



Часть I.

ТЕОРІЯ
МЕХАНИЗМОВЪ.

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА.

ЛЕКЦІИ

АД.-ПРОФЕССОРА

Н. И. Мерцалова,

читанныя на 2-мъ курсѣ

ИМПЕРАТОРСКАГО Техническаго Училища

въ 1901–1902 ак. году.

В В Е Д Е Н І Е .

Прикладная механика, какъ это видно изъ самаго названія, занимается приложеніемъ нашихъ знаній о соотношеніяхъ между силами природы къ изысканію способовъ пользованія этими силами въ нашихъ цѣляхъ. Эти способы пользованія силами и цѣли, имѣющіяся въ виду при этомъ, можно раздѣлить на двѣ группы. Въ одной мы пользуемся извѣстными силами для того, чтобы устранить нежелательное дѣйствіе другихъ силъ. Перекидывая, напр., мостъ черезъ рѣку, мы устраняемъ нежелательное дѣйствіе тяжести; возводя зданіе, — устраняемъ нежелательное дѣйствіе температуры и другихъ атмосферическихъ дѣятелей, и т. д. Здѣсь наши знанія о молекулярныхъ силахъ сцѣпленія, упругости и т. п. даютъ намъ возможность избѣжать вреднаго для насъ дѣйствія другихъ силъ.

Та часть прикладной механики, которая занимается изысканіемъ этихъ способовъ устраненія извѣстныхъ дѣйствій внѣшнихъ факторовъ, называется вообще строительной механикой.

Другая группа способовъ пользованія силами носить

гораздо болѣе активный характеръ. Тутъ мы заставляемъ си кое производить движеніе въ опредѣленномъ желательномъ дѣйствіи насъ направленіи, совершать извѣстную нужную для насъ работу.

Орудія, при помощи которыхъ мы производимъ эти и сдѣйствія, называются машинами, и та часть прикладной механики, которая занимается изслѣдованіемъ этой второй группы способовъ пользованія силами, назыв. машиностроеніемъ.

Уже изъ самой сущности задачи, которую мы ставимъ себѣ при такомъ пользованіи силами, вытекаетъ опредѣленіе машины. Однако это опредѣленіе было дано впервые, какъ это ни странно, только въ концѣ шестидесятихъ годовъ извѣстнымъ Reuleaux'и формуруется такъ :

Машиной называется система тѣлъ, при помощи которыхъ данныя силы производятъ движеніе только въ заранее опредѣленныхъ направленіяхъ, - всѣ же другія дѣйствія силъ устраняются соотвѣтственнымъ сопротивленіемъ этой совокупности тѣлъ.

Какъ видимъ, и это опредѣленіе есть собственно описаніе, но такое, которое хорошо формулируетъ сущность рѣшаемой нами при помощи машинъ задачи. Замѣтимъ, что изъ приведеннаго опредѣленія непосредственно вытекаетъ подраздѣленіе науки о машинахъ на соотвѣтственные отдѣлы.

Вопервыхъ, основнымъ требованіемъ является произведеніе заранее опредѣленнаго движенія; а такъ какъ вся-

Ско́рое сло́жное дви́женіе, какъ извѣстно, можно составить изъ
нѣсколькихъ простыхъ, то на первомъ планѣ появляется
вопросъ : какой комбинаціей простѣйшихъ движеній мы мо-
жемъ воспроизвести требуемое движеніе ? - Поэтому первымъ
и основнымъ отдѣломъ науки машиностроенія будетъ отдѣлъ
кинематическій, въ которомъ разсматриваются, во-первыхъ,
способы воспроизведенія простѣйшихъ движеній, а затѣмъ -
различныя ихъ комбинаціи.

Далѣе, силы, производя при помощи машины опредѣлен-
ныя движенія, совершаютъ нужную для насъ работу. Но эта
работа является результатомъ не свободнаго дѣйствія
силъ, а принужденнаго. Устраняя нежелательныя для насъ
движенія при помощи сопротивленія частей машины, мы дол-
жны ожидать извѣстной потери въ дѣйствиіи силъ. Слѣдо-
вательно, здѣсь является вопросъ, какимъ образомъ све-
сти эту потерю на minimum, т.е. является вопросъ объ эконо-
мическомъ коэффиціентѣ машины и о вредныхъ сопротивле-
ніяхъ. Рѣшенію этого вопроса посвящается второй отдѣлъ
науки о машиностроеніи, носящій обыкновенно названіе "об-
щей теоріи машинъ", а такъ какъ различныя потери въ дѣй-
ствіяхъ силъ несомнѣнно зависятъ отъ природы самихъ
силъ, то этотъ отдѣлъ естественно распадается на груп-
пы сообразно съ особыми свойствами вводимыхъ силъ; та-
кимъ образомъ частью этого отдѣла явится, напр.,
"термодинамика".

Наконецъ, требованіе устраненія нежелательныхъ дѣй-

ствій силъ порождаетъ вопросъ о достаточной сопротивляемости частей машинъ этимъ, такъ сказать, вреднымъ дѣйствіямъ силъ, и такимъ образомъ является третій отдѣлъ науки машиностроенія: "ученіе о прочности частей машинъ".

Каждый изъ этихъ отдѣловъ представляетъ одинаковую важность для инженера, но каждый имѣетъ свои особенности для изученія и пользованія выводами, — особенности, на которыхъ я нѣсколько останавлиюсь. —

— Первый, кинематическій отдѣлъ выдѣлился въ особую науку сравнительно недавно. Извѣстно, что еще Амперъ настаивалъ на выдѣленіи изъ механики особой отрасли, занимающейся исключительно изслѣдованіемъ движеній, безъ разсмотрѣнія силъ, ихъ производящихъ, и указывалъ на важное значеніе этой отрасли для потребностей практической механики. И дѣйствительно, инженеру прежде всего приходится рѣшать вопросъ объ относительныхъ движеніяхъ частей машины, производящихъ въ совокупности желательное движеніе, а для рѣшенія этого вопроса вовсе не нужно принимать во вниманіе, какія силы заставляютъ механизмъ двигаться. Вопросъ этотъ въ весьма большомъ числѣ случаевъ машиностроенія является даже первенствующимъ такъ, напр., во всѣхъ машинахъ, обрабатывающихъ дерево или металлы, гдѣ требуется куску матеріала придать опредѣленную форму при помощи извѣстнаго инструмента, мы прежде всего должны рѣшить вопросъ объ относительномъ движеніи этого инструмента; — именно такомъ, чтобы онъ могъ

придать обрабатываемому куску, заданную форму. Точно также при устройствѣ ткацкихъ станковъ прежде всего требуется, при помощи известной комбинаціи движеній, рѣшить сложную задачу объ относительномъ движеніи нитей основы и утка съ цѣлью воспроизведенія даннаго узора ткани; всѣмъ известно, какія остроумныя и въ высшей степени сложныя комбинаціи движеній встрѣчаются, напр., въ новѣйшихъ Жаккардовыхъ машинахъ, работающих съ нѣсколькими челноками. Въ этомъ случаѣ, какъ и многихъ, ему подобныхъ, вопросъ о силахъ, производящихъ движеніе, даже вопросъ объ экономичности, - отступаютъ на второй планъ. Легко однако видѣть, что разъ мы опускаемъ на время вопросъ о силахъ и рассматриваемъ только движеніе, наше изслѣдованіе пріобрѣтаетъ чисто геометрический характеръ, и Амперъ былъ вполне правъ, когда называлъ эту новую отрасль прикладной механики "геометріей 4-хъ измѣреній," гдѣ четвертымъ измѣреніемъ является элементъ времени.

Слѣдовательно, первый основной отдѣлъ прикладной механики обладаетъ тѣмъ преимуществомъ, какимъ обладаетъ геометрія въ частности, и чистая математика - вообще. Этимъ преимуществомъ является наибольшая легкость и доступность для изученія, - ибо при этомъ не требуется ни сложныхъ опытовъ, ни кропотливыхъ наблюденій, - и строгая доказательность положеній и выводовъ. - Далѣе, въ самомъ пользованіи результатами наблюдается полное тождество съ геометріей: подобно тому, какъ въ геометріи мы,

обладая нѣкоторой долей воображенія, при помощи комби-
націи извѣстныхъ пространственныхъ соотношеній, можемъ
создавать новыя формы и а priori заключать о новыхъ
соотношеніяхъ, такъ и здѣсь для творчества требуется толь-
ко воображеніе и способность къ комбинированію, такъ что
рѣшеніе кинематическихъ вопросовъ по существу не отлича-
ется отъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе.

Ошибочнымъ, конечно, являлось бы предположеніе, что
рѣшеніе это можно подвести подъ извѣстныя формулы или да-
же облегчить его введеніемъ разныхъ условныхъ обозначеній
для механизмовъ, какъ полагалъ, напр., тотъ - же Reuleaux.
Обозначенія эти скорѣе даже мѣшаютъ успѣшному ходу твор-
ческаго процесса, ибо вмѣсто непосредственной наглядности
является отвлеченная условность, а только интуиція и мо-
жетъ создать здѣсь что - либо новое. - Въ дѣйствительно -
сти хорошее воображеніе и способность къ комбинаціямъ
встрѣчаются далеко не рѣдко, и потому вовсе не удивитель-
но, что творчество въ этой области машиностроенія раз-
вито весьма сильно. Стоитъ только посмотрѣть, какая мас-
са всевозможныхъ механизмовъ для полученія различныхъ слу-
чаевъ движенія патентуется ежегодно, чтобы убѣдиться въ
справедливости сказаннаго. Почему же однако не всѣ эти
механизмы, а только ничтожно-малая часть ихъ вводится по-
томъ въ дѣйствительную жизнь и пріобрѣтаетъ, т.ск., права
гражданства? Въ большинствѣ случаевъ эти механизмы
бываютъ вѣдь весьма остроумны съ кинематической точки

зрѣнія, и тѣмъ не менѣе примѣненія на практикѣ не имѣютъ.

Отвѣтъ на поставленный нами вопросъ дадутъ намъ другіе отдѣлы науки о машиностроеніи, и, прежде всего, общая теорія машинъ. Механизмъ, совершенный съ точки зрѣнія кинематики, можетъ оказаться на дѣлѣ никуда не годнымъ по своей неэкономичности, и указанія, необходимыя для построенія удовлетворительныхъ съ этой точки зрѣнія механизмовъ долженъ бы намъ давати второй отдѣлъ машиностроенія.

Однако здѣсь дѣло обстоитъ гораздо сложнее: теперь въ наше изслѣдованіе мы должны ввести вопросъ о силахъ, и задача наша сразу становится труднѣйшей.

Изъ исторіи развитія теоретической механики извѣстно, какъ трудно поддаются изученію даже рудиментарныя силы: такъ, напр., у древнихъ геометрія стояла на очень высокой степени развитія, а тѣмъ не менѣе они не имѣли даже самаго отдаленнаго понятія хотя бы о принципѣ инерціи или о принципѣ независимости дѣйствія. Нуженъ былъ необыкновенный геній Галилея, чтобы положить начало выясненію этихъ основныхъ принциповъ. Галилей изучалъ преимущественно дѣйствія силъ тяжести, что значительно упрощало дѣло въ виду нѣкоторыхъ спеціальныхъ условій этого дѣйствія. Въ машиностроеніи же мы имѣемъ дѣло не съ простымъ дѣйствіемъ тяжести, а съ несравненно болѣе сложными явленіями молекулярныхъ силъ. Изслѣдованіе этихъ силъ и дѣйствій, ими производимыхъ, сопряжено съ очень

трудными опытами, да и опыты зачастую мало помогают делу, такъ какъ въ виду совмѣстности существованія силъ сущность дѣйствія каждой отдѣльной силы ускользаетъ отъ нашего наблюденія, и нужно обладать геніальными способностями, чтобы быть въ состояніи усмотрѣть главныя въ явленіи и отвлечься отъ всего частнаго и побочнаго. Въ этомъ обстоятельствѣ и коренится причина такого медленнаго развитія этого отдѣла ученія о машинахъ; потому то такъ несовершенна въ большинствѣ случаевъ теорія относящихся сюда явленій; такъ, напр., объ одномъ изъ самыхъ важныхъ факторовъ въ вопросѣ объ экономичности механизма, а именно - о треніи, мы знаемъ очень мало; и напр., до сихъ поръ не можемъ опредѣленно сказать, зависятъ ли треніе твердыхъ тѣлъ отъ относительной ихъ скорости, или нѣтъ.

Въ термодинамикѣ, правда, благодаря геніямъ Mayer'а, Clausius'а и Carnot, мы имѣемъ рядъ опредѣленныхъ указаній, которыми долженъ руководствоваться инженеръ при построеніи относящихся сюда машинъ, но практическое выполненіе указанныхъ ими идеальныхъ конструкцій весьма затруднительно именно въ силу весьма малыхъ знаній нашихъ о дѣйствіи молекулярныхъ силъ. Исслѣдованіе Carnot появилось въ 1824 году, работа Mayer'а - въ 1842 г., однако хоть нѣсколько приблизиться къ теоретическимъ требованіямъ удалось только въ самое послѣднее время благодаря энергіи германскаго инженера Diesel'я, - нуженъ былъ

многолѣтній упорный трудъ, нужна была большая изобрѣтательность въ конструкціи, чтобы достигнуть полученнаго имъ, хотя въ дѣйствительности и небольшого, приближенія къ научнымъ требованіямъ.

Итакъ, этотъ отдѣлъ механики представляетъ огромныя и неопредолимыя трудности какъ для теоретической его разработки, такъ и для пракческаго использованія добытыхъ результатовъ; и только въ немногихъ случаяхъ онъ даетъ намъ вполне опредѣленный отвѣтъ на вопросъ о пригодности того и другого механизма.

Если мы обратимся къ третьему основному отдѣлу ученія о машиностроеніи, къ ученію о прочности частей машинъ, то и здѣсь встрѣтимся съ такими же, если не большими, трудностями. Правда, здѣсь мы имѣемъ дѣло съ опредѣленнымъ классомъ явленій, а именно - съ явленіями упругости; однако явленія эти довольно сложны, и хотя нѣкоторыя предположенія о сущности дѣйствія силъ упругости мы и можемъ сдѣлать, однако въ случаяхъ, представляющихся намъ въ дѣйствительности, мы наталкиваемся часто на такія сложныя комбинаціи этихъ силъ, что теоретически въ нихъ разобратся бываетъ невозможно, и мы бываемъ принуждены прибѣгать въ такихъ случаяхъ къ болѣе или менѣе произвольнымъ, упрощающимъ дѣло предположеніямъ. Но даже и при такомъ приѣмѣ нахожденія рѣшенія удается намъ только въ немногихъ, наиболѣе простыхъ и въ дѣйствительности рѣдко имѣющихъ мѣсто слу-

чаяхъ. Тѣмъ не менѣе получаемые такимъ образомъ выводы мы примѣняемъ къ сложнымъ явленіямъ, гораздо чаще встрѣчающимся, стараясь поправить неточности введеніемъ опытныхъ коэффиціентовъ. Такой путь, конечно, мало рационаленъ, ибо самый видъ соотношенія можетъ вовсе не подходить къ данному случаю, а коэффиціенты эти дѣла совсѣмъ не поправляютъ — поправленная при ихъ помощи формула будетъ выражать соотношенія только для тѣхъ опытовъ, изъ которыхъ эти коэффиціенты выведены, что, понятно, большого интереса представить не можетъ. Обыкновенно руководствуются аналогіями съ механизмами, испытанными уже раньше; но и этотъ путь по весьма понятнымъ причинамъ представляется также мало рациональнымъ. Тѣмъ не менѣе, вслѣдствіе необыкновенныхъ трудностей дѣла, приходится мириться съ этими мало научными приемами.

Итакъ, намъ представляется теперь вполне понятнымъ, почему только немногіе изъ всѣхъ изобрѣтаемыхъ механизмовъ удерживаются въ дѣйствительности. Вслѣдствіе несовершенствъ общей теоріи машинъ и ученія о достаточной прочности частей механизма нельзя съ полной опредѣленностью заранее сказать въ каждомъ данномъ случаѣ, пригоденъ или нѣтъ тотъ или иной новый механизмъ. Мы еще не обладаемъ достаточнымъ запасомъ свѣдѣній и знаній по части вредныхъ сопротивленій, — запасомъ на столько достаточнымъ, чтобы устранить, по возможности заранее, ихъ дѣйствіе; мы не можемъ еще распоряжаться геометрическими

формами, - мы вынуждены пробовать и испытывать. Но если дело обстоит такимъ именно образомъ, то тѣмъ нужнѣе становится для насъ обладаніе возможно болѣе богатымъ запасомъ придуманныхъ механизмовъ, и богатство творчества въ кинематической части является однимъ изъ необходимыхъ условій успешной борьбы инженера съ вредными сопротивленіями. Мы будемъ поступати въ этомъ случаѣ такъ, какъ поступаетъ сама природа: она производитъ массу сѣмянъ, но только ничтожно малая часть ихъ выдерживаетъ борьбу съ вредными вліяніями, такъ, что необходимымъ условіемъ успешности борьбы и служить именно это богатство произведенія.

ОБЩІЯ КИНЕМАТИЧЕСКІЯ СВЕДѢНІЯ.

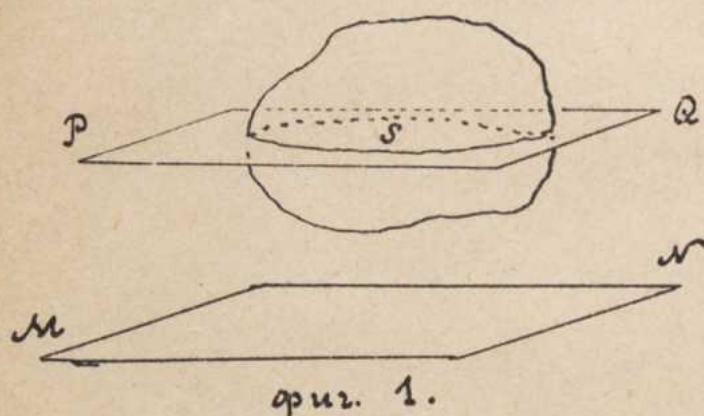
Движеніе всякой неизмѣняемой системы вполне опредѣляется движеніемъ какихъ-либо трехъ точекъ этой системы; зная положеніе этихъ послѣднихъ въ каждый данный моментъ, мы легко опредѣлимъ положеніе любой точки этой системы, такъ какъ положеніе ея относительно трехъ выбранныхъ нами точекъ, при данной конфигураціи системы, намъ извѣстно вполне.

Если система движется параллельно какой - либо плоскости ("направляющая" плоскость), - а съ такимъ преимущественно движеніемъ мы имѣемъ дело въ кинематикѣ ме-

ханизмовъ, то какое либо сѣченіе S (фиг. 1) этой системы плоскостью PQ , параллельной направляющей плоско-

сти mn , будетъ во все время этого движенія находиться въ этой сѣкущей плоскости.

Тогда для опредѣленія движенія системы намъ достаточно будетъ разсмотрѣть дви-



женіе одного сѣченія S въ его плоскости PQ .

Такъ какъ, далѣе, положеніе всякой ^{плоской} неизмѣняемой системы вполне опредѣляется положеніемъ двухъ какихъ-нибудь точекъ ея, то все изслѣдованіе подобнаго движенія сводится, какъ видимъ, къ разсмотрѣнію движенія какого-либо прямого отрѣзка, движущагося въ данной плоскости. Простейшими движеніями такого отрѣзка будутъ : 1) поступательное и прямолинейное, при которомъ всѣ точки этого отрѣзка будутъ перемѣщаться по параллельнымъ прямымъ со скоростями, равными между собою, и 2) вращательное около какой нибудь неподвижной точки плоскости, — въ этомъ случаѣ точки отрѣзка будутъ описывать концентрическія окружности съ центромъ въ неподвижной точкѣ.

Замѣтимъ, что первый случай можно, съ какой угодно степенью точности, также разсматривать, какъ нѣкоторое вращеніе, если только неподвижную точку взять достаточно далеко. Точно также можно сказать, что, если концы отрѣзка принуждены за все время движенія оста-

ааться на двухъ concentрическихъ окружностяхъ, то
виженіе представится вращеніемъ отрѣзка около общаго
центра этихъ окружностей.

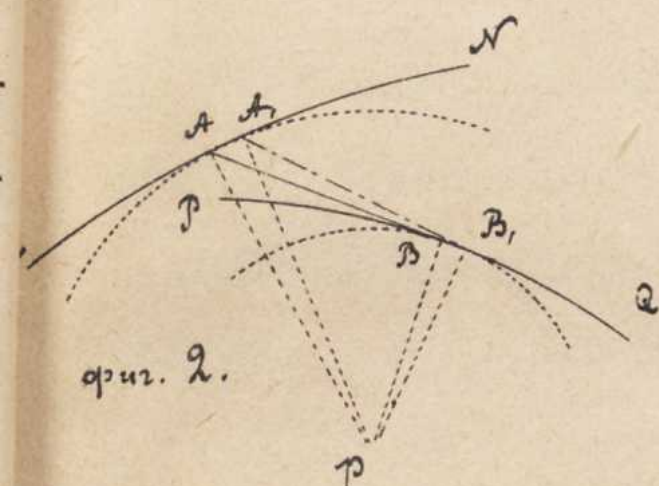
Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію вообще какого
нибудь движенія подобнаго отрѣзка.

Пусть отрѣзокъ прямой AB движется такъ, что
концы его A и B все время принуждены оставаться на
кривыхъ mn и pq (фиг. 2). Если мы рассмотримъ 2 ка-

кихънибудь смежныхъ послѣ-
довательныхъ положенія отрѣз-
ка, положимъ, AB и A_1B_1 , то
перемѣщеніе конца A по кри-
вой mn изъ A въ A_1 можно

будетъ разсматривать, какъ
движеніе его по некоторой окружности, имѣющей съ кри-
вой двѣ общія точки A и A_1 ; въ предѣлѣ; при бесконечно
близкихъ другъ къ другу точкахъ A и A_1 , это будетъ ок-
ружность, касательная къ кривой mn въ точкѣ A .

О точкѣ B можно сказать буквально то же самое, —
опять можно принять, что при бесконечно маломъ перемѣще-
ніи отрѣзка AB конецъ его B , подобно концу A , пе-
ремѣстится по некоторой окружности, касательной къ pq
въ точкѣ B . Но изъ анализа мы знаемъ, что центры
всѣхъ окружностей, касательныхъ къ кривой mn въ точкѣ
 A ея, лежатъ на нормали къ этой кривой въ точкѣ A ;



то же можно сказать и про точку B . Если мы проведемъ такіа двѣ нормали и точку ихъ пересѣченія возьмемъ за центръ окружностей, касательныхъ къ кривымъ $МN$ и PQ соотвѣтственно въ точкахъ A и B , то можно будетъ сказать (съ какой угодно степенью точности), что нашъ отрѣзокъ перешелъ изъ положенія AB въ положеніе A_1B_1 , скользя своими концами по двумъ концентрическимъ окружностямъ ($\gamma_0 A$) и ($\gamma_0 B$), иными словами, вращаясь около точки γ_0 . Такимъ образомъ, всякое перемѣщеніе отрѣзка за достаточно малый промежутокъ времени можно рассматривать, какъ вращеніе около нѣкоторой вполне определенной и единственной точки неподвижной плоскости. Эта точка называется центромъ или полюсомъ мгновеннаго вращенія.

Если мы возьмемъ рядъ послѣдовательныхъ положеній отрѣзка, т.е. рассмотримъ его движеніе за извѣстный промежутокъ времени, то, руководствуясь вышеприведенными соображеніями, найдемъ рядъ точекъ $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$, аналогичныхъ точкѣ γ_0 ; около этихъ точекъ послѣдовательно вращается нашъ отрѣзокъ AB , а вмѣстѣ съ нимъ и вся та плоская система, съ которою онъ составляетъ одно цѣлое. Непрерывный рядъ этихъ

точек p_n представить собою некоторую кривую, лежащую въ неподвижной плоскости и называемую **неподвижной плоскостью**.

Скорости различныхъ точекъ подвижной системы въ каждый данный моментъ пропорціональны разстояніямъ ихъ отъ соответствующаго этому моменту полюса мгновеннаго вращенія. Пусть угловая скорость мгновеннаго вращенія системы въ данный моментъ есть ω ; пусть разстояніе какой либо точки x отъ соответствующаго полюса p есть ρ ; тогда, на основаніи предыдущаго, линейная скорость точки въ данный моментъ равна $\rho \cdot \omega$. На основаніи же предыдущаго линія, соединяющая точку въ ея положеніи въ данный моментъ съ центромъ мгновеннаго вращенія, **нормальна** къ траекторіи точки x , а перпендикуляръ къ этой линіи, черезъ точку проведенной, есть касательная къ траекторіи (фиг. 3- p -полюсъ

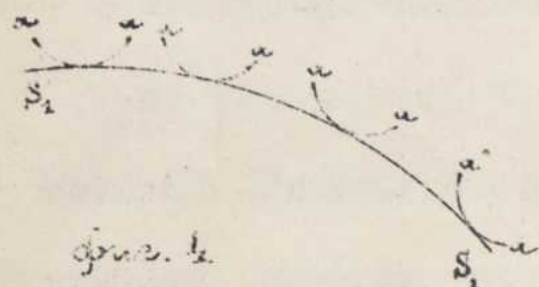


мгн. вращ., x -точка подвижной системы, MN -ея траекторія, xT - касательная къ траекторіи MN , $\perp$ - ая къ рад. вект.

px). Возьмемъ теперь въ подвижной системѣ не одну точку, а цѣлый рядъ ихъ - цѣлую кривую $\alpha\alpha$.

При движеніи системы эта кривая будетъ занимать

различныя положенія на неподвижной плоскости (фиг. 4). На той же неподвижной



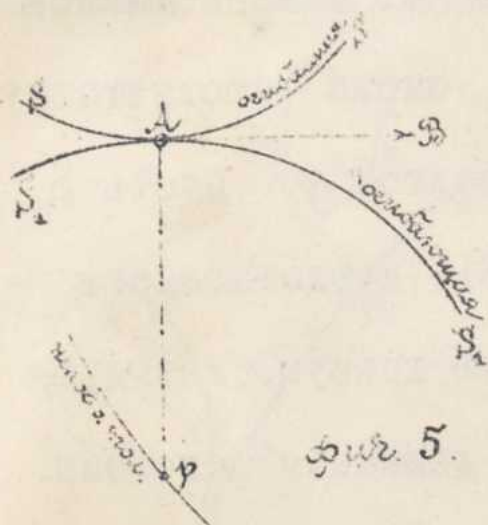
плоскости можно представить себѣ новую кривую S_1 , къ которой будетъ постоянно прикасаться наша подвижная кри-

вая aa ; подвижную кривую aa мы назовемъ огибаемой, а кривую S_1 - огибающей. Рассмотрим движеніе огибаемой по огибающей. Пусть въ данный моментъ точкой ихъ взаимнаго соприкосновенія будетъ точка A , а мгновенный центръ вращенія пусть находится въ p . (фиг. 5).

Положимъ далѣе, что кривая S (огибаемая), вращаясь въ данный моментъ вмѣстѣ со всей подвижной системой около точки p , обладаетъ въ этотъ моментъ угловою скоростью ω , (подъ угловою скоростью подразумѣвается отношеніе безконечно малаго угла поворота системы, $d\alpha$, къ безконечно малому элементу времени dt , въ продолженіе котораго совершился этотъ поворотъ на $d\alpha$; т.е. $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$).

Теперь, на основаніи одной изъ теоремъ механики, вращеніе около точки p замѣняемъ вращеніемъ около точки касанія A , съ той же угловою скоростью ω , и параллельнымъ перенесеніемъ вдоль линіи, перпендикулярной къ pa , со скоростью $v = \omega \cdot pa$. Но при такомъ перенесеніи кривая S (огибаемая) должна сколь-

зять по кривой S_1 (огибающей), оставаясь съ ней все время въ соприкосновеніи (по самому опредѣленію огибающей). Слѣдовательно, указанное безконечно - малое перенесеніе



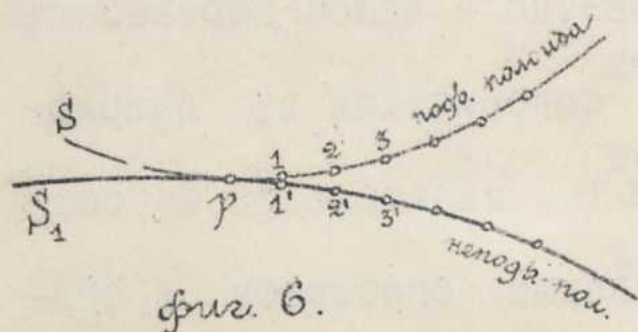
должно совершиться въ направленіи AB , касательной къ обѣимъ кривымъ, огибающей и огибаемой, въ ихъ общей точкѣ A . Отсюда слѣдуетъ, что PA , какъ прямая, перпендикулярная къ на-

правленію перенесенія, а значить, и къ касательной AB , есть нормаль къ обѣимъ кривымъ въ общей ихъ точкѣ A ; такимъ образомъ получаемъ слѣдующее весьма важное положеніе кинематики: н о р м а л ь к ѣ о г и б а ю щ е й и к ѣ о г и б а е м о й в ѣ т о ч к ѣ ихъ соприкосновенія всегда проходитъ черезъ центръ мгновеннаго вращенія.

Мѣру скольженія огибаемой по огибающей найти не трудно: вращеніе около точки A скольженія не даетъ, а при параллельномъ перенесеніи кривая S за время dt передвинется на длину $l = \omega \cdot PA \cdot dt$; эта величина l и будетъ измѣрять собою скольженіе S по S_1 .

Сама неподвижная полоида, въ свою очередь, можетъ быть разсматриваема, какъ огибающая нѣкоторой

кривой, принадлежащей подвижной системѣ. Такъ какъ въ этомъ случаѣ $rA = 0$, то эта огибаемая по своей огибающей не скользитъ, — она только катится по ней,



фиг. 6.

вращаясь въ каждый данной моментъ около соответствующаго полюса p . Пусть S_1 (фиг. 6) представляет

неподвижную полониду, а S — подвижную кривую, катящуюся безъ скольженія по S_1 во время движенія системы.

Пусть въ данный моментъ эти кривыя соприкасаются въ точкѣ p — полюсѣ мгн. вращ. для даннаго момента. Отмѣ-

тимъ на той и на другой кривой рядъ точекъ: 1, 2, 3, ... на S и 1', 2', 3', ... на S_1 , такихъ, чтобы дуги $p1$,

12, 23, ... равнялись соответственно дугамъ $p1'$, $1'2'$,

2'3', ... Тогда можно сказать, что огибаемая S , при

своемъ каченіи послѣдовательно будетъ совпадать своими точками 1, 2, 3, ... съ точками 1', 2', 3', ... огибающей.

Но точки 1', 2', 3', ... служатъ послѣдовательно полюсами мгновеннаго вращенія системы; а поэтому точки 1, 2, 3, ...

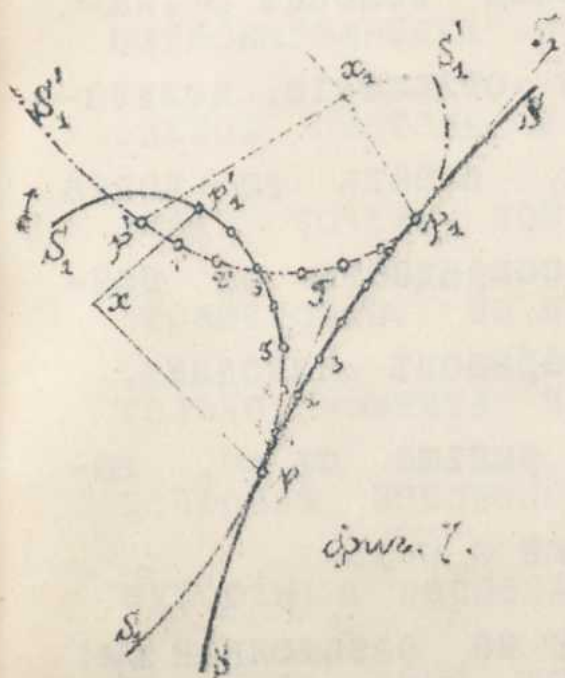
..., суть тѣ точки подвижной системы, которыя при движеніи системы совпадаютъ, каждая въ известной моментъ, съ полюсами вращенія.

Наша огибаемая, соединяющая такія точки, носитъ названіе п о д в и ж - н о й п о л о н и д ы .

Все движеніе системы можно поэтому разсматривать, какъ результатъ каченія подвиж-

ной полоиды по неподвижной.

Если обѣ полоиды даны, то построить траекторію какой либо точки подвижной системы можно такъ: пусть подвижная полоида S_1 касается въ дан-



ный моментъ неподвижной въ точкѣ p , которая такимъ образомъ служитъ въ данный моментъ мгновеннымъ центромъ вращенія. Пусть теперь (фиг. 7).

подвижная полоида S_1 перекатилась въ новое положеніе S_1' ; такимъ образомъ новымъ цен-

тромъ мгновеннаго вращенія теперь служить точка p_1 . Пусть въ подвижной системѣ у насъ имѣлась нѣкоторая точка x , занимавшая положеніе x , когда полюсомъ служила точка p , и занявшая новое положеніе, нѣкоторое x_1 , когда полоида изъ S_1 перекатилась въ S_1' . Это новое положеніе точки x можно легко найти, принимая во вниманіе, что полоиды катились одна по другой безъ скольженія, и что дуга, на которую онѣ прокатились, извѣстна - эта дуга есть дуга pp_1 . Спросимъ себя теперь, гдѣ на полоидѣ S_1 лежитъ та точка, которая впоследствии, когда S_1 перешла въ S_1' , совпала съ точкой p_1 ? Очевидно, что такая точка отстоитъ отъ точки p , считая по дугѣ полоиды S_1 , на длину,

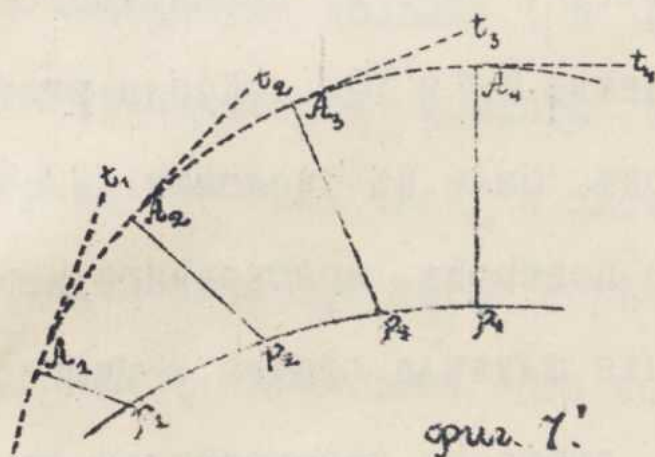
равную длинѣ дуги pp_1 . Поэтому на подвижной полоидѣ S_1 откладываемъ отъ точки p дугу pp'_1 , равную дугѣ pp_1 ; сдѣлать это можно различнымъ образомъ; можно, напр., раздѣлить дугу pp_1 на нѣсколько малыхъ частей и отложить ихъ по подвижной полоидѣ S_1 , начиная отъ точки p . Произведя это отложеніе, получаемъ точку p'_1 , которая, стало быть, и есть та точка полоиды, которая внослѣдствіи совпадаетъ съ точкой p_1 полоиды S_1 . Подобнымъ же образомъ находимъ, что точка полоиды S_1 , совпадавшая раньше съ p , теперь окажется въ p' (дуга p_1p' - дугѣ p_1p).

Точка x отстоитъ отъ точки p на разстояніи xp ; отъ точки p'_1 - на разстояніе xp'_1 ; разстоянія эти не измѣнились и послѣ перемѣщенія S_1 въ S'_1 . Поэтому новое положеніе точки x найдется такъ: изъ центра p' (совпадавшаго раньше съ точкой p) описываемъ дугу радіусомъ $= xp$, а изъ p_1 - радіусомъ xp'_1 ; въ пересѣченіи этихъ двухъ дугъ, по опредѣленную сторону отъ p_1p' , и будетъ лежать искомая точка x_1 ; въ эту именно точку и придетъ точка x послѣ вышеупомянутого поворота.

Можно построить это новое положеніе еще иначе, построивъ въ p' касательную p_1T_1 къ полоидѣ S'_1 и проведя черезъ p_1 линію p_1x_1 подъ угломъ $x_1p_1T_1 =$ углу xpT ; для нахожденія точки x_1 придется отложить

на этой линіи отъ точки p_1 отрѣзокъ $p_1 x_1 = p'_1 x$.

Положеніе точки x относительно подвижной полониды можно, конечно, опредѣлить различными способами; но такъ или иначе всегда легко можно найти рядъ послѣдовательныхъ положеній какой угодно точки подвижной системы, т.е. ея траекторію. Въ каждомъ положеніи точки можно также провести касательную къ траекторіи, не проводя самой траекторіи; нужно только помнить, что линія, соединяющая точку съ центромъ мгновеннаго вращенія, есть нормаль къ траекторіи, а перпендикуляръ къ этому вектору, выходящій изъ этой точки, будетъ, слѣдствительно, касательной.

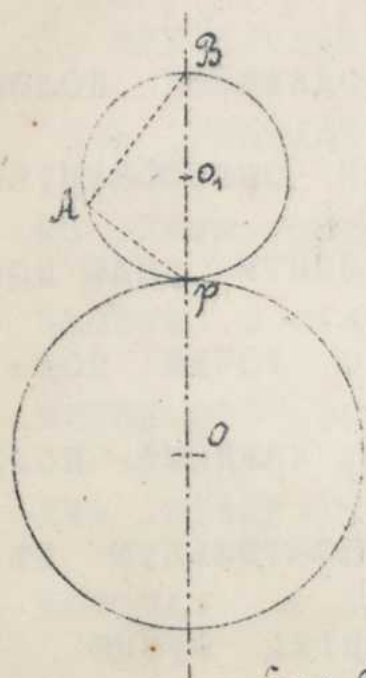


Если, напр., точка x находилась въ A_1 , когда центромъ мн. вращ. служила точка p_1 , въ A_2 — когда p_2 , ..., то перпендикуляры $A_1 t_1$, $A_2 t_2$, $A_3 t_3$, проведенные че-

резъ точки $A_1, A_2, A_3, \dots$ и будутъ касательными къ траекторіи (фиг. 7). Траекторія точки x намѣчена пунктиромъ.

Пусть, напр., окружность O_1 катится по окружности O ; тогда, какъ извѣстно, какая нибудь точка окружности O_1 , напр., точка A , описываетъ эпициклоиду, которую легко

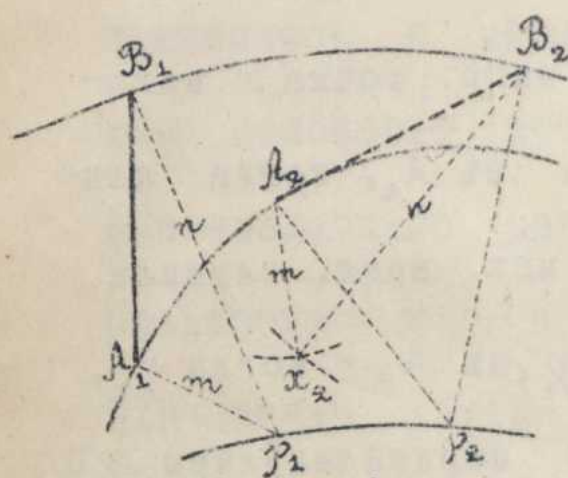
будетъ построить по точкамъ (фиг. 8). На основаніи



фиг. 8.

высказаннаго ρA , гдѣ ρ есть полюсъ мгновеннаго вращенія, будетъ нормально къ эпициклоидѣ въ точкѣ A , а AB (гдѣ B есть точка пересѣченія линіи центровъ OO_1 съ окружностью O_1) будетъ касательной къ этой эпициклоидѣ въ той же точкѣ A .

Что же касается до отысканія подвижной полониды, то здѣсь можно поступать согласно самому опредѣленію ея, т.е. отмѣчать тѣ точки подвижной системы, которыя послѣдовательно совпадаютъ съ центрами мгновеннаго вращенія. Пусть, напр., отрѣзокъ AB (фиг. 9) перемѣщается по кривымъ MN и PQ . Когда этотъ отрѣзокъ былъ въ положеніи A_1B_1 ,



фиг. 9.

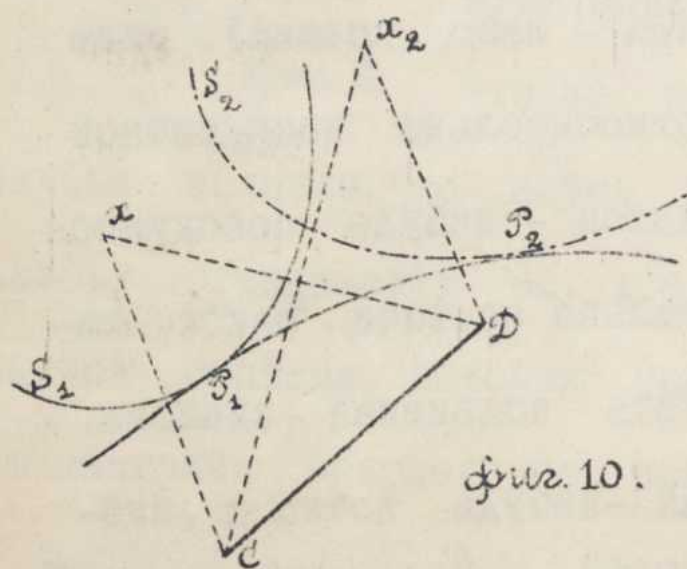
то центромъ мгновеннаго вращенія служила точка ρ_1 ; когда же отрѣзокъ перемѣстился въ A_2B_2 , то та точка подвижной системы отрѣзка, которая раньше совпадала съ ρ_1 и, слѣдовательно, находилась въ разстояніяхъ $A_1\rho_1$ отъ конца A_1 и $B_1\rho_1$ - отъ B_1 ,

теперь уже не совпадаетъ, вообще, говоря, съ новымъ полюсомъ ρ_2 , но займетъ на неподвижной плоскости мѣсто, опредѣляемое ея неизмѣнными разстояніями m и n

отъ A_1 и B_1 ; она помѣстится теперь въ x_2 . — Подобнымъ же образомъ мы найдемъ сколько угодно точекъ подвижной полоиды и будемъ въ состояніи начертить ее на плоскости. Но часто бываетъ лучше поступать другимъ образомъ.

При нахожденіи неподвижной полоиды мы рассматривали, согласно условіямъ движенія (мы задавались траекторіями двухъ какихъ-либо точекъ), рядъ положеній подвижной системы относительно неподвижной плоскости, т.е. относительно какой-нибудь совокупности ея точекъ (напр. относительно отрезка какой-нибудь прямой, кривой ит.д.). Пусть подвижная система, къ которой принадлежитъ какая-нибудь точка x , имѣетъ подвижную полоиду S_1 и неподвижную S (фиг. 10). Пусть въ нѣкоторой моментъ полоиды касаются другъ друга въ P_1 , такъ что P_1 и служитъ центромъ мгновеннаго вращенія. Если CD есть отрезокъ прямой, лежащей въ неподвижной плоскости, то въ данный моментъ положеніе точки x м.б. опредѣлено, напр., разстояніями Cx и Dx . Когда полоида S_1 заняла положеніе S_2 , т.е. перекатилась на дугу $P_1P = P_1P_2$, гдѣ P есть точка полоиды S_1 , совпадающая теперь съ P_2 , а P_2 — новый полюсъ м. вр., то точка x заняла новое положеніе x_2 , вполне опредѣленное относительно того же неподвижнаго отрезка CD . Но очевидно, что то же самое относитель-

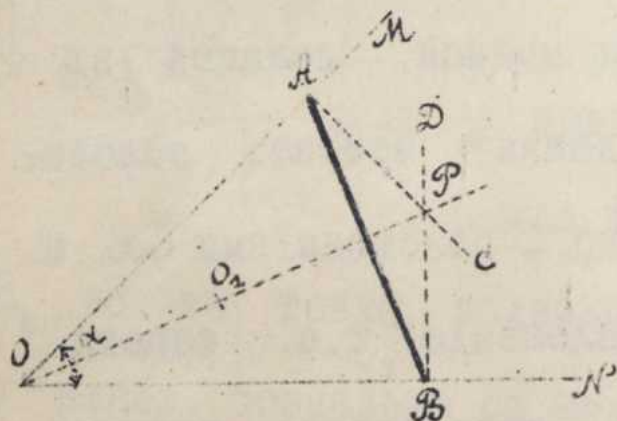
ное положеніе я могъ бы получить, сдѣлавъ полоиду S_1 неподвижной и прокативъ по ней полоиду S до совпаденія P_2 съ P . При этомъ система $(S_1 \times P)$ остается неподвижной, а система отръзка CD , какъ неразрывно связанная съ полоидой S , будетъ двигаться относительно системы (S_1, x) . Это послѣднее относительное движеніе намъ извѣстно изъ условій движенія



фиг. 10.

(S_1, x) и, слѣдовательно, нахожденіе полоиды S_1 сводится къ нахожденію неподвижной полоиды для движенія CD относительно системы B .

Для примѣра возьмемъ одну изъ самыхъ извѣстныхъ задачъ - задачу о движеніи отръзка AB постоянной величины, опирающагося концами на стороны угла

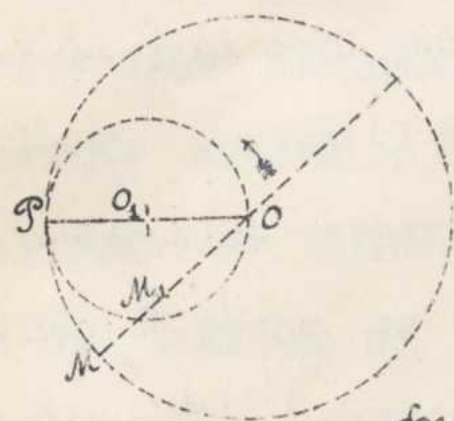


фиг. 11

ла MON (фиг. 11). Такимъ образомъ даны неподвижныя въ пространствѣ траекторіи двухъ точекъ нашей системы - точекъ A и B ; траекторіи

эти представляются прямыми OM и ON . Возставляя въ точкахъ A и B перпендикуляры къ OM и ON , въ точкѣ ихъ пересѣченія получаемъ центръ мгновеннаго вращенія P (фиг. 11). Разстояніе его отъ O неизмѣн-

но, такъ какъ OP всегда служитъ діаметромъ окружности, проходящей чрезъ точки



фиг. 12

O, A, P, B ; а эта окружность вмѣщаетъ данный уголъ α , опирающійся на отрѣзокъ постоянной длины AB ;

а потому, каково бы ни было положеніе отрѣзка AB относительно угла α , эта окружность имѣетъ единственный, вполне опредѣленный радіусъ. Такимъ образомъ, неподвижной полондой является окружность радіуса OP и центра O (фиг. 12).

Подвижную полониду можемъ найти, заставляя уголъ MON перемѣщаться относительно AB такъ, чтобы относительное движеніе осталось тѣмъ же; въ этомъ случаѣ стороны угла α , т.е. прямая OM и ON будутъ принуждены постоянно проходить чрезъ неподвижныя точки A и B , (ибо теперь мы остановили отрѣзокъ AB и перемѣщаемъ систему MON). Такимъ образомъ точки A и B явятся огибающими и положеній прямыхъ OM и ON . Но нормаль къ огибающей и огибаемой всегда проходитъ чрезъ центръ мгновеннаго вращенія; (см. стр. 19), поэтому, если OM есть огибаемая, точка A - огибающая, (точкой касанія служитъ та же точка A), то центръ мгновен-

наго вращенія будетъ лежать на $\perp$ - рѣ къ $ОМ$ въ точкѣ A , т.е. на $Ас$; по той же причинѣ, онъ долженъ лежать на $ВД$ ($\perp$ къ $ОМ$ въ точкѣ $В$); такимъ образомъ центръ мгновеннаго вращенія лежитъ въ точкѣ пересѣченія этихъ перпендикуляровъ, въ точкѣ $Т$. Отсюда слѣдуетъ, что векторы, соединяющіе A и $В$ съ центромъ вращенія, при этомъ вращеніи угла всегда перпендикулярны къ его сторонамъ, т.е. образуютъ между собою постоянный уголъ (равный α или $180^\circ - \alpha$), такъ что геометрическимъ мѣстомъ центровъ вращенія будетъ окружность, проходящая чрезъ A и $В$ и вмѣщающая данный уголъ, т.е. окружность съ діаметромъ $ОТ$.

Такимъ образомъ, подвижной полоидой будетъ окружность вдвое меньшаго радіуса, сравнительно съ неподвижной, и движеніе отрѣзка $АВ$, а съ нимъ и всей системы, неразрывно съ $АВ$ связанной, приводитъ къ каченію окружности внутри другой вдвое большаго радіуса.

Разсмотримъ подробнѣе каченіе такихъ двухъ полоидъ -окружностей, одной по другой. Пусть окружность ($ОТ$) есть наша неподвижная. полоида, и окружность ($О_1Т$), гдѣ $О_1Т = \frac{1}{2} ОТ$, - подвижная полоида. Пусть онѣ находятся въ положеніи, указанномъ на фиг 12. Точка ихъ касанія, точка $Т$, есть мѣст. полюсъ вращ. для взятаго момента. Какая нибудь точ-

ка этой окружности O_1 , точка M_1 , нѣсколько времени передъ тѣмъ совпадала съ однимъ изъ центровъ мгновеннаго вращенія; мѣсто этого центра можно найти, отложивъ по большой окружности дугу PM , равную дугѣ PM_1 , или, проще, проведя черезъ M_1 радиусъ OM . На самомъ дѣлѣ, радиусъ OM отсѣчетъ на окружности O дугу PM , а на O_1 - дугу PM_1 . Уголъ POM измѣряется величиной $\frac{\text{дуга } PM}{PO}$; уголъ M_1O_1P (тотъ же уголъ POM) измѣряется величиной $\frac{\text{дуга } PM_1}{2PO_1}$; такъ какъ углы равны, то равны и круговыя мѣры ихъ; т.е. получается равенство

$$\frac{\text{дуга } PM}{PO} = \frac{\text{дуга } PM_1}{2PO_1} \dots \dots \dots (1)$$

Но $PO = 2PO_1$; поэтому равенство (1) приводится къ равенству $\text{дуга } PM = \text{дуга } PM_1$, что и т.д. - Точка M занимаетъ на полоидѣ O постоянное мѣсто; значить это одна изъ точекъ неподвижной полоиды; положеніе радиуса OM ^{потому} также постоянно; а такъ какъ точка M_1 *нуждена* все время находится на радиусѣ MO , то ¹при каченіи ³окружности O_1 ²съ этого радиуса ¹она не сойдетъ; другими словами, всякая точка малой окружности при каченіи описываетъ опредѣленный діаметръ большой.

Какая -нибудь точка m (фиг. 13), неразрывно связанная съ окружностью O_1 , опишетъ при каченіи

метрами $M\mathcal{P}$ и NQ . Одинъ изъ нихъ, положимъ, $M\mathcal{P}$, примемъ за ось x -овъ, NQ - y овъ. Примемъ далѣе, что точка m отстоитъ отъ окружности O_1 на a , т. е. положимъ, что $mN_1 = a$; а діаметръ окружности O_1 обозначимъ черезъ d . Во взятомъ нами положеніи точки m m_k есть x , а ko есть y . Если уголъ O_1N_1O обозначимъ черезъ φ , то изъ $\Delta\Delta$ -овъ kmN_1 и M_1N_1O имѣемъ :

$$mk = x = mN_1 \cdot \sin\varphi = a \sin\varphi \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} ko = y &= kN_1 + N_1O = mN_1 \cos\varphi + N_1M_1 \cos\varphi = \\ &= (a + d) \cos\varphi \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Исключаемъ изъ ур-ій (1) и (2) параметръ φ , для чего опредѣляемъ :

$$\sin\varphi = \frac{x}{a} \dots\dots\dots (3)$$

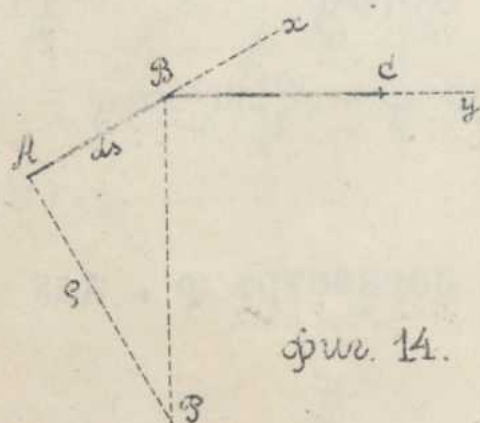
$$\cos\varphi = \frac{y}{a+d} \dots\dots\dots (4)$$

Возводя въ квадратъ эти оба ур-ія, (3) и (4), и складывая, находимъ:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \equiv 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a+d)^2} \dots\dots\dots (5)$$

Полученное ур-іе (5) показываетъ, что точка m описываетъ эллипсъ съ полуосями a и $a+d$, причемъ главныя оси его лягутъ по упомянутымъ діаметрамъ OM и ON ; эллипсъ этотъ будетъ выдаваться изъ окр. O на $CQ = AN = mN_1 = a$.

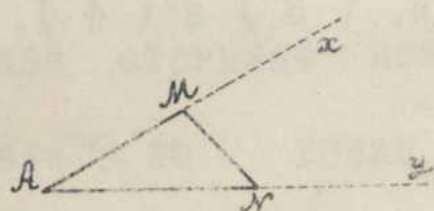
Какъ было указано выше (см. стр. 16), дви-
женіе плоской системы за элементъ времени dt сводит-
дится къ вращенію около опредѣленной точки - полю-
са мгновеннаго вращенія. Такъ какъ движеніе какой
нибудь точки этой системы будетъ, вообще говоря,
криволинейнымъ, то скорость точки будетъ мѣняться
и по величинѣ, и по направленію. Если за промежу-
токъ времени отъ t до $(t + dt)$ точка рассматри-



фиг. 14.

ваемой системы, двигаясь со
скоростью $v = \omega r$ (см. стр. 17,
12 стр. св.), пройдетъ по
своей траекторіи путь $AB = v dt =$
 $= ds$ (фиг. 14), то въ слѣ-

дующій промежутокъ времени отъ $(t + dt)$ до
 $(t + 2 dt)$, она, измѣнивъ свою скорость и укло-



фиг. 15.

нившись отъ первоначальнаго на-
правленія AB , пойдётъ по но-
вому BC и пройдетъ въ немъ

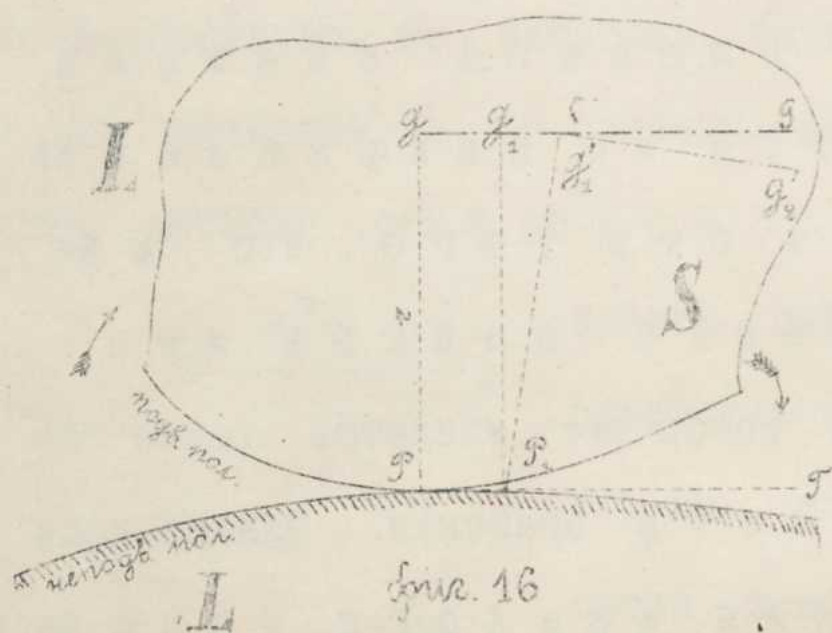
пространство BC . Если изъ точки A (фиг. 15) про-
ведемъ линіи $Ax \parallel AB$ и $Ay \parallel BC$ и соответствен-
но отложимъ на нихъ $AM = AB$ и $AN = BC$, то, сое-
динивъ M съ N , получимъ отръзокъ MN , характе-
ризующій измѣненіе скорости за промежутокъ времени dt .
Частное же $\frac{MN}{dt}$ представитъ ускореніе въ движеніи
рассматриваемой точки системы (для даннаго мо-

мента времени).

Такъ какъ скорость какой нибудь точки A системы (фиг. 14) есть функція разстоянія ϱ этой точки A отъ полюса мгн. вращ. $\mathcal{P}$, и мгнон. угловой скорости ω ($v_A = \varrho \cdot \omega$), то легко видѣть, что, вообще говоря, измѣненіе скоростей точекъ плоской системы и по величинѣ, и по направленію зависитъ какъ отъ того, что мѣняется положеніе центра мгн. вращ., такъ и отъ того, что мѣняется также и угловая скорость вращенія. Однако, какъ мы вскорѣ увидимъ, для каждаго момента есть точка системы, не имѣющая ускоренія, т.е. въ продолженіе двухъ сосѣднихъ промежутковъ времени - отъ t до $(t + dt)$ и отъ $(t + dt)$ до $(t + 2 dt)$ - двигающаяся прямолинейно и равномерно.

Пусть въ продолженіе промежутка времени отъ t до $(t + dt)$ центромъ мгновеннаго вращенія будетъ служить точка $\mathcal{P}$ (фиг. 16), и предположимъ, что мы нашли точку $\mathcal{Q}$ подвижной системы $\mathcal{S}$, не имѣющую во взятый моментъ ускоренія. Введемъ теперь условія,

какимъ должна удовлетворять эта точка g ; они дадутъ намъ отвѣтъ на то, возможно - ли вообще существованіе такой точки и если возможно, то существуетъ ли такихъ точекъ одна (только одна) или нѣсколько. Обратимся къ разсмотрѣнію фиг. 16.



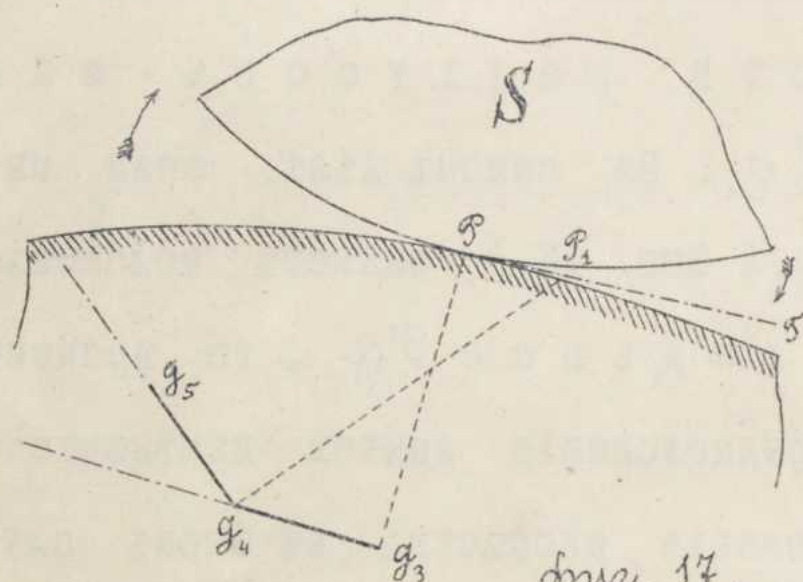
ніе совершается по направленію, указанному стрѣлками съ угловою скоростью ω . Если Pg обозначимъ черезъ r , то за время dt точка g пройдетъ

путь $gg_1 = r \cdot \omega \cdot dt$. Черезъ промежутокъ времени dt новымъ полюсомъ мгновеннаго вращенія сдѣлается точка P_1 , и если черезъ u обозначимъ скорость передвиженія центра мгновеннаго вращенія по неподвижной плоскости, т.е. скорость, съ какою мѣняются точки, служащія последовательно полюсами мгновеннаго вращенія, то эта точка P_1 , (служащая мн. м. вр. въ промежутокъ времени отъ $(t + dt)$ до $(t + 2 dt)$), будетъ отстоять отъ точки P на разстояніи $PP_1 = u \cdot dt$ и при томъ въ направленіи касательной къ неподвижной плоскости въ точкѣ P_1 - въ направленіи PT . Итакъ, замѣтимъ, что $gg_1 = r \cdot \omega \cdot dt$, а $PP_1 = u \cdot dt$.

Такъ какъ направленіе скорости точки g всегда перпендикулярно къ радіусу вектору, соединяющему ее съ соотвѣтствующимъ центромъ мгновеннаго вращенія, то прямолинейность движенія, которому должна удовлетворять точка g (по нашему предположенію не имѣющая ускоренія) возможна лишь при условии параллельности радіусовъ-векторовъ Pg и P_1g_1 . Въ самомъ дѣлѣ, если мы предположимъ, что P_1g_1 (фиг. 16) займетъ положеніе $P_1g'_1$, не параллельное Pg , то прямымъ слѣдствіемъ такого предположенія явится измѣненіе первоначальнаго направленія скорости; въ этомъ случаѣ направленіе ея будетъ $g'_1g'_2$, разнящееся отъ первоначальнаго gg_1 ; это заключеніе позволяетъ намъ судить о томъ, въ какую сторону отъ линіи PP_1 - касательной къ полудѣ - можетъ лежать точка g : она должна лежать такъ, чтобы наблюдатель, обернувшись спиной къ P_1 - второму положенію центра м.г.н. вр. - и смотря на P по направленію P_1P , видѣлъ ее всегда по ту сторону отъ P_1P , въ какую совершается вращеніе. ^{х)} На чертежѣ 16-омъ

х) Иная формулировка: она должна....; чтобы наблюдатель ставъ въ P_1 , второмъ положеніи центра м.г.н. вр., и смотря на P , видѣлъ ее

точка g удовлетворяетъ этому условію. Но если бы мы предположили, что она находится, напр., въ g_3 , (фиг. 17), то сейчасъ мы могли бы обнаружить невозможность и недопустимость такого предположенія: въ самомъ дѣлѣ, при вращеніи около P въ продолженіе про-



фиг. 17.

межутка времени отъ t до $(t + dt)$ точка g_3 пошла бы въ такомъ случаѣ по g_3g_4 , перпендикулярно къ Pg_3 , а дальше, за промежутокъ времени

отъ $(t + dt)$ до $(t + 2 dt)$ - по направленію g_4g_5 , перпендикулярно къ радіусу - вектору P_1g_4 (за второй промежутокъ вращеніе совершается уже около центра P_1); но этотъ радіусъ - векторъ, P_1g_4 , какъ видно изъ чертежа, перекрещивается съ Pg_3 , а между тѣмъ при нашемъ предположеніи, то точка g_3 не имѣетъ ускоренія, эти два радіуса - вектора должны быть параллельны. Последнему условію, при данномъ вращеніи около полюсовъ $P, P_1, \dots$ удовлетворяетъ выбранная нами согласно вышеизложенному правилу, въ области L точка g . Но одного этого условія еще недостаточно: дѣло въ томъ, что точка g , по нашему предположенію не

имѣющая ускоренія и двигающаяся прямолинейно за два бесконечно-малые промежутки времени, должна въ то же время двигаться равномерно; этого послѣдняго обстоятельства мы не принимали еще во вниманіе. Если точка двигается равномерно, то это значитъ, что приращеніе скорости при переходѣ отъ одного промежутка до другого равно нулю; — такимъ образомъ, принимая во вниманіе, что скорость точки g , при вращеніи ея около P , равна $\kappa \omega$ (стр. 17), это второе условіе выразимъ равенствомъ

$$d(\kappa \cdot \omega) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Дифференцируя, получаемъ (и κ , и ω — обѣ величины переменны):

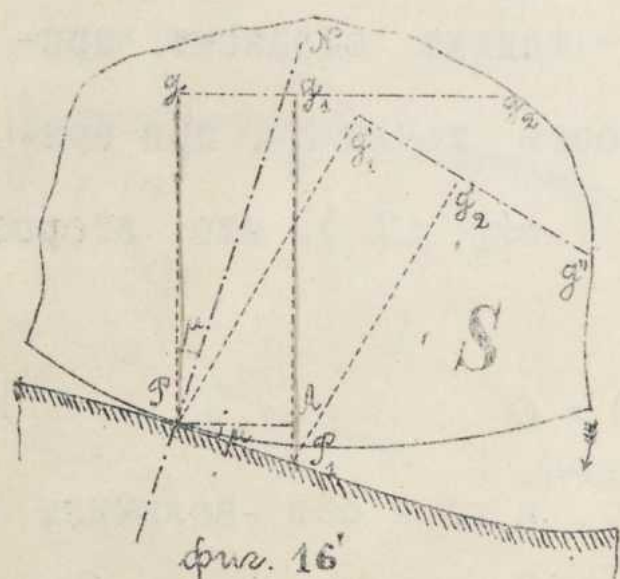
$$\omega \cdot d\kappa + \kappa \cdot d\omega = 0 ,$$

откуда

$$d\kappa = -\frac{\kappa \cdot d\omega}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Формула (2) показываетъ, что $d\kappa$ — приращеніе радіуса вектора — противоположно по знаку $d\omega$ — приращенію угловой скорости, что можно было сказать заранѣе; на самомъ дѣлѣ при условіи равномерности движенія точки g въ два ∞ малые промежутка времени произведеніе изъ угловой скорости ея (ω) на соотвѣтствующее разстояніе ея отъ полюса мгновеннаго вращенія (на κ) есть величина постоянная, откуда вытекаетъ, что съ увеличе-

н і е м ѣ радіуса вектора должна у м е н ь ш а т ь с я угловая скорость и наоборотъ; а если такъ, то приращенія этихъ двухъ параметровъ необходимо должны имѣть разные знаки. — Обратимся теперь опять къ разсмотрѣнію фигуры 16, которую ради удобства, воспроизводимъ здѣсь еще разъ. Проведемъ $PA \parallel gg_1$;



фиг. 16'

получаемъ $\triangle PAP_1$, прямоугольный при A . Такъ какъ $Pg = r$, $P_1g_1 = r + dr$ (ибо радіусъ векторъ P_1g_1 смеженъ съ Pg), то $AP_1 = dr$. Выше (на

стр. 34, 4 стр. см.) было указано, что $PP_1 = u dt$, а gg_1 , или, что то же, $PA = r \cdot \omega \cdot dt$, а въ такомъ случаѣ имѣемъ возможность написать :

$$AP_1^2 = PP_1^2 - PA^2$$

или

$$(dr)^2 = u^2 (dt)^2 - r^2 \omega^2 (dt)^2;$$

но, въ виду рав. (2) на стр. 37, это равенство приметъ видъ:

$$\frac{r^2 (d\omega)^2}{\omega^2} = u^2 (dt)^2 - r^2 \omega^2 (dt)^2$$

откуда:

$$r^2 (d\omega)^2 = \omega^2 u^2 (dt)^2 - \omega^4 r^2 (dt)^2$$

Затѣмъ, дѣля на $(dt)^2$,

$$\omega^2 \left[\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 \right] = \omega^2 u^2,$$

Такъ что :

$$\kappa = \frac{\omega \cdot u}{\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}} \quad \dots \quad (3)$$

Изъ этого выраженія прежде всего видно, что κ есть всегда дѣйствительная величина, а поэтому необходимо признать, что предположенная нами точка g дѣйствительно существуетъ. Знаковъ $\pm$ у корня мы не ставимъ потому, что направленіе, или, вѣрнѣе, — положеніе радіуса вектора вполне характеризуется направлениемъ вращенія относительно $\mathcal{P}_1\mathcal{P}$. Обращаясь къ чертежу (фиг. 16), видимъ, что уголъ $\mathcal{P}\mathcal{P}_1g_1$ будетъ острымъ или тупымъ, въ зависимости отъ того, уменьшается или увеличивается радіусъ векторъ u , т.е. увеличивается ли или уменьшается угловая скорость ω ; и если проведемъ $\mathcal{P}\mathcal{N}$, нормаль къ полоидамъ въ точкѣ касанія ихъ — $\mathcal{P}$, (это будетъ, значитъ, перпендикуляръ къ линіи $\mathcal{P}\mathcal{P}_1$), то линія $\mathcal{P}g$ будетъ лежать отъ этой нормали въ сторону вращенія, когда угловая скорость увеличивается (пунктиръ на фиг. 16), и въ противоположную, — когда она уменьшается. (сплошная линія на ф. 16).

Линія $\mathcal{P}g$ составляетъ съ нормалью $\mathcal{N}$ уголъ $\mathcal{N}\mathcal{P}g$, равный углу $\mathcal{A}\mathcal{P}\mathcal{P}_1$ (углы съ $\perp\perp$ -ными сторонами). Пусть этотъ уголъ $\mathcal{N}\mathcal{P}g$ равенъ μ . Изъ сурьеса

видимъ, что $\operatorname{tg} \mu$, равный tg -су угла AP_1 ,
равенъ $\frac{AP_1}{AP} = \frac{dr}{r \cdot \omega \cdot dt} = \frac{r \cdot d\omega}{\omega \cdot r \cdot \omega \cdot dt}$, (по абсол. вел.)

что, послѣ сокращеній, дастъ :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} \dots \dots \dots (4)$$

Замѣтимъ, что уголъ всегда острый, такъ какъ тре-
угольникъ PA_1 прямоуголенъ (уголъ $PA_1 = 90^\circ$).

Такимъ образомъ, н а п р а в л е н і е векто-
ра Pg , на которомъ лежитъ точка g , вполне и
единственнымъ образомъ опредѣляется изъ условій дви-
женія системы; то же скажемъ и о величинѣ его r ;
а въ такомъ случаѣ заключаемъ, что, дѣйствительно, въ
каждый данный моментъ существу-
етъ одна единственная точка
системы, не имѣющая ускоренія.

Если теперь вращеніе системы около P , со-
вершающееся съ угловою скоростью ω , замѣнимъ враще-
ніемъ около g , съ тою же угловою скоростью ω , и
параллельнымъ перенесеніемъ вдоль gg_1 (черт. 16)
на величину $gg_1 = r \cdot \omega \cdot dt$, а вращеніе около P_1 ,
совершающееся съ угловою скоростью $\omega + d\omega$, враще-
ніемъ около g_1 съ тою же угл. скоростью и парал-
лельнымъ перенесеніемъ вдоль g_1g_2 на величину $g_1g_2 =$
 $(\omega + d\omega) \times (r + dr) \times dt$, то все движеніе си-
стемы представится такъ: за промежутокъ времени отъ
(t) до ($t + 2 dt$) система переносится равномер-

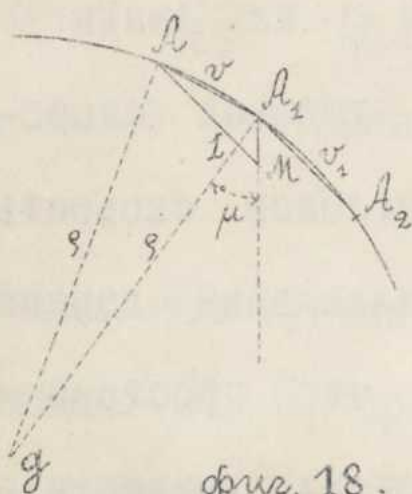
но вдоль линіи $g g_1 g_2$ и въ то же время вращается около послѣдовательныхъ положеній точки g на линіи $g_1 g_2$ - отъ точки g до g_1 , по $g g_1$, съ угловою скоростью ω , а отъ точки g_1 до g_2 - съ угловою скоростью $\omega + d\omega$; такъ какъ при этомъ параллельныя перенесенія $g g_1$ и $g_1 g_2$, какъ равныя (ибо это пространства, проходимыя точкой въ равномерномъ движеніи за одинаковые промежутки времени) и одинаково направленныя, для ускоренія какой нибудь точки системы не дадутъ ничего, то все ускореніе выразится, какъ результатъ двухъ послѣдовательныхъ вращеній около нѣкоторой точки системы съ угловыми скоростями ω и $\omega + d\omega$. Полное ускореніе какой нибудь точки A можно въ такомъ случаѣ выразить, какъ составленное изъ двухъ: центростремительнаго, равнаго $\frac{v^2}{\varrho}$ или $\omega^2 \varrho$, ибо $v = \omega \varrho$, и тангенціальнаго, равнаго $\varrho \frac{d\omega}{dt}$, и, слѣдовательно, это полное ускореніе j выразится въ видѣ :

$$j = \varrho \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2}$$

и, значить, для каждой точки системы выразится величиной, пропорціональной ея разстоянію отъ точки g

Направленіе этого ускоренія составляетъ съ радіусомъ ϱ уголъ $g A_1 M$, (фиг. 18); $\triangle A_1 L M$ пря-

моуголенъ при L , ибо $A_1 A_2 \perp g A_1$, но AM или, что



фиг. 18.

то же, $LM \parallel A_1 A_2$, поэтому

$A_1 L \perp LM$. Такъ какъ

$AA_1 = v$ и $A_1 A_2 = v_1$, то от-

рѣзокъ $A_1 M$ и представить по

величинѣ и направленію пол-

ное ускореніе точки A , $A_1 L$

нормальное, а LM - тангенци-

альное, такъ что $A_1 L = \omega^2 \zeta$, а $LM = \zeta \frac{d\omega}{dt}$. Изъ того

же $\triangle A_1 L M$ получаемъ

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{LM}{A_1 L} = \zeta \frac{d\omega}{dt} : \zeta \omega^2 = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

т.е. направленіе ускоренія для какой - либо точки

системы составляетъ съ радіусомъ - векторомъ, соеди-

няющимъ эту точку съ точкой g , уголъ μ , е д и н -

с т в е н н ы й д л я в с ѣ х ѣ т о ч е к ѣ с и -

с т е м ы в ѣ к а ж д ы й д а н н ы й м о м е н т ѣ.

Точка g называется ц е н т р о м ѣ у с к о -

р е н і я , по аналогіи съ центромъ мгновеннаго

вращенія - подобно тому, какъ центръ мгновеннаго

вращенія служитъ для опредѣленія скоростей всѣхъ

точекъ системы, такъ и центръ ускореній служитъ

для опредѣленія ускореній всѣхъ точекъ системы.

Отысканіе положенія центра ускоренія также

аналогично отысканію положенію центра мгновеннаго

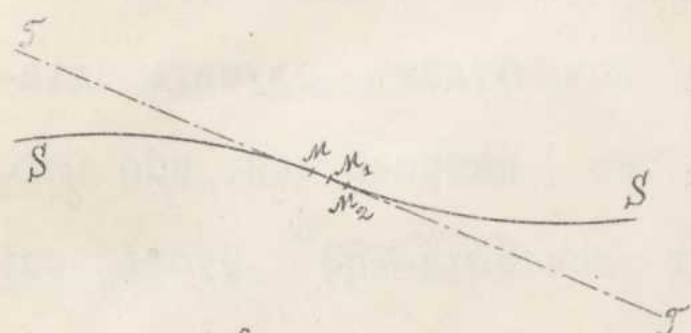
вращенія, но при этомъ знаніе одного только на-

ки A къ ускоренію точки B равно m , а по доказанному выше, ускоренія точекъ A и B пропорціональны радіусамъ - векторамъ gA и gB ; въ такомъ случаѣ получаемъ равенство:

$$gA : gB = m,$$

и, слѣдовательно, точка g должна одновременно лежать еще на окружности, описанной на CD , какъ на діаметрѣ, гдѣ C и D суть точки на прямой AB дѣлящія отрѣзокъ AB внѣшнимъ и внутреннимъ образомъ въ данномъ отношеніи m . Пересѣченіе этихъ двухъ окружностей дастъ искомую точку g , положеніе которой есть единственное и вполне опредѣленное, ибо вторая точка g_2 устраняется въ силу того, что радіусы векторы A_g и B_g должны лежать по одну сторону векторовъ AN и BN .

Кромѣ этой единственной точки g , двигающейся за два ∞ - малыхъ промежутка времени прямолинейно и равномерно, можно найти ∞ много другихъ точекъ этой системы, двигающихся прямолинейно, хотя, конечно, неравномерно, за тѣ же промежутки времени. Замѣтимъ, что каждая изъ такихъ точекъ, напр., точка M (фиг. 20), будетъ въ данный моментъ въ томъ мѣстѣ своей траекторіи $\S \S_1$, гдѣ два послѣдователь-

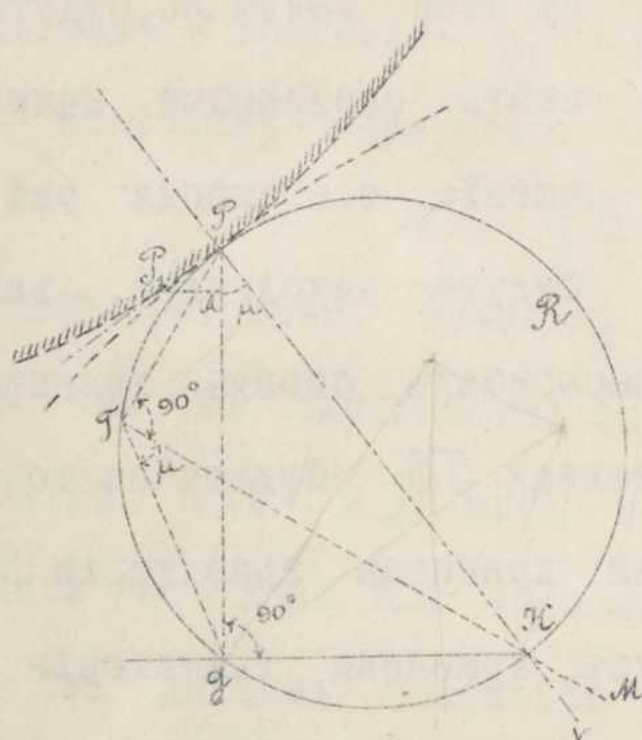


фиг. 20.

