50/4

И.Т.У.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ

Провер. 1935
ПРОВЕРЕНО 1952



Р124112
21
ПРОВЕРЕНО 1945



Лекціи

Ад-праф. НА Шапошникова.

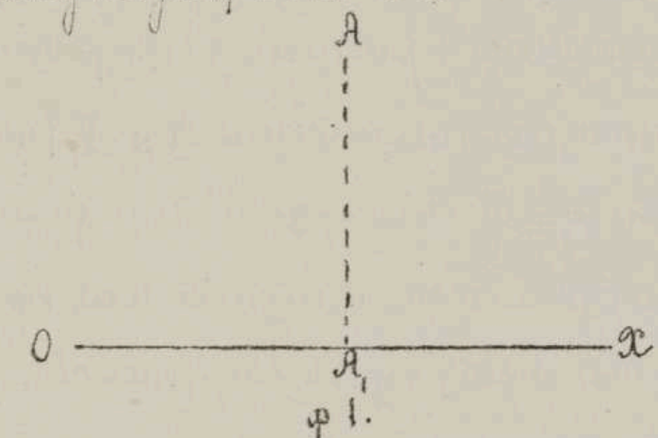
Курсъ X^ш.

1895-96 г.

Издание дозволяю: Н. Шапошников

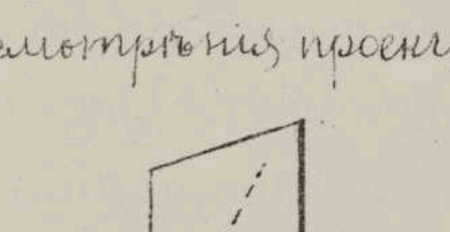
О проекціяхъ.

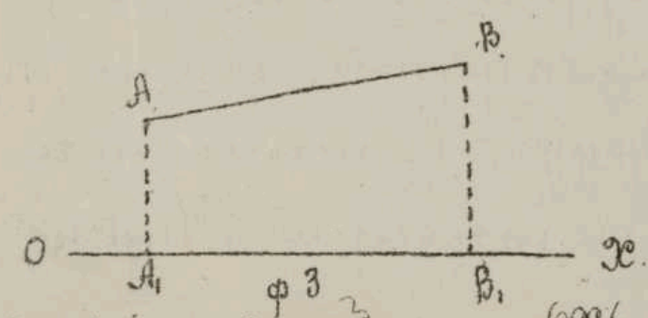
Пусть имѣемъ какую нибудь точку A и прямую OX называемую осью проекцій; требуется найти проекцію точки A на этой оси. Если точка A и ось проекцій OX находятся на данной плоскости чертежа (ф. 1), то надо опустить изъ A перпендикуляръ на OX и точка пересѣченія A_1 будетъ проекціей точки A. Если-же точка A лежитъ не въ той плоскости чертежа гдѣ дана OX, то черезъ A проводимъ плоскость N перпендикулярную къ оси; точка A_1 пересѣченія этой плоскости съ осью OX и будетъ проекція точки A. (ф. 2)



ф 1.

Отъ разсмотрѣнія проекціи точки перейдемъ къ разсмотрѣнію проекціи прямой линіи. На прямую линію будемъ смотрѣть, какъ на путь поступательнаго движенія нѣкоторой воображаемой точки, а то мѣсто откуда начала свое движеніе точка будемъ считать началомъ прямой, а гдѣ окончила — концомъ прямой. Положимъ дана прямая AB, гдѣ A-начало, а B — конецъ; требуется найти

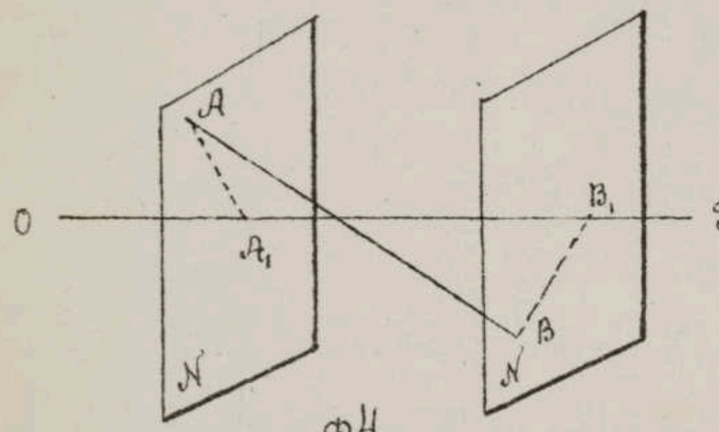

ф 2



ф 3

проекцію прямой на оси OX (ф. 3). Чтобы найти проекцію прямой

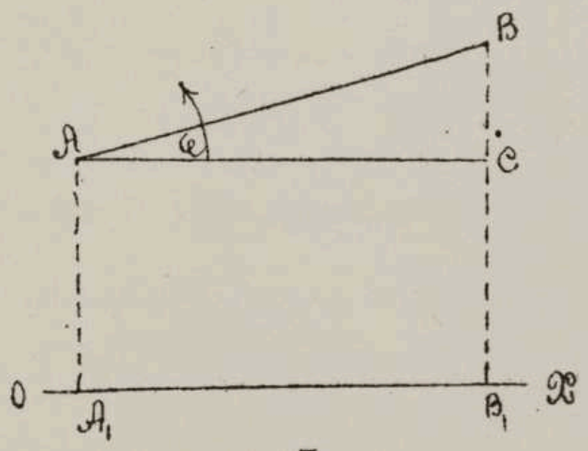
линіи надо найти проекціи крайнихъ ея точекъ и считать направленіе проекціи прямой отъ проекціи начала до проекціи конца ея. Такъ A_1B_1 есть проекція прямой AB (фиг. 3) когда линія и ось проекцій лежатъ въ плоскости чертежа.



фиг. 4.

Если же онѣ лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ, то проекція прямой находится при помощи проектирующихъ плоскостей N и N_1 (фиг 4) Выведемъ алгебраическую зависимость между линіей и ея проекціей. Для обобщенія вывода разсмотримъ правило знаковъ. Носитъ названіе Декартоваго. Правило это заключается въ томъ, что всѣ числовыя величины берутся въ вычисленіяхъ со знакомъ (+) разъ сами линіи имѣютъ направленіе считаемое положительнымъ, и со знакомъ (−) разъ онѣ имѣютъ направленіе обратное. Такое, издавна принятое, выраженіе правила не даетъ ему теоретическаго обоснованія вслѣдствіе чего это правило низводится на степень непосредственнаго указанія принимаемаго условно ради достиженія единства и общности выводимыхъ формулъ. На самомъ дѣлѣ нужно понимать указанное правило какъ послѣдствіе общаго представленія о различіи между величинами направленными и абсолютными. Нужно

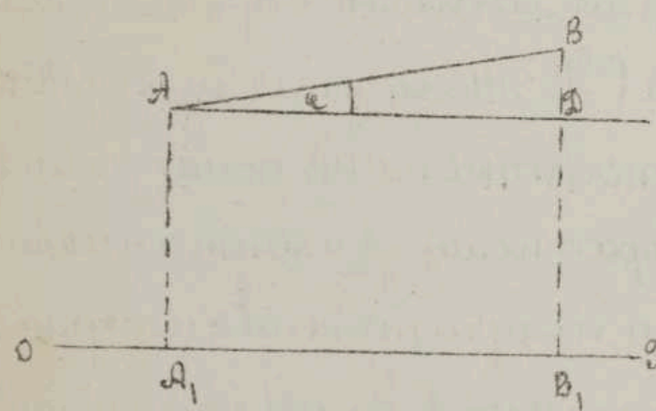
помнить то, что соотношения величин указываемыя элементарной геометрией касаются величинъ абсолютныхъ, а въ аналитической геометріи имѣющей дѣло съ величинами направленными могутъ примѣняться только къ величинамъ положительнымъ, а потому, относя ихъ къ величинамъ отрицательнымъ, мы должны передъ обозначеніями послѣднихъ ставить вторые знаки минусы, основываясь на томъ, что совокупность двухъ минусовъ даетъ плюсъ. Сдѣлавъ эти замѣчанія обратимся теперь къ вопросу о нахожденіи соотношеній между линіей и ея проекціей. Положимъ что намъ дана линія AB (фр. 5) и ея проекція A_1B_1. Черезъ начало A линіи AB проведемъ линію AC вправо параллельно OX. Тогда уголъ между AC и AB отсчитываемый по направленію обратному движенію часовой стрѣлки, получитъ названіе угла отклоненія линіи отъ оси проекцій; обозначимъ его черезъ φ. Между величиной угла φ и знаками (+) и (−) проекціи существуетъ ясное соотношеніе. Если $\varphi < \frac{\pi}{2}$ или $\varphi < 2\pi$, но больше $\frac{3}{2}\pi$, то B_1 будетъ вправо отъ A_1 и проекція будетъ положительная. Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$, но $< \pi$ или $\varphi > \pi$, но $< \frac{3}{2}\pi$,



фр 5.

то B_1 будетъ влѣво отъ A_1, и проекція будетъ отрицательная. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, то проекція будетъ равна нулю. **Теорема**: Проекція прямой линіи на ось равняется произведенію проектируемой линіи на косинусъ угла отклоненія. Теорема эта опредѣляетъ не только абсолютную величину проекціи, но и знакъ ея. Въ зависимости отъ угла φ проектируемая линія AB можетъ располагаться во всѣхъ четырехъ квадрантахъ круга т. е. можетъ быть I) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; II) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; III) $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$; IV) $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$. Во всѣхъ этихъ случаяхъ доказательство будетъ отличаться одно отъ другого и такъ какъ теорема эта имѣетъ весьма важное значеніе, то мы и разберемъ всѣ 4 случая.

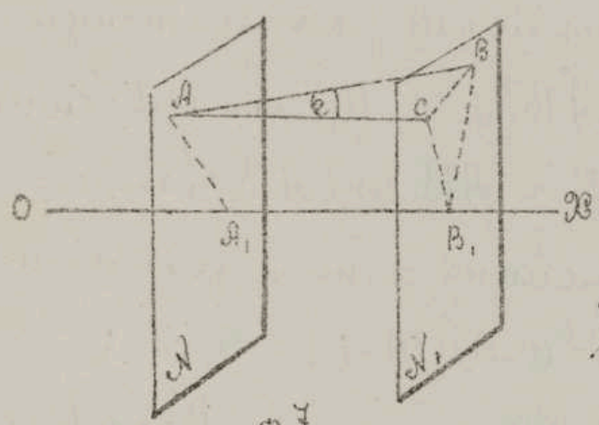
Случай I-ый: $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Для доказательства проведемъ AC параллельно OX до пересѣченія съ BB_1 въ точкѣ D (фиг. 6) тогда $AD = A_1B_1$, какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными. Изъ прямоугольнаго треугольника ABD имѣемъ: $AD = AB \cdot \cos BAD = A_1B_1$.



фиг.

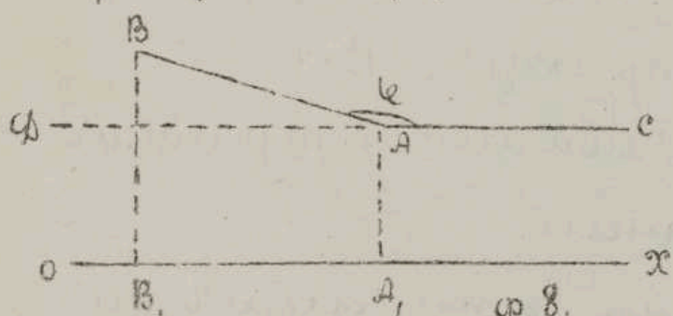
Обозначимъ черезъ $\underline{a}$ абсолютную величину AB, черезъ a величину и знакъ проекціи и черезъ φ уголъ BAD. Такъ какъ A_1B_1 выражаетъ собой число абсолютное, а a — положительное, ибо проекція направлена влѣво направо, то a можетъ замѣнить A_1B_1, на томъ основаніи, что въ вычисленіяхъ абсолютныя величины можно замѣнять положительными количествами. Сдѣлавъ замѣну имѣемъ: $a = A \cdot \cos \varphi$.

Величина a есть здесь число, а не количество т. к. направление проектируемой прямой определяется углом φ. Если бы AB и OX не лежали в одной плоскости, то пришлось-бы линию AC продолжить до встречи с плоскостью N_1 в точке C (ф 7) и соединить C с B; тогда $AC = A_1B_1$, как отрезки прямых между параллельными плоскостями. Остальной ход доказательства остается тот-же самый.

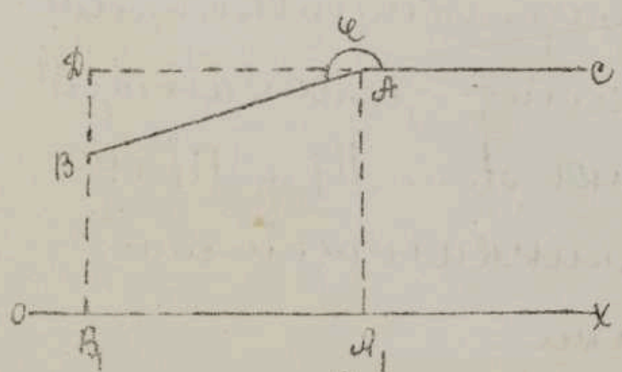


ф 7.

Случай II: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Через точку A проводим линию AC вправо (ф 8). Угол отклонения φ, отсчитываемый по направлению обратному движению часовой стрелки, будет $> \frac{\pi}{2}$ и $< \pi$. Затем линию AC продолжаем влево до встречи с BB_1 в точке D. Из прямоугольного треугольника BAD имеем: $AD = A_1B_1 = AB \cdot \cos BAD$. Обозначая проекцию A_1B_1 через d, где d само по себе отрицательно. Требуется перед d поставить знак $(-)$ чтобы сделать d положительным и тогда только мы можем будем заменить абсолютную величину A_1B_1. Заменяя AB через a и угол BAD через $(\pi - \varphi)$ получаем: $-d = a \cdot \cos(\pi - \varphi) = -a\cos\varphi$; откуда $d = a\cos\varphi$.



ф 8.



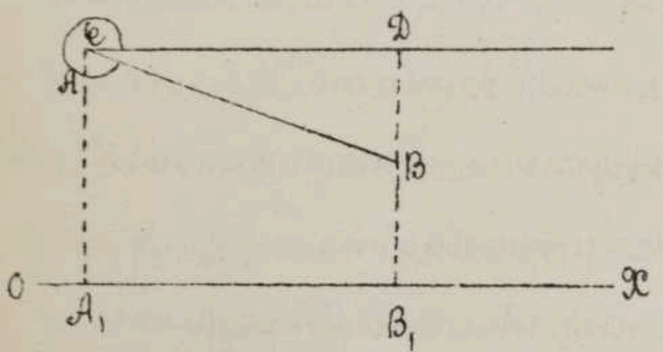
ф 9.

Случай III: $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Строим угол отклонения φ. Линию AC продолжаем вправо до встречи в точке D с продолженной линией BB_1 (ф 9). Из прямоугольного треугольника BAD имеем: $AD = A_1B_1 = AB \cdot \cos DAB$

Заменяя дуги A_1B_1 через $-x$ на том же основании как и в предыдущем случае, AB через a и угол DAB через $\varphi - \pi$ имеем:

$-x = a\cos(\gamma - \pi) = a.\cos(\pi - \varphi) = a\cos\varphi$; откуда $x = a\cos\varphi$.

Случай IV-ый. $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$. Построив угол отклонения и продолжив BB_1 до пересечения с AC имеем прямоугольный треугольник DAB (ф. 10). Из него выводим: $AD = A_1B_1 = AB.\cos DAB$. Дуга DAB тоже заменяется через x и равняется: $x = a.\cos(2\pi - \varphi) = a\cos\varphi$.



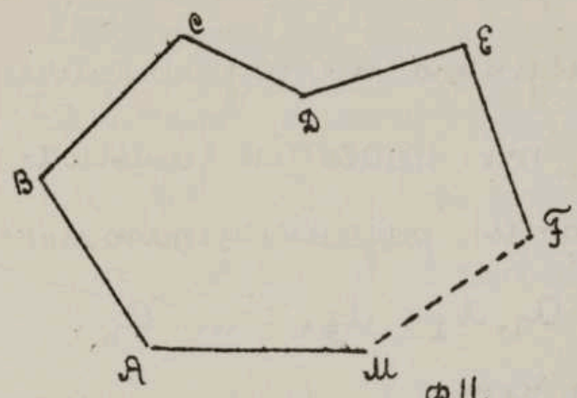
ф. 10.

Рассмотрим частные случаи этой теоремы. Когда $\varphi = 0$, то $\cos\varphi = 1$ и $A_1B_1 = AB$; когда $\varphi = \pi$, то $\cos\pi = 1$ и $A_1B_1 = AB$; когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3}{2}\pi$, то $\cos\varphi = 0$ и проекция $AB = 0$

От рассмотрения проекции прямой линии перейдем к рассмотрению проекций ломаной линии.

Если мы от многоугольника отнимем какую нибудь сторону, то получится ломаная линия, которая называется разомкнутым многоугольником; а отнятая линия – замыкающей стороной. Так многоугольник $A.....M$ (ф. 11) будет разомкнутым, а AM замыкающею стороною этого многоугольника.

Анал. Геом.

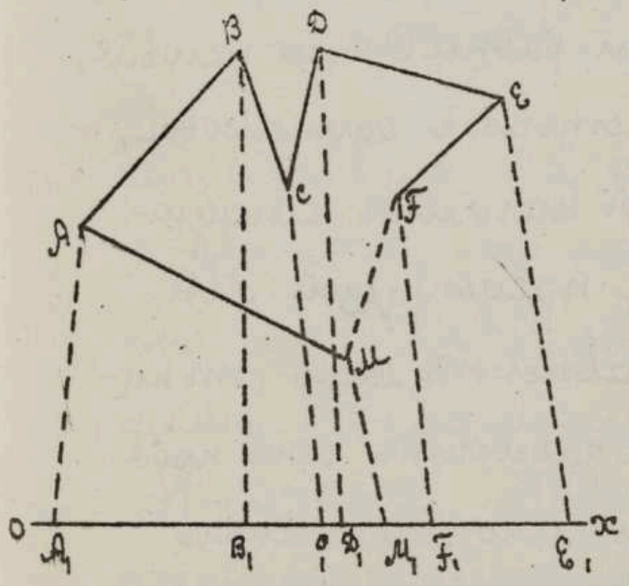


ф 11.

Относительно стороны разомкнутого многоугольника, замыкающей стороны вводят условие: направление стороны многоугольника считают в одну сторону по направлению обхода, а направление замыкающей стороны в другую.

Определение: Проекцией ломаной линии считается алгебраическая сумма проекций составных частей ломаной.

Теорема. Сумма проекций сторон разомкнутого многоугольника равна проекции замыкающей стороны.



ф 12.

Проектируем разомкнутый многоугольник A.....M на ось проекций OX (ф. 12). Так как не все стороны многоугольника находятся в одной плоскости с линией ox, то проектирующие линии вообще не лежат в одной плоскости и потому не будут параллельны. Складывая в силу определения проекции линий: AB, BC и т. д. в алгебраическом смысле, т.е. принимая их за направления: $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$; $A_1C_1 + C_1D_1 = A_1D_1$ и т. д. Мы видим, что сумма проекций зависит лишь от положения начала и конца ломаной линии и сов-

съмъ не зависитъ отъ промежуточныхъ точекъ. Окончивъ сложеніе проекцій разомкнутаго многоугольника A.....M будемъ имѣть сумму A_1M_1, т.е. проекцію замыкающей стороны AM. Обозначивъ стороны разомкнутаго многоугольника послѣдовательно черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$, а углы отклоненія этихъ сторонъ черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots \varphi_n$, будемъ имѣть:

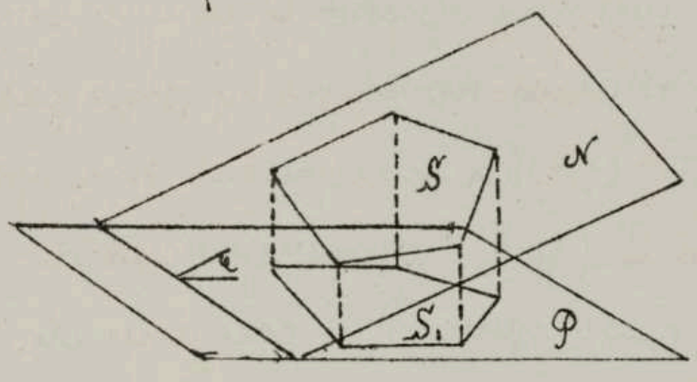
$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + \ldots\ldots + a_n\varphi_n = A\,cs\,\Phi$, что напишется короче такъ: $\sum a_i\,cs\varphi_i = A\,cs\,\Phi$, гдѣ A-замыкающая сторона, а Φ - уголъ ея отклоненія. Если мы будемъ разсматривать замкнутый многоугольникъ, то сумма проекцій всѣхъ его сторонъ на ось равна 0, при условіи, если мы примемъ направленіе всѣхъ сторонъ одинаковое, т.е. конецъ одной стороны служитъ началомъ слѣдующей. Эта теорема есть слѣдствіе предыдущей. Мы уже видѣли, что сумма проекцій зависитъ лишь отъ начала и конца ломаной и совсѣмъ не зависитъ отъ промежуточныхъ точекъ. Въ замкнутомъ многоугольникѣ начало и конецъ сливаются въ одну точку и проекція обращается въ точку, т.е. равна по величинѣ 0. Выражая это равенство символически, имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,cs_i = 0$$

Проекция площадей

Возьмем в пространстве площадь, ограниченную произвольным контуром, и спроектируем эту площадь на данную плоскость проекций P (ф 13). Чтобы получить проекцию рассматриваемой площади, вообразим, что из всех точек контура ея, опущены перпендикуляры на плоскость P; подошвы этих перпендикуляров ограничат на плоскости P площадь, которая и будет проекцией данной площади.

ф 13.



Пусть величина данной площади будет S, а величина площади ея проекции – S_1, и положим, что плоскость N, в которой лежит данная площадь S, делает с плоскостью проекций P угол φ. Тогда можно доказать, что $S_1 = S \cos\varphi$

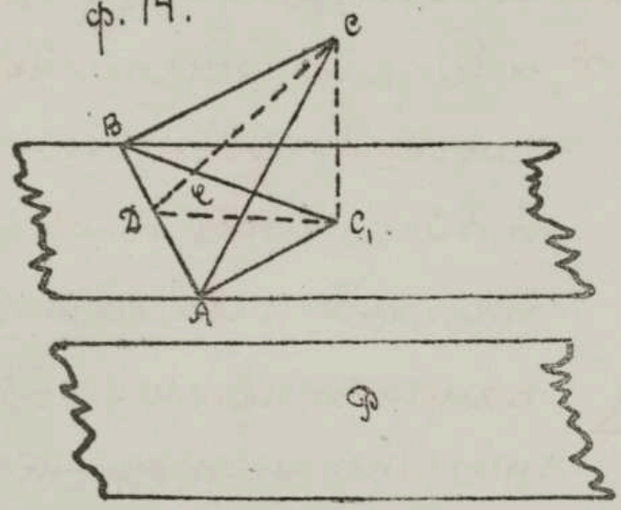
Теорема: Проекция площади равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла, делаемаго плоскостью, в которой лежит данная площадь, с плоскостью проекций.

Для доказательства мы начнем с рассмотрения простейших случаев:

I) Рассмотрим вопервых проекцию площади треуголь-

ника, одна изъ сторонъ которого параллельна плоскости проекцій. Пусть это будетъ (ф. 14) сторона AB треугольника ABC. Погда проведемъ черезъ AB плоскость параллельную плоскости P и возьмемъ проекцію площади ABC на эту вспомогательную плоскость. Очевидно, что такая проекція будетъ равна проекціи на плоскости P. Чтобы получить эту проекцію, опустимъ изъ точки C (ф. 14) перпендикуляръ на плоскость, параллельную плоскости P, и соединимъ его подошву C_1 съ A и B. Треугольникъ ABC_1 будетъ проекціей треугольника ABC. Изъ C_1 на линію AB опустимъ перпендикуляръ C_1D и точку D соединимъ съ C. Линія CD будетъ, очевидно, перпендикулярна къ AB и уголъ $CDC_1 = \varphi$, причемъ φ - есть линейный уголъ, которымъ измѣряется двугранный уголъ $CABC_1$.

ф. 14.



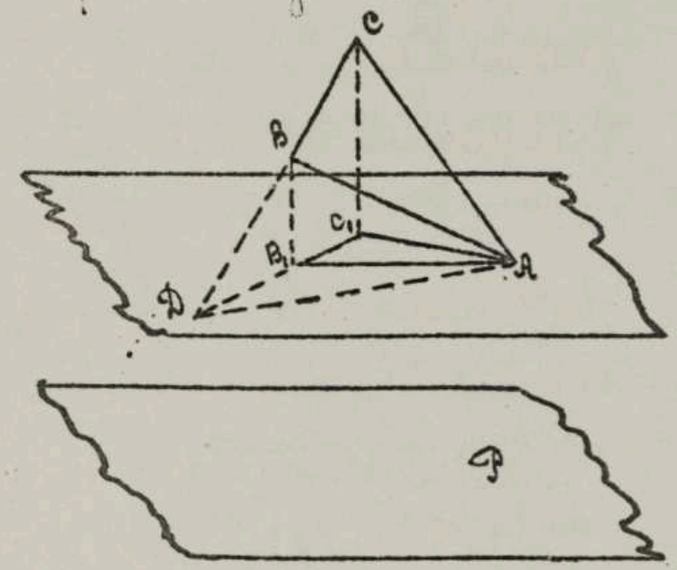
Въ треугольникѣ CDC_1, уголъ при C_1 есть прямой; слѣдовательно имѣемъ $C_1D = CD \cdot \cos\varphi$. Помноживъ обѣ части этого равенства на $\frac{1}{2} AB$, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2} AB \cdot C_1D = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cos\varphi, \text{ или площадь}$$

$$\Delta ABC_1 = \Delta ABC \cdot \cos\varphi$$

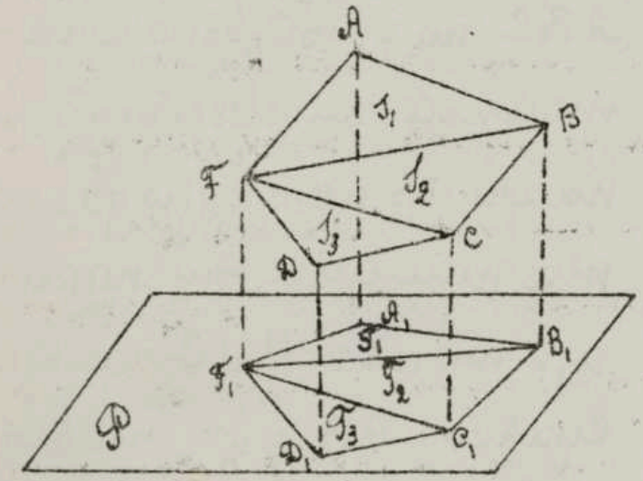
II) Положимъ, что ни одна изъ сторонъ даннаго тре-

угольника ABC на параллельна плоскости проекций. Тогда через вершину A (ф. 15), ближайшую к плоскости проекций, проведем вспомогательную плоскость, параллельную плоскости Φ, и будем рассматривать проекцию треугольника ABC на этой вспомогательной плоскости. Чтобы получить проекцию данного треугольника, опустим из точек B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 на вспомогательную плоскость; точка-ра A будет служить сама себе проекцией. Продолжив перпендикуляров B_1 и C_1 соединим между собою и ее точкою A; тогда треугольник AB_1C_1 будет проекцией треугольника ABC. Продолжим далее прямые BC и B_1C_1 до встречи в точке D и соединим точку D с точкою A; мы получим треугольник ADC_1, проекцией которого, очевидно, будет ADC_1, следовательно мы можем написать что $ADC_1 = ADC \cdot \cos\varphi$. Подобно этому треугольник DAB_1 есть проекция DAB; следовательно $DAB_1 = DAB \cdot \cos\varphi$. Вычитая из первого равенства второе получим: $B_1AC_1 = BAC \cos\varphi$.



ф 15

III) Докажем далее тупую теорему для площади произвольного многоугольника. Положим, что площадь данного многоугольника есть S (ф.16). Разделим его диагоналями проведенными из одной вершины, на треугольники и площади всех этих треугольников обозначим попорядку через $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Тогда будем иметь $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$. Проектируем все эти площади на плоскость проекций и назовем через T проекцию площади многоугольника, а через $T_1, T_2, T_3 \ldots$ проекции площадей треугольников, тогда очевидно будем иметь $T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$. При том для проекции площадей треугольников имеем по доказанному, что $T_1 = S_1 \cdot \cos\varphi$; $T_2 = S_2 \cdot \cos\varphi$; $T_3 = S_3 \cdot \cos\varphi \ldots$. Сложив все эти равенства имеем: $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots = (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots)\cos\varphi$

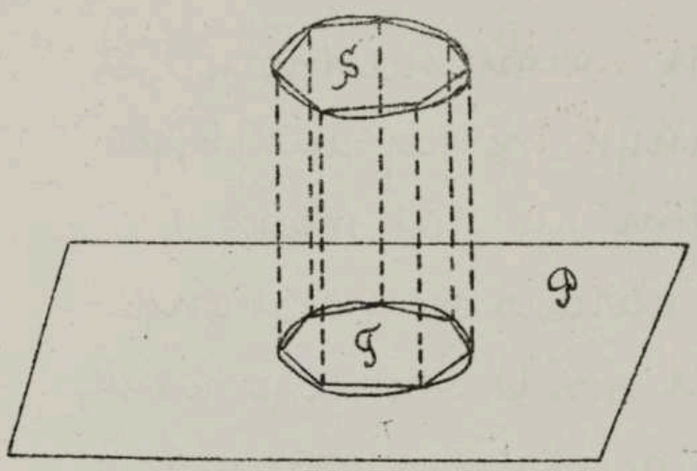


ф.16

или $T = S\cos\varphi$.

IV) Наконец можно будет доказать эту теорему для произвольной криволинейной площади (ф.17). Рассмотрим произвольную криволинейную площадь S и ея проекцию T. Впишем в контуры площади S произвольный многоугольник, который

также спроектируем на плоскость проекций. Онъ, очевидно, имѣетъ проекцію многоугольникъ, вписанный въ контуръ площади Т. Площадь многоугольника, вписаннаго въ S, обозначимъ черезъ Q, а площадь многоугольника, вписаннаго въ Т, обозначимъ

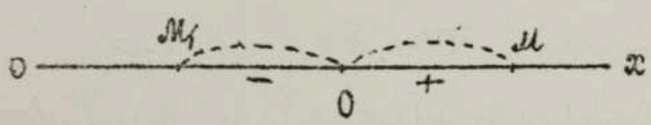


ф 17.

черезъ R; гдѣ R представляетъ проекцію Q. Тогда на основаніи уже доказаннаго имѣемъ: $R = Q \cdot \cos\varphi$. Это равенство всегда справедливо, каково-бы ни было число сторонъ многоугольника. Вообразимъ, что число сторонъ вписаннаго многоугольника возрастаетъ неопредѣленно и что каждая изъ сторонъ стремится сдѣлаться безконечно малой. Тогда предѣлъ площади Q будетъ площадь S, а предѣлъ площади R будетъ Т. По принципу способа предѣловъ заключаемъ, что такое равенство будетъ существовать и между предѣлами. Слѣдовательно въ предѣлѣ получимъ $T = S \cdot \cos\varphi$. Такимъ образомъ наша теорема доказана вполнѣ.

Определение положения точки на оси.

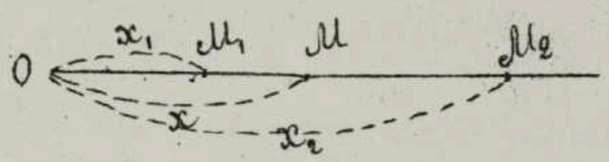
Для того, чтобы определить положение точки M на оси, проводим через данную точку линию, называемую осью. абсцисс, берут на ней точку O, которую принимают за начало счета, и определяют расстояние точки M от O. Это расстояние, выраженное как количество, называется абсциссой точки M. Обозначим абсолютную величину расстояния M от O через a, т.е. $OM = a$ (ф18). Для более точного определения положения точки M, вводят правило знаков, которое состоит в том, что расстояния, лежащие вправо от точки O, принятой за начало, считают положительными, а влево отрицательными. Так OM будет положительно, а OM_1 - отрицательно. Количества, выражающие расстояния вместе с соответствующими им знаками, называются абсциссами. Называя абсциссы точек M и M_1 через x и x_1, а абсолютные величины OM и равной ей OM_1 через a имеем: $x = +a$ и $x_1 = -a$, где $(+a)$ и $(-a)$ суть количества алгебраические.



ф 18.

Задача. На оси даны точки M_1 и M_2 (ф. 19) найти точку M так, чтобы $M-M_1$ относилось к MM_2, как $m:n$.

Эту задачу нужно разрешить так, чтобы получить общую формулу. Обозначим абсциссу точки M_1 через x_1, абсциссу точки M_2 через x_2, а абсциссу искомой точки M через x. Тогда $MM_1 : MM_2 = m:n$. Но усматривая из чертежа, что MM_1 равняется $x-x_1$, а $MM_2 = x_2-x$ имеем: $(x-x_1):(x_2-x)=m:n$, или $nx-nx_1 = mx_2-mx$; определяя отсюда x, получаем



ф. 19.

$$x = \frac{nx_1+mx_2}{m+n}.$$

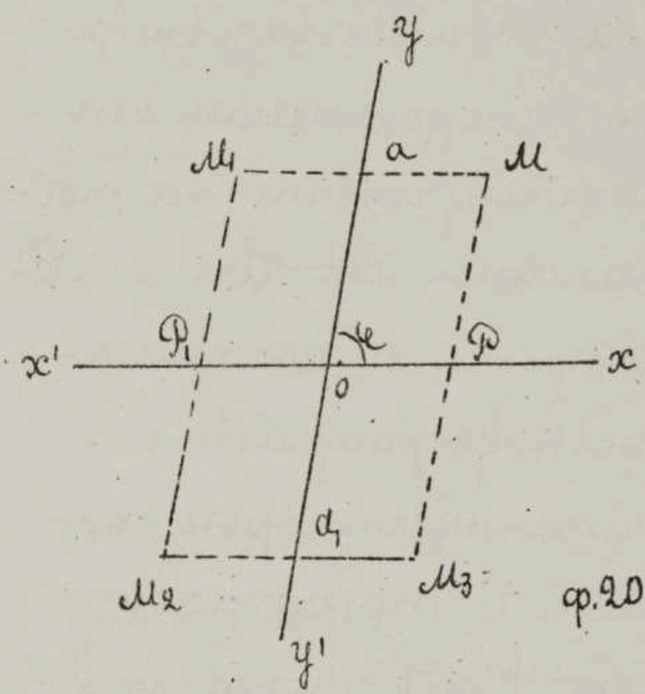
Если отношение $\frac{m}{n}$ выразим через k, то формула эта примет вид: $x = \frac{x_1+kx_2}{k+1}$. В частном случае когда $k=1$, т.е. когда M есть середина M_1M_2, имеем: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

МОСКОВСКОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧИЛИЩЕ — БИБЛИОТЕКА

Определение положения точки на плоскости.

Рассмотрим теперь приемы Декарта, применяемый им к определению положения точки на плоскости. Положим, что имеем две пересекающиеся прямые линии xx' и yy', называемые осями координат (ф 20). Прямая xx' носит название оси

х-овъ, или оси абсциссъ, а прямая у у' — оси у-овъ, или оси ординатъ. Пересѣченіе ихъ даетъ точку О, принимаемую за начало координатъ. Уголъ ϕ, считаемый въ направленіи обратномъ движенію часовой стрѣлки, называется координатнымъ угломъ. Съ помощью этихъ данныхъ, положеніе любой точки на плоскости можно точно опредѣлить. Названіе системы координатъ зависитъ отъ угла ϕ: разъ онъ острый, или тупой, то такая система координатъ носитъ названіе прямолинейной косоугольной, а разъ уголъ ϕ — прямой — то прямоугольной, или ортогональной. При послѣдней системѣ координатъ многіе соотношенія выражаются гораздо проще, чѣмъ при косоугольной. Она-то собственно и была предложена Декартомъ. Оси координатъ, пересѣкаясь разбиваютъ плоскость на четыре угла, которые отсчитываются по порядку, въ сторону противуположную движенію часовой стрѣлки. Такимъ образомъ хоу есть первый уголъ, уох' — второй уголъ, х'оу' — третій и у'ох — четвёртый. Положеніе точки М опредѣляется слѣдующимъ образомъ: черезъ точку М проводимъ линіи МР и МQ параллельно оси $x^{овъ}$ и $y^{овъ}$. Тогда величинами и направленіями этихъ линій точка М вполнѣ



ф.20.

определяются. Количества, выражающія размѣры и направленія линій опредѣляющихъ положеніе точки называются ея координатами. Символически точка съ ея координатами обозначается такъ: $M(x, y_1)$, гдѣ x, обозначаетъ всегда абсциссу точки, а y_1 – ея ординату. Принять употребленія координатъ связанъ съ правиломъ знаковъ Декарта. Правило знаковъ вытекаетъ изъ того, что для различія положенія точекъ въ разныхъ углахъ осей координатъ необходимо считать координаты величинами направленными. Дѣйствительно, если-бы не различали направленія координатъ, то по даннымъ абсолютнымъ величинамъ двухъ координатъ, положимъ, $x = a$ и $y = b$, могли-бы построить въ разныхъ углахъ осей четыре точки M, M_1, M_2, M_3, попарно симметричныя относительно одной изъ осей и имѣющія вслѣдствіе этого совершенно одинаковыя по абсолютной величинѣ одноименныя координаты. Условившись же въ томъ, что координаты величины суть направлен-

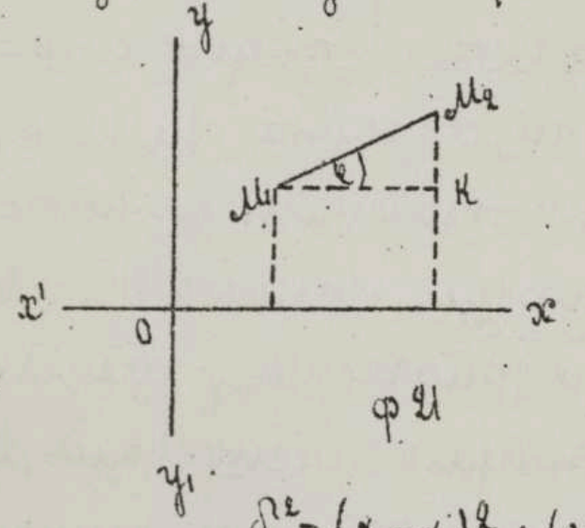
ныя и что направленія ихъ направо и вверхъ считаются положительными, а направленія налѣво и внизъ - отрицательными, мы отчетливо различимъ всѣ четыре указанныя точки, потому что тогда точка M будетъ имѣть координаты $x = +a$ и $y = +b$, точка M_1 координаты $x = -a$ и $y = +b$, M_2 координаты $x = -a$ и $y = -b$ и наконецъ M_3 координаты $x = +a$ и $y = -b$. Разберемъ еще нѣкоторые частные случаи положенія точки: 1) точка лежитъ на оси x-овъ, какъ напримѣръ P и P_1, тогда ея координаты будутъ $x = \pm a$, $y = 0$; 2) Точка лежитъ на оси y-овъ, какъ Q и Q_1, ея координаты $x = 0$ и $y = \pm b$. 3) Точка лежитъ въ началѣ координатъ, ея координаты $x = 0$ и $y = 0$. Итакъ мы видимъ, что координаты всякой точки суть дѣйствительныя направленныя величины, могущія быть положительными или отрицательными. Въ смыслѣ тѣхъ алгебраическихъ вычислений, которыя производятся въ аналитической геометріи, за координаты нужно принимать не самыя разстоянія опредѣляемой точки отъ осей, а тѣ отвлеченныя алгебраическія количества, которыя при извѣстной единицѣ длины и прилѣжномъ условіи относительно направленія выража-

ють длины и направления такихъ геометрическихъ разстояній.

Если относительно выбранныхъ осей дана нѣкоторая точка M, то по извѣстному ея положенію мы можемъ опредѣлить объ координаты. Для этого проводимъ MP параллельно оси координатъ и непосредственнымъ измѣреніемъ находимъ количества выражающія прямыя OP и MP. Если, наоборотъ, даны алгебраическія значенія координатъ, то, руководствуясь масштабомъ, который опредѣляетъ выбранную единицу длины, строимъ прямую OP и параллельную оси y'. PM и опредѣляемъ такимъ образомъ положеніе точки M.

Покажемъ теперь на примѣрѣ, что объясненный пріемъ опредѣленія положенія точки ведетъ къ алгебраическому выраженію различныхъ геометрическихъ величинъ. Опредѣлимъ для этого длину прямой, которой положеніе на плоскости дано координатами двухъ ея концовъ. Положимъ, что относительно осей координатъ ортогональныхъ даны координаты точекъ M_1 и M_2 (ср. 21), которыя обозначимъ соотвѣтственно черезъ x_1, y_1, и x_2, y_2. Требуется опредѣлить

расстояние M_1M_2, которое обозначим через δ. Достаточно для вывода построить координаты и провести чрз одной точки параллельно оси абсцисс прямую МК до встречи ординаты другой точки. Тогда чрз прямоугольного треугольника M_1M_2K находим $M_1M_2^2 = M_1K^2 + M_2K^2$ или, замечая по чертежу, что $M_1K = x_2 - x_1$ и $M_2K = y_2 - y_1$, можем написать:



фиг 21

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \text{ откуда}$$

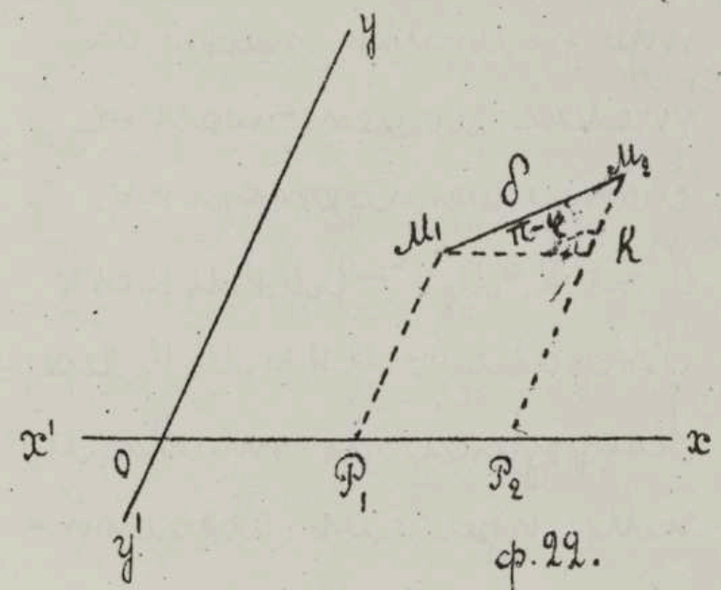
$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если-бы мы захотели определить направление линии M_1M_2, то нам пришлось-бы определить угол α, ибо оно вполне характеризуется. Так, что чрз тех-же прямоугольного треугольника M_1M_2K мы получили-бы: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_2K}{M_1K} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Если одна чрз точек положили M_1 совпадает с началом координат, то ея координаты равняются 0 и тогда расстояние выразится так: $\delta = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, а направление, выражаемое углом α, так: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2}{x_2}$.

Мы рассматривали расстояние между двумя точками при прямоугольных осях координат.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда оси косоугольны (ф. 22). Имеем точки $M(x_1 y_1)$ и $M_2(x_2 y_2)$.



ф. 22.

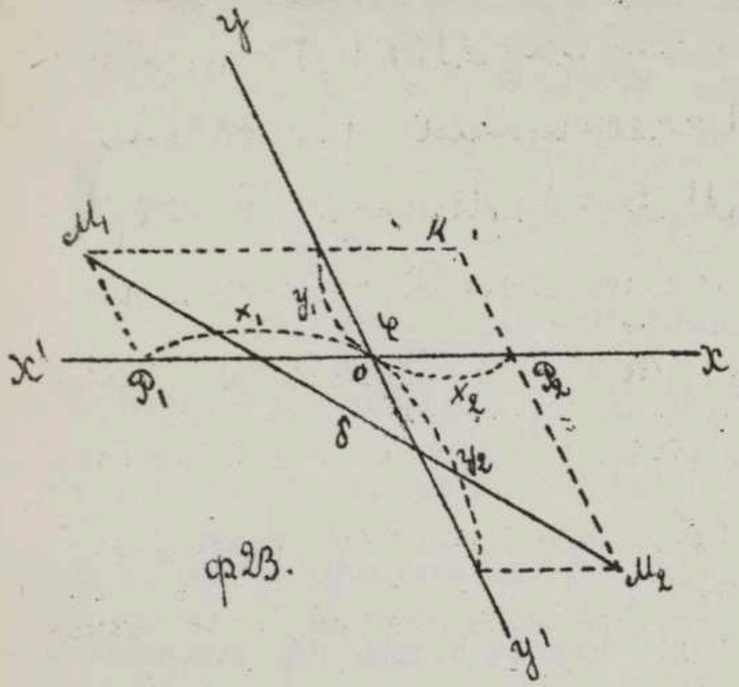
Определяемое расстояние $M_1M_2 = \delta$. Линия M_1K параллельна оси x-овъ и уголъ M_1KM_2 равенъ $\pi - \varphi$, такъ какъ онъ есть дополненіе координатнаго угла φ до π, какъ углы съ параллельными сторонами, напаправленными въ разныя стороны. Изъ ΔM_1KM_2 имѣемъ $\delta^2 = M_1K^2 + M_2K^2 - 2M_1K \cdot M_2K \cdot \cos M_1KM_2$, или подставляя значенія M_1K, M_2K и $\angle M_1KM_2$ имѣемъ:

$$\delta^2 (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos(\pi - \varphi);$$

наконецъ замѣняя $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ получимъ:

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi$$

Для того, чтобы доказать, что выведенная формула разстоянія остается также - самая при любомъ расположеніи осей и точекъ разберемъ слѣдующій случай: Положимъ напримѣръ, что точка M_1 дана во второмъ углѣ, гдѣ абсцисса x_1 отрицательна, а точка M_2 въ четвертомъ углѣ, гдѣ ордината y_2 отрицательна. Сдѣлавъ построеніе подобное предыдущему, имѣемъ (ф. 23)



фг23.

треугольник M_1KM_2 с углом $M_1KM_2=\varphi$; из этого треугольника имеем такое геометрическое соотношение сторон:

$$\delta^2=M_1K^2+M_2K^2-2M_1K\cdot M_2K\cos\varphi$$

Выразим M_1K и M_2K через координаты точек M_1 и M_2; причем абсолютные величины будем заключать только положительными:

$$M_1K=OP_2+OP_1=x_2+(-x_1)=x_2-x_1$$

Перед x_1 мы ставим $(-)$ для того, чтобы сделать это количество положительным.

$$M_2K=P_2K+P_2M_2=y_1+(-y_2)=y_1-y_2$$

Замечая, что $(y_1-y_2)^2=(y_2-y_1)^2$ и подставив эти значения в формулу расстояния, получим:

$$\delta^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-2(x_2-x)(y_1-y_2)\cos\varphi=$$

или заменив $y_1-y_2=-(y_2-y_1)$ имеем

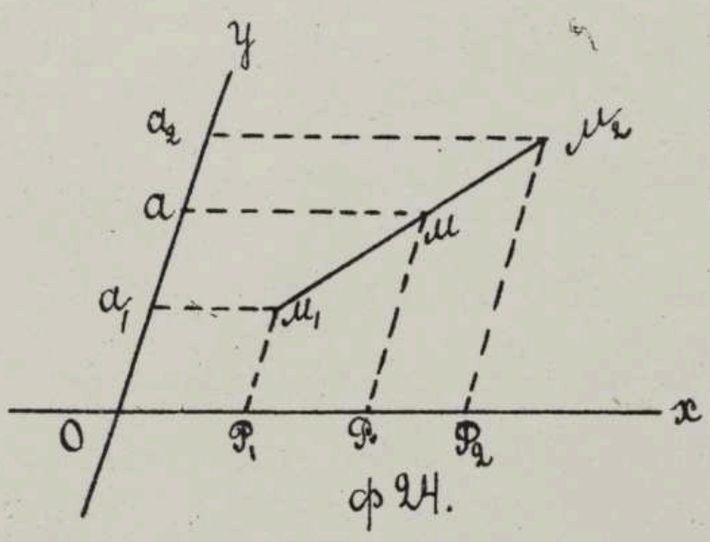
$$\delta^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x)(y_2-y_1)\cos\varphi$$

т.е. мы получили знакомую уже нам формулу. Если примем $\varphi=\frac{\pi}{2}$; т.е. будем рассматривать расстояние при прямолинейной системе координат, то мы из этой формулы получим уже пройденное

в выведенную нами формулу, так как $\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ и мы имеем: $\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Задача: Даны координаты двух точек на плоскости, найти координаты точки, делящей прямую, соединяющую две данные точки в данном отношении $m:n$?

Пусть две данные точки будут $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (фр 24). Положим координаты косоугольными и построим точки M_1 и M_2 по данным координатам. Пусть точка M будет искомая, тогда, по условию, должны иметь $M_1M : M_2M = m:n$. Координаты точки M обозначим через x и y. Проведем через точки M_1, M и M_2 линии, параллельные оси координат и определим точки P_1, P и P_2, в которых они пересекают ось абсцисс; будем иметь $\frac{M_1M}{M_2M} = \frac{P_1P}{P_2P} = \frac{m}{n}$. Вопрос об отыскании точки P сводится таким образом, на разделение расстояния между точками P_1 и P_2 в отношении $m:n$. Эта задача решена нами раньше. Так как точка P имеет тут же абсциссу, как точка M, то по выше приведенной формуле будем иметь:



фр 24.

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

Выражение для y получается точно таким же рассуждением, проведя только через точки M_1, M и M_2 параллельные оси абсцисс. Найдем $y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$. Если отношение $\frac{m}{n}$ выразить через k, то формулы примут такой вид:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{k+1}; \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{k+1}$$

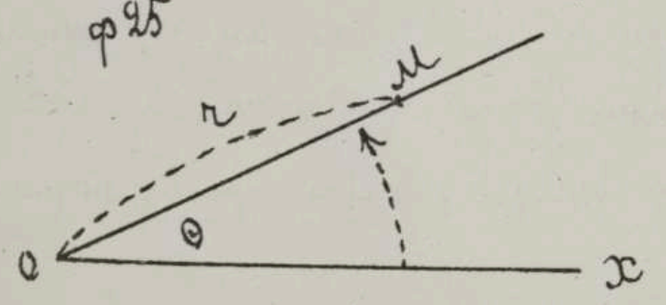
В частном случае, когда $k=1$, имеем:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

Полярные координаты.

Из различных систем координат разберем еще одну очень употребительную – полярную систему. Возьмем на плоскости постоянную точку O, которая будет называться полюсом. Проведем через неё постоянную прямую Ox, называемою полярною осью. Для определения положения точки M (фр 25) соединим её со полюсом и измерим угол MOx равный Θ, а также абсолютную величину $OM = r$. Если эти две величины будут даны, то положение точки на плоскости будет вполне определено. Вели-

фр 25

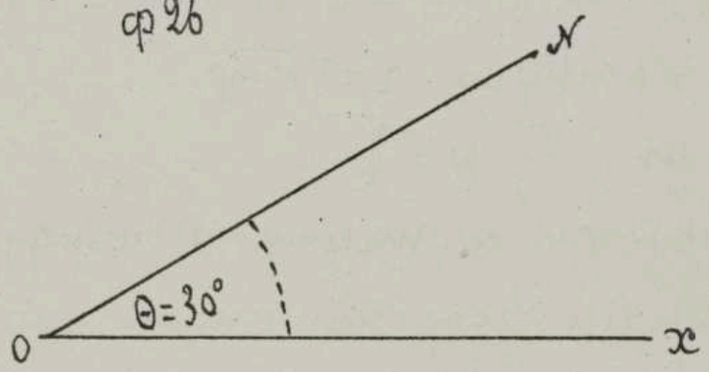


числа θ и r называются поэтому полярными координатами точки M.

Угол θ называется полярным углом или амплитудой, величина r называется радиусом вектором.

Угол θ считается от линии ox в одну сторону, противуположную движению часовой стрелки, и изменяется от 0 до $+\infty$. Чтобы по данным координатам точки M (фр 26) построить эту точку, поступаем так. Положим дано $\theta = 30°$ и $r = 3$ дюйм.: тогда строим полярный угол, равный 30°, на оси ox при точке O и на другой стороне его OM откладываем OM равное радиусу вектору $r = 3$ дюймам. Полученная таким образом точка M и будет искомою

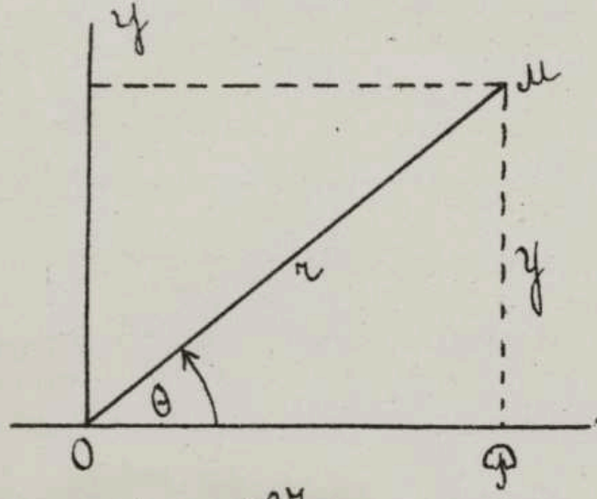
фр 26



Соотношение между прямоугольными и полярными координатами.

Между прямоугольными и полярными координатами существует соотношение, которое позволяет одни координаты заменять другими.

Примемъ начало координатъ за полюсъ и положительную сторону $0x$ оси $x^{овъ}$ за полярную ось. Тогда соединивъ точку 0 съ M (ф 27) получимъ ея полярныя координаты: $\angle MOx = \theta$ и $MO = r$. Изъ прямоугольнаго треугольника OMP находимъ:



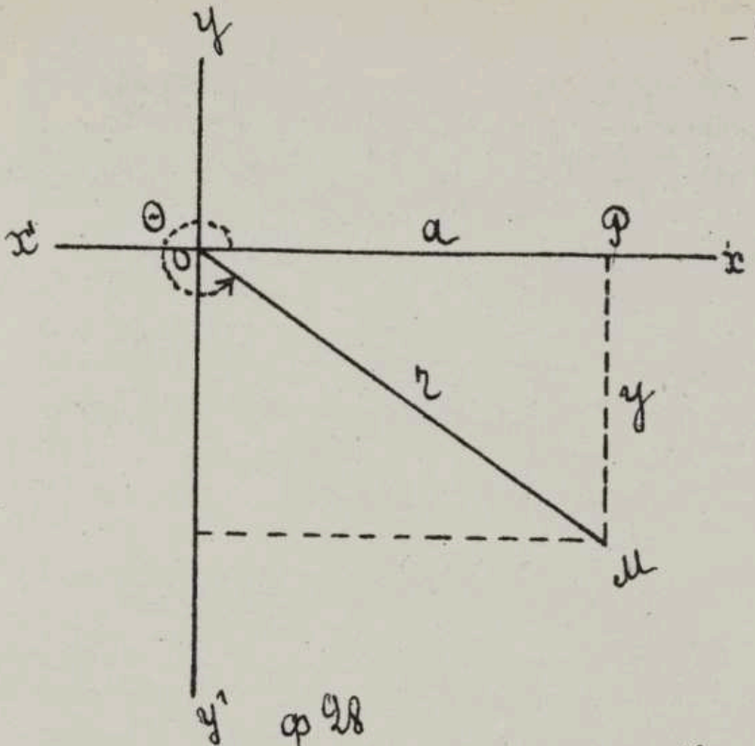
ф27

$x = r.\cos\theta$; $y = r.\sin\theta$

Возведя эти формулы въ квадратъ и сложивъ ихъ, имѣемъ: $x^2+y^2 = r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = r^2$, откуда $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ----- I

Раздѣливъ y на x получимъ $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ ---------- II

Эти двѣ формулы показываютъ соотношеніе между прямоугольными и полярными координатами и даютъ возможность одни координаты замѣнять другими. Радіусъ r принимаютъ абсолютной величиной; вслѣдствіе этого по формуламъ $x = r.\cos\theta$ и $y = r.\sin\theta$ величины $\cos\theta$ и $\sin\theta$ имѣютъ тѣ же знаки, какъ x и y. Эти знаки опредѣляютъ четвертъ, въ которой лежитъ конецъ дуги θ. Пусть точка $M(x,y)$ лежитъ теперь въ четвертой четверти, разберемъ соотношенія координатъ, опредѣляющихъ её въ прямоугольной и полярной системахъ (ф. 28). Изъ треугольника POM имѣемъ $OP = OM.\cos MOP$; $MP = OM.\sin MOP$



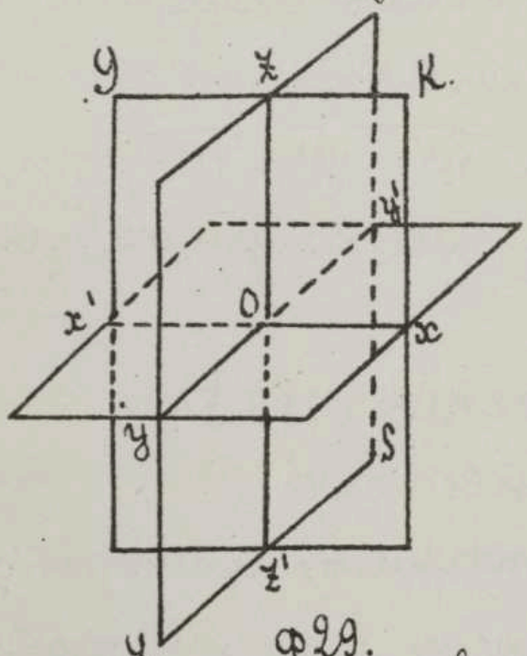
ф 28

Заметим, имеем:
$x = r.\cos(2\pi - \Theta) = r.\cos\Theta$ и
$-y = r.\sin(2\pi - \Theta) = -r.\sin\Theta$; откуда $y = r.\sin\Theta$. Возводя в квадрат полученные результаты и складывая их, имеем:
$r = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, а деля одно на другое, т.е $\frac{r.\sin\Theta}{r.\cos\Theta} = \frac{y}{x}$ мы получили $\operatorname{tg}\Theta = \frac{y}{x}$

Определение положения точки в пространстве.

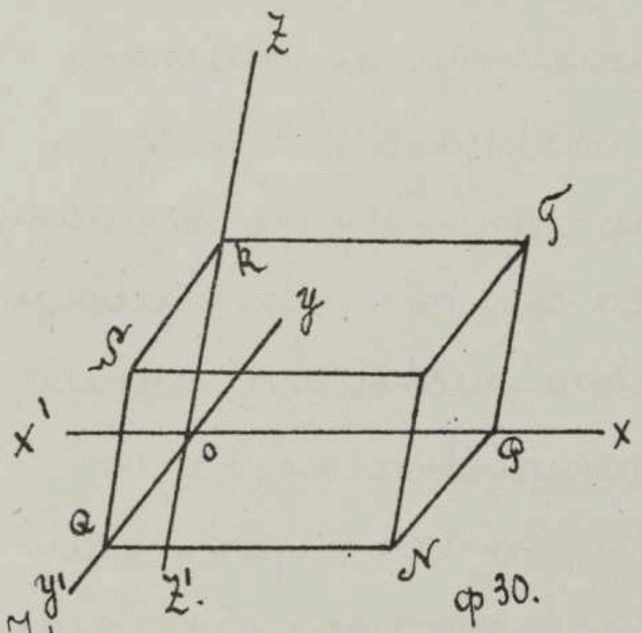
Для определения положения точки в пространстве ее относят к системе трех взаимно-пересекающихся плоскостей, имеющих одну общую точку. Эти три пересекающиеся плоскости носят название плоскостей координат, общая точка их пересечения называется началом координат, а линии их сечений – осями координат. Пары плоскости координат взаимно перпендикулярны, то они образуют так называемую систему прямоугольных или ортогональных координат; в противном случае они образуют косоугольную систему. Плоскости координат, пересекаясь, делят про-

странство на 8 частей; разберем это. Прежде всего рассмотрим плоскость xOz (ф. 29), она делит пространство на две части: переднюю и заднюю. Плоскость yOz делит пространство также на две части: правую и левую. Вместе с первою плоскостью она делит все пространство на четыре части, из которых каждую можно охарактеризовать названием, например часть, образуемую двугранным углом $Kzz'9$. — правым передним углом, $Yzz'9$ — правым задним и т. д. Третья плоскость xOx делит все пространство на 2 части верхнюю и нижнюю, а вместе с первыми двумя плоскостями — на 8 частей, из которых каждой можно дать особое название; например часть, заключаемой трехгранным углом $Oxyz$ — верхнего правого переднего угла, а заключаемой трехгранным углом $Ox'y'z'$ — нижнего левого заднего и т. д. Посмотрим, теперь как определить положение какой-либо точки M относительно этих трех плоскостей координат. Для краткости



ф29.

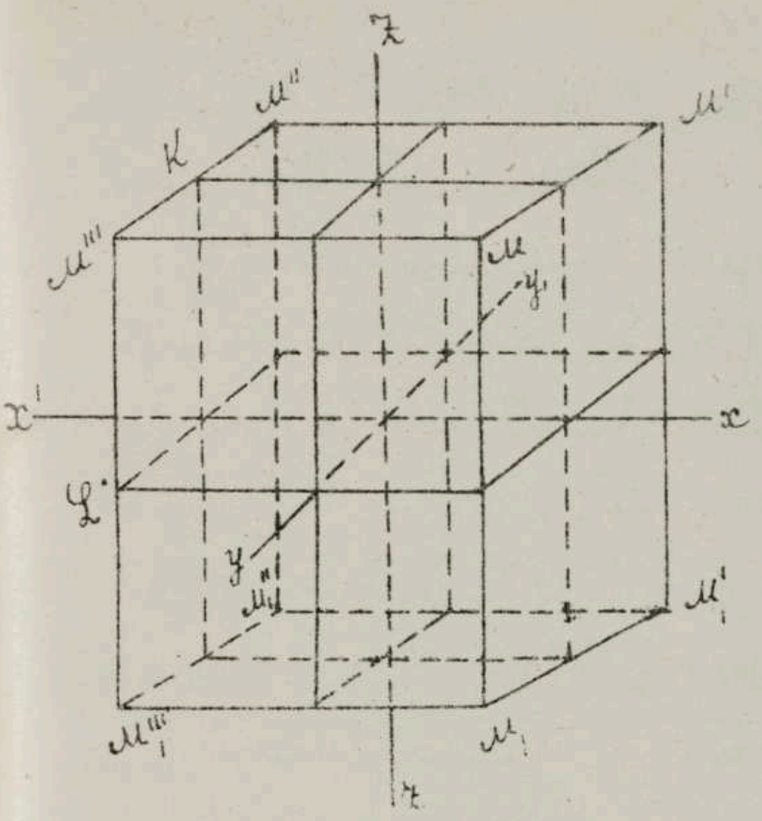
плоскости координат будем обозначать так: плоскость xoy через xy, плоскость xoz через xz, плоскость yoz через yz. Положим, что точка M находится внутри трехгранного угла oxyz. Проведем через эту точку три плоскости параллельные плоскостям координат (ф. 30). Эта три плоскости вместе с плоскостями координат ограничат так называемый параллелепипед координат, который будет наклонный, или прямоугольный, смотря по тому, к какой системе координат отнесена точка M. Проведенные нами три плоскости MP || yz, MQ || xz и MR || xy определяют на осях координатах три отрезка, считаемые от O.



ф 30.

На нашем чертеже эти отрезки суть OP OQ и OR. Очевидно, что если мы будем знать величины этих отрезков и направления, по которому каждый из них должен быть отложен на соответствующей оси, то положение точки M будет вполне определено. Действительно

отложивъ эти отрѣзки и проведя черезъ точки R, Q и P три плоскости параллельныя осямъ координатъ, мы въ пересѣченіи ихъ получимъ точку M. Направленіе отрѣзковъ обозначается посредствомъ знаковъ (+) и (−), приписываемыхъ числамъ, выражающимъ длины отрѣзковъ. При этомъ принимаютъ слѣдующія условія: число, выражающее величину отрѣзка, полученнаго на частяхъ Ox, Oy и Oz сопровождать знаками (+), а на частяхъ Ox', Oy' и Oz' — знакомъ (−). Принявъ это во вниманіе, будемъ называть буквою x алгебраическое количество, представляющее величину отрѣзка, полученнаго на оси xx' съ его знакомъ, также буквою y; алгебраическое количество, представляющее величину отрѣзка, полученнаго на оси yy' съ его знакомъ, и наконецъ буквою z — алгебраическое количество, представляющее величину отрѣзка на zz' съ его знакомъ. Тогда, очевидно, этихъ трехъ величинъ будетъ достаточно для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ. Поэтому алгебраическія количества x, y и z называются координатами точки M. На прилагаемомъ чертежѣ (фр 31) точки M, M' и M'' имѣютъ абсолютныя величины координатъ x, y и z одни и тѣ же



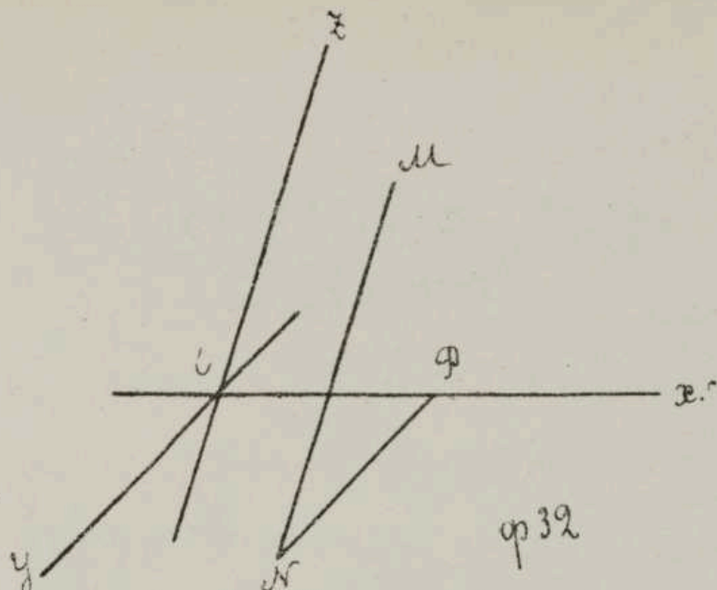
фр. 31.

абсолютная величина $x-ca=a$, $y-ka=b$ и $z-ma=c$. Положение этих точек въ пространствѣ обусловливается различіемъ знаковъ ихъ координатъ, такъ координаты точки M суть: $x=+a$; $y=+b$; $z=+c$; точки M' — $x=+a$; $y=-b$; $z=+c$; точки M'' — $x=-a$; $y=-b$; $z=+c$; точки M''' — $x=-a$; $y=+b$; $z=+c$; точки M_1 — $x=+a$; $y=+b$; $z=-c$; точки M'_1 — $x=+a$; $y=-b$; $z=-c$; точки M''_1 — $x=-a$; $y=-b$, $z=-c$; точки M'''_1 — $x=-a$; $y=+b$; $z=-c$;

Обратимъ теперь вниманіе на нѣкоторые частные случаи положенія точки въ пространствѣ.

Положимъ, что данная точка лежитъ на плоскости $x'z$, пусть это будетъ точка K; тогда ея координаты будутъ: $x=-a$; $y=0$; $z=+c$. Положимъ, что данная точка L лежитъ въ плоскости $x'y$, ея координаты: $x=-a$; $y=+b$; $z=0$; и т. д. Обратимъ еще вниманіе на тотъ случай, когда точка лежитъ въ началѣ координатъ, тогда ея координаты суть: $x=0$; $y=0$ и $z=0$. Замѣтивъ по чертежу (фр 30)

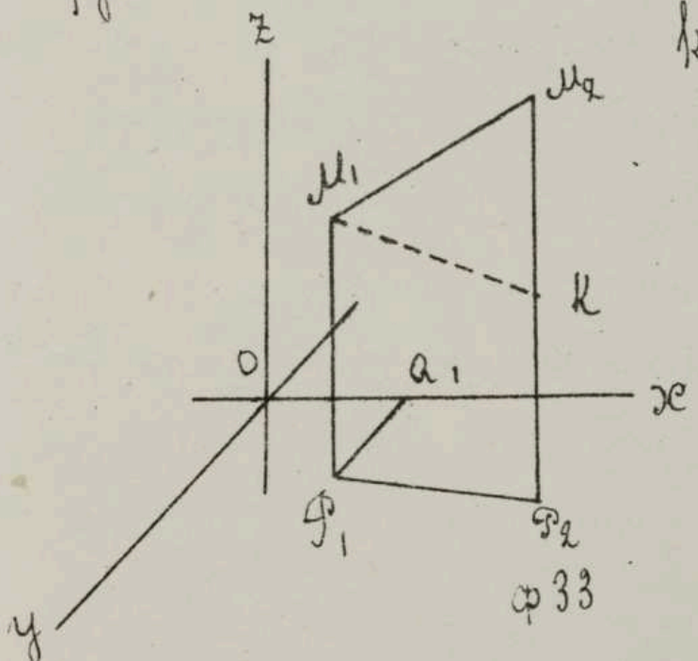
что $OP = MS = TR = NQ$, мы можем сказать, так как $x = MS$, что координата x есть расстояние точки M от плоскости yz, считаемое по направлению параллельному оси $x^{ов}$ и сопровождаемое соответствующим знаком. Подобно этому, так как $NP = OQ = RS = MT$ и $y = MT$, y есть расстояние точки M от плоскости xz, взятое по направлению, параллельному оси $y^{ов}$ с должным знаком. Наконец $MN = OR = PT = QS$ и $z = MN$; следовательно z есть расстояние точки M от плоскости xy, взятое по направлению параллельному оси $z^{ов}$ и сопровождаемое соответствующим знаком. Для построения прямолинейных координат данной точки мы должны надлежащим образом построить вышеуказанный параллелепипед. Достаточно, очевидно, построить ломаную линию, потому что три стороны этой линии представляют три координаты точки M, а именно: $OP = x$, $PN = y$ и $MN = z$. Поэтому, чтобы получить координаты данной точки M, проводят через нее (фр 32) параллель оси Oz до встречи с плоскостью xy в точке N, потом через N проводят параллель оси Oy до встречи с осью $x^{ов}$, таким образом получим три координаты: $OP = x$, $NP = y$ и $MN = z$. Обратно, всякую точку



ф32

координаты, которой даны можно построить тем же образом, откладывая последовательно три стороны ломаной линии OPNM, при чем направления этих сторон указываются знаками данных координат x, y и z.

Задача. Даны прямоугольные координаты двух точек в пространстве; найти расстояние между этими точками. Положим даны две точки M_1 и M_2; координаты точки M_1 суть: x_1, y_1 и z_1, а координаты точки M_2 суть x_2, y_2 и z_2; требуется (ф. 33) определить длину прямой M_1M_2, которую означим буквою S. Из точек M_1, M_2 опустим перпендикуляры M_1N_1 и M_2N_2 на плоскость xOy и через них представим плоскость, на которой проведем прямую $M_1K \parallel P_1P_2$. Из прямоугольного треугольника M_1KM_2 имеем:



ф33

$M_1M_2 = \sqrt{M_1K^2 + M_2K^2}$; но $M_1K = P_1P_2$, где P_1P_2 есть расстояние между точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ лежащими на плоскости xOy, а потому: $P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

Далее $M_2K = z_2 - z_1$, а $M_1M_2 = \delta$ следовательно:

$$\delta = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Эта формула определяет расстояние двух точек в пространстве для прямоугольных координат.

Заметим частный случай: если точка M_1 совпадает с началом координат O, что нетрудно положить $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, и тогда будем иметь:

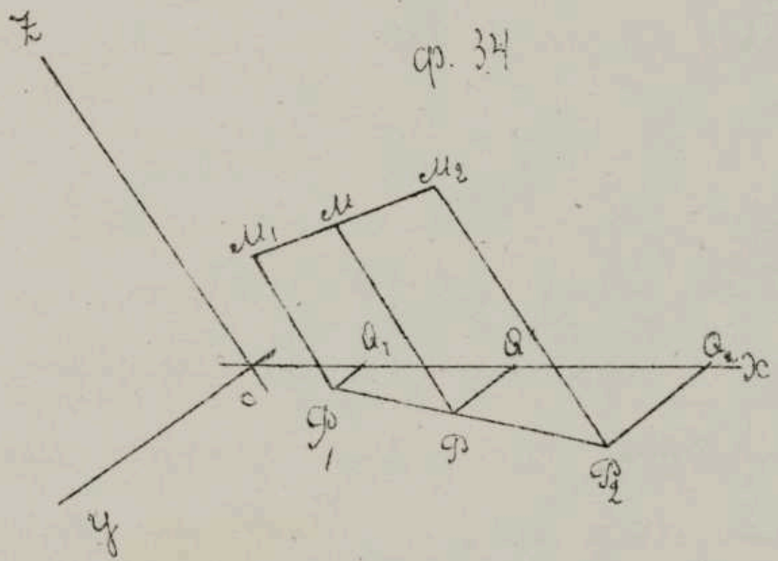
$$\delta = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

Хотя полученная формула расстояния была выведена при частном расположении данных точек, тем не менее мы можем быть уверены, что она будет общею и останется без перемены, где-бы данная точка не находилась.

Задача. Даны координаты двух точек в пространстве, найти координаты точки, делящей линию соединяющую данныя точки в отношении $m : n$

Эта задача разрешается совершенно одинаково, как при прямоугольных, так и при косоугольных координатах. Поэтому будем рассматривать косоугольныя координаты, что-бы

вывести более общее значение формулы, определяющей некоторую координату. Пусть (фр 34) координаты двух данных точек будут: $M_1(x_1\ y_1\ z_1)$ и $M_2(x_2\ y_2\ z_2)$. Возьмем косоугольные оси, построим координаты данных точек. Соединим точки M_1 и M_2 прямой линией M_1M_2. Тогда мы должны найти отношение $MM_1 : MM_2 = m:n$. Координаты точки M обозначим через (x, y, z) и выразим их через координаты данных точек. Для этого проведем через точки M_1, M и M_2 плоскости параллельные yz и определим точки Q_1, Q и Q_2, в которых они пересекаются с осью $x^{ов}$. Так как отрезки двух прямых между тремя параллельными плоскостями пропорциональны, то: $M_1M : MM_2 = P_1P : PP_2 = Q_1Q : QQ_2 = m:n$. Таким образом вопрос об отыскании $x = OQ$ приводится к разделению расстояния между двумя точками Q_1 и Q_2 на оси $x^{ов}$ в отношении $m:n$. Но эта задача была решена при определении положения точки на оси. Так как $OQ_1 = x_1$ и $OQ_2 = x_2$, то



фр. 34

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \quad \text{и} \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}.$$ Аналогично

$$\text{знаем } z = \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}.$$ Если отношение $m:n$ = куто

$x = \frac{x_1 + Kx_2}{1+K}$; $y = \frac{y_1 + Ky_2}{1+K}$ и $z = \frac{z_1 + Kz_2}{1+K}$.

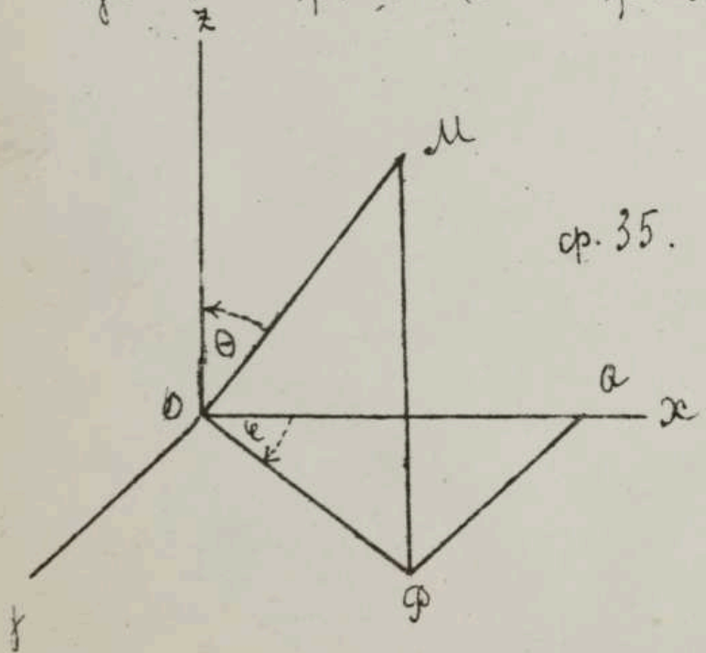
Если $m = n$, то координаты искомой точки най дутся, принимая $K = 1$:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

Эти формулы определяют координаты середины прямой, соединяющей две данныя точки.

Сферическія координаты.

Кромѣ выше разсмотрѣнной прямолинейной системы координатъ, для пространства есть еще другая система такъ называемыхъ сферическихъ координатъ. Эта система аналогична полярнымъ координатамъ на плоскости и по аналогіи называется тоже полярною. Полярныя координаты въ пространствѣ (ср 35) разсматривают обыкновенно вмѣстѣ съ прямоугольными слѣдующимъ образомъ: Возьмемъ произвольную точку M и построимъ ея прямоугольныя координаты; соединимъ M. съ O. Потомъ чрезъ



ср. 35.

OM и ось $z^{\text{ось}}$ проведемъ плоскость эта плоскость пересѣ

кает плоскость xy по прямой OP. Измерим $\angle xOP = \varphi$, служащий мерою двугранного угла, образуемого плоскостями POz и xz. Измерим также угол MOz, который обозначим через θ, наконец измерим расстояние $OM = r$. Этих трех величин φ, θ и r будет, очевидно, достаточно для определения положения точки M в пространстве и потому эти 3 величины называются полярными координатами точки M в пространстве. Угол θ считается от положительной оси z в сторону до отрицательной оси z и может получать все величины от 0 до π. Угол φ считается от положительной оси x в сторону к положительной оси y и может получать все величины от 0 до 2π. Наконец расстояние r может получать все величины от 0 до $+\infty$. Расстояние называется радиусом вектором. Угол φ называется долготою. Угол θ есть полярный угол или дополнение до широты. Широтою же называется угол $MOP = \frac{\pi}{2} - \theta$. Плоскость xy называется плоскостью экватора, а zOP — плоскость меридиана.

Соотношение между прямоугольными и полярными координатами в пространстве.

Нам надо связать уравнениями величины x, y, z

съ величинами r, φ и θ. Изъ прямоугольнаго треугольника PQO, въ которомъ $\angle OQP$ прямой, имѣемъ: $OQ = OP\cos\varphi$ и $QP = OP\sin\varphi$ или $x = OP\cos\varphi$ и $y = OP\sin\varphi$. Изъ треугольника OPM, въ которомъ $\angle OPM = \frac{\pi}{2}$, а уголъ $OMP = \theta$, такъ какъ $MP \parallel Oz$, находимъ что $OP = r\sin\theta$. Подставивъ это значеніе OP въ предыдущія уравненія, будемъ имѣть

$$x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi \quad \text{---------- I}$$

$$y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi \quad \text{---------- II}$$

Изъ того же треугольника OMP выведемъ, что

$$z = r\cdot\cos\theta \quad \text{---------- III}$$

Эти три уравненія дадутъ возможность по полярнымъ координатамъ вычислить прямолинейныя. Выведемъ теперь обратныя формулы, позволяющія сдѣлать переходъ отъ прямолинейныхъ координатъ къ полярнымъ. Возведемъ въ квадратъ и сложимъ I, II и III уравненія; получимъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta \text{ или}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\left[\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \cos^2\theta\right] = r^2,$$

такъ какъ выраженіе стоящее въ скобкахъ $= 1$, ибо $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ и мы получаемъ $\left[\sin^2\theta\cdot 1 + \cos^2\theta\right] = 1$

Такимъ образомъ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{---------- IV}$$

Такъ какъ въ полярныхъ координатахъ направ-

лемѣ опредѣляется уголъ φ и θ, а r принимается величиной абсолютной, то и корень мы принимаемъ въ ариѳметическомъ смыслѣ, не придавая ему знака. Будемъ опредѣлять теперь уголъ θ и φ и постараемся ихъ опредѣлить черезъ Тд, такъ какъ Тд точнѣе всѣхъ другихъ тригонометрическихъ величинъ опредѣляетъ уголъ. Для этого возведемъ въ квадратъ и сложимъ уравненія I и II затѣмъ извлекая корень, раздѣлимъ результатъ на уравненіе III; найдемъ:

$$x^2+y^2=r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r^2\sin^2\theta\ ;\ r\sin\theta=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{r\cdot\sin\theta}{r\cos\theta}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\ ;\ \operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\ \text{------}\ \overline{V}$$

Знакъ $\operatorname{Tg}\theta$ всегда соотвѣтствуетъ знаку z такъ какъ $\sqrt{x^2+y^2}$ самъ по себѣ величина абсолютная, что видно изъ уравненія $r\sin\theta=\sqrt{x^2+y^2}$

Дѣля уравненіе $\overline{II}^{ое}$ на $\overline{I}^{ое}$, имѣемъ:

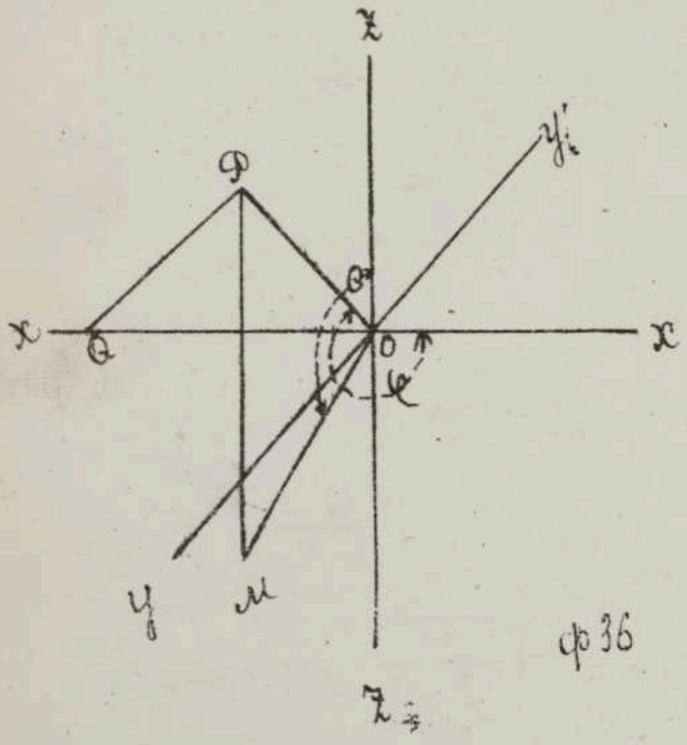
$$\frac{y}{x}=\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r\cos\varphi\cdot\sin\theta}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi\ \text{------}\ \overline{VI}$$

Окончательное значеніе φ опредѣляется знаками y и x, а именно:

$\frac{+}{+}$ $\overline{I}_r$ $\quad\frac{+}{-}$ $\overline{II}_r$ $\quad\frac{-}{-}$ $\overline{III}_r$ $\quad\frac{-}{+}$ $\overline{IV}_r$

Провѣримъ эти формулы при другомъ положеніи точки M (фиг 36). Положимъ точка M находится въ нижнемъ третьемъ углу $Ox'y'z'$. Проведемъ ея координаты

$MP = z$, $PA = y$ и $OA = x$, а также соединимъ точку M съ O, причемъ линія $OM = r$. Линія OP есть слѣдъ пересѣченія плоскости меридіанальной съ плоскостью $x'y'$. Изъ прямоугольнаго треугольника $OP.A$ имѣемъ:



ф 36

$OA = -x = OP \cos[\varphi - \pi] = OP \cos[\pi - \varphi] = -OP \cos\varphi$

$PA = -y = OP \sin[\varphi - \pi] = -OP \sin[\pi - \varphi] = -OP \sin\varphi$

Изъ треугольника POM имѣемъ

$OP = r \sin PMO$; но $\angle PMO + \theta = \pi$

такъ какъ $MP \parallel zz'$ или $\angle PMO = (\pi - \theta)$;

слѣдовательно $OP = r \sin(\pi - \theta) = r \sin\theta$

Подставляя значеніе OP въ предыдущія уравненія, имѣемъ:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

Изъ прямоугольнаго треугольника MOP имѣемъ:

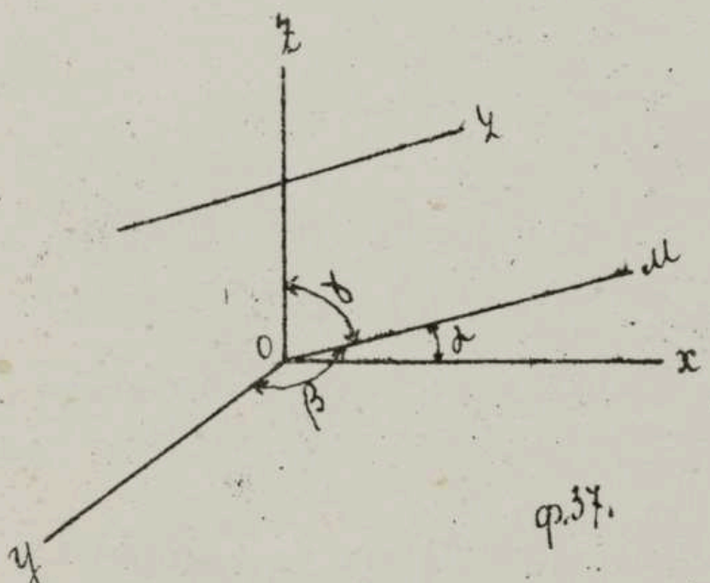
$MP = -z = r \cos OMP = r \cos(\pi - \theta) = -r \cos\theta$

Наконецъ умножая на -1, получимъ $z = r \cos\theta$

Опредѣленіе направленія линіи въ пространствѣ.

