

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.В. Сороквашин¹

sorokvashinav@student.bmstu.ru

Г.А. Кедровских²

kedrovskikh.ga@phystech.edu

А.С. Татаринава¹

tatarinovaas@student.bmstu.ru

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

² МФТИ, Московская обл., Долгопрудный, Российская Федерация

В работе рассмотрена методика построения областей расположения корней алгебраического многочлена четвертого порядка с действительными коэффициентами. Разграничены области устойчивых и неустойчивых многочленов. Для области устойчивых многочленов получены уравнения поверхностей, разделяющих области с различным характером корней. Указанные поверхности построены в пространстве коэффициентов нормированного многочлена, которые непосредственно связаны с коэффициентами исходного. Предложенная методика представляет практический интерес для исследования корней характеристического многочлена системы линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, что позволяет определить характер ее решений. Приведен пример реализации предложенной методики в среде MATLAB.

Ключевые слова: характеристическое уравнение, многочлен, полином, комплексные корни, дискриминант, теория устойчивости, критерий Гурвица, диаграмма Вышнеградского, апериодический процесс

Введение. Направление в алгебре, посвященное решению уравнений n -й степени (где n — некоторое натуральное число) вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (1)$$

является одним из самых древних в мире и актуально до сих пор. Это объясняется тем, что решение очень многих практических задач связано с нахождением решений уравнения (1), а также с исследованием их свойств. В общем случае коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ этого уравнения являются произвольными комплексными числами, причем старший коэффициент a_0 должен быть отличным от нуля. Решениями называются числовые значения для неизвестного x , которые удовлетворяют уравнению (1). Если решение уравнения (1) можно выразить через функциональную зависимость вида $x = f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ с помощью функции извлечения корня целой степени и арифметических опера-

ций, то такое решение называют решением в радикалах (от лат. *radix* — корень).

Методами решения уравнений второй степени различного вида владели еще древние греки. В Европе слияние методов решения различных уравнений второй степени (так называемых квадратных уравнений) в общее правило произвел немецкий математик Михаэль Штифель в своей работе «Полная арифметика», изданной в 1544 г. Открытие методов решений в радикалах уравнений третьей (так называемых кубических уравнений) и четвертой степени пришлось на эпоху Возрождения. В 1545 г. итальянец Джероламо Кардано опубликовал книгу «*Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis*» («Великое искусство, или Правила алгебры»), где представил формулу для нахождения решения кубического уравнения общего вида, которая с тех пор называется формулой Кардано [2]. В той же книге Кардано предложил способ решения уравнения четвертой степени общего вида, указав, что он принадлежит Луиджи Феррари — его ученику [3]. Еще одним из способов нахождения решений уравнения четвертой степени служит решение Декарта — Эйлера. После результатов, опубликованных Кардано, почти три столетия продолжались безуспешные попытки найти общие формулы, выражающие с помощью радикалов решение уравнения пятой степени через его коэффициенты.

С течением времени оказалось, что наиболее целесообразно заменить задачу решения уравнения (1) более общей задачей изучения левой части этого уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (2)$$

называемой многочленом (или полиномом) n -й степени от неизвестного x . Таким образом, многочленом называется сумма целых неотрицательных степеней неизвестного x , взятых с некоторыми числовыми коэффициентами [1]. Каждое решение уравнения (1) называется корнем многочлена (2).

В 1799 г. немецкий математик Карл Фридрих Гаусс впервые доказал основную теорему алгебры комплексных чисел: всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный [1]. Прямым следствием из основной теоремы алгебры является то, что любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней (с учетом их кратности). Впервые это следствие сформулировал без доказательства французский математик Альбер Жирар в 1629 г. [4]. Также в 1799 г. итальянский математик Паоло Руффини впервые представил доказательство теоремы о неразрешимости в радикалах многочленов (уравнений) общего вида пятой степени и выше. Правда, в этом доказательстве было несколько неточностей,

и лишь только в 1824 г. норвежский математик Нильс Хенрик Абель опубликовал полное доказательство этой теоремы, именуемой теоремой Абеля — Руффини. Суть теоремы сводится к тому, что для произвольных уравнений степени выше четвертой невозможно указать явную формулу для нахождения решений в радикалах. При этом могут существовать уравнения какого-то конкретного вида степени выше четвертой, для которых можно выразить решение в радикалах, к примеру, возвратные уравнения. Полностью вопрос об условиях, при которых общее уравнение n -й степени разрешимо в радикалах, был исследован французским математиком Эваристом Галуа в 30-х годах XIX в. [2].

Новым стимулом к изучению свойств многочленов n -й степени и методам нахождения их корней послужило создание в 1868–1876 гг. теории автоматического управления, в которой рассматривались характеристические многочлены обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изучаемый объект управления. В 1892 г. Александр Михайлович Ляпунов представил теорию устойчивости движения механических систем. Впервые задача отыскания критерия устойчивости для механических систем, описываемых дифференциальными уравнениями любого порядка, была сформулирована шотландцем Джеймсом Кларком Максвеллом в 1868 г. в его книге «О регуляторах». Основы современных методов исследования устойчивости и качества управления были представлены в работе Ивана Алексеевича Вышнеградского «О регуляторах непрямого действия» [5], которая была напечатана в № 5 т. LXXXIII (31 июля 1876 г.) *Comptes Rendus* Парижской Академии в извлечении, представленном академиком Анри Треска под заглавием «*Wischnegradski, Mémoire sur la théorie générale des régulateurs*». Эта работа положила начало развитию теории автоматического управления.

