теперь никакихъ трудностей не представляетъ. Прежде всего, замѣчаемъ, что точка $P_1$ полодіи $\alpha\alpha$, имѣющая въ моментъ $(z, Z)$ совпасть съ точкой $P_1'$ отрѣзка $OO_1$, найдется въ точкѣ пересѣченія кривой $\alpha\alpha$ съ окружностью, описанной изъ центра $O$ радіусомъ $OP_1'$. Отсюда слѣдуетъ, что точка $Z$ лежитъ на окружности $vv$, описанной изъ центра $P_1$ радіусомъ $\delta$, равнымъ $p_1z$; а такъ какъ, кромѣ того, она находится отъ точки $O$ на разстояніи $O\zeta$, то и оказывается, что искомая точка $Z$ будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія круговой дуги $vv$ съ дугою, описанной изъ центра $O$ радіусомъ $O\zeta$.

Полученная такимъ путемъ точка $Z$ представляетъ собою одну изъ точекъ искомой огибающей $aa$,—ту именно, которой эта кривая $aa$ соприкоснется съ огибаемой $bb$ въ точкѣ $z$ этой послѣдней; случится это въ тотъ моментъ, когда полюсъ будетъ лежать въ точкѣ $P_1'$, въ которой совпадутъ точки $P_1$ и $p_1$ полодій; само совпаденіе точекъ $z$ и $Z$ огибаемой и огибающей произойдетъ въ точкѣ $\zeta$ неподвижной плоскости.

Взявъ на огибаемой $bb$ рядъ точекъ $z$ и повторивъ для каждой построеніе, подобное приведенному выше, получимъ: 1) рядъ точекъ $Z$, опредѣляющихъ собою контуръ искомой огибающей, и 2) рядъ точекъ $\zeta$, образующихъ нѣкоторую кривую $KLMN$, играющую весьма важную роль въ теоріи зацѣпленій вообще и называемую *линіей зацѣпленія*; она, какъ видимъ, представляетъ собою геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ будетъ послѣдовательно происходить соприкосновеніе взятой нами огибаемой $bb$ съ ея огибающей $aa$.

На чертежѣ (фиг. 262) линія зацѣпленія изображена сомкнутой, что, очевидно, можетъ имѣть мѣсто лишь въ томъ случаѣ, когда зацѣпленіе осуществляется помощью одной лишь пары кривыхъ $aa$ и $bb$,

также сомкнутыхъ. Если кривая, опредѣляющая профиль, будетъ разомкнута, то разомкнутой является также и линія зацѣпленія.

Пусть профиль $bb$ встрѣчаетъ свою полодію $\beta\beta$ въ нѣкоторой точкѣ $p_0$, и пусть ей соотвѣтствуетъ нѣкоторая точка $P_0$ полодіи $aa$, въ извѣстный опредѣленный моментъ сливающаяся съ $p_0$ въ одну точку $(P_0, p_0)$,—полюсъ мгновеннаго вращенія для этого момента. Такъ какъ эта точка $(P_0, p_0)$, подобно всѣмъ остальнымъ полюсамъ, будетъ лежать на оси $OO_1$, то выходитъ, что *линія зацѣпленія* данной пары соотвѣтственныхъ кривыхъ $aa$ и $bb$ *проходитъ черезъ полюсъ* $(P_0, p_0)$, встрѣчаясь здѣсь съ осью $OO_0$.

Если профиль $bb$, пересѣкши полодію $\beta\beta$, пройдетъ по другую сторону ея, то туда же, по ту же сторону полодіи $bb$, перейдетъ и линія зацѣпленія. Зная начальную и конечную точку профиля $bb$, найдемъ начало и конецъ зацѣпленія и, значитъ, *длину дуги зацѣпленія*, соотвѣтствующую данному профилю.

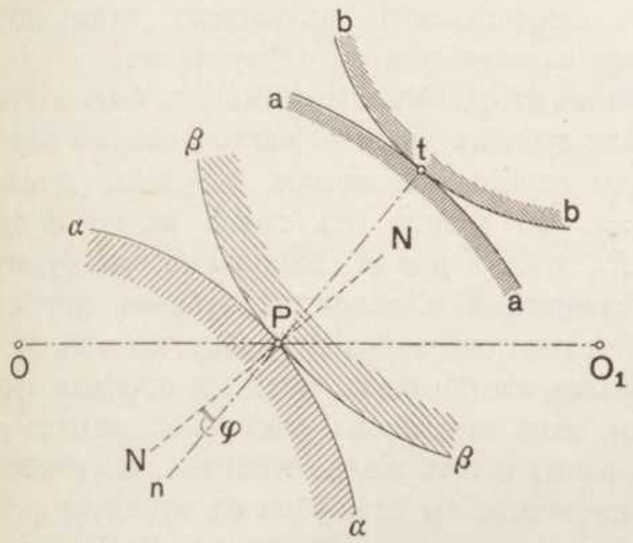
Въ случаѣ круглыхъ полодій линія зацѣпленія обладаетъ нѣкоторыми особенностями, выясненіе коихъ будетъ выполнено ниже, при разборѣ соотвѣтствующихъ зацѣпленій.

Огибающую $aa$ мы получимъ, соединивъ непрерывной кривой всѣ точки $Z$, соотвѣтствующія точкамъ $z$ профиля огибаемой $bb$, но при этомъ вычерчиваніи ея всегда надо имѣть въ виду, что каждый отрѣзокъ $P_1Z$ (фиг. 262) долженъ служить нормалью къ профилю $aa$ въ точкѣ $Z$ его,—иными словами, профиль $aa$ долженъ быть касательнымъ къ окружности, описанной изъ $P_1$ радіусомъ $P_1Z$. Такимъ образомъ, профиль $aa$ можно будетъ признать вѣрнымъ лишь въ томъ случаѣ, если онъ окажется касательнымъ ко всѣмъ окружностямъ, описаннымъ изъ различныхъ точекъ $P_1$ полодіи $aa$ соотвѣтственными радіусами $PZ$. Такая провѣрка правильности контура профиля необходима; она, какъ видимъ, сближаетъ методъ Reuleaux съ методомъ Poncelet.

Точку $P_1$ полодіи $aa$, соотвѣтствующую точкѣ $p_1$, мы находили путемъ засѣканія круговой дугой радіуса $OP_1'$ и центра $O$. Надо, однако, замѣтить, что такое опредѣленіе точекъ $P_1$ особенно точнымъ признать нельзя, ибо пересѣченіе это, обычно, получается весьма неяснымъ, какъ это и бываетъ при полодіяхъ, близкихъ къ окружностямъ; при круглыхъ полодіяхъ такой пріемъ нахожденія точекъ $P_1$ не дастъ никакихъ результатовъ, ибо здѣсь дуга $P_1'P_1$ сольется всѣми своими точками съ дугой $PP_1a$. Поэтому болѣе раціональнымъ слѣдуетъ признать или отложеніе по кривой $aa$ дуги $PP_1$, равной дугѣ $Pp_1$, или, что удобнѣе всего, опредѣленіе угла $\gamma$, соотвѣтствующаго углу $\varphi$, что можно выполнить при помощи графиковъ угловыхъ скоростей данной системы. *Равенство дугъ слѣдуетъ провѣрять путемъ подсчета соотвѣтствующихъ угловъ*,—этого правила надо придерживаться какъ здѣсь, такъ и при примѣненіи метода Poncelet.

Опредѣленіе соотвѣтствующихъ профилей по методу Reuleaux требуетъ отысканія довольно значительнаго числа точекъ $Z$, ибо только

такимъ путемъ и можно обезпечить достаточную точность получаемыхъ контуровъ. Примѣненіе этого метода представляетъ нѣкоторыя трудности лишь въ случаѣ некруглыхъ полодій, ибо здѣсь, при взаимномъ каченіи полодій $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, *полюсъ* $P$ постоянно *перемѣщается по оси* $OO_1$; это затрудненіе отпадаетъ при круглыхъ полодіяхъ, гдѣ полюсъ $P$ зафиксированъ, занимая вполнѣ опредѣленное мѣсто на оси $OO_1$.—Послѣ этихъ замѣчаній мы перейдемъ къ разсмотрѣнію третьяго способа опредѣленія огибающей для данной огибаемой, — способа, основаннаго на *теоремѣ Савари*. Сущность его заключается въ слѣдующемъ:



Фиг. 263.

Пусть въ системѣ $\beta\beta$ выдѣлена огибаемая $bb$, касающаяся въ данный моментъ своей огибающей $aa$ въ точкѣ $t$ (фиг. 263); полюсомъ въ этотъ моментъ пусть служитъ точка $P$ касанія полодій $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$. Такимъ образомъ, общей нормалью къ полодіямъ будетъ служить нѣкоторая прямая $NPN'$, а къ огибаемой и огибающей—прямая $tPn$. Обозначимъ уголъ $nPN'$ черезъ $\varphi$, а отрѣзокъ $tP$—черезъ $p$. Тогда, на основаніи теоремы Савари, можно написать соотношеніе

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\cos\varphi\left(\frac{1}{\varrho-p}+\frac{1}{\varrho_1+p}\right),$$

гдѣ черезъ $R$ и $R_1$ обозначены радіусы кривизны полодій, а черезъ $\varrho$ и $\varrho_1$—радіусы кривизны огибающей $aa$ и огибаемой $bb$, причемъ всѣ эти факторы соотвѣтствуютъ лишь взятому моменту; для слѣдующаго значенія ихъ измѣняются.

Предположимъ теперь, что геометрическія свойства обѣихъ полодій и взятой огибаемой намъ извѣстны вполнѣ, такъ что для каждаго даннаго момента намъ будутъ извѣстны значенія какъ факторовъ $p$ и $\varphi$, такъ и радіусовъ $R$, $R_1$ и $\varrho_1$. Отсюда слѣдуетъ, что для каждаго момента будетъ извѣстна и величина радіуса кривизны $\varrho$ огибающей, ибо для опредѣленія его мы будемъ имѣть каждый разъ уравненіе, единственной неизвѣстной въ коемъ будетъ служить только эта величина $\varrho$. Такимъ образомъ, для каждаго момента будутъ извѣстны положеніе центра кривизны кривой $aa$ во взятой ея точкѣ и, значитъ, та окружность, съ коей наша кривая $aa$ будетъ имѣть въ этой точкѣ касаніе второго порядка, откуда слѣдуетъ, что искомая кривая $aa$ представитъ собою огибающую всѣхъ этихъ круговъ кривизны съ радіусами $\varrho$.

Примѣненіе этого способа опредѣленія огибающихъ въ случаѣ некруглыхъ колесъ является затруднительнымъ, главнымъ образомъ, по

тому, что для каждой отдѣльной точки искомой огибающей оно требуетъ знанія значеній пяти указанныхъ выше факторовъ. При круглыхъ полодіяхъ дѣло нѣсколько упрощается въ виду того, что здѣсь $R$ и $R_1$ полодій постоянны, такъ что для каждой точки придется опредѣлять только три фактора: $\varphi$, $p$ и $\varrho_1$, а если профиль $bb$ очертимъ какой-либо круговой дугой, такъ что $\varrho_1 = const$, то для опредѣленія $\varrho$ нужно будетъ имѣть значенія уже только двухъ факторовъ: $\varphi$ и $p$.

Изложенныя соображенія позволяютъ исчерпывающе разъяснить одинъ изъ важныхъ вопросовъ зубчатой передачи. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Выше было указано, что профиля зубцовъ на одномъ колесѣ могутъ быть взяты какими-угодно; соотвѣтствующіе имъ профиля зубцовъ другого явятся вполнѣ опредѣленными. Предположимъ теперь, что зубцы одного изъ колесъ очерчены дугами одного и того же радіуса $\varrho_1$. Тогда, замѣчая, что теперь отъ точки къ точкѣ будутъ мѣняться, вообще говоря, какъ $R$ и $R_1$, такъ и $p$ и $\varphi$, заключаемъ, что будетъ перемѣннымъ и $\varrho$, радіусъ кривизны огибающихъ, т.-е. профилей зубцовъ другого колеса,—кривизна эта будетъ мѣняться не только отъ зубца къ зубцу, но и на протяженіи одного и того же профиля. Подобнымъ же образомъ, если бы профиля зубцовъ одного колеса мы взяли одинаковыми, такъ что законъ измѣненія радіуса $\varrho_1$ по длинѣ профиля былъ бы для всѣхъ нихъ одинъ и тотъ же, то очевидно, что измѣненія радіусовъ $\varrho$ профилей другого колеса протекали бы отъ зубца къ зубцу *по разному*, вслѣдствіе непрестаннаго измѣненія всѣхъ остальныхъ факторовъ: $R$, $R_1$, $p$ и $\varphi$.

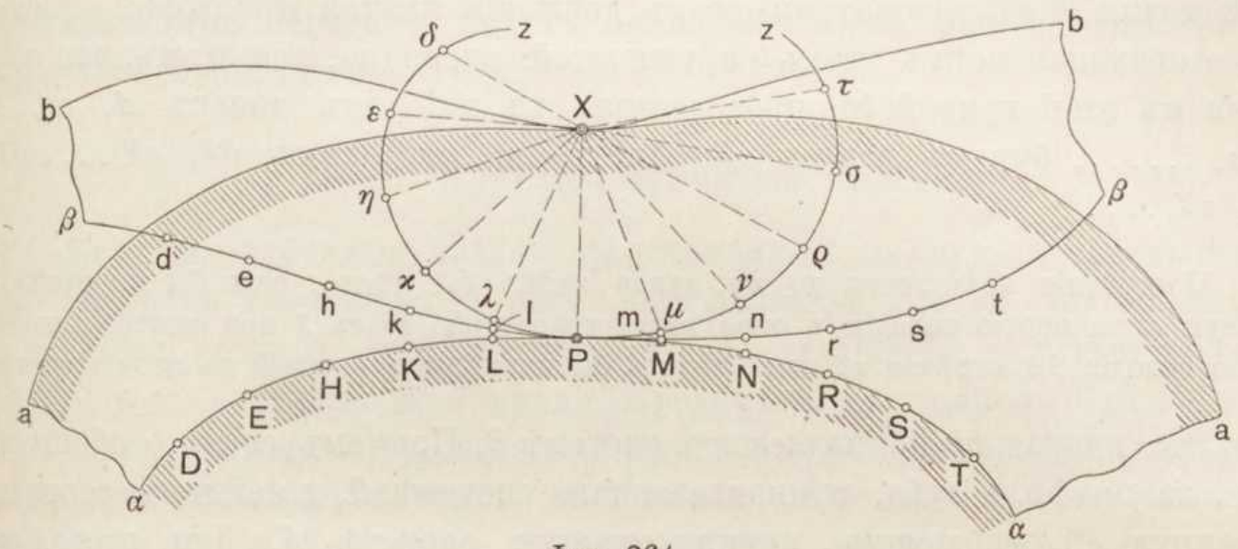
Отсюда вытекаетъ, что, въ общемъ случаѣ передачи, *при одинаковыхъ зубцахъ одного колеса всѣ зубцы другого будутъ разными*, такъ что профиля каждаго изъ нихъ приходится опредѣлять отдѣльно. Это обстоятельство значительно затрудняетъ на практикѣ изготовленіе этихъ колесъ и заставляетъ замѣнять ихъ другими подходящими механизмами, работающими безъ зацѣпленія. Такъ, напримѣръ, пару эллиптическихъ колесъ, вращающихся вокругъ фокусовъ, можно замѣнить механизмомъ симметрическаго кривошипа, какъ это было указано въ статьѣ о мертвыхъ положеніяхъ, и т. д.

Итакъ, профиля зубцовъ одного изъ колесъ, какъ огибаемыя, могутъ быть очерчены по какимъ угодно кривымъ; сопряженные имъ профиля зубцовъ другого колеса, будучи огибающими для нихъ, будутъ очерчены всякій разъ кривыми, вполнѣ опредѣленными. Методы полученія огибающихъ по даннымъ огибаемымъ разобраны нами выше, и на очереди встаетъ вопросъ о наиболѣе раціональномъ выборѣ кривыхъ для очерчиванія огибаемыхъ. Не касаясь динамической стороны этого вопроса, мы остановимся немного лишь на кинематической, графической сторонѣ его, и по этому поводу можно сказать лишь одно,—что наиболѣе раціональными кривыми явятся здѣсь, очевидно, тѣ, которыя позволяютъ находить ихъ огибающія наиболѣе просто, помощью наименьшаго числа графическихъ построеній. Среди этихъ кривыхъ на первомъ мѣстѣ можно поставить такъ называемыя *циклическія* кривыя; разсмотрѣніемъ свойствъ ихъ мы теперь и займемся; нѣкоторыя другія кривыя будутъ разсмотрѣны въ слѣдующемъ параграфѣ.

*Циклической кривой* называется траекторія точки, принадлежащей системѣ какой-либо окружности, которая катится по нѣкоторой другой окружности, внѣ или внутри ея. Въ первомъ случаѣ получаются такъ называемыя *эпициклоиды*, а во второмъ—*гипоциклоиды*. Съ этими

кривыми мы встрѣтимся еще разъ въ дальнѣйшемъ, при разсмотрѣніи зацѣпленій въ круглыхъ зубчатыхъ колесахъ, а теперь мы разсмотримъ *обобщенныя циклическія кривыя*, понимая подъ ними траекторіи точекъ, связанныхъ съ какой-нибудь кривой, катящейся по нѣкоторой другой кривой, при чемъ обѣ кривыя будемъ принимать отличными отъ окружностей.

Предположимъ, такимъ образомъ, что у насъ имѣются двѣ полодіи, $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, осуществляющія заданное движеніе, и пусть въ качествѣ огибаемой предполагается взять траекторію какой-либо точки $X$, принадлежащей системѣ кривой $zz$, катящейся безъ скольженія по полодіи $\beta\beta$ (фиг. 264). Посмотримъ, какъ построится эта огибаемая, а затѣмъ опредѣлимъ и ея огибающую.




Фиг. 264.

Пусть въ разсматриваемый моментъ эта кривая $zz$ занимаетъ положеніе, указанное на чертежѣ, т.-е. касается полодіи $\beta\beta$ въ точкѣ $P$, служащей полюсомъ мгновеннаго вращенія для этого момента,—иными словами, въ точкѣ касанія полодіи $\beta\beta$ съ полодіей $\alpha\alpha$; пусть, далѣе, въ системѣ $zz$ выдѣлена какая-либо точка $X$. Опредѣлимъ по этимъ даннымъ траекторію этой точки $X$ при каченіи кривой $zz$ по кривой $\beta\beta$.

Съ этой цѣлью намѣчаемъ на кривой $zz$ рядъ точекъ: $\delta, \varepsilon, \eta, \ldots$, $\varrho, \sigma, \tau, \ldots$, не особенно удаленныхъ одна отъ другой. На полодіяхъ $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ отмѣтимъ точки, имъ соотвѣтствующія, для чего по этимъ полодіямъ придется отложить дуги, соотвѣтственно равныя выдѣленнымъ нами дугамъ кривой $zz$. Такимъ образомъ получимъ точки $d, e, h \ldots$ $r, s, t, \ldots$ полодіи $\beta\beta$ и точки $D, E, H, \ldots, R, S, T, \ldots$ полодіи $\alpha\alpha$ при чемъ, какъ мы указали, будутъ имѣть мѣсто равенства:

$$\begin{aligned}
&\smile P\lambda = \smile Pl = \smile PL,\\
&\smile \lambda x = \smile lk = \smile LK,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\smile P\mu = \smile Pm = \smile PM,\\
&\smile \mu\nu = \smile mn = \smile MN,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Соединимъ теперь точку $X$ съ точками $\delta$, $\varepsilon$..., $\lambda$, $P$, $\mu$, .., $\sigma$, $\tau$,... ея кривой $zz$ и начнемъ перекатывать кривую $zz$ по кривой $\beta\beta$.

Въ тотъ моментъ, когда точка $\delta$ этой кривой совпадетъ съ точкой $d$ полодіи $\beta\beta$, точка $X$ будетъ находиться отъ этой точки $d$ на разстояніи, равномъ, очевидно, $\delta X$, и, значитъ, будетъ лежать на окружности, описанной изъ центра $d$ радіусомъ, равнымъ $\delta X$. Подобнымъ же образомъ, въ моментъ совпаденія точки $\varepsilon$ съ соотвѣтствующей ей точкой $e$ точка $X$ будетъ лежать на окружности, описанной изъ центра $e$ радіусомъ, равнымъ $\varepsilon X$; въ моментъ совпаденія точки $\eta$ съ точкой $h$ точка $X$ будетъ находиться на окружности, описанной изъ центра $h$ радіусомъ $\eta X$, и т. д. Отсюда непосредственно вытекаетъ, что траекторіей точки $X$ въ разсматриваемомъ движеніи явится нѣкоторая кривая $bb$, огибающая всѣхъ этихъ окружностей; очевидно, при этомъ, что нормали къ этой кривой $bb$, проведенныя къ ней изъ точекъ $d$, $e$,..., $r$, $s$, $t$,...., будутъ равны соотвѣтственно отрѣзкамъ $\delta X$, $\varepsilon X$,..., $\varrho X$, $\sigma X$, $\tau X$,....

Построеніе получается то же, какое имѣло бы мѣсто, если бы мы приняли кривую $zz$ за новую полодію и опредѣляли траекторію точки $X$ при каченіи полодіи $zz$ по полодіи $\beta\beta$; отрѣзки $\tau X$ оказывались бы нормалями, каждый въ свое время.

Эта кривая $bb$ принадлежитъ системѣ $B$. Примемъ ее за огибаемую, т.-е. за профиль зуба, принадлежащаго системѣ $B$, и найдемъ соотвѣтственную ей огибающую, принадлежащую системѣ $A$. Для этого, согласно методу Poncelet, придется изъ точки $D$ описать окружность радіусомъ, равнымъ отрѣзку нормали, проведенной къ кривой $bb$ изъ точки $d$, соотвѣтствующей $D$; очевидно, что этотъ отрѣзокъ будетъ равенъ отрѣзку $\delta X$. Далѣе, изъ $E$ придется описать дугу радіусомъ, равнымъ нормали, проведенной къ $bb$ изъ точки $e$, соотвѣтствующей $E$; отрѣзокъ этотъ будетъ, очевидно, равенъ $\varepsilon X$. Подобнымъ же образомъ, изъ точки $N$ придется описать окружность радіусомъ $\nu X$, и т. д. Искомая огибающая представитъ собою огибающую всѣхъ этихъ окружностей; пусть это будетъ нѣкоторая кривая $aa$.

Нетрудно убѣдиться, что эта огибающая $aa$ представляетъ собою въ то же время траекторію точки $X$ при каченіи кривой $zz$ по полодіи $\alpha\alpha$. Дѣйствительно, если бы мы захотѣли опредѣлить эту траекторію, то должны были бы изъ точки $D$ описать окружность радіусомъ, равнымъ $\delta X$, изъ точки $E$—радіусомъ $\varepsilon X$, изъ точки $N$—радіусомъ $\nu X$, и т. д.,— и въ результатѣ, повторили бы построеніе, выполненное нами выше при опредѣленіи огибающей $aa$ для данной огибаемой $bb$. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что *огибающая $aa$ представляетъ собою* также *циклическую кривую, образуемую той же точкой $X$ системы $zz$ при каченіи* этой *системы $zz$ по полодіи $\alpha\alpha$*, и мы, такимъ образомъ, получаемъ такъ называемую *теорему Камуса*, говорящую, что *если въ качествѣ огибаемой взята циклическая кривая, образованная какой-либо точкой $X$ системы кривой $zz$ при каченіи этой кривой по одной изъ полодій,*

*то огибающей ея явится опять циклическая кривая, образованная той же точкой* ***X*** *при каченіи системы* ***MN*** *по другой полодіи.*

Самостоятельнаго значенія эта теорема, какъ видимъ, не имѣетъ,— она представляетъ собою лишь формулировку одного изъ частныхъ случаевъ примѣненія метода Poncelet. Помощью теоремы Камуса мы имѣемъ возможность сразу опредѣлить о б а профиля,—огибаемый и огибающій; стоитъ лишь, при заданныхъ полодіяхъ $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, задаться той или другой образующей кривой ***zz*** и выполнить указанныя выше простыя построенія. Точка ***X*** обычно берется на самой кривой ***zz***.

Разборомъ теоремы Камуса мы и закончимъ нашъ краткій очеркъ общей теоріи зубчатой передачи; частныя замѣчанія, относящіяся къ деталямъ этой передачи, будутъ приведены ниже, при разборѣ теоріи круглыхъ зубчатыхъ колесъ.

## § 40. Круглыя зубчатыя колеса.

Круглыя зубчатыя колеса представляютъ собою тотъ частный случай передачи вращенія отъ одной неподвижной оси къ другой, ей параллельной и также неподвижной, когда отношеніе $q$ угловыхъ скоростей есть величина постоянная. Предположимъ, такимъ образомъ, что нѣкоторая система ***A*** вращается вокругъ оси ***O*** съ угловой скоростью $\omega$, а система ***B***—вокругъ оси $O_1$ съ угловой скоростью $\omega_1$, при чемъ оси ***O*** и $O_1$ остаются все время неподвижными и параллельными, а отношеніе между угловыми скоростями представляетъ величину постоянную, такъ что

$$\omega : \omega_1 = q = n = const, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

—число $n$ называется *передаточнымъ числомъ*,— и

$$OO_1 = d = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

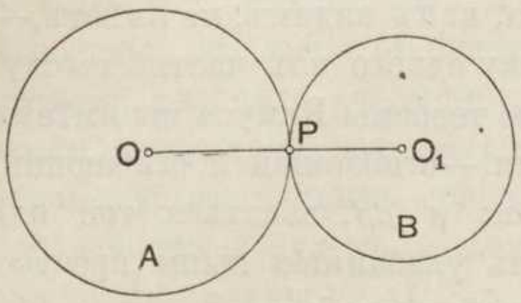
Полодіи относительныхъ движеній ***A/B*** и ***B/A*** будутъ представлять собою окружности опредѣленныхъ постоянныхъ радіусовъ. Дѣйствительно, опредѣляя полодію движенія ***A/B***, увидимъ, что полюсъ ***P*** этого движенія, находясь каждый разъ на прямой $OO_1$, будетъ дѣлить разстояніе между ***O*** и $O_1$ на части, обратно-пропорціональныя угловымъ скоростямъ, удовлетворяя, такимъ образомъ, соотношенію

$$OP : O_1P = \omega_1 : \omega = 1 : n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Такъ какъ разстояніе $OO_1$ между осями не мѣняется, а отношеніе $OP : O_1P$ есть величина постоянная, какъ это ясно изъ равенства $(c)$, гдѣ $n$ величина постоянная, то и разстояніе точки ***P*** (въ плоскости сѣченія) отъ $O_1$ будетъ постояннымъ:

$$O_1P = const = OO_1 \frac{\omega}{\omega + \omega_1} = OO_1 \frac{n}{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Такимъ образомъ, неподвижной полодіей плоской системы $A$ въ ея движеніи относительно $B$ будетъ служить окружность центра $O_1$ и радіуса $O_1P$ (фиг. 265). Нетрудно видѣть, что подвижной полодіей будетъ окружность центра $O$ радіуса $OP$.



Фиг. 265.

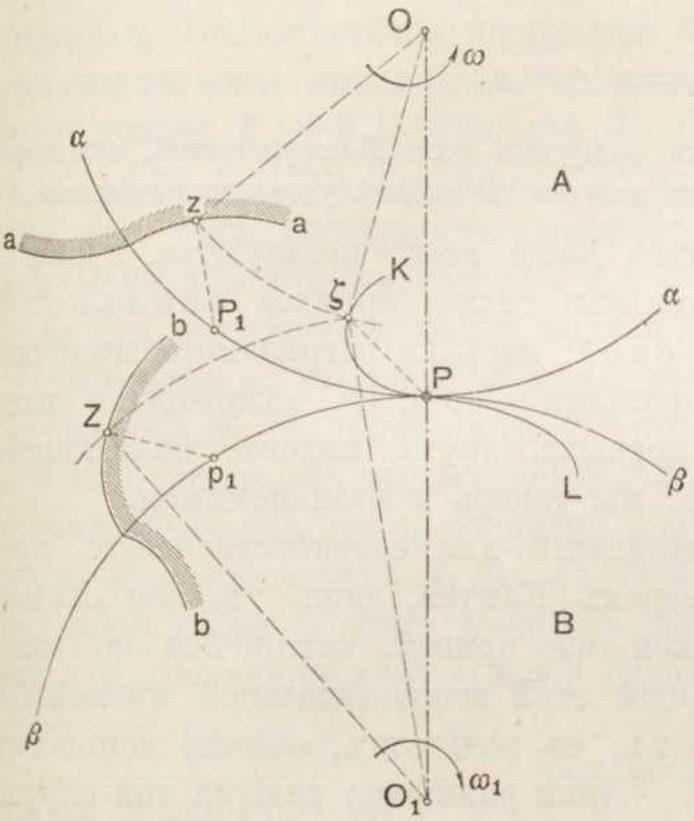
Такимъ образомъ, движеніе системы $A$ относительно $B$ приводится къ каченію одной окружности по другой въ плоскости сѣченія или,—въ пространствѣ,—къ каченію одного цилиндра по другому. Если мы выполнимъ въ дѣйствительности оба цилиндра такъ, чтобы они плотно прикасались другъ къ другу и не могли бы имѣть относительнаго скольженія, то, при вращеніи одного изъ нихъ около $O$ съ угловой скоростью $\omega$, мы получимъ вращеніе другого около $O_1$ съ угловой скоростью $\omega_1$, гдѣ $\omega_1$ выразится въ видѣ $\omega_1 = \omega/n$. На самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе тренія цилиндръ $A$ будетъ увлекать за собою цилиндръ $B$, а такъ какъ скольженія, по нашему предположенію, нѣтъ, то относительное движеніе цилиндровъ будетъ каченіемъ одного по другому, цилиндры же эти построены именно для даннаго опредѣленнаго отношенія $\omega/\omega_1$. Пользуясь такимъ методомъ, мы можемъ, слѣдовательно, устроить передачу вращательныхъ движеній съ постояннымъ отношеніемъ скоростей; передачи такого вида называются *цилиндрическими фрикціонными передачами*.

Итакъ, чтобы построить такую передачу между данными осями $O$ и $O_1$ при опредѣленномъ отношеніи и направленіи скоростей, надо раздѣлить разстояніе $OO_1$ на части $OP$ и $PO_1$, находящіяся между собою въ отношеніи, обратномъ отношенію скоростей, выполнить круглые цилиндры радіусовъ $OP$ и $PO_1$, насадить ихъ на оси $O$ и $O_1$, устроить плотное соприкосновеніе между ними, для чего потребуется нажатіе ихъ другъ на друга, съ опредѣленнымъ усиліемъ, зависящимъ, конечно, отъ относительнаго тренія матеріаловъ, изъ которыхъ сдѣланы цилиндры; нажатіемъ этимъ мы и устраняемъ относительное скольженіе цилиндровъ.

Въ указанномъ видѣ передача примѣняется довольно часто; но такъ какъ при ея примѣненіи приходится считаться съ нажатіемъ осей другъ къ другу, часто совершенно нежелательнымъ, то эту фрикціонную передачу, какъ и въ случаѣ некруглыхъ колесъ, замѣняютъ *зацѣпленіемъ*, осуществляя его, какъ и въ общемъ случаѣ, при помощи огибаемыхъ и огибающихъ,—въ одной изъ полодій мы задаемся той или иной огибаемой, а въ системѣ другой полодіи отыскиваемъ соотвѣтствующую ей огибающую. Отысканіе этой послѣдней можетъ быть выполнено или по методу Понселе, или по методу Рёло, или, наконецъ, помощью теоремы Савари. Примѣненіе метода Рёло никакихъ затрудненій здѣсь не представитъ, ибо полюсъ $P$ въ данномъ случаѣ будетъ

все время сохранять одно и то же положеніе на прямой $OO_1$; нахожденіе огибающихъ помощью этого метода будетъ поэтому совершаться здѣсь такъ:

Пусть въ системѣ $A$ выдѣленъ какой-либо огибаемый профиль $aa$ (фиг. 266). Возьмемъ на полодіи $\alpha\alpha$ какую-нибудь точку $P_1$ и опустимъ изъ нея на профиль $aa$ нормаль $P_1z$.




Фиг. 266.

Въ тотъ моментъ, когда, при вращеніи системъ $A$ и $B$, профиль $aa$ коснется точкой $z$ соотвѣтствующаго ему профиля системы $B$, точка $P_1$ придетъ въ точку $P$ линіи $OO_1$, нормаль $P_1z$, какъ мы знаемъ, пройдетъ черезъ точку $P$, но точка $z$, какъ связанная неразрывно съ системой $A$, будетъ все время находиться на окружности центра $O$ и радіуса $Oz$, и, слѣд., мы найдемъ положеніе точки $z$ въ моментъ соприкосновенія профилей на пересѣченіи окружностей: одной—изъ $O$ радіуса $Oz$, и другой—изъ $P$ радіуса $P_1z$. Именно въ этой точкѣ пересѣченія этихъ двухъ окружностей, точкѣ $\zeta$, и совпадетъ точка $z$ профиля $aa$ съ соотвѣтствующей ей точкой $Z$ профиля $bb$, сопряженнаго съ $aa$.

Въ свою очередь, точка $Z$ будетъ во все время находиться на окружности центра $O_1$ и радіуса $O_1Z$; точкѣ $P_1$ въ первомъ ея положеніи соотвѣтствуетъ въ системѣ $O_1$ точка $p_1$, отстоящая отъ полюса $P$ (считая по полодіи $\beta\beta$) на дугу $Pp_1 =$ дугѣ $PP_1$; отъ этой точки $p_1$ искомая точка $Z$ находится на разстояніи $p_1Z$, равномъ $P_1z$. Поэтому начальное положеніе точки $Z$, соотвѣтствующее первому положенію точки $z$, мы найдемъ въ точкѣ пересѣченія окружностей: одной изъ $O_1$ радіуса $O_1\zeta$, а другой—изъ $p_1$ радіуса, равнаго $P_1z$. Пусть это будетъ точка $Z$; она будетъ представлять собою одну изъ точекъ искомаго профиля $bb$, сопряженнаго заданному $aa$, и будетъ соотвѣтствовать одной изъ точекъ этого послѣдняго—точкѣ $z$.

Поступая подобнымъ же образомъ, мы для каждой точки профиля $aa$ найдемъ соотвѣтствующую ей точку профиля $bb$, а кромѣ того, опредѣлимъ мѣсто ихъ совпаденія при вращеніи системъ $A$ и $B$, т.-е. линію зацѣпленія; она представится здѣсь нѣкоторой кривой $K\zeta PL$. Очевидно, что, при данныхъ круглыхъ полодіяхъ $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$, линія зацѣпленія будетъ проходить все время черезъ одну и ту же точку $P$ отрѣзка $OO_1$, какой бы видъ ни имѣла огибаемая и соотвѣтствующая ей огибающая.

Отмѣтимъ, кстати, что равенство дугъ $PP_1$ и $Pp_1$ можно провѣрить углами и здѣсь, ибо, если эти дуги равны, то стягиваемые ими углы должны будутъ удовлетворять соотношенію

$$\angle POP_1 : \angle PO_1p_1 = O_1P : OP = \omega : \omega_1 = n = const,$$

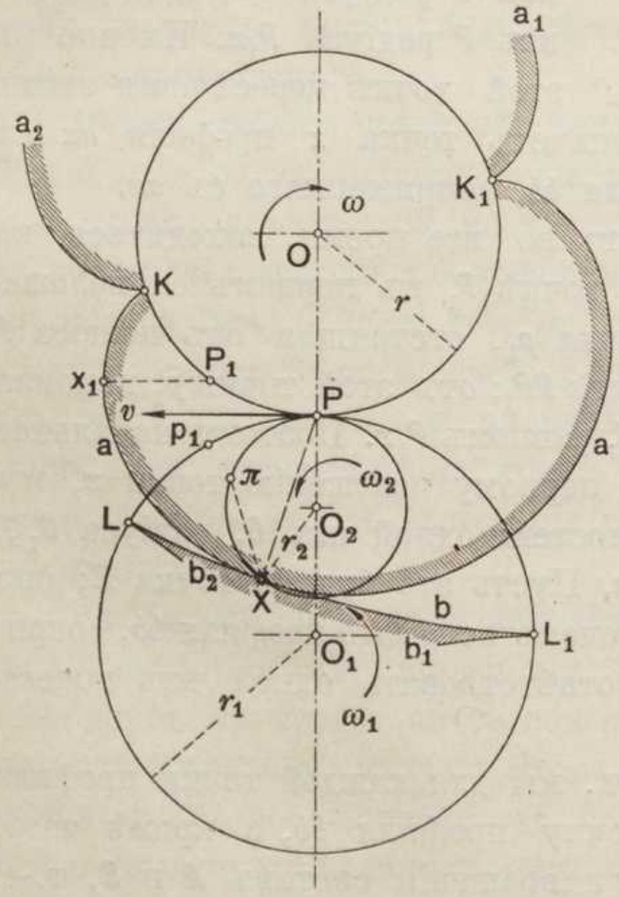
такъ что здѣсь всегда имѣемъ, что

$$\angle POP_1 = n \angle PO_1p_1.$$

Обычно, однако, въ виду большихъ радіусовъ полодій-окружностей, отложеніе помощью достаточно малыхъ дугъ даетъ результаты вполнѣ удовлетворительные.

Въ качествѣ огибаемыхъ здѣсь чаще всего пользуются циклическими кривыми, употребительны также кривыя эвольвентныя,—развертки окружностей; изрѣдка встрѣчаются профили, очерченные другими кривыми, прямыми и т. д. Съ нѣкоторыми важнѣйшими свойствами кривыхъ первыхъ двухъ видовъ, находящими себѣ примѣненіе въ зацѣпленіяхъ, мы теперь и познакомимся.

Циклическими кривыми, пригодными для соотвѣтственныхъ профилей, оказываются, согласно теоремѣ Камуса, лишь тѣ, кои образованы одной и той же точкой какой-либо кривой, катящейся по полодіямъ. Въ случаѣ круглыхъ полодій этой вспомогательной кривой берется всегда также окружность, съ радіусомъ, обычно меньшимъ (или равнымъ) радіуса той окружности, внутри коей ей приходится катиться. То обстоятельство, что два профиля, полученные путемъ такого каченія, будутъ соотвѣтствовать другъ другу, можетъ быть установлено непосредственно, чисто кинематическимъ путемъ, помощью слѣдующихъ очевидныхъ разсужденій:




Фиг. 267.

Пусть данная передача вращенія отъ оси $O$ къ оси $O_1$ осуществляется при помощи двухъ круглыхъ полодій, соприкасающихся въ точкѣ $P$ (фиг. 267), такъ что имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\omega : \omega_1 = O_1P : OP = r_1 : r,$$

дающее равенство

$$\omega r = \omega_1 r_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

указывающее намъ на то обстоятельство, что *окружныя скорости* обѣихъ окружностей $O$ и $O_1$ между собою *равны*, какъ это и должно

быть по самому существу дѣла,—между этими двумя окружностями имѣетъ мѣсто лишь чистое каченіе, скольженія же нѣтъ совсѣмъ.

Пусть, далѣе, вспомогательной окружностью является окружность $O_2$ радіуса $r_2$; ее мы помѣстимъ здѣсь такъ, чтобы она касалась окружности $O$ въ точкѣ $P$,—здѣсь же она коснется и окружности $O_1$, а центръ $O_2$ ея помѣстится на прямой $OO_1$. Предположимъ, наконецъ, что соотвѣтствующіе циклическіе профили имѣютъ быть образованы нѣкоторой точкой $X$ этой окружности $O_2$. При каченіи этой окружности по окружности $O$ точка $X$ опишетъ нѣкоторую вполнѣ опредѣленную кривую $aa$,—такъ называемую *эпициклоиду*,—упирающуюся въ окружность $O$ въ нѣкоторыхъ точкахъ $K$ и $K_1$. Примемъ эту кривую $aa$ за огибаемую и посмотримъ, какой кривой представится ея огибающая.

Профиль $aa$ мы предположили полученнымъ при помощи каченія окружности $O_2$ по окружности $O$. Это взаимное каченіе ихъ можно получить и иначе, не трогая центра $O_2$ съ мѣста, занимаемаго имъ на прямой $OO_1$,—для этого, очевидно, достаточно будетъ сообщить кругу $O_2$ вращеніе около центра $O_2$ его съ такой угловой скоростью $\omega_2$, чтобы окружная скорость этого вращенія оказалась равна окружной скорости круга $O$. Величина этой угловой скорости $\omega_2$ получится, очевидно, изъ условія

$$\omega_2 r_2 = \omega r, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f)$$

откуда и найдемъ, что

$$\omega_2 = \omega . r / r_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (g)$$

При такомъ значеніи скорости $\omega_2$ скольженія между окружностями $O$ и $O_2$ не будетъ,—относительнымъ движеніемъ $O_2 / O$ явится каченіе $O_2$ по $O$, вслѣдствіе чего точка $X$ опишетъ въ системѣ круга $O$ эпициклоиду $aa$. Замѣчая, кромѣ того, что полюсомъ относительнаго движенія $O_2 / O$ будетъ служить въ разсматриваемый моментъ та же точка $P$, заключаемъ, что нормаль къ траекторіи точки $X$,—къ эпициклоидѣ $aa$,—пройдетъ въ данный моментъ черезъ точку $P$ и, значитъ, пойдетъ по прямой $PX$, сама же эпициклоида окажется, въ виду этого, касательной къ окружности, описанной изъ $P$ радіусомъ $PX$.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ окружности $O_1$, вращающейся съ угловой скоростью $\omega_1$, удовлетворяющей условію $(e)$. Сопоставляя это послѣднее съ соотношеніемъ $(f)$, опредѣляющимъ величину угловой скорости $\omega_2$, заключаемъ, что

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

т.-е. что равны также и окружныя скорости круговъ $O_1$ и $O_2$. Такимъ образомъ, вращеніе окружности $O_2$ съ угловой скоростью $\omega_2$ и окружности $O_1$ съ угловой скоростью $\omega_1$ сведется опять къ каченію круга $O_2$ по кругу $O_1$, и относительнымъ движеніемъ $O_2 / O_1$ явится теперь каченіе круга $O_2$ внутри круга $O_1$, при чемъ полюсомъ мгновеннаго вращенія въ разсматриваемый моментъ явится опять та же точка $P$, что

и выше, въ движеніи $O_2 / O$. Отсюда слѣдуетъ, что при этомъ движеніи $O_2 / O_1$ точка $X$ опишетъ въ системѣ круга $O_1$ *гипоциклоиду* $bb$, причемъ нормаль къ этой кривой, проведенная въ точкѣ $X$ ея, пройдетъ черезъ тотъ же полюсъ $P$, такъ что гипоциклоида также окажется касательной къ прежней окружности, описанной изъ центра $P$ радіусомъ $PX$. Такимъ образомъ, оказывается, что двѣ полученныя нами кривыя, $aa$ и $bb$, имѣютъ въ каждый данный моментъ *одну общую точку*,—ею служитъ точка $X$ вспомогательной окружности $O_2$,—*и общую нормаль*, проходящую черезъ эту точку,—нормаль эта, очевидно, сольется съ прямой $PX$. Отсюда слѣдуетъ, что обѣ наши кривыя будутъ въ каждый отдѣльный моментъ касаться одна другой въ этой точкѣ $X$ и, что самое важное, явятся соотвѣтствующими другъ другу въ томъ смыслѣ, что если одну изъ нихъ,—напримѣръ, эпициклоиду $aa$,—примемъ за огибаемую, то другая,—гипоциклоида $bb$,—явится огибающей, и обратно.

Мы указывали, что точкой касанія нашихъ кривыхъ служитъ подвижная точка $X$. Замѣчая теперь, что эта точка принадлежитъ системѣ $O_2$ и, слѣдовательно, вмѣстѣ съ этой послѣдней вращается вокругъ центра $O_2$, перемѣщаясь по окружности центра $O_2$ и радіуса $r_2$, заключаемъ, что *линіей зацѣпленія при циклическихъ профиляхъ является сама вспомогательная окружность* $O_2$. Линейная скорость $v$ точки касанія $X$ нашихъ профилей выразится, очевидно, такъ:

$$v = \omega_2 r_2 = \omega r = \omega_1 r_1,$$

и будетъ, какъ мы уже указывали въ самомъ началѣ, равна окружной скорости нашихъ полодій.

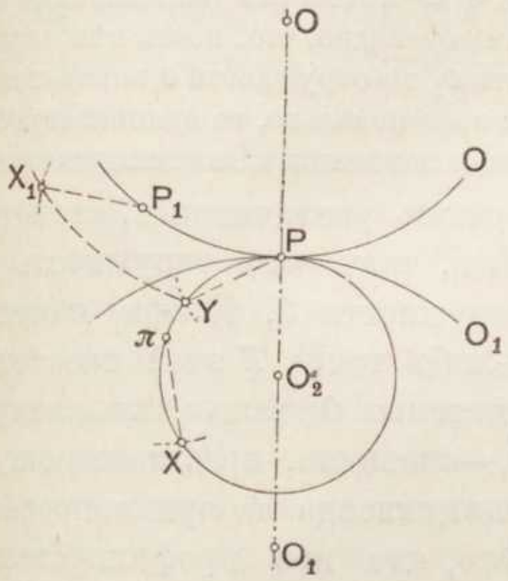
Точки трехъ нашихъ окружностей, одновременно приходящія на ось $OO_1$ и служащія здѣсь полюсами относительныхъ движеній, будутъ, очевидно, удовлетворять равенству дугъ, такъ что, напримѣръ, съ точкой $P_1$, приходящей въ нѣкоторый моментъ на ось $OO_1$, совпадутъ здѣсь точки $p_1$ окружности $O_1$ и $\pi$ окружности $O_2$, удовлетворяющія условію

$$\smile PP_1 = \smile Pp_1 = \smile P\pi.$$

Общей нормалью въ этотъ моментъ будетъ, очевидно, служить прямая $X\pi$. Отсюда слѣдуетъ, что эпициклоида $aa$ будетъ касательна къ окружности, описанной изъ центра $P_1$ радіусомъ, равнымъ $\pi X$, а гипоциклоида $bb$—окружности, описанной тѣмъ же радіусомъ $\pi X$ изъ центра $p_1$. Вычерчиваніе эпи- и гипоциклоидъ можетъ быть выполнено или этимъ путемъ, т.-е. помощью метода Poncelet, или по точкамъ, методомъ Reuleaux. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ построеніе будетъ выполнено такъ:

Пусть эпициклоида имѣетъ быть образована точкой $X$ вспомогательной окружности $O_2$ (фиг. 268). Посмотримъ, гдѣ будетъ находиться точка $X$ въ тотъ моментъ, когда какая-либо точка $\pi$ окружности $O_2$ совпадетъ съ со-

отвѣтствующей ей точкой $P_1$ окружности $O$. Съ этой цѣлью откладываемъ, какъ всегда, дугу $PP_1$, равную дугѣ $P\pi$; затѣмъ изъ точки $P_1$, какъ изъ центра, описываемъ окружность радіусомъ $\pi X$ и ищемъ, на какомъ разстояніи отъ центра $O$ будетъ находиться точка $X$ въ моментъ соприкосновенія окружностей точками $\pi$ и $P_1$; такъ какъ въ этотъ моментъ точка $\pi$ окружности $O_2$ будетъ имѣть то же значеніе, что теперь точка $P$, то искомое разстояніе найдемъ, отойдя отъ $P$ по окружности $O_2$ на дугу $PY$, равную $\pi X$, т.-е. засѣкая изъ центра $P$ дугу радіусомъ $PY$, равнымъ $\pi X$. Точка $Y$ находится на такомъ разстояніи отъ центра $O$, на какомъ, очевидно, будетъ точка $X$ въ моментъ соприкосновенія окружностей точками $\pi$ и $P_1$; проводя поэтому изъ центра $O$ окружность радіусомъ $OY$, найдемъ въ пересѣченіи ея съ окружностью, описанною изъ $P_1$ радіусомъ $P_1X_1 = \pi X$, точку $X_1$, опредѣляющую собою мѣсто точки $X$ въ моментъ $(P_1, \pi)$; слѣдовательно, точка $X_1$ представитъ собою точку искомой эпициклоиды, соотвѣтствующую указанному моменту. Прямая $P_1X_1$ будетъ служить нормалью къ эпициклоидѣ въ этой точкѣ.



Фиг. 268.

Сравнивая это построеніе съ построеніемъ, даннымъ *Reuleaux* для нахожденія *линіи зацѣпленія*, видимъ, что точка $X_1$ будетъ соприкасаться съ соотвѣтствующей точкой сопряженнаго профиля (при вращеніи системъ $O$ и $O_1$) какъ разъ въ точкѣ $Y$, что указываетъ намъ на извѣстное уже обстоятельство, что *въ случаѣ циклическаго профиля линіей зацѣпленія будетъ служить сама вспомогательная окружность* $O_2$.

Совершенно такъ же чертимъ и гипоциклоиду, служащую сопряженнымъ профилемъ.

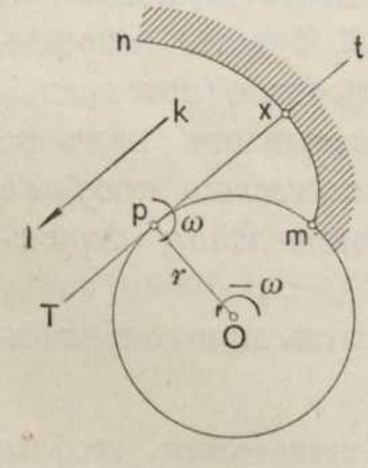
Слѣдуетъ, наконецъ, отмѣтить тотъ фактъ, что два циклическихъ профиля явятся соотвѣтствующими другъ другу и смогутъ быть принятыми за огибаемый и огибающій только тогда, когда они образованы точками *одной и той же вспомогательной окружности* $O_2$ и занимаютъ въ обѣихъ системахъ мѣста, опредѣленныя для нихъ въ процессѣ ихъ образованія. Если же одинъ изъ этихъ профилей, принятый за огибаемую, мы сдвинемъ куда-либо въ сторону, такъ что онъ потеряетъ связь съ своей окружностью $O_2$, давшей его, и каченіемъ ея образованъ быть не сможетъ никакъ, то огибающей для него явится уже не прежній циклическій профиль, а нѣкоторый другой, отъ него отличный,—опредѣлить его придется отдѣльно, помощью того или другого построенія. Такимъ образомъ, соотвѣтствующими циклическими профилями могутъ служить лишь тѣ, между коими можетъ быть установлена связь при посредствѣ одной и той же вспомогательной окружности.

Замѣтимъ, кстати, что каждая эпи- или гипоциклоида представляетъ собою кривую, состоящую изъ безконечнаго числа повторяющихъ другъ друга вѣтвей, упи-

рающихся своими конечными точками въ ту окружность, по которой происходитъ каченіе. Такъ, вѣтвь $aa$ эпициклоиды упирается своими концами $K$ и $K_1$ въ окружность $O$, при чемъ отъ этихъ точекъ $K$ и $K_1$ отойдутъ дальше вѣтви $a_1$ и $a_2$, повторяющія собою вѣтвь $aa$. Очевидно, что *внутри окружности O эпициклоида точекъ не имѣетъ*. Подобнымъ же образомъ, гипоциклоида будетъ состоять изъ ряда вѣтвей, повторяющихъ собою вѣтвь $bb$, своими концами $L$ и $L_1$ упирающуюся въ окружность $O_1$; отъ этихъ точекъ отойдутъ новыя вѣтви $b_1$ и $b_2$. Вся гипоциклоида будетъ лежать внутри окружности $O_1$,—*внѣ ея она точекъ имѣть не будетъ*. Пусть $\smile KK_1 = \alpha . 2\pi r$, гдѣ $r$ есть радіусъ окружности $O$, а $\alpha$—нѣкоторая раціональная конечная дробь любой величины; при такихъ условіяхъ очевидно, что, послѣ нѣкотораго вполнѣ опредѣленнаго числа пробѣговъ окружности $O_2$ по окружности $O$, эпициклоида замкнется и дальше станетъ повторяться. Если $\alpha$ ирраціонально, то эпициклоида будетъ разомкнутой. Нетрудно вывести соотвѣтствующія замѣчанія и для гипоциклоиды.

Если радіусъ $r_2$ окружности $O_2$, непрерывно увеличиваясь, станетъ, наконецъ, въ предѣлѣ безконечно большимъ, такъ что окружность $O_2$ перейдетъ въ прямую, касательную къ окружности $O$, то при каченіи этой касательной по окружности $O$ какая-либо точка $X$ этой касательной будетъ описывать на плоскости системы $O$ такъ называемую *эвольвенту*,—развертку окружности $O$,—очевидно, представляющую собою предѣлъ, къ которому стремится эпициклоида $aa$ при непрерывномъ увеличеніи радіуса $r_2$. Въ виду того, что при профилированіи зубьевъ находитъ себѣ довольно частое примѣненіе и эвольвента, мы познакомимся теперь нѣсколько подробнѣе съ тѣми свойствами этой кривой, кои пригодятся намъ въ дальнѣйшемъ.

Предположимъ, такимъ образомъ, что у насъ имѣется нѣкоторая окружность $O$ радіуса $r$ (фиг. 269). Проведемъ въ какой-либо точкѣ $p$ ея касательную $Tt$, на которой намѣтимъ какую-нибудь точку $x$, и станемъ затѣмъ катить эту касательную по окружности $O$, не допуская никакого скольженія. Тогда точка $x$, двигаясь вмѣстѣ съ своей касательной, опишетъ на плоскости круга $O$ эвольвенту $mn$. Конецъ $m$ этой кривой будетъ упираться въ окружность $O$ въ томъ мѣстѣ, гдѣ касательная $Tt$ коснется окружности своей точкой $x$; другой конецъ эвольвенты лежитъ, очевидно, въ безконечности. Внутри окружности $O$ эвольвента точекъ не имѣетъ. Присмотримся теперь нѣсколько ближе къ условіямъ полученія эвольвентъ.



Фиг. 269.

По условію, касательная $Tt$, одна точка $x$ коей даетъ эту кривую, движется, *катясь* по окружности $O$, но не скользя, такъ что движеніе ея въ каждый отдѣльный моментъ представитъ собою *мгновенное вращеніе около точки касанія*, этому моменту соотвѣтствующей и являющейся, слѣдовательно, *полюсомъ мгновеннаго вращенія* для этого момента. Отсюда слѣдуетъ, что все движеніе системы прямой $Tt$ приводится къ *каченію подвижной полодіи* ея, представляемой этой *прямой* $Tt$, по неподвижной полодіи, изображаемой окружностью $O$; точка $x$ подвиж-

ной полодіи опишетъ при этомъ эвольвенту, при чемъ, отмѣтимъ кстати, нормаль къ эвольвентѣ представится каждый разъ самой этой прямой $xpT$. Это движеніе точки $x$ можно, однако, представить себѣ совершающимся иначе, если мы замѣтимъ слѣдующее:

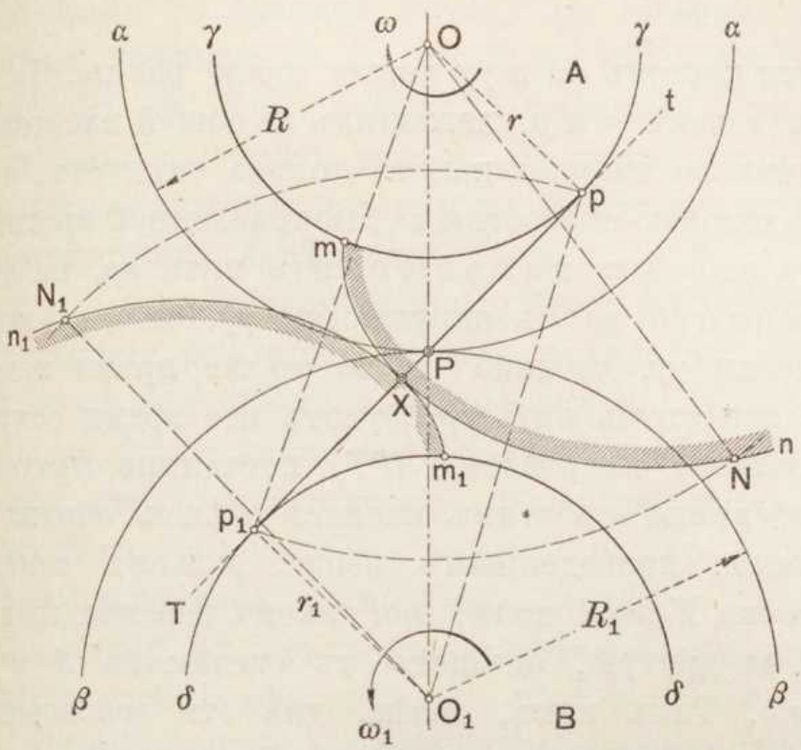
Пусть наша касательная $tT$ въ данный моментъ вращается вокругъ свой точки касанія съ окружностью $O$, т.-е. вокругъ полюса мгновеннаго вращенія $p$, по стрѣлкѣ часовъ, съ мгновенной угловой скоростью $\omega$. Это мгновенное вращеніе системы $tT$ вокругъ точки $p$ можно замѣнить мгновеннымъ вращеніемъ вокругъ точки $O$, съ той же угловой скоростью $\omega$, направленной также по часовой стрѣлкѣ, при чемъ системѣ прямой $tT$ придется, однако, придать поступательное движеніе со скоростью $v = \omega . Op$ по направленію $kl$, перпендикулярному къ радіусу $Op$, т.-е. по направленію $tT$ самой этой касательной. Такимъ образомъ, каченіе прямой $tT$ по окружности $O$ можетъ быть замѣнено вращеніемъ всей касательной $tT$ вокругъ центра $O$ съ угловой скоростью $\omega$ и поступательнымъ движеніемъ этой же касательной *вдоль самой себя* по направленію $tT$ со скоростью $v = \omega . Op$, при чемъ надо отмѣтить, что какъ въ прежнемъ простомъ движеніи каченія, такъ и въ теперешнемъ составномъ, ему эквивалентномъ, точка $x$ будетъ описывать въ системѣ круга $O$ одну и ту же эвольвенту $mn$.

Замѣтивъ это, придадимъ теперь всей этой системѣ, состоящей изъ неподвижной окружности $O$ и подвижной прямой $tT$, вращеніе вокругъ центра $O$ въ сторону, обратную вращенію около $p$, т.-е. вращеніе противъ часовой стрѣлки съ угловой скоростью $\omega$,— иными словами, вращеніе съ угловой скоростью $(-\omega)$. Въ относительномъ движеніи касательной $tT$ по окружности $O$, т.-е. въ каченіи $tT$ по $O$, прибавленіе этого новаго вращенія не измѣнитъ ничего,— въ системѣ круга $O$ точка $x$ прямой $tT$ будетъ, попрежнему, описывать эвольвенту $mn$,—за то въ абсолютномъ движеніи у насъ получится какъ разъ то, что намъ понадобится въ дальнѣйшемъ, а именно: касательная $tT$, потерявъ теперь свое вращательное движеніе, будетъ имѣть теперь только одно поступательное движеніе вдоль самой себя, по направленію $tT$, совершающееся съ линейной скоростью $v = -\omega . Op$, окружность же $O$, до того остававшаяся неподвижной, станетъ теперь вращаться вокругъ центра $O$ съ угловой скоростью $(-\omega)$, т.-е. со скоростью $\omega$ противъ часовой стрѣлки. Такъ какъ всѣ точки касательной $tT$ будутъ имѣть теперь одну и ту же скорость $v$, очевидно, равную окружной скорости точекъ, лежащихъ на окружности $O$,—та и другая равны $\omega . Op$ и направлены въ одну и ту же сторону $tT$,—то эффектъ полученнаго составного движенія оказывается такимъ же, какой мы бы получили, если бы касательная $tT$ представляла собою нѣкоторую *нить*, натягиваемую по нѣкоторому постоянному направленію $pt$ и наматываемую на окружность $O$,—при вращеніи этой послѣдней со скоростью $(-\omega)$, каждая точка $x$ такой нити въ относительномъ движеніи $tT/O$ описала бы эвольвенту.

Это свойство относительнаго движенія $tT/O$ можно, впрочемъ, доказать и прямо. Дѣйствительно, пусть у насъ имѣется окружность $O$, на которую, при вращеніи ея вокругъ центра $O$, наматывается нить $tp$, натягиваемая все время по одному и тому же направленію $Tt$. Начнемъ теперь вращать эту окружность $O$ съ угловой скоростью $(-\omega)$, противъ часовой стрѣлки. Нить станетъ наматываться на окружность, при чемъ любая точка $x$ этой нити, въ абсолютномъ (дѣйствительномъ) движеніи ея, будетъ двигаться прямолинейно-поступательно со скоростью $v$, равной окружной скорости $(-\omega.Op)$ круга $O$ и, конечно, одинаково съ ней направленной; точка $x$ будетъ при этомъ приближаться къ точкѣ $p$. Посмотримъ теперь, каково будетъ относительное движеніе нити или, что то же, прямой $tp$, по отношенію къ окружности $O$. Для опредѣленія этого движенія сообщаемъ всей системѣ $(O, tp)$ вращеніе около центра $O$ съ угловой скоростью $(+\omega)$, по стрѣлкѣ часовъ. Тогда окружность $O$ остановится, а система прямой $tp$ будетъ участвовать въ двухъ движеніяхъ, а именно: въ прямолинейно-поступательномъ вдоль самой себя, по направленію $tT$, со скоростью $v=-\omega.Op$, и во вращательномъ вокругъ точки $O$ съ угловой скоростью $(+\omega)$. Спросимъ себя теперь, гдѣ будетъ лежать въ данный моментъ полюсъ мгновеннаго вращенія для такого движенія системы прямой $tp$. Положеніе этого полюса можно найти, исходя изъ того соображенія, что онъ представляетъ собою точку, скорость которой равна нулю. Въ нашей системѣ $pt$ такой точкой явится, очевидно, точка $p$ касанія этой прямой съ окружностью $O$, ибо скорость $v_p$ этой точки, будучи равна суммѣ скорости $v$ поступательнаго движенія, равной $(-\omega.Op)$, со скоростью отъ вращенія вокругъ точки $O$, равной $(+\omega.Op)$, очевидно, равняется нулю. Итакъ, въ данный моментъ прямая $tp$ совершитъ мгновенное вращеніе около полюса $p$,—точки касанія прямой $tp$ съ окружностью $O$. Такія же мгновенныя вращенія будутъ имѣть мѣсто и въ слѣдующіе моменты движенія,—въ каждый изъ нихъ прямая $tp$ будетъ совершать мгновенное вращеніе около полюса, этому моменту соотвѣтствующаго. Замѣчая теперь, что непрерывный рядъ такихъ послѣдовательныхъ мгновенныхъ вращеній вокругъ полюсовъ мгновеннаго вращенія сводится къ каченію подвижной полодіи по неподвижной, заключаемъ, что указанное сложное движеніе прямой $tp$, представляющее собою относительное движеніе $tp/O$, приводится къ каченію подвижной полодіи,—прямой $tp$,—по неподвижной,—окружности $O$. Итакъ, въ относительномъ движеніи $tp/O$ прямая $tp$ катится по окружности $O$, а при такомъ каченіи каждая точка $x$ этой прямой опишетъ эвольвенту, что и требовалось доказать.

Если бы мы, натягивая нить по тому же направленію $pt$, стали вращать окружность $O$ *по* часовой стрѣлкѣ, сматывая, такимъ образомъ, нить съ окружности, то разсужденія, во всемъ схожія съ предыдущими, показали бы намъ, что теперешнее относительное движеніе $pt/O$ свелось бы опять къ каченію прямой $tT$ по неподвижной окружности $O$,

такому, что точка $x$ удалялась бы отъ окружности $O$; траекторіей ея явилась бы опять та же эвольвента $mn$, при чемъ нормаль въ точкѣ $x$ опять проходила бы каждый разъ черезъ точку $p$ касанія этой прямой $tp$ съ окружностью. — Посмотримъ теперь, какимъ образомъ можно примѣнить эвольвентныя кривыя къ зацѣпленію.




Фиг. 270.

Пусть данная передача осуществляется помощью двухъ круглыхъ полодій: окружности $\alpha\alpha$ центра $O$, принадлежащей системѣ $A$, и окружности $\beta\beta$ съ центромъ въ $O_1$, принадлежащей системѣ $B$, при чемъ $OO_1 = d = const$ (фиг. 270). Полюсомъ мгновеннаго вращенія для относительнаго движенія $A/B$ будетъ служить въ данный моментъ точка $P$ касанія полодій, удовлетворяющая условію

$$O_1P : OP = R_1 : R = \omega : \omega_1 = n = const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

и занимающая на оси $OO_1$ нѣкоторое вполнѣ опредѣленное, неизмѣнное положеніе. Опишемъ теперь въ системѣ $A$ изъ того же центра $O$ окружность $\gamma\gamma$ какимъ-либо радіусомъ $r$, меньшимъ радіуса $R$ окружности $O$, и проведемъ къ ней изъ полюса $P$ касательную $Ppt$, продолживъ ее и по другую сторону точки $P$, въ направленіи $tPT$. Опустимъ теперь изъ точки $O_1$ на эту прямую $tPT$ перпендикуляръ $O_1p_1$ и изъ центра $O_1$ радіусомъ $r_1$, равнымъ $O_1p_1$, опишемъ окружность $\delta\delta$, которая коснется прямой $tT$ въ точкѣ $p_1$, такъ что окружности $\gamma\gamma$ и $\delta\delta$ будутъ имѣть общую касательную $tT$, проходящую черезъ полюсъ $P$.

Представимъ себѣ теперь, что на окружность $\gamma\gamma$ намотана по часовой стрѣлкѣ нить, сходящая съ нея въ точкѣ $p$ и перекинутая затѣмъ въ натянутомъ состояніи, по направленію общей касательной $tT$, на окружность $\delta\delta$, на которую она и вступитъ въ точкѣ $p_1$, обматывая затѣмъ ее противъ часовой стрѣлки. Начнемъ теперь вращать окружность $O_1$ противъ часовой стрѣлки, съ угловой скоростью $\omega_1$. Благодаря отсутствію скольженія между полодіями, система $O$ станетъ вращаться по часовой стрѣлкѣ съ угловой скоростью $\omega$, удовлетворяющей условію $(h)$, при чемъ окажется, что окружная скорость круга $\delta\delta$ будетъ равна $\omega_1 r_1$, а круга $\gamma\gamma$....$\omega r$. Замѣчая теперь, что

$$\omega : \omega_1 = O_1P : OP = O_1p_1 : Op = r_1 : r, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h')$$

заключаемъ отсюда, что

$$\omega_1 r_1 = \omega r,$$

т.-е. что окружныя скорости круговъ $\delta\delta$ и $\gamma\gamma$ между собою равны. Такъ какъ, кромѣ того, скорости точекъ $p$ и $p_1$, лежащихъ на общей касательной $tT$, будутъ еще и одинаково направлены, то отсюда слѣдуетъ, что вращеніе окружности $\beta\beta$ съ угловою скоростью $\omega_1$, направленной противъ часовой стрѣлки, повлечетъ за собою наматываніе нити $pp_1$ на эту окружность $\delta\delta$ и сматываніе ея съ окружности $\gamma\gamma$, ибо сколько нити сойдетъ съ окружности $\gamma\gamma$, столько ея за то же время намотается на окружность $\delta\delta$; при этомъ нить $pp_1$ будетъ все время сохранять одно и то же постоянное направленіе $tPT$, постоянно проходя черезъ полюсъ $P$ и одновременно съ этимъ касаясь обѣихъ окружностей. Согласно заключеніямъ, приведеннымъ выше, можемъ теперь сказать, что какая-либо точка $X$ этой нити, при такомъ перематываніи ея съ одной окружности на другую, опишетъ въ системахъ $A$ и $B$ по эвольвентѣ ($mn$ и $m_1n_1$). Такъ какъ, далѣе, двѣ эти эвольвенты будутъ имѣть въ каждый данный моментъ одну общую точку,—ею будетъ служить эта точка $X$,—и такъ какъ нормали къ этимъ эвольвентамъ въ этой общей точкѣ $X$ ихъ, проходя одна черезъ точку $p$, а другая—черезъ точку $p_1$, будутъ проходить черезъ полюсъ относительныхъ движеній $P$, то эти двѣ кривыя касаются одна другой въ этой точкѣ $x$, и ихъ можно признать соотвѣтствующими другъ другу въ томъ смыслѣ, что если одну изъ нихъ,—напримѣръ, $mn$,—примемъ за огибаемую, то другая, $m_1n_1$, явится для нея огибающей, и обратно.

Очевидно, что вращеніе системы $A$ съ угловой скоростью $\omega$ противъ часовой стрѣлки повлечетъ за собою сматываніе нити съ окружности $\delta\delta$ и наматываніе ея на окружность $\gamma\gamma$, точка же $X$ будетъ двигаться опять по той же прямой $Tt$, но уже въ обратномъ направленіи, отъ $p_1$ къ $p$, описывая въ системахъ $A$ и $B$ тѣ же, что и прежде, эвольвенты $mn$ и $m_1n_1$.

Точка $X$ касанія двухъ этихъ профилей въ абсолютномъ (дѣйствительномъ) движеніи нашихъ системъ перемѣщается, какъ видимъ, по прямой $tT$, въ ту или другую сторону ея. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что *при эвольвентныхъ профиляхъ линіей зацѣпленія является сама* эта *прямая* $tT$. При этомъ необходимо отмѣтить, что *длина этой линіи зацѣпленія является* здѣсь всегда *конечной*,—она строго ограничена точками $p$ и $p_1$ касанія ея съ вспомогательными окружностями $\gamma\gamma$ и $\delta\delta$. Дѣйствительно, если точка $X$, двигаясь къ точкѣ $p$, придетъ, наконецъ, въ эту точку $p$, то въ этотъ моментъ эвольвента $mn$ коснется эвольвенты $m_1n_1$ своей крайней, послѣдней точкой $m$, и такъ какъ въ этой точкѣ $m$ теченіе эвольвенты $mn$ прекращается, то прекратится дальше и касаніе ея съ эвольвентой $m_1n_1$; подобнымъ же образомъ оказывается, что это касаніе прекратится, съ другой стороны, и тогда, когда въ точку $p_1$ придетъ крайняя точка $m_1$ эвольвенты $m_1n_1$.

Нетрудно найти точки $N$ и $N_1$, соотвѣтствующія этимъ крайнимъ точкамъ $m$ и $m_1$: очевидно, что точка $N$ профиля $mn$, совпадающая въ свое время съ крайней точкой $m_1$ профиля $m_1n_1$, опредѣлится пересѣченіемъ профиля $mn$ съ дугой $p_1N$ окружности, описанной изъ центра $O$ радіусомъ $Op_1$; подобнымъ же образомъ точка $N_1$, имѣющая совпасть съ точкой $m$, будетъ лежать въ пересѣченіи профиля $m_1n_1$ съ окружностью, описанной изъ центра $O_1$ радіусомъ $O_1p$. Такимъ образомъ, въ эвольвентномъ зацѣпленіи профили $m_1N_1$ и $mN$, работающіе другъ съ другомъ, безконечно-большими быть не могутъ,—въ данномъ зацѣпленіи каждый изъ нихъ имѣетъ величину, вполнѣ, какъ видимъ, опредѣляемую основными данными заданія, т.-е. угломъ $OPt$ касательной $Tt$ съ осью $OO_1$ и величиной радіусовъ $R$ и $R_1$ полодій. Участокъ зацѣпленія строго ограниченъ какъ по линіи зацѣпленія, такъ и по профилямъ.

Эвольвентное зацѣпленіе обладаетъ одной особенностью, выгодно отличающей его отъ всѣхъ другихъ зацѣпленій. Дѣло заключается въ слѣдующемъ:

Пусть каченіе полодій $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ (фиг. 270) мы осуществляемъ помощью двухъ эвольвентныхъ профилей $mn$ и $m_1n_1$, служащихъ одинъ разверткой окружности $\gamma\gamma$ опредѣленнаго радіуса $r$, а другой—окружности $\delta\delta$ радіуса $r_1$, также вполнѣ опредѣленнаго; линіей зацѣпленія здѣсь будетъ служить общая касательная къ нимъ, $Tt$, пересѣкающая ось $OO_1$ въ точкѣ $P$,—полюсѣ относительныхъ движеній. Предположимъ теперь, что центры $O$ и $O_1$ измѣнили свое относительное расположеніе, такъ что разстояніе $d$ между ними перешло въ нѣкоторое $d_1$, отличное отъ $d$. Спрашивается, какъ и чѣмъ отзовется такое измѣненіе начальныхъ данныхъ на выполненномъ уже нами зацѣпленіи и будетъ ли это послѣднее годиться для дальнѣйшей работы?

Прежде всего, очевидно, что, такъ какъ вспомогательныя окружности $\gamma\gamma$ и $\delta\delta$ останутся прежними, неизмѣнившимися, то измѣнится лишь направленіе и положеніе общей касательной $tT$,—ее замѣнитъ нѣкоторая новая общая касательная $t'T'$, которая пересѣчетъ теперь новую ось $OO_1$ въ нѣкоторой точкѣ $P'$, отличной отъ $P$. *На видъ и величинъ эвольвентъ $mn$ и $m_1n_1$ это измѣненіе касательной не скажется*, однако, *ничѣмъ*, ибо развертываемыя окружности $\gamma\gamma$ и $\delta\delta$, давшія эти эвольвенты, остались прежними. Въ виду этого, когда наши колеса, установивъ снова, благодаря наличности силового замыканія, связь и соприкосновеніе между этими же профилями $mn$ и $m_1n_1$, станутъ двигаться дальше, то точка $X$ соприкосновенія ихъ станетъ теперь перемѣщаться по этой новой общей касательной $t'T'$, которая, въ то же время, опять будетъ служить общей нормалью къ нашимъ профилямъ, а такъ какъ общая нормаль всегда проходитъ черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія, то ясно, что этимъ полюсомъ будетъ служить теперь точка $P'$ пересѣченія новой общей касательной $t'T'$ съ новой осью $OO_1$, такъ что прежнія полодіи радіусовъ $OP$ и $O_1P$ замѣнятся новыми $OP'$

и $O_1P'$. Надо, однако, замѣтить, что эта замѣна на величинѣ передаточнаго числа $n$ не отразится совсѣмъ, такъ какъ теперь, въ виду $(h')$, будетъ имѣть мѣсто соотношеніе

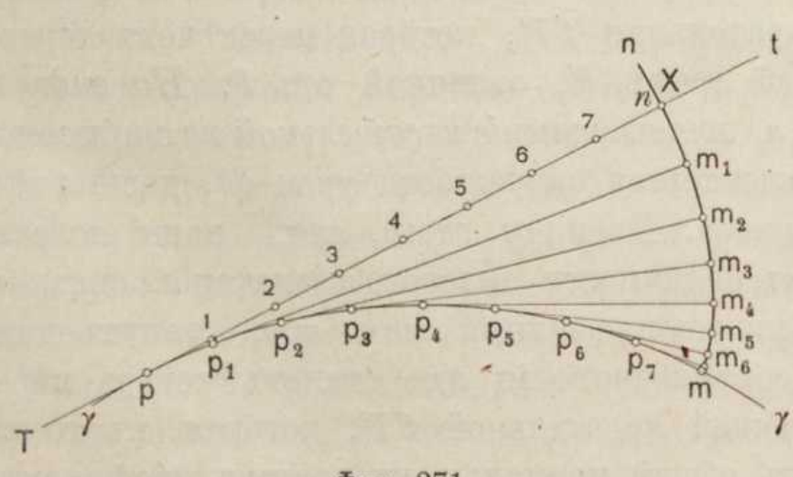
$$O_1P' : OP' = r_1 : r = \omega : \omega_1 = n,$$

—величина радіусовъ $r$ и $r_1$ вспомогательныхъ окружностей осталась прежней.

Такимъ образомъ, измѣненіе разстоянія $d$ между осями $O$ и $O_1$ влечетъ за собою: 1) измѣненіе линіи зацѣпленія,—изъ $pp_1$ она перейдетъ теперь въ $p'p'_1$,—и 2) измѣненіе величины соотвѣтствующихъ теперь другъ другу участковъ профилей, ибо точки $N$ и $N_1$ займутъ на профиляхъ новыя мѣста. Помимо же этихъ, въ сущности, маловажныхъ измѣненій правильность зацѣпленія, однако, нарушена не будетъ совсѣмъ, и оно будетъ протекать теперь такъ же, съ тѣмъ же постояннымъ передаточнымъ числомъ, какъ протекало раньше, до измѣненія $d$, если, конечно, длина дуги зацѣпленія останется достаточной. Отсюда вытекаетъ слѣдующее важное въ практическомъ отношеніи свойство эвольвентнаго зацѣпленія, представляющее неоспоримое преимущество его передъ другими, а именно: *эвольвентное зацѣпленіе особенно точной установки не требуетъ.*

Нетрудно сообразить, что въ циклическомъ зацѣпленіи ничего подобнаго быть не можетъ,—измѣненіе разстоянія $d$ сейчасъ же повлечетъ за собою нарушеніе равенства окружныхъ скоростей у круговъ $O$, $O_1$ и вспомогательнаго $O_2$, соприкосновеніе между ними прекратится, и прежнія циклическія кривыя, образованныя точкой $X$ окружности $O_2$, теперь перестанутъ быть огибаемыми и огибающими. Детали всѣхъ этихъ измѣненій легко выяснить помощью основного чертежа циклическаго зацѣпленія (фиг. 267).

Выполненіе эвольвенты на чертежѣ покоится на тѣхъ же основныхъ соображеніяхъ, коими мы руководимся при вычерчиваніи траекторій точекъ, связанныхъ съ подвижной полодіей, перекатывающейся по неподвижной. Пусть, напримѣръ, ищется эвольвента, образованная точкой $X$ прямой $tT$, катящейся по окружности $\gamma\gamma$ (фиг. 271). Намѣтимъ на прямой $pt$ рядъ какихъ-нибудь точекъ $1$, $2$, $3$,... и опредѣлимъ на дугѣ $\gamma\gamma$ точки $p_1$, $p_2$, $p_3$,...., имъ соотвѣтствующія; это будетъ выполнено обычнымъ путемъ, помощью отложенія дугъ, равныхъ прямымъ отрѣзкамъ, такъ что $\smile pp_1 = p1$, $\smile p_1p_2 = 12$, и т. д. Очевидно,




Фиг. 271.

что въ моментъ $(\rho_1, 1)$ точка $X$ будетъ отстоять отъ точки $\rho_1$ на разстояніи, равномъ отрѣзку $1X$, въ моментъ $(\rho_2, 2)$—на разстояніи $2X$ отъ точки $\rho_2$, и т. д., откуда слѣдуетъ, что искомая эвольвента представитъ собою *огибающую* окружностей, описанныхъ изъ центровъ $\rho_n$ радіусами $nX$. Построить эвольвенту можно также еще и по точкамъ, проводя въ каждой точкѣ $\rho_n$ касательную къ окружности $\gamma\gamma$ и откладывая на ней отъ точки касанія $n$ соотвѣтствующій отрѣзокъ $nX$,—результатъ получится тотъ же, что и въ предыдущемъ случаѣ.

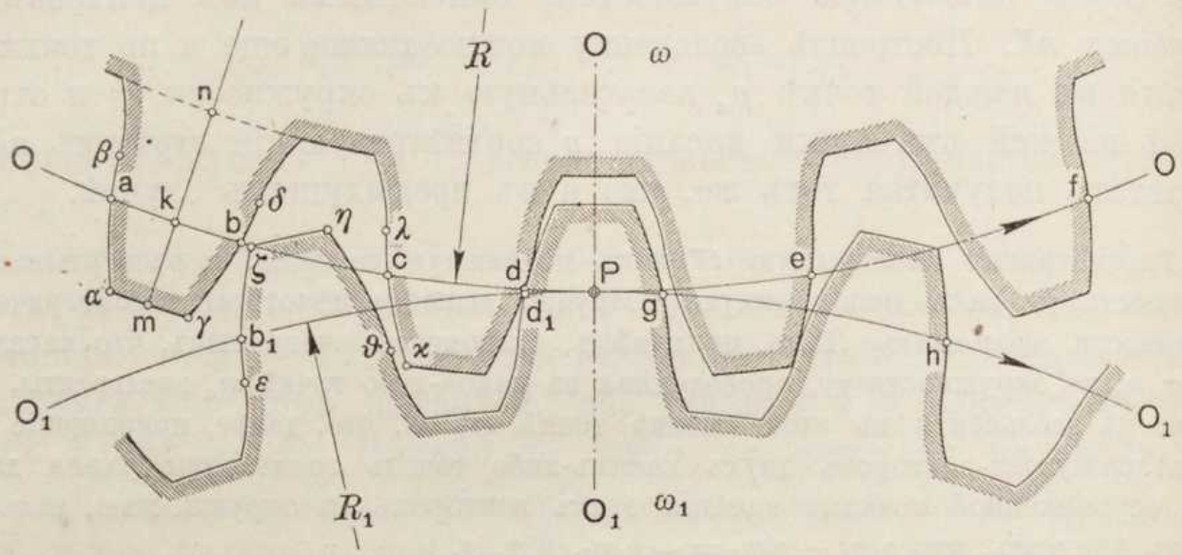
Разсматривая касательную $tT$, какъ подвижную полодію, а развертываемую окружность $\gamma\gamma$, какъ неподвижную, нетрудно вывести нѣкоторыя геометрическія особенности эвольвентъ. Такъ, напримѣръ, становится очевиднымъ, что касательная $m_n\rho_n$ къ окружности $\gamma\gamma$, проведенная въ какой-либо точкѣ $m_n$ эвольвенты, нормальна къ эвольвентѣ въ этой именно точкѣ $m_n$ ея, что, далѣе, приращеніе (или убыль) радіусовъ-векторовъ двухъ какихъ-либо точекъ эвольвенты равна длинѣ дуги, ограниченной точками касанія этихъ векторовъ съ окружностью, такъ что можемъ написать, что $\rho_1 m_1 - \rho_5 m_5 = \smile \rho_1 m_5$, и т. д.

## § 41. Детали профилированія зубцовъ круглыхъ колесъ.

Перейдемъ теперь къ дѣйствительному выполненію передачи. Профиля цилиндрическихъ тѣлъ, при помощи которыхъ мы устраиваемъ передачу, имѣютъ въ дѣйствительности опредѣленную длину въ радіальномъ направленіи, находясь частью между окружностью полодіи и центромъ, частью—внѣ полодіи. Чтобы устроить непрерывную передачу, придется, какъ мы уже указывали выше, взять рядъ такихъ цилиндрическихъ тѣлъ съ образующими, параллельными осямъ, и съ профилями, имѣющими найденныя выше соотношенія. Тогда мы получимъ рядъ зубцовъ, принадлежащихъ той и другой системѣ (фиг. 272, 273). Если мы мысленно проведемъ полодію, принадлежащую системѣ $O$ (въ дѣйствительности, конечно, невыполняемую), то, какъ сказано, она раздѣлитъ каждый зубецъ на двѣ части (въ радіальномъ направленіи): $mk$ и $kn$ (фиг. 272); первая изъ нихъ, лежащая внѣ полодіи, называется *головкой* зубца, вторая—*основаніемъ* или *ножкой* зубца. Окружность радіуса $Om$, гдѣ $m$—крайняя внѣшняя точка рабочаго профиля, принято называть окружностью *вершинъ*; точно такъ же окружность, проходящую черезъ крайнія внутреннія точки,—окружностью *основаній*. Длина дуги $ab$ (по полодіи) измѣряетъ *толщину* зубца и обозначается буквой $a$.

Очертанія зубцовъ обыкновенно бываютъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину дуги $ab$, хотя, собственно говоря, если движеніе совершается всегда въ одну сторону, по правиламъ, изложеннымъ выше, слѣдуетъ строить только рабочій профиль,—напр., $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$, и т. д.; стороны же нерабочія могутъ быть ограничены и другими какими-нибудь кривыми, лишь бы не затруднялась правильная смѣна зубцовъ и правильность зацѣпленія вообще.

Размѣръ $bc$, считая по полодіи, называется *шириною впадины*. Разстояніе между рабочими профилями пары смежныхъ зубцовъ, считая опять по полодіи, называется *шагомъ зацѣпленія* и обозначается буквой $t$;




Фиг. 272.

такъ, напр., дуга $b_1d_1$ есть шагъ зацѣпленія. *Шагъ зацѣпленія у обоихъ колесъ долженъ быть одинаковъ*,—иначе мы не получимъ непрерывной передачи съ желаемымъ отношеніемъ скоростей. Какъ не трудно видѣть, точки $d_1$ и $d$, $b_1$ и $b$, . . . , должны быть соотвѣтственными точками обѣихъ полодій, апотому дуга $bd$ равна дугѣ $b_1d_1$, и т. д.

Назовемъ черезъ $z$ и $z_1$ соотвѣтственно числа зубцовъ той и другой системъ, а радіусы полодій черезъ $R$ и $R_1$. Тогда, какъ мы знаемъ, $R : R_1 = \omega_1 : \omega$, такъ что $R\omega = R_1\omega_1$.