Какъ опредѣлить абсолютную величину линіи, мы уже знаемъ. Теперь постараемся опредѣлить ея направленіе относительно прямоугольныхъ осей

координат. Проведем из начала координат линию ОМ параллельно (ср 37) данной линии L и обозначим углы, образованные этой линией с осями, через α, β, γ. Совокупность этих трех углов определит направление прямой точно и единственно. Между тем совокупность двух из них может дать два решения.



ф.37.

В самом деле, если представить себе конус с осью по линии Ox, вершиною в O и образующею OM, то образующая его представит геометрическое место линий, образующихся с осью Ox угол α. Если вообразить себе еще другой конус на оси OY с той же образующей OM, то будем иметь геометрическое место линий образующихся с осью Y-ов угол β. Эти конусы вообще могут пересекаться по двум образующим и только в частном случае коснутся, в первом случае будем иметь два решения, а во втором одно. Но если вообразить еще конус с осью Oz, то вопрос будет решен вполне определенно, ибо 3 конуса могут пересекаться только по одной общей образующей. Итак мы знаем, что

совокупность углов α, β и γ дает вполне определенное решение вопроса. Но между этими углами существует связь, для вывода которой обратимся к методу проекций. Спроектируем точку M на оси координат и получим координаты x, y, z точки M. Обозначив длину отрезка OM через r, будем иметь:

$$x = r \cdot \cos\alpha$$
$$y = r \cdot \cos\beta$$
$$z = r \cos\gamma$$

возведя их в квадраты и сложив, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

Но раньше мы уже видели, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, а потому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Это и есть формула связывающая углы, образованные прямой с осями координат. Если известны углы α и β, то γ находится по формуле: $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

Эта формула дает два значения γ. Нужно дополнительное указание о направлении прямой для того, чтобы определение угла оказалось единственным. Иногда вместо косинусов известны только величины им пропорциональные. В этом случае определение углов примет следующий вид: положим $a : b : c = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ или $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = k$

Составляя от этой пропорции производную, имеем:

$$k^2 = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

откуда $k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Затем находим

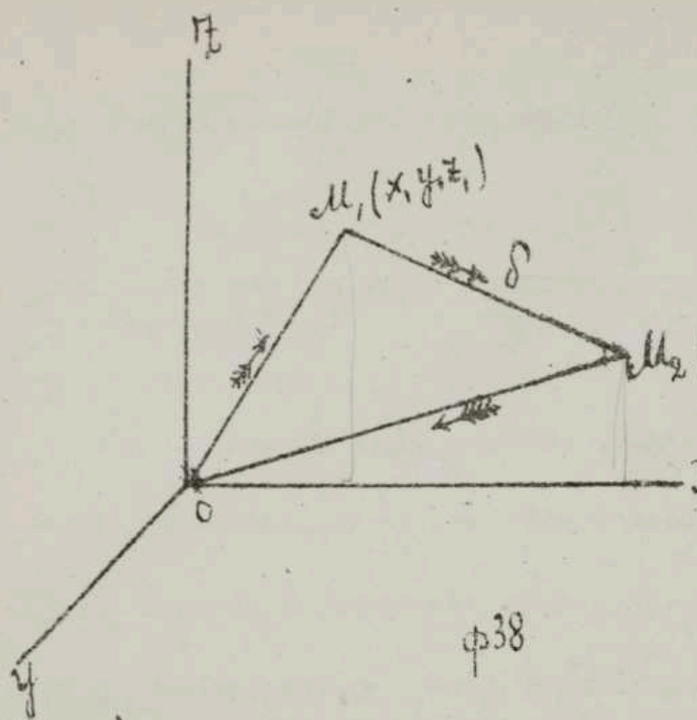
$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\quad \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Так как выражение k имеет два знака, то и косинусы углов α, β и γ имеют двойные знаки при чем одна система знаков соответствует направлению данной прямой в одну сторону, а другая система обратному направлению той-же прямой. Этой двойственности знаков можно избежать, выводя выражения косинусов при других условиях, а именно: определяя направление прямой по координатам двух ея точек. Соединим точки M_1 и M_2 с O (фиг 38) и спроектируем замкнутый контур ломаной OM_1M_2O на координатные оси. Тогда получим:

$$x_1 + \delta\cdot\cos\alpha - x_2 = 0 \quad \text{---------- на ось } Ox$$
$$y_1 + \delta\cdot\cos\beta - y_2 = 0 \quad \text{---------- на ось } Oy$$
$$z_1 + \delta\cos\gamma - z_2 = 0 \quad \text{---------- на ось } Oz$$

Отсюда: $\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{\delta}$; $\cos\beta = \frac{y_2-y_1}{\delta}$; $\cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{\delta}$

Здесь δ есть абсолютная величина отрезка M_1M_2, а потому знаки косинусов зависят только от разностей числителей. Мы видим, что вычитаемыми

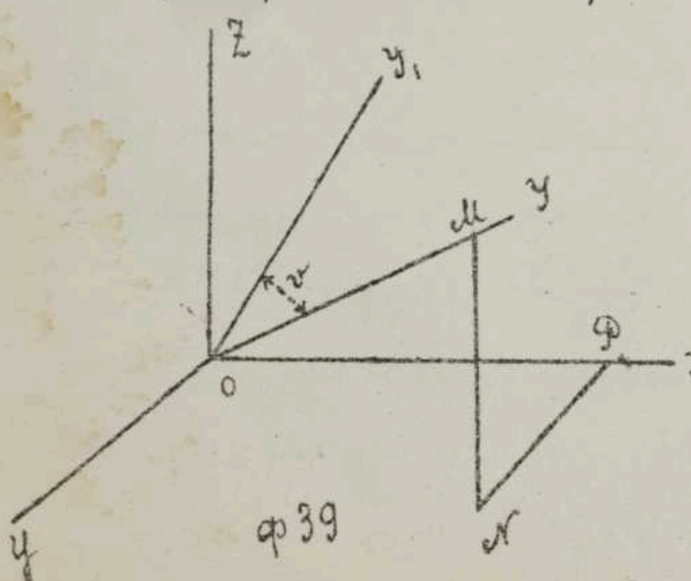


ф38

разностей берутся координаты первой точки, т.е. той, от которой отмечается направление.

Угол двух прямых в пространстве.

Оси координат опять полагаем прямоугольными. Положим, что первая прямая делает с осями углы α, β и γ, а вторая прямая углы α_1, β_1 и γ_1. Угол между двумя прямыми обозначим через V - его требуется найти. Чтобы построить этот угол, мы через начало координат проведем две прямые параллельные двум данным прямым: OY параллельно первой прямой, и OY_1 параллельно второй. Тогда будем иметь $\angle YOY_1 = V$. Прямая OY делает с осью $x^{ов}$ угол α, а с осями $y^{ов}$ и $z^{ов}$ углы β и γ. Прямая OY_1 делает с теми-же осями углы α_1, β_1 и γ_1 (ф39). Возьмем на прямой OY произвольную точку M и пусть ее координаты будут (x, y, z)



ф39

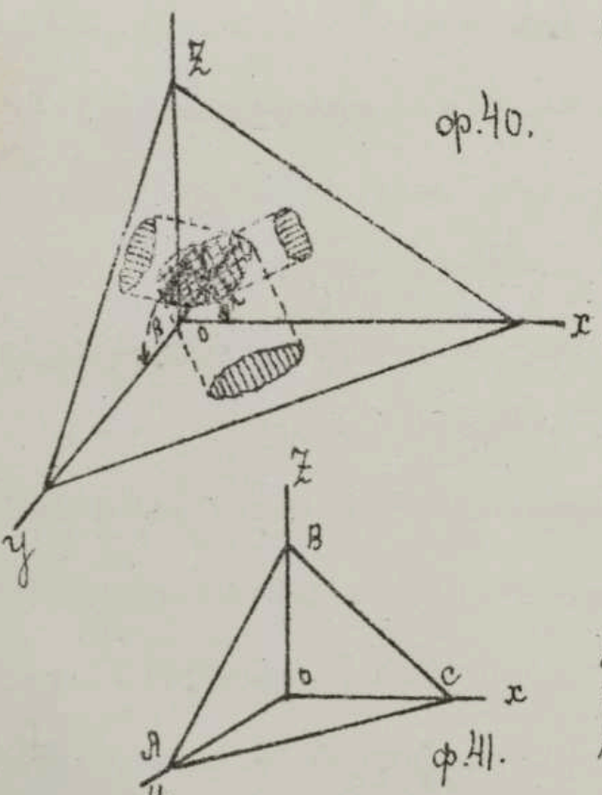
а радіусъ векторъ $OM=r$. Построимъ указанныя координаты. Разсмотримъ затѣмъ несамкнутый контуръ $OPNM$, съ его замыкающей стороной OM и возьмемъ сумму проекцій сторонъ этого контура на какую нибудь ось. Тогда будемъ имѣть: $пр OP + пр PN + пр NM = пр OM$. За ось проекцій примемъ прямую OY_1, тогда предыдущее равенство будетъ очевидно: $x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 = r\cos\nu$.

Но сверхъ того мы знаемъ, что x, y, z, могутъ быть разсматриваемы, какъ проекціи радіуса-вектора r на оси координатъ; на этомъ основаніи мы можемъ написать: $x = r\cdot\cos\alpha$; $y = r\cdot\cos\beta$; $z = r\cos\gamma$. Вставивъ эти формулы въ предыдущее равенство, получимъ: $\cos\nu = \cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1$, т. е. Косинусъ угла между двумя прямыми = суммѣ произведеній косинусовъ угловъ, образуемыхъ этими прямыми съ тремя осями координатъ. Замѣтимъ частный случай выведенной формулы. Если двѣ данныя прямыя взаимно перпендикулярны то $\nu = \frac{\pi}{2}$ и слѣдовательно въ этомъ случаѣ имѣемъ: $\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0$. Это равенство выражаетъ условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ въ пространствѣ.

Соотношеніе между площадью и проекціями ея на трехъ прямоугольныхъ плоскостяхъ координатъ

Пусть въ пространствѣ дана нѣкоторая площадь S. Проектируемъ ее на три взаимно перпендикулярныя плоскости координатъ. Положимъ, что ея проекція на плоскость yz есть S_x. Если α есть уголъ образуемый плоскостью S

с плоскостью yz, то будем умать: $S_x = S \cdot \cos\alpha$. Точно также проекция той же плоскости на плоскость xz будет S_y и если β есть угол, двугранный данной плоскостью с плоскостью xz, то будем иметь: $S_y = S \cdot \cos\beta$. Наконец пусть проекция S на плоскость xy есть S_z и γ угол, двугранный плоскостью S с плоскостью xy; тогда: $S_z = S \cdot \cos\gamma$. Через начало координат проведем прямую линию перпендикулярную к плоскости S. Эта прямая будет делать



ф.40.

соответственно с осями координат углы α, β, γ, на том основании, что угол между двумя прямыми равен углу между плоскостями к ним перпендикулярными (ф.40). Взаимные этого получаем: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Сложив квадраты предыдущих равенств, получим $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$ Так что будем иметь $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$ т.е. квадрат числа представляющего площадь

ф.41.

в пространстве, равняется сумме квадратов чисел выражающих проекции той же площади на 3 координатных плоскостях. Доказанное нами соотношение площадей можно рассматривать в частном случае, как распространение теоремы Пифагора. Возьмем (ф.41) прямой трехгранный угол $OXYZ$ и проведем произвольную плоскость пересекающую грани его. Получим четырехгранник $OABC$. В нем площадь грани противолежащей прямому углу обозначим через S. Очевидно, что три грани сходящиеся в вершине O, будут проекциями этой площади на 3 плоскости xy, yz и xz и следовательно будем иметь по выше указанному $(AOC)^2 + (BOC)^2 + (AOB)^2 = S^2$

О геометрическихъ мѣстахъ.

Геометрическимъ мѣстомъ называется совокупность безчисленнаго множества точекъ, удовлетворяющихъ данному и вполнѣ опредѣленному геометрическому условію. Такимъ геометрическимъ мѣстомъ безчисленнаго множества точекъ часто бываетъ непрерывная линія, при чемъ каждая точка этой линіи удовлетворяетъ требуемому условію, всякая-же другая точка не лежащая на этой линіи, не будетъ удовлетворять тому же геометрическому условію.

Напримѣръ: I. Геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ на плоскости, есть перпендикуляръ, возставленный изъ средины прямой соединяющей данныя точки.

II. Геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ прямоугольныхъ треугольниковъ, построенныхъ на общей гипотенузѣ, есть окружность, описанная надданной гипотенузѣ, какъ на діаметръ.

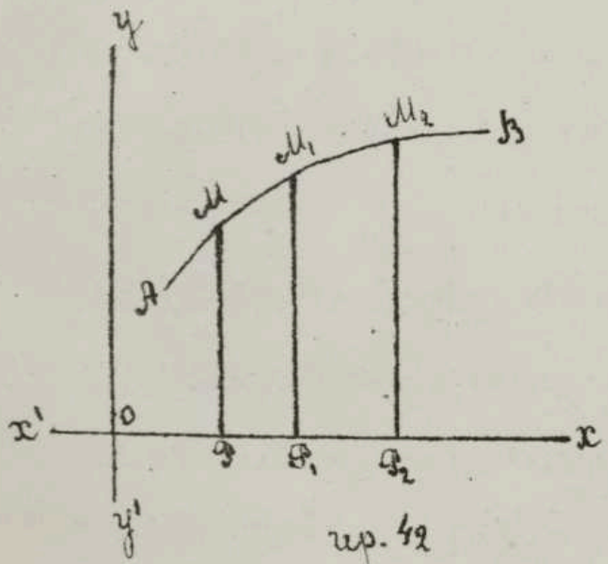
Выраженіе линій уравненіями.

Въ аналитической геометріи разсматриваются только тѣ линіи, которыя представляютъ опредѣленныя геометрическія мѣста точекъ. Линія-же, напер-

чения на плоскости произвольно, не составляют предмета исследований аналитической геометрии.

Из основного способа представления точки координатами легко выводится способ алгебраического выражения непрерывной линии. Для возможности выражения нужно только, чтобы линия была определенная, представляющая так называемое геометрическое место точек, т. е. последовательность точек, удовлетворяющих некоторому определенному условию.

Положим, что некоторая кривая линия AB (гр. 42), заданная, как геометрическое место, отнесена к двум неподвижным осям координат. Это значит, что кривая занимает относительно этих двух осей совершенно определенное и нам известное положение. Тогда каждая точка данной кривой будет иметь свои определенные координаты. Напр. координаты точки M_1 будут $OP_1 = x_1$ и $P_1M_1 = y_1$, координаты M_2 будут $OP_2 = x_2$ и $P_2M_2 = y_2$ и т. д.



гр. 42

Вообразим теперь, что некоторая неопределенная, или, как говорят, текущая точка движется на плоскости, описывая своим движением кривую AB,

переходя поэтому, между прочимъ, намѣченныя точки $M_1, M_2 \ldots$. Координаты точки M, или такъ называемыя текущія координаты x и y будутъ при этомъ измѣняться. Очевидно, это измѣненіе координатъ должно быть такимъ, что всякому опредѣленному значенію x соотвѣтствуетъ одно или нѣсколько опредѣленныхъ значеній y и наоборотъ, т. е. обѣ координаты должны находиться въ опредѣленной взаимной зависимости. Такъ какъ всякая опредѣленная зависимость между двумя перемѣнными должна выражаться нѣкоторымъ уравненіемъ между ними, то значитъ должно существовать уравненіе между x и y, соотвѣтствующее кривой AB. Въ это уравненіе входятъ текущія координаты произвольной точки кривой и должны входить еще нѣкоторыя постоянныя величины, такъ называемые **параметры** уравненія, зависящія отъ формы кривой и ея расположенія относительно осей координатъ. Такое уравненіе, связывающее текущія координаты при посредствѣ параметровъ, называется уравненіемъ кривой линіи. Итакъ, мы видѣли, что всякой кривой, заданной, какъ геометрическое мѣсто точекъ, соотвѣтствуетъ нѣкоторое уравненіе между двумя координатами произвольной изъ этихъ точекъ.

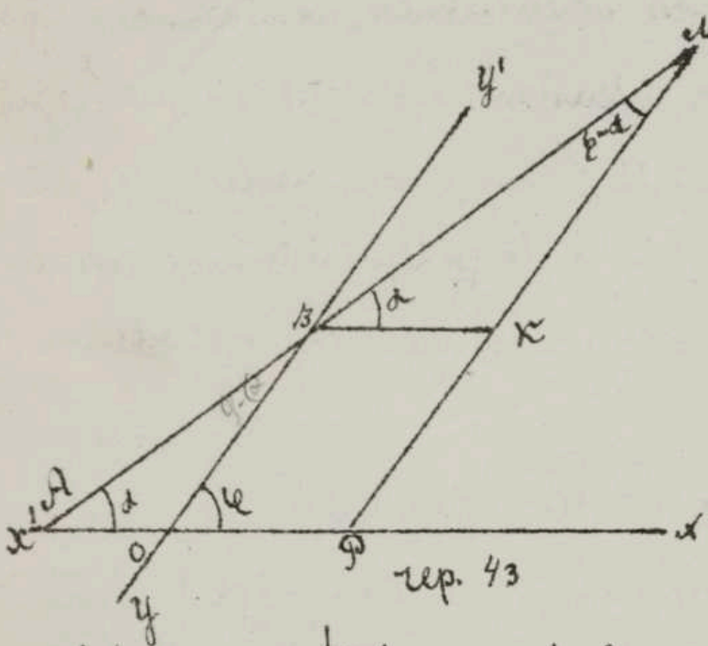
После этого возникает вопрос: как можно составлять на дому уравнения геометрических мест? Легко понять, что решение такого вопроса не может подчиняться какому либо совершенно определенному, общему правилу. Условия, как те, которые определяют форму геометрических мест, так и те, которые показывают расположение их относительно выбранных осей координат, могут быть чрезвычайно разнообразны и в зависимости от этого разнообразия путь составления уравнения кривой может быть более или менее длинен и труден. Можно сделать только общие характера указания, как следует направлять работу мысли при составлении требуемого уравнения. Для того, чтобы вывести уравнение геометрического места, нужно взять какую-нибудь произвольную из точек этой кривой, построить координаты взятой точки и выразить посредством одного или нескольких равенств, то геометрическое свойство, которое принадлежит всем точкам кривой и служит определением ей, как геометрического места. При этом необходимо заботиться, чтобы в равенства вошли обе текущие координаты и данные параметры. Если условие, определяющее кривую, выражается одним уравнением, содержащим обе координаты и данные параметры, то такое уравнение

и будетъ искомымъ. Если же получится нѣсколько уравненій, въ которыхъ кромѣ указанныхъ величинъ будутъ входить какія либо посредствующія перемѣнныя, то искомое уравненіе получится какъ результатъ исключенія всѣхъ этихъ посредствующихся перемѣнныхъ.

Уравненіе безконечной прямой.

Положимъ, что разсматривается геометрическое мѣсто точекъ, расположенныхъ на нѣкоторой прямой. Этимъ условіемъ опредѣляется форма геометрическаго мѣста точекъ. Нужно еще другое условіе, которое опредѣлило-бы положеніе нашего геометрическаго мѣста относительно осей координатъ. Примемъ для этого, что прямая наклонена къ оси абсциссъ подъ угломъ α и пересѣкаетъ ось ординатъ въ данной точкѣ B на разстояніи b отъ начала координатъ. Сказаннымъ вполнѣ опредѣляется условіе вопроса. Величины α и b будутъ постоянными параметрами.

Возьмемъ на прямой AB произвольную текущую точку M, построимъ ея координаты MP и OP и постараемся изъ чертежа (чер 4.) вывести какое либо равенство, въ которое какъ либо кромѣ текущихъ координатъ и параметры. Если проведемъ параллельно оси x прямую BK до встрѣчи съ ординатой



чер. 43

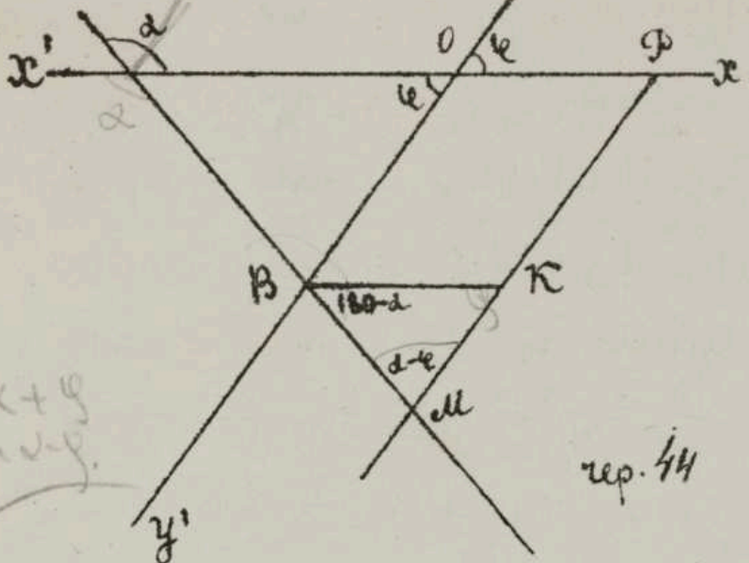
что получим треугольник BMK, в котором BK = x KM = y - b и ∠ KBM = α, а ∠ BMK = φ - α, где φ есть угол между осями координат. Из треугольника BKM имеем: MK : BK = sin α : sin(φ - α) или (y - b) : x = sin α : sin(φ - α)

откуда $y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}x + b$. Это и есть уравнение прямой. Обозначим $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$ через K, где K для данного направления прямой есть постоянная величина, зависящая только от α и называемая угловым параметром, а b называется линейным параметром. Таким образом уравнение прямой мы будем иметь в таком виде:

$$y = Kx + b$$

Найденное нами соотношение существует во всякой прямоугольной системе координат для координат x и y всякой точки прямой. Заметим, что при составлении уравнения прямой мы брали α < φ и откладывали b положительным. Но уравнение прямой получается одно и то же при каком угодно α и всяком b. Допустим, что $b = -OB$ откуда $OB = -b$ (чер. 44). Взяв произвольную точку M, построим ее координаты x и y. Делая построение, подобное предыдущему,

гль треугольника BMK имеем: $MK : BK = \sin MBK : \sin BMK$.



чер. 44

Но $BK = x$; $MK = MP - KP = -y - (-b) =$
$= y + b$; $\sin MBK = \sin(180 - \alpha) =$
$= \sin\alpha$; $\sin BMK = \sin(\alpha - \varphi)$
Отсюда, взяв абсолютные величины положительными количествами, имеем:

$$-(y-b) : x = \sin\alpha : \sin(\alpha - \varphi) = -K$$

Так как $\sin(\alpha - \varphi) = -\sin(\varphi - \alpha)$ и $\frac{\sin\alpha}{-\sin(\varphi - \alpha)} = -K$, то имеем $-(y-b) : x = -K$ или $y = Kx + b$ т.е мы получили уравнение такого же вида, какой был обнаружен раньше.

Заметим некоторые частные случаи I.) Если прямая проходит через начало координат, то для нея отрезок $b = 0$ и ея уравнение обратится в $y = Kx$.

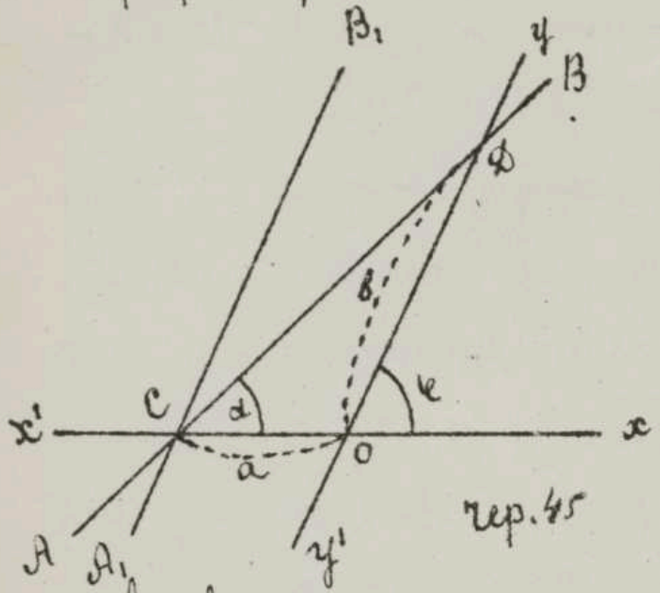
II.) Если прямая параллельна оси абсцисс, то для нея $\alpha = 0$, а следовательно угловой параметр тоже равен 0, почему уравнение будет $y = b$.

Или прямая совпадает с осью x ^{oo}, тогда и K обращается в 0 уравнение будет $y = 0$. Это есть уравнение оси абсцисс.

V.) Чтобы получить уравнение линии параллельной оси y ^{ob}, надо с уравнением $y = Kx + b$ сделать сначала некоторое преобразование. При непосредственной подстановке в уравнение условия $\alpha = \varphi$ имеем неопределенность $K = \frac{\sin\varphi}{0} = \infty$.

Положим, что AB (чер 45) при непрерывном вра-

гуется около неподвижной точки C примет въ положеніе A_1B_1, параллельное оси yъ тогда разстоянія всѣхъ точекъ A_1B_1 отъ yy' будутъ одинаковы и пусть оно равно количеству a. Изъ треугольника OCD имѣемъ: $\frac{OD}{CO} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = K$, но $\frac{OD}{OC} = \frac{b}{-a}$ и слѣдовательно $\frac{b}{-a} = K$ или $b = -aK$. Подставивъ значеніе b въ уравненіе $y = Kx + b$, имѣемъ $y = Kx - aK$ или $\frac{y}{K} = x - a$. Это равенство существуетъ при всѣхъ положеніяхъ линіи AB, при ея вращеніи около C. Въ предѣлѣ, т.е. когда $\sin K = 0$, то $\sin\frac{y}{K} = 0$ и уравненіе обращается въ $x - a = 0$ или $x = a$, что и есть уравненіе линіи параллельной оси yъ.



чер. 45

V.) Для оси ординатъ $a = 0$ и уравненіе ея будетъ $x = 0$. Если прямая отнесена къ прямоугольнымъ координатамъ, то $\varphi = 90°$, и въ этомъ случаѣ угловой параметръ прямой будетъ:

$$K = \frac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{Tg}\alpha$$

Итакъ, при прямоугольныхъ координатахъ угловой параметръ прямой выражается тангенсомъ угла наклоненія прямой къ оси xъ такъ, что уравненіе прямой сохраняетъ прежній видъ $y = Kx + b$ и будетъ

$y = \operatorname{Tg}\alpha x + b$

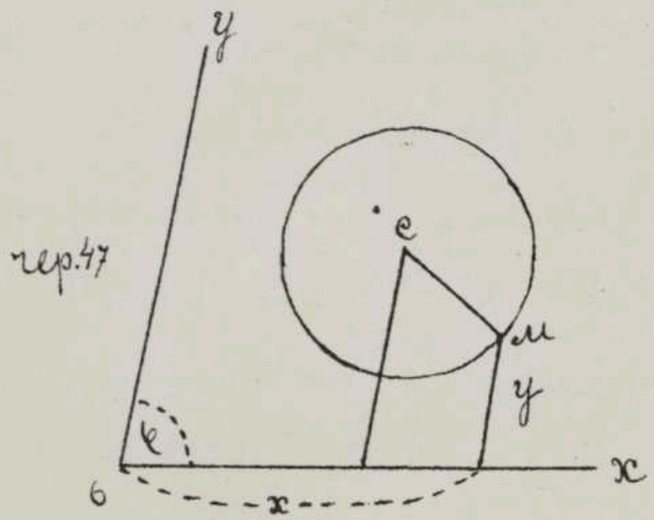
Частные случаи: 1) Прямая проходит через начало координат; для нея отрезокъ $b=0$ и ея уравнение будетъ $y = \operatorname{Tg}\alpha x$; а) если прямая, проходя через начало координатъ, дѣлаетъ съ осью $\overset{ов}{X}$ уголъ въ $45°$, то $\operatorname{tg} 45° = 1$ и уравнение прямой будетъ $y = x$ (чер 46)

в) если прямая, проходя через начало координатъ, дѣлаетъ съ осью $\overset{ов}{X}$ уголъ въ $135° = 180° - 45°$ то $\operatorname{Tg}(180°-45°) = -\operatorname{Tg} 45° = -1$ и уравнение прямой въ такомъ случаѣ будетъ $y = -x$

Уравнение окружности.

Окружность опредѣляется, какъ геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ одной точки, называемой центромъ. Руководствуясь этимъ опредѣленіемъ, легко составить уравнение окружности. Начертимъ окружность и отнесемъ ее къ косоугольной системѣ координатъ. Положеніе окружности будетъ вполнѣ опредѣлено относительно данной системы координатъ, если знаемъ радіусъ окружности и положеніе центра, т. е. его координаты, а потому обозначимъ радіусъ окружности через r и координаты центра окружности C через α и β.

Составить уравнение линии значить выразить аналитическую зависимость между данными величинами и текущими координатами произвольной точки линии, а потому берем какую нибудь точку M (чер47)



чер.47

на окружности и означим ея координаты буквами x и y. Точку M соединим с C. На основании определения окружности длина CM постоянна, где-бы мы не взяли точку M на окружности и равна r. Выражая величину r, как расстояние между двумя точками C и M, мы по известной нам формуле имеем:

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\varphi \quad \text{------(a)}$$

это и есть уравнение окружности в самом общем виде. Если-бы мы захотели вывести уравнение окружности при ортогональной системе координат, то нам пришлось-бы координатный угол φ положить равным 90° и тогда уравнение окружности приняло-бы следующий вид

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \quad \text{------(b)}$$

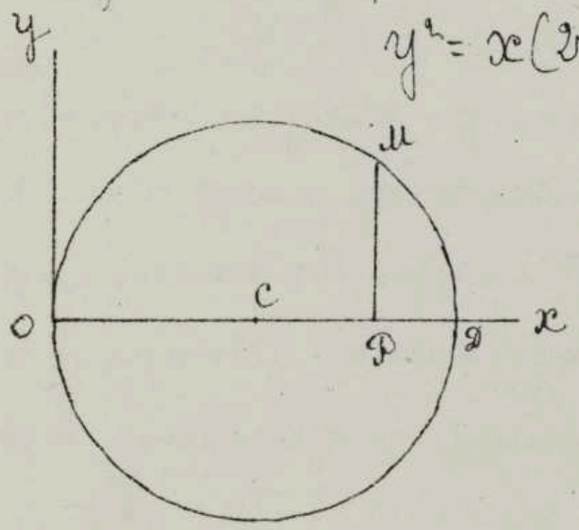
Рассмотрим теперь, как изменится уравнение окружности в зависимости от изменения ея

расположенія относительно ортогональныхъ осей координатъ. 1) Центръ окружности находится на оси x-овъ, а сама окружность (чер.48) проходитъ черезъ начало координатъ; въ такомъ случаѣ координаты центра будутъ $\alpha = r$, а $\beta = 0$ и уравненіе (6) приметъ видъ:

$$r^2 = (x - r)^2 + y \quad \text{или} \quad y^2 = 2rx - x^2$$

Это уравненіе можно представить еще въ такомъ видѣ, взявъ во второй части x за скобки:

$$y^2 = x(2r - x)$$



чер. 48

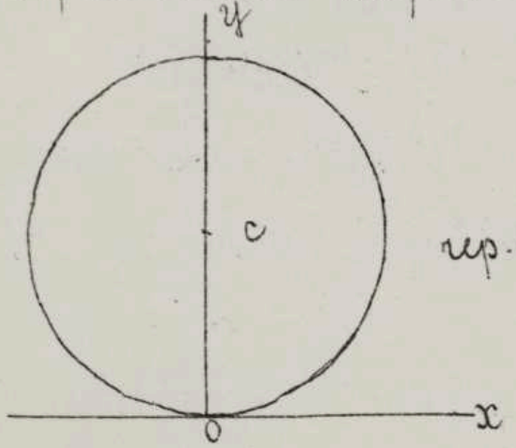
Если возьмемъ какую нибудь точку M на окружности (чер 48) и опустимъ перпендикуляръ MP на ось x-овъ, то найдемъ, что $y = MP$, $x = OP$ и $2r - x = PD$, поэтому предъидущее равенство приметъ видъ:

$$MP^2 = OP \cdot PD \quad \text{или}$$

$OP : MP = MP : PD$, т.е. перпендикуляръ, опущенный изъ какой нибудь точки окружности на діаметръ есть средняя пропорціональная между отрѣзками этого діаметра. Слѣдовательно предъидущее уравненіе $y^2 = 2rx - x^2$ мы могли-бы вывести непосредственно изъ чертежа при помощи только что доказан-

ной теоремы, извѣстной намъ еще изъ курса элементарной геометріи.

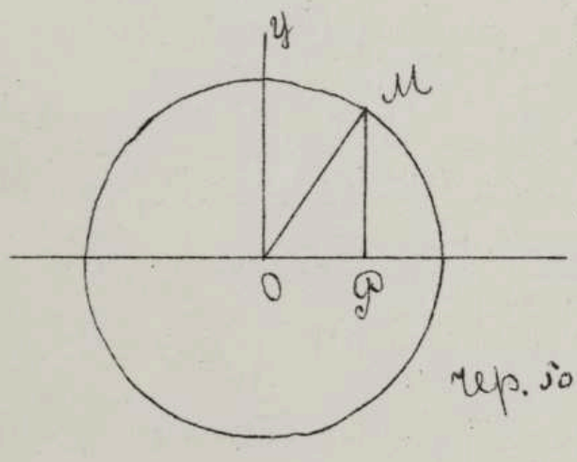
2) Центръ окружности находится на оси Oy а сама окружность (чер 49) проходитъ черезъ начало координатъ; въ этомъ случаѣ координаты центра будутъ: $\alpha = 0$ и $\beta = r$ и уравненіе окружности приметъ видъ:



чер. 49

$$r^2 = x^2 + (y - r)^2, \text{ или}$$
$$x^2 + y^2 = 2ry$$

3) Центръ окружности совпадаетъ съ началомъ координатъ; въ этомъ случаѣ координаты центра α и β равны 0 и уравненіе будетъ въ такомъ видѣ:



чер. 50

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Это самое простое уравненіе окружности; оно могло-бы быть также выведено непосредственно изъ чертежа 50-го.

Парабола.

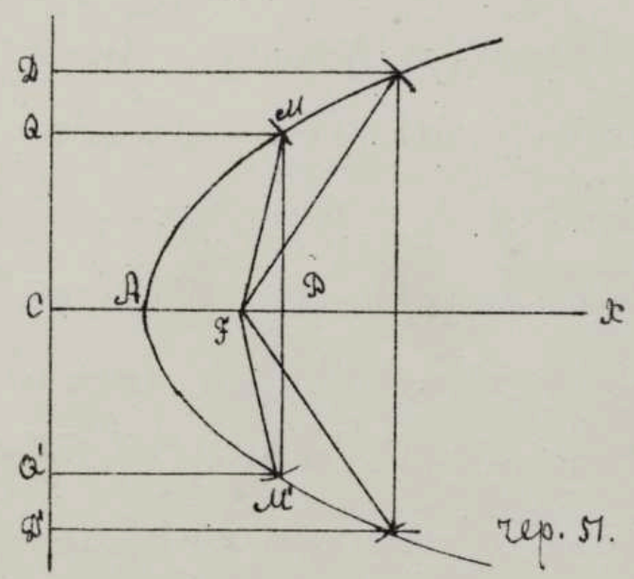
Параболой называется геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ постоянной точки и постоян-

ной прямой, непроходящей через эту точку. Постоянная точка называется фокусом параболы, постоянная прямая называется ее направляющей или директриссой, а расстояние какой нибудь точки параболы дося фокуса называется радиусом-вектором.

На основании определения параболы можно ее начертить двояким образом: по точкам и непрерывным движением; разберем это.

Построение параболы по точкам.

Пусть F (чер. 51) есть данный фокус параболы, а прямая DD' есть данная направляющая. Проведем через фокус линию Cx, перпендикулярную к направлению DD'; разделим расстояние CF пополам в точке A, мы знаем, что эта точка принадлежит параболе, так как ее расстояние от фокуса равно расстоянию директрисы, т. е. AF = AE. Чтобы получить другие точки параболы, проведем ряд прямых линий параллельных направляющей DD' на различных рас-

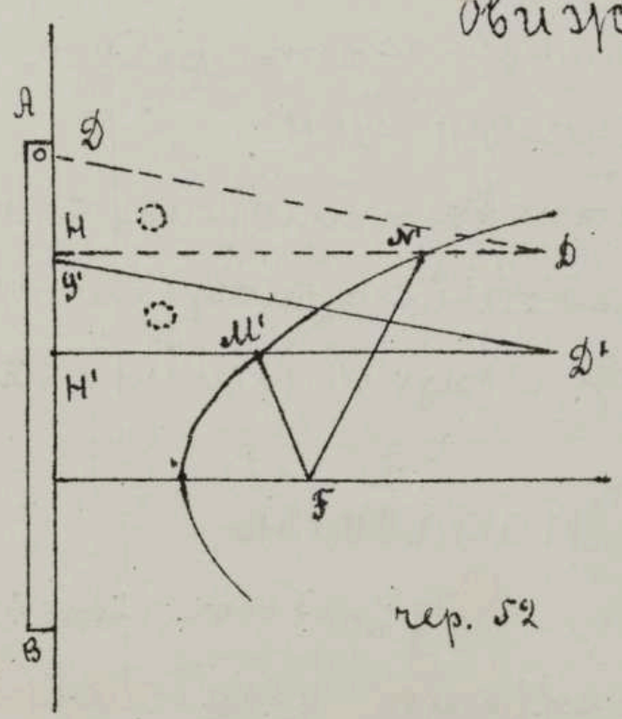


чер. 51.

стоящих большихъ AC. Пусть MM' есть одно изъ такихъ прямыхъ, пересѣкающая линію Cx въ точкѣ P. Изъ точки F, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ CP опишемъ окружность. Эта окружность пересѣчетъ нашу прямую въ двухъ точкахъ M' и M, которыя будутъ очевидно точками параболы. Въ самомъ дѣлѣ опустимъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры QM и Q'M' на направляющую DD'; мы видимъ изъ чертежа, что разстоянія каждой изъ нихъ отъ фокуса F, т.е. MF и M'F равны CP = MQ = M'Q' т.е. равны разстоянію ихъ отъ направляющей. Повторяя тоже построеніе для каждой изъ прямыхъ параллельныхъ DD', мы на каждой изъ нихъ опредѣлимъ двѣ точки параболы. Соединивъ затѣмъ всѣ точки непрерывной кривой, мы получимъ приближенное черченіе параболы. Парабола будетъ состоять, очевидно, изъ одной непрерывной вѣтви MAM' простирающейся до безконечности, такъ какъ на всякой параллели направляющей DD', хотя-бы и чрезвычайно удаленной отъ нея всегда можно найти построеніемъ двѣ точки, принадлежащія параболѣ. Не трудно усмотрѣть, что прямая Cx будетъ ось параболы. Дѣйствительно изъ треугольниковъ MFP и M'FP видно, что MP = M'P и, слѣдовательно, двѣ точки параболы находящіяся на одной изъ

параллелей направляющей DD' и расположены симметрично относительно Cx, которая поэтому есть ось параболы. Точка A, в которой ось Cx встречает кривую, есть вершина параболы. Фигура параболы т.е. большее или меньшее отверстие, представляемое двумя ее половинами AM и AM', соединяющимися в точке A, зависит от расстояния фокуса от направляющей: чем меньше это расстояние, тем меньше расходятся две половины параболы и чем больше это расстояние, тем больше отверстие, образуемое кривой. Расстояние это обозначается, обыкновенно, буквою p, так, что CF = p и называется главным параметром параболы.

Построение параболы непрерывным движением.



чер. 52

Параболу можно также построить непрерывным движением. Пусть AB (чер. 52) будет направляющая, а F фокус параболы. Приложим ребро линейки к направляющей AB и укрепим неподвижно в этом положении.

Къ ребру линейки приложимъ прямоугольный треугольникъ, катетъ котораго DM можетъ свободно скользить по линейкѣ. Возьмемъ нить, длина которой была-бы равна другому катету DM и одинъ конецъ этой нити укрѣпимъ неподвижно въ точкѣ F, другой же конецъ прикрѣпимъ къ вершинѣ D треугольника. Перемѣщая катетъ треугольникъ по линейкѣ, будемъ натягивать нить помощью карандаша, прижимая остріе карандаша къ катету DM. Остріе будетъ, очевидно, описывать дугу параболы. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ треугольникъ въ какомъ-нибудь его положеніи, напримѣръ, въ положеніи $M'D'd'$; тогда нить примѣтъ форму $D'M'F$ и остріе карандаша натягивающее её будетъ находиться въ точкѣ M'. Легко видѣть, что точка M' принадлежитъ параболѣ, такъ какъ ея разстоянія отъ направляющей и отъ фокуса равны

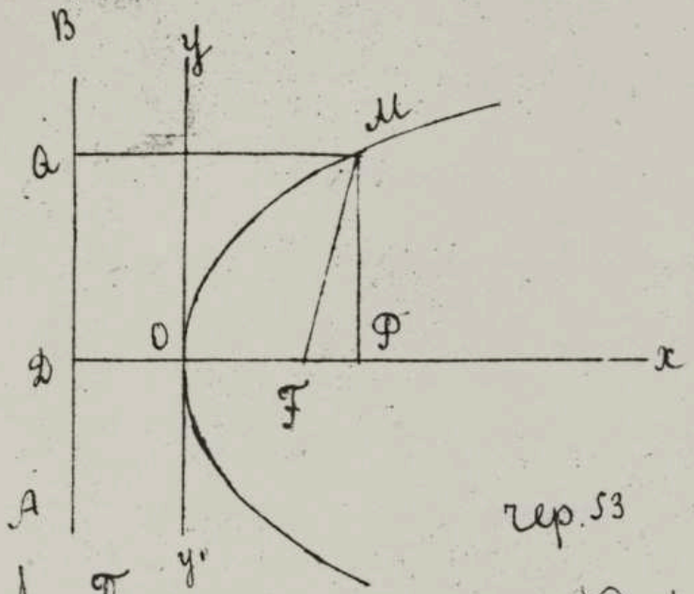
$$M'F = (D'M' + M'F) - D'M' = D'H' - D'M' = M'H'$$

Перевернувъ треугольникъ, и снова прижавъ катетъ MD къ направляющей, мы, очевидно, можемъ тѣмъ же способомъ начертить и другую половину параболы.

Уравненіе параболы.

Составимъ теперь уравненіе параболы, отнесенной къ ортогональной системѣ координатъ.

Пусть AB направляющая параболы и точка F ее фокус (чер. 53). Тогда, если M есть текущая точка кривой, то, соединив ее с фокусом и проведя перпендикуляр MQ к направляющей, мы должны иметь по определению параболы: MF = MQ. Из точки F опустим перпендикуляр FD на направляющую AB. Мы знаем уже, что Dx есть ось кривой. Для получения более простого уравнения кривой всегда бывает выгодно ее ось принимать за одну из осей координат. Поэтому здесь линию Dx примем за ось абсцисс. Разделим линию DF пополам точкою O, так, что будем иметь: OF = OD. Точка O есть, очевидно, точка параболы, и притом ее вершина. Мы примем точку O за начало прямоугольных координат.



чер. 53

При выбранных таким образом осях координат получается самый простой вид уравнения параболы. Положим, что FD = p, тогда $OF = OD = \frac{p}{2}$. Координаты текущей точки M означим через x и y, координаты фокуса F будут $\frac{p}{2}$ и 0. По формуле, определяющей расстояние между двумя точками имеем:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

В другой стороны: $QM = PF = x + \frac{p}{2}$ и по основному свойству параболы получим равенство:

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x + \frac{p}{2}$$

Это уравнение представляет соотношение между координатами x и y произвольной точки параболы. Его можно упростить; возведя обе части в квадрат; получим:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

или по сокращении

$$y^2 = 2px$$

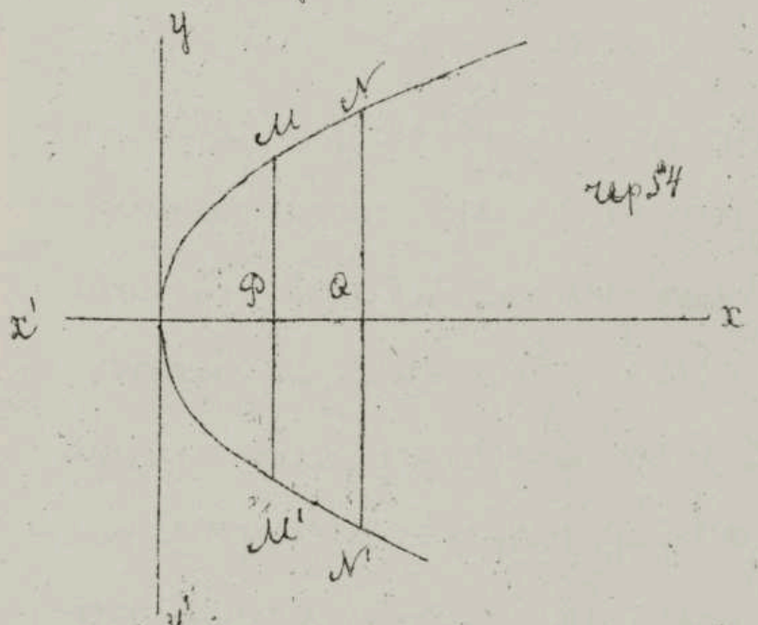
Это и есть уравнение параболы, отнесенной к вершине и оси. Коэффициент $2p$ есть данная величина и называется параметром кривой

Исследование формулы параболы по ее уравнению

Чтобы исследовать кривую линию, т.е. определить ее фигуру и размеры, а также ее положение на плоскости в аналитической геометрии достаточно иметь ее уравнение. Возьмем прямоугольные оси координат OX и OY (чер 54). Решим данное уравнение относительно y: $y^2 = 2px$; $y = \pm\sqrt{2px}$

Отсюда видно, что, если положить $x=0$, то $y=0$;

следовательно найти кривую проведить через начало координат. Если возьмем $x < 0$, то у будет мнимое количество. Это значит, что по левую сторону от оу точек кривой не существует. Будем полагать $x > 0$. Возьмем какое-нибудь значение для x, пусть например $x = OF$. Тогда по данному уравнению мы получим соответствующую величину для y, и ясно, что для $y^{ка}$ мы получаем два равных, но с обратными знаками величины.

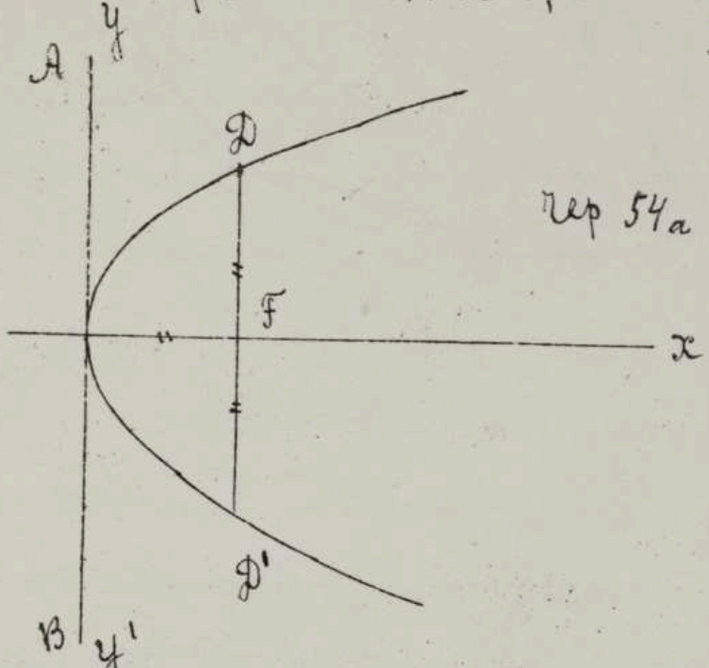


чер 54

Из этого мы заключаем, что все точки кривой, подобно точкам M и M' будут расположены симметрично относительно оси $X^{об}$, а следовательно ось $X^{об}$ есть ось кривой. В силу этого достаточно рассматривать часть кривой, находящуюся над осью $X^{об}$, другая же ветвь может быть построена по симметрии ея относительно оси $X^{об}$. Для верхней части кривой будем иметь: $y = +\sqrt{2px}$. Если x, идя от O, будет увеличиваться, тогда, очевидно, y будет тоже постоянно увеличиваться; это значить, что кривая от точки O идет в пра-

вую сторону, постоянно поднимаясь надъ осью Ox. При томъ, увеличивая x до ∞, мы видимъ, что y будетъ увеличиваться до $+\infty$, оставаясь всегда дѣйствительнымъ. Отсюда заключаемъ, что кривая имѣетъ одну непрерывную вѣтвь, которая, удаляясь отъ оси Ox, простирается въ безконечность. Если-бы величина p была дана числомъ и если-бы x мы стали приписывать на самомъ дѣлѣ числовое значеніе, то мы могли-бы построить на чертежѣ сколько угодно точекъ кривой. Соединивъ ихъ непрерывной чертой, мы получимъ вѣтвь параболы. Парабола можетъ имѣть отверстіе большее или меньшее, смотря по величинѣ $2p$. Чѣмъ больше $2p$, тѣмъ быстрѣе растетъ y, и слѣдовательно тѣмъ больше отверстіе параболы. Когда парабола одна, то ея параметръ легко опредѣлить и построить. Для этого стоитъ только черезъ фокусъ параболы F, провести хорду перпендикулярную оси. Длина ея и будетъ равна $2p$. Пусть AB (черт.) направляющая, F – фокусъ. Опредѣлимъ координаты точки D; онѣ будутъ: $x = FO = \frac{p}{2}$ $y = DF = \sqrt{2px}$, подставивъ вмѣсто x подъ корнемъ его величину $\frac{p}{2}$, получимъ: $DF = p$; $2DF = DH = 2p$. т.е. удвоенному параметру параболы. Уравненіе $y = \sqrt{2px}$ называется уравненіемъ параболы отнесенной къ вер-

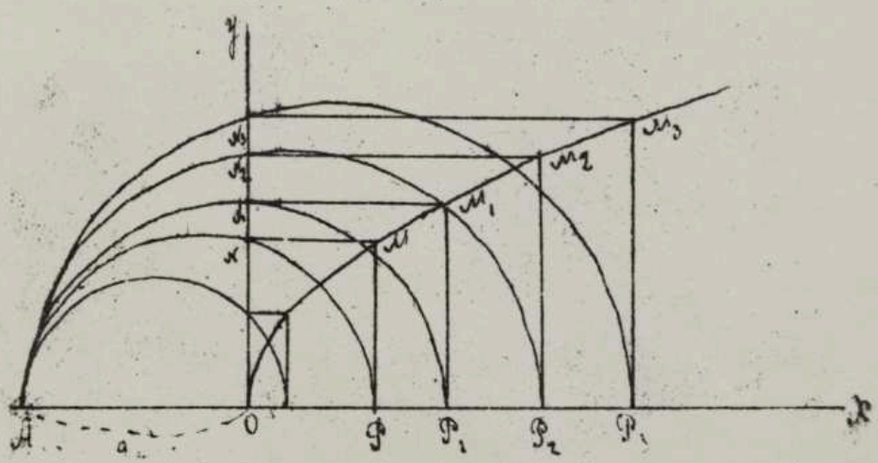
нию и оси. Из уравнения параболы, отнесенной к вершине и оси, вытекает способ построения ее по точкам (чер. 55).



чер 54а

Уравнение $y = \sqrt{2px}$ показывает, что каждая ордината есть величина, средняя пропорциональная между постоянною величиною $2p$ и абсциссою x. Отложим на оси Oy в отрицательную сторону $OA = 2p$ и, взявъ затѣмъ произвольную абсциссу $OP = x$, мы на линіи AP, какъ на діаметрѣ, опишемъ окружность, которая пересѣчетъ ось y-овъ въ точкѣ N. Затѣмъ, проведя въ точкѣ P перпендикуляръ къ оси x-овъ, изъ точки N проводимъ еще параллель ей. Эта параллель пересѣчетъ перпендикуляръ въ точкѣ M, которая будетъ принадлежать параболѣ. Въ самомъ дѣлѣ въ кругѣ ANP

чер. 55



по извѣстной теоремѣ имѣемъ:

$$ON = MP = \sqrt{AO \cdot OP} = \sqrt{2px} = y$$

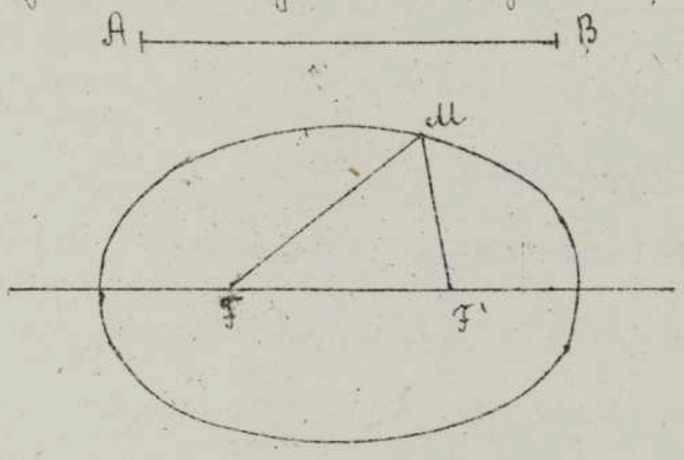
Такъ какъ абсцисса $OP = x$ была взята произвольно, то, повторяя тоже построеніе при другихъ абсциссахъ, можемъ построить сколько угодно точекъ параболы, произвольно близкихъ одна къ другой; для этого намъ надо будетъ описывать различныя окружности, центры которыхъ находились-бы на оси Ox, и которыя проходили-бы черезъ точку A. Эти окружности пересѣкутъ ось $x^{ов}$ въ точкахъ $P, P_1, P_2, \ldots\ldots$, а ось $y^{ов}$ въ точкахъ $N, N_1, N_2, \ldots\ldots$ Черезъ точки $P, P_1, P_2, \ldots$ проведемъ перпендикуляры къ Ox, а черезъ $N, N_1, N_2, \ldots\ldots$ параллели той же оси. Точки пересѣченія $M, M_1, M_2, \ldots\ldots$ будутъ точками параболы.

Эллипсъ, его построеніе и уравненіе

Эллипсомъ называется кривая линія, представляющая геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ неподвижныхъ точекъ постоянна и равна данной длинѣ.

Двѣ постоянныя точки, которыя упоминаются въ опредѣленіи, называются фокусами эллипса. Для того, чтобы получить общее понятіе о фи-

чертеж эллипса, укажем прежде всего, как можно начертить эту кривую непрерывным движением карандаша. Пусть F и F' (чер. 56) суть два данные фокуса и AB данная длина равная 2a. Сумма расстояний каждой точки эллипса от двух фокусов F и F' должна быть равна 2a. Возьмем возможно тонкую, гибкую и нерастяжимую нить, длина которой равнялась бы 2a и укрепим



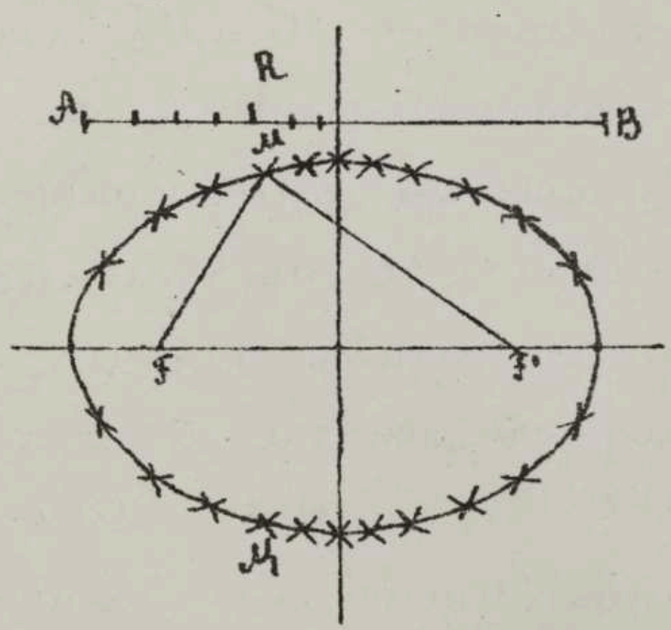
чер. 56

оба конца ея неподвижно в фокусах F и F'. Натянем эту нить карандашем так, чтобы она образовала ломанную линию FMF', причем острие карандаша будет находиться в точке M. Эта точка, очевидно, будет принадлежать эллипсу, потому что сумма ея расстояний от двух фокусов, т.е. MF + MF' составляет полную длину нити и следовательно равна данной длине 2a. Если теперь, держа нить в натянутом положении, будем двигать карандашем, то острие его, очевидно, будет описывать дугу эллипса MM₁M₂..... и можем таким образом начертить эллипс. Из этого способа черчения эллипса

можно усмотреть непосредственно, что эллипс есть непрерывная выпуклая и замкнутая кривая линия, похожая на растянутый круг. Ясно, что если расстояние между фокусами F и F' обозначить через 2c, то непременно должно быть 2c < 2a, иначе эллипс был-бы невозможен. При том, очевидно, что фигура эллипса тем более будет растянута, чем более будет 2c сравнительно с 2a, или все равно, чем ближе отношение этих длин $\frac{c}{a}$ к единице. Наоборот, чем менее будет 2c сравнительно с 2a т.е. чем меньше будет правильная дробь $\frac{c}{a}$, тем ближе фигура эллипса будет подходить к фигуре круга. Когда, наконец, соединим оба фокуса F и F' в одну точку, так что 2c = 0 и отношение $\frac{c}{a} = 0$, то эллипс, очевидно, обратится в окружность радиуса a и точка, в которой совместятся оба фокуса будет центром окружности. Отношение длин 2c и 2a т.е. дробь $\frac{c}{a}$ есть число отвлеченное, всегда меньше единицы; оно называется эксцентрицитетом эллипса. По величине эксцентрицитета, как видно, можно судить о фигуре эллипса.

Описанный способ черчения эллипса непрерывным

движением карандаша употребляется в различных искусствах и ремеслах, когда надо начертить эллипсъ на доськ. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда требуется большая точность и когда надо начертить эллипсъ на бумагѣ употребляется другой способъ, а именно - строятъ эллипсъ по точкамъ. Этотъ послѣдній способъ состоитъ въ геометрическомъ построеніи возможно большаго числа точекъ эллипса, расположенныхъ весьма близко другъ отъ друга. Совокупность этихъ точекъ составитъ приближенное изображеніе эллипса. Приступая къ построенію эллипса по точкамъ, замѣтимъ во первыхъ, что, руководствуясь опредѣленіемъ этой кривой, мы можемъ построить сколько угодно точекъ, принадлежащихъ ей. Пусть (чер. 57) F и F' два данные фокуса, разстояніе между нами FF' = 2c и пусть AB = 2a есть данная сумма разстояній точекъ эллипса отъ данныхъ фокусовъ. Возьмемъ на линіи AB произвольную точку R, и затѣмъ изъ фокуса F' радіусомъ равнымъ BR, а изъ фокуса F радіусомъ равнымъ AR опишемъ двѣ окружности. Эти двѣ

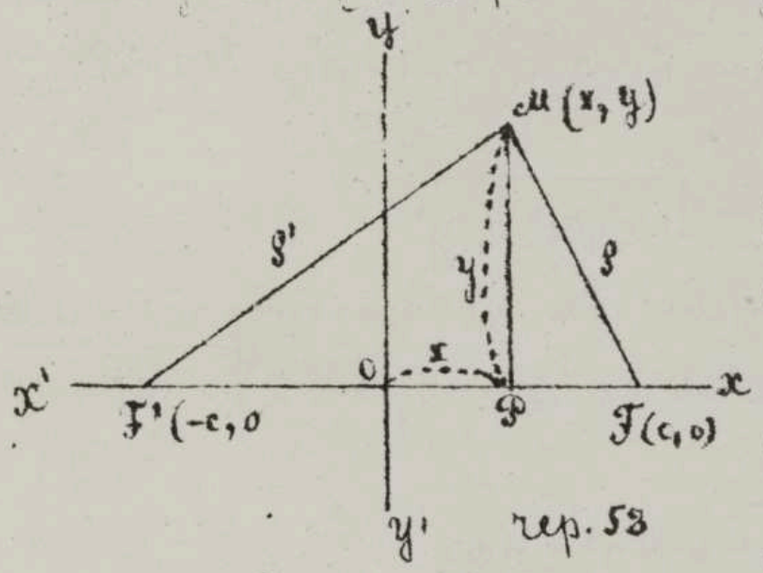


чер. 57

окружности пересекутся въ точках M и M_1, которыя будутъ, очевидно, принадлежать эллипсу, ибо сумма ихъ разстояній отъ фокусовъ F и F' составляетъ $2a$. Подобныхъ паръ точекъ, принадлежащихъ эллипсу, можно построить сколько угодно, такъ какъ для получения другихъ паръ стоитъ только измѣнять величины радіусовъ двухъ окружностей, но при томъ такъ, чтобы ихъ сумма всегда равнялась $2a$. Пусть первый изъ радіусовъ будетъ равенъ $a+d$, тогда другой долженъ быть равенъ: $2a-(a+d)=a-d$. Для того, чтобы было возможно образовать треугольникъ FMF', иначе говоря, для того, чтобы двѣ описанныя окружности пересѣклись, необходимо: 1) чтобы сумма двухъ сторонъ $MF+MF'$ была больше третьей стороны FF', т.е. чтобы $2a$ было больше $2c$ и 2) чтобы разность тѣхъ-же сторонъ MF и MF' была-бы менѣе FF'. Первое изъ этихъ условій мы полагаемъ выполненнымъ. Второе же условіе требуетъ, чтобы разность $a+d-(a-d)<2c$, т.е. чтобы $d<c$. Отсюда видно, что для полученія точекъ эллипса должно брать большій радіусъ менѣе $a+c$, а меньшій радіусъ больше $a-c$. Наибольшею величиною для каждаго радіуса будетъ $a+c$, а наименьшею $a-c$

Уравнение эллипса.

Положим (черт. 53), что F и F' два данные фокуса эллипса, а расстояние $FF' = 2c$. Пусть M есть произвольная точка кривой. Соединим её с фокусами и обозначим расстояния MF и MF' через ρ и ρ'. По определению эллипса мы должны иметь:



чер. 53

$\rho + \rho' = 2a$, где $2a$ равно данной длине. Для составления уравнения эллипса линию FF' примем за ось x-ов, а начало координат поместим в точке O, взятой на средине FF' так, что $OF = OF' = c$. Ось y-ов будет перпендикулярна оси x-ов. Таким образом за оси координат примем оси эллипса. При таких осях получится самое простое уравнение эллипса. Координаты произвольной точки M эллипса будут x и y, а координаты фокуса F будут $(c, 0)$. Поэтому имеем:

$$\rho = \sqrt{FP^2 + MP^2} = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

Для фокуса F' координаты будут $(-c, 0)$, поэтому имеем право написать:

$$\rho' = \sqrt{FP^2 + MP^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Сумма $s+s'$ должна быть равна $2a$, следовательно: $\sqrt{(c-x)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$.

Это уравнение можно представить в простейшем виде, освободив его от радикала. Напишем его в виде

$$\sqrt{(c-x)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$c^2+x^2-2cx+y^2 = 4a^2+x^2+c^2+2xc+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2};$$

по сокращении имеем:

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2+4cx$$

Сократив на 4 и возведя обе части в квадрат, получим:

$$a^2x^2+a^2c^2+2a^2xc+a^2y^2 = a^4+c^2x^2+2a^2xc,$$

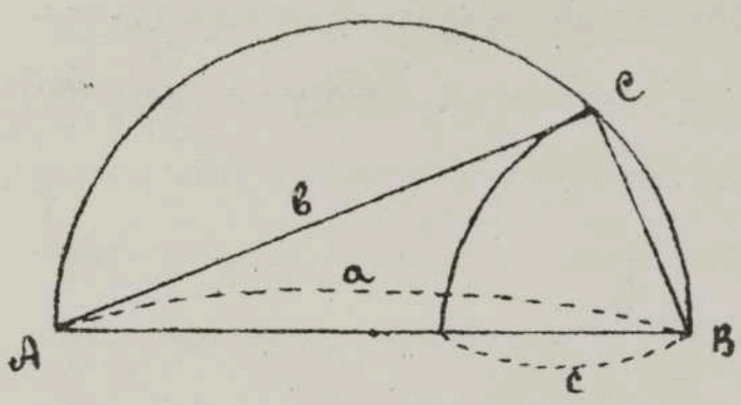
или по упрощении

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2), \text{ или } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Заметим, что $a>c$, и потому разность a^2-c^2 есть величина положительная; приравняем её b^2 так что $a^2-c^2=b^2$

Величину b^2 можно построить по теореме Пифагора, как катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна a, а другой катет c (чер 53). Таким образом b будет известная и вполне определенная величина для данного эллипса, и мы можем ввести b

въ уравненіе, какъ параметръ; тогда уравненіе приметъ видъ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Чер. 59

Изслѣдованіе уравненія эллипса.

Уравненіе эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ рѣшимъ относительно y: получимъ: $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$, $y = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ и по извлеченіи корня

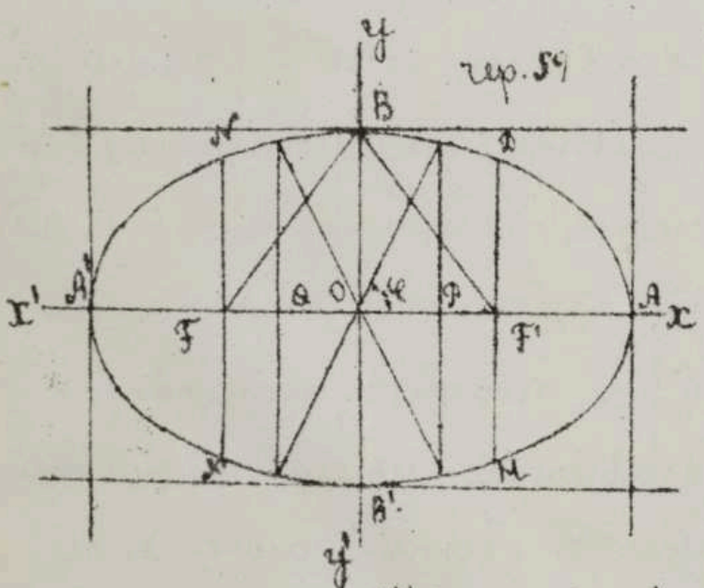
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

По уравненію мы видимъ, что одному значенію x соотвѣтствуетъ два значенія y равныхъ по величинѣ, но съ обратными знаками; отсюда заключаемъ, что кривая расположена симметрично относительно оси x, и каждой точкѣ кривой надъ осью соотвѣтствуетъ точка подъ осью, имѣющая тѣже абсциссу извѣстную, но противуположную ординату. Затѣмъ изъ уравненія мы видимъ, что величина абсциссы не можетъ быть болѣе a и менѣе $(-a)$, такъ какъ только при условіи $a^2 - x^2 \geq 0$ корень будетъ дѣйствительнымъ и построеніе точки возможнымъ. Это условіе выпол-

мимо при $a \geqq x \geqq -a$. Так как x входит в квадрат, то величина корня для положительных и отрицательных абсцисс останется одна и та же, а потому одной и той же ординате будут соответствовать две равные противуположенные абсциссы, и кривая будет расположена симметрично также и относительно оси y-ов. Найдем теперь точки кривой, имеющие предельные абсциссы a, $-a$, а также и абсциссу $x=0$. Из уравнения

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

при подстановке $x=a$ и $x=-a$, имеем $y=0$, т.е. в этих точках кривая пересекает ось x-ов. Таковы точки A и A' (чер. 54) и как вправо от точки A, так и влево от A' точек кривой нет.



чер. 54

Пусть теперь $x=0$; тогда $y = \pm b$. Отложив по оси y-ов OB и OB' равные b, получим точки кривой B и B', в которых кривая пересекает ось y-ов, и как выше точки B, так и ниже точки B', точек кривой нет. Оси x-ов и y-ов будут осями кривой. Если в точках A, A', B, B' восставим перпендикуляры к осям, то получим

касательныя къ кривой въ этихъ точкахъ. Эти касательныя въ пересѣченіи своемъ дадутъ прямоугольникъ, внутри котораго и будутъ заключаться всѣ точки кривой.

Если x будетъ увеличиваться, то изъ уравненія видно, что при этомъ y уменьшается по абсолютной величинѣ, и стало-быть отъ точки B въ правую сторону кривая пойдетъ, приближаясь къ оси X. Возьмемъ произвольный x, положимъ OP; вычисливъ соотвѣтствующую величину y, построимъ эти величины какъ ординаты MP и другую $M'P$ ей равную, но по знаку противоположную. Двѣ точки M, M' суть точки кривой, при томъ $MP = M'P$. Если въ лѣвую сторону отъ оси Y отложимъ $OQ = OP$ и возставимъ перпендикуляръ изъ точки Q къ оси X и отложимъ на немъ $NQ = N'Q = MP = M'P$, то получимъ двѣ точки кривой N и N' симметричныя съ точками M, M' относительно оси Y. Не трудно доказать, что точка O будетъ центромъ этихъ; дѣйствительно, соединивъ точку O съ точками M и N' и увидимъ, что два треугольника MOP и $N'OQ$ равны, откуда слѣдуетъ, что углы MOP и QON' равны, а потому линія MON' есть прямая. Чрезъ тоже имѣемъ $OM = ON'$,

и так как M есть произвольная точка эллипса, то, следовательно, произвольная хорда эллипса MM' и проведенная через центр O, делится этою точкою пополам, значит точка O есть центр эллипса, и всякая хорда, проходящая через нее делится ею пополам. Дополним это исследование свойств эллипса рассмотрением, как изменяется в нем радиус, проведенный через центр к различным точкам кривой, при переходе от точки B к A.

Пусть $OP = x$, $MP = y$ и $OM = r$; тогда имеем:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

но по уравнению эллипса: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$;

вставивши величину y^2 в уравнение r, получим

$$r = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{b^2 + x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}.$$

Так как $b < a$, то $\frac{b}{a}$ или $\frac{b^2}{a^2}$ менее 1; поэтому $\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) > 0$. При переходе точки B к A x постоянно увеличивается, и при наибольшей величине x, т. е. при $x = a$, мы будем иметь:

$$r_{maxim.} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - a^2)} = \sqrt{b^2 + a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = a$$

Фокусы эллипса находятся на большой оси, причем $OF = OF' = c$. Соединивши F и F' с B, из треугольника BOF имеем:

$$BF^2 = b^2 + c^2.$$

Но мы положили, что $a^2 - c^2 = b^2$, или $a^2 = b^2 + c^2$;

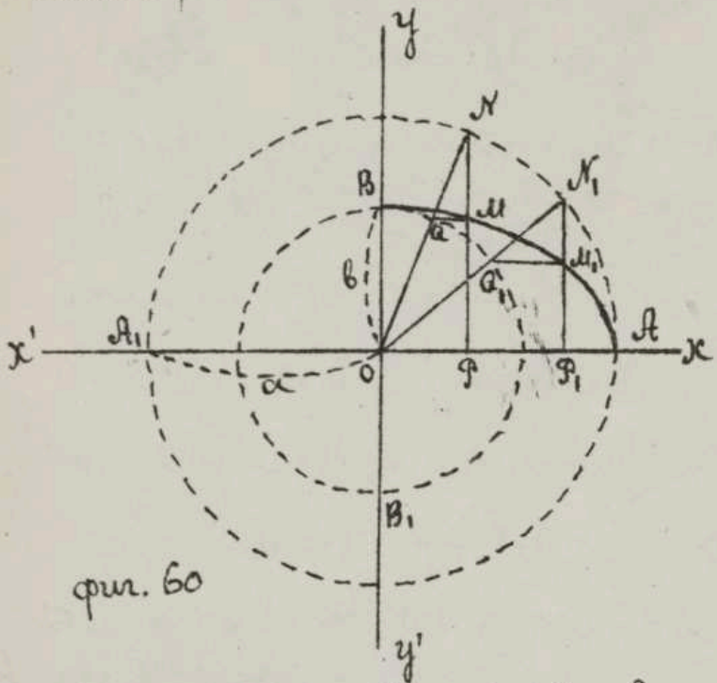
отсюда заключаем, что $BF^2 = a^2$, или $BF = \pm a$. Следовательно, если даны оси эллипса, то чтобы получить фокусы, надо из концов B малой оси описать дуги радиусом a. Точки пересечения этой дуги с большой осью и будут фокусы. Итак $c^2 = a^2 - b^2$ и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; значит эксцентриситет $\frac{c}{a} = \varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$. Величина ε всегда меньше единицы, так как под корнем правильная дробь а следовательно и c всегда $< a$. Если в эллипсе обе оси будут равны, то эллипс обратится в окружность действительно возьмем уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Так как по предположению $b = a$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ даст $x^2 + y^2 = a^2$, а это и есть уравнение окружности, которой центр в начале координат и радиус равен a. При этом, так как $b = a$, то $\varepsilon = 0$. Следовательно можно сказать, что окружность есть частный вид эллипса, у которого эксцентриситет равен 0

Построение эллипса по точкам, выводимое из его уравнения.

Напишем уравнение эллипса: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Возьмем (фигура 60) две прямоугольные координаты. Из центра O радиусом b опишем окруж.

ность; изъ той же точки опишемъ еще другую окружность концентрическую съ первой и радіусомъ = a. Возьмемъ затѣмъ произвольную абсциссу OP и изъ точки P возставимъ перпендикуляръ къ оси x-въ. Пусть точка N есть точка встрѣчи этого перпендикуляра съ окружностью радіуса a. Соединивъ точку N съ O и изъ точки Q, пересѣченія линіи ON съ окружностью радіуса b, проведемъ параллель QM оси x-въ; тогда точка встрѣчи этой параллели съ перпендикуляромъ NP, будетъ точкою эллипса M. Въ самомъ дѣлѣ пусть OP = x, и такъ какъ ON = a, то изъ треугольника ONP имѣемъ: $PN = \sqrt{a^2 - x^2}$. Затѣмъ, такъ какъ QO = b, то, написавъ пропорцію MP : OQ = NP : ON, или MP : b = $\sqrt{a^2-x^2}$: a; найдемъ отсюда, что $MP = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Итакъ мы видимъ, что MP = y, а потому точка M есть точка эллипса. Такихъ точекъ, тѣмъ же построеніемъ можно получить сколько угодно. На чертежѣ обозначимъ точки M и M_1, принадлежащія эллипсу. Соединивъ ихъ непрерывною чертою, мы получимъ дугу кривой AB. Другую часть можно построить по симметріи

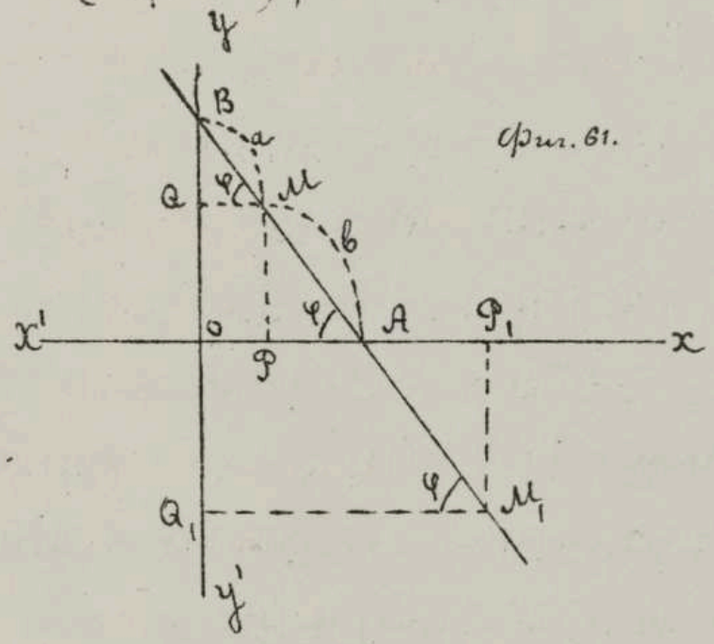


фиг. 60

или же по прежнему способу попарно съ указанными выше точками

Свойство эллипса, служащее основаніемъ для устройства эллипсографа.

Возьмемъ двѣ прямоугольныя оси координатъ Ox и Oy (чер. 61); положимъ что прямая линія AB имѣетъ постоянную величину и перемѣщается по плоскости такъ, что конецъ ея A скользитъ по оси $x^{ов}$, а другой конецъ ея B перемѣщается въ то же время по оси $y^{ов}$. Мы докажемъ, что всякая точка прямой AB будетъ описывать нѣкоторый эллипсъ, причемъ эллипсъ, которая центръ находится въ O и которая оси совпадаютъ съ осями координатъ. Чтобы доказать это, возьмемъ произвольную точку M и положимъ, что разстоянія AM = b и BM = a; эти разстоянія постоянны. Обозначимъ координаты точки M черезъ x и y и построимъ ихъ. Проведя MQ параллельно оси абсциссъ и положимъ



фиг. 61.

$\angle OAB = \varphi$. Найдем $x = a.\cos\varphi$ и $y = b.\sin\varphi$, откуда $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ и $\frac{y}{b} = \sin\varphi$. Возведя в квадрат и складывая, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Тоже самое получим-бы, если бы мы взяли точку в положении M_1. Пусть $M_1B = a$ и $M_1A = b$. Мы нашли бы для точки M_1, что $x = a.\cos\varphi$, $y = -b\sin\varphi$; затем $\frac{x}{a} = \cos\varphi$, $\frac{y}{b} = -\sin\varphi$; наконец:

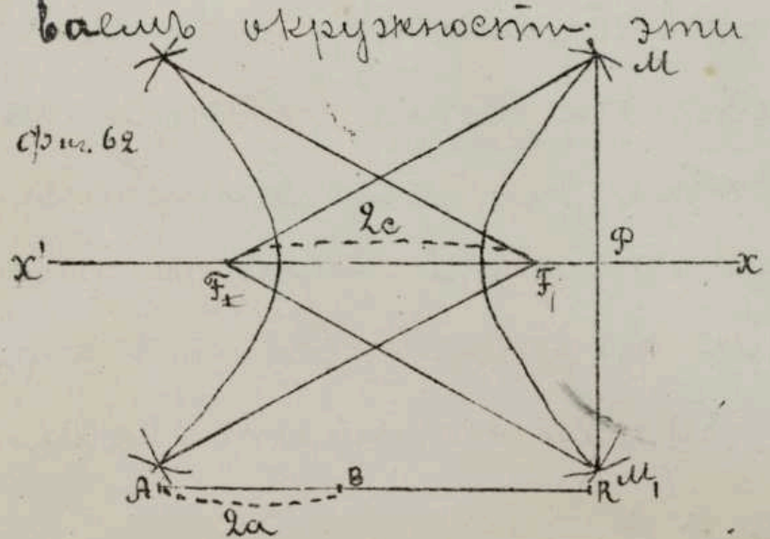
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

На основании этого свойства движения точки M прямой AB устраивают для непрерывного черчения эллипса снаряд, который называется эллипсографом. По осям Ox и Oy помещают две металлические пластинки. Затем берут третью линейку произвольной длины AB, которую можно перемещать так, что постоянная ея точка A движется вниз по оси Ox, а другая точка B по оси Oy. Точку M, в которой укрепляют карандаш можно брать в какой угодно части линейки и таким образом можно дать полуосям a и b эллипса желаемые размеры.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место то-

чель, разность расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная и равна данной длине. Данныя точки называются фокусами гиперболы, а прямыя, соединяющия фокусы съ точками гиперболы, называются радиусами-векторами. На основании этого опредѣленія гиперболу можно начертить двоякимъ образомъ: — по точкамъ и непрерывнымъ движеніемъ. Разберемъ сперва построеніе гиперболы по точкамъ. Положимъ что F и F_1 будутъ два данныя фокуса гиперболы и пусть ихъ разстояніе $FF_1 = 2c$. Положимъ далѣе, что AB есть данная длина, выражающая разность разстояній каждой точки гиперболы до ея фокусовъ. Руководствуясь опредѣленіемъ гиперболы, мы можемъ построить сколько угодно точекъ гиперболы. Для этого на продолженіи линіи AB возьмемъ произвольную точку R и изъ точки F, какъ изъ центра, радіусомъ AR, а изъ F_1 радіусомъ равнымъ BR опишемъ окружности. Эти окружности пересѣкутся въ двухъ точкахъ M и M_1. Легко видѣть, что эти точки будутъ принадлежать разсматриваемой нами гиперболѣ. Въ самомъ дѣлѣ



Фиг. 62

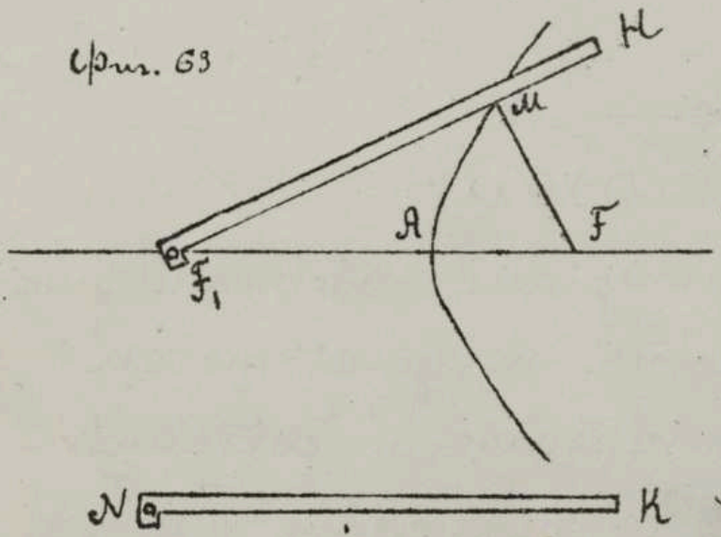
для точки M будемъ имѣть, что разность ея разстояній отъ фокусовъ F и F_1 будетъ $MF - MF_1 = AK - BK = AB = 2a$. Потомъ будемъ имѣть и для точки M_1. Подобныя пары точекъ, принадлежащихъ гиперболѣ, можно построить сколько угодно, такъ какъ измѣняя положеніе точки K на продолженіи AB, т.е. величину радіусовъ двухъ окружностей, будемъ имѣть всегда въ пересѣченіи этихъ окружностей точки гиперболы. Если черезъ $2a$ положимъ постоянную разность и черезъ $2c$ разстояніе FF_1 отъ фокусовъ, то для полученія точекъ кривой, необходимо, чтобы $2a$ было менѣе $2c$. Обозначимъ черезъ $x+a$ большій радіусъ, тогда меньшій будетъ $x-a$; круги пересѣкутся тогда, когда сумма $2x$ радіусовъ будетъ больше $2c$. Такимъ образомъ большій радіусъ долженъ быть $> c+a$, а меньшій $> c-a$. Соединивъ теперь двѣ точки гиперболы M и M_1, мы получимъ изъ равенства треугольниковъ M_1FF_1 и MFF_1, что $MF = M_1F$ и что MM_1 перпендикулярна къ xx'. Слѣдовательно, двѣ точки M и M_1 расположены симметрично относительно прямой xx', которая поэтому есть ось гиперболы. Не трудно замѣтить, что мы можемъ получить еще новый рядъ точекъ гиперболы, если повторяя предыдущее построеніе, будемъ описывать окружности

большихъ радіусовъ изъ фокуса F_1, а меньшихъ изъ фокуса F, и станемъ отмѣчать точки пересѣченія такихъ окружностей, разность радіусовъ которыхъ равна $AB = 2a$. Совокупность точекъ, полученныхъ такимъ образомъ, опредѣлитъ другую вѣтвь гиперболы, которая будетъ расположена относительно фокуса F точно такъ же, какъ первая относительно фокуса F_1.