В современной теории автоматического управления множество задач связано с решением систем линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) первого порядка, зачастую полученных в результате линеаризации. Если рассматриваемая линейная система имеет третий или четвертый порядок, то для исследования влияния параметров системы на ее устойчивость можно использовать решение в радикалах соответствующего характеристического уравнения. Также существует ряд критериев (алгебраических и частотных), не требующих вычисления корней характеристических многочленов или собственных значений соответствующих им матриц. Практическому применению описанного подхода для решения различных задач посвящено множество работ [5–8].

Знак вещественных частей корней характеристического многочлена тесно связан с устойчивостью системы, тогда как мнимая составляющая

корней — с колебаниями, возникающими в системе. Особый интерес представляют системы, характеристические многочлены которых имеют только отрицательные действительные корни, что соответствует т.н. апериодическому процессу [9]. Преимущество таких процессов заключается в отсутствии колебаний и перерегулирования, что часто необходимо или предпочтительно при решении реальных технических задач. В данной работе целью является получение уравнений поверхностей, разделяющих области с различным характером корней характеристических многочленов, в частности, выделение области апериодических процессов. Для этого необходимо сначала разграничить области устойчивых и неустойчивых решений, а затем для области устойчивости получить уравнения поверхностей, разделяющих подобласти с различным числом действительных и комплексносопряженных корней. Указанные поверхности строятся в пространстве коэффициентов нормированного многочлена, которые непосредственно связаны с коэффициентами исходного характеристического многочлена.

Условие устойчивости линейной системы. Если характеристический многочлен линеаризованной системы имеет нулевые или чисто мнимые корни, то судить о поведении реальной системы не всегда возможно, поскольку даже самые малые нелинейные члены могут коренным образом изменить вид переходного процесса, сделав систему устойчивой или неустойчивой [9, с. 138]. В связи с этим здесь и далее речь ведется об асимптотической устойчивости [10, с. 238].

Для асимптотической устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней характеристического многочлена были отрицательны, т. е. все корни должны лежать слева от мнимой оси плоскости корней. Если хотя бы один из корней окажется справа от мнимой оси, то система будет неустойчивой. Таким образом, мнимая ось представляет собой границу устойчивости системы.

Не всегда бывает удобно вычислять корни характеристического многочлена, даже если его порядок не выше четвертого, поэтому желательно определить критерии, позволяющие судить об устойчивости линейной системы непосредственно по коэффициентам характеристического многочлена. В [9] показано, что необходимым условием асимптотической устойчивости системы является положительность (или отрицательность) всех коэффициентов характеристического многочлена (2). Достаточным это условие становится только для уравнений первого и второго порядков. Для уравнений третьего и четвертого порядков требуются дополнительные исследования устойчивости системы.

Отметим, что систему ЛОДУ из n уравнений можно привести к одному ЛОДУ n -го порядка. Рассмотрим ЛОДУ 4-го порядка

$$x^{IV} + a_1 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_3 x + a_4 x = 0. \quad (3)$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 полагаем положительными, поскольку в противном случае соответствующая система неустойчива. Уравнению (3) соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) приводится к нормированному виду путем преобразования

$$\lambda = u \sqrt[4]{a_4}; \quad A = \frac{a_1}{\sqrt[4]{a_4}}; \quad B = \frac{a_2}{\sqrt[4]{a_4^2}}; \quad C = \frac{a_3}{\sqrt[4]{a_4^3}}.$$

Полученное уравнение

$$u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + 1 = 0 \quad (5)$$

имеет параметры A, B и C , представляющие собой комбинации реальных параметров системы, входящих в коэффициенты характеристического уравнения (4).

Критерий Гурвица [9] в пространстве параметров A, B и C сводится к тому, что для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$A > 0; B > 0; C > 0; \begin{vmatrix} A & C & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & A & C \end{vmatrix} > 0. \quad (6)$$

Последнее условие может быть переписано в виде

$$C(AB - C) - A^2 > 0.$$

На основе условий (6) построена граница устойчивости (рис. 1).

Выделение решений с двумя действительными корнями. Для уравнения четвертой степени вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Дискриминант по [11] определяется как

$$D = a^{(2 \cdot 4 - 2)} (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2, \quad (7)$$

где x_1, x_2, x_3 и x_4 — корни уравнения.