ной TT' къ траекторіи въ этой точкѣ M , будутъ имѣть одинаковое направление, т.е. когда онѣ будутъ находиться, какъ

обыкновенно говорятъ, въ перегибахъ своихъ траекторій. Въ этомъ случаѣ касательная TT' будетъ въ то же время служить и окружностью кривизны траекторіи SS' въ точкѣ M , причемъ радіусъ кривизны траекторіи ϱ равенъ ∞ — сти. Такъ какъ центростремительное ускореніе, равное $\frac{v^2}{\varrho}$, при этомъ значеніи ϱ обращается въ нуль, то очевидно, что точка M , движущаяся въ этомъ мѣстѣ своей траекторіи, будетъ имѣть только тангенціальное ускореніе, и если T есть центръ мгновеннаго вращенія (фиг. 21), а T' — точка находящаяся въ перегибѣ своей траекторіи, то направление ускоренія будетъ $TM \perp TT'$. — Если центромъ ускореній для даннаго момента будетъ служить точка q , то соединивъ ее съ полюсомъ T и проведя Tq — нормаль къ полоидамъ (намѣченнымъ пунктиромъ), найдемъ по предыдущему, что линія Tq составитъ съ линіей TM уголъ, равный углу NqP , который выше (стр. 39 и 40) мы назвали черезъ μ , а слѣд., точка T лежитъ на окружности, проходящей черезъ точ-

ки P , g и K , гдѣ точка K есть пересѣченіе нормали PN съ направлениемъ ускоренія TM ; линія PK



фиг. 21.

будетъ служить діаметромъ ея, ибо угломъ $PKK=90^\circ$ Пусть слѣдующее смежное положеніе центра вращенія есть P_1 ; проводимъ $P_1A \perp Pg$ (см. стр. 38) изъ подобія $\triangle \triangle$ -овъ PP_1A и PgK имѣемъ: $Pg : P_1A = PK : PP_1$;

но, какъ было выведено выше, $P_1A = Pg \cdot \omega \cdot dt$, (такъ какъ $P_1A = gg_1$ - фиг. 16), а $PP_1 = u \cdot dt$, значить, вышенаписанное равенство приметъ видъ

$$Pg : (Pg \cdot \omega \cdot dt) = PK : (u \cdot dt);$$

послѣ сокращеній получимъ

$$PK = \frac{u}{\omega} \quad (1)$$

Окружность $PTgKRP$, представляющая собою геометрическое мѣсто точекъ системы, имѣющихъ только тангенціальное ускореніе, называется поворотнымъ кругомъ, а точка K — полюсомъ поворота — Совершенно аналогичнымъ способомъ находится геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ въ данный моментъ одни только нормальныя

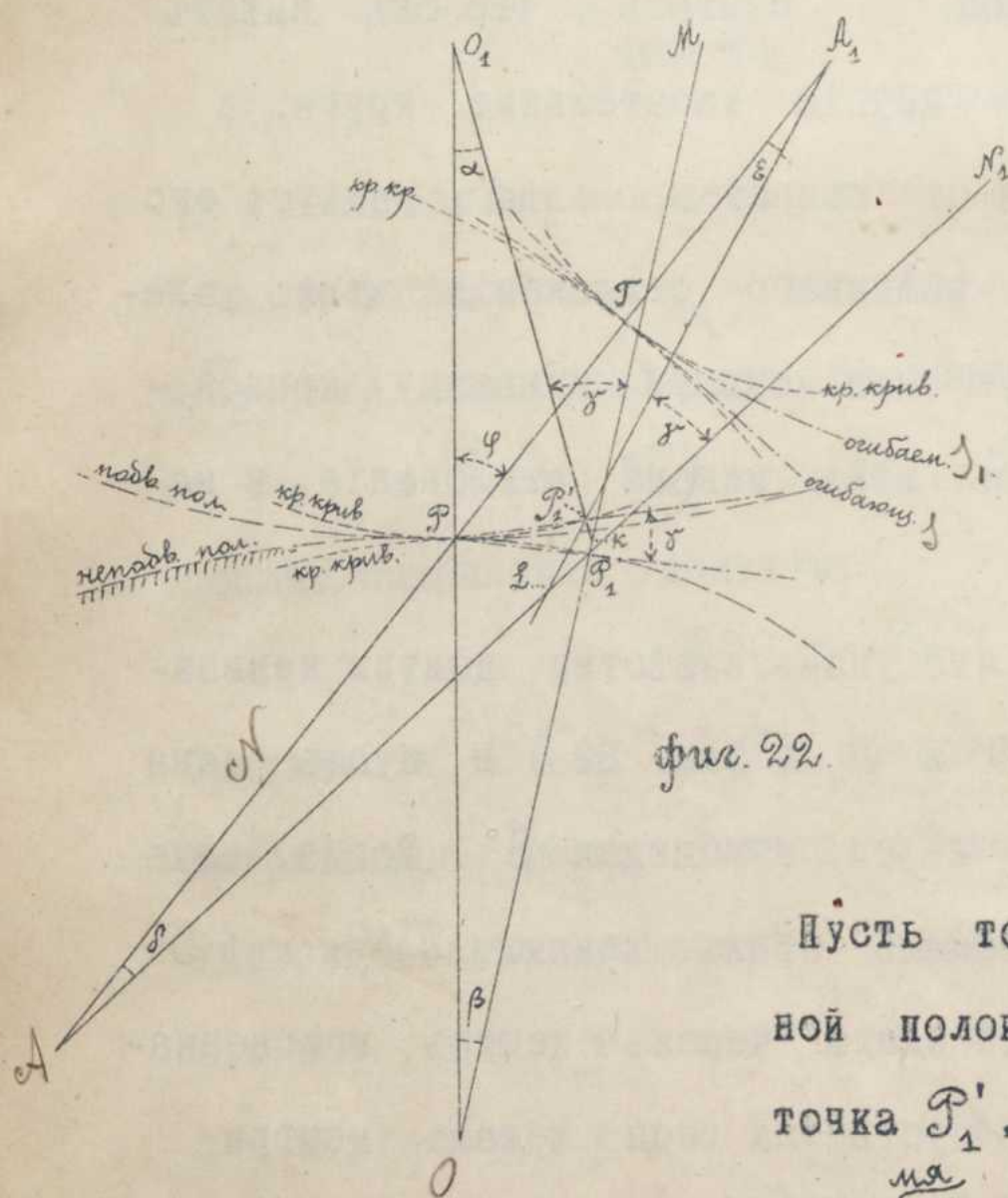
ускоренія.

Съ помощью центра мгновеннаго вращенія легко, какъ мы видѣли (см. стр. 26), проводить касательныя къ траекторіямъ точекъ. Разсмотримъ теперь, какъ можно отыскивать центры и круги кривизны траекторіи.

Извѣстно, что изъ всѣхъ круговъ, касательныхъ къ кривой въ какой либо точкѣ ея, кругъ, наиболее близко подходящій къ кривой, называется кругомъ кривизны. Можно считать, что онъ имѣетъ не одинъ, какъ всѣ другіе касательные круги, а два общихъ элемента съ кривой и, слѣд., радіусъ его измѣряетъ величину взаимнаго отклоненія этихъ элементовъ, т.е. большую или меньшую кривизну кривой, - чѣмъ больше радіусъ, тѣмъ меньше отклоненіе, и наоборотъ.

Допустимъ, что намъ извѣстны центры кривизны обѣихъ полюдовъ O и O_1 (фиг. 22) и пусть дана подвижная кривая S_1 и ея огибающая S . Тогда, какъ извѣстно, общая нормаль этихъ кривыхъ TM , гдѣ T - точка касанія, пройдетъ черезъ центръ мгновеннаго вращенія T , и пусть на ней лежатъ центры кривизны: - огибающей S - въ A , и огибаемой S_1 - въ A_1 . Найдемъ зависимость между радіусами кривиз-

ны огибающей и огибаемой въ точкѣ ихъ сопря-
 косновенія $\mathcal{T}$. Пока эти 2 кривыя касались другъ
 друга въ точкѣ $\mathcal{T}$, общая нормаль проходила черезъ
 центры кривизны A и A_1 , точку касанія $\mathcal{T}$ и полюсъ
 мгн. вращенія $\mathcal{P}$. Когда полоиды повернутся на нѣкото-
 рый уголъ и новымъ центромъ мгн. вращенія станетъ
 точка $\mathcal{P}_1$, смежная съ $\mathcal{P}$, то, такъ какъ кругъ A_1 съ
 кривою $\mathcal{S}_1$ имѣетъ 2 общихъ элемента, такъ же, какъ
 кругъ A съ кривою $\mathcal{S}$ -, общая нормаль (новая, AN_1)
 въ новой, смежной съ прежней, точкѣ касанія оги-



фиг. 22.

бающей и огиба-
 емой пройдетъ
 опять черезъ
 тотъ же центръ A ,
 черезъ новое по-
 ложеніе центра A_1 ,
 точку A_2 , и, на-
 конецъ, черезъ
 новый центръ мгно-
 веннаго вращенія $\mathcal{P}_1$.

Пусть точкѣ $\mathcal{P}_1$ на подвиж-
 ной полоидѣ соотвѣтствуетъ
 точка $\mathcal{P}'_1$, такъ что при вы-
 шеупомянутомъ поворотѣ эти
 точки $\mathcal{P}'_1$ и $\mathcal{P}_1$ совпадутъ; под-

вижная полоида повернется при этомъ на уголъ меж-

ду элементами $\mathcal{P}\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}\mathcal{P}_1'$, т.е. на угол $\mathcal{P}_1\mathcal{P}\mathcal{P}_1'$; назовемъ этотъ уголъ чрезъ γ ; поворотъ полоиды произойдетъ, понятно, вокругъ центра $\mathcal{P}$; такъ что, называя угловую скорость чрезъ ω , а продолжительность поворота чрезъ dt , получимъ: $\gamma = \omega \cdot dt \dots (1)$

Тому же углу γ равенъ еще уголъ между радіусами $O\mathcal{P}_1$ и $O_1\mathcal{P}_1'$. На самомъ дѣлѣ, круги O и O_1 суть круги кривизны полоидъ, т.е., какъ мы говорили выше, имѣютъ по два общихъ элемента съ полоидами. Въ точкѣ $\mathcal{P}$ совпадали первые 2 элемента этихъ круговъ, въ точкѣ $\mathcal{P}_1$ совпадутъ другіе 2, значитъ, круги кривизны для этихъ точекъ $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_1'$ останутся тѣ же, центръ O останется на мѣстѣ, радіусъ $O\mathcal{P}_1$ замѣститъ прежній $O\mathcal{P}$, и общая нормаль пройдетъ, слѣд., по $O\mathcal{P}_1M$. По этой же нормали долженъ пойти и радіусъ круга O_1 , проходящій черезъ новую точку касанія, т.е. радіусъ $O_1\mathcal{P}_1'$, для чего онъ и долженъ повернуться на $\angle (O\mathcal{P}_1, O_1\mathcal{P}_1')$, а такъ какъ уголъ поворота всей системы равенъ γ , то тому же углу γ равенъ и $\angle (O\mathcal{P}_1, O_1\mathcal{P}_1')$. Если точку пересѣченія $O_1\mathcal{P}_1'$ съ $O\mathcal{P}_1$ назовемъ чрезъ k то на основаніи вышесказаннаго, получимъ

$$\angle O_1kM = \gamma.$$

Но уголъ O_1kM , какъ внѣшній уголъ треугольника

$\angle O O_1 K$, выражается так :

$$\angle O_1 K M = \angle O O_1 K + \angle O_1 O K \dots (2)$$

Если, далѣе, замѣтимъ, что уголъ $\angle O O_1 K$, обозначенный на чертежѣ буквой α , выражается равенствомъ :

$$\angle O O_1 K = \alpha = \frac{\text{дуга } PP_1}{O_1 P}, \dots (3)$$

а уголъ $\angle O_1 O K$ или β , черезъ

$$\angle O_1 O K = \beta = \frac{\text{дуга } PP_1}{OP} \dots (4),$$

и если, кромѣ того обозначимъ радиусы: OP — черезъ R , $O_1 P$ — черезъ R_1 , а дугу PP_1 , равно какъ и равную ей дугу PP_1' , черезъ ds , то получимъ :

$$\alpha = \frac{ds}{R_1}, \beta = \frac{ds}{R} \dots (5)$$

въ виду чего равенство (2) приметъ видъ

$$\angle O_1 K M = \gamma = \alpha + \beta = \frac{ds}{R_1} + \frac{ds}{R},$$

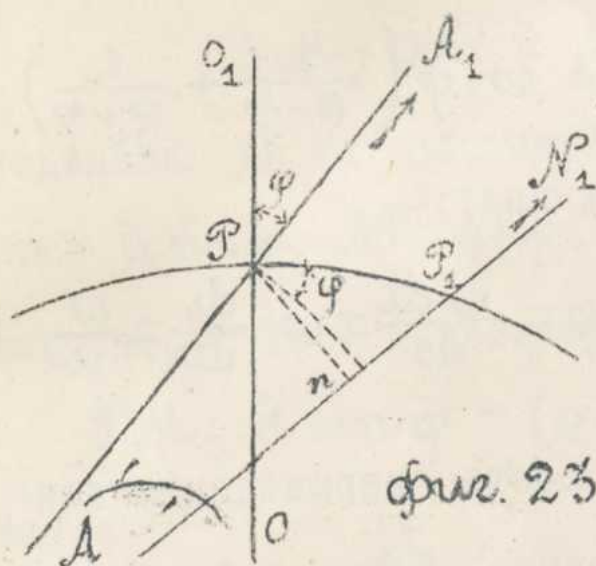
иначе

$$\gamma = ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \dots (6)$$

Разсматривая далѣе круги центровъ A и A_1 , мы, путемъ разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, убѣдимся, что уголъ между радиусами AP_1 и $A_1 P_1'$, должнствующими совпасть послѣ вращенія, опять равенъ γ . Называя точку пересѣченія этихъ радиусовъ черезъ L , имѣемъ $\angle A_1 L N_1 = \gamma$. — Подобно предыдущему, находимъ:

$$\angle A_1 L N_1 = \gamma = \angle L A A_1 + \angle L A_1 A = \delta + \varepsilon \dots (7)$$

За дугу, описанную при этомъ радиусомъ AP можно



принять отръзокъ Tn перпендикуляра,

опущеннаго изъ T на

линію AN ; такъ какъ онъ

образуетъ съ PT уголъ

$\varphi = \angle(OO_1, AN)$, то

длину его можно положить

равной $PT \cos \varphi = ds \cdot \cos \varphi$ (дѣлая это допущеніе,

мы пренебрегаемъ безконечно малыми 2 - го порядка)

(см. фиг. 23).

Поэтому съ указанной малой ошибкой можно написать, что

$$\delta = \frac{ds \cdot \cos \varphi}{AP}, \quad \varepsilon = \frac{ds \cdot \cos \varphi}{A_1P}, \quad \dots, \quad (8)$$

Если разстоянія точки касанія T отъ полюса P мы

назовемъ черезъ r , а радиусы AP и A_1P - черезъ

ξ и ξ_1 , то найдемъ, что

$$AP = \xi - r, \quad A_1P = \xi_1 + r$$

Поэтому теперь можемъ написать:

$$\delta = \frac{ds \cdot \cos \varphi}{\xi - r}, \quad \varepsilon = \frac{ds \cdot \cos \varphi}{\xi_1 + r}, \quad \dots, \quad (9)$$

Въ виду чего ур. (7) перепишется теперь такъ:

$$y = ds \cdot \cos \varphi \left(\frac{1}{\xi - r} + \frac{1}{\xi_1 + r} \right) \dots (10).$$

Соединяя вмѣстѣ равенства (1), (6), (10),

находимъ:

$$\gamma = \omega \cdot dt = ds \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) = ds \cdot \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right),$$

что может быть приведено къ виду:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right) \cos \varphi = \frac{\omega \cdot dt}{ds} = \omega : \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{u} \dots (11)$$

гдѣ u , какъ всегда, есть скорость перемѣщенія центра мгновеннаго вращенія, равная $\frac{ds}{dt}$. Соотношеніе (11), которое мы въ окончательномъ его видѣ переносимъ ниже еще разъ, называется теоремою Савари, и пишется, слѣд., такъ:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \left(\frac{1}{\rho - p} + \frac{1}{\rho_1 + p} \right) \cos \varphi = \frac{\omega}{u} \dots (12)$$

Теорема Савари даетъ возможность строить положеніе центра кривизны огибающей или огибаемой. Дѣйствительно, пусть даны центры кривизны полюды, O и O_1 и центръ кривизны, положимъ, огибающей — A ; полюсъ мгновеннаго вращенія пусть лежитъ въ P (фиг. 24). Соединяемъ данный центръ A съ полюсомъ P ; возставаемъ къ полученной прямой AP въ точкѣ P перпендикуляръ PN ; соединяемъ далѣе точки A и O и линію AO продолжаемъ далѣе, до пересѣченія съ перпендикуляромъ PN въ точкѣ M ; наконецъ, изъ центровъ O и O_1 опускаемъ перпендикуляры Om и O_1n на линію AP . Тогда изъ подобія $\triangle AOm$ и $\triangle AMT$ имѣемъ:

$$PM : Om = AG : Am \dots (13).$$

Если точка A есть действительно центр кривизны огибаемой, то для всей системы этих точек должна быть справедливой теорема Савари, могущая для этого случая быть представленной в видѣ

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos \varphi}{\xi - \gamma} = \frac{\cos \varphi}{\xi_1 + \gamma} - \frac{1}{R_1} \dots \quad (16).$$

а въ такомъ случаѣ изъ сравненія (14) и (15) съ (16) оказывается, что

$$TM = TM_1,$$

т.е. точки M и M_1 совпадаютъ. Это послѣднее обстоятельство поможетъ намъ разрѣшить поставленную задачу о нахожденіи центра кривизны.

Если намъ даны точки O, O_1 и A — центры кривизны, и требуется найти четвертый — A_1 , то мы поступаемъ такъ: соединяемъ A съ T и съ O и продолжаемъ дальше линіи AT и AO ; изъ нихъ AT продолжаемъ до пересѣченія съ перпендикуляромъ TM въ точкѣ M ; соединяемъ полученную точку M съ центромъ O_1 и въ пересѣченіи линіи O_1M съ AT получаемъ искомый четвертый центръ A_1 .

Если вмѣсто какой либо огибаемой кривой возьмемъ просто точку, то совершенно такимъ же образомъ найдемъ центръ кривизны траекторіи этой точки, при этомъ роль центра A (центра кривизны огибаемой) займетъ, очевидно, сама точка.

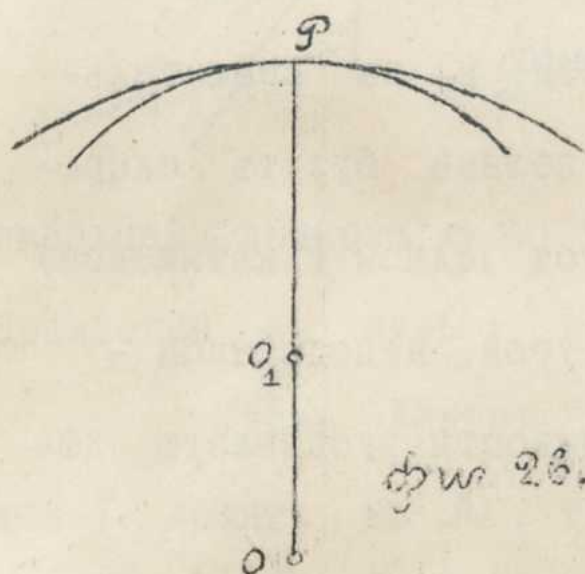
Соотношеніе Савари позволяетъ также пользо-

ваться поворотнымъ кругомъ для построения центровъ кривизны, такъ какъ соотношеніе (12) можно представить иначе въ видѣ :

$$\cos \varphi \left(\frac{1}{R - r} + \frac{1}{R_1 + r} \right) = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{d} = \frac{1}{2d} + \frac{1}{2d} \quad (17)$$

гдѣ d есть діаметръ поворотнаго круга (см. стр. 46), такимъ образомъ можно примѣнить хотя бы то же построение, - только мѣсто величинъ R и R_1 займутъ двѣ равныя величины $2d$ и $2d$.

Замѣтимъ, что если бы подвижная полоида



помѣщалась внутри неподвижной, то уголъ поворота за время dt опредѣлялся бы не суммой $\omega \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)$, а,

очевидно, разностью

$\omega \approx 2\omega \cdot d \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right]$, соотвѣтственно чему

и въ выраженіи Савари вошла

бы не сумма обратныхъ величинъ радіусовъ кривизны полоидъ , а разность (фиг. 25). —

Итакъ, заканчивая это краткое кинематическое введеніе, мы можемъ сказать, что для составленія понятія о движеніи какой либо плоской системы, нужно прежде всего отыскать полоиды, пользуясь условіями движенія; по полоидамъ мы не только найдемъ траекторіи любой точки взятой системы, но и будемъ въ состояніи замѣнить любую ма-

лую часть этой траекторіи подходящей окружностью.,
что часто бывает весьма важно.

- - - o o o - - -

З А Д А Ч И .

- 1. Показать, что всякое качение окружности по другой окружности можно свести на поступательное движение окружности и на вращательное около своего центра. Какъ велики будутъ скорости обоихъ движеній, если радіусъ одной (катящейся) окружности есть r , радіусъ другой, неподвижной -

- R , а центръ катящейся окружности успѣваетъ дѣлать n оборотовъ въ мин.?

- 2. Найти, гдѣ будетъ центръ ускоренія для движенія, даннаго въ предыдущей задачѣ. Определить поворотный кругъ.

- 3. Прямая катится равномерно по окружности. Найти ускореніе какой нибудь точки этой прямой при помощи центра ускореній. Определить центръ кривизны траекторіи точки, связанной съ прямой, если а) точка лежитъ внѣ прямой, и в) если точка находится на самой прямой.

- 4. Допустимъ, что въ подвижной системѣ имѣет-

Ур-іе (18) принимаетъ дальше видъ

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{PT} = \frac{1}{PM} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

что, послѣ уничтоженія знаменателей, приметъ видъ :

$$PA \cdot PT = PM \cdot AT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Повѣрить это соотношеніе на основаніи общаго построенія центра кривизны при помощи поворотнаго круга; найти затѣмъ точку M поворотнаго круга, зная положеніе точекъ P , A и T . — Обратно, имѣя поворотный кругъ, найти центръ кривизны A при помощи точки M , вмѣсто того, чтобы примѣнять построеніе, указанное въ лекціяхъ.

- 5. Тяжелый дискъ катится подъ угломъ α къ горизонту. Определить положеніе центра ускоренія въ любой моментъ и рассмотреть ускоренія различныхъ точекъ диска. (Предполагается, что начальной скорости дискъ не имѣлъ).

- 6. Показать, что если двѣ точки имѣютъ равныя и параллельно направленныя ускоренія, то и всѣ точки плоской системы будутъ имѣть тѣ же ускоренія.

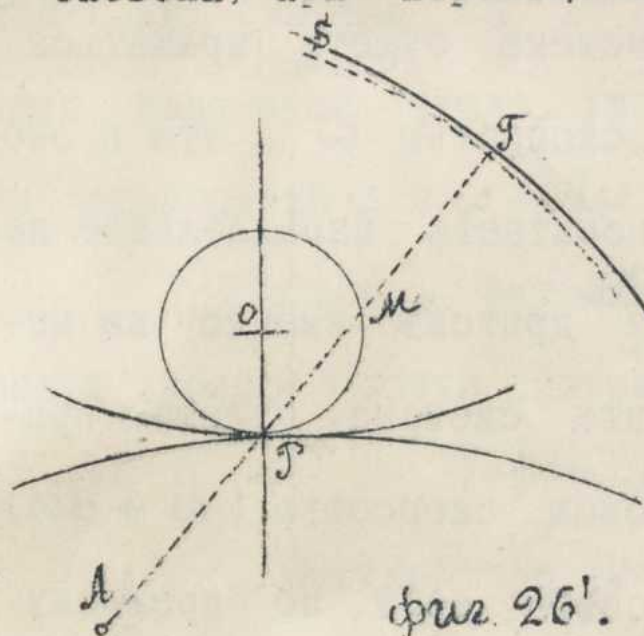
- 7. Извѣстно, что если мы будемъ искать геометрическое мѣсто точекъ, не имѣющихъ въ данный моментъ тангенціальнаго ускоренія, то найдемъ, что такимъ мѣстомъ будетъ

кругъ, проходящей черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія P и центръ ускоренія S и пересѣкающей поворотный кругъ подъ прямымъ угломъ α . — Доказать это.

Задача N 8 была разобрана профессоромъ на одной изъ лекцій, и ниже мы этотъ разборъ и приводимъ.

Дѣло касается одного любопытнаго свойства поворотнаго круга, свойства, дающаго намъ возможность судить не о полномъ ускореніи какой-нибудь точки, а о нормальномъ. — Пусть нѣкоторая точка

T системы, при перемѣщеніи этой послѣдней, дви-



гается по своей траекторіи S (фиг. 26);

радіусъ кривизны траекторіи въ этомъ мѣстѣ

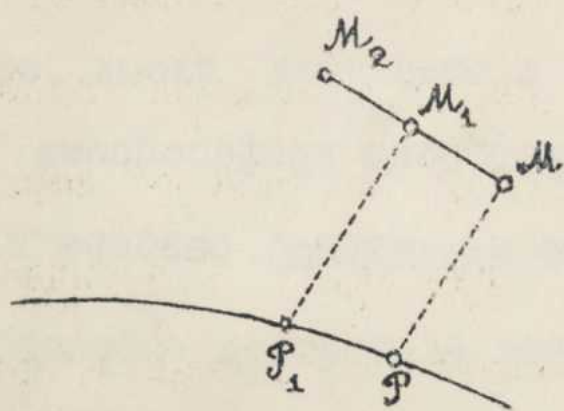
обозначимъ черезъ R ;

пусть A есть центръ

кривизны, такъ что $AT = R$.

Положимъ, что для этого момента полюсъ мгновеннаго вращенія находится въ P и пусть рад. векторъ PT пересѣкаетъ поворотный кругъ O въ точкѣ M . Эта точка M , какъ точка, принадлежащая поворотному кругу, въ два сосѣдніе, бесконечно малые промежутка времени движется прямолинейно, хотя и неравномѣрно, а

именно, если въ первой безк. малый промежутокъ dt она прошла путь MM_1 , гдѣ $MM_1 \neq PM$ и равно



фиг. 26".

$PM \omega dt$, то во второй она пройдетъ путь M_1M_2 , лежащій на продолженіи MM_1 , но ему уже не равный :

M_1M_2 выразится произведеніемъ $P_1M_1 \cdot (\omega + d\omega) dt$.

Перенесемъ теперь вращеніе изъ точки P въ точку M ; тогда наша система, а значить, и точка T , будутъ двигаться такъ : въ продолженіе первого элемента времени dt наша система будетъ вращаться около M съ той же угловою скоростью ω , что и около P , и, кромѣ того, она испытаетъ параллельное перенесеніе по направленію $\overline{MM_1}$ и притомъ именно на величину MM_1 ; въ слѣд. моментъ система будетъ вращаться уже около M_1 съ угловою скоростью $(\omega + d\omega)$ и перенесется параллельно самой себѣ по прежнему направленію MM_1 на величину M_1M_2 , какъ мы уже говорили, вообще не равную MM_1 .

Эти два послѣдовательныхъ перенесенія, хотя происшедшія по одному и тому же направленію, но между собою неравныя, обусловятъ измѣненія въ полномъ ускореніи каждой точки системы; однако измѣненія эти будутъ, такъ сказать, односторонними,

такъ какъ коснутся, какъ это очевидно, лишь тангенціальныхъ ускореній, давая для нихъ нѣкоторую слагающую - для нормальныхъ же ускореній слагающей этотъ переносъ не дастъ никакой, почему, слѣд., при разсмотрѣніи этихъ неизмѣняющихся при указанномъ переносѣ нормальныхъ ускореній на измѣненія тангенціальныхъ можно и не обращать никакого вниманія, попросту ихъ отбросить. Эти соображенія можно сформулировать въ видѣ слѣд. теоремы:

Н о р м а л ь н ы я у с к о р е н і я
для всякой точки системы можно получить, предполагая, что наша система за 2 безк. малые промежутка времени вращается около упомянутой точки M съ угловыми скоростями ω и $\omega + d\omega$.

Отсюда вытекаетъ, что нормальное ускореніе всякой точки системы выразится формулой:

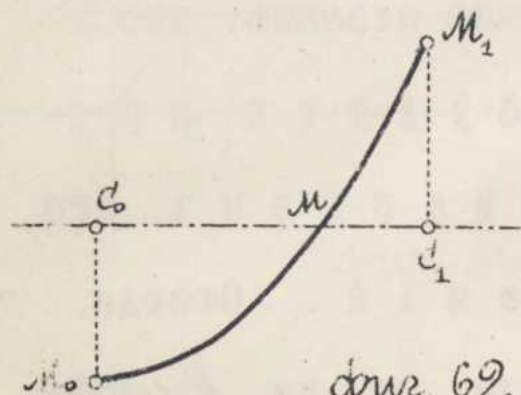
$$j = M \cdot \omega^2 \dots (20)$$

Соотношеніе это любопытно еще въ томъ отношеніи, что даетъ намъ возможность при помощи точки M поворотнаго круга опредѣлить радіусъ кривизны траекторіи точки T .

На самомъ дѣлѣ, нормальное ускореніе точки T , при ея движеніи по траекторіи S , выражается формулой

$$j = \frac{v^2}{\rho} \dots \dots \dots (21)$$

Крайнія ординаты ея, отрѣзки $C_0 M_0$ и $C_1 M_1$, будутъ



фиг. 69.

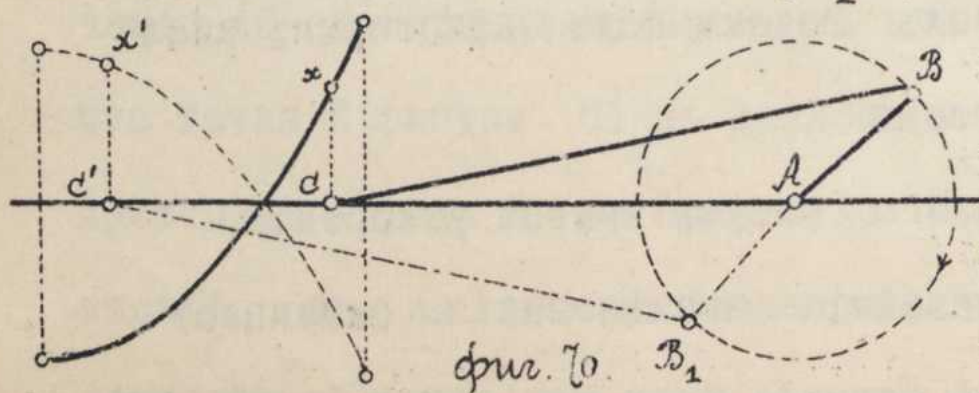
уже не равны, а именно, для одного мертвого положенія, при $\alpha = 0$, изъ ур. (8) получаемъ

$$j_0 = \frac{l-r}{l} \omega_r^2 \cdot r,$$

а для другого, при $\alpha = 180^\circ$, имѣемъ

$$j_{180} = \frac{l+r}{l} \omega_r^2 \cdot r,$$

(и ту, и другую величину беремъ абсолютно, не принимая во вниманіе знака ея). Парабола $M_0 M M_1$ будетъ пересѣкать ось $C_0 C_1$ уже не въ серединѣ отрѣзка $C_0 C_1$, изображающаго ходъ ползуна, что видно также и изъ того обстоятельства, что максимумъ скорости ползуна не приходится теперь на его среднее положеніе. Указанная парабола $M_0 M M_1$ даетъ законъ ускореній при движеніи ползуна отъ C_0 къ C_1 ; при движеніи же ползуна отъ C_1 къ C_0 , (при слѣдующемъ полуоборотѣ кривошипа), кривая ускореній изобразится опять параболой, симметричной съ первой относительно оси $C_0 C_1$, (Она намѣчена у



фиг. 70.

насъ пунктиромъ) и поэтому въ положеніи кривошипа AB ускоре-

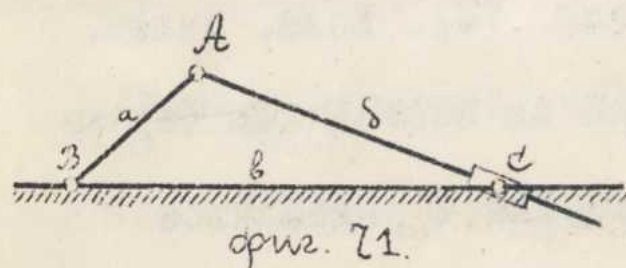
ніе ползуна изобразится отрѣзкомъ Cx , а въ AB_1 .. от-

рѣзкомъ $C_2 X_2$ (фиг. 70).

КАЧАЮЩАЯСЯ ПАРОВАЯ МАШИ- НА .

Познакомившись съ обыкновеннымъ кривошипнымъ механизмомъ, перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію даль-
нѣйшихъ видоизмѣненій четырехзвенной цѣпи съ посту-
пательной парой.

Если мы поставимъ механизмъ, изображенный на
фиг. 51, не на звено δ , какъ это сдѣлано тамъ, а на
звено ν , то получимъ т. наз. механизмъ качающейся па-
ровой машины . (фиг. 71). Звено σ будетъ имѣть



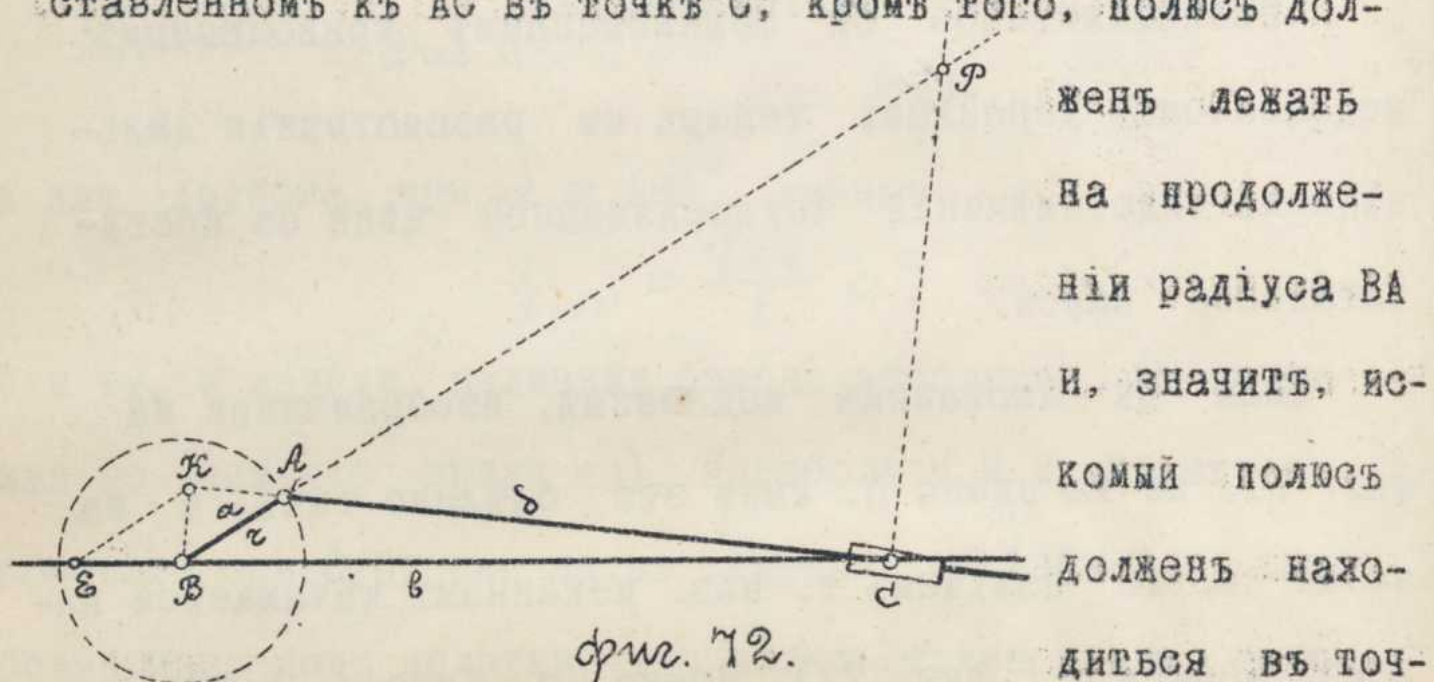
здѣсь только одно вращатель-
ное движеніе около оси C ,
наглухо соединенной съ зве-

номъ ν и перпендикулярной къ плоскости чертежа.

Звено δ будетъ участвовать концомъ A во вращеніи кри-
вошина около оси B и въ то же время скользить по
звену σ . Если звено σ мы выполнимъ въ видѣ ци-
линдра, могущаго качаться на шинахъ, звено же δ
снабдимъ поршнемъ, соответствующимъ этому цилин-
дру, то и получимъ механизмъ качающейся паровой ма-
шины. — Не трудно найти здѣсь скорость поршня.

Центръ мгновеннаго вращенія звена δ находимъ

по общему правилу: такъ какъ звено δ постоянно проходить съ одной стороны черезъ точку C , такъ что эта точка является огибающей этого звена, то полюсъ P долженъ лежать на перпендикулярѣ PC , составленномъ къ AC въ точкѣ C ; кромѣ того, полюсъ дол-



женъ лежать на продолженіи радіуса BA и, значитъ, искомымъ полюсъ долженъ находиться въ точ-

кѣ пересѣченія линій CP и AB (фиг. 72). Если, далѣе, угловую скорость вращенія около P мы обозначимъ черезъ θ , то найдемъ, что скорость поршня, v_c , выразится такъ:

$$v_c = PC \cdot \theta \quad (1)$$

Если угловую скорость вращенія кривошипа мы обозначимъ черезъ ω_n , то для скорости точки A можно будетъ написать:

$$v_A = \theta \cdot PA = \omega_n \cdot BA = n \cdot \omega_n \quad (2)$$

Какъ и въ предыдущихъ выводахъ, предполагаемъ, что ω_n есть величина постоянная.

Изъ ур-ія (2) находимъ:

$$\theta = \frac{c \cdot \omega_n}{PA} \dots (3)$$

въ виду чего ур. (1) приметъ видъ :

$$v_c = \frac{PC}{PA} \cdot r \cdot \omega_n \dots (4)$$

Если теперь изъ точки В мы опустимъ перпендикуляръ ВК на продолженіе прямой АС, и проведемъ КЕ || ВА, то изъ треугольниковъ РАС и ВАК получимъ :

$$\frac{PC}{PA} = \frac{BK}{r}, \text{ такъ что } \frac{PC}{PA} \cdot r = BK \dots (5),$$

а поэтому ур. (4) переписется теперь такъ :

$$v_c = \omega_n \cdot BK \dots (6).$$

т.е. скорость поршня будетъ пропорціональна отръзку ВК. —

Угловая скорость вращенія около Р есть въ то же время угловая скорость качанія цилиндра, геометрическая ось котораго направлена по δ . Эта угловая скорость будетъ уже постоянно мѣняться; на самомъ дѣлѣ, изъ ур. (3) имѣемъ

$$\theta = \omega_n \cdot \frac{r}{PA} \dots (7)$$

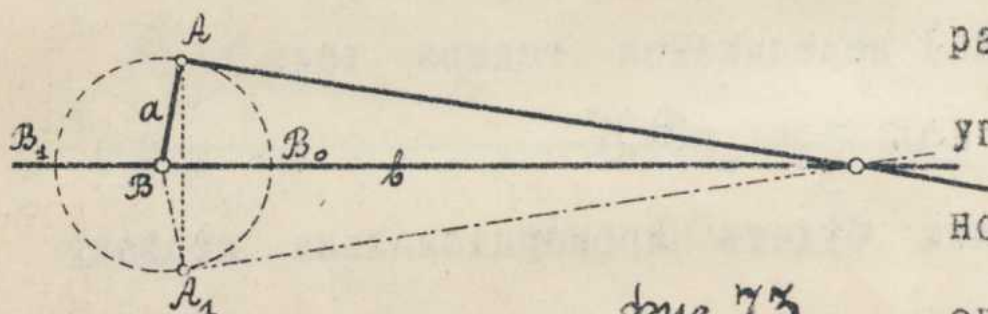
но изъ треугольниковъ ВАК и РАС, АВС и КСЕ

$$r : PA = AK : AC = BE : BC \dots (8)$$

такъ какъ КЕ || ВА (см. пред. стр.), — и тогда получаемъ:

$$\theta = \mathcal{B}\mathcal{E} \cdot \frac{\omega_z}{\mathcal{B}\mathcal{C}} \quad (9).$$

т.е. угловая скорость качанія цилиндра пропорциональна отрезку $\mathcal{B}\mathcal{E}$; чтобы затѣмъ показать, что эта скорость будетъ мѣняться, возьмемъ такое положеніе механизма, при которомъ звено $\mathcal{C}\mathcal{A}$ является касательнымъ къ окружности $\mathcal{B}_0\mathcal{A}\mathcal{B}_1$ (фиг. 73); пока кривошипъ описываетъ уголъ $\mathcal{B}_0\mathcal{B}\mathcal{A} = \alpha$, цилиндръ поворачи-



фиг 73.

рачивается на уголъ $\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{B} = 90^\circ - \alpha$, но на тотъ же уголъ онъ повернется въ

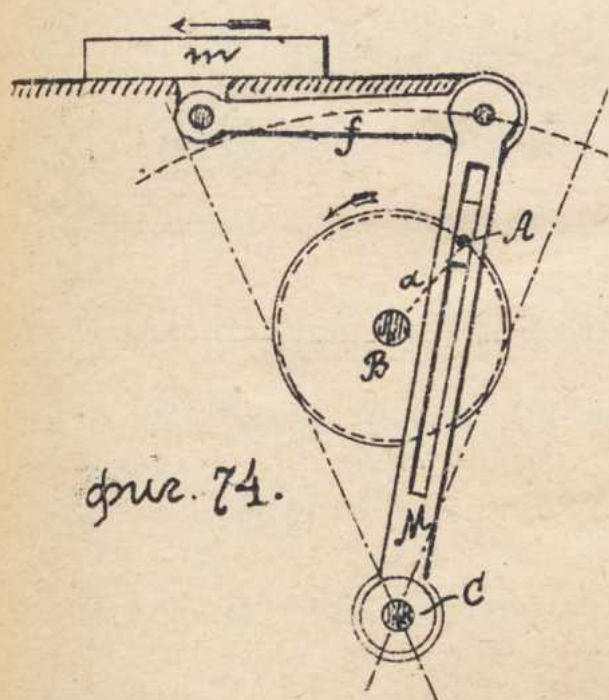
обратную сторону при вращеніи кривошипа на уголъ $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}_1$ $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}_1 = 180^\circ - \alpha$. Следовательно, когда кривошипъ поворачивается на уголъ $\mathcal{A}_1\mathcal{B}\mathcal{A} = 2\alpha$, качаніе цилиндра (въ одну сторону) будетъ быстрое, - въ другую же сторону оно будетъ медленное, - кривошипъ описываетъ при этомъ уголъ $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}_1$, стягиваемый дугой $\mathcal{A}\mathcal{B}_1\mathcal{A}_1 (= 360^\circ - 2\alpha)$ причемъ, скорость вращенія кривошипа все время остается постоянной, т.е. кривошипъ вращается равномерно; отношеніе временъ качаній равно отношенію угловъ $\mathcal{B}_0\mathcal{B}\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}_1$, т.е. выразится въ видѣ :

$$\frac{\alpha}{180^\circ - \alpha} = \frac{\arccos \cos \frac{a}{b}}{\pi - \arccos \cos \frac{a}{b}}, \text{ гдѣ, въ виду } \cos \alpha = \frac{a}{b},$$

обозначено

$$\alpha = \arcsin \cos$$

Этимъ свойствомъ качаній можно пользоваться въ тѣхъ случаяхъ, когда какому-либо предмету требуется сообщить быстрое движеніе въ одну сторону и медленное - въ другую. Такъ, напр., въ строгальныхъ машинахъ рѣзецъ долженъ двигаться медленно въ то время, когда онъ беретъ стружку, и быстро - когда идетъ въ обратную сторону, на холостомъ ходу. Схему механизма, выполняющаго подобное движеніе, можно представить себѣ такъ :



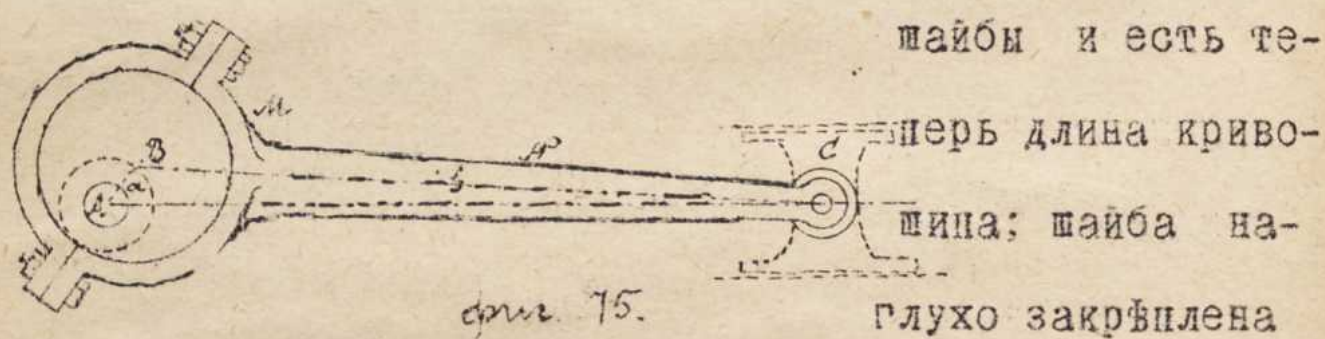
кривошипъ а (фиг. 74); выполняемый обыкновенно въ видѣ круглой шайбы съ шипомъ, служащимъ пальцемъ кривошипа, несетъ на своемъ пальцѣ вольно сидящій ползунокъ, могущій ходить въ прорѣзѣ рычага М; этотъ послѣдній качается около С, и къ другому его концу прикреплена тяга, идущая къ суппорту м для рѣз-

ца. При равномерномъ вращеніи кривошипа въ сторону показанную стрѣлкой мы получимъ медленное движеніе рѣзца впередъ - рабочій ходъ, - и острое - назадъ.

К Р У Г Л Ы Й Э К С Ц Е Н Т Р И КЪ .

Механизмъ кривошипа и шатуна, а также качающейся

паровой машинѣ можетъ имѣть нѣкоторое видоизмѣненіе съ внѣшней стороны. Дѣло въ томъ, что въ случаѣ, если радиусъ кривошипа очень малъ, сдѣлать палецъ кривошипа должныхъ размѣровъ является труднымъ, а иногда и невозможнымъ. Въ такомъ случаѣ увеличиваетъ диаметръ пальца настолько, что онъ захватываетъ уже ось вращенія кривошипа, и тогда этотъ палецъ выполняется въ видѣ круглой шайбы, насаженной эксцентрично на ось А вращенія кривошипа. Эксцентриситетъ АВ этой

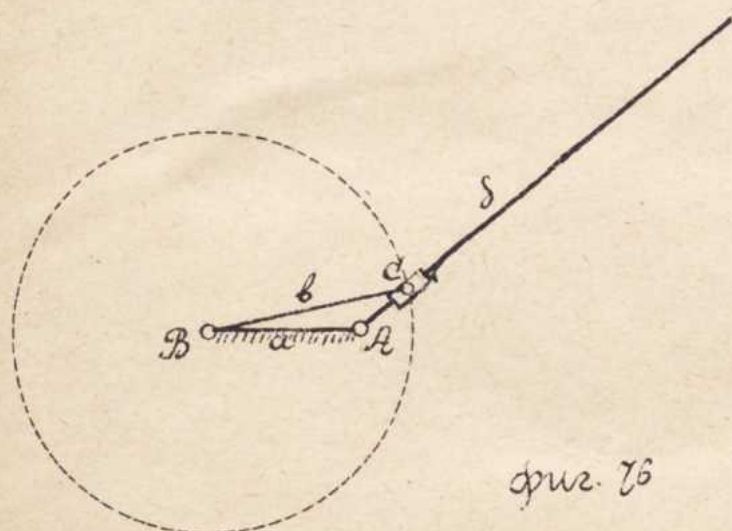


шайбы и есть теперь длина кривошипа; шайба наглухо закреплена на валу А; съ внѣшней стороны ее (какъ раньше это было съ пальцемъ кривошипа) охватываетъ хомутъ М, составляющій одно цѣлое съ тягой Н, идущей къ ползуну С. (фиг. 75). Механизмъ этотъ носить названіе механизма круглаго эксцентрика, и, какъ видимъ, по существу не отличается отъ обыкновеннаго кривошипнаго механизма.

СЛУЧАЙ, КОГДА СДѢЛАНО НЕПОДВИЖНЫМЪ ЗВЕНО а
(прежній кривошипъ).

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію механизма по-

ставленнаго на звено a , служившее раньше кривошипомъ; звенья b и δ являются въ такомъ случаѣ оба кривошипами въ томъ смыслѣ, что оба получаютъ возможность совершать полный оборотъ около точекъ A и B (фиг. 76).



фиг. 76

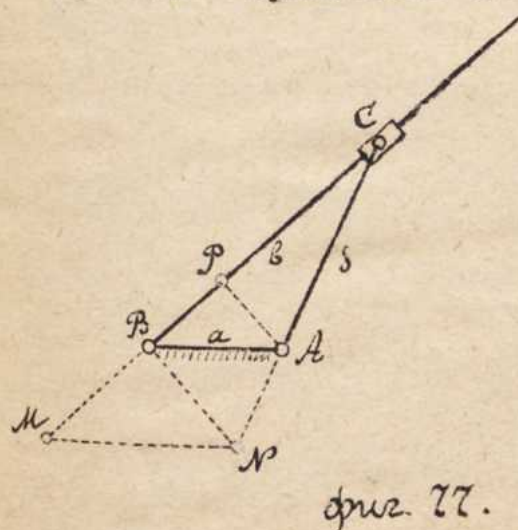
Центръ мгновеннаго вращенія для движенія ползуна получит-ся въ пересѣченіи перпендикуляра PA къ δ съ линіей BC , — пусть

это будетъ точка P . Угловая скорость вращенія звена δ есть, конечно, угловая скорость вращенія ползуна C около P ; скорость же точки C , v_C , можетъ быть выражена двояко: съ одной стороны $v_C = BC \cdot \omega_B$, гдѣ ω_B есть угловая скорость равномернаго вращенія кривошипа b ; съ другой стороны $v_C = PC \cdot \theta$, гдѣ θ есть угловая скорость вращенія около P . Поэтому имѣемъ возможность

написать $BC \cdot \omega_B = PC \cdot \theta$, откуда

$$\theta = \frac{BC}{PC} \cdot \omega_B \dots (1).$$

Проводимъ $BN \parallel AP$ до пересѣченія съ δ въ точкѣ N , и $NM \parallel AB$ до пересѣченія съ CB въ точкѣ M ; тогда получаемъ (см. фиг. 77):



фиг. 77.

$$\frac{Bc}{Pc} = \frac{Nc}{Ac} = \frac{CM}{Bc},$$

въ виду чего ур.-іе (1) приметъ видъ :

$$\theta = \frac{CM}{Bc} \omega_B \dots \dots \dots (2)$$

т.е. угловая скорость вращенія звена δ выражается величинами, пропорціональными отрѣзкамъ CM . Въ положеніяхъ совмѣщенныхъ звеньевъ, когда B и δ совпадаютъ съ A (фиг. 78), имѣемъ:

$$v_c = Bc \cdot \omega_B = Ac \cdot \theta \dots \dots \dots (3)$$

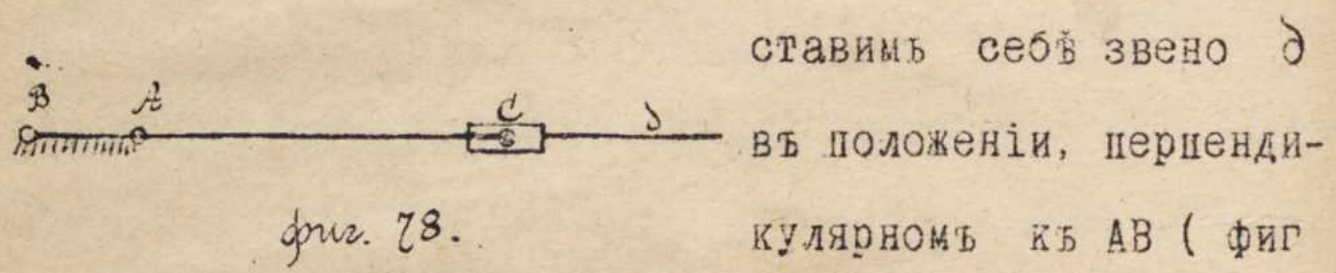
откуда получаемъ, что $\theta = \omega_B \cdot \frac{Bc}{Ac}$, иначе

$$\theta = \omega_B \cdot \frac{b}{b-a} \dots \dots \dots (4)$$

для другого положенія совмѣщенныхъ звеньевъ находимъ аналогично

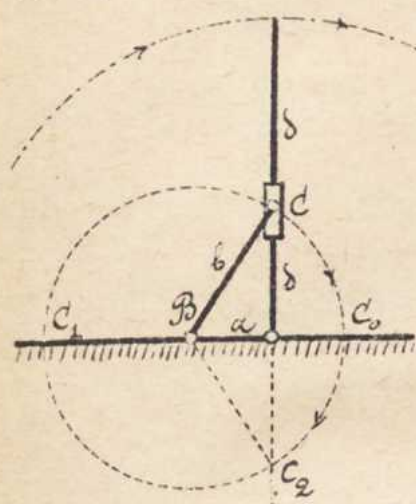
$$\theta = \omega_B \cdot \frac{b}{b+a} \dots \dots \dots (4)$$

Такимъ образомъ видимъ, что угловая скорость θ не постоянна. Это впрочемъ можно обнаружить еще и такъ: пред-



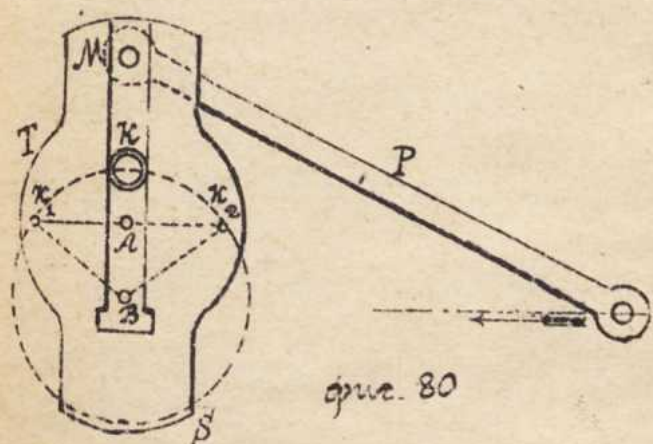
79). причемъ вращеніе пусть совершается въ сторону, показанную стрѣлкой; тогда легко видѣть, что при поворотѣ кривошипа на острый уголъ CB_0C , звено δ повернется на прямой уголъ; но на тотъ же прямой уголъ оно повернулось и раньше, при поворотѣ кривошипа на тупой уголъ C_1B_1C ; слѣд., пока кривошипъ описываетъ

васть острый угол $\angle CVC_2$, звено δ вращается быстро и совершает полъ-оборота; вторую же половину оборота оно совершает медленно, и при этом кривошипъ поворачивается на угол $(360^\circ - \angle CVC_2)$. Отношеніе времени той и другой половинъ оборота равно отношению $\arccos \frac{a}{b} : (\pi - \arccos \frac{a}{b})$, или отношению $\angle CVC_0 : \angle C_1VC$. Какъ видимъ, получается то же выраженіе, что и для механизма качающейся паровой машины.



фиг. 79

Указанною неравномерностью вращенія мы опять можем воспользоваться для сообщенія рѣзущему инструменту движенія медленнаго въ одну сторону и быстраго въ другую. Подобный механизмъ употребляется въ строгальных машинахъ Витворта.



фиг. 80

Кулачекъ K (фиг. 80), вращающагося около оси B , входитъ въ то же время въ прорѣзъ шайбы T , могущей въ свою очередь вращаться около оси A . Съ другой стороны этой шайбы приделана тяга P , идущая къ суппорту на -

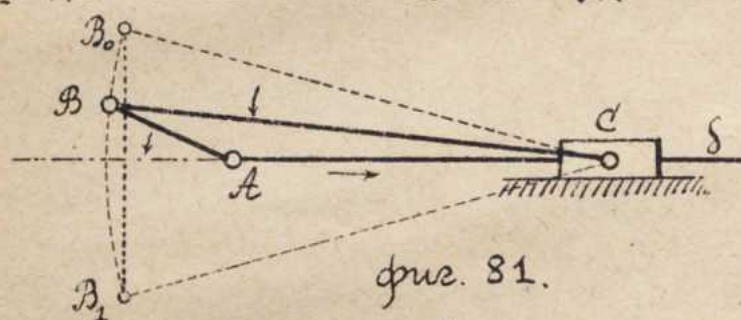
лецъ M этой тяги можетъ быть устанавливаемъ на желаемомъ разстояніи отъ A . При равномерномъ вращеніи кулачка въ направленіи, указанномъ стрѣлкой, шайба бу-

свою очередь вращаться около оси A . Съ другой стороны этой шайбы приделана тяга P , идущая къ суппорту на -

детъ совершать одну половину оборота быстро, другую — медленно, соответственно повороту кулачка на уголъ K_2 в K_1 или на уголъ, дополнительный ему до 360° . Первое будетъ соответствовать движению суппорта назад (— холостой ходъ, показанный стрѣлкой), второе — вперед (— рабочій ходъ).

Наконецъ, четвертый механизмъ изъ кривошипнаго механизма съ поступательной парой получимъ тогда, когда сдѣлаемъ неподвижнымъ звено OC .

Въ такомъ случаѣ A будетъ ходить взадъ и впередъ съ звеномъ δ , BC будетъ качаться около C между



фиг. 81.

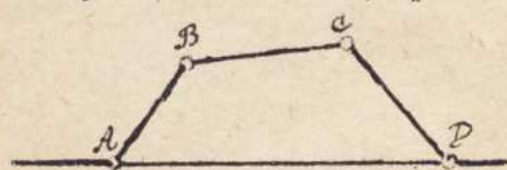
положеніями CB_0 и CB_1 , при которыхъ звено AB перпендикулярно къ на-

правленію звена δ ; движущимъ звеномъ является обыкновенно AB . Механизмъ этотъ имѣетъ малое применение.. (фиг. 81).

ПЛОСКАЯ ЧЕТЫРЕХЗВЕННАЯ
ШАРНИРНАЯ ЦѢПЬ СЪ ДВУМЯ ПО-
СТУПАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМИ.

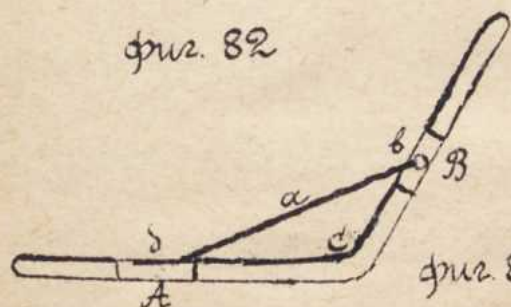
Разсмотрѣвъ механизмъ съ одной поступательной парой, перейдемъ къ тому случаю, когда плоская четырехзвенная цѣпь имѣетъ двѣ поступательныя пары. Въ такомъ случаѣ нужно различать механизмы по тому, смежныя ли двѣ вращательныя пары обратились въ поступательныя, или противолѣжащія. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать только механизмы перваго рода, какъ наиболѣе важные.

Если въ шарнирной цѣпи пары **С** и **Д** обратились въ поступательныя (фиг. 82), то ничто не мѣшаетъ намъ



фиг. 82

взять направленія этихъ поступательныхъ движеній проходящими черезъ **В** и **А**. Тогда механизмъ



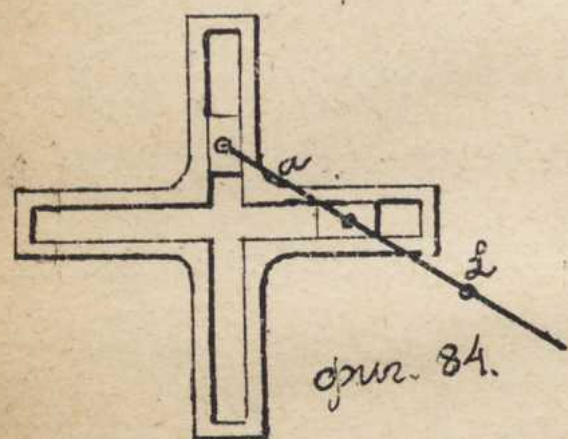
фиг. 83

принимаетъ слѣдующій видъ: звено

но а (фиг. 83) имѣетъ попрежнему два шарнира **А** и **В**, звенья **в** и **д** обратились въ ползушки для двухъ неразрывно скрѣпленныхъ стержней, которые представляютъ теперь звено **с**.

Механизмъ этотъ можно поставить на звено **с**; тог-

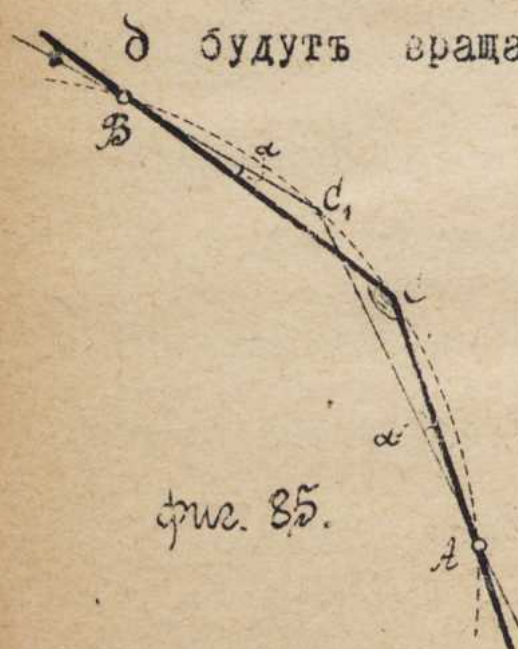
да движеніе звена а представить собою ничто иное, какъ движеніе неизмѣняемаго отрѣзка внутри опредѣленнаго угла. Каждая точка звена а, какъ извѣстно, опишетъ тогда эллипсъ, и механизмъ имѣетъ, применіе, какъ эллипсографъ.



Звено с (фиг. 84) выполняется въ видѣ двухъ, скрѣпленныхъ подъ прямымъ угломъ стержней, имѣющихъ прорѣзы, въ которыхъ и ходятъ ползуны δ и ν . Какая-либо точка L звена а опишетъ эллипсъ, причемъ, назвавъ

разстояніе точки L отъ середины отрѣзка, точки M , черезъ C , найдемъ, что полуоси этого эллипса будутъ: большая - $(C + \frac{a}{2})$ и меньшая - $(C - \frac{a}{2})$.

Вторымъ видоизмѣненіемъ разбираемой цѣпи будетъ механизмъ, поставленный на звено а. Тогда звенья в и δ будутъ вращаться около А и В, причемъ нетрудно



видѣть, что извѣстному повороту звена δ соответствуетъ равный ему поворотъ звена в (фиг. 85). Это произойдетъ вслѣдствіе того, что уголъ при С остается неизмѣннымъ и точка С находится на окружности, вмѣщающей

данный уголъ С, опирающійся на отрѣзокъ постоянной

длина АВ.

МУФТА ОЛДНАМ'А.

Последнее замѣчаніе предыдущаго параграфа приводитъ насъ къ тому заключенію, что при помощи послѣдняго изъ вышеразобранныхъ механизмовъ можно производить вращеніе около какой - либо оси В (фиг. 85) вращеніемъ около другой оси А, причемъ угловыя скорости этихъ вращеній останутся одинаковыми. Такого рода передача вращенія отъ одного вала другому, ему параллельному, но не совпадающему съ нимъ, выполняется при помощи т. н. муфты Oldham'а.

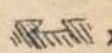
Представимъ себѣ на осяхъ В и А, которыя дол-

жны быть свя-

заны этой

муфтой, двѣ

шайбы съ про-

рѣзами вида ,

обращенными

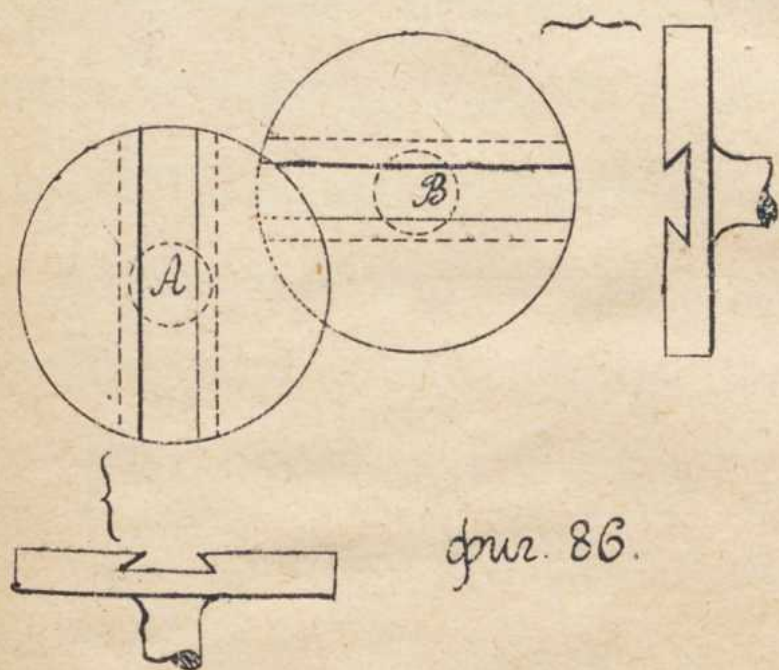
другъ къ дру-

гу (фиг. 86).

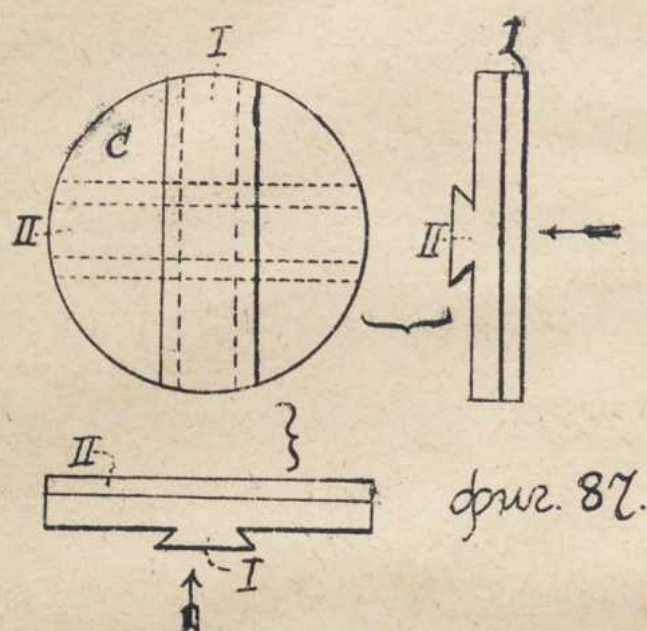
Стоитъ теперь

ввести въ эти прорѣзы

два стержня, скрѣпленныхъ подѣ прямымъ угломъ (на-



глухо), и наша передача будет осуществлена, — мы получаем муфту Oldham'a. Стержни эти выполняются не отдѣльно, а въ видѣ отдѣльной третьей шайбы (фиг.



87). имѣющей выступы : (I) съ одной стороны и перпендикулярный къ нему (II) — съ другой. Эта третья шайба вставляется между

шайбами А и В такъ, что выступы ея входятъ въ прорѣзы этихъ послѣднихъ. Понятно, что при вращеніи одного вала выступы будутъ скользить въ своихъ вырѣзахъ такъ, что ихъ оси будутъ постоянно проходить черезъ постоянныя по положенію въ пространствѣ точки А и В, такъ что все сводится къ перемѣщенію прямого угла, принужденнаго двигаться такъ, что его стороны постоянно проходятъ черезъ двѣ неподвижныя точки.

— — — — —

СТАНОКЪ ЛЕОНАРДО — ДА — VINCI.

Движеніе средней шайбы въ муфтѣ Oldham'a есть, какъ мы говорили, движеніе системы прямого

угла, стороны котораго принуждены все время проходить черезъ двѣ неподвижныя точки. Такъ какъ при движеніи отрѣзка внутри прямого угла каждая точка, неизмѣняемо соединенная съ отрѣзкомъ, описываетъ на плоскости этого прямого угла, эллипсъ, то обратно, при движеніи угла и неподвижномъ отрѣзкѣ, карандашъ, помѣщенный гдѣ — либо н е п о д в и ж н о, начертитъ на плоскости прямого угла опять — таки эллипсъ. Слѣдовательно, если къ средней шайбѣ муфты Oldham'a приставить рѣзецъ, то онъ обточитъ шайбу по эллипсу.

Этимъ замѣчаніемъ можно воспользоваться для устройства станка для обтачиванія овальныхъ предметовъ; для удобства работы придется лишь видоизмѣнить внѣшнимъ образомъ муфту Oldham'a. Средняя шайба представится теперь планшайбой токарнаго станка, — значить, обѣ оси придутся по одну сторону ея. Одну изъ осей выполнимъ въ видѣ кольца, сквозь которое эксцентрично будетъ проходить вторая, сплошная ось; кольцо это вращается въ соотвѣтствующемъ подшипникѣ. Какъ это кольцо, такъ и сплошная ось снабжены кулачками, ходящими въ прорѣзахъ планшайбы; прорѣзы эти замѣняютъ собою прежніе выступы на средней шайбѣ муфты Oldham'a и другъ къ дру-

гу перпендикулярны. Выполненный такимъ образомъ станокъ носить названіе станка" Leonardo da Vinci"; чертежи его помѣщены у насъ на отдѣльной таблицѣ. (таблица 3).

Здѣсь A есть полная (сплошная) ось, вращающаяся въ подшипникахъ K и L ; F есть кольцо (полая ось), могущее вращаться въ подшипникѣ L . Геометрическая ось этого кольца проектируется на черт. 1 въ точку B . (AB) и есть постоянный отрѣзокъ, теперь неподвижный. — Какъ кольцо F , такъ и ось A , снабжены кулачками: первое — NN , вторая — MM , входящими въ прорѣзы N_1N_1 и M_1M_1 планшайбы (черт. 2). Прорѣзы эти перпендикулярны другъ другу и расположены, разумѣется, съ задней стороны планшайбы; геометрическія оси ихъ и представляютъ собою прямой уголь, опирающійся сторонами на неподвижный отрѣзокъ AB .

При вращеніи оси A кольцо F , подобно второй оси въ муфтѣ Oldham'a, также приходитъ во вращеніе. Планшайбы выполняетъ при этомъ движеніе средней шайбы муфты, и приставленный къ ея внѣшней сторонѣ карандашъ начертитъ на ней эллипсъ, и, слѣд., повернутый къ планшайбѣ предметъ можетъ быть обточень по эллипсу. Какъ видно изъ чертежей, под-

шипникъ E , въ которомъ вращается кольцо F , при помощи винтовъ ($у, у$) можетъ быть нѣсколько передвигаемъ въ направляющихъ ($х, х$), — это даетъ возможность измѣнять величину отрезка AB , причемъ это измѣненіе измѣняется съ помощью мѣтокъ m и n у лѣваго винта $уз$; мѣтка m (на нижней части подшипника E) — подвижная, мѣтки же n являются неподвижными дѣленіями, что и даетъ намъ возможность получать эллипсы различныхъ эксцентриситетовъ; установивъ, напр., рѣзецъ въ направленіи AB на разстояніяхъ (C) отъ A и ($C - AB$) отъ B , получимъ эллипсъ съ полуосями (C) и ($C - AB$).

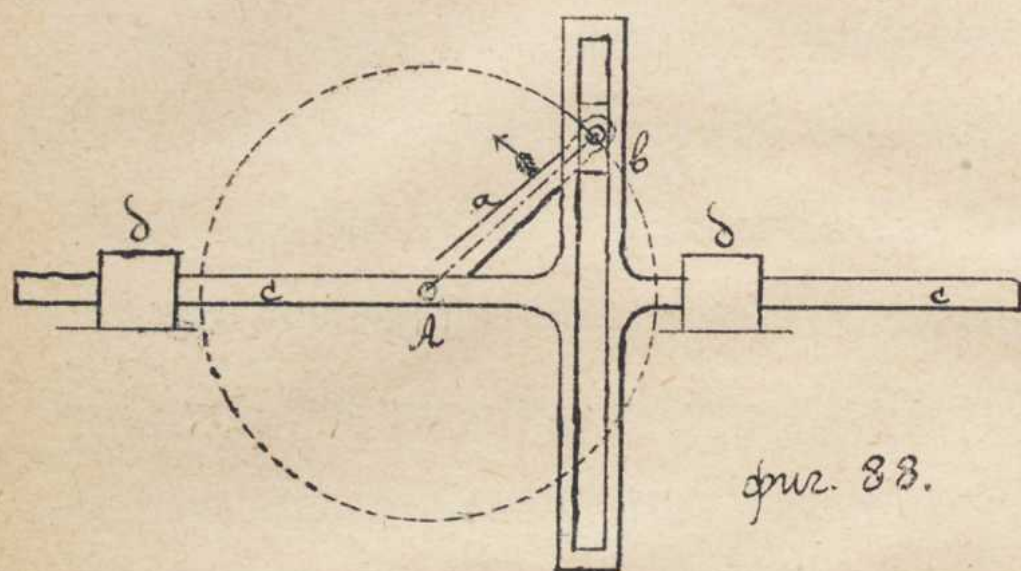
ДВОЙНОЙ ПОЛЗУНЪ.

Третье видоизмѣненіе механизма плоскаго шарнирнаго четырехугольника съ двумя смежными поступательными парами получимъ, если обратимъ въ стойку какое — либо изъ звеньевъ $в$ или $д$.

Какое изъ нихъ мы сдѣлаемъ неподвижнымъ, это безразлично для кинематическаго характера механизма, — въ обоихъ случаяхъ получится механизмъ одного и того же рода. Обыкновенно оба направленія поступательныхъ паръ, какъ и въ прежнихъ видоизмѣненіяхъ, перпендикулярны другъ къ другу, и въ

этомъ случаѣ механизмъ носить названіе "двойного ползуна".

Звено а (фиг. 88) служитъ кривошипомъ и вра-



фиг. 88.

щается около оси

А; звено в пол-

заетъ въ напра-

вляющихъ, прина-

длежащихъ звену

сс. а это по-

слѣднее ходитъ въ

направляющихъ, перпендикулярныхъ къ первымъ и при-

надлежащихъ неподвижному теперь звену δ ; при этомъ,

если кривошипъ а вращается равномерно, то движе-

ніе всякой точки звена с тождественно съ движені-

емъ точки М, служащей проекціей центра В пальца

кривошипа а на діаметръ $\delta\delta$

(фиг. 89); движеніе это бу-

детъ т. наз. гармоническое,

соотвѣтствующее, какъ видно

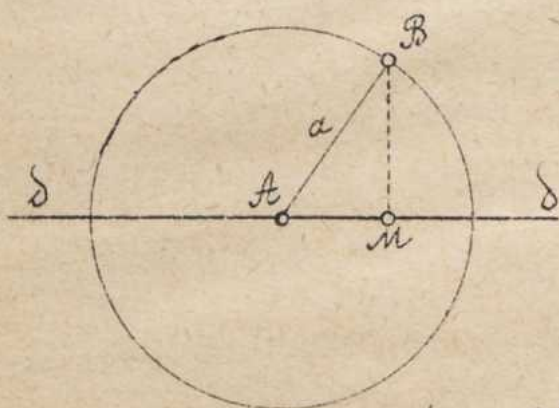
изъ чертежа, движенію пол-

зуна въ обыкновенномъ кривошипномъ механизмѣ съ

безконечно - длиннымъ шатуномъ. Такимъ образомъ то,

что для кривошипнаго механизма было только при-

близительнымъ, здѣсь является вполне точнымъ.