Построеніе гиперболы непрерывнымъ движеніемъ

Обратимся теперь къ построенію гиперболы непрерывнымъ движеніемъ. Пусть даны два фокуса F и F_1, и длина $2a$, опредѣляющая разность разстояній отъ какой либо точки гиперболы до ея фокусовъ. Возьмемъ линейку NK и нить, такой длины, чтобы разность между длиною линейки и длиною нити равнялась бы $2a$; одинъ конецъ нити укрѣпимъ въ K — конецъ линейки и другимъ прижмемъ линейку къ прямой FF_1, и

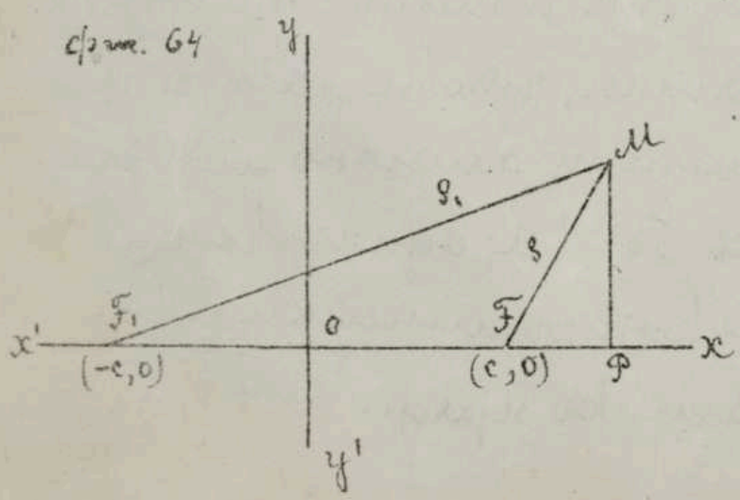
Фиг. 63



укрепим конец линейки N в фокусе F_1. Свободный конец нити укрепим в точке F и натянем нить карандашем, прижимая его к ребру линейки. Будем теперь вращать линейку, оставляя нить в натянутом положении и прижимая карандашь к ребру линейки, тогда, очевидно, что карандашь опишет часть гиперболы. Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ, что линейка приняла положеніе F_1N, указанное на чертежѣ, то $MF_1 - MF = MF_1 + MN - (MF + MN)$ = длинѣ линейки безъ длины нити $= 2a$; слѣдовательно точка M принадлежитъ гиперболѣ. Легко такимъ же образомъ, но располагая иначе линейку, начертить другія части гиперболы

Уравненіе гиперболы.

Пусть F и F_1 два фокуса гиперболы; разстояніе между ними $FF_1 = 2c$. Если M есть текущая точка гиперболы, то соединивъ её съ фокусами F и F_1, получимъ два радіуса ρ и ρ_1. По опредѣленію кривой для всѣхъ точекъ имѣемъ что $\rho_1 - \rho = 2a$, гдѣ $2a$



есть данная длина, при чем должно быть соблюдено условіе, что $a < c$. Чтобы составить уравненіе кривой, примемъ линію FF_1 за ось x-овъ, а середину линіи FF_1 за начало координатъ O, при чемъ будемъ имѣть, что $OF = OF_1 = c$. Координаты точки M пусть будутъ x и y. Такимъ образомъ за оси координатъ мы примемъ оси кривой; при этомъ уравненіе гиперболы получается въ самомъ простомъ видѣ. Замѣчаемъ, что координаты точки F будутъ $(c, 0)$, а потому ρ, какъ разстояніе между двумя точками $= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \rho$. Затѣмъ координаты фокуса F_1 будутъ $(-c, 0)$, а потому разстояніе $\rho_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. По основному свойству гиперболы имѣемъ:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Это и есть уравненіе гиперболы. Сравнивъ его съ уравненіемъ эллипса, которое было выведено тѣмъ же путемъ, но въ которомъ было выражено, что сумма

$$\rho + \rho_1 = 2a,$$

мы замѣтимъ, что уравненіе гиперболы отличается тѣмъ, что въ немъ передъ вторымъ радикаломъ стоитъ знакъ минусъ. Если же второй радикалъ мы перенесемъ во вторую часть, а $2a$ въ первую и затѣмъ возведемъ обѣ части въ квадратъ, то различіе между уравненіями

эллипса и гиперболы уничтожится совсѣмъ. Отсюда заключаемъ, что не повторяя прежняго вычисленія, сдѣланнаго для освобожденія уравненія эллипса отъ радикаловъ, мы можемъ прямо написать уравненіе гиперболы въ окончательномъ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Это уравненіе по виду совершенно одинаково съ найденнымъ выше уравненіемъ эллипса, но на самомъ дѣлѣ разница между уравненіемъ эллипса и уравненіемъ гиперболы значительна. Это разница заключается въ томъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, т. е. въ гиперболѣ $a<c$, почему и $a^2<c^2$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, разсмотримъ $\Delta F M F_1$; въ немъ разность двухъ сторонъ меньше третьей, слѣдовательно $\rho_1 - \rho < 2c$; но $\rho_1 - \rho = 2a$, значитъ $2a<2c$, или $a<c$, почему и $a^2<c^2$ или $a^2-c^2<0$.

Вслѣдствіе этого намъ будетъ удобно написать наше уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Положимъ теперь, что $c^2-a^2=b^2$. Величину b легко построить. Для этого взявъ прямой уголъ yox, отложимъ отъ точки O длину $OA=a$ и изъ точки A радіусомъ равнымъ c опишемъ дугу, которая пересѣчетъ Oy въ точкѣ B; тогда

въ треугольникѣ OAB катетъ OB будетъ равняться $\sqrt{c^2-a^2}=b$. Такимъ образомъ величина b будетъ извѣстна и уравненіе гиперболы примѣтъ видъ:

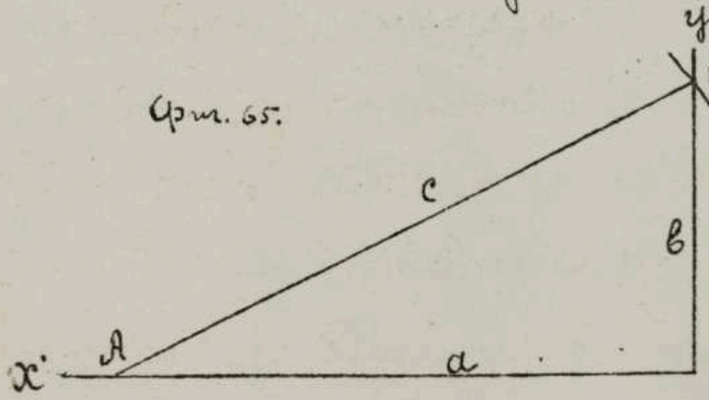
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Если сравнимъ это уравненіе съ уравненіемъ эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то увидимъ, что уравненіе гиперболы получается изъ уравненія эллипса замѣною b^2 на $-b^2$, или b на $b\sqrt{-1}$. Это замѣчаніе очень важно потому, что на основаніи его можно выводы, сдѣланные для эллипса, помощью его уравненія, прямо примѣнять къ гиперболѣ, замѣняя только въ полученномъ результатѣ b^2 на $-b^2$. Уравненіе гиперболы можно написать еще въ слѣдующемъ видѣ, получаемомъ освобожденіемъ предыдущаго уравненія отъ знаменателя,

$$a^2y^2-b^2x^2=-b^2a^2$$

Если же рѣшимъ это уравненіе относительно y, то найдемъ, что

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$



Чрт. 65.

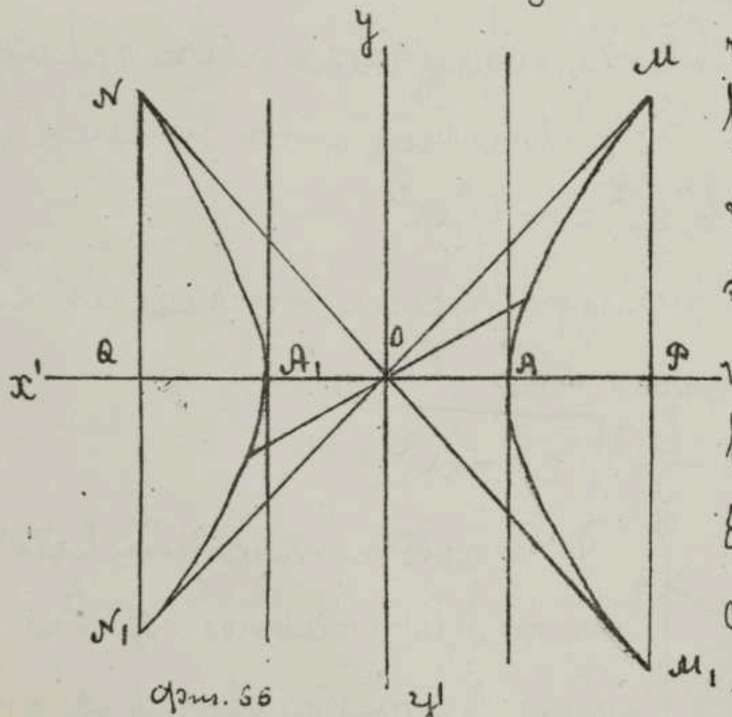
Это есть третій видъ того же уравненія. Всѣ эти три вида представляютъ гиперболу, отнесенную къ центру и осямъ.

Исследование фигуры гиперболы по ея уравнению.

Решимъ уравнение гиперболы относительно y; получимъ:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Отсюда видимъ, что, если положимъ $x=0$, то получимъ y мнимымъ, и если x будетъ увеличиваться отъ $x=0$ до $x=a$, то y останется мнимымъ, пока $x<a$. Когда возмемъ $x=a$, то найдемъ $y=0$. Построимъ точку, опредѣляемую этими двумя координатами; для этого отложимъ $OA=a$; точка A будетъ точкой кривой. Проведемъ

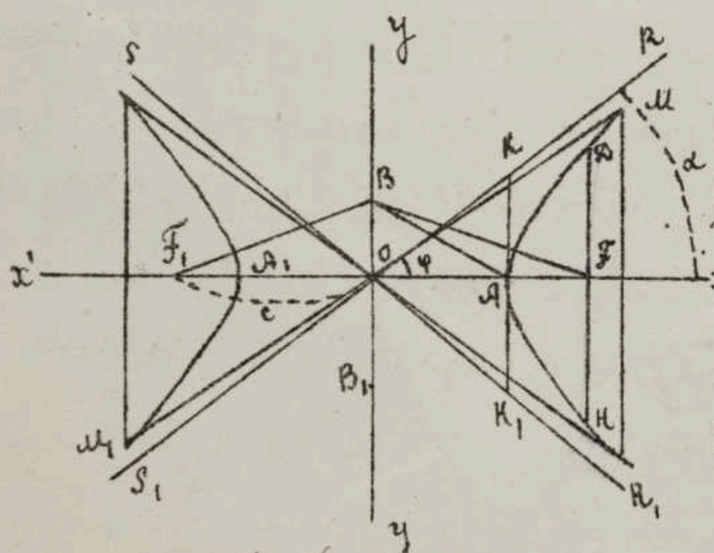


фиг. 66

черезъ A перпендикуляръ къ оси x-овъ; мы можемъ утверждать что между этимъ перпендикуляромъ и осью y-овъ нѣтъ точекъ кривой. Если затѣмъ x будемъ увеличивать по абсолютной величинѣ, то и y будетъ также увеличиваться. Возьмемъ какой нибудь $x=OF$ и вычислимъ для него соотвѣтствующій y, который

будетъ имѣть два значенія, равныя, но съ обратными знаками; изъ этого заключаемъ, что ось $x^{ов}$ есть ось кривой и что всѣ точки кривой будутъ расположены симметрично относительно этой оси подобно точкамъ M и M_1. Абсциссу x можно увеличивать до $\pm\infty$. Изъ этого заключаемъ, что отъ точки A въ правую сторону, кривая идетъ постоянно удаляясь отъ оси $x^{ов}$ и продолжается въ безконечность, такъ какъ съ увеличеніемъ x, y увеличивается тоже до безконечности, оставаясь дѣйствительнымъ. Если x будетъ принимать отрицательныя значенія отъ 0 до $-\infty$, то замѣчая, что x въ уравненіи входитъ въ квадратѣ, можно прямо сказать, что y при отрицательныхъ значеніяхъ $x^{ов}$ получаетъ соотвѣтственныя такія же значенія, какъ и при положительныхъ. Отсюда слѣдуетъ, что по лѣвую сторону оси $y^{ов}$ получается другая вѣтвь кривой и притомъ точно такая же, какъ и по правую сторону относительно оси $y^{ов}$. Вслѣдствіе этого, если мы отложимъ на оси $x^{ов}$ влѣво отъ точки O длину $OA_1 = OA = a$, то A_1 будетъ точкой кривой, ея другою вершиною. По симметріи мы можемъ начертить лѣвую

вить кривой. При этом, если возьмем абсциссу $OQ = OP_1$, то получим две ординаты кривой $NQ = N_1Q = MP$ и точки N и N_1 будут точки гиперболы. Легко доказать, что точка O есть центр кривой. Соединим O с M и N_1, получим два равных треугольника OMP и ON_1Q, и из их равенства заключаем, что в них углы при точке O равны; следовательно линия N_1OM есть прямая причем $N_1O = OM$. Таким образом мы видим что MN_1 есть произвольная хорда гиперболы проходящая через точку O и эта хорда делится точкою O пополам; отсюда заключаем, что всякая хорда кривой, проведенная через точку O, делится ею пополам; следовательно точка O есть центр кривой. Отложим по оси yy' от центра O части $OB = OB_1 = b$ (фр. 675). Длина $BB_1 = 2b$ называется мнимою осью гиперболы. Иногда ось $2a$ называется пересекающею, а ось BB_1 непересекающею. Чтобы получить фокусы, отложим от точки O на главной оси в обе стороны длину фокусного расстояния c,



фр. 67

причемъ $c > a$, такъ что $OF = OF_1 = c$. Соединивъ A и B, получимъ изъ треугольника AOB, что $AB = \sqrt{b^2+a^2}$; но $c^2 - a^2 = b^2$, отсюда $c^2 = a^2+b^2$ и $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Слѣдовательно $AB = c$ или $OF = OF_1 = AB$, такъ, что два фокуса получаются отложеніемъ отъ точки O въ обѣ стороны длины AB. Отношеніе фокуснаго разстоянія къ главной полуоси, т.е $\frac{c}{a}$ называется эксцентрицитетомъ гиперболы. Пусть $\frac{c}{a} = \varepsilon$. Такъ какъ $c > a$, то ε всегда > 1. Хорда проходящая черезъ фокусъ и перпендикулярная главной оси, называется главнымъ параметромъ гиперболы: $FM = 2p$; $FF = p$ есть полупараметръ. Величину полупараметра можно выразить посредствомъ a и b изъ уравненія гиперболы. Въ данномъ случаѣ $x = OF = c$; слѣдовательно $y = FF = p = \frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}$, или $p = \frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \frac{b^2}{a}$. Разсмотримъ измѣненіе радіуса-, проведеннаго изъ центра къ различнымъ точкамъ гиперболы. Пусть $OM = r$, тогда $r = \sqrt{x^2+y^2}$; но $y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)}$, а потому $r = \sqrt{x^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)} = \sqrt{(1+\frac{b^2}{a^2})x^2-b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-b^2}$; далѣе $\frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2$, слѣдовательно

$$r = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 - b^2}$$

Видимъ, что, если x будетъ увеличиваться и слѣдовательно точка M будетъ перемѣщаться

по гиперболе вправо, тогда x увеличивается до ∞. Рассмотрим угол между осью x-ов и r, т.е. угол $MOx = \varphi$. В треугольнике MPO имеем: $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$ или $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}$; иначе $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$. Отсюда видно, что, если x будет увеличиваться до ∞, то $\frac{a^2}{x^2}$ будет стремиться к 0, а $\mathrm{tg}\,\varphi$ к $\frac{b}{a}$. Обозначим предельную величину φ через α; будем иметь

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a},\ \text{при } x = \infty$$

Угол φ будет всегда меньше α, но может приближаться к нему как угодно близко. Построим прямую, которая составит с осью x-ов угол α и проходит через центр O; для чего из точки A восставим перпендикуляр к главной оси и отложим длину $AK = b$. Соединим точку O с K; эта прямая и будет искомая. Действительно в ΔAOK имеем:

$\mathrm{tg}\,AOK = \frac{b}{a}$. Так как гипербола расположена симметрично относительно оси y-ов, то следовательно выше оси x-ов будет существовать точно такая же прямая. Чтобы её получить стоит отложить $AK_1 = b = AK$ и точку O соединить с точкой K_1. Левая ветвь гиперболы расположится в угле SOS_1, образованном про-

должением прямых OR и OR_1. Въ двух же верхних углах SOR и S_1OR_1 нет точек гиперболы. Прямыя R,S и RS_1 называются ассимптотами гиперболы. Напишем их уравнения; прямая RS_1 делает съ осью $x^{ов}$ уголъ α и проходитъ черезъ начало координатъ: слѣдовательно ея уравненіе будетъ: $y = x.Tg\alpha$ или $y = \frac{b}{a}x$. Прямая R,S дѣлаетъ съ осью $x^{ов}$ уголъ въ $(\pi - \alpha)$ и ея уравненіе будетъ: $y = x.Tg(\pi - \alpha) = -Tg\alpha.x$ или $y = -\frac{b}{a}\cdot x$.

Уравненіе двух ассимптотъ можно написать вмѣстѣ:

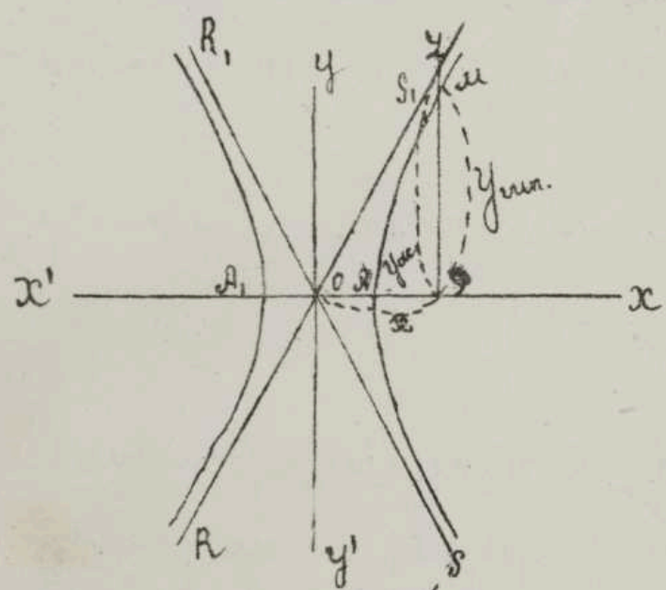
$$y = \pm \frac{b}{a}\cdot x.$$

Слово „ассимптота" значитъ приближающаяся. Названіе это дано этимъ прямымъ потому, что вѣтви гиперболы по мѣрѣ ихъ продолженія въ безконечность, все болѣе и болѣе приближаются къ этимъ прямымъ, такъ что разстояніе гиперболы отъ ассимптотъ можно сдѣлать сколько угодно малымъ; оно обращается въ нуль лишь въ предѣлѣ. Итакъ гипербола приближается къ ассимптотамъ неопредѣленно, но никогда не достигаетъ ихъ. Чтобы это обнаружить, возьмемъ уравненіе кривой рѣшенное относительно

y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Положимъ, что мы разсматриваемъ ассимптоту S_1R. Уравненіе этой ассимптоты: $y = + \frac{b}{a} \cdot x$. Возьмемъ на верхней части этой кривой точку M и построимъ MP, продолживъ ее до встрѣчи съ ассимптотой въ точкѣ Y; пусть $OP = x$ и $MP = y$.



Ординату ассимптоты для отличія обозначимъ черезъ $y_{ас}$, такъ что $MP = y_{ас}$; тогда по уравненію ассимптоты будемъ имѣть $y_{ас} = + \frac{b}{a} \cdot x$. Возьмемъ разность ординатъ ассимптоты и гиперболы:

$$y_{ас} - y_{гип.} = MY = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

Если въ послѣднемъ выраженіи возьмемъ $x = \infty$, то формула приметъ видъ: $MY = \frac{b}{a}(\infty - \infty)$; это выраженіе неопредѣленное. Чтобы избѣжать этой неопредѣленности, умножимъ и раздѣлимъ выраженіе, стоящее въ скобкахъ, на сопряженную съ нимъ величину $\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$; тогда получимъ:

$$MY = \frac{b}{a}\left[\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right] = \frac{b}{a}\left[\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right] =$$

$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Теперь, если точку M будемъ перемѣщать по гиперболѣ, удаляя ее къ правую сторону въ бесконечность, то ея абсцисса x будетъ увеличиваться до $+\infty$ и при этомъ знаменатель дроби, выражающей разность координатъ MZ, будетъ увеличиваться также до+бесконечности, а вся дробь будетъ уменьшаться до нуля. Такимъ образомъ видимъ, что разность ординатъ можетъ быть сколь-угодно бесконечно мала, но никогда не можетъ достигнуть нуля.

Построеніе гиперболы, веденное изъ ея уравненія.

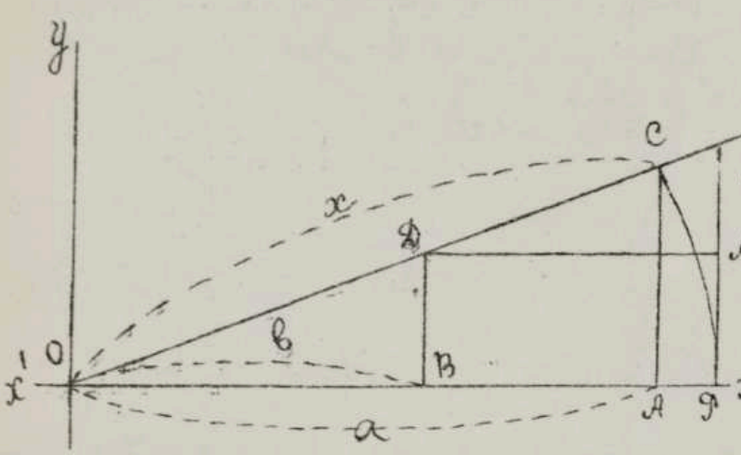
Уравненіе гиперболы, отнесенное къ центру и осямъ даетъ возможность построить эту кривую по точкамъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ. Уравненіе кривой есть:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Отъ начала координатъ O вправо отложимъ длину $AO = a$ и проведемъ черезъ точку A перпендикуляръ AC къ оси $x^{ов}$; потомъ отложимъ

произвольную абсциссу x, которая должна быть больше a; пусть она будет OP, так что $OP = x$; через точку P проведем другую линию перпендикулярную оси x-ов и затем из точки O радиусом OP опишем дугу окружности, которая пересечет первый перпендикуляр в точке C. Соединим точку O с C; тогда из треугольника OCA, в котором гипотенуза $OC = x$ и катет $OA = a$, имеем:



$$AC = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

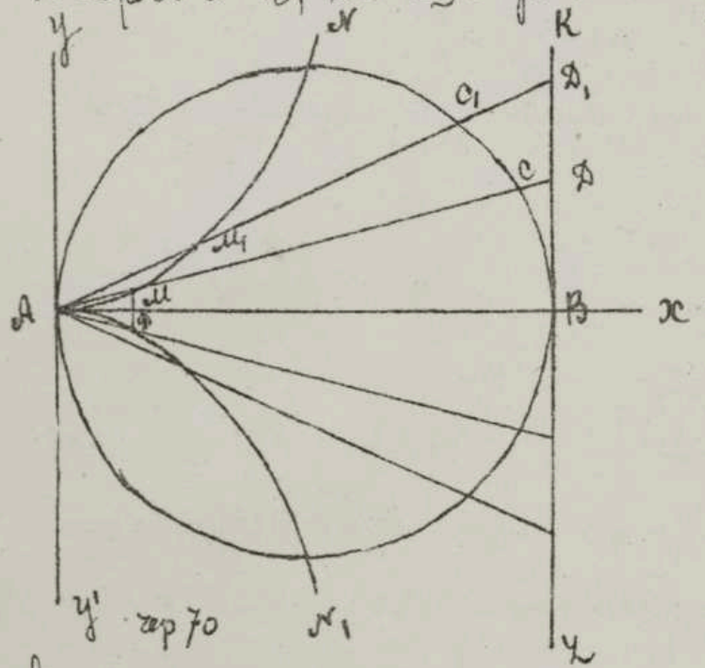
Далее от точки O в правую сторону отложим длину $OB = b$, причем заметим, что b может быть и меньше и больше a. Положим, что $b < a$. Из точки B восставим перпендикуляр к оси x-ов, который пересечет радиус OC в точке $Д$; из нее проведем параллель оси x, продолжая последнюю, т. е. параллель, до пересечения с перпендикуляром, восстановленным из P, в точке M. Утверждаем, что точка M принадлежит гиперболе. Чтобы доказать это, рассмотрим подобные треугольники

OCA и OBD, въ которыхъ имѣемъ: $BD:OB = AC:AO$, или $MF:b = \sqrt{x^2-a^2} : a$; откуда $MF = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = y$. Видимъ, что M дѣйствительно есть точка гиперболы. Подобныхъ точекъ можно найти безчисленное множество, повторяя описанное построеніе при различныхъ абсциссахъ x. При этомъ легко, что, если точки могутъ быть построены произвольно близко одна отъ другой, то соединивъ ихъ непрерывной чертой, получимъ приблизительное очертаніе гиперболы.

Циссоида Діокла.

Выводя уравненія линій, заданныхъ какъ геометрическое мѣсто, мы уже успѣли познакомиться съ такими линіями, которыя выражаются алгебраическими уравненіями первой степени (прямая линія) и второй степени (парабола, эллипсъ и гипербола). Продолжая ознакомленіе съ тѣми линіями, которыя выражаются алгебраическими уравненіями, перейдемъ теперь къ такимъ, которыя выражаются уравненіями 3-ей и 4-ой степени. Разсмотримъ примѣръ линіи, выражаемой уравненіемъ 3-ей

степени, именно разберем одну кривую линію, носящую названіе Диссоиды. Первый, кто изслѣдовалъ эту кривую былъ Діоклесъ, а потому эту кривую называютъ обыкновенно диссоидой Діоклеса. Чтобы показать какую линію называютъ диссоидой Діоклеса, мы начертимъ окружность и черезъ B, конецъ діаметра AB (чер. 70) проведемъ прямую KL перпендикулярно къ AB. Изъ точки A проведемъ произвольно прямую, которая пересѣчетъ окружность въ точкѣ C, и прямую KL въ точкѣ D. На прямой AD отложимъ AM = CD.



Точно также проведемъ изъ точки A еще прямую, пересѣкающую окружность въ точкѣ C_1, а прямую KL въ точкѣ D_1; отложивъ на ней $AM_1 = C_1D_1$, получимъ еще точку M_1 и т. д. Найдя такимъ образомъ рядъ точекъ по возможности близко одну къ другой, и соединивъ ихъ непрерывною чертою, получимъ приблизительное очертаніе NAN₁ искомаго геометрическаго мѣста называемаго диссоидой.

Чтобы вывести уравнение циссоиды, отнесем ее к прямоугольной системе координат и для этого примем направление диаметра AB за ось абсцисс, а прямую, проходящую через точку A перпендикулярно к AB, за ось ординат. Обозначим радиус круга буквою r, а координаты M – какой либо точки циссоиды – буквами x и y. Опустив из точки M перпендикуляр MP на ось абсцисс, найдем из подобия треугольников AMP и ADB: $\frac{y}{x} = \frac{AB}{2r}$ или $AB = \frac{2ry}{x}$

AB мы можем определить основываясь на известной теореме о касательной и секущей, т. е. из следующего уравнения: $AB^2 = CA \cdot AD$. Замечая, что $CA = AM = \sqrt{x^2+y^2}$ и $AD = \sqrt{4r^2+AB^2}$, имеем

$$AB^2 = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4r^2+AB^2}$$

Подставляя найденное рациональное выражение AB в предыдущее уравнение имеем:

$$\frac{4r^2y^2}{x^2} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4r^2+\frac{4r^2y^2}{x^2}} = \frac{2r\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{x} \text{ или } \frac{2ry^2}{x} = x^2+y^2$$

Определяя из этого уравнения y^2, имеем:

$$y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$$

Это и есть уравнение циссоиды. Решив его относительно y, получим:

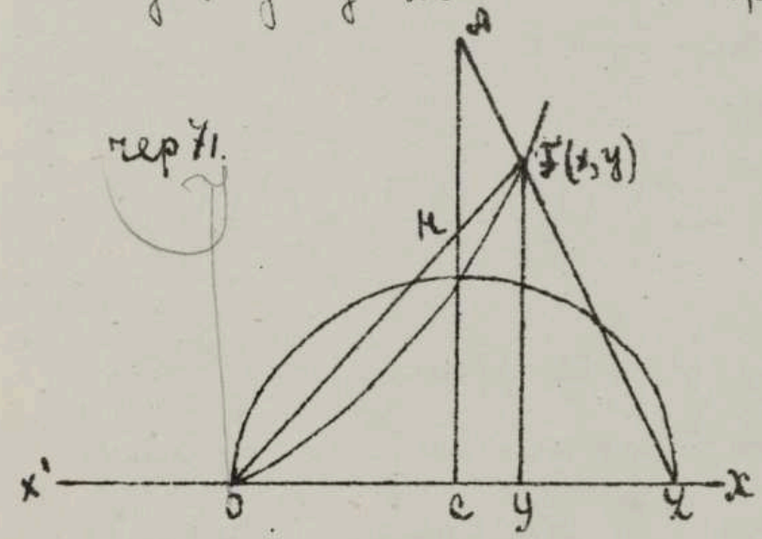
$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2r-x}}$$

Так как ордината имеет действительные

величины только при тех величинах абсциссы, которые заключаются между 0 и 2r, то, следовательно вся кривая расположена между осью $Y^{ось}$ и линией KL параллельной этой оси и проведенной от нее на расстоянии 2r. Когда x возрастает от 0 до 2r, числовая величина $y^{ка}$ увеличивается от 0 до ∞; отсюда видим, что ветвь кривой, проходя через начало A, простирается в бесконечность. При этом увеличении x расстояние равное 2r-x точки кривой от прямой KL будет приближаться к нулю; из чего мы заключаем, что прямая KL есть ассимптота кривой. Так как каждой величине x соответствуют две величины y – равные и с обратными знаками, то кривая состоит из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси абсцисс AB.

Циссоида была найдена и определена, как геометрическое место Диоклесом при решении задачи об удвоении куба. Эта задача, как и подобные ей – квадратура круга, трисекция угла – очень сильно занимали умы древних геометров и все попытки разрешить их элементарным путем остались тщетными.

Всѣ эти задачи, какъ сказано въ настоящее время, не могутъ быть рѣшены элементарнымъ путемъ, т. е. при помощи циркуля и линейки, а рѣшаются только при помощи высшей математики. Задача объ удвоеніи куба заключается въ слѣдующемъ: данъ кубъ, сторона котораго = r; требуется построить сторону куба двойного объема, т. е. линію выраженную черезъ $\sqrt[3]{2r^3}$. Рѣшимъ теперь эту задачу. Для этого проведемъ кругъ радіуса r (чер. 71.) изъ его центра C возставимъ перпендикуляръ AC = 2r, къ діаметру OA; соединимъ A съ A и проводимъ къ построенному кругу циссоиду, полюсъ которой O. Пусть F будетъ точка встрѣчи циссоиды съ прямой AA. Соединимъ F съ O и опредѣлимъ точку пересѣченія M прямыхъ AC и OF. Отрѣзокъ CM будетъ искомая сторона двойного куба, т. е линія, длина которой есть $\sqrt[3]{2r^3}$. Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія $\triangle$овъ OFY и OMC имѣемъ:



чер 71.

$$\frac{FY}{OY} = \frac{MC}{OC}, \text{ или } \frac{y}{x} = \frac{MC}{r} \text{ ---------- (1)}$$

Далее из подобия треугольников QMT и QCA имеем:

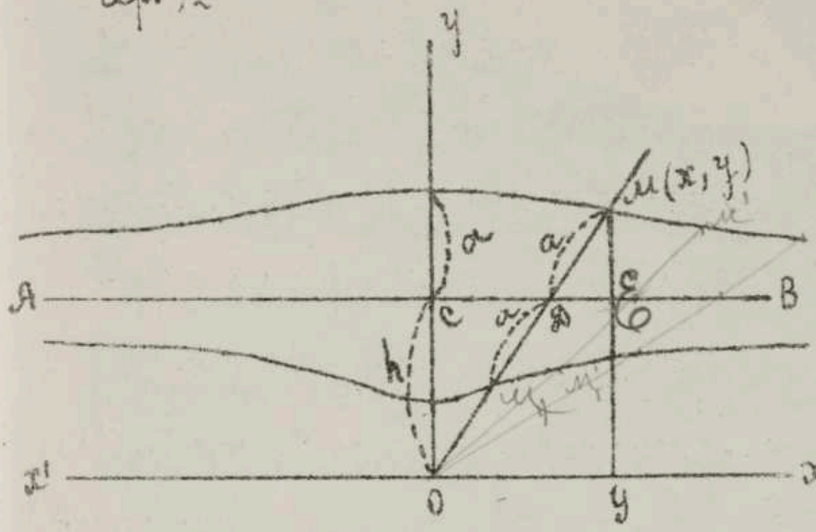
$$\frac{TM}{AC} = \frac{QM}{QC} \text{ или } \frac{y}{2r-x} = \frac{2r}{x} = 2$$

Умножив уравнение циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$ на y получим: $y^3 = \frac{x^3 y}{2r-x}$ или $y^3 = x^3 \cdot \frac{y}{2r-x}$; но мы только что вывели, что $\frac{y}{2r-x} = 2$, следовательно $y^3 = 2x^3$ или $\frac{y^3}{x^3} = 2$. Но из формулы (2) видим, что $\frac{y}{x} = \frac{MC}{r}$ или $\frac{y^3}{x^3} = \frac{MC^3}{r^3}$, а потому $\frac{MC^3}{r^3} = 2$, отсюда $MC = \sqrt[3]{2r^3}$, что и требовалось доказать.

Конхоида Никомеда.

Разберем теперь кривую выражаемую алгебраически уравнением четвертой степени. Для примера возьмем кривую носящую название „Конхоиды Никомеда". Для того, чтобы показать какой вид имеет конхоида построим ее. Возьмем прямую AB и точку O, отстоящую от нее на расстоянии h. ($= r/2$) Через точку O станем проводить во всевозможных направлениях прямые OD и от точки D, в которой эти прямые пересекаются станем откладывать $MD = M_1D = a$. Места точек, полученных таким образом

чер. 72

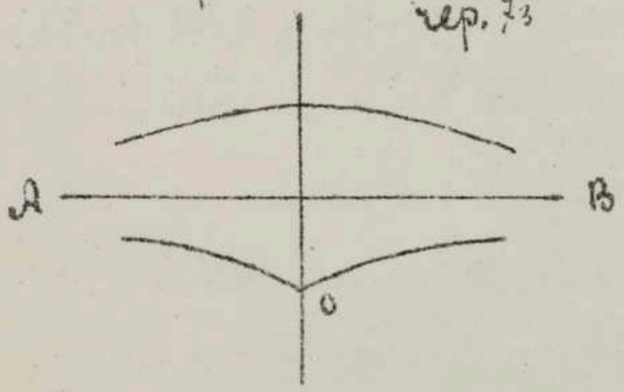


т. е. точки M и M, определяют искомую кривую.

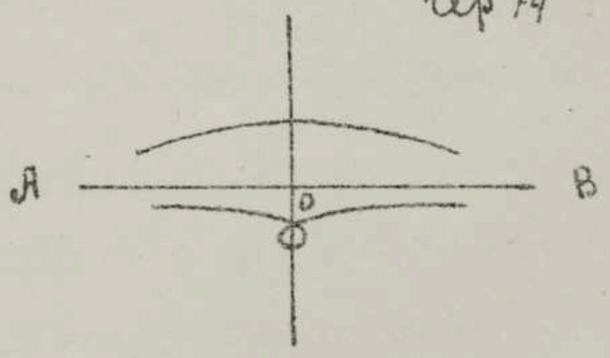
Прямая AB называется направляющей конхоиды, а точка O полюсом конхоиды. Вид конхоиды зависит от двух параметров: от a и от OC = h.

Если $a < h$, то конхоида будет иметь вид, представленный на чер. 72. Если $a = h$, то она получит вид, изображенный на чер. 73; наконец, если $a > h$, то она будет иметь вид, представленный на чер. 74.

чер. 73



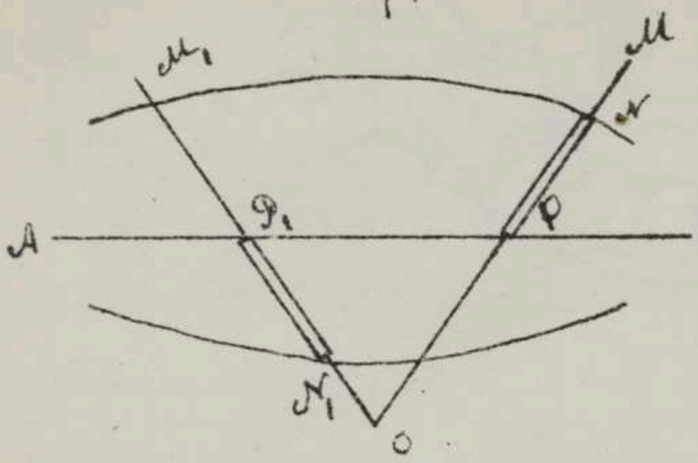
чер 74



Построение конхоиды непрерывным движением

Конхоиду можно также построить непрерывным движением. Взяв для этого линейку AB и укрепив ее неподвижно (чер. 75) в плоскости чертежа, примем ее за направляющую конхоиды.

чер 75



Въ точкѣ O, полюсѣ конхоиды, укрѣпимъ конецъ стержня OM такъ, чтобы онъ свободно могъ вращаться около точки O; на конецъ этого стержня надѣнемъ трубку, величина которой должна равняться данной длинѣ a. Трубку надѣнемъ на стержень такъ, чтобы конецъ ея P упирался въ линейку AB, на другомъ же концѣ ея N укрѣпимъ карандашъ. Теперь будемъ вращать стержень OM около точки O, стараясь, чтобы конецъ P трубки постоянно касался линейки, тогда другой конецъ ея N, въ которомъ укрѣпленъ карандашъ, будетъ описывать конхоиду. Расположивъ трубку NP въ положеніи N_1P_1, и опять вращая стержень OM, точно такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, мы конецъ N_1, въ которомъ укрѣпленъ карандашъ отмѣтимъ нѣкоторую вѣтвь конхоиды.

Составимъ теперь уравненіе конхоиды; принявъ ея полюсъ O за начало координатъ Декарта, проведемъ ось абсциссъ параллельно направляющей конхоиды (чер 76). Изъ прямоугольника OMY, подобнаго треугольнику

Имеем следующую пропорцию:

$$\frac{y-h}{a} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$ Отсюда $(x^2+y^2)(y-h)^2 = a^2y^2$.

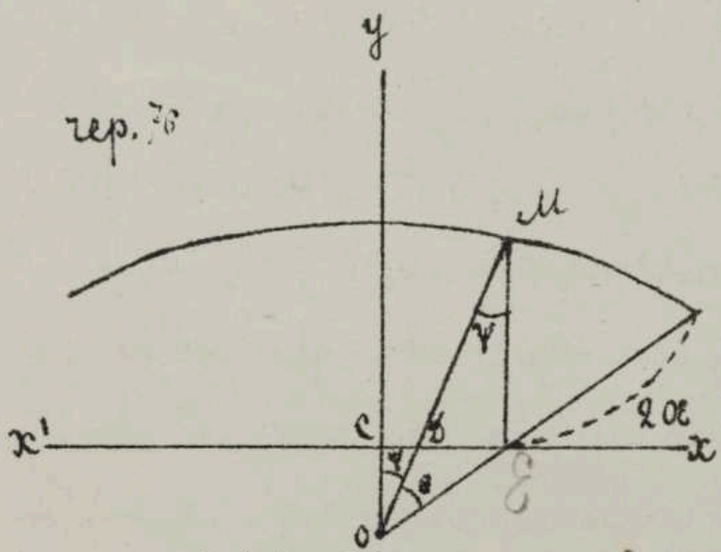
Это и есть уравнение конхоиды, которое, как мы видим будет четвертой степени. Определив отсюда:

$$y-h = \pm \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

найдем, что AB есть ассимптота конхоиды.

Легко убедиться в том, что знаки минус при корне относятся к нижней ветви конхоиды.

Конхоида была найдена Никомедом и послужила ему для решения известной задачи о трисекции угла, т. е. о разделении угла на три равные части. Это деление делается так (чер.)



чер. 76

Опускаем из точки E на одной из сторон данного угла COE перпендикуляр EC на другую сторону; примем точку O за полюс, а линию CE за параметр, который $a = 2OE$. Из точки E восставим перпендикуляр к направляющей CE и продолжим его до пересечения с конхоидой в точке M. Полученный таким образом угол $COM = \psi$ будет искомый т. е. составит треть данного.

Для доказательства имеем из треугольника OME, что

$ME = MP \cos\psi = 2OE \cos\psi$. Это же равенство можем написать в таком виде:

$$\frac{ME}{OE} = 2\cos\psi$$

Далее из треугольника OME имеем пропорцию $\frac{ME}{OE} = \frac{\sin\theta}{\sin\psi}$ и $\frac{ME}{OE} = 2\cos\psi$, а потому $2\cos\psi = \frac{\sin\theta}{\sin\psi}$. Отсюда $\sin\theta = 2\sin\psi \cdot \cos\psi = \sin 2\psi$ или $\theta = 2\psi$; т.е. $\psi = \frac{1}{3}\theta$. Это и требовалось доказать.

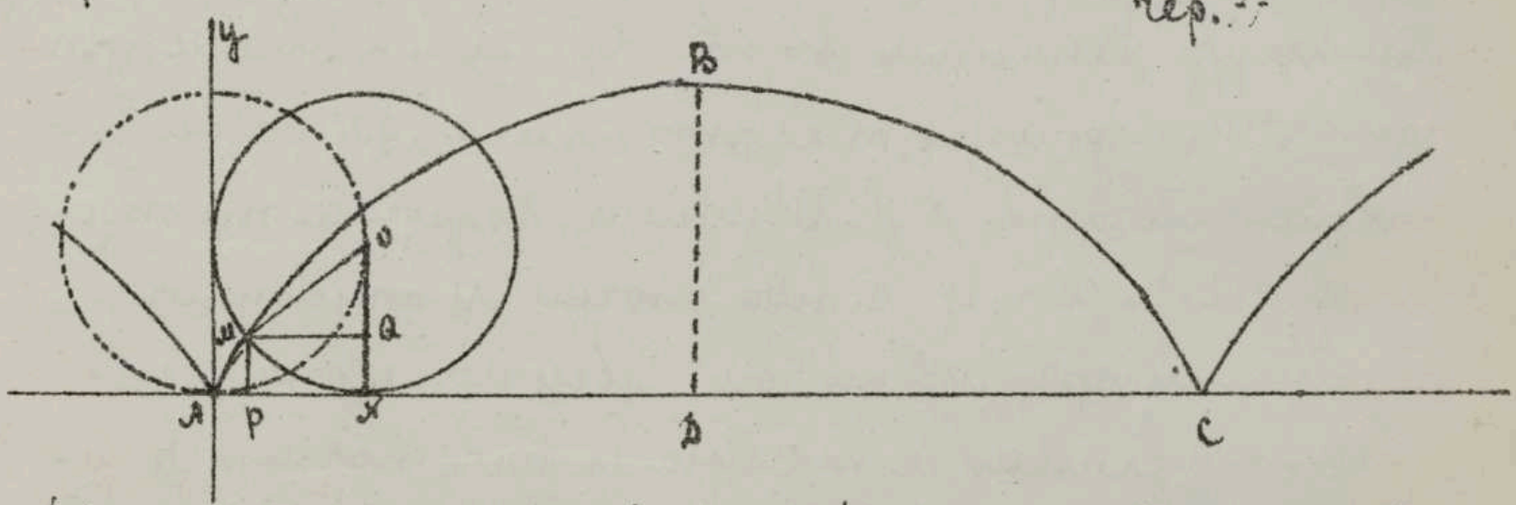
Циклоида.

До сих пор мы рассматривали линии, уравнения которых выражались алгебраическими функциями, т.е. такими, которые в явном виде выражаются через свой аргумент посредством обозначения конечного числа алгебраических действий. Теперь же перейдем к линиям, которые выражаются трансцендентными функциями, т.е. такими, которые не могут быть выражены через аргумент посредством обозначений конечного числа алгебраических действий, а требуют для своего полного вычисления бесчисленного

множества таких действий. К трансцендентным функциям относятся — показательная, логарифмическая, тригонометрическая и круговая. Одним из примеров линий, уравнения которых представляют трансцендентные функции, служит циклоида.

Представим себе, что круг катится по прямой AC, не выходя из плоскости и не скользя. Тогда точка M взятая на окружности круга, опишет некоторую линию. Чтобы составить себе понятие об этой линии, положим, что точка A есть начало движения, т.е. что точка M окружности находилась в этом месте на прямой AC.

чер. 77



По мере того, как будем катить круг в ту или иную сторону, напр. вправо, точка M будет сначала подниматься кверху и когда круг сделает пол оборота, точка M будет находиться

въ B на разстояніи діаметра отъ AC. При данномъ чемъ движеніи круга, точка M станетъ опускаться внизъ и когда кругъ сдѣлаетъ полный оборотъ, то точка M снова будетъ находиться на прямой AC въ точкѣ C. Если кругъ будемъ продолжать катить въ томъ же направленіи, то точка M снова начнетъ подниматься и т.д. и такимъ образомъ получимъ цѣлый рядъ вѣтвей, подобныхъ вѣтви ABC. Понятно, что длина AC равна окружности даннаго круга, если его радіусъ обозначимъ буквою R, то $AC = 2\pi R$. Примемъ прямую AC за ось абсциссъ, а прямую, проходящую черезъ точку A, перпендикулярно къ оси абсциссъ, за ось ординатъ. Возьмемъ на кривой какую нибудь точку M и положимъ что образующій кругъ занимаетъ въ это время положеніе, указанное на чертежѣ, т.е. что длина AN равна выпрямленной дугѣ MN. Обозначимъ координаты точки M черезъ x и y и изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MP на ось абсциссъ; точку O соединимъ прямыми съ точкою M и съ точкою N касанія круга къ оси абсциссъ; изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MQ на ON. Имѣемъ:

$$x = AP = AN - PN = AN - MQ \quad \text{I}$$

$$y = MP = NQ = ON - OQ \quad \text{II}$$

Длина прямой AN равняется выпрямленной дуге MN; поэтому, назвав линейную*) меру угла MON через θ, найдем, что дуга $NM = R\theta$; кроме того из треугольника MOQ выходит, что $MQ = OM \sin\theta = R\sin\theta$ и $\theta Q = OM \cdot \cos\theta = R\cos\theta$; следовательно из I и II равенств найдем:

$$x = R\theta - R\sin\theta = R(\theta - \sin\theta) \quad \text{III}$$

$$y = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta) \quad \text{IV}$$

Из уравнения IV мы определим теперь $\sin\theta$ и θ и подставим потом в уравнение III. Из уравнения $y = R - R\cos\theta$ имеем $\cos\theta = \frac{R-y}{R}$. Далее $\sin\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{R-y}{R}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{2Ry-y^2}{R^2}}$; при этом знак плюс соответствует тому случаю, когда точка от начала своего положения переходит в высшее, т. е. пока угол $\theta < \pi$, а знак (−) соответствует тому случаю, когда точка от высшего положения переходит к низшему, т. е. когда угол $\theta > \pi$.

Из того же уравнения, т. е. из уравнения $\cos\theta = \frac{R-y}{R}$ имеем, что $\theta = \text{arc.cos}\frac{R-y}{R}$; здесь $\text{arc.cs}\frac{R-y}{R}$ представляет из себя функцию многозначную. Общий вид $\theta = \text{arc cs}\frac{R-y}{R} + 2k\pi$, где k есть целое положительное

*) Как известно за единицу меры угла принимается центральный угол, дуга которого равняется радиусу; он равняется приблизительно 57° 17′ 44″.

или отрицательное число.

Подставляя теперь величины $\ln\theta$ и θ въ уравненіе $x = R(\theta - \ln\theta)$ имѣемъ:

$$x = R\left[\arccos\frac{R-y}{R} + 2k\pi - \left(\pm\sqrt{\frac{2Ry-y^2}{R^2}}\right)\right] \text{ или}$$

$$x = R\left[\arccos\frac{R-y}{R} \mp \frac{1}{R}\sqrt{2Ry-y^2}\right] + 2k\pi$$

Это и есть уравненіе циклоиды; изъ него видимъ, что наибольшая величина y есть $2R$. При $y > 2R$ x дѣлается мнимымъ. Этому значенію y соотвѣтствуетъ значеніе $x = R\arccos(-1) + 2k\pi R = \pi R + 2k\pi R$. Кромѣ того мы видимъ, что всякому опредѣленному значенію y соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній x, слѣдовательно уравненіе циклоиды представляетъ безчисленное множество послѣдовательно повторяющихся вѣтвей.

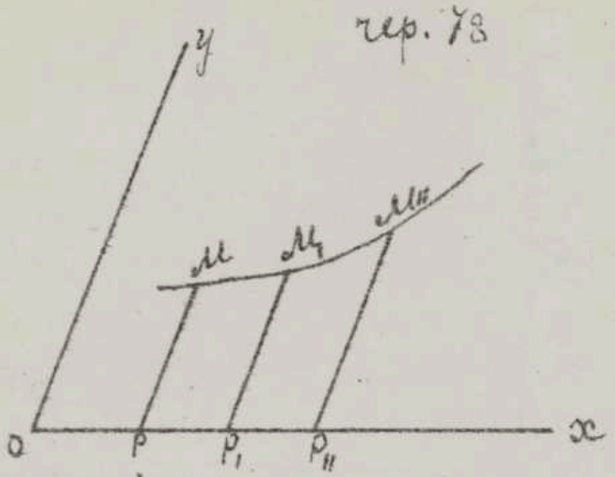
Геометрическое значеніе уравненія съ двумя неизвѣстными.

До сихъ поръ мы разбирали первую задачу Аналитической Геометріи, — по данному геометрическому мѣсту составить уравненіе, связывающее координаты любой изъ ея точекъ. Теперь обратимся ко второй обратной задачѣ, по любому уравненію связывающему два перемѣнныхъ,

имеющих непрерывные и действительные значения, найти геометрическое место точек, координаты любой из точек которого удовлетворяют данному уравнению. Положимъ дано уравнение $F(x,y)=0$ съ двумя перемѣнными x и y, представляющими координаты нѣкоторой точки плоскости. Каждая пара вещественныхъ значений x и y, удовлетворяющихъ этому уравненію, представляетъ точку на плоскости, и если предположимъ, что x_0 и y_0 суть пара рѣшеній даннаго уравненія, то получимъ точку (x_0, y_0), если x будетъ измѣняться непрерывно отъ x_0, одна изъ величинъ y будетъ также, говоря вообще, измѣняться непрерывно отъ y_0, когда x дастъ значенія между извѣстными предѣлами. Такимъ образомъ получимъ непрерывный рядъ точекъ, которыя всѣ будутъ лежать на опредѣленной линіи

Для изображенія чертежомъ самой линіи, дадимъ одной изъ перемѣнныхъ, напримѣръ x, произвольныя значенія OP, OP_1, OP_{II}, ... и вставивъ въ уравненіе $F(x,y)=0$ числовыя величины этихъ абсциссъ, получимъ соотвѣтствующія значенія для y. Отложивъ соотвѣтственно эти ординаты на прямыхъ, проведенныхъ изъ точекъ P, P_1, P_{II}, ...

параллельно оси ординатъ получимъ рядъ точекъ



чер. 78

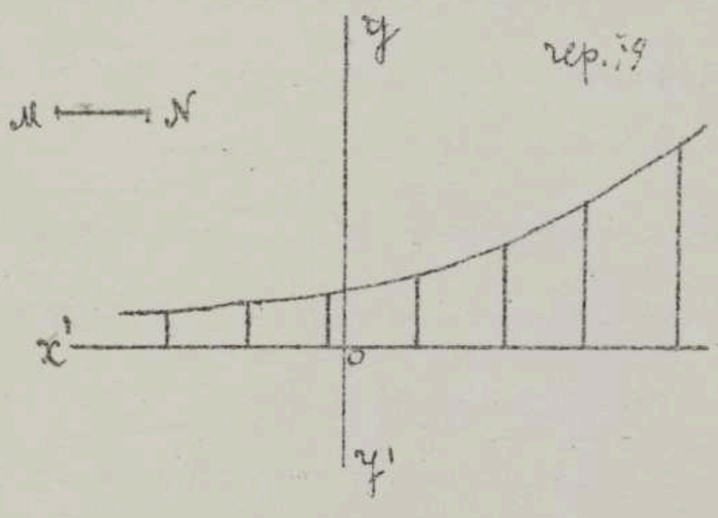
$M, M_1, M_{II}, \ldots\ldots$ координаты которыхъ удовлетворяютъ данному уравненію линіи. Найдя такимъ способомъ рядъ точекъ по возможности близкихъ между собою, соединимъ ихъ непрерывною чертою и получимъ приблизительное очертаніе линіи, представляющей геометрическое значеніе даннаго уравненія. Слѣдовательно, говоря вообще, уравненіе съ $2^{мя}$ перемѣнными x и y, представляетъ на плоскости нѣкоторую линію. Но въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ данное уравненіе съ x и y не представляетъ никакого геометрическаго мѣста, именно когда ему не удовлетворяютъ никакія вещественныя величины x и y. Въ другихъ же случаяхъ данное уравненіе съ x и y представляетъ одну или нѣсколько отдѣльныхъ точекъ, когда ему удовлетворяетъ опредѣленное число паръ вещественныхъ значеній x и y.

Изображеніе линіи на плоскости по данному ея уравненію называется черченіемъ или построеніемъ линіи. Въ слѣдующихъ примѣровъ

можно легко понять самый способъ изображенія линіи по ея уравненію.

Кривая логариѳмическая.

Она дается уравненіемъ $y = e^x$, гдѣ e есть основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ. Чтобы опредѣлить приблизительную форму кривой, будемъ давать x различныя значенія и находить соотвѣтствующія значенія для y.



чер. 19

Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ и опредѣленной величины линію MN, принявъ ее за единицу измѣренія. Полагая послѣдовательно:

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots +\infty; -1, -2, -3, \ldots -\infty$$

найдемъ, что y въ этомъ случаѣ равенъ:

$$y = 1, e, e^2, e^3 \ldots\ldots +\infty; \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3} \ldots\ldots 0$$

Поэтому логариѳмическая кривая будетъ имѣть видъ представленный на чертежѣ.

Здѣсь ось абсциссъ является асимптотой кривой.

Синусоида.

Эта кривая выражается уравнением $y = a \sin x$.

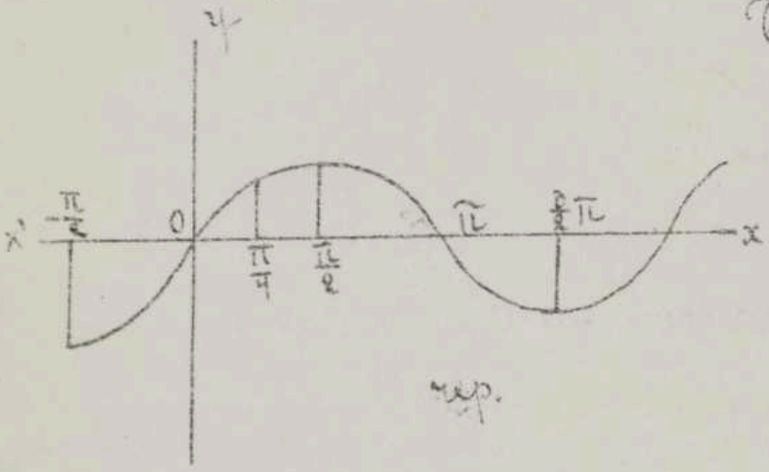
Беря прямоугольные оси координат и давая x различные значения.

$x = 0, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ и т.д., а также $x = -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\pi$ и т.д.

для y будем иметь:

$y = 0, \frac{a}{\sqrt{2}}, a, 0, -a, 0, \ldots\ldots$ а также

$y = -\frac{a}{\sqrt{2}}, -a, 0, a, \ldots$ и т.д.



чер.

Кривая тангенсов.

Эта кривая выражается уравнением $y = a \operatorname{tg} x$

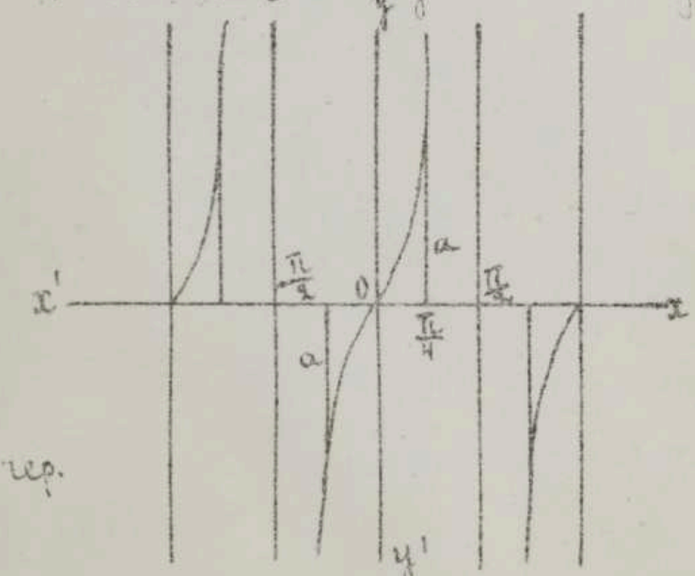
Полагая в данном уравнении,

$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi \ldots; -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\pi \ldots$

находим выражения для

y: $y = 0, a, +\infty \ldots -a, -\infty \ldots$

Поэтому кривая может быть представлена на чертеже. Она состоит из бесконечного множества ветвей, для которых прямые параллельные



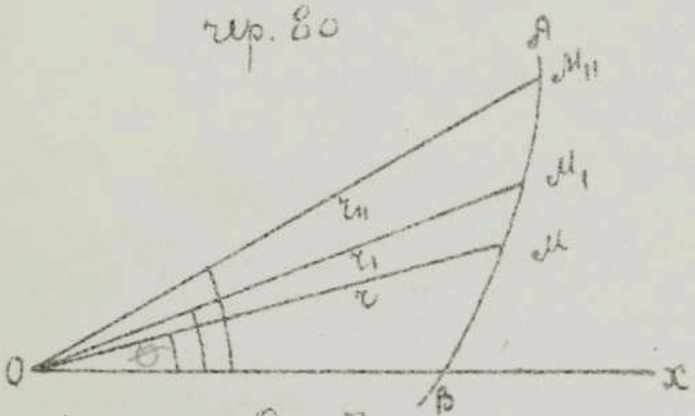
чер.

оси $y^{об}$ и отстоящія отъ нея на разстояніи $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \ldots\ldots - \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\pi \ldots\ldots$ служатъ асимптотами

Понятіе объ уравненіи линіи въ полярныхъ координатахъ.

Иногда точки данной кривой линіи опредѣляются по полярнымъ координатамъ. Пусть AB (г. 86) нѣкоторая кривая линія на плоскости. Возьмемъ на этой плоскости постоянную точку O и примемъ ее за полюсъ. Проведемъ опредѣленную прямую линію OM и примемъ ее за полярную ось. Пусть будетъ положеніе кривой AB относительно точки O и прямой OX вполнѣ опредѣлено и намъ извѣстно. Тогда каждая точка кривой AB будетъ имѣть свои опредѣленныя координаты. Пусть образомъ точка M, взятая на этой кривой будетъ опредѣлена полярнымъ угломъ MOX и радіусомъ векторомъ OM. Тоже самое можно сказать и относительно остальныхъ точекъ $M_1, M_{11}, \ldots\ldots$ этой кривой. Вообразимъ далѣе перемѣщающуюся точку M, которая движется на плоскости и описываетъ кривую AB. Перемѣнныя полярныя координаты этой точки обозначимъ черезъ $(\rho$ и $\theta)$. При движеніи точ-

ки, их координаты будутъ измѣняться, но такимъ образомъ, что каждому опредѣленному значенію одной изъ нихъ, напримѣръ θ, будетъ соотвѣтствовать совершенно опредѣленное значеніе другой, въ данномъ случаѣ r. Такимъ образомъ, когда $\theta = \angle M_1 ox$, то $r = OM$ и т. д.



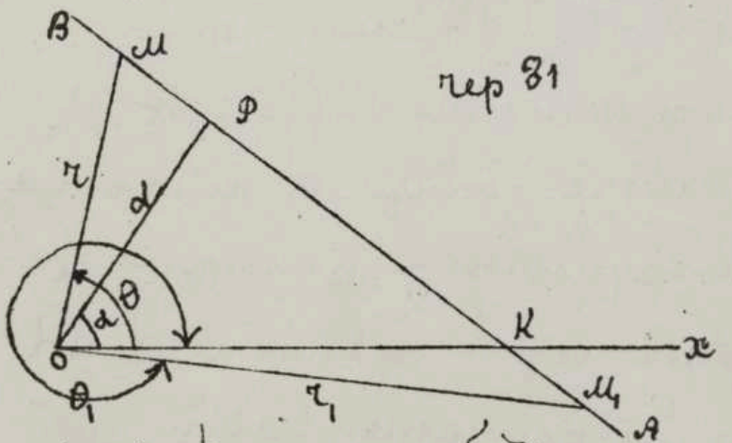
чер. 80

Словомъ, всякому опредѣленному значенію θ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе r. Отсюда заключаемъ, что перемѣнныя θ и r должны быть связаны между собою нѣкоторымъ уравненіемъ, которое должно дать возможность опредѣлять величины r, соотвѣтствующія опредѣленнымъ значеніямъ перемѣннаго θ. Этому уравненію должны удовлетворять полярныя координаты всякой точки кривой; оно называется полярнымъ уравненіемъ кривой и показываетъ связь, существующую между полярными координатами произвольной точки кривой. Координаты r и θ произвольной точки называются текущими. Относительно составленія полярнаго уравненія данной кривой нельзя дать никакихъ общихъ

правилъ и мы ограничимся тѣмъ, что повторимъ прежнее замѣчаніе, а именно для составленія уравненія должно для произвольной точки кривой выразить уравненіемъ то основное свойство, которое по опредѣленію должно принадлежать всѣмъ точкамъ разсматриваемой кривой, и если въ полученномъ уравненіи кромѣ перемѣнныхъ r и θ будутъ входить и другія перемѣнныя величины, то надо ихъ исключить съ помощью какихъ либо свойствъ разсматриваемой кривой, выводимыхъ изъ ея построенія

Полярное уравненіе прямой.

Вообразимъ прямую AB и отнесемъ ее къ полярной системѣ координатъ гдѣ O есть полюсъ, а прямая ox полярная ось. Изъ точки O опустимъ перпендикуляръ OP на данную прямую и обозначимъ длину перпендикуляра OP буквою d и уголъ XOP буквою α. Возьмемъ какую нибудь точку M на этой прямой



чер 81

и обозначим ее полярныя координаты буквами r и θ. Изъ прямоугольнаго треугольника OMP имѣемъ:

$$OP = OM \cdot \cos MOP \text{ или } d = r \cdot \cos(\theta - \alpha) \text{ откуда}$$

$$r = \frac{d}{\cos(\theta - \alpha)}$$

Это и есть полярное уравненіе прямой AB, принадлежащее, безъ исключенія, всѣмъ ея точкамъ. Такъ напримѣръ если-бы мы взяли точку M_1 и ея координаты r_1 и θ_1, то изъ треугольника OM_1P имѣли бы $d = OM_1 \cdot \cos M_1OP = OM_1 \cdot \cos(M_1OK + KOP) = OM_1 \cdot \cos(360° - \theta_1 + \alpha)$

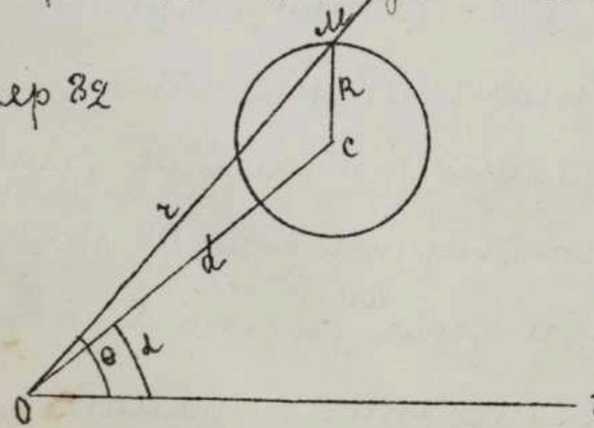
или $d = OM_1 \cos[360° - (\theta_1 - \alpha)] = r \cdot \cos(\theta_1 - \alpha)$ откуда

$r_1 = \frac{d}{\cos(\theta_1 - \alpha)}$, а это и есть тоже самое уравненіе. Величины d и α входятъ здѣсь какъ параметры полярнаго уравненія прямой.

Полярное уравненіе окружности.

Начертимъ окружность и отнесемъ ее къ полярной системѣ, причемъ точку O примемъ за полюсъ, а направленіе Ox за полярную ось. Обозначимъ радіусъ окружности буквою R, также обозначимъ полярныя координаты центра окружности буквами d и α, а координаты какой

чер 82



нибудь точки M, взятой на окружности, буквами r и θ. Тогда OC = d, угол COx = α, OM = r и угол MOx = θ. Из треугольника OMC имеем:

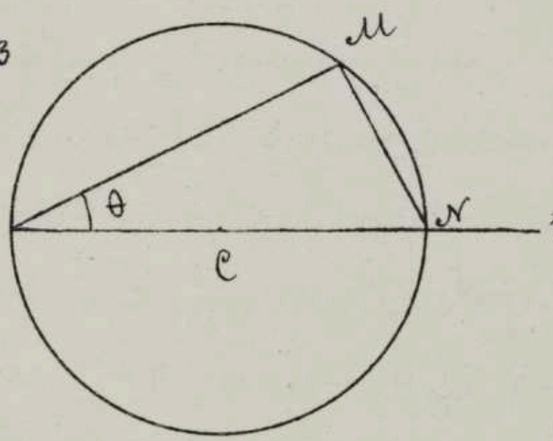
$$MC^2 = OC^2 + OM^2 - 2OC \cdot OM \cdot \cos MOC$$

или, заменивъ MC, OC, OM и ∠ MOC ихъ величинами, найдемъ уравненіе окружности

$$R^2 = d^2 + r^2 - 2dr\cos(\theta - \alpha) \ldots\ldots$$

Если окружность проходитъ черезъ полюсъ и центръ ея лежитъ на полярной оси, то α = 0 и d = R. Уравненіе окружности приметъ видъ: $R^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$ или, преобразуя, получимъ:

$$r = 2R\cos\theta.$$



чер. 83

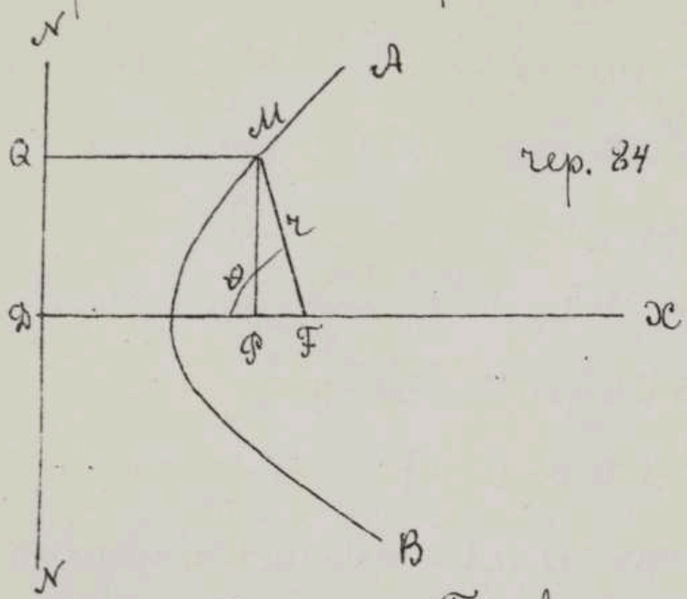
Это же уравненіе можно получить непосредственно и изъ чертежа 83-го. Взявъ прямоугольный треугольникъ OMN, имѣемъ:

$$OM = ON \cdot \cos\theta \quad \text{или} \quad r = 2R \cdot \cos\theta$$

Полярное уравненіе параболы.

Начертимъ параболу AB и ея директрису NN. Будемъ считать ось параболы Ox за полярную ось, а фокусъ параболы F за полюсъ, при семъ на-

направленіе полярной оси будемъ считать отъ F къ D, (т.е. обратно обыкновенному). Если M есть произвольная точка параболы, то ея полярныя координаты будутъ $MF = r$ и уголъ $MFD = \theta$ причемъ этотъ уголъ отсчитывается отъ оси FD въ сторону движенія часовой стрѣлки, (т.е. обратно принятому способу отсчитыванія). Опуская по предыдущему DF черезъ p, мы имѣемъ по опредѣленію параболы, что $MF = MQ$. Опустивъ изъ M перпендикуляръ на FD, имѣемъ:



чер. 84

$$r = QM = DP = DF - PF = p - r.\cos\theta \quad \text{или} \quad r + r.\cos\theta = p$$

Отсюда $r = \dfrac{p}{1 + \cos\theta}$, что и представляетъ полярное уравненіе параболы.

Величина $\cos\theta$ болѣе или равна (-1) и менѣе или равна $(+1)$, а потому $1 + \cos\theta$ будетъ величиною положительною при всѣхъ значеніяхъ θ, слѣдовательно и r есть величина положительная, съ увеличеніемъ угла θ увеличивается и величина r. Такъ напримѣръ когда $\theta = 0°$, то $\cos\theta = 1$ и $r = \dfrac{p}{1+1} = \dfrac{p}{2}$, когда же $\theta = 90°$, то $\cos 90° = 0$ и $r = \dfrac{p}{1} = p$. Если теперь мы θ будемъ увеличивать

то въ зависимости отъ этого и r будетъ увеличиваться и когда $\cos\theta$ будетъ равенъ -1, то $r = \frac{p}{1-1} = \frac{p}{0} = \infty$. Итакъ мы видимъ, что величина r измѣняется отъ $\frac{p}{2}$ до ∞. Точка наименьшаго разстоянія отъ фокуса, что соотвѣтствуетъ величинѣ $r = \frac{p}{2}$, называется точкой перигелія въ противоположность афелію, т.е. точкѣ наибольшаго разстоянія

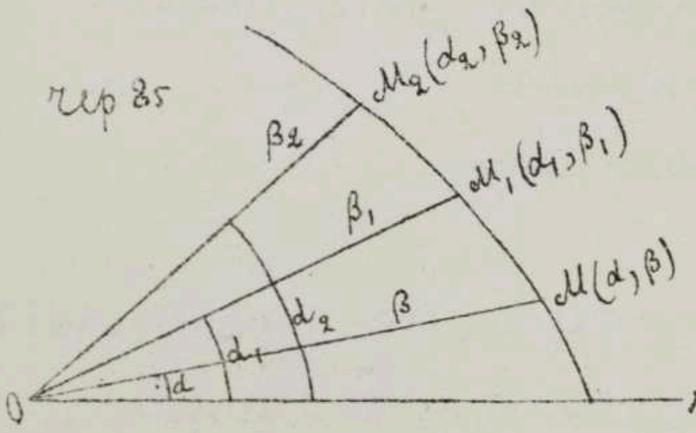
Геометрическое значеніе уравненія съ двумя перемѣнными въ полярныхъ координатахъ.

Рѣшимъ теперь обратную задачу, т.е. по данному уравненію въ полярныхъ координатахъ опредѣлимъ какую кривую она представляетъ. Возьмемъ уравненіе между двумя перемѣнными r и θ, которыя пусть будутъ полярными координатами нѣкоторой точки на плоскости, напримѣръ вообразимъ уравненія:

$$r = a\cos\theta, \quad r = a(1-\cos\theta), \quad r = 2 + 3\cos 2\theta \text{ и т. под.}$$

Разсматриваемое нами уравненіе будетъ неопредѣленное и поэтому можно найти безчис-

ленное множество значений для r и θ, удовлетворяющих тому условию, которое выражается уравнением. Иначе говоря, можно найти на плоскости бесчисленное множество точек, полярные координаты которых будут удовлетворять данному уравнению. Для этого одной из переменных пар. θ приписывают произвольные значения: α, α_1, α_2, ... и из рассматриваемого уравнения определяют соответствующие значения r. Пусть они будут β, β_1, β_2.... Тогда каждая пара соответственных значений для θ и r, как α и β, α_1 и β_1 ..... дает точку на плоскости. Пусть O есть полюс, Ox — полярная ось. При $\theta=\alpha$ имеем $r=\beta$, что дает точку $M(\alpha,\beta)$. При $\theta=\alpha_1$, имеем $r=\beta_1$, что дает точку $M_1(\alpha_1,\beta_1)$

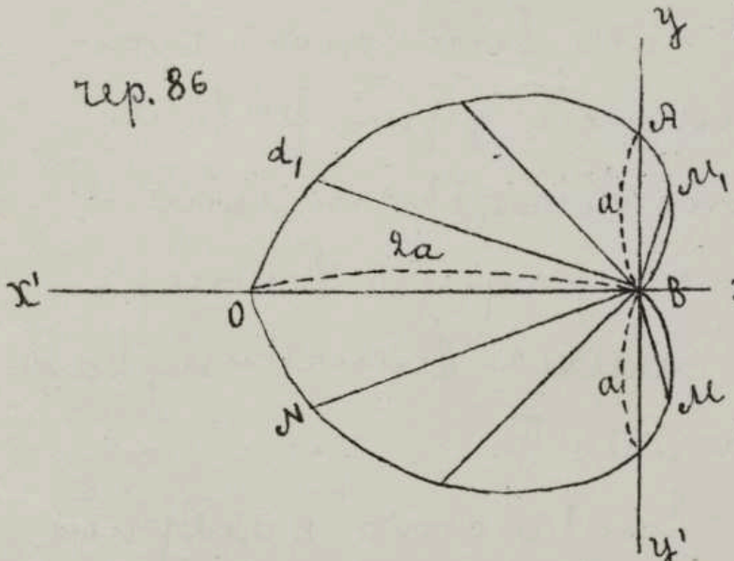


чер 85

При $\theta=\alpha_2$ имеем $r=\beta_2$, что дает точку $M_2(\alpha_2,\beta_2)$. Если значения, приписываемые θ, т.е. числа α, α_1, α_2, ... будут весьма близки одно к другому, то очевидно, что и соответственные значения r, т.е. числа β, β_1, β_2, ...

будутъ также весьма близки одно къ другому, и потому мы получимъ на плоскости точки M, M_1, M_2 и т.д. весьма близкія одна къ другой. При томъ мы можемъ представить эти точки сколько угодно близкими между собою, для чего мы должны будемъ еще болѣе уменьшить промежутки между числами $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Соединивъ полученныя точки непрерывной чертою, мы получимъ кривую линію. Эта кривая будетъ проходить черезъ всѣ точки плоскости, которыхъ полярныя координаты удовлетворяютъ данному уравненію, называемому полярнымъ уравненіемъ кривой, и обратно координаты всякой точки, взятой на этой кривой будутъ удовлетворять данному уравненію и кривая въ этомъ смыслѣ есть геометрическое представленіе даннаго уравненія. Построимъ напримѣръ кривую представленную уравненіемъ вида

чер. 86



$$r = a(1 - \cos\theta)$$

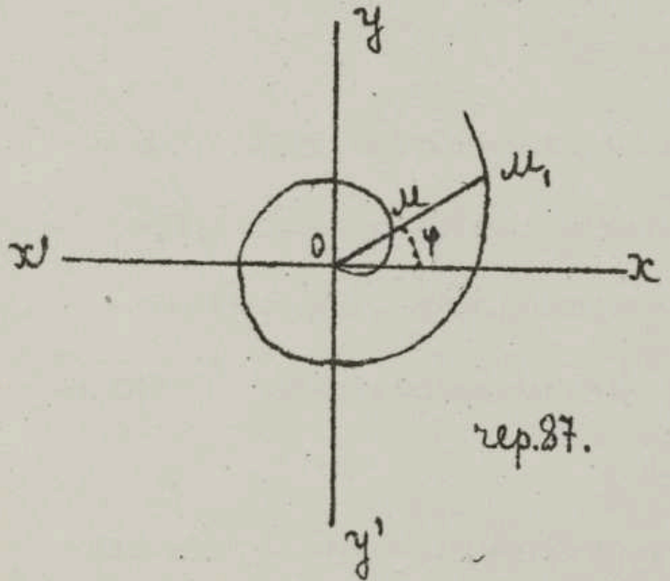
Пусть будетъ О полюсъ и ох полярная ось. При

$\theta = 0$ имѣемъ $r = 0$; это значитъ, что кривая начинается въ точкѣ O, т. е. въ полюсѣ. Если θ увеличивается, то $\cos\theta$ уменьшается, а r въ этомъ случаѣ увеличивается. Дойдя до $\theta = \frac{\pi}{2}$, получимъ $r = a$, что даетъ точку A. Если θ увеличивается, то θ будетъ оканчиваться во 2-ой четверти, т. е. $\cos\theta$ будетъ отрицательнымъ, вслѣдствіе чего будемъ имѣть r постоянно увеличивающимся. Когда $\theta = \pi$, то $r = 2a$, что даетъ точку B. Вмѣсто того, чтобы увеличивать θ далѣе, будемъ приписывать ему отрицательныя значенія отъ 0 до $-\pi$. При этомъ замѣтимъ, что такъ какъ θ входитъ въ уравненіе подъ знакомъ косинуса, а $\cos$ отрицательной дуги равенъ $\cos$ положительной, то слѣдовательно при измѣненіи θ отъ 0 до $-\pi$ радіусъ векторъ будетъ получать тѣже самыя величины, какъ и при измѣненіи θ отъ 0 до π.

Отсюда заключаемъ, что вплоть отъ полярной оси ox кривая будетъ расположена какъ и вверху отъ полярной оси ox. Другихъ точекъ у кривой не будетъ, такъ какъ нѣтъ значеній косинуса, какія не были разсмотрѣны. Эта кривая называется кардіоидой. (т. 2, стр. 85)

Спираль Архимеда.

Спираль Архимеда представляетъ изъ себя кривую, уравненіе которой выражается гораздо проще въ полярныхъ координатахъ, нежели въ Декартовыхъ. Спираль Архимеда представляетъ изъ себя геометрическое мѣсто точекъ, радіусы векторы которыхъ прямо пропорціональны полярному углу.



чер.87.

Пусть О (чер.87.) будетъ полюсъ полярныхъ координатъ, который въ данномъ спираль называется полюсомъ спирали, а Ох полярною осью. Полярное уравненіе спирали будетъ:

$$r = a\varphi \quad \text{- - - - - - - - - - - - (2)}$$

Полагая $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$ .....

Найдемъ, что $r = 0, a\frac{\pi}{2}, a\pi, a\frac{3\pi}{2}, a2\pi, a\frac{5\pi}{2}$, ...

Такимъ образомъ съ возрастаніемъ дуги будетъ возрастать пропорціонально ей радіусъ векторъ, и спираль будетъ дѣлать около полюса безчисленное множество оборотовъ. На одномъ и томъ-же ра-

фіусь вектора она будетъ отсѣкать части $MM_1 = 2\pi a$. Преобразуя полярное уравненіе (2) въ уравненіе, получающееся при прямоугольной системѣ координатъ, мы по извѣстнымъ намъ формуламъ:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

имѣемъ:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \cdot \operatorname{arcctg}\frac{y}{x}, \text{ ибо } \theta = \operatorname{arcctg}\frac{y}{x}$$

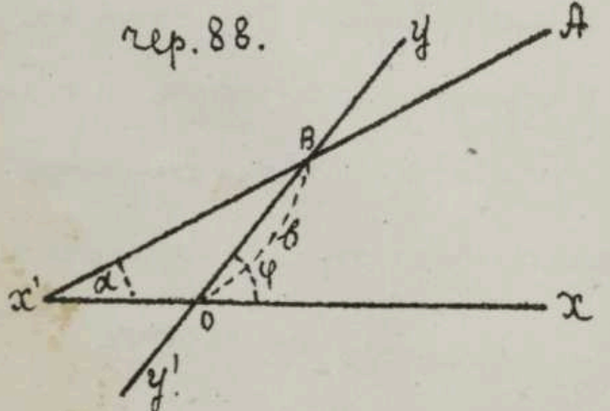
Теорія прямой линіи.

Изложимъ теперь подробные способы составленія уравненій прямой и ихъ изслѣдованія, такъ какъ формулы относящіяся къ прямой линіи постоянно будутъ встрѣчаться въ дальнѣйшемъ ходѣ изложенія.

Мы уже имѣли случай познакомиться съ одной формулой уравненія прямой, а именно, когда прямая выражается по отрѣзку (чер. 88), который она дѣлаетъ на оси y-овъ, и по углу, образуемому ею съ осью x-овъ. Форма этого уравненія слѣдующая:

$$y = kx + b;$$

чер. 88.



где $k = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$ и $b = OB$. Отсюда мы видим, что всякая прямая линия выражается уравнением 1-ой степени. Докажем теперь, что всякое уравнение 1-ой степени съ двумя перемѣнными x и y представляетъ прямую линію.

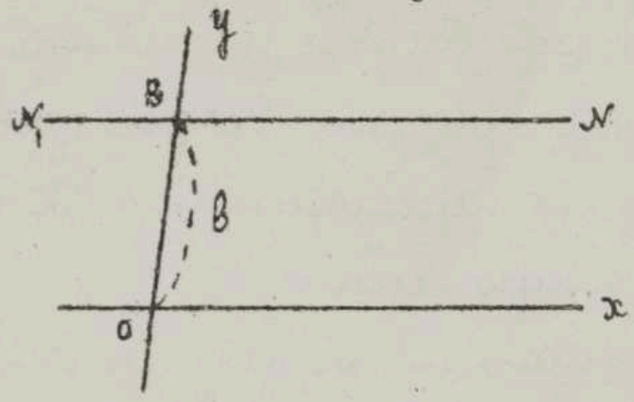
Возьмемъ уравненіе 1-ой степени съ двумя перемѣнными; общій видъ такого уравненія будетъ:

$$Ax + By + C = 0$$

Здѣсь коэфиціенты A, B и C суть данныя числа положительныя или отрицательныя. Они въ частномъ случаѣ могутъ быть и нулями. Коэфиціенты A и B въ одно и тоже время не могутъ равняться нулю, потому что въ этомъ случаѣ необходимо, чтобы $C = 0$, и тогда уравненіе обратится въ тождество.

Но можетъ случиться, что одинъ изъ коэфиціентовъ будетъ нуль. Если, напримѣръ, коэфиціентъ A равенъ нулю, то уравненіе обратится въ $By + C = 0$ или $y = -\frac{C}{B} = b$. Это уравненіе выражаетъ геометрическое мѣсто точекъ, ординаты которыхъ имѣютъ одну и ту-же постоянную величину $= b$, это геометрическое мѣсто точекъ представляетъ

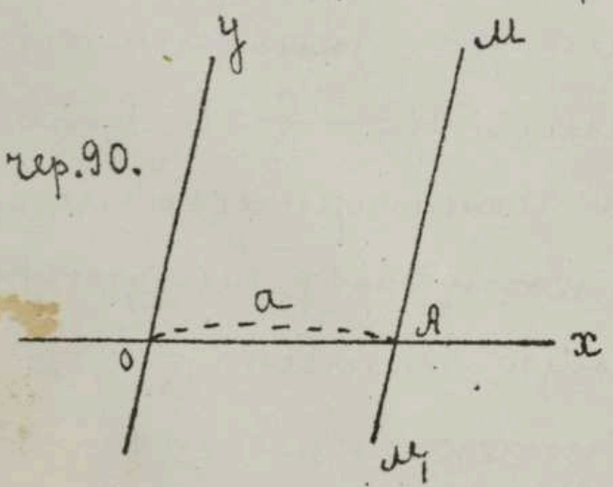
ных себя прямую N_1N, параллельную оси абсцисс.



чер. 89.

(чер. 89). Мы ее получим, отложивъ по оси Oy, по ту или другую сторону отъ начала координатъ (смотря по знаку b) линію OB, равную b, и проведя черезъ точку B линію NN, параллельную оси Ox. Въ частномъ случаѣ уравненіе $y=0$, представляетъ самую ось Ox.