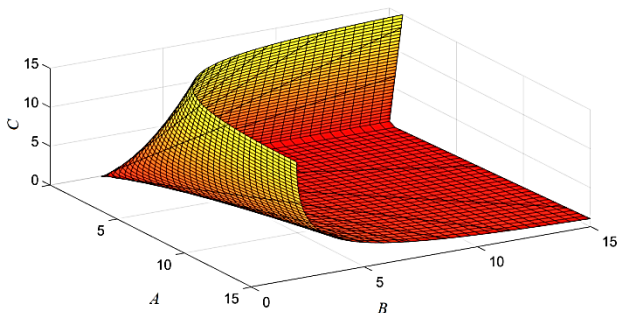


Рис. 1. Поверхность границы устойчивости в параметрах A, B, C

Из (7) следует, что $D = 0$ при наличии кратных корней. В случае линеаризованных систем с кратными корнями характеристического многочлена судить об истинном характере переходного процесса затруднительно, поэтому этот случай рассматриваться не будет. В зависимости от коэффициентов a, b, c, d, e уравнения возможны три случая расположения корней на комплексной плоскости. Во-первых, уравнение может иметь четыре действительных корня. В таком случае в соответствии с формулой (7) дискриминант, очевидно, будет положительным. Во-вторых, уравнение может иметь два комплексно-сопряженных корня

$$x_1 = \alpha + i\beta \text{ и } x_2 = \alpha - i\beta$$

и два действительных. Тогда дискриминант принимает отрицательные значения:

$$\begin{aligned} D &= a^6 (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2 = \\ &= a^6 (2i\beta)^2 (\alpha + i\beta - x_3)^2 (\alpha + i\beta - x_4)^2 (\alpha - i\beta - x_3)^2 (\alpha - i\beta - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2 = \\ &= -4a^6 \beta^2 ((\alpha - x_3)^2 - (i\beta)^2)^2 ((\alpha - x_4)^2 - (i\beta)^2)^2 (x_3 - x_4)^2 = \\ &= -4a^6 \beta^2 ((\alpha - x_3)^2 + \beta^2)^2 ((\alpha - x_4)^2 + \beta^2)^2 (x_3 - x_4)^2. \end{aligned}$$

Также возможен случай, когда уравнение имеет две пары комплексно-сопряженных корней:

$$x_1 = \alpha_1 + i\beta_1; \quad x_2 = \alpha_1 - i\beta_1; \quad x_3 = \alpha_2 + i\beta_2; \quad x_4 = \alpha_2 - i\beta_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D &= a^6 (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2 = \\ &= a^6 (2i\beta_1)^2 (\alpha_1 + i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2)^2 (\alpha_1 + i\beta_1 - \alpha_2 + i\beta_2)^2; \\ &\quad (\alpha_1 - i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2)^2 (\alpha_1 - i\beta_1 - \alpha_2 + i\beta_2)^2 (2i\beta_2)^2 = \\ &= 16a^6 \beta_1^2 \beta_2^2 ((\alpha_1 - \alpha_2)^2 - i^2 (\beta_1 + \beta_2)^2)^2 ((\alpha_1 - \alpha_2)^2 - i^2 (\beta_1 - \beta_2)^2)^2. \end{aligned}$$

Для последнего случая дискриминант также положителен. Таким образом, $D < 0$ тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение системы четвертого порядка имеет пару комплексно-сопряженных и два действительных не кратных корня.

Для уравнения (5) дискриминант может быть найден через коэффициенты A , B и C по формуле

$$D = 256 - 192AC - 128B^2 + 144BC^2 - 27C^4 + 144A^2B - 6A^2C^2 - 80AB^2C + 18ABC^3 + 16B^4 - 4B^3C^2 - 27A^4 + 18A^3BC - 4A^3C^3 - 4A^2B^3 + A^2B^2C^2. \quad (8)$$

Приравнивая дискриминант из формулы (8) к нулю, получим уравнение поверхности в пространстве параметров A , B , C , которое отделяет решения с парой комплексно-сопряженных и двумя действительными корнями от всех остальных. Поверхность нулевого дискриминанта (рис. 2) имеет характерный «ласточкин хвост» [12].

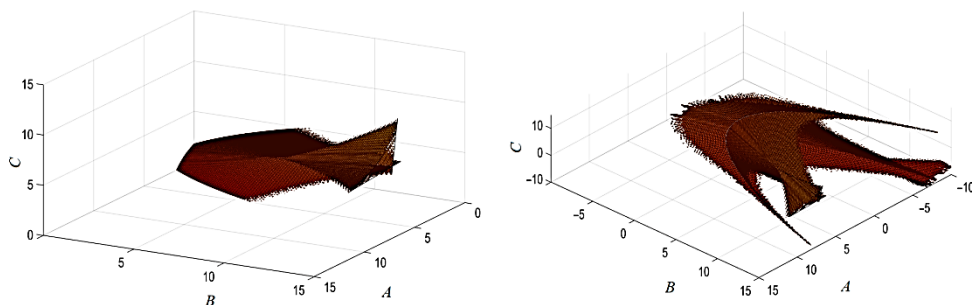


Рис. 2. Поверхность нулевого дискриминанта (8) в параметрах A , B , C

Необходимое условие наличия четырех действительных корней. Для уравнения (5) выполним замену

$$u = y - \frac{A}{4}$$

и получим уравнение в канонической форме (как при решении уравнения методом Феррари):

$$y^4 + \left(B - \frac{3A^2}{8} \right) y^2 + \left(C - \frac{AB}{2} + \frac{A^3}{8} \right) y + \left(1 + \frac{A^2B}{16} - \frac{3A^4}{256} - \frac{AC}{4} \right) = 0. \quad (9)$$