фиг. 89.

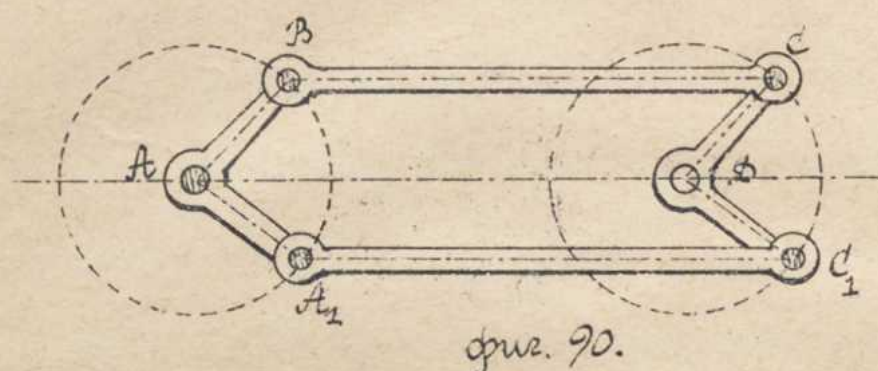
Тремя приведенными видоизмѣненіями и исчерпывается четырехзвенная цѣпь съ двумя смежными поступательными парами. Мы не будемъ останавливаться здѣсь на дальнѣйшихъ преобразованіяхъ цѣпи, какъ не имѣющихъ большого практическаго значенія, и намъ остается теперь разобрать вопросъ о тѣхъ положеніяхъ въ нѣкоторыхъ видахъ четырехзвенной цѣпи, когда механизмъ теряетъ свою сущность, т. е. опредѣленность относительныхъ движеній звеньевъ; эти т. наз. мертвыя положенія заставляютъ насъ прибѣгать къ помощи постороннихъ приспособленій, имѣющихъ своей цѣлью возвращеніе механизму опредѣленности движенія его частей.

ПЕРЕХОДЪ ЧЕРЕЗЪ МЕРТВЫЯ ПОЛОЖЕНІЯ.

Въ обыкновенномъ кривошипномъ механизмѣ паровой машины, гдѣ мертвыя положенія являются дѣйствительно мертвыми, а не только положеніями неопредѣленности движенія, присутствіе большихъ массъ на валу, вращаемомъ кривошипомъ (маховиковъ и пр), обезпечиваетъ самой инерціей ихъ надлежащій переходъ черезъ мертвыя положенія.

Въ механизмѣ параллельнаго кривошипа для той же цѣли къ имѣющемуся уже пар. кривошину присое-

диняють другой, тоже параллельный, кривошипъ, имѣ-
ющій мертвыя положенія, отличныя по времени отъ
перваго ($ABCD$ и AA_1C_1D .. фиг. 90). Второй кри-



вошипъ, какъ и пер-
вый наглухо соеди-
ненъ съ осями A и
 D , такъ что эти

два кривошипа являются, какъ бы соединенными наглу-
хо между собою, какъ и показано на фиг. 90

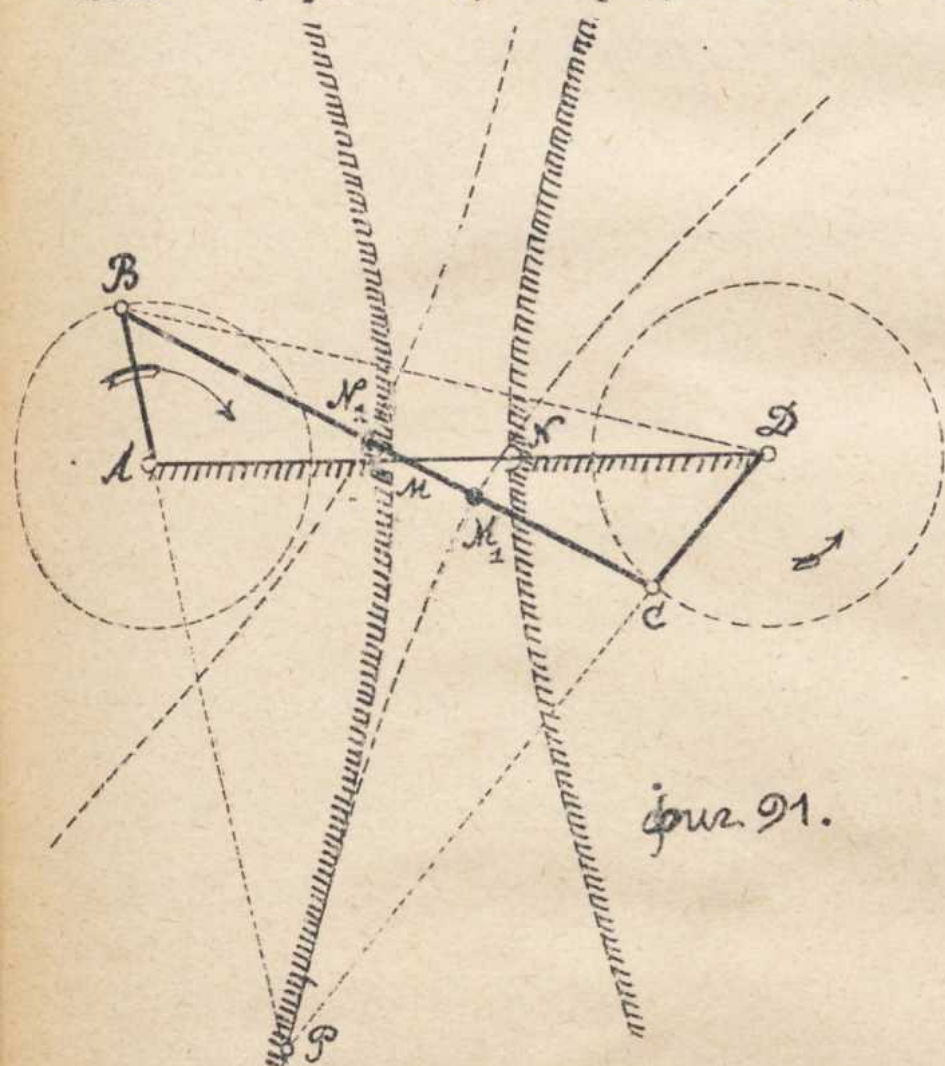
Неопредѣленность движенія теперь устранена со-
вершенно : когда кривошины AB и DC окажутся въ мер-
твомъ положеніи, кривошины AA_1 и DC_1 не будутъ въ та-
ковомъ и переведутъ первые кривошины черезъ это
мертвое положеніе въ опредѣленномъ направленіи. Та-
кую же роль сыграютъ первые кривошины, когда вто-
рые окажутся въ мертвомъ положеніи.

Подобное соединеніе двухъ параллельныхъ кри-
вошиповъ примѣняется въ паровозахъ, гдѣ именно та-
кимъ образомъ соединяють двѣ пары (или больше)
колесъ, лежащихъ съ разныхъ сторонъ.

Въ другихъ случаяхъ устраняють неопредѣленно-
сть т. наз. **з а ц ѣ н л е н і е м ъ**. Сущность это-
го способа состоитъ въ томъ, что опредѣляютъ дви-
женіе какого - либо звена по отношенію къ друго-

му и пристраиваютъ на этихъ звеньяхъ приспособле-
нія, заставляющія звенья около мертвыхъ положеній
продолжать свое прежнее относительное движеніе.
Способомъ этимъ можно съ удобствомъ воспользо-
ваться для устраненія неопред. движенія въ мертв. по-
ложеніяхъ симметричнаго кривошипа.

Пусть у насъ имѣется симметричный кривошипъ
ABCD (фиг. 91). Опредѣлимъ движеніе звена BC по



AD. Центръ мгно-
веннаго вращенія
для звена BC ле-
житъ въ точкѣ не-
ресѣченія радіу-
совъ BA и DC, — до-
пустимъ, въ точ-
кѣ P; при этомъ
имѣемъ : $AB = CD$,
 $AD = BC$, значитъ,
треугольникъ

$\triangle BAD = \triangle DCB$ (сторона BD — общая); значитъ

$\angle ABD = \angle CDB$, что показываетъ, что $\triangle PBD$ — равнобед-
ренный и $PB = PD$; въ такомъ случаѣ можемъ написать
 $PB - AB = PD - CD$, или $PA = PC$, что, наконецъ, даетъ
намъ возможность написать, что $PO - PC = CD = const$, т.е.

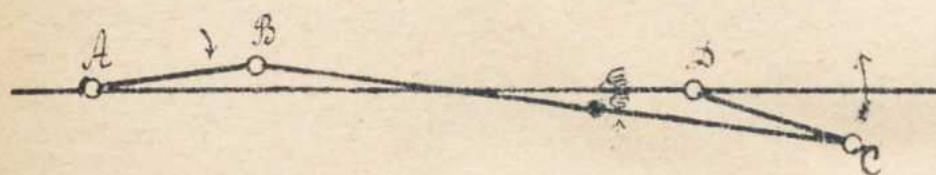
$PQ - PA = \text{const} (= CD)$. значить, точка P есть одна изъ точекъ, разность разстояній которыхъ до двухъ данныхъ неподвижныхъ точекъ A и D постоянна; геометрическое мѣсто такихъ точекъ есть, какъ извѣстно, гиперболою съ фокусами A и D и съ действительною осью $= MN = AB$. Точки M и N служатъ полюсами мгновеннаго вращенія для BC въ обоихъ мертвыхъ положеніяхъ.

Подвижной полюсидой для BC , т.е. полюсидой движенія AD по отношенію къ BC будетъ также гиперболою съ действительною осью $N_1 M_1 = CD = AB$.

Въ одномъ мертвомъ положеніи совпадутъ точки N_1 и N гиперболы, во второмъ — M_1 и M . (неподв. полюсиды отмѣчена у насъ пунктиромъ ~~.....~~, подвижная — простымъ пунктиромъ -----).

Чтобы заставить звено BC въ томъ или другомъ мертвомъ положеніи действительно вращаться около точекъ N и M и тѣмъ самымъ продолжать двигаться въ прежнемъ смыслѣ, а не измѣнять характера движенія, мы можемъ устроить въ точкахъ N_1 и M_1 звена BC кулачки, а въ точкахъ M и N звена AO соотвѣтствующія этимъ кулачкамъ вилки. Теперь понятно, что, когда, напр., кулакъ N_1 совпадетъ съ вилкой N , то при дальнѣйшемъ вращеніи кривошина AB все въ

ту же сторону (указанную на чертежѣ стрѣлкой), стержень BC будетъ вынужденъ повернуться около N, и такъ какъ при этомъ одинъ конецъ его, B, повернется въ прежнемъ направленіи (по стрѣлкѣ), то другой конецъ его C будетъ вынужденъ повернуться въ обратномъ концу B направленіи, т.е. повернется въ томъ же направленіи, что и передъ тѣмъ (фиг. 92).

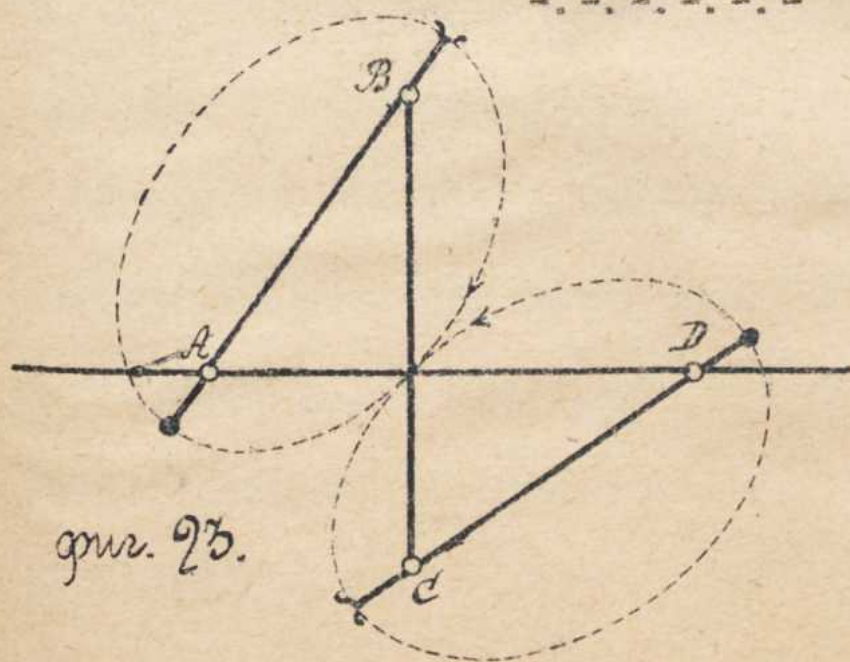


фиг. 92

и, значить, симметричный кривошипъ и дальше

пойдетъ по прежнему симметричному кривошипу, и направленія вращеній останутся прежними.

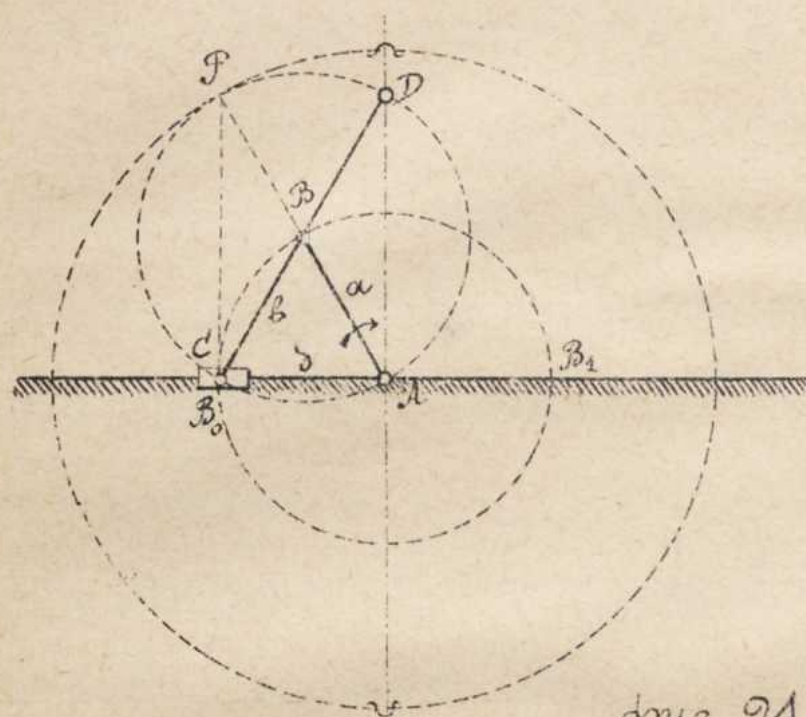
Защѣпление можно устроить и на звеньяхъ AB и CD. Опредѣляя относительное ихъ движеніе, легко найдемъ, что въ этомъ случаѣ одной полоидой будетъ эллипсъ съ фокусами A и B, а другой — также эллипсъ, — съ фокусами C и D (фиг. 93). —



фиг. 93.

Подобные переходы черезъ мертвыя положенія при помощи защѣпления употребляются и

въ нѣкоторыхъ другихъ частныхъ случаяхъ плоской четырехзвенной кинематической цѣпи. Такъ, напр., если у



фиг. 94

насъ имѣется криво-
шинный механизмъ,
въ которомъ длина
кривошина равна дли-
нѣ шатуна, то по-
лучимъ здѣсь мерт-
вые положенія и въ
томъ случаѣ, когда
движеніе происхо-

дитъ отъ кривошина, чего въ общемъ случаѣ механиз-
ма кривошина и шатуна не бываетъ. На самомъ дѣ-
лѣ, когда кривошипъ АВ (фиг. 94), вращаясь, придетъ
въ положеніе, перпендикулярное къ линіи B_0B_1 , то
ось шарнира С ползуна совпадетъ съ осью А, и ша-
тунъ приметъ направленіе такое же, какъ и криво-
шипъ; при дальнѣйшемъ вращеніи кривошина шатунъ, съ
нимъ совпавшій, свободно можетъ вращаться съ нимъ
около оси С, теперь совпавшей съ А.; при этомъ
ползунъ останется неподвижнымъ, и механизмъ обра-
тится въ простую вращательную пару. Устранить эту
неопредѣленность мы можемъ, для чего заставляемъ
шатунъ ВС и въ мертвыхъ положеніяхъ сохранить ха-

рзктеръ его движенія по отношенію, напр., къ непод-
вижному звену δ (фиг. 94).

Полюсъ P мгновеннаго вращенія шатуна найдет-
ся обыкновеннымъ способомъ; при этомъ, вслѣдствіе ра-
венства $BC = AB$, имѣемъ также равенство :

$BC = PB = AB$, т.е. $AP = 2 AB$, что показываетъ намъ,
что неподвижная полоида есть окружность центра A
и радіуса $2a$ ($= 2AB$); подвижную полониду найдемъ,
сдѣлавъ CB неподвижнымъ, — это будетъ окружность съ
центромъ въ B и вдвое меньшимъ радіусомъ.

Движеніе шатуна есть въ данномъ случаѣ движе-
ніе отръзка CD (гдѣ $BD = BC$ есть продолженіе шату-
на) внутри прямого угла CAD . Въ мертвыхъ положе-
ніяхъ полюсами мгновеннаго вращенія шатуна будутъ
точки P_0 и P_1 ; заставимъ шатунъ дѣйствительно вра-
щаться около этихъ точекъ, устроивъ въ P_0 и P_1 вил-
ки, а въ точкѣ D шатуна, совпадающей въ мерт-
выхъ положеніяхъ съ P_0 и P_1 , — кулакъ, могущій сдѣл-
ваться съ этими вилами; тогда неопредѣленность имѣть
мѣста не будетъ.

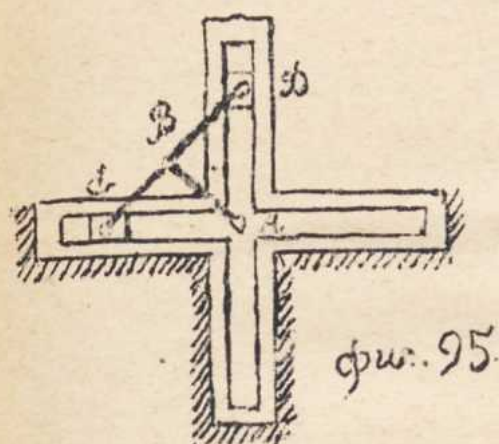
Поставивъ этотъ же механизмъ на AB , увидимъ,
что и здѣсь получатся мертвыя положенія того же рода
и подобнымъ же образомъ устраняемымъ. Здѣсь, когда
движущимъ звеномъ является звено δ (CB), при рав-

номѣрномъ его вращеніи около B , звено δ будетъ также равномерно вращаться около A , но лишь съ вдвое меньшей угловой скоростью, — въ то время какъ звено δ сдѣлаетъ два оборота, звено δ сдѣлаетъ только одинъ, причемъ мертвыхъ положеній не будетъ совсѣмъ.

Но въ томъ случаѣ, когда движущимъ звеномъ является звено δ , — слѣд., вращеніе около A передается вращенію около B съ вдвое большей угловой скоростью, мы опять получимъ неопредѣленность въ движеніи механизма въ тотъ моментъ, когда ось шарнира C совпадетъ съ осью A ; тутъ ничто не помѣшаетъ звену CB остаться неподвижнымъ, а ползуну вращаться вмѣстѣ съ δ около совпавшихъ осей C и A , — механизмъ опять обратится въ простую вращательную пару.

Взявъ опять на продолженіи шатуна въ разстояніи отъ B , равномъ BC , точку D и приладивъ въ ней кулакъ, заставимъ его сцѣпляться въ мертвыхъ положеніяхъ съ вилками, соединенными теперь съ движущимъ звеномъ δ . Но можно сдѣлать иначе: можно въ D пристроить такой же ползунъ, какъ и въ C , а звену δ придать соотвѣтствующія направляющія, перпендикулярныя къ направляющимъ ползуна C (фиг. 95).

Строго говоря, этот последний способ будет уже способом перехода через мертвые положения приба-

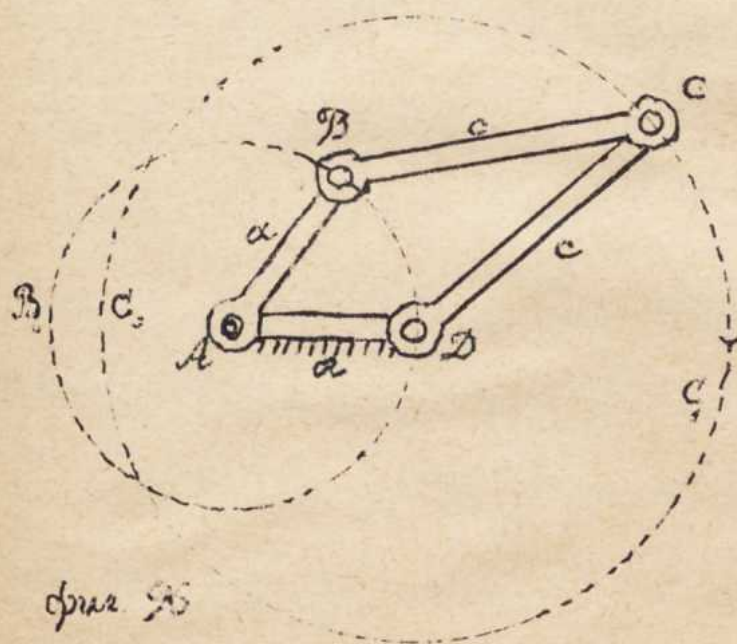


влением механизма, имѣющаго друга мертвые положения сравнительно съ даннымъ. - Рассмотрѣнный механизмъ употребляется иногда для передачи вращательнаго

движенія между параллельными осями при отношеніи скоростей. равномъ $1/2$.

Подобные же способы перехода через мертвые положения употребляются и въ тѣхъ, гораздо болѣе рѣдкихъ случаяхъ, когда имѣемъ частные виды четырехзвенной шарнирной цѣпи съ четырьмя равными попарно звеньями (фиг. 96).

Какъ мы уже знаемъ, механизмъ, поставленный на



короткое звено, даетъ въ этомъ случаѣ двойной кривошипъ, и если движущимъ звеномъ является большій кривошипъ, то мертвые положения имѣютъ мѣсто, когда ось С приходитъ въ

С₁, а В - въ В, ^{или} когда С приходитъ въ С₂, а В опять

въ D; въ этихъ случаяхъ кривошипъ а свободно можетъ оставаться неподвижнымъ, въ то время, какъ оба звена с будутъ вращаться, какъ одно, около оси D, — такимъ образомъ у насъ получится простая вращательная пара.

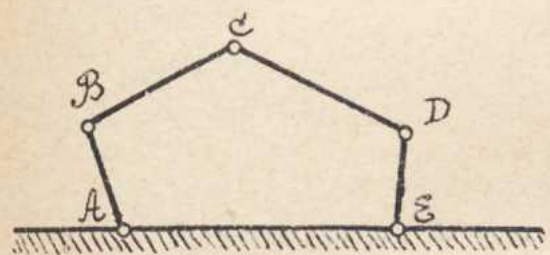
Здѣсь точно также можно устранить получающуюся неопредѣленность движенія сдѣяніемъ въ соответственныхъ положеніяхъ, напр., звеньевъ АВ и CD, для чего нужно отыскать ихъ относительныя полюды и поступить, какъ раньше.

Если этотъ механизмъ будетъ поставленъ на звено с, то, какъ нетрудно видѣть, мертвыя положенія будутъ въ случаѣ полученія движенія отъ кривошипа а, — звено с явится тогда коромысломъ-, и опять будутъ имѣть тотъ же характеръ.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЦѢПЬ СЪ
ПЯТЬЮ ШАРНИРАМИ. СТАНОКЪ
КОХА И МЮЛЛЕРА.

Предыдущимъ параграфомъ мы закончили изслѣдованіе плоской четырехшарнирной цѣпи; переходя къ изученію цѣпей съ большимъ числомъ шарнировъ, замѣтимъ, что увеличеніе числа ихъ (сверхъ четырехъ) ведетъ къ неопредѣленности движенія механизма.

До сихъ поръ мы представляли себѣ механизмъ поставленнымъ на одно какое-либо звено; далѣе, одно изъ звеньевъ приводилось въ движеніе какой-либо вѣншей силой, и тѣмъ самымъ всѣ остальные звенья приводились въ вполне опредѣленное движеніе. Очевидно, что если мы имѣемъ пять вращательныхъ паръ: А, В, С, D и Е (фиг. 97), и поставимъ эту цѣнь, напр.,



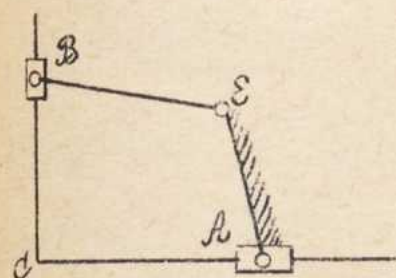
фиг. 97

на звено АЕ, то при вращеніи звена АВ звенья ВС и CD не будутъ имѣть вполне опредѣленнаго движенія, — оно будетъ зависетьъ еще и отъ звена DE; если звено DE неподвижно, то мы опять получимъ обыкновенную четырехзвенную цѣнь; но мы можемъ это звено DE двигать вполне самостоятельно; тогда звенья ВС и CD получатъ нѣкоторое сложное движеніе, зависящее и отъ движенія АВ и отъ движенія DE; слѣдовательно, въ такой цѣпи можно самостоятельно (конечно, — до известной степени) двигать два звена и тогда движеніе двухъ остальныхъ будетъ вполне опредѣленнымъ. Этимъ обстоятельствомъ можно воспользоваться для практическаго выполненія нѣкоторыхъ сложныхъ движеній, требуемыхъ, напр., въ частныхъ случаяхъ обработки металловъ. Мы остановимся здѣсь на одномъ

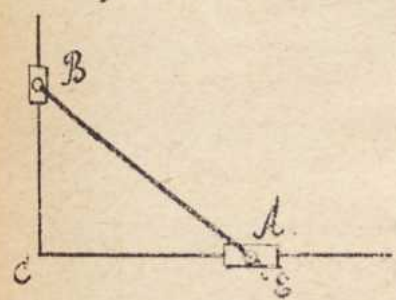
примѣръ, встрѣчающемся на практикѣ, — именно на стан-
кѣ Коха и Мюллера, служащемъ для обтачиванія некру-
глыхъ предметовъ. Мы уже имѣли дѣло со станкомъ
Леонардо- да - Винчи, могущимъ обтачивать по эллип-
самъ; станокъ Коха и Мюллера даетъ возможность вы-
полнять не только эллипсы, но и другія циклическія
кривыя, получаемыя каченіемъ одной окружности внѣ
или внутри другой. Какъ извѣстно, при такомъ каче-
ніи каждая точка, связанная съ подвижной окружно-
стью, совершитъ оборотъ вмѣстѣ съ центромъ своей
окружности около неподвижнаго центра второй и въ
то же время повернется нѣсколько разъ около цен-
тра своей окружности. Слѣдовательно, если представимъ
себѣ нѣкоторую планшайбу, центръ которой будетъ о-
писывать окружность, а планшайба сама въ то же
время будетъ поворачиваться около своего центра, то
какой - либо пишущій или рѣжущій инструментъ оста-
вить на планшайбѣ слѣдъ опредѣленной циклической
кривой. Первое движеніе планшайбы будетъ круговымъ
поступательнымъ, второе — вращательнымъ около своей
оси. Выполнить это сложное движеніе можно при по-
мощи пятизвенной цѣпи, гдѣ движеніе будетъ пере-
даваться одновременно отъ двухъ звеньевъ.

Представимъ себѣ опять муфту Oldham'a; какъ

известно, она есть частный случай четырехзвенной цепи, и при помощи ее можно от оси А передать вращение параллельной ей оси В (см. фиг. 85). Представимъ теперь, что мы придали этому механизму пятую вращательную пару Е и звено ЕА установили неподвижно; тогда, какъ мы выше видѣли, движеніе всего механизма становится въ зависимость отъ дви-



фиг. 98



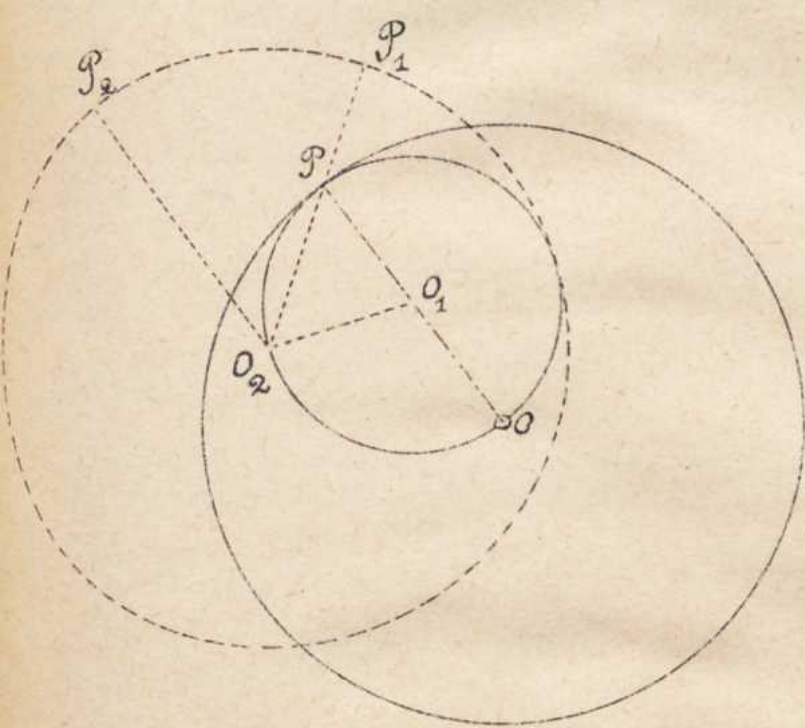
фиг. 99.

женія звена ВЕ: при неподвижномъ звенѣ ВЕ мы будемъ имѣть простую муфту Oldham'a, но при подвижномъ движеніе будетъ уже болѣе сложнымъ. Ось шарнира Е можно устроить совпадающей съ осью шарнира А, и тогда А можно взять въ видѣ пустотѣлаго вала (фиг. 99), свя-

зать съ нимъ ползущку, а Е - въ видѣ полного вала, входящаго внутрь А; оба вала получаютъ вращеніе независимо одинъ отъ другого. Если валъ Е неподвиженъ, и, слѣд., неподвижно и связанное съ нимъ звено ВЕ, то, какъ было сказано, получаемъ муфту Oldham'a; но если валъ А неподвиженъ, а Е (-звено ВЕ) вращается равномерно, тогда направленіе движенія ползущки, связанной съ валомъ А, остается неизмѣннымъ, и мы получаемъ механизмъ двойного ползуна:

при этомъ В будетъ описывать окружность, а ползушка, принадлежащая В, будетъ оставаться все время параллельной самой себѣ. Эту ползушку, вольно сидящую на оси В, можемъ замѣнить, порочно тому, какъ мы это дѣлали въ муфтѣ Ольдгема или станкѣ da_Vinci, цѣлой планшайбой, имѣющей соотвѣтствующія ползушки направляющія; тогда при неподвижномъ пустотѣломъ валѣ А планшайба будетъ перемѣщаться параллельно самой себѣ, а центръ ея опишетъ окружность около геометрической оси А и Е. Но ничто не мѣшаетъ намъ вмѣстѣ съ этимъ вращеніемъ вала Е или звена ВЕ самостоятельно вращать пустотѣлый валъ А и, слѣд., связанную съ нимъ ползушку; тогда это послѣднее вращеніе передается планшайбѣ, и она станетъ вращаться около своей неподвижной оси В. Такъ какъ характеръ передачи вращенія въ муфтѣ Oldham'a нисколько не зависитъ отъ того, гдѣ находится ось В, то равномерное вращеніе вала А будетъ передаваться планшайбѣ равномернымъ же вращеніемъ около ея оси. Такимъ образомъ мы можемъ придать планшайбѣ два движенія: круговое поступательное - вращеніемъ (равномернымъ) вала Е, и равномерно-вращательное - вращеніемъ вала А. Такъ какъ мы можемъ по своему произволу выбирать то или другое число оборотовъ

какъ для вала А, такъ и для вала Б, то тѣмъ самымъ мы заставимъ планшайбу совершить любое число оборотовъ около своего центра въ то время, какъ этотъ послѣдній опишетъ одну окружность около геометрической оси А и Б, а это значить, что мы помощью такого механизма можемъ воспроизвести любую циклическую кривую. — Положимъ, напр., что мы желаемъ какимъ-нибудь пишущимъ орудіемъ оставить на планшайбѣ слѣдъ эллипса. Мы знаемъ, что если какая-нибудь окружность O (фиг. 100) катится по окружности O_1



фиг. 100.

вдвое меньшаго радиуса, находящейся внутри первой, то неподвижный карандашъ начертитъ на плоскости, принадлежащей окружности O , эллипсъ, видъ котораго будетъ

зависѣть отъ положенія карандаша по отношенію къ O_1 . Каченіе окружности O по O_1 можно представить себѣ составленнымъ изъ круговаго поступательнаго движенія (при этомъ центръ O перемѣстится по окружности O_1

по часовой стрѣлкѣ, напр., въ точку O_2), - и вращенія около центра O_2 на уголъ, равный, какъ мы знаемъ, половинѣ угла $O_2 O_1 O$; на самомъ дѣлѣ, точка P перешла теперь въ P_1 и находится, какъ мы знаемъ, на радіусѣ $O_2 P$; но при параллельномъ перенесеніи всей окружности она перешла бы въ P_2 , гдѣ $O_2 P_2 \parallel OP$, и, чтобы привести ее въ надлежащее положеніе, которое имѣло бы мѣсто при дѣйствительномъ каченіи окружности O по O_1 , нужно повернуть окружность O около O_2 на уголъ $P_2 O_1 P_1$, равный половинѣ угла $O_2 O_1 O$, и также по часовой стрѣлкѣ. Отсюда слѣдуетъ, что мы должны вращать оси A и E (фиг. 99) въ одну сторону, но ось E придется вращать съ вдвое большей угловой скоростью, чѣмъ ось A . При такомъ вращеніи карандашъ начертитъ на планшайбѣ эллипсъ. Задаваясь различными окружностями и представляя себѣ каченіе подобно тому, какъ мы это только что продѣлали, мы всегда можемъ узнать, какъ нужно вращать оси, чтобы получить желаемыя циклическія кривыя. Идея воспроизведенія сложнаго движенія планшайбы при помощи такой пятишарнирной цѣпи и лежитъ въ основѣ механизма Коха и Миллера. Детальное устройство его соотвѣтствуетъ приведенной выше схемѣ и представлено на отдѣльномъ чертежѣ.

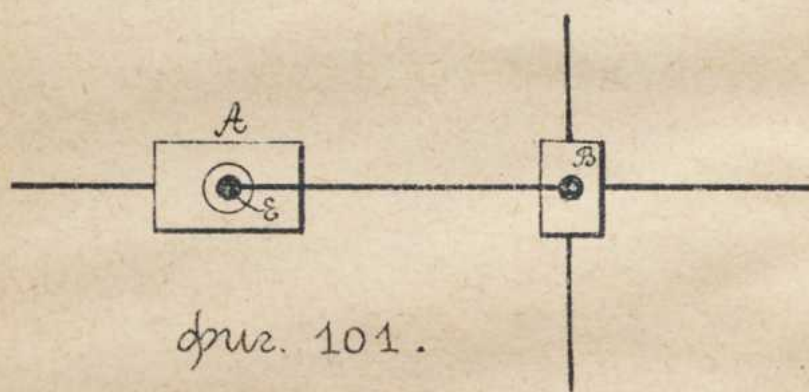
(Таблица 4.)

Въ передней бабкѣ токарнаго станка устраиваются два вала - пустотѣлый А и полный Е. Полный валъ соединенъ наглухо съ шиномъ В планшайбы при помощи болтовъ К, но, какъ видно изъ чертежа, шина В можетъ быть передвигаема перпендикулярно къ плоскости чертежа, такъ что имѣется возможность установить его въ желаемомъ разстояніи отъ геометрической оси А и Е. Пустотѣлый валъ А имѣетъ направляющія mm для ползунки Q (направляющія эти также перпендикулярны къ плоскости чертежа). Ползушка Q имѣетъ кулаки ll , входящіе въ радіальныя направляющія nn планшайбы Р. Въ установленномъ станкѣ направленіе направляющихъ nn перпендикулярно къ направленію mm . Сравнивая детальный чертежъ съ схематическимъ (фиг. 99) видимъ, что ползункѣ при А схематическаго чертежа соответствуютъ здѣсь направляющія mm , а звену С соответствуетъ ползушка Q вмѣстѣ съ кулаками ll ; направляющія планшайбы представляютъ ползушку при В схематическаго чертежа. Если представить себѣ шину В отодвинутымъ за плоскость чертежа, то это будетъ соответствовать въ схематическомъ чертежѣ положенію шарнира В, когда онъ находится какъ разъ въ направленіи оси ползунки (фиг. 101.)

Разсмотрѣвъ наиболее часто встрѣчающіеся механизмы, получаемые изъ вращательныхъ паръ съ параллельными осями, мы теперь перейдемъ къ сочетанію винтовыхъ паръ, представляющихъ общій случай вращательной и поступательной пары, но опять ограничимся разборомъ паръ съ одинаково направленными осями.

В И Н Т О В Ы Я П А Р Ы .

Винтовое движеніе, какъ мы знаемъ, есть сочетаніе вращательнаго движенія около нѣкоторой оси и



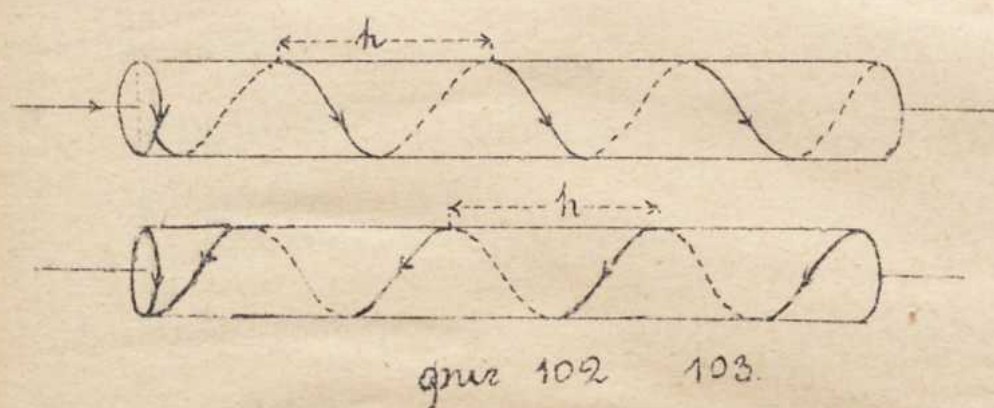
фиг. 101.

поступательнаго вдоль той же оси; но одно и то же вращательное движеніе, положимъ,

происходящее по часовой стрѣлкѣ, можно сочетать съ поступательнымъ двояко : одинъ разъ при одномъ направленіи поступательнаго движенія, другой разъ при противоположномъ, что, въ свою очередь, обуславливаетъ различіе винтовыхъ паръ.

Пусть передъ нами находится винтовая пара; будемъ смотрѣть на нее вдоль ея оси; нариска этой пары м. б. такова, что при вращеніи по часовой стрѣлкѣ одного элемента относительно другого, остающагося неподвижнымъ, первый будетъ удаляться отъ насъ; такимъ образомъ здѣсь имѣемъ сочетаніе вращательна-

го движенія съ поступательнымъ въ направленіи отъ насъ; такая наръзка, а вмѣстѣ съ ней и вся пара, называется правой. Но можно устроить наръзку такъ, что элементъ пары, вращаясь опять по часовой стрѣлкѣ, станетъ приближаться къ намъ, — въ этомъ случаѣ имѣемъ сочетаніе того же вращательнаго движенія съ поступательнымъ, совершающимся теперь въ другую сторону, — такая наръзка называется лѣвой. Обѣ наръзки схематически изображены на фиг. 102 и 103; стрѣлками показаны соответствующія направленія вращательнаго и поступательнаго движеній



Легко видѣть, что, если мы будемъ вращать

элементъ пары противъ часовой стрѣлки, то въ первомъ случаѣ — въ случаѣ правой пары (фиг. 102), элементъ будетъ приближаться къ намъ, а во второмъ (фиг. 103) — удаляться отъ насъ. При вращеніи элемен-

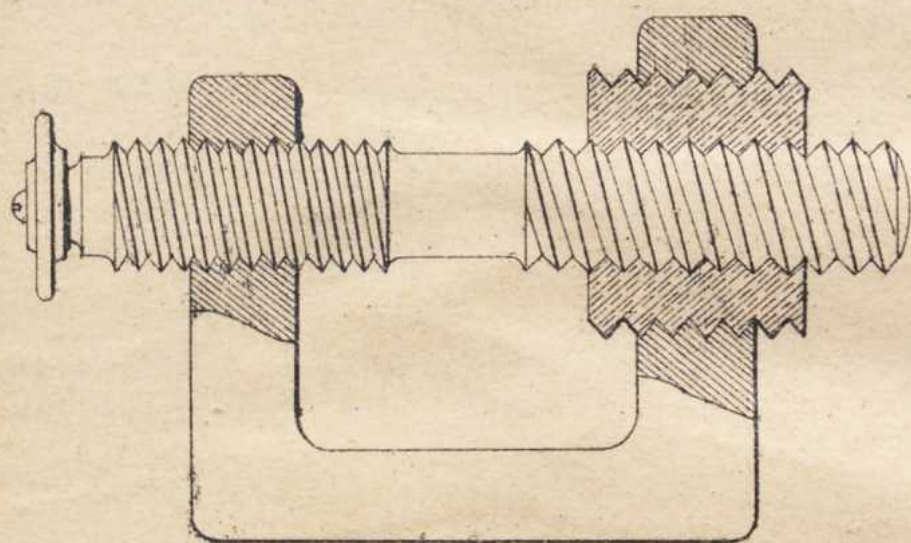
та по часовой стрѣлкѣ на 360° , онъ, въ случаѣ п р а-
в о й нарѣзки, у д а л и т с я отъ насъ на вели-
чину h , равную шагу винтовой линіи (разстоянію
двухъ сосѣднихъ точекъ винтовой линіи, лежащихъ на
одной образующей цилиндра). Изъ самаго закона обра-
зованія винтовой линіи на поверхности круглаго ци-
линдра слѣдуетъ, что, въ случаѣ поворота элемента па-
ры вообще на нѣкоторый уголъ φ , элементъ подвинет-
ся вдоль оси цилиндра на величину, равную $\frac{\varphi}{2\pi} \cdot h$
или на αh , гдѣ α есть величина поворота въ
частяхъ полного оборота.

При томъ же поворотѣ α элементъ лѣвой пары,
имѣющей тотъ же шагъ h подвинется на ту же ве-
личину αh , но въ другую сторону (къ намъ); ес-
ли первую величину αh считать положительной, то
вторую можно считать отрицательной. Такимъ обра-
зомъ является возможность алгебраически различать
правыя и лѣвыя нарѣзки тѣмъ, что у первыхъ будемъ
считать шагъ положительнымъ, у вторыхъ — отрицатель-
нымъ; повороты же, какъ это принято вообще, счи-
таются положительными въ направленіи часовой стрѣл-
ки и отрицательными — въ обратную сторону . —

ТРЕХЗВЕННАЯ ВИНТОВАЯ

ЦѢПЬ.

Обратимся теперь къ сочетанію винтовыхъ паръ, ограничиваясь простѣйшими. Здѣсь, въ противоположность вращательнымъ и поступательнымъ парамъ, можно составить замкнутую цѣпь изъ паръ, оси которыхъ совпадаютъ, и именно, изъ трехъ паръ. Дѣйствительно, не трудно представить себѣ винтъ а (фиг. 104), на



фиг. 104.

оси
кото-
раго
имѣ-
ется
еще,
какой

нибудь винтъ; гайка в этого послѣдняго имѣетъ на своей внѣшней сторонѣ нарезку и служить такимъ образомъ въ то же время винтомъ, гайка для котораго с соединена неразрывно съ гайкой для а. Получаемъ такимъ образомъ цѣпь изъ трехъ одноосныхъ винтовыхъ паръ : А (с , а), В (в , а), С (в , с). Рассмотримъ относительныя движенія звеньевъ этой цѣпи.

Повертываемъ а относительно с на α , гдѣ α

выражено въ долях π и пусть B повернется отно-
 сительно A на β , тогда относительно C оно повернет-
 ся на $(\alpha + \beta)$, и, если шаги пары мы назовемъ со-
 отвѣтственно черезъ x, y и z , то найдемъ, что посту-
 пательное движеніе A относительно C равно αx , B
 относительно A равно βy ; слѣд. B относительно C
 подвинулось на $(\alpha x + \beta y)$; но такъ какъ оно повер-
 нулось въ то же время относительно C на $(\alpha + \beta)$, а
 шагъ этой пары (B, C) есть z , то поступательное пе-
 ремѣщеніе B выразится въ то же время въ видѣ $z(\alpha + \beta)$,
 что даетъ намъ возможность написать равенство :

$$\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta) z.$$

Отсюда видимъ, что при данныхъ шагахъ, т. е. для дан-
 ныхъ винтовыхъ паръ, опредѣленному повороту α звена
 A относительно C соотвѣтствуетъ вполне опредѣленное
 движеніе звена B относительно того же звена C , —
 другими словами, цѣпь является вполне опредѣленной.

Если механизмъ былъ поставленъ на звено C , то дви-
 женіе звена B относительно C является абсолютнымъ
 и, слѣд., при поворотѣ звена A на α , звено B по-
 вернется на

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \frac{x - y}{z - y}$$

и подвинется на

$$(\alpha + \beta) z = \alpha \cdot z \cdot \frac{x - y}{z - y},$$

какъ это видно изъ уравненія, связывающаго α и β .

Если механизмъ поставленъ на звено a ; то абсолютнымъ движеніемъ звена b будетъ его движеніе относительно a . У насъ α было поворотомъ звена a относительно C ; слѣдовт: $(-\alpha)$ являлось поворотомъ c относительно a ; поэтому теперь $(+\alpha)$ будетъ выражать абсолютный поворотъ звена c , а β — абсолютный поворотъ звена b , причемъ α и β опять связаны прежнимъ ур-іемъ; оно намъ даетъ

$$\beta = (-\alpha) \cdot \frac{x-z}{y-z};$$

звено c подвинется на $(-\alpha) \cdot x$, а звено b — на $\beta \cdot y$, т.е. на

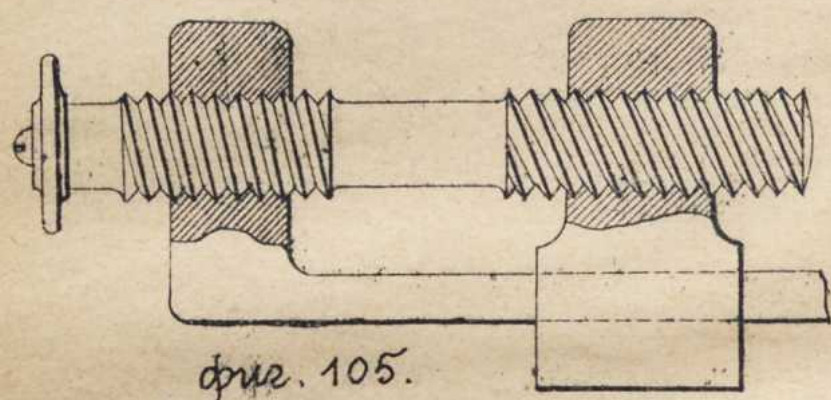
$$-\alpha y \cdot \frac{x-z}{y-z}.$$

Точно также при неподвижномъ b имѣемъ абсолютный поворотъ звена a равнымъ $(-\beta)$, а звена c — равнымъ $[-(\alpha + \beta)]$, гдѣ α и β опять связаны приведеннымъ выше уравненіемъ; нетрудно получить теперь передвиженія a и c .

Въ такомъ общемъ видѣ механизмъ этотъ почти не имѣетъ примѣненій. Гораздо чаще встрѣчаются частные случаи этой трехзвенной винтовой цѣпи, когда какая-либо пара обращается въ поступательную или вращательную.

Предположимъ, что пара C (b, c) обратилась въ поступательную пару съ направленіемъ движенія, парал-

лельнымъ общей оси оставшихся винтовъ (фиг. 105). По-
ставивъ механизмъ на с ; мы можемъ вращеніемъ винта а
передвигать взадъ и впередъ гайку в второго винта,
имѣющую извнѣ направляющія, параллельныя оси винта
а (поступательная пара с). Обозначимъ, какъ и пре-
жде, шаги обоихъ винтовъ черезъ x и y ; поворотъ α



звена а относи-
тельно с теперь
будетъ въ то же
время и поворо-
томъ а относи-

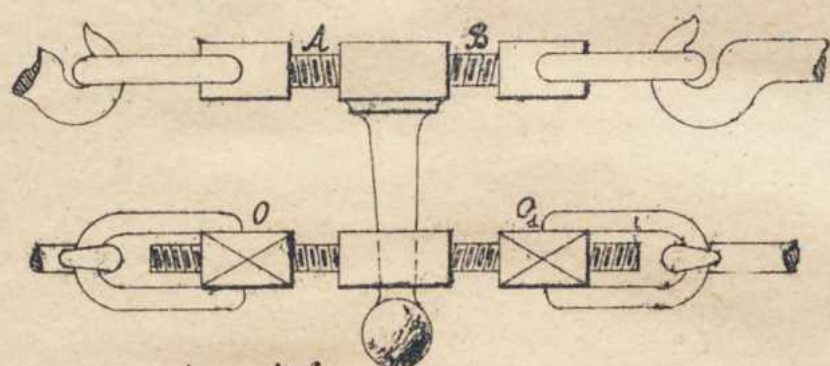
тельно в, такъ какъ гайка в сама вращаться не мо-
жетъ, или, другими словами, (β) , - поворотъ в от-
носительно а, - будетъ теперь равенъ $(-\alpha)$. Та-
кимъ образомъ звено в относительно звена а подви-
нется на величину $(-ay)$; но звено а подвинется
относительно звена с (т.е. абсолютно) на величину
 αx , слѣд., гайка в подвинется абсолютно на величи-
ну $\alpha(x - y)$. - Это выраженіе могло быть получено
изъ найденнаго выше (см. стр. 149) соотношенія:

$$(\alpha + \beta) z = \alpha z \cdot \frac{x - y}{z - y},$$

въ которомъ, примѣнительно къ рассматриваемому случаю
пришлось бы положить $z = \infty$ (для поступательной па-
ры); произведевіе же $(\alpha + \beta) z$, обращающееся теперь

въ 0. ∞ (ибо $(\alpha \neq \beta)$ теперь равно нулю) попрежнему остается осевымъ перемѣщеніемъ гайки в.

Какъ показиваетъ выраженіе $\alpha \cdot (x \neq y)$, передвиженіе гайки в можетъ быть сдѣлано произвольно малымъ, — стоитъ только шаги обоихъ винтовъ, при одинаковой нарезкѣ (правой или лѣвой) сдѣлать мало разнящимися другъ отъ друга. Подобный механизмъ носитъ названіе дифференціальной винта, и имъ можно пользоваться для измѣренія малыхъ отрѣзковъ числомъ оборотовъ винта а, а также и во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ требует-



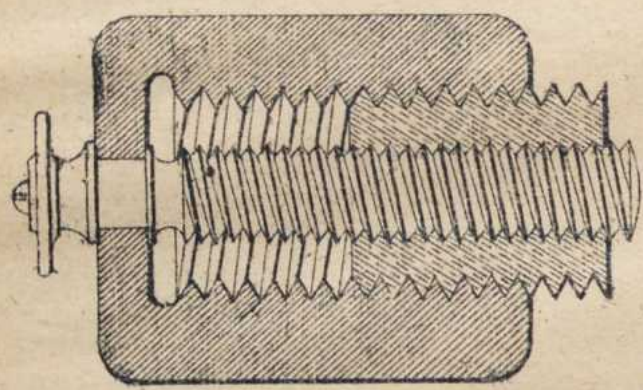
фиг. 106.

ся весьма малое передвиженіе. Если теперь видоизмѣ-

нить эту цѣпь тѣмъ, что сдѣлать нарезки обоихъ винтовъ противоположными, то передвиженіе гайки будетъ равно $\alpha (x + y)$. Въ такомъ измѣненномъ видѣ этотъ механизмъ употребляется для соединенія вагоновъ (фиг. 106). Здѣсь винты А и В, принадлежащіе звену а, имѣютъ: одинъ (А) — правую нарезку, а другой (В) — лѣвую. Гайки О и О₁ для этихъ винтовъ соединяются при помощи крюковъ соотвѣтственно съ однимъ и

другимъ вагономъ. Если мы будемъ вращать звено a по часовой стрѣлкѣ, (смотря со стороны O_1), то, очевидно, винтъ A будетъ входить въ гайку O ; т.е. гайка O будетъ приближаться къ серединѣ звена a ; гайка O_1 точно также будетъ приближаться къ серединѣ a ; значить, оба вагоны будутъ сдвигаться на величину $(x + y)$ при одномъ оборотѣ звена a .

Второе частное видоизмѣненіе нашей трехзвенной цѣпи получимъ, если сдѣлаемъ пару A (c, a) вращательной, т.е. одинъ изъ винтовъ a обратимъ въ простой шипъ, вращающійся въ подшипникѣ неподвижнаго звена c (фиг. 107). Въ этомъ случаѣ шагъ $x=0$, и при поворотѣ звена a на α получаемъ по-



воротъ гайки b въ

видѣ

$$\alpha \cdot \frac{y}{y-z},$$

гдѣ y и z опять обозначаютъ шаги оставшихся винтовъ; передвиженіе гайки b выразится черезъ

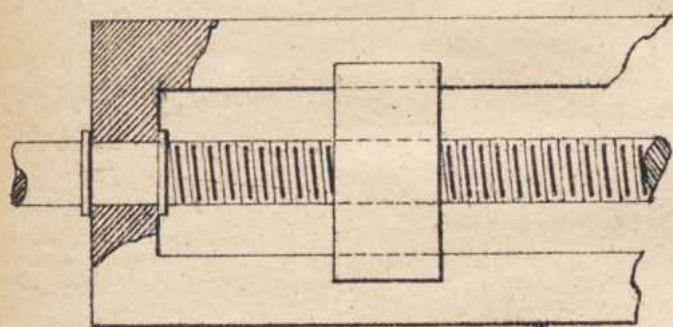
$$\alpha z \cdot \frac{y}{y-z}.$$

Какъ это, такъ и предыдущее выраженіе можно получить изъ выраженія на стр. 149, гдѣ придется положить $x=0$.

Въ противоположность тому, что мы имѣли для предыдущаго случая (дифф. винта), здѣсь при данномъ обо-

воротъ α передвиженіе можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ, если шаги x и y будутъ сдѣланы мало разнящимися одинъ отъ другого.

Если теперь пару A (a, c) сдѣлаемъ вращательной, а пару C (b, c) поступательной, то получимъ одно изъ наиболее часто встрѣчаемыхъ на практикѣ видоизмѣненій этого механизма (фиг. 108). Здѣсь при поворотѣ винта a на α , гайка b будетъ подвигаться въ ту или другую сторону на величину αx , гдѣ x есть шагъ винта; другими словами, одинъ элементъ (a) винтовой пары B (b, a) имѣетъ только вращательное



фиг. 108.

движеніе, другой же (b) — только поступательное.

Описанный механизмъ применяется въ параллельныхъ тискахъ и во многихъ

машинахъ по обработкѣ металловъ и дерева, тамъ, гдѣ, вообще говоря, равномерное вращательное движеніе желательно преобразовать въ равномерное же и достаточно медленное поступательное, напр., при движеніи суппорта въ такъ называемыхъ самоточкахъ. Суппортъ въ такихъ случаяхъ имѣетъ гайку, соответствующую гайкѣ (b), звено же (a) представляетъ шпиндель, снабженный нарезкой и вращающійся въ подшипникахъ, укрѣп-

134
ленныхъ въ станинѣ, (звено- с) самоточки.

= Рассмотрѣніемъ этого механизма мы заканчиваемъ
рассмотрѣніе винтовыхъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вообще низ-
шихъ кинематическихъ паръ

К Л А С С И Ф И К А Ц І Я М Е Х А Н И З - М О В Ъ .

Высшими кинематическими парами, какъ мы знаемъ,
будутъ такія, въ которыхъ соприкосновеніе элементовъ
происходитъ только по линіямъ или точкамъ. При изслѣ-
дованіи механизмовъ, составленныхъ изъ такихъ паръ, при-
ходится держаться иного порядка изложенія, нежели при
рассмотрѣніи низшихъ паръ. Тамъ, въ виду ограничен-
наго числа самихъ паръ, можно было до извѣстной сте-
пени систематически исчерпать наиболѣе важныя ихъ ком-
бинаціи; здѣсь же, при безграничномъ числѣ какъ самихъ
паръ, такъ и ихъ комбинацій, нельзя произвести подоб-
ный систематическій обзоръ механизмовъ, какъ возмож-
ныхъ сочетаній изъ тѣхъ или другихъ винтовыхъ паръ.
Является поэтому необходимость заранѣе положить въ ос-
нову изложенія болѣе или менѣе искусственную классифи-

кацію механизмів, а такъ какъ во всякомъ механизмѣ движеніе какого-либо звена должно передаваться въ опредѣленномъ видѣ другимъ звеньямъ, то на этомъ основаніи въ основу классификаціи можно положить именно характеръ передачи движенія; механизмъ здѣсь рассматривается, какъ преобразователь даннаго движенія въ желаемое для насъ. Преобразование это можетъ заключаться какъ въ измѣненіи направленія движенія, такъ и въ измѣненіи его скорости; при этомъ измѣненные факторы движенія (скорость и направленіе) могутъ оставаться или въ постоянномъ отношеніи съ основными, или въ перемѣнномъ; можно, наприкладъ, передавать вращеніе отъ одной оси къ другой въ сторону, скажемъ, противоположную и съ отношеніемъ скоростей постояннымъ или перемѣннымъ по извѣстному заранее данному закону.

Далѣе можно различать, происходитъ ли передача при помощи непосредственнаго соприкосновенія двухъ звеньевъ, или при помощи промежуточныхъ звеньевъ. Такъ, наприкладъ, въ кривошипномъ механизмѣ вращательное движеніе кривошипа передается въ видѣ возвратнаго поступательнаго движенія ползуна (т.е. отношеніе и скоростей, и направленій здѣсь перемѣнно), но не непосредственно, а при помощи промежуточнаго звена - шатуна.

Эти признаки характера передачи, т.е. отношенія фак-

торовъ движенія, а также отсутствіе или существованіе промѣжуточныхъ звеньевъ и положены въ основу классификаціи Виллиса (знаменитаго англійскаго ученаго), коей мы, по примѣру проф. Д. С. Вернова, и будемъ придерживаться въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Механизмы раздѣлены Виллисомъ на три класса. Къ п е р в о м у отнесены тѣ, въ которыхъ передача происходитъ непосредственнымъ соприкосновеніемъ; ко второму — механизмы , съ передачей движенія при помощи п р о м е ж у т о ч н ы х ъ т в е р д ы х ъ , и къ третьему — ж и д к и х ъ и г и б к и х ъ т ѣ л ѣ .

Каждый классъ дѣлится на 3 отдѣла, сообразно тому каковы отношенія факторовъ движенія: въ первомъ отдѣлѣ отношенія направленій и скоростей п о с т о я н н ы , во второмъ — отношеніе скоростей п е р е м ѣ н н о , и въ третьемъ — м ѣ н я ю т с я и то, и другое отношеніе.

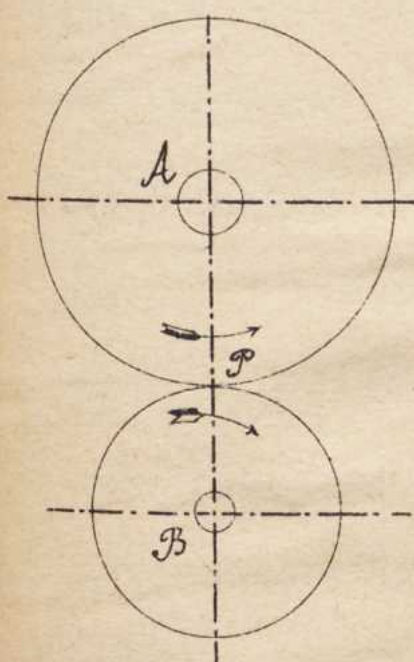
Согласно такой классификаціи прежде всего мы обратимся къ механизмамъ, передающимъ движеніе непосредственнымъ соприкосновеніемъ, и съ постояннымъ отношеніемъ какъ между направленіями, такъ и между скоростями движеній.

Передача движенія непосред-
ственнымъ прикосновеніемъ.

Отд. I. Отношенія между ско-
ростями и направленіями по-
стоянно.

1. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ФРИКЦИ- ОННАЯ ПЕРЕДАЧА.

Здѣсь важнѣйшими являются механизмы для переда-
чи вращательнаго движенія между двумя какими - либо
осями. Разсмотримъ, какъ можно устроить такую передачу
въ случаѣ параллельныхъ осей. Пусть имѣются двѣ парал-
лельныхъ оси А и В (фиг. 109). Пусть, далѣе, систе-
ма, связанная съ осью А, вращается
съ угловой скоростью ω , система же,
связанная съ осью В, должна вра-
щаться со скоростью ω_1 ; пусть, на-
конецъ, отношеніе этихъ скоростей не
мѣняется, такъ что



фиг. 109.

$$\frac{\omega}{\omega_1} = n = \text{const} \dots \dots (1)$$

Вращенія около параллельныхъ осей
суть движенія, параллельныя плоскости; поэтому разсмо-
тримъ какое - либо плоское сѣченіе обѣихъ системъ,
сдѣланное перпендикулярно къ направленію осей. Пред-

положимъ, что направленія вращеній системъ А и В противоположны, т.е. вращеніе системы А противъ часовой стрѣлки съ угловой скоростью ω должно передаваться системѣ В вращеніемъ по часовой стрѣлкѣ и съ заданной угловой скоростью ω_1 , гдѣ $\omega : \omega_1 = n$, причемъ n заранее дано. Это число n называется передаточнымъ числомъ.

Предположимъ, что мы уже устроили систему удовлетворяющую предъявленнымъ условіямъ, и теперь рассмотримъ, какъ движется система А относительно системы В. Для этого придаемъ обѣмъ системамъ вращательное движеніе около В со скоростью ω_1 , но направленное въ сторону, противоположную действительному вращенію системы В. Тогда, очевидно, система В придетъ въ покой, а получаемое абсолютное движеніе системы А и дастъ намъ ея движеніе относительно В.

Система А имѣетъ теперь 2 движенія: она вращается около оси В съ угловой скоростью ω_1 , а около оси А — со скоростью ω . Вслѣдствіе перваго изъ этихъ движеній ось А будетъ описывать около оси В цилиндрическую поверхность, и, слѣд., въ плоскомъ сѣченіи — кругъ центра В. Въ каждой данный моментъ оба вращенія — около А и около В — можно замѣнить однимъ вращеніемъ около некоторой промежуточной оси Р, положеніе ко-

торой относительно прежних осей находится по общим правилам сложения вращательных движений между параллельными осями : точка Р будет дѣлить разстояніе между А и В на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ, такъ что точка Р должна удовлетворять соотношенію

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{n} \quad (2)$$

вращеніе же около этой точки Р будетъ, конечно, въ ту же сторону, что и оба составныхъ.

Такъ какъ разстояніе АВ между осями не мѣняется, а отношеніе АР: ВР есть величина постоянная, кк. это явствуеть изъ (2), гдѣ n пост., то и разстояніе точки Р (въ плоскости сѣченія) отъ В будетъ постояннымъ :

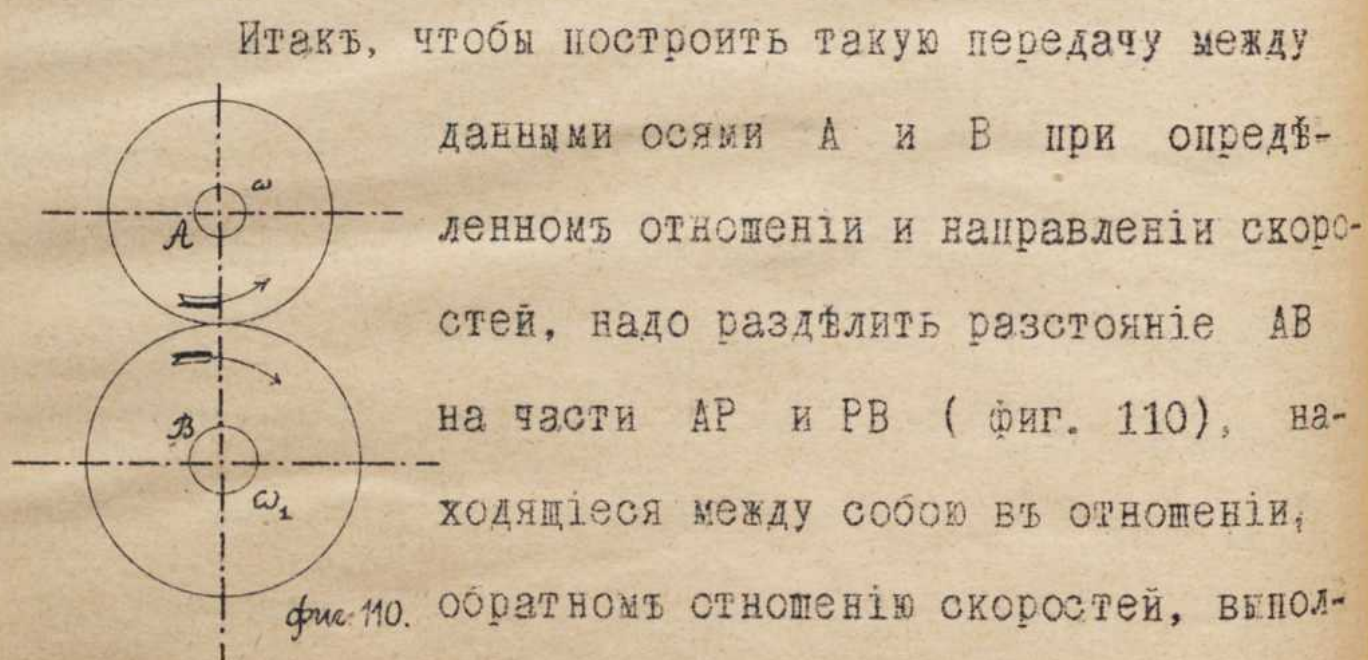
$$BP = const. = AB \frac{\omega}{\omega + \omega_1} = AB \frac{n}{n+1} \quad (3).$$

Такимъ образомъ, неподвижной полоидой плоской системы А въ ея движеніи относительно В будетъ окружность центра В и радіуса ВР (фиг. 109).

Не трудно видѣть, что подвижной полоидой будетъ окружность центра А и радіуса АР.

Такимъ образомъ, движеніе системы А относительно В приводится къ каченію одной окружности по другой въ плоскости сѣченія или, - въ пространствѣ, къ

каченію одного цилиндра по другому. Если мы выполнимъ въ дѣйствительности оба цилиндра такъ, чтобы они плотно прикасались другъ къ другу и не могли бы имѣть относительнаго скольженія, то при вращеніи одного изъ нихъ около A съ угловой скоростью ω , мы получимъ вращеніе другого около B съ угловой скоростью ω_1 , гдѣ ω_1 выразится въ видѣ $\omega_1 = \frac{\omega}{n}$; на самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе тренія цилиндра A будетъ увлекать за собою цилиндръ B , и, такъ какъ скольженія, по нашему предположенію, нѣтъ, то относительное движеніе цилиндровъ будетъ каченіемъ одного по другому, цилиндры же эти построены именно для даннаго опредѣленнаго отношенія $\frac{\omega}{\omega_1}$. Пользуясь такимъ методомъ, мы можемъ, слѣдовательно, устроить передачу вращательныхъ движеній съ постояннымъ отношеніемъ скоростей; передачи такого вида наз. ц и л и н д р и ч е с к и м и ф р и к ц і о н н ы м и п е р е д а ч а м и.



нить круглые цилиндры радиусовъ AP и PB , насадить ихъ на оси A и B , устроить плотное соприкосновение между ними, для чего потребуется нажатіе ихъ другъ на друга, съ опредѣленнымъ усиліемъ, зависящимъ, конечно, отъ относительнаго тренія матеріаловъ, изъ которыхъ сдѣланы цилиндры; нажатіемъ этимъ мы и устраняемъ относительное скольженіе цилиндровъ.

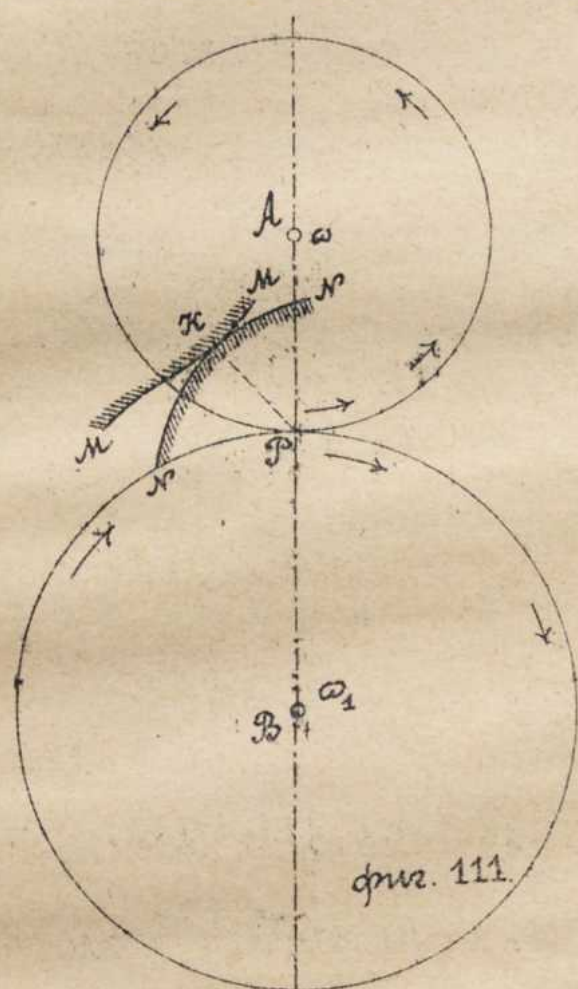
Въ указанномъ видѣ передача примѣняется довольно часто; но такъ какъ при ея примѣненіи приходится считаться съ нажатіемъ осей другъ къ другу, часто совершенно нежелательнымъ, то эту фрикціонную передачу замѣняютъ зацѣпленіемъ.

ЗАМѢНА КАТАЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ СКОЛЬЗЯЩИМИ.

Представимъ себѣ въ системѣ A (фиг. 111.) нѣкую цилиндрическую поверхность, профиль которой пусть будетъ MM , а въ системѣ B также цилиндрическую поверхность съ профилемъ NN находящуюся въ соприкосновеніи съ первой; вращая A , мы, при помощи давленія поверхности MM на поверхность NN можемъ заставить вращаться и систему B . Спрашивается теперь, какое соотношение должно существовать между этими двумя про-

фнлями, чтобы вращеніе около A съ угловой скоростью ω могло передаться B со скоростью ω_1 , причемъ должно быть выполнено условіе : $\omega : \omega_1 = n$ (данному числу).

Система B должна вращаться со скоростью ω_1 ; по-
этому, если мы въ какой - нибудь моментъ придадимъ об-
имъ системамъ еще общее вращеніе около оси B со скоро-



стью ω_1 , направленной, од-
нако, въ противоположную
сторону, то система B
должна придти въ покой;
система A (въ плоскомъ
сѣченіи), а, слѣд., и про-
филь MM , въ этотъ моментъ
будутъ вращаться около
полюса P , находямаго
указаннымъ выше спосо-
бомъ. Но профиль MM , по

условію, долженъ находиться въ соприкосновеніи съ про-
филемъ NN , допустимъ, въ данный моментъ въ точкѣ K ;
а такъ какъ, съ другой стороны, система B должна ос-
таваться въ покой, то для того, чтобы при своемъ враще-
ніи около P этотъ профиль MM не стремился сдви-
нуть профиля NN , движеніе точки K его въ этотъ мо-

ментъ должно происходить по касательной къ профилю NN въ той же точкѣ K , а это будетъ выполнено, если нормаль къ обоимъ профилямъ въ точкѣ K будетъ проходить черезъ полюсъ P .

Приведенное разсужденіе остается справедливымъ для всякаго момента, поэтому отсюда вытекаетъ, что профиль NN долженъ служить огибающей профиля MM при движеніи системы A относительно B .

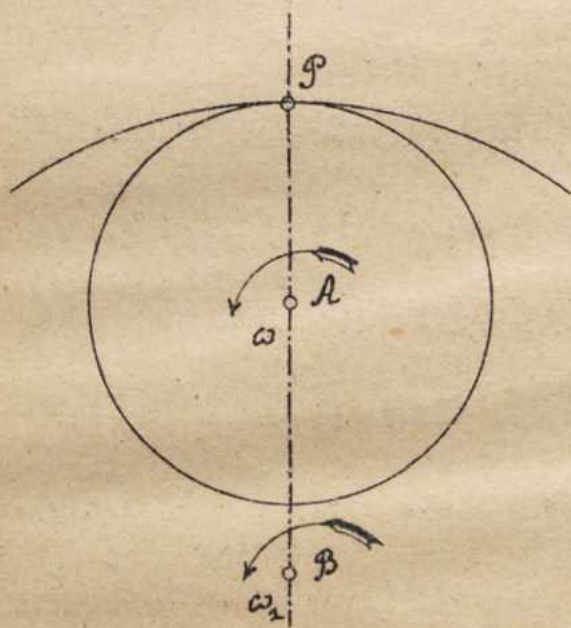
Итакъ, задаваясь какимъ-нибудь профилемъ MM въ системѣ A , для данной опредѣленной передачи мы найдемъ соотвѣтствующій ему, или, какъ говорятъ, сопряженный ему профиль въ системѣ B въ видѣ огибающей профиля MM при каченіи полоиды, связанной съ осью A , по полоидѣ, связанной съ B . — Устроивъ далѣе цилиндрическія поверхности MM и NN съ направляющими, параллельными осямъ, мы приобрѣтемъ возможность передать вращеніе около оси A вращеніемъ около оси B съ желаемымъ отношеніемъ скоростей. При этомъ вращеніи поверхности MM и NN будутъ находиться въ соприкосновеніи, и общая нормаль ихъ въ точкѣ соприкосновенія пройдетъ черезъ полюсъ P , вполне и единственно опредѣляемый на линіи AB для данной передачи.

Относительное движеніе профиля MM по NN при вращеніи обѣихъ системъ будетъ, какъ это мы знаемъ

изъ свойствъ огибающихъ и огибаемыхъ, сопровождается скольженіемъ. Такъ какъ угловая скорость вращенія MM около полюса P для данной передачи (при противоположныхъ вращеніяхъ A и B) выразится черезъ $(\omega \mp \omega_1)$ то скорость скольженія въ данный моментъ будетъ равна $r (\omega \mp \omega_1)$, гдѣ черезъ r обозначена длина нормали KP .

Не трудно, подобно вышеизложенному, разобрать и тотъ случай, когда вращенія около A и B должны оба совершаться въ одну сторону съ сохраненіемъ, по прежнему, постояннаго отношенія между угловыми скоростями: $\omega : \omega_1 = n$, гдѣ n дано

Положимъ, что $\omega > \omega_1$; тогда полюсъ мгновеннаго вращенія въ движеніи A относительно B найдет-



фиг. 112.

ся по общимъ правиламъ въ точкѣ P на продолженіи линіи AB (внѣ отрезка AB) въ сторону A (фиг. 112), причемъ разстоянія PA и PB должны удовлетворять соотношенію: $PA : PB = \omega : \omega_1$.

Полоидами будутъ здѣсь опять окружности центровъ A и B и радіусовъ AP и BP ; только одна изъ нихъ, A будетъ находится теперь

внутри другой, В. Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ случаѣ передачи вращенія въ противоположную сторону, можно представить себѣ два профиля, связанные съ этими полоидами, выполнить по нимъ цилиндрическія поверхности, при помощи которыхъ и осуществится наша передача. Снова, какъ , и въ предыдущемъ случаѣ, профили должны находиться въ указанномъ соотношеніи, т.е. одинъ изъ нихъ долженъ представлять собою огибающую положеній второго въ относительномъ движеніи полоиды, принадлежащей первому профилю, по полоидѣ, принадлежащей второму. Разница будетъ здѣсь только въ скорости относительнаго скольженія профилей, и нетрудно видѣть, что въ этомъ случаѣ она выразится въ видѣ $r(\omega - \omega_1)$, гдѣ черезъ r мы попрежнему обозначили отрѣзокъ общей нормали отъ полюса до точки прикосновенія; вторымъ же факторомъ произведенія взята разность $(\omega - \omega_1)$, — разность потому, что относительная скорость вращения здѣсь равна разности (а прежде — суммѣ) угловыхъ скоростей обѣихъ системъ.

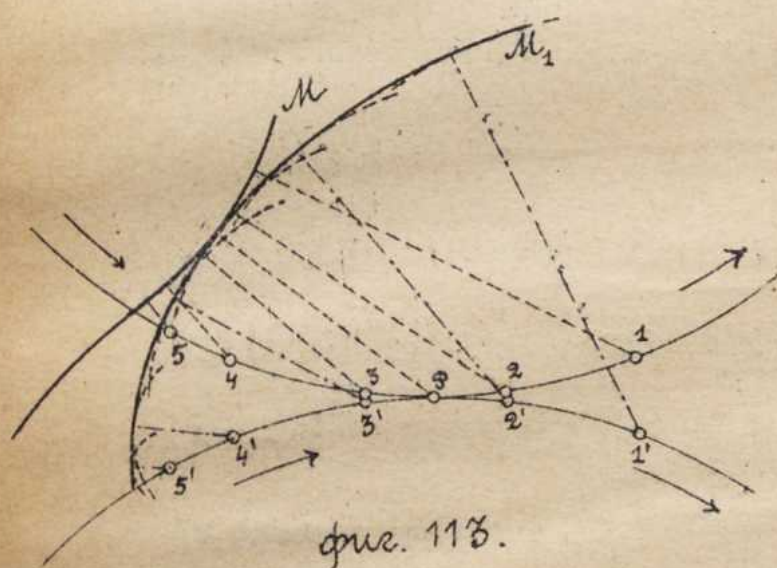
— . — . — . — . — . — . — . — . — .

ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНІЕ ПРОФИЛЯ, СОПРЯЖЕННОГО ДАННОМУ.

Разсмотримъ теперь вообще , какъ по данному профилю находится графически профиль, ему сопряженный.

Построение, какъ это слѣдуетъ, изъ приведенныхъ выше соображеній, сводится къ отысканію огибающей по данной огибаемой, и его можно выполнить по нѣсколькимъ методамъ, точнымъ или приближеннымъ; ниже мы приводимъ два очень удобные метода, достаточно точные и несложные, одинъ изъ нихъ предложенъ Poncélet, а другой — Reuleaux. Основой какъ для того, такъ и для другого служить свойство огибающей имѣть съ огибаемой общую нормаль въ точкѣ соприкосновенія, проходящую черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія.

Способъ Ронселе. Пусть профиль M принадлежитъ полюсу O (фиг. 113); вращенія



системъ указаны стрѣлками, и вращеніе O противъ стрѣлки часовъ требуется передать вращеніемъ O по стрѣлкѣ. Последовательность точекъ соприкосновенія полюсы O въ дви-

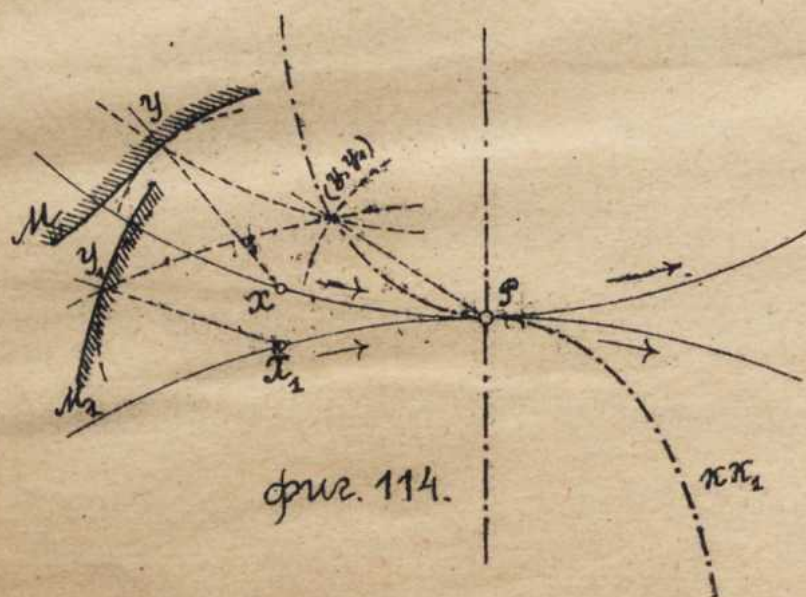
женіи этой системы относительно O_1 будетъ, очевидно, идти по стрѣлкѣ часовъ, т.е. точками соприкосновенія судутъ послѣдовательно служить, напр., точки 1, 2, 3, 4, и т.д. Соответствующія имъ точки полюсы O найдемъ, отложивъ дуги: $\overset{\frown}{P2'} = P2$, $\overset{\frown}{2'1'} = \overset{\frown}{21}$, $\overset{\frown}{P3'} = \overset{\frown}{P3}$, $\overset{\frown}{3'4'} = \overset{\frown}{34}$

и т.д. что мы можем сдѣлать достаточно точно циркулемъ, если только дуги возьмемъ достаточно малыми, что и дастъ намъ возможность принимать ихъ отрѣзки прямыхъ. Опустимъ теперь изъ точекъ (1, 2, 3, ...) нормали на профиль М; этотъ профиль М мы можемъ разсматривать, какъ огибающую окружностей, описанныхъ изъ точекъ 1, 2, 3... радиусами, равными нормалямъ, и, значить, касающихся профиля М; но нормали, опущенныя на искомую огибающую профиля М изъ точекъ 1', 2', 3', ... должны быть равны нормалямъ изъ точекъ 1, 2, 3, ... на М; слѣдовательно, искомая огибающая представляетъ собою огибающую окружностей, описанныхъ изъ точекъ 1', 2', 3', ... радиусами, равными соответственнымъ нормалямъ профиля М. Чѣмъ больше мы возьмемъ точекъ 1, 2, 3, ..., а, слѣд., и точекъ 1', 2', 3', ..., т.е. иными словами, чѣмъ ближе эти точки другъ къ другу, тѣмъ точнѣе можно построить сопряженный профиль, и при достаточномъ числѣ взятыхъ точекъ, а также, при правильности построенія нормалей, откладыванія равныхъ дугъ, дуги окружностей, описанныхъ изъ центровъ 1', 2', 3' и др. какъ бы сольются въ одну непрерывную кривую.

Само собою разумѣется, что для построенія безразлично, будутъ ли нолоиды окружностями или какими нибудь другими кривыми.

Огибающую можно вычертить еще по точкам: тамъ напр. величина нормали изъ точки 1 намъ извѣстна; значить, извѣстна величина нормали изъ точки 1' на искомую огибающую; стоитъ теперь только опредѣлить направлѣніе этой нормали, и мы получимъ одну изъ точекъ огибающей; направлѣніе же мы можемъ получить на основаніи того соображенія, что нормаль изъ точки (1) на М дѣлаетъ съ касательной въ точкѣ (1) такой же уголъ, какой должна дѣлать нормаль изъ точки (1') на искомую огибающую M_1 съ касательной въ точкѣ (1') полоиды O_1 , — обѣ касательныя и обѣ нормали должны совпасть въ тотъ моментъ, когда обѣ полоиды коснутся одна другой въ точкѣ (1, 1')

Способъ Reuleaux, излагаемый ниже, особенно удобенъ для разбираемаго нами теперь случая передачи вращенія съ постояннымъ отношеніемъ скоростей, слѣд., при полоидахъ — окружностяхъ; огибающая строится здѣсь



по точкамъ.
Способъ этотъ основанъ на отысканіи мѣста точекъ сопряжено-

венія профиля M (фиг. 114) съ сопряженнымъ ему профилемъ въ системѣ O_1 при вращеніи обѣихъ системъ, — одной около O , другой около O_1 , — съ требуемымъ отношеніемъ скоростей, т.е. при каченіи полоидѣ O и O_1 другъ по другу.

Возьмемъ на полоидѣ O какую-нибудь точку X и опустимъ изъ нея на профиль M нормаль XU . Въ тотъ моментъ, когда при вращеніи системъ O и O_1 профиль M коснется точкой U соответствующаго ему профиля системы O_1 , нормаль XU , какъ мы знаемъ, пройдетъ черезъ P , т.е. точка X придетъ въ точку P линіи OO ; но точка U , какъ связанная неразрывно съ системой O , все время будетъ находиться на окружности центра O и радіуса OU , и, слѣд., мы найдемъ положеніе точки U въ моментъ соприкосновенія профилей на пересѣченіи окружностей: одной — изъ O радіуса OU , и другой — изъ P радіуса XU . Именно въ этой точкѣ пересѣченія этихъ двухъ окружностей, точкѣ (UU_1), и совпадетъ точка U профиля M съ соответствующей ей точкой U_1 профиля M_1 , сопряженнаго съ M .

Въ свою очередь точка U_1 будетъ во все время находиться на окружности центра O_1 и радіуса O_1U_1 ; точкѣ X въ первомъ ея положеніи соответствуетъ въ системѣ O_1 точка X_1 , отстоящая (считая по полоидѣ

O_1) на дугу $RX_1 \neq$ дуге RX ; отъ этой точки X_1 иско-
мая точка Y_1 находится на разстояніи, равномъ XU . По-
этому начальное положеніе точки Y_1 , соответствующее
первому положенію точки U , мы найдемъ въ точкѣ пе-
ресѣченія окружностей: одной изъ O_1 радіуса $O_1(YU_1)$, а
другой — изъ X_1 радіуса, равнаго XU . Пусть это бу-
детъ точка Y_1 .

Эта точка Y_1 есть одна изъ точекъ искомага
профиля M_1 , сопряженнаго заданному M , соответствую-
щая одной изъ точекъ этого послѣдняго — точкѣ U .

Поступая подобнымъ же образомъ, мы для каждой
точки профиля M найдемъ соответствующую ей точку про-
филя M_1 , да кромѣ того, опредѣлимъ мѣсто ихъ совпаде-
нія при вращеніи системъ O и O_1 , т.е. опредѣлимъ
геометрическое мѣсто точекъ взаимнаго соприкоснове-
нія профилей при движеніи обѣихъ системъ; это геом.
мѣсто представится въ видѣ нѣкоторой кривой $(yy_1)P(kk_1)$

(отмѣчена она на чертежѣ пунктиромъ $---$);
кривая эта носитъ названіе **л и н і и з а ц ѣ п л е -**
н і я.

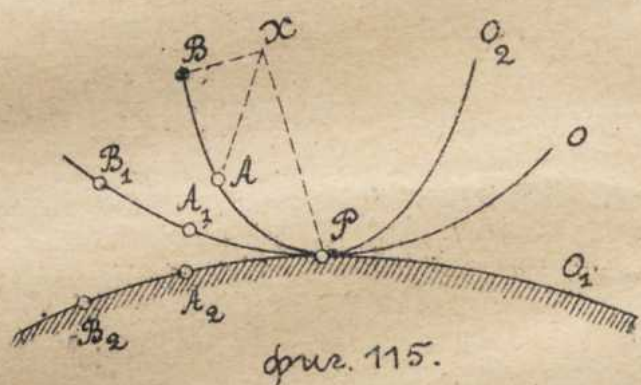
Способъ Reuleaux, хотя и болѣе сложный, чѣмъ
способъ Poncelet, даетъ возможность, кромѣ непосред-
ственнаго нахожденія точекъ сопряженнаго профиля M_1 ,
еще найти совокупность послѣдовательныхъ точекъ со-

прикосновенія обоихъ профилей. Нетрудно убѣдиться, что точка соприкосновенія на профиль, принадлежащемъ системѣ в е д у щ е й , будемъ постепенно у д а л я т ь с я отъ центра (оси) вращенія этой системы; и, наоборотъ , на профиль в е д о м о й системы точка прикосновенія будетъ п р и б л и ж а т ь с я къ центру вращенія системы. Если теперь въ ведущей системѣ мы возьмемъ какой -нибудь произвольный профиль, то, примѣняя къ нему сказанное, получимъ возможность судить о томъ, какая часть взятаго профиля можетъ служить намъ для передачи, -стоитъ лишь при этомъ помнить послѣдовательность точекъ соприкосновенія какъ полоидъ, такъ и профилей.

Замѣтимъ, что на практикѣ для этихъ профилей мы беремъ по большей части нѣкоторыя опредѣленныя кривыя, напр. циклическія, и др. Циклическіе профили обладаютъ однимъ весьма любопытнымъ свойствомъ, а именно, - если для одного профиля взята циклическая кривая, то сопряженнымъ профилемъ будетъ служить также циклическая кривая. Это есть такъ называемая теорема Камуса, которую мы и докажемъ ниже въ самомъ общемъ видѣ.

Какая либо циклическая кривая есть.

какъ мы знаемъ, траекторія точки, связанной съ какой-нибудь окружностью, катящейся по другой окружности. Въ данномъ случаѣ за профиль ведущей системы можно взять циклическую кривую, образованную при каченіи какой-либо окружности по полюидѣ ведущей системы; отыскивая затѣмъ сопряженный профиль въ ведомой системѣ, намъ придется убѣдиться, что этотъ сопряженный профиль окажется также циклической кривой, образованной тою же точкой той же окружности, но при каченіи этой послѣдней уже по второй полюидѣ. Мы обобщимъ эту теорему тѣмъ, что вмѣсто окружностей возьмемъ три кривыя — нѣбудь кривыя. Двѣ изъ нихъ, O и O_1 , (фиг. 115)



пусть служатъ полюидами двухъ системъ; пусть, да-
лѣе, нѣкоторая
третья кривая O_2
катится одинъ разъ

по полюидѣ O_1 , другой — по O . Нѣкоторая точка X связанная съ кривой O_2 , при каченіи O_2 по O , опишетъ въ системѣ полюиды O нѣкоторую определенную кривую; эту кривую — траекторію точки X — мы можемъ построить по способу Poncelet, — а именно: отмѣчаемъ на кривой O_2 рядъ точекъ $A, B, \dots$ служащихъ послѣдства-

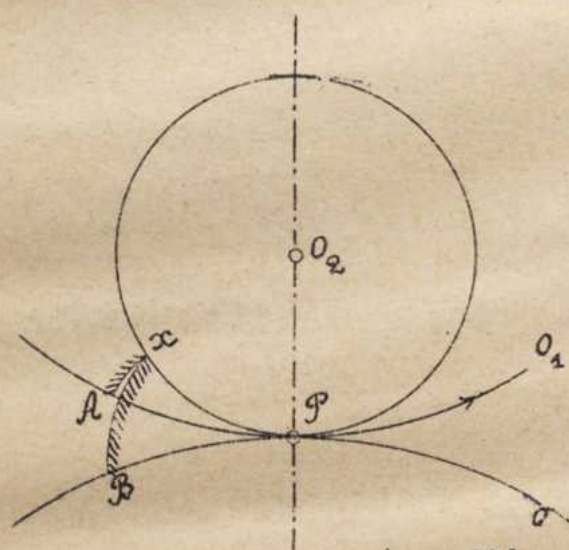
тельными точками соприкосновения кривой O_2 при качении ее по O ; соединяемъ эти точки съ нашей точкой X ; далѣе на кривой O находимъ точки $A_1, B_1, \dots$, соответствующія точкамъ $A, B, \dots$, для чего придется отложить дуги: $\sim PA_1$, равную PA , A_1B_1 , равную AB , и т.д.; затѣмъ изъ полученныхъ точекъ $A_1, B_1, \dots$ описываемъ окружности радиусами $AX, BX, \dots$ (такъ какъ нормали на траекторію точки X изъ точекъ $A_1, B_1, \dots$ должны быть равны AX, BX); наконецъ подыскиваемъ огибающую этихъ окружностей, — она и будетъ траекторіей точки.

Но если теперь мы станемъ отыскивать для этой кривой ея огибающую при качении O по O_1 , то, какъ и выше, должны будемъ отложить дуги $PA_2, A_2B_2, \dots$, соответственно равныя дугамъ $BA_1, A_1B_1, \dots$ (эти послѣднія, въ свою очередь, равны дугамъ $PA, AB, \dots$), затѣмъ изъ полученныхъ точекъ $A_2, B_2, \dots$, какъ изъ центровъ, описать окружности радиусами, равными нормальямъ на траекторію изъ точекъ $A_1, B_1, \dots$, т.е. радиусами AX, BX , и проч., и, наконецъ, вычертить огибающую этихъ окружностей. Очевидно, что построение этой искомой огибающей вполнѣ тождественно съ построениемъ траекторіи точки X при качении O_2 по O .

Слѣдовательно, вообще, если мы имѣемъ въ

системъ O нѣкоторую кривую, какъ траекторію точки X при каченіи кривой O_2 , связанной съ этою точкой, по полюидѣ системы O_1 , то огибающей этой траекторіи при движеніи системы O_1 относительно системы O будетъ траекторія точки X , образованная при каченіи той же кривой O_2 , но уже по полюидѣ, принадлежащей системѣ O . Соотношеніе это носитъ названіе теоремы Камуса.

Примѣняя эту теорему къ нашему частному случаю круговыхъ полюидъ, находимъ, что если въ системѣ O_1



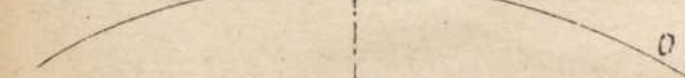
фиг. 116.

(ведущей) мы взяли за профиль кривую AX (фиг. 116), образованную точкой нѣкоторой окружности O_2 при каченіи ея по O_1 , т.е. гипоциклоиду, то сопряженнымъ ему профилемъ будетъ эпициклоида BX , образованная точкой X при каченіи O_2 по O .

0

Выполненіе на чертежѣ гипо- и эпициклоидъ можетъ

точка X въ моментъ соприкосновенія окружностей точка—



фмс. 117.

РУ, равную АХ, т.е.

прямая же $A_1 X_1$ будет служить норма-

ЛЮ КЪ ГИНОЦИКЛОИДЪ ВЪ ЭТОЙ ТОЧКѢ.

Сравнивая это построение съ построениемъ, даннымъ Reuleaux для нахождения линіи зацѣпленія, видимъ, что точка X_1 будетъ соприкасаться съ соответствующей точкой сопряженнаго профиля (при вращеніи системъ O и O_1) какъ разъ въ точкѣ U ; что указываетъ намъ на то обстоятельство, что въ случаѣ циклическаго профиля линіей зацѣпленія будетъ служить сама вспомогательная окружность O .

Совершенно такъ же чертимъ и эпициклоиду, служащую сопряженнымъ профилемъ.

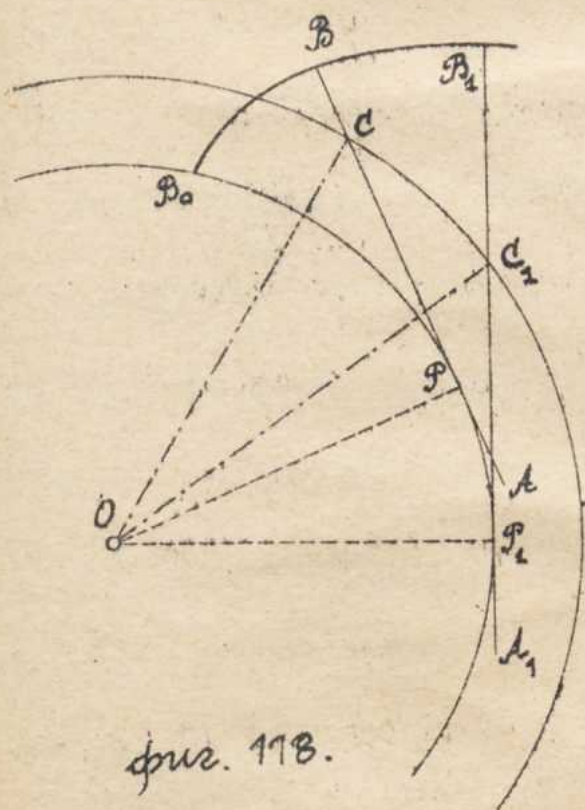
— 2 —

Другимъ изъ употребительныхъ профилей служить профиль эвольвентный. Эвольвентой окружности, какъ извѣстно, называется траекторія точки, лежащей на касательной къ окружности при каченіи этой касательной по окружности. Если касательная АВ (фиг. 118) катится по окружности О, то точка В описываетъ кривую, называемую эвольвентой (линія $B_0 B B_1$). Въ каждый данный моментъ касательная служить, конечно, нормалью къ эвольвентѣ, и притомъ, по самому способу образованія кривой, разность между длинами радіусовъ векторовъ эвольвенты $P_1 B_1$ и $P B$

равна дугѣ PP_1 окружности O ; такимъ образомъ длина $PB =$ дугѣ PB_0 .

Какую -нибудь другую окружность, concentричную

съ первой, касательная пересѣкаетъ всегда подѣ однимъ и тѣмъ же угломъ, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться изъ равенства треугольниковъ OPC и OP_1C_1 , и такъ какъ $CP = C_1P_1$, то разность между длинами C_1B_1 и CB равна дугѣ PP_1 . Обрат- но, мы можемъ замѣтить,

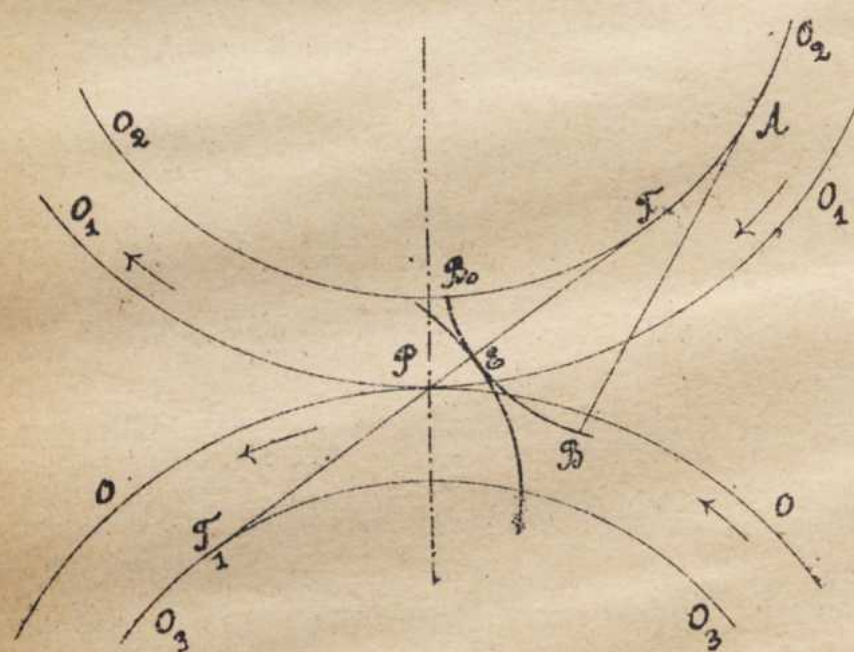


фиг. 178.

что если данная кривая имѣетъ нормалью прямая, пересѣ- кающія окружность подѣ постояннымъ угломъ, то такая кривая служить эвольвентой для круга, concentричнаго съ первымъ. Дѣйствительно, прямая, пересѣкающія окруж- ность подѣ постояннымъ угломъ, являются непремѣнно ка- сательными къ окружности, concentричной съ данной, какъ въ этомъ нетрудно убѣдиться изъ чертежа; а, слѣд., всѣ нормали кривой служатъ касательными къ некоторой окружности. Взявъ какую -нибудь точку B кривой и

ея нормаль PB , мы, очевидно, можем заставить точку B проходить последовательно всѣ точки кривой, касаясь нормаль по окружности.

Возьмемъ, переходя къ зацѣпленію, въ системѣ O_1 окружность O_2 , concentричную съ полоидой O_1 (фиг. 119), а за ведущій профиль возьмемъ эвольвенту окружности O_2 . Нормали къ этой эвольвентѣ пересѣкаютъ полоиду O_1 подъ однимъ и тѣмъ же угломъ. Въ моментъ соприкосновенія точки B съ соотвѣтствующей точкой профиля нормаль AB должна будетъ пройти черезъ точку P



фиг. 119.

соприкосновенія полоиды, и, слѣдовательно, она совпадаетъ съ касательной PT , проведенной изъ точки P къ окружности O_2 , и такъ какъ это справедливо для какой угодно нормали, то

линіею зацѣпленія будетъ служить здѣсь касательная изъ P къ окружности O_2 . Отсюда слѣдуетъ, что въ профилѣ, сопряженномъ съ профилемъ BB_0 , нормали къ нему будутъ пересѣкать соотвѣтственную полоиду также подъ

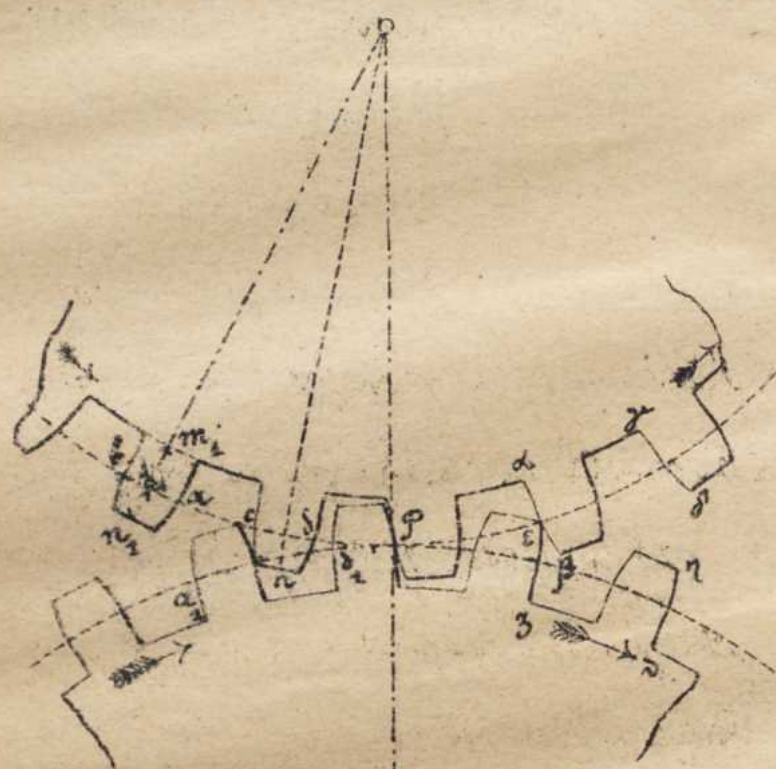
постояннымъ угломъ, равнымъ, конечно, первому; другими словами, этотъ сопряженный профиль будетъ эвольвента окружности, concentричной съ полоидой O и касающейся PT , т.е. кривая, образованная точкой E при качении касательной PT_1 по окружности O_s .

Ц И Л И Н Д Р И Ч Е С К И Я З У Б Ч А Т Ы Я К О Л Е С А .

Перейдемъ теперь къ дѣйствительному выполнению передачи. Профили цилиндрическихъ тѣлъ, при помощи которыхъ мы устраиваемъ передачу, имѣютъ въ дѣйствительности опредѣленную длину въ радіальномъ направленіи, находясь частью между окружностью полоиды и центромъ, частью — внѣ полоиды. Чтобы устроить непрерывную передачу, придется взять рядъ такихъ цилиндрическихъ тѣлъ съ образующими, параллельными осямъ, и съ профилями, имѣющими найденныя выше соотношенія. Тогда мы получимъ рядъ зубцовъ, принадлежащихъ той и другой системѣ (фиг. 120, 121). Если мы мысленно проведемъ полоиду, принадлежащую системѣ O (въ дѣйствительности, конечно, не выполняемую), то, какъ сказано, она раздѣлитъ каждый зубецъ на двѣ части (въ радіальномъ направленіи): на $n_1 h_1$ и $h_1 m_1$ (фиг. 120); первая изъ нихъ, лежащая внѣ полоиды, называется

головой зубца, вторая — основаніемъ или ножкой зубца. Окружность радиуса On , гдѣ n — крайняя внѣшняя точка рабочаго профиля, принято называть окружностью вершинъ; точно также окружность, проходящую черезъ крайнія внутреннія точки — окружностью основаній. Длина дуги измѣряетъ толщину зубца.

Очертанія зубцовъ обыкновенно бываютъ симметричны по отношенію къ радіусу, проходящему черезъ середину дуги ab , хотя, собственно говоря, если движеніе



фиг. 120.

совершается всегда въ одну сторону, по правиламъ, изложеннымъ выше, слѣдуетъ строить только рабочій профиль, напр., $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\epsilon\zeta$, $\eta\theta$,

и т.д.; стороны же не рабочія могутъ быть ограничены и другими какими — либо кривыми, лишь бы не затруднялась правильная смена зубцовъ и правильность за-

цѣпленія вообще.

Размѣръ a , считая по полоидѣ, называется шириною впадины. Разстояніе между рабочими профилями пары смежныхъ зубцовъ, считая опять по полоидѣ, называется шагомъ зацѣпленія; такъ, напр., дуга $\alpha_1 \delta_1$ есть шагъ зацѣпленія. Шагъ зацѣпленія у обоихъ колесъ долженъ быть одинаковъ, иначе мы не получимъ непрерывной передачи съ желаемымъ отношеніемъ скоростей.

Какъ нетрудно вѣдѣть, δ_1 и δ , α_1 и α , ..., должны быть соотвѣтственными точками обѣихъ полоидъ, а потому дуга $\alpha\delta$ равна дугѣ $\alpha_1\delta_1$ и т.д. -

Назовемъ черезъ z и z_1 соотвѣтственно числа зубцовъ той и другой системъ, а радіусы полоидъ черезъ R и R_1 . Тогда, какъ мы знаемъ,

$$R : R_1 = \omega_1 : \omega$$

или

$$R \omega = R_1 \omega_1.$$

Если шагъ зацѣпленія равенъ t , то получаемъ

$$2\pi R = z t$$

и

$$2\pi R_1 = z_1 t,$$

откуда

$$\frac{R}{R_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega} \dots \dots \dots (1)$$

называя же числа оборотовъ въ минуту черезъ n и n_1 , имѣемъ :

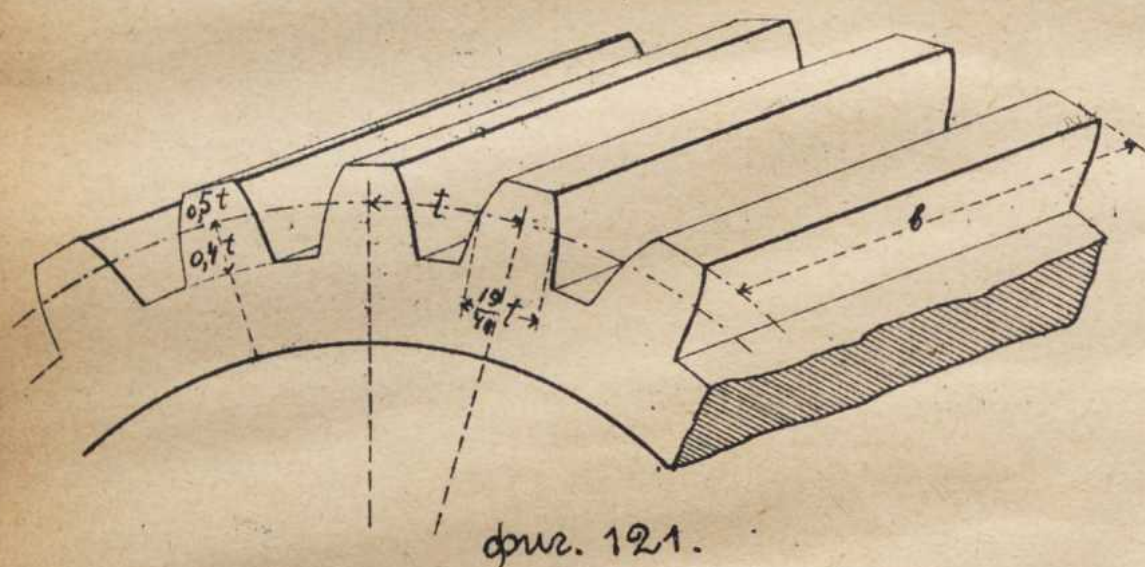
$$\omega = \frac{2\pi n}{60}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60},$$

въ виду чего (1) перепишется еще разъ такъ:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{n_1}{n} \dots (2).$$

откуда видно, что числа зубцовъ обратно пропорціональны числамъ оборотовъ.

Размѣры зубцовъ выражаются обыкновенно въ до-



ляхъ ша-
га зацѣпи-
ленія t ;
такъ, всю
высоту зуб.
ца (фиг.
121) бе -

рутъ равной $0,7 t$, причемъ высота головки , $n_1 h_1$,
берется равной $0,3 t$, а ножки, $h_1 m_1$, - $0,4 t$;
толщина зубца берется различно , - въ металлическихъ
передачахъ она берется въ $\frac{19}{40} t$, такъ что ши-
рина впадины достигнетъ $\frac{21}{40} t$; длина b

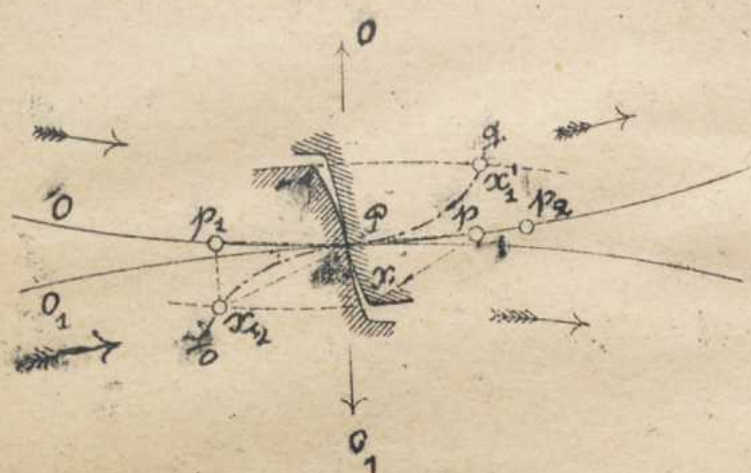
зубца, т.е. размѣръ его въ осевомъ направленіи, берется различно, въ зависимости отъ разныхъ условій (подробности указаны въ курсѣ деталей машинъ); часто берется равно $2t$ и больше.

Дугу, на которую прокатятся одна по другой половины, пока одна пара зубцовъ находится въ зацѣпленіи, принято называть дугой зацѣпленія. Очевидно, что дуга зацѣпленія должна быть больше шага зацѣпленія, иначе произошло бы что одна пара зубцовъ уже вышла изъ зацѣпленія, а другая еще не вошла; — передача въ этомъ случаѣ не могла бы быть непрерывной.

Для плавности передачи и для уменьшенія изнашиванія зубцовъ выгодно, чтобы одновременно въ зацѣпленіи находилось возможно большее число зубцовъ — требованіе, часто невыполнимое; чтобы судить о достоинствѣ передачи съ этой стороны, нужно уметь опредѣлять, сколько паръ зубцовъ будутъ находиться одновременно въ зацѣпленіи.

Зная профили и шагъ зацѣпленія, нетрудно рѣшить эту задачу. Для этого сначала найдемъ, гдѣ началось соприкосновеніе пары зубцовъ, т.е. гдѣ ^{крайняя} точка профиля на ведомомъ колесѣ — (фиг. 122) вступила

въ соприкосновеніе съ соотвѣтствующей ей точкой на ведущемъ колесѣ; если линія зацѣпленія уже начерчена,



фиг 122

напр., по методу Reuleaux, (на чертежѣ это линія $\pi P q$, обозначенная пунктиромъ $---$) то проводя изъ центра O окружность радіуса

OX (окружность вершинъ), въ пересѣченіи ея съ линіей зацѣпленія найдемъ точку X_1 , положеніе точки X въ моментъ начала соприкосновенія; замѣчая, кромѣ того, что профиль XP своего положенія относительно полюды O не мѣняетъ, ибо онъ связанъ съ ней неизмѣнно, заключаемъ, что въ указанный моментъ точка P занимала положеніе p_1 , гдѣ

$$p_1 X_1 = PX;$$

итакъ, теперь мы знаемъ, что точка P профиля, приходящаяся на полюдѣ, въ моментъ начала соприкосновенія находилась въ p_1 ; а въ такомъ случаѣ дуга $p_1 P$ представитъ собою часть дуги зацѣпленія за время прикосновенія пары зубцовъ передъ линіей центровъ $O_1 O$.

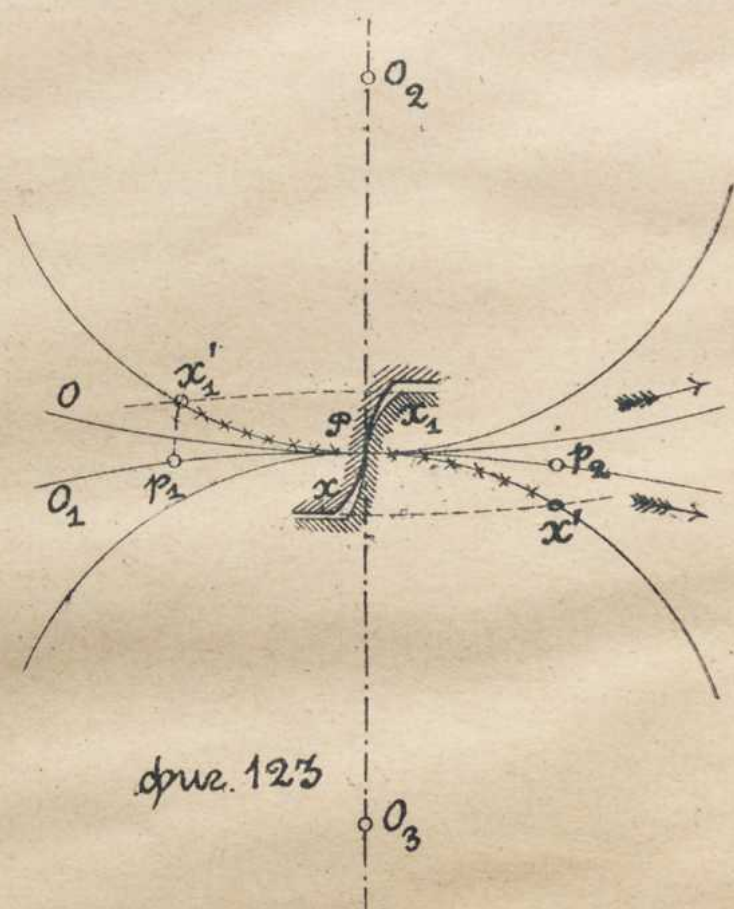
Указанную часть дуги зацѣпленія можно, впрочемъ, опредѣлить еще проще, проведя въ точкѣ X профиля PX

нормаль x_r къ нему до пересѣченія съ соотвѣтствующей полоидой въ точкѣ r ; эта точка r въ моментъ начала зацѣпленія придется на линіи центровъ, въ точкѣ P , потому, что въ этотъ моментъ, въ начальный моментъ касанія огибающей и огибаемой, общая нормаль должна пройти черезъ полюсъ мгновеннаго вращенія; и-такъ, точка r попадетъ въ P ; какъ мы говорили раньше, точка профиля PX , совпадающая теперь съ P , въ этотъ моментъ придется въ r_1 , а если такъ, то $\triangle P X r = \triangle r_1 X_1 P$ (по двумъ сторонамъ : $X_1 r_1 = XP$, $XP - Xr$, и высотѣ изъ X и X_1 на O); значить хорды $r_1 P$ и $P r$ равны, а посему равны и дуги $r_1 P$ и $P r$.

Подобнымъ же образомъ найдемъ конецъ зацѣпленія, проводя изъ O_1 окружность вершинъ для другого колеса O_1 до пересѣченія съ линіей зацѣпленія въ точкѣ X'_1 ; найдемъ также и здѣсь, что за линіей центровъ дугой зацѣпленія служить нѣкоторая опредѣленная дуга $P r_2$ такимъ образомъ, в с я дуга зацѣпленія равна суммѣ дугъ $P r_1$ и $P r_2$ одной полоиды O , т.е. равна дугѣ $r_1 r_2$. Теперь можно узнать, сколько разъ шагъ зацѣпленія содержится въ дугѣ зацѣпленія; частное и укажетъ намъ, сколько зубцовъ находится одновременно въ соприкосновеніи. Стараются, обыкновенно, достигнуть того, чтобы въ соприкосновеніи было одновременно, по

крайней мѣрѣ, двѣ пары зубцовъ, т.е. чтобы дуга зацѣпленія была не меньше двухъ шаговъ зацѣпленія.

Посмотримъ теперь, въ какомъ соотношеніи будутъ



фиг. 123

находиться между собою линія и дуга зацѣпленія въ случаѣ циклическихъ профилей. Мы знаемъ, что въ этомъ случаѣ линіей зацѣпленія будетъ

служить сама вспомогательная окружность (дуга ея $\sim$).

Вспомогательная окружность O_2 (фиг. 123) можетъ намъ служить, очевидно, только для образованія головки зубца колеса O_1 , давая для него эпициклоиду, и ножки зубца колеса O , — давая гипоциклоиду. Чтобы получить головку второго зубца (o) и ножку второго, беремъ еще одну вспомогательную окружность O_3 , которая, при каченіи по O , дастъ эпициклоиду — профиль головки зубца o , а при каченіи по O_1 , — гипоциклоиду — профиль, служащій, по теоремѣ Камуса, профилемъ, сопряженнымъ эпициклоидѣ ; по этой гипоциклоидѣ мы

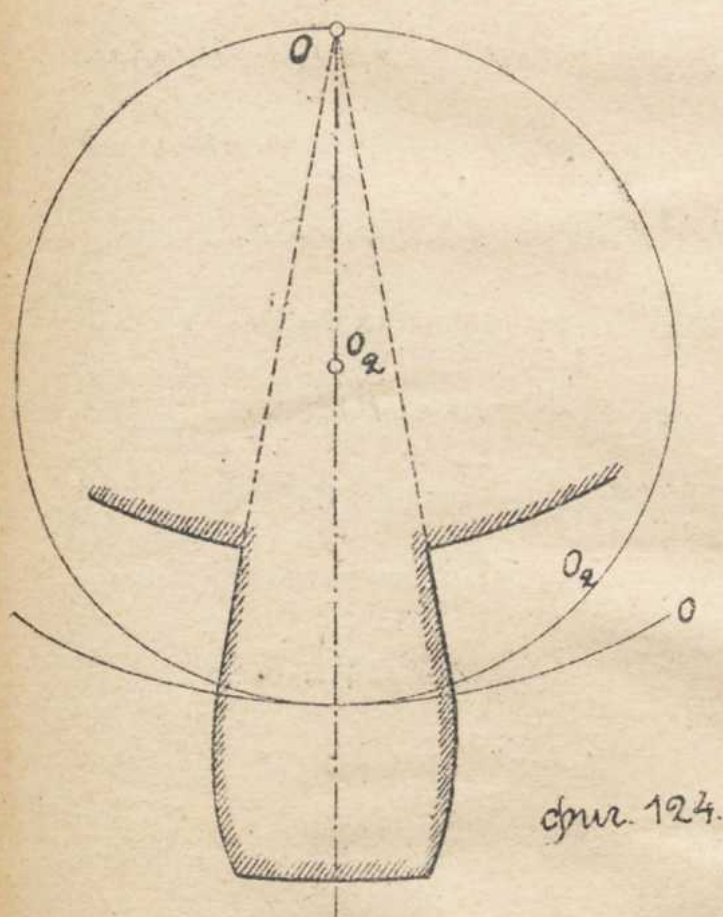
какъ видимъ, она равна части линіи зацѣпленія до линіи центровъ и, какъ видимъ, равна части линіи зацѣпленія X'_1P .

Подобнымъ же образомъ, мы найдемъ конецъ зацѣпленія въ точкѣ X' окружности O_3 , проведя окружность вершинъ для второго колеса радіусомъ OX до пересѣченія съ окружностью O_3 , а затѣмъ, какъ и выше, опять найдемъ, что часть дуги зацѣпленія Pp_2 для соприкосновенія за линіей центровъ равна дугѣ PX_1 , такъ что получаемъ, что въ случаѣ циклическаго зацѣпленія дуга зацѣпленія равна линіи зацѣпленія.

.....

При данномъ шагѣ зацѣпленія, величина котораго, какъ мы говорили уже, обусловливается требованіями прочности на изломъ и проч., и при данной высотѣ головки зубца (а эта высота, какъ извѣстно, обыкновенно, выражается въ доляхъ шага), для плавности зацѣпленія выгодна возможно большая длина линіи $X'_1P X'$, такъ какъ эта линія равна дугѣ зацѣпленія; длина же этой линіи будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше радіусы вспомогательныхъ окружностей O_2 и O_3 , какъ это можно легко видѣть непосредственно изъ чертежа. Однако, здѣсь является другое неудобство: мы, на основаніи предыду-

цаго (см. стр. 29 - 31 , фиг. 13) знаемъ, что если діаметръ вспомогательной окружности равенъ радіусу



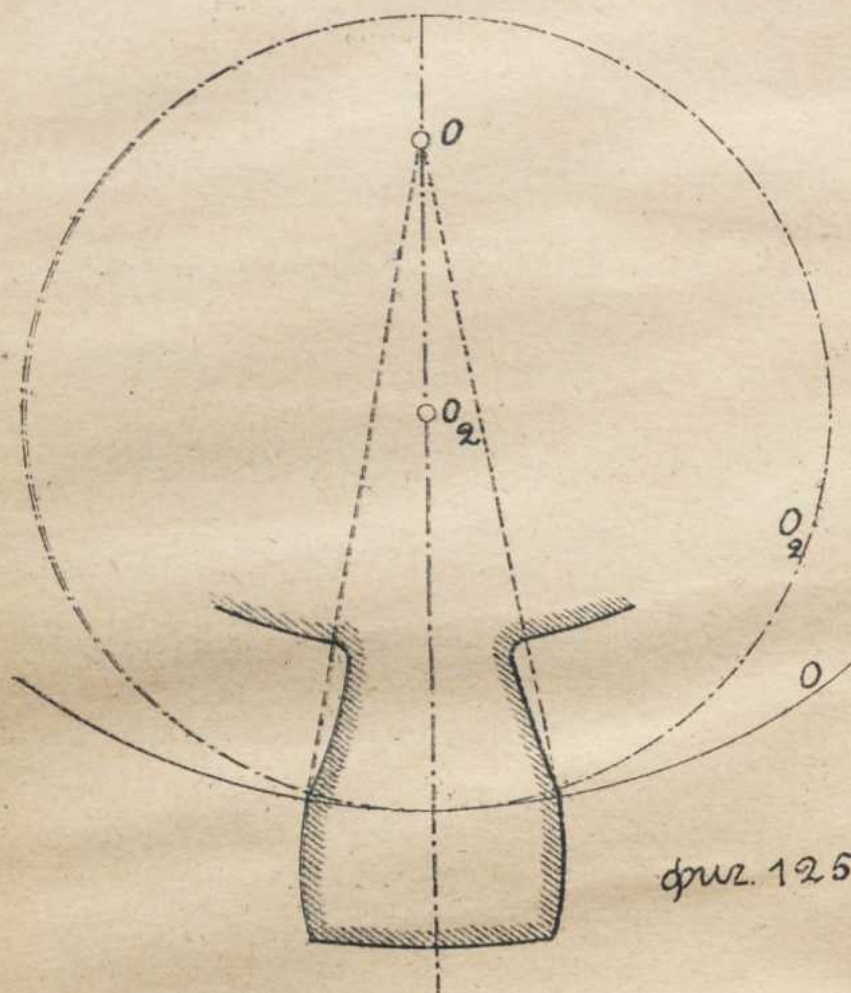
фиг. 124.

ваніе зуба у колеса O (фиг. 124), обращается въ этомъ случаѣ въ прямую линію, совпадающую съ радіусомъ большей окружности, проходящемъ черезъ рассматриваемую точку меньшей; если очертанія зуба будутъ симметричны по отношенію къ радіусу, прохо-

дящему черезъ середину толщины зуба, то, какъ это ясно видно изъ самаго чертежа, въ такомъ случаѣ получается утоненіе зуба къ его основанію, что, конечно, вредно отзывается на прочности зуба. Еще большее утоненіе мы получимъ, если возьмемъ діаметръ вспомогательной окружности больше радіуса начальной, какъ это можно непосредственно видѣть, вычерчивая для этого случая гипоциклоиду (фиг. 125). Кроме того, здѣсь является еще одно неудобство: дѣйствительно ра-

ботать приходится только о-
чень малой части ножки зуба.

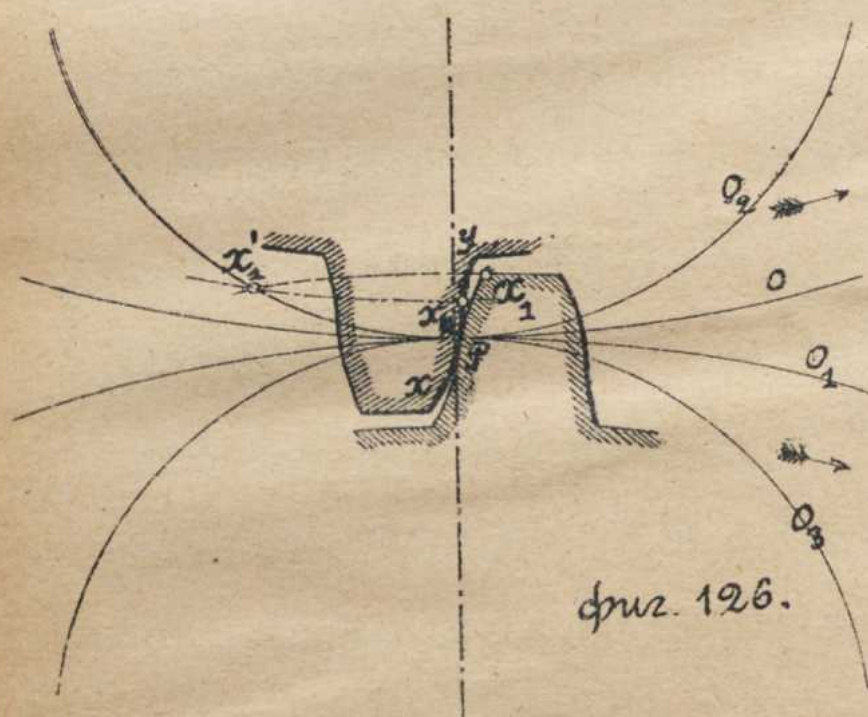
Чтобы отыскать вообще, какая часть ножки (или



фиг. 125.

головки) одного
зубца работает съ
соответствующей го-
ловкой (или осно-
ваніемъ) другого,
поступаемъ такъ:
находимъ, какъ
раньше, точку X_1'
линіи зацѣпленія,
гдѣ начинается со-
прикосновеніе зуб-

цовъ (фиг. 126); (профили на чертежѣ изображены со-



фиг. 126.

прикасающимися на
линіи центровъ въ точ-
кѣ P); та точка пр
профиля зубца коле-
са O, которая сопри-
касается съ крайней
точкой X_1 сопряжен-
наго профиля, въ мо-

ментъ начала зацѣпленія, - теперь, когда профили кас-

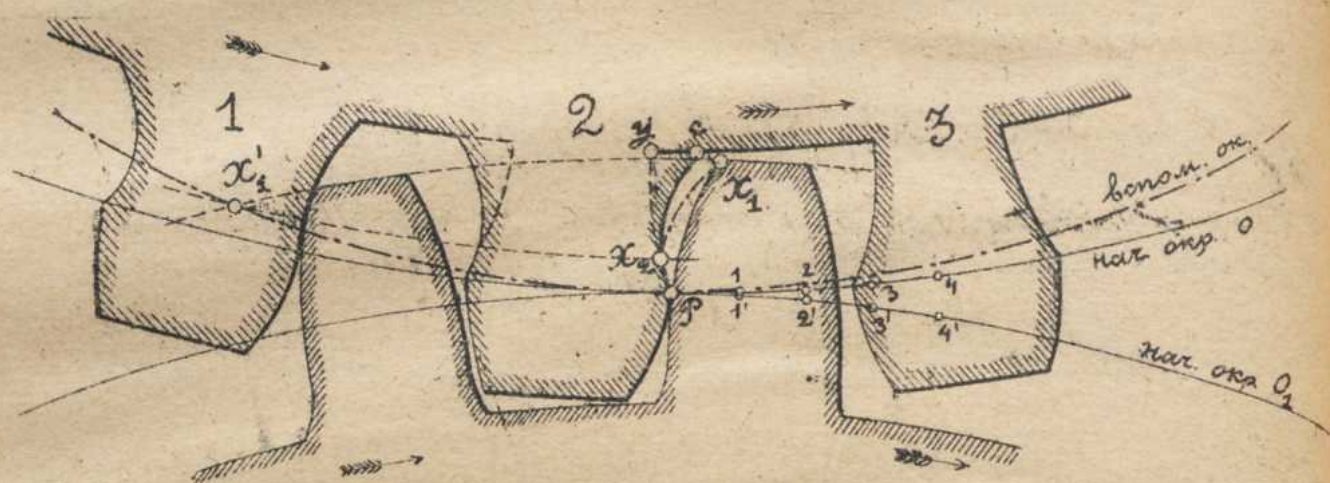
ются другъ друга въ P , занимаетъ, очевидно, положеніе X_2 , гдѣ X_2 есть точка пересѣченія окружности радиуса OX_1' съ профилемъ $X P$ у въ его настоящемъ положеніи. Часть PX_2 профиля и есть та часть ножки зубца X , которая работала со всею головкой зубца X_1 за время отъ начала соприкосновенія въ точкѣ X_1' до соприкосновенія на линіи центровъ въ точкѣ P .

Эта часть, какъ видимъ, тѣмъ меньше, чѣмъ больше радиусъ окружности O_2 ; на части $P X_2$, какъ видимъ, сосредоточивается все передаваемое колесомъ O давленіе за время работы передъ линіей, центровъ. Поэтому, при небольшой длинѣ PX_2 естественно ожидать быстраго изнашиванія (истиранія) зубца въ этой части для тѣхъ передачъ, гдѣ имѣемъ дѣло съ болѣе или менѣе значительными давленіями, какъ это и бываеъ въ большей части случаевъ машиностроенія.

Подобнымъ же образомъ можно найти ту часть профиля у зубца X_1 колеса O_1 , которая работаетъ съ головкой зубца колеса O , и она также была бы тѣмъ меньше, чѣмъ больше радиусъ вспомоательной окружности O_3 . Отсюда становится понятнымъ, почему въ обыкновенномъ машиностроеніи избѣгаютъ брать діаметръ вспомоательной окружности больше радиуса начальной, внутри которой она должна катиться для обра-

разованія профиля. =

Въ случаѣ, если при выбранномъ шагѣ зацепленія (выборъ его, какъ мы уже указывали зависитъ обыкновенно отъ условій прочности передачи) дуга зацепленія получается очень короткая, такъ что находится въ соприкосновеніи только пара зубцовъ, наиболѣе рациональнымъ слѣдуетъ признать здѣсь увеличеніе радіусовъ поloidъ, если только ничто не мѣшаетъ намъ увеличить разстояніе между осями передачи. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда приходится дорожить мѣстомъ, какъ, напр., во многихъ грузоподъемныхъ машинахъ, или когда усилія передаваемыхъ колесами, не особенно значи-



фиг. 127.

тельно, берутъ діаметры вспомогательныхъ окружностей и больше радіусовъ начальныхъ окр. Тогда, замѣтивъ, что часть профиля x_2y (фиг. 127), совершенно не работаетъ, а потому можетъ быть очерчена по любой кривой,

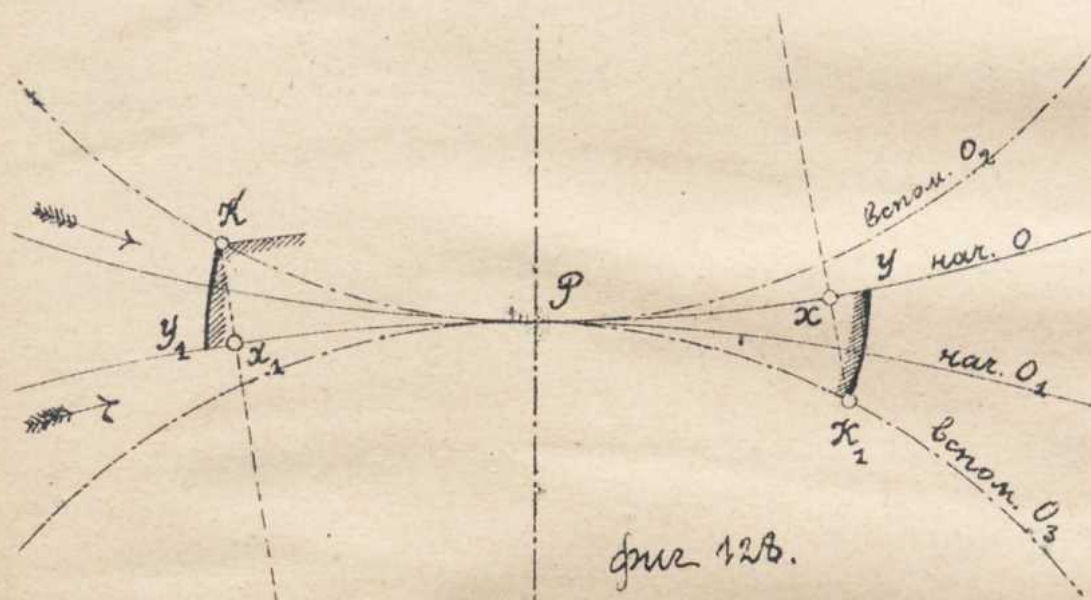
лишь бы она не мешала свободному движению вершины X_1 сопряженного зубца, можем основание зубца 2 несколько усилить. Мы сказали, что кривая, по которой можно очертить зубецъ, должна быть такова, чтобы не мешать свободному движению вершины X_1 ; а для этого указанная кривая должна не заходить за геометрическое место вершинъ X_1 въ движении системы O_1 относительно O . Это геометрическое место легко построить следующимъ образомъ: откладываемъ по обѣимъ полюдамъ O и O_1 , дуги: $P_1 = P_1'$, $12 = 1'2'$, $23 = 2'3'$, и т.д. затѣмъ изъ точекъ $1, 2, 3, \dots$ описываемъ дуги радиусами X_11' , X_12' , X_13' , $\dots$; огибающая этихъ дугъ и будетъ траекторіей точки X_1 въ относительномъ движении, — она и будетъ искомымъ геометрическимъ местомъ; легко видѣть, что она должна пройти черезъ точки X_2 и X_1 . Такимъ образомъ точка X_1 за линію X_2X_1 (къ точкѣ U) не зайдетъ, а, слѣд. начиная отъ точки X_2 , мы имѣемъ возможность вмѣсто крутой кривой профиля, X_2U , взять любую, болѣе пологую, напр., X_2C лишь бы она вся лежала внѣ кривой X_2X_1 . Очерчивая теперь зубецъ по кривой X_2C , мы, какъ легко видѣть изъ сравненія усиленнаго такимъ образомъ зубца 1 съ прежнимъ

неусиленнымъ 3, значительно увеличиваемъ его прочность, нисколько въ то же время не рискуя правильно-
стью зацѣпленія.

Нужно также замѣтить, что иногда быва-
етъ нежелательнымъ брать вспомо-
гательныя окружности слиш-
комъ малаго радіуса, потому,
что это можетъ повести къ то-
му, что мы не будемъ въ состоя-
ніи выполнить нашу передачу.

Дѣйствительно, пусть намъ требуется устроить пе-
редачу съ даннымъ шагомъ зацѣпленія (величина его, какъ
мы уже указывали, опредѣляется изъ расчетовъ проч-
ности зубцовъ) и данными полуидами, радіусы которыхъ
опредѣляются изъ величины шага и числа зубцовъ (изъ
ур.-ія $2\pi R = z t$, — см. стр. 181); обык-
новенно знаемъ также и высоту головки зуба, находя-
щуюся, какъ извѣстно, въ опредѣленномъ соотношеніи
въ величину шага или же задаемся величиной дуги
зацѣпленія, всегда не меньшей длины шага зацѣпленія;
въ этомъ последнемъ случаѣ, при выбранныхъ вспомога-
тельныхъ окружностяхъ мы можемъ опредѣлить
высоту головки зуба, и именно
слѣд. образомъ: откладываемъ на вспомогательныхъ ок-

ружностяхъ O_2 и O_3 такія двѣ дуги $Р К$ и $Р К_1$ (фиг. 128), чтобы онѣ въ суммѣ дали дугу зацѣпленія и чтобы точка $К$ отъ полюды O_1 , а точка $К_1$ отъ полюды O находились на одинаковомъ разстояніи, если эти разстоянія считать по соответствующимъ радіусамъ полюды O и O_1 ; такимъ образомъ $КХ_1 = КХ$; построивъ теперь дугу $К_1У$ энциклоиды каченія O_3 по O , най-



демъ, очевидно, положеніе рабочаго профиля зубца ведущаго колеса O въ моментъ конца зацѣпленія; построивъ затѣмъ энциклоиду $КУ_1$, опредѣлимъ положеніе профиля зубца ведомаго колеса O_1 въ моментъ начала зацѣпленія. Отрѣзки $КХ_1$ и $КХ$ будутъ высотами головокъ зубцовъ; зацѣпленіе начнется въ точкѣ $К$ и окончится въ точкѣ $К_1$.

Очевидно, что дуга $ХУ$, равно какъ и $Х_1У_1$, должна быть меньше половины толщины зубца, потому что зубецъ обыкновенно бываетъ сим-

метриченъ относительно радауса, проведеннаго черезъ середину толщины его, а головка не оканчивается остриемъ, а если бы XU вышло больше половины толщины зубца, что какъ видно изъ чертежа, можетъ случится при маломъ радиусѣ окружности O_3 , то заданное зацепленіе невозможно было бы выполнить съ такою вспомогательной окружностью. Подобнымъ образомъ можно было бы рѣшить вопросъ при данной высотѣ головки (и даннѣмъ, конечно, шагѣ): въ этомъ случаѣ пришлось бы повѣрить, достаточно ли величина дуги зацепленія. -

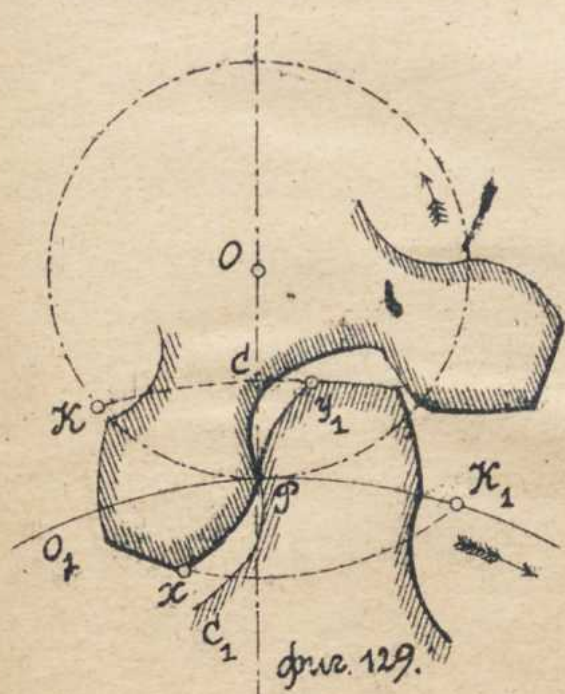
Иногда, хотя и очень рѣдко въ обыкновенномъ машиностроеніи, встрѣчаются случаи не одинаковой высоты головокъ на томъ и другомъ колесѣ; въ такихъ случаяхъ намъ даются или высоты зубцовъ (ихъ головокъ), или же даются части дуги зацепленія до и послѣ линіи центровъ (каждая, конечно, отдѣльно); рѣшеніе этого вопроса будетъ вестись по вышеприведеннымъ указаніямъ.

Можетъ встрѣтиться и отсутствіе головки на одномъ колесѣ (и, значитъ, ножки на другомъ), - слѣдовательно, профилированіе будетъ ведено здѣсь при одномъ вспомогательномъ кругѣ (объ этомъ см. ниже, стр. 199), или несимметричное строеніе зубца; въ каждомъ такомъ отдѣльномъ

случай вопросъ о возможности зацепленія рѣшить не ..
трудно.

- . - . - . - . - . - . -

Для полученія возможности зацепленія, когда мѣ-
стомъ дорожатъ, а радіусовъ полоидъ увеличить нель-
зя, является, какъ мы видѣли, необходимость брать
вспомогательныя окружности съ діаметрами, большими
радіусовъ полоидъ; а въ нѣкоторыхъ грузоподъемныхъ
машинахъ встрѣчается даже предѣльный слу-
чай циклическаго зацепленія,
а именно случай, когда вспомогательныя
окружности совпадаютъ съ по-
лоидами; въ этомъ случаѣ профилемъ основанія
зубца является точка самой полоиды



сопряженнымъ же съ нимъ
профилемъ, профилемъ голов-
ки зубца другого колеса бу-
детъ эпициклоида; образова-
ная этой точкой при каченіи
полоиды по другой полоидѣ
При этомъ способѣ профили-
рованія возможнымъ бываетъ

осуществленіе зацепленія съ весьма малымъ числомъ
зубцовъ, доходящимъ напр. до 4-хъ на меньшемъ колесѣ.

На чертежъ (фиг. 129) схематически представлено такое заѣмленіе . PU_1 есть энциклоида, образованная точкой окружности O при каченіи ея по O_1 ; PX — энциклоида, описанная точкой полюиды O_1 при каченіи ея по O ; двѣ эти энциклоиды и дадутъ профили обѣихъ головокъ у сопряженныхъ зубцовъ; основанія же зубцовъ обратились здѣсь въ т о ч к и полюидъ. Проводя окружности вершинъ для того и другого колеса, найдемъ линію заѣмленія $K_1 P K$; на части $K P$ точка P зубца $X C$, лежащая на полюидѣ O_1 , работаетъ съ энциклоидой $U_1 P$; далѣе, на части PK_1 , работаетъ головка PX того же зубца $X C$ съ точкой P зубца $U_1 C_1$. Основанія зубцовъ, какъ профили не работающіе, могутъ быть ограничены произвольными кривыми, лишь бы эти кривыя, какъ объ этомъ мы уже говорили выше, не заходили за соответственныя траекторіи точекъ U_1 и X , т.е. не вызывали заѣмленія зубцовъ. (Какъ мы знаемъ, траекторіи эти суть траекторіи ихъ въ относительномъ движеніи какъ O_1 по O , такъ и O по O_1).

Легко видѣть, что въ такомъ заѣмленіи будетъ имѣть мѣсто сильное изнашиваніе зубцовъ около точекъ P , такъ какъ за все время заѣмленія передъ линіей центровъ давленіе на зубецъ колеса O сосредоточивается въ одной (или почти въ одной) точкѣ; то

же самое имѣетъ мѣсто для зуба колеса O за время зацѣпленія за линіей центровъ. Благодаря этому обстоятельству зубцы быстро теряютъ правильность своей формы, что и принуждаетъ насъ по возможности избѣгать такихъ зацѣплений и употреблять ихъ только въ исключительныхъ случаяхъ.

Мало употребительно въ машиностроеніи профилирование съ однимъ вспомогательнымъ кругомъ и прямолинейнымъ профилемъ на одномъ колесѣ. Въ этомъ

случаѣ вспомогатель-

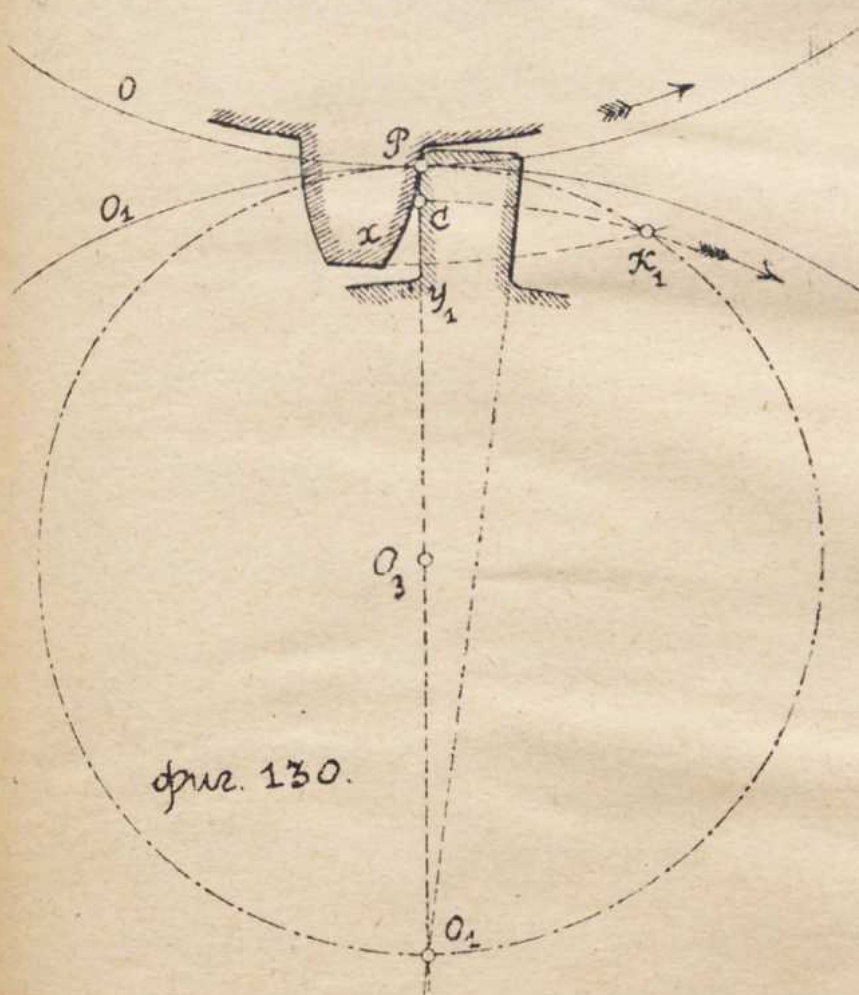
ная окружность O_3

(фиг. 130) имѣетъ

діаметръ PO_1 , равный радіусу полонды O_1 .

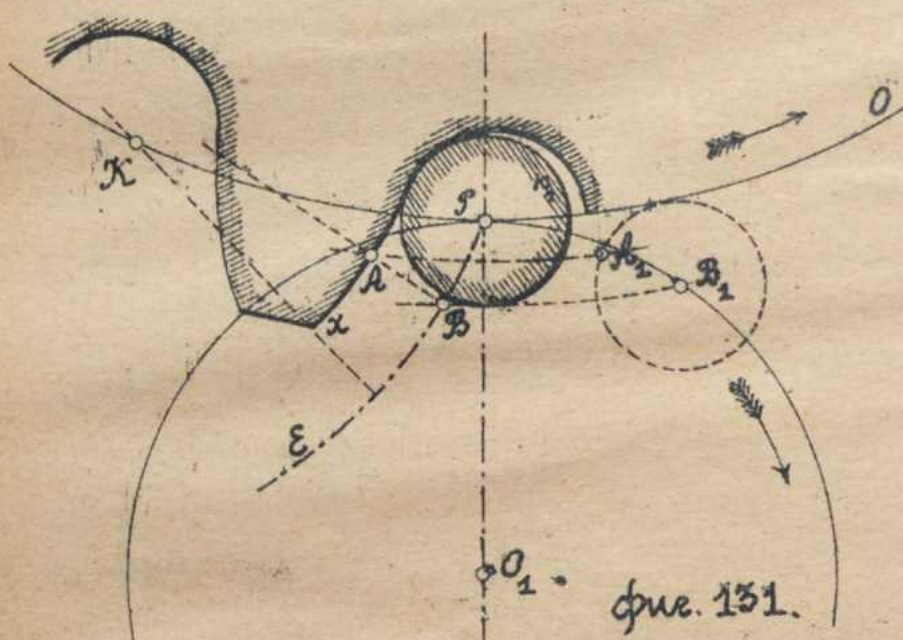
Колесо O_1 имѣетъ только рабочее основаніе зуба, которое тогда профилируется, конечно, по радіусу PO_1 ; колесо же O_1 имѣетъ

взбоочій профиль головки — эллипсоиду PX . Проводя окружности вершинъ для колеса O до пересѣченія съ O_3 , допустимъ, въ точкѣ K_1 , получаемъ линію зацѣпле-



нія PK_1 ; мы видимъ, что въ этомъ случаѣ, при ведущемъ колесѣ O , зацѣпленіе все будетъ происходить за линіей центровъ. Проводя далѣе окружность центра O_1 и радіуса $O_1 q_1$ до пересѣченія съ профилемъ PU_1 въ точкѣ C , найдемъ рабочую часть PC профиля PU_1 ; остальная же часть CU_1 , работать не будетъ совсѣмъ.

Рѣдко употребляется теперь и такъ называемое цѣвочное зацѣпленіе, представляющее частный случай циклическаго. Здѣсь за профиль, обыкновенно на ведомомъ колесѣ, принимаютъ окружность нѣкотораго радіуса PK_1 , такъ что зубцы на этомъ колесѣ будутъ представлять собою круглые цилиндры, называемые цѣвками (фиг. 131). Профиль на ведущемъ ко-



лесѣ O найдется, какъ огибающая окружности PK_1 при качении полюды O_1 по O . При этомъ качении точка P — центр

окружности PK_1 , опишетъ эпициклоиду PE и огибающей будетъ поэтому кривая, параллельная эпициклоидѣ

РЕ и отстоящая отъ нея на разстояніе радіуса RK_1 ; обозначимъ эту кривую черезъ АХ .

Линію зацѣпленія мы построимъ обыкновеннымъ приемомъ; такъ, чтобы найти, гдѣ будетъ имѣть мѣсто соприкосновеніе точки А зубца съ цѣвкой, проводимъ въ точкѣ А зубца нормаль къ его профилю до пересѣченія съ эпициклоидой РЕ въ точкѣ В , или, иначе говоря, отыскиваемъ на РЕ такое положеніе центра круга RK_1 , при которыхъ послѣдній касается профиля въ точкѣ А; теперь находимъ дѣйствительное положеніе цѣвки въ моментъ соприкосновенія ея съ точкой А профиля, проводя изъ центра О полюиды окружность радіуса ОВ до пересѣченія съ полюидой O_1 въ точкѣ B_1 ; дѣйствительное же положеніе точки А въ этотъ моментъ найдемъ, описавъ изъ О окружность радіуса ОА до пересѣченія съ окружностью цѣвки въ точкѣ A_1 , которая и будетъ такимъ образомъ одной изъ точекъ линіи зацѣпленія. Дугу зацѣпленія можемъ найти, если проведемъ изъ крайней точки Х профиля зубца нормаль къ профилю до пересѣченія ея съ полюидой въ точкѣ К ; тогда РК и будетъ дугою зацѣпленія; эта послѣдняя д. б. больше шага зацѣпленія, сообразно чему и выбирать высоту зубца. Зацѣпленіе такого рода употребляется теперь рѣдко; в е д у щ и м ъ дѣлаютъ зубчатое колесо.

разъ положенія окружности O_2 , мы поступаемъ такъ:

намѣчаемъ на O рядъ точекъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$

достаточно близкихъ другъ къ другу; затѣмъ дуги

$R\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \dots$, откладываемъ послѣдователь-
но по полюидѣ O_1 , такъ что получимъ рядъ точекъ

$a_1, b_1, c_1, \dots$ такихъ, что дуги $Ra_1, a_1b_1, b_1c_1, \dots$

будутъ соотвѣтственно равны дугамъ $R\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \dots$;

далье изъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \dots$ описываемъ дуги ок-
ружностей соотвѣтственно радіусами $R\alpha, R\beta, R\gamma, \dots$

- огибающая этихъ окружностей и дастъ намъ искомый

профиль PX_1 головки зубца; если точки $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ вы-

браны достаточно близко, то дуги сливаются въ одну не-
прерывную кривую.

Профиль основанія зубца у колеса O найдемъ, от-

ложивъ теперь по полюидѣ O въ ту же сторону дуги,

равныя $R\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \dots$, и описавъ

изъ концовъ $a, b, c, \dots$ этихъ дугъ тѣми же радіуса-

ми $R\alpha, R\beta, R\gamma, \dots$ окружности; получимъ такимъ об-

разомъ искомый профиль PY .

Взявъ теперь по окружности O въ другую сторо-

ну рядъ точекъ $I, II, III, IV, \dots$, откладываемъ на обѣ-

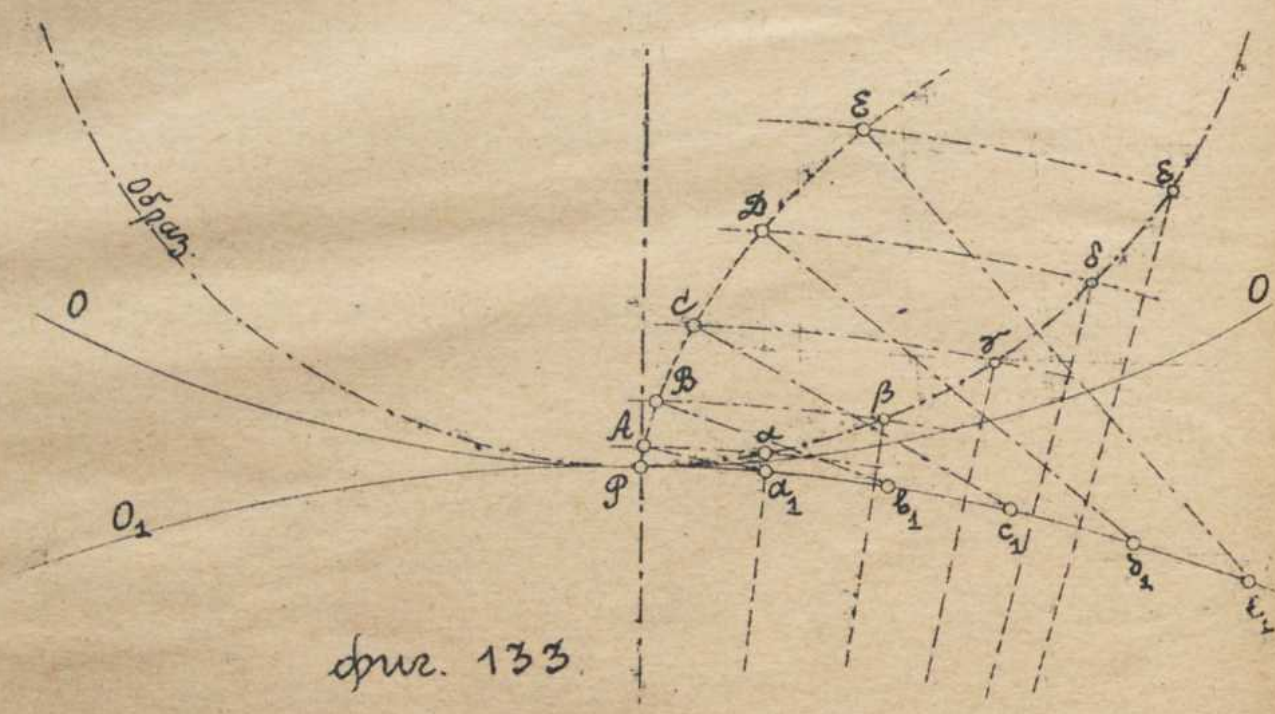
ихъ полюидахъ, начиная отъ точки P , въ ту же сто-

рону, гдѣ лежатъ точки $I, II, III, \dots$ дуги, равныя

$PI, I-II, II-III, \dots$, и изъ концовъ этихъ дугъ T, Z

изъ точекъ $1, 2, 3, \dots, 1_1, 2_1, 3_1, \dots$) описываемъ дуги окружностей радиусами $PI, P II, P III, \dots$, совершенно такъ же, какъ это мы дѣлали для точекъ a_1, b_1, c_1 . Такимъ образомъ мы получаемъ профили для голозоекъ зубцовъ колеса O и для основаній зубцовъ колеса O_1 .

Проводя теперь окружность вершинъ для колеса O , а также для колеса O_1 , найдемъ на окружностяхъ O_2 и O_2 точки K и K_1 — начало и конецъ зацѣпленія; при этомъ нужно всегда помнить, что на ведущемъ колесѣ точка соприкосновенія удаляется отъ центра, а на ведомомъ — приближается къ центру. Ограничивъ профиль въ высоту, въ ту и другую сторону отъ лойиды, откладываемъ на лойидахъ толщину зуба и строимъ симметрично относительно радиуса профиль, ограничивающій зубецъ съ другой стороны; затѣмъ, по шагу зацѣпленія, вычерчиваемъ и другіе зубцы.

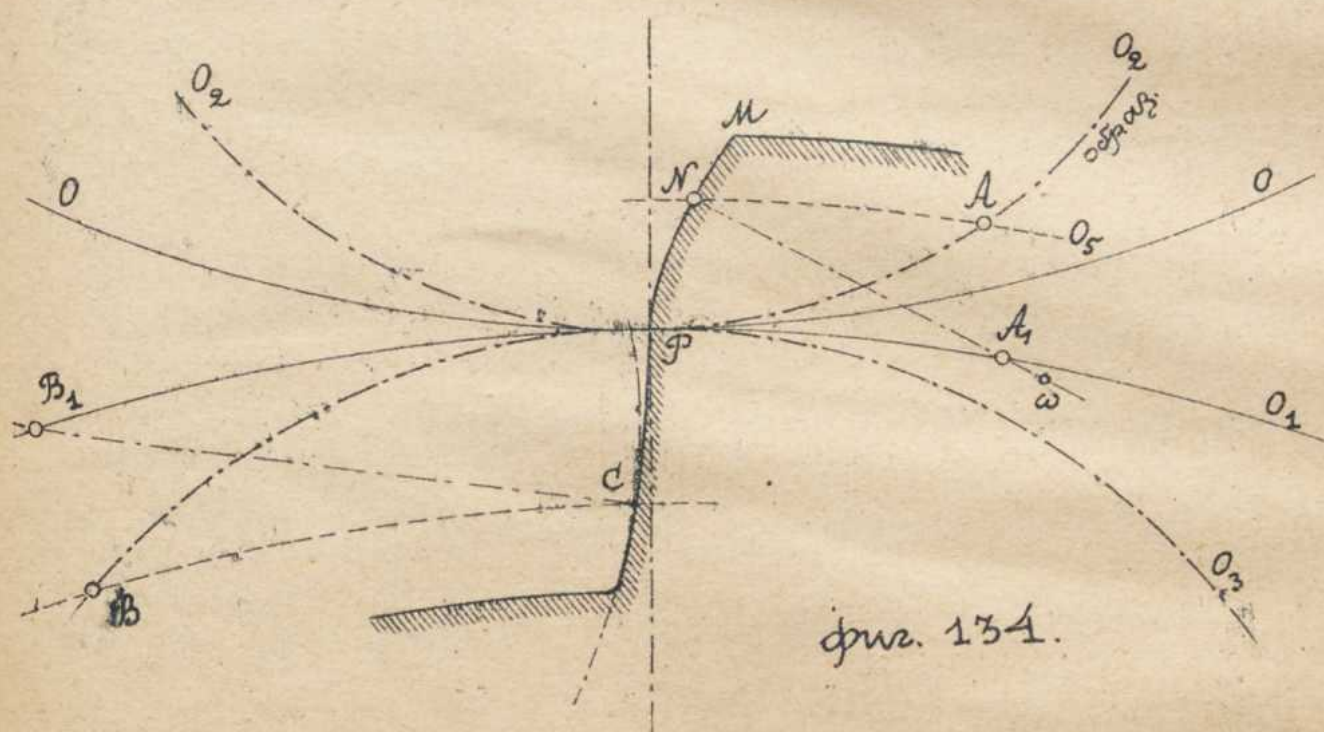


фиг. 133.

х) изъ точекъ $1, 2, 3, \dots, 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, \dots$

Вычерчиваніе профиля по точкамъ менѣе удобно, но также достаточно просто. Для этого проводимъ черезъ тѣ же точки $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ окружности изъ центра O_1 (если хотимъ найти головку профиля зуба O_1 — фиг. 133) и на нихъ находимъ точки профиля, засѣкая соответственно изъ точекъ $a_1, b_1, c_1, \dots$ дуги окружностей радіусами $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma, \dots$, какъ было указано выше. Такимъ образомъ получаемъ точки профиля: $A, B, C, \dots$.

Указанные способы построения профилей неудобны, однако, тѣмъ, что требуютъ большой траты времени, поэтому, ради быстроты вычерчиванія, удобнѣе будетъ подобрать одну или двѣ окружности, которыя могли бы



съ достаточной точностью замѣнить дугу эпициклоиды или гипоциклоиды. Особенно удобенъ для этого способъ Unwin'a, въ которомъ дуга эпициклоиды съ хорошимъ

приближеніемъ замѣняется дугой окружности. Профиль головки зубца у колеса O_1 есть эпициклоида, ограниченная въ высоту окружностью вершинъ; ищемъ теперь такую окружность, которая имѣла бы съ этой эпициклоидой общую точку P и касалась бы ее, кромѣ того, въ точкѣ, лежащей отъ полюды O_1 на разстояніи, равномъ $2/3$ высоты головки зубца, считая это разстояніе по радіусу полюды. На этомъ основаніи проводимъ изъ O_1 окружность O_5 , имѣющую радіусъ, меньшій радіуса окружности вершинъ на $1/3$ высоты головки (фиг. 134). Пересѣченіе этой окружности съ вспомогательной окружностью O_2 даетъ точку A . Когда, при каченіи O_2 по O_1 , точка P окружности O_2 придетъ на окружность O_5 , точка A совпадетъ съ полюдой O_1 . Слѣдовательно, мы прямо можемъ найти точку N эпициклоиды, отстоящую отъ полюды O_1 на $2/3$ высоты головки, если отложимъ на полюдѣ O_1 отъ точки P дугу PA_1 , равную PA , и изъ точки A_1 засѣчемъ дугою радіуса PA точку N на окружности O_5 . Теперь остается подыскать окружность, проходящую черезъ P и касающуюся эпициклоиды въ точкѣ N . Такъ какъ NA_1 есть нормаль къ эпициклоидѣ въ точкѣ N , то центръ такой окружности лежитъ гдѣ - либо на этой прямой NA_1 . Теперь мы путемъ

пробъ отыскиваемъ на линіи NA_1 центръ ^(ω) окружности, проходящей чрезъ Р и N ; этотъ центръ можно было бы найти непосредственно, возставивъ въ серединѣ отрѣзка РN къ нему перпендикуляръ и продолживъ его до пересѣченія съ NA_1 , но упомянутый способъ пробъ на практикѣ оказывается гораздо удобнѣе. Не трудно непосредственно убѣдиться, что дуга Р N M этой окружности съ достаточной точностью замѣняетъ эпициклоиду.

Совершенно такимъ же образомъ находимъ прибли-
женную дугу окружности и для основанія зуба: опять и-
щемъ окружность, имѣющую съ гипоциклоидой общую
точку Р и, кромѣ того, касающуюся ея въ точкѣ С,
лежащей отъ полюиды, считая по радіусу, на разстоя-
ніи двухъ третей всей высоты основанія зуба.

Точное вычерчиваніе эпи - и гипоциклоидъ обыкновенно не выполняются, - эти кривыя съ большой степенью приближенія замѣняются дугами круговъ, приведенныхъ въ способъ Unruна, и этимъ способомъ обыкновенно пользуются всегда для вычерчиванія упомянутыхъ профилей.

Замѣтимъ, наконецъ, что для очертаній другихъ зубцовъ колеса, благодаря ихъ симметріи, найти центры подходящихъ окружностей *Unwin's* очень легко.

Во многих машинахъ, какъ напр., въ машинахъ для обработки металловъ, часто встрѣчается необходимость имѣть подъ рукою цѣлый рядъ (или серію) колесъ, въ которомъ каждое колесо должно правильно зацѣпляться съ любымъ другимъ колесомъ этого ряда, что дастъ намъ возможность составлять тѣ или другія комбинаціи зубчатыхъ колесъ, а, слѣд., осуществлять ту или другую передачу. Не трудно видѣть, что въ такомъ случаѣ всѣ вспомогательныя окружности, при помощи которыхъ произведены профили, должны быть одинаковаго радіуса, и кромѣ того шагъ зацѣпленія также долженъ быть одинаковъ.

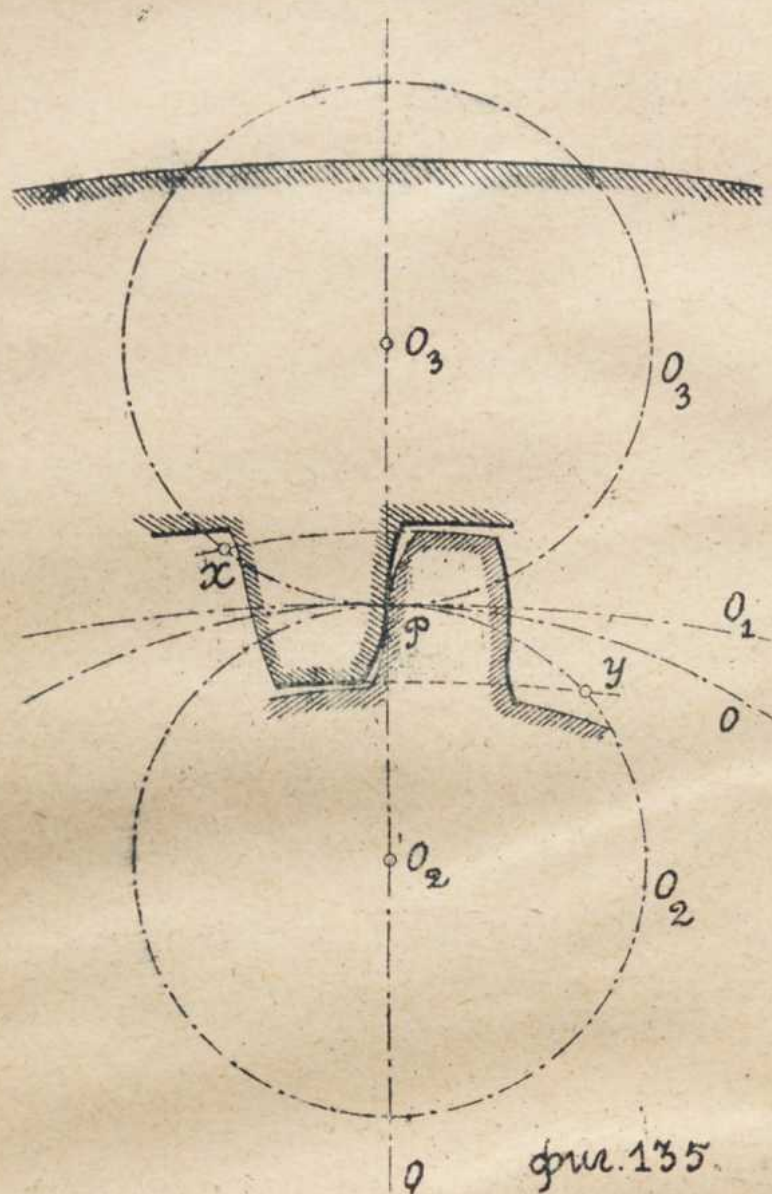
Если бы вспомогательныя окружности были не одинаковы, то вышло бы, что какое - либо колесо А, у котораго профили произведены двумя неодинаковыми окружностями, могло бы сцѣпляться съ колесомъ В, если профили послѣдняго образованы тѣми же окружностями, равно какъ и съ колесомъ С, имѣющимъ профили того же происхожденія; но колеса В и С между собою сцѣпляться не могли бы, такъ какъ, по предположенію, окружность, производившая профиль головки колеса В (и С), разнится отъ окружности, производившей профиль ножки колеса С (и В), а между тѣмъ для зацѣпленія В съ С нужно (по теоремѣ Ка-

муса), чтобы окружность, производящая профиль головки В, производила своим качением сопряженный профиль основания у зубца С.

Въ такихъ смѣнныхъ колесахъ за производящую окружность берутъ окружность съ діаметромъ, нѣсколько меньшимъ радіуса меньшаго колеса; это обстоятельство представляетъ однако то неудобство, что въ случаѣ работы большихъ колесъ дуга зацепленія остается сравнительно очень малой.

Колеса съ внутреннимъ зацепленіемъ и циклическими профилями профилируются по тѣмъ же правиламъ, что и колеса вѣшняго зацепленія: выбираютъ опять двѣ вспомогательныя окружности, O_2 и O_3 (фиг. 135) и образуютъ качениемъ O_2 по O основание зубца колеса O , а качениемъ O_2 по O_1 - профиль головки у колеса O_1 . Точно также окружность O_3 дастъ профиль головки у колеса O и основания - у колеса O_1 . Само собой разумѣется, что въ этомъ случаѣ точка прикосновенія одновременно удаляется или приближается къ центру на обоихъ профиляхъ. Изъ самаго способа произведенія профилей видно, что здѣсь гипоциклоида работаетъ съ гипоциклоидой и эпициклоида - съ эпициклоидой. Линіей зацепленія будутъ попрежнему служить части вспомога-

тельныхъ окружностей, MP и PN , которыя мы нахо-



димъ, проводя
окружности вер-
шинъ для то-
го и другого
колеса; при
этомъ всегда
нужно помнить
последователь-
ность точекъ со-
прикосновенія
вспомогательной
окружности при
каченіи по по-
лоидамъ, а также

и то, что эти точки будутъ последовательными точка-
ми соприкосновенія самихъ полоидъ; дуга зацѣпленія
здѣсь также равна линіи зацѣпленія и также дол-
жна быть больше шага зацѣпленія. -

— . — . — . — . — .

О Б Ѣ Э О Л Ъ В Е Н Т Н О М Ъ З А Ц Ѣ П Л Е - Н І И .

БѢ эвольвентномъ зацѣпленіи линіей зацѣпле-
нія, какъ это мы уже видѣли, является прямая, ка-

сательная къ вспомогательнымъ окружностямъ. За все время работы давленіе одного зубца на другой постоянно направлено по этой прямой.

Въ практикѣ машиностроенія установилось требованіе вообще устраивать зацѣпленіе такъ, чтобы давленіе зубцовъ другъ на друга не отклонялось значительно отъ общей касательной къ полоидамъ. Въ циклическомъ зацѣпленіи это требованіе, какъ извѣстно, мы можемъ до извѣстной степени выполнить, взявъ возможно большія вспомогательныя окружности. Здѣсь въ эвольвентномъ зацѣпленіи, требованіе это сводится къ тому, чтобы прямая зацѣпленія была наклонена къ касательной къ полоидамъ подъ небольшимъ угломъ; обыкновенно берутъ уголъ въ 15° . — При данныхъ полоидахъ выборомъ этого угла вполне опредѣляются вспомогательныя окружности, а, слѣд., и профили зубцовъ.

Построеніе, такимъ образомъ, выполняется такъ: черезъ точку P (фиг. 136) прикосновенія полоидъ проводимъ прямую PNP_1 подъ угломъ въ 75° къ линіи центровъ OO_1 ; далѣе изъ точекъ O и O_1 опускаемъ на эту прямую перпендикуляры ON и O_1N_1 , которые и будутъ радіусами вспомогательныхъ окружностей. Точка P при каченіи касательной PN по окружности ON дастъ профиль зубца колеса O , а при каче-

собой, какъ радіусы полоидъ; но для радіусовъ полоидъ PO и PO_1 имѣемъ соотношение (обозначая PO черезъ κ , а PO_1 ... κ_1)

$$\omega \kappa = \omega_1 \kappa_1 \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ ω и ω_1 суть соотвѣтственные угловыя скорости; обозначая теперь радіусы вспомогательныхъ окружностей черезъ ϱ и ϱ_1 , гдѣ $ON = \varrho$, а $O_1 N_1 = \varrho_1$, будемъ имѣть

$$\kappa : \kappa_1 = \varrho : \varrho_1 = \omega_1 : \omega \dots \dots \dots (\text{изъ (1)})$$

такъ что ур. (1) приметъ теперь видъ :

$$\varrho \omega = \varrho_1 \omega_1 \dots \dots \dots (2)$$

Представимъ себѣ окружности ON и $O_1 N_1$ неразрывно связанными съ полоидами O и O_1 ; вмѣсто того, чтобы катить касательную PN по окружности ON для образованія профиля, мы можемъ вращать эту окружность вмѣстѣ съ системой O , и тогда точка нити, намотанной на окружность ON и натянутой въ направленіи PN , дастъ на этой системѣ очертаніе эвольвентнаго профиля

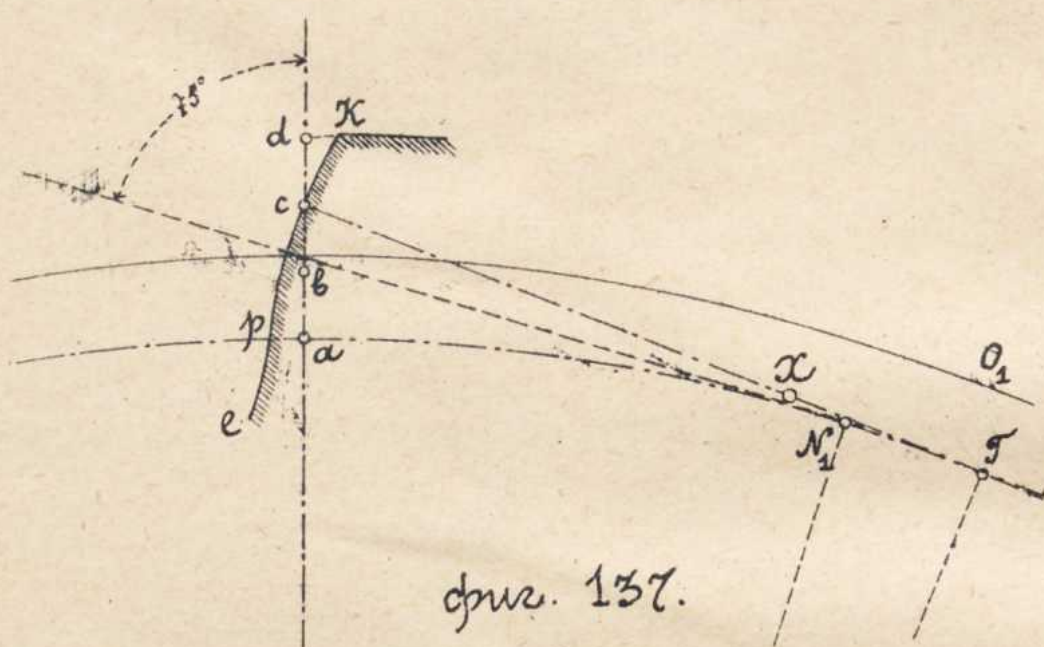
Представимъ теперь нить продолженной и намотанной другимъ концомъ на окружности $O_1 N_1$; вращаемъ систему O со скоростью ω , а систему O_1 со скоростью ω_1 ; получаемъ каченіе полоидъ другъ по другу и, кромѣ того, сматываніе (или наматываніе)

нити съ окружности ON и наматываніе (или сматыва-
ваніе) на окружность $O_1 N_1$; при этомъ за время t
съ окружности ON смотается кусокъ нити длиною
въ $\omega \cdot \varrho \cdot t$, и, какъ показываетъ ур. (2), столь-
ко же наматается на окружность $O_1 N_1$. Точка этой
нити, описывая на системѣ O профиль зубца, опи-
сываетъ въ то же время на системѣ O_1 сопряжен-
ный ему профиль, и путь ея вдоль нити за время
 t , равный $\omega \cdot \varrho \cdot t$, будетъ частью линіи зацѣпленія
за время t ; но за тотъ же промежутокъ времени то-
чка полоиды опишетъ дуги $\omega \cdot r \cdot t$, а такъ какъ
 $\varrho = r \cos \alpha$, гдѣ α есть уголъ наклона $NP N_1$ къ
касательной къ полоидамъ TT_1 , равный у насъ (на
фиг. 136) 75° , то получаемъ, что часть линіи зацѣп-
ленія за время t равна части дуги зацѣпленія за
то же время, умноженной на косинусъ угла между ли-
ніей зацѣпленія и касательной къ полоидамъ. То,
что справедливо относительно ч а с т и дуги зацѣп-
ленія за время t , очевидно, будетъ справедливо и
для всей дуги зацѣпленія; поэтому называя черезъ
 Y длину линіи зацѣпленія, а черезъ S - длину дуги
зацѣпленія, можемъ написать :

$$S \cos \alpha = Y \quad \dots \dots \dots (3).$$

Эвольвентный профиль легко вообще вычертить

или точно по методу Poncelet или по точкамъ ; но и здѣсь, ради экономіи во времени, употребляютъ приближенное вычерчиваніе профиля, аналогично вычерчиванію циклическихъ профилей. Раздѣляютъ часть вы-



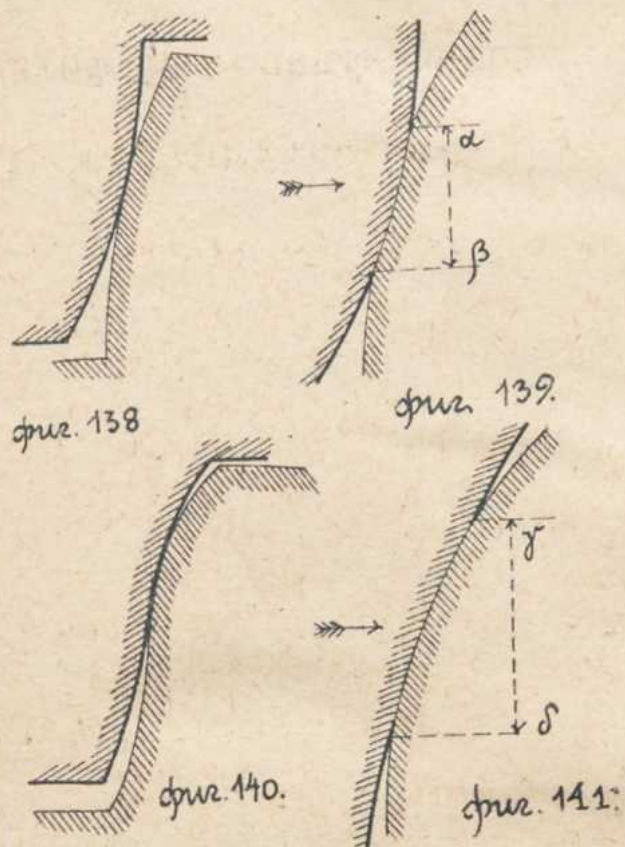
соти зубца, считая отъ вспомогательной окружности до окружности вершинъ, на 3 части ($ab = bc = cd = \frac{1}{3} ad$), берутъ одну изъ точекъ дѣленія, отстоящую отъ вспомогательной окружности на разстояніи двухъ такихъ частей, - въ данномъ случаѣ это будетъ точка С ; проводятъ изъ нея касательную СТ къ вспомогательной окружности и дѣлятъ отрѣзокъ СТ на 4 части; тогда одна изъ точекъ дѣленія, точка Х, отстоящая отъ точки Т на одну такую часть, и принимается за центръ круга радіуса Хс , и дугою рск этого круга и замѣняютъ эвольвенту. Часть профиля зубца, лежащая внутри вспомогательной окружности

сти (часть re), можетъ быть очерчена произволь-
но, лишь бы не было препятствія движенію вершины
сопряженнаго зубца.

Эвольвентное зацѣпленіе имѣетъ ту особенность,
что колеса съ эвольвентными зубцами можно нѣс-
колько отодвинуть одно отъ другого, и зацѣпленіе
все таки останется правильнымъ, если длина дуги
зацѣпленія остается достаточной. Дѣйствительно, из-
мѣненіе разстоянія между центрами ^{имѣло} полоидъ) бы сво-
имъ слѣдствіемъ только измѣненіе наклона линіи
зацѣпленія къ линіи центровъ и увеличеніе радиу-
совъ полоидъ; но такъ какъ вспомоگательныя окружно-
сти остались тѣ же, то отношеніе между радиуса-
ми полоидъ осталось прежнее, а, слѣдовательно, и пе-
редача осталась та же. Подобнаго свойства цикличе-
ское зацѣпленіе не имѣетъ, что и представляетъ
преимущество эвольвентнаго зацѣпленія передъ цикли-
ческимъ и особенное его удобство: эвольвентное за-
цѣпленіе не требуетъ особенно точной установки.

Однако эвольвентное зацѣпленіе, въ свою оче-
редь, имѣетъ свою невыгодную сторону, выясненную
изъ опытовъ Бахомъ. Въ этомъ зацѣпленіи зубцы ог-
раничены выпуклыми профилями, значить, приходится работать выпуклой поверхностью по

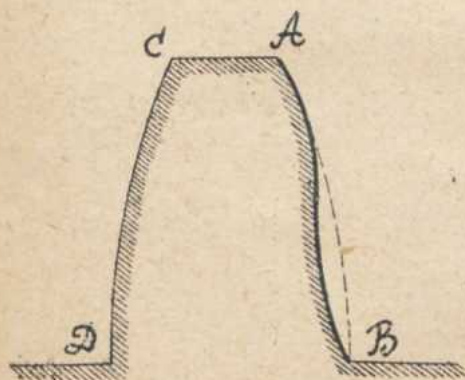
выпуклой же, и, какъ не трудно видѣть, соприкоснове-
неніе въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто на меньшей
поверхности. (вслѣдствіе упругости матеріала и смина-
нія поверхностей соприкосновеніе никогда не проис-
дитъ по линіи),



невели тогда, ког-
да выпуклая поверх-
ность работаетъ съ
вогнутой, - это по-
слѣднее имѣетъ мѣ-
сто именно въ ци-
клическомъ зацѣпле-
ніи. (фиг. 138-
141 $\alpha\beta < \gamma\delta$).

въ этомъ и кроется причина большаго изнашива-

нія зубцовъ эвольвентнаго за-
цѣпленія сравнительно съ ци-
клическимъ, при всѣхъ ос-
тальныхъ равныхъ условіяхъ .



фиг. 142.

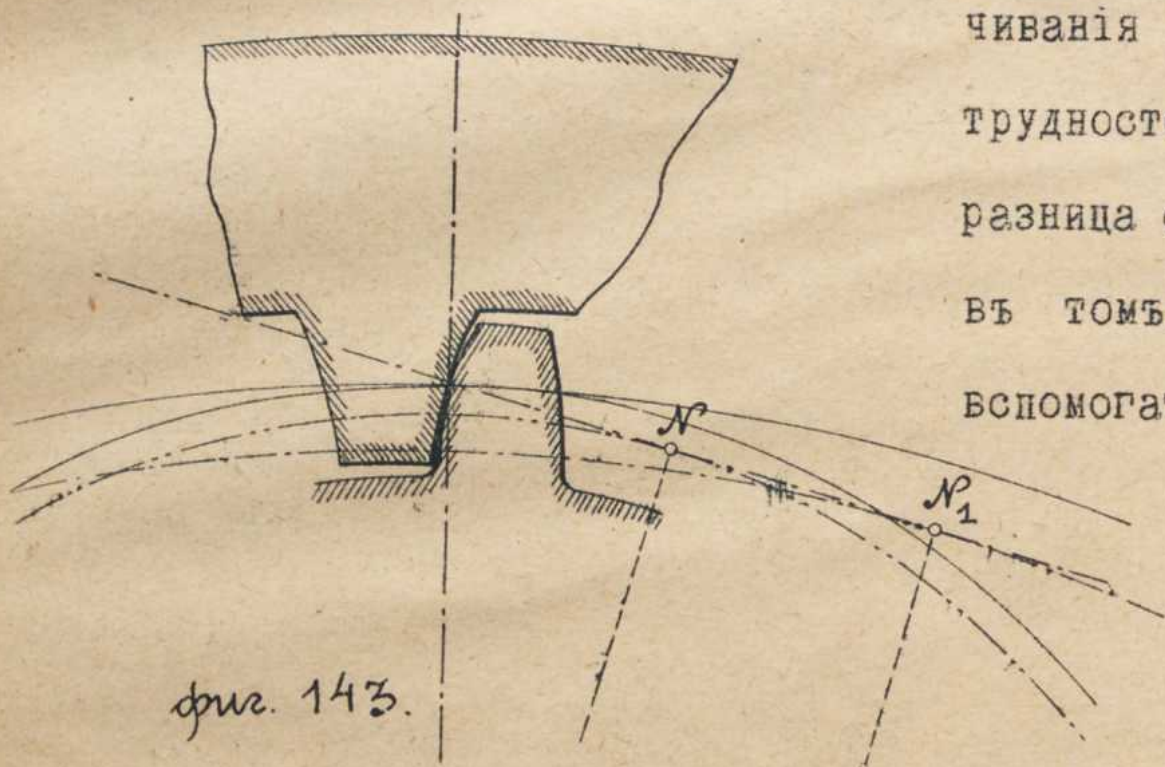
Опыты Баха надъ деревян-
ными зубьями показываютъ, что
эвольвентный профиль посте-

пенно, путемъ истиранія, обращается въ профиль,
близкій къ циклическому. На фиг. 142 представлѣн

одинъ такой зубъ - у него все время работала только одна сторона АВ, и оказалось, что послѣ нѣкотораго промежутка времени рабочая сторона АВ приняла форму циклическаго очертанія, а нерабочая - сохранила эвольвентное, (пунктиромъ выше В указана граница первоначальнаго эвольвентнаго профиля ВА). Поэтому циклическое зацѣпленіе слѣдуетъ признать болѣе умѣстнымъ, особенно тамъ, гдѣ имѣетъ мѣсто болѣе или менѣе значительная угловая или окружная скорость колесъ.

Внутреннее эвольвентное зацѣпленіе не предста-

вляетъ для вычерчивания никакихъ трудностей; вся разница состоитъ въ томъ, что обѣ вспомогательныя

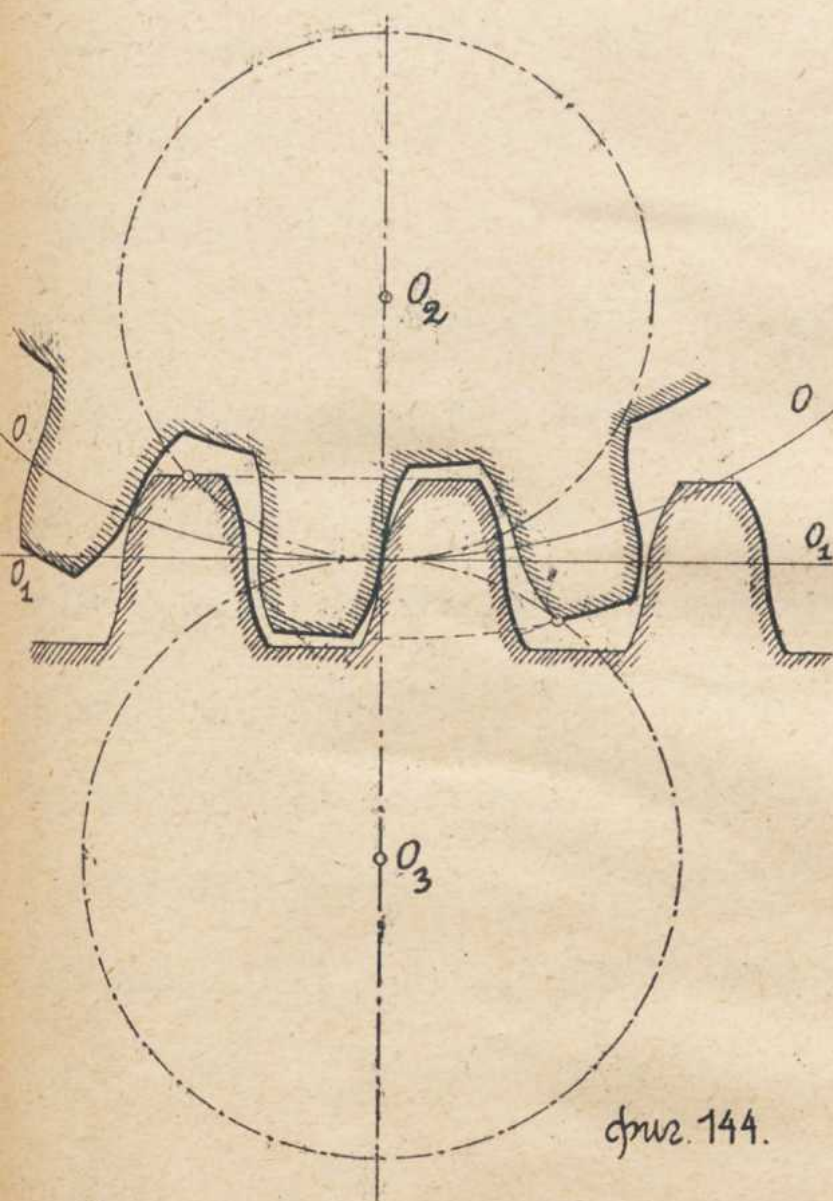


окружности будутъ лежать по одну сторону касательной къ полюдамъ (фиг. 143) . Начало и конецъ за-

цѣпленія, а также соотвѣтственныя величины рабочих частей профилей находятся по общимъ правиламъ

- - - - -

На основаніи приведенныхъ соображеній не представитъ никакихъ затрудненій вычерчиваніе зацепленія зубчатой полосы съ колесомъ. Это зацѣпленіе можетъ быть выполне-



но или съ циклическимъ профилемъ или съ эвольвентнымъ. Въ первомъ случаѣ выбираемъ вспомогательныя окружности O_2 и O_3 (фиг. 144) и строимъ циклическіе профили на общихъ основаніяхъ. У зуб-

цовъ полосы профилями будутъ служить простыя циклоиды, образованныя при каченіи вспомогательныхъ окружностей по прямой $O_1 O_1$, въ которую обратилась здѣсь циклоида O_1 . Иногда (теперь рѣдко) на по-

рѣшеніе этого вопроса въ отдѣльных случаяхъ особыхъ трудностей не представляетъ, но, понятно, достаточно полнымъ быть не можетъ, почему здѣсь и приходится руководствоваться данными и правилами практики. Вообще избѣгаютъ брать малое число зубцовъ, и упомянутыя выше передачи съ четырьмя зубцами на маломъ колесѣ, встрѣчаются только въ видѣ исключенія въ нѣкоторыхъ небольшихъ грузоподъемныхъ машинахъ. Для передачъ съ малой скоростью (въ ручныхъ воротахъ, кранахъ и проч.) не берутъ меньше 11 зубцовъ на меньшемъ колесѣ, въ передачахъ приводныхъ, отъ паровыхъ машинъ и проч., не берутъ меньше 24 зубцовъ.

Что касается передаточнаго числа, т.е. отношенія чиселъ зубцовъ, то вообще нужно замѣтить,

что тамъ, гдѣ рѣчь идетъ о передачѣ болѣе или менѣе значительнаго постояннаго усилія, выгодно, чтобы зубцы какъ можно скорѣе приработались другъ къ другу, а это будетъ тогда когда работать другъ съ другомъ придется однимъ и тѣмъ же зубцами. Въ этомъ смыслѣ выгодны передачи

$1 : 1$, $1 : 2$, $1 : 3$,; совершенно же невыгодны такія, какъ $11 : 17$, или нпр., $23 : 31$ и т.п.

Но если рѣчь идетъ о передачѣ усилія, пере-

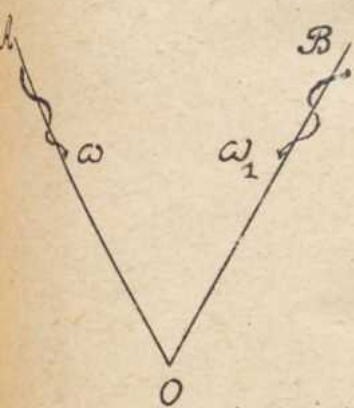
одически мѣняющагося, когда ,напр., за одинъ оборотъ
усиліе будетъ переходить черезъ maximum и minimum
тогда, очевидно, простыя передачи, каковы, напр.,
 $1 : 2$, $1 : 4$,, невыгодны, потому что въ слу-
чаѣ простыхъ отношеній однимъ и тѣмъ же зубцамъ
пришлось бы испытывать постоянно наибольшія усилія,
а другимъ - наименьшія. Для болѣе равномернаго из-
нашивания зубцовъ по крайней мѣрѣ у того колеса, ко-
торому передается усиліе, выгоднѣе брать менѣе
простыя отношенія, напр., $2 : 5$, $3 : 7$ и т.д.

- . 2 . - . - . - .

ПЕРЕДАЧА МЕЖДУ ПЕРЕСѢКАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ.

Коническія фрикціонныя и зубчатыя колеса.

Мы изложили вопросъ о передачѣ вращенія между параллельными осями; допустимъ теперь, что требуется передать вращеніе отъ оси А другой оси В, пересѣкающейся съ первой, положимъ, въ точкѣ О (фиг. 146). Пусть вращеніе около оси А совершается съ угловою скоростью ω , вращеніе же около В должно совершаться съ угловою скоростью ω_1 ; причемъ отношеніе $\omega : \omega_1$ есть нѣкоторое постоянное число.



фиг. 146.

Допустимъ, наконецъ, что оба вращенія направлены въ противоположныя стороны.

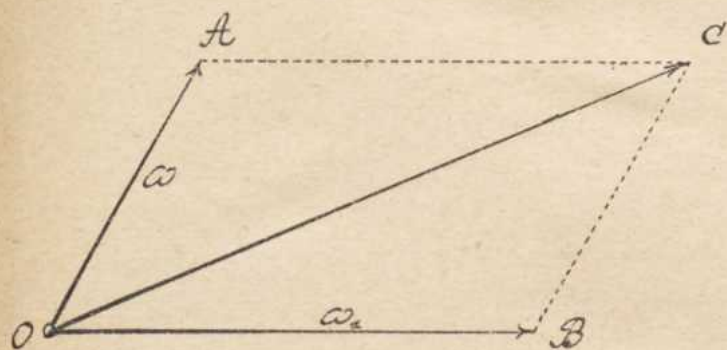
Разсмотримъ и здѣсь, подобно тому, какъ это мы дѣлали при разборѣ передачи между параллельными осями, движеніе системы А относительно В; для этого попрежнему придаемъ обѣимъ системамъ скорость вращенія около В, равную ω_1 , но напра-

вленную въ сторону, противоположную дѣйствительно-
му вращенію около В. Тогда система А будетъ об-
ладать сложнымъ движеніемъ: ось А будетъ вращать-
ся около В съ угловою скоростью ω_1 , а система
А будетъ вращаться около оси А со скоростью ω .
Въ каждый данный моментъ оба вращенія можно пред-
ставить замѣненными однимъ, положеніе оси и угло-
вая скорость котораго найдутся по извѣстнымъ пра-
виламъ механики.

Замѣтимъ, что вращенія обыкновенно предста-
вляютъ въ видѣ векторовъ, величина которыхъ да-
етъ въ извѣстномъ масштабѣ угловую скорость, а
направленіе опредѣляетъ вращенія такимъ образомъ,
что наблюдатель, смотря съ конца вектора на его
начало, видитъ вращеніе совершающимся по часовой
стрѣлкѣ. Какъ извѣстно, въ такомъ случаѣ вращенія
около пересѣкающихся осей складываются по правилу
паралелограмма движенія.

Система А, какъ было уже указано выше,
въ каждый данный моментъ участвуетъ въ двухъ
вращеніяхъ: - 1) около оси А, и 2) около оси
В, направленныхъ въ одну и ту же сторону (вра-
щеніе системы В около ея оси само, по предпо-
ложенію, направлено въ сторону, противоположную

вращенію около A). Составное вращеніе, замѣняющее въ данный моментъ эти два вращенія, мы найдемъ, если отложимъ отъ точки O (фиг. 147) два вектора OA и OB въ направленіи осей вращенія, представляющіе по своей величинѣ въ заданномъ масштабѣ угловыя скорости ω и ω_1 , построимъ на нихъ параллелограммъ $OACB$ и проведемъ діагональ его OC , — она и дастъ намъ направле-



фиг. 147.

строимъ на нихъ параллелограммъ $OACB$ и проведемъ діагональ его OC , — она и дастъ намъ направленіе оси и величину

угловой скорости составного вращенія.

Уголъ между осями OA и OB предполагается неизмѣннымъ ($\angle AOB = \text{const.}$), поэтому ось A , въ движеніи системы A относительно B , опишетъ круглый конусъ. Въ каждый данный моментъ мы можемъ построеніемъ параллелограмма опредѣлить положеніе оси OC составного вращенія (— оси мгновеннаго вращенія); при этомъ мы всегда имѣемъ соотношение :

$$OB:OA = \omega_1:\omega = \sin AOC : \sin COB = \text{const.},$$

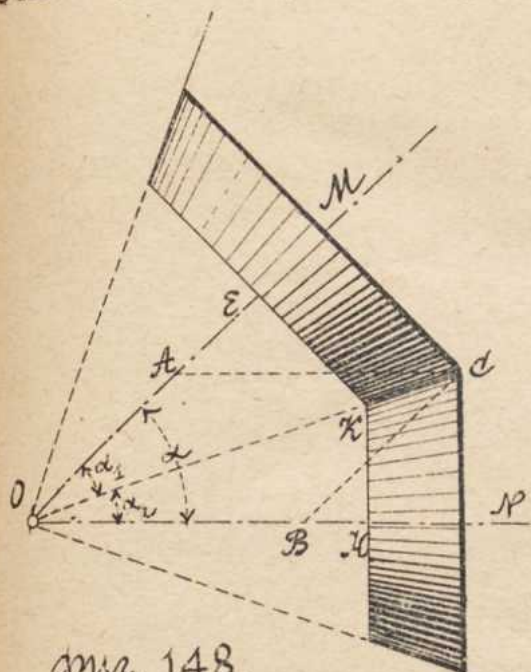
откуда при постоянствѣ угла AOB слѣдуетъ постоянство угла COB ; иными словами, ось мгновеннаго вращенія бу-

детъ лежать на кругломъ конусѣ, описанномъ діагональю OC около оси OB .

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что ось мгновеннаго вращенія въ движеніи системы B относительно A будетъ лежать на конусѣ, описанномъ тою же діагональю OC около OA . Такимъ образомъ движеніе системы A относительно B можно, слѣд., представить каченіемъ (безъ скольженія) второго конуса по первому.

Передачу въ данномъ случаѣ мы можемъ осуществить подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ цилиндрической передачѣ, а именно : задавшись направленіями осей и отношеніемъ угловыхъ скоростей (или чиселъ оборотовъ), строимъ на направленіяхъ осей параллелограммъ со сторонами, пропорціональными угловымъ скоростямъ; находимъ діагональ этого параллелограмма и выполняемъ два конуса, одинъ, — описанный этой діагональю около одной оси и другой, — около другой оси; заставляемъ эти конусы плотно прижиматься другъ къ другу (вершины ихъ должны все время оставаться совпадающими), и тогда, вращая одинъ конусъ съ угловою скоростью ω , получимъ вращеніе другого съ угловою скоростью ω_1 . Возьмемъ какую-либо точку K соприкосновенія этихъ конусовъ (фиг. 148). Разсматривая ее, какъ принадлежащую конусу A , мы выразимъ ея линейную скорость въ видѣ $KE \cdot \omega$, гдѣ $KE \perp$ оси

ОА; при отсутствіи скольженія конусовъ другъ по другу ту же скорость должна имѣть точка К, если разсматривать ее, какъ принадлежащую ко-



фиг. 148.

нусу В и предположивъ, что этотъ второй конусъ вращается съ какой либо угловою скоростью ω' , мы найдемъ равенство

$$КЕ. \omega = КН. \omega',$$

а такъ какъ точка К принадлежитъ діагонали осъ па-

раллелограмма ОАСВ, то имѣемъ

$$КЕ : КН = СМ : СN = СА : СВ ;$$

то, какъ мы писали выше ,

$$СА : СВ = \omega_1 : \omega ,$$

поэтому заключаемъ, что

$$\omega' = \omega_1$$

въ самомъ дѣлѣ изъ ур-ія :

$$КЕ. \omega = КН. \omega',$$

имѣемъ

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{КЕ}{КН} = \frac{СА}{СВ} = \frac{\omega_1}{\omega} ,$$

т.е.

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega_1}{\omega} ,$$

Иными словами, построивъ конусы около А и около В съ образующей ОС и устранивъ ихъ взаимное скольженіе, мы дѣйствительно получаемъ требуемую передачу; при этомъ угловая скорость одной системы въ ея движеніи относительно другой, выражаемая діагональю ОС, будетъ равна

$$\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega \cdot \omega_1 \cos \alpha}$$

гдѣ α есть уголъ между осями, (выраженіе это получаемъ изъ $\triangle_{\text{ка}} OBC$). Обозначивъ черезъ α_1 и α_2 углы діагонали ОС со сторонами ОВ и ОА, можемъ ту же угловую скорость представить еще въ видѣ

$$\omega \cdot \cos \alpha_1 + \omega_1 \cos \alpha_2.$$

Для осуществленія передачи можно ограничиться выполненіемъ лишь отрѣзковъ конусовъ, и такая коническая фрикціонная передача употребляется (подобно фрикціонной цилиндрической) въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

Болѣе употребительна, какъ и въ случаѣ цилиндрической передачи, передача зубчатая. Представимъ себѣ шаровую поверхность, описанную изъ точки O' какимъ либо радіусомъ $O'C'$ (см. табл. 5); эта шаровая поверхность пересѣчетъ упомянутые конусы по двумъ окружностямъ; при каченіи конусовъ другъ по другу, окружности, оставаясь на сферѣ, будутъ также катиться другъ по другу; взявъ на сферѣ профиль, связанный съ одной

изъ окружностей, получимъ сопряженный съ нимъ про-
филь другой окружности, катя первую окружность по вто-
рой и отыскивая на сферѣ огибающую перваго профиля,
Какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ, можно взять вспо-
могательныя окружности, которыя своимъ каченіемъ по
той и другой окружности конусовъ дадутъ сферическія
эпи - и гипоциклоиды; послѣднія будутъ сопряженными
профилями головокъ и основаній зубцовъ, а сами зубцы
представятся коническими поверхностями, образующія ко-
торыхъ будутъ постоянно проходить черезъ точку O' , на-
правляющими же для нихъ будутъ служить сферическіе про-
фили.

Не трудно найти горизонтальную и вертикальную
проекціи профилей зубцовъ; ходъ построенія указанъ на
чертежѣ (см. табл. 5.). Даны основныя конусы, верти-
кальныя проекціи которыхъ суть $O'S'K'$ и $O'S'M'$. Описыва-
емъ сферу изъ вершины конусовъ (O' , O) радіусомъ, ра-
внымъ $O'S'$, а за вспомогательную окружность для образо-
ванія профиля головки на колесѣ $O'S'K'$ беремъ на этой
сферѣ окружность, проектирующуюся на вертикальную плос-
кость въ видѣ прямой $S'N'$, - діаметръ ея будетъ равенъ
 $S'N'$ и сама она (на половину) начерчена въ совме-
щеніи съ вертикальной плоскостью проекцій. При каченіи
этой окружности по окружности $S'K'$ основанія конуса, или,

что то же, при качении конуса $O'S'N'$ по конусу $O'S'K'$, точка окружности $S'N'$ образуетъ профиль головки, лежащій на сферѣ $K'S'M'$.

Чтобы построить горизонтальную проекцію этой сферической эпициклоиды, положимъ, что конусы, основной и вспомогательный, касаются другъ друга по образующей OX , $O'X'$. Замѣтимъ, что окружность основанія основного конуса проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ натуральную величину. Поэтому беремъ на вспомогательной окружности, начерченной въ натуральную величину на вертикальной плоскости проекцій, рядъ точекъ I, II, III, IV, V, ... и откладываемъ по горизонтальной проекціи основанія конуса $O'S'K'$ отъ точки X послѣдовательно дуги $X1, 12, 23, \dots$ равныя дугамъ $S'I, I II, II III, \dots$; концы этихъ дугъ будутъ служить горизонтальными проекціями послѣдовательныхъ точекъ соприкосновенія окружностей.

Проведемъ теперь для начального положенія конусовъ черезъ точку IV горизонтальную плоскость; слѣды ея найти легко, — стоитъ изъ точки IV совмѣщенной вспомогательной окружности опустить на прямую $S'N'$ перпендикуляръ IV p и провести черезъ основаніе его p горизонтальную прямую $a'pb'$ — эта послѣдняя прямая и будетъ вертикальнымъ слѣдомъ искомой горизонтальной плоскости;

вмѣстѣ съ тѣмъ она будетъ служить вертикальной проекціей окружности, по которой плоскость пересѣкаетъ сферу. Горизонтальную проекцію той же окружности мы найдемъ, опустивъ изъ a' и b перпендикуляры, при чемъ не слѣдуетъ забывать, что эта окружность будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость проекціей въ натуральную величину, въ видѣ окружности vea .

Теперь, аналогично тому, что мы имѣли при построении плоскихъ эпициклоидъ, мы можемъ сказать, что въ тотъ моментъ, когда прикосновеніе окружностей будетъ имѣть мѣсто въ точкѣ $(4, 4')$, точка вспомогательной окружности, прикасавшаяся къ основной въ начальный моментъ, теперь будетъ находиться на горизонтальной окружности $(aev, a'e'v')$, причемъ разстояніе ея отъ точки $(4, 4')$ дается непосредственно отрѣзкомъ $(C IV)$.

Идемъ теперь по правиламъ начертательной геометріи проекціи точки, отстоящей отъ другой, данной, на известное разстояніе и лежащей на данной горизонтальной окружности, — схема построения указана справа. Такимъ образомъ мы и находимъ точку (e, e') , которая и будетъ одной изъ точекъ искомой эпициклоиды.

Подобнымъ же образомъ отыскиваемъ и другія точки, и находимъ такимъ образомъ вертикальную и горизонтальную проекціи профиля головки. Взявъ далѣе на окружно-

сти KxO толщину зубца и ширину впадины и повторяя построение, получимъ горизонтальныя и вертикальныя проекціи профили всѣхъ зубцовъ. Сами зубцы, какъ мы уже говорили, будутъ представлять собою коническія поверхности, направляющими для которыхъ будутъ служить найденные сферическіе профили, образующія же будутъ проходить черезъ общую вершину (O, O) конусовъ. Ограничивая зубцы по длинѣ образующихъ другой сферической поверхностью, получимъ полныя поверхности зубцовъ.

Указанное построение на практикѣ однако не примѣняется, и обыкновенно употребляется нижеприводимое, приблизительное. Представимъ себѣ, что мы построили еще два конуса KPC и CQM , касающіеся нашей сферы по окружностямъ основаній двухъ первыхъ конусовъ (KOC и CQM); конусы эти (фиг. 149) будутъ имѣть образующую PCQ , перпендикулярную къ образующей соприкосновенія первыхъ. Если сферическіе профили не велики, т.е., если зубцы не высоки по сравненію съ радіусомъ сферы OC , что вообще имѣетъ мѣсто почти всегда, то можно принять, что эти профили приблизительно совпадаютъ съ поверхностью конусовъ, касающихся сферы по окружностямъ KC и CM . Но поверхности этихъ дополнительныхъ конусовъ KPC и QCM мы можемъ развернуть на плоскости чертежа, — тогда на той же поверхности развернутся и профили, и

цы совершенно такъ же, какъ и въ случаѣ сферическихъ профилей, ограничивая ихъ однако въ длину не сферической поверхностью, а конической, какъ это видно на чертежѣ, гдѣ слѣва дана часть разрѣза колеса вертикальной плоскостью.

Назовемъ числа зубцовъ у колесъ черезъ z и z_1 тогда, аналогично цилиндрическимъ колесамъ, можемъ написать

$$z : z_1 = \omega_1 : \omega = R : R_1 ,$$

гдѣ черезъ R и R_1 обозначены соотвѣтствующие радіусы окружностей КС и СМ. Обозначая далѣе шагъ передачи черезъ t , имѣемъ :

$$zt = 2\pi R , \quad z_1 t = 2\pi R_1 .$$

Далѣе изъ чертежа имѣемъ :

$$PC = r = \frac{R}{\cos \alpha_1} , \quad CQ = r_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha_2} .$$

Углы β и β_1 секторовъ, въ которые развернутся боковыя поверхности дополнительныхъ конусовъ, опредѣляются условіями

$$r\beta = 2\pi R , \quad r_1\beta_1 = 2\pi R_1$$

Если данъ или выбранъ шагъ зацепленія t , то, задаваясь числомъ зубцовъ, опредѣляемъ радіусы окружностей КС и СМ = R и R_1 , проводимъ оси ОР и ОQ, затѣмъ проводимъ параллель оси ОР на разстояніи R отъ нея и парал-

мель оси OQ на разстояніи $\mathcal{R}_1$; въ точкѣ ихъ пересѣченія и будетъ лежать точка C ; такимъ образомъ опредѣляется линія OC . Впрочемъ, направленіе линіи OC можно найти построеніемъ параллелограмма на осяхъ, какъ это было уже указано выше.

При обычномъ расчетѣ шагъ относится не къ окружности $СК$, какъ это мы принимали выше, а къ средней (по длинѣ зубца) окружности; и въ этомъ случаѣ радіусъ ея опредѣляется непосредственно по числу зубцовъ, а затѣмъ, зная радіусы этихъ среднихъ окружностей для обоихъ колесъ, мы опредѣляемъ направленіе OC проведеніемъ параллелей той и другой оси на разстояніяхъ, равныхъ радіусамъ, а затѣмъ находимъ и точку C , отложивъ отъ точки пересѣченія параллелей половину длины зубца по длинѣ образующей OC . Проведя прямую PCO перпендикулярно къ OC до пересѣченія съ той и другой осью, получаемъ CP и CO — длины образующихъ дополнительныхъ конусовъ; далѣе, изъ чертежа или вычисленіемъ опредѣляемъ радіусы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_1$, по числу зубцовъ находимъ шагъ зацепленія, отнесенный къ окружностямъ $СК$ и $СМ$, и такимъ образомъ получаемъ всѣ нужные для построенія профилей элементы. Для вычисленія $\mathcal{R}$ или $\mathcal{R}_1$ имѣемъ соотношенія :

$$\mathcal{R} = \varrho + \frac{l}{2} \sin \alpha_1$$

$$R_1 = \varrho_1 + \frac{l}{2} \sin \alpha_2;$$

дѣлѣ

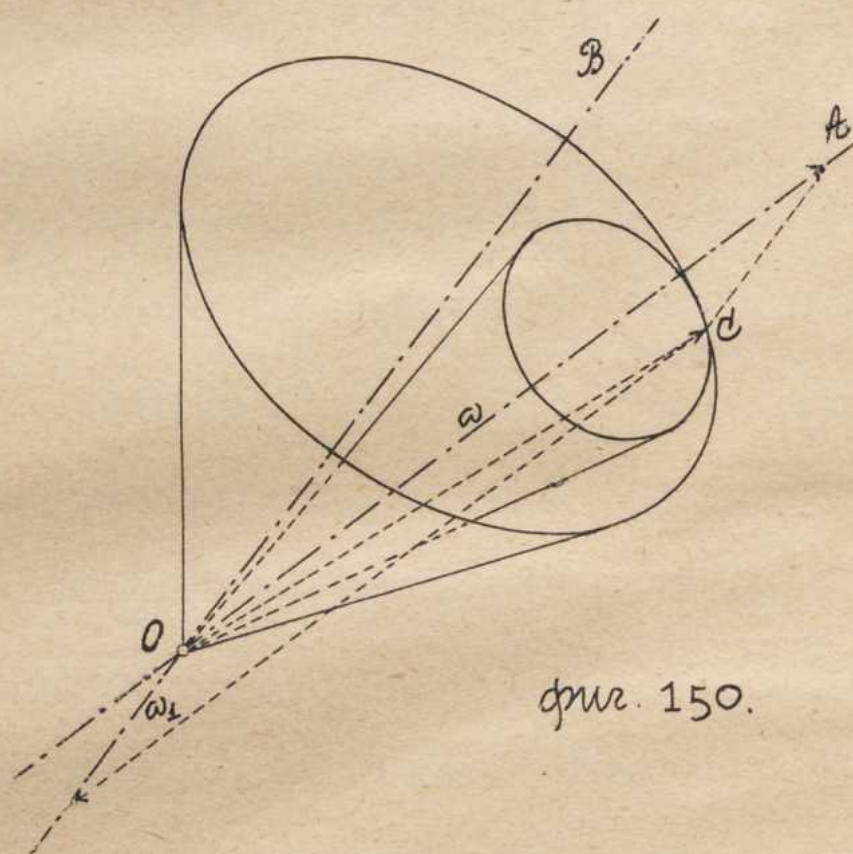
$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = \varrho_1 : \varrho_2,$$

и, наконецъ,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, -$$

углу между осями.

Внутренняя коническая передача не представляетъ послѣ сказаннаго никакихъ затрудненій; это будетъ пе-



редача враще-
нiя между дву-
мя пересѣкающи-
мися осями въ
одну и ту же
сторону. Въ
этомъ случаѣ дѣ-
ло сводится къ
каченiю одного
конуса внутри

другого (фиг. 150).

Замѣтимъ, наконецъ, что коническая передача упо-
требляется по большей части между осями взаимноперпен-
дикулярными.

.....

Относительное скольжение какой - либо точки зуба по другому имѣетъ скорость, очевидно, произведение изъ относительной угловой скорости вращенія на разстояніе этой точки отъ оси мгновеннаго вращенія, т. е. скорость относительнаго скольженія w выразится такъ :

$$w = r \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1\cos\alpha},$$

гдѣ r есть разстояніе точки отъ оси; та же величина w выразится еще такъ :

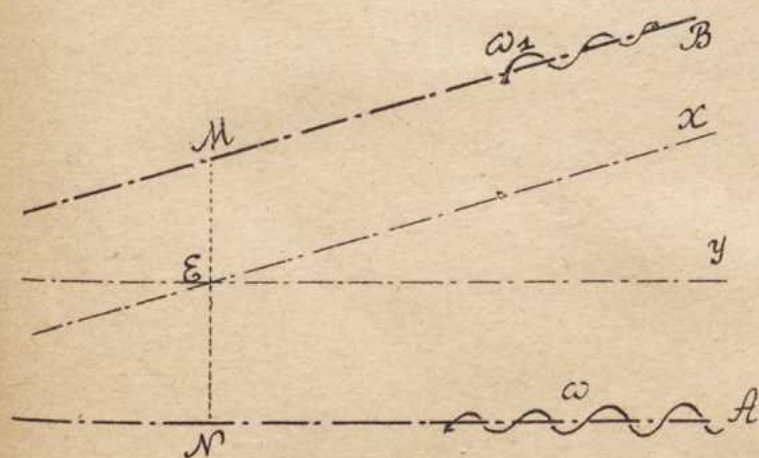
$$w = r(\omega\cos\alpha_1 \pm \omega_1\cos\alpha_2).$$

Положивъ $\alpha=0$, получимъ формулу для скорости скольженія въ случаѣ цилиндрической передачи:

$$w = r(\omega \pm \omega_1).$$

Знакъ - (минусъ) относится къ внутренней передачѣ.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію передачи меж-



фиг. 151.

ду осями непараллельными и непересекающимися. Пусть одна изъ такихъ осей есть ось А (фиг. 151), а другая — ось В; положимъ далѣе, что

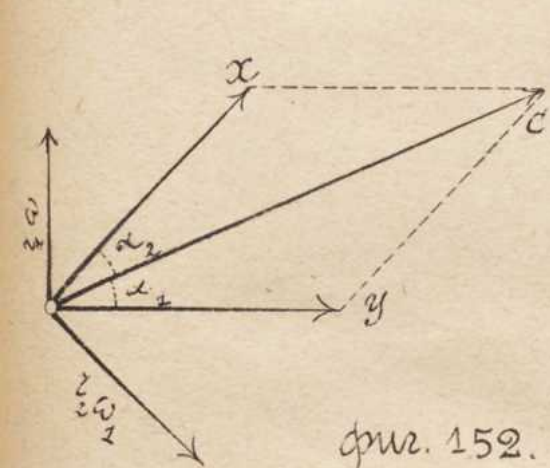
вращеніе около А совершается съ угловою скоростью ω ,

а около B — со скоростью ω_1 и въ сторону, противоположную первому вращенію; пусть затѣмъ отношеніе $(\omega : \omega_1)$ есть величина постоянная.

Подобно тому, какъ мы это дѣлали въ предшествовавшихъ случаяхъ, для рѣшенія этого вопроса рассмотримъ движеніе системы B относительно A , для чего даемъ обѣимъ системамъ скорость около оси A , равную ω , но направленную въ обратную сторону. Система A станетъ неподвижной, система же B будетъ заразѣ участвовать въ двухъ движеніяхъ — около оси A и около оси B ; это сложное движеніе и будетъ относительнымъ движеніемъ системы B . Какъ это извѣстно изъ теоретической механики, сложеніе двухъ вращательныхъ движеній около осей не параллельныхъ и не пересѣкающихся приводитъ къ результирующему вращательному движенію около нѣкоторой третьей оси и къ поступательному движенію вдоль той же оси, т. е. что эта ось будетъ осью вращенія — скольженія; положеніе ея не трудно найти. Съ этою цѣлью проводимъ линію MN кратчайшаго разстоянія между осями A и B и возьмемъ на ней нѣкоторую точку E , (что касается выбора этой точки, то объ этомъ мы скажемъ ниже); замѣняемъ теперь вращеніе около оси A вращеніемъ около оси, параллельной оси A и проходящей черезъ точку E ; вращеніе около оси B подобнымъ же образомъ замѣняемъ вращеніемъ около ос-

вой оси, параллельной прежней оси В и проходящей чрезъ ту же точку Е. Обѣ замѣны дадутъ еще два поступательныхъ движенія, направленія коихъ будутъ лежать въ плоскости, проходящей чрезъ ту же точку Е и перпендикулярной къ МN, т. е. въ плоскости, содержащей какъ направленіе А, такъ и направленіе В.

Вращенія мы откладываемъ въ этой плоскости, какъ векторы ЕХ и ЕУ (фиг. 152), гдѣ ЕХ параллельна оси



МВ (фиг. 151), а ЕУ парал-

лельна оси НА, и складыва-

емъ ихъ по правилу паралле-

лограмма; результирующее

вращеніе представится діа-

гональю этого параллелограм-

ма ЕС и величина его Ω выразится чрезъ ω и ω_1 такъ:

$$EC = \Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1\cos\alpha}$$

гдѣ α обозначаетъ уголъ между осями.

Что касается до поступательныхъ движеній, то каж-

дое изъ нихъ будетъ перпендикулярно къ соотвѣтствующей

оси: поступательное движеніе, получившееся при пере-

несеніи вращенія около В, будетъ перпендикулярно къ ЕХ,

а поступательное движеніе отъ замѣны вращенія около А-

перпендикулярно къ ЕУ; величина же каждаго выразится

произведеніемъ изъ разстоянія точки Е отъ оси на со-

отвѣтствующую угловую скорость. Назовемъ EN (фиг. 151) черезъ r_1 , а EM - черезъ r_2 ; обозначимъ MN черезъ r , такъ что

$$MN = r = r_1 + r_2 ;$$

поступательныя движенія (скорости ихъ) выразятся одно черезъ $r_1 \omega$, а другое - черезъ $r_2 \omega_1$; складывая ихъ по правилу параллелограмма, получимъ результирующее поступательное движеніе, направленіе котораго будетъ направленіемъ оси скользя. Чтобы эта ось совпадала съ осью вращенія, необходимо, чтобы точка E была выбрана нѣкоторымъ опредѣленнымъ образомъ. Дѣйствительно, для совпаденія указанныхъ осей необходимо, чтобы слагающія величины $r_1 \omega$ и $r_2 \omega_1$, взятая въ направленіи, перпендикулярномъ къ ЕС, взаимно уничтожались; это требованіе влечетъ за собою необходимость удовлетворить уравненію :

$$r_1 \omega \cos (CEY) = r_2 \omega_1 \cos (XEC) . . . (1)$$

или, называя углы прямой ЕС съ осями А и В черезъ α_1 и α_2 , уравненію :

$$r_1 \omega \cos \alpha_1 = r_2 \omega_1 \cos \alpha_2 . . . (2)$$

такъ какъ, далѣе, α_1 и α_2 суть вполне опредѣленные величины при данномъ отношеніи угловыхъ скоростей вращенія, и кромѣ того

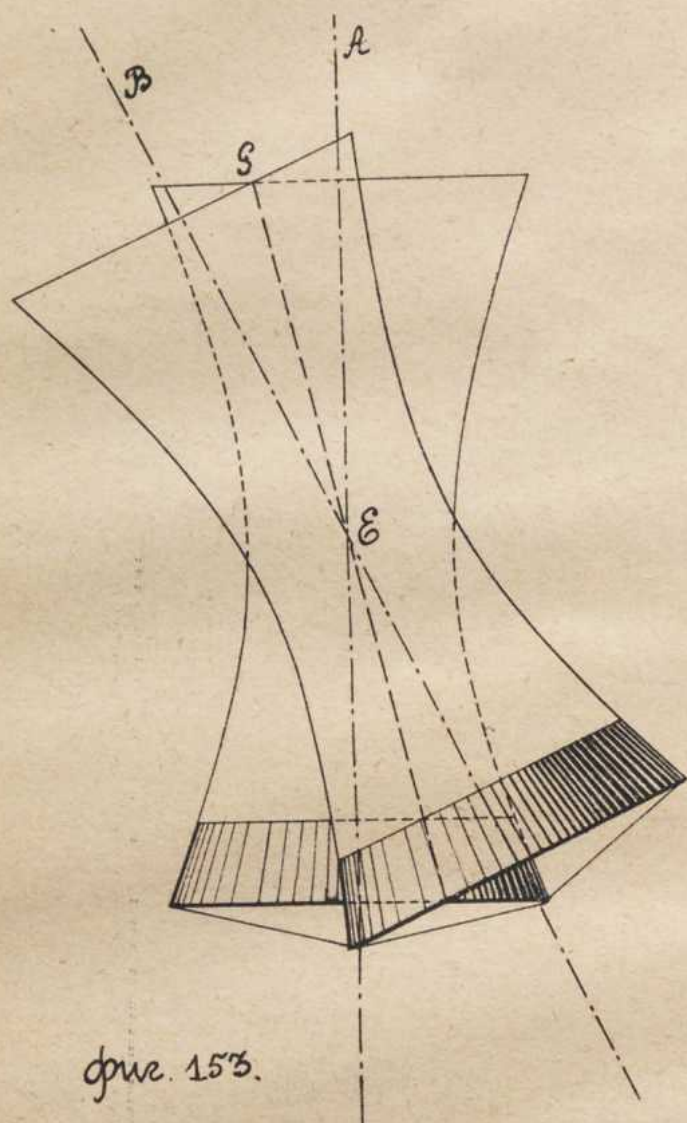
$$r_1 + r_2 = r$$

нѣкоторой вполне опредѣленной величины, то z_1 или z_2 опредѣлится единственнымъ образомъ, такъ что отсюда становится возможнымъ заключить, что точка Е есть нѣкоторая вполне опредѣленная точка кратчайшаго разстоянія MN.

Такую замѣну сложнаго движенія однимъ вращательнымъ и однимъ поступательнымъ мы можемъ произвести въ каждый данный моментъ относительнаго движенія системы В; каждый разъ мы будемъ получать новую ось ЕС - ось скользя - вращенія. Геометрическимъ мѣстомъ этихъ осей ЕС будетъ служить, очевидно, поверхность, описанная прямой ЕС, наклоненной къ оси А подъ опредѣленнымъ угломъ α_1 и находящейся отъ нея на опредѣленномъ разстояніи z_1 . Извѣстно, что такая поверхность будетъ однополымъ гиперболоидомъ вращенія съ осью А.

Такимъ образомъ, а к с о и дъ въ движеніи системы В относительно А есть, слѣдовательно, л и н е й - ч а т ы й г и п е р б о л о и дъ в р а щ е н і я . Точно также мы найдемъ, что аксоидомъ въ движеніи А относительно В будетъ служить гиперболоидъ, описанный прямой ЕС при вращеніи ея около оси В. Оба гиперболоида будутъ касаться другъ друга по прямой ЕС. Вы-
Ад. = проф. Мерцаловъ. Прикл. мех. Листъ 16.

полнивъ матеріально эти 2 гиперболоида (фиг. 153) и нажавъ ихъ другъ на друга, мы можемъ, вращая одинъ изъ нихъ около A со скоростью , получить вращеніе друго- го около B со скоростью , причемъ отношеніе , бу-

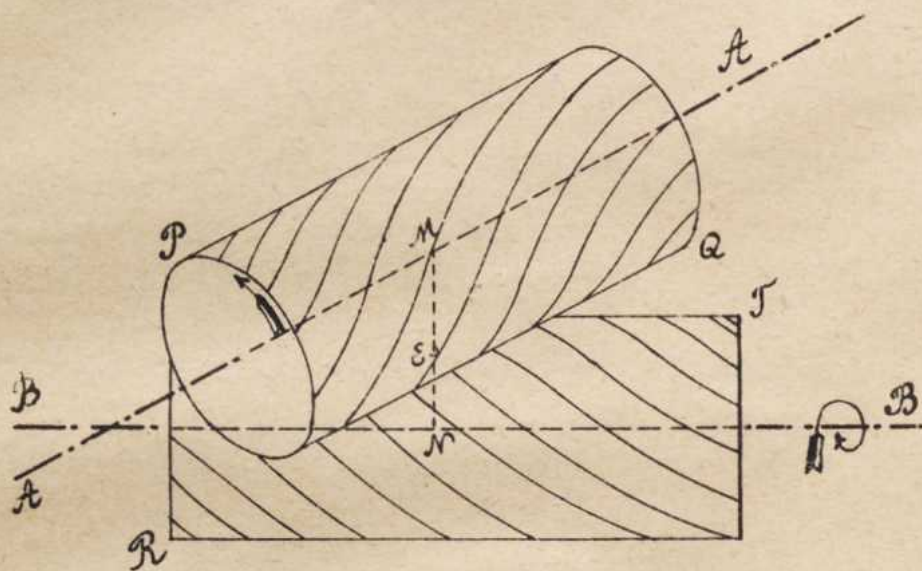


детъ даннымъ числомъ. Взявъ отрѣзки этихъ ги- перболоидовъ, ограничен- ные плоскостями, проведен- ными перпендикулярно къ осямъ черезъ какія либо двѣ точки общей об- разующей (по которой происходитъ касаніе ги- перболоидовъ), можемъ устроить зубчатую переда- чу, подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ кони-

ческихъ колесахъ, опять при помощи дополнительныхъ ко- нусовъ; образующими этихъ конусовъ будутъ служить нор- мали къ поверхностямъ гиперболоидовъ, проведенныя въ точкахъ окружностей основаній отрѣзковъ. Развернувъ ко- нусы, найдемъ соотвѣтствующіе профили. Такъ какъ движе- ніе гиперболоидовъ сопровождается, какъ мы видѣли, вза- имнымъ скольженіемъ вдоль линіи соприкосновенія, то по-

добнаго рода зубчатая передача будет сопровождаться большой потерей на треніе, нежели въ передачахъ цилиндрической и конической; это обстоятельство, а также и трудность выполненія, заставляютъ избѣгать на практикѣ употребленія этой гиперболической передачѣ, и въ машиностроеніи она, вообще говоря, примѣненія не имѣетъ; въ виду этого больше на ней останавливаться не будемъ. Замѣтимъ только, что передачу между осями непараллельными и непересѣкающимися всегда можно выполнить при помощи двухъ коническихъ передачъ. На самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что посредствующей осью для передачи служить линія кратчайшаго разстоянія MN (фиг. 151); тогда, мы устраиваемъ одну передачу между осями NA и MN , а другую - между MN и MB , и такимъ образомъ выполнимъ передачу между NA и MB . Можно и не брать линіи MN посредствующей осью, можно за эту ось взять прямую, соединяющую двѣ любыя точки прямыхъ NA и MB ; но передъ всѣми этими передачами передача при помощи линіи кратчайшаго разстоянія имѣетъ то преимущество, что это будетъ коническая передача при осяхъ, наклоненныхъ другъ къ другу подъ прямымъ угломъ. Такимъ образомъ мы всегда можемъ обойтись безъ гиперболической передачи.

Менѣе выгодна, а потому и менѣе употребительна за-
мѣна гиперболическаго зацѣпленія такъ называемымъ в и н-
т о в ы м ъ ; въ машиностроеніи оно употребляется поч-
ти такъ же рѣдко, какъ и гиперболическое. Возьмемъ на



фиг. 154.

линіи крат-
чайшаго раз-
стоянія между
осями, на ли-
ніи MN, какую
нибудь точку
E и радіусами
ME и EN опи-

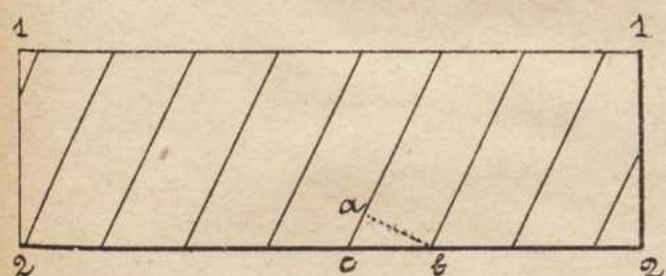
шемъ около осей B и A цилиндры PQ и RT; оба эти ци-
линдра будутъ касаться другъ друга въ одной точкѣ E.
Заставимъ теперь одинъ цилиндръ вращаться со скоростью
 ω_1 , а другой - со скоростью ω . Если мы будемъ раз-
сматривать движеніе одного цилиндра по отношенію къ дру-
гому подобно тому, какъ мы это дѣлали выше при разсмо-
трѣніи гиперболическихъ колесъ, то можно замѣтить, что
это относительное движеніе сопровождается скольженіемъ
(какъ и въ случаѣ гиперболоидовъ), направленіе котора-
го найти легко. Для этого черезъ точку E проводимъ пло-
скость, параллельную обѣимъ осямъ; плоскость эта будетъ

угловыхъ скоростей намъ дано, а направленіе осей неизмѣнно, то діагональ параллелограмма будетъ и по величинѣ и по направленію то же, что и въ параллелограммѣ ЕС, (фиг. 148), построенномъ нами при разсмотрѣніи гиперболической передачи; разница будетъ въ томъ, что тамъ, благодаря выбору нѣкоторой опредѣленной въ системѣ точки Е, направленіе относительнаго скольженія совпадало съ направленіемъ оси относительнаго вращенія; здѣсь же, при произвольной точкѣ Е, такого совпаденія нѣтъ.

Направленіе діагонали ЕК, лежащее въ плоскости, касательной къ цилиндрамъ, есть направленіе одной изъ касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку Е къ обоимъ цилиндрамъ ; возьмемъ эту діагональ за направленіе касательной къ винтовымъ линіямъ на томъ и на другомъ цилиндрѣ. Такія двѣ винтовя линіи можно, очевидно, взять принадлежащими поверхностямъ двухъ сопряженныхъ зубцовъ того и другого цилиндра; теперь, слѣд., зубцы будутъ обладать винтовыми поверхностями, дающими въ сѣченіи съ начальными цилиндрами наши винтовя линіи. Проведя мысленно рядъ винтовыхъ нитокъ на поверхности того и другого цилиндра, получимъ опредѣленное число зубцовъ на томъ и другомъ колесѣ. Такъ какъ скорости точекъ начальныхъ цилиндровъ въ направленіи, перпендикулярномъ къ

діагоналі ЕК, равны (по свойству параллелограмма), а прямая ЕК даетъ направленіе винтовыхъ нитокъ, то разстояніе между рабочими поверхностями двухъ сосѣднихъ зубцовъ, считая по поверхности цилиндровъ и въ направленіи, перпендикулярномъ къ винтовымъ линіямъ, должны быть одинаковыми на томъ и другомъ цилиндрѣ, или, иначе говоря, разстоянія между сосѣдними винтовыми нитями, которыя служатъ направляющими поверхностей зубцовъ, должны быть одинаковы. Разстоянія эти часто называютъ и *о-перечными шагами зацепленія*. *Окружнымъ шагомъ* называется разстояніе между двумя нитями, если считать по окружности цилиндра; окружные шаги относятся между собою, какъ окружныя скорости цилиндровъ.

Если наклонъ винтовыхъ нитокъ къ осямъ цилиндровъ



фиг. 156.

назовемъ черезъ β_1 и β_2 , то уголъ КЕХ (фиг. 155) будетъ равенъ $(\frac{\pi}{2} - \beta_1)$, а уголъ КЕУ будетъ равенъ $(\frac{\pi}{2} - \beta_2)$, такъ какъ оси

соотвѣтственно перпендикулярны къ направленіямъ окружныхъ скоростей. Если цилиндръ развернуть на плоскость, такъ что (1,1) и (2,2) (фиг. 156) представятъ развернутыя окружности основаній, а (1,2) представятъ

образующія, то окружной шагъ представится отрѣзкомъ cb , а поперечный отрѣзкомъ ab ; уголъ abc , очевидно, будетъ равенъ углу между касательной къ винтовой линіи и осью цилиндра, т.е. углу β_1 . Мы можемъ написать :

$$ab = cb \cdot \cos \beta_1, \quad \dots \dots \dots (1)$$

и соотвѣтственно для другого цилиндра :

$$a_1 b_1 = c_1 b_1 \cdot \cos \beta_2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

а такъ какъ

$$ab = a_1 b_1,$$

то (1) и (2) даютъ

$$cb \cdot \cos \beta_1 = c_1 b_1 \cdot \cos \beta_2 \quad \dots \dots (3)$$

Равенство скоростей въ направленіи, перпендикулярномъ къ прямой EK , выразится уравненіемъ :

$$\omega_1 r_2 \cos \beta_2 = \omega r_1 \cos \beta_1 \quad \dots \dots \dots (4)$$

Ур-ія (3) и (4) даютъ :

$$bc : b_1 c_1 = \omega r_1 : \omega_1 r_2 \quad \dots \dots \dots (5)$$

Обозначая числа зубцовъ того и другого колеса черезъ z_1 и z_2 , получаемъ ур-ія:

$$2\pi r_1 = cb \cdot z_1, \quad 2\pi r_2 = c_1 b_1 \cdot z_2 \quad \dots \dots (6)$$

Ур-ія (5) и (6) приводятъ насъ къ ур-ію:

$$z_1 : z_2 = \omega_1 : \omega \quad \dots \dots \dots (7)$$

аналогично съ колесами цилиндрическими.

Нужно замѣтить, что нарѣзки на обоихъ цилиндрахъ будутъ одинаковы, какъ это видно изъ построенія винто-

вой линіи при помощи прямой линіи ЕК.

Относительно скольженія укажемъ далѣе, что въ разбираемомъ случаѣ оно будетъ даже больше, нежели въ томъ случаѣ, если бы мы взяли стрѣзки гинерболоидовъ около ихъ горловыхъ круговъ. Дѣйствительно, спроектируемъ на ось относительнаго вращенія составное скольженіе. Отдѣлать это мы можемъ, проектируя отдѣльно окруженія скорости, изъ которыхъ составляется скольженіе, на ту же ось. Если назвать, какъ и раньше, углы составнаго вращенія съ осями черезъ α_1 и α_2 , то проекціи въ направленіи оси составнаго вращенія будутъ соотвѣтственно равны :

$$\omega r_1 \sin \alpha_1 \text{ и } \omega_1 r_2 \sin \alpha_2 ;$$

проектируя же составное вращеніе въ направленіи, перпендикулярномъ къ первому, получаемъ проекціи

$$(+\omega r_1 \cos \alpha_1) \text{ и } (-\omega_1 r_2 \cos \alpha_2) ;$$

все скольженіе выразится такимъ образомъ черезъ

$$\sqrt{(\omega r_1 \sin \alpha_1 + \omega_1 r_2 \sin \alpha_2)^2 + (\omega r_1 \cos \alpha_1 - \omega_1 r_2 \cos \alpha_2)^2}$$

по свойству діагонали EC_1 параллелограмма EC_1 (фиг.

57) имѣемъ

$$\omega \sin \alpha_1 = \omega_1 \sin \alpha_2$$

слѣд., первый членъ (въ скобкахъ) подъ радикаломъ

равенъ

$$[\omega \sin \alpha_1 (r_1 + r_2)]^2 ,$$

т.е. представляет при данной ω и данномъ отношеніи $\frac{\omega}{\omega_1}$ величину вполне опредѣленную и неизмѣняющуюся. Весь радикалъ получить наименьшее значеніе тогда, когда исчезнетъ второй членъ, т.е. когда

$$(\omega r_1 \cos \alpha_1 - \omega_1 r_2 \cos \alpha_2)^2 = 0,$$

а это будетъ имѣть мѣсто при выполненіи условія

$$\omega r_1 \cos \alpha_1 = \omega_1 r_2 \cos \alpha_2,$$

но этимъ уравненіемъ опредѣлялись именно радіусы r_1 и r_2

горловыхъ круговъ ги-

перболоидовъ. Поэтому съ точки зрѣнія

потери на треніе, вин-

товья колеса въ о б-

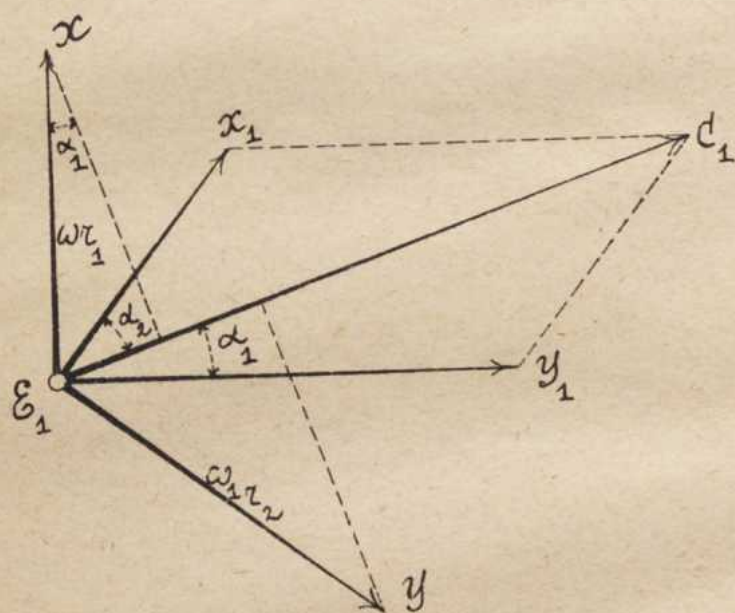
щ е м ъ в и д ѣ ме-

нѣе выгодны, нежели

когда радіусами ихъ

служатъ радіусы гор-

ловыхъ круговъ.



фиг. 157.

ЛОВЫХЪ КРУГОВЪ.

— . — . — . — . — . — .

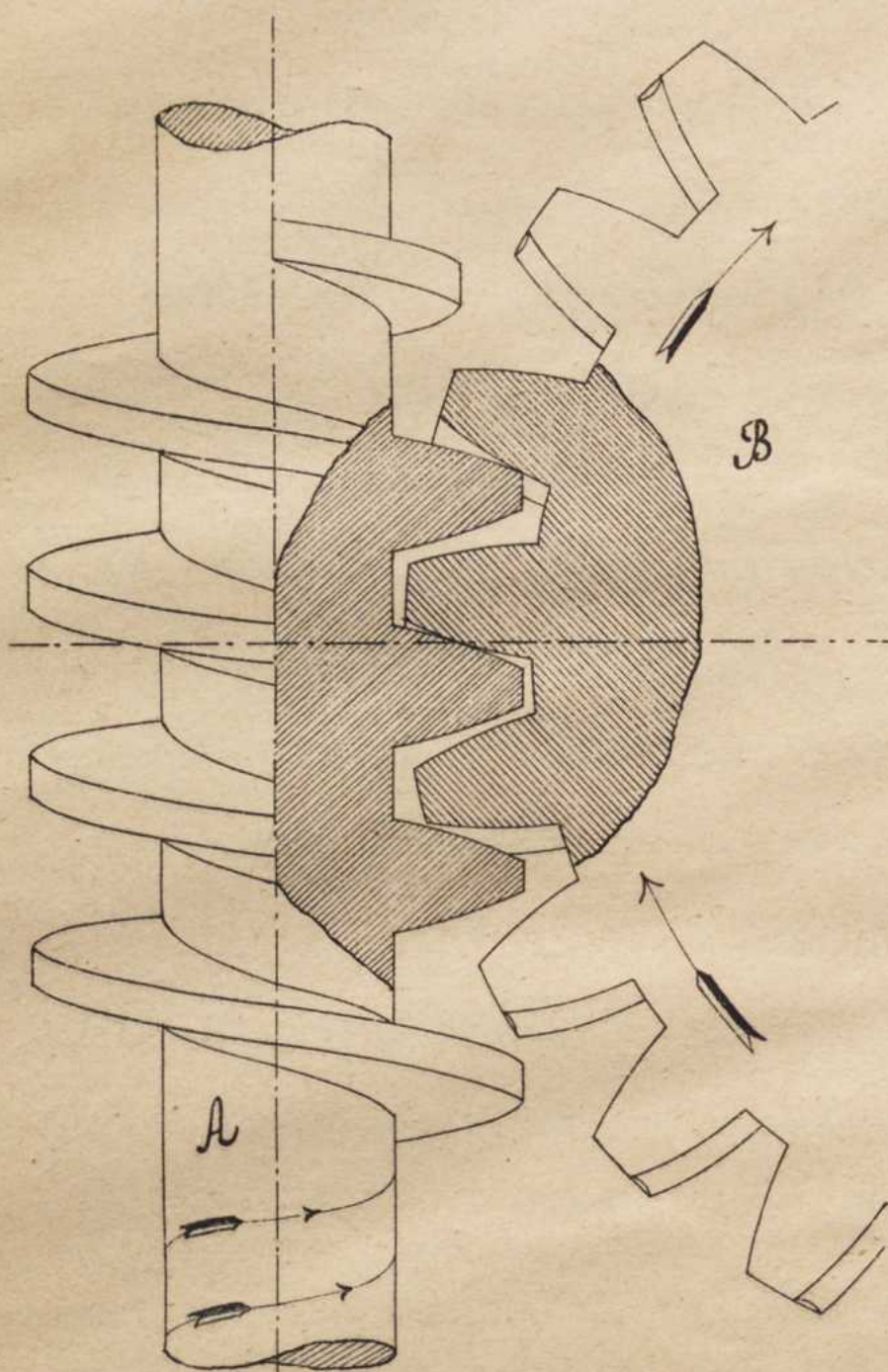
Въ виду малаго употребленія винтоваго зацѣпленія въ машиностроительной практикѣ, больше мы на немъ останавливаться не будемъ, а обратимся теперь къ передачѣ, весьма часто встрѣчающейся на практикѣ, а именно къ червячной передачѣ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда требуется устроить перемѣну между осями, не пересѣкающимися, но идущими въ на-
правленіяхъ, перпендикулярныхъ другъ къ другу, вмѣсто
одного колеса берутъ винтъ и сдѣлываютъ съ нимъ колесо,
идущее на другой оси; устранивъ возможность поступа-
тельного движенія винта (посредствомъ шпонки и проч.),
даютъ ему вращательное движеніе около его оси; тогда
зубцы колеса, входящіе во впадины винтовой нарезки, бу-
дутъ представлять собою выступы винтовой нарезки гайки,
соотвѣтствующей винту. Вслѣдствіе вращенія винта, гай-
ка должна получить поступательное движеніе вдоль оси
винта; скорость этого поступательнаго движенія обратитъ-
ся въ окружную скорость колеса, и послѣднее станетъ вра-
щаться около своей оси (фиг. 158).

Проведемъ сѣченіе черезъ ось винта перпендикуляр-
но къ оси колеса и рассмотримъ движеніе профилей зуб-
цовъ колеса въ этомъ сѣченіи, предполагая,
какъ всегда бываеетъ въ этомъ
зацепленіи, ведущимъ червякомъ.

Проводимъ такжѣ мысленно рядъ осевыхъ сѣченій
винта; при вращеніи винта около своей оси эти сѣченія
будутъ послѣдовательно, одно за другимъ, совпадать съ
плоскостью нашего чертежа; каждое изъ этихъ сѣченій
представляетъ въ сущности ничто иное, какъ сѣченіе зуб-

чатыхъ профилей, расположенныхъ вдоль прямой. Принимая теперь во вниманіе, что въ каждомъ изъ этихъ сѣченій профиля передвинуты относительно профилей сосѣдняго сѣ-



фиг. 158.

ченія на нѣкоторую величину вдоль оси винта, — по самой сущности винтовой нарѣзки, — мы увидимъ, что послѣдовательное совпаденіе этихъ сѣченій съ плоскостью нашего чертежа равносильно простому передвиженію основнаго нашего сѣченія винта вдоль его оси, а это, въ свою очередь, равносильно тому, какъ если

бы мы заставляли профили зубчатой полосы дѣйствовать на профили зубцовъ колеса, передвигая зубчатую полосу вдоль ея направленія. Слѣдовательно, мы найдемъ какъ профили винта, такъ и профили винтоваго колеса, въ сѣ-

ченіи, перпендикулярномъ оси колеса и проходящемъ черезъ ось винта, если выполнимъ построение зацѣпленія зубчатой полосы съ колесомъ. Теперь, взявъ найденный профиль полосы и зная наклонъ винтовой линіи, образуемъ поверхность нарѣзки на винтѣ движеніемъ даннаго профиля по во винтовой линіи. какъ это вообще дѣлается для всякихъ винтовъ.

Что касается зубчатаго колеса, то для точнаго выполнения зубцовъ лучше всего сдѣлать фрезъ, имѣющій форму червяка, и этимъ фрезомъ нарѣзать зубцы: при вращеніи фреза около оси острія его ребра будутъ врѣзываться въ тѣло цилиндра, изъ котораго должно быть сдѣлано колесо и который посаженъ на ось, перпендикулярную къ первой, и такимъ образомъ винтовья нарѣзки мало по малу оставятъ какъ бы слѣдъ на поверхности цилиндра въ видѣ точныхъ зубцовъ колеса.

Чтобы имѣть на чертежѣ профили поверхности зубца колеса въ различныхъ точкахъ, мы можемъ поступить такимъ образомъ : проводимъ рядъ вспомогательныхъ сѣченій, параллельныхъ главному, которое мы выше рассматривали, тогда отъ поверхности винтовой нарѣзки червяка останутся на каждой изъ плоскостей этихъ сѣченій слѣды опять въ видѣ профилей зубцовъ полосы. Ищемъ далѣе для каждой изъ полосъ сопряженные профили на колесѣ,

предполагая полосу движущейся вдоль своего направленія; найденные профили и будутъ профилями поверхностей зубцовъ колеса, лежащими въ проведенныхъ нами сѣченіяхъ.

Возьмемъ для червяка, какъ это часто берутъ на практикѣ, трапецеидальный профиль ;(см. табл. 6); тогда въ главномъ сѣченіи мы будемъ имѣть эвольвентное зацепленіе зубчатой полосы съ колесомъ.

На чертежѣ $vkNr$ есть профиль червяка; окружность червячнаго колеса и представляетъ собою полоиду плоской системы O ; прямая AB , касательная къ окружности, является полоидой для системы, принадлежащей зубчатой полосѣ.

Въ точкѣ N касанія полоидъ проводимъ прямую, нормальную къ профилю kr и отыскиваемъ вспомогательную окружность aa , разверткой которой будетъ служить профиль lq зубцовъ колеса въ этомъ главномъ сѣченіи. Шагъ зацепленія получается изъ расчета прочности зубцовъ, подобно тому, какъ мы это имѣли въ другихъ передачахъ. Зная шагъ и помня, что размѣры профилей какъ въ радіальномъ, такъ и въ окружномъ направленіяхъ даются обыкновенно въ частяхъ шага, вычерчиваемъ полные профили зубцовъ, находимъ длины линіи и дуги зацепленія, а также опредѣляемъ рабочую часть какъ профиля lq , такъ и профиля kr , пользуясь при этомъ обыкновенными, изложен-

ными выше приемами.

Будем считать наш червяк однооборотным, —
иными словами, шаг винтовой нарезки его будет равен
шагу зацепления. Так как шаг зацепления считается
вдоль АВ, то мы описываем прямую АВ цилиндрическую по-
верхность около оси O_1 червяка, на этой поверхности опре-
деляем винтовую линию ВС, имеющую шаг, равный шагу за-
цепления, и берем ее за направляющую при образовании
профиля $ВКНр$ поверхности винтовой нарезки. Считая сде-
ланное нами сечение за вертикальную проекцию, вычертим
еще горизонтальную проекцию червяка; в таком случае
мы увидим, что различные винтовые линии, описанные точ-
ками профиля при его движении по направляющей ВС, изо-
бразятся в горизонтальной проекции окружностями, из
которых на чертеже показаны лишь те, которые соответству-
ют крайним точкам $р$ и $к$ и средней $Н$. Проведем те-
перь вертикальное сечение UV , параллельное главному,
и найдем профили впадины на червяке. Так как сече-
ние это параллельно вертикальной плоскости проекций, то
вертикальная проекция профиля и даст нам его истинный
вид. Находим эту проекцию: берем произвольную точку
 $х$ на вертикали, проходящей через точку $х$ пересечения
плоскости с средней окружностью, так что точка
($х, х_1$) будет представлять собою точку пересече-

нія плоскости VV съ средней винтовой линіей. Проводимъ теперь черезъ точку x_1 вертикальную проекцію средней винтовой линіи, т.е. пристраиваемъ при x_1 кривую, тождественную съ bc , или же просто строимъ гдѣ нибудь эту кривую и отыскиваемъ на ней точку x_1 , соотвѣтствующую точкѣ x .

Чтобы найти другія точки профиля, нпр., точку, соотвѣтствующую P_v , можемъ провести чрезъ P_v слѣдъ осевого сѣченія винта, т.е. прямую $O_1 P_v$, продолжить его до пересѣченія съ средней окружностью въ точкѣ u , найти на вертикальной проекціи средней винтовой линіи, проведенной черезъ x_1 , точку u_1 , соотвѣтствующую u , и теперь, по свойству образованія винтовой поверхности, можемъ сказать, что точка этой поверхности, представляемая горизонтальной проекціей P_v , находится въ такомъ же разстояніи отъ горизонтальной плоскости, проведенной черезъ (uu_1) , въ какомъ точка p профиля к Np находится отъ прямой ON (движеніемъ этого профиля и образована винтовая поверхность). Проводя поэтому горизонталь $u_1 u_2$ черезъ точку u_1 , находимъ на вертикали, проходящей чрезъ P_v , точку P_{v_1} , находящуюся въ указанномъ разстояніи отъ $u_1 u_2$ и служащую вертикальной проекціей для P_v .

Подобнымъ же образомъ находимъ проекціи и другихъ точекъ профиля, т.е. проводимъ черезъ горизонтальную

проекцію $\times$ какой либо точки окружности $O_1 z$,
которая будет служить горизонтальной проекціей винтовой линіи, соответствующей точкѣ z . Опредѣляемъ далѣе относительное положеніе точки z на образующемъ профилѣ, для чего изъ точки пересѣченія окружности ($O_1 z$) съ ($O_1 K_1$) проводимъ вертикаль до пересѣченія съ профилемъ. Далѣе проводимъ осевое сѣченіе, т.е. соединяемъ O_1 съ z ; на средней винтовой линіи получаемъ точку y_3 (не показанную на чертежѣ), отыскиваемъ соответствующую ей вертикальную проекцію и заканчиваемъ построение совершенно такъ же, какъ мы это сдѣлали для точки P_v . Теперь беремъ этотъ профиль и отыскиваемъ ему сопряженный по общимъ правиламъ (по методу Reuleaux), причемъ профиль этотъ рассматриваемъ принадлежащимъ зубчатой полосѣ AB , сѣпляющейся съ колесомъ радіуса ON ; замѣтимъ при этомъ, что такъ какъ профиль впадины уже не будетъ симметричнымъ, то придется отыскивать сопряженные профили отдѣльно, какъ для $K_2 x_1 P_{v_1}$, такъ и для $S_a t_a$. Шагъ зацѣпленія остался тотъ же, что и въ главномъ сѣченіи, но ширина впадины, считая по AB , будетъ теперь другая, сообразно чему нѣсколько измѣнится теперь и толщина профиля зубца. Высота зубца въ радіальномъ направленіи можетъ быть опредѣлена изъ того обстоятельства, что зубцы колеса, обыкновенно, ограничива-

ются линіей CD , показанной пунктиромъ въ проекціи на плоскость, проведенную черезъ ось колеса перпендикулярно къ оси червяка и служившую намъ плоскостью горизонтальныхъ проекцій; разстояніе точки пересѣченія vv съ CD отъ оси O и служитъ ограниченіемъ профилей въ радіальномъ направленіи для разсма- ваемаго сѣченія. Безъ труда находимъ линію зацѣпле- нія и рабочія части профилей.

Проведя нѣсколько такихъ сѣченій, мы будемъ въ состояніи опредѣлить вполне видъ зубцовъ колеса, рав- но какъ величины рабочихъ частей для различныхъ сѣче- ній, т.е. опредѣлимъ дѣйствіе винта на зубцы колеса; соотвѣтственно этому будемъ имѣть представленіе и о ра- ботѣ нарѣзки.

Относительно связи между шагомъ зацѣпленія и ша- гомъ винта мѣжно сказать, что послѣдній бываетъ или равенъ первому, или вдвое, втрое,.... въ n разъ больше его; въ первомъ случаѣ мы имѣемъ однооборотный червякъ во второмъ - двухъ, - трехъ,.... n - оборотный. Если у насъ имѣется однооборотный червякъ, а колесо имѣетъ z зубцовъ, то очевидно, что при одномъ оборотѣ чер- вяка колесо сдѣлаетъ $\frac{1}{z}$ -ую часть оборота, повернув- шись на одинъ зубецъ; при двухъ - оборотномъ червякѣ колесо повернется (за время одного оборота червяка),

уже на 2 зубца, т.е. сдѣлаетъ $\frac{2}{z}$ часть оборота, и вообще повернется на $\frac{n}{z}$ часть оборота при n -оборотномъ червякѣ. Отсюда видно, что червячная передача можетъ служить для преобразованія быстраго вращательнаго движенія въ медленное. Задавшись передаточнымъ числомъ и выбравъ опредѣленный типъ червяка (одно, двухъ, ... оборотный) находимъ число зубцовъ на колесѣ; далѣе изъ расчета прочности опредѣляемъ шагъ зацепленія, 2 по шагу и числу зубцовъ находимъ радіусъ R колеса, ибо мы имѣемъ

$$z t = 2 \pi R .$$

Если червякъ n -оборотный, то шагъ нарѣзки равенъ $n.t$. Выбираемъ уголъ наклона β нарѣзки на среднемъ цилиндрѣ и опредѣляемъ средній радіусъ червяка r (соотвѣтствующій АВ на чертежѣ); для этого воспользуемся соотношеніемъ

$$n t = 2 \pi r . \operatorname{tg} \beta .$$

Профилируемъ, какъ указано, червякъ и колесо — сначала въ главномъ сѣченіи, а затѣмъ, такъ какъ всѣ размѣры червяка извѣстны, находимъ профили зубцовъ колеса и въ другихъ сѣченіяхъ; все это позволитъ намъ составить полное представленіе о работѣ червяка. В е д у щ и м ъ в с е г д а б ы в а е т ъ ч е р в я к ъ . П р и маломъ углѣ наклона винтовой нарѣз-

ки, меньшемъ, такъ наз. угла тренія, колесо не въ состояніи привести червякъ во вращеніе, каковымъ обстоятельствомъ приходится часто пользоваться въ машиностроеніи (нпр., при конструированіи подъемныхъ механизмовъ и проч).

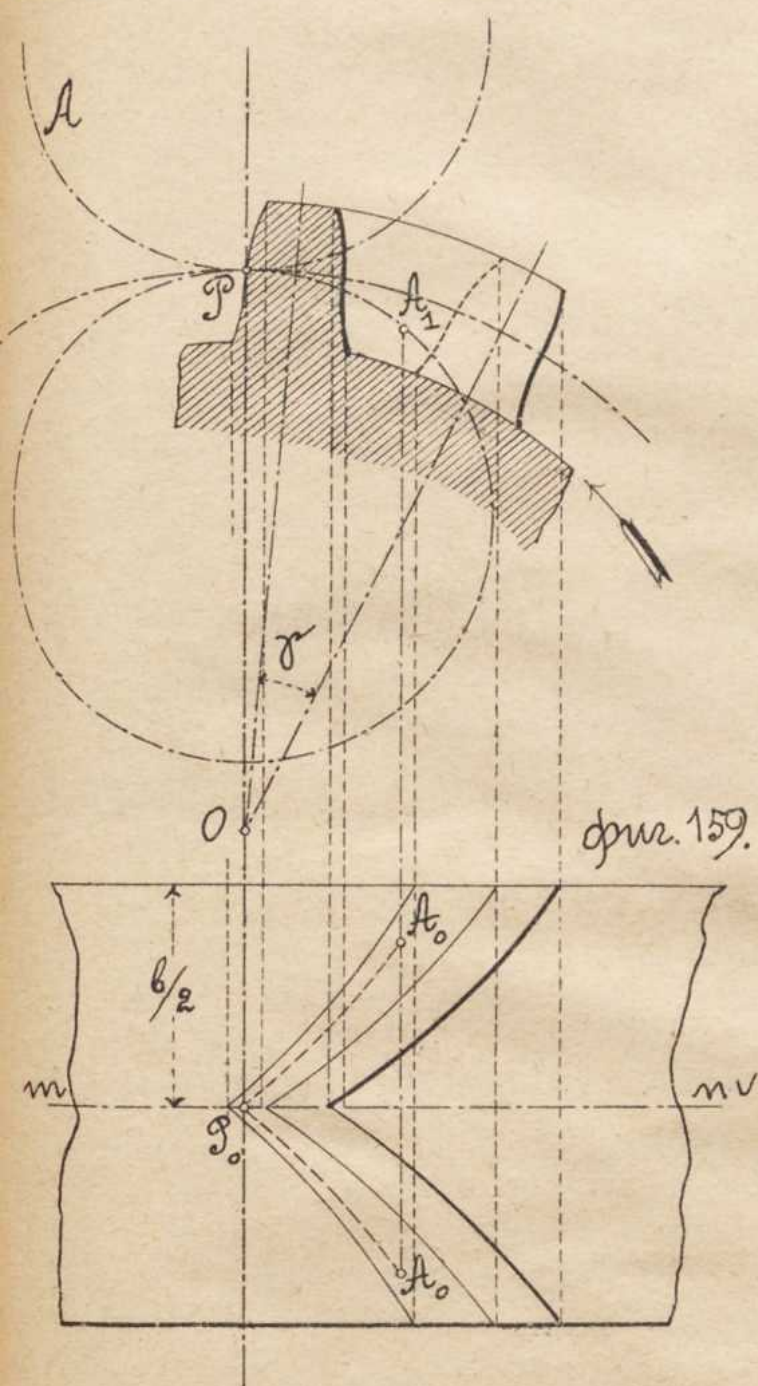
- . - . - . - . - .

Винтообразныя зубчатая поверхности, иногда, употребляются и въ простой цилиндрической передачѣ. Представимъ себѣ цилиндръ (аксоидъ), принадлежащій какому либо изъ колесъ, раздѣленнымъ на 2 половины плоскостью, перпендикулярной къ оси цилиндра. Оставляя въ этой плоскости профили зубцовъ на мѣстѣ, строимъ винтовья линіи (на той и другой половинѣ) одного и того же шага, но противоположнаго направленія - одна правая, другая лѣвая. Взявъ ихъ за направляющія, описываемъ имѣющимися профилями винтовья поверхности, которыя и будутъ служить теперь зубцами (фиг. 159).

Колесо такого рода можно разсматривать, какъ состоящее изъ ряда тонкихъ дисковъ съ о д н и м и и т ѣ м и же зубцами, но только сдвинутыхъ по отношенію другъ къ другу такъ, что соотвѣтствующія точки зубцовъ лежатъ на винтовыхъ линіяхъ.

На чертежѣ 159 изображена п о л о в и н а одно-

го такого зубца въ проекціи его на среднюю плоскость, а также проекція того же зубца (шѣлаго) на плоскость перпендикулярную средней (т.е. проходящую параллельно оси колеса); контуры зубца на этой плоскости представля-



ются винтовыми линіями.

Защѣпленіе выбра -
но цикличе-
ское и указана
линія защѣпленія APA_1 .
Ведущимъ предположено
разсматриваемое коле-
со 0. Такъ какъ каж-
дое сѣченіе, параллель-
ное средней плоскости,
изобразится въ проек-
ціи на эту плоскость
въ натуральную величи-
ну и такъ какъ каждое

такое сѣченіе, какъ мы указали выше, представляетъ со-
бою какъ бы тонкое колесо, тождественное съ среднимъ сѣ-
ченіемъ, но только сдвинутое по отношенію къ нему на нѣ-
который уголъ, то ясно, что дуга PA_1 представляетъ въ
данный моментъ проекцію на среднюю плоскость линіи со-

прикосновенія пары сопряженныхъ зубцовъ.

Не трудно видѣть, что въ данный моментъ соприкосновеніе въ средней плоскости дошло уже до полоиды; въ сѣченіи, соотвѣтствующемъ точкѣ A_1 , соприкосновеніе только начинается, въ сѣченіяхъ же, лежащихъ дальше отъ средняго, соприкосновенія еще нѣтъ. При дальнѣйшемъ вращеніи колеса точка соприкосновенія будетъ постепенно удаляться отъ полоиды, дальнѣйшія сѣченія будутъ вступать въ соприкосновеніе; въ нѣкоторой моментъ соприкосновеніе въ среднемъ сѣченіи прекратится, постепенно оно будетъ прекращаться на дальнѣйшихъ, а линія соприкосновенія все будетъ укорачиваться и въ послѣдній моментъ обратится въ точку (съ той и другой стороны).

Для этой пары зубцовъ соприкосновеніе началось также въ точкѣ средняго сѣченія, затѣмъ стала увеличиваться линія соприкосновенія, какъ это нетрудно видѣть.

Такимъ образомъ, въ данномъ зацѣпленіи мы имѣемъ постепенное увеличеніе, а затѣмъ постепенное же уменьшеніе длины линіи соприкосновенія, между тѣмъ какъ въ простыхъ цилиндрическихъ колесахъ длина линіи соприкосновенія всегда равна длинѣ зубцовъ; это обстоятельство приводитъ насъ къ заключенію того рода, что въ разсматриваемыхъ нами колесахъ съ угловыми зубцами имѣются

болѣе выгодныя условія работы, чѣмъ въ простыхъ цилиндрическихъ, такъ какъ зубецъ не сразу подвергается дѣйствію полной нагрузки, а постепенно.

Кромѣ того, если мы черезъ γ обозначимъ уголъ, на который является сдвинутымъ крайнее сѣченіе относительно средняго, а, слѣд., дуга пологидѣ, соотвѣтствующая этому углу, будетъ равна γR , то не трудно видѣть, что продолжительность зацѣпленія пары зубцовъ выразится теперь величиной $(b + \gamma R)$, гдѣ черезъ b мы обозначили дугу зацѣпленія для простыхъ цилиндрическихъ колесъ съ тѣми же профилями. Что касается угла β наклона винтовой линіи, то онъ связанъ, какъ это можно видѣть изъ чертежа, съ половиною ширины колеса $\frac{b}{2}$ и съ дугой γR соотношеніемъ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\gamma R}.$$

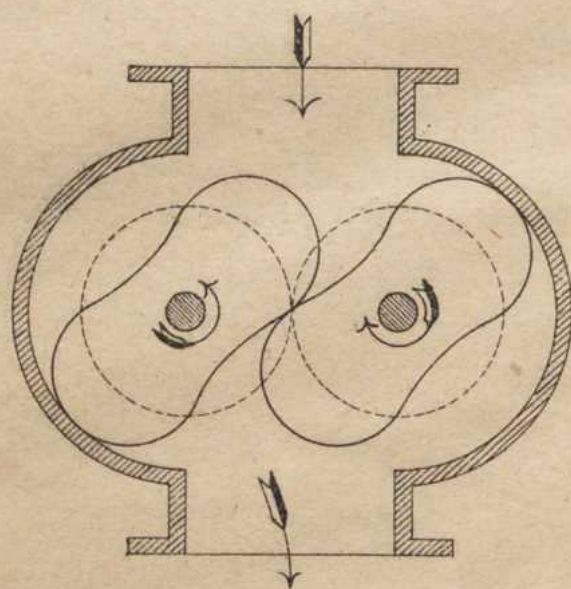
Выбравъ уголъ γ , получаемъ изъ этого уравненія уголъ β и такимъ образомъ вполне опредѣлимъ видъ зубцовъ.

Изъ чертежа понятно, что если бы въ нашей парѣ колесъ вращеніе совершалось въ другую сторону (ведущимъ было бы колесо O_1), то соприкосновеніе началось бы въ обоихъ крайнихъ сѣченіяхъ и кончилось бы въ среднемъ. Точно также легко видѣть, что соотвѣтствующія вин-

товья линіи на обоихъ колесахъ противоположны, т.е. правой винтовой линіи на одномъ колесѣ соответствуетъ лѣвая на другомъ, и обратно.

.....

Къ числу вопросовъ объ отысканіи сопряженныхъ профилей относятся также вопросы о построеніи профилей въ коловратныхъ машинахъ. Эти машины предназначаются для перемѣщенія жидкихъ тѣлъ и въ частности употребляются также, какъ вентиляторы. Мы ниже рассмотримъ только одинъ изъ наиболее распространенныхъ, а именно, — такъ называемый вентиляторъ Рута (Root). Онъ состоитъ изъ двухъ крыльевъ, заключенныхъ въ кожухъ и плотно прилегающихъ какъ къ кожуху, такъ и другъ къ другу. (фиг. 160). Оба крыла враца-



фиг. 160.

ются съ одинаковой угловой скоростью, но въ обратныя стороны. При этомъ, какъ не трудно видѣть, какая либо жидкость (или воздухъ) будетъ всасываться въ одинъ конецъ кожуха и нагнетаться въ другой.

Полоидами для системъ обоихъ

крыльевъ будутъ здѣсь двѣ равныя окружности O_1 и O (фиг. 161). Для профиля выступа крыла Root бралъ часть окружности, описанной изъ нѣкоторой произвольной точки O_2 , лежащей на радіусѣ OP , радіусомъ O_2N ($O_2N = O_2M$), гдѣ точки M и N суть концы дугъ PN и PM , равныхъ каждой $1/8$ части всей окружности O ; такимъ образомъ точки M и N Root взялъ постоянными, и профиль, такимъ образомъ занимаетъ по поloidѣ четверть ея длины.

Чтобы найти профиль впадины, соответствующей этому профилю выступа, ищемъ огибающую кривой NKM (дуги окружности) при каченіи поloidы O по O_1 . Беремъ какую нибудь точку x кривой профиля, проводимъ нормаль къ нему, т.е. соединяемъ точку x съ центромъ O_2 . Пусть эта прямая пересѣкаетъ поloidу O въ точкѣ P_1 ; откладываемъ теперь по другой поloidѣ, считая отъ точки P , дугу PP_2 , равную дугѣ PP_1 . Далѣе при точкѣ P_2 мы должны построить векторъ, наклоненный къ окружности поloidы O_1 подъ тѣмъ же угломъ α , что и векторъ xP_1 къ окружности O . Пусть это будетъ векторъ P_2p . Отложивъ теперь на немъ, считая отъ точки P , длину x_2P_2 , равную xP_1 , получимъ точку x_2 , одну изъ точекъ профиля впадины. Итакъ,

$$\angle x_2P_2y = \alpha = \angle xP_1z,$$

и прямая yP_2T есть касательная къ поloidѣ O_1 въ точ-

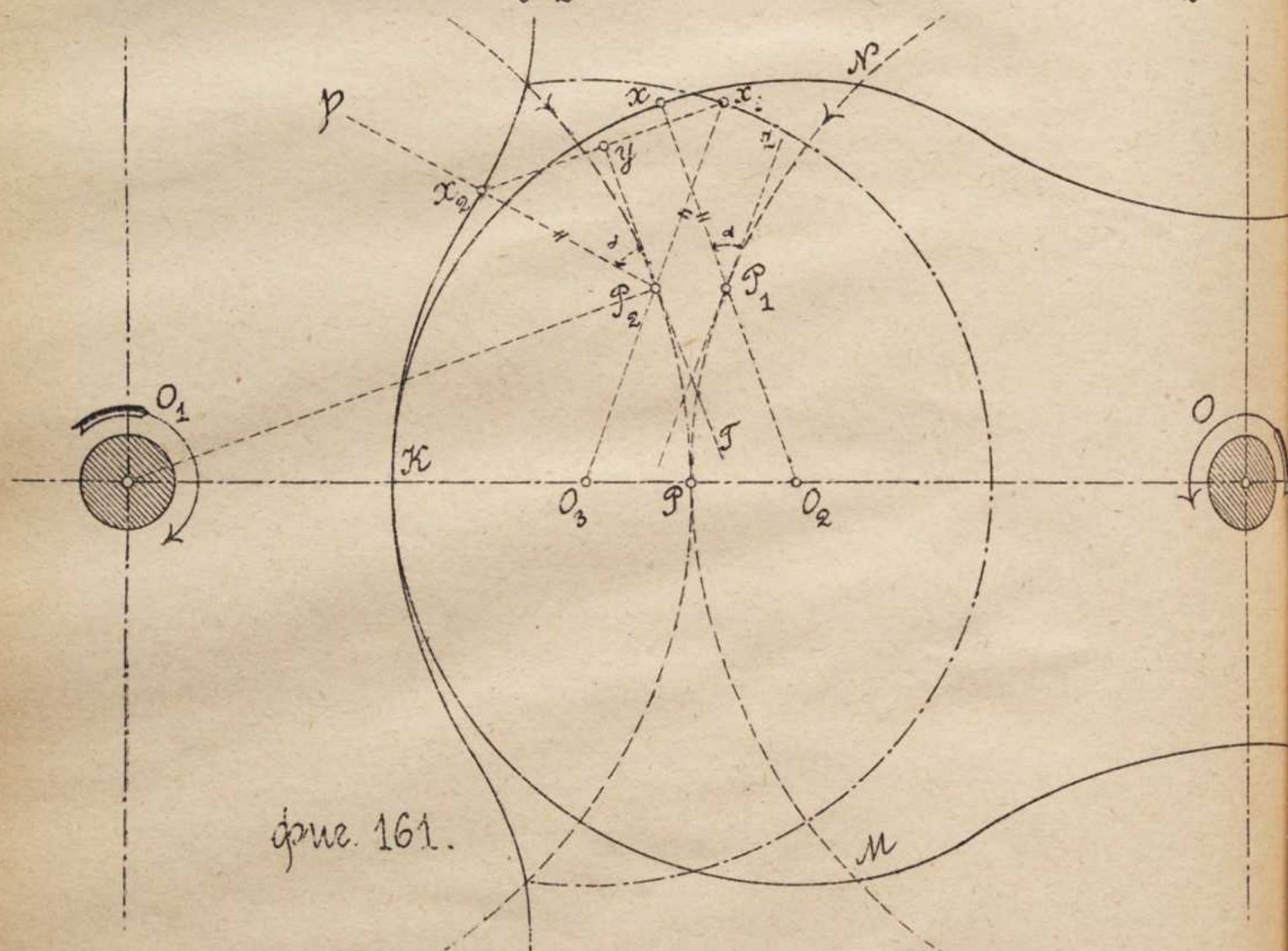
къ P_2 . Опустимъ теперь изъ точки x_2 перпендикуляръ x_2y на эту касательную у Т и, продолживъ его по другую сторону касательной, отложимъ $yx_3 = yx_2$. Соединивъ полученную точку x съ P_2 , находимъ, что

$$\Delta x_2 P_2 y = \Delta x_3 P_2 y;$$

значить, имѣемъ:

$$x_3 P_2 = x_2 P_2 = x P_1,$$

причемъ отръзокъ $x_3 P_2$ наклоненъ къ касательной въ P_2 под



тѣмъ же угломъ α , что и xP_1 къ касательной въ P_1 .

Вслѣдствіе равенства полоидъ мы можемъ заключить что различныя точки x_3 , какъ и различныя x , находятся всё на окружности, центръ коей O_3 лежитъ отъ P на такомъ

же разстояніи, что и O_2 , и радіусъ которой равенъ радіусу O_2x . Поэтому нахожденіе точекъ профиля впадины сводится къ слѣдующему: проводимъ изъ центра O_3 , гдѣ $PO_3 = PO_2$, окружность того же радіуса, что и НКМ; какую нибудь точку ея x_3 соединяемъ съ центромъ O_1 , проводимъ въ точку пересѣченія радіуса x_3O_3 съ окружностью O_1 , т. е. въ точку P_2 , радіусъ O_1P_2 , а изъ x_3 проводимъ параллель ему x_3x_2 и на этой параллели отрѣзкомъ, равнымъ P_2x_3 , изъ центра P застѣкаемъ точку x_2 , которая и будетъ одной изъ точекъ искомаго профиля.

Какъ видно изъ построенія, профиль пересѣчетъ пологиду въ тѣхъ же точкахъ, что и вспомогательныя окружности, т. е. въ точкахъ, находящихся другъ отъ друга на разстояніи четверти длины пологиды.

Выполнивъ построеніе профиля сопряженнаго съ профилемъ НКМ, чертимъ далѣе профиль выступа въ видѣ окружности, тождественной съ окружностью НКМ, и затѣмъ ограничиваемъ соотвѣтственно все крыло, пристраивая еще профиль впадины и выступа. Другое крыло, конечно, будетъ ограничено тождественнымъ контуромъ.

- . - . - . - . - . - .

О Т Д . 2. О Т Н О Ш Е Н І Е М Е Ж Д У С К О Р О С Т Я М И Ш Е Р Е М Ъ Н Н О .

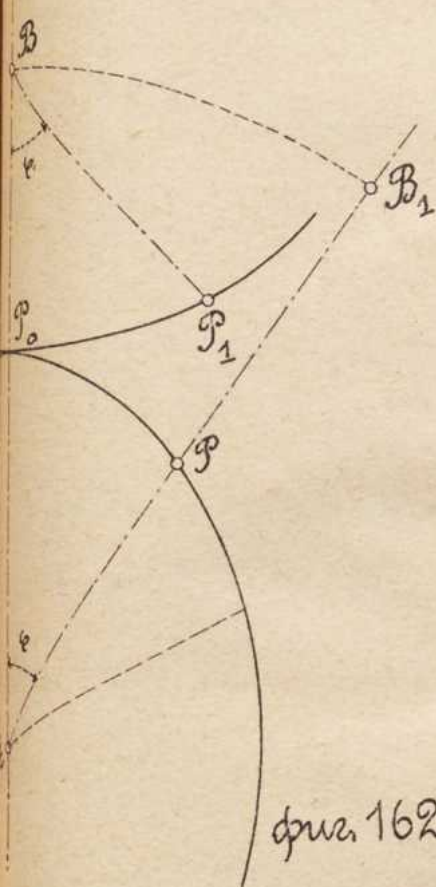
Н Е К Р У Г Л Ы Я К О Л Е С А :

Разсмотримъ теперь передачу вращенія около двухъ параллельныхъ осей съ н е р е м ъ н н ы м ъ отноше-
ніемъ скоростей. Замѣтимъ, что на практикѣ передачи эти
употребляются рѣдко, а потому мы остановимся на нихъ
лишь вкратцѣ. —

Допустимъ, что у насъ имѣются двѣ оси , А и В, въ
опредѣленномъ разстояніи другъ отъ друга, и пусть вра-
щеніе около А съ угловою скоростью ω требуется передать
вращеніемъ около В съ угловою скоростью ω_1 , причемъ от-
ношеніе $\frac{\omega}{\omega_1}$ должно быть нѣкоторой функціей $\varphi (\varphi)$ угла
поворота системы А. Вращенія имѣютъ совершаться въ про-
тивоположныя стороны.

Опредѣлимъ, какъ и прежде, движеніе системы В отно-
сительно А, придавъ обѣимъ системамъ еще общее враще-
ніе около оси А со скоростью ω ; тогда система А оста-
новится, а система В будетъ имѣть два вращенія, кото-
рыя мы въ каждомъ данномъ положеніи оси В, при вращеніи
около А, замѣняемъ однимъ мгновеннымъ вращеніемъ около
оси, лежащей въ плоскости АВ, параллельной имъ, и, какъ

известно, дѣлящей разстояніе АВ на части, обратно пропорціональныя ω и ω_1 . Въ плоскомъ сѣченіи, совпадающемъ, нпр., съ плоскостью чертежа, оси сведутся къ точкамъ А и В (фиг. 162). Полоиду въ движеніи плоской системы В относительно А мы найдемъ слѣдующимъ образомъ.



фиг. 162.

Проводимъ черезъ точку А какой нибудь векторъ АРВ подѣ угломъ φ къ линіи АВ, на немъ отъ точки А откладываемъ АВ₁, равное АВ, и дѣлимъ АВ₁ внутреннимъ образомъ въ отношеніи

$$\frac{PA}{PB_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = f(\varphi);$$

при данномъ углѣ φ величина

$f(\varphi)$ будетъ вполне опредѣлен-

ной и известной. Такимъ образомъ мы получимъ точку Р, которая и будетъ одной изъ точекъ полоиды.

Далѣе нужно найти, какъ обыкновенно, полоиду въ движеніи А относительно В. Такъ какъ разстояніе между осями есть величина постоянная и такъ какъ точка Р постоянно должна находиться на АВ, то отсюда слѣдуетъ, что два соотвѣтственные радіуса, r и r_1 , въ суммѣ должны давать АВ, т.е. должны удовлетворять условію

$$r + r_1 = АВ.$$

Если вектору AP ($= z$) соответствует въ другой по-
лоидѣ векторъ BP_1 ($= z_1$), то углы, образуемые ими съ
осью AB , т.е. углы P_1BA ($= \varphi_1$) и PAB ($= \varphi$), должны
быть таковы, чтобы векторы PA и BP_1 , при вращеніи си-
стемы A со скоростью ω , ^{а системы B со скоростью ω_1 ,} одновременно могли вступить
на линію AB . Это условіе можно выразить такъ : элемен-
тарное вращеніе $d\varphi$, за промежутокъ времени dt , вы-
разится въ видѣ

$$d\varphi = \omega \cdot dt ;$$

для вращенія $d\varphi_1$ имѣемъ аналогично

$$d\varphi_1 = \omega_1 \cdot dt$$

(для того же промежутка времени dt). Эти два соот-
ношенія приводятъ насъ къ ур-ію

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = f(\varphi),$$

откуда находимъ ур-іе

$$d\varphi_1 = f(\varphi) \cdot d\varphi ,$$

откуда находимъ, что

$$\varphi_1 = \int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi .$$

Выполнивъ интегрированіе, опредѣлимъ отсюда уголъ φ_1 ,
соотвѣтствующій данному φ , а этимъ опредѣлится точка
полоиды P_1 , — для полученія ея придется на сторонѣ уг-
ла φ_1 отложить отъ точки B отрѣзокъ BP_1 ($= AB - AP = PB_1$).

Кривыя, построенныя , такимъ образомъ, и будутъ

полоидами. Не трудно, кромѣ того, убѣдиться, что дуга $P_2 P_1$ равна дугѣ $P P_1$, и радіусъ векторъ BP дѣлаетъ съ кривой такой же уголъ, какъ и векторъ PA . На самомъ дѣлѣ, на основаніи вышеприведенныхъ соображеній, мы можемъ теперь написать, что

$$\frac{d\varphi}{d\varphi_1} = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{r},$$

что даетъ намъ

$$r d\varphi = r_1 d\varphi_1 \dots \dots \dots (1)$$

Уголъ вектора BP_1 съ кривою, т.е. съ касательною къ кривой въ крайней точкѣ вектора, этотъ уголъ, который мы назовемъ черезъ ψ_1 , опредѣляется изъ условія

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{r_1 d\varphi_1}{dr_1} \dots \dots \dots (2)$$

а уголъ между векторомъ AP и кривою — условіемъ

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r d\varphi}{dr} \dots \dots \dots (3)$$

причемъ, если dr_1 положительно, то dr , по построенію кривыхъ, отрицательно, но по абсолютной величинѣ равно dr_1 , слѣдов., изъ (2) и (3) получимъ

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \psi_1, \dots \dots \dots (4)$$

т.е.

$$\psi = \psi_1$$

Далѣе мы имѣемъ выраженіе для ds : (ds — элементъ

дуги)

$$ds = \frac{1}{\sin \psi} \cdot r d\varphi ,$$

и аналогично

$$ds_1 = \frac{1}{\sin \psi_1} \cdot r_1 d\varphi_1 ;$$

въ виду ур. (1) и (4), находимъ :

$$ds = ds_1 ,$$

т.е. всякій элементъ дуги между двумя безконечно близкими радіусами одной полоиды равенъ элементу дуги другой полоиды, заключенному между соответственными радіусами другой.

Кривыя будутъ катиться одна по другой б е з ъ с к о л ь ж е н і я , если мы начнемъ вращать систему А со скоростью ω , а В - со скоростью ω_1 . Здѣсь , однако, далеко не всегда возможно устроить ф р и к ц і - о н н у ю передачу вслѣдствіе того, что кривыя могутъ имѣть угловатые выступы и т. под., формы, при которыхъ нельзя увлечь одну систему другой лишь помощью силы тренія.

Зубчатая передача , можетъ быть устроена всегда и устраивается совершенно такъ же, какъ и въ цилиндрическихъ колесахъ: беремъ опять нѣкоторый произвольный профиль въ одной системѣ и находимъ сопряженный ему въ дру-

гой, катя одну полониду по другой, - здѣсь удобнѣе всего примѣнить методъ Poncelet, годный, какъ было сказано, для всякихъ полонидъ (см. стр 166 и слѣд.).

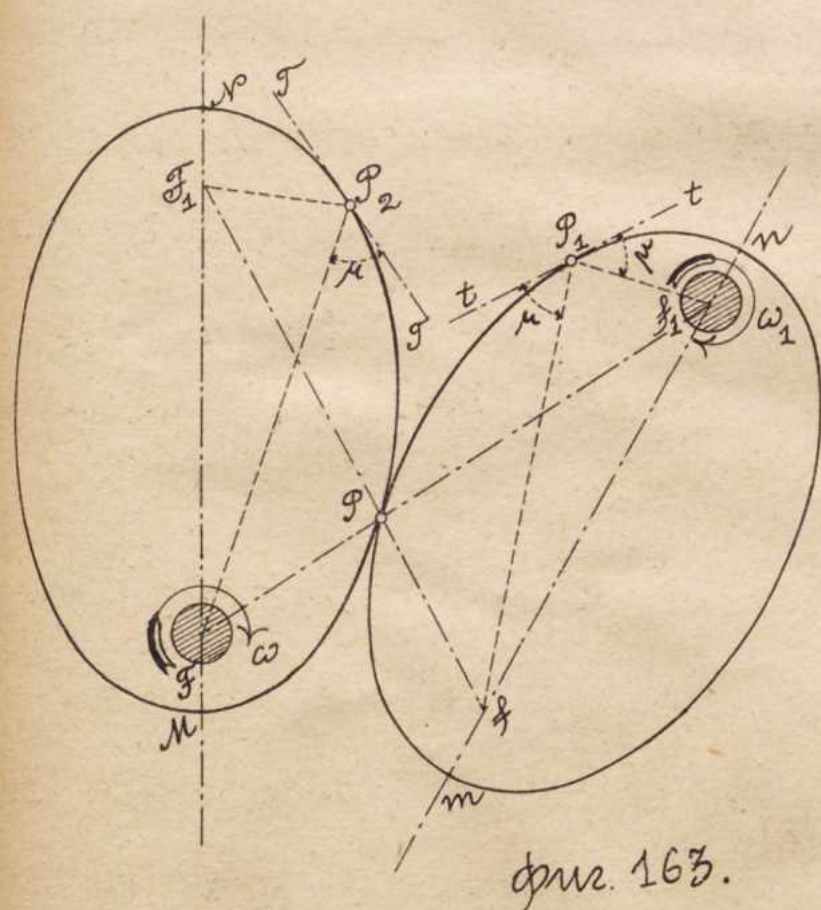
Примѣромъ не круглыхъ колесъ могутъ служить эллиптическія колеса. Представимъ себѣ два одинаковыхъ эллипса, посаженныхъ на осяхъ, проходящихъ черезъ ихъ фокусы F и f_1 (фиг. 163). Расстояние между осями равно большой оси эллипсовъ :

$$Ff_1 = MN = mn;$$

кромѣ того

$$FF = Ff \quad \text{и} \quad FF = Ff_1.$$

Не трудно видѣть, что расположенные такимъ образомъ



эллипсы, если ихъ вращать около ихъ осей, будутъ катиться одинъ по другому. Взявъ на одномъ изъ нихъ точку P_1 , а на другомъ - точку P_2 такъ, что бы дуга PP_1 была равна дугѣ PP_2 ,

вслѣдствіе тождества эллипсовъ получаемъ :

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_2 = \mathcal{f}\mathcal{P}_1,$$

а такъ какъ

$$\mathcal{F}\mathcal{P}_2 + \mathcal{F}_1\mathcal{P}_2 = 2a = \mathcal{f}\mathcal{P}_1 + \mathcal{f}_1\mathcal{P}_1,$$

то и

$$\mathcal{F}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{f}_1\mathcal{P}_1,$$

а значитъ

$$\mathcal{f}_1\mathcal{P}_1 + \mathcal{F}\mathcal{P}_2 = 2a = \mathcal{F}\mathcal{f}_1.$$

Далѣе, касательная въ P_2 , линія TP_2T , образуетъ съ векторомъ $\mathcal{F}P_2$ уголъ $\mathcal{F}P_2T (= \mu)$ такой же, какой образуетъ касательная въ P_1 , прямая $t\mathcal{P}_1t$, съ векторомъ $\mathcal{f}_1P_1$, т.е. уголъ

$$\angle \mathcal{F}\mathcal{P}_2T = \mu = \angle \mathcal{f}_1\mathcal{P}_1t;$$

на самомъ дѣлѣ, въ силу тождественности эллипсовъ, заключаемъ, что углы $\mathcal{F}P_2T$ и $\mathcal{f}_1P_1t$, какъ углы между соответственно - равными векторами ($\mathcal{F}P_2$ и $\mathcal{f}_1P_1$) и касательными (TT) и (tt), равны между собою; углы же $\mathcal{f}_1P_1t$ и $\mathcal{f}_1P_1t$ равны между собою по свойству эллипсовъ. Уголъ $\mathcal{F}P_2T$ равенъ углу $\mathcal{f}_1P_1t (= \mu')$.

Такимъ образомъ векторы $\mathcal{F}P_2$ и $\mathcal{f}_1P_1$ суть соответственные векторы, и взятые эллипсы, прокатившись другъ по другу на дугу PP_2 , равную $\cup PP_1$, будутъ касаться въ этотъ моментъ точками P_1 и P_2 , которыя одновременно придутъ на линію центровъ $\mathcal{F}\mathcal{f}_1$; касательныя же ихъ въ точкахъ P_1 и P_2 сольются въ одну общую касательную. Отношение угловыхъ скоростей (ω_1, ω) равно отно-

шенію ($FR: \frac{1}{2} T$) и, очевидно, мѣняется отъ maximum'a, когда векторомъ FR будетъ на одно мгновеніе служить отрѣзокъ большой оси FN , до minimum'a, когда роль вектора FR перейдетъ на мгновеніе къ отрѣзку FM . Если эксцентриситетъ эллипса назвать черезъ e , гдѣ

$$e = \frac{c}{a},$$

то maximum отношенія $\frac{\omega_1}{\omega}$ будетъ равенъ $\frac{a+c}{a-c}$ или $\frac{1+e}{1-e}$, а minimum $= \frac{1-e}{1+e}$.

- . - . - . - . - . - .

КУЛАКИ И ЭКСЦЕНТРИКИ.

Гораздо большее значеніе въ машиностроеніи имѣетъ преобразованіе вращательнаго движенія въ прямолинейное возвратное при помощи кулаковъ и эксцентриковъ, или же въ качательное.

Пусть нѣкоторый стержень, могущій двигаться вдоль

своего направленія

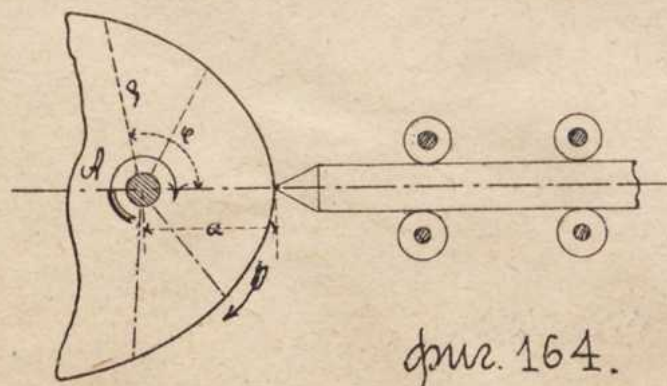
(нпр., на каткахъ,

какъ на чертежѣ) опи-

рается концомъ на

шайбу, сидящую на

оси A (фиг. 164).



Положимъ, что направленіе оси стержня встрѣчаетъ ось A и перпендикулярно къ ней.

При равномерномъ вращеніи шайбы (или эксцентрика) полоса будетъ двигаться, пока будутъ возрастать радіусы векторы эксцентрика; при дальнѣйшемъ вращеніи, когда радіусы векторы начнутъ убывать, стержень можетъ остаться на мѣстѣ (если онъ, нпр., движается горизонтально), и для замыканія пары въ этомъ случаѣ придется употребить постороннюю силу, которая всегда прижимала бы стержень къ эксцентрику, т.е., придется примѣнить т. наз. силовое замыканіе пары, нпр. при помощи нѣкоторой пружины.

Законъ движенія стержня , несомнѣнно, зависитъ отъ формы эксцентрика, и, наоборотъ, для даннаго закона движенія стержня всегда можно опредѣлить форму эксцентрика.

Пусть a есть наименьшій векторъ эксцентрика, а ϱ какой нибудь другой, образующій нѣкоторый уголъ φ съ первымъ (фиг. 164). Движеніе стержня мы начнемъ разсматривать, начиная съ того момента, когда съ направлениемъ движенія стержня совпадаетъ н а и м е н ь ш і й радіусъ эксцентрика. При поворотѣ эксцентрика на уголъ φ , стержень, очевидно, подвинется на величину x , равную $(\varrho - a)$.

Кривую, ограничивающую эксцентрикъ, мы можемъ выразить уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ, написан-

имъ въ видѣ

$$\zeta - a = f(\varphi) \quad (1).$$

Мы примемъ вращеніе эксцентрика равномѣр-
нымъ, и въ такомъ случаѣ углы поворота эксцентрика
будутъ пропорціональны временамъ, т.е. мы можемъ време-
на мѣрить этими углами поворота, а тогда уравненіе

$$\zeta - a = f(\varphi) = x \quad (1)$$

дастъ намъ зависимость пути, пройденнаго какой либо
точкой стержня, отъ времени, если за начальный моментъ
мы будемъ считать моментъ наибольшаго приближенія этой
точки стержня къ центру (или къ оси вращенія) эксцен-
трика.

Обратно, если намъ данъ законъ движенія стержня въ
видѣ

$$x = f(t),$$

то это соотношеніе, можетъ быть, сейчасъ же преобразо-
вано въ полярное уравненіе для кривой, ограничивающей
эксцентрикъ, а именно, въ ур-іе

$$\zeta - a = f(t)$$

Задавшисъ a - наименьшимъ векторомъ эксцентрика, мы
опредѣлимъ форму кривой, его ограничивающей. Примѣнимъ
эти общія разсужденія къ какому-нибудь частному слу-
чаю.

Пусть, нпр., дано, что стержень за время поворота

эксцентрика отъ 0 до π долженъ двигаться равномерно; это значитъ, что пути, проходимые какой либо точкой стержня, должны быть пропорціональны временамъ, а поэтому ур-іе кривой, ограничивающей эксцентрикъ, изобразится въ видѣ

$$\zeta - a = k \cdot \varphi; \quad (2)$$

это ур-іе представляетъ собою ур-іе А р х и м е д о в о й с п и р а л и . Факторъ пропорціональности к мы опредѣлимъ по величинѣ хода стержня. Пусть ходъ этотъ равенъ h ; тогда при $\varphi = \pi$ имѣемъ:

$$\zeta' - a = h = k\pi, \quad (3)$$

откуда

$$k = \frac{h}{\pi},$$

и ур-іе кривой эксцентрика (2) приметъ окончательно видъ:

$$\zeta - a = \frac{h}{\pi} \cdot \varphi \quad (4).$$

Построеніе этой кривой можно выполнить такъ : задаемся наименьшимъ радіусомъ эксцентрика A_1O , равнымъ, положимъ, a ; ходъ стержня попрежнему пусть равенъ h ; опредѣлимъ радіусъ, соотвѣтствующій φ , равному π ; изъ ур-ія (3) имѣемъ, что этотъ радіусъ, который мы обозначили черезъ ζ' , равенъ $(h + a)$; итакъ, $\zeta' = a + h$. Дѣлимъ теперь уголъ π векторами на n равныхъ частей (фиг. 165), на столько же частей дѣлимъ отрѣзокъ h , и откладываемъ на векторахъ послѣдовательно отрѣзки

$$a, a + \frac{h}{n}, a + 2 \cdot \frac{h}{n}; a + 3 \cdot \frac{h}{n}, \dots$$

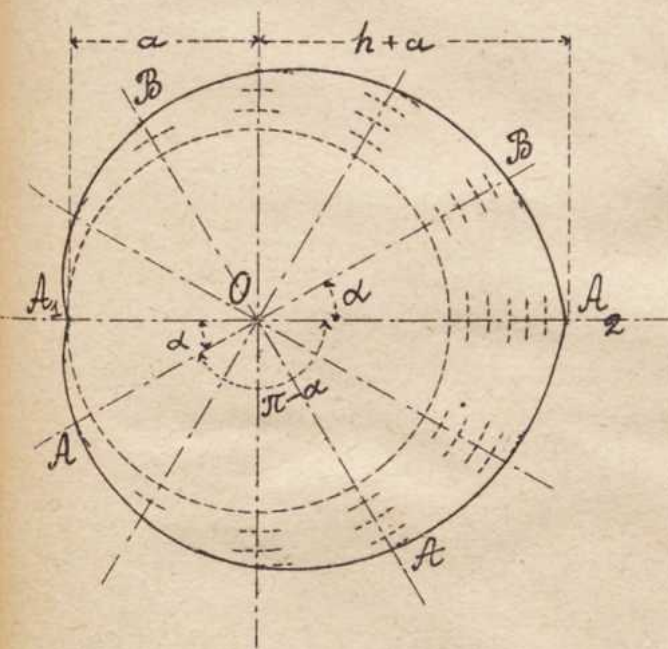
Можно выполнить этот процесс получения точек кривой еще немного проще, — а именно, описать изъ полюса окружность радиусомъ a , какъ мы это сдѣлали на чертежѣ, раздѣлить половину ея (соотвѣтственно углу π) на равныхъ частей и къ радиусамъ, проведеннымъ въ точкахъ дѣленія, прибавлять послѣдовательно отрѣзки

$$1. \frac{h}{n}, 2. \frac{h}{n}, 3. \frac{h}{n}, 4. \frac{h}{n}, \dots$$

Такимъ образомъ мы получимъ рядъ точекъ, которыми имѣ-

ютъ оканчиваться векторы кривой эксцентрика, — это будетъ рядъ точекъ этой кривой.

Соединяемъ теперь ихъ непрерывною кривою, — эта кривая будетъ тѣмъ ближе подходить къ Архимедовой спирали, чѣмъ больше взято дѣ-



фиг. 165.

лений (чѣмъ больше n).

Если бы было поставлено требованіе, что назадъ отъ центра отержень также долженъ итти равномерно, то намъ приш-

шлось бы къ нашей кривой пристроить другую, ей симметри-
 чную, и такимъ образомъ, эксцентрикъ былъ бы очерченъ
 вполне. Такой эксцентрикъ обладаетъ свойствомъ по-
 стоянной ширины, иными словами, любое
 два вектора, составляющіе про-
 долженіе одинъ другого, нпр. AO и OB ,
 въ суммѣ дають постоянную ве-
 личину, равную суммѣ наибольшаго
 векторовъ. На самомъ дѣлѣ, назовемъ
 уголъ BOA_2 черезъ α ; тогда для вектора AO , соответству-
 ющаго BO , уголъ A_1OA также равенъ α . По построенію мы
 имѣемъ :

$$BO = a + \frac{h}{\pi} \cdot \alpha$$

$$\text{и} \quad AO = a + \frac{h}{\pi} (\pi - \alpha).$$

Складывая, находимъ :

$$AO + BO = 2a + h = a + (a + h).$$

ч. т. д.

Легко опредѣлить, нпр., форму такого эксцентрика, ко-
 торый заставлялъ бы намъ стержень двигаться впередъ
 сначала равномерно ускореннымъ движеніемъ, а затѣмъ-
 равномерно замедленнымъ, такъ что въ результатѣ къ кон-
 цу хода скорость стержня будетъ равна нулю. Выполнимъ
 это требованіе.

Пусть по прежнему наименьшей радіусъ эксцентрика

равенъ a , ходъ стержня равенъ h ; значитъ, за четверть оборота эксцентрика стержень долженъ пройти путь $\frac{h}{2}$. При равномерномъ ускоренномъ движеніи пространства пропорціональны квадратамъ времени, а поѣтому уравненіе кривой эксцентрика имѣетъ видъ

$$\varphi - a = k\varphi^2 \quad \dots \quad (5).$$

Факторъ пропорціональности k опредѣлится, какъ и прежде, изъ условія

$$\frac{h}{2} = k \left(\frac{\pi}{2} \right)^2, \quad \dots \quad (6)$$

откуда получаемъ :

$$k = \frac{h}{2} : \frac{\pi^2}{4} = \frac{2h}{\pi^2},$$

и уравненіе (5) получаетъ видъ :

$$\varphi - a = 2h \cdot \frac{\varphi^2}{\pi^2} \quad \dots \quad (7).$$

Построеніе кривой можетъ быть ведено совершенно аналогично тому, какъ мы дѣлали въ предыдущемъ примѣрѣ. Дѣлимъ четверть окружности радіуса a (фиг. 166) на n равныхъ частей, а отрѣзокъ $\frac{h}{2}$ - на n^2 равныхъ частей, проводимъ въ точки дѣленія окружности радіусы и прибавляемъ къ нимъ послѣдовательно :

$$1 \cdot \frac{h}{2n^2}, \quad 4 \cdot \frac{h}{2n^2}, \quad 9 \cdot \frac{h}{2n^2}, \quad \dots$$

дѣлаемъ мы такъ потому, что, какъ извѣстно, при равномер-
но-ускоренномъ движеніи пространства, проходимая точкой,
считая отъ начальнаго пункта, возрастаютъ пропорціональ-
но квадратамъ времени. Соединивъ концы векторовъ кри-
вою, получимъ часть очертанія эксцентрика для равноуско-
ренного движенія стержня.

Для построенія другой части замѣтимъ слѣдующее: ес-
ли мы проведемъ какой либо векторъ отъ кривой, а изъ цен-
тра O опишемъ окружность радіуса $a + \frac{h}{2}$, то отрѣзокъ
продолженнаго вектора между кривой и окружностью выра-
зится въ функціи $mOA (= \varphi)$ такъ :

$$mn = \left(a + \frac{h}{2}\right) - \varrho,$$

ибо

$$mn = On - om,$$

а

$$On = a + \frac{h}{2},$$

и Om обозначаемъ черезъ ϱ . Принимая во вниманіе ур-
не (7), можемъ написать :

$$mn = a + \frac{h}{2} - \varrho = a + \frac{h}{2} - a - 2h \cdot \frac{\varphi^2}{\pi^2}$$

или

$$mn = \frac{h}{\pi} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{\frac{\pi^2}{4}};$$

теперь вмѣсто угла φ (угла mOA), введемъ ему допол

ительный, mOB , равный поэтому $(90^\circ - \varphi)$; обозначимъ его черезъ ψ ; тогда

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

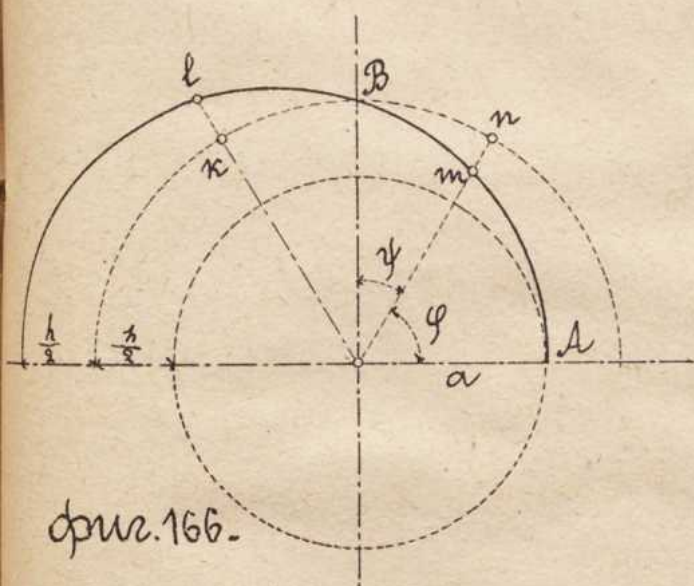
и ур. (8) приметъ видъ

$$\begin{aligned} mn &= \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \cdot \frac{(\frac{\pi}{2} - \psi)^2}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \left\{ \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^2}{4}} - \frac{\pi\psi}{\frac{\pi^2}{4}} + \frac{\psi^2}{\frac{\pi^2}{4}} \right\} = \\ &= \frac{h}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \psi - \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{\psi^2}{2}; \end{aligned}$$

окончательно

$$mn = \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \psi - \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{\psi^2}{2} \quad (9).$$

но эта зависимость mn отъ ψ выражаетъ собою зависимо-



сть пути отъ времени въ движеніи равноѣрно-замедленномъ, если время считать углами ψ .

Дальнѣйшее построение эксцентрика будетъ, очевидно, таково: прово-

димъ какой-либо векторъ Ok , откладываемъ по другую сторону вектора OB уголъ BoM , равный углу BoK , находимъ отрезокъ mm между кривой, раньше начерченной, и окружностью радиуса $(a + \frac{h}{2})$ и прибавляемъ этотъ отрезокъ къ радиусу Ok той же окружности, т.е. дѣлаемъ

$kl = mn$; точка l , полученная такимъ образомъ, будетъ одной изъ точекъ кривой очертанія эксцентрика.

Тотъ же результатъ получимъ, если составимъ на общихъ основаніяхъ полярное уравненіе кривой для движенія равномерно замедленнаго. Считая уголъ φ отъ ОВ, получаемъ для этого случая

$$x = \alpha \varphi - \beta \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Постоянныя α и β опредѣлимъ изъ того условія, что при $\varphi = 0$ скорость стержня должна имѣть нѣкоторую опредѣленную величину, намъ заранее извѣстную; также и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Скорость стержня выражается такъ

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} = \alpha - \beta \varphi ;$$

а при $\varphi = 0$ имѣемъ $v = \alpha$; но, съ другой стороны, та же скорость напишется въ видѣ $\frac{dz}{d\varphi}$, гдѣ z берется изъ прежняго уравненія

$$z - a = \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{\varphi^2}{2} = \frac{2h}{\pi^2} \cdot \varphi^2 ,$$

причемъ, понятно,

$$v = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} ,$$

ибо во второмъ случаѣ углы отсчитываются отъ А.

Мы имѣемъ

$$\left(\frac{dz}{d\varphi} \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \varphi \right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{h}{\frac{\pi^2}{2}} = v = \alpha ;$$

значитъ, получаемъ окончательно :

$$\alpha = \frac{h}{\frac{\pi}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Постоянное β опредѣлится изъ того условія, что v при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ должна обращаться въ нуль , т.е. мы имѣемъ условіе :

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Откуда находимъ :

$$(\alpha - \beta \cdot \varphi)_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0 ,$$

т.е.

$$\alpha - \beta \cdot \frac{\pi}{2} = 0 ; \quad \beta = \alpha : \frac{\pi}{2} ,$$

что, въ виду (11), дастъ намъ

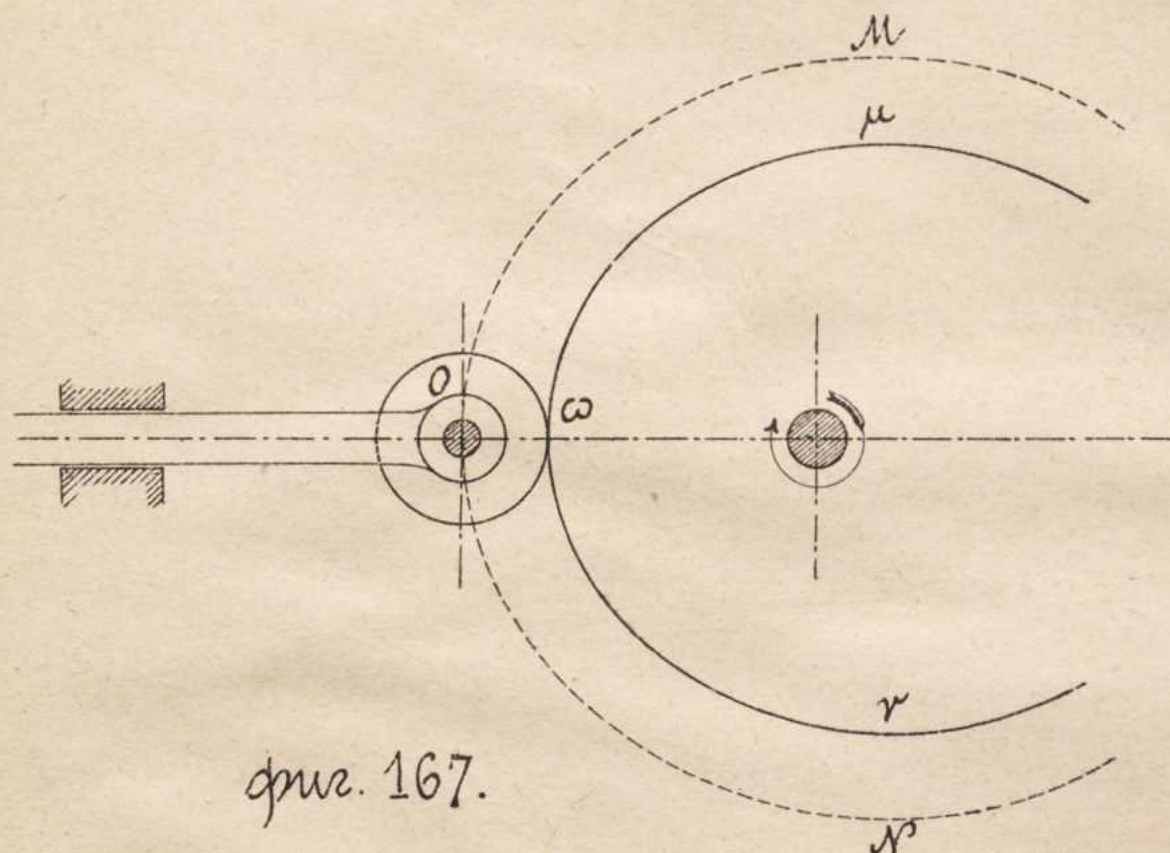
$$\beta = \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Теперь, въ виду (11) и 13), ур-іе (10) можно переписать такъ :

$$x = \frac{h}{\frac{\pi}{2}} \cdot \varphi - \frac{h}{\frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{\varphi^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

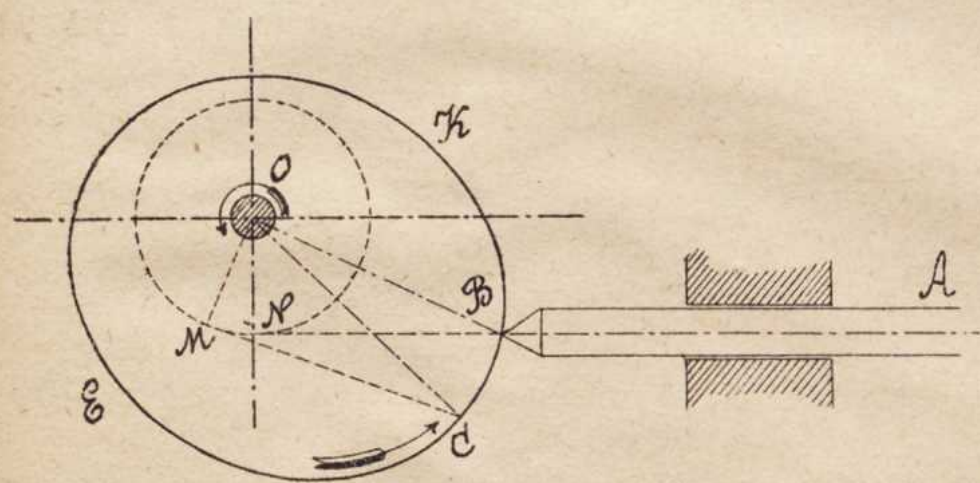
Если требуется получить обратное движеніе стержня такого же характера, какъ прямое, то дальше мы очерчиваемъ эксцентрикъ симметричной кривой. — Эксцентрикъ такого рода имѣетъ передъ первымъ то преимущество, что переходъ отъ одного направленія движенія къ противополо-

20



фиг. 167.

проходящемъ. Проводимъ прямую BN (продолженная ось стерж-



Apr. 168.

жень АВ) и

ИЗЪ ЦЕНТРА

ЭКСЦЕНТРИКА

О проводимъ

ОКРУЖНОСТЬ,

касательную

КЪ ЭТОЙ ПРЯ-

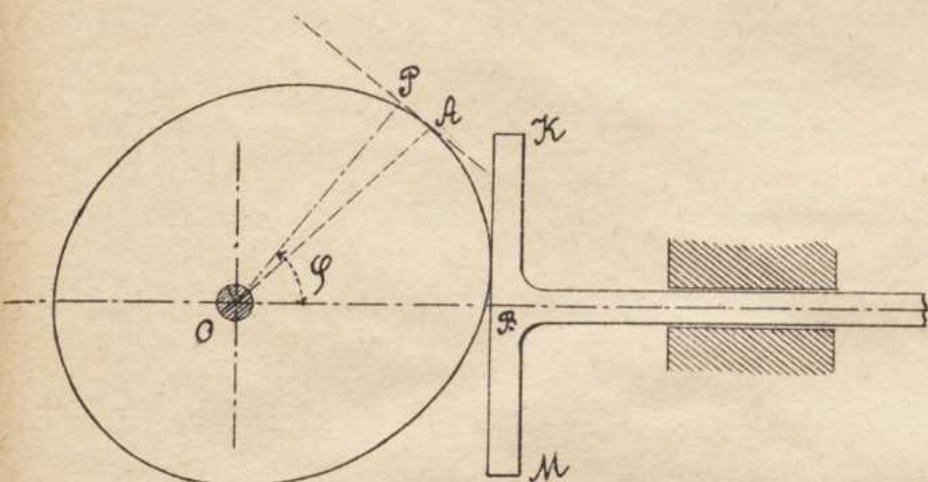
мой BN . Пусть точкой ихъ касанія будетъ точка N . Проведемъ теперь какой нибудь радіусъ векторъ эксцентрика MC и изъ точки C касательную CM къ упомянутому выше кругу.

Легко видѣть, что когда на линію движенія АВ придетъ точка С то стержень къ этому времени передвинется на разность между длинами касательныхъ СМ и ВN, причемъ эксцентрикъ повернется на уголъ NoM .

Если намъ дана зависимость перемѣщенія стержня отъ времени или отъ угловъ поворота эксцентрика, тогда мы опредѣляемъ длины касательныхъ для разныхъ угловъ поворота и безъ труда строимъ кривую эксцентрика такимъ образомъ : дѣлимъ окружность ON на n равныхъ частей, въ точкахъ дѣленія проводимъ касательныя къ этой окружности и, выбравъ наименьшую изъ нихъ, откладываемъ послѣдовательно на остальныхъ отрѣзки, возрастаніе которыхъ соответствуетъ закону движенія , - совершенно также, какъ это мы дѣлали для возрастающихъ векторовъ эксцентрика въ случаѣ, когда центръ его лежалъ на прямой движенія.

Не трудно также рѣшить вопросъ о формѣ эксцентрика, который долженъ дѣйствовать на полосу, соединенную со стержнемъ и обыкновенную перпендикулярную къ его длинѣ (фиг. 169). Допустимъ, что центръ эксцентрика находится на продолженіи оси стержня. Такъ какъ направленіе полосы всегда касательно къ эксцентрику и перпендикулярно къ линіи движенія стержня, то мы можемъ получить зависимость ОВ, - разстоянія центра О

отъ полосы КМ, - отъ угловъ поворота эксцентрика, т.е.,
можемъ получить законъ движенія стержня, если будемъ
проводить къ эксцентрику касательныя и опускать на них



фиг. 169.

перпендикуля-
ры изъ точки
О.

Какой нибудь
перпендикуляр
ОР, соответ-
ствующій век-
тору ОА и об-

разующій уголъ φ съ линіей ОВ, опредѣлитъ собою удале-
ніе конца В стержня отъ центра О. После поворота экс-
центрика на уголъ φ ($\angle \text{ВОР} = \varphi$), стержень передвинет-
ся на величину ($\text{ОР} - \text{ОВ}$.) Соединивъ различные концы Р
перпендикуляровъ, получимъ кривую, выражающую законъ
передвиженія стержня.

Обратно, если намъ дана зависимость перемѣщеній
отъ угловъ поворота φ эксцентрика, то мы строимъ, какъ
въ обыкновенномъ эксцентрикѣ, геометрическое мѣсто то-
чекъ Р и къ каждому вектору этого геометрическаго мѣ-
ста, въ концѣ его, возставляемъ перпендикуляръ. Оги-
бающая этихъ перпендикуляровъ и дастъ очертанія эксцен-
трика, дѣйствующаго на полосу и двигающаго стержень со-

φ , находитъ:

$$PO = r + d \cos \varphi .$$

Какъ видимъ, движеніе, дѣйствительно, будетъ гармоническое . $\text{Max}(PO)$ есть $r + d$ (при $\varphi = 0$), $\text{min}(PO) = r - d$ (при $\varphi = \pi$). Перемѣщеніе стержня выражается формулой вида

$$\Delta = d(1 - \cos \varphi) ,$$

и поэтому ходъ стержня будетъ равенъ $2d$.

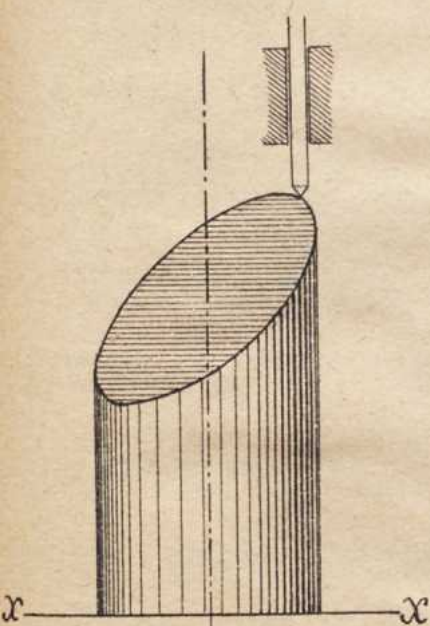
Эксцентрики или кулаки могутъ имѣть также форму цилиндровъ, срубанныхъ по нѣкоторой кривой, на которую и будетъ опираться и скользить по ней конецъ стержня, могущаго ходить въ направленіи, параллельномъ оси

цилиндра. Легко вычертить, напр. ,

вертикальную проекцію кривой, по которой долженъ быть срубанъ цилиндръ, если намъ дана зависимость движенія стержня отъ времени. Представимъ себѣ круглый цилиндръ, стоящій на горизонтальной плоскости проекцій,

(нижнее основаніе предполагаемъ кругомъ, такъ что оно перпендикулярно оси) (фиг. 171). Дѣлимъ окружно-

сть основанія на n равныхъ частей, проводимъ черезъ полученныя точки дѣленія вертикали (образующія) и откла-



фиг. 171 .

дываемъ на нихъ отъ оси проекцій xx ординаты, измѣненіе длинн которыхъ зависитъ отъ угловъ, образуемыхъ соотвѣтственными радіусами основаній съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ направленіемъ, принятымъ нами за начальное, такъ же, какъ перемѣщеніе стержня зависитъ отъ времени.

Можно также развернуть цилиндръ на плоскости, раздѣлить развернутое основаніе на n равныхъ частей и въ точкахъ дѣленія возставить ординаты, пользуясь опять закономъ движенія стержня.

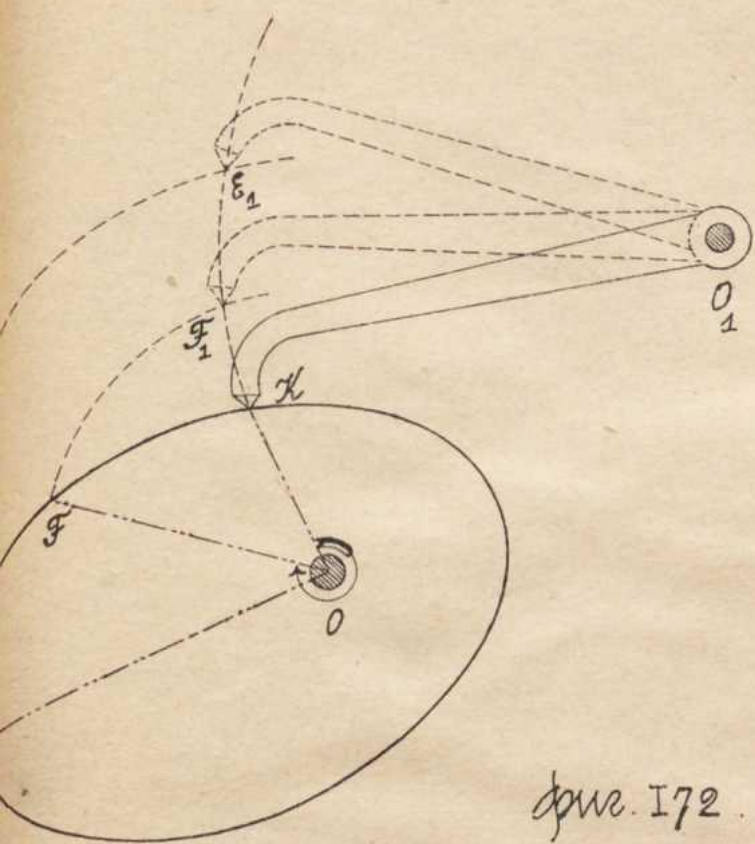
Если, напр., дано, что за полъ - оборота эксцентрика стержень долженъ двигаться пропорціонально квадратамъ времени, то мы беремъ какую нибудь ординату за наименьшую, - проще всего, ординату начальной точки, и дальнѣйшія ординаты увеличиваемъ послѣдовательно на $1. \frac{h}{n^2}$, $4. \frac{h}{n^2}$, $9. \frac{h}{n^2}$ и т.д., гдѣ черезъ h обозначенъ ходъ стержня. Затѣмъ для обратнаго хода стержня, за второй полуоборотъ эксцентрика, строимъ кривую, требуемую заданными условіями движенія, и т.д. Получимъ такимъ образомъ нѣкоторую кривую, которая, будучи наведена на цилиндръ, и покажетъ, какъ долженъ быть срезанъ цилиндръ для полученія требуемаго движенія.

Можно также на цилиндрѣ сдѣлать каналъ, въ который могъ бы входить роликъ отъ стержня; форма канала опредѣляется, понятно, указаннымъ выше способомъ.

Встрѣчаются эксцентрики и другихъ формъ, напр., коническіе и т. п.; способъ очерчиванія ихъ не представля-

ете никакихъ затруд-
неній и ведется
аналогично разсмо-
трѣннымъ примѣрамъ

Если стержень, опирающийся на эксцентрикъ, не двигается прямолинейно, а вращается около опредѣленнаго центра, то, по данной



этомъ случай долженъ быть очерченъ эксцентрикъ въ соответственной его части..

Для простого эксцентрика кривая на этой части обратится въ окружность, описанную изъ центра эксцентрика. Переходъ отъ этой дуги окружности къ дальнѣйшей кривой слѣдуетъ сдѣлать постепеннымъ, подобравъ нѣкоторую переходную кривую.

- . - . - . - . - . - .

ПЕРЕДАЧА ДВИЖЕНІЯ ПРИ ПОМОЩИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХЪ ЗВЕНЬЕВЪ.

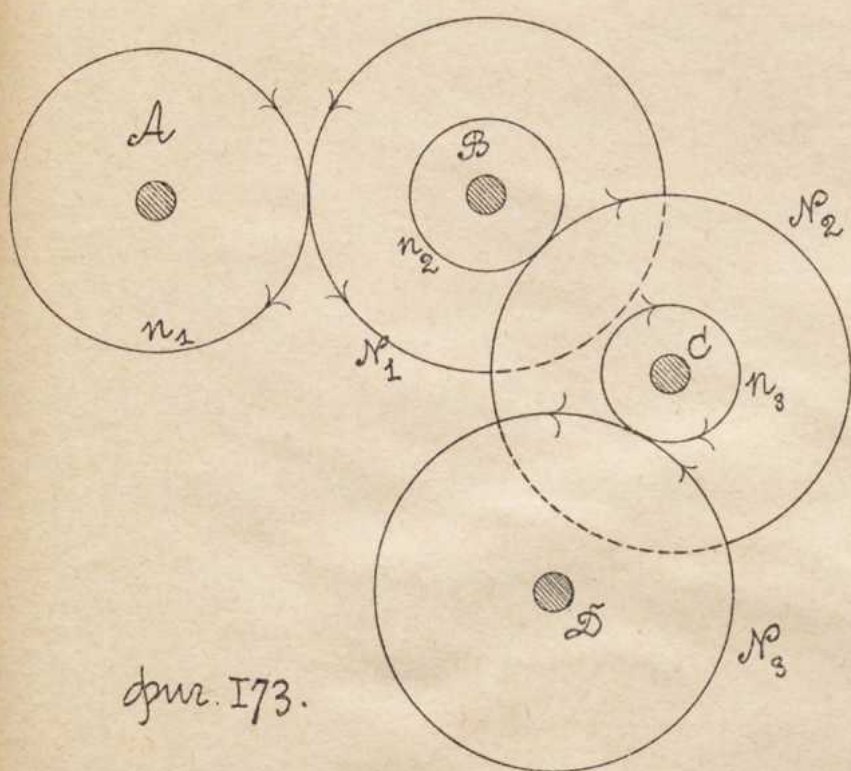
Разсмотримъ теперь случаи передачи движенія при помощи промежуточныхъ звеньевъ. Наиболее важнымъ въ практическомъ отношеніи примѣромъ такой передачи является передача при помощи рядового соединенія зубчатыхъ колесъ.

Положимъ, что вращеніе отъ одной оси требуется передать другой, причемъ передаточное число довольно велико. Какъ извѣстно для зубчатой цилиндрической передачи большого передаточнаго числа не берутъ, а если такое будетъ задано, то передачу разбиваютъ на рядъ передачъ: колесо, сидящее на оси А (фиг. 173) и имѣющее n_1 зубцовъ, зацѣпляютъ съ колесомъ, сидящимъ на оси В и имѣющимъ N_1 зубцовъ; на той же оси В сидитъ колесо съ

числомъ n_2 зубцовъ , - оно зацѣпляется съ колесомъ

N_2 (гдѣ N_2 - число зубцовъ его) на оси С , на этой же оси С сидитъ еще колесо n_3 , зацѣпляющееся съ N_3 на оси Д и т.д.

Положимъ, что движеніе передается от колеса А ; тогда ведущими будутъ коле-



фиг. 173.

са $n_1, n_2, n_3, \dots$, а ведомыми $N_1, N_2, N_3, \dots$. При z_1 оборотахъ колеса А колесо В совершитъ $\frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, С совершитъ $\frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ, колесо О -

$\frac{n_3}{N_3} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_1}{N_1} \cdot z_1$ оборотовъ и т.д. Вообще, число оборотовъ послѣдней оси будетъ равно числу оборотовъ первой (z_1), помноженному на дробь, числитель которой есть произведеніе чиселъ зубцовъ ведущихъ колесъ, а знаменатель - произведеніе чиселъ зубцовъ ведомыхъ колесъ.

Послѣдняя ось будетъ вращаться или въ ту же сторону, что и первая, или въ обратную, — это зависитъ отъ числа промежуточныхъ передачъ: если мы назовемъ число всѣхъ передачъ черезъ m , то можемъ написать, что число оборотовъ послѣдней оси равно

$$(-1)^m \cdot \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_m}{N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \dots \cdot N_m} z_1 \dots \quad (I)$$

гдѣ z_1 есть число оборотовъ первой оси, знакъ же „минусъ“ будетъ указывать, что вращеніе послѣдней оси совершается въ сторону, п р о т и в о п о л о ж н у ю первой.

Замѣтимъ здѣсь, что, если на какой — либо оси сидитъ только одно колесо, сцепляющееся съ предшествующимъ и послѣдующимъ колесами, то вліяніе на передаточное число оно, очевидно, не имѣетъ; на самомъ дѣлѣ, это колесо мы можемъ разсматривать, какъ два одинаковыхъ колеса, посаженныхъ на одну и ту же ось; поэтому въ выраженіи (1) дробь $\frac{n_k}{N_{k-1}}$, соотвѣтствующая этому колесу, будетъ равна единицѣ; колесо это вліяетъ лишь на измѣненіе смысла вращенія.

Такимъ образомъ, разбивая передачу на рядъ передачъ, мы можемъ выполнить какое угодно передаточное число. Въ т. наз. п е р е б о р ѣ токарныхъ станковъ мы имѣемъ одинъ изъ простѣйшихъ примѣровъ разбивки пе-

редачи.

Ступеньчатый шкив S , называемый также „конусом“ (табл. VII), получающий свое вращение от фабричного вала, сидит вольно на шпинделе A передней бабки токарной станка, — на шпинделе и вращается обрабатываемый предмет. Колесо N_2 наглухо, при помощи шпонки, соединено с осью A и, в свою очередь, может быть соединяемо при помощи выключателя, не показанного на чертеже, со шкивом S ; малое зубчатое колесо n_1 составляет одно целое со шкивом S .

Параллельно оси AA в бабке имеется другая ось B с парой зубчатых колес N_1 и n_2 . Ось эта может быть, смотря по надобности, удаляема или приближаема к оси A ; с этой целью она сдвинута втулкой и сидит на оси C , концы которой, C_1 и C_2 , эксцентричны по отношению к оси B . Вращая рукоятку D , насаженную на шпиль C_1 , мы, очевидно, будем приближать или удалять ось B от оси A .

Если хотят, чтобы шпиндель AA вращался быстро, то выключателем соединяют колесо N_2 со шкивом S , удаляя вращением рукоятки D ось B от оси A , так что колеса N_1 и n_2 перестанут сцепляться с колесами n_1 и N_2 ; тогда шпиндель будет получать вращение непосредственно от вала при помощи шкива S .

Если же нужно получить медленное вращение шпин-

деля, то разъединяютъ колесо N_2 и шкивъ S , вращеніемъ рукоятки Φ заставляютъ ось B приблизиться къ оси A , пока колеса N_1 и n_2 не войдутъ въ зацепленіе съ колесами n_1 и N_2 ; въ этомъ случаѣ при одномъ оборотѣ шкива шпиндель сдѣлаетъ $\frac{n_1 n_2}{N_1 N_2}$ оборотовъ.

Ступеньчатый шкивъ служитъ для того, чтобы можно было разнообразить число оборотовъ. —

— При нарѣзкѣ винтовъ опредѣленнаго шага сунпортъ, несущій рѣзецъ, долженъ подвигаться на нѣкоторую опредѣленную величину при каждомъ цѣломъ оборотѣ обрабатываемаго предмета.

Какъ мы знаемъ, передвиженіе сунпорта производится при помощи частнаго видоизмѣненія трехзвенной винтовой цѣпи, въ которомъ одна пара превратилась во вращательную и одна — въ поступательную; при этомъ за одинъ оборотъ винта сунпортъ подвинется на величину его шага, h_1 . Если обрабатываемый предметъ совершаетъ z_2 оборотовъ за то время, въ какое винтъ сунпорта совершаетъ z_1 оборотовъ, то рѣзецъ сдѣлаетъ нарѣзку, шагъ которой, h_2 , черезъ прежній, h_1 , выразится такъ :

$$h_2 = \frac{z_1 h_1}{z_2} \quad (2)$$

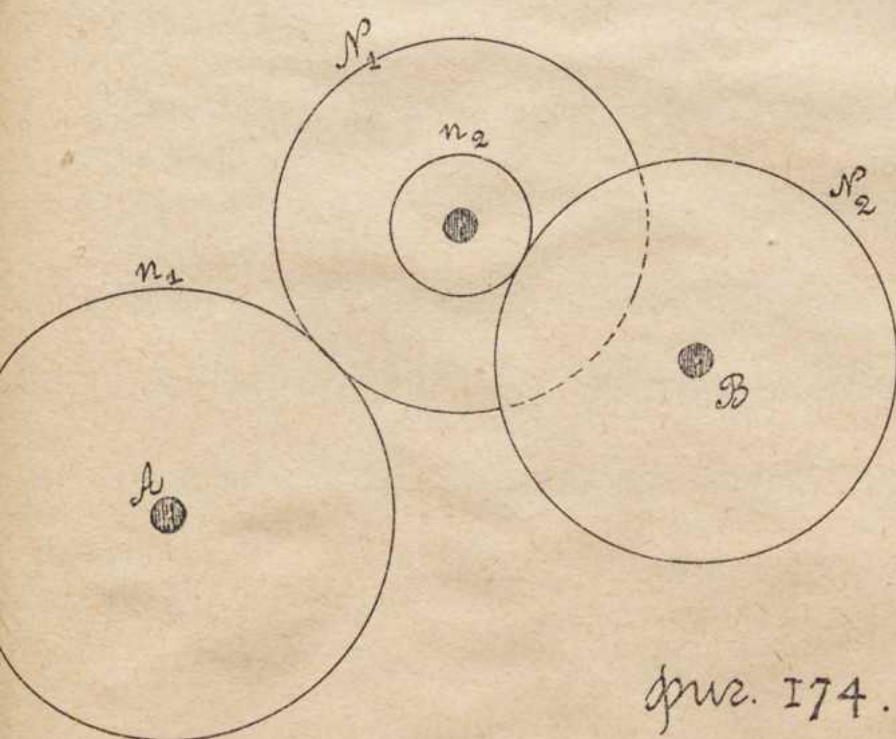
Чтобы имѣть возможность нарѣзать различные винты (съ разными шагами h_2), нужно, какъ показываетъ ур.

(2), гдѣ $h_1 = \text{const}$, имѣть возможность мѣнять отноше-
 ніе $\frac{z_1}{z_2}$; это мы можемъ сдѣлать, вставляя между шпинде-
 лемъ передней бабки, отъ которой винтъ суппорта полу-
 чаетъ вращеніе, и этимъ винтомъ различныя промежуточ-
 ныя передачи сообразно требуемой нарѣзкѣ.

Если А есть шпиндель (фиг. 174), а В - винтъ
 суппорта, то при показанныхъ на чертежѣ числахъ зубцовъ
 колесъ, шагъ нарѣзки будетъ равенъ (при одной промежу-
 точной передачѣ, какъ это изображено на черт.)

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{N_1 \cdot N_2} \quad (3)$$

Имѣя рядъ смѣнныхъ колесъ (такъ наз. с е р і ю),
 мы можемъ выполнить разныя нарѣзки, а вставкой промежу-
 точнаго колеса можемъ мѣнять направленіе вращенія вин-

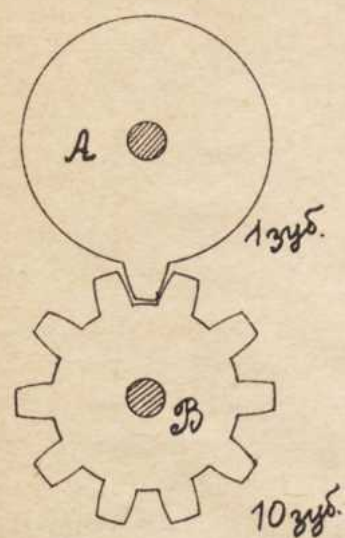


фиг. 174.

та и, слѣд.,
 выполнять какъ
 правую, такъ
 и лѣвую рѣзь-
 бу. Въ послѣд-
 нее время, од-
 нако, вмѣсто
 такой системы
 колесъ примѣ-

няютъ иногда червячную передачу для приведенія въ дви-

Такъ, напр. для отсчитыванія единицъ, десятковъ и проч. можно употребить слѣдующее соединеніе : на ось А, непо-



фиг. 176.

средственно соединенную такъ или иначе съ той, число оборотовъ которой (за извѣстный промежутокъ времени) мы хотимъ сосчитать, мы насаживаемъ наглухо колесо съ о д н и м зубцомъ; слѣдующая ось В (фиг. 176) имѣетъ колесо съ 10 впадинами, соответствующими каждой зубцу колеса

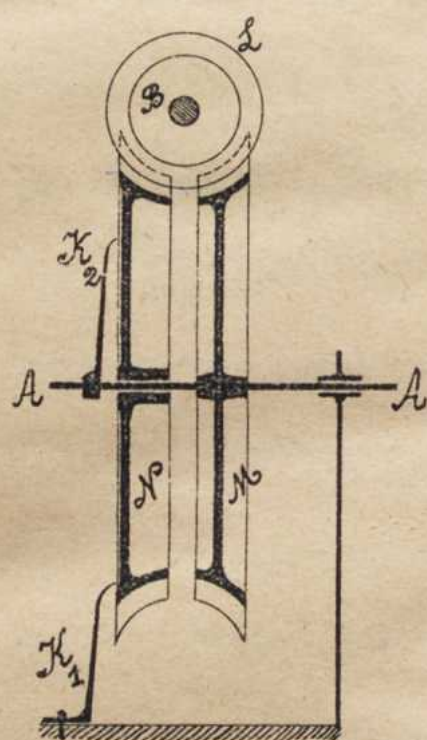
А. Если на осяхъ А и В посадимъ указатели, ходящіе по циферблатамъ, то указатель, соединенный съ колесомъ А, будетъ, очевидно, показывать десятые части, а указатель В — единицы оборотовъ, если циферблаты имѣютъ дѣленія 0, 1, 2,, 8, 9.

Далѣе, на ту же ось В мы можемъ посадить еще колесо съ однимъ зубцомъ, подобное колесу А, а на слѣдующей оси С — колесо съ десятью впадинами, тогда указатель, соединенный съ С, будетъ давать на своемъ циферблатѣ д е с я т к и оборотовъ и т. д. При такомъ устройствѣ послѣ полного оборота какой либо оси слѣдующая повернется на $1/10$ оборота.

Другой способъ счета оборотовъ основывается на относителѣнномъ движеніи двухъ

колеса, оси которых совпадают.

Червякъ Е (фиг. 177) сидитъ на оси В и одновременно зацѣпляется съ колесами М и N, изъ которыхъ одно, N, сидитъ вольно, на оси А, а другое М, съ той же осью А соединено наглухо. Колесо N на передней сторонѣ имѣетъ два диферолата, — внутренній и внѣшній; на внутренній указываетъ стрѣлка K_2 , соединенная съ осью А, а на внѣшній — стрѣлка K_1 , неподвижно ук-



фиг. 177

рѣвленная въ станинѣ. Вольно-сидя-

щее колесо N имѣетъ 100 зубцовъ,

колесо М — 101 зубецъ. При одномъ

оборотѣ червяка колесо N повер-

нется на $\frac{1}{100}$ оборота, и, значитъ,

указатель K_1 будетъ указывать на

шкалѣ единицы и десятки оборотовъ

червяка до 100. За 101 оборотъ

червяка колесо N сдѣлаетъ $(1 + \frac{1}{100})$

оборота, колесо же М сдѣлаетъ лишь

одинъ оборотъ; иными словами, оно

отстанетъ отъ колеса М, и указатель K_2 подвинется от-

носительно внутренней скалы на одно дѣле-

нiе. Такимъ образомъ, на внутренней скалѣ будутъ от-

считываться сотни оборотовъ — до 10100.

— . — . — . —

Переходя къ вопросу о рядовомъ соединеніи для
какого нибудь даннаго передаточнаго числа, можемъ ви-
дѣть, что, если число это не особенно сложно, то не-
трудно разбить его всегда на произведеніе такихъ дро-
бей, чтобъ каждая изъ нихъ не превосходила допускаемыхъ
на практикѣ передаточныхъ чиселъ, а также чтобъ числи-
тели и знаменатели этихъ дробей, выражающіе числа зуб-
цовъ колесъ, не уклонялись ни въ ту ни въ другую сто-
рону отъ ходовыхъ чиселъ зубцовъ (не были бы меньше
или больше 150 и т.д.).

Если требуется выполнить, напр., передачу $\frac{1}{60}$, то
разбивая ее на 2, съ 6-ю зубцами у cadaго изъ ко-
лесъ, имѣемъ :

$$\frac{1}{60} = \frac{6 \cdot 6}{2160} = \frac{6}{45} \cdot \frac{6}{48} ;$$

такимъ образомъ у большихъ колесъ числа зубцовъ будутъ
45 и 48.

Если передаточное число настолько сложно, или ес-
ли разбить его на нѣсколько дробей по указанному выше
способу почему либо нельзя, то приходится прибѣгнуть
къ приближенному способу. Можно, на примѣръ, вмѣсто дан-
наго передаточнаго числа взять въ нѣкоторыхъ случаяхъ
приближенное къ нему, такое, чтобъ оно хорошо разлага-
лось на рядъ болѣе простыхъ дробей. Такимъ образомъ, не

редача получается приближенной.

Пусть, напр., требуется, чтобы одна стрѣлка показывала часы, а другая совершала полный оборотъ по циферблату за время обращенія луны, равное 29 дн. 12 час. 44 мин. (приблизительно).

Обращая это число въ часы, получаемъ $42524/60$ часовъ. Слѣдовательно, въ то время, какъ одна стрѣлка (часовая) совершаетъ $\frac{1}{12}$ оборота, другая совершаетъ $\frac{60}{42524}$ обор.; поэтому передаточное число въ данномъ случаѣ равно

$$\frac{60}{42524} : \frac{1}{12} = \frac{720}{42524} = \frac{180}{10631}$$

Число, стоящее въ знаменателѣ получившейся у насъ дроби, первоначальное, значитъ разложеніе на простѣйшія дроби невозможно. Но если вмѣсто 42524 мы возьмемъ число 42525, то получимъ :

$$\frac{720}{42525} = \frac{80}{4725} = \frac{8}{75} \cdot \frac{10}{63}$$

Такимъ образомъ путемъ пробъ всегда можно подобрать удобныя передачи.

При сложныхъ передаточныхъ числахъ часто бываетъ полезно употреблять способъ Гюйгенса, состоящій въ томъ что данную дробь разлагаемъ въ непрерывную и находимъ рядъ подходящихъ дробей. Пусть послѣдняя подходящая

дробь есть $\frac{n}{m}$, а данная - $\frac{a}{b}$; тогда, какъ извѣстно, существуетъ соотношеніе

$$am - bn = 1 \quad \dots \dots (1).$$

Если какая либо дробь $\frac{x}{y}$ есть одна изъ дробей, близко подходящихъ къ данной $\frac{a}{b}$, то разность между ними, $(\frac{a}{b} - \frac{x}{y})$, должна быть малой величиной.

Мы имѣемъ :

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{ay - bx}{by} \quad \dots \dots (2).$$

для того, чтобы разность $\frac{a}{b} - \frac{x}{y}$ была достаточно малой, нужно, чтобы достаточно малой была разность, стоящая въ числителе дроби (2) (сравнительно съ знаменателемъ by). Пусть эта разность есть k , гдѣ k - нѣкоторая величина, сравнительно съ by очень малая :

$$ay - bx = k \quad \dots \dots (3).$$

Составляя равенства (1) и (3), находимъ, что можно положить

$$y = mk \quad \text{и} \quad x = nk$$

(послѣ умноженія обѣихъ частей рав. (1) на k), или вообще :

$$y = mk + \mu b$$

$$x = nk + \mu a$$

Подбирая теперь числа k и μ , можемъ получить такія значенія для x и y , при которыхъ дробь $\frac{x}{y}$ хорошо

разлагается и достаточно близка къ $\frac{a}{b}$.

Методъ Броко, также дающій возможность получать удобныя для разложенія дроби и разбивать соотвѣтственно передачу, состоитъ въ слѣдующемъ :

Пусть данное передаточное число есть $\frac{m}{n}$; оно, положимъ, слишкомъ сложно и не допускаетъ разложенія. Мы попрежнему обращаемъ его въ непрерывную дробь и находимъ подходящія дроби. По свойству подходящихъ дробей мы знаемъ, что, если двѣ послѣдовательныя подходящія дроби суть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то всякая дробь, заключенная между ними, будетъ болѣе сложной, чѣмъ эти двѣ. То же замѣчаніе относится вообще ко всякимъ двумъ дробямъ, удовлетворяющимъ соотношенію

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$$

Дробь $\frac{a+c}{b+d}$, какъ нетрудно убѣдиться, находится именно въ такомъ соотношеніи съ дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$; поэтому, въ свою очередь, она будетъ простѣйшей изъ дробей, заключенныхъ между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

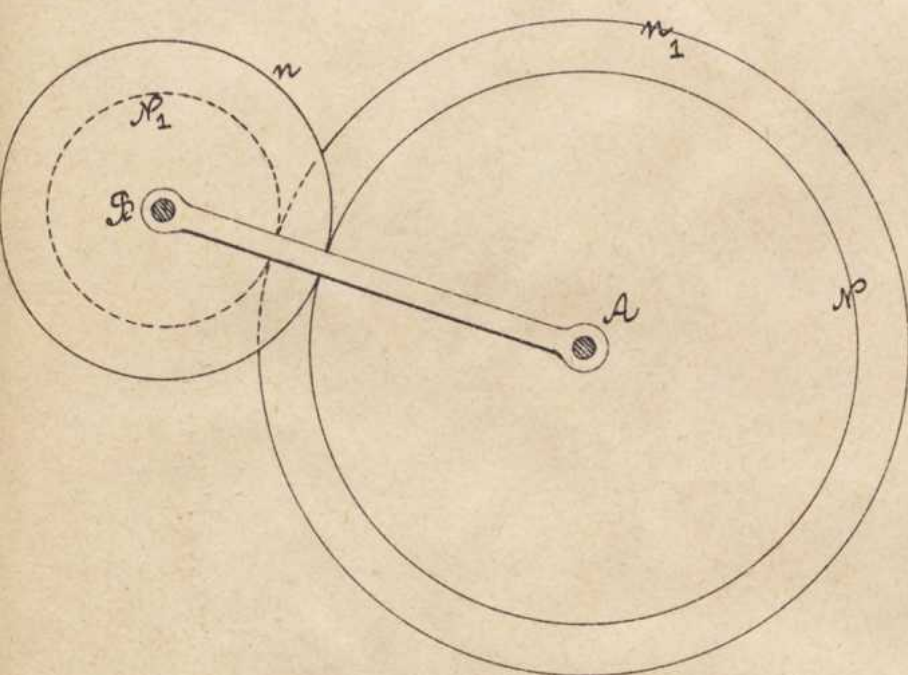
Такимъ образомъ, если, послѣ указаннаго обращенія въ непрерывную дробь и полученія подходящихъ, эти послѣднія окажутся неудобными, то, взявъ двѣ подходящія дроби, $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, мы находимъ затѣмъ цѣлый рядъ другихъ подходящихъ дробей, интерполируя сначала между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

т. е. составляя дробь $\frac{a+c}{b+d}$, потомъ между этой и каждой изъ дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и т. д.

- . - . - . - . - .

Перейдемъ теперь къ тому случаю соединеній колесъ, при которомъ оси нѣкоторыхъ колесъ имѣютъ сами движеніе около неподвижной оси.

Представимъ себѣ такое соединеніе: колесо N (фиг.



фиг. 178.

178), сидящее на оси A, зацѣпляется съ колесомъ n, сидящим на оси B; на той же оси B сидитъ колесо n_1 , зацѣпляющееся съ

колесомъ n_1 , вольно сидящимъ на оси A. Ось B сама сидитъ на рычагѣ AB, можемъ вращаться около A.

Пусть колесо N совершаетъ z оборотовъ, при неподвижномъ рычагѣ колесо n_1 совершило бы z_1 оборотовъ, причемъ

$$z_1 = \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} \cdot z .$$

Если же рычагъ совершаетъ въ то же самое время p оборотовъ въ ту же сторону, что и N , то разсмотрѣніе соотносительныхъ движеній мы можемъ свести опять къ случаю неподвижнаго рычага, если дадимъ всей системѣ скорость вращенія, равную и противоположную скорости рычага, выполнивъ это, имѣемъ

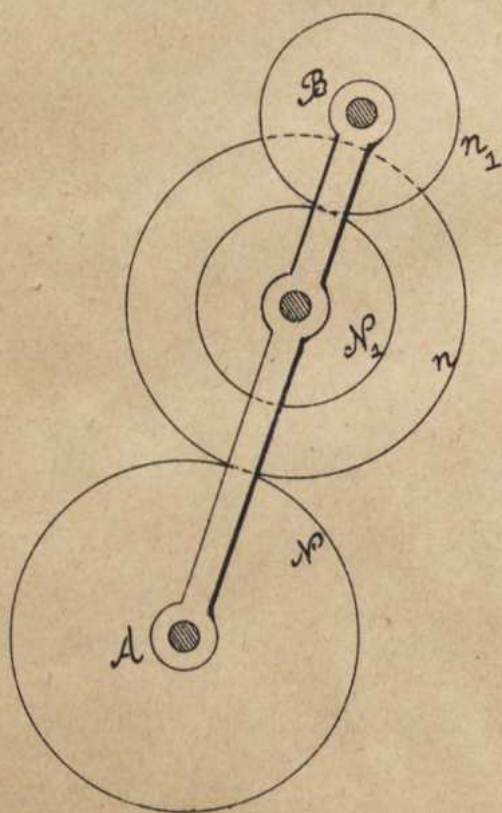
$$z_1 - p = \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} (z - p),$$

или иначе

$$z_1 - p = k (z - p),$$

гдѣ k есть передаточное число между колесами N и n_1 .

Точно также, если мы имѣемъ послѣднее колесо n_1 си-



фиг. 179.

дящимъ не на первой оси A , а на томъ же рычагѣ AB (фиг. 179), то число оборотовъ этого колеса около его оси опредѣлится изъ того же соотношенія. Дѣйствительно, то обстоятельство, что колесо n_1 участвуетъ вмѣстѣ съ рычагомъ въ вращеніи около оси A , можно разсматривать, какъ вращеніе колеса около своей оси B со скоростью рычага и параллельное

перенесеніе по кругу радіуса AB . Слѣдовательно, число

оборотовъ колеса n_1 опредѣлится какъ сумма числа оборотовъ рычага, p , и числа оборотовъ, происходящаго вслѣдствіе вращенія колеса N относительно рычага т.е.,

$$z_1(\text{кол. } n_1) = p + k(z - p)$$

(параллельное перенесеніе къ вращенію не прибавитъ ничего).

Если между колесами N и n_1 имѣется лишь одно колесо и если колесо N неподвижно, то, такъ какъ $N_1 = n$, мы находимъ :

$$z_1 = p - \frac{N}{n_1} \cdot p,$$

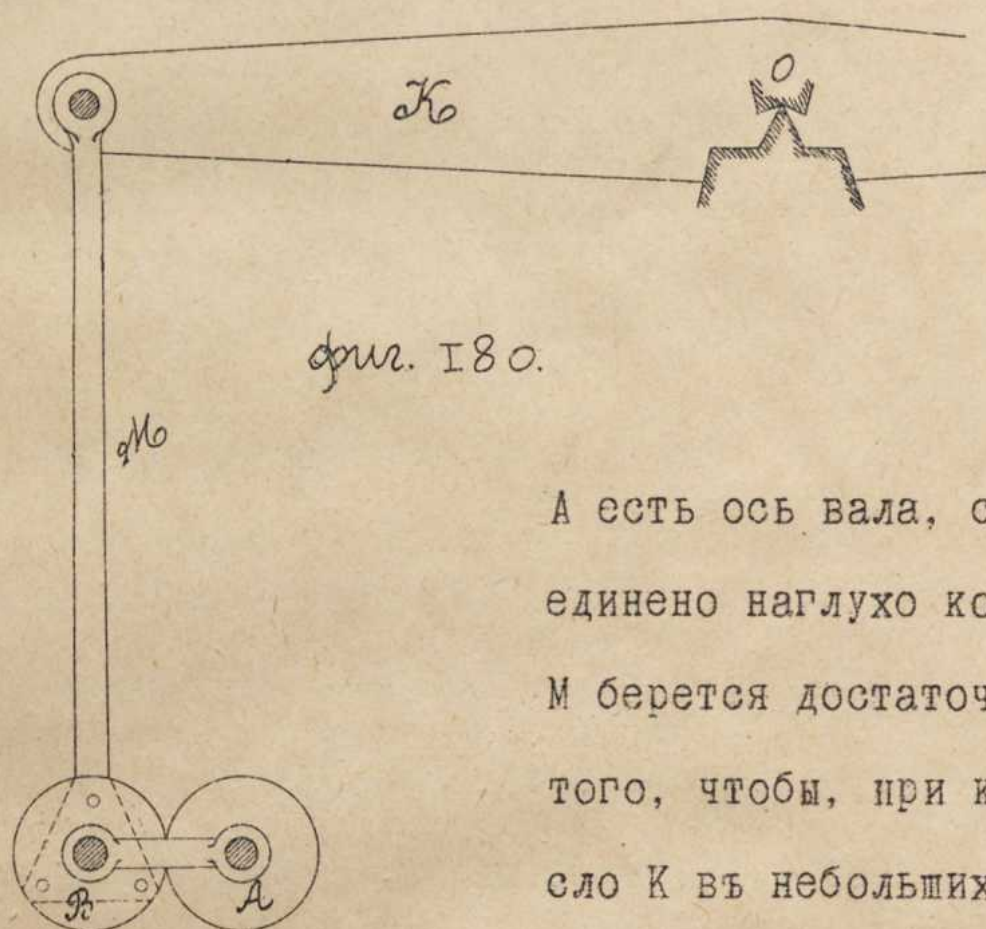
а при $N = n_1$ получимъ

$$z_1 = 0,$$

т.е., колесо n_1 въ этомъ случаѣ будетъ лишь передвигаться параллельно самому себѣ, что, впрочемъ, въ данномъ случаѣ можно видѣть и прямо: промежуточное колесо, очевидно, нисколько не вліяетъ на отношеніе чиселъ оборотовъ, а заставляетъ лишь колесо n_1 вращаться относительно рычага въ сторону, противоположную его вращенію. Въ такомъ частномъ видѣ механизмъ носитъ названіе **п а р а д о к с а Ф е р г ю с с о н а**.

Если, далѣе, промежуточнаго колеса нѣтъ, и если колеса N и n_1 равны (они въ этомъ случаѣ непосредственно сѣвнляются одно съ другимъ), то, очевидно, колесо n_1 совершитъ около своей оси $2p$ оборотовъ, при неподвиж-

номъ колесѣ N , въ ту же сторону, что и рычагъ. Обратнo, если мы заставимъ колесо n_1 перемѣщаться параллельно самому себѣ, то колесо N совершитъ въ то же время $2r$ оборотовъ въ сторону вращенія рычага. Это соображеніе положено въ основу механизма Уатта, гдѣ рычагъ K (фиг.



180), качаясь около O , увлекаетъ во вращеніе рычагъ AB ;

A есть ось вала, съ которымъ соединено наглухо колесо A . Тяга M берется достаточно длинной для того, чтобы, при качаніи коромысла K въ небольшихъ предѣлахъ,

можно было предположить, что она перемѣщается параллельно самой себѣ, т.е. иными словами, что колесо B неизмѣнно соединенное съ этой тягой M , не имѣетъ вращательнаго движенія, а лишь одно поступательное. Легко видѣть, что при качаніи рычага AB , вызываемомъ, какъ было указано, качаніемъ коромысла K , колесо A будетъ вращаться вдвое быстрее рычага AB .

Наглядно можемъ представить себѣ дѣйствіе механиз-

ма, если возьмемъ два равные круга, А и В, (фиг. 181) и прокатимъ положимъ, колесо В по А, положимъ, въ положеніе В. Радиусъ этого колеса ВР приметъ теперь положеніе B_1P_2 , причемъ дуга ОР будетъ равна OP_2 .

Для того, чтобы этотъ радиусъ ВР и при новомъ положеніи B_1 круга В сохранилъ свое направленіе, необходимо теперь повернуть колесо А на уголъ, равный углу $P_2B_1P_1$

$= 2\varphi$; тогда точка P_2

придетъ въ P_1 и радиусъ

ВР окажется въ положе-

ніи B_1P_1 , параллельномъ

прежнему. Обратнo, если

при своемъ вращеніи око-

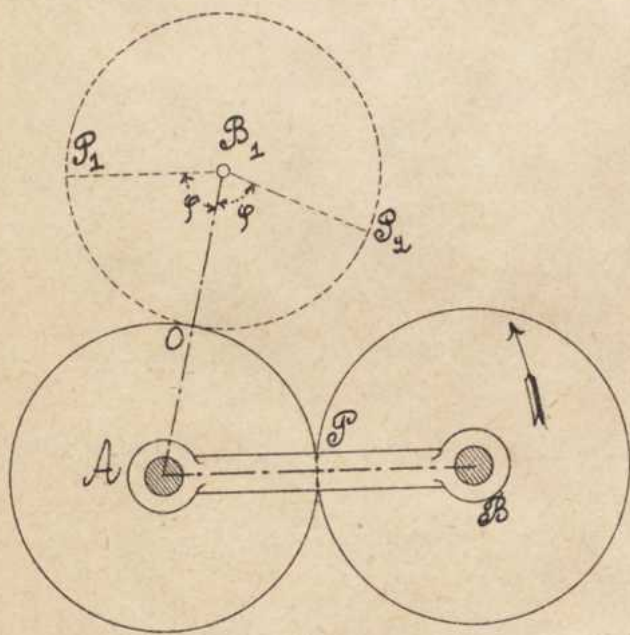
ло колеса А колесо В око-

ло своей оси В вращенія

имѣть не будетъ, то имен-

но съ этой удвоенной угловой скоростью и будетъ вращаться колесо А.

(Механизмъ этотъ, такъ назыв. планетное колесо Уатта, былъ примѣненъ имъ для передачи движенія отъ коромысла L паровой машины главному валу А; обыкновеннымъ кривошипнымъ механизмомъ Уаттъ воспользоваться не могъ, такъ какъ этотъ послѣдній механизмъ былъ въ то время патентованъ.)



фиг. 181.

Если при вращеніи опредѣленнаго предмета, напр., рѣзца въ цилиндричесверлильных станкахъ, требуется имѣть еще его медленное поступательное передвиженіе, то можно примѣнить рядовое соединеніе, разобранный въ первомъ примѣрѣ. — Рѣзецъ $\mathcal{R}$ (смтр. табл. 8) укрѣпленъ на шайбѣ E , снабженной двумя выступами, позволяющими ей перемѣщаться вдоль пустотѣлаго вала K , на которомъ имѣются два продольныхъ вырѣза, въ которыхъ и скользятъ эти выступы. Шайба E , кромѣ того, представляетъ собою гайку для винта A , помѣщеннаго внутри этого пустотѣлаго вала K . На этомъ же валу K сидитъ (наглухо) рычагъ M , несущій на себѣ ось съ колесами n и N_1 ; наглухо съ винтомъ A соединено колесо n_1 ; колесо N наглухо соединено съ станиной. Пустотѣлый валъ K получаетъ вращеніе отъ приводнаго фабричнаго вала и заставляетъ поэтому вращаться и шайбу E съ рѣзцомъ R и рычагъ M съ его колесами. При p оборотахъ рычага винтъ сдѣлаетъ z_1 оборотовъ, гдѣ

$$z_1 = p - \frac{N}{n} \cdot \frac{N_1}{n_1} \cdot p,$$

($z = 0$) или

$$z_1 = p \left(1 - \frac{N N_1}{n n_1} \right),$$

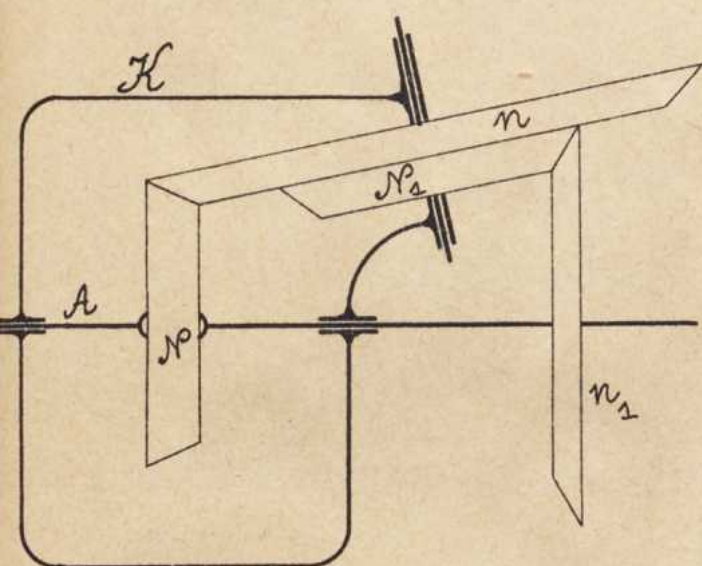
и, слѣд., если шагъ винта есть h , то рѣзецъ подви-
тся на

$$h(z_1 - p)$$

и на

$$- \frac{N N_1}{n n_1} p h.$$

Подобное же сочетаніе зубчатыхъ колесъ можно предста-



фиг. 182.

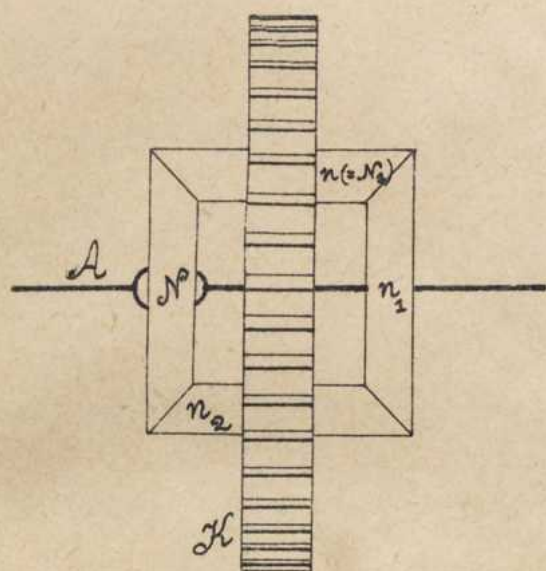
вить себѣ и для
конической переда-
чи - аналогично ци-
линдрической. Коле-
со N (фиг. 182)
наглухо соединено
съ осью A , а коле-
со n_1 - вольно; ко-
леса n и N_1 враща-

ются около оси, сидящей на рычагѣ K , который самъ можетъ
вращаться около оси A . При неподвижномъ рычагѣ K колесо
 n_1 , при z оборотахъ колеса N , сдѣлаетъ $-\frac{N N_1}{n n_1} z$ оборотовъ,
слѣдовательно, при p оборотахъ рычага K сдѣлаетъ

$$z_1 = p - \frac{N N_1}{n n_1} (z - p)$$

обор. (передаточное число является здѣсь отрицатель-
нымъ по смыслу передачи вращенія). Приборъ этотъ иног-
да употребляется въ нѣкоторыхъ прядильныхъ машинахъ.

Механизмъ можно внѣшнимъ образомъ измѣнить: колеса n и N_1 соединить въ одно ($N_1 = n$); колеса N и n_1 дѣла-
ются равными (фиг. 183); рычагъ K выполненъ въ видѣ ци-



фиг. 183

линдрическаго зубчатаго ко-
леса K , внутри котораго по-
мѣщается ось колеса n . Ко-
лесо K сидитъ, конечно, на
оси A вольно, точно такъ же,
какъ и колесо n_1 . Для симме-

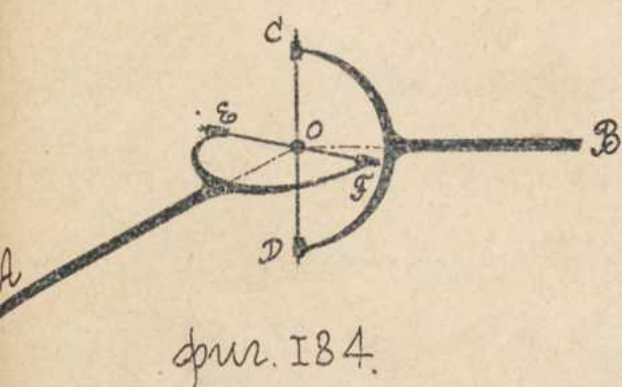
тріи прибавляютъ еще колесо n_2 . Въ этомъ случаѣ мы имѣ-
емъ : $z + z_1 = 2p$. Измѣняя число оборотовъ колеса K , мо-
жно измѣнять и число z_1 .

- . - . - . - . - . - .

О Т Н О Ш Е Н І Е С К О Р О С Т Е И П Е Р Е -
М Ъ Н Н О , Н А П Р А В Л Е Н І Й - П О С Т О -
Я Н Н О .

Въ порядкѣ послѣдовательности классификаціи Вилли-
са мы теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію передачи при по-
средствѣ промежуточныхъ твердыхъ звеньевъ, гдѣ отноше-
ніе скоростей переменнo, а направленій - постоянно. Здѣсь
мы остановимся на одномъ изъ наиболѣе употребительныхъ
механизмовъ, а именно, на шарнирѣ Гук а .

Шарниръ Гука представляетъ изъ себя муфту для двухъ валовъ, геометрическія оси которыхъ пересѣкаются въ точкѣ O (фиг. 184). Муфта устраивается въ видѣ двухъ



фиг. 184.

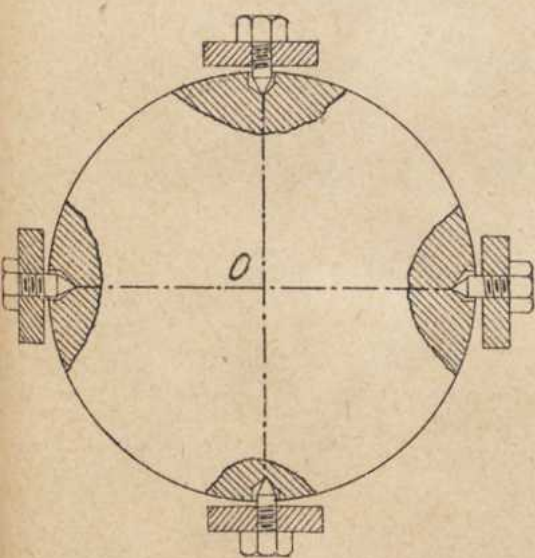
перекладинъ, соединенныхъ крестообразно под прямымъ угломъ другъ къ другу: оси перекладинъ пересѣкаются въ той же точкѣ O , въ которой пе-

ресѣкаются и оси валовъ; каждая перекладина перпендикулярна къ своему валу:

$$CD \perp OB, \quad EF \perp OA.$$

Концы валовъ снабжены вилами, въ которыя и входятъ, кк. концы перекладинъ.

Механизмъ, конечно, можетъ быть видоизмѣняемъ съ



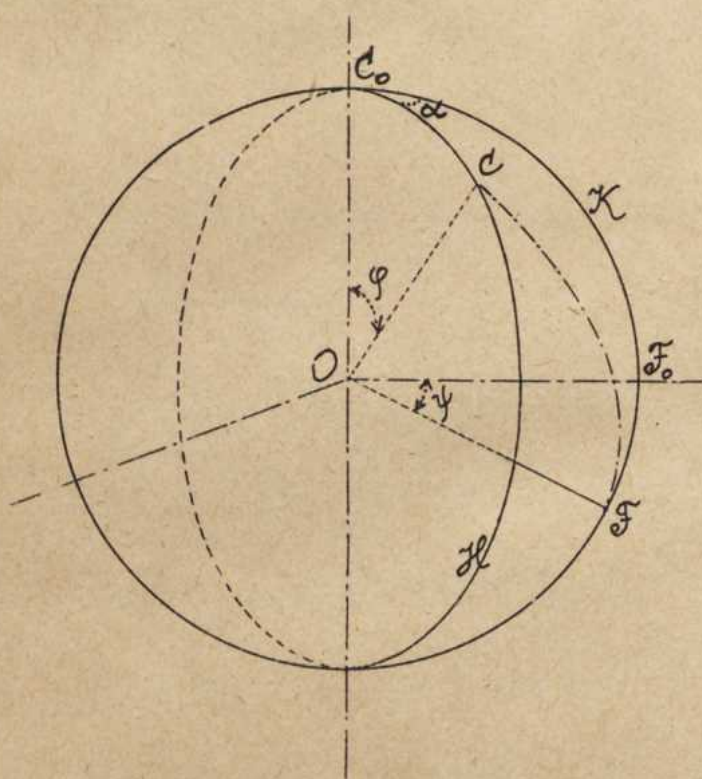
фиг. 185.

внѣшней стороны; напр., вмѣсто перекладинъ берутъ иногда шарикъ, въ которомъ дѣлаютъ 4 радіальныхъ углубленія: соотвѣтствующія осямъ этихъ углубленій радіусы лежатъ въ одной плоскости, образуя притомъ 2 діаметра

сферы, перпендикулярныхъ другъ другу; центръ этой сфе-

ри долженъ лежать въ точкѣ O . Въ упомянутыя углубленія входятъ шипики отъ вилы каждаго изъ валовъ (фиг. 185). Сущность дѣйствія остается, конечно, та же, что и прежде.

При вращеніи вала A (фиг. 184) ось перекладки EF будетъ двигаться въ плоскости, перпендикулярной къ оси A , вращаясь около центра O со скоростью вращенія вала A ; точно также перекадина CD во все время вращенія будетъ оставаться въ плоскости, проходящей также черезъ точку O и перпендикулярной къ оси B ; угол



фиг. 186.

между плоскостями будетъ равенъ углу между осями.

—Опишемъ мысленно изъ центра O сферу какого либо радіуса. Ось каждой изъ перекадинъ будетъ діаметромъ этой сферы.

Пусть плоскости движенія этихъ діаметровъ будутъ OS_0H и OS_1KF (фиг. 186).

Разсматривать движеніе

цѣлыхъ діаметровъ мы не будемъ, мы разсмотримъ движеніе радіусовъ OS_0 и OF , представляющихъ какъ бы половины перекадинъ, — другія половины движутся совершенно

такъ же, какъ эти.

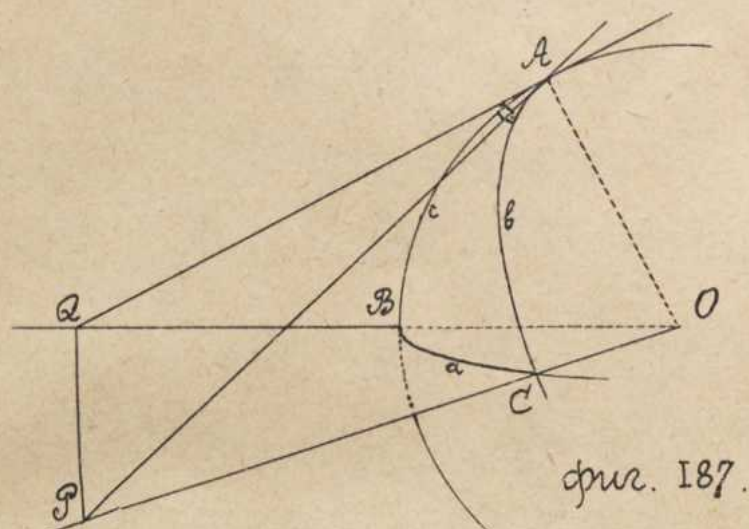
Два эти радіуса, OC_0 и OF_0 , движутся въ своихъ плоскостяхъ такъ, что уголъ COF между ними всегда остается прямымъ, такъ какъ перекладины соединены другъ съ другомъ неизмѣнно подъ прямымъ угломъ.

Начальнымъ положеніемъ радіусовъ условимся считать одно изъ тѣхъ, при которыхъ радіусы OC_0 и OF_0 лежатъ въ плоскости чертежа, перпендикулярной къ плоскости, проходящей чрезъ оси A и B , - радіусъ OC_0 въ этотъ моментъ будетъ перпендикуляренъ къ этой послѣдней плоскости (A, B), т.е. къ обѣимъ осямъ. Пусть теперь этотъ радіусъ OC_0 передвинулся въ своей плоскости OC_0H на уголъ φ и занялъ положеніе OC ; радіусъ OF_0 также передвинется въ своей плоскости OC_0KF_0 на нѣкоторый уголъ ψ , и займетъ нѣкоторое опредѣленное положеніе OF ; при этомъ, какъ было указано, уголъ COF будетъ попрежнему прямой.

Спросимъ себя, каково соотношеніе между этими двумя углами φ и ψ . Для вывода его намъ придется воспользоваться теперь одной изъ основныхъ формулъ сферической тригонометріи, выводъ которой мы ниже и помещаемъ.

Пусть изъ точки O , какъ изъ центра, описана сфера

радіусомъ, равнымъ единицѣ, и пусть на этой сферѣ ле-
житъ сферическій треугольникъ ABC , дуги котораго AB ,
 BC и AC представляютъ собою дуги большихъ круговъ. По-



фиг. 187.

ложимъ, наконецъ,
что двѣ изъ этихъ
дугъ, напр., AB и
 AC , не превышаютъ
четверти окружно-
сти большого круга,

т.е., $\frac{\pi}{2}$ (фиг. 187).

Проведемъ радіусы OA , OB и OC и два послѣдніе про-
должимъ до пересѣченія въ точкахъ O и P съ касательны-
ми, проведенными въ вершинѣ A къ сторонамъ AB и AC . Ка-
сательныя и радіусы пересѣкнутся такъ, какъ это изобра-
жено на чертежѣ, только въ томъ случаѣ, если дуги AB
и AC меньше $\frac{\pi}{2}$. Такъ какъ радіусъ сферы принятъ за еди-
ницу, то, какъ видно непосредственно изъ чертежа:

$$AQ = \operatorname{tg} \angle AOB;$$

если же мы условимся уголъ AOB и ему под. измѣрять д у-
г а м и , ихъ стягивающими, то предыдущее ур-іе напишет-
ся такъ :

$$AQ = \operatorname{tg} \overset{\frown}{AB},$$

или, обозначая $\overset{\frown}{AB}$ черезъ s , подобно тому, какъ это дѣ-
лается въ плоской тригонометріи, находимъ:

$$AQ = \operatorname{tg} c \dots \dots \dots (1).$$

Подобнымъ же образомъ мы найдемъ:

$$AP = \operatorname{tg} b \dots \dots \dots (2)$$

$$OQ = \sec c \dots \dots \dots (3)$$

$$OP = \sec b \dots \dots \dots (4)$$

Кромѣ того, на основаніи формулъ плоской тригонометріи, изъ треугольниковъ OPQ и APQ имѣемъ :

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 OP \cdot OQ \cos \alpha$$

$$\text{и } PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 AP \cdot AQ \cos A.$$

Сравнивая эти выраженія между собою и съ выведенными выше равенствами, получаемъ :

$$\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = \sec^2 b + \sec^2 c - 2 \sec b \cdot \sec c \cdot \cos \alpha.$$

Замѣняемъ $\sec^2 x$ черезъ $(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ и сокращаемъ :

$$\operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = 1 + \operatorname{tg}^2 b + 1 + \operatorname{tg}^2 c - 2 \sec b \cdot \sec c \cdot \cos \alpha,$$

или

$$-2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = 2 - 2 \sec b \sec c \cos \alpha,$$

или

$$-\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A = 1 - \sec b \sec c \cos \alpha.$$

Замѣняя въ этой формулѣ $\operatorname{tg} x$ черезъ $\frac{\sin x}{\cos x}$, а $\sec x$ черезъ $\frac{1}{\cos x}$ и приводя формулу къ цѣлому виду, получаемъ :

$$-\frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \cos A = 1 - \frac{1}{\cos b} \cdot \frac{1}{\cos c} \cdot \cos \alpha,$$

или

$$-\sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \cos b \cdot \cos c - \cos a ;$$

окончательно:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A ,$$

т.е. кос стороны равенъ произведенію косинусовъ двухъ другихъ сторонъ плюсъ произведеніе синусовъ тѣхъ же сторонъ на косинусъ угла между ними.

Въ сферической тригонометріи доказывается затѣмъ, что та же теорема имѣетъ силу для всякаго сферическаго треугольника, какъ велики бы ни были его стороны.

Поэтому можемъ примѣнить ее и къ нашему треугольнику CSF (фиг. 186).

Здѣсь придется положить :

$$AB = c = \frac{\pi}{2} + \psi ,$$

$$AC = b = \varphi ,$$

$$BC = a = \frac{\pi}{2} ,$$

$$A = \alpha .$$

Тогда получимъ :

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \varphi \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right) + \sin \varphi \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right) \cos \alpha ,$$

откуда:

$$0 = -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \alpha ,$$

или

$$\cos \varphi \sin \psi = \sin \varphi \cos \psi \cos \alpha .$$

дѣля обѣ части этого ур-ія на $\cos \varphi \cdot \cos \psi$, получа-
емъ :

$$\frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\cos \varphi \cdot \cos \psi} = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \alpha}{\cos \varphi \cdot \cos \psi},$$

или окончательно

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha \dots (1).$$

причемъ углы φ и ψ считаются здѣсь
отъ того начальнаго положенія,
при которомъ, какъ мы указывали выше, оба радиу-
са, OC_0 и OF_0 , находятся въ плоско-
сти, перпендикулярной къ пло-
скости осей.

Найдя зависимость между углами поворота осей, най-
демъ зависимость между угловыми скоростями вращенія этихъ
осей, между ω и ω' , гдѣ ω есть угловая скорость враще-
нія оси В (радіуса OC), а ω_1 - оси А (рад. OF). Мы
знаемъ, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{и} \quad \omega' = \frac{d\psi}{dt} \dots (2).$$

Дифференцируя по t ур. (1), находимъ :

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \cos \alpha,$$

или, въ виду (2),

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \cdot \omega' = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \omega \cdot \cos \alpha,$$

откуда!

$$\omega' = \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} \cdot \omega \cos \alpha \quad (3).$$

Но изъ (1) имѣемъ

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha ,$$

иначе

$$\frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \cos^2 \alpha ;$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по 1-цѣ, получаемъ :

$$\frac{\sin^2 \psi + \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi} = \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} ,$$

откуда получаемъ :

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \psi} = \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha + 1 - \sin^2 \varphi ;$$

иначе :

$$\frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha} ,$$

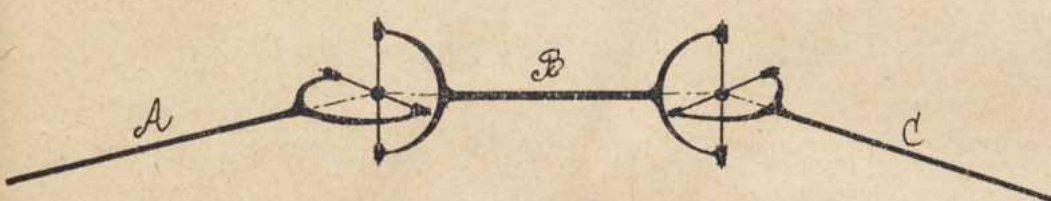
и теперь ур. (3) приметъ видъ :

$$\omega' = \omega \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha} \quad (4)$$

Формула (4) показываетъ намъ, что при равномерномъ вращеніи одного вала другой вращается неравномерно; это видно изъ того, что въ отношеніе скоростей входитъ переменная величина $\sin^2 \varphi$. При $\varphi = 0$ имѣемъ $\omega_1 = \omega \cos \alpha$,

а при $\varphi = \frac{\pi}{2} \dots \omega_1 = \frac{\omega}{\cos \alpha}$. При небольших углах α , когда $\cos \alpha$ мало отличается отъ единицы, неравномерность выходитъ небольшая.

Представимъ себѣ теперь два вала А и С, (фиг. 188) соединенные промежуточнымъ между ними валомъ В при помощи двухъ шарнировъ Гука; пусть оси обоихъ валовъ одинаково наклонены къ оси средняго. Если вилы промежуточнаго вала лежать въ одной плоскости, то, очевидно, вал А дѣйствуетъ на валъ В такъ же, какъ валъ С - на В, т. е., при извѣстномъ вращеніи вала В валы А и С будутъ вращаться одинаково, и, слѣдовательно, если мы станемъ равномерно вращать валъ А, то валъ С, при помощи вала



фиг. 188.

В, будетъ вращаться также

равномерно и съ тою же скоростью, что и валъ А; понятно, что валъ В равномернаго вращенія имѣть не будетъ.

Тотъ же результатъ получился бы у насъ, если бы къ данной системѣ мы примѣнили соотношеніе (1). Относя ψ къ валу В, а φ - къ А, находимъ для (А, В)

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha ;$$

пусть соотвѣтствующій уголъ поворота вала С равенъ φ_1 ;

тогда имѣемъ

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \cos \alpha_1 ;$$

α есть уголъ между осями А и В, а α_1 - между В и С;
при равенствѣ этихъ угловъ (на что было указано выше)
получаемъ -

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_1 ,$$

т. е. ,

$$\varphi = \varphi_1 .$$

Теперь предположимъ, что вилки вала В перпендикулярны другъ къ другу (фиг. 189). Валъ С вращаться равномерно не будетъ. На самомъ дѣлѣ, изъ того же соотношенія (1) между валами В и А имѣемъ :

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha ;$$

здѣсь ψ попрежнему есть уголъ поворота вала В, а φ - вала А. Для второй пары валовъ, В и С, имѣемъ , при углѣ φ_1 поворота вала С,

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \alpha_1 ,$$

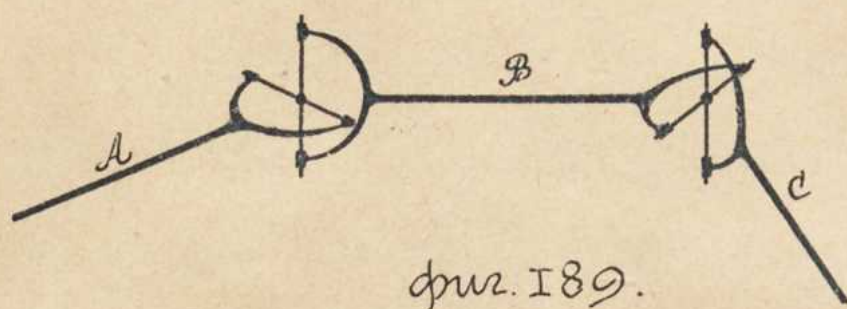
такъ какъ теперь валъ В по отношенію къ С играетъ ту же роль, что у первой пары А по отношенію къ В. Два послѣднія ур-ія дають намъ соотношение

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 ;$$

оно показываетъ намъ, что углы φ и φ_1 одинаковыми быть не могутъ никогда, за исключеніемъ того случая, когда углы α обращаются въ нуль: $\alpha = \alpha_1 = 0$; но въ этомъ пос-

слѣднемъ случаѣ всѣ три вала по существу обращаются въ одинъ.

Замѣтимъ, наконецъ, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ передача при помощи шарнира Гука становится невозможной.



О Т Д Ъ Л Е Н І Е III.

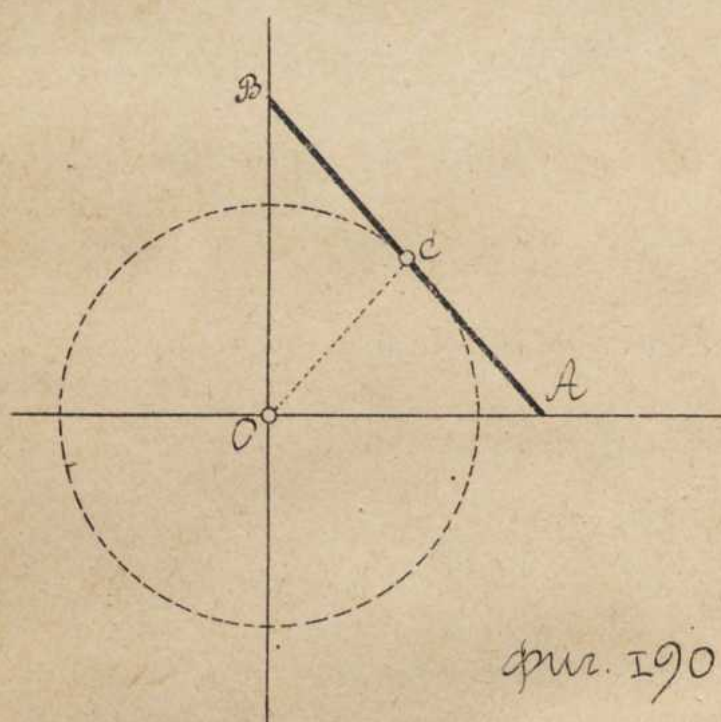
ОТНОШЕНІЕ СКОРОСТЕЙ КАКОЕ УГОДНО, А ОТНО-
ШЕНІЕ НАПРАВЛЕНІЙ ПЕРЕМѢННО.

Къ этому классу механизмовъ относятся такъ наз.

н а п р а в л я ю щ і е механизмы. Цѣль ихъ - при помощи ряда шарнирныхъ соединеній получить п р я м о -
л и н е й н о е движеніе опредѣленной точки механизма. Практическое примѣненіе эти механизмы находятъ себѣ тамъ, гдѣ почему либо нежелательно устройство направляющихъ для прямолинейнаго движенія опредѣленной части механизма, подобное тому, какое имѣется въ паровой машинѣ для ползуна. Въ направляющихъ механизмахъ эта прямая получается не вслѣдствіе присутствія призматич-

ческих направляющих, а какъ траекторія нѣ-
которой опредѣленной точки механизма.

Механизмы, относящіеся сюда, можно раздѣлить на
п р б л и ж е н н ы е и т о ч н ы е . Въ первыхъ пря-
мая замѣняется нѣкоторой кривой траекторіей, близко къ
прямой подходящей и не трудно выполняемой; въ другихъ-
траекторія будетъ теоретически точной прямой. Мы раз-
смотримъ сначала первые, приближенные, механизмы. Изъ



фиг. 190

кинематики извѣстно, что,
если какой либо прямой от-
рѣзокъ АВ движется, опи-
раясь концами на стороны
прямого угла BOA (фиг. 190)
то середина его, точка С,
описываетъ окружность цен-
тра О и радіуса ОС.

Если мы возьмемъ довольно длинный стержень АВ и по-
ставимъ его подъ небольшимъ угломъ ψ къ линіи ОА, то
при перемѣщеніи конца В стержня отъ В къ О и дальше къ
 B_1 на $OB_1 = OB$ (фиг. 191), получится очень малое пере-
движеніе точки А, могущее быть выраженнымъ въ видѣ:

$$AB - AB \cos \psi = a (1 - \cos \psi)$$

гдѣ $a = AB$; передвиженіе конца В въ то же время выра-
зится черезъ $a \sin \psi$, и отношеніе обоихъ перемѣщеній

будетъ равно :

$$\frac{a(1 - \cos \psi)}{a \sin \psi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}.$$

Какъ видимъ, при достаточно маломъ углѣ ψ это отноше-

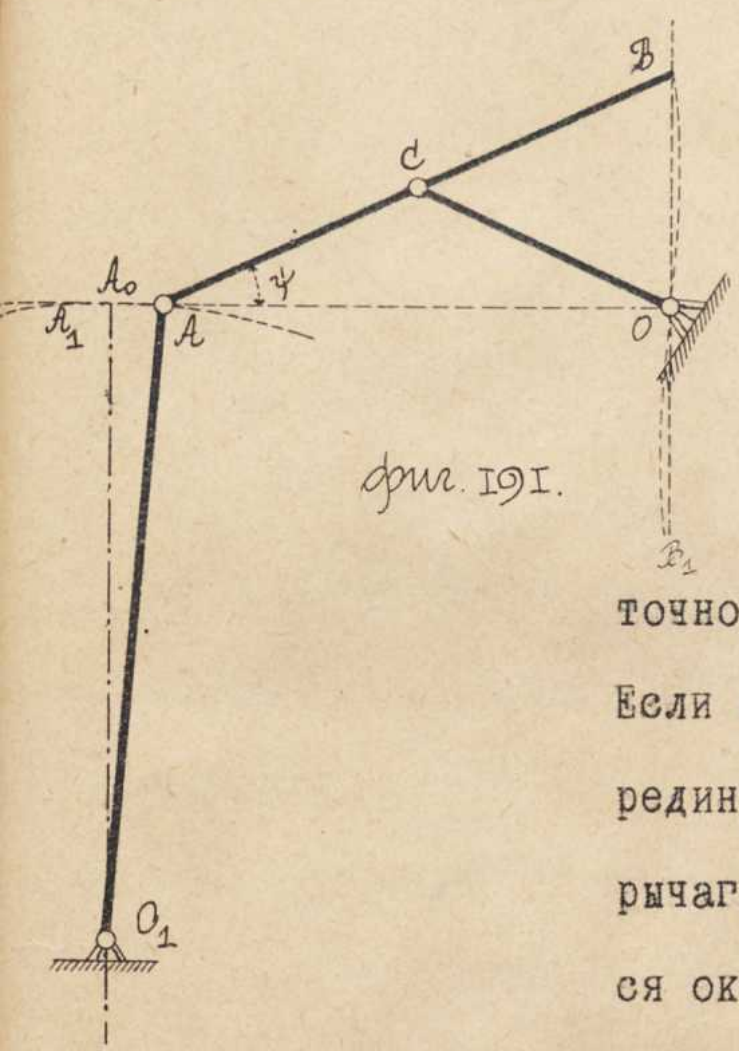
ніе очень мало, между тѣмъ какъ въ то же самое время передвиженіе конца В, при достаточно длинномъ стержнѣ, можетъ быть доста-

точно велико.

Если мы соединимъ точку С, середину стержня, съ центромъ О рычагомъ СО, могущимъ вращаться около этой точки О, а конецъ А заставимъ двигаться по прямой ОА, то конецъ В опишетъ

прямую ОВ. Такъ какъ перемѣщеніе точки А мало, то вмѣсто малаго отрѣзка прямой АА₀ можно взять дугу круга достаточно большого радіуса, для чего соединяемъ точку А рычагомъ съ нѣкоторой неподвижной точкой О₁, находящейся на перпендикулярѣ къ ОА₀, проведенномъ изъ А₀—средняго положенія точки А; при этомъ А будетъ описывать малыя дуги круга радіуса О₁А ; точка В будетъ двигать-

фиг. 191.



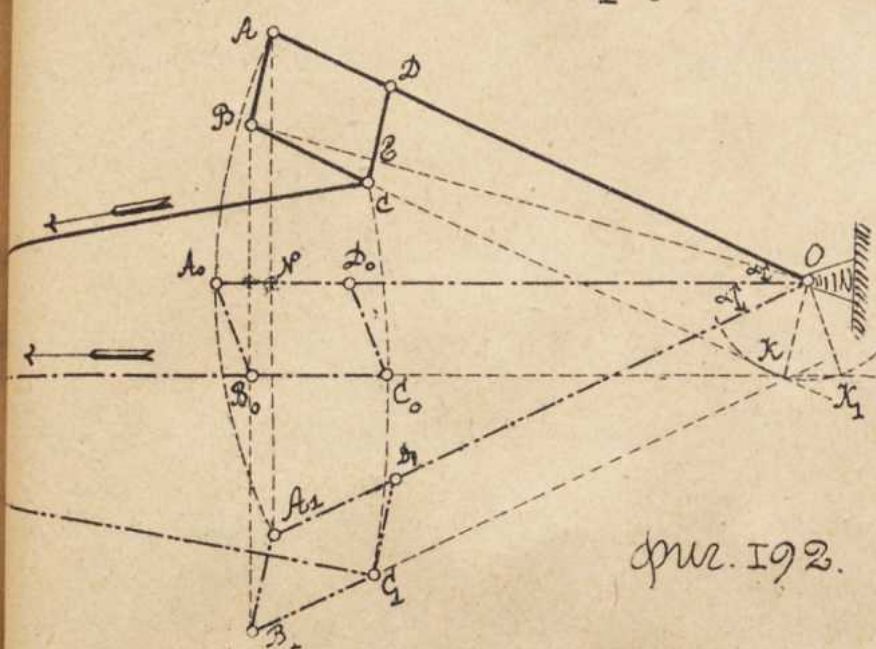
ся, собственно говоря, не по прямой OB , а по нѣкоторой кривой, которая можетъ, однако, при соотвѣтственно выбранныхъ a , ψ и радиусѣ O_1A , весьма близко подходитъ къ этой прямой OB ; во всякомъ случаѣ эта кривая съ этой прямой будетъ имѣть три общія точки: B, O и B_1 , гдѣ BB_1 есть весь размахъ точки B .

Съ геометрической стороны движеніе точки B будетъ движеніемъ одной изъ точекъ прямого отрезка AC , опирающагося своими концами на двѣ окружности радиусовъ O_1A и OC .

Разсмотрѣнный приближенный направляющій механизмъ носитъ названіе механизма Эванса и употребляется въ индикаторахъ; — замѣтимъ, что вмѣсто точки C можно взять и другую точку отрезка AB ; какъ известно, при движеніи отрезка въ углу она опишетъ эллипс; найдя центръ кривизны эллипса для средняго положенія точки, замѣняетъ дугу эллипса дугою окружности, имѣющей центръ въ центрѣ кривизны.

Другой направляющій механизмъ есть извѣстный параллелограммъ Уатта. Представимъ себѣ рычагъ OA (фиг. 192) съ шарнирнымъ параллелограммомъ $ABCD$. Пусть рычагъ качается около средняго его положенія OA_0 , отклоняясь въ обѣ стороны на уголъ α . Заставимъ точку B двигаться по прямой, перпендикулярной

OA_0 и дѣлящей стрѣлку A_0N пополамъ; при этомъ точка
 опишетъ нѣкоторую кривую CC_0C_1 ; обратно, если по этой
 кривой мы будемъ вести точку C , то точка B будетъ дви-
 гаться по прямой. Кривую C_1C_0C мы замѣняемъ окружностью,



фиг. 192.

проходящей че-
 резъ точки C, C_0
 и C_1 , т.е. че-
 резъ среднее и
 два крайнихъ
 положенія точ-
 ки C ; центръ

этой окружности будетъ лежать на линіи B_0C_0 средняго
 положенія точекъ B и C . — Соединяемъ теперь рычагомъ
 точку C съ найденнымъ центромъ O_1 ; теперь при качаніи
 рычага OA точка B будетъ описывать уже не прямую, а нѣ-
 которую кривую, которая, однако, при соотвѣтствующемъ
 выборѣ элементовъ этого механизма, можетъ весьма близ-
 ко подходить къ прямой. Ходъ точки B , т.е. отрѣзокъ BB_1 ,
 будетъ, конечно, равенъ AA_1 ($AA_1 \parallel BB_1$, $AA_1 \perp OA_0$ и $AB=A_1B_1$).

Нетрудно убѣдиться, что мы имѣемъ здѣсь движеніе,
 съ геометрической точки зрѣнія подобное движенію въ ме-
 ханизмѣ Эванса. На самомъ дѣлѣ, продолживъ BC и проводя
 $OK \parallel CD$, получаемъ

$$OK = CD = \text{const.}$$

и

$$CX = DO = \text{const.};$$

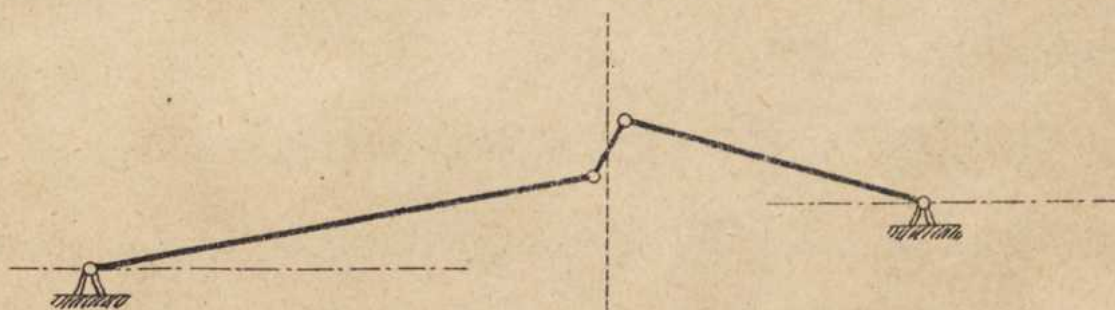
слѣдовательно, мы имѣемъ движеніе отрѣзка СК постоянной величины, опирающаго своими концами на окружности радиусовъ O_1C и OK и центровъ O и O_1 ; точка K будетъ описывать дугу K_1K , гдѣ K_1 лежитъ, очевидно, на продолженіи B_0C_0 и соотвѣтствуетъ точкѣ K , когда BC приметъ положеніе B_0C_0 . Обыкновенно ходъ точки B дается заранее. Имѣя его, выбираютъ длину рычага OA , (часто берутъ $OA = 1,5 BB_1$), и чертятъ дугу AA_0A_1 такъ, чтобы хорда AA_1 равнялась данному ходу; находятъ затѣмъ стрѣлку ея A_0N , дѣлятъ ее пополамъ и проводятъ черезъ точки дѣленія прямую, параллельную AA_1 , которая и будетъ предполагаемой траекторіей точки B ; задаются затѣмъ длинами AB и AD и чертятъ рычагъ и параллелограммъ въ обоихъ крайнихъ положеніяхъ и въ среднемъ (т.е. $ABCD$, $A_0B_0C_0D_0$ и $A_1B_1C_1D_1$) такъ, конечно, чтобы точка B приходилась на своей прямой. Такимъ образомъ находятъ три соотвѣтствующихъ положенія точки C , т.е. точки C, C_0 и C_1 , и ищутъ центръ окружности, проходящей черезъ эти три точки. Затѣмъ соединяютъ точку C съ центромъ O_1 при помощи рычага, и тогда, при качаніи рычага AO около центра O , а рычага O_1C около O_1 , точка B приблизительно будетъ описывать прямую BB_0B_1 .

имѣтимъ, что, если мы соединимъ прямою $ОВ$ точки O и B опредѣлимъ точку пересѣченія этой прямой $ВО$ съ прямою $ОА$, то точка E также будетъ описывать прямую, — это видно изъ того, что фигуры OAE и OAB всегда остаются подобными другъ другу; на самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ равенство отношеній :

$$DE : AB = DO : OA$$

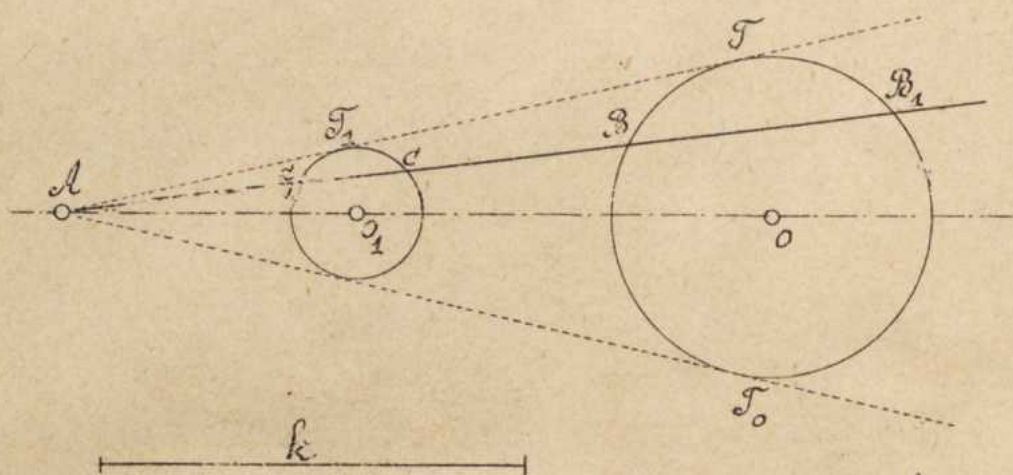
значитъ, отношеніе $DE : AB$ есть const.; прямая AB и OE всегда между собою параллельны; такимъ образомъ, точки B и E будутъ всегда лежать на одной прямой съ точкой O ; поэтому если B будетъ двигаться по прямой, то, въ виду постоянства отношенія $BO : EO$, точка E будетъ двигаться по прямой, параллельной первой.

Поэтому, найдя такую точку E , можно удалить части OA , AB и BC , оставивъ лишь рычаги OD , O_1C и звено CD ; точка E этого звена и будетъ описывать прямую. Механизмъ будетъ имѣть видъ, изображенный на фиг. 193.



фиг. 193.

Обратимся теперь къ точнымъ механизмамъ. Основаны они на такъ называемой инверсіи или множеніи кривыхъ. Имѣемъ окружность O и точку A (фиг. 194), и нѣко-



фиг. 194.

торый данный по величинѣ отрѣзокъ прямой k . Проводимъ изъ точки A лучъ AL , пересѣкающій ок-

ружность O въ точкахъ B и B_1 и ищемъ на томъ же лучѣ AL такую точку C , чтобы произведеніе $AB \times AC$ равнялось данной величинѣ k^2 . Оказывается, что геометрическимъ мѣстомъ такихъ точекъ C будетъ нѣкоторая опредѣленная окружность O_1 . Дѣйствительно, подыскавъ еще такую точку C_1 , чтобы произведеніе $AB_1 \times AC_1$ равнялось опять k^2 , можемъ написать

$$AB \times AC = k^2,$$

$$AB_1 \times AC_1 = k^2.$$

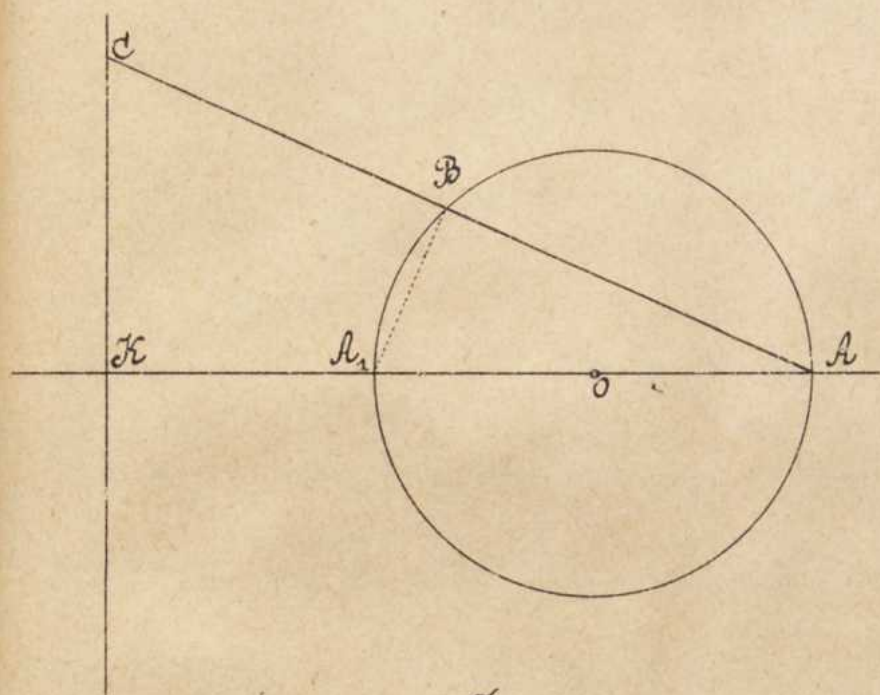
Перемноживъ, имѣемъ :

$$(AB \times AB_1) \cdot (AC \times AC_1) = k^4$$

Но произведеніе $(AB_1 \times AB)$ есть величина постоянная, равная AT^2 , гдѣ AT есть касательная къ кругу O изъ точки A . значитъ, произведеніе $AC \times AC_1$ есть также величина постоянная, что и показываетъ намъ, что точки C и C_1 ле-

жаты также на окружности, — это и будетъ упомянутая выше окружность O_1 . Нетрудно убѣдиться въ томъ, что общія касательныя къ этимъ двумъ окружностямъ TT_1 и T'_1T' проходятъ черезъ ту же точку A .

Въ томъ частномъ случаѣ, когда точка A лежитъ на



фиг. 195.

окружности O (см.

фиг. 195),

геометрическимъ

мѣстомъ точекъ

C будетъ прямая,

занимающая впол-

нѣ определенное

(при данномъ K)

положеніе относи-

тельно круга O . Дѣйствительно, если мы проведемъ черезъ A діаметръ AA_1 , возьмемъ на немъ какую нибудь точку K такъ, чтобы произведеніе $AA_1 \times AK$ равнялось данной величинѣ, и въ этой точкѣ K возставимъ перпендикуляръ KC къ діаметру AA_1 , то для какой нибудь точки C этого перпендикуляра, пользуясь подобіемъ треугольниковъ ABA_1 и ACK , можемъ написать :

$$AC : AA_1 = AK : AB,$$

откуда получаемъ :

$$AK \cdot AA_1 = AC \cdot AB,$$

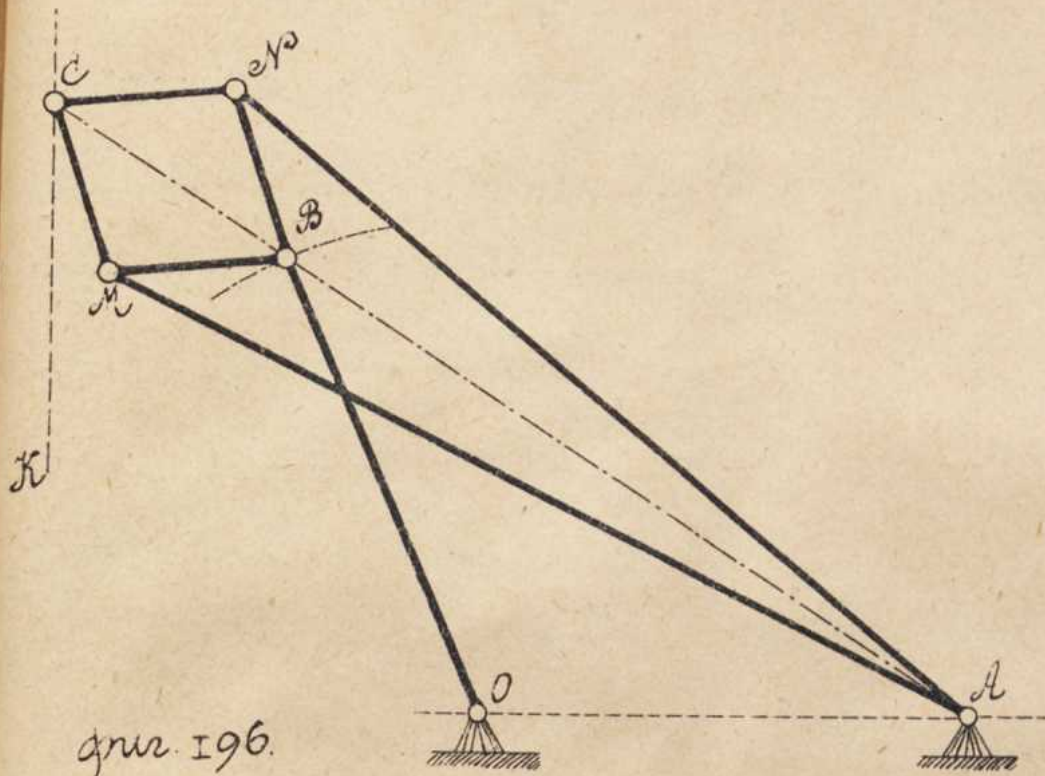
что и указываетъ намъ, что точка C принадлежитъ искомому геометрическому мѣсту. Такимъ образомъ, съ перемѣщеніемъ точки B по окружности O , точка C будетъ двигаться по нѣкоторой вполне опредѣленной прямой $СК$. Эта идея и положена въ основу механизма П о с е л ь е (Peaucellier). Здѣсь взять шарнирный ромбъ $BMCN$ (фиг. 197); точки M и N его связаны тягами AM и AN съ неподвижной точкой A , причемъ эти рычаги AM и AN между собой равны

$$AM = AN.$$

Нетрудно видѣть, что въ такомъ случаѣ точки A, B и C , при всѣхъ измѣненіяхъ фигуры остаются на одной прямой AC (по свойству ромба діагональ $BC \perp MN$ и дѣлитъ ее пополамъ, а вслѣдствіе равенства $MA = NA$, точка A всегда придется на этомъ же перпендикулярѣ BC).

Окружность изъ M радіуса MC проходитъ черезъ точку B , такъ какъ $MC = MB$; отсюда слѣдуетъ, что произведение $(AB \cdot AC)$ есть величина постоянная; дѣйствительно упомянутая окружность M имѣетъ опредѣленный радіусъ MC , а точка A находится въ опредѣленномъ разстояніи MA отъ центра M этой окружности, и это послѣднее соотношеніе между окружностью M и точкой A имѣетъ мѣсто при всѣхъ положеніяхъ ромба. Такимъ образомъ у насъ имѣется постоянное по величинѣ произведеніе векторовъ AB и AC .

Заставимъ теперь конецъ одного вектора, В, описывать окружность, проходящую черезъ точку А (сравни съ фиг. 195), тогда, конецъ другого, точка С, опишетъ



точную
прямую.
Выбира-
емъ за
центръ
этой ок-
ружность
нѣкото-
рую точ-
ку О такъ,

что

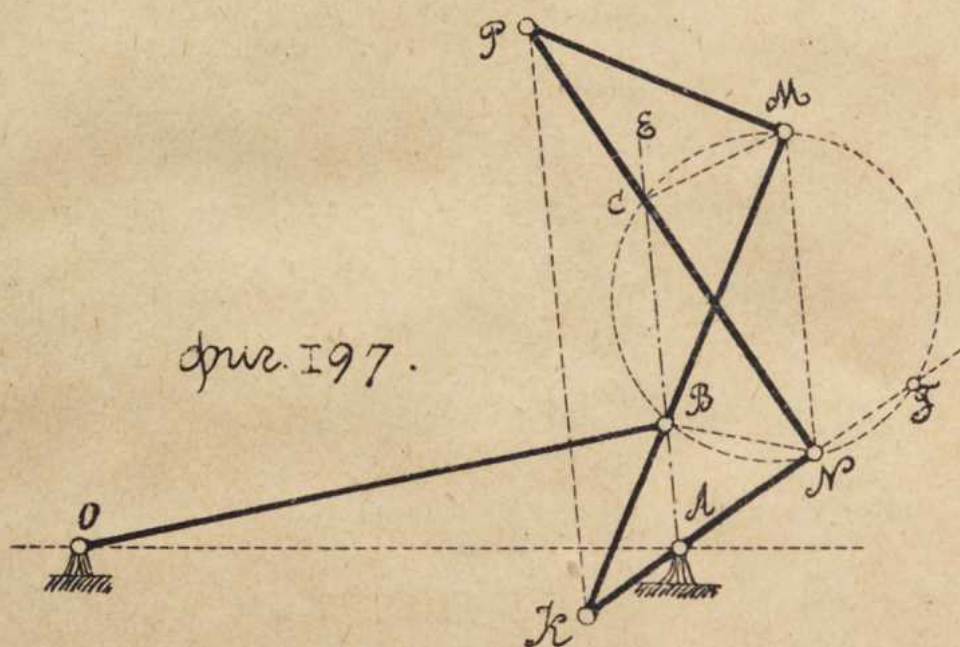
$$OB = OA,$$

соединяемъ ее рычагомъ съ точкой В и такимъ образомъ получаемъ направляющій механизмъ, носящій названіе механизма П о с е л ь е (1864 г.). Если ВО не будетъ равно ОА, то точка С будетъ описывать дугу нѣкоторой, вполне опредѣленной въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ окружности.

Въ механизмѣ Н а г т ' а положены въ основу четыре стержня, соединенные шарнирами (фиг. 197); длины ихъ подбираются такъ, чтобы они составля-

ли діагонали и бока равнобокой трапеціи КРМН. Возьмем на стержнѣ КН какую нибудь точку А и едѣлаемъ ее неподвижной, такъ что стержень КН получить возможность вращенія около этой точки.

Проведимъ изъ этой точки А линію АЕ, параллельную NM; точки пересѣченія ея съ діагоналями КМ и РN обозначимъ черезъ В



и С. Нетрудно видѣть, что фигура ВСМН будетъ также равнобокой трапеціей.

Точки В и С

будутъ вполне опредѣленными точками стержней КМ и РN, разъ выбрана точка А; дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$KB = \frac{KA}{KN} \cdot KM \text{ и } PC = \frac{KA}{KN} \cdot PN;$$

выбравъ точку А, мы тѣмъ самымъ задаемся длиною КА, а этимъ въ свою очередь, опредѣляются длины KB и PC, т.е. точки В и С.

Около трапеціи ВСМН, какъ равнобокой, можно описать кругъ; пусть онъ пересѣчетъ прямую КN еще въ точкѣ Е. Сѣкущія KBM и KNE дадутъ соотношенія :

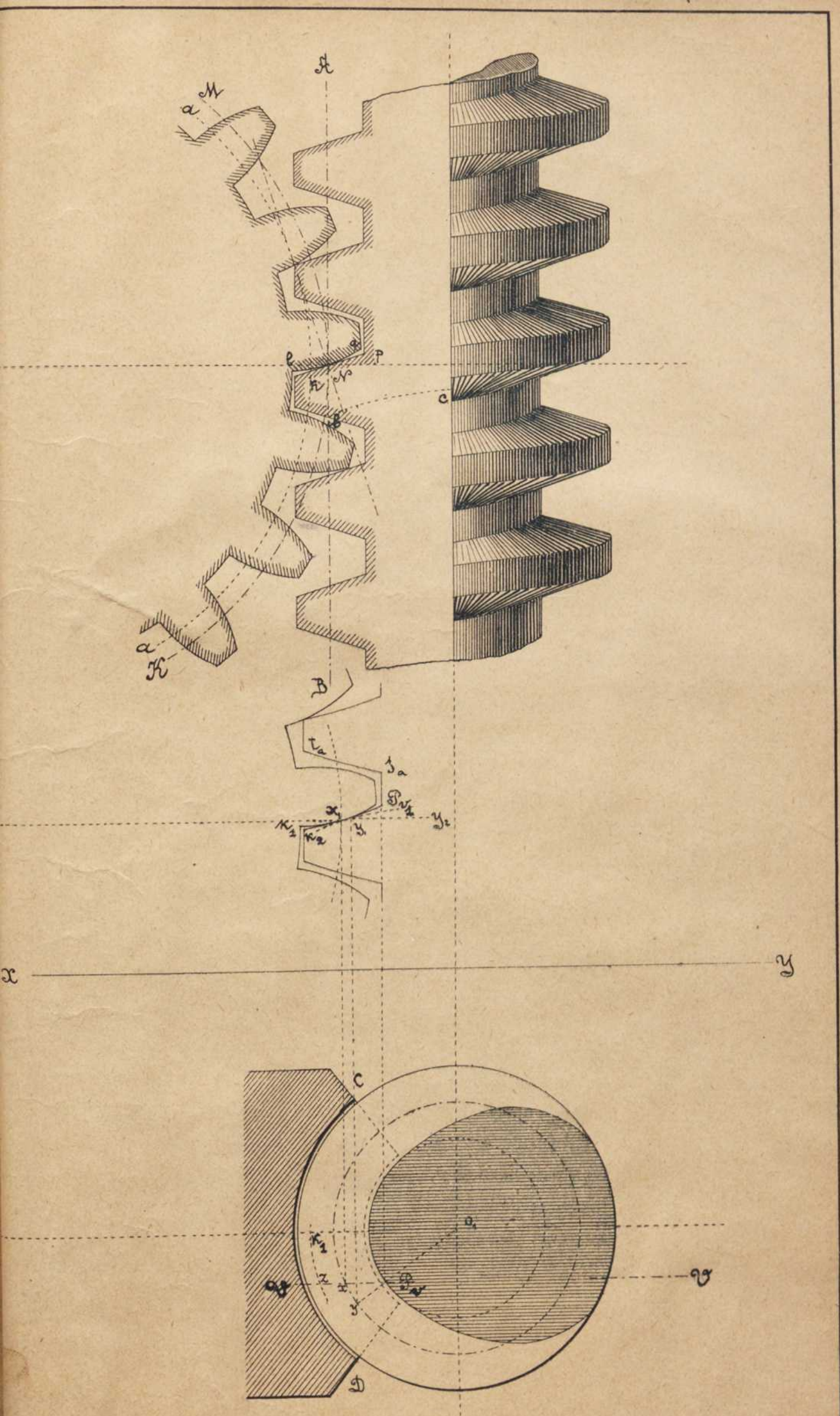
$$KE \cdot KN = KM \cdot KB = \text{const.};$$

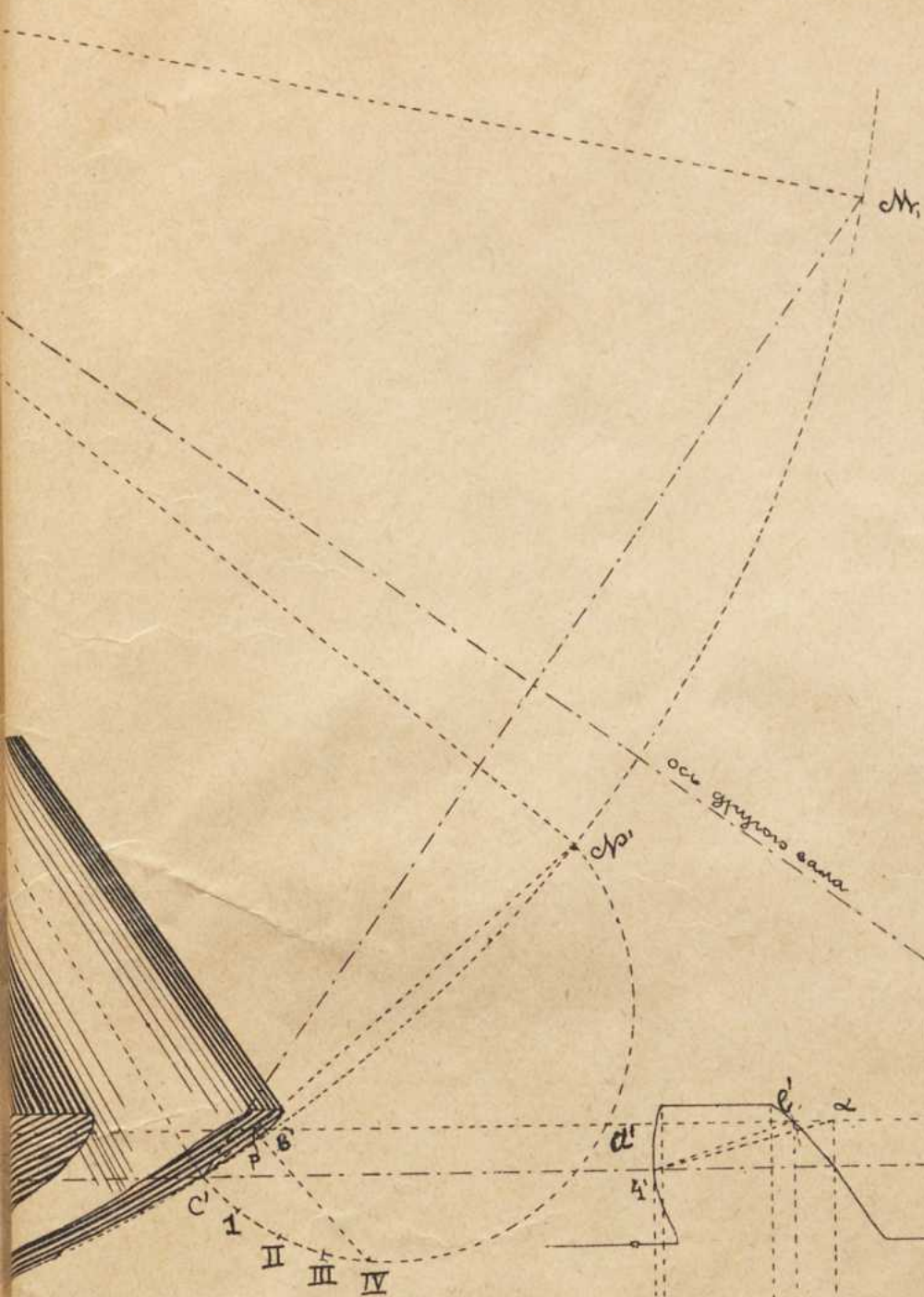
откуда слѣдуетъ, что Е есть нѣкоторая вполне опредѣленная точка прямой KN . Далѣе, еѣкушія изъ точки А, АС и АЕ, даютъ :

$$AE \cdot AN = AC \cdot AB = \text{const.},$$

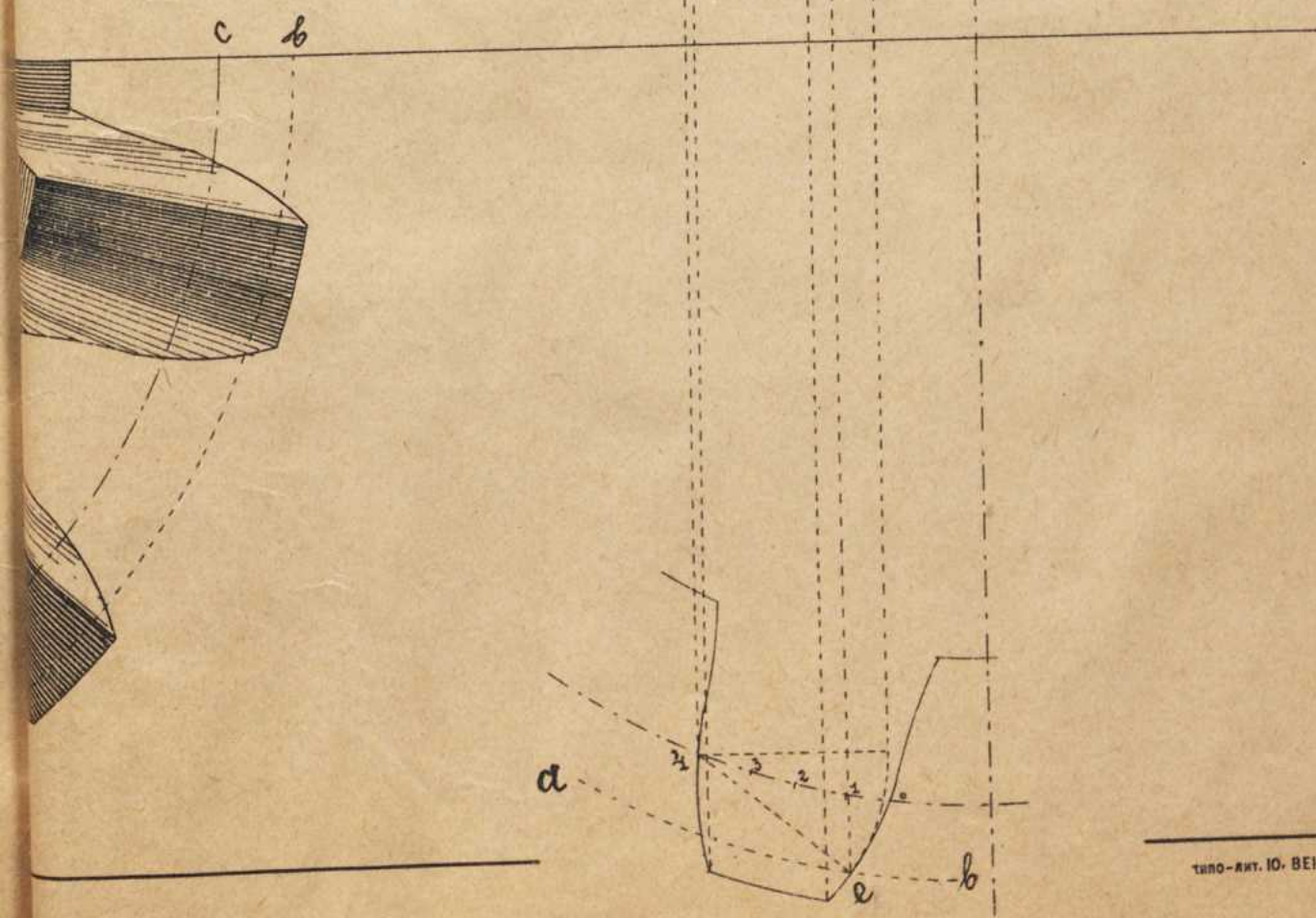
что показываетъ намъ, что, если мы соединимъ точку В рычагомъ съ неподвижной точкой О, такъ что она будетъ описывать дугу окружности радіуса ОВ, то точка С будетъ описывать или прямую, при $OB = OA$, или окружность. Весь механизмъ будетъ состоять только изъ пяти стержней : KN, KM, PM, PN и ОВ, при двухъ неподвижныхъ точкахъ. О и А.

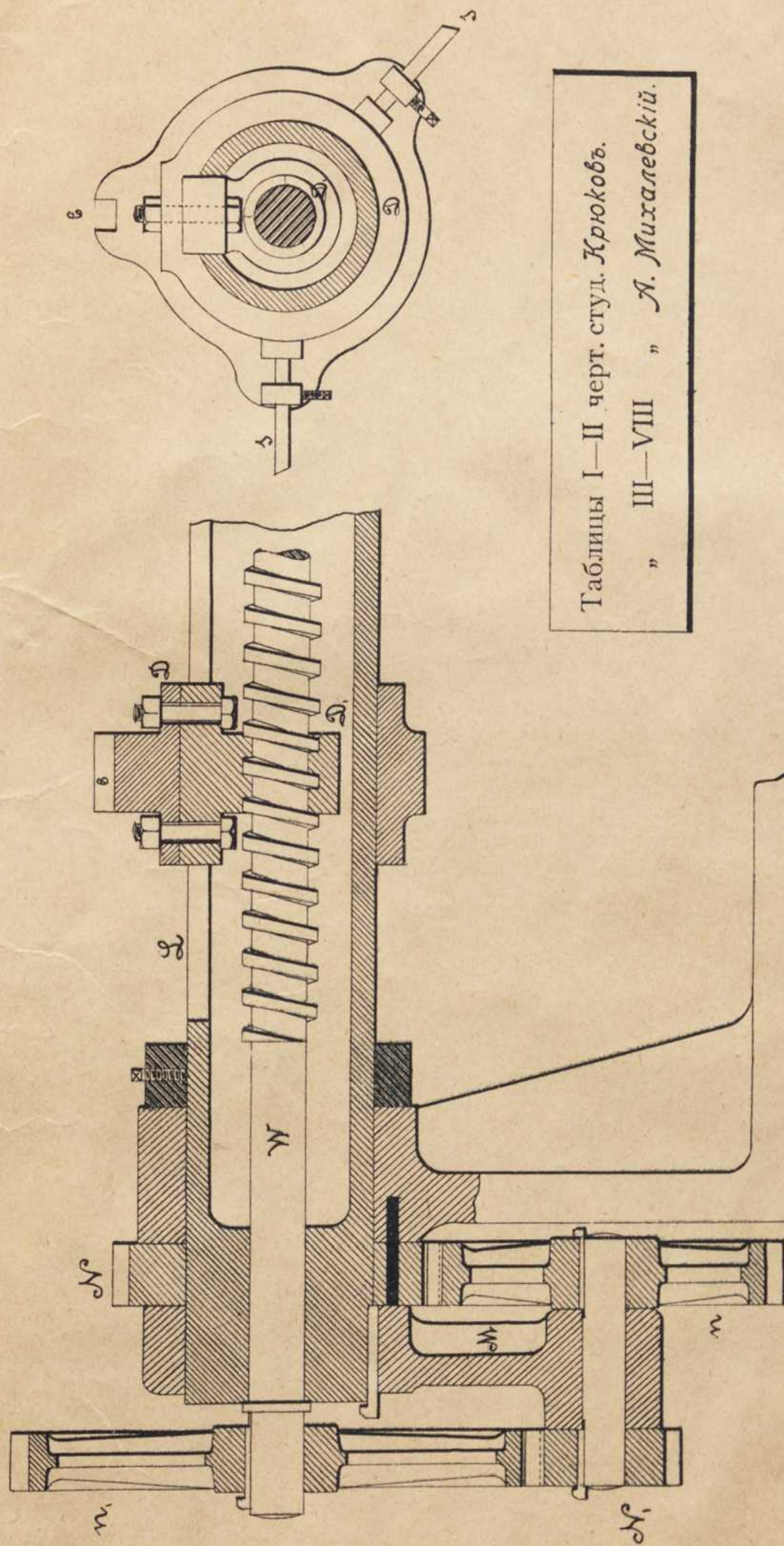
К о н е ц ъ .



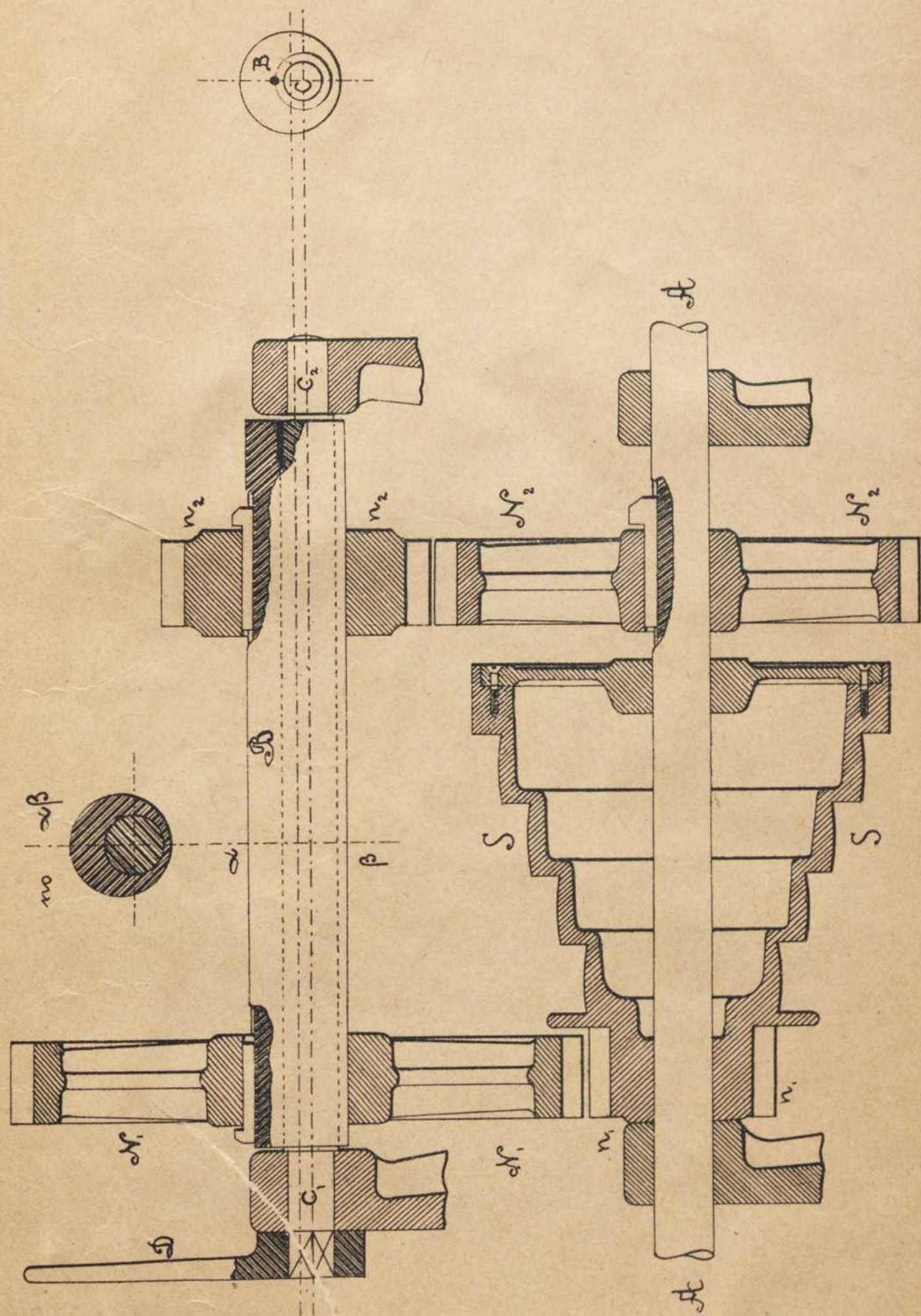


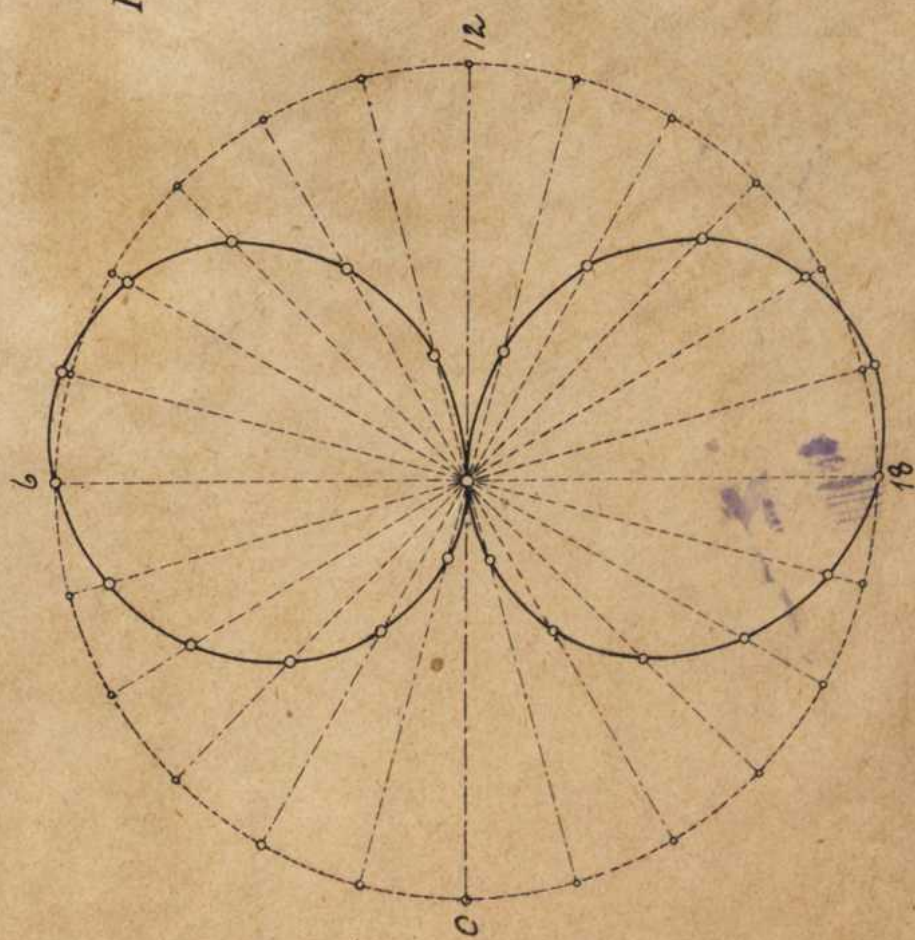
$$\overline{a_1 \alpha} = \overline{c' 4}$$





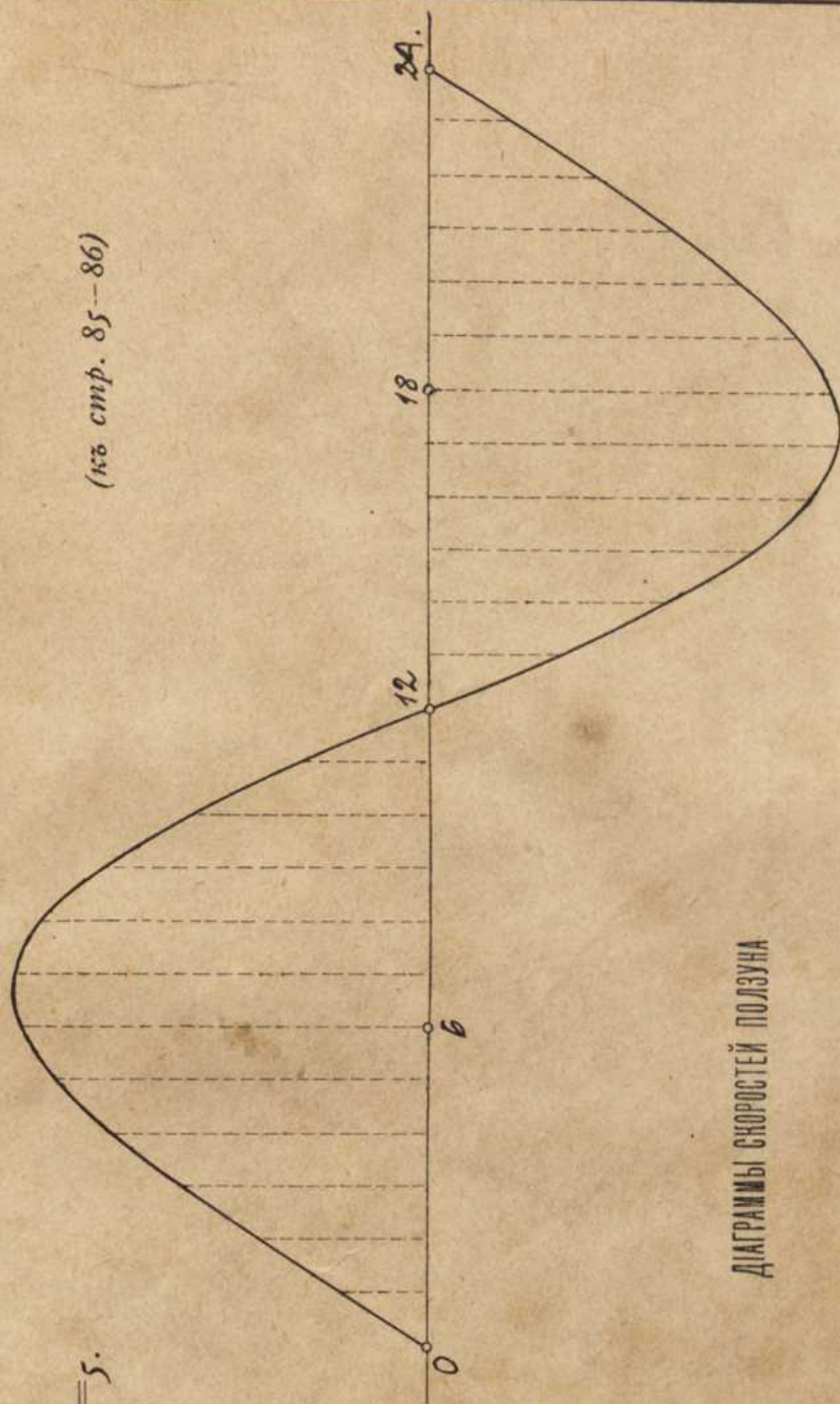
Таблицы I—II черт. студ. Крюковъ.
 III—VIII „ А. Михалевскій.





Полярная.

$$R: L = 5.$$



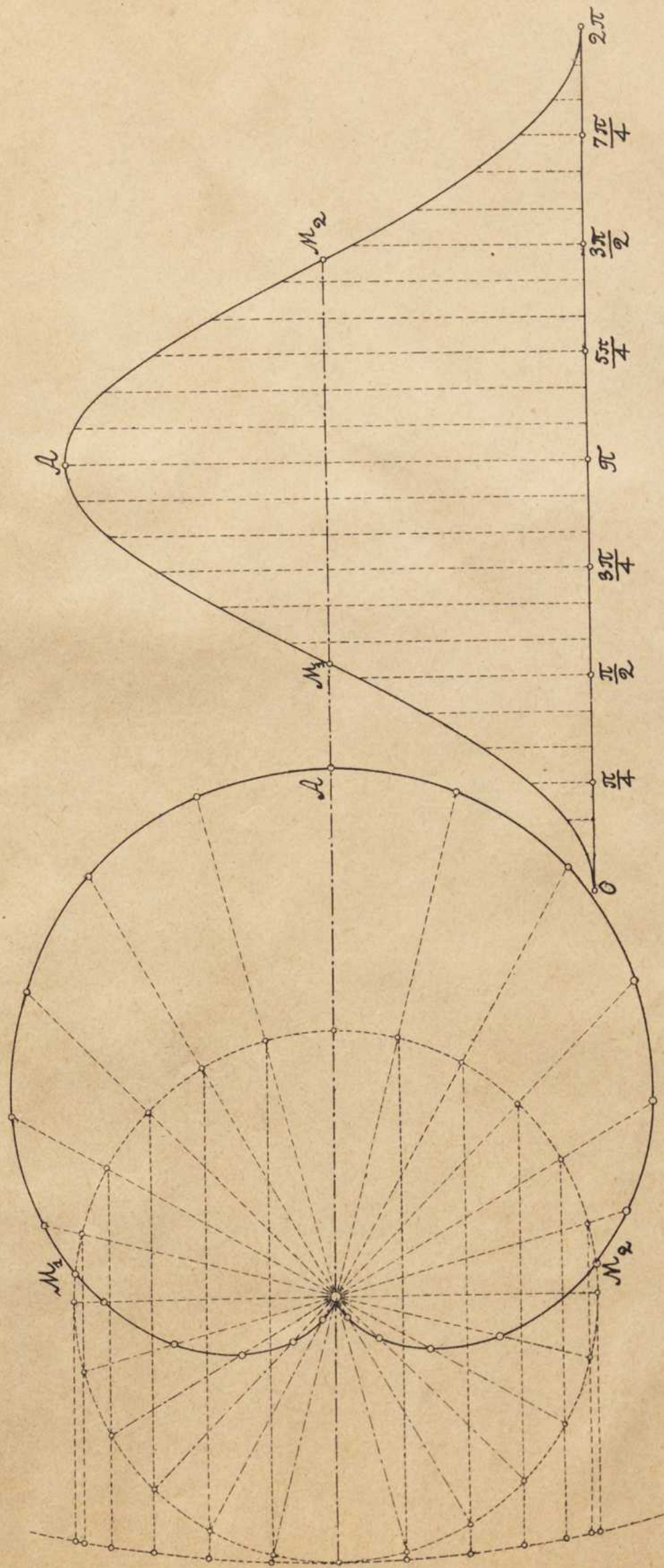
Прямоугольная.

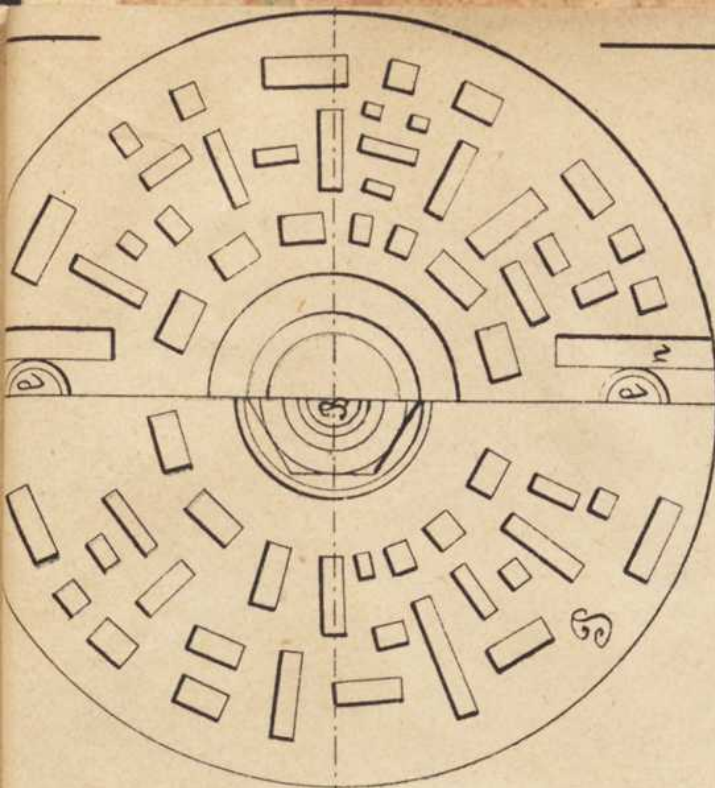
(кб стр. 85--86)

ДИАГРАММЫ СКОРОСТЕЙ ПОЛЗУНА

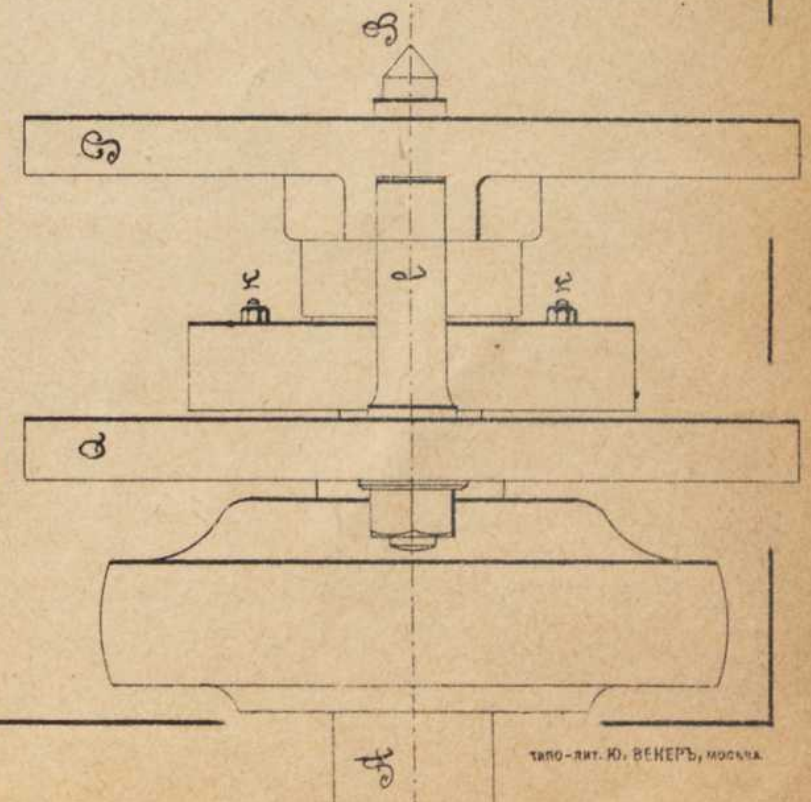
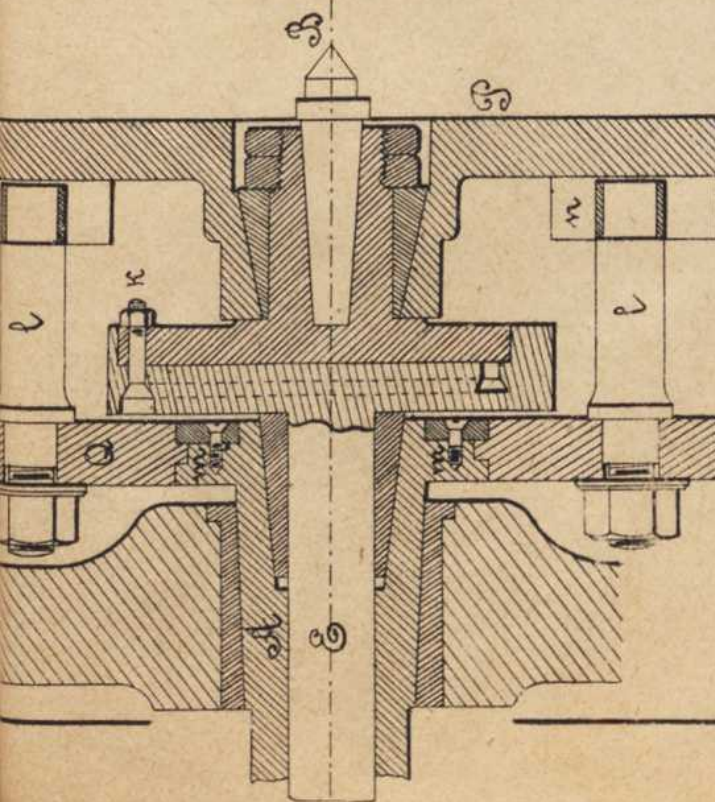
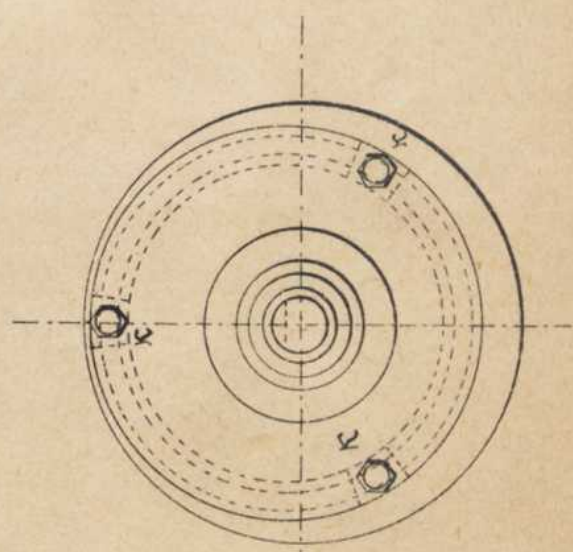
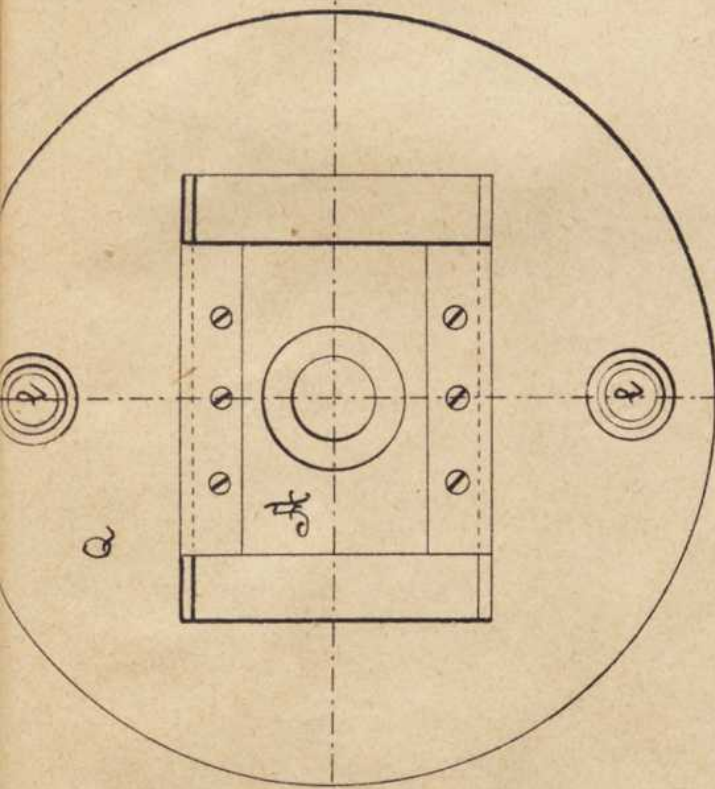
ДІАГРАММИ ОТКЛОНЕНІЙ ПОЛЗУНА ОТЪ ОДНОГО ИЗЪ МЕРТВЫХЪ ПОЛОЖЕНІЙ φ_1

(Fig. 53, стр. 83).



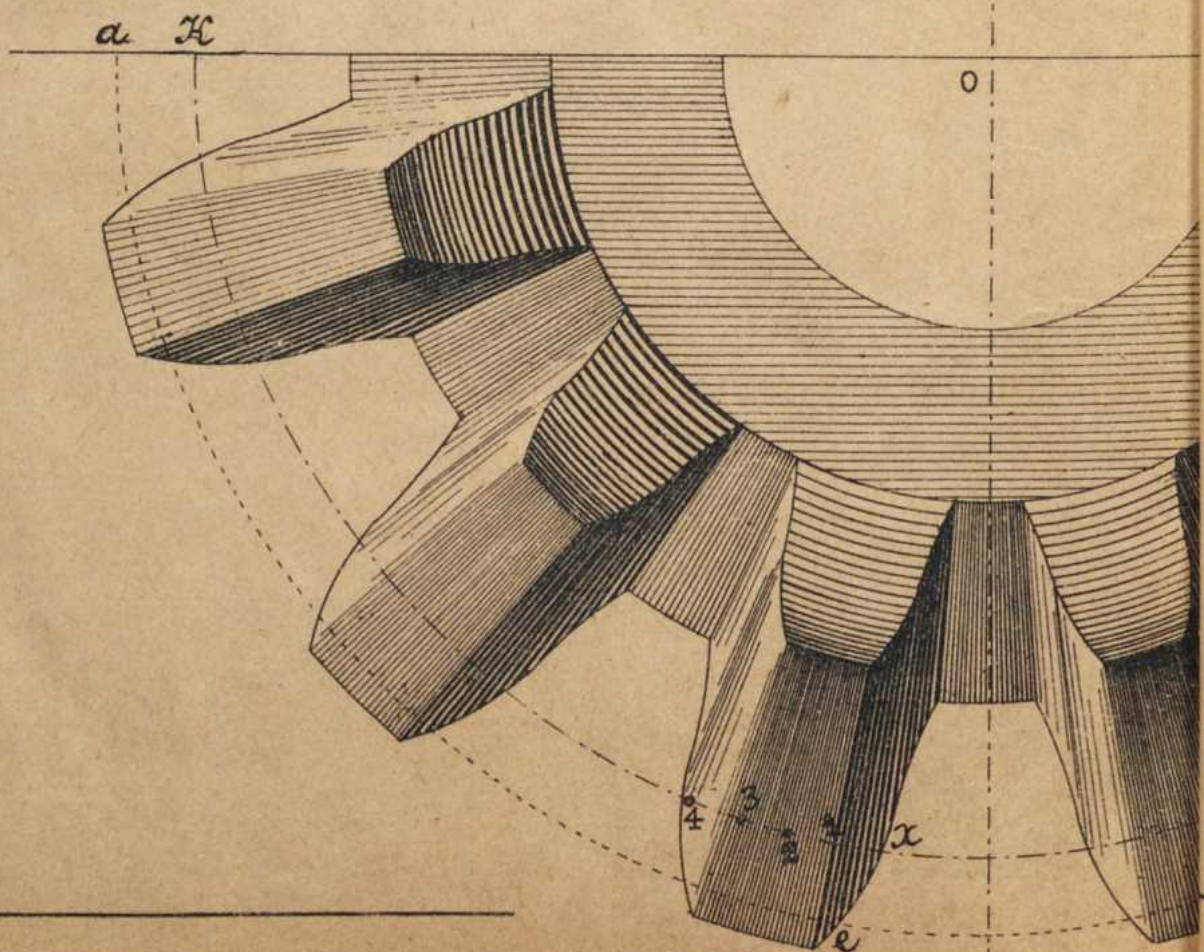
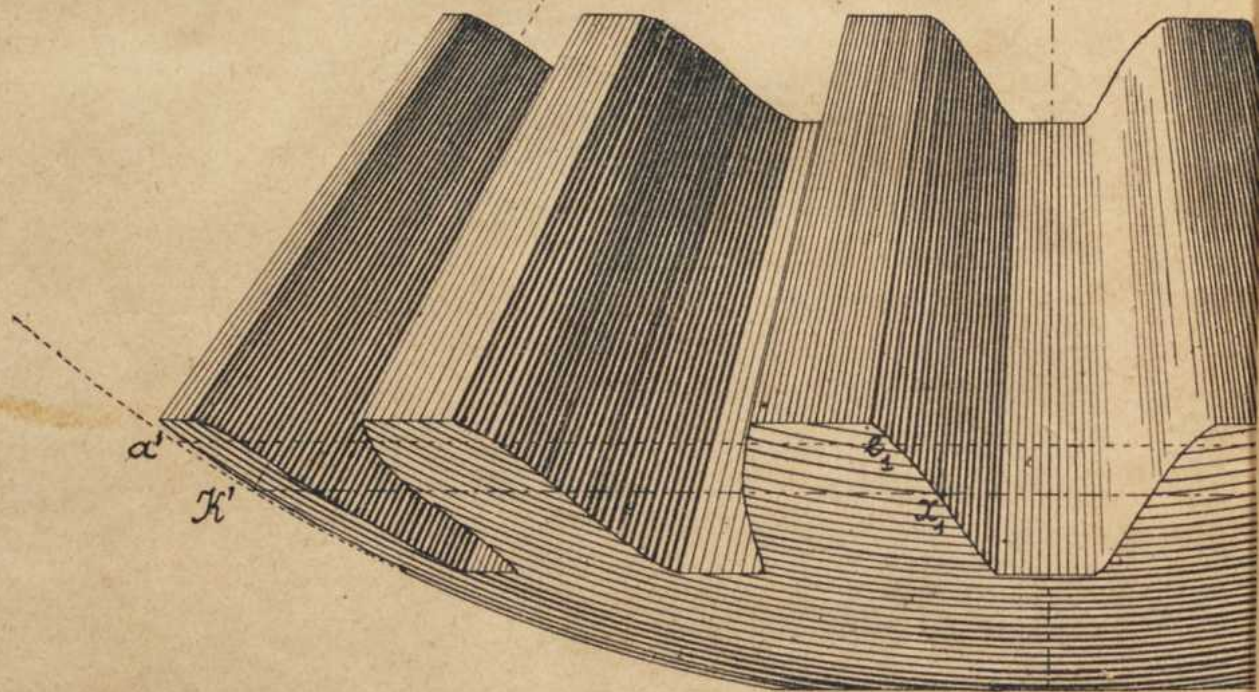


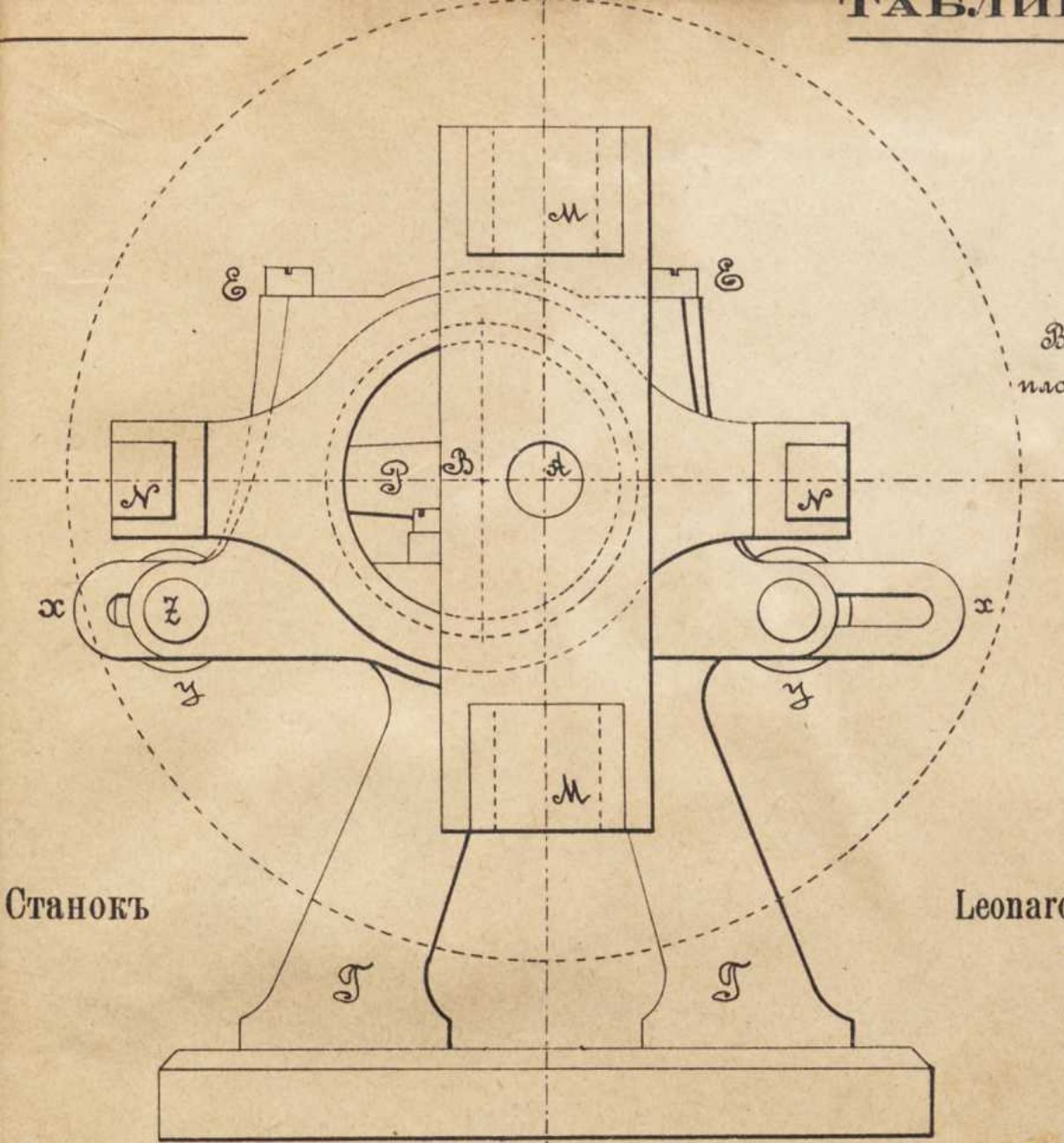
спереди
сзади.



СТАНОКЪ КОХА И МЮЛЛЕРА. $\frac{1}{5}$ отъ натурь.

ор. одного ряда

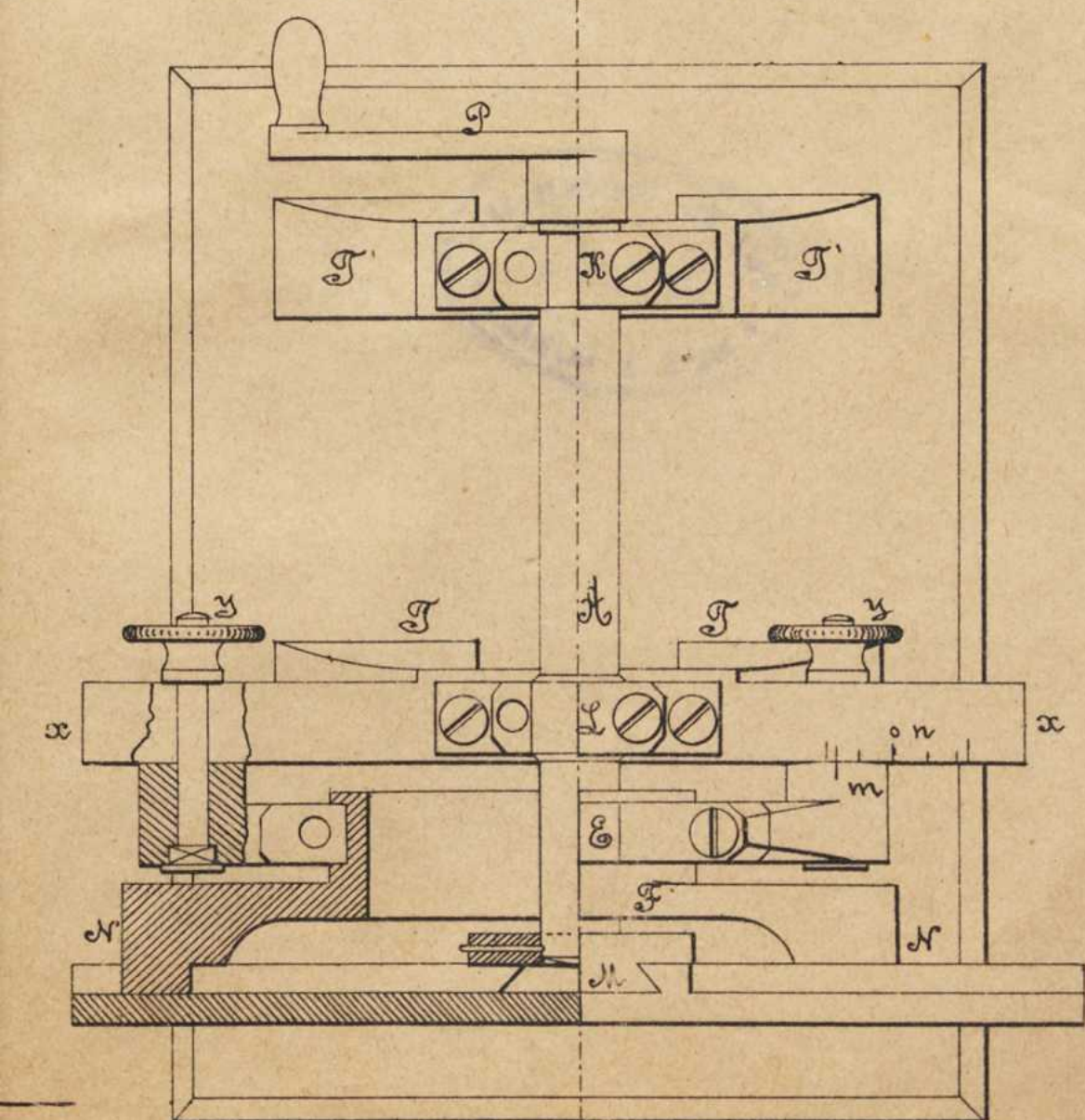




Видъ со стороны
планшайбы, которая
снята

Станокъ

Leonardo da Vinci.



планшайба.