Если теперь коэфиціентъ $B=0$, то уравненіе приметъ видъ $Ax+C=0$ или $x=-\frac{C}{A}=a$. Это уравненіе выражаетъ геометрическое мѣсто точекъ, абсциссы которыхъ имѣютъ общую и тутъ-же постоянную величину $=a$, а потому въ этомъ случаѣ мы имѣемъ прямую параллельную оси ординатъ. Мы ее получимъ,



чер. 90.

отложивъ по оси Ox въ ту или другую сторону (чер. 90) отъ начала координатъ (смотря по знаку A) линію $OA=a$, и проведя черезъ

точку A линию MM, параллельную оси Oy. В частном случае уравнение $x=0$ выражает ось oy. Если-бы в данном уравнении было $C=0$, то уравнение имело-бы вид: $Ax+By=0$. В этом случае отрезок $b=-\frac{C}{B}=0$ и следовательно прямая проходит через начало координат. Это и прямо видно по уравнению $Ax+By=0$, потому, что оно удовлетворяется, когда одновременно $x=0$ и $y=0$.

Положим теперь, что в нашем уравнении ни A, ни B, ни C не равно нулю, определим тогда из него y иначе:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

Сравним это уравнение с выведенным нами уравнением прямой

$$y=\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}x+b$$

Чтобы эти уравнения были тождественны мы должны иметь, во первых $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}=-\frac{A}{B}$ и во вторых $b=-\frac{C}{B}$

Если мы найдем прямую для которой $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}=-\frac{A}{B}$ и точка пересечения которой с осью y лежит на расстоянии $b=-\frac{C}{B}$ от начала координат, то мы

убедимся, что наше уравнение представляет некоторую прямую линию и определяет ее положение на плоскости.

Относительно величины $b = -\frac{C}{B}$ можно заметить, что всегда может существовать на оси Oy такая точка, ордината которой была бы равна b, а что же касается угла наклонения прямой к оси Ox, при котором $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = -\frac{A}{B}$; то его можно определить из уравнения $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = -\frac{A}{B}$ или, обозначая для краткости $-\frac{A}{B} = K$ имеем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = K \text{ или же } \sin\alpha = K\sin(\varphi-\alpha).$$

Раскрывая скобки, получаем $\sin\alpha = K\sin\varphi\cdot\cos\alpha - K\cos\varphi\sin\alpha$; делим обе части равенства на $\cos\alpha$ тогда имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = K\sin\varphi - K\cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\alpha \text{ или}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{K\sin\varphi}{1+K\cos\varphi} \quad \text{----------(1)}$$

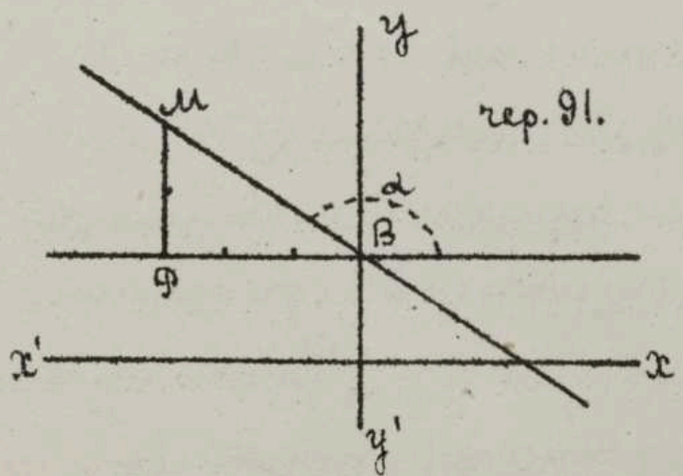
По этой формуле всегда можно определить угол α, потому что этот угол здесь определяется по тангенсу, а тангенс может иметь всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Нашему тангенсу соответствуют два угла, отличающиеся друг от друга на 180°.

Однако эта двойственность решений не дает двух прямых, а указывает только на то, что направление нашей прямой можно считать в двух противоположных сторонах от точки B. Итак наше уравнение выражает некоторую прямую, а так как оно в общем виде, то мы можем сказать, что всякое уравнение первой степени выражает прямую линию. Если-бы мы пользовались прямоугольной системой координат, то формула служащая для определения угла упрощается, ибо подставив в формулу (1) $\varphi = 90°$ имеем

$$Tg\alpha = \frac{K \sin 90°}{1 + K \cos 90°} = \frac{K \cdot 1}{1 + K \cdot 0} = K = -\frac{A}{B}.$$

Прямую можно построить по отрезку (b), который она делает с осью y^{ab} и по углу α образуемому ею с осью абсцисс. Пусть дано уравнение: $2x + 3y - 4 = 0$; отсюда

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$



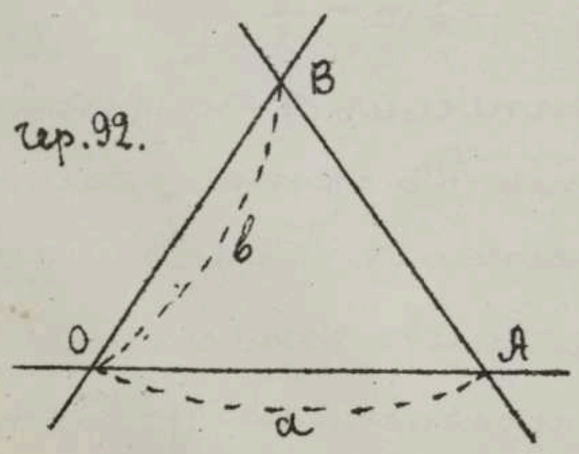
Чер. 91.

Отнесем это уравнение к ортогональной системе координат. Сравнив это уравнение с уравнением $y = Kx + b$,

мы видимъ что, $b = \frac{4}{3}$, $K = -\frac{2}{3}$ или $K = \operatorname{Tg}\alpha = -\frac{2}{3}$
Возьмемъ оси координатъ (чер.91) отложимъ отрѣзокъ $\frac{4}{3}$ въ единицахъ выбраннаго масштаба до точки B, черезъ точку B проведемъ параллель оси ox. Строимъ потомъ $\operatorname{Tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, получимъ точку M. Соединимъ M съ B получимъ требуемую прямую. Въ случаѣ косоугольной системы координатъ уголъ α опредѣлялся - бы по формулѣ $\operatorname{Tg}\alpha = \frac{K\sin\varphi}{1+K\cos\varphi}$, гдѣ $K = -\frac{2}{3}$, а координатный уголъ φ долженъ быть данъ.

Вторая форма уравненія прямой.

Прямая можетъ быть опредѣлена еще другими данными, кромѣ выбранныхъ нами въ предъидущемъ примѣрѣ и тогда она, понятно, будетъ имѣть иные параметры. Пусть, напримѣръ



чер.92.

требуется составить уравненіе прямой по координатамъ точекъ пересѣченія ея съ осями координатъ. Обозначимъ черезъ a абсциссу точки A.

пересѣченія прямой съ осью $x^{ов}$ и черезъ b – ординату точки B пересѣченія прямой съ осью $y^{ов}$, тогда координаты точки A будутъ: a и 0, а координаты точки B будутъ: 0 и b. Уравненіе всякой прямой, а слѣдовательно и искомой есть:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{- - - - - - - - (1)}$$

гдѣ A, B и C, надо замѣтить, въ зависимости отъ данныхъ величинъ a и b. Такъ какъ точка A и B (чер. 92) лежатъ на этой прямой (1), то координаты ихъ должны удовлетворять (1) уравненію, т. е.

$$Aa + B0 + C = 0 \quad \text{и} \quad A0 + Bb + C = 0$$

откуда $A = -\frac{C}{a}$ и $B = -\frac{C}{b}$.

подставивъ эти величины въ (1) уравненіе получимъ:

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

т. е. для точекъ прямой сумма отношеній координатъ къ соотвѣтствующимъ координатамъ точекъ пересѣченія прямой съ осями координатъ равняется 1.

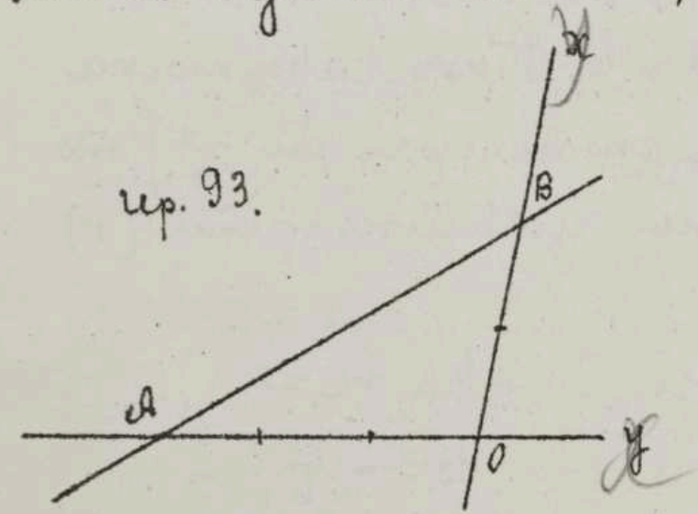
Задача. Построить прямую уравненія,

которой $2x - 3y + 6 = 0$

Анал. Геом. Листъ 18-й

Чтобы построить прямую достаточно определить двѣ какія-нибудь ея точки. Для простоты опредѣлимъ точки пересѣченія прямой съ осями координатъ

Возьмемъ за оси координатъ ox и oy (чер. 93). Въ точкѣ пересѣченія прямой съ осью x мы должны имѣть $y=0$ и слѣдовательно уравненіе будетъ $2x+6=0$, откуда $x=-3$.



чер. 93.

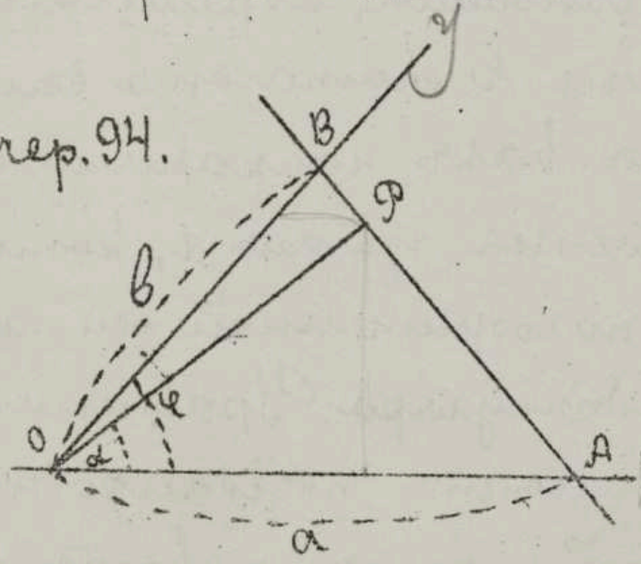
Строимъ эту точку. Пусть она будетъ A. Въ точкѣ пересѣченія съ осью ординатъ мы должны имѣть: $x=0$ и слѣдовательно уравненіе будетъ $-3y+6=0$, Откуда $y=2$. Строимъ и эту точку, она будетъ B. Соединимъ теперь A и B прямой и полученная прямая и будетъ искомой.

Третья форма уравненія прямой.

Третья форма уравненія прямой имѣетъ большое геометрическое приложеніе и называ-

ется нормальным уравнением прямой.

Положение прямой на плоскости можно определить следующим образом: опустим на данную прямую перпендикуляр OP из начала координат и определим длину этого перпендикуляра. Таким образом выразим расстояние прямой от начала координат. Но этого еще мало для определения положения прямой, ибо всякая касательная к окружности описанной из точки O радиусом OP удовлетворяла бы тому же условию. Положение же прямой станет вполне определенным когда мы дадим угол наклонения перпендикуляра к оси OX. Пусть это будет угол α.



Фиг. 94.

Тогда угол α и длина перпендикуляра OP = p вполне определят положение прямой AB. Посмотрим, каково уравнение нашей прямой при этих параметрах. Способы вывода этого уравнения могут быть различны, но мы выведем его переводя от только что выведенного уравнения

прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Рассмотрим прямоугольные треугольники OPA и OPB. Въ этихъ прямоугольныхъ треугольникахъ мы можемъ выразить параметры a и b посредствомъ нашихъ параметровъ. Въ самомъ дѣлѣ $a = \frac{p}{\cos\alpha}$ и $b = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$. Подставимъ эти выраженія вмѣсто a и b въ наше уравненіе, получимъ:

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}} = 1$$

Преобразуя, имѣемъ:

$$x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos(\varphi-\alpha) = p \quad - - - - - - (1)$$

Это и есть, такъ называемое, нормальное уравненіе прямой. Здѣсь p считаютъ величиной абсолютной, такъ какъ направленіе перпендикуляра опредѣляется угломъ α, который отсчитывается отъ положительной оси абсциссъ до этого перпендикуляра. Уравненіе въ нормальномъ видѣ имѣетъ нѣсколько иной видъ при прямоугольной системѣ координатъ. Въ этомъ случаѣ $\varphi = 90°$ и $\cos(\varphi-\alpha) = \cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$. Уравненіе приметъ видъ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

Приведение общаго уравнения прямой къ нормальному.

Уравнение общаго вида $Ax+By+C=0$ можно привести къ нормальному уравнению. Разсмотримъ, какъ это сдѣлать. Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ и положимъ, что общее уравнение надо помножить на неизвѣстный пока множитель λ, чтобы получить его въ нормальномъ видѣ, т. е.

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

Отсюда имѣемъ три уравнения:

$$\lambda A=\cos\alpha,\quad \lambda B=\sin\alpha,\quad \lambda C=-p.$$

Чтобы узнать, возможно ли найти такую величину λ, которая удовлетворяла-бы предыдущимъ условіямъ, возвысимъ первыя два равенства въ квадратъ и сложимъ ихъ почленно, найдемъ:

$$\lambda^2A^2+\lambda^2B^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot \text{ или } \lambda^2(A^2+B^2)=1$$

Откуда $$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Это выраженіе для λ возможно для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній A и B, за исключеніемъ того случая когда одновременно $=A$

и B равны нулю; но такое условие очевидно невозможно, потому что данное уравнение приняло бы вид невозможного равенства $C=0$, где C не равно нулю. Так как для λ получили два значения, то чтобы определить, который знак надо удержать при корне, обратимся к равенству $p=-\lambda C$.

Из последнего видим, что должно удерживать такой знак, чтобы $-\lambda C$ было-бы числом положительным, т.е. чтобы множитель λ был со обратным знаком относительно C. Определивши знак при λ, найдем величины $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha = \lambda B = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \lambda A = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Поэтим формулам определение угла α неудобно, а потому составим другую формулу, разделивши почленно равенства $\sin\alpha=\lambda B$ на $\cos\alpha=\lambda A$ найдем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{B}{A}$, откуда, приняв во внимание знаки для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, можем по логарифмам определить величину угла α.

Итак, чтобы уравнение общего вида привести к уравнению нормальной формы нужно его помножить на соответствующий

множитель $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$. Уравнение общего вида в таком случае преобразуется в форму: $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$, что и будет нормальным уравнением. Отсюда видим, что для приведения данного уравнения к нормальному в прямоугольных координатах нужно перенести все члены уравнения в одну часть и разделить обе части уравнения на корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при x и y, взяв при корне знак обратный знаку известного члена.

В случае косоугольных координат преобразования общего уравнения в нормальное достигается также путем умножения только уравнением на соответствующий множитель, но вид самого множителя в этом случае будет более сложен. Ход доказательства остается тот же самый как и при прямоугольной системе координат.

Сравнивая уравнения $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ с $x\cos\alpha + y\cos(\varphi-\alpha) - p = 0$, находим условия:

$$\lambda A = \cos\alpha, \quad \lambda B = \cos(\varphi-\alpha), \quad \lambda C = -p.$$

Чтобы узнать, возможно ли найти такую

величину λ, которая удовлетворяла предыдущим условиям, сделаем надо последними тремя уравнениями следующие преобразования:
Возведем во квадрат часть двух первых из этих равенств и сложим их; потом составим удвоенное произведение частей тех же равенств между собою, умножив их еще на $\cos\varphi$. Затем из полученной прежде суммы вычтем последнее произведение; тогда будем иметь:

$$\lambda^2A^2+\lambda^2B^2-2\lambda AB\cos\varphi=\cos^2\alpha+\cos^2(\varphi-\alpha)-2\cos\alpha\cdot\cos(\varphi-\alpha)\cos\varphi.$$

Докажем теперь что

$\cos^2\alpha+\cos^2(\varphi-\alpha)-2\cos\alpha\cdot\cos(\varphi-\alpha)\cos\varphi$ равняется $\sin^2\varphi$.

Для этого произведем вычисления:

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\varphi-\alpha)-2\cos\alpha\cdot\cos(\varphi-\alpha)\cdot\cos\varphi=\cos^2\alpha+(\cos\varphi\cdot\cos\alpha+\sin\varphi\cdot\sin\alpha)^2-$$
$$-2\cos\alpha\cdot\cos\varphi(\cos\varphi\cdot\cos\alpha+\sin\varphi\cdot\sin\alpha)=\cos^2\alpha+\cos^2\varphi\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\varphi\cdot\sin^2\alpha+$$
$$+2\cos\varphi\cdot\cos\alpha\cdot\sin\varphi\cdot\sin\alpha-2\cos^2\varphi\cdot\cos^2\alpha-2\cos\varphi\cdot\cos\alpha\cdot\sin\varphi\cdot\sin\alpha=$$
$$=\cos^2\alpha-\cos^2\varphi\cos^2\alpha+\sin^2\varphi\sin^2\alpha=\cos^2\alpha(1-\cos^2\varphi)+\sin^2\varphi\sin^2\alpha=$$
$$=\cos^2\alpha\sin^2\varphi+\sin^2\varphi\sin^2\alpha=\sin^2\varphi(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\sin^2\varphi$$

Следовательно мы можем написать:

$$\lambda^2A^2+\lambda^2B^2-2\lambda AB\cos\varphi=\sin^2\varphi,\ \text{откуда}$$

$$\lambda=\pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cdot\cos\varphi}}$$

Знак λ определяется уравнением $p=-\lambda C$, т.е.

должень быть обратень знаку извъстнаго члена. Общее же уравненіе $Ax + By + C = 0$ при косоугольной системѣ координатъ въ нормальной формѣ выразится такъ:

$$\frac{(Ax+By+C)\sin\varphi}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\varphi}} = 0$$

Четвертая форма уравненія прямой.

Найдемъ теперь общее уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку. Назовемъ черезъ x_1 и y_1 координаты данной точки M_1. Уравненіе всякой прямой есть

$$y = Kx + b$$

Чтобы эта прямая проходила черезъ точку M_1, надобно, чтобы координаты данной точки удовлетворяли уравненію прямой. Слѣдовательно, если перемѣнныя координаты x и y замѣнимъ координатами x_1 и y_1 точки M_1, то получимъ условное уравненіе:

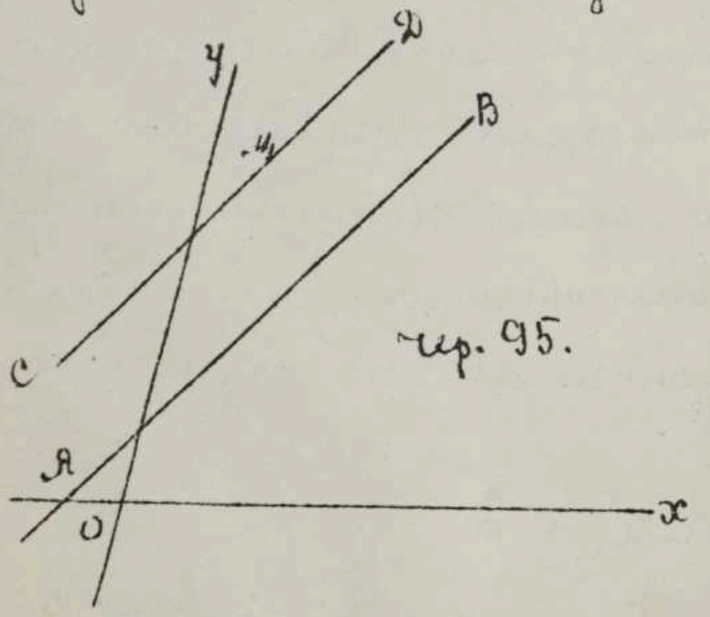
$$y_1 = Kx_1 + b$$

Из этого уравнения определяется один из параметров K или b в функции другого. Например параметр b в функции K; заменив в уравнении прямой b его выражением $y_1 - Kx_1$, найденным из условного уравнения, получим:

$$y - y_1 = K(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Это уравнение, в котором угловой коэффициент K остается произвольным, выражает весь пучок прямых, проходящих через точку M_1. Поэтому, если K изменяется, прямая будет вращаться около точки M_1.

Обратимся теперь к составлению уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.



Чер. 95.

Пусть $y = Kx + b$ будет уравнение данной прямой AB, а x_1 и y_1 – координаты данной точки M_1. (Чер. 95). Так как искомая прямая должна проходить через данную точку,

то ея уравненіе, какъ мы видѣли будетъ:

$$y - y_1 = K_1(x - x_1)$$

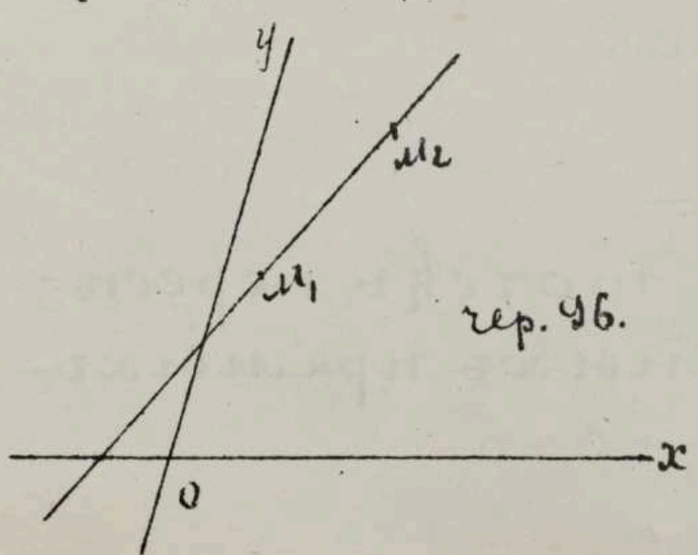
Эта прямая, по условію, должна быть параллельна прямой AB, поэтому угловой коэффиціентъ ея K_1 долженъ быть равенъ угловому коэффиціенту K прямой AB. Слѣдовательно, искомая параллельная CD выразится уравненіемъ:

$$y - y_1 = K(x - x_1).$$

Пятая форма уравненія прямой

Составимъ теперь уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки.

Пусть M_1 и M_2 (чер. 96.) будутъ двѣ данныя точки; x_1 и y_1 координаты точки M_1 и x_2 и y_2 координаты точки M_2.



чер. 96.

Такъ какъ прямая M_1M_2 должна проходить черезъ точку M_1, то ея уравненіе будетъ

$$y - y_{c1} = K(x - x_1) \quad \ldots (1)$$

Остается теперь опре-

дълить коэффициентъ K такъ, чтобы эта прямая проходила также черезъ M_2. Для этого необходимо чтобы координаты точки M_2 удовлетворяли уравнению (1), и мы получимъ

$$y_2 - y_1 = K(x_2 - x_1) \quad \text{откуда}$$

$$K = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

т.е. угловой коэффициентъ прямой M_1M_2 равенъ разности ординатъ двухъ данныхъ точекъ, раздѣленной на разность абсциссъ этихъ же точекъ.

Замѣнивъ въ уравненіи (1) K его величиною, получимъ уравненіе прямой M_1M_2

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

которое можно представить въ видѣ:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если точка M_1 находится въ началѣ координатъ, то $x_1 = 0$; $y_1 = 0$ и уравненіе (2) въ этомъ случаѣ получитъ видъ:

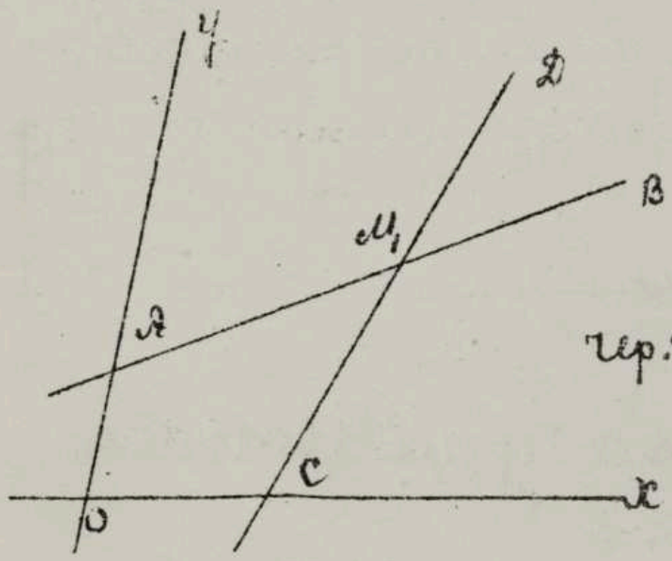
$$y = \frac{y_2}{x_2}x$$

Отысканіе точекъ пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.

Пусть $\quad Ax + By + C = 0$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

будут уравнения двух данных прямых AB и CD (чр. 97) и M_1 — точка пересечения этих двух прямых. Так как точка M_1 принадлежит каждой прямой, то ее координаты должны в одно и тоже время удовлетворять двум уравнениям. Следовательно, решив эти два уравнения с двумя неизвестными, получим координаты точки M_1.



чр. 97.

$$x_1 = \frac{BC_1 - CB_1}{AB_1 - BA_1}$$

$$y_1 = \frac{CA_1 - AC_1}{AB_1 - BA_1}$$

Если знаменатель $AB_1 - BA_1$ не равен нулю, то x_1 и y_1 будут иметь конечные и определенные, и обе прямые действительно пересекаются в точке M_1. Но если знаменатель равен нулю, а числители не равны нулю, то x_1 и y_1 будут величины бесконечные; это показывает что две данные прямые параллельны и действительно в этом случае угловые

ихъ коэффиціенты равны $-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1}$.
Въ томъ же случаѣ, когда $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}$, числители и знаменатели равны нулю и величины x_1 и y_1 представляются въ видѣ $\frac{0}{0}$. Эта неопредѣленность показываетъ, что обѣ данныя прямыя сливаются; дѣйствительно, если положимъ $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = K$, откуда $A_1 = AK$; $B_1 = BK$; $C_1 = CK$, затѣмъ внесемъ эти величины во второе уравненіе и потомъ раздѣлимъ его на K, то оно окажется тождественно съ первымъ.



Шестая форма уравненія прямой.

Найдемъ общее уравненіе прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.

Пусть $Ax + By + C = 0$ . . . . . (1)

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ . . . . . (2)

будутъ уравненія двухъ данныхъ прямыхъ. Этотъ вопросъ можно рѣшить слѣдующимъ образомъ. Изъ уравненій (1) и (2) опре-

дадимъ координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ и потомъ черезъ эту точку проведемъ какую нибудь прямую.
Но этотъ вопросъ можно рѣшить гораздо скорѣе.
Умноживъ одно изъ уравненій (1) или (2) на произвольное количество λ, и сложивъ ихъ, получимъ уравненіе первой степени

$$(Ax + By + C) + \lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

которое выражаетъ третью прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ. Дѣйствительно, такъ какъ координаты этой точки въ одно и тоже время удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ (1) и (2), то они обращаютъ въ нуль выраженія, находящіяся въ скобкахъ, а слѣдовательно, удовлетворяютъ уравненію (3).
Уравненіе (3) выражаетъ всѣ прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ, такъ какъ коэффиціентъ λ остается произвольнымъ. Положивъ въ уравненіи (3) $\lambda = 0$, получимъ $Ax + By + C = 0$; это есть первая изъ данныхъ линій.
Если λ замѣнимъ черезъ $\frac{m}{n}$ и потомъ

умноживъ на λ, положимъ $\lambda = 0$, то получимъ вторую прямую: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
Коэффиціентъ λ можно опредѣлить какого нибудь дополнительнаго условія, напримѣръ изъ условія, чтобы прямая проходила черезъ какую нибудь точку M плоскости, координаты которой суть x_1 и y_1; для этого необходимо, чтобы удовлетворялось уравненіе

$$(Ax_1 + By_1 + C) + \lambda(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) = 0$$

Отсюда $$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Замѣнивъ въ уравненіи (3) λ его выраженіемъ получимъ уравненіе

$$\frac{Ax + By + C}{Ax_1 + By_1 + C} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}$$

которое выражаетъ прямую, проходящую черезъ точку M и точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ. Въ этомъ уравненіи числители суть первыя части уравненій двухъ данныхъ прямыхъ, знаменатели же суть тѣ же многочлены только въ нихъ x и y замѣнены координатами данной точки.

При взгляде на это уравнение прямо видно, что прямая, выражаемая им, проходит через данную точку и точку пересечения двух данных прямых.

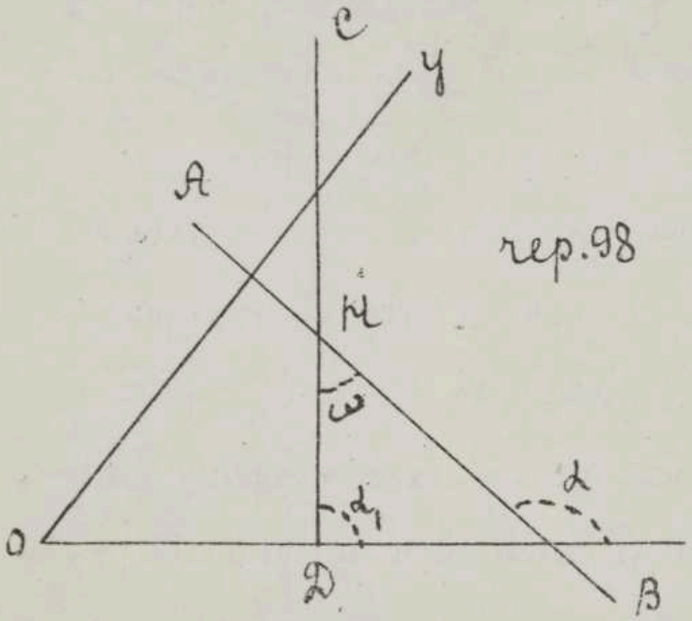
Уравнение первой степени относительно x и y, содержащее произвольный параметр λ выражает бесконечное число прямых; если этот параметр входит в уравнение только в первой степени, то уравнение можно представить в виде (3) тогда увидим, что все прямые проходят через одну и туже точку, точку пересечения прямых (1) и (2).

Определение угла, образуемого двумя данными прямыми.

Пусть $y = kx + b$ и $y = k_1 x + b_1$, будут уравнения двух данных прямых AB и CD. Назовем через α и α_1 углы, образуемые этими линиями с осью Ox, а через ω — угол, который они составляют между

ду собой. В таком случае, очевидно, что $\omega = \alpha - \alpha_1$, и мы можем написать, что

$$\operatorname{Tg}\omega = \frac{\operatorname{Tg}\alpha - \operatorname{Tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{Tg}\alpha \cdot \operatorname{Tg}\alpha_1}$$



Рер.98

Но по выведенной ранее формуле известно что

$$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{K \cdot \sin\varphi}{1 + K\cos\varphi} \quad \text{и}$$

$$\operatorname{Tg}\alpha_1 = \frac{K_1 \sin\varphi}{1 + K_1\cos\varphi}$$

где φ — есть угол между осями ос и оу. Внеся эти величины в предыдущую формулу получим:

$$\operatorname{Tg}\omega = \frac{\dfrac{K\cdot\sin\varphi}{1+K\cos\varphi} - \dfrac{K_1\sin\varphi}{1+K_1\cos\varphi}}{1 + \dfrac{KK_1\sin^2\varphi}{(1+K\cos\varphi)(1+K_1\cos\varphi)}}$$ или упрощая

$$\operatorname{Tg}\omega = \frac{K\sin\varphi + KK_1\sin\varphi\cos\varphi - K_1\sin\varphi - KK_1\sin\varphi\cos\varphi}{1 + K\cos\varphi + K_1\cos\varphi + KK_1\cos^2\varphi + KK_1\sin^2\varphi}$$

Наконец $\operatorname{Tg}\omega = \dfrac{(K-K_1)\sin\varphi}{1 + (K+K_1)\cos\varphi + KK_1}$

Эта формула решает вопрос. В частном случае, когда координаты прямоугольны эта формула упростится, ибо $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$, а $\sin\varphi = 1$, и мы будем иметь

$$\operatorname{Tg}\omega = \frac{K - K_1}{1 + KK_1}$$

Изъ этихъ формулъ можно вывести условія параллельности данныхъ линій, а также и при перпендикулярности.
Если прямыя параллельны, то $\omega = 0$ и $\operatorname{Tg}\omega = 0$ такъ какъ знаменатель ни того ни другого выраженія не можетъ равняться безконечности, потомучто, вообще говоря, ни K, ни K_1 не безконечно велики. Итакъ для параллельности данныхъ линій необходимо, какъ при косоугольныхъ, такъ и при прямоугольныхъ осяхъ координатъ чтобы

$$K - K_1 = 0,$$

такъ какъ $\operatorname{Sin}\varphi$ не можетъ равняться 0.

Задача 1. Составить уравненіе прямой линіи, проходящей черезъ данную точку и перпендикулярную къ данной прямой.

Пусть данная точка есть (x_1, y_1), а данная прямая $y = kx + b$. Уравненіе искомой прямой, какъ проходящей черезъ данную точку, будетъ $y - y_1 = K_1(x - x_1)$. Здѣсь K_1 неизвѣстно. По условію перпендикулярности двухъ прямыхъ имѣемъ:

$$1+(K+K_1)\cos\varphi+KK_1=0,$$

где φ есть угол между осями координат. Отсюда найдем K_1.

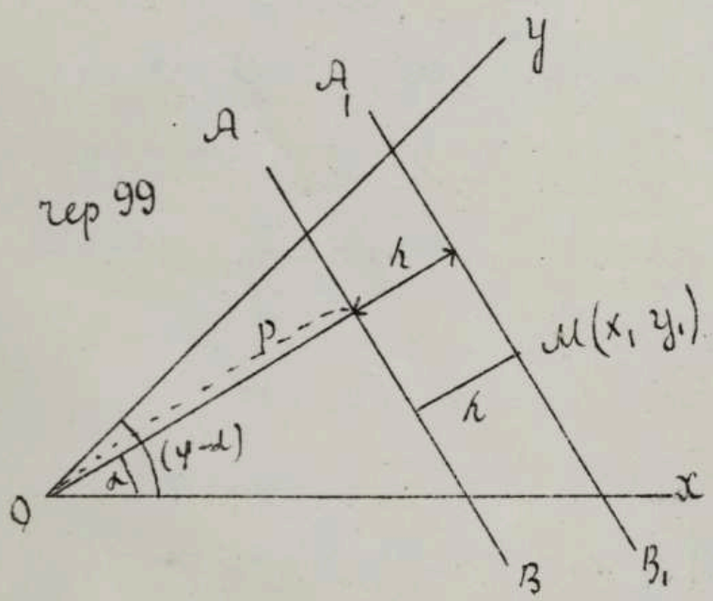
$$1+K\cos\varphi+K_1(K+\cos\varphi)=0;\quad K_1=-\frac{K\cos\varphi+1}{K+\cos\varphi}$$

Т.к. теперь K_1 известно и уравнение искомой прямой будет такое:

$$y-y_1=-\frac{K\cos\varphi+1}{K+\cos\varphi}(x-x_1)$$

Задача 9. Определить длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую.

Решим эту задачу в предположении, что уравнение прямой AB дано в нормальной форме, т.е. в форме: $x\cos\alpha+y\cos(\varphi-\alpha)-p=0\ldots(1)$



гер 99

Проведем через данную точку M прямую A_1B_1 параллельную AB и заметим, что уравнение этой прямой будет:

$$x\cos\alpha+y\cos(\varphi-\alpha)-(p+h)=0\quad\ldots\ldots(2)$$

где h есть расстояние между прямыми AB и A_1B_1. Т.к. как прямая дан-

ная уравнением (2) проходит через точку $M(x_1, y_1)$, то

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos(\varphi - \alpha) - (p + h) = 0$$

откуда

$$h = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos(\varphi - \alpha) - p \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Если бы точка M была дана по другую сторону прямой, то оказалось бы, что

$$h = -(x_1 \cos\alpha + y_1 \cos(\varphi - \alpha) - p) \quad \ldots\ldots (3_1)$$

Итак, если точка находится по другую сторону прямой относительно начала координат, то выражение перпендикуляра получается при вычислении со положительным знаком, а если точка расположена по ту же сторону прямой как и начало координат, то выражение перпендикуляра представится отрицательным количеством. Первая часть формулы (3) представляет искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую AB, вторая ея часть представляет левую часть уравнения (1), в которую подставлены координаты точки M. Отсюда следует, что для решения предложенной задачи стоит только

подставить координаты данной точки в уравнение нормальное данной прямой. Полученное при этом вычислении положительное или отрицательное количество и имеет значения для определения длины перпендикуляра, потому что эту длину нужно считать абсолютной величиной, а указанное обстоятельство служит только к разысканию положения точки и начала координат относительно прямой.

Если уравнение прямой дано в общем виде

$$Ax + By + C = 0,$$

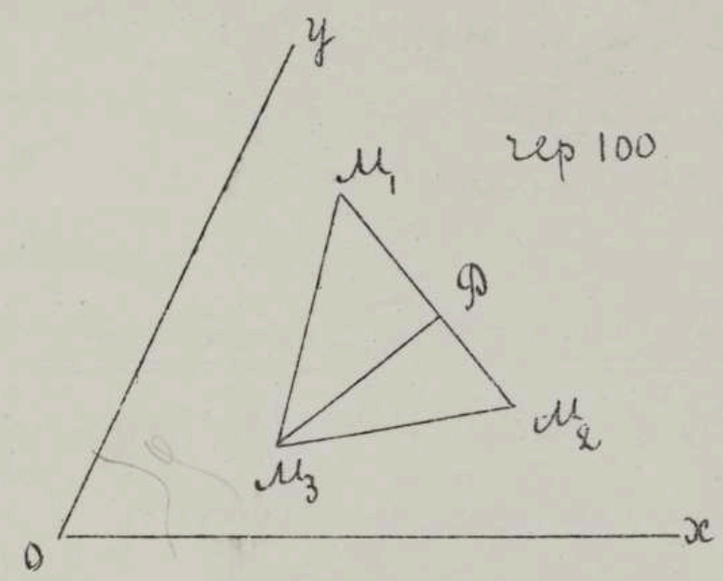
то для решения предложенной задачи нужно это уравнение прежде привести к нормальной форме.

В частном случае, когда точка M лежит в начале координат, имеем $x_1 = y_1 = 0$ поэтому

$$h = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Задача 3. Определить площадь треугольника по координатам его вершин.

Означим вершины треугольника буквами M_1, M_2, M_3, координаты точки M_1 через x_1, y_1, точки M_2 через x_2, y_2, и точки M_3 через x_3, y_3. Опустим перпендикуляр M_3P из точки M_3 на линию M_1M_2. Составим теперь уравнение прямой проходящей через точку M_1 и M_2, получим



$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{или}$$

$$x(y_2-y_1) - y(x_2-x_1) + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$$

Приведем это уравнение к нормальному, для этого, как известно должно умножить его первую часть на

$$\pm \frac{\sin\varphi}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\varphi}}$$

где $A = y_2-y_1$, $B = -(x_2-x_1)$, а φ есть угол между осями координат поэтому наше уравнение примет вид:

$$\pm \frac{[x(y_2-y_1) - y(x_2-x_1) + x_2y_1 - x_1y_2]\cdot \sin\varphi}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2+2(y_2-y_1)(x_2-x_1)\cos\varphi}} = 0$$

Если подставим сюда вместо x и y координаты x_3 и y_3, то найдем длину перпендикуляра h, опущенного из точки M_3 на основание треугольника M_1M_2
Этот перпендикуляр будет:

$$h = \pm \frac{[x_3(y_2-y_1) - y_3(x_2-x_1) + x_2y_1 - x_1y_2] \cdot \sin\varphi}{\sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2 + 2(y_2-y_1)(x_2-x_1)\cdot\cos\varphi}}$$

Он представляет высоту нашего треугольника, основание его треугольника есть расстояние между точками M и M_2.
Оно выражается, как известно следующей формулой:

$$\delta = \sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2 + 2(y_2-y_1)(x_2-x_1)\cdot\cos\varphi}$$

Отсюда следует, что искомая площадь будет:

$$\Delta = \frac{h\delta}{2} = \pm\frac{1}{2}[x_3(y_2-y_1) - y_3(x_2-x_1) + x_2y_1 - x_1y_2]\cdot\sin\varphi, \text{ или}$$

$$\Delta = \pm\frac{1}{2}[x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_3 + x_1y_3 + x_2y_1 - x_1y_2]\cdot\sin\varphi \ldots\ldots$$

Так как площадь берут по абсолютной величине, то в этой формуле следует взять такой знак, что бы вторая часть была положительна. Если площадь $\Delta = 0$, то это показывает что три данные точки лежат на одной прямой.

Отсюда получается алгебраическое соотношение, обусловливающее положение трех данных точек на одной прямой. Оно выражается так:

$$\pm\left[x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2\right]=0$$

Первая часть этого равенства представляет следующий детерминант:

$$\mp\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}$$

Площадь же можно выразить следующим образом

$$\Delta=\mp\frac{\sin\varphi}{2}\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}$$

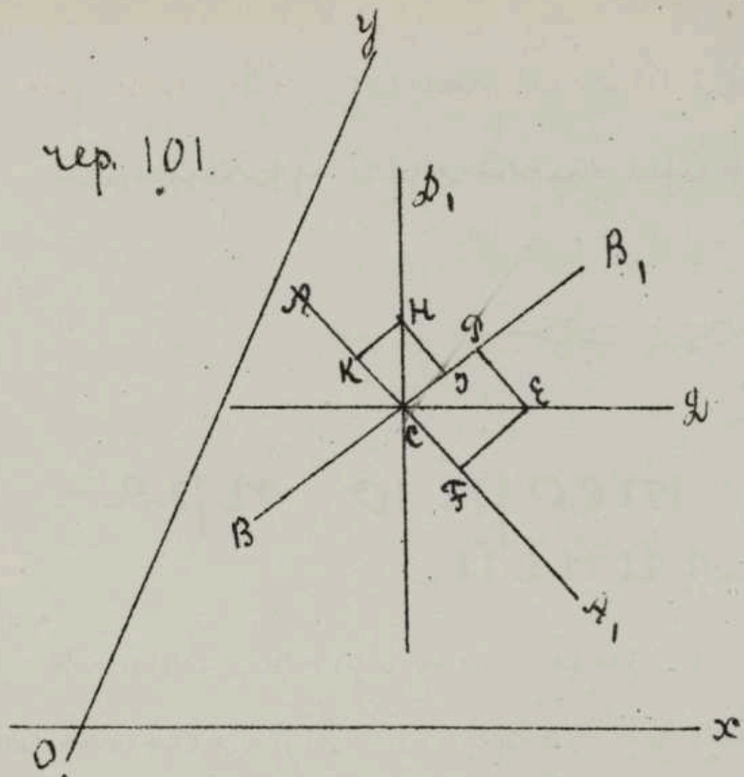
Задача 4. Составить уравнение прямой, делящей угол, составленный двумя данными прямыми, пополам.

Когда при решении вопроса нас не интересуют коэффициенты уравнения прямой, то вместо того, чтобы приводить

полное уравнение прямой обозначают его сокращенно, например в виде $A=0$, где под этим равенством подразумевают общее уравнение прямой, нормальное же уравнение прямой сокращенно обозначают так $\alpha=0$, т. е. в первом случае принято употреблять латинские, а во втором греческие буквы.

Итак положим, что уравнения данных прямых даны в нормальной форме, т. е. $\alpha=0$, $\beta=0$. Так как для определения длины перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, должно только подставить координаты этой точки в первую часть нормального уравнения данной прямой, то можем считать α и β за длины перпендикуляров опущенных на эти линии.

Положим теперь, что данныя прямыя будут AA_1 и BB_1 (чер. 101). Проведем линию CD делящую угол A_1CB_1, пополам и линию CD_1, делящую угол ACB_1 пополам. Возьмем какую нибудь произвольную точку E на линии CD и из нея опустим



чер. 101.

перпендикуляры EF и EP на данныя прямыя. Возьмемъ такожде произвольную точку M на линію CD1 и опустимъ изъ нея перпендикуляры MY и MK на данныя линіи.

Перпендикуляръ EF равенъ перпендикуляру EP. Такъ какъ линія BB1 выражается уравненіемъ $\beta = 0$, и точки E и O лежатъ по разныя стороны прямой BB1, то перпендикуляръ $EP = \beta$. Линія AA1 выражается уравненіемъ $\alpha = 0$, и потому перпендикуляръ $EF = \alpha$. Имѣемъ слѣдовательно

$\beta = \alpha$ или $\alpha - \beta = 0$

Такъ биссектриса CD выражается уравненіемъ, которое получается черезъ **вычитаніе** нормальныхъ уравненій данныхъ прямыхъ. Чтобы вывести уравненіе биссектрисы CD1, замѣтимъ, что перпендикуляръ $MY = MK$. Такъ какъ точки M и O лежатъ по одну сторону прямой BB1, то $MY = -\beta$. Съ другой стороны $MK = \alpha$. Слѣдовательно $-\beta = \alpha$ или

$\alpha + \beta = 0$, т. е. уравнение биссектрисы CD, получается через сложение нормальных уравнений данных прямых.

Задачи на теорію прямыхъ линій.

На теорію прямыхъ линій могутъ быть предлагаемы различныя задачи. По главнымъ признакамъ, ихъ можно раздѣлить на слѣдующія четыре рода: 1) Составить уравненіе прямой по двумъ даннымъ. 2) Доказать, что три точки лежатъ на одной прямой. 3) Доказать, что три прямыя пересѣкутся въ одной точкѣ. 4) Найти прямую, какъ нѣкоторое геометрическое мѣсто.

Задачи перваго рода.

Съ задачами перваго рода мы уже встрѣчались раньше. Чтобы напомнить ихъ сущность, рѣшимъ одну изъ подобныхъ задачъ. Провести черезъ данную точку (x, y_1) прямую, которая съ прямою $y = kx + b$ обра-

зуемъ данный уголъ.

Пусть оси координатъ косоугольны и тесть φ данного угла. Обозначимъ угловой коэффиціентъ искомой прямой черезъ k_1, получимъ $m = \frac{(k-k_1)\sin\varphi}{1+(k+k_1)\cos\varphi+kk_1}$ откуда

$$k_1 = \frac{m+mk\cos\varphi+k\sin\varphi}{\sin\varphi-m\cos\varphi-mk_1}.$$

Зная k_1, найдемъ уравненіе для искомой прямой, какъ проходящей черезъ данную точку (x_1, y_1). Получимъ:

$$y-y_1 = \frac{m+mk\cos\varphi+k\sin\varphi}{\sin\varphi-m\cos\varphi-mk}(x-x_1)$$

Задачи второго рода.

Доказать, что три точки лежатъ на одной прямой.

Пусть уравненіе этой прямой будетъ

$$Ax+By+C=0$$

Тогда, подставивъ координаты данныхъ точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) въ это уравненіе, получимъ

$$Ax_1+By_1+C=0$$
$$Ax_2+By_2+C=0$$
$$Ax_3+By_3+C=0$$

Въ этихъ уравненіяхъ, которыя должны быть совмѣстными, если только три точки лежатъ на одной прямой, неизвѣстныя величины суть A, B и C, извѣстныя же числа въ каждомъ изъ этихъ равенствъ равны нулю. Поэтому условіе совмѣстности состоитъ въ томъ, что детерминантъ, составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ этихъ уравненій, долженъ равняться нулю, т.е.

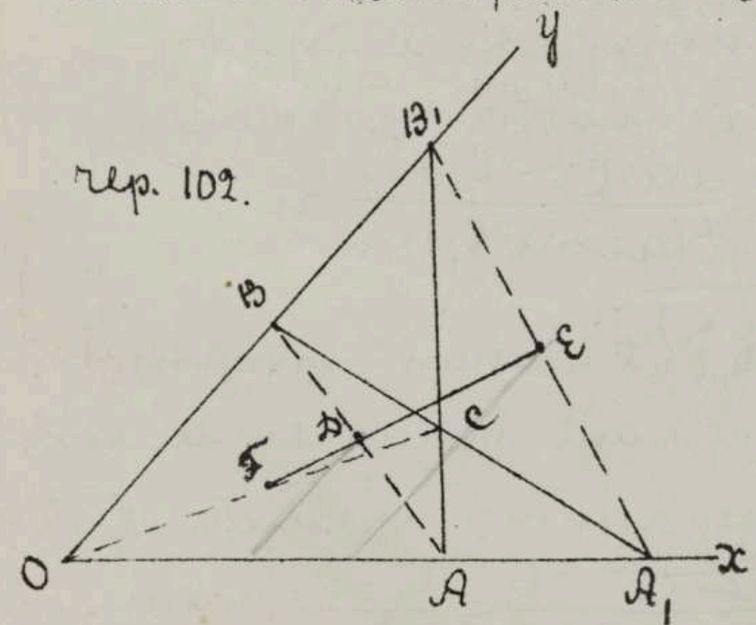
$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Итакъ это послѣднее равенство представляетъ условіе, при которомъ три данныя точки лежатъ на одной прямой. Это же условіе было нами раньше выведено, когда мы, опредѣляя площадь треугольника, полагали её равной нулю. Этотъ же вопросъ можно было рѣшить иначе такъ: Пусть M, M_1, M_2 – будутъ три данныя точки, x_1 и y_1 – координаты первой точки, x_2 и y_2 – координаты второй и x_3 и y_3 – координаты третьей.

Угловой коэффициент прямой MM_1, как известно по пятой форме уравнения прямой, равен $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, а угловой коэффициент прямой MM_2 равен $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$. Если три точки M, M_1, M_2, находятся на прямой линии, то прямые MM_1 и MM_2 сливаются, а следовательно угловые коэффициенты равны, т. е.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

Чтобы указать пример трех точек лежащих на прямой линии, рассмотрим так называемый полный четырехугольник $ОДСВ$. Если четыре стороны обыкновенного четырехугольника продолжим неограниченно, что стороны пересекаются по две, всеми возможными способами образуют всего шесть точек, или вершин. Соединив противоположные вершины получим три диагонали $АВ$, $А_1В_1$ и $ОС$. Мы докажем, что три точки $Д$, $Е$ и $Ф$, которые



чер. 102.

дельтоїд эти діагонали пополамъ, лежатъ на одной прямой. Возьмемъ стороны OA и OB за оси координатъ; черезъ a и a_1 обозначимъ линіи OA и OA_1; черезъ b и b_1 линіи OB и OB_1. Координаты точки D, середины AB будутъ $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}$; координаты точки E середины A_1B_1 будутъ $x_2 = \frac{a_1}{2}$, $y_2 = \frac{b_1}{2}$. Чтобы найти координаты точки F, середины OC, отыщемъ сначала координаты точки C, пересѣченія двухъ прямыхъ AB_1 и A_1B, уравненія которыхъ суть:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b_1} = 1 \quad ; \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1$$

Рѣшивъ эти два уравненія, получимъ координаты точки C

$$x = \frac{aa_1(b-b_1)}{ab - a_1b_1} \quad \text{и} \quad y = \frac{bb_1(a-a_1)}{ab - a_1b_1}$$

Такъ какъ точка F есть середина прямой OC, то координаты ея x_3, y_3 будутъ половины координатъ точки C Слѣдовательно $x_3 = \frac{aa_1(b-b_1)}{2(ab - a_1b_1)}$ и

$$y_3 = \frac{bb_1(a-a_1)}{2(ab - a_1b_1)}$$

Найдя координаты точекъ D, E и F убѣдимся, что три точки находятся на одной прямой. Дѣйствительно, такъ какъ угловые коэффиціенты прямыхъ DE и DF

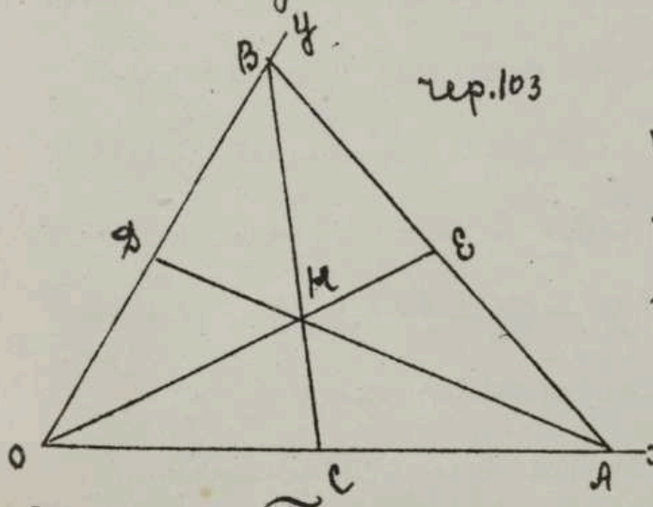
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b_1 - b}{a_1 - a} \quad \text{и} \quad \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{bb_1(a-a_1)}{ab - a_1b_1} - b}{\frac{aa_1(b-b_1)}{ab - a_1b_1} - a} = \frac{b_1 - b}{a_1 - a}$$

равны между собою, то заключаемъ, что три точки D, E, F находятся на одной прямой.

Задачи третьяго рода.

Если три прямыя проходятъ черезъ одну точку, то уравненія этихъ прямыхъ должны быть совмѣстны. Самый общій способъ открыть такую совмѣстность уравненій состоитъ въ томъ, что составляютъ детерминантъ изъ всѣхъ коэффиціентовъ всѣхъ трехъ уравненій. Если по вычисленіи этого детерминанта онъ окажется равнымъ 0, то уравненія совмѣстны. Иногда можно доказать совмѣстность уравненій и другими способами, показывая, что одно изъ уравненій есть алгебраическое слѣдствіе двухъ другихъ.

Примѣръ 3. Доказать, что разносторонія сторонъ треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.



чер. 103

Направимъ оси координатъ по двумъ сторонамъ треугольника (чер. 103). Пусть $OA=a$ и $OB=b$. Составимъ уравненіе прямой AD въ видѣ $\frac{x}{a}+\frac{y}{\frac{b}{2}}=1$, прямой BC въ видѣ $\frac{x}{\frac{a}{2}}+\frac{y}{b}=1$ и прямой OE такъ:

$$y-0=\frac{\frac{b}{2}-0}{\frac{a}{2}-0}(x-0)$$

Представляем их в более простом виде:

$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}=1,\quad \frac{2x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{y}{b}-\frac{x}{a}=0.$$

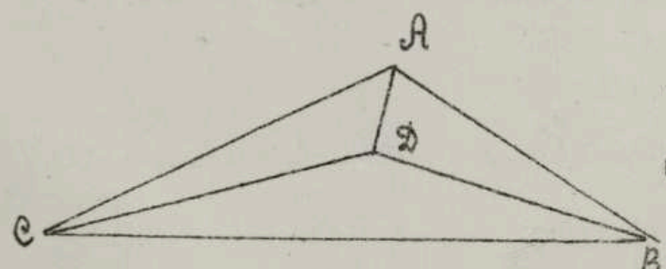
Мы имеем: $-\left(\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}-1\right)+\left(\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+\left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right)=0$

Это доказывает, что одно из уравнений есть алгебраическое следствие двух остальных, а потому прямые AD, BC, OC пересекаются в одной точке.

Пример 4. Доказать, что равнодействующая углов треугольника пересекаются в одной точке.

Берем начало осей координат внутри данного треугольника ABC (чер. 104) и напишем ур-ния его сторон в нормальной форме. Пусть для сокращения эти уравнения будут: $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$. Уравнения равнодействующих получатся, как было сказано, вычитая данные уравнения. Они будут: $\beta-\alpha=0$; $\gamma-\beta=0$; $\gamma-\alpha=0$. Мы имеем $(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)+(\alpha-\gamma)=0$

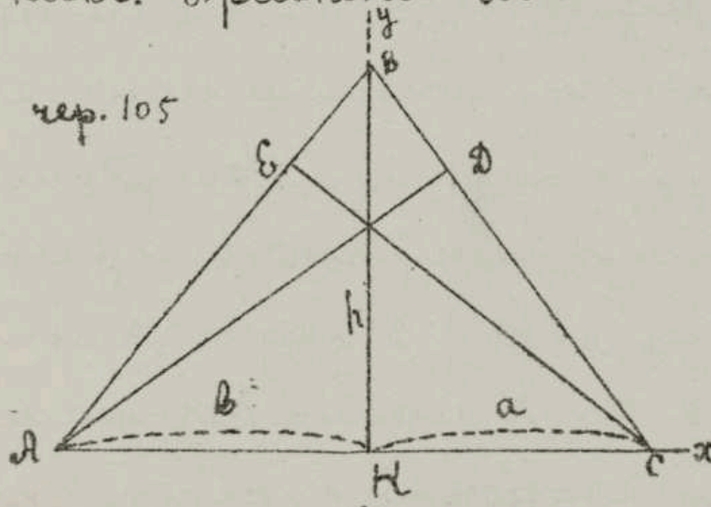
чер. 104



Желаемое таким образом доказано.

Пример 5. Доказать, что во всяком треугольнике три его высоты пересекаются

Берем треугольник (чер. 105) и его высоты. Принимаем H за начало и HC за ось $x^{ов}$, а HB за ось $y^{ов}$. Обозначим HC через a, AH через b, BH через h, т.е. HC = a, AH = b, BH = h. Эти три величины известны и вполне определяют треугольник. Уравнение линии BC есть $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$.



чер. 105

Решив его относительно y получим $y = -\frac{h}{a}x + h$. Угловой коэффициент $= -\frac{h}{a}$. Координаты точек $E(x, 0)$ и $A(-b, 0)$. Уравнение линии AD есть $y - 0 = m[x - (-b)]$ или $y = m(x + b)$. Здесь m неизвестно, но по условию перпендикулярности получим $-\frac{h}{a}m + 1 = 0$, откуда $m = \frac{a}{h}$. Окончательное уравнение AD будет $y = \frac{a}{h}(x + b)$. Уравнение DB будет $\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$, откуда $y = \frac{h}{b}x + h$. Угловой коэффициент $= \frac{h}{b}$. Уравнение CE будет $y - 0 = m_1(x - a)$ или $y = m_1(x - a)$. Условие перпендикулярности EC с AB дает: $\frac{h}{b}m_1 + 1 = 0$, откуда $m' = -\frac{b}{h}$. Окончательное уравнение CE будет: $y = -\frac{b}{h}(x - a)$. Ищем координаты точки пересечения CE и AD. Имеем:

$\frac{a}{h}(x + b) = -\frac{b}{h}(x - a)$; $a(x + b) = -b(x - a)$ или $ax + ab = -bx + ab$ или $ax = -bx$; но a не равно b следо-

вательно $x=0$ и точка лежитъ на оси ординатъ. Этимъ заключеніемъ доказывается теорема.

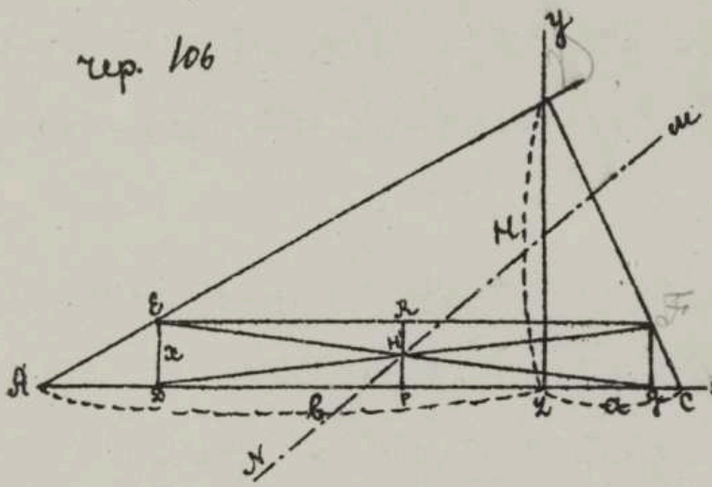
Задачи четвертаго рода.

Задачи четвертаго рода о выводѣ уравненія прямой, которая задается, какъ геометрическое мѣсто, рѣшаются составленіемъ изъ чертежа связи между текущими координатами. Для это, обыкновенно, нужно выбрать перемѣнную величину, отъ измѣненія которой зависитъ образованіе геометрическаго мѣста и выразить координаты черезъ эту перемѣнную и черезъ данные параметры. Затѣмъ между полученными уравненіями исключить указанную перемѣнную. Весьма важно выбрать удобныя оси, за которыя слѣдуетъ принять болѣе характерныя прямыя данной фигуры.

Примѣръ 6. Найти геометрическое мѣсто центровъ прямоугольниковъ вписанныхъ въ данный треугольникъ.

За оси координатъ примемъ высоту BH и основаніе треугольника AC. Обозначимъ координаты пересѣченія діагоналей черезъ

ξ и η и найдем связь между ними и параметрами, определяющими $\triangle ABC$, т.е. a, b и h; для этого на время введем новый параметр k, выражающий ординату точки E и F. Прямо видно, что $\eta = \frac{k}{2}$. Чтобы найти абсциссу M надо взять полусумму абсцисс E и F. Абсцисса x_2 точки E найдется, когда в уравнение прямой AB подставим ординату k точки E; абсцисса x_3 точки F получится также из уравнения прямой BC.



чер. 106

Уравнение AB ..... $\frac{x}{-b} + \frac{y}{h} = 1$; $y = k$; $x_2 = b\left[\frac{k}{h} - 1\right]$

— " — BC ..... $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$; $y = k$ $x_3 = a\left[1 - \frac{k}{h}\right]$

$$\xi = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{a-b}{2}\left[1 - \frac{k}{h}\right];$$

Определив k из уравнения $\eta = \frac{k}{2}$ и подставив в последнее уравнение имеем: $\xi = \frac{a-b}{2}\left[1 - \frac{2\eta}{h}\right]$

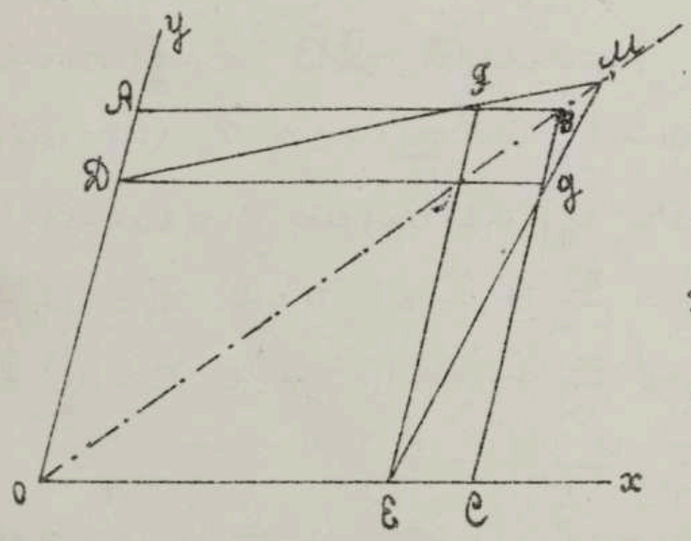
Это уравнение геометрического места точек пересечения диагоналей прямоугольника при непрерывном процессе изменения приведем деление на $\frac{a-b}{2}$ к виду $\frac{\xi}{\frac{a-b}{2}} + \frac{\eta}{\frac{h}{2}} = 1$. Оно определяет нам прямую MN проходящую на-

рез середину высоты BH и середину основания AC.

Примѣръ 7. Дань параллелограмъ $OABC$ (чер. 107) въ которомъ $OC = a$ и $AO = b$. Проводимъ произвольныя прямыя $Dg \parallel OC$ и $EF \parallel OA$. Соединимъ прямыми точки D съ F и E съ g. Опредѣлить мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ Eg и DF.

Беремъ за оси координатъ стороны параллелограмма OC и OA, полагаемъ $OE = a_1$ и $OD = b_1$; составляемъ уравненія прямыхъ Eg и DF

чер. 107



Уравненіе Eg есть:

$$y - 0 = \frac{b_1 - 0}{a - a_1}(x - a_1)$$

Уравненіе DF есть:

$$y - b_1 = \frac{b - b_1}{a}(x - 0)$$

Преобразуемъ эти уравненія: $ya - ya_1 = b_1x - a_1b_1$

$$ya_1 - ba_1 = bx - b_1x$$

Координаты точки M удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ, слѣдовательно и тому, которое получится отъ сложенія ихъ. Производя это сложеніе, найдемъ: $ya - ya_1 + ya_1 - b_1a_1 = b_1x - b_1a_1 + bx - b_1x$ или

$$ya = bx, \text{ откуда } y = \frac{b}{a}x.$$

Это и есть искомое уравненіе. Оно, какъ

видно, выражаетъ собою діагональ данная параллелограмма, въ чемъ легко убѣдиться начиная строить прямую выражаемую этимъ уравненіемъ.

На страницѣ 155 пропущено условіе перпендикулярности прямыхъ. Оно слѣдующее:
Если прямыя перпендикулярны, то $\omega = 90°$ и $\operatorname{tg}\omega = \infty$, но числители этихъ двухъ формулъ не могутъ быть безконечностями, потому что ни k, ни k_1, ни $\sin\varphi$ не могутъ равняться безконечности. Слѣдовательно, для того, чтобы какая изъ формулъ обратилась въ безконечность необходимо, чтобы знаменатели ихъ равнялись нулю, а потому для перпендикулярности данныхъ линій при косоугольныхъ осяхъ координатъ необходимо, чтобы:

$$1 + (k + k_1)\cos\varphi + kk_1 = 0$$

и при прямоугольныхъ осяхъ координатъ, чтобы

$$1 + kk_1 = 0$$

Преобразованіе координатъ

Намъ извѣстно, что одна и та же кривая отнесенная къ различнымъ координатамъ будетъ выражаться разными уравненіями.

Такъ мы видѣли, что окружность отнесенная къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, при произвольномъ положеніи центра выражается уравненіемъ:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

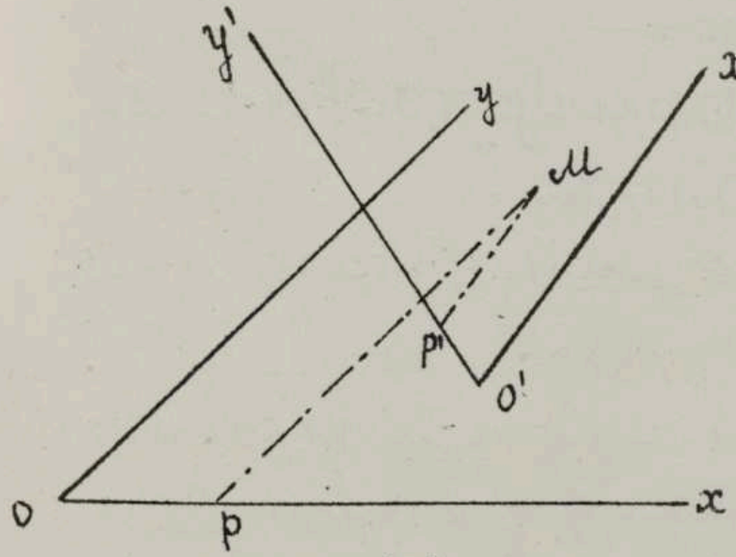
Тогда же окружность выразится уравненіемъ $x^2+y^2=2Rx$, если начало координатъ будетъ помѣщено на окружности и за ось абсциссъ будетъ взятъ діаметръ. Если же начало координатъ совпадаетъ съ центромъ окружности оси координатъ будутъ направлены по діаметрамъ, то уравненіе приметъ видъ:

$$x^2+y^2=R^2$$

Итакъ съ перемѣной осей координатъ всегда будетъ измѣняться и видъ уравненія кривой. Относительно одной осей координатъ уравненіе будетъ проще, относительно другихъ сложнѣе. При изслѣдованіи свойствъ кривыхъ, большая или меньшая простота ихъ уравненій, играетъ очень важную роль. Чѣмъ проще уравненіе кривой, тѣмъ легче его изслѣдовать, поэтому для каждой кривой необходимо выбирать такія оси координатъ чтобы ея уравненіе получило возможно простой видъ.

Отсюда понятна важность вопроса о преобразовании координат, который заключается въ слѣдующемъ: Дано уравненіе нѣкоторой кривой, отнесенной къ даннымъ осямъ координатъ; требуется составить уравненіе той же кривой, но относительно другой системы координатъ, при чемъ положеніе второй системы относительно первой извѣстно.

Положимъ, что намъ дано уравненіе нѣкоторой кривой, отнесенной къ осямъ координатъ Ox и Oy и, что требуется получить уравненіе той же кривой относительно новой системы осей координатъ $O'x'$ и $O'y'$ (чер. 108). Чтобы рѣшить этотъ вопросъ возьмемъ произвольную точку M, разсматриваемой кривой, назовемъ ея координаты относительно первой системы черезъ (x, y) причемъ $x = Op$ и $y = Mp$, а координаты той же точки относительно другой новой системы черезъ (x', y') при чемъ $x' = O'p'$ и $y' = Mp'$. Между этими координатами необходима долженства



чер. 108.

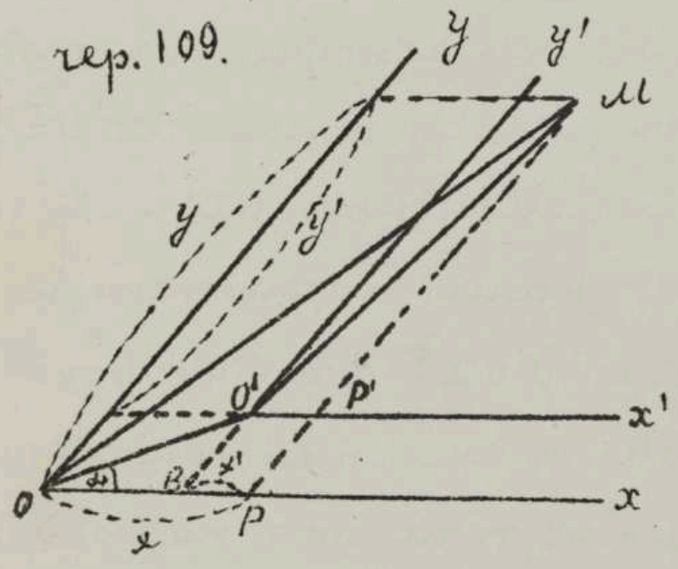
существовать некоторая зависимость, которая можетъ быть обнаружена изъ чертежа. Отыскивая эту зависимость, мы будемъ стараться старыя координаты выразить черезъ новыя и когда такія выраженія будутъ найдены, то вставивъ ихъ въ данное уравненіе кривой вмѣсто x и y, мы получимъ новое уравненіе, которое выразитъ связь между новыми координатами x'иy' произвольной точки кривой. Это уравненіе будетъ слѣдовательно уравненіемъ кривой относительно новыхъ осей координатъ; отсюда видно, что рѣшеніе вопроса о преобразованіи требуетъ вывода формулъ, которыя выражали-бы старыя координаты черезъ новыя.

Формулы для преобразованія координатъ.

При преобразованіи координатъ необходимо различать три основныхъ случая.

Случай 1. Перенесеніе начала координатъ въ другую точку, оставляя оси координатъ параллельными прежнимъ направленіямъ. Пусть данная система координатъ есть xoy (чер. 109), а новая x'o'y'; положимъ, что o'x'

параллельна Ox и $O'y'$ параллельна Oy. Въ этомъ случаѣ, чтобы опредѣлить положеніе новой системы относительно старой, достаточно знать координаты новаго начала $O'(a,b)$ относительно старыхъ координатъ. Соединимъ точку O' съ точками O и M и точку M съ O'; разсмотримъ контуръ $OO'M$ съ замыкающей стороной OM. Взявъ за ось проэкцій ось x-овъ, будемъ проэктировать на нее контуръ OMO', линіями параллельными оси y-овъ. Принявъ очевидно будемъ имѣть:



чер. 109.

$$\text{пр. } OM = \text{пр. } OO' + \text{пр. } O'M$$

Но пр. $OO' = a$, пр. $OM = x$ и $O'M = x'$; наше равенство обратится въ такое:

$$x = a + x'$$

Если за ось проэкцій возьмемъ ось y-овъ и будемъ проэктировать линіями параллельными оси x-овъ, то подобно предыдущему получимъ, что тогда равенство обратится въ такое:

$$y = b + y'$$

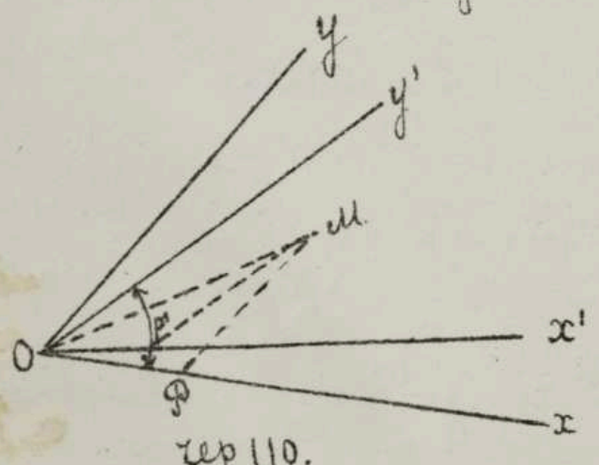
Двѣ формулы $x = a + x'$ и $y = b + y'$ служатъ для перехода отъ старыхъ осей координатъ

къ новымъ въ разсматриваемомъ нами случаѣ. Эти соотношенія будутъ также справедливы при любомъ расположеніи начала старыхъ и новыхъ лишь-бы соотвѣтственныя оси координатъ были параллельны между собою.

Случай 2-й. Переходъ отъ одной осей координатъ къ другимъ, оставляя тоже начало, но измѣняя направленіе осей.

Этотъ случай преобразованія осей координатъ подраздѣляется на нѣсколько частныхъ случаевъ.

а) Положимъ, что старыя и новыя оси координатъ косоугольны. Пусть старыя оси координатъ суть oy и ox (чер. 110) и уголъ между ними $xoy=\varphi$; новыя оси координатъ пусть будутъ ox' и oy' и уголъ между ними $x'oy'$ намъ неизвѣстенъ, но зато извѣстны два угла $xox'=\alpha$ и $xoy'=\beta$, которые новыя оси образуютъ съ прежнею осью абсциссъ ox. Эти углы считаются отъ положительной оси x-овъ въ сторону къ положительной оси y-овъ. Возьмемъ затѣмъ произвольную точку кривой M и построимъ ея старыя и новыя



чер 110.

координаты, MP параллельно Oy и MP_1 параллельно Oy'. Будемъ имѣть старыя координаты: $OP = x$ и $MP = y$, а новыя будутъ $OP_1 = x'$ и $MP_1 = y'$. Чтобы открыть зависимость между старыми и новыми координатами, замѣтимъ, что имѣемъ на чертежѣ два контура OPM и $OP'M$. Эти два контура имѣютъ общую замыкающую сторону OM, а потому суммы проекцій сторонъ на каждую изъ осей равны между собою, ибо каждая изъ этихъ суммъ равна проекціи замыкающей стороны OM на ту ось. На основаніи этого имѣемъ:

$$пр(OP) + пр(MP) = пр(OP_1) + пр(MP_1)$$

За ось проекцій выберемъ сначала старую ось абсциссъ: тогда, замѣтивъ, что линія OP проектируется безъ измѣненія длины и направленія, и что углы $xOy = \varphi$, $xOx' = \alpha$ и xOy' отсчитываются отъ оси, слѣдующей осью проекцій, найдемъ:

$$x + y \cdot C\varphi = x' C\alpha + y' C\beta$$

Если теперь выберемъ за ось проекцій старую ось ординатъ, то наоборотъ линія MP будетъ проектироваться безъ измѣненія длины и направленія. Теперь углы будутъ отсчитываться

отъ оси $y^{ов}$ и, если примемъ, что отсчетъ будетъ сдѣланъ въ сторону къ положительной оси абсциссъ, то окажется, что $yox = \varphi$, $yox' = \varphi - \alpha$ и $yoy' = \varphi - \beta$. Поэтому получимъ при проектировании:

$$x\cos\varphi + y = x'\cos(\varphi - \alpha) + y'\cos(\varphi - \beta)$$

Мы нашли такимъ образомъ два равенства, которыя связываютъ старыя координаты съ новыми. Если рѣшимъ эти равенства относительно старыхъ координатъ, что удобно сдѣлать способомъ уравниванія коэффиціентовъ, то, послѣ простыхъ преобразованій, выведемъ окончательныя формулы такого рода:

$$x = \frac{x'\sin(\varphi - \alpha) + y'\sin(\varphi - \beta)}{\sin\varphi}$$

$$y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\varphi}$$

в) Старыя оси косоугольныя, а новыя прямоугольныя.

Этотъ случай можно разсматривать, какъ частный случай относительно предыдущаго. Уголъ между новыми осями, т. е. уголъ $x'oy' = \beta - \alpha$ въ предыдущемъ преобразованіи былъ произвольный. Положимъ теперь его равнымъ $\frac{\pi}{2}$, тогда $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Замѣнивъ въ предыдущихъ формулахъ β его выраженіемъ, найдемъ: $\sin(\varphi - \beta) = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= -\sin\left[\frac{\pi}{2} + \alpha - \varphi\right] = -\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi - \alpha)\right] = -\cos(\varphi - \alpha)$

С другой стороны

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha.$$

Формулы преобразования координат для настоящего случая примут вид:

$$x = \frac{x'\sin(\varphi - \alpha) - y'\cos(\varphi - \alpha)}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\sin\varphi}.$$

c) Старые оси координат прямоугольны, а новые косоугольны.

В этом случае будем иметь $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi = 1$. Формулы выше приведенные для случая (a) обратятся при этом в следующие:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta \quad \text{и} \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta$$

d) Старые и новые оси координат прямоугольны.

Чтобы получить формулы преобразования координат для этого случая стоит только в последние формулах заметить, что угол $\beta - \alpha$, образуемый новыми осями координат равен $\frac{\pi}{2}$, т.е. сделаем $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ или $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$. При этом будем иметь:

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \quad \text{и}$$

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

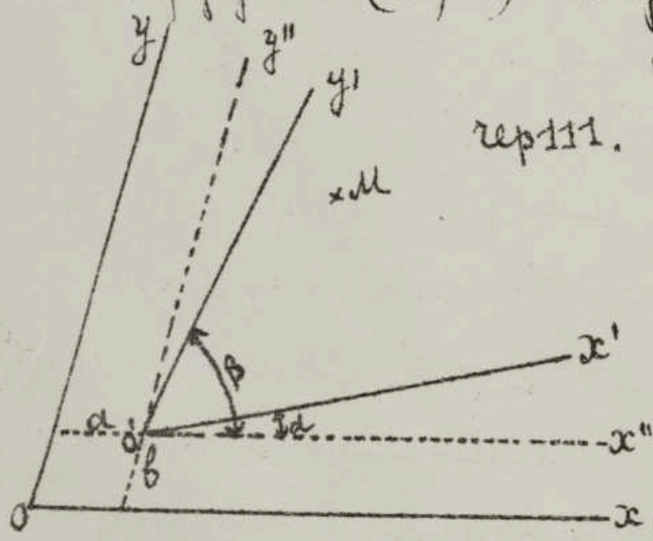
Следовательно формулы преобразования для

рассматриваемого случая будут:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

Случай 3. Переход от одних осей координат к другим, причем изменяется, как начало, так и направления осей. Положим для общности рассмотрения, что старые оси координат Ox и Oy (чер 111) образуют угол φ и, что, как новые, так и старые оси координат косоугольны. Новые оси координат пусть будут Ox' и Oy'. Чтобы определить положение новых осей координат, найдем координаты нового начала O', пусть они будут (a, b) и найдем сперва те углы, которые образуют новые оси со старою осью абсцисс Ox. Чтобы получить эти углы проведем через O' прямую $O'x''$, параллельную Ox, тогда угол, образуемый новою осью $O'x'$ с Ox будет равен углу $x'O'x'' = \alpha$ и угол образуемый осью $O'y'$ с осью Ox будет равен углу $y'O'x'' = \beta$. Затем из O' проведем



чер 111.

параллельно оси y^{ax} – $O'y''$ и будемъ еще разсматривать вспомогательную систему осей координатъ $O'x''$ и $O'y''$. Положимъ что для произвольной точки M старыя координаты суть (x, y), новыя (x', y'), а вспомогательныя (x'', y''). Перейдемъ сначала отъ старыхъ осей координатъ къ вспомогательнымъ. На основаніи формулъ случая 1^го будемъ имѣть:

$$x = a + x'' \quad \text{и} \quad y = b + y''$$

Затѣмъ перейдемъ отъ вспомогательныхъ осей къ новымъ по формуламъ случая II^го, которыя даютъ:

$$x'' = \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi + \beta)}{\sin \varphi}; \quad y'' = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \varphi}$$

Подставивъ эти выраженія въ предыдущія равенства получимъ:

$$x = a + \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi}; \quad y = b + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \varphi}$$

Эти формулы рѣшаютъ вопросъ. Въ заключеніе сдѣлаемъ замѣчаніе объ одной особенности вида общихъ формулъ для преобразованія координатъ. Эта особенность заключается въ томъ, что въ выраженія старыхъ координатъ посредствомъ новыхъ эти послѣднія входятъ только въ первой степени.

Такого рода формулы называются линейными. Следовательно формулы для преобразования координат будут линейными относительно новых координат. Самая общая формулы для преобразования координат имеют, таким образом, следующий вид:

$$x = a + cx' + dy'; \quad y = b + c'x' + d'y',$$

где коэффициенты c, d, c', d', имеют известные величины, зависящие от углов α, β и φ, а A и B суть координаты нового начала

Классификация линий.

Для изучения общих свойств плоских линий, обыкновенно, употребляются прямолинейные координаты. Относительно этой системы линии разделяются на классы следующим образом. Во-первых, линии разделяются на алгебраические и трансцендентные, смотря потому, выражаются-ли они алгебраическими или трансцендентными уравнениями. Уравнение называется алгебраическим в том случае, когда координаты x и y входят в него только со знаками алгебраических дей-

тый, но если одна изъ координатъ входитъ въ уравненіе подъ трансцендентнымъ знакомъ, какъ напримѣръ въ видѣ синуса, логарифма и т. д., то уравненіе называется трансцендентнымъ. Алгебраическія уравненія можно всегда представить въ цѣломъ видѣ, уничтоживъ радикалы и знаменателей.

Алгебраическія линіи, смотря по степени ихъ уравненій, раздѣляются на порядки. Линіями перваго порядка называются тѣ, которыя выражаются уравненіями первой степени относительно x и y

$$Ax + By + C = 0$$

Мы уже доказали, что всѣ линіи, выражаемыя уравненіями первой степени съ двумя перемѣнными x и y суть прямыя, такъ что, всѣ прямыя суть линіи перваго порядка.

Линіями втораго порядка называются тѣ, которыя выражаются общимъ уравненіемъ 2-й степени съ 2-мя перемѣнными x и y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Къ этому порядку принадлежатъ уже разсмотрѣнныя нами кривыя: кругъ, на-

парабола, эллипсъ, гипербола, изъ которыхъ каждая выражается уравненіемъ 2ой степени относительно x и y и слѣдовательно всѣ эти кривыя суть линіи второго порядка.

Кривыми 3го порядка называются линіи, представляемыя общимъ уравненіемъ 3ей степени, которое будетъ:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + K = 0$$

Вообще кривая mго порядка будетъ кривая представляемая уравненіемъ той же степени между двумя перемѣнными x и y. При этомъ надо, чтобы въ уравненіи вообще по крайней мѣрѣ хотъ одинъ членъ суммы показателей при x и y въ которомъ бы была бы равна m.

Чтобы это опредѣленіе кривыхъ по порядкамъ имѣло смыслъ, необходимо чтобы кривая сохраняла свой порядокъ, къ какимъ бы осямъ координатъ онѣ не были бы отнесены.

Теорема. Степень алгебраическаго уравненія линіи не измѣняется при преобразованіи прямолинейныхъ координатъ.

Положимъ дано уравненіе mой степени между x и y. Оно представляетъ кривую mго порядка. Вообразимъ, что всѣ члены этого уравненія

перенесены в первую часть тогда во второй части останется 0. Все члены первой части будут иметь вид $Ax^k y^l$. Здесь сумма показателей будет или меньше или равна m, т.е. $k+b \leqq m$. Сумма подобных членов равна 0 или $\sum Ax^k y^l = 0$. Итак имеем эту кривую в новых осях координат $x'0'y'$. Чтобы перейти от старых осей в новые мы должны применить формулы:

$$x = a + mx' + ny'$$
$$y = b + m'x' + n'y'$$

Если мы эти формулы внесем вместо x и y в уравнение кривой, то мы получим уравнение кривой относительно новых осей координат. Это уравнение будет:

$$\sum A(a + mx' + ny')^p (b + m'x' + n'y')^q = 0$$

Если мы раскроем скобки, сделаем указанное умножение, то, так как в скобках x' и y' входят только в первую степень, от умножения мы не можем получить членов степень или измерение которых было-бы выше $p+q$ но так как $p+q \leqq m$, то наивысшая степень новых уравнений относительно x и y не может быть выше m.