Использованная замена позволяет избавиться от третьей степени переменной. Стоит отметить, что новая переменная отличается от исходной на действительную величину, а следовательно, характер корней уравнений (5)

и (9) одинаковый. Другими словами, сохраняется количество и взаимное расположение действительных и комплексно-сопряженных корней. Для удобства введем обозначения коэффициентов уравнения (9):

$$q = B - \frac{3A^2}{8}; \quad r = C - \frac{AB}{2} + \frac{A^3}{8}; \quad s = 1 + \frac{A^2B}{16} - \frac{3A^4}{256} - \frac{AC}{4}.$$

Левую часть уравнения (9) обозначим за $f(y)$ и вычислим ее производную:

$$f(y) = y^4 + qy^2 + ry + s; \quad (10)$$

$$f'(y) = 4y^3 + 2qy + r.$$

При $q \geq 0$ производная $f'(y)$ — неубывающая на всей числовой прямой функция, область значений которой — все действительные числа, что характерно для полиномов нечетной степени. Следовательно, при $q \geq 0$ функция $f'(y)$ имеет один действительный корень, а исходная функция $f(y)$ только один экстремум. Для наличия у непрерывной функции $f(y)$ четырех действительных корней ей необходимо иметь три экстремума, т. е. $f'(y)$ должна иметь три действительных решения, что реализуется лишь при $q < 0$. Таким образом, необходимое условие наличия четырех действительных корней функции $f(y)$ в параметрах A, B, C имеет вид

$$q < 0 \quad \Rightarrow \quad B - \frac{3A^2}{8} < 0. \quad (11)$$

Соответствующая поверхность показана на рис. 3.

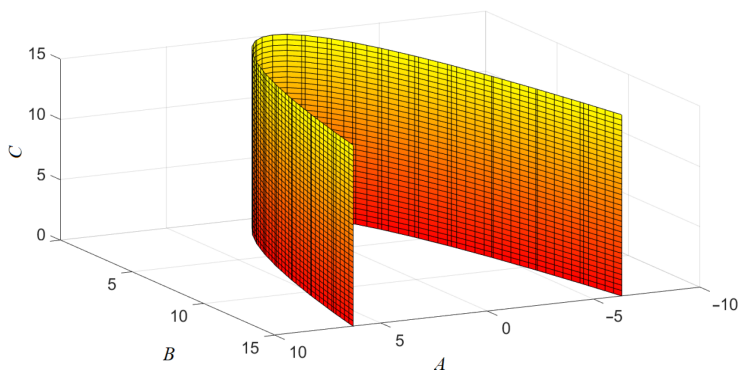


Рис. 3. Поверхность $B - \frac{3A^2}{8} = 0$ в параметрах A, B, C , представляющая собой параболический цилиндр

Связь числа действительных корней исходного и вспомогательного многочленов. Введем вспомогательную функцию-многочлен (рис. 4), обнулив в (10) коэффициент r перед первой степенью переменной:

$$g(y) = y^4 + qy^2 + s. \quad (12)$$

Лемма. Если многочлен вида

$$g(y) = y^4 + qy^2 + s$$

имеет действительные корни, то и многочлен вида

$$f(y) = y^4 + qy^2 + ry + s$$

тоже имеет действительные корни.

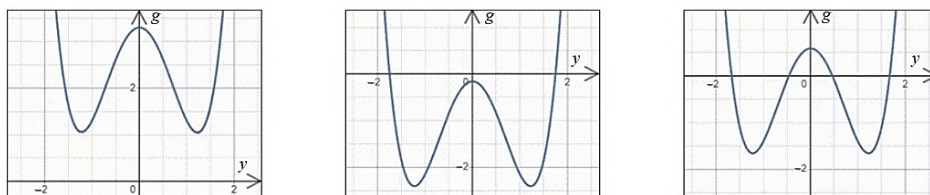


Рис. 4. Вид функции-многочлена $g(y)$ при $q < 0$ для случаев отсутствия действительных корней, двух действительных корней и четырех соответственно

Доказательство. Функция-многочлен $g(y)$ является четной. Рассмотрим случай, когда $g(0) = 0$. Это достигается при коэффициенте $s = 0$, тогда центральный максимум функции $g(y)$ совпадет с началом координат. Очевидно, любая прямая, проходящая через начало координат, пересечет график функции $g(y)$. В том числе и прямая $h(y) = -ry$. Другими словами, уравнение

$$g(y) = h(y) = -ry;$$

$$g(y) - h(y) = y^4 + qy^2 + ry + s = f(y) = 0$$

будет иметь решение в действительных числах. Следовательно, функция-многочлен $f(y)$ имеет действительные корни.

Теперь пусть $g(0) \neq 0$ (рис. 5). Для определенности $g(0) > 0$. По условию леммы функция-многочлен $g(y)$ имеет действительные корни. Обозначим минимальный по модулю действительный корень за b . То есть график функции $g(y)$ имеет пересечение с осью абсцисс в точке $(b, 0)$. В силу четности $g(y)$ имеет еще одно пересечение с осью абсцисс в точке $(-b, 0)$. Функция-

многочлен непрерывна в интервале $(-b; b)$, не обращается в ноль на этом интервале и принимает положительное значение в точке, принадлежащей этому интервалу (в точке с абсциссой 0), следовательно, функция $g(y)$ принимает положительные значения на всем интервале $(-b; b)$ и обращается в ноль в точках с абсциссами b и $-b$. В случае $g(0) < 0$ функция принимает отрицательные значения на всем интервале $(-b; b)$.

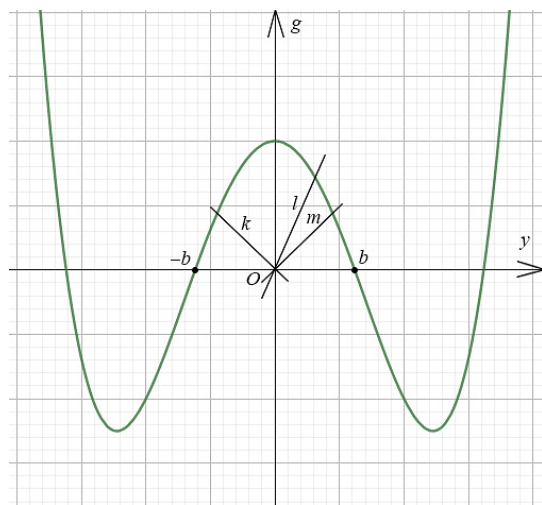


Рис. 5. Пояснение к доказательству леммы. Случай $g(0) \neq 0$

Рассмотрим множество отрезков, соединяющих начало координат с точками графика функции $g(y)$ на отрезке $[-b; b]$. Дополнив эти отрезки до соответствующих прямых, получим множество всех прямых, проходящих через начало координат. Среди них будет и прямая $h(y) = -ry$, пересекающая $g(y)$, из чего следует, как было показано ранее, наличие корней у функции-многочлена $f(y)$.

Отметим, что при отсутствии у $g(y)$ действительных корней, $f(y)$ не может иметь четырех действительных корней — действительных корней либо два (в том числе кратных), либо нет вовсе. Это нетрудно показать методом графического сложения (рис. 6). Пусть для определенности у проходящей через начало координат прямой $h(y) = ry$, коэффициент $r > 0$. Тогда в правой координатной полуплоскости сложение графика функции $g(y)$ с прямой $h(y)$ будет давать лишь положительные значения, поэтому в этой области график функции $f(y)$ не будет иметь пересечений с осью абсцисс. В левой полуплоскости ветвь графика $g(y)$ будет перемещаться вниз, при этом пересечение $f(y)$ с осью абсцисс может как возникнуть, так и не возникнуть.

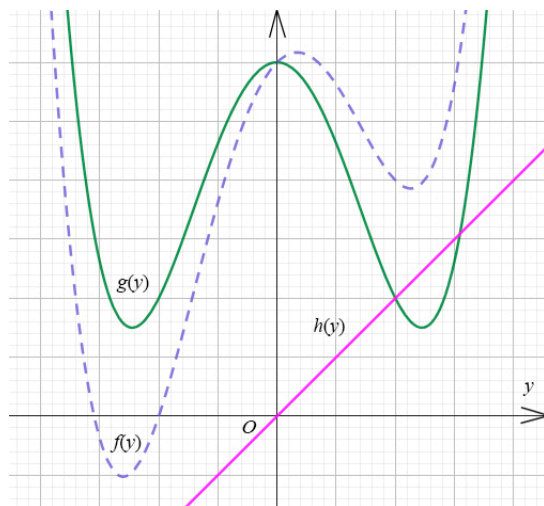


Рис. 6. Графическое сложение графика функции $g(y)$ с прямой $h(y) = y$

Нестрого вышеизложенную лемму также можно было доказать путем сложения графика $g(y)$ с прямой.

Таким образом, наличие или отсутствие у функции $g(y)$ действительных корней, а также знак дискриминанта определяют характер корней функции $f(y)$, что можно проиллюстрировать схемой (рис. 7).

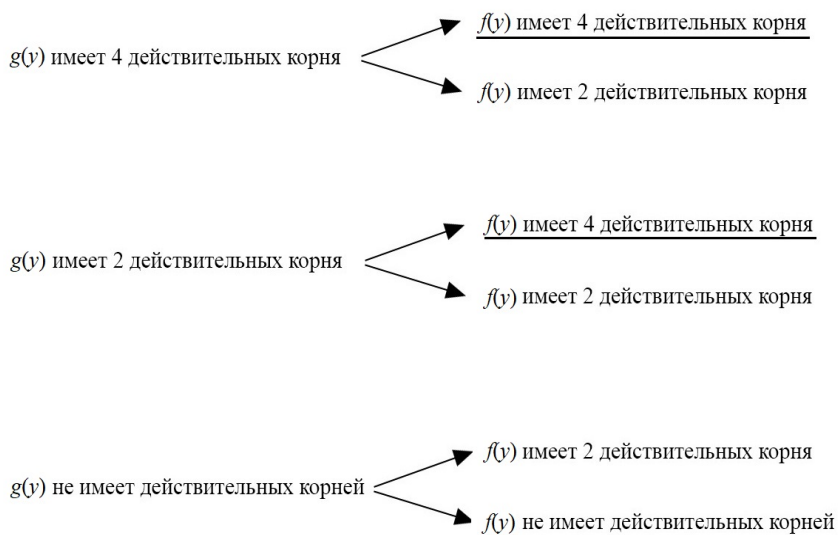


Рис. 7. Схема, поясняющая связь числа действительных корней функций-многочленов $g(y)$ и $f(y)$