Если шагъ зацѣпленія равенъ $t$, то получаемъ, что $2\pi R = zt$ и $2\pi R_1 = z_1t$, откуда

$$R : R_1 = z : z_1 = \omega : \omega ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

называя же числа оборотовъ *въ минуту* черезъ $n$ и $n_1$, имѣемъ:

$$\omega = 2\pi n/60, \quad \omega_1 = 2\pi n_1/60,$$

въ виду чего уравненіе $(k)$ перепишется еще разъ такъ:

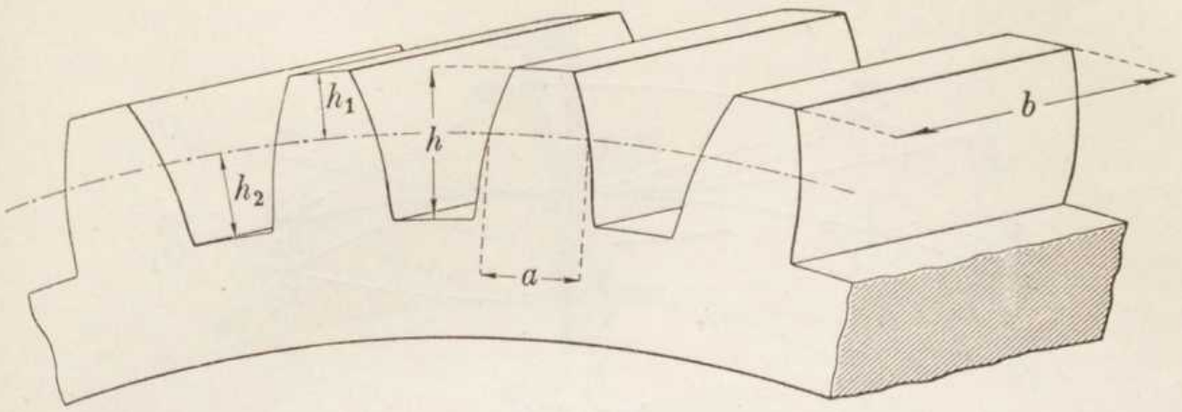
$$R : R_1 = z : z_1 = \omega_1 : \omega = n_1 : n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

откуда видно, что *числа зубцовъ обратно пропорціональны числамъ оборотовъ*.

Размѣры зубцовъ выражаются обыкновенно въ доляхъ шага зацѣпленія $t$; такъ, всю высоту $h$ зубца (фиг. 273) берутъ равной $0{,}7t$, при чемъ высота головки, $h_1$, берется равной $0{,}3t$, а ножки, $h_2$,— $0{,}4t$; толщина зубца берется различно,—въ металлическихъ передачахъ она берется въ $^{19}/_{40}\ t$, такъ что ширина впадины достигаетъ $^{21}/_{40}\ t$; длина $b$ зубца, т.-е. размѣръ его въ осевомъ направленіи, бе-

рется различно, въ зависимости отъ разныхъ условій; часто $b$ берется равнымъ $2t$ и больше (подробности указаны въ курсѣ деталей машинъ).

Дугу, на которую прокатываются одна по другой полодіи, пока одна




Фиг. 273.

пара зубцовъ находится въ зацѣпленіи, принято называть *дугой зацѣпленія*. Очевидно, что *дуга зацѣпленія должна быть больше шага зацѣпленія*,—иначе произошло бы, что одна пара зубцовъ уже вышла изъ зацѣпленія, а другая еще не вошла; передача въ этомъ случаѣ не могла бы быть непрерывной.

Для плавности передачи и для уменьшенія изнашиванія зубцовъ выгодно, чтобы одновременно въ зацѣпленіи находилось возможно большее число зубцовъ—требованіе, часто невыполнимое; чтобы судить о достоинствѣ передачи съ этой стороны, нужно умѣть опредѣлять, сколько паръ зубцовъ будутъ находиться одновременно въ зацѣпленіи. Зная профили и шагъ зацѣпленія, не трудно рѣшить эту задачу. Для этого сначала найдемъ, гдѣ началось соприкосновеніе пары зубцовъ, т.-е. гдѣ крайняя точка $Y$ профиля на ведомомъ колесѣ (фиг. 274) вступила въ соприкосновеніе съ соотвѣтствующей ей точкой на ведущемъ колесѣ. Если линія зацѣпленія уже начерчена, напр., по методу *Reuleaux* (на чертежѣ это линія $rPq$), то, проводя изъ центра $O_1$ окружность радіуса $O_1Y$ (окружность вершинъ), въ пересѣченіи ея съ линіей зацѣпленія найдемъ точку $Y_1$,—положеніе точки $Y$ въ моментъ начала соприкосновенія; замѣчая, кромѣ того, что профиль $YP$ своего положенія относительно полодій $O_1$ не мѣняетъ, ибо связанъ съ ней неизмѣнно, заключаемъ, что въ указанный моментъ точка $P$ занимала положеніе $p_1$, гдѣ $p_1Y_1 = PY$. Итакъ, теперь мы знаемъ, что точка $P$ профиля, приходящаяся на полодіи, въ моментъ начала соприкосновенія находилась въ $p_1$, а въ такомъ случаѣ дуга $p_1P$ представитъ собою часть дуги зацѣпленія за время прикосновенія пары зубцовъ передъ линіей центровъ $O_1O$.

Указанную часть дуги зацѣпленія можно, впрочемъ, опредѣлить еще проще, проведя къ точкѣ $Y$ профиля $PY$ нормаль $Yp$ къ нему до пересѣченія съ соотвѣтствующей полоидой въ точкѣ $p$; эта точка $p$ въ моментъ начала зацѣпленія придется на линіи центровъ въ точкѣ $P$,

потому что въ этотъ моментъ линія $Yp$, какъ общая нормаль въ точкѣ касанія огибающей и огибаемой, должна пройти черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія, т.-е. черезъ точку $P$; какъ мы говорили раньше,




Фиг. 274.

точка профиля $PY$, совпадающая теперь съ $P$, въ этотъ моментъ придется въ $p_1$, а если такъ, то $\triangle PYp = \triangle p_1Y_1P$ (по двумъ сторонамъ: $Y_1p_1 = YP$, $Y_1P = Yp$, и высотѣ изъ $Y$ и $Y_1$ на $O_1$); значитъ хорды $p_1P$ и $Pp$ равны, а поэтому равны и дуги $p_1P$ и $Pp$.

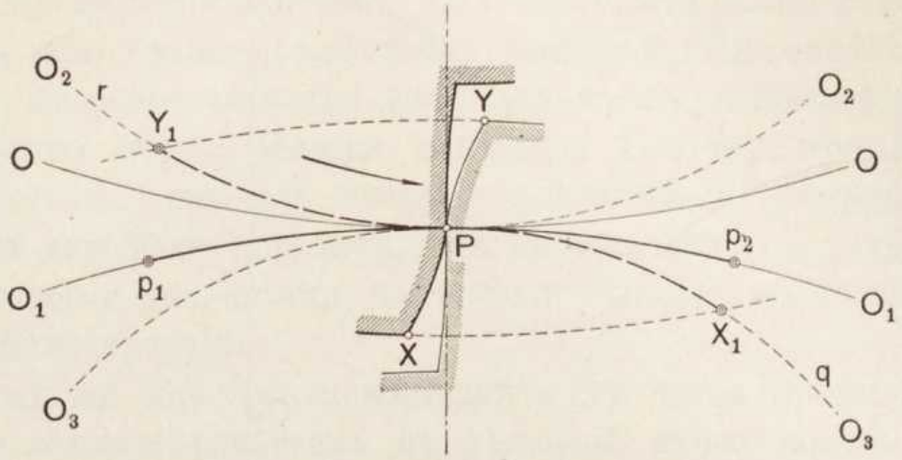
Подобнымъ же образомъ найдемъ конецъ зацѣпленія, проводя изъ $O$ окружность вершинъ для ведущаго колеса $O$ до пересѣченія съ линіей зацѣпленія въ точкѣ $X$; найдемъ также и здѣсь, что за линіей центровъ дугой зацѣпленія служитъ нѣкоторая опредѣленная дуга $Pp_2$; такимъ образомъ, вся дуга зацѣпленія равна суммѣ дугъ $p_1P$ и $Pp_2$ одной полодіи $O_1$, т.-е. равна дугѣ $p_1p_2$. Теперь можно узнать, сколько разъ шагъ зацѣпленія содержится въ дугѣ зацѣпленія; частное и укажетъ намъ, сколько зубцовъ находится одновременно въ соприкосновеніи. Стараются, обыкновенно, достигнуть того, чтобы въ соприкосновеніи было одновременно, по крайней мѣрѣ, *двѣ* пары зубцовъ, т.-е. чтобы дуга зацѣпленія была не меньше двухъ шаговъ зацѣпленія.

Разсмотримъ теперь, болѣе или менѣе подробно, основные, наиболѣе употребительные типы зацѣпленій, и, прежде всего, разсмотримъ

**Циклическое зацѣпленіе.** Мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ линіей зацѣпленія будетъ служить дуга вспомогательной окружности. Вспомогательная окружность $O_2$ (фиг. 275) можетъ намъ служить, очевидно, только для образованія головки зубца колеса $O_1$, давая для него *эпициклоиду*, и ножки зубца колеса $O$,—давая *гипоциклоиду*. Чтобы получить головку второго зубца и ножку перваго, беремъ еще одну вспомогательную окружность $O_3$, которая при каченіи по $O$ дастъ *эпициклоиду*—профиль головки зубца колеса $O$, а при каченіи по $O_1$,—*гипоциклоиду*—профиль ножки зубца колеса $O_1$. Колесо $O$, какъ видно изъ чертежа, ведущее; поэтому соприкосновеніе какой-нибудь пары зубцовъ начинается въ тотъ моментъ, когда профиль ведомаго колеса, $PY$, вступаетъ своей крайней точкой $Y$ на линію зацѣпленія, т.-е. на окружность $O_2$. Проводя поэтому изъ $O_1$ окружность вершинъ радіусомъ $O_1Y$

до пересѣченія съ $O_2$ передъ линіей центровъ въ точкѣ $Y_1$, находимъ, такимъ образомъ, начало соприкосновенія.

Такъ какъ профиль $YP$ есть эпициклоида, образованная каченіемъ



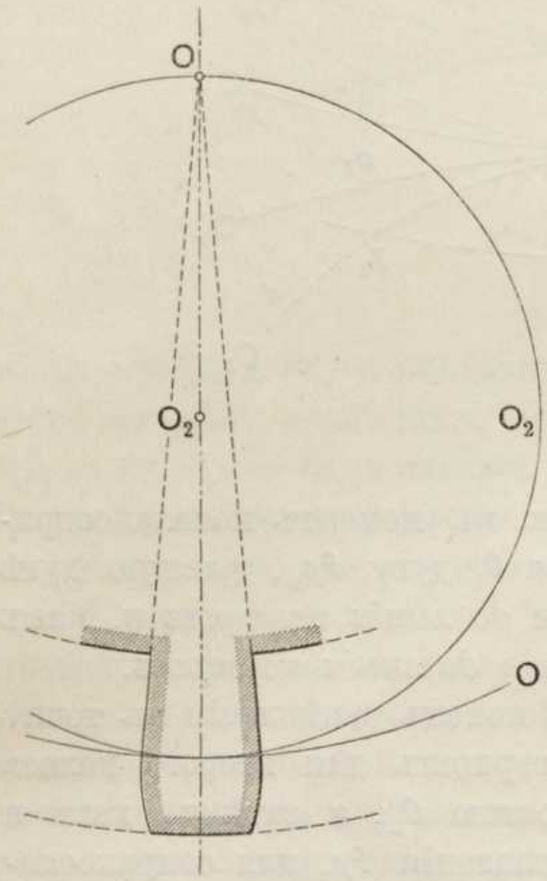

Фиг. 275.

$O_2$ по $O_1$, то положеніе точки $P$ профиля въ моментъ начала соприкосновенія найдемъ, отложивъ по полодіи $O_1$ дугу $Pp_1$, равную дугѣ $PY_1$. Дуга $Pp_1$ есть часть дуги зацѣпленія *до линіи центровъ* и, какъ видимъ, она *равна части линіи зацѣпленія до линіи центровъ*.

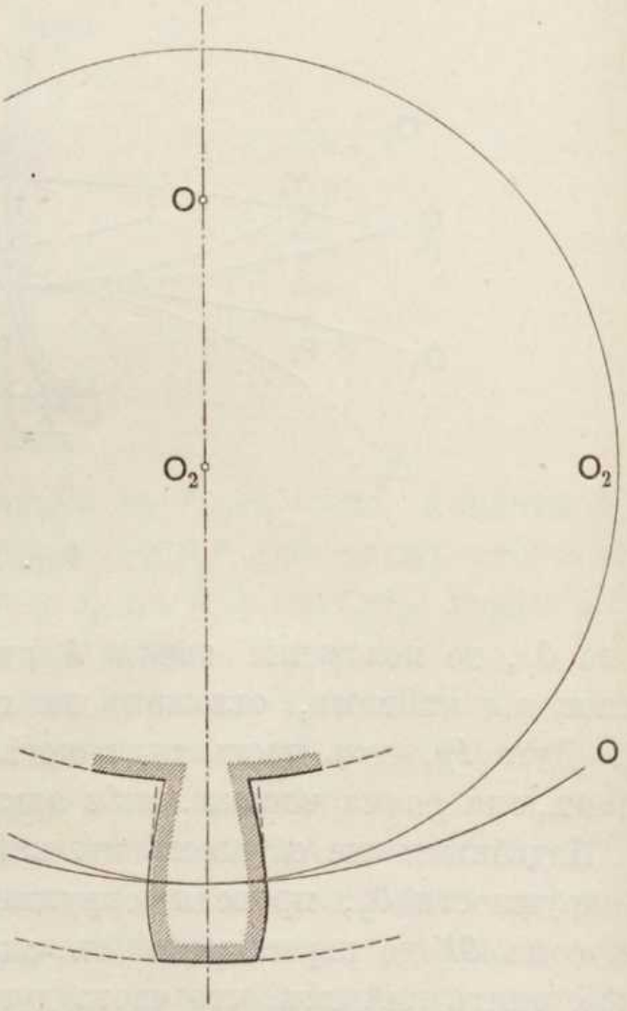
Подобнымъ же образомъ мы найдемъ конецъ зацѣпленія въ точкѣ $X_1$ окружности $O_3$, проведя окружность вершинъ для второго колеса радіусомъ $OX$ до пересѣченія съ окружностью $O_3$, а затѣмъ, какъ и выше, опять найдемъ, что часть дуги зацѣпленія $Pp_2$ для соприкосновенія за линіей центровъ равна дугѣ $Y_1PX_1$. Въ результатѣ получаемъ, что *въ случаѣ циклическаго зацѣпленія дуга зацѣпленія равна линіи зацѣпленія*.

При данномъ шагѣ зацѣпленія, величина котораго, какъ мы говорили уже, обусловливается требованіями прочности на изломъ и проч., и при данной высотѣ головки зубца (а эта высота, какъ было указано, обыкновенно выражается въ доляхъ шага), для плавности зацѣпленія выгодна возможно большая длина линіи $Y_1PX_1$, такъ какъ эта линія равна дугѣ зацѣпленія; длина же этой линіи будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше радіусы вспомогательныхъ окружностей $O_2$ и $O_3$, какъ это можно легко видѣть непосредственно изъ чертежа. Однако, здѣсь является другое неудобство: согласно даннымъ, полученнымъ нами выше, при разборѣ теоріи станка Ліопардо-да-Винчи и проч., можно утверждать, что, если діаметръ вспомогательной окружности равенъ радіусу полодіи, то гипоциклоида, по которой очерчено основаніе зубца у колеса $O$ (фиг. 276), обращается въ этомъ случаѣ въ *прямую линію*, совпадающую съ радіусомъ большей окружности, проходящемъ черезъ разсматриваемую точку меньшей; если очертанія зубца будутъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину толщины зубца, то, какъ это ясно видно изъ самаго чертежа, въ такомъ случаѣ получается *утоненіе* зубца въ его основаніи, что, конечно, вредно

отзывается на прочности зубца. Еще большее утоненіе мы получимъ, если возьмемъ *діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной*, какъ это можно непосредственно видѣть, вычерчивая для



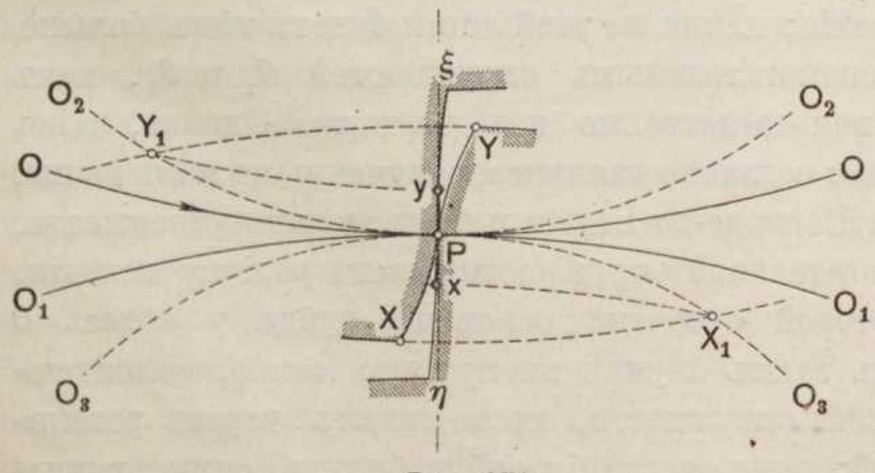

Фиг. 276.




Фиг. 277.

этого случая гипоциклоиду (фиг. 277). Кромѣ того, здѣсь является еще одно неудобство: *дѣйствительно работать приходится только очень малой части ножки зубца.*

Чтобы отыскать вообще, какая часть ножки (или головки) одного зубца работаетъ съ соотвѣтствующей головкой (или основаніемъ) другого, поступаемъ такъ; находимъ, какъ раньше, точку $Y_1$ линіи зацѣпленія, гдѣ начинается соприкосновеніе зубцовъ (фиг. 278) (профили на чертежѣ изображены соприкасающимися на линіи центровъ въ точкѣ $P$); та точка профиля зубца колеса $O$, которая соприкасалась съ крайней точкой $Y$ сопряженнаго профиля въ моментъ начала зацѣпленія, теперь, когда профили касаются другъ друга въ $P$,

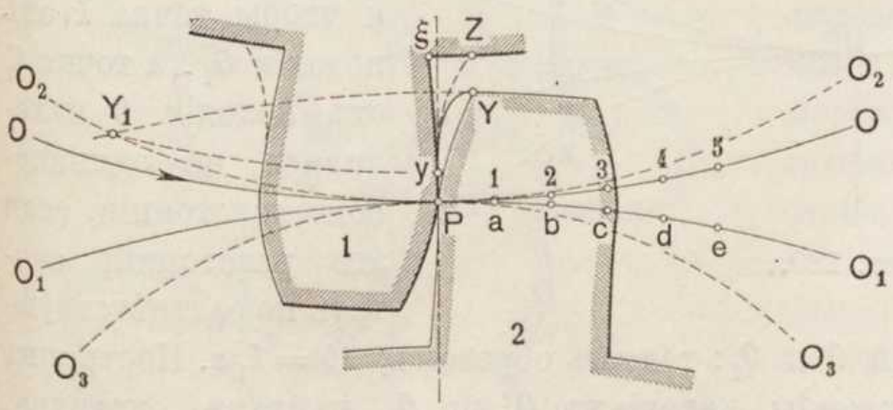



Фиг. 278.

занимаетъ, очевидно, положеніе $y$, гдѣ $y$ есть точка пересѣченія окружности радіуса $OY_1$ съ профилемъ $\xi PX$ въ его настоящемъ положеніи. Часть $Py$ профиля и есть та часть ножки зубца $X$, которая работала со всей головкой зубца $Y$ за время отъ начала соприкосновенія въ точкѣ $Y_1$ до соприкосновенія на линіи центровъ въ точкѣ $P$. Эта часть, какъ видимъ, тѣмъ меньше, чѣмъ больше радіусъ окружности $O_2$. На точкахъ части $Py$, какъ видимъ, сосредоточивается все передаваемое колесомъ $O$ давленіе за время работы передъ линіей центровъ. Поэтому при небольшей длинѣ $Py$ естественно ожидать быстраго изнашиванія (истиранія) зубца въ этой части для тѣхъ передачъ, гдѣ имѣемъ дѣло съ болѣе или менѣе значительными давленіями, какъ это и бываетъ въ большей части случаевъ машиностроенія.

Подобнымъ же образомъ можно найти ту часть профиля у зубца $Y$ колеса $O_1$, которая работаетъ съ головкой зубца колеса $O$, и она также была бы тѣмъ меньше, чѣмъ больше радіусъ вспомогательной окружности $O_3$. Отсюда становится понятнымъ, почему въ обыкновенномъ машиностроеніи избѣгаютъ брать діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной, внутри которой она должна катиться для образованія профиля.

Въ случаѣ, если при выбранномъ шагѣ зацѣпленія (выборъ его, какъ мы уже указывали, зависитъ обыкновенно отъ условій прочности передачи) дуга зацѣпленія получается очень короткая, такъ что въ соприкосновеніи находится только пара зубцовъ, наиболѣе раціональнымъ слѣдуетъ признать здѣсь увеличеніе радіусовъ полодій, если только ничто не мѣшаетъ намъ увеличить разстояніе между осями передачи. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда приходится дорожить мѣстомъ, какъ, напр., во многихъ грузоподъемныхъ машинахъ, или когда усилія, передаваемыя колесами, не особенно значительны, берутъ діаметры вспомогательныхъ окружностей и больше радіусовъ начальныхъ окружностей. Тогда, замѣтивъ, что часть профиля $y\xi$ (фиг. 279) совершенно не работаетъ, а потому можетъ быть очерчена по любой кривой, лишь бы она не мѣшала свободному движенію вершины $Y$ сопряженнаго зубца, можемъ основаніе зубца $1$ нѣсколько усилить. Мы сказали, что кривая, по которой можно очертить зубецъ, должна быть такова, чтобы не мѣшать свободному движенію вершины $Y$; а для этого указанная кривая должна не заходить за геометрическое мѣсто вершинъ $Y$ въ движеніи системы $O_1$ относительно $O$. Это геометрическое

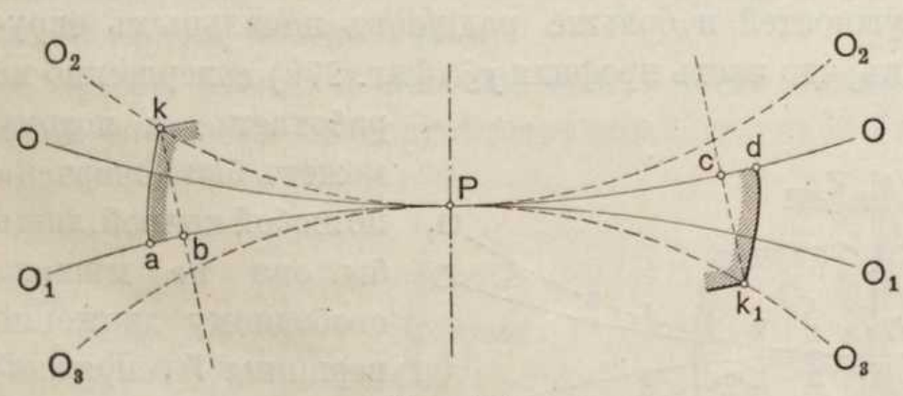



Фиг. 279.

мѣсто легко построить слѣдующимъ образомъ: откладываемъ по обѣимъ полодіямъ $O$ и $O_1$ дуги: $\smile P1 = \smile Pa$, $\smile 12 = \smile Pb$, $\smile 23 = \smile Pc$ и т. д., затѣмъ изъ точекъ $1,2,3\ldots$ описываемъ дуги радіусами $aY$, $bY$, $cY$, ...; огибающая этихъ дугъ и будетъ траекторіей точки $Y$ въ относительномъ движеніи,—она и будетъ искомымъ геометрическимъ мѣстомъ; легко видѣть, что она должна пройти черезъ точки $y$ и $Y$. Такимъ образомъ, точка $y$ за линію $yY$ не зайдетъ, а слѣдовательно, начиная отъ точки $y$, мы имѣемъ возможность вмѣсто крутой кривой профиля, $y\xi$, взять любую, болѣе пологую, напр., $yZ$, лишь бы она вся лежала внѣ кривой $yY$. Очерчивая теперь зубецъ по кривой $yZ$, мы, какъ легко видѣть изъ сравненія усиленнаго такимъ образомъ зубца съ прежнимъ неусиленнымъ, значительно увеличиваемъ его прочность, нисколько въ то же время не рискуя правильностью зацѣпленія.

Нужно также замѣтить, что иногда бываетъ нежелательнымъ брать вспомогательныя окружности слишкомъ малаго радіуса, такъ какъ это можетъ повести къ тому, что мы не будемъ въ состояніи выполнить нашу передачу.

Дѣйствительно, пусть намъ требуется устроить передачу съ даннымъ шагомъ зацѣпленія (величина его, какъ мы уже указывали, опредѣляется изъ расчетовъ прочности зубцовъ) и данными полодіями, радіусы которыхъ опредѣлятся изъ величины шага и числа зубцовъ (изъ уравненія $2\pi R = zt$); обыкновенно знаемъ также и высоту головки зубца, находящуюся, какъ извѣстно, въ опредѣленномъ соотношеніи съ величиною шага, или же задаемся величиной дуги зацѣпленія, всегда не меньшей длины шага зацѣпленія. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ при выбранныхъ вспомогательныхъ окружностяхъ мы можемъ опредѣлить высоту головки зубца, и именно слѣдующимъ образомъ: откладываемъ на вспомогательныхъ окружностяхъ $O_2$ и $O_3$ такія двѣ дуги $Pk$ и $Pk_1$ (фиг. 280), чтобы онѣ въ суммѣ дали дугу зацѣпленія и чтобы точка $k$ отъ полодіи $O_1$, а точка $k_1$ отъ полодіи $O$ находились на одинаковомъ разстояніи, если эти разстоянія считать по соотвѣтствующимъ радіусамъ полодій $O$ и $O_1$; такимъ образомъ, $kb = k_1c$. Построивъ теперь дугу $k_1d$ *эпициклоиды* каченіемъ $O_3$ по $O$, найдемъ, очевидно, положеніе рабочаго профиля зубца ведущаго колеса $O$ въ моментъ конца зацѣпленія; построивъ затѣмъ эпициклоиду $ak$, опредѣлимъ положеніе профиля зубца ведомаго колеса $O_1$ въ моментъ начала зацѣпленія. Отрѣзки $kb$ и $k_1c$ будутъ высотами головокъ зубцовъ; зацѣпленіе начнется въ точкѣ $k$ и окончится въ точкѣ $k_1$.



Фиг. 280.

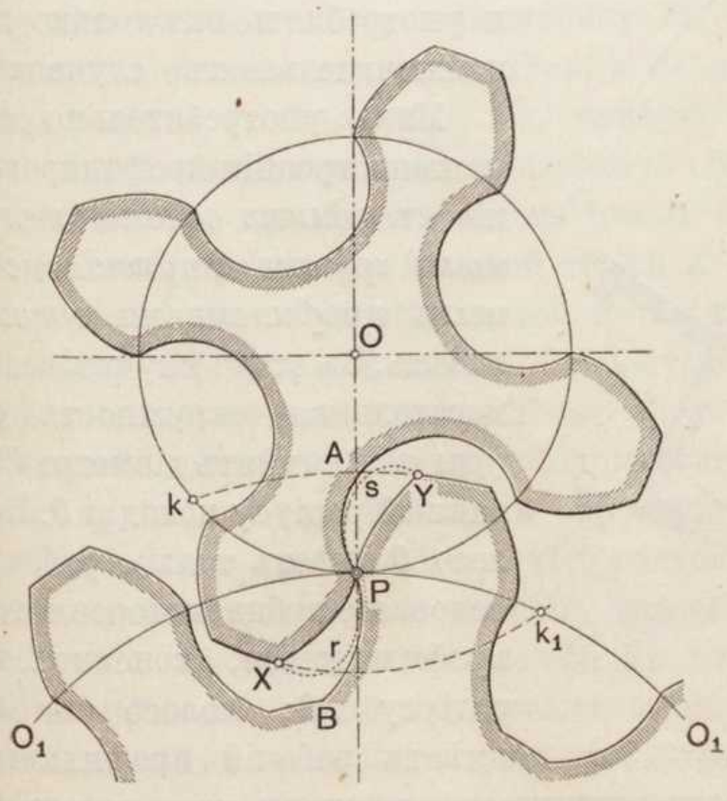
Очевидно, что дуга *ab*, равно какъ и *cd*, должна быть меньше половины толщины зубца, потому что зубецъ обыкновенно бываетъ симметриченъ относительно радіуса, проведеннаго черезъ середину толщины его, а головка не оканчивается остреемъ, а если бы *cd* вышло больше половины толщины зубца, что, какъ видно изъ чертежа, можетъ случиться при маломъ радіусѣ окружности $O_3$, то заданное зацѣпленіе невозможно было бы выполнить съ такою вспомогательною окружностью. Подобнымъ образомъ можно было бы рѣшить вопросъ при данной высотѣ головки (и данномъ, конечно, шагѣ); въ этомъ случаѣ пришлось бы повѣрить, достаточна ли величина дуги зацѣпленія.

Иногда, хотя и очень рѣдко въ обыкновенномъ машиностроеніи, встрѣчаются случаи *неодинаковой высоты головокъ* на томъ и другомъ колесѣ; въ такихъ случаяхъ намъ даются или высоты зубцовъ (ихъ головокъ), или же части дуги зацѣпленія до и послѣ линіи центровъ (каждая, конечно, отдѣльно); рѣшеніе этого вопроса будетъ вестись по вышеприведеннымъ указаніямъ.

Можетъ встрѣтиться и отсутствіе головки на одномъ колесѣ (и, значитъ, ножки на другомъ); здѣсь слѣдовательно, профилированіе будетъ ведено *при одномъ вспомогательномъ кругѣ* (объ этомъ см. ниже); встрѣчаются также случаи несимметричнаго строенія зубца. Въ каждомъ такомъ отдѣльномъ случаѣ вопросъ о возможности зацѣпленія рѣшить не трудно.

---

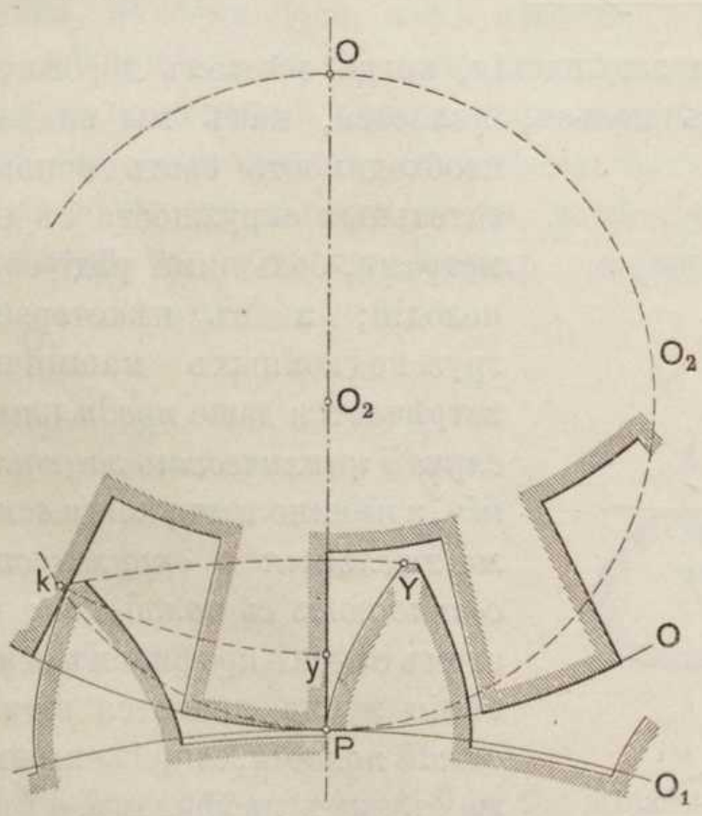
Для полученія возможности зацѣпленія, когда мѣстомъ дорожатъ, а радіусовъ полодій увеличить нельзя, является, какъ мы видѣли, необходимость брать вспомогательныя окружности съ діаметрами, большими радіусовъ полодій; а въ нѣкоторыхъ грузоподъемныхъ машинахъ встрѣчается даже *предѣльный случай циклическаго зацѣпленія*, а именно тотъ, когда *вспомогательныя окружности совпадаютъ съ полодіями*; въ этомъ случаѣ профилемъ основанія зубца является *точка самой полодіи*, сопряженнымъ же съ нимъ профилемъ,—профилемъ головки зубца другого колеса,—будетъ служить эпициклоида, образованная этой точкой при каченіи полодіи по другой полодіи. При этомъ способѣ профилированія возможнымъ бываетъ осуществленіе зацѣ-




Фиг. 281.

пленія съ весьма малымъ числомъ зубцовъ, доходящимъ, напр., до четырехъ на меньшемъ колесѣ. На чертежѣ (фиг. 281) схематически представлено такое зацѣпленіе. Здѣсь $PY$ есть эпициклоида, образованная точкой окружности $O$ при каченіи ея по $O_1$; $PX$—эпициклоида, описанная точкой полоиды $O_1$ при каченіи ея по $O$; двѣ эти эпициклоиды и дадутъ профиля обѣихъ головокъ у сопряженныхъ зубцовъ; основанія же зубцовъ обратились здѣсь въ *точки* полодій. Проводя окружность вершинъ для того и другого колеса, найдемъ линію зацѣпленія $kPk_1$; на части $kP$ точка $P$ зубца $XA$, лежащая на полодіи $O_1$, работаетъ съ эпициклоидой $YP$; далѣе, на части $Pk$ головка $PX$ того же зубца $XA$ работаетъ съ точкой $P$ зубца $YB$. Основанія зубцовъ, какъ профили не работающіе, могутъ быть ограничены произвольными кривыми, лишь бы эти кривыя, какъ объ этомъ мы уже говорили выше, не заходили за соотвѣтственныя траекторіи точекъ $Y$ и $X$, т.-е. не вызывали защемленія зубцовъ. Траекторіи эти, какъ извѣстно, представляютъ собою траекторіи ихъ въ относительномъ движеніи какъ $O_1$ по $O$, такъ и $O$ по $O_1$.

Легко видѣть, что въ такомъ зацѣпленіи будетъ имѣть мѣсто сильное изнашиваніе зубцовъ около точекъ $P$, такъ какъ за все время зацѣпленія передъ линіей центровъ давленіе на зубецъ колеса $O$ сосредоточивается въ одной (или почти въ одной) точкѣ; то же самое имѣетъ мѣсто для зубца колеса $O_1$ за время зацѣпленія за линіей центровъ. Благодаря этому обстоятельству зубцы быстро теряютъ правильность своей формы, что и принуждаетъ насъ, по возможности, избѣгать такихъ зацѣпленій и употреблять ихъ только въ исключительныхъ случаяхъ.

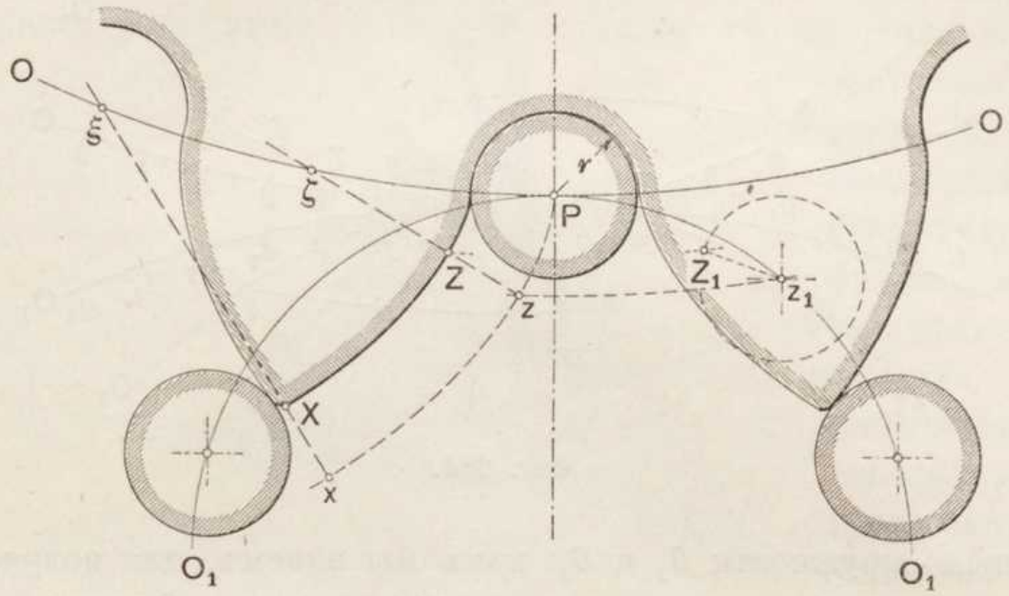


Фиг. 282.

Мало употребительно въ машиностроеніи профилированіе съ *однимъ вспомогательнымъ кругомъ и прямолинейнымъ профилемъ на одномъ колесѣ*. Въ этомъ случаѣ вспомогательная окружность $O_2$ (фиг. 282) имѣетъ діаметръ $PO$, равный радіусу полодіи $O$. Колесо $O$ имѣетъ только рабочее основаніе зубца, которое тогда профилируется, конечно, по радіусу $PO$; колесо же $O_1$ имѣетъ рабочій профиль головки—*эпициклоиду* $PY$. Проводя окружности вершинъ для колеса $O_1$ до пересѣченія съ $O_2$, допустимъ, въ точкѣ $k$, получаемъ линію зацѣпленія $Pk$; мы видимъ, что въ этомъ случаѣ, при ведущемъ колесѣ $O$, зацѣпленіе все будетъ происходить *передъ линіей центровъ*. Проводя

далѣе окружность центра $O$ и радіуса $Ok$ до пересѣченія съ профилемъ $PO_2$ въ точкѣ $y$, найдемъ рабочую часть $Py$ профиля $PO_2$; остальная же часть этого профиля работать не будетъ совсѣмъ.

Рѣдко употребляется теперь и такъ называемое *цѣвочное зацѣпленіе*, представляющее частный случай циклическаго. Здѣсь за профиль, обыкновенно на ведомомъ колесѣ, принимаютъ окружность нѣкотораго радіуса $r$, такъ что зубцы на этомъ колесѣ будутъ представлять собою круглые цилиндры, называемые *цѣвками* (фиг. 283). Профиль на




Фиг. 283.

ведущемъ колесѣ $O$ найдется, какъ огибающая окружности $r$ при каченіи полоиды $O_1$ по $O$. При этомъ каченіи точка $P$,— центръ этой окружности,—опишетъ эпициклоиду $Px$, и огибающей будетъ поэтому кривая, параллельная эпициклоидѣ $Px$ и отстоящая отъ нея на разстояніи радіуса $r$; обозначимъ эту кривую черезъ $ZX$.

Линію зацѣпленія мы построимъ обыкновеннымъ пріемомъ; такъ, чтобы найти, гдѣ будетъ имѣть мѣсто соприкосновеніе точки $Z$ зубца съ цѣвкой, проводимъ въ этой точкѣ $Z$ зубца нормаль къ его профилю до пересѣченія съ эпициклоидой $Px$ въ точкѣ $z$, или, иначе говоря, отыскиваемъ на $Px$ такое положеніе центра круга $r$, при которомъ этотъ кругъ касается профиля въ точкѣ $Z$; теперь находимъ дѣйствительное положеніе цѣвки въ моментъ соприкосновенія ея съ точкой $Z$ профиля, проведя изъ центра $O$ полодіи окружность радіуса $Oz$ до пересѣченія съ полодіей $O_1$ въ точкѣ $z_1$; дѣйствительное же положеніе точки $Z$ въ этотъ моментъ найдемъ, описавъ изъ $O$ окружность радіуса $OZ$ до пересѣченія съ окружностью цѣвки въ точкѣ $Z_1$, которая и будетъ, такимъ образомъ, одной изъ точекъ линіи зацѣпленія. Дугу зацѣпленія можемъ найти, если проведемъ изъ крайней точки $X$ профиля зубца нормаль къ профилю до пересѣченія ея съ полодіей въ точкѣ $\xi$; тогда $P\xi$ и будетъ дугою зацѣпленія; эта послѣдняя должна быть больше шага зацѣпленія, сообразно чему и выбираютъ высоту зубца. Зацѣпленіе такого рода употребляется теперь рѣдко; ведущимъ дѣлаютъ зубчатое колесо.

Перейдемъ теперь къ вопросу о *профилированіи зубцовъ*. Его можно выполнить или точно (по методу *Poncelet*, а также по точкамъ) или приближенно. Мы разсмотримъ сначала построенія, служащія для точнаго профилированія, а затѣмъ укажемъ способы приближенныхъ построеній.

По методу *Poncelet* построеніе выполняется такъ: пусть имѣются полодіи $O$ и $O_1$ (фиг. 284),—онѣ опредѣляются изъ условій передачи и изъ расчета прочности зубцовъ; пусть, далѣе, мы уже выбрали вспо-




Фиг. 284.

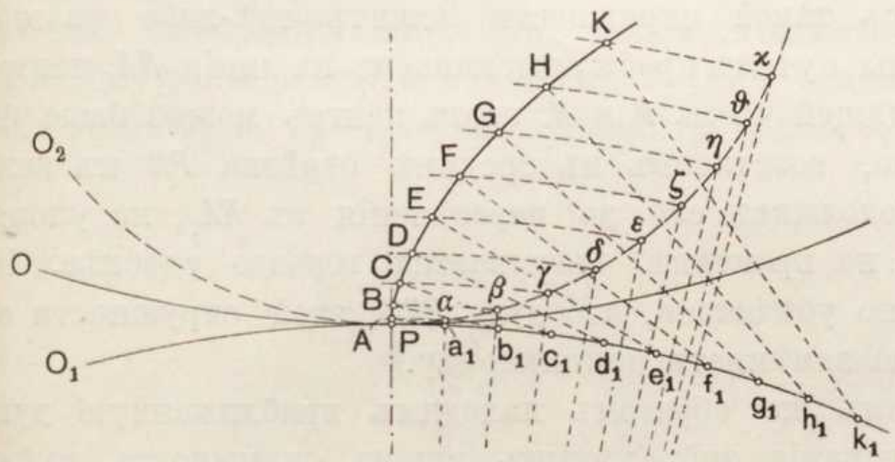
могательныя окружности $O_2$ и $O_3$; какъ мы знаемъ, для полученія при точкѣ $P$ профиля головки зубца у ведущаго колеса $O_1$ мы должны катить окружность $O_2$ по $O_1$; не вычерчивая каждый разъ положенія окружности $O_2$, мы поступаемъ такъ: намѣчаемъ на $O_2$ рядъ точекъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, достаточно близкихъ другъ къ другу; затѣмъ дуги $P\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta, \ldots$ откладываемъ послѣдовательно по полодіи $O_1$, такъ что получимъ рядъ точекъ ..... такихъ, что дуги $Pa_1$, $a_1b_1$, $b_1c_1$, ... будутъ соотвѣтственно равны дугамъ $P\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ...; далѣе, изъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \ldots$ описываемъ дуги окружностей соотвѣтственно радіусами $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, ...; огибающая этихъ окружностей и дастъ намъ искомый профиль $PX$ головки зубца. Если точки $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ выбраны достаточно близко, то дуги эти выдѣляютъ свою огибающую весьма ясно и отчетливо.

Профиль основанія зубца у колеса $O$ найдемъ, отложивъ теперь по полоидѣ $O$ въ ту же сторону дуги, равныя $P\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, ..., и описавъ изъ концовъ $a, b, c, \ldots$ этихъ дугъ тѣми же радіусами $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, ... окружности; такимъ образомъ получимъ искомый профиль $PY$.

Взявъ теперь по окружности $O_3$ въ другую сторону рядъ точекъ $\lambda, \mu, \nu, \pi, \ldots$, откладываемъ на обѣихъ полодіяхъ, начиная отъ точки $P$, въ ту же сторону, гдѣ лежатъ точки $\lambda, \mu, \nu, \pi, \ldots$, дуги, равныя $P\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\nu$, ..., и изъ концовъ этихъ дугъ, т.-е. изъ точекъ $l, m, n, \ldots, l_1, m_1, n_1, \ldots$, описываемъ дуги окружностей радіусами $P\lambda$, $P\mu$, $P\nu$, ..., совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали для точекъ $a_1, b_1, c_1 \ldots$ Такимъ образомъ мы получаемъ профили для головокъ зубцовъ колеса $O$ и для основанія зубцовъ колеса $O_1$.

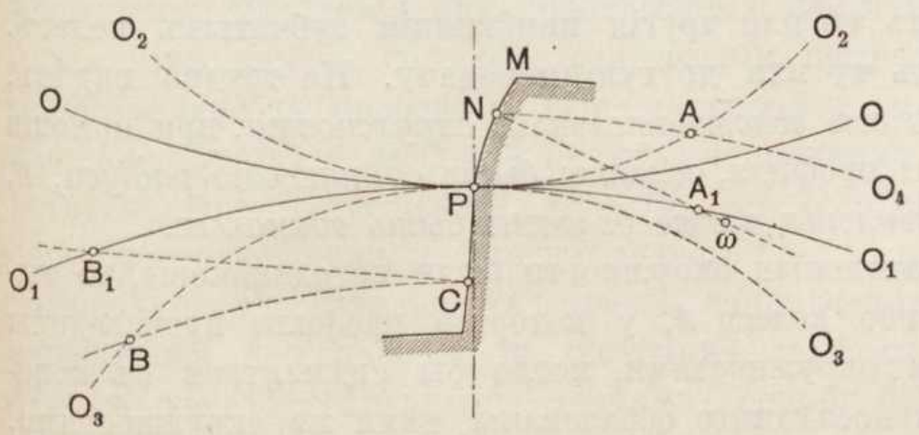
Проводя теперь окружность вершинъ для колеса $O$, а также для колеса $O_1$, найдемъ на окружностяхъ $O_3$ и $O_2$ точки $k$ и $k_1$ — начало и конецъ зацѣпленія; при этомъ нужно всегда помнить, что *на ведущемъ колесѣ точка соприкосновенія удаляется отъ центра, а на ведомомъ приближается къ центру.* Ограничивъ профиль въ высоту, въ ту и другую стороны отъ полодіи, откладываемъ на полодіяхъ толщину зубца и строимъ симметрично относительно радіуса профиль, ограничивающій зубецъ съ другой стороны; затѣмъ, по шагу зацѣпленія, вычерчиваемъ и другіе зубцы.

*Вычерчиваніе профиля по точкамъ* менѣе удобно, но также достаточно просто. Для этого проводимъ черезъ тѣ же точки $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... окружности изъ центра $O_1$ (если хотимъ найти головку профиля зубца $O_1$,— фиг. 285) и на нихъ находимъ точки профиля, засѣкая соотвѣтственно изъ точекъ $a_1$, $b_1$, $c_1$,... дуги окружностей радіусами $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$,.., какъ было указано выше. Такимъ образомъ получаемъ точки профиля $A,B,C$,...—Перейдемъ теперь къ приближеннымъ построеніямъ.




Фиг. 285.

Приведенные выше способы построенія профилей неудобны тѣмъ, что требуютъ большой траты времени; поэтому, ради быстроты вычерчиванія, удобнѣе будетъ подобрать одну или двѣ окружности, которыя могли бы съ достаточной точностью замѣнить дугу эпициклоиды или гипоциклоиды. Особенно удобенъ для этого способъ *Unwin*'а, въ которомъ дуга эпициклоиды съ хорошимъ приближеніемъ замѣняется дугой окружности. Профиль головки зубца у колеса $O_1$ есть эпициклоида, ограниченная въ высоту окружностью вершинъ; ищемъ теперь такую окружность, которая имѣла бы съ этой эпициклоидой общую точку $P$ и касалась бы ее, кромѣ того, въ точкѣ, лежащей отъ полодіи $O_1$




Фиг. 286.

на разстояніи, равномъ $^2/_3$ высоты головки зубца, считая это разстояніе по радіусу полодіи. На этомъ основаніи проводимъ изъ $O_1$ окружность $O_4$, имѣющую радіусъ, меньшій радіуса окружности вершинъ на $^1/_3$ высоты головки (фиг. 286). Пересѣченіе этой окружности съ вспомогательной окружностью $O_2$ даетъ точку $A$. Когда при каченіи $O_2$ по $O_1$, точка $P$ окружности $O_2$ придетъ на окружность $O_4$, точка $A$ совпадаетъ съ полодіей $O_1$. Слѣдовательно, мы прямо можемъ найти точку $N$ эпициклоиды, отстоящую отъ полодіи $O_1$ на $^2/_3$ высоты головки, если отложимъ на полодіи $O_1$ отъ точки $P$ дугу $PA_1$, равную $PA$, и изъ точки $A_1$ засѣчемъ дугою радіуса $PA$ точку $N$ на окружности $O_4$. Теперь остается подыскать окружность, проходящую черезъ $P$ и касающуюся эпициклоиды въ точкѣ $N$. Такъ какъ $NA_1$ есть нормаль къ эпициклоидѣ въ точкѣ $N$, то центръ такой окружности лежитъ гдѣ-либо на этой прямой $NA_1$. Теперь мы путемъ пробъ отыскиваемъ на линіи $NA_1$ центръ $\omega$ окружности, проходящей чрезъ $P$ и $N$; этотъ центръ можно было бы найти непосредственно, возставивъ въ срединѣ отрѣзка $PN$ къ нему перпендикуляръ и продолживъ его до пересѣченія съ $NA_1$, но упомянутый способъ пробъ на практикѣ оказывается гораздо удобнѣе. Не трудно непосредственно убѣдиться, что дуга $PNM$ этой окружности съ достаточной точностью замѣняетъ эпициклоиду.

Совершенно такимъ же образомъ находимъ приближенную дугу окружности и для основанія зубца: опять ищемъ окружность, имѣющую съ гипоциклоидой общую точку $P$ и, кромѣ того, касающуюся ея въ точкѣ $C$, лежащей отъ полодіи, считая по радіусу, на разстояніи двухъ третей всей высоты основанія зубца.

Замѣтимъ, наконецъ, что для очертаній другихъ зубцовъ колеса, благодаря ихъ симметріи, найти центры подходящихъ окружностей *Unvin*'а очень легко.

---

Во многихъ машинахъ, какъ, напр., въ машинахъ для обработки металловъ, часто встрѣчается необходимость имѣть подъ рукою цѣлый рядъ (или серію) колесъ, въ которомъ каждое колесо должно правильно зацѣпляться съ любымъ другимъ колесомъ этого ряда, что дастъ намъ возможность составлять тѣ или другія комбинаціи зубчатыхъ колесъ, а, слѣд., осуществлять ту или другую передачу. Не трудно видѣть, что въ такомъ случаѣ *всѣ вспомогательныя окружности,* при помощи которыхъ произведены профиля, *должны быть одинаковаго радіуса,* и, кромѣ того, *шагъ зацѣпленія* также *долженъ быть одинаковъ.*

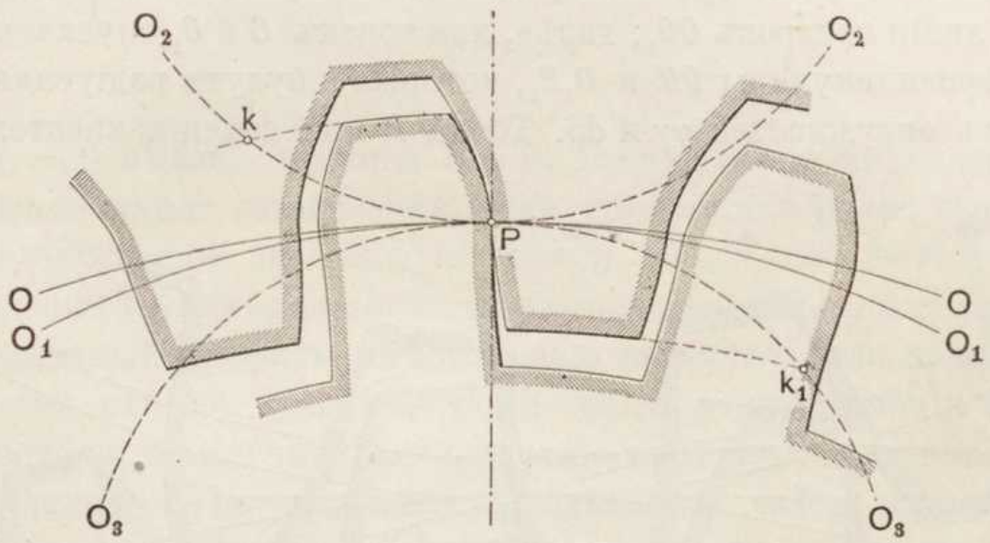
Если бы вспомогательныя окружности были не одинаковы, то вышло бы, что какое-либо колесо $A$, у котораго профили произведены двумя неодинаковыми окружностями, могло бы сцѣпляться съ колесомъ $B$, если профили послѣдняго образованы тѣми же окружностями, равно какъ и съ колесомъ $C$, имѣющимъ профили того же происхожденія; но колеса $B$ и $C$ между собою сцѣпляться не могли бы, такъ какъ, по предположенію, окружность, производившая профиль головки колеса $B$

(и $C$), разнится отъ окружности, производившей профиль ножки колеса $C$ (и $B$), а между тѣмъ для зацѣпленія $B$ съ $C$ нужно (по теоремѣ Камуса), чтобы окружность, производящая профиль головки $B$, производила своимъ каченіемъ сопряженный профиль основанія у зубца $C$.

Въ такихъ смѣнныхъ колесахъ за производящую окружность берутъ окружность съ діаметромъ, нѣсколько меньшимъ радіуса меньшаго колеса; это обстоятельство представляетъ, однако, то неудобство, что въ случаѣ работы большихъ колесъ дуга зацѣпленія остается сравнительно очень малой.

---

*Колеса съ внутреннимъ зацѣпленіемъ* и циклическими профилями профилируются по тѣмъ же правиламъ, что и колеса внѣшняго зацѣпленія: выбираютъ опять двѣ вспомогательныя окружности, $O_2$ и $O_3$ (фиг. 287), и образуютъ каченіемъ $O_2$ по $O$ основаніе зубца колеса $O$, а каченіемъ $O_2$ по $O_1$—профиль головки у колеса $O_1$. Точно такъ же окруж-



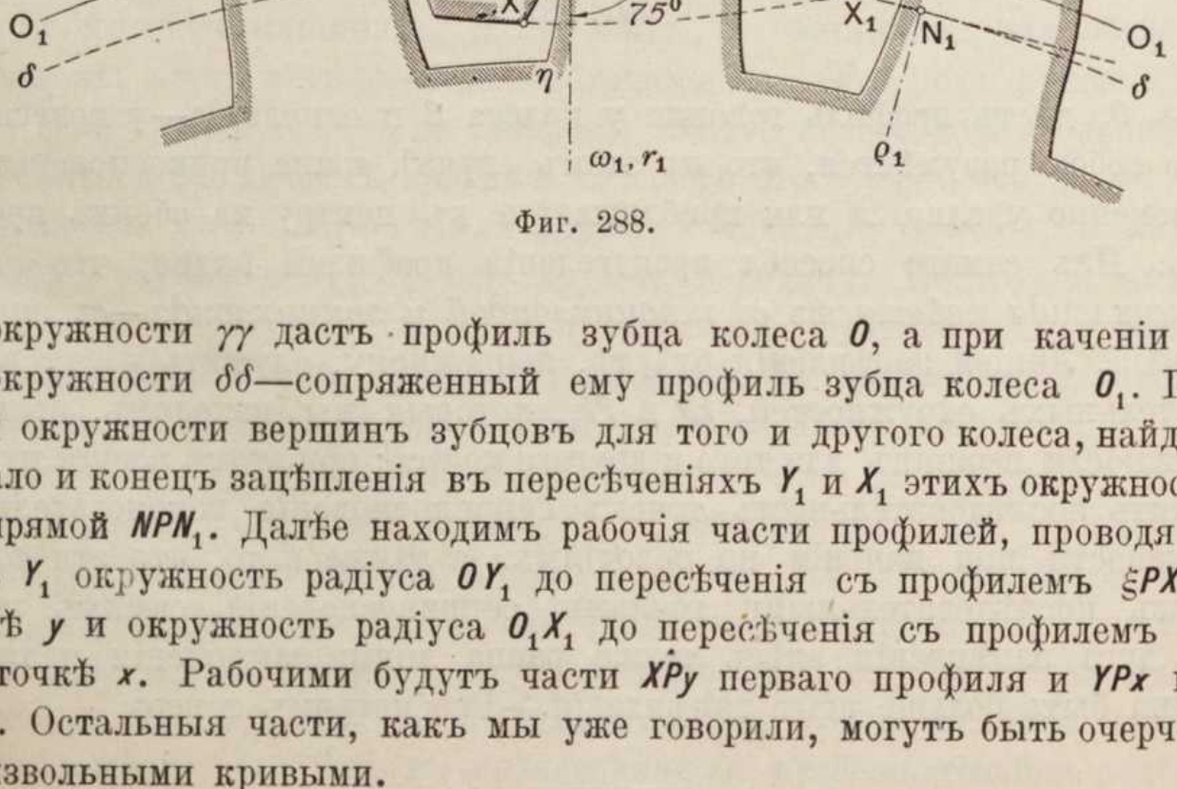

Фиг. 287.

ность $O_3$ дастъ профиль головки у колеса $O$ и основаніе—у колеса $O_1$. Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ точка прикосновенія одновременно удаляется или приближается къ центру на обоихъ профиляхъ. Изъ самаго способа произведенія профилей видно, что здѣсь *гипоциклоида работаетъ съ гипоциклоидой и эпициклоида—съ эпициклоидой*. Линіей зацѣпленія будутъ, попрежнему, служить части вспомогательныхъ окружностей, $kP$ и $Pk_1$, которыя мы находимъ, проводя окружности вершинъ для того и другого колеса; при этомъ всегда нужно помнить послѣдовательность точекъ соприкосновенія вспомогательной окружности при каченіи по полодіямъ, а также и то, что эти точки будутъ послѣдовательными точками соприкосновенія самихъ полодій; дуга зацѣпленія здѣсь также равна линіи зацѣпленія и также должна быть больше шага зацѣпленія.—Разсмотримъ теперь

---

**Эвольвентное зацѣпленіе.** Въ эвольвентномъ зацѣпленіи линіей зацѣпленія, какъ это мы уже видѣли, является прямая, касательная къ вспомогательнымъ окружностямъ. Нетрудно убѣдиться, что за все время работы давленіе одного зубца на другой постоянно направлено по этой прямой. Въ практикѣ машиностроенія установилось требованіе вообще устраивать зацѣпленіе такъ, чтобы давленіе зубцовъ другъ на друга не отклонялось значительно отъ общей касательной къ полодіямъ. Въ циклическомъ зацѣпленіи это требованіе, какъ извѣстно, мы можемъ до извѣстной степени выполнить, взявъ возможно большія вспомогательныя окружности. Здѣсь, въ эвольвентномъ зацѣпленіи, требованіе это сводится къ тому, чтобы прямая зацѣпленія была наклонена къ касательной къ полодіямъ подъ небольшимъ угломъ; обыкновенно берутъ уголъ въ $15^0$. При данныхъ полодіяхъ выборомъ этого угла вполнѣ опредѣляются вспомогательныя окружности, а слѣдовательно, и профили зубцовъ.

Построеніе, такимъ образомъ, выполняется такъ: черезъ точку $P$ прикосновенія полодій (фиг. 288) проводимъ прямую $NPN_1$ подъ угломъ въ $75^0$ къ линіи центровъ $OO_1$; далѣе, изъ точекъ $O$ и $O_1$ опускаемъ на эту прямую перпендикуляры $ON$ и $O_1N_1$, которые и будутъ радіусами вспомогательныхъ окружностей $\gamma\gamma$ и $\delta\delta$. Точка $P$ при каченіи касательной $PN$




Фиг. 288.

по окружности $\gamma\gamma$ дастъ профиль зубца колеса $O$, а при каченіи $PN_1$ по окружности $\delta\delta$—сопряженный ему профиль зубца колеса $O_1$. Проведя окружности вершинъ зубцовъ для того и другого колеса, найдемъ начало и конецъ зацѣпленія въ пересѣченіяхъ $Y_1$ и $X_1$ этихъ окружностей съ прямой $NPN_1$. Далѣе находимъ рабочія части профилей, проводя черезъ $Y_1$ окружность радіуса $OY_1$ до пересѣченія съ профилемъ $\xi PX$ въ точкѣ $y$ и окружность радіуса $O_1X_1$ до пересѣченія съ профилемъ $YP\eta$ въ точкѣ $x$. Рабочими будутъ части $XPy$ перваго профиля и $YPx$ второго. Остальныя части, какъ мы уже говорили, могутъ быть очерчены произвольными кривыми.

Нетрудно установить здѣсь связь между дугой зацѣпленія $S$ и линіей зацѣпленія $L$. Вся линія зацѣпленія дается прямымъ отрѣзкомъ $NPN_1$, длину коего мы обозначимъ черезъ $L$ (фиг. 288). Чтобы смотать съ окружности $O_1$ элементъ $dL$ нити, мы должны вращать окружность $O$ въ теченіе времени $dt$, опредѣляемаго изъ условія $dL = \omega \cdot ON \cdot dt$. За то же время $dt$ точка, слѣдящая за смѣной полюсовъ, пробѣжитъ по полодіи дугу $dS = \omega \cdot OP \cdot dt$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$dL : dS = ON : OP = sin \angle NPO = cos \angle NPT = cos\alpha = const,$$

гдѣ черезъ $\alpha$ обозначенъ уголъ $NPT$ общей касательной къ полодіямъ, $TT$, съ линіей зацѣпленія $NPN_1$. Отсюда, далѣе, находимъ, что

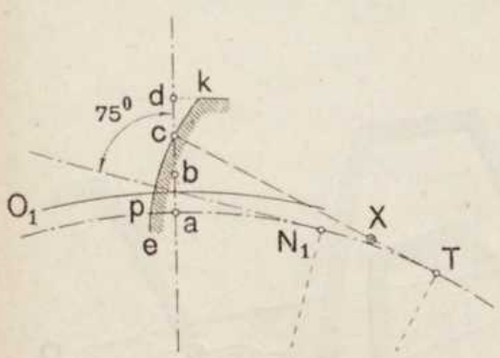
$$dL = dS \cdot cos\alpha,$$

что, послѣ интеграціи, даетъ искомое соотношеніе

$$L = S cos\alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

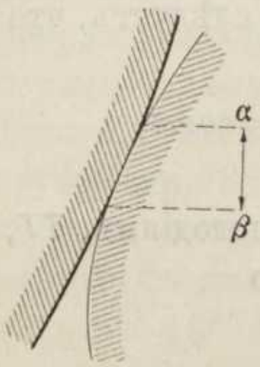
ибо при $L = 0$ имѣемъ также и $S = 0$. Такимъ образомъ, оказывается, что *въ эвольвентномъ зацѣпленіи линія зацѣпленія равна дугѣ зацѣпленія, помноженной на cos угла между общей касательной къ полодіямъ и общей касательной къ вспомогательнымъ окружностямъ.*

Эвольвентный профиль легко вообще вычертить или точно по методу *Poncelet* или по точкамъ; но и здѣсь, ради экономіи времени, употребляютъ приближенное вычерчиваніе профиля аналогично вычерчиванію циклическихъ профилей. Раздѣляютъ часть высоты зубца (фиг. 289), считая отъ вспомогательной окружности до окружности вершинъ, на три равныя части ($ab = bc = cd = \frac{1}{3} ad$), берутъ одну изъ точекъ дѣленія, отстоящую отъ вспомогательной окружности на разстояніи двухъ такихъ частей,—въ данномъ случаѣ это будетъ точка $c$,—и проводятъ изъ нея касательную $cT$ къ вспомогательной окружности. Отрѣзокъ $cT$ дѣлятъ на четыре равныя части, и тогда одна изъ точекъ дѣленія, точка $X$, отстоящая отъ точки $T$ на одну такую часть, принимается за центръ круга радіуса $Xc$; дугою $pck$ этого круга и замѣняютъ эвольвенту. Часть профиля зубца, лежащая внутри вспомогательной окружности (часть $pe$), можетъ быть очерчена произвольно, лишь бы не было препятствія движенію вершины сопряженнаго зубца.

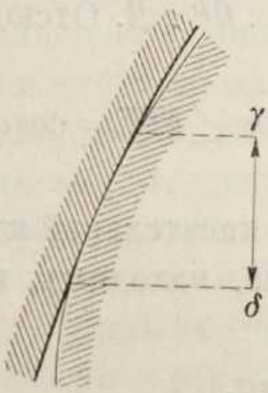


Фиг. 289.

Эвольвентное зацѣпленіе имѣетъ, какъ мы видѣли, то важное преимущество передъ другими, что не требуетъ точной установки. Съ другой стороны, оно, въ свою очередь, имѣетъ свою невыгодную сторону, выясненную изъ опытовъ *Бахомъ*. Въ этомъ зацѣпленіи зубцы ограничены выпуклыми профилями, значитъ, *выпуклой поверхности приходится работать по выпуклой же*, и, какъ не трудно видѣть, соприкосновеніе въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто на меньшей поверхности (вслѣдствіе упругости матеріала и смиванія поверхностей соприкосновеніе никогда не происходитъ по линіи), нежели тогда, когда *выпуклая поверхность работаетъ съ вогнутой;* это послѣднее имѣетъ мѣсто именно въ циклическомъ зацѣпленіи (фиг. 290—291. . . $\alpha\beta < \gamma\delta$).



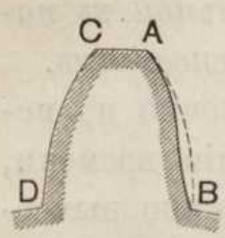

Фиг. 290.



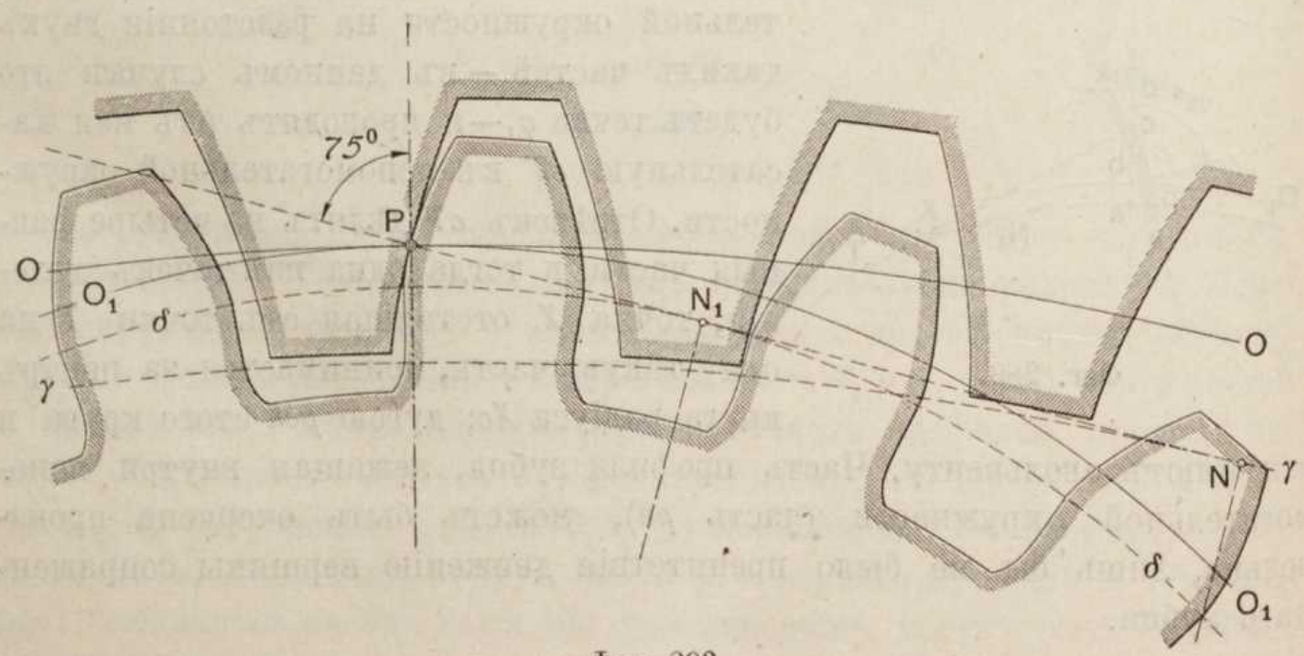

Фиг. 291.

Въ этомъ и кроется причина большаго изнашиванія зубцовъ эвольвентнаго зацѣпленія сравнительно съ циклическимъ, при всѣхъ остальныхъ равныхъ условіяхъ.

Опыты *Баха* надъ деревянными зубьями показываютъ, что эвольвентный профиль постепенно, путемъ истиранія, обращается въ профиль, близкій къ циклическому. На фиг. 292 представленъ одинъ такой зубъ; у него все время работала только одна сторона ***AB***, и оказалось, что послѣ нѣкотораго промежутка времени рабочая сторона ***AB*** приняла форму *циклическаго* очертанія, а нерабочая—сохранила *эвольвентное* (пунктиромъ выше ***B*** указана граница первоначальнаго эвольвентнаго профиля ***BA***). Поэтому циклическое зацѣпленіе слѣдуетъ признать болѣе умѣстнымъ, особенно тамъ, гдѣ имѣетъ мѣсто болѣе или менѣе значительная угловая или окружная скорость колесъ.




Фиг. 292.

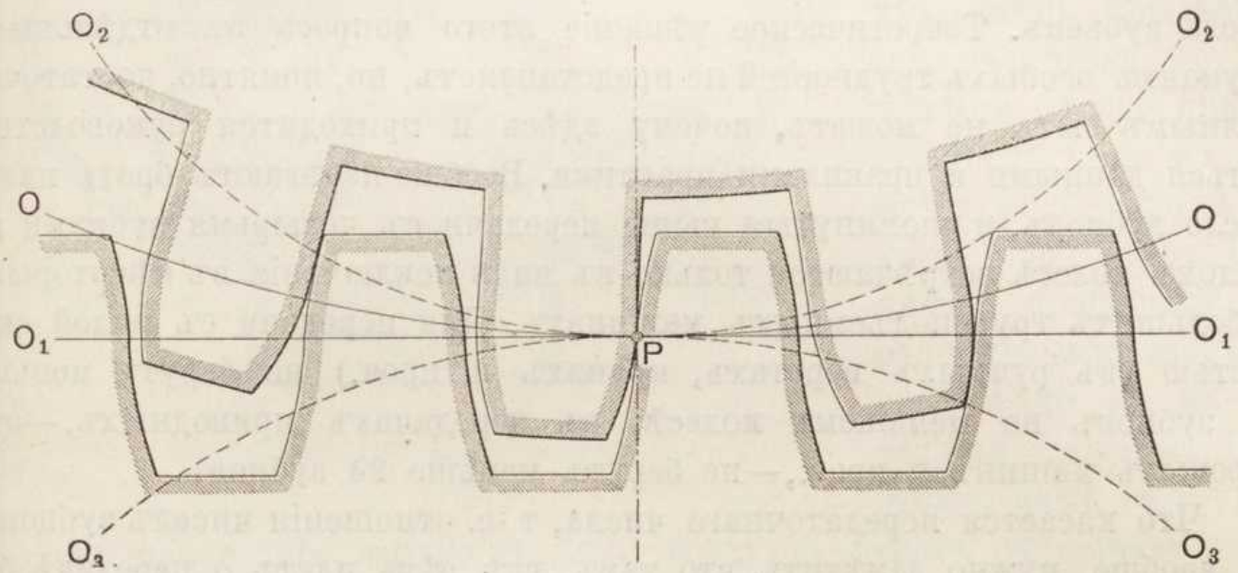



Фиг. 293.

*Внутреннее эвольвентное* зацѣпленіе не представляетъ для вычерчиванія никакихъ трудностей; вся разница состоитъ въ томъ, что обѣ вспомогательныя окружности будутъ лежать по одну сторону касательной къ полодіямъ (фиг. 293). Начало и конецъ зацѣпленія, а также соотвѣтственныя величины рабочихъ частей профилей находятся по общимъ правиламъ.—Разсмотримъ теперь нѣкоторые другіе виды зацѣпленій.

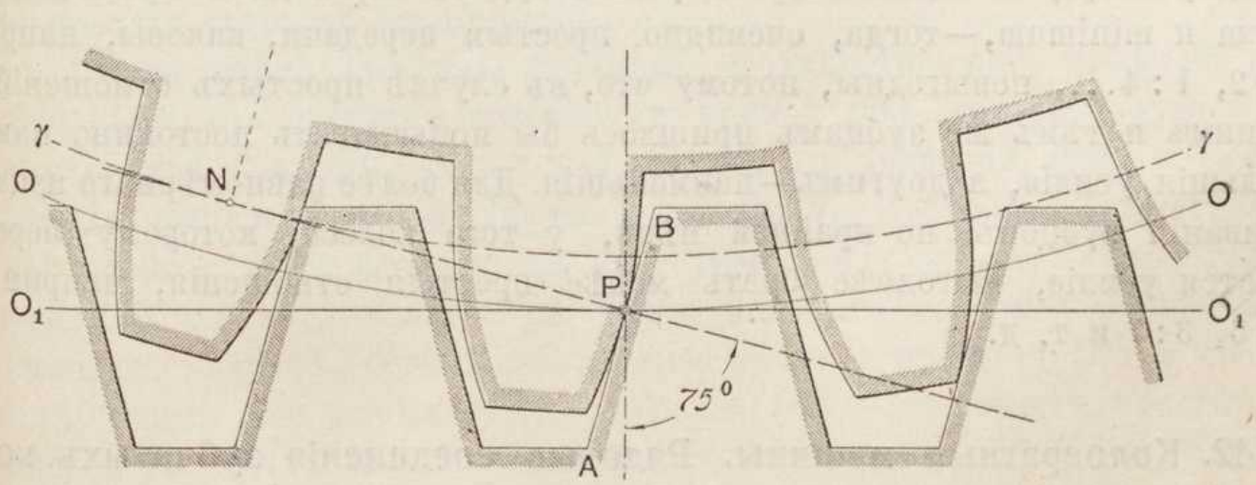
---

На основаніи приведенныхъ соображеній не представитъ никакихъ затрудненій вычерчиваніе *зацѣпленія зубчатой полосы съ колесомъ*. Это зацѣпленіе можетъ быть выполнено или съ циклическимъ профилемъ,




Фиг. 294.

или съ эвольвентнымъ. Въ первомъ случаѣ выбираемъ вспомогательныя окружности $O_2$ и $O_3$ (фиг. 294) и строимъ циклическіе профили на общихъ основаніяхъ. У зубцовъ полосы профилями будутъ служить простыя циклоиды, образованныя при каченіи вспомогательныхъ окружностей по прямой $O_1O_1$, въ которую обратилась здѣсь полодія $O_1$.




Фиг. 295.

Иногда (теперь рѣдко) на полосѣ вмѣсто зубцовъ прилаживаютъ цѣвки. Можно устроить въ данномъ случаѣ и эвольвентное зацѣпленіе,

для чего, подобно тому, какъ это мы дѣлали раньше, проводимъ прямую ***PN*** (фиг. 295) подъ угломъ въ 75° къ линіи центровъ; профилемъ зубца колеса будетъ эвольвента окружности $\gamma\gamma$; для полосы же соотвѣтствующая вспомогательная окружность сливается съ прямой ***NP*** (центръ окружности удалился въ безконечность); поэтому мѣсто эвольвенты займетъ здѣсь прямая ***AB***, перпендикулярная къ линіи ***NP***, такъ что профиля зубчатой полосы получаютъ здѣсь прямолинейное очертаніе.

---

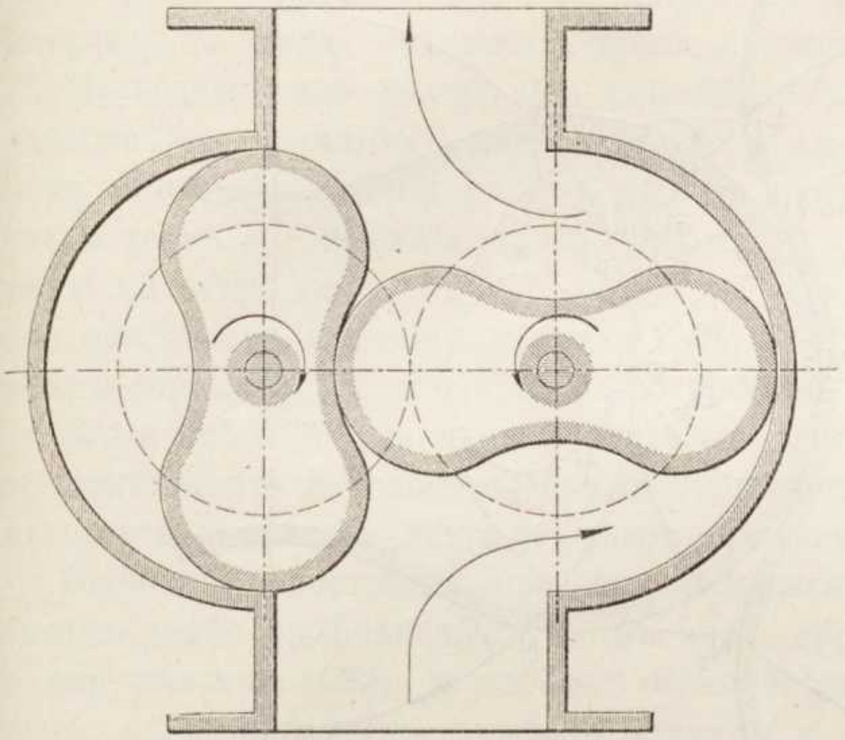
Заканчивая этими замѣчаніями статью о профилированіи зубцовъ круглыхъ колесъ, замѣтимъ, что въ практикѣ машиностроенія установились нѣкоторыя требованія относительно наименьшаго допустимаго числа зубьевъ. Теоретическое рѣшеніе этого вопроса въ отдѣльныхъ случаяхъ особыхъ трудностей не представляетъ, но, понятно, достаточно полнымъ быть не можетъ, почему здѣсь и приходится руководствоваться данными и правилами практики. Вообще избѣгаютъ брать малое число зубцовъ, и упомянутыя выше передачи съ четырьмя зубцами на маломъ колесѣ встрѣчаются только въ видѣ исключенія въ нѣкоторыхъ небольшихъ грузоподъемныхъ машинахъ. Для передачи съ малой скоростью (въ ручныхъ воротахъ, кранахъ и проч.) не берутъ меньше 11 зубцовъ на меньшемъ колесѣ; въ передачахъ приводныхъ,—отъ паровыхъ машинъ и проч.,—не берутъ меньше 24 зубцовъ.

Что касается передаточнаго числа, т.-е. отношенія чиселъ зубцовъ, то, вообще, нужно замѣтить, что тамъ, гдѣ рѣчь идетъ о передачѣ болѣе или менѣе значительнаго постояннаго усилія, выгодно, чтобы зубцы какъ можно скорѣе приработались другъ къ другу, а это будетъ тогда, когда работать другъ съ другомъ придется однимъ и тѣмъ же зубцамъ. Въ этомъ смыслѣ выгодны передачи 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3...; совершенно же невыгодны такія, какъ 11 : 17, или, напр., 23 : 31 и т. п. Но если рѣчь идетъ о передачѣ усилія, *періодически мѣняющагося*,— когда, напр., за одинъ оборотъ усиліе будетъ переходить черезъ maximum и minimum,—тогда, очевидно, простыя передачи, каковы, напр., 1 : 2, 1 : 4..., невыгодны, потому что, въ случаѣ простыхъ отношеній, однимъ и тѣмъ же зубцамъ пришлось бы испытывать постоянно наибольшія усилія, а другимъ—наименьшія. Для болѣе равномѣрнаго изнашиванія зубцовъ, по крайней мѣрѣ, у того колеса, которому передается усиліе, выгоднѣе брать менѣе простыя отношенія, наприм., 2 : 5, 3 : 7 и т. д.

## § 42. Коловратныя машины. Рядовыя соединенія зубчатыхъ колесъ. Счетчики.

Статью о передачѣ вращенія отъ одной неподвижной оси къ другой, также неподвижной, мы закончимъ разсмотрѣніемъ нѣкоторыхъ частныхъ вопросовъ, помѣченныхъ въ заглавіи настоящаго параграфа. Сна-

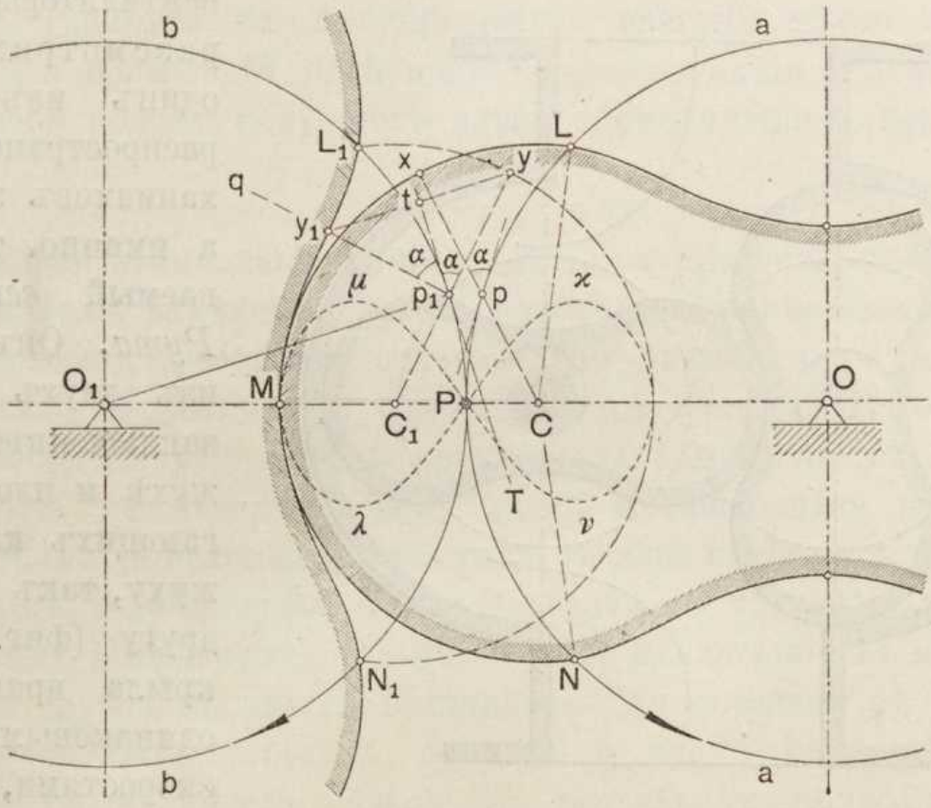
чала разсмотримъ вопросъ о профилированіи зубцовъ въ такъ называемыхъ *коловратныхъ* машинахъ. Эти машины предназначаются для перемѣщенія жидкихъ тѣлъ и въ частности употребляются также, какъ вентиляторы. Ниже мы разсмотримъ только одинъ изъ наиболѣе распространенныхъ механизмовъ этого рода, а именно, такъ называемый *вентиляторъ Рута*. Онъ состоитъ изъ двухъ крыльевъ, заключенныхъ въ кожухѣ и плотно прилегающихъ какъ къ кожуху, такъ и другъ къ другу (фиг. 296). Оба крыла вращаются съ одинаковыми угловыми скоростями, но въ обратныя стороны. При этомъ, какъ не трудно видѣть, какая-либо жидкость (или воздухъ) будетъ всасываться въ одинъ конецъ кожуха и нагнетаться въ другой. Полодіями для системъ обоихъ крыльевъ будутъ здѣсь двѣ равныя окружности *aa* и *bb* (фиг. 297). Для профиля выступа крыла Рутъ бралъ часть ***LMN*** окружности, описанной изъ нѣкоторой произвольной точки ***C***, лежащей на радіусѣ ***OP***, радіусомъ ***CN***, причемъ точки ***L*** и ***N*** суть концы дугъ ***PL*** и ***PN***, равныхъ каждая $^1/_8$ части всей окружности *aa*; такимъ образомъ, точки ***L*** и ***N*** Рутъ взялъ постоянными, и профиль, такимъ образомъ, занимаетъ по полодіи четверть ея длины.



Фиг. 296.

Чтобы найти профиль впадины, соотвѣтствующей профилю выступа ***LMN***, отыскиваемъ огибающую кривой ***LMN*** (круговой дуги даннаго центра ***C*** и даннаго же радіуса ***CL***) въ движеніи $O/O_1$, т.-е. при каченіи полодіи ***O*** по неподвижной полодіи $O_1$. Построеніе этой огибающей удобнѣе всего вести здѣсь по точкамъ, находя для каждой точки дуги ***LMN*** соотвѣтствующую ей точку искомаго огибающаго профиля. Согласно съ этимъ, беремъ какую-либо точку ***x*** профиля ***LMN*** и проводимъ черезъ нее нормаль къ профилю ***LMN***,—это будетъ, очевидно, радіусъ ***xC***. Пусть эта нормаль ***xC*** пересѣкаетъ полодію ***O*** (т.-е. окружность *aa*) въ точкѣ ***p***. Ищемъ теперь мѣсто, которое займетъ точка ***x*** въ тотъ моментъ, когда точка ***p*** совпадетъ съ полюсомъ мгновеннаго вращенія. Этимъ послѣднимъ для нея будетъ служить точка $p_1$ полодіи *bb*, опредѣляемая изъ условія равенства дугъ: $\smile Pp_1 = Pp$. По общему правилу, касательная въ точкѣ ***p*** должна въ это мгновеніе слиться

съ касательной $tT$ въ точкѣ $p_1$; поэтому искомое мѣсто точки $x$ въ моментъ $(p, p_1)$ найдемъ, если отложимъ на касательной $tT$, у точки $p_1$, уголъ $\alpha$, равный углу нормали $xC$ съ касательной въ точкѣ $p$, и на




Фиг. 297.

другой сторонѣ $p_1q$ этого угла отложимъ отъ точки $p_1$ отрѣзокъ $p_1y$, равный $px$. Точка $y_1$, опредѣлившаяся такимъ образомъ, и представитъ собою мѣсто точки $x$ въ моментъ $(p, p_1)$ и, значитъ, явится одной изъ точекъ искомаго профиля, соотвѣтствующей точкѣ $x$.

Это построеніе, само по себѣ достаточно простое, неудобно, однако, тѣмъ, что требуетъ проведенія двухъ касательныхъ и построенія угла. Поэтоту его замѣняютъ болѣе простымъ, основаннымъ на слѣдующихъ очевидныхъ соображеніяхъ:

Опустимъ изъ точки $y_1$ перпендикуляръ $y_1t$ на касательную $tpT$ и, продолживъ его по другую сторону этой касательной, отложимъ $ty = y_1t$. Соединяя точки $y$ и $p_1$ прямой $yp_1$ и продолжая ее до пересѣченія съ $OO_1$ въ точкѣ $C_1$, получаемъ, прежде всего, два треугольника $p_1ty_1$ и $pty$, равные между собою, что указываетъ на то, что $\angle tp_1y = \alpha$,— углу нормали $xpC$ съ касательной въ точкѣ $p$. Простыя геометрическія соображенія показали бы намъ далѣе, что $\triangle O_1p_1C_1 = \triangle OpC$, такъ что $O_1C_1 = OC$ и $p_1C_1 = pC$, вслѣдствіе чего $yC_1 = xC$. Замѣтимъ, наконецъ, что $yty_1 \parallel p_1O_1$, ибо обѣ эти прямыя перпендикулярны къ одной и той же прямой,—касательной $tp_1T$.

Повторивъ тѣ же построенія для любой другой точки $x_n$ дуги $LMN$, мы нашли бы опять, что соотвѣтствующая ей точка $(y_1)_n$ искомаго профиля дала бы опять по другую сторону ея касательной $(tT)_n$ точку $y_n$, такую, что лучъ $(yp_1)_n$ выдѣлилъ бы на оси $OO_1$ опять ту же точку $C_1$, и отрѣзокъ $C_1y_n$ былъ бы опять равенъ $xC$. Все это показало бы намъ

что всѣ точки $y_n$, симметричныя точкамъ $(y_1)_n$ искомаго профиля относительно соотвѣтствующихъ касательныхъ $(tT)_n$, располагаются на окружности $L_1yN_1$ постояннаго центра $C_1$, симметричнаго съ центромъ $C$ относительно полюса $P$, и постояннаго же радіуса $C_1y$, равнаго $Cx$. Сообразно съ этимъ, нахожденіе точки $y_1$ можетъ быть выполнено такъ:

Проводимъ изъ центра $C_1$, гдѣ $PC_1 = PC$, окружность радіусомъ, равнымъ $Cx$, соединяемъ любую точку $y$ ея съ центромъ $C_1$ и отмѣчаемъ точку пересѣченія радіуса $yC_1$ съ окружностью $bb$,—пусть это будетъ точка $p_1$. Проведя теперь радіусъ $O_1p_1$ и лучъ $yy_1 \parallel p_1O_1$, засѣкаемъ на немъ изъ центра $p_1$ радіусомъ $p_1y$ точку $y_1$,—эта и будетъ одна изъ точекъ искомаго профиля $L_1MN_1$. Рядъ точекъ $y_1$, найденныхъ такимъ образомъ, опредѣлитъ собою профиль искомой впадины $L_1MN_1$.

Какъ видно изъ построенія, профиль пересѣчетъ полодію въ тѣхъ же точкахъ, что и вспомогательныя окружности, т.-е. въ точкахъ, находящихся другъ отъ друга на разстояніи четверти длины полодіи.

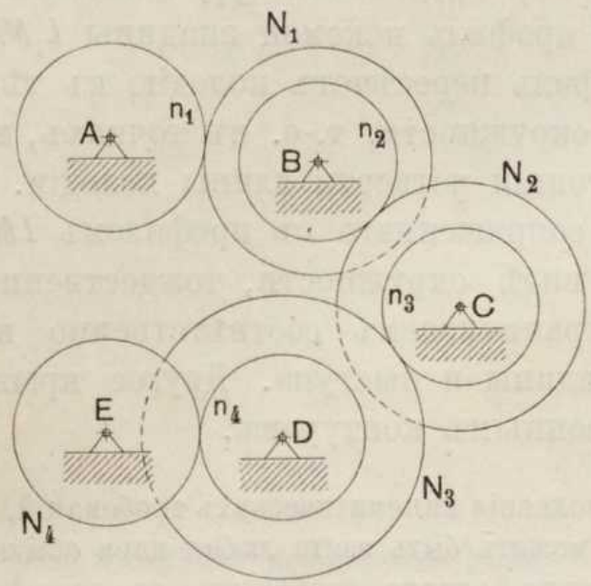
Выполнивъ построеніе профиля, сопряженнаго съ профилемъ $LMN$, чертимъ далѣе профиль выступа въ видѣ окружности, тождественной съ окружностью $LMN$, и затѣмъ ограничиваемъ соотвѣтственно все крыло, пристраивая еще профиль впадины и выступа. Другое крыло, конечно, будетъ ограничено тождественнымъ контуромъ.

Надо замѣтить, что, съ точки зрѣнія выполненія кинематическихъ требованій, въ качествѣ крыльевъ коловратныхъ насосовъ можетъ быть взята любая пара обыкновенныхъ круглыхъ зубчатыхъ колесъ. Нетрудно, однако, сообразить, что примѣненіе ихъ на практикѣ нецѣлесообразно, ибо ведетъ къ пониженію работоспособности машины. Дѣйствительно, въ тотъ моментъ, когда зацѣпленіе одной пары зубьевъ кончается, оно должно начаться (или уже началось) у другой пары, смежной съ прежней, и точка касанія первой пары въ этотъ моментъ какъ бы перескочитъ на смежную пару, а линія зацѣпленія первой пары смѣнится линіей зацѣпленія этой второй пары. При этомъ скачкѣ соприкосновеніе между частями профилей, ограниченными послѣдней точкой касанія первой пары и очередной точкой касанія второй пары, мѣста имѣть не будетъ, вслѣдствіе чего эти участки профилей выдѣлятъ нѣкоторое мертвое пространство, наполненное жидкостью, которая затѣмъ, при продолженіи вращенія, *будетъ вытѣснена назадъ*, въ подводящую трубу, вмѣсто того, чтобы быть поданной впередъ. Это явленіе, совершенно нежелательное, можетъ быть устранено только единственнымъ образомъ,—путемъ *уничтоженія* этого *скачка* точки касанія, а для этого, очевидно, необходимо, чтобы точка касанія шла по профилямъ непрерывно, не минуя ни одного участка ихъ; другими словами, необходимо, чтобы здѣсь существовала *только одна линія зацѣпленія*; для этого, конечно, необходимо, чтобы она представляла собою *замкнутую кривую*. Въ нашемъ случаѣ ею служитъ лемниската $\kappa\lambda\iota\nu$, касательная къ окружностямъ $LN$ и $L_1N_1$.

Зубцы, профилированные при этомъ условіи, оказываются не въ состояніи передавать вращеніе отъ одной оси къ другой, вслѣдствіе чего эта передача обезпечивается особо, помощью пары обыкновенныхъ зубчатыхъ колесъ, спеціально для этого насаживаемыхъ на оси крыльевъ. Для того, чтобы присоединеніе этихъ колесъ не могло измѣнить радіусовъ полодій крыльевъ, *необходимо*, *чтобы полодіи колесъ и крыльевъ были одинаковы*.—Профиля крыльевъ коловратныхъ насосовъ могутъ быть весьма различны и имѣютъ часто весьма прихотливыя формы, какъ объ этомъ можно судить по общимъ чертежамъ коловратныхъ насосовъ Fabry, Root'a, Payton'a и друг., помѣщеннымъ у насъ на отдѣльной таблицѣ,—см. таблица IV.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію такъ называемыхъ *рядовыхъ соединеній зубчатыхъ колесъ*, когда передача вращенія совершается не непосредственно, путемъ воздѣйствія колеса, сидящаго на одной оси, на колесо, посаженное на другой, а *при посредствѣ промежуточныхъ звеньевъ*, коими здѣсь могутъ служить другія зубчатыя колеса, червяки, коническія колеса и т. д. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ лишь простѣйшихъ случаевъ, первымъ изъ коимъ разберемъ случай передачи съ *большимъ* передаточнымъ числомъ.

Положимъ, что вращеніе отъ одной оси требуется передать другой, при чемъ передаточное число довольно велико. Такъ какъ для зубчатой цилиндрической передачи большого передаточнаго числа не берутъ, то если такое будетъ задано, передачу разбиваютъ на рядъ передачъ. Пусть, напримѣръ, вращеніе съ оси *A* надо передать на какую-либо ось *E*. Тогда колесо, сидящее на оси *A* (фиг. 298) и имѣющее $n_1$ зубцовъ, зацѣпляютъ съ колесомъ, сидящимъ на оси *B* и имѣющимъ $N_1$ зубцовъ; на той же оси *B* насаживаютъ колесо съ числомъ $n_2$ зубцовъ,—оно будетъ зацѣпляться съ колесомъ $N_2$ (гдѣ $N_2$—число зубцовъ его) на оси *C*, на которой сидитъ еще колесо $n_3$, зацѣпляющееся съ $N_3$ на оси *D* и т. д.



Фиг. 298.

Положимъ, что движеніе передается отъ колеса *A*; тогда ведущими будутъ колеса $n_1$, $n_2$, $n_3$, ... а ведомыми $N_1$, $N_2$, $N_3$ ... При $z_1$ оборотахъ колеса *A* колесо *B* совершитъ $\frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, *C* совершитъ $\frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, колесо *D*.... $\frac{n_3}{N_3} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ и, наконецъ, колесо *E*..... $\frac{n_4}{N_4} \cdot \frac{n_3}{N_3} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, и можно, поэтому, сказать вообще, что *число оборотовъ послѣдней оси будетъ равно числу оборотовъ первой* ($z_1$), *помноженному на дробь, числитель которой есть произведеніе чиселъ зубцовъ ведущихъ колесъ, а знаменатель—произведеніе чиселъ зубцовъ ведомыхъ колесъ.*

Послѣдняя ось будетъ вращаться или въ ту же сторону, что и первая, или въ обратную,—это зависитъ отъ числа промежуточныхъ передачъ: если мы назовемъ число всѣхъ передачъ черезъ $m$, то число оборотовъ послѣдней оси *E*, $z_e$, выразится, очевидно, такъ:

$$z_e = (-1)^m \cdot \frac{n_1 n_2 n_3 \ldots n_m}{N_1 N_2 N_3 \ldots N_m} z_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

гдѣ $z_1$ есть число оборотовъ первой оси, знакъ же *минусъ*, если таковой получится, будетъ указывать, что вращеніе послѣдней оси совершается въ сторону, противоположную первой.

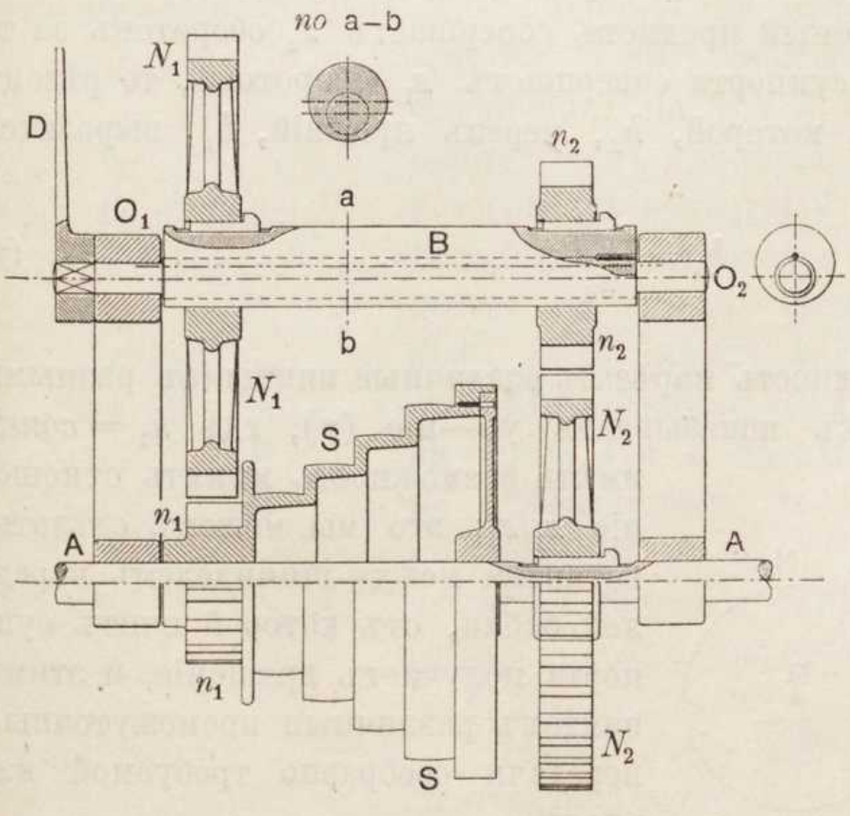
Если бы мы желали установить зависимость между угловыми скоростями колесъ, то могли бы сдѣлать это на основаніи формулы (*l*),— см. стр. 225,—говорящей, что числа оборотовъ прямопропорціональны угловымъ скоростямъ. Въ виду этого формула (*α*) перепишется еще такъ:

$$\omega_e = (-1)^{m-1} \cdot \frac{n_1 n_2 n_3 \ldots . n_m}{N_1 N_2 N_3 \ldots . N_m} \omega_1 \ldots \ldots \ldots \quad (\beta)$$

Замѣтимъ здѣсь, что если на какой-либо оси сидитъ только одно колесо, сцѣпляющееся съ предшествующимъ и послѣдующимъ колесами, то вліянія на величину передаточнаго числа оно, очевидно, не имѣетъ. На самомъ дѣлѣ, это колесо мы можемъ разсматривать, какъ два одинаковыхъ колеса, посаженныхъ на одну и ту же ось; поэтому въ выраженіи (*α*) дробь $\frac{n_k}{N_{k-1}}$, соотвѣтствующая этому колесу, будетъ равна единицѣ; колесо это вліяетъ лишь *на измѣненіе смысла вращенія*.

Такимъ образомъ, разбивая передачу на рядъ передачъ, мы можемъ выполнить какое угодно передаточное число. Въ такъ называемомъ *переборѣ* токарныхъ станковъ мы имѣемъ одинъ изъ простѣйшихъ примѣровъ разбивки передачи.

Ступеньчатый шкифъ *S*, называемый также *конусомъ* (фиг. 299), получающій свое вращеніе отъ фабричнаго вала, сидитъ вольно на шпинделѣ *A* передней бабки токарнаго станка; на этомъ шпинделѣ вращается и обтачиваемый предметъ. Колесо $N_2$ наглухо, при помощи шпонки, соединено съ осью *A* и, въ свою очередь, можетъ быть соединяемо при помощи выключателя, не показаннаго на чертежѣ, со шкивомъ *S*; малое зубчатое колесо $n_1$ составляетъ одно цѣлое со шкивомъ *S*.




Фиг. 299.

Параллельно оси *AA* въ бабкѣ имѣется другая ось *B* съ парой зуб-

чатыхъ колесъ $N_1$ и $n_2$. Ось эта можетъ быть, смотря по надобности, удаляема или приближаема къ оси *AA*; съ этою цѣлью она сдѣлана пустой и сидитъ на оси *C*, шипы которой, $O_1$ и $O_2$, эксцентричны по отношенію къ оси *B*. Вращая рукоятку *D*, насаженную на шипъ $O_1$, мы, очевидно, будемъ приближать или удалять ось *B* отъ оси *A*.

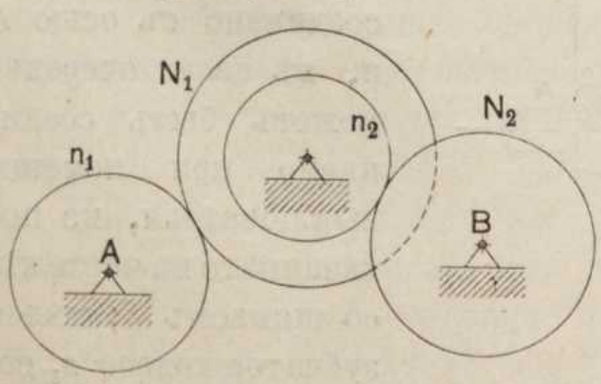
Если хотятъ, чтобы шпиндель *AA* вращался быстро, то выключателемъ соединяютъ колесо $N_2$ со шкивомъ *S* и удаляютъ вращеніемъ рукоятки *D* ось *B* отъ оси *A*, такъ что колеса $N_1$ и $n_2$ перестанутъ сцѣпляться съ колесами $n_1$ и $N_2$; тогда шпиндель будетъ получать вращеніе непосредственно отъ вала при помощи шкива *S*.

Если же нужно получить медленное вращеніе шпинделя, то разъединяютъ колесо $N_2$ и шкивъ *S*, вращеніемъ рукоятки *D* заставляютъ ось *B* приблизиться къ оси *A*, пока колеса $N_1$ и $n_2$ не войдутъ въ зацѣпленіе съ колесами $n_1$ и $N_2$; въ этомъ случаѣ при одномъ оборотѣ шкива шпиндель сдѣлаетъ $n_1 n_2 / N_1 N_2$ оборотовъ.

Ступенчатый шкивъ служитъ для того, чтобы можно было разнообразить число оборотовъ. При нарѣзкѣ винтовъ опредѣленнаго шага суппортъ, несущій рѣзецъ, долженъ подвигаться на нѣкоторую опредѣленную величину при каждомъ цѣломъ оборотѣ обтачиваемаго предмета. Въ одномъ изъ дальнѣйшихъ параграфовъ будетъ разъяснено, что передвиженіе суппорта производится при помощи частнаго видоизмѣненія трехзвенной винтовой цѣпи, въ которомъ одна пара превратилась во вращательную и одна — въ поступательную; при этомъ за одинъ оборотъ винта суппортъ подвинется на величину его шага $h_1$. Если обтачиваемый предметъ совершаетъ $z_2$ оборотовъ за то время, въ какое винтъ суппорта совершаетъ $z_1$ оборотовъ, то рѣзецъ сдѣлаетъ нарѣзку, шагъ которой, $h_2$, черезъ прежній, $h_1$, выразится такъ:

$$h_2 = \frac{z_1 h_1}{z_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Чтобы имѣть возможность нарѣзать различные винты (съ разными шагами $h_2$), нужно, какъ показываетъ ур—ніе $(\gamma)$, гдѣ $h_1 = const$, имѣть возможность мѣнять отношеніе $z_1/z_2$; это мы можемъ сдѣлать, вставляя между шпинделемъ передней бабки, отъ которой винтъ суппорта получаетъ вращеніе, и этимъ винтомъ различныя промежуточныя передачи сообразно требуемой нарѣзкѣ.



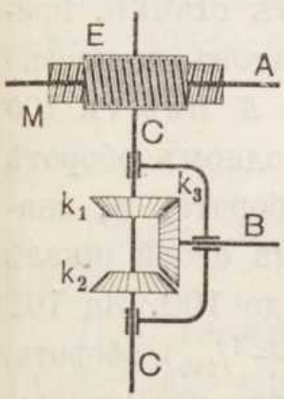

Фиг. 300.

Если *A* есть шпиндель (фиг. 300), а *B*—винтъ суппорта, то, при показанныхъ на чертежѣ числахъ зубцовъ колесъ, шагъ нарѣзки бу-

детъ равенъ (при одной промежуточной передачѣ, какъ это изображено на чертежѣ)

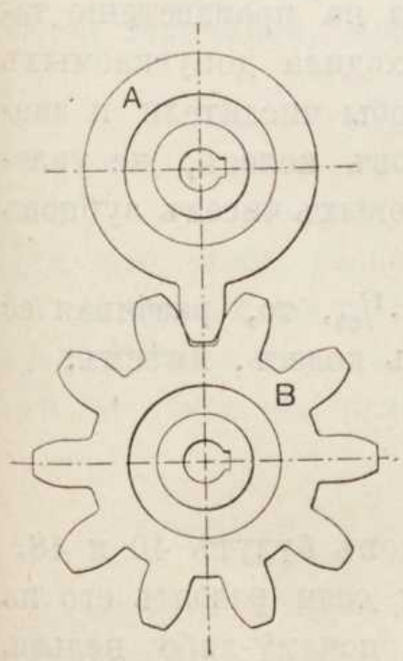
$$h_2 = h_1 \cdot \frac{n_1 n_2}{N_1 N_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\delta)$$

Имѣя рядъ смѣнныхъ колесъ (такъ наз. *серію*), мы можемъ выполнить разныя нарѣзки, а вставкой промежуточнаго колеса можемъ мѣнять направленіе вращенія винта и, слѣд., выполнять какъ правую, такъ и лѣвую рѣзьбу. Въ послѣднее время, однако, вмѣсто такой системы колесъ примѣняютъ иногда червячную передачу для приведенія въ движеніе супорта. На фиг. 301 схематически представлено подобное устройство. Червякъ *E* сидитъ на шпинделѣ *A* передней бабки и приводитъ во вращеніе червячное колесо *M*, а вмѣстѣ съ нимъ колеса $k_1$ и $k_2$. На продолженіи винта суппорта *B* сидитъ колесо $k_3$. Колеса *k* всѣ коническія. Колеса $k_1$ и $k_2$, соединенныя общей втулкой, могутъ быть немного передвигаемы вдоль оси *C*, и мы можемъ, такимъ образомъ, заставить спѣпляться съ колесомъ $k_3$ или колесо $k_1$, или колесо $k_2$; этимъ дается возможность сообщить винту суппорта вращеніе въ ту или другую сторону. Червячное колесо смѣнное, и по числу его зубцовъ, числу винтовыхъ нитокъ на червякѣ *E* и шагу винта *B* не трудно опредѣлить шагъ нарѣзки на обрабатываемомъ предметѣ.



Фиг. 301.

Къ числу рядовыхъ соединеній относятся также различные *счетчики чиселъ оборотовъ*. Такъ, напр., для отсчитыванія единицъ, десятковъ и проч. можно употребить слѣдующее соединеніе: на ось *A*, непосредственно соединенную такъ или иначе съ той, число оборотовъ которой (за извѣстный промежутокъ времени) желательно сосчитать, насаживается наглухо колесо съ *однимъ* зубцомъ; слѣдующая ось *B* (фиг. 302) имѣетъ колесо съ 10 впадинами, соотвѣтствующими каждая зубцу колеса *A*. Если на осяхъ *A* и *B* посадимъ указатели, ходящіе по циферблатамъ, то указатель, соединенный съ колесомъ *A*, будетъ, очевидно, показывать *десятыя* части, а указатель *B*—*единицы* оборотовъ, если циферблаты имѣютъ дѣленія 0, 1, 2, . . . , 8, 9.



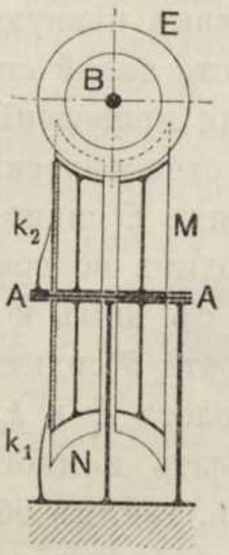
Фиг. 302.

Далѣе, на ту же ось *B* мы можемъ посадить еще одно колесо съ однимъ зубцомъ, подобное колесо *A*, а на слѣдующей оси *C*—колесо съ десятью впадинами; тогда указатель, соединенный съ *C*, будетъ давать на своемъ циферблатѣ *десятки* оборотовъ и т. д. При такомъ устрой-

ствѣ послѣ полнаго оборота какой-либо оси слѣдующая повернется на $^1/_{10}$ оборота.

Другой способъ счета оборотовъ основывается на *относительномъ движеніи двухъ колесъ, оси которыхъ совпадаютъ.*

Червякъ ***E*** (фиг. 303) сидитъ на оси ***B*** и одновременно зацѣпляется съ колесами ***M*** и ***N***, изъ которыхъ одно, ***N***, сидитъ *вольно* на оси ***A***, а другое, ***M***, съ тою же осью ***A*** соединено наглухо. Колесо ***N*** на передней сторонѣ имѣетъ два циферблата: внутренній и внѣшній; на внутренній указываетъ стрѣлка $k_2$, соединенная съ осью ***A***, а на внѣшній—стрѣлка $k_1$, неподвижно укрѣпленная въ станкѣ, причемъ на каждомъ изъ этихъ циферблатовъ нанесено по 100 дѣленій. Вольно-сидящее колесо ***N*** имѣетъ 100 зубцовъ, колесо ***M***—101 зубецъ. При одномъ оборотѣ червяка колесо ***N*** повернется на $^1/_{100}$ оборота, и, значитъ, указатель $k_1$ будетъ указывать на своей шкалѣ единицы и десятки оборотовъ червяка до 100. За 101 оборотъ червяка колесо ***N*** сдѣлаетъ $(1 + {}^1/_{100})$ оборота, колесо же ***M*** сдѣлаетъ лишь одинъ оборотъ; иными словами, оно отстанетъ отъ колеса ***N***, и указатель $k_2$ подвинется относительно своей, внутренней скалы на *одно дѣленіе*. Такимъ образомъ, на внутренней скалѣ будутъ отсчитываться сотни оборотовъ до 10·000.



Фиг. 303.

---

Переходя къ вопросу о рядовомъ соединеніи для какого-нибудь даннаго передаточнаго числа, можемъ видѣть, что если число это не особенно сложно, то не трудно разбить его всегда на произведеніе такихъ дробей, чтобы каждая изъ нихъ не превосходила допускаемыхъ на практикѣ передаточныхъ чиселъ, а также, чтобы числители и знаменатели этихъ дробей, выражающіе числа зубцовъ колесъ, не уклонялись ни въ ту, ни въ другую сторону отъ ходовыхъ чиселъ зубцовъ (не были бы меньше 6 или больше 150 и т. д.).

Если, напр., требуется выполнить передачу $^1/_{60}$, то, разбивая ее на двѣ, съ 6-ю зубцами у каждаго изъ ведущихъ колесъ, имѣемъ:

$$^1/_{60} = {}^{6\cdot 6}/_{2160} = {}^6/_{45} \cdot {}^6/_{48};$$

такимъ образомъ, у большихъ колесъ числа зубцовъ будутъ 40 и 48.

Если передаточное число весьма сложно или если разбить его на нѣсколько дробей по указанному выше способу почему-либо нельзя, то приходится прибѣгнуть къ приближенному способу. Можно, напримѣръ, вмѣсто даннаго передаточнаго числа взять въ нѣкоторыхъ случаяхъ приближенное къ нему, такое, чтобы оно хорошо разлагалось на рядъ болѣе простыхъ дробей. Такимъ образомъ, передача получается приближенной.

Пусть, напр., требуется, чтобы одна стрѣлка показывала часы, а другая—совершала полный оборотъ по циферблату за время обращенія луны, равное 29 дн. 12 час. 44 мин. (приблизительно).

Обращая это число въ часы, получаемъ $^{42524}/_{60}$ часовъ. Слѣдовательно, въ то время, какъ одна стрѣлка (часовая) совершаетъ $^{1}/_{12}$ оборота, другая совершаетъ $^{60}/_{42524}$ оборота; поэтому передаточное число въ данномъ случаѣ равно

$$^{60}/_{42524} : {}^{1}/_{12} = {}^{720}/_{42524} = {}^{180}/_{10631} .$$

Число, стоящее въ знаменателѣ получившейся у насъ дроби, первоначальное, значитъ, разложеніе на простѣйшія дроби невозможно. Но если вмѣсто 42524 мы возьмемъ число 42525, то получимъ:

$$^{720}/_{42525} = {}^{80}/_{4725} = {}^{8}/_{75} \cdot {}^{10}/_{63} .$$

Такимъ образомъ, путемъ пробъ всегда можно подобрать удобныя передачи.

При сложныхъ передаточныхъ числахъ часто бываетъ полезно употреблять способъ *Гюйгенса*, состоящій въ томъ, что данную дробь разлагаемъ въ непрерывную и находимъ рядъ подходящихъ дробей. Пусть послѣдняя подходящая дробь есть $n/m$, а данная $a/b$; тогда, какъ извѣстно, существуетъ соотношеніе

$$am - bn = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Если какая-либо дробь $x/y$ есть одна изъ дробей, близко подходящихъ къ данной $a/b$, то разность между ними $(a/b - x/y)$ должна быть малой величиной. Мы имѣемъ:

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{ay - bx}{by} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta)$$

Для того, чтобы разность $a/b - x/y$ была достаточно малой, нужно, чтобы въ правой части равенства $(\zeta)$ числитель былъ достаточно малымъ сравнительно съ знаменателемъ, $by$. Пусть этотъ числитель есть $k$, гдѣ $k$—нѣкоторая величина, сравнительно съ $by$ очень малая:

$$ay - bx = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\eta)$$

Сопоставляя равенства $(\varepsilon)$ и $(\eta)$, находимъ, что можно положить $y = mk$ и $x = nk$ (послѣ умноженія обѣихъ частей рав. $(\varepsilon)$ на $k$), или вообще: $y = mk + \mu b$, и $x = nk + \mu a$.

Подбирая теперь числа $k$ и $\mu$, можемъ получить такія значенія $x$ и $y$, при которыхъ дробь $x/y$ хорошо разлагается и достаточно близка къ $a/b$.

*Методъ Броко*, также дающій возможность получать удобныя для разложенія дроби и разбивать соотвѣтственно передачу, состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть данное передаточное число есть $m/n$; оно, положимъ, слишкомъ сложно и не допускаетъ разложенія. Мы попрежнему обращаемъ его въ непрерывную дробь и находимъ подходящія дроби. По свойству подходящихъ дробей мы знаемъ, что если двѣ послѣдовательныя подходящія дроби суть $a/b$ и $c/d$, то всякая дробь, заключенная между ними, будетъ болѣе сложной, чѣмъ эти двѣ. То же замѣчаніе относится вообще ко всякимъ двумъ дробямъ, удовлетворяющимъ соотношенію

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}.$$

Дробь $(a+c)/(b+d)$, какъ не трудно убѣдиться, находится именно въ такомъ соотношеніи съ дробями $a/b$ и $c/d$.

Такимъ образомъ, если послѣ указаннаго обращенія въ непрерывную дробь и полученія подходящихъ эти послѣднія окажутся неудобными, то, взявъ двѣ подходящія дроби $a/b$ и $c/d$, мы находимъ затѣмъ цѣлый рядъ другихъ подходящихъ дробей, интерполируя сначала между $a/b$ и $c/d$, т.-е. составляя дробь $(a+c)/(b+d)$, потомъ между этой и каждой изъ дробей $a/b$, $c/d$ и т. д.

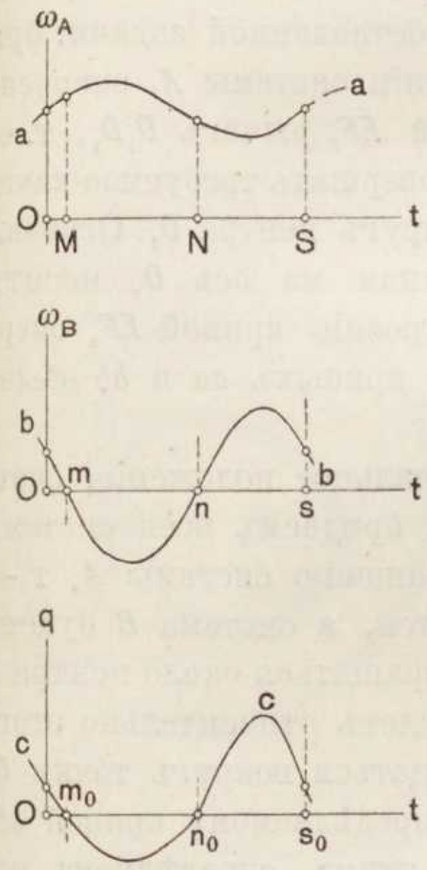
## b) Преобразованіе вращательнаго движенія въ движеніе колебательное и въ движеніе прямолинейно-поступательное.

### § 43. Эксцентрики и кулаки.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію того частнаго случая предыдущей передачи, когда система $A$, передающая движеніе, вращается, вокругъ своей оси $O$ непрерывно, другая же система $B$, воспринимающая движеніе, должна при этомъ совершать вокругъ своей оси $O_1$ только колебательное движеніе, попеременно то въ одну сторону, то въ другую. Обѣ оси, $O$ и $O_1$, предполагаемъ, попрежнему, неподвижными, такъ что разстояніе $OO_1 = d = const.$

Рѣшеніе этой частной задачи можетъ быть выполнено помощью тѣхъ же соображеній, коими мы руководились выше, при рѣшеніи предыдущей задачи. Разница будетъ сводиться лишь къ тому, что кривая угловыхъ скоростей системы $B$ будетъ имѣть теперь теченіе, отличное отъ того, какое она имѣла въ предыдущемъ случаѣ: тамъ, при непрерывномъ вращеніи системы $A$, протекающемъ все время въ одномъ и томъ же направленіи, система $B$ вращалась также непрерывно и также все время въ одномъ и томъ же направленіи; здѣсь, при такомъ же непрерывномъ вращеніи системы $A$, система $B$ будетъ

вращаться, мѣняя не только величину своей угловой скорости, но въ нѣкоторые моменты и направленіе ея, такъ что, если въ діаграммахъ $(\omega, t)$ мы условимся откладывать *вверхъ* отъ оси $Ot$ угловыя скорости, направленныя *по* часовой стрѣлкѣ, а внизъ отъ $Ot$—противъ нея, и если система $A$ вращается все время по часовой стрѣлкѣ, то кривая угловыхъ скоростей системы $B$ изобразится нѣкоторой кривой $bb$ синусоидальнаго типа (фиг. 304), пересѣкающей ось абсциссъ за время каждаго періода minimum два раза,—въ точкахъ $m$ и $n$; въ эти моменты угловая скорость $\omega_B$ будетъ обращаться каждый разъ въ нуль, а вращеніе системы $B$ будетъ мѣнять свое направленіе. Кривая $cc$ отношеній $q$, гдѣ $q = \omega_B : \omega_A$, будетъ имѣть теченіе, подобное теченію кривой $bb$,—въ точкахъ $m_0$ и $n_0$, соотвѣтствующихъ по времени точкамъ $m$ и $n$, отношеніе $q$ будетъ равно нулю, а между точками $m_0$ и $n_0$ значенія $q$ будутъ, по знаку, обратны значеніямъ его передъ моментомъ $m_0$ и послѣ момента $n_0$. Такимъ образомъ, если на участкѣ $Om_0$ дѣленіе отрѣзка $OO_1$ совершалось внѣшнимъ образомъ, то между точками $m_0$ и $n_0$ оно будетъ совершаться уже внутреннимъ, и т. д. Если движеніе системъ производится здѣсь періодически, то въ теченіе каждаго періода пересѣченіе кривой $bb$ съ осью абсциссъ будетъ совершаться четное число разъ; такой же характеръ будетъ имѣть въ этомъ случаѣ и теченіе кривой $cc$.



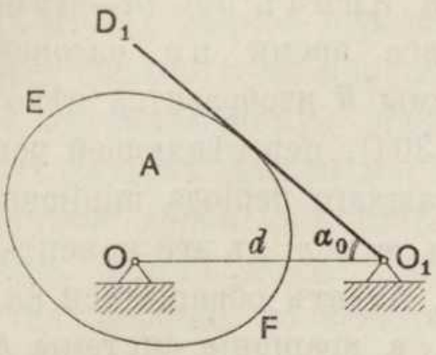
Фиг. 304.

Получивъ кривую $cc$ отношеній $q$, можемъ построить обычнымъ путемъ полодіи относительныхъ движеній нашихъ системъ и, наконецъ, замѣнимъ каченіе полодій каченіемъ-скольженіемъ огибаемыхъ по ихъ огибающимъ,—выполнимъ, иначе говоря, приличествующую зубчатую передачу, и поставленная задача будетъ рѣшена. Замѣтимъ, кстати, что, при подсчетѣ угловъ поворота по кривой $bb$, площади, лежащія ниже оси абсциссъ, слѣдуетъ считать отрицательными, а выше этой оси—положительными.

Этими замѣчаніями, въ сущности, исчерпывается вся теорія такихъ передачъ. На практикѣ, однако, такое рѣшеніе, помощью полодій, примѣняется лишь въ исключительныхъ случаяхъ, главнымъ образомъ, изъ-за трудностей осуществленія зубчатой передачи при здѣшнихъ полодіяхъ, зачастую имѣющихъ здѣсь весьма прихотливое теченіе. Въ виду этого поставленный вопросъ разрѣшается обычно такъ:

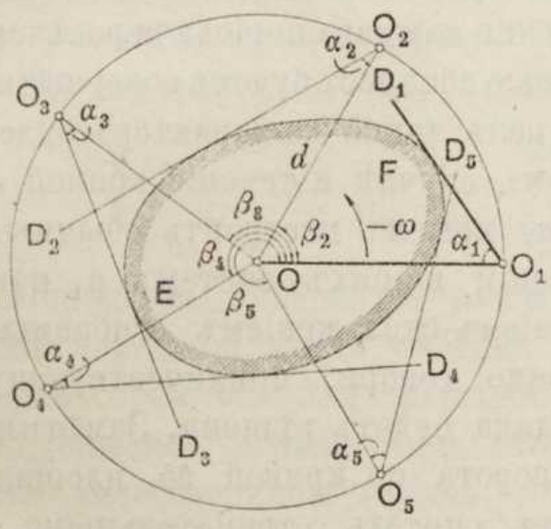
Предположимъ, что система $B$ изображается нѣкоторымъ рычагомъ $D_1O_1$, вращающимся вокругъ ея центра $O_1$ (фиг. 305),—для простоты разсужденій, предположимъ этотъ рычагъ прямолинейнымъ. Примемъ

теперь этотъ рычагъ за единственный зубецъ, принадлежащій системѣ $B$, т.-е. за нѣкоторую огибаемую. Тогда огибающая $EF$ всѣхъ его положеній въ движеніи $B/A$, полученная въ системѣ $A$, дастъ собою соотвѣтствующій этому рычагу-зубцу $O_1D_1$ зубецъ системы $A$ также, очевидно, единственный, и если мы теперь выполнимъ матеріально этотъ огибающій профиль $EF$ и установимъ между профилями $EF$ и $O_1D_1$ силовое замыканіе, то и получимъ рѣшеніе поставленной задачи: при непрерывномъ вращеніи системы $A$, очерченной теперь по кривой $EF$, рычагъ $O_1D_1$, т.-е. система $B$, будетъ совершать требуемое качательное движеніе вокругъ центра $O_1$. Огибающая $EF$, выполненная матеріально и насаженная на ось $O$, носитъ названіе *эксцентрика* или *кулака*.—Само построеніе кривой $EF$, очерчивающей эксцентрикъ, выполняется помощью кривыхъ $aa$ и $bb$ обычнымъ путемъ, а именно:



Фиг. 305.

Намѣтивъ для рычага $D_1O_1$ какое-либо начальное положеніе, соотвѣтствующее начальному моменту $O$ движенія, придаемъ всей системѣ $(A, B)$ вращеніе около центра $O$, обратное вращенію системы $A$, т.-е. вращеніе $(-\omega_A)$. Тогда система $A$ остановится, а система $B$ будетъ двигаться такъ, что отрѣзокъ $OO_1$ ея будетъ вращаться около центра $O$ съ угловой скоростью $(-\omega_A)$, а прямая $D_1O_1$ будетъ относительно этого отрѣзка вращаться вокругъ точки $O_1$ по закону, опредѣляемому кривой $bb$. Согласно съ этимъ, опредѣляемъ помощью кривой $aa$ соотвѣтствующіе различнымъ моментамъ углы $\beta$ поворота отрѣзка $OO_1$ отъ начальнаго его положенія, помѣченнаго на чертежѣ толстой сплошной линіей, а затѣмъ, помощью кривой $bb$ опредѣляемъ соотвѣтствующіе углы поворота прямой $D_1O_1$ отъ ея начальнаго положенія, также отмѣченнаго толстой линіей на томъ же чертежѣ. Прибавляя (или отнимая согласно знаку) эти углы къ начальному углу $\alpha_1$ наклона $D_1O_1$ къ $O_1O$ въ начальный моментъ, получимъ послѣдовательные углы $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$ и т. д. наклона рычага $D_1O_1$ къ отрѣзку $OO_1$. Вычертивъ всѣ эти послѣдовательныя положенія $D_2O_2$, $D_3O_3$, $D_4O_4$,.... рычага, проводимъ не прерывную кривую $EF$ (фиг. 306), огибающую всѣ эти положенія рычага и опредѣляющую собою профиль искомаго эксцентрика.

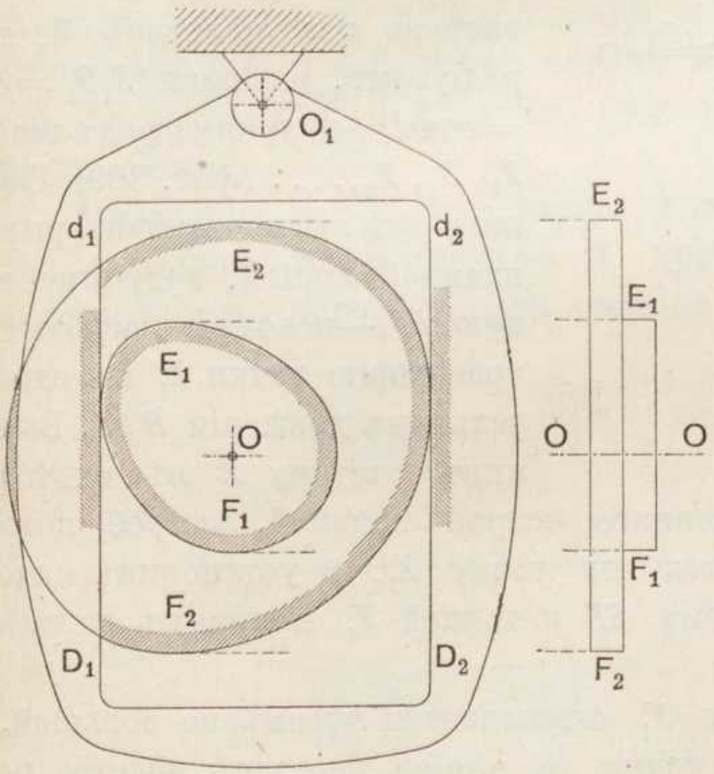


Фиг. 306.

Вполнѣ очевидно, что каждому начальному углу $\alpha_n$ будетъ соотвѣтствовать своя кривая $E_nF_n$ и, значитъ, своя форма эксцентрика;

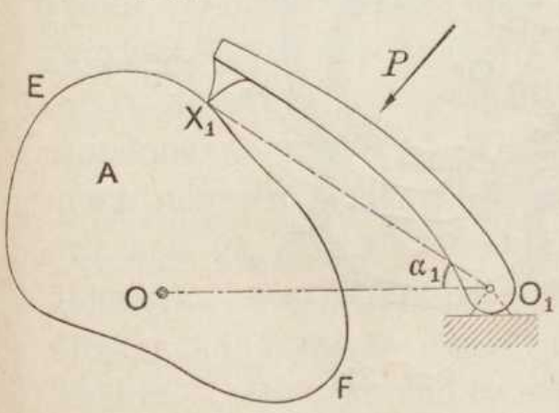
кромѣ того, прямую $D_1O_1$ можно было бы взять проходящей какъ-нибудь внѣ центра $O_1$. Наконецъ, вмѣсто рычага, очерченнаго по прямой линіи $D_1O_1$, можно взять другой, очерченный по какой-либо кривой линіи, проходящей черезъ точку $O_1$ или мимо ея, и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что эксцентриковъ, могущихъ осуществить данное колебательное движеніе, можетъ быть безконечно много.

Всѣ эксцентрики, принадлежащіе къ типу, разсмотрѣнному выше, удерживаются въ постоянномъ соприкосновеніи съ своимъ рычагомъ $D_1O_1$ путемъ силового замыканія. Въ тѣхъ случаяхъ, когда такое замыканіе почему-либо оказывается нежелательнымъ, его можно избѣгнуть, выдѣляя въ системѣ $B$ второй рычагъ $D_2d_2$ (фиг. 307), расположенный по другую сторону центра $O$. Построивъ огибающую $E_2F_2$ для этого второго рычага и соединивъ ее во-едино съ огибающей $E_1F_1$ для перваго рычага $E_1F_1$, получимъ систему, уже не нуждающуюся въ силовомъ замыканіи. Если двѣ эти огибающія, $E_1F_1$ и $E_2F_2$, представляютъ собою кривыя, другъ отъ друга отличныя, то ихъ придется размѣстить въ различныхъ плоскостяхъ, одна другой параллельныхъ; соотвѣтственно размѣстятся и рычаги $D_1d_1$ и $D_2d_2$.




Фиг. 307.

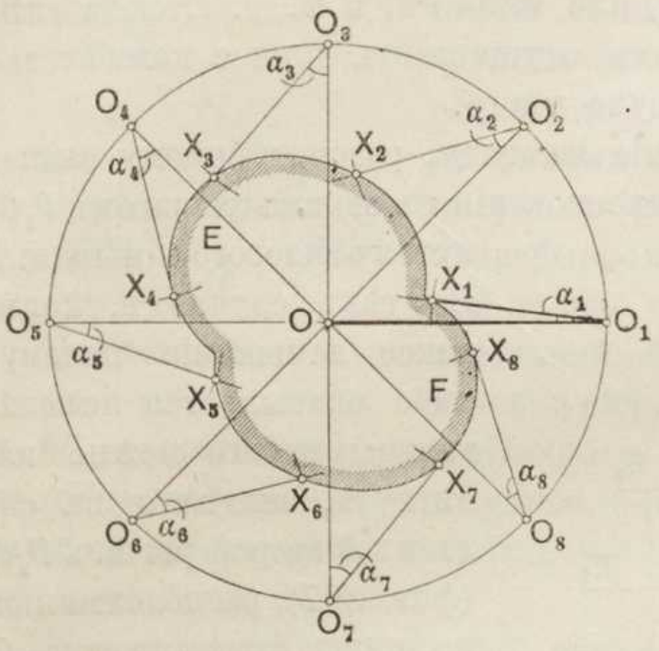
Вмѣсто того, чтобы выдѣлять въ системѣ $B$ цѣлый профиль,—рычагъ $D_1O_1$,—можемъ выдѣлить въ ней какую-либо точку $X_1$ (фиг. 308). Принявъ ее за огибаемую, строимъ для нея въ системѣ $A$ огибающую, которая, очевидно, представитъ собою траекторію этой точки $X$ въ относительномъ движеніи $B/A$. Построеніе этой траекторіи - огибающей проще всего выполняется такъ:




Фиг. 308.

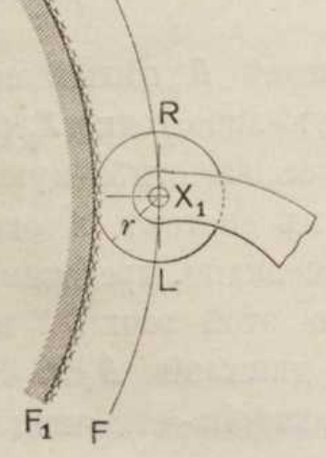
Выдѣливъ въ системѣ $B$ такую точку $X_1$, соединяемъ ее съ центромъ $O_1$ прямой $X_1O_1$ и опредѣляемъ рядъ послѣдовательныхъ положеній этой прямой $X_1O_1$ въ относительномъ движеніи $B/A$. Очевидно, что прямая $X_1O_1$, будучи жестко связана съ системой $B$, будетъ раздѣлять

движеніе этой послѣдней, т.-е. будетъ вращаться около центра $O_1$ съ угловой скоростью $\omega_B$ системы $B$; такимъ образомъ, законъ измѣненія угловыхъ скоростей прямой $X_1O_1$ будетъ намъ извѣстенъ вполнѣ. Опредѣливъ теперь рядъ послѣдовательныхъ положеній этой прямой въ упомянутомъ относительномъ движеніи $B/A$ и отмѣтивъ на каждой изъ этихъ прямыхъ мѣсто точки $X_1$,—что выполнимъ, засѣкая изъ центровъ $O_n$ дуги радіусомъ, равнымъ $K_1O_1 = a = const$,—получимъ рядъ точекъ: $X_1, X_2, X_3, \ldots$ (фиг. 309). Соединивъ всѣ эти точки непрерывной плавной линіей, получимъ кривую $EF$,—искомую огибающую траекторію точки $X_1$ въ относительномъ движеніи $B/A$. Выполнивъ систему $B$ въ видѣ рычага $X_1O_1$ (фиг. 308), снабженнаго острой призмой, остреё которой имѣетъ матеріально изображать эту точку $X_1$, и установивъ силовое замыканіе между эксцентрикомъ $EF$ и точкой $X_1$, получимъ желаемую передачу.

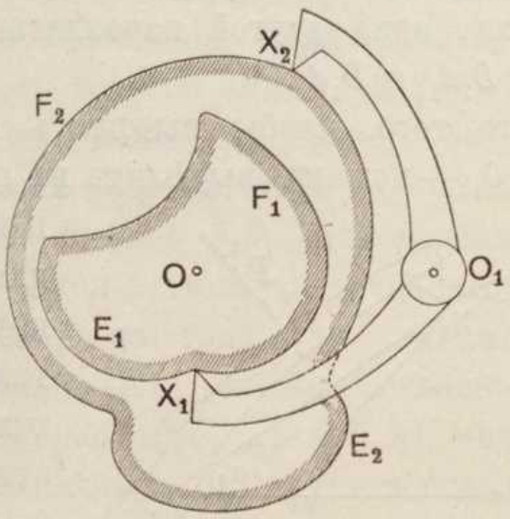



Фиг. 309.

Если нагрузка на точку $X_1$ оказывается чрезмѣрно большой, то остреё, осуществляющее эту точку въ нашей передачѣ, быстро истирается, что, конечно, ведетъ къ извращенію передачи и измѣненію закона угловыхъ скоростей $\omega_B$. Во избѣжаніе этого треніе скольженія




Фиг. 310.



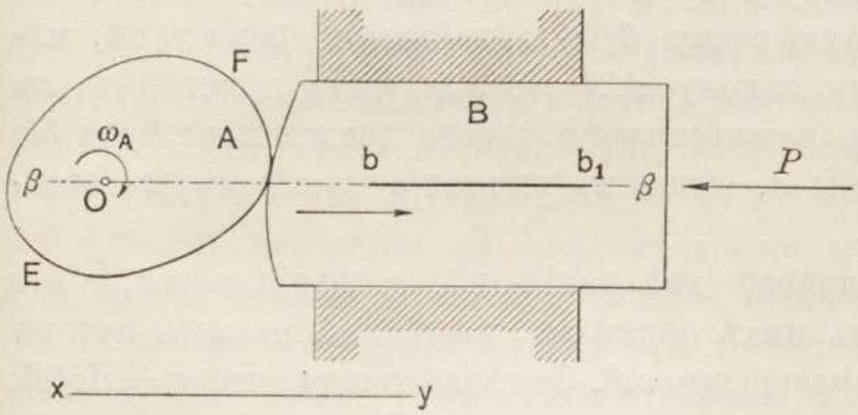

Фиг. 311.

замѣняютъ *треніемъ качепія*, для чего точку $X_1$ принимаютъ за центръ ролика $RL$ (фиг. 310), радіусомъ $r$ коего описываютъ рядъ круговыхъ дугъ изъ различныхъ послѣдовательныхъ точекъ кривой $EF$. Огибающая $E_1F_1$ всѣхъ этихъ дугъ дастъ намъ контуръ новаго эксцентрика,

дѣйствующаго теперь уже не на точку $X_1$, а на роликъ $RL$. Очевидно, однако, что, при вращеніи этого новаго эксцентрика $E_1F_1$, точка $X_1$,—центръ ролика,—будетъ перемѣщаться по прежней кривой $EF$.

Если силовое замыканіе почему-либо нежелательно, то въ системѣ $B$ можно выдѣлить не одну точку, а двѣ,—напримѣръ, точки $X_1$ и $X_2$ (фиг. 311). Опредѣливъ относительныя траекторіи обѣихъ точекъ, выполнивъ каждую изъ нихъ матеріально и связавъ должнымъ образомъ одну съ другой, получимъ передачу, не нуждающуюся въ силовомъ замыканіи. Рычагъ выполнится въ видѣ развилки, несущей на своихъ концахъ призмы $X_1$ и $X_2$. Ролики можно примѣнить и здѣсь. Если огибающія $E_1F_1$ и $E_2F_2$ всѣми своими точками совпадаютъ одна съ другой, то точкамъ $X_1$ и $X_2$ можно будетъ дать движеніе въ одной и той же плоскости.

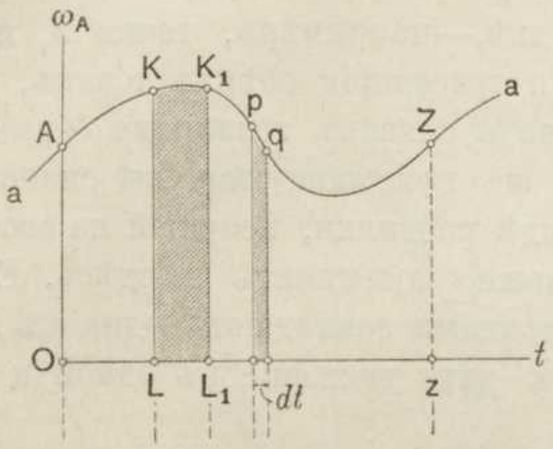
Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію того частнаго случая разобранной передачи, когда центръ $O_1$ вращенія системы $B$ удаляется въ безконечность, такъ что эта система можетъ выполнять только *возвратно-прямолинейное движеніе* по нѣкоторому вполнѣ опредѣленному постоянному направленію. Схема такой передачи представлена на фиг. 312: система $A$ выполнена въ видѣ нѣкотораго эксцентрика $EF$, вращающагося вокругъ своей неподвижной оси $O$ съ угловыми скоростями $\omega_A$, измѣняющимися по извѣстному закону $aa$ (фиг. 313); при этомъ своемъ движеніи система $A$, путемъ скольженія, воздѣйствуетъ на систему $B$, могущую перемѣщаться только поступательно, по нѣкоторому постоянному направленію $xy$; между обѣими системами все время поддерживается силовое замыканіе. При замкнутой кривой $EF$ система $B$ можетъ двигаться только возвратно-прямолинейнымъ движеніемъ по этому направленію $xy$. Предположимъ, что ходъ измѣненія линейныхъ скоростей $v$ системы $B$ дается кривой $dd$ (фиг. 314), при чемъ принято, что скорости, направленныя *вправо*, отложены *вверхъ* отъ оси $Ot$, а влѣво—внизъ отъ этой оси. Такъ какъ система $B$ движется возвратнымъ движеніемъ, то кривая $dd$ своимъ теченіемъ будетъ напоминать *синусоиду;* точки пересѣченія ея съ осью $Ot$ опредѣлятъ собою *моменты остановки* системы $B$ и слѣдующей затѣмъ *перемѣны направленія движенія.*



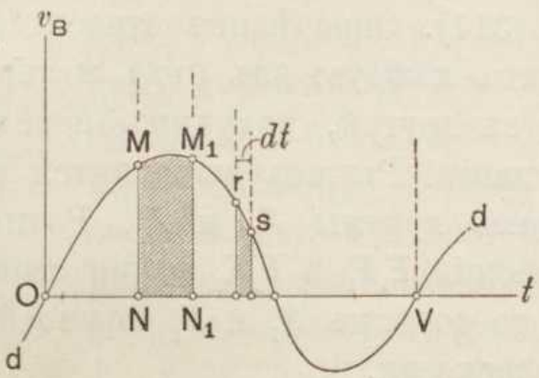

Фиг. 312.

Такое возвратно-поступательное движеніе системы $B$ можно свести къ возвратно-поступательному же движенію принадлежащаго этой системѣ прямого отрѣзка $bb_1$ (фиг. 312), параллельнаго упомянутой пря-

мой *xy* и проходящаго своимъ направленіемъ $\beta\beta$ черезъ центръ *O* вращенія системы *A*. Сообразно съ этимъ, данное движеніе системы *B* можно задать такъ: нѣкоторая прямая $bb_1$, принадлежащая нашей си-




Фиг. 313.




Фиг. 314.

стемѣ *B*, при движеніи этой послѣдней должна скользить вдоль самой себя, по своему собственному направленію $\beta\beta$, проходя при этомъ постоянно черезъ неподвижную точку *O* съ линейными скоростями, мѣняющимися по извѣстному закону *dd*.—Прежде чѣмъ приступить къ разсмотрѣнію вопроса объ осуществленіи такого движенія отрѣзка $bb_1$ помощью вращенія системы *A*, обратимъ вниманіе на нѣкоторыя свойства кривой *dd*.

Выдѣлимъ на этой кривой двѣ какія-либо сосѣднія точки, *r* и *s* (фиг. 314). Проведя черезъ нихъ ординаты, выдѣлимъ такимъ путемъ нѣкоторую элементарную площадку $v\,dt$. Замѣчая теперь, что $v = ds/dt$, заключаемъ, что величина этой площадки есть $ds$. Отсюда слѣдуетъ, что линейное перемѣщеніе $s$ любой точки нашей системы *B* за нѣкоторое время *1—2* выразится формулой

$$s = \int_1^2 v\,dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

показывающей, что это *перемѣщеніе* изобразится въ извѣстномъ масштабѣ *площадью*, ограниченною кривой *dd*, двумя ординатами, соотвѣтствующими крайнимъ моментамъ (*1*) и (*2*), и осью абсциссъ. Въ діаграммѣ *aa* (фиг. 313) площадь $\int \omega\,dt$ дастъ собою *уголъ* поворота системы *A*. Площадки, лежащія внизъ отъ оси *Ot*, будемъ считать отрицательными,—онѣ будутъ давать перемѣщенія системы *B* влѣво; площадки, лежащія *вверхъ* отъ *Ot*, будутъ *положительны* и дадутъ собою перемѣщенія *вправо*.

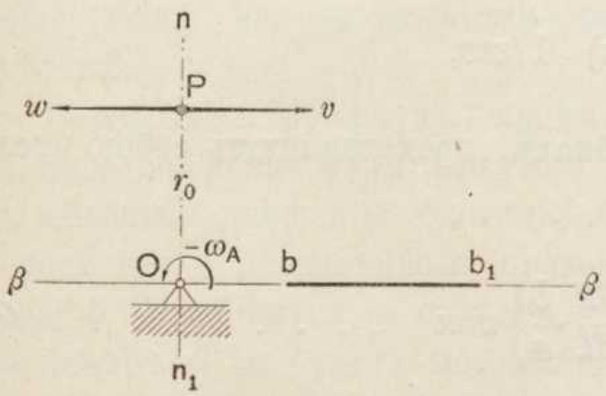
Относительно кривыхъ *aa* и *dd* надо замѣтить еще, что, обычно, движенія системъ *A* и *B* совершаются *періодически*, и мы предположимъ, что періоды обѣихъ системъ *одинаковы*, совпадая съ временемъ одного полнаго оборота системы *A*. Разсмотрѣніемъ одного такого періода мы и ограничимся.

Прежде всего, посмотримъ, какъ разрѣшается поставленная задача

при помощи полодій и какъ эти полодіи строятся. Методъ нахожденія полодій остается прежнимъ: для нахожденія полодіи системы $B$ въ относительномъ движеніи $B/A$ придаемъ обѣимъ системамъ, $A$ и $B$, вращеніе $(-\omega_A)$ около центра $O$, послѣ чего система $A$ останавливается, а система $B$ начинаетъ двигаться новымъ сложнымъ движеніемъ, составляемымъ изъ прежняго поступательнаго движенія по направленію $\beta\beta$ со скоростями $v$ и новаго, вращательнаго движенія вокругъ центра $O$ съ угловыми скоростями $(-\omega_A)$. Полюсъ этого сложнаго движенія можно найти на основаніи слѣдующихъ простыхъ соображеній:

Движеніе системы $B$ сводится, какъ мы знаемъ, къ движенію принадлежащаго ей прямого отрѣзка $bb_1$, все время проходящаго своимъ направленіемъ черезъ неподвижную точку $O$. Но разъ система $B$ вращается теперь вокругъ центра $O$, то вмѣстѣ съ ней будетъ вращаться около того же центра $O$ и отрѣзокъ $bb_1$, вслѣдствіе чего новое сложное движеніе системы $B$ сведется къ вращенію прямой $bb_1$ вокругъ центра $O$ съ угловыми скоростями $(-\omega_A)$ и къ скольженію (прохожденію) этой прямой постоянно черезъ ту же точку $O$ со скоростями $v$. Движеніе это, очевидно, аналогично движенію системы ползуна въ механизмѣ Витворта, гдѣ ось $xx$ ползуна (фиг. 145) постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку $O$, вращаясь въ то же время около нея съ извѣстной угловой скоростью.—Перейдемъ теперь къ опредѣленію положенія полюса мгновеннаго вращенія системы отрѣзка $bb_1$.

Замѣчая, что огибающей всѣхъ положеній отрѣзка $bb_1$ является точка $O$ (фиг. 315),—самъ этотъ отрѣзокъ является огибаемой,—заключаемъ, что въ каждый данный моментъ общая нормаль къ огибаемой и огибающей будетъ представляться прямой, проведенной перпендикулярно отрѣзку $bb$ черезъ точку $O$; на этомъ перпендикулярѣ и будетъ помѣщаться каждый разъ искомый полюсъ $P$. Предположимъ теперь, что мы отыскиваемъ полюсъ для того момента, когда $\omega_A$ имѣетъ значеніе, выражающееся въ извѣстномъ масштабѣ ординатой $KL$ (фиг. 313), а скорость $v$—значеніе, даваемое ординатой $MN$ (фиг. 314). Этотъ именно моментъ и взятъ на фиг. 315; общая нормаль представляется здѣсь прямой $nn_1$, перпендикулярной къ $bb_1$. Посмотримъ теперь, по какую сторону отъ центра $O$ долженъ лежать на этой нормали искомый полюсъ.




Фиг. 315.

Пусть во взятый моментъ система $A$ вращается по направленію часовой стрѣлки. Въ такомъ случаѣ въ относительномъ движеніи $B/A$ отрѣзокъ $bb_1$, а вмѣстѣ съ нимъ и вся система $B$, будутъ вращаться около центра $O$ въ обратномъ направленіи, противъ часовой стрѣлки.

Скорость $MN$ поступательнаго движенія направлена въ этотъ моментъ вправо. Такъ какъ полюсомъ мгновеннаго вращенія можетъ служить лишь та точка системы, которая въ разсматриваемый моментъ *не имѣетъ скорости*, то ясно, что въ нашемъ случаѣ полюсъ будетъ лежать въ той точкѣ, линейная скорость $w$ коей отъ вращенія отрѣзка $bb_1$ вокругъ $O$ равна и противоположна скорости $v$ поступательнаго движенія, даваемой отрѣзкомъ $MN$. Очевидно, что такую точку слѣдуетъ искать только въ области $On$ нормали $n_1n$, т.-е. тамъ, гдѣ стрѣлка добавочной угловой скорости $(-\omega_A)$ идетъ обратно стрѣлкѣ направленія скорости $v$,—иначе говоря, *тамъ, гдѣ стрѣлка данной угловой скорости* $(\omega_A)$ *оказывается идущей согласно стрѣлкѣ скорости* $v$. Само же положеніе полюса $P$ опредѣлится изъ условія

$$w = r_0\omega_A = v, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

гдѣ черезъ $r_0$ обозначено разстояніе полюса $P$ отъ центра $O$. Отсюда находимъ, что

$$r_0 = \frac{v}{\omega_A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Отложивъ $r_0$ отъ $O$ по направленію $On$, получимъ точку $P$,—полюсъ мгновеннаго вращенія въ относительномъ движеніи $B/A$.

Уравненіе $(c)$ показываетъ, что отрѣзокъ $r_0$ можетъ быть полученъ прямо, помощью діаграммъ $aa$ и $dd$ (фиг. 313 и 314). Въ масштабахъ, помѣченныхъ у осей ординатъ этихъ діаграммъ, имѣемъ, что

$$v = (MN \,.\, b)\, mm/sec$$

и

$$\omega_A = (KL \,.\, a) \,.\, 1/sec,$$

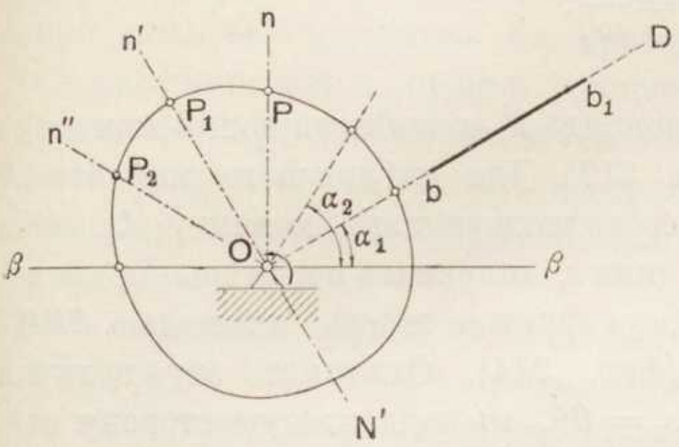
причемъ количества, стоящія въ скобкахъ, представляютъ собою числа отвлеченныя. Отсюда находимъ, что

$$r_0 = \frac{v}{\omega_A} = \left(\frac{MN}{KL}\cdot\frac{b}{a}\right) mm \quad \ldots\ldots\ldots (d)$$

Итакъ, величина $r_0$ выражается въ извѣстныхъ единицахъ,—у насъ въ $mm$, въ зависимости отъ способа учета скорости $v$,—произведеніемъ изъ отношенія ординатъ на отношеніе масштабовъ. Удобно поэтому выбирать масштабы $a$ и $b$ такъ, чтобы отношеніе $b/a$ выражалось возможно болѣе простымъ числомъ.—Что касается отношенія ординатъ $MN/KL$, то удобнѣе всего сразу построить кривую этихъ отношеній, аналогичную кривой отношеній $q$ въ некруглыхъ колесахъ.

Пусть, такимъ образомъ, для момента $(L)$,—фиг. 313,—полюсъ находится въ точкѣ $P$ (фиг. 316). Для слѣдующаго момента $(L_1)$ опредѣ-

леніе полюса будетъ выполнено такимъ же образомъ. Угловая скорость $\omega_A$ выразится въ этотъ моментъ ординатой $K_1L_1$, а уголъ поворота системы $A$ за время $LL_1$—площадью $LKK_1L_1$ (фиг. 313); пусть эта площадь равна углу $\alpha_1$ (фиг. 316). Значитъ, въ моментъ $L_1$ прямая $bb_1$ окажется наклоненной къ своему начальному положенію $\beta\beta$, соотвѣтствующему моменту $L$, подъ угломъ $\alpha_1$ и ляжетъ по нѣкоторой прямой $DO$, гдѣ $\angle DO\beta = \alpha_1$. Проводя теперь черезъ точку $O$ нормаль $On'$ къ прямой $DO$ и предположивъ, что въ моментъ $L_1$ линейная скорость $v$ системы $bb_1$ выражается отрѣзкомъ $M_1N_1$ (фиг. 314), опредѣляемъ сначала сторону, по какую относительно центра $O$ долженъ лежать на нормали $On'$ полюсъ мгновеннаго вращенія, а затѣмъ, пользуясь формулой $(d)$, и разстояніе $r_1$ этого полюса отъ центра $O$. Такъ получимъ полюсъ $P_1$, соотвѣтствующій моменту $L_1$.



Фиг. 316.

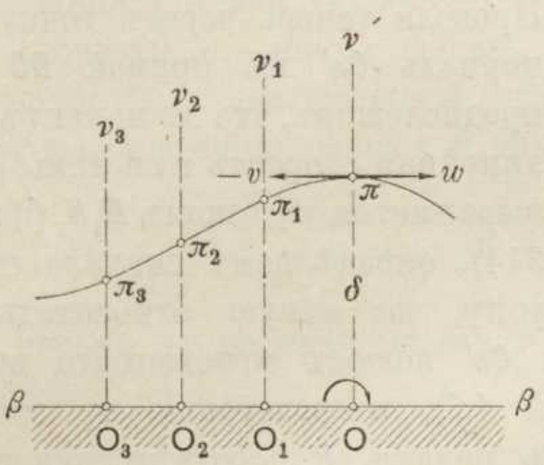
Точно такимъ же образомъ получимъ положеніе полюсовъ и для всѣхъ слѣдующихъ моментовъ,—ими будутъ служить нѣкоторыя точки $P_2, P_3, \ldots\ldots$ Соединивъ всѣ эти точки $P_n$ непрерывной плавной линіей, получимъ неподвижную полодію $PP_1P_2\ldots$. относительнаго движенія $B/A$. Замѣтимъ, кстати, что, при опредѣленіи мѣста полюса $P_n$, однимъ только ариѳметическимъ подсчетомъ значеній $r_0$ довольствоваться нельзя,—каждый разъ необходимо опредѣлять еще и сторону, въ которую относительно центра $O$ лежитъ на своей нормали искомый полюсъ; проще всего это достигается помощью вышеприведеннаго правила стрѣлокъ.

Переходимъ теперь къ опредѣленію неподвижной полодіи относительнаго движенія $A/B$, для чего придаемъ обѣимъ системамъ движеніе, обратное движенію системы $B$, т.-е. поступательное движеніе со скоростями, параллельными прямой $\beta\beta$ и равными $(-v)$. Тогда системы $B$ остановится, а система $A$ станетъ, очевидно, двигаться такъ, что центръ $O$ ея будетъ перемѣщаться по прямой $\beta\beta$ со скоростями $(-v)$, а сама система $A$ будетъ продолжать вращаться около этого центра $O$ съ угловыми скоростями $\omega_A$. Принимая здѣсь точку $O$ за огибаемую, а прямую $\beta\beta$—за ея огибающую, заключаемъ, что полюсъ мгновеннаго вращенія такого движенія системы $A$ будетъ лежать каждый разъ на перпендикулярѣ къ $\beta\beta$, возставленномъ въ точкѣ $O$. Мѣсто полюса $\pi$ на этомъ перпендикулярѣ опредѣлимъ, замѣтивъ, что для точки $\pi$ скорость $w$ ея отъ вращенія вокругъ $O$ съ угловой скоростью $\omega_A$ должна быть равна и противоположна скорости $(-v)$. Очевидно, поэтому, что полюсъ $\pi$ будетъ лежать по ту сторону отъ $O$, гдѣ напра-

вленіе угловой скорости $\omega_A$ согласно съ направленіемъ истинной скорости $v$ поступательнаго движенія. Разстояніе $\delta$ отъ $O$ до $\pi$, аналогичное $r_0$, опредѣлится по обычной формулѣ $(d)$:

$$\delta = \frac{v}{\omega_A}.$$

Пусть въ разсматриваемый моментъ $N$, соотвѣтствующій моменту $L$, полюсъ лежитъ въ точкѣ $\pi$ (фиг. 317). Для слѣдующаго момента $N_1$, соотвѣтствующаго моменту $L_1$, величина $s_1$ линейнаго перемѣщенія точки $O$ опредѣлится теперь площадью $NMM_1N_1$ (фиг. 314). Отложивъ эту величину $s_1 = OO_1$ въ надлежащую сторону относительно $O$, возставивъ въ такъ полученной точкѣ $O_1$ перпендикуляръ $O_1v_1$ къ прямой $\beta\beta$ и отложивъ на немъ въ должную сторону отъ $O_1$ отрѣзокъ $O_1\pi_1$, равный $(v/\omega_A)_1$, получимъ полюсъ $\pi_1$ для этого момента. Такъ же получимъ рядъ другихъ полюсовъ: $\pi_2$, $\pi_3$, ....., а соединивъ всѣ эти точки $\pi$ непрерывной плавной линіей, получимъ неподвижную полодію $\pi\pi_1\pi_2$.... движенія $A/B$.



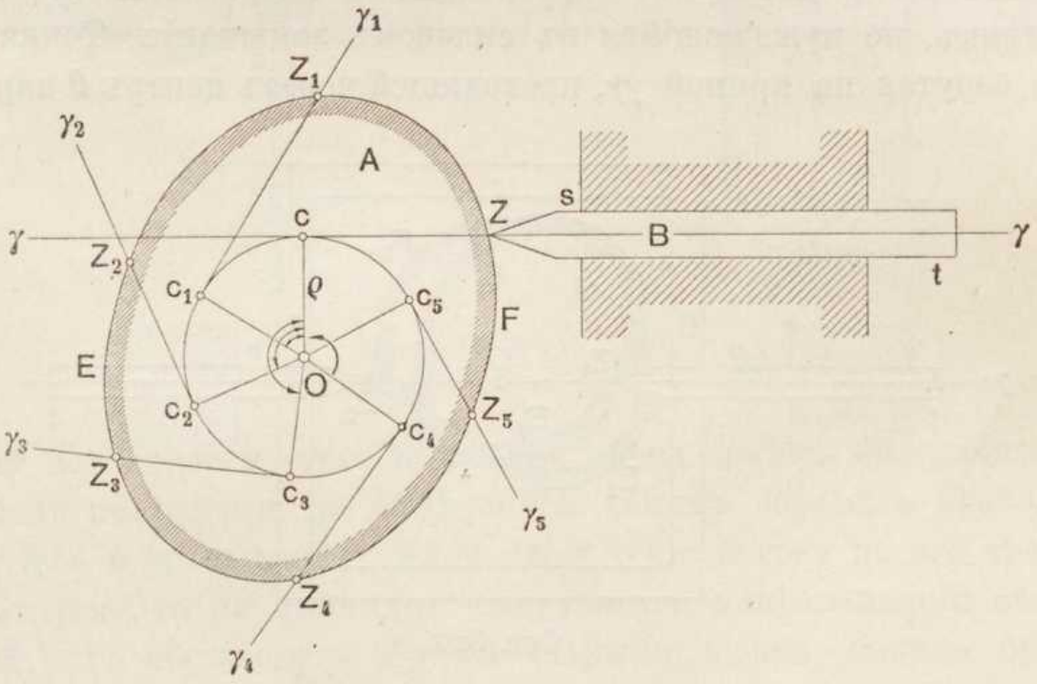

Фиг. 317.

Скрѣпивъ теперь каждую изъ полученныхъ нами полодій съ ея системой, обезпечивъ каченіе ихъ одной по другой и вращая систему $A$ съ должной угловой скоростью $\omega_A$, получимъ требуемое прямолинейно-поступательное движеніе системы $B$ съ должными скоростями $v$. Каченіе полодій можно затѣмъ замѣнить каченіемъ-скольженіемъ огибаемыхъ и огибающихъ, выдѣленныхъ въ нашихъ системахъ и устроить, такимъ образомъ, зубчатую передачу. На дѣлѣ эта послѣдняя осуществляется крайне рѣдко, въ виду трудностей профилированія зубцовъ, и чаще всего здѣсь удовлетворяются одной какой-либо кривой-огибаемой системы $B$, для которой затѣмъ и отыскиваютъ огибаемую въ системѣ $A$. Такъ получится передача, схематически изображенная на фиг. 312.

Въ качествѣ такой огибаемой обычно беруть просто какую-либо точку $Z$ системы $B$. Точка эта, очевидно, принуждена все время перемѣщаться по нѣкоторой неподвижной прямой $\gamma\gamma$, параллельной направленію $xy$ поступательнаго движенія системы $B$. Законъ измѣненія скоростей $v$ точки $Z$ при этомъ движеніи ея вдоль прямой $\gamma\gamma$ дается, очевидно, той же кривой $dd$ (фиг. 314). Ищемъ теперь огибающую-траекторію точки $Z$ въ движеніи $B/A$. Для этого сообщаемъ всей системѣ $(B, A)$ движеніе, обратное движенію системы $A$, т.-е. вращеніе вокругъ центра $O$ съ угловыми скоростями $(-\omega_A)$. Послѣ этого система $A$ остановится, а система $B$ станетъ участвовать въ двухъ движеніяхъ,—въ своемъ поступательномъ со скоростями $v$ и во вращательномъ вокругъ

*O* съ угловыми скоростями $(-\omega_A)$. Отсюда слѣдуетъ, что прямая $\gamma\gamma$, какъ принадлежащая системѣ *B*, будетъ вращаться около центра *O* съ угловыми скоростями $(-\omega_A)$; это значитъ, что она при этомъ будетъ все время касаться окружности, описанной изъ центра *O* радіусомъ *Oc*, равнымъ разстоянію $\rho$ этого центра *O* отъ прямой $\gamma\gamma$ (такъ что $Oc \perp \gamma\gamma$), при чемъ этотъ радіусъ *Oc*, проводимый въ точку касанія прямой $\gamma\gamma$ съ окружностью $\rho$, будетъ вращаться вокругъ *O* съ угловыми скоростями $(-\omega_A)$; что же касается точки *Z*, то она будетъ двигаться по этой прямой $\gamma\gamma$ по закону, изображаемому кривой *dd*.—Согласно сказанному, построеніе искомой траекторіи точки *Z* будетъ выполнено такъ:

Помощью кривой *aa* опредѣляемъ послѣдовательные углы поворота радіуса *Oc* отъ какого-либо его начальнаго положенія; получивъ такимъ путемъ точка касанія $c_1$, $c_2$, $c_3$, .... окружности $\rho$ съ прямой $\gamma\gamma$, проводимъ въ нихъ касательныя $c_1\gamma_1$, $c_2\gamma_2$, $c_3\gamma_3$, ...., представляющія собою послѣдовательныя положенія прямой $\gamma\gamma$; опредѣливъ затѣмъ перемѣщенія точки *Z*, откладываемъ на этихъ касательныхъ $c_n\gamma_n$ отрѣзки $c_nZ_n$, каждый изъ коихъ равенъ начальному отрѣзку *cZ*, измѣненному на соот-

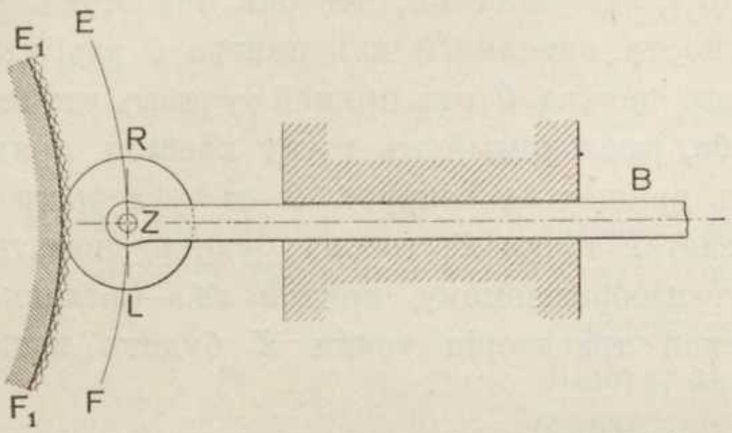



Фиг. 318.

вѣтственное перемѣщеніе точки *Z*, подсчитанное по кривой *dd*. Такъ полученныя точки $Z_n$, будучи соединены непрерывной плавной линіей, и дадутъ очертаніе искомаго эксцентрика, имѣющаго дѣйствовать на точку *Z*. Система *B* выполняется при этомъ въ видѣ нѣкотораго стержня *st*, могущаго двигаться однимъ лишь поступательнымъ движеніемъ по направленію $\gamma\gamma$ (фиг. 318), сама же точка *Z* осуществляется матеріально въ видѣ острея этого стержня.

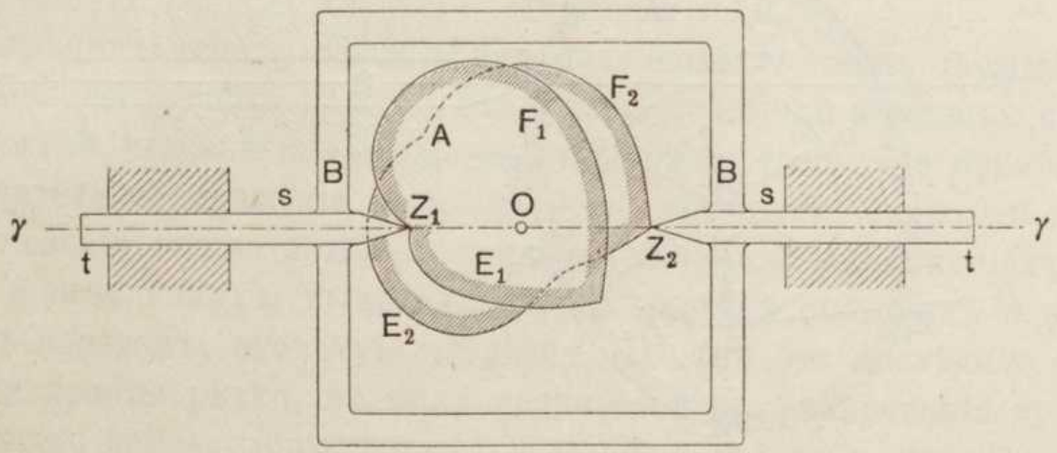
Если нагрузка на стержень *st* настолько велика, что можетъ повести къ усиленному изнашиванію острея *Z*, то, подобно предыдущему, треніе скольженія замѣняемъ треніемъ каченія, помощью ролика *l*, ось

коего закрѣпляемъ въ точкѣ $Z$ стержня. Тогда полученный выше профиль $EF$ замѣнится профилемъ $E_1F_1$, ему параллельнымъ и отстоящимъ отъ $EF$ на разстояніи, равнымъ радіусу $r$ ролика. Самый процессъ полученія этого новаго профиля $E_1F_1$ показанъ на фиг. 319 и въ дальнѣйшихъ поясненіяхъ не нуждается.




Фиг. 319.

Между стержнемъ $st$ и эксцентрикомъ $ET$ должно быть установлено силовое замыканіе. Если же оно является нежелательнымъ, то обходятся безъ него, взявъ въ системѣ $B$ не одну точку $Z$, а двѣ, $Z_1$ и $Z_2$, расположенныя по разнымъ сторонамъ центра $O$; найдя для нихъ огибающія $E_1F_1$ и $E_2F_2$ и закрѣпивъ эти послѣднія должнымъ образомъ въ системѣ $A$, а, кромѣ того, обезпечивъ точкамъ $Z_1$ и $Z_2$ возможность поступательныхъ движеній, параллельныхъ направленію $xy$, получимъ эксцентрикъ, не нуждающійся въ силовомъ замыканіи. Точки $Z_1$ и $Z_2$ обычно берутся на прямой $\gamma\gamma$, проходящей черезъ центръ $O$ параллельно

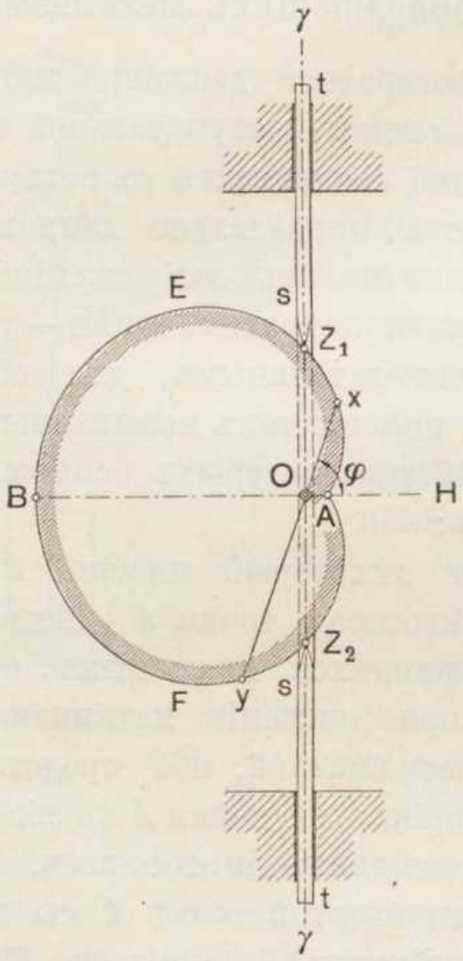



Фиг. 320.

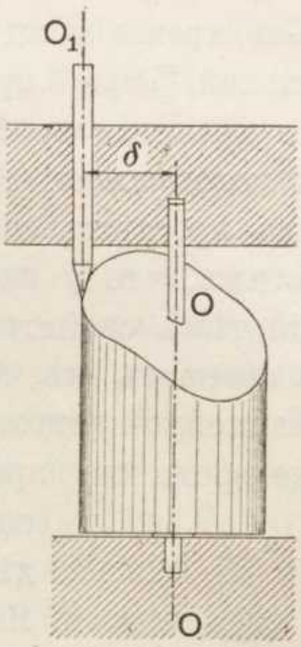
направленію $xy$ поступательнаго движенія, какъ это показано на фиг. 320. Если обѣ кривыя $E_1F_1$ и $E_2F_2$ оказываются тождественно совпадающими всѣми своими точками, то мы получимъ такъ называемый *эксцентрикъ постоянной ширины*,—всѣ діаметры его будутъ равны отрѣзку $Z_1Z_2$. Одинъ изъ такихъ эксцентриковъ,—такъ называемый *эксцентрикъ Морэна*,—изображенъ здѣсь на фиг. 321. Свойства какъ его, такъ и нѣкоторыхъ другихъ эксцентриковъ, осуществляющихъ различные частные законы поступательнаго движенія стержня, опирающагося на эксцентрикъ, разсмотрѣны въ соотвѣтствующемъ параграфѣ дополнительной части нашего курса.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе $\gamma\gamma$ поступательнаго движенія стержня параллельно оси $O$ вращенія системы $A$ (фиг. 322), траекторія

острея стержня оказывается, вообще говоря, кривой двоякой кривизны, не укладывающейся въ плоскости, но въ то же время цѣликомъ умѣщающейся на поверхности круглаго цилиндра съ осью $O$ и радіусомъ $\delta$, равнымъ разстоянію этой оси $O$ до прямой $O_1$, ей параллельной и представляющей собою траекторію острея стержня. Такимъ образомъ, въ этихъ случаяхъ эксцентрики приходится выполнять въ видѣ цилиндровъ, срѣзанныхъ по нѣкоторой кривой, опредѣляемой по даннымъ заданія. Построеніе этой кривой обычно выполняется сначала на




Фиг. 321.




Фиг. 322.

развернутой поверхности этого цилиндра, снова затѣмъ наворачиваемой на него послѣ построенія; по намѣченной такимъ образомъ кривой цилиндръ затѣмъ и срѣзывается. Если скольженіе острея по его траекторіи нежелательно, то на цилиндрѣ выполняется направляющій каналъ, въ который могъ бы входить роликъ стержня; форма канала опредѣляется профилемъ ролика.—Иногда встрѣчаются эксцентрики другихъ формъ,—коническіе и т. п.; способы опредѣленія кривыхъ, ограничивающихъ ихъ, остаются прежними,—въ основаніи ихъ всегда нужно класть опредѣленіе траекторіи острея стержня въ относительномъ движеніи его относительно системы эксцентрика.

---

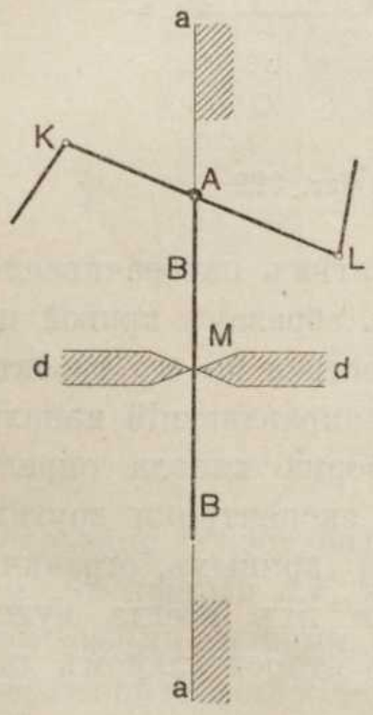
Никакого труда не представитъ рѣшеніе обратной задачи: по данному очертанію эксцентрика системы $A$ и сочетаемаго съ нимъ элемента системы $B$ (рычага, ролика и т. д.) найти законъ перемѣщенія этого элемента при данномъ вращеніи системы $A$. Проще всего въ такихъ случаяхъ предположить вращеніе системы $A$ совершающимся равномѣрно и опредѣлить рядъ положеній системы $B$ въ движеніи ея

относительно *A*. Угловыя перемѣщенія рычага *A* дадутъ возможность установить законъ перемѣщеній его и вычертить затѣмъ діаграмму угловыхъ скоростей и т. д.

## § 44. Направляющіе механизмы, точные и приближенные. Графическій методъ построенія направляющихъ механизмовъ.

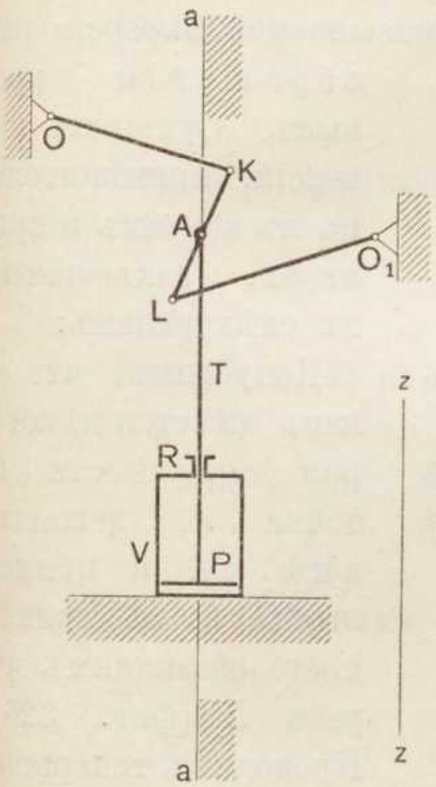
Прямолинейно-поступательное возвратное движеніе матеріальной системы обычно обезпечивается при помощи поступательной кинематической пары, при чемъ система жестко соединяется съ ползуномъ этой пары, а направляющія устанавливаются параллельно данному направленію. Когда же, однако, по тѣмъ или инымъ соображеніямъ,—чаще всего изъ-за тренія между ползуномъ и направляющими,—устройство поступательной пары признается нежелательнымъ, для обезпеченія указаннаго движенія прибѣгаютъ къ помощи такъ называемыхъ *направляющихъ механизмовъ*, сущность дѣйствія которыхъ основывается на слѣдующихъ простыхъ соображеніяхъ:

Допустимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый плоскій механизмъ, обладающій тѣмъ свойствомъ, что нѣкоторая точка *A* одного изъ подвижныхъ звеньевъ его, *KL*, перемѣщающихся движеніемъ, отличнымъ отъ прямолинейно-поступательнаго, при движеніи механизма перемѣщается все время по прямой *aa*,—неподвижной, ибо представляющей собою траекторію этой точки *A* въ абсолютномъ, дѣйствительномъ движеніи этого звена (фиг. 323). Ясно, что если въ этой точкѣ *A* мы подвѣсимъ на шарнирѣ стержень *B*, а у точки *M* прямой *aa* помѣстимъ неподвижную шайбу *dd* съ отверстіемъ для пропуска здѣсь стержня *BB*, то при движеніи механизма этотъ стержень, а вмѣстѣ съ нимъ и всякая система, жестко съ нимъ скрѣпленная, долженъ будетъ, очевидно, двигаться прямолинейно-поступательно именно по этому направленію *aa*, при чемъ для достиженія этой прямолинейности уже не потребуется ни ползуна, ни направляющихъ,—шайба *dd* съ ея отверстіемъ для пропуска стержня *BB* направляющими названа быть не можетъ, ибо стержень *BB*, будучи отцѣпленъ отъ шарнира *A*, получаетъ, благодаря острымъ краямъ вырѣза и именно отсутствію прямолинейныхъ направляющихъ, возможность двигаться въ пространствѣ по любымъ направленіямъ, не выходя изъ этой шайбы *dd*. Назначеніе этой шайбы состоитъ исключительно лишь въ томъ, чтобы принуждать прямую *BB* *проходить постоянно черезъ неподвижную точку* *M*,—отверстіе шайбы и осуществляетъ собою именно эту точку *M*.



Фиг. 323.

Такимъ образомъ, если механизмъ, обладающій прямолинейно-движущейся точкой *A*, мы расположимъ такъ, чтобы прямолинейная траекторія *aa* этой точки легла параллельно направленію движенія какой-либо поступательной пары, то подвижной элементъ этой пары можно будетъ скрѣпить непосредственно съ точкой *A*, помощью соотвѣтствующаго рычага съ шарниромъ, послѣ чего этотъ элементъ сможетъ выполнять свое прямолинейное движеніе въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ границами колебаній точки *A*. Такъ, напримѣръ, пусть у насъ имѣется нѣкоторый цилиндръ *V* (фиг. 324), внутри котораго можетъ двигаться поршень *P* съ его штокомъ *T*, перемѣщающійся, очевидно, прямолинейно-поступательно по нѣкоторому опредѣленному направленію *zz*. Если мы теперь расположимъ нашъ механизмъ такъ, чтобы прямая *aa*, ставъ параллельно *zz*, совпала съ осью цилиндра *V* и штока *T*, то, закрѣпивъ шарнирно штокъ *T* въ этой точкѣ *A* и приведя механизмъ въ движеніе, получимъ движеніе поршня *P* въ должномъ направленіи *zz* безъ помощи ползуна и направляющихъ,—сальникъ *R* служитъ не для направленія движенія, а лишь для воспрепятствованія просачиванію пара. Обратно, если мы заставимъ двигаться поршень *P*, какъ это имѣетъ мѣсто въ случаѣ паровой машины, то этимъ самымъ заставимъ точку *A* звена *KL* перемѣщаться по ея прямолинейной траекторіи *aa*, при чемъ звенья *KO* и *LO* будутъ выполнять соотвѣтственныя качанія около своихъ центровъ *O* и $O_1$. Такимъ образомъ, въ этомъ послѣднемъ случаѣ направляющій механизмъ даетъ возможность преобразовывать поступательное движеніе одной системы (поршня *P*) въ вращательное (качательное) движеніе другихъ системъ (коромыселъ *KO* и $LO_1$).

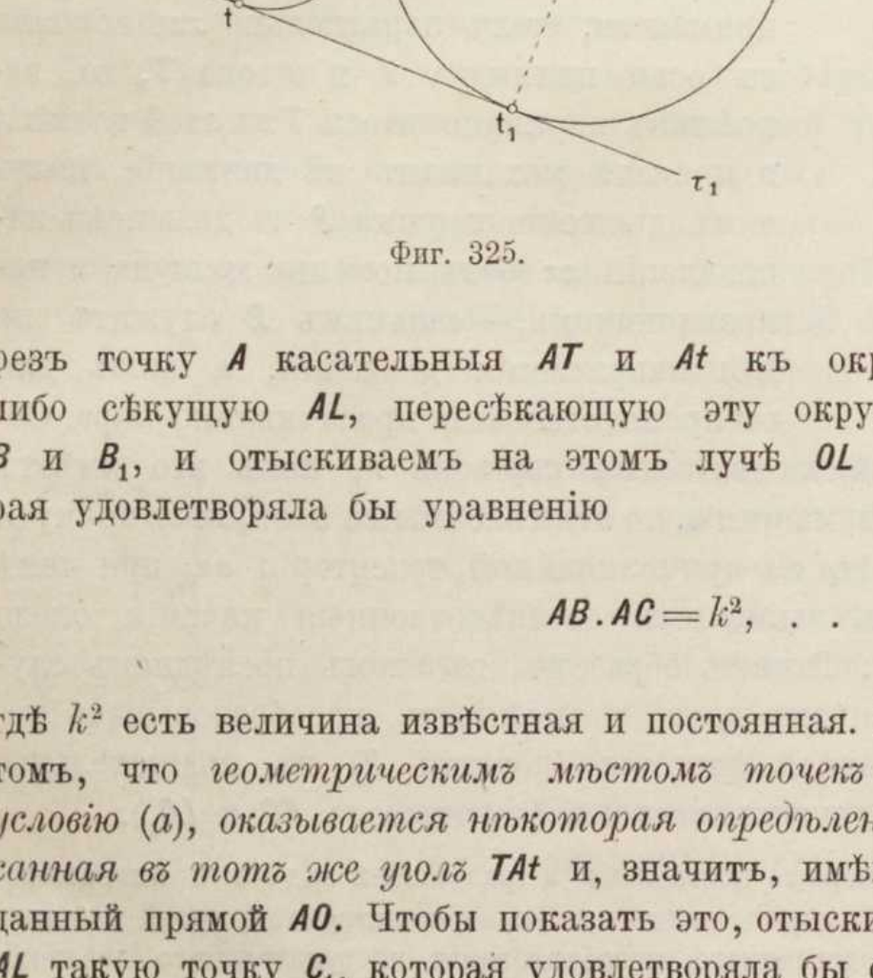


Фиг. 324.

Такъ именно и была впервые поставлена и разрѣшена задача о направляющихъ механизмахъ Уаттомъ, вынужденнымъ, при усовершенствованіи своей машины, изыскать пріемъ для непосредственнаго преобразованія поступательнаго движенія поршня паровой машины въ колебательное движеніе коромысла; механизмъ, придуманный для этой цѣли Уаттомъ, приведенъ и разсмотрѣнъ ниже.

Механизмовъ, въ которыхъ имѣлись бы точки съ траекторіями, представляющими собою *точныя прямыя*, имѣется немного,—это будутъ такъ называемые *точные направляющіе механизмы*, и теорію одной главнѣйшей группы ихъ, а также и механизмы этой группы, мы разсмотримъ прежде всего. Гораздо больше,—и даже, практически говоря, безконечно много,—можно представить себѣ *приближенныхъ направляющихъ механизмовъ*, въ каждомъ изъ которыхъ можно выдѣ-

лить точку **A**, двигающуюся по траекторіи, болѣе или менѣе *близко подходящей къ прямой линіи*. Ниже мы приведемъ общій графическій пріемъ отысканія на данномъ звенѣ разсматриваемаго механизма точекъ, движущихся приближенно-прямолинейно, а затѣмъ разсмотримъ нѣкоторые частные виды приближенныхъ механизмовъ, пріобрѣтшіе себѣ наибольшую извѣстность.—Итакъ, мы разсмотримъ сначала точные направляющіе механизмы, при чемъ ограничимся разборомъ лишь тѣхъ изъ нихъ кои основаны на такъ называемой *инверсіи* или обращеніи кривыхъ. Сущность инверсіи, примѣнительно къ кругамъ и прямымъ, заключается въ слѣдующемъ:




Фиг. 325.

Допустимъ, что у насъ имѣется нѣкоторая окружность **O**, точка **A**, лежащая внѣ ея, и прямой отрѣзокъ $\alpha\beta$, длину коего обозначимъ черезъ $k$ (фиг. 325). Проводимъ теперь черезъ точку **A** касательныя **AT** и **At** къ окружности **O** и какую-либо сѣкущую **AL**, пересѣкающую эту окружность **O** въ точкахъ **B** и $B_1$, и отыскиваемъ на этомъ лучѣ **OL** такую точку **C**, которая удовлетворяла бы уравненію

$$AB \cdot AC = k^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

гдѣ $k^2$ есть величина извѣстная и постоянная. Нетрудно убѣдиться въ томъ, что *геометрическимъ мѣстомъ точекъ* **C**, *удовлетворяющихъ условію* (*a*), *оказывается нѣкоторая опредѣленная окружность, вписанная въ тотъ же уголъ* **TAt** и, значитъ, имѣющая свой центръ на данный прямой **AO**. Чтобы показать это, отыскиваемъ на томъ же лучѣ **AL** такую точку $C_1$, которая удовлетворяла бы соотношенію.

$$AB_1 \cdot AC_1 = k^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

аналогичному (*a*). Тогда изъ (*a*) и (*b*) вытекаетъ, что

$$AB \cdot AC = AB_1 \cdot AC_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

такъ что

$$AB_1 / AC = AB / AC_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

Кромѣ того, оказывается, что

$$(AB.AB_1).(AC.AC_1) = k^4, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

а такъ какъ

$$AB.AB_1 = AT^2 = const, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

то

$$AC.AC_1 = (k^2/AT)^2 = const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

Пусть

$$k^2/AT = AT_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

Тогда $(g)$ переписывается такъ:

$$AC.AC_1 = AT_1^{\,2} = const \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

Изъ $(f)$ и $(k)$ слѣдуетъ, что

$$\frac{AB.AB_1}{AC.AC_1} = \frac{AT^2}{AT_1^{\,2}} = \frac{AB_1^{\,2}}{AC^2} = \frac{AB^2}{AC_1^{\,2}},$$

—въ виду $(d)$,—такъ что можно написать, что

$$\frac{AT}{AT_1} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{AB}{AC_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (l)$$

Соединимъ теперь прямыми линіями точки $B_1$, $T$ и $B$ съ центромъ $O$, при чемъ, очевидно, $OT \perp AT$, и ведемъ черезъ точку $T_1$ лучъ $T_1O_1 \parallel TO$ до пересѣченія съ $AO$ въ точкѣ $O_1$, такъ что $T_1O_1 \perp AT_1$. Въ виду подобія треугольниковъ $ATO$ и $AT_1O_1$ находимъ, что

$$AT/AT_1 = AO/AO_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (m)$$

что, въ виду $(l)$, приводитъ къ основнымъ соотношеніямъ

$$AO/AO_1 = AB_1/AC = AB/AC_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

показывающимъ, что $\triangle AB_1O \infty \triangle ACO_1$ и $\triangle ABO \sim \triangle AC_1O_1$, т.-е что $B_1O \parallel CO_1$ и $BO \parallel C_1O_1$. Отсюда вытекаетъ, что $\triangle BOB_1 \infty \triangle C_1O_1C$, а такъ какъ $B_1O = BO$, то и $CO_1 = C_1O_1$. Нетрудно, далѣе, убѣдиться, кромѣ того, что $CO_1 = T_1O_1$, такъ что, въ результатѣ, приходимъ къ заключенію, что точка $O_1$ служитъ центромъ окружности, проходящей черезъ точки $C$ и $C_1$ и вписанной въ уголъ $TAt$,—сторонъ его она касается въ точкахъ $T_1$ и $t_1$. Мѣсто центра $O_1$ на лучѣ $AO$ опредѣляется изъ соотношеній $(m)$ и $(h)$, указывающихъ намъ, что

$$AO_1 = AO.AT_1/AT = AO.(k/AT)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (p)$$

Радіусъ $O_1T_1$ этой окружности $O_1$ выразится такъ:

$$O_1T_1 = OT.(k/AT)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

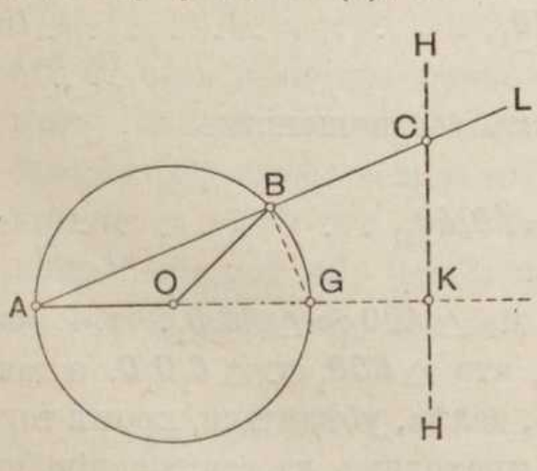
Замѣчая теперь, что какъ положеніе центра $O_1$ на лучѣ $AO$, такъ и величина радіуса $O_1T_1$ совершенно не зависятъ отъ наклона луча $AL$ и, значитъ, отъ положенія точки $B$ на окружности $O$, заключаемъ, что вышеприведенныя соображенія справедливы для любой точки $B$ окружности $O$,—каждой парѣ точекъ $B$ и $B_1$, выдѣленныхъ на окружности $O$ лучемъ $AL$, будетъ соотвѣтствовать своя пара точекъ $C$ и $C_1$ окружности $O_1$, лежащихъ на томъ же лучѣ $AL$.

Теперь становится понятнымъ, что если бы точка $B$ стала двигаться по окружности $O$, обходя ее, напримѣръ, по часовой стрѣлкѣ, то соотвѣтствующая ей точка $C$ того же луча $OB$ двигалась бы по своей окружности $O_1$, вполнѣ, какъ видимъ, опредѣленной, но обходила бы ее уже въ противоположномъ направленіи, противъ часовой стрѣлки. Въ этихъ случаяхъ говорятъ, что окружность $O_1$ является обращеніемъ, инверсіей окружности $O$.

Нетрудно убѣдиться, далѣе, что, по мѣрѣ приближенія точки $A$ къ окружности $O$, радіусъ $O_1T_1$ окружности $O_1$ будетъ все время увеличиваться, а центръ $O_1$ будетъ все больше и больше удаляться отъ точекъ $O$ и $A$ (т.-е. вправо). *При вступленіи точки $A$ на самую окружность $O$*, центръ $O_1$ удаляется въ безконечность, а *окружность $O$ обращается въ прямую $HH$, перпендикулярную къ $AO$* и опредѣляемую изъ соотношенія

$$AG.AK = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (r)$$

—(фиг. 326). Что точки такой прямой $HH$ продолжаютъ удовлетворять основному условію ($a$), можно убѣдиться непосредственно, проведя какую-либо сѣкущую $AL$; пусть она пересѣкаетъ окружность $O$ въ точкѣ $B$, а прямую $HH$—въ точкѣ $C$. Тогда изъ подобныхъ треугольниковъ $ABG$ и $AKC$ находимъ, что $AB:AG = AK:AC$, откуда и слѣдуетъ, что



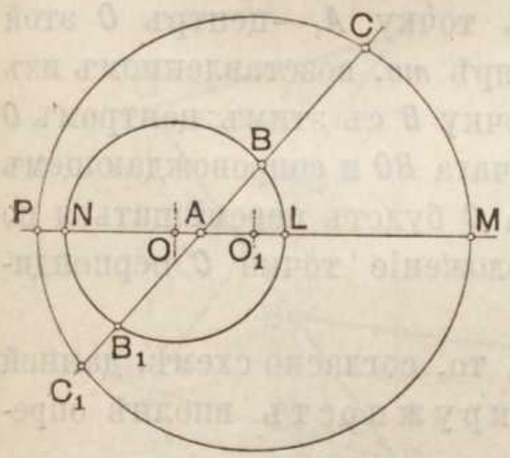
Фиг. 326.

$$AB.AC = AG.AK = k^2, \quad . \quad . \quad . \quad (s)$$

—согласно съ ($r$). Такимъ образомъ, *если точка $A$ лежитъ на самой окружности $O$, то инверсіей этой окружности является нѣкоторая вполнѣ опредѣленная прямая $HH$*, и если точка $B$ луча $AL$, при вращеніи этого послѣдняго вокругъ $A$, будетъ перемѣщаться по окружности $O$, то соотвѣтствующая ей точка $C$ той же прямой $AB$ будетъ двигаться по неподвижной прямой $HH$, перпендикулярной къ $AO$ и, при

данномъ, извѣстномъ $k$, вполнѣ опредѣленной. Слѣдовательно, *если мы имѣемъ такой механизмъ, что три точки его* **A**, **B** *и* **C**, *лежащія на одной прямой* **AL**, *удовлетворяютъ соотношенію* (*s*), *при чемъ точка* **A** *остается неподвижной, то, при перемѣщеніи точки* **B** *по окружности* **O** *радіуса* $OB = OA$, *точка* **C** *будетъ двигаться по прямой* **HH**, *проведенной черезъ точку* **C** *перпендикулярно къ* **AO** *и удовлетворяющей уравненію* (*r*).

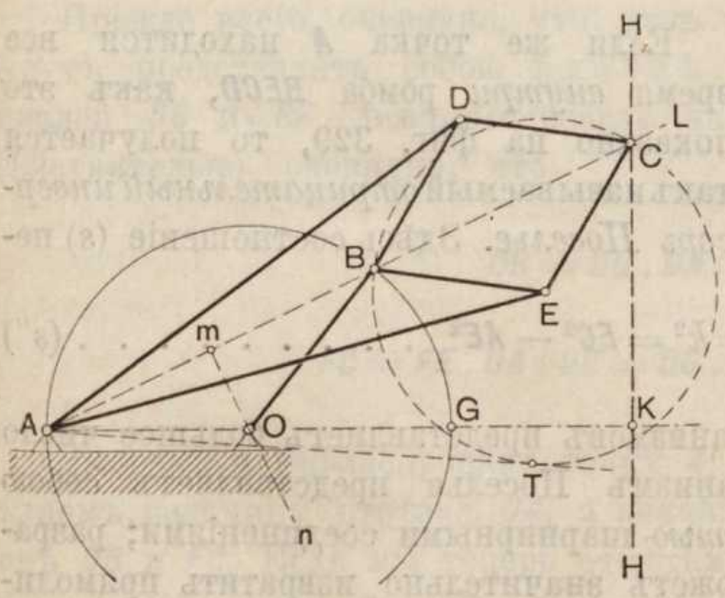
Когда, наконецъ, точка **A** вступаетъ внутрь окружности **O**, какъ это показано на фиг. 327, то геометрическимъ мѣстомъ точекъ **C**, удовлетворяющихъ условію $AB.AC = k^2$, оказывается, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться непосредственно, опять окружность, описанная на отрѣзкѣ **MP**, какъ на діаметрѣ, при чемъ крайнія точки **M** и **P** этого отрѣзка получаются изъ соотношенія $AL.AM = AN.AP = k^2$. Общія касательныя къ окружностямъ **O** и $O_1$, проведенныя изъ точки **A**, будутъ здѣсь мнимыми, но окружность $O_1$, являясь вполнѣ опредѣленной, будетъ существовать всегда.



Фиг. 327.

Геометрическія соображенія, легшія въ основу точныхъ направляющихъ механизмовъ *Поселье* и *Гарта*, разбираемыхъ ниже, относятся къ тому случаю, когда точка **A** лежитъ на окружности круга **O** (фиг. 326), ибо только здѣсь геометрическимъ мѣстомъ точекъ **C** является прямая. Разсмотримъ теперь эти два механизма.

*Механизмъ Поселье* (фиг. 328) состоитъ изъ шарнирнаго ромба **BECD**, вершины **E** и **D** коего связаны тягами **DA** и **EA**, равными между собою, съ неподвижной точкой **A**. Точка **B** соединена рычагомъ **BO** съ неподвижной точкой **O**, при чемъ соблюдается требованіе $BO = AO$. При этихъ условіяхъ вершина **C** ромба будетъ описывать прямую **HH**, перпендикулярную къ **AO**. Убѣдиться въ этомъ можно помощью слѣдующихъ простыхъ соображеній:



Фиг. 328.

Прежде всего, очевидно, что точка **C** всегда лежитъ на одной прямой съ точками **B** и **A**. Дѣйствительно, по свойству ромба діагональ **CB** дѣлитъ отрѣзокъ **DE** пополамъ и къ нему перпендикулярна; въ то же время высота равнобедреннаго треугольника **ADE** дѣлитъ основаніе его **DE** пополамъ и опять

къ нему перпендикулярна. Отсюда слѣдуетъ, что діагональ $CB$ совпадаетъ съ этой высотой и, значитъ, проходитъ черезъ вершину $A$.

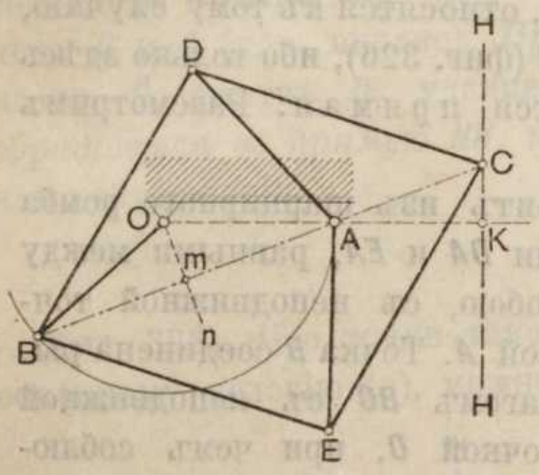
Далѣе, нетрудно показать, что произведеніе $AB.AC$ представляетъ здѣсь собою постоянную величину. Дѣйствительно, если изъ центра $E$ мы опишемъ окружность радіусомъ $EC$, то она пройдетъ и черезъ точку $B$, ибо $EC = EB$. Проведя теперь изъ точки $A$ касательную $AT$ къ этой окружности, можемъ написать, что $AB.AC = AT^2 = const$, ибо радіусъ $EC$ окружности $E$ остается все время постояннымъ, а центръ $E$ ея находится все время на одномъ и томъ же разстояніи $AE$ отъ точки $A$.

Если теперь, согласно схемѣ фиг. 326, заставимъ точку $B$ двигаться по окружности, проходящей черезъ точку $A$,—центръ $O$ этой окружности будетъ лежать на перпендикулярѣ $mn$, возставленномъ изъ середины $m$ отрѣзка $AB$, и мы соединяемъ точку $B$ съ этимъ центромъ $O$ помощью рычага $BO$,—то, при вращеніи рычага $BO$ и сопровождающемъ его движеніи всего механизма $AECBO$, точка $C$ будетъ перемѣщаться по прямой $HH$, проведенной черезъ данное положеніе точки $C$ перпендикулярно къ $AO$.

Если радіусъ $BO$ не будетъ равенъ $AO$, то, согласно схемѣ, данной на фиг. 326, точка $C$ будетъ описывать окружность вполнѣ опредѣленнаго радіуса и центра.

Если точка $A$ лежитъ *внѣ* ромба $BECD$, какъ это изображено на фиг. 328, то механизмъ получаетъ названіе *положительнаго инверсора Поселье*. Нетрудно убѣдиться, что здѣсь имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$AB.AC = k^2 = AE^2 - EC^2 \quad \ldots\ldots (s')$$



Фиг. 329.

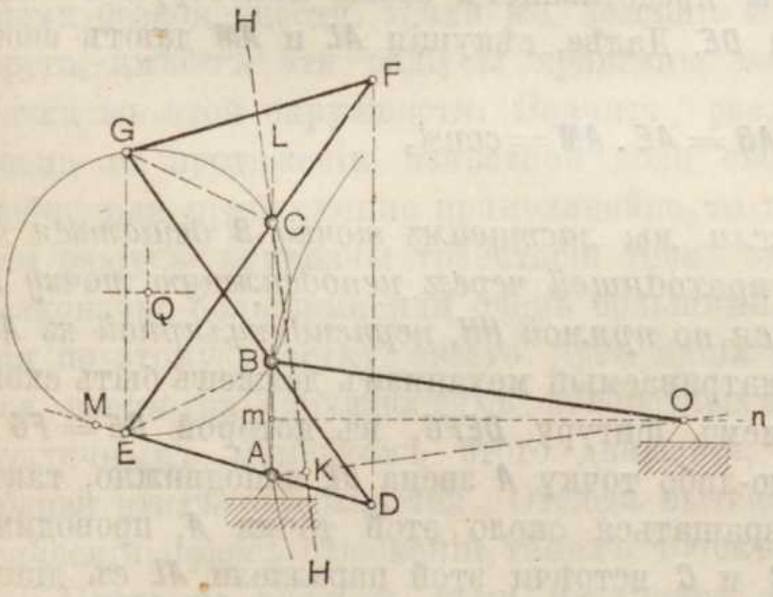
Если же точка $A$ находится все время *внутри* ромба $BECD$, какъ это показано на фиг. 329, то получается такъ называемый *отрицательный инверсоръ Поселье*. Здѣсь соотношеніе ($s$) переписывается въ видѣ

$$AB.AC = k^2 = EC^2 - AE^2 \quad \ldots\ldots\ldots (s'')$$

Слабую сторону этихъ механизмовъ представляетъ большое число шарнирныхъ соединеній,—механизмъ Поселье представляетъ собою семизвенный механизмъ съ *шестью* шарнирными соединеніями; разрабатываніе этихъ шарнировъ можетъ значительно извратить прямолинейность траекторіи $HH$ точки $C$.

Механизмъ Поселье названъ такъ въ честь французскаго инженера Peaucellier, придумавшаго его въ 1864 г. Нѣсколько лѣтъ спустя, въ 1871 году, тотъ же механизмъ былъ изобрѣтенъ вторично, независимо отъ Поселье, магистрантомъ Петроградскаго университета Липкинымъ.

Разсмотримъ теперь *точный направляющій механизмъ Гарта*. Въ основу его положена фигура **DEFG** (фиг. 330), представляющая собою шарнирно соединенные между собою бока и діагонали равнобокой трапеціи **DFGE**, такъ что здѣсь всегда берется $DE = FG$ и $DG = FE$. Очевидно, что если бы мы поставили эту фигуру на одну изъ діагоналей, **DG** или **EF**, то получили бы механизмъ антипараллельнаго кривошипа.— Возьмемъ теперь на стержнѣ **DE** какую-либо точку **A** и сдѣлаемъ ее неподвижной, такъ, чтобы стержень **DE** получилъ возможность вращаться около нея. Очевидно, что при этомъ вращеніи стержня **DE**, фигура **DEFG** все время будетъ оставаться равнобокой трапеціей,—будетъ мѣняться лишь высота ея, т.-е. разстояніе между основаніями **DF** и **GE** ея, также перемѣнными. Взявъ теперь трапецію въ одномъ изъ ея положеній,—хотя бы, напримѣръ, въ изображенномъ на чертежѣ,—проводимъ черезъ точку **A** прямую **AL**, параллельную **DF**, и обозначимъ точки пересѣченія ея съ діагоналями **DG** и **EF** черезъ **B** и **C**. Нетрудно показать, что три точки **A**, **B** и **C**, полученныя такимъ образомъ, удовлетворяютъ условію $AB \cdot AC = const.$



Фиг. 330.

Прежде всего, очевидно, что, разъ точка **A** выбрана, то точки **B** и **C** будутъ представлять собою вполнѣ опредѣленныя точки діагоналей **DG** и **EF**, лежащія всегда на одной прямой съ точкой **A**. Дѣйствительно, очевидно, что

$$DB = DG \cdot DA \,/\, DE$$

и

$$FC = FE \cdot DA \,/\, DE = DG \cdot DA \,/\, DE = DB.$$

Выбравъ и зафиксировавъ точку **A**, мы тѣмъ самымъ вполнѣ опредѣляемъ величину отрѣзка **DA**, а значитъ, вмѣстѣ съ этимъ, и отрѣзковъ **DB** и **FC**. Если мы теперь отмѣтимъ на діагоналяхъ выдѣленныя нами теперь точки **B** и **C**, то увидимъ, что, при всѣхъ возможныхъ здѣсь положеніяхъ трапеціи, въ силу пропорціональности соотвѣтствующихъ отрѣзковъ, прямая **AC** будетъ всегда параллельна основанію **DF**, а прямая **AB**—основанію **EG**. Отсюда слѣдуетъ, что точки **A**, **B** и **C**, разъ опредѣленныя параллелью **AL**, будутъ затѣмъ все время оставаться *на одной прямой*.

Очевидно, далѣе, что $EC = BG$, откуда слѣдуетъ, что фигура $BCGE$ представляетъ собою также равнобокую трапецію, въ виду чего около нея можно описать окружность. Пусть это будетъ нѣкоторая окружность $Q$, и мы предположимъ, что она пересѣкаетъ прямую $DE$ еще въ нѣкоторой точкѣ $M$. Сѣкущія $DG$ и $DM$ даютъ соотношеніе

$$DG \,.\, DB = DM \,.\, DE,$$

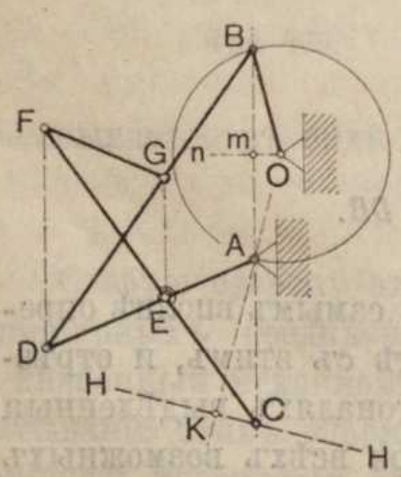
показывающее, что точка $M$ представляетъ собою нѣкоторую вполнѣ опредѣленную точку прямой $DE$. Далѣе, сѣкущія $AL$ и $AM$ даютъ соотношеніе

$$AC \,.\, AB = AE \,.\, AM = const,$$

изъ коего слѣдуетъ, что, *если мы заставимъ точку* $B$ *двигаться по какой-либо окружности* $O$, *проходящей черезъ неподвижную точку* $A$, *то точка* $C$ *будетъ двигаться по прямой* $HH$, *перпендикулярной къ* $AO$.

Такимъ образомъ, разсматриваемый механизмъ долженъ быть сконструированъ такъ: составляемъ фигуру $DEFG$, въ которой $DE = FG$ и $DG = EF$, закрѣпляемъ какую-либо точку $A$ звена $DE$ неподвижно, такъ, чтобы оно могло теперь вращаться около этой точки $A$, проводимъ $AL \parallel DF$, отмѣчаемъ точки $B$ и $C$ встрѣчи этой параллели $AL$ съ діагоналями $DG$ и $EF$ и, наконецъ, соединяемъ точку $B$ помощью рычага $BO$ съ неподвижной точкой $O$, лежащей на перпендикулярѣ $mn$, возставленномъ изъ середины $m$ отрѣзка $AB$. Тогда получимъ, что $OB = OA$. Очевидно, что, при этихъ условіяхъ, точка $C$ будетъ двигаться по прямой $HH$, перпендикулярной къ $AO$. Понятно, что, если точка $O$ будетъ занимать какое-либо другое положеніе, такъ что $AO$ будетъ неравно $BO$, то точка $C$ будетъ описывать нѣкоторую вполнѣ опредѣленную окружность.

Если шарниръ $A$ мы выполнимъ въ какой-либо точкѣ звена $DE$, лежащей *внѣ* этого отрѣзка, то механизмъ приметъ видъ, изображенный на фиг. 331. Здѣсь, какъ и на фиг. 330, точками $B$ и $C$ являются точки пересѣченія діагоналей $DG$ и $FE$ съ прямой $AL$, проведенной черезъ точку $A$ параллельно $DF$. Соединивъ рычагомъ $OB$ точку $B$ съ неподвижной точкой $O$, причемъ должно быть $OB = OA$, и двигая механизмъ, обнаружимъ, что точка $C$ звена $FE$ будетъ двигаться по прямой $HH$, перпендикулярной къ $OA$.



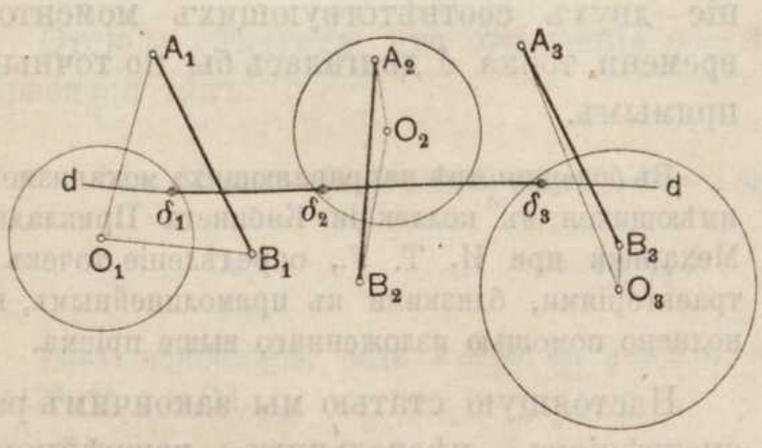
Фиг. 331.

Весь механизмъ состоитъ изъ шести звеньевъ, при семи шарнирахъ, что также мало способствуетъ постоянству и прямолинейности траекторіи $HH$.—Этотъ механизмъ придуманъ *Гартомъ*.

Разсмотрѣніемъ этихъ двухъ точныхъ направляющихъ механизмовъ мы и ограничимся,—другіе типы ихъ особеннаго интереса не предста-

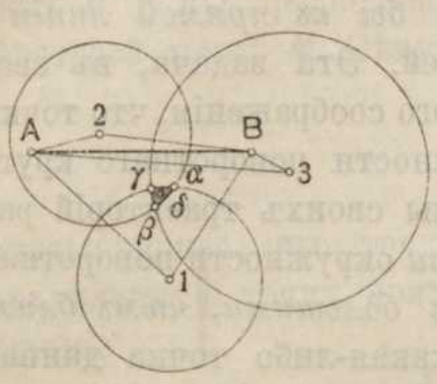
вляютъ,—и перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію задачи о построеніи *приближенныхъ направляющихъ механизмовъ*. Рѣшеніе этой задачи сводится, какъ мы показали выше, къ нахожденію въ данномъ механизмѣ, на томъ или другомъ данномъ звенѣ его, такой точки, *траекторія которой возможно ближе подходила бы къ прямой линіи* и могла бы быть взята вмѣсто этой послѣдней. Эта задача, въ свою очередь, можетъ быть рѣшена на основаніи того соображенія, что точки, лежащія въ данный моментъ на самой окружности поворотнаго круга, имѣютъ для этого момента радіусы кривизны своихъ траекторій равными безконечности, точки же, лежащія *вблизи* окружности поворотнаго круга, имѣютъ эти радіусы кривизны *тѣмъ бо́льшими, чѣмъ ближе* точка къ этой окружности. Значитъ, разъ какая-либо точка даннаго звена на протяженіи извѣстной доли своего пути движется прямолинейно или приближенно прямолинейно, то это, иными словами, значитъ, что радіусы кривизны траекторіи точки за все это время остаются или безконечно-большими или очень большими, т.-е. что за время движенія по этому участку своего пути наша точка или остается лежащей все время на окружностяхъ поворотныхъ круговъ соотвѣтствующихъ различнымъ моментамъ этого движенія, или лежитъ все это время вблизи этихъ окружностей. Отсюда вытекаетъ слѣдующій простой графическій пріемъ отысканія такихъ точекъ:

Пусть во взятомъ нами механизмѣ движеніе того звена, въ системѣ коего ищется упомянутая точка, характеризуется движеніемъ нѣкотораго принадлежащаго ему прямого отрѣзка $AB$ по траекторіямъ его концовъ, и пусть прямолинейное движеніе искомой точки имѣетъ длиться все то время, пока отрѣзокъ $AB$ переходитъ отъ положенія $A_1B_1$ къ положенію $A_3B_3$ (фиг. 332). Возьмемъ два эти крайнія положенія отрѣзка и какое-либо среднее $A_2B_2$ и построимъ поворотные круги, соотвѣтствующіе этимъ тремъ выдѣленнымъ нами моментамъ движенія. Пусть это будутъ круги $O_1$, $O_2$ и $O_3$. Согласно предыдущему, можемъ сказать, что точки системы, траекторіи коихъ въ моментъ (*1*) имѣютъ радіусы кривизны безконечно-большими или очень большими, лежатъ въ этотъ моментъ или на самой окружности $O_1$ или вблизи ея. То же можно сказать и относительно окружностей $O_2$ и $O_3$. Но разъ въ данной системѣ существуетъ точка, радіусы кривизны траекторіи коей за все указанное время (*1*)—(*3*) остаются или безконечно-большими или очень большими, то это значитъ, что такая точка въ продолженіе всего этого времени, а значитъ, и въ эти моменты остается лежащей



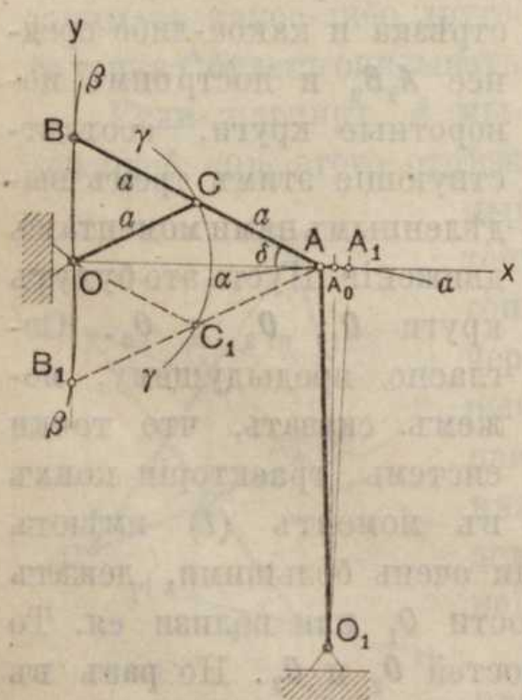
Фиг. 332.

или *на* самихъ окружностяхъ круговъ $O_1$, $O_2$ и $O_3$, или *вблизи* ихъ. Отсюда слѣдуетъ, что для нахожденія искомой точки нужно *наложить отрѣзки* $A_1B_1$, $A_2B_2$ и $A_3B_3$, *вмѣстѣ съ ихъ поворотными кругами, другъ на друга такъ, чтобы соотвѣтствующія крайнія точки ихъ совпали*, т.-е. чтобы точки $A_1$, $A_2$ и $A_3$ совпали въ одну точку $A$, а точки $B_1$, $B_2$ и $B_3$—въ другую, $B$ (фиг. 333). Поворотные круги $O_1$, $O_2$ и $O_3$, при такомъ наложеніи отрѣзковъ, займутъ нѣкоторыя вполнѣ опредѣленныя положенія (*1*), (*2*) и (*3*),—фиг. 333,—и при этомъ могутъ выдѣлить участокъ системы $AB$, точки коего лежатъ вблизи всѣхъ трехъ окружностей одновременно,—въ данномъ случаѣ такимъ участкомъ явился треугольникъ $\alpha\beta\gamma$. Взявъ одну изъ его точекъ,—лучше всего брать точку, равноудаленную отъ сторонъ его, каковой на чертежѣ предположена точка $\delta$,—и вычертивъ траекторію ея, увидимъ, что она окажется почти прямолинейной. Очевидно, что чѣмъ меньше $\triangle\alpha\beta\gamma$, тѣмъ траекторія точки $\delta$ будетъ ближе къ прямой.



Фиг. 333.

Если бы оказалось, что $\triangle\alpha\beta\gamma$ настолько великъ, что траекторіи его точекъ имѣли бы въ нѣкоторые моменты слишкомъ малые радіусы кривизны, или если бы этотъ треугольникъ не получился совсѣмъ, что случилось бы тогда, когда три взятые нами круга не пересѣклись бы, то пришлось бы изслѣдовать другія положенія $A_nB_n$ нашего отрѣзка, и могло бы случиться, что въ системѣ $AB$ такія точки все-таки существуютъ.—Если бы за точку $\delta$ мы взяли одну изъ вершинъ треугольника $\alpha\beta\gamma$, то оказалось бы, что въ теченіе двухъ соотвѣтствующихъ моментовъ времени точка $\delta$ двигалась бы по точнымъ прямымъ.



Фиг. 334.

Въ большинствѣ направляющихъ механизмовъ, имѣющихся въ коллекціи Кабинета Прикладной Механики при И. Т. У., опредѣленіе точекъ съ траекторіями, близкими къ прямолинейнымъ, выполнено помощью изложеннаго выше пріема.

Настоящую статью мы закончимъ разсмотрѣніемъ нѣсколькихъ важнѣйшихъ приближенныхъ направляющихъ механизмовъ, пользующихся наибольшей извѣстностью въ техникѣ. Среди нихъ на первомъ мѣстѣ слѣдуетъ поставить такъ называемый *механизмъ Эванса*, изображенный на фиг. 334 и построенный на основаніи слѣдующихъ соображеній:

Предположимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый прямой отрѣзокъ $AB$,

скользящій своими концами $A$ и $B$ по осямъ $Ox$ и $Oy$ неподвижной прямоугольной системы координатъ $xOy$. При движеніи этого отрѣзка середина $C$ его будетъ, какъ извѣстно, перемѣщаться по окружности центра $O$ и радіуса $OC$, равнаго $AC$, т.-е. $^1/_2 AB$. Обратно, если мы соединимъ эту точку $C$ съ началомъ $O$ помощью рычага $OC$ съ шарнирами у $O$ и $C$, а точку $A$ заставимъ двигаться по прямой $Ox$, то точка $B$ станетъ двигаться по прямой $Oy$, перпендикулярной къ $Ox$.

Замѣтивъ это, предположимъ, что въ тотъ моментъ, когда точка $B$ приходитъ въ начало $O$, точка $A$ занимаетъ положеніе $A_1$, такъ что $OA_1 = BA$. Нетрудно показать, что небольшія перемѣщенія конца $A$ вблизи точки $A_1$ (влѣво отъ нея) ведутъ за собою сравнительно значительныя перемѣщенія конца $B$ по оси $Oy$. Дѣйствительно, при перемѣщеніи конца $B$ изъ положенія $B$ въ положеніе $O$, т.-е. при перемѣщеніи $BO$, точка $A$ выполняетъ перемѣщеніе $AA_1$; найдемъ зависимость между этими двумя перемѣщеніями.

Пусть $CO = a$, такъ что $AC = CB = a$ и $AB = 2a$. Если уголъ $BAO$ начальнаго наклона отрѣзка $AB$ къ оси $Ox$ обозначимъ черезъ $\delta$, то можно будетъ написать, что

$$AO = 2a \cos\delta,$$

въ виду чего имѣемъ, что

$$AA_1 = A_1O - AO = 2a(1 - \cos\delta).$$

Одновременно съ этимъ, перемѣщеніе $BO$ выражается такъ:

$$BO = 2a \sin\delta.$$

Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе $q = AA_1 : BO$ обоихъ перемѣщеній выразится такъ:

$$q = AA_1 : BO = 2a(1 - \cos\delta) : 2a \sin\delta = 2 \sin^2 {}^1/_2\delta : 2 \sin {}^1/_2\delta \cos {}^1/_2\delta =$$
$$= tg\, {}^1/_2\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (t)$$

Такъ, напримѣръ, если $\delta = 8^0$, то $q = 0{,}07$; если $\delta = 10^0$, то $q = 0{,}087$; если $\delta = 12^0$, то $q = 0{,}1$.

Такимъ образомъ, при достаточной длинѣ стержня $AB$ малыя перемѣщенія $AA_1$ конца $A$ ведутъ за собою весьма значительныя, сравнительно съ ними, перемѣщенія конца $B$, что въ извѣстныхъ случаяхъ является очень цѣннымъ.

Прямолинейное движеніе конца $A$ по оси $Ox$ можно было бы осуществить при помощи соотвѣтствующей поступательной пары, но такъ какъ это могло бы повлечь здѣсь за собою появленіе значительнаго тренія и такимъ путемъ могло бы отразиться на чувствительности механизма, то Эвансъ былъ вынужденъ отказаться отъ соблюденія

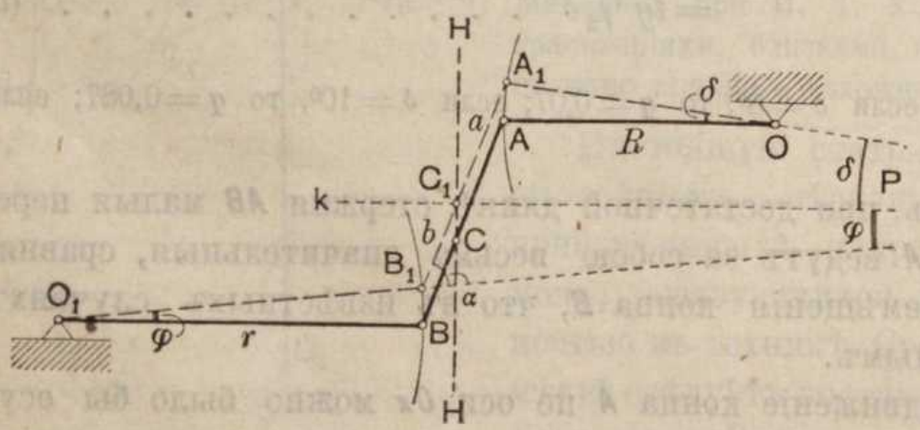
такой строгой прямолинейности и, принявъ во вниманіе незначительность перемѣщенія $AA_1$, замѣнилъ его перемѣщеніемъ по дугѣ окружности достаточно большого радіуса, проходящей черезъ крайнія точки $A$ и $A_1$ размаха $AA_1$; такимъ образомъ, центръ $O_1$ этой окружности долженъ лежать на перпендикулярѣ къ $Ox$, возставленномъ изъ точки $A_0$,—середины отрѣзка $AA_1$.

Послѣ такой замѣны точка $B$ станетъ двигаться уже не по прямой $yO$, а по нѣкоторой кривой $\beta O\beta$, могущей, однако, при соотвѣтственномъ выборѣ величинъ $a$, $\delta$ и радіуса $O_1A$, достаточно близко подойти къ прямой $yO$. Очевидно, что кривая $\beta\beta$ пересѣчетъ ось $yO$ въ точкахъ $B$, $O$ и $B_1$, соотвѣтствующихъ крайнимъ моментамъ $A$, $A_1$ и $A$ размаха конца $A$.—Съ кинематической точки зрѣнія движеніе точки $B$ представитъ собою движеніе одной изъ точекъ прямого отрѣзка $AC$, концы $A$ и $C$ коего движутся по круговымъ дугамъ $\alpha\alpha$ и $\gamma\gamma$ опредѣленныхъ радіусовъ и центровъ.

Замѣчая, далѣе, что каждая точка отрѣзка $AB$ описываетъ на плоскости $xOy$ эллипсъ съ осями, лежащими на прямыхъ $Ox$ и $Oy$, можно вмѣсто точки $C$,—середины этого отрѣзка,—взять какую-либо другую его точку $Z$; опредѣливъ затѣмъ центръ $O_2$ окружности, проходящей черезъ три положенія этой точки,—два крайнихъ и среднее (на оси $Ox$),—замѣняемъ этой окружностью соотвѣтствующую дугу эллипса и соединяемъ точку $Z$ рычагомъ съ этой точкой $O_2$. При удачномъ подборѣ окружности $O_2$ точка $B$ будетъ описывать траекторію, достаточно мало отличающуюся отъ прямой $Oy$. Полученный механизмъ является особенно удобнымъ тогда, когда требуется, чтобы траекторія точки $B$ проходила внѣ точки $O$; чаще всего онъ примѣняется въ различныхъ самопищущихъ приборахъ, какъ-то: индикаторахъ, барографахъ и т. д.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію приближеннаго направляющаго механизма, придуманнаго Уаттомъ и названнаго въ честь его *параллелограммомъ Уатта*. Механизмъ этотъ построенъ на основаніи слѣдующихъ соображеній:

Предположимъ, что у насъ имѣется обыкновенный четырехшарнирный механизмъ $OABO_1$, расположенный такъ, что неподвижныя оси вращенія $O$ и $O_1$ лежатъ по разныя стороны шатуна $AB$, какъ это показано на фиг. 335. Требуется на шатунѣ $AB$ найти такую точку $C$, которая бы перемѣщалась по прямой при малыхъ отклоненіяхъ механизма отъ нѣкотораго средняго его положенія,—иными словами, точку,




Фиг. 335.

направленіе скоростей коей для двухъ сосѣднихъ промежутковъ времени оставалось бы постояннымъ. Для нахожденія этой точки примемъ, прежде всего, за среднее положеніе механизма то, при которомъ звенья $OA$ и $O_1B$ располагаются параллельно другъ другу, какъ это и изображено на чертежѣ. Въ этотъ моментъ полюсъ мгновеннаго вращенія системы $AB$ удаляется въ безконечность по направленію, параллельному $OA$, а сама система $AB$ движется поступательно по направленію $HH$, перпендикулярному къ $OA$, переходя по истеченіи безконечно-малаго времени $dt$ въ сосѣднее положеніе $A_1B_1$, при чемъ къ этому моменту $(A_1B_1)$ звено $OA$ отклонится на уголъ $\delta$, а звено $O_1B$—на уголъ $\varphi$; оба эти угла будутъ безконечно-малыми. Принявъ теперь, что система шатуна перешла изъ положенія $AB$ въ сосѣднее $A_1B_1$ поступательнымъ движеніемъ, можемъ принять, что перемѣщеніе $AA_1$ равно и параллельно перемѣщенію $BB_1$, что выразится въ формѣ равенства

$$R\delta = r\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (u)$$

Въ моментъ $(AB)$ скорости всѣхъ точекъ системы $AB$ были направлены перпендикулярно къ прямой $OA$; въ моментъ $(A_1B_1)$, когда полюсъ мгновеннаго вращенія системы шатуна $AB$ лежитъ въ нѣкоторой точкѣ $P$, то же направленіе скорости сохранится лишь у одной точки $C_1$, лежащей въ пересѣченіи отрѣзка $A_1B_1$ съ лучомъ $Pk$, параллельнымъ $AO$. Очевидно, что въ моментъ $(AB)$ эта точка находилась въ положеніи $C$ на той же прямой $HH$. Найденная такимъ путемъ точка $C$ и будетъ искомой.

Нетрудно установить зависимость положенія этой точки $C$ отъ величины звеньевъ $OA$ и $O_1B$. Для этого обозначимъ уголъ $A_1B_1O$ черезъ $\alpha$, а длины отрѣзковъ $AC$ и $CB$—черезъ $a$ и $b$. Тогда изъ треугольниковъ $PB_1C_1$ и $PC_1A_1$, принявъ уголъ $A_1$ равнымъ $180^0-\alpha$, получаемъ соотношенія:

$$PC_1 / \sin\alpha = a / \sin\delta = b / \sin\varphi,$$

приводящія къ равенству

$$a\sin\varphi = b\sin\delta,$$

сводящемуся, въ свою очередь, въ виду малости угловъ $\varphi$ и $\delta$, къ равенству

$$a\varphi = b\delta.$$

Исключая отсюда параметры $\varphi$ и $\delta$ помощью соотношенія $(u)$, приходимъ къ соотношенію

$$aR = br,$$

показывающему, что

$$a : b = r : R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

Итакъ, точка $C$, движущаяся за время $dt$ по прямой $HH$, дѣлитъ собою отрѣзокъ $AB$ на части $a$ и $b$, *обратно пропорціональныя* звеньямъ $OA$ и $O_1B$.

Нетрудно убѣдиться, что при маломъ отклоненіи внизъ точка $C$ перемѣстится также внизъ по той же прямой $HH$.

Соотношеніе $(v)$ даетъ весьма простой графическій пріемъ нахожденія точки $C$ на шатунѣ $AB$ даннаго механизма $OABO_1$: ставимъ механизмъ въ такое положеніе, при которомъ звенья $OA$ и $O_1B$ его параллельны другъ другу, и соединяемъ точки $O$ и $O_1$ прямой линіей. Пусть эта прямая $OO_1$ пересѣкаетъ отрѣзокъ $AB$ въ нѣкоторой точкѣ $Z$; тогда отрѣзокъ $AZ$, будучи отложенъ по $AB$ отъ точки $B$, и опредѣлитъ собою искомую точку $C$.

Въ томъ случаѣ, когда требуется построить механизмъ разсмотрѣннаго типа по даннымъ $R$, $a$ и $b$, поступаемъ, согласно указанію Уатта, такъ: изъ центра $O$ описываемъ окружность $\alpha\alpha$ радіусомъ $OA_1=R$ (фиг. 336) и всю дугу $A_1A_2$ отклоненій точки $A$ дѣлимъ пополамъ прямой $OA_0$, опредѣляющей собой въ то же время среднее положеніе звена $OA$; крайними будутъ служить положенія $OA_1$ и $OA_2$. Соединяемъ теперь прямой линіей точки $A_1$ и $A_2$ и получившуюся такимъ образомъ стрѣлку $aA_0$ дуги $A_1A_2$ дѣлимъ пополамъ, и черезъ середину $m$ этой стрѣлки ведемъ прямую $HmH$, перпендикулярную къ $OA_0$. Предположимъ теперь, что точка $C$ дѣлитъ шатунъ $AB$ на части $AC=a$ и $CB=b$.



Фиг. 336.

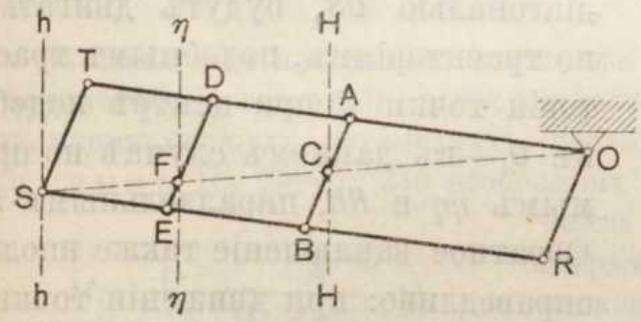
Принимая теперь прямую $HH$ за траекторію точки $C$, находимъ положенія этой послѣдней въ моменты $(A_1)$, $(A_0)$ и $(A_2)$, засѣкая изъ точекъ $A_1$, $A_0$ и $A_2$ дуги радіусомъ $a$; такимъ путемъ получимъ точки $C_1$, $C_0$ и $C_2$. Отложивъ отъ нихъ по направленіямъ $AC$ еще по отрѣзку, равному $b$, найдемъ три точки $B_1$, $B_0$ и $B_2$, представляющія собою положенія точки $B$ въ упомянутые три момента. Отыскавъ теперь центръ $O_1$ окружности, проходящей черезъ эти точки, и соединивъ точку $B$ рычагомъ съ этой точкой $O_1$, получимъ искомый механизмъ $OABO_1$. Точка $C$ его будетъ двигаться по траекторіи, тѣмъ ближе подходящей къ прямой $HH$, чѣмъ меньше уголъ отклоненія $\delta$.

Нетрудно убѣдиться, что соотношеніе $(v)$ соблюдается и здѣсь.

Уаттъ бралъ всегда $a = b$, такъ что точка $C$ приходилась всегда въ серединѣ отрѣзка $AB$, а звенья $OA$ и $O_1B$ были другъ другу равны.

Механизмъ $OABO_1$ (фиг. 335), такъ полученный и дающій приближенно-прямолинейное движеніе нѣкоторой вполнѣ опредѣленной его точкѣ $C$, называется *приближеннымъ направляющимъ механизмомъ Уатта*. Прежде чѣмъ разсматривать вопросъ о томъ, какъ использовалъ его Уаттъ въ своей паровой машинѣ, слѣдуетъ обратить вниманіе на слѣдующія геометрическія соображенія:

Допустимъ, что у насъ имѣется нѣкоторый шарнирный параллелограммъ $ORST$, могущій вращаться около одной изъ его вершинъ,—положимъ, $O$ (фиг. 337),—и пусть противоположная ей вершина $S$ движется по нѣкоторой неподвижной линіи,—положимъ, по прямой $hh$. Такъ какъ при этомъ движеніи величина діагонали $OS$ будетъ непрестанно мѣняться, то будетъ мѣняться и форма параллелограмма $ORST$. Отложимъ теперь $TA = SB$ и соединимъ шарнирно точки $A$ и $B$ стержнемъ $AB$. Ясно, что отрѣзокъ $AB$ будетъ всегда оставаться параллельнымъ сторонамъ $TS$ и $OR$ нашего параллелограмма при всѣхъ измѣненіяхъ этого послѣдняго, такъ что фигура $ABST$ будетъ также все время оставаться параллелограммомъ, мѣняющимъ свою форму при перемѣщеніи вершины $S$ его по прямой $hh$.



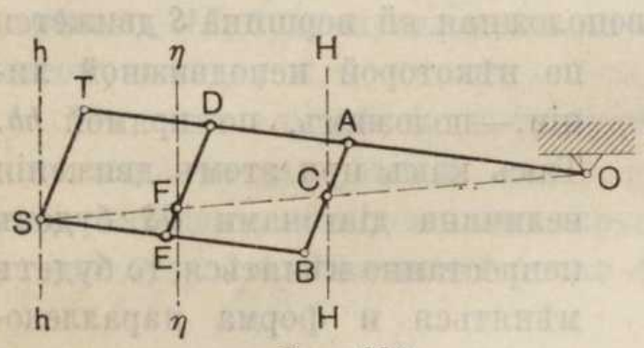
Фиг. 337.

Пусть въ разсматриваемый моментъ діагональ $OS$ пересѣкаетъ прямую $AB$ въ точкѣ $C$. Такъ какъ $AC = OR.OA / OT = const$ и такъ какъ это соотношеніе имѣетъ мѣсто при всѣхъ возможныхъ здѣсь положеніяхъ точки $S$ и величинахъ діагонали $OS$, то отсюда вытекаетъ, что, при движеніи параллелограмма $OS$, сопровождающемся измѣненіемъ его формы, мѣняющаяся діагональ $OS$ его будетъ пересѣкать отрѣзокъ $AB$ *постоянно въ одной и той же точкѣ* $C$ его, занимающей на немъ положеніе вполнѣ опредѣленное и неизмѣнное. Отсюда, далѣе, слѣдуетъ, что точка $C$ будетъ описывать траекторію, подобную траекторіи $hh$ точки $S$ относительно центра подобія $O$: если, напримѣръ, точка $S$ будетъ описывать какую-либо окружность, то подобно расположенную ей окружность будетъ описывать и точка $C$; если точка $S$ движется по неподвижной прямой $hh$, то точка $C$ будетъ двигаться по прямой $HH$, параллельной $hh$ и также неподвижной.

Такъ какъ отрѣзокъ $TA$, а значитъ, и равный ему отрѣзокъ $SB$, является по своей длинѣ вполнѣ произвольнымъ, то вышеприведенное заключеніе остается справедливымъ для всякаго другого отрѣзка $DE$, построеннаго въ параллелограммѣ $OS$ параллельно $AB$: точка $F$ пересѣченія этого отрѣзка $DE$ съ діагональю $OS$ будетъ занимать на немъ положеніе, вполнѣ опредѣленное и неизмѣнное, и будетъ перемѣщаться

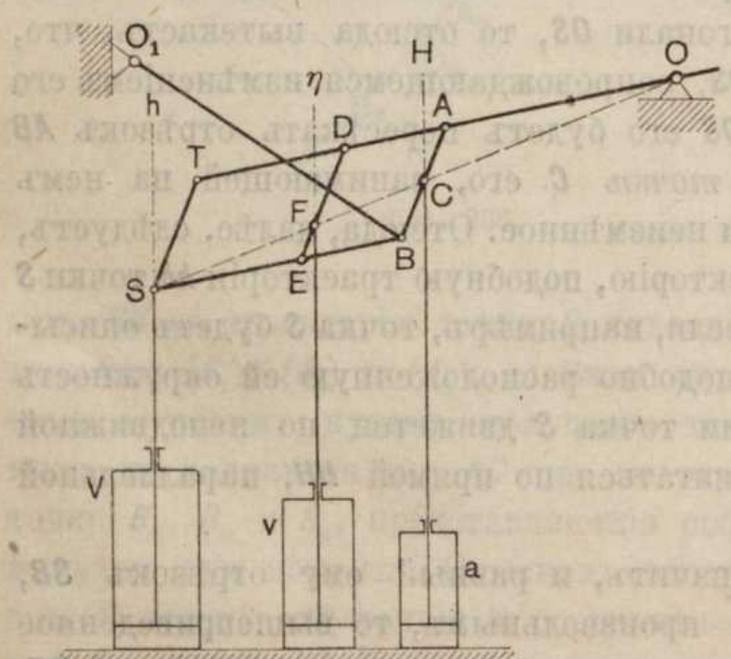
по траекторіи, подобной траекторіи точки *S* при томъ же центрѣ подобія *O*; въ нашемъ случаѣ точка *F* будетъ перемѣщаться по неподвижной прямой $\eta\eta$, параллельной *hh*.

Замѣчая теперь, что части *BR* и *OR* основного параллелограмма *OS* на движеніе точекъ *C*, *F* и *S* никакого вліянія не имѣютъ, можемъ ихъ, безъ всякаго ущерба для всего устройства, отбросить, послѣ чего получимъ систему, состоящую изъ рычага *OT* съ точкой вращеніа въ *O*, несущаго на себѣ шарнирно закрѣпленный на немъ параллелограммъ *ABST*, внутри коего можетъ быть, также шарнирно, закрѣпленъ рычагъ *DE*, параллельный *AB* (фиг. 338). Точки *F* и *C* звеньевъ *DE* и *AB*, лежащія въ пересѣченіи ихъ съ діагональю *OS*, будутъ двигаться по траекторіямъ, подобнымъ траекторіи точки *S* при центрѣ подобія въ *O*,—въ данномъ случаѣ по прямымъ $\eta\eta$ и *HH*, параллельнымъ *hh*. Обратное заключеніе также вполнѣ справедливо: при движеніи точки *C* звена *AB*, лежащей въ пересѣченіи его съ діагональю *OS*, по нѣкоторой траекторіи,—напримѣръ, по прямой *HH*,—лежащія на той же діагонали точки *F* и *S* звеньевъ *DE* и *TS*, параллельныхъ *AB*, будутъ двигаться по траекторіямъ, подобнымъ траекторіи точки *C*, при томъ же центрѣ подобія *O*; въ нашемъ случаѣ онѣ будутъ двигаться по прямымъ $\eta\eta$ и *hh*, параллельнымъ *HH*.



Фиг. 338.

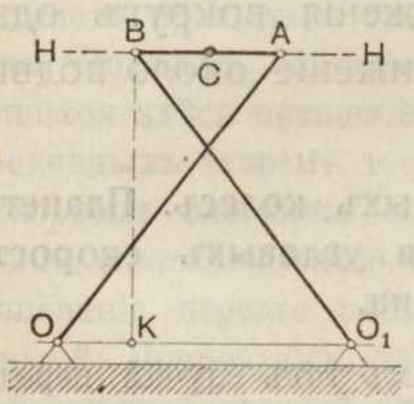
Замѣтивъ такое свойство точекъ *C* и *F*, лежащихъ на діагонали *OS*, Уаттъ заставилъ точку *C* двигаться по приближенной прямой, примѣнивъ сюда свой приближенный направляющій механизмъ, изображенный выше, на фиг. 335. Для этого, пользуясь построеніемъ, даннымъ на фиг. 336, онъ опредѣлилъ по даннымъ *OA*, *AC* и *CB* центръ $O_1$ окружности, по которой должна двигаться здѣсь точка *B*, и соединилъ эти точки *B* и $O_1$ рычагомъ $BO_1$. Такимъ образомъ получился механизмъ, изображенный на фиг. 339. Въ точкахъ *C*, *F* и *S* (и другихъ, имъ аналогичныхъ) можно пристегнуть, помощью соотвѣтствующихъ шарнировъ, штоки паровыхъ цилиндровъ, воздушныхъ насосовъ и другихъ подобныхъ имъ деталей, входящихъ въ составъ



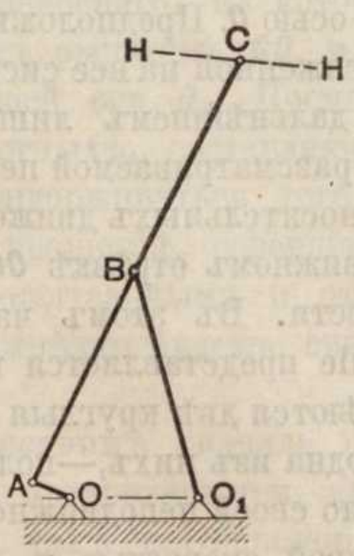
Фиг. 339.

данной машины; на чертежѣ показанъ случай, когда въ точкахъ $S$ и $F$ пристегнуты штоки большого и малаго паровыхъ цилиндровъ, а въ точкѣ $C$—штокъ воздушнаго насоса. Рычагъ $OT$ схематически изображаетъ собою коромысло паровой машины. Направленіе движенія всѣхъ штоковъ берется, конечно, параллельнымъ прямой $HH$, по которой движется точка $C$; точка $O$ и $O_1$ неподвижны.—Весь такъ устроенный механизмъ $OATSBA$, какъ мы уже говорили, получилъ названіе *параллелограмма Уатта*. Въ настоящее время онъ примѣняется крайне рѣдко, но въ свое время находилъ себѣ весьма обширное примѣненіе во всѣхъ паровыхъ машинахъ съ балансиромъ; его мѣсто въ нашихъ машинахъ занимаетъ обыкновенный кривошипный механизмъ съ ползуномъ и его направляющими.

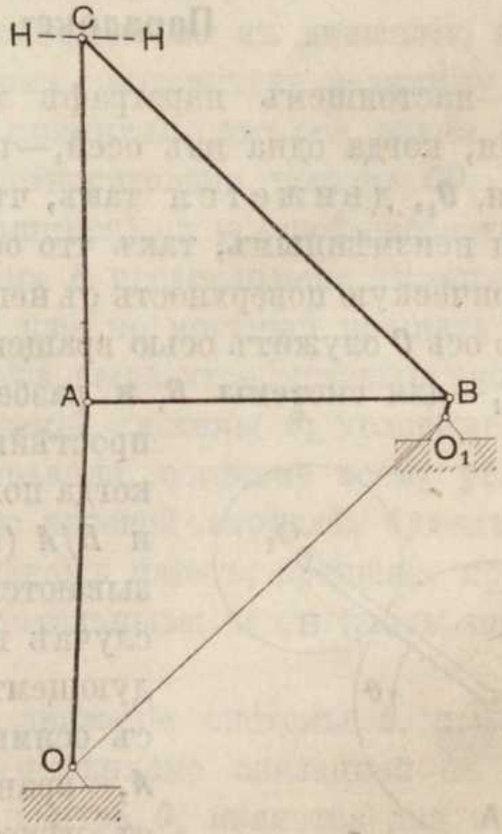
Въ заключеніе настоящаго параграфа упомянемъ лишь вскользь, не вдаваясь въ аналитическія изысканія, о нѣсколькихъ наиболѣе замѣчательныхъ приближенныхъ направляющихъ механизмахъ, предложенныхъ покойнымъ академикомъ Чебышевымъ. На фигурѣ 340 изображенъ его *перекрестный направляющій механизмъ* $OABO_1$, состоящій изъ двухъ равныхъ стержней $OA$ и $O_1B$, вращающихся вокругъ неподвижныхъ центровъ $O$ и $O_1$, соединенныхъ рычагомъ $AB$; вблизи средняго положенія механизма рычаги $OA$ и $O_1B$ перекрещиваются. Середина $C$ звена $AB$, при движеніи механизма, будетъ описывать траекторію, на довольно




Фиг. 340.




Фиг. 341.




Фиг. 342.

большомъ протяженіи одной изъ ея частей мало отличающуюся отъ прямой. Наиболѣе удобными размѣрами являются здѣсь, согласно Чебышеву, слѣдующіе: $OO_1 = 4$, $OA = O_1B = 5$ и $AB = 2$. Замѣтимъ кстати, что перпендикуляръ $BK$, опущенный при

среднемъ положеніи механизма изъ точки $B$ на прямую $OO_1$, даетъ египетскій треугольникъ $BKO_1$, ибо $KO_1 = 3$, $BK = 4$ и $BO_1 = 5$.

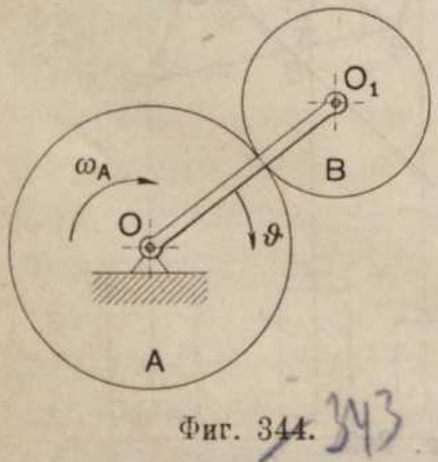
На фигурахъ 341 и 342 изображены такъ называемые *прямило Чебышева* (фиг. 341) и *непрерывный* трансформаторъ его же (фиг. 342). Движущаяся по прямой точка $C$ въ обоихъ случаяхъ, какъ и въ предыдущемъ, принадлежитъ системѣ неизмѣняемаго отрѣзка $AB$, движущагося своими концами по окружностямъ постоянныхъ центровъ и радіусовъ. Въ первомъ изъ этихъ механизмовъ (фиг. 341) точка $C$ лежитъ на продолженіи шатуна $AB$, во второмъ (фиг. 342)—въ вершинѣ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника, построеннаго на $AB$, какъ на катетѣ. Въ механизмѣ фиг. 341 точка $C$ описываетъ прямолинейную траекторію при перемѣщеніи точки $A$ по нѣкоторой *дугѣ* окружности $O$, а во второмъ—при обходѣ точки $B$ *цѣлой окружности* $O_1$. Наиболѣе удобными размѣрами являются для фигуры 341: $AB = BC = BO_1 = 64$, $OA = 11$ и $OO_1 = 25$, а для фиг. 342: $OA = AB = AC = 100$, $OO_1 = 141$, и $O_1B = 5$.

Пользуясь даннымъ выше графическимъ пріемомъ, нетрудно построить рядъ аналогичныхъ направляющихъ механизмовъ для различныхъ частныхъ случаевъ шарнирнаго четереугольника $OABO_1$; треугольникъ $\alpha\beta\gamma$ укажетъ всѣ тѣ точки, среди которыхъ можно будетъ выбирать искомую точку $C$.

## c) Преобразованіе вращательнаго движенія вокругъ одной неподвижной оси во вращательное движеніе около подвижной другой.

### § 45. Эпициклическія соединенія зубчатыхъ колесъ. Планетное колесо Уатта. Механизмъ для измѣненія угловыхъ скоростей. Парадоксъ Фергюссона.

Въ настоящемъ параграфѣ мы разберемъ тотъ случай передачи вращенія, когда одна изъ осей,—положимъ, $O$,—остается неподвижной, а другая, $O_1$, движется такъ, что разстояніе $d$ ея отъ оси $O$ все время остается неизмѣннымъ, такъ что ось $O_1$ описываетъ нѣкоторую круглую цилиндрическую поверхность съ неподвижною осью $O$. Предположимъ, далѣе, что ось $O$ служитъ осью вращенія для насаженной на нее системы $A$, а ось $O_1$—для системы $B$, и разберемъ въ дальнѣйшемъ лишь тотъ простѣйшій случай разсматриваемой передачи, когда полодіями относительныхъ движеній $A/B$ и $B/A$ (при неподвижномъ отрѣзкѣ $OO_1$) оказываются окружности. Въ этомъ частномъ случаѣ все движеніе представляется въ слѣдующемъ видѣ: имѣются двѣ круглыя полодіи съ осями $O$ и $O_1$; одна изъ нихъ,—положимъ, $A$,—вращается около своей неподвижной оси $O$ съ нѣкоторой угловой скоростью $\omega_A$, а другая, $B$, повинуясь общему закону взаимнаго движенія полодій, *катится* по ней въ ту или другую сторону такъ, что рычагъ $OO_1$, несущій на себѣ обѣ эти оси $O$ и $O_1$, вращается около своей неподвижной оси $O$ съ нѣкоторой угловой скоростью $\vartheta$ (фиг. 343). Спрашивается, какова будетъ




Фиг. 344. 343

при этихъ условіяхъ,—т.-е. при данныхъ $\omega_A$ и $\vartheta$,—зависимость угловой скорости $\omega_B$ отъ этихъ данныхъ угловыхъ скоростей $\omega_A$ и $\vartheta$ и отъ величины радіусовъ данныхъ полодій-окружностей $A$ и $B$. Замѣтимъ попутно, что каченіе этихъ окружностей одной по другой обычно обезпечивается помощью соотвѣтствующаго зубчатаго зацѣпленія, такъ что эти окружности выполняются всегда въ видѣ круглыхъ зубчатыхъ колесъ.

Рѣшеній поставленной задачи имѣется нѣсколько, но ниже мы приведемъ только т р и наиболѣе наглядныя и, въ то же время, детально выясняющія всѣ кинематическія особенности разсматриваемаго движенія. Каждое изъ этихъ рѣшеній будетъ исходить изъ своей особой отправной точки, но конечные результаты всѣхъ трехъ рѣшеній, разумѣется, окажутся тождественными.—Перейдемъ къ разсмотрѣнію перваго рѣшенія.

Движеніе системы $B$ представляетъ собою нѣкоторое с л о ж н о е движеніе, ибо центръ ея $O_1$, будучи увлекаемъ рычагомъ $OO_1$, перемѣщается по нѣкоторой окружности, а въ то же время сама система продолжаетъ вращаться около этого центра съ извѣстной угловой скоростью. Подсчетъ зависимости между угловыми скоростями всѣхъ имѣющихся здѣсь вращеній можетъ быть выполненъ при помощи одной изъ основныхъ теоремъ теоретической механики, говорящей, что *угловая скорость сложнаго движенія равна суммѣ угловыхъ скоростей движеній относительнаго и переноснаго*. Эту теорему мы и положимъ въ основаніе перваго рѣшенія и примѣнимъ ее къ движенію нашей системы $B$. Попробуемъ, такимъ образомъ, подсчитать величину искомой абсолютной угловой скорости $\omega_B$, принимая, что она равна суммѣ угловой скорости движенія системы $B$ относительно рычага $OO_1$, предположеннаго неподвижнымъ (остановившимся), и угловой скорости движенія переноснаго, въ которомъ система $B$ предположена скрѣпленной воедино съ рычагомъ $OO_1$ и, значитъ, уже не могущей вращаться вокругъ своей оси $O_1$. Посмотримъ, какъ выразятся угловыя скорости этихъ частныхъ, составляющихъ движеній системы $B$; условимся при этомъ придерживаться того общаго правила, согласно коему угловыя скорости вращеній, совершающихся по часовой стрѣлкѣ, будемъ считать положительными и отмѣчать знакомъ плюсъ; вращенія противъ часовой стрѣлки будемъ считать отрицательными и отмѣчать знакомъ минусъ.

Разсмотримъ сначала переносное движеніе системы $B$, при которомъ она предполагается жестко и неизмѣняемо связанной съ рычагомъ $OO_1$, такъ что вращеніе вокругъ центра $O_1$ является для нея невозможнымъ. Пусть угловая скорость вращенія рычага $OO_1$ вокругъ центра $O$ равна $\vartheta$. Очевидно, что въ переносномъ движеніи системы $B$ угловая скорость ея также будетъ равна $\vartheta$, ибо эта система теперь раздѣляетъ движеніе рычага $OO_1$. Съ другой стороны ясно, что, *въ силу отсутствія скольженія* между окружностями $O$ и $O_1$, окружность $O$,

будучи увлекаема окружностью $O_1$, станетъ вращаться около центра $O$ съ той же угловой скоростью $\vartheta$. Неизбѣжность и необходимость такого именно движенія системы $O$ станетъ очевидной, если мы предположимъ, что взаимное каченіе окружностей $O$ и $O_1$ обезпечивается помощью соотвѣтственнаго зубчатаго зацѣпленія, т.-е. что обѣ системы выполнены въ видѣ пары сцѣпляющихся зубчатыхъ колесъ; тогда становится вполнѣ яснымъ, что если зубчатое колесо $B$ будетъ фиксировано на рычагѣ $OO_1$, то зубцы его, вошедшіе во впадины колеса $A$, станутъ, при движеніи рычага $OO_1$, воздѣйствовать непосредственно на зубцы колеса $A$ и поведутъ его за собою въ ту же сторону, куда сами они двигаются вмѣстѣ съ своимъ колесомъ $B$ и рычагомъ $OO_1$. Итакъ, *въ переносномъ движеніи системы* $B$ *угловыя скорости обѣихъ системъ одинаковы и равны каждая* $\vartheta$,—*угловой скорости рычага* $OO_1$.

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію *относительнаго* движенія системы $B$, имѣющаго мѣсто при остановкѣ рычага $OO_1$. Такъ какъ при переносномъ движеніи системы $B$ система $A$ получаетъ вращеніе съ угловой скоростью $\vartheta$, то для того, чтобы полная угловая скорость ея была равна $\omega_A$, необходимо сообщить ей въ этомъ относительномъ движеніи вращеніе съ угловой скоростью $\omega_A - \vartheta$, не хватающей до полной угловой скорости $\omega_A$. А такъ какъ разсматриваемое относительное движеніе сводится къ передачѣ вращенія отъ одной неподвижной оси $O$ къ другой $O_1$, также неподвижной, то, обозначивъ отношеніе радіусовъ $R_A : R_B$ черезъ $k$, находимъ, что при вращеніи системы $A$ съ угловой скоростью $(\omega_A - \vartheta)$ система $B$ будетъ вращаться около своей оси $O_1$ съ угловой скоростью $[-k(\omega_A - \vartheta)]$,—знакъ минусъ поставленъ здѣсь потому, что система $B$ вращается здѣсь противъ часовой стрѣлки. Итакъ, оказывается, что *въ* разсматриваемомъ *относительномъ движеніи угловая скорость системы* $B$ *равна* $[-k(\omega_A - \vartheta)]$, а системы $A \ldots (\omega_A - \vartheta)$.

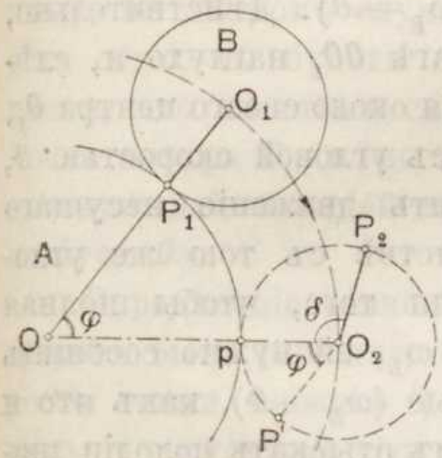
Обозначивъ теперь дѣйствительную, полную угловую скорость системы $B$ черезъ $\omega_B$, получаемъ теперь слѣдующее основное соотношеніе между участвующими здѣсь угловыми скоростями:

$$\omega = \vartheta + [-k(\omega_A - \vartheta)] = \vartheta(1+k) - k\omega_A \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

Второе рѣшеніе нашей задачи основывается на принципѣ *сложенія движеній* и сводятся къ тому, что мы подсчитываемъ уголъ поворота системы $B$ *при неподвижности системы* $A$ и при какомъ-либо поворотѣ рычага $OO_1$, а затѣмъ вводимъ соотвѣтствующее вращеніе системы $A$ и, учтя вліяніе его на движеніе системы $B$, прибавляемъ получившееся такимъ образомъ добавочное движеніе системы $B$ къ тому, какое она имѣла при неподвижной системѣ $A$. Въ суммѣ этихъ двухъ движеній и получится истинное движеніе системы $B$. Сообразно изложенному плану рѣшеніе ведется такъ:

Остановивъ систему $A$ и вращая рычагъ $OO_1$ съ прежней угловой

скоростью $\vartheta$, поворачиваемъ его на какой-либо уголъ $\varphi$ (фиг. 344), такъ что, если въ началѣ этого поворота рычагъ занималъ положеніе $OO_1$, то въ концѣ его, по истеченіи нѣкотораго времени $\Delta t$, онъ займетъ положеніе $OO_2$; при этомъ окружность $O_1$ перейдетъ въ положеніе $O_2$, прокатившись по неподвижному теперь кругу $O$ на дугу $P_1p$.



Фиг. 344.

Такимъ образомъ, радіусъ $O_1P_1$, въ началѣ промежутка $\Delta t$ проходившій черезъ точку касанія $P_1$ нашихъ окружностей и, значитъ, совпадавшій съ линіей центровъ $OO_1$, теперь займетъ положеніе $O_2P_2$, такое, что дуга $P_2p$ окружности $O_1$ будетъ равна дугѣ переката $P_1p$, гдѣ черезъ $p$ обозначена точка касанія нашихъ окружностей въ концѣ времени $\Delta t$. Еслибы окружность $O_1$ при этомъ своемъ движеніи могла не вращаться, а перемѣщалась бы поступательно, то радіусъ $O_1P_1$, перемѣстившись параллельно самому себѣ, занялъ бы положеніе $O_2P'$, откуда слѣдуетъ, что, при перекатѣ на дугу $P_1p$, система $O_1$ поворачивается на уголъ, $P'O_2P_2$, равный $\varphi+\delta$. Замѣчая теперь, что углы $\varphi$ и $\delta$ стягиваются равными дугами $P_1p$ и $P_2p$, заключаемъ, что между ними существуетъ соотношеніе:

$$\delta : \varphi = OP_1 : O_1P_1 = R_A : R_B = k,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\delta = k\varphi.$$

Такимъ образомъ, за упомянутое время $\Delta t$ система $B$ поворачивается на уголъ $\delta+\varphi$, равный, очевидно, $\varphi(1+k)$. Угловая скорость этого поворота, равная $d(\varphi+\delta)/dt$, выразится иначе, очевидно, черезъ $(1+k)d\varphi/dt$, а такъ какъ $d\varphi/dt=\vartheta$, угловой скорости вращенія рычага $O_1$, то выходитъ, что, при неподвижности окружности $O$ и вращеніи рычага $OO_1$ съ угловой скоростью $\vartheta$, окружность $O_1$ будетъ перемѣщаться, вращаясь въ пространствѣ съ угловой скоростью $\vartheta(1+k)$.

Теперь опредѣляемъ угловую скорость системы $B$ при неподвижности рычага $OO_1$ и вращеніи системы $A$ съ угловой скоростью $\omega_A$. Очевидно, что эта угловая скорость системы $B$ будетъ равна $(-k\omega_A)$.

Складывая двѣ эти угловыя скорости, получаемъ искомую дѣйствительную угловую скорость $\omega_B$ системы $B$, при чемъ оказывается, что

$$\omega_B = \vartheta(1+k) - k\omega_A,$$

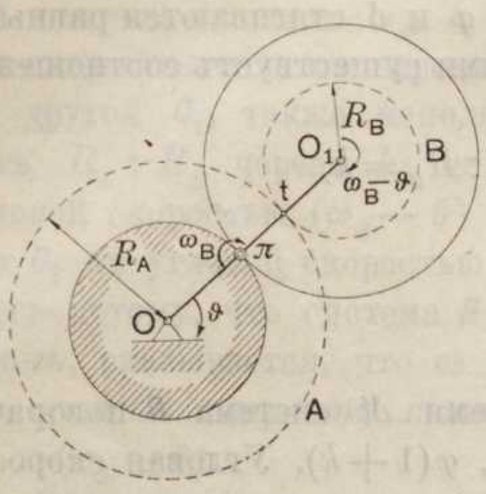
—получилась опять та же формула, что и выше.

Переходимъ теперь къ третьему рѣшенію, использующему чисто кинематическій принципъ опредѣленія движенія помощью опредѣленія

*подвижной* и *неподвижной полодій* его. Предварительно необходимо замѣтить слѣдующее:

Пусть абсолютная угловая скорость системы $B$, при движеніи ея относительно неподвижной плоскости, равна $\omega_B$. То обстоятельство, что ось $O_1$ этой системы сидитъ на рычагѣ, вращающемся около центра $O$ съ угловой скоростью $\vartheta$, указываетъ, что система $B$ вращается около своего центра $O_1$ всего лишь со скоростью $(\omega_B - \vartheta)$. Дѣйствительно, если бы эта система была закрѣплена на рычагѣ $OO_1$ наглухо и, слѣдовательно, не могла бы имѣть никакого вращенія около своего центра $O_1$, то, при вращеніи рычага $OO_1$ около центра $O$ съ угловой скоростью $\vartheta$, она, будучи вынуждена раздѣлять и повторять движеніе несущаго ее рычага, стала бы вращаться въ пространствѣ съ тою же угловою скоростью $\vartheta$. Отсюда слѣдуетъ, что для того, чтобы полная абсолютная скорость системы $B$ была равна $\omega_B$, ей нужно сообщить вращеніе около центра $O_1$ съ угловой скоростью $(\omega_B - \vartheta)$, какъ это и было указано выше.—Замѣтивъ это, попробуемъ отыскать полодіи движенія системы $B$.

Мы выяснили, что въ каждый данный моментъ система $B$ участвуетъ одновременно въ двухъ вращеніяхъ, а именно: 1) во вращеніи около точки $O$ съ угловой скоростью $\vartheta$ и 2) во вращеніи около точки $O_1$ съ угловой скоростью $(\omega_B - \vartheta)$. По этимъ даннымъ нетрудно найти положеніе полюса мгновеннаго вращенія системы $B$ для любого момента. Возьмемъ, напримѣръ, моментъ, изображенный на фиг. 345, и предположимъ, что угловыя скорости $\vartheta$ и $(\omega_B - \vartheta)$ направлены согласно,—положимъ, по часовой стрѣлкѣ. Тогда искомый полюсъ будетъ лежать на линіи центровъ $OO_1$ между точками $O$ и $O_1$, въ нѣкоторой точкѣ $\pi$, положеніе коей опредѣляется изъ соотношенія



Фиг. 345.

$$O_1\pi : O\pi = \vartheta : (\omega_B - \vartheta),$$

сводящагося къ соотношенію

$$O_1\pi : OO_1 = \vartheta : \omega_B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Такъ какъ $OO_1 = R_A + R_B$, то уравненіе $(a)$ приводитъ къ выраженію

$$O_1\pi = \vartheta(R_A + R_B) : \omega_B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Итакъ, полюсъ мгновеннаго вращенія системы $B$ лежитъ въ точкѣ $\pi$,

опредѣляемой единственнымъ образомъ по даннымъ $\vartheta$, $\omega_B$, $R_A$ и $R_B$, при чемъ, согласно общему правилу, мгновенное вращеніе системы $B$ вокругъ этого полюса $\pi$ будетъ выполняться съ угловой скоростью, равной суммѣ угловыхъ скоростей $\vartheta$ и $(\omega_B - \vartheta)$, т.-е. съ угловой скоростью $\omega_B$.

Сумма $R_A + R_B$ представляетъ собою длину отрѣзка $OO_1$,—величину, въ данномъ случаѣ постоянную. Поэтому, если отношеніе $\vartheta/\omega_B$ есть *const*, то будетъ постоянной и длина отрѣзка $O_1\pi$, что показываетъ, что въ этомъ случаѣ подвижной полодіей будетъ служить окружность центра $O_1$ и постояннаго радіуса $O_1\pi$. Нетрудно убѣдиться, что неподвижной полодіей явится окружность центра $O$ и постояннаго же радіуса $O\pi$.

Опредѣленіе зависимости между угловыми скоростями $\omega_A$, $\omega_B$ и $\vartheta$ можетъ быть выполнено теперь при помощи выраженій линейной скорости точки касанія $t$, принадлежащей одновременно какъ системѣ $A$, такъ и системѣ $B$. Эта линейная скорость,—обозначимъ ее черезъ $v_t$,—выразится, съ одной стороны, уравненіемъ

$$v_t = R_A\omega_A,$$

а съ другой стороны, уравненіемъ

$$v_t = \pi t.\omega_B.$$

Отсюда находимъ соотношенія:

$$v_t = R_A\omega_A = \pi t.\omega_B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Остается подсчитать величину отрѣзка $\pi t$. Очевидно, что

$$\pi t = O_1\pi - O_1 t = [\vartheta(R_A + R_B)/\omega_B] - R_B = [\vartheta(R_A + R_B) - R_B\omega_B] : \omega_B,$$

откуда получаемъ, что

$$\pi t.\omega_B = \vartheta(R_A + R_B) - R_B\omega_B = R_A\omega_A,$$

—въ виду $(c)$. Такимъ образомъ, оказывается, что

$$R_B\omega_B = \vartheta(R_A + R_B) - R_A\omega_A.$$

Дѣленіе обѣихъ частей этого уравненія на $R_B$ приводитъ къ знакомому уже намъ соотношенію

$$\omega_B = \vartheta(1 + k) - k\omega_A.$$

На фиг. 342 данныя намъ окружности радіусовъ $O_1t$ и $Ot$ обозначены пунктиромъ, а полодіи-окружности (при $\vartheta : \omega_B = const$) дѣйствительнаго движенія системы $B$—сплошными линіями.

Оказывается, такимъ образомъ, что одновременное вращеніе окружности $(Ot)$ системы $A$ съ угловой скоростью $\omega_A$ и рычага $OO_1$, вмѣстѣ съ насаженной на него окружностью $(O_1t)$ системы $B$, съ угловой скоростью $\vartheta$ эквивалентно каченію нѣкоторой новой окружности $(O_1\pi)$, принадлежащей системѣ $B$ и концентричной съ $O_1$, по окружности $(O\pi)$, концетричной съ $(Ot)$ и остающейся неподвижной, т.-е. принадлежащей неподвижной плоскости; каченіе это сопровождается вращеніемъ рычага $OO_1$ вокругъ центра $O$ съ угловой скоростью $\vartheta$. Если бы рычагъ $OO_1$ былъ неподвиженъ, то мы имѣли бы обыкновенный случай передачи вращенія отъ одной неподвижной оси $O$ къ другой, $O_1$, также неподвижной, и, при вращеніи окружности $(Ot)$ съ угловой скоростью $\omega_A$, окружность $(O_1t)$ вращалась бы съ угловой скоростью $(-k\omega_A)$. Вращеніе рычага $OO_1$, при продолжающемся вращеніи окружности $(Ot)$ съ той же угловой скоростью $\omega_A$, извращаетъ эту передачу, переводя ее уже въ каченіе новой окружности $(O_1\pi)$ по неподвижной окружности $(O\pi)$. Прежнее чистое каченіе окружностей $(Ot)$ и $(O_1t)$ одной по другой переводится теперь въ каченіе-скольженіе этихъ же окружностей, при чемъ мѣра этого скольженія будетъ равна $\pi t.\omega_B$, т.-е. $Ot.\omega_A$, и, значитъ, при $\omega_A = const$ будетъ также величиной постоянной. Выясняется, такимъ образомъ, тотъ любопытный фактъ, что, при вращеніи окружности $(Ot)$ съ какой-либо постоянной скоростью $\omega_A$ и рычага $OO_1$ съ любой перемѣнной угловой скоростью $\vartheta$, скорость $v_t$ скольженія окружности $O_1t$ по неподвижной окружности $Ot$ остается неизмѣнной, равной $Ot.\omega_A$, какова бы ни была величина $\vartheta$; скорость $v_t$ мѣняется лишь при измѣненіи радіусовъ начальныхъ окружностей $Ot$ и $O_1t$ и угловой скорости $\omega_A$.

---

Перейдемъ теперь къ *изслѣдованію* основной формулы (56) разсматриваемой передачи, имѣющей видъ:

$$\omega_B = \vartheta(1+k) - k\omega_A, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

при чемъ черезъ $k$ обозначено отношеніе $R_A / R_B$ радіусовъ данныхъ окружностей.

Если $\omega_A = 0$, т.-е. если окружность $O$ (фиг. 343) остается неподвижной, то окружность $O_1$ будетъ вращаться около своего центра $O_1$ съ угловой скоростью $\vartheta(1+k)$, т.-е. съ угловой скоростью рычага $OO_1$, увеличенной въ $(1+k)$ разъ.

Если $\vartheta = 0$, то $\omega_B = -k\omega_A$, какъ и должно быть, ибо въ этомъ частномъ случаѣ мы имѣемъ обыкновенную передачу вращенія отъ одной неподвижной оси къ другой, также неподвижной.

Для того, чтобы $\omega_B$ была равна *нулю*, т.-е. чтобы система **B** могла перемѣщаться *поступательно*, необходимо удовлетворить условію

$$\vartheta(1+k) = k\omega_A,$$

сводящемуся къ условію

$$\vartheta / \omega_A = k / (1+k) = const,$$

показывающему, что въ этомъ частномъ случаѣ *отношеніе угловыхъ скоростей рычага* $OO_1$ *и окружности* **O** *должно оставаться величиной постоянной*, равной, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться, отношенію $R_A / OO_1$.

Если требуется, чтобы $\omega_B$ была равна $\omega_A$, то для этого должно быть все время $\vartheta = \omega_A$, т.-е. рычагъ $OO_1$ долженъ вращаться такъ, какъ если бы онъ былъ жестко связанъ съ окружностью **O**. Величина радіусовъ $R_A$ и $R_B$ не играетъ здѣсь никакой роли.

Если $R_A = R_B$, такъ что $k = 1$, то при $\omega_A = 0$ система **B** будетъ вращаться съ угловой скоростью $2\vartheta$, т.-е. *вдвое скорѣе рычага* $OO_1$. Если не вращается колесо **B**, т.-е. если оно движется поступательно, такъ что $\omega_B = 0$, то $\omega_A = 2\vartheta$, т.-е. колесо **A** будетъ вращаться вдвое быстрѣе рычага $OO_1$.

Никакого труда не представитъ разсмотрѣніе тѣхъ случаевъ, когда каченіе окружности $O_1$ протекаетъ в н у т р и окружности **O**. Формула (56) останется прежней,—въ ней лишь перемѣнится знакъ у $k$, такъ что она приметъ видъ:

$$\omega_B = \vartheta(1-k) + k\omega_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

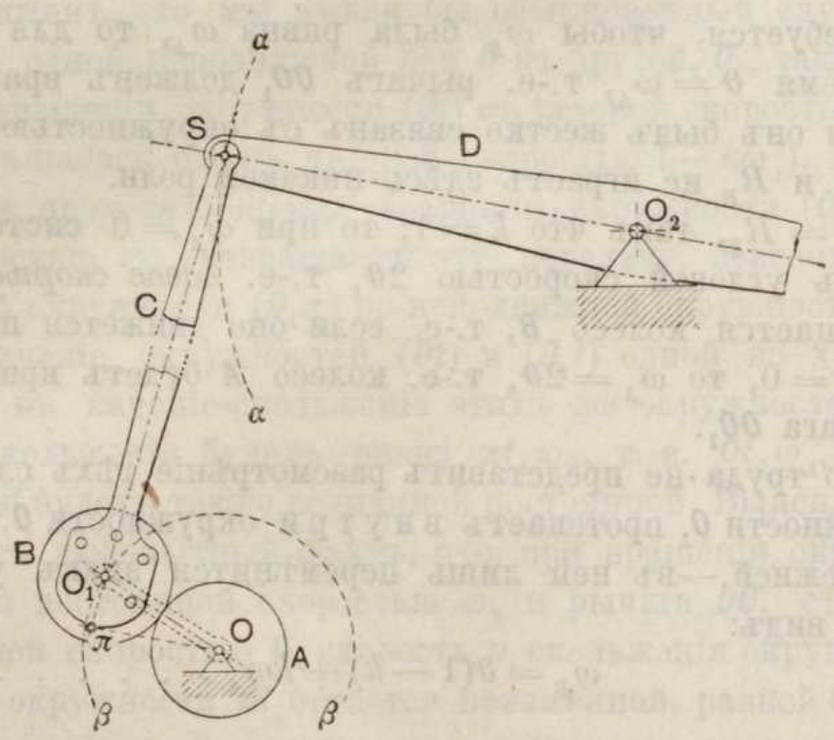
Разсмотримъ теперь нѣсколько наиболѣе интересныхъ случаевъ примѣненія разсмотрѣнной нами эпициклической передачи и нѣкоторыхъ ея видоизмѣненій, и, прежде всего, разсмотримъ такъ называемое *планетное колесо Уатта* (фиг. 346), примѣненное имъ въ его паровыхъ машинахъ для замѣны механизма кривошипа и ползуна, тогда только что изобрѣтеннаго и запатентованнаго. Этотъ механизмъ Уатта состоитъ въ слѣдующемъ:

Къ концу коромысла **D** паровой машины подвѣшенъ на шарнирѣ **S** рычагъ **C**, жестко скрѣпленный съ зубчатымъ колесомъ **B**, вынужденнымъ совершать эпициклическое движеніе при посредствѣ рычага $OO_1$, сидящаго вольно на осяхъ **O** и $O_1$, и зубчатаго колеса **A**, закрѣпленнаго на оси **O** и сцѣпляющагося съ колесомъ **B**. Очевидно, что, при вращеніи рычага $OO_1$, колесо **B** перемѣщается движеніемъ, лишь немного отличнымъ отъ поступательнаго; угловую скорость $\omega_B$ этого дѣйствительнаго движенія колеса **B** можно выразить въ функціи угловой скорости $\vartheta$ рычага $OO_1$ при помощи плана скоростей системы звена $SO_1$, ибо ясно, что $\omega_B$ представляетъ собою въ то же время мгновенную угловую скорость этого звена $S_1O$, несущаго на себѣ колесо **B**. Такъ

какъ звено $SO_1$ представляетъ собою шатунъ обыкновеннаго четырехшарнирнаго механизма $OO_1S_2O$, то планъ скоростей системы $SO_1$ изобразится треугольникомъ $OO_1\pi$, гдѣ $O\pi \parallel O_2S$, а $O_1\pi$ есть продолженіе прямой $SO_1$ (или сама эта прямая). Такимъ образомъ, согласно общему положенію, находимъ, что

$$\omega_B = \vartheta \,.\, \pi O_1 / O_1 S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Такъ какъ $\pi O_1$ перемѣнно, то $\omega_B$, вообще говоря, будетъ также перемѣнной. Для постоянства $\omega_B$ необходимо постоянство произведенія $\vartheta \,.\, \pi O_1$, что на практикѣ не выполняется никогда, почему будемъ




Фиг. 346.

считать $\omega_B$ перемѣнной; полученіе графика угловыхъ скоростей $\omega_B$ въ какомъ-либо предположеніи относительно $\vartheta$,—напримѣръ, при $\vartheta = const$,—никакихъ затрудненій не представляетъ. Въ виду (58) угловая скорость $\omega_A$ системы $A$ выразится, согласно (57), такъ:

$$\omega_A = \vartheta\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{\omega_B}{k} = \vartheta\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{\vartheta}{k}\cdot\frac{\pi O_1}{O_1 S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Уаттъ выполнялъ всегда $R_A = R_B$, такъ что $k = 1$, и формула (59), въ примѣненіи къ его механизмамъ, принимала видъ:

$$\omega_A = \vartheta\left(2 - \frac{\pi O_1}{O_1 S}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Благодаря большимъ размѣрамъ шатуна $SO_1$ сравнительно съ возможными здѣсь значеніями отрѣзка $\pi O_1$ и, значитъ, малой величинѣ

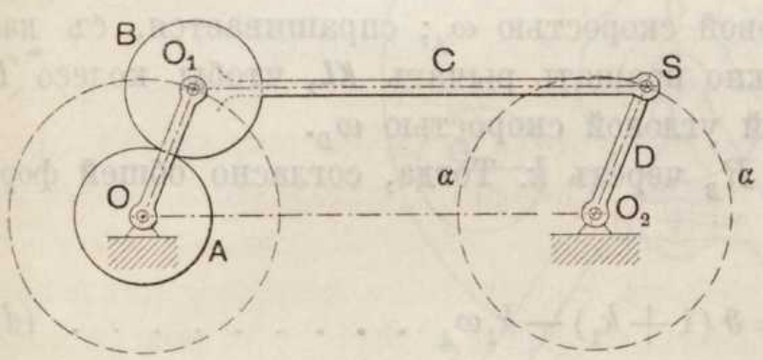
дроби $\pi O_1 / O_1 S$, можно эту дробь отбросить и принять, что, приближенно,

$$\omega_A \infty 2\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Такъ какъ колесо $A$ закрѣплено на своемъ валу $O$, представляющемъ собою въ то же время коренной валъ машины, наглухо, то можно сказать, что валъ $O$ будетъ вращаться здѣсь почти вдвое скорѣе кривошипа $OO_1$.

Этотъ механизмъ называется *планетнымъ колесомъ* потому, что помощью его можно воспроизвести движенія планетъ съ ихъ спутниками, если только мы условимся принимать эти движенія эпициклическими.

Въ томъ частномъ случаѣ разобраннаго механизма, когда шарнирный четыреугольникъ $O_2 S O_1 O$ представляетъ собою *параллельный кривошипъ*, т.-е. когда $OO_2 = O_1 S$ и $OO_1 = O_2 S$ (фиг. 347), шатунъ $C$ будетъ двигаться строго поступательно, ибо полюсъ мгновеннаго вращенія его будетъ все время лежать въ безконечности. Такъ какъ планъ скоростей $OO_1 \pi$ изобразится здѣсь просто отрѣзкомъ $OO_1$, ибо $O\pi$, будучи всегда параллельно $O_2 S$, будетъ здѣсь сливаться съ $OO_1$, то отрѣзокъ $O_1 \pi$ будетъ всегда равенъ нулю, въ виду чего мы всегда будемъ имѣть здѣсь, что



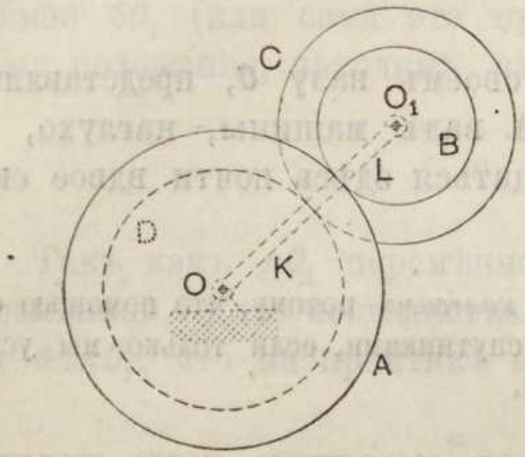
Фиг. 347.

$$\omega_A = 2\vartheta,$$

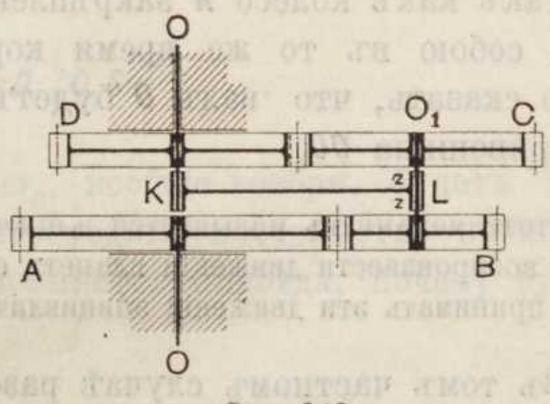
т.-е. что колесо $A$ будетъ вертѣться ровно *вдвое* скорѣе кривошипа $OO_1$ или, что то же, кривошипа $O_2 S$.

Разсмотримъ теперь механизмъ, представляющій собою сочетаніе двухъ механизмовъ основного типа, разобраннаго выше, и служащій для измѣненія угловыхъ скоростей вращенія двухъ валовъ, оси коихъ продолжаютъ другъ друга. Идея этого механизма, схематически изображеннаго на фиг. 348 и 349, крайне проста: имѣются два вала, $O$ и $O'$, оси коихъ лежатъ на одной прямой (фиг. 349), и требуется данную угловую скорость $\omega_A$ вала $O$ преобразовать въ нѣкоторую заданную заранѣе угловую скорость $\omega_D$ вала $O'$. Для этого поступаемъ такъ: на одномъ изъ валовъ,—положимъ, $O'$,—насаживаемъ вольно рычагъ $KL$, несущій на себѣ втулку $zz$ для свободно вращающагося въ ней вала $O_1$, на концахъ коего наглухо насажены зубчатыя колеса $B$ и $C$, при чёмъ колесо $B$ сцѣпляется съ колесомъ $A$, жестко связаннымъ съ ва-

ломъ $O$, а колесо $C$—съ колесомъ $D$, также жестко соединеннымъ съ валомъ $O'$. Пусть валъ $O$, а вмѣстѣ съ нимъ, значитъ, и колесо $A$,




Фиг. 348.




Фиг. 349.

вращается съ нѣкоторой угловой скоростью $\omega_A$; спрашивается, съ какой угловой скоростью $\vartheta$ нужно вращать рычагъ $KL$, чтобы колесо $D$ стало вращаться съ требуемой угловой скоростью $\omega_D$.

Назовемъ отношеніе $R_A / R_B$ черезъ $k$. Тогда, согласно общей формулѣ, можемъ написать, что

$$\omega_B = \vartheta (1 + k_1) - k_1 \omega_A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Съ другой стороны, если $R_D / R_C = k_2$, то

$$\omega_C = \vartheta (1 + k_2) - k_2 \omega_D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Замѣчая теперь, что оба колеса $B$ и $C$ насажены наглухо на одну и ту же ось $O_1$, заключаемъ, что здѣсь всегда

$$\omega_C = \omega_B,$$

въ виду чего, согласно $(d)$ и $(e)$, получаемъ соотношеніе между интересующими насъ угловыми скоростями, а именно:

$$\vartheta(1 + k_1) - k_1 \omega_A = \vartheta(1 + k_2) - k_2 \omega_D.$$

Отсюда находимъ, что

$$k_2 \omega_D = \vartheta(k_2 - k_1) + k_1 \omega_A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Дѣля обѣ части этого уравненія на $k_2$ и обозначая $k_1 / k_2$ черезъ $n$, такъ что

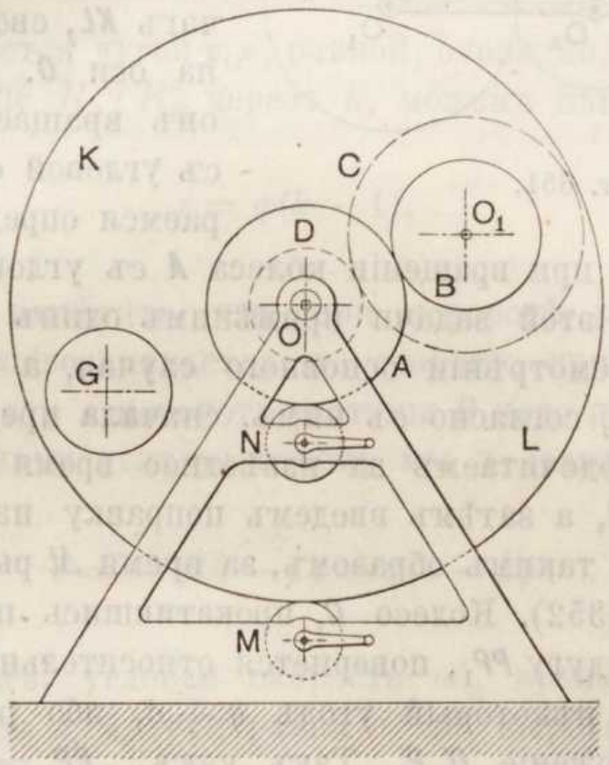
$$k_1 : k_2 = R_A R_C : R_B R_D = n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

можемъ дать уравненію $(f)$ видъ

$$\omega_D = \vartheta(1-n) + n\omega_A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

Подбирая должнымъ образомъ величину и направленіе угловой скорости $\vartheta$, можемъ, при данныхъ $\omega_A$ и $n$, получить любую величину $\omega_D$, т.-е. любое вращеніе вала $O'$.

Ради удобства, рычагъ $KL$ выполняется иногда въ видѣ цѣлаго зубчатаго колеса $KL$ (фиг. 350), приводимаго во вращеніе спеціальнымъ




Фиг. 350.

колесомъ $M$; вращая это послѣднее съ различными скоростями $\omega_M$, получимъ различныя скорости $\vartheta$, ибо

$$\vartheta = \omega_M R_M / R_{KL} = \omega_M k_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

Въ этомъ случаѣ формулѣ $(h)$ можно дать видъ:

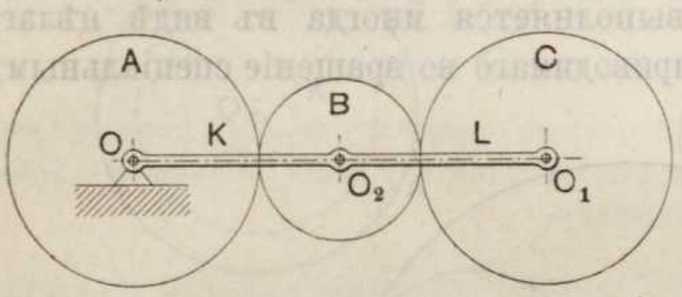
$$\omega_D = k_3\omega_M(1-n) + n\omega_A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (l)$$

Колесо $A$ приводится во вращеніе помощью колеса $N$. Буквой $G$ обозначенъ противовѣсъ, посаженный на колесо $KL$ наглухо для уравновѣшенія системы колесъ ($B$, $C$).—Разсмотрѣнный механизмъ находитъ себѣ примѣненіе въ нѣкоторыхъ современныхъ станкахъ (ткацкихъ и др.).

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію болѣе сложныхъ типовъ эпициклическихъ зацѣпленій,—тѣхъ именно, когда взаимодѣйствіе между

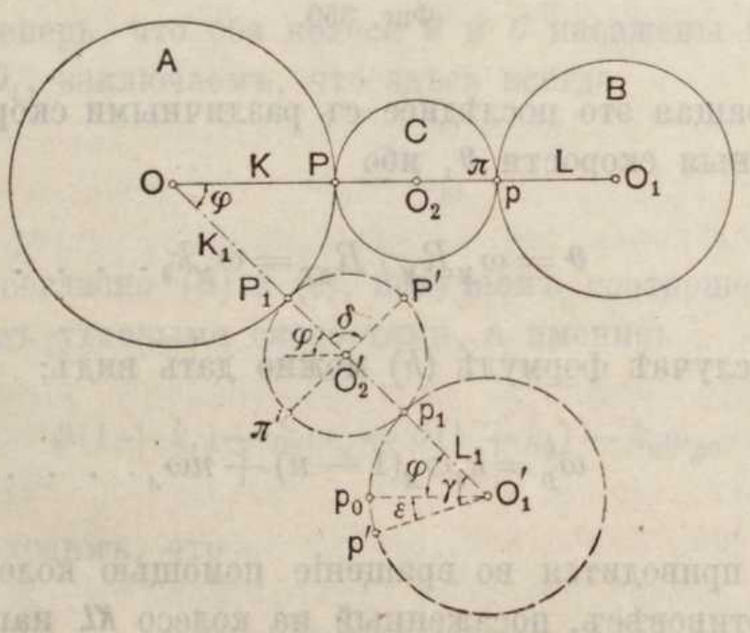
двумя данными зубчатыми колесами устанавливается не непосредственно, а при помощи одного или нѣсколькихъ зубчатыхъ колесъ, какъ это показано на фиг. 351—354. Разберемъ сначала простѣйшій случай такого сочетанія, когда число промежуточныхъ колесъ равно одному.

Предположимъ, такимъ образомъ, что на оси $O$ вращается колесо $A$ (фиг. 351), воздѣйствующее на колесо $B$ при помощи промежуточнаго колеса $C$, сцѣпляющагося съ ними обоими. Оси $O_1$ и $O_2$ колесъ $B$ и $C$ несетъ на себѣ рычагъ $KL$, свободно вращающійся на оси $O$. Предположивъ, что онъ вращается вокругъ оси $O$ съ угловой скоростью $\vartheta$, постараемся опредѣлить угловую скорость $\omega_B$ колеса $B$ при вращеніи колеса $A$ съ угловой скоростью $\omega_A$.



Фиг. 351.

Для рѣшенія этой задачи примѣнимъ одинъ изъ пріемовъ, разобранныхъ при разсмотрѣніи основного случая, а именно, пріемъ сложенія движеній, и, согласно съ нимъ, сначала предположимъ колесо $A$ неподвижнымъ, подсчитаемъ за извѣстное время $\Delta t$ соотвѣтствующій поворотъ колеса $B$, а затѣмъ введемъ поправку на истинное движеніе колеса $A$.—Пусть, такимъ образомъ, за время $\Delta t$ рычагъ $KL$ повернулся на уголъ $\varphi$ (фиг. 352). Колесо $C$, прокатившись по неподвижному теперь колесу $A$ на дугу $PP_1$, повернется относительно своего начальнаго положенія $O_2$ на нѣкоторый уголъ $\varphi + \delta$, ибо радіусъ $O_2P$ займетъ теперь новое положеніе $O'_2P'$. Такъ какъ $\smile PP_1 = \smile P'P_1$, то $\delta = k_1\varphi$,



Фиг. 352.

гдѣ черезъ $k_1$, обозначено отношеніе $R_A / R_C$. Такимъ образомъ, уголъ $\varphi + \delta$ поворота колеса $C$ выражается такъ

$$\varphi + \delta = \varphi(1 + k_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

Вращаясь около своей оси $O_2$, колесо $C$ заставитъ повернуться и соприкасающееся съ нимъ колесо $B$, и, такъ какъ начальная точка касанія $\pi$, лежащая на одномъ діаметрѣ съ точкой $P$, займетъ теперь положеніе $\pi'$, то точка $p$ окружности $O_1$, совпадавшая съ $\pi$, займетъ теперь положеніе $p'$, такъ что радіусъ $O_1p$ перейдетъ въ $O'_1p'$, и система $B$ повернется всего на уголъ $p_0O'_1p'$, гдѣ $p_0O'_1 \parallel pO_1$. Обозначивъ этотъ уголъ черезъ $\varepsilon$, находимъ, что

$$\varepsilon = \gamma - \varphi,$$

гдѣ уголъ $\gamma$ измѣряется дугой $p_1p'$, равной, очевидно, дугѣ $PP_1$. Поэтому, обозначивъ отношеніе $R_A / R_B$ черезъ $k$, можемъ написать, что $\gamma = k\varphi$, такъ что

$$\varepsilon = \varphi(k - 1).$$

Надо, однако, замѣтить, что, при поворотѣ рычага $KL$ въ одну сторону, колесо $B$ поворачивается въ сторону, прямо ему противоположную, такъ что углу $\varepsilon$ поворота системы $B$ надо приписывать знакъ, противоположный знаку угла $\varphi$, почему мы и должны написать, что

$$\varepsilon = -\varphi(k - 1) = \varphi(1 - k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

Такимъ образомъ, угловая скорость $\omega'_B$ вращенія колеса $B$ при неподвижномъ колесѣ $A$, будучи равна $d\varepsilon / dt$, выразится такъ:

$$\omega'_B = d\varepsilon / dt = (1 - k) \cdot d\varphi / dt = \vartheta(1 - k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

Остановимъ теперь рычагъ $KL$ и станемъ вращать колесо $A$ съ должной угловой скоростью $\omega_A$. Тогда колесо $B$ станетъ вращаться съ нѣкоторой угловой скоростью $\omega''_B$, выражающейся, очевидно, такъ:

$$\omega''_B = +k\omega_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

Такимъ образомъ, оказывается, что дѣйствительная абсолютная угловая скорость системы $B$, $\omega_B$, выражается здѣсь такъ:

$$\omega_B = \omega'_B + \omega''_B = \vartheta(1 - k) + k\omega_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Сравнивая эту формулу съ основной формулой (57), видимъ, что введеніе промежуточнаго колеса $C$ отразилось *лишь на знакѣ* коэффиціента $k$, измѣнивъ его на противоположный, что совпадаетъ съ измѣненіемъ смысла вращенія колеса $B$; на величинѣ же этого коэффиціента введеніе колеса $C$ не отразилось совсѣмъ. Отсюда, далѣе, слѣдуетъ,

что введеніе еще одного промежуточнаго колеса, увеличивающее общее число колесъ до 4-хъ, вернетъ формулу (62) къ начальной формулѣ (57); введеніе 5-го дастъ опять формулу (62), и т. д. Однимъ словомъ, можно сказать, что если число всѣхъ колесъ четное, то мы будемъ имѣть формулу (57), при нечетномъ же получимъ формулу (62). Принимая это обстоятельство во вниманіе, можемъ обѣ эти формулы соединить въ одну, написавъ, что

$$\omega_B = \vartheta - (-1)^n k(\omega_A - \vartheta), \quad \ldots\ldots\ldots (63)$$

гдѣ $n$ есть число всѣхъ колесъ, участвующихъ въ зацѣпленіи, считая въ томъ числѣ колеса $A$ и $B$, а $k$—отношеніе $R_A / R_B$ радіуса крайняго колеса $A$, сидящаго на неподвижной оси $O$, къ радіусу $R_B$ другого крайняго колеса, сидящаго на подвижной оси $O_1$.

Пусть $n = 3$, такъ что

$$\omega_B = \vartheta + k(\omega_A - \vartheta) = \vartheta(1-k) + k\omega_A \quad \ldots\ldots (r)$$

Если колесо $A$ неподвижно, такъ что $\omega_A = 0$, то

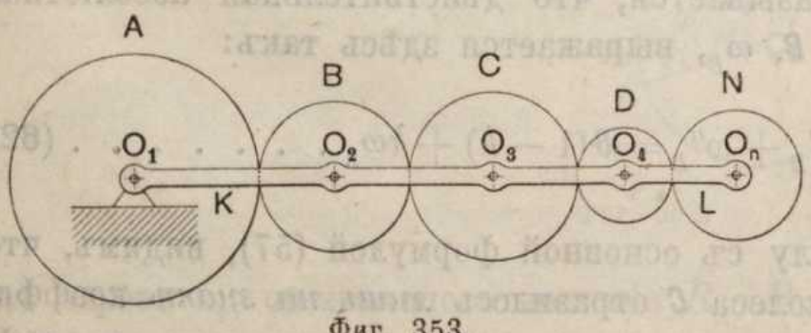
$$\omega_B = \vartheta(1-k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (s)$$

Если, вдобавокъ, колеса $A$ и $B$ одинаковы, такъ что $R_A = R_B$ и, значитъ, $k = R_A / R_B = 1$, то

$$\omega_B = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (t)$$

Такимъ образомъ, въ этомъ частномъ случаѣ колесо $B$ будетъ перемѣщаться только *поступательно*. Это есть случай такъ называемаго *парадокса Ферюссона*; механизмъ, его осуществляющій, изображенъ на фигурѣ 351,—здѣсь $R_A = R_B$. Если колесо $B$, равное колесу $A$, замѣнимъ какимъ-нибудь другимъ колесомъ $D$, неравнымъ $A$, то это колесо $D$ будетъ обладать угловой скоростью $\omega_D$, подсчитываемой по формулѣ $(s)$ и направленной согласно $\vartheta$, если $k < 1$, т.-е. если $R_D > R_A$, и противоположно $\vartheta$, если $k > 1$, т.-е. если колесо $D$ меньше колеса $A$.

Подсчетъ угловыхъ скоростей сколь угодно сложныхъ сочетаній разсмотрѣннаго выше типа весьма удобно выполняется при помощи теоремы о составленіи абсолютной угловой скорости изъ угловыхъ скоростей переноснаго и относительнаго движеній, какъ это было разсмотрѣно уже выше. Выполняется здѣсь этотъ подсчетъ такъ:



Фиг. 353.

Пусть на оси $O$ вращается зубчатое колесо $A$ и, независимо отъ него, рычагъ $KL$ (фиг. 353), несущій на себѣ оси $O_2$, $O_3$, ..., $O_n$ зубчатыхъ колесъ $B$, $C$, ..., $N$, сцѣпляющихся другъ съ другомъ, при чемъ колесо $B$ сцѣпляется съ колесомъ $A$. Пусть

число всѣхъ колесъ равно $n$. Требуется опредѣлить зависимость между угловыми скоростями $\omega_N$, $\omega_A$ и $\vartheta$.

Для этого, согласно относящейся сюда схемѣ, предполагаемъ колесо **N** *закрѣпленнымъ наглухо на рычагѣ* **KL**. Такъ какъ скольженіе между всѣми этими колесами проявиться не можетъ, то такое закрѣпленіе колеса **N** поведетъ за собою закрѣпленіе на томъ же рычагѣ всѣхъ остальныхъ колесъ: **D**,..., **A**. Такимъ образомъ, при вращеніи рычага **KL** съ угловой скоростью $\vartheta$, съ тою же угловой скоростью будетъ вращаться вся система колесъ (**A**—**N**), а значитъ, и колесо **A**. Итакъ, при переносномъ движеніи колеса **N** угловая скоростъ $\omega'_N$ его будетъ равна $\vartheta$, такъ что

$$\omega'_N = \omega'_A = \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (u)$$

Замѣчая теперь, что колесо **A** должно обладать угловой скоростью $\omega_A$, заключаемъ, что въ относительномъ движеніи, т.-е. при неподвижномъ рычагѣ, оно должно имѣть угловую скорость $(\omega_A - \vartheta)$. Отсюда слѣдуетъ, что въ относительномъ движеніи колеса **N** угловая скорость $\omega''_N$ его будетъ равна

$$\omega''_N = (-1)^{n-1} k(\omega_A - \vartheta),$$

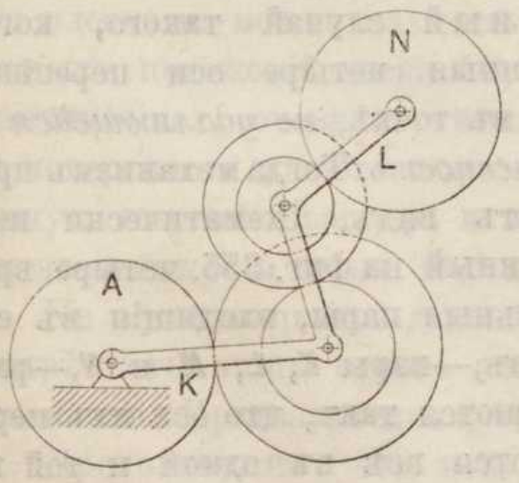
гдѣ $k = R_A / R_B$. Замѣчая теперь, что абсолютная угловая скорость $\omega_N$ колеса **N** выражается суммой $\omega'_N + \omega''_N$, находимъ, что

$$\omega_N = \vartheta + (-1)^{n-1} k(\omega_A - \vartheta),$$

что можетъ быть переписано еще такъ:

$$\omega_N = \vartheta - (-1)^n k(\omega_N - \vartheta),$$

—получилась та же формула (63). Оказывается, такимъ образомъ, что число $n$ всѣхъ колесъ непосредственно вліяетъ *только на знакъ* коэффиціента $k$; величина же его опредѣляется величиной радіусовъ крайнихъ колесъ. Такимъ образомъ, типичными формами этихъ эпициклическихъ соединеній слѣдуетъ признать сочетаніе изъ двухъ колесъ (фиг. 343) и трехъ (фиг. 351); сочетанія съ большимъ числомъ колесъ являются эквивалентными или первому изъ этихъ основныхъ сочетаній, или второму. Никакого труда не составитъ подсчетъ угловой скорости любого изъ промежуточныхъ колесъ ряда **A**—**N** (фиг. 353),—стоитъ лишь принять его за крайнее колесо и опредѣлить его номеръ.



Фиг. 354.

Въ сочетаніяхъ, болѣе сложныхъ по своему внѣшнему виду, подобныхъ, напримѣръ, сочетанію, изображенному на фиг. 354, учетъ угловыхъ скоростей также не представитъ никакихъ затрудненій; ф о р м а рычага **KL** не имѣетъ никакого значенія. Подсчетъ удобнѣе всего вести путемъ разбивки дѣйствительнаго движенія на движенія переносное и относительное. Результатъ выразится формулой, тождественной съ формулой (63).

Этими соображеніями мы закончимъ какъ текущій параграфъ, такъ и статью о плоскомъ движеніи вообще, и перейдемъ къ разсмотрѣнію *движеній въ пространствѣ*, при чемъ, по необходимости, ограничимся лишь статьей о передачѣ движенія отъ одной неподвижной оси къ другой, также неподвижной, и краткой статьей о винтовой передачѣ.

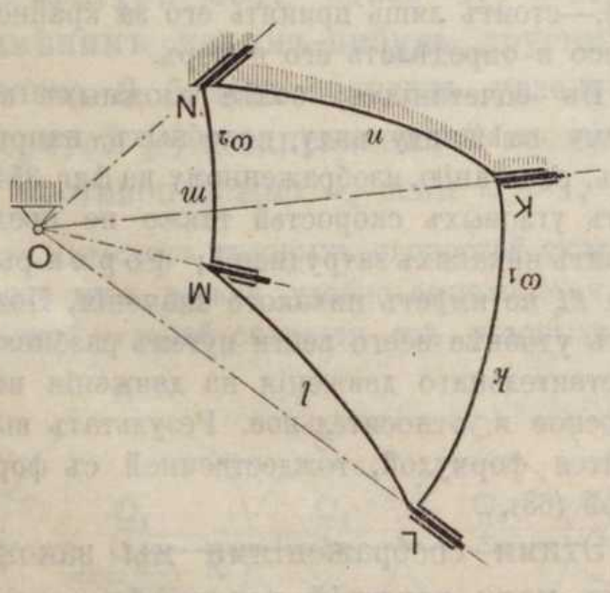
## 2. Пространственные механизмы.

Въ настоящей статьѣ мы не имѣемъ въ виду излагать въ полномъ объемѣ основанія кинематики въ пространствѣ, отчасти потому, что это вывело бы насъ за предѣлы курса, а отчасти потому, что пространственные механизмы на практикѣ примѣняются много рѣже плоскихъ. Въ виду этого мы ограничимся изложеніемъ лишь самаго необходимаго, причемъ тамъ, гдѣ это будетъ умѣстно, будемъ прибѣгать къ аналогіямъ съ плоскими механизмами, общая теорія коихъ изложена выше достаточно полно. Прежде всего мы разберемъ общую теорію четырехзвенной пространственной цѣпи, ограничиваясь при этомъ лишь самымъ необходимымъ, а затѣмъ разберемъ вопросъ о передачѣ движенія между непараллельными осями, пересѣкающимися и непересѣкающимися. Въ отдѣльную группу будутъ вынесены механизмы, составленные изъ сосныхъ винтовыхъ паръ,—разборомъ ихъ мы и закончимъ изложеніе нашего курса.

### A. Четырехшарнирный сферическій механизмъ и частные виды его.

#### § 46. Четырехшарнирный сферическій механизмъ. Шарниръ Гука. Муфта Губэ.

Плоскій четырехшарнирный механизмъ, составленный изъ четырехъ вращательныхъ паръ и детально, во всѣхъ наиболѣе важныхъ модификаціяхъ его, разобранный въ рядѣ предыдущихъ параграфовъ, отличается, между прочимъ, тѣмъ основнымъ свойствомъ, что оси всѣхъ четырехъ вращательныхъ паръ его между собою *параллельны*, т.-е. пересѣкаются въ нѣкоторой безконечно-удаленной точкѣ. Случай этотъ представляетъ собою лишь частный случай такого, когда указанныя четыре оси пересѣкаются въ точкѣ, *не удаляющейся въ безконечность*. Тогда механизмъ принимаетъ видъ, схематически изображенный на фиг. 355: четыре вращательныя пары, входящія въ его составъ,—пары ***K***, ***L***, ***M*** и ***N***,—располагаются такъ, что оси ихъ пересѣкаются всѣ въ одной и той же точкѣ ***O***. Соединивъ элементы этихъ паръ хотя бы, напримѣръ, такъ, какъ это изображено на чертежѣ, гдѣ шипы паръ ***L*** и ***M***, будучи жестко связаны другъ съ другомъ, образуютъ звено $l$, а соединенныя воедино втулки паръ ***K*** и ***N*** даютъ



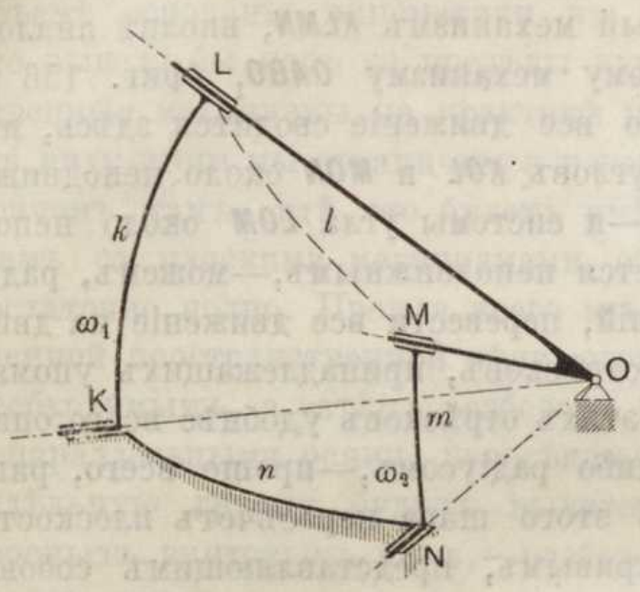
Фиг. 355.

звено $n$, звенья же $k$ и $m$ несутъ на себѣ по шипу и втулкѣ соотвѣтствующихъ паръ, получимъ шарнирную систему ***KLMN***, которая, будучи поставлена на какое-либо звено,—положимъ, на звено $n$,—дастъ намъ четырехшарнирный пространственный механизмъ ***KLMN***, вполнѣ аналогичный плоскому четырехшарнирному механизму $OABO_1$ (фиг. 156 и слѣд.). Принимая во вниманіе, что все движеніе сводится здѣсь, въ сущности, къ вращенію системъ угловъ ***KOL*** и ***MON*** около неподвижныхъ сторонъ ихъ,—осей ***KO*** и ***NO***,—и системы угла ***LOM*** около неподвижной точки ***O***,—уголъ ***KON*** остается неподвижнымъ,—можемъ, ради упрощенія дальнѣйшихъ изслѣдованій, перевести все движеніе на движеніе нѣкоторыхъ опредѣленныхъ отрѣзковъ, принадлежащихъ упомянутымъ системамъ. Для полученія этихъ отрѣзковъ удобнѣе всего описать изъ центра ***O*** шаръ какимъ-либо радіусомъ,—проще всего, равнымъ единицѣ. Тогда поверхность этого шара пересѣчетъ плоскости нашихъ угловъ по нѣкоторымъ кривымъ, представляющимъ собою, очевидно, дуги большихъ круговъ этого шара. Эти дуги мы затѣмъ и принимаемъ за стороны—звенья нашего четырехугольника. Предположимъ, что механизмъ, изображенный на фиг. 355, и представляетъ собою такой именно сферическій четырехшарнирный механизмъ, звенья коего (или оси ихъ) изображаются дугами большихъ круговъ шара съ центромъ въ точкѣ ***O*** пересѣченія осей вращательныхъ паръ нашего механизма. Это представленіе весьма удобно, ибо позволяетъ намъ совершенно отвлечься отъ разсмотрѣнія вида, формы и дѣйствительнаго расположенія звеньевъ нашего пространственнаго механизма, а кромѣ того, такимъ путемъ достигается извѣстная аналогія между плоскимъ и пространственнымъ четырехугольниками: если тамъ все движеніе происходило въ плоскости, то здѣсь оно протекаетъ на шаровой поверхности опредѣленнаго центра и радіуса. Сообразно съ этимъ, изученіе движенія звеньевъ такого сферическаго четырехзвеннаго механизма можно выполнить совершенно аналогично тому, какъ это было сдѣлано для плоскаго: можно находить полюсы мгновеннаго вращенія для различныхъ положеній звена ***LM***, обѣ полодіи движенія этого звена, представляющіяся, очевидно, нѣкоторыми кривыми, цѣликомъ лежащими на поверхности нашего шара; можно, далѣе, вывести теорему, аналогичную теоремѣ Грасгофа и выясняющую условія возможности вращенія звеньевъ $k$ и $m$ на $360^0$ вокругъ ихъ осей вращенія, и т. д.

Не останавливаясь дальше на этомъ вопросѣ, мы ограничимся разсмотрѣніемъ лишь одного частнаго случая вышеупомянутаго общаго механизма. Предварительно, однако, замѣтимъ слѣдующее:

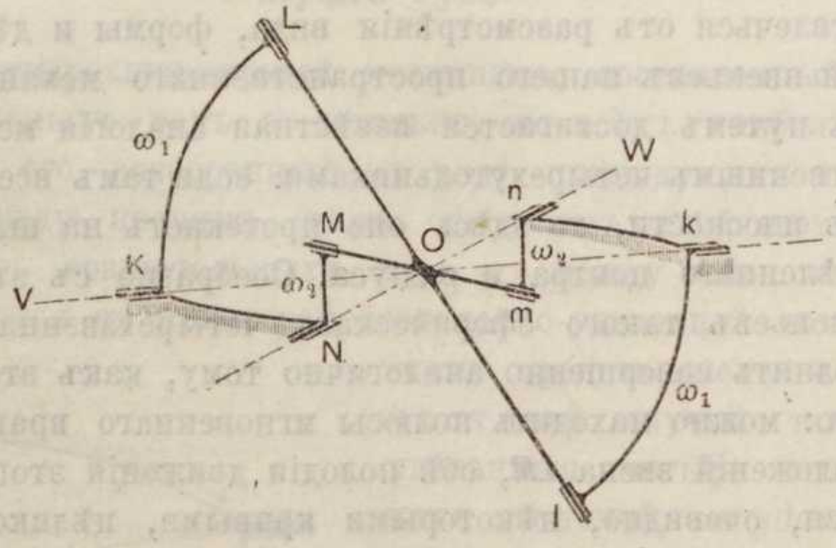
Предположимъ, что всѣ дуги ***KL***, ***LM***, ***MN*** и ***NK*** нашего механизма выполнены матеріально въ видѣ нѣкоторыхъ стержней, изогнутыхъ соотвѣтствующимъ образомъ. Замѣчая теперь, что форма и видъ стержней, въ сущности, никакого значенія не имѣютъ, подобно тому, какъ это имѣло мѣсто въ случаѣ плоскаго четыреугольника,—отъ звена требуется лишь одно: чтобы оно представляло собою жесткое соединеніе

соотвѣтствующихъ элементовъ двухъ сосѣднихъ паръ,—мы, имѣя въ виду дальнѣйшее, дадимъ звену **LM** форму жесткаго угла **LOM**, составленнаго изъ двухъ стержней **LO** и **MO**, оси которыхъ пересѣкаются въ центрѣ **O**. Тогда механизмъ получитъ видъ, изображенный на фиг. 356. Очевидно, что, при движеніи звеньевъ **KL** и **MN**, уголъ **LOM** будетъ перемѣщаться такъ, что вершина его будетъ оставаться все время въ одной и той же точкѣ **O**,—центрѣ нашего шара,—и вращеніе звена **KL** съ угловой скоростью $\omega_1$ вызоветъ вращеніе звена **MN** съ тою же угловою скоростью $\omega_2$, что и въ случаѣ основного механизма (фиг. 355).




Фиг. 356.

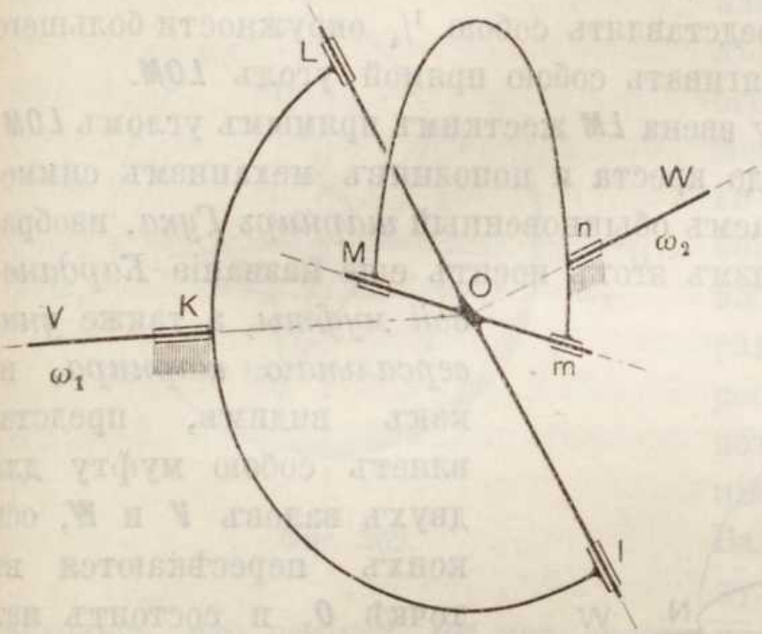
Продолживъ стороны жесткаго угла **LOM** по другую сторону вершины его **O**, дополнимъ нашъ механизмъ механизмомъ, ему симметричнымъ относительно центра **O**, какъ это показано на фиг. 357. Уголъ




Фиг. 357.

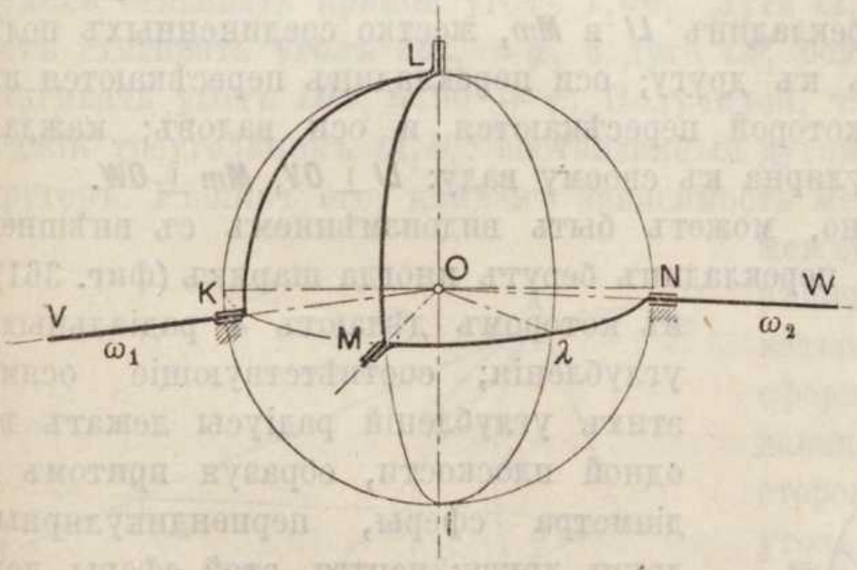
**LOM** перейдетъ въ жесткій крестъ **OL/Mm**,—косой или прямой, что зависитъ отъ величины этого угла,—а оси вращенія каждой пары симметричныхъ звеньевъ вытянутся въ одну прямую, проходящую черезъ центръ **O**; такъ, напримѣръ, оси **KO** и **kO** дадутъ прямую **KOk**, а оси **NO** и **nO**—прямую **NOn**, при чемъ обѣ эти прямыя будутъ, очевидно, неподвижны. Ясно, далѣе, что вращеніе звена **KL** съ угловой скоростью $\omega_1$ вызоветъ вращеніе симметричнаго ему звена **kl** съ угловой скоростью, равной $\omega_1$ и одинаково съ ней направленной; подобнымъ же образомъ вращеніе звена **MN** вызоветъ тождественное ему вращеніе звена **mn**. Замѣчая теперь, что сторона **lO** нашего креста вращается

около той же оси *KOk* и съ той же угловой скоростью $\omega_1$, что и сторона *LO*, заключаемъ, что звено *kl* можно отбросить совсѣмъ, закрѣпивъ втулку пары *l* на соотвѣтственно продолженномъ звенѣ *KL*, какъ это показано на фиг. 358. По тѣмъ же соображеніямъ можно отбросить звено *MN*, закрѣпивъ втулку пары *M* на продолженіи звена *mn*. Такъ получится механизмъ, изображенный на фиг. 358 и представляющій собою *обобщенный шарниръ Гука*. Условія возможности совершенія крестовинами *Ll* и *Mm* полныхъ оборотовъ вокругъ осей *VK* и *Wn* могутъ быть получены при помощи обобщенной теоремы Грасгофа, о которой было упомянуто выше.



Фиг. 358.

На практикѣ нашелъ себѣ примѣненіе лишь тотъ частный видъ его, который получается изъ такого основного, въ которомъ углы *KOL*, *LOM* и *MON* равны каждый 90° (фиг. 359). Уголъ *KON* между осями *V* и *W* вращенія звеньевъ *KL* и *NM* можетъ имѣть различныя значенія, но очевидно, что, при значеніи $\angle KON = 90^0$, когда радіусъ *OM* совпадаетъ съ радіусомъ *OK*, а звено *ML*—съ звеномъ *KL*, вращеніе этого звена *KL* не вызоветъ никакого движенія звена *MN*,— послѣднее будетъ оставаться неподвижнымъ, и механизмъ фактически исчезнетъ, перейдя въ простую вращательную пару. Можно поэтому сказать, что это будетъ одинъ изъ случаевъ мертваго положенія такого механизма.

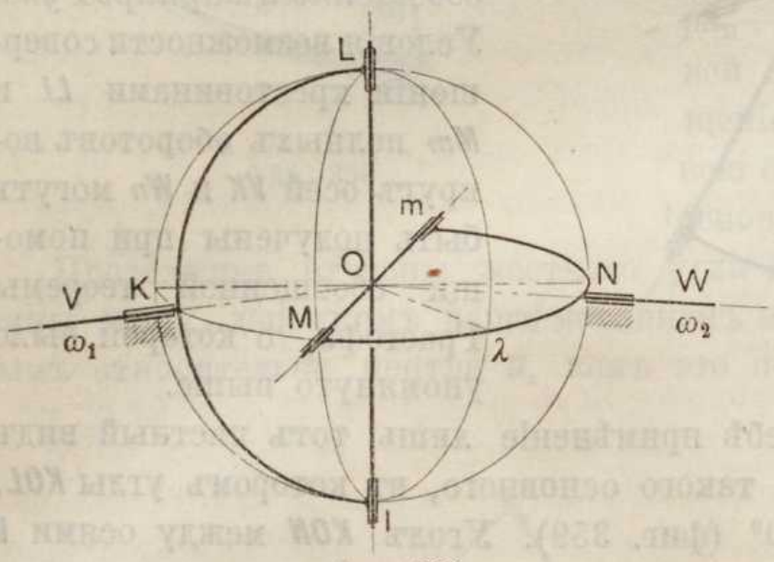


Фиг. 359.

Предположимъ, однако, что этотъ уголъ *KON* больше 90°, какъ это обычно и бываетъ на дѣлѣ. Ясно, что при вращеніи вала *V* звено *LM* станетъ двигаться такъ, что точка *L* его, лежащая на поверхности пара, станетъ перемѣщаться по дугѣ *Lλl* большого круга, перпендику-

лярнаго оси ***VKO***, а точка ***M***—по дугѣ ***LMl*** большого круга, перпендикулярнаго оси ***WNO***. Уголъ между этими двумя кругами, измѣряемый линейнымъ угломъ ***MOλ***, будетъ равенъ углу между осями ***V*** и ***W***, если направленія этихъ послѣднихъ мы будемъ брать по одну и ту же сторону относительно плоскостей ***LMl*** и ***Lλl***. Замѣтимъ, наконецъ, что дуга ***LM*** все время будетъ представлять собою $^1/_4$ окружности большого круга и постоянно будетъ стягивать собою прямой уголъ ***LOM***.

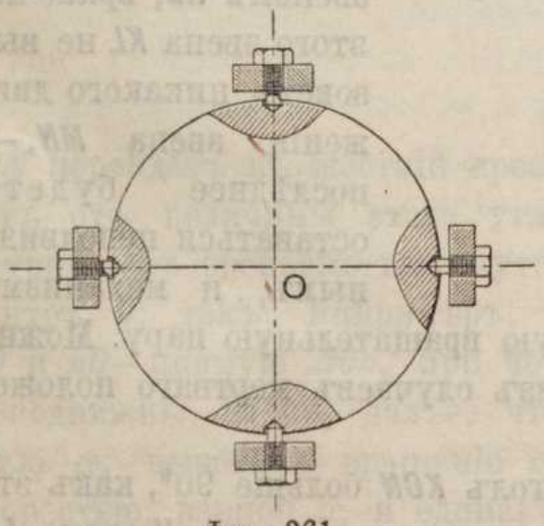
Произведя теперь замѣну звена ***LM*** жесткимъ прямымъ угломъ ***LOM***, дополнивъ этотъ послѣдній до креста и пополнивъ механизмъ симметричными дугами, мы получаемъ обыкновенный *шарниръ Гука*, изображенный на фиг. 360. Механизмъ этотъ носитъ еще названіе *Кардановой муфты*, а также *универсальнаго шарнира*, и, какъ видимъ, представляетъ собою муфту для двухъ валовъ ***V*** и ***W***, оси коихъ пересѣкаются въ точкѣ ***O***, и состоитъ изъ собственно муфты ***LlMm*** и двухъ дугъ (вилъ) ***LKl*** и ***MNm***, закрѣпленныхъ каждая на своемъ валу и несущихъ на своихъ концахъ втулки для шиповъ муфты.



Фиг. 360.

Эта послѣдняя устраивается въ видѣ двухъ перекладинъ ***Ll*** и ***Mm***, жестко соединенныхъ подъ прямымъ угломъ другъ къ другу; оси перекладинъ пересѣкаются въ той же точкѣ ***O***, въ которой пересѣкаются и оси валовъ; каждая перекладина перпендикулярна къ своему валу: ***Ll*** $\perp$ ***OV***, ***Mm*** $\perp$ ***OW***.

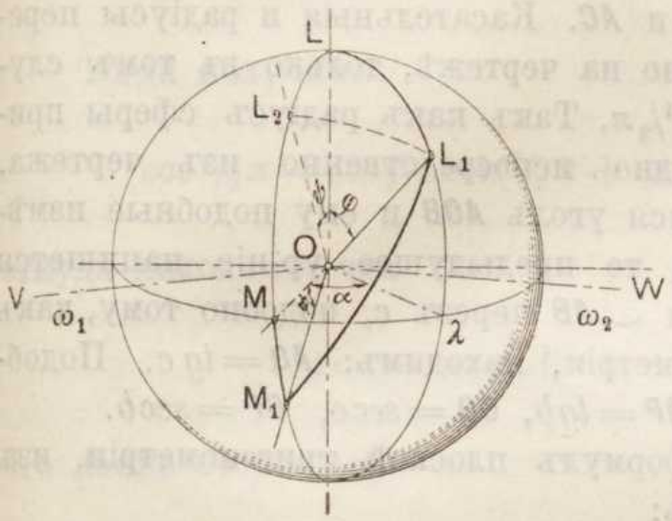
Механизмъ, конечно, можетъ быть видоизмѣняемъ съ внѣшней стороны; напр., вмѣсто перекладинъ берутъ иногда шарикъ (фиг. 361), въ которомъ дѣлаютъ 4 радіальныхъ углубленія; соотвѣтствующіе осямъ этихъ углубленій радіусы лежатъ въ одной плоскости, образуя притомъ 2 діаметра сферы, перпендикулярные другъ другу; центръ этой сферы долженъ лежать въ точкѣ ***O***. Въ упомянутыя углубленія входятъ шипики каждаго изъ валовъ. Сущность дѣйствія остается, конечно, та же, что и прежде.



Фиг. 361.

Перейдемъ теперь къ выясненію зависимости между угловыми скоростями $\omega_1$ и $\omega_2$ вращенія валовъ ***V*** и ***W***.

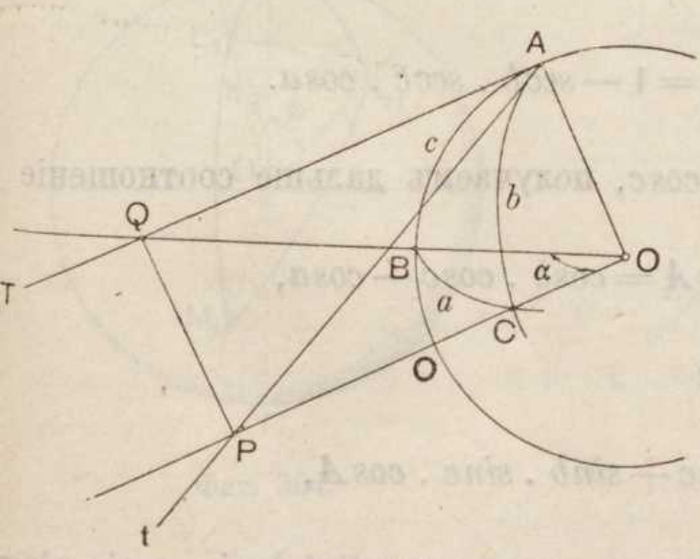
Примемъ за начальное положеніе механизма то, когда ось одной изъ поперечинъ,—положимъ, **LOl**,—стоитъ перпендикулярно къ плоскости осей **VOW**; очевидно, что другая ось, **MOm**, будетъ въ этотъ моментъ лежать въ самой этой плоскости **VOW**. Чтобы не имѣть дѣла съ цѣлыми діаметрами, мы ограничимся разсмотрѣніемъ движенія ихъ половинъ,—радіусовъ **LO** и **MO**. Предположимъ, такимъ образомъ, что при вращеніи вала **V** въ продолженіе нѣкотораго времени $\tau$ съ угловой скоростью $\omega_1$ радіусъ **OL** перешелъ изъ своего начальнаго положенія **OL** въ новое $OL_1$ (фиг. 362). Валъ **W** за это время повернулся съ угловой скоростью $\omega_2$ настолько, что радіусъ **OM** изъ своего начальнаго положенія **OM** перешелъ въ новое $OM_1$. Обозначимъ уголъ $LOL_1$ черезъ $\varphi$, а $\angle MOM_1$—черезъ $\psi$. Согласно съ этимъ, имѣемъ соотношенія




Фиг. 362.

$$\omega_1 = d\varphi/dt,\ \omega_2 = d\psi/dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Дуга **LM** займетъ теперь положеніе $L_1M_1$, при чемъ попрежнему будетъ стягивать прямой уголъ $L_1OM_1$. Дуга $LL_1$ большого круга **Lλl** будетъ стягивать уголъ $LOL_1 = \varphi$, а дуга $LM_1$ большого круга **LMl** будетъ стягивать уголъ $LOM_1 = 90^0 + \psi$. Получился, такимъ образомъ, сферическій треугольникъ $LL_1M_1$, составленный дугами нѣкоторыхъ большихъ круговъ. Рѣшивъ его, найдемъ зависимость между $\varphi$ и $\psi$, а затѣмъ и между $\omega_1$ и $\omega_2$. Для этого рѣшенія придется воспользоваться одной изъ формулъ сферической тригонометріи, дающей выраженіе косинуса стороны сферическаго треугольника. Выводомъ ея мы теперь и займемся.




Фиг. 363.

Пусть изъ точки **O**, какъ изъ центра, описана сфера радіусомъ, равнымъ единицѣ, и пусть на этой сферѣ лежитъ сферическій треугольникъ **ABC** (фиг. 363), дуги котораго **AB**, **BC** и **AC** представляютъ собою дуги большихъ круговъ. Положимъ, наконецъ, что двѣ изъ этихъ дугъ, напримѣръ, **AB**

и $AC$, не превышаютъ четверти окружности большого круга, т.-е. меньше $^1/_2\pi$.

Проведемъ радіусы $OA$, $OB$ и $OC$ и два послѣдніе продолжимъ до пересѣченія въ точкахъ $Q$ и $P$ съ касательными $AT$ и $At$, проведенными въ вершинѣ $A$ къ сторонамъ $AB$ и $AC$. Касательныя и радіусы пересѣкутся такъ, какъ это изображено на чертежѣ, только въ томъ случаѣ, если дуги $AB$ и $AC$ меньше $^1/_2\pi$. Такъ какъ радіусъ сферы принятъ за единицу, то, какъ видно непосредственно изъ чертежа, $AQ = tg \angle AOB$; если же мы условимся уголъ $AOB$ и ему подобные измѣрять дугами, ихъ стягивающими, то предыдущее ур-ніе напишется такъ: $AQ = tg \smile AB$ или, обозначая $\smile AB$ черезъ $c$, подобно тому, какъ это дѣлается въ плоской тригонометріи, находимъ: $AQ = tg\, c$. Подобнымъ же образомъ мы найдемъ: $AP = tg\, b$, $OQ = sec\, c$, $OP = sec\, b$.

Кромѣ того, на основаніи формулъ плоской тригонометріи, изъ треугольниковъ $OPQ$ и $APQ$ имѣемъ:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\,OP \,.\, OQ \cos a,$$

и

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2\,AP \,.\, AQ \cos A.$$

Сравнивая эти выраженія между собою и съ выведенными выше равенствами, получаемъ уравненія:

$$tg^2 b + tg^2 c - 2\, tg b \,.\, tg c \,.\, \cos A = sec^2 b + sec^2 c - 2\, sec b \,.\, sec c \,.\, \cos a.$$

Замѣняя $sec^2 x$ черезъ $(1 + tg^2 x)$ и сокращая, находимъ, далѣе, соотношеніе

$$-2\, tg b \,.\, tg c \,.\, \cos A = 2 - 2\, sec b \,.\, sec c \,.\, \cos a,$$

или, что то же, соотношеніе

$$-tg b \,.\, tg c \,.\, \cos A = 1 - sec b \,.\, sec c \,.\, \cos a.$$

Умножая обѣ части на $\cos b \cos c$, получаемъ дальше соотношеніе

$$-\sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A = \cos b \,.\, \cos c - \cos a,$$

дающее окончательную формулу:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A,$$

говорящую намъ, что *cosinus стороны равенъ произведенію cosinus'овъ двухъ другихъ сторонъ плюсъ произведеніе sinus'овъ тѣхъ же сторонъ на cosinus угла между ними.*

Въ сферической тригонометріи доказывается затѣмъ, что та же

теорема имѣетъ силу для всякаго сферическаго треугольника, какъ бы велики ни были его стороны. Поэтому можемъ примѣнить ее и къ нашему треугольнику $LL_1M_1$ (фиг. 362). Здѣсь придется положить:

$$LM_1 = c = {}^1/_2\pi + \psi,\ LL_1 = b = \varphi,\ L_1M_1 = a = {}^1/_2\pi,\ A = \alpha.$$

Тогда получимъ:

$$\cos {}^1/_2\pi = \cos\varphi \,.\, \cos({}^1/_2\pi + \psi) + \sin\varphi \,.\, \sin({}^1/_2\pi + \psi)\cos\alpha,$$

откуда находимъ, что

$$0 = -\cos\varphi \,.\, \sin\psi + \sin\varphi \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\alpha,$$

что даетъ соотношеніе

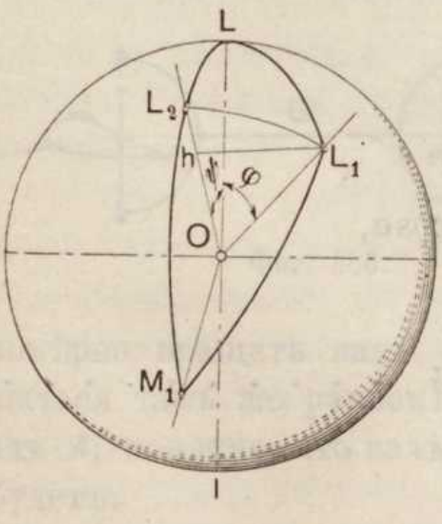
$$\cos\varphi \,.\, \sin\psi = \sin\varphi \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\alpha;$$

дѣля обѣ части этого ур-нія на $\cos\varphi \,.\, \cos\psi$, получаемъ окончательную формулу:

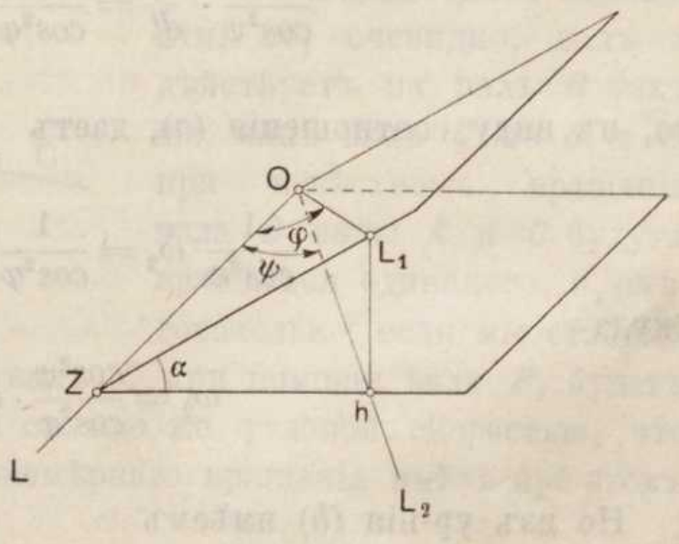
$$tg\psi = tg\varphi \,.\, \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Надо помнить, что углы $\varphi$ и $\psi$ *отсчитываются здѣсь отъ того начальнаго положенія, при которомъ*, какъ мы указывали выше, *оба радіуса* $OL$ *и* $OM$ *находятся въ плоскости, перпендикулярной плоскости осей.*

Надо замѣтить, что ту же формулу ($b$) можно получить еще иначе путемъ прямого разсмотрѣнія треугольника $LL_1M_1$ (фиг. 362). Дѣло въ




Фиг. 364.




Фиг. 365.

томъ, что дуга $L_1M_1$ стягиваетъ прямой уголъ $L_1OM_1$. Значитъ, если мы повернемъ уголъ $L_1OM_1$ около стороны $M_1O$ его такъ, чтобы плоскость $L_1OM_1$ совпала съ плоскостью $LOM_1$, какъ это изображено на фиг. 364,

то фигура $L_1OM_1$ займетъ положеніе $L_2OM_1$, при чемъ уголъ $L_2OL$ окажется равнымъ $\psi$, ибо $\angle L_2OM_1 = 90^0$. Замѣчая, далѣе, что плоскость $L_1OL_2$ перпендикулярна радіусу $M_1O$, заключаемъ, что, если точку $M_1$ примемъ за полюсъ шара $O$, то кругъ $L_1L_2$ окажется его экваторомъ, а кругъ $M_1L_2L$—меридіаномъ, и, значитъ, плоскость $L_1OL_2$ будетъ перпендикулярна плоскости $LL_2M_1$. Отсюда слѣдуетъ, что перпендикуляръ $L_1h$, опущенный изъ точки $L_1$ на плоскость $LL_2M_1$, пройдетъ какъ разъ черезъ прямую $OL_2$, что, въ свою очередь, указываетъ на то важное обстоятельство, что проекція угла $LOL_1$, т.-е. $\varphi$, на плоскость $LL_2M_1$ представляетъ собою уголъ $LOL_2$, т.-е. $\psi$. Замѣчая теперь, что уголъ $L$, т.-е. линейный уголъ двугранаго угла $L_1LOL_2$, равенъ $\alpha$, можемъ изобразить такое проектированіе угла $\varphi$ еще такъ, какъ это показано на фиг. 365. Проведя черезъ упомянутый перпендикуляръ $L_1h$ плоскость, перпендикулярную ребру $OL$, и обозначивъ пересѣченіе этой плоскости съ прямой $OL$ черезъ $Z$, можемъ написать, что $tg\varphi = L_1Z/OZ$ и $tg\psi = hZ/OZ$, откуда слѣдуетъ, что

$$tg\psi / tg\varphi = hZ / L_1Z = \cos\alpha,$$

что и приводитъ насъ къ извѣстной уже намъ формулѣ

$$tg\psi = tg\varphi \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Полученная такимъ образомъ формула ($b$) даетъ намъ, наконецъ, возможность вывести искомую зависимость между угловыми скоростями $\omega_1$ и $\omega_2$.

Дифференцируя по $t$ ур-ніе ($b$), находимъ:

$$\frac{1}{\cos^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos\alpha,$$

что, въ виду соотношенія ($a$), даетъ

$$\frac{1}{\cos^2\psi} \cdot \omega_2 = \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \omega_1 \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi} \cdot \omega_1 \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Но изъ ур-нія ($b$) имѣемъ

$$tg^3\psi = tg^2\varphi \cdot \cos^2\alpha,$$

иначе

$$\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \cos^2\alpha;$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по единицѣ, получаемъ:

$$\frac{\sin^2\psi + \cos^2\psi}{\cos^2\psi} = \frac{\sin^2\varphi \,.\, \cos^2\alpha + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

откуда получаемъ:

$$\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi} = \sin^2\varphi \,.\, \cos^2\alpha + 1 - \sin^2\varphi,$$

такъ что

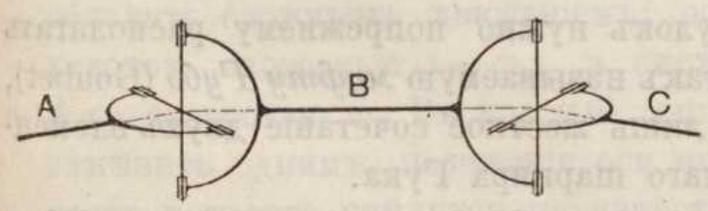
$$\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{1 - \sin^2\varphi \,.\, \sin^2\alpha},$$

послѣ чего ур-ніе (*c*) принимаетъ видъ:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\varphi \,.\, \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

Формула (64) показываетъ намъ, что при равномѣрномъ вращеніи одного вала, другой вращается неравномѣрно; это видно изъ того, что въ отношеніе скоростей входитъ перемѣнная величина $\sin^2\varphi$. При $\varphi = 0$ имѣемъ $\omega_2 = \omega_1 \cos\alpha$, а при $\varphi = {}^1/_2\pi$ .... $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\cos\alpha}$. При небольшихъ углахъ $\alpha$, когда оси ***V*** и ***W*** близки къ продолженію одна другой и когда, слѣдовательно, $\cos\alpha$ мало отличается отъ единицы, неравномѣрность выходитъ небольшая.

Представимъ себѣ теперь два вала ***A*** и ***C*** (фиг. 366), соединенные промежуточнымъ между ними валомъ ***B*** при помощи двухъ *шарнировъ Гука*; пусть оси обоихъ валовъ одинаково наклонены къ оси средняго. Если вилы промежуточнаго вала ***B*** лежатъ въ одной плоскости, то, очевидно, валъ ***A*** дѣйствуетъ на валъ ***B*** такъ же, какъ валъ ***C*** на ***B***, т.-е. при извѣстномъ вращеніи вала ***B*** валы ***A*** и ***C*** будутъ вращаться одинаково, и, слѣдовательно, если мы станемъ равномѣрно вращать валъ ***A***, то валъ ***C*** при помощи вала ***B***, будетъ вращаться такъ же равномѣрно и съ тою же угловой скоростью, что и валъ ***A***; понятно, что валъ ***B*** равномѣрнаго вращенія имѣть при этомъ не будетъ.

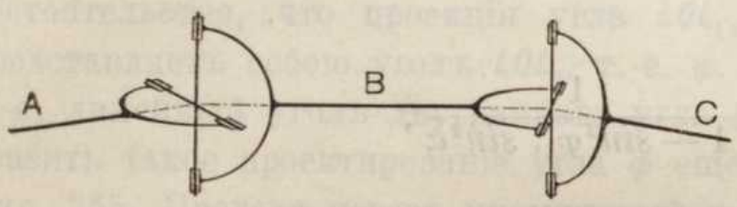


Фиг. 366.

Тотъ же результатъ получился бы у насъ, если бы къ данной системѣ мы примѣнили соотношеніе (*b*). Относя $\psi$ къ валу ***B***, а $\varphi$ къ ***A***, находимъ для (***A***, ***B***): $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi \,.\, \cos\alpha$; пусть соотвѣтствующій уголъ поворота вала ***C*** равенъ $\varphi_1$; тогда имѣемъ: $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\varphi_1 \,.\, \cos\alpha_1$; здѣсь $\alpha$ есть уголъ между осями ***A*** и ***B***, а $\alpha_1$ — между ***B*** и ***C***; при ра-

венствѣ этихъ угловъ (на что было указано выше) получаемъ: $tg\varphi = tg\varphi_1$, т.-е. $\varphi = \varphi_1$ и $\omega_1 = \omega_2$.

Теперь предположимъ, что вилки вала *B* перпендикулярны другъ къ другу (фиг. 367). Валъ *C* вращаться равномѣрно не будетъ. На самомъ дѣлѣ, изъ того же соотношенія (*b*) между валами *B* и *A* имѣемъ: $tg\psi = tg\varphi \cdot cos\alpha$; здѣсь $\psi$ попрежнему есть уголъ поворота вала *B*, а $\varphi$—вала *A*. Для второй пары валовъ *B* и *C*, имѣемъ при углѣ $\varphi_1$ поворота вала *C*, $tg\varphi_1 = tg\psi \cdot cos\alpha_1$, такъ такъ теперь валъ *B* по отношенію къ *C* играетъ ту же роль, что у первой пары *A* по отношенію къ *B*. Два послѣднія уравненія даютъ намъ соотношеніе $tg\varphi_1 = tg\varphi \cdot cos\alpha \cdot cos\alpha_1$; оно показываетъ намъ, что углы $\varphi$ и $\varphi_1$ одинаковыми быть не могутъ никогда, за исключеніемъ того случая, когда углы $\alpha$ обращаются въ нуль: $\alpha = \alpha_1 = 0$; но въ этомъ послѣднемъ случаѣ всѣ три вала по существу обращаются въ одинъ.



Фиг. 367.

Замѣтимъ, наконецъ, что при $\alpha = {}^1/_2\pi$ передача при помощи шарнира Гука становится невозможной.

Возвращаясь къ схемѣ, изображенной на фиг. 366, можемъ замѣтить, что валъ *B* служитъ здѣсь 1) для соединенія во-едино вилокъ его и 2) для передачи вращающаго момента отъ вала *A* къ валу *C*. Очевидно, что для достиженія этихъ цѣлей тѣлу *B* вовсе не обязательно придавать цилиндрическую форму вала,—ему можно дать любую другую форму, лишь бы при этомъ была обезпечена возможность передачи упомянутаго момента. Поступивъ именно такъ, давъ системѣ вала *B* и его вилокъ какую-либо другую, соотвѣтствующую указанному требованію форму и снабдивъ её втулками для соотвѣтствующихъ перекладинъ муфтъ *A* и *C* (оси втулокъ нужно попрежнему располагать въ одной плоскости), получимъ такъ называемую *муфту Губэ* (Goubet), представляющую, какъ видимъ, лишь жесткое сочетаніе двухъ элементовъ (вилокъ) дважды повтореннаго шарнира Гука.

Шарниръ Гука можетъ быть примѣненъ также для передачи вращенія между осями непараллельными и непересѣкающимися. Если бы при этомъ требовалось достичь равенства угловыхъ скоростей вращенія этихъ валовъ, то элементарный анализъ, подобный вышеизложенному, показалъ бы намъ, что для этого необходимо, 1) чтобы вилки промежуточнаго вала *B* лежали въ одной плоскости, 2) чтобы перекладины ихъ одновременно проходили черезъ плоскости (*A*, *B*) и (*B*, *C*) и 3) чтобы ось *B* пересѣкала оси *A* и *C* подъ одинаковыми углами.

Разсмотрѣніемъ этого частнаго случая мы закончимъ обзоръ теоріи шарнира Гука, а вмѣстѣ съ этимъ и теоріи четырехшарнирнаго про-

странственнаго механизма, и перейдемъ къ разсмотрѣнію вопроса о передачѣ движенія между непараллельными осями, лишь отчасти затронутаго въ вышеизложенной статьѣ.

## B. Передача движенія между непараллельными осями.

### § 47. Передача движенія между непараллельными и пересѣкающимися осями. Коническія колеса. Фрикціонная и зубчатая коническая передача.

Выше, въ статьѣ о плоскихъ механизмахъ, мы изложили вопросъ о передачѣ вращенія между параллельными осями; допустимъ теперь, что требуется передать вращеніе отъ оси *A* на другую ось *B*, пересѣкающуюся съ первой, положимъ, въ точкѣ *O* (фиг. 368). Пусть вращеніе около оси *A* совершается съ угловою скоростью $\omega$, вращеніе же около *B* должно совершаться съ угловою скоростью $\omega_1$, причемъ отношеніе $\omega : \omega_1$ есть нѣкоторое постоянное число. Допустимъ, наконецъ, что оба вращенія направлены въ противоположныя стороны.



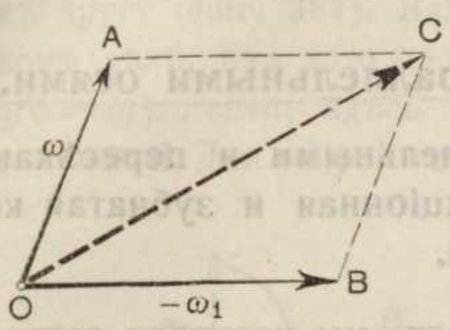
Фиг. 368.

Разсмотримъ и здѣсь, подобно тому, какъ это мы дѣлали при разборѣ передачи между параллельными осями, движеніе системы *A* относительно *B*; для этого попрежнему придаемъ обѣимъ системамъ скорость вращенія около оси *B*, равную $\omega_1$, но направленную въ сторону, противоположную дѣйствительному вращенію около *B*, т.-е. угловую скорость $(-\omega_1)$. Тогда система *B* остановится, а система *A* будетъ обладать сложнымъ движеніемъ: ось *A* будетъ вращаться около *B* съ угловою скоростью $(-\omega_1)$, а система *A* будетъ вращаться около оси *A* со скоростью $\omega$. Въ каждый данный моментъ оба вращенія можно замѣнить однимъ, положеніе оси мгновеннаго вращенія и угловая скорость котораго найдутся по извѣстнымъ правиламъ механики.

Замѣтимъ, что вращенія графически обыкновенно представляютъ въ видѣ векторовъ, величина которыхъ даетъ въ извѣстномъ масштабѣ угловыя скорости, а направленіе опредѣляютъ такимъ образомъ, чтобы наблюдатель, смотря съ конца вектора на его начало, видѣлъ вращеніе совершающимся по часовой стрѣлкѣ. Какъ извѣстно, въ такомъ случаѣ вращенія около пересѣкающихся осей складываются по правилу параллелограмма.

Система *A*, какъ было уже указано выше, въ каждый данный моментъ участвуетъ въ двухъ вращеніяхъ: во-первыхъ — около оси *A*, и во-вторыхъ—около оси *B*, направленныхъ въ одну и ту же сторону,

такъ какъ вращеніе системы *B* около ея оси было, по предположенію, направлено въ сторону, противоположную вращенію около *A*. Составное вращеніе, замѣняющее въ данный моментъ эти два вращенія, мы найдемъ, если отложимъ отъ точки *O* (фиг. 369) два вектора *OA* и *OB* въ направленіи осей вращенія, представляющіе по своей величинѣ въ заданномъ масштабѣ угловыя скорости $\omega$ и $(-\omega_1)$, построимъ на нихъ параллелограммъ *OACB* и проведемъ діагональ его *OC*,—она и дастъ намъ направленіе оси и величину угловой скорости составного вращенія.



Фиг. 369.

Уголъ между осями *OA* и *OB* предполагается неизмѣннымъ; поэтому ось *A*, въ движеніи системы *A* относительно *B*, опишетъ круглый конусъ. Въ каждый данный моментъ мы можемъ построеніемъ параллелограмма опредѣлить положеніе оси *OC* составного вращенія (оси мгновеннаго вращенія); при этомъ всегда имѣется соотношеніе:

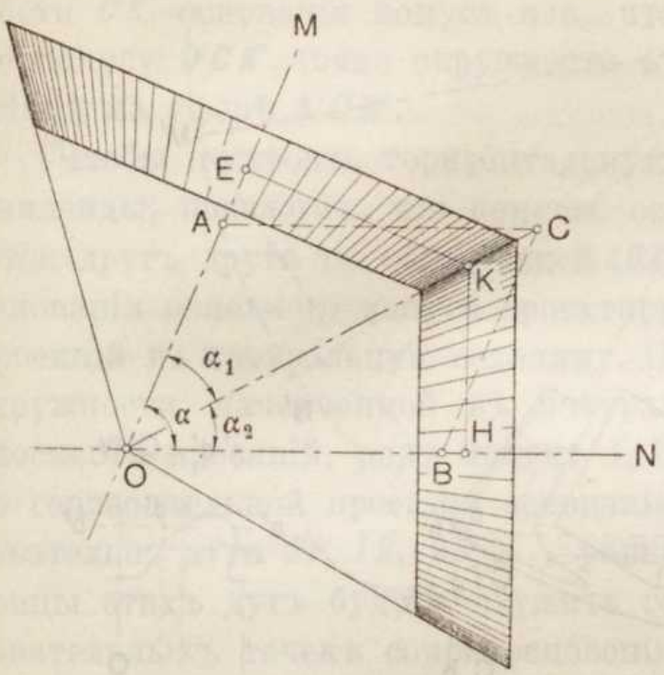
$$\frac{OB}{OA} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} = const, \quad \ldots\ldots\ldots (64)$$

—отъ знака минусъ при $\omega_1$ мы здѣсь отвлекаемся,—откуда при постоянствѣ угла *AOB* слѣдуетъ постоянство угла *COB*; иными словами, ось мгновеннаго вращенія будетъ постоянно лежать на кругломъ конусѣ, описанномъ діагональю *OC* около оси *OB*.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что ось мгновеннаго вращенія въ движеніи системы *B* относительно *A* будетъ лежать на конусѣ, описанномъ тою же діагональю *OC* около *OA*. Такимъ образомъ, движеніе системы *A* относительно *B* можно представить каченіемъ (безъ скольженія) второго конуса по первому.

Передачу въ данномъ случаѣ мы можемъ осуществить подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ цилиндрической передачѣ, а именно: задавшись направленіями осей и отношеніемъ угловыхъ скоростей (или чиселъ оборотовъ), строимъ на направленіяхъ осей, согласно указаніямъ, сдѣланнымъ выше, параллелограммъ со сторонами, пропорціональными угловымъ скоростямъ; находимъ діагональ этого параллелограмма и выполняемъ два конуса, одинъ — описанный этой діагональю около одной оси, и другой—около другой оси; заставляемъ эти конусы плотно прижиматься другъ къ другу (вершины ихъ должны все время оставаться совпадающими), и тогда, вращая одинъ конусъ съ угловою скоростью $\omega$, получимъ вращеніе другого съ угловою скоростью $\omega_1$. Показать это можно такъ: возьмемъ какую-либо точку *K* соприкосновенія этихъ конусовъ (фиг. 370). Разсматривая ее, какъ принадлежащую конусу *A*, мы выразимъ ея линейную скорость въ видѣ $KE \cdot \omega$, гдѣ $KE \perp$ оси *OA*. При отсутствіи скольженія конусовъ другъ по другу

ту же скорость должна имѣть также та точка поверхности конуса **B**, которая въ данный моментъ совпадаетъ съ точкой **K**. Назвавъ эту точку, ради сокращенія письма, опять черезъ **K** и предположивъ, что этотъ второй конусъ вращается съ какой-либо угловой скоростью $\omega'$, получаемъ равенство




Фиг. 370.

$$KE \cdot \omega = KH \cdot \omega', \quad . \quad . \quad (a)$$

откуда находимъ, что

$$KE/KH = \omega'/\omega \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Разсматривая прямоугольные треугольники **OEK** и **OKH**, имѣющіе общую гипотенузу **OK**, и принимая во вниманіе уравненіе $(b)$, получаемъ:

$$KE/KH = \omega'/\omega = \sin AOC/\sin COB \quad . \quad (c)$$

Сравнивая полученное ур-ніе $(c)$ съ ур-ніемъ (64), находимъ, что

$$\omega_1/\omega = \omega'/\omega = \sin AOC/\sin COB,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\omega' = \omega_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Иными словами, построивъ конусы около **A** и около **B** съ образующей **OC** и устранивъ ихъ взаимное скольженіе, мы дѣйствительно получаемъ требуемую передачу; при этомъ угловая скорость одной системы въ ея движеніи относительно другой, выражаемая діагональю **OC**, будетъ равна

$$\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\alpha},$$

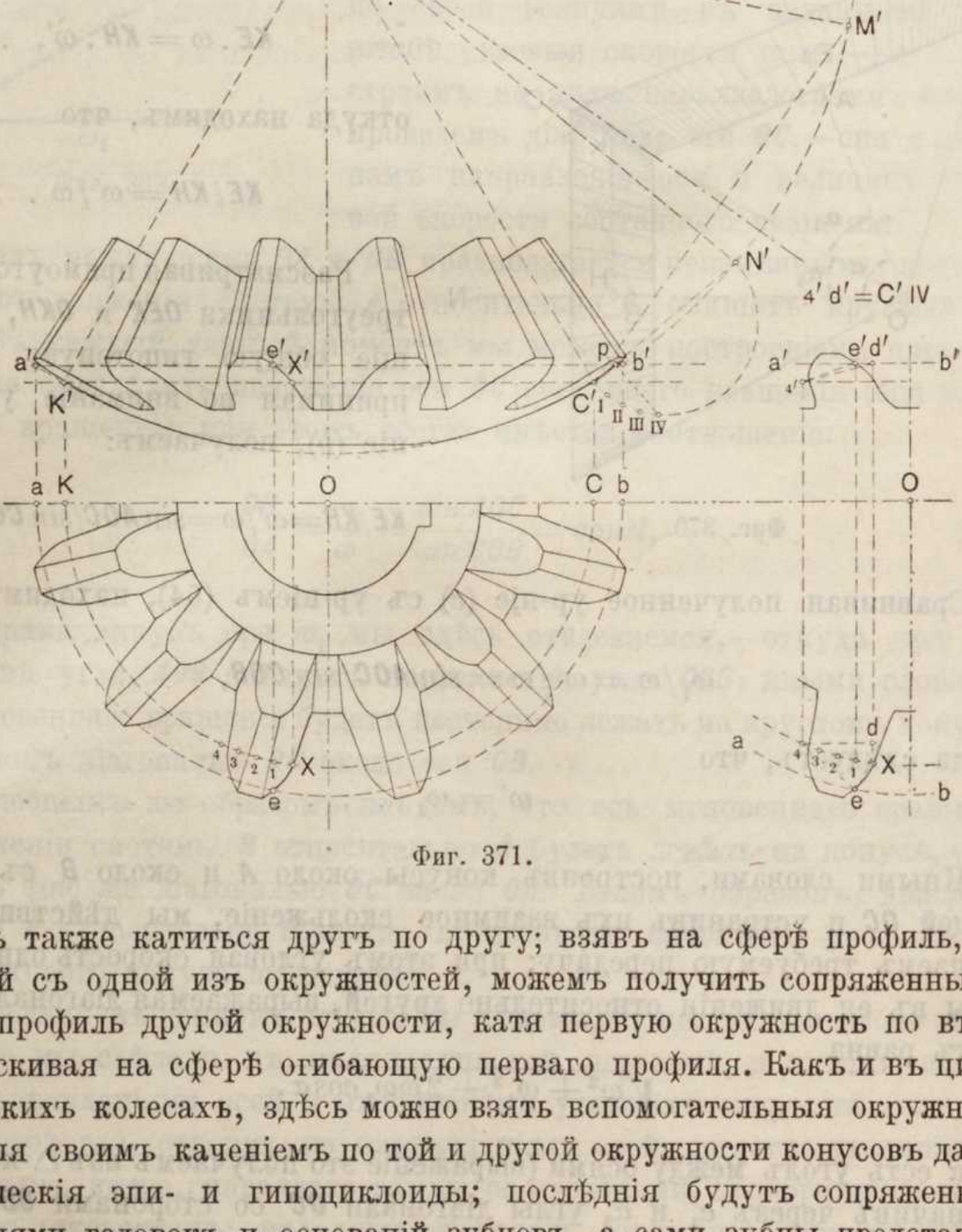
гдѣ $\alpha$ есть уголъ между осями (выраженіе это получаемъ изъ $\triangle$-ка **OBC**). Обозначивъ черезъ $\alpha_1$ и $\alpha_2$ углы діагонали **OC** со сторонами **OB** и **OA**, можемъ ту же угловую скорость представить еще въ видѣ

$$\omega \cos\alpha_1 + \omega_1 \cos\alpha_2.$$

Для осуществленія передачи можно ограничиться выполненіемъ лишь отрѣзковъ конусовъ, и такая *коническая фрикціонная передача* употребляется (подобно фрикціонной цилиндрической) въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

Болѣе употребительна, какъ и въ случаѣ цилиндрической передачи, передача *зубчатая*. Представимъ себѣ шаровую поверхность, описан-

ную изъ точки $O'$ какимъ-либо радіусомъ $O'C'$ (фиг. 371); эта шаровая поверхность пересѣчетъ упомянутые конусы по двумъ окружностямъ; при каченіи конусовъ другъ по другу окружности, оставаясь на сферѣ,




Фиг. 371.

будутъ также катиться другъ по другу; взявъ на сферѣ профиль, связанный съ одной изъ окружностей, можемъ получить сопряженный съ нимъ профиль другой окружности, катя первую окружность по второй и отыскивая на сферѣ огибающую перваго профиля. Какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ, здѣсь можно взять вспомогательныя окружности, которыя своимъ каченіемъ по той и другой окружности конусовъ дадутъ сферическія эпи- и гипоциклоиды; послѣднія будутъ сопряженными профилями головокъ и основаній зубцовъ, а сами зубцы представятся коническими поверхностями, образующія которыхъ будутъ постоянно проходить черезъ точку $O'$, направляющими же для нихъ будутъ служить сферическіе профили.

Не трудно найти горизонтальную и вертикальную проекціи профилей зубцовъ; ходъ построенія указанъ на чертежѣ. Даны основные конусы, вертикальныя проекціи которыхъ суть $O'C'K'$ и $O'C'M'$. Описываемъ сферу изъ вершины конусовъ ($O'$, $O$) радіусомъ, равнымъ $O'C'$, а за вспомогательную окружность для образованія профиля головки на колесѣ $O'C'K'$, беремъ на этой сферѣ окружность, проектирующуюся на

вертикальную плоскость въ видѣ прямой $C'N'$,—діаметръ ея будетъ равенъ $C'N'$, и сама она (на половину) начерчена въ совмѣщеніи съ вертикальной плоскостью проекцій. При каченіи этой окружности по окружности $C'K'$ основанія конуса или, что то же, при каченіи конуса $O'C'N'$ по конусу $O'C'K'$, точка окружности $C'N'$ образуетъ профиль головки, лежащій на сферѣ $K'C'M'$.

Чтобы построить горизонтальную проекцію этой сферической эпициклоиды, положимъ, что конусы, основной и вспомогательный, касаются другъ друга по образующей ($OX$, $O'X'$). Замѣтимъ, что окружность основанія основного конуса проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину. Поэтому беремъ на вспомогательной окружности, начерченной въ натуральную величину на вертикальной плоскости проекцій, рядъ точекъ I, II, III, IV, V, .... и откладываемъ по горизонтальной проекціи основанія конуса $O'C'K'$ отъ точки $X$ послѣдовательно дуги $X1$, $12$, $23$,.... равныя дугамъ $C'$ I, I II, II III, ....; концы этихъ дугъ будутъ служить горизонтальными проекціями послѣдовательныхъ точекъ соприкосновенія окружностей.

Проведемъ теперь для начальнаго положенія конусовъ черезъ точку IV горизонтальную плоскость; слѣды ея найти легко,—стоитъ изъ точки IV совмѣщенной вспомогательной окружности опустить на прямую $C'N'$ перпендикуляръ IV$p$ и провести черезъ основаніе его $p$ горизонтальную прямую $a'pb'$—эта послѣдняя прямая и будетъ вертикальнымъ слѣдомъ искомой горизонтальной плоскости; вмѣстѣ съ тѣмъ она будетъ служить вертикальной проекціей окружности, по которой плоскость пересѣкаетъ сферу. Горизонтальную проекцію той же окружности мы найдемъ, опустивъ изъ $a'$ и $b'$ перпендикуляры, при чемъ не слѣдуетъ забывать, что эта окружность будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину, въ видѣ окружности $bea$.

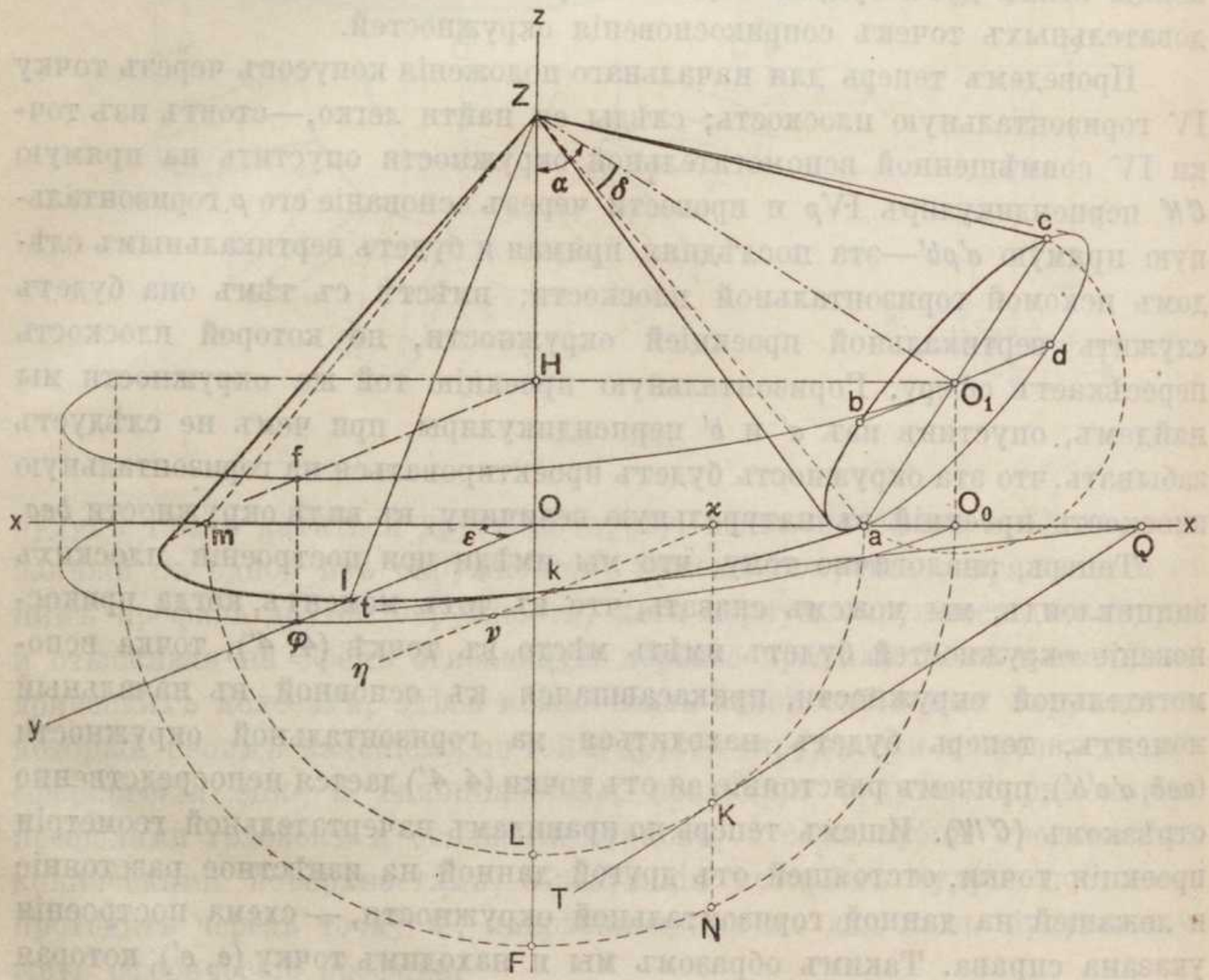
Теперь, аналогично тому, что мы имѣли при построеніи плоскихъ эпициклоидъ, мы можемъ сказать, что въ тотъ моментъ, когда прикосновеніе окружностей будетъ имѣть мѣсто въ точкѣ ($4$, $4'$), точка вспомогательной окружности, прикасавшаяся къ основной въ начальный моментъ, теперь будетъ находиться на горизонтальной окружности ($aeb$, $a'e'b'$), причемъ разстояніе ея отъ точки ($4$, $4'$) дается непосредственно отрѣзкомъ ($C'IV$). Ищемъ теперь по правиламъ начертательной геометріи проекціи точки, отстоящей отъ другой данной на извѣстное разстояніе и лежащей на данной горизонтальной окружности, — схема построенія указана справа. Такимъ образомъ мы и находимъ точку ($e$, $e'$), которая и будетъ одной изъ точекъ искомой эпициклоиды.

Подобнымъ же образомъ отыскиваемъ и другія точки и находимъ такимъ образомъ вертикальную и горизонтальную проекціи профиля головки. Взявъ далѣе на окружности $KXC$ толщину зубца и ширину впадины и повторяя построеніе, получимъ горизонтальныя и вертикальныя проекціи профилей всѣхъ зубцовъ. Сами зубцы, какъ мы уже говорили, будутъ представлять собою коническія поверхности, напра-

вляющими для которыхъ будутъ служить найденные сферическіе профили, образующія же будутъ проходить черезъ общую вершину (*O*, *O'*) конусовъ. Ограничивая зубцы по длинѣ образующихъ другой сферической поверхностью, получимъ полныя поверхности зубцовъ.

Изложенный выше способъ построенія сферическихъ эпи- и гипоциклоидъ, основанный на элементарныхъ соображеніяхъ изъ области начертательной геометріи и дающій для каждой кривой по два изображенія ея, какъ проекціи этихъ кривыхъ на основныя плоскости проекцій, въ послѣднее время съ удобствомъ замѣняется другимъ, дающимъ изображенія этихъ кривыхъ въ проекціи ихъ на одну изъ плоскостей нѣкоторой прямоугольной системы координатъ. Способъ этотъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Предположимъ, что у насъ имѣется нѣкоторая прямоугольная система координатъ *Oxyz* (фиг. 372), плоскость *xOz* коей приведена въ совпаденіе съ плоскостью чертежа, а ось *Oz* расположена вертикально.




Фиг. 372.

Тогда для глаза, помѣщеннаго внутри трехграннаго угла *Oxyz* на безконечномъ разстояніи отъ вершины *O*, ось *Oy* спроектируется на плоскость чертежа въ видѣ нѣкоторой прямой *OlF*, наклоненной къ прямой *Ox* подъ нѣкоторымъ угломъ *ε*. Очевидно, что, при такихъ условіяхъ, всѣ отрѣзки, параллельные прямымъ *Ox* и *Oz* и, значитъ, на-

правленные вертикально или горизонтально, будутъ проектироваться на плоскость чертежа въ натуральную величину, всѣ же идущіе какъ-нибудь иначе претерпятъ въ своихъ изображеніяхъ измѣненія (сокращенія или удлиненія), масштабъ коихъ, особый для каждаго отдѣльнаго направленія, легко опредѣляется по начальнымъ даннымъ, какъ это будетъ показано ниже.

Не внося никакихъ измѣненій въ сущность построеній, мы предположимъ, что всѣ наши конусы ограничены въ своихъ основаніяхъ не шаровыми поверхностями, а плоскостями,—кругами, ограниченными тѣми же окружностями, кои ограничивали ихъ основанія и раньше. Предположимъ теперь, что основной конусъ расположенъ такъ, что основаніе его, теперь плоское, лежитъ въ плоскости $xOy$, а ось слилась съ осью $Oz$. Въ проекціи на плоскость $xOz$ эта окружность изобразится теперь, очевидно, нѣкоторымъ эллипсомъ, построеніе коего можно выполнить по точкамъ, руководствуясь слѣдующими соображеніями:

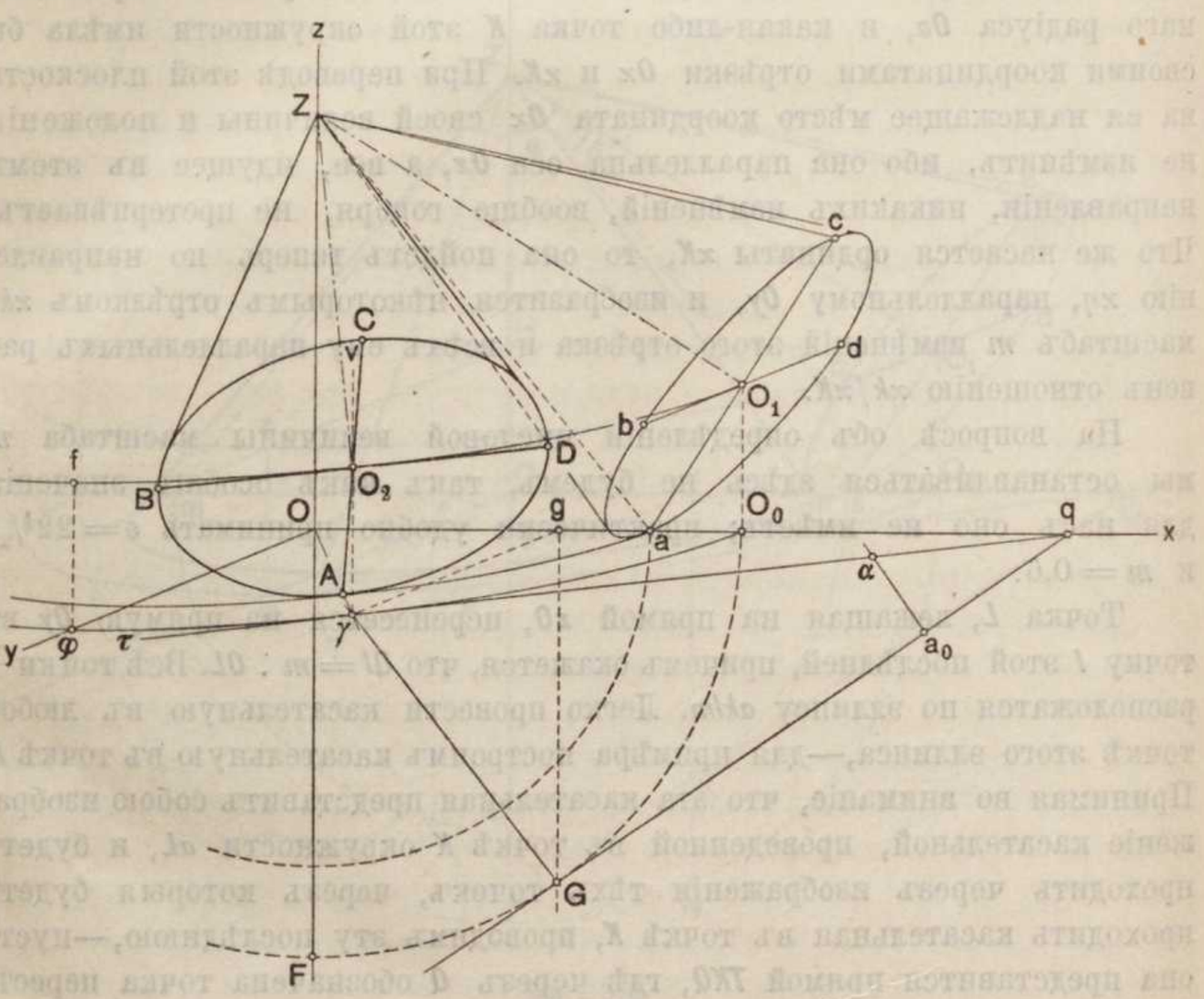
Если бы плоскость $xOy$ совпала съ плоскостью $xOz$,, то окружность основанія изобразилась бы окружностью $aKL\ldots$ центра $O$ и опредѣленнаго радіуса $Oa$, и какая-либо точка $K$ этой окружности имѣла бы своими координатами отрѣзки $Ox$ и $xK$. При переводѣ этой плоскости на ея надлежащее мѣсто координата $Ox$ своей величины и положенія не измѣнитъ, ибо она параллельна оси $Ox$, а все, идущее въ этомъ направленіи, никакихъ измѣненій, вообще говоря, не претерпѣваетъ. Что же касается ординаты $xK$, то она пойдетъ теперь по направленію $x\eta$, параллельному $Oy$, и изобразится нѣкоторымъ отрѣзкомъ $xk$; масштабъ $m$ измѣненій этого отрѣзка и всѣхъ ему параллельныхъ равенъ отношенію $xk/xK$.

На вопросѣ объ опредѣленіи числовой величины масштаба $m$ мы останавливаться здѣсь не будемъ, такъ какъ особаго значенія для насъ оно не имѣетъ; практически удобно принимать $\varepsilon = 22^1/_2{}^0$ и $m = 0{,}6$.

Точка $L$, лежащая на прямой $zO$, перенесется на прямую $Oy$ въ точку $l$ этой послѣдней, причемъ окажется, что $Ol = m \cdot OL$. Всѣ точки $k$ расположатся по эллипсу $akl m$. Легко провести касательную въ любой точкѣ этого эллипса,—для примѣра построимъ касательную въ точкѣ $k$. Принимая во вниманіе, что эта касательная представитъ собою изображеніе касательной, проведенной въ точкѣ $K$ окружности $aL$, и будетъ проходить черезъ изображенія тѣхъ точекъ, черезъ которыя будетъ проходить касательная въ точкѣ $K$, проводимъ эту послѣднюю,—пусть она представится прямой $TKQ$, гдѣ черезъ $Q$ обозначена точка пересѣченія этой касательной съ осью $Ox$. Замѣчая теперь, что изображеніемъ точки $K$ является точка $k$, а точки $Q$—сама эта точка $Q$, заключаемъ, что изображеніемъ касательной $TQ$ явится прямая $tkQ$, которая, слѣдовательно, и представитъ собою касательную къ нашему эллипсу въ точкѣ $k$ его. Проведеніе касательныхъ въ различныхъ точкахъ эллипса значительно облегчаетъ проведеніе самого эллипса, самой кривой его.—

Такъ какъ вершина конуса остается лежащей въ той же точкѣ $Z$, то весь конусъ изобразится фигурой $Zaklm\ldots$

Изобразимъ теперь малый, вспомогательный конусъ, имѣющій катиться по начерченному основному. За начальное положеніе его удобнѣе всего взять такое, когда ось $ZO_1$ его совпадаетъ съ вертикальной плоскостью $xOz$. Тогда отверстіе этого конуса изобразится въ натуру въ видѣ нѣкотораго угла $cZa$; изобразится также въ натуру лежащій въ той же плоскости $zOx$ діаметръ $ac$ основанія его. Очевидно, что $cZ = aZ$, такъ что фигура $cZa$ представитъ собою равнобедренный треугольникъ, и $ZO_1$ будетъ перпендикулярно къ $ac$, причемъ будемъ имѣть, что $aO_1 = O_1c$. Окружность радіуса $O_1a$, лежащая въ основаніи этого конуса, изобразится эллипсомъ $abcd$, однимъ изъ діаметровъ коего будетъ служить отрѣзокъ $ac$, а другимъ, ему сопряженнымъ, отрѣзокъ $bd$, параллельный $Oy$ и опредѣляемый изъ соотношенія $bd = m \cdot ac$. Дѣйствительно, если въ кругѣ $O_1$ мы проведемъ два діаметра,—$ac$ и нѣкоторый другой, ему перпендикулярный,—то этотъ




Фиг. 373.

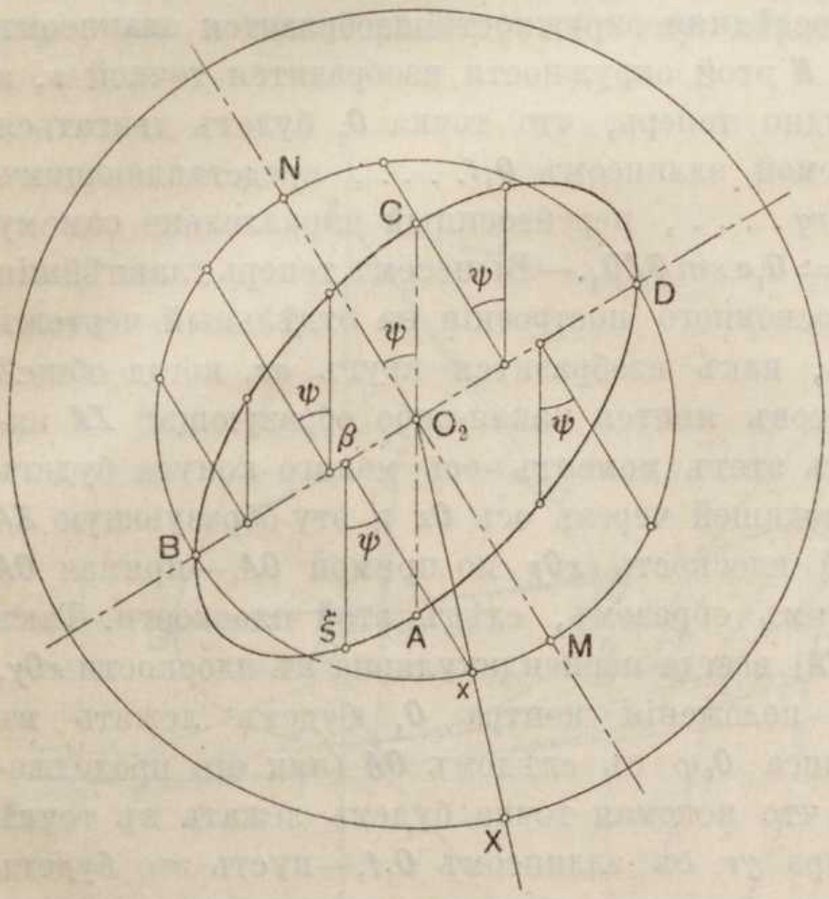
второй діаметръ, будучи въ то же время перпендикуляренъ оси $ZO_1$ конуса, будетъ, слѣдовательно, перпендикуляренъ плоскости $xOz$ и, значитъ, параллеленъ оси $Oy$, а такъ какъ все, параллельное этой оси, измѣняется въ отношеніи $m : 1$, то діаметръ $bd$ и окажется равенъ $m \cdot ac$.

Такимъ же путемъ, какъ и выше, строимъ эллипсъ $abcd$, изображающій окружность, лежащую въ основаніи этого конуса. Самъ этотъ конусъ изобразится фигурой $Zabcd$.—Оба наши конуса соприкасаются по прямой $aZ$, при чемъ, замѣтимъ, эта прямая $aZ$ будетъ лежать всегда въ одной плоскости съ осями $OZ$ и $O_1Z$.

Посмотримъ теперь, какъ изобразится этотъ конусъ $O_1Z$ въ разныхъ положеніяхъ его при каченіи по большому конусу; умѣнье строить эти послѣдовательныя положенія позволитъ намъ строить искомыя сферическія эпициклоиды. Прежде всего, посмотримъ, какъ изобразится траекторія точки $O_1$. При каченіи малаго конуса она будетъ описывать въ пространствѣ окружность радіуса $O_1H$, гдѣ $O_1H$ есть перпендикуляръ, опущенный изъ $O_1$ на ось $Oz$. Этотъ радіусъ $O_1H$ въ то же время равенъ отрѣзку $O_0O$, гдѣ $O_0$ есть проекція точки $O_1$ на ось $Ox$. Проекція окружности $(O_1H)$ на плоскость $xOy$ представится, очевидно, окружностью центра $O$ и радіуса $OO_0$. Повторивъ построеніе, данное выше, найдемъ, что эта послѣдняя окружность изобразится эллипсомъ $O_0v\varphi\ldots$, причемъ точка $N$ этой окружности изобразится точкой $v$, а точка $F$—точкой $\varphi$. Очевидно теперь, что точка $O_1$ будетъ двигаться по окружности, изображаемой эллипсомъ $O_1f\ldots$, представляющимъ собою тотъ же эллипсъ $O_0v\varphi\ldots$, перенесенный параллельно самому себѣ на высоту $O_0O_1 = \varphi f = O_1a\sin OZO_1$.—Вынесемъ теперь главнѣйшія линіи такъ полученнаго основного построенія на отдѣльный чертежъ (фиг. 373) и посмотримъ, какъ изобразится кругъ $ac$, когда общей образующей нашихъ конусовъ явится какая-либо образующая $ZA$ нашего большого конуса. Въ этотъ моментъ ось малаго конуса будетъ лежать въ плоскости, проходящей черезъ ось $Oz$ и эту образующую $ZA$ и, значитъ, пересѣкающей плоскость $xOy$ по прямой $OA$,—прямая $OA$ представляетъ собою, такимъ образомъ, слѣдъ этой плоскости. Такъ какъ эта плоскость $(Oz,\ ZA)$ всегда перпендикулярна къ плоскости $xOy$, то проекція теперешняго положенія центра $O_1$ будетъ лежать въ точкѣ $\gamma$ пересѣченія эллипса $O_0\varphi$ съ слѣдомъ $OA$ (или его продолженіемъ), откуда слѣдуетъ, что искомая точка будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія перпендикуляра $\gamma v$ съ эллипсомъ $O_1f$,—пусть это будетъ нѣкоторая точка $O_2$. Такимъ образомъ, діаметръ окружности, проходящій черезъ точку $A$, изображается отрѣзкомъ $AO_2C$,—это будетъ діаметръ, лежащій въ вертикальной плоскости. Что касается горизонтальнаго діаметра, то опредѣлить изображеніе его не трудно, замѣтивъ, что онъ расположенъ параллельно плоскости $xOy$ и касается эллипса $O_1O_2f$ въ точкѣ $O_2$ этого послѣдняго. Касательную въ точкѣ $O_2$ не трудно провесть, найдя на основной окружности $O_0F$ точку $G$, соотвѣтствующую точкѣ $\gamma$, для чего черезъ точку $\gamma$ проводимъ лучъ $\gamma g \parallel yO$ и изъ точки $g$ пересѣченія его съ осью $Ox$ ведемъ $gG \perp Ox$ до пересѣченія въ точкѣ $G$ съ окружностью $O_0F$. Проведя теперь въ этой точкѣ $G$ касательную $Gq$ до пересѣченія въ точкѣ $q$ съ осью $Ox$ и соединяя точки $q$ и $\gamma$ прямой линіей, получимъ искомую касательную,—ею бу-

детъ служить эта прямая $q\gamma\tau$. Такимъ образомъ, направленіе нашего горизонтальнаго діаметра будетъ параллельно направленію $q\gamma\tau$. Что же касается величины его, то опредѣлить ее можно, замѣтивъ, что отрѣзокъ $Gq$ изображается отрѣзкомъ $\gamma q$, откуда слѣдуетъ, что масштабъ направленія $q\tau$ равенъ $q\gamma/qG$. Поэтому, отложивъ по $qG$ отъ точки $q$ отрѣзокъ $qa_0$, равный $O_1a$, и проведя $a_0\alpha \parallel G\gamma$, найдемъ, что отрѣзокъ $qa_0$ изображается теперь отрѣзкомъ $q\alpha$. Отложивъ теперь при точкѣ $O_2$ отрѣзки $O_2B$ и $O_2D$, равные каждый $q\alpha$ и параллельные прямой $q\tau$, получимъ горизонтальный діаметръ $BO_2D$ нашей окружности. Очевидно, что отрѣзки $AC$ и $BD$ представятъ собою пару сопряженныхъ діаметровъ эллипса $ABCD$, изображающаго теперешнее основаніе малаго конуса.

Самый этотъ эллипсъ построить весьма легко,—для этого на $BD$, какъ на діаметрѣ, описываемъ окружность (фиг. 374) и проводимъ діаметръ $MN$, перпендикулярный $BD$. Этотъ діаметръ $MN$, какъ видимъ, сокращенъ далѣе въ отношеніи $k = AC/MN$ или, что то же, $AC/BD$, и, затѣмъ, повернутъ на уголъ $NO_2C = \psi$. Это замѣчаніе даетъ возможность построить теперь весь искомый эллипсъ, для чего нужно будетъ помножать ординаты окружности $BNDM$ въ отношеніи $k$ и повертывать ихъ, послѣ такого помноженія, на уголъ $\psi$.

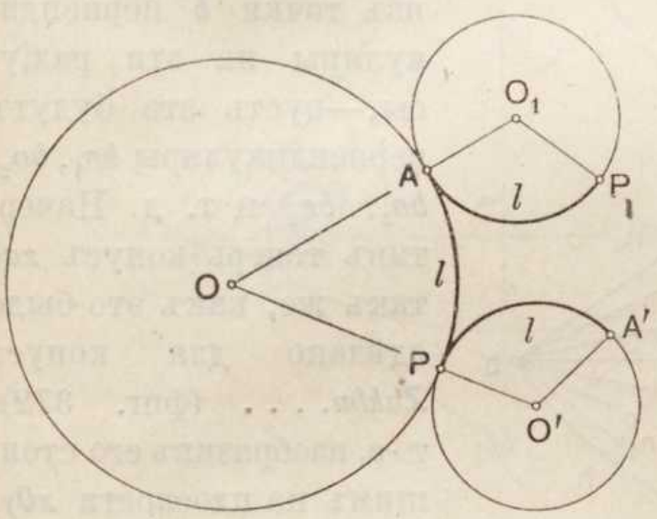


Фиг. 374.

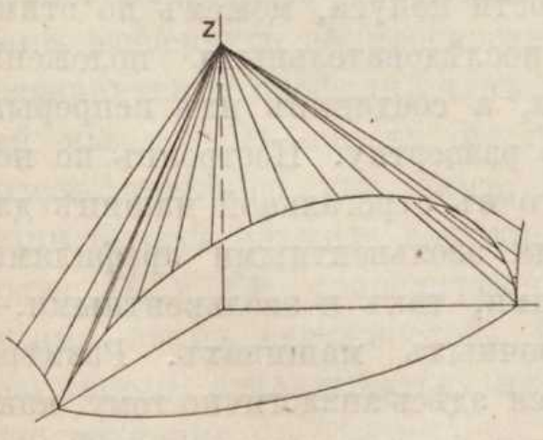
Никакихъ затрудненій не представитъ отысканіе на эллипсѣ $ABCD$ точки $\xi$, соотвѣтствующей какой-либо точкѣ $X$ окружности $O_1$ основанія малаго конуса. Для этого соединяемъ точку $X$ съ центромъ $O_2$, отмѣчаемъ точку $x$ пересѣченія радіуса $XO_2$ съ окружностью $BNDM$, проводимъ ординату $x\beta \perp BD$, помножаемъ ее въ отношеніи $k$ и поворачиваемъ на уголъ $\psi$. Такъ получится точка $\xi$ искомаго эллипса, соотвѣтствующая точкѣ $X$ и ее изображающая, при чемъ будутъ имѣть мѣсто соотношенія $\xi\beta = k \cdot x\beta$ и $\angle x\beta\xi = \angle MO_2A = \psi = const.$ Замѣтимъ, наконецъ, что уголъ $\psi$ надо откладывать всегда по одному направленію, указываемому стрѣлкой, идущей отъ діаметра $MN$ къ діаметру $AC$.—Вопросъ о построеніи эллипса $ABCD$ исчерпывается, та-

кимъ образомъ, вполнѣ, и мы можемъ приступить къ вычерчиванію искомой эпициклоиды.

Малый конусъ, какъ извѣстно, имѣетъ катиться по большому безъ скольженія, чистымъ каченіемъ. Имѣя это въ виду, вычерчиваемъ гдѣ-либо въ плоскости чертежа окружности основаній нашихъ конусовъ, въ положеніи касанія,—пусть это будутъ окружности $O$ и $O_1$, касающіяся другъ друга въ точкѣ $A$. Пусть это положеніе ихъ соотвѣтствуетъ начальному расположенію нашихъ конусовъ,—положимъ, тому, когда малый, вспомогательный конусъ занимаетъ положеніе $ZABCD$ (фиг. 375). Прокатимъ окружность $O_1$ по окружности $O$ на какую-либо дугу $l$, такъ что въ соприкосновеніе придутъ точки $P'$ и $P$; окружность $O_1$ займетъ положеніе $O'$, а точка $A$ перейдетъ въ $A'$. Если мы условимся образовать сферическую эпициклоиду помощью точки $A$, то полученіе ея сведется къ перекату окружности $O_1$ по окружности $O$, вычерчиванію эллипсовъ, изображающихъ окружность $O_1$ въ различныхъ положеніяхъ ея при этомъ каченіи, и нахожденію на этихъ эллипсахъ точекъ, изображающихъ соотвѣтствующія положенія точки $A$. Само собою разумѣется, что самихъ эллипсовъ $ABCD$ можно и не вычерчивать,—для нахожденія точекъ $A'$ искомой эпициклоиды достаточно опредѣлять величину и положеніе діаметра $BD$ и находить затѣмъ точку $A'$ по схемѣ, данной на фиг. 374 для нахожденія точки $\xi$, соотвѣтствующей точкѣ $X$ окружности $O_1$. Найдя рядъ точекъ $A'$ и соединивъ ихъ непрерывной плавной линіей, получимъ, такимъ образомъ, изображеніе искомой сферической эпициклоиды. Никакого труда не представитъ опредѣленіе координатъ всѣхъ точекъ ея,—это опредѣленіе удобно выполнять при самомъ построеніи. Пользуясь этими координатами, можемъ, затѣмъ, выполнить эту кривую реально (фиг. 376).




Фиг. 375.

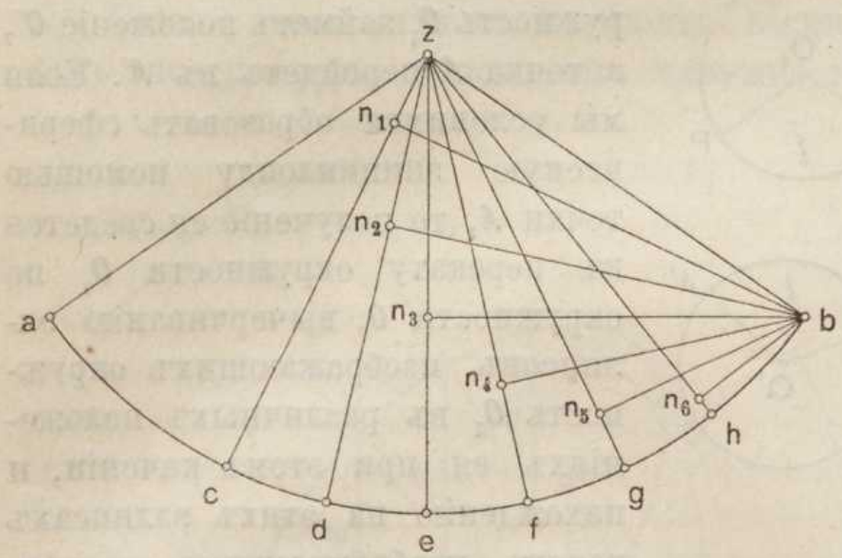



Фиг. 376.

Построивъ далѣе соотвѣтствующую гипоциклоиду и соединивъ ее должнымъ образомъ съ эпициклоидой, получимъ кривую, согласно которой и должны быть очерчены зубцы разсматриваемаго коническаго колеса. По этой кривой выполняется соотвѣтствующій шаблонъ, уста-

навливаемый въ спеціальной машинѣ, которая затѣмъ и обстрагиваетъ по нему зубцы колеса, уже точно очерченные по сферическимъ эпи- и гипоциклоидамъ.

Кромѣ циклическихъ профилей, здѣсь находятъ себѣ примѣненіе также эвольвентные профили, образуемые точками плоскости, катящейся по конусу, т.-е. развертывающей его. Для полученія проекціи такой эвольвенты въ разсмотрѣнной выше системѣ координатъ развертываемъ боковую поверхность конуса въ секторъ *zab* (фиг. 377), беремъ какую-либо точку окружности основанія его,—хотя бы, напримѣръ, ту же точку *b*,—и, намѣтивъ на окружности *ba* рядъ точекъ: *c*, *d*, *e*, . . . . , и соединивъ ихъ съ центромъ *z* радіусами *cz*, *dz*, *ez* и т. д., опускаемъ изъ точки *b* перпендикуляры на эти радіусы,—пусть это будутъ перпендикуляры $bn_1$, $bn_2$, $bn_3$, $bn_4$ и т. д. Начертивъ теперь конусъ *zab* такъ же, какъ это было сдѣлано для конуса *Zaklm*. . . . (фиг. 372), т.-е. изобразивъ его стоящимъ на плоскости *xOy*, съ осью, совпадающей съ осью *Oz*, начинаемъ перекатывать плоскую фигуру *zab* по конусу такъ, чтобы радіусы *bz*, *cz*, . . . . послѣдовательно становились линіями касанія плоскости *zab* съ поверхностью конуса. Зная по чертежу фиг. 377 величины отрѣзковъ *zn* и перпендикулярныхъ къ нимъ отрѣзковъ *nb*, касательныхъ къ поверхности конуса, можемъ по этимъ даннымъ найти изображенія всѣхъ послѣдовательныхъ положеній точки *b* при такомъ перекатѣ плоскости, а соединивъ ихъ непрерывной плавной кривой, получимъ искомую развертку. Построивъ по ней шаблонъ, можемъ опять использовать его въ строгальной машинѣ для обстрагиванія зубцовъ съ сферическими эвольвентными профилями. Этими же шаблонами,—какъ циклическими, такъ и эвольвентными,—можно пользоваться также въ формовочныхъ машинахъ. Размѣры вспомогательныхъ конусовъ опредѣляются здѣсь аналогично тому, какъ это выполняется въ плоской передачѣ. Уголъ развертывающей плоскости съ общей касательной плоскостью къ нашимъ главнымъ конусамъ можно брать и здѣсь равнымъ $15^0$. Детали построенія понятны сами собою.

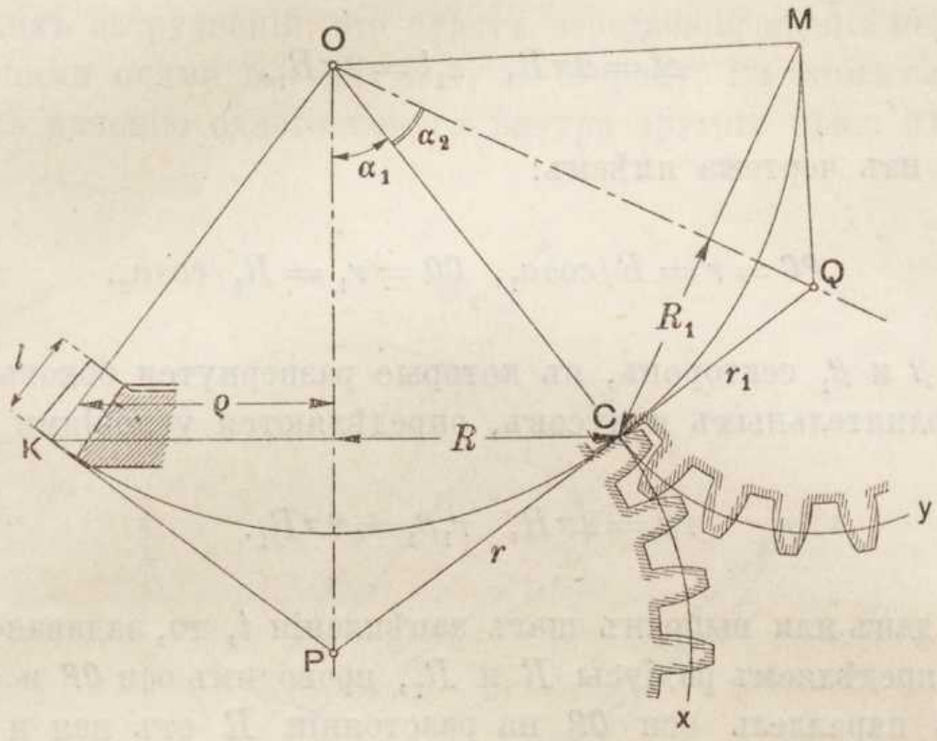


Фиг. 377.

Во всѣхъ серьезныхъ случаяхъ конической передачи слѣдуетъ примѣнять какое-либо изъ разобранныхъ выше точныхъ построеній; въ тѣхъ же случаяхъ, гдѣ такой точности не требуется, гдѣ неправильность въ работѣ передачи особеннаго значенія для механизма не

имѣетъ, пользуются, ради экономіи времени, слѣдующимъ приблизительнымъ построеніемъ:

Представимъ себѣ, что мы построили еще два конуса **KPC** и **CQM** (фиг. 378), касающіеся нашей сферы по окружностямъ основаній двухъ первыхъ конусовъ (**KOC** и **COM**); конусы эти будутъ имѣть образующую **PCQ**, перпендикулярную къ образующей соприкосновенія первыхъ. Если




Фиг. 378.

сферическіе профили не велики, т.-е., если зубцы не высоки по сравненію съ радіусомъ сферы **OC**, что, вообще, имѣетъ мѣсто почти всегда, то можно принять, что эти профили приблизительно совпадаютъ съ поверхностью конусовъ, касающихся сферы по окружностямъ **KC** и **CM**. Но поверхности этихъ дополнительныхъ конусовъ **PKC** и **QCM** мы можемъ развернуть на плоскости чертежа; тогда на той же поверхности развернутся и профили, и въ такомъ случаѣ построеніе этихъ профилей мы можемъ свести на построеніе профилей у цилиндрическихъ колесъ, знакомое уже намъ, при чемъ придется считать, что полодіями будутъ служить окружности $C_x$ и $C_y$ радіусовъ **PC** и **QC** (окружности **KC** и **CM**, развернутыя теперь на плоскости, будутъ, понятно, дугами этихъ окружностей). Шагъ, толщина зубца и проч. будутъ, разумѣется, откладываться на окружностяхъ $C_x$ и $C_y$ въ дѣйствительную величину.

Вычертивъ профили, навертываемъ ихъ на поверхности дополнительныхъ конусовъ **PKC** и **QCM** и строимъ зубцы совершенно такъ же, какъ и въ случаяхъ сферическихъ профилей, ограничивая ихъ однако въ длину не сферической поверхностью, а конической, какъ это видно на чертежѣ, гдѣ слѣва дана часть разрѣза колеса вертикальной плоскостью.

Назовемъ числа зубцовъ у колесъ черезъ $z$ и $z_1$; тогда, аналогично цилиндрическимъ колесамъ, можно написать, что

$$z : z_1 = \omega_1 : \omega = R : R_1,$$

гдѣ черезъ $R$ и $R_1$ обозначены соотвѣтствующіе радіусы окружностей **KC** и **CM**. Обозначая, далѣе, шагъ передачи черезъ $t$, имѣемъ:

$$zt = 2\pi R, \quad z_1 t = 2\pi R_1.$$

Далѣе изъ чертежа имѣемъ:

$$\mathbf{PC} = r = R/\cos\alpha_1, \quad \mathbf{CQ} = r_1 = R_1/\cos\alpha_2.$$

Углы $\beta$ и $\beta_1$ секторовъ, въ которые развернутся боковыя поверхности дополнительныхъ конусовъ, опредѣляются условіями

$$r\beta = 2\pi R, \quad r_1\beta_1 = 2\pi R_1.$$

Если данъ или выбранъ шагъ зацѣпленія $t$, то, задаваясь числомъ зубцовъ, опредѣляемъ радіусы $R$ и $R_1$, проводимъ оси **OP** и **OQ**, затѣмъ проводимъ параллель оси **OP** на разстояніи $R$ отъ нея и параллель оси **OQ** на разстояніи $R_1$; въ точкѣ ихъ пересѣченія и будетъ лежать точка **C**; такимъ образомъ опредѣляется линія **OC**. Впрочемъ, направленіе линіи **OC** можно найти построеніемъ параллелограмма на осяхъ, какъ это было уже указано выше.

При обычномъ расчетѣ шагъ относится не къ окружности **CK**, какъ это мы принимали выше, а къ средней (по длинѣ зубца) окружности; и въ этомъ случаѣ радіусъ $\varrho$ ея опредѣляется непосредственно по числу зубцовъ, а затѣмъ, зная радіусы этихъ среднихъ окружностей для обоихъ колесъ, мы опредѣляемъ направленіе **OC** проведеніемъ параллелей той и другой оси на разстояніяхъ, равныхъ радіусамъ, а затѣмъ находимъ и точку **C**, отложивъ отъ точки пересѣченія параллелей половины длины зубца по длинѣ образующей **OC**. Проведя прямую **PCQ** перпендикулярно къ **OC** до пересѣченія съ той и другой осью, получаемъ **CP** и **CQ**—длины образующихъ дополнительныхъ конусовъ; далѣе, изъ чертежа или вычисленіемъ опредѣляемъ радіусы $R$ и $R_1$, по числу зубцовъ находимъ шагъ зацѣпленія, отнесенный къ окружностямъ **CK** и **CM**, и, такимъ образомъ, получаемъ всѣ элементы, нужные для построенія профилей. Для вычисленія $R$ и $R_1$ имѣемъ соотношенія:

$$R = \varrho + {}^1/_2\, l \sin\alpha_1$$

и

$$R_1 = \varrho_1 + {}^1/_2\, l \sin\alpha_2;$$

далѣе

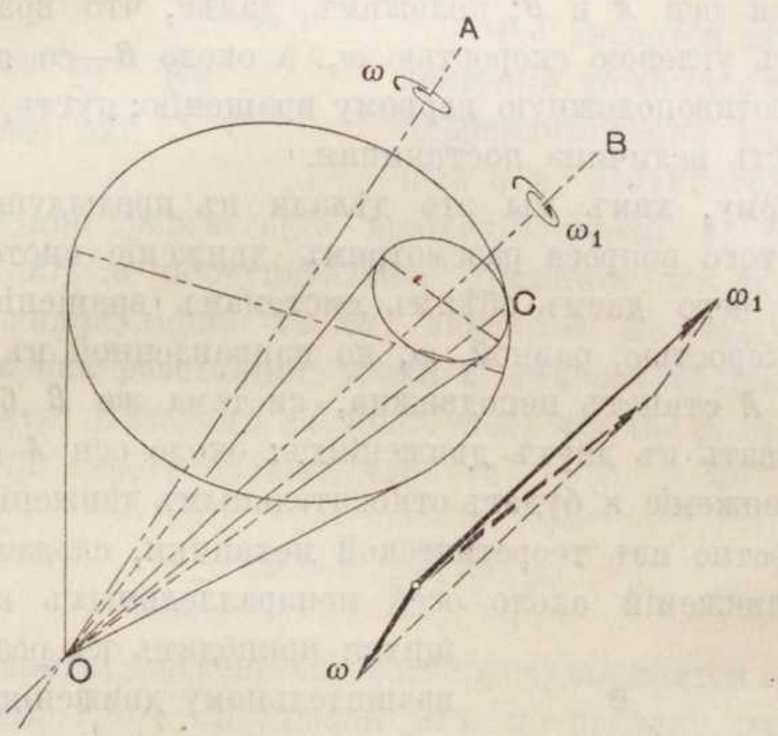
$$\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = \varrho_1 : \varrho_2,$$

и, наконецъ,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

—углу между осями.

Внутренняя коническая передача не представляетъ послѣ сказаннаго никакихъ затрудненій; это будетъ передача вращенія между двумя пересѣкающими осями въ одну и ту же сторону. Въ этомъ случаѣ дѣло сводится къ каченію одного конуса внутри другого (фиг. 379).




Фиг. 379.

Замѣтимъ, наконецъ, что коническая передача употребляется по большей части между осями взаимно-перпендикулярными.

---

Скорость $w$ относительнаго скольженія какой-либо точки зубца по другому, очевидно, равна произведенію изъ относительной угловой скорости вращенія на разстояніе этой точки отъ оси мгновеннаго вращенія, т.-е. она выразится такъ:

$$w = p\sqrt{\omega^2 + \omega_1{}^2 + 2\omega\omega_1\cos\alpha},$$

гдѣ $p$ есть разстояніе точки отъ оси; та же величина $w$ выразится еще такъ:

$$w = p\,(\omega\cos\alpha_1 \pm \omega_1\cos\alpha_2).$$

Положивъ $\alpha = 0$, получимъ формулу для скорости скольженія въ случаѣ цилиндрической передачи:

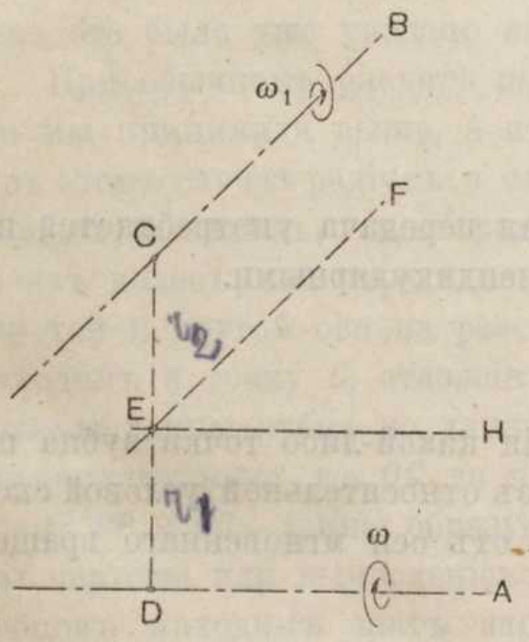
$$w = p(\omega \pm \omega_1).$$

Знакъ *минусъ* относится къ внутренней передачѣ.

## § 48. Передача движенія между непараллельными и непересѣкающимися осями. Гиперболоидальныя колеса. Винтовыя колеса. Червячная передача.

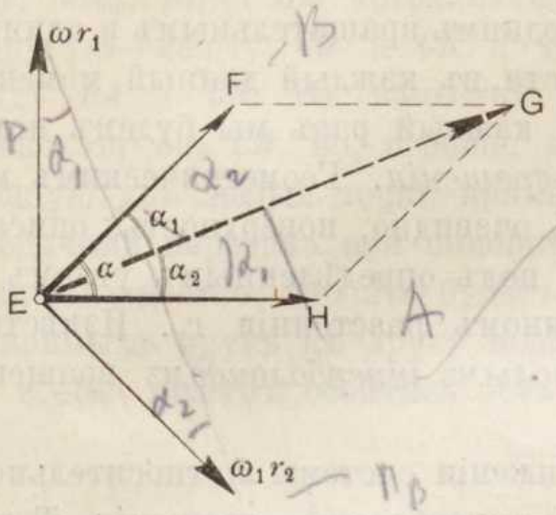
Предположимъ, что у насъ имѣется двѣ непараллельныя и непересѣкающіяся оси *A* и *B*; положимъ, далѣе, что вращеніе около *A* совершается съ угловою скоростью $\omega$, а около *B*—со скоростью $\omega_1$ и въ сторону, противоположную первому вращенію; пусть, затѣмъ, отношеніе $\omega : \omega_1$ есть величина постоянная.

Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ предыдущихъ случаяхъ, для рѣшенія этого вопроса разсмотримъ движеніе системы *B* относительно *A*, для чего даемъ обѣимъ системамъ вращеніе около оси *A* съ угловой скоростью, равной $\omega$, но направленной въ обратную сторону. Система *A* станетъ неподвижна, система же *B* будетъ одновременно участвовать въ двухъ движеніяхъ: около оси *A* и около оси *B*; это сложное движеніе и будетъ относительнымъ движеніемъ системы *B*. Какъ это извѣстно изъ теоретической механики, сложеніе двухъ вращательныхъ движеній около осей непараллельныхъ и непересѣкающихся приводитъ къ результирующему вращательному движенію около нѣкоторой третьей оси и къ поступательному движенію вдоль той же оси, такъ что эта ось будетъ осью *вращенія-скольженія*. Положеніе ея найти не трудно. Съ этою цѣлью проводимъ линію *CD* кратчайшаго разстоянія между осями *A* и *B* (фиг. 380) и беремъ на ней нѣкоторую точку *E* (о выборѣ этой точки см. ниже); замѣняемъ теперь вращеніе около оси *A* вращеніемъ около оси, параллельной оси *A* и проходящей черезъ точку *E*; вращеніе около оси *B* подобнымъ же образомъ замѣняемъ вращеніемъ около новой оси, параллельной прежней оси *B* и проходящей черезъ ту же точку *E*. Обѣ замѣны дадутъ еще два поступательныхъ движенія, направленія коихъ будутъ лежать въ плоскости, проходящей чрезъ ту же точку *E* и перпендикулярной къ *CD*, т.-е. въ плоскости, содержащей какъ направленіе *A*, такъ и направленіе *B*.




Фиг. 380.

Вращенія мы откладываемъ въ этой плоскости, какъ векторы *EF* и *EH* (фиг. 381), гдѣ *EF* параллельна оси *CB* (фиг. 380), а *EH* параллельна оси *DA*, и складываемъ ихъ по правилу параллелограмма; результирующее вращеніе представится діагональю этого параллелограмма *EG*, и величина его $\Omega$ выразится черезъ $\omega$ и $\omega_1$ такъ:



Фиг. 381.

$$EG = \Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\alpha},$$

гдѣ $\alpha$ обозначаетъ уголъ между осями.

Что касается поступательныхъ движеній, то каждое изъ нихъ будетъ перпендикулярно къ соотвѣтствующей оси: поступательное движеніе, получившееся при перенесеніи вращенія около *B*, будетъ перпендикулярно къ *EF*, а поступательное движеніе отъ замѣны вращенія около *A*—перпендикулярно къ *EH*; величина же каждаго выразится произведеніемъ изъ разстоянія точки *E* отъ оси на соотвѣтствующую угловую скорость. Назовемъ *EC* (фиг. 380) черезъ $r_1$, а *ED*—черезъ $r_2$, и обозначимъ *CD* черезъ $r$, такъ что

$$CD = r = r_1 + r_2.$$

Поступательныя движенія (скорости ихъ) выразятся одно черезъ $r_1\omega$, а другое—черезъ $r_2\omega_1$; складывая ихъ по правилу параллелограмма, получимъ результирующее поступательное движеніе, направленіе котораго будетъ направленіемъ оси скольженія. Чтобы эта ось совпадала съ осью вращенія, необходимо, чтобы точка *E* была выбрана нѣкоторымъ опредѣленнымъ образомъ. Дѣйствительно, для совпаденія указанныхъ осей необходимо, чтобы слагающія величинъ $r_1\omega$ и $r_2\omega_1$, взятыя въ направленіи, перпендикулярномъ къ *EG*, взаимно уничтожались; это требованіе влечетъ за собою необходимость удовлетворить уравненію:

$$r_1\omega \cdot \cos GEH = r_2\omega_1 \cos FEG \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Называя углы прямой *EG* съ осями *A* и *B* черезъ $\alpha_1$ и $\alpha_2$, получаемъ отсюда уравненіе:

$$r_1\omega\cos\alpha_1 = r_2\omega_1\cos\alpha_2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

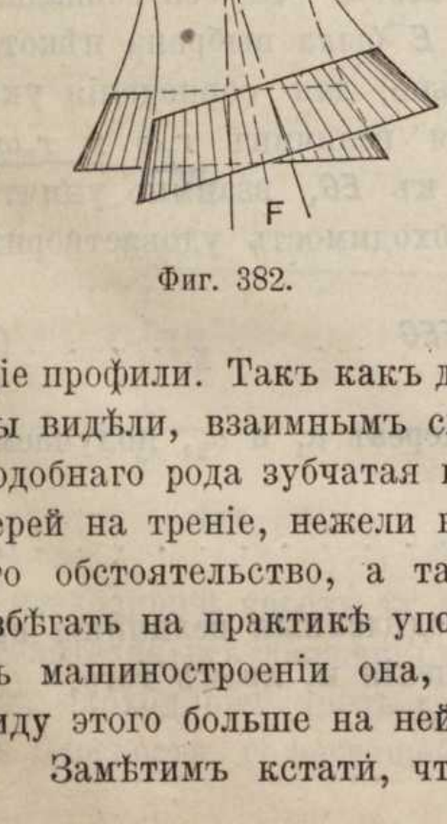
Такъ какъ, далѣе, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ суть вполнѣ опредѣленныя величины при данномъ отношеніи угловыхъ скоростей вращенія и, кромѣ того,

$$r_1 + r_2 = r,$$

т.-е. нѣкоторой также вполнѣ опредѣленной величинѣ, то разстоянія $r_1$ и $r_2$ опредѣлятся единственнымъ образомъ, что позволяетъ заключить, что точка *E* есть нѣкоторая вполнѣ опредѣленная точка кратчайшаго разстоянія *CD*.

Такую замѣну сложнаго движенія однимъ вращательнымъ и однимъ поступательнымъ мы можемъ произвести въ каждый данный моментъ относительнаго движенія системы *B*; каждый разъ мы будемъ получать новую ось *EG*—ось *скольженія—вращенія*. Геометрическимъ мѣстомъ этихъ осей *EG* будетъ служить, очевидно, поверхность, описанная прямой *EG*, наклоненной къ оси *A* подъ опредѣленнымъ угломъ $\alpha_1$ и находящейся отъ нея на опредѣленномъ разстояніи $r_1$. Извѣстно, что такая поверхность будетъ *однополымъ гиперболоидомъ* вращенія съ осью *A*.

Такимъ образомъ, *аксоидомъ* въ движеніи системы *B* относительно *A* является, слѣдовательно, *линейчатый гиперболоидъ вращенія*. Точно такъ же найдемъ, что аксоидомъ въ движеніи *A* относительно *B* будетъ служить гиперболоидъ, описанный прямой *EG* при вращеніи ея около оси *B*. Оба гиперболоида будутъ касаться другъ друга по прямой *EG*. Выполнивъ матеріально эти два гиперболоида (фиг. 382) и нажавъ ихъ другъ на друга, мы можемъ, вращая одинъ изъ нихъ около *A* со скоростью $\omega$, получить вращеніе другого около *B* со скоростью $\omega_1$, причемъ отношеніе $\omega : \omega_1$ будетъ даннымъ числомъ. Взявъ отрѣзки этихъ гиперболоидовъ, ограниченные плоскостями, проведенными перпендикулярно къ осямъ черезъ какую-либо точку общей образующей (по которой происходитъ касаніе гиперболоидовъ), можемъ устроить зубчатую передачу, подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ коническихъ колесахъ,—напр., при помощи дополнительныхъ конусовъ; образующими этихъ конусовъ будутъ служить нормали къ поверхностямъ гиперболоидовъ, проведенныя въ точкахъ окружностей основаній отрѣзковъ. Развернувъ конусы, найдемъ соотвѣтствующіе профили. Такъ какъ движеніе гиперболоидовъ сопровождается, какъ мы видѣли, взаимнымъ скольженіемъ вдоль линіи соприкосновенія, то подобнаго рода зубчатая передача будетъ сопровождаться бо́льшей потерей на треніе, нежели въ передачахъ цилиндрической и конической; это обстоятельство, а также и трудность выполненія, заставляютъ избѣгать на практикѣ употребленія этой гиперболоической передачи, и въ машиностроеніи она, вообще говоря, примѣненія не имѣетъ; въ виду этого больше на ней останавливаться не будемъ.



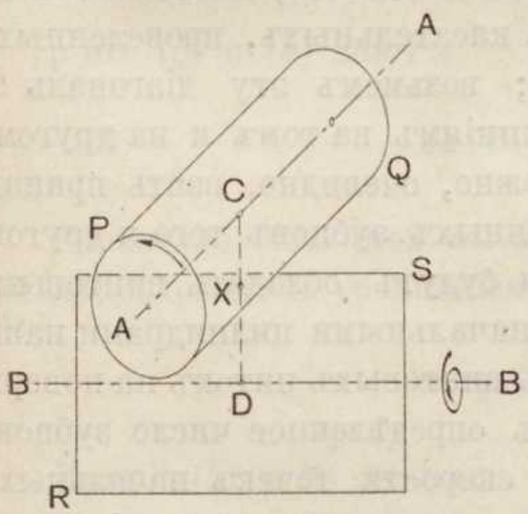
Фиг. 382.

Замѣтимъ кстати, что передачу между осями непараллельными и

непересѣкающимися всегда можно выполнить при помощи двухъ коническихъ передачъ. На самомъ дѣлѣ представимъ себѣ, что посредствующею осью для передачи служитъ линія кратчайшаго разстоянія *CD* (фиг. 384); тогда мы устраиваемъ одну передачу между осями *DA* и *CD*, а другую—между *CD* и *CB* и такимъ образомъ выполнимъ передачу между *DA* и *CB*. Въ качествѣ посредствующей оси, можно брать не только эту ось *CD*, но, вообще, какую-нибудь другую прямую, соединяющую двѣ любыя точки прямыхъ *DA* и *CB*; но передъ всѣми этими передачами передача при помощи линіи кратчайшаго разстоянія имѣетъ то преимущество, что это будетъ коническая передача при осяхъ, наклоненныхъ другъ къ другу подъ *прямымъ* угломъ. Такимъ образомъ, мы всегда можемъ обойтись безъ гиперболической передачи.

---

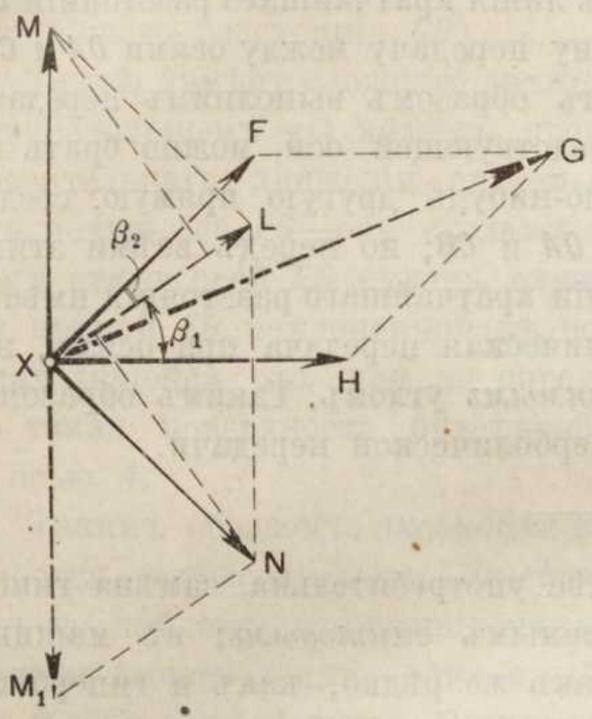
Менѣе выгодна, а потому и менѣе употребительна, замѣна гиперболическаго зацѣпленія такъ называемымъ *винтовымъ*; въ машиностроеніи оно употребляется почти такъ же рѣдко, какъ и гиперболическое. Возьмемъ на линіи кратчайшаго разстоянія между осями, на линіи *CD* (фиг. 383), какую-нибудь точку *X* и радіусами *XC* и *XD* опишемъ около осей *B* и *A* цилиндры *PQ* и *RS*; оба эти цилиндра будутъ касаться другъ друга въ одной точкѣ *X*.



Фиг. 383.

Заставимъ теперь одинъ цилиндръ вращаться со скоростью $\omega_1$, а другой—со скоростью $\omega$. Если мы будемъ разсматривать движеніе одного цилиндра по отношенію къ другому, подобно тому, какъ мы это дѣлали выше при разсмотрѣніи гиперболоическихъ колесъ, то можно замѣтить, что это относительное движеніе сопровождается скольженіемъ (какъ и въ случаѣ гиперболоидовъ), направленіе котораго найти легко. Для этого черезъ точку *X* проводимъ плоскость, параллельную обѣимъ осямъ; плоскость эта будетъ въ то же время касательною плоскостью къ обоимъ цилиндрамъ. Отложимъ въ этой плоскости векторъ *XM*, пропорціональный произведенію $r_1 . \omega$, гдѣ $r_1 = XD$ (фиг. 383 и 384), направленный противъ окружной скорости цилиндра *A* въ точкѣ *X*; затѣмъ проводимъ векторъ *XN*, пропорціональный произведенію $r_2\omega_1$, гдѣ $r_2 = XN$, и направленный по окружной скорости цилиндра *B*. Діагональ *XL* параллелограмма, построеннаго на этихъ векторахъ, и дастъ скорость относительнаго скольженія. Эту скорость мы можемъ получить еще иначе, какъ замыкающую сторону $M_1N$ треугольника $M_1XN$, въ которомъ стороны *XN* и $XM_1$ пропорціональны окружнымъ скоростямъ цилиндровъ и отложены въ направленіи этихъ скоростей.

Ось относительнаго вращенія будетъ, какъ и прежде, опредѣляться діагональю параллелограмма, построеннаго на векторахъ, пропорціональныхъ угловымъ скоростямъ системъ и параллельныхъ осямъ *A* и *B*. Такъ какъ отношеніе угловыхъ скоростей намъ дано, а направленіе осей неизмѣнно, то діагональ *XG* параллелограмма (фиг. 384) будетъ и по величинѣ, и по направленію та же, что и въ параллелограммѣ *EG* (фиг. 381), построенномъ нами при разсмотрѣніи гиперболической передачи; разница будетъ въ томъ, что тамъ, благодаря выбору нѣкоторой опредѣленной въ системѣ точки *E*, направленіе относительнаго скольженія совпадало съ направленіемъ оси относительнаго вращенія; здѣсь же, при произвольной точкѣ *X*, такого совпаденія нѣтъ.

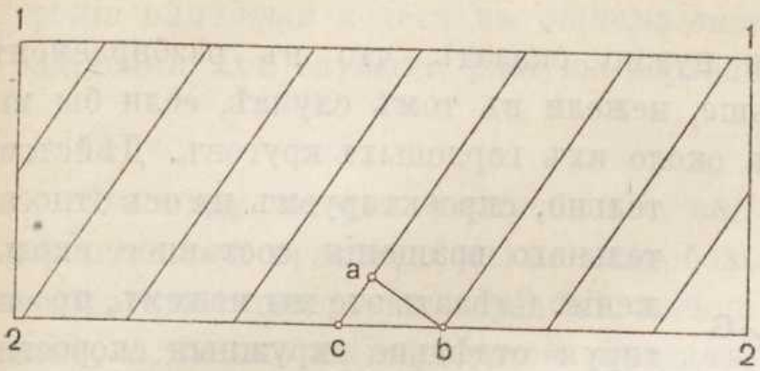


Фиг. 384.

Направленіе діагонали *XL*, лежащее въ плоскости, касательной къ цилиндрамъ, есть направленіе одной изъ касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку *X* къ обоимъ цилиндрамъ; возьмемъ эту діагональ за направленіе касательной къ винтовымъ линіямъ на томъ и на другомъ цилиндрѣ. Такія двѣ винтовыя линіи можно, очевидно, взять принадлежащими поверхностямъ двухъ сопряженныхъ зубцовъ того и другого цилиндра; теперь, слѣдовательно, зубцы будутъ обладать винтовыми поверхностями, дающими въ сѣченіи съ начальными цилиндрами наши винтовыя линіи. Проведя мысленно рядъ винтовыхъ нитокъ на поверхности того и другого цилиндра, получимъ опредѣленное число зубцовъ на томъ и другомъ колесѣ. Такъ какъ скорости точекъ начальныхъ цилиндровъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ діагонали *XL*, равны (по свойству параллелограмма), а прямая *XL* даетъ направленіе винтовыхъ нитокъ, то разстоянія между рабочими поверхностями двухъ сосѣднихъ зубцовъ, считая по поверхности цилиндровъ и въ направленіи, перпендикулярномъ къ винтовымъ линіямъ, или, иначе говоря, разстоянія между сосѣдними винтовыми нитями, которыя служатъ направляющими поверхностей зубцовъ, должны быть одинаковыми на томъ и другомъ цилиндрѣ. Разстоянія эти часто называютъ *поперечными шагами* зацѣпленія. *Окружнымъ шагомъ* называется разстояніе между двумя нитями, если считать по окружности цилиндра; окружные шаги относятся между собою, какъ окружныя скорости цилиндровъ.

Если наклонъ винтовыхъ нитокъ къ осямъ цилиндровъ назовемъ черезъ $\beta_1$ и $\beta_2$, то уголъ *LXM* (фиг. 384) будетъ равенъ $^1/_2\pi - \beta_1$, а уголъ *LXN* будетъ равенъ $^1/_2\pi - \beta_2$, такъ какъ оси соотвѣтственно пер-

пендикулярны къ направленіямъ окружныхъ скоростей. Если цилиндръ развернуть на плоскость, такъ что (*1,1*) и (*2,2*) (фиг. 385) представятъ развернутыя окружности основаній, а (*1,2*) представятъ образующія, то окружный шагъ представится отрѣзкомъ *cb*, а поперечный—отрѣзкомъ *ab*; уголъ *abc*, очевидно, будетъ равенъ углу между касательной къ винтовой линіи и осью цилиндра *), т.-е. углу $\beta_1$. Мы можемъ написать:



Фиг. 385.

$$ab = cb \,.\, cos\beta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

и соотвѣтственно для другого цилиндра:

$$a_1b_1 = c_1b_1 \,.\, cos\beta_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

а такъ какъ

$$ab = a_1b_1,$$

то ур-нія (*g*) и (*h*) даютъ

$$cb \,.\, cos\beta_1 = c_1b_1 \,.\, cos\beta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Равенство скоростей въ направленіи, перпендикулярномъ къ прямой *XL*, выразится уравненіемъ:

$$\omega_1 r_2 \, cos\beta_2 = \omega r_1 \, cos\beta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Ур-нія (*k*) и (*l*) даютъ:

$$cb : c_1b_1 = \omega r_1 : \omega_1 r_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

Обозначая числа зубцовъ того и другого колеса черезъ $z_1$ и $z_2$, получаемъ ур-нія:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi r_1 &= cb \,.\, z_1 \\ 2\pi r_2 &= c_1b_1 \,.\, z_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

Ур-нія (*m*) и (*n*) приводятъ насъ къ ур-нію:

$$z_1 : z_2 = \omega_1 : \omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

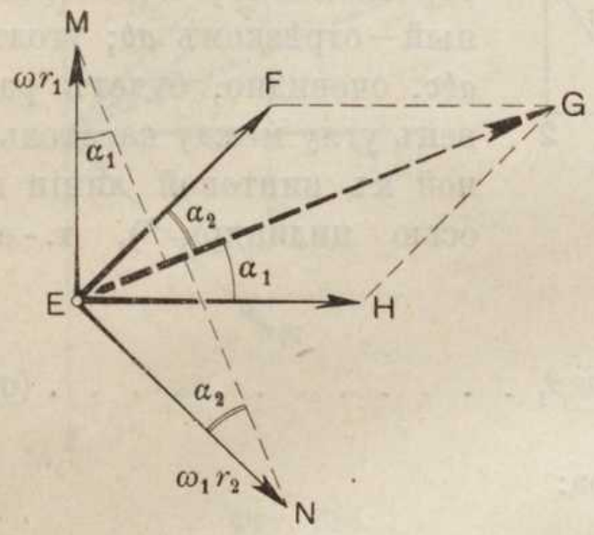
аналогично съ колесами цилиндрическими.

---

*) Какъ уголъ, образованный перпендикулярами къ этимъ линіямъ.

Нужно замѣтить, что нарѣзки на обоихъ цилиндрахъ будутъ одинаковы, какъ это видно изъ построенія винтовой линіи при помощи прямой линіи ***XL***.

Относительно скольженія нужно сказать, что въ разбираемомъ случаѣ оно будетъ даже больше, нежели въ томъ случаѣ, если бы мы взяли отрѣзки гиперболоидовъ около ихъ горловыхъ круговъ. Дѣйствительно, спроектируемъ на ось относительнаго вращенія составное скольженіе. Сдѣлать это мы можемъ, проектируя отдѣльно окружныя скорости, изъ которыхъ составляется скольженіе, на ту же ось. Если назвать, какъ и раньше, углы составного вращенія съ осями (фиг. 386) черезъ $\alpha_1$ и $\alpha_2$, то проекціи въ направленіи оси составного вращенія будутъ соотвѣтственно равны:




Фиг. 386.

$$\omega r_1 \sin\alpha_1 \quad \text{и} \quad \omega_1 r_2 \sin\alpha_2;$$

проектируя же составное вращеніе въ направленіи, перпендикулярномъ къ первому, получаемъ проекціи

$$+\omega r_1 \cos\alpha_1 \quad \text{и} \quad -\omega_1 r_2 \cos\alpha_2;$$

все скольженіе выразится такимъ образомъ черезъ

$$\sqrt{(\omega r_1 \sin\alpha_1 + \omega_1 r_2 \sin\alpha_2)^2 + (\omega r_1 \cos\alpha_1 - \omega_1 r_2 \cos\alpha_2)^2},$$

но по свойству діагонали ***XG*** параллелограмма ***XFGH*** имѣемъ

$$\omega \sin\alpha_1 = \omega_1 \sin\alpha_2,$$

и, слѣд., первый членъ (въ скобкахъ) подъ радикаломъ равенъ

$$[\omega \,.\, \sin\alpha_1 (r_1 + r_2)]^2,$$

т.-е. представляетъ, при данной $\omega$ и данномъ отношеніи $\omega/\omega_1$, величину вполнѣ опредѣленную и неизмѣняющуюся. Весь радикалъ получитъ наименьшее значеніе тогда, когда исчезнетъ второй членъ, т.-е. когда

$$(\omega r_1 \cos\alpha_1 - \omega_1 r_2 \cos\alpha_2)^2 = 0,$$

а это будетъ имѣть мѣсто при выполненіи условія

$$\omega r_1 \cos\alpha_1 = \omega_1 r_2 \cos\alpha_2,$$

но этимъ уравненіемъ опредѣлялись именно радіусы $r_1$ и $r_2$ горловыхъ круговъ гиперболоидовъ. Поэтому съ точки зрѣнія потери на треніе винтовыя колеса въ *общемъ видѣ* менѣе выгодны, нежели когда радіусами ихъ служатъ радіусы горловыхъ круговъ.

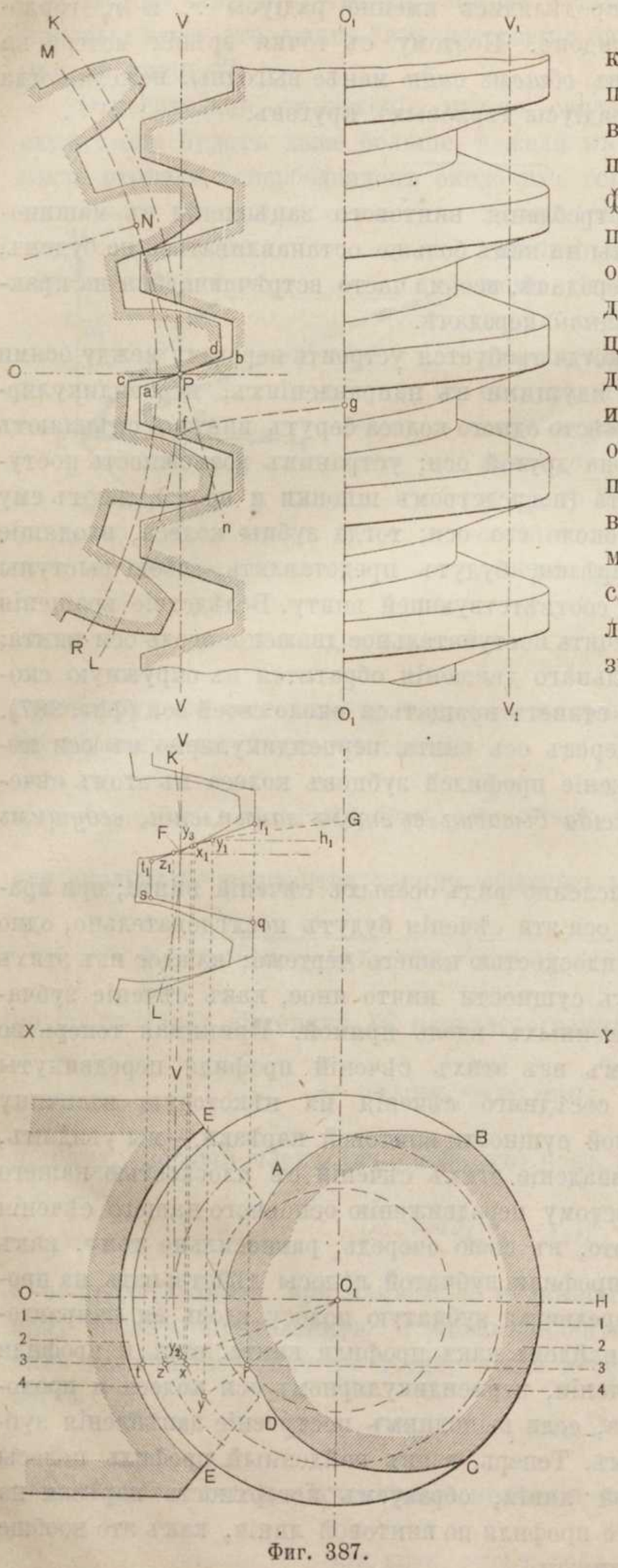
---

Въ виду малаго употребленія винтового зацѣпленія въ машиностроительной практикѣ, мы на немъ больше останавливаться не будемъ, а обратимся теперь къ передачѣ, весьма часто встрѣчающейся на практикѣ, а именно къ *червячной* передачѣ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется устроить передачу между осями не пересѣкающимися, но идущими въ направленіяхъ, перпендикулярныхъ другъ къ другу, вмѣсто одного колеса берутъ винтъ и сцѣпляютъ съ нимъ колесо, сидящее на другой оси; устранивъ возможность поступательнаго движенія винта (посредствомъ шпонки и проч.), даютъ ему вращательное движеніе около его оси; тогда зубцы колеса, входящіе во впадины винтовой нарѣзки, будутъ представлять собою выступы винтовой нарѣзки гайки, соотвѣтствующей винту. Вслѣдствіе вращенія винта гайка должна получить поступательное движеніе вдоль оси винта; скорость этого поступательнаго движенія обратится въ окружную скорость колеса, и послѣднее станетъ вращаться около своей оси (фиг. 387).

Проведемъ сѣченіе черезъ ось винта перпендикулярно къ оси колеса и разсмотримъ движеніе профилей зубцовъ колеса въ этомъ сѣченіи, *предполагая, какъ всегда бываетъ въ этомъ зацѣпленіи, ведущимъ червякъ.*

Проводимъ также мысленно рядъ осевыхъ сѣченій винта; при вращеніи винта около своей оси эти сѣченія будутъ послѣдовательно, одно за другимъ, совпадать съ плоскостью нашего чертежа; каждое изъ этихъ сѣченій представляетъ въ сущности ничто иное, какъ сѣченіе зубчатыхъ профилей, расположенныхъ вдоль прямой. Принимая теперь во вниманіе, что въ каждомъ изъ этихъ сѣченій профиля передвинуты относительно профилей сосѣдняго сѣченія на нѣкоторую величину вдоль оси винта,—по самой сущности винтовой нарѣзки,—мы увидимъ, что послѣдовательное совпаденіе этихъ сѣченій съ плоскостью нашего чертежа равносильно простому передвиженію основного нашего сѣченія винта вдоль его оси, а это, въ свою очередь, равносильно тому, какъ если бы мы заставляли профили зубчатой полосы дѣйствовать на профили зубцовъ колеса, передвигая зубчатую полосу вдоль ея направленія. Слѣдовательно, мы найдемъ какъ профили винта, такъ и профили винтового колеса, въ сѣченіи, перпендикулярномъ оси колеса и проходящемъ черезъ ось винта, если выполнимъ построеніе зацѣпленія зубчатой полосы съ колесомъ. Теперь, взявъ найденный профиль полосы и зная наклонъ винтовой линіи, образуемъ поверхность нарѣзки на винтѣ движеніемъ даннаго профиля по винтовой линіи, какъ это вообще дѣлается для всякихъ винтовъ.




Фиг. 387.

Что касается зубчатаго колеса, то для точнаго выполненія зубцовъ лучше всего сдѣлать фрезъ, имѣющій форму червяка, и этимъ фрезомъ нарѣзать зубцы: при вращеніи фреза около оси острыя его ребра будутъ врѣзываться въ тѣло цилиндра, изъ котораго должно быть сдѣлано колесо и который посаженъ на ось, перпендикулярную къ первой, и такимъ образомъ винтовыя нарѣзки мало-помалу оставятъ какъ бы слѣдъ на поверхности цилиндра въ видѣ точныхъ зубцовъ колеса.

Чтобы имѣть на чертежѣ профили поверхности зубца колеса въ различныхъ точкахъ, мы можемъ поступить такимъ образомъ: проводимъ рядъ вспомогательныхъ сѣченій, параллельныхъ главному, которое мы выше разсматривали; тогда отъ поверхности винтовой нарѣзки червяка останутся на каждой изъ плоскостей этихъ сѣченій слѣды опять въ видѣ профилей зубцовъ полосы. Ищемъ далѣе для каждой изъ полосъ сопряженные профили на колесѣ, предполагая полосу движущейся вдоль своего направленія; найденные профили и будутъ профилями по-

верхностей зубцовъ колеса, лежащими въ проведенныхъ нами сѣченіяхъ.

Возьмемъ для червяка, какъ это часто берутъ на практикѣ, трапецоидальный профиль; тогда въ главномъ сѣченіи мы будемъ имѣть эвольвентное зацѣпленіе зубчатой полосы съ колесомъ.

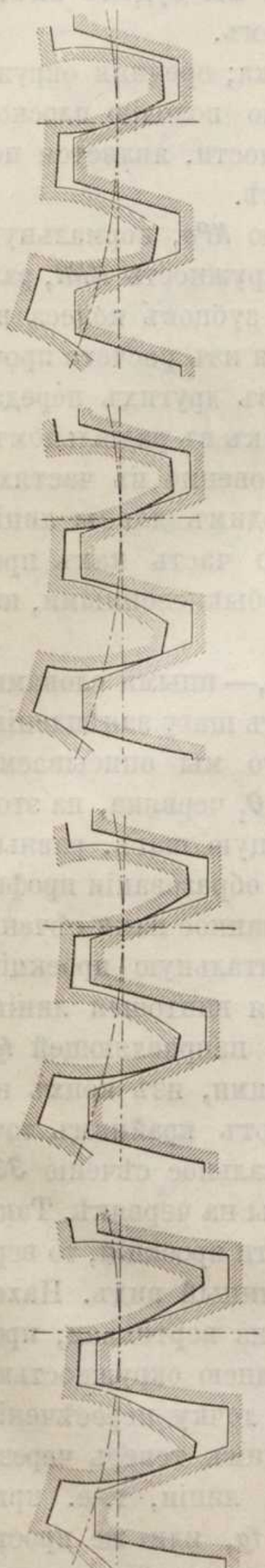
На чертежѣ (фиг. 387) *aPb* есть профиль червяка; средняя окружность *KPL* червячнаго колеса и представляетъ собою полодію плоской системы *O*; прямая *VV*, касательная къ этой окружности, является полодіей для системы, принадлежащей зубчатой полосѣ.

Въ точкѣ *P* касанія полодій проводимъ прямую *NPn*, нормальную къ профилю *aPb*, и отыскиваемъ вспомогательную окружность *MNR*, развертывающей которой будетъ служить профиль *cPd* зубцовъ колеса въ этомъ главномъ сѣченіи. Шагъ зацѣпленія получается изъ расчета прочности зубцовъ, подобно тому, какъ мы это имѣли въ другихъ передачахъ. Зная шагъ и помня, что размѣры профилей, какъ въ радіальномъ, такъ и въ окружномъ направленіяхъ, даются обыкновенно въ частяхъ шага, вычерчиваемъ полные профили зубцовъ, находимъ длины линіи и дуги зацѣпленія, а также опредѣляемъ рабочую часть какъ профиля *cd*, такъ и профиля *ab*, пользуясь при этомъ обыкновенными, изложенными раньше пріемами.

Будемъ считать нашъ червякъ однооборотнымъ,— иными словами, предположимъ, что шагъ винтовой нарѣзки его равенъ шагу зацѣпленія. Такъ какъ шагъ зацѣпленія считается вдоль *VV*, то мы описываемъ прямою *VV* цилиндрическую поверхность около оси $O_1O_1$ червяка, на этой поверхности опредѣляемъ винтовую линію *fg*, имѣющую шагъ, равный шагу зацѣпленія, и беремъ ее за направляющую при образованіи профилемъ *aPb* поверхности винтовой нарѣзки. Считая сдѣланное нами сѣченіе за вертикальную проекцію, вычертимъ еще горизонтальную проекцію червяка; въ такомъ случаѣ окажется, что различныя винтовыя линіи, описанныя точками профиля при его движеніи по направляющей *fg*, изобразятся въ горизонтальной проекціи окружностями, изъ коихъ на чертежѣ показаны лишь тѣ, которыя соотвѣтствуютъ крайнимъ точкамъ *a* и *b* и средней *P*. Проведемъ теперь вертикальное сѣченіе *ЗЗ*, параллельное главному, и найдемъ профили впадины на червякѣ. Такъ какъ сѣченіе это параллельно вертикальной плоскости проекцій, то вертикальная проекція профиля и дастъ намъ его истинный видъ. Находимъ эту проекцію: беремъ произвольную точку $x_1$ на вертикали, проходящей чрезъ точку пересѣченія плоскости съ среднею окружностью, такъ что точка ($x$, $x_1$) будетъ представлять собою точку пересѣченія плоскости *ЗЗ* съ средней винтовой линіей. Проводимъ теперь черезъ точку $x_1$ вертикальную проекцію средней винтовой линіи, т.-е. пристраиваемъ при $x_1$ кривую *FG*, тождественную съ *fg*, или же просто строимъ гдѣ-нибудь эту кривую *FG* и отыскиваемъ на ней точку $x_1$, соотвѣтствующую точкѣ $x$.

Чтобы найти другія точки профиля, напр., точку, соотвѣтствую-

щую точкѣ $r$, проводимъ чрезъ $r$ слѣдъ осевого сѣченія винта, т.-е. прямую $O_1 r$, продолжаемъ его до пересѣченія съ среднею окружностью въ точкѣ $y$ и находимъ на вертикальной проекціи $FG$ средней винтовой линіи, проведенной черезъ $x_1$, точку $y_1$, соотвѣтствующую $y$. Теперь, по свойству образованія винтовой поверхности, можемъ сказать, что точка этой поверхности, представляема ягоризонтальной проекціей $r$, находится въ такомъ же разстояніи отъ горизонтальной плоскости, проведенной черезъ $(y, y_1)$, въ какомъ точка $b$ профиля $aPb$ находится отъ прямой $OP$ (движеніемъ этого профиля и образована винтовая поверхность). Проводя поэтому горизонталь $y_1 h_1$ черезъ точку $y_1$, находимъ на вертикали, проходящей черезъ $r$, точку $r_1$, находящуюся въ указанномъ разстояніи отъ $y_1 h_1$ и служащую вертикальной проекціей для $r$.



Фиг. 388.

Подобнымъ же образомъ находимъ проекціи и другихъ точекъ профиля. Такъ, напримѣръ, для отысканія вертикальной проекціи какой-либо точки $Z$ искомаго профиля проводимъ черезъ горизонтальную проекцію $z$ окружность $O_1 z$, которая будетъ служить горизонтальной проекціей винтовой линіи, соотвѣтствующей точкѣ $Z$. Опредѣляемъ далѣе относительное положеніе точки $Z$ на образующемъ профилѣ $ab$, для чего изъ точки пересѣченія окружности $(O_1 z)$ съ $(O_1 H)$ проводимъ вертикаль до пересѣченія съ профилемъ $ab$,—это построеніе здѣсь не выполнено во избѣжаніе усложненія чертежа. Далѣе проводимъ осевое сѣченіе, т.-е. соединяемъ $O_1$ съ $z$; на средней винтовой линіи получаемъточку $y_3$, отыскиваемъ соотвѣтствующую ей вертикальную проекцію $y_3$ и заканчиваемъ построеніе совершенно такъ же, какъ мы это сдѣлали для точки $r$. Такъ найдемъ верхнюю часть искомаго профиля, $t_1 r_1$. Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ и нижнюю его часть $sq$ и, зназитъ, весь искомый профиль $r_1 t_1 sq$, образованный сѣкущей плоскостью $33$. Теперь беремъ этотъ профиль и отыскиваемъ ему сопряженный по общимъ правиламъ (по методу *Reuleaux*), при чемъ профиль этотъ разсматриваемъ принадлежащимъ зубчатой полосѣ $VV$, сцѣпляющейся съ колесомъ радіуса $OP$; замѣтимъ при этомъ, что такъ какъ профиль впадины уже не будетъ симметричнымъ, то придется отыскивать сопряженные профили

отдѣльно какъ для $t_1 r_1$, такъ и для *sq*. Шагъ зацѣпленія остался тотъ же, что и въ главномъ сѣченіи, но ширина впадины, считая по *VV*, будетъ теперь другая, сообразно чему нѣсколько измѣнится теперь и толщина профиля зубца. Высота зубца въ радіальномъ направленіи можетъ быть опредѣлена изъ того обстоятельства, что зубцы колеса обыкновенно ограничиваются линіей *EE*; точка пересѣченія *33* съ *EE* и служитъ границей профилей въ радіальномъ направленіи для разсматриваемаго сѣченія. Безъ труда находимъ линію зацѣпленія и рабочія части профилей.

Проведя нѣсколько такихъ сѣченій, мы будемъ въ состояніи опредѣлить вполнѣ видъ зубцовъ колеса, равно какъ величины рабочихъ частей для различныхъ сѣченій, т.-е. опредѣлимъ дѣйствіе винта на зубцы колеса; соотвѣтственно этому будемъ имѣть представленіе и о работѣ нарѣзки. На фигурѣ 388 приведены профили сѣченій, образованныхъ вертикальными плоскостями *11*, *22*, *33* и *44*. Профили изображены въ различные моменты движенія червяка,—тѣ именно, когда точка касанія одной пары ихъ совпадаетъ съ точкой *P* касанія полодій *KL* и *VV*, пунктирно проведенныхъ на всѣхъ фигурахъ. Никакого труда не представитъ изображеніе всѣхъ этихъ профилей въ какой-либо одинъ моментъ движенія червяка.

Относительно связи между шагомъ зацѣпленія и шагомъ винта можно сказать, что послѣдній бываетъ или равенъ первому, или вдвое, втрое, ... въ $n$ разъ больше его; въ первомъ случаѣ мы имѣемъ однооборотный червякъ, во второмъ — двухъ-, трехъ-, ... $n$ — оборотный. Если у насъ имѣется однооборотный червякъ, а колесо имѣетъ $z$ зубцовъ, то очевидно, что при одномъ оборотѣ червяка колесо сдѣлаетъ $1/z$-ую часть оборота, повернувшись на одинъ зубецъ; при двухъ-оборотномъ червякѣ колесо повернется (за время одного оборота червяка) уже на 2 зубца, т.-е. сдѣлаетъ $2/z$ часть оборота, и, вообще, повернется на $n/z$ часть оборота при $n$-оборотномъ червякѣ. Отсюда видно, что червячная передача можетъ служить для преобразованія быстраго вращательнаго движенія въ медленное. Задавшись передаточнымъ числомъ и выбравъ опредѣленный типъ червяка (одно-, двухъ- ... оборотный), находимъ число зубцовъ на колесѣ; далѣе, изъ расчета прочности опредѣляемъ шагъ зацѣпленія, а по шагу и числу зубцовъ находимъ радіусъ $R$ колеса, ибо

$$zt = 2\pi R.$$

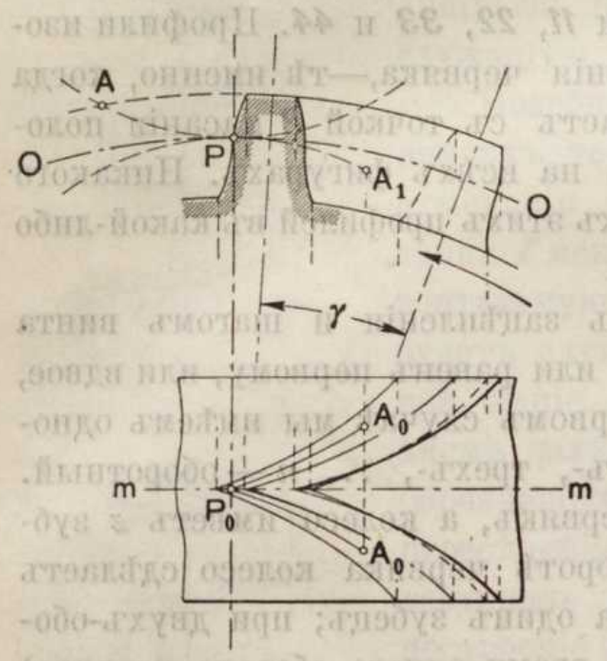
Если червякъ $n$-оборотный, то шагъ нарѣзки равенъ $nt$. Выбираемъ уголъ наклона $\beta$ нарѣзки на среднемъ цилиндрѣ и опредѣляемъ средній радіусъ червяка $r$ (соотвѣтствующій *AB* на чертежѣ); для этого воспользуемся соотношеніемъ

$$nt = 2\pi r\, tg\beta.$$

Профилируемъ, какъ указано, червякъ и колесо сначала въ главномъ сѣченіи, а затѣмъ, такъ какъ всѣ размѣры червяка извѣстны, находимъ профили зубцовъ колеса и въ другихъ сѣченіяхъ; все это позволитъ намъ составить полное представленіе о работѣ червяка. *Ведущимъ всегда бываетъ червякъ.* При маломъ углѣ наклона винтовой нарѣзки, меньшемъ такъ наз. *угла тренія*, колесо не въ состояніи привести червякъ во вращеніе, каковымъ обстоятельствомъ приходится часто пользоваться въ машиностроеніи (напр., при конструированіи подъемныхъ механизмовъ и проч.).

---

Винтообразныя зубчатыя поверхности иногда употребляются и въ простой цилиндрической передачѣ. Представимъ себѣ цилиндръ (аксоидъ), принадлежащій какому-либо изъ колесъ, раздѣленнымъ на двѣ половины плоскостью, перпендикулярной къ оси цилиндра. Оставляя въ этой плоскости профили зубцовъ на мѣстѣ, строимъ винтовыя линіи (на той и другой половинѣ) одного и того же шага, но противоположнаго направленія: одна правая, другая лѣвая. Взявъ ихъ за направляющія, описываемъ имѣющимися профилями винтовыя поверхности, которыя и будутъ служить теперь зубцами (фиг. 389).



Фиг. 389.

Колесо такого рода можно разсматривать, какъ состоящее изъ ряда безконечно тонкихъ дисковъ съ одними и тѣми же зубцами, но только сдвинутыхъ по отношенію другъ къ другу такъ, что соотвѣтствующія точки зубцовъ лежатъ на винтовыхъ линіяхъ.

На чертежѣ 389 изображена половина одного такого зубца въ проекціи его на среднюю плоскость, а также проекція того же зубца (цѣлаго) на плоскость, перпендикулярную средней (т.-е. проходящую параллельно оси колеса); контуры зубца на этой плоскости представятся винтовыми линіями.

Зацѣпленіе выбрано *циклическое*, и указана линія зацѣпленія $APA_1$. Ведущимъ предположено разсматриваемое колесо $O$. Такъ какъ каждое сѣченіе, параллельное средней плоскости, изобразится въ проекціи на эту плоскость въ натуральную величину, и такъ какъ каждое такое сѣченіе, какъ мы указали выше, представляетъ собою какъ бы безконечно-тонкое колесо, тождественное съ среднимъ сѣченіемъ, но только сдвинутое по отношенію къ нему на нѣкоторый уголъ, то ясно, что дуга $PA_1$ представляетъ въ данный моментъ проекцію на среднюю плоскость линіи соприкосновенія пары сопряженныхъ зубцовъ.

Не трудно видѣть, что въ данный моментъ соприкосновеніе въ средней плоскости дошло уже до полодій: въ сѣченіи, соотвѣтствующемъ точкѣ $A_1$, соприкосновеніе только начинается, въ сѣченіяхъ же, лежащихъ дальше отъ средняго, соприкосновенія еще нѣтъ. При дальнѣйшемъ вращеніи колеса точка соприкосновенія будетъ постепенно удаляться отъ полодіи; въ соприкосновеніе будутъ вступать дальнѣйшія сѣченія. Въ нѣкоторый моментъ соприкосновеніе въ среднемъ сѣченіи прекратится; постепенно оно будетъ прекращаться на дальнѣйшихъ, а линія соприкосновенія все будетъ укорачиваться и въ послѣдній моментъ обратится въ точку (съ той и другой стороны). Для этой пары зубцовъ соприкосновеніе началось также въ точкѣ средняго сѣченія, затѣмъ, какъ это не трудно видѣть по чертежу, стала увеличиваться линія соприкосновенія.

Такимъ образомъ, въ данномъ зацѣпленіи мы имѣемъ постепенное увеличеніе, а затѣмъ постепенное же уменьшеніе длины линіи соприкосновенія, между тѣмъ какъ въ простыхъ цилиндрическихъ колесахъ длина линіи соприкосновенія всегда равна длинѣ зубцовъ; это обстоятельство приводитъ насъ къ заключенію того рода, что въ разсматриваемыхъ нами колесахъ съ угловыми зубцами имѣются болѣе выгодныя условія работы, чѣмъ въ простыхъ цилиндрическихъ, такъ какъ зубецъ не сразу подвергается дѣйствію полной нагрузки, а постепенно.

Кромѣ того, если мы черезъ $\gamma$ обозначимъ уголъ, на который является сдвинутымъ крайнее сѣченіе относительно средняго, а слѣдовательно, дуга полодіи, соотвѣтствующая этому углу, будетъ равна $\gamma R$, то не трудно видѣть, что продолжительность зацѣпленія пары зубцовъ выразится теперь величиной $(\sigma + \gamma R)$, гдѣ черезъ $\sigma$ мы обозначили дугу зацѣпленія для простыхъ цилиндрическихъ колесъ съ тѣми же профилями. Что касается угла $\beta$ наклона винтовой линіи, то онъ связанъ, какъ это можно видѣть изъ чертежа, съ половиной ширины колеса $b/2$ и съ дугой $\gamma R$ соотношеніемъ:

$$tg\beta = b / 2\gamma R.$$

Выбравъ уголъ $\gamma$, получаемъ изъ этого уравненія уголъ $\beta$ и такимъ образомъ вполнѣ опредѣлимъ видъ зубцовъ.

Изъ чертежа понятно, что если бы въ нашей парѣ колесъ вращеніе совершалось въ другую сторону (ведущимъ было бы колесо $O_1$), то соприкосновеніе началось бы въ обоихъ крайнихъ сѣченіяхъ и кончилось бы въ среднемъ. Точно такъ же легко видѣть, что соотвѣтствующія винтовыя линіи на обоихъ колесахъ противоположны, т.-е. правой винтовой линіи на одномъ колесѣ соотвѣтствуетъ лѣвая на другомъ и обратно.

Этими соображеніями мы закончимъ статью о передачѣ движенія между непараллельными осями и перейдемъ теперь къ изложенію послѣдней статьи нашего курса,—статьи о трехзвенныхъ винтовыхъ цѣпяхъ и ея модификаціяхъ.

## C. Трехзвенная винтовая цѣпь.

### § 49. Общая теорія трехзвенной винтовой цѣпи. Частные случаи.

Винтовое движеніе, какъ мы знаемъ, есть сочетаніе вращательнаго движенія около нѣкоторой оси и поступательнаго вдоль той же оси; но одно и то же вращательное движеніе, положимъ, происходящее по часовой стрѣлкѣ, можно сочетать съ поступательнымъ двояко: одинъ разъ при одномъ направленіи поступательнаго движенія, другой разъ при противоположномъ, что, въ свою очередь, обусловливаетъ различіе винтовыхъ паръ.

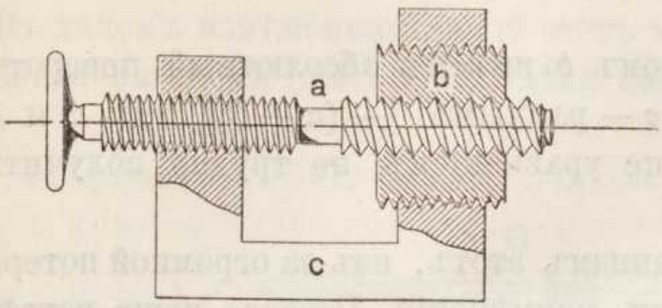
Пусть передъ нами находится винтовая пара; будемъ смотрѣть на нее вдоль ея оси; нарѣзка этой пары можетъ быть такова, что при вращеніи *по часовой стрѣлкѣ* одного элемента относительно другого, остающагося неподвижнымъ, первый будетъ *удаляться отъ насъ*; такимъ образомъ, здѣсь имѣемъ сочетаніе вращательнаго движенія *съ поступательнымъ въ направленіи отъ насъ*; такая нарѣзка, а вмѣстѣ съ ней и вся пара, называется *правой*. Но можно устроить нарѣзку такъ, что элементъ пары, вращаясь опять по часовой стрѣлкѣ, станетъ *приближаться къ намъ*; въ этомъ случаѣ имѣемъ сочетаніе того же вращательнаго движенія съ поступательнымъ, совершающимся теперь въ другую сторону,—такая нарѣзка называется *лѣвой*.

Легко видѣть, что, если мы будемъ вращать элементъ пары *противъ* часовой стрѣлки, то въ первомъ случаѣ,—въ случаѣ правой пары,—элементъ будетъ приближаться къ намъ, а во второмъ—удаляться отъ насъ. При вращеніи элемента по часовой стрѣлкѣ на $360^0$, онъ, въ случаѣ правой нарѣзки, удалится отъ насъ на величину $h$, равную *шагу* винтовой линіи (разстоянію двухъ сосѣднихъ точекъ винтовой линіи, лежащихъ на одной образующей цилиндра). Изъ самаго закона образованія винтовой линіи на поверхности круглаго цилиндра слѣдуетъ, что, въ случаѣ поворота элемента пары вообще на нѣкоторый уголъ $\varphi$, элементъ подвинется вдоль оси цилиндра на величину, равную $\varphi h/2\pi$ или на $\alpha h$, гдѣ $\alpha$ есть величина поворота въ частяхъ полнаго оборота.

При томъ же поворотѣ $\alpha$ элементъ лѣвой пары, имѣющей тотъ же шагъ $h$, подвинется на ту же величину $\alpha h$, но въ другую сторону (къ намъ); если первую величину $\alpha h$ считать положительной, то вторую можно считать отрицательной. Такимъ образомъ является возможность алгебраически различать правыя и лѣвыя нарѣзки тѣмъ, что у первыхъ будемъ считать шагъ положительнымъ, у вторыхъ—отрицательнымъ; повороты же, какъ это принято вообще, считаются положительными въ направленіи часовой стрѣлки и отрицательными—въ обратную сторону.

Обратимся теперь къ сочетанію винтовыхъ паръ, ограничиваясь простѣйшими. Здѣсь, въ противоположность вращательнымъ и посту-

пательнымъ парамъ, можно составить замкнутую цѣпь изъ паръ, *оси которыхъ совпадаютъ*, и именно изъ *трехъ* паръ. Дѣйствительно, не трудно представить себѣ винтъ *a* (фиг. 390), на оси котораго имѣется еще какой-нибудь винтъ; гайка *b* этого послѣдняго имѣетъ на своей внѣшней сторонѣ нарѣзку и служитъ такимъ образомъ въ то же время винтомъ, гайка *c* для котораго соединена неразрывно съ гайкой для *a*. Получаемъ такимъ образомъ цѣпь изъ трехъ одноосныхъ винтовыхъ паръ: $A(c,a)$, $B(b,a)$, $C(b,c)$.



Фиг. 390.

Разсмотримъ относительныя движенія звеньевъ этой цѣпи.

Повертываемъ *a* относительно *c* на $\alpha$, гдѣ $\alpha$ выражено въ доляхъ $\pi$, и пусть *b* повернется относительно *a* на $\beta$; тогда относительно *c* оно повернется на $(\alpha+\beta)$, и, если шаги паръ мы назовемъ соотвѣтственно черезъ $x$, $y$ и $z$, то найдемъ, что поступательное движеніе *a* относительно *c* равно $\alpha x$, *b* относительно *a* равно $\beta y$; слѣд., *b* относительно *c* подвинулось на $(\alpha x+\beta y)$; но такъ какъ оно повернулось въ то же время относительно *c* на $(\alpha+\beta)$, а шагъ этой пары $(b,c)$ есть $z$, то поступательное перемѣщеніе *b* выразится въ то же время въ видѣ $z(\alpha+\beta)$, что даетъ намъ возможность написать уравненіе:

$$\alpha x+\beta y=(\alpha+\beta)z.$$

Отсюда видимъ, что при данныхъ шагахъ, т.-е. для данныхъ винтовыхъ паръ, опредѣленному повороту $\alpha$ звена *a* относительно *c* соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное движеніе звена *b* относительно того же звена *c*,—другими словами, цѣпь является вполнѣ опредѣленной.

Если механизмъ былъ поставленъ на звено *c*, то движеніе звена *b* относительно *c* является абсолютнымъ, и, слѣдовательно, при поворотѣ звена *a* на $\alpha$, звено *b* повернется на $\alpha+\beta=\alpha\cdot\dfrac{x-y}{z-y}$ и подвинется на $(\alpha+\beta)z=\alpha z\cdot\dfrac{x-y}{z-y}$, какъ это видно изъ уравненія, связывающаго $\alpha$ и $\beta$.

Если механизмъ поставленъ на звено *a*, то абсолютнымъ движеніемъ звена *b* будетъ его движеніе относительно *a*. У насъ $\alpha$ было поворотомъ звена *a* относительно *c*, слѣд. $(-\alpha)$ являлось поворотомъ *c* относительно *a*; поэтому теперь $(-\alpha)$ будетъ выражать абсолютный поворотъ звена *c*, а $\beta$ — абсолютный поворотъ звена *b*, при чемъ $\alpha$ и $\beta$ опять связаны прежнимъ ур-ніемъ; оно намъ даетъ

$$\beta=(-\alpha)\cdot\frac{x-z}{y-z};$$

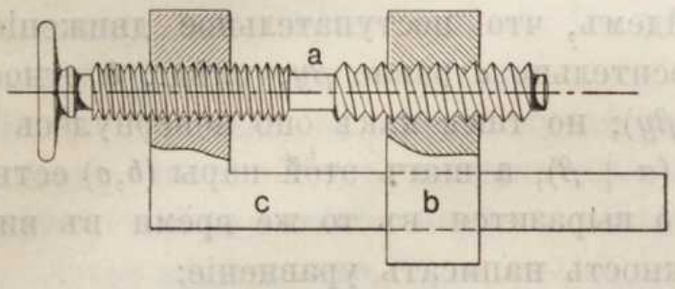
звено $c$ подвинется на $(-\alpha).x$, а звено $b$ — на $\beta.y$, т.-е. на

$$-\alpha y \cdot \frac{x-z}{y-z}.$$

Точно такъ же при неподвижномъ $b$ имѣемъ абсолютный поворотъ звена $a$ равнымъ $(-\beta)$, а звена $c$ — равнымъ $[-(\alpha+\beta)]$, гдѣ $\alpha$ и $\beta$ опять связаны приведеннымъ выше уравненіемъ; не трудно получить теперь передвиженія $a$ и $c$.

Въ такомъ общемъ видѣ механизмъ этотъ, изъ-за огромной потери работы на треніе, почти не имѣетъ примѣненій. Гораздо чаще встрѣчаются частные случаи этой трехзвенной винтовой цѣпи, когда какая-либо пара обращается въ поступательную или вращательную.

Предположимъ, что пара $C(b,c)$ обратилась въ поступательную пару съ направленіемъ движенія, параллельнымъ общей оси оставшихся винтовъ (фиг. 391). Поставивъ механизмъ на $c$, мы можемъ вращеніемъ винта $a$ передвигать взадъ и впередъ гайку $b$ второго винта, имѣющую извнѣ направляющія, параллельныя оси винта $a$ (поступательная пара $c$). Обозначимъ, какъ и прежде, шаги обоихъ винтовъ черезъ $x$ и $y$; поворотъ $\alpha$ звена $a$ относительно $c$ теперь будетъ въ то же время и поворотомъ $a$ относительно $b$, такъ какъ гайка $b$ сама вращаться не можетъ; другими словами, $(\beta)$, — поворотъ $b$ относительно $a$, — будетъ теперь равенъ $(-\alpha)$. Такимъ образомъ звено $b$ относительно звена $a$ подвинется на величину $(-\alpha y)$; но звено $a$ подвинется относительно звена $c$ (т.-е. абсолютно) на величину $\alpha x$, слѣд., гайка $b$ подвинется абсолютно на величину $\alpha(x-y)$. Это выраженіе могло быть получено также изъ найденнаго выше соотношенія:



Фиг. 391.

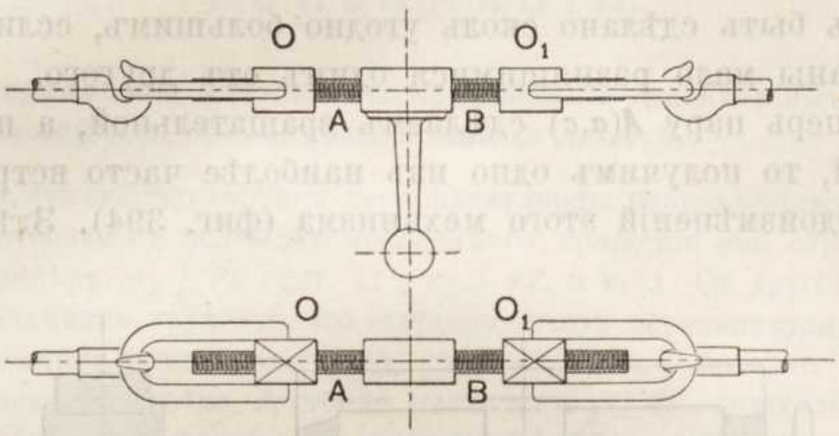
$$(\alpha+\beta)z = \alpha z \cdot \frac{x-y}{z-y},$$

если бы въ немъ, примѣнительно къ разсматриваемому случаю, мы положили $z=\infty$ (для поступательной пары); произведеніе же $(\alpha+\beta)z$, обращающееся теперь въ $0.\infty$ (ибо $(\alpha+\beta)$ теперь равно нулю), попрежнему остается осевымъ перемѣщеніемъ гайки $b$.

Какъ показываетъ выраженіе $\alpha.(x-y)$, передвиженіе гайки $b$ можетъ быть сдѣлано *произвольно малымъ*,—стоитъ только шаги обоихъ винтовъ, при одинаковой нарѣзкѣ (правой или лѣвой) сдѣлать мало разнящимися другъ отъ друга. Подобный механизмъ носитъ названіе *дифференціальнаго винта*, и имъ можно пользоваться для измѣренія

малыхъ отрѣзковъ числомъ оборотовъ винта $a$, а также и во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ требуется весьма малое передвиженіе.

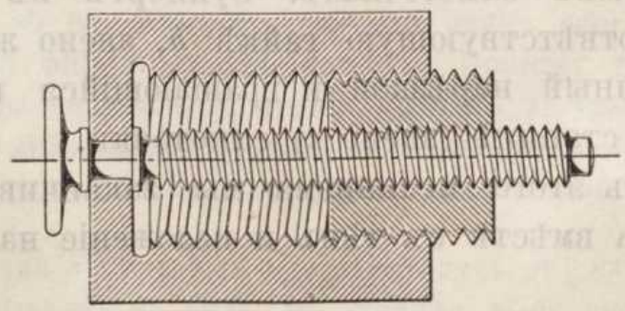
Если теперь видоизмѣнить эту цѣпь тѣмъ, что сдѣлать нарѣзки обоихъ винтовъ противоположными, то передвиженіе гайки будетъ равно $a(x+y)$. Въ такомъ измѣненномъ видѣ этотъ механизмъ употребляется для соединенія вагоновъ (фиг. 392). Здѣсь винты $A$ и $B$, принадлежащіе звену $a$,




Фиг. 392.

имѣютъ: одинъ ($A$)—правую нарѣзку, а другой ($B$)—лѣвую. Гайки $O$ и $O_1$ для этихъ винтовъ соединяются при помощи крюковъ соотвѣтственно съ однимъ и другимъ вагономъ. Если мы будемъ вращать звено $a$ по часовой стрѣлкѣ (смотря со стороны $O_1$), то, очевидно, винтъ $A$ будетъ входить въ гайку $O$, т.-е. гайка $O$ будетъ приближаться къ серединѣ звена $a$; гайка $O_1$ точно такъ же будетъ приближаться къ серединѣ $a$; значитъ, оба вагона будутъ сдвигаться на величину $(x+y)$ при одномъ оборотѣ звена $a$.

Второе частное видоизмѣненіе нашей трехзвенной цѣпи получимъ, если сдѣлаемъ пару $A(c,a)$, вращательной, т.-е. одинъ изъ винтовъ $a$ обратимъ въ простой шипъ, вращающійся въ подшипникѣ неподвиж-



Фиг. 393.

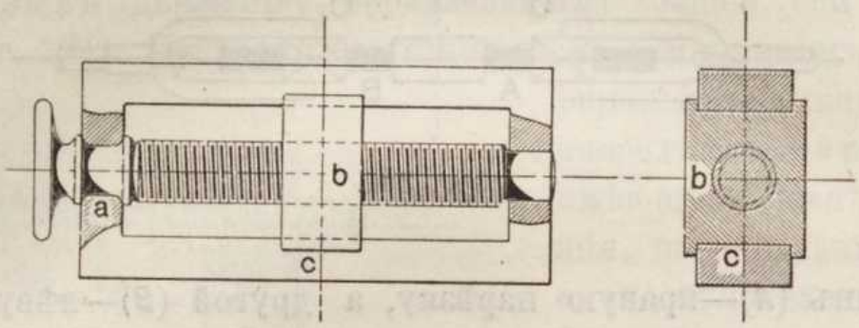
наго звена $c$ (фиг. 393). Въ этомъ случаѣ шагъ $x=0$, и при поворотѣ звена $a$ на $\alpha$ получаемъ поворотъ гайки $b$ въ видѣ $\alpha\cdot\frac{y}{y-z}$, гдѣ $y$ и $z$

опять обозначаютъ шаги оставшихся винтовъ; передвиженіе гайки $q$ выразится черезъ $\alpha z . \frac{y}{y-z}$.

Какъ это, такъ и предыдущее выраженіе можно получить изъ выраженія $(\alpha+\beta)z = \alpha \cdot z \frac{x-y}{z-y}$, гдѣ придется положить $x=0$.

Въ противоположность тому, что мы имѣли для предыдущаго случая (дифференціальнаго винта), здѣсь при данномъ оборотѣ $\alpha$ передвиженіе можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ, если шаги $x$ и $y$ будутъ сдѣланы мало разнящимися одинъ отъ другого.

Если теперь пару $A(a,c)$ сдѣлаемъ вращательной, а пару $C(b,c)$ поступательной, то получимъ одно изъ наиболѣе часто встрѣчаемыхъ на практикѣ видоизмѣненій этого механизма (фиг. 394). Здѣсь при пово-




Фиг. 394.

ротѣ винта $a$ на $\alpha$ гайка $b$ будетъ подвигаться въ ту или другую сторону на величину $\alpha x$, гдѣ $x$ есть шагъ винта; другими словами, одинъ элементъ $(a)$ винтовой пары $B(b,a)$ имѣетъ только вращательное движеніе, другой же $(b)$—только поступательное. Описанный механизмъ примѣняется въ параллельныхъ тискахъ и во многихъ машинахъ по обработкѣ металловъ и дерева, тамъ, гдѣ, вообще говоря, равномѣрное вращательное движеніе желательно преобразовать въ равномѣрное же и достаточно медленное поступательное, напр., при движеніи суппорта въ такъ-называемыхъ самоточкахъ. Суппортъ въ такихъ случаяхъ имѣетъ гайку, соотвѣтствующую гайкѣ $b$, звено же $a$ представляетъ шпиндель, снабженный нарѣзкой и вращающійся въ подшипникахъ, укрѣпленныхъ въ станинѣ (звено $c$) самоточки.

Разсмотрѣніемъ этого механизма мы заканчиваемъ разсмотрѣніе винтовыхъ паръ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и изложеніе нашего курса.

---

Практика курса упражненій и графическихъ работъ по кинематикѣ механизмовъ показала необходимость дополненія настоящаго текста рядомъ замѣчаній, имѣющихъ цѣлью разъясненіе тѣхъ или иныхъ вопросовъ курса. Всѣ эти замѣчанія, собранныя вмѣстѣ, составили дополнительную часть курса, приводимую ниже.

# ДОПОЛНЕНІЯ.

**Къ § 4. Опредѣленіе направленія нормалей къ траекторіямъ точекъ и направленія скоростей ихъ при помощи плана скоростей.**

Мы видѣли, что скорости точекъ перпендикулярны направленіямъ векторовъ, соединяющихъ эти точки съ полюсомъ мгновеннаго вращенія (см. стр. 12, строка 16 св.). Такъ, напримѣръ, $v_C \perp PC$ (фиг. 11), $v_Z \perp PZ$, и т. д. Съ другой стороны, изъ теоретической механики извѣстно, что скорости точекъ перпендикулярны нормалямъ къ траекторіямъ этихъ точекъ, такъ что, напримѣръ, $v_A \perp Am$ (фиг. 10), гдѣ $Am$ есть нормаль къ траекторіи точки $A$; точно такъ же $v_B \perp Bn$,—нормали къ траекторіи точки $B$, и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что векторы $PA$, $PB$ и другіе, имъ подобные, совпадаютъ съ нормалями къ траекторіямъ этихъ точекъ. Замѣчая теперь, что векторы плана скоростей параллельны отрѣзкамъ, соединяющимъ точки съ полюсомъ мгновеннаго вращенія, такъ что, напримѣръ, $pa \parallel PA$ (фиг. 11), $pb \parallel PB$, $pz \parallel PZ$ и т. д., заключаемъ, въ свою очередь, что *векторы плана скоростей параллельны нормалямъ къ траекторіямъ соотвѣтственныхъ точекъ*, такъ что, напримѣръ, $pc \parallel$ нормали $PC$ къ траекторіи точки $C$ и т. д.

Полученное заключеніе является особенно цѣннымъ въ тѣхъ случаяхъ, когда полюсъ мгновеннаго вращенія $P$ лежитъ внѣ предѣловъ чертежа и когда, слѣдовательно, непосредственное проведеніе нормалей фактически оказывается невозможнымъ. Въ этихъ случаяхъ вопросъ разрѣшается помощью плана скоростей. Пусть, напримѣръ, требуется опредѣлить направленіе нормали къ траекторіи какой-либо точки $X$ данной системы. Для этого, согласно указаніямъ, сдѣланнымъ выше, строимъ планъ скоростей этой системы, находимъ въ системѣ этого плана точку $x$, соотвѣтствующую точкѣ $X$, и соединяемъ эту точку $x$ съ полюсомъ $p$ плана; прямая $px$ опредѣлитъ собою направленіе искомой нормали, и мы получимъ эту нормаль, если черезъ точку $X$ проведемъ прямую $XN \parallel px$. Прямая $NX$ и представитъ собою искомую нормаль.

Переходя къ вопросу о построеніи плана скоростей $pab$ (фиг. 11), мы должны, прежде всего, принять во вниманіе, что каждый планъ скоростей представляетъ собою фигуру, подобную фигурѣ данной системы. Поэтому для построенія этого плана достаточно имѣть направленія трехъ прямыхъ фигуры системы и дѣйствительное значеніе какого-либо одного отрѣзка или вектора этой системы. Такъ, напримѣръ, въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 11, построеніе можетъ быть выполнено такъ:

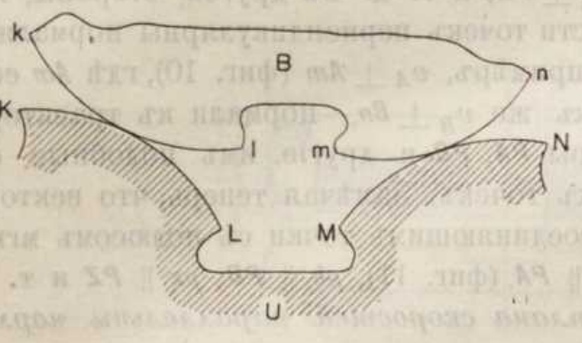
Изъ какой-либо точки $p$ плоскости проводимъ лучъ $p1 \parallel PA$ (нормали къ траекторіи точки $A$) и откладываемъ на немъ, въ заранѣе выбранномъ масштабѣ, отрѣзокъ $pa$, изображающій $v_A$. Точку $b$ опредѣляемъ пересѣченіемъ лучей $p2 \parallel PB$ (нормали къ траекторіи точки $B$) и $a3 \parallel AB$. Такъ же найдется и точка $C$.

Никакого труда не представляетъ и *опредѣленіе направленія скоростей точекъ системы при помощи плановъ скоростей*. Для этого достаточно имѣть дѣйствительное направленіе скорости одной изъ точекъ системы. Пусть, напримѣръ, извѣстно направленіе скорости $v_C$ точки $C$ (фиг. 11). Тогда, опредѣливъ въ системѣ плана точку $c$, соотвѣтствующую точкѣ $C$, ставимъ вокругъ полюса $p$ плана стрѣлку

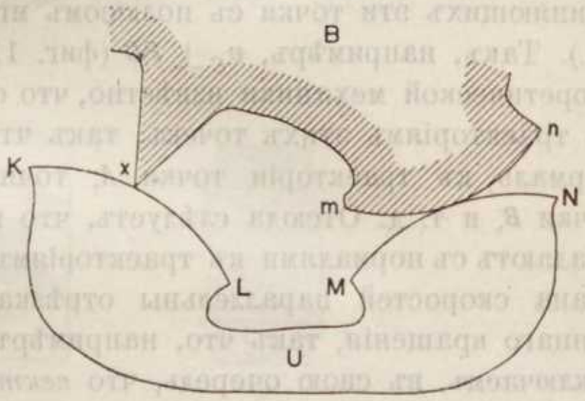
такого направленія, чтобы при вращеніи плана по этой стрѣлкѣ точка $c$ имѣла скорость, направленную *согласно скорости* $v_C$. Ясно, безъ дальнѣйшихъ разсужденій, что скорости всѣхъ точекъ системы окажутся опредѣленными такимъ образомъ вполнѣ.

### Къ § 5. Различные случаи заданія движенія.

Общій случай заданія иллюстрируется фигурой 26, скомпонованной не особенно удачно. Фиг. 395 выясняетъ этотъ случай гораздо нагляднѣе: въ неподвижной системѣ ***U*** выдѣлены двѣ кривыя, ***KL*** и ***MN***, а въ подвижной ***B***—также двѣ кривыя, ***kl*** и ***mn***; при движеніи системы ***B*** кривая ***kl*** касается все время кривой ***KL***, а кривая ***mn***—кривой ***MN***. Если кривую ***kl*** уменьшимъ до размѣровъ точки,—точка ***x*** на фиг. 396,—то получимъ случай, изображенный на фиг. 22. Далѣе можно уменьшить



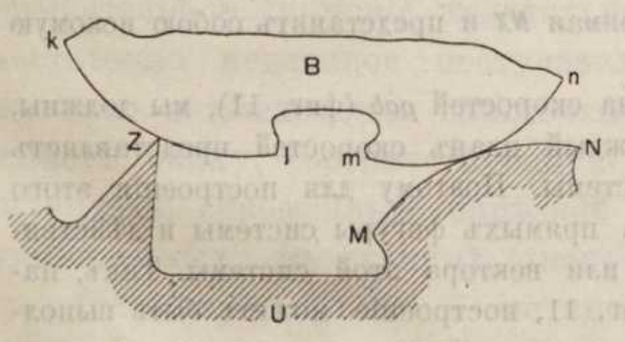

Фиг. 395.




Фиг. 396.

до размѣровъ точки и кривую ***mn***, послѣ чего заданіе движенія окажется такимъ: въ системѣ ***B*** выдѣлены двѣ точки, коими она и скользитъ по неподвижнымъ кривымъ, принадлежащимъ системѣ ***U***, причемъ каждая точка скользитъ по своей кривой.

Указанное сокращеніе кривыхъ можно выполнить и въ системѣ ***U***. Если, напримѣръ, сократить до размѣровъ точки кривую ***KL***, то получимъ случай, изображенный на фиг. 397; можно, далѣе, сократить и кривую ***MN***.

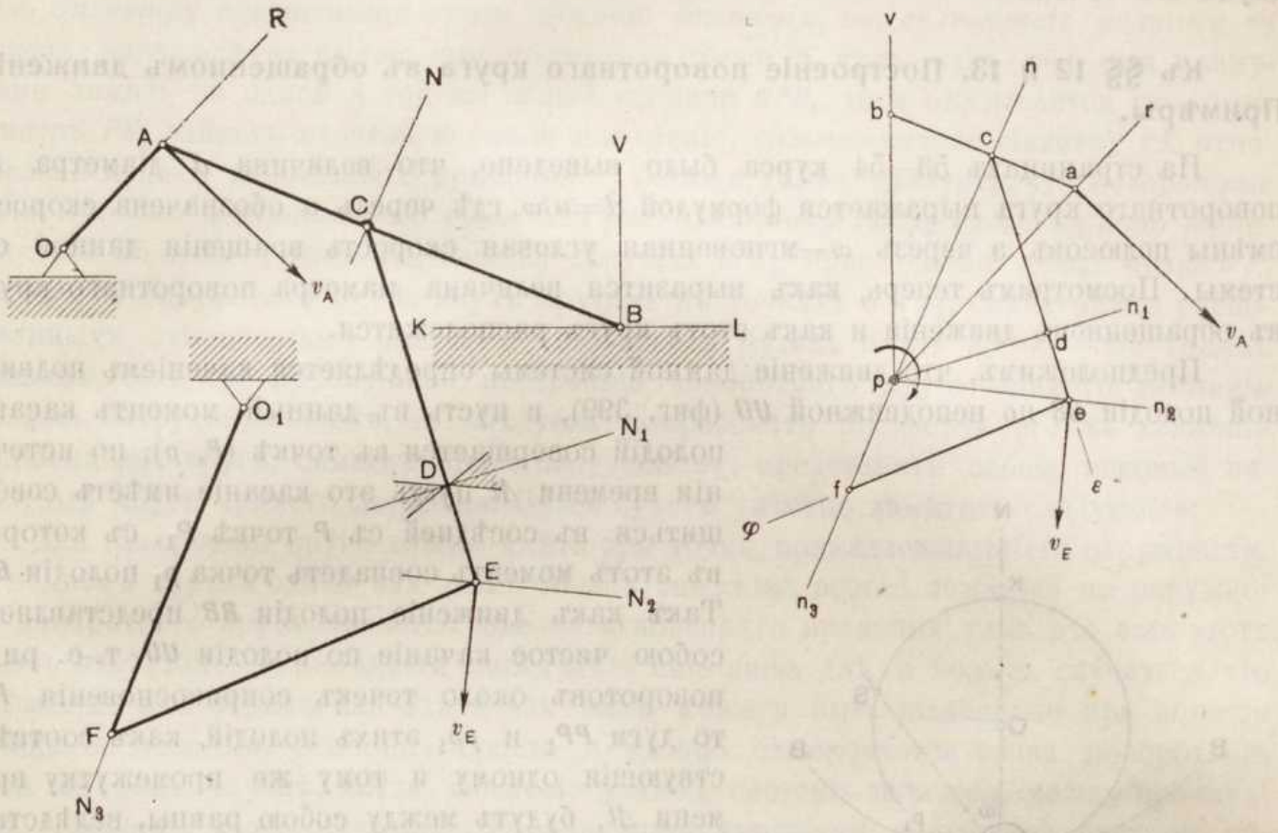



Фиг. 397.

Отмѣтимъ, кстати, недосмотръ въ текстѣ, относящемся къ фиг. 23. Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ прямая можетъ двигаться, скользя вдоль самой себя, на дѣлѣ же имѣлось въ виду указаніе на невозможность перемѣщенія прямой ***AB*** по плоскости въ другихъ направленіяхъ, отличныхъ отъ этого,—прямая сохраняетъ здѣсь все время одно и то же направленіе. Болѣе точно было бы указаніе натотъ фактъ, что прямая не всегда можетъ коснуться двухъ окружностей.—достаточно взять случай расположенія одной окружности внутри другой. Въ этомъ случаѣ къ прямой, имѣющей соприкасаться съ одной окружностью, необходимо присоединить другую прямую, имѣющую касаться съ другой окружностью. Аналогичныхъ примѣровъ невозможности касанія данной кривой съ заданными двумя неподвижными другими можно подобрать сколько угодно,—соприкасаясь съ одной кривой, данная подвижная кривая далеко не всегда сможетъ, одновременно съ этимъ, соприкоснуться съ другой.

**Къ § 6. Составленіе плановъ скоростей сложныхъ механизмовъ.**

Для того, чтобы показать, какъ въ дѣйствительности составляются планы скоростей сложныхъ механизмовъ, построимъ такой планъ для одного механизма, изображеннаго здѣсь на фиг. 398. Точка *A* шатуна *AB* движется по окружности центра *O* и радіуса *OA*, такъ что нормаль къ траекторіи ея въ данный моментъ представится прямой *OAR*. Далѣе, точка *B* того же шатуна все время скользитъ по неподвижной прямой *KL*; поэтому нормаль къ траекторіи этой точки *B* представится прямой *BV*,




Фиг. 398.

перпендикулярной къ *KL*. По эттимъ даннымъ строимъ планъ скоросей для системы шатуна *AB*, для чего изъ какой-либо точки *p* плоскости чертежа проводимъ лучъ *pr* ‖ *OR*, откладываемъ на немъ отъ точки *p* отрѣзокъ *pa*, изображающій въ какомъ-либо масштабѣ $m$ скорость $v_A$, такъ что $v_A = pa.m$. Проводя затѣмъ лучи *pv* ‖ *BV* и *ab* ‖ *AB*, находимъ въ точкѣ *b* пересѣченія ихъ третью вершину треугольника *pab*, представляющаго собою планъ скоростей системы шатуна *AB*.

Находимъ теперь въ системѣ отрѣзка *ab* точку *c*, соотвѣтствующую точкѣ *C*. Лучъ *pcn* дастъ собою направленіе нормали къ траекторіи точки *C*,—это будетъ нормаль *CN*. Далѣе, такъ какъ стержень *DE* вынужденъ все время проходить черезъ неподвижную точку *D*, то общая нормаль въ этой точкѣ *D* представится прямой $DN_1 \perp CE$. По этимъ даннымъ можно построить планъ скоростей системы *CE*, причемъ онъ всегда пристраивается къ плану *pab*, т.-е. строится при томъ же полюсѣ *p*. Поэтому изъ точки *p* проводимъ $pn_1 \parallel DN_1$, а изъ точки *c* ведемъ $c\varepsilon \parallel CE$. Пересѣченіе этихъ лучей опредѣлитъ намъ вершину *d* плана *pcd* системы *CE*.

Находимъ теперь на лучѣ *cd* точку *e*, соотвѣтствующую точкѣ *E*, и ведемъ изъ *p* лучъ $pn_3 \parallel FO_1$, а изъ *e*—лучъ $e\varphi \parallel EF$. Пересѣченіе ихъ опредѣлитъ точку *f* треугольника *pef*, представляющаго собою планъ скоростей системы *EF*.

Нетрудно убѣдиться, что весь планъ *pabcef* построенъ для одного и того же масштаба скоростей $m$, такъ что $v_D = pd.m$, $v_F = pf.m$, и т. д.

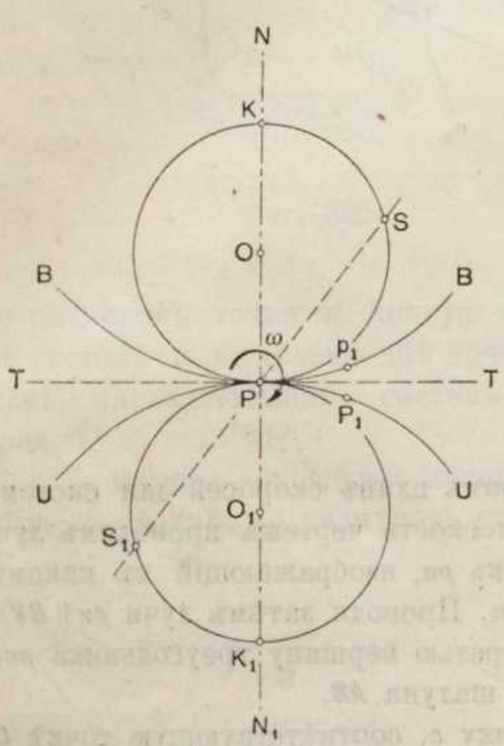
Легко теперь опредѣлить и направленія всѣхъ скоростей. Пусть, напримѣръ, скорость $v_A$ точки *A* имѣетъ направленіе, показанное на чертежѣ. Ставимъ теперь у точки *a* стрѣлку, направленную согласно стрѣлкѣ $v_A$, а вокругъ полюса *p* ставимъ

стрѣлку, идущую такъ, чтобы, при вращеніи плана по ней, точка $a$ имѣла скорость, направленную согласно стрѣлкѣ, поставленной у $a$. Послѣ этого окажется, что направленія всѣхъ точекъ механизма $AF$ опредѣлятся этой стрѣлкой, стоящей у полюса $p$. Такъ, точка $F$ будетъ имѣть скорость $v_F$, направленную параллельно и согласно стрѣлкѣ $fk$, и т. д.—Вопросъ объ опредѣленіи величины и направленія скоростей точекъ даннаго механизма разрѣшается такимъ путемъ вполнѣ. Аналогично приходится поступать во всѣхъ другихъ случаяхъ, когда для каждаго звена механизма имѣется возможность опредѣлить направленіе нормалей къ траекторіямъ двухъ его точекъ.

**Къ §§ 12 и 13. Построеніе поворотнаго круга въ обращенномъ движеніи. Примѣры.**

На страницахъ 53—54 курса было выведено, что величина $d$ діаметра $PK$ поворотнаго круга выражается формулой $d=u/\omega$, гдѣ черезъ $u$ обозначена скорость смѣны полюсовъ, а черезъ $\omega$—мгновенная угловая скорость вращенія данной системы. Посмотримъ теперь, какъ выразится величина діаметра поворотнаго круга въ обращенномъ движеніи и какъ этотъ кругъ расположится.

Предположимъ, что движеніе данной системы опредѣляется каченіемъ подвижной полодіи $BB$ по неподвижной $UU$ (фиг. 399), и пусть въ данный моментъ касаніе полодій совершается въ точкѣ $(P, p)$; по истеченіи времени $\Delta t$ пусть это касаніе имѣетъ совершиться въ сосѣдней съ $P$ точкѣ $P_1$, съ которой въ этотъ моментъ совпадетъ точка $p_1$ полодіи $BB$. Такъ какъ движеніе полодіи $BB$ представляетъ собою чистое качаніе по полодіи $UU$, т.-е. рядъ поворотовъ около точекъ соприкосновенія $P_n$, то дуги $PP_1$ и $pp_1$ этихъ полодій, какъ соотвѣтствующія одному и тому же промежутку времени $\Delta t$, будутъ между собою равны, вслѣдствіе чего можно будетъ написать, что



Фиг. 399.

$$u = ds/dt = lim \smile PP_1/\Delta t = lim \smile pp_1/\Delta t \quad . \quad . \quad (a)$$

Если мгновенная угловая скорость имѣетъ въ разсматриваемый моментъ значеніе $\omega$, то діаметръ поворотнаго круга разсматриваемаго прямого движенія выразится такъ:

$$d = u/\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Замѣтивъ это, обратимъ движеніе, для чего придаемъ всей системѣ подвижной и неподвижной полодій движеніе, обратное данному движенію системы $BB$, т.-е. вращеніе около той же точки $(P, p)$ съ угловой скоростью $(-\omega)$. Тогда полодія $BB$ остановится, а полодія $UU$ станетъ вращаться около точки $(P, p)$ съ угловой скоростью $(-\omega)$, направленной п р о т и в ъ часовой стрѣлки. При этомъ скорость $u_1$ смѣны полюсовъ останется прежней, ибо по истеченіи времени $\Delta t$ въ соприкосновеніе придутъ тѣ же точки $P_1$ и $p_1$ полодій, что и раньше, и, значитъ,

$$u_1 = lim \smile PP_1/\Delta t = u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Если теперешнюю угловую скорость вращенія около полюса $(P, p)$ мы обозначимъ черезъ $\omega_1$, причемъ

$$\omega_1 = -\omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

то величина $d_1$ діаметра $PK_1$ поворотнаго круга обращеннаго движенія выразится такъ:

$$d_1 = u_1/\omega_2 = -u/\omega = -d.$$

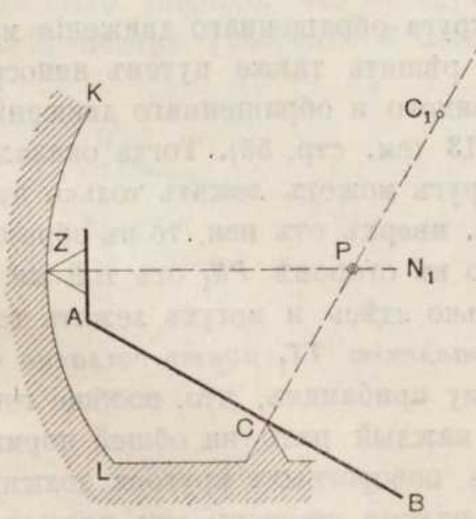
Такимъ образомъ, оказывается, что

$$PK_1 = -PK,$$

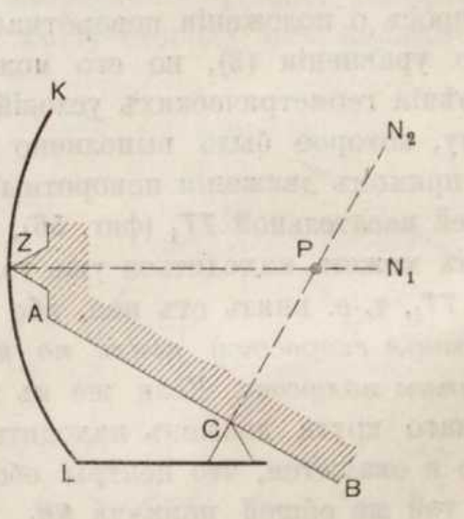
т.-е. что *діаметръ поворотнаго круга обращеннаго движенія равенъ по своей величинѣ діаметру поворотнаго круга прямого движенія, но, вслѣдствіе разницы въ знакахъ, расположенъ прямо ему противоположно*, а такъ какъ оба они принуждены лежать на одной и той же общей нормали $NPN_1$, то и оказывается, что этотъ діаметръ $PK_1$ займетъ на этой нормали положеніе, *симметричное* діаметру $PK$ относительно полюса мгновеннаго вращенія $P$. Отсюда, далѣе, слѣдуетъ, что *поворотные круги прямого и обращеннаго движеній располагаются* также *симметрично относительно полюса* $P$, такъ что каждая сѣкущая $SPS_1$, проведенная черезъ полюсъ $P$, пересѣчетъ окружности этихъ двухъ круговъ въ точкахъ $S$ и $S_1$, симметрично расположенныхъ относительно полюса $P$, ибо всегда будемъ имѣть $S_1P = -SP$. Такимъ образомъ, если бы почему-либо построеніе поворотнаго круга прямого движенія являлось затруднительнымъ, то слѣдуетъ попробовать построить его въ движеніи обращенномъ; кругъ, симметричный полученному, представитъ собою искомый поворотный кругъ прямого движенія. Здѣсь будетъ умѣстно замѣтить слѣдующее:

Для построенія круга нужно имѣть три точки, принадлежащія его окружности. Въ данномъ случаѣ одной изъ этихъ точекъ, завѣдомо всегда лежащей на окружности поворотнаго круга, является полюсъ мгновеннаго вращенія, такъ что если этотъ полюсъ извѣстенъ, то останется опредѣлить еще лишь двѣ, и можетъ случиться, что нахожденіе ихъ обѣихъ или одной изъ нихъ можетъ быть выполнено при помощи обращенія движенія. Особенно просто и удобно отыскивается точка поворотнаго круга въ томъ случаѣ, когдо движеніе данной системы задается, между прочимъ, тѣмъ условіемъ, чтобы нѣкоторая прямая, принадлежащая подвижной системѣ, постоянно проходила черезъ нѣкоторую неподвижную точку. Разберемъ такой случай.

Пусть движеніе нѣкоторой системы задается тѣмъ, что точка $Z$ ея перемѣщается по нѣкоторой неподвижной кривой $KL$ (фиг. 400), а прямая $AB$, принадлежа-




Фиг. 400.

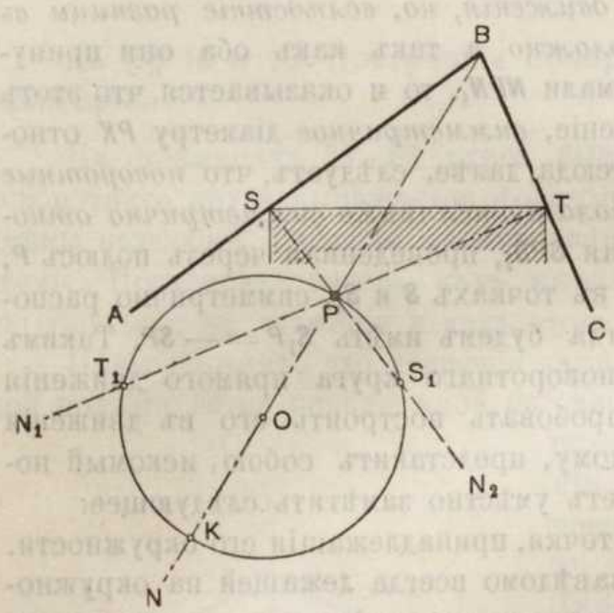



Фиг. 401.

щая той же системѣ, вынуждена все время проходить черезъ неподвижную точку $C$. Полюсъ $P$ этого движенія будетъ лежать въ точкѣ пересѣченія общихъ нормалей $ZN_1$ и $CN_2$ и будетъ, какъ мы указывали, служить одной изъ точекъ окружности искомаго поворотнаго круга. Вторая точка этой же окружности находится здѣсь весьма просто на основаніи слѣдующихъ разсужденій:

Обратимъ движеніе. Тогда система ($Z$, $AB$) остановится, а система ($KL$, $C$) начнетъ двигаться такъ, что кривая $KL$ ея станетъ все время проходить черезъ неподвижную теперь точку $Z$, а точка $C$ станетъ скользить по неподвижной прямой $AB$ (фиг. 401). Отсюда слѣдуетъ, что *точка $C$ находится на поворотномъ кругѣ обращеннаго движенія*, и, значитъ, точка $C_1$, симметричная точкѣ $C$ относительно полюса мгновеннаго вращенія $P$ (фиг. 400), принадлежитъ окружности поворотнаго круга прямого движенія.

Итакъ, вторая точка искомаго поворотнаго круга найдена,—ею служитъ точка $C_1$. Третью точку можно найти изъ разсмотрѣнія движенія точки $Z$ по кривой $KL$, для чего придется прибѣгнуть въ теоремѣ Савари.—Разберемъ еще одинъ примѣръ.



Фиг. 402.

Пусть система нѣкотораго жесткаго угла $ABC$ (фиг. 402) движется такъ, что одна сторона его, $AB$, постоянно проходитъ черезъ одну неподвижную точку $K$, а другая, $BC$,—черезъ другую, также неподвижную, точку $L$. Требуется построить поворотный кругъ для этой системы $ABC$. Для этого разсуждаемъ такъ:

Полюсъ $P$ лежитъ въ точкѣ пересѣченія общихъ нормалей $KN_1$ и $LN_2$. Если обратимъ движеніе, то получимъ движеніе неизмѣняемаго отрѣзка $KL$ внутри неподвижнаго теперь угла $ABC$, причемъ точка $K$ этого отрѣзка будетъ двигаться по неподвижной прямой $AB$, а точка $L$—по прямой $BC$, также неподвижной. Отсюда слѣдуетъ, что эти точки $K$ и $L$ принадлежатъ поворотному кругу обращеннаго движенія, и, значитъ, поворотному кругу прямого движенія будутъ принадлежать точки $K_1$ и $L_1$, симметричныя точкамъ $K$ и $L$ относительно полюса $P$. Такимъ образомъ, искомый поворотный кругъ опредѣлится тремя точками $P$, $K_1$ и $L_1$.—Вопросъ, такимъ образомъ, исчерпывается вполнѣ.

---

Вопросъ о положеніи поворотнаго круга обращеннаго движенія мы разрѣшили помощью уравненія (3), но его можно рѣшить также путемъ непосредственнаго разсмотрѣнія геометрическихъ условій прямого и обращеннаго движеній, аналогичнаго тому, которое было выполнено § 13 (см. стр. 55). Тогда оказалось бы, что, если въ прямомъ движеніи поворотный кругъ можетъ лежать только въ сторону $PN$ отъ общей касательной $TT_1$ (фиг. 56), т.-е. вверхъ отъ нея, то въ обращенномъ движеніи онъ можетъ находиться уже только въ сторонѣ $PN_1$ отъ той же общей касательной $TT_1$, т.-е. внизъ отъ нея, ибо только здѣсь и могутъ лежать точки системы II, *слагающія скоростей коихъ по направленію $TT_1$ идутъ согласно съ направленіемъ смѣны полюсовъ*. Если же къ этому прибавимъ, что, вообще говоря, центръ поворотнаго круга долженъ находиться каждый разъ на общей нормали къ полодіямъ, то и окажется, что центры обоихъ поворотныхъ круговъ должны лежать на одной и той же общей нормали $NN_1$, *по разныя стороны отъ полюса мгновеннаго вращенія $P$* и на равныхъ разстояніяхъ отъ него, ибо діаметры этихъ круговъ, какъ показываетъ вычисленіе, между собою равны. Дальнѣйшія заключенія тождественны съ приведенными выше.

Слѣдуетъ, далѣе, отмѣтить, что величина $d$ діаметра поворотнаго круга отъ кинематическихъ факторовъ движенія не зависитъ, ибо въ выраженіе его время, эта четвертая координата заданія каждаго движенія, не входитъ. Дѣйствительно, вообще, $d = u/\omega$. Но такъ какъ измѣреніе $\omega$ есть $sec^{-1}$, а измѣреніе $u$ есть $cm.\ sec^{-1}$,

то измѣреніе $d$ есть $cm.\ sec^{-1}/sec^{-1} = cm$. Это показываетъ, что *величина $d$ зависитъ только отъ геометрическихъ факторовъ движенія*,—отъ вида и геометрическихъ свойствъ полодій, огибающихъ и ихъ огибаемыхъ, радіусовъ кривизны, направленія и длины различныхъ отрѣзковъ и т. д. Общее выраженіе (20) величины діаметра $d$, данное выше, остается справедливымъ всегда, но параллельно съ этимъ являются вполнѣ мыслимыми и такія общія выраженія $d$, въ которыя входятъ только одни геометрическіе факторы,—таковы, напримѣръ, выраженія $d$, даваемыя теоремой Савари (см. формулы (35) и (35′) на стр. 85).

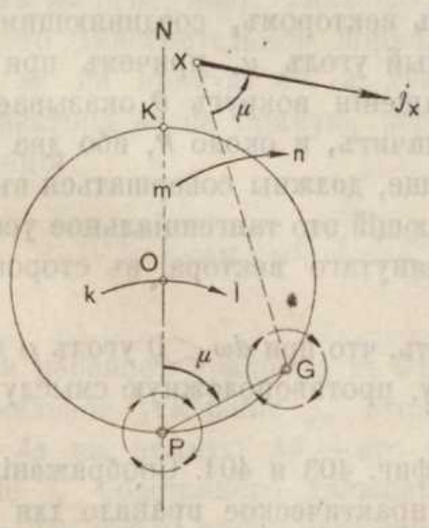
Изъ формулы (20) слѣдуетъ, что $u = \omega d$, что указываетъ намъ на то обстоятельство, что скорость $u$ смѣны полюсовъ численно равна скорости той точки подвижной системы, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ полюсомъ $P$ мгновеннаго вращенія, въ предположеніи вращенія подвижной системы около полюса поворота $K$ съ угловой скоростью $\omega$, равной мгновенной угловой скорости вращенія, соотвѣтствующей данному моменту; направленіе этой скорости $u$ будетъ, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться, противоположно направленію скорости $\omega d$ отъ упомянутаго вращенія или, что то же, согласно съ скоростью $\omega d$ отъ вращенія этой же точки вокругъ полюса поворота $K_1$ обращеннаго движенія.

**Къ § 14. Дополнительныя указанія по вопросу о нахожденіи центра ускореній и объ опредѣленіи направленія ускореній различныхъ точекъ движущейся системы. Разложеніе ускореній. Геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ одними лишь нормальными ускореніями.**

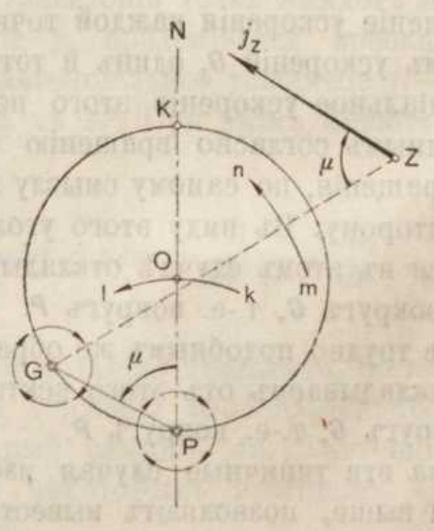
Положеніе центра ускореній $G$ на окружности поворотнаго круга опредѣляется, какъ извѣстно, путемъ откладыванія при нормали $PN$, въ опредѣленную сторону отъ нея, угла $\mu$,—пересѣченіе другой стороны его съ этой окружностью и опредѣляетъ собою искомый центръ $G$. Что касается ускореній различныхъ точекъ системы, то направленія ихъ опредѣляются опять путемъ откладыванія того же угла $\mu$ на векторахъ, соединяющихъ эти точки съ центромъ ускореній $G$. Общія соображенія о томъ, въ какую сторону нормали и векторовъ слѣдуетъ откладывать эти углы $\mu$, приведены въ § 14 курса.

Въ практическомъ отношеніи болѣе удобными являются, однако, указанія графическаго характера, какъ болѣе наглядныя и легче запоминаемыя. Выводомъ ихъ мы теперь и займемся.

Въ § 14 было указано, что въ случаѣ возрастанія угловой скорости $\omega$, т.-е. при $d\omega/dt > 0$, центръ ускореній $G$ лежитъ по ту сторону отъ нормали, которая




Фиг. 403 ($d\omega > 0$).




Фиг. 404 ($d\omega < 0$).

*согласна съ смысломъ вращенія системы вокругъ полюса мгновеннаго вращенія $P$*; если же угловая скорость $\omega$ убываетъ, такъ что $d\omega < 0$, то точка $G$ лежитъ въ

сторонѣ, противоположной смыслу вращенія около $P$. Согласно этому основному положенію и опредѣлены мѣста центровъ $G$ въ случаяхъ, изображенныхъ на фиг. 403 и 404, гдѣ, при одномъ и томъ же направленіи вращенія вокругъ $P$, данная система предположена вращающейся одинъ разъ съ возрастающей угловой скоростью ($d\omega > 0$, фиг. 403), а другой—съ убывающей ($d\omega < 0$, фиг. 404). Присмотримся ближе къ этимъ двумъ типичнымъ случаямъ.

Ради удобства сопоставленій, отмѣтимъ смыслъ вращенія системы вокругъ полюса мгновеннаго вращенія ея $P$ кружкомъ около этой точки $P$ со стрѣлками, указывающими направленіе вращенія, какъ это показано на фиг. 403 и 404. Тогда, при разсматриваніи этихъ фигуръ, становится яснымъ, что при $d\omega > 0$ уголъ $\mu$ откладывается отъ нормали $PN$ въ сторону, указываемую стрѣлками вокругъ $P$, а при $d\omega < 0$—обратно имъ. Поэтому направленіе отложенія угла $\mu$ при нормали $PN$ можно указать стрѣлкой $kl$, поставленной въ центрѣ $O$ поворотнаго круга, причемъ въ случаѣ $d\omega > 0$ эту стрѣлку $kl$ надо ставить *согласно* стрѣлкѣ вокругъ $P$, а при $d\omega < 0$—противоположно ей, какъ это и выполнено на фиг. 403 и 404. Отсюда вытекаетъ слѣдующее простое правило для опредѣленія стороны, въ которую долженъ быть въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ откладываемъ упомянутый уголъ $\mu$:

*Ставимъ вокругъ полюса мгновеннаго вращенія $P$ кружокъ со стрѣлками, указывающими направленіе вращенія системы вокругъ $P$. Далѣе, въ центръ поворотнаго круга ставимъ стрѣлку $kl$, согласную со смысломъ вращенія вокругъ $P$, если $d\omega > 0$, т.-е. если угловая скорость возрастаетъ, и противоположную ему, если $d\omega < 0$, т.-е. если эта угловая скорость убываетъ. Направленіе, въ коемъ имѣетъ быть отложенъ отъ нормали уголъ $\mu$, опредѣляется такъ полученной стрѣлкой $kl$.*

Отмѣтимъ, кстати, что мы ставимъ вокругъ $P$ цѣлый кружокъ со стрѣлками, а не одну стрѣлку (какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто на фиг. 65 и 66), только потому, что такимъ образомъ значительно облегчается возможность правильной постановки стрѣлки $kl$ при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ центра $O$ относительно полюса мгновеннаго вращенія $P$.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вопроса объ опредѣленіи направленія ускореній различныхъ точекъ движущейся системы. Напомнимъ, что какъ величина, такъ и направленіе этихъ ускореній проще всего опредѣляются путемъ переноса вращенія изъ полюса $P$ въ центръ $G$. Тогда, между прочимъ, и оказывается, что направленіе ускоренія каждой точки образуетъ съ векторомъ, соединяющимъ ее съ центромъ ускореній $G$, одинъ и тотъ же постоянный уголъ $\mu$, причемъ при $d\omega > 0$ тангенціальное ускореніе этого подставного вращенія вокругъ $G$ оказывается направленнымъ согласно вращенію около $G$, а значитъ, и около $P$, ибо два послѣднихъ вращенія, по самому смыслу переноса, вообще, должны совершаться въ одну и ту же сторону. Въ виду этого уголъ $\mu$, опредѣляющій это тангенціальное ускореніе, придется въ этомъ случаѣ откладывать отъ упомянутаго вектора въ сторону вращенія вокругъ $G$, т.-е. вокругъ $P$.

Не трудно подобнымъ же образомъ сообразить, что при $d\omega < 0$ уголъ $\mu$ долженъ быть откладываемъ отъ этого вектора въ сторону, противоположную смыслу вращенія вокругъ $G$, т.-е. вокругъ $P$.

Два эти типичные случая изображены на фиг. 403 и 404. Соображенія, изложенныя выше, позволяютъ вывести слѣдующее практическое правило для опредѣленія направленія ускореній различныхъ точекъ системы:

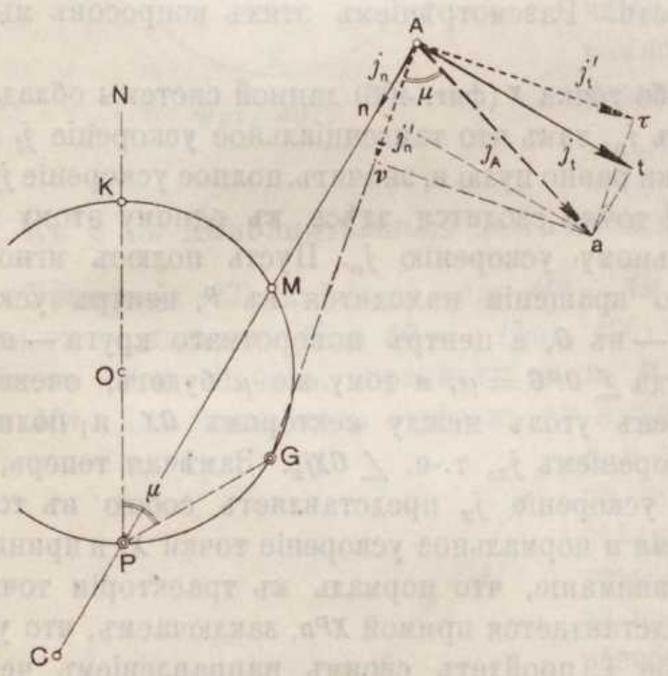
*Опредѣливъ положеніе центра ускореній $G$, ставимъ вокругъ точки $G$ кружокъ, который и снабжаемъ стрѣлками, идущими согласно*

*со стрѣлками кружка, поставленнаго вокругъ полюса P. Соединяя теперь любую точку X движущейся системы съ центромъ ускореній G векторомъ GX, снабжаемъ этотъ векторъ стрѣлкой mn, направленной или согласно со стрѣлкой вокругъ G, если $d\omega > 0$, или противоположно ей, если $d\omega < 0$. Уголъ $\mu$ слѣдуетъ затѣмъ откладывать отъ вектора GX въ сторону, указываемую такъ полученной стрѣлкой mn.*

Согласно съ этимъ, въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 403, гдѣ предположено $d\omega > 0$, стрѣлку *mn* пришлось направить согласно стрѣлкѣ вокругъ *G*, а въ случаѣ фиг. 404—противоположно ей, ибо здѣсь предположено $d\omega < 0$; углы $\mu$ при точкахъ *X* и *Z* отложены отъ векторовъ *GX* и *GZ* согласно соотвѣтственнымъ стрѣлкамъ *mn*.

---

Опредѣленіе величины и направленія полныхъ ускореній различныхъ точекъ системы удобнѣе всего выполняется, какъ мы видѣли, путемъ переноса вращенія изъ полюса *P* въ центръ ускореній *G*. Надо, однако, замѣтить, что переносъ этотъ, не отражаясь на величинѣ полныхъ ускореній, вліяетъ на измѣненіе величины и направленія слагающихъ ускореній, нормальнаго и тангенціальнаго,—уже по чертежу (фиг. 405) можно видѣть, что слагающія ускоренія дѣйствительнаго движенія, $j_n$ и $j_t$, отличны отъ слагающихъ ускореній подставного движенія, $j_n'$ и $j_t'$. Тождественно одинаковыми эти слагающія являются лишь для точекъ системы, лежащихъ въ данный моментъ на прямой *GP*.—Разсмотримъ этотъ вопросъ нѣсколько детальнѣе.



Фиг. 405.

Пусть полное ускореніе какой-либо точки *A* есть $j_A$ и изображается въ нѣкоторомъ масштабѣ векторомъ *Aa* (фиг. 405). Такъ какъ нормаль къ траекторіи точки *A* идетъ по прямой *AP*, то дѣйствительное нормальное ускореніе $j_n$ представится проекціей *An* вектора *Aa* на прямую *AP*, а дѣйствительное тангенціальное ускореніе $j_t$—проекціей *At* вектора *Aa* на прямую, перпендикулярную къ *AP*. При этомъ имѣютъ мѣсто соотношенія

$$j_n = \frac{v^2}{\varrho} = AM \cdot \omega^2; \quad j_t = \frac{dv}{dt}; \quad tg(j_A, j_n) = tg \angle aAn = \frac{1}{AM \cdot \omega^2} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \ldots \quad (a)$$

При переносѣ вращенія въ *G* полное ускореніе остается прежнимъ, но теперешнее нормальное ускореніе $j_n'$ этого подставного движенія изобразится проекціей вектора *Aa* на прямую *AG*,—это будетъ нѣкоторый векторъ *Av*. Тангенціальное ускореніе $j_t'$ подставного движенія изобразится нѣкоторымъ векторомъ *Aτ*. При этомъ будутъ имѣть мѣсто извѣстныя соотношенія:

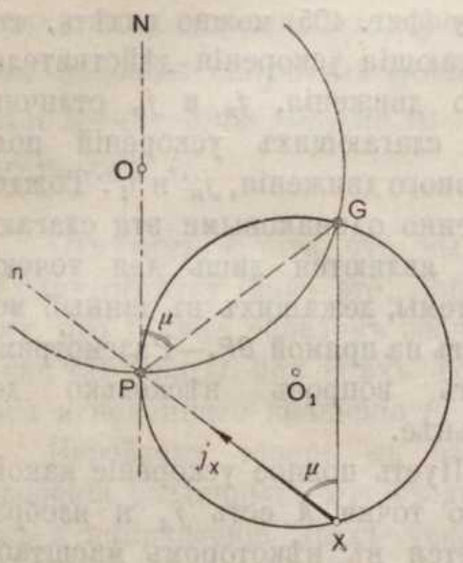
$$j_n' = GA \cdot \omega^2, \quad j_t' = GA \cdot \frac{d\omega}{dt} \text{ и } tg \angle aAG = tg\mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \ldots \quad (b)$$

Сопоставленіе (*a*) и (*b*) вполнѣ опредѣленно указываетъ, что тождество слагающихъ ускореній будетъ имѣть мѣсто только въ томъ единственномъ случаѣ, когда точка $M$ поворотнаго круга сливается съ центромъ $G$, т.-е, когда точка $A$ лежитъ на лучѣ $PG$ (или на его продолженіи). При подсчетѣ слѣдуетъ имѣть въ виду, что точка $G$ сохраняетъ свое положеніе въ системѣ въ теченіе двухъ сосѣднихъ промежутковъ времени; поэтому за это же время $2\,dt$ отрѣзокъ $GA$ своей величины не мѣняетъ, почему $dGA$, отнесенный къ первому изъ этихъ промежутковъ, обращается въ нуль. Кромѣ того, если $PG$ обозначимъ черезъ $r$, то, согласно уравненію (24) на стр. 65, можемъ написать, что $\omega\,dr + r\,d\omega = 0$. При такихъ условіяхъ формулы (*b*) переходятъ тождественно въ формулы (*a*).

---

Поворотный кругъ, какъ извѣстно, представляетъ собою геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ одними лишь тангенціальными ускореніями и, значитъ, находящихся на перегибахъ своихъ траекторій. Спросимъ себя теперь, не имѣется ли въ каждой данной движущейся системѣ точекъ, обладающихъ *одними* лишь *нормальными ускореніями*, и если такія точки есть, то не охватываетъ ли ихъ какое-либо опредѣленное геометрическое мѣсто. Разсмотрѣніемъ этихъ вопросовъ мы теперь и займемся.

Пусть, такимъ образомъ, какая-либо точка $X$ (фиг. 406) данной системы обладаетъ однимъ лишь нормальнымъ ускореніемъ $j_n$, такъ что тангенціальное ускореніе $j_t$ этой точки равно нулю и, значитъ, полное ускореніе $j_x$ нашей точки сводится здѣсь къ одному этому нормальному ускоренію $j_n$. Пусть полюсъ мгновеннаго вращенія находится въ $P$, центръ ускореній — въ $G$, а центръ поворотнаго круга — въ $O$. Тогда $\angle OPG = \mu$, и тому же $\mu$ будетъ, очевидно, равенъ уголъ между векторомъ $GX$ и полнымъ ускореніемъ $j_x$, т.-е. $\angle GXj_x$. Замѣчая теперь, что это ускореніе $j_x$ представляетъ собою въ то же время и нормальное ускореніе точки $X$, и принимая во вниманіе, что нормаль къ траекторіи точки $X$ представляется прямой $XPn$, заключаемъ, что ускореніе $j_x$ пройдетъ своимъ направленіемъ черезъ полюсъ $P$, откуда, въ свою очередь, слѣдуетъ, что $\angle GXP = \mu$.

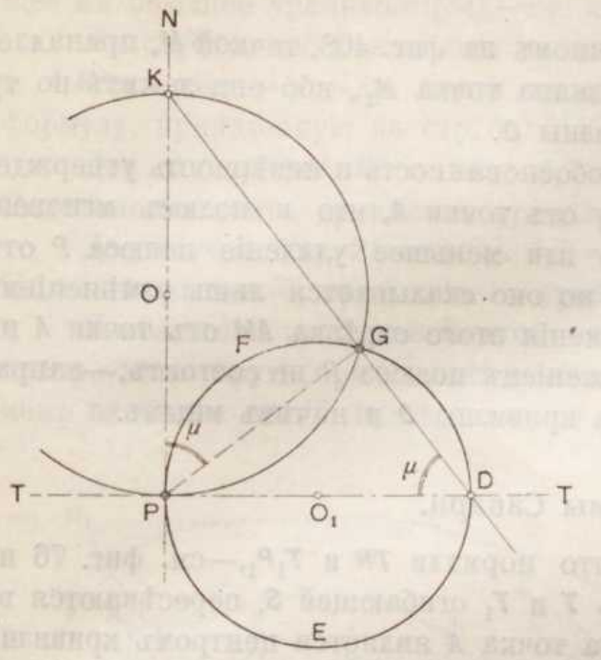


Фиг. 406.

Замѣчая теперь, что этотъ уголъ $GXP$ опирается на отрѣзокъ $PG$, причемъ *ни величина* этого *угла*, равнаго $\mu$, *ни величина отрѣзка* $PG$ *отъ положенія точки* $X$ въ системѣ *не зависятъ*, заключаемъ, что *всѣ точки, полныя ускоренія коихъ проходятъ черезъ точку* $P$, *лежатъ на окружности* $GXP$, описанной на $PG$ и вмѣщающей уголъ $\mu$. Замѣчая, далѣе, что прямая $OP$ образуетъ съ хордой $PG$ опять уголъ $\mu$, заключаемъ, что эта прямая $OP$ является *касательной* къ окружности $GXP$, такъ что центръ этой окружности,—обозначимъ его черезъ $O_1$,—долженъ лежать на перпендикулярѣ $TPT$ къ прямой $OP$, т.-е. на общей касательной $TT$ къ полодіямъ. Величину діаметра этой окружности $O_1$ можно найти такъ:

Пусть этотъ діаметръ равенъ $d_1$ и представляется отрѣзкомъ $PD$ (фиг. 407). Соединивъ $G$ съ $D$ прямой, находимъ, что $PG = PD\sin\mu = d_1\sin\mu$. Но, съ другой стороны, $PG = PK\cos\mu = d\cos\mu$. Отсюда слѣдуетъ, что $d_1\sin\mu = d\cos\mu$ такъ что окончательно находимъ, что $d_1 = d\,\mathrm{ctg}\,\mu$. Это соотношеніе, въ свою очередь, показываетъ, что точки $K$, $G$ и $D$ лежатъ на одной прямой, такъ что точка $D$ опредѣляется пересѣченіемъ общей касательной къ полодіямъ $TT$ съ прямой $KG$.

Отмѣтимъ, что требованію обладанія одними нормальными ускореніями удовлетворяютъ *всѣ точки полной окружности* **PFGDEP**, *описанной на діаметрѣ* **PD**, ибо если точки дуги **GDEP** имѣютъ ускоренія, направленныя къ полюсу **P**, то точки дуги **PFG** будутъ имѣть ускоренія, направленныя прямо ему противоположно.

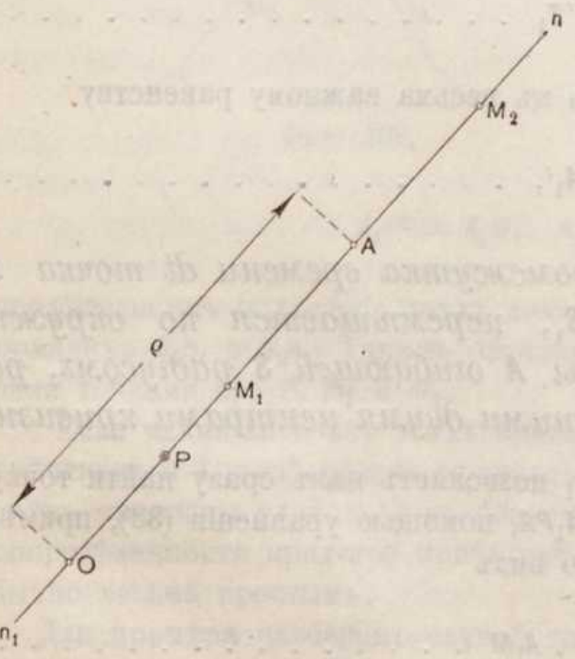


Фиг. 407.

Не трудно установить, что всѣ точки такъ полученной окружности $O_1$ движутся въ разсматриваемый моментъ по дугамъ окружностей, описанныхъ изъ центровъ кривизны; иными словами, траекторіи всѣхъ точекъ, вступившихъ на окружность $O_1$, имѣютъ въ данный моментъ подъ этими точками элементы окружностей круговъ кривизны, причемъ движутся по нимъ равномѣрно. Такимъ образомъ, можно сказать еще, что окружность $O_1$ представляетъ собою геометрическое мѣсто точекъ, въ теченіе разсматриваемаго момента времени равномѣрно вращающихся вокругъ центровъ кривизны своихъ траекторій.

**Къ § 15. Дополнительныя замѣчанія по поводу уравненія (33).**

Уравненіе (33), имѣющее видъ $AP^2 = AM \cdot \varrho$, важно въ томъ отношеніи, что позволяетъ по даннымъ **AP** и $AO = \varrho$ (фиг. 408) найти вычисленіемъ или построеніемъ отрѣзокъ **AM** и, значитъ, опредѣлить точку **M** поворотнаго круга, лежащую на нормали $APn_1$. Для этого этотъ отрѣзокъ **AM** нужно отложить по нормали $nAPn_1$ у точки **A**, и здѣсь обычно возникаютъ затрудненія по поводу того, по какую сторону отъ **A** слѣдуетъ откладывать этотъ отрѣзокъ, — въ сторону ли **An** или въ сторону $An_1$, прямо ей противоположную. Чтобы окончательно разобраться въ этомъ вопросѣ, необходимо принять во вниманіе слѣдующія соображенія:



Фиг. 408.

Дѣло въ томъ, что уравненіе (33) было получено помощью переноса вращенія изъ полюса мгновеннаго вращенія **P** въ точку **M** поворотнаго круга круга (фиг. 70 на стр. 74), при чемъ нами была использована та особенность новаго подставного движенія, что нормальное ускореніе точки **A** во вращеніи ея вокругъ **M** со скоростью $\omega$. **AM** оказалось какъ по величинѣ, такъ и по направленію, совпадающимъ съ дѣйствительнымъ нормальнымъ ускореніемъ ея, $j_n$, присущимъ ей при движеніи ея по траекторіи ея **SS**. Но разъ *направленія нормальныхъ ускореній* этихъ двухъ движеній *совпадаютъ*, то, принимая во вниманіе, что одно изъ нихъ, $j_n$, направлено отъ **A** къ центру кривизны **O**, а другое (въ подставномъ движеніи)—отъ той же точки **A** къ точкѣ **M**, заключаемъ, что

*Точки* **M** *и* **O** *должны лежать всегда по одну и ту же сторону отъ точки* **A**.

Итакъ, можно установить, что центръ кривизны траекторіи точки $A$, — точка $O$, — и точка $M$ поворотнаго круга, лежащая на прямой $AO$ и опредѣляемая помощью уравненія (33), должны находиться всегда по одну и ту же сторону отъ данной точки $A$.

Такимъ образомъ, въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 408, точкой $M$, принадлежащей поворотному кругу, должна быть признана точка $M_1$, ибо она лежитъ по ту же сторону отъ точки $A$, что и центръ кривизны $O$.

Теперь становится вполнѣ понятной необоснованность и невѣрность утвержденія, будто точка $M$ лежитъ по ту же сторону отъ точки $A$, что и полюсъ мгновеннаго вращенія $P$. Несомнѣнно, что большее или меньшее удаленіе полюса $P$ отъ точки $A$ на положеніи точки $M$ сказывается, но оно сказывается лишь измѣненіемъ величины отрѣзка $AM$, направленіе же отложенія этого отрѣзка $AM$ отъ точки $A$ ни въ какой связи съ тѣмъ или инымъ расположеніемъ полюса $P$ не состоитъ,—направленіе это опредѣляется положеніемъ центра кривизны $O$ и ничѣмъ инымъ.

**Къ § 16. Иное доказательство теоремы Савари.**

Если мы обратимъ вниманіе на то, что нормали $TP$ и $T_1P_1$,—см. фиг. 76 на стр. 80,—проведенныя въ смежныхъ точкахъ $T$ и $T_1$ огибающей $S$, пересѣкаются въ точкѣ $A$, то должны будемъ признать, что эта точка $A$ является центромъ кривизны огибающей $S$ для элемента $TT_1$ ея и что поэтому дуга $TT_1$ можетъ быть, съ ошибкой до безконечно-малыхъ высшаго порядка, принята за дугу окружности, описанной изъ центра $A$ радіусомъ $AT$. Согласно съ этимъ, надо принять, что

$$AT = AT_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Аналогично найдемъ, что $A_1T = A_1\tau_1$, а такъ какъ $A_1\tau_1 = A_1'T_1$, то находимъ далѣе, что

$$A_1T = A_1'T_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Сложеніе равенствъ $(\alpha)$ и $(\beta)$ приводитъ къ весьма важному равенству

$$AA_1 = AA_1', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

показывающему, что

*Въ теченіе разсматриваемаго промежутка времени $dt$ точка $A_1$, т.-е. центръ кривизны огибаемой $S_1$, перемѣщается по окружности, описанной изъ центра кривизны $A$ огибающей $S$ радіусомъ, равнымъ $AA_1$, т.-е. разстоянію между этими двумя центрами кривизны.*

Эта опредѣленность движенія центра $A_1$ позволяетъ намъ сразу найти точку $M$ поворотнаго круга, лежащую на нормали $A_1PA$, помощью уравненія (33), примѣнительно къ даннымъ условіямъ принимающаго видъ

$$A_1P^2 = A_1A \cdot A_1M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

Полученное уравненіе $(\delta)$ можетъ быть принято за алгебраическое выраженіе теоремы Савари, разнящееся отъ выведенныхъ раньше только своей внѣшней формой, ибо не трудно показать, что, послѣ надлежащихъ подстановокъ, оно приводитъ насъ къ уравненіямъ, полученнымъ въ § 16. Дѣйствительно, положивъ $AT = \varrho$, $A_1T = \varrho_1$, $TP = p$ и зная, что $MP = d\cos\varphi$, находимъ, что $A_1P = \varrho_1 + p$, $A_1M = \varrho_1 + p - d\cos\varphi$ и $A_1A = \varrho_1 + \varrho$. Подставивъ эти выраженія въ уравненіе $(\delta)$ и произведя необходимыя упрощенія, получимъ обычную формулу (35),—см. стр. 85.

Примѣняя формулу $(\delta)$ къ полодіямъ, при чемъ она принимаетъ видъ $O_1P^2 =$

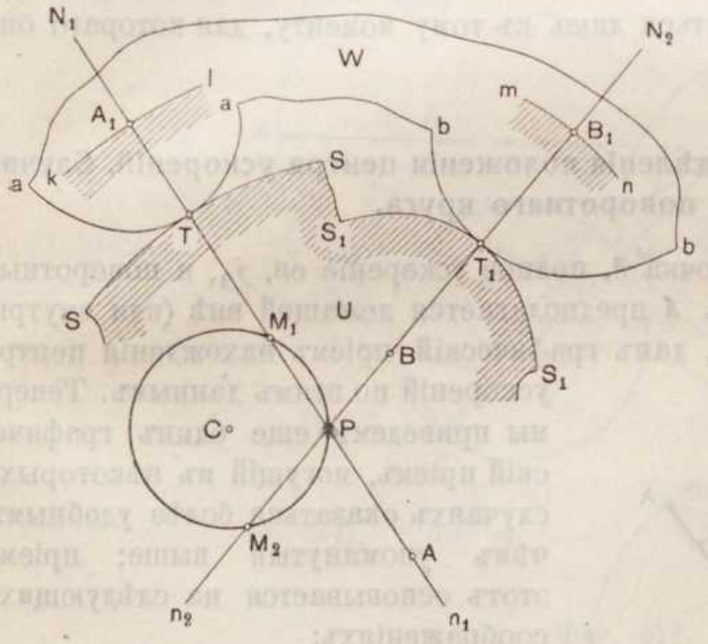
$= O_1M \cdot OO_1$, мы должны помнить, что эта точка $M$ является здѣсь полюсомъ поворота $K$, такъ что $MP = KP = d$. Полагая $OP = R$ и $O_1P = R_1$, находимъ, что $O_1M = R_1 - d$ и $OO_1 = R + R_1$, послѣ чего получаемъ уравненіе $R_1^2 = (R_1 - d)(R + R_1)$, переходящее въ обычное уравненіе (34),—см. стр. 82.

Въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 79, имѣемъ, что $A_1P = p - \varrho_1$, $A_1A = \varrho + \varrho_1$, и $A_1M = d\cos\varphi - p + \varrho_1$; послѣ подстановки въ ($\delta$) и преобразованій получаемъ формулу, приведенную на стр. 90 (11 строка св.).

Для случая фиг. 80 имѣемъ $A_1P = p - \varrho_1$, $AA_1 = \varrho - \varrho_1$ и $A_1M = p - \varrho_1 - d\cos\varphi$. Подстановка даетъ уравненіе, приведенное на стр. 91 (7 строка св.).

Для случая фиг. 81 имѣемъ $A_1P = p + \varrho_1$, $A_1A = \varrho - \varrho_1$ и $A_1M = d\cos\varphi - p - \varrho_1$. Подстановка въ ($\delta$) приводитъ къ уравненію, помѣщенному на стр. 91 (1 строка сн.).

Изложенныя соображенія позволяютъ весьма удобно и быстро находить точки $M$ поворотнаго круга при самыхъ разнообразныхъ случаяхъ заданія движенія. Возьмемъ наиболѣе общій: пусть движеніе системы $W$ опредѣляется перемѣщеніемъ двухъ кривыхъ $aa$ и $bb$, принадлежащихъ этой системѣ и, значитъ, жестко между собою связанныхъ, по кривымъ $SS$ и $S_1S_1$, служащимъ для нихъ огибающими и принадлежащимъ неподвижной системѣ $U$ (фиг. 409). Проведя въ точкахъ касанія $T$ и $T_1$ общія нормали $N_1Tn_1$ и $N_2T_1n_2$, получаемъ въ точкѣ пересѣченія ихъ полюсъ мгновеннаго вращенія $P$,—одну точку поворотнаго круга.



Фиг. 409.

Пусть для взятаго момента центры огибающихъ лежатъ въ точкахъ $A$ и $B$, а огибаемыхъ—въ точкахъ $A_1$ и $B_1$. Тогда, примѣняя разсужденія, аналогичныя вышеприведеннымъ, сначала къ парѣ кривыхъ ($SS$, $aa$), а затѣмъ—къ парѣ ($S_1S_1$, $bb$), приходимъ къ двумъ уравненіямъ

$$A_1P^2 = A_1M_1 \cdot A_1A, \quad B_1P^2 = B_1M_2 \cdot B_1B,$$

опредѣляющимъ положеніе двухъ точекъ $M_1$ и $M_2$ поворотнаго круга, лежащихъ на нормаляхъ $N_1n_1$ и $N_2n_2$. Такимъ образомъ, поворотный кругъ системы $W$ опредѣлится тремя точками его $P$, $M_1$ и $M_2$.

Если какая-либо изъ этихъ кривыхъ обращается въ точку, то въ той же точкѣ помѣстится и бывшій центръ кривизны ея; если кривая обращается въ прямую, то центръ кривизны удаляется въ безконечность, и въ этомъ случаѣ для уничтоженія неопредѣленности придется прибѣгнуть къ нѣкоторымъ аналитическимъ выкладкамъ, обычно весьма простымъ.

Для примѣра разберемъ случай движенія, изображенный на фиг. 86 (см. стр. 99). Здѣсь кривая $aa$ нашей общей схемы (фиг. 408) обратилась въ точку $A$, ея огибающая $SS$—въ прямую $SS$, кривая $bb$—въ прямую $AL$ и ея огибающая $S_1S_1$—въ точку $B$.—Беремъ сначала первую пару (точка $A$, прямая $SS$). Такъ какъ центръ кривизны огибаемой лежитъ въ точкѣ $A$, а огибающей—въ безконечности, то уравненіе ($\delta$) принимаетъ здѣсь видъ $AP^2 = AM_1 \cdot \infty$, откуда находимъ, что $AM_1 = 0$, такъ что точка $M_1$ поворотнаго круга совпадаетъ здѣсь съ самой этой точкой $A$.

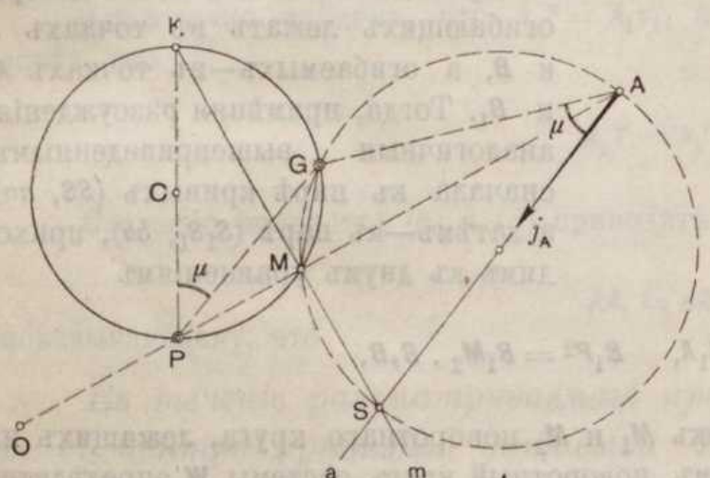
Переходимъ теперь къ парѣ (прямая $AL$, точка $B$). Здѣсь центръ кривизны огибаемой удалился въ безконечность по направленію $Bn \perp AL$, а центръ кривизны огибающей лежитъ въ самой точкѣ $B$. Поэтому уравненіе ($\delta$) даетъ намъ соотноше-

ніе $ZP^2 = ZM \cdot ZB$, гдѣ черезъ $Z$ условно обозначенъ центръ кривизны огибаемой. Замѣчая, что $ZM = ZP + PM$ и $ZB = ZP + PB$, находимъ, что $ZP^2 = (ZP + PM)(ZP + PB)$, откуда получаемъ, что $ZP(PM + PB) + PM \cdot PB = 0$. Дѣля на $ZP$ и полагая $ZP = \infty$, находимъ, что $PM = -PB$, т.-е. что точка $M$ симметрична точкѣ $B$ относительно полюса $P$; на чертежѣ 86 эта точка $M$ обозначена черезъ $M_2$. Искомый поворотный кругъ опредѣляется тремя точками: $M_1$, $P$ и $M_2$.

Этими соображеніями мы и закончимъ изложеніе нашего вывода и изслѣдованія теоремы Савари; отмѣтимъ лишь то важное обстоятельство, что пользованіе уравненіемъ ($\delta$) особенно удобно тѣмъ, что такимъ образомъ изслѣдованіе движенія огибаемыхъ по ихъ огибающимъ сводится на изученіе движенія нѣкоторыхъ вполнѣ опредѣленныхъ точекъ нашей системы по нѣкоторымъ кривымъ, также вполнѣ опредѣленнымъ, и, слѣдовательно, этотъ общій случай движенія сводится къ извѣстному намъ уже случаю движенія нѣкотораго прямого отрѣзка, принадлежащаго данной системѣ, по траекторіямъ его концовъ, при чемъ, какъ это само собою разумѣется, величина этого отрѣзка и расположеніе его въ данной системѣ будутъ отъ момента къ моменту мѣняться, вслѣдствіе чего каждое отдѣльное изслѣдованіе движенія этого отрѣзка будетъ относиться лишь къ тому моменту, для котораго оно выполнено.

**Къ § 17. Частные случаи опредѣленія положенія центра ускореній. Случай нахожденія точки $A$ на окружности поворотнаго круга.**

Предположимъ, что намъ дана точка $A$, полное ускореніе ея, $j_A$, и поворотный кругъ $C$ (фиг. 410), при чемъ точка $A$ предполагается лежащей внѣ (или внутри) этого круга. Выше, на стр. 102—103, данъ графическій пріемъ нахожденія центра ускореній по этимъ даннымъ. Теперь мы приведемъ еще одинъ графическій пріемъ, могущій въ нѣкоторыхъ случаяхъ оказаться болѣе удобнымъ, чѣмъ упомянутый выше; пріемъ этотъ основывается на слѣдующихъ соображеніяхъ:



Фиг. 410.

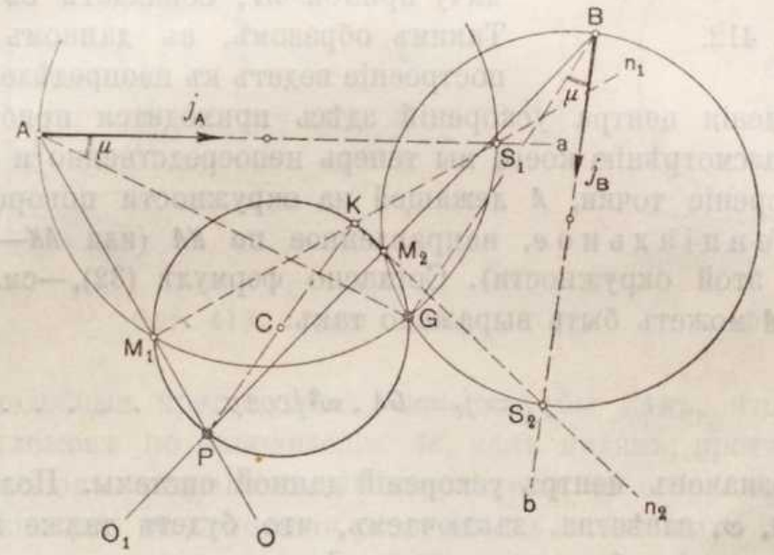
Соединимъ точку $A$ съ полюсомъ мгновеннаго вращенія $P$ прямой $AP$ (фиг. 410) и предположимъ, что эта прямая пересѣкаетъ окружность $C$ въ точкѣ $M$. Замѣтимъ кстати, что точка $M$ опредѣляетъ собою положеніе центра кривизны $O$ траекторіи точки $A$, ибо $AP^2 = AM \cdot \rho$, гдѣ $\rho = AO$. Предположивъ, далѣе, что центръ ускореній уже найденъ и находится въ $G$, соединимъ прямыми точку $M$ съ точками $K$, $G$ и $A$ и обозначимъ точку пересѣченія прямой $KMm$ съ прямой $Aj_Aa$, по которой направлено ускореніе $j_A$, черезъ $S$. Въ полученномъ такимъ образомъ четырехугольникѣ $AGMS$ уголъ $GAS = \mu$; тому же углу $\mu$ равенъ также уголъ $GMK$. Замѣчая, далѣе, что $\angle KMP = \angle AMS = 90^0$, заключаемъ, что $\angle GMA = 90^0 - \mu$, откуда слѣдуетъ, что $\angle GMS = 180^0 - \mu = 180^0 - \angle GAS$. Такимъ образомъ, оказывается, что въ нашемъ четырехугольникѣ $AGMS$ противолежащіе углы $M$ и $A$ его дополняютъ другъ друга до $180^0$, что показываетъ, что нашъ четырехугольникъ есть четырехугольникъ, вписанный въ кругъ, діаметръ коего есть, очевидно, $AS$, ибо на хорду $AS$ опирается прямой уголъ $AMS$. Окружность этого круга проходитъ, какъ видимъ, черезъ центръ ускореній $G$, но можетъ быть опредѣлена безъ всякаго участія этой точки $G$, ибо, кромѣ $G$, она проходитъ еще черезъ три вполнѣ опредѣленныя точки $A$, $M$ и $S$,— будучи проведена черезъ нихъ, она, очевидно, представитъ собою геометрическое

мѣсто центровъ $G$, и искомый центръ будетъ лежать въ пересѣченіи этой окружности съ окружностью поворотнаго круга $C$. Отсюда вытекаетъ слѣдующее простое графическое построеніе, разрѣшающее вопросъ о положеніи центра $G$:

Проведя прямую $AP$ и опредѣливъ точку пересѣченія ея $M$ съ окружностью поворотнаго круга $C$, проводимъ прямую $KM$ и отыскиваемъ точку $S$ пересѣченія ея съ прямой $Aj_Aa$. Окружность, описанная на отрѣзкѣ $AS$, какъ на діаметрѣ, представитъ собою геометрическое мѣсто центровъ $G$; она пересѣчетъ окружность поворотнаго круга въ двухъ точкахъ, одной изъ коихъ явится упомянутая выше точка $M$, другая же представитъ собою искомый центръ ускореній $G$.

Вопросъ разрѣшается, такимъ образомъ, вполнѣ, и мы перейдемъ къ разсмотрѣнію другихъ частныхъ случаевъ, намѣченныхъ нами.

Предположимъ, что намъ даны двѣ точки подвижной системы,—точки $A$ и $B$ (фиг. 411); извѣстны, далѣе, центры кривизны $O$ и $O_1$ ихъ траекторій и полное ускореніе одной изъ данныхъ точекъ,—допустимъ, ускореніе $j_A$ точки $A$. Опредѣле-

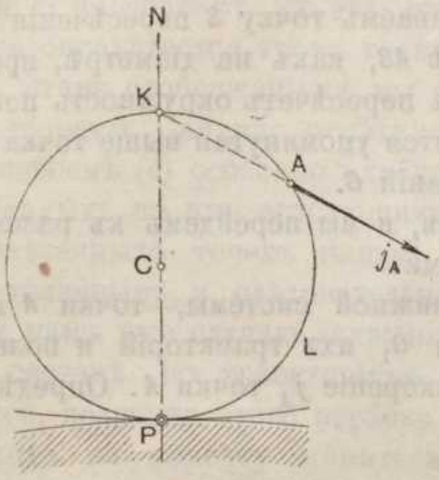



Фиг. 411.

ніе центра $G$ по этимъ даннымъ никакого труда не представляетъ, ибо, проведя радіусы кривизны $OA$ и $O_1B$ и опредѣливъ полюсъ мгновеннаго вращенія $P$ и обѣ точки $M_1$ и $M_2$ поворотнаго круга, лежащія на этихъ радіусахъ кривизны, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ этотъ поворотный кругъ вполнѣ, послѣ чего вопросъ рѣшается однимъ изъ пріемовъ, изложенныхъ выше. Но можно поступить иначе.

Дѣло въ томъ, что, пользуясь пріемомъ, изложеннымъ въ § 19 и слѣдующихъ, мы можемъ по даннымъ $j_A$, $O_1$ и $O$ сейчасъ же опредѣлить $j_B$,—полное ускореніе точки $B$. Проводимъ теперь прямыя $Aj_Aa$ и $Bj_B$ и, замѣтивъ, что прямая $KMSm$ была перпендикулярна къ $AM$, проводимъ лучъ $M_1n_1 \perp AM_1O$ и $M_2n_2 \perp BM_2O_1$; обозначивъ точки пересѣченія лучей $M_1n_1$ и $M_2n_2$ съ прямыми $Aa$ и $Bb$ соотвѣтственно черезъ $S_1$ и $S_2$, описываемъ на отрѣзкахъ $AS$ и $BS_2$, какъ на діаметрахъ, окружности $BM_2S_2$ и $AM_1S_1$, каждая изъ коихъ является геометрическимъ мѣстомъ центровъ $G$; искомымъ центромъ будетъ, слѣдовательно, служить одна изъ точекъ пересѣченія этихъ двухъ окружностей,—$G$ или $G_1$. За искомый центръ нужно взять ту изъ нихъ, радіусы векторы изъ коей, проведенные къ точкамъ $A$ и $B$, образуютъ одинаковые углы съ ускореніями $j_A$ и $j_B$; сверхъ того, должно соблюдаться правило направленій, данное въ одной изъ дополнительныхъ статей, приведенныхъ выше. Стрѣлки направленій, поставленныя вокругъ точекъ $P$, $G$ и $G_1$, разрѣшаютъ вопросъ о выборѣ точки $G$ сразу. Такъ же сразу выдѣляетъ должную точку поворотный кругъ $C$ нашей системы, опредѣляемый точками $P$, $M_1$ и $M_2$.—Вопросъ и въ этомъ случаѣ разрѣшается вполнѣ.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію того случая, когда точка $A$, ускореніе коей $j_A$ дано, лежитъ на самой окружности поворотнаго круга, какъ это и изображено на фиг. 412. Обычное построеніе, примѣняемое для нахожденія центра ускореній $G$ и изображенное на фиг. 90 (стр. 103), здѣсь непримѣнимо. Дѣйствительно, разъ точка $A$ лежитъ на поворотномъ кругѣ, то, какъ это извѣстно изъ предыдущаго, она обладаетъ однимъ лишь тангенціальнымъ ускореніемъ, направленнымъ, притомъ, всегда по прямой $KA$, проходящей черезъ полюсъ поворота $K$. Въ виду этого прямая $Km$, проводимая, согласно основному построенію (фиг. 90 на стр. 103), черезъ полюсъ поворота $K$ параллельно ускоренію точки, пройдетъ здѣсь черезъ самоё точку $A$, вслѣдствіе чего точка $T$, опредѣляющая положеніе рѣшающей задачу прямой $AT$, совпадетъ съ самой точкой $A$. Такимъ образомъ, въ данномъ случаѣ обычное построеніе ведетъ къ неопредѣленности, вслѣдствіе чего для нахожденія центра ускореній здѣсь приходится прибѣгать къ другому построенію, къ разсмотрѣнію коего мы теперь непосредственно и приступимъ.



Фиг. 412.

Полное ускореніе точки, $A$ лежащей на окружности поворотнаго круга, есть ускореніе тангенціальное, направленное по $KA$ (или $AK$—это зависитъ отъ мѣста точки на этой окружности). Согласно формулѣ (32),—см. стр. 72,—полное ускореніе точки $A$ можетъ быть выражено такъ:

$$j_A = j_t = GA \cdot \omega^2 / \cos\mu, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

гдѣ черезъ $G$ обозначенъ центръ ускореній данной системы. Полагая, что угловая скорость системы, $\omega$, извѣстна, заключаемъ, что будетъ также извѣстной и величина $j_A/\omega^2$, которую мы обозначимъ черезъ $l$, такъ что

$$l = j_A/\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Принимая во вниманіе, что измѣреніе $j$ есть $cm.\ sec^{-2}$, а $\omega \ldots.\ sec^{-1}$, заключаемъ, что измѣреніе $l$ есть $cm$, что указываетъ намъ, что величина $l$ представляетъ собою длину нѣкотораго вполнѣ опредѣленнаго прямого отрѣзка.

Въ виду $(b)$ соотношеніе $(a)$ приводится къ соотношенію

$$GA = l\cos\mu, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

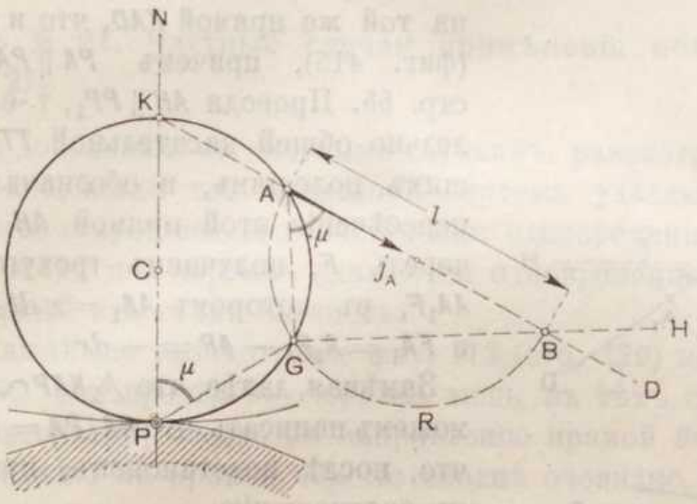
показывающему, что отрѣзокъ $GA$ представляетъ собою катетъ прямоугольнаго треугольника съ гипотенузой $l$ и прилегающимъ острымъ угломъ $\mu$, образованнымъ прямой $AD$, по которой направлено ускореніе $j_A$, и прямой $AG$.

Замѣтивъ это, предположимъ, что положеніе центра ускореній $G$ для разсматриваемаго случая намъ уже извѣстно,—пусть онъ лежитъ въ точкѣ $G$,—см. фиг. 413. Соединивъ его прямыми съ полюсомъ $P$ и данной точкой $A$, находимъ, что уголъ $GPK = \mu = \angle GAD$. Поэтому, проведя черезъ точку $G$ прямую $GH \perp GA$ до пересѣченія въ $B$ съ прямой $KAD$, получаемъ отрѣзокъ $AB$, равный, очевидно, отрѣзку $l$, ибо $GA = AB\cos\mu$. Отсюда слѣдуетъ, что опредѣленіе положенія точки $G$ можетъ быть выполнено слѣдующимъ образомъ:

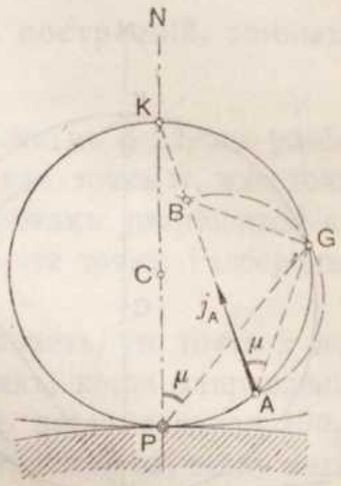
Проводимъ прямую $KAD$ и, опредѣливъ отрѣзокъ $l$ помощью уравненія $(b)$, откладываемъ его по прямой $KD$ отъ точки $A$ ея. Пусть $AB = l$. Описываемъ на $AB$, какъ на діаметрѣ, окружность. Тогда пересѣченіе ея съ окружностью поворотнаго круга опредѣлитъ собою точку $G$,—центръ ускореній данной системы.

Построеніе это приведено на фиг. 413. По поводу его слѣдуетъ обратить вниманіе на слѣдующее важное обстоятельство:

Дѣло въ томъ, что, примѣняя указанное выше построеніе, зачастую дѣлаютъ ошибку въ опредѣленіи направленія, въ которомъ долженъ быть отложенъ отъ точки $A$ отрѣзокъ $AB = l$, а именно: за направленіе его принимаютъ всегда направленіе отъ полюса поворота $K$ къ точкѣ $A$. Что это совершенно невѣрно и что прямая $KD$ играетъ здѣсь роль лишь носительницы отрѣзка $l$, но *вопроса о направленіи этого отрѣзка не предрѣшаетъ*, можно заключить изъ разсмотрѣнія чертежа, даннаго на фиг. 414, гдѣ точка $A$ взята на дугѣ $PG$, между $P$ и $G$. Разсужде-




Фиг. 413.




Фиг. 414.

нія, во всемъ подобныя предыдущимъ, показали бы намъ, что здѣсь отрѣзокъ $l$ долженъ быть отложенъ по направленію $AK$, какъ видимъ, противоположному первому. Такимъ образомъ, направленіе $AK$ направленія $AB$ собою еще не опредѣляетъ, этотъ вопросъ рѣшается на основаніи слѣдующихъ очевидныхъ соображеній:

Дѣло въ томъ, что, согласно формулѣ (*b*), для полученія вектора $l$ надо надъ векторомъ $j_A$ произвести нѣкоторое дѣйствіе (дѣленіе), *направленія его*, однако, *не затрагивающее*; отсюда непосредственно слѣдуетъ, что *направленіе вектора $l$ совпадаетъ съ направленіемъ образующаго его вектора-ускоренія $j_A$*. Итакъ, можно установить, что

*Направленіе, въ которомъ нужно откладывать отъ точки $A$ отрѣзокъ $AB = l$, должно быть всегда согласно съ направленіемъ ускоренія $j_A$ точки $A$.*

Чертежи (фиг. 413 и 414) вполнѣ подверждаютъ полученное правило отложенія вектора $l$, и вопросъ можно считать исчерпаннымъ вполнѣ.

Если отложеніе діаметра $AB$ является почему-либо затруднительнымъ,—если, напримѣръ, отрѣзокъ $l$ такъ великъ, что точка $B$ выходитъ изъ предѣловъ чертежа,—то приходится прибѣгнуть къ другому способу нахожденія центра $G$, сводящемуся къ непосредственному опредѣленію угла $\mu$; при этомъ приходится руководствоваться слѣдующими соображеніями:

Прежде всего, замѣтимъ, что мгновенную угловую скорость $\omega$ вращенія около полюса $P$ будемъ въ дальнѣйшемъ считать величиной *перемѣнной*; случай $\omega = const$ не представляетъ никакого интереса потому, что, въ виду равенства $\mu = 0$, соотвѣтствующаго этому частному случаю, центръ ускореній $G$ совпадаетъ здѣсь все время съ полюсомъ поворота $K$. Итакъ, $\omega$ перемѣнна.

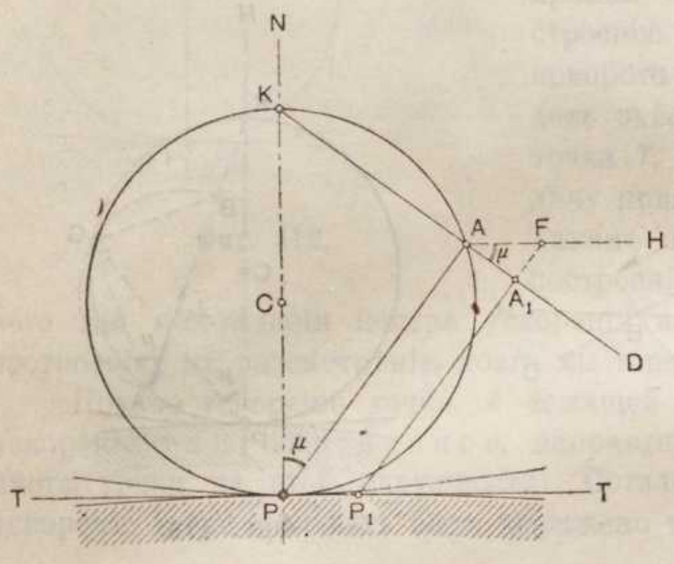
Обозначимъ, далѣе, величину отрѣзка $AP$ черезъ $r$. Замѣчая, что съ каждымъ новымъ моментомъ полюсъ мѣняетъ свое положеніе, заключаемъ, что, вообще говоря, $AP = r$ есть также величина перемѣнная. Замѣчая, далѣе, что скорость $v$ точки $A$

выражается уравненіемъ $v = \omega r$ и что въ данномъ случаѣ полное ускореніе точки, $j_A$, совпадаетъ съ тангенціальнымъ ускореніемъ ея, $j_t$, можемъ поэтому написать, что

$$j_A = j_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt} + \omega\,\frac{dr}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

Одну изъ производныхъ, входящихъ въ это соотношеніе, а именно производную $dr/dt$, можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ:

Пусть въ теченіе элемента времени $dt$ точка $A$ переходитъ въ сосѣднее положеніе $A_1$, лежащее, какъ мы знаемъ, на той же прямой $KAD$, что и точка $A$ (фиг. 415), причемъ $PA \parallel PA_1$, — см. стр. 55. Проводя $AH \parallel PP_1$, т.-е. параллельно общей касательной $TT$ къ нашимъ полодіямъ, и обозначая точку пересѣченія этой прямой $AH$ съ $A_1P_1$ черезъ $F$, получаемъ трехугольникъ $AA_1F$, въ которомъ $AA_1 = v\,dt = \omega r\,dt$ и $FA_1 = A_1P_1 - AP = -dr$.




Фиг. 415.

Замѣчая, далѣе, что $\triangle KAP \sim \triangle FA_1A$, можемъ написать, что $HA/PA = FA_1/AA_1$, что, послѣ подстановокъ, приводитъ къ соотношенію

$$\frac{KA}{r} = -\frac{dr}{\omega r\,dt}.$$

Отсюда, послѣ необходимыхъ преобразованій, находимъ выраженіе искомой производной, а именно:

$$\frac{dr}{dt} = -KA \cdot \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Подстановка въ $(d)$ приводитъ къ уравненію

$$j_A = r\,\frac{d\omega}{dt} - KA \cdot \omega^2,$$

откуда получаемъ, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega^2}{r}\left(\frac{j_A}{\omega^2} + KA\right) = \frac{\omega^2}{r}(AB + KA) = \frac{\omega^2}{r}(l + KA) \quad \ldots\ldots\ldots (f)$$

Черезъ $AB$ здѣсь, согласно $(b)$, обозначенъ векторъ $j_A/\omega^2$, *откладываемый*, напомнимъ еще разъ, *всегда по направленію ускоренія* $j_A$.

Теперь, наконецъ, опредѣляемъ $tg\mu$, а именно:

$$tg\mu = \frac{1}{\omega^2}\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{AB + KA}{r} = \frac{KB}{r} = \frac{l + KA}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

Если отрѣзокъ $AB$ $(= l)$ умѣщается на чертежѣ, то мы откладываемъ его по прямой $KD$ отъ точки $A$ *въ направленіи, даваемомъ ускореніемъ* $j_A$; отрѣзокъ $KA$ берется всегда въ одномъ и томъ же направленіи, отъ $K$ къ $A$. Тогда отрѣзокъ $KB$, изображающій собою разстояніе отъ $K$ до точки $B$ отрѣзка $AB$, и дастъ собою числителя дроби, изображающей $tg\mu$.

Если отложеніе отрѣзка $AB$ невозможно, то мы просто подсчитываемъ величину $l$ этого отрѣзка и складываемъ съ ней или вычитаемъ (смотря по тому, согласны ли направленія ускоренія $j_A$ и отрѣзка $KA$, или противоположны, т.-е. уходитъ ли векторъ $j_A$ отъ полюса поворота $K$ или смотритъ въ эту точку $K$) величину $\delta$ отрѣзка $KA$. Частное дастъ собою числителя дроби, выражающей $tg\mu$. По $tg$ находимъ самый уголъ $\mu$, что, наконецъ, позволяетъ найти положеніе искомаго центра $G$. Обычно величину $l$ отрѣзка $AB$ подсчитываютъ по формулѣ (*b*), а векторы $KA$ и $PA = r$ берутъ прямо по чертежу.

Этими соображенія мы и закончимъ разсмотрѣніе вопроса о нахожденіи центра ускореній $G$.

**Къ § 22. Частные случаи примѣненія общихъ построеній, данныхъ въ §§ 20—21.**

Въ дополненіе къ частнымъ случаямъ, разсмотрѣннымъ въ § 22, мы разберемъ еще тѣ два, когда изъ предѣловъ чертежа удаляются или точка $\pi$, или точка $M_2$ основного искусственнаго построенія; одновременно съ этимъ разрѣшится и тотъ случай, когда изъ чертежа удаляются одновременно обѣ эти точки. Разберемъ сначала первый изъ этихъ случаевъ.

Ближайшее разсмотрѣніе фиг. 113 (стр. 129) показываетъ, что точка $\pi$ можетъ удаляться изъ предѣловъ чертежа лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда направленіе радіуса-вектора $BO_1$ близко къ направленію прямой $BA$, т.-е. когда ломаная $ABO_1$ подходитъ близко къ прямой $AO_1$. Но вполнѣ очевидно, что въ этихъ случаяхъ полюсъ $P$ мгновеннаго вращенія системы $AB$ въ ея дѣйствительномъ движеніи (см. фиг. 106 на стр. 119) будетъ находиться вблизи точки $A$ и въ предѣлахъ чертежа, въ виду чего задача будетъ рѣшаться пріемомъ *непосредственнаго построенія поворотнаго круга дѣйствительнаго движенія*, какъ это было указано въ началѣ § 19 (стр. 119), и поставленный вопросъ будетъ исчерпанъ, такимъ образомъ, вполнѣ.—Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію второго случая.

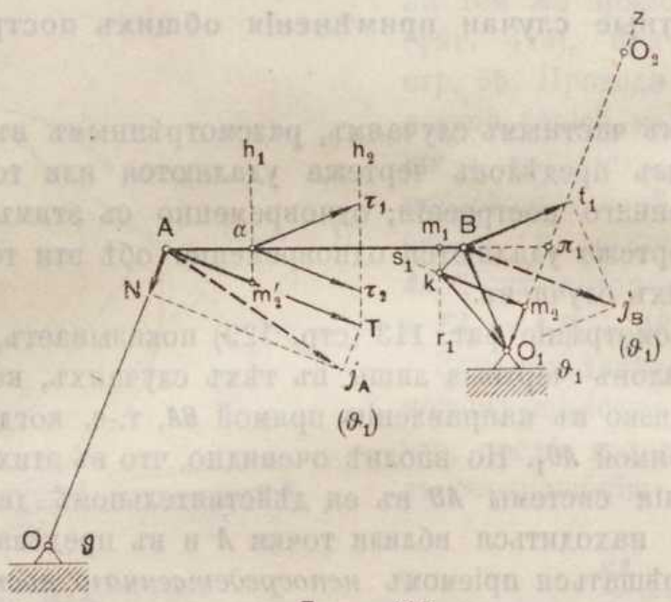
Предположимъ, что, примѣняя наше искусственное построеніе, мы обнаружили, что точка $M_2$, опредѣляемая, какъ извѣстно, помощью уравненія $O\pi^2 = M_2O \cdot \varrho_B$, удаляется изъ предѣловъ чертежа,—черезъ $\varrho_B$ нами обозначенъ радіусъ кривизны $BO_1$ траекторіи точки $B$ (см. фиг. 118, 120 и слѣд.). Это уравненіе показываетъ, что такое удаленіе точки $M_2$, т.-е. чрезмѣрно большая величина отрѣзка $M_2O$, можетъ имѣть мѣсто лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда $\varrho_B$ достаточно мало по сравненію съ $O\pi$, т.-е. когда точка $B$ движется по траекторіи достаточно большой кривизны. Такой именно случай *малаго* $\varrho_B$ мы теперь и разберемъ. Замѣтимъ, кстати, что малость $\varrho_B$ сравнительно съ $O\pi$ обычно соотвѣтствуетъ малости $\varrho_B$ сравнительно съ $OA = \varrho_A$, почему мы въ дальнѣйшемъ и будемъ предполагать, что $\varrho_B$ мало сравнительно съ $\varrho_A$.

Допустимъ, далѣе, что скорость и ускореніе точки $A$ намъ извѣстны, и требуется опредѣлить ускореніе точки $B$. Въ виду отсутствія точки $M_2$ примѣненіе нашего обычнаго построенія и выполненіе его у точки $A$ является фактически невозможнымъ, почему для рѣшенія поставленной задачи приходится прибѣгать къ другимъ пріемамъ, и одинъ изъ нихъ, основанный на переносѣ искусственнаго построенія къ точкѣ $B$ и на послѣдующемъ затѣмъ примѣненіи теоремы о дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореніяхъ, мы теперь и разберемъ. Предварительно замѣтимъ слѣдующее:

Пусть линейная скорость точки $A$ равна $v_A$. Тогда угловая скорость $\vartheta$ радіуса-вектора $OA$ опредѣлится изъ соотношенія $v_A = OA \cdot \vartheta$ и представитъ собою величину, вполнѣ намъ извѣстную. Проведемъ теперь черезъ центръ $O_1$ (фиг. 416) лучъ $O_1z \parallel OA$. Обозначивъ черезъ $\pi_1$ точку пересѣченія его съ прямой $AB$, получимъ $\triangle O_1B\pi_1$, могущій быть принятымъ за планъ скоростей системы $AB$, такъ что можно будетъ написать, что $v_B = v_A \cdot O_1B / O_1\pi_1 = O_1B \cdot \vartheta_1$, гдѣ черезъ $\vartheta_1$ обозначена угловая скорость

радіуса-вектора $O_1B$. Отсюда слѣдуетъ, что $\vartheta_1 = v_A / O_1\pi_1 = \vartheta \cdot OA / O_1\pi_1$ и, значитъ, будетъ извѣстна намъ вполнѣ.

Опредѣливъ $\vartheta_1$, выразимъ данное намъ полное ускореніе точки $A$ въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$ въ видѣ нѣкотораго вектора $Aj_A$, такъ что $j_A = Aj_A \cdot \vartheta_1^2$. На чертежѣ у конечной точки $j_A$ этого вектора поставлена внизу въ скобкахъ буква $\vartheta_1$ для обозначенія того, что векторъ $Aj_A$ представляетъ собою полное ускореніе $j_A$ въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$. Тангенціальное и нормальное ускоренія точки $A$ выразятся въ томъ же масштабѣ слагающими векторами $AT$ и $AN$, такъ что $(j_t)_A = AT \cdot \vartheta_1^2$ и $(j_n)_A = AN \cdot \vartheta_1^2$. Такое изображеніе ускореній точки $A$ въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$ нужно выполнять здѣсь въ самомъ началѣ построенія. Принимая во вниманіе, что величина нормальнаго




Фиг. 416.

ускоренія зависитъ лишь отъ значенія угловой скорости $\omega$ въ разсматриваемый моментъ, но не отъ величины $d\omega/dt$, заключаемъ, что векторъ $AN$, изображающій нормальное ускореніе точки $A$ въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$, будетъ оставаться однимъ и тѣмъ же, независимо отъ того, будетъ ли точка $B$ обладать какимъ-либо тангенціальнымъ ускореніемъ или нѣтъ,—важно лишь, чтобы въ данный моментъ значеніе угловой скорости радіуса-вектора $BO_1$ оставалось равнымъ $\vartheta_1$.—Послѣ этихъ необходимыхъ предварительныхъ замѣчаній перейдемъ къ разрѣшенію поставленной задачи. Будемъ разсуждать такъ:

Отвлекаясь на время отъ разсмотрѣнія дѣйствительнаго движенія точки $A$, предположимъ теперь, что точка $B$ движется *съ постоянной линейной скоростью* $v_B$, такъ что угловая скорость $\vartheta_1$ радіуса-вектора $BO_1$ будетъ постоянной, вслѣдствіе чего точка $B$ будетъ обладать однимъ лишь нормальнымъ ускореніемъ $(j_n)_B$, равнымъ $BO_1 \cdot \vartheta_1^2$ и изображаемымъ въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$ векторомъ $BO_1$; направленіе этого ускоренія будетъ идти отъ точки $B$ къ точкѣ $O_1$, какъ это и изображено на чертежѣ. Аналогично сказанному выше, заключаемъ, что это нормальное ускореніе $BO_1 \cdot \vartheta^2$ будетъ представлять собою въ то же самое время и *дѣйствительное нормальное ускореніе*, которое имѣетъ въ данный моментъ точка $B$ *въ* своемъ *дѣйствительномъ движеніи* по своей траекторіи. Отсюда слѣдуетъ, что для опредѣленія полнаго ускоренія точки $B$ намъ нехватаетъ только тангенціальнаго ускоренія этой точки, которое она имѣетъ въ своемъ дѣйствительномъ движеніи. Опредѣленіе этого дѣйствительнаго тангенціальнаго ускоренія точки $B$, $(j_t)_B$, никакихъ трудностей не представляетъ и выполняется слѣдующимъ образомъ:

Мы предположили, что $\vartheta_1 = const$. Посмотримъ теперь, каково будетъ соотвѣтствующее этому частному случаю полное ускореніе точки $A$. Этотъ вопросъ нетрудно разрѣшить при помощи нашего обычнаго искусственнаго построенія, но выполнить его придется, очевидно, уже у точки $B$. Для этого, согласно общей схемѣ, на

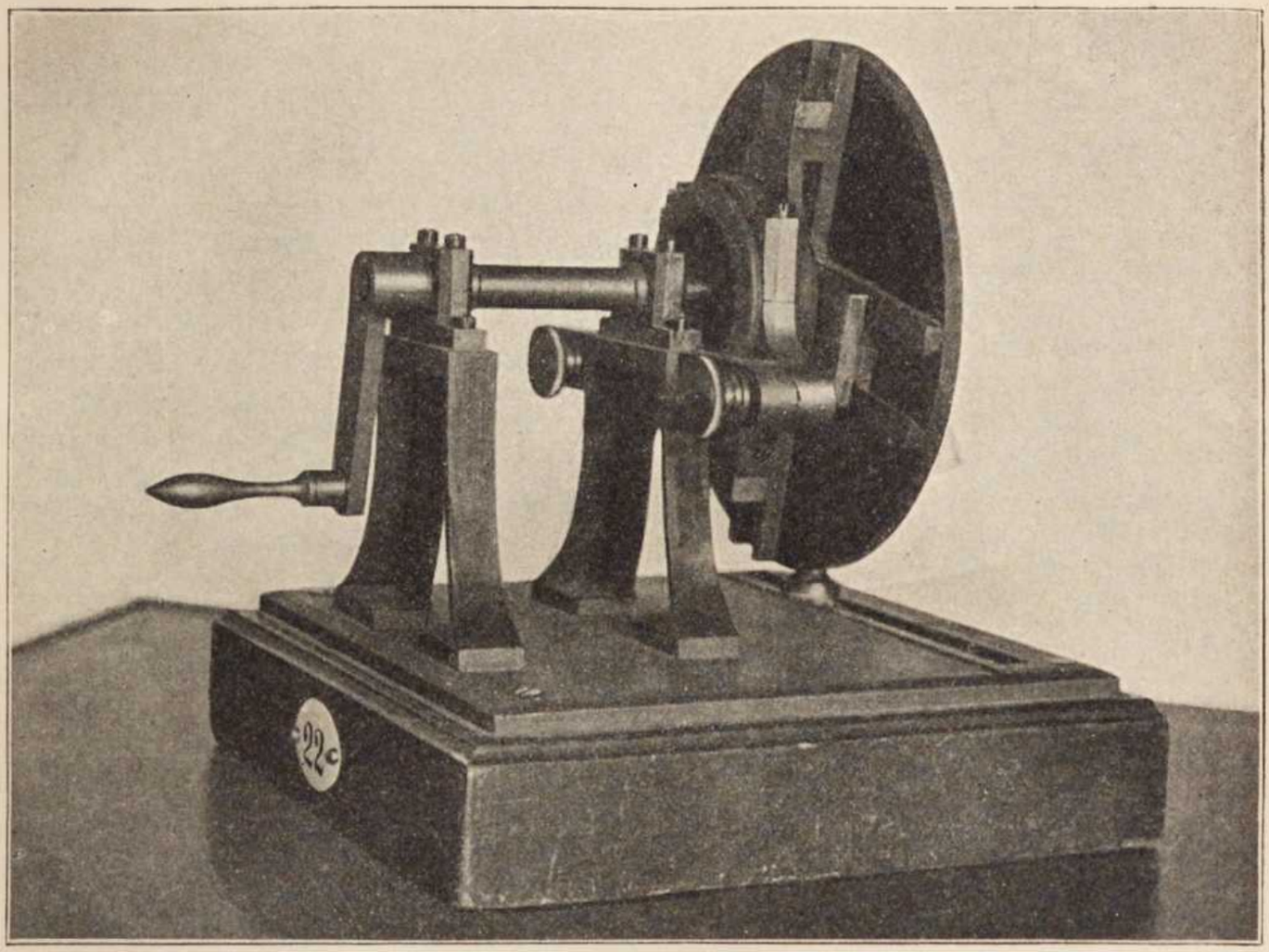
лучѣ $O_1z$, параллельномъ $OA$, по направленію $OA$, отъ $O$ къ $A$, откладываемъ отъ точки $O_1$ отрѣзокъ $O_1O_2$, равный $AO$. Находимъ теперь на лучахъ $A\pi_1$ и $O_1\pi_1$ точки $m_1$ и $m_2$ (соотвѣтствующія прежнимъ точкамъ $M_1$ и $M_2$) при помощи обычныхъ уравненій $B\pi_1^2 = BA \,.\, Bm_1$ и $O_1\pi_1^2 = O_1O_2 \,.\, O_1m_2$. Возставивъ въ этихъ точкахъ $m_1$ и $m_2$ перпендикуляры $m_1r_1$ и $m_2s_1$, такъ что $m_1r_1 \perp AB$ и $m_2s_1 \perp O_1\pi_1$, т.-е. $AO$, и обозначивъ точку пересѣченія этихъ перпендикуляровъ черезъ $k$, опредѣляемъ такимъ путемъ векторъ $kO_1$, дающій собою, въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$, полное ускореніе точки $A$ въ случаѣ $\vartheta_1 = const$. Замѣчая, далѣе, что лучъ $O_1z \parallel AO$, т.-е. нормали къ траекторіи точки $A$, и разлагая векторъ $kO_1$ по направленіямъ $s_1m_2 \perp O_1O_2$ и $m_2O_1$, находимъ слагающіе векторы $km_2$ и $m_2O$, изъ коихъ первый изображаетъ въ томъ же масштабѣ $(\vartheta_1^2)$ тангенціальное ускореніе точки $A$, а второй—нормальное ускореніе ея въ томъ же масштабѣ $(\vartheta_1^2)$. Отмѣтимъ еще разъ, что оба эти ускоренія получены нами въ предположеніи $\vartheta_1 = const$.

Здѣсь будетъ умѣстно обратить вниманіе на то обстоятельство, что отрѣзки $AN$ и $m_2O_1$ должны быть между собою равны, ибо оба они представляютъ собою нормальное ускореніе точки $A$ въ томъ случаѣ, когда угловая скорость радіуса-вектора $BO_1$ имѣетъ значеніе $\vartheta_1$. Это замѣчаніе позволяетъ значительно упростить и укоротить излагаемое построеніе, ибо даетъ возможность получить точку $m_2$ безъ помощи соотвѣтствующаго уравненія, а лишь путемъ прямого отложенія отрѣзка $NA$ у точки $O_1$. Съ другой стороны, это замѣчаніе позволяетъ намъ произвести провѣрку правильности разложенія и опредѣленія полнаго ускоренія $j_A$ въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$.—Вернемся теперь къ нашей задачѣ.

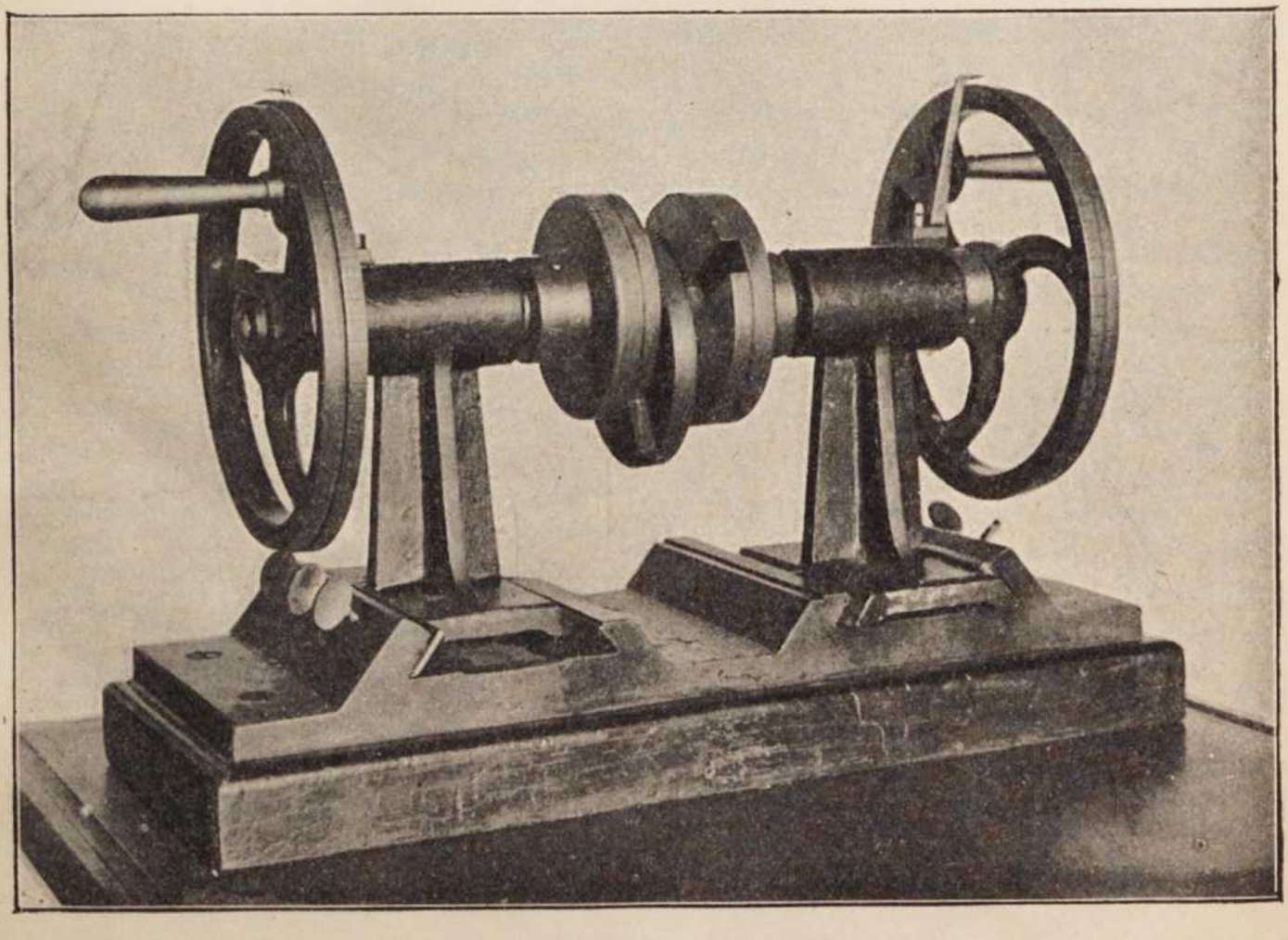
Мы нашли, что въ случаѣ $\vartheta_1 = const$ точка $A$ обладаетъ тангенціальнымъ ускореніемъ, изображаемымъ въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$ векторомъ $km_2$, и нормальнымъ ускореніемъ $m_2O_1$. Въ дѣйствительности же она, сохраняя то же нормальное ускореніе $(j_n)_A$, равное $AN \,.\, \vartheta_1^2$ или, что то же, $m_2O_1 \,.\, \vartheta_1^2$, обладаетъ тангенціальнымъ ускореніемъ $AT \,.\, \vartheta_1^2$, изображаемымъ векторомъ $AT$ и отличнымъ, вообще говоря, отъ $km_2 \,.\, \vartheta_1^2$. Разницу въ этихъ двухъ тангенціальныхъ ускореніяхъ мы опредѣлимъ, если перенесемъ векторъ $km_2$ параллельно самому себѣ въ точку $A$; если, послѣ этого переноса, онъ займетъ тамъ положеніе $Am'_2$, то и окажется, что дѣйствительное тангенціальное ускореніе точки $A$, изображаемое векторомъ $AT$, отличается отъ тангенціальнаго ускоренія $km_2$ ея при $\vartheta_1 = const$ на величину, изображаемую въ масштабѣ $(\vartheta_1^2)$ векторомъ $m_2'T$, направленнымъ, какъ мы видимъ, отъ точки $m_2'$ къ точкѣ $T$. Отсюда слѣдуетъ, что для перехода отъ предположеннаго нами случая $\vartheta_1 = const$ *къ дѣйствительному движенію* уже съ перемѣннымъ $\vartheta_1$, необходимо сообщить точкѣ $A$, обладающей при $\vartheta_1 = const$ тангенціальнымъ ускореніемъ $km_2$, еще дополнительное тангенціальное ускореніе, изображаемое векторомъ $m_2'T$,—векторъ $km_2$ перейдетъ послѣ этого, очевидно, въ векторъ $AT$.

Мы знаемъ, что сообщеніе точкѣ $A$ дополнительнаго тангенціальнаго ускоренія *не вызоветъ никакого измѣненія въ нормальномъ ускореніи точки* $B$, но на тангенціальномъ ускореніи ея отразится,—точка $B$ получитъ нѣкоторое вполнѣ опредѣленное дополнительное тангенціальное ускореніе, могущее быть найденнымъ при помощи теоремы о дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореніяхъ. Замѣчая же, что при $\vartheta_1 = const$ тангенціальное ускореніе точки $B$ равно нулю, заключаемъ, что сообщеніе точкѣ $A$ дополнительнаго тангенціальнаго ускоренія въ размѣрѣ $m_2'T$ вызоветъ появленіе у точки $B$ тангенціальнаго ускоренія, въ точности равнаго тому, какое эта точка имѣетъ въ дѣйствительности, при перемѣнномъ $\vartheta_1$. Итакъ, оказывается, что дѣйствительное тангенціальное ускореніе точки $B$ можетъ быть получено при помощи теоремы о дополнительныхъ тангенціальныхъ ускореніяхъ, путемъ сообщенія точкѣ $A$ дополнительнаго тангенціальнаго ускоренія $m_2'T$. Согласно съ этимъ, опредѣленіе $(j_t)_B$ будетъ выполнено при помощи слѣдующаго простого геометрическаго построенія:

Черезъ точки $m_2'$ и $T$ проводимъ прямыя $m_2'h_1$ и $Th_2$, перпендикулярныя къ $AB$, и черезъ точку $\alpha$ пересѣченія $AB$ съ $m_2'h_1$ проводимъ $\alpha\tau_1 \perp BO_1$. Тогда полученный

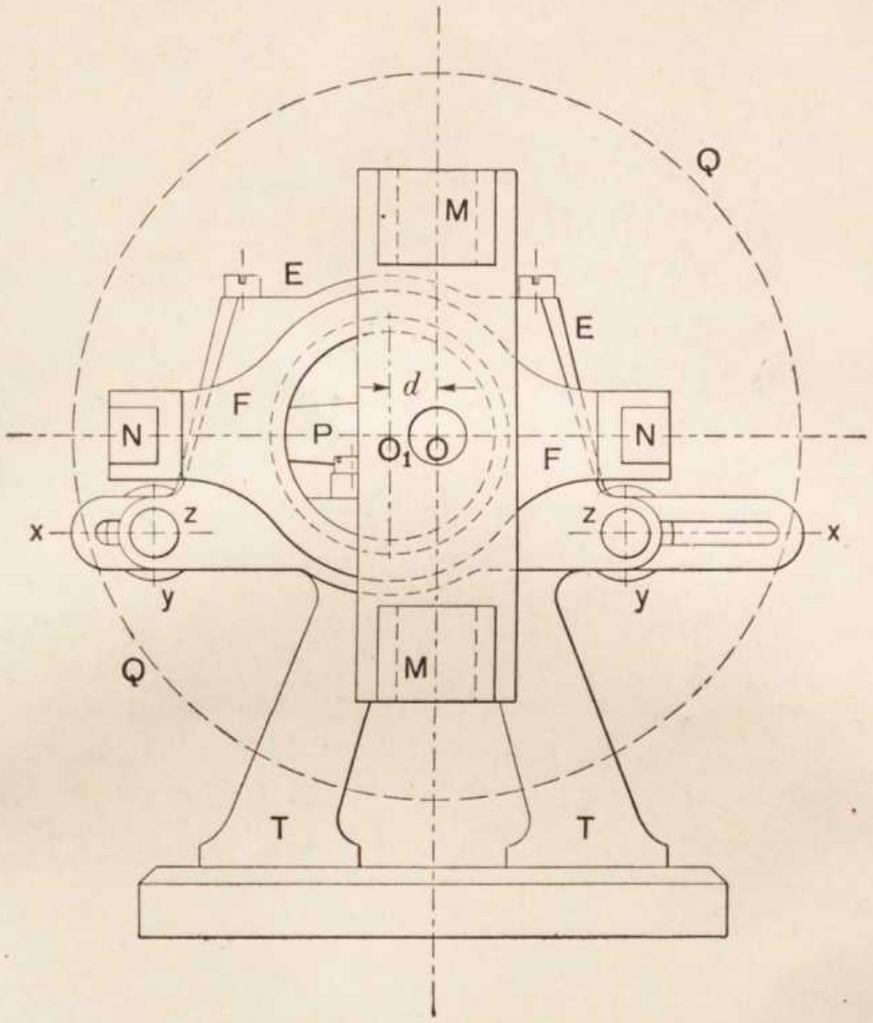


Фиг. 1. Станокъ Lionardo-da-Vinci.

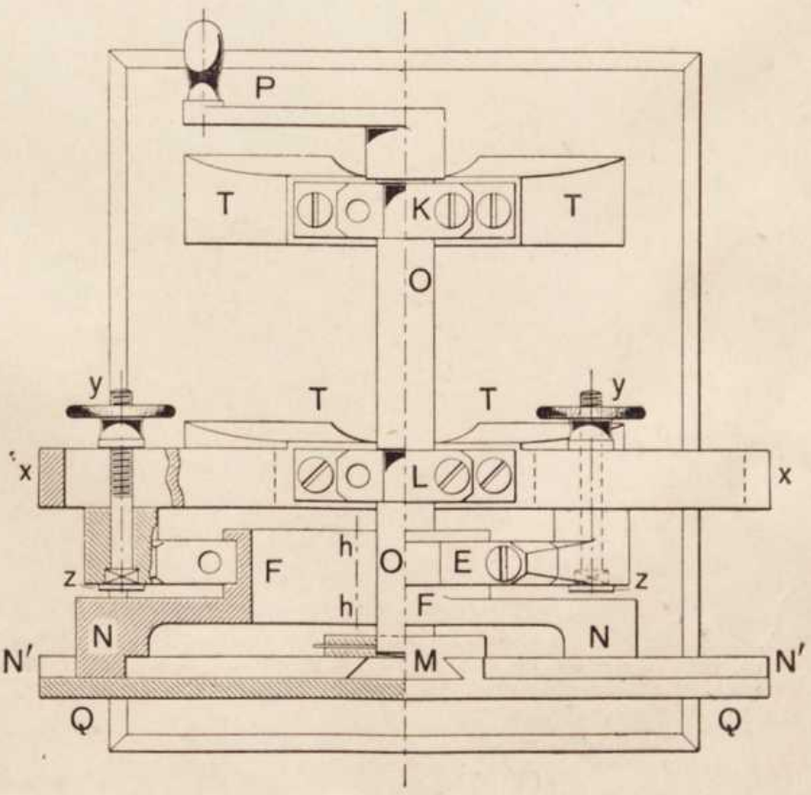


Фиг. 2. Муфта Ольдгэма.

# Схематическіе чертежи станка Lionardo-da-Vinci.

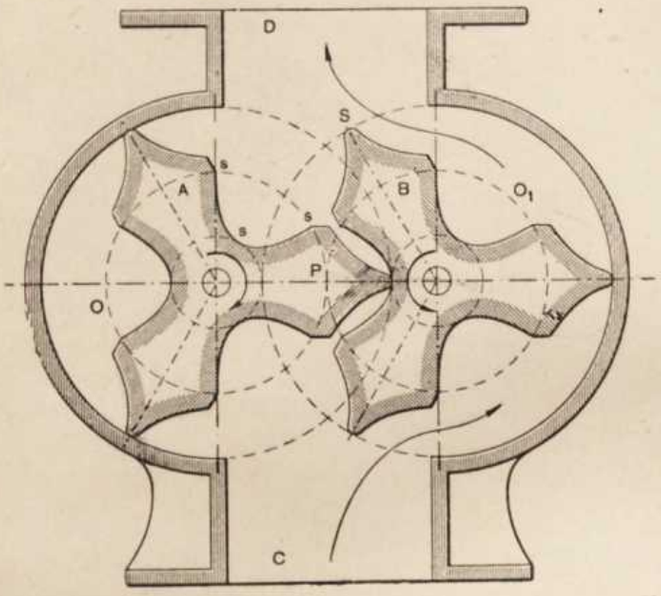



Фиг. 3. Видъ со стороны планшайбы,— сама планшайба (*Q*) снята.

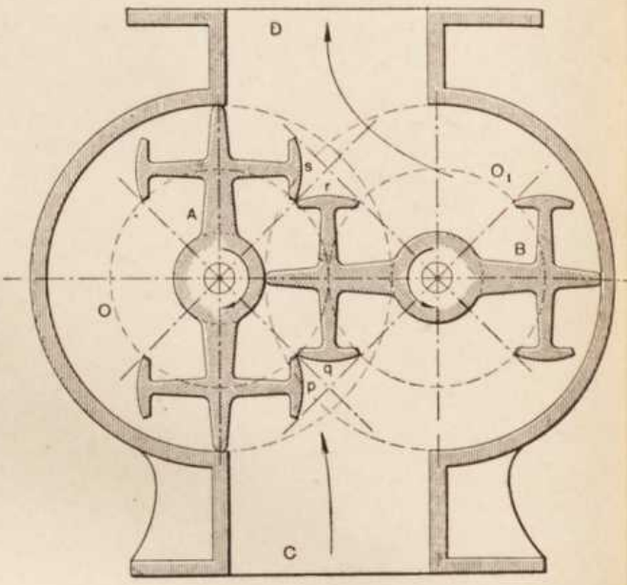



Фиг. 4. Видъ сверху съ горизонтальнымъ разрѣзомъ по оси *O*.

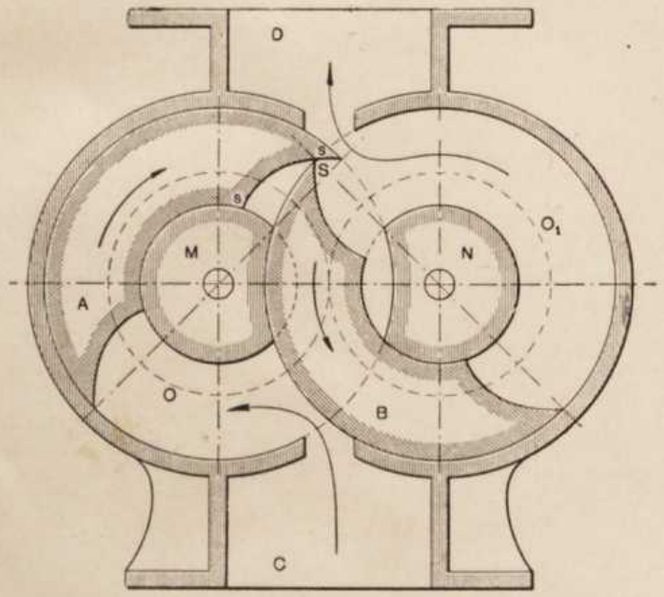
Снимки, воспроизведенные на фиг. 1 и 2, выполнены А. М. Спиридоновымъ.



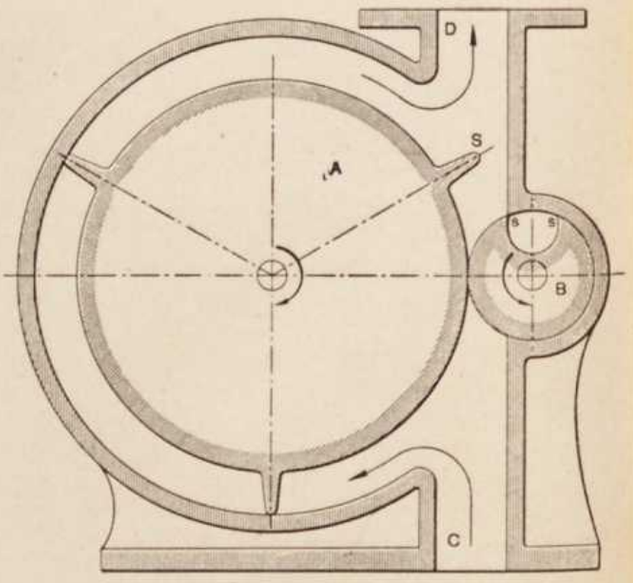

Фиг. 1. Fabry.




Фиг. 2. Fabry.



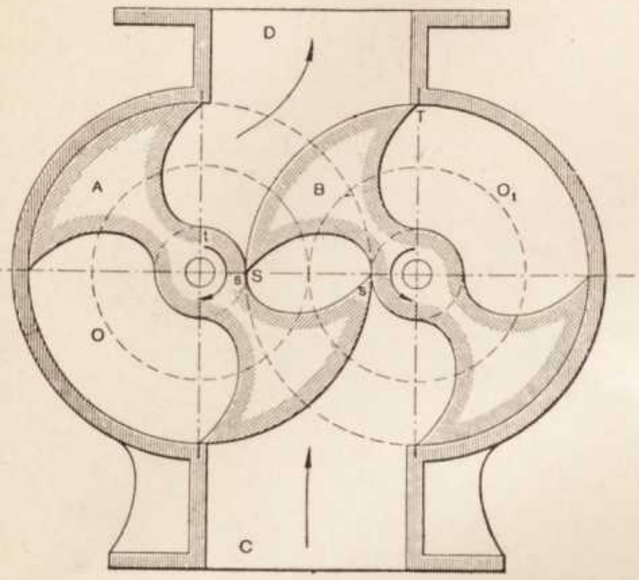

Фиг. 5. Dart.



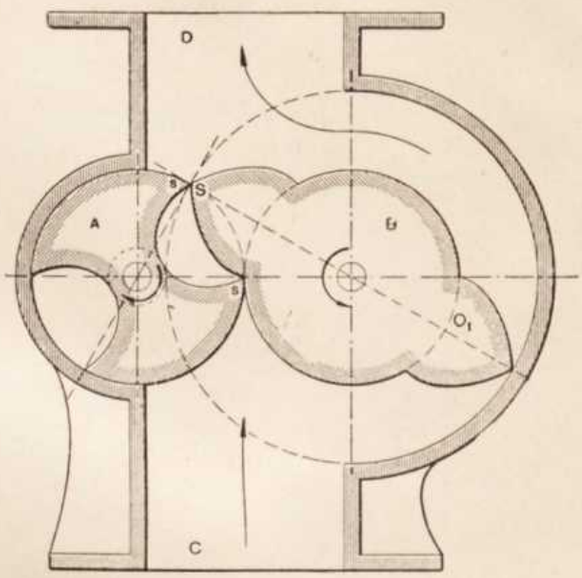

Фиг. 6. Eve, Ganahl.

Фиг. 1—8 представляютъ собою схематическіе чертежи нѣсколькихъ наиболѣе интересныхъ коловратныхъ машинъ. Буквами *O* и $O_1$ помѣчены круглыя полодіи крыльевъ, одинаковыя у всѣхъ машинъ, изображенныхъ здѣсь, кромѣ машины Eve (фиг. 6), гдѣ одна полодія втрое больше другой. На фиг. 1 и 3—6 буквами *ss* помѣчены эпициклоиды,—траекторіи точекъ *S* въ относительномъ движеніи полодій. На фиг. 2 части *p*, *q*, *r*, *s* и др. очерчены также дугами эпициклоидъ. Въ машинѣ Dart'a (фиг. 5) части *M* и *N* неподвижны; вращаются

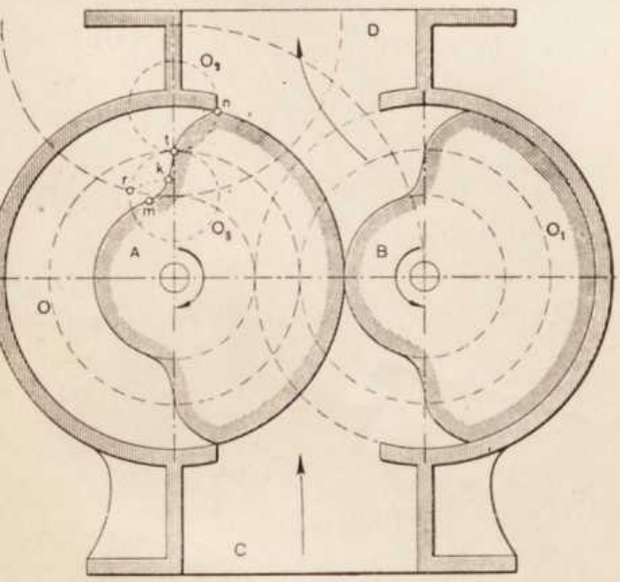
# машины.



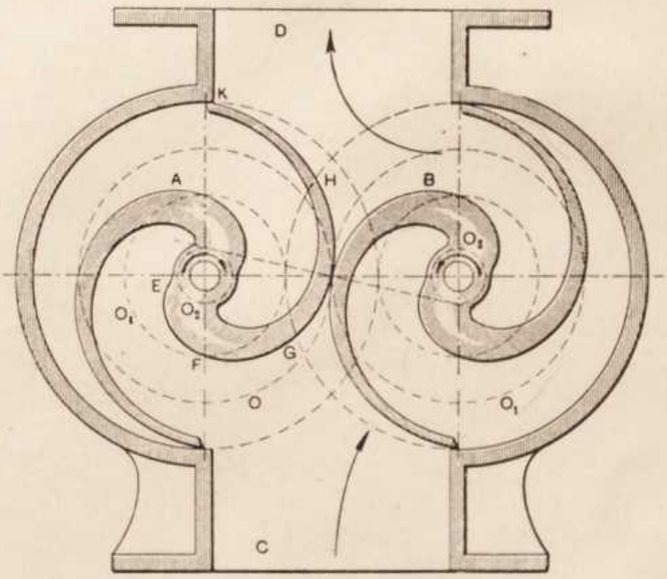

Фиг. 3. Roots.




Фиг. 4. Evrard.




Фиг. 7. Lecocq, Repsold.




Фиг. 8. Payton.

части *A* и *B*. Въ машинѣ Lecocq'a (фиг. 7) циклическіе профили *nt* и *tk* образованы точками *t* окружностей $O_2$ и $O_3$ при каченіи ихъ по полодіи *O*; часть *km* очерчена дугой эпициклоиды, — траекторіи крайней угловой точки профиля *B*. Въ машинѣ Payton'a (фиг. 8) рабочія части крыльевъ очерчены по разверткамъ *FGHK* двухъ одинаковыхъ окружностей $O_2$ и $O_3$; уголъ общей касательной (внѣшней) съ линіей центровъ берется обычно равнымъ $15^0$; часть *EF* можетъ быть очерчена произвольно.