Это показывает, что при преобразовании координат степень уравнения кривой не может повыситься.

Из этого рассуждения следует также, что степень уравнения кривой не может и понизиться. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы опять новыя координаты перешли бы опять къ старымъ, т. е. сдѣлали бы обратное преобразованіе, тогда мы должны изъ уравненія второго получить первое, но если мы допустимъ, что степень новаго уравненія ниже, то при обратномъ переходѣ снова должна быть степень уравненія должна повыситься, но мы сейчасъ только сказали, что при преобразованіи координатъ степень уравненія повышаться не можетъ.

Такимъ образомъ преобразованное уравненіе должно быть одинаковой степени съ первоначальнымъ.

Порядокъ данной линіи показываетъ наибольшее число точекъ пересѣченія этой линіи съ прямою. Выясняемъ теперь пусть m будетъ порядокъ данной линіи, т. е. уравненіе данной линіи представляетъ

функцию $m^{го}$ измерения, а уравнение прямой представляет функцию $1^{го}$ измерения; чтобы определить число точек пересечения данной линии с прямою, нужно решить эти два уравнения с двумя неизвестными, из которых одно $m^{го}$ степени, а другое первой степени.

В таком случае, как известно, получается m значений для x и y, следовательно наибольшее число точек пересечений будет m; понятно, что число точек пересечений может быть меньше m и даже не одной, так как некоторых, или всех значений x и y могут быть мнимыми. Из этого видно, что линии первого порядка суть прямые линии, потому что они могут пересекаться с прямою только в одной точке. Линии второго порядка могут пересекаться прямого только в двух точках; линии третьего порядка в трех точках и так далее.

Так как круг, эллипс, гипербола и парабола суть линии второго порядка, то они могут пересекаться прямыми

въ двухъ точкахъ Циссоида и Конхоида суть третьяго и четвертаго порядка, они могутъ пересѣкаться прямыми въ трехъ и четырехъ точкахъ.

Если говорятъ, что общее алгебраическое уравненіе $m^{ой}$ степени выражаетъ кривую $m^{го}$ порядка, то предполагаютъ, что первая часть не разлагается на произведеніе двухъ производителей; въ противномъ случаѣ уравненіе выражало-бы двѣ или больше число линій меньшаго порядка. Такъ напримѣръ, уравненіе второй степени, первая часть котораго состоитъ изъ произведенія двухъ уклоняющихъ производителей первой степени, выражаетъ двѣ линіи перваго порядка, т. е. двѣ прямыя. Точно такимъ уравненіе третьей степени можетъ выражать или три прямыя линіи, или линію втораго порядка и одну прямую. Вслѣдствіе этого извѣстныя свойства линій $m^{го}$ порядка относятся также и къ системѣ m прямыхъ, т. е. къ многоугольнику, имѣющему m сторонъ.

Теорія окружности.

Прежде нежели перейдемъ къ изслѣдованію кривыхъ, выражаемыхъ общимъ уравненіемъ второй степени, разсмотримъ уравненіе окружности, которое по праву должно занимать первое мѣсто послѣ прямой. Будемъ разсматривать окружность при прямоугольныхъ осяхъ координатъ. Самый общій видъ уравненія окружности при такой системѣ, какъ мы видѣли, есть слѣдующій:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

Здѣсь α и β суть координаты центра, а R – радіусъ окружности. Раскрывъ скобки, получимъ:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0 \ldots\ldots 1$$

Такимъ образомъ, уравненіе окружности въ прямоугольныхъ координатахъ есть такое уравненіе второй степени, которое не содержитъ произведенія xy перемѣнныхъ и въ которомъ члены x^2 и y^2 имѣютъ одинаковые коэффиціенты. Сравнивая это (1) уравненіе съ общимъ уравненіемъ второй степени

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

мы найдемъ условіе для того, чтобы это послѣднее выражало окружность. Въ самомъ

дыль, если мы положим $B=0$ и $C=A$ и затем разделим все уравнение на A, то получим:

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

Полагая для краткости $\frac{D}{A}=a$, $\frac{E}{A}=b$ и $\frac{F}{A}=c$ имеем $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$

Это уравнение имеет вид совершенно одинаковой с уравнением (1), а потому предыдущий вид уравнения есть самый общий вид уравнения второй степени, которое может представлять окружность. Положим теперь, что это уравнение нами дано и разсмотрим действительно-ли оно представляет окружность, и если представляет, то какую именно. Для этого постараемся привести разсматриваемое уравнение к виду

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

Для этого перенесем C во вторую часть и к обеим частям равенства прибавим $\frac{a^2}{4}$ и $\frac{b^2}{4}$; получим:

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c \text{ или}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

Теперь видим, что это уравнение есть прямое уравнение окружности, у которой $\alpha=-\frac{a}{2}$, $\beta=-\frac{b}{2}$ и $R^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$ или $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$.

Итакъ мы нашли координаты центра (α, β) и радіусъ R окружности. Но отсюда же видно, что это уравненіе не всегда будетъ представлять окружность, потому что радіусъ можетъ получиться мнимымъ и окружности не будетъ. Чтобы была окружность, необходимо чтобы было $a^2+b^2>4c$. Можетъ еще случиться, что $a^2+b^2=4c$, тогда $R=0$ и окружность обратится въ точку. Это же можно видѣть прямо и изъ уравненія окружности. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ разсматриваемое уравненіе приметъ видъ:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=0$$

Но сумма двухъ квадратовъ тогда только равна нулю, когда каждое изъ количествъ возводимыхъ въ квадратъ равно нулю. Отсюда имѣемъ $x+\frac{a}{2}=0$ и $y+\frac{b}{2}=0$ или получимъ $x=-\frac{a}{2}$ и $y=-\frac{b}{2}$, а эти равенства для координатъ опредѣляютъ одну точку.

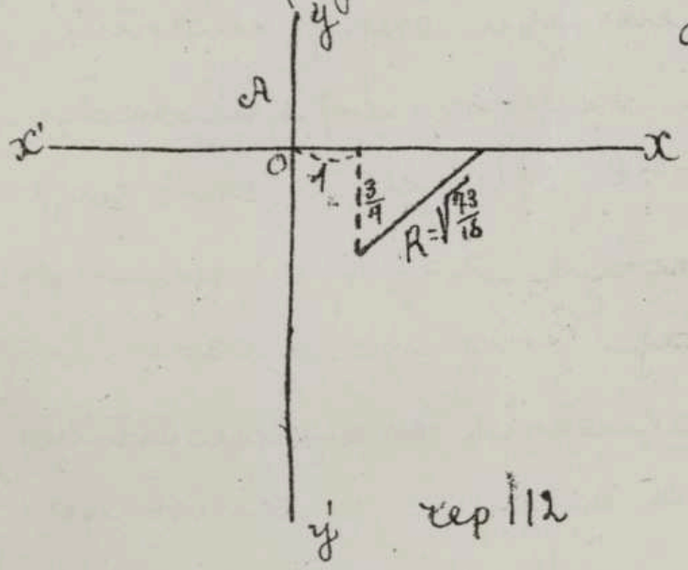
Изъ того, что въ выраженіе координатъ центра не входитъ постоянная величина c, мы можемъ заключить, что двѣ окружности, которыхъ уравненія отличаются только постоянными членами, концентричны.

$x^2+y^2-2x+\frac{3}{2}y=-3$

$(x-1)^2+\frac{9}{16}y=1+\frac{9}{16}-3$

Задача. Построить окружность, уравнение которой $2x^2+2y^2-4x+3y+6=0$

Приводим это уравнение к общему виду уравнения окружности, т. е. к виду $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$.



чер 112

Для этого делим данное уравнение на 2 переносим известный член во вторую часть равенства и ко обеим частям равенства прибавляем по $1+\frac{9}{16}$; получим:

$$x^2-2x+1+y^2+\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}=3+1+\frac{9}{16} \text{ или}$$

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{73}{16}$$

Отсюда видим, что координаты центра, т. е. α и β равняются $\alpha=1$, $\beta=-\frac{3}{4}$, а радиус окружности $R=\sqrt{\frac{73}{16}}$. Возьмем оси координат и по вычисленным данным построим окружность

Пересечение окружности с прямой.

Иногда при построении окружности нужно определить точки ее пересечения с осями координат. Пусть дано уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Въ точкахъ пересѣченія съ осью $X^{ось}$ должны имѣть $y = 0$; слѣдовательно въ этихъ точкахъ $x^2 + ax + c = 0$, откуда найдемъ x для точекъ пересѣченія. Если полученное уравненіе имѣетъ дѣйствительные и неравные корни, то оказывается двѣ точки пересѣченія. Если корни мнимые, то окружность не пересѣкаетъ ось $X^{ось}$. Если корни равны, то окружность имѣетъ только одну общую точку съ осью $X^{ось}$, т.е. она касательна оси $X^{ось}$. Для точки пересѣченія съ осью ординатъ должны имѣть $x = 0$ и уравненіе приметъ видъ: $y^2 + by + c = 0$. Отсюда найдемъ y для этихъ точекъ. Возьмемъ предыдущій примѣръ (стр. 112). Для пересѣченія съ осью ординатъ должны имѣть

$x = 0$ и стало быть $2y^2 + 3y - 6 = 0$ или

$$y^2 + \frac{3}{2}y - 3 = 0 \text{ откуда}$$

$$y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 3} \quad \text{или} \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

Отложивъ на чертежѣ эти точки A и B, будемъ имѣть $OA = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}$ и $OB = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4}$

Сдѣлаемъ общее замѣчаніе объ опредѣленіи точекъ пересѣченія окружности съ данной прямой линіей. Положимъ что дана окруж-

ность, уравнение которой:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{и}$$

прямая линия $Ax + By + C = 0$

Требуется найти точки ихъ пересѣченія.

Точка пересѣченія лежитъ въ одно и тоже время и на окружности и на прямой, слѣдовательно ея координаты удовлетворяютъ и уравненію окружности и уравненію прямой. Чтобы ихъ найти стоитъ только рѣшить эти два уравненія, разсматривая въ нихъ x и y какъ неизвѣстныя.

Изъ уравненія прямой имѣемъ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это выраженіе нужно вставить въ уравненіе окружности, тогда получится уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x. Уравненіе это очевидно будетъ квадратное. Пусть оно имѣетъ видъ $Mx^2 + Nx + P = 0$, гдѣ M, N и P извѣстны. Рѣшивъ это уравненіе мы получимъ для x два значенія $x = x'$ и $x = x''$. Этимъ двумъ значеніямъ будутъ соотвѣтствовать два значенія y

$$y' = -\frac{A}{B}x' - \frac{C}{B} \quad \text{и} \quad y'' = -\frac{A}{B}x'' - \frac{C}{B}$$

Мы будемъ имѣть двѣ точки пересѣченія одну (x', y'), другую (x'', y''). Эти точки бу-

дуть действительными только тогда, когда x' и x'' действительны. Если x' и x'' мнимы, то это значить, что прямая не пересекает окружности. Может случиться что $x' = x''$, тогда и $y' = y''$ и получится одна точка. Это значить что окружность касается прямой, ибо они имеют одну общую точку.

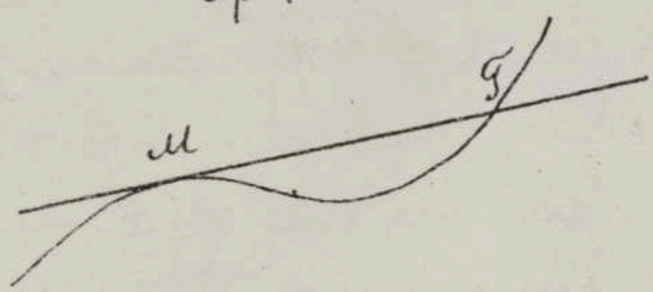
Касательная линія къ окружности.

Опредѣленіе. Касательная линія къ произвольной кривой въ данной точкѣ есть предѣлъ положенія сѣкущей, проходящей черезъ эту точку, при предположеніи, что другая ея точка пересѣченія приближается неопредѣленно близко къ первой, стремясь съ ней совпасть. Это опредѣленіе не требуетъ, чтобы касательная линія имѣла съ кривой одну общую точку. Если кривая линія представляетъ изгибы, то касательная къ кривой въ одной точкѣ, будучи продолжена, можетъ пересѣчь кривую въ другой точкѣ (гр. 113)

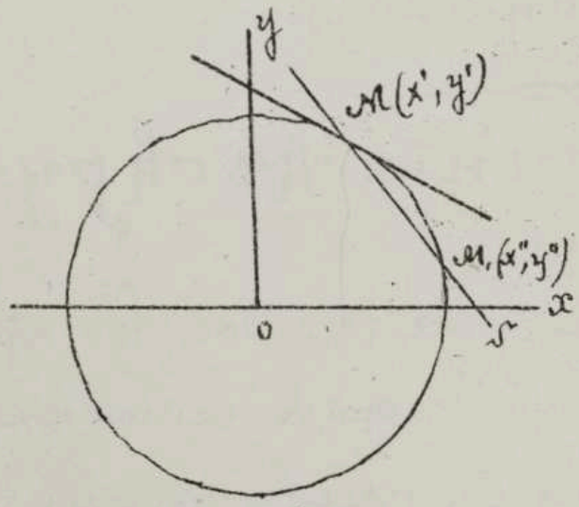
Руководствуясь принятымъ опредѣленіемъ, составимъ уравненіе касательной къ окруж-

ности въ данной точкѣ. Возьмемъ окружность,

чер 113



центръ которой въ началѣ координатъ (чер. 114). Уравненіе ея дано $x^2+y^2=r^2$. Дана на окружности точка M, координаты которой (x', y'). Проведемъ въ этой точкѣ касательную. Требуется составить ея уравненіе. Вообразимъ, что черезъ точку M проходитъ секущая MS. Эта секущая пересѣкаетъ окружность въ



чер. 114.

другой точкѣ M_1. Координаты этой точки обозначимъ черезъ (x'', y'). Уравненіе секущей, какъ прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки, будетъ:

$$y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$$

Если предположимъ, что точка M_1, перемѣщаясь по окружности, совпадаетъ наконецъ съ точкою M, то секущая обратится въ касательную, и тогда будемъ имѣть:

$$x''=x' \quad \text{и} \quad y''=y'.$$

При этомъ тангенсъ угла наклоненія
сѣкущей, т.е. $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ получится въ формѣ
$\frac{0}{0}$. Слѣдовательно прямо нельзя перейти
отъ уравненія сѣкущей къ уравненію каса-
тельной. Это потому, что мы досель пор
не выразили тотъ, что точка M_1 нахо-
дится на окружности. Сдѣлаемъ это и
представимъ уравненіе сѣкущей въ другомъ
видѣ. Координаты точекъ M и M_1 удовлетво-
ряютъ уравненію окружности, а потому

$$x_1^2+y_1^2=r^2 \quad \text{и} \quad x_{11}^2+y_{11}^2=r^2$$

Вычитая изъ второго равенства первое,
найдемъ:

$$x_{11}^2+y_{11}^2-x_1^2-y_1^2=0 \quad \text{или} \quad (x_{11}-x_1)(x_{11}+x_1)+(y_{11}-y_1)(y_{11}+y_1)=0$$

$$(x_{11}-x_1)(x_{11}+x_1)=-(y_{11}-y_1)(y_{11}+y_1) \text{ отсюда}$$

$$\frac{y_{11}-y_1}{x_{11}-x_1}=-\frac{x_{11}+x_1}{y_{11}+y_1}$$

Теперь уравненіе сѣкущей можно написать
въ такомъ видѣ:

$$y-y_1=-\frac{x''+x'}{y_{11}+y_1}(x-x')$$

чтобы отъ этого уравненія перейти къ урав-
ненію касательной, предположимъ, что точ-
ка M_1 совпадаетъ съ M, т.е. сдѣлаемъ

$x''=x'$ и $y''=y'$, тогда будемъ имѣть уравненіе касательной въ такомъ видѣ:

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x')$$

Это уравненіе можно представить въ другомъ болѣе простомъ видѣ. Помноживъ его на y', тогда будемъ имѣть

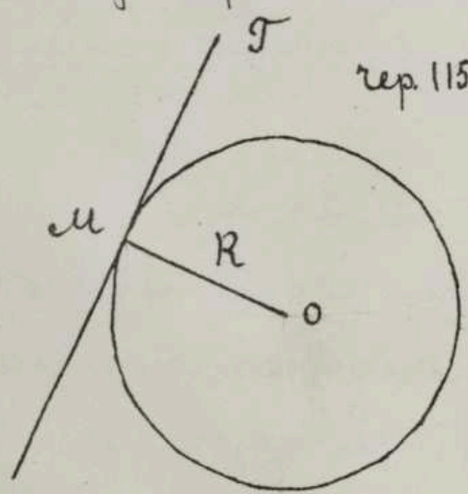
$$yy_1-y_1^2=-xx'+x_1^2 \text{ или}$$

$xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$. Но $x_1^2+y_1^2=r^2$ и потому уравненіе касательной примѣтъ видъ:

$$xx'+yy'=r^2$$

Нормальная линія къ окружности.

Нормальной линіей къ какой либо кривой, называется прямая, проходящая черезъ точку прикосновенія и перпендикулярная къ касательной. Составимъ уравненіе нормальной линіи къ окружности. Уравненіе этой линіи, какъ прямой проходящей черезъ данную точку, будетъ: $y-y'=m'(x-x')$ здѣсь m'



чер. 115.

есть неизвестный пока тангенс угла наклонения прямой къ оси x'-овъ. По условію перпендикулярности этой прямой къ касательной имѣемъ $mm'+1=0$; отсюда

$$m'=-\frac{1}{m},\ \text{но}\ m=-\frac{x'}{y'},\ \text{слѣдовательно}\ m'=\frac{y'}{x'}$$

и уравненіе нормальной линіи будетъ:

$$y-y'=\frac{y'}{x'}(x-x')$$

упрощая его, получимъ

$$x'y-x'y'=y'x-x'y' \quad \text{или}$$

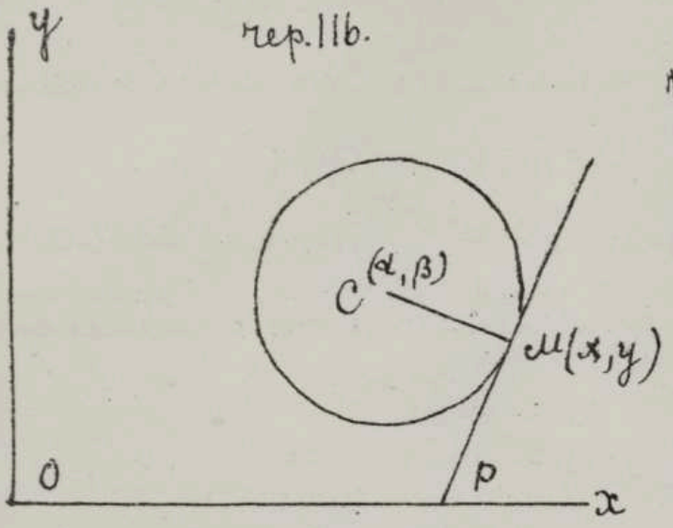
$$y=\frac{y'}{x'}x.$$

Это и есть уравненіе нормальной. Изъ полученнаго уравненія видимъ, что нормальная линія перпендикулярна къ окружности и проходитъ черезъ начало координатъ, слѣдовательно она есть радіусъ окружности. Мы доказали такимъ образомъ, что касательная линія перпендикулярна къ радіусу проведенному въ точкѣ касанія.

Уравненіе радіуса и касательной къ окружности въ случаѣ когда центръ не находится въ началѣ координатъ.

Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ (чер.116)

и на окружности точку M, координаты которой (x, y). Проводимъ радіусъ и касательную. Уравненіе окружности будетъ:



$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

Прежде всего уравненіе касательной получимъ, разсматривая ее какъ прямую перпендикулярную къ радіусу проведенному въ точку касанія. Уравненіе радіуса CM, какъ прямой, проходящей черезъ двѣ точки, будетъ

$$y-\beta=\frac{y'-\beta}{x'-\alpha}(x-\alpha).$$ Тангенсъ угла наклоненія этой прямой къ оси x' въ будетъ: $$m'=\frac{y'-\beta}{x'-\alpha}$$

Уравненіе касательной, какъ прямой проходящей черезъ данную точку будетъ

$$y-y'=m(x-x')$$

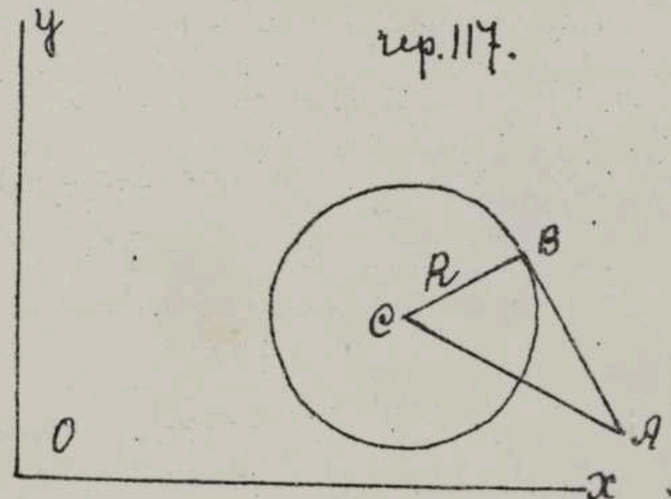
По условію перпендикулярности имѣемъ:

$m.m'+1=0$. Отсюда $m=-\frac{1}{m'}=-\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}$ и уравненіе касательной будетъ:

$$y-y'=-\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}(x-x')$$

Длина касательной, проведенной изъ внѣшней точки.

Когда дано уравненіе окружности, то весьма легко опредѣлить длины касательныхъ, проведенныхъ къ окружности изъ внѣшней точки. Стоитъ только вставить въ уравненіе окружности вмѣсто текущихъ координатъ, координаты внѣшней точки; тогда первая часть уравненія будетъ представлять квадратъ длины искомой касательной



гр. 117.

Дѣйствительно изъ (чертежа 117) имѣемъ:

$$AB^2 = AC^2 - R^2$$

Если назовемъ координаты точки A черезъ (x', y'), а координаты центра C черезъ (α, β), то: $AC^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2$, слѣдовательно

$$AB^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 - R^2 \ldots\ldots (1)$$

Это и требовалось доказать.

Радіальная ось двухъ

окружностей

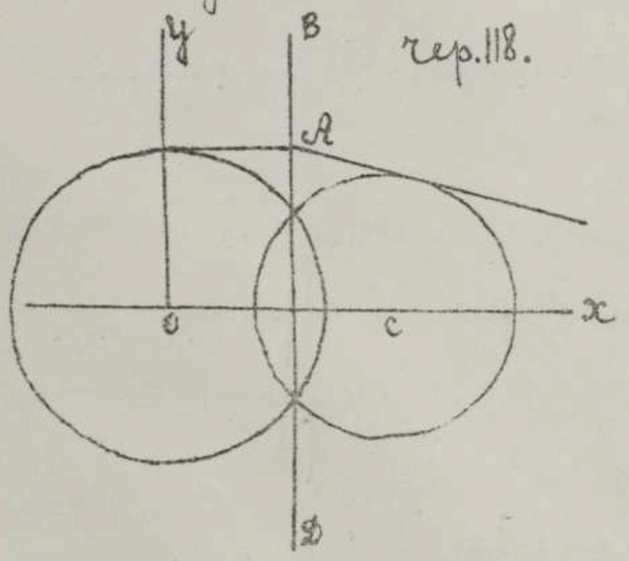
Пользуясь простым правилом для определения длины касательной можно очень просто определить геометрическое место точек, обладающих тою собственностью, что касательная, проведенная из них к двум данным окружностям, равны между собою. Пусть уравнения окружностей будут:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0 \quad \text{и}$$
$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-R_1^2=0$$

На основании сказанного, уравнение искомого места будет:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-R_1^2$$

Это будет некоторая прямая, ибо квадраты координат сокращаются. Такая прямая называется радиальной осью двух окружностей. Возьмем частный случай, когда центр первой окружности лежит в начале координат, а центр другой на оси Ox. (чер. 118.)



чер. 118.

то тогда $\alpha = \beta = \beta_1 = 0$. Находимъ,
$x^2 + y^2 - R^2 = x^2 - 2xd_1 + d_1^2 + y^2 - R_1^2$. Отсюда

$$x = \frac{R^2 + d_1^2 - R_1^2}{2d_1}$$

Это есть прямая DB перпендикулярная къ OX, представляющая въ случаѣ пересѣченія окружностей хорду ихъ пересѣченія.

Теорема.

Радіальныя оси трехъ окружностей пересѣкаются въ одной точкѣ.

Напишемъ (чер. 119) для сокращенія, уравненія трехъ данныхъ окружностей въ видѣ:

$$c = 0, \quad c_1 = 0 \text{ и } c_2 = 0$$

Уравненія ихъ радіальныхъ осей будутъ:

$$c_1 - c = 0, \quad c_2 - c_1 = 0 \text{ и } c - c_2 = 0$$

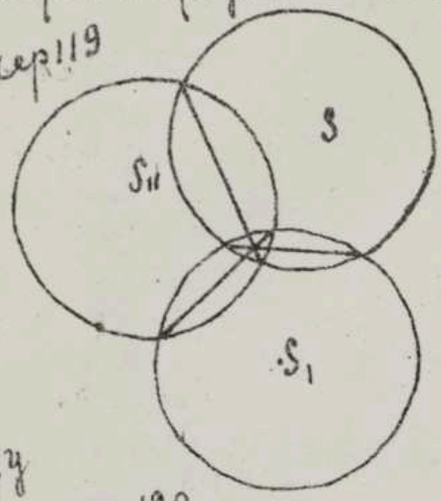
Эти три прямыя линіи пересѣкутся въ одной точкѣ, потому, что имѣетъ мѣсто тождество:

$$(c_1 - c) + (c_2 - c_1) + (c - c_2) = 0$$

Задачи на теорію окружности.

Задачи на теорію окружности могутъ быть предложены или на построеніе окружности по данными условіями, или на изложеніе теоріи окружности, или на опредѣленіе геометрическаго мѣста- представляющаго окруж-

пость. **Задача 1.** Определить длину общей хорды двух окружностей, выражаемых уравнениями



чер.119

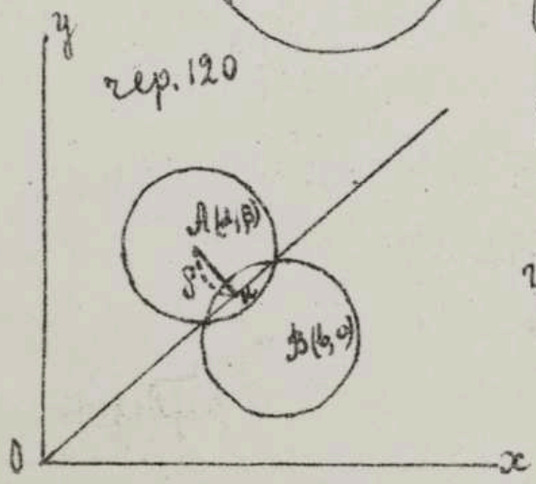
$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ и $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$

Из данных уравнений следует, что радиусы окружностей одинаковы, а координаты центров имеют обратный порядок. Составим прежде уравнение радикальной оси:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(x-b)^2-(y-a)^2=0$$

или $2x(b-a)+2y(a-b)=0$ или

$$x-y=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



чер. 120

Отсюда следует, что радикальная ось проходит через начало координат. Далее определим длину перпендикуляра δ, опущенного из центра окружности (a, b) на прямую (1). Для этого (чер 120) приводим ур-е прямой к нормальной форме, делим его на $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ и представляем $x=a$, $y=b$; получим:

$$AK=\delta=\pm\frac{a-b}{\sqrt{2}}, \quad \text{или}$$

$$\delta^2=\frac{(a-b)^2}{2}$$

Называя искомую хорду через d найдем

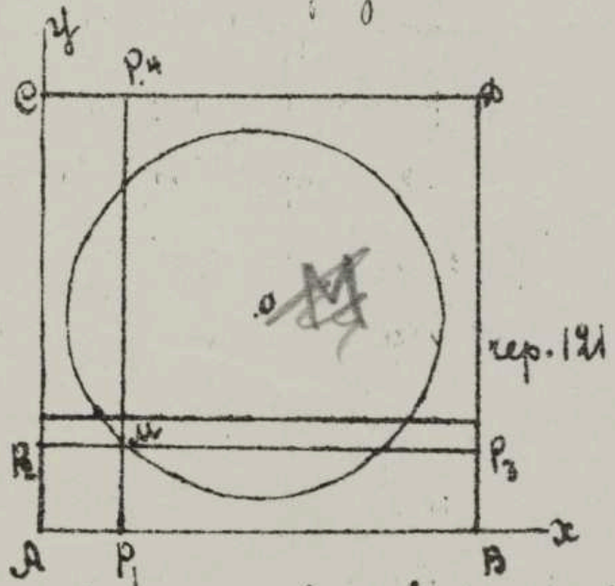
$$\frac{d}{2}=\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{2}}, \quad \text{откуда } d=\sqrt{4c^2-2(a-b)^2}$$

Задача 2. Внутри данного квадрата отмечается точка таким образом, что сумма квадратов ее расстояний от вершин квадрата сохраняет постоянную величину. Найти кривую описываемую точкой.

Построим (фиг. 121) $AB = a$. Пусть точка M обладает тем свойством, что сумма квадратов ее расстояний от сторон квадрата равняется постоянной величине m^2, т. е.

$$MP_1^2 + MP_2^2 + MP_3^2 + MP_4^2 = m^2$$

где m^2 есть постоянная величина. Примем начало координат в точке A AB за ось x-ов, Ae за ось y-ов. Координаты точки M (x, y) координаты $MP_1 = y$, $MP_2 = x$ $MP_3 = a - x$ и $MP_4 = a - y$. Подставляем эти величины в предыдущее уравнение:



$$y^2 + x^2 + (a-x)^2 + (a-y)^2 = m^2$$

Это и есть искомое ур—ие геометрического места. Раскрывая скобки, получим:

$$2x^2 + 2y^2 + 2a^2 - 2ax - 2ay - m^2 = 0$$

или $$x^2 + y^2 + a^2 - ax - ay - \frac{m^2}{2} = 0.$$

Изъ этого уравненія видимъ, что геометрическое мѣсто будетъ окружность. Если его приведемъ къ обыкновенному виду ур-ія окружности.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = k^2$$

то будемъ имѣть $2\alpha = a$ и $2\beta = a$, откуда $\alpha = \frac{a}{2}$ и $\beta = \frac{a}{2}$. Слѣдовательно центръ окружности находится въ центрѣ квадрата. Не трудно вычислить при этомъ и радіусъ.

Конецъ первой части.

Теорія кривыхъ второго порядка.

Построеніе общаго уравненія кривыхъ второго порядка.

Возьмемъ общее уравненіе второй степени съ двумя перемѣнными:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Задача: чтобы изслѣдовать виды кривыхъ представляемыхъ этимъ уравненіемъ, сдѣлаемъ одно замѣчаніе, которое до извѣстной степени обусловливаетъ ихъ форму: произвольная прямая можетъ пересѣчь кривую второго порядка не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ.

Возьмемъ произвольную прямую, пусть ея ур-іе будетъ:

$$y = ax + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Координаты точекъ пересѣченія этой прямой съ кривой второго порядка должны удовлетворять и первому и второму уравненію, а потому, чтобы найти эти координаты, нужно рѣшить предыдущія уравненія, принимая x и y за неизвѣстныя. Возьмемъ y изъ второго уравненія и вставимъ въ первое;

тогда получим:

$$A x^2 + B x (ax+b) + C (ax+b)^2 + D x + E (ax+b) + F = 0.$$

Раскрывая скобки, мы получим квадратное уравнение относительно x, общий вид которого будет:

$$M x^2 + N x + P = 0$$

Это уравнение, как всякое квадратное, имеет не более двух корней x_1 и x_2. Если эти корни вещественные, то для каждого из них получим соответствующую величину y и именно при уравнении (2) имеем

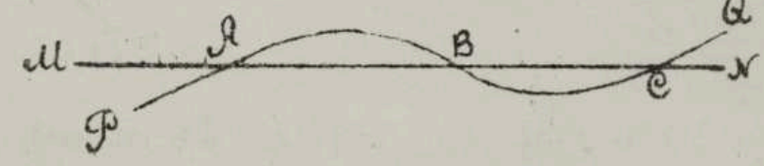
$$y_1 = a x_1 + b \quad \text{и} \quad y_2 = a x_2 + b$$

Таким образом найдутся точки пересечения прямой с кривой второго порядка; координаты одной (x_1, y_1) и другой (x_2, y_2). Очевидно, что, кроме двух найденных точек, других точек пересечения не может быть найдено, ибо квадратное уравнение не может иметь более двух корней. Допустим могут случиться, что оба корня одинаковы, т.е. что $x_1 = x_2$. В таком случае и $y_1 = y_2$ и две точки пересечения сольются в одну; следовательно в этом случае прямая и кривая имеют только одну общую точку, т.е. они касаются друг друга. Если корни мнимые, то и y_1 и y_2 тоже мнимые и

прямая не пересекать кривой. Из сказанного выводим следствие: вся кривая второго порядка сплошь одновыпуклая или вогнутая, т.е. не имеет изгибов.

Действительно, если бы кривая имела изгиб, то всегда можно было бы провести такую прямую, которая пересекала бы кривую по крайней мере в трех точках. Действительно кривую PQ (чер. 122) с изгибом; на пересекающей прямой MN в точках A, B и C. Следовательно, кривая второго порядка не может иметь изгиб, причем всегда и одна ветвь, и пересекается прямой не более, как в двух точках. Эти доказательства распространяются на кривые высших порядков.

чер 122



Обратимся теперь к исследованию уравнения кривой второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

При этом будем считать, что коэффициенты A, B, C не равны одновременно нулю, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Для определенности положим, что A отлично от нуля. Будем сначала

числа A, B, C..... суть величины произвольныя, положительныя или отрицательныя, но во всякомъ случаѣ онѣ могутъ быть равными и нулю, за исключеніемъ того случая когда $A=0$, $B=0$ и $C=0$. Положимъ, что коэффиціентъ C не равенъ нулю, тогда уравненіе относительно x будетъ квадратнымъ.

Сдѣлаемъ нѣсколько важныхъ замѣчаній относительно уравненій второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ ихъ есть:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Припомнимъ принятую нами терминологію для такого уравненія; количества a, b и c называются коэффиціентами уравненія, изъ нихъ a и c называются крайними коэффиціентами, а b среднимъ коэффиціентомъ. Какъ извѣстно, рѣшенія такого уравненія получаются изъ формулы.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Эта формула допускаетъ упрощеніе въ томъ случаѣ, когда средній коэффиціентъ въ есть число, кратное 2, т. е. $b = 2\beta$; тогда имѣемъ:

$$x = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4(\beta^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Таким образом неизвестное въ этомъ уравненіи равно половинѣ средняго коэффиціента, взятаго съ обратнымъ знакомъ, ± корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ произведенія, крайнихъ коэффиціентовъ, дѣленное все на первый коэффиціентъ. . . . . .

Обратимъ теперь вниманіе на особую форму, въ которую можно обратить первую часть уравненія. Имѣемъ

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Прибавляя и вычитая $\frac{b^2}{4a^2}$ изъ выраженія въ скобкахъ, находимъ

$$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Въ послѣднихъ двухъ видахъ особенно удобно представлять первую часть уравненія для облегченія его изслѣдованія. Возвратимся къ равенству (1); изъ него видимъ что корни уравненія зависятъ отъ подкоренного выраженія b^2-4ac. Извѣстно, что когда: 1) $b^2>4ac$, т. е. $b^2-4ac>0$, то уравненіе имѣетъ два дѣйствительныхъ корня, 2) $b^2=4ac$, т. е. $b^2-4ac=0$, уравненіе имѣетъ два равныхъ корня, 3) $b^2<4ac$, т. е. $b^2-4ac<0$, уравненіе имѣетъ два мнимыхъ корня. Когда

$b^2 > 4ac$, первая часть уравнения разлагается на два действительных множителя 1-ой степени относительно x, именно ур-е уравнения (1) имеет вид:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

приравнивая эти выражения 0 и зная, что a отлично от нуля, необходимо будет иметь

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \quad \text{и} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0.$$

откуда получаются два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_{II} = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

и тогда равенство (II) примет вид

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_{II}) \ldots\ldots\ldots (III)$$

Когда же $b^2 - 4ac = 0$ то имеем два равных корня, а именно $x_1 = x_{II} = -\frac{b}{2a}$

Наконец когда $b^2 < 4ac$, разлагаем первую часть так:

$$ax^2 + 0x + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

откуда получим:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)(-1)\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i\right) \cdot$$

$$\cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots IV$$

Приравнивая эти выражения нулю, найдем два

мнимыхъ сопряженныхъ корня:

$$x_I = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i \quad \text{и} \quad x_{II} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i;$$

Теперь обратимся къ общему уравненію кривыхъ второго порядка. Располагая наше уравненіе по степенямъ y и рѣшая относительно y, получимъ послѣдовательно:

$$Cy^2 + (Bx+E)y + (Ax^2+Dx+F) = 0, \quad y = -\frac{(Bx+E)}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(Bx+E)^2 - 4C(Ax^2+Dx+F)}$$

Выраженіе подъ корнемъ располагаемъ по степенямъ x

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + (E^2-4CF} \quad \ldots\ldots(1)$$

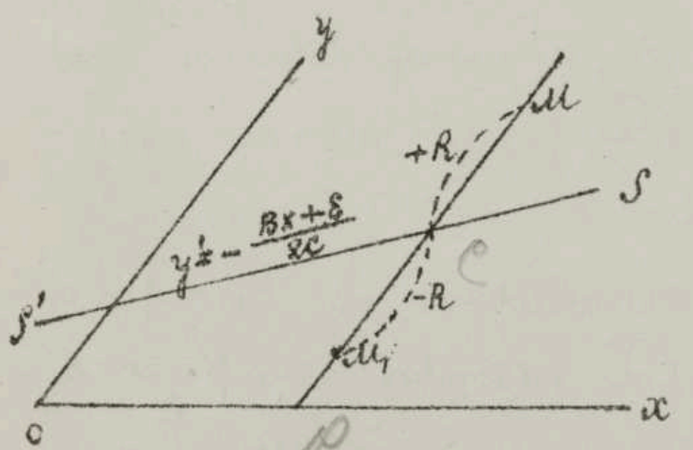
Для упрощенія введемъ сокращенныя обозначенія, именно:

$$B^2 - 4AC = M, \quad BE - 2CD = N \text{ и } E^2 - 4CF = P.$$

Тогда уравненіе (1) приметъ видъ:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Полагая $\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P} = R$, получимъ $y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm R$



Чер 123.

Сравнимъ это уравненіе съ другимъ, которое получимъ, опустивши R, и которое будетъ имѣть видъ $y' = -\frac{Bx+E}{2C}$. Если въ этомъ уравненіи возьмемъ x и y' за текущія координаты, то разсматриваемое уравненіе, буду-

ми первой степени, представить прямую:
$y' = -\frac{B}{2c}x + \frac{E}{2c}$ (фиг. 123) Построимъ эту прямую; пусть она будетъ SS_1. Сравнивая ординаты нашей кривой съ ординатами полученной прямой, мы замѣтимъ, что при одной и той же абсциссѣ x, имѣемъ:

$$y = y' \pm R.$$

Это уравненіе показываетъ, что ординату y кривой легко найти по ординатѣ y' прямой. Возьмемъ $OP = x$, проведемъ черезъ точку P параллель оси y'ковъ, пусть эта параллель встрѣтитъ прямую SS' въ точкѣ C; тогда $PC = y'$. Придадимъ къ ординатѣ y' величину R, вычисленную для того же значенія $x = OP$, и вычтемъ ее изъ y', получимъ двѣ точки кривой M и M', такъ что $CM = Cm' = R$. Тогда очевидно, что $MP = y' + R$ и $M'P = y' - R = y' - R = y$ Слѣдовательно точки M и M' принадлежатъ нашей кривой. Такимъ образомъ точки кривой будутъ получаться, когда къ ординатѣ y' будемъ прибавлять или отнимать R. Слѣдовательно всякому значенію x соотвѣтствуетъ два значенія y т. е. по данному значенію x находимъ двѣ точки кривой.

Линія MM', соединяющая двѣ точки кривой, есть

хорда этой кривой, эта хорда параллельна оси ординат. Прямая SS_1 делит эту хорду в точке C пополам. Отсюда вытекает следующее свойство этой прямой: она делит пополам все хорды кривой, параллельные оси ординат. Прямая, обладающая таким свойством называется диаметром кривой. Следовательно прямая SS' есть диаметр делящий все хорды, параллельные оси ординат, пополам, иначе говоря, это есть диаметр кривой, сопряженный хордам, параллельн. оси y'ков.

И так мы видим, что форма кривой зависит от величины K. Займемся исследованием этой величины. В последствии мы увидим, что вид кривой, главным образом зависит от знака, со противоследующего коэффициента при неизвестной во второй степени, т. е. при X^2; иначе говоря вид кривой зависит от знака двучлена:

$$M = B^2 - 4Ac$$

поэтому и исследование распадается на три случая: 1) Когда $M = B^2 - 4Ac < 0$ или $B^2 < 4Ac$. В этом случае получается группа кривых, называемых Эллипсами. 2). Когда $M = B^2 - 4Ac > 0$

или $B^2 > 4Ac$. В этом случае получается группа кривых называемых **гиперболами**.

3). Когда $M = B^2 - 4Ac = 0$ или $B^2 = 4Ac$. В этом случае получается группа кривых, называемых **параболами**.

Группа эллипсов.

Положим $M = B^2 - 4Ac < 0$. Для удобства исследования выражения $R = \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$, где $M = B^2 - 4Ac$, $N = BE - 2cD$ и $P = E^2 - 4cF$ преобразуем подкоренной трехчлен по известному правилу в произведение двух разностей. Именно полагая,

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0$$

и решая это квадратное уравнение по сокращенной формуле для случая, когда средний коэффициент кратен 2, получим:

$$x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M},$$

Найдем оба корня уравнения; меньший из них обозначим через x_1, больший через x_2, так что $x_1 < x_2$. По выведенной формуле можно:

$$Mx^2 + 2Nx + P = M(x - x_1)(x - x_2)$$

Следовательно можно написать

$$R = \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} = \frac{1}{2c}\sqrt{M(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{2c}\sqrt{-M(x - x_1)(x_2 - x)} =$$

$$= \frac{\sqrt{-M}}{2c}\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}$$

Так как по условию $M < 0$, т. е. отрицательно, то $\sqrt{-M}$ есть количество действительное. Используя выражения

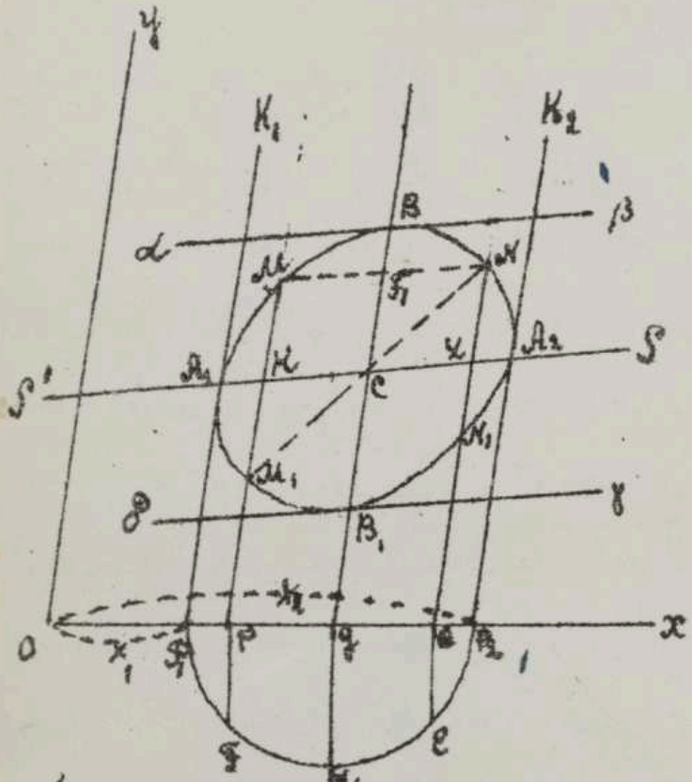
$$R = \frac{\sqrt{-M}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$$

с геометрической точки зрения, нужно прежде всего определить пределы изменения переменной абсциссы x, в которых R есть количество действительное. Во-первых, положим $x = x_1$. В таком случае $R = 0$. В геометрическом смысле это указывает на то, что такой абсцисс соответствует одна точка кривой, находящаяся на ветви, сопряженной оси y-ков. Действительно, мы привели общее уравнение кривых второго порядка к виду:

$$y = -\frac{Bx+E}{2c} \pm R$$

или строя сопряженной оси y'-ков ветви по уравнению $y_1 = -\frac{Bx+E}{2c}$, окончательно имеем $y = y_1 \pm R$ ... (a) где y_1 означает текущую ординату ветви SS', соответствующую различным значениям абсциссы, а y означает ординату кривой соответствующую текущим тем-же значениям x'са, как и y. Так как во рассматриваемом случае $R = 0$, то имеем: $y = y_1 = OA$. Построив образом хорды C_1K_1 (фиг. 124) вместо

чер. 124.



ся кривой одну общую точку, следовательно в силу рассуждения, приведенного в исследовании вопроса о точках пересечения прямой с кривой второго порядка, эта хорда будет касательной к кривой в точке $A_1(x_1, y_1)$. Теперь полагаем $x = x_2$; тогда $R = 0$. Пусть соответствующее этому значению x'а значение y'-ка будет y_2 (на чертеже $A_2 P_2$ или $OP_2 = x_2$ и $P_2 K_2 \parallel oy$). По формуле же (а) имеем в этом случае $y = y_2$, что снова указывает, что хорда $P_2 K_2$ имеет с кривой одну общую точку $A_2(x_2, y_2)$. и в силу тех-же рассуждений, как и в первом случае, видим, что хорда $P_2 K_2$ будет касательной к кривой в точке A_2.

Чтобы R, а следовательно и y, были действительны, x не должен быть менее x_1, ибо если $x < x_1$, и принять еще во внимание условие $x_1 < x_2$ видим, что подкоренное выражение

$(x-x_1)(x_2-x)$ будет отрицательно. Поэтому x не должно быть больше x_2, потому что подкоренное выражение опять будет отрицательно, т.е. R а следовательно и y, будут мнимы. Поэтому образом x должно быть больше x_1 (меньший корень уравнения: $Mx^2+2Nx+P=0$) и меньше x_2 (большего корня):

$$x_1 < x < x_2$$

Геометрически это означает, что вся искомая кривая находится между касательными к ней прямыми P_1K_1 и P_2K_2, параллельными оси y'ков.

Будем теперь строить кривую, как обыкновенно, по точкам. Как мы видели, это сводится к построению:

$$R = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$$

Надо еще построить диаметр SS' по уравнению $y' = -\frac{Bx+E}{2C}$. Выражение $\frac{\sqrt{-\Delta}}{2c}$ есть величина постоянная и представляет собою числовой коэффициент при иррациональности множителя $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, который и надо будет строить непосредственно. Мы видели, что выражение этого множителя представляет среднюю пропорциональную между линиями:

$(x-x_1)$ и (x_2-x)

Применимъ къ построенію теорему о перпендикулярѣ, опущенномъ на діаметръ изъ точки, взятой на окружности, и которомъ, какъ извѣстно, есть среднее пропорціональное между отрѣзками діаметра; слѣдовательно самый діаметръ долженъ быть равенъ сумиѣ этихъ отрѣзковъ, т. е.

$$\mathcal{D} = (x-x_1) + (x_2-x) = x_2 - x_1$$

На чертежѣ этотъ діаметръ равенъ линіи $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$. Такимъ образомъ, если на $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$, какъ на діаметрѣ, построимъ изъ центра $\mathcal{O}$ окружность, и будемъ проводить въ ней всевозможныя линіи перпендикулярно $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$, то эти линіи будутъ выражать различныя величины пропорціональнаго множителя $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, соотвѣтствующія величинамъ x, выражающимъ отрѣзки оси абсциссъ отъ начала координатъ до основанія соотвѣтствующей хорды. Такъ $\mathcal{P}_1\mathcal{T}_1$ выражаетъ линейный множитель $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$ при $x=0\mathcal{P}_1$. Для построенія соотвѣтствующаго такому x точекъ кривой, проводимъ черезъ точку $\mathcal{P}_1$ параллель оси y'ковъ и по этой параллели отъ точки K пересѣченія этой па-

равными съ діаметромъ SS' откладывать въ обѣ стороны величину $R = \frac{\sqrt{-M}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$ т. е. откладывать найденный линейный множитель $\mathfrak{F} = \sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, увеличенный или уменьшенный въ отношеніи $\frac{\sqrt{-M}}{2c}$. Итакъ откладываемъ:

$$Mk = M_1k = \frac{\sqrt{-M}}{2c} \cdot \mathfrak{F}$$

получимъ двѣ точки искомой кривой, именно M и M_1. Такимъ же образомъ строимъ точки кривой, постепенно перемѣщая точку $\mathfrak{P}$ отъ $\mathfrak{P}_1$ къ $\mathfrak{P}_2$. При такомъ перемѣщеніи хорда кривой обращается для точки $\mathfrak{P}_1$ въ точку A_1, принимаетъ далѣе конечную величину, постепенно увеличивается; наибольшей величины она достигаетъ, когда точка $\mathfrak{P}$ раздѣлитъ пополамъ прямую $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ въ точкѣ $\mathfrak{Q}$, потому что въ этомъ случаѣ линейный множитель выраженія R равняется половинѣ наибольшаго изъ хордъ окружности, т. е. половинѣ его діаметра. При дальнѣйшемъ перемѣщеніи точки $\mathfrak{P}_1$ къ $\mathfrak{P}_2$ хорда кривой будетъ постепенно уменьшаться и, когда точка $\mathfrak{P}$ совпадаетъ съ $\mathfrak{P}_2$, хорда обратится въ точку A_2. Изъ этого видно, что искомая кривая есть кривая самопересѣченія. Изслѣдуемъ свойства нѣкоторыхъ точекъ этой

мыкъ въ этой кривой. Какъ мы видѣли наибольшая хорда $B B_1$ кривой соотвѣтствуетъ абсциссѣ $x = Oq$ при условіи, что $P_1 q = P_2 q$. Если провести черезъ точки B и B_1 параллели діаметру SS_1, то всѣ точки кривой будутъ расположены между этими параллелями. Мы можемъ такимъ образомъ параллелограммъ $cBpd$, внутри котораго будутъ расположены всѣ точки нашей кривой. Отмѣтимъ точку C пересѣченія хорды BB' съ діаметромъ SS_1. Теперь возьмемъ точку Q такъ, чтобы $QP_2 = PP_1$. Строимъ соотвѣтствующія абсциссѣ OQ точки кривой M и M_1. Изъ условія $QP_2 = PP$, и изъ геометрическаго способа построенія точекъ кривой заключаемъ, что $LM = LM_1 = \frac{V-M}{2c} \cdot QE$, но:

$$\frac{V-M}{2c} \cdot QE = \frac{V-M}{2c} \cdot PF \text{ ибо } QE = PF,$$

какъ хорды круга равноудаленныя отъ центра. Отсюда слѣдуетъ что $LM = LM_1 = KM = KM_1$. Соединивъ теперь точку M_1 съ C и точку M съ C. Сравнимъ между собою треугольники $M_1 KC$ и MLC; и замѣтимъ, что $M_1 K = ML$, изъ трапеціи $PMLQ$ имѣемъ $KC = CL$ такъ какъ $PQ = QP$ и $PC \parallel MP$, а изъ того что $MP \parallel M_1 K$, заключаемъ $\angle M_1 KC = \angle MLC$. Слѣдовательно тре-

угольники $M_1 Ke$ и $N_1 Kc$ равны между собою, так как они имеют по равному углу, заключенному между соответственно равными сторонами. Из равенства треугольников следует, что $\angle KeM_1 = \angle KcN_1$ и так как Kc есть прямая, то и MeM_1 есть так же прямая, упирающаяся в точку e положась. Так как точки M_1 и N вполне произвольны (они связаны между собою указанным условием:

$$\mathcal{P}q = qQ,$$

но это условие имеет, как сказано, текущее значение и одно не определяет собою положения точек M_1 и N), то и вообще $M_1 eN$ прямые (положение их обусловливается только проведением через точку e). Таким образом точка e дает весь проходящий через нее ходы прямой положась, точка же **же** обладающая таким свойством, называется центровой кривой, есть следовательно точка e есть центр некоторой кривой. Вообще исследуем расположение точек кривой относительно центра, отыскание последнего весьма важно в самом деле построения кривой. И так, определив центр некоторой кри-

вой, т. е. опредѣлить координаты точки C, тогда достаточно опредѣлить одну абсциссу этой точки $aq = x_{II}$, потому что, разъ найдена точка q, то проведя черезъ нее параллель оси y'ковъ, найдемъ центръ C въ пересѣченіи этой параллели съ діаметромъ SS'.

Изъ черт. 1 имѣемъ:

$$x_{II} = oq = op_1 + p_1q = x_1 + \frac{p_1p_2}{2} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

т. е. абсцисса центра искомой кривой есть средняя ариѳметическая между корнями уравненія:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0$$

Изъ этого уравненія $x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$; слѣдовательно имѣемъ $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{N}{M}$.

Соединимъ теперь точки M и N между собою. Прямая MN пересѣчетъ прямую qq, въ точкѣ F_1. Очевидно MN ∥ SS, ибо $(KM \# LN)$, а изъ трапеціи PMNQ, имѣя $Pq = qQ$ и qq, ∥ MP, получимъ $MF' = NF'$. Прямая MN есть продолженная хорда кривой, только параллельная діаметру SS'. Эта хорда дѣлитъ линію qq' пополамъ, стало быть линія qq, есть послѣ діаметръ кривой. При томъ этотъ діаметръ имѣетъ особое соотношеніе съ

діаметромъ SS'. Мы видимъ дѣйствительно, что эти діаметры таковы, что каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ ряды хордъ параллельныхъ другому. Такіе діаметры называются взаимно сопряженными. Уравненіе діаметра qq_1 будетъ очевидно:

$$x = -\frac{N}{M}.$$

Замѣтимъ, что въ началѣ нашего разсужденія ось y'ковъ была взята произвольно, а потому и положеніе діаметра SS' въ такой же степени произвольно. Поэтому можно сказать, что въ разсматриваемой кривой существуетъ безконечное множество паръ взаимно сопряженныхъ діаметровъ. Совокупность всѣхъ вышеприведенныхъ замѣчаній достаточно опредѣляетъ видъ кривой, она представляется выпуклой симметричной кривой, имѣющей въ точкахъ A_1, A_2 и B_1, B_2, называемыхъ вершинами кривой къ сторонамъ параллелограмма, попарно параллельнымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ:

$$SS' \left(y = -\frac{B.x + b}{2c} \right) \text{ и } qq_1 \left(x = -\frac{N}{M} \right).$$

и имѣющую точку C своимъ центромъ.

Эта сомкнутая кривая второго порядка называется Эллипсом.

До сих пор мы всюду наше исследование в предположении, что корни уравнения:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0$$

действительны и не равны, т. е. в предположении, что в формуле:

$$x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$$

дано условие $N^2 - MP > 0$ или $N^2 > MP$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $N^2 = MP$

Уравнение $Mx^2 + 2Nx + P = 0$ в таком случае имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{N}{M} = x_0$

Следовательно выражение трехчлена есть

$$Mx^2 + 2Nx + P = M(x - x_0)(x - x_0) = M(x - x_0)^2$$

откуда $y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2}\sqrt{M(x - x_0)^2}$

$$= -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}(x - x_0) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Так как по условию $M \neq 0$, то $\sqrt{M}$ есть количество конечное. Поэтому, очевидно, что уравнение (1) представляет собою два (двойной только при конечном члене $\frac{x - x_0}{2C}\sqrt{M}$) линейных уравнения (ибо уравнение относительно x первой степени). Эти два линейных уравнения имеют одну общую действительную точку. В самом деле, полагая $x = x_0 = -\frac{N}{M}$, получим

дим у действительную величину:

$$y_0 = -\frac{Bx+E}{2C}$$

Этот случай можно рассматривать как предельный относительно первого, именно при постепенном переходе от неравенства $N^2 > MP$ к равенству $N^2 = MP$, при чем эллипсы, постепенно уменьшаясь через взаимное сближение точек A_1 и A_2 (ибо в таком процессе удаление X стремится к равенству с точкой P_2) и в пределе, при $N^2 = MP$, обращается в точку, именно в центр эллипса, так как и центра эллипса в таком случае нельзя, как видели раньше, так же определить:

$$x_0 = -\frac{N}{M} \quad \text{и} \quad y_0 = -\frac{Bx+E}{2C}$$

Наконец рассмотрим случай, когда $N^2 < MP$. Легко видеть, что в таком случае уравнение не представляет собою никакого геометрического места. Действительно:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}$$

Преобразуем вторую часть:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{M\left(x^2+\frac{2Nx}{M}+\frac{P}{M}+\frac{N^2}{M^2}\right)\frac{M}{M}} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm$$

$$\pm\frac{1}{2C}\sqrt{M\left[\left(x^2+\frac{2Nx}{M}+\frac{N^2}{M^2}\right)+\frac{PM-N^2}{M^2}\right]} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{M\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+\frac{PM-N^2}{M^2}\right]}$$

Очевидно, что при всяких действительных

значениях x, выражение для y всегда мнимо так как в выражении y-ка под корнем находится отрицательное количество, представляющее произведение двух множителей, из которых один:

$$\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+\frac{PM-N^2}{M^2}\right]$$

всегда в силу условия $N^2 < MP$ положителен, а другой M по условию отрицателен. Таким образом, когда $N^2 < MP$ уравнение второй степени с двумя переменными не представляет собою никакого геометрического места. Разсмотрим несколько числовых примеров.

Пример 1. Построить уравнение

$$3x^2-2xy+y^2+5x-4y-6=0$$

Прежде всего посмотрим, какую кривую представляет наше уравнение, для этого составим определитель кривых второго порядка, т. е. выражение B^2-4AC

$$B^2-4AC=4-4.3=-8<0$$

Следовательно кривая относится к группе эллипсов. Решаем уравнение:

$$y^2-2(x+2)y+(3x^2+5x-6)=0$$

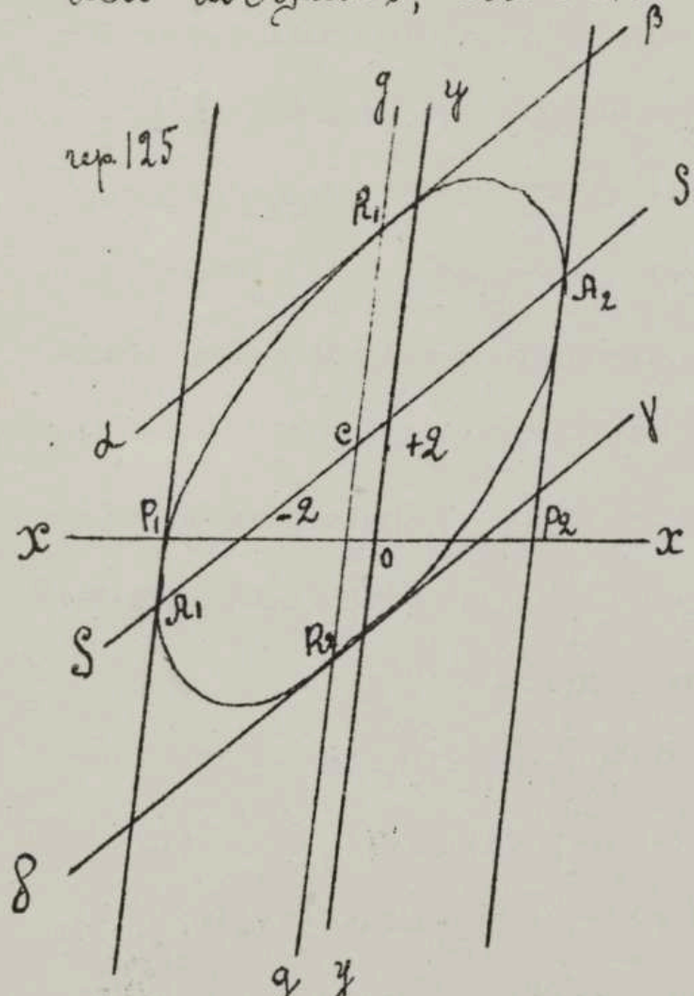
относительно y; имеем:

После упрощений, получимъ:

$$y = x + 2 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 3x^2 - 5x + 6}$$

После упрощений, получимъ: $y = x + 2 \pm \sqrt{-2x^2 - x + 10}$.

Возьмемъ теперь оси координатъ (фиг. 125) и прежде всего построимъ діаметръ SS_1, находимъ изъ этого уравненія отрѣзки, отсѣкаемые прямой SS_1 отъ осей координатъ; именно, полагая $x = 0$, найдемъ отрѣзокъ по оси ординатъ отъ начала +2, полагая же $y = 0$ найдемъ отрѣзокъ по оси абсциссъ, именно -2.



Откладываемъ эти отрѣзки по осямъ и соединяемъ между собою полученныя точки, построимъ діаметръ SS_1. Построимъ теперь вершины A_1 и A_2. Какъ мы видѣли, это суть точки пересѣченія кривой съ діаметромъ SS_1, и абсциссы ихъ равны соотвѣтственно корнямъ уравненія.

$Mx^2 + 2Nx + P = 0$, т. е. въ разсматриваемомъ случаѣ корнямъ уравненія:

$2x^2 - x + 10 = 0$. Эти корни:

$X_1 = -2,5$ и $X_2 = 2$

Откладывая эти величины по оси абсцисс от начала координат и проведя через полученные точки P_1 и P_2 параллели оси y'ов, получим искомые вершины A_1 и A_2 в пересечении этих параллелей с диаметром SS_1. Теперь займемся определением положения центра искомого эллипса. Как мы видели, эта точка геометрически определяется как точка делящая на диаметре SS_1, абсцисса которой $X_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, в данном случае $X_0 = -\frac{1}{4}$. Откладывая эту величину по оси x'ов и проводя через полученную точку q параллель оси y'ов, находим центр C эллипса в пересечении диаметра SS_1 с проведенной параллелью $q_1 q_{11}$ причем последняя будет вторым диаметром эллипса, сопряженным диаметру SS_1.

Построим теперь вершины R_1, R_2 т. е. точки пересечения кривой с диаметром $q_1 q_2$. Их можно найти, откладывая по диаметру $q_1 q_2$ от точки C в обе стороны величину $R = \sqrt{-2x^2 - x + 10}$, вычисленную для $X = \frac{1}{4}$ т. е. откладывая от c в обе стороны по $q_1 q_2$ величину

$-2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 9 = 9\frac{1}{8} = \frac{81}{8}$ =

$\sqrt{\frac{81}{32}} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{\frac{2}{4}}$ (Видимъ, что $R_1 C = R_2 C$ построится какъ сторона квадрата, вписаннаго въ кругъ, радіусъ котораго $= \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$). $a_2 = 2\sqrt{2}$.

Остальныя точки кривой строимъ по указанному способу, т. е. проводя всевозможныя параллельныя оси у'ковъ, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ X (при условіи что $x_1 > x > x_2$) и откладывая по этимъ хордамъ въ обѣ стороны отъ точекъ ихъ пересѣченія съ діаметромъ SS_1 величины R, вычисленныя для соотвѣтствующихъ хордамъ значеній X. Какъ мы видѣли величину R можно непосредственно вычислить по извѣстной формулѣ $R = \sqrt{-2x^2 - x + 10}$, но удобнѣе строить ихъ геометрически.

Примѣръ 2-й.

Дано уравненіе:

$$5x^2 + 4xy + y^2 - 22x - 10y + 26 = 0.$$

Опредѣлитель кривыхъ второго порядка указываетъ, что кривая, строимая по этому уравненію, есть эллипсъ, ибо:

$$B^2 - 4Ac = 16 - 20 = -4 < 0.$$

Рѣшая уравненіе относительно у'ка, находимъ:

$$y^2 + (4x - 10)y + (5x^2 - 22x + 26) = 0 \text{ откуда:}$$

$$y = -2x + 5 \pm \sqrt{-x^2 + 2x - 1}.$$

Будет корнем имеем полный квадрат, и потому напишем:

$$y = -2x + 5 \pm \sqrt{-(x-1)^2} = -2x + 5 \pm (x-1)\sqrt{-1}.$$

Здесь y вообще мнимо, но при $x = 1$, мы получим $y = 3$. Таким образом видим, что в данном примере уравнение представляет частный случай эллипса, именно точку, координаты которой $(1, 3)$.

Пример 3. Дано уравнение:

$$9x^2 + 4xy + y^2 - 18x - 6y + 12 = 0.$$

Определитель кривых второго порядка, т. е. выражение $B^2 - 4AC = 16 - 36 = -20 < 0$, указывает на то, что строимая кривая есть эллипс.

Решим уравнение относительно y:

$$y^2 + (4x - 6)y + (9x^2 - 18x + 12) = 0$$

$$y = -2x + 3 \pm \sqrt{4x^2 - 12x + 9 - 9x^2 + 18x - 12} =$$

$$= -2x + 3 \pm \sqrt{-5x^2 + 6x - 3} = -2x + 3 \pm \sqrt{5}\left(-x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}\right) =$$

$$= -2x + 3 \pm \sqrt{5}\sqrt{-x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}} =$$

прибавляя и отнимая от второго подкоренного количества $\left(\frac{9}{25}\right)$ $= -2x + 3 \pm \sqrt{5}\sqrt{-x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{9}{25} + \frac{3}{5} + \frac{9}{25}} =$

$$= 2x + 3 \pm \sqrt{-\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{6}{25}} \cdot \sqrt{5} = -2x + 3 \pm \sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{6}{25}}\right) \cdot i$$

Следовательно y всегда мнимо и данное

уравнение не представляет никакого геометрического места, или как говорят въ видахъ общности, представляет мнимое место.

Группа гипербол.

Уравнение кривыхъ второго порядка въ этомъ случаѣ отличается отъ случая эллипсовъ только тѣмъ что $M = B^2 - 4Ac > 0$. Изслѣдованіе кривыхъ этой группы будетъ вести аналогично первой; имѣемъ:

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P},$$

гдѣ $M = B^2 - 4Ac$, $N = BE - 2cD$; $P = E^2 - 4CF$.

Обозначимъ по прежнему:

$\frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$ черезъ R найдемъ

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm R \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Въ этомъ видѣ уравненіе удобно для построеній. Для общности возьмемъ косоугольныя оси координатъ. Прежде всего строимъ діаметръ (фиг. 126) уравненія котораго есть

$$y' = -\frac{Bx + E}{2c}$$

Пусть этотъ діаметръ будетъ имѣть

рая прямая SS_1. Съ проведеніемъ этой прямой построеніе точекъ кривой значительно упрощается, такъ какъ ордината кривой выражается черезъ ординату діаметра SS_1 въ видѣ $y = y \pm R$.

Для построенія точекъ кривой по данному x вычислить:

$$R = \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}.$$

и величину R отложить по параллели оси y'ковъ, проведенной черезъ конецъ соотвѣтствующей абсциссы x, въ обѣ стороны отъ діаметра SS_1, отъ точки пересѣченія его съ проведенной къ оси y'ковъ параллелью.

Такимъ образомъ съ построеніемъ діаметра SS_1, весь вопросъ о построеніи точекъ кривой сводится къ построенію R. Для удобства изслѣдованія разложимъ подкоренное выраженіе въ произведеніе двухъ разностей

$$R = \frac{1}{2c}\sqrt{M(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$$

гдѣ x_1 есть меньшій, а x_2 большій корень уравненія:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0.$$

Изслѣдованіе распадается, какъ и въ случаѣ группы эллипсовъ на три случая:

1) $N^2 > MP$; 2) $N^2 = MP$; 3) $N^2 < MP$.

Разберем каждый случай отдельно.

1) $N^2 > MP$.

Узнаем, в каких предположениях действительным значениям переменной X соответствуют действительные значения y'ка. Во первых, когда $x < x_1$ (а следовательно $x < x_2$ либо $x_1 < x_2$) то подкоренное количество в выражении R положительно, а потому действительным значениям X_1, меньшим X_1, соответствуют действительные значения y'ка и по таким значениям X возможно следовательно построение точек кривой.

Когда $X = X_1$, тогда $R = 0$ это показывает, что хорда кривой постепенно уменьшаясь (при переходе от неравенства $X < X_1$ к равенству $x = x_1$) обращается в точку когда $X = X_1$ таким образом, если отложить $OP = X$ и провести P_1K_1 параллельно оси y'ков, то точка A, пересечения параллели с диаметром SS_1 будет точкой кривой, а параллель P_1K_1 очевидно будет касательной к кривой в точке A.

Если $x > x_2$ (слѣдовательно и $x > x_1$, ибо $x_2 > x_1$), то подкоренное количество въ выраженіи R положительно. Слѣдовательно всевозможнымъ дѣйствительнымъ значеніямъ x-ся большимъ x_2, соотвѣтствуютъ дѣйствительныя же значенія y'ка и по такимъ значеніямъ x возможно слѣдовательно построеніе точекъ кривой. Когда $x = x_2$, тогда $R = 0$. Получаемъ одну точку A_2 кривой на діаметрѣ SS'. Разсужденіемъ, подобнымъ предыдущему, убѣждаемся, что прямая $A_2 P_2$, параллельная оси y'овъ, касательна къ кривой въ точкѣ A_2. Когда абсцисса x будетъ давать значенія, промежуточныя между x_1 и x_2 т. е. когда $x_1 < x < x_2$, тогда подкоренное количество въ выраженіи R отрицательно а потому R, а слѣдовательно и y мнимы. Это означаетъ, что такія значенія x не выражаютъ собою абсциссъ кривой или что между прямыми $P_1 K_1$ и $P_2 K_2$ нѣтъ точекъ кривой. Изъ этого изслѣдованія видимъ, что искомая кривая имѣетъ двѣ вѣтви пересѣкающія ея діаметромъ SS_1 въ точкахъ:

$A_1\left(x_1, \frac{Bx+\mathfrak{C}}{2c}\right)$ и $A_2\left(x_2, \frac{Bx+\mathfrak{C}}{2c}\right)$.

Одна изъ этихъ вѣтвей располагается вся вправо отъ линіи A_1K_1, а другая вся вправо отъ линіи A_2K_2. Самую кривую построимъ по точкамъ, задавшись какой-либо величиной абсциссы x (конечно только въ указанныхъ предѣлахъ), откладывая эту величину по оси абсциссъ отъ начала координатъ, проводя черезъ полученную точку параллель оси y-ковъ и откладывая по этой параллели отъ точки ея пересѣченія съ діаметромъ SS_1 въ обѣ стороны величину R, вычисленную для этого значенія x-са. Такой способъ построенія точекъ кривой основывается на выведенномъ нами уравненіи

$$y = y' \pm R.$$

представляющемъ собою геометрическое толкованіе этого уравненія. Величину R удобнѣе всего опредѣлить геометрическимъ построеніемъ: именно она выразится:

$$R = \frac{\sqrt{cM}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$$

Здѣсь $\frac{\sqrt{cM}}{2c}$ есть величина постоянная и представляетъ собою длину въ діаметрѣ

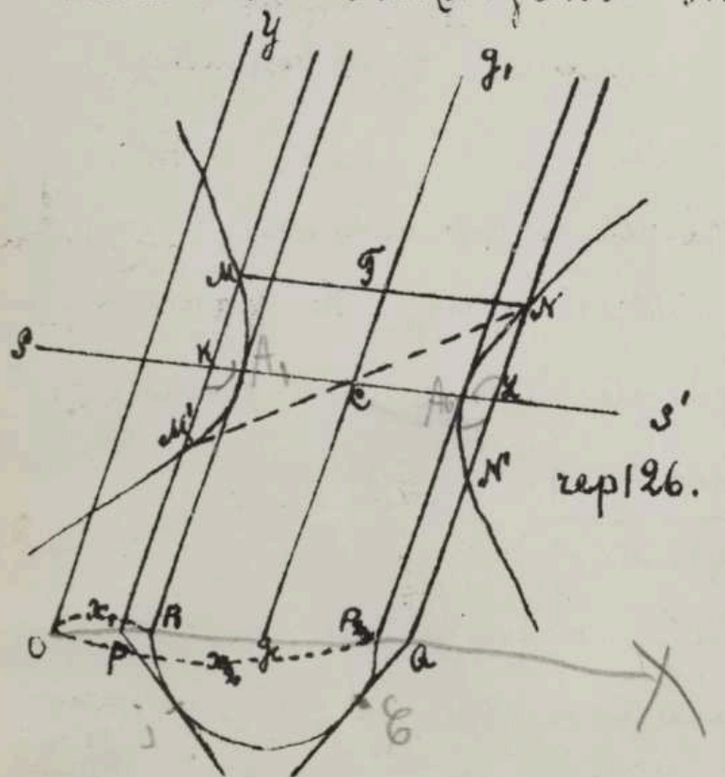
найдем общий случай не ясно выраженный) коэффициент при множителе $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$ который и будем стремиться непосредственно. Мы видим, что этот линейный множитель есть среднее пропорциональное между линиями:

$$(x-x_1) \text{ и } (x-x_2).$$

Здесь к построению удобно применить теорему о касательной и секущей, проведенных из одной точки к кругу. Определим диаметр этого круга в предположении, что секущая всегда проходит через его центр, рассматривая большую разность $x-x_1$ как всю секущую, а меньшую разность $x-x_2$ как внешнюю отрезок этой секущей. При сделанном предположении читатель, что нетрудно диаметр ч(фиг 126)

$$D=(x-x_1)-(x-x_2)=x_2-x_1=P_1P_2$$

Таким образом, если построить на $P_1P_2=x_2-x_1$, как на диаметре круг центра g получим окружность и ту



фиг 126.

различных точек оси x-ов будешь проводить к этой окружности касательных, то величина изменится:

$$\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$$

соответствующая величине x, выражающей расстояние взятой на оси x-ов точки до начала координат. Изменяя же получаемую линию в отношении $\frac{\sqrt{M}}{2c}$, будешь получать различные величины R, соответствующие различным значениям x-са. Так прямая PT, проведенная из точки P касательно к окружности P_1 и P_2, представляет собою величину:

$$\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$$

при $x = 0P$. Проводя же PK параллельно оси y.-ков и откладывая $KM = KM' = \frac{\sqrt{M}}{2c} PT$ получишь две точки M и M_1, принадлежащие кривой. Таким образом отыскивая точки кривой, постепенно переменяя точку P по оси x-ов начиная от точки P_1 и кончая от точки P_2. Принимая перемещение точки P вокруг двух ветвей кривой, увидим 0 для точек P_1 и P_2, с удалением от них постепенно уве-

стремится до бесконечности, при чем очевидно, что дуги, соответствующие каким бы то ни было двум положениям точки P_x равно удаленным от точек P_1 и P_2, равным между собою. Из сказанного ясно, что вогнутая кривая удаляется в бесконечность, по двигаясь ближе между собою и крайние расположения. Отыщем положение центра изследуемой кривой. Имея:

$$P_1 q = P_2 q$$

и проводя qq_1 параллельно оси y'ов, из трапеции $P_1 A_1 A_2 P_2$ получим, что $A_1 C = A_2 C$. Не трудно доказать, что точка C и есть центръ разсматриваемой кривой. Возьмем точку Q так, чтобы $QP_2 = PP_1$; имеем:

$$KM = KM_1 = LN = LN_1 = \frac{KH}{QC} PJ = \frac{KH}{QC} QE,$$

ибо $QE = PJ$, так как $QP_2 = PP_1$. Соединим теперь точку M_1 с C и N с точкою C: тогда будем имеем $\triangle M_1 KC = \triangle CLN$, ибо эти треугольники имеют по равному углу ($\angle M_1 KC = \angle CLN$, так как $KP \parallel LQ$ по 9), заключенным между двумя соответственно равными сторонами, из подобия $P_1 A_1 A_2 P_2$ имеем, что $KC = CL$, ибо $P_1 q = A_2 q$;

кроме того, как видим $KM_1 = LN$). Из равенства треугольников заключаем, что $\angle KCM_1 = LCN$ и так как LK есть прямая, то и линия M_1CN есть также прямая. Кроме того из равенства тех же треугольников имеем $CM_1 = CN$. Прямая M_1N есть произвольная хорда кривой, обусловливаемая только прохождением через точку C, которая делит ее пополам; отсюда заключаем, что точка C делит пополам всех проходящих через нее хорд, т. е. точка C есть центр кривой.

Для определения положения точки C достаточно знать ее абсциссу Oq, так как эта точка лежит на диаметре SS_1.

Из чертежа имеем:

$$Oq = Op_1 + p_1q = Op + \frac{p_1p_2}{2} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{N}{M}$$

Если соединим между собою точки M и N, то линия MN будет хорда кривой, параллельная диаметру SS'. Эта хорда в точке T делится пополам прямой QQ_1, сопряженной прямая QQ_1, проходящая через центр и параллельная оси y' ов, делит пополам все хорды кривой и

при этом этот диаметр будет сопряжен-ный диаметру SS_1, так как каждый из этих диаметров делит пополам ряд хорд, параллельных другому. Вследствие произвола в выборе направления оси y'ов надо заметить, что кривая имеет бесконечное множество пар сопряженных диаметров. Совокупность всех вышеприведенных замечаний достаточно определяет вид кривой. Эта кривая, как мы видим состоит из двух ветвей; она наз-в. **Гиперболой**. 2) Перейдем теперь к случаю, когда в общем уравнении кривой второго порядка при $M > 0$ имеем $N^2 = MP$.

Будем рассматривать этот случай как частный, предельный случай относительно первого при постепенном переходе от неравенства $N^2 > MP$ к равенству $N^2 = MP$, или, что тоже, при переходе от $x_1 < x_2$ к $x_1 = x_2$. Геометрически такому переходу будет соответствовать сближение между собой точек P_1 и P_2 до совпадения (при $N^2 = MP$ или при $x_1 = x_2$) при этом касательные P_1A_1 и P_2A_2 совпадут в одну

кратных и комплексно-сопряженных ветвей кривой сходятся между собою в центре кривой.

Исследуем форму геометрического места. В этом случае обозначим $\lambda_1 = \lambda_2$ через λ_0; напишем $R = \frac{\sqrt{cM}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{cM}}{2c}\sqrt{(x-x_0)(x-x_0)} = \frac{\sqrt{cM}}{2c}(x-x_0)$

Уравнение кривой:

$$y = -\frac{Bx+E}{2c} \pm R$$

принимает вид

$$y = -\frac{Bx+E}{2c} \pm \frac{\sqrt{cM}}{2c}(x-x_0).$$

Рассматривая это выражение, мы замечаем, что y выражается функцией первой степени относительно x, стало быть, это и есть уравнение прямой. Далее мы замечаем, что здесь фигурируют собственно два уравнения: одно со знаком, а другое со знаком при члене $\frac{\sqrt{cM}}{2c}(x-x_0)$ стало быть это уравнение выражает две прямые. Обе эти прямые проходят через точку, абсцисса которой есть x_0, так как обе прямые имеют при $x = x_0$ одинаковые ординаты, а именно $y = -\frac{Bx+E}{2c}$. Но эти две прямые имеют различные угловые коэффициенты. Для первой прямой угловой коэффициент равен:

$$K = -\frac{B}{2c} + \frac{\sqrt{cM}}{2c},$$

для второй прямой же имеем $K_1 = \frac{B}{2c} - \frac{\sqrt{cM}}{2c}$.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ уравненіе представляетъ не кривую линію, а двѣ пересѣкающіяся прямыя что представляетъ частный случай гиперболы и опредѣляется вообще только условіемъ: $M = B^2 - 4Ac > 0$ = 3) Пусть въ общемъ уравненіи кривыхъ второго порядка,

$$M = B^2 - 4Ac > 0;$$

мы примемъ еще, что $N^2 < MP$. Рѣшая общее у-іе относительно у'ка получимъ:

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Если бы мы для цѣлесообразія задались подкоренной трехчленъ въ правой части радикаловъ, равнымъ у-ію $Mx^2 + 2Nx + P = 0$, то мы получили бы корни уравненія $x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$ мнимыми, такъ какъ по условію $N^2 < MP$. Поэтому для цѣлесообразія уравненія (1) мы напишемъ его въ другомъ видѣ:

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{PM - N^2}{M^2}} \ldots\ldots (2)$$

Остается построить это уравненіе. Положимъ такъ, какъ сказали выше, что радикалъ

$$\frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{PM - N^2}{M^2}} = R.$$

Тогда уравненіе дѣлается цѣлесообразной прямой:

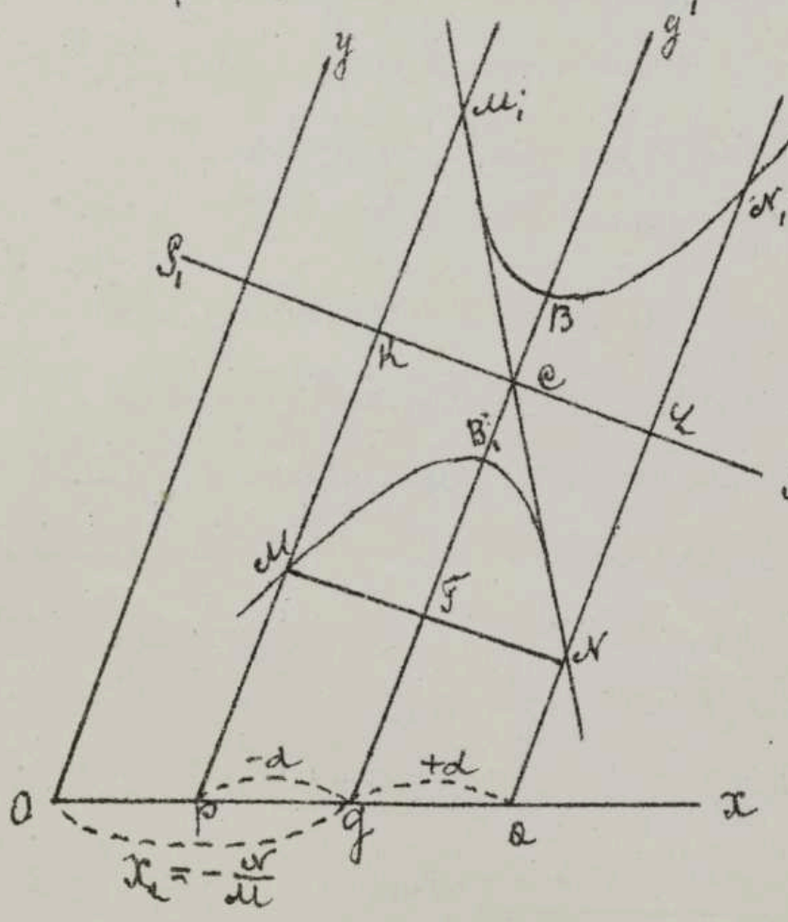
$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm R.$$

Такимъ образомъ наше уравненіе можно представить такъ:

$$y = y_1 \pm R.$$

Возьмемъ для общности косоугольныя оси координатъ и построимъ прежде всего діаметръ (фиг. 127). Пусть этотъ діаметръ будетъ SS_1. Будемъ теперь строить R; прежде всего замѣтимъ, что подъ корнемъ въ выраженіи R стоитъ сумма всегда положительныхъ количествъ, слѣдовательно R всегда дѣйствительно, при всевозможныхъ значеніяхъ X. Наименьшая величина

Чер. 127.