Случаи, соответствующие $D > 0$, подчеркнуты (см. рис. 7). Корни считаются с учетом кратности.

Условие наличия действительных корней функции-многочлена $g(y)$. Вычислим производную функции $g(y)$, а затем найдем корни функции многочлена $g'(y)$:

$$g'(y) = 4y^3 + 2qy; \quad y_1 = 0; \quad y_{2,3} = \pm \sqrt{-\frac{q}{2}}.$$

Поскольку $q < 0$ является необходимым условием наличия четырех действительных корней исходной функции $f(y)$, рассмотрение для $g(y)$ случай $q \geq 0$ в рамках поставленной задачи не имеет смысла. При $q < 0$ функция $g'(y)$ имеет три различных действительных корня, поэтому вспомогательная функция $g(y)$ имеет три экстремума. Функция-многочлен $g(y)$ имеет действительные корни, если ее минимумы находятся не выше оси Oy . Подставим y_2 в $g(y)$ и получим ординату точки соответствующего минимума (другой минимум расположен симметрично и имеет ту же ординату):

$$g\left(\sqrt{-\frac{q}{2}}\right) = \left(\sqrt{-\frac{q}{2}}\right)^4 + q\left(\sqrt{-\frac{q}{2}}\right)^2 + s = \frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{2} + s = s - \frac{q^2}{4}.$$

Таким образом, условием наличия действительных корней функции $g(y)$ будет

$$s - \frac{q^2}{4} \leq 0. \quad (13)$$

Отметим, что $g(y) = 0$, по сути, является биквадратным уравнением. Тот же результат (13) можно было бы получить, потребовав неотрицательность дискриминанта. В сочетании с условием $q < 0$ это гарантирует наличие у уравнения $g(y) = 0$ действительных корней.

Выполним обратную замену в условии (13):

$$\left(1 + \frac{A^2 B}{16} - \frac{3A^4}{256} - \frac{AC}{4}\right) - \frac{1}{4} \left(B - \frac{3A^2}{8}\right)^2 \leq 0,$$

откуда получим условие наличия действительных корней функции $g(y)$ в параметрах A, B, C :

$$64 + 16A^2 B - 3A^4 - 16AC - 16B^2 \leq 0. \quad (14)$$

Соответствующая поверхность показана на рис. 8.

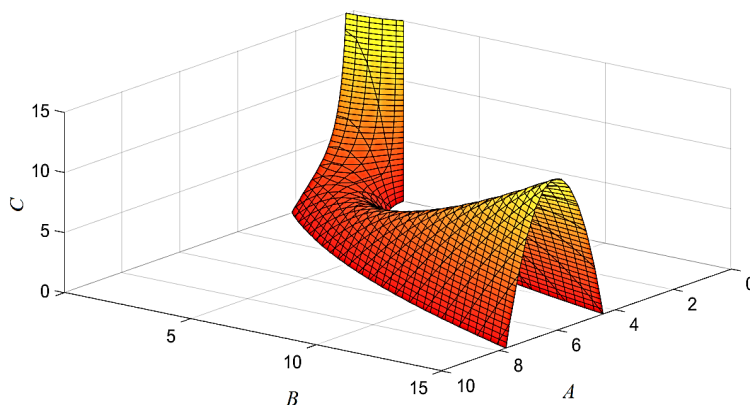


Рис. 8. Поверхность $64 + 16A^2B - 3A^4 - 16AC - 16B^2 = 0$ в параметрах A, B, C

Разделение подобластей с различным расположением корней на комплексной плоскости. Условие (6) отделяет устойчивые процессы от неустойчивых в зависимости от параметров A, B и C . Область устойчивости можно разделить рядом поверхностей на несколько подобластей с различным характером решений нормированного уравнения (5). Знак дискриминанта (8), выполнение или невыполнение условий (11) и (14) в рамках области устойчивости этот характер определяют:

$D < 0$ — пара комплексно сопряженных и два действительных корня;

$D > 0, B - \frac{3A^2}{8} < 0, 64 + 16A^2B - 3A^4 - 16AC - 16B^2 \leq 0$ — все корни действительные;

$D > 0, B - \frac{3A^2}{8} \geq 0$ или $64 + 16A^2B - 3A^4 - 16AC - 16B^2 > 0$ — две пары комплексно-сопряженных корней.

Случай $D = 0$ не рассмотрен.

В целях проверки вышеизложенных соображений с помощью среды MATLAB была построена двумя различными способами область аperiodических процессов в пространстве параметров A, B, C . В первом случае область строится как множество точек, где нормированное уравнение (5) имеет только действительные отрицательные корни. Для этого пространство разбивается на ячейки. В каждой точке разбиения встроенным в MATLAB методом решается уравнение четвертого порядка, а затем производится анализ полученных корней и выделение подходящих точек. Такой подход приводит

к значительной длительности выполнения программы. Второй способ заключается в построении области как множества точек, для которых положителен дискриминант, выполнены критерий Гурвица (6), а также условия (11) и (14). В обоих случаях выделенной оказалась одна и та же область, что говорит о правильности нахождения неравенств, определяющих область аperiodических процессов. Можно заметить, что область аperiodических процессов лежит внутри «ласточкиного хвоста» поверхности дискриминанта (рис. 9).

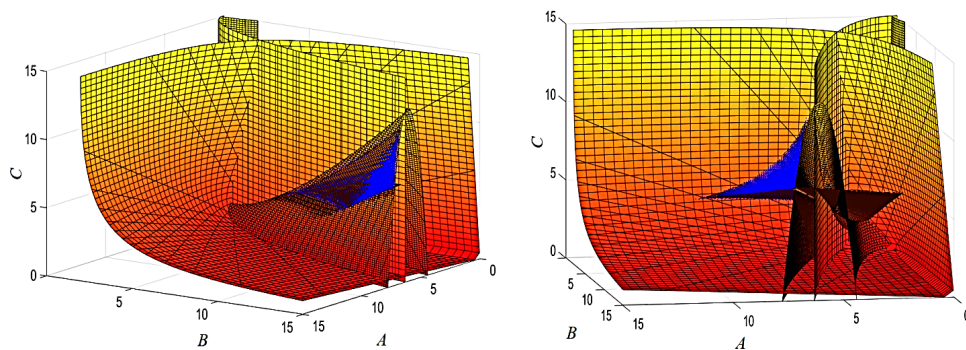


Рис. 9. Поверхности $C(AB - C) - A^2 = 0$, $D = 0$, $B - \frac{3A^2}{8} = 0$,

$64 + 16A^2B - 3A^4 - 16AC - 16B^2 = 0$ (область аperiodических процессов выделена синим)

Точка в координатах A , B , C однозначно связана с коэффициентами характеристического уравнения (4). Таким образом, полученный набор поверхностей представляет собой диаграмму, с помощью которой можно судить о некоторых свойствах решения характеристического уравнения. На практике может быть полезно построение сечений диаграммы плоскостями уровня, которые проходят через заданную точку, или выбор точки с использованием сечений диаграммы (рис. 10). Это позволяет оценить, например, насколько отдалена точка от границ аperiodического процесса.

Закключение. Предложена методика построения областей расположения корней алгебраического многочлена четвертого порядка с действительными коэффициентами. Указанная методика позволяет определить тип корней многочлена непосредственно по его коэффициентам. Особый интерес представляет использование методики для исследования характеристического многочлена системы линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, что облегчает процесс исследования устойчивости и типа решений.

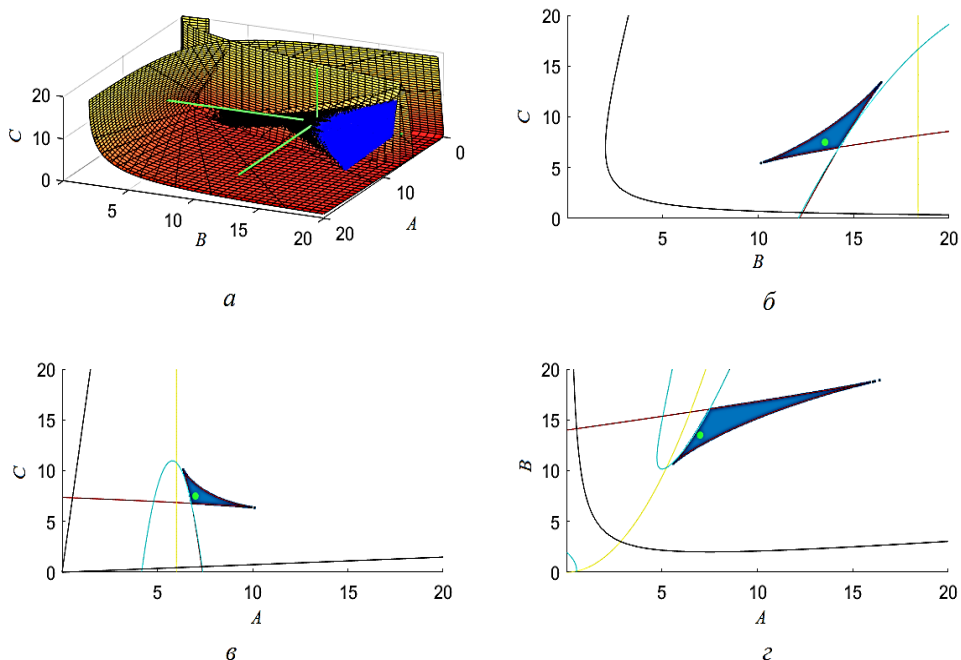


Рис. 10. Сечения координатными плоскостями в точке (7; 13,5; 7,5):

а — диаграмма в параметрах A, B, C ; б — сечение $A = 7$; в — сечение $B = 13,5$; г — сечение $C = 7,5$

Получены уравнения, позволяющие графически разделить области расположения корней в трехмерном пространстве и выделить область аперiodических процессов в зависимости от коэффициентов характеристического многочлена.

Литература

- [1] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*. Москва, Наука, 1975.
- [2] Панов В.Ф. *Математика древняя и юная*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
- [3] [Рыбников К.А. *История математики*. Москва, Изд-во МГУ, 1960–1963.
- [4] Прасолов В.В. *Многочлены*. Москва, МЦНМО, 1999.
- [5] Сырчина А.С., Кулешов А.В. Синтез регулятора индикаторного гиросtabilизатора с использованием критерия Вышнеградского. *Известия ТулГУ. Технические науки*, 2022, вып. 11, с. 99–110.
<https://doi.org/10.24412/2071-6168-2022-11-99-110>
- [6] Мирер С.А., Прилепский И.В. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, 2008, № 48, с. 198–208.

- [7] Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников. *Космические исследования*, 1976, т. 14, № 2.
- [8] Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы. *Известия РАН. ТуСУ*, 2020, № 1.
<https://doi.org/10.31857/S0002338819060064>
- [9] Бесекерский В.А., Попов Е.П. *Теория систем автоматического регулирования*. Москва, Наука, 1975.
- [10] Иванов В.А. и др. *Математические основы теории автоматического регулирования*. Москва, Высшая школа, 1971, 808 с.
- [11] Rees E.L. Graphical Discussion of the Roots of a Quartic Equation. *Source the American Mathematical Monthly*, 1922, vol. 29, no. 2, pp. 51–55.
<https://doi.org/10.2307/2972804>
- [12] Васильев В.А. *Геометрия дискриминанта*. Москва, МЦНМО, 2017, 16 с.

Поступила в редакцию 28.03.2024

Сороквашин Александр Владимирович — студент кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» факультета «Специальное машиностроение», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Кедровских Глеб Алексеевич — студент кафедры «Вычислительная механика» факультета «Аэрокосмические технологии», МФТИ, Московская обл., Долгопрудный, Российская Федерация.

Татаринова Анна Сергеевна — студентка кафедры «Комбинированные двигатели и альтернативные энергоустановки» факультета «Энергомашиностроение», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Научный руководитель — Игнатов Александр Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» им. профессора Н.Е. Жуковского факультета «Фундаментальные науки», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сороквашин А.В., Кедровских Г.А., Татаринова А.С. Построение областей расположения корней многочленов четвертого порядка с действительными коэффициентами. *Политехнический молодежный журнал*, 2025, № 01 (96). URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/math/compmath/1023.html>

CONSTRUCTING A POSITION DOMAIN OF THE FOURTH ORDER POLYNOMIALS WITH THE ACTIVE COEFFICIENT ROOTS

A.V. Sorokvashin¹

sorokvashinav@student.bmstu.ru

G.A. Kedrovskikh²

kedrovskikh.ga@phystech.edu

A.S. Tatarinova¹

tatarinovaas@student.bmstu.ru

¹ *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

² *MIPT, Moscow region, Dolgoprudny, Russian Federation*

The paper considers a technique in constructing regions of position of the fourth-order algebraic polynomial roots with the real coefficients. The regions of stable and unstable polynomials are delimited. For the region of stable polynomials, equations of surfaces separating regions with different character of the roots are obtained. These surfaces are constructed in the space of the normalized polynomial coefficients directly related to the original coefficients. The proposed technique is of practical interest in studying roots of the characteristic polynomial in a system of linear differential equations of the fourth order, which makes it possible to determine the nature of its solution. The paper provides an example of implementing the proposed technique in the MATLAB environment.

Keywords: characteristic equation, polynomial, complex roots, discriminant, stability theory, Hurwitz criterion, Vyshnegradsky diagram, aperiodic process

Received 28.03.2024

Sorokvashin A.V. — Student, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Faculty of Special Mechanical Engineering, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Kedrovskikh G.A. — Student, Department of Computational Mechanics, Faculty of Aeromechanics and Flight Engineering, Moscow Institute of Physics and Technology, MIPT, Moscow region, Dolgoprudny, Russian Federation.

Tatarinova A.S. — Student, Department of Combined Engines and Alternative Power Plants, Faculty of Power Engineering, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Scientific advisor — Ignatov A.I., Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics named after Professor N.E. Zhukovsky, Faculty of Fundamental Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Sorokvashin A.V., Kedrovskikh G.A., Tatarinova A.S. Constructing a position domain of the fourth order polynomials with the active coefficient roots. *Politekhicheskiy molodezhnyy zhurnal*, 2025, no. 01 (96). (In Russ.). URL: <https://ptsj.bmstu.ru/catalog/math/compmath/1023.html>