R будетъ очевидно при $x = -\frac{N}{M}$; при этомъ R имѣетъ конечную величину, отличную отъ 0, именно:

$$R = \frac{\sqrt{M}\,\sqrt{PM - N^2}}{2CM}.$$

Это указываетъ на то, что искомая кривая не имѣетъ общихъ точекъ съ діаметромъ SS_1. Строимъ точки B и B_1, соотвѣтствующія $X = -\frac{N}{M}$, откладывая $CB = CB_1 =$

$= \frac{\sqrt{M}\cdot\sqrt{PM-N^2}}{2cM}$, потомъ строимъ самую кривую, какъ обыкновенно по точкамъ, вычисляя R по различнымъ значеніямъ текущей абсциссы X. Такое построеніе кривой, какъ мы видѣли, обусловливается построеніемъ центра ея т. е. точки, въ которой проходящія черезъ нее хорды кривой дѣлятся пополамъ. Займемся разысканіемъ центра кривой. Къ равенству

$$x = -\frac{N}{M}$$

Мы можемъ придти двумя путями; x могущее имѣть всѣ значенія между $+\infty$ и $-\infty$, увеличиваясь или уменьшаясь приближается къ величинѣ $-\frac{N}{M}$ такъ что текущее значеніе X мы можемъ замѣнить такимъ

$$X = -\frac{N}{M} + \alpha$$

гдѣ α можетъ имѣть всевозможныя значенія, положительныя или отрицательныя. Возьмемъ два какихъ нибудь значенія α, равныя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знаку; тогда будемъ имѣть:

$$x' = -\frac{N}{M} + \alpha' \text{ и } X'' = -\frac{N}{M} - \alpha'.$$

Для обѣихъ же этихъ значеній X мы получаемъ одну и ту же величину:

$$R = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{\alpha^2 + \frac{PM-N^2}{M^2}}$$

Построимъ точки кривой, соответствующія взятымъ абсциссамъ. Откладываемъ $Pq = Qq = d'$ (d' имѣетъ вполнѣ произвольное текущее значеніе). Проводимъ изъ точекъ P и Q параллели оси y'овъ. Пусть эти параллели встрѣтятъ діаметръ SS_1 въ точкахъ K и L. Откладываемъ отъ точки K вверхъ и внизъ до точекъ N и N' ту же величину R, такъ что: $KM = KM_1 = LN = LN_1 = R = \frac{V_M}{2c}\sqrt{d^2 + \frac{p_M - N^2}{M^2}}$

Такимъ образомъ мы получили четыре точки нашей кривой, именно M, M_1, N и N'. Соединивъ точку C съ точками M' и N, получимъ треугольникъ KCM_1, равный треугольнику LCN. Эти треугольники равны, какъ имѣющіе по равному углу:

$$\angle M_1KC = \angle NLC, \text{ ибо } M_1K \parallel LN,$$

заключенному между соотвѣтственно равными сторонами ($M_1K = LN$, изъ трапеціи $PKLQ$, въ которой $Pq = Oq$ и: $qC \parallel KP \parallel PQ \parallel$ оси y, кромѣ того имѣемъ $KC = CL$). Изъ равенства тре-объ слѣдуетъ, что углы при точкѣ C равны между собою и что $CM_1 = CN$.

Из равенства углов следует, что линия M_1CN прямая и есть произвольная хорда кривой, проходящая через точку C, и что она делится в этой точке пополам. Отсюда видно, что точка C делит все проходящие через нее хорды кривой пополам. Стало быть, точка C есть центр кривой. Из построения видно, что абсцисса центра C есть:

$$x_0 = -\frac{N}{M}.$$

Соединим между собою точки M и N, получим хорду MN, параллельную диаметру SS'. Эта хорда делится в точке T линией QQ_1 пополам (это видно из трапеции $PMNQ$) так как точка M произвольна, то и хорда MN тоже произвольна, но она параллельна диаметру SS' и эта хорда делится линией QQ пополам. Таким образом прямая QQ_1 делит пополам все хорды, параллельные диаметру SS_1; стало быть прямая QQ_1 есть тоже диаметр кривой.

Три таких диаметра SS_1 и QQ_1, которые между собою, так как каждый из

ниях длины полосами ряд хорд параллельных другому.

Далее, если рассмотрим выражение:

$$x = -\frac{N}{M} \pm d,$$

то замѣтимъ, что при всевозможныхъ значеніяхъ d, отъ 0 до ∞, R будетъ всегда отлично отъ нуля и наименьшая его величина будетъ при $d = 0$ именно:

$$R = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{\frac{PM - N^2}{M^2}};$$

этой величинѣ R соотвѣтствуютъ точки B и B_1; изъ этого видно, что кривая имѣетъ двѣ полуочертанія и точкодѣственныя по обѣимъ бесконечныя вѣтви, изъ которыхъ одна расположена вся вверхъ надъ діаметромъ SS_1 отъ точки B. Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ получимъ кривую, состоящую изъ двухъ бесконечныхъ вѣтвей и называемую гиперболой.

Дополненіе объ ассимптотахъ гиперболъ.

Выше мы строили кривую по уравненію такого вида:

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 - \frac{N^2 - MP}{M^2}}.$$

При этомъ построеніи мы разсмотрѣли три

случаи:

1) Когда въ этомъ уравненіи $N^2 > MP$

2) " " " $N^2 = MP$

3) " " " $N^2 < MP$.

Въ первомъ и послѣднемъ случаяхъ мы получимъ двѣ гиперболы, различныя образомъ расположенныя относительно осей координатъ, во второмъ случаѣ мы получимъ двѣ пересѣкающіяся прямыя, угловые коэффиціенты которыхъ суть.

$$K_1 = -\frac{B}{2C} + \frac{\sqrt{M}}{2C} \quad \text{и} \quad K_2 = -\frac{B}{2C} - \frac{\sqrt{M}}{2C}.$$

Отнесемъ эти три геометрическія мѣста къ одной и той же системѣ координатъ и разсмотримъ ихъ взаимное расположеніе. Мы видимъ, что всѣ три геометрическія мѣста имѣютъ общій діаметръ, уравненіе котораго есть.

$$y = -\frac{Bx + E}{2C}.$$

Затѣмъ мы видимъ, что на этомъ діаметрѣ обѣ гиперболы (для перваго и третьяго случаевъ) имѣютъ общій центръ, абсцисса котораго $x_0 = -\frac{N}{M}$,

и что этотъ центръ есть точка пересѣченія двухъ прямыхъ (для втораго слу-

чая) Затѣмъ видимъ, что всѣ три геометрическія мѣста имѣютъ другой общій діаметръ, сопряженный первому и проходящій черезъ общій центръ линій, параллельной осямъ у'ковъ, и уравненіе котораго есть:

$$x_0 = -\frac{N}{M}$$

Каждая изъ двухъ вѣтвей первой гиперболы пересѣкаетъ въ одной точкѣ первый діаметръ, относительно котораго эти вѣтви и расположены симетрично. Каждая изъ вѣтвей второй гиперболы пересѣкаетъ въ одной точкѣ второй діаметръ, относительно котораго эти вѣтви расположены также симетрично. Вѣтви первой гиперболы расположатся по обѣ стороны (вправо и влѣво) отъ перваго діаметра, вѣтви второй гиперболы расположатся по обѣ стороны (вверхъ и внизъ) отъ втораго діаметра. Опредѣлимъ соотношеніе этихъ трехъ геометрическихъ мѣстъ, сравнивая ихъ ординаты, соотвѣтствующія одной и той же абсциссѣ. Для удобства такого сравненія преобразуемъ

нъсколько выражение $y'_{кл}$ и упростить его. Во первыхъ обозначимъ текущее значение ординаты для перваго случая черезъ $y_{кл.}$, для втораго черезъ $y_{пр}$ и для третьяго $y'_{кл.}$ Въ силу условій имѣемъ:

$$y_{кл.} = -\frac{Bx+C}{2C} \pm \frac{\sqrt{AM}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{N^2-MP}{M^2}},$$

$$y_{пр.} = -\frac{Bx+C}{2C} \pm \frac{\sqrt{AM}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2},$$

$$y'_{кл.} = -\frac{Bx+C}{2C} \pm \frac{\sqrt{AM}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{-N^2+MP}{M^2}}.$$

Принимая $-\frac{N}{M} = x_0$ и $\frac{N^2-MP}{M^2} = m^2$, получимъ:

$$y_{кл.} = -\frac{Bx+C}{2C} \pm \frac{\sqrt{AM}}{2C}\sqrt{(x-x_0)^2 - m^2}, \ldots\ldots (1)$$

$$y_{пр.} = -\frac{Bx+C}{2C} \pm \frac{\sqrt{AM}}{2C}(x-x_0) \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$y'_{кл.} = -\frac{Bx+C}{2C} \pm \frac{\sqrt{AM}}{2C}\sqrt{(x-x_0)^2 + m^2} \ldots\ldots (3$$

Сравнивая эти выраженія, при условіи положительности вторыхъ членовъ ихъ видимъ, что $y_{кл.} < y_{пр} < y'_{кл.}$) т. е. внутри первой гиперболы расположатся въ одной парѣ противоположныхъ угловъ, образуемыхъ прямыми, имѣющія въ уголъ, содержащемся въ себѣ первый діаметръ кривыхъ; а внутри второй гиперболы расположатся въ другой парѣ противоположныхъ угловъ, имѣющія въ уголъ, содержащій въ себѣ второй діаметръ кривыхъ.

Сравнимъ эти величины ординатъ, вычитая по частямъ уравненіе первое изъ второго и второе изъ третьяго получимъ (опредѣляя одну абсолютную величину получающихся разностей):

$$y_{пр.} - y_{ин.} = \frac{\sqrt{n}}{2c}\left(x - x_0 - \sqrt{(x-x_0)^2 - m^2}\right)$$

$$y'_{ин.} - y_{пр} = \frac{\sqrt{n}}{2c}\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + m^2} - (x-x_0)\right)$$

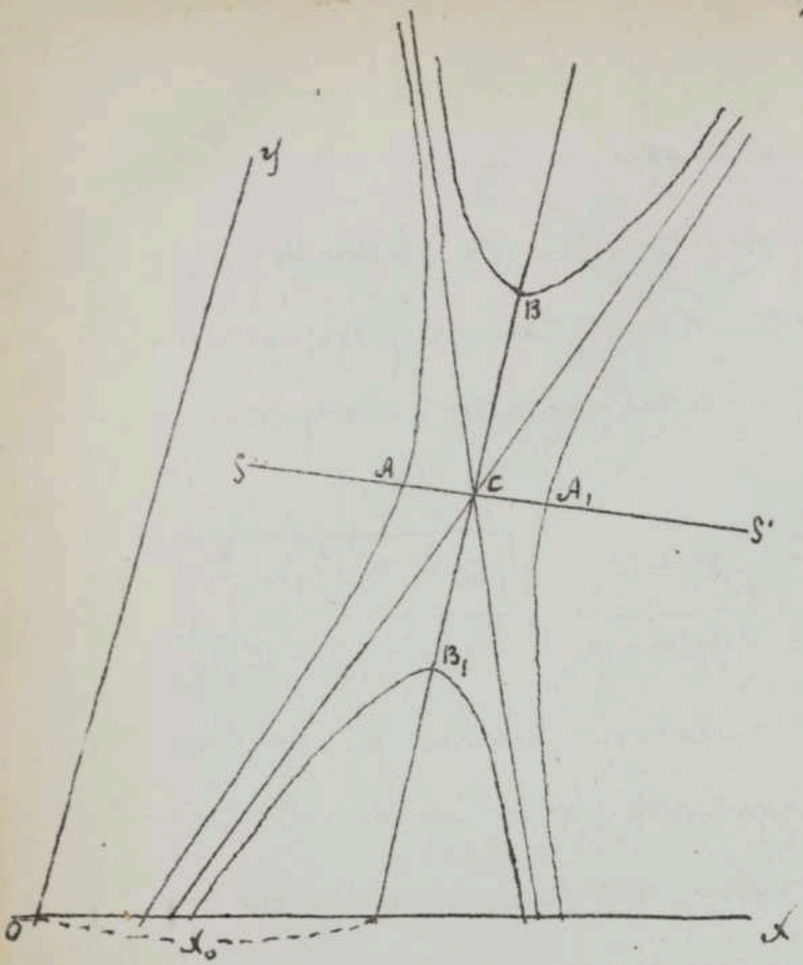
Преобразуемъ вторыя части этихъ равенствъ для удобства изслѣдованія ихъ измѣненія въ зависимости отъ измѣненій x'са. Именно умножимъ и раздѣлимъ вторыя части на сопряженныя выраженія получимъ:

$$y_{пр} - y_{ин.} = \frac{\sqrt{n}}{2c} \cdot \frac{m^2}{(x-x_0) + \sqrt{(x-x_0)^2 - m^2}}$$

$$y'_{ин.} - y_{пр} = \frac{\sqrt{n}}{2c} \cdot \frac{m^2}{x - x_0 + \sqrt{(x-x_0)^2 + m^2}}$$

Если теперь будемъ постепенно увеличивать x, то эти разности будутъ постепенно уменьшаться т. е. вѣтви кривой будутъ постепенно приближаться къ прямымъ и такимъ образомъ сближаться между собою.

Если же $x = \infty$ то въ предѣлѣ получимъ: $\mathrm{Lim}\,(y_{пр.} - y_{ин.}) = \mathrm{Lim}\,(y'_{ин.} - y_{пр}) = 0$



Слѣдовательно при безконечномъ продолженіи кривыхъ ихъ вѣтви все болѣе и болѣе приближаются къ прямымъ. Прямыя же безконечно приближающіяся къ кривымъ при ихъ продолженіи, называются асимптотами этихъ кривыхъ.

Слѣдовательно двѣ наши гиперболы имѣютъ общую систему асимптотъ, а кривыя, имѣющія общія асимптоты, называются сопряженными между собою. И такъ мы видимъ, что всякая гипербола имѣетъ двѣ асимптоты проходящія черезъ центръ ея и общее уравненіе которыхъ есть:

$$y_{асс.} = -\frac{Bx+b}{2c} \pm \frac{\sqrt{M}}{2c}(x - x_0)$$

При построеніи гиперболы весьма удобно строить предварительно ея асимптоты, которыя опредѣляютъ до нѣкоторой

степени направление течения кривой, такъ какъ на достаточномъ разстояніи отъ центра кривая идетъ почти параллельно ея асимптотамъ. Разсмотримъ теперь числовые примѣры.

Примѣръ 1. Возьмемъ уравненіе:

$$5y^2 - 2xy - x^2 + 2y - 1 = 0.$$

Составимъ бином:

$$B^2 - 4AC = 4 + 4.1.5 = 24 > 0$$

слѣдовательно разсматриваемая кривая относится къ классу гиперболъ. Рѣшая это уравненіе относительно y, получимъ.

$$5y^2 - 2(x-1)y + (x^2+1) = 0; \quad y = \frac{(x-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 5(x^2+1)}}{5}$$

$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{6x^2 - 2x + 6} = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{x^2 - \frac{1}{3}x + 1} \ldots\ldots (1)$$

Если-бы мы для построенія кривой приводили полученное уравненіе къ виду:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)},$$

то опредѣляя x_1 и x_2 изъ уравненія:

$$x^2 - \frac{1}{3}x + 1 = 0,$$

мы получили бы для нихъ мнимыя выраженія. Слѣдовательно данный примѣръ соотвѣтствуетъ случаю (3). Поэтому и полученное уравненіе кривой удобнымъ для ея построенія, какъ мы

это дѣлали въ изслѣдованіи третьяго случая т. е въ подкоренномъ выраженіи дополнимъ до полнаго квадрата сумму членовъ съ перемѣннымъ x. Производя это получимъ:

$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + 1} \text{ или}$$

$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{36}}.$$

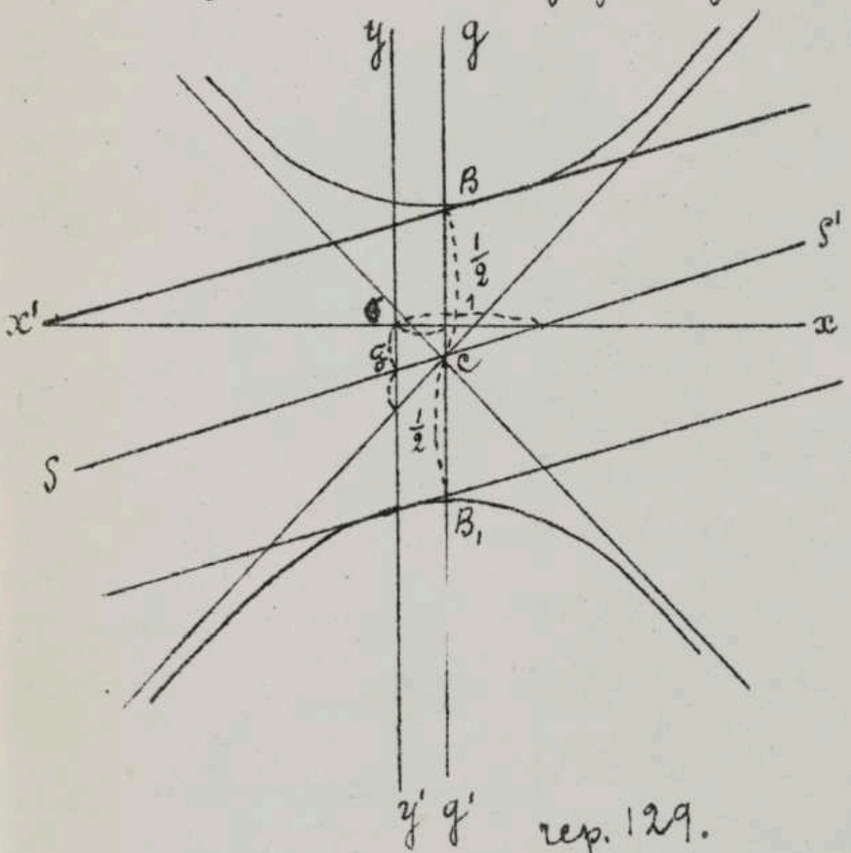
Строимъ теперь это уравненіе (фиг.) Беремъ, прямоугольныя оси координатъ. Отрѣзокъ на оси y'овъ есть $q = -\frac{1}{5}$, отрѣзокъ на оси x-овъ есть $p = 1$. Строимъ этотъ діаметръ; пусть это будетъ прямая SS_1. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію радикала

$$R = \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{36}}$$

Этотъ радикалъ всегда дѣйствителенъ и отличенъ отъ нуля, а потому гипербола расположится вверхъ и внизъ отъ діаметра SS_1, который не пересѣкаетъ кривой. Построимъ вершины гиперболы, т. е. точки пересѣченія ея съ другимъ ея діаметромъ, который при этомъ и проведемъ. Эти вершины имѣютъ соотвѣтствующія значе-

42.5
5.5.3.3

ния R наименьшая. Это имеет место при $x = \frac{1}{6}$ и тогда $R = \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot \sqrt{\frac{35}{36}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{35}}{5 \cdot 6} = \frac{\sqrt{210}}{30} = \frac{14,5}{30} = 0,5 = \frac{1}{2}$. Откладываем $x = \frac{1}{6}$, через полученную на оси x-ов точку проведем параллель qq_1 y-ов. Точка встречи этой параллели с диаметром SS_1 даст центр гиперболы C, а сама параллель будет другим диаметром кривой.



чер. 129.

Откладываем по qq_1 вверх и вниз от точки C величину $R = 0,5$ получим две точки B и B_1, вершины гиперболы. Проведем через B и B_1 параллели диаметру SS_1. Одна ветвь гиперболы расположится над параллелью, проведенною из точки B, другая ветвь под параллелью, проведенной из точки B_1. Чтобы лучше проследить течение кривой, построим ее асимптоты уравнение которых будет:

$$y_{асс.} = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

Замѣтимъ, что асимптоты проходятъ чрезъ центръ гиперболы, значитъ, чтобы узнать расположеніе асимптотъ, доста точно найти еще по одной точкѣ, принадлежащей этой прямой. Найдемъ именно точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ осью y-овъ, для этихъ точекъ имѣемъ: $x = 0$, а потому $y_{асс} = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{1}{6} = -0,2 \pm 0,08$. Здѣсь $-0,2 = -\frac{1}{5}$ выражаетъ собою y, ординату точки F пересѣченія діаметра SS съ осью y. Поэтому для полученія точекъ пересѣченія асимптотъ съ осью y-овъ надо отъ точки F по оси y-овъ вверхъ и внизъ отложить величину 0,08. Найденныя точки соединяемъ съ центромъ C и получаемъ асимптоты строящейся гиперболы.

Примѣръ 2-й. Дано уравненіе

$$y^2 - 6xy + 5x^2 - 14y + 22x + 24 = 0$$

Составимъ бином: $B^2 - 4Ac = 36 - 4 \cdot 5 = 16 > 0$, значитъ, кривая, выражаемая этимъ уравненіемъ, принадлежитъ къ группѣ гиперболъ. Рѣшая наше уравненіе отно-

сительно y. получимъ последовательно:

$$y^2 - 2(3x+7)y + (5x^2+22x+24) = 0$$

$$y = 3x+7 \pm \sqrt{(3x+7)^2 - 5x^2 - 22x - 24}.$$

$$y = 3x+7 \pm \sqrt{4x^2+20x+25} =$$

$$= 3x+7 \pm \sqrt{(2x+5)^2} \text{ или } y = 3x+7 \pm (2x+5)$$

Мы видимъ, что y есть функція первой степени относительно x, слѣдовательно это уравненіе представляетъ двѣ прямыя, которыя уравненія: $y_1 = 5x+12$ и $y_2 = x+2$. Обѣ проходятъ черезъ точку, абсцисса которой $x = -2\frac{1}{2}$. Эти прямыя легко построить.

Группа параболъ.

Возьмемъ опять общее уравненіе кривыхъ второго порядка. Рѣшая его относительно y получимъ последовательно.

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+(E^2-4CF)}$$

а полагая $B^2-4AC = M$; $BE-2CD = N$ и $E^2-4CF = P$ получимъ

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Изслѣдуемъ теперь послѣдній изъ нашихъ случаевъ т. е. случай, когда $M = B^2-4AC = 0$. При такомъ условіи въ уравненіи первомъ (1) подъ корнемъ по-

ляется двучленъ первой степени относительно x:

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{2Nx + P}$$

Приведемъ подкоренной двучленъ къ виду, удобному для изслѣдованія. Для этого возьмемъ въ немъ $2N$ за скобку, получимъ:

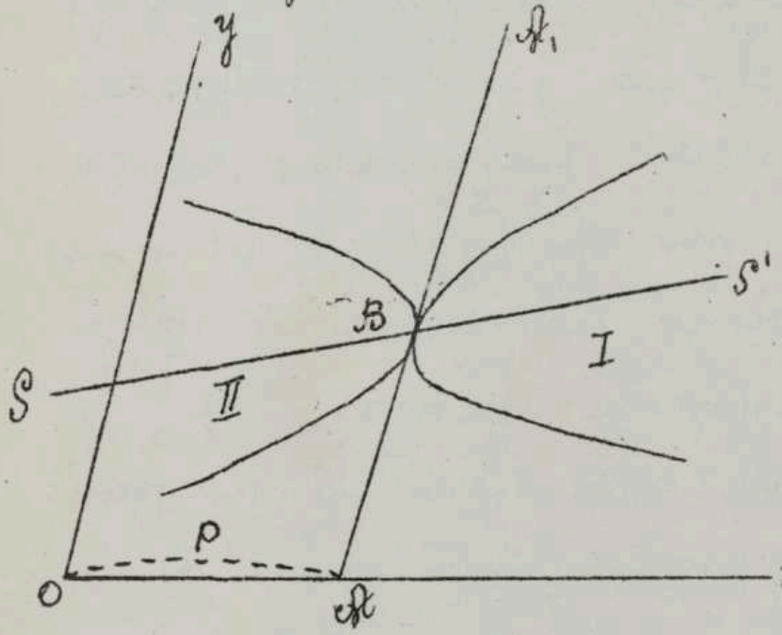
$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{2N\left(x + \frac{P}{2N}\right)},$$

а полагая $2N = n$ и $\frac{P}{2N} = -p$, имѣемъ окончательно: $y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{n(x - p)}$.

Въ этомъ видѣ мы будемъ строить наше уравненіе. Прежде всего построимъ, какъ и прежде, діаметръ кривой, сопряженный оси y-овъ т. е. прямую дѣлящую пополамъ хорды кривой, параллельныя оси y-овъ. Не трудно замѣтить, что уравненіе этого діаметра есть: $y = -\frac{Bx + E}{2C}$. Возьмемъ для общности косоугольныя оси координатъ и построимъ діаметръ: пусть это будетъ прямая SS_1 (черт. 129). Обратимся теперь къ радикалу и положимъ для краткости, что $\frac{1}{2C}\sqrt{n(x - p)} = R$: тогда наше уравненіе напишемъ такъ: $y = y_1 \pm R$. Въ

выражении R подъ корнемъ находится произведеніе двухъ множителей, поэтому изслѣдованіе кривой надо вести въ зависимости отъ каждаго изъ этихъ множителей; но такъ какъ множитель $(x-p)$ содержитъ въ себѣ независимое перемѣнное x, то изслѣдованіе зависитъ только отъ постояннаго множителя n. Итакъ разсмотримъ три случая, когда $n>0$, $n=0$ и $n<0$:

1.) Пусть $n>0$. Въ этомъ случаѣ R будетъ дѣйствительнымъ только тогда, когда $x>p$, когда же $x=p$, то $R=0$ и получимъ $y=y_1$, т.е. точка кривой лежитъ на діаметрѣ SS_1. Отложимъ на чертежѣ $x_1=p=OA$, проведемъ черезъ точку A параллель AA_1 оси y-ковъ. Пусть эта параллель встрѣтитъ діаметръ въ точкѣ B. Точка B будетъ принадлежать



чер. 130.

кривой и будет ея вершиной. Далѣе, если x увеличивается отъ $x = p$ до $x = +\infty$, то R, оставаясь постоянно дѣйствительнымъ, будетъ тоже послѣдовательно увеличиваться отъ 0 до ∞, и стало быть отъ точки B идетъ вправо одна безконечная вѣтвь кривой, имѣющая прямую BS, своимъ діаметромъ и параллель AA, оси y-ковъ касательную въ точкѣ B (если точку B разсматривать, какъ результатъ слѣянія концовъ хорды, параллельной оси y-ковъ при уменьшеніи x отъ $x = +\infty$ до $x = 0$). Кривая, образуемая этою вѣтвью, называется параболой. Если $x < p$, то R будетъ мнимое, что показываетъ, что вѣтви отъ прямой AA, кривой не существуетъ.

2) Положимъ что въ выраженіи R имѣемъ $n < 0$. Ясно, что въ этомъ случаѣ R только тогда дѣйствительно, когда $x < p$; при этомъ опять когда $x = p$, $R = 0$ и $y = y_1$, это даетъ ту же точку кривой B. на діаметрѣ. Далѣе, если x уменьшается отъ $x = p$ до $x = -\infty$, то R, оставаясь постоянно дѣйствительнымъ, возрастаетъ отъ $R = 0$ до $R = -\infty$.

Въ этомъ случаѣ отъ точки B вплоть отъ прямой AA_1 идетъ одна безконечная вѣтвь кривой, причемъ она безпрерывно удаляется отъ SS_1. Если въ этомъ случаѣ $x > p_1$ то R будетъ мнимымъ, это показываетъ, что вправо отъ прямой AA_1 точекъ кривой не существуетъ. Такимъ образомъ, при $n < 0$ получается только парабола, но только обращенная своимъ отверстіемъ въ сторону діаметра BS.

3) Когда $n = 0$, то мы не можемъ пользоваться непосредственно уравненіемъ:

$$y = y_1 \pm \frac{1}{2c}\sqrt{n(x - p\cdot)},$$ какъ уравненіе тождественное первоначальному:

$$y = y_1 \pm \frac{1}{2c}\sqrt{2Nx + P},$$

гдѣ помощью нашего уравненія получается дѣленіемъ подкоренного количества и умноженіемъ его на $2N = n = 0$, какового дѣйствія нулемъ, какъ извѣстно, уничтожаются нѣкоторые корни уравненія. Итакъ въ этомъ случаѣ мы должны возвратиться къ уравненію

$$y = y_1 \pm \frac{1}{2c}\sqrt{2Nx + P}.$$

Имѣя же $2N = n = 0$, получаемъ окончательно

$y = y_1 \pm \frac{1}{2c}\sqrt{P}$. Очевидно, изслѣдованіе распадается на 3 случая, когда: $P > 0$, $P = 0$ и $P < 0$. 1) Если $P > 0$, то радикалъ всегда дѣйствителенъ и наше уравненіе:

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{P}$$

представляетъ совокупность двухъ прямыхъ, такъ какъ y выраженъ въ уравненіи функціей первой степени относительно x. Уравненія этихъ прямыхъ будутъ:

$$y_1 = -\frac{Bx + E}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{P}; \quad y_2 = -\frac{Bx + E}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{P}.$$

Эти прямыя параллельны между собою и параллельны діаметру: $(y_1 = -\frac{Bx + E}{2c})$, такъ какъ въ тѣхъ прямыхъ имѣютъ одинъ угловой коэффиціентъ $K = -\frac{B}{2c}$ (прямая $y_1 = -\frac{Bx + E}{2c}$ есть діаметръ для системы параллельныхъ прямыхъ, такъ какъ она дѣлитъ пополамъ линіи, параллельныя оси ординатъ и заключенныя между нашими параллельными прямыми.)

Не трудно видѣть изъ сравненія уравненія прямыхъ съ уравненіемъ ихъ діаметра, что эти прямыя располага-

ются по разныя стороны отъ діамет-
ра и на равныхъ отъ него разстояніяхъ.
2) Если $P=0$, то мы можемъ разсматри-
вать этотъ случай, какъ частный
предыдущаго, постепенно переходя отъ
неравенства $P>0$ къ равенству $P=0$ т.е.
постепенно уменьшая P до 0. Такому ана-
литическому уменьшенію P соответст-
вуетъ геометрическое сближеніе строи-
мыхъ прямыхъ до совпаденія ихъ съ ді-
аметромъ, такъ какъ при $P=0$ мы имѣ-
емъ наше уравненіе въ такомъ видѣ:

$$y = -\frac{Bx+C}{2C} = y_1,$$

которое мы можемъ разсматривать какъ
совокупность двухъ сливающихся прямыхъ.
3) Если $P<0$, то въ изслѣдуемомъ уравне-
ніи радикалъ мнимъ, а потому и тоже
мнимъ, слѣдовательно уравненіе предста-
вляетъ собою, какъ говорятъ для общно-
сти, совокупность двухъ мнимыхъ прямыхъ.
Применимъ наши разсужденія къ чис-
ловымъ примѣрамъ.

Примѣръ 1. Дано уравненіе:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 7x - 6y + 9 = 0.$$

Находимъ для него:

$$B^2 - 4AC = 16 - 4.1.4 = 0;$$

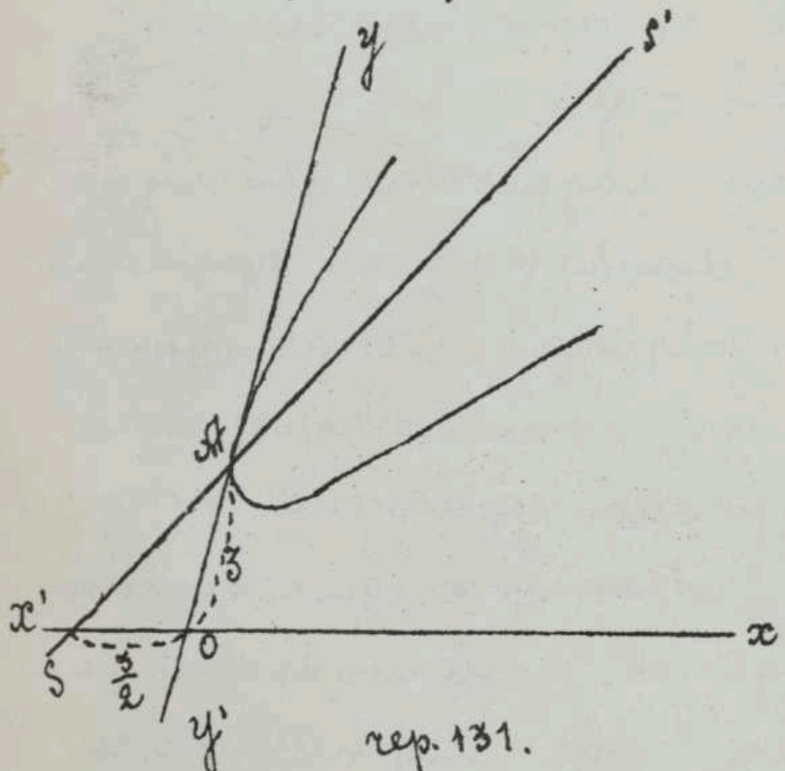
отсюда заключаемъ, что оно представляетъ собою параболу. Рѣшая уравненіе относительно y_1 находимъ послѣдовательно:

$$y^2 - 2(2x+3)y + (4x^2+7x+9) = 0$$

$$y = 2x+3 \pm \sqrt{(2x+3)^2 - 4x^2 - 7x - 9};\quad y = 2x+3 \pm \sqrt{4x^2+12x+9-4x^2-7x-9}$$

$$y = 2x+3 \pm \sqrt{5x}$$

Построимъ діаметръ, уравненіе котораго: $y_1 = 2x+3$. Эта прямая дѣлитъ на оси y-ковъ отрѣзокъ $q=3$ и на оси x отрѣзокъ $p = -\frac{3}{2}$.



чер. 131.

Ордината кривой возможна только при $x>0$ и при $x=0$; именно $y = y_1 = 3 = OA$. Слѣдовательно кривая распространяется отъ точки A вправо отъ оси y-ковъ причемъ діаметръ AS_1 дѣлитъ въ ней пополамъ всѣ хорды, параллельныя оси y-ковъ.

Примѣръ 2. Дано уравненіе

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2ax - 4ay = 0.$$

Здесь имеем также:

$$B^2 - 4AC = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

Следовательно геометрическое место, представляемое данным уравнением относится к группе парабол. Решая уравнение, находим:

$$y^2 - (x-a)\,y + \frac{x^2 - 2ax}{4} = 0,$$

откуда: $y = \frac{x-a}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2-2ax+a^2}{4} - \frac{x^2-2ax}{4}} = \frac{x-a}{2} \pm \frac{a}{2}$.

Следовательно наше уравнение представляет собою совокупность параллельных прямых, выражаемых двумя отдельными уравнениями:

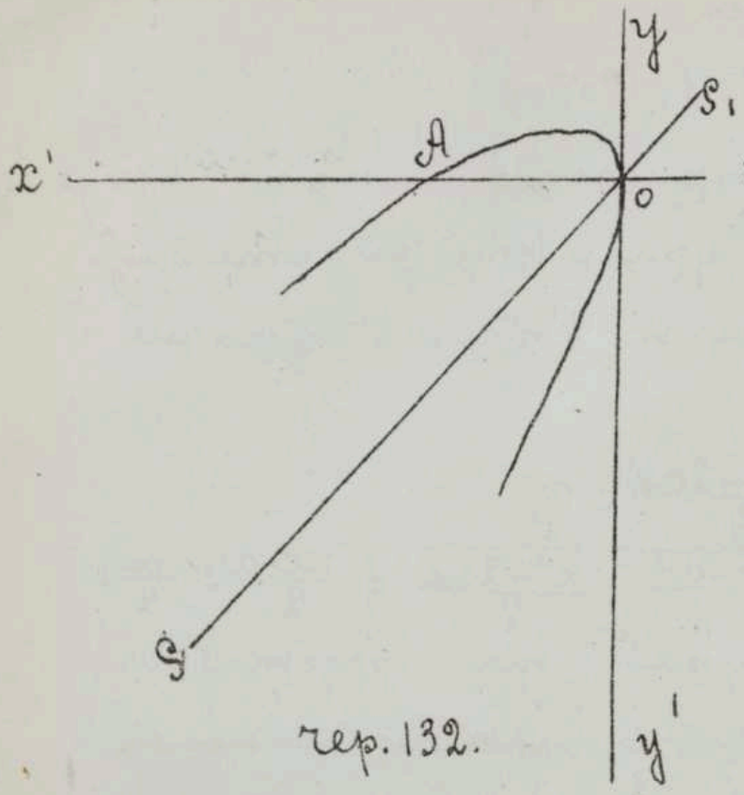
$$y_1 = \frac{x}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{x}{2} + a.$$

Прямая, уравнение которой $y_1 = \frac{x}{2} - \frac{a}{2}$, дает очевидно расстояние между найденными параллелями пополам.

Пример 3. Построить уравнение

$$x^2 + y^2 - 2xy + x = 0$$

в котором $B^2 - 4AC = 0$. В этом уравнении первые три члена составляют полный квадрат (как и вообще в уравнении параболы в силу условия что $B^2 - 4AC = 0$). Так что данное уравнение можно представить так: $(y-x)^2 = -x$,



чер. 132.

Откуда $y-x=\pm\sqrt{-x}$. Діаметръ этой параболы равенъ $y_1=x$. Очевидно эта прямая проходитъ черезъ начало координатъ и есть биссектриса угла xOx (черт. 132). Здѣсь ордината y возможна только при $x<0$; при $x=0$ будемъ имѣть: $y=y_1=0$, откуда видимъ, что кривая расположена вполнѣ отъ оси y-овъ, и проходя черезъ начало, обращена своимъ отверстіемъ въ сторону OS_1 діаметра SS_1. Не трудно видѣть, что кривая пересѣчетъ ось x-овъ кромѣ начала O еще въ точкѣ A, причемъ $OA=1$.

Изслѣдованіе о центрѣ кривыхъ второго порядка.

Центромъ кривой вообще называется такая точка, которая дѣлитъ пополамъ всѣ проходящія черезъ нее хорды. Разсмат-

рывая общее уравнение второй степени, мы нашли, что эллипсъ и гипербола имѣютъ центръ.

Теперь же постараемся отыскать центръ кривой второго порядка, прямо не рѣшая уравнения. Способъ, который мы здѣсь примемъ основывается на слѣдующей теоремѣ:

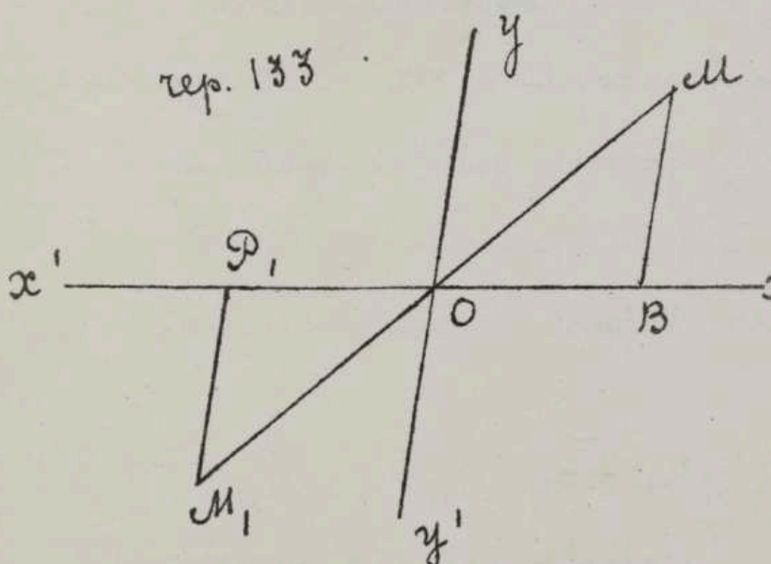
Теорема. Если начало координатъ будетъ центромъ линіи второго порядка, то уравненіе линіи не будетъ содержать членовъ съ первыми степенями координатъ.

Дѣйствительно пусть:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots 1$$

будетъ уравненіе линіи второго порядка, центръ о которой есть начало координатъ (чер. 133).

чер. 133



Черезъ начало координатъ проведемъ произвольную прямую M_1M; уравненіе ея есть:

$$y = mx,$$

гдѣ m принимается произвольнымъ. Положимъ, что эта прямая пересѣчетъ кривую въ двухъ точкахъ M и M_1, мы должны имѣть:

$OM = OM_1$. Построимъ координаты точекъ M и M_1: онѣ будутъ $OP = OP_1$ и $MP = M_1P$.

Будемъ искать координаты пересѣченія данной кривой съ прямой. Вставимъ значеніе y изъ уравненія I; получимъ:

$$Ax^2 + Bmx^2 + Cm^2x^2 + Dx + Emx + F = 0,$$

или $$(A + Bm + Cm^2)x^2 + (D + Em)x + F = 0.$$

Это уравненіе должно дать абсциссы двухъ точекъ пересѣченія M и M_1. Но эти абсциссы равны и съ обратными знаками, слѣдовательно предыдущее уравненіе должно дать два корня равные, но съ обратными знаками. Значитъ въ немъ коэффиціентъ при x въ первой степени долженъ быть 0, т. е. должно быть $D + Em = 0$. Въ этомъ равенствѣ m произвольно; слѣдовательно оно можетъ быть удовлетворено, только полагая одновременно $D = 0$ и $E = 0$. Слѣдовательно уравненіе кривой должно быть:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II},$$

т. е. въ немъ не должно быть членовъ съ x и y въ первой степени, что и требовалось доказать.

Обратная теорема. Если кривая пред-

ставимъ уравненіемъ II, которое не содержитъ членовъ съ первыми степенями координатъ, то начало координатъ есть центръ кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ начало провести произвольную прямую $y = mx$, то для пересѣченія этой прямой съ кривой будемъ имѣть:

$$Ax^2 + Bmx^2 + Cm^2x^2 + F = 0$$

или $$(A + Bm + Cm^2)\,x^2 + F = 0$$

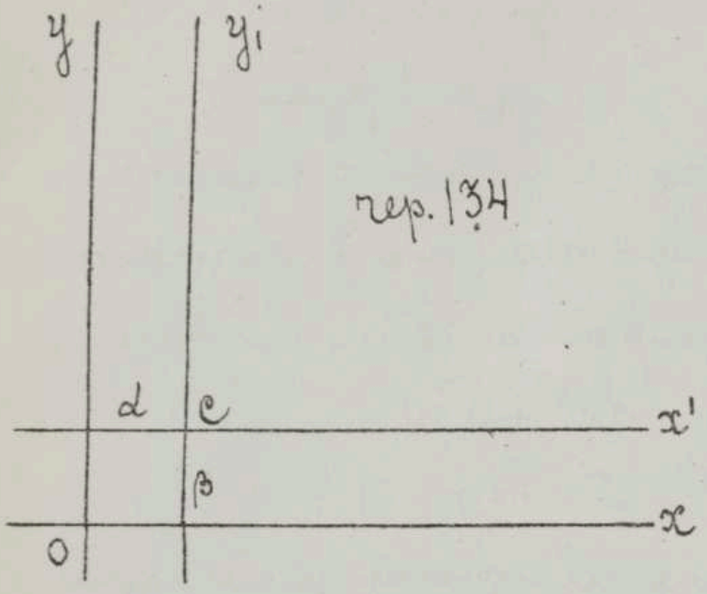
Это уравненіе даетъ для абсциссы точки пересѣченія двѣ величины, равныя и съ обратными знаками. По уравненію $y = mx$ получаемъ двѣ такія же величины для y, а слѣдовательно въ этомъ случаѣ (чер. 133) имѣемъ, что $OP = OP_1$ и $MP = M_1P_1$, а потому треугольники OMP и OM_1P_1 равны и затѣмъ изъ равенства этихъ треугольниковъ заключаемъ, что $OM = OM_1$, т.е. что точка O есть центръ.

Доказанныя теоремы ведутъ къ отысканію центра. Положимъ опять, что дано уравненіе:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Въ немъ D и E неравны нулю, слѣдовательно начало координатъ не есть центръ и мы не знаемъ заразъ, имѣетъ-ли эта кри-

вая центръ или нѣтъ. Обозначимъ неизвѣстныя координаты черезъ α и β. Если центръ есть, то α и β будутъ возможныя величины, а если нѣтъ, то невозможныя. Преобразуемъ координаты и перенесемъ въ центръ начало, оставляя оси параллельными самимъ себѣ (чер. 134). Формулы преобразованія координатъ будутъ: $x = \alpha + x_1$ и $y = \beta + y_1$. Вставимъ въ уравненіе кривой; получимъ



чер. 134

$$A(\alpha+x_1)^2 + B(\alpha+x_1)(\beta+y_1) + C(\beta+y_1) + D(\alpha+x_1) + E(\beta-y_1) + F = 0 \text{ , или}$$

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + (2A\alpha + B\beta + D)x_1 + (B\alpha + 2C\beta + 2)y_1 + F_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{III},$$

гдѣ для краткости F_1 означаетъ слѣдующее выраженіе:

$$F_1 = A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F$$

Уравненіе III представляетъ такъ же самую кривую, но относительно новыхъ осей.

Теперь предположимъ, что новое начало C есть центръ кривой тогда коэффи-

члены въ уравнении (11) при x_1 и y_1 должны быть равны 0, т. е. получатся уравнения:

$$1)\ 2A\alpha + B\beta + D = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ B\alpha + 2C\beta + E = 0.$$

Мы здѣсь имѣемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными α и β въ первыхъ степеняхъ. Рѣшивъ ихъ, мы найдемъ α и β т. е. координаты центра. Будемъ ихъ рѣшать, тогда получаемъ:

$$\alpha = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Эти двѣ формулы даютъ для координатъ центра величины возможныя, если только знаменатель общій не равенъ нулю. Слѣдовательно, когда это условіе соблюдено, то кривая имѣетъ центръ, и мы его найдемъ. Но можетъ случиться, что $B^2 - 4Ac = 0$; тогда придется различать два случая: 1) Когда числители α и β не равны нулю и 2) когда они равны нулю.

Положимъ сначала, что $2CD - BE \neq 0$, тогда получимъ $\alpha = \infty$. При этомъ окажется что $2AE - BD \neq 0$, т. е. и $\beta = \infty$; въ этомъ случаѣ центръ можно разсматривать, какъ удаленный на безконечно большое разсто-

ние от начала, иначе говоря, они не существуют. Два уравнения, из которых мы определили координаты центра, будут в этом случае несовместными. Чтобы это обнаружить стоит только сравнить в них коэффициенты при одном из неизвестных. Помножив 1ое на B и 2ое на $2A$, получим:

$$2AB\alpha + B^2\beta + DB = 0$$

$$\text{и } 2AB\alpha + 4AC\beta + 2EA = 0$$

Теперь мы видим что в этих уравнениях коэффициенты при α равны и при β также, т. к. $B^2 = 4AC$, но известные члены не одинаковы т. е. $BD \neq 2AE$; следовательно эти уравнения несовместны и мы не можем удовлетворить никакими величинами α и β, т. е. центра не существует. Если $2AE - BD = 0$, тогда $\beta = \infty$, здесь можно доказать что числитель у α- тоже будет равен 0. В самом деле, мы имеем: $B^2 - 4AC = 0$, отсюда $B^2 = 4AC$ или $\frac{2C}{B} = \frac{B}{2A}$, но $2AE = BD$, откуда $\frac{B}{2A} = \frac{E}{D}$. Сравнивая, найдем: $\frac{2C}{B} = \frac{E}{D}$ или $2CD = BE$ или $2CD - BE = 0$. Следовательно в этом слу-

как будетъ имѣть что и $\alpha = \frac{0}{0}$. Неопредѣленность рѣшенія указываетъ, что разсматриваемыя уравненія въ этомъ случаѣ приводятся къ одному: въ самомъ дѣлѣ, умноживъ первое уравненіе на B и второе на $2A$, мы увидимъ, что наши два уравненія будутъ тождественны, потому что имѣютъ $2AE = DB$. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ для опредѣленія α и β мы имѣемъ только одно уравненіе, которое имѣетъ безконечное число рѣшеній. Въ этомъ случаѣ центровъ безчисленное множество. Итакъ изъ нашего изслѣдованія обнаружилось, что кривыя второго порядка могутъ быть раздѣлены на 2 класса: 1) кривыя имѣющія одинъ центръ. Этотъ классъ характеризуется признакомъ $B^2 - 4AC \neq 0$.
2) Кривыя, не имѣющія центра. Этотъ классъ характеризуется $B^2 - 4AC = 0$. Къ послѣднему классу присоединимъ, какъ исключеніе, геометрическое мѣсто второго порядка, имѣющее безчисленное множество центровъ, которое характеризуетъ-

ся двумя признаками $B^2 - 4AC = 0$ и $2CD - BE = 0$ или $2AE - DB = 0$

Кривая, имѣющія центръ.

Случай ($B^2 - 4AC \neq 0$).

Дано уравненіе:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{I}$$

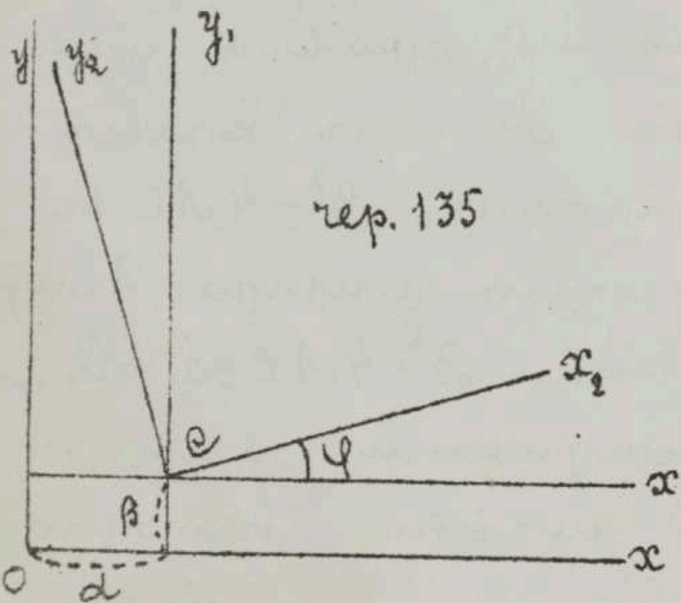
Кривая имѣетъ центръ. Прежде всего найдемъ координаты центра α и β, рѣшивъ два уравненія:

$$2A\alpha + B\beta + D = 0 \quad \text{и} \quad B\alpha + 2C\beta + E = 0$$

Сдѣлаемъ преобразованіе координатъ, перенеся начало въ центръ, для чего воспользуемся формулы $x = \alpha + x_1$ и $y = \beta + y_1$. (чер. 135) Новое уравненіе кривой относительно осей Cx_1 и Cy_1 будетъ:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0 \quad \text{II}$$

Въ этомъ уравненіи $F_1 = A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F$.



чер. 135

Эту формулу, по которой слѣдовало бы вычислить F_1, можно упростить. Для этого возьмемъ уравненія, опредѣляющія центръ.

Умножим 1-е на α, а второе на β: сложим их, получим:

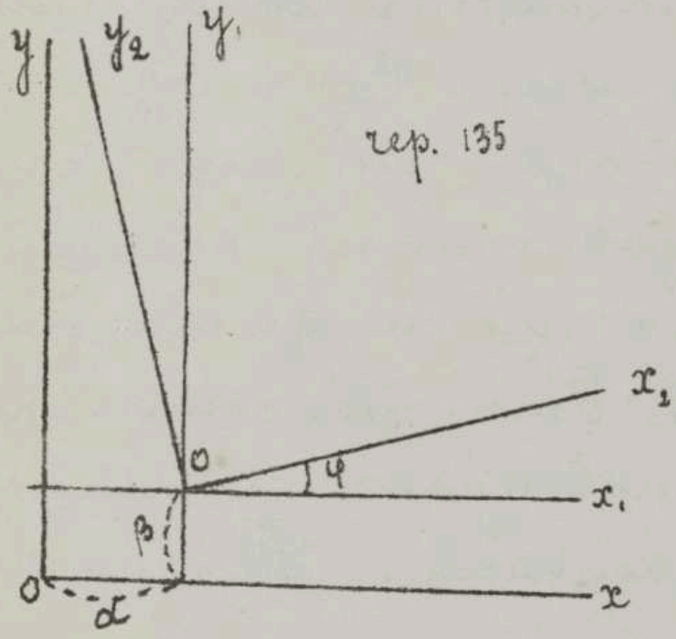
$$2\alpha^2 A + 2B\alpha\beta + 2C\beta^2 + D\alpha + E\beta = 0,$$

откуда $A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = -\frac{D\alpha + E\beta}{2}$

Вставим это в выражение F_1, находим:

$$F_1 = -\frac{D\alpha + E\beta}{2} + D\alpha + E\beta + F \text{ или } F_1 = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F.$$

По этой формуле легко будет вычислить F_1.



Затем будем считать F_1 известным. Возьмем уравнение (2) и упростим его вид новым преобразованием координат. Для этого, оставляя то же начало C, повернем оси координат на произвольный пока угол φ. Формула для перехода к новым осям суть:

$$x_1 = x_2 \cos\varphi - y_2 \sin\varphi \;;\; y_1 = x_2 \sin\varphi + y_2 \cos\varphi.$$

Вставивъ их въ уравнение второе (2) получим:

$$A(x_2^2\cos^2\varphi - 2x_2y_2\sin\varphi\cos\varphi + y_2^2\sin^2\varphi) + B(x_2^2\sin\varphi\cos\varphi - x_2y_2\sin^2\varphi + x_2y_2\cos^2\varphi - y_2^2\sin\varphi\cos\varphi) + C(x_2^2\sin^2\varphi - 2x_2y_2\sin\varphi\cos\varphi + y_2^2\cos^2\varphi) + \ldots = 0$$

Раскрывъ здѣсь скобки и беря подобные члены за скобки получимъ уравненіе такого вида:

$$M x_2^2 + P x_2 y_2 + N y_2^2 + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Здѣсь для краткости положено, что

$$M = A Cs^2\varphi + B Sn\varphi\, Cs\varphi + C s^2\varphi$$
$$N = A Sn^2\varphi - B Sn\varphi\, Cs\varphi + C s^2\varphi$$
$$P = 2 Sn\varphi\, Cs\varphi (C - A) + B(Cs^2\varphi - Sn^2\varphi)$$

Уравненіе (3) представляетъ нашу кривую, отнесенную къ осямъ Cx_2 и Cy_2. Это уравненіе имѣетъ такой же видъ, какъ и уравненіе (2): слѣдовательно начиная преобразованіемъ мы еще не достигли никакого упрощенія. Это произошло потому, что уголъ поворота остался до сихъ поръ произвольный. Теперь мы воспользуемся неопредѣленностью угла φ и опредѣлимъ его такъ, чтобы коэффиціентъ при произведеніи координатъ въ уравненіи (3) получился бы равный 0 т. е. чтобы $P = 0$. Посмотримъ, возможно-ли это? Мы должны имѣть:

$$2(C - A)\, Sn\varphi . Cs\varphi + B(Cs^2\varphi - Sn^2\varphi) = 0.$$

Попробуемъ изъ этого уравненія опре-

дѣлить уголъ φ, неизвѣстный намъ. Замѣтивъ, что:

$$2 Sn\varphi Cs\varphi = Sn 2\varphi \text{ и } Cs^2\varphi - Sn^2\varphi = Cs 2\varphi,$$

получимъ $(A-C) Sn 2\varphi - B Cs 2\varphi = 0$.

Раздѣливъ на $Cs 2\varphi$, имѣемъ: $(A-C) Tg 2\varphi = B$, откуда:

$$Tg 2\varphi = \frac{B}{A-C}$$

По этой формулѣ всегда можно опредѣлить уголъ φ, потому что уголъ 2φ опредѣляется здѣсь по тангенсу, а тангенсъ можетъ получать всевозможныя величины отъ $+\infty$ до $-\infty$; значитъ, какови бы ни были величины A, B и C, мы всегда найдемъ уголъ 2φ, а слѣдовательно и φ. Есть однако одно исключеніе. Это случай, когда $A = C$ и $B = 0$; тогда $Tg 2\varphi = \frac{0}{0}$. Но въ этомъ случаѣ, какъ мы уже знаемъ, уравненіе будетъ представлять окружность, и эту окружность мы уже умѣемъ строить. Устраняемъ этотъ случай. Изъ полученной нами формулы найдемъ для 2φ безчисленное множество значеній. Такъ, пусть наименьшее значеніе положитель-

ное для φ будетъ θ, причемъ $\theta < 180°$; тогда можно получить: $2\varphi = \theta + к.180°$, где к можетъ быть равнымъ $0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Отсюда $\varphi = \frac{\theta}{2} + к.90°$. Всѣ эти рѣшенія, какъ легко видѣть, опредѣляютъ одну и ту же пару прямоугольныхъ осей. Взявъ рѣшенія $\varphi = \frac{\theta}{2} < 90°$ мы видимъ, что другія вытекаютъ изъ него прибавленіемъ или вычитаніемъ нѣсколько разъ по $90°$. Очевидно, что при этомъ будемъ получать тѣ же самыя направленія двухъ линій Cx_2 и Cy_2. Отсюда слѣдуетъ, что существуетъ только одна система прямоугольныхъ координатъ, при которыхъ въ уравненіи (3) будетъ $P=0$, и относительно этой системы осей наша кривая будетъ выражена уравненіемъ:

$$M x_2^2 + N y_2^2 + F' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.)$$

Въ этомъ уравненіи намъ нужно будетъ вычислить коэффиціенты M и N. Составимъ для этого болѣе удобныя формулы. Наше вычисленіе начнется съ угла φ. Имѣемъ $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A-C}$. Мы возьмемъ для угла φ наименьшее положи-

тельное значение т. е. примем $\varphi = \frac{\alpha}{2} < 90°$. Затем возьмем прежние выражения M и N. Составим их сумму и разность:

$$M + N = A(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + C(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = A + C$$

$$M - N = A(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2B\cos\varphi\sin\varphi - C(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) =$$
$$= (A - C)\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi.$$

Выразим $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$: имеем:

$$\sin 2\varphi = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \frac{\frac{B}{A-C}}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{(A-C)^2}}} = \frac{B}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}};$$

подобно этому:

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{(A-C)^2}}} = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}$$

В этих формулах перед корнем подразумевается двойной знак $(\pm)$ и нам следует определить, какой знак мы примем. Мы замечаем для этого, что $2\varphi = \Theta < 180°$; следовательно $\sin 2\varphi > 0$, а отсюда видно, что в выражении $\sin 2\varphi$ мы должны перед корнем принять знак одинаковый с B. Заметив, это, вставим $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$ в выражение $M - N$; получим $M - N = \frac{(A-C)^2 + B^2}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}} = \sqrt{(A-C)^2 + B^2}$

Сюда присоединим, что $M + N = A + C$; затем, если сложим и разделим на 2, получим:

$M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$; $N = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$

По этим формулам будет очень удобно вычислить M и N; таким образом уравнение (4) будет вполне составлено. По этому уравнению мы исследуем кривую линию, выражаемую данным уравнением. Форма кривой, как оказывается далее, зависит главным образом от того, будут ли коэффициенты M и N знаки одинаковые или разные. Чтобы определить, будут ли иметь коэффициенты M и N знаки одинаковые или разные, мы разыщем произведение M и N. По формулам находим:

$$MN = \frac{1}{4}\left[(A+C)^2 - (A-C)^2 - B^2\right] = \frac{1}{4}\left[A^2 + 2AC + C^2 - A^2 + 2AC - C^2 - B^2\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[4AC - B^2\right]; \quad MN = -\frac{B^2 - 4AC}{4}.$$

В рассматриваемом случае $B^2 - 4AC \neq 0$ т.е. или больше 0, или меньше 0. Если $B^2 - 4AC < 0$, тогда $MN > 0$. В этом случае M и N имеют одинаковые знаки. Кривая, представляемая уравнением (4) называется ЭЛЛИПСОМ. Если $B^2 - 4AC > 0$, то $MN < 0$, следовательно M и N имеют разные знаки и кривая, представляемая урав-

нением, называется Гиперболой. Таким образом кривая имеющая центр разделяется на два вида: первый характеризуется признаком $B^2 - 4AC < 0$, это эллипсы: второй признаком $B^2 - 4AC > 0$, это - гиперболы.

Эллипсы.

Построить кривую, уравнение которой:

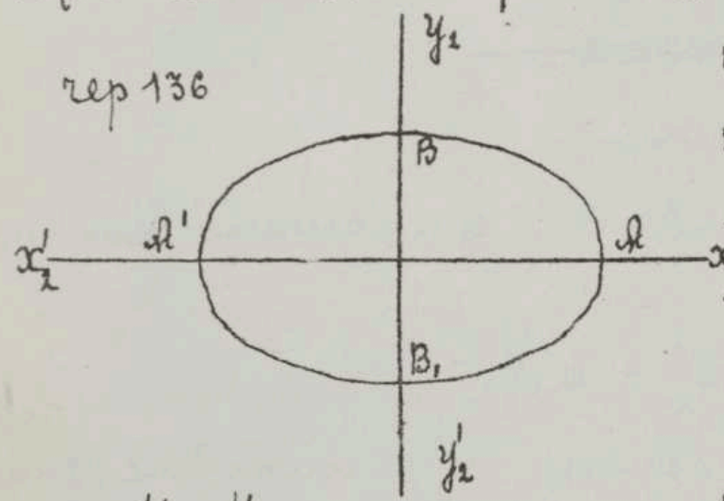
$$Mx_2^2 + Ny_2^2 = -F_1.$$

Здесь M и N имеют одинаковые знаки; примем их положительными. Если бы они были отрицательными, тогда мы могли бы переменить знаки в обеих частях равенства. При построении этой кривой рассмотрим три случая 1) $-F_1 > 0$; 2) $-F_1 = 0$ и 3) $-F_1 < 0$.

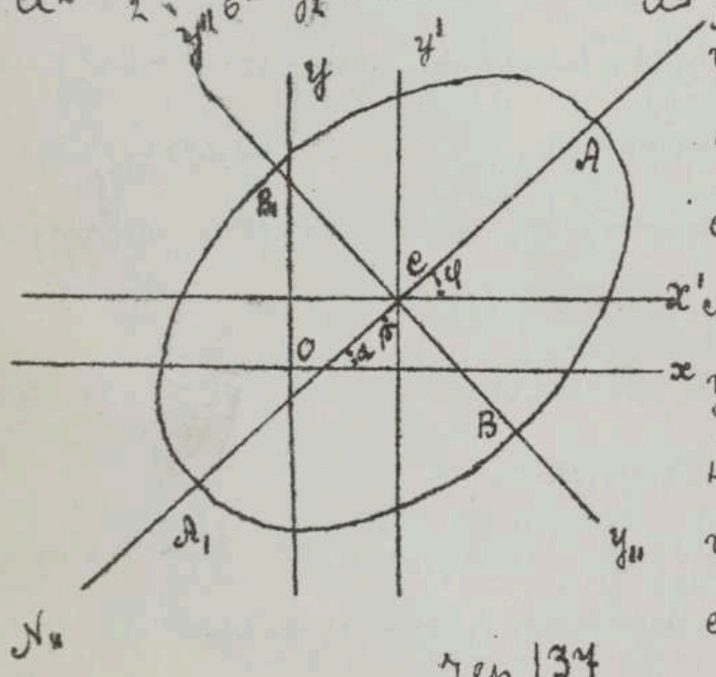
1) Случай $-F_1 > 0$. Положим $-F_1 = H$ и напишем уравнение так:

$Mx_2^2 + Ny_2^2 = H$ Здесь M, N и H положительны. Возьмем прямоугольные оси координат. Определим точки пересечения этой кривой с осями коорди-

нать (фиг.136) Положивъ $y_2=0$, получимъ: $M x_2^2 = H$ откуда $x_2 = \pm\sqrt{\frac{H}{M}} = \pm a$; получимъ двѣ точки пересѣченія A и A_1, причемъ $CA = CA_1 = a$. Для пересѣченія съ осью y-ковъ сдѣлаемъ $x_2=0$, получимъ двѣ точки пересѣченія B и B_1, причемъ $CB = CB_1 = b = \sqrt{\frac{H}{N}}$. Уравненіе кривой напишется въ болѣе простомъ видѣ, если мы въ него вмѣсто коэффиціентовъ M N и H введемъ величины a и b. Мы имѣемъ $\frac{H}{M} = a^2$ откуда $M = \frac{H}{a^2}$; такимъ $N = \frac{H}{b^2}$. Вставивъ, получимъ: $\frac{H}{a^2} x_2^2 + \frac{H}{b^2} y_2^2 = H$ или $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$. Это уравненіе мы было нами построено, и мы знаемъ, что оно представляетъ эллипсъ, отнесенный къ центру и къ осямъ. Но не забудемъ, что цѣль нашей состояла въ построеніи кривой, выраженной уравненіемъ (1) т. е. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ относительно



Чер 136



Чер 137

первоначально данных осей. Заметим что построивъ эллипсъ относительно осей Cx_2 и Cy_2, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ его положеніе и относительно старыхъ осей. Заметимъ только еще, что въ послѣднемъ построеніи не всегда бываетъ $a > b$, можетъ случиться, что $a < b$. Это будетъ значить, что большая ось эллипса пойдетъ не по Cx_2 а по Cy_2. 2) Пусть $-F_1 = 0$. Уравненіе будетъ $Mx_2^2 + Ny_2^2 = 0$. Такъ какъ M и N положительныя, то очевидно, что этому уравненію возможно удовлетворить только полагая одновременно, что $x_2'' = 0$ и $y'' = 0$, иначе сумма двухъ положительныхъ чиселъ не можетъ быть равна 0. Въ этомъ случаѣ получится не кривая, а одна точка C.

3) Положимъ, что $-F_1 < 0$. Уравненіе будетъ $Mx_2^2 + Ny_2^2 = -F_1$. Въ этомъ уравненіи первая часть всегда положительна а вторая отрицательна, слѣдовательно ему нельзя удовлетворить никакими дѣйствительными значеніями.

ями x'' и y''. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что уравненіе представляетъ мнимое мѣсто или мнимый эллипсъ. И такъ окончательно, если въ уравненіи (1) $B^2-4AC<0$; то уравненіе представляетъ или эллипсъ, или точку, или мнимое мѣсто.

Гиперболы.

Мы разсмотримъ теперь, какія кривыя представляетъ уравненіе:

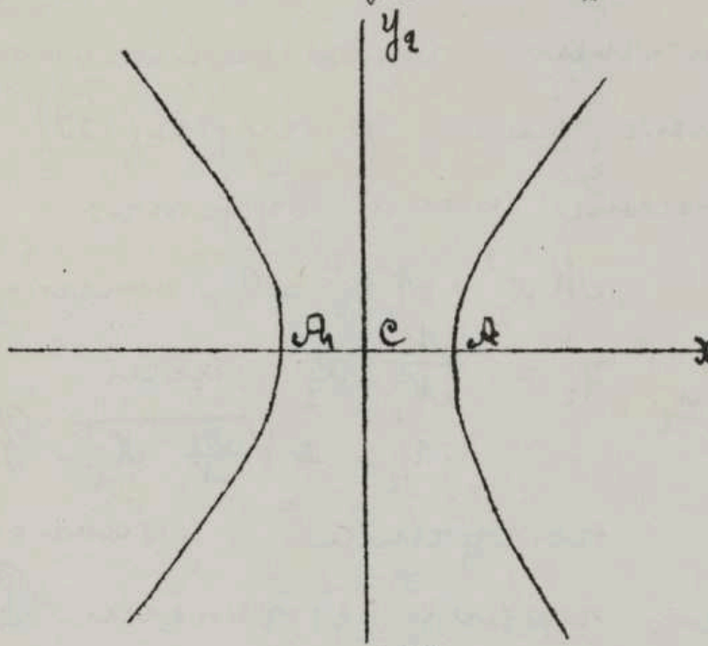
$$Mx_2^2 + Ny_2^2 = -F_1,$$

въ которомъ M и N имѣютъ разные знаки. Мы будемъ полагать, что $M>0$, а $N<0$. Если бы было наоборотъ, то мы могли бы перемѣнить знаки въ обѣихъ частяхъ уравненія. Здѣсь мы также разсмотримъ три случая: .... (1) $-F_1>0$, 2) $-F_1=0$ и 3) $-F_1<0$.

1) Пусть $-F_1>0$. Положимъ, что $-F_1=H$ и сверхъ того поставимъ знакъ при N на видъ; уравненіе будетъ:

$$Mx_2^2+(-Ny_2^2)=H$$ гдѣ M, N и H положительны. Возьмемъ оси координатъ и отрѣзокъ точки пересѣченія кривой съ оси-

ли. Въ точкахъ пересѣченія съ осью x-овъ имѣемъ $y_2 = 0$, $x_2 = \pm\sqrt{\frac{u}{M}} = \pm a$ (фиг. 138) гдѣ черезъ a обозначено $\sqrt{\frac{u}{M}}$, получимъ двѣ точки пересѣченія A и A_1, причемъ:



фиг. 138.

$$AC = A'C = \sqrt{\frac{u}{M}} = a.$$

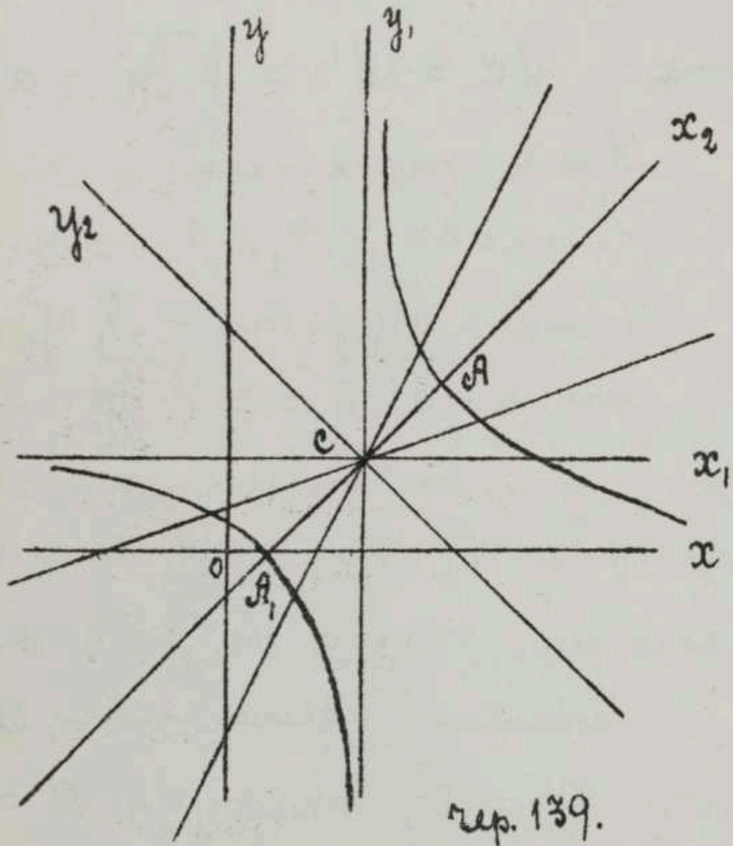
Для пересѣченія съ осью y-ковъ, $x_2 = 0$ и уравненіе будетъ $-N_1 y_2^2 = u$, откуда $y_2 = \pm\sqrt{\frac{u}{N_1}}$. Это величина мнимая, слѣдовательно кривая не пересѣчетъ оси y-овъ. Такъ какъ мнимыя мы получимъ, что $\sqrt{+\frac{u}{N_1}} = b$ и введемъ въ уравненіе кривой величины a и b. Мы имѣемъ, что $\frac{u}{M} = a^2$, откуда $M = \frac{u}{a^2}$, далѣе $\frac{u}{N_1} = b^2$, откуда $N_1 = \frac{u}{b^2}$. Вставивъ въ уравненіе получимъ:

$$\frac{u}{a^2} x_2^2 - \frac{u}{b^2} y_2^2 = u \quad \text{или} \quad \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{a^2} = 1.$$

Въ этомъ уравненіи мы прямо узнаемъ гиперболу, отнесенную къ центру и осямъ. A и A' двѣ вершины этой гиперболы и ея главная ось совпадаетъ съ осью Cx_2. Мы можемъ эту гиперболу посгро-

гить. Построимъ ее относительно осей Cx_2 и Cy_2 или тѣмъ самымъ опредѣлимъ ея положеніе относительно первоначальныхъ осей, (какъ показано на фигурѣ (139)

2) Пусть $-F_1 = 0$. Уравненіе наше будетъ:



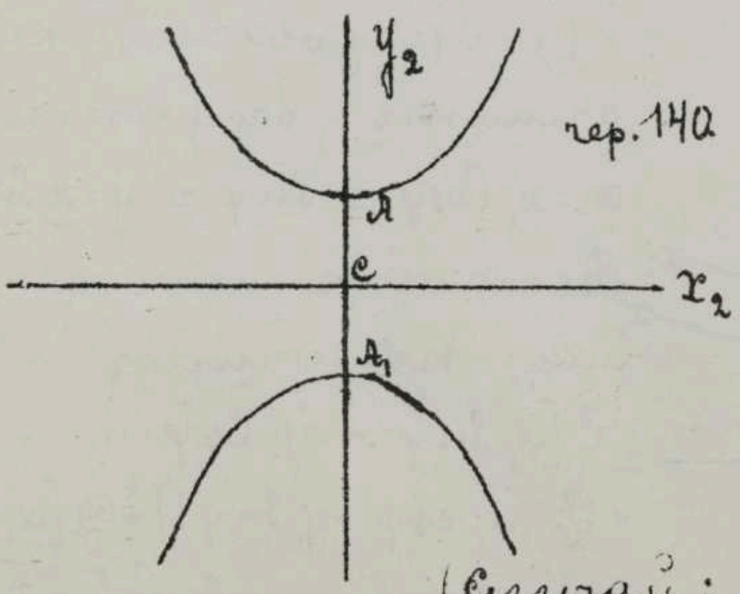
Чер. 139.

$Mx_2^2 - N_1 y_2^2 = 0$, отсюда $y_2^2 = \frac{M}{N_1} x_2^2$ или $y_2 = \pm\sqrt{\frac{M}{N_1} x_2^2}$. Здѣсь получились уравненія первой степени. Каждое изъ нихъ представляетъ прямую линію, проходящую черезъ начало координатъ C. (фиг. 139) Эти двѣ прямыя будутъ одинаково наклонены къ оси X_2 съ двухъ разныхъ сторонъ. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ наше уравненіе представляетъ не кривую, а совокупность двухъ пересѣкающихся прямыхъ. Это частный случай гиперболы. 3) Положимъ, что $-F_1 < 0$. Положимъ, что $F_1 = M$ и напишемъ: $Mx_2^2 - N_1 y_2^2 = -M$. Строимъ

эту кривую относительно последних осей. Для пересечения с осью y_2 будем иметь $x_2 = 0$ и следовательно $N_1 y_2^2 = H$, откуда $y_2 = \pm\sqrt{\frac{H}{N_1}} = \pm a$. Получаем две точки A и A_1, причем $CA = CA' = a$. Для пересечения с осью x_2 нужно положить $y_2 = 0$, получим $-M x_2^2 = K$, откуда $x_2 = \pm\sqrt{\frac{K}{M}}$. Следовательно ось x_2 не пересекает кривой; чтобы не иметь, мы положили $\sqrt{\frac{K}{M}} = b$ и затем введем в уравнение величины a и b. Будем иметь $\frac{K}{M} = b^2$, откуда $N_1 = \frac{H}{a^2}$. Вставив, получим:

$$\frac{H}{a^2} y_2^2 - \frac{H}{b^2} x_2 = K \text{ или } \frac{y_2^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение отличается от первого случая только тем, что в нем переменились x_2 на y_2 и y_2 на x_2 следовательно это тоже гипербола, только ее главная ось будет совпадать с осью Oy_2.



чер. 140

Кривая не имеющая центра.

(Случай: $B^2 - 4AC = 0$)

$4Ac = B^2$ $A = \frac{B^2}{4C}$ $x_1 = x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi$ $y_1 = x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi$

Дано уравнение кривой.

$$\underline{Ax^2 + Bxy + Cy^2} + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (1)$$

Прежде всего заметим, что в этом случае первые три члена уравнения (1) образуют полный квадрат. В самом деле, мы имеем $4Ac = B^2$, откуда $A = \frac{B^2}{4C}$; следовательно:

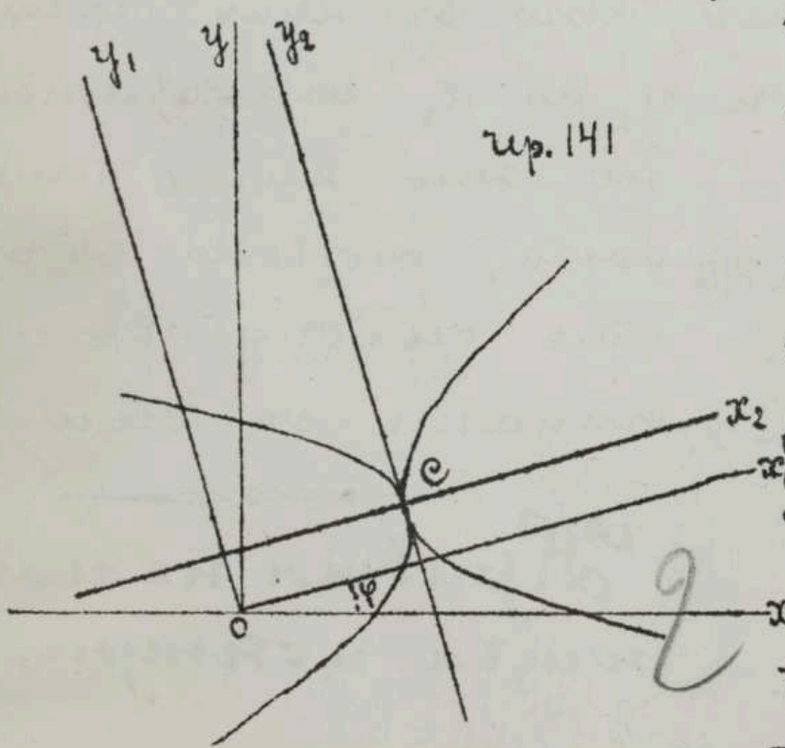
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \frac{B^2}{4C}x^2 + Cy^2 + Bxy = C\left(y^2 + \frac{B}{C}xy + \frac{B^2}{4C^2}x^2\right) =$$
$$= C\left(y + \frac{B}{2C}x\right)^2.$$

Вследствие этого уравнение (1) напишется в виде:

$$C\left(y + \frac{B}{2C}x\right)^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots\ldots (1')$$

Для упрощения этого уравнения, мы повернем оси координат на некоторый угол φ, оставив только начало. Формулы преобразования координат будут:

$x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi$ и $y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi$



Чр. 141

Вставивъ эти формулы, получимъ

$$C[(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) + \frac{B}{2C}(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)]^2 + D[x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi] + [x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi]E + F = 0.$$

или $C\left[y_1\left(\cos\varphi - \frac{B}{2c}\sin\varphi\right) + \left(\sin\varphi + \frac{B}{2c}\cos\varphi\right)x_1\right]^2$

$+ \left[D\cos\varphi + E\sin\varphi\right]x_1 + \left[E\cos\varphi - D\sin\varphi\right]y_1 + F = 0.$

Воспользуемся неопределенностью угла φ и выберем его так, чтобы это уравнение упростилось по составу. Именно мы возьмем такой угол φ, чтобы коэффициент при x_1 в большой скобке был бы равен нулю т. е. полагаясь $\sin\varphi + \frac{B}{2c}\cos\varphi = 0$, отсюда определим $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{B}{2c}$. Эта формула определяет угол φ. Притом так как этот угол определяется по тангенсу, то его всегда можно найти. Въ первых двух четвертях тангенс получает всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому φ найдется или въ первой или во второй четверти. Мы поэтому будем полагать $\varphi < 180°$. При таком значении φ, уравнение кривой будет иметь видъ:

$$N y_1^2 + P x_1 + Q y_1 + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Здесь для краткости положено:

$N = C\left[\cos\varphi - \frac{B}{2c}\sin\varphi\right]^2$, $P = D\cos\varphi + E\sin\varphi$ и $Q = E\cos\varphi - D\sin\varphi$

Эти три коэффициента нам нужно будет вычислить. Мы составим для

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$

этого более удобные формулы. Со этою целью предварительно выразим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ через коэффициенты уравнения кривой; имеем:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{-\frac{B}{2C}}{\sqrt{1+\frac{B^2}{4C^2}}} = \frac{-B}{\sqrt{4C^2+B^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{B^2}{4C^2}}} = \frac{2C}{\sqrt{4C^2+B^2}}$$

В этих формулах перед корнем квадратным подразумевается двойной знак. Чтобы определить, нужно ли взять + или −, заметим что так как $0 < \varphi < 180°$, то $\sin\varphi > 0$. Следовательно, как видно из выражения $\sin\varphi$, перед корнем нужно принимать знак обратный со знаком B. Далее вычислим N:

$$N = C(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\varphi)^2 = C\left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 = C\left(\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 =$$

$$= \frac{C}{\cos^2\varphi} \quad \text{или} \quad N = C : \frac{4C^2}{4C^2+B^2} = 1 : \frac{4C}{4C^2+B^2} = C + \frac{B^2}{4C}$$

или $N = A + C$.

Обращаясь к вычислению других коэффициентов, имеем:

$$P = \frac{2CD - BE}{\sqrt{4C^2+B^2}}$$

Заметим, что $4C^2+B^2 = 4C\left(C+\frac{B^2}{4C}\right) = 4C(C+A) = 4CN$

Следовательно $P = \frac{2CD-BE}{2\sqrt{C(C+A)}}$. Затем находим: $Q = \frac{2CE+BD}{2\sqrt{C(C+A)}}$. По найденным выра-

можемъ вычислить P, N и Q. Возьмемъ теперь новое уравненіе кривой т. е:

$$N y_1^2 + P x_1 + Q y_1 + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Его можно еще болѣе упростить новымъ преобразованіемъ координатъ. Именно, оставляя оси параллельными самимъ себѣ, перенесемъ начало координатъ въ другую точку. Координаты этой точки обозначимъ черезъ (a, b) и оставимъ ихъ пока неопредѣленными:

Формулы перехода будутъ:

$$x_1 = x_2 + a \; ; \quad y_1 = y_2 + b.$$

Вставляя эти выраженія въ уравненіе (2) получимъ: $N(y_2+b)^2 + P(x_2+a) + Q(y_2+b) + F = 0$

или $$N y_2^2 + P x_2 + (2Nb + Q) y_2 + Nb^2 + Pa + Qb + F = 0$$

Это уравненіе имѣетъ пока тотъ же самый видъ, какъ и уравненіе (2). Воспользуемся неопредѣленностью координатъ a и b и выберемъ ихъ такими, что бы въ послѣднемъ уравненіи коэффиціентъ при y_2 и сумма постоянныхъ членовъ обратились бы въ нуль. Мы должны имѣть:

$$2aNb + Q = 0 \quad \text{и} \quad Nb^2 + Pa + Qb + F = 0.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій мы найдемъ неизвѣстные a и b. Имѣемъ $b = -\frac{Q}{2N}$ и вставивъ во второе, получимъ:

$$\frac{Q^2}{4N} + Pa + F - \frac{Q}{2N} = 0 \text{ или } Pa = \frac{Q^2}{2N} - \frac{Q^2}{4N} - F$$

отсюда $a = \frac{Q^2 - 4NF}{4PN}$. Изъ этихъ рѣшеній видимъ мы, что a и b будутъ возможны, если только $N \neq 0$ и $P \neq 0$. Но если бы было $N = 0$,, то тогда уравненіе (2) имѣло бы видъ:

$$Px_1 + Qy_1 + F = 0.$$

И представляло бы прямую линію, которая является такимъ образомъ, частнымъ случаемъ параболы. Также, если бы было $P = 0$, то оказалось бы $Ny_1^2 + Qy_1 + F = 0$ Это уравненіе содержитъ одно y и его можно рѣшить относительно y. Получимъ два рѣшенія $y_1' = B'$ и $y_1'' = B''$. Эти два рѣшенія представляютъ двѣ прямыхъ линіи, параллельныя съ осью X, если B' и B'' дѣйствительныя. Если же они мнимы, то указанныя двѣ прямыя будутъ мнимыми. Наконецъ, если корни равны, то эти двѣ прямыя совпадаютъ въ одну. Также

образуется две прямыя, одна прямая и мнимое место двойныхъ частными случаями параболы. Устранимъ эти частные случаи. Тогда скажемъ, что послѣднее преобразованіе координатъ возможно и при найденныхъ величинахъ a и b уравненіе (1) приметъ видъ:

$$N y_2^2 + P x_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots : (3).$$

Изъ него находимъ $y_2^2 = -\frac{P}{N} x_2$. Различимъ два случая: 1) пусть $-\frac{P}{N} > 0$. Положимъ тогда, что $-\frac{P}{N} = 2p$; будемъ имѣть $y_2^2 = 2p x_2$. Въ этомъ уравненіи узнаемъ извѣстную намъ параболу, отнесенную къ вершинѣ и оси 2). Пусть $-\frac{P}{N} < 0$. Тогда положимъ $-\frac{P}{N} = -2q$; уравненіе будетъ $y_2^2 = -2q x_2$ или $y_2 = \pm\sqrt{-2q x_2}$. Въ этомъ случаѣ y_2 будетъ дѣйствительно только при отрицательныхъ значеніяхъ x_2. Значитъ уравненіе выражаетъ подобную же параболу, но только ея ось будетъ направлена отъ вершины C въ противоположную сторону Cx_2.

Сводъ формулъ, употребляемыхъ при изслѣдованіи кривыхъ 2го порядка

черезъ преобразованіе координатъ.

Дано уравненіе:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (1)$$

Прежде всего составимъ бином $B^2 - 4AC$. Если онъ не равенъ нулю, то кривая имѣетъ центръ. Притомъ если $B^2 - 4AC < 0$, то кривая будетъ эллипсъ; если $B^2 - 4AC > 0$, то гипербола. Далѣе нужно написать два уравненія, опредѣляющія центръ. Они опредѣляются дифференцированіемъ и имѣютъ видъ:

$$2A\alpha + B\beta + D = 0 \quad \text{и} \quad B\alpha + 2C\beta + E = 0.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій мы найдемъ координаты центра α и β. Затѣмъ перенесемъ координаты въ центръ, полагая $x = x_1 + \alpha$ и $y = y_1 + \beta$. Новое ур-ie кривой будетъ:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Въ немъ F_1 вычисляемъ по формулѣ $F_1 = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F$. Вычисляемъ потомъ уголъ φ, поворота осей, по формулѣ $\operatorname{Tg} 2\varphi = \frac{B}{A - C}$. Поворачиваемъ оси координатъ на уголъ φ, для чего служатъ

формулы:

$x_1 = x_2 \cos\varphi - y_2 \sin\varphi$, $y_1 = x_2 \sin\varphi + y_2 \cos\varphi$

причем $2\varphi < 180°$ и $\varphi < 90°$. Новое уравнение кривой будет: $M x_2^2 + N y_2^2 + F_1 = 0$ ..... (3)

Въ немъ коэффиціенты M и N вычисляются по формуламъ:

$$M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] \text{ и } N = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right],$$

причемъ передъ корнемъ нужно перемѣнить знакъ, если $B < 0$. Наконецъ по уравненію (3) построимъ самую кривую, опредѣливъ ея полуоси.

Замѣчаніе. Если въ частномъ случаѣ у насъ выйдетъ $F_1 = 0$, тогда уравненіе (2) будетъ $A x_2^2 + B x_1 y_1 + C y_1^2 = 0$. Въ этомъ случаѣ не нужно дѣлать послѣдняго преобразованія координатъ. Дѣйствительно, прямо на этомъ уравненіи легко видѣть, что получатся двѣ пересѣкающіяся прямыя. Чтобы обнаружить это стоитъ только рѣшить это уравненіе относительно y_1. Рѣшая находимъ:

$$y_1^2 + \frac{B}{C} y_1 x_1 + \frac{A}{C} x_1^2 = 0, \quad y_1 = -\frac{B}{2C} x_1 \pm \sqrt{\frac{B^2}{4C^2} x_1^2 - \frac{A}{C} x_1^2};$$

$$y_1 = -\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} x_1$$

Если $B^2-4AC>0$, то это уравнение представляет две прямые проходящие через начало координат: если же $B^2-4AC<0$, то этому уравнению можно удовлетворить только положив $x_1=0$ и $y=0$ и уравнение представляет точку.

Наконец, если $B^2-4AC=0$, то получится одна прямая $y_1=\frac{-B}{2C}x_1$. Вернемся опять к уравнению (1) и положим что $B^2-4AC=0$, но во точке время $2CD-BE\neq 0$; тогда получится парабола. Прежде всего повернем оси координат, оставив точке начало, на угол φ, который вычислять по формуле $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{B}{2C}$. Формулы преобразования координат будут:

$$x=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi \text{ и } y=x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi.$$

Новое уравнение будет

$$Ny_1^2+Px_1+Qy_1+F=0 \ldots\ldots\ldots (2)'$$

Вычисляем коэффициенты по формулам:

$$N=A+C,$$

$$P=\frac{2CD-BE}{2\sqrt{C}\,N} \text{ и } Q=\frac{2CE+DB}{2\sqrt{C}\,N}.$$

Здесь перед корнем надо принять знак обратный со знаком B. Угол φ всегда меньше 180°. Наконец перенесем начало

координатъ, оставляя оси параллельными самимъ себѣ, въ точку, находящуюся на кривой линіи. Формулы преобразованія будутъ: $x_1 = x_2 + a$ и $y_1 = y_2 + b$. Координаты a и b будутъ найдены изъ того условія, что въ ур—ніи кривой обращаются въ нули члены съ y_1 и членъ ~~неизвѣстный~~. Окончательно уравненіе кривой будетъ: $N y_2^2 + P x_2 = 0$. Строимъ параболу. **Замѣчаніе.** Если намъ задано уравненіе такого вида:

$$A x^2 + D x + E y + F = 0,$$

то тогда $B^2 - 4AC = 0$ и это уравненіе представляетъ параболу. Въ этомъ случаѣ не надо дѣлать преобразованія координатъ относительно поворота осей, а положить только $x = x_1 + a$ и $y = y_1 + b$. Затѣмъ нужно опредѣлить a и b такъ, чтобы въ новомъ уравненіи не было члена неизвѣстнаго и члена съ x въ первой степени, такъ что уравненіе получится въ видѣ $A x_1^2 + E y_1 = 0$. Это уравненіе представляетъ подобную же параболу, но въ ней осью симетріи

слушить ось y-овъ.

Примѣръ 1-й Построить кривую представленную ур-емъ

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16y + 23 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Здѣсь мы имѣемъ $B^2 - 4AC = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 3 < 0$, а потому наше уравненіе представляетъ собою эллипсъ. Уравненія центра составятся взявъ производныя отъ данной функціи по x и производную по y, приченъ въ этихъ производныхъ x должень быть замѣненъ черезъ α, а y черезъ β, гдѣ α и β суть координаты центра. Слѣдовательно уравненія центра суть:

$$6\alpha + 2\beta = 0$$
$$2\alpha + 6\beta - 16 = 0$$

Изъ перваго уравненія $\beta = -3\alpha$. Вставивъ во второе, получимъ $\alpha - 9\alpha - 8 = 0$ или $8\alpha - 8 = 0$, откуда $\alpha = -1$ и $\beta = +3$.

Перенесемъ начало въ центръ, получимъ

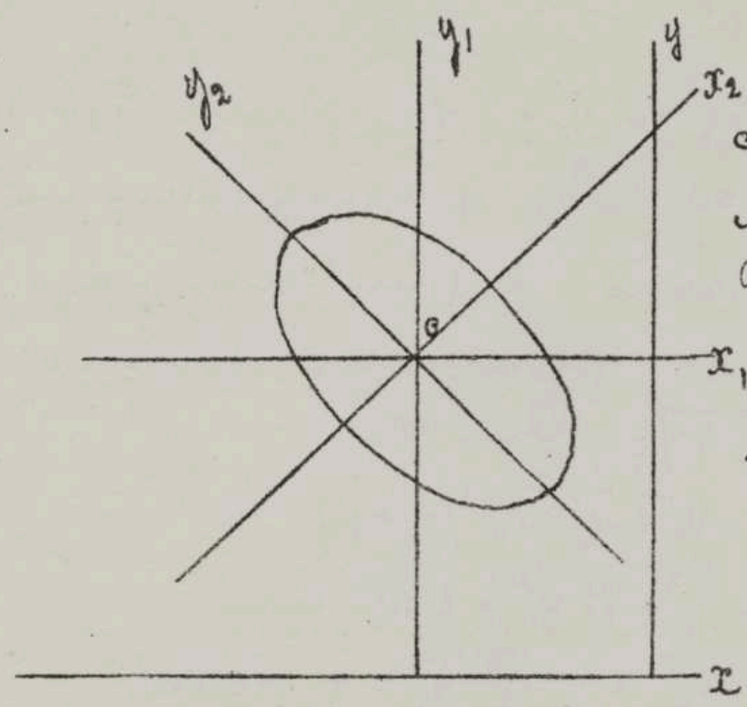
$$3x_1^2 + 2x_1y_1 + 3y_1^2 + F_1 = 0$$

Здѣсь $F_1 = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F$, гдѣ $\alpha = -1$, $\beta = +3$, $D = 0$, $E = -16$; подставивши, опредѣлимъ $F_1 = \frac{-48}{2} + 23 = -1$.

Подставивши теперь въ уравненіе величину F_1, имѣемъ $3x_1^2 + 2x_1y_1 + 3y_1^2 - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

Делаем поворот осей на угол φ. Имеем:

$$\operatorname{Tg} 2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{2}{3-3} = \frac{2}{0} = \infty, \quad \angle 2\varphi = 90^\circ, \quad \angle \varphi = 45^\circ.$$



Чер.

Уравнение будет:

$$M x_2^2 + N y_2^2 + F_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = \frac{1}{2}\left[6 + \sqrt{4}\right] = 4,$$

$$N = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = \frac{1}{2}\left[6 - 2\right] = 2.$$

Уравнение (3) будет:

$$4x_2^2 + 2y_2^2 = 1 \ldots\ldots\ldots (3)$$

или $\frac{x_2^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{\frac{1}{2}})^2} = 1$. Сравнивая это уравнение с общим уравнением эллипса:

$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, видим, что $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Строим кривую относительно последних осей координат и возстановив старые оси, получим положение эллипса относительно данных осей.

Пример 2-ой. Дано уравнение:

$$y^2 - 2xy - x^2 + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

имеем $B^2 - 4AC = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8 > 0$. Кривая есть

гиперболa или ее частный случай. Здесь начало координат в центре и переносить оси не надо. Делаем поворот, вычислим угол φ: имеем $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{-2}{-1-1} = +1$, $2\varphi = 45°$, $\varphi = 22° 30'$.

Уравнение будет: $Mx_2^2 + Ny_2^2 + F_1 = 0$. Далее $F_1 = F = 2$ так как $d = 0$ и $\beta = 0$. По формулам находим M и N, только корни их надо взять с обратными знаками; получим

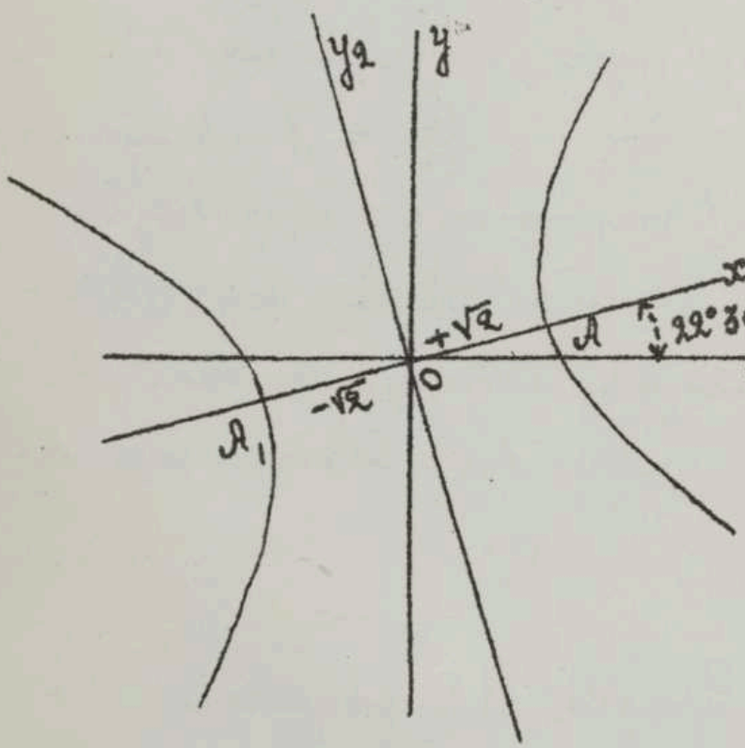
$$M = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{4+4}\right] = -\frac{\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2};$$

$$N = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = +\sqrt{2}.$$

Уравнение будет: $-\sqrt{2}\,x_2^2 + \sqrt{2}\,y_2^2 + 2 = 0$ или

$$\sqrt{\frac{2}{2}}\,x_2^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,y_2^2 = 1 \text{ или}$$

$$\frac{x_2^2}{(\sqrt[4]{2})^2} - \frac{y_2^2}{(\sqrt[4]{2})^2} = 1$$



чер.

Сравнивая это уравнение с уравнением гиперболы

$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1,$$

получим $a = \sqrt[4]{2}$, $b = \sqrt[4]{2}$.

Находим так называемую равносторонюю гиперболу. Для определения пересечения с осью x, положим $y = 0$; тогда

$-x^2+2=0$, $x^2=2$ и $x=\pm\sqrt{2}$.

Ось x гипербола пересечет в двух точках на расстоянии от начала на $\sqrt{2}$.

Пример 3. Дано уравнение:

$$-y^2-2xy+x^2-6y-6y-6x+9=0 \quad \ldots (1)$$

Имеем: $B^2-4AC=4-4\cdot1\cdot1=0$

т. е. это парабола. Повернем оси на угол φ. Находим $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{13}{2c}=-\frac{-2}{2}=1$; $\angle\varphi=45^\circ$.

Уравнение будет:

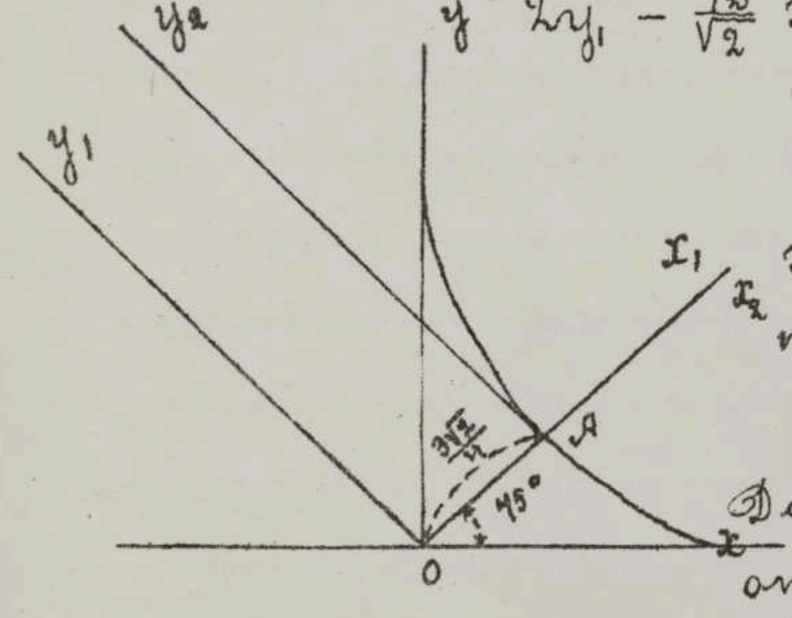
$$Ny_1^2+Px_1+Qy_1+F=0 \quad \ldots (2)$$

$N=A+C=1+1=2$; $P=\frac{2cD-BE}{2\sqrt{C(A+C}}=\frac{(2\cdot1\cdot-6)-12}{2\sqrt{1(2)}}=\frac{-24}{2\sqrt{2}}=-\frac{12}{\sqrt{2}}$

$Q=\frac{2cE+BD}{2\sqrt{C(A+C}}=\frac{-12+12}{2\sqrt{2}}=0$; $F=9$.

Уравнение будет:

$$2y_1^2-\frac{12}{\sqrt{2}}x_1+9=0 \quad \ldots (2)$$



чер.

Переносим оси координат по формулам:

$x_1=x_2+a$; $y_1=y_2+b$. Вставив, получим $2(y^2+2by_2+b^2)-\frac{12}{\sqrt{2}}(x+a)+9=0$

Далее $b=-\frac{Q}{2N}=0$; $2b^2-\frac{12}{\sqrt{2}}a+9=0$, откуда $a=\frac{9\sqrt{2}}{12}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Уравнение будет

$$2y_2^2-\frac{12}{\sqrt{2}}x_2=0$$

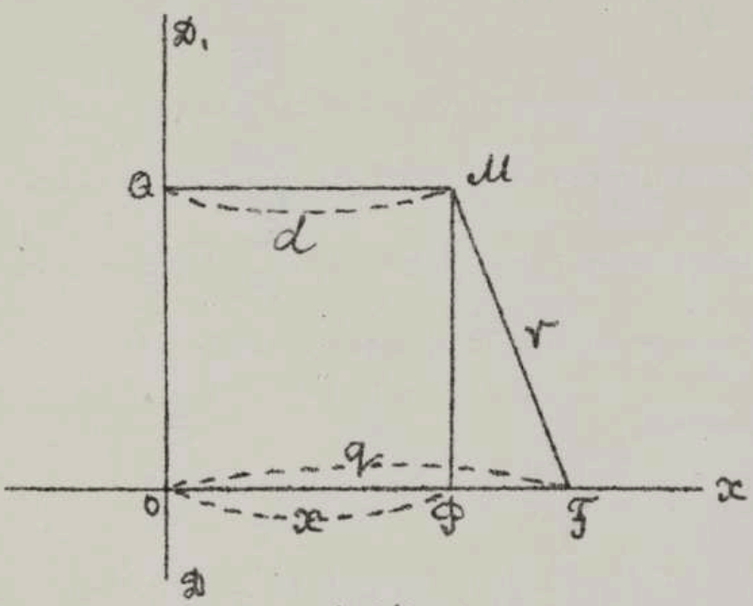
или $y_2^2=\frac{6}{\sqrt{2}}x_2=3\sqrt{2}\,x_2$. Дополнить чертеж.

Для пересечения съ осью x, полагаемъ $y=0$; получимъ $x^2-6x+9=0$ или $x=3\pm\sqrt{9-9}=3$. Парабола касается оси x. Съ осью y, полагаемъ $x=0$, получимъ $y^2+6y+9=0$ или $y=3$. Парабола касается оси y.

Общее геометрическое опредѣленіе кривыхъ 2го порядка по ихъ свойствамъ относительно фокусовъ и направляющихъ линій.

Каждая изъ трехъ кривыхъ, эллипсъ, парабола и гипербола, можетъ быть опредѣлена какъ геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ данной неподвижной точки имѣютъ постоянное отношеніе къ разстоянію отъ нѣкоторой неподвижной прямой. Когда величина этого отношенія <1, тогда получается эллипсъ, если она $=1$, то парабола, если >1, то гипербола. Докажемъ это и съ этою цѣлью составимъ уравненіе такого геометрическаго мѣста. Пусть DD, постоянная неподвижная прямая и F постоянная точка и пусть M нѣкоторая точка кривой. Проведемъ $MF=r$ и опус-

тись перпендикуляр на DD_1. По условию для всех точек кривой $\frac{r}{d}$ = постоянной величине, где $d = MQ$. Величину эту $\frac{r}{d}$ обозначим через ε. Если $\varepsilon = 1$, то кривая парабола и когда $\varepsilon > 1$, то гипербола. Случай параболы очевидень по прежнему определению параболы, потому что, когда $\varepsilon = 1$. т. е. $\frac{r}{d} = 1$, то будем иметь $d = r$ и расстояние точки кривой от постоянной точки равно расстоянию от постоянной прямой, как и должно быть для параболы. Точка F называется фокусом, а постоянная прямая DD_1 направляющей линией. Опустим из фокуса на направляющую $\perp$ ox. Точку O примем за начало координат, а линию ox за ось абсцисс и oD за ось y. Построим координаты точки M, будем иметь: $OP = x$, $MP = y$. Пусть расстояние $OF = q$. Это расстояние дано. Имеем $\frac{r}{d} = \varepsilon$ или $\frac{x}{d} = \varepsilon$



чер.

или $r^2 = \varepsilon^2 d^2$, но $r^2 = y^2 + (q-x)^2$. Далее $x = d$, следовательно вставляя, имеем:

$$y^2 + (q-x)^2 = \varepsilon^2 x^2$$

Это есть уравнение рассматриваемого класса. Уравнение это 2-ой степени, следовательно кривая будет второго порядка. Определить, какая это кривая. Перенесем все члены в первую часть.

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2qx + q^2 = 0.$$

Составим биномы $B^2 - 4AC = -4(1-\varepsilon^2) = 4(\varepsilon^2 - 1)$. Прямо видно теперь, что если $\varepsilon < 1$, то $B^2 - 4AC < 0$ и кривая будет эллипс. Если $\varepsilon = 1$, то $B^2 - 4AC = 0$ и кривая будет парабола. Наконец если $\varepsilon > 1$, то $B^2 - 4AC > 0$ и кривая будет гипербола. Рассмотрим эти три случая, каждый отдельно.

Эллипс.

Пусть $\varepsilon < 1$. Возьмем уравнение кривой:

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2qx + q^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Прежде всего определим центр этой кривой. Координаты центра, как мы знаем, найдутся из уравнений. Берем частную производную по x; получим

$2(1-\varepsilon^2)\alpha - 2q = 0$. По y будет $2y = 0$.
Следовательно центръ кри перваго $x = \frac{q}{1-\varepsilon^2} = \alpha$, а кри втораго $y = 0 = \beta$. Перенесемъ начало координатъ въ центръ, полагая $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$; или $x = x_1 + \frac{q}{1-\varepsilon^2}$ и $y = y_1$. Новое уравненіе кривой будетъ

$$A x_1^2 + B x_1 y_1 + C y_1^2 + F_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или въ нашемъ случаѣ:

$$(1-\varepsilon^2) x_1^2 + y_1^2 + F_1 = 0,$$

причемъ по извѣстной формулѣ найдемъ $F_1 = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F = -\frac{q^2}{1-\varepsilon^2} + q^2 = -\frac{q^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$. По этому уравненію опредѣлимъ полуоси нашего эллипса. Для этого напишемъ уравненіе въ видѣ:

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{q^2\varepsilon^2} x_1^2 = 1 - \frac{(1-\varepsilon^2)}{q^2\varepsilon^2} y_1^2 \text{ или } \frac{x_1^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\frac{q\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} = 1$$

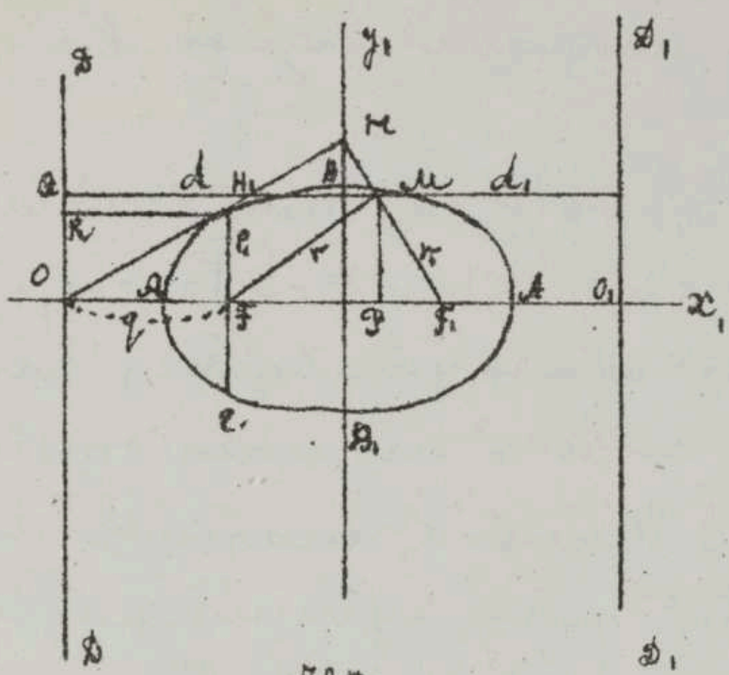
Теперь сравнивая это уравненіе извѣстною формулою: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, получимъ полуоси:

$$a = \frac{q\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \text{ и } b = \frac{q\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}};$$

изъ сравненія видимъ, что $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ и такъ какъ $\varepsilon < 1$, то слѣдовательно $b < a$, т. е. a есть большая полуось. Мы опредѣлили положеніе центра и величину полуосей по отношенію къ данному фокусу и

направляющей линии; но чаще приходится принимать за данные в эллипсе эти построения и реконструировать эллипс, относительный к его центру и к осям. Тогда нужно будет на оборот определить положение фокуса и направляющей линии относительно центра. Сделаем это в разобранном случае. Построим центр. Абсцисса центра d очевидно больше q. Пусть $OC = d$. Построим новые оси cx_1 и cy_1. Строим эллипс относительно новых осей. Для определения фокуса вычислим расстояние $CF = c = OC - OF = \frac{q}{1-\varepsilon^2} - q = \frac{\varepsilon^2 q}{1-\varepsilon^2}$. Сравнивая c с a, мы видим, что $c = a \cdot \varepsilon$. Положение направляющей определится расстоянием $x = d = \frac{q}{1-\varepsilon^2}$; следовательно $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Постоянная величина ε называется эксцентрицитетом эллипса, он < 1, $e = cF$ называется фокусным расстоянием (фиг.). Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, т. е. он есть отношение фокусного расстояния к большей полуоси. Это есть число отвлеченное. До сих пор мы имеем один фокус F и одну направляющую линию DD_1, соответствующую

этому фокусу. Но заметивъ, что эллипсъ расположенъ симметрично относительно оси Cy'. Поэтому отложивъ $CF' = CF = c$, будемъ имѣть другой фокусъ F', а отложивъ $co_1 = co = \frac{a}{\varepsilon}$ получимъ другую направляющую линію $D'D_1'$. Разстояніе OC или o_1c легко построить. Именно, замѣтивъ, что $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c}$. Отложимъ на оси y_1 длину $cH = a$; соединимъ точку H съ F_1. Въ точкѣ H возставимъ къ HF_1 перпендикуляръ: этотъ перпендикуляръ пройдетъ черезъ точку O. Въ самомъ дѣлѣ, въ прямоугольномъ треугольникѣ имѣемъ: $Hc^2 = oc \cdot F_1c$ и отсюда $oc = \frac{Hc^2}{F'c} = \frac{a^2}{c}$. Выведемъ выраженія радіусовъ векторовъ эллипса въ функціи абсциссы, считаемой отъ центра; возьмемъ произвольную точку M, проведемъ два радіуса вектора FM и F_1M, одинъ r, а другой r_1. Текущій



чер.

координата $MP = y_1$, имѣемъ $CP = x_1$. Возьмемъ радіусы M отъ направляющихъ d и d_1, будемъ имѣть:

$r = \varepsilon d$ или $r = \varepsilon(OC + x_1) = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x_1\right)$ или $r = a + \varepsilon x_1$.

Точно также: $r_1 = \varepsilon d_1 = \varepsilon(OC - x_1) = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x_1\right) = a - \varepsilon x_1$.

Изъ этихъ формулъ обнаруживается главное свойство всѣхъ точекъ эллипса относительно фокусовъ. Именно, сколько ихъ, находящихъ $r + r_1 = 2a$, или сумма радіусовъ векторовъ равна большой оси.

Гипербола.

Пусть DD есть направляющая линія, F фокусъ M - произвольная точка кривой. Имѣемъ: $OF = c$, $OP = cx$, $MP = y$. По опредѣленію имѣемъ: $\frac{r}{d} = \varepsilon$. Здѣсь будетъ эксцентрицитетъ и для гиперболы онъ больше 1. Мы получимъ уравненіе кривой въ такомъ видѣ:

$y^2 + (x-a)^2 = \varepsilon^2 x^2$ или $(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2 + 2cx - c^2 = 0$

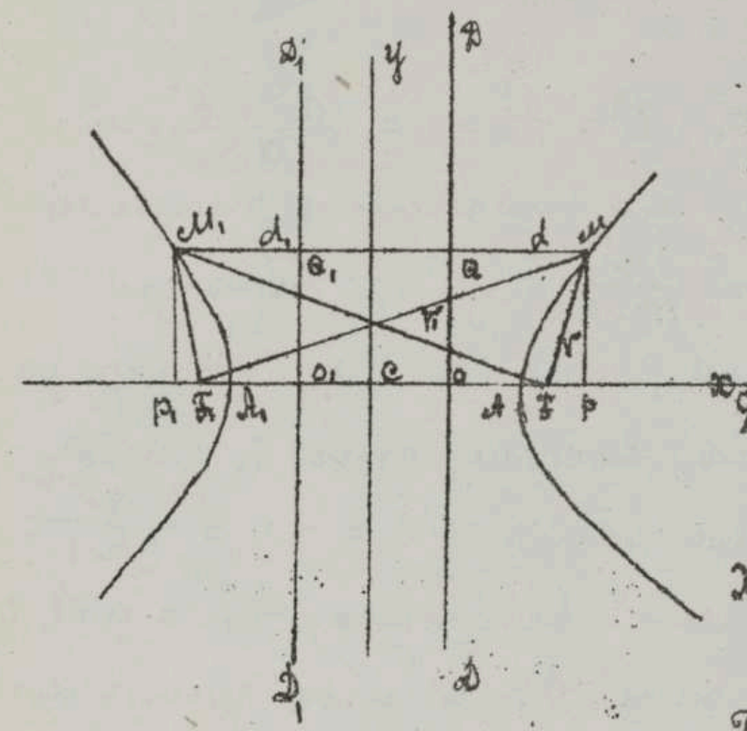
(фиг.) Опредѣлимъ центръ и полюсы гиперболы. Перенесемъ начало координатъ въ центръ, полагая:

$x = x_1 + \alpha$ и $y = y_1 + \beta$. Уравненіе кри-

вой будет: $A x_1^2 + B x_1 y_1 + C y_1^2 + F_1 = 0$. Въ нашемъ случаѣ оно будетъ:

$(\varepsilon^2 - 1) x_1^2 - y_1^2 + F_1 = 0$, причемъ

$$F_1 = \frac{Da + \varepsilon B}{2} + F.$$



Фиг.

Для опредѣленія координатъ центра α и β составимъ два уравненія:

$2(\varepsilon^2 - 1)x + 2q = 0$ и $-2y = 0$.

Находимъ:

$x = -\frac{q}{\varepsilon^2 - 1} = \alpha$ и $y = 0 = \beta$.

Слѣдовательно

$$F_1 = -\frac{q^2}{\varepsilon^2 - 1} - q^2 = -\frac{q^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Поэтому уравненіе гиперболы, отнесенной къ центру и къ осямъ, будетъ:

$$(\varepsilon^2 - 1) x_1^2 - y_1^2 = \frac{q^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Чтобы опредѣлить ея полуоси, приведемъ это уравненіе къ виду $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. Имѣемъ:

$\frac{\varepsilon^2 - 1}{q^2 \varepsilon^2} x_1^2 - \frac{\varepsilon^2 - 1}{q^2 \varepsilon^2} y_1^2 = 1$ $\quad \frac{x_1^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}\right)^2} - \frac{y_1^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\right)^2} = 1$. Теперь имѣемъ получили гиперболы:

$$a = \frac{q\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \text{ и } b = \frac{q\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}.$$ такъ какъ q и ε даны, то слѣдовательно по этимъ формуламъ a и b будутъ найдены. Сравненіе формулъ, выражающихъ a и b, показываетъ, что $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$. Если теперь полу-

оси a и b считать данными, то из последнего равенства легко определить эксцентриситет.

Имеем: $\sqrt{\varepsilon^2-1} = \frac{b}{a}$, $\varepsilon^2-1 = \frac{b^2}{a^2}$, $\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}+1 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ и $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. Построим на нашем чертеже центр. Имеем $\alpha = -\frac{q}{\varepsilon^2-1}$ и $\beta = 0$. Так как $\varepsilon > 1$, то очевидно, что $\alpha < 0$, следовательно центр будет влево от O, положение в точке C. Имеем $OC = -\alpha = \frac{q}{\varepsilon^2-1}$. Сравнивая a и OC, мы видим, что $a = \varepsilon \cdot OC$, следовательно a больше OC и мы имеем $OC = \frac{a}{\varepsilon}$. Это выражение определяет положение направляющей линии относительно центра. Положение фокуса относительно центра определяется разностью

CF, а $CF = OC + OF = \frac{q}{\varepsilon^2-1} + q = \frac{q\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}$; следовательно $CF = a \cdot \varepsilon$. Отложим полуось Ae, так что $AA_1 = a$ и влево $CA_1 = CA = a$. Мы имеем один фокус и одну направляющую линию, но так как гипербола расположена симметрично относительно оси Cy, то следовательно у нее должен быть другой фокус и другая направляющая линия, симметричная с первой. Отложим:

$cF_1 = cF = a.\ b = oc,\ oc_1 = oc = \frac{a}{\varepsilon}$. Отъ двухъ фокусовъ въ точку M можно провести два радіуса вектора, причемъ одинъ $MF = r$ и $MF_1 = r_1$. Выведемъ выраженіе радіусовъ векторовъ въ функціи абсциссы считаемой отъ центра. Продолжимъ MA до точки Q_1 взявъ $MQ_1 = d$. и $MF_1 = r_1$. Имѣемъ $\frac{r}{d} = \varepsilon$, $r = d\varepsilon$ или $r = [cp - co]\,\varepsilon = \varepsilon\left[x_1 - \frac{a}{\varepsilon}\right] = \varepsilon x_1 - a$. Можно также $\frac{r}{d} = \varepsilon$, отсюда:

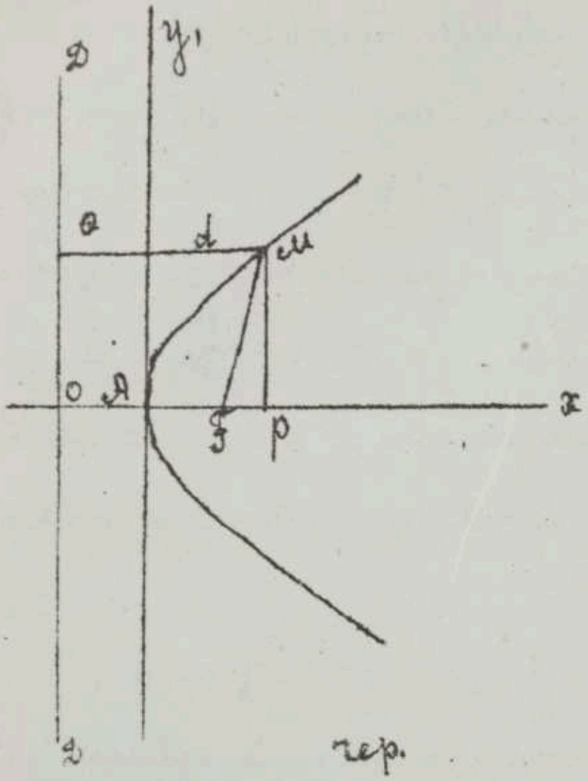
$$r = d\varepsilon = \varepsilon(cp - co') = \varepsilon\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right) = \varepsilon x + a.$$

Изъ этихъ выраженій получаемъ главное свойство всѣхъ точекъ гиперболы относительно фокусовъ, именно, взявъ разность, находимъ $r - r_1 = 2a$, т. е. разность радіусовъ векторовъ равна главной оси. Мы вывели выраженіе радіусовъ векторовъ для правой вѣтви гиперболы; подобно этому выведемъ ихъ и для лѣвой.

Парабола.

Парабола получится, когда $\varepsilon = 1$. При прежнихъ осяхъ координатъ уравненіе будетъ $y^2 + (x - q)^2 = x^2$ или $y^2 - 2qx + q^2 = 0$ для каждой точки имѣемъ $r = d$. Поэтому раздѣливъ

OF помещать въ точкѣ A, получимъ $OA = AF = \frac{q}{2}$.



чер.

Перенесемъ начало въ точку A. Полагаемъ:

$$x = x_1 + \frac{q}{2}, \text{ а } y = y_1.$$

Уравненіе будетъ:

$y_1^2 - 2a\left(x_1 + \frac{q}{2}\right) + q^2 = 0$ или

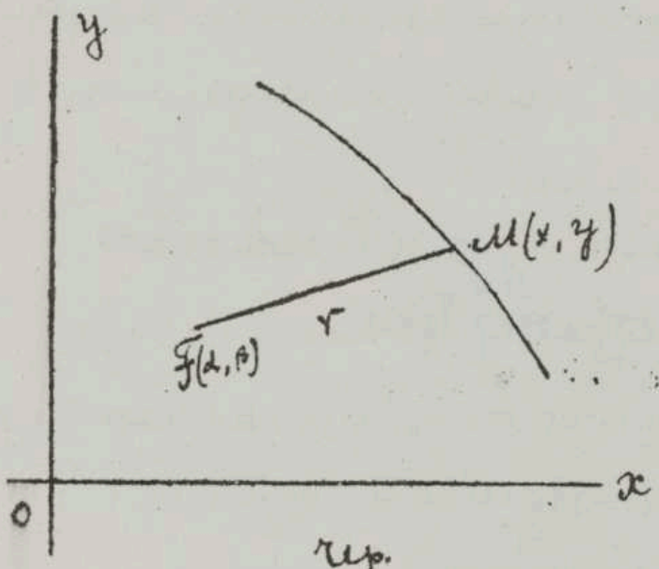
$y_1^2 - 2qx_1 - q^2 + q^2 = 0$ или $y_1^2 = 2qx_1$.

Это есть уравненіе параболы, отнесенной къ вершинѣ и къ оси. Чертимъ ее. Замѣтимъ и для параболы выраженіе радіусовъ векторовъ въ функціи отъ абсциссы. Возьмемъ произвольную точку M и строимъ ея координаты. Имѣемъ: $r = d = OA + PA = \frac{q}{2_1} + x_1$. Но въ параболѣ $q = p$ и потому $r = \frac{p}{2} + x_1$. Слѣдовательно и въ параболѣ радіусъ векторъ выражается линейною функціей абсциссы.

Общее опредѣленіе фокусовъ кривыхъ линій.

Изъ сдѣланнаго нами изслѣдованія видно, что во всѣхъ $3^{хъ}$ кривыхъ эллипсѣ, параболѣ и гиперболѣ радіусъ векторъ, т. е. разстояніе отъ фокуса до произвольной точки

кривой, выражается линейною функцией абсциссы. Можно доказать, что только кривыя второго порядка имеют такия определенныя точки, разстояния которых до произвольной точки кривой выражаются линейною функцией координат этой точки. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что мы имѣемъ какую нибудь кривую, отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ, и положимъ что для нея существуетъ такая постоянная точка F, то если возьмемъ разстояніе FM произвольной точки кривой, и обозначимъ его черезъ r, то будемъ имѣть $r = Ax + By + C$, гдѣ A, B и C будутъ нѣкоторыя постоянныя коэффиціенты.



чер.

Тогда замѣтимъ съ другой стороны, что $r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ и слѣдовательно должно имѣть $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (Ax + By + C)^2$ или $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (Ax + By + C)^2 = 0$. Это уравненіе представляетъ зависимость между координатами произ-

вольной точки кривой; следовательно это есть уравнение кривой. Оно 2ой степени относительно x_1, а потому разыскиваемая кривая есть одна изъ кривыхъ второго порядка. Вследствіе этого кривыя могутъ быть опредѣлены, какъ такія точки, которыхъ разстоянія отъ произвольной точки кривой выражаются линейными функціями координатъ. Это есть опредѣленіе Эйлера.

Общее полярное уравненіе кривыхъ 2го порядка.

Всѣ три кривыя - эллипсъ, гипербола и парабола могутъ быть выражены одними полярными уравненіями, если за полюсъ ихъ принять фокусъ, а за полярную ось принять ось проходящую черезъ этотъ фокусъ и направленную въ ближайшую вершину. Пусть DD есть направляющая (черт.) и точка F - фокусъ. Проведемъ $\perp$ OF на направляющую. Пусть A вершина кривой. Представимъ самую кривую, которая есть или эллипсъ или парабола, или гипербола. Положимъ $OF = q$. Примемъ за по-

лась точку F, а за полярную ось линію FO, взятую по направленію отъ фокуса къ направляющей. Тогда для точки M получимъ полярныя координаты $MF = r$ и $\angle OFM = \theta$. Изъ M опустимъ перпендикуляръ $MD = d$ на направляющую. По общему геометрическому представленію всѣхъ трехъ кривыхъ, имѣемъ:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon,$$ гдѣ $\varepsilon < 1$ въ случаѣ эллипса, $\varepsilon > 1$ въ случаѣ гиперболы и $\varepsilon = 1$ въ случаѣ параболы. Далѣе:

$r = \varepsilon d$. Но $d = OP = OF + FP = q + r\cos(180^\circ - \theta) = q - r\cos\theta$.

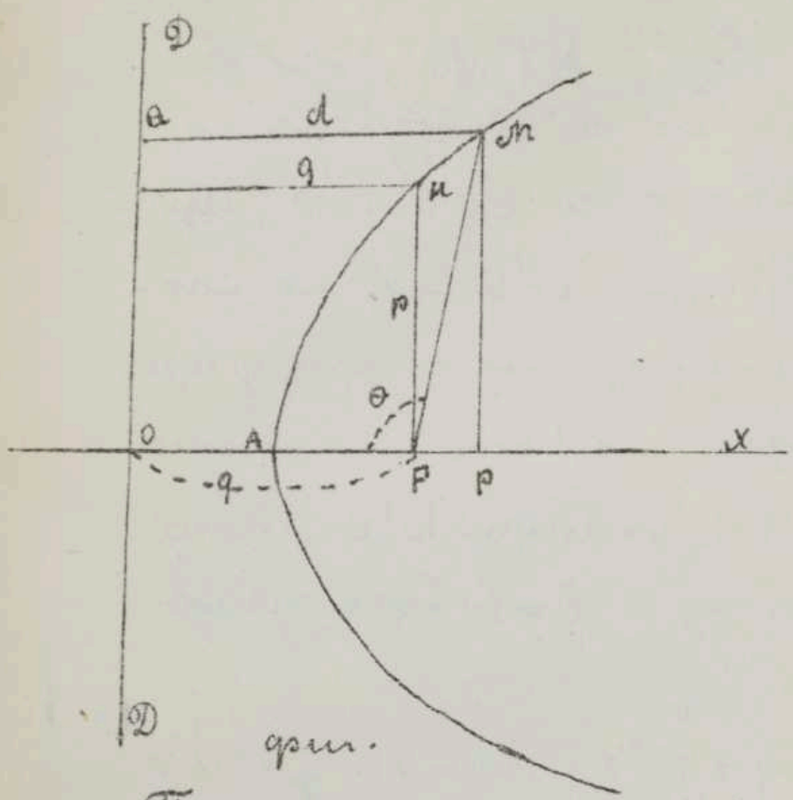
Поэтому $r = q\varepsilon - r\varepsilon\cos\theta$ или $r(1+\varepsilon\cos\theta) = q\varepsilon$.

отсюда $r = \dfrac{q\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\theta}$. Проведемъ ординату черезъ фокусъ FM. Эта ордината FM есть полупараметръ p. Опустимъ изъ M перпендикуляръ на DD; получимъ разстояніе q и должны имѣть $\dfrac{p}{q} = \varepsilon$. Отсюда $p = q\varepsilon$, такъ что можно написать.

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

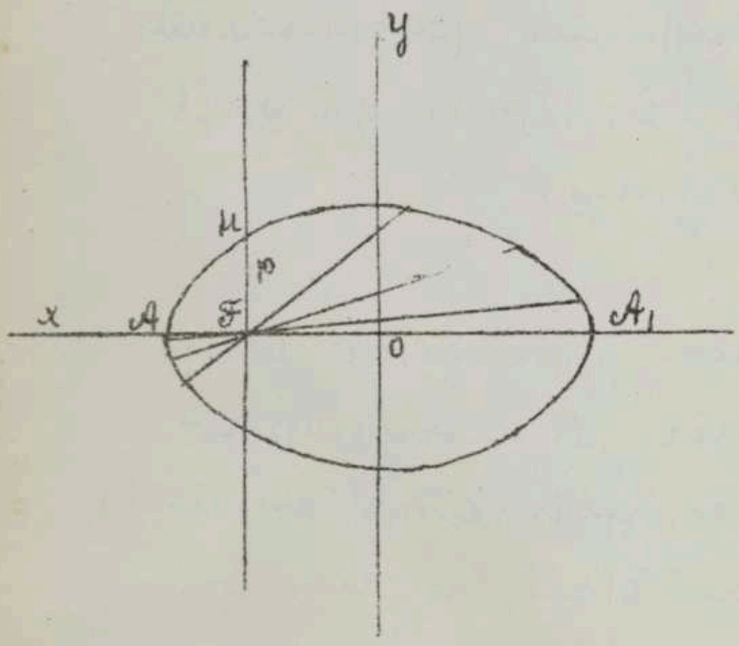
Это есть общее полярное уравненіе всѣхъ трехъ кривыхъ. Въ немъ p полупараметръ. Уравненіе представляетъ эллипсъ, если $\varepsilon < 1$, параболу если $\varepsilon = 1$ и гиперболу если $\varepsilon > 1$. Если-бы форма кривой не

была нам известна, то мы могли бы ее восстановить по-этому уравнению. Рассмотрим три случая: Положим, что $\varepsilon < 1$. Кривая будет эллипс. Возьмем фокус F и полярную ось Fx. Из уравнения видим, что когда $\theta = 0$, то $\cos\theta = 1$. и $r = \frac{p}{1+\varepsilon}$.



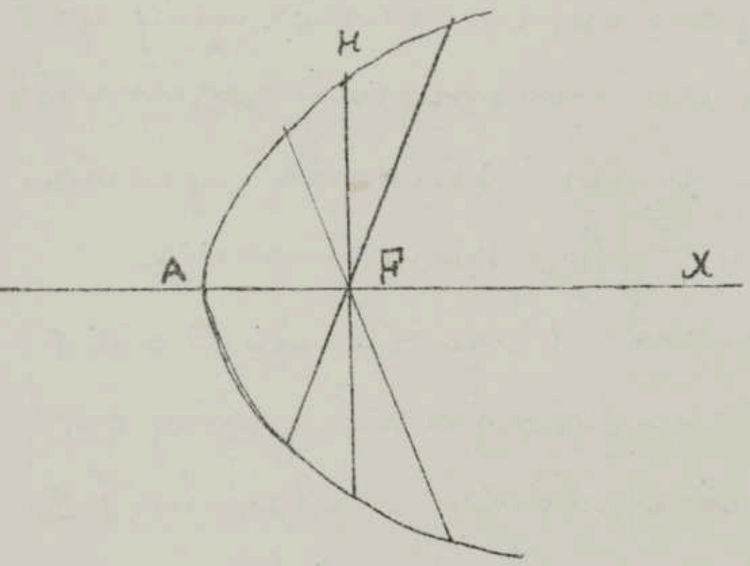
фиг.

Пусть эта величина будет FA. Точка A есть точка кривой. Далее, если θ увеличивается, $\cos\theta$ уменьшается и r увеличивается. Когда $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $r = p$. Построим $FH = p$. Если θ еще больше увеличивается, r тоже увеличивается. Когда $\theta = \pi$, $r = \frac{p}{1-\varepsilon}$. Отложим эту величину до точки A_1. Теперь можем начертить верхнюю часть кривой. Дальше, если θ будет

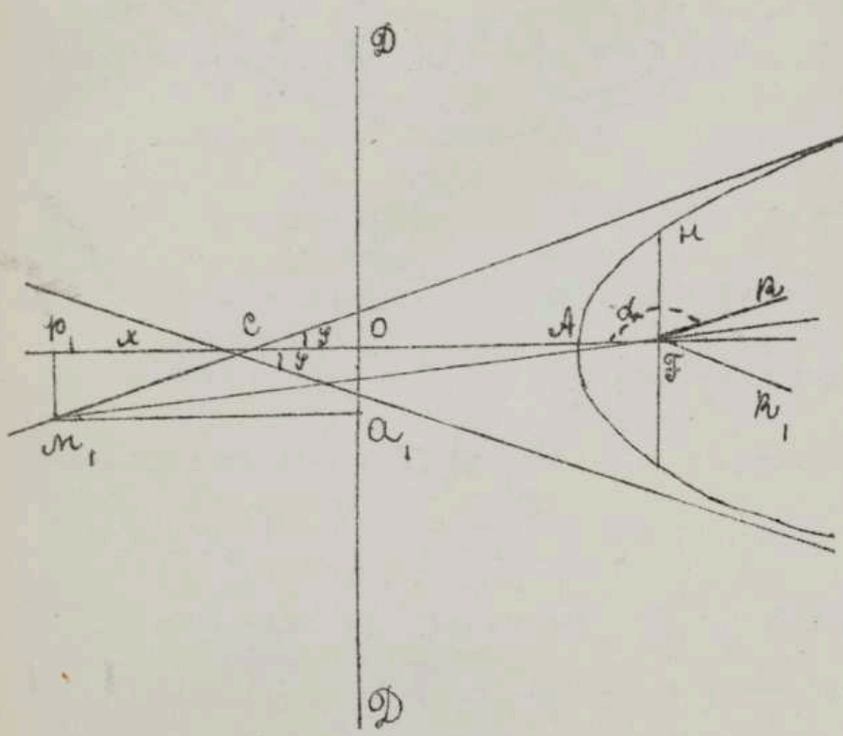


фиг.

давать отрицательные значения, то r будет получать те-же значения, как и при положительном θ, так что вниз от полярной оси получится вторая кривой, симметричная первой. Этим фигура эллипса определяется. Пусть ε=1, кривая будет парабола. Возьмем фокус F и полярную ось Fx. Здесь имеем, когда θ=0, то $r = \frac{p}{1+1} = \frac{p}{2}$ FA. Если θ увеличивается, r тоже увеличивается. Когда $\theta = \frac{\pi}{2}$, r = p = FH. Когда θ = π, то r = ∞. Получим таким образом бесконечную ветвь. При отрицательном θ. радиус вектор r получает такие же значения; ветвь от этого вниз от полярной оси получится вторая, симметричная верхней. Пусть ε > 1 Возьмем фокус F и полярную ось. Здесь имеем, когда (фиг.) θ=0, то $r = \frac{p}{1+\varepsilon}$ = FA. Когда θ увеличива-



ется, r увеличивается, но в этом случае Θ может увеличиваться только до известного предела, когда знаменатель обратится в нуль. Называя этот предел $\Theta = \alpha$, будем иметь $1 + \varepsilon \cos\alpha = 0$. Отсюда $\cos\alpha = -\frac{1}{\varepsilon}$. Это равенство определяет величину угла α, которую можно поэтому считать известною. Построим этот угол. Пусть он будет AFK, так что $\angle AFK = \alpha$. При этой величине $\Theta = \alpha$, получим $r = \infty$. Вообразим эту бесконечную ветвь гиперболы. Линия FK уже не встретится этой ветви или встретится только в бесконечности. Если Θ будем приписывать значения от $\Theta = 0$ до $\Theta = -\alpha$, то r будет получать те-же самые величины, как прежде. Так что построив $\angle AFK_1 = -\alpha$, мы



получить прямую, которая встретит кривую только в бесконечности. Таким образом наше уравнение даст только одну правую ветвь гиперболы. Чтобы лучше определить направление FR и FR_1, вычислим угол φ. Очевидно, что $\varphi = 180° - \alpha$. Найдем его тангенс:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{-\frac{1}{\varepsilon}} =$$
$$= -\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Выразим ε через полуоси в виде:

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}.$$

Следовательно $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}}$;

окончательно получим $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}$.

Это показывает, что две рассматриваемые прямые параллельны асимптотам гиперболы. Точки этой ветви гиперболы получатся, когда θ будет изменяться от $\theta = \alpha$ до $\theta = \pi$ и еще от $\theta = -\alpha$ до $\theta = -\pi$. При этих значениях θ мы будем иметь, что:

$$\cos\theta < -\frac{1}{\varepsilon} \text{ и } \varepsilon\cos\theta < -1,$$

откуда знаменатель $1 + \varepsilon\cos\theta$ будет < 0 и мы будем иметь $r < 0$. Примем $r = -r_1$, где $r_1 > 0$. Возьмем какое-нибудь зна-

равнений под углом большим α, напр. FS. Тогда, так как r отрицательно, то чтобы получить точку кривой, нужно продолжить FS в противоположную сторону и отложить длину $FM_1 = r_1$. Точка M_1 будет принадлежать гиперболе. Во этом можно удостовериться и непосредственно. Проведем направляющую линию DD. Опустим из M_1 перпендикуляр на DD имеем M_1Q_1, и на полярную ось M_1P_1. Будет $M_1Q_1 = d_1$. Из чертежа имеем: $d_1 = FP_1 - OF = r_1\cos(180^\circ - \theta) - q$, или $d_1 = -r_1\cos\theta - q$. Но $q = \frac{p}{\varepsilon}$; следовательно:

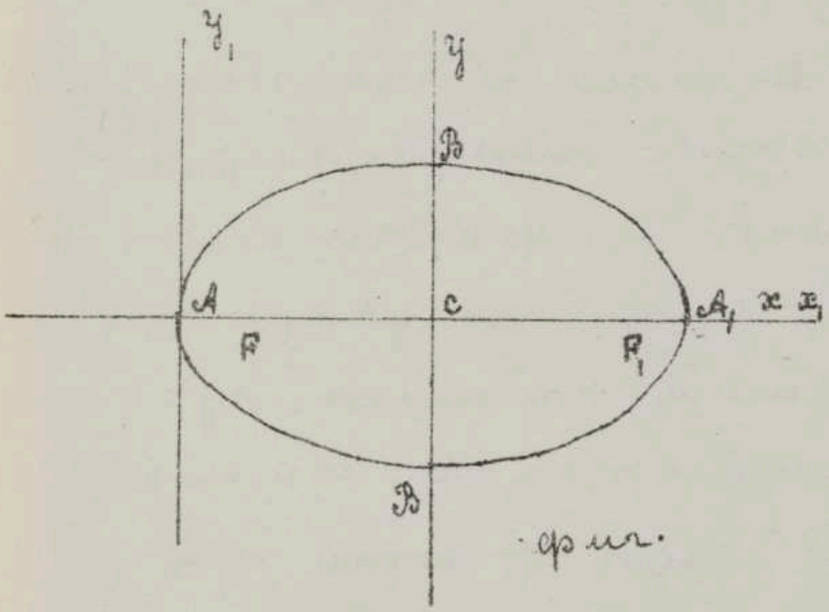
$$d_1 = -r_1\cos\theta - \frac{p}{\varepsilon}. \text{ Далее } -r_1 = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}; \text{ следовательно } d = \frac{p\cdot\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \frac{p}{\varepsilon} = -\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon\cos\theta)}.$$

Сравнивая d_1 с r_1, мы легко видим, что $d_1 = \frac{r_1}{\varepsilon}$ или $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ а это показывает, что точка M_1 принадлежит гиперболе. Итак наше полярное уравнение дает не только все точки правой ветви гиперболы, но и все точки левой, если только будем строить

отрицательныя значенія радіуса вектора.

Общее уравненіе трехъ кривыхъ 2го порядка отнесенныхъ къ вершинѣ и фокальной оси.

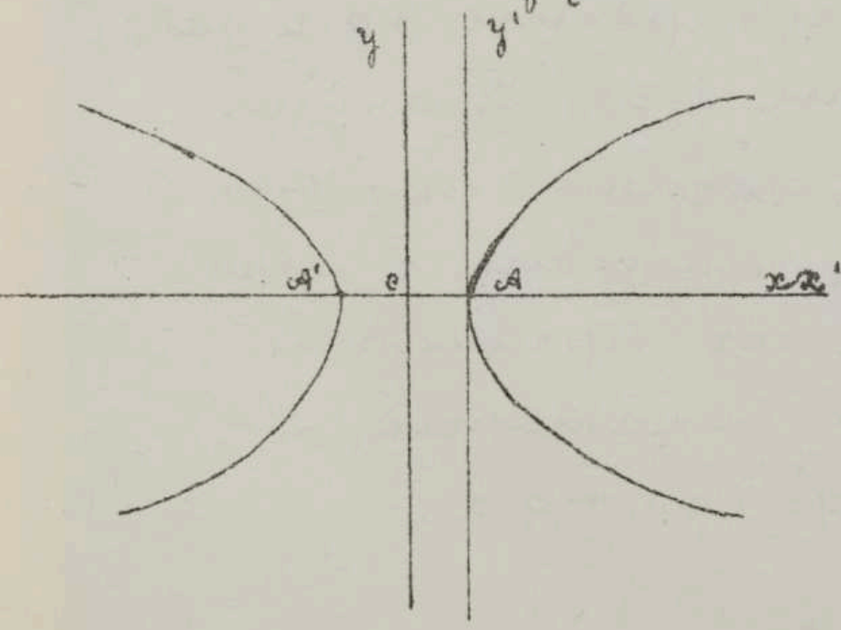
Разсмотримъ эллипсъ. Возьмемъ его уравненіе относительно центра и осей. Уравненіе эллипса есть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



фиг.

Перенесемъ начало координатъ въ вершину A (фиг.) а за ось y примемъ ось Ay_1 такъ какъ $Ac = a$, то формулы перехода будутъ: $x = x - a$, $y = y_1$. Вставивъ въ уравненіе эллипса найдемъ: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{2x_1}{a} + x' + \frac{y_1^2}{b^2} = x$. Отсюда $y^2 = \frac{2b^2}{a} x_1 - \frac{b^2}{a} x_1^2$ или приложивъ, что $\frac{b^2}{a} = p$, получимъ $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}$ и наше уравненіе будетъ:

$y^2 = 2px_1 - \frac{p}{a} x_1^2$



Возьмем теперь гиперболу отнесенную к центру и к осям. Ее уравнение будет $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перенесем координаты в A. Формулы преобразования будут: $x = x_1 + a$, и $y = y_1$ Вставив это в уравнение получим:

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{2x_1}{a} + 1 - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, отсюда $y_1^2 = \frac{2b^2}{a} x_1 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2$.

Если положить $\frac{b^2}{a} = p$, то уравнение будет:

$$y_1^2 = 2px_1 + \frac{p}{a} x_1^2 .$$

Если к уравнениям эллипса и гиперболы присоединим уравнение параболы, отнесенной к вершине и продольной оси, т. е. уравнение $y_1^2 = 2px_1$, то увидим, что все эти три уравнения имеют одинаковый вид и заключаются в общем уравнении: $y^2 = 2px + qx^2$, где p есть полупараметр кривой, а q для эллипса < 0 и равно $-\frac{p}{a}$, для гиперболы > 0 и равно $+\frac{p}{a}$; для параболы $q = 0$. Таким образом мы можем сказать, что все три кривые - эллипс, гипербола и парабола, будучи отнесены к вершине и продольной оси будут выражаться общим уравнением: $y^2 = 2px + qx^2$.

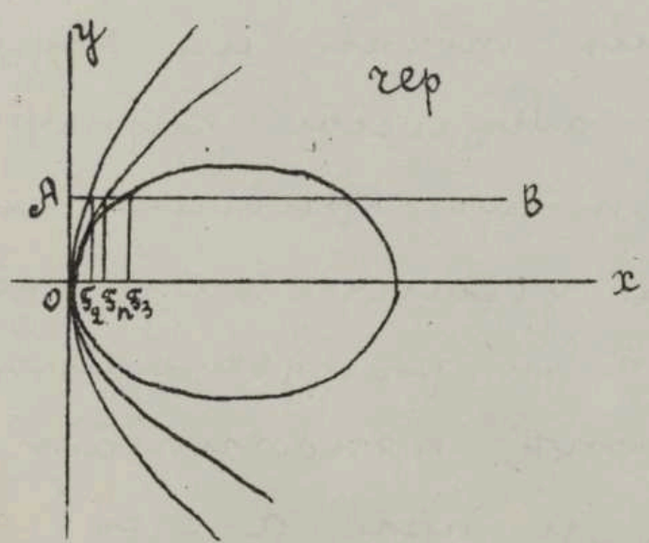
Теорема. Предѣлъ эллипса или гипер-
болы, параметръ которыхъ имѣетъ
постоянную и конечную величину, а боль-
шая ось неопредѣленно увеличивается есть
парабола. Возьмемъ эллипсъ, гиперболу
и параболу, имѣющіе одинъ и тотъ
же параметръ p (фиг.). Уравненія
этихъ трехъ кривыхъ суть:

Эллипсъ ..... $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$

парабола ..... $y^2 = 2px$

гипербола ..... $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$.

Возьмемъ прямоугольную систему коор-
динатъ xoy; на оси Oy отъ O отложимъ
часть OA = p и проведемъ AB парал-
но оси ox. Изъ точекъ пересѣченія этой
прямой съ кривыми опускаемъ пер-
пендикуляры на ось
ox; получимъ три
точки F_3, F_n, F_2, ко-
торыя суть фокусы
нашихъ кривыхъ,
ибо параметръ есть
величина перпенди-
кулярa къ большой



чер

оси, восставленного из фокуса. Фокусъ эллипса лежитъ правѣе, чѣмъ фокусъ параболы, а фокусъ гиперболы лежитъ лѣвѣе фокуса параболы. Сравнивая уравненія этихъ кривыхъ, мы замѣчаемъ, что при одной и той же величинѣ x ордината эллипса всегда меньше ординаты параболы, а ордината гиперболы всегда больше ординаты параболы. Слѣдовательно эллипсъ всѣми своими точками лежитъ внутри параболы, точно также гипербола всѣми своими точками лежитъ внѣ параболы. Уравненіе эллипса есть $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, параболы $y^2 = 2px$; возьмемъ точки на эллипсѣ и на параболѣ, абсциссы которыхъ равны (параметръ этихъ кривыхъ также равенъ) и будемъ увеличивать большую ось эллипса. По мѣрѣ увеличенія a точка эллипса будетъ приближаться къ точкѣ параболы и при $a = \infty$ сольется съ ней, потому что уравненіе

эллипса принять видъ:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2 \text{ или } y^2 = 2px$$

Точно такъ же увеличивая дѣйствительную ось гиперболы, мы заставимъ точку гиперболы приближаться къ точкѣ параболы, и при $a = \infty$ эти точки сольются, уравненіе гиперболы будетъ:

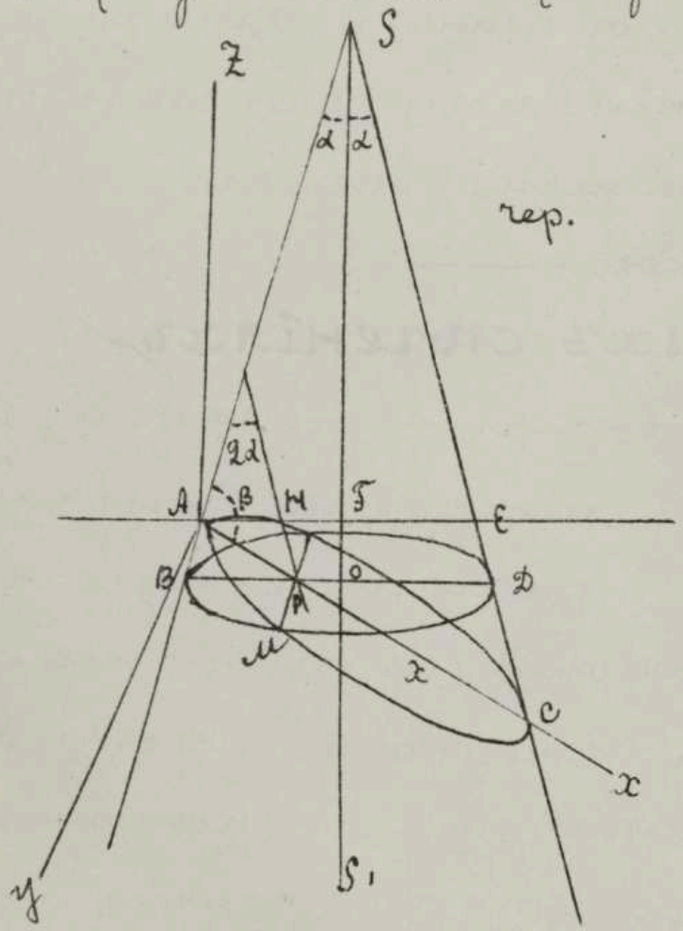
$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2 \text{ или } y^2 = 2px.$$

Итакъ парабола есть предѣлъ эллипса и гиперболы, у которыхъ параметръ есть величина постоянная и конечная, а большая ось эллипса или дѣйствительная гиперболы безконечно велики.

О коническихъ сѣченіяхъ.

Всѣ три кривыя втораго порядка: эллипсъ, парабола и гипербола получаются при разсѣченіи прямого конуса плоскостью въ различныхъ ея положеніяхъ. Возьмемъ прямой конусъ и пусть SS_1 есть ось конуса, лежащая въ плоскости чертежа. Разсѣчемъ этотъ конусъ произвольною плоскостью и положимъ, что плоскость чертежа перпендикулярна къ

секущей плоскости. Плоскость чертежа пересекает конусъ по двумъ прямымъ, одинаково наклоненнымъ къ оси. Пусть эти образующія дѣлаютъ съ осью одинаковые углы α. Пусть прямая Ax есть сѣченіе секущей плоскости съ плоскостью чертежа на поверхности конуса получится кривая линія Ae. Положеніе секущей плоскости мы опредѣлимъ разстояніемъ $AS = d$ и угломъ $SAx = \alpha$. Чтобы изслѣдовать кривую, полученную сѣченіемъ мы составимъ ея уравненіе.



чер.

Примемъ точку A за начало координатъ, прямую Ax за ось абсциссъ. Ось ординатъ возьмемъ перпендикулярно къ Ax въ плоскости кривой.

Возьмемъ на кривой произвольную точку M. Опустимъ изъ нея перпендикуляръ

MP на Ax. Будемъ имѣть координаты точки $Ap = x$ и $Mp = y$.

Прямая MP перпендикулярна къ плоскости чертежа. Черезъ эту прямую проведемъ плоскость, перпендикулярную къ оси конуса SS_1. Эта плоскость пересѣчетъ плоскость чертежа по прямой BD перпендикулярной къ оси, а конусъ по кругу BmD. Въ кругъ BmD прямая pm будетъ средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра pB и pD. Имѣемъ поэтому:

$$y^2 = pB \cdot pD.$$

Разсмотримъ $\triangle ABP$. Въ немъ имѣемъ:

$$\frac{pB}{x} = \frac{\sin(180-B)}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\sin B}{\cos\alpha}$$

отсюда $BP = \frac{\sin B}{\cos\alpha} x$. Чтобы вычислить pD, проведемъ черезъ точку A параллельно BD линію AE, черезъ P линію pH, параллельно Sc. Имѣемъ:

$$pD = HE = AE - AH = 2A5 - AH = 2d \cdot \sin\alpha - AH.$$

Въ треугольникѣ AHP, имѣемъ:

$$\frac{AH}{x} = \frac{\sin(B+2\alpha)}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\sin(B+2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Отсюда $AH = \frac{\sin(B+2\alpha)}{\cos\alpha} x$, откуда

$$PD = 2d\sin\alpha - \frac{\sin(B+2\alpha)}{\cos\alpha} x.$$ Вычисля-

ния pB и PD вставимъ въ выражение y.

Будемъ имѣть:

$$y^2 = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} x \left(2d \sin\alpha - \frac{\sin(\beta+2\alpha)}{\cos\alpha} x\right)$$

или $$y^2 = \frac{2d\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha} x - \frac{\sin(\sin\beta+2\alpha)\sin\beta}{\cos^2\alpha} x^2.$$

Это есть уравнение нашей кривой и мы видимъ, что это уравнение имѣетъ такой видъ:

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Здѣсь имѣемъ:

$$p = \frac{d\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha}, \text{ а } q = -\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\beta+2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Слѣдовательно кривая сѣченія есть или эллипсъ, или парабола, или гипербола; при томъ начало A есть вершина кривой, а прямая Ax есть фокальная ось кривой. Разсмотримъ, когда ее имено въ сѣченіи получится эллипсъ, когда парабола и когда гипербола. Это зависитъ отъ знака q. Величина p всегда положительная, потому что $\sin\alpha$, $\sin\beta$ и $\cos\alpha$ величины положительныя, такъ какъ $\alpha < 90°$, а $\beta < 180°$ и слѣдовательно p всегда > 0. Въ выраженіи q имѣемъ $\sin\beta > 0$, $\cos^2\alpha$ также > 0 и знакъ q будетъ обратный со знакомъ

множителя $\sin(\beta + 2\alpha)$. Поэтому, если сумма углов $\beta + 2\alpha$ меньше 180°, то тогда $\sin(\beta + 2\alpha)$ будет больше 0 и $q < 0$. Кривая будет эллипс. Если же $\beta + 2\alpha$ будет $= 180^\circ$, то $\sin(\beta + 2\alpha) = 0$ и $q = 0$. Кривая будет парабола. Наконец, если $\beta + 2\alpha > 180^\circ$, то $\sin(\beta + 2\alpha)$ будет < 0 и $q > 0$ и кривая будет гипербола. Обращаясь к чертежу, мы видим, что углы β и 2α суть углы внутренние, односторонние относительно прямых Ax и SD. Следовательно в первом случае эти прямые будут пересекаться, во втором они будут параллельны и в третьем они будут опять пересекаться, но при продолжении уже в противоположную сторону. Но так как SD есть образующая конуса, то заключаем окончательно: 1) Если секущая плоскость пересекает весь образующий одной плоскости конуса, то в сечении получается эллипс 2) Если секущая плоскость параллельна одной из образующих, то в сечении получаем

параболу. Наконецъ 3) если секущая плоскость пересекаетъ образующую объемъ полостей конуса, то въ сѣченіи получается гипербола. По обнаруженному свойству, кривыя второго порядка называются часто коническими сѣченіями.

Замѣчаніе о сѣченіи цилиндрическомъ.

Прямой круглый цилиндръ есть частный случай прямого кругового конуса. Именно, чтобы этотъ конусъ перешелъ въ цилиндръ, стоитъ только уменьшать уголъ α, удаляя вершину S въ ∞. Въ предѣлѣ образующая AS будетъ параллельна оси SS_1, и конусъ обратится въ цилиндръ, когда α будетъ $=0$. Изъ этого замѣчанія вытекаетъ возможность получить сѣченіе цилиндра, какъ частный случай разсмотрѣннаго нами коническаго сѣченія. Именно, принимая точку A неподвижною, а вершину S будемъ удалять въ безконечность. Положимъ, что $AF = k$. Эта величина будетъ оставаться постоян-

ного. Изъ треугольника AOS имѣемъ: $R = d \cdot \sin\alpha$ и уравненіе нашего сѣченія можно написать такъ:

$$y^2 = \frac{2R \sin\beta}{\cos\alpha} x - \frac{\sin\beta \cdot \sin(\beta + 2\alpha)}{\cos^2\alpha} x^2.$$

Чтобы получить цилиндрическое сѣченіе, нужно сдѣлать въ предыдущемъ $d = \infty$ и уголъ $\alpha = 0$. Уголъ β обратится въ уголъ $ZAx = \theta$, причемъ AZ параллельна SS_1. Въ предѣлѣ получимъ уравненіе:

$$y^2 = 2R \sin\theta \cdot x - \sin^2\theta \cdot x^2$$

Это уравненіе имѣетъ прежній видъ

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

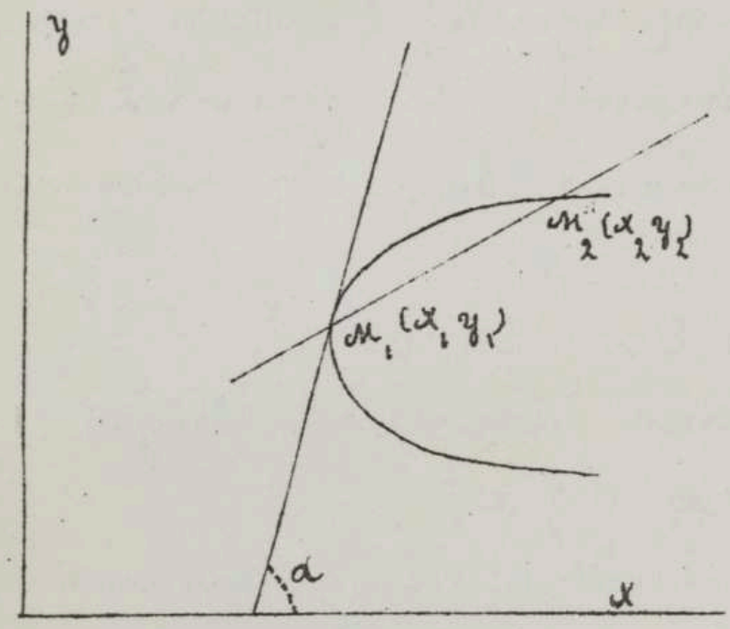
но только здѣсь $q = -\sin^2\theta$ и слѣдовательно всегда будемъ имѣть $q < 0$. Сѣченіе всегда будетъ Эллипсъ.

О касательныхъ линіяхъ къ кривымъ 2го порядка

Составимъ во первыхъ общее уравненіе касательныхъ къ кривымъ второго порядка въ данной точкѣ. Пусть уравненіе кривой будетъ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Пусть координаты данной точки M_1 на кривой будут (x_1, y_1). Проведем сначала секущую линию через точку M_1, которая пересекает кривую еще в другой точке $M_2(x_2, y_2)$. Затем представим себе что точка M_2 перемещается по кривой и стремится совпасть с точкой M_1. Касательная линия будет предельное положение секущей.



Это получится, когда точка M_2 совпадет с M_1. Уравнение секущей, как прямой, проходящей через две точки будет

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

и следовательно в пределе $m = \frac{0}{0}$. Отсюда видно, что по предыдущему выражению m нельзя получить углового коэффициента касательной. Это потому, что мы еще ничего не знаем, что точки M_1 и M_2 лежат на данной кривой. Коор-

динаты этих точек M_1 и M_2 удовлетворяют уравнению кривой, а потому имеем:

$$A x_2^2 + B x_2 y_2 + C y_2^2 + D x_2 + E y_2 + F = 0$$
$$A x_1^2 + B x_1 y_1 + C y_1^2 + D x_1 + E y_1 + F = 0$$

Вычитая эти два уравнения получим:

$$A(x_2^2 - x_1^2) + B(x_2 y_2 - x_1 y_1) + C(y_2^2 - y_1) + D(x_2 - x_1) + E(y_2 - y_1 = 0.$$

Здесь в коэффициенте при B прибавим

$$- x_1 y_2 + x_1 y_2$$

затем напишем наше равенство так:

$$A(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + B y_2 (x_2 - x_1) + B x_1 (y_2 - y_1) +$$
$$+ C(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + D(x_2 - x_1) + E(y_2 - y_1) = 0$$

или
$$(x_2 - x_1)[A(x_2 + x_1) + D + B y_2] =$$
$$= -(y_2 - y_1)[B x_1 + C(y_2 - y_1) + E].$$

Отсюда имеем пропорцию:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = - \frac{A(x_2 + x_1) + B y_2 + D}{B x_1 + C(y_2 + y_1) + E}.$$

Полученное выражение представляет угловой коэффициент секущей m, так что уравнение секущей можно написать в виде

$$y - y_1 = - \frac{A(x_2 + x_1) + B y_2 + D}{B x_1 + C(y_2 + y_1) + E}(x - x_1)$$

Чтобы перейти к касательной нужно в этом уравнении положить

$$x_2 = x_1 \text{ и } y_2 = y_1.$$

Получим уравнение касательной в точке (x_1, y_1);

$$y - y_1 = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}(x - x_1) \ldots\ldots (1).$$

Это уравнение касательной имеет один и тот же вид как при прямоугольных, так и при косоугольных осях.

Если оси прямоугольные, то назвав через α угол, образованный касательной с осью абсцисс будем иметь

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}$$

Уравнение касательной можно представить еще в другом виде. Для этого умножим на знаменатели и раскроем скобки:

$$[Bx_1 + 2Cy_1 + E]y - Bx_1y_1 - 2Cy_1^2 - Ey_1 = -[2Ax_1 + By_1 + D]x +$$
$$+ 2Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Dx_1 \text{ или } [2Ax_1 + By_1 + D]x +$$
$$+ [Bx_1 + 2Cy_1 + E]y = 2(Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2) + Dx_1 + Ey_1$$

но $Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 = -Dx_1 - Ey_1 - F$

Вставив, получим уравнение касательной:

$$[2Ax_1 + By_1 + D]x + [Bx_1 + 2Cy_1 + E]y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0 \ldots (2)$$

В этом уравнении коэффициенты при x и y - суть частные производные выражения по x_1 и y_1 от функции

$$f(x_1, y_1) = (Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F)$$

Зная уравнение касательной, мы можем построить касательную по ее уравнению. Построить касательную особенно удобно, когда кривая 2-го порядка дана относительно вершины и фокальной оси. Припомним, что в этом случае уравнение кривой есть:

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0.$$

Имеем в нем:

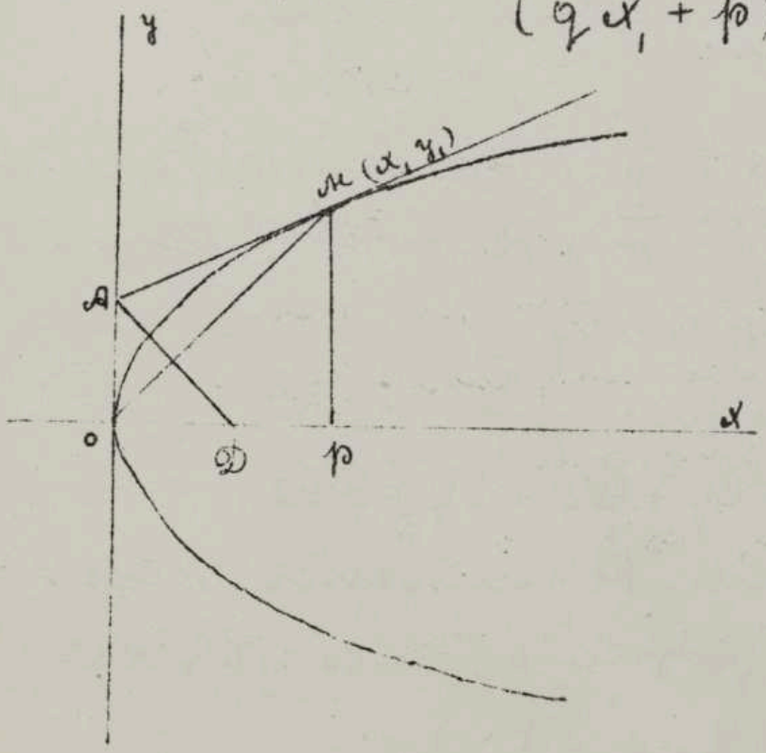
$$A = -q,\ B = 0,\ C = 1,\ D = -2p,\ E = 0,\ F = 0$$

Следовательно по формуле (1) уравнение касательной будет:

$$y - y_1 = -\frac{-2qx_1 - 2p}{2y_1}(x - x_1) = \frac{qx_1 + p}{y_1}(x - x_1)$$

Вставляя в уравнение (2) вместо A, B, C, D, E и F их значения, получим:

$$(qx_1 + p)x - y_1 y - px_1 = 0.$$



Пусть M есть данная точка (x_1, y_1). Определим ординату точки пересечения касательной с осью y; назовем эту ординату через y_0. Тогда для точки пересечения

будет иметь: $x=0$, а $y=y_0$ и уравнение даст: $y_0 - y_1 = -\frac{qx_1^2+px_1}{y_1}$. Отсюда

$$y_0 = y_1 - \frac{qx_1^2+px_1}{y_1}\ ;\ y_0 = \frac{y_1^2 - qx_1^2 - px_1}{y_1}$$

Но $y_1^2 = 2px_1 + qx_1^2$ и потому $y_0 = \frac{2px_1+qx_1^2-qx_1^2-px_1}{y_1} =$

$$= \frac{px_1}{y_1}.$$

Эту величину можно построить следующим образом (фиг.). Проведем ординату MP, отложим длину $OD = p$, соединим O с M и из точки D на линию OM опустим перпендикуляр. Он пересечет ось y в точке A. Определим длину OA: $\triangle OMP$ со $\triangle DAO$ и поэтому имеем:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OP}{MP} \quad \text{или} \quad \frac{OA}{p} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Отсюда $\frac{px_1}{y_1} = OA$. Мы видим, что $OA = y_0$; следовательно, если точку A соединить с M, то получим касательную.

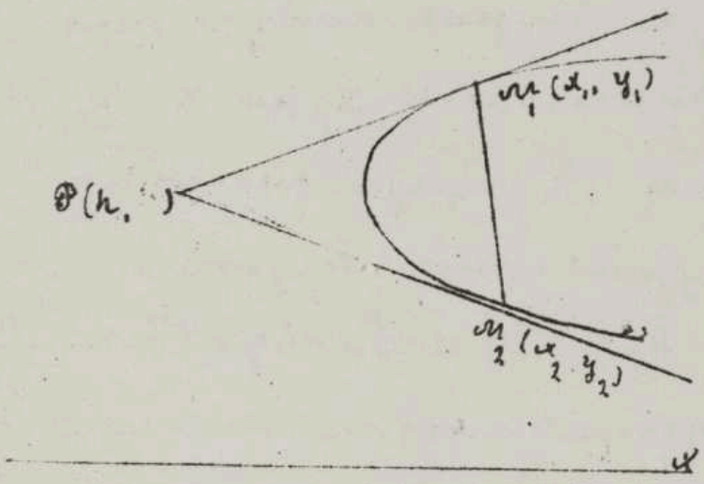
Задача. *Провести касательную к кривой второго порядка из данной внешней точки.*

Уравнение кривой есть:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Пусть данная точка P имеет координаты (k, κ). Вообразим, что две ка-

сательныя проведены. Пусть M и M будутъ точки соприкосновенія. Прямая $M\,M$ называется хордою прикосновенія, соотвѣтствующей точкѣ P. Очевидно, что если мы составимъ уравненіе этой хорды то, построивъ эту прямую по ея уравненію мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ точки M_1 и M_2. Затѣмъ соединивъ эти точки съ P, мы получимъ двѣ требуемыя касательныя. Итакъ рѣшеніе нашей задачи приводится къ составленію уравненія хорды соприкосновенія. Положимъ, что координаты точекъ M_1 и M_2 суть (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда уравненіе касательной $M_1 P$ по формулѣ (2) будетъ:



$$[2Ax_1 + By_1 + D]x + [Bx_1 + 2Cy_1 + E]y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0$$

Координаты точки $P(h, k)$ должны удовлетворять этому уравненію. Поэтому будемъ имѣть:

$$[2Ax_1 + By_1 + D]h + [Bx_1 + 2Cy_1 + E]k + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0 \ldots\ldots (1)$$

Точно такое уравнение касательной pM_2 по той же формуле (2) будет:

$$[2Ax_2 + By_2 + D]h + [Bx_2 + 2Cy_2 + E]k + Dx_2 + Ey_2 + 2F = 0 \ldots\ldots (2)$$

Напишем уравнение (3) которое получится из уравнения (1) через замену x_1 на x и y_1 на y, или из уравнения (2) через замену x_2 на x и y_2 на y. Это уравнение будет:

$$[2Ax + By + D]h + [Bx + 2Cy + E]k + Dx + Ey + 2F = 0 \ldots\ldots (3)$$

Рассмотрим, что представляет это уравнение, где y и x суть текущие координаты. Оно представляет некоторую прямую линию, так как оно 1-ой степени относительно x и y. Эта прямая проходит через точку M_1, потому что координаты этой точки x_1 и y_1, будучи вставлены вместо x и y в это уравнение, удовлетворяют уравнению (3), как видно из равенства (1). Точно также прямая (3) проходит через точку M_2, потому что, если координаты этой точки вставить в уравнение (3), то оно обратится в равенство (2), которое удовлетворяется, следовательно прямая (3) проходит через две точки M_1 и M_2 и по

тому эта прямая есть хорда прикосновения. Ея уравнение пишутъ такъ:

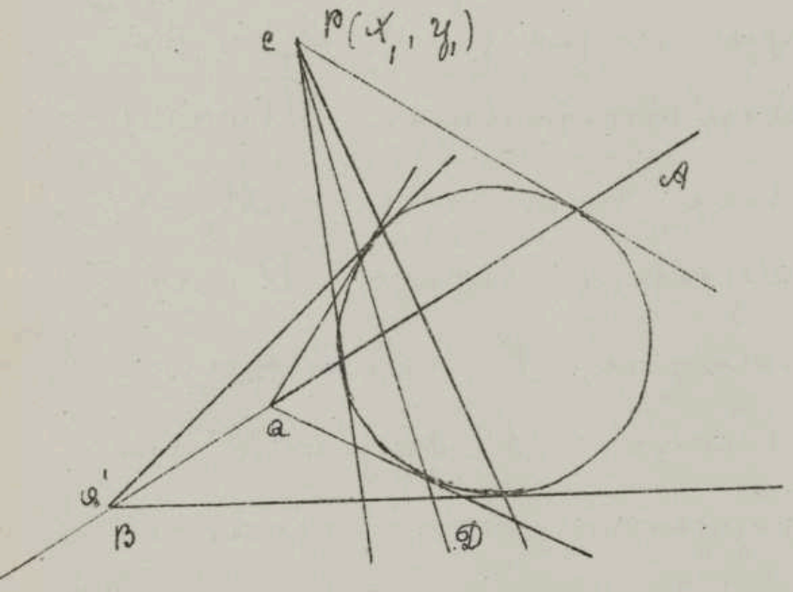
$[2Ah + Bk + D]x + [Bh + 2Ck + E]y + Dh + Ek + 2F = 0 \ldots\ldots (a)$

Если точка (h, k) такова, что изъ нея можно провести касательную къ кривой, то уравнение (a) представитъ хорду прикосновения. Если точка (h, k) лежитъ на самой кривой, то уравнение (2) предетавитъ касательную къ кривой въ этой точкѣ. Если точка (h, k) такова, что изъ нея нельзя провести касательную то уравнение (a) представитъ всетаки совершенно опредѣленную прямую, этой точкѣ соотвѣтствующую. Прямая эта не должна пересѣкать кривой, потому что иначе она была бы хордою прикосновения и тогда соединивъ точки ея пересѣчения съ кривой съ точкою (h, k) мы должны бы были провести двѣ касательныя. Точка (h, k) и соотвѣтствующая ей прямая (a) по отношению къ данной кривой второго порядка носятъ особыя названія. Именно точка (h, k) называется полюсомъ, а прямая (a) полярою этой. Каждой точ-

Аналит. Геом.

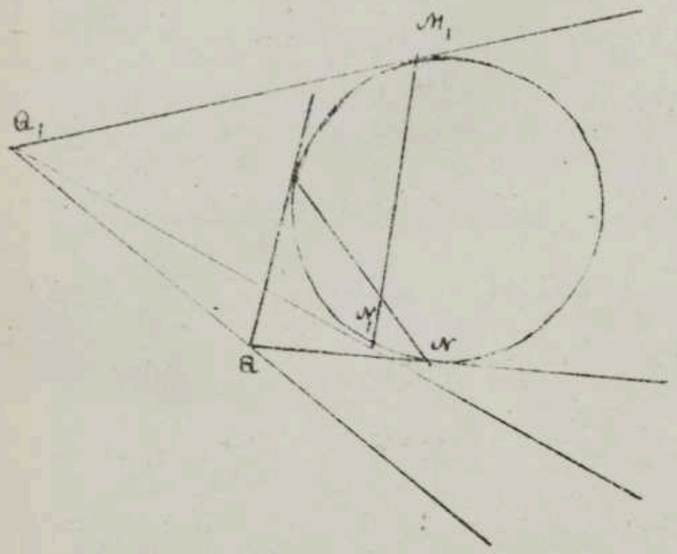
ко плоскости соответствует своя полюса. Главное свойство полюсы заключается въ слѣдующей теоремѣ:
Если полюса первой точки проходитъ черезъ полюсъ второй, то и полюса второй точки проходитъ черезъ полюсъ первой.
Пусть имѣемъ точку (x_1, y_1). Ея полюса будетъ:
$$[2Ax_1 + By_1 + D]x + [Bx_1 + 2Cy_1 + E]y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0 \ldots\ldots (1)$$
Пусть другая точка есть (x_2, y_2). Ея полюса будетъ:
$$[2Ax_2 + By_2 + D]x + [Bx_2 + 2Cy_2 + E]\cdot y + Dx_2 + Ey_2 + 2F = 0 \ldots\ldots (2)$$
Положимъ, что первая прямая проходитъ черезъ полюсъ второй; значитъ координаты $(x_2\ y_2)$ удовлетворяютъ уравненію (1) и мы должны имѣть:
$$[2Ax_1 + By_1 + D]x_2 + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y_2 + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0$$
Это равенство можно написать въ такомъ видѣ:
$$[2Ax_2 + By_2 + D]x_1 + (Bx_2 + 2Cy_2 + E)y_1 + Dx_2 + Ey_2 + 2F = 0$$
Сравнивая это послѣднее равенство съ уравненіемъ (2) мы видимъ, что точка (x_1, y_1) лежитъ на прямой (2) т. е. прямая (2) проходитъ черезъ полюсъ (1) прямой. Эта

теорема дает замечательный геометрический построений. Возьмем произвольную кривую второго порядка, для простоты окружность. Пусть точка (x_1, y_1) есть P и находится вне круга. Проведем две касательные и соединим точки прикосновения. Прямая AB будет полярой точки P. Возьмем на ней произвольную точку Q. Ее координаты суть (x_2, y_2)



Прямую AB назовем (1). Проведем еще Q две касательные к окружности и соединим точки прикосновения. Прямая CD будет полярой точки Q, назовем ее (2). Обе теоремы она должна пройти через точку P. Так будет для всякой другой точки, взятой на прямой AB. Возьмем теперь точку P внутри круга (фиг.) Ее поляру можно получить по нашей теореме так:

Проведемъ черезъ точку P произвольную хорду M N касательныя къ окружности; ихъ пересѣченія будетъ въ точкѣ Q. Q будетъ полюсъ прямой M N, слѣдовательно поляра точки P должна проходить черезъ точку Q. Проведемъ черезъ точку P другую хорду $M_1 N_1$ и въ точкахъ M_1 и N_1 двѣ касательныя. Точка Q_1 ихъ пересѣченія будетъ полюсомъ $M_1 N_1$. Но прямая $M_1 N_1$ проходитъ черезъ P слѣдовательно поляра точки P проходитъ черезъ Q_1 и поляра точки P будетъ прямая $Q Q_1$. Отсюда слѣдуетъ, что если черезъ тѣже точку P провести третью хорду $M_2 N_2$ то касательныя въ точкахъ M_2 и N_2 пересѣкутся на прямой $Q Q_1$ въ нѣкоторой точкѣ Q_2.



Касательная къ эллипсу.

Возьмемъ эллипсъ, отнесенный къ центру

и къ осямъ; уравненіе его будетъ:

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Возьмемъ произвольную точку M. Пусть ея координаты (x_1, y_1). Проведемъ касательную и обозначимъ уголъ образуемый этой касательной съ осью абсциссъ черезъ α. Имѣемъ общую формулу:

$$\operatorname{Tg}\alpha = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}$$

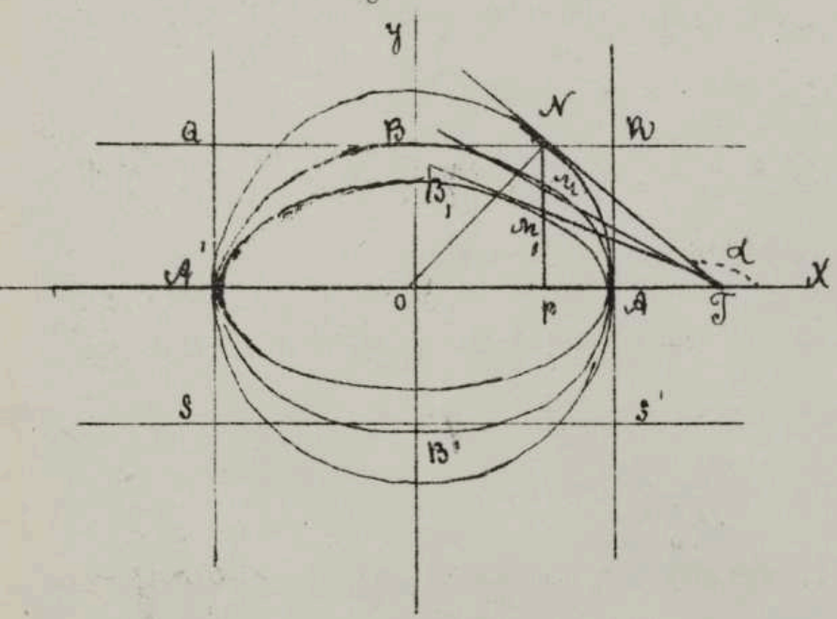
Дифференцируя первую часть уравненія эллипса по x и по y, найдемъ:

$$\operatorname{Tg}\alpha = -\frac{2b^2x_1}{2a^2y_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Уравненіе касательной въ точкѣ M будетъ:

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$

По формулѣ, выражающей $\operatorname{Tg}\alpha$ легко изслѣдовать, какъ измѣняется направленіе касательной въ эллипсѣ.



Такъ для точки A имѣемъ (фиг.) $y_1 = 0$, $x_1 = a$; слѣдовательно въ этой точкѣ $\operatorname{Tg}\alpha = \infty$ и $\angle\alpha = 90°$. Касательная перпендикулярна къ оси въ точкѣ A. Затѣмъ, если отъ точки A она будетъ переходить къ B, то

x_1 уменьшается, а y_1 увеличивается и $\operatorname{Tg}\alpha$ по абсолютной величине постоянно уменьшается, но он притом будет отрицательный. Из этого следует, что угол, дополнительный касательной с осью x будет тупой и постоянно и постоянно увеличивается. В точке B будем иметь $x_1 = 0$ а $y_1 = b$ следовательно $\operatorname{Tg}\alpha = 0$ и угол $\alpha = 180°$, т. е. в точке B касательная параллельна с осью x. Во второй четверти касательная занимает ряд положений симметричных предыдущим. Если в вершинах эллипса провести четыре касательных, то получится прямоугольник, внутри которого заключен эллипс. Уравнение касательной к эллипсу можно написать еще в другой форме. Возьмем общее уравнение касательной.

$$(2Ax_1 + By_1 + E)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0$$

Для нашего случая оно будет:

$$2b^2x_1x + 2a^2y_1y - 2a^2b^2 = 0 \text{ или } a^2y_1y + b^2x_1x - a^2b^2 = 0$$

Также можно написать:

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

Его легко запомнить, так как оно получается из уравнения самого эллипса че-

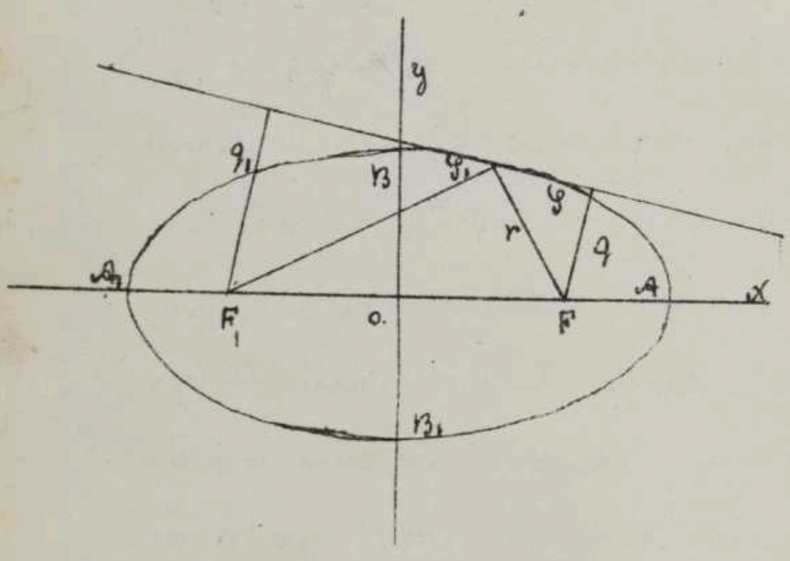
резъ перемѣнную x^2 на $x_1 x$ и y^2 на $y_1 y$. Для эллипса можно дать особый способъ построенія касательной. Опредѣлимъ съ этою цѣлью абсциссу точки T пересѣченія касательной съ осью x. Въ точкѣ T имѣемъ: $x = OT$ и $y = 0$. Принимая уравненіе касательной въ этой точкѣ, получимъ:

$$b^2 x_1 \cdot OT - a^2 b^2 = 0, \text{ откуда } OT = \frac{a^2}{x_1}.$$

Отсюда видно что величина OT зависитъ отъ a и отъ x_1, но не зависитъ отъ b, слѣдовательно она остается такая и для другого эллипса, построеннаго на той же большой оси, если на немъ возьмемъ точку съ тою же абсциссою x_1. Такъ, возставивъ изъ A до точки B_1 и построивъ эллипсъ, тогда касательная въ M_1 пройдетъ черезъ T. Слѣдовательно такая величина OT будетъ относиться и къ точкѣ, взятой на окружности, описанной на большой оси, какъ на діаметрѣ, имѣющей туже абсциссу x_1, потому что окружность есть частный видъ эллипса. Она получается, когда возьмемъ $b = a$. Опишемъ ее, продолживъ AM до точки N; касательная въ точкѣ N пройдетъ

через Г. Отенода способъ для построенія касательной. Чтобы получить касательную къ эллипсу въ точкѣ М, изъ центра О, радіусомъ = ОА опишемъ полуокружность. Ординату МР продолжимъ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ К. Точку К соединимъ съ О, изъ К къ ОХ возставимъ перпендикуляръ. Онъ пересѣчетъ ось Х въ точкѣ Т и точку Т соединимъ съ М. Это и будетъ касательная. Кромѣ этого способа есть еще другой, который употребляется, когда даны фокусы эллипса. Онъ основанъ на слѣдующей теоремѣ.

Углы, образуемые касательной съ радіусами векторами равны между собою.



Назовемъ эти углы черезъ φ и φ_1, а перпендикуляры, опущенные изъ фокусовъ на касательную черезъ q и q_1. Уравненіе касательной будетъ: $b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0$

Для опредѣленія q и q_1

обращаемъ уравненіе касательной въ нормальный видъ и подставляемъ въ первую часть координаты точекъ $F(a\varepsilon, 0)$ и $F_1(-a\varepsilon, 0)$;

(о $FC = a \cdot \varepsilon$ гдѣ той формулы что $\frac{c}{a} = \varepsilon$)

$$q = -\frac{b^2 a\varepsilon x_1 - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_1 + a^4 y_1^2}}$$

$$q_1 = -\frac{-b^2 a\varepsilon x_1 - a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y_1^2}}$$

Мы беремъ здѣсь знакъ $(-)$ передъ выраженіемъ перпендикуляровъ потому что точки F и F_1 лежатъ съ той стороны касательной, гдѣ начало координатъ. Преобразуемъ:

$$q = \frac{ab^2(a - \varepsilon x_1)}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}, \quad q_1 = \frac{ab^2(a + \varepsilon x_1)}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}} \quad \ldots\ldots (к)$$

Припомнимъ формулы радіусовъ векторовъ: $MF = r$ и $MF_1 = r_1$, именно

$$r = a - \varepsilon x_1, \quad r_1 = a + \varepsilon x_1$$

и имѣемъ изъ формулы $(к)$ $\frac{q}{r} = \frac{q_1}{r_1} = \frac{ab^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}$

Такъ какъ $\frac{q}{r} = \sin\varphi$, $\frac{q_1}{r_1} = \sin\varphi_1$; $\varphi = \varphi_1$.

Докажемъ теперь, что произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на касательную, равно квадрату малой полуоси.

Перемножимъ формулы $(к)$ $q\, q_1 =$

$$= \frac{a^2 b^4 (a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}$$

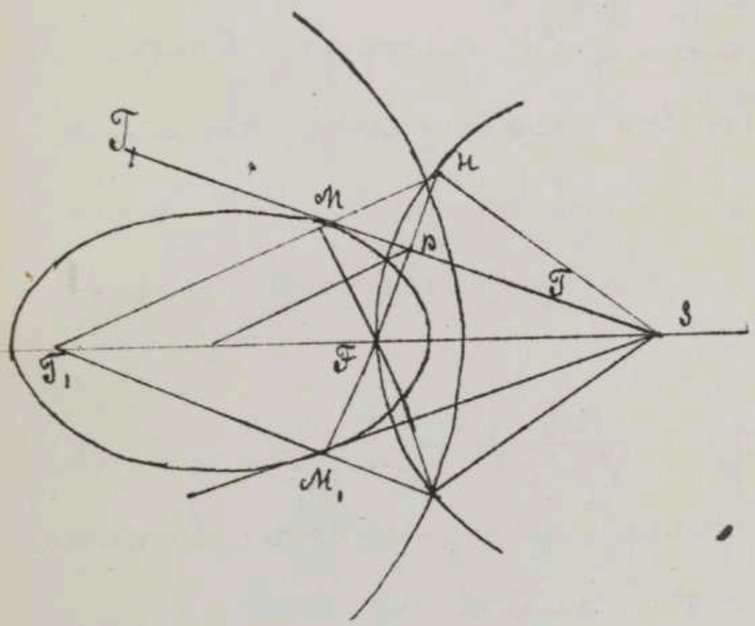
Заменимъ здѣсь y_1^2 черезъ x_1^2 изъ уравненія эллипса

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2;\quad y_1^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x_1^2}{a^2}$$

$$qq_1 = \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x_1^2)}{b^4x_1^2 + a^4b^2 - a^2b^2x_1^2} = \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x_1^2)}{a^2b^2[a^2 - x_1^2(1 - \frac{b^2}{a^2})]} =$$

$$= \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x_1^2)}{a^2b^2[a^2 - (\frac{a^2 - b^2}{a^2})x_1^2]} = \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x_1^2)}{a^2b^2(a^2 - \varepsilon^2x_1^2)}$$

Равенство угловъ φ и φ_1 даетъ весьма простой способъ для построенія касательной въ данной точкѣ.



Имѣемъ, положивъ, что касательная TT_1 проведена, продолживъ F_1M и FP (FP есть перпендикуляръ опущенный изъ фокуса F на касательную TT_1) до точки N. Два прямоугольныхъ треугольника FMP и NMP равны; слѣдовательно $MN = MF$; а потому, чтобы получить касательную, нужно, продолживъ F_1M, отложить $MN = MF$, точку N соединить съ F линіей NF раздѣлить пополамъ и соединить точку дѣленія съ точкой прикосновенія, это и будетъ касательною

такая теорема даетъ способъ для проведенія касательной къ эллипсу изъ внѣшней точки. Пусть внѣшняя точка есть P и вообразимъ, что касательная SS проведена. Соединимъ S съ H и съ F; изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ SPH и SPF имѣемъ SH = SF, причемъ точка H отъ точки F_1 находится на разстояніи, равномъ $HF_1 + HH = HF_1 + HF = 2a$.

Вслѣдствіе этого точка H опредѣлится, какъ пересѣченіе двухъ окружностей одной описанной изъ F_1, радіусомъ равнымъ 2a и второй, описанной изъ S радіусомъ равнымъ SF. Когда точка H будетъ опредѣлена, то соединивъ H съ F и опустивъ изъ S перпендикуляръ на HF, мы получимъ касательную SPM T_1. Двѣ описанныя наши окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ. Пусть H_1 будетъ другая точка ихъ пересѣченія. Она послужитъ для проведенія другой касательной къ эллипсу. Именно, соединивъ F съ H_1 и опустивъ изъ S на H_1F_1 перпендикуляръ, получимъ другую касательную S_1M_1. Наконецъ прибавимъ, что

сти о соединить съ P, то въ треугольникъ HFF_1 линія OP будетъ соединять средины сторонъ HF и FF_1, слѣдовательно

$$OP = \frac{1}{2} HF_1 \text{ или } OP = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Отсюда заключаемъ:

Теорема: Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на касательную, расположены на окружности, описанной изъ центра радіусомъ, равнымъ большой полуоси.

Касательная къ гиперболѣ.

Уравненіе гиперболы есть:

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0.$$

Оно получается изъ уравненія эллипса черезъ перемѣну b^2 на $-b^2$, поэтому уравненіе касательной къ гиперболѣ можно написать прямо, взявъ уравненіе касательной къ эллипсу и перемѣнивъ въ немъ b^2 на $-b^2$. Получаемъ два вида уравненія.

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \text{ и}$$

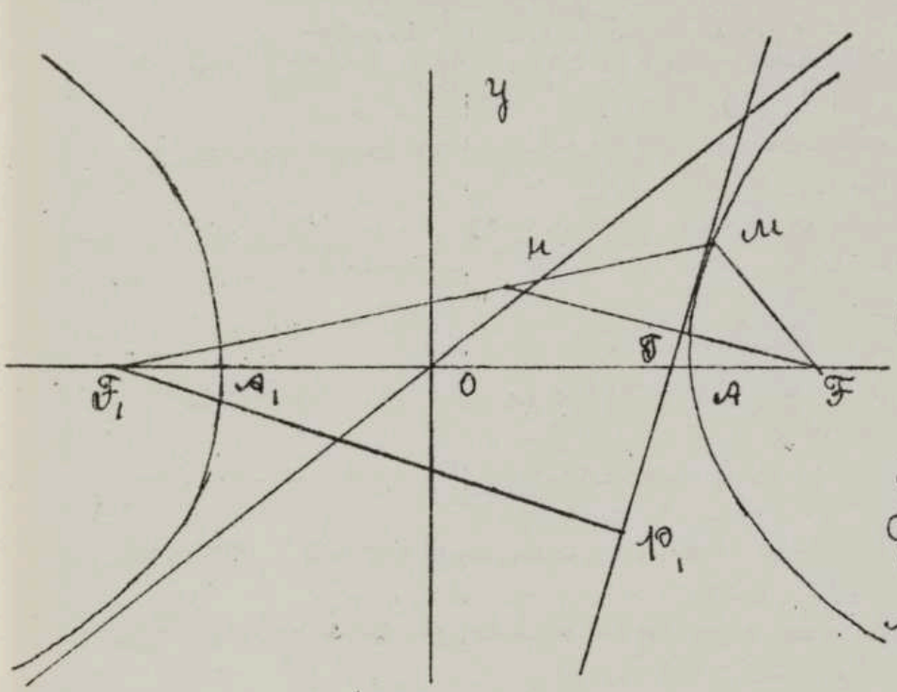
$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Послѣднее уравненіе касательной полу-

нается прямо из уравнения гиперболы через перемену y^2 на $y_1 y$ и x^2 на $x_1 x$.

Рассмотрим теперь как вычисляется направление касательной линии к гиперболе. Мы имеем

$$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$



В точке A имеем

$$y = 0, \quad x = a,$$

и $\operatorname{Tg}\alpha = \infty$.

Касательная перпендикулярна к оси x в точке A. Если точку прикосновения будем по верхней ветви удалять в правую сторону, то всегда будет $\operatorname{Tg}\alpha > 0$ и $\alpha < 90°$. При этом x_1 увеличивается и y_1 увеличивается. Чтобы видеть как вычисляется $\operatorname{Tg}\alpha$, мы выразим его в функции одного x_1. Из уравнения гиперболы найдем.

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2};$$

Следовательно:

$$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{b^2 x_1}{a\frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}} = \frac{b x_1}{a\sqrt{x_1^2 - a^2}} = \frac{b}{a}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x_1^2}}}$$

Теперь видно, что если x_1 увеличивается, то знаменатель увеличивается, а $\operatorname{tg}\alpha$ и угол α уменьшается.

При $x_1 = \infty$, получим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Предположим, что сей через φ обозначим угол, заключенный асимптотами со осью x, то будем иметь

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Следовательно $\alpha > \varphi$ и угол α стремится сделаться равным φ по мере удаления точки M в бесконечность, так что $\operatorname{Lim}\alpha = \varphi$. Рассмотрим отрезок OT, заключенный касательной по оси x. В точке T будет $x = OT$, а $y = 0$. Предположив уравнение касательной, получим:

$$b^2 x_1 \cdot OT - a^2 b^2 = 0,$$

откуда $OT = \frac{a^2}{x_1}$. Отсюда видно, что $OT > 0$ и точка T всегда вправо от точки O. С удалением точки M в бесконечность, OT стремится к 0, так что при $x_1 = \infty$ имеем $\operatorname{Lim} OT = 0$.

Из всего этого видно, что касательная линия по мере удаления точки при-

положения в бесконечность стремится совпасть со асимптотами и асимптота может быть разсматриваема, как касательная в точке, бесконечно удаленной. Для гиперболы совершенно такие, как и для эллипса, можно доказать, что два радіуса вектора, проведенные в точку пересечения, длина-ют с касательной равные углы. Пусть F и F_1 два фокуса. Соединивши их с M и пусть:

$$\angle FMT = \varphi \quad \text{а} \quad \angle F_1 MT = \varphi_1,$$

будет иметь $\varphi = \varphi_1$. Доказать это точно такими же вычисленіями, как и для эллипса. Разница будет состоять единственно в том, что надо перемножить b^2 на $-b^2$. Назвавши два перпендикуляра, опущенные из фокусов на касательную через q и q_1, получить точно также $q\,q_1 = b^2$.

Равенство углов φ и φ_1 дает простой способъ для построенія касательной. Именно проводимъ два радіуса вектора FM и $F_1 M$ откладываемъ $MH = MF$.

Соединимъ точку H съ F и изъ M на линію F H опустимъ перпендикуляръ, это и будетъ касательная.

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ.

Возьмемъ гиперболу, отнесенную къ ея осямъ и сдѣлаемъ преобразованіе координатъ, принявъ за новыя оси ассимптоты гиперболы. Уравненіе гиперболы, отнесенной къ осямъ, есть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть уголъ, образуемый ассимптотой съ осью x, есть φ, тогда:

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Принимая за новыя оси координатъ ассимптоты OX_1 и OY_1, получимъ $\angle X_1 O Y_1 = 2\varphi$, слѣдовательно новыя оси будутъ косоугольныя. Формулы преобразованія будутъ:

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\beta$$

Но $\alpha = 360^\circ - \varphi$ и $\beta = \varphi$; формулы будутъ

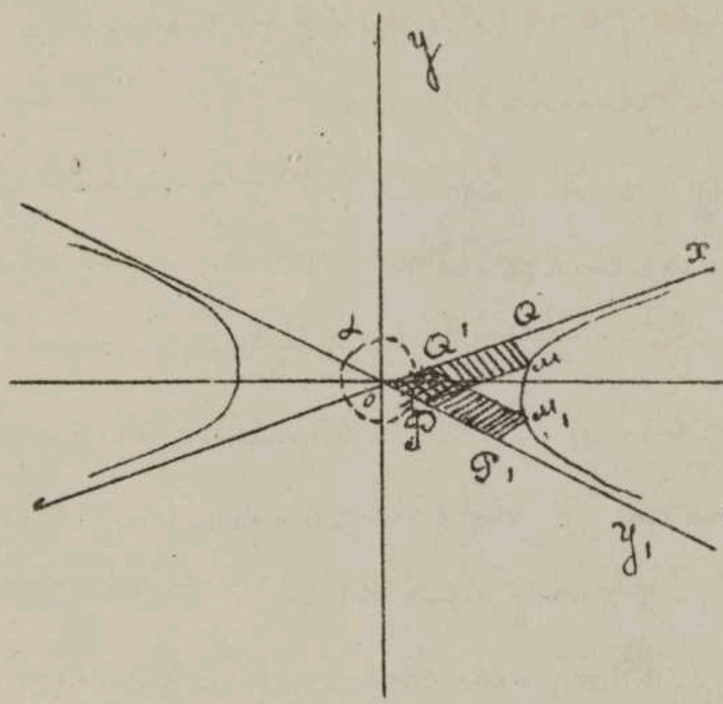
$$x = x_1 \cos\varphi + y_1 \cos\varphi$$
$$y = -x_1 \sin\varphi + y_1 \sin\varphi$$

или $$x = (y_1 + x_1)\ \cos\varphi$$
$$y = (y_1 - x_1)\ \sin\varphi.$$

Но $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; а $\sqrt{a^2+b^2} = c$

Следовательно $\cos\varphi = \frac{a}{c}$

$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{c}$.



чер.

Поэтому формулы преобразования координат:

$$x = \frac{a}{c}(y_1 + x_1)$$
$$y = \frac{b}{c}(y_1 - x_1).$$

Вставляя в уравнение кривой, получим:

$$\frac{(y_1+x_1)^2}{c^2} - \frac{(y_1-x_1)^2}{c^2} = 1$$

или $y_1^2 + 2x_1y_1 + x_1^2 - y_1^2 + 2x_1y_1 - x_1^2 = c^2$ или $4x_1y_1 = c^2$

или $x_1y_1 = \frac{c^2}{4}$. Это и есть уравнение гиперболы, отнесенной к асимптотам. Это уравнение имеет особое геометрическое значение. Возьмем произвольную точку M на кривой и построим ее новыми координатами. Получим параллелограмм: OPMQ. Его

Аналит. Геом. лист 46

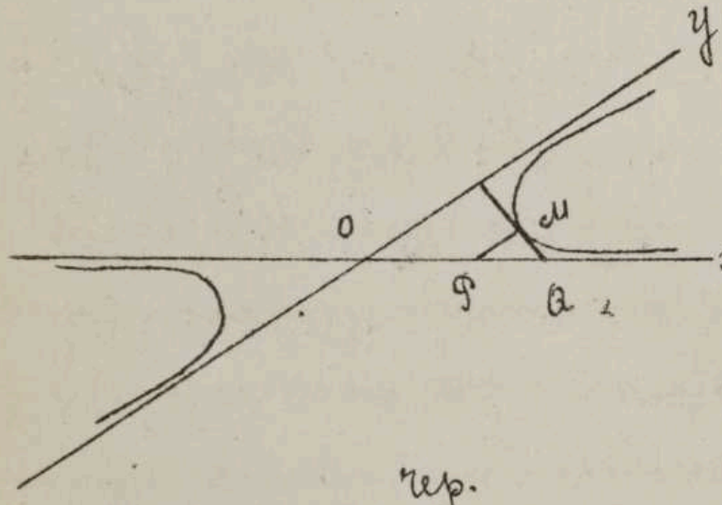
площадь $OPMQ = x_1 y_1 \operatorname{Sin} 2\varphi$ или площадь $OPMQ = \frac{c^2}{4} \operatorname{Sin} 2\varphi$. Следовательно площадь параллелограмма, построенного на координатах гиперболы, отнесенной к асимптотам, имеет величину постоянную. Определим эту величину. Мы имеем:

$$\operatorname{Sin} 2\varphi = 2 \operatorname{Sin}\varphi \cdot \operatorname{Cos}\varphi = \frac{2ab}{c^2}$$

Следовательно площадь:

$$OPMQ = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{2ab}{c^2} = \frac{ab}{2}.$$

Эта площадь равна половине площади прямоугольника, построенного на полуосях.



чер.

Возьмем отнесенную к асимптотам. Ее уравнение будет:

$$xy = \frac{c^2}{4}$$

Составим уравнение касательной в точке $M(x_1, y_1)$. Общее уравнение

будет:

$$[2Ax_1 + By_1 + D]x + [Bx_1 + 2Cy_1 + E]$$
$$y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0$$

В нашем случае:

$$A = 0,\ B = 1,\ C = 0,\ D = 0,\ E = 0\ \ F = -\frac{c^2}{4}.$$

Следовательно уравнение касательной будет:

$$y_1 x + x_1 y - \frac{c^2}{2} = 0.$$

Найдем абсциссу точки Q пересечения касательной с осью X. В ней $y = 0$, $x = OQ$; следовательно имеем

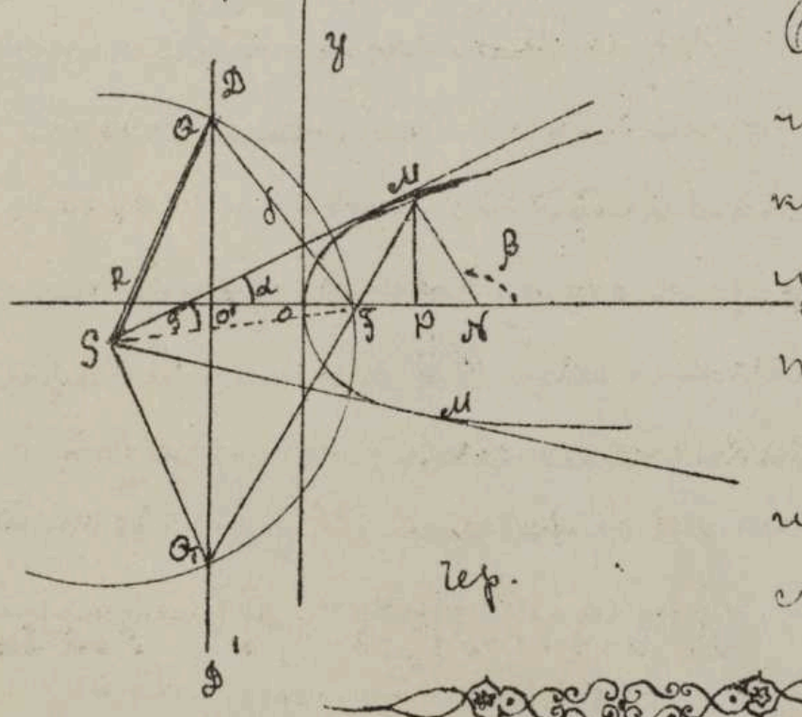
$$y_1 \cdot OQ = \frac{c^2}{2} \text{ и } OQ = \frac{c^2}{2y_1}$$

По уравнению кривой имеем:

$$x_1 y_1 = \frac{c^2}{4};$$

отсюда $$2x_1 = \frac{c^2}{2y_1}$$

Следовательно $OQ = 2x_1$, или $OQ = 2OP$.



Чер.

Отсюда следует, что для получения касательной нужно отложить от точки P вправо

$$PQ = OP$$

и точку Q соединить с M.

Возьмем параболу, отнесенную к вершине и к оси. Уравнение ее:

$$y^2 - 2px = 0$$

Возьмем на ней точку $M(x_1, y_1)$

Составим посредством частных дифференцирований угловой параметр касательной, находим:

$$\operatorname{Tg}\alpha = -\frac{-2p}{2y_1} = \frac{p}{y_1}$$

Уравнение касательной будет:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

Исследуем, как изменяется направление касательной на параболе. Для точки 0 имеем:

$$y_1 = 0 \text{ и } \operatorname{Tg}\alpha = \infty,$$

следовательно $\alpha = 90^\circ$. Касательная перпендикулярна к оси. Если точка прикосновения от вершины движется вверх по параболе, то y_1 постоянно увеличивается и следовательно $\operatorname{Tg}\alpha$, оставаясь постоянно > 0, уменьшается, и угол α оставаясь постоянно острым, уменьшается. Составим другой вид уравнения касательной. Общее уравнение будет:

$$(2Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + 2F = 0$$

В нашем случае будем иметь:

$$-2px_1 + 2yy_1 - 2px = 0$$

или $$y_1 y = p(x + x_1)$$

Для построения касательной определим абсциссу точки T пересечения ее с осью X. В точке T имеем $x = OT$, $y = 0$; следовательно, вставляя, получим:

$$0 = p(-OT + x_1); \quad OT = x_1$$

Отрезок $Tp = 2x_1$. Этот отрезок представляет расстояние от подошвы ординаты до точки встречи касательной с осью X. Он называется Субнаименсом. И мы видим, что в параболе субнаименс равен двойной абсциссе. Чтобы построить касательную, достаточно отложить

$$OT = OP.$$

и точку T соединить с M. Проведем нормальную линию, т. е. перпендикулярную к касательной MN. Назвав угол нормальной линии с осью x через β, напишем уравнение нормальной:

$$y - y_1 = \operatorname{Tg}\beta\,(x - x_1)$$

Но по условию перпендикулярности имеем:

$$\operatorname{Tg}\beta \cdot \operatorname{Tg}\alpha + 1 = 0$$

или $$\operatorname{Tg}\beta \cdot \frac{p}{y_1} + 1 = 0,$$

откуда $\operatorname{Tg}\beta = -\frac{y_1}{p}$, следовательно уравнение нормали будет:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Определим точку N, пересечения нормали с осью x. В ней

$$x = ON, \text{ а } y = 0,$$

следовательно:

$$-y_1 = -\frac{y_1}{p}(ON - x_1)$$

или $$p = ON - x_1,$$

откуда $ON = p + x_1$. Следовательно

$$KN = ON - x_1 = p.$$

Отрезок pN представляет расстояние от подошвы ординаты до точки встречи нормали с осью x. Он называется субнормалью и мы видим, что во всякой точке параболы субнормаль имеет величину постоянную и равную параметру p.

это даёт способъ для построенія нормаль-ной. Именно отложимъ отъ точки P длину $PN = p$. и соединимъ точку N съ M, получимъ нормальную. Есть еще способъ для построенія касательной. Соединимъ точку M съ N и продолжимъ. По извѣстному выраженію радіуса вектора въ параболѣ имѣемъ:

$$MF = \frac{p}{2} + x'$$

но съ другой стороны:

$$FJ = OF + OJ = \frac{p}{2} + x'$$

слѣдовательно $MF = FJ$, а потому $\triangle MJF$ будетъ равнобедренный и уголъ FMJ равенъ α. Проведемъ черезъ M параллели оси параболы и пусть $D'D''$ будетъ направляющая $\angle QMJ = \alpha$. Если Q соединимъ съ F, то эта линія пересѣчетъ касательную въ точкѣ j и два треугольника QMj и FMj будутъ равны, слѣдовательно эти треугольники прямоугольные и $Qj = jF$. Отсюда такой способъ для построенія касатель-ной. Изъ точки M опускаемъ перпендикуляръ MQ на направляющую, точку Q соединимъ съ F и изъ точки M на линію QF опускаемъ перпендикуляръ Mj. Это и

будетъ касательная. Покажемъ, что требуется провести касательную изъ внѣшней точки S. Соединимъ эту точку съ Q и съ F, мы найдемъ, что SQ = SF, а потому точку Q можно опредѣлить, описавъ изъ точки S радіусомъ, равнымъ SF окружность, и когда опредѣлимъ точку Q, то соединимъ ее съ F, изъ точки S на линію QF опустимъ перпендикуляръ. Это и будетъ касательная. При томъ описанная окружность пересѣчетъ направляющую и въ другой точкѣ Q'. Соединивъ ее съ F и опустивъ перпендикуляръ на FQ' изъ S, получимъ другую касательную.

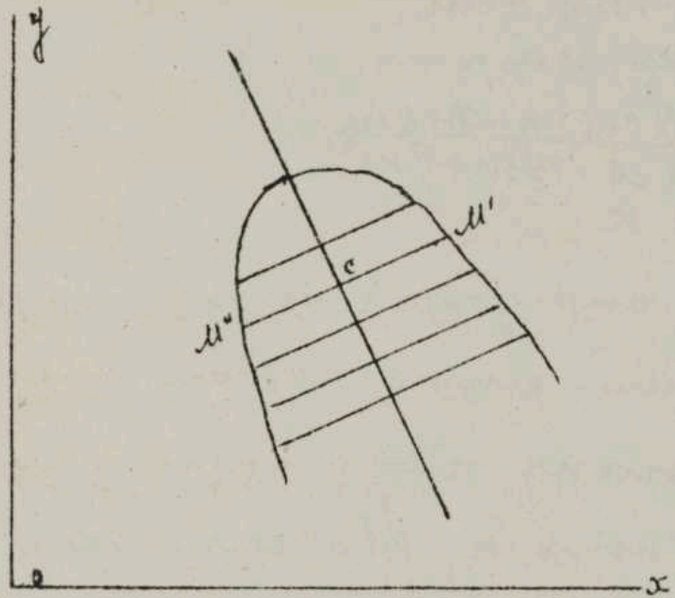
Діаметръ кривыхъ 2го порядка.

Діаметромъ кривыхъ называется геометрическое мѣсто серединъ ряда параллельныхъ хордъ. Пусть уравненіе кривой будетъ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (1)$$

Положимъ координаты прямоугольными. Возьмемъ затѣмъ данную кривую и какую-

ными рядъ параллельныхъ хордъ. Общее уравнение этихъ хордъ будетъ:



$$y = mx + k \quad \ldots\ldots (2)$$

Для всѣхъ хордъ m одна и таже величина, а k перемѣнная и измѣняетъ свою величину при переходѣ отъ одной хорды къ другой.

Разсмотримъ одну изъ этихъ хордъ $M'M''$ Пусть C ея середина. Координаты точекъ M' и M'' найдутся, рѣшая два уравненія относительно x и y (1) и (2). Будемъ рѣшать ихъ; исключимъ y:

$$Ax^2 + Bx(mx+k) + C(m^2x^2 + 2mxk + k^2) + Dx + E(mx+k) + F = 0$$

или $(A + Bm + Cm^2)x^2 + (Bk + 2Cmk + D + Em)x + Ck^2 + Ek + F = 0.$

Это уравненіе имѣетъ два корня x' и x''. Эти корни суть абсциссы точекъ M' и M''. Координаты середины C обозначимъ черезъ (x_1, y_1), или будемъ имѣть:

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2}, \quad y_1 = mx_1 + k,$$

потому что точка C лежитъ на прямой (2). По свойству корней квадратнаго

уравнения имѣемъ:

$$x' + x'' = -\frac{Bk + 2Cmk + D + Em}{A + Bm + Cm^2}$$

Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$x_1 = -\frac{(B + 2Cm)k + D + Em}{2(A + Bm + Cm^2)}$$

$$y_1 = mx_1 + k.$$

Эти два равенства опредѣляютъ координаты x_1, y_1 серединъ нѣкоторой опредѣленной хорды, такъ какъ эти координаты зависятъ отъ k, Но если изъ этихъ двухъ равенствъ исключимъ k, то получимъ нѣкоторую зависимость между координатами x_1 и y_1; эта зависимость будетъ существовать, какое бы значеніе не дали количеству k. Слѣдовательно это будетъ соотношеніе между координатами серединъ какой угодно изъ данныхъ рядя параллельныхъ хордъ т. е. это и будетъ искомое уравненіе діаметра. Исключая k, находимъ:

$$k = y_1 - mx_1$$

$$x_1 = -\frac{(B + 2Cm)(y_1 - mx_1) + D + Em}{2(A + Bm + Cm^2)}$$

или $2(A + Bm + Cm^2)x_1 + (B + 2Cm)(y_1 - mx_1) + D + Em = 0$

или $(2A + 2Bm + 2Cm^2 - Bm - 2Cm^2)x_1 + (B + 2Cm)y_1 + D + Em = 0$

$$(2A + Bm)x_1 + (B + 2Cm)y_1 + D + Em = 0$$

Это уравнение первой степени относительно x_1, y_1; следовательно оно представляет прямую линию. Из этого следует, что диаметры кривых второго порядка суть прямые линии. Так как теперь x_1, y_1 будут означать текущие координаты диаметра, то уравнение можно будет написать так:

$$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y + D + Em = 0$$

Иначе $2Ax + By + D + (Bx + 2Cy + E)m = 0$

Это будет уравнение диаметра, делящего пополам ряд параллельных хорд с угловым коэффициентом m. Ясно, что для всякого данного ряда параллельных хорд существует соответствующий диаметр, делящий эти хорды пополам. Относительно расположения диаметров кривых второго порядка нужно различать кривые, имеющие центр и кривые не имеющие центра.

1) Если кривая имеет центр, то все диаметры проходят через центр. В самом деле, пусть координаты центра будут α и β. Мы знаем, что эти координаты удовлетворяют таким уравнениям:

$$2A\alpha + B\beta + D = 0$$

$$B\alpha + 2C\beta + E = 0$$

Но всякая прямая, проходящая через точку пересечения этихъ двухъ прямыхъ, выражается такимъ уравненіемъ:

$$2Ax + By + D + \lambda(Bx + 2Cy + E) = 0,$$

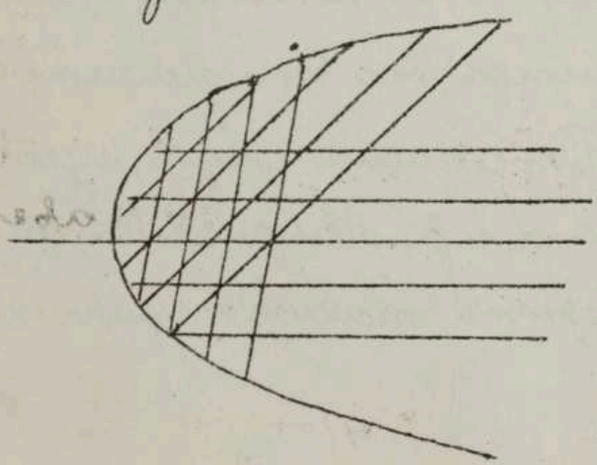
гдѣ λ произвольный множитель. Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ діаметра, мы видимъ, что оно представляетъ діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды съ угловымъ коэффиціентомъ λ. Слѣдовательно всякая прямая проходящая черезъ центръ будетъ діаметромъ.

2) Въ параболѣ всѣ діаметры параллельны. Чтобы доказать это напишемъ уравненіе діаметра такъ:

$$y = \frac{2A + Bm}{B + 2Cm}x - \frac{D + Em}{B + 2Cm}$$

и угловой коэффиціентъ діаметра будетъ m_1. Онъ равенъ: $m_1 = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm}$.

Въ случаѣ параболы $B^2 - 4AC = 0$ или $B^2 = 4AC$ и отсюда $\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C}$. Но съ другой стороны:



$$m_1 = -\frac{B\left(\frac{2A}{B} + m\right)}{2C\left(\frac{B}{2C} + m\right)} = -\frac{B}{2C};$$

т. е въ параболѣ угловой коэффиціентъ всѣхъ діаметровъ имѣетъ одну и ту же величину, такъ какъ онъ не зависитъ отъ угловъ коэффиціента хорды. Слѣдовательно всѣ діаметры

параллельным. Прямая замѣтимъ, что ось параболы есть тоже одинъ изъ діаметровъ, такъ какъ она дѣлитъ пополамъ рядъ хордъ къ ней перпендикулярныхъ. Слѣдовательно въ параболѣ всѣ діаметры параллельны оси. Всѣ діаметры въ параболѣ какъ и ось пересѣкаютъ кривую въ одной только точкѣ. Вернемся опять къ кривымъ имѣющимъ центръ. Возьмемъ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Діаметръ дѣлящій эти хорды пополамъ, имѣетъ угловой коэффиціентъ:

$$m' = -\frac{2A + Bm'}{B + 2Cm'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Назовемъ этотъ діаметръ (1). Возьмемъ другой рядъ хордъ, которыя были бы параллельны этому діаметру. Ихъ угловой коэффиціентъ будетъ m' а угловой коэффиціентъ діаметра, дѣлящаго эти хорды пополамъ будетъ:

$$m'' = -\frac{2A + Bm'}{B + 2Cm'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Назовемъ его (2). Вставимъ во (2) равенство вмѣсто m' его выраженіе:

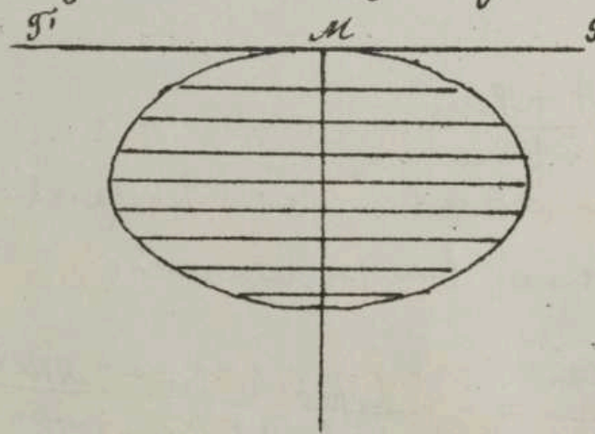
$$m'' = -\frac{2A - \frac{2AB + B^2m}{B + 2Cm}}{B - \frac{4AC + 2BCm}{B + 2Cm}} = -\frac{2AB + 4ACm - 2AB - B^2m}{B^2 + 2BCm - 4AC - 2BCm}$$

или $m'' = \frac{(B^2-4AC)m}{B^2-4AC} = m$

т. е. второй діаметръ будетъ параллеленъ тѣмъ хордамъ, которыя первый діаметръ дѣлитъ пополамъ. Слѣдовательно въ кривыхъ имѣющихъ центръ, всякому діаметру соотвѣтствуетъ другой, который дѣлитъ пополамъ ряды хордъ, параллельныхъ первому діаметру и который самъ параллеленъ тѣмъ хордамъ, которыя первый діаметръ дѣлитъ пополамъ. Такія два діаметра называются сопряженными. Въ эллипсѣ и гиперболѣ существуетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметровъ.

Касательная въ концѣ діаметра параллельна тѣмъ хордамъ, которыя этотъ діаметръ дѣлитъ пополамъ.

Возьмемъ произвольную кривую 2го порядка.



Возьмемъ на ней точку $M(x', y')$. Проведемъ черезъ эту точку діаметръ. Пусть на будетъ угловой коэффиціентъ тѣхъ хордъ,

которая этому диаметру данных параллельных. Напишем уравнение так:

$$2Ax + By + D + m(Bx + 2Cy + E) = 0.$$

Координаты x', y' данных удовлетворяют этому уравнению, т. е. будет:

$$2Ax' + By' + D + m(Bx' + 2Cy' + E) = 0$$

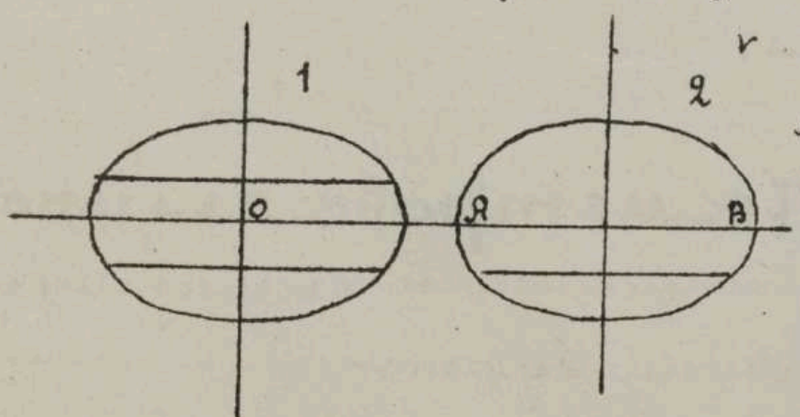
Откуда $$m = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}$$

Проведем в точке m касательную TT'; угловой коэффициент этой касательной будет:

$$m' = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}$$

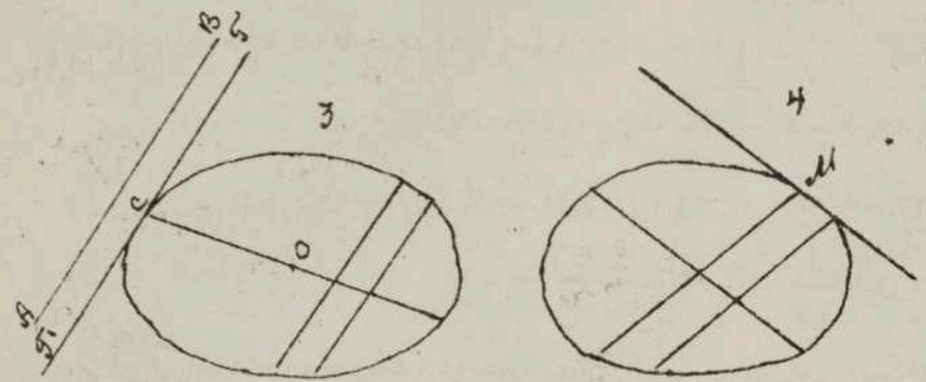
Следовательно $m = m'$, что и доказывает теорему. Доказанное свойство диаметров дает возможность решать некоторые графические задачи.

1) Дано очертание эллипса или гиперболы. Найти его центр. Проведем две параллельные хорды, соединим их серединами, и получим диаметр, разделив его пополам, будем иметь центр.



2) Построить диаметр сопряженный

данному. Проведемъ хорду, параллельную діаметру АВ. Раздѣлимъ ее пополамъ. Середину соединимъ съ центромъ.



3) Провести касательную, параллельную данной пр. АВ. Проведемъ двѣ хорды, параллельныя АВ, соединимъ ихъ средины и въ точкѣ С проведемъ параллель къ АВ. Это и будетъ касательная.

4) Провести касательную въ данной точкѣ М эллипса. Проведемъ черезъ нее діаметръ и хорду, параллельную ему. Ея середину соединимъ съ центромъ, получимъ діаметръ сопряженный. Черезъ точку М проводимъ параллельную этому діаметру Это и будетъ касательная.

Свойства діаметровъ эллипса.

Возьмемъ эллипсъ, отнесенный къ центру и къ осямъ. Его уравненіе будетъ:

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

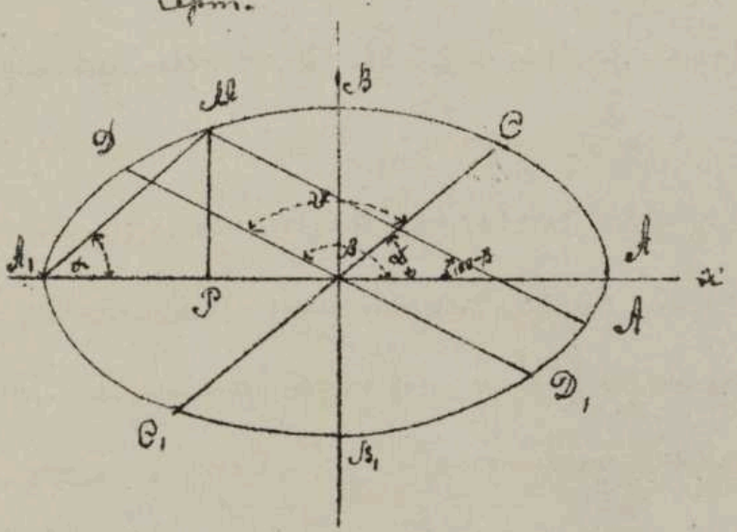
Возьмемъ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Уравненіе діаметра, дѣлящаго эти хорды, пополамъ, будетъ вообще:

$$2Ax + By + D + m(Bx + 2Cy + E) = 0$$

Составивши подобное уравненіе діаметра для эллипса, получимъ:

$2b^2x + m\,2a^2y = 0$ или $y = -\frac{b^2}{a^2m}x$. Построимъ этотъ діаметръ Cc_1. Означимъ черезъ α уголъ, дѣлаемый имъ съ осью x. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b^2}{a^2m}$. Черезъ центръ проведемъ діаметръ DD_1 параллельный хордамъ. Это будетъ сопряженный діаметръ. Пусть $\angle Dox = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\beta = m$ и слѣдовательно $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\beta}$ или $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$. Изъ этого соотношенія легко видѣть, какъ будетъ измѣняться положеніе діаметра, сопряженнаго съ даннымъ. Именно. $\operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\alpha}$.

Черт. 7



Если $x = 0$, то діаметръ Cc_1 совпадаетъ съ

большой осью AA_1. Тогда $Tg\beta = \infty$ и $\angle\beta = 90°$ т. е. діаметръ DD_1 совпадаетъ съ малой осью. Такимъ образомъ оси составляютъ такую пару сопряженныхъ діаметровъ, образующихъ прямой уголъ. Если уголъ α будетъ увеличиваться, то $Tg\beta$, оставаясь отрицательнымъ, будетъ уменьшаться по абсолютной величинѣ, слѣдовательно $\angle\beta$ будетъ больше $90°$ и будетъ увеличиваться постоянно. Діаметръ DD_1 будетъ постоянно отклоняться отъ оси BB_1 въ лѣвую сторону. Когда $\alpha = 90°$ то $Tg\alpha = \infty$ и $Tg\beta = 0$; $\angle\beta = 180°$, т. е. когда діаметръ CC_1 совпадаетъ съ малой осью, то діаметръ DD_1 совпадаетъ съ большою.

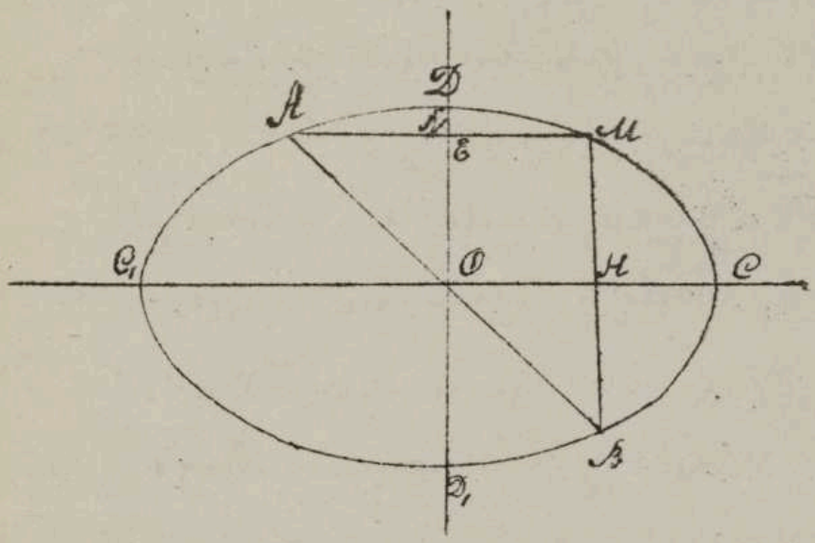
Къ сопряженнымъ діаметрамъ имѣютъ весьма близкое соотношеніе, такъ называемыя дополнительныя хорды. Это суть двѣ хорды, соединяющія произвольную точку эллипса съ концами какого нибудь діаметра; напр. AM и BM суть хорды дополнительныя.

Теорема. Два діаметра, параллельные двумъ дополнительнымъ хордамъ, суть діаметры сопряженные.

Проведемъ черезъ центръ O два діаметра PP_1 и

хающемо АМ и ВМ. Очевидно въ треугольникъ М АВ линія ОН ∥ АМ и ОН проходитъ

Черт.



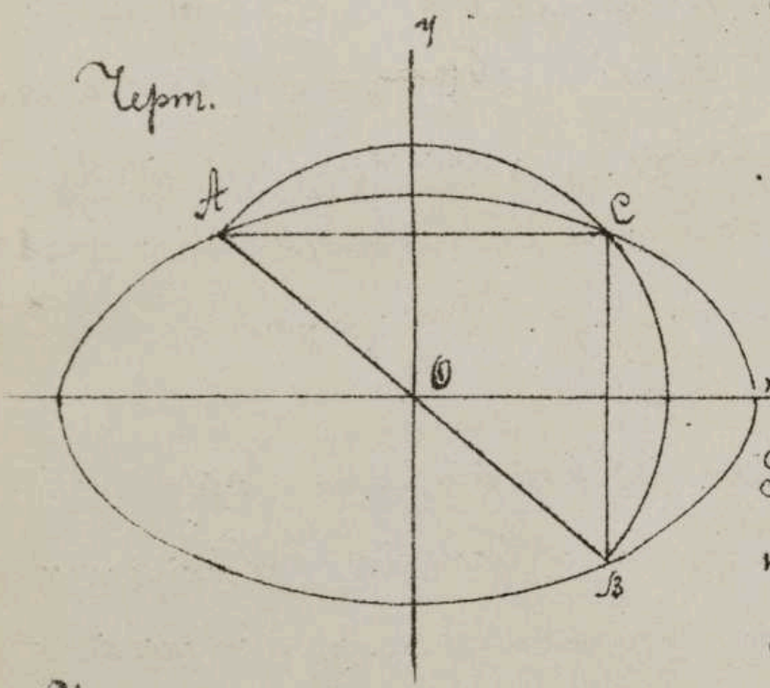
черезъ середину АВ. Слѣдовательно АН = НВ. Точно такимъ ОЕ ∥ ВМ и проходитъ черезъ середину АВ; слѣдовательно ЕМ = АЕ. Такимъ образомъ каждый изъ діаметровъ С₁С и DD₁ дѣлитъ пополамъ хорду, параллельную другому; слѣдовательно эти діаметры сопряженные.

Обратная теорема. Двѣ хорды, проведенныя изъ концовъ одного діаметра параллельно двумъ данныхъ сопряженныхъ діаметрамъ, будутъ дополнительныя.

Пусть СС₁ и DD₁ два данные и сопряженные діаметра и пусть АВ продольный діаметръ. Черезъ точку А проведемъ хорду АМ ∥ СС₁. Эта хорда въ точкѣ Е раздѣлится пополамъ. Такъ какъ при этомъ АО = ВО, то соединивъ М съ В мы получимъ линію ВМ, которая будетъ параллельна ОЕ или DD₁. Слѣдова-

тельно обратно, если изъ точки B проведемъ параллель DD_1, то она пройдетъ черезъ точку M, такъ что двѣ параллели AM и BM двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, пересѣкаются на эллипсѣ и и слѣдовательно онѣ будутъ дополнительными хордами. По доказанному свойствѣ дополнительныхъ хордъ, можно найти оси эллипса, котораго очертаніе дано. Возьмемъ произвольный діаметръ AB и на немъ, какъ на діаметрѣ, опишемъ полуокружность. Точку пересѣченія этой полуокружности съ эллипсомъ C соединимъ съ A и B.

Чер.



Уголъ ABC будетъ прямой хорды AC и BC будутъ дополнительныя. Проведемъ черезъ O два діаметра, параллельные этимъ хордамъ. Эти діаметры будутъ сопряженные и при томъ они образуютъ прямой уголъ; слѣдовательно это оси эллипса.

Разсмотримъ уголъ, образуемый двумя сопряженными діаметрами эллипса. Это

будет угол $CO\mathfrak{D} = v = \beta - \alpha$. Рассмотрим как изменяется этот угол с изменением α.

Имеем: $\operatorname{Tg} v = \operatorname{Tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{Tg}\beta - \operatorname{Tg}\alpha}{1 + \operatorname{Tg}\alpha \cdot \operatorname{Tg}\beta}$.

Проведем через A и A' две дополнительные хорды параллельно $\mathfrak{CC}'$ и $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$. Они пересекаются в точке $M(x, y)$; $\angle OA'M = \alpha$,

$$\angle OAM = 180^\circ - \beta.$$

Из треугольника $A'MP$ имеем:

$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{MP}{A'P} = \frac{y}{a+x}$. Из треугольника MAP имеем

$$\operatorname{Tg}(180^\circ - \beta) = \frac{MP}{AP} = \frac{y}{a-x} = -\operatorname{Tg}\beta,$$

так что $\operatorname{Tg}\beta = -\frac{y}{a-x}$. Следовательно:

$$\operatorname{Tg} v = \frac{\frac{-y}{a-x} - \frac{y}{a+x}}{1 - \frac{y^2}{a^2-x^2}} = -\frac{2ay}{a^2-x^2-y^2}$$

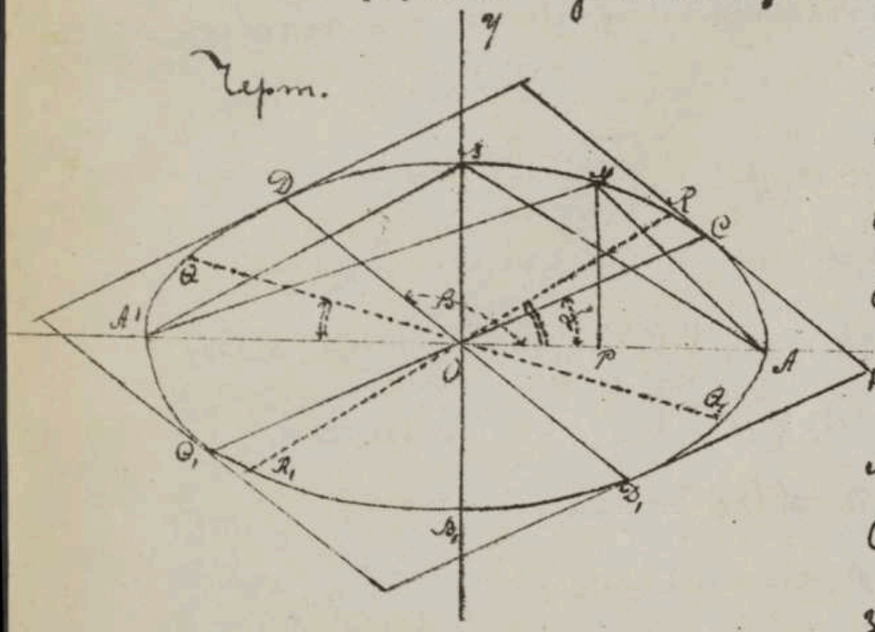
Но из уравнения эллипса мы выводим, что $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ и отсюда $a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$

Вставивъ получимъ $\operatorname{Tg} v = -\frac{2ay}{\frac{a^2y^2}{b^2} - y^2} = -\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)y}$.

Но $a^2 - b^2 = c^2$; следовательно $\operatorname{Tg} v = -\frac{2ab^2}{c^2 y}$.

Мы видимъ, что $\operatorname{Tg} v$ всегда меньше 0; следовательно $\angle v$ всегда $> 90^\circ$ т. е. два сопряженные діаметра образуютъ другъ съ другомъ тупой уголъ.

Уравненіе эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ.



Возьмемъ уравненіе эллипса относительно главныхъ осей: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Преобразуемъ его въ уравненіе относительно сопряженныхъ діаметровъ. OX' и OY', которые образуютъ съ прежней осью углы α и β, для этого подставимъ вмѣсто x и y ихъ величины изъ формулъ преобразованія такимъ:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta.$$

Получимъ: $\frac{x'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\cdot\cos\beta + y'^2\cos^2\beta}{a^2} +$

$+ \frac{x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\sin\beta + y'^2\sin^2\beta}{b^2} = 1$

или $x'^2\left(\frac{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}\right) + \frac{2x'y'\cos\alpha\cos\beta}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\right)+$

$+ y'^2\left(\frac{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}{a^2b^2}\right) = 1$

Коэффиціентъ при $x'y'$ обращается въ нуль либо по свойству сопряженныхъ діаметровъ, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$. Получимъ: $\frac{x'^2}{a_1^2}+\frac{y'^2}{b_1^2}=1$,

гдѣ $a_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}$, $b_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}$

Это есть простѣйшій видъ уравненія эллипса

са, отнесенаго къ сопряженнымъ діаметрамъ. Мы видимъ, что это уравненіе совершенно одинаково съ уравненіемъ эллипса, отнесеннаго къ осямъ, только оси координатъ здѣсь косоугольныя. $a_1^2 y'^2 + b_1^2 x'^2 - a_1^2 b_1^2 = 0$.

Теоремы Аполлонія.

Для выводя этихъ теоремъ найдемъ площадь выраженія сопряженныхъ полудіаметровъ въ функціи угловъ α и β. Мы найдемъ изъ равенствъ (a) и (b):

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$$

$$b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}$$

Теорема 1. Площадь параллелограмма построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, постоянна по величинѣ и равна площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ. Въ точкахъ P, P', D' и D проведемъ касательныя къ эллипсу, получимъ параллелограммъ, построенный на сопряженныхъ діаметрахъ. Его площадь равна $2a_1 2b_1 \sin v$. Она должна быть равна $2a \cdot 2b$. Иначе должно быть

$$a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha) = a b.$$

Доказать упомянутую теорему значить вывести последнее равенство. Со этою целью перемножим a_1^2 и b_1^2; получимъ:

$$a_1^2 \cdot b_1^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + b^4 \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + a^2 b^2 (\sin^2\alpha \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta)}$$

Возьмемъ уравненіе:

$$a^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cdot \cos\beta = 0$$

Возведя его въ квадратъ, получимъ:

$$a^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\beta = -2a^2 b^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

Вставимъ, получимъ:

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^4 b^4}{-2a^2 b^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + a^2 b^2 (\sin^2\alpha \cos^2\beta + \sin^2\beta \cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{a^2 b^2}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Въ знаменателѣ полный квадратъ, поэтому пишемъ:

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{(\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta)^2} = \frac{a^2 b^2}{\sin^2(\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{a^2 b^2}{\sin^2(\beta - \alpha)}$$

Извлекая корень, находимъ

$$a_1 b_1 = \frac{ab}{\sin(\beta - \alpha)} \quad \text{Отсюда: } a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha) = ab.$$

Это и требовалось доказать.

Теорема 11. Сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, постоянна и равна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на осяхъ.

Эта теорема выражается такимъ равенствомъ: $(2a_1)^2 + (2b_1)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$

или $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$

Доказать указанную теорему значит вывести предыдущее равенство. Для этого нужно изъ двухъ равенствъ, выражающихъ a_1 и b_1, исключить углы α и β. Это можно сдѣлать съ помощью уравненія:

$$\operatorname{Tg}\alpha \cdot \operatorname{Tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

Мы имѣемъ:

$$a_1^2(a^2 \operatorname{Sin}^2\alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2\alpha) = a^2 b^2$$

Выразивъ Sin и Cos черезъ Tg, имѣемъ:

$$\frac{a^2 a^2 \operatorname{Tg}^2\alpha}{1+\operatorname{Tg}^2\alpha} + \frac{a_1^2 b^2}{1+\operatorname{Tg}^2\alpha} = a^2 b^2$$

или имѣемъ:

$$a_1^2 a^2 \operatorname{Tg}^2\alpha + a_1^2 b^2 = a^2 b^2 + a^2 b^2 \operatorname{Tg}^2\alpha$$

Отсюда $\operatorname{Tg}^2\alpha = \frac{a^2 b^2 - a_1^2 b^2}{a^2 a_1^2 - a^2 b^2}$ или $\operatorname{Tg}^2\alpha \frac{b^2(a^2-a_1^2)}{a^2(a_1^2-b^2)}$

Изъ равенства, опредѣляющаго b_1^2; мы точно такимъ выведемъ $\operatorname{Tg}^2\beta$ и такъ какъ это равенство отличается только перестановкою a_1 на b_1 и α на β то прямо имѣемъ:

$$\operatorname{Tg}^2\beta = \frac{b^2(a^2-b_1^2)}{a^2(b_1^2-b^2)}$$

Перемноживъ и замѣчая, что $\operatorname{Tg}\alpha \cdot \operatorname{Tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$ получимъ $\frac{b^4(a^2-a_1^2)(a^2-b_1^2)}{a^4(a_1^2-b^2)(b_1^2-b^2)} = \frac{b^4}{a^4}$

или $(a^2-a_1^2)(a^2-b_1^2) =$

$= (a_1^2 - b^2)(b_1^2 - b^2)$. Далѣе $a^4 - a^2 a_1^2 - a^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 = a_1^2 b_1^2 - b^2 b_1^2 - a_1^2 b^2 + b^4$

или $a^4 - b^4 = a^2(a_1^2 + b_1^2) - b^2(a_1^2 + b_1^2)$.

Затѣмъ $a^4 - b^4 = (a_1^2 + b_1^2)(a^2 - b^2)$ Сокративъ на $a^2 - b^2$, получимъ:

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2 .$$

Діаметры въ гиперболѣ.

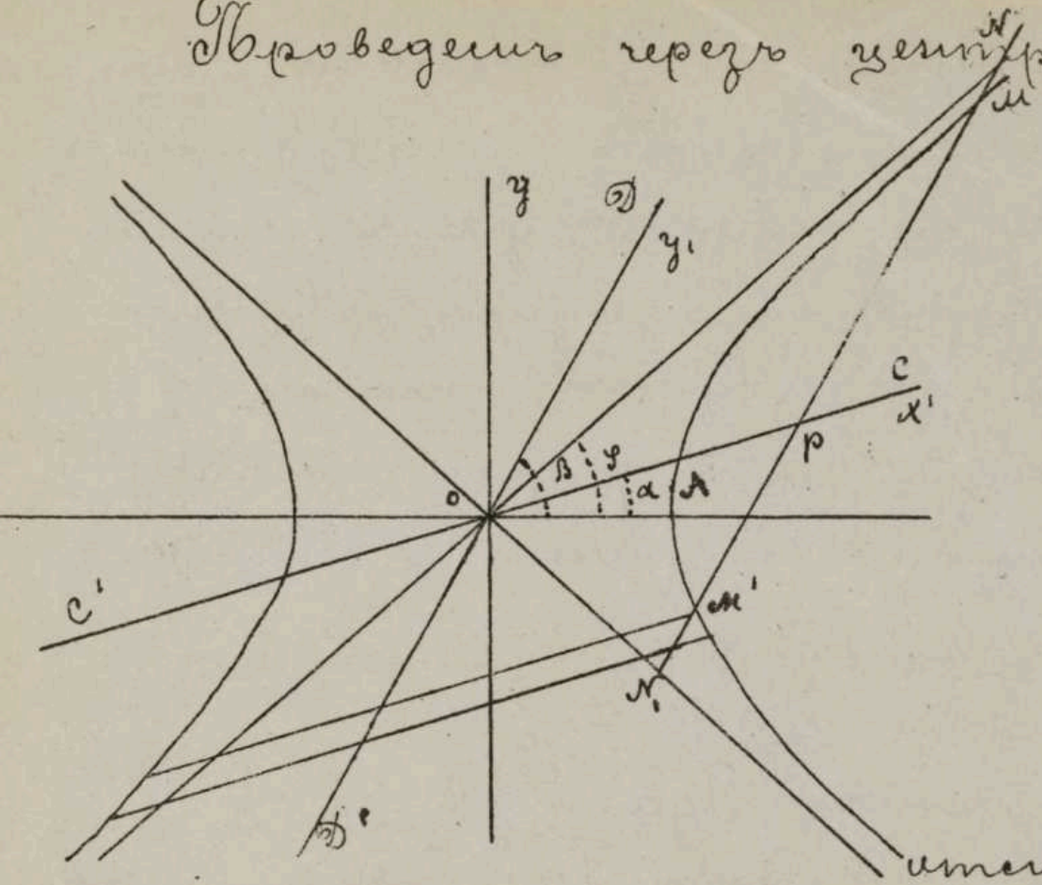
Возьмемъ гиперболу, отнесенную къ осямъ; черезъ перемѣну въ уравненіи эллипса b^2 на $-b^2$, получимъ уравненіе гиперболы; оно будетъ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Возьмемъ въ гиперболѣ ряду параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m.

Уравненіе діаметра, дѣлящаго эти хорды пополамъ, получится изъ такого же уравненія діаметра, выведеннаго для эллипса черезъ перемѣну b^2 на $-b^2$. Слѣдовательно это уравненіе будетъ

$$y = + \frac{b^2}{a^2 m} x .$$

Проведемъ этотъ діаметръ CC'. Онъ дѣлитъ съ осью X уголъ α и мы имѣемъ

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{b^2}{a^2 m} .$$



Проведемъ черезъ центръ діаметръ DD' параллельный хордамъ. Это будетъ діаметръ сопряженный. Пусть β есть уголъ имъ образуемый съ осью x. Именно:

$$Tg\beta = m,$$

$$Tg\alpha = \frac{b^2}{a^2 Tg\beta} \text{ и}$$

отсюда $Tg\alpha . Tg\beta = \frac{b^2}{a^2}$

Это есть отношение между углами двухъ сопряженныхъ діаметровъ съ главною осью гиперболы. Отсюда:

$$Tg\beta = \frac{b^2}{a^2 Tg\alpha}.$$

По этой формулѣ можно изслѣдовать, какъ измѣняется направленіе діаметра, сопряженнаго съ даннымъ. Если $\alpha = 0$, то:

$$Tg\beta \infty \text{ и } \angle\beta = 90°.$$

Слѣдовательно, когда діаметръ Cc' совпадаетъ съ главною осью гиперболы, то діаметръ DD' совпадетъ съ линіею центровъ. Если же будемъ увеличивать

Тд β - уменьшается и ∠β оставаясь остр-
ым, уменьшается. Построим диаметр
D D' делящий ∠ x угол острый
и угол COD между двумя сопряжен-
ными диаметрами будет также ост-
рый. Обозначим через φ угол, образу-
емый асимптой гиперболы с осью x
и построим ее.

Мы знаем что $Тд\,\varphi = \frac{b}{a}$.

С другой стороны $Тд\alpha \cdot Тд\beta = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a}$;

отсюда видно, что если Тд α будет мень-
ше $\frac{b}{a}$, то Тд β > $\frac{b}{a}$, иначе если одна
хорда диаметральная пересекает гиперболу
то другая D D' не пересекает ее.

Когда ∠α, увеличиваясь, будет при-
ближаться к углу φ, то β, уменьша-
ясь также приближается к углу φ
и когда ∠α = φ то $Тд\alpha = \frac{b}{a}$;

тогда и $Тд\beta = \frac{b}{a}$ и ∠β = ∠φ.

В этом случае два сопряженных
диаметра совпадут с асимптотами
или и следовательно для хорды пара-
ллельной асимптотами не существ-
ует диаметра, которая делил-

ни бы ихъ пополнить.

Это впрочемъ и такъ видно, потому что линіи параллельныя асимптотамъ пересѣкаютъ гиперболу въ одной точкѣ и потому не будутъ хордами. Когда $< \alpha$ сдѣлается $> < \beta$, то $< \beta$ будетъ $< < \gamma$ и два діаметра CC' и DD' перемѣнятся одинъ на другой.

Уравненіе гиперболы отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ

Возьмемъ уравненіе гиперболы, отнесенной къ главнымъ осямъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Преобразуемъ его въ уравненіе относительно сопряженныхъ діаметровъ Ox', Oy', которые образуютъ съ осью x углы α и β. Формулы перехода будутъ:

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

Подставимъ и находимъ:

$$\frac{x'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\cos\beta + y'^2\cos^2\beta}{a^2} - \frac{x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\sin\beta + y'^2\sin^2\beta}{b^2} = 1.$$

или $$x'^2\,\frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2} + \frac{2x'y'\cos\alpha\cdot\cos\beta}{b^2}\left[\frac{b^2}{a^2} - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\right] -$$
$$- y'^2\,\frac{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}{a^2b^2} = 1.$$

Коэффициентъ при $x'y'$ есть нуль, либо

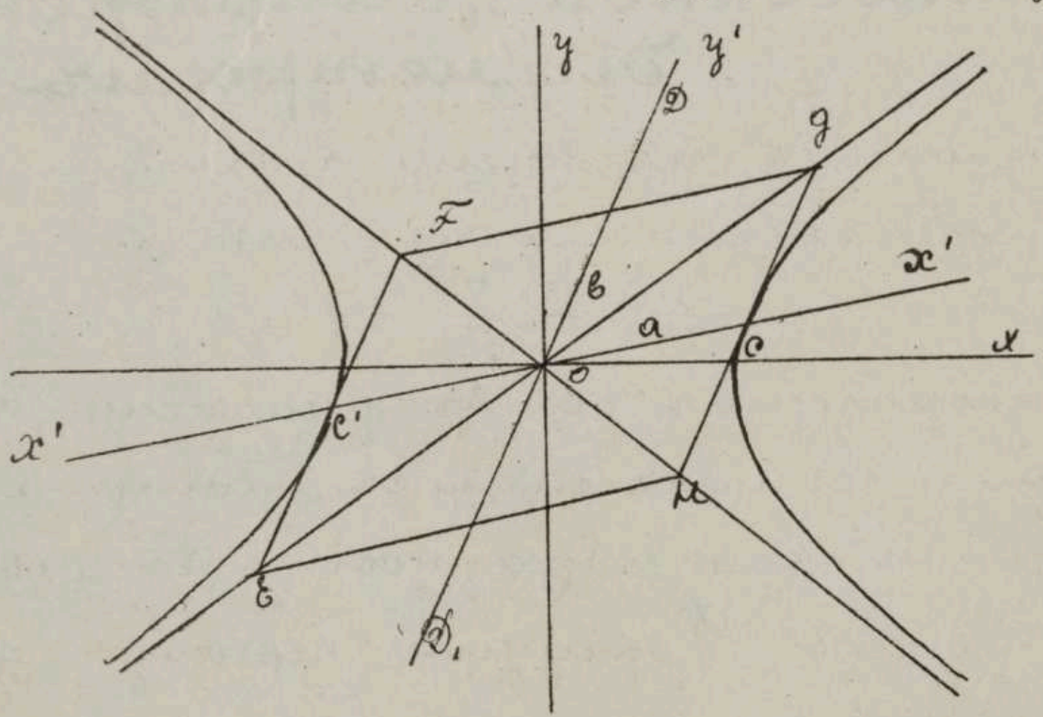
$$\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Мы получимъ:

$$\frac{x'^2}{a_1^2} - \frac{y'^2}{b_1^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ $a_1^2 = \dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}$ и $b_1^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}$.

Уравненіе (2) выражаетъ уравненіе гиперболы, отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ, имѣетъ тотъ же видъ, какъ и уравненіе гиперболы, отнесенной къ осямъ, только оси будутъ косоугольныя.



Теоремы Аполлонія для гиперболы.

Онѣ выводятся изъ формулъ, выражающихъ сопряженныя полудіаметры a_1 и b_1 въ функціи угловъ α и β данныхъ діаметровъ съ главною осью. Эти формулы будутъ:

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\alpha - a^2 \sin^2\alpha},$$

$$b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\beta - b^2 \cos^2\beta}$$

первыя части въ этихъ двухъ формулахъ положительны, слѣдовательно и вторыя должны быть положительны. Легко убѣдиться, что это такъ и будетъ. Дѣйствительно, такъ какъ діаметръ CC' пересѣкаетъ гиперболу, то $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$

или $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta} < \frac{b^2}{a^2}$ или:

$$a^2 \sin^2\alpha < b^2 \cos^2\alpha.$$

Слѣдовательно въ первой формулѣ вторая часть положительна.

Діаметръ DD' не пересѣкаетъ гиперболы, стало быть:

$$\text{Тд}\beta > \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad \frac{\text{Sin}^2\beta}{\text{Cs}^2\beta} > \frac{b^2}{a^2}$$

или $a^2 \text{Sin}^2\beta > b^2 \text{Cs}^2\beta$, следовательно и вторая часть второй формулы положительна. Если мы сравним формулы, выражающие A_1^2 и B_1^2 для гиперболы с подобными же формулами для эллипса, то мы видим, что формулы для гиперболы получаются из формулы эллипса через перемену

$$b^2 \text{на} - b^2 \text{ и } b_1^2 \text{ на } - b_1^2.$$

Теорема Аполлония для эллипса была выведена, как следствие этих двух формул.

Вывод этой применяется к последним двум формулам с переменою

$$b^2 \text{на} - b^2 \text{ и } b_1^2 \text{ на} - b_1^2.$$

Следовательно теорема Аполлония для гиперболы получается из таких же теорем для Эллипса через перемену

$$b^2 \text{на} - b^2 \text{ и } b_1^2 \text{ на} - b_1^2.$$

Для эллипса были выведены два равенства:

$$a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha) = ab$$

и $$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2.$$

Переместимъ въ первомъ уравненіи

b на $b\sqrt{-1}$ и b_1 на $b_1\sqrt{-1}$

получимъ $a_1 b_1 \sqrt{-1} \sin(\beta - \alpha) = ab\sqrt{-1}$

или $a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha) = ab$, а второе равенство даетъ:

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Слѣдовательно находимъ:

1) Въ гиперболѣ площадь параллелограмма, построеннаго на сопряженныхъ діаметрахъ, имѣетъ величину постоянную и равную площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

2) Разность площадей квадратовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ гиперболы постоянна и равна разности площадей квадратовъ построенныхъ на осяхъ.

Діаметры параболы.

Возьмемъ параболу, отнесенную къ вер-

Аналит. геом. Листъ 50

линии и къ оси. Ея уравненіе будетъ $y^2 - 2px = 0$. Возьмемъ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Діаметръ, дѣлящій пополамъ эти хорды, будетъ имѣть общее уравненіе:

$$2Ax + By + D + m(Bx + 2Cy + 2) = 0$$

Въ данномъ случаѣ это уравненіе примѣтъ видъ

$$-2p + m \cdot 2y = 0$$

Отсюда $y = \frac{p}{m}$. Ордината постоянна. Слѣдовательно діаметръ параллеленъ оси xъ.

При этомъ всякая параллель оси x будетъ діаметромъ. Дѣйствительно пусть уравненіе нѣкоторой параллели будетъ

$$y = b$$

Положимъ $b = \frac{p}{m}$; отсюда $m = \frac{p}{b}$ и это опредѣляетъ направленіе тѣхъ хордъ, которыя такая па-

ранѣе доказать помощью.

Составимъ уравненіе параболы, отнесенной къ діаметру и къ касательной въ концу діаметра.

Возьмемъ діаметръ Ax и касательную Ay'. Пусть координаты A будутъ (a, b). Ось дана.

Такъ какъ эта точка лежитъ на параболѣ, то имѣемъ:

$$b^2 = 2pa.$$

Формулы преобразованія координатъ будутъ:

$$x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\beta; \quad y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\beta$$

Въ нашемъ случаѣ

$$\angle\alpha = 0, \quad \angle\beta = \angle y'Ax:$$

Слѣдовательно формулы будутъ

$$x = a + x' + y' \cos\beta, \quad y = b + y' \sin\beta.$$

Вставимъ въ уравненіе

$$y^2 = 2px,$$

получимъ:

$$b^2 + 2b \sin\beta \cdot y' + \sin^2\beta\, y'^2 = 2pa + 2px' + 2p \cos\beta y',$$

но $b^2 = 2pa$.

Уголъ β есть уголъ, образованный касательной къ параболѣ въ точкѣ ординатой

которой равна b_1. Но мы знаемъ, что

$$\operatorname{Tg}\beta = \frac{p}{b} \text{ или } \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{p}{b}$$

и отсюда

$$b \cdot \sin\beta = p \cdot \cos\beta.$$

Слѣдовательно члены съ y' въ обѣихъ частяхъ предыдущаго равенства можно сократить.

Остается

$$\sin^2\beta \; y'^2 = 2p x'$$

или

$$y'^2 = \frac{2p}{\sin^2\beta} x'.$$

Если для краткости положить, что

$$\frac{p}{\sin^2\beta} = p';$$

то получимъ:

$$y'^2 = 2p' x'.$$

Такимъ образомъ уравненіе параболы, отнесенной къ діаметру и къ касательной въ концу его, имѣетъ совершенно такой же видъ, какъ уравненіе параболы, отнесенной къ вершинѣ и оси.

Величина p' называется параметромъ параболы по отношенію къ діаметру Ax'.

Покажемъ какое значеніе имѣетъ этотъ

новый параметръ.

Мы имѣемъ

$$p' = \frac{p}{\sin^2\beta}, \text{ но } \sin^2\beta = \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}; =$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\frac{p^2}{b^2}}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\frac{p^2}{b^2}}{1+\frac{p^2}{b^2}} = \frac{p^2}{b^2+p^2} =$$

$$= \frac{p^2}{2pa+p^2} = \frac{p}{2a+p}.$$

Поэтому $p_1 = p : \frac{p}{2a+p} = 2a + p.$

Возьмемъ фокусъ параболы F, соединимъ его съ A. Принимая, что радіусъ векторъ FA выражается посредствомъ абсциссы такъ:

$$FA = \frac{p}{2} + a, \text{ или } 2FA = p + 2a.$$

Слѣдовательно находимъ, что новый параметръ p' равенъ $2FA$, т.е. онъ равенъ удвоенному разстоянію точки A отъ фокуса.

Конецъ

Издатель: