Изъ библіотеки
Н. Л. Бухаліцева
№

49/44
Изъ библіотеки
Н. Э. Бухгольцева
№

И.Т.Ч.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

I-ый КУРСЪ

лекціи

Провер. 1935

ПРОВЕРЕНО
1952

ПРОВЕРЕНО
1945

Москов.-Машинострои. Инст.
БИБЛІОТЕКА
им. Н. Э. Баумана

проф. Н.А.ШАПОШНИКОВА.

1935 г.

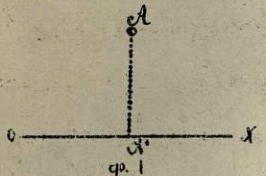
Издание лекций разрешаю: Н. Шапошников

Введеніе.

На границѣ древней математики, отличавшейся синтетическимъ характеромъ и новой, по преимуществу аналитической, стоитъ аналитическая геометрія. Ея основателемъ считается Декартъ, французскій философъ и математикъ XVII столѣтія. Идея Декарта, выраженная имъ въ его „Геометріи", изданной въ 1637 году, заключается въ нахожденіи общаго способа рѣшенія геометрическихъ проблемъ при помощи математическаго анализа, говоря иначе Декартъ далъ средство выражать геометрическія фигуры и изслѣдовать свойства ихъ посредствомъ символовъ. Такъ какъ фигуры могутъ быть двухъ и трехъ измѣреній то аналит. геометрія обыкновенно раздѣляется на двѣ части: аналит. геометрію на плоскости и аналитич. геометрію въ пространствѣ; въ первой разсматриваются только тѣ геометрическія фигуры, которыя могутъ быть помѣщены на плоскости, а во второй тѣ, которыя помѣщаются гдѣ-нибудь въ пространствѣ. Принимаясь за изученіе аналитической геометріи и тѣхъ цѣлей, которыя она преслѣдуетъ познакомимся предварительно съ нѣкоторымъ методомъ, который значительно облегчаетъ изученіе аналитической геометріи; этотъ методъ носитъ названіе методовъ проекцій и былъ введенъ французскимъ инженеромъ Понселе.

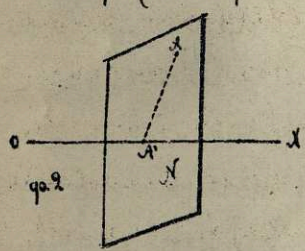
О проекціяхъ

Допустимъ имѣемъ какую нибудь точку A и прямую ox называемую осью проекцій требуется найти проекцію точки A на этой оси. Если точка A и ось ox находятся на одной плоскости (фг.1), то надо опустить изъ A перпендикуляръ на ox и точка пересѣченія ихъ A' будетъ проекціей точки A. Если же ось ox и точка A лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ



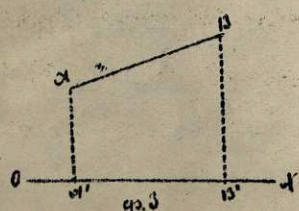
фг.1

то чрезъ A проводимъ плоскость N перпендикулярную къ оси; точка A' пересѣченія этой плоскости съ осью ox и будетъ проекціей точки A. (фг.2)



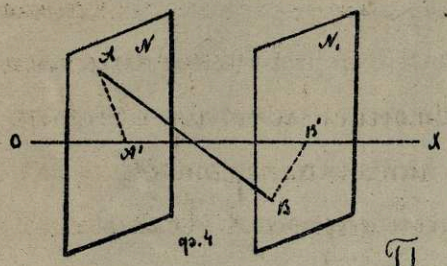
фг.2

Отъ разсмотрѣнія проекціи точки перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію проекціи прямой линіи. Надо замѣтить, что на прямую линію мы будемъ смотрѣть, какъ на путь поступательнаго движенія точки, и то мѣсто откуда начала свое движеніе точка будемъ считать началомъ прямой, а гдѣ окончила — концомъ прямой. Положимъ намъ дана прямая AB, гдѣ A — начало, а B — конецъ прямой, требуется найти ея проекцію на оси. ox (фг.3). Чтобы найти проекцію прямой линіи надо найти проекціи крайнихъ ея точекъ и считать направленіе проекціи отъ проекціи начала до проекціи конца ея.



фг.3

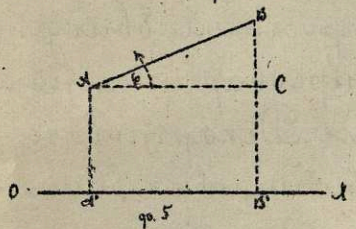
Такъ $A'B'$ есть проекція линіи AB (фиг.3), когда линія и ось проекцій лежатъ въ одной плоскости; если же онѣ лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ, то проекція прямой находится при помощи проектирующихъ плоскостей NN_1 (фиг.4)



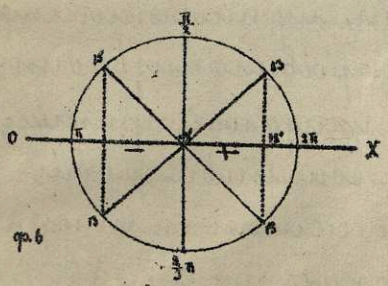
фиг.4

Попытаемся теперь вывести зависимость между линіей и ея проекціей, ввиду же ообщенія выводовъ познакомимся предварительно съ правилом знаковъ, носящее названіе Декартоваго. Правило это заключается въ томъ: всѣ числовыя величины линій берутся со знакомъ (+), разъ сами линіи имѣютъ направленіе слѣва направо, и со знакомъ (—) разъ онѣ направленіе имѣютъ обратное. Такое, издавна принятое, выраженіе правила не даетъ ему теоретическаго обоснованія, вслѣдствіи чего это правило низводится на степень непосредственнаго указанія, принимаемаго условно ради достиженія единства и общности выводимыхъ формулъ. На самомъ дѣлѣ нужно понимать указанное правило какъ послѣдствіе общаго представленія о разлиціи между величинами направленными и абсолютными. Нужно помнить то, что соотношенія величинъ, указываемыя элементарной геометріей, касаются величинъ абсолют-

ными и въ аналитической геометріи, имѣющей дѣло съ величинами направленными, могутъ приписываться только къ величинамъ положительнымъ, а потому, относя ихъ къ величинамъ отрицательнымъ, мы должны передъ обозначеніями послѣднихъ ставить вторые знаки минусы, основываясь на томъ, что совокупность двухъ минусовъ даетъ плюсъ. Сдѣлавъ эти замѣчанія обратимся теперь къ вопросу о положеніи соотношенія между линіею и ея проекціею. Положимъ имѣемъ линію AB (фиг 5) и ея проекцію $A'B'$. Черезъ начало A линіи AB проведемъ линію AC вправо параллельно ox, тогда уголъ между AC и AB, отсчитываемый по направленію обратному движенію часовой стрѣлки, носитъ названіе угла отклоненія линіи отъ оси проекцій, обозначимъ его черезъ φ. Между угломъ φ и знаками (+) и (−) проекціи существуетъ строгое соотношеніе. Если $\varphi < \frac{\pi}{2}$ или $\varphi < 2\pi$, но больше $\frac{3}{2}\pi$, то B' будетъ вправо отъ A' (гдѣ A' считается за начало линіи $A'B'$) и проекція будетъ положительна. Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$, но $< \pi$ или $\varphi > \pi$ но $< \frac{3}{2}\pi$, то B' будетъ влѣво отъ A' и проекція будетъ отрицательна. Если $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ или $\varphi = \frac{3}{2}\pi$, то проекція будетъ равна нулю. На фиг 6 показаны всѣ эти положенія.



фиг 5



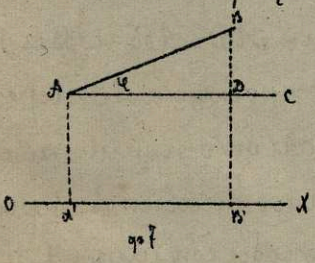
фиг 6

Теорема: Проекція линіи на ось равняется произведенію

проектируемой линии на косинус угла отклонения.

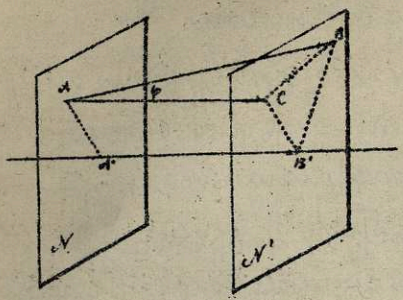
Теорема эта определяет не только абсолютную величину проекции но и знак ея. Въ зависимости отъ угла отклонения φ проектируемая линія AB можетъ располагаться во всѣхъ четырехъ квадрантахъ, т.е. φ можетъ быть I) $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$; II) $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ III) $\pi<\varphi<\frac{3}{2}\pi$; IV) $\frac{3}{2}\pi<\varphi<2\pi$. Во всѣхъ этихъ случаяхъ доказательство будетъ нѣсколько отличаться одно отъ другого и такъ какъ теорема эта имѣетъ весьма важное значеніе, то мы и разберемъ всѣ 4 случая

Случай I-ый. $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Для доказательства проводимъ AC параллельно ox до пересѣченія съ BB' въ точкѣ D (ф.7), тогда $AD=A'B'$ какъ отрѣзки параллельные между параллельными.



ф.7

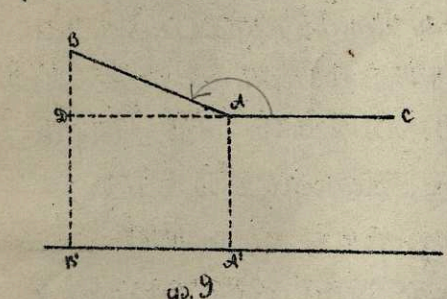
Изъ прямоугольнаго треугольника ABD имѣемъ $AD=AB.\cos BAD=A'B'$. Обозначимъ черезъ $\underline{a}$ величину AB, черезъ a — проекцію и черезъ φ — уголъ BAD. Такъ какъ $A'B'$ выражаетъ собою число абсолютное, а a — положительно, ибо проекція направлена слѣва направо, то a можетъ замѣнить $A'B'$ на томъ основаніи, что абсолютныя величины можно замѣнять только положительными количествами. Сдѣлавъ замѣну имѣемъ $a=a.\cos\varphi$. Величина $\underline{a}$ есть здѣсь число, а не количество, т.к. направленіе, а слѣдовательно и знакъ опредѣляетъ уголъ φ. Если бы AB и ox не лежали въ одной плоскости, то пришлось бы линію AC продолжить до встрѣчи съ плоскостью N' въ точкѣ C (ф.8)



ф. 8

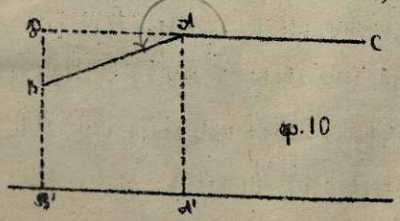
и соединить C с B; тогда AC = A'B' как отрезки прямых между параллельными плоскостями. Остальной ход доказательства останется тот же самый.

Случай II-й: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Через точку A проводим линию AC вправо (ф. 9). Угол отклонения φ, отсчитываемый по направлению обратному движению часовой стрелки, будет $> \frac{\pi}{2}$ и $< \pi$. Затем линию AC продолжаем влево до встречи с BB' в точке D. Из прямоугольного треугольника BAD, имеем $AD = A'B' = AB \cos BAD$. Обозначаем проекцию A'B' через a, где a само по себе отрицательно. Требуется поставить перед a знак (−), чтобы сделать a положительным и тогда только можно будет или заменить абсолютную величину A'B'. Заменяя через a AB, и через $(\pi - \varphi)$ угол BAD, получаем



ф. 9

$$-a = a\cos(\pi - \varphi) = -a\cos\varphi; \quad a = a.\cos\varphi$$



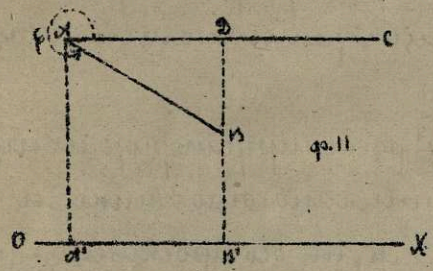
ф. 10

Случай III-й: $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$. Строим угол отклонения φ. Линию AC продолжаем до встречи в точке D с продолженной линией

BB'. Из прямоугольного треугольника BAD имеем: $AD = A'B' = AB\cos DAB$. Заменяя здесь $A'B'$ через $-a$ (на том же основании как и в предыдущем случае) AB через a и угол DAB через $(\varphi - \pi)$ имеем:

$$-a = a\cos(\varphi - \pi) = a\cos(\pi - \varphi) = -a\cos\varphi; \quad a = a\cos\varphi$$

Случай IV $\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$. Построив угол отклонения и продолжив BB' до пересечения с AC имеем прямоугольный треугольник DAB (фиг 11) Из него выводим $AD = A'B' = AB\cos DAB$



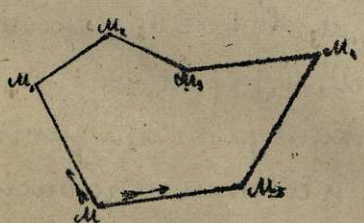
фиг 11

Делая туже замену, что и раньше имеем: $a = a\cos(2\pi - \varphi) = a\cos\varphi$

Разсмотрим частные случаи этой теоремы: когда $\varphi = 0$, то $\cos\varphi = 1$ и $A'B' = AB$; когда $\varphi = \pi$, то $\cos\pi = -1$ и $A'B' = -AB$; когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3}{2}\pi$, то $\cos\varphi = 0$ и проекция $AB = 0$.

От разсмотрения проекции прямой перейдем к разсмотрению проекции ломаной линии

Если мы от многоугольника отнимем какую-нибудь сторону, то получится ломаная линия, которая называется разомкнутым многоугольником, а отнятая линия — замыкающею стороною, так многоугольник $M \ldots M_n$ (фиг 12) будет разомкнутым, а MM_n замыкающею стороною этого много-

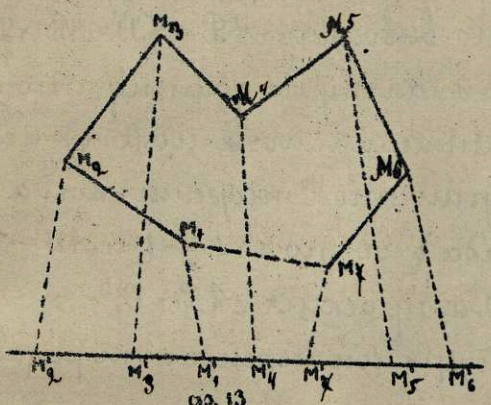


фиг 12

угольника. Относительно сторонъ разомкнутаго многоугольника и замыкающей стороны вводятъ условіе: направленіе стороны многоугольника считаютъ въ одну сторону, а направленіе замыкающей въ другую.

Опредѣленіе: Проекція ломаной линіи равна алгебраической суммѣ проекцій составныхъ частей ломаной.

Теорема: Сумма проекцій сторонъ разомкнутаго многоугольника равна проекціи замыкающей стороны.



фр. 13

Проектируемъ разомкнутый многоугольникъ $M_1 \ldots M_6$ на ось проекцій ox (фр13) (такъ какъ не всѣ стороны многоугольника находятся въ одной плоскости и линіи ox, то и не всѣ проектирующія линіи на чертежѣ къ линіи ox перпендикулярны). Складываемъ въ силу опредѣленія проекціи линій M_1M_2 и M_2M_3 въ алгебраическомъ смыслѣ, т.е. принимая ихъ направленія въ умъ: $(-M'_1M'_2)+(+M'_2M'_3)=-M'_1M'_3$. Съ $(-M'_1M'_3)$ складываемъ проекцію линіи M_3M_4, имѣемъ $(-M'_1M'_3)+(+M'_3M'_4)=-M'_1M'_4$ и т.д. Мы видимъ, что сумма проекцій зависитъ лишь отъ начала и конца ломан. линіи и совсѣмъ не зависитъ отъ промежуточныхъ точекъ. Окончивъ сложеніе проекцій

разомкнутого многоугольника $M_1 \ldots M_n$ будем имѣть сумму $M_1'M_n'$, т.е проекцію замыкающей стороны M_1M_n. Обозначивъ стороны разомкнутого многоугольника послѣдовательно черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, а углы отклоненія этихъ сторонъ черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$, будемъ имѣть:

$$a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_n \cos\varphi_n = A \cdot \cos\Phi$$

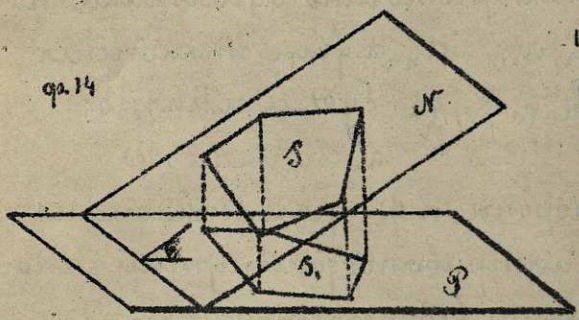
гдѣ A — замыкающая сторона, а Φ — уголъ отклоненія ея. Если мы будемъ разсматривать замкнутый многоугольникъ, то сумма проекцій всѣхъ его сторонъ на ось равна 0, при условіи, если мы примемъ направленіе всѣхъ сторонъ одинаковое, т.е. конецъ одной стороны служитъ началомъ слѣдующей. Эта теорема есть слѣдствіе предыдущей. Мы уже видѣли, что сумма проекцій зависитъ лишь отъ начала и конца ломаной и совсѣмъ не зависитъ отъ промежуточныхъ точекъ. Въ замкнутомъ многоугольникѣ начало и конецъ сливаются въ одну точку и проекція ихъ обращается въ точку, т.е равна по величинѣ 0. Выражая это равенство символически имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \cos\varphi_i = 0$$

Проекціи площадей

Возьмемъ въ пространствѣ площадь, ограниченную произвольнымъ контуромъ и спроектируемъ эту площадь на данную плоскость проекцій P (фиг. 14). Чтобы получить проекцію разсматриваемой площади, вообра-

зимъ что изъ всѣхъ точекъ ея контура опущены перпендикуляры на плоскость P; подошвы этихъ перпендикуляровъ ограничатъ на плоскости P площадь, которая и будетъ проекціей данной площади.



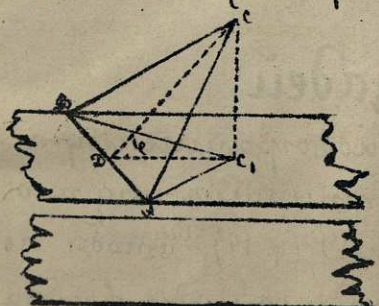
фг. 14

Пусть величина данной площади будетъ S, а величина площади ея проекціи S_1 и положимъ плоскость N, въ которой лежитъ данная площадь S, дѣлаетъ съ плоскостью проекцій P уголъ φ, тогда можно доказать, что $S_1 = S \cos\varphi$.

Теорема: Проекція площади равна проектируемой площади, умноженной на $\cos$ угла, дѣлаемаго съ плоскостью проекцій.

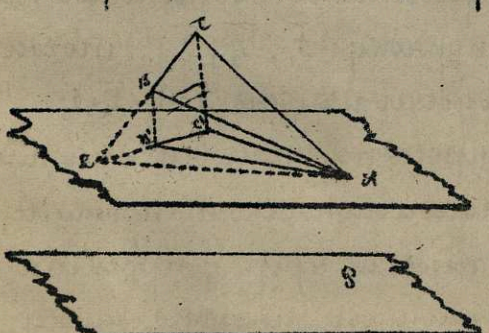
Для доказательства мы начнемъ съ разсмотрѣнія простѣйшихъ случаевъ.

I Разсмотримъ вопервыхъ проекцію площади треугольника, одна изъ сторонъ котораго параллельна плоскости проекцій; пусть это будетъ сторона AB треугольника ABC. Тогда проведемъ черезъ AB плоскость параллельную плоскости P, и возьмемъ проекцію площади ABC на эту вспомогательную плоскость. Очевидно, что


фг. 15.

такая проекція будетъ равна проекціи на плоскости P. Чтобы получить эту проекцію, опустимъ изъ точки C (фр 15) перпендикуляръ на плоскость, параллельную плоскости P, и соединимъ его подошву C_1 съ A и B. Треугольникъ $AB C_1$ будетъ проекціей треугольника ABC. Изъ C_1, на линію AB опустимъ перпендикуляръ $C_1 D$ и точку D соединимъ съ C; линія CD будетъ очевидно перпендикулярна къ AB и уголъ $CDC_1 = \varphi$, при чемъ φ есть линейный уголъ, которымъ измѣряется двугранный уголъ $CABC_1$. Въ треугольникѣ CDC_1 уголъ при C_1 есть прямой; слѣдовательно имѣемъ $C_1 D = CD \cdot \cos\varphi$. Помноживъ обѣ части этого равенства на $\frac{1}{2} AB$ будемъ имѣть: $\frac{1}{2} AB \cdot C_1 D = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \cos\varphi$ или площадь $\triangle AB C_1 = \triangle ABC \cdot \cos\varphi$

II. Положимъ, что ни одна изъ сторонъ даннаго треугольника ABC не параллельна плоскости проекцій. Тогда черезъ вершину A, (фр. 16) ближайшую къ плоскости проекцій, проведемъ вспомогательную плоскость, параллельную плоскости P, и будемъ разсматривать проекцію треугольника ABC на этой вспомогательной плоскости. Чтобы получить проекцію даннаго треугольника, опустимъ изъ точекъ B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 на вспомо-

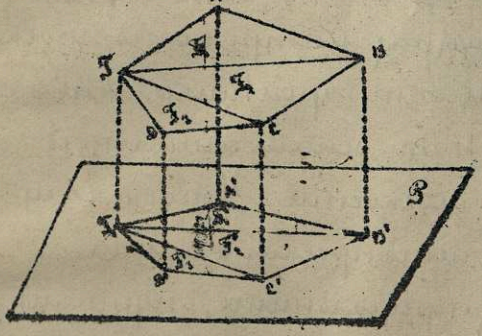


фр. 16

чательную плоскость, точка же A будет служить сама себе проекцией. Подошвы перпендикуляров B_1 и C_1 соединим между собою и с точкою A; тогда треугольник AB_1C_1 будет проекцией треугольника ABC. Продолжим далее прямые BC и B_1C_1 до встречи в точке D и соединим точку D с точкою A; мы получим треугольник ADC, проекцией которого очевидно будет $DA'C_1$, следовательно мы можем написать что $ADC_1 = A'DC$ сч; подобно этому треугольник DAB_1 есть проекция DAB; следовательно $DAB_1 = DA'B$ сч. Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$B_1AC_1 = BAC \text{ сч}$$

III. Докажем далее ту же теорему для площади прямолинейного многоугольника. Положим, что площадь данного многоугольника есть S (фиг. 17); разделим его диагоналями, проведенными из одной вершины, на треугольники и площади всех этих треугольников обозначим по порядку: $F_1, F_2, F_3 \ldots$ тогда будем иметь $S = F_1 + F_2 + F_3 \ldots$; спроектируем все эти площади на плоскость проекций и назовем через S_1 проекцию площади многоугольника,

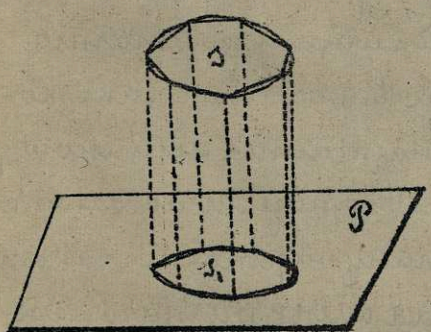


фиг. 17

а через $F_1', F_2', F_3' \ldots$ проекции площадей треугольников

F_1, F_2 ..... , тогда очевидно будем иметь $S_1 = F_1' + F_2' + F_3' + \ldots\ldots$
При том для проекции площадей треугольников имеем по доказанному, что $F_1' = F_1 \cos\varphi$; $F_2' = F_2 \cos\varphi$; $F_3' = F_3 \cos\varphi$ .....
Сложив все эти равенства, имеем: $F_1' + F_2' + \ldots + F_n' = \cos\varphi (F_1 \ldots F_n)$
или $S' = S \cdot \cos\varphi$

IV. Наконец легко будет доказать эту теорему для произвольной криволинейной площади (фр. 18). Рассмотрим произвольную криволинейную площадь S и ее проекцию S_1. Впишем в контур площади S произвольный многоугольник, который также спроектируем на плоскость проекций; он имеет, очевидно, проекцией многоугольник, вписанный в контур площади S_1. Площадь многоугольника вписанного в S обозначим через Q, а площадь многоугольника, вписанного в S_1, обозначим через Q_1, где Q_1 представляет проекцию Q; тогда на основании уже доказанного имеем: $Q_1 = Q \cdot \cos\varphi$. Это равенство всегда справедливо, каково бы ни было число сторон вписанного многоугольника. Вообразим, что число сторон вписанного многоугольника возрастает до ∞ и что каждая из сторон стремится сделаться бесконечно малой, тогда предель площади Q будет площадь S, а предель пло-

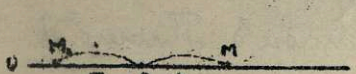


фр. 18

щади Q_1 будетъ S_1; по способу предѣловъ заключаемъ, что такое же равенство будетъ существовать между предѣлами; слѣдовательно въ предѣлѣ получимъ $S_1 = S \cos\varphi$. Такимъ образомъ наша теорема доказана вполнѣ.

Опредѣленіе положенія точки на оси.

Для того чтобы опредѣлить положеніе точки M на оси, проводятъ черезъ данную точку линію, называемую осью абсциссъ, берутъ на ней точку O, которую принимаютъ за начало счета и опредѣляютъ разстояніе точки M отъ O. Это разстояніе выраженное какъ количество, называется абсциссою точки M. Обозначимъ абсолютную величину разстоянія M отъ O черезъ a, т.е $MO = a$ (фр.19). Для болѣе точнаго опредѣленія положенія точки M, вводятъ правило знаковъ которое состоитъ въ томъ, что разстоянія, лежащія вправо отъ точки O, принятой за начало, считаютъ положительными, а влѣво отрицательными. Такъ OM будетъ положительно, а OM_1 – отрицательно. Называя абсциссы точекъ M и M_1 черезъ x и x', а абсолютныя величины OM и равной ей OM_1, черезъ a имѣемъ:



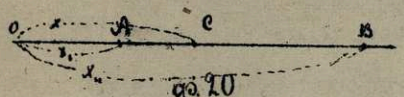
фр.19

$$x = +a \text{ и } x' = -a$$

гдѣ $(+a)$ и $(-a)$ суть количества.

Задача: На оси даны точки A и B (фр 20) найти точку C такъ чтобы AC относилось къ CB какъ m:n?

Эту задачу нужно рѣшить такъ, чтобы получить общую формулу. Обозначимъ абсциссу точки A черезъ x_1, абсциссу точки B — x_{11}, а абсциссу искомой точки C черезъ x.



фр 20

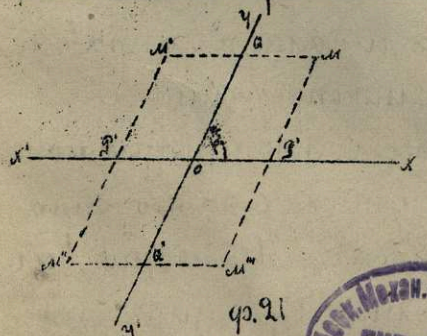
Тогда $AC:CB = m:n$; но усматривая изъ чертежа, что AC равняется $x - x_1$, а $BC = x_{11} - x$, пишемъ: $(x-x_1):(x_{11}-x) = m:n$, или $nx - nx_1 = mx_{11} - mx$, опредѣляя отсюда x получаемъ $x = \frac{nx_1 + mx_{11}}{m+n}$. Если отношеніе $\frac{m}{n}$ выразимъ черезъ K, то формула эта приметъ такой видъ $x = \frac{x_1 + Kx_{11}}{K+1}$

Въ частномъ случаѣ, когда $K=1$, имѣемъ:

$$x = \frac{x_1 + x_{11}}{2}$$

Опредѣленіе положенія точки на плоскости

Разсмотримъ теперь принципъ Декарта, примѣненный имъ къ опредѣленію положенія точки на плоскости



фр 21

Положимъ имѣемъ двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи xx' и yy', называемыя осями координатъ (фр 21). Прямая xx' носитъ названіе оси $x^{ъ}$, или оси абсциссъ, а прямая yy' —

Моск. Механ.-Машиностр. Ин-т
БИБЛІОТЕКА
им. Н. Э. Баумана

— оси y или оси ординат. Пересечение их даетъ точку O принимаемую за начало координатъ. Уголъ φ, откладываемый въ направленіи обратномъ движенію часовой стрѣлки называется координатнымъ угломъ. Съ помощью этихъ данныхъ положеніе любой точки на плоскости можно точно опредѣлить. Названіе осей координатъ зависитъ отъ угла φ, разъ онъ острый или тупой, то такая система координатъ носитъ названіе прямолинейной косоугольной, а разъ φ прямой уголъ — то прямоугольной или ортогональной. При послѣдней системѣ координатъ многія соотношенія выражаются гораздо проще чѣмъ при косоугольной. Она-то собственно и была предложена Декартомъ. Оси координатъ пересѣкаясь разбиваютъ плоскость на четыре угла, которые откладываются по порядку въ сторону противуположную движенію часовой стрѣлки. Такимъ образомъ xOy есть первый уголъ, yOx' — второй уголъ, x'Oy' третій, y'Ox четвертый. Положеніе точки M опредѣляется слѣдующимъ образомъ. Черезъ точку M проводимъ линію MP и MQ параллельно осямъ y'' и x'', тогда величинами и направленіями этихъ линій точка M вполнѣ опредѣлится. Линіи эти опредѣляющія положеніе точки называются ея координатами и символически точка съ ея координатами обозначается такъ: $M(x_1, y_1)$, гдѣ x_1 — обозначаетъ всегда абсциссу точки, а y_1 — ея ординату. Принципъ ко-

требления координатъ дополняется правиломъ знаковъ Декарта. Правило знаковъ вытекаетъ изъ того, что для различія положенія точекъ въ разныхъ углахъ осей координатъ необходимо считать координаты величинами направленными. Дѣйствительно, если бы не различали направленія координатъ, то по даннымъ абсолютнымъ величинамъ двухъ координатъ, положивъ $x=a$ и $y=b$, могли бы построить въ разныхъ углахъ осей четыре точки M, M_1, M_2 и M_3 попарно симметричныя относительно одной изъ осей и имѣющія вслѣдствіе этого совершенно одинаковыя по абсолютной величинѣ одноименныя координаты. Условившись же въ томъ, что координаты суть величины направленныя и что направленія или направо и вверхъ считаются положительными, а направленія налѣво и внизъ — отрицательными, мы отчетливо различимъ всѣ четыре указанныя точки, потому что тогда точка M будетъ имѣть координаты $x=+a$ и $y=+b$, точка M_1 координаты $x=-a$ и $y=+b$, M_2 координаты $x=-a$ и $y=-b$, и наконецъ M_3 координаты $x=+a$ и $y=-b$. Разберемъ еще нѣкоторые частные случаи положенія точки: 1) точка лежитъ на оси x-овъ, какъ напримѣръ P и P', тогда ея координаты будутъ $x=\pm a$, $y=0$; 2) точка лежитъ на оси y-овъ, какъ Q и Q_1, ея координаты $x=0$ и $y=\pm b$; 3) точка лежитъ въ началѣ координатъ ея координаты $x=0$ и $y=0$. И такъ мы видимъ, что координаты всякой точки суть дѣйствительныя направлен-

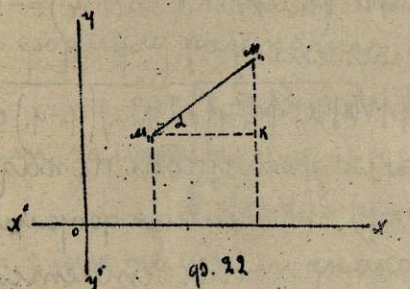
ныя величины, могущія быть положительными или отрицательными. Въ смыслѣ тѣхъ алгебраическихъ вычисленій, которыя производятся въ аналитической геометріи, за координаты нужно принимать не самыя разстоянія опредѣляемой точки отъ осей, а тѣ отвлеченныя алгебраическія количества, которыя при извѣстной единицѣ длины и при извѣстномъ условіи относительно направленій, выражаютъ длины и направленія такихъ геометрическихъ разстояній.

Если относительно выбранныхъ осей дана нѣкоторая точка M, то по извѣстному положенію ея мы можемъ опредѣлить обѣ координаты. Для этого проводимъ MP параллельно оси ординатъ и непосредственнымъ измѣреніемъ находимъ количества, выражающія длины OP и MP. Если наоборотъ даны алгебраическія значенія координатъ, то, руководствуясь масштабомъ, который опредѣляетъ выбранную единицу длины, строимъ прямую OP и параллельную оси y-овъ PM и опредѣляемъ такимъ образомъ положеніе точки M.

Покажемъ теперь на примѣрѣ, что объясненный принципъ опредѣленія положенія точки ведетъ къ алгебраическому выраженію разныхъ геометрическихъ величинъ. Опредѣлимъ для этого длину прямой, которой положеніе на плоскости дано координатами двухъ ея концовъ. Положимъ, что относительно осей координатъ ортогональныхъ даны

координаты точек M_1 и M_2 (ф. 22), которые обозначим соответственно через x_1, y_1 и x_2, y_2. Требуется определить расстояние M_1M_2, которое обозначим через δ. Достаточно для этого построить координаты и провести из одной точки параллельно оси абсцисс прямую M_1K до встречи с ординатой другой точки. Тогда из прямоугольного треугольника M_1M_2K находим $M_1M_2^2 = M_1K^2 + M_2K^2$, или заметив по чертежу, что $M_1K = x_2 - x_1$ и $M_2K = y_2 - y_1$, можем написать $\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, откуда

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



ф. 22

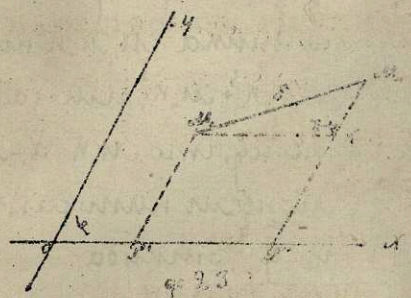
Если бы мы захотели определить направление линии M_1M_2, то нам пришлось бы определить угол α, ибо оно вполне его характеризует. Так что из того же прямоугольного треугольника M_1M_2K мы получили бы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_2K}{M_1K} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Если одна из точек положим M_1 совпадает с началом координат, то ее координаты равняются 0, и тогда расстояние выразится так: $\delta = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, а направление выражаемое углом α так: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2}{x_2}$.

Сейчас мы рассматривали расстояние между двумя точками, беря прямоугольные оси координат, рассмотрим теперь более общий случай, когда оси косоугольны (ф. 23). Имеем точку $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Определяемое расстоя-

ние $M_1M_{II}=\delta$. Линия M_1K параллельна оси x^{II} и угол M_1KM_{II} равен $(\pi-\varphi)$, так как он есть дополнение угла φ до π, ибо они имеют параллельные стороны, но направлены в разные стороны. Из ΔM_1KM_{II} имеем $\delta^2=M_1K^2+M_{II}K^2-2M_1K\cdot M_{II}K\cos M_1KM_{II}$ или подставляя значения M_1K, $M_{II}K$ и $\angle M_1KM_{II}$ имеем: $\delta^2=(x_{II}-x_1)^2+(y_{II}-y_1)^2-2(x_{II}-x_1)(y_{II}-y_1)\cos(\pi-\varphi)$

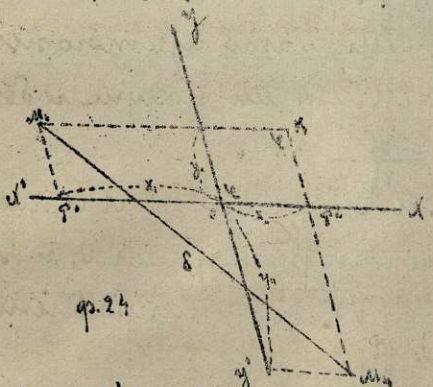


ф. 23

или заменяя $\cos(\pi-\varphi)=-\cos\varphi$ имеем:

$$\delta=\sqrt{(x_{II}-x_1)^2+(y_{II}-y_1)^2+2(x_{II}-x_1)(y_{II}-y_1)\cos\varphi}$$

Для того, чтобы показать, что выведенная формула расстояния остается та же самая при любом расположении осей и точек, разберем следующий случай. Положим например, что точка M_1 дана во второй угл, где абсцисса x_1 отрицательна, а точка M_{II} в четвертом угл, где ордината y_{II} отрицательна. Сделав построение подобное предыдущему, имеем (ф. 24)



ф. 24

треугольник M_1KM_{II} с углом $M_1KM_{II}=\varphi$; из этого треугольника имеем такое геометрическое соотношение сторон

$$\delta^2=M_1K^2+M_{II}K^2-2M_1K\cdot M_{II}K\cos\varphi.$$

Выразим M_1K и $M_{II}K$ через координаты точек M_1 и M_{II},

причем абсолютные величины будем заключать только положительными

$$M_1K = OP'' + OP' = x_2 + (-x_1) = x_2 - x_1$$

перед x_1 ставим $(-)$ для того, чтобы сделать количество положительным.

$$M_2K = P''K + P''M_2 = y_1 + (-y_2) = y_1 - y_2$$

Заметив, что $(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$; подставив эти значения в формулу расстояния, получим

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi =$$

или заметив $y_1 - y_2 = -(y_2 - y_1)$ имеем

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi$$

т. е мы получили знакомую уже нам формулу.

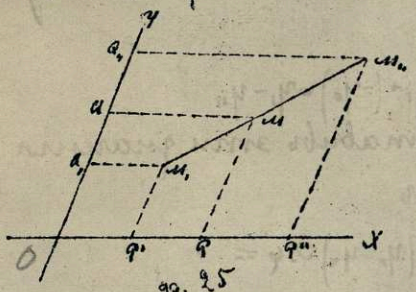
Если принять $\varphi = \frac{\pi}{2}$; т. е. будем рассматривать при прямоугольной системе координат, то мы из этой формулы получим уже прежде выведенную нами формулу так как $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ и мы имеем

$$\delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Задача: Даны координаты двух точек на плоскости, найти координаты точки, делящей прямую, соединяющую две данные точки в данном отношении $m:n$?

Пусть две данные точки будут $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (фр 25), положим координаты косоугольными и построим точки M_1 и M_2 по данным координатам. Пусть точка M будет искомая, тогда, по условию, должны иметь $M_1M : MM_2 = m:n$, координаты точки M обозна-

ными через x и y. Проведем через точки M_1, M, и M_2 линии, параллельные оси координат и определим точки P', P и P'', в которых они пересекают ось абсцисс; будем иметь $\frac{M_1M}{M_2M} = \frac{P'P}{P''P} = \frac{m}{n}$. Вопрос об отыскании точки P сводится таким образом на разделение расстояния между точками P' и P'' в отношении т:п. Эта задача решена нами раньше. Так как точка P имеет ту же абсциссу, как точка M, то по выше приведенной формуле будем иметь.



фр. 25

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \quad \text{и} \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

выражение для y'' получается точно таким же рассуждением, проведя только через точки M_1, M и M_2 параллели оси абсцисс. Если отношение $\frac{m}{n}$ выразим через k, то формулы примут такой вид

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{k+1} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{k+1}$$

В частном случае, когда $k=1$, имеем

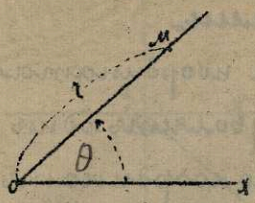
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Полярные координаты

Из различных систем координат разберем еще одну очень употребительную — полярную.

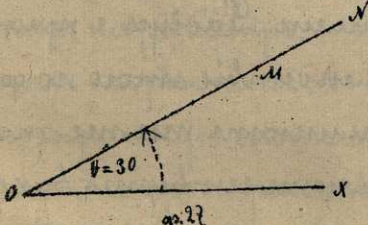
Возьмем на плоскости постоянную точку O, которая

будет называться полюсом, проведем через нее постоянную прямую ox, называемую полярной осью; для определения положения точки M (фр. 26) соединим ее с полюсом и измерим угол MOx равный θ, а также абсолютную величину OM = r. Если эти две величины будут даны, то положение точки на плоскости будет вполне определено. Величины θ и r называются поэтому полярными координатами точки M.



фр. 26

Угол θ называется полярным углом или аномалией; величина r — радиусом вектором. Угол θ считается от линии ox в одну сторону, противоположную движению часовой стрелки и изменяется от 0 до +∞. Чтобы по данным координатам точки M (фр. 27) построить эту точку, поступаем так. Положим дано θ = 30° и r = 3 дюйма; тогда строим полярный угол равный 30° по оси ox при точке O. и на другой стороне его ON откладываем OM равное радиусу вектору r = 3 дюймам.

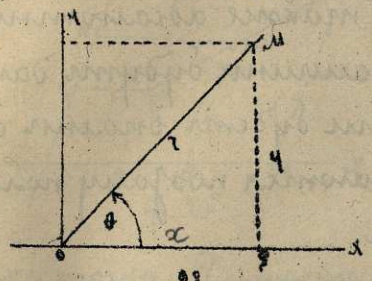


фр. 27

Полученная таким образом точка M и будет искомою.

Соотношение между прямоугольными и полярными координатами.

Между прямоугольными и полярными координатами существует соотношение, которое позволяет одни заменять другими. Примем начало координат за полюс и положительную сторону ox оси $x^{ов}$ за полярную ось, тогда, соединив точку O с M получим ея полярныя координаты: ∠MOx = θ и MO = r. Из прямоугольного треугольника OMP



фр.29

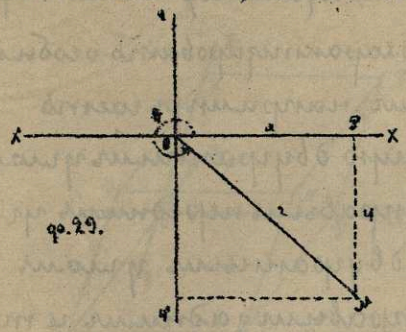
находимъ: $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$.

Возведя эти формулы въ квадратъ и сложивъ ихъ, имѣемъ: $x^2+y^2 = r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = r^2$ откуда: $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ..... (I)

Раздѣливъ y на x получимъ $tg\,\theta = \frac{y}{x}$ ..... (II)

Эти двѣ формулы показываютъ соотношение между прямоугольными и полярными координатами и даютъ возможность одни заменять другими. Радіусъ r принимаютъ абсолютной величиной, вслѣдствіе этого по формулѣ $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$, $\cos\theta$ и $\sin\theta$ имѣютъ тѣ же знаки, какъ x и y. Эти знаки опредѣляютъ четверть, въ которой лежитъ конецъ дуги θ. Пусть точка $M(x,y)$ лежитъ теперь въ $4^{ой}$ четверти; разберемъ соотношение координатъ, опредѣляющихъ ее въ прямоугольной и полярной системахъ (фр.29). Изъ треугольника POM имѣемъ

$OP = OM \cdot \cos MOP$; $MP = OM \cdot \sin MOP$; или дальняя имьем



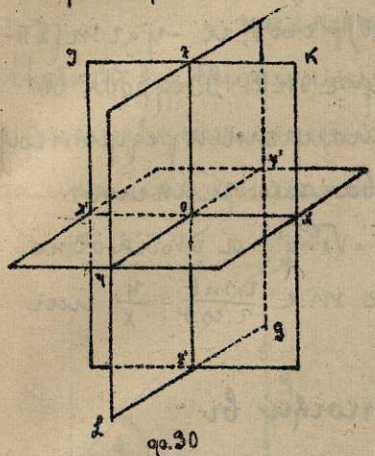
ф.29.

$x = r \cdot \cos(2\pi - \theta) = r\cos\theta$, и $-y = r\sin(2\pi - \theta) = -r\sin\theta$; $y = r\sin\theta$. Возводя в квадрат полученные результаты и складывая их имьем: $r = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, а дьля одно на другое $\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x}$ мы получим $tg\theta = \frac{y}{x}$.

Определьение положения точки в пространстве

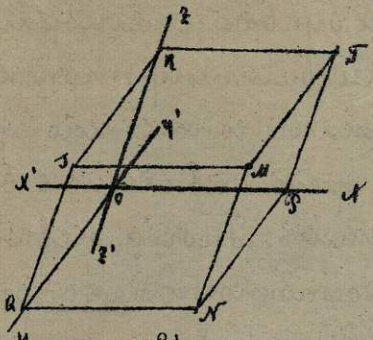
Для определьения положения точки в пространстве ее относят к системе трех взаимно пересекающихся плоскостей, имеющих одну общую точку. Эти три пересекающиеся плоскости носят название плоскостей координат, общая точка их пересечения — начала координат, а линии их сьечений — осей координат. Раз плоскости координат взаимно перпендикулярны, то они образуют, так называемую, систему прямоугольных или ортогональных координат, в противном случае они образуют косоугольную систему. Плоскости координат пересекаясь дьелят пространство на 8 частей; разберем это. Прежде всего рассмотрим плоскость xOz (ф30.), она пространство на дьве части: переднюю и заднюю. Плоскость yOz дьелит пространство также на дьве части: правую и левую; вместе с первой плоскостью она дьелит

все пространство на четыре части, из которых каждую можно охарактеризовать особым названием, например часть образуемую двугранным углом К z z' l — правым передним углом, а двугранным углом Э z z' Э — правым задним и т.д. Третья плоскость уоz делит все пространство на 2 части: верхнюю и нижнюю, а вместе с первыми двумя плоскостями — на 8 частей, из которых каждой можно дать особое название, например части, заключаемой углом трехгранным охуz — верхнего правого переднего угла, а заключаемой трехгранным углом ох'у'z' — нижнего левого заднего и т.д. Посмотрим теперь как определить положение какой-либо точки М относительно этих трех плоскостей координат. Для краткости плоскости координат будем обозначать так: плоскость хоу через ху, плоскость хоz — xz, плоскость уоz — yz. Положим, что точка М находится внутри трехгранного угла охуz. Проведем через эту точку три плоскости параллельные плоскостям координат (фр.31) Эти три плоскости вместе с



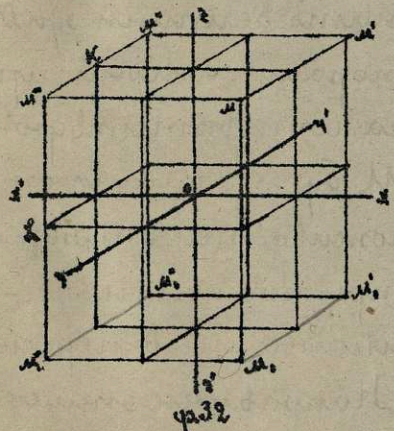
фр.30

ваемый параллелепипед координат, который будет наклонный или прямоугольный смотря потому, к какой системе координат отнесена точка M. Проведенные нами три плоскости MP ∥ yz, MQ ∥ xz и MR ∥ xy, определяют на осях координат три отрезка, считаемые от O. На нашем чертеже эти отрезки суть OP, OQ, OR. Очевидно, что если мы будем знать величину этих отрезков и направление, по которому каждый из них должен быть отложен на соответствующей оси, то положение точки M будет вполне определено. Действительно, отложив эти отрезки и проведя через точки R, Q и P три плоскости параллельные плоскостям координат, мы в пересечении их получим точку M. Направление этих отрезков обозначается посредством знаков (+) и (−), приписываемых числам, выражающим длины отрезков. При этом принимают следующия условия: число выражающее величину отрезка, полученного на части ox, oy и oz сопровождать знаком (+) а на части ox', oy', oz' — знаком (−). Принявши это во внимание, будем называть буквою x алгебраическое коли-



фр. 31

чество, представляющее величину отрезка, полученного на оси xx' съ его знакомъ, такжe буквою y — алгебраическое количество, представляющее величину отрезка, полученного на оси yy' съ его знакомъ, и наконецъ буквою z — алгебраическое количество, представляющее величину отрезка на zz', съ его знакомъ. Тогда, очевидно, этихъ трехъ величинъ будетъ достаточно для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ и поэтому алгебраическія количества x, y, z называются координатами точки M. На прилагаемомъ чертежѣ (фиг. 32)

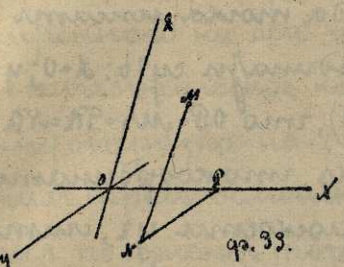


фиг. 32

точки $M, M', M'', \ldots$ имѣютъ абсолютныя величины координатъ x, y и z одни и тѣ же, абсолютная величина $x' = a$, $y' = b$ и $z' = c$. Положеніе этихъ точекъ въ пространствѣ обусловливается разницею знаковъ ихъ координатъ, такъ координаты точки M суть: $x = +a$; $y = +b$; $z = +c$; точки M' — $x = +a$; $y = -b$; $z = +c$; точки M'' — $x = -a$; $y = -b$; $z = +c$; точки M''' — $x = -a$; $y = +b$; $z = +c$; точки M_1 — $x = +a$; $y = +b$; $z = -c$; точки M_1' — $x = +a$; $y = -b$; $z = -c$; точки M_1'' — $x = -a$; $y = -b$; $z = -c$; точки M_1''' — $x = -a$; $y = +b$; $z = -c$. Обратимъ теперь вниманіе на нѣкоторые частные случаи положенія точки въ пространствѣ. Положимъ, что данная точка лежитъ на плоскости $x'z$, тогда это будетъ точка K

тогда ея координаты будут: $x=-a$; $y=0$; $z=c$, или положить, что данная точка L лежит в плоскости $x'y$, ея координаты: $x=-a$; $y=+b$; $z=0$; и т. д. Обратимъ еще вниманіе на тотъ случай когда точка лежитъ въ началѣ координатъ, тогда ея координаты суть: $x=0$; $y=0$ и $z=0$. Замѣтивъ по чертежу, (фр 31), что $OP=MS=TR=NQ$, мы можемъ сказать, такъ какъ $x=MS$, что координата x есть разстояніе точки M отъ плоскости yz, считаемое по направленію, параллельному оси x^{ax} и сопровождаемое соотвѣтствующимъ знакомъ. Подобно этому, такъ какъ $NP=OQ=RS=MT$ и $y=MT$, y есть разстояніе точки M отъ плоскости xz, взятое по направленію, параллельному оси y^{ax} съ должнымъ знакомъ. Наконецъ $MN=OR=PT=QS$ и $z=MN$; слѣдовательно z есть разстояніе M отъ плоскости xy, взятое по направленію параллельному оси z^{ax}, и сопровождаемое соотвѣтствующимъ знакомъ. Для построенія прямолинейныхъ координатъ данной точки нѣтъ надобности непремѣнно строить вышеуказанный параллелипедъ, достаточно, очевидно, построить ломаную линію $MNPO$, потому что три стороны этой линіи представляютъ три координаты точки M, а именно: $OP=x$, $PN=y$ и $MN=z$. Поэтому, чтобы получить координаты данной точки M, проводятъ черезъ нее (фр33) параллель оси Oz до встрѣчи съ плоскостью xy въ точкѣ N,

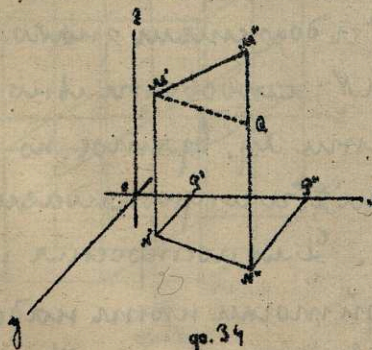
потомъ черезъ N проводятъ параллель оси oy до встрѣчи съ осью x'x; такимъ образомъ получимъ три координаты: OP = x, NP = y и MN = z. Обратно, всякую точку, координаты которой даны, можно построить тѣмъ же образомъ, откладывая послѣдовательно три стороны ломаной линіи OPNM, причемъ направленія этихъ сторонъ



фр. 33.

указываются знаками данныхъ координатъ x, y и z.

Задача. Даны прямоугольныя координаты двухъ точекъ въ пространствѣ, найти разстояніе между этими точками.



фр. 34

Положимъ даны двѣ точки M' и M''; координаты точки M' суть: x_1, y_1 и z_1, а координаты точки M'' суть x_{11}, y_{11} и z_{11}; требуется (фр. 34) опредѣлить длину прямой M'M'', которую означимъ буквою δ. Изъ точекъ M' и M'' опустимъ перпендикуляры M'N' и M''N'' на плоскость xOy и черезъ нихъ представимъ плоскость на которой проведемъ прямую M'Q.[1] Изъ прямоугольнаго треугольника M'QM'' имѣемъ: $M'M'' = \sqrt{M'Q^2 + M''Q^2}$; но $M'Q = N'N''$, гдѣ $N'N''$ есть разстояніе между точками $N'(x_1, y_1)$ и $N''(x_{11}, y_{11})$, лежащими на плоскости xOy, а потому $N'N'' = \sqrt{(x_{11}-x_1)^2 + (y_{11}-y_1)^2}$; $M''Q =$

[1] M'Q проводится ∥ N'N''

$= M''N'' - QN'' = z_{''} - z_{'}$, а $M'M'' = \delta$; следовательно

$$\delta = \sqrt{(x_{''} - x_{'})^2 + (y_{''} - y_{'})^2 + (z_{''} - z_{'})^2}$$

Эта формула определяет расстояние двух точек в пространстве для прямоугольных координат. Заметим частный случай: если точка M' совпадает с началом координат O, то нужно положить: $x' = y' = z' = 0$, и тогда будем иметь:

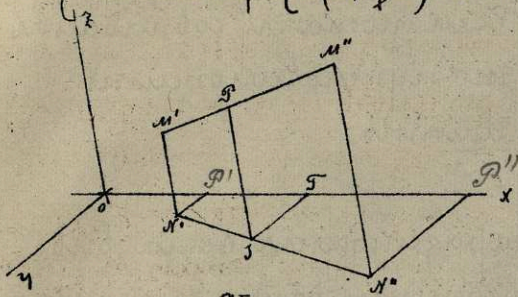
$$\delta = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

Хотя полученная формула расстояния была выведена при частном расположении данных точек, тем не менее мы можем быть уверены, что она будет общею и останется без перемены, где бы данные точки не находились.

Задача: Даны координаты двух точек в пространстве, найти координаты точки, делящей линию соединяющую данные точки в отношении $m:n$?

Эта задача решается совершенно одинаково, как при прямоугольных, так и при косоугольных координатах. Поэтому будем рассматривать косоугольные координаты, чтобы получить более общее доказательство формул, определяющих искомые координаты. Пусть (чр. 35) координаты двух данных точек будут: $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'', z'')$. Возьмем косоугольные оси, построим координаты

данных точек. Соединим точки M' и M'' прямой линией M'M'', тогда мы должны иметь следующую пропорцию: $PM' : PM'' = m : n$. Координаты точки P обозначим через (x, y, z) и выразим их через координаты данных точек. Для этого проведем через точки M', P и M'' плоскости параллельные yz и определим точки P' T и P'' в которых они пересекаются с осью x'''. Так как отрезки двух прямых между тремя параллельными плоскостями пропорциональны то: $P'T : PP'' = N'S : SN'' = M'P : PM'' = m : n$. Таким образом вопрос об отыскании $x = OT$ приводится к разделению расстояния между двумя точками P' и P на оси x''' в отношении $m : n$. Но эта задача была решена при определении положения точки на оси. Так как $OP' = x'$ и $OP'' = x''$ то



фо. 35.

$$x = \frac{nx' + mx''}{m+n} \text{ и } y = \frac{ny' + my''}{m+n}; \text{ аналогично } z = \frac{nz' + mz''}{m+n}$$

Если отношение $\frac{m}{n} = k$ то: $x = \frac{x' + kx''}{1+k}$; $y = \frac{y' + ky''}{1+k}$; $z = \frac{z' + kz''}{1+k}$

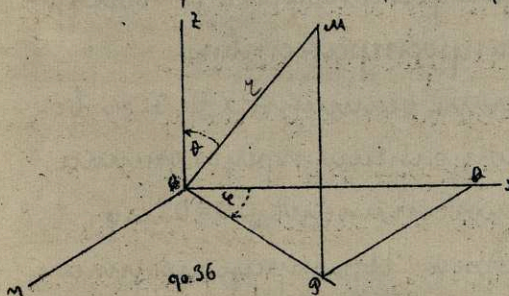
Если $m = n$, то координаты искомой точки найдутся, принимая $k = 1$.

$$x = \frac{x' + x''}{2}, \quad y = \frac{y' + y''}{2}, \quad z = \frac{z' + z''}{2}$$

Эти формулы определяют координаты середины прямой, соединяющей две данные точки.

Сферическія координаты.

Кромѣ выше разсмотрѣнной системы прямолинейныхъ координатъ, есть еще другая система такъ называемыхъ сферическихъ координатъ. Эта система аналогична полярнымъ координатамъ на плоскости и по аналогіи называется иногда полярною. Полярныя координаты въ пространствѣ (фиг. 36) разсматриваютъ обыкновенно вмѣстѣ съ прямоугольными слѣдующимъ образомъ: возьмемъ произвольную точку M и построимъ ея прямоугольныя координаты; соединимъ M съ O, потомъ черезъ линію OM и ось Z^{m} проведемъ плоскость; эта плоскость



фиг. 36

пересѣчетъ плоскость xy по прямой OP. Измѣримъ $\angle xOP = \varphi$, служащій мѣрою двугранаго угла, образуемаго плоскостями POz и xz. Измѣримъ также уголъ $\angle OM$, который обозначимъ черезъ θ, наконецъ измѣримъ разстояніе $OM = r$, этихъ трехъ величинъ φ, θ и r будетъ, очевидно, достаточно для опредѣленія положенія точки M въ пространствѣ и потому эти 3 величины называются полярными координатами точки M въ пространствѣ. Уголъ θ считается отъ положительной оси Z^{m} въ сторону отрицательной оси Z^{m} и можетъ получать всѣ величины отъ

$0-\pi$. Угол φ считается от положительной оси x^m к положительной оси y^m и может получать все величины от $0-2\pi$. Наконец расстояние r может получать все величины от 0 до $+\infty$. Расстояние r называется радиусом вектором; угол φ называется долготою; угол θ есть полярный угол или дополнение до широты. Широтою же называется угол $MOP=\frac{\pi}{2}-\theta$ Плоскость xy называется плоскостью экватора, а zOP — плоскость меридиана

Соотношение между прямоугольными и полярными координатами в пространстве.

Нам надо связать уравнениями величины x, y, z с величинами r, φ и θ. Из прямоугольного треугольника PQO, в котором $\angle OQP$ прямой, имеем $OQ=OP\cos\varphi$. $QP=OP\sin\varphi$ или $x=OP\cos\varphi$ и $y=OP\sin\varphi$. Из треугольника OPM, в котором $\angle OPM=\alpha$, а угол $OMP=\theta$, так как $MP\parallel Oz$, находим что $OP=r\sin\theta$, подставив это значение OP в предыдущия уравнения будем иметь

$$x=r\sin\theta.\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$y=r\sin\theta.\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

Из того же треугольника OMP выведем, что

$$z=r.\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

Эти три уравнения дают возможность от полярных координат перейти к прямолинейным. Выведем теперь обратные формулы, позволяющия

сделать переход от прямолинейных координат к полярным. Возведем в квадрат и сложим (1) (2) и (3) ур-ия
$x^2+y^2+z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cdot\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta$ или

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\left[\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\cos^2\theta\right] = r^2$$

так как выражение стоящее в скобках = 1, ибо $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1$, и мы получаем $\left[\sin^2\theta\cdot 1+\cos^2\theta\right] = 1$

Таким образом $r^2 = x^2+y^2+z^2$ или

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

Так как в полярных координатах направление определяется углами φ и θ, а r принимается величиной абсолютной, то и корень мы принимаем в арифметическом смысле не придавая ему знака. Будем определять теперь угол θ и φ и постараемся мы определить через tg, т.к. tg точнее всех других тригонометрических функций определять угол. Для этого возведем в квадрат и сложим уравнения (1) и (2) и сумму разделим на уравнение (3).

$$x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) = r^2\sin^2\theta;\quad r\sin\theta = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{r\cdot\sin\theta}{r\cdot\cos\theta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z};\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Знак $\operatorname{tg}\theta$ всегда соответствует знаку z так как $\sqrt{x^2+y^2}$ сам по себе величина абсолютная.

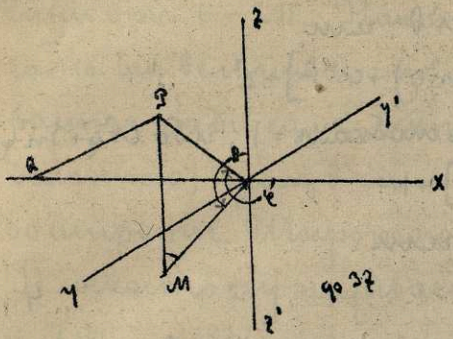
Разделив уравнение (2) на (1) имеем

$$\frac{y}{x} = \frac{r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi}{r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Положение $\operatorname{tg}\varphi$ определяется знаками y и x а именно:

$$\frac{+}{+}\ \text{I}_r. \qquad \frac{+}{-}\ \text{II}_r. \qquad \frac{-}{-}\ \text{III}_r. \qquad \frac{-}{+}\ \text{IV}_r.$$

Проверимъ эти формулы при другомъ положеніи точки M (фиг 37). Положимъ точка M находится въ нижнемъ треугольникѣ угла $0x'y'z'$



фиг 37

Проведемъ ея координаты $MP = z$; $PQ = y$ и $OQ = x$, а также соединимъ точку M съ O причемъ линія $OM = r$. Линія OP есть слѣдъ перемѣщенія плоскости меридіанальной съ плоскостью $x'y'$. Изъ прямоугольнаго треугольника OPQ имѣемъ.

$$OQ = -x = OP \cos[\varphi - \pi] = OP \cos[\pi - \varphi] = -OP \cdot \cos\varphi$$

$$PQ = -y = OP \sin[\varphi - \pi] = -OP \sin[\pi - \varphi] = -OP \sin\varphi$$

Изъ треугольника POM имѣемъ $OP = r \cdot \sin PMO$; но $\angle PMO + \theta = \Pi$, такъ какъ $MP \parallel zz'$ или $\angle PMO = (\pi - \theta)$;

$$OP = r \sin(\pi - \theta) = r \sin\theta.$$

Подставляя значеніе OP въ предыдущія уравненія, имѣемъ:

$$x = r \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

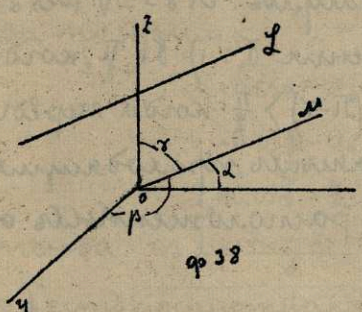
$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

Изъ прямоугольнаго треугольника MOP имѣемъ: $MP = -z = r \cos OMP = r \cos(\pi - \theta) = -r \cos\theta$; и наконецъ умножая на -1 получимъ $z = r \cos\theta$.

Опредѣленіе направленія линіи въ пространствѣ.

Какъ опредѣлить абсолютную величину линіи или

уже знаем теперь постараемся определить ея направление относительно прямоугольных осей координат. Проведем из начала координат линию OM параллельно (фр.38) данной линии L и обозначим углы, делаемые этой линией с осями через α, β, γ. Связь этих 3 углов и определить направление прямой точно и единственно, между тем, как связь двух из них может дать два решения. Если представим себе конус с осью по линии Ox вершиною в O и образующею OM, то образующия его представят геометрическое место линий, делающих с Ox угол α. Если вообразим себе еще другой конус на оси Oy с той же образующей OM, то будем иметь геометрическое место линий образующих с осью y угол β. Эти конусы могут пересекаться по двум образующим или только коснуться — в первом случае будем иметь два решения, а во втором одно. Но если вообразим подобный конус с осью Oz то вопрос будет решен вполне и определенно, ибо 3 конуса могут пересечься только по одной общей образующей. И так мы уже знаем, что связь между углами α, β и γ дает вполне определенное решение вопроса. Для вывода связи обратимся к методу проекций, и спроектируем линию OM на оси координат и полу-



фр 38

ими координаты x, y, z точки M. Обозначив длину отрезка OM через r будем иметь три соотношения:

$$x = r \cdot \cos\alpha$$

$$y = r \cos\beta$$

$$z = r \cos\gamma$$

возведя их в квадрат и сложив получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Но раньше мы уже видели, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ а потому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Это и есть формула связывающая углы, образуемые прямой с осями координат. Если известны углы α и β, то γ находится по формуле: $\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$

Эта формула дает два значения γ: 1) $\gamma < \frac{\pi}{2}$, когда перед корнем стоит (+) и 2) $\gamma = (\pi - \gamma) > \frac{\pi}{2}$ когда перед корнем (−). Мы получаем две прямые проходящие через начало O и симметрично расположенные относительно плоскости Oxy.

Иногда вместо косинусов известны только величины им пропорциональные. В этом случае определение углов принимает следующий вид: положим $a : b : c = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ или $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = k$.

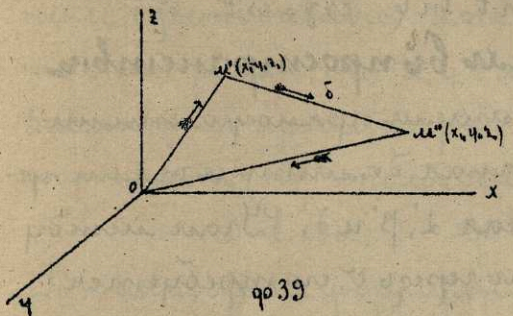
Беря от этой пропорции производную, имеем:

$$k^2 = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

откуда $k = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$; а

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Так как выражение $\cos\alpha$ имеет два знака, то и косинусы углов α, β и γ имеют двойной знак, причем знак (+) соответствует тому случаю, когда мы считаем направление линии, положим $M'M''$ (фр39) от M' к M'' и знак (−), когда считаем в обратном направлении, т.е от M'' к M'. Этой двойственности знаков можно избежать в выводе значение косинусов следующим образом. Соединим точки M' и M'' с O и спроектируем замкнутый треугольник $OM'M''$ на каждую из осей тогда получим:



фр39

$$x_1 + \delta\cos\alpha - x_{II} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{на ось } Ox$$

$$y_1 + \delta\cos\beta - y_{II} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{на ось } Oy$$

$$z_1 + \delta\cos\gamma - z_{II} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{на ось } Oz$$

а отсюда: $\cos\alpha = \frac{x_{II} - x_1}{\delta}$; $\cos\beta = \frac{y_{II} - y_1}{\delta}$; $\cos\gamma = \frac{z_{II} - z}{\delta}$;

Где δ есть абсолютная величина отрезка $M'M''$, а потому знаки косинусов зависят только от разностей числителей.

Задача: По полярному углу θ и долготе φ определить косинусы углов α, β и γ, которые образуют радиус вектор с осями координат?

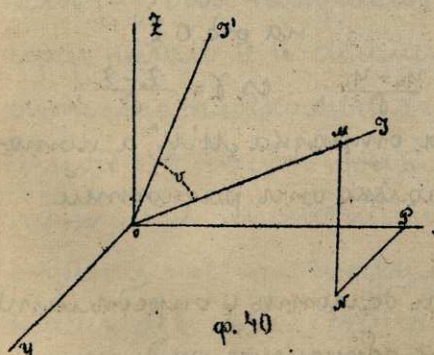
Называя прямоугольные координаты точки M, лежащей на конце радиуса вектора r, через x, y и z имеем:

$x = r.\cos\alpha$; $y = r.\cos\beta$; $z = r.\cos\gamma$. Съ другой стороны было выведено, что $x = r\sin\theta.\cos\varphi$; $y = r.\sin\theta.\sin\varphi$ и $z = r.\cos\theta$, слѣдовательно $r.\cos\alpha = r.\sin\theta.\cos\varphi$; $r\cos\beta = r.\sin\theta.\sin\varphi$; $r.\cos\gamma = r.\cos\theta$. Сократимъ эти послѣднія на r.

$$\cos\alpha = \sin\theta.\cos\varphi;\quad \cos\beta = \sin\theta.\sin\varphi.\quad \cos\gamma = \cos\theta.$$

Уголъ двухъ прямыхъ въ пространствѣ.

Оси координатъ опять полагаемъ прямоугольными. Положимъ, что первая прямая дѣлаетъ съ осями углы α, β и γ, а вторая прямая α', β' и γ'. Уголъ между двумя прямыми обозначимъ черезъ v, его требуется найти. Чтобы построить этотъ уголъ, мы черезъ начало координатъ проведемъ двѣ прямыя параллельныя двумъ даннымъ прямымъ: OJ параллельно первой прямой и OJ' — второй. Тогда будемъ имѣть уголъ $JOJ' = v$. Прямая OJ дѣлаетъ съ осью $x^{ов}$ уголъ α, а съ осью $y^{ов}$ и $z^{ов}$ углы β и γ. Прямая OJ' дѣлаетъ съ тѣми же осями углы α', β' и γ' (фр. 40). Возьмемъ на прямой OJ' произвольную точку M и пусть ея координаты будутъ (x, y, z) а разстояніе $OM = l$. Построимъ эти координаты. Разсмотримъ затѣмъ несамокнутый многоугольникъ $OPNM$, съ его замыкающей стороной OM и возьмемъ сумму проекцій сторонъ



фр. 40

этого многоугольника на какую-нибудь ось; тогда будемъ имѣть: пр. OP + пр. PN + пр. NM = пр. OM.

За ось проекцій примемъ прямую OJ', тогда это уравненіе будетъ очевидно: $x.\cos\alpha' + y.\cos\beta' + z.\cos\gamma' = l.\cos v$. Но сверхъ того мы знаемъ, что x, y, z могутъ быть разсматриваемы, какъ проекціи радіуса вектора l на оси координатъ; на этомъ основаніи можемъ написать.

$$x = l.\cos\alpha; \qquad y = l.\cos\beta \qquad z = l.\cos\gamma$$

Вставивъ эти формулы въ предъидущее равенство получимъ: $\cos v = \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma'$,

т.е. **косинусъ угла между двумя прямыми = суммѣ произведеній косинусовъ угловъ, заключаемыхъ этими прямыми съ тремя осями координатъ.**

Замѣтимъ частный случай этой задачи. Если двѣ данныя прямыя взаимно перпендикулярны, то $v = 90°$ и слѣдовательно въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$\cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma' = 0.$$

Это равенство выражаетъ условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ въ пространствѣ.

Соотношеніе между площадью и проекціями ея на три прямоугольныя плоскости координатъ.

Пусть въ пространствѣ дана нѣкоторая площадь S и проектируемъ ее на три плоскости координатъ и положимъ, что ея проекція на плоскость yz есть S_x.

Если α есть угол образуемый площадью S с площадью yz, то будем иметь: $S_x = S \cdot \cos\alpha$

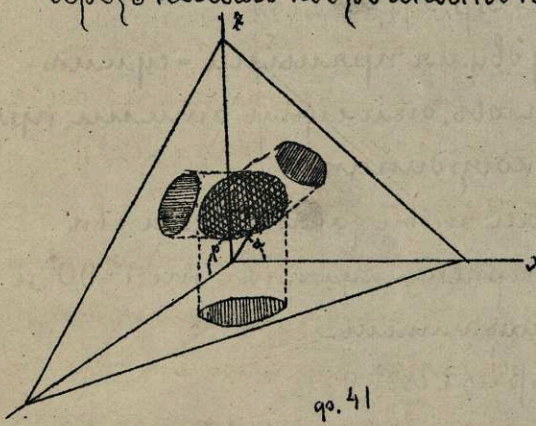
Точно также проекция той же плоскости на плоскость xz будет S_y и если β есть угол, делаемый данной площадью с плоскостью xz; тогда будем иметь

$$S_y = S \cdot \cos\beta$$

Наконец пусть проекция S на плоскость xy есть S_z и γ угол, делаемый плоскостью S с плоскостью xy, тогда:

$$S_z = S \cdot \cos\gamma.$$

Через начало координат проведем прямую линию перпендикулярную к площади S. Эта прямая будет делать соответственно с осями координат углы α, β, γ, на том основании, что углы между двумя двумя прямыми равны углу между плоскостями к ним перпендикулярными (фиг 41). Вследствие этого имеем: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.



фиг. 41

Сложив квадраты предыдущих равенств получим

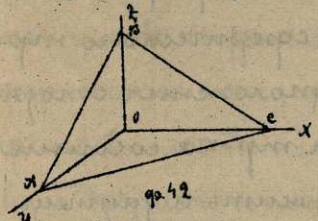
$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

Так что будем иметь $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2$

т.е. квадрат числа представляющего площадь в пространстве, равняется сумме квадратов чисел, выра-

жающих проекции той же площади на трех плоскостях координат.

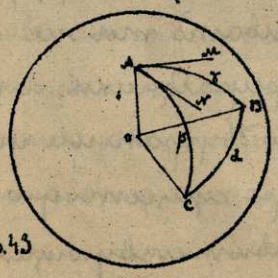
Доказанное нами соотношение площадей представляет распространение теоремы Пифагора. Возьмем


фр. 42

(фр. 42) прямой трехгранный угол oxyz и проведем произвольную плоскость, пересекающую три ребра его, получим трехгранник oABC. В нем площадь грани, противолежащей прямому углу, означим через S, тогда очевидно, что три грани, сходящиеся в вершине O, будут проекциями этой площади на трех плоскостях xy, yz и xz и следовательно будем иметь по вышеказанному $S^2 = (AOC)^2 + (BOC)^2 + (AOB)^2$.

О сферическом треугольнике

Сферическая тригонометрия имеет предметом своим решение сферических треугольников. Приложим предварительно некоторые свойства сферических тр-ков. Сферический треугольник есть часть поверхности сферы заключенная между тремя взаимно пересекающимися ее окружностями больших кругов. Вообразим


фр. 43

такой треугольник на какой-нибудь сфере (фр. 43) Вершины треугольника пусть будут A, B и C. Во всяком сферическом треугольнике различают шесть частей: три стороны и три

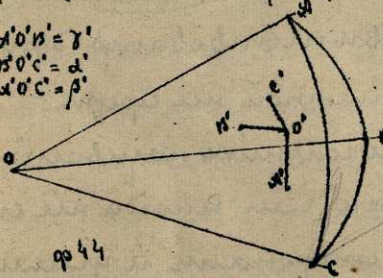
угла. Как стороны так и углы выражаются в градусах и при этом мерою сферического угла A служит линейный угол, составленный из касательных AM и AN к сторонам AB и AC сферического треугольника, так что угол A = MAN. При угла сферического тр-ка обозначим через A, B и C, а противоположения стороны через a, β и γ. Если мы три вершины тр-ка соединим и центром O сферы, на которой они лежат и затем проведем три плоскости AOC, COB и AOB то мы получим при центре трехгранный угол OABC, соответствующий рассматриваемому сферическому треугольнику. В этом трехгранном угле мы рассматриваем также шесть частей, три плоские угла его составляющие и три двугранные угла. Плоские углы трехгранного угла измеряются сторонами сферического тр-ка или противулежащими, а двугранные углы имеют одинаковую меру с углами сферического треугольника. Таким образом, напр. угол MAN = A служит мерою двугранного угла BOAC, потому что касательные AM и AN перпендикулярны к радиусу AO, т.е к ребру двугранного угла. Таким образом в трехгранном угле можно рассматривать ту же шесть частей, как и в сферическом треугольнике, а именно, три плоских его угла будут a, β, γ, а его двугранные углы будут A, B, C. Вследствие такой связи существующей между сферическим тр-ком и соответствующим

ему трехгранным углом, рассмотренные треугольника можно часто заменять рассмотрением ему соответствующего трехгранного угла. Так как свойства трехгранного угла нам известны из геометрии, то ограничимся здесь тем, что напомним только некоторые свойства трехгранных углов, выражая их посредством сторон и углов сферического треугольника. 1). Во всяком сферическом треугольнике каждая из его сторон меньше суммы двух других и потому $a < \beta + \gamma$; $\beta < a + \gamma$; $\gamma < a + \beta$.

2) Сумма трех сторон сферического треугольника всегда менее 360°, так что $a + \beta + \gamma < 360°$

3). Сумма трех углов сферического треугольника всегда больше 180° и менее 540°, так что: $180° < A + B + C < 540°$

Упомянем еще о дополнительном трехгранном угле (ф. 44) который получается следующим образом: возьмем произвольный трехгранный угол $OABC$, внутри этого



ф 44

угла возьмем произвольную точку O' и из этой точки опустим перпендикуляры $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ на плоскости BOC, AOC и AOB трехгранного угла. Затем проведем три плоскости $A'O'B'$, $B'O'C'$ и $C'O'A'$ мы получим таким образом трехгранный угол $O'A'B'C'$, который называется дополнительным трехгранным углом для данного трехгранного угла; обозначим его углы через a', β', γ',

а его двугранные углы через A', B' и C'. Между плоскими углами данного трехгранного угла и двугранными ему дополнительного существует простое соотношение, а именно, легко доказать, что плоские углы дополнительного трехгранного угла служат дополнением до двух прямых двугранным углам данного трехгранного. Это свойство выражается тремя равенствами:

$$a' + A = 180^\circ \qquad \beta' + B = 180^\circ \qquad \gamma' + C = 180^\circ$$

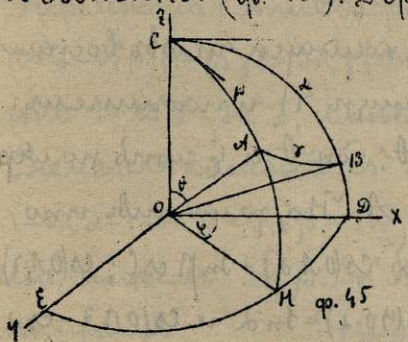
Так как очевидно, что данный трехгранный угол будет также дополнительным для второго трехгранного угла то будем иметь.

$$a + A' = 180^\circ \qquad \beta + B = 180^\circ \qquad \gamma + C' = 180^\circ$$

Данному трехгранному углу соответствует на сфере некоторый сферический треугольник ABC с углами ABC и сторонами a, β, γ. Дополнительному трехгранному углу, если его вершину поместить в центр той же сферы будет соответствовать другой сферический треугольник, на той же сфере. Этот второй сферический треугольник называется дополнительным для первого, или иногда же его называют полярным. Между сторонами и углами этих треугольников существует зависимость, указанная написанными выше равенствами. Сделав все эти замечания перейдем теперь к выводу основных формул сферической тригонометрии.

Основная формула сферической тригонометрии

Это так называемая формула косинуса стороны, т.е. формула выражающая, чему равен косинус стороны во всяком сферич. треуг. Она называется основною потому, что как было показано Лагранжем, из нея можно вывести все прочия формулы, относящияся к сферическому треугольнику. Пусть ABC есть данный сферический тр-ик и O есть центр сферы на которой он лежит (фр. 45). Примем O за начало координат



фр. 45

причем линию Ox возьмем за ось $x^{ов}$, проведенную в пл. BOC перпендикулярно к OC, где OC примем за ось $z^{ов}$, осью же $y^{ов}$ будет служить линия oy перпендикулярная к плоскости xOz. Плоскость xz пересекает сферу по дуге большого круга CBD, плоскость AOC, пересекает ту же сферу по дуге CAH, наконец плоскость xy — по дуге DHE. Плоские углы трехгранного угла $OABC$ измеряются соответственно сторонами сферического тр-ка ABC и потому $\angle BOC = \alpha$; $\angle AOC = \beta$; $\angle AOB = \gamma$. Сферический угол C имеет одинаковую меру с двугранным углом $HOCD$ и потому он измеряется линейным углом $HOD = C$. Рассмотрим теперь две прямые вы-

ходящія изъ точки O, — AO и BO. Косинусъ угла между этими двумя прямыми можетъ быть выраженъ помощью косинусовъ угловъ образуемыхъ этими прямыми съ осями координатъ, по слѣдующей извѣстной намъ формулѣ.

$$\cos\gamma = \cos(OA,OB) = \cos(OA,x).\cos(OB,x) + \cos(OA,y).\cos(OB,y) + \cos(OA,z).\cos(OB,z)$$

гдѣ подъ обозначеніями (OA,x) мы разумѣемъ уголъ, заключенный линіей OA съ осью x^{m} и т. д. Формула эта для нашего случая упрощается вслѣдствіе того, что линія OB перпендикулярна къ оси $y^{ов}$. Такъ какъ $\cos(OB,y) = \cos 90^{\circ} = 0$, то мы имѣемъ

$$\cos\gamma = \cos(OA,x).\cos(OB,x) + \cos(OA,z).\cos(OB,z)$$

Чтобы опредѣлить входящіе сюда косинусы угловъ воспользуемся задачей помѣщ. на страницѣ 41 и напишемъ:

$\cos(OA,x) = \sin\theta.\cos\varphi$ и $\cos(OA,z) = \cos\theta$, гдѣ θ и φ суть полярный уголъ и долгота для точки A. Но, замѣтивъ, что $\theta = \beta$, а $\varphi = C$ мы можемъ написать $\cos(OA,x) = \sin\beta.\cos C$; $\cos(OA,z) = \cos\beta$ замѣтивъ также, что $\cos(OB,x) = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$ и $\cos(OB,z) = \cos\alpha$. мы подставивъ всѣ эти значенія въ формулу $\cos\gamma$ имѣемъ $\cos\gamma = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos C$. Это равенство и представляетъ основную формулу сферическаго тр-ка. Формула эта справедлива для каждой изъ сторонъ сферич. тр-ка, такъ что по аналогіи можемъ написать:

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ldots\ldots \cos\alpha = \cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\sin\gamma.\cos A \\
&(2)\ldots\ldots \cos\beta = \cos\alpha.\cos\gamma + \sin\alpha.\sin\gamma.\cos B \\
&(3)\ldots\ldots \cos\gamma = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos C
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{I}$$

Формула четырёх синусов

Эта формула получается из формулы косинуса стороны следующим образом. Сложим и потом вычтем два уравнения (1) и (2)

$$\cos\alpha+\cos\beta=(\cos\alpha+\cos\beta)\cos\gamma+(\sin\beta.\cos A+\sin\alpha.\cos B)\sin\gamma$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=(\cos\beta-\cos\alpha)\cos\gamma+(\sin\beta.\cos A-\sin\alpha.\cos B)\sin\gamma$$

или перенеся $(\cos\alpha+\cos\beta)\cos\gamma$ и $(\cos\beta-\cos\alpha)\cos\gamma$ в первую часть имеем:

$$(\cos\alpha+\cos\beta)(1-\cos\gamma)=\sin\gamma(\sin\beta.\cos A+\sin\alpha.\cos B)$$

$$(\cos\alpha-\cos\beta)(1+\cos\gamma)=\sin\gamma(\sin\beta.\cos A-\sin\alpha.\cos B)$$

Перемножая эти два равенства находим

$(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma)=\sin^2\gamma(\sin^2\beta.\cos^2A-\sin^2\alpha.\cos^2B)$; или замечая, что $1-\cos^2\gamma=\sin^2\gamma$, имеем $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin^2\beta.\cos^2A-\sin^2\alpha.\cos^2B$.

Заменяя каждый $\cos^2$ через $1-\sin^2$, получим

$1-\sin^2\alpha-1+\sin^2\beta=\sin^2\beta-\sin^2\beta.\sin^2A-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha.\sin^2B$ по сокращении имеем $\sin^2\beta:\sin^2A=\sin^2\alpha.\sin^2B$; по извлечении корня получим $\sin\beta.\sin A=\sin\alpha.\sin B$

Мы ставили знак (+) в обеих частях равенства, потому что углы и стороны сферического треугольника полагаются меньшими 180°, а синусы таких дуг, как известно положительны. Последнее равенство можно написать в виде пропорции: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin A}{\sin B}$, которая показывает, что синусы сторон во всяком сфер. тр-ке относятся, как синусы противолежащих им углов. Эту же пропорцию можно написать в виде $\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}$. Если возьмем две стороны α и γ то почти также будем иметь:

$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$. Обыкновенную пропорцию можно соединить вместе написать, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C} \quad \text{II}$$

Формула косинуса угла сферического треугольника

Рассмотрим дополнительный сферический треугольник, которого стороны пусть будут α', β' и γ', а углы A' B' и C'.

Применим к этому треугольнику формулу косинуса стороны, тогда можно написать, что

$$\cos\alpha' = \cos\beta' \cdot \cos\gamma' + \sin\beta' \cdot \sin\gamma' \cdot \cos A'$$

Но так как стороны дополнительного треугольника суть дополнение до 180° к углам данного треугольника, а его углы суть дополнения до 180° к сторонам данного треугольника, то тожественное равенство можно написать в виде

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B) \cdot \cos(180^\circ - C) + \sin(180^\circ - B) \cdot \sin(180^\circ - C) \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

При том, так как вообще $\cos(180 - x) = -\cos x$ и $\sin(180 - x) = \sin x$, то это равенство будет:

$$-\cos A = \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C \cos\alpha$$

или

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos\alpha$$

Эта формула дает косинус угла, выраженный помощью двух других углов треугольника и стороны к ним прилежащей. Таким образом для треугольника можно написать три формулы а именно

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos\alpha \\ \cos B &= -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad \cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos\gamma \quad \text{III}$$

Наконец выведем последнюю общую формулу сферич. тр-ка, которая есть формула с котангенсами
Напишем равенство: $\cos\alpha = \cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\sin\gamma.\cos A$.
исключим отсюда сторону γ и введем вместо нея противолежащий ей угол C, для чего изаменим $\cos\gamma$ его выражением по формуле (I), а именно

$$\cos\gamma = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos C$$

и вместо $\sin\gamma$ вставим его выражение из равенства (II)
т.е. $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha.\sin C}{\sin A}$ получим

$$\cos\alpha = \cos\beta\left(\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos C\right) + \sin\beta\frac{\sin\alpha.\sin C}{\sin A}.\cos A$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha.\cos^2\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos\beta.\cos C + \sin\alpha.\sin\beta.\sin C.\operatorname{ctg} A \text{ или}$$

$$\cos\alpha\left(1-\cos^2\beta\right) = \cos\alpha.\sin^2\beta = \sin\alpha.\sin\beta.\cos\beta.\cos C + \sin\alpha.\sin\beta.\sin C.\operatorname{ctg} A$$

сокращая на $\sin\beta$, имеем

$$\cos\alpha.\sin\beta = \sin\alpha.\cos\beta.\cos C + \sin\alpha.\sin C.\operatorname{ctg} A$$

Разделим все обе части равенства на $\sin\alpha$, найдем формулу котангенсов, именно.

$$\operatorname{ctg}\alpha.\sin\beta = \operatorname{ctg} A.\sin C + \cos C.\cos\beta$$

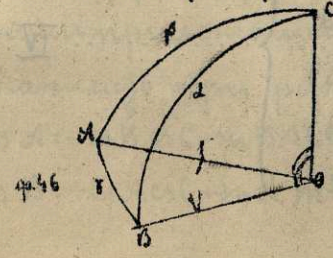
Подобным образом для одного треугольника можно написать шесть уравнений, а именно

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\alpha.\sin\beta &= \operatorname{ctg} A\sin C + \cos C.\cos\beta \\
\operatorname{ctg}\beta.\sin\alpha &= \operatorname{ctg} B.\sin C + \cos C.\cos\alpha \\
\operatorname{ctg}\gamma.\sin\alpha &= \operatorname{ctg} C.\sin B + \cos B.\cos\alpha \\
\operatorname{ctg}\alpha.\sin\gamma &= \operatorname{ctg} A.\sin B + \cos B.\cos\gamma \\
\operatorname{ctg}\beta.\sin\gamma &= \operatorname{ctg} B.\sin A + \cos A.\cos\gamma \\
\operatorname{ctg}\gamma.\sin\beta &= \operatorname{ctg} C.\sin A + \cos A.\cos\beta
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV}$$

Замѣчаніе. Общія формулы (I, II, III, IV) доставляютъ въ совокупности всего 15 ур-ній для разсматриваемаго сферическаго тр-ка. Въ каждое изъ этихъ уравненій входятъ 4 элемента изъ 6 – $a, \beta, \gamma, A, B, C$, принадлежащихъ тр-ку и потому каждое изъ нихъ можетъ служить для опредѣленія извѣстнаго элемента по тремъ даннымъ. Число возможныхъ сочетаній изъ 6 по 4 равно $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ и слѣдовательно въ найденныхъ 15 уравн. входятъ всевозможныя сочетанія изъ 6 частей тр-ка по 4, такъ что этихъ формулъ будетъ вполнѣ достаточно для всѣхъ случаевъ, которые могутъ представиться при рѣшеніи треугольниковъ, когда по тремъ даннымъ частямъ нужно опредѣлить четвертую неизвѣстную. Выведенныя формулы рѣдко употребляются на практикѣ при рѣшеніи тр-ковъ, потому что они неудобны, кромѣ ур. (II) логарифмическаго вида; для этой цѣли выводятъ изъ нихъ другія формулы, вполнѣ удобныя для логарифмич. вычисл. Этихъ формулъ мы здѣсь выводить не будемъ.

Формулы для прямоуг. сферич. треуголь.

Сферическій тр-къ можетъ имѣть не только одинъ, но также два и три прямыхъ угла. Пр-къ ABC (фр. 46) съ двумя прямыми углами A и B наз. двояко-прямоугольнымъ. Если въ немъ соединить его вершины съ центромъ сферы O, то получимъ трехгран-



ный угол OABC, въ которомъ два двугранныхъ угла CAOB и CBOA будутъ прямые, слѣдовательно ребро CO будетъ перпенд. къ плоскости AOB. Плоскіе углы AOC и BOC, измѣряются дугами AC=β и BC=α будутъ также прямые, а потому стороны α=β=90°. Сферич. уголъ C имѣетъ общую мѣру съ линейнымъ угломъ AOB, который измѣряется дугою AB=γ, такъ что C=γ. Если же въ сфер. тр-кѣ всѣ три угла прямые, то онъ назыв. трехпрямоугольнымъ. Въ такомъ тр-кѣ всѣ три стороны, очевидно по 90°. Остановимся на разсмотрѣніи тр-ка съ однимъ прямымъ угломъ и положимъ, что этотъ уголъ есть A, противулежащая сторона α наз. гипотенузой, другія же двѣ стороны β и γ суть катеты. Изъ выведенныхъ выше формулъ I, II, III, IV, можно легко получить болѣе простыя частныя формулы прямоуг. сферич. треуг. Положивъ A=90° въ тѣхъ общихъ формулахъ, въ которыхъ входитъ этотъ уголъ, мы получимъ слѣдующія новыя формулы.

Изъ урав. (I) получимъ $\cos\alpha = \cos\beta . \cos\gamma$ 1

" " (II) " $\sin\beta = \sin\alpha . \sin B$ 2

$\sin\gamma = \sin\alpha . \sin C$ 3

II и (III) " $\cos B = \cos\beta . \sin C$ 4

$\cos C = \cos\gamma . \sin B$ 5

$\cos A = -\cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos\alpha$ откуда $\cos\alpha = \operatorname{ctg} B . \operatorname{ctg} C$ 6

Изъ ур-ій (IV) (1,4) получимъ $\sin\beta . \operatorname{ctg}\alpha = \cos C . \cos\beta$ и

$ctg\alpha \cdot \sin\gamma = cs B \cdot cs\delta$. Эти формулы преобразуем так:

$\frac{\sin\beta}{cs\beta} \cdot ctg\alpha = cs C$ или $cs C = ctg\alpha \cdot tg\beta$ 7

$\frac{\sin\gamma}{cs\delta} \cdot ctg\alpha = cs B$ " $cs B = ctg\alpha \cdot tg\gamma$ 8

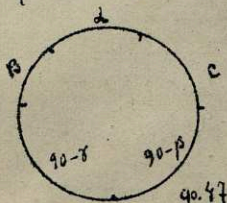
Из ур-ий 5 и 6 найдем $ctg B = ctg\beta \cdot \sin\gamma$ 9

$ctg C = ctg\gamma \cdot \sin\beta$ 10

Полученных 10 уравнений будет вполне достаточно для решения прямоугольного сферического треугольника во всех возможных случаях, т.к. $C_5^3 = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ и по двум данным всегда можно будет найти третье неизвестное.

Эти десять формул при том имеют вид удобный для логарифмических вычислений.

Примечание. Существует очень простое правило для запоминания формул прямоугольного сферического тр-ка. Для этого нужно вообразить все части тр-ка расположенными на окружности в том порядке, как они идут в треугольнике и опустив



фиг. 47

из A, как равного 90°, три эти части β и γ, т.е. катеты заменить их дополнениями до 90°. Тогда для каждой величины две величины прилежащие и две противулежащие. Правило состоит в том, что cs части равен произведению котангенсов прилежащих частей или sin-ов противулежащих. Итак $cs\alpha = ctg B \cdot ctg C = \sin(90-\beta) \cdot \sin(90-\delta) = cs\beta \cdot cs\delta$.

О геометрическихъ мѣстахъ

Геометрическимъ мѣстомъ называется совокупность безчисленнаго множества точекъ, удовлетворяющихъ данному и вполнѣ опредѣленному геометрическому условію.

Такимъ геометрическимъ мѣстомъ безчисленнаго множества точекъ обыкновенно бываетъ линія, при чемъ каждая точка этой линіи удовлетворяетъ требуемому условію, всякая же другая точка не лежащая на этой линіи не будетъ удовлетворять тому же геометр. условію.

Напр.: 1) Геометрическое мѣсто точекъ равноудаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ на плоскости, есть перпендикуляръ возставленный изъ середины прямой соединяющей данныя точки. 2) Геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ прямоугольныхъ треугольниковъ построенныхъ на общей гипотенузѣ, есть окружность, описанная на данной гипотенузѣ, какъ на діаметрѣ.

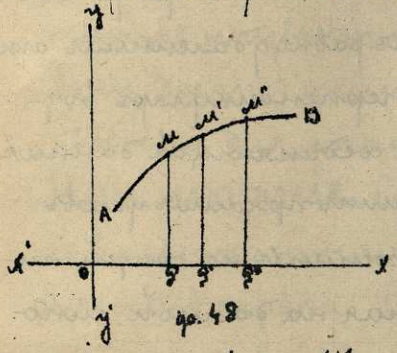
Выраженіе линій уравненіями

Въ аналитической геометріи разсматриваются только тѣ линіи, которыя представляютъ извѣстное геометрическое мѣсто точекъ, линіи же, начертенныя на плоскости произвольно, не составляютъ предмета для изслѣдованій аналит. геометріи.

Изъ основного способа представленія точки координатами легко выводится способъ алгебраическаго выраженія непрерывной линіи. Для возможности выраженія нужно только,

чтобы линия была определенная, представляющая так называемое геометрическое место точек, т.е. последовательность точек удовлетворяющих определенному условию.

Положим, что некоторая кривая линия AB (ф. 48), заданная как геометрическое место, отнесена к двум неподвижным осям координат. Это значит, что кривая занимает относительно этих двух осей совершенно определенное и нам известное положение. Тогда каждая точка данной кривой будет иметь свои определенные координаты.



ф. 48

Напр. координаты точки M' будут $OP' = x'$ и $P'M' = y'$, координаты M'' — $OP'' = x''$ и $P''M'' = y''$ и т.д. Вообразим теперь, что некоторая неопределенная или, как говорят, текущая точка движется на плоскости, описывая своим движением кривую AB, переходя поэтому между прочим через намеченные точки M', M'', ... Координаты точки M или так называемая текущая координата x и y будут при этом изменяться. Очевидно, это изменение координат должно быть таким, что всякому определенному значению x соответствует одно или несколько определенных значений y и наоборот, т.е. обе координаты должны находиться в определенной взаимной зависимости. Так как всякая определенная зависимость между двумя переменными должна выражаться некоторым

уравнением между ними, то значит должно существовать уравнение между x и y, соответствующее кривой AB. В это уравнение входят текущие координаты произвольной точки кривой и должны входить еще некоторые постоянные величины, так называемые *параметры* уравнения, зависящие от формы кривой и ее расположения относительно осей координат. Такое уравнение, связывающее текущие координаты при посредстве параметров, называется *уравнением кривой линии*.

И так мы видим, что всякой кривой, заданной как геометрическое место точек, соответствует некоторое уравнение между двумя координатами произвольной из этих точек. После этого возникает вопрос, как можно составлять на вид уравнения геометрическим местам. Легко понять, что решение такого вопроса не может подчиняться какому-либо совершенно определенному, общему правилу. Условия как те, которые определяют форму геометрического места, так и те, которые показывают расположение его относительно выбранных осей координат, могут быть чрезвычайно разнообразны и в зависимости от этого разнообразия путь составления уравнения кривой может быть более или менее длинен и труден. Можно сделать только общего характера указания, как следует направлять работу мысли при составлении требуемого уравнения.

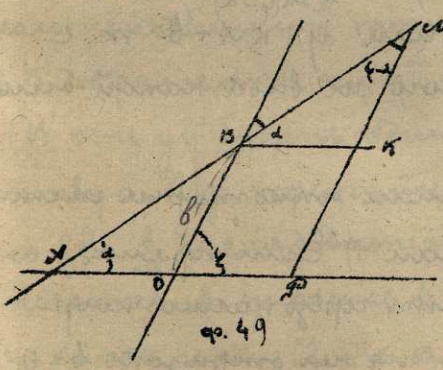
Для того, чтобы вывести уравнение геометрического места, нужно взять какую-нибудь произвольную из точек этой кривой, построить координаты взятой точки и выразить посредством одного или нескольких равенств то геометрическое свойство, которое принадлежит всем точкам кривой и служит определением ей, как геометрического места. При этом необходимо заботиться, чтобы в равенства вошли обе текущия координаты и данные параметры. Если условие, определяющее кривую, выразится одним уравнением, содержащим обе координаты и данные параметры, то такое уравнение и будет искомым. Если же получатся несколько уравнений, в которых кроме указанных величин будут входить какия либо посредствующия переменныя, то искомое уравнение получится как результат исключения всех этих посредствующих переменных.

Уравнение бесконечной прямой

Положим, что разсматривается геометрическое место точек, расположенных на некоторой прямой. Этим условием определяется форма геометрического места. Нужно еще другое условие, которое определило бы положение самого геометрического места относительно осей координат. Примем для этого, что прямая наклонена к оси абсцисс под углом α и пересекает

ось ординат в данной точке B на расстоянии „b" от начала координат. Сказанным вполне определяются условия вопроса. Величины α и b будут постоянными параметрами.

Возьмем на прямой AB произвольную текущую точку M, построим ее координаты MP и OP и постараемся из чертежа (фр 49) вывести какое либо равенство, в которое какие-нибудь вошли бы текущие координаты и параметры. Если проведем параллельно оси x прямую BK до встречи с ординатой, то получим треугольник BMK, в котором BK = x, KM = y − b и ∠KBM = α а ∠BMK = φ − α, где φ есть угол между осями координат. Из треугольника BMK имеем: MK : BK = sin α : sin (φ − α) или (y − b) : x = sin α : sin (φ − α) откуда $y = \frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} x + b$



фр. 49

Это и есть уравнение прямой. Обозначим $\frac{\sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}$ через K, где K для направления данной прямой есть постоянная величина, зависящая только от α и назыв. угловым параметром, а b называется линейным параметром. Таким образом уравнение прямой мы будем иметь в таковом виде

$$y = Kx + b$$

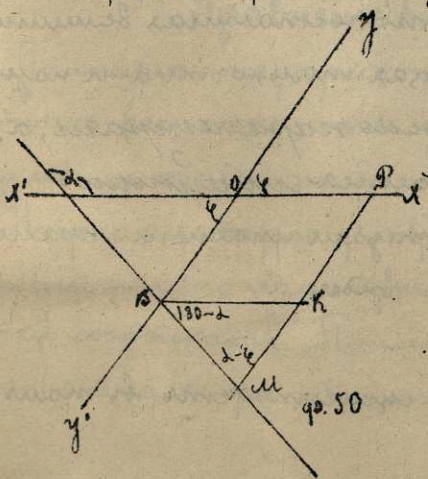
Найденное нами соотношение существует в том же

самый вид для координат x и y всякой точки прямой. Заметим, что при составлении уравнения прямой мы брали $\alpha < \varphi$ и откладывали „b" положительным. Но уравнение прямой получается одно и тоже при каком угодно α и всяком b. Действительно пусть $b = -OB$ откуда $OB = -b$ (фр.50). Взять произвольную точку M, построить ее координаты x и y. Делая построение подобное предыдущему из треугольника BMK имеем $MK : BK = \sin MBK : \sin BMK$; но $BK = x$; $MK = MP - KP = -y - (-b) = -y + b$; $\sin MBK = \sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$; $\sin BMK = \sin(\alpha - \varphi)$; откуда данными абсолютными величины положительн количествами имеем:

$$-(y-b) : (x) = \sin\alpha : \sin(\alpha - \varphi) = -K$$

Так как $\sin(\alpha - \varphi) = -\sin(\varphi - \alpha)$ и $\frac{\sin\alpha}{-\sin(\varphi-\alpha)} = -K$.

следовательно $-(y-b) : (x) = -K$ или $y = Kx + b$. т. е мы получили уравнение такого же вида, какой было обнаружено раньше.



фр.50

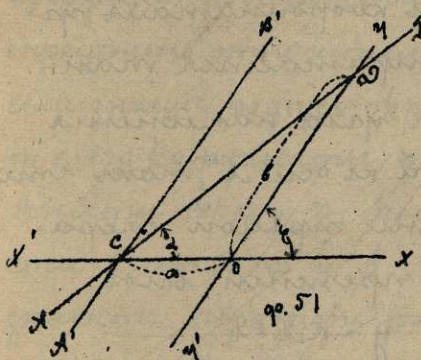
Заметим некоторые частные случаи 1) Если прямая проходить через начало координат для нея отрезокъ $b = 0$ и ее уравнение обратится въ $y = Kx$. 2) Если прямая параллельна оси абсцисс, то для нея $\alpha = 0$, а следовательно угловой пара-

метр тоже равен 0 почему уравнение будет

$$y = b$$

3) Если прямая совпадает с осью $x^{ов}$, то и b и k обращаются в 0 и уравнение будет $y = 0$. — Это есть уравнение оси абсцисс.

4) Чтобы получить уравнение линии параллельной оси $y^{ов}$ надо над уравнением $y = kx + b$ сделать сначала некоторое преобразование при непосредственной подстановке в уравнение условия $\alpha = \varphi$ имеем неопределенность $K = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{0} = \infty$



фр. 51

Положим, что AB (фр. 51) при непрерывном вращении около неподвижной точки C пришла в положение $A'B'$ параллельное оси $y^{ов}$, тогда расстояние всех точек $A'B'$ от yy' будет одинаково и пусть оно равно количеству a. Из треугольника OCD имеем $\frac{OD}{CO} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\varphi - \alpha)} = K$ но $\frac{OD}{OC} = \frac{b}{-a}$ и следовательно $\frac{b}{-a} = K$ или $b = -aK$ и подставив значение b в уравнение $y = kx + b$ имеем $y = kx - ak$ или $\frac{y}{K} = x - a$. Это равенство существует при всех положениях линии AB при вращении и в пределе, т. е когда $\lim K = \infty$, то $\lim \frac{y}{K} = 0$ и уравнение обращается в $x - a = 0$ или $x = a$, что и есть уравнение линии параллельной оси $y^{ов}$.

5) Для оси ординат $\alpha = 0$ и уравнение будет

$$x = 0$$

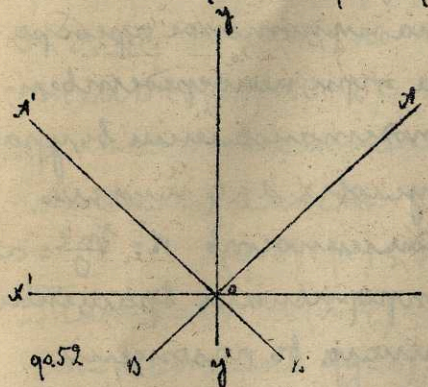
Если прямая отнесена к прямоугольным координатам, то $\varphi = 90$, и в этом случае угловой параметр прямой будет:

$$k = \frac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

И так, при прямоугольных координатах угловой параметр прямой выражается тангенсом угла наклонения прямой к оси x'ов, так что уравнение прямой сохранит прежний вид

$$y = kx + b$$

и будет $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$



ф. 52

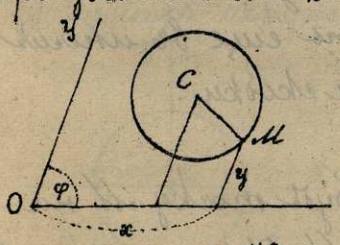
Частные случаи. 1) Прямая проходит через начало координат для нея отрезок $b = 0$ и ея уравнение будет $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$.

а) если прямая проходя через начало координат знает с осью x'ов угол в 45° то $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и и уравнение прямой будет $y = x$. (ф. 52)

в) если прямая проходя через начало координат знает с осью x'ов угол в $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ то $\operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45 = -1$ и уравнение прямой в таком случае будет: $y = -x$.

Уравненіе окружности.

Окружность опредѣляется, какъ геометрическое мѣсто точекъ равноудаленныхъ отъ одной точки, называемой центромъ. Руководствуясь этимъ опредѣленіемъ легко составить уравненіе окружности. Начертимъ окружность и отнесемъ ее къ косоугольной системѣ координатъ. Положеніе окружности будетъ вполнѣ опредѣлено относительно данной системы координатъ, если знаемъ радіусъ окружности и положеніе центра, т.е его координаты, а потому означимъ радіусъ окружности черезъ r, координаты центра окружности C черезъ α и β. Составить уравненіе линіи значитъ выразить равенствомъ зависимость между данными величинами и текущими координатами произвольной точки линіи, а потому беремъ какую нибудь точку M (ф.53) на окружности и означимъ ея координаты буквами x и y, точку M соединимъ съ C. На основаніи опредѣленія окружности длина CM постоянна, чего бы мы ни взяли точку M окружности, и равна r; выражая величину r, какъ разстояніе между двумя точками C и M, мы по извѣстной намъ формулѣ имѣемъ



ф.53

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a);$$

это и есть уравнение окружности въ самомъ общемъ видѣ. Если бы мы захотѣли вывести уравнение окружности при ортогональной системѣ координатъ, то намъ пришлось бы координатный уголъ φ положить равнымъ $90°$ и тогда уравнение окружности приняло бы слѣдующій видъ

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (в).$$

Разсмотримъ теперь, какъ измѣнится уравнение окружности въ зависимости отъ измѣненія ея расположенія относительно ортогональныхъ осей координатъ.

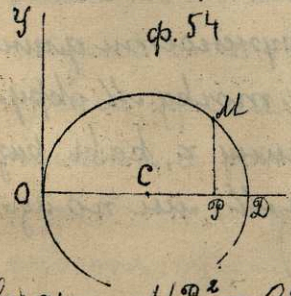
1) Центръ окружности находится на оси $X^{ов}$, а сама окружность (ф. 54) проходитъ чрезъ начало координатъ; въ такомъ случаѣ координаты центра будутъ $\alpha = r$, а $\beta = 0$, и уравнение (в) приметъ видъ:

$$r^2 = (x-r)^2 + y^2 \text{ или } y^2 = 2rx - x^2.$$

Это уравнение можно представить еще въ иномъ видѣ, взявъ во второй части x за скобки:

$$y^2 = x(2r - x).$$

Если теперь возьмемъ какую-нибудь точку M на



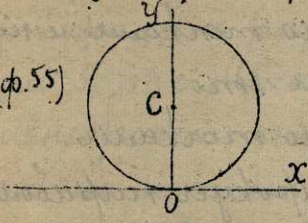
окружности (ф. 54) и опустимъ перпендикуляръ MP на ось $X^{ов}$, то найдемъ, что $y = MP$, $x = OP$ и $2r - x = PD$; поэтому предыдущее равенство приметъ видъ: $MP^2 = OP \cdot PD$ или $OP : MP = MP : PD$, т. е.

перпендикуляръ, опущенный изъ какой-нибудь точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками того діаметра.

Предыдущее уравненіе $y^2 = 2rx - x^2$ мы также могли бы вывести непосредственно изъ чертежа, при помощи только что доказанной теоремы, извѣстной намъ еще изъ курса элементарной геометріи.

2). Центръ окружности находится на оси Oy, а сама окружность (ф. 55) проходитъ чрезъ начало координатъ; въ этомъ случаѣ координаты центра будутъ: $\alpha = 0$ и $\beta = r$ и уравненіе окружности

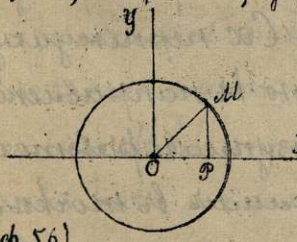
(ф.55)



приметъ видъ:

$$r^2 = x^2 + (y - r)^2, \text{ или } x^2 + y^2 = 2ry.$$

3). Центръ окружности (ф. 56) совпадаетъ съ цен-



(ф.56)

трономъ координатъ; въ этомъ случаѣ координаты центра α и β равны 0, и уравненіе будетъ въ такомъ видѣ:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Это самое простое выраженіе уравненія окружности; оно могло бы быть выведено такъже непосредственно и изъ чертежа.

Парабола.

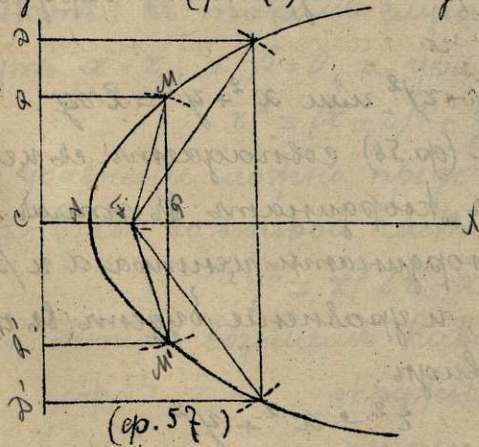
Параболой называется геометрическое мѣсто

точекъ равно удаленныхъ отъ постоянной точки и постоянной прямой, не проходящей чрезъ эту точку. Постоянная точка называется **фокусомъ** параболы, постоянная прямая называется ея **направляющей** или **директриссой**, а разстояніе какой нибудь точки параболы до ея фокуса называется **радіусомъ-векторомъ**.

На основаніи опредѣленія параболы можно ее начертить двоякимъ образомъ: по точкамъ и непрерывнымъ движеніемъ; разберемъ это.

Построеніе параболы по точкамъ.

Пусть F (фр. 57) есть данный фокусъ параболы, а прямая DD' есть данная направляющая. Проведемъ чрезъ фокусъ линію Cx перпендикулярную къ направленію DD'; раздѣливъ разстояніе CF пополамъ въ точкѣ A, мы замѣтимъ, что эта точка принадлежитъ параболѣ, такъ какъ ея разстояніе отъ фокуса равно разстоянію отъ директриссы, т.е. AF = AC. Чтобы получить другія точки параболы, проведемъ рядъ прямыхъ линій параллельныхъ направляющей DD' на различныхъ разстояні-



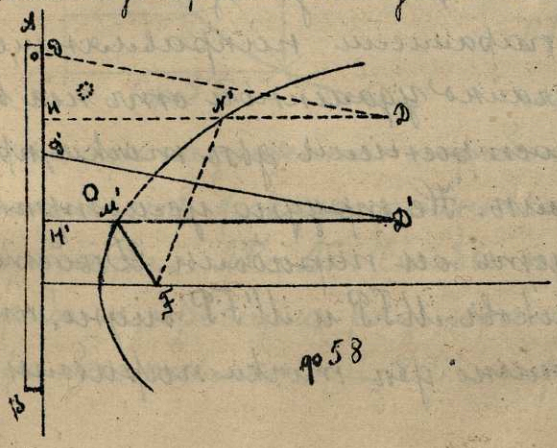
(фр. 57)

ярь бо́льшимь AC. Пусть MM' есть одна изь этихь прямыхь, пересѣкающая линію Cx въ точкѣ P. Изъ точки F, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ CP опишемъ окружность. Эта окружность пересѣчетъ нашу прямую въ двухъ точкахъ M' и M, которыя будутъ очевидно точками параболы. Въ самомъ дѣлѣ опустимъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры QM и Q'M' на направляющую DD'; мы видимъ изъ чертежа, что разстоянія каждой изъ нихъ отъ фокуса F, т.е. MF и M'F равно CP = MQ = M'Q', т.е. равно разстоянію ихъ отъ направляющей. Повторяя то же построеніе для каждой изъ прямыхъ параллельныхъ DD', мы на каждой изъ нихъ опредѣлимъ двѣ точки параболы. Соединяя затѣмъ всѣ точки непрерывной кривой, мы получимъ приблизительное очертаніе параболы. Парабола будетъ состоять, очевидно, изъ одной непрерывной вѣтви MAM', простирающейся до безконечности, такъ какъ на всякой параллели направляющей DD', хотя бы и чрезвычайно удаленной отъ нея всегда можно найти построеніемъ двѣ точки, принадлежащія параболѣ. Не трудно усмотрѣть, что прямая Cx будетъ ось параболы. Дѣйствительно изъ треугольниковъ MFP и M'FP видно, что MP = M'P и слѣдовательно двѣ точки параболы на-

ходятся на одной изъ параллелей направляющей DD' и расположены симметрично относительно прямой Cx, которая поэтому есть ось параболы. Точка A, въ которой ось Cx встрѣчаетъ кривую, есть вершина параболы. Фигура параболы, т. е. большее или меньшее отверстіе, представляемое двумя ея половинами AM и AM', соединяющимися въ точкѣ A, зависитъ отъ разстоянія фокуса отъ направляющей: чѣмъ меньше это разстояніе, тѣмъ меньше расходятся двѣ половины параболы, и чѣмъ больше это разстояніе, тѣмъ больше отверстіе, образуемое кривой. Разстояніе это обыкновенно обозначается буквою p, такъ (какъ) что $CF = p$ и называется половиной параметра параболы.

Построеніе параболы непрерывнымъ движеніемъ.

Параболу можно также построить непрерывнымъ движеніемъ. Пусть AB (фр. 58) будетъ направляющая, а F фокусъ параболы. Приложимъ ребро линейки къ направляющей AB и укрѣпимъ неподвижно въ этомъ положеніи. Къ ребру линейки прило-



фр 58

возьмем прямоугольный треугольникъ, катетъ котораго dH можетъ свободно скользить по линейкѣ. Возьмемъ нить, длина которой была бы равна другому катету DH, и одинъ конецъ этой нити укрѣпимъ неподвижно въ точкѣ F, другой же конецъ прикрѣпимъ къ вершинѣ D треугольника. Перемѣщая затѣмъ треугольникъ по линейкѣ, будемъ натягивать нить помощью карандаша, прижимая остріе карандаша къ катету DH. Остріе будетъ, очевидно, описывать дугу параболы. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ треугольникъ въ какомъ-нибудь его положеніи, напр. $H'D'q'$, тогда нить приметъ форму $D'M'F$, и остріе карандаша, натягивающее ее, будетъ находиться въ точкѣ M'. Легко видѣть, что точка M' принадлежитъ параболѣ, такъ какъ ея разстоянія отъ направляющей и отъ фокуса равны

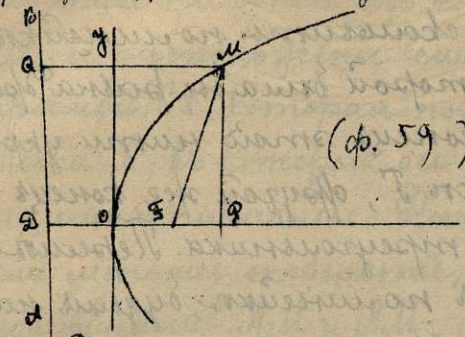
$$M'F = (D'M' + M'F) - D'M' = D'H' - D'M' = M'H'.$$

Перевернувъ треугольникъ и снова приложивъ катетъ Hq къ направляющей, мы, очевидно, можемъ тѣмъ же способомъ начертить и другую половину параболы.

Уравненіе параболы.

Составимъ теперь уравненіе параболы, отнесенной къ ортогональной системѣ координатъ. Пусть AB направляющая параболы и точка F ея

фокусе (ф. 59). Тогда, если M есть текущая точка кривой, то, соединив ее с фокусом и проведя перпендикуляр к направляющей MQ, мы должны иметь по определению параболы: $MF = MQ$. Из точки F опустим перпендикуляр FD на направляющую AB. Мы знаем уже, что Dx есть ось кривой. Для получения более простого уравнения кривой всегда бывает выгодно ее ось принимать за одну из осей координат. Поэтому здесь линию Dx примем за ось абсцисс. Разделим линию DF пополам точкою O, так что будем иметь: $OF = OD$. Точка O есть, очевидно, точка параболы, и притом ее вершина. Мы примем точку O за начало прямоугольных координат. При выбранных таким образом осях координат получается самый простой вид уравнения параболы. Положим, что $FD = p$, тогда $OF = OD = \frac{p}{2}$. Координаты текущей точки M обозначим через x и y, координаты фокуса F будут $\frac{p}{2}$ и 0. По формуле, определяющей расстояние между двумя точками имеем:



(ф. 59)

$$MF = \sqrt{(x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2}.$$

С другой стороны: $QM = PD = x + \frac{p}{2}$, и по главному

свойству параболы получимъ равенство:

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{p}{2}.$$

Это уравненіе представляетъ соотношеніе между координатами x и y произвольной точки параболы. Его можно упростить, возведя обѣ части въ квадратъ, получимъ:

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 = x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

или, по сокращеніи,

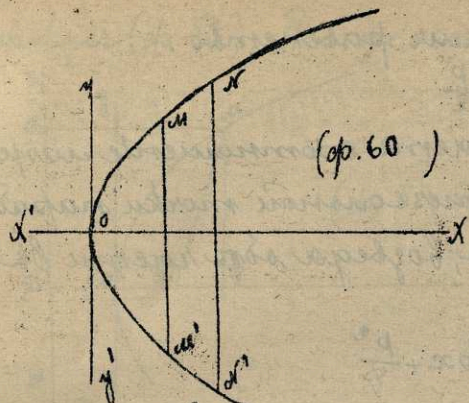
$$y^2 = 2px.$$

Это и есть уравненіе параболы, отнесенной къ вершинѣ и оси. Коэффиціентъ $2p$ есть данная величина и называется параметромъ кривой.

Изслѣдованіе формы параболы по ея уравненію.

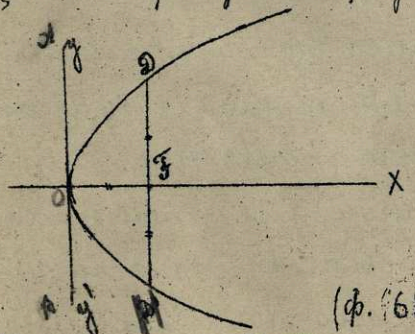
Чтобы изслѣдовать кривую линію, т.е. опредѣлить ея фигуру и размѣры, а также ея положеніе на плоскости въ аналитической геометріи достаточно имѣть ея уравненіе.

Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ OX и OY (ср. 60). Рѣшимъ данное уравненіе относительно y: $y^2 = 2px$; $y = \pm\sqrt{2px}$. Отсюда видно, что, если положимъ $x=0$, то $y=0$; слѣдовательно наша кривая проходитъ чрезъ начало координатъ. Если возьмемъ $x<0$, то y будетъ мнимое количество. Это значитъ, что по лѣвую сторону



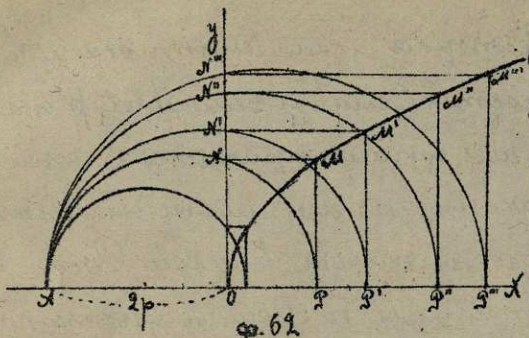
отъ OY точекъ кривой не существуетъ. Будемъ полагать $x > 0$. Возьмемъ какое-нибудь значеніе для x, пусть, напр., $x = OP$. Тогда по данному уравненію мы получимъ соотвѣтствующую величину для $y^{\text{ка}}$, и ясно, что для $y^{\text{ка}}$ мы получимъ двѣ равныя, но съ обратными знаками, величины. Изъ этого мы заключаемъ, что всѣ точки кривой, подобно точкамъ M и M', будутъ расположены симметрично относительно оси $x^{\text{ов}}$, а слѣдовательно ось $x^{\text{ов}}$ есть ось кривой. Вслѣдствіе этого достаточно разсматривать часть кривой, находящуюся надъ осью $x^{\text{ов}}$, ибо вся кривая можетъ быть построена по симметріи ея относительно оси $x^{\text{ов}}$. Для верхней части кривой будемъ имѣть $y = +\sqrt{2px}$. Если x, идя отъ 0, будетъ увеличиваться, тогда, очевидно, y будетъ тоже постоянно увеличиваться; это значитъ, что кривая отъ точки O идетъ въ правую сторону, постоянно поднимаясь надъ осью $x^{\text{ов}}$. При томъ, увеличивая x до ∞ мы видимъ, что и y будетъ увеличиваться до $+\infty$, оставаясь всегда дѣйствительнымъ. Отсюда заключаемъ, что кривая имѣетъ

одну непрерывную ветвь, которая удаляясь отъ оси $x^{ов}$, простирается въ безконечность. Если бы величина p была дана числомъ и если бы x-ы мы стали приписывать на самомъ дѣлѣ числовое значеніе, то мы могли бы построить на чертежѣ сколько угодно точекъ кривой. Соединивъ ихъ непрерывной чертой, мы получимъ ветвь параболы. Парабола можетъ имѣть отверстіе большее или меньшее смотря по величинѣ $2p$. Чѣмъ больше $2p$, тѣмъ быстрѣе растетъ y, слѣдовательно тѣмъ больше отверстіе параболы. Когда парабола дана, то ея параметръ легко опредѣлить и построить. Для этого стоитъ только черезъ фокусъ параболы F провести хорду, перпендикулярную оси. Длина ея и будетъ равна параметру. Пусть AB (ф. 61) направляющая, F — фокусъ. Опредѣлимъ координаты точки D; онѣ будутъ: $x = FO = \frac{p}{2}$; $y = DF = \sqrt{2px}$; подставивъ вмѣсто x подъ корнемъ его величину $\frac{p}{2}$, получимъ: $DF = p$; $2DF = DH = 2p$, т.е. параметру параболы.



(ф. 61)

Уравненіе $y = \sqrt{2px}$ называется уравненіемъ параболы, отнесенной къ вершинѣ и оси. Изъ уравненія параболы, отнесенной къ вершинѣ и оси, вытекаетъ способъ построенія ея по точкамъ (ф. 62). Уравненіе $y = \sqrt{2px}$



Фиг. 62

показывает, что каждая ордината есть величина средняя пропорциональная между постоянною длиною 2p и абсциссою x. Отложимъ на оси Oy въ отрицательную сторону $OA = 2p$ и, взявъ затѣмъ произвольную абсциссу $OP = x$, мы на линіи Ap, какъ на діаметрѣ опишемъ окружность, которая пересѣчетъ ось y-овъ въ точкѣ N. Затѣмъ, проведя въ точкѣ P перпендикуляръ къ оси x-овъ, изъ точки N проводимъ еще параллель ей. Эта параллель пересѣчетъ перпендикуляръ въ точкѣ M, которая будетъ принадлежать параболѣ. Въ самомъ дѣлѣ въ кругѣ AMP по извѣстной теоремѣ имѣемъ:

$$ON = MP = \sqrt{AO \cdot OP} = \sqrt{2px} = y$$

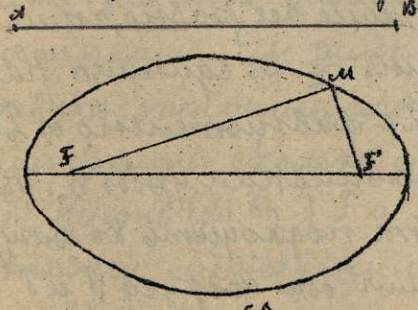
Такъ какъ абсцисса $OP = x$ была взята произвольно, то повторяя тотъ же построеніе при другихъ абсциссахъ, можно построить сколько угодно точекъ параболы, произвольно близкихъ одна къ другой; для этого намъ надо будетъ описывать различныя окружности, центры которыхъ находились бы на оси Ax и которыя проходили бы черезъ точку A. Эти окружности пересѣкутъ ось x-овъ въ точкахъ P, P', P''..... а ось y-овъ въ точкахъ N, N', N''..... Черезъ точки P, P', P''... проведемъ перпендикуляры къ Ox, а черезъ N, N', N''.... параллели той же

оси. Точки пересѣченія M, M', M''.... будутъ точками параболы.

Эллипсъ, его построеніе и уравненіе.

Эллипсомъ называется кривая линія, представляющая геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ неподвижныхъ точекъ постоянна и равна данной длинѣ.

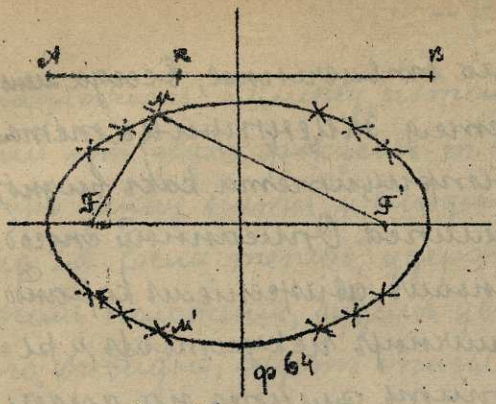
Двѣ постоянныя точки, которыя упоминаются въ опредѣленіи, называются фокусами эллипса. Для того, чтобы получить болѣе полное понятіе о фигурѣ эллипса, укажемъ прежде всего, какъ можно начертить эту кривую непрерывнымъ движеніемъ карандаша. Пусть F и F' (фр. 63) суть два данные фокуса и AB данная длина равная $2a$. Сумма разстояній каждой точки эллипса отъ двухъ фокусовъ F и F' должна быть равна $2a$. Возьмемъ возможно тонкую, гибкую и не растяжимую нить, длина которой равнялась бы $2a$, и укрѣпимъ оба конца ея неподвижно въ фокусахъ F и F'. Натянемъ эту нить карандашемъ такъ, чтобы она образовала ломанную линію FMF', при чемъ остріе карандаша будетъ находиться въ точкѣ M. Эта точка, очевидно, будетъ при-



фр. 63

надлежать эллипсу, потому что сумма их разстояний от двух фокусов, т.е. $MF + MF'$ составляет полную длину нити и следовательно равна данной длине $2a$. Если теперь, удерживая нить в натянутом положении, будем двигать карандаш, то острие его, очевидно, будет описывать дугу эллипса $MM'M''\ldots$ и может таким образом начертить эллипс. Из этого способа черчения эллипса можно усмотреть непосредственно, что эллипс есть непрерывная выпуклая и замкнутая кривая линия, похожая на растянутый круг. Ясно, что если разстояние между фокусами F и F' обозначим через $2c$, то непременно должно быть $2c < 2a$, иначе эллипс был бы невозможен. При том очевидно, что фигура эллипса тем более будет растянута, чем более будет $2c$ сравнительно с $2a$, или все равно, чем ближе отношение этих длин $\frac{c}{a}$ к единице. Наоборот, чем менее будет $2c$ сравнительно с $2a$, т.е. чем меньше будет правильная дробь $\frac{c}{a}$, тем ближе фигура эллипса будет подходить к фигуре круга. Когда наконец соединим оба фокуса F и F' в одну точку, так что будет $2c = 0$ и отношение $\frac{c}{a} = 0$, то эллипс очевидно обратится в круг радиуса a, и точка, в которой совместятся оба фокуса, будет центром круга. Отношение длин $2c$

и $2a$, т.е. дробь $\frac{c}{a}$ есть число отвлеченное, всегда меньшее единицы; оно называется эксцентрицитетом эллипса. По величине эксцентрицитета, как видно, можно судить о фигуре эллипса. Описанный способ черчения эллипса непрерывным движением карандаша употребляется в различных искусствах и ремеслах, когда надо начертить эллипс на доске. В тех же случаях, когда требуется большая точность и когда надо начертить эллипс на бумаге употребляется другой способ, а именно-строят эллипс по точкам. Этот последний способ состоит в геометрическом построении возможно большого числа точек эллипса, расположенных весьма близко друг от друга. Совокупность этих точек составит пунктирное изображение эллипса. Приступая к построению эллипса по точкам, мы заметим во первых, что, руководствуясь определением этой кривой, мы можем построить сколько угодно точек, принадлежащих ей. Пусть (фр. 64) F и F' два данные фокуса, расстояние между ними $FF' = 2c$, и пусть $AB = 2a$ есть данная сумма разстояний точек эллипса от данных фокусов. Возьмем на линии AB произвольную точку R, и затем из фокуса F' радиусом равным BR, а из фокуса F радиусом



ф64

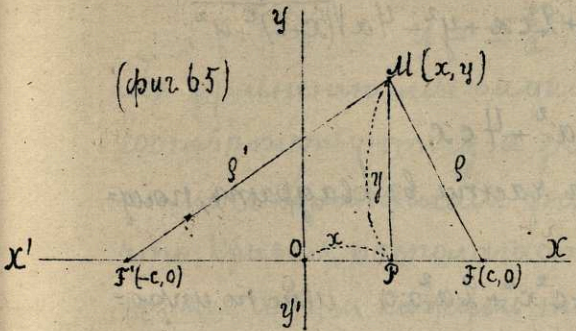
равным AR описанием двух окружности. Эти две окружности пересекутся в точках M и M', которые будут, очевидно, принадлежать эллипсу, ибо сумма их расстояний от фокусов F и F' составляет 2a. Подобных пар точек, принадлежащих эллипсу, можно построить сколько угодно, так как для получения других пар стоит только изменять величины радиусов двух окружностей, но при том так, чтобы их сумма все таки равнялась 2a. Пусть первый из радиусов будет равен $a+\alpha$, тогда другой должен быть равен: $2a-(a+\alpha)=a-\alpha$. Для того, чтобы было возможно образовать треугольник FMF', иначе говоря, для того, чтобы две описанных окружности пересекались, необходимо: 1) чтобы сумма двух сторон $MF+MF'$ была больше третьей стороны FF', т.е. чтобы 2a было больше 2c и 2) чтобы разность тех же сторон MF и MF' была бы менее FF'. Первое из этих условий мы полагаем выполненным. Второе же условие требует, чтобы разность $a+\alpha-(a-\alpha)<2c$, т.е. чтобы $\alpha<c$. Отсюда видно, что для точек эллипса должно брать больший радиус меньше

(a+c), а меньший радіусъ больше (a−c). Наибольшею величиною для каждаго радіуса будетъ (a+c), а наименьшею (a−c).

Уравненіе эллипса.

Положимъ (фиг. 65), что F и F' два данные фокуса эллипса, и разстояніе FF' = 2c. Пусть M есть произвольная точка кривой. Соединимъ ее съ фокусами и обозначимъ разстояніе MF и MF' черезъ ρ и ρ'; по опредѣленію эллипса ихъ сумма должна быть: ρ + ρ' = 2a, гдѣ 2a равно данной длинѣ. Для составленія уравненія эллипса линію FF' примемъ за ось x-въ, а начало координатъ помѣстимъ въ точкѣ O, взятой на срединѣ FF', такъ что OF = OF' = c. Ось y-въ будетъ перпендикулярна оси x-въ. Такимъ образомъ за оси координатъ примемъ оси эллипса. При такихъ осяхъ получится самое простое уравненіе эллипса. Координаты произвольной точки M эллипса будутъ x и y, а координаты фокуса F будутъ (c, 0). Поэтому имѣемъ:

(фиг 65)



$$\rho = \sqrt{FP^2 + MP^2} = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Для фокуса F' координаты будутъ (−c, 0), поэтому имѣемъ право написать

$$\rho' = \sqrt{FP^2 + MP^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Сумма ρ + ρ' должна быть равна 2a, слѣдовательно

$$\sqrt{(c-x)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Это уравнение можно представить в простейшем виде, освободив его от радикала. Напишем его в виде

$$\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$c^2+x^2-2cx+y^2=4a^2+x^2+c^2+2cx+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2};$$

по сокращении имеем:

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx.$$

Сократив на 4 и возведя обе части в квадрат, получим:

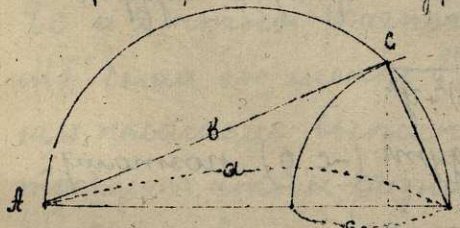
$$a^2x^2+a^2c^2+2a^2xc+a^2y^2=a^4+c^2x^2+2a^2xc,$$ или по упрощении

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$ или $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Заметим, что $a>c$, и потому разность a^2-c^2 есть величина положительная; приравняем ее b^2, так что

$$a^2-c^2=b^2.$$

Величину b можно построить по теореме Пифагора, как катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна a, а другой катет c. (фиг. 66). Таким образом b будет известная и вполне определенная величина для данного эллипса, и мы можем ввести в ее уравнение, как параметр; тогда уравнение примет вид:



(фиг. 66.)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Изслѣдованіе уравненія эллипса.

Уравненіе эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ рѣшимъ относительно $y^{ка}$: $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$; $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ и по извлеченіи корня

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

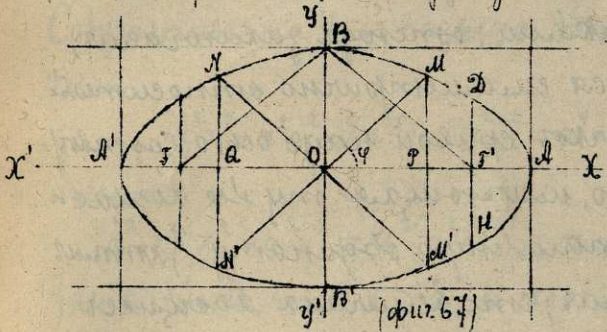
По уравненію мы видимъ, что одному значенію $x^{а}$ соотвѣтствуютъ два значенія $y^{ка}$ равныя по величинѣ, но съ обратными знаками; отсюда заключаемъ, что кривая располагается симметрично относительно оси $x^{въ}$, и каждой точкѣ кривой надъ осью соотвѣтствуетъ точка подъ осью, имѣющая тую же абсциссу и равную, но противоположную ординату. Затѣмъ изъ уравненія мы видимъ, что величина абсциссъ не можетъ быть болѣе a и менѣе $(-a)$, такъ какъ только при условіи $a^2-x^2\geqq 0$ корень будетъ дѣйствительный и построеніе точки возможнымъ. Это условіе выполнимо при $a\geqq x\geqq(-a)$. Такъ какъ x входитъ въ квадратъ, то величина корня для положительныхъ и отрицательныхъ абсциссъ останется одна и таже, а потому одной и той же ординатѣ будутъ соотвѣтствовать двѣ равныя, противоположныя абсциссы, и кривая будетъ расположена симметрично такуе и относительно оси $y^{ов}$.

Найдемъ теперь точки кривой, имѣющія пре-

дельныя абсциссы a, $-a$, а также и абсциссу $x=0$. Изъ уравненія

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

при подстановкѣ $x=a$ и $x=-a$, имѣемъ $y=0$, т.е. въ этихъ точкахъ кривая пересѣкаетъ ось x'въ. Таковы точки A и A' (фиг. 67) и какъ вправо отъ точки A, такъ и влѣво отъ A' точекъ кривой нѣтъ. Пусть теперь $x=0$; тогда $y=\pm b$. Отложивъ отъ O по оси y'въ OB и OB' равныя b, получимъ точки кривой B и B', въ которыхъ кривая пересѣкаетъ ось y'въ, и какъ выше точки B, такъ и ниже точки B' точекъ кривой нѣтъ.



(фиг. 67)

Оси x'въ и y'въ будутъ осями кривой. Если въ точкахъ A, A', B, B' возставимъ перпендикуляры къ осямъ, то получимъ касательныя къ кривой въ этихъ точкахъ. Эти касательныя въ пересѣченіи своемъ дадутъ прямоугольникъ, внутри котораго и будутъ заключаться всѣ точки кривой.

Если x будетъ увеличивать, то изъ уравненія видно, что при этомъ y уменьшается по абсолютной величинѣ, и стало быть отъ точки B въ правую сторону кривая пойдетъ приближаясь къ оси x'въ. Возьмемъ произвольный x, положимъ

OP, т.е. $x = OP$; вычислив соответствующую величину y, построим эту величину как ординату MP и другую $M'P$ ей равную, но по знаку противоположную. Две точки M, M' суть точки кривой, при том $MP = M'P$. Если в любую сторону от оси y отложим $OQ = OP$ и возставим перпендикуляр из точки Q к оси x и отложим на нем $NQ = N'Q = MP = M'P$, то получим две точки кривой N и N' симметричные с точками M и M' относительно оси y.

Не трудно доказать, что точка O будет центром эллипса; действительно, соединив точку O с точками M и N' и увидим, что два треугольника MOP и $N'OQ$ равны, откуда следует, что углы MOP и QON' равны, а потому линия MON' есть прямая. Сверх того имеем: $OM = ON'$, и так как M есть произвольная точка эллипса, то, следовательно, произвольная хорда эллипса MN' и проведенная через точку O, делится этою точкою пополам, значит точка O есть центр эллипса, и все хорды, проходящие через нее делятся ею пополам.

Дополним это исследование фигуры эллипса разсмотрением, как изменяется в нем радиус, проведенный через центр к различным точкам кривой при переходе от точки B к A. Пусть $OP = x$, $MP = y$ и $OM = r$; тогда имеем:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$. Но по уравнению эллипса: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. Вставивъ величину y^2 въ уравненіе r, получимъ: $r = \sqrt{x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)} = \sqrt{b^2+x^2(1-\frac{b^2}{a^2})}$. Такъ какъ $b<a$, то $\frac{b}{a}$ или $\frac{b^2}{a^2}$ менѣе 1; поэтому $(1-\frac{b^2}{a^2})>0$. При переходѣ точки B къ A x - постоянно увеличивается, и при наибольшей величинѣ x, т.е. при $x=a$, мы будемъ имѣть

$$r_{maxim.} = \sqrt{a^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-a^2)} = \sqrt{b^2+a^2(1-\frac{b^2}{a^2})} = a.$$

Фокусы эллипса находятся на большой оси, причемъ $OF = OF' = c$. Соединивъ F и F' съ B; изъ треугольника BOF имѣемъ:

$$BF^2 = b^2+c^2.$$

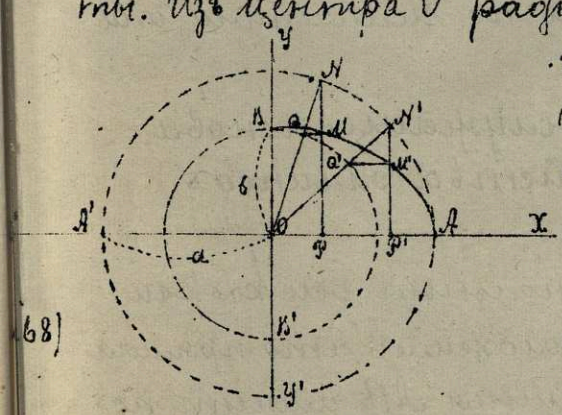
Но мы положили, что $a^2-c^2=b^2$, или $a^2=b^2+c^2$; отсюда заключаемъ, что $BF^2=a^2$, или $BF=\pm a$.; слѣдовательно, если даны оси эллипса, то чтобы получить фокусы, надо изъ концовъ B малой оси описать дугу радіусомъ a, - точки пересѣченія этой дуги съ большой осью и будутъ фокусы. Итакъ $c^2=a^2-b^2$ и $c=\sqrt{a^2-b^2}$; значитъ эксцентриситетъ $\frac{c}{a}=\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$. Величина ε всегда менѣе 1, такъ какъ подъ корнемъ правильная дробь, а слѣдовательно и c всегда $<a$. Если въ эллипсѣ обѣ оси будутъ равны, то эллипсъ обращается въ окружность. Дѣйствительно, возьмемъ уравненіе эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; такъ какъ по предположенію $b=a$, то

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ даетъ $x^2+y^2=a^2$; а это есть уравненіе круга, котораго центръ въ началѣ координатъ радіусъ $=a$. При этомъ – если $b=a$, то $\varepsilon=0$.

Слѣдовательно можно сказать, что кругъ есть частный случай эллипса, у котораго эксцентриситетъ равенъ 0.

Построеніе эллипса по точкамъ, выводимое изъ его уравненія.

Напишемъ уравненіе эллипса: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Возьмемъ (фиг. 68) двѣ прямоугольныя координаты. Изъ центра O радіусомъ в описываемъ окружность; изъ той же точки описываемъ еще другую окружность концентрическую съ первой и радіуса $=a$. Возьмемъ затѣмъ произвольную абсциссу OP и изъ точки P возставимъ



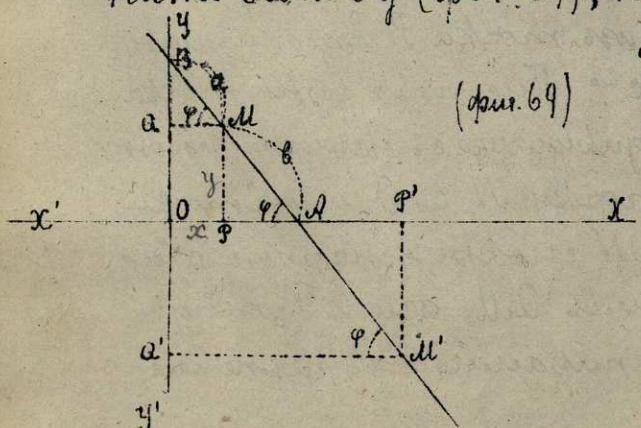
(68)

перпендикуляръ къ оси $x^{ов}$. Пусть N есть точка встрѣчи этого перпендикуляра съ окружностью радіуса a. Соединивъ точку N съ O и изъ точки Q пересѣченія линіи ON съ окружностью радіуса b проведемъ параллель QM оси $x^{ов}$; тогда точка встрѣчи этой параллели съ перпенди-

кулярами NP, будетъ точкою эллипса M. Въ самомъ дѣлѣ пусть $OP = x$, и такъ какъ $ON = a$, то изъ прямоугольника ONP имѣемъ: $PN = \sqrt{a^2 - x^2}$. Затѣмъ, такъ какъ $QO = b$, то, написавъ пропорцію $MP : OQ = NP : ON$, или $MP : b = \sqrt{a^2 - x^2} : a$, найдемъ отсюда, что $MP = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Итакъ мы видимъ, что $MP = y$, а потому точка M есть точка эллипса. Такихъ точекъ тѣмъ же построеніемъ можно получить сколько угодно. На чертежѣ обозначены точки M, M', принадлежащія эллипсу. Соединивъ ихъ непрерывною чертою, мы получимъ дугу кривой AB. Другую часть можно построить по симметріи, или гдѣ-нибудь по точкамъ.

Свойство эллипса, служащее основаніемъ для устройства эллипсографа.

Возьмемъ двѣ прямоугольныя оси координатъ Ox и Oy (фиг. 69); положимъ, что прямая линія AB имѣетъ постоянную величину и перемѣщается по плоскости такъ, что конецъ ея A скользитъ по оси x-въ, а другой конецъ ея B перемѣщаясь



(фиг. 69)

въ тоже время по оси y^{ax}. Мы докажемъ, что всякая точка прямой AB будетъ описывать нѣкоторый эллипсъ, причемъ эллипсъ, котораго центръ находится въ O и котораго оси совпадаютъ съ осями координатъ. Чтобы доказать это, возьмемъ произвольную точку M и положимъ, что разстояніе $AM = b$ и $BM = a$. Эти разстоянія постоянны; обозначимъ координаты точки M чрезъ x и y и построимъ чертежъ. Проведя MQ параллельно оси абсциссъ и положивъ $\angle OAB = \varphi$, найдемъ $x = a.\cos\varphi$ и $y = b.\sin\varphi$; откуда $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ и $\frac{y}{b} = \sin\varphi$; или возведя въ квадратъ и складывая, получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

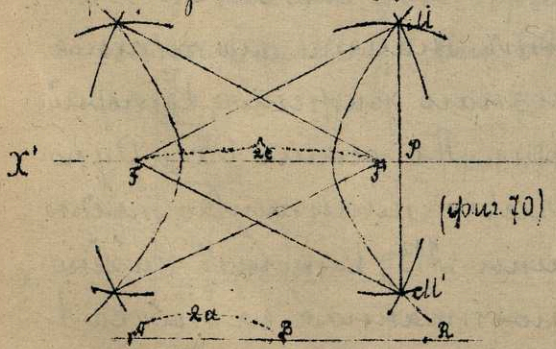
Тоже самое получили бы, если бы мы взяли точку въ положеніи M'. Пусть $M'B = a$ и $M'A = b$. Мы нашли бы для точки M': $x = a.\cos\varphi'$, $y = -b\sin\varphi$; $\frac{x}{a} = \cos\varphi$; $\frac{y}{b} = -\sin\varphi$; и наконецъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

На основаніи этого свойства движенія точки M прямой AB устраиваютъ снарядъ для черченія эллипса помощью непрерывнаго движенія, который называется эллипсографомъ. По осямъ Ox и Oy помѣщаютъ двѣ металлическія пластинки, третью линейку произвольной длины AB, которую можно передвигать такъ, что постоянная ея точка A движется внизу по оси Ox, а другая точка B по оси Oy. Точку M, въ которой укрѣпленъ карандашъ,

можно брать въ какомъ угодно мѣстѣ линейки и такимъ образомъ можно дать полюсамъ а и в эллипса желаемые размѣры.

Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній отъ которыхъ до двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная и равная данной длинѣ. Данныя точки называются фокусами гиперболы, а прямыя, соединяющія фокусы съ точками гиперболы, называются радіусами-векторами. На основаніи этого опредѣленія гиперболу можно начертить двоякимъ образомъ по точкамъ и непрерывнымъ движеніемъ. Разберемъ сперва построеніе гиперболы по точкамъ. Положимъ (фиг. 70) F и F' будутъ два данные фокуса гиперболы и пусть разстояніе $FF' = 2c$. Положимъ далѣе, что AB есть данная длина, выражающая разность разстояній каждой точки гиперболы до ея фокусовъ. Руководствуясь опредѣленіемъ гиперболы, мы можемъ построить сколько угодно точекъ гиперболы. Для этого на продолженіи линіи AB возьмемъ



(фиг. 70)

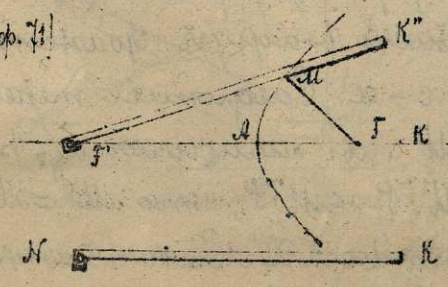
произвольную точку R и изъ точки F, какъ изъ цен-
тра, радіусомъ AR, а изъ F' радіусомъ равнымъ BR
описываемъ окружности; эти окружности пересѣ-
кутся въ двухъ точкахъ M и M'. Легко видѣть, что эти
точки будутъ принадлежать разсматриваемой на-
ми гиперболѣ. Въ самомъ дѣлѣ, для точки M бу-
демъ имѣть, что разность ея разстояній отъ фо-
кусовъ F и F' будетъ: $MF - MF' = AR - BR = AB = 2a$. То-
же будемъ имѣть и для точки M'. Подобныхъ паръ
точекъ, принадлежащихъ гиперболѣ, можно постро-
ить сколько угодно, такъ что, измѣняя положеніе
точки R на продолженіи AB, т.е. величину радіусовъ
двухъ окружностей, будемъ имѣть всегда въ пере-
сѣченіи этихъ окружностей точки гиперболы. Ес-
ли черезъ $2a$ назовемъ постоянную разность и
черезъ $2c$ разстояніе FF' отъ фокусовъ, то, чтобы по-
лучить точки кривой, необходимо, чтобы $2a$ было
менѣе $2c$. Означимъ черезъ $\alpha + a$ большій радіусъ,
тогда меньшій будетъ $\alpha - a$; круги пересѣкутся
тогда, когда сумма 2α радіусовъ будетъ больше
$2c$. Такимъ образомъ большій радіусъ должен-
$\alpha > c$ быть $> c + a$, а меньшій $> c - a$. Соединивъ теперь
двѣ точки гиперболы M и M' мы получимъ изъ ра-
венства треугольниковъ $M'FF$ и MFF, что $MF = M'F$
и что MM' перпендикулярна къ XX'. Слѣдователь-

но, две точки M и M' расположены симметрично относительно прямой XX', которая по этому есть ось гиперболы. Не трудно заметить, что мы можем получить еще новый ряд точек гиперболы, если, повторяя предыдущее построение, будем описывать окружности большим радиусом из фокуса F', а меньшим из фокуса F и станем отмечать точки пересечения таких окружностей, разность радиусов которых равны MB = 2a. Совокупность точек, построенных таким образом, определит другую ветвь гиперболы, которая будет расположена относительно фокуса F точно так же, как первая относительно фокуса F'.

Построение гиперболы непрерывным движением.

Обратимся теперь к построению гиперболы непрерывным движением. Пусть даны два фокуса F и F' (фиг. 71) и длина 2a, определяющая разность расстояний от какой либо точки гиперболы до ея фокусов. Возьмем линейку KK и нить такой длины, чтобы разность между длиною линейки и длиною нити равнялась 2a; один конец нити

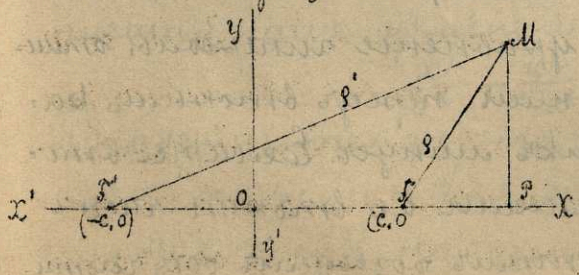
(фиг. 71)



укрепим в K — конец линейки и затем приложим линейку к прямой FF' и укрепим конец линейки N в фокусе F'. Свободный конец нити укрепим в точке F и натянем нить карандашом, прижимая его к ребру линейки. Будем теперь вращать линейку, оставляя нить в натянутом положении и прижимая карандаш к ребру линейки, тогда очевидно, что карандаш опишет часть гиперболы. В самом деле, если предположим, что линейка приняла положение F'K", указанное на фиг. 71, то MF'−MF = MF'+MK" = −(MF+MK") = длине линейки без длины нити = 2a; следовательно, точка M принадлежит гиперболе. Легко таким же способом, но располагая иначе линейку, начертить другие части гиперболы.

Уравнение гиперболы.

Пусть (фиг. 72) F и F' два фокуса гиперболы, расстояние между ними FF' = 2c; тогда, если M есть текущая точка гиперболы, то, соединив ее с фокусами F и F', получим два радиуса ϱ и ϱ'. По определению гиперболы должны быть, что ϱ'−ϱ = 2a, где 2a



(фиг. 72)

есть данная длина, при чем должно быть соблюдено условіе, что $a < c$. Чтобы составить уравненіе кривой, примемъ линію $FF'x$ за ось x-овъ, а серединy линіи FF' за начало координатъ O, при чемъ будемъ имѣть, что $OF = OF' = c$. Координаты точки M пусть будутъ x и y. Такимъ образомъ за оси координатъ мы примемъ оси кривой; при этомъ уравненіе гиперболы получается въ самомъ простомъ видѣ. Замѣтимъ, что координаты точки F будутъ $(c, 0)$, а потому ϱ, какъ разстояніе между двумя точками, $= \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \varrho$. Затѣмъ координаты фокуса F' будутъ $(-c, 0)$, а потому разстояніе $\varrho' = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$. По главному свойству гиперболы имѣемъ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Это есть уравненіе гиперболы. Сравнивъ его съ уравненіемъ эллипса, которое было выведено тѣмъ же путемъ, но въ которомъ было выражено, что сумма

$$\varrho + \varrho' = 2a,$$

мы замѣтимъ, что уравненіе гиперболы отличается тѣмъ, что въ немъ передъ вторымъ радикаломъ стоитъ знакъ минусъ. Если же второй радикалъ мы перенесемъ во вторую часть и $2a$ въ первую и затѣмъ возведемъ обѣ части

въ квадратъ, то разница между уравненіями эллипса и гиперболы уничтожится совсѣмъ. Отсюда заключаемъ, что, не повторяя прежняго вычисленія, служащаго для освобожденія уравненія эллипса отъ радикаловъ, мы можемъ прямо написать уравненіе гиперболы въ окончательномъ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

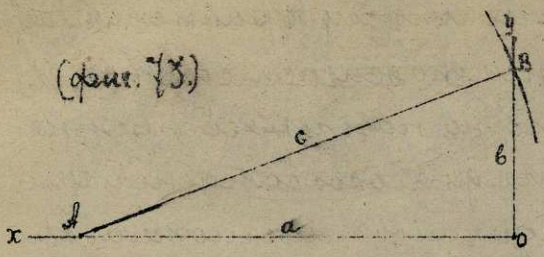
Это уравненіе по виду совершенно одинаково съ найденнымъ выше уравненіемъ эллипса, но тѣмъ не менѣе разница между уравненіями эллипса и уравненіемъ гиперболы чрезвычайно значительна. Эта разница заключается въ томъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, т. е. въ гиперболѣ $a < c$, почему и $a^2 < c^2$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, разсмотримъ $\Delta FMF'$; въ немъ разность двухъ сторонъ меньше третьей, слѣдовательно $\rho' - \rho < 2c$; но $\rho' - \rho = 2a$, значитъ $2a < 2c$, или $a < c$, почему и $a^2 < c^2$ или $a^2 - c^2 < 0$.

Вслѣдствіе этого намъ будетъ удобно написать наше уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Положимъ теперь, что $c^2 - a^2 = b^2$. Величину b легко построить. Для этого, взявъ прямой уголъ yox (чер. 73), отложимъ отъ точки O одинаку

(фиг. 73)



$OA = a$ и изъ точки A радіусомъ равнымъ c опишемъ дугу, которая пересѣчетъ ось y въ точкѣ B; тогда въ треугольникѣ OAB катетъ OB будетъ равнаться $\sqrt{c^2-a^2} = b$. Такимъ образомъ величина b будетъ извѣстна и уравненіе гиперболы приметъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если сравнить это уравненіе съ уравненіемъ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то увидимъ, что уравненіе гиперболы получается изъ уравненія эллипса замѣною b^2 на $-b^2$, или b на $b\sqrt{-1}$. Это замѣчаніе очень важно, потому что на основаніи его можно выводы, сдѣланные изъ эллипса, помощью его уравненія прямо примѣнять къ гиперболѣ, замѣняя только въ полученномъ результатѣ b^2 на $-b^2$. Уравненіе гиперболы можно написать еще въ слѣдующемъ видѣ, получаемое освобожденіемъ предыдущаго уравненія отъ знаменателя,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -b^2a^2.$$

Если же рѣшимъ это уравненіе относительно y, то найдемъ, что

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

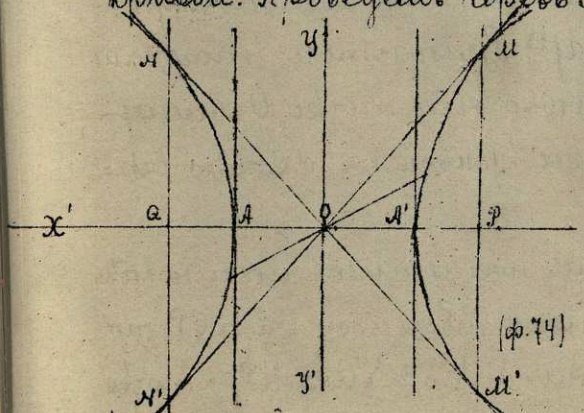
Это есть третій видъ того же уравненія. Всѣ эти три вида представляютъ гиперболу, отнесенную къ центру и осямъ.

Изслѣдованіе фигуры гиперболы по ея уравненію.

Рѣшимъ уравненіе гиперболы относительно y; получимъ

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Отсюда видимъ, что, если сдѣлаемъ $x = 0$, то получимъ y мнимымъ и что, если x будетъ увеличиваться отъ $x = 0$ до $x = a$, то y останется мнимымъ, пока $x < a$. Когда возьмемъ $x = a$, то найдемъ $y = 0$. Построимъ точку, опредѣляемую этими двумя координатами; (фиг. 74) для этого отложимъ $OA = a$; точка A будетъ точкой кривой. Проведемъ черезъ A перпендикуляръ къ оси x'въ; мы можемъ утверждать, что между перпендикуляромъ и осью y'въ нѣтъ кривой. Если затѣмъ x будетъ увеличиваться по абсолютной величинѣ, то и y будетъ также увеличиваться. Возьмемъ какой нибудь $x = OP$ и вычислимъ для него соотвѣтствующій y, который будетъ имѣть два значенія, равныя, но съ обратными знаками; изъ этого заклю-

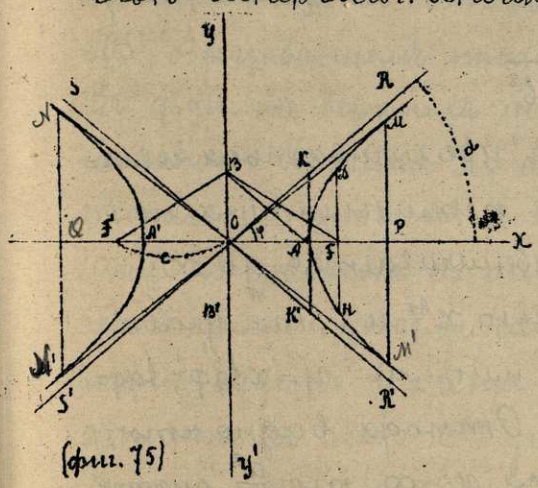


замѣчаемъ, что ось $x^{вх}$ есть ось кривой и что всѣ точки кривой будутъ расположены симметрично относительно этой оси подобно точкамъ M и M'. Абсциссу x можно увеличивать до $\pm\infty$. Изъ этого заключаемъ, что отъ точки A въ правую сторону кривая идетъ, постоянно удаляясь отъ оси x и продолжается въ безконечность, такъ какъ съ увеличеніемъ x^a, y увеличивается тоже до безконечности, оставаясь дѣйствительнымъ. Если x будетъ принимать отрицательныя значенія отъ 0 до $-\infty$, то замѣчая, что x въ уравненіе входитъ въ квадратѣ, можно прямо сказать, что y при отрицательныхъ значеніяхъ x^a получаемъ такія же значенія, какъ и при положительныхъ. Отсюда слѣдуетъ, что по лѣвую сторону оси $y^{вх}$ получается другая вѣтвь кривой и притомъ точно такая же, какъ и по правую сторону относительно оси $y^{вх}$. Вслѣдствіе этого, если мы отложимъ на оси $x^{вх}$ влѣво отъ точки O длину $OA' = OA = a$, то A' будетъ точка кривой ея другою вершиною.

По симметріи мы можемъ начертить лѣвую вѣтвь кривой. При этомъ, если возьмемъ абсциссу $OQ = OP$, то получимъ двѣ ординаты кривой $NQ = N'Q = MP$ и точки N и N' будутъ точки гиперболы. Легко доказать, что точка O есть центръ кривой. Соединимъ O съ M и N'; получимъ два равныхъ треугольника OMP и $ON'Q$, и изъ

ных равенства заключаем, что в них углы при точке O равны; следовательно линия N'OM есть прямая, причем N'O = OM. Таким образом мы видим, что MN' есть произвольная хорда гиперболы, проходящая через точку O, и эта хорда делится точкою O пополам; отсюда заключаем, что всякая хорда кривой, проведенная через точку O, делится ею пополам; следовательно точка O есть центр кривой.

Отложим по оси yy' от центра O части OB = = OB' = b (фиг. 75). Длина BB' = 2b называется мнимою осью гиперболы. Иногда ось 2a называется пересекающеюся, а ось BB' пересекающею. Чтобы получить фокусы, отложим от точки O на главной оси в обе стороны длину фокусного расстояния c, причем c > a, так что OF = OF' = c. Соединим A и B, получим из треугольника AOB: $AB = \sqrt{b^2 + a^2}$; но $c^2 - a^2 = b^2$, отсюда $c^2 = a^2 + b^2$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Следовательно AB = c, или OF = OF' = AB, так что два фокуса получаются отложением от точки O в обе стороны длины AB. Отношение фокусного расстояния к главной полуоси, т. е. $\frac{c}{a}$ называется эксцентрицитетом гиперболы.



(фиг. 75)

Пусть $\frac{c}{a} = \varepsilon$. Так как $c > a$, то ε всегда > 1.

Хорда, проходящая через фокус и перпендикулярная главной оси, называется параметром гиперболы: $DH = 2p$; $DF = p$ есть полупараметр. Величину полупараметра можно выразить посредством a и b из уравнения гиперболы. В данном случае $x = OF = c$; следов. $y = DF = p = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$, или $p = \frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \frac{b^2}{a}$. Рассмотрим изменение радиуса, проведенного из центра к различным точкам гиперболы. Пусть $OM = r$, тогда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; но $y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$; а потому $r = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2})x^2 - b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - b^2}$; но $\frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2$, следовательно

$$r = \sqrt{\varepsilon^2 x^2 - b^2}.$$

Видим, что, если x будет увеличиваться и следовательно точка M будет перемещаться по гиперболе вправо, тогда r увеличивается до ∞. Рассмотрим угол между осью x-ов и r, т.е. угол $MOX = \varphi$. В треугольнике MPO имеем: $y = x \operatorname{tg}\varphi$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, или $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$. Отсюда видно, что, если x будет увеличиваться до ∞, то $\frac{a^2}{x^2}$ будет стремиться к 0, а $\operatorname{tg}\varphi$ к $\frac{b}{a}$. Означим предельную величину φ через α; будем иметь

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}, \text{ при } x = \infty.$$

Угол φ будет всегда меньше α, но может приближаться к нему как угодно близко. Постро-

имѣть прямую, которая составитъ съ осью $x^{вл}$ уголъ α и пройдетъ черезъ центръ O; для чего изъ точки A возставляемъ перпендикуляръ къ главной оси и откладываемъ длину $AK = b$. Соединимъ точку O съ K; эта прямая и будетъ искомая. Дѣйствительно, въ $\triangle AOK$ имѣемъ: $\operatorname{tg} AOK = \frac{b}{a}$. Такъ какъ гипербола расположена симметрично относительно оси $x.^{вл}$, то слѣдовательно внизъ отъ оси $x^{вл}$ будетъ существовать точно такая же прямая. Чтобы ее получить стоитъ отложить $AK' = b = AK$. и точку O соединить съ точкою K'. Лѣвая вѣтвь гиперболы расположится въ углѣ SOS', образованномъ продолженіемъ прямыхъ OR и OR', въ двухъ же верхнихъ углахъ SOR и $S'OR'$ нѣтъ точекъ гиперболы. Прямыя $R'S$ и RS' называются ассимптотами гиперболы. Напишемъ ихъ уравненія; прямая RS' дѣлаетъ съ осью $x^{вл}$ уголъ α и проходитъ черезъ начало координатъ; слѣдовательно ея уравненіе будетъ $y = x\operatorname{tg}\alpha$ или $y = \frac{b}{a}x$. Прямая $R'S$ дѣлаетъ съ осью $x^{вл}$ уголъ въ $(\pi - \alpha)$ и ея уравненіе будетъ: $y = x\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.x$ или $y = -\frac{b}{a}x$.

Уравненіе двухъ ассимптотъ можно написать вмѣстѣ:

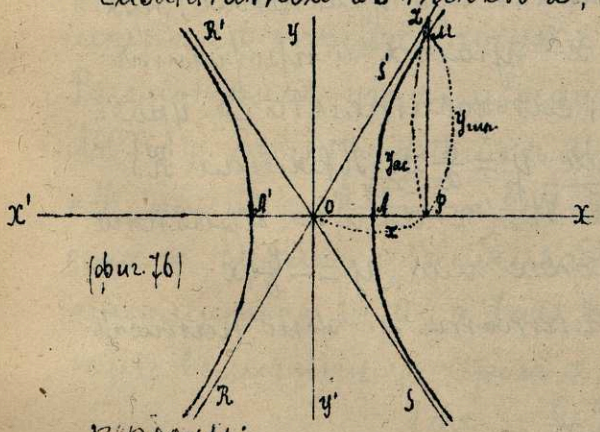
$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Слово „ассимптота" значитъ „приближающаяся". Названіе это дано этимъ прямымъ потому, что

ветви гиперболы, по мере их продолжения в бесконечность, все более и более приближаются к этим прямым, так что расстояние гиперболы от ассимптот можно сделать сколь угодно малым и обращается в нуль лишь в пределе. Итак, гипербола приближается к ассимптотам неопределенно, но никогда не достигает их. Чтобы это обнаружить, возьмем уравнение кривой, решенное относительно y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Положим, что мы рассматриваем ассимптоту $S'R$. Уравнение этой ассимптоты: $y = +\frac{b}{a}x$. Возьмем на верхней части этой кривой точку M (фиг. 76) и построим MP, продолжив ее до встречи с ассимптотой в точке L; пусть $OP = x$ и $MP = y$. Ординату ассимптоты для отличия обозначим через $y_{ac.}$, так что $LP = y_{ac.}$; тогда по уравнению ассимптоты будем иметь $y_{ac.} = +\frac{b}{a}x$. Возьмем разность ординат ассимптоты и гиперболы:



$$y_{ac.} - y_{гип.} = ML = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right).$$

Если в последнем выражении x возьмем $= \infty$,

то формула примет вид: $MZ = \frac{b}{a}(\infty - \infty)$; это выражение неопределенное. Чтобы избавиться этой неопределенности, умножим и разделим количество, стоящее в скобках на сопряженную с ним величину $(x + \sqrt{x^2 - a^2})$; тогда получим:

$$MZ = \frac{b}{a}\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right] = \frac{b}{a}\left[\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right] = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Теперь, если точка M будет перемещаться по гиперболе, удаляясь ее в правую сторону в бесконечность, то ея абсцисса x будет увеличиваться до $+\infty$, и при этом знаменатель дроби, выражающей разность координат MZ будет также увеличиваться до $+\infty$, а вся дробь будет уменьшаться до нуля. Таким образом видим, что разность ординат может быть сделана бесконечно малой, но никогда не может достигнуть нуля.

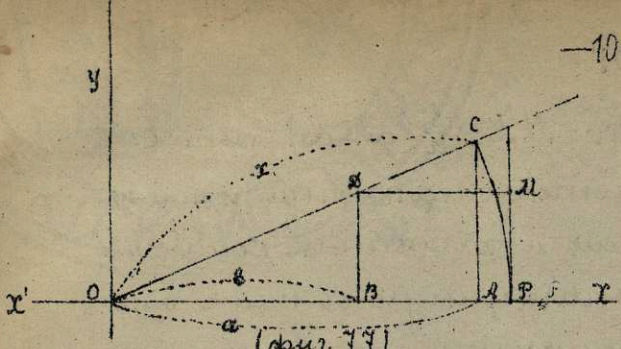
Построение гиперболы, выведенное из ея уравнения.

Уравнение гиперболы, отнесенное к центру и к осям дает возможность построить эту кривую по точкам следующим образом.

Возьмем (фиг. 77) прямоугольныя оси координат. Уравнение кривой есть:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

От начала координат O вправо отложим длину $OA = a$ и проведем через точку A перпен-



(фиг. 77)

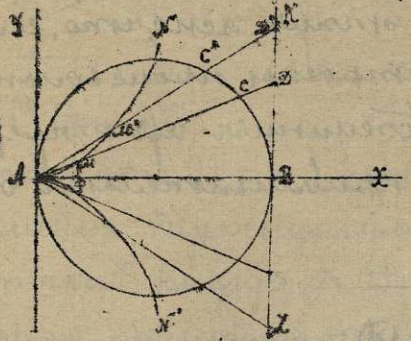
дикуляръ AC къ оси x-въ; потомъ отложимъ произвольную абсциссу x, которая должна быть больше a; пусть она будетъ OF, такъ что $OF = x$; черезъ точку F проведемъ окружность линію, перпендикулярную къ оси x-въ и затѣмъ изъ точки O радіусомъ OF отмѣтимъ дугу окружности, которая пересѣчетъ первый перпендикуляръ въ точкѣ C; соединимъ точку O съ C; тогда изъ треугольника OCA, въ которомъ гипотенуза $OC = x$ и катетъ $OA = a$, имѣемъ: $AC = \sqrt{x^2 - a^2}$. Далѣе, отъ точки O въ правую сторону отложимъ длину $OB = b$, причемъ замѣтимъ, что b можетъ быть и больше и меньше a. Положимъ, что $b < a$. Изъ точки B возставимъ перпендикуляръ къ оси x-въ, который пересѣчетъ радіусъ OC въ точкѣ D; изъ нея проведемъ параллель оси x, продолжая послѣднюю, т.е. параллель, до пересѣченія съ перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ F, въ точкѣ M. Утверждаемъ, что точка M принадлежитъ гиперболѣ. Чтобы доказать это, разсмотримъ подобные треугольники OCA и OBD, изъ которыхъ имѣемъ: $BD : OB = AC : AO$, или $MF : b = \sqrt{x^2 - a^2} : a$; откуда: $MF = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y$. Видимъ, что M дѣйствительно есть точка гиперболы. Подо-

Зная точек можно найти безчисленное множество, повторяя описанное построение при разных абсциссах x. При этом ясно, что, если точки могут быть построены произвольно близко одна от другой и соединить их непрерывной чертой, получим приблизительное очертание гиперболы.

Циссоида Діоклеса.

Выводя уравнения линий, заданных как геометрическое место, мы уже успели познакомиться с такими линиями, которыя выражаются алгебраическими уравнениями первой степени (как напр. прямая линія) и второй степени (как гипербола, эллипс и парабола). Продолжая ознакомленіе с тѣми линіями, которыя выражаются алгебраическими уравненіями, перейдем теперь къ такимъ, которыя выражаются уравненіями 3ей и 4ой степени. Обратимся сначала къ линіямъ, выражаемымъ уравненіями 3ей степени и изъ нихъ разберемъ одну кривую линію, носящую названіе циссоиды. Первый, кто изслѣдовалъ эту кривую былъ Діоклей, а потому эту кривую обыкновенно называютъ также циссоидой Діоклеса. Чтобы показать, какую линію называютъ циссоидой Діоклеса, мы начер-

тимъ окружность и черезъ B, конецъ діаметра AB (фиг. 78) проведемъ прямую KL, перпендикулярно къ AB; изъ точки A проведемъ произвольно прямую, которая пересѣчетъ окружность въ точкѣ C и прямую KL въ точкѣ D; на прямой AD отложимъ $AM = CD$.



(фиг. 78)

Точно такъ же проведемъ изъ точки A еще прямую, пересѣкающую окружность въ точкѣ C', а прямую KL въ точкѣ D'; отложивъ на ней $AM' = C'D'$, получимъ еще точку M' и т. д. Найдя такимъ образомъ рядъ точекъ, по возможности ближе одну къ другой, соединивъ ихъ непрерывною чертою, получимъ приблизительное очертаніе MAM' искомаго геометрическаго мѣста, называемаго циссоидою.

Чтобы вывести уравненіе циссоиды, отнесемъ ее къ прямоугольной системѣ координатъ и для этого примемъ направленіе діаметра AB за ось абсциссъ, а прямую, проходящую черезъ точку A, перпендикулярно къ AB, за ось ординатъ. Означимъ радіусъ круга буквою r и координаты M — какой-либо точки циссоиды — буквами x и y; опустивъ изъ точки M перпендикуляръ MP на ось абсциссъ, найдемъ изъ подобія треугольниковъ AMP и ADB:

$$\frac{y}{x} = \frac{DB}{2r} \quad \text{или} \quad DB = \frac{2ry}{x}.$$

DB мы можемъ опредѣлить, основываясь на извѣстной теоремѣ о касательной и секущей, т. е. изъ слѣдующаго уравненія: $DB^2 = CD \cdot AD$. Замѣтивъ, что $CD = AM = \sqrt{x^2+y^2}$ и $AD = \sqrt{4r^2+DB^2}$, имѣемъ:

$$DB^2 = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4r^2+DB^2}.$$

Подставляя найденную величину DB^2 въ уравненіе: $DB = \frac{2ry}{x}$, или, что одно и то же, въ уравненіе: $DB^2 = \frac{4r^2y^2}{x^2}$, имѣемъ:

$$\frac{4r^2y^2}{x^2} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4r^2+\frac{4r^2y^2}{x^2}} = \frac{2r\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad \text{или} \quad \frac{2ry^2}{x} = x^2+y^2.$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно y^2, имѣемъ:

$$y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$$

Это и есть уравненіе циссоиды. Рѣшивъ это уравненіе относительно y, получимъ:

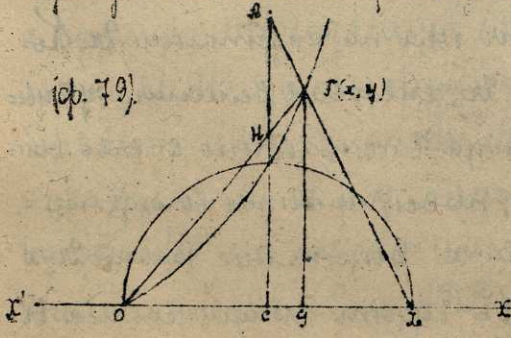
$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2r-x}}.$$

Такъ какъ ордината имѣетъ дѣйствительныя величины только при тѣхъ величинахъ абсциссы, которыя заключаются между 0 и $2r$, то, слѣдовательно вся кривая расположена между осью y-въ и линіей KL параллельной этой оси и проведенной отъ нея на разстояніи $2r$. Когда x возрастаетъ отъ 0 до $2r$, числовая величина y-а увеличивается отъ 0 до ∞; отсюда видимъ, что ветвь кривой, проходя черезъ начало A, простирается въ безконечность. При этомъ измѣненіи x разстояніе равное $2r-x$ точки кривой отъ прямой KL будетъ приближаться къ

мило; изъ чего мы заключаемъ, что прямая KL есть ассимптота кривой. Такъ какъ каждой величинѣ x соотвѣтствуютъ двѣ величины y — равныя и съ обратными знаками, то кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, расположенныхъ симметрично относительно оси абсциссъ AB.

Циссоида была найдена и опредѣлена, какъ геометрическое мѣсто, Диоклесомъ при рѣшеніи задачи объ удвоеніи куба. Эта задача, какъ и подобныя ей — какъ-то: квадратура круга, трисекція угла — очень сильно занимали умы древнихъ геометровъ, и всѣ попытки разрѣшить ихъ элементарнымъ путемъ оказались тщетными. Всѣ эти задачи, какъ доказано въ новѣйшее время, не могутъ быть рѣшены элементарнымъ путемъ, т. е. при помощи циркуля и линейки, а рѣшаются только при помощи высшей математики. Задача объ удвоеніи куба заключается въ слѣдующемъ: данъ кубъ, сторона котораго = r; требуется построить сторону куба двойнаго объема, т. е. линію, выражающуюся $\sqrt[3]{2r^3}$. Рѣшимъ теперь эту задачу. Для этого проведемъ кругъ радіуса r (фиг. 79); изъ его центра C возставимъ перпендикуляръ $AC = 2r$ къ діаметру OL; соединимъ A съ L и назовемъ K точку пересѣченія круга съ прямою, соединяющею O. Пусть T —

(фиг. 79).



будетъ точка встрѣчи циссоиды съ прямой AL. Соединяемъ F съ B и опредѣляемъ точку пересѣченія H прямыхъ AC и OF. Отрѣзокъ CH будетъ искомая сторона двойного куба, т.е. линія, длина которой есть $\sqrt[3]{2r^3}$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія $\Delta^{ов}$: OFG и OHC имѣемъ:

$$\frac{FG}{OG} = \frac{HC}{OC}, \text{ или } \frac{y}{x} = \frac{HC}{r} \quad \ldots\ldots (\alpha).$$

Далѣе изъ подобія треугольниковъ $\angle GF$ и $\angle CA$ имѣемъ:

$$\frac{FG}{GA} = \frac{AC}{CO} \text{ или } \frac{y}{2r-x} = \frac{2r}{r} = 2.$$

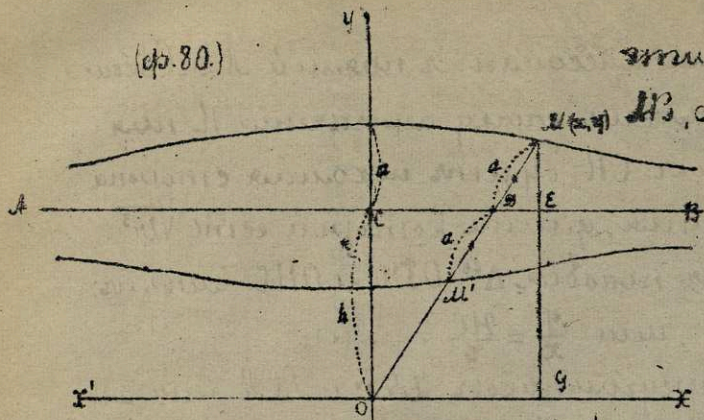
Умножая крайнія циссоиды: $y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$ на y, получимъ: $y^3 = \frac{x^3 y}{2r-x}$ или $y^3 = x^3 \cdot \frac{y}{2r-x}$; но мы только что видѣли, что $\frac{y}{2r-x} = 2$, слѣдовательно $y^3 = 2x^3$ или $\frac{y^3}{x^3} = 2$; но изъ формулы (α) видимъ, что

$$\frac{y}{x} = \frac{HC}{r} \text{ или } \frac{y^3}{x^3} = \frac{HC^3}{r^3}, \text{ а потому:}$$

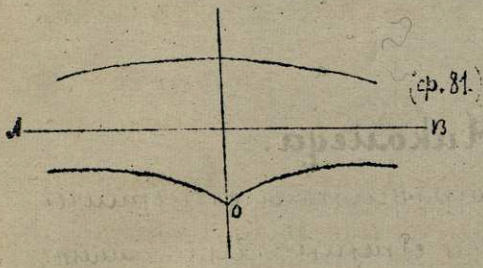
$\frac{HC^3}{r^3} = 2$, откуда $HC = \sqrt[3]{2r^3}$, что и требовалось доказать.

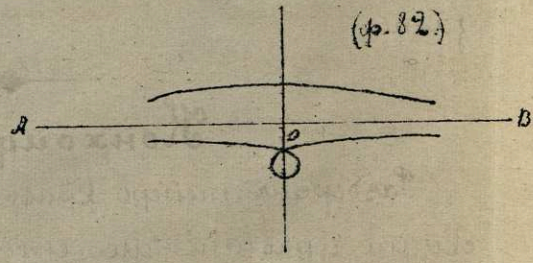
Конхоида Никомеда.

Разберемъ теперь кривыя, выражающіяся алгебраическими уравненіями четвертой степени. Для примѣра возьмемъ кривую, носящую названіе „Конхоиды Никомеда". Для того, чтобы показать, какой видъ имѣетъ конхоида, построимъ ее. Возьмемъ прямую AB и точку O, отстоящую отъ нея на разстояніи h. (фиг. 80). Черезъ точку O станемъ проводить въ разныя направленія прямыя: OD и отъ каждой D, въ сторону



эти прямыя пересѣкаютъ MB, отложивъ MD = M'D = a. Мѣсто точекъ, полученныхъ такимъ образомъ, т.е. M и M', опредѣлитъ искомую кривую. Прямая AB называется направляющей конхоиды, а точка O полюсомъ конхоиды. Видъ конхоиды зависитъ отъ двухъ параметровъ: отъ a и отъ OC = h. Если a < h, то конхоида будетъ имѣть видъ, представленный на фиг. 80. Если a = h, то она получитъ видъ, изображенный на фиг. 81. Наконецъ, при a > h она будетъ имѣть видъ, представленный на фиг. 82.

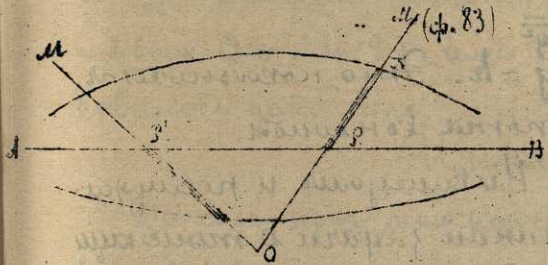




Построеніе конхоиды непрерывнымъ движеніемъ.

Конхоиду можно также построить непрерывнымъ движеніемъ. Взявъ для этого линейку AB и укрѣпивъ ее неподвижно (фиг. 83) въ плоскости чертежа, примемъ ее за направляющую конхоиды. Въ точкѣ O, полюсѣ конхоиды, укрѣпимъ конецъ стержня OM такъ, что-

бы он свободно мог вращаться около точки O; на



(ф. 83)

конец этого стержня наш-
ли трубку, величина ко-
торой должна равняться дан-
ной длине a. Трубку надо-
ли на стержень так, что-
бы конец ея P упирался в линейку AB, на другом
же конце ея N укрепили карандаш. Теперь будем
вращать стержень OM около точки O; стараясь, что-
бы конец P трубки постоянно касался линейки,
тогда другой конец ея N, в котором укреплен ка-
рандаш, будет описывать конхоиду. Расположим
трубку NP в положении N'P' и опять вращая стер-
жень OM' точно так же, как и в первом случае,
мы концом N', в котором укреплен карандаш,
опишем нижнюю ветвь конхоиды.

Составим теперь уравнение конхоиды, приняв
за полюс O за начало координат Декарта, по-
ложим ось абсцисс параллельно основанию
конхоиды (ф. 80). Мы имеем из треугольника
OMQ, подобного треугольнику DME, следующую
пропорцию:

$$\frac{y-h}{a} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{или} \quad (x^2+y^2)(y-h)^2 = a^2y^2.$$

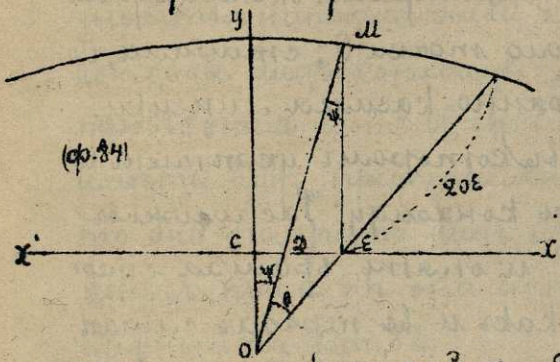
Это и есть уравнение конхоиды, которое, как мы
видим, будет четвертой степени. Определим об-

отсюда

$$y - h = \pm \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

найдемъ, что, при $x = \infty$, $y = h$. Это показываетъ намъ, что AB есть ассимптота конхоиды.

Конхоида была найдена Никомедомъ и послужила ему для рѣшенія извѣстной задачи о трисекціи угла, т.е. о раздѣленіи угла на три равныя части. Это дѣленіе дѣлается такъ (рис. 84). Опускаемъ изъ



точки E на одной изъ сторонъ данна[го] угла COE перпендикуляръ EC на другую сторону; примемъ точку O за полюсъ, а линію CE за направляющую конхоиды, параметръ которой $a = 2OE$. Изъ точки E возставимъ перпендикуляръ къ направляющей CE и продолжимъ его до пересѣченія съ конхоидой въ точкѣ M. Послѣ этого соединимъ точку O съ точкою M, и полученный такимъ образомъ уголъ $COM = \psi$ будетъ искомый, т.е. $= \frac{1}{3}$ данна[го].

Для доказательства напишемъ изъ треугольника DME:

$ME = MD \cos\psi = 2OE \cos\psi$, или это же равенство можемъ написать въ такомъ видѣ:

$$\frac{ME}{OE} = 2\cos\psi.$$

Далѣе изъ треугольника OME имѣемъ пропорцію $\frac{ME}{OE} = \frac{\sin\Theta}{\sin\psi}$ и $\frac{ME}{OE} = 2\cos\psi$, а потому $2\cos\psi = \frac{\sin\Theta}{\sin\psi}$. Откуда $\sin\Theta = 2\sin\psi\cdot\cos\psi = \sin 2\psi$ или $\Theta = 2\psi$; т. е. $\psi = \frac{1}{3}\cos$. Это и требовалось доказать.

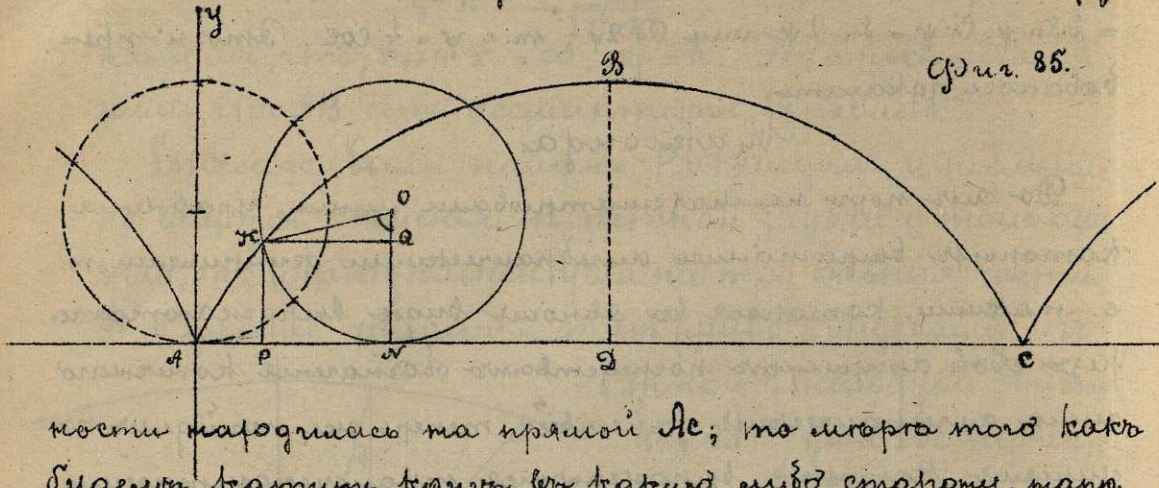
Циклоида.

До сихъ поръ мы разсматривали линіи, уравненія которыхъ выражались алгебраическими функціями, т. е. такими, которыя во явномъ видѣ выражаются черезъ свой аргументъ посредствомъ обозначенія конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій, теперь же перейдемъ къ линіямъ, которыя выражаются трансцендентными функціями, т. е. такими, которыя не могутъ быть выражены черезъ аргументъ посредствомъ обозначенія конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій, а требуютъ для точнаго вычисленія своего безчисленнаго множества такихъ дѣйствій. Такимъ образомъ къ трансцендентнымъ функціямъ относятся: показательныя, логарифмическія, тригонометрическія и круговыя.

Одинъ изъ примѣровъ линій, уравненія которыхъ представляютъ трансцендентныя функціи, служитъ циклоида.

Представимъ себѣ, что кругъ катится по прямой AC, не выходя изъ плоскости; тогда точка K взятая на окружности круга, опишетъ нѣкоторую линію. Чтобы

составить себе понятіе объ этой линіи, положимъ, что точка A есть начало движенія т. е. что точка K окруж-



Фиг. 85.

ности народилась на прямой AC; по мѣрѣ того какъ будемъ катить кругъ въ какую либо сторону, напр. вправо, точка K будетъ сначала подыматься къ верху и, когда кругъ сдѣлаетъ полуоборота, точка K будетъ находиться въ B на разстояніи діаметра отъ AC, при дальнѣйшемъ движеніи круга, точка K станетъ опускаться внизъ, и когда кругъ сдѣлаетъ полный оборотъ, то точка K снова будетъ находиться на прямой AC въ точкѣ C. Если кругъ будемъ продолжать катить въ ту же направленіи, то точка K снова начнетъ подниматься и. т. д. и такимъ образомъ получимъ цѣлой рядъ кривыхъ, какъ кривая ABC, начерченная на фиг. 85. Понятно что длина AC равна окружности даннаго круга и если его радіусъ обозначимъ буквою R, то $AC = 2\pi R$.

Примемъ прямую AC за ось абсциссъ, а прямую, про-

ходящую через точку A, перпендикулярно к оси абсцисс за ось ординат. Возьмем на кривой какую нибудь точку K и положим, что образующий круг занимал в это время положение, указанное на чертеже т.е. что длина AN равна выпрямленной дуге KN. Означим координаты точки K через x и y и из точки K опустим перпендикуляр KP на ось абсцисс; точку O соединим прямыми с точкою K и со точкою N касания круга с осью абсцисс; из точки K опустим перпендикуляр KQ на ON. Имеем:

$$x = AP = AN - PN = AN - KQ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y = KP = NQ = ON - OQ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Длина прямой AN равняется выпрямленной дуге KN; поэтому, назвав линейную*) меру угла KON через θ, найдем, что дуга NK = Rθ; кроме того из треугольника KOQ выводим, что KQ = OK $\sin\theta$ = R $\sin\theta$ и OQ = OK $\cos\theta$ = R $\cos\theta$; следовательно из (1) и (2) равенств найдем:

$$x = R\theta - R\sin\theta = R(\theta - \sin\theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$y = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Из уравнения (4) определим теперь $\sin\theta$ и θ и подставим потом в уравнения (3). Итак уравнения $y = R - R\cos\theta$ имеем $\cos\theta = \frac{R-y}{R}$; а $\sin\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{R-y}{R}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{2Ry-y^2}{R^2}}$ при этом знак (+) соответствует тому случаю, когда точка от начального своего положения

*) Как известно за единицу меры угла принимается центральный угол дуга которого равняется радиусу, он приблизительно $57^\circ 17' 44''$

переходить въ высшее т.е. пока уголъ $\theta < \pi$, а знакъ (-) соотвѣтствуетъ тому случаю, когда точка отъ высшаго положенія переходитъ къ низшему т.е. когда уголъ $\theta > \pi$.

Изъ того же уравненія т.е. изъ уравненія $\cos\theta = \frac{R-y}{R}$ имѣемъ, что $\theta = \arccos\frac{R-y}{R}$, здѣсь $\arccos\frac{R-y}{R}$ представляетъ изъ себя функцію многозначную. Общій видъ $\theta = \arccos\frac{R-y}{R} \pm 2k\pi$ гдѣ k есть цѣлое положительное или отрицательное число.

Подставляя теперь величины $\sin\theta$ и θ въ уравненіе $x = R(\theta - \sin\theta)$ имѣемъ:

$$x = R\left[\arccos\frac{R-y}{R} \pm 2k\pi - \left(\pm\sqrt{\frac{2Ry-y^2}{R^2}}\right)\right] \text{ или}$$

$$x = R\left[\arccos\frac{R-y}{R} \mp \frac{1}{R}\sqrt{2Ry-y^2}\right) \pm 2k\pi.$$

Это и есть уравненіе циклоиды; изъ него видимъ что наибольшая величина y есть $2R$ что при $y > 2R$ x дѣлается мнимымъ. Этому значенію y соотвѣтствуетъ значеній $x = R\arccos(-1) \pm 2k\pi R = \pi R \pm 2k\pi R$. Кромѣ того мы видимъ, что всякому опредѣленному значенію y соотвѣтствуетъ безчисленное множество значеній x а слѣдов. уравненіе циклоиды представляетъ безчисленное множество послѣдовательно повторяющихся вѣтвей.

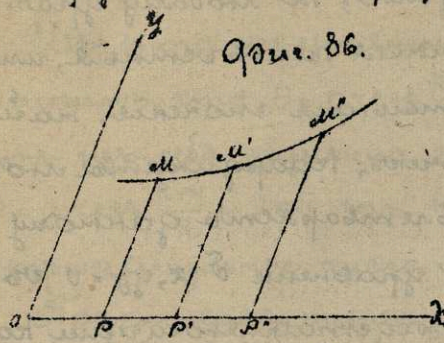
Геометрическое значеніе уравненія съ двумя неизвѣстными.

До сихъ поръ мы разбирали первую задачу

Аналитической геометрии, - по данному геометрическому месту составить уравнение, связывающее координаты любой из его точек; теперь обратимся ко второй обратной задаче, по любому уравнению связывающему переменные неизвестные, имеющие непрерывные и действительные значения, найти геометрическое место точек, координаты любой из точек которого удовлетворяют данному уравнению. Положимъ дано уравнение $F(x,y)=0$ съ двумя переменными x и y, представляющими координаты нѣкоторой точки плоскости. Каждая пара вещественныхъ значений x и y, удовлетворяющихъ этому уравнению, представляетъ точку на плоскости, и если предположимъ, что x_0 и y_0 суть пара рѣшений даннаго уравнения, то получимъ точку (x_0, y_0); если будемъ x измѣнять непрерывно отъ x_0, одна изъ величинъ y будетъ такую, говоря вообще, измѣняться непрерывно отъ y_0, когда x далъ значенія между нулемъ и нѣкоторымъ предѣломъ. Такимъ образомъ получимъ непрерывный рядъ точекъ, которыя всѣ будутъ лежать на опредѣленной линіи.

Для изображенія чертежемъ самой линіи, дадимъ одной изъ перемѣнныхъ напр. x произвольныя значения: Op, Op', Op'', ... и вставивъ въ уравнение $F(x,y)=0$ числовыя величины x, рѣшимъ, получимъ соотвѣтствующія

значения для y, отложивъ соответственно эти ординаты на прямыхъ, проведенныхъ изъ точекъ P, P', P''... параллельно оси ординатъ получимъ ряда точекъ M, M', M''... координаты которыхъ удовлетворяютъ данному уравнению линіи, найдя такимъ способомъ рядъ точекъ по возможности близкихъ между собою, соединяемъ ихъ непрерывною чертою и получаемъ приблизительное очертаніе линіи, представляющей геометрическое значеніе даннаго уравненія. Слѣдовательно, говоря вообще уравненіе съ 2мя перемѣнными x и y, представляетъ на плоскости нѣкоторую линію. Но въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ: данное уравненіе съ x и y не представляетъ никакого геометрическаго смысла, когда ему не удовлетворяютъ никакія вещественныя величины x и y, въ другихъ же случаяхъ данное уравненіе съ x и y представляетъ одну или нѣсколько отдѣльныхъ точекъ, когда ему удовлетворяютъ опредѣленное число паръ вещественныхъ значеній x и y.

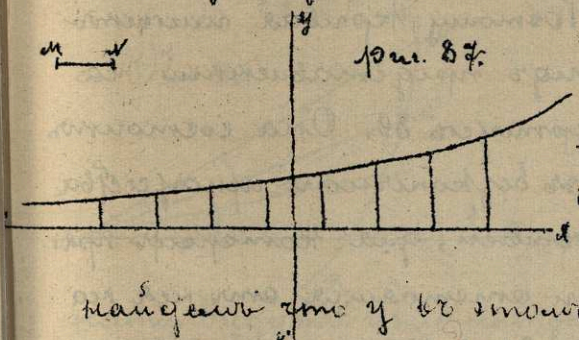


Фиг. 86.

Изображеніе линіи на плоскости по данному ея уравненію наз. черченіемъ или построеніемъ линіи. Изъ слѣдующихъ примѣровъ можно ясно понять самый способъ изображенія линіи по ея уравненію.

Кривая логарифмическая.

Она суммой уравнением $y = c^x$, где c есть основание Неперовых логарифмов. Чтобы определить приблизительную форму кривой будем давать x-ам различные значения и вычислять соответствующие значения для y-ка. Возьмем прямоугольные оси координат и определенной величины линию MN приняв ее за единицу измерения. Полагая



фиг. 87.

последовательно

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots +\infty; \quad -1, -2, -3, \ldots -\infty$$

найдем что y в этом случае равен:

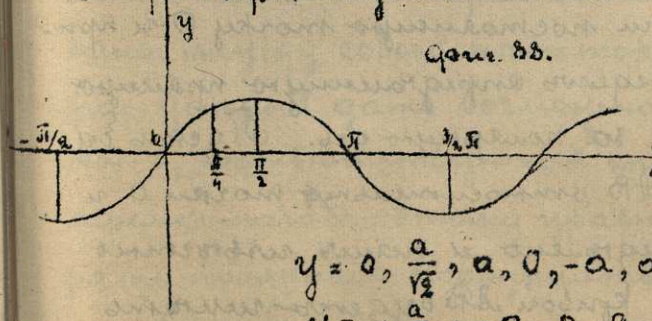
$$y = 1, e, e^2, e^3 \ldots\ldots +\infty; \quad \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3} \ldots\ldots 0.$$

Поэтому логарифмическая кривая будет иметь вид представленный на черт. 87. Здесь ось абсцисс является асимптотой кривой.

Синусоида.

Эта кривая выражается уравнением $y = a \sin x$

Беря прямоугольные оси координат и давая x-ам



фиг. 88.

различные значения

$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ и т.д. и также $x = -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\pi$, и т.д.

для y будем иметь

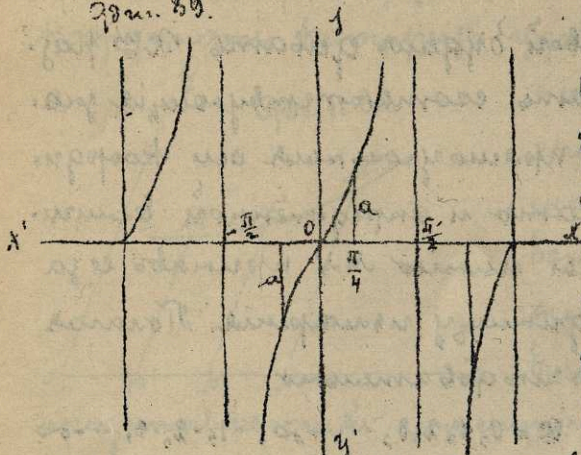
$$y = 0, \frac{a}{\sqrt{2}}, a, 0, -a, 0 \ldots\ldots \text{а также}$$

$$y = -\frac{a}{\sqrt{2}}, -a, 0, a \text{ и т.д.}$$

Кривая тангенсов.

Эта кривая выражается уравнением $y = a \operatorname{tg} x$.

Полагая в данном уравнении



$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi \ldots\ldots ; -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\pi \ldots$

находим выражения для y:

$y = 0, a, +\infty \ldots\ldots ; -a, -\infty \ldots$

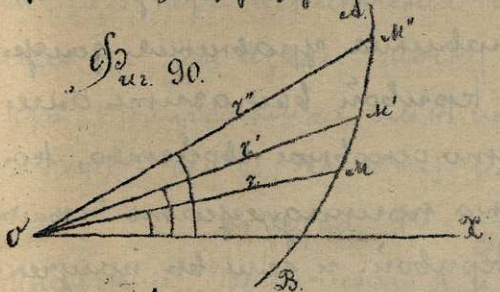
Поэтому кривая имеет вид представленной на чертеже 89. Она состоит из бесконечного множества ветвей, для которых прямые параллельные оси y-ов и отстоящие от нее на расстояния $\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \ldots -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi \ldots$ служат асимптотами.

Понятие об уравнении линии в полярных координатах.

Иногда точки данной кривой линии определяются по полярным координатам. Пусть AB кт. которая кривая линия на плоскости (фиг. 90). Возьмем на этой плоскости постоянную точку O и примем ее за полюс. Проведем определенную прямую линию Ox и примем ее за полярную ось. Пусть будет положение кривой AB относительно точки O и прямой Ox вполне определено и нам известно. Тогда каждая точка кривой AB будет иметь

свои определенныя координаты. Такимъ образомъ точка M, взятая на этой кривой, будетъ опредѣлена полярнымъ угломъ Mox и радіусомъ векторомъ OM. Тоже самое можемъ сказать и относительно остальныхъ точекъ $M_1, M_2, \ldots$ этой кривой. Вообразимъ далѣе перемѣщающуюся точку M, которая движется на плоскости и описываетъ кривую AB. - Перемѣнныя полярныя координаты этой точки обозначимъ черезъ $(r$ и $\theta)$. При движеніи точки, ея координаты будутъ измѣняться, но такимъ образомъ, что каждому опредѣленному значенію одной изъ нихъ, напр. θ, будетъ соотвѣтствовать совершенно опредѣленное значеніе другой, въ данномъ случаѣ r. Такимъ образомъ, когда $\theta = \angle M_1 ox$, то $r = OM_1$ и т. д.

Фиг. 90.

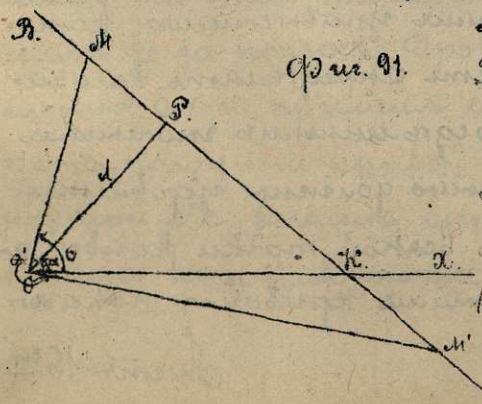


Словомъ, всякому опредѣленному значенію θ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе r. Отсюда заключаемъ что перемѣнныя θ и r должны быть связаны между собою нѣкоторымъ уравненіемъ, которое должно дать возможность опредѣлять величины r, соотвѣтствующія опредѣленнымъ значеніямъ перемѣннаго θ. Этому уравненію должны удовлетворять полярныя координаты всякой точки кривой, оно называется полярнымъ уравненіемъ кривой и показы-

вать связь, существующую между полярными координатами произвольной точки кривой. Координаты r и θ произвольной точки называются текущими. Относительно составления полярного уравнения данной кривой нельзя дать никакого общего правила и мы ограничимся тем, что повторим прежние замечания, а именно для составления уравнения данной для произвольной точки кривой выразить аналитическим равенством, то основное свойство, которое по определению должно принадлежать всем точкам рассматриваемой кривой, и если в полученном уравнении кроме переменных r и θ будут входить и другие переменные величины, то надо их исключить с помощью какого либо свойства рассматриваемой кривой, выводимого из ея построения.

Полярное уравнение прямой.

Отнесем данную прямую к полярной системе координат, где O есть полюс, а прямая Ox полярная ось (фиг. 91.)



фиг. 91.

Из точки O опустим перпендикуляр OP на данную прямую и означим длину перпендикуляра OP буквою d и угол POx буквою α. Возьмем какую

возьмем точку M на этой прямой и означим ея полярныя координаты буквами r и θ. Из прямоугольнаго треугольника OMP имеемъ:

$$OP = OM \cdot Cs \angle MOP \quad \text{или} \quad d = r \cdot Cs(\theta - \alpha) \quad \text{откуда}$$

$$r = \frac{d}{Cs(\theta - \alpha)}$$

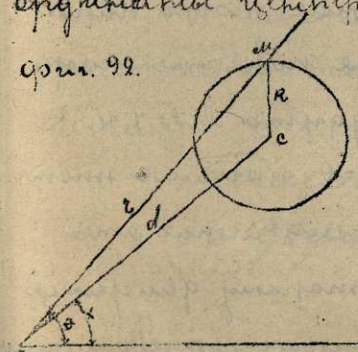
Это и есть уравнение полярной прямой AB, принадлежащее всем тем точкам, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Так напр. если бы мы взяли точку M' и ея координаты r' и θ', то из треугольника OM'P имели бы $d = OM' \cdot Cos \angle M'OP = OM' \cdot Cs(\angle MOK + \angle KOP) = OM' \cdot Cs(360° - \theta + \alpha)$ или $d = OM' \cdot Cos[360° - (\theta' - \alpha)] = r' Cs(\theta' - \alpha)$

откуда $r' = \frac{d}{Cs(\theta' - \alpha)}$ а это и есть такое же самое уравнение. Величины d и α входят здесь как параметры полярнаго уравнения прямой.

Полярное уравнение окружности.

Начертим окружность и отнесем ее (фиг. 92) къ полярной системе, причем точку O примем за полюс а направление Ob - за полярную ось. Означим радиус окружности буквою R, также означим полярныя координаты центра окружности буквами d и α, а координаты какой-нибудь точки M, взятой на окружности буквами r и θ; тогда $OC = d$; $\angle COb = \alpha$, $OM = r$ и $\angle MOb = \theta$. Из треугольника OMC имеемъ:

фиг. 92.



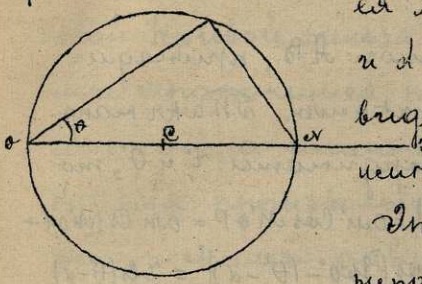
$$CM^2 = OC^2 + OM^2 - 2 OC \cdot OM \cdot Cs \angle OC$$

чем. засекаешь МС, ОС, ОСН и с ног гра величинами найдем уравнение этой окружности:

$$R^2 = d^2 + r^2 - 2dr\cos(\theta - \alpha) \ldots$$

Если окружность проходит через полюс и центр ея лежит на полярной оси, то $\alpha = 0$, и $d = R$ и уравнение окружности примет вида $R^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$ или преобразуя неравенство: $r = 2R\cos\theta$.

Фиг. 93.



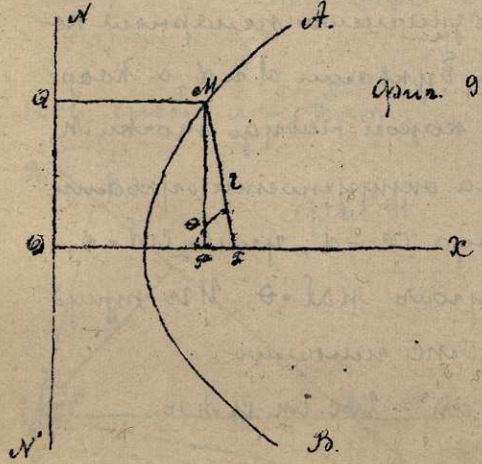
Это же уравнение можно получить непосредственно и из чертежа (фиг. 93.)

Взяв прямоугольный треугольник OMN имеем:

$$OCH = OM.\cos\theta \quad \text{или} \quad r = 2R.\cos\theta.$$

Полярное уравнение параболы.

Начертим параболу AB. и ея директрису MN' и будем считать ось параболы DF за полярную ось, а фокус параболы F - за полюс, при чем положительной полярной оси будем считать отрезок FD, т.е. обратное обыкновенному). Если M есть произвольная точка параболы, то ея полярная координаты будут $MF = r$ и угол $MFD = \theta$ причем этот угол отсчитывается от оси FD в сторону движения часовой стрелки (т.е обратно



Фиг. 94.

принятому способу отсчитывания). Называя по прежнему $\angle F$ через θ, мы имеем по определению параболы, что $MF = MB$. Опустив из M перпендикуляр на FQ имеем:

$$r = QM = QP - QF - PF = p - r\cos\theta \text{ или } r + r\cos\theta = p. \text{ от-}$$

куда $r = \frac{p}{1+\cos\theta}$ что и представляет полярное уравнение параболы.

Абсолютная величина $\cos\theta$ больше или равна (-1) и меньше или равна $(+1)$, а потому $1+\cos\theta$ будет величиной положительной при всяких значениях θ, следовательно и r есть величина положительная, с увеличением угла θ увеличивается и величина r, так напр. когда $\theta = 0°$, то $\cos\theta = 1$. и $r = \frac{p}{1+1} = \frac{p}{2}$, когда же $\theta = 90°$, то $\cos 90° = 0$. и $r = \frac{p}{1} = p$, если теперь или θ будем увеличивать, то и зависимости отсюда и r будет увеличиваться и когда $\cos\theta$ будет равен -1, то $r = \frac{p}{1-1} = \frac{p}{0} = \infty$. Итак мы видим, что величина r изменяется от $\frac{p}{2}$ до ∞. Точка наименьшего расстояния от фокуса, что соответствует величине $r = \frac{p}{2}$ называется точкой вершины (в противоположность афелию, т.е. точки наибольшего расстояния).

Геометрическое значение уравнения со двумя переменными в полярных координатах.

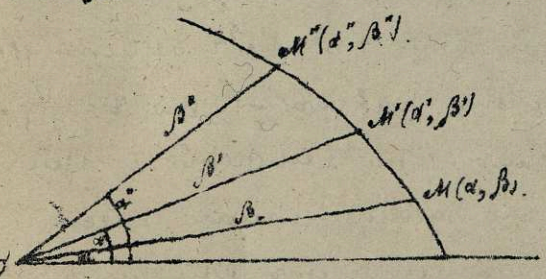
Решим теперь обратную задачу т.е. по данному

уравнению во полярных координатах определить какую кривую она из себя представляет. Возьмем какое угодно уравнение между двумя переменными r и θ, которые пусть будут полярными координатами некоторой точки на плоскости на-пример:

$$r = a\cos\theta;\quad r = a(1-\cos\theta);\quad r = a + a\cos 2\theta \text{ и т. д.}$$

Рассматриваемое нами уравнение будет неопределенное и поэтому можно найти бесчисленное множество значений для r и θ, удовлетворяющих этому условию. Иначе говоря, можно найти на плоскости бесчисленное множество точек, полярные координаты которых будут удовлетворять данному уравнению. Для этого одной из переменных, напр. θ, приписываем последовательно определенные значения: $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ (Фиг. 95) и из рассматриваемого уравнения определяем соответствующие значения r. Пусть они будут $\beta, \beta', \beta'' \ldots$. Тогда каждая пара соответственных значений для θ и r, как α и β, α' и β', ... дает точку на плоскости. Пусть O есть полюс, Ox - полярная ось. При $\theta = \alpha$ имеем $r = \beta$, что дает точку $M(\alpha, \beta)$.

Фиг. 95.

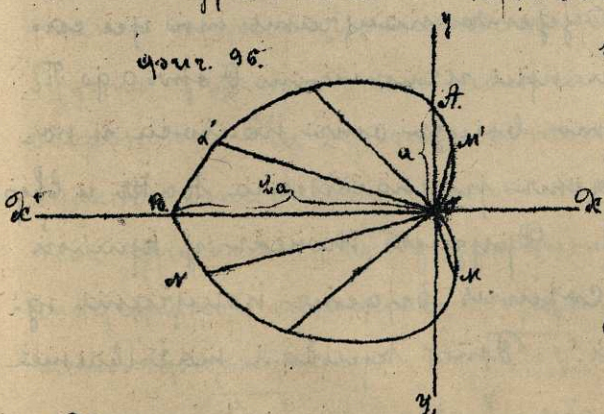


При $\theta = \alpha'$ имеем $r = \beta'$ что дает точку $M'(\alpha', \beta')$.
" $\theta = \alpha''$ " $r = \beta''$ " " " $M''(\alpha'', \beta'')$ и т. д.

Если значения принимаемые θ, т. е. числа $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ будут весьма близки одно ко другому, то очевидно, что и соответственные значения r, т. е. числа $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ будут также весьма близки одно ко другому, и потому мы получим на плоскости точки M, M', M'' и т. д. весьма близкие одна ко другой.

При том мы можем представить эти точки сколь угодно близкими между собою, для чего они должны будут еще более промежутки между числами $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ Соединяя полученные точки непрерывною чертою, мы получим кривую линию. Эта кривая будет проходить через все точки плоскости, которых полярные координаты удовлетворяют данному уравнению, называемому полярным уравнением кривой и обратно координаты всякой точки, взятой на этой кривой будут удовлетворять данному уравнению и кривая вся имеет сперва ее геометрическое представление данного уравнения.

фиг. 96.



Построим например кривую представляемую

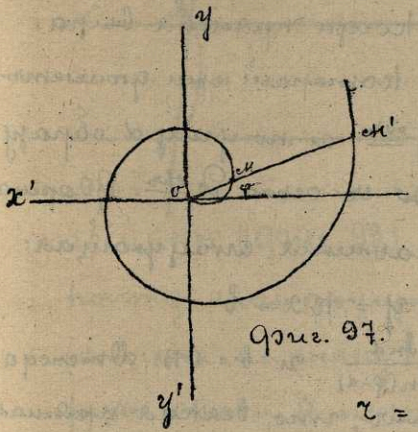
уравнением вида

$$r = a(1 - \cos\theta).$$

Пусть будет О полюс (фиг. 96.) и Ох полярная ось. При $\theta = 0$, $r = 0$, что значит, что кривая начинается в точке О, т.е. в полюсе. Если θ увеличивается, то $\cos\theta$ уменьшается, а r в этом случае увеличивается. Дойдя до $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим $r = a$, что даст точку А. Если θ увеличивается, то ее θ будет во 2ой четверти, т.е. отрицательным, величиной его будет служить r постоянно увеличивающимся. Когда $\theta = \pi$ то $r = 2a$, что даст точку В. Построенные эти точки. Теперь вместо того, чтобы увеличивать θ далее будем приписывать ему отрицательные значения от 0 до $-\pi$. При этом заметим, что так как θ входит в уравнение со $\cos$-ом, а $\cos$ отрицательной дуги равен $\cos$ положительной, то следовательно, при изменении θ от 0 до $-\pi$ радиус вектора будет получать те же самые величины, как и при изменении θ от 0 до π. Отсюда заключаем, что внизу от полюса и полярной оси Ох кривая будет расположена как и вверху от полярной оси Ох. Другие точки у кривой не будет так как синусы будут получать одни и те же величины. Эта кривая называется кардиоидой.

Спираль Архимеда.

Спираль Архимеда представляетъ изъ себя кривую уравненіе которой выражается гораздо проще въ полярныхъ координатахъ, нежели въ декартовыхъ. Спираль Архимеда представляетъ изъ себя геометрическое мѣсто точекъ, радіусы векторы которыхъ прямо пропорціональны полярному углу. Пусть O (фиг. 97) будетъ полюсъ полярныхъ координатъ, который въ данномъ случаѣ является полюсомъ спирали, а Ox полярною осью. Полярное уравненіе спирали будетъ:



фиг. 97.

$$r = a\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Полагая $\varphi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi \ldots\ldots$

Найдемъ что $r = 0,\ a\frac{\pi}{2},\ a\pi,\ a\frac{3}{2}\pi,\ a.2\pi,\ a\frac{5}{2}\pi \ldots\ldots\ldots$

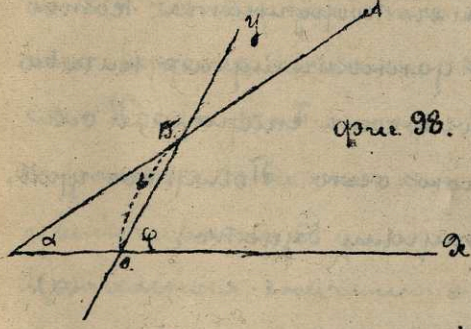
Такимъ образомъ съ возрастаніемъ дуги будетъ возрастать пропорціонально ей радіусъ векторъ, и спираль будетъ дѣлать около полюса безчисленное множество оборотовъ. На одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ она будетъ отсѣкать части $MM' = 2\pi a$. Преобразуя полярное уравненіе (α) въ уравненіе получающееся при прямоугольной системѣ координатъ, мы по извѣстнымъ формуламъ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ имѣемъ:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a.\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ \text{ибо}\ \theta = \operatorname{arctg}.\frac{y}{x}.$$

Теория прямой линии.

Изложимъ теперь подробные способы составленія уравненій прямой и ихъ изслѣдованія, такъ какъ теоремы относящіяся къ прямой линіи постоянно будутъ встрѣчаться въ дальнѣйшемъ ходѣ изложенія.

Мы уже нѣсколько знакомились съ одной формой уравненія прямой, а именно, когда прямая выражается по отрѣзку ОВ, (фиг. 98.), который она дѣлаетъ на оси Oy и по углу α образуемому ею съ осью Ox. Форма этого уравненія слѣдующая:



фиг. 98.

$$y = kx + b$$

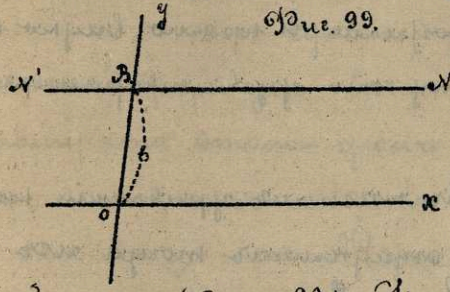
гдѣ $k = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$ и $b = OB$. Отсюда мы видимъ, что всякая прямая линія выражается уравненіемъ 1ой степени. Докажемъ теперь, что всякое уравненіе 1ой степени со двумя перемѣнными x и y представляетъ прямую линію.

Возьмемъ уравненіе первой степени съ двумя перемѣнными, общій видъ такого уравненія будетъ:

$$Ax + By + C = 0$$

Здѣсь коэффиціенты A, B и C суть данныя числа положительныя или отрицательныя. Они въ частномъ случаѣ могутъ быть и нулями. Но коэффиціенты A и B въ одно и то-же время не могутъ равняться нулю, потому что въ этомъ случаѣ необходимо чтобы $C = 0$, и

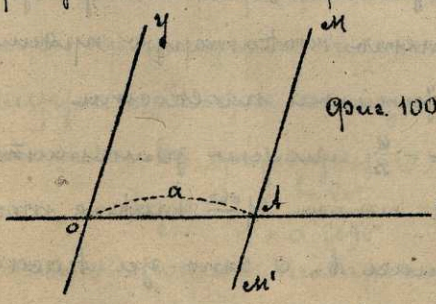
тогда уравнение обратится в тождество. Но может случиться, что один из коэффициентов будет нуль, если например коэффициент A равен нулю, то уравнение обратится в $By + C = 0$ или $y = -\frac{C}{B} = b$. Это уравнение выражает геометрическое место точек, ординаты



Фиг. 99.

которых имеют одну и ту же постоянную величину $= b$, это геометрическое место точек представляет из себя прямую NN' параллельную оси абсцисс (фиг. 99). Мы ее получим, отложив по оси Oy, по ту или другую сторону от начала координат (смотря по знаку b) линию OB, равную b, и проведя через точку B линию NN' параллельную оси Ox. В частном случае уравнений $y = 0$, представляет собою ось Ox.

Если теперь коэффициент $B = 0$, то уравнение примет вид $Ax + C = 0$ или $x = -\frac{C}{A} = a$. Это уравнение выражает геометрическое место точек, абсциссы которых имеют одну и ту же



Фиг. 100.

постоянную величину $= a$, а потому в этом случае мы имеем прямую параллельную оси ординат. Мы ее получим, отложив по оси Ox в ту или другую сторону (фиг. 100) от начала координат, (смотря по знаку a). линию $OA = a$,

и проведя через точку A линию MM' параллельную оси Oy. В частном случае уравнение $A = 0$ выражает ось Oy. Если бы в данном уравнении исчезло $C = 0$, то уравнение имело бы вид $Ax + By = 0$. В этом случае отрезок $b = -\frac{C}{B} = 0$ и следовательно прямая проходит через начало координат. Это положение и прямо видно по уравнению $Ax + By = 0$, потому что удовлетворяется, когда $x = 0$, то и $y = 0$.

Положим теперь, что в нашем уравнении ни A, ни B и ни C не равно нулю, определим тогда из него y, имеем:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Сравним это уравнение с выведенным нами уравнением прямой

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}x + b$$

Чтобы эти уравнения были тождественны, мы должны иметь во первых $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = -\frac{A}{B}$ и во вторых $b = -\frac{C}{B}$. Если мы найдем прямую для которой $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = -\frac{A}{B}$ и точка пересечения которой со осью y лежит на разстоянии $b = -\frac{C}{B}$ от начала координат, то мы увидим, что наше уравнение изображает некоторую прямую линию, и определяет ее положение на плоскости.

Относительно величины $b = -\frac{C}{B}$ можно заметить, что всегда может существовать на оси $y^{ов}$ такая точка, ордината которой бы равнялась b, а что уже касается угла наклонения прямой к оси Ox, при котором $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = -\frac{A}{B}$, то его можно определить из уравнения

$\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = -\frac{A}{B}$. или обозначая для краткости $a = -\frac{A}{B}$.

Имеемъ $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = a$ или же $\sin\alpha = a\sin(\varphi-\alpha)$, раскрывая скобки, получаемъ $\sin\alpha = a\sin\varphi.\cos\alpha - a\cos\varphi.\sin\alpha$ раздѣлимъ обѣ части равенства на $\cos\alpha$ тогда имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = a\sin\varphi - a\cos\varphi\operatorname{tg}\alpha \text{ или}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\varphi}{1+a\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

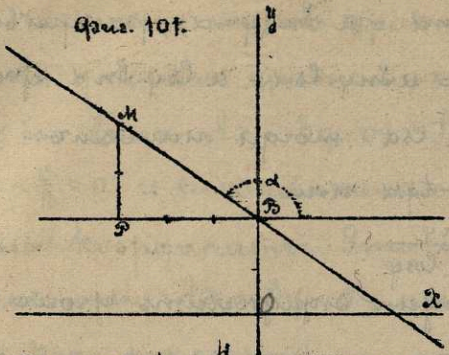
По этой формулѣ всегда можемъ опредѣлить уголъ α, потому что этотъ уголъ здѣсь опредѣляется по тангенсу, а тангенсъ можетъ получать всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Числу тангенсу соотвѣтствуютъ два угла, отличающіеся другъ отъ друга на 180° однако эта двойственность рѣшенія не даетъ двухъ прямыхъ, а указываетъ только на то, что направленіе данной прямой можемъ считать въ двухъ противоположныхъ сторонахъ отъ точки B. Итакъ наше уравненіе изображаетъ нѣкоторую прямую, а такъ какъ оно въ общемъ видѣ, то мы можемъ сказать, что всякое уравненіе первой степени изображаетъ прямую линію. Если бы мы пользовались прямоугольной системой координатъ, то формула служащая для опредѣленія угла α, упрощается изъ подставивъ въ формулу (1) $\varphi = 90^\circ$ имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a.\sin 90^\circ}{1+a\cos 90^\circ} = \frac{a.1.}{1+a.0} = a = -\frac{A}{B}.$$

Прямую можемъ построить по отрѣзку (b), который она дѣлаетъ на оси oy и по углу α образуемому ею съ осью ox. Пусть дано уравненіе: $3x + 2y - 4 = 0$,

отсюда $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

фиг. 101.

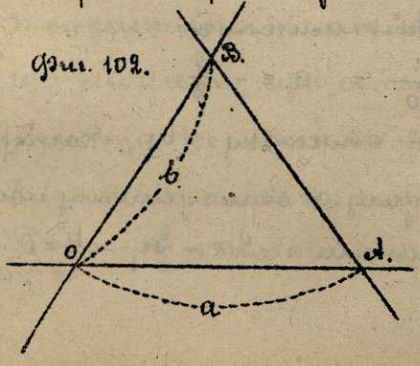


Отнесем это уравнение к ортогональной системе координат. Сравнивая это уравнение со уравнением $y = ax + b$, мы видим что, $b = \frac{4}{3}$, $a = -\frac{2}{3}$ или $a = tg\alpha = -\frac{2}{3}$. Возьмем на оси координат (фиг. 101) отрезок $\frac{4}{3}$ в единицах выбранного масштаба до точки B., через B проведем параллельно оси ox. Отложим по тоже $tg\alpha = -\frac{2}{3}$, получим точку M. Соединим M с B получим требуемую прямую. В случае косоугольной системы координат угол α определяется по формуле $tg\alpha = \frac{a \cdot \sin\varphi}{1 + a\cos\varphi}$, где $a = -\frac{2}{3}$, а координатный угол φ должен быть дан.

Вторая форма ур-ия прямой

Прямая может быть определена еще другими данными, кроме выбранных нами в предыдущем примере и тогда она попадет будет иметь совершенно иные параметры. Пусть например требуется составить уравнение прямой по координатам точек пересечения ея с осями координат. Обозначим через $\underline{a}$ абсциссу точки A. пересечения прямой с осью $\underline{ox}$ и через $\underline{b}$ - ординату

фиг. 102.



ки В. пересечения прямой со осью $y^{ов}$, тогда координаты точки А будут: a и 0, а координаты точки В. будут: 0 и b. Уравнение всякой прямой, а следовательно и искомой есть:

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

где A, B и C надо выяснить в зависимости от данных величин a и b. Так как точки А и В (фиг. 102) лежат на этой прямой (1), то координаты их должны удовлетворять (1) уравнению т. е.

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C = 0 \quad \text{и} \quad A \cdot 0 + B \cdot b + C = 0.$$

откуда $$A = -\frac{C}{a} \quad \text{и} \quad B = -\frac{C}{b}.$$

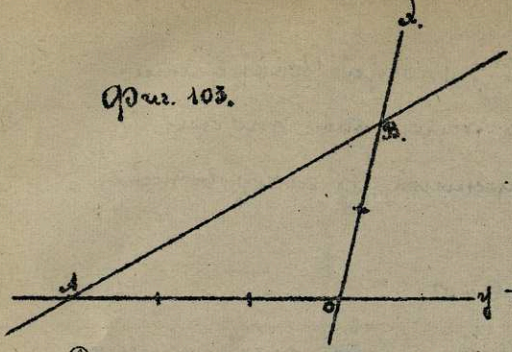
подставив эти величины во (1) уравнение получим:

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

т. е. для точек прямой сумма отношений координат со соответствующими координатами точек пересечения прямой со осями координат равняется единице.

Задача. Построить прямую, уравнение которой $2x - 3y + 6 = 0$. Чтобы построить прямую достаточно определить какие-нибудь две ее точки. Для простоты определим точки пересечения прямой со осями координат.

Возьмем за оси координат ox и oy (фиг. 103). Во точках пересечения прямой со осью $x^{ов}$ мы должны иметь $y = 0$ и следоват. ур-ие будет $2x + 6 = 0$, откуда



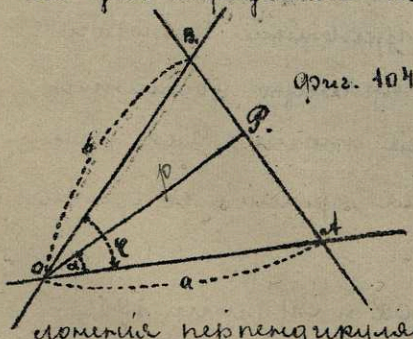
Фиг. 103.

$x=-3$. Строимъ эту точку, пусть она будетъ A. Два точки пересѣченія прямой съ осями ординатъ получены: полагая $x=0$ и слѣд. ур-ій будетъ: $-3y+6=0$, откуда $y=2$. Строимъ и эту точку, она будетъ B. Соединимъ теперь A и B прямой и полученная прямая и будетъ искомою.

Третья форма уравнен. прямой.

Третья форма уравненія прямой имѣетъ большое геометрическое приложеніе и назыв. нормальнымъ уравненіемъ прямой.

Положеніе прямой на плоскости можетъ опредѣлить слѣдующимъ образомъ опустимъ на данную прямую перпендикуляръ OP изъ начала координатъ и опредѣлимъ длину этого перпендикуляра, такимъ образомъ выразимъ разстояніе прямой отъ начала координатъ, но этого еще мало для опредѣленія положенія прямой, ибо всякая касательная къ окружности описанной изъ точки O радіусомъ OP удовлетворяла бы тому же условію, положеніе же прямой станетъ вполнѣ опредѣленнымъ, когда мы дадимъ уголъ наклоненія перпендикуляра къ оси OX, пусть это будетъ уголъ α, тогда уголъ α и длина перпендикуляра $OP=p$. вполнѣ опредѣляютъ положеніе прямой AB. Посмотримъ какова будетъ



Фиг. 104.

уравнение нашей прямой при этих параметрах. Способы вывода этого уравнения могут быть очень различны, но мы выведем его перейдя отъ только что выведенного уравнения прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Разсмотримъ прямоугольные треугольники OPA и OPB, въ этихъ прямоугольн. тр-кахъ мы можемъ замѣнить параметры a и b, посредствомъ нашихъ параметровъ, въ самомъ дѣлѣ $a = \frac{p}{\cos\alpha}$ и $b = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$. Подставимъ эти выраженія вмѣсто a и b въ наше уравненіе получимъ: $\frac{x}{p/\cos\alpha} + \frac{y}{p/\cos(\varphi-\alpha)} = 1$.

или преобразуя имѣемъ: $x\cos\alpha + y\cos(\varphi-\alpha) = p$ . . . . . (1)

это и есть такъ называемое нормальное уравненіе прямой

Здѣсь p считаютъ величиной абсолютной, т. к. направленіе перпендикуляра опредѣляетъ уголъ α, который отсчитывается отъ положительной оси абсциссъ до этого перпендикуляра.

Уравненіе въ нормальномъ видѣ имѣетъ большое примѣненіе при прямоугольной системѣ координатъ. Въ этомъ случаѣ $\varphi = 90°$ и $\cos(\varphi-\alpha) = \cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$ и уравненіе приметъ видъ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

Приведеніе общаго уравненія прямой къ нормальному.

Уравненіе общаго вида $Ax + By + C = 0$ можно привести къ нормальному уравненію. Посмотримъ какъ это сдѣлать. Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ и положимъ, что общее уравненіе надо помножить на неизвѣстный пока множитель λ, чтобы получить его въ нор-

нального вида т. е.

$$\lambda A x - \lambda B y + \lambda C = x \operatorname{Ch}\alpha + y \operatorname{Sh}\alpha - p = 0$$

откуда получаем три уравнения:

$$\lambda A = \operatorname{Ch}\alpha; \quad \lambda B = \operatorname{Sh}\alpha; \quad \lambda C = -p.$$

Чтобы узнать: возможно ли найти такую величину λ, которая удовлетворяла бы предыдущим условиям, возьмем первые два равенства во квадрате и сложим почленно, найдем: $\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \operatorname{Ch}^2\alpha + \operatorname{Sh}^2\alpha$ или $\lambda^2(A^2 + B^2) = 1$.

откуда $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Это выражение для λ возможно для всяких действительных значений A и B, за исключением того случая, когда одновременно A и B равны нулю; но это условие очевидно невозможно, потому что данное уравнение приняло бы вид невозможного равенства $C = 0$, где C не равно нулю. Так как для λ получили два значения, то чтобы определить, который знак должно удержать при корне, обратимся к равенству $p = -\lambda C$ из которого видим, что должно удерживать такой знак чтобы $-\lambda C$ было бы числом положительным т. е. чтобы λ было со обратным знаком относительно C; определив знак при λ, найдем величины $\operatorname{Sh}\alpha$ и $\operatorname{Ch}\alpha$

$$\operatorname{Sh}\alpha = \lambda B = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{Ch}\alpha = \lambda \cdot A = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

По этим формулам определение угла α неудобно, а потому составим другую формулу, разделив почленно равенства $\operatorname{Sh}\alpha = \lambda B$ на $\operatorname{Ch}\alpha = \lambda \cdot A$ найдем: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A}$. откуда, приняв во внимание знаки для $\operatorname{Sh}\alpha$ и $\operatorname{Ch}\alpha$, получим то

логарифмами определить величину угла α.

Итак, чтобы уравнение общего вида привести къ уравнению нормальной формы должно его помножить на соотвѣтствующій множитель $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, и уравненіе общаго вида въ такомъ случаѣ будетъ: $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ которое и будетъ нормальнымъ. Отсюда видимъ, что для приведенія даннаго уравненія къ нормальному должно перенести всѣ члены уравненія въ одну часть; сдѣлать приведеніе и раздѣлить обѣ части уравненія на корень квадратный изъ суммы квадратовъ коэффиціентовъ при x и y, взявъ при корнѣ знакъ обратный знаку извѣстнаго члена.

Въ случаѣ косоугольныхъ координатъ преобразованіе общаго уравненія въ нормальное достигается такимъ же только умноженіемъ на соотвѣтствующаго множителя, но видъ самаго множителя въ этомъ случаѣ будетъ болѣе сложенъ. Ходъ доказательства остается тотъ же самый какъ и при прямоугольной системѣ координатъ.

Сравнивъ уравненіе: $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ съ $x\cos\alpha + y\cos(\varphi-\alpha) - p = 0$.

находимъ условія $\lambda A = \cos\alpha$; $\lambda B = \cos(\varphi-\alpha)$; $\lambda C = -p$.

Чтобы узнать возможно ли найти такую величину λ, которая удовлетворала предыдущимъ условіямъ, сдѣлаемъ надъ послѣдними тремя уравнен. слѣдующія преобразованія: возведемъ въ квадратъ два первыя изъ этихъ равенствъ и сложимъ ихъ, помноживъ составленное удвоенное произведеніе

тогда все равенства сперва между собою умножив оные на $Cs\varphi$; затем из полученной суммы вычитаем последнее произведение тогда будем иметь

$$\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 - 2\lambda^2AB\,Cs\varphi = Cs^2\alpha + Cs^2(\varphi-\alpha) - 2\,Cs\alpha\,Cs(\varphi-\alpha)\,Cs\varphi$$

докажем теперь что $Cs^2\alpha + Cs^2(\varphi-\alpha) - 2\,Cs\alpha\cdot Cs(\varphi-\alpha)\,Cs\varphi$ равняется $Sn^2\varphi$; $Cs^2\alpha + Cs^2(\varphi-\alpha) - 2Cs\alpha\cdot Cs(\varphi-\alpha)\,Cs\varphi = Cs^2\alpha + (Cs\varphi\,Cs\alpha + Sn\varphi\cdot Sn\alpha)^2 - 2\,Cs\alpha\cdot Cs\varphi\,(Cs\varphi\,Cs\alpha + Sn\varphi\cdot Sn\alpha) = Cs^2\alpha + Cs^2\varphi\,Cs^2\alpha + Sn^2\varphi\cdot Sn^2\alpha + 2\,Cs\varphi\,Cs\alpha\,Sn\varphi\,Sn\alpha - 2\,Cs^2\varphi\cdot Cs^2\alpha - 2\,Cs\varphi\cdot Cs\alpha\cdot Sn\varphi\cdot Sn\alpha = Cs^2\alpha - Cs^2\varphi\,Cs^2\alpha + Sn^2\varphi\cdot Sn^2\alpha = Cs^2\alpha(1-Cs^2\varphi) + Sn^2\varphi\,Sn^2\alpha = Cs^2\alpha\,Sn^2\varphi + Sn^2\varphi\cdot Sn^2\alpha = Sn^2\varphi(Cs^2\alpha + Sn^2\alpha) = Sn^2\varphi$

следовательно мы можем написать

$$\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 - 2\lambda^2AB\,Cs\varphi = Sn^2\varphi \quad \text{откуда}$$

$$\lambda = \pm\frac{Sn\varphi}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\,Cs\varphi}}$$

знак λ определяется уравнением $p = -\lambda c$, т.е. должен быть обратен знаку известного члена. Общее же уравнение $Ax + By + C = 0$ при косоугольной системе координат в нормальной форме выразится так:

$$\frac{(Ax + By + C)\,Sn\varphi}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\,Cs\varphi}} = 0.$$

Четвертая форма уравнения прямой.

Найдем теперь общее уравнение прямой проходящей через данную точку. Назовем через x' и y' координаты данной точки M. Уравнение всякой прямой есть:

$$y = ax + b$$

Чтобы эта прямая проходила через точку M, надобно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли урав-

нию прямой; следовательно, если переменныя координаты x и y заменимъ координатами x' и y' точки M, то получимъ условное уравненіе:

$$y' = ax' + b$$

Изъ этого уравненія опредѣляется одинъ изъ параметровъ a и b въ функціи другого; напримѣръ параметръ b въ функціи a; замѣнивъ въ уравненіи прямой b его величиною $y' - ax'$, найденною изъ условнаго уравненія, получимъ

$$y - y' = a(x - x') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Это уравненіе, въ которомъ угловой коэффиціентъ a остается произвольнымъ, выражаетъ всѣ прямыя, проходящія черезъ точку M. Поэтому если a измѣняется, прямая будетъ обращаться около точки M.

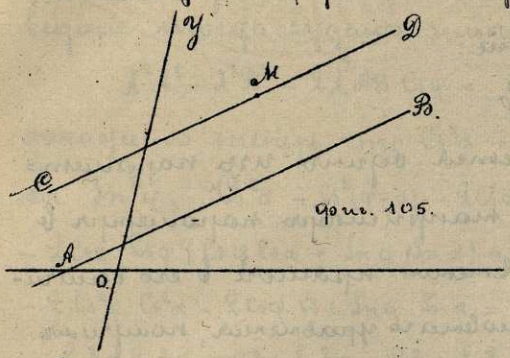
Мы сказали, что всякая прямая выражается уравненіемъ вида $y = ax + b$, какое бы ни было ея положеніе въ плоскости: но есть исключеніе, именно, когда прямая параллельна оси y, потому что въ этомъ случаѣ угловой коэффиціентъ a равенъ безконечности, точно такъ же и ордината b начала. Въ такомъ случаѣ, замѣнивъ въ уравненіи (1) a отношеніемъ $\frac{m}{n}$, найдемъ

$$n(y - y') = m(x - x').$$

положивъ здѣсь $n = 0$, получимъ ур. $x = x'$, выражающее линію, параллельную оси y и проведенную черезъ точку M.

Обратимся теперь къ составленію уравненія прямой проходящей черезъ данную точку параллельно данной прямой.

Пусть $y = ax + b$ будет уравнение данной прямой AB, а x' и y' координаты данной точки M (фиг. 105). Так как искомая прямая должна проходить через данную точку, то ее уравнение, как мы ведали, будет



фиг. 105.

$$y - y' = a'(x - x').$$

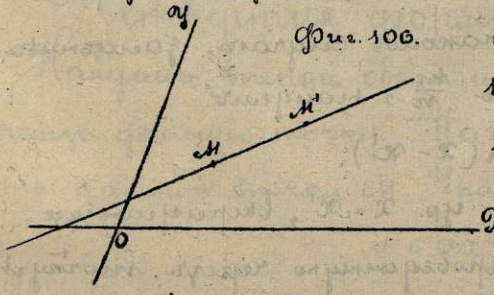
Эта прямая, по условию, должна быть параллельна прямой AB, поэтому угловой коэффициент ее a' должен быть равен угловому коэффициенту a прямой AB; следовательно, искомая параллельная CD выразится уравнением

$$y - y' = a(x - x').$$

Пятая форма уравнения прямой.

Составим теперь уравнение прямой, проходящей через два данных точки.

Пусть M и M' (фиг. 106) будут два данных точки; x' и y' координаты точки M; x'' и y'' координаты точки M'



фиг. 106.

Так как прямая MM' должна проходить через точку M, то ее уравнение будет

$$y - y' = a(x - x') \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Остается теперь определить коэффициент a так, чтобы эта прямая проходила также через точку M'. Для этого необходимо, чтобы коорди-

нами точки M' удовлетворяли ур. (1), и мы получили

$$y'' - y' = a(x'' - x'), \quad \text{откуда}$$

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

т. есть угловой коэффициент прямой MM' равен разности ординат двух данных точек, разделенной на разность абсцисс этих же точек.

Заменив в ур. (1) a его величиной, получим уравнение прямой MM'. $y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$ . . . . . (2)

которое можно представить в виде:

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}.$$

Если точка M находится в начале координат, то $x' = 0$, $y' = 0$ и ур. (2) в этом случае получит вид

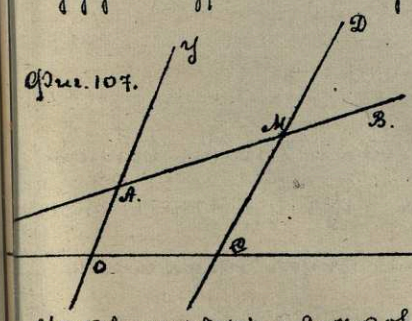
$$y = \frac{y''}{x''} x.$$

Нахождение точки пересечения двух данных прямых.

Пусть $Ax + By + C = 0$

$A'x + B'y + C' = 0$

будут уравнения двух данных прямых AB и CD (фиг. 107.)



фиг. 107.

и M точка пересечения этих двух прямых. Так как точка M принадлежит каждой прямой, то ея координаты должны в одно и то же время удовлетворять двум уравнениям; следовательно, решив эти два уравнения с двумя неизвестными, получим координаты точки M.

$$x = \frac{Bc' - cB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{cA' - Ac'}{AB' - BA'}.$$

Если знаменатель $AB' - BA'$ не равен нулю, то x и y будут иметь величины конечные и определенные, и обе прямые действительно пересекутся в точке M. Но если знаменатель равен нулю, а числители не равны нулю, то x и y будут величины бесконечные; это показывает, что два данные прямые параллельны и действительно в этом случае угловые их коэффициенты равны $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$. В том же случае, когда $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, числители и знаменатели равны нулю, и величины x и y представляются в виде $\frac{0}{0}$. Эта неопределенность показывает, что обе данные прямые сливаются; действительно, если положить $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = k$, откуда $A = A'k$, $B = B'k$, $C = C'k$, внеся эти величины во второе уравнение и потом разделив его на k, то оно будет тождественно с первым.

Шестая форма уравнения прямой.

Найдем общее уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых.

Пусть
$$Ax + By + C = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$A'x + B'y + C' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$
будут уравнения двух данных прямых. Этот вопрос можно решить следующим образом. Из ур. (1) и (2) определим координаты точки пересечения двух прямых и потом через эту точку проведем какую нибудь прямую. Но этот вопрос можно решить гораздо скорее.

Умножив одно из уравнений (1) или (2) на произвольную величину λ и сложив их, получим уравнение первой степени

$$(Ax + By + C) + \lambda (A'x + B'y + C') = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

которое выражает третью прямую, проходящую через точку пересечения двух первых. Действительно, так как координаты этой точки в одно и то же время удовлетворяют двум уравнениям (1) и (2), то они обращают в нуль и величины, находящиеся в скобках, а следовательно, удовлетворяют уравнению (3). Уравнение (3) выражает всю прямую проходящую через точку пересечения двух данных прямых, так как коэффициент λ остается произвольным; этот коэффициент можно определить например из условия, чтобы прямая проходила через какую нибудь точку M плоскости, координаты которой суть x' и y'; для этого необходимо, чтобы удовлетворялось уравнение.

$$(Ax' + By' + C) + \lambda (A'x' + B'y' + C') = 0$$

отсюда

$$\lambda = -\frac{Ax' + By' + C}{A'x' + B'y' + C'} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Положив в уравнении (3) $\lambda = 0$, получим $Ax + By + C = 0$; это есть первая линия. Если λ заменить через $\frac{m}{n}$ и потом, умножив на n, положить $n = 0$, получим вторую прямую: $A'x + B'y + C' = 0$.

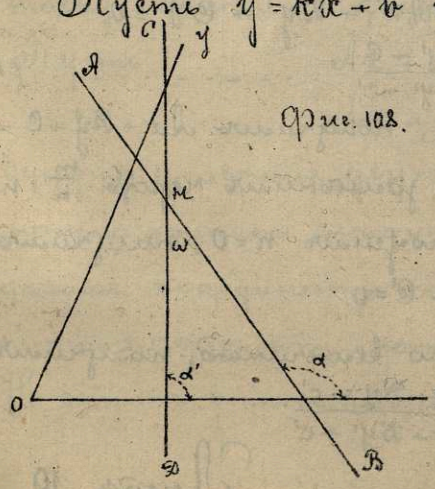
Заменив в уравнении (3) λ его величиной, получим уравнение

$$\frac{Ax + By + C}{Ax' + By' + C'} = \frac{A'x + B'y + C'}{A'x' + B'y' + C'}$$

которое выражается прямую, проходящую через точку M и точку пересечения двух данных прямых. Во этом уравнении числители суть первые части уравнений двух данных прямых, знаменатели же суть тех же многочлены, только вместо x и y заключены координаты данной точки. При взгляде на это уравнение прямо видно, что прямая, выражаемая им, проходит через данную точку и точку пересечения двух данных прямых. Уравнение первой степени относительно x и y, содержащее произвольный параметр λ, выражает бесконечное число прямых; если этот параметр входит в уравнение только в первой степени, то уравнение можно представить в виде (3) тогда увидим, что все прямые проходят через одну и ту же точку, точку пересечения прямых (1) и (2).

Определение угла образуемого двумя данными прямыми.

Пусть $y = kx + b$ и $y = k'x + b'$ будут уравнения двух данных прямых AB и CD. Назовем через α и α' углы, образуемые этими линиями с осью ox, а через ω угол, который они составляют между собою. В таком случае очевидно что $\omega = \alpha - \alpha'$ и мы можем



фиг. 108.

написать что

$$tg\,\omega = \frac{tg\,\alpha - tg\,\alpha'}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\alpha'}$$

но по выведенной ранее формуле известно что

$$tg\,\alpha = \frac{\kappa \cdot Sn\,\varphi}{1 + \kappa\, Cs\,\varphi} \quad \text{и} \quad tg\,\alpha' = \frac{\kappa' Sn\,\varphi}{1 + \kappa' Cs\,\varphi}$$

где φ есть угол между осями Ox и Oy.

Вместо эти величины во предыдущую формулу получимъ

$$tg\,\omega = \frac{\frac{\kappa\, Sn\,\varphi}{1+\kappa\, Cs\,\varphi} - \frac{\kappa' Sn\,\varphi}{1+\kappa' Cs\,\varphi}}{1 + \frac{\kappa\kappa' Sn^2\varphi}{(1+\kappa\, Cs\,\varphi)(1+\kappa' Cs\,\varphi)}}$$ или упрощая

$$tg\,\omega = \frac{\kappa\, Sn\,\varphi + \kappa\kappa' Sn\,\varphi\, Cs\,\varphi - \kappa' Sn\,\varphi - \kappa\kappa' Sn\,\varphi \cdot Cs\,\varphi}{1 + \kappa\, Cs\,\varphi + \kappa' Cs\,\varphi + \kappa\kappa' Cs^2\varphi + \kappa\kappa' Sn^2\varphi}$$

и наконецъ $$tg\,\omega = \frac{(\kappa - \kappa')\, Sn\,\varphi}{1 + (\kappa + \kappa')\, Cs\,\varphi + \kappa\kappa'}$$

Эта формула и решаетъ вопросъ. Въ частномъ случаѣ, когда координаты прямоугольныя, эта формула упрощается ибо $\varphi = 90°$; $Cs\,\varphi = 0$ а $Sn\,\varphi = 1$ и она будетъ имѣть

$$tg\,\omega = \frac{\kappa - \kappa'}{1 + \kappa\kappa'}$$

Изъ этой формулы можно вывести условія параллельности данныхъ линій, а также и перпендикулярности. Если прямыя параллельныя то $\omega = 0$ и $tg\,\omega = 0$, такъ какъ знаменатель ни той, ни другой формулы не можетъ равняться безконечности, потому что ни κ, ни κ' ни $Cs\,\varphi$ не могутъ быть безконечностями, то для обращенія каждой изъ формулъ въ нуль, числители ихъ должны равняться нулю. И такъ для параллельности данныхъ линій необходимо какъ при косоугольныхъ, такъ и при прямоугольныхъ осяхъ координатъ чтобы $\kappa - \kappa' = 0$, такъ какъ $Sn\,\varphi$

не могутъ равняться нулю. V Смотр 163

Задача 1. Составить уравненіе прямой линіи, проходящей черезъ данную точку и перпендикулярной къ данной прямой.

Пусть данная точка есть (x', y'), а данная прямая $y = kx + b$. Уравненіе искомой прямой, какъ проходящей черезъ данную точку, будетъ $y - y' = k'(x - x')$. Здѣсь k' неизвѣстно; по условію перпендикулярности двухъ прямыхъ имѣемъ $1 + (k + k')\cos\varphi + kk' = 0$, гдѣ φ есть уголъ между осями координатъ: отсюда найдемъ k':

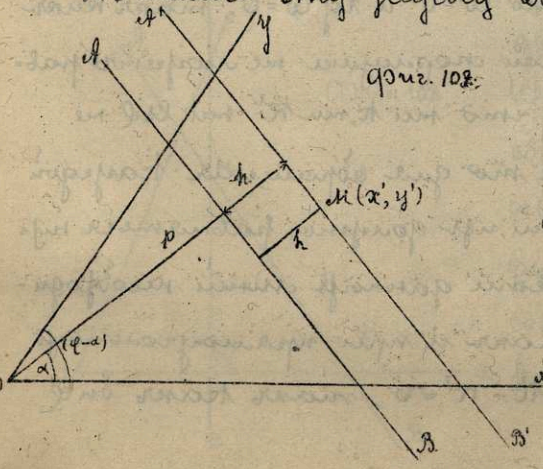
$$1 + k\cos\varphi + k'(k + \cos\varphi) = 0; \qquad k' = -\frac{k\cos\varphi + 1}{k + \cos\varphi}$$

Теперь k' извѣстно и уравненіе искомой прямой будетъ такое: $y - y' = -\frac{k\cos\varphi + 1}{k + \cos\varphi}(x - x')$.

Задача 2. Опредѣлить длину перпендикуляра опущеннаго изъ данной точки на прямую.

Рѣшимъ эту задачу въ предположеніи, что уравненіе прямой AB дано въ нормальной формѣ:

$$x\cos\alpha + y\cos(\varphi - \alpha) - p = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$



фиг. 108.

Проведемъ черезъ данную точку M (Черт 108) прямую $A'B'$ параллельную AB и замѣтимъ, что ур-іе этой пря-

мой будет:

$$x\cos\alpha + y\cos(\varphi-\alpha) - (p+h) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

где h расстояние между прямыми AB и $A'B'$. Так как прямая, данная уравнением (2) проходит через точку $M(x'y')$ то $x'\cos\alpha + y'\cos(\varphi-\alpha) - (p+h) = 0$ откуда

$$h = x'\cos\alpha + y'\cos(\varphi-\alpha) - p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Если бы точка M дана была по другую сторону прямой то $h = -(x'\cos\alpha + y'\cos(\varphi-\alpha) - p) \quad \ldots\ldots\ldots (3')$

И так если точка находится по другую сторону прямой относительно начала координат, то перпендикуляр есть величина положительная, а если точка расположена по ту же сторону прямой как и начало координат, то перпендикуляр есть величина отрицательная. Первая часть формулы (3) представляет искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую AB, вторая его часть представляет левую часть уравнения (1), в которую подставлены координаты точки M. Отсюда следует, что для решения предложенной задачи стоит только подставить координаты данной точки в нормальное уравнение данной прямой.

Если ур-ие прямой дано в общем виде

$$Ax + By + C = 0$$

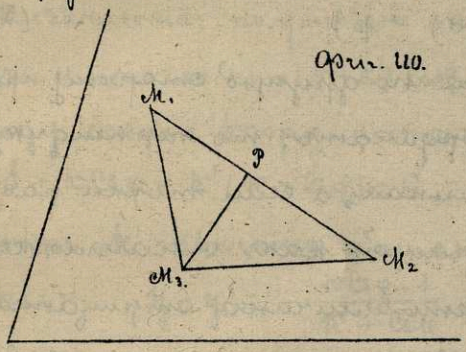
то для решения предложенной задачи нужно это уравнение прежде привести к нормальной форме.

В частномъ случаѣ, когда точка M лежитъ въ началѣ координатъ, имѣемъ $x' = y' = 0$ поэтому

$$h = \frac{c}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Задача 3. Опредѣлить площадь треугольника по координатамъ его вершинъ.

Означимъ вершины треугольника буквами M_1, M_2, M_3, координаты точки M_1 — x_1, y_1, точки M_2 — x_2, y_2 и точки M_3 — x_3, y_3. Опустимъ перпендикуляръ M_3P изъ точки M_3 на линію M_1M_2. Составимъ теперь уравненіе прямой, проходящей черезъ точки M_1 и M_2, получимъ:



фиг. 110.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{или}$$

$$x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) + x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0.$$

Приведемъ это уравненіе къ нормальному, для этого какъ извѣстно должно умножить его на

$$\pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\varphi}}$$

гдѣ $A = y_2 - y_1$; $B = -(x_2 - x_1)$, а φ — уголъ между осями координатъ, а потому наше уравненіе приметъ видъ

$$\pm \frac{[x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) + x_2 y_1 - x_1 y_2]\sin\varphi}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + 2(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)\cos\varphi}} = 0.$$

Если подставимъ сюда вмѣсто x и y координаты x_3 и y_3, то найдемъ длину перпендикуляра h, опущеннаго изъ точки M_3 на основаніе треугольника $M_1M_2 = 8$.

Итак перпендикуляр будет

$$h = \pm \frac{[x_3(y_2-y_1) - y_3(x_2-x_1) + x_2y_1 - x_1y_2] \sin\varphi}{\sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2 + 2(y_2-y_1)(x_2-x_1)\cos\varphi}}$$

Он представляет высоту нашего треугольника, основание же треугольника есть расстояние между точками M_1 и M_2. Оно выражается как известно следующей формулой:

$$\delta = \sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2 + 2(y_2-y_1)(x_2-x_1)\cos\varphi}$$

Отсюда следует, что искомая площадь будет

$$\Delta = \frac{h\delta}{2} = \pm \frac{1}{2}[x_3(y_2-y_1) - y_3(x_2-x_1) + x_2y_1 - x_1y_2] \sin\varphi \text{ или}$$

$$\Delta = \pm \frac{1}{2}[x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_3 + x_1y_3 + x_2y_1 - x_1y_2] \sin\varphi \ldots\ldots$$

Так как площадь берут по абсолютной величине, то в этой формуле следует взять такой знак, чтобы вторая часть была положительна. Если площадь $\Delta = 0$, то это показывает что три данные точки лежат на одной прямой. Отсюда получается аналитическое выражение обусловливающее положение через данные точки на одной прямой. Оно выражается так

$$\pm [x_3(y_2-y_1) - y_3(x_2-x_1) + x_2y_1 - x_1y_2] = 0.$$

Первая часть этого равенства представляет следующий детерминант:

$$\pm \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & -x_2, & y_2 \\ 1, & -x_3, & y_3 \end{vmatrix}$$ который посредством от детерм. $\mp \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}$

Площадь же треугольника можно выразить следующим

Отсюда

$$\Delta = \mp \frac{3\varphi}{2} \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}$$

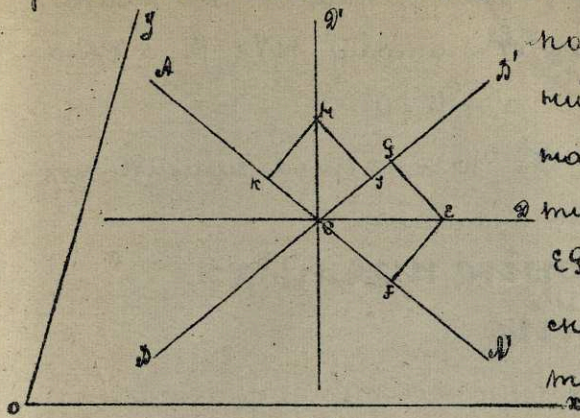
Задача 4. Составить уравнение прямой делящей угол, составленный двумя данными прямыми, пополам.

Когда при решении вопроса нам не интересуют координатные ур-ия прямой, то вместо того, чтобы приводить полное уравнение прямой обозначают его сокращенно, например $A=0$, где подо этим равенством подразумевают какое бы общее уравнение прямой, нормальное ур-ие уравнение прямой сокращенно обозначают так $\delta=0$, т.е. в первом случае принято употреблять латинские, а во втором греческие буквы.

Итак положимъ что уравнения данных прямых даны в нормальной форме т.е. $\delta=0$ и $\beta=0$. Итак как для определения длины перпендикуляра опущенного из данной точки на прямую достаточно подставить координаты этой точки в первую часть нормального уравнения данной прямой, то принято считать δ и β за длины перпендикуляров опущенных на эти линии.

Положимъ теперь, что данныя прямыя будутъ AA' и BB' (фиг.) Проведем линию CD, делящую

угол $A'CB'$ пополам, и линию CD', делящую угол MN' пополам. Возьмем какую-нибудь произвольную точку E на линии CD и из нее опустим перпендикуляры EF и ES на данные прямые. Возьмем также произвольную точку M на линии CD' и опустим из нее перпендикуляры MT и MK на данные линии.



фиг. 111.

Перпендикуляр EF равен перпендикуляру ES, но так как линия BN выражается уравнением $\beta = 0$, то перпендикуляр $ES = \beta$, линия же AA' выражается ур-ием $\alpha = 0$, то перпендикуляр $EF = \alpha$, следовательно $\beta = \alpha$ или

$$\alpha - \beta = 0.$$

Итак биссектриса CD выражается разностью нормальных уравнений данных прямых.

Чтобы вывести уравнение биссектрисы CD', заметим, что перпендикуляры $MT = MK$. Но так как перпендикуляры ES и MT имеют противоположения направления относительно линии BB', то считая одну из них за положительную величину, другой из них надо должно считать за отрицательную и поэтому если ES считали равным $+\alpha$, то MT должны считать за $-\alpha$, тогда как перпендикуляры EF и MK имеют одно и тоже

направление относительно Ad', следовательно они имеют одинъ и тотъ же знакъ. А потому $\alpha' = -\beta$, а $\alpha' = \alpha$ следовательно $-\beta = \alpha$ или $\alpha + \beta = 0$.

т. е. уравнение биссектрисы CD равняется суммѣ нормальныхъ уравнений данныхъ прямыхъ.

Задачи на теорію прямыхъ линій.

На теорію прямыхъ линій могутъ быть предлагаемы различныя задачи, которыя можно разделить на следующіе четыре рода 1) составить уравнение прямой по двумъ даннымъ. 2) доказать, что три точки лежатъ на одной прямой, 3) доказать, что три прямыя пересекаются въ одной точкѣ; 4) найти прямую какъ нѣкоторое геометрическое мѣсто.

Задачи перваго рода.

(Съ задачами перваго рода мы уже встрѣчались ранѣе, теперь же рѣшимъ еще одну изъ подобныхъ задачъ Провести черезъ данную точку (x, y_1) прямую, которая съ прямою $y = kx + b$ образуетъ данный уголъ.

Пусть оси координатъ косоугольныя и m есть tg. даннаго угла. Обозначая коэффиціенты искомой прямой черезъ k и данной черезъ k' получимъ $m = \frac{(k-k')\sin\varphi}{1+(k+k')\cos\varphi+kk'}$ откуда $k = \frac{m+mk'\cos\varphi+k'\sin\varphi}{\sin\varphi - m\cos\varphi - mk'}$, зная k, найдемъ уравнение для искомой прямой, какъ проходящей черезъ данную точку (x, y_1). получимъ;

$$y - y' = \frac{m + mk'\cos\varphi + k'\sin\varphi}{\sin\varphi - m\cos\varphi - mk'} (x - x_1)$$

Задачи второго рода.

Доказать, что три точки лежать на одной прямой.

Пусть уравнение этой прямой будетъ:

$$Ax + By + C = 0.$$

тогда подставивъ координаты данныхъ точекъ (x_1, y_1) (x_{11}, y_{11}), (x_{111}, y_{111}) въ это уравненіе получимъ

$$Ax_1 + By_1 + C = 0;$$

$$Ax_{11} + By_{11} + C = 0; \quad Ax_{111} + By_{111} + C = 0.$$

Въ этихъ уравненіяхъ, которыя должны быть совмѣстны, если только три точки лежатъ на одной прямой, неизвѣстныя величины суть A, B, и C извѣстныя же числа въ каждомъ изъ этихъ равенствъ равны нулю, а потому какъ извѣстно детерминантъ составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ этихъ уравненій должны равняться нулю т.е.

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_{11}, & y_{11}, & 1. \\ x_{111}, & y_{111}, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

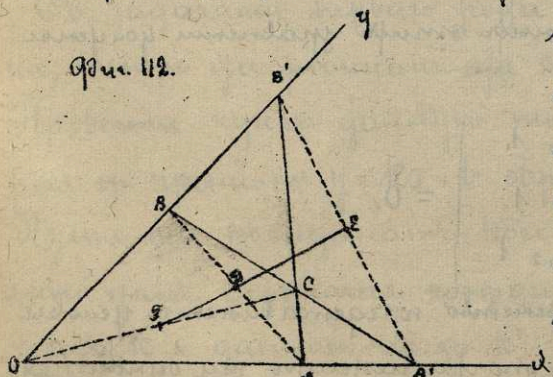
И такъ это послѣднее равенство представляетъ условіе при которомъ три данныя точки лежатъ на одной прямой, это же условіе было нами ранѣе выведено, когда мы опредѣляя площадь треугольника полагали ее равной нулю.

Этот же вопрос можно было бы решить иначе, а именно. Пусть M, M', M'' будут три данные точки; x' и y' координаты первой точки, x'' и y'' координаты второй, x''' и y''' координаты третьей. Угловой коэффициент прямой MM', как известно, равен $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ (смотри 5-ую формулу ур-ия прямой) а угловой коэффициент прямой MM'' равен $\frac{y'''-y'}{x'''-x'}$. Если три точки M, M', M'' находятся на прямой линии, то прямые MM', MM'' сливаются, и следовательно угловые коэффициенты их равны т. е.

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y'''-y'}{x'''-x'}.$$

Примером трех точек, лежащих на прямой линии, служит четырехугольник $OACB$ (фиг. 112). Если четыре стороны продолжены неопределенно, то составится так называемый дополнительный четырехугольник; стороны, пересекаясь по две, образуют шесть точек, или вершин, соединив противоположные вершины, получим три диагонали AB, $A'B'$ OC. Мы докажем, что три точки D, E, F которыя делят эти диагонали пополам лежат на одной прямой.

Фиг. 112.



Возьмем стороны OA и OB за оси координат; через a и a' обозначим линии OA и OA'; через b и b' линии OB и OB'. Координаты точки D, середины AB будут $x' = \frac{a}{2}$,

$y' = \frac{b}{2}$; координаты точки E середины $A'B'$ будут $x'' = \frac{a'}{2}$, $y'' = \frac{b'}{2}$. Чтобы найти координаты точки F, середины OC, отыщем сначала координаты точки C, пересечения двух прямых AB' и $A'B$, ур-ия которых суть

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad ; \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1$$

Решив эти два ур-ия, получим координаты точки C

$$x = \frac{aa'(b-b')}{ab - a'b'} \quad \text{и} \quad y = \frac{bb'(a-a')}{ab - a'b'}$$

Так как точка F есть середина прямой OC, то координаты ея x'', y'' будут половинами координат точки C, соответственно $x''' = \frac{aa'(b-b')}{2(ab-a'b')}$ и $y''' = \frac{bb'(a-a')}{2(ab-a'b')}$

Найдя координаты точек D, E и F увидим легко, что три точки находятся на одной прямой. Действительно, так как угловые коэффициенты прямых DE и DF

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{b'-b}{a'-a} \quad ; \quad \frac{y'''-y'}{x'''-x'} = \frac{\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'} - b}{\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'} - a} = \frac{b'-b}{a'-a}$$

равны между собою, то заключаем, что три точки D, F, E находятся на одной прямой.

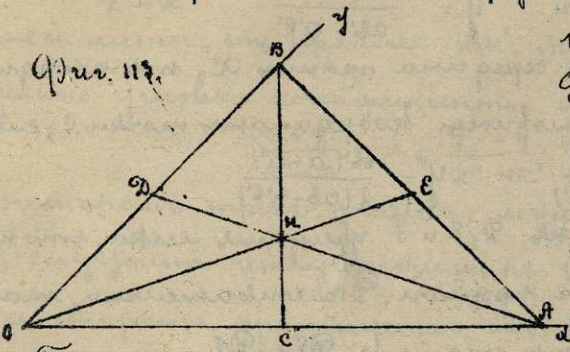
Задачи третьяго рода.

Если три прямыя проходят через одну точку, то уравнения этих прямых должны быть совместны. Самый общий способ открыть такую совместность уравнений состоит в том, что составляют детерминант из всех коэффициентов всех трех уравнений. Если по вычислении этого детерминанта он окажется равным 0, то ур-ия

совместны. Но можно доказать совместность ур-ий и другими способами, показывая, что одно из ур-ий есть алгебраическое следствие двух других.

Пример 3. Доказать, что равнодействующая стороны треугольника пересекаются в одной точке.

Направим оси координат по двум сторонам треугольника. (фиг. 113)



Фиг. 113.

Пусть $OA = a$ и $OB = b$. Составим ур-ие прямой AD $\frac{x}{a} + \frac{y}{\frac{b}{2}} = 1$; прямой BC $\frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{b} = 1$; прямой OE $y - 0 = \frac{\frac{b}{2} - 0}{\frac{a}{2} - 0}(x - 0)$.

Преобразуем ур-ия в более простой вид

$$\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 1, \quad \frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0.$$

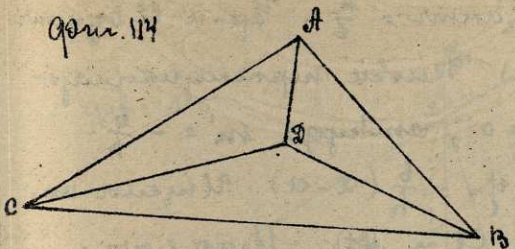
Мы имеем: $-\left(\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} - 1\right) + \left(\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) + \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) = 0$

Это доказывает, что одно из уравнений есть алгебраическое следствие двух остальных, а поэтому прямые AD, BC, OE пересекаются в одной точке.

Пример 4. Доказать, что равнодействующая углов треугольника пересекаются в одной точке.

Берем начало осей координат внутри данного треугольника ABC. (Черт. 114.) и напишем ур-ие его сторон в нормальной форме. Пусть для

Фиг. 114



сокращения эти уравнения будут: $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $\gamma = 0$. Уравнения равнодействующих получатся как было сказано, вычитая эти уравнения.

$\beta - \alpha = 0$; $\gamma - \beta = 0$; $\alpha - \gamma = 0$.

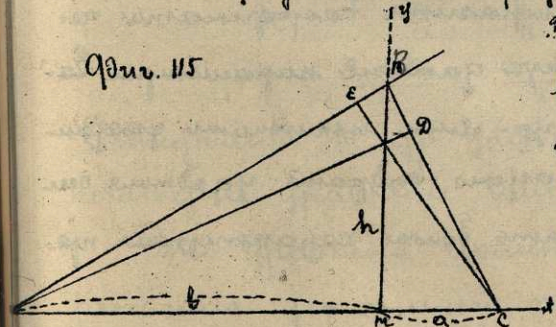
Мы имеем $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) + (\alpha - \gamma) = 0$.

Желаемое таким образом доказано.

Пример 5. Доказать, что, во всяком треугольнике три его высоты пересекаются в одной точке.

Возьмем треугольник (черт. 115) и его высоты. Примем M за начало и MC за ось $x^{ов}$, а MB за ось $y^{ов}$. Обозначим MC через a, AM через b, BM через h. т. е. $MC = a$, $AM = b$, $BM = h$. Эти три величины известны и вполне определяют треугольник. Уравнение линии BC: $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$.

Фиг. 115



Решив его относительно y получим $y = -\frac{h}{a}x + h$

Угловой коэффициент $= -\frac{h}{a}$

Координаты точки C – (a, 0) и A (– b, 0) Уравнение линии AD: $y - 0 = m[x - (-b)]$ или $y = m(x + b)$, где m неизвестно; но по условию перпендикулярности имеем: $-\frac{h}{a}m + 1 = 0$, откуда $m = \frac{a}{h}$ и окончательное уравнение AD будет

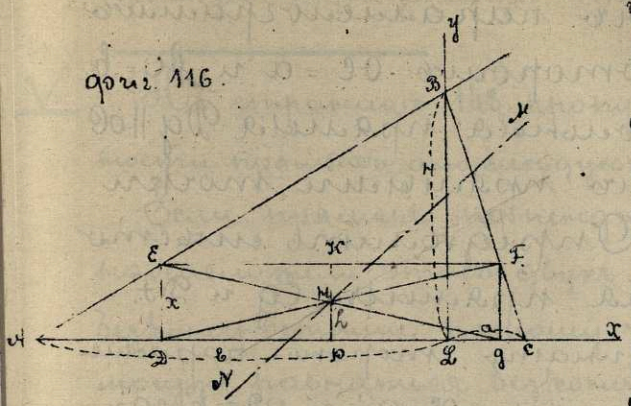
$y = \frac{a}{b}(x+b)$. Ур-ie AB будетъ $-\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$, откуда $y = \frac{h}{b}x + h$. Угловой коэффиціентъ $= \frac{h}{b}$. Ур-ie CE будетъ $y - 0 = m'(x-a)$ или $y = m'(x-a)$. Условіе перпендикулярности CE съ AB даетъ: $\frac{h}{b}m' + 1 = 0$, откуда $m' = -\frac{b}{h}$. Окончательное ур-ie будетъ: $y = -\frac{b}{h}(x-a)$. Ищемъ координаты точки пересѣченія CE и AD. Имѣемъ: $\frac{a}{h}(x+b) = -\frac{b}{h}(x-a)$; $a(x+b) = -b(x-a)$ или $ax + ab = -bx + ab$ или $ax = -bx$; но a не равно 0 слѣдов. $x=0$ и точка лежитъ на оси ординатъ.

Задачи четвертаго рода.

Задачи четвертаго рода объ опредѣленіи ур-ія прямой, какъ заданнаго геометрическаго мѣста, рѣшаются составленіемъ чрезъ чертежа связи между текущими координатами. Для этого нужно выбрать перемѣнную величину, отъ измѣненія которой зависитъ образованіе геометрическаго мѣста и выразить координаты черезъ эту перемѣнную и черезъ данные параметры. Затѣмъ между полученными ур-іями исключить указанную перемѣнную. Весьма важно выбрать удобныя оси за которыя слѣдуетъ принять болѣе характерныя прямыя данной фигуры.

Примѣръ 6. Найти геометрическое мѣсто центровъ прямоугольниковъ вписанныхъ въ данный треугольникъ.

За оси координат примем высоту BL и основание треугольника AC. Обозначим координаты пересечения диагоналей через ξ и h и найдем связь между ними и параметрами, определяющими $\triangle ABC$, т. е. a, b и h; для этого на время введем новый параметр k, выражающий ординату точки E и F. Прямо видно, что $h = \frac{k}{2}$. Чтобы найти абсциссу M надо взять полусумму абсцисс E и F. Абсцисса точки $E(x_2)$ найдется когда в уравнение прямой AB подставим ординату k точки E; абсцисса точки $F(x_3)$ получится также из ур-ия прямой BC.



фиг. 116.

Ур-ie AB ..... $\frac{x}{-b} + \frac{y}{N} = 1$; $y = k$; $x_2 = b\left[\frac{k}{N} - 1\right]$

---- BC ..... $\frac{x}{a} + \frac{y}{N} = 1$; $y = k$; $x_3 = a\left[1 - \frac{k}{N}\right]$

$$\xi = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{a-b}{2}\left[1 - \frac{k}{N}\right];$$

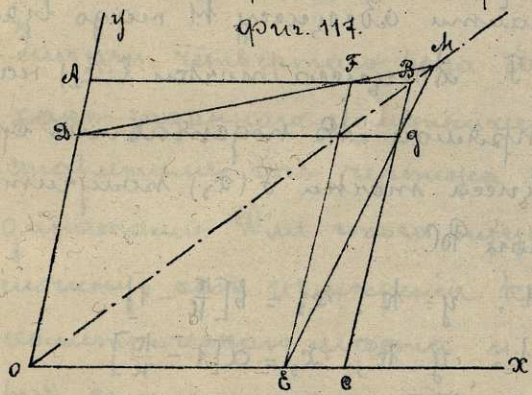
Определив k из уравнения $h = \frac{k}{2}$ и подставив в последнее уравнение имеем: $\xi = \frac{a-b}{2}\left[1 - \frac{2h}{N}\right]$.

Это уравнение геометрического места точек пересечения диагоналей прямоугольника при изменении процесса изменения приведем деление на $\frac{a-b}{2}$ к виду $\frac{\xi}{\frac{a-b}{2}} + \frac{h}{\frac{N}{2}} = 1$. Что даст нам прямую MN проходящую через половину высоты

точки K и половину основания AC.

Пример 7. Дано параллелограмм OABC (Черт. 117) в котором OC = a и AO = b. Проводим произвольную прямую DG ∥ OC и EF ∥ OA. Соединяем прямыми точки D со F и E со G. Определить место точек пересечения прямых EG и DF.

Берем за оси координат стороны параллелограмма OC и OA, полагаем OE = a' и OD = b' составляем уравнения прямых EG и DF. Уравнение



фиг. 117.

EG:

$$y - 0 = \frac{b' - 0}{a - a'}(x - a')$$

ур-ие DF $\quad y - b' = \frac{b - b'}{a'}(x - 0)$

Преобразуем эти ур-ия

$$ya - ya' = b'x - a'b'$$

$$ya' - ba' = bx - b'x$$

Координаты точек K удовлетворяют обоим уравнениям, а следовательно и тому которое получится от сложения их. Совершая это сложение находим:

$$ya - ya' - ya' - b'a' = b'x - b'a' + bx - b'x \quad \text{или}$$

$$ya = bx \quad \text{откуда} \quad y = \frac{b}{a}x.$$

Это и есть искомое уравнение, оно как видно выражает собою диагональ данного параллелограмма, в чем легко убедиться начиная строить

прямую выражаемую этими уравнениями.

V На странице 148 пропущено условіе перпендикулярности прямыхъ, оно слѣдующее:

Если прямыя перпендикулярны, то $\omega = 90°$ и $\operatorname{tg}\omega = \infty$ но числители этихъ двухъ формулъ не могутъ быть безконечностями, потому что ни k, ни k', ни $\sin\varphi$ не могутъ равняться безконечности. Слѣдовательно для того, чтобы каждая изъ формулъ обратилась въ безконечность необходимо, чтобы знаменатели ихъ равнялись нулю, а потому для перпендикулярности данныхъ линій при косоугольныхъ осяхъ координатъ необходимо; чтобы

$$1 + (k + k')\cos\varphi + kk' = 0.$$

и при прямоугольныхъ осяхъ координатъ, чтобы:

$$1 + kk' = 0.$$

Преобразованіе координатъ.

Намъ извѣстно, что одна и та же кривая отнесенная къ различнымъ координатамъ будетъ выражаться разными уравненіями. Такъ мы видѣли что окружность отнесенная къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, при произвольномъ положеніи центра выражается уравненіемъ:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

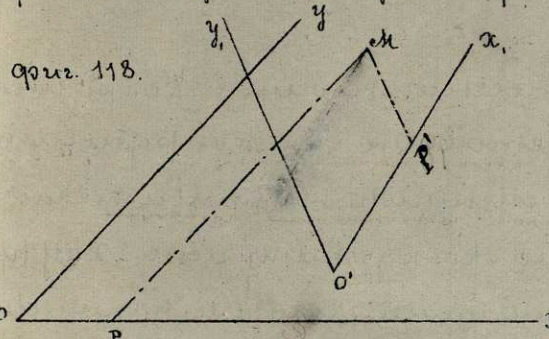
Та же окружность выразится уравнением:
$x^2 + y^2 = 2Rx$, если начало координат будет помещено на окружности и за ось абсцисс будет взят диаметр. Если же начало координат совпадает с центром окружности и оси координат будут направлены по диаметрам ур-я примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

И так: со переменой осей координат всегда будет изменяться и вид уравнения кривой. Относительно одного осей координат уравнение будет проще, относительно другого сложнее. При исследовании свойства кривых, большая или меньшая простота их уравнений играет очень важную роль. Чем проще уравнение кривой, тем легче его исследовать, поэтому для каждой кривой необходимо выбирать такия оси координат, чтобы ея уравнение получило возможно простой вид. Отсюда понятна важность вопроса о преобразовании координат, который заключается в следующем: дано уравнение некоторой кривой, отнесенной ко данным осям координат, требуется составить уравнение той же самой кривой, но относительно другой системы координат, при чем положение второй системы относительно первой известно.

Положим, что нам дано уравнение некоторой

кривой, отнесенной к осям координат ox и oy и что требуется получить уравнение той же кривой относительно новой системы осей координат o'x' и o'y' (фиг. 118). Чтобы решить этот вопрос возьмем произвольную точку M рассматриваемой кривой, назовем ее координаты относительно первой системы через (x, y) причем x = op и y = mp, а координаты той же точки относительно другой новой системы через (x', y') причем x' = o'p' и y = Mp'



фиг. 118.

Между этими координатами необходимо должна существовать некоторая зависимость, которая может быть обнаружена из чертежа. Отыскивая эту зависимость, мы будем стараться старые координаты выразить через новые и когда такие выражения будут найдены, то вставивши их в данное уравнение кривой вместо x и y, мы получим новое уравнение, которое выразит связь между новыми координатами x' и y' произвольной точки кривой, это уравнение будет следовательно уравнением кривой относительно новых осей координат; отсюда видно, что решение вопроса о преобразовании требует вывода формулы, которая опре-

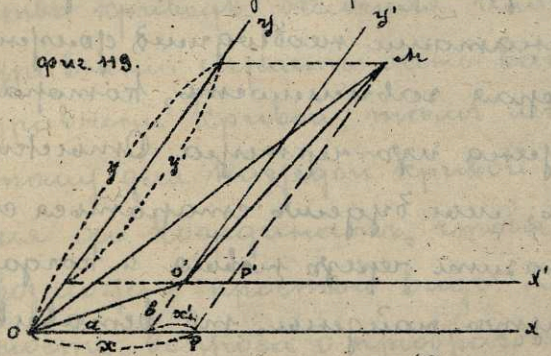
дъемся бы старыя координаты посредствомъ новыхъ.

Формулы для преобразованія координатъ.

При преобразованіи координатъ необходимо различать три основныхъ случая.

Случай 1. Перенесеніе начала координатъ въ другую точку, оставляя оси координатъ параллельными прежнимъ направленіямъ.

Пусть данная система координатъ есть xoy (фиг. 119), а новая x'o'y'; положимъ, что o'x' параллельна ox и o'y' параллельна oy. Въ этомъ случаѣ, чтобы опредѣлить положеніе новой системы относительно старой, достаточно знать координаты новаго начала O' (a, b) относительно старыхъ координатъ. Соединимъ точку O' съ точками o и M и точку M съ O'; разсмотримъ контуръ MOO' съ замыкающей стороной OM. Взявъ за ось проекцій ось x_{ov}, будемъ проектировать на нее контуръ OMO', линіями параллельными оси y_{ov}.



При этомъ очевидно будетъ имѣть:

$$\text{пр. } OM = \text{пр. } OO' + \text{пр. } O'M; \text{ но}$$

$$\text{пр. } OO' = a, \quad \text{пр. } OM = x, \quad \text{пр. } O'M = x'$$

и наше равенство обратится в

$$x = a + x' \quad \text{I}$$

Оси за ось проекций возьмем ось $y^{ов}$ и будем проектировать линиями параллельными оси $x^{ов}$, то подобно предыдущему получим, что то же равенство обратится в $y = b + y'$ II

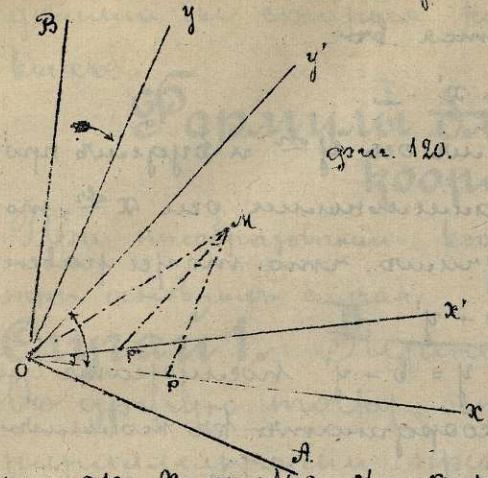
Два формулы $x = a + x'$ и $y = b + y'$ послужат для перехода от старых осей координат к новым в рассматриваемом нами случае. Эти соотношения будут также справедливы и при любом расположении начала старого и нового систем, но оси координат были параллельны между собою.

Случай 2. Переход от одних осей координат к другим, оставляя то же начало, но изменяя направление осей.

Этот случай преобразования осей координат подразделяется на несколько частных случаев.

а) Положим что старая и новая оси координат косоугольны. Пусть старая оси координат суть oy и ox (фиг. 120) и угол между ними $xoy = \varphi$; новая оси координат пусть будут ox' и oy' и угол между ними $x'oy'$ нам неизвестен, но зато известны два угла $x'ox$ и $y'ox$, которые эти оси делают с прежнею осью абсцисс ox. Эти углы

считаются от положительной оси $x^{ов}$ в сторону положительной оси $y^{ов}$. Возьмем затем произвольную точку кривой M и построим ее старые и новые координаты, Mp параллельно Oy и Mp' параллельно Oy'. Будем иметь старые координаты: $Op = x$ и $Mp = y$, а новые будут $Op' = x'$ и $Mp' = y'$.



фиг. 120.

Чтобы открыть зависимость между старыми и новыми координатами, заметим, что имеем на чертеже два контура $Opsk$ и $Op'sk$. Эти два контура имеют общую замыкающую сторону Osk, а потому суммы проекций их сторон на каждую из осей равны между собою, ибо каждая из этих сумм равна проекции замыкающей стороны Osk на ту же ось. На основании этого можем

$$пр.(Op) + пр.(Mp) = пр(Op') + пр.(Mp').$$

За ось проекций выберем сначала прямую Os перпендикулярную оси $y^{ов}$. Обозначая углы посредством названий тех же направлений между которыми лежит рассматриваемый угол, получим при проектировании:

$$x\,Cs(x,A) = x'\,cs(x',A) + y'\,Cs(y',os).$$

Углы всех углов отсчитываются отъ оси Ox и притомъ въ сторону противоположную движенію часовой стрѣлки. Послѣ этого возьмемъ за ось проэкцій линію OB, перпендикулярную къ оси $x^{ы}$. Проэктируя получимъ:

$$y\,Cs(y,B) = x'\,Cs(x',B) + y'\,Cs(y',B).$$

Здѣсь всѣ углы отсчитываются отъ оси OB и притомъ въ сторону по движенію часовой стрѣлки.

Выведенныя формулы неудобны во томъ отношеніи, что углы въ нихъ отсчитываются не отъ данныхъ осей, а отъ посторонніхъ линій Ao и Bo. Но формулы легко преобразовать основываясь на общей тригонометрической теоріи такъ называем. дополнительныхъ угловъ. Если положимъ, что въ первой изъ предыдущихъ формулъ всѣ направленія будутъ относиться не къ оси Ox, а къ оси $y^{ы}$ ей перпендикулярной и отсчетъ угловъ отъ oy будемъ производить по направленію противоположному прежнему отсчитыванію отъ Ox, то вмѣсто прежнихъ угловъ войдутъ въ формулу дополнительные къ нимъ и формула приметъ видъ такой.

$$x\,Sn(x,y) = x'\,Sn(x',y) + y'\,Sn(y',y)$$

Здѣсь всѣ углы отсчитываются отъ оси $y^{ы}$ въ сторону къ оси $x^{ы}$, т.е. на данномъ чертежѣ по движенію часовой стрѣлки. Точно такъ же, если

во второй формуле будем отсчитывать углы не от оси OB, а от оси X и противоположно принятому отсчитывать т.е. противоположно движению часовой стрелки, то формула примет вид:

$$y \sin(y,x) = x' \sin(x',x) + y' \sin(y',x).$$

Здесь все углы отсчитываются от оси x и все стороны к оси y, т.е. на данном чертеже противоположно движению часовой стрелки. Полученная формула применяется ко всем случаям преобразования координат со переменой направления осей. Иногда эти формулы приводятся к другому виду. Именно, если принять, что во общей формуле углы отсчитываются от оси x, что угол старой координаты φ, а новых осей x' и y' наклонены к оси x соответственно под углами α и β, то напишем наше уравнение в следующем виде:

$$x \sin\varphi = x' \sin(\varphi-\alpha) + y' \sin(\varphi-\beta) \quad \text{откуда}$$

$$x = \frac{x' \sin(\varphi-\alpha) + y' \sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi}.$$

Эта формула дает одну из старых координат, именно x, выраженную посредством новых x' и y'.

Второе уравнение получится в виде:

$$y \cdot \sin\varphi = x' \sin\alpha + y' \sin\beta \quad \text{откуда}$$

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\varphi}.$$

Таким образом переход от старых формул к новым во рассматриваемом случае совершается помощью двух формул

$$x = \frac{x' \sin(\varphi-\alpha) + y' \sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\varphi}.$$

в) Старые оси косоугольны, а новые прямоугольны.

Этот случай можно рассматривать как частный случай относительно предыдущего. Угол между новыми осями, т.е. угол $x'oy' = \beta - \alpha$ в предыдущем преобразовании был произвольным, положим теперь его равным $90°$, т.е. сделаем $\beta - \alpha = 90°$, откуда $\beta = 90° + \alpha$; заменив в предыдущих формулах величину β найдем:

$$\sin(\varphi-\beta) = \sin(\varphi - 90° - \alpha) = -\sin(90° + \alpha - \beta) = -\sin(90° - (\varphi-\alpha)) = -\cos(\varphi-\alpha)$$

но $\sin\beta = \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ и формулы преобразования координат для настоящего случая примут вид:

$$x = \frac{x' \sin(\varphi-\alpha) - y' \cos(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad y = \frac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\varphi}$$

г) Старые оси координат прямоугольны, а новые косоугольны.

Во этом случае будем иметь $\varphi = 90°$ и $\sin\varphi = 1$. Формулы выше приведенные для случая (а) обратятся при этом в следующие

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta \quad \text{и} \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

д) Старые и новые оси координат

прямоугольны.

Чтобы получить формулы преобразования координат для этого случая, стоит только во последних формулах заметить, что угол $\beta - \alpha$ образуемый новыми осями координат равен $90°$, т. е. сделаем $\beta - \alpha = 90°$ или $\beta = 90° + \alpha$. При этом будем иметь $\cos\beta = \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$ и

$$\sin\beta = \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$$

Следовательно формулы преобразования для рассматриваемого случая будут:

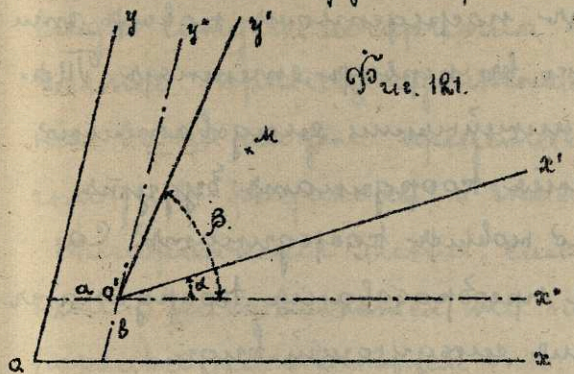
$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Случай 3. Переход от одних осей координат к другим, причем изменяется как начало так и направление осей.

Положим для общности рассмотрения, что старые оси координат ox и oy (фиг. 121) образуют угол φ и что как новые, так и старые оси координат косоугольны. Новые оси координат пусть будут ox' и oy'. Чтобы определить положение новых осей координат дадим координаты нового начала o', пусть они будут (a, b) и дадим сверх того углы, которые образуют новые оси со старою осью абсцисс ox.

Чтобы получить эти углы проведем через o' прямую $o'x''$, параллельную ox, тогда угол, образованный новою осью $o'x'$ с ox будет равен углу $x''o'a = \alpha$ и угол, образуемый осью $o'y'$ с осью ox будет равен углу $y'o'x'' = \beta$. Затем из o' проведем параллель оси y'ов — $o'y''$ и будем еще разематривать вспомогательную систему осей координат $o'x''$ и $o'y''$. Положим, что для произвольной точки M старые координаты суть (x, y), новые (x', y'), а вспомогательные (x'', y''). Перейдем сначала от старых осей координат к вспомогательным. На основании формулы случая 1-го будем иметь:



Фиг. 121.

$$x = a + x'' \quad \text{и} \quad y = b + y''$$

Затем перейдем от вспомогательных осей к новым по формулам случая II-го, которые дают:

$$x'' = \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi}; \quad y'' = \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \varphi}$$

Подставив эти выражения во предыдущие равенства получим:

$$x = a + \frac{x' \sin(\varphi - \alpha) + y' \sin(\varphi - \beta)}{\sin \varphi}; \quad y = b + \frac{x' \sin \alpha + y' \sin \beta}{\sin \varphi}$$

Эти формулы решают вопрос. В заключение

сделаем замечание объ одной особенности вида общихъ формулъ для преобразованія координатъ. Эта особенность заключается въ томъ, что въ выраженія старыхъ координатъ посредствомъ новыхъ эти послѣднія входятъ только въ первой степени. Такого рода формулы наз. линейными слѣдовательно формулы для преобразованія координатъ будутъ линейными относительно новыхъ координатъ. Самая общія формулы для преобразованія координатъ имѣютъ такимъ образомъ слѣдующій видъ:

$$x = a + cx' + dy' \; ; \; y = b + c'x' + d'y'$$

гдѣ коэффиціенты c, d, c', d' имѣютъ извѣстныя величины зависящія отъ угловъ α, p и φ, а A и b суть координаты новаго начала.

Классификація линій.

Для изученія общихъ свойствъ плоскихъ линій, обыкновенно употребляются прямолинейныя координаты. Относительно этой системы линіи раздѣляются на классы слѣдующимъ образомъ. Во-первыхъ, линіи раздѣляются на алгебраическія и трансцендентныя смотря потому, выражаются-ли онѣ алгебраическими или трансцендентными уравненіями.

Уравненіе называется алгебраическимъ въ томъ случаѣ, когда координаты x и y входятъ въ него

только со знаками алгебраических действий, то если одна изъ координатъ входитъ въ уравненіе подъ трансцендентнымъ знакомъ, какъ напримѣръ во видѣ синуса, логарифма и т. д., то уравненіе называется трансцендентнымъ. Алгебраическія уравненія всегда можно представить въ цѣломъ видѣ, уничтоживъ радикалы и знаменателей.

Алгебраическія линіи, смотря по степени ихъ уравненій, раздѣляются на порядки. Линіями перваго порядка называются тѣ, которыя выражаются уравненіями первой степени относительно x и y

$$Ax + By + C = 0.$$

Мы уже доказали что всѣ линіи выражаемыя уравненіями первой степени съ двумя перемѣнными x и y суть прямыя, такъ что, всѣ прямыя — линіи перваго порядка.

Линіями втораго порядка называются тѣ, которыя выражаются общимъ уравненіемъ 2ой степени съ 2мя перемѣнными x и y.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Къ этому порядку принадлежатъ уже разсмотрѣнныя нами кривыя: кругъ, парабола, эллипсъ, гипербола, изъ которыхъ каждая выражается уравненіемъ 2ой степени относительно x и y и слѣдовательно всѣ эти кривыя суть линіи вто-

рого порядка.

Кривыми 3го порядка называются линии представляемыя общим уравнением 3ей степени, которое будетъ:

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + K = 0$$

Вообще кривая $m^{го}$ порядка будетъ кривая представляемая уравнением той же степени между двумя перемѣнными x и y при этомъ надо, чтобы въ уравненіи входилъ по крайней мѣрѣ хотъ одинъ членъ сумма показателей при x и y въ которомъ была бы равна m. Чтобы это дѣленіе кривыхъ на порядки имѣло смыслъ, необходимо, чтобы кривыя сохраняли свой порядокъ въ какихъ бы осяхъ координатъ онѣ не были бы отнесены.

Теорема. Степень уравненія линіи не измѣняется при преобразованіи координатъ.

Положимъ дано уравненіе $m^{ой}$ степени между x и y. Оно представляетъ кривую $m^{го}$ порядка. Вообразимъ, что всѣ члены этого уравненія перенесены въ первую часть, тогда во второй части останется 0; тогда всѣ члены первой части будутъ имѣть видъ Ax^py^q. Здѣсь сумма показателей будетъ или меньше или равна m, т.е $p+q \leqq m$. Сумма подобныхъ членовъ равна 0 или $\Sigma Ax^py^q = 0$. Отнесемъ эту кривую къ новымъ осямъ координатъ x'o'y', чтобы

перейдем отъ старыхъ осей къ новымъ мы уравнимъ прямолинейными формулами.

$$x = a + mx' + ny'$$

$$y = b + m'x' + n'y'$$

Если мы эти формулы внесемъ вместо x и y въ уравнение кривой, то мы получимъ уравнение кривой относительно новыхъ осей координатъ. Это уравнение будетъ:

$$\Sigma A (a + mx' + ny')^p (b + m'x' + n'y')^q = 0.$$

Если мы раскроемъ скобки, сдѣлаемъ указанное умноженіе, то, такъ какъ въ скобкахъ x' и y' входятъ только въ первой степени, отъ умноженія мы не сможемъ получить членовъ степень измѣренія которыхъ была бы выше $p+q$, но такъ какъ $p+q \leqq m$, то слѣдовательно степень новаго уравненія относительно x и y не можетъ быть выше m. Это показываетъ, что при преобразованіи координатъ степень уравненія кривой не можетъ повыситься.

Изъ этого разсужденія слѣдуетъ, что степень уравненія кривой не можетъ и понизиться. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы отъ новыхъ координатъ перешли бы опять къ старымъ, т.е. сдѣлали бы обратное преобразованіе, тогда мы должны бы изъ уравненія втораго получить первое, но если мы допустимъ, что степень уравненія первое ниже, то при обратномъ переходѣ она должна быть

степень уравнения должна повыситься. Но сие сейчасъ только сказано, что при преобразовании координатъ степень уравнения повыситься не можетъ.

Такимъ образомъ преобразованное уравнение должно быть одинаковой степени съ первоначальнымъ.

Порядокъ данной линии показываетъ наибольшее число точекъ пересѣченія этой линіи съ прямою. Дѣйствительно пусть m будетъ порядокъ данной линіи т.е. уравненіе данной линіи представляетъ функцію $m^{\text{го}}$ измѣренія, а уравненіе прямой, какъ извѣстно, есть функція перваго измѣренія; чтобы опредѣлить число точекъ пересѣченія данной линіи съ прямою, нужно исключить эти два уравненія съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ одно $m^{\text{ой}}$ степени, а другое первой степени.

Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно, получается m значеній для x и y, слѣдовательно наибольшее число точекъ пересѣченія будетъ m: понятно что число точекъ пересѣченія можетъ быть меньше m и даже нулю, такъ какъ нѣкоторыя или всѣ значенія x и y могутъ быть мнимыми.

Изъ этого видно, что линіи перваго порядка суть прямыя линіи, потому что онѣ могутъ пересѣкаться прямою только въ одной точкѣ. Линіи втораго порядка могутъ пересѣкаться прямою только въ двухъ

точках; линій третьяго порядка въ трехъ точкахъ и т. д. Такъ какъ кругъ, эллипсъ, гипербола и парабола суть линіи второго порядка, то онѣ могутъ пересѣкаться прямыми въ двухъ точкахъ. Циссоида и конхоида суть третьяго и четвертаго порядка, онѣ могутъ пересѣкаться прямыми въ трехъ и четырехъ точкахъ.

Если говорятъ, что цѣлое алгебраическое уравненіе $m^{ой}$ степени выражаетъ кривую $m^{го}$ порядка, то предполагаютъ, что первая часть не разлагается на произведеніе цѣлыхъ производителей; въ противномъ случаѣ уравненіе (уравненіе) выражало бы двѣ или болѣе число линій низшаго порядка. Такъ напримѣръ уравненіе второй степени, первая часть котораго состоитъ изъ произведенія двухъ цѣлыхъ производителей первой степени, выражаетъ двѣ линіи перваго порядка, т. е. двѣ прямыя. Точно такое уравненіе третьей степени можетъ выражать или три прямыя линіи, или линію второго порядка и одну прямую. Вслѣдствіе этого извѣстныя свойства линій $m^{го}$ порядка относятся также и къ системѣ m прямыхъ, т. е. къ многоугольнику, имѣющему m сторонъ.

Теорія окружности.

Прежде нежели перейдемъ къ изслѣдованію кривыхъ, выражаемыхъ общимъ уравненіемъ второй степени, разсмотримъ уравненіе окружности, которое по простотѣ занимаетъ первое мѣсто послѣ прямой.

Будемъ разсматривать окружность при прямоугольныхъ осяхъ координатъ. Самый общій видъ уравненія окружности при такой системѣ, какъ мы видѣли слѣдующій:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

гдѣ α и β суть координаты центра, а R – радіусъ окружности. Раскрывая скобки получимъ:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Такимъ образомъ, уравненіе окружности въ прямоугольныхъ координатахъ есть уравненіе второй степени, которое не содержитъ произведенія xy перемѣнныхъ и въ которомъ члены x^2 и y^2 имѣютъ одинаковые коэффиціенты.

Сравнивая это (1) уравненіе съ общимъ уравненіемъ второй степени:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

мы найдемъ условіе для того, чтобы это послѣднее выражало окружность. Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ $B=0$ и $C=A$ и затѣмъ раздѣлимъ все ур-іе на A, то получимъ:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

или полагая для краткости $\frac{D}{A} = a$; $\frac{E}{A} = b$ и $\frac{F}{A} = c$

получимъ: $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Это уравненіе имѣетъ видъ совершенно одинаковый съ уравненіемъ (1), а потому это уравненіе есть самый общій видъ уравненія второй степени, которое можетъ представлять окружность. Положимъ теперь, что это уравненіе намъ дано и разсмотримъ дѣйствительно ли оно представляетъ окружность, а если представляетъ то какую именно. Для этого постараемся привести это уравненіе къ виду $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. Для этого перенесемъ с во вторую часть и къ обѣимъ частямъ равенства прибавимъ $\frac{a^2}{4}$ и $\frac{b^2}{4}$ получимъ:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 + by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \quad \text{или}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

Теперь это уравненіе есть прямое уравненіе окружности, у которой $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\frac{b}{2}$ и $R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$ или $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

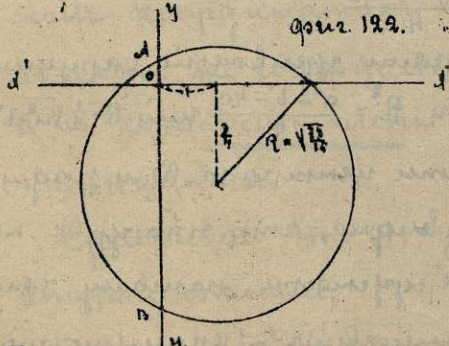
И такъ мы имѣемъ координаты центра (α, β) и радіусъ R окружности; но отсюда уже видно, что это ур-е на всегда будетъ представлять окружность, потому что радіусъ можетъ получиться мнимымъ и окружности не будетъ. Чтобы была окружность необходимо чтобы $a^2+b^2 > 4c$. Можетъ еще случиться, что $a^2 + b^2 = 4c$, тогда $R = 0$ и окружность обратится въ точку. Это уже можно видѣть прямо и изъ ур-ія окружности. Въ самомъ

дробь, имеем наконец $C = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$. Вставляя в уравнение получаем: $x^2 + y^2 + ax + by + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 0$ или $(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = 0$.

Но сумма двух квадратов тогда только равна 0, когда каждое из количеств возводимых в квадрат равно 0, отсюда имеем $x + \frac{a}{2} = 0$ и $y + \frac{b}{2} = 0$, откуда получаем $x = -\frac{a}{2}$ и $y = -\frac{b}{2}$, а эти координаты определяют одну точку.

Из того, что в выражение координат центра не входят постоянные величины, мы можем заключить, что две окружности, которых уравнения отличаются только постоянными величинами, концентричны.

Задача. Построить окружность уравнение которой $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y + 6 = 0$. Приводим это уравнение к общему виду ур-ия окружности т. е. к виду: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. Для этого делим данное уравнение на 2, переносим



фиг. 122.

известный член во вторую часть равенства и к обеим частям равенства прибавляем по $1 + \frac{9}{16}$ получаем:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + 1 + \frac{9}{16}$

или $(x-1)^2 + (y + \frac{3}{4})^2 = \frac{73}{16}$.

Отсюда видим что координаты центра т. е. α и β равняются $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{3}{4}$, а радиус окружности $R = \sqrt{\frac{73}{16}}$. Возьмем оси координат и по этим данным построим окружность.

Пересѣченіе окружности съ прямой.

Иногда при построеніи окружности нужно опредѣлить точки ея пересѣченія съ осями координатъ. Пусть дано уравненіе окружности:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Въ точкахъ пересѣченія съ осью x-въ должны имѣть $y = 0$ слѣдовательно въ этихъ точкахъ: $x^2 + ax + c = 0$ откуда найдемъ x для точки пересѣченія. Если это уравненіе имѣетъ дѣйствительные корни, то получаются двѣ точки пересѣченія, если корни мнимые, то окружность не пересѣкаетъ ось x-овъ, если корни равны, то окружность имѣетъ только одну общую точку съ осью x-въ т.е. она касательна оси x-въ. Для точки пересѣченія съ осью ординатъ должны имѣть $x=0$ и уравненіе приметъ видъ $y^2 + by + c = 0$. Отсюда найдемъ y для этихъ точекъ. Возьмемъ предыдущій примѣръ (фиг. 129) Для пересѣченія съ осью ординатъ должны имѣть $x=0$ и стало быть $9y^2 + 3y - 6 = 0$ или $y^2 + \frac{3}{9}y - 3 = 0$ откуда

$$y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 3} \quad \text{или} \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4}.$$

Отложимъ на чертежѣ эти точки A и B, будемъ имѣть $AO = \frac{-3+\sqrt{57}}{4}$ и $BO = \frac{-3-\sqrt{57}}{4}$

Одномалѣ общее замѣчаніе объ опредѣленіи точки

пересечения окружности съ данной прямой линией. Положимъ, что дана окружность уравненіе которой

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

и прямая линія $Ax + By + C = 0$

требуется найти точки ихъ пересѣченія. Точка пересѣченія лежитъ въ одно и тоже время на окружности и на прямой, слѣдовательно ея координаты удовлетворяютъ и уравненію окружности и уравненію прямой и чтобы ихъ найти, стоитъ только рѣшить эти два уравненія, разсматривая ихъ x и y какъ неизвѣстныя.

Изъ уравненія прямой имѣемъ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это выраженіе нужно вставить въ уравненіе окружности, тогда получится уравненіе съ одной неизвѣстной x. Уравненіе это очевидно (брать) квадратное. Пусть оно имѣетъ видъ $Mx^2 + Nx + P = 0$, гдѣ M, N и P извѣстны. Рѣшивъ это уравненіе мы получимъ для x два значенія $x = x'$ и $x = x''$. Этимъ двумъ значеніямъ будутъ соотвѣтствовать два значенія y на

$$y' = -\frac{A}{B}x' - \frac{C}{B} \quad \text{и} \quad y'' = -\frac{A}{B}x'' - \frac{C}{B}$$

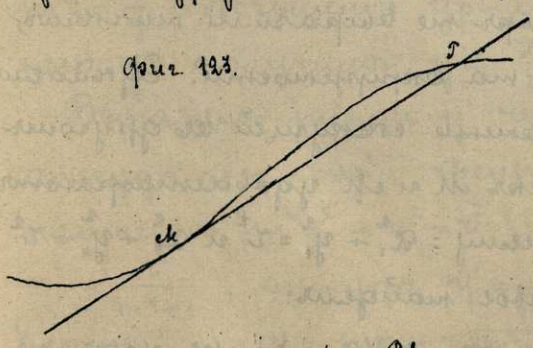
И мы будемъ имѣть двѣ точки пересѣченія, одну (x', y'), другую (x'', y''). Эти точки будутъ дѣйствительными только тогда, когда x' и x'' дѣйствительны. Если x', x'' мнимы, то это значитъ, что прямая не пересѣкаетъ окружности. Можетъ случиться

что $x' = x''$, тогда и $y' = y''$ и получится одна точка. Это значит что окружность касается прямой, ибо они имеют одну общую точку.

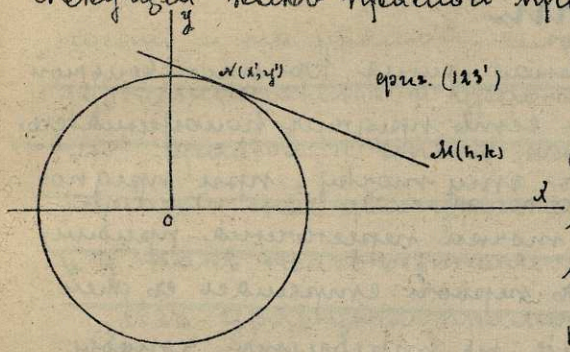
Касательная линія къ окружности.

Опредѣленіе. Касательная линія къ произвольной кривой въ данной точкѣ есть предѣлъ положенія сѣкущей, проходящей черезъ эту точку, при предположеніи, что другая ея точка пересѣченія приближается неопредѣленно къ первой стремясь съ ней совпасть. Это опредѣленіе не требуетъ чтобы касательная линія имѣла съ кривой только одну общую точку. Если кривая линія предполагаетъ изгибы, то касательная къ кривой въ одной точкѣ будучи продолжена можетъ пересѣчь кривую въ другой точкѣ (фиг. 193). Руководствуясь принятымъ опредѣленіемъ, составимъ уравненіе касательной къ окружности въ данной точкѣ. Возьмемъ окружность центръ которой въ началѣ координатъ (фиг. 194.) Ур-іе ея дано $x^2 + y^2 = r^2$. Дана на окружности точка M, координаты которой (x', y')

фиг. 193.



Проведем в этой точке касательную. Требуется составить ее уравнение. Вообразим, что через точку M проходит секущая MN. Эта секущая пересекает окружность в другой точке M'. Координаты этой точки обозначим через (x'', y''). Уравнение секущей как прямой проходящей через две данные точки будет:



$$y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$$

Если предположить, что точка M' перемещаясь по окружности, совпадет наконец с точкой M, то секущая обратится в касательную и тогда будем иметь: $x''=x'$ и $y''=y'$.

При этом дробь правой части, т.е. $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ равняется $0/0$, следовательно прямо нельзя перейти от уравнения секущей к ур-ию касательной. Это потому, что мы до сих пор не выразили точно, что точка M' находится на окружности. Сделаем это и представим уравнение секущей в другом виде. Координаты точек M и M' удовлетворяют ур-ию окружности, а потому: $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ и $x_2^2 + y_2^2 = r^2$

Вычитая из второго первое найдем:

$$x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0 \text{ или } (x_2-x_1)(x_2+x_1) + (y_2-y_1)(y_2+y_1) = 0$$

$$(x_2-x_1)(x_2+x_1) = -(y_2-y_1)(y_2+y_1) \text{ откуда } \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$$

Теперь это уравнение секущей можно написать в таком виде: $y'' - y' = -\frac{x''+x'}{y''+y'}(x-x')$

Чтобы от этого ур-ия перейти к ур-ию касательной, предположим, что точка M' совпадает с M, т.е. сделаем $x''=x'$ и $y''=y'$ тогда будем иметь ур-ие касательной в таком виде:

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x-x')$$

Это уравнение можно представить в другом более простом виде, помножив его на y'; тогда будем иметь $yy' - y_1^2 = -xx' - x^2$ или $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$ но $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ и ур-ие касательной примет вид

$$\underline{xx' + yy' = r^2.}$$

Уравнение касательной к окружности, выраженное по tg' су угла образованного ею со осью абсцисс.

Пусть этот угол есть α и положим, что $\operatorname{tg}\alpha = m$ Из первого ур-ия касательной мы видим, что $m = -\frac{x'}{y'}$. Возьмем ур-ие касательной выведем из него y, получим $y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'}$ или $y = mx + \frac{r^2}{y'}$

Выразим теперь y' через m, мы имеем $-\frac{x'}{y'} = m$ откуда $x' = -my'$; сверх того $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ вставляя получаем $m^2y_1^2 + y_1^2 = r^2$ или $y_1^2(m^2+1) = r^2$ или $y_1^2 = \frac{r^2}{m^2+1}$, откуда $y' = \frac{r}{\sqrt{m^2+1}}$ и ур-ие касательной будет $y = mx + r\sqrt{m^2+1}$.

Это и есть искомое уравнение. Докажем что каса-

Касательная к окружности имеет одну общую точку. Возьмем ур-ие круга $x^2+y^2=r^2$ и ур-ие касательной

$$xx_1+yy_1=r^2$$

Координаты точки взятой на окружности суть (x', y'). Будем искать координаты точек пересечения этой прямой с окружностью. Для этого, как мы знаем, нужно эти два уравнения решить относительно x и y. Сделаем это. Из 2го ур-ия имеем:

$$y=-\frac{x'}{y'}x+\frac{r^2}{y'}$$

Вставив в значение для y во первое ур-ие найдем

$$x^2+\frac{x'^2}{y'^2}x^2-\frac{2r^2x'x}{y'^2}+\frac{r^4}{y'^2}=r^2$$

Умножив на знаменатель и вынув x^2 за скобки найдем: $(y'^2+x'^2)x^2+2r^2xx_1+r^4-r^2y'^2=0$ но так как $y'^2+x'^2=r^2$, то получаем $r^2x^2-2r^2xx_1+r^2(r^2-y'^2)=0$ сократив на r^2 и заметив, что $r^2=y'^2+x'^2$ откуда $r^2-y'^2=x'^2$; получим $x^2-2xx'+x'^2=0$ или $(x-x')^2=0$. Отсюда одно решение $x=x'$ и $y=-\frac{x'^2}{y'}+\frac{r^2}{y'}=\frac{r^2-x'^2}{y'}$ или $y=\frac{y'^2}{y'}=y'$. Получилась одна общая точка. Это требовалось доказать.

Задача. Провести касательную к окружности из данной точки.

Положим что центр окружности находится (фиг.) в начале координат. Имеем ур-ие окружности

$$x^2+y^2=r^2$$

Пусть координаты данной точки будут (h, k).

Воображаем что касательная проведена. Координаты неизвестной нам точки касания отмечаем через (x', y'). Нам нужно будет найти эти координаты. Уравнение касательной линии ва этой точке должно иметь вид: $xx' + yy' = r^2$.

Эта прямая по условию проходит через данную точку (h, k) и координаты h и k должны удовлетворять этому ур-ию. Вставив найдем:

$$x'h + y'k = r^2 \text{ или } hx' + ky' = r^2$$

В этом уравнении 2 неизвестных x' и y'. Надо найти еще одно уравнение с тими же неизвестными. Для этого замечаем, что точка (x', y') лежит на окружности, а потому имеем $x'^2 + y'^2 = r^2$. Остается для определения x' и y' решить эти два уравнения относительно x' и y'. Из 1-го имеем:

$$y' = \frac{r^2 - hx'}{k}$$

Вставив во второе получим:

$$x'^2 + \frac{r^4 - 2r^2x'h + h^2x'^2}{k^2} = r^2$$

Или умножая знаменатель

$$k^2x'^2 + r^4 - 2r^2x'h + h^2x'^2 = k^2r^2 \text{ откуда после упро-}$$

щений $$x' = \frac{r^2h \pm (\sqrt{h^2 + k^2 - r^2})rk}{h^2 + k^2}$$

Ордината y' найдется по формуле

$$y' = \frac{r^2 - hx'}{k} = -\frac{h}{k}x' + \frac{r^2}{k}$$

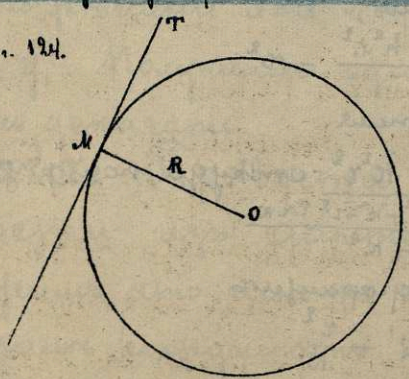
Решение найденное нами для x может оказаться мнимым. Это будет тогда, когда $k^2 + h^2 < r^2$. Сра-

ливается какое геометрическое значение соответствует этому случаю? Рассматривать расстояние точки из которой проводится касательная до начала координат т.е. радиус вектор точки касания. Обозначим его через δ. Известно что $\delta^2 = h^2 + k^2$.
Следовательно d, будет минимум тогда, когда $h^2 + k^2 < r^2$, т.е. когда $\delta^2 < r^2$ или $\delta < r$, т.е. когда данная точка находится внутри круга. Если же $h^2 + k^2 = r^2$ тогда будет одно только решение и одна касательная; это потому что в этом случае $\delta^2 = r^2$ или $\delta = r$ и точка находится на окружности; через такую точку можно провести только одну касательную.

Нормальная линия к окружности.

Нормальной линией к какой либо кривой называется прямая проходящая через точку прикосновения и перпендикулярная к касательной. Составим ур-ие

фиг. 124.



нормальной линии к окружности. Ур-ие этой линии как прямой проходящей через данную точку будет

$$y - y' = m'(x - x').$$

m' есть неизвестный пока tg-с угла наклонения прямой к оси x'-в; по условию перпендикулярности этой прямой к касательной должно $mm' + 1 = 0$; отсюда

$m' = -\frac{1}{m}$, но $m = -\frac{x'}{y'}$, следовательно $m' = +\frac{y'}{x'}$ и ур-ie нормальной линии будет:

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$$

упрощая его $x'y - x'y' = y'x - x'y'$ получим

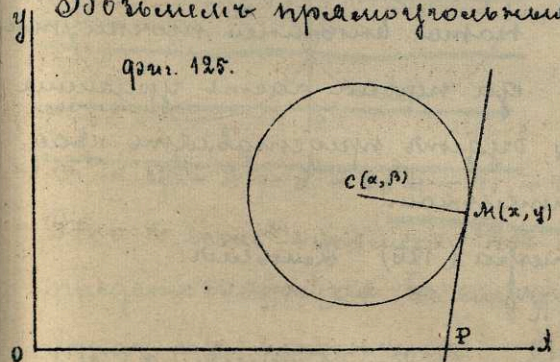
$$y = \frac{y'}{x'}x.$$

Это и есть уравнение нормальной. Из этого уравнения видно, что нормальная линия перпендикулярна к окружности и проходит через начало координат, следовательно она есть радиус окружности. Мы доказали таким образом, что касательная линия перпендикулярна к радиусу проведенному в точке касания.

Задача. Составить ур-ie касательной к окружности, которой центр не находится во начале координат.

Возьмем прямоугольные оси координат (фиг. 125.)

фиг. 125.



на окружности точку M, координаты которой (x', y'). Проведем радиус и касательную. Ур-ie окружности будет:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Прежде всего ур-ie касательной получится рассматривая ее как прямую перпендикулярную к радиусу проведенному во точку касания. Уравнение радиуса CM, как прямой проходящей через две точки будет $y - \beta = \frac{y'-\beta}{x'-\alpha}(x-\alpha)$ tg'-ся угла

наклонения этой прямой к оси x'ов будет

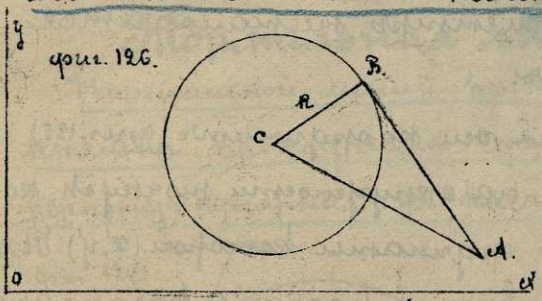
$$m' = \frac{y'-\beta}{x'-\alpha}$$

Ур-ие касательной, как прямой проходящей через данную точку будет $y - y' = m(x - x')$

но по условию перпендикулярности имеем: $m \cdot m' + 1 = 0$, откуда $m = -\frac{1}{m'} = -\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}$ и ур-ие касательной будет: $y - y' = -\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}(x - x')$.

Радиальная ось двух окружностей

Когда дано ур-ие окружности, то весьма легко определить длины касательных проведенных к окружности из внешней точки стоит только вставить в ур-ие



окружности вместо текущих координат, координаты внешней точки, тогда первая часть уравнения будет представлять квадрат длины искомой касательной.

Действительно из чертежа (126) имеем:

$$AB^2 = AC^2 - R^2$$

Если назовем координаты точки A через (x', y') а координаты центра C через (α, β), то:

$$AC^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2$$ следовательно

$$AB^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 - R^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Это и требовалось доказать. Пользуясь формулой (1)

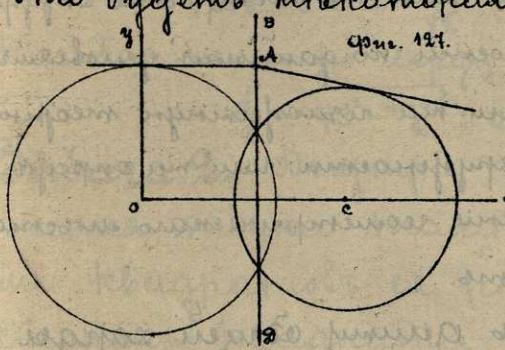
очень просто можно определить множество точек обладающих тем свойством, что касательныя проведенныя изъ нихъ къ двумъ данным окружностям равны между собою. Пусть ур-ія окружностей будутъ:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0 \quad \text{и}$$
$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-R_1^2=0$$

На основаніи сказаннаго уравненіе искомаго мѣста будетъ:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-R_1^2$$

Это будетъ нѣкоторая прямая либо квадраты координатъ сокращаются.



фиг. 127.

Въ частномъ случаѣ когда ось y'-овъ проходитъ черезъ центръ O, а ось x-въ черезъ центръ Q (фиг. 127), то тогда $\alpha=\beta=\beta_1=0$. Найдемъ

$$x^2+y^2-R^2=x^2-2x\alpha_1+\alpha_1^2+y^2-R_1^2; \quad x=\frac{R^2+\alpha_1^2-R_1^2}{2\alpha_1}$$

Это и есть прямая DB перпендикулярная къ ox представляющая въ случаѣ пересѣченія окружности хорду ихъ пересѣченія. Эта прямая называется радіальной осью двухъ окружностей.

Теорема. Радіальныя оси трехъ окружностей пересѣкаются въ одной точкѣ.

Начертимъ (чер 128) для сокращенія, ур-ія трехъ дан:

пары окружностей в виде:

$$c = 0; \quad c_1 = 0 \quad и \quad c_2 = 0.$$

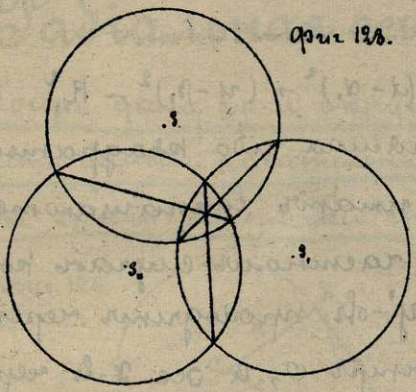
ур-ия их радикальных осей:

$$c_1 - c = 0, \quad c_2 - c_1 = 0 \quad и \quad c - c_2 = 0.$$

Эти три прямые линии пересекаются в одной точке, потому, что имеется тождество:

$$(c_1 - c) + (c_2 - c_1) + (c - c_2) = 0.$$

Задачи на теорию окружности.



фиг. 128.

Задачи на теорию окружности могут быть предложены или на построение окружности по данным условиям или на изложение теорию окружности или на определение геометрического места, представляющего окружность.

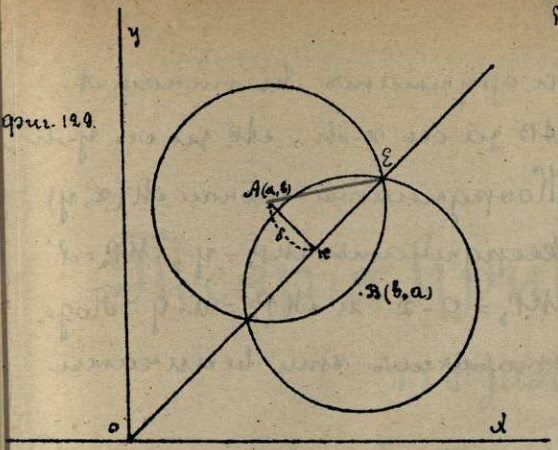
Задача 1. Определить длину общей хорды двух окружностей, выражаемых ур-иями.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \quad и \quad (x-b)^2 + (y-a)^2 = c^2 ?$$

Из данных уравнений следует, что радиусы окружностей одинаковы, а координаты центров имеют обратный порядок. Составим прежде ур-ие радикальной оси:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - (x-b)^2 - (y-a)^2 = 0$$

или $2x(b-a) + 2y(a-b) = 0$ или



фиг. 129.

$x - y = 0 \ldots (1)$ Отсюда следует, что радикальная ось проходит через центры данных окружностей. Далее определим длину перпендикуляра δ, опущенного из центра окружности (a, b) на прямую (1). Для этого (фиг. 129) приводим ур-ие прямой к нормальной форме, для чего на $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ и подставляем $x = a$; $y = b$, получим:

$$AK = \delta = \pm \frac{a-b}{\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \delta^2 = \frac{(a-b)^2}{2}$$

Называя искомую хорду через d, найдем из тр-ка AEK

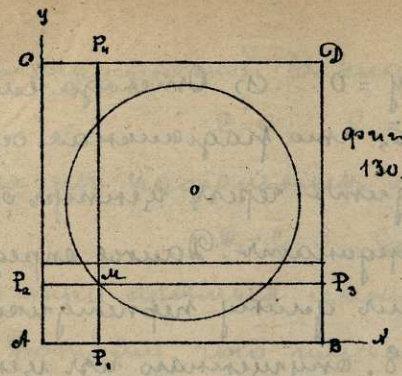
$$\frac{d}{2} = \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{2}}; \text{ откуда } d = \sqrt{4c^2 - 2(a-b)^2}$$

Задача 2. Внутри данного квадрата движется точка таким образом, что сумма квадратов ея разстояний отъ четырех сторонъ квадрата сохраняетъ постоянную величину. Найти кривую описываемую точкой?

Положимъ (фиг. 130) $AB = a$. Пусть точка M обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма квадратовъ ея разстояній отъ сторонъ квадрата равняется постоянной величинѣ m. е.

$$MP_1^2 + MP_2^2 + MP_3^2 + MP_4^2 = m^2$$

гдѣ m^2 есть постоянная величина. Примемъ начало



фиг. 130.

координаты въ точкѣ A AB за ось x-овъ, AC за ось y-овъ. Координаты точки $M(x, y)$ координаты $MP_1 = y$, $MP_2 = x$ $MP_3 = a - x$ и $MP_4 = a - y$. Подставляемъ эти величины въ предыдущее уравненіе:

$$y^2 + x^2 + (a-x)^2 + (a-y)^2 = m^2$$

Это и есть искомое ур-іе геометрическаго мѣста. Раскрывъ скобки получимъ:

$$2x^2 + 2y^2 + 2a^2 - 2ax - 2ay - m^2 = 0$$

или $$x^2 + y^2 + a^2 - ax - ay - \frac{m^2}{2} = 0.$$

Изъ этого уравненія видимъ, что геометрическое мѣсто будетъ окружность. Если его сравнимъ съ общимъ уравненіемъ окружности:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

или раскрывая скобки

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$$

то будемъ имѣть $2\alpha = a$ и $2\beta = a$, откуда $\alpha = \frac{a}{2}$ и $\beta = \frac{a}{2}$ Слѣдовательно центръ его находится въ центрѣ квадрата.-

Конецъ 1 части.

Теорія кривыхъ втораго порядка.

Построеніе общаго уравненія кривыхъ втораго порядка.

Возьмемъ общее уравненіе второй степени съ двумя перемѣнными:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Прежде чѣмъ изслѣдовать виды кривыхъ, представляемыхъ этимъ уравненіемъ, сдѣлаемъ одно замѣчаніе, которое до извѣстной степени обусловливаетъ ихъ форму: произвольная прямая можетъ пересѣчь кривую втораго порядка не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ.

Возьмемъ произвольную прямую; пусть ея ур-іе будетъ:

$$y = ax + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Координаты точекъ пересѣченія этой прямой съ кривой втораго порядка должны удовлетворять и первому и второму уравненію, а потому, чтобы найти эти координаты, нужно рѣшить эти уравненія, принимая x и y за неизвѣстныя. Возьмемъ y изъ второго уравненія и вставимъ въ первое. Тогда получимъ:

$$Ax^2 + Bx(ax+b) + C(ax+b)^2 - Dx + E(ax+b) + F = 0.$$

Раскрывая скобки, мы получим квадратное уравнение относительно x, общий вид которого будет:

$$Mx^2 + Nx + P = 0.$$

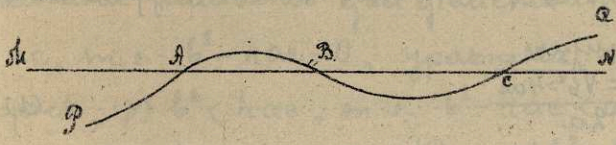
Это уравнение, как всякое квадратное, может иметь не более двух корней x_1 и x_2. Если эти корни действительные, то для каждого из них получим соответствующую величину y, а именно из уравнения (2) имеем $y_1 = ax_1 + b$ и $y_2 = ax_2 + b$.

Таким образом найдутся точки пересечения прямой с кривой второго порядка, координаты одной (x_1, y_1) а другой (x_2, y_2). Очевидно, что, кроме двух найденных точек, другие точки пересечения не могут быть найдены, ибо квадратное уравнение не дает более двух корней. Но может случиться, что два корня будут равны, так что $x_1 = x_2$. В таком случае $y_1 = y_2$ и обе точки пересечения сливаются во одну, следовательно в этом случае прямая с кривой имеют только одну общую точку, т. е. она касательна к кривой. Если корни мнимые, то и y_1 и y_2 тоже мнимые и прямая не пересекает кривой. Из сказанного выводим следствие: всякая кривая второго порядка суть выпуклая или вогнутая т. е. не имеет изгибов.

Действительно, если бы кривая имела изгиб, то

всегда можно было бы провести такую прямую, которая пересекала бы кривую по крайней мере в трех точках. Представимся кривую Pa (фиг. 125.) съ линіей; она пересѣчется прямою MN въ точкахъ A, B и C. Слѣдовательно, кривая второго порядка въ своемъ теченіи идетъ, изгибаясь всегда въ одну сторону и пересѣкается прямою линіей не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ. Это замѣчаніе опредѣляетъ до нѣкоторой степени форму кривой.

• фиг. 125.



Обратимся теперь къ построенію общаго уравненія кривыхъ второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

При этомъ построеніи можно брать оси и косоугольныя и прямоугольныя. Для общности возьмемъ оси косоугольныя. Въ нашемъ общемъ уравненіи коэффиціенты A, B, C.... суть величины произвольныя, положительныя или отрицательныя, но въ частности они могутъ быть равными и нулю, за исключеніемъ того случая когда $A=0$, $B=0$ и $C=0$. Положимъ, что коэффиціентъ C не равенъ нулю, тогда уравненіе относительно y будетъ квадратнымъ.

Рѣшая его относительно y получимъ

I уравнений второй степени съ одним неизвѣстнымъ общій видъ имѣетъ:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Припомнимъ принятую нами терминологію для такого уравненія: количества a, b и c называются коэффиціентами уравненія, изъ нихъ a и c называются крайними коэффиціентами, а b среднимъ коэффиціентомъ. Какъ извѣстно, рѣшеніе такого уравненія получается въ формулѣ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

допускающей упрощеніе въ томъ случаѣ, когда средній коэффиціентъ b есть число, кратное 2, т. е. $b = 2\beta$. тогда имѣемъ:

$$x = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2-4ac}}{2a} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4(\beta^2-ac)}}{2a} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2-ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2-ac}}{a}$$

Такимъ образомъ неизвѣстное въ этомъ уравненіи равно половинѣ средняго коэффиціента, взятаго съ обратнымъ знакомъ, $\pm$ корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ произведенія крайнихъ коэффиціентовъ, дѣленное все на первый коэффиціентъ.

II Обратимъ теперь вниманіе на особую форму, въ которую можно обратить первую часть уравненія.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

прибавляя и вычитая $\frac{b^2}{4a^2}$ изъ выраженія въ скобкахъ.

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Из последних двух видов особенно удобно представлять первую часть уравнения для облегчения его исследования. Возвращаемся к равенству (1), из него видим что корни уравнения зависят от подкоренного выражения (b^2-4ac)

Известно, что когда: 1) $b^2>4ac$, т.е. $b^2-4ac>0$, то уравнение имеет два действительных корня; 2) $b^2=4ac$, т.е. $b^2-4ac=0$, уравнение имеет два равных корня; 3) $b^2<4ac$, т.е. $b^2-4ac<0$, уравнение имеет два мнимых корня. Когда $b^2>4ac$, первая часть уравнения разлагается на два действительных множителя 1-ой степени относительно x, именно ур-ние (1) имеет:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] =$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \quad (II)$$

приравнивая это выражение 0 (ибо $ax^2+bx+c=0$) и зная, что a отлично от нуля, необходимо будем иметь:

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad \text{и} \quad x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0.$$

откуда получаются два действительные корня

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_{II}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

и тогда равенство (II) примет вид

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_{II}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

Когда же $b^2-4ac=0$ то имеем два равных корня, и

именно $x_1 = x_{11} = -\frac{b}{2a}$

Наконец когда $b^2 < 4ac$, разлагаем первую часть так:

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

отсюда получим:

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{4ac - b^2}{4a^2})(-1)\right] =$$

$$a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i\right) \ldots\ldots (IV)$$

Приравнивая это выражение нулю, находим два мнимо-сопряженных корня.

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i \quad \text{и} \quad x_{11} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i;$$

Теперь обратимся к общему уравнению кривых второго порядка. Располагая наше уравнение по степеням y и решая относительно y, получим последовательно:

$$Cy^2 + (Bx + E)y + (Ax^2 + Dx + F) = 0, \quad y = \frac{-(Bx + E)}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(Bx + E)^2 + 4c(Ax^2 + \ldots}$$

Выражение под корнем располагаем по степеням x

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(B^2 - 4ac)x^2 + 2(BE - 2cD)x + (E^2 - 4cF)} \ldots\ldots (1)$$

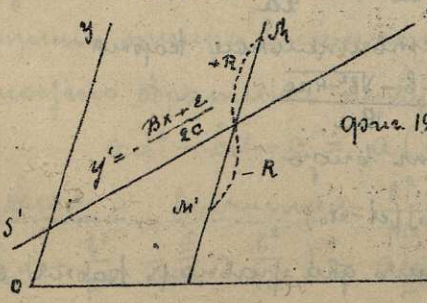
Для упрощения введем сокращенные обозначения, именно:

$$B^2 - 4ac = M; \quad BE - 2CD = N \quad \text{и} \quad E^2 - 4CF = P.$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Полагая $\frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} = R$, получим $y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm R$



Фиг. 126.

Сравнить это уравнение с другим, которое получим, отнеся R, и которое будет иметь вид $y' = -\frac{Bx + E}{2c}$; если в этом

уравнении вместо x и y' за текущия координаты, то это уравнение, будучи первой степени, представляетъ прямую $y' = -\frac{B}{2c}x + \frac{\varepsilon}{2c}$ (фиг. 126.) Построимъ эту прямую, пусть она будетъ SS_1. Разница ординатъ нашей кривой съ ординатами полученной прямой, мы замѣтимъ, что при одной и той же абсциссѣ x, имѣемъ:

$$y = y' \pm R.$$

Это уравнение показываетъ, что ординату y кривой легко найти по ординатѣ y' прямой. Возьмемъ $OP = x$, проведемъ черезъ точку P параллель оси y'овъ, пусть эта параллель встрѣтитъ прямую SS' въ точкѣ C, тогда $PC = y'$. Прибавимъ къ ординатѣ y' величину R, вычисленную для того же значения $x = OP$, и вычтемъ ее изъ y', получимъ двѣ точки кривой M и M' такъ что $CM = CM' = R$. Тогда очевидно, что $MP = y' + R$ и $M'P = y' - R = y$. Слѣдовательно точки M и M' принадлежатъ нашей кривой. Такимъ образомъ точки кривой будутъ получаться, когда къ ординатѣ y' будемъ прибавлять или отнимать R. Слѣдовательно всякому значению x соотвѣтствуетъ два значения y т. е. по данному значению x находимъ двѣ точки кривой.

Линия MM', соединяющая двѣ точки кривой, есть хорда этой кривой, эта хорда параллельна оси ординатъ. Прямая SS_1 дѣлитъ эту хорду въ точкѣ C пополамъ; отсюда вытекаетъ слѣдующее свойство

этой прямой: она делит пополам весь хорды кривой, параллельные оси ординат. Прямая, обладающая таким свойством называется диаметром кривой. Следовательно прямая SS' есть диаметр, делящий все хорды, параллельные оси ординат, пополам, иначе говоря, что есть диаметр кривой, сопряженный хордам, параллельн. оси y'ков.

Итак мы видим, что форма кривой зависит от величины K. Займемся исследованием этой величины. Впоследствии мы увидим, что вид кривой, главным образом зависит от знака, сопровождающего коэффициент при неизвестной во второй степени, т. е. при x^2; иначе говоря вид кривой зависит от знака двучлена:

$$M = B^2 - 4AC$$

поэтому и исследование распадается на три случая:

1). Когда $M = B^2 - 4AC < 0$ или $B^2 < 4AC$. В этом случае получается группа кривых, называемых эллипсами.

2). Когда $M = B^2 - 4AC > 0$ или $B^2 > 4AC$. В этом случае получается группа кривых называемых гиперболами.

3.) Когда $M = B^2 - 4AC = 0$ или $B^2 = 4AC$. В этом случае получается группа кривых, называемых параболами.

Группа эллипсов.

Положимъ $M = B^2 - HE < 0$. Для удобства изслѣдованія выраженія: $R = \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$,

гдѣ $M = B^2 - HE$; $N = BE - 2CD$ и $P = E^2 - 4CF$, преобразуемъ подкоренной трехчленъ по извѣстному правилу въ произведеніе двухъ разностей; именно, полагая:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0$$

и рѣшая это квадратное уравненіе по сокращенной формулѣ для случая, когда средній коэффиціентъ кратенъ 2, получимъ:

I $N^2 - MP > 0$ $$x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$$

Найдемъ два корня уравненія, меньшій изъ нихъ обозначимъ черезъ x_1, большій черезъ x_2, такъ что $x_1 < x_2$. По выведенной формулѣ имѣемъ:

$$Mx^2 + 2Nx + P = M(x - x_1)(x - x_2)$$

слѣдовательно можемъ написать

$$R = \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} = \frac{1}{2c}\sqrt{M(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{2c}\sqrt{-M(x - x_1)(x_2 - x)} =$$

$$= \frac{\sqrt{-M}}{2c}\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}.$$

Такъ какъ по условію $M < 0$, т. е. отрицательно, то $\sqrt{-M}$ есть количество дѣйствительное. Изслѣдуя выраженіе

$$R = \frac{\sqrt{-M}}{2c}\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}$$

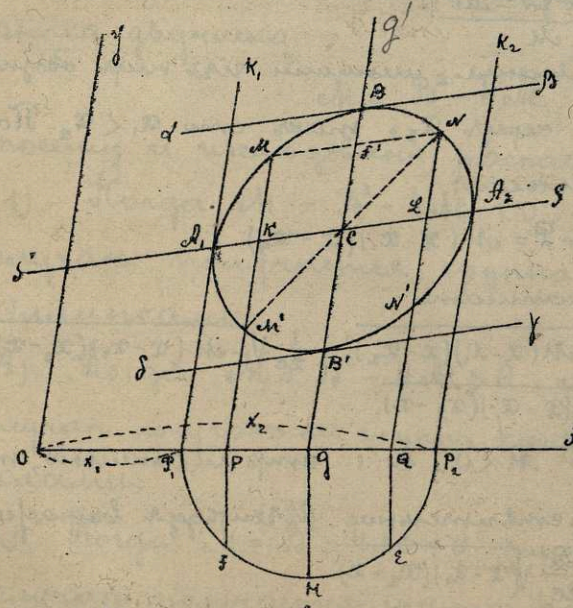
съ геометрической точки зрѣнія, нужно прежде всего опредѣлить предѣлы измѣненія перемѣнной абсциссы

x, въ которомъ R есть количество дѣйствительное. Во первыхъ, положимъ $x = x_1$. Въ такомъ случаѣ $R = 0$. Въ геометрическомъ смыслѣ это указываетъ на то, что такой абсциссѣ соотвѣтствуетъ одна точка кривой, находящаяся на ея діаметрѣ, сопряженномъ оси у'ковъ. Дѣйствительно, если привести общее уравненіе кривыхъ второго порядка къ виду.

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm R$$

или строя сопряженный оси у'ковъ діаметръ по уравненію $y' = -\frac{Bx + E}{2C}$, окончательно имѣемъ $y = y' \pm R \cdots (a)$ гдѣ y' означаетъ текущую ординату діаметра SS',

фиг. 127.



Соотвѣтствующую различнымъ значеніямъ абсциссы x ординату этихъ значеній x'са, какъ и y.

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $R = 0$, то имѣемъ: $y = y'_1 = P_1A_1$. Такимъ образомъ дуга P_1K_1 (фиг. 127.) имѣетъ съ кривой одну общую точку, слѣдовательно въ силу разсужденія, приведеннаго въ изслѣдованіи вопроса о точкахъ пересѣченія прямой

с кривой второго порядка, эта хорда будет касательной к кривой в точке $A_1(x_1, y_1')$

Теперь положим $x = x_2$, опять $R = 0$. Пусть соответствующее этому значению x'са значение y'-ка будет y_2' (на чертеже A_2P_2, если $OP_2 = x_2$ и $P_2K_2 \parallel Oy$) По формуле же (d) получим в этом случае $y = y_2'$, что снова указывает, что хорда P_2K_2 имеет с кривой одну общую точку $A_2(x_2, y_2')$ и в силу тех же рассуждений, как и в первом случае, видим, что хорда P_2K_2 будет касательной к кривой в точке A_2.

Чтобы R, а следовательно и y, были действительны, x не должно быть менее x_1, ибо если $x < x_1$ и принять еще во внимание условие $x_1 < x_2$, видим, что подкоренное выражение: $(x - x_1)(x_2 - x)$ будет отрицательно. Также x не должно быть более x_2, потому что подкоренное выражение опять будет отрицательно, т. е. R а следовательно и y, будут мнимы. Таким образом x должно быть более x_1 (меньшего корня уравнения: $Mx^2 + 2Nx + P = 0$) или менее x_2 (большого корня):

$$x_1 < x < x_2$$

Геометрически это означает, что вся искомая кривая находится между касательными к ней прямыми P_1K_1 и P_2K_2, параллельными оси y'ков.

Будем теперь строить кривую, как обыкновенно, по точкам. Как мы видели, это сводится к построению

$$R = \frac{\sqrt{-M}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x_n-x)}$$

рач удре построенъ діаметръ SS' по уравненію $y' = -\frac{Bd+E}{2c}$

Выраженіе $\frac{\sqrt{-M}}{2c}$ есть величина постоянная и предста-вляетъ собою числовой коэффиціентъ при ирраціональномъ множителѣ: $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, который и надо будетъ строить непосредственно. Мы видимъ, что этотъ множи-тель представляетъ среднюю пропорціональную между линіями:

$$(x-x_1) \quad \text{и} \quad (x_2-x)$$

Приложимъ къ построенію теорему о перпендикуля-рѣ, опущенномъ на діаметръ изъ точки, взятой на окружности, которой, какъ извѣстно, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра, слѣдо-вательно самый діаметръ будетъ равенъ суммѣ этихъ отрѣзковъ, т. е:

$$\mathfrak{D} = (x-x_1) + (x_2-x) = x_2 - x_1$$

На чертежѣ этотъ діаметръ равенъ линіи P_1P_2. Такимъ образомъ, если на P_1P_2, какъ на діаметрѣ, построимъ изъ центра $\mathfrak{g}$ окружность, и будемъ проводить въ ней всевозможныя линіи перпендикулярно P_1P_2, то эти ли-нія будутъ выражать различныя величины ирраціональ-наго множителя $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$; соотвѣтствующія вели-чинамъ x, выражаемымъ отрѣзками оси абсциссъ отъ на-чала координатъ до основанія соотвѣтствующей хорды. Такъ $PF \perp P_1P_2$ выражаетъ линейный множитель

$\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$ при $x = OP$. Для построения соответствующих такому x точек кривой, проводим через точку P параллель оси y'ков и по этой параллели от точки K пересечения этой параллели с диаметром SS' откладываем в обе стороны по $R = \frac{\sqrt{-M}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$ т. е. откладываем найденный линейный множитель $PF = \sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, увеличенный или уменьшенный в отношении $\frac{\sqrt{-M}}{2c}$. Итак откладывая $MK = M_1K = \frac{\sqrt{-M}}{2c}\cdot PF$, получим две точки искомой кривой, именно M и M_1. Таким же образом строим точки кривой, постепенно перемещая точку P от P_1 к P_2. При таком перемещении форда кривой образуется для точки P_1 в A_1, представляет затем конечную величину, постепенно увеличивается; наибольшей величины она достигает, когда точка P разделит пополам прямую P_1P_2 в точке Q, потому что в этом случае линейный множитель выражения R равняется половине наибольшей из форд окружности, т. е половине его диаметра. При дальнейшем перемещении точки P_1 к P_2 хорда кривой будет постепенно уменьшаться и, когда точка P совпадет с P_2, хорда обратится в точку A_2. Из этого видно, что исследуемая кривая есть кривая овальная. Исследуем свойства некоторых точек и прямых в этой кривой. Как мы видели наибольшая форда BB_1 кривой соответствует абсциссе

$x = Oq$, при условии, что $P_1q = P_2q$. Если проведем через точки B и B_1 параллели диаметру SS_1, то все точки кривой будут расположены между этими параллелями. Мы назовем такими образом параллелограмм $\alpha\beta\gamma\delta$, внутри которого будут расположены все точки нашей кривой. Отметим точку C пересечения хорды BB' с диаметром SS_1. Теперь возьмем точку Q так, чтобы $QP_2 = PP_1$. Отрезки соответствующие абсциссе OQ точки кривой N и N_1. Из условия $QP_2 = PP_1$ и из геометрического способа построения точек кривой заключаем, что $\angle N = \angle N_1 = \frac{\sqrt{-M}}{2c} QE$, но $\frac{\sqrt{-M}}{2c} QE = \frac{\sqrt{-K}}{2c} PF$ ибо $QE = PF$, как хорды круга равноудаленные от центра, отсюда следует что $\angle N = \angle N_1 = KM = KM_1$. Соединим теперь точку M_1 с C и точку N с Q. Рассмотрим между собою треугольники M_1KC и NLC; и заметим, что $M_1K = NL$; из трапеции $PKLQ$ имеем $KC = CL$, так как $Pq = Qq$ и $qC \parallel PK$, а из того что $MP \parallel NQ$, заключаем $\angle M_1KC = \angle NLC$. Следовательно треугольники M_1KC и NLC равны между собою, так как они опираются по равному углу, заключенному между соответственно равными сторонами. Из равенства треугольников следует, что $\angle KCM_1 = \angle LCN$ и так как KL есть прямая, то и NCM_1 есть также прямая, проходящаяся в точке C пополам. Так как точки M_1 и N вполне произвольны (они связаны

между собою известными условиями: $P_1 q = q_1 q$, но это условие неполно, так как сказано, текущее значение q одно не определяет собою положения точек M, и N), то и хорда MN произвольна (она обусловливается проведением через точку q). Таким образом точка C делит весь проходящий через нее хорды кривой пополам, точка же обладающая таким свойством, называется Центром кривой; следовательно точка C есть центр искомой кривой. В виду симметричности расположения точек кривой относительно центра, описание последнего всегда можно в сильной степени облегчить построение кривой. Итак, определить центр искомой кривой, т.е. определить координаты точки C, причем достаточно определить одну абсциссу этой точки $Oq = x_0$, потому что, раз найдена точка q, то проведя через нее параллель оси y'ков, найдем центр C в пересечении этой параллели с диаметром SS'. Из черт. 1 имеем:

$$x_0 = Oq = OP_1 + P_1 q = x_1 + \frac{P_1 P_2}{2} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

т.е. абсцисса центра искомой кривой есть средняя арифметическая между корнями уравнения:

$$Mx^2 + q_1 Nx + P = 0$$

Из этого уравнения $x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$, следовательно имеем $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{N}{M}$.

Соединим теперь точки M и N между собою. Прямая

MN пересѣкаетъ прямую qq_1 въ точкѣ T_1. Очевидно $MN \parallel SS_1$, изъ $(Ken \# \angle M)$, а изъ трапеціи $PMNQ$, имѣя $Pq = qQ$ и $qq_1 \parallel MP$, получимъ: $MT' = NT'$. Прямая MN есть произвольная хорда кривой, только параллельная діаметру SS'. Эта хорда дѣлится линіей qq' пополамъ, стало быть линія qq_1 есть тоже діаметръ кривой и при томъ этотъ діаметръ имѣетъ особое соотношеніе съ діаметромъ SS'. Мы видимъ, дѣйствительно, что эти діаметры таковы, что каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ рядъ хордъ параллельныхъ другому. Такіе діаметры называются взаимно сопряженными. Уравненіе діаметра qq_1 будетъ очевидно:

$$x = -\frac{N}{M}.$$

Замѣтимъ, что въ началѣ нашего изслѣдованія ось y-ковъ была взята произвольно, а потому и положеніе діаметра SS_1, въ такой же степени произвольно. Поэтому можемъ сказать, что въ разсматриваемой кривой существуетъ безконечное множество паръ взаимно сопряженныхъ діаметровъ.

Совокупность всѣхъ вышеприведенныхъ замѣчаній достаточно опредѣляетъ видъ кривой, она представляется выпуклой замкнутой кривой, касающейся въ точкахъ A_1, A_2, и B_1, B_2, называемыхъ вершинами кривой къ сторонамъ параллелограмма, попарно параллельнымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ:

$ss'\left(y=-\frac{Bx+E}{2C}\right)$ и $qq_1\left(x=-\frac{N}{M}\right)$.

и симметричную точку с своими центрами. Эта замкнутая кривая второго порядка назыв. эллипсом.

До сих пор мы вели наше исследование в предположении, что корни уравнения: $Mx^2+2Nx+P=0$ действительные и не равные, т.е. в предположении, что в формуле:

$$x=\frac{-N\pm\sqrt{N^2-MP}}{M}$$

дано условие: $N^2-MP>0$ или $N^2>MP$.

II Рассмотрим теперь второй случай, когда $N^2=MP$

Уравнение $Mx^2+2Nx+P=0$ в таком случае имеет два равных корня: $x_1=x_2=x_0=-\frac{N}{M}$.

и следовательно наше уравнение:

$$Mx^2+2Nx+P=M(x-x_0)(x-x_0)=M(x-x_0)^2$$

откуда: $y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{M(x-x_0)^2}$

$$=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{\sqrt{M}}{2C}(x-x_0)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Но так как по условию $M<0$, то $\sqrt{M}$ есть количество мнимое. Поэтому, очевидно, что уравнение (1) представляет собою две (двойной знак при мнимом члене $\frac{x-x_0}{2C}\sqrt{M}$) мнимые прямые (ибо уравнение относительно x первой степени!). Эти две мнимые прямые имеют одну общую действительную точку. Вследствие этого, полагая $x=x_0=-\frac{N}{M}$, получим для y действительную величину:

$$y_0=-\frac{Bx+E}{2C}.$$

Этот случай можно рассматривать как предельный перехода, именно когда $N^2 > AB$, при постепенном переходе это неравенство в равенству $N^2 = AB$, при чем эллипс, постепенно уменьшаясь, переходит в конечное расстояние точек A_1 и A_2 (ибо в таком процессе изменения x стремится к равенству с x_0 т.е. точка P_1 стремится к совпадению с точкой P_2) и в предельный, при $N^2 = AB$, обращается в точку, именно в центр эллипса, так как и центр эллипса в таком случае имеет, как видно из формул, те же координаты:

$$x_c = x_0 = -\frac{N}{B} \quad \text{и} \quad y_c = y_0 = -\frac{Bx + E}{2C}$$

III Наконец рассмотрим случай, когда $N^2 < AB$. Легко видеть, что в таком случае уравнение не представляет собою никакого геометрического места. Действительно

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Ax^2 + 2Nx + P}$$

Преобразуем вторую часть:

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{A\left(x^2 + \frac{2Nx}{A} + \frac{P}{A} + \frac{N^2}{A^2} - \frac{N^2}{A^2}\right)} = -\frac{Bx + E}{2C} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2C}\sqrt{A\left[\left(x^2 + \frac{2Nx}{A} + \frac{N^2}{A^2}\right) + \frac{PA - N^2}{A^2}\right]} = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{A\left[\left(x + \frac{N}{A}\right)^2 + \frac{PA - N^2}{A^2}\right]}$$

Очевидно, что при всех действительных значениях x, выражение для y всегда мнимое, так как в выражении y-ка под корнем находится отрицательное количество, представляющее произведение двух множителей, из которых один:

$$\left[\left(x + \frac{N}{A}\right)^2 + \frac{PA - N^2}{A^2}\right]$$

всегда въ силу условія $N^2 < BR$ положительнымъ, а другой BR по условію отрицательнымъ.

Такимъ образомъ, когда $N^2 < BR$ уравненіе второй степени съ двумя перемѣнными не представляетъ собою никакого геометрическаго мѣста. Разсмотримъ нѣсколько числовыхъ примѣровъ.

Примѣръ 1. Построить уравненіе:

$$3x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 4y - 6 = 0$$

Прежде всего построимъ, какую кривую представляетъ наше уравненіе; для этого составимъ опредѣлитель кривыхъ второго порядка, т. е. выраженіе $B^2 - 4AC$

$$B^2 - 4AC = 4 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$$

Слѣдовательно кривая относится къ группѣ эллипсовъ. Рѣшимъ уравненіе:

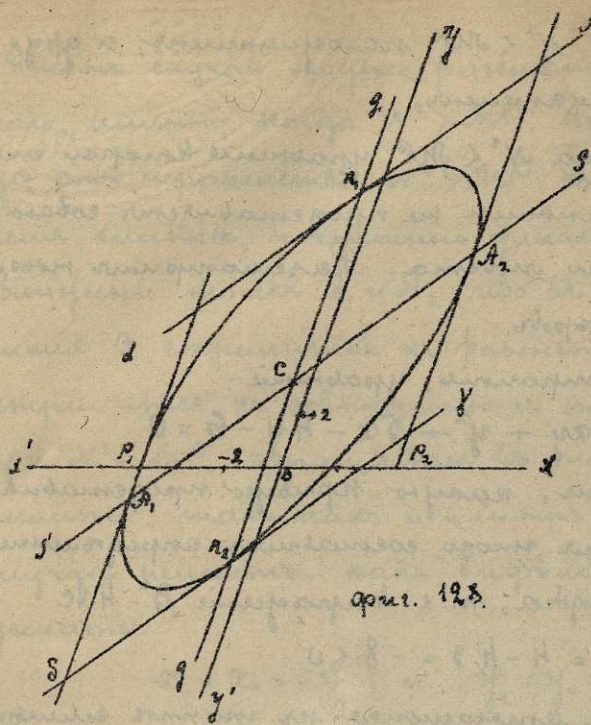
$$y^2 - 2(x+1)y + (3x^2 + 5x - 6) = 0$$

относительно y получимъ:

$$y = x + 2 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 3x^2 - 5x + 6}$$

послѣ упрощеній, получимъ: $y = x + 2 \pm \sqrt{-2x^2 - x + 10}$

Возьмемъ теперь оси координатъ (фиг. 128.) и прежде всего построимъ діаметръ SS, уравненіе котораго будетъ: $y_1 = x + 2$. Для построенія SS находимъ изъ этого уравненія отрѣзки, отсѣкаемые прямой SS, отъ осей координатъ; именно, полагая $x = 0$, найдемъ отрѣзокъ по оси ординатъ отъ равный $+2$, полагая же $y = 0$, найдемъ отрѣзокъ по оси абсциссъ, именно -2.



фиг. 128.

Откладывая эти отрезки по осям и соединяя между собою полученные точки, построим диаметр SS_1. Построим теперь вершины A_1 и A_2. Как мы видели, это суть точки пересечения кривой с диаметром SS_1, и абсциссы их равны соответственно корням уравнения:

$$Mx^2 - 2Nx + P = 0,$$

т. е. в рассматриваемом случае корням уравнения:

$$-2x^2 - x + 10 = 0.$$ Эти корни:

$$x_1 = -2{,}5 \quad \text{и} \quad x_2 = 2$$

Откладывая эти величины по оси абсцисс от начала координат и проведя через полученные точки P_1 и P_2 параллели оси y-ов, получим искомые вершины A_1 и A_2 в пересечении этих параллелей с диаметром SS_1. Теперь займемся определением положения центра искомого эллипса. Как мы видели, эта точка геометрически определяется как точка, делящая на диаметре SS_1, абсцисса которой: $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$, в данном случае $x_c = -\frac{1}{4}$. Откладывая эту величину по оси x-ов

и проведя через полученную точку q параллель оси y'ков, найдем центр c эллипса в пересечении диаметра SS_1 с проведенной параллельно q_1q_2 причем последняя будет вторым диаметром эллипса, сопряженным диаметру SS_1.

Построим теперь вершины A_1, A_2 т.е. точки пересечения кривой с диаметром q_1q_2. Их можно найти откладывая по диаметру q_1q_2 от точки c в обе стороны величину $R = \sqrt{-2x^2 - x + 10}$, вычисленную для $x = \frac{1}{4}$, т.е. откладывая от c в обе стороны по q_1q_2 величину $\sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = 9\frac{\sqrt{2}}{4}$. (Видим, что $A_1C = A_2C$ построится, как сторона квадрата, вписанного в круг, радиус которого $= 9/4 = 9\frac{1}{4}$).

Остальные точки кривой строим по указанному способу, т.е. проводя всевозможные параллели оси y'ков, соответствующие различным значениям x (при условии что $x_1 > x > x_2$) и откладывая по этим хордам в обе стороны от точек их пересечения с диаметром SS_1 величины R, вычисленные для соответствующих хордам значений для x. Как мы видели величину R можно непосредственно вычислять по известной формуле $R = \sqrt{-2x^2 - x + 10}$, то удобнее строить ее геометрически.

Пример 2. Дано уравнение:

$$5x^2 + 4xy + y^2 - 22x - 10y + 26 = 0.$$

Определитель кривых второго порядка указывает что кривая, отрицая по этому уравнению есть эллипс, ибо:

$$B^2 - 4AC = 16 - 20 = -4 < 0$$

Решаем ур-е относительно y'ка, получим:

$$y^2 + (4x - 10)y + (5x^2 - 22x + 26) = 0, \text{ откуда:}$$

$y = -2x + 5 \pm \sqrt{-x^2+2x-1}$. Под корнем имеем точный квадрат, поэтому напишем:

$$y = -2x + 5 \pm \sqrt{-(x-1)^2} = -2x + 5 \pm (x-1)\sqrt{-1}$$

Здесь y вообще мнимо, но при $x = 1$., мы получим $y = 3$. Таким образом видно, что в данном примере уравнение представляет частный случай эллипса, мнимую точку, координаты которой (1, 3).

Пример 3. Дано уравнение:

$$9x^2 + 42xy + y^2 - 18x - 6y + 12 = 0.$$

Определитель кривых второго порядка, т. е. выражение $B^2 - 4AC = 16 - 36 = -20 < 0$, указывает на то, что отрицая кривая есть эллипс.

Решаем уравнение относительно y'ка.

$$y^2 + (42x - 6)y + (9x^2 - 18x + 12) = 0$$

$$y = -21x + 3 \pm \sqrt{441x^2 - 126x + 9 - 9x^2 + 18x - 12} =$$

$$= -21x + 3 \pm \sqrt{-5x^2 + 6x - 3} = -21x + 3 \pm \sqrt{5\left(-x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}\right)} =$$

$$= -21x + 3 \pm \sqrt{5}\sqrt{-x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}} = \text{(прибавляя и отнимая от вто-}$$

$$\text{рого подкоренного количества } \frac{9}{25}) = -21x + 3 \pm \sqrt{5}\sqrt{-x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{9}{25} + \frac{3}{5} + \frac{9}{25}}$$

$$= -21x + 3 \pm \sqrt{-\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{6}{25}}\sqrt{5} = -21x + 3 \pm \sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{-\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{6}{25}}\right)\cdot i, \text{ ели-}$$

дователно и всегда имеемъ и данное уравненіе не представляетъ никакого геометрическаго мѣста, или какъ говорятъ въ видахъ общности, представляетъ мнимое мѣсто.

Группа гиперболъ.

Уравненіе кривыхъ второго порядка въ этомъ случаѣ отличается отъ случая эллипсовъ только тѣмъ что $M = B^2 - HAC > 0$

Изслѣдованіе кривыхъ этой группы будемъ вести аналогично первой; именно.

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}.$$

гдѣ $M = B^2 - HAC$, $N = BE - 2CD$; $P = E^2 - HCF$. Обозначая по предыдущему $\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}$ черезъ R, найдемъ

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе удобно для построеній Для общности возьмемъ косоугольныя оси координатъ. Прежде всего строимъ діаметръ (орд.) уравненія котораго

$$y' = -\frac{Bx+E}{2C}.$$

Пусть этотъ діаметръ будетъ нѣкоторая прямая ss_1. Съ проведеніемъ этой прямой построеніе точекъ кривой значительно упрощается, такъ какъ ордината кривой выражается черезъ ординату діаметра

SS_1 въ видѣ: $y = y' \pm R$

Для построенія точекъ кривой надо по данному x вычислить:

$$R = \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$$

и величину R отложить по параллели оси y'ковъ, проведенной черезъ конецъ соотвѣтствующей абсциссы x, въ ту сторону отъ діаметра SS_1, отъ точки пересѣченія его съ проведенной къ оси y'ковъ параллельно.

Такимъ образомъ съ построеніемъ діаметра SS_1 весь вопросъ о построеніи точекъ кривой сводится къ построенію R. Для удобства изслѣдованія разложимъ подкоренное (количество) выраженіе въ произведеніе двухъ разностей:

$$R = \frac{1}{2c}\sqrt{M(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$$

гдѣ x_1 есть меньшій, а x_2 большій корень уравненія:

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0.$$

Изслѣдованіе распадается, какъ и въ случаѣ эллипса на три случая:

$$1)\ N^2 > MP;\quad 2)\ N^2 = MP;\quad 3)\ N^2 < MP.$$

Разберемъ каждый случай отдѣльно.

I 1) $N^2 > MP$. Узнаемъ, въ какихъ предѣлахъ дѣйствительныхъ значеній перемѣнной x соотвѣтствуютъ дѣйствительныя значенія y'ка.

Во-первыхъ, когда $x < x_1$, (а слѣдовательно $x < x_2$ ибо $x_1 < x_2$) то подкоренное количество въ выраженіи R положительно,

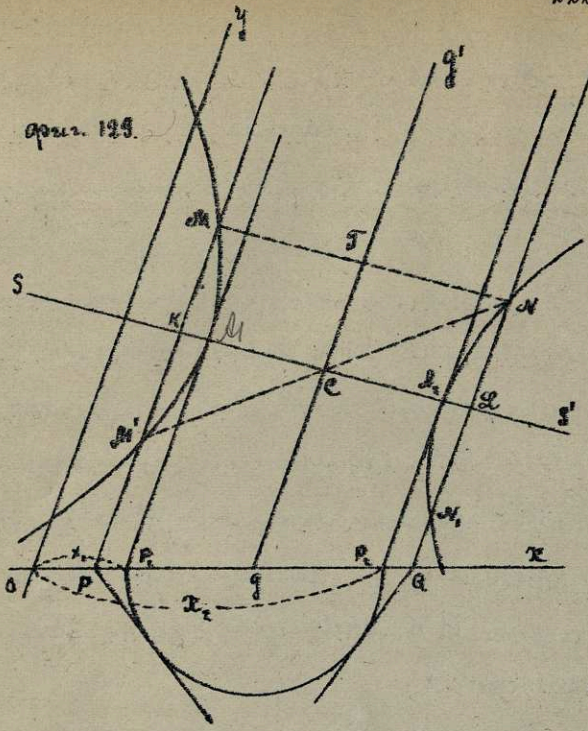
а потому всевозможнымъ значеніямъ x, меньшимъ x_1, соотвѣтствуютъ дѣйствительныя значенія y'ка и по такимъ значеніямъ x возможно слѣдовательно построеніе точекъ кривой.

Когда $x = x_1$, тогда $R=0$, что показываетъ, что хорда кривой, постепенно уменьшаясь (при переходѣ отъ неравенства $x < x_1$ къ равенству $x = x_1$), обращается въ точку когда $x = x_1$. Такимъ образомъ, если отложимъ $OP_1 = x_1$, и проведемъ P_1K_1 параллельно оси y'ковъ, то точка A_1, пересѣченія параллели съ діаметромъ Ox, будетъ точкой кривой, а параллель P_1K_1 очевидно будетъ касательной къ кривой въ точкѣ A_1.

Если $x > x_2$ (слѣдовательно и $x > x_1$, ибо $x_2 > x_1$), то построенное количество въ выраженіи R положительно слѣдовательно всевозможнымъ дѣйствительнымъ значеніямъ x'са, большимъ x_2, соотвѣтствуютъ дѣйствительныя же значенія y'ка и по такимъ значеніямъ x возможно слѣдовательно построеніе точекъ кривой.

Когда $x = x_2$, тогда $R=0$. Получаемъ одну точку A_2 кривой на діаметрѣ Ox. Разсужденіемъ, подобнымъ предыдущему, убѣждаемся, что прямая A_2P_2, параллельная оси y'ковъ, касательна къ кривой въ точкѣ A_2.

Когда абсциссѣ x будемъ давать значенія, промежуточныя между x_1 и x_2 т. е. когда $x_1 < x < x_2$, тогда подкоренное количество въ выраженіи R отрицательно



фиг. 129.

а потому R, а следовательно и Y известны. Это означает, что такія значенія x не выражаютъ собою абсциссъ кривой и указываютъ въ то время, что между прямыми P_1K_1 и P_2K_2 нѣтъ точекъ кривой.

Изъ этого изслѣдованія видимъ, что искомая кривая имѣетъ двѣ вѣтви, пересѣкающіяся съ діаметромъ SS_1 въ точкахъ:

$$A_1\left(x_1, \frac{Bx_1+\varepsilon}{2c}\right) \quad \text{и} \quad A_2\left(x_2, \frac{Bx_2+\varepsilon}{2c}\right).$$

Одна изъ этихъ вѣтвей располагается вся влѣво отъ линіи A_1K_1, а другая вся вправо отъ линіи A_2K_2. Самую кривую построимъ по точкамъ, задаваясь какой-либо величиной абсциссы x (конечно только въ указанныхъ предѣлахъ); откладывая эту величину по оси абсциссъ отъ начала координатъ, проводя черезъ полученную точку параллель оси y'овъ и откладывая по этой параллели отъ точки ея пересѣченія съ діаметромъ SS_1 въ обѣ стороны величину R, вычисленную для этого значенія x'са. Такой способъ построенія точекъ

кривой основывается на выведенном нами уравнении:

$$y = y' \pm R.$$

представляя собою геометрическое толкование этого уравнения. Величину R удобнее всего определить геометрическим построением: именно мы имеем:

$$R = \frac{\sqrt{m}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$$

Здесь $\frac{\sqrt{m}}{2c}$ есть величина постоянная и представляет собою числовой (в рассматриваемом общем случае не явно выраженный) коэффициент при многочлене: $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$, который и будем строить непосредственно. Мы видели, что этот линейный многочлен есть среднее пропорциональное между линиями:

$$(x-x_1) \quad \text{и} \quad (x-x_2)$$

Здесь к построению удобно применить теорему о касательной и секущей, проведенных из одной точки к кругу. Определим диаметр этого круга в предположении, что секущая всегда проходит через его центр, рассматривая большую разность $x-x_1$ как всю секущую, а меньшую разность $x-x_2$, как внешний отрезок этой секущей. При сделанном предположении имеем, что искомый диаметр (фиг. 129.)

$$D = (x-x_1) - (x-x_2) = x_2 - x_1 = P_1P_2$$

Таким образом, если построим на $P_1P_2 = x_2 - x_1$, как на диаметре из центра O пополам и из P_1 как начала отрезков оси x'ов будем проводить

ко этой окружности касательная, то величины подкоренные выражать собою различные величины отношения: $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$

соответствующие величине x, выражающей расстояние взятой на оси x'ов точки до начала координат. Изменяя уже получаемые ранее отношения $\frac{\sqrt{n}}{2c}$, будем получать различные величины R, соответствующие различным значениям x'са.

Так прямая Pj, проведенная из точки P касательно ко окружности $P_1 g P_2$, представляется собою отношение $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$ при $x = OP$. Проводя уже PK параллельно оси y'ков и откладывая $KM = KM' = \frac{\sqrt{n}}{2c} Pj$ получим две точки M и M_1, принадлежащие кривой. Таким образом строим точки кривой, постепенно перемещая точку P по оси x'ов влево от точки P_1 и вправо от точки P_2. При такого перемещении точки P хорды двух взятых кривой, равные 0 для точек P_1 и P_2, с удалением от них постепенно увеличиваются до бесконечности, при чем очевидно, что хорды, соответствующие каким бы то ни было двум положениям точки P, равно удаленным от точек P_1 и P_2, равны между собою. Из сказанного ясно, что ветви кривой удаляются в бесконечность, но кривые сходны между собою и обратно расположены. Отметим положение центра изображаемой кривой.

Имея $P_1Q = P_2Q$ и проведя Qq_1 параллельно оси у'ков, из трапеции $P_1A_1A_2P_2$ получим, что $A_1C = A_2C$. Не трудно доказать, что точка O и есть центр рассматриваемой кривой. Возьмем точку Q так, чтобы $OP_2 = PP_1$ имеем:

$$KM = KM_1 = LN = LN_1 = \frac{\sqrt{m}}{2c} P\breve{y} = \frac{\sqrt{m}}{2c} QE$$

Ибо $QE = P\breve{y}$ так как $QP_2 = PP_1$. Соединим теперь точку M_1 с C и N с точкою C, тогда будем иметь: $\triangle M_1KC = \triangle CLN$, ибо эти треугольники имеют по равному углу ибо $\angle M_1KC = \angle CLN$, так как $KP \parallel LQ \parallel Oy$), заключенному между двумя соответственно равными сторонами (из трапеции $P_1A_1A_2P_2$ имеем, что $KC = CL$, ибо $PQ = Qq$; кроме того, как видно $KM_1 = LN$). Из равенства треугольников заключаем, что $\angle KCM_1 = \angle LCN$ и так как LK есть прямая, то и линия M_1CN есть также прямая. Кроме того из равенства тех же треугольников имеем: $CM_1 = CN$. Прямая M_1N есть произвольная хорда кривой, обусловливаемая только прохождением через точку C, которая делится ею пополам; отсюда заключаем, что точка O делит пополам всю прохождения через нее хорды, т.е. точка C есть центр кривой.

Для определения положения точки C достаточно знать ея абсциссу Oq, так как эта точка лежит на диаметре SS_1. Из чертежа имеем:

$$OQ_1 = OP_1 + P_2Q = OP + \frac{P_1P_2}{2} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{N}{M}$$

Если соединим между собою точки M и N, то линия MN будет хорда кривой, параллельная диаметру SS'. Эта хорда в точке T делится пополам прямою QQ_1, следовательно прямая QQ_1, проходящая через центр и параллельная оси y'ков, делит пополам всех хорд кривой и при этом этот диаметр будет сопряженным диаметру SS_1, так как каждый из этих диаметров делит пополам ряд хорд, параллельных другому. Вследствие произвола в выборе направления оси y'ков надо заключить, что кривая имеет бесконечное множество пар сопряженных диаметров. Совокупность всех вышеприведенных замечаний достаточно определяет вид кривой. Эта кривая, как мы видели состоит из двух ветвей; она назыв. „гиперболой".

II а) Перейдем теперь к случаю, когда в общем уравнении кривых второго порядка при $M > 0$ имеем $N^2 = MP$. Будем рассматривать этот случай как частный, предельный случай первого при постепенном переходе от неравенства $N^2 > MP$ к равенству $N^2 = MP$ или, что то же, при переходе от $x_1 < x_2$ к $x_1 = x_2$. Геометрически такому переходу будет соответствовать сближение между собою точек P_1 и P_2 до совпадения их ($N^2 = MP$ или $x_1 = x_2$) при этом касательные P_1A_1 и P_2A_2 совпадут в одну прямую и следовательно ветви кривой коснутся

следует сразу, что центр кривой.

Исследуем форму геометрического места. В этом случае обозначим $\lambda_1 = \lambda_2$ через λ_0. Напишем

$$R = \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_0)(x-x_0)} = \frac{\sqrt{M}}{2C}(x-x_0)$$

и уравнение кривой:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm R$$

принимает вид:

$$y = -\frac{B\lambda_0+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}(x-x_0)$$

Рассматривая это выражение, мы замечаем, что у нас разрастается функцией первой степени относительно x, стало быть, это и есть уравнение прямой. Далее мы замечаем, что здесь заключается собственно два уравнения: одно с плюсом, а другое с минусом при члене $\frac{\sqrt{M}}{2C}(x-x_0)$ стало быть это уравнение выражает две прямые.

Обе эти прямые проходят через точку, абсцисса которой есть x_0, так как обе прямые имеют при $x = x_0$ одинаковые ординаты, а именно $y = -\frac{Bx+E}{2C}$. Но эти две прямые имеют различные угловые коэффициенты. Для первой прямой угловой коэффициент равен:

$$k = -\frac{B}{2C} + \frac{\sqrt{M}}{2C};$$

для второй прямой равен:

$$k_1 = -\frac{B}{2C} - \frac{\sqrt{M}}{2C}.$$

Таким образом в этом случае уравнение представляет не кривую линию, а две пересекающиеся прямые что представляет частный случай гиперболы и отре-

дъляется вообще только условіемъ: $\mathcal{M} = B^2 - AC > 0$.

III 3) Пусть въ общемъ уравненіи кривыя второго порядка

$$\mathcal{M} = B^2 - AC > 0;$$

имѣемъ еще, что $N^2 < MP$. Рѣшая общее ур-іе относительно y'ка получимъ:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Если бы мы въ видахъ удобства изслѣдованія разложили подкоренной трехчленъ въ произведеніи разностей, рѣшая ур-іе $Mx^2 + 2Nx + P = 0$, мы получили бы корни уравненія: $x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$

мнимыми, такъ какъ по условію $N^2 < MP$. Поэтому для изслѣдованія формулы (1) мы напишемъ ее въ другомъ видѣ

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{PM-N^2}{M^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Будемъ строить это уравненіе. Положимъ сначала, какъ дѣлали выше, что радикалъ:

$$\frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{PM-N^2}{M^2}} = R$$

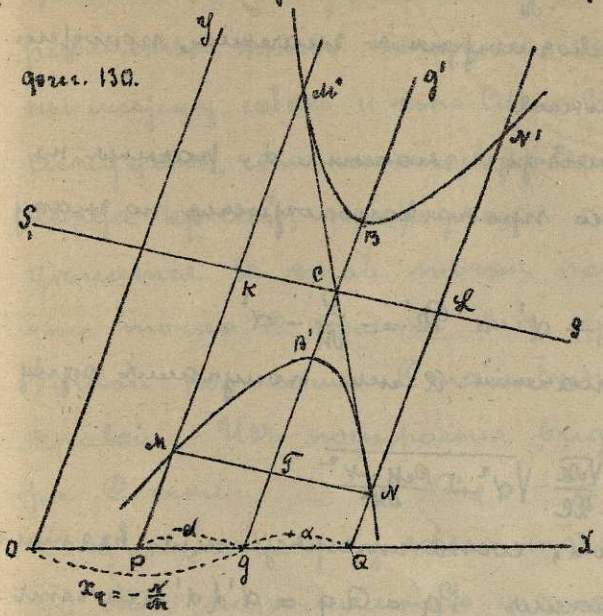
Напишемъ уравненіе діаметра изслѣдуемой кривой:

$$y_1 = -\frac{Bx+E}{2C}$$

Такимъ образомъ наше уравненіе можно представить такъ: $y = y_1 \pm R$.

Возьмемъ для общности косоугольныя оси координатъ и построимъ прежде всего діаметръ (фиг. 130) Пусть этотъ діаметръ будетъ SS_1. Будемъ теперь строить R; прежде всего замѣтимъ, что подъ корнемъ въ выраженіи R стоитъ сумма всегда положительныхъ ко-

имеет, следовательно R всегда действительно, при всевозможных значениях x.



черт. 130.

Наименьшая величина R будет очевидно при $x = -\frac{N}{M}$, при этом R имеет конечную величину, отличную от 0 именно

$$R = \frac{\sqrt{M} \cdot \sqrt{PM - N^2}}{2CM}.$$

Это указывает на то, что искомая кривая не имеет общих точек с диаметром gg. Строим точки B и B' соответственно $x = -\frac{N}{M}$, откладывая $CB = CB_1 = \frac{\sqrt{M} \cdot \sqrt{PM - N^2}}{2CM}$, потом строим самую кривую, как обыкновенно по точкам, вычисляя R по различным значениям текущей абсциссы x. Такое построение кривой, как мы видим, обусловливается построением центра ea, т. е. точки, в которой профекция через нее форды кривой делятся пополам. Займемся разысканием центра кривой. К равенству

$$x = -\frac{N}{M}$$

мы можем придти двумя путями; x могущее иметь все значения между $+\infty$ и $-\infty$, увеличиваясь или уменьшаясь приближается к величине $-\frac{N}{M}$ так что текущее значение x мы можем заменить таким

$$x = -\frac{N}{M} + \alpha,$$

где α может иметь всевозможные значения, положительные или отрицательные.

Возьмем два конца - между значения α, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку тогда будем иметь:

$$x' = -\frac{N}{M} + \alpha' \text{ и } x'' = -\frac{N}{M} - \alpha'.$$

Для обоих уже этих значений x мы получаем одну и ту же величину:

$$R = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{\alpha' + \frac{pM - N^2}{M^2}}$$

Построим точки кривой, соответствующие взятым абсциссам. Откладываем $Pq = Qq = \alpha'$ (α' может иметь произвольное текущее значение). Проведем из точек P и Q параллели оси y'ков. Пусть эти параллели встретят диаметр SS_1 в точках K и L. Откладываем от точки K вверх и вниз до точек N и N' ту же величину R, так что: $KM = KM_1 = LN = LN_1 = R = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{\alpha' + \frac{pM - N^2}{M^2}}$

Таким образом мы получили четыре точки нашей кривой, именно M, M', N и N'. Соединив точку C с точками M, и N, получим треугольники KCM, равный треугольнику LCN. Эти треугольники равны ибо имеют по равному углу $\angle M'KC = \angle NLC$, ибо $MK \parallel LN$, заключенному между соответственно равными сторонами ($MK = LN$, как стороны $PKLQ$, в которой $Pq = Qq$ и

$QC \parallel KO \parallel PQ \parallel$ оси y, кромѣ того имѣемъ $KC = CL$. Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что углы при точкѣ C равны между собою и что $CM_1 = CM$. Изъ равенства угловъ слѣдуетъ, что линія $M'M$ прямая и есть произвольная хорда кривой, проходящая черезъ точку C, и что она дѣлится въ этой точкѣ пополамъ. Отсюда видно, что точка C дѣлитъ всѣ проходящія черезъ нее хорды кривой пополамъ. Стало быть, точка C есть центръ кривой. Изъ построенія видно, что абсцисса центра C есть:

$$x_c = -\frac{N}{M}$$

Соединимъ между собою точки M и M, получимъ хорду MM, параллельную діаметру SS'. Эта хорда дѣлится въ точкѣ T линіей dd, пополамъ (что видно изъ трапеціи $PMMQ$). Такъ какъ точка M произвольна, то и хорда MM тоже произвольна, то она параллельна діаметру SS' и эта хорда дѣлится линіей dd' пополамъ. Такимъ образомъ прямая dd, дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя діаметру SS_1; стало быть прямая dd, есть тоже діаметръ кривой.

При томъ діаметры SS_1 и dd, сопряжены между собою, такъ какъ каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ рядъ хордъ параллельныхъ другому.

Далѣе, если разсмотримъ выраженіе $x = -\frac{N}{M} \pm \alpha$, то замѣтимъ, что при всевозможныхъ значеніяхъ α отъ 0

до ∞, K будет всегда отлично отъ нуля и наименьшая его величина будетъ при $\alpha = 0$, именно:

$$K = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{\frac{PM - N^2}{M^2}};$$

этой величинѣ K соотвѣтствуютъ точки B и B_1; изъ этого видно, что кривая имѣетъ двѣ положительныя и тождественныя по формѣ безконечныя вѣтви, изъ которыхъ одна расположена вся вверхъ подъ діаметромъ SS, отъ точки B, а другая вся внизъ подъ діаметромъ SS, отъ точки B_1. Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ получимъ кривую, состоящую изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей и называемую гиперболой.

Дополненіе объ ассимптотахъ гиперболы.

Взявши мы строимъ кривую по уравненію такого вида

$$y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{(x + \frac{N}{M})^2 - \frac{N^2 - MP}{M^2}}$$

При этомъ построеніи они разсмотрѣли три случая:

1) Когда въ этомъ уравненіи $N^2 > MP$
2) " " " $N^2 = MP$
3) " " " $N^2 < MP$

Въ первомъ и послѣднемъ случаяхъ мы получили двѣ гиперболы, различныя образомъ расположенія относительно осей координатъ, во второмъ случаѣ мы получили двѣ пересѣкающіяся прямыя, угловые коэффиціенты которыхъ суть:

$$K_1 = -\frac{B}{2c} + \frac{\sqrt{M}}{2c} \quad \text{и} \quad K_2 = -\frac{B}{2c} - \frac{\sqrt{M}}{2c}$$

Отнесемъ эти три геометрическія мѣста къ одной и той же системѣ координатъ и разсмотримъ ихъ взаимное расположеніе. Мы видимъ, что всѣ три геометрическія мѣста имѣютъ общій діаметръ, уравненіе котораго есть.

$$y = -\frac{Bx + E}{2C}$$

Затѣмъ мы видимъ, что на этомъ діаметрѣ объ гиперболы (для перваго и третьяго случаевъ) имѣютъ общій центръ, абсцисса котораго: $x_0 = -\frac{N}{M}$
и что этотъ центръ есть точка пересѣченія двухъ прямыхъ (для втораго случая) Затѣмъ видимъ, что всѣ три геометрическія мѣста имѣютъ другой общій діаметръ сопряженный первому и проходящій черезъ общій центръ линій, параллельный оси y'совъ и уравненіе котораго есть:

$$x_0 = -\frac{N}{BM}$$

Каждая изъ двухъ вѣтвей первой гиперболы пересѣкаетъ въ одной точкѣ первый діаметръ, относительно котораго эти вѣтви и расположены симметрично. Каждая изъ вѣтвей второй гиперболы пересѣкаетъ въ одной точкѣ второй діаметръ, относительно котораго эти вѣтви расположены также симметрично. Вѣтви первой гиперболы располагаются по объ стороны (вправо и влѣво) отъ перваго діаметра, вѣтви второй гиперболы располагаются по объ стороны

(вверх и внизъ) отъ второго діаметра. Опредѣлимъ соотношеніе этихъ трехъ геометрическихъ мѣстъ, сравнивая ихъ ординаты, соотвѣтствующія одной и той же абсциссѣ. Для удобства такого сравненія преобразуемъ нѣсколько выраженіе для y'ка и упростимъ его. Во-первыхъ обозначимъ текущее значеніе ординаты для перваго случая ~~для перваго случая~~ черезъ $y_{гип.}$, для втораго черезъ $y_{пр}$ и для третьяго $y'_{гип.}$ Въ силу условій имѣемъ:

$$y_{гип.} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{N^2-MP}{M^2}};$$

$$y_{пр.} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2};$$

$$y'_{гип.} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{-N^2+MP}{M^2}}$$

а принимая $-\frac{N}{M} = x_0$ и $\frac{N^2-MP}{M^2} = m^2$, получимъ:

$$y_{гип.} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_0)^2 - m^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y_{пр.} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}(x-x_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$y'_{гип} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_0)^2 + m^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Сравнивая эти выраженія, мы видимъ, что $y_{гип} < y_{пр} < y$ т.е. вѣтви первой гиперболы расположатся въ одной парѣ противоположныхъ угловъ, образуемыхъ прямыми, именно въ томъ, содержащемъ въ себѣ первый діаметръ кривыхъ; а вѣтви второй гиперболы расположатся въ другой парѣ противоположныхъ угловъ, именно въ томъ, содержащемъ въ себѣ второй діаметръ кривыхъ. Сравнивая эти величины ординатъ видимъ по частямъ уравненіе первое или второе или третье

получения (определяя одну абсолютную величину получающихся разностей):

$$y_{пр} - y_{гип.} = \frac{\sqrt{m}}{2c}\left(x - x_0 - \sqrt{(x-x_0)^2 - m^2}\right)$$

$$y'_{гип.} - y_{пр} = \frac{\sqrt{m}}{2c}\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + m^2} - (x-x_0)\right)$$

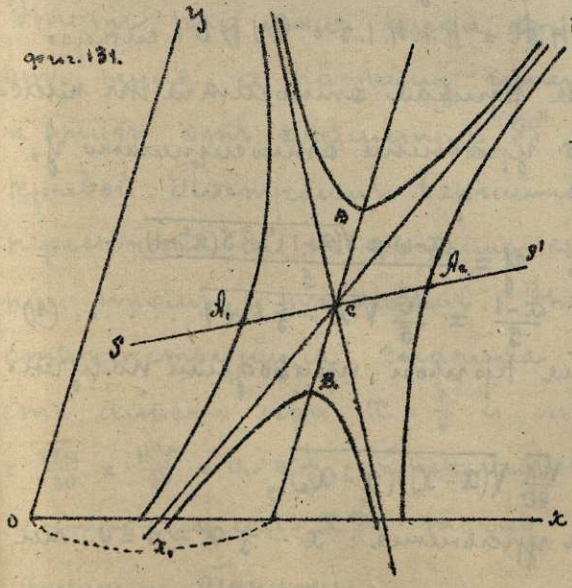
Преобразуем вторые части теперь равенств для удобства пользования их изменением в зависимости от изменений x'са. Именно умножим и разделим вторые части на сопряженные выражения получим:

$$y_{пр} - y_{гип.} = \frac{\sqrt{m}}{2c} \cdot \frac{m^2}{(x-x_0) + \sqrt{(x-x_0)^2 - m^2}}$$

$$y'_{гип.} - y_{пр} = \frac{\sqrt{m}}{2c} \cdot \frac{m^2}{x - x_0 + \sqrt{(x-x_0)^2 + m^2}}$$

Если теперь будем постепенно увеличивать x, то эти разности будут постепенно уменьшаться т. е. ветви кривой будут постепенно приближаться к прямым и таким образом сближаться между собою.

фиг. 131.



Если же $x = \infty$ то в пределе получим: $\lim (y_{пр} - y_{гип}) = \lim (y'_{гип} - y_{пр}) = 0$.

Следовательно при безконечном продолжении кривых ветви все более и более приближаются к прямым.

Прямые же безконечно приближающиеся к кривым при их продолжении, на-

называются асимптотами этих кривых. Очевидно две наши гиперболы имеют общую систему асимптот, а кривые, имеющие общие асимптоты, называются сопряженными гиперболами. И так мы видим, что всякая гипербола имеет две асимптоты проходящие через центр ее и общее уравнение которых есть: $y_{ас.} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}(x - x_0)$

При построении гиперболы весьма удобно строить предварительно ее асимптоты, которые определяют до некоторой степени направление течения кривой, так как на достаточном расстоянии от центра кривая идет почти параллельно ее асимптотам. Рассмотрим теперь числовые примеры.

Пример 1. Возьмем уравнение:

$$5y^2 - 2xy - x^2 + 2y - 1 = 0.$$

Составляем знаменат.: $B^2 - 4AC = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 5 = 24 > 0$ следовательно рассматриваемая кривая относится к классу гипербол. Решая это уравнение относительно y, получим.

$$5y^2 - 2(x-1)y - (x^2+1) = 0; \quad y = \frac{(x-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 5(x^2+1)}}{5}$$

$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{6x^2 - 2x + 6} = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{x^2 - \frac{1}{3}x + 1} \quad \ldots\ldots (1)$$

Если-бы мы для построения кривой привели полученное уравнение к виду:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)},$$

то определили x_1 и x_2 как уравнения: $x^2 - \frac{1}{3}x + 1 = 0$, как

получили бы для них мнимые выражения. Следовательно данный пример соответствует случаю (3). Поэтому и полученное уравнение кривой пригодным для построения, как мы это делали в предыдущем третьем случае, т.е. в подкоренном выражении дополнить до полного квадрата сумму членов с переменным x. Проделав это получим:

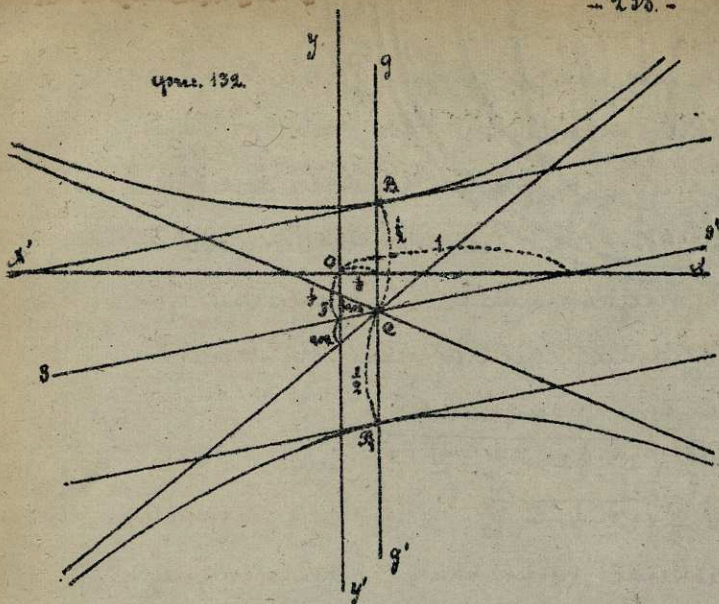
$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + 1} \text{ или}$$

$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{(x-\tfrac{1}{6})^2 + \frac{35}{36}}.$$

Строим теперь это уравнение (срм. 132.) Берем прямоугольную ось координат. Отрезок на оси y'ов есть $q = -\frac{1}{5}$, отрезок на оси x'ов есть $p = 1$. Строим этот диаметр; пусть это будет прямая SS'. Обратимся теперь к рассмотрению радикала

$$R = \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{(x-\tfrac{1}{6})^2 + \frac{35}{36}}$$

Этот радикал всегда действительный и отличен от нуля, а потому гипербола расположится вверх и вниз от диаметра SS', который не пересекает кривой. Построим вершины гиперболы, т.е. точки пересечения ея с другими ея диаметрами, который при этом и проведем. Эти вершины имеют соответствующия значения R наименьшия. Это имеет место при $x = \frac{1}{6}$ и тогда $R = \frac{\sqrt{6}}{5}\cdot\sqrt{\frac{35}{36}} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{35}}{5\cdot 6} = \frac{\sqrt{210}}{30} = \frac{14{,}5}{30} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$. Откладывая $x = \frac{1}{6}$, через полученную на оси x'ов точку проведем параллель QQ_1.



Черт. 132.

уравн. Точка встречи этой параллели с диаметром SS' даст центр гиперболы C, а сама параллель будет другим диаметром кривой.

Откладывая по обе стороны от точки C величину $R = 0{,}5$ получим две точки B и B', вершины гиперболы. Проведем через B и B' параллели диаметру SS'. Одна ветвь гиперболы расположится между параллелью, проведенною чрез точку B, другая ветвь между параллелью, проведенной чрез точку B'. Чтобы скорее произвести течение кривой, построим ее асимптоты уравнение которых будет:

$$Y_{асс.} = \frac{x-1}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

Замечаем, что асимптоты проходят через центр гиперболы, значит, чтобы узнать расположение асимптот, достаточно найти еще по одной точке, принадлежащей этой прямой. Найдем именно точки пересечения этих прямых с осью Y'Y, для этих точек имеем: $x = 0$, а потому $Y_{асс.} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{6} = -0{,}2 \pm 0{,}08$. Здесь $-0{,}2 = -\frac{1}{5}$ выражает собою Y ординату точки F, пересечения диаметра

ss' с осью y. Поэтому для получения точек пересечения асимптоты с осью y'ов надо от точки F по оси y'ов вверх и вниз отложить величину $0,5b$. Найденные точки соединяем с центром C и получаем асимптоты строимой гиперболы.

Пример II. Дано уравнение:

$$y^2 - 6xy + 5x^2 - 14y + 22x + 24 = 0$$

Составим дискриминант: $B^2 - 4AC = 36 - 4 \cdot 5 = 16 > 0$. значит, кривая, выражаемая этим уравнением, принадлежит к группе гипербол. Решая наше уравнение относительно y, получим последовательно:

$$y^2 - 2(3x+7)y + (5x^2 + 22x + 24) = 0.$$

$$y = 3x + 7 \pm \sqrt{(3x+7)^2 - 5x^2 - 22x - 24}.$$

$$y = 3x + 7 \pm \sqrt{4x^2 + 20x + 25} =$$

$$= 3x + 7 \pm \sqrt{(2x+5)^2} \text{ или } y = 3x + 7 \pm (2x + 5)$$

Мы видим, что y есть функция первой степени относительно x, следовательно это уравнение представляет две прямые, которые уравнения: $y_1 = 5x + 12$ и $y_2 = x + 2$. Обе проходят через точку, абсцисса которой $x = -2\frac{1}{2}$. Эти прямые легко построить.

Группа парабол.

Возьмем опять общее уравнение кривых второго порядка. Решая его относительно y получим последовательно:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + (E^2-4CF)}$$

а полагая $B^2-4AC = M$; $BE-2CD = N$ и $E^2-4CF = P$, получимъ

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Изслѣдуемъ теперь послѣдній изъ названныхъ нами случаевъ т. е. случай, когда $M = B^2-4AC = 0$.

При такомъ условіи въ уравненіи первомъ (1) подъ корнемъ получается двучленъ первой степени относительно x:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{2Nx+P}$$

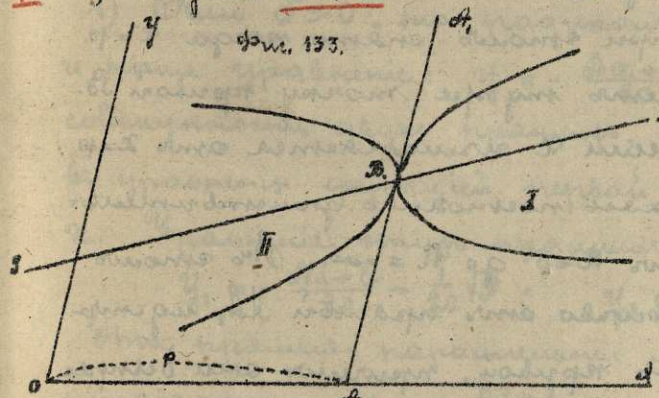
Приведемъ подкоренной двучленъ къ виду, удобному для изслѣдованія. Для этого вынесемъ изъ него $2N$ за скобку, получимъ $y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{2N\left(x+\frac{P}{2N}\right)}$, а полагая $2N = n$ и $\frac{P}{2N} = -p$, напишемъ окончательно:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{n(x-p)}.$$

Въ этомъ видѣ мы будемъ строить наше уравненіе. Прежде всего построимъ, какъ и прежде, діаметръ кривой, сопряженный оси y-овъ т. е. прямую, раздѣляющую пополамъ хорды кривой, параллельныя оси y-овъ. Не трудно замѣтить, что уравненіе этого діаметра есть: $y = -\frac{Bx+E}{2C}$. Возьмемъ для общности косоугольныя оси координатъ и построимъ діаметръ; пусть это будетъ прямая 33_1 (черт. 133). Обратимся теперь къ радикалу и положимъ для краткости, что $\frac{1}{2C}\sqrt{n(x-p)} = R$; тогда наше уравненіе напишется такъ: $y = y_1 \pm R$. Въ выраженіи R подъ корнемъ

находится произведение двух множителей, поэтому исследование кривой надо вести в зависимости от каждого из этих множителей, но так как множитель $(x-p)$ содержит в себе неизвестное переменное x, то исследование удлинится только от постоянного множителя n. Итак рассмотрим три случая, когда $n>0$, $n=0$ и $n<0$

I 1.) Пусть $n>0$. В этом случае R будет действительным только тогда, когда $x>p$, когда же $x=p$, то $R=0$ и получим $y=y_1$, т.е. точка кривой ляжет на диаметр BB_1. Отложим на чертеже $x_1=y_1=OA$, проведем через точку A параллель Aa_1 оси $y'y$. Пусть эта параллель встретит диаметр в точке B. Точка B будет принадлежать кривой и будет ее вершиной. Далее, если x увеличивается от $x=p$ до $x=+\infty$, то R оставаясь постоянно действительным, будет тоже последовательно увеличиваться от 0 до ∞ и стало быть от точки B пойдет вправо одна бесконечная ветвь кривой, имеющая прямую BB_1 своим диаметром и параллель Aa_1 оси $y'y$ касательную в точке B (если точку B рас-



Фиг. 133.

смотрикать, как результат слияния концов ветви, параллельной оси y'ов при уменьшении x от $x=-\infty$ до $x=0$). Кривая, образуемая этою ветвью называется параболой. Если $x<p$, то R будет мнимое, что показывает, что ветвь от прямой AA, кривой не существует.

II 2) Положим, что в выражении R число n<0. Ясно, что в этом случае R только тогда действительно, когда $x<p$; при этом опять когда $x=p$. $R=0$ и $y=y_1$, это дает ту же точку кривой B. на диаметре. Далее, если x изменяется от $x=p$ до $x=-\infty$, то R, оставаясь постоянно действительным, возрастает от $R=0$ до $R=-\infty$. В этом случае от точки B ветвь от прямой AA, идет одна бесконечная ветвь кривой, причем она беспрерывно удаляется от BB. Если в этом случае $x>p$, то R будет мнимым, что показывает, что кривая от прямой AA, точек кривой не существует. Таким образом, при n<0 получается тоже парабола, но только обращенная своим отверстием в сторону диаметра BB.

III 3). Когда n=0, то мы не можем использовать непосредственно уравнение: $y=y_1=\frac{1}{2c}\sqrt{n(x-p)}$, как уравнение тождественное первоначальному: $y=y_1=\frac{1}{2c}\sqrt{2Nx-P}$, из которого наше уравнение полу-

частей дробленія подкоренного количества и умноженіемъ его на $2lN = n = 0$, какового дѣйствія числитель, какъ извѣстно, уничтожаетъ некоторые корни уравненія. Итакъ въ этомъ случаѣ наше дополненіе возвратится къ уравненію $y = y_1 \pm \frac{1}{2c}\sqrt{2lNx + P}$. Полагая же $2lN = n = 0$, получаемъ окончательно $y = y_1 \pm \frac{1}{2c}\sqrt{P}$. Отсюда видно, изслѣдованіе распадается на 3 случая, когда: $P > 0$, $P = 0$ и $P < 0$.

1) Если $P > 0$, то радикалъ всегда дѣйствителенъ и наше уравненіе: $y = -\frac{Bx + E}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{P}$ представляетъ совокупность двухъ прямыхъ, такъ какъ y выраженъ въ уравненіи функціей первой степени относительно x. Уравненія этихъ прямыхъ будутъ:

$$y_1 = -\frac{Bx + E}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{P}; \qquad y_2 = -\frac{Bx + E}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{P}.$$

Эти прямыя параллельны между собою и параллельны діаметру ($y_0 = -\frac{Bx + E}{2c}$), такъ какъ всѣ три прямыя имѣютъ одинъ угловой коэффиціентъ $\pi = -\frac{B}{2c}$ (прямая $y_1 = -\frac{Bx + E}{2c}$ есть діаметръ для системы параллельныхъ прямыхъ, такъ какъ она дѣлитъ пополамъ линіи, параллельныя ея ординатѣ и заключенныя между ними параллельными прямыми.) Не трудно видѣть изъ среднихъ уравненій прямыхъ съ уравненіемъ ихъ діаметра, что эти прямыя расположатся по равныя стороны отъ діаметра и на равныхъ отъ него разстояніяхъ.

2). Если $P=0$, то мы можем рассматривать этот случай, как частный предыдущего, постепенно переходя от неравенства $P>0$ к равенству $P=0$ т.е. постепенно уменьшая P до 0. Такому аналитическому уменьшению P соответствует геометрическое сближение строителей прямых до совпадения их в диаметрах, так как при $P=0$ мы имеем наше уравнение в таком виде: $y = -\frac{Bx+E}{2C} = y_1$, поэтому мы можем рассматривать как совокупность двух сливающихся прямых.

3) Если $P<0$, то в этом случае уравнение радиусы мнимы, а потому и у тоже мнимы, соответственно уравнение представляет собою, как говорят для общности, совокупность двух мнимых прямых. Приложимо наши рассуждения к числовым примерам.

Пример 1-й. Дано уравнение:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 7x + 6y - 9 = 0.$$

Находим для него $B^2 - 4AC = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$; отсюда заключаем, что оно представляет собою параболу.

Решая уравнение относительно y, находим последовательно: $y^2 - 2(2x+3)y + (4x^2 - 7x + 9) = 0$

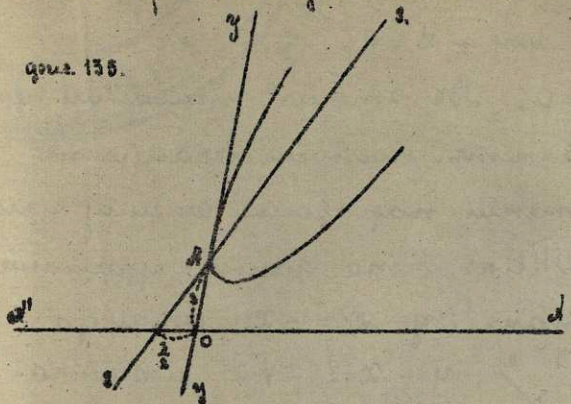
$$y = 2x + 3 \pm \sqrt{(2x+3)^2 - 4x^2 + 7x - 9}; \quad y = 2x + 3 \pm \sqrt{4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 + 7x - 9}$$

$$y = 2x + 3 \pm \sqrt{19x}$$

Получили диаметр, уравнение которого: $y_1 = 2x + 3$.

Эта прямая дѣлаетъ на оси y'овъ отрѣзокъ $q = 3$ и на оси x отрѣзокъ $p = -\frac{3}{2}$. Ордината кривой возможна только при $x > 0$ и при $x = 0$; именно $y = y_1 = 3 = OA$. Слѣдовательно кривая распространяется отъ точки A вправо отъ оси y'овъ причемъ діаметръ AB, дѣлитъ въ ней пополамъ всѣ хорды, параллельныя оси y'овъ.

фиг. 135.



Примѣръ 2-й. Дано уравненіе.

$$x^2 - 4xy - 4y^2 - 2ax + 4ay = 0.$$

Здѣсь имѣемъ также $B^2 - 4AC = 16 - 4.1.4 = 0$. Слѣдовательно геометрическое мѣсто, представляемое данным уравненіемъ относится къ группѣ параболъ. Рѣшая уравненіе, находимъ: $y^2 - (x-a)y + \frac{x^2 - 2ax}{4} = 0$, откуда: $y = \frac{x-a}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2-2ax+a^2}{4} - \frac{x^2-2ax}{4}} = \frac{x-a}{2} \pm \frac{a}{2}$.

Слѣдовательно наше уравненіе представляетъ собою совокупность параллельныхъ прямыхъ, выражаемыхъ двумя отдѣльными уравненіями:

$$y_1 = \frac{x}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{x}{2} - a$$

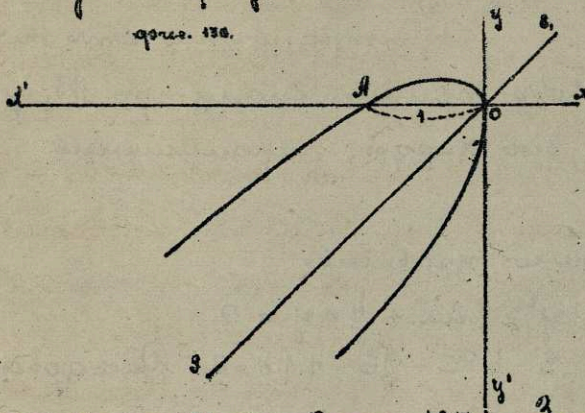
Прямая, уравненіе которой $y_1 = \frac{x}{2} - \frac{a}{2}$, дѣлитъ очевидно разстояніе между найденными параллелями пополамъ.

Пример 3-й. Построить уравнение:

$$x^2 + y^2 - 2xy + x = 0$$

в котором $B^2 - 4AC = 0$. В этом уравнении первые три члена составляют полный квадрат (как и вообще в уравнении параболы в силу условия что $B^2 - 4AC = 0$). Так что данное уравнение можно представить так: $(y - x)^2 = -x$; откуда $y - x = \pm\sqrt{-x}$ и окончательно $y = x \pm \sqrt{-x}$. Диаметр этой параболы равен $y_1 = x$. Очевидно эта прямая проходит через начало координат и есть биссектриса угла yox (фиг. 136). Здесь ордината y возможна только при $x < 0$; при $x = 0$ будет иметь: $y = y_1 = 0$, откуда видим, что кривая расположена влево от оси y'ов и, проходя через начало, обращена своим отверстием в сторону OS, диаметра SS_1. Не трудно видеть, что кривая пересекает ось x'ов кроме начала O еще в точке A, причем $OA = 1$.

фиг. 136.



Случай, когда $e = 0$. Мы рассматривали кривые второго порядка, представляемые общим уравнением: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ и при этом в рассмотрении было сделано предположение, что

C не равно нулю, и мы решили данное уравнение относительно y по формуле квадратного уравнения.

Рассмотрим теперь наше уравнение в предположении, что $C = 0$. Если $C = 0$, то уравнение будет первой степени относительно y и его нельзя будет решать, как прежде. Если $C = 0$, то уравнение примет вид: $Ax^2 + Bxy + Dx + Cy + F = 0$.

Чтобы узнать к какому классу принадлежит кривая, представляемая этим уравнением, составим знак $B^2 - 4AC = M$, так как $C = 0$, а B не равно 0, то заключаем, что кривая, представляемая этим уравнением относится к типу гипербол, так как B^2 всегда больше 0 ($B^2 > 0$). Если же $B = 0$, то кривая, представляемая этим уравнением, относится к классу параболь, так как в этом случае $B^2 - 4AC = 0$. Положим сначала что $B \neq 0$. Решим уравнение относительно y. Напишем его в виде:

$$(Bx + C)y = -Ax^2 - Dx - F$$

откуда находим:

$$y = \frac{-Ax^2 - Dx - F}{Bx + C}$$

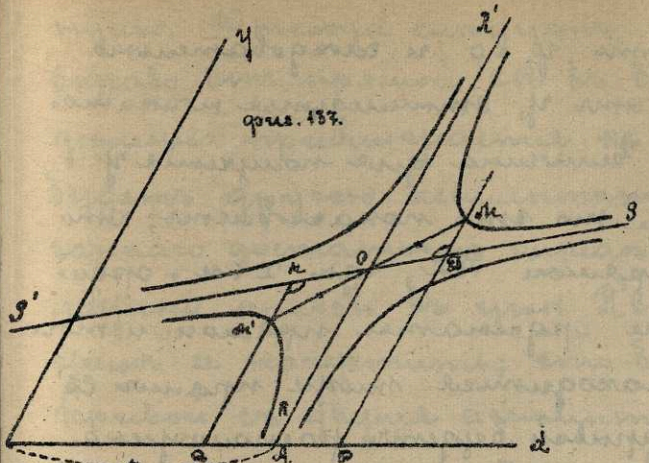
В этой дроби числитель есть функция второй степени, разделив числителя на знаменателя, получим в частном функцию первой степени x. Пусть частное от деления будет $ax + b$ и

положимъ, что получится нѣкоторой остатокъ R, не содержащій x, тогда наше уравненіе напишется въ видѣ $y = ax + b + \frac{R}{Bx+C}$, раздѣливъ числителя на знаменателя полученной дроби на B, получимъ: $y = ax + b + \frac{R/B}{x + C/B}$.

Положимъ для краткости: $\frac{R}{B} = c_1$ и $\frac{C}{B} = -n$. Знакъ $-$ (минусъ) передъ n не показываетъ отрицательности, такъ какъ n и само по себѣ можетъ быть и положительно и отрицательно. Теперь наше уравненіе представится такъ: $y = ax + b + \frac{c_1}{x-n}$

Въ этомъ видѣ мы и будемъ его строить. Это уравненіе одинаково строится, какъ при косоугольныхъ осяхъ координатъ такъ и при прямоугольныхъ, для общности возьмемъ косоугольныя оси координатъ. Сначала построимъ прямую, уравненіе которой будетъ $y_1 = ax + b$ Пусть (фиг. 137.) эта прямая будетъ SS_1. Ордината кривой можетъ быть опредѣлена уравненіемъ: $y = y_1 + \frac{c_1}{x-n}$. Положимъ для краткости $\frac{c_1}{x-n} = y_0$ и напишемъ $y = y_1 + y_0$

Изъ этого уравненія видно, что мы получимъ ординату кривой, когда къ ординатѣ прямой SS_1 прибавимъ y_0. Само собой разумѣется, что прямая SS_1 не есть діаметръ, такъ какъ для построенія ординатъ кривой къ ординатамъ прямой нужно только прибавлять величину y_0. Возьмемъ



абсциссу $x = n$; отложить от начала координат величину n, тогда это будет линия OA, такая что $x \cdot n = OA$. Проведем через точку A параллель RR оси ординат. Пусть она параллель пересекает линию SS_1 в точке C. Из уравнения видно, что при $x = n$, получим $y_0 = \infty$ так как в этом случае знаменатель дроби $\frac{c_1}{x-n}$ обращается в нуль. Если $y_0 = \infty$, то и $y = \infty$. Это показывает, что прямая RR_1 пересекает кривую в бесконечности или собственно говоря, не пересекает ее. Далее условимся относительно знака c_1, так как c_1 может быть и положительно и отрицательно. Положим сначала, что $c_1 > 0$ I

Ясно, что в этом случае, когда $x > n$, $y > 0$; стало быть $y > y_1$, так как к y_1 прибавляется некоторая положительная величина для получения y. Если $y > y_1$ при $x > n$, то это показывает, что по правую сторону от линии RR_1, где $x > n$, ордината кривой всегда больше ординаты прямой SS_1, то-есть кривая будет расположена в угле $R'CS$ (фиг. 137). Если же возьмем

$x < n$, то будет иметь $y_1 < 0$ и следовательно $y < y_1$, потому что от y_1 отнимается некоторая положительная величина для получения y. Если $y < y_1$ при $x < n$, то это показывает, что по левую сторону прямой RR', где $x < n$, ордината кривой меньше ординаты прямой и точки кривой будут находиться ниже прямой CS' т. е. другая ветвь кривой будет расположена в углу RCS'. Чтобы полнее проследить течение кривой, рассмотрим изменение y в зависимости от изменения x в уравнении: $y_1 = \frac{c_1}{x-n}$. Если возьмем x превышающим n на очень малую величину, то y_1 будет весьма велико, так как знаменатель дроби $\frac{c_1}{x-n}$ будет весьма мал. При том, если x, оставаясь постоянно больше n, приближается к n, то y, оставаясь положительным, стремится к бесконечности. Это показывает, что кривая стремится к бесконечности вверх, приближаясь неопределенно к прямой CR, так что CR есть асимптота кривой. Если от $x = n$ абсцисса x увеличивается, то y уменьшается, и кривая идет бесконечности постоянно приближается к прямой CS. Если x весьма велико, то y_1 весьма мал, и если x стремится к бесконечности, то y_1 стремится к

нуло. Отсюда следует, что кривая, удаляясь вправо от прямой CR' в бесконечность, неопределенно приближается к прямой CS, которая будет другою асимптотой кривой. Из сказанного достаточно определяется вид и расположение кривой в угле $R'CS$, так что мы можем ее начертить; это будет бесконечная ветвь кривой с двумя асимптотами $R'C$ и CS. ~~Положим теперь, что $x < n$; в этом случае будем иметь $y_0 < 0$.~~ Если возьмем две абсциссы $x = n \pm \alpha$, где α произвольно, то при этих двух абсциссах найдем: $y_0 = \frac{c_1}{n \pm \alpha - n} = \pm \frac{c_1}{\alpha}$ т. е. при этих двух абсциссах к соответствующим ординатам прямой SS_1 прибавляется одно и то же количество, только с обратными знаками, чтобы получить ординаты кривой. От точки A отложим вправо и влево величину α до точек P и Q, так что $AP = AQ = \alpha$; при этом $OP = n + \alpha$ и $OQ = n - \alpha$. Проведем ординату, соответствующую абсциссе OP; пусть эта ордината пересечет прямую SS_1 в точке D, а кривую в точке M. Возьмем другую ординату, соответствующую абсциссе OQ; пусть и она пересечет SS_1 в точке N; теперь, чтобы получить точку кривой

въ уголъ $3'CR$, нужно отложить отъ K внизъ величину $\frac{c_1}{d}$ до точки K_1 такъ, чтобы было: $HK_1 = DK = \frac{c_1}{d}$. Точка K_1 будетъ точкой кривой. Соединимъ точки K и K_1 съ C, мы получимъ два равныхъ треугольника: CDK и CHK_1. Треугольники эти равны, потому что $DK = HK_1$, а $CD = CH$, что очевидно изъ трапеціи $PAMD$, въ которой одна изъ непараллельныхъ сторонъ PC раздѣлена пополамъ линіею параллельною параллельнымъ сторонамъ и пересѣкающей въ точкѣ C противоположную сторону. Кромѣ того углы при точкахъ D и H равны, какъ внутреннія накрестъ-лежащіе. Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что углы при точкѣ C равны и что линія $K_1C = KC$. Изъ равенства угловъ при точкѣ C слѣдуетъ, что линія KHK_1 есть прямая, и такъ какъ точка K есть произвольная точка кривой, то прямая KK_1 есть произвольная хорда кривой, проведенная черезъ точку C и дѣлящаяся въ ней пополамъ. Итакъ точка C есть центръ кривой, такъ какъ она дѣлитъ всѣ проходящія черезъ нее хорды пополамъ. Изъ послѣдняго обстоятельства вполнѣ выясняется положеніе всѣхъ кривой въ углѣ $3'CR$, а именно точки этой кривой расположатся симметрично относительно центра C по сторонамъ всѣхъ кривой,

расположенной въ уголъ R'CS. Такимъ образомъ можно начертить вѣтвь кривой въ уголъ S'CR безъ дальнѣйшаго вычисленія; линіи SS' и RR' будутъ очевидно ея ассимптотами. Итакъ въ разсматриваемомъ нами случаѣ данное уравненіе второй степени представляетъ гиперболу, у которой одна ассимптота параллельна оси ординатъ, другая же имѣетъ особое направленіе. Замѣтимъ далѣе, что въ сдѣланномъ нами вычисленіи мы полагали, что $c_1 > 0$.

Положимъ теперь, что $c_1 < 0$, и посмотримъ какое измѣненіе произойдетъ отъ этого въ расположеніи кривой. Въ этомъ случаѣ, когда возьмемъ $x > n$ будемъ имѣть $y_0 < 0$ и стало быть $y < y_0$, а это показываетъ что по правую сторону отъ линіи RR', ордината кривой всегда меньше ординаты прямой SS_1, т. е. кривая будетъ расположена въ уголъ RCS; напротивъ, когда примемъ $x < n$, будемъ имѣть $y_0 > 0$ и потому $y > y_0$, т. е. въ этомъ случаѣ по лѣвую сторону прямой RR' точки кривой, расположатся выше прямой SS_1. Стало быть при $c_1 < 0$ кривая расположится въ двухъ противоположныхъ углахъ SCR и S'CR'. Все остальное разсмотрѣніе будетъ, очевидно, совершенно одинаково съ предыдущимъ и никакихъ измѣненій въ сдѣланныхъ заключеніяхъ не произойдетъ. Точка C будетъ центромъ кривой, а линіи

AA' и SS_1 ее асимптотами. Расположение ветвей однако будет иное, а именно такое, как показано на чертеже (фиг. 137). Заметим теперь еще частный случай, когда во общем уравнении кривых второго порядка не только $C=0$, но и $A=0$. В этом случае уравнение будет:

$$Bxy + Dx + Ey + F = 0.$$

К виду приведенному решением этого уравнения является уравнение:

$$y = ax + b + \frac{c}{x-n}$$

надо положить $a=0$, потому что член ax был получен от деления Ax^2 на Bx; стало быть теперь решение будет: $y = b + \frac{c}{x-n}$. В этом случае уравнение асимптоты будет: $y_1 = b$. Это показывает, что прямая SS_1 будет параллельна оси Ox. Итак этот частный случай представляет нам основание, что ось асимптотич гипербол мы параллельно осям координат. К предыдущему прибавим еще одно замечание. Когда мы разыскивали решение данного уравнения относительно y т. е. выражение: $y = \frac{-Ax^2 - Dx - F}{Bx + E}$, то мы полагали, что числитель этой дроби не делится нацело на знаменатель, ибо иначе в вычислении остается R, полагая $B \neq 0$. Если же числитель делится на знаменатель без остатка

то означивъ по прежнему частное отъ дѣленія черезъ $ax+b$, имѣемъ

$$-Ax^2-Dx-B=(ax+b)(Bx+C)$$

$$y=\frac{(ax+b)(Bx+C)}{Bx+C}$$

Хотя эту дробь и можно сократить на $(Bx+C)$, но мы не будемъ дѣлать этого сокращенія, потому что, дѣлая такимъ образомъ, какъ ей часто увидимъ, мы опустимъ бы одно рѣшеніе. Умножая обѣ части послѣдняго равенства на $(Bx+C)$ и перенося потомъ всѣ члены въ первую часть получимъ:

$(Bx+C)y=(ax+b)(Bx+C)$ или $(Bx+C)(y-ax-b)=0$.

Такъ какъ въ уравненіи этомъ указано, что произведеніе двухъ множителей должно быть равно 0, то удовлетворять этому уравненію можно не иначе, какъ полагая одинъ изъ множителей равнымъ нулю, такъ что должно быть: $Bx+C=0$ или $y-ax-b=0$. Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ данное уравненіе второй степени распадается на два предыдущихъ уравненія, изъ которыхъ каждое будетъ уравненіе первой степени, а потому будутъ представлять совокупность двухъ пересѣкающихся прямыхъ линій. Изъ этихъ двухъ уравненій первое т.е. $Bx+C=0$ выразится при этомъ

прямую, параллельную оси ординат, так как она дает: $x = -\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}}$. Заметим, что мы здесь опять встретились с двумя перпендикулярными прямыми, которая являются, как и прежде, частным случаем гиперболы. Рассмотрим теперь случай общего уравнения кривых второго порядка, когда:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B} = 0$$

В этом случае прямая, как нам известно, должна быть отнесена к классу парабол и ее уравнение будет:

$$\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{D}x + \mathfrak{C}y + \mathfrak{F} = 0.$$

В этом случае всегда удобнее будет рассматривать уравнение относительно x, а не y, а y считать за переменное независимое. Решая данное уравнение, как квадратное, по известной формуле, находим:

$$x = -\frac{\mathfrak{D}}{2\mathfrak{A}} \pm \frac{1}{2\mathfrak{A}}\sqrt{-4\mathfrak{A}\mathfrak{C}y + \mathfrak{D}^2 - 4\mathfrak{A}\mathfrak{F}}$$

вынося $(-4\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{C})$ за скобку, получим:

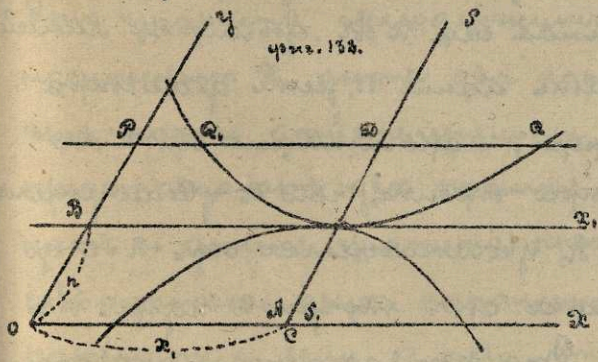
$$x = -\frac{\mathfrak{D}}{2\mathfrak{A}} \pm \frac{1}{2\mathfrak{A}}\sqrt{-4\mathfrak{A}\mathfrak{C}\left(y - \frac{\mathfrak{D}^2 - 4\mathfrak{A}\mathfrak{F}}{4\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\right)}$$

Положим для краткости, что $-4\mathfrak{A}\mathfrak{C} = a$ и $\frac{\mathfrak{D}^2 - 4\mathfrak{A}\mathfrak{F}}{4\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = n$. Здесь a и n могут быть положительны и отрицательны. Теперь наше ур-ие примет вид:

$$x = -\frac{\mathfrak{D}}{2\mathfrak{A}} \pm \frac{1}{2\mathfrak{A}}\sqrt{a(y-n)}$$

В этом виде и будем его строить. Возьмем

для общности косоугольная оси координат. Построим сначала прямую, уравнение которой есть: $x_1 = -\frac{2}{2A}$. Так как это уравнение показывает, что абсцисса постоянна, то соответствующая уравнению прямая будет параллельна оси ординат. Пусть эта прямая будет SS_1 (фиг. 133.) и пересечет ось x'ов в точке A, так что $OA = x_1$. Положим теперь, что $\frac{1}{2A}\sqrt{a(y-n)} = R$, тогда будем иметь: $x = x_1 \pm R$. Если возьмем $y = n$, то при этом $R = 0$ и следовательно $x = x_1$. Отложим на чертеже от начала координат величину n по оси y'ов до точки B, так что $OB = n$. Проведем через точку B параллель оси x'ов; пусть эта параллель пересечет линию SS_1 в точке C; точка C будет, очевидно, принадлежать кривой, потому что при $y = n$ и $x = x_1$. Положим теперь, что $a > 0$. В этом случае R будет действительно только тогда, когда $y > n$, а при $y < n$ количество R будет мнимым. Это показывает, что от точки C кривая идет вверх, располагаясь выше параллели Bx. Для того чтобы вверху определить течение кривой, заметим, что при всякой



I

значений y для R получаются два равных, но противоположных по знаку величины. Положимъ какую нибудь ординату, положимъ: OP и построимъ соответствующій x; для чего проведемъ черезъ P параллель оси x'овъ; она пересѣчетъ линію CS, въ точкѣ D, тогда PD = x, а чтобы получить x, отложимъ вправо и влѣво отъ точки D величину R до точекъ Q и Q_1, такъ что:

$$DQ = DQ_1 = R = \frac{1}{2a}\sqrt{a(y-n)}$$

Точки Q и Q_1 будутъ очевидно точками кривой. Хорда кривой QQ_1, параллельная оси x'овъ, дѣлится линіей SS, пополамъ, а такъ какъ линія SS, есть діаметръ кривой, дѣлящій всѣ хорды, параллельныя оси x'овъ пополамъ. Замѣтимъ при этомъ, что съ увеличеніемъ y отъ y = n до y = ∞ и R увеличивается отъ R = 0 до R = ∞ и такъ какъ вверхъ отъ точки C идетъ безконечная вѣтвь кривой. Эта кривая есть парабола.

II Если мы предположимъ, что a < 0, то увидимъ, что R дѣйствительно только тогда, когда y < n, напротивъ R мнимо, когда y > n. При y = n будетъ опять R = 0. Это показываетъ, что точка C будетъ точкой кривой; въ этомъ случаѣ кривая пойдетъ внизъ отъ точки C. Прямая CD будетъ опять діаметромъ. При этомъ y будетъ уменьшаться отъ y = n до y = -∞, а R будетъ увеличиваться отъ R = 0

что $\lambda = -\infty$. Таким образом получится бесконечная ветвь параболы, простирающаяся в минус от прямой Bx_1. В последнем случае, когда $C=0$ и $B=0$, нельзя предполагать, чтобы было и $A=0$, потому что уравнение представилось-бы в виде:

$$Dx + Ey + F = 0$$

а это уравнение, будучи первой степени, не было бы уравнением кривой второго порядка. Но если $C=0$ и $B=0$, то может быть, что и $E=0$. В этом частном случае наше уравнение напишется так: $Ax^2 + Dx + F = 0$. Это уравнение не содержит y и, будучи решено относительно x, даст два корня: $x_1 = a_1$ и $x_2 = a_2$. Если эти корни действительные, то найденные решения представляют: две прямые, параллельные оси ординат и данное уравнение представляет тогда собою совокупность двух параллельных прямых. Если корни равны т. е. если $a_1 = a_2$, то данное уравнение представляет одну прямую, параллельную оси ординат. Наконец, если корни мнимые, то уравнение представляет мнимое место. Итак и на этот раз мы заключаем что все три частные случая параболы, которые встречались нам прежде, именно: 1) две параллельных прямых, 2) одна прямая и 3) мнимое место.

Изследованіе центра кривыхъ второго порядка.

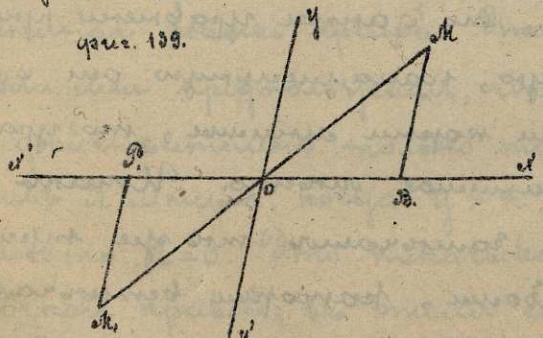
Центромъ кривой вообще называется такая точка, которая дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, проходящія черезъ нее. Разсматривая общее уравненіе второй степени, мы нашли, что эллипсъ и гипербола имѣютъ центръ. Теперь уже постараемся опредѣлить центръ кривой второго порядка прямо, не рѣшая уравненія. Способъ, которымъ мы здѣсь воспользуемся основывается на слѣдующей теоремѣ:

Теорема. Если начало координатъ будетъ центромъ линіи второго порядка, то уравненіе линіи не будетъ содержать членовъ съ первыми степенями координатъ.

Дѣйствительно пусть:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

будетъ уравненіе линіи второго порядка, центръ О которой есть начало координатъ (фиг. 139). Черезъ начало координатъ проведемъ произвольную прямую M_1M; уравненіе ея есть: $y = mx$



гдѣ m принимается произвольно. Положимъ, что эта прямая пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ M и M_1, для которыхъ длины: $OM = OM_1$. Обозначимъ координаты

точка M и M_1 они будут: $OP = OP'$ и $MP = M_1P'$.
Будем искать координаты пересечения нашей кривой со прямою. Вставим значение y'ка в уравнение (1) $Ax^2 + Bmx^2 + Cm^2x^2 + Dx + Emx - F = 0$
или $(A + Bm + Cm^2)x^2 + (D + Cm)x + F = 0$.
Это уравнение должно дать абсциссы двух точек пересечения M и M_1. Но эти абсциссы равны и со обратными знаками, следовательно это уравнение должно дать два корня равные, но с обратными знаками, следовательно в нем коэффициент при x первой степени должен быть 0 т. е. должно быть: $D + Em = 0$. В этом равенстве m произвольно, следовательно оно может быть удовлетворено, только полагая одновременно: $D = 0$ и $E = 0$; таким образом уравнение кривой должно быть:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

то есть в нем не должно быть членов с x и y в первой степени, что и требовалось доказать.

Обратно. Если кривая представляется уравнением (II), которое не содержит членов с первыми степенями координат, то начало координат есть центр кривой.
В самом деле, если через начало проведем произвольную прямую $y = mx$, то для пересечений

Этой прямой ее кривой будем иметь:

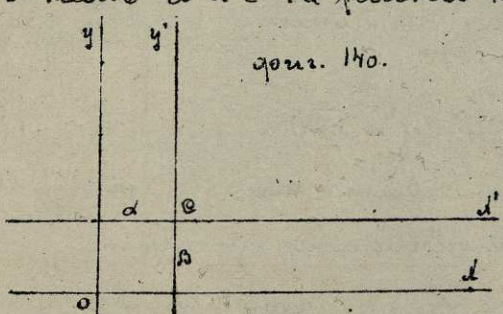
$$Ax^2 + Bmx^2 + Cm^2x^2 + F = 0$$

или $$(A + Bm + Cm^2)x^2 + F = 0.$$

Это уравнение дает для абсциссы точки пересечения две величины, равные и со обратными знаками. По уравнению $y = mx$ получаем две такие же величины для y, а следовательно в этом случае (фиг. 139) имеем, что $OP = OP_1$ и $MP = M_1P_1$, а потому треугольники OMP и OM_1P_1 равны и взяв из равенства этих треугольников заключаем, что $OM = OM_1$ т.е. что точка O есть центр. Эта теорема служит для отыскания центра. Положим опять, что дано уравнение:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Но теперь D и E не равны нулю, следовательно начало координат не есть центр и мы не знаем даже, имеет ли эта кривая центр или нет. Обозначим неизвестные координаты центра через α и β. Если центр есть, то α и β будут вещественные величины, а если нет то невещественные. Преобразуем координаты и перенесем начало в центр, оставляя оси параллельными самим себе (фиг. 140) Формула преобразования



фиг. 140.

координаты будутъ: $x = \alpha + x_1$ и $y = \beta + y_1$. Вставивъ въ уравненіе кривой, получимъ:

$$(\alpha+x_1)^2 A + B(\alpha+x_1)(\beta+y_1) + C(\beta+y_1)^2 + D(\alpha+x_1) + E(\beta+y_1) + F = 0$$

или $Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + (2\alpha A + B\beta + D)x_1 + (B\alpha + 2C\beta + E)y_1 + F' = 0 \ldots (III)$

гдѣ для краткости F' означаетъ слѣдующее выраженіе: $F' = A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0$. ✝ Смотр 281

Уравненіе (III) представляетъ тѣ же самую кривую, но относительно новыхъ осей; теперь предположимъ, что новое начало $\mathcal{O}$ есть центръ кривой тогда коэффиціенты въ уравненіи (III), при x_1 и y_1 должны быть равны 0:

1) $2A\alpha + B\beta + D = 0$ и 2) $B\alpha + 2C\beta + E = 0$

Мы здѣсь имѣемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными α и β въ первой степени. Рѣшивъ ихъ, мы найдемъ α и β т.е. координаты центра. Будемъ ихъ рѣшать, тогда получимъ:

$$\alpha = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Эти двѣ формулы даютъ для координатъ центра величины возможныя, если только знаменатель обѣихъ не равенъ нулю; слѣдовательно, когда это условіе соблюдено то кривая имѣетъ центръ, и мы его найдемъ; но можетъ случиться, что $B^2 - 4AC = 0$ тогда придется разсмотрѣть два случая 1) когда числители α и β не равны нулю и 2) когда они равны нулю.

Положимъ сначала, что $2CD - BE \neq 0$, тогда получимъ $\alpha = \infty$. Положимъ, что $2AE - BD \neq 0$, тогда и $\beta = \infty$; въ этомъ случаѣ центръ можно разсматривать, какъ удаленный на безконечно большое разстояніе отъ начала, иначе говоря, онъ не существуетъ. Два уравненія, изъ которыхъ имѣемъ опредѣлимъ координаты центра, будутъ въ этомъ случаѣ несовмѣстными. Чтобы это обнаружить стоитъ только сравнить въ нихъ коэффиціенты при одномъ изъ неизвѣстныхъ. Помноживъ 1-ое на B и 2-ое на $2A$, получимъ:

$$2AB\alpha + B^2\beta + BD = 0$$

$$\text{и } 2AB\alpha + 4AC\beta + 2EA = 0$$

Теперь имѣемъ видимъ что въ этихъ уравненіяхъ коэффиціенты при α равны и при β также, т. к. $B^2 = 4AC$, но извѣстные члены не одинаковы т.е. $BD \neq 2AE$, слѣдовательно эти уравненія несовмѣстны и никоимъ образомъ удовлетворить никакими величинами α и β т. е. центра не существуетъ. Если $2AE - BD = 0$, тогда $\beta = 0$, здѣсь можно доказать что числитель у α также будетъ равенъ 0. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ: $B^2 - 4AC = 0$, отсюда $B^2 = 4AC$ или $\frac{2C}{B} = \frac{B}{2A}$, но $2AE = BD$, откуда $\frac{B}{2A} = \frac{E}{D}$, сравнивая, найдемъ: $\frac{2C}{B} = \frac{E}{D}$ или $2CD = BE$ или $2CD - BE = 0$ слѣдовательно въ этомъ случаѣ будетъ

имеет что и $\alpha = \frac{0}{0}$. Неопределенность решения указывает что уравнения в этом случае приводятся к одному: в самом деле, умножив первое уравнение на B и второе на $2A$, мы увидим, что наши два уравнения будут тождественны, потому что имеем $2AE = BB$. Следовательно в этом случае для определения α и β имеем только одно уравнение, которое имеет бесконечное число решений. В этом случае центров бесчисленное множество. Итак из нашего исследования обнаружилось, что кривые второго порядка могут быть разделены на 2 класса: 1) Кривые имеющие один центр. Этот класс характеризуется признаком: $B^2 - 4AC \neq 0$. 2) Кривые, не имеющие центра. Этот класс характеризуется $B^2 - 4AC = 0$. К последнему классу присоединим, как исключение, геометрическое место второго порядка, имеющее бесчисленное множество центров, которое характеризуется двумя признаками $B^2 - 4AC = 0$ и $2CD - BE = 0$ или $2AE - DB = 0$.

Кривые имеющие центр.

Случай ($B^2 - 4AC \neq 0$). Дано уравнение:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Кривая имеет центр. Прежде всего найдем координаты центра α и β, решив два уравнения

$$2Aα + Bβ + D = 0 \quad \text{и} \quad Bα + 2Cβ + E = 0.$$

Сделаем преобразование координат, перенеся начало в центр, для чего служат формулы: $x = α + x'$ и $y = β + y'$ (фиг. 141). Новое уравнение кривой относительно осей Ox' и Oy' будет:

$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Во этому уравнению $F_1 = Aα^2 + Bαβ + Cβ^2 + Dα + Eβ + F$

Эту формулу, по которой следовало бы вычислить F_1, можно упростить. Для этого возьмем уравнения, определяющие центр. Умножим 1-е на $α$, а второе на $β$; сложим их, получим:

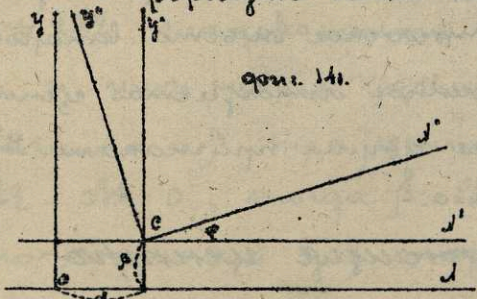
$$2α^2A + 2Bαβ + 2Cβ^2 + Dα + Eβ = 0$$

откуда $$Aα^2 + Bαβ + Cβ^2 = -\frac{Dα + Eβ}{2}$$

вставляя это в выражение F_1, находим:

$$F' = -\frac{Dα + Eβ}{2} + Dα + Eβ + F \quad \text{или} \quad F' = \frac{Dα + Eβ}{2} + F.$$

По этой формуле легко будет вычислить F_1.



фиг. 141.

Заметим будем считать F_1 известным. Возьмем уравнение (2) и упростим его вид новым преобразованием координат. Для этого, оставляя по-прежнему начало C, повернем оси координат на произвольный пока угол $φ$. Формулы для перехода к новым осям суть:

$$x' = x''\cos φ - y''\sin φ \; ; \quad y' = x''\sin φ + y''\cos φ.$$

Вставивъ ихъ въ уравненіе которое (2) получимъ:

$$A(x''^2\cos^2\varphi - 2x''y''\sin\varphi\cos\varphi + y''^2\sin^2\varphi) + B(x''^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi - x''y''\sin^2\varphi + x''y''\cos^2\varphi - y''^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi) + C(x''^2\sin^2\varphi - 2x''y''\sin\varphi\cos\varphi + y''^2\cos^2\varphi) + F' = 0$$

Раскрывъ здѣсь скобки и беря подобные члены за скобки получимъ уравненіе такого вида:

$$Mx''^2 + Px''y'' + Ny''^2 + F' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Здѣсь для краткости положено, что

$$M = A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi$$

$$N = A\sin^2\varphi - B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi$$

$$P = 2\sin\varphi\cos\varphi(C - A) + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

Уравненіе (3) представляетъ нашу кривую, отнесенную къ осямъ Ox'' и Oy''. Это уравненіе имѣетъ такой же видъ, какъ и уравненіе (1); слѣдовательно нашимъ преобразованіемъ мы еще не достигли никакого упрощенія. Это произошло потому, что уголъ поворота оставался до сихъ поръ произвольнымъ. Теперь мы воспользуемся неопредѣленностью угла φ и выразимъ его такъ, чтобы коэффиціентъ при произведеніи координатъ въ уравненіи (3) получился бы равнымъ 0 т. е. чтобы $P = 0$.

Посмотримъ, возможно ли это? Для этого должно имѣть:

$$2\sin\varphi\cdot\cos\varphi(C - A) + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0.$$

Попробуемъ изъ этого уравненія опредѣлить уголъ φ, неизвѣстный намъ. Замѣтивъ, что

$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$ и $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$, получимъ:

$$\sin 2\varphi (C - A) - B\cos 2\varphi = 0.$$

Раздѣливъ на $\cos 2\varphi$, напишемъ: $\operatorname{tg} 2\varphi (C - A) = -B$, отсюда:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{B}{C-A} = \frac{B}{A-C}.$$

По этой формулѣ всегда можно опредѣлить уголъ φ, потому что уголъ 2φ опредѣляется здѣсь по tg, а tg можетъ получать всевозможныя величины отъ $+\infty$ до $-\infty$; слѣдовательно, каковы бы ни были величины A, B и C мы всегда найдемъ уголъ 2φ, а слѣдовательно и φ. Есть однако одно исключеніе. Это случай, когда $A = C$ и $B = 0$; тогда $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{0}{0}$. Но въ этомъ случаѣ, какъ мы уже знаемъ, уравненіе будетъ представлять кругъ, и этотъ кругъ можно будетъ построить. Устранимъ этотъ случай. Изъ полученной нами формулы найдемъ для 2φ безчисленное множество значеній. Такъ наименьшее значеній положительное для γ будетъ θ, причемъ $\theta < 180°$; тогда можно получить: $2\varphi = \theta + k.180°$, гдѣ k можетъ быть равнымъ $0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Отсюда $\varphi = \frac{\theta}{2} + k.90°$. Всѣ эти рѣшенія, какъ легко видѣть, опредѣляютъ одну и ту же пару прямоугольныхъ осей. Взявъ рѣшеніе $\varphi = \frac{\theta}{2} < 90°$ мы видимъ, что другія получаемъ изъ него прибавленіемъ или вычитаніемъ нѣсколько разъ $90°$. Очевидно, что при этомъ будемъ получать лишь две самыя

направления двух линий Cd' и Cy'. Отсюда следует что существует только одна система прямоугольных координат, при которой в уравнении (3) будет $P=0$, и относительно этой системы осей наша кривая будет выражена уравнением:

$$Mx''^2 + Ny''^2 + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.)$$

В этом уравнении нам нужно будет вычислить коэффициенты M и N. Составим для этого более удачные формулы. Наше вычисление начнется с угла φ: $tg\,2\varphi = \frac{B}{A-C}$. Мы возьмем для угла φ наименьшее положительное значение т.е. примем $\varphi = \frac{\Theta}{2} < 90°$. Запишем возьмем прежнее выражение M и N. Составим их сумму и разность:

$$M+N = A(Cs^2\varphi + Sn^2\varphi) + C(Sn^2\varphi + Cs^2\varphi) = A + C$$

$$M-N = A(Cs^2\varphi - Sn^2\varphi) + 2B\,Cs\varphi\,Sn\varphi - C(Cs^2\varphi - Sn^2\varphi) =$$

$$= (A-C)Cs\,2\varphi + B\,Sn\,2\varphi.$$ Выразим $Sn\,2\varphi$ и $Cs\,2\varphi$ через $tg\,\varphi$: $Sn\,2\varphi = \frac{tg\,2\varphi}{\sqrt{1+tg^2 2\varphi}} = \frac{\frac{B}{A-C}}{\sqrt{1+\frac{B^2}{(A-C)^2}}} = \frac{B}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$; для $Cs\,2\varphi$

$$Cs\,2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{B^2}{(A-C)^2}}} = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

В эти формулы перед корнем подразумевается двойной знак $\pm$ и нам следует определить какой мы знак примем. Мы заметим

для этого, что $2\varphi = \Theta < 180°$; следовательно $\sin 2\varphi > 0$, а отсюда видно, что в выражении $\sin 2\varphi$ мы должны перед корнем принять знак одинаковый с B. Заметив это, вставляя $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$ в выражение $M - N$ получим: $M - N = \frac{(A-C)^2 + B^2}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}} = \sqrt{(A-C)^2 + B^2}$

Отсюда присоединяя, что $M + N = A + C$; затем, сложив и разделив на 2, получим: для

$M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$; для $N = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$

По этим формулам будет очень удобно вычислить M и N; таким образом уравнение (4) будет вполне составлено. По этому уравнению мы изобразим кривую линию, выраженную данным уравнением. Форма кривой, как окажется далее, зависит главным образом от того, будут ли коэффициенты M и N иметь знаки одинаковые или разные. Чтобы определить, будут ли иметь коэффициенты M и N знаки одинаковые или разные, мы рассмотрим произведение M и N. По формулам находим:

$$MN = \frac{1}{4}\left[(A+C)^2 - (A-C)^2 - B^2\right] = \frac{1}{4}\left[A^2 + 2AC + C^2 - A^2 + 2AC - C^2 - B^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[4AC - B^2\right]; \quad MN = -\frac{B^2 - 4AC}{4}.$$

В рассматриваемом случае $B^2 - 4AC \neq 0$ т.е. или больше 0, или меньше 0. Если $B^2 - 4AC < 0$, тогда $MN > 0$.

В этом случае M и N имеют одинаковые знаки. Кривая, представляемая уравнением (1), назыв. эллипсом. Если $B^2 - 4AC > 0$, то $MN < 0$, следовательно M и N имеют разные знаки и кривая, представляемая уравнением, называется гиперболой. Таким образом кривая имеющая центр разделяется на два вида: первый характеризуется признаком $B^2 - 4AC < 0$; это эллипсы; второй признаком $B^2 - 4AC > 0$; это - гиперболы.

а) Эллипсы.

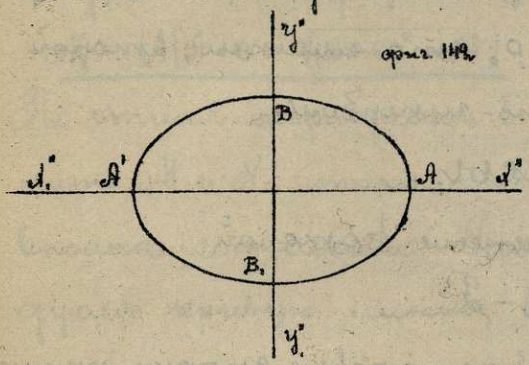
Построим кривую, уравнение которой

$$Mx_1^2 + Ny_1^2 = -F'.$$

Здесь M и N имеют одинаковые знаки; примем их положительными. Если бы они были отрицательными, тогда мы могли бы переменить знаки в обеих частях равенства. При построении этой кривой рассмотрим три случая: 1) $-F' > 0$; 2) $-F' = 0$ и 3) $-F' < 0$.

1) Случай $-F' > 0$. Положим $-F' = K$ и напишем уравнение так: $Mx_1^2 + Ny_1^2 = K$. Здесь M, N и K положительны. Возьмем прямоугольные оси координат. Определим точки пересечения этой кривой с осями координат (фиг. 142). Положим $y'' = 0$, по-

лучимъ: $Mx''^2 = {}^2M$, откуда $x'' = \pm\sqrt{\frac{M}{M}} = \pm a$, получимъ двѣ точки пересѣченія A и A', причемъ $cA = cA' = a$. Для пересѣченія съ осью y'овъ сдѣлаемъ $x''=0$, получимъ двѣ точки пересѣченія B и B', причемъ $cB = cB' = b = \sqrt{\frac{N}{N}}$ Уравненіе кривой напишется въ болѣе простомъ видѣ, если мы въ него вмѣсто коэффиціентовъ M и N и ${}^2M$ введемъ величины a и b. Мы имѣемъ $\frac{M}{M} = a^2$



фиг. 118

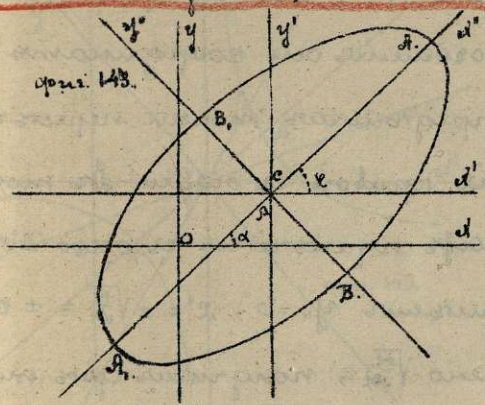
откуда $M = \frac{M}{a^2}$; также $N = \frac{M}{b^2}$ Вставивъ получимъ:

$\frac{M}{a^2}x''^2 + \frac{M}{b^2}y''^2 = M$ или $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$.

Это уравненіе уже было намъ построено, и мы знаемъ, что оно представляетъ эллипсъ, относительно центра и къ осямъ. Но не забудемъ, что цѣль наша состояла въ построеніи кривой, выраженной уравненіемъ (1) т.е. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ относительно первоначально данныхъ осей. Замѣтимъ что построивъ эллипсъ относительно осей Cx'' и Cy'', мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ его положеніе и относительно старыхъ осей. Замѣтимъ только еще, что въ послѣднемъ построеніи не всегда бываетъ $a > b$, можетъ случиться, что $a < b$. Это будетъ значить, что большая ось эллипса пойдетъ не по Cx'';

а по y''. 2) Пусть $-F'=0$. Уравнение будет $Mx''^2+Ny''^2=0$. Так как M и N положительны, то очевидно, что этому уравнению возможно удовлетворить только полагая одновременно, что $x''=0$ и $y''=0$, иначе сумма двух положительных чисел не может быть равна 0. В этом случае получится не кривая, а одна точка O.

3.) Положим, что $-F'<0$. Уравнение будет $Mx''^2+Ny''^2=-F'$



фиг. 143.

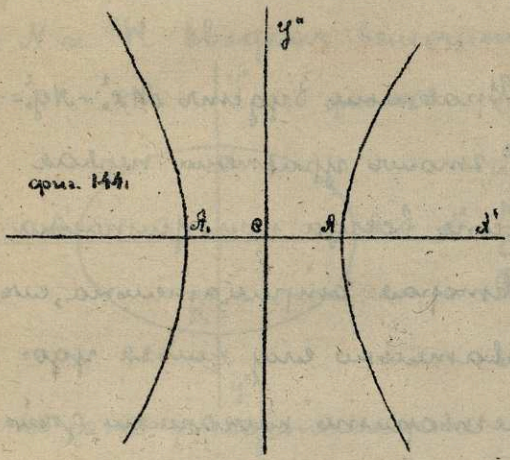
В этом уравнении первая часть всегда положительна, а вторая отрицательна, следовательно ему нельзя удовлетворить никакими действительными значениями x'' и y''. В этом случае говорят, что уравнение представляет мнимое место или мнимый эллипс. Итак окончательно, если в уравнении (1) $B^2-AC<0$, то уравнение представляет или эллипс, или точку, или мнимое место.

Гиперболы.

Мы рассмотрим теперь, какие кривые представляет уравнение $Mx''^2+Ny''^2=-F'$, в котором M и N имеют разные знаки. Мы будем полагать, что

$M>0$, а $N<0$. Если бы было наоборот, то мы могли бы переменить знаки во обеих частях уравнения. Здесь мы также рассмотрим три случая: 1) $-\delta'>0$, 2) $-\delta'=0$ и 3) $-\delta'<0$.

1) Пусть $-\delta'>0$. Положим, что $-\delta'=\mu$ и вместо того поставим знак при N на вверх, положим $N=-N_1$ и уравнение будет: $Mx''^2+(-N_1y''^2)=\mu$, где M, N_1 и μ положительны. Возьмем оси координат и определим точки пересечения кривой с осями. Для точек пересечения с осью x'ов имеем $y''=0$, $x''=\pm\sqrt{\frac{\mu}{M}}=\pm a$

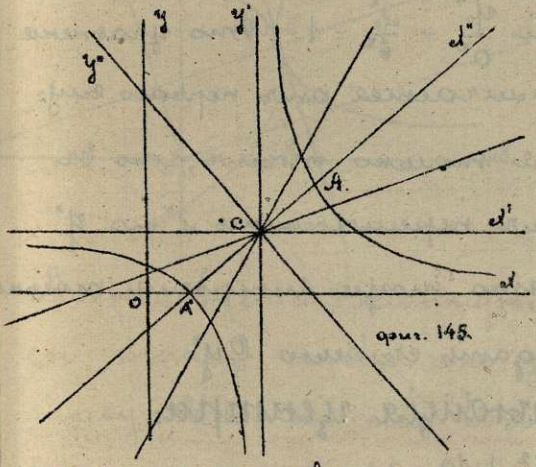


фиг. 144.

(фиг. 144) где через a обозначено $\sqrt{\frac{\mu}{M}}$, получим две точки пересечения A и A', причем $AC=A'C=\sqrt{\frac{\mu}{M}}=a$. Для пересечения с осью y'ков; $x''=0$ и уравнение будет $-N_1y''^2=\mu$, откуда $y''=\pm\sqrt{\frac{\mu}{N_1}}$. Это величина мнимая, следовательно кривая не пересечет оси y'ов. Если мы положим, что $\sqrt{+\frac{\mu}{N_1}}=b$ и введем в уравнение кривой величины a и b. Мы имеем, что $\frac{\mu}{M}=a^2$, откуда $M=\frac{\mu}{a^2}$, далее $\frac{\mu}{N_1}=b^2$, откуда $N_1=\frac{\mu}{b^2}$. Вставляя в уравнение получаем:

$$\frac{\mu}{a^2}x''^2-\frac{\mu}{b^2}y''^2=\mu \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1.$$

В этом уравнении мы прямо узнаем гиперболу, отнесенную к центру и осям. A и A' две вершины этой гиперболы и ее главная ось совпадает с осью Cx. Мы можем эту гиперболу построить. Построим ее относительно осей Cx'' и Cy'' или тоже самое определим ее положение относительно первоначальных осей (как показано на фигуре 145).



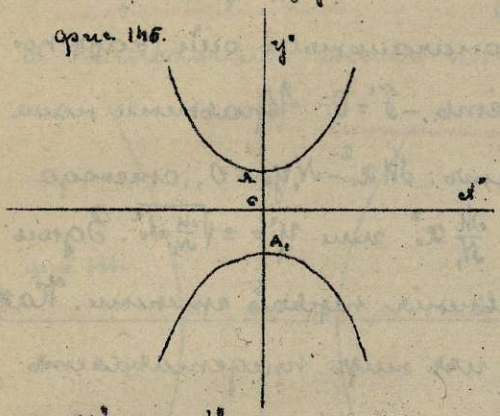
фиг. 145.

2.) Пусть $-F'=0$. Уравнение наше будет: $Mx''^2 - N_1 y''^2 = 0$, откуда $y''^2 = \frac{M}{N_1} x''^2$ или $y'' = \pm\sqrt{\frac{M}{N_1}}\, x''$. Здесь уравнения первой степени. Каждое из них представляет прямую линию, проходящую через начало координат C. (фиг. 145) Эти две прямые будут одинаково наклонены к оси x'' с двух разных сторон. Следовательно в этом случае наше уравнение представляет не кривую, а совокупность двух пересекающихся прямых. Это частный случай гиперболы.

3.) Положим, что $-F'<0$. Положим, что $F'=M$ и напишем: $Mx''^2 - N_1 y''^2 = -M$. Строим эту кривую относительно последних осей. Для пересечения с осью y'' будем иметь $x''=0$ и следовательно $N_1 y''^2 = M$, откуда $y'' = \pm\sqrt{\frac{M}{N_1}} = \mp a$. Получаем две точки A и A' причем

$CA = CA' = a$. Для пересечения с осью x' нужно положить $y' = 0$, получим $-Mx'^2 = N$, откуда $x' = \pm\sqrt{\frac{N}{M}}$. Следовательно ось x' не пересекает кривой; только не имеет, если положить $\sqrt{\frac{N}{M}} = b$ и затем введем в уравнение величины a и b; будем иметь $\frac{N}{M} = b^2$, откуда $M = \frac{N}{b^2}$;

фиг. 146.



$\frac{N}{N_1} = a^2$, откуда $N_1 = \frac{N}{a^2}$. Вставив получим: $\frac{N}{a^2}y_0'^2 - \frac{N}{b^2}x'^2 = N$ или $\frac{y_0'^2}{a^2} - \frac{x_0'^2}{b^2} = 1$. Это уравнение отличается от первого случая только тем, что в нем переменились x' на y' и y' на x', следовательно это тоже гипербола, только ее главная ось будет совпадать с осью Cy'.

Кривые не имеющие центра.

(случай: $B^2 - 4AC = 0$)

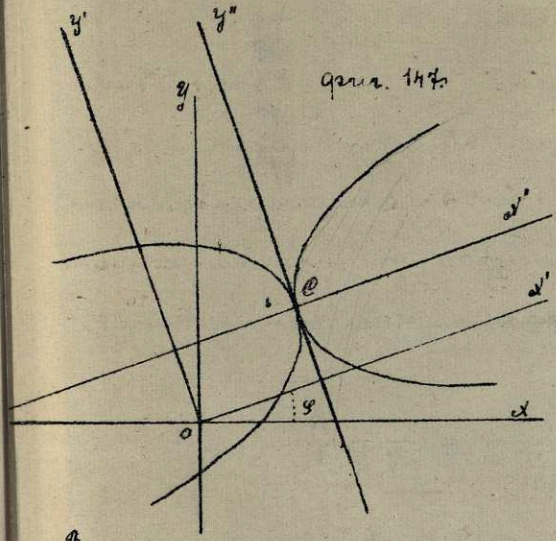
Дано уравнение кривой

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Прежде всего заметим, что в этом случае первые три члена уравнения (1) образуют полный квадрат. В самом деле, имеем: $4AC = B^2$, откуда $A = \frac{B^2}{4C}$, следовательно $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \frac{B^2}{4C}x^2 + Cy^2 + Bxy =$
$C\left(y^2 + \frac{B}{C}xy + \frac{B^2}{4C^2}x^2\right) = C\left(y + \frac{B}{2C}x\right)^2$. Вследствие этого уравнение (1) напишется в виде:

$$C\left(y+\frac{B}{2c}x\right)^2+Dx+Ey+F=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Для удобства упрощения этого уравнения, мы повернем оси координат на некоторый угол φ, оставляя то-



фиг. 147.

же начало. Формулы преобразования координат будут $x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$ и $y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$. Вставляя эти формулы, получим $C\left[x'\sin\varphi+y'\cos\varphi+\frac{B}{2c}(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\right]^2+D\left[x'\cos\varphi-y'\sin\varphi\right]+\left[x'\sin\varphi+y'\cos\varphi\right]E+F=0$.

или $C\left[y'\left(\cos\varphi-\frac{B}{2c}\sin\varphi\right)+\left(\sin\varphi+\frac{B}{2c}\cos\varphi\right)x'\right]^2+\left[D\cos\varphi+E\sin\varphi\right]x'+\left[E\cos\varphi-D\sin\varphi\right]y'+F=0$.

Воспользуемся неопределенностью угла φ и выберем его так, чтобы это уравнение упростилось по составу. Именно мы возьмем такой угол φ, чтобы коэффициент при x' в большой скобке был бы равен нулю т. е. положим $\sin\varphi+\frac{B}{2c}\cos\varphi=0$, отсюда определится угол φ: $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{B}{2c}$. Эта формула определяет угол φ. Притом, так как тангенс угла определяется по $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, то его всегда можно найти. В первых двух четвертях tg получает всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому $\angle\varphi$ найдется или в первой или во второй четверти; или поэтому будем пола-

часть $\varphi < 180°$. При таком значении φ, уравнение кривой будет иметь вид:

$$N y'^2 + P x' + Q y' + T = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Здесь для краткости положено:

$N = C\left[\cos\varphi - \frac{B}{2C}\sin\varphi\right]^2$, $P = 2D\cos\varphi + E\sin\varphi$ и $Q = E\cos\varphi - 2D\sin\varphi$

Эти три коэффициента нам нужно будет вычислить. Мы составили для этого более удобные формулы. Но этою целью предварительно выразим $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ через коэффициенты уравнения кривой; именно:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{-\frac{B}{2C}}{\sqrt{1-\frac{B^2}{4C^2}}} = \frac{-B}{\sqrt{4C^2+B^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{B^2}{4C^2}}} = \frac{2C}{\sqrt{4C^2+B^2}}$$

В этих формулах перед корнем квадратным подразумевается двойной знак. Чтобы определить, нужно ли взять + или −, заметим что так как $\varphi < 180°$, то $\sin\varphi > 0$. Следовательно, как видно из выражения $\sin\varphi$, перед корнем нужно принимать знак обратный со знаком B.

Далее вычисляем N:

$$N = C(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\varphi)^2 = C\left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 = C\left(\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 =$$

$$= \frac{C}{\cos^2\varphi} \text{ или } N = C : \frac{4C^2}{4C^2+B^2} = 1 : \frac{4C}{4C^2+B^2} = C + \frac{B^2}{4C} \quad \left\{\text{так как } B^2 = 4AC\right.$$

или $N = A + C$;

$$P = \frac{2CD - BE}{\sqrt{4C^2+B^2}}$$

Заметим, что $4C^2 + B^2 = 4C\left(C + \frac{B^2}{4C}\right) = 4C(C+A)$.

Следовательно $P = \frac{2CD - BE}{2\sqrt{C(C+A)}}$. Затем находим: $Q = \frac{2CE + BD}{2\sqrt{C(C+A)}}$. По найденным выражениям вычислим P, N и Q. Возьмем теперь новое уравнение кривой т. е. $Nx'^2 + Px' + Qy' + F = 0$ ..... (2)

Его можно еще более упростить новым преобразованием координат, именно, оставляя оси параллельными самим себе, перенесем начало координат в другую точку. Координаты этой точки обозначим через (a, b) и оставим их пока произвольными.

Формулы перехода будут: $x' = x'' + a$; $y' = y'' + b$.

Вставляя эти выражения в уравнение (2) получим:

$$N(y'' + b)^2 + P(x'' + a) + Q(y'' + b) + F = 0 \text{ или}$$

$$Nx''^2 + Px'' + (2Nb + Q)y'' + Nb^2 + Pa + Qb + F = 0$$

Это уравнение имеет пока тот же самый вид, как и уравнение (2). Воспользуемся неопределенностью координат a и b и выберем их такими, чтобы в последнем уравнении коэффициент при y'' и сумма постоянных членов $= 0$. Мы должны иметь: $2Nb + Q = 0$ и $Nb^2 + Pa - Qb + F = 0$. Из этих двух уравнений мы найдем неизвестные a и b именно: $b = \frac{-Q}{2N}$ и вставим во второе, получим: $\frac{Q^2}{4N} + Pa + F - \frac{Q^2}{2N} = 0$ или $Pa = \frac{Q^2}{2N} - \frac{Q^2}{4N} - F$, отсюда $a = \frac{Q^2 - 4NF}{4PN}$. Из этих равенств видно, что a и b будут возможны, если только

$N \neq 0$ и $P \neq 0$. Но если бы было $N = 0$, то тогда уравнение (2) имело бы вид:

$$Px' + Qy' + F = 0.$$ и

представляло бы прямую линию, которая является таким образом, частным случаем параболы. Это уравнение содержит одно y' и его можно решить относительно y', получим два решения: $y' = \beta'$ и $y' = \beta''$. Эти два решения представляют две прямые линии, параллельные с осью x, если они действительные. Если же они мнимые, то эти две прямые будут мнимые. Наконец, если корни равны, то эти две прямые совпадают в одну. Таким образом две прямые и одна прямая и мнимое место являются частными случаями параболы. Устраним эти частные случаи; мы сказали, что в нашем последнее преобразование координат всегда возможно и при найденных величинах a и b уравнение (1) примет вид:

$$N y''^2 + Px'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Отсюда находим: $y''^2 = -\frac{P}{N} x''$. Различим два случая: 1) $-\frac{P}{N} > 0$. Положим тогда, что $-\frac{P}{N} = 2p$ будем иметь: $y^2 = 2px''$. В этом уравнении узнаем, известную нам, параболу, отнесенную к вершине и оси.

2). $-\frac{P}{N} < 0$, тогда положим $-\frac{P}{N} = -2q$, уравнение

будет: $y''^2 = -2qx''$ или $y'' = \pm\sqrt{-2qx''}$. Во этом случае y'' будет действительно только при отрицательных значениях x''. Значит это уравнение выражает тут уже параболу, но только ось будет направлена от вершины O в противоположную сторону Ox''.

При написании центра кривых второго порядка пропущено следующее замечание.

Рассматривая уравнение:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2\alpha A + B\beta + D)x' + (B\alpha + 2C\beta + E)y' + (A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\overline{1})$

и обозначая для краткости через $f(x,y)$ первую часть уравнения (1), которая есть функция целая второй степени относительно xy. Замечаем, что в уравнении $(\overline{1})$ члены второй степени одинаковы с членами в уравнении (1); коэффициенты при членах первой степени суть частные производные от функции $f(x,y)$ взятые относительно переменных x и y, и в которых эти переменные заменены через α и β; наконец постоянный член есть величина многочлена $f(x,y)$ при $x=\alpha$ и $y=\beta$. Сообразительно ур-е $(\overline{1})$, можно написать так:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + f'_x(\alpha,\beta)x' + f'_y(\alpha,\beta)y' + f(\alpha,\beta) = 0.$$

Приравнявъ нулю коэффиціенты при x' и y' получимъ два ур-нія первой степени.

$$2Ax + By + D = 0$$
$$Bx + 2Cy + E = 0.$$

Отсюда видно, что центръ кривой второго порядка мы опредѣлимъ рѣшивъ два уравненія, которыя получимъ, когда приравняемъ нулю частныя производныя, взятыя относительно x и y отъ первой части даннаго ур-нія.

Сводъ формулъ, употребляемыхъ при изслѣдованіи кривыхъ 2го порядка черезъ преобразованіе координатъ

Дано уравненіе:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Прежде всего составимъ дискриминантъ $B^2 - 4AC$. Если онъ не равенъ нулю, то кривая имѣетъ центръ, причемъ если $B^2 - 4AC < 0$, то кривая будетъ эллипсъ. Если $B^2 - 4AC > 0$, то гипербола. Далѣе легко написать два уравненія, опредѣляющія центръ:

$$2Ax + By + D = 0 \quad \text{и} \quad Bx + 2Cy + E = 0$$

Изъ этихъ двухъ уравненій мы найдемъ координаты центра α и β. Затѣмъ перенесемъ координаты центра, полагая: $x = x' + \alpha$ и $y = y' + \beta$. Новое ур-е кривой будетъ:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

в нем F' вычисляем по формуле $F' = \frac{Dd + Ee}{2} + F$

Вычисляем теперь угол φ, поворота осей, по формуле $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A - C}$. Повернем оси координат на угол φ, для чего служат формулы:

$$x' = x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi \; ; \quad y' = x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi$$

причем $2\varphi < 180°$ и $\varphi < 90°$. Новое уравнение кривой будет:

$$Mx''^2 + Ny''^2 + F' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

В нем коэффициенты M и N вычисляются по формуле: $M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$ и $N = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$

причем перед корнем нужно переменить знак, если $B < 0$. Имея по уравнению (3) построим саму кривую, определив ее полуоси.

Замечание. Если в частном случае у нас выйдет $F' = 0$, тогда уравнение (2) будет:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = 0$$

В этом случае не нужно делать последнего преобразования координат. Действительно, прямо на этом уравнении легко видеть, что получатся две пересекающиеся прямые. Чтобы обнаружить это стоит только решить это уравнение относительно y': $y'^2 + \frac{B}{C} y'x' + \frac{A}{C} x'^2 = 0$, $y' = -\frac{B}{2C} x' \pm \sqrt{\frac{B^2}{4C^2} x'^2 - \frac{A}{C} x'^2}$;

$$y' = -\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} x'$$

Если $B^2 - 4AC > 0$, то это уравнение представляет две прямые проходящие через начало координат:

Если же $B^2 - 4AC < 0$, то этому уравнению можно удовлетворить, полагая $x' = 0$ и $y' = 0$ и уравнение представляет точку.

Наконец, если $B^2 - 4AC = 0$, то получится одна прямая: $y' = -\frac{B}{2C}x'$. Вернемся опять к уравнению (1) и положим что $B^2 - 4AC = 0$, но в тоже время $2CD - BE \neq 0$, тогда получится парабола. Тогда прежде всего повернем оси координат, оставив то же начало, на угол φ, который вычисляем по формуле $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{B}{2C}$. Формулы преобразования координат будут: $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$ и $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$. Новое уравнение будет:

$$Ny'^2 + Px' + Qy' + F = 0 \ldots\ldots (2)'$$

Вычисляем коэффициенты по формулам: $N = A + C$, $P = \frac{2CD - BE}{2\sqrt{C(A+C)}}$ и $Q = \frac{2CE + DB}{2\sqrt{C(A+C)}}$. Здесь перед корнем надо принять знак обратный со знаком B.

Угол φ всегда меньше $90°$. Наконец перенесем начало координат, оставляя оси параллельными самим себе в точку, находящуюся на кривой линии и уничтожим в новом уравнении член с y' в первой степени и сумму известного члена. Формулы преобразования будут: $x' = x'' + a$ и $y' = y'' + b$. Координаты a и b будут известны. Окончательно уравнение кривой будет: $Ny''^2 + Px'' = 0$. Строим параболу.

Замечание. Если нам задано уравнение такого

вида: $Ax^2 + 2Dx + Ey + F = 0$,

то тогда $B^2 - 4AC = 0$ и это уравнение представляет параболу. В этом случае не надо делать преобразования координат относительно поворота осей, а положить только $x = x' + a$ и $y = y' + b$ и затем определить a и b так, чтобы в новом уравнении не было члена известного и с x в первой степени, так что уравнение получится в виде: $Ax'^2 + Ey' = 0$

Это уравнение представляет кривую параболу, но в ней осью параболы служит ось y обр.

Пример 1-ый Построить кривую представляемую уравнением:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16y + 21 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Здесь мы имеем $B^2 - 4AC = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 3 < 0$, а потому наше уравнение представляет собою эллипс. Уравнения центра будут: производная от данного уравнения по x и производная от данного уравнения по y, причем в этих производных x должен быть заменен через α, а y через β, где α и β суть координаты центра. Следовательно уравнения центра суть:

$$6\alpha + 2\beta = 0$$

$$2\alpha + 6\beta - 16 = 0$$

Из первого уравнения $\beta = -3\alpha$. Вставляя во второе, получим $2\alpha - 18\alpha - 16 = 0$ или $-16\alpha - 16 = 0$, откуда $\alpha = -1$ и $\beta = +3$.

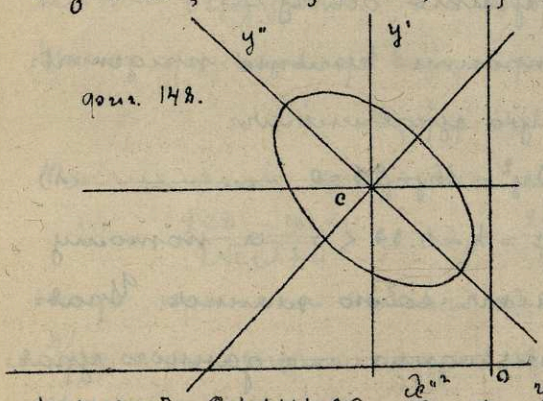
Переносим начало в центр:

$$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 + F' = 0$$

здесь $F' = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F$, где $\alpha = -1$, $\beta = +3$, $D = 0$, $E = -16$ подставляя определяем $F' = -\frac{48}{2} + 25 = -1$. Подставляя теперь в уравнение величину F'; имеем:

$$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Делаем поворот осей на угол φ. $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{2}{3-3} = \frac{2}{0} = \infty$; $\angle 2\varphi = 90°$; $\angle \varphi = 45°$. Уравнение будет:



фиг. 148.

$$Mx''^2 + Ny''^2 + F' = 0 \ldots\ldots (3),$$

$$M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = \frac{1}{2}\left[6 + \sqrt{4}\right] = 4.$$

$$N = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = \frac{1}{2}\left[6 - 2\right] = 2$$

Уравнение (3) будет: $4x''^2 + 2y''^2 = 1 \ldots$ или $\frac{x''^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y''^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$. Сравнивая это уравнение с общим уравнением эллипса $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$, видим, что $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Откладываем кривую относительно последних осей координат и восстановив старые оси, получим положение эллипса относительно данных осей.

Пример 2й. Дано уравнение:

$$y^2 - 2xy - x^2 + 2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

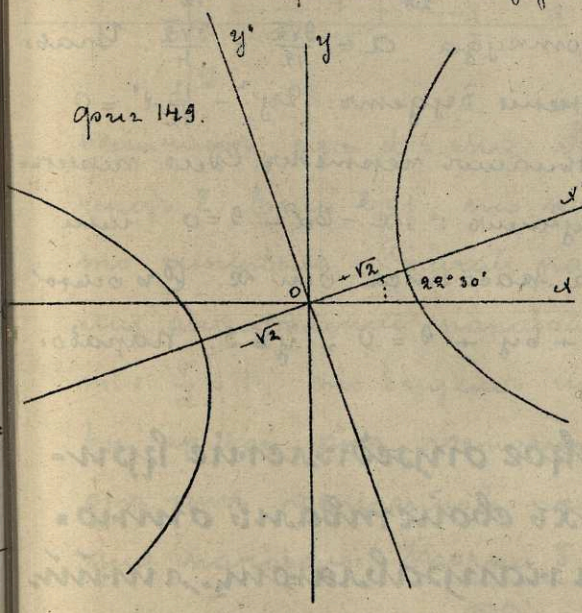
$B^2 - 4AC = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8 > 0 \ldots$ гипербола или ее частный

случай. Здесь начало координат в центре и переносить оси не надо. Делаем поворот, вычисляем угол φ: $tg\,2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{-2}{-1-1} = +1$, $2\varphi = 45°$, $\varphi = 22°30'$. Уравнение будет: $Mx''^2 + Ny''^2 + F' = 0$; $F' = F = 2$, знак как $x=x$ и $y=0$. По формулам находим M и N, только корни нам надо взять с обратными знаками, получим: $M = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{4+4}\right] = -\frac{\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}$; $N = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = +\sqrt{2}$. Уравнение будет: $-\sqrt{2}x''^2 + \sqrt{2}y''^2 + 2 = 0$ или

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x''^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y''^2 = 1 \text{ или}$$

$$\frac{x''^2}{(\sqrt[4]{2})^2} - \frac{y''^2}{(\sqrt[4]{2})^2} = 1.$$

фиг. 149.



Сравнивая это уравнение с уравнением гиперболы:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1.$$

получим: $a = \sqrt[4]{2}$, $b = \sqrt[4]{2}$. Получили так называемую равносторонюю гиперболу. Для пересечения с осью x, получим $y=0$, тогда $-x^2 + 2 = 0$, $x^2 = 2$ и $x = \pm\sqrt{2}$. Ось x гипербола пересечет в двух точках на расстоянии от начала на $\sqrt{2}$.

Пример 3-й. Дано уравнение:

$$-y^2 - 2xy + x^2 - 6y - 6x + 9 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

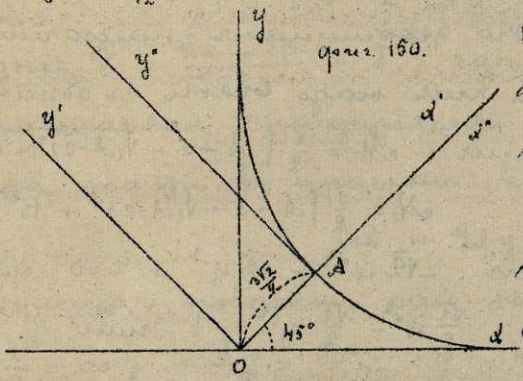
$B^2 - 4AC = 4 - 4\cdot1\cdot1 = 0$ ... парабола. Поворачиваем оси на угол φ; $tg\,\varphi = -\frac{B}{2C} = -\frac{-2}{2} = 1$, $\angle\varphi = 45°$, уравнение будет:

$$A y'^2 + Px' + Qy' + F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$A = A + C = 1 + 1 = 2$; $P = \frac{2CD - BE}{2\sqrt{C(A+C)}} = \frac{(2\cdot 1\cdot -6) - 12}{2\sqrt{1(2)}} = \frac{-24}{2\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}}$

$Q = \frac{2CE + BD}{2\sqrt{C(A+C)}} = \frac{-12 + 12}{2\sqrt{2}} = 0$; $F = 9$ Уравнение будет:

$2y'^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}x' + 9 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ Переносим оси координат по формулам:



фиг. 150.

$x' = x'' + a$; $y' = y'' + b$, вставляя, получим: $2(y''^2 + 2by'' + b^2) - \frac{12}{\sqrt{2}}(x'' + a) + 9 = 0$

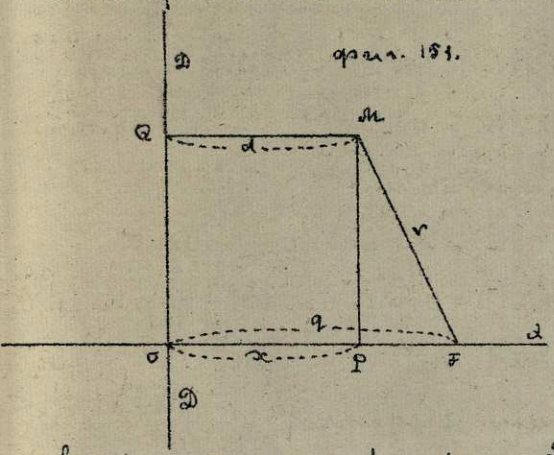
но $b = -\frac{Q}{2A} = 0$, $2b^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}a + 9 = 0$. откуда $a = \frac{9\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Уравнение будет: $2y''^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}x'' = 0$

или $y''^2 = \frac{6}{\sqrt{2}}x'' = 3\sqrt{2}\,x''$. Строим чертеж. Для пересечения с осью x, $y = 0$, получим: $x^2 - 6x + 9 = 0$ или $x = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$. Парабола касается оси x. С осью y, $x = 0$, получим: $y^2 + 6y + 9 = 0$; $y = 3$. Парабола касается оси y.

Общее геометрическое определение кривых 2-го порядка по их свойствам относительно фокусов и направляющих линий.

Каждая из трех кривых, эллипс, парабола и гипербола, могут быть определены как геометрическое место точек, расстояния которых от данной неподвижной точки имеют постоянное отношение к расстоянию от некоторой неподвижной прямой. Когда величина этого отношения

< 1, тогда получается эллипсъ, если она $= 1$, то парабола, если > 1, то гипербола. Докажемъ это и въ этомъ случаѣ составимъ уравненіе такого геометрическаго мѣста. Пусть DD' постоянная неподвижная прямая и F постоянная точка и пусть M какая-нибудь точка кривой. Проведемъ $MF = r$ и опустимъ перпендикуляръ на DD'.



фиг. 151.

По условію для всѣхъ точекъ имѣемъ: $\frac{r}{d}$ = постоянной величинѣ, гдѣ $d = MQ$. Величину эту $\frac{r}{d}$ обозначимъ черезъ ε. Если $\varepsilon = 1$, то кривая парабола и когда $\varepsilon > 1$, то гипербола. Случай параболы очевиденъ по предыдущему опредѣленію параболы, потому что, когда $\varepsilon = 1$, т. е. $\frac{r}{d} = 1$, то будемъ имѣть: $d = r$ и разстояніе точки кривой отъ постоянной точки равно разстоянію ея отъ постоянной прямой, какъ и должно быть для параболы. Точка F называется фокусомъ, а постоянная прямая DD' направляющей линіей. Опустимъ черезъ фокусъ на направляющую $\perp$ ось. Точку O примемъ за начало координатъ, а линію Ox за ось абсциссъ и Oy за ось y. Построимъ координаты точки M, будемъ имѣть: $OP = x$, $MP = y$. Пусть разстояніе $OF = q$. Это разстояніе дано. Имѣемъ $\frac{r}{d} = \varepsilon$ или $r = \varepsilon d$

чем $r^2 = \varepsilon^2 d^2$, но $r^2 = y^2 + (q - x)^2$. Если $x = d$, следовательно вставить, имеем:

$$y^2 + (q - d)^2 = \varepsilon^2 d^2$$

Это есть уравнение рассматриваемого сечения. Уравнение это 2-ой степени, следовательно кривая будет второго порядка. Определить, какая это кривая. Перенесем все члены в первую часть.

$$(1 - \varepsilon^2) d^2 + y^2 - 2qd + q^2 = 0.$$

Составим бином $B^2 - 4AC = -4(1 - \varepsilon^2) = 4(\varepsilon^2 - 1)$. Ясно видно теперь, что если $\varepsilon < 1$, то $B^2 - 4AC < 0$ и кривая будет эллипс. Если же $\varepsilon = 1$, то $B^2 - 4AC = 0$ и кривая будет парабола. и если $\varepsilon > 1$, то $B^2 - 4AC > 0$ и кривая будет гипербола. Рассмотрим эти три случая, каждый отдельно.

Эллипс.

Пусть $\varepsilon < 1$. Возьмем уравнение кривой:

$$(1 - \varepsilon^2) d^2 + y^2 - 2qd + q^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

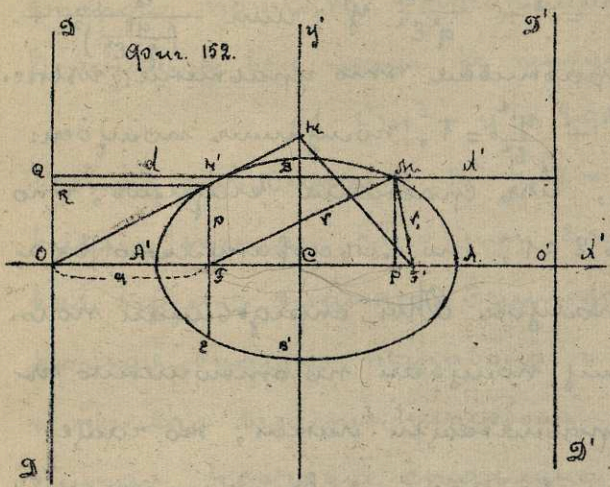
Прежде всего определим центр этой кривой. Координаты центра, как мы знаем, найдутся из уравнений. Берем частную производную по d: $2(1 - \varepsilon^2) d - 2q = 0$, по y: $2y = 0$, следовательно имеем из первого $x = \frac{q}{1 - \varepsilon^2} = \alpha$, а из второго $y = 0 = \beta$; перенесем начало координат в центр, полагая $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$; или $x = x' + \frac{q}{1 - \varepsilon^2}$ и $y = y'$. Новое уравнение

кривой будет:

$$A x'^2 + B x'y' + C y'^2 + F' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

или въ нашемъ случаѣ: $(1-\varepsilon^2)x'^2 + y'^2 + F' = 0$, причемъ по извѣстнымъ формуламъ: $F' = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F = -\frac{q^2}{1-\varepsilon^2} + q^2 = -\frac{q^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$. Поэтому уравненію опредѣлимъ полуоси нашего эллипса. Для этого напишемъ это уравненіе въ видѣ: $\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{q^2\varepsilon^2}x'^2 = 1 - \frac{(1-\varepsilon^2)}{q^2\varepsilon^2}y'^2$ или $\frac{x'^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\frac{q\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}} = 1$. Теперь сравнивая это уравненіе съ извѣстною формулою: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, получимъ полуоси: $a = \frac{q\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ и $b = \frac{q\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$; изъ сравненія видимъ, что $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ и такъ какъ $\varepsilon < 1$, то слѣдовательно $b < a$, т. е. a есть большая полуось. Мы опредѣлили положеніе центра и величину полуосей по отношенію къ данному фокусу и направляющей линіи; но чаще приходится принимать за данныя въ эллипсѣ эти полуоси и разсматривать эллипсъ, отнесенный къ его центру и къ осямъ, тогда нужно будетъ находить опредѣлить положеніе фокуса и направляющей линіи относительно центра. Сдѣлаемъ это въ разсматриваемомъ случаѣ. Построимъ центръ. Абсцисса центра α очевидно больше q. Пусть $OC = \alpha$. Построимъ новыя оси Cx' и Cy'. Строимъ эллипсъ относительно новыхъ осей. Для опредѣленія фокуса вычислимъ разстояніе $CF = c = OC - OF = \frac{q}{1-\varepsilon^2} - q = \frac{\varepsilon^2 q}{1-\varepsilon^2}$. Сравнивая c съ a, мы видимъ, что $\underline{c = a.\varepsilon}$. Положеніе

направляющей определяется равенством $x = a = \frac{a}{1-\varepsilon^2}$ следовательно $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Постоянная величина ε называется эксцентриситетом эллипса*), $\varepsilon < 1$, $c = cF$ называется фокусным расстоянием (фиг. 152); эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, т. е. отношение фокусного расстояния к большой полуоси. Это есть число отвлеченное.



До сих пор мы имели одну фокусу F и одну направляющую линию DD', соответствующую этому фокусу, но заметим, что эллипс расположен симметрично относительно оси Cy'. Построим их. Отложим $CF' = CF = c$, будем иметь другой фокус F', а отложив $Co' = Co = \frac{a}{\varepsilon}$, получим другую направляющую линию $D'D'$. Расстояние OC или oc легко построить. Именно, заметим, что $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c}$. Отложим на оси y' длину $cM = a$; соединим точку M с F'. В точке M восставим к MF' перпендикуляр; этот перпендикуляр пройдет через точку O. В самом деле, в прямоугольном треугольнике имеем: $MC^2 = OC \cdot FC$ и отсюда $OC = \frac{MC^2}{FC} = \frac{a^2}{c}$. Вводя выражения радиусов векторов эллипса в функции абсциссы, считаемой от центра; возьмем про-

*) Из фор. $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ имеем $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$ откуда $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

произвольную точку M, проведем два радиуса вектора FM и $F'M$, один r, а другой r'. Текущие координаты $MP = y'$ именем $CP = x'$. Возьмем расстояние M от направляющей d и d', будем иметь

$r = \varepsilon d$ или $r = \varepsilon(\alpha c + x') = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x'\right)$ или $r = a + \varepsilon x'$.

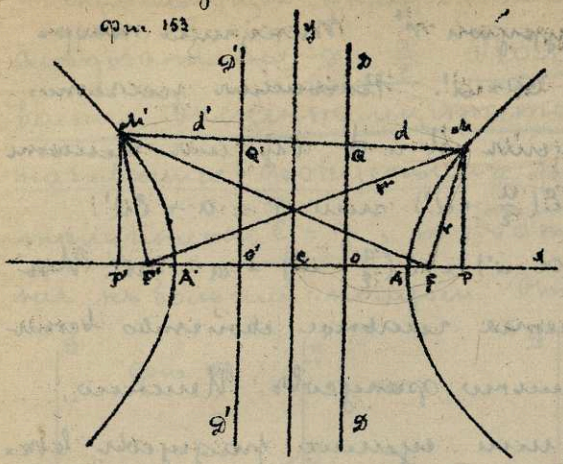
Точно также: $r' = \varepsilon d' = \varepsilon(\alpha c - x') = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x'\right) = a - \varepsilon x'$. Из этих выражений получается главное свойство всех точек эллипса относительно фокусов. Именно, сложив имеем, $r + r' = 2a$, или сумма радиусов векторов равна большой оси. Заметим в заключение выражений параметров эллипса. Это есть хорда перпендикулярная к большой оси и проведенная через фокусы $N'\varepsilon = 2p$, где p есть полупараметр $= N'p'$. Взяв расстояние $N'R$ точки N' от неподвижной DD мы имеем: $N'R = q$ и должны иметь: $\frac{p}{q} = \varepsilon$ откуда $p = q\varepsilon$, так что можно написать полуоси

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Гипербола.

Пусть DD' есть направляющая линия и F фокус; M - произвольная точка кривой. Имеем: $OF = q$, $OP = x$ $MP = y$. По определению имеем: $\frac{r}{d} = \varepsilon$. ε - есть эксцентриситет и для гиперболы он больше 1. Из полученных уравнений кривой в таком виде:

$y^2 + (x-a)^2 = \varepsilon^2 x^2$ или $(\varepsilon^2-1)x^2 - y^2 + 2qx - q^2 = 0$



(фиг. 153) Определимъ центръ и полуоси гиперболы. Перенесемъ начало координатъ въ центръ, полагая: $x = x' + \alpha$ и $y = y' + \beta$. Уравненіе кривой будетъ:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$$

Въ нашемъ случаѣ оно будетъ: $(\varepsilon^2-1)x'^2 - y'^2 + F' = 0$, причемъ $F' = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F$.

Для опредѣленія координатъ центра α и β составимъ два уравненія:

$$2(\varepsilon^2-1)\alpha + 2q = 0 \quad ; \quad -2y = 0$$

Находимъ: $x = -\frac{q}{\varepsilon^2-1} = \alpha$ и $y = 0 = \beta$. Слѣдовательно $F' = -\frac{q^2}{\varepsilon^2-1} - q^2 = -\frac{q^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}$, слѣдовательно уравненіе гиперболы, отнесенной къ центру и къ осямъ будетъ:

$$(\varepsilon^2-1)x'^2 - y'^2 = \frac{q^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}.$$

Чтобы обнаружить ея полуоси, приведемъ это уравненіе къ виду: $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Имѣемъ: $\frac{(\varepsilon^2-1)^2}{q^2\varepsilon^2}x'^2 - \frac{\varepsilon^2-1}{q^2\varepsilon^2}y'^2 = 1$

$\frac{x'^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)^2} = 1$. Теперь имѣемъ полуоси гиперболы $a = \frac{q\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$; $b = \frac{q\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$. Такъ какъ q и ε даны, то слѣдовательно по этимъ формуламъ a и b будутъ извѣстны. Сравненіе формулъ, выражающихъ a и b, показываетъ, что $b = a\sqrt{\varepsilon^2-1}$. Если теперь полуоси a и b считать данными, то изъ послѣдняго равенства

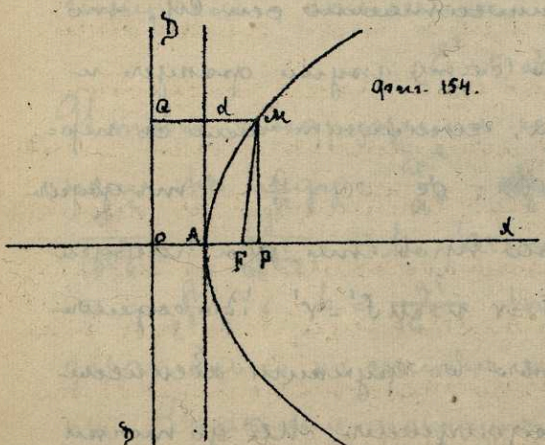
легко определить эксцентриситет.

Имеем: $\sqrt{\varepsilon^2-1} = \frac{b}{a}$; $\varepsilon^2-1 = \frac{b^2}{a^2}$, $\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}+1 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ и $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. Построим на нашем чертеже центр и построим эту гиперболу. Имеем: $\alpha = -\frac{q}{\varepsilon^2-1}$ и $\beta = 0$. Так как $\varepsilon > 1$, то очевидно, что $\alpha < 0$, следовательно центр будет всегда от O, положим в точке C, имеем $OC = -\alpha = \frac{q}{\varepsilon^2-1}$. Сравнивая a и OC, мы видим, что $a = \varepsilon \cdot OC$, следовательно a больше OC и имеем $OC = \frac{a}{\varepsilon}$. Это выражение определяет положение направляющей линии относительно центра. Положение фокуса относительно центра определится расстоянием CF, а $CF = OC + OF = \frac{q}{\varepsilon^2-1} + q = \frac{q\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}$, следовательно $CF = a \cdot \varepsilon$. Отложим полюс AC, так что $AC = a$ и всегда $Cd' = Cd = a$. Мы имеем один фокус и одну направляющую линию, но так как гипербола расположена симметрично относительно оси Cy, то следовательно у нее должен быть другой фокус и другая направляющая линия, симметричная с первой. Отложим $CF' = CF = a \cdot \varepsilon$; $OC = OC = \frac{a}{\varepsilon}$. Имеем двух фокусов в точку M можно провести два радиуса вектора, причем один $MF = r$ и $MF' = r'$. Выведем выражение радиусов векторов в функции абсциссы считаемой от центра. Продолжим MQ до точки Q' всегда $MQ' = d'$, и $MF' = r'$. Имеем $\frac{r}{d} = \varepsilon$, $r = d\varepsilon$ или $r = [cp - co]\varepsilon = \varepsilon\left[x' - \frac{a}{\varepsilon}\right] = \varepsilon x' - a$, точно также $\frac{r'}{d'} = \varepsilon$, от-

откуда $r' = d'\varepsilon = \varepsilon(cp + co') = \varepsilon(d' + \frac{a}{\varepsilon}) = \varepsilon d' + a$. Из этих выражений получается главное свойство всех точек гиперболы относительно фокусов, именно, взяв разность $r - r' = 2a$, т. е. разность радиусов векторов равна главной оси. Мы вывели выражения радиусов векторов для правой ветви гиперболы, выведем их и для левой: возьмем точку M' и соединим ее с фокусами. Положим $M'F = r_2$ и $M'F' = r_1'$; положим далее $M'a = d_1$, а $M'a' = d_1'$. Имеем $cp' = -x'$ находим $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$; $r_1 = d_1\varepsilon = \varepsilon(cp' + co) = \varepsilon(-x' + \frac{a}{\varepsilon}) = -\varepsilon d' + a$ точно также $\frac{r_1'}{d_1'} = \varepsilon$, $r_1' = d_1'\varepsilon = \varepsilon(cp' - co') = \varepsilon(-d' - \frac{a}{\varepsilon}) = -\varepsilon d' - a$ Из этих выражений найдем: $r_1 - r_1' = 2a$.

Парабола.

Парабола получится, когда $\varepsilon = 1$. При принятых осях координат уравнение будет $y^2 + (x - q)^2 = d^2$ или $y^2 - 2qd + q^2 = 0$ для каждой точки имеем: $r = d$; поэтому разделим OF пополам в точке A, причем $OA = AF = \frac{q}{2}$. Перенесем начало в точку A. Положим $x = x' + \frac{q}{2}$, а $y = y'$



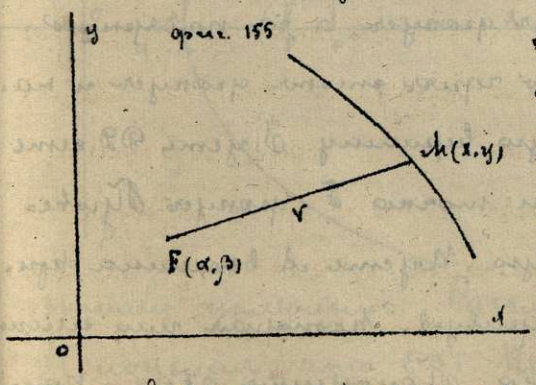
фиг. 154.

Уравнение будет: $y'^2 - 2a(d' + \frac{q}{2}) + q^2 = 0$ или $y'^2 - 2qd' - q^2 + q^2 = 0$ или $y'^2 = 2qd'$. Это есть уравнение параболы,

отнесенной къ вершинѣ и къ оси. Чертимъ ее. Замѣтимъ и для параболы выраженіе радіусовъ векторовъ въ функціи отъ абсциссы. Берем произвольную точку M и спроэцируемъ ея координаты. Имѣемъ: $r = d = oA + pA = x'$. Слѣдовательно и въ параболѣ радіусъ векторъ выражается линейною функціей абсциссы.

Общее опредѣленіе фокуса кривыхъ.

Изъ сдѣланнаго нами изслѣдованія видно, что во всѣхъ 3хъ кривыхъ: эллипсѣ, параболѣ и гиперболѣ, радіусъ векторъ т.е. разстояніе отъ фокуса до произвольной точки кривой выражается линейною функціей абсциссъ. Можно доказать, что только кривыя второго порядка имѣютъ такія постоянныя точки, разстоянія которыхъ до произвольной точки кривой выражаются линейною функціей координатъ этой точки. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что мы имѣемъ какую нибудь кривую, отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ и положимъ, что для нея существуетъ такая постоянная точка F, то если возьмемъ разстояніе ея произвольной точки кривой, и обозначимъ его черезъ r, то будетъ имѣть $r = ax + by + c$, гдѣ a, b и c будутъ нѣкоторыя посто-



фиг. 155

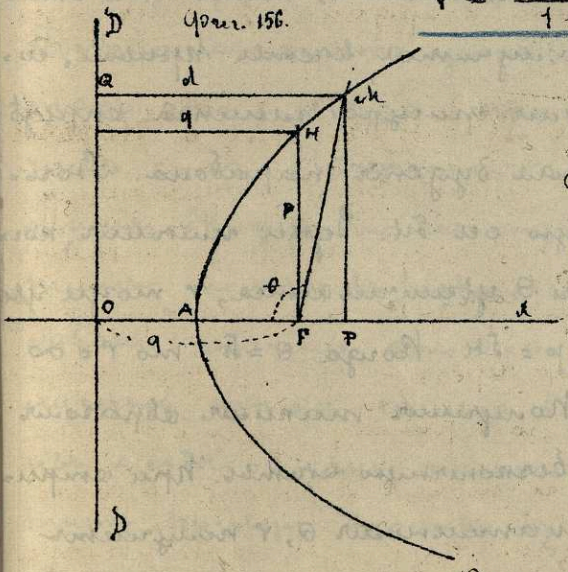
ными координатами, тогда замечаем с другой стороны, что $r = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$ и следовательно формула имеет $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = (Ax+By+C)^2$ или $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 - (Ax+By+C)^2 = 0$. Это уравнение представляет зависимость между координатами произвольной точки кривой, следовательно это есть уравнение кривой и оно 2-й степени относительно x и y, а потому рассматриваемая кривая есть одна из кривых второго порядка. Вследствие этого фокусы могут быть определены, как такие постоянные точки, которых расстояния от произвольной точки кривой выражается линейными функциями координат. Это определение Эйлера.

Общее полярное ур-ие 3-х кривых 2-го поряд.

Все виды кривых: эллипс, гипербола и парабола могут быть выражены одним полярным уравнением если за полюс мы примем фокус, а за полярную ось, примем ось проходящую через этот фокус и направляющую в ближайшую вершину. Пусть DD есть направляющая (фиг. 156) и точка F - фокус. Проведем $\perp$ OF на направляющую. Пусть A вершина кривой. Предполагаем какую кривую, которая или эллипс или парабола или гипербола. Положим $OF = q$. Примем за полюс точку F, и за полярную ось линию FO, тогда для точки M получим полярные коорди-

нами: $MF = r$ и $\angle OFM = \theta$. Из M опустим перпендикуляр $MQ = d$ на направляющую. По общему геометрическому представлению всякая кривая, имеющая $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где $\varepsilon < 1$ в случае эллипса, $\varepsilon > 1$ в случае гиперболы и $\varepsilon = 1$ в случае параболы. Далее $r = \varepsilon d$, но $d = OP = OF - FP = q + r\cos(180° - \theta) = q - r\cos\theta$, $r = q\varepsilon - r\varepsilon\cos\theta$ или $r(1 + \varepsilon\cos\theta) = q\varepsilon$, отсюда $r = \frac{q\varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\theta}$. Проведем ординату через фокус FN. Эта ордината FN есть полупараметр p. Опустим из N перпендикуляр на DD, получим расстояние q и фокусное имеем $\frac{p}{q} = \varepsilon$, отсюда $p = q\varepsilon$, так что можно написать:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

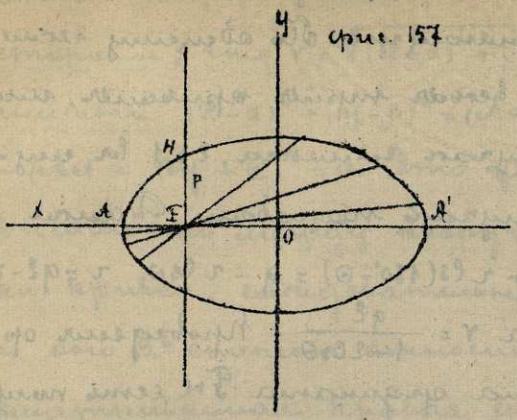


Фиг. 156.

Это есть общее полярное уравнение всякой кривой. Мы знаем p полупараметр и это уравнение представляет эллипс, если $\varepsilon < 1$, параболу если $\varepsilon = 1$ и гиперболу если $\varepsilon > 1$. Если бы форма кривой не была нам известна, то мы могли бы ее восстановить по этому уравнению. Рассмотрим три случая:

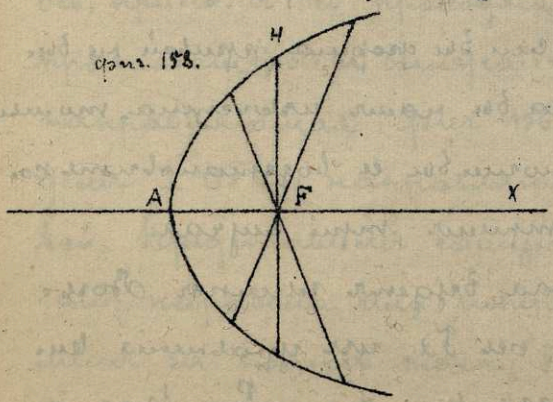
Положим, что $\varepsilon < 1$. Кривая будет эллипс. Возьмем фокус F и полярную ось Fx, из уравнения видим, что когда $\theta = 0$, то $\cos\theta = 1$. и $r = \frac{p}{1 + \varepsilon}$. Будет

эта величина будет FA. A - есть точка кривой. Да-
лее если θ увеличивается, cos θ
уменьшается и r увеличи-
вается. Когда $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $r = p$



фиг. 157

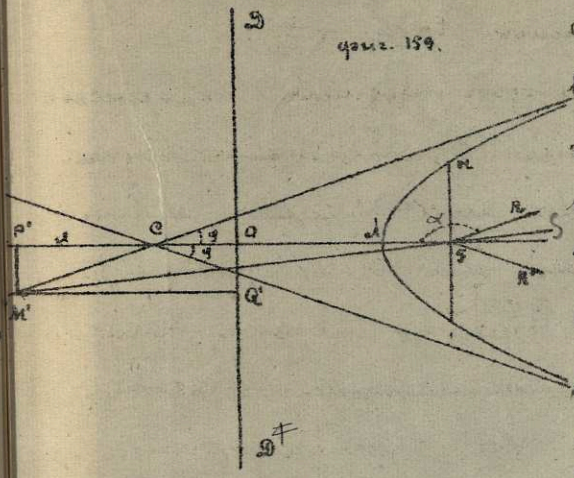
Построим $FH = p$. Если θ еще
более увеличивается r тоже
увеличивается. Когда $\theta = \pi$,
$r = \frac{p}{1-\varepsilon}$. Отложим эту вели-
чину до точки A'. Теперь можем начертить верхнюю
ветвь кривой. Далее, если θ будет давать отрица-
тельные значения, то r будет получать те же зна-
чения, как и при положительных θ, так что вни-
зу от полярной оси получится ветвь кривой, си-
мметричная первой. Этим фигура эллипса определя-
ется. Пусть $\varepsilon = 1$, кривая будет парабола. Воз-
ьмем фокус F за полярную ось FA. Здесь ясно, ко-
гда $\theta = 0$, $r = \frac{p}{1+1} = \frac{p}{2} = FA$. Если θ увеличивается, r тоже уве-
личивается. Когда $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = p = FH$. Когда $\theta = \pi$, то $r = \infty$



фиг. 158.

Получим таким образом
бесконечную ветвь. При отри-
цательных θ, r получает
такие же значения, вследст-
вие этого ветвь от полярной
оси получится ветвь,
симметричная верхней.

Пусть $\varepsilon > 1$. Возьмем фокус F и полярную ось. Здесь имеем, когда (фиг. 159) $\theta = 0$, $r = \frac{p}{1+\varepsilon} = FA$. Когда θ увеличивается, r увеличивается, но в этом случае θ может увеличиваться только до известного предела, когда значение r станет обратиться в нуль.



фиг. 159.

Начиная этот предел $\theta = \alpha$, будем иметь: $1 + \varepsilon \cos\alpha = 0$. Отсюда $\cos\alpha = -\frac{1}{\varepsilon}$. Это равенство определяет величину угла α, которую можно считать известною. Построим этот угол. Пусть оно будет $\angle AFR$, так что $\angle AFR = \alpha$; при этой величине $\theta = \alpha$, получим $r = \infty$. Начертим эту бесконечную ветвь. Линия FR уже не встретится этой ветви или встретится только в бесконечности. Если θ будем принимать значения от $\theta = 0$ до $\theta = -\alpha$, то r будет получать те же самые величины. Таким образом построив $\angle AFR' = -\alpha$, мы получим прямую, которая встретит кривую только в бесконечности. Таким образом наше уравнение нам дало только одну правую ветвь гиперболы. Чтобы лучше определить направления FR и FR', вычислим угол φ. Очевидно,

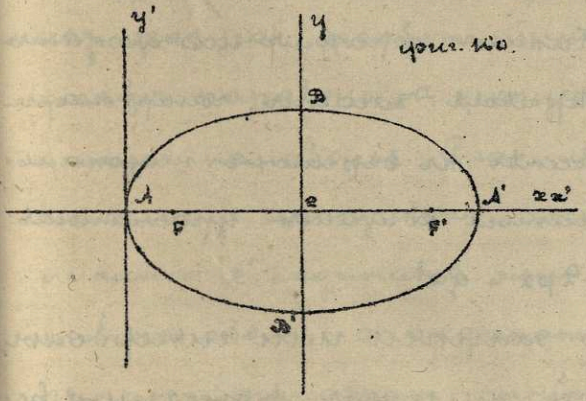
что $\varphi = 180° - \alpha$. Найдем его тангенс. $tg(180°-\alpha) = -tg\alpha =$
$= -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{\frac{1}{\varepsilon}} = +\sqrt{\varepsilon^2-1}$. Выразим ε через полуоси: $\varepsilon^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$, следовательно $tg\varphi = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}-1} =$
$= \sqrt{\frac{b^2}{a^2}}$, окончательно получим: $tg\varphi = \pm\frac{b}{a}$.

Это показывает, что эти две прямые параллельны асимптотам гиперболы. Точки левой ветви гиперболы получатся, когда мы θ будем изменять от $\theta = \alpha$ до $\theta = \pi$ и еще от $\theta = -\alpha$ до $\theta = -\pi$. При этих значениях θ мы будем иметь, что $\cos\theta < -\frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon\cos\theta < -1$ откуда знаменатель $1+\varepsilon\cos\theta$ будет < 0 и будем иметь $r < 0$. Примем $r = -r_1$, где $r_1 > 0$. Двигаясь какое нибудь направление годографа большими α, Fs, тогда, так как r отрицательно, то чтобы получить точку кривой, нужно продолжить Fs в противоположную сторону и отложить длину $Fm' = r_1$. Точка m' будет принадлежать гиперболе. Из этого можно удостоверится непосредственно. Проведем направляющую линию DD. Опустим из m' перпендикуляр на DD, $m'Q'$ и на полярную ось $m'p'$. Пусть $m'Q' = d_1$. Из чертежа имеем: $d_1 = Fp' - OF = r_1\cos(180°-\theta) - q$ или $d_1 = -r_1\cos\theta - q$, но $q = \frac{p}{\varepsilon}$, следовательно $d_1 =$
$= -r_1\cos\theta - \frac{p}{\varepsilon}$, но $-r_1 = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$. следовательно $d_1 =$
$= \frac{p\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} - \frac{p}{\varepsilon} = -\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon\cos\theta)}$. Сравнивая d_1 с r_1 мы прямо видим, что $d_1 = \frac{r_1}{\varepsilon}$ или $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$, а это показы-

часть, что точка M' принадлежит гиперболе. Итак наше полярное уравнение дает не только всю точки правой ветви гиперболы, но и всю точки левой, если только будем строить отрицательные значения радиуса вектора.

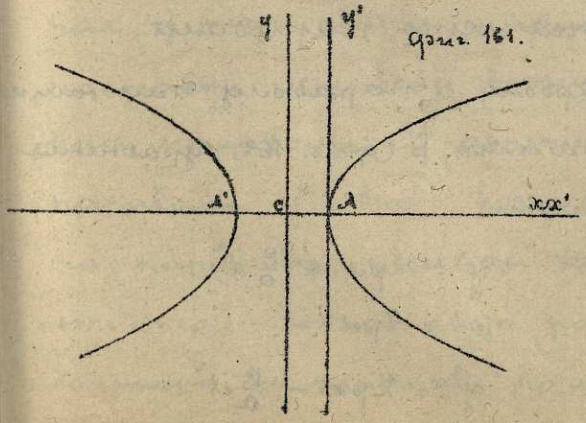
Общее уравнение трех кривых 2го порядка отнесенных к вершине и фокальной оси

Рассмотрим эллипс. Возьмем его относительно центра и оси. Уравнение эллипса есть: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перенесем начало координат в вершину A (фиг. 160)



фиг. 160.

а за ось x примем ось Ax. Так как $AC = a$, то формулы перехода будут: $x = x' - a$, $y = y'$. Вставляя в уравнение эллипса, найдем: $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{2x'}{a} + 1 + \frac{y'^2}{b^2} = 1$; отсюда $y'^2 = \frac{2b^2}{a}x' - \frac{b^2}{a^2}x'^2$ или принимая, что $\frac{b^2}{a} = p$ (полупараметру) $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}$ и наше уравнение будет: $y'^2 = 2px' - \frac{p}{a}x'^2$



фиг. 161.

Возьмем теперь гиперболу, отнесенную к центру и к ее осями. Ее уравнение будет $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перенесем координаты в A. Формулы преобразования будут: $x = x' + a$,

и $y = y'$. Вставляя это в уравнение получимъ:

$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{2x'}{a} + 1 - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, отсюда $y'^2 = \frac{2b^2}{a}x' + \frac{b^2}{a^2}x'^2$, если положимъ $\frac{b^2}{a} = p$, то уравненiе будетъ: $y'^2 = 2px' + \frac{p}{a}x'^2$

Если къ уравненiямъ эллипса и гиперболы присоединимъ уравненiе параболы, отнесенной къ вершинѣ и фокальной оси, т. е. уравненiе $y'^2 = 2px'$, то увидимъ, что всѣ эти три уравненiя имѣютъ одинаковый видъ и заключаются въ общемъ уравненiи: $y^2 = 2px + qx^2$, гдѣ p есть полупараметръ кривой, а q для эллипса < 0 и равно $-\frac{p}{a}$, для гиперболы > 0 и равно $+\frac{p}{a}$ и для параболы $q = 0$. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что всѣ три кривыя: эллипсъ, гипербола и парабола, будучи отнесены къ вершинѣ и фокальной оси будутъ выражаться общимъ уравненiемъ:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

Теорема. Предѣлъ эллипса или гиперболы, параметръ которой имѣетъ конечную величину, а большая (или фокальная) ось неопредѣленно увеличивается есть парабола.

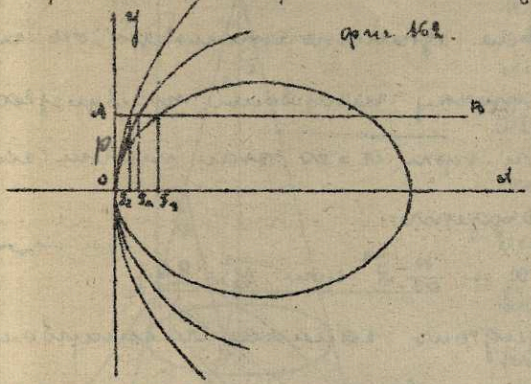
Возьмемъ эллипсъ, гиперболу и параболу имѣющiя одинаковый и такой же параметръ p (фиг. 164) уравненiя этихъ трехъ кривыхъ суть:

гипербола ..... $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$

парабола ..... $y^2 = 2px$

эллипсъ ..... $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$

Возьмем прямоугольную систему координат oxy; на оси Oy есть O отложим часть $oA = p$ и проведем Ab параллельно оси Ox; из точек пересечения этой прямой с кривыми опускаем перпендикуляры на ось Ox получим три точки: F_2, F_n, F_1, которые будут фокусы наших кривых, ибо параметр есть величина перпендикуляра к большой оси, взятая — величина к фокусу; фокусы эллипса лежат правее, чем фокусы параболы, а фокусы гиперболы лежат левее фокуса параболы. Сравнивая уравнения этих кривых, мы замечаем, что при одной и той же величине x ордината эллипса всегда менее ординаты параболы, а ордината гиперболы всегда более ординаты параболы, последовательно имеет все свои точки за исключением вершины O, которая у них общая, лежит внутри параболы, точно также гипербола всеми своими точками лежит вне параболы. Уравнение эллипса есть $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, параболы $y^2 = 2px$; возьмем точки на эллипсе и на параболе, абсциссы которых равны (параметры этих кривых также равны) и будем увеличивать большую ось эллипса; по мере увеличения и точка



фиг 162.

эллипса будет приближаться к точке параболы и при $a = \infty$ сольется со ней, потому что уравнение эллипса примет вид:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{\infty} x^2 \text{ или } y^2 = 2px$$

Точно таким увеличивая действительную ось гиперболы, или заставляя точку гиперболы приближаться к точке параболы, и при $a = \infty$ эти точки сольются, уравнение гиперболы будет:

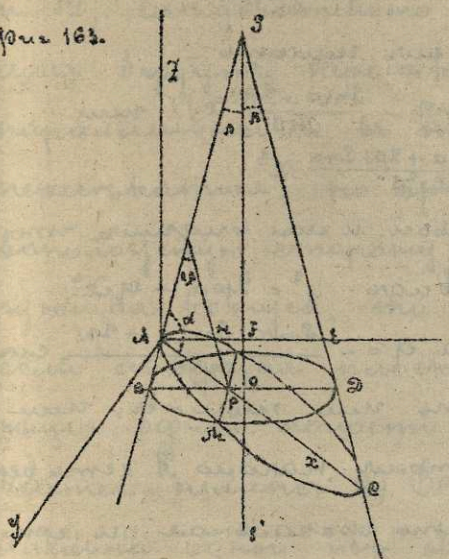
$$y^2 = 2px + \frac{p}{\infty} x^2 \text{ или } y^2 = 2px$$

Итак парабола есть предел эллипса и гиперболы, у которых параметр есть величина конечная, а большая ось эллипса или действительная гиперболы бесконечно велики.

О конических сечениях.

Есть три кривые второго порядка: эллипс, парабола и гипербола получаются при разсечении прямого конуса плоскостью в различном положении. Возьмем прямой конус и пусть ss' есть ось конуса, лежащая в плоскости чертежа. Разсечем этот конус произвольною плоскостью и положим, что плоскость чертежа перпендикулярна к секущей плоскости. Плоскость чертежа пересекает конус по двум прямым, одинаково наклоненным к оси. Пусть эти образующие составляют с осью одинаковый угол $= \beta$. Пусть прямая ll' есть сечение секущей плоскости

ся плоскостью чертежа. На поверхности конуса получится кривая линия AC. Положение секущей плоскости или определится расстоянием $cA = d$ и углом $SAA = \alpha$. Чтобы исследовать кривую, получающуюся сечением или составить ее уравнение. Примем точку A за начало координат, прямую cA за ось абсцисс. Ось ординат возьмем перпендикулярно к cA в плоскости кривой. Возьмем на кривой произвольную точку M. Опустим из нее перпендикуляр MP на cA. Будем искать координаты точки: $cP = x$; $MP = y$. Прямая MP перпендикулярна к плоскости чертежа. Через эту прямую проведем плоскость, перпендикулярную к оси конуса SS'. Эта плоскость пересечет плоскость чертежа по прямой BD перпендикулярной к оси, а конус по кругу BMD. В круге BMD прямая PM будет средней пропорциональной между отрезками диаметра PB и PD. Имеем поэтому: $y^2 = PB \cdot PD$. Из симметрии $\triangle ABD$. В нем имеем: $\frac{PB}{x} = \frac{\sin(180-\alpha)}{\sin(90-\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ отсюда $BP = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} x$. Чтобы выразить PD проведем через точку A параллель BD линию AE, через P



Фиг. 162.

линию pm, параллельно ac, имеем: $pq = mc = dc - dm = 2d\sin\beta - dm$. Из треугольника dmp, имеем: $\frac{dm}{x} = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin(90+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}$, отсюда $dm = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}d$, откуда $pq = 2d\sin\beta - \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}x$. Выражение pq и pd вставим в выражение y^2 будем иметь:

$$y^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}x\left(2d\sin\beta - \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}x\right) \text{ или}$$

$$y^2 = \frac{2d\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}x - \frac{\sin(\sin\alpha+2\beta)\sin\alpha}{\cos^2\beta}x^2.$$

Это есть уравнение нашей кривой. и мы видим, что это уравнение имеет такой вид: $y^2 = 2px + qx^2$; здесь имеем: $p = \frac{d\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}$, а $q = -\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}$, следовательно кривая сечения есть или эллипс, или парабола, или гипербола, при том начало A есть вершина кривой, а прямая Ae есть абсцисная ось кривой. Рассмотрим, когда же именно в сечении получится эллипс, когда парабола и когда гипербола. Это зависит от знака q. Величина p всегда положительная, потому что $\sin\beta$, $\sin\alpha$ и $\cos\beta$ величины положительные, так как $\beta < 90°$, а $\alpha < 180°$ и следовательно p всегда > 0. В выражении q $\sin\alpha > 0$, $\cos^2\beta$ также > 0 и знак q будет обратный со знаком числителя $\sin(\alpha+2\beta)$. Поэтому если сумма углов $\alpha+2\beta$ меньше $180°$, то тогда $\sin(\alpha+2\beta)$ будет больше 0 и $q<0$. Кривая будет эллипс. Если же $\alpha+2\beta$ будет $= 180°$, то $\sin(\alpha+2\beta) = 0$ и $q = 0$. Кривая будет парабола. Наконец, если $\alpha+2\beta > 180°$, то $\sin(\alpha+2\beta)$ будет < 0 и $q > 0$

и кривая будетъ гипербола, то обращаясь къ черте-
жу, мы видимъ, что углы a и qS суть углы внут-
ренніе, односторонніе относительно прямыхъ Ax
и SD, слѣдовательно въ первомъ случаѣ эти пря-
мыя будутъ пересѣкаться, во второмъ онѣ будутъ
параллельны и въ третьемъ онѣ будутъ опять
пересѣкаться, но при продолженіи ихъ въ проти-
воположную сторону; но такъ какъ SD есть обра-
зующая конуса, то заключаемъ окончательно: 1)
если сѣкущая плоскость пересѣкаетъ всѣ обрazу-
ющія одной полости конуса, то въ сѣченіи полу-
чается эллипсъ 2) Если сѣкущая плоскость пара-
ллельна одной изъ образующихъ, то въ сѣченіи по-
лучимъ параболу и наконецъ, если сѣкущая плос-
кость пересѣкаетъ образующую обѣихъ полостей
конуса, то въ сѣченіи получается гипербола. По
обнаруженному свойству, кривыя втораго поряд-
ка называются часто коническими сѣченіями.

Замѣчаніе о сѣченіи цилиндрическомъ.

Прямой круглый цилиндръ есть частный случай
прямого кругового конуса. Именно, чтобы этотъ ко-
нусъ перешелъ въ цилиндръ, стоитъ только увели-
чить уголъ S, удаляя вершину S въ ∞. Въ предѣ-
лѣ образующая RS будетъ параллельна оси SS' и ко-

тусь обратится в цилиндр, когда $\angle\beta$ будет $= 0$. Из этого замечания вытекает возможность получить сечение цилиндра, как частный случай рассмотренного нами конического сечения. Именно, примем точку A неподвижною, а вершину S будем удалять в бесконечность. Положим, что $AF = R$. Эта величина будет оставаться постоянною. Из треугольника AOS имеем: $R = d \cdot \sin\beta$ и уравнение нашего сечения можно написать так:

$$y^2 = \frac{2R\sin\alpha}{\cos\beta}x - \frac{\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta}x^2.$$

Чтобы получить цилиндрическое сечение, нужно сделать в предыдущем $d = \infty$ и угол $\beta = 0$. Угол α обратится в угол $\alpha = \theta$, причем dA параллельна SS'. В предыдущем получим уравнение:

$$y^2 = 2R\sin\theta x - \sin^2\theta \cdot x^2$$

Это уравнение имеет прежний вид: $y^2 = 2px + qx^2$, но только здесь $q = -\sin^2\theta$ и следовательно всегда будет иметь $q < 0$. Сечение всегда будет эллипс.

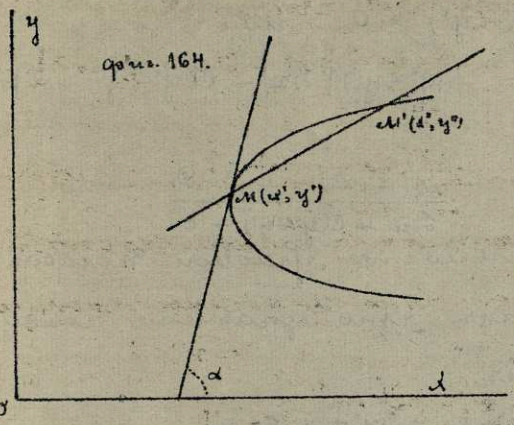
О касательных линиях к кривым $2^{го}$ порядка.

Составим во первых общее уравнение касательных к кривым второго порядка в данной точке. Пусть уравнение кривой будет:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Пусть координаты данной точки M на кривой

будущей (x', y'). Проведем сначала секущую линию через точку M, которая пересекает кривую еще в другой точке $M'(x'', y'')$



Затем предположим себе что точка M' перемещается по кривой и стремится совпасть с точкой M. Касательная линия будет предельное положение секущей. Оно получится, когда точка M' совпадет с M. Уравнение секущей, как прямой, проходящей через две точки будет:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$$

и следовательно $m = \frac{0}{0}$. Отсюда видно, что по этому выражению m нельзя получить углового коэффициента касательной. Это потому, что мы еще ничего не выразили, что точки M и M' лежат на данной кривой. Координаты этих точек M и M' удовлетворяют уравнению кривой, а потому имеем:

$$A x''^2 + B x'' y'' + C y''^2 + D x'' + E y'' + F = 0$$

$$A x'^2 + B x' y' + C y'^2 + D x' + E y' + F = 0$$

Вычитая эти два уравнения получим:

$$A(x''^2 - x'^2) + B(x'' y'' - x' y') + C(y''^2 - y'^2) + D(x'' - x') + E(y'' - y') = 0.$$

Здесь в коэффициенте при B прибавим $-x'y'' + x'y''$

Затем напишем наше равенство так:

$A(x''-x')(x''+x') + By''(x''-x') + Bx'(y''-y') + C(y''-y')(y''+y') + D(x''-x') + E(y''-y') = 0$ или

$(x''-x')[A(x''+x') + D + By''] = -(y''-y')[Bx' + C(y''-y') + E]$. Отсюда пропорцию:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = -\frac{A(x''+x') + By'' + D}{Bx' + C(y''+y') + E}.$$

Это выражение представляет угловой коэффициент секущей m, так что уравнение секущей можно написать так:

$$y - y' = -\frac{A(x''+x') + By'' + D}{Bx' + C(y''+y') + E}(x - x')$$

Чтобы перейти к касательной, нужно в этом уравнении положить: $x'' = x'$ и $y'' = y'$.

Получим уравнение касательной в точке (x', y')

$$y - y' = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}(x - x') \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Это уравнение касательной существует как при прямоугольных, так и при косоугольных осях. Если оси прямоугольны, то полагая через α угол, образованный касательной с осью абсцисс, будем иметь

$$tg\,\alpha = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}$$

Уравнение касательной можно представить еще в другом виде. Для этого умножим на знаменатели и раскроем скобки:

$[Bx' + 2Cy' + E]y - Bx'y' - 2Cy'^2 - Ey' = -[2Ax' + By' + D]x + 2Ax'^2 - Bx'y' + Dx'$

или $[2Ax' + By' + D]x + [Bx' + 2Cy' + E]y = 2(Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2) + Dx' + Ey'$

но $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = -Dx' - Ey' - F$

Вставивъ, получимъ ур-ніе касательной:

$$[2Ax' + By' + D]x + [Bx' + 2Cy' + E]y + Dx' + Ey' + 2F = 0 \quad \ldots (2)$$

Въ этомъ уравненіи коэффиціенты при x и y – суть производныя взятыя по x' и y' отъ функціи:

$$f = (Ax^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F)$$

Зная уравненіе касательной, мы можемъ построить касательную по ея уравненію. Построить касательную особенно удобно, когда кривая $2^{го}$ порядка дана относительно вершины и фокальной оси. Принимая, что въ этомъ случаѣ уравненіе кривой есть:

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0.$$

имѣемъ въ немъ: $A = -q$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -2p$, $E = 0$, $F = 0$

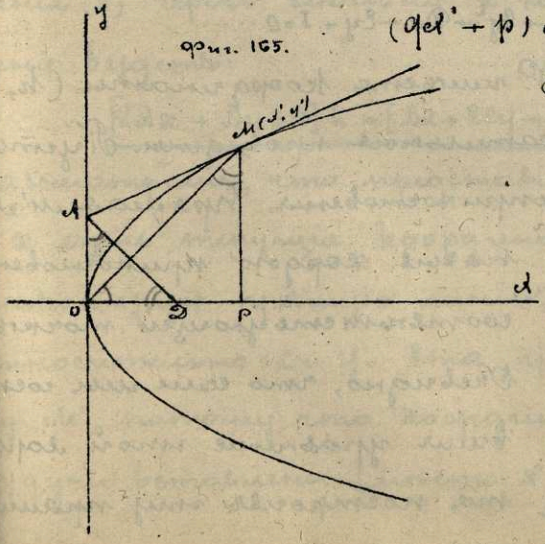
Слѣдовательно по формулѣ (1) ур-ніе касательной будетъ:

$$y - y' = -\frac{-2qx' - 2p}{2y}(x - x') = \frac{qx' + p}{y}(x - x')$$

Вставивъ въ уравненіе (2) вмѣсто A, B, C, D, E и F ихъ значенія, получимъ:

$$(qx' + p)x - y'y + px' = 0.$$

фиг. 165.



Пусть M есть данная точка (x', y'). Опредѣлимъ ординату точки пересѣченія касательной съ осью y; назовемъ эту ординату черезъ y_0, тогда для точекъ пересѣченія будемъ имѣть: $x = 0$, а $y = y_0$ и уравненіе дастъ:

$$y_0 - y_1 = -\frac{qx'^2 + px'}{y'}$$ отсюда

$$y_0 = y_1 - \frac{qx'^2 + px'}{y'}\ ;\ y_0 = \frac{y'^2 - qx'^2 - px'}{y'}$$

но $y'^2 = 2px' + qx'^2$ и потому $y_0 = \frac{2px' + qx'^2 - qx'^2 - px'}{y'} = \frac{px'}{y'}$

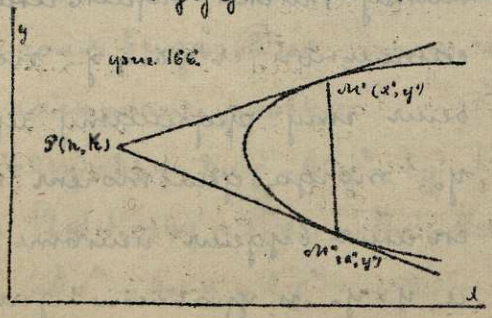
Эту величину можно построить следующим образом (фиг. 165). Проведем ординату $M'P$, отложим длину $OD = p$ (полупараметру), соединим O с M и из точки D на линию OM опустим перпендикуляр. Он пересечет ось y в точке d. Определим длину Od, $\triangle OM'P$ и $\triangle DeO$ и потому имеем: $\frac{Od}{OD} = \frac{OP}{OM'}$ или $\frac{Od}{p} = \frac{x'}{y'}$, отсюда $\frac{px'}{y'} = Od$. Мы видим, что $Od = y_0$, следовательно, если точку d соединим с M, то получим касательную.

Задача. Провести касательную к кривой второго порядка из данной вне лежащей точки.

Уравнение кривой есть:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Пусть данная точка P имеет координаты (h, k). Вообразим, что две касательные проведены. Пусть M' и M'' будут точки соприкосновения. Прямая $M'M''$ назыв. хордой прикосновения, соответственной точке P. Очевидно, что если мы составим уравнение этой хорды и то, построив эту прямую



по ея уравнению. Они тогда самыми определенными точки M' и M''. Затем, соединивъ эти точки съ P, мы получимъ двѣ требуемыя касательныя. Итакъ рѣшеніе нашей задачи приводится къ составленію уравненія хорды соприкосновенія. Положимъ, что координаты точекъ M' и M'' суть (x', y') и (x'', y''). Тогда ур-ніе касательной $M'P$ по формулѣ (2) будетъ:

$$[2Ax' + By' + D]x + [Bx' + 2Cy' + E]y + Dx' + Ey' + 2F = 0$$

Координаты точки $P(h, k)$ должны удовлетворять этому ур-нію. Поэтому будетъ имѣть:

$$[2Ax' + By' + D]h + [Bx' + 2Cy' + E]k + Dx' + Ey' + 2F = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Точно такое ур-ніе касательной PM'' по той же формулѣ (2) будетъ:

$$[2Ax'' + By'' + D]h + [Bx'' + 2Cy'' + E]k + Dx'' + Ey'' + 2F = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Напишемъ уравненіе (3), которое получится изъ уравненія (1) черезъ замѣну x' на x и y' на y, или изъ уравненія (2) черезъ замѣну x'' на x и y'' на y. Это уравненіе будетъ:

$$[2Ax + By + D]h + [Bx + 2Cy + E]k + Dx + Ey + 2F = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Разсмотримъ, что представляетъ это уравненіе, гдѣ y и x суть текущія координаты. Оно представляетъ нѣкоторую прямую линію, такъ какъ оно 1-ой степени относительно x и y. Эта прямая проходитъ черезъ точку M', потому что координаты этой точки x' и y' будучи вставлены вмѣсто x и y въ это ур-ніе, удовле-

творяють уравненію (3), какъ видно изъ равенства (1). Точно такожде прямая (3) проходитъ черезъ точку M'', потому что, если координаты этой точки вставимъ въ уравненіе (3), то оно обратится въ равенство (2), которое удовлетворяется, следовательно прямая (3) проходитъ черезъ двѣ точки M' и M'' и потому она прямая есть секуща прикосновенія. Ея уравненіе пишутъ такъ:

$$[2cH - Bk + D]x + [Bh + 2Ck + E]y + Dh + Ek + 2F = 0 \ldots\ldots (a)$$

Если точка (h, k) такова, что изъ нея можно провести касательную къ кривой, то уравненіе (a) представитъ секущу прикосновенія. Если точка (h, k) лежитъ на самой кривой, то уравненіе (2) представляетъ касательную къ кривой въ этой точкѣ. Если точка (h, k) такова, что изъ нея нельзя провести касательную то ур-ніе (a) представляетъ всегда совершенно опредѣленную прямую, этой точкѣ соотвѣтствующую. Прямая эта не должна пересѣкать кривой, потому что иначе она была бы секущей прикосновенія и тогда соединивъ точки ея пересѣченія съ кривой съ точкою (h, k) мы должны бы были провести двѣ касательныя. Точка (h, k) и соотвѣтствующая ей прямая (a) по отношенію къ данной кривой втораго порядка носятъ особыя названія. Именно, точка (h, k) называется полюсомъ, а прямая (2) полярою этой точки.

Каждой точке плоскости соответствует своя поляра. Главное свойство поляры заключается в следующей теореме:

Если поляра первой точки проходит через полюсь второй, то и поляра второй точки проходит через полюсь первой.

Пусть имеем точку (x', y'). Ея поляра будет:

$$[2Ax' + By' + D]x + [Bx' + 2Cy' + E]y + Dx' + Ey' + 2F = 0 \ldots (1)$$

Пусть другая точка есть (x'', y''). Ея поляра будет:

$$[2Ax'' + By'' + D]x + [Bx'' + 2Cy'' + E]y + Dx'' + Ey'' + 2F = 0 \ldots (2)$$

Положимъ, что первая прямая проходитъ черезъ полюсь второй значитъ координаты (x'', y'') удовлетворяютъ уравненію (1) и должны имѣть:

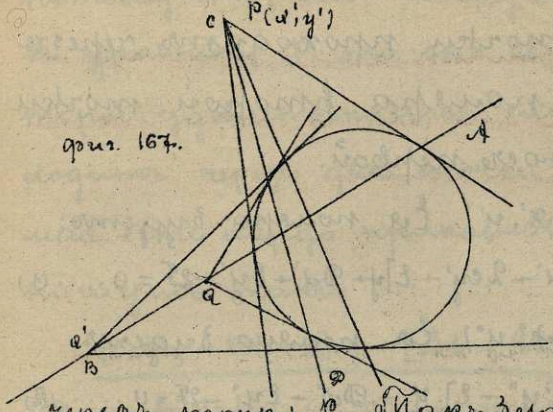
$$[2Ax' + By' + D]x'' + (Bx' + 2Cy' + E)y'' + Dx' + Ey' + 2F = 0$$

Это равенство можно написать въ такомъ видѣ:

$$(2Ax'' + By'' + D)x' + (Bx'' + 2Cy'' + E)y' + Dx'' + Ey'' + 2F = 0$$

Сравнивая это послѣднее равенство съ уравненіемъ (2) мы видимъ, что точка (x', y') лежитъ на прямой (2) т. е. прямая (2) проходитъ черезъ полюсь (1) прямой. Эта теорема даетъ замѣчательныя геометрическія построенія. Возьмемъ произвольную кривую второго порядка, для простоты кругъ. Пусть точка (x', y') есть P и находится внѣ круга. Проведемъ двѣ касательныя и соединимъ точки прикосновенія. Бря-

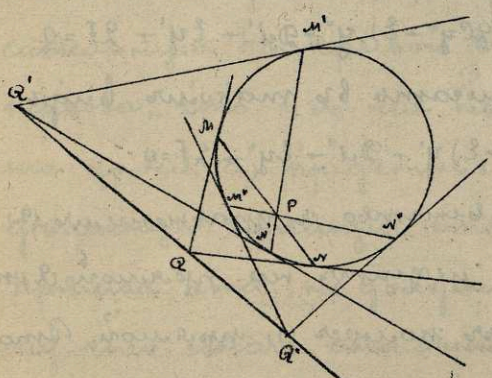
мая AB будет полярой точки P. Возьмем на ней произвольную точку Q. Ея координаты суть $(x'; y')$



фиг. 167.

Прямую AB назовем (1). Проведем чрез Q две касательныя къ кругу и соединимъ точки прикосновенія. Прямая CD будет полярой точки Q, назовем ее (2). По теоремѣ она должна пройти черезъ точку P. Такъ будет для всякой другой точки, взятой на прямой AB. Возьмем теперь точку P внутри круга (фиг. 168). Ея полярy можно получить по нашей теоремѣ такъ: проведем черезъ точку P произвольную хорду MN и въ точкахъ M и N касательныя къ кругу; чрезъ пересѣченіе будет въ точкѣ Q. Q будет полюсъ прямой MN, слѣдовательно полюса точки P должна проходить черезъ точку Q. Проведем черезъ точку P другую хорду $M'N'$ и въ точкахъ M' и N' двѣ касательныя. Точка Q', чрезъ пересѣченія будет полюсомъ $M'N'$ но прямая $M'N'$ проходит черезъ P слѣдовательно полюса точки P проходит черезъ Q' и полярой точки

фиг. 168.



P будет прямая QQ'. Отсюда следует, что если через тую же точку P проведем третью хорду $M''N''$ то касательные в точках M'' и N'' пересекутся на прямой QQ' в некоторой точке Q''.

Касательная к эллипсу.

Возьмем эллипс, отнесенный к центру и к осям, уравнение его будет:

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

Возьмем произвольную точку M. Пусть ея координаты (x', y') Проведем касательную и обозначим угол образованный этой касательной с осью абсцисс через α.

Используем общую формулу:

$$tg\,\alpha = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}$$

в нашем случае $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = 0$, $E = 0$, $F = -a^2b^2$

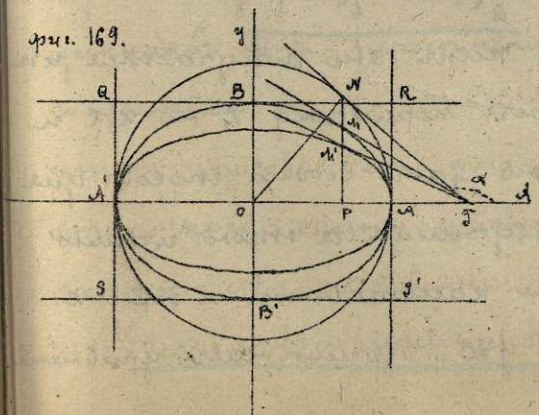
следовательно: $tg\,\alpha = -\frac{2b^2x'}{2a^2y'} = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$.

Уравнение касательной в точке M будет:

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$$

По формуле, выражающей $tg\,\alpha$, легко исследовать, как изменяется направление касательной на эллипсе. Так

фиг. 169.



для точки A имеем (фиг. 169) $y' = 0$, $x' = a$, следовательно в этой точке $tg\,\alpha = \infty$ и $\angle\alpha = 90°$ Касательная перпендикулярна к оси в точке A. Если точка A

она будет переходить к B, то x' уменьшается, а y' увеличивается и tg α по абсолютной величине постоянно уменьшается, но он будет всегда будет отрицателен. Из этого следует, что угол, образуемый касательной с осью x будет всегда тупой и постоянно увеличиваться. В точке B будем иметь x'=0 а y'=b следовательно tg α=0 и угол α=180°, т.е. в точке B касательная параллельна с осью x. Во второй четверти касательная занимает ряд положений симметричных предыдущим. Следовательно, если в вершинах эллипса проведем четыре касательные, то получим прямоугольник, внутри которого заключен эллипс. Уравнение касательной к эллипсу можно написать еще в другой форме. Возьмем общее уравнение касательной.

$$(2Ax' + By' + E)x + (Bx' + 2Cy' + E)y + Dx' + Ey' + 2F = 0$$

Для нашего случая оно будет:

$$2b^2x'x + 2a^2y'y - 2a^2b^2 = 0 \text{ или } a^2y'y + b^2x'x - a^2b^2 = 0$$

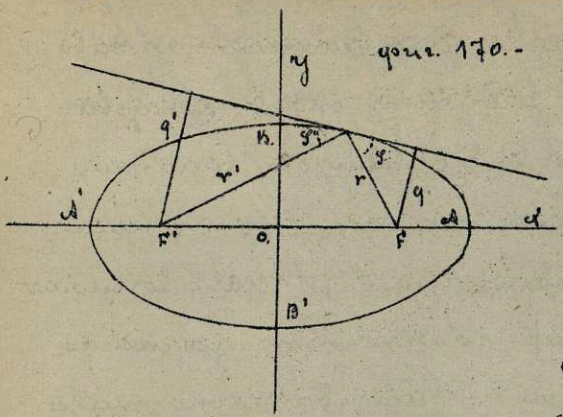
Также можно написать: $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$

Его легко запомнить, так как оно получается из уравнения самого эллипса через перемену x^2 на $x'x$ и y^2 на $y'y$. Для эллипса можно дать особый способ для построения касательной. Определим с этою целью абсциссу точки T пересечения касательной с осью x. В точке T имеем: $x = OT$ и $y = 0$. Применяя уравнение

касательной в этой точке, получимъ: $b^2x' \cdot OT - a^2b^2 = 0$, откуда $OT = \frac{a^2}{x'}$. Отсюда видно, что величина OT зависитъ отъ a и отъ x', но не зависитъ отъ b, слѣдовательно она остается такая и для другого эллипса, построеннаго на той же большой оси, если на немъ возьмемъ точку съ тою же абсциссою x'. Опять, возьмемъ ось до точки B' и построимъ эллипсъ, тогда касательная въ M' пройдетъ черезъ T. Слѣдовательно такая величина OT будетъ относиться и къ точкѣ, взятой на кругѣ, описанномъ на большой оси, какъ на діаметрѣ, имѣющей тую же абсциссу x', потому что кругъ есть частный случай эллипса. Онъ получается, когда возьмемъ b = a. Опишемъ его, продолживши $M'P'$ до точки N; касательная въ точкѣ N пройдетъ черезъ T. Отсюда способъ для построенія касательной. Итобы получить касательную къ эллипсу въ точкѣ M, изъ центра O, радіусомъ = OA опишемъ полуокружность. Ординату MP продолжимъ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ N. Точку N соединимъ съ O, изъ N къ OA возставимъ перпендикуляръ. Онъ пересѣчетъ ось x въ точкѣ T и точку T соединимъ съ M. Это и будетъ касательная. Кромѣ этого способа есть еще другой, который употребляется, когда даны фокусы эллипса. Онъ основанъ на слѣдующей теоремѣ.

Углы, образуемые касательной съ радіусами

векторами: равны между собою.



фиг. 170.-

Назовем эти углы через φ и φ', а перпендикуляры, опущенные из фокусов на касательную через q и q'. Уравнение касательной будет:

$$b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2 = 0$$

Для определения q и q' приведем ее к нормальному виду и подставим в первую часть координаты точек $F(a\varepsilon, 0)$ и $F'(-a\varepsilon, 0)$:

($OF = c = a\cdot\varepsilon$ из формулы, что $\frac{c}{a} = \varepsilon$)

$$q = -\frac{b^2a\varepsilon x' - a^2b^2}{\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}}$$

$$q' = -\frac{-b^2a\varepsilon x' - a^2b^2}{\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}}$$

Мы берем здесь знак (−) потому что точки F и F' лежат с той стороны касательной, где начало координат. Преобразуем:

$$q = \frac{ab^2(a - \varepsilon x')}{\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}}, \quad q' = \frac{ab^2(a + \varepsilon x')}{\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (K)$$

Применяя формулы радиусов векторов: $MF = r$ и $MF' = r'$,

$$r = a - \varepsilon x', \quad r' = a + \varepsilon x'$$

и имея из формулы (K) $\frac{q}{r} = \frac{q'}{r'} = \frac{ab^2}{\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}}$

так как $\frac{q}{r} = \sin\varphi$, $\frac{q'}{r'} = \sin\varphi'$, то $\varphi = \varphi'$. Доказанное теперь, что произведение перпендикуляров, опущенных из фокусов на касательную, равно квадрату малой полуоси.

Перемножая формулы (K) $qq' = \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x'^2)}{b^4x'^2 + a^4y'^2}$

Заметим здесь y'^2 через x'^2 из ур-ния эллипса

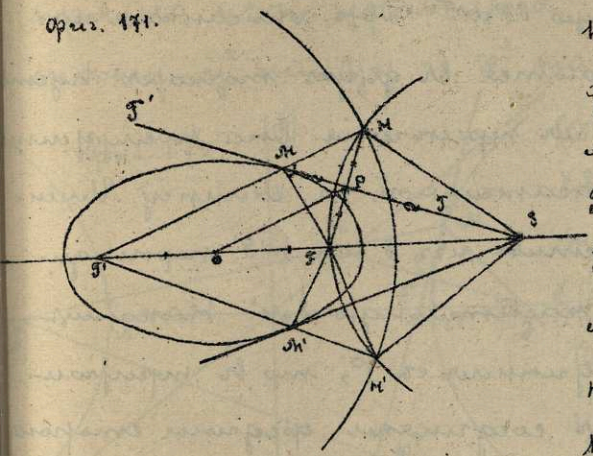
$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2; \quad y'^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x'^2}{a^2}$$

получимъ: $$qq' = \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x'^2)}{b^4x'^2 + a^4b^2 - a^2b^2x'^2} = \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x'^2)}{a^2b^2[a^2 - x'^2(1 - \frac{b^2}{a^2})]} =$$

$$= \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x'^2)}{a^2b^2[a^2 - (\frac{a^2 - b^2}{a^2})x'^2]} = \frac{a^2b^4(a^2 - \varepsilon^2x'^2)}{a^2b^2(a^2 - \varepsilon^2x'^2)} = b^2$$

Равенство угловъ φ и φ' даетъ весьма простой способъ для построенія касательной въ данной точкѣ. Именно, положимъ, что касательная TT' проведена, продолженіе $F'M$ и FP (FP есть перпендикуляръ опущенный изъ фокуса F на касательную TT') до точки M. Два прямоугольные треугольника FMP и MFP, равны, следовательно $MN = NF$; а потому, чтобы получить касательную, нужно, продолживъ $F'M$, отложить $MN = MF$, точку N соединить съ F линіей NF раздѣлить пополамъ и соединить точку дѣленія съ точкой прикосновенія, это и будетъ касательная. Такая теорема даетъ способъ для проведенія касательной къ эллипсу изъ внѣшней точки.

Фиг. 171.



Пусть внѣшняя точка есть t и вообразимъ, что касательная tT проведена. Соединимъ t съ M и съ F; изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ tPM и tPF имѣемъ $tM = tF$, притомъ точка M отъ точки F' нахо-

учится на разстояніи, равномъ $MF' + MH = MF' + MF = 2a$. Вслѣдствіе этого точка M опредѣлится, какъ пересѣченіе двухъ окружностей одной описанной изъ F', радіусомъ равнымъ $2a$ и второй, описанной изъ S радіусомъ равнымъ SF. Когда точка M будетъ опредѣлена, то соединивъ M съ F и опустивъ изъ S перпендикуляръ на MF, мы получимъ касательную SP къ T. Двѣ описанныя нами окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ. Пусть M' будетъ другая точка ихъ пересѣченія. Она послужитъ для проведенія другой касательной къ эллипсу. Именно, соединивъ F съ M' и опустивъ изъ S на $M'F'$ перпендикуляръ, получимъ другую касательную SM'. Наконецъ замѣтимъ, что если O соединимъ съ P, то въ треугольникѣ MFF' линія OP будетъ соединять средины сторонъ MF и FF', слѣдовательно $OP = \frac{1}{2} MF'$ или $OP = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$.

Отсюда заключаемъ:

Теорема: Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на касательную, расположенныя на окружности, описанной изъ центра радіусомъ, равнымъ большой полуоси.

Касательная къ гиперболѣ.

Уравненіе гиперболы есть:

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0.$$

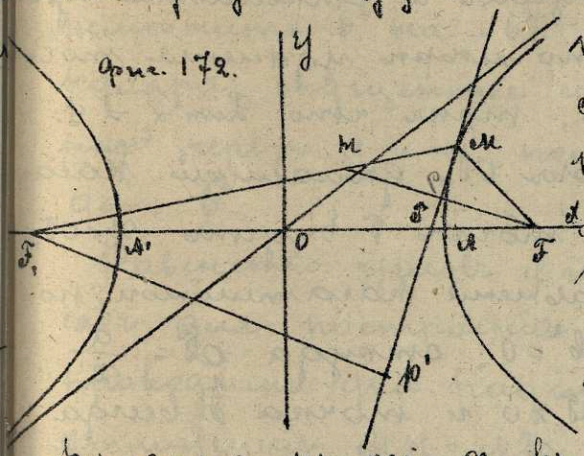
Оно получается изъ ур-нія эллипса черезъ перемѣну b^2 на $-b^2$, поэтому ур-ніе касательной къ гиперболѣ

можно написать прямо, взявъ уравненіе касательной къ эллипсу и перемѣнивъ въ немъ b^2 на $-b^2$. Получимъ два вида уравненій.

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x') \text{ и } a^2 y y' - b^2 x' x + a^2 b^2 = 0$$

$$\frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} = 1.$$

Послѣднее уравненіе касательной получается прямо изъ уравненія гиперболы черезъ перемѣну y^2 на yy' и x^2 на xx'. Разсмотримъ теперь какъ измѣняется направленіе касательной линіи къ гиперболѣ.



фиг. 172.

Мы имѣемъ $tg\alpha = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$. Въ точкѣ A имѣемъ $y = 0$, $x' = a$, и $tg\alpha = \infty$. Касательная перпендикулярна къ оси x въ точкѣ A. Если точку прикосновенія будемъ по верхней кривой удалять въ правую сторону, то всегда будетъ $tg\alpha > 0$ и $\alpha < 90°$. При этомъ x' увеличивается и y' увеличивается. Чтобы видѣть какъ измѣняется $tg\alpha$, мы выразимъ его въ функціи одного x'. Изъ уравненія гиперболы найдемъ: $y' = \frac{b}{a}\sqrt{x'^2 - a^2}$, слѣдовательно:

$$tg\alpha = \frac{b^2 x'}{a^2 \frac{b}{a}\sqrt{x'^2 - a^2}} = \frac{bx'}{a\sqrt{x'^2 - a^2}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}}.$$

Теперь видно, что если x' увеличивается, то знаменатель увеличивается, а $tg\alpha$ и угол α уменьшается.

При $x' = \infty$, получим: $tg\alpha = \frac{b}{a}$

но предположим, что если через φ обозначим угол, образуемый ассимптотами с осью ox, то будем иметь: $tg\varphi = \frac{b}{a}$, то следовательно $<\alpha> < \varphi$ и угол α стремится сделаться равным $< \varphi$ по мере удаления точки M в бесконечность, так что $\lim \alpha = \varphi$.

Рассмотрим отрезок OT, образуемый касательной по оси x. Ибо точке T будет $x = OT$, а $y = 0$. Применяя уравнение касательной, получим: $b^2 x \cdot OT - a^2 b^2 = 0$, откуда $OT = \frac{a^2}{x'}$

Отсюда видно, что $OT > 0$ и точка T всегда вправо от точки O. С удалением точки M в бесконечность, OT стремится к 0, так что при $x' = \infty$ $\lim OT = 0$. Из всего этого видим, что касательная линия по мере удаления точки прикосновения в бесконечность стремится совпасть с ассимптотами и ассимптота может быть рассматриваема, как касательная в точке, бесконечно удаленной.

Для гиперболы совершенно точно, как и для эллипса, можно доказать, что два радиуса

вектора проведенные въ точку прикосновенія, образуютъ съ касательной равные углы. Пусть F и F' два фокуса. Соединимъ ихъ съ M и пусть $\angle FMT = \varphi$ а $\angle F'MT = \varphi$, будемъ имѣть $\varphi = \varphi'$.

Доказанное что точно такимъ же вычисленіемъ, какъ и для эллипса. Разница будетъ состоять единственно въ томъ, что надо перемѣнить b^2 на $-b^2$. Взявъ два перпендикуляра, опущенные изъ фокусовъ на касательную черезъ q и q' получимъ точно такимъ $qq' = b^2$.

Равенство угловъ φ и φ' даетъ простой способъ для построенія касательной. Именно проводимъ два радіуса вектора FM и $F'M$ отложимъ $MK = MF$. Соединимъ точку K съ F и изъ M на линію FK опустимъ перпендикуляръ, это и будетъ касательная.

Уравненіе гиперболы отнесеной къ ассимптотамъ.

Возьмемъ гиперболу, отнесенную къ ея осямъ и сдѣлаемъ преобразованіе координатъ, приняв за новыя оси ассимптоты гиперболы. Уравненіе гиперболы, отнесенной къ осямъ, есть

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть угол, образуемый асимптотой с осью x, есть φ, тогда:

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a}$$

Принимая за новые оси координат асимптоты Ox' и oy', получим: $\angle x'oy' = 2\varphi$, следовательно новые оси будут косоугольные. Формулы преобразования будут:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta.$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta.$$

но $\alpha = 360° - \varphi$ и $\beta = \varphi$; формулы будут

$$x = x'\cos\varphi + y'\cos\varphi$$

$$y = -x'\sin\varphi + y'\sin\varphi$$

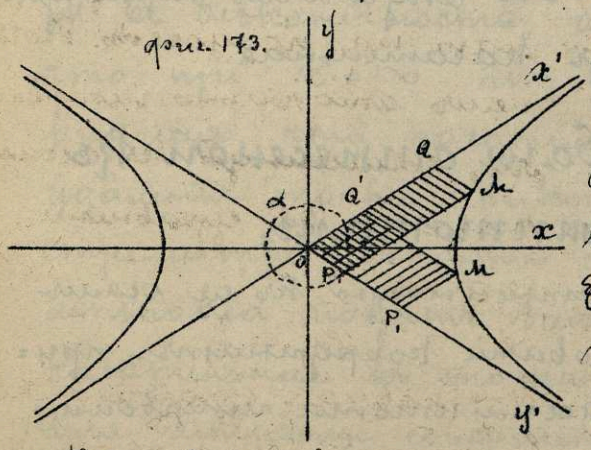
или $$x = (y' + x')\cos\varphi$$

$$y = (y' - x')\sin\varphi.$$

но $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; а $\sqrt{a^2+b^2} = c$

следовательно $\cos\varphi = \frac{a}{c}$

фиг. 173.



$$\sin\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{c};$$

следовательно формулы преобразования координат будут:

$$x = \frac{a}{c}(y' + x')$$

$$y = \frac{b}{c}(y' - x')$$

Вставляя в уравнение кривой, получим:

$$\frac{(y'+x')^2}{c^2} - \frac{(y'-x')^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad y'^2 + 2x'y' + x'^2 - y'^2 + 2x'y' -$$

$-x'^2 = c^2$ или $Hx'y' = c^2$ или $x'y' = \frac{c^2}{H}$

Это и есть уравнение гиперболы, отнесенной к ассимптотам. Это уравнение имеет особое геометрическое место и значение. Возьмем произвольную точку M на кривой и построим ея новыя координаты. Получим параллелограмм ОРМQ. Его площадь ОРМQ = $x'y' \sin\varphi$ или площадь ОРМQ = $\frac{c^2}{H} \sin\varphi$, следовательно площадь параллелограмма, построенная на координатах гиперболы, отнесенной к ассимптотам, имеет величину постоянную. Определим эту величину. Мы имеем:

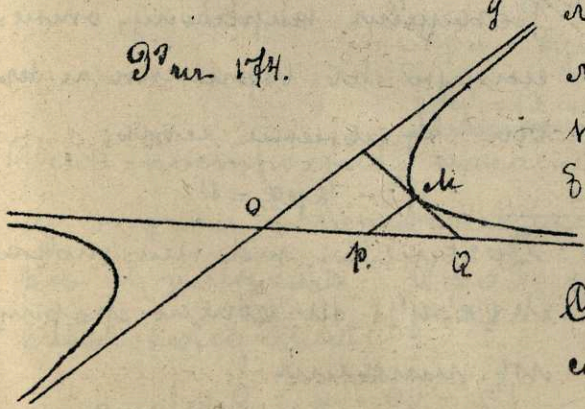
$$\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{2ab}{c^2}$$

следовательно площадь

$$ОРМQ = \frac{c^2}{H} \cdot \frac{2ab}{c^2} = \frac{ab}{2}$$

Эта площадь равна половине площади треугольника, построеннаго на полуосях. Возьмем отдельно гипербо-

Фиг. 174.



лу, отнесенную к ассимптотам. Ея уравнение будет:

$$xy = \frac{c^2}{4}$$

Составим уравнение касательной в точке M ($x'y'$). Общее уравнение

будет:

$$[2Ax' + By' + D]x + [Bx' + 2Cy' + E]y + Dx' + Ey' + 2F = 0.$$

В нашем случае $A=0$; $B=1$, $C=0$, $D=0$, $E=0$ $F=-\frac{c^2}{4}$. Следовательно уравнение касательной будет:

$$\underline{y'x + x'y - \frac{c^2}{2} = 0}$$

Найдя абсциссу точки Q пересечения касательной с осью x. В ней $y=0$, $x=OQ$, следовательно имеем:

$$y' \cdot OQ = \frac{c^2}{2} \text{ и } OQ = \frac{c^2}{2y'}.$$

По уравнению кривой имеем:

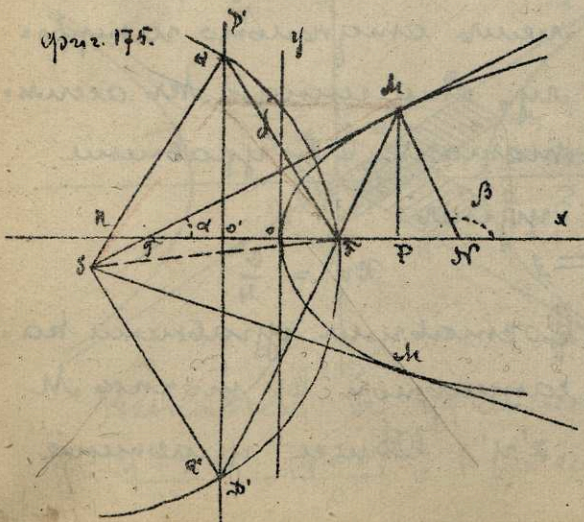
$$x'y' = \frac{c^2}{4}, \text{ откуда } 2x' = \frac{c^2}{2y'}$$

следовательно: $OQ = 2x'$ или $OQ = 2OP$.

Отсюда следует, что построенная касательная, если отложить от точки P вправо $PQ = OP$ и точку Q соединить с M.

Касательная к параболе.

фиг. 175.



Возьмем параболу, отнесенную к вершине и к оси. Уравнение есть:

$$y^2 - 2px = 0.$$

Возьмем на ней точку $M(x', y')$. По общей формуле имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}$$

В нашем случае $A = B = C = F = 0$, $E = 1$, $D = -2p$, следовательно имеем:

$$tg\,\alpha = -\frac{-2p}{2y'} = \frac{p}{y'}$$

Уравнение касательной будет:

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$$

Исследуем, как изменяется направление касательной на параболе. Для точки 0 имеем: $y' = 0$ и $tg\,\alpha = \infty$, следовательно $\angle\alpha = 90°$. Касательная в вершине перпендикулярна к оси. Если точка прикосновения от вершины движется вверх по параболе, то y' постоянно увеличивается и следовательно $tg\,\alpha$, оставаясь постоянно > 0, уменьшается и угол α, оставаясь постоянно острым, уменьшается. Составим другой вид уравнения касательной. Общее ур-ние будет:

$$(2Aa' + By' + D)x + (Ba' + 2Cy' + E)y + Da' + Ey' + 2F = 0$$

В нашем случае будем иметь:

$$-2pa' + 2yy' - 2px = 0 \quad \text{или}$$

$$yy' = (x + x')p$$

Для построения касательной строим сначала ординату точки T пересечения ея с осью x. В точке T имеем: $x = OT$, $y = 0$, следовательно вставив получим:

$$0 = p(-OT + x') \;;\quad OT = x'$$

Отрезок $Tp = 2x'$ Этот отрезок представляет собой разность между подкасательной ординаты до точки встречи касательной с осью x. Он называется субтангенсом. и мы видим, что в параболе субтангенс равен двойной абсциссе. Чтобы построить касательную, должно отложить $\partial T = \partial P$ и точку T соединить с M. Проведем нормальную линию, т.е. перпендикулярную к касательной MN. Назвав угол нормальной линии с осью x через β, напишем уравнение нормали[5]

$$y - y' = \operatorname{tg}\beta\,(x - x')$$

но по условию перпендикулярности имеем:

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha + 1 = 0, \text{ или } \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{p}{y'} + 1 = 0,$$

отсюда $\operatorname{tg}\beta = -\frac{y'}{p}$, следовательно ур-ие нормальной будет: $y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$

Определим точку N, пересечения нормальной с осью x. Для нее $x = ON$, а $y = 0$, следовательно:

$$-y' = -\frac{y'}{p}(ON - x') \text{ или } p = ON - x',$$

отсюда $ON = p + x'$. Следовательно $PN = ON - x' = p$. Отрезок PN представляет расстояние от подошвы ординаты до точки встречи нормальной с осью x. Он называется субнормалью и мы видим, что во всякой точке параболы субнормальная имеет величину постоянную и равную полупараметру p.

Это даетъ способъ для построенія нормали. Именно, отложивъ отъ точки P длину PN = p и соединивъ точку N съ M, получимъ нормальную. Есть еще способъ для построенія касательной. Соединимъ точку M съ N и проведемъ. По извѣстному выраженію радіуса вектора въ параболѣ имѣемъ:

$$MF = \frac{p}{2} + x'$$

но съ другой стороны:

$$FT = OF + OT = \frac{p}{2} + x'$$

слѣдовательно MF = FT, а потому △ MFT будетъ равнобедренный и уголъ FMT равенъ α. Проведемъ черезъ M параллели оси параболы и пусть D'D" будетъ направляющая ∠ QMF = α. Если Q соединимъ съ F, то эта линія пересѣчетъ касательную въ точкѣ j и два треугольника QMj и FMj будутъ равны, слѣдовательно эти треугольники прямоугольны и Qj = jF. Отсюда такой способъ для построенія касательной. Изъ точки M опускаемъ перпендикуляръ MQ на направляющую, точку Q соединимъ съ F и изъ точки M на линію QF опускаемъ перпендикуляръ Mj. Это и будетъ касательная. Положимъ, что требуется провести касательную изъ внѣшней точки S. Соедин-

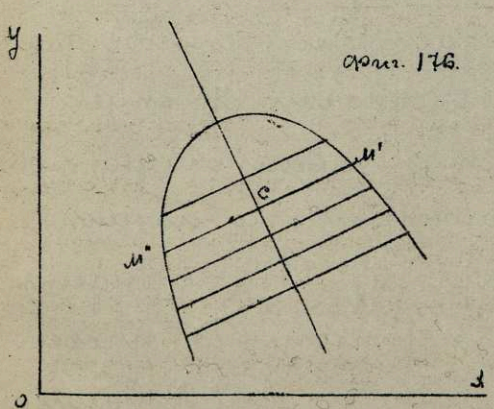
имѣемъ эту точку съ Q и съ F, или найдемъ, что $SQ = SF$, а потому и точку Q можно опредѣлить, описавъ изъ точки S радіусомъ, равнымъ SF окружность, и когда опредѣлимъ точку Q, то соединимъ ее съ F, изъ точки S на линію QF опустимъ перпендикуляръ. Это и будетъ касательная. При томъ вписанная окружность пересѣчетъ направляющую ее въ другой точкѣ Q'. Соединяя ее съ F и опустивъ перпендикуляръ на FQ' изъ S, получимъ другую касательную.

О діаметрѣ кривыхъ 2го порядка.

Діаметромъ кривыхъ называется геометрическое мѣсто серединъ ряда параллельныхъ хордъ. Пусть уравненіе кривой будетъ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Положимъ координаты прямоугольными. Ясно имѣемъ данную кривую и вообразимъ рядъ параллельныхъ хордъ. Общее уравненіе этихъ хордъ будетъ:



фиг. 176.

$$y = mx + k \quad \ldots\ldots (2)$$

Для всѣхъ хордъ m одна и таже величина, а k

переменная и изменяется свою величину при переходе от одной хорды к другой. Рассмотрим одну из этих хорд M'M". Пусть Q ея середина. Координаты точек M' и M" найдутся, решая два уравнения относительно x и y (1) и (2). Будем решать их: исключим y:

$$Ax^2 + B(mx+k) + C(m^2x^2 + 2mxk + k^2) + Dx + E(mx+k) + F = 0$$

или $(A + Bm + Cm^2)x^2 + (Bk + 2Cmk + D + Em)x + Ck^2 + Ek + F = 0$.

Это уравнение имеет два корня x' и x". Эти корни суть абсциссы точек M' и M". Координаты середины Q обозначим через (x', y'), или будем иметь:

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2} \; ; \quad y_1 = mx_1 + k$$

потому что точка Q лежит на прямой (2) по свойству корней квадратного уравнения имеем:

$$x' + x'' = -\frac{Bk + 2Cmk + D + Em}{A + Bm + Cm^2}$$

Следовательно будем иметь:

$$x_1 = -\frac{(B + 2Cm)k + D + Em}{2(A + Bm + Cm^2)}$$

$$y_1 = mx_1 + k.$$

Эти два равенства определяют координаты x_1, y_1 середины некоторой определенной хорды, так как эти координаты зависят от k, то если мы из этих двух равенств исключим k, то мы получим некоторую зависимость между координатами x_1 и y_1, эта зависимость

будет существовать, какое бы значение ни дали количеству k, следовательно это будет соотношение между координатами середины какой угодно из данного ряда параллельных хорд т. е. это и будет искомое уравнение диаметра. Исключим все k:

$$k = y_1 - mx_1$$

$$x_1 = -\frac{(B+2Cm)(y_1 - mx_1) + D + Em}{2(A + Bm + Cm^2)}$$

или $2(A + Bm + Cm^2)x_1 + (B + 2Cm)(y_1 - mx_1) + D + Em = 0$

или $(2A + 2Bm + 2Cm^2 - Bm - 2Cm^2)x_1 + (B + 2Cm)y_1 + D + Em = 0$

$$(2A + Bm)x_1 + (B + 2Cm)y_1 + D + Em = 0$$

Это уравнение первой степени относительно x_1, y_1, следовательно оно представляет прямую линию, из чего следует, что диаметры кривых второго порядка суть прямые линии. Так как теперь x_1, y_1 будут означать текущие координаты диаметра, то уравнение можно будет написать так:

$$(2A + Bm)x + (B + 2Cm)y + D + Em = 0$$

Иначе $2Amx + By + D + (Bx + 2Cy + E)m = 0$

Это будет уравнение диаметра, делящего полный ряд параллельных хорд с угловым коэффициентом m. Ясно, что для всякого данного ряда параллельных хорд существует соответствующий диаметр, делящий эти хорды

пополам. Относительно расположения диаметров кривых второго порядка нужно различать кривые, имеющие центр и кривые не имеющие центра.

1) Если кривая имеет центр, то все диаметры проходят через центр. В самом деле, пусть координаты центра будут α и β. Мы знаем, что эти координаты удовлетворяют таким уравнениям:

$$A\alpha + B\beta + D = 0$$
$$B\alpha + C\beta + E = 0.$$

Всякое действие этого эти координаты удовлетворяют и уравнению всякого диаметра, так как вставляя их в уравнение диаметра, мы получим:

$$(A\alpha + B\beta + D) + m(B\alpha + C\beta + E) = 0 + m \cdot 0 = 0.$$

Обратно можно сказать, что всякая прямая проходящая через центр, будет диаметром. В самом деле, центр можно рассматривать как точку пересечения двух прямых линий, которых уравнения суть:

$$A\alpha + By + D = 0$$
$$Bx + Cy + E = 0$$

Но уравнение всякой прямой, проходящей через точку пересечения этих двух прямых, выражается таким уравнением:

$$2Ax + By + D + \lambda(Bx + 2Cy + E) = 0$$

где λ произвольный множитель, а сравнивая это уравнение с уравнением диаметра, мы видим, что оно представляет диаметр, делящий пополам хорды с угловым коэффициентом λ, следовательно всякая прямая проходящая через центр будет диаметром.

2) Все параболы имеют диаметры параллельные. Чтобы доказать это, напишем уравнение диаметра таким:

$$y = -\frac{[2A + Bm]}{[B + 2Cm]}x - \frac{D + Em}{B + 2Cm}$$

и угловой коэффициент диаметра будет m'. Он равен:

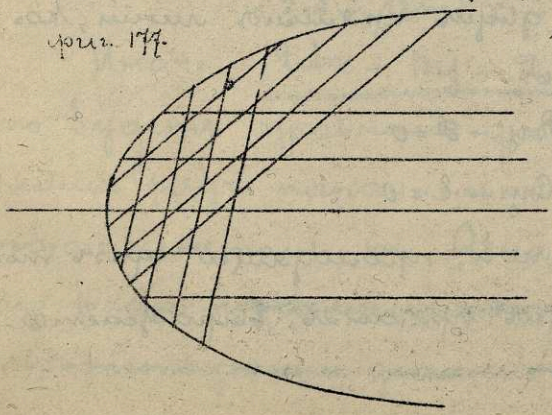
$$m' = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm}$$

но в случае параболы $B^2 - 4AC = 0$ или $B^2 = 4AC$ и отсюда $\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C}$, но с другой стороны:

$$m' = -\frac{B\left(\frac{2A}{B} + m\right)}{2C\left[\frac{B}{2C} + m\right]} = -\frac{B}{2C};$$

т. е. в параболе угловой коэффициент всех диаметров имеет одну и ту же величину, так как он не зависит от углового коэффициента хорды, следовательно все диаметры параллельны. Притом заметим, что ось параболы есть тоже один из диаметров, так

фиг. 177.



как она дълить пополамъ рядъ хордъ къ ней перпендикулярныхъ, слѣдовательно къ параболѣ всѣ діаметры параллельны оси. Всѣ діаметры въ параболѣ какъ и ось пересѣкаютъ кривую въ одной точкѣ. Возвратимся опять къ кривымъ имѣющимъ центръ. Возьмемъ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Діаметръ дѣлящій эти хорды пополамъ, имѣетъ угловой коэффиціентъ:

$$m' = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Найдемъ этотъ діаметръ (1). Возьмемъ другой рядъ хордъ, которыя были бы параллельны этому діаметру. Ихъ угловой коэффиціентъ будетъ m' а угловой коэффиціентъ діаметра, дѣлящаго эти хорды пополамъ будетъ:

$$m'' = -\frac{2A + Bm'}{B + 2Cm'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Найдемъ его (2). Вставивъ во (2) равенство вмѣсто m' его выраженіе:

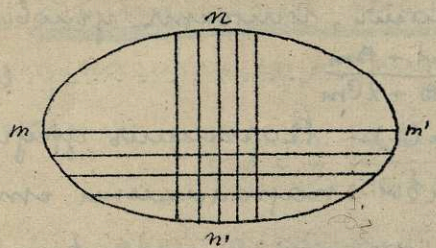
$$m'' = -\frac{2A - \frac{2AB + B^2m}{B + 2Cm}}{B - \frac{4AC + 2BCm}{B + 2Cm}} = -\frac{2AB + 4ACm - 2AB - B^2m}{B^2 - 2BCm - 4AC - 2BCm}$$

Или $$m'' = \frac{(B^2 - 4AC)m}{B^2 - 4AC} = m$$

т. е. второй діаметръ будетъ параллеленъ тѣмъ хордамъ, которыя первый діаметръ дѣлитъ пополамъ, слѣдовательно къ кривымъ имѣющимъ центръ, всякому діаметру соотвѣтствуетъ другой, который дѣлитъ пополамъ рядъ хордъ, пара-

имеющий первому диаметру и который самъ параллеленъ тѣмъ хордамъ, которыя первый діаметръ дѣлитъ пополамъ. Такіе два діаметра называются сопряженными. Въ эллипсѣ и гиперболѣ существуетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметровъ. Уравненіе эллипса

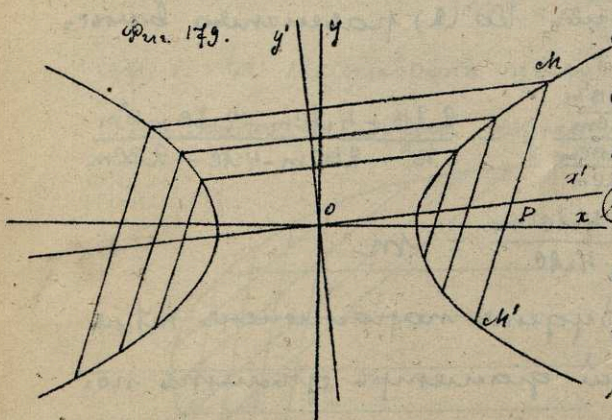
фиг. 178.



и гиперболы принимаетъ очень простой видъ, когда за оси координатъ приняты два сопряженныхъ діаметра. Эти оси будутъ косоугольныя. Пусть два діаметра будутъ Ox и Oy. Уравненіе кривой должно имѣть видъ: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

но здѣсь мы замѣтимъ, что всякой величинѣ x

Фиг. 179.



должны соотвѣтствовать двѣ величины y, равныя и съ обратными знаками. Слѣдовательно это уравненіе не должно содержать y въ первой степени, а потому коэффиціентъ при y долженъ быть равенъ нулю, такъ что: $B\alpha + E = 0$

И такъ какъ это равенство должно существовать при всякой величинѣ x, то должны имѣть

отдельно: $B=0$ и $E=0$, уравнение будетъ:

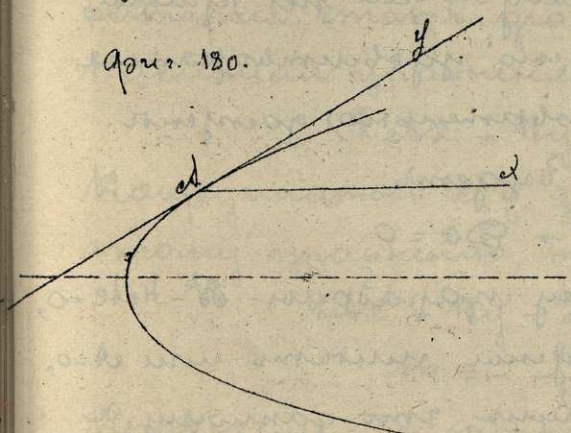
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = 0$$

Далѣе, всякому y ^ду соотвѣтствуютъ двѣ величины x, равныя и съ обратными знаками, слѣдовательно уравненіе недолжно содержать x въ первой степени, т. е. должно быть $D=0$. Такъ что уравненіе эллипса гиперболы, отнесенныхъ къ сопряженнымъ діаметрамъ должно имѣть видъ:

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Такъ что уравненіе эллипса и гиперболы отнесенныхъ къ сопряженнымъ діаметрамъ будетъ имѣть такой же видъ, какъ уравненіе эллипса и гиперболы, отнесенныхъ къ осямъ только въ послѣднемъ случаѣ оси прямолинейны, а при сопряженныхъ діаметрахъ они косоугольны. Уравненіе параболы получаетъ весьма простой видъ, когда за ось координатъ принять одинъ изъ діаметровъ и касательную къ кривой въ концѣ діаметра

Фиг. 180.



(фиг. 180) Уравнение должно иметь вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Касательная параллельна хорде, которая диаметр делить пополам. В этом случае всякому x будут соответствовать два значения y равных и с обратными знаками, следовательно наше уравнение не должно содержать y в первой степени, т.е. оно должно иметь вид:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = 0$$

потому что $Bx + E = 0$ и так это уравнение должно иметь место при всяком x то должно иметь: $B = 0$ и $E = 0$. Так как начало координат находится на кривой, то это уравнение должно удовлетворяться когда $x = 0$ и $y = 0$, (следовательно) должно иметь $F = 0$. Уравнение будет:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx = 0$$

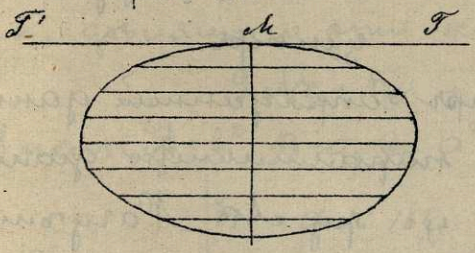
Так как по свойству параболы $B^2 - 4AC = 0$, то следовательно должно иметь или $A = 0$, или $C = 0$. Мы предполагаем, что данному x соответствует два значения y, потому: $A = 0$ и $Cy^2 + Dx = 0$; т.е. в этом случае уравнение параболы имеет такой же вид, как и когда парабола отнесена к вершине

и не ось, только координаты будут косоугольны.

Теорема. Касательная в конце диаметра параллельна тем хордам, которая этот диаметр делит пополам.

Возьмем произвольную кривую 2-го порядка.

фиг 181.



Возьмем на ней точку $M(x', y')$. Проведем через эту точку диаметр. Пусть m будет угловой коэффициент тех хорд, которая этот диаметр делит пополам. Напишем уравнение таких:

$$2ax + by + D + m(bx + 2cy + e) = 0$$

Координаты x', y' должны удовлетворять этому уравнению, т.е. будет:

$$2ax' + by' + D + m(bx' + 2cy' + e) = 0$$

$$m = -\frac{2ax' + by' + D}{bx' + 2cy' + e}$$

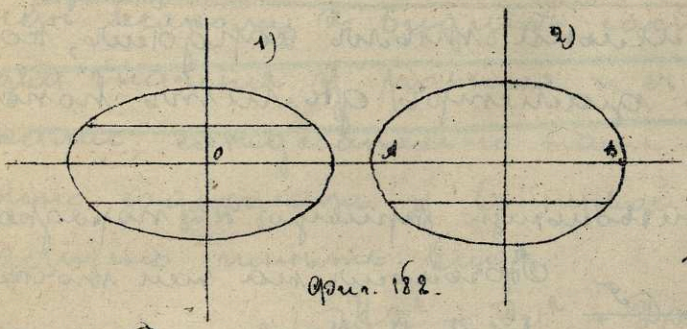
Проведем в точке M касательную TT', угловой коэффициент этой касательной будет:

$$m' = -\frac{2ax' + by' + D}{bx' + 2cy' + e}$$

Следовательно $m = m'$, что и доказывает теорему. Доказанные свойства диаметров дают возможность решать некоторые

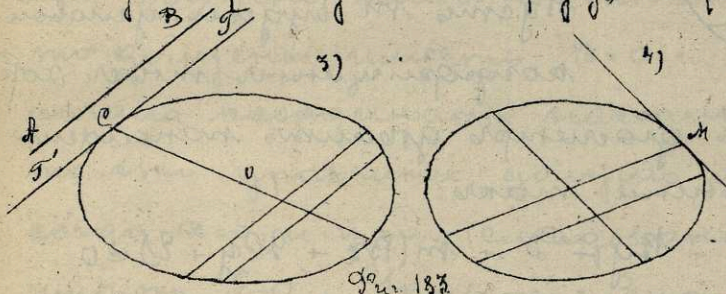
графические задачи.

1.) Дано очертание эллипса или гиперболы. Найти его центр. Проводим две параллельные хорды, соединяем их средины, получим диаметры; разделим его пополам, будет наш центр.



фиг. 182.

2.) Построить диаметр сопряженный данному. Проводим хорду, параллельную диаметру AB. Разделим ее пополам. Середину соединим с центром.



фиг. 183

3.) Провести касательную, параллельную данной пр. AB. Проведем две хорды, параллельные AB, соединим их средины и в точке A проведем параллель AB. Это и будет касательная.

4.) Провести касательную в данной точке M эллипса. Проведем через нее диаметр и хорду, параллельную ему. Ее середину соединим с центром, получим диаметр сопряженный. Через точку M проводим пара-

имеющую этому диаметру. Это и будет касательная.

Свойства диаметровъ эллипса.

Возьмем эллипсъ, отнесенный къ центру и къ осямъ. Его уравненіе будетъ:

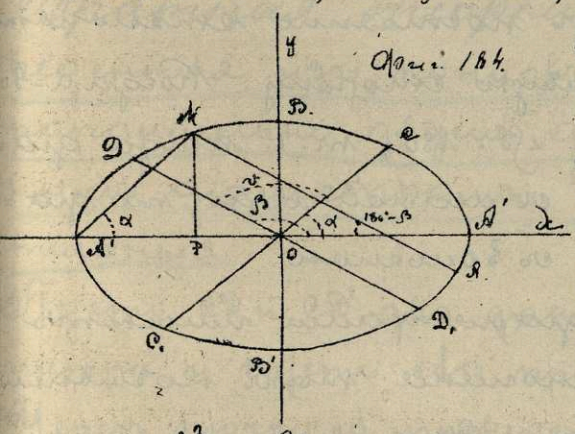
$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

Возьмем рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Уравненіе діаметра, дѣлящаго эти хорды пополамъ, будетъ:

$$2Ax + 2By + D + m(2Bx + 2Cy + E) = 0$$

Здѣсь $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = E = 0$, $F = -a^2b^2$, слѣдовательно ур-ніе діаметра будетъ: $2b^2x + m\,2a^2y = 0$ или $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x$. Построимъ этотъ діаметръ CC'. Обозначимъ черезъ α уголъ, дѣлаемый имъ съ осью x. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{b^2}{a^2m}$. Черезъ центръ проведемъ діаметръ параллельный хордамъ DD'. Это будетъ сопряженный діаметръ. Пусть $\angle DOx = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\beta = m$ и слѣдовательно $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\beta}$ или $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{b^2}{a^2}$. Изъ этого соотношенія легко видѣть, какъ будетъ измѣняться положеніе діаметра, сопряженнаго съ даннымъ.

Фиг. 184.



Имеем: $tg\beta = -\frac{b^2}{a^2 tg\alpha}$

Если $\alpha = 0$, то диаметр CC' совпадет съ большою осью AA', тогда $tg\beta = \infty$ и $\angle\beta = 90°$ т. е диаметр DD' совпадет съ малой осью, такъ что оси составляютъ также пару сопряженныхъ діаметровъ, образующихся прямой уголъ. Если уго α будетъ увеличиваться, то $tg\beta$, оставаясь отрицательнымъ, будетъ увеличиваться по абсолютной величинѣ, слѣдовательно $\angle\beta$ будетъ больше $90°$ и будетъ увеличиваться постоянно и діаметръ DD' будетъ постоянно отклоняться отъ оси BB' въ лѣвую сторону. Когда $\alpha = 90°$ то $tg\alpha = \infty$ и $tg\beta = 0$; $\angle\beta = 180°$, т. е. когда діаметръ CC' совпадетъ съ малой осью, то діаметръ DD' совпадетъ съ большою.

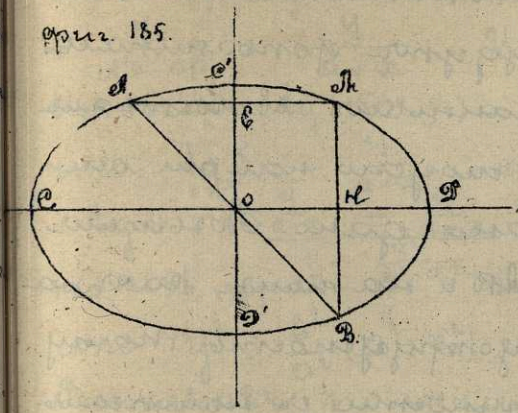
Къ сопряженнымъ діаметрамъ примыкаетъ весьма близкое соотношеніе, такъ называемыхъ дополнительныхъ хордъ. Это суть двѣ хорды, соединяющія произвольную точку эллипса съ концами діаметра; AM и BM хорды дополнительныя.

Теорема. Два діаметра, параллельные двумъ дополнительнымъ хордамъ суть діаметры сопряженные.

Проведемъ черезъ центръ о два діаметра

параллельно АМ и ВМ. Очевидно в треугольнике АВВ: ОК || АМ и проходит через середину АВ. Следовательно СМ = МВ; точно также ОЕ || ВМ и проходит через середину АВ, следовательно ЕМ = АЕ, т. е. каждый изъ діаметровъ СД и С'Д' дѣлитъ пополамъ хорду, параллельную другому, слѣдовательно эти діаметры сопряженные.

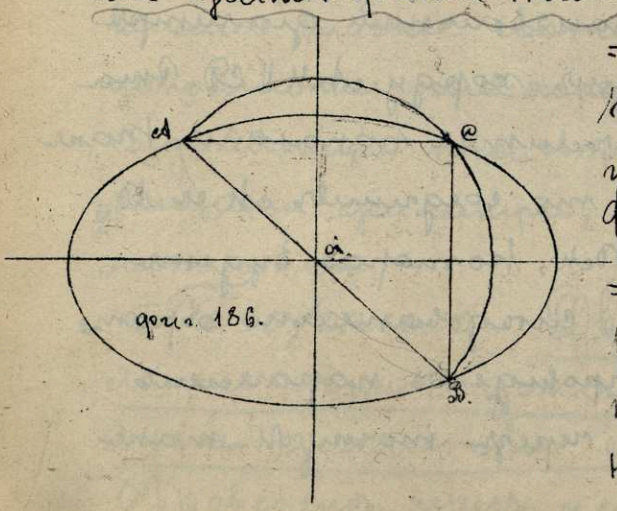
фиг. 185.



Обратная теорема. Двѣ хорды, проведенныя изъ концовъ одного діаметра параллельно двумъ данными сопряженнымъ діаметрамъ, будутъ дополнительныя.

Пусть СД и С'Д' два данные и сопряженные діаметра и пусть АВ произвольный діаметръ. Черезъ точку А проведемъ хорду АМ || СД. Эта хорда въ точкѣ Е раздѣлится пополамъ. Такъ какъ при этомъ АО = ОВ, то соединивъ М съ В, мы получимъ линію ВМ, которая будетъ параллельна ОЕ или С'Д', слѣдовательно обратно, если изъ точки В проведемъ параллель Д'С', то она пройдетъ черезъ точку М, такъ

что две параллели AM и BK двух сопряженных диаметров, пересекаются на эллипсе и следовательно они будут дополнительными хордами. По доказанным свойствам дополнительных хорд, можно найти оси эллипса, которого очертание дано. Возьмем произвольный диаметр AB и на нем, как на диаметре, опишем полуокружность. Точку пересечения этой полуокружности с эллипсом C соединим с A и B. Угол ACB будет прямой хорды AC и BC будут дополнительными. Проведем через O два диаметра, параллельные этим хордам. Эти диаметры будут сопряженные и при том они образуют прямой угол следовательно это оси эллипса. Рассмотрим угол, образуемый двумя сопряженными диаметрами эллипса. Это будет угол $v = \beta - \alpha$. Рассматривая как изменяется этот угол с изменением α. Имеем: $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$. Проведем через A и A' две дополнительные хорды параллельно CC' и DD'. Они пересекут



фиг. 186.

Если точка $M(x; y)$ $\angle CMO = \alpha$, $\angle OAM = 180° - \beta$

Из треугольника $A'MP$ имеем: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{A'P} = \frac{y}{A'O - OP} = \frac{y}{a+x}$. Из треугольника CMP имеем $\operatorname{tg}(180° - \beta) = \frac{MP}{CP} = \frac{y}{a-x} = -\operatorname{tg}\beta$, так что $\operatorname{tg}\beta = -\frac{y}{a-x}$, следовательно:

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{-\frac{y}{a-x} - \frac{y}{a+x}}{1 - \frac{y^2}{a^2-x^2}} = -\frac{ay + xy + ay - xy}{a^2 - x^2 - y^2} = -\frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Но из уравн. эллипса мы выводили, что $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ и отсюда $a^2 - c^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$

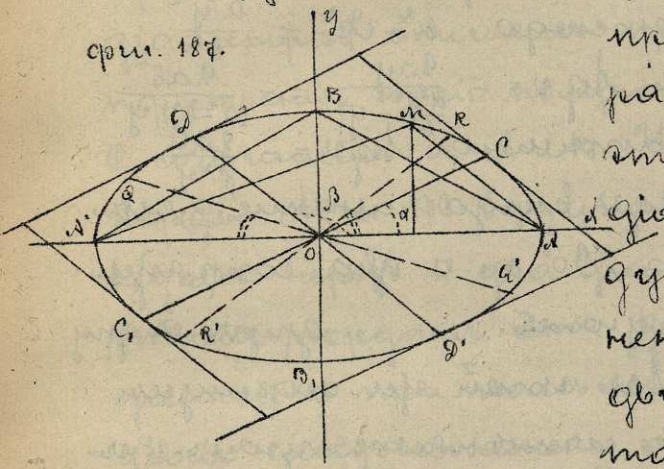
Вставив получим $\operatorname{tg}\nu = -\frac{2ay}{\frac{a^2y^2}{b^2} - y^2} = -\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)y}$

но $a^2 - b^2 = c^2$, следовательно: $\operatorname{tg}\nu = -\frac{2ab^2}{c^2 y}$

и мы видим, что $\operatorname{tg}\nu$ всегда меньше 0; следовательно $\angle\nu$ всегда $> 90°$ т.е. два сопряженные диаметра образуют друг с другом тупой угол. Из этой же формулы можно видеть, как изменяется угол ν с изменением $\angle\alpha$. Предположим, что α увеличивается от $\alpha = 0$ до $\alpha = 90°$. При этом точка M будет переходить от точки A по направлению к точке B. Ордината $MP = y$ и будет сначала увеличиваться; $\operatorname{tg}\nu$ будет уменьшаться по абсолютной величине, но так как $\operatorname{tg}\nu < 0$, то угол ν будет постоянно увеличиваться. Какой-то угол получит

когда ордината у сдѣлается наибольшею. Это будетъ тогда, когда M совпадетъ съ B. Тогда хорда AA' и BB' и два сопряженныхъ діаметра параллельные этимъ хордамъ. Они будутъ KK' и QQ'. Уголъ между ними AOK будетъ также уголъ между двумя сопряженными діаметрами. Очевидно, что эти два сопряженные діаметра KK' и QQ' будутъ одинаково наклонены къ большой оси съ двухъ разныхъ сторонъ, такъ что $\angle KOA = \angle QOA'$.

фиг. 187.



Но такъ какъ линіи расположены симметрично относительно осей y и x, то очевидно, что OK = OQ и также KK' = QQ', слѣдовательно пара сопряженныхъ діаметровъ, образующихъ наибольшій уголъ, есть пара равносопряженныхъ діаметровъ. Если мы уголъ α возьмемъ больше угла KOA, то точка будетъ перемѣщаться отъ B къ A' и ордината y уменьшается; вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ уменьшаться и $\angle v$, такъ что отсѣ

угол имеет только один максимум.

Присоединяя к этому, что кроме двух найденных нами сопряженных диаметров, эллипс не имеет других пар равных сопряженных диаметров. Это видно из следующего: Два угла α и β связаны между собою уравнением: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$.

Чтобы два полудиаметра OC и OD были равны, очевидно необходимо, чтобы $\angle COA$ был равен $\angle DOA'$, так как эллипс есть фигура симметричная, т.е. нужно, чтобы было: $\alpha = 180° - \beta$ или чтобы $\beta = 180° - \alpha$, но тогда $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Значит будем иметь $-\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}^2\alpha = -\frac{b^2}{a^2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Но эта формула определяет угол KOA. Очевидно: $\angle KOA = \angle BA'O$ и из треуг. $BA'O$ имеем: $\operatorname{tg} BA'O = \frac{OB}{A'O} = \frac{b}{a}$; так что пара равных сопряженных диаметров только одна.

Уравнение эллипса, отнесенного к сопряженным диаметрам.

Возьмем уравнение эллипса относительно главных осей: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, и преобразуем его в уравнение относительно сопряженных диаметров Ox' и Oy', которые

образующими съ принятой осью углы α и β, для этого подставимъ вмѣсто x и y ихъ величины изъ уравненій перехода:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta.$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta.$$

получимъ: $\frac{x'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\cdot\cos\beta + y'^2\cos^2\beta}{a^2} + \frac{x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\sin\beta + y'^2\sin^2\beta}{b^2} = 1$

или $x'^2\left(\frac{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}\right) + \frac{2x'y'\cos\alpha\cos\beta}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\right) + y'^2\left(\frac{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}{a^2b^2}\right) = 1$

Коэффиціентъ при $x'y'$ обращается въ нуль ибо по свойству сопряженныхъ діаметровъ $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$ и мы получимъ: $\frac{x'^2}{a_1^2} + \frac{y'^2}{b_1^2} = 1$,

гдѣ $a_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}$, $b_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}$

Это есть простѣйшій видъ уравненія эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ. Мы видимъ, что это уравненіе совершенно одинаково съ уравненіемъ эллипса, отнесеннаго къ осямъ, только оси координатъ здѣсь косоугольныя. Въ частности, если мы за оси координатъ возьмемъ пару равныхъ сопряженныхъ діаметровъ AA' и BB' тогда будетъ имѣть: $a_1 = b_1$ и уравненіе будетъ:

$$x'^2 + y'^2 = a_1^2$$

Оно будетъ одинаково съ уравненіемъ круга, то только координаты косоугольныя.

Уравненіе эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ, можно написать въ видѣ

$$a_1^2 y^2 + b_1^2 x^2 - a_1^2 b_1^2 = 0.$$

Теоремы Аполлонія.

Для вывода этихъ теоремъ надо посмотрѣть выраженія сопряженныхъ діаметровъ въ функціи угловъ α и β. Мы имѣемъ изъ равенствъ (a) и (b):

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}$$

$$b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}$$

Теорема 1. Площадь параллелограмма построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, постоянна по величинѣ и = площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

Въ точкахъ C, C', D' и D проведемъ касательныя къ эллипсу, получимъ параллелограммъ, построенный на сопряженныхъ діаметрахъ. Его площадь равна $2a_1 \cdot 2b_1 \sin v$. Она должна быть равна $2a \cdot 2b$. Иначе должно быть

$$a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha) = ab.$$

Доказать эту теорему значитъ вывести послѣднее равенство. Съ этою цѣлью перемножимъ a_1^2 и b_1^2 получимъ:

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta + b^4 \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + a^2 b^2 (\sin^2\alpha \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta)}$$

то возьмемъ уравненіе:

$$a^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cdot \cos\beta = 0$$

возведя его во квадратъ, получимъ:

$$a^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\beta = -2a^2b^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

Вставивъ, получимъ:

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^4 b^4}{-2a^2b^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + a^2b^2(\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta \cdot \cos^2\alpha)} =$$

$$= \frac{a^2b^2}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta - 2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Въ знаменатель тотчасъ квадратъ, потомъ имѣемъ:

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^2b^2}{(\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta)^2} = \frac{a^2b^2}{\sin^2(\alpha-\beta)} = \frac{a^2b^2}{\sin^2(\beta-\alpha)}$$

Извлекая корень, получимъ:

$$a_1 b_1 = \frac{ab}{\sin(\beta-\alpha)} \quad \text{и отсюда } a_1 b_1 \sin(\beta-\alpha) = ab.$$

что и требовалось доказать.

Теорема II. Сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, постоянна и равна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на осяхъ.

Эта теорема выражается такимъ равенствомъ:

$$(2a_1)^2 + (2b_1)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

или $$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

Доказать эту теорему значитъ вывести это равенство, а для этого нужно изъ двухъ равенствъ, выражающихъ a_1 и b_1, исключить углы α и β, и это можно сдѣлать съ помощью урав-нія:

$$tg\alpha . tg\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

Мы имѣемъ: $a_1^2(a^2 Sin^2\alpha + b^2 Cos^2\alpha) = a^2 b^2$

Выразивъ Sin и Cos черезъ tg, имѣемъ:

$$\frac{a_1^2 a^2 tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{a_1^2 b^2}{1+tg^2\alpha} = a^2 b^2$$

или имѣемъ: $a_1^2 a^2 tg^2\alpha + a_1^2 b^2 = a^2 b^2 + a^2 b^2 tg^2\alpha$

Отсюда $tg^2\alpha = \frac{a^2 b^2 - a_1^2 b^2}{a^2 a_1^2 - a^2 b^2}$ или $tg^2\alpha = \frac{b^2(a^2-a_1^2)}{a^2(a_1^2-b^2)}$

Изъ равенства, опредѣляющаго b_1^2, или точно такъже выведемъ $tg^2\beta$ и такъ какъ это равенство отличается только перемѣною a_1 на b_1 и α на β, то прямо имѣемъ:

$$tg^2\beta = \frac{b^2(a^2-b_1^2)}{a^2(b_1^2-b^2)}$$

Перемноживъ и замѣчая, что $tg\alpha . tg\beta = -\frac{b^2}{a^2}$ получимъ: $\frac{b^4(a^2-a_1^2)(a^2-b_1^2)}{a^4(a_1^2-b^2)(b_1^2-b^2)} = \frac{b^4}{a^4}$ или $(a^2-a_1^2)(a^2-b_1^2) = (a_1^2-b^2)(b_1^2-b^2)$ или $a^4 - a^2a_1^2 - a^2b_1^2 + a_1^2b_1^2 = a_1^2b_1^2 - b^2b_1^2 - a_1^2b^2 + b^4$ или $a^4 - b^4 = a^2(a_1^2+b_1^2) - b^2(a_1^2+b_1^2)$ или $a^4 - b^4 = (a_1^2+b_1^2)(a^2-b^2)$ или сокративъ на a^2-b^2, получимъ:

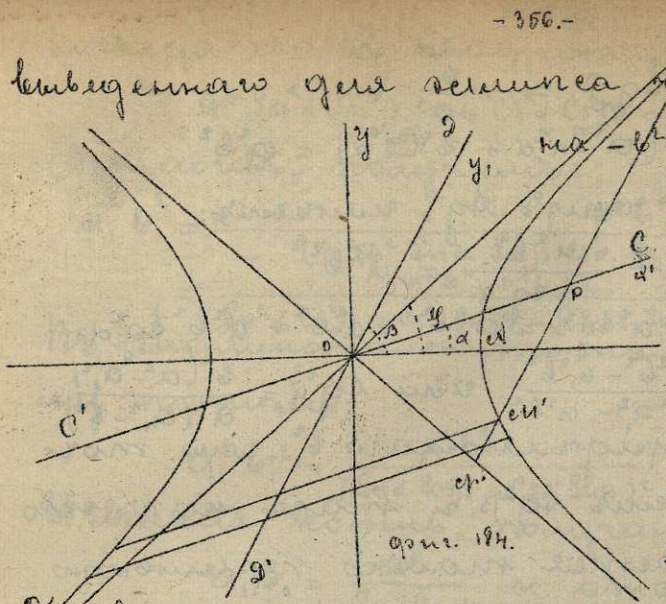
$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2$$

Діаметры въ гиперболѣ.

Возьмемъ гиперболу, отнесенную къ осямъ; перемѣнивъ перемѣнную въ уравненіи эллипса b^2 на $-b^2$, получимъ ур-іе гиперболы; оно будетъ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Возьмемъ въ гиперболѣ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Ур-іе діаметра, дѣлящаго эти хорды пополамъ, получится изъ такого же ур-ія діаметра,

выведенной для эллипса через перемену b^2 на $-b^2$. Следовательно это ур-ние будет $y = +\frac{b^2}{a^2 m} x$. Проведем опять диаметр CC'. Он делает с осью x угол α и его наклон: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2 m}$



фиг. 194.

Проведем через центр диаметр DD' параллельный хордам MM'. Это будет диаметр сопряженный. Пусть β есть угол им образуемый с осью x. Именно: $\operatorname{tg}\beta = m$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\beta}$ и отсюда $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$. Это есть отношение между углами двух сопряженных диаметров с главною осью гиперболы. Отсюда $\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\alpha}$. По этой формуле можно исследовать как изменяется направление диаметра, сопряженного с данным. Именно, если $\alpha = 0$, то $\operatorname{tg}\beta = \infty$ и $\angle\beta = 90°$. Следовательно, когда диаметр CC' совпадает с главною осью гиперболы то диаметр DD' совпадает с мнимою осью. Если α будет увеличиваться, то $\operatorname{tg}\beta$ - уменьшаться и $\angle\beta$ оставаясь острым, уменьшается. Поэтому диаметр DD' делает с осью x

уголъ острый и уголъ cos между двумя сопряженными діаметрами будетъ также острый. Обозначимъ черезъ φ уголъ, образуемый асимптотой гиперболы съ осью x и построимъ ее. Мы знаемъ что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. По другой сторонѣ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a}$, отсюда видно, что если $\operatorname{tg}\alpha$ будетъ меньше $\frac{b}{a}$, то $\operatorname{tg}\beta > \frac{b}{a}$, иначе если $\angle\alpha < \angle\varphi$, то $\angle\beta > \angle\varphi$ и слѣдовательно, если одинъ изъ діаметровъ пересѣкаетъ гиперболу то другой DD' не пересѣкаетъ ее. Когда $\angle\alpha$, увеличиваясь будетъ приближаться къ углу φ, то β, уменьшаясь также приближается къ углу φ и когда $\angle\alpha = \varphi$ то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, тогда и $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$ и $\angle\beta = \angle\varphi$. Въ этомъ случаѣ два сопряженныхъ діаметра совпадутъ съ асимптотами и слѣдовательно для хорды параллельныхъ асимптотамъ не существуетъ діаметровъ, которые дѣлили бы ихъ пополамъ. Это вѣрно и такъ видно, потому что линіи параллельныя асимптотамъ пересѣкаютъ гиперболу въ одной точкѣ и потому не будутъ хордами. Когда $\angle\alpha$ дѣлается $> \angle\varphi$, то $\angle\beta$ будетъ $< \angle\varphi$ и два діаметра CC' и DD' перемѣняются одинъ на другой.

Докажемъ теорему:

Отрѣзки всякой секущей, заключенные между гиперболою и асимптотами равны между собою.

Надо доказать, что для произвольной секущей NN' имѣемъ $MN = M'N'$. Для этого напишемъ ур-ніе: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ..... (к) и замѣтимъ, что оно представляетъ обѣ асимптоты, ибо разлагается на множители $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$ и дастъ: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$. Разсмотримъ уравненіе к, какъ ур-ніе 2го порядка; мы можемъ описывать діаметръ, дѣлящій всѣ хорды, параллельныя NN', пополамъ. Если т будетъ тангенсъ угла NN' съ осью x, то ур-ніе этого діаметра будетъ: $y = \frac{b^2}{a^2 m}x$, т.е. будетъ такое же, какое имѣли для гиперболы. Такимъ образомъ, діаметръ Ox' дѣлитъ пополамъ, какъ хорды NN', такъ и хорды MM'. Мы имѣемъ: $1^o\, NN = PN'$, $PM = PM'$. Вычитая найдемъ: $MN = M'N'$, что и треб. доказать.

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ.

Возьмемъ уравненіе гиперболы, отнесенной къ главнымъ осямъ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ..... (1) и преобо-

разумѣть сю въ уравненіе относительно сопряженныхъ діаметровъ ox', oy', которые образуютъ съ осью x углы α и β. Формулы перехода дадутъ намъ: $x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta$, $y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta$; подставляемъ ихъ.

$$\frac{x'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\cos\alpha + y'^2\cos^2\beta}{a^2} - \frac{x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\cdot\sin\beta + y'^2\sin^2\beta}{b^2} = 1.$$

или $x'^2\frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2} + \frac{2x'y'\cos\alpha\cdot\cos\beta}{b^2}\left[\frac{b^2}{a^2} - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\right] - y'^2\frac{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}{a^2b^2} = 1.$

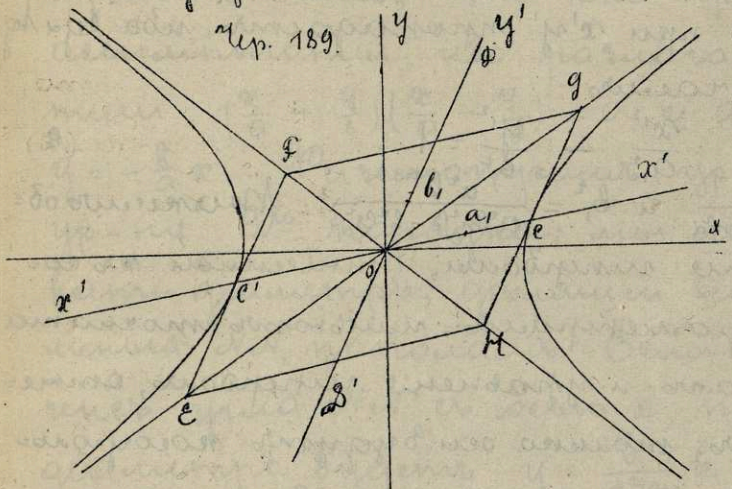
Коэффиціентъ при $x'y'$ превращается, ибо $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$ и мы получаемъ:

$$\frac{x'^2}{a_1^2} - \frac{y'^2}{b_1^2} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ $a_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}$ и $b_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}$. Такимъ образомъ уравненіе гиперболы, отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ, имѣетъ точно такой же видъ, какъ и уравненіе гиперболы, отнесенныхъ къ осямъ, только оси будутъ косоугольныя. Составимъ еще уравненіе асимптоты, отнесенныя къ осямъ, есть: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Если мы въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ тоже самое преобразованіе координатъ, то мы получимъ уравненіе асимптоты относительно сопряженныхъ діаметровъ, но не имѣемъ надобности повторять вычисленіе, потому что первая часть послѣдняго уравненія отличается отъ первой части уравненія (1) только извѣстнымъ членомъ, который въ пре-

следственно вычисление все будет тоже и результат будет следующий: $x'^2\frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2} - y'^2\frac{a^2\sin^2\alpha}{a^2} - b^2\cos^2\alpha = 0$ или сводя в это уравнение, как и прежде сделали, полудиаметры a_1 и b_1, мы получим его в виде $\frac{x'^2}{a_1^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} = 0$. Это и будет уравнение двух асимптот, относящихся к сопряженным диаметрам. Пользуясь этим уравнением мы можем сейчас же доказать, что вершины параллелограмма, построенного на сопряженных диаметрах гиперболы находятся на асимптотах. Докажем, что четыре точки M, q, F и E находятся на асимптотах. Возьмем одну из них какую угодно положим q. Ея координаты будут $x' = a_1$ и $y' = b_1$. Вставив эти координаты в ур-ние асимптот получим: $\frac{a_1^2}{a_1^2} - \frac{b_1^2}{b_1^2} = 0$ т. е. $0 = 0$. Следовательно точка q находится на асимптоте, а также и для всякой другой точки.

Чер. 189.



31 Теорема Аполлония для гипер-
болы.

Очень выводятся еще другие формулы, выра-
жающие сопряженные полудиаметры a_1 и b_1
во функции углов α и β или диаметра со
главною осью. Эти формулы будут:

$$a_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}, \quad b_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}$$

Первые части их суть две формулах
следовательно и вторые должны быть положительны.
положительны. Легко убедиться, что это
так и будет. Действительно, так как
диаметр CC' пересекает гиперболу, то $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$
или $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} < \frac{b^2}{a^2}$ или $a^2\sin^2\alpha < b^2\cos^2\alpha$. Следователь-
но в первой формуле вторая часть поло-
жительна. Диаметр DD' не пересекает ги-
перболы, стало быть $\operatorname{tg}\beta > \frac{b}{a}$ или $\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} > \frac{b^2}{a^2}$
или $a^2\sin^2\beta > b^2\cos^2\beta$ следовательно и вто-
рая часть второй формулы положитель-
на. Если мы сравним формулы, выража-
ющия a_1^2 и b_1^2 для гиперболы со подобными же
формулами для эллипса, то мы увидим,
что формулы для гиперболы получаются
из формул эллипса через перемену b^2
на $-b^2$ и b_1^2 на $-b_1^2$. Теорема Аполлония для эллип-
са была выведена, как следствие этих
двух формул. Выводы этой теоремы применяются

къ послѣднимъ двумъ формуламъ съ перемѣною b^2 на $-b^2$ и b_1^2 на $-b_1^2$, слѣдовательно теоремы относящіяся для гиперболы получатся изъ такихъ же теоремъ для эллипса черезъ перемѣну b^2 на $-b^2$ и b_1^2 на $-b_1^2$. Для эллипса были выведены два равенства: $a_1 b_1 \sin(\beta-\alpha) = ab$ и $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$. Перемѣнивъ въ первомъ уравненіи b на $b\sqrt{-1}$ и b_1 на $b_1\sqrt{-1}$ получимъ: $a_1 b_1 \sqrt{-1} \sin(\beta - \alpha) = ab\sqrt{-1}$ или $a_1 b_1 \sin(\beta-\alpha) = ab$, а второе равенство дастъ: $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$

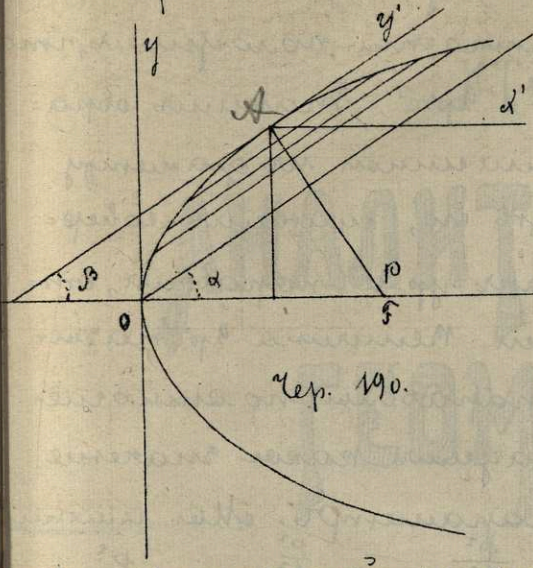
1) Въ гиперболѣ площадь параллелограмма построеннаго на сопряженныхъ діаметрахъ, имѣетъ величину постоянную и равную площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

2) Разность площадей квадратовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ гиперболы постоянна и равна разности площадей квадратовъ построенныхъ на осяхъ

Діаметры параболы.

Возьмемъ параболу, отнесенную къ вертикальной оси. Ея ур-ніе будетъ: $y^2 - 2px = 0$. Возьмемъ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Діаметръ, дѣлящій пополамъ эти хорды, будетъ имѣть уравненіе: $2Ax + By + D + m(Bx + 2Cy + E) = 0$. Зная $A = B = E = 0$, $C = 1$, $D = -2p$.

Очевидно будет иметь $-2p + m \cdot 2y = 0$. Отсюда $y = \frac{p}{m} = const$. Очевидно диаметр параллелен оси x'ов. При этом всякая параллель оси x будет диаметром. Действительно: по пути уравнение некоторой параллели будет $y = b$. Положим $b = \frac{p}{m}$, отсюда $m = \frac{p}{b}$ и это определяет направление той хорды, которая эта параллель делит пополам. Составим ур-е параболы, отнесенной к диаметру и к касательной в конце диаметра. Возьмем диаметр Ad' и dy'. Пусть координаты будут (a, b). Они даны. Так как эта точка лежит на параболе, то имеем: $b^2 = 2pa$. Формулы преобразования координат будут: $x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\beta$; $y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\beta$. В нашем случае $\angle\alpha = 0$, $\angle\beta = \angle y'Ax'$, следовательно формулы будут $x = a + x' + y' \cos\beta$, $y = b + y' \sin\beta$.



Вставим в ур-ие $y^2 = 2px$, получим:
$b^2 + 2b \sin\beta \cdot y' + \sin^2\beta\, y'^2 = 2pa + 2px' + 2p \cos\beta\, y'$, но $b^2 = 2pa$ так как β есть угол, делаемый касательной к параболе в точке ордината которой равна b, но мы знаем, что $tg\beta = \frac{p}{b}$ или $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{p}{b}$ и

отсюда $y \cdot \sin\beta = p \cdot \cos\beta$. следов. члены съ y' въ объ=
ихъ частяхъ предыдущаго равенства можно
сократить. Остается $\sin^2\beta\, y'^2 = 2px'$ или
$y'^2 = \frac{2p}{\sin^2\beta} x'$. Если для краткости положимъ, что
$\frac{p}{\sin^2\beta} = p'$, то получимъ: $y'^2 = 2p'x'$. Такимъ обра=
зомъ ур-ніе параболы, описанной къ діаметру
и къ касательной въ концу его, имѣетъ совер=
шенно такой же видъ, какъ ур-іе параболы, от=
несенной къ вершинѣ и оси. Величина $2p'$ назы=
вается параметромъ параболы по отношен=
ію къ діаметру Ax'. Покажемъ какое значеніе
имѣетъ этотъ новый параметръ. Мы имѣли
$p' = \frac{p}{\sin^2\beta}$, но $\sin^2\beta = \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\frac{p^2}{b^2}}{1+\frac{p^2}{b^2}} = \frac{\frac{p^2}{b^2}}{1+\frac{p^2}{b^2}} = \frac{p^2}{b^2+p^2} =$
$= \frac{p^2}{2pa+p^2} = \frac{p}{2a+p}$ и $p' = p : \frac{p}{2a+p} = 2a+p$.
Возьмемъ фокусъ параболы F, соединимъ его съ A.
Припомнимъ, что радіусъ векторъ FA выража=
ется посредствомъ эксцисы такъ: $Fa = \frac{p}{2} + a$ или
$2FA = p + 2a$, следов. народимъ, что новый пара=
метръ равенъ $4Fa$, т.е. онъ равенъ учетверен=
ному разстоянію точки A отъ фокуса.

Конецъ.

Изд. В. Затищенскій

Гуськовъ

М.Т.У.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ

лекціи

проф. Н. А. Шапошникова.

1895 годъ

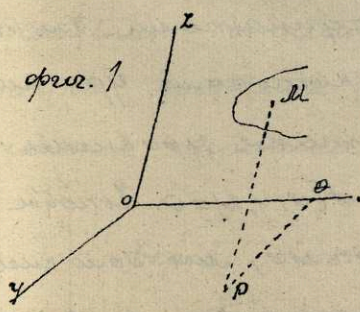
Москва.

Изданіе лекцій разрѣшаю:

Введеніе.

Положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется относительно трехъ плоскостей координатъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ. Для этого мы поступимъ слѣдующимъ образомъ: Проводимъ черезъ данную точку параллель оси x и черезъ точку встрѣчи этой линіи съ плоскостью xy проводимъ параллель оси y. Отрѣзки OQ, QP, PM, взятые по величинѣ и по направленію будутъ представлять координаты точки M (фиг. 1).

фиг. 1



Плоскости координатъ могутъ, вообще говоря, пересѣкаться подъ произвольными углами, но эти углы берутъ обыкновенно прямыми, благодаря чему всѣ формулы принимаютъ болѣе простой видъ.

Уравненія поверхностей и линій въ пространствѣ.

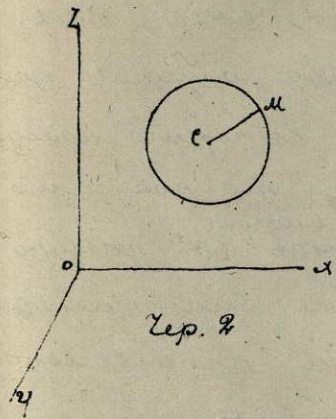
Теорема: Всякая поверхность въ пространствѣ можетъ быть представлена посредствомъ

уравнения, связывающего три координаты произвольной точки этой поверхности.

Из нашего основного построения, определяющего положение точки в пространстве, мы видим, что свойство координат точки, лежащей на данной поверхности, характеризуется тем, что при произвольно выбранных двух координатах, третья будет иметь одно или несколько определенных значений. В самом деле, положим что к трем осям координат (чер. 1) отнесена какая-нибудь поверхность. Выберем для x и y произвольные значения OQ и QP. Тогда для линии PM т.е. для z мы получим одно или несколько определенных значений. Такая зависимость между координатами должна математически выразиться некоторым ур-ем с тремя переменными. Всякое такое уравнение выразим символически в виде $F(x, y, z) = 0$. Чтобы получить ур-ие на самом деле, мы должны пользоваться геометрическим определением нашей поверхности и помощью этого определения выразить связь между координатами текущей точки поверхности. Например положим, что в прямоугольных осях координат дана сферическая поверхность и требуется составить ее уравнение.

Да данныя величины примемъ координаты центра α, β, γ и величину радіуса R. Возьмемъ на поверхности произвольную, текущую точку M съ координатами x, y, z (чер. 2) Применяя формулу разстоянія между 2 точками M и C пишемъ уравненіе

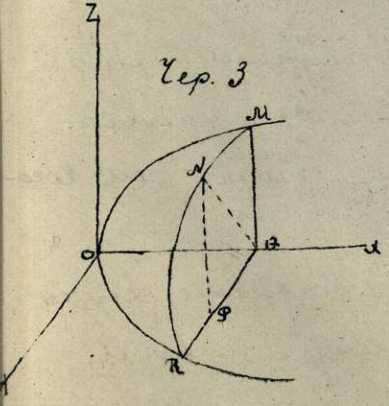
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2.$$



Чер. 2

Это ур–іе представляетъ зависимость между координатами всякой точки, взятой на сферѣ, слѣдовательно и есть уравненіе сферы.

Разсмотримъ еще примѣръ поверхности параболоида вращенія отнесеннаго къ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Возьмемъ въ плоскости xz параболу такъ, чтобы вершина ея была въ точкѣ O, а осью симметріи ось x. (чер. 3). Уравненіе параболы будетъ тогда $z^2=2px$. Сама эта парабола будетъ вращаясь около линіи Ox, то она опишетъ параболоидъ вращенія, ур–іе котораго мы фолъ.ски составимъ. Возьмемъ произвольную абсциссу $OQ=x$ и черезъ точку Q проведемъ



Чер. 3

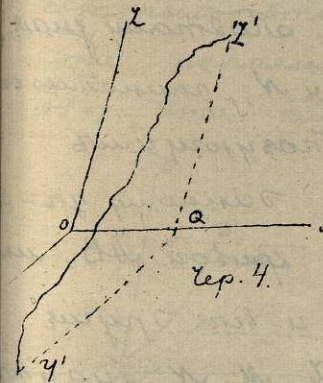
плоскость, перпендикулярную къ оси X, она разсѣчетъ нашу поверхность по окружности, центръ которой есть Q, а радіусъ MQ. Возьмемъ на этой окружности произвольную точку N, которая очевидно принадлежитъ поверхности параболоида вращенія. Построимъ ея координаты $OQ = x$; $QP = y$; $PN = z$, если теперь соединимъ Q съ N, то получимъ прямоугольный треугольникъ NPQ, изъ котораго находимъ $y^2 + z^2 = QN^2$. Но такъ какъ $QN = QM = z_1$, то получимъ уравненіе $y^2 + z^2 = 2px$, если подставить вмѣсто QN^2 равную ему величину $z_1^2 = 2px$. Это уравненіе выражаетъ зависимость между координатами произвольной точки нашей поверхности. Слѣдовательно оно и есть ур—іе параболоида вращенія.

Обратная теорема: *Всякое ур—іе съ тремя перемѣнными представляетъ нѣкоторую поверхность.*

Начнемъ доказательство теоремы (2) этой (1) съ разсмотрѣнія частныхъ видовъ нашего ур—ія и будемъ для общности брать оси косоугольныя.

1) Положимъ, что данное уравненіе содержитъ только одну координату напр. X. Уравненіе будетъ типа $F(x) = 0$. Это ур—іе

имѣетъ вообще нѣсколько рѣшеній $x=a, a_1, a_2$ и т.д., но изъ нихъ только дѣйствительныя могутъ имѣть геометрическое значеніе. Разсмотримъ рѣшеніе $x=a$, гдѣ a дѣйствительно. На оси x отложимъ $OQ=a$ и черезъ Q проведемъ плоскость $y'Qz'$, параллельную yz (чер. 4).



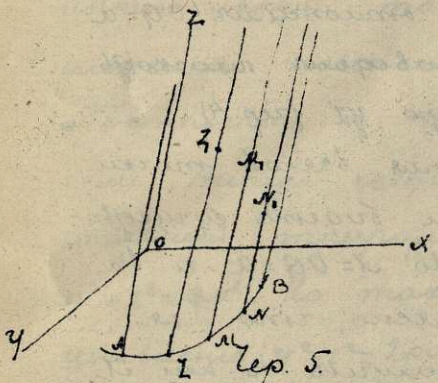
Чер. 4.

Очевидно, что для всякой точки этой плоскости будетъ существовать равенство $x=OQ=a$ и въ то же время ясно, что для точекъ, не лежащихъ въ ней x не равно a. Отсюда заключаемъ, что ур-іе $F(x)=0$ представляетъ одну или нѣсколько плоскостей параллельныхъ yz. Очевидно, что тутъ двѣ координаты, которыя не входятъ въ уравненіе остаются неопредѣленными. Подобнымъ образомъ мы можемъ вывести, что ур-іе $F(y)=0$ представляетъ плоскости параллельныя xz, а ур-іе $F(z)=0$ — плоскости параллельныя xy.

2) Положимъ, что мы имѣемъ ур-іе $F(x,y)=0$ Если мы будемъ разсматривать это ур-іе на плоскости xy, то найдемъ, что всѣ точки ему удовлетворяющія расположатся на нѣкоторой кривой, положимъ AB (чер. 5).

Построимъ цилиндръ, котораго направляющей будетъ эта кривая AB, а образующія параллельны оси z. Этого (координатной)

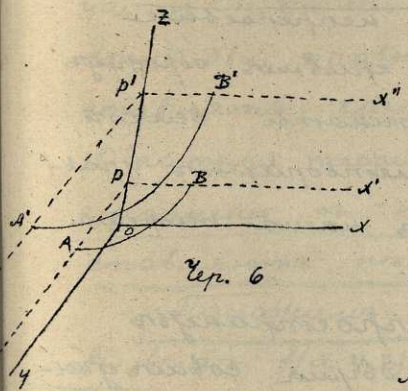
всех точек поверхности такого цилиндра будут удовлетворять ур-ию $F(x, y)=0$. Для доказательства заметим, что все точки одной образующей имеют одни и те же x и y. Поэтому зная, что точки Z, M и N, принадлежащие некоторым образующим удовлетворяют данному ур-ию, либо лежат на кривой AB, мы заключаем, что и все другие точки этих образующих напр. Z, M, N, будут удовлетворять тому же ур—ию. Отсюда видим, что данное уравнение представляет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Z, а направляющей служит кривая, которая выражается тем же уравнением и лежащая на плоскости XY. Величина Z, не входящая в уравнение, для нашей поверхности является неопределенной. Подобным образом получается геометрическое представление уравнений $F(x, z)=0$ и $F(y, z)=0$.



Чер. 5.

3) Рассмотрим общий случай, когда данное уравнение имеет вид $F(x, y, z)=0$. Для того чтобы решить (нарисовать) какое геометрическое

представленіе соотвѣтствуетъ данному уравненію, будемъ искать точки, ему удовлетворяющія. Назначимъ для z какую нибудь опредѣленную величину, положимъ $z=\gamma$. Какъ извѣстно точки пространства, для которыхъ это условіе выполнено, лежатъ въ плоскости параллельной xy и отсѣкающей на оси z отрѣзокъ $OB=\gamma$. Эта плоскость будетъ $\gamma' P x'$ (Чер. 6) Въ другой сторонѣ искомыя точки должны имѣть координаты x и y удовлетворяющія уравненію $F(x,y,\gamma)=0$, полученному изъ даннаго подстановкою $z=\gamma$. Это уравненіе содержитъ двѣ координаты x и y, а потому представляетъ цилиндрическую поверхность, образующія которой параллельны оси z, а направляющей служитъ



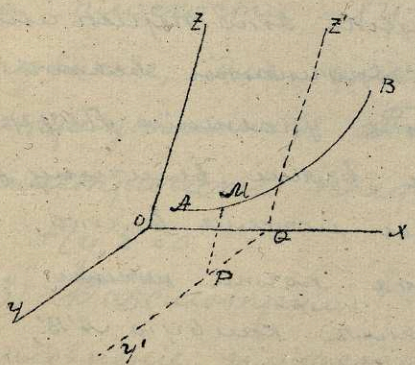
Чер. 6

кривая, выражающаяся уравненіемъ $F(x,y,\gamma)=0$ и лежащая въ плоскости xy. Слѣдовательно искомыя точки должны лежать на пересѣченіи этого цилиндра съ плоскостью опредѣляемой условіемъ $z=\gamma$. Пусть это пересѣченіе будетъ кривая AB, тогда координаты всякой точки ея будутъ удовлетворять уравненію $F(x,y,\gamma)=0$ При этомъ построеніи мы взяли величину γ совершенно произвольной. Мы можемъ взять другую величину $z=\gamma'$ и произведя почти такое же построеніе, получимъ кривую $A'B'$, всякая точка которой будетъ имѣть координаты, удовлетворяющія данному уравненію $F(x,y,\gamma)=0$

Очевидно, что такимъ кривымъ AB, $A'B'$ и т. д. мы можемъ получить безчисленное множество. Если мы будемъ придавать λ значенія все болѣе близкія другъ къ другу, то кривыя будутъ также приближаться одна къ другой и все болѣе будутъ сходны по величинѣ и формѣ. Когда здѣсь мы въ предѣлѣ перейдемъ къ непрерывному измѣненію типа $\frac{3}{2}$ кривой λ, то получимъ непрерывное измѣненіе $\frac{1}{2}$. Совокупность этихъ кривыхъ образуетъ нѣкоторую поверхность и координаты всякой точки этой поверхности удовлетворяютъ уравненію $F(x, y, z)=0$. Такимъ образомъ наша теорема доказана и въ общемъ случаѣ.

Теорема: Всякая кривая въ пространствѣ представляется аналитически двумя совмѣстными уравненіями съ тремя перемѣнными.

Положимъ нашею кривую AB, лежащую въ пространствѣ (чер. 7). Возьмемъ на оси X косоугольной системы координатъ произвольный отрѣзокъ $OQ=x$ и черезъ точку Q проведемъ плоскость $Y'QZ'$ параллельную плоскости YZ. Эта плоскость пересѣчетъ нашу кривую въ точкѣ M, причемъ опредѣляется координаты $y=QP$ и $z=MP$. Изъ



Этого построения следует, что между 3-мя координатами x, y и z произвольной точки кривой существует такая зависимость, по которой всякому значению для одной изъ нихъ, напр. x соотвѣтствуютъ совершенно опредѣленныя значенія для y и z. Слѣдовательно y и z должны опредѣляться какъ нѣкоторыя функціи x т.е. мы должны имѣть: $y=\varphi(x)$ и $z=\psi(x)$ Эти два уравненія вмѣстѣ и будутъ представлять кривую въ пространствѣ.

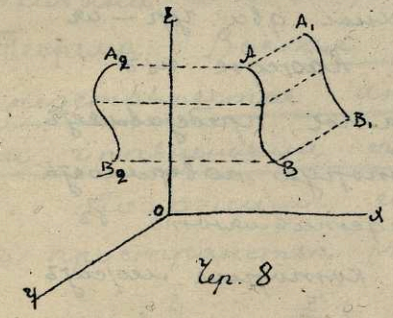
Обратная теорема: Всякія два совмѣстныя уравненія съ тремя перемѣнными представляютъ нѣкоторую кривую въ пространствѣ.

Положимъ, что намъ даны два ур—ія въ видѣ $f(x, y, z)=0$ и $\varphi(x, y, z)=0$. Каждое изъ этихъ ур—ій отдѣльно взятое, представляетъ, какъ было доказано, нѣкоторую поверхность. Оба уравненія вмѣстѣ представляютъ въ пространствѣ такія точки, которыя лежатъ въ одно и тоже время на обѣихъ поверхностяхъ, т.е. точки пересѣченія поверхностей. Такъ какъ двѣ поверхности пересѣкаются по кривой линіи, то эти 2 уравненія вмѣстѣ представляютъ нѣкоторую кривую.

Большею частью оказывается удобнымъ представлять кривую въ пространствѣ какъ пересѣченіе двухъ цилиндрическихъ поверх-

ностей. Въ возможности подобнаго представленія можно убѣдиться слѣдующимъ соображеніемъ. Проведя черезъ всѣ точки данной кривой линіи параллельныя осямъ X и Y (Чер. 8), мы получимъ двѣ цилиндрическія поверхности, пересѣченіе которыхъ и есть наша кривая. Очевидно, что такія цилиндрическія поверхности можно построить для всякой кривой.

Кривыя линіи, получаемыя въ сѣченіи цилиндрическихъ поверхностей съ плоскостями YZ и XZ, называются проекціями кривой на эти плоскости. На нашемъ чертежѣ кривыя A_1B_1 и A_2B_2 будутъ проекціями кривой AB.



Чер. 8

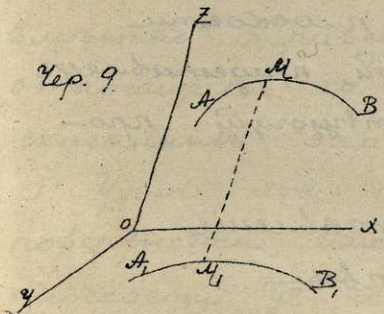
Аналитически кривая AB представится при этомъ двумя уравненіями, изъ коихъ одно будетъ представлять цилиндръ AA_2B_2B и согласно доказанному имѣть видъ $\varphi(x,z)=0$, а другое уравненіе будетъ представлять цилиндръ AA_1B_1B и имѣть видъ $\psi(x,z)=0$. Оба эти уравненія, взятыя вмѣстѣ, представляютъ кривую AB въ пространствѣ, какъ линію пересѣченія этихъ цилиндрическихъ поверхностей. Такъ какъ ур-іе цилиндрической поверхности,

образующія которой параллельны оси Y, одинаково съ ур-іемъ направляющей A, B, на плоскости XZ, то мы [написали] можемъ сказать, что уравненіе $\psi(X,Z)=0$ есть уравненіе проекціи AB на плоскости XZ. Точно такъ же $\varphi(Y,Z)=0$ есть уравненіе другой проекціи нашей линіи.

Теорема: Для полученія уравненія проекціи кривой на какой нибудь плоскости координатъ нужно исключить изъ ея уравненій ту координату, которая перпендикулярна этой плоскости.

Положимъ дана кривая AB, представленная ур-іями $f(X,Y,Z)=0$ и $\varphi(X,Y,Z)=0$ (Чер. 9). Возьмемъ произвольную точку M на кривой AB. Координаты ея будутъ удовлетворять ур-іямъ $f(X,Y,Z)=0$ и $\varphi(X,Y,Z)=0$, а также и всѣмъ слѣдствіямъ, вытекающимъ изъ этихъ уравненій. Однимъ изъ такихъ слѣдствій является ур-іе $\Pi(X,Y)=0$, полученное какъ результатъ исключенія Z. Съ другой стороны мы, зная, что координаты всѣхъ точекъ линіи MM_1, параллельной оси Z, имѣютъ одни и тѣже x и y, заключаемъ, что координаты точки M_1 удовлетворяютъ ур-ію $\Pi(X,Y)=0$

Чер. 9



Отсюда следует, что проекции всех точек кривой удовлетворяют ур-ию $F(x, y) = 0$, т.е. это ур-ие есть ур-ие проекции кривой AB на плоскости xy.

Подобно этому мы доказем, что если из двух данных ур-й кривой исключим y, то получим ур-ие вида $\psi(x, z) = 0$, которое будет представлять проекцию кривой AB на плоскости xz. Наконец, если исключим x из данных уравнений, то получим ур-ие $\omega(y, z)$, которое представит проекцию кривой AB на плоскости yz. При этом надо заметить, что ур-ие, которое представляет на плоскости координат проекцию кривой, представляет в пространстве соответствующий проектирующий цилиндр.

Аналитическое представление точки в пространстве.

Теорема: *Совокупность трех уравнений с тремя неизвестными представляет одну или несколько точек.*

Положим даны уравнения $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ и $\psi(x, y, z) = 0$. Решив их, мы получим одно или несколько определенных решений для каждого неизвестного, если только между данными уравнениями

ными пересечениями. Этим решениям соответствуют некоторые точки.

Того же результата мы достигали, основывая наше рассуждение на геометрическом представлении уравнений. Геометрическим представителем нашей системы ур-ий являлся общие точки трех поверхностей. Две поверхности, положим $f(x, y, z)=0$ и $\varphi(x, y, z)=0$ пересекаются по некоторой кривой, а эта последняя пересечется с третьей поверхностью $\psi(x, y, z)=0$ в нескольких точках, которые будут соответствовать различным решениям всех наших ур-ий взятых совместно. Приведем несколько примеров, относящихся ко всем главным из вышесказанных замечаний:

1) Ур-ие $x=a$ представляет частный случай поверхности, именно плоскость параллельную плоскости yz и отстоящую от нее на расстоянии равной a.

Ур-ие $y=\beta$ представляет плоск. парал. плоск. xz

" $z=c$ " " " " xy.

2) Ур-ие $x=0$ представляет самую плоскость yz

" $y=0$ " " " xz

" $z=0$ " " " xy.

3) Сделаем замечание об ур-иях плоскостей параллельных осям координат. Положим

плоскость параллельна оси $x^{ов}$ она пересекает плоскости координат по некоторым прямым. Линия пересечения нашей плоскости съ плоскостью yz въ общемъ видѣ представится ур-іемъ $By + Cz + D = 0$, что есть общее уравненіе въ плоскости линіи. Это же самое ур-іе въ пространствѣ будетъ представлять цилиндрическую поверхность, образующія которой параллельны оси $x^{ов}$, а направляющею служитъ прямая, выраженная этимъ самымъ уравненіемъ и лежащая въ плоскости yz. Очевидно, что эта цилиндрическая поверхность и будетъ разсматриваемая нами плоскость. Точно также плоскость параллельная оси $y^{ов}$ пересѣчетъ плоскость xz по прямой ур-іе которой будетъ $Ax + Cz + D = 0$. Это ур-іе въ то же время выразитъ въ пространствѣ нашу плоскость. Наконецъ плоскость параллельная оси $z^{ов}$ представится ур-іемъ вида: $Ax + By + D = 0$.

Если намъ дано ур-іе $x^2 + y^2 = a^2$ при прямоугольныхъ осяхъ координатъ, то такое ур-іе на плоскости xy представляетъ окружность, а въ пространствѣ цилиндръ, у котораго направляющею служитъ также окружность, а образующія параллельны

оси $Z^{\text{об}}$.

Уравнение $y^2+2az+b=0$ на плоскости yz представляет некоторую параболу, а в пространстве представляет параболический цилиндр, который эту параболу имеет своею направляющею, и образующия которого параллельны оси $x^{\text{об}}$. 3.

Заметим ур-ия прямых параллельных осям координат. Положим прямая параллельна оси $x^{\text{об}}$. Через такую прямую можно провести две плоскости: одну параллельную xz, а другую параллельную xy. Уравнения таких плоскостей будут $y=b$; $z=c$. Совокупность этих $2^{\text{ух}}$ ур-ий определяет прямую параллельную оси $x^{\text{об}}$ как линию их пересечения.

Если прямая параллельна оси $y^{\text{об}}$, то проведя через нее две плоскости параллельныя плоскостям yz и yx, имеем ур-ия этих двух плоскостей $x=a$; $z=c$, которыя вместе взятыя и представят прямую параллельную оси $y^{\text{об}}$.

Подобно этому ур-ия $x=a$; $y=b$ представляют две плоскости, первое – парал

нельную yz и второе параллельную xz, а вместе прямую параллельную оси z ^{обз}.

Въ частныхъ случаяхъ.

Урав. $y=0$ и $z=0$ будутъ представлять ось x ^{обз}

„ $x=0$ и $z=0$ „ „ „ y ^{обз}

„ $y=0$ и $x=0$ „ „ „ z ^{обз}

Разсмотримъ еще для примѣра что представляетъ система уравненій $x^2+y^2=a^2$ и $z=mx$. Положимъ координаты прямоугольны. Первое ур–ie представляетъ круглый цилиндръ, ось котораго совпадаетъ съ осью x ^{обз}. Второе представляетъ плоскость, проходящую черезъ ось y ^{обз}. Вмѣстѣ эти два ур–йя представятъ элипсъ – кривую сѣченія указанныхъ двухъ поверхностей.

Замѣчаніе: Общія положенія, которыя были нами выше доказаны могутъ имѣть исключенія: 1) Могутъ быть такія ур–йя съ тремя перемѣнными, которыя не удовлетворяются никакими дѣйствительными значеніями x, y и z, а только мнимыми. Такія ур–йя представляютъ мнимыя мѣста, напр. $x^2+y^2+z^2=-a^2$. Если x, y и z дѣйствительны, то первая часть ур–йя не можетъ быть отрицательна и потому это ур–ie не имѣетъ геометрическаго значенія. 2) Можетъ случиться, что

одно ур-ie съ тремя перемѣнными будетъ представлять не поверхность, а одну или нѣсколько точекъ. Напр. ур-ie $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$ по виду есть одно ур-ie съ тремя неизвѣстными. Общее правило говоритъ, что оно должно выражать поверхность; на самомъ дѣлѣ оно представляетъ точку съ координатами $x=a$; $y=b$; $z=c$ т. к. это уравненіе распадается на три $(x-a)^2=0$; $(y-b)^2=0$ $(z-c)^2=0$, которыя имѣютъ вполнѣ опредѣленную систему рѣшеній. $x=a$; $y=b$; $z=c$.

Можетъ случиться, что ур-ie представляетъ не поверхность, а линію. Напримѣръ ур-ie $(x^2+y^2-a^2)^2+(z-mx)^2=0$ можетъ обратиться въ тождество только при условіи, что одновременно $x^2+y^2-a^2=0$ и $z-mx=0$. Первое ур-ie представляетъ цилиндръ, образующія котораго параллельны оси z, а второе — плоскость. Оба они вмѣстѣ представляютъ кривую линію ихъ пересѣченія.

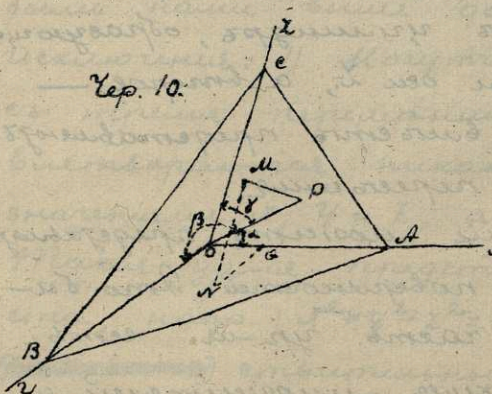
Наконецъ уравненіе можетъ представлять не одну, а нѣсколько поверхностей. Это бываетъ, когда первая часть ур-ія есть произведеніе нѣсколькихъ многочленовъ, а вторая равна нулю. Напримѣръ $(ax+by+c)(z^2-2kx)=0$. Уравненіе распадается на два $ax+by+c=0$ и $z^2-2kx=0$. При томъ

они не должны рассматриваться совместно, так как достаточно, чтобы значения X, Y и Z удовлетворяли одному из этих ур-ий и тогда они удовлетворят и первоначальному. Поэтому имеем два геометрических места: Первое ур-ие дает плоскость параллельную оси $Z^{ов}$, второе дает параболический цилиндр, образующия которого параллельны оси $Y^{ов}$. Координаты всех точек как того, так и другого геометрического места, удовлетворяют первоначальному уравнению.

Нормальное ур-ие плоскости.

1) Возьмем произвольную плоскость, отнесенную к системе косоугольных координат осей (Чер. 10). Положим, что эта плоскость отсекает от осей координат положительные отрезки ОА, ОВ и ОС. Опустим из начала О на нашу плоскость перпендикуляр ОР. Выберем за данныя величины или за параметры уравнения плоскости величины перпендикуляра ОР=р и углы, которые ось [больш]

Чер. 10.



образуетъ съ осями координатъ. Этихъ данныхъ вполнѣ достаточно для опредѣленія положенія плоскости, ибо черезъ точку на линіи прямой можно провести только одну перпендикулярную къ этой прямой плоскость.

Чтобы составить уравненіе плоскости въ пространствѣ, т.е. найти зависимость между координатами всѣхъ точекъ ея и нашими параметрами, соединимъ произвольную точку плоскости M съ точкою P, построимъ координаты точки M и будемъ разсматривать OP какъ замыкающую сторону контура OOMMP. Примемъ за ось проекцій замыкающую сторону, почему ея проекція будетъ равна самой величинѣ OP. Тогда въ силу теоремы, что алгебраическая сумма проекцій сторонъ какого нибудь контура равна проекціи замыкающей стороны, получимъ равенство

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ α, β и γ суть углы составляемые линіей OP съ осями координатъ.

Это уравненіе и есть ур-іе плоскости; оно называется въ этомъ видѣ нормальнымъ ур-іемъ плоскости. Особенность его та,

что коэффициенты при x, y, и z суть косинусы угловъ, образуемыхъ перпендикуляромъ къ плоскости съ осями координатъ, а извѣстный членъ равенъ длинѣ этого перпендикуляра, взятой при перенесеніи въ первую часть съ отрицательнымъ знакомъ.

Если плоскость проходитъ черезъ начало координатъ, то точка P совпадетъ съ точкою O и p въ ур-іи (1) обратится въ нуль, такъ что ур-іе напишется въ слѣдующемъ видѣ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

Это уравненіе представляетъ плоскость, проходящую черезъ начало координатъ, [illegible] и опредѣляемую углами наклоненія къ плоскостямъ координатъ.

Итакъ мы видѣли, что плоскость выражается однимъ ур-іемъ первой степени съ тремя неизвѣстными.

Полезно замѣтить, какимъ геометрическимъ опредѣленіемъ плоскости мы пользовались при составленіи нашего ур-ія. Такъ какъ при соединеніи произвольной точки M плоскости (Чер. 10) съ точкою P получаемъ прямой уголъ OPM т.е. линія OP перпендикулярна ко всякой линіи проведенной

въ нашей плоскости черезъ точку P, то очевидно, что мы представляемъ себѣ плоскость какъ геометрическое мѣсто прямыхъ перпендикулярныхъ къ линіи OP и проходящихъ черезъ одну и ту же точку P. Поэтому наше ур-іе $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ представляетъ совокупность прямыхъ перпендикулярныхъ OP и проходящихъ черезъ точку P, иначе совокупность такихъ прямыхъ и есть наша плоскость.

Покажемъ, что общее ур-іе первой степени съ тремя неизвѣстными

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

можетъ быть преобразовано въ ур-іе вида $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$.

Тогда будетъ доказана Теорема: Всякое уравненіе вида $Ax + By + Cz + D = 0$ представляетъ плоскость.

Для приведенія ур-ія $Ax + By + Cz + D = 0$ къ виду $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ умножимъ обѣ части даннаго уравненія на неопредѣленный пока множитель λ. Получимъ

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0$$

Выберемъ λ такъ, чтобы $D\lambda = -p$, тогда

$$\lambda\cdot\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz.$$

По принципу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ имѣемъ:

$$\cos\alpha = \lambda A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\cos\beta = \lambda B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\cos\gamma = \lambda C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Присоединимъ къ этой системѣ допущенное нами равенство:

$$D\lambda = -p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

и еще извѣстное изъ предыдущаго курса соотношеніе:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

опредѣлимъ λ. Для этого возведемъ ур-ія 1, 2 и 3 въ квадратъ и подставимъ въ ур-іе 5-ое. Получимъ:

$\lambda^2A^2 + \lambda^2B^2 + \lambda^2C^2 = 1$, откуда $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Такъ какъ p всегда больше нуля, то на основаніи равенства $-p = D\lambda$ ..... (4) заключаемъ, что знакъ корня обратенъ знаку D.

Послѣ этого ур-іе $Ax + By + Cz + D = 0$ предстанется въ видѣ

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

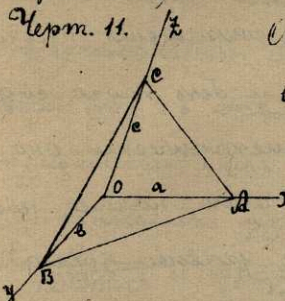
или $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, что и требовалось доказать.

2) Уравненіе плоскости по отрѣзкамъ

на осях.

2) Положим, что плоскость дана тремя отрезками, которые она отсекает на осях координат (фиг. 11). Оси берем для общности косоугольными. Пусть $OA = a$, $OB = b$ и $OC = c$. Возьмем уравнение плоскости в виде $Ax + By + Cz + D = 0$ .... (1).

Черт. 11.



В это уравнение произвольному входят 4 параметра, между тем как плоскость вполне определяется тремя данными величинами a, b и c. Всматриваясь в уравнение, мы убеждаемся, что разделив его на D получим

$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0$ ..... (2), т. е. получим уравнение с тремя только параметрами. Выразим теперь коэффициенты A, B и C через отрезки a, b и c. Введем в уравнение (1) координаты точки A, которая будут $x = a$, $y = 0$ и $z = 0$. Подставим, получим $Aa + D = 0$. Точно таким же образом для точки B получим $Bb + D = 0$ и для точки C имеем $Cc + D = 0$. Из этих трех уравнений определяем искомые коэффициенты A, B и C; получим $A = -\frac{D}{a}$, $B = -\frac{D}{b}$ и $C = -\frac{D}{c}$. Если мы подставим эти выражения в уравнение (1), то оно примет вид

$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$. Положим, что D отлич-

но отъ нуля, мы можемъ произвести сокращеніе на D и тогда получаемъ искомое уравненіе

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Если бы D равнялось нулю, то данное уравненіе имѣло бы видъ $Ax + By + Cz = 0$ и никакого сокращенія производить не понадобилось бы, такъ какъ оно и безъ того содержало бы только три параметра. Геометрически оно представляетъ плоскость, проходящую черезъ начало координатъ, такъ какъ отрѣзки a, b и c равны нулю. Напр., имѣемъ по предыдущему $b = -\frac{D}{B}$ и очевидно, при $D = 0$ должно быть и b тоже равно 0.

3) Уравненіе плоскости, проходящей черезъ данную точку.

Теперь составимъ типичный видъ уравненія плоскости, проходящей черезъ данную точку M, координаты которой x_1, y_1 и z_1. Изъ геометрическихъ соображеній мы сейчасъ видимъ, что получается цѣлый пучекъ плоскостей, удовлетворяющихъ нашему требованію. Опредѣлимъ то аналитическое условіе, которому должны подчиняться всѣ эти плоскости. Если уравненіе плоскости мы представимъ въ общемъ видѣ $Ax + By + Cz + D = 0$, то при подстановкѣ въ него координатъ точки M оно должно обратиться въ тождество и потому имѣемъ $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \ldots (2)$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2); получим:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \quad \ldots (3)$$

Это и есть искомое уравнение. Представим его в другом виде. Обозначим через α, β и γ углы, которые образует с осями координат перпендикуляр, опущенный из начала на плоскость, и имеем по известным уже формулам $\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ и $\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Написав эти формулы в виде $A = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $B = \frac{\cos\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $C = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ и подставив в уравнение (3) получим:

$$\frac{(x-x_1)\cos\alpha}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{(y-y_1)\cos\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{(z-z_1)\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

В этом уравнении мы можем отбросить $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ и тогда получим новый вид того же уравнения: $(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z-z_1)\cos\gamma=0$.

Плоскость, проходящая через 3 точки.

Если нам даны три пучка плоскостей, определяемых проходящими через одну из трех данных точек, то только одна плоскость будет общей всем трем пучкам. Следовательно, для полного определения положения плоскости нужно дать три точки.

Представим искомое уравнение в виде:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0 \quad \ldots (1)$$

Так как они удовлетворяют координатам наших точек, то мы напишем тождества

$$1)\ \frac{A}{D}x_1 + \frac{B}{D}y_1 + \frac{C}{D}z_1 + 1 = 0$$

$$2)\ \frac{A}{D}x_2 + \frac{B}{D}y_2 + \frac{C}{D}z_2 + 1 = 0$$

$$3)\ \frac{A}{D}x_3 + \frac{B}{D}y_3 + \frac{C}{D}z_3 + 1 = 0$$

Принявъ за неизвѣстныя $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ и $\frac{C}{D}$, мы получимъ систему трехъ уравненій, которую всегда можно рѣшить, хотя рѣшенія и будутъ очень сложны. Искомое уравненіе плоскости получится если мы въ общее уравненіе (1) подставимъ найденныя величины для $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ и $\frac{C}{D}$. Рѣшеній будетъ безконечное множество, когда три данныя точки лежатъ на одной прямой, потому что тогда координаты трехъ уравненій явятся простымъ слѣдствіемъ двухъ остальныхъ. Помощью теоріи детерминантовъ, можно выразить символически видъ уравненія плоскости, опредѣляемой тремя точками. Для этого написавъ по условію вопроса равенства

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

замѣтимъ, что результатъ исключенія изъ нихъ коэффиціентовъ A, B, C и D представится равенствомъ:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_3 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Из-за этого здесь детерминант 4-го порядка можно разложить по элементам первой горизонтальной строки и тогда получим уравнение требуемой плоскости с совершенно определенными коэффициентами. Заметим однако, что в данном случае вопрос-ние метода решения вопроса, а самый результат, т.е. вид уравнения, не существен.

Пересечение плоскостей.

Т.к. как две плоскости пересекаются по прямой, то ур-ия двух плоскостей, рассматриваемые совместно, представляют в пространстве прямую. Три плоскости имеют одну общую точку, которая определяется уравнениями этих плоскостей, если их рассматривать совместно. Это вполне согласуется с тем, что три уравнения с тремя неизвестными дают одно решение. Но может случиться, что такая система уравнений имеет бесконечное решение; это соответствует параллельности одной из плоскостей линии сечения двух других или все параллельности всех трех плоскостей. Неопределенному решению соответствует случай, когда три

плоскости пересекаются по одной линии; еще большая неопределенность будет, если плоскости сольются.

Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую.

Составим соотношение относительно особого типа уравнений, выражающих плоскости, определяемые тем условием, что они проходят через линию пересечения двух данных плоскостей. Ур-ія данных плоскостей пусть будут $Ax+By+Cz+D=0$ (1) и $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (2).

Помножим второе ур-ie на неопределенный множитель λ и сложив его с первым, получим:

$$(Ax+By+Cz+D)+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0 \ldots (3)$$

Посмотрим, что представляет это уравнение. Очевидно оно представляет плоскость, ибо оно первой степени. Эта плоскость проходит через линию пересечения двух данных плоскостей. Действительно координаты всех точек линии пересечения, удовлетворяющия первоначальным двум ур-иям, удовлетворяют также рассматриваемому, т.к. при подстановке выражений (1) и (2) в уравнение (3) мы получаем тождество: $0+\lambda 0=0$. Итак наше уравнение есть ур-ie плоскости, проходящей через линию сечения двух других плоскостей.

Решение считается вполне определенным если мы свяжем искомую плоскость еще какими нибудь условиями. Положим, что плоскость должна проходить через точку $M(x_1, y_1, z_1)$. Подставляем эти координаты в уравнение (3). Мы должны получить тождество: $(Ax_1+By_1+Cz_1+D)+\lambda(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)=0$.

Отсюда $\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1}$. Уравнение искомой плоскости будет: $Ax+By+Cz+D-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1}(A_1x+B_1y+C_1z+D)=0$.

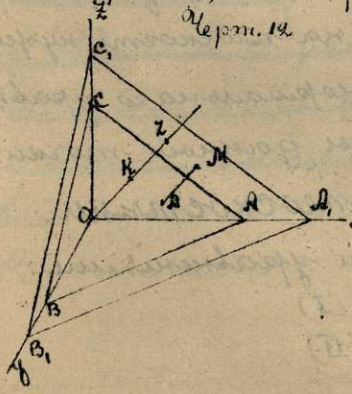
Определение длины перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость.

Эта задача легко решается при помощи нормального уравнения плоскости. Положим, что данная плоскость определяется такими параметрами: длиной перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость и углами, которые образует этот перпендикуляр с осями. Уравнение ея будет

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

Положим, что проведена плоскость через точку M (чер. 12) параллельно данной. Углы, составляемые новой плоскостью с координатными плоскостями остаются, конечно, и потому ея параметры изменяются только длиной перпендикуляра P. Для нея плос-

Черт. 12.



кости она равнялась OK, для новой равняется OL; представимъ эту величину какъ $p+\delta$, гдѣ δ очевидно есть искомая величина KL. Слѣдовательно уравненіе плоскости $A'B'C'$ будетъ: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-(p+\delta)=0$.

Это уравненіе должно удовлетворяться координатами точки L, такъ какъ эта точка лежитъ въ плоскости $A'B'C'$. Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-(p+\delta)=0.$$

Отсюда опредѣляемъ δ; имѣемъ $\delta=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p$, но такъ какъ $\delta=KL=AM$, какъ отрѣзки параллельныхъ линій между параллельными плоскостями, то найденное выраженіе и представляетъ рѣшеніе нашего вопроса. Если уравненіе плоскости дано въ общемъ видѣ, то рѣшеніе вопроса усложняется тѣмъ, что это уравненіе нужно сначала привести къ нормальному виду, что, какъ извѣстно, производится умноженіемъ его на $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Тогда $\delta=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Отсюда выводимъ слѣдующее правило: чтобы найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на плоскость, нужно подставить въ первую часть нормальнаго уравненія этой плоскости координаты данной точки.

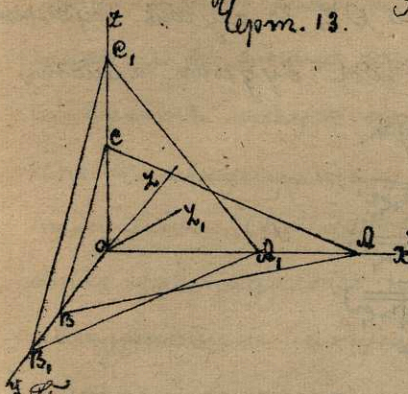
Уголъ между двумя плоскостями.

Положимъ даны двѣ плоскости уравненіями:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots \quad (I)$$

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \ldots \quad (II)$$

Опустимъ изъ начала на обѣ плоскости перпендикуляры и определимъ уголъ составленный съ осями координатъ (черт. 13)



Черт. 13.

Преобразуемъ ур-я (I) и (II) въ нормальную форму. Получимъ

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \dots (1)$$

$$x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0 \dots (2)$$

гдѣ $\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\alpha_1=\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$;

$\cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\beta_1=\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$;

$\cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\gamma_1=\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$;

Припомнимъ формулу $\cos V=\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1+\cos\beta\cdot\cos\beta_1+\cos\gamma\cdot\cos\gamma_1$, служащую для определенія угла между линіями въ пространствѣ. Применяя ее къ нашему случаю, получаемъ

$$\cos(\angle Z_1)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1+\cos\beta\cdot\cos\beta_1+\cos\gamma\cdot\cos\gamma_1$$

или подставивъ вмѣсто косинусовъ ихъ выраженія и произведя сложеніе $\cos(\angle Z_1)=\cos\omega=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \dots (3)$

Уголъ между линіями перпендикулярными къ плоскостямъ равняется углу между самыми плоскостями и потому найденная формула выражаетъ въ то же время и $\cos$ угла между плоскостями.

Изъ этой общей формулы мы можемъ вывести условіе параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Если плоскости параллельны, то уголъ $\omega=0$ и $\cos\omega=1$.

Слѣдовательно $\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=1 \dots (4)$

Эта формула очень сложна. Гораздо вывести зависимость между коэффициентами уравнений лишь того соображения, что нормали OZ и OZ_1 в случае параллельности плоскостей совпадут и мы будем иметь:

$$\alpha = \alpha_1;\ \beta = \beta_1;\ \gamma = \gamma_1.$$ Тогда

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\cos\beta = \cos\beta_1 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

Отсюда $\frac{A}{A_1} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$

Следовательно получается такое условие параллельности плоскостей: $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$

Если плоскости перпендикулярны, то угол $\omega = 90°$ и $\cos\omega = 0$.

При конечных величинах для A, B и C мы из формулы (а) должны иметь $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$, что и представляет условие перпендикулярности.

Условие параллельности может быть выведено из уравнения (в) при помощи тождества Лагранжа, которое таково: $(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2) - (AA_1+BB_1+CC_1)^2 = (BA_1-AB_1)^2 + (AC_1-CA_1)^2 + (BC_1-CB_1)^2$

Это равенство доказывается проверкой; его необходимо знать наизусть. Вторая часть равенства (в) равна единице, следовательно числитель равен знаменателю, а потому равны и их квадраты.

Итак $(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2) - (AA_1+BB_1+CC_1)^2 = 0$.

Здесь у нас обозначения, как в тождестве Лагранжа так и в этом соотношении не только соответствуют друг другу, но даже совпадают. Применяя к предыдущему выражению тождество Лагранжа, получим: $(B_1A - AB_1)^2 + (AC_1 - A_1C)^2 + (BC_1 - B_1C)^2 = 0$. Полученное равенство распадается на три, так как члены его, как квадраты, не могущие быть отрицательными, должны каждый в отдельности равняться нулю. Имеем

$$AB_1 - A_1B = 0;\ AC_1 - A_1C = 0;\ BC_1 - B_1C = 0;$$

или $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}$ и $\frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1}$.

Соединяя эти отношения, получим известную уже формулу $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$. Покончим с этим более сложным путем мы дошли до того же условия параллельности плоскостей, какое вывели раньше из соображения о совпадении перпендикуляров к плоскостям.

Составить уравнение плоскости параллельной данной плоскости и проходящей через данную точку.

Пусть дана точка $M(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку будет $A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0$.

По условию параллельности имеем: $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = k$.

Тогда $A_1 = Ak$; $B_1 = Bk$; $C_1 = Ck$. Уравнение искомой плоскости будет $A(x - x_1)k + B(y - y_1)k + C(z - z_1)k = 0$. По сокращении на k, получим: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$.

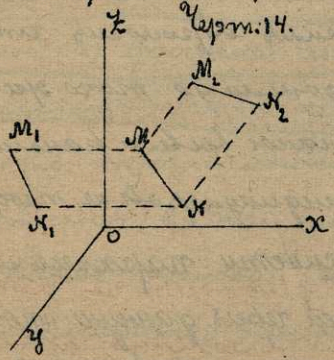
Алгебраическое представление прямой.

Ограничимъ наше разсмотрѣніе случаемъ Декартовыхъ координатъ. Такъ какъ всякая прямая опредѣляется пересѣченіемъ двухъ плоскостей, то алгебраически она должна выражаться двумя уравненіями первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

Вмѣсто произвольныхъ плоскостей возьмемъ плоскости проэктирующія нашу прямую на плоскости координатъ. Двухъ плоскостей вполнѣ достаточно для опредѣленія прямой. Положимъ намъ дана прямая MN. Изобразимъ проходящую черезъ нее проэктирующую плоскость параллельную оси x и другую плоскость параллельную оси y (черт. 14). Уравненія этихъ двухъ плоскостей и будутъ опредѣлять нашу прямую. Извѣстно, что уравненіе плоскости MNM_2N_2 будетъ одинаково съ уравненіемъ линіи N_2M_2, такъ какъ эта плоскость параллельна оси y.



Черт. 14.

Если прямая выражена двумя уравненіями произвольныхъ плоскостей, то изъ нихъ можемъ получить уравненія проэктирующихъ плоскостей. Для этого исключимъ изъ нихъ какое нибудь неизвѣстное,

положимъ y, получимъ $Kx + Lz + M = 0$.

Это уравненіе выражаетъ проэкцію прямой на плоскость xz. Въ пространствѣ же это уравненіе выражаетъ проэктирующую плоскость параллельную оси y.

Подобнымъ же образомъ уравненіе проэкцій прямой на плоскость yz выразится въ видѣ

$$Ny + Pz + Q = 0 \ldots (1)$$

Такъ какъ мы всегда можемъ сократить ур-ё на коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ, то можемъ общій видъ этихъ ур-ій представить такъ

$$x = mz + p \ldots (1)$$

$$y = nz + q \cdots (2)$$

Третье уравненіе, выражающее третью проэктирующую плоскость является простымъ слѣдствіемъ изъ полученныхъ. Если исключимъ z изъ ур-ій (1) и (2), то получимъ $\frac{x-p}{m} = \frac{y-q}{n} \ldots (3)$

Отсюда заключаемъ, что двухъ ур-ій вполнѣ достаточно для опредѣленія положенія прямой въ пространствѣ.

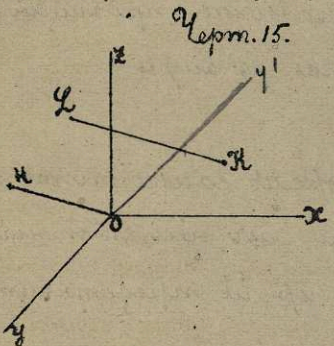
Примѣнимъ эти уравненія къ опредѣленію точекъ пересѣченія линій съ плоскостями координатъ.

Пусть пересѣченіе съ плоскостью xy (черт. 15) обозначимъ черезъ K, а съ плоскостью yz черезъ L; коорди-

наты мск будут для $K-(x, y, 0)$, а для $L-(0, y, z)$.

Подставим в уравнения (1) и (2), получим координаты для точки K $x=p$; $y=q$. Координаты точки L будут $z=-\frac{p}{m}$ и $y=q-\frac{np}{m}$.

Находим точкам образом, что параметры p и q, называемые линейными параметрами, определяют точку K.



Черт. 15.

Посмотрим в какой зависимости находятся угловые параметры m и n от направления прямой. Рассмотрим для этого вместо данной прямой другую ей параллельную, но проходящую через начало координат. Ведь как проекции двух параллельных прямых на одну и ту же плоскость параллельны, то новая прямая выразится уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= mz \\ y &= nz \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

Эти уравнения в совокупности выражают линию ON. Таким образом мы освободились от параметров p и q и сосредоточим наше внимание на m и n. Возьмем на линии ON произвольную точку N. Радиус вектор ея пусть будет r, углы, которые прямая образует съ

осями, будут λ, μ и ν. Рассмотрим какую-нибудь координату, напр. проекцию r на соответствующей оси получим

$$x = r\cos\lambda$$

$$y = r\cos\mu$$

$$z = r\cos\nu$$

Подставив эти выражения в уравнение (1) находим

$$\left.\begin{aligned} r\cos\lambda &= m\cdot r\cos\nu \\ r\cos\mu &= n\cdot r\cos\nu \end{aligned}\right\}$$ Сокращая на r, имеем $$\begin{aligned} \cos\lambda &= m\cos\nu = m\cos\gamma \\ \cos\mu &= n\cdot\cos\nu = n\cos\gamma \end{aligned}$$

Полным образом мы находим очень простую зависимость между величинами m и n и направлением линии. Полученные уравнения можно написать иначе $m = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$; $n = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}$;

Благодаря этой зависимости, нам придется впоследствии обращать внимание на параметры m и n во всех тех случаях, когда мы имеем дело с углами прямой, отчего они и называются угловыми параметрами. Замечаем что m и n однозначная функция углов. Для того чтобы определить направление линии по данным m и n, найдем косинусы углов α, β и γ.

Для этого возводим в квадрат наши уравнения $\cos\lambda = m\cos\nu$, $\cos\mu = n\cos\nu$ и тождество $\cos^2\nu = \cos^2\gamma$.

Затем, складывая, получаем

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = m^2\cos^2\nu + n^2\cos^2\nu + \cos^2\nu$$

Упрощая выражение, находим $1 = (m^2+n^2+1)\cos^2\nu$

Отсюда

$$1)\ \cos\nu = \frac{1}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

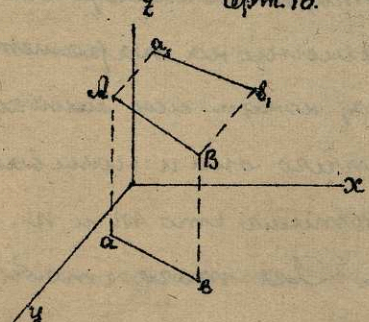
$$2)\ \cos\lambda = m\cdot\cos\nu = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

$$3)\ \cos\mu = n\cdot\cos\nu = \frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

Двойной знак является потому, что рассматриваемая прямая имеет два противоположных направления AB и BA. Если знать, какое именно направление прямой следует принять за данное, то двойственность знака исчезнет. В частных случаях положения прямой, ее ур-ия упрощаются. Приведем примеры.

1) Прямая параллельна плоскости xy (черт. 16).

Черт. 16.



Уравнения ее проекций на плоскость xy будет иметь общий вид $Ax+By+D=0$. Ур-ие ее проекции на yz будет $z=a$. Прямая выразится уравнениями $z=a$ и $Ax+By+D=0$.

Для прямой, параллельной xz, имеем $y=a$ и $Ax+Bz+D=0$. Подобным же образом в третьем однородном случае.

2) Если прямая параллельна одной из осей, положим оси z, то уравнения ея будут $x=a$ и $y=b$.
Если она параллельна оси y, то ур-ія примут вид $x=a$ и $z=c$. Подобно этому въ случаѣ параллельности съ осью x.

Задачи на теорію прямой.

1) Построить прямую, проходящую черезъ точку $M(x_1, y_1, z_1)$. Направленія ея не будетъ опредѣлено и потому мы не можемъ ожидать, чтобы мы получили для нея уравненія съ вполнѣ извѣстными коэффиціентами. Мы можемъ получить нѣкоторое ур-ія, опредѣляющее общій видъ безчисленнаго множества прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку.

Всякая вообще прямая выражается ур-іями:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz+p \\ y &= nz+q \end{aligned}\right\} \dots (1)$$

Разъ она проходитъ черезъ точку M, должны существовать такія тождества

$$x_1 = mz_1 + p$$
$$y_1 = nz_1 + q$$

Вычтемъ эти тождества по частямъ изъ соотвѣтственныхъ уравненій (1). Получимъ

$$x - x_1 = m(z - z_1)$$
$$y - y_1 = n(z - z_1)$$

Для того, чтобы вопрос был определенный нужно наложить на рассматриваемую линию еще какое нибудь условие.

Положим, нам известна система углов, образуемых данной прямой с осями координат; пусть эти углы будут λ, μ и ν. Выразим зависимость между углами λ, μ и ν и параметрами m и n, которая выражается формулами: $m = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$; $n = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}$. Подставив эти выражения m и n в уравнение (2). Получим:

$$x - x_1 = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}(z - z_1) \ldots (a) \text{ и } y - y_1 = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}(z - z_1) \ldots (b)$$

Представим эти уравнения в виде одной сложной пропорции. Именно, делим уравнение (a) на $\cos\lambda$, а уравнение (b) на $\cos\mu$ и сравнивая вторые части, получаем:

$$\frac{x - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y - y_1}{\cos\mu} = \frac{z - z_1}{\cos\nu} \ldots (A)$$

Если в знаменателях подобной задачи не даны самые косинусы углов, а даны только количества a, b и c, которым косинусы пропорциональны, то вопрос остается определенным. В самом деле, напишем условие пропорциональности $\frac{\cos\lambda}{a} = \frac{\cos\mu}{b} = \frac{\cos\nu}{c} = k$. Подставив вместо косинусов их величины в

уравнения прямой, получимъ:

$$\frac{x-x_1}{a}k = \frac{y-y_1}{a}k = \frac{z-z_1}{c}k.$$

Если найти по a, b и c удовлетворительно определить косинусы, то это можно легко выполнить. Составимъ производную пропорцію. Первая часть получается, возведя всѣ отношенія въ квадратъ и раздѣливъ сумму предыдущихъ на сумму послѣдующихъ; второй частью остается любое отношеніе въ квадратѣ или, что все равно, коэффиціентъ k въ квадратѣ.

$$k^2 = \frac{\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu}{a^2+b^2+c^2}$$

Отсюда $k = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Слѣдовательно $\cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ и т. д.

2) *Построеніе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки* (x_1, y_1, z_1) и (x_{11}, y_{11}, z_{11}).

Условіе прохожденія линіи черезъ точку (x_1, y_1, z_1) выразится уравненіемъ

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= m(z - z_1) \\ y - y_1 &= n(z - z_1) \end{aligned}\right\} (1)$$

Этимъ уравненіямъ прямой должны удовлетворять x_{11}, z_{11} и y_{11} второй точки. Поэтому имѣемъ тождества:

$$\left.\begin{aligned} x_{11} - x_1 &= m(z_{11} - z_1) \\ y_{11} - y_1 &= n(z_{11} - z_1) \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Равенства (1) и (2) относятся к одной и той же прямой и потому m и n в уравнении (1) тождественны с m и n в ур-ии (2). Исключаем m и n. Получим

$$\frac{x-x_1}{z-z_1} = \frac{x_{11}-x_1}{z_{11}-z_1} \quad \text{и} \quad \frac{y-y_1}{z-z_1} = \frac{y_{11}-y_1}{z_{11}-z_1}$$

Соединив эти отношения в одну общую пропорцию, находим:

$$\frac{x-x_1}{x_{11}-x_1} = \frac{y-y_1}{y_{11}-y_1} = \frac{z-z_1}{z_{11}-z_1}$$

Это и будут ур-ия прямой, определяемой 2-мя точками

5) Пересечение двух прямых.

Вообще две прямые в пространстве не пересекаются и пересечение их является только частным случаем. Обнаружим это геометрическое свойство прямых рассмотрением их уравнений. Положим, уравнения данных прямых даны в виде

$$\text{I} \quad \begin{cases} x = mz + p \\ y = nz + q \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{II} \quad \begin{cases} x = m_1 z + p_1 \\ y = n_1 z + q_1 \end{cases}$$

Т.о. точка пересечения определится, как известно, решением этих четырех уравнений. Но так как в них только три неизвестных, то, как известно из алгебры, они только в частном случае могут оказаться совместн

именно, когда одно из них является следствием остальных. Определим при каких условиях мы имеем дело с таким частным случаем. Приравнивая $x^{ш}$ и $y^{ш}$. Найдем

$$mz+p = m_1 z+p_1$$

$$nz+q = n_1 z+q_1$$

Следствия совместных уравнений должны быть тоже совместны и потому $\frac{p_1-p}{m_1-m} = z = \frac{q_1-q}{n_1-n}$ должно быть тождество. Отсюда $\frac{p_1-p}{m_1-m} = \frac{q_1-q}{n_1-n}$ или

$$\frac{p_1-p}{q_1-q} = \frac{m_1-m}{n_1-n}$$

Итак для пересечения линий необходимо, чтобы отношение между разностями линейных параметров равнялось отношению между соответственными разностями угловых параметров.

4) Угол между двумя прямыми.

Если ур-ия прямых будут

$$\left.\begin{aligned} x &= mz+p \\ y &= nz+q \end{aligned}\right\} (I) \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x &= m_1 z+p_1 \\ y &= n_1 z+q_1 \end{aligned}\right\} (II)$$

то косинусы углов, которые образуют эти прямые с осями x, y и z, коих известны, будут равняться

$$\cos\lambda = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}, \quad \cos\lambda_1 = \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+1}},$$

$$\cos\mu = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}, \quad \cos\mu_1 = \frac{n_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+1}},$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}, \quad \cos\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+1}};$$

Применяя формулу косинуса угла между прямыми, которые образуют данные углы с осями координат, получаем

$$\cos\varphi = \cos\lambda\cdot\cos\lambda_1 + \cos\mu\cdot\cos\mu_1 + \cos\nu\cdot\cos\nu_1 =$$

$$= \frac{m\,m_1}{\sqrt{m^2+n^2+1}\,\sqrt{m_1^2+n_1^2+1}} + \frac{n\cdot n_1}{\sqrt{m^2+n^2+1}\,\sqrt{m_1^2+n_1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}\,\sqrt{m_1^2+n_1^2+1}}$$

или $$\cos\varphi = \frac{m m_1 + n n_1 + 1}{\sqrt{m^2+n^2+1}\,\sqrt{m_1^2+n_1^2+1}}.$$

Выведенная формула служит для определения искомого угла между данными прямыми. Из нее можно вывести условия параллельности и перпендикулярности линий.

Если линии параллельны, то угол $\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 1$.

Квадрат числителя равен квадрату знаменателя, т.е. $(m m_1 + n n_1 + 1)^2 = (m^2+n^2+1)(m_1^2+n_1^2+1) \ldots (A)$

При помощи тождества Лагранжа, эта формула может быть представлена в другом виде. Перенесем первую часть уравнения (A) во вторую, получим

$$(m^2+n^2+1)(m_1^2+n_1^2+1) - (m m_1 + n\cdot n_1 + 1)^2 = 0.$$

Применим к этому уравнению тождество Лагранжа, выражающееся в виде

$$(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2) - (AA_1+BB_1+CC_1)^2 = (AB_1-A_1B)^2 + (AC_1-A_1C)^2 + (BC_1-B_1C)^2$$

В нашем случае $A = m$, $B = n$, $C = 1$, $A_1 = m_1$, $B_1 = n_1$, $C_1 = 1$.

Тогда имѣемъ: $(m^2+n^2+1)(m_1^2+n_1^2+1)-(mm_1+nn_1+1)^2=(mn_1-m_1n)^2+(m-m_1)^2+(n-n_1)^2=0$.

Полученное равенство распадается на слѣдующія три:

$mn_1-m_1n=0$, $m-m_1=0$, $n-n_1=0$. Откуда $m=m_1$ и $n=n_1$.

Окончательно условіе параллельности выразится соотвѣтственными равенствами угловыхъ параметровъ m и n данныхъ прямыхъ.

Если прямыя взаимно перпендикулярны, то $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\cos\varphi=0$. Тогда коэф. m, m_1, n и n_1 конечны, то $mm_1+nn_1+1=0$.

Изъ предыдущаго разсужденія видно, что данныя прямыя не разсматриваются какъ пересѣкающіяся. На р и д мы никакого вниманія не обращаемъ и формулу $\frac{p_1-p}{m_1-m}=\frac{q_1-q}{n_1-n}$ въ соображеніе не принимаемъ.

Вопросы, касающіеся плоскости и линій.

1) Пересѣченіе прямой съ плоскостью.

Пусть плоскость дана ур-іемъ $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая дана ур-іями $x=mz+p$

$y=nz+q$

Опредѣленіе пересѣченія сводится къ рѣшенію совмѣстныхъ трехъ уравненій. Эти уравненія рѣшаются опредѣленно и рѣшеніе будетъ представлять координаты точки пересѣченія.

Решимъ по общимъ правиламъ. Имѣемъ послѣ подстановки: $A(mz+p)+B(nz+q)+Cz+D=0$,

отсюда $z=-\frac{D+Bq+Ap}{Am+Bn+C}$

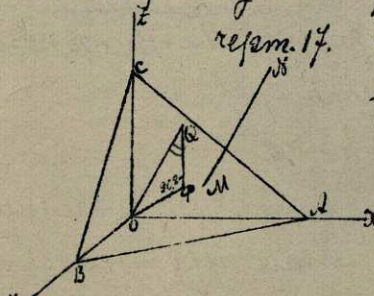
Такимъ образомъ опредѣляется единственное значеніе координаты z. Подставивъ его, получимъ:

$$x=p-m.\frac{D+Bq+Ap}{Am+Bn+C}$$

$$y=q-n.\frac{D+Bq+Ap}{Am+Bn+C}$$

Когда линія параллельна плоскости, тогда x, y и z должны быть безконечно большими. При конечныхъ p и q въ этомъ случаѣ должно быть $Am+Bn+C=0$. Это значитъ и есть условіе параллельности линіи съ плоскостью.

2) Уголъ между плоскостью и прямой. Положимъ, что плоскость ABC (черт. 17) дана уравненіемъ $Ax+By+Cz+D=0$, прямая MN — уравненіями $x=mz+p$ и $y=nz+q$. Проведемъ черезъ начало координатъ прямую OQ, параллельную данной. Будемъ разсматривать уголъ, который образуетъ эта прямая съ плоскостью, на основаніи того, что параллельныя прямыя образуютъ съ плоскостью одинаковые углы. Опустимъ на плоскость изъ O



черт. 17.

перпендикуляр OP. Соединивъ P съ Q получимъ PQ, проэкцію прямой OP. За уголъ прямой съ плоскостью принимается уголъ, образуемый линіей OQ съ ея проэкціей PQ на плоскость. Для опредѣленія угла QOP найдемъ раньше дополнительный къ нему до $\frac{\pi}{2}$ уголъ QOP. Выразимъ направленія линій OQ и OP относительно осей координатъ. Если углы, образуемые линіей OP съ осями будутъ α, β и γ, то

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ ;\quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

Углы, дѣлаемые съ осями координатъ линіей OQ, обозначимъ черезъ λ, μ и ν; тогда имѣемъ

$$\cos\lambda = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\ ;\ \cos\mu = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\ ;\ \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\ ;$$

Теперь опредѣлимъ косинусъ угла (OP, OQ) по извѣстной формулѣ: $\cos(OP, OQ) = \frac{Am+Bn+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+1}} = \sin\varphi$ ..... (1)

Мы написали, что $\cos(OP, OQ) = \sin\varphi$, такъ какъ эти углы дополняютъ другъ друга до $\frac{\pi}{2}$, потому что входятъ въ прямоугольный треугольникъ OPQ. Эта формула можетъ служить также и для опредѣленія условія перпендикулярности и параллельности линіи и плоскости. Если линія параллельна плоскости, то $\angle\varphi = 0$ и $\sin\varphi = 0$. Числитель $Am+Bn+C = 0$.

Если линія перпендикулярна плоскости, то $\angle\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi = 1$. Тогда $Am + Bn + C = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+1}$. Отсюда имѣемъ

$$(Am+Bn+C)^2 - (A^2+B^2+C^2)(m^2+n^2+1) = 0.$$

Преобразуя подобно предыдущему формулу Лагранжа, получаемъ: $(An-Bm)^2+(A-Cm)^2+(B-Cn)^2=0$, что обусловливаетъ три равенства: $An-Bm=0$; $A-Cm=0$; $B-Cn=0$. Первое изъ этихъ равенствъ является прямымъ слѣдствіемъ двухъ другихъ и потому условія перпендикулярности суть: $A=Cm$ и $B=Cn$.

Замѣтимъ, что въ урав-ію (1) у насъ выраженъ уголъ черезъ синусъ, между тѣмъ какъ при опредѣленіи угла между прямыми и между плоскостями мы имѣли дѣло съ косинусомъ. Вслѣдствіе этого условіе параллельности плоскостей и линій обусловливалось двумя уравненіями, а перпендикулярность одними; здѣсь же мы замѣчаемъ прямо обратное.

3) Опустить изъ данной точки $M(x_1,y_1,z_1)$ перпендикуляръ на плоскость, выраженную уравненіемъ

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Здѣсь мы понимаемъ подъ выраженіемъ опустить перпендикуляръ не нахожденіе его величины, а нахожденіе уравненія безпредѣльной прямой. Будемъ опредѣлять уравненіе прямой, исходя изъ ранѣе ур-ій

такихъ прямыхъ, которыя проходятъ черезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$. Эти прямыя выражаются уравненіями

$$x - x_1 = m(z - z_1) \quad \text{и} \quad y - y_1 = n(z - z_1).$$

Выберемъ изъ этихъ прямыхъ такую, которая удовлетворяла бы другому нашему условію, именно условію перпендикулярности къ плоскости. Въ... параметры m и n должны входить въ слѣдующія равенства, выражающія перпендикулярность: $A = Cm$ и $B = Cn$. Откуда $m = \frac{A}{C}$ и $n = \frac{B}{C}$. Подставивъ эти величины m и n въ первое уравненіе получимъ: $x - x_1 = \frac{A}{C}(z - z_1)$ и $y - y_1 = \frac{B}{C}(z - z_1)$. Выразимъ эти два равенства одной слитной пропорціей: $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$.

4) Провести плоскость перпендикулярную данной прямой и проходящую черезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$.

Пусть прямая дана уравненіями $x = mz + p$ и $y = nz + q$. Плоскость, коей проходящая черезъ точку M, выразится такъ: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$. Теперь выразимъ слѣдующими условіями перпендикулярность къ прямой: $A = Cm$ и $B = Cn$. Подставивъ A и B въ первое уравненіе, получимъ:

$Cm(x - x_1) + Cn(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$. Сокращая на C, получимъ: $m(x - x_1) + n(y - y_1) + (z - z_1) = 0 \ldots (1)$

Пользуясь ур-ем перпендикулярной плоскости легко найти длину перпендикуляра. Находимъ точку пересѣченія, ~~прямой~~ данной ур-ія прямой и перпендикулярной къ ней плоскости.

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+(z-z_1)=0,$$

$$x=mz+p,\quad y=nz+q.$$

Найдя эту точку пересѣченія, мы можемъ опредѣлить разстояніе отъ нея до данной точки по формулѣ $\delta=\sqrt{(x_{11}-x_1)^2+(y_{11}-y_1)^2+(z_{11}-z_1)^2}$. Это разстояніе, которое мы здѣсь вычислять не станемъ, и будетъ выражать длину перпендикуляра.

О преобразованіи координатъ.

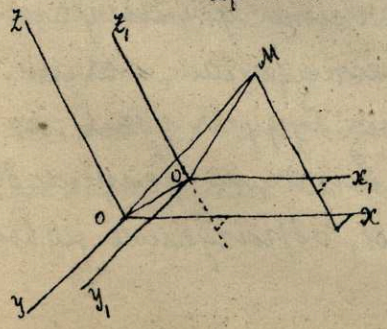
Одна и та же поверхность, будучи отнесена къ различнымъ осямъ координатъ, выражается различными уравненіями. Бываетъ одними осями ур-ie болѣе простымъ чѣмъ при другихъ. Чтобы намъ въ нашихъ интересахъ получить возможно простыя уравненія, то понятно, что для насъ очень важенъ вопросъ о преобразованіи координатъ. Самый способъ преобразованія координатъ остается для пространства тотъ же самый по идеѣ, какой былъ разсмотрѣнъ для плоскости. Находятъ зависимость между новыми и старыми координа-

нотации, выражающую тот, что старые координаты представлены данными функциями новых координат. Подставив эти выражения в уравнение поверхности, получим новое, выражающее зависимость новых текущих координат.

1. Перенесение начала координат в другую точку, оставляя новые оси координат параллельными старым.

Пусть старые оси будут $Oxyz$, а новые им параллельные пусть будут $O_1x_1y_1z_1$. Положение новой системы будет вполне определено, если даны координаты центра O_1. Пусть они будут a, b, c. Возьмем произвольную точку M. Ее старые координаты пусть будут x, y, z, а новые x_1, y_1, z_1 (черт. 18) Требуется найти зависимость между x, y, z и x_1, y_1, z_1, относящуюся ко всевозможным частным положениям точки M. Казалось бы, что для этого нужно рассматривать множество случаев положения точки M, таких как знаки координат, как новых, так и старых могут составить весьма разнообразные комбинации. Но мы имеем способ весьма общий, который легко дает общее правило.

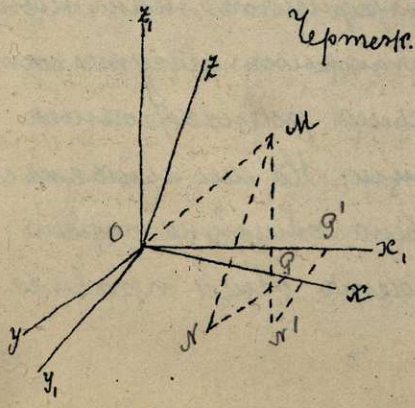
Черт. 18



Этот способ основан на теореме: проекция ломанной равна проекции прямой, соединяющей начало ломанной с ее концом. Эта теорема верна для положительных и отрицательных величин проекций. Спроектируем контур OO_1M на ось Ox, причем проектирующие плоскости пусть будут параллельны плоскости yz. Итак $пр_x OM = пр_x OO_1 + пр_x O_1M$. Но-как как проекция O_1M на ось x равна проекции O_1M на ось x_1, то $x = a + x_1$. Точно только, взяв за ось проекций ось y, а затем ось z най-дем: $y = b + y_1$ и $z = c + z_1$. Эти три уравнения суть формулы преобразования координат для нашего частного случая, когда перемещается одно начало координат без изменения направления осей.

2. Переход от одной системы координат к другой, имеющей то же начало, но с новым направлением осей.

Начнем вывод с общего: со случая косоугольных систем (черт. 19). Здесь должны быть даны углы между старыми осями. Пусть они будут $yOz = \lambda$, $xOz = \mu$ и $xOy = \nu$. Затем должны быть даны углы, образуемые новыми



Чертеж 19

осями старыми. Въ интересахъ удобства вывода формулъ представляютъ эти углы ихъ косинусами. Для ясного представленія того, какой косинусъ соотвѣтствуетъ какому углу, составляютъ таблицу.

	x_1	y_1	z_1
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

Косрдой изъ косинусовъ $a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots, c_3$ есть косинусъ угла между тѣми осями координатъ, названія которыхъ находятся съ названіемъ косинуса въ одной строкѣ и въ одномъ столбцѣ. Напр., a_2 есть косинусъ угла x_1 съ y, b_3 косинусъ угла y_1 съ z. Всѣхъ косинусовъ очевидно девять. Но между ними есть зависимость. Для прямоугольныхъ старыхъ координатъ будетъ $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$ ит. д. Для косоугольныхъ эта зависимость болѣе сложна и мы ее не разсматриваемъ. Пусть M произвольная точка; построимъ ея старыя и новыя координаты. $OP=x$, $PK=y$; $KM=z$, $OP_1=x_1$, $P_1K_1=y_1$, $K_1M=z_1$. Проведемъ линію OM и спроэктируемъ два контура $OPKM$ и OP_1K_1M, имѣющихъ общую замыкающую сторону, на ось x. Будемъ имѣть

$$np_x(OM)=np_x(OP)+np_x(PK)+np_x(MK)=np_x(OP_1)+np_x(P_1K_1)+np_x(K_1M)$$

Получимъ: $x+y\cos\gamma+z\cos\mu=a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1$. Спроэктируемъ на ось y, получимъ: $x\cos\gamma+y+z\cos\lambda=a_2x_1+b_2y_1+b_2z_1$.

Спроэктируемъ на ось z, получимъ: $x\cos\mu+y\cos\lambda+z=a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1$.

Формулы преобразования для настоящего случая получаются из этих уравнений, если мы их разрешим относительно x, y и z. Мы не будем выполнять это вычисление, по его сложности. Заметим только, что формулы получатся непременно первой степени относительно x, y, z и x_1, y_1, z_1, и не будут содержать в рассматриваемом случае известных членов. Следовательно общий вид искомых формул выразится так: $x = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1$,

$y = A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 z_1$ и $z = A_3 x_1 + B_3 y_1 + C_3 z_1$.

Коэффициенты зависят здесь от углов между старыми осями и углов новых осей со старыми.

Частные случаи. а) Старые оси прямоугольны. В этом случае $\lambda = \mu = \nu = \frac{\pi}{2}$. Следовательно $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0$. Отбросив в основных формулах члены, содержащие $\cos\lambda$, $\cos\mu$ и $\cos\nu$, как равные нулю, получаем формулы в более простом виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1, \\ y &= a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1, \\ z &= a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1, \end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

Заметим, что здесь мы получили без всяких вычислений формулы в прежнем виде, именно в форме выражения старых координат

явными функціями новыхъ. Сравнивъ съ формулами общаго вида для косоугольныхъ координатъ, мы замѣчаемъ только особенность. Здѣсь величины $a_1, b_1, c_1 \dots, c_3$ извѣстны но онѣ не могутъ быть здѣсь произвольными, такъ какъ онѣ стѣснены нѣкоторыми условіями. Разсматривая косинусы угловъ, которые составляетъ новая ось x_1 со старыми прямоугольными осями, находимъ: $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$

Подобно находимъ, что $b_1^2+b_2^2+b_3^2=1$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \dots (2)$

$c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$

2) Старыя и новыя оси прямоугольны.

Формулы (1) остаются тѣже. Но величины $a_1, b_1, c_1 \dots$ стѣсняются еще новыми условіями. Кромѣ выведенныхъ уже условій (2): $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$, $b_1^2+b_2^2+b_3^2=1$ и $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$, которыя выражаютъ прямоугольность старыхъ осей, мы найдемъ еще формулы, выражающія прямоугольность новыхъ осей. Разсматривая углы $x_1 O y_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 O z_1 = \frac{\pi}{2}$ и $y_1 O z_1 = \frac{\pi}{2}$, отнесенныя къ старымъ координатамъ найдемъ по извѣстной формулѣ: $\cos\omega = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$, три соотношенія. Въ нашемъ случаѣ $\cos x_1 O y_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \dots (3)$

$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0$

При составленіи этихъ формулъ мы руководствовались таблицей косинусовъ. Итакъ входящія въ уравненія

уравнений (1) девять косинусов стоящих вместо неизвестных. Следовательно через три направляющих косинуса можно характеризовать положение одной прямоугольной системы относительно другой.

Заметим, что прямоугольность систем координат можно выразить и другими уравнениями. Именно рассмотрим сначала старую оси Ox, Oy и Oz относительно новых получаем:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Рассматривая } Ox & a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 \\ \text{—}\,,\,\text{—}\,,\,\text{—}\,, & Oy \quad a_2^2+b_2^2+c_2^2=1 \\ \text{—}\,,\,\text{—}\,,\,\text{—}\,, & Oz \quad a_3^2+b_3^2+c_3^2=1 \end{array}\right\} \ldots (4)$$

Уравнения (4) выражают прямоугольность новых осей, т. е. то же, что указывалось уравнениями (3).

Если рассматривать прямые углы xOy, xOz, yOz, но отнесенные на новой системе, получаем подобно сформулированным (3) следующие формулы:

$$\left.\begin{array}{l} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0 \\ a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0 \end{array}\right\} \ldots (5)$$

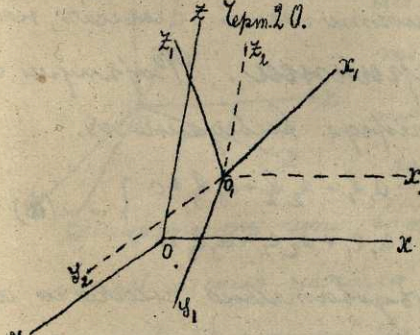
Уравнения (5) выражают то же, что и ур-ия (2), именно прямоугольность старых осей. Ур-ия (5) и (4) вместе выражают то же геометрическую модель, что уравнения (2) и (3) и потому группу шести новых уравнений можно рассматривать, как

алгебраическое свойство группы шести перестановок. Девять величин $a_1, b_1, c_1, \ldots, c_3$, входящих в уравнения (1) связаны шестью уравнениями. Эти шесть уравнений мы можем представить двумя способами

3) **Переход от одной системы координат к другой системе координат при изменении положения начала и направления осей.**

Пусть координаты O_1 суть α, β, γ. Направления новых осей относительно старых определяются тем же способом косинусов углов. Вспомогательные оси (черт. 20) параллельны старым, имеющим начало в O_1. Это оси x_2, y_2 и z_2. Пусть x, y, z будут старые координаты точки, x_2, y_2 и z_2 вспомогательные координаты, а x_1, y_1, z_1 — новые координаты.

Черт. 20.



Будем иметь: $x = \alpha + x_2$, $y = \beta + y_2$ и $z = \gamma + z_2$.

Вместо $x_2 = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1$,

$y_2 = A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 z_1$,

$z_2 = A_3 x_1 + B_3 y_1 + C_3 z_1$

и соответственно $x = \alpha + A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1$

$y = \beta + A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 z_1$,

$z = \gamma + A_3 x_1 + B_3 y_1 + C_3 z_1$,

Отсюда видно, что и в самом общем случае преобразования координат сторона многогранника выразится через новые линейные функции.

Формулы Лагранжа.

Кроме двух найденных систем уравнений, которые выражают зависимость между косинусами, существуют еще другие замечательные формулы, имеющие тот же геометрический смысл, называемые формулами Лагранжа. Формулы эти являются как следствие предыдущих.

Возьмем два уравнения: $\left.\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \dots (a)$

и исключим из них последовательно сначала a_3, а затем a_2. Чтобы исключить a_3, помножим первое на c_3, второе на b_3 и вычтем из первого.

Получим $a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + a_2(b_2c_3 - b_3c_2) = 0$. Отсюда

$$\frac{b_3c_1 - b_1c_3}{a_2} = \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_1}$$

Чтобы исключить a_2, помножим первое на c_2, а второе на b_2. Получим $a_1(b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_3c_2 - b_2c_3) = 0$

Отсюда $\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_1} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_3}$

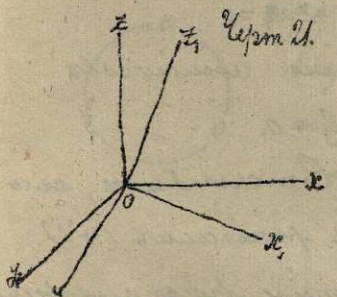
Эти два пропорции можем выразить так:

$$\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_1} = \frac{b_3c_1 - b_1c_3}{a_2} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_3} = k$$

*) Теперь по алгебраическому тождеству Лагранжа имеем $(b_3c_2 - b_2c_3)^2 + (b_1c_3 - b_3c_1)^2 + (b_2c_1 - c_2b_1)^2 =$
$= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2$.

Пользуемся остальными четырьмя тождествами
$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$, $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$
и подставляя получим $k = \pm\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \pm 1$.

Здесь неизвестно какой знак следует принять. Чтобы



Черт 11.

решить это, сделаем следующее замечание. Мы имеем две прямоугольные системы осей координат; эти две системы могут иметь одна относительно другой два различных расположения. Чтобы решить это, вообразим, что вторая система $Ox_1y_1z_1$, вращаясь около начала приводится в совпадение с первой и положим, что ось Ox_1 совпадает с Ox, ось Oy_1 — с Oy. Тогда Oz_1 совпадает с Oz или с продолжением Oz. В первом случае говорят, что две системы имеют **взаимно-прямое расположение**, а во втором **взаимно-обратное**.

Формулы, доказанные для общего случая должны существовать и для частного расположения координат, напр. для совпадения

*) Т-ро пущено: Из этих отношений составим сложное следующим образом. Возьмем отношение суммы квадратов предыдущих к сумме квадратов последующих и извлечем корень квадратный из всего. Получим $\frac{\sqrt{(b_3c_2 - b_2c_3)^2 + (b_1c_3 - b_3c_1)^2 + (b_2c_1 - c_2b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = k$. Теперь и т. д.

осей x и y первой системы съ x_1, y_1 второй.

Мы нашли для общаго случая, что

$$\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_1} = \frac{1}{\varkappa}$$

Какой знакъ у единицы истинной мы еще не знаемъ. Принявъ это равенство за совпаденіе x съ x_1 и y съ y_1, имѣемъ при взаимно прямомъ расположеніи совпаденій z съ z_1. Слѣдовательно углы $yOy_1 = x_1Ox_1 = zOz_1 = 0$

По таблицѣ косоугольныя величины косинусовъ

$$a_1 = b_2 = c_3 = 1; \quad b_1 = c_1 = a_2 = c_2 = a_3 = b_3 = 0.$$

По подстановкѣ получимъ $\varkappa = \frac{1}{1} = 1$. Это было бы, если оси совпадаютъ, когда принять $\varkappa$ равнымъ $(+1)$. Если бы имѣли взаимно обратное расположеніе, то при частномъ случаѣ совпаденія осей x_1 и y_1 съ x и y, ось z_1 образовала бы съ z уголъ π. Тогда $c_3 = -1$, а всѣ остальные косинусы остаются тѣ же и $\varkappa = \frac{1}{-1} = -1$. Итакъ имѣемъ при прямомъ расположеніи:

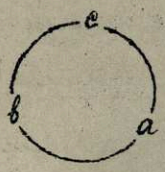
$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_2c_3 - b_3c_2 \\ a_2 &= b_3c_1 - b_1c_3 \\ a_3 &= b_1c_2 - b_2c_1 \end{aligned}\right\} \ldots (I)$$

Мы взяли въ системѣ уравненій

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0, \quad a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0, \quad b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$$

первыя два уравненія и исключили a_2 и a_3. Возьмемъ теперь для полученія новыхъ отношеній $3^{ее}$ и $2^{ое}$ уравненія и исключимъ b_2 и b_3. Не станемъ опять повторять

полного вычисления, а воспользуемся способом перемещения букв. Заметим, что 2-е и 3-е уравнения получаются из 1-го и 2-го и величины b_2 и b_3 получаются из a_2 и a_3 через круговое перемещение букв, только a через b, b через c, c через a. Это круговое замещение последовательно и повторяется кругом, на котором a, b, c и т. д. перемещаются по стрелке на $\frac{1}{3}$ окружности. Произведя точно то же замещение в полученных уравнениях мы найдем еще



формулы:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}\right\} \dots (II)$$

Произведя еще раз круговое замещение, мы получим формулы, которые можно бы через несколько c_2 и c_3. Эти формулы будут:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}\right\} \dots . (III)$$

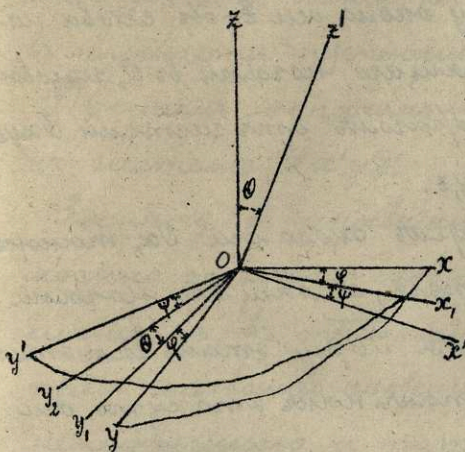
Формулы III не выразили новый путь. Из уравнений I и II мы могли простым вычислением получить уравнений III. Таким образом мы опять имеем систему шести независимых уравнений.

Формулы Эйлера.

Эти формулы относятся к самому простому случаю преобразования координат, именно к переходу от прямоугольной системы координат к прямоугольной не изменяя начало. Для такого преобразования выше уже даны формулы. Указанные формулы удобны по своей симметричному виду, но неудобны в том отношении, что в них входят девять косинусов углов, которые связаны между собою шестью уравнениями, так что при употреблении формул приходится обращаться с довольно громоздкими. Между тем положение новой системы координат относительно старой определяется только тремя величинами (косинусами), потому что остальные шесть найдутся из шести уравнений. Было бы удобны, если бы три величины, которыми положение новой системы координат определяется не посредственно, входили бы прямо в формулы для преобразования координат с тем, что бы никаких других соотношений не приходилось бы рассматривать. Формулы Эйлера достигают именно эту цель; в них прямо входят те углы, которыми определяется положение

новой системы относительно старой. Эти углы суть слъдующіе. Положимъ, что плоскость $x'Oy'$ пересъкаетъ плоскость xOy по прямой Ox_1 и пусть уголъ $xOx_1 = \varphi$. Плоскость $x'Oy'$ съ плоскостью xOy образуетъ двугранный уголъ $y'Ox_1y$ ровный углу zOz', составленному перпендикулярами къ этимъ плоскостямъ. Пусть этотъ уголъ равенъ θ (черт. 22)

Черт. 22



Ось Ox' съ прямою пересъченія Ox_1 образуетъ уголъ ψ, такъ что $x_1Ox' = \psi$. Для различныхъ расположеній новой системы относительно старой уголъ φ, считаемый отъ оси Ox въ сторону положительной оси Oy можетъ получить всъ величины отъ $0°$ до $360°$. Уголъ θ, считаемый отъ положительной оси Oz до отрицательной стороны той же оси, можетъ получить всъ величины отъ $0°$ до $180°$. Наконецъ уголъ ψ точно, какъ и φ можетъ измъняться отъ $0°$ до $360°$.

Замътимъ, что, если будутъ даны три угла φ, θ и ψ, то положеніе новой системы координатъ относительно старыхъ будетъ вполнъ опредълено. Для доказательства этого, положимъ, что можно

привести старыя оси въ совпаденіе съ новыми посредствомъ трехъ послѣдовательныхъ вращеній около трехъ осей слѣдующимъ образомъ:

1) Повернемъ старую систему около оси z-овъ слѣва направо, для наблюдателя стоящаго ногами въ O, головой въ z, на уголъ φ. Такимъ образомъ отъ системы $Oxyz$ мы перейдемъ къ системѣ $Ox, y_1 z$.

2) Второе вращеніе произведемъ около оси Ox, тоже слѣва направо для наблюдателя, стоящаго ногами въ O и головой въ x, на уголъ θ. При этомъ замѣтимъ, что Oz перпендикулярна Ox, такъ какъ это суть оси старой прямоугольной системы, измѣнившей только свое положеніе въ пространствѣ; Oz' тоже перпендикулярна къ Ox, такъ какъ Ox лежитъ въ плоскости xOy', которая, въ силу прямоугольности новой системы, перпендикулярна къ z'. Oz и Oz', какъ перпендикулярныя къ Ox, лежатъ въ плоскости перпендикулярной къ Ox. Слѣдовательно, если мы вращеніе произведемъ около Ox, слѣва направо на уголъ θ, то Oz, оставаясь въ плоскости перпендикулярной къ Ox, совпадетъ съ z_1. Ось Oy_1 приметъ положеніе Oy_2, причемъ уголъ $y_1 O y_2 = \theta$. Такимъ образомъ мы отъ системы $Ox, y_1 z$ перейдемъ къ систѣмѣ $Ox, y_2 z'$.

3) Третье вращеніе придется совершить около

оси z' по направлению от x_1 к y_2 на угол φ. Тогда ось Ox_1 совпадет с Ox', а ось Oy_2 совпадет с Oy', ибо как все эти линии, как перпендикулярные к Oz', лежат в плоскости перпендикулярной к оси вращения Oz'.

Таким образом от нашей системы Ox_1y_2z' перейдем к системе $Ox'y'z'$.

Замену в уравнении старых координат новыми можно сделать, сообразно сделанным нами перемещениям, в три приема, и при каждом из трех преобразований координат, одна из осей остается неподвижною и потому ея координаты не меняются. Хотя преобразование совершается в пространстве, но в нашем случае меняются только две координаты и потому здесь применимы плоскостные формулы преобразования, которыя будут:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

При применении этих формул нужно обращать внимание на то, какия величины в нашем случае соответствуют предыдущим x, y, x' и y'.

При первом вращении, переходя от осей $Oxyz$ к Ox_1y_1z, формулы принимают вид:

$$x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi$$

$$y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi$$

При второмъ вращеніи, при переходѣ отъ Ox_1y_1z къ Ox_1y_2z', поворотъ дѣлается на уголъ θ и потому по тѣмъ же формуламъ имѣемъ:

$$y_1 = y_2\cos\theta - z'\sin\theta$$
$$z = y_2\sin\theta + z'\cos\theta$$
$$x_1 = x_1$$

Наконецъ при третьемъ вращеніи, при переходѣ отъ Ox_1y_2z' къ $Ox'y'z'$, поворачивая около z' на уголъ φ имѣемъ:

$$x_1 = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$$
$$y_2 = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$
$$z' = z'$$

Изъ этихъ уравненій исключимъ x_1, y_1, y_2 и выразимъ x, y и z черезъ x', y' и z'. Получимъ:

$$x = \cos\varphi(x'\cos\psi - y'\sin\psi) - \sin\varphi[\cos\theta(x'\sin\psi + y'\cos\psi) - z'\sin\theta]$$
$$y = \sin\varphi(x'\cos\psi - y'\sin\psi) + \cos\varphi[\cos\theta(x'\sin\psi + y'\cos\psi) - z'\sin\theta]$$
$$z = \sin\theta(x'\sin\psi + y'\cos\psi) + z'\cos\theta$$

Далѣе, раскрывъ скобки и соединивъ члены съ одинаковыми перемѣнными, имѣемъ:

$$x = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)x' + (-\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)y' + \sin\varphi\sin\theta z'$$
$$y = (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)x' + (-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta)y' - \cos\varphi\sin\theta z'$$
$$z = \sin\theta(x'\sin\psi + y'\cos\psi) + z'\cos\theta = x'\sin\theta\sin\psi + y'\sin\theta\cos\psi + z'\cos\theta.$$

Эти три выведенныхъ равенства и суть формулы **Эйлера**. Они не только симметричны и не только просты по внѣшнему виду, какъ равныя выведенныя

но имъ нужно отдать преимущество, потому что въ нихъ прямо входятъ три величины φ, ψ и ϑ, которыми геометрически опредѣляется положеніе новыхъ осей относительно старыхъ.

Эти формулы, какъ выше сказано, одно и то же что и прежнія должны быть съ ними тождественны.

Припомнимъ формулы Лагранжа:

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z'$$
$$y = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z'$$
$$z = a_3 x' + b_3 y' + c_3 z'$$

Замѣтимъ, что общій видъ тѣхъ и другихъ формулъ одинъ и тотъ же. Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ неизвѣстныхъ получаемъ рядъ равенствъ:

$$a_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta$$
$$b_1 = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta$$
$$c_1 = \sin\varphi\sin\vartheta$$

и тому подобныхъ, всего девять равенствъ.

Эти равенства выражаютъ зависимость между углами, косинусы которыхъ a_1, b_1, c_1 и т. д., и углами φ, ψ и ϑ.

О классификации поверхностей.

Всѣ поверхности по виду ихъ уравненій разбиваются на алгебраическія и трансцендентныя. Поверхности трансцендентныя выражаются трансцендентными уравненіями, поверхности алгебраическія — уравненіями алгебраическими. Если уравненіе, освобожденное отъ дробей и радикаловъ, имѣетъ высшій членъ $m^{ой}$ степени, то поверхность, имъ выражаемая, носитъ названіе $m^{аго}$ порядка.

Поверхность $1^{го}$ порядка представляется уравненіемъ $1^{ой}$ степени съ $3^{мя}$ неизвѣстными.

Самый общій видъ такого уравненія будетъ:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Поверхность, представляемая этимъ уравненіемъ, какъ извѣстно, есть плоскость.

Поверхности $2^{го}$ порядка представляются уравненіемъ $2^{ой}$ степени съ $3^{мя}$ неизвѣстными, общій видъ котораго такой:

$$Ax^2 + A_1y^2 + A_2z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + 2Cx + 2C_1y + 2C_2z + D = 0.$$

Здѣсь значки при B принято ставить такъ, чтобы значекъ соотвѣтствовалъ обозначенію отсутствующей въ произведеніи координаты.

Затѣмъ слѣдуютъ поверхности $3^{го}$, $4^{го}$ и т. д. порядковъ.

Чтобы показать, что такое разделение поверхностей по степеням их уравнений имеет смысл, покажем, что степень уравнения зависит от существенных свойств поверхности и что она не изменяется от расположения кривой. Для этого докажем теорему: Степень уравнения поверхности не изменяется при преобразовании координат.

Пусть уравнение поверхности $F(x, y, z) = 0$ есть алгебраическое $m^{ой}$ степени. Отнесем эту же поверхность к новой системе осей координат $Ox'y'z'$. Переход от старых осей к новым выразится формулами:

$$x = \alpha + A_1 x' + B_1 y' + C_1 z'$$
$$y = \beta + A_2 x' + B_2 y' + C_2 z'$$
$$z = \gamma + A_3 x' + B_3 y' + C_3 z'.$$

Новое уравнение поверхности будет:

$$F(\alpha + A_1 x' + B_1 y' + C_1 z', \beta + A_2 x' + B_2 y' + C_2 z', \gamma + A_3 x' + B_3 y' + C_3 z') = 0.$$

Степень нового уравнения не может быть выше степени первоначального, так как вместо x, y и z мы подставили линейные функции новых координат. Доказав таким образом, что степень уравнения поверхности не может быть повышена переменою системы координат, мы тем самым докажем, что она не может быть также понижена, так как в противном случае при обратном переходе

от новой системы к старой, мы должны бы были допустить, что степень уравнения может повыситься при преобразовании координат.

Степень уравнения, не завися от частного расположения поверхности, зависит от некоторых определенных и существенных ея свойств, что показывают следующия теоремы:

Теорема I. *Поверхность $m^{го}$ порядка разсекается произвольной плоскостью по кривой линии, порядок которой не может быть выше m.*

Положим, что имеем уравнение поверхности $f(x,y,z)=0$ $m^{ой}$ степени. Разсечем ее произвольной плоскостью. Изобразим мысленно новую систему координат $O'x'y'z'$, в которой плоскость $x'y'$ совпадает с сьекущей плоскостью, а оси могут быть направлены как угодно. Перейдем от старых осей к новым, т. е. сделаем преобразование координат, получим новое уравнение той же поверхности: $F(x',y',z')=0$. Но как при преобразовании координат порядок поверхности не может измениться, то это новое уравнение будет вообще $m^{ой}$ степени относительно x',y',z'. Положив в уравнении $F(x',y',z')=0$ координату $z'=0$, получаем уравнение кривой сьечения на ея плоскости: $F(x',y',0)=0$, С степень которого мысленно z' нулем, не могла повыситься

что и требовалось доказать.

Примѣчаніе. На основаніи этой теоремы заключаемъ, что сѣченіе поверхности $2^{го}$ порядка плоскостью представляетъ изъ себя кривую $2^{го}$ порядка, и только въ частномъ случаѣ оно можетъ представить прямую линію.

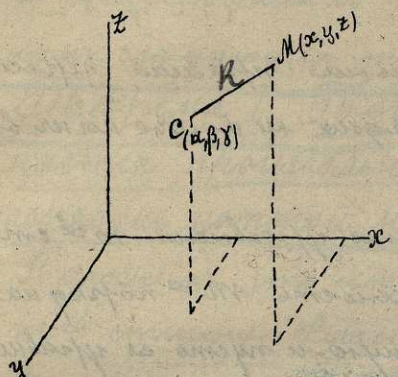
Теорема II. Произвольная прямая пересѣкаетъ поверхность $m^{го}$ порядка не болѣе какъ въ m точкахъ.

Пусть опять $F(x,y,z)=0$ есть уравненіе $m^{ой}$ степени и представляетъ поверхность $m^{го}$ порядка. Возьмемъ произвольную прямую и пусть ея уравненія будутъ: $x=az+p$ и $y=bz+q$; будемъ искать пересѣченія этой прямой съ поверхностью, для чего изъ этихъ $3^{хъ}$ уравненій надо опредѣлить x, y и z, которые и будутъ координатами точки пересѣченія. Исключая x и y, получимъ уравненіе: $F(az+p, bz+q)=0$. Изъ этого уравненія мы найдемъ z для точекъ пересѣченія. Но такъ какъ x и y въ уравненіи линіи выразятся линейно относительно z, то функція F относительно z есть $m^{ой}$ степени. Полное уравненіе можетъ имѣть не болѣе m дѣйствительныхъ корней, слѣдовательно и точекъ пересѣченія будетъ не болѣе m.

Примѣчаніе. По этой теоремѣ поверхность 2-го порядка пересѣкается произвольною прямою не болѣе какъ въ 2 точкахъ.

Уравненіе сферической поверхности.

Разсмотримъ сферу, отнесенную къ тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Пусть координаты центра будутъ α, β и γ и радіусъ ея $CM = R$. Для каждой точки M мы можемъ выразить длину CM черезъ координаты точекъ C и M. Разсматривая сферу какъ геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ C, будемъ имѣть уравненіе сферы:



$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \ldots\ldots (1)$$

Если центръ въ началѣ координатъ, то $\alpha=\beta=\gamma=0$, и уравненіе сферы будетъ: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Раскрывъ скобки въ уравненіи (1), получимъ его такъ: $x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2=0$

Изъ уравненія видимъ, что сфера есть поверхность второго порядка. Возьмемъ общее уравненіе поверхности второго порядка:

$$Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2B_3yz+2B_1xz+2B_2xy+2Cx+2C_1y+2C_2z+D=0$$

и сравнимъ его съ уравненіемъ сферы; тогда замѣ-

тимъ, что въ уравненіи сферы нѣтъ членовъ съ произведеніями координатъ, а потому чтобы послѣднее уравненіе представило сферу, необходимо, чтобы въ немъ было: $B=0,\ B_1=0,\ B_2=0$; тогда уравненіе приметъ видъ: $Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2Cx+2C_1y+2C_2z+D=0$. Произведя сравненія далѣе, видимъ, что для того, чтобы уравненіе можно представить сферу, необходимо, чтобы коэффиціенты при x^2, y^2 и z^2 были равны, т. е. нужно, чтобы $A=A_1=A_2$; тогда раздѣливъ все уравненіе на A, мы получимъ его въ такомъ видѣ:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0.$$

Это послѣднее уравненіе можетъ представлять сферу. Положимъ, что намъ дано такое уравненіе; разсмотримъ, представляетъ ли оно сферу, и если представляетъ, то какую? Для этого мы постараемся это уравненіе привести къ первоначальному виду уравненія сферы:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\delta)^2=R^2.$$

Для такого приведенія прибавимъ къ первой части и вычтемъ $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}$; получимъ:

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}+z^2+cz+\frac{c^2}{4}+d-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}-\frac{c^2}{4}=0$$

или $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ сферы,

мы видим, что оно представляет точку ~~сферу~~ сферу, для которой $\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2}, \gamma = -\frac{c}{2}$, а $R^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$, откуда $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$.

Эта сфера действительно существует при условии, что $a^2+b^2+c^2 > 4d$; если же $a^2+b^2+c^2 < 4d$, то, так как выражение радиуса мнимо, и сфера будет мнима. Если $a^2+b^2+c^2 = 4d$, то $R = 0$ и сфера обратится в точку, совпадающую с центром.

Уравнения поверхностей, образуемых движением линий.

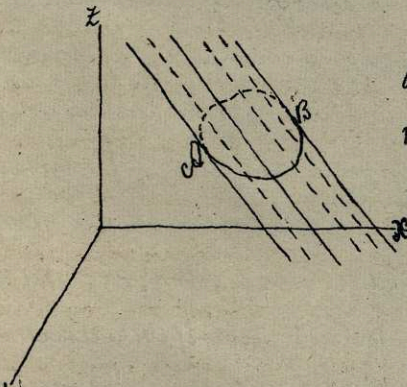
Многие поверхности рассматриваются, как происходящие от движения прямой или кривой в пространстве по извѣстному закону; тогда поверхность есть слѣд, оставляемый линией при движении. Линия, описывающая поверхность, называется образующей. Если образующая есть прямая, то описываемая ею поверхность называется линейчатою. Если же поверхность не может быть образована движением прямой, то она называется кривой. Иногда линейчатую поверхность можно развернуть в плоскость, как например цилиндрическую или коническую поверхность; тогда она называется развертывающеюся. Если же развернуть

поверхность нельзя без разрыва частей, то она имеет название **косой**.

Линей частных поверхностей разделяются на три класса. Охарактеризуем теперь каждый из этих классов и дадим общие типы уравнений поверхностей, принадлежащих к тому или другому классу.

Поверхности цилиндрические.

Цилиндрические поверхности образуются движением прямой, скользящей по данной кривой, называемой **направляющей**, при чем образующая прямая во всяком положении параллельна самой себе.



При таких общих условиях можно найти тип уравнений, выражающих произвольную цилиндрическую поверхность. Положим для общности, что оси косоугольны.

Пусть AB произвольная кривая в пространстве, которую мы берем за направляющую. Ея уравнения пусть будут $f(x, y, z) = 0$ и $\varphi(x, y, z) = 0$, при чем функции f и φ будем считать совершенно произвольными. Каждая из образующих представится уравнениями: $x = mz + p$ и $y = nz + q$. Для всех образующих угловые коэф-

функціонеты m и n остаются одни и тѣ же, а p и q будутъ измѣняться при перемѣщеніи образующей; эти послѣднія количества называются **перемѣнными параметрами образующей.**

Для того, чтобы выразить, что эта прямая во всѣхъ своихъ положеніяхъ пересѣкается съ направляющею, необходимо выразить, что четыре написанныя уравненія удовлетворяются координатами точки пересѣченія. Найдя изъ трехъ уравненій вполнѣ опредѣленныя координаты, мы подставляемъ ихъ въ 4-ое уравненіе. Полученное уравненіе не будетъ содержать текущихъ координатъ и выразитъ условіе, долженствующее существовать при пересѣченіи образующей съ направляющей. Направляющая вполнѣ опредѣлена и потому коэффиціенты въ ея уравненіяхъ извѣстны; m и n тоже извѣстны, такъ какъ каждое направленіе образующей дано; перемѣнными въ нашемъ уравненіи будутъ только p и q. Поэтому наше уравненіе будетъ: $F(p, q) = 0$ или $p = \varphi(q)$. Это уравненіе называется **условнымъ уравненіемъ между параметрами.** Относительно вида этого уравненія замѣтимъ, что видъ функціи F или все равно φ будетъ зависѣть отъ вида функ-

цій f и φ, которыя мы считаемъ совершенно произвольными, вслѣдствіе чего функцію F или функцію φ всегда будемъ считать также произвольными. Отъ условнаго уравненія между параметрами легко перейти къ уравненію поверхности. Дѣйствительно изъ уравненій образующей имѣемъ: $p = x - mz$ и $q = y - nz$

гдѣ x, y и z будутъ координаты произвольной точки какой угодно образующей. Вставимъ эти выраженія въ условное уравненіе получимъ:

$$x - mz = \varphi(y - nz)$$

Въ этомъ уравненіи координаты x, y и z будутъ координаты произвольной точки цилиндрической поверхности; поэтому это уравненіе будетъ уравненіемъ цилиндрической поверхности. Функція φ, какъ мы сказали, совершенно произвольна. Давая ей различные виды, будемъ получать безчисленное множество цилиндрическихъ поверхностей, и поэтому предыдущее уравненіе есть общее уравненіе цилиндрическихъ поверхностей. Уравненіе это имѣетъ нѣкоторую опредѣленную форму, благодаря чему по виду данного уравненія поверхностей можно узнать, представляетъ ли оно цилиндрическую поверхность или нѣтъ; наприм., пусть дано урав-ій.:

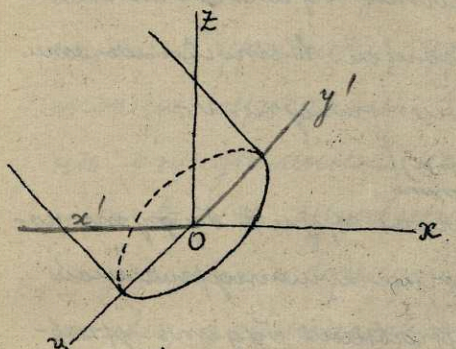
1) $x - mz = (y - nz)^3$

2) $a(x-mz)^2 + b(y-nz)^2 = c$

Это суть уравнения цилиндрических поверхностей, потому что в обоих них $x - mz$ есть некоторая ф-ия $y - nz$

Пример 1. Составить уравнение косого цилиндра с эллиптическим основанием.

Положим, что направляющая цилиндра есть эллипс, лежащий в плоскости xy, так что оси эллипса совпадают с осями $x^{ов}$ и $y^{ов}$. Уравнения эллипса будут: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $z = 0$.



Эти два уравнения представляют направляющую. Образующие будут представлены двумя уравнениями $x = mz + p$ и $y = nz + q$, в которых m и n постоянные, а p и q переменные параметры. Выразим условие пересечения образующей с направляющей. Для точек пересечения образующих с плоскостью xy должно быть $z = 0$ и потому имеем уравнения: $x = p$ и $y = q$.

Подставив затем эти величины для x и y в уравнение направляющей получаем:

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1.$$

Это есть условное уравнение между параметрами p и q, которое должно быть удовлетворено для того, что

пересѣченія имѣло мѣсто.

Для того, чтобы перейти теперь къ уравненію поверхности, возвратимся къ уравненіямъ образующихъ, гдѣ теперь благодаря условному уравненію неопредѣленныя величины p и q могутъ быть исключены. Для этого подставимъ въ условное уравненіе вмѣсто p и q равныя имъ величины $x - mz$ и $y - nz$, найденныя изъ уравненій образующей. Получаемъ: $\frac{(x-mz)^2}{a^2} + \frac{(y-nz)^2}{b^2} = 1$.

Это есть уравненіе косого цилиндра съ эллиптической направляющей.

2) Уравненіе гиперболическаго цилиндра.

Если бы за направляющую взяли гиперболу, то подставляя вмѣсто $b^2 - (-b^2)$, получили бы уравненіе цилиндрической поверхности такого вида:

$$\frac{(x-mz)^2}{a^2} - \frac{(y-nz)^2}{b^2} = 1.$$

3) Если направляющая есть окружность круга, то $a = b$ и уравненіе цилиндрической поверхности получится: $(x-mz)^2 + (y-nz)^2 = a^2$.

4) Разберемъ теперь самый общій случай. Примемъ за направляющую произвольную кривую второго порядка, лежащую въ плоскости xy. Уравненія этой кривой будутъ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{и} \quad z = 0.$$

Уравненія образующей, какъ и прежде суть:

$x = mz + p$ и $y = nz + q$.

Для точек пересечения этихъ образующихъ съ плоскостью xy имѣемъ: $x = p$, $y = q$.

Но точки кони эти точки лежатъ на конической кривой, то уравненію ея удовлетворяютъ p и q и потому

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F = 0$$

Разсмотримъ теперь всѣ точки, находящіяся на образующихъ. Кони и прежде найдемъ p и q

$$p = x - mz \quad \text{и} \quad q = y - nz.$$

Подставляя получимъ:

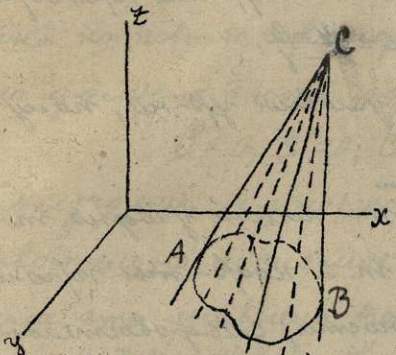
$$A(x - mz)^2 + B(x - mz)(y - nz) + C(y - nz)^2 + D(x - mz) + E(y - nz) + F = 0$$

Примѣчаніе. Если направляющая будетъ второго порядка, то, кони видимъ, и цилиндрическая поверхность будетъ второго порядка, такъ кони полученное нами уравненіе есть ур-ніе второй степени.

Коническія поверхности.

Коническія поверхности образуются движеніемъ прямой по данной кривой направляющей, при чемъ образующая прямая во всѣхъ своихъ положеніяхъ проходитъ постоянно черезъ одну и туже точку, которая называется вершиной конической поверхности. Положимъ, оси косоугольны. Пусть AB — кривая направляющая, ея уравненія пусть будутъ: $f(x,y,z) = 0$ и $\varphi(x,y,z) = 0$. Будемъ счи-

точь функцій f и φ совершенно произвольными и, слѣдовательно будемъ разсматривать направляющую, какъ данную кривую совершенно произвольнаго вида. Пусть затѣмъ данная точка C съ координатами α, β и γ будетъ вершиной конической поверхности. Образующія проходятъ черезъ C и пересѣкаются съ кривою AB. Уравненія образующей, точь проходящей черезъ точку C будутъ: $x-\alpha = m(z-\gamma)$ и $y-\beta = n(z-\gamma)$.



Въ этихъ уравненіяхъ m и n будутъ измѣняться при переходѣ отъ одной образующей къ другой, стало быть m и n суть перемѣнные параметры образующей.

Изыщемъ условіе пересѣченія образующей съ направляющей. Координаты точки пересѣченія должны удовлетворять написаннымъ 4^мъ уравненіямъ вмѣстѣ. Исключивъ изъ этихъ ур-ній x, y и z, мы получимъ условное ур-ніе между параметрами, которое должно удовлетворяться, если пересѣченіе имѣетъ мѣсто. Въ это условное ур-ніе войдутъ перемѣнныя m и n и оно приметъ видъ нѣкотораго соотношенія между параметрами. Пусть оно будетъ $F(m,n)=0$, отсюда найдемъ, что $n=\psi(m)$.

Функція F или точнѣе ψ могутъ быть считаемы

совершенно произвольною, потому что это ур-ние получилось, как результат исключения x, y и z из 4-х ур-ний, из которых два совершенно произвольны. Из ур-ний все образующей всегда имеем: $m = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}$ и $n = \frac{y-\beta}{z-\gamma}$.

Вставив эти выражения в условное ур-ние, получим

$$\frac{y-\beta}{z-\gamma} = \varphi\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)$$

Коор-ты x, y и z суть коор-ты какой угодно точки из произвольных образующихся, т. е. коор-ты произвольной точки конической поверхности; следовательно, это есть ур-ние конической поверхности.

В этом ур-нии φ есть совершенно произвольная функция и, давая ей различные виды, мы можем получить из этого ур-ния бесчисленное множество ур-ний конических поверхностей; аргумент все функции имеет свой определенный вид, благодаря чему мы можем по данному ур-нию узнать представляет ли оно коническую поверхность или нет.

Это уравнение есть общее ур-ние всех конических поверхностей. В частном случае, когда вершина находится в начале координат, будем иметь $\alpha = \beta = \gamma = 0$ и ур-ние конуса обратится в $\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right)$.

Это есть ур-ние конуса, вершина которого находится в начале координат. Уравнение это однородно относительно x, y и z и потому нетрудно можно прямо узнать, что данное уравнение представляет конус,

вершина которого въ началѣ координатъ. Возьмемъ общее уравненіе 2го порядка:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2By z+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

и опредѣлимъ, когда оно представляетъ конусъ, вершина которого совпадаетъ съ началомъ координатъ. Оно должно быть однородно и потому положимъ

$$C=0,\ C'=0,\ C''=0 \text{ и } D=0$$

Получимъ однородное уравненіе, которое и есть слѣдовательно искомое: $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0$.

Если это уравненіе раздѣлимъ на z^2, то оно будетъ:

$$A\left(\frac{x}{z}\right)^2+A'\left(\frac{y}{z}\right)^2+A''+2B\left(\frac{y}{z}\right)+2B'\left(\frac{x}{z}\right)+2B''\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{z}\right)=0.$$

Мы видимъ, что здѣсь входятъ два переменныхъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ и если это уравненіе рѣшимъ относительно $\frac{y}{z}$, то $\frac{y}{z}$ изъ него получится, какъ функція $\frac{x}{z}$, т. е. будемъ имѣть уравненіе вида: $\frac{y}{z}=\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$.

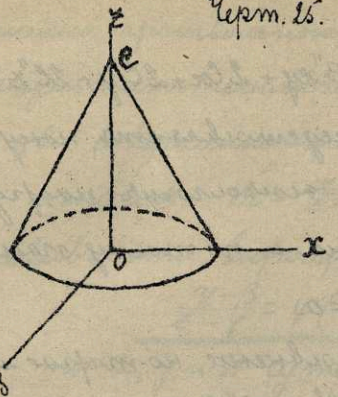
Это уравненіе представляетъ конусъ, имѣющій вершину въ началѣ координатъ.

Примѣръ. Составить уравненіе прямого конуса съ эллиптическимъ основаніемъ при слѣдующемъ заданіи. Положимъ, что оси прямоугольны; за направляющую примемъ эллипсъ, лежащій въ плоскости xy. Его уравненія пусть будутъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $z=0$.

Вершину C возьмемъ на оси z-овъ, причемъ $OC=c$; тогда будемъ имѣть координаты C: $\alpha=0$, $\beta=0$ и $\gamma=c$. Уравненія образующей будутъ $x=m(z-c)$ и $y=n(z-c)$. (черт. 25)

Для пересечения образующей съ направляющей имѣемъ

Черт. 25.



$z=0$, а изъ уравненій образующихъ получимъ $x=-mc$ и $y=-nc$. и слѣдовательно, вставивъ, получимъ: $\frac{m^2c^2}{a^2}+\frac{n^2c^2}{b^2}=1$ или

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=\frac{1}{c^2}$$

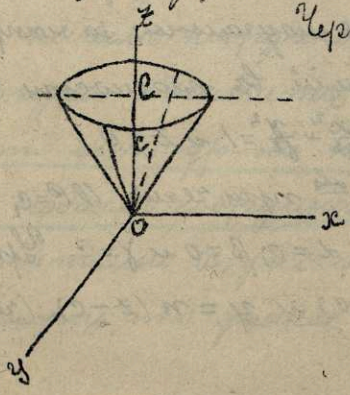
Это есть условное уравненіе между параметрами m и n, которое непремѣнно должно удовлетворяться для того, чтобы образующая пересѣкалась съ направляющей. Изъ ур-й образующей имѣемъ: $m=\frac{x}{z-c}$; $n=\frac{y}{z-c}$.

Вставивъ эти выраженія m и n въ условное ур-ніе получимъ: $\frac{x^2}{a^2(z-c)^2}+\frac{y^2}{b^2(z-c)^2}=\frac{1}{c^2}$ или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(z-c)^2}{c^2}$.

Это будетъ ур-ніе конической поверхности. Въ частномъ случаѣ, когда направляющею будетъ кругъ, т. е. когда будетъ $a=b$, тогда ур-ніе будетъ: $x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(z-c)^2$.

Примѣръ 2-й. Составить ур-ніе прямого конуса, вершина котораго лежитъ въ началѣ координатъ, а направляющею служитъ эллипсъ, лежащій въ плоскости параллельной съ плоскостью xy.

Черт. 26



Положимъ, что направляющая лежитъ въ плоскости параллельной xy и проходящей черезъ точку C, причемъ $OC=c$; оси эллипса пусть будутъ параллельны осямъ

$x^{\text{отн}}$ и $y^{\text{отн}}$ (черт. 25). При этомъ ур-ія направляющей будутъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $z=c$. Ур-ія образующей будутъ: $x=mz$ и $y=nz$, такъ какъ образующая проводитъ черезъ начало координатъ. Для пересѣченія образующей съ направляющей будемъ имѣть: $z=c$, $x=mc$, $y=nc$; вставивъ въ 1-е ур-ія, получимъ $\frac{m^2c^2}{a^2}+\frac{n^2c^2}{b^2}=1$, или $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=\frac{1}{c^2}$.

Это есть условное ур-ie между параметрами т и п.

Изъ ур-ія образующей имѣемъ: $m=\frac{x}{z}$ и $n=\frac{y}{z}$.

Вставивъ въ условное ур-ie получимъ:

$\frac{x^2}{a^2z^2}+\frac{y^2}{b^2z^2}=\frac{1}{c^2}$ или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

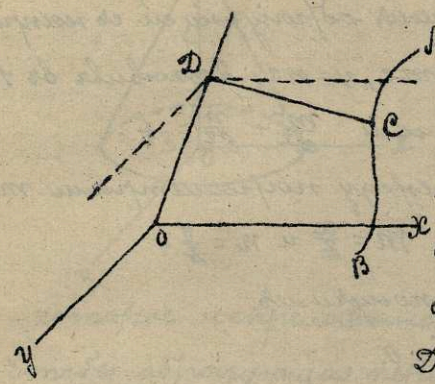
Это будетъ ур-ie треугольной конической поверхности.

Поверхности коноидальныя.

Коноидомъ называется поверхность, образуемая движеніемъ прямой, которая перемѣщается по двумъ неподвижнымъ направляющимъ, при чемъ одна изъ направляющихъ есть прямая, а другая можетъ быть и кривою; образующая все время движенія остается параллельна одной постоянной плоскости.

Коноидъ называется прямымъ, когда образующая перпендикулярна къ прямой направляющей, т. е. иначе говоря, когда прямая направляющая перпендикулярна къ той плоскости, параллельно которой движется образующая. При составленіи ур-ія коноида мы за данную прямую направляющую примемъ ось $z^{\text{отн}}$, а плоскость xy, возьмемъ параллельную той плоскости, параллельно которой движется

образующая. При этомъ оси координатъ будутъ считаться косоугольными. Пусть AB — другая направляющая кривая (черт. 27)



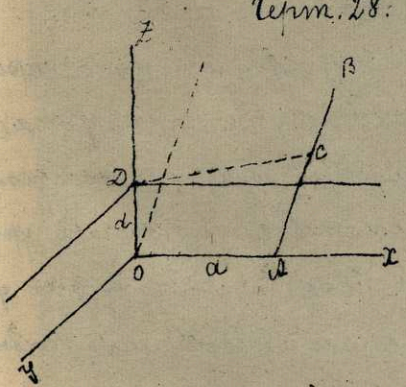
Черт. 27

Ур-нія ея пусть будутъ: $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$, при чемъ функціи f и φ будемъ считать совершенно произвольными. Чтобы получить одну изъ образующихъ, проведемъ плоскость параллельную плоскости xy; она пересѣчетъ ось $z^{ов}$ въ точкѣ D и кривую AB — въ точкѣ C. Тогда, соединивъ D съ C, получимъ прямую образующую. Ур-нія этой прямой получатся: Во-первыхъ, взявъ ур-нія плоскости, параллельной xy, въ которой эта прямая лежитъ; это ур-нія будетъ $z=\gamma$ и во-вторыхъ, взявъ ур-нія плоскости, проходящей черезъ эту прямую и ось $z^{ов}$; уравненіе ея будетъ $y=\alpha x$. Итакъ ур-нія образующей будутъ $z=\gamma$ и $y=\alpha x$. Въ этихъ ур-ніяхъ α и γ будутъ перемѣнными параметрами. Выразимъ условіе пересѣченія образующей съ направляющею. Въ точкѣ пересѣченія должны удовлетворяться всѣ 4 написанныя ур-нія. Исключивъ изъ нихъ x, y и z, мы получимъ условіе пересѣченія. Въ это условное ур-нія войдутъ перемѣнные параметры α и γ и потому оно представится въ видѣ $F(\alpha,\gamma)=0$, отсюда $\gamma=\psi(\alpha)$, гдѣ ψ есть совершенно произвольная функція, потому что f и φ совершенно произвольны. Но изъ ур-нія образующей имѣемъ $\gamma=z$ и $\alpha=\frac{y}{x}$;

внося это въ условное ур-ніе, найдемъ $z = \varphi(\frac{y}{x})$. Это будетъ общее ур-ніе коническихъ поверхностей, потому что x, y и z въ него входящіе, суть координаты точки произвольной какой нибудь изъ образующихъ, т. е. коор-ты произвольной точки поверхности.

Конусъ примѣръ конуса составимъ ур-ніе поверхности, образуемой движеніемъ прямой по двумъ прямымъ направляющимъ, при чемъ образующая всегда параллельна одной и той же плоскости. Возьмемъ прямоугольныя оси $Oxyz$ (черт. 28) и пусть ось z есть одна изъ направляющихъ; другая направляющая

Черт. 28.



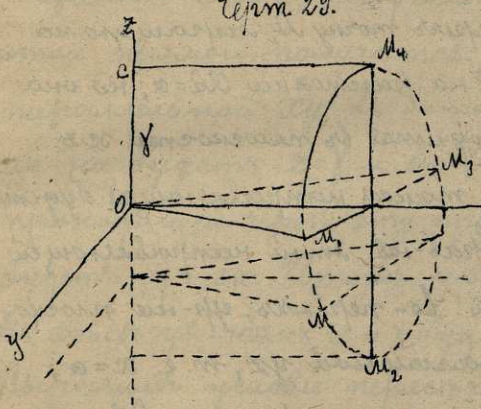
параллельна плоскости yz и проходитъ черезъ точку A, лежащую на оси x на разстояніи $OA = a$; но она не находится въ плоскости xz. Пусть такая направляющая будетъ AB. Ур-нія этой направляющей будутъ: во-первыхъ, ур-ніе плоскости, проходящей черезъ A и параллельной yz, т. е. $x = a$; во-вторыхъ, ур-ніе плоскости проходящей черезъ AB и черезъ ось x; оно будетъ $y = bz$; эти два ур-нія и дадутъ направляющую. Ур-нія произвольной образующей, пересѣкающей ось z и параллельной плоскости xy, будутъ очевидно $z = \gamma$, $y = \alpha x$. Здѣсь α и γ — перемѣнные параметры. Выразимъ условіе пересѣченія образующей съ направляющей. Въ точкѣ пересѣченія имѣемъ: $x = a$, $z = \gamma$, $y = b\gamma$; вставивъ въ послѣднее ур-ніе получимъ: $b\gamma = ax$. Это есть условное ур-ніе между

параметрами α и β. Но ур-ния образующей имѣемъ: $\gamma = z$ и $\alpha = \frac{y}{x}$; слѣдовательно, вставивъ въ условное ур-ніе, получимъ: $bz = \frac{ay}{x}$ или $bxz - ay = 0$. Это и будетъ ур-ніе поверхности. Мы видимъ, что эта поверхность 2го порядка.

Поверхность эта называется **гиперболическимъ параболоидомъ** или иначе **косою плоскостью**.

Примѣръ II. Ось z овъ перпендикулярна той плоскости, параллельно которой перемѣщается образующая. Образующая кромѣ оси z овъ пересѣкаетъ еще эллипсъ, лежащій въ плоскости параллельной yz. Ур-ія его: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ и $x = a$.

Черт. 29.



Уравненія образующей, коей параллельной xy, будутъ: $z = \gamma$ и $y = \alpha x$ (черт. 29). Пересѣченіе образующей съ эллипсомъ обусловливается слѣдующимъ ур-ніемъ $\frac{a^2x^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$. Подставивъ въ это уравненіе вмѣсто α и γ величины равныя имъ (на основаніи ур-ній образующей) получимъ: $\frac{a^2y^2}{b^2x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

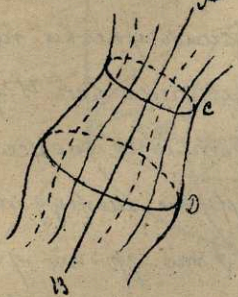
Это ур-ніе 4й степени. Поверхность, опредѣляемая имъ, называется **коноидальнымъ клиномъ**.

Поверхности вращенія.

Поверхность вращенія образуется вращеніемъ плоской кривой CD около неподвижной прямой AB (черт. 30); при этомъ разстояніе каждой точки M кривой остается постояннымъ и каждая точка описываетъ кругъ, центръ котораго лежитъ

на оси Az; именно это есть подошва перпендикуляра, опущенного из точки на ось; радиусом круга служит расстояние точки от оси, а плоскость круга перпендикулярна к оси вращения. Въ этой поверхности вѣ сѣченія перпендикулярныя къ оси вращенія будутъ круги различныхъ радіусовъ, называемыя параллелями, а вѣ сѣченія, проходящія черезъ ось, будутъ одинаковыя кривыя, называемыя меридианами поверхности.

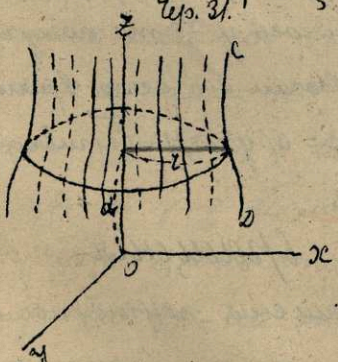
Черт. 30.



Для составленія уравненія поверхности вращенія удобнѣе принять для нея другой способъ образованія, именно кривую CD мы будемъ разсматривать какъ неподвижную и будемъ принимать ее за направляющую; образующею же пусть будетъ кругъ, центръ котораго перемѣщается по оси вращенія, и плоскость его остается перпендикулярной къ этой оси. Во время движенія радіусъ круга измѣняется такъ, что этотъ кругъ постоянно соприкасается съ кривою CD направляющею.

Составимъ общее ур-ніе поверхностей вращенія, принимая сначала за ось вращенія одну изъ осей координатъ (черт. 31).

Черт. 31.



Положимъ оси прямоугольны и пусть Oz есть ось вращенія, а CD направляющая линія. CD будетъ совершенно произвольная кривая. Ур-нія ея $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$, гдѣ функціи f и φ произвольны. Ур-нія образующаго круга получатся, взявъ: 1) ур-ніе плоскости, параллельной xy, положимъ $z=\alpha$,

и 2) взяв в проекцию круга на плоскость xy или все равно ур-ние цилиндра, проектирующего круг на плоскость xy; это ур-ние будет $x^2+y^2=r^2$. При движении круга параметры α и r^2 будут изменяться. Это суть переменные параметры образующей. Выразим условие пересечения образующей с направляющей. В точке пересечения все 4 ур-ния должны удовлетворяться вместе, следовательно можем исключить x, y и z и мы получим условное ур-ние между параметрами α и r^2 вида $F(\alpha, r^2)=0$ или $\alpha=\varphi(r^2)$. Это ур-ние должно удовлетворяться для того, чтобы пересечение имело место. В ур-нии этом фу-ция φ должна считаться совершенно произвольною, потому что она получилась в результате исключения из 4 ур-ний, из которых два совершенно произвольны.

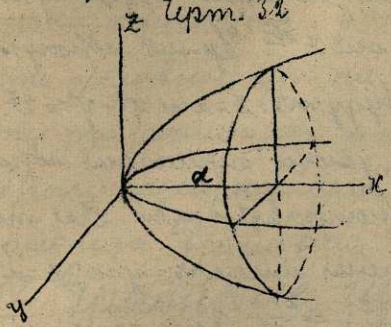
Вставим теперь в условное ур-ние вместо параметров α и r^2 их выражения из ур-ний образующей, получим $z=\varphi(x^2+y^2)$. Это будет ур-ние рассматриваемой поверхности вращения, потому что x, y и z в него входящий суть координаты произвольной точки одной из образующих, т. е. координаты произвольной точки поверхности. Мы получили общее ур-ние поверхностей вращения, когда ось вращения служит ось $z^{ов}$. Если бы за ось вращения взяли бы ось $y^{ов}$, то получили бы ур-ние такого вида: $y=\varphi(x^2+z^2)$; а если бы осью вращения была ось $x^{ов}$, то ур-ние было бы $x=\varphi(y^2+z^2)$. Приведем примеры поверхностей вращения.

I. Уравнение параболоида вращения.

Параболоид получается от вращения параболы около оси $x^{ов}$. Положим, что в прямоугольной системе

координатах отнесена парабола, ось которой совпадает с осью $x^{ов}$, а вершина лежит в О. Ур-ние этой параболы в плоскости xz будет $z^2=2px$; а в пространстве надо еще присоединить ур-ние $y=0$. Вращая эту параболу около оси $x^{ов}$ мы получаем параболоид вращения. Как в общем случае будем здесь рассматривать эту кривую за направляющую, образующая же будет круг, центр которого перемещается по оси $x^{ов}$, а плоскость остается параллельной плоскости yz. Ур-ния образующего круга будут: $x=\alpha$ и $y^2+z^2=r^2$, где α и r суть переменные параметры. Для того, чтобы образующая перешла с направляющею, нами 4 ур-ния, как мы уже не раз говорили, должны быть совместны. Исключив из них x, y и z имеем: из ур-ний 3-го и 4-го $x=\alpha$, $z^2=r^2$ или $z=r$. Вставив в 1-е ур-ие, получим $r^2=2p\alpha$. Это будет условие ур-ний между параметрами; заменив r^2 и α их ур-ний образующей, получим: $y^2+z^2=2px$ – уравнение параболоида вращения.

Черт. 32

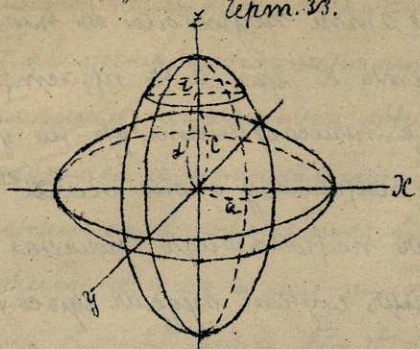


II. Уравнение эллипсоида вращения.

Возьмем эллипс в плоскости xz, которого оси совпадают с осями $x^{ов}$ и $z^{ов}$. Ур-ние его в плоскости xz будет: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, а в пространстве надо присоединить еще ур-ние $y=0$. Положим, эллипс вращается около оси $z^{ов}$ (черт. 33); он и опишет эллипсоид вращения. Чтобы получить ур-ние этого эллипсоида, мы примем взятый нами эллипс за направляющую, а образующею пусть

будет круг, центр которого перемещается по оси z ов, а плоскость его остается перпендикулярной к оси z ов. Ур-ния образующего круга будут: $z=\alpha$ и $x^2+y^2=r^2$. Выразим условие пересечения образующей с направляющей. Для точки пересечения имеем: $y=0$, $z=\alpha$, $x=r$.

Черт. 33.

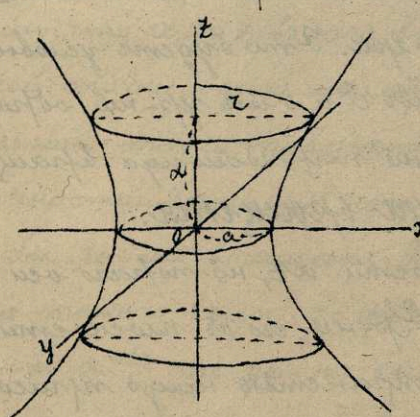


Подставив в 1-е ур-ние, получим $\frac{r^2}{a^2}+\frac{\alpha^2}{c^2}=1$. Это есть условное ур-ние между параметрами. Заменив параметры их ур-ний образующей получим: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Это будет ур-ние эллипсоида вращения.

III. Уравнение гиперболоида вращения с одной полостью. В плоскости xz возьмем гиперболу, мнимая ось которой совпадает с осью z ов, а действительная с осью x ов (черт. 34). Ур-ние этой гиперболы в плоскости xz будет: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, а в пространстве надо еще присоединить ур-ние $y=0$. Положим, что гипербола вращается около оси z ов; она опишет поверхность, называемую гиперболоидом вращения с одной полостью. При составлении ур-ния поверхности гиперболоида вращения, примем гиперболу за направляющую. Ур-ния всех образующего круга будут: $z=\alpha$ и

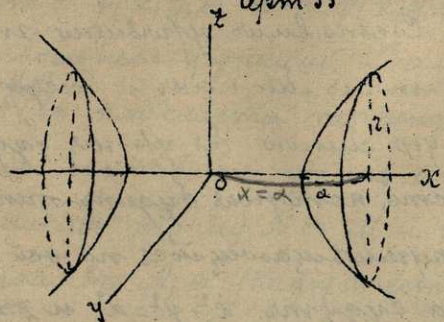
Черт 34



$x^2+y^2=r^2$. Исключив x, y, z из 4 ур-ний, находим для точки пересечения: $y=0, z=\alpha, x=r$; затем $\frac{r^2}{a^2}-\frac{\alpha^2}{c^2}=1$. Это есть условное ур-ние между параметрами. Исключив эти параметры α и r их выражениями из ур-ний образующей, найдем $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это есть ур-ние гиперболоида вращения с одной полостью.

IV. Уравнение гиперболоида вращения с двумя полостями. Возьмем ту ур-ю гиперболу в плоскости xz; ее ур-ния будут: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ и $y=0$. Положим,

Черт 35



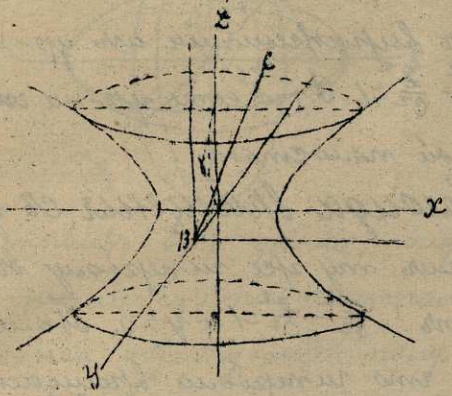
что гипербола вращается около своей главной оси, т.е. около оси x-ов. При этом она опишет поверхность, состоящую из двух бесконечных полостей, называемую гиперболоидом вращения с двумя полостями.

Примем гиперболу за направляющую. Ур-ния образующего круга будут: $x=\alpha$ и $y^2+z^2=r^2$. Исключим x, y и z. Имеем для пересечения образующей с направляющей: $y=0, x=\alpha$ и $z=r$ и следовательно $\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{r^2}{c^2}=1$. Это есть условное ур-ние между параметрами. Исключив α и r получим: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$. Это и будет ур-ние гиперболоида вращения с двумя полостями.

V. Составить ур-ние поверхности вращения, происходящей от обращения одной прямой около другой, полагая, что эти прямые не находятся

въ одной плоскости. Возьмемъ опять прямоугольныя оси координатъ. На оси y-овъ возьмемъ произвольную точку B и пусть $OB=b$. Черезъ эту точку проведемъ плоскость, параллельную xz и въ этой плоскости черезъ точку B проведемъ произвольную прямую положимъ BC. Вообразимъ далѣе, что прямая BC вращается около оси z-овъ. Составимъ уравненіе этой поверхности вращенія. При этомъ мы, какъ и всегда, примемъ прямую BC за направляющую линію. Ея ур-нія будутъ очевидно $x=az$ и $y=b$. Окружность, которая будетъ теперь образующей, имѣетъ центръ, перемѣщающійся по оси z-овъ. Ур-нія образующаго круга будутъ: $x^2+y^2=a^2$ и $z=\gamma$. Исключивъ x, y и z, получимъ: $y=b, z=\gamma$ и $x=a\gamma$. Подставивъ, получимъ: $a^2\gamma^2+b^2=a^2$. Это есть условное ур-ніе между параметрами. Замѣнивъ въ немъ a^2 и γ ихъ выраженіями изъ ур-ній образующей, получимъ: $a^2z^2+b^2=x^2+y^2$ или $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{a^2z^2}{b^2}=1$. Въ этомъ ур-ніи мы узнаемъ гиперболоидъ вращенія съ одной полостью.

Чер. 36.

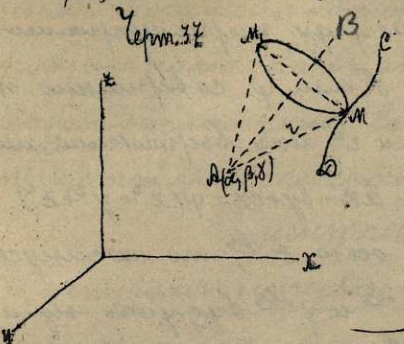


Общее уравненіе поверхностей вращенія около произвольной оси.

Возьмемъ точку A (чер. 37); ея координаты α, β и γ. Проведемъ черезъ эту точку прямую AB, которая дѣлаетъ съ

осями координатъ углы, косинусы которыхъ соотвѣтственно пропорціональны тремъ количествамъ a, b и c. Ур-нія этой прямой будутъ: $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$.

Черт. 37



Пусть эта прямая (совершенно произвольная) будетъ осью вращенія. Далѣе пусть CD — кривая линія, которая, вращаясь около AB, производитъ поверхность вращенія (чер. 37). Эту кривую примемъ за направляющую — ея ур-нія пусть будутъ: $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$. Здѣсь f и φ совершенно произвольныя функціи. Далѣе, возьмемъ образующій кругъ MM' въ плоскости перпендикулярной къ оси вращенія. Чтобы составить ур-нія этого круга, мы, во-первыхъ, соединимъ точку A съ M и возьмемъ сферу, центръ которой въ A, а радіусъ есть AM=r. Ур-нія этой сферы будетъ: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$ .... (1). Далѣе, разсѣчемъ эту сферу плоскостью перпендикулярною къ AB и проходящею черезъ точку M. Очевидно, что въ сѣченіи получится образующій кругъ MM'. Ур-нія сѣкущей плоскости, какъ перпендикулярной къ AB, будетъ: $ax+by+cz=d$ .... (2).

Эти два ур-нія будутъ выражать образующій кругъ. Съ измѣненіемъ положенія образующаго круга, будутъ измѣняться r и d. Величина d зависитъ отъ разстоянія начала координатъ до сѣкущей плоскости. Припомнимъ, что $p=+\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Отсюда $d=p\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Съ измѣненіемъ p будетъ измѣняться и d. Такимъ образомъ r и d — перемѣнные параметры образующей, a, b, c — постоянные. Получимъ условное ур-ніе между параметрами: $F(d, r^2) = 0$ или $d = \varphi(r^2)$. При этомъ F или φ совершенно произвольная функція. Замѣнивъ d и r^2 ихъ выраженіями изъ ур-ній образующей получимъ: $ax + by + cz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$. Если ось вращенія совпадаетъ съ осью z-въ, то косинусы угловъ ея дѣлающихъ съ осями x-въ и y-въ будутъ нули, т. е. $a = 0, b = 0$. Ур-ніе будетъ: $cz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$.

Это ур-ніе какъ будто нѣсколько отличается отъ прежде найденнаго $z = \varphi(x^2 + y^2)$, но его легко привести къ прежнему. Дѣйствительно, если положимъ $x^2 + y^2 = u$, то $cz = \varphi(u + z^2)$. Это послѣднее ур-ніе можно рѣшить относительно z, а это показываетъ, что есть нѣкоторая зависимость между z и u; эту зависимость можно выразить въ видѣ $z = \varphi(u)$ или $z = \varphi(x^2 + y^2)$. Это уравненіе имѣетъ прежній видъ.

О поверхностяхъ 2-го порядка.

Мы будемъ разсматривать поверхности, представляемыя общимъ ур-ніемъ 2-й степени съ 3-мя неизвѣстными (перемѣнными) и это ур-ніе всегда будемъ писать такъ:

$$Ax^2 + A_1y^2 + A_2z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + 2Cx + 2C_1y + 2C_2z + D = 0 \ldots (1).$$

Для краткости будемъ то же ур-ніе выражать въ видѣ $f(x, y, z) = 0$. Такимъ общій видъ уравненія поверхностей

2го порядка. Въ частности оно можетъ быть и неполнымъ, когда нѣкоторые изъ коэффиціентовъ будутъ равны нулю. Но въ этомъ ур-ніи долженъ остаться хотя одинъ членъ второго порядка для того, что бы оно представляло поверхность 2го порядка.

О центрѣ поверхностей 2го порядка.

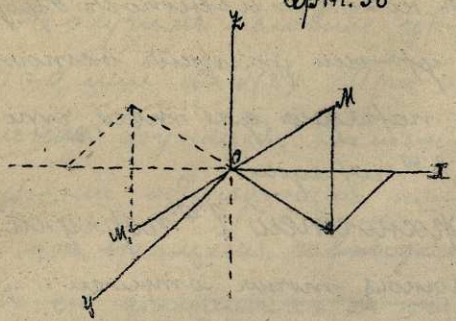
Центромъ называется такая точка, относительно которой всѣ точки поверхности расположены симметрично по двѣ. Если какая прямая линія пересѣкаетъ поверхность 2го порядка вообще въ 2хъ точкахъ, то если прямая проходитъ черезъ центръ, тогда хорда, образуемая этою прямою въ поверхности дѣлится центромъ пополамъ.

Теорема. Если начало координатъ помѣщено въ центрѣ поверхности 2го порядка, то уравненіе этой поверхности не будетъ заключать членовъ съ первыми степенями координатъ.

Дѣйствительно, предположимъ, что начало координатъ есть центръ поверхности и что поверхность представляется ур-ніемъ (1). Проведемъ черезъ начало произвольную прямую линію. Ур-нія этой прямой будутъ: $x = mz$ и $y = nz$, гдѣ m и n произвольны. Эта прямая пересѣкаетъ поверхность въ 2хъ точкахъ. На основаніи свойства центра имѣемъ $OM = OM_1$. Если-бы тѣ координаты двухъ точекъ M и M_1 будутъ по абсолютной величинѣ равны,

но съ обратными знаками. Для нахождения разыскиваемыхъ точекъ пересѣченія рѣшаемъ наши три ур-нія. Подставляя въ ур-ніе поверхности вмѣсто x и y ихъ выраженія, получаемъ ур-ніе

Черт. 38



$$Am^2z^2+A_1n^2z^2+A_2z^2+2Bmnz^2+2B_1mz^2+$$
$$+2B_2mnz^2+2Cmz+2C_1nz+2C_2z+D=0.$$

Иначе имѣемъ: $(Am^2+A_1n^2+A_2+2B_1m+2Bn+2B_2mn)z^2+2(Cm+C_1n+C_2)z+D=0.$

Это ур-ніе должно дать для z двѣ величины равныя числамъ, но съ обратными знаками. По своимъ свойствамъ обладаютъ только неполныя квадратныя ур-нія, не содержащія членовъ съ неизвѣстнымъ въ $1^{ой}$ степени. Слѣдовательно у насъ коэффиціентъ при z равенъ нулю. По своимъ образомъ мы должны имѣть равенство:

$$Cm+C_1n+C_2=0.$$

Притомъ это равенство должно удовлетворяться при всевозможныхъ значеніяхъ m и n. Для этого необходимо, что бы $C=0$, $C_1=0$ и $C_2=0$. Значитъ уравн-ніе поверхности въ разсматриваемомъ случаѣ должно имѣть видъ: $Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2Byz+2B_1xz+2B_2xy+D=0\ldots(2)$, что и требовалось доказать.

Обратная теорема. Если данное уравненіе поверхности не содержитъ членовъ съ первыми степенями x, y и z, то начало координатъ есть

центръ этой поверхности

Дѣйствительно, положимъ, что данная намъ поверхность выразится ур-ніемъ (2). Проведемъ черезъ начало произвольную прямую $x = mz$ и $y = nz$ и опредѣлимъ координаты точекъ пересѣченія этой прямой съ данной поверхностью. Мы получимъ ур-ніе не содержащее члена $1^{ой}$ степени, такъ какъ x и y выразятся линейно черезъ z, именно получимъ: $(Am^2 + Bn^2 + C + 2Bn + 2Bm + 2Cm)z^2 + D = 0$.

Это неполное квадратное ур-ніе дастъ для z два значенія равныя по абсолютной величинѣ, но съ обратными знаками (ибо оно содержитъ z только во второй степени). Для x и y получимъ также двѣ величины равнопротивоположныя. Слѣдовательно произвольная прямая, проходящая черезъ начало, пересѣкаетъ поверхность въ двухъ точкахъ, координаты которыхъ равнопротивуположны. Слѣдовательно начало координатъ есть центръ поверхности, ибо разсматриваемыя двѣ точки оказались симметричными относительно начала.

Обратимся теперь къ **изысканію центра** и положимъ, что намъ дана поверхность, представленная ур-ніемъ (1). У этой можетъ быть центръ, но только онъ оказывается не въ началѣ координатъ. Обозначимъ неизвѣстныя координаты центра черезъ α, β и γ и перенесемъ начало координатъ въ воображаемый центръ, оставляя оси параллельными самимъ себѣ. Будемъ имѣть формулы: $x = \alpha + x_1$, $y = \beta + y_1$ и $z = \gamma + z_1$,

Новое ур-ние поверхности будет: $f(x+x_1, \beta+y_1, \gamma+z_1)=0$.

Выписывая его подробно, имѣемъ:

$$A(x_1+\alpha)^2+A_1(\beta+y_1)^2+A_2(\gamma+z_1)^2+2B(\beta+y_1)(\gamma+z_1)+2B_1(\alpha+x_1)(\gamma+z_1)+2B_2(\alpha+x_1)(\beta+y_1)+2C(\alpha+x_1)+$$
$$+2C_1(\beta+y_1)+2C_2(\gamma+z_1)+D=0.$$

Изслѣдуемъ сначала вліяніе выполняемаго преобразованія координатъ на форму ур-нія. Если въ этомъ ур-ніи раскроемъ всѣ скобки и затѣмъ расположимъ всѣ члены по степенямъ новыхъ перемѣнныхъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ они раньше были расположены по степенямъ прежнихъ, то ур-ніе представится въ видѣ: $Ax_1^2+A_1y_1^2+A_2z_1^2+2B_1y_1z_1+2B_1x_1z_1+2B_2x_1y_1+2(A\alpha+B_2\beta+B_1\gamma+C)x_1+$
$+2(B_2\alpha+A_1\beta+B\gamma+C_1)y_1+2(B_1\alpha+B\beta+A_2\gamma+C_2)z_1+A\alpha^2+A_1\beta^2+A_2\gamma^2+2B\beta\gamma+2B_1\alpha\gamma+$
$+2B_2\alpha\beta+2C\alpha+2C_1\beta+2C_2\gamma+D=0.$

При разсматриваніи полученнаго ур-нія обнаруживается, что отъ выполненнаго нами преобразованія координатъ всѣ коэффиціенты членовъ второй степени совсѣмъ не измѣняются. Измѣняются лишь коэффиціенты членовъ первой степени и извѣстный членъ. Если обозначимъ эти коэффиціенты по онологіи съ прежнимъ обозначеніемъ черезъ $2C', 2C_1', 2C_2'$ и D_1, то находимъ: $2C'=2(A\alpha+B_2\beta+B_1\gamma+C)$, $2C_1'=2(B_2\alpha+A_1\beta+B\gamma+C_1)$;
$2C_2'=2(B_1\alpha+B\beta+A_2\gamma+C_2)$; $D_1=A\alpha^2+A_1\beta^2+A_2\gamma+2B\beta\gamma+2B_1\alpha\gamma+2B_2\alpha\beta+$
$+2C\alpha+2C_1\beta+2C_2\gamma+D$;

Нетрудно запомнить составъ полученныхъ выраженій по связи его съ составомъ первой части даннаго ур-нія поверхности. Именно оказывается, что коэффиціенты при x_1, y_1 и z_1 представляютъ выраженія частныхъ произ-

водную от $f(x, y, z)$ взятую по x, y и z съ знаком въ томъ x, y и z соответственно через α, β и γ. Такимъ образомъ, вводя извѣстныя символическія выраженія имѣемъ:

$$2C' = f'_x(\alpha, \beta, \gamma); \quad 2C_1' = f'_y(\alpha, \beta, \gamma); \quad 2C_2' = f'_z(\alpha, \beta, \gamma).$$

Что же касается до коэффициента D_1, то выраженіе его представляетъ результатъ подстановки α, β и γ вмѣсто x, y и z въ выраженіе самой ф-ціи $f(x, y, z)$ и потому $D_1 = f(\alpha, \beta, \gamma)$

Возвратимся теперь къ вопросу о розысканіи центра.

Если точка съ координатами α, β и γ есть центръ данной поверхности, то послѣ совершеннаго нами преобразованія, состоящаго въ перенесеніи начала координатъ въ эту точку, ур-ніе не должно содержать членовъ съ первыми степенями x_1, y_1, z_1. Поэтому координаты центра должны удовлетворять тремъ ур-ніямъ: $C' = 0$; $C_1' = 0$; $C_2' = 0$.

Выписывая эти ур-нія подробно, имѣемъ:

$$C' = A\alpha + B_1\gamma + B_2\beta + C = 0$$

$$C_1' = A_1\beta + B\gamma + B_2\alpha + C_1 = 0$$

$$C_2' = A_2\gamma + B\beta + B_1\alpha + C_2 = 0.$$

Мы получимъ такимъ образомъ три ур-нія 1-ой степени, которымъ должны удовлетворять координаты центра α, β и γ, если онъ существуетъ. Ур-нія эти легко получить, взявъ частныя производныя отъ 1-ой части данного ур-нія поверхности и приравнивая каждую изъ нихъ нулю. Координаты центра α, β и γ должны обращать эти ур-нія въ тождества. Поэтому рѣшивъ указанныя ур-нія найдемъ координаты центра.

Мы имеем три уравнения 1-ой степени съ тремя перемѣнными; если ихъ рѣшимъ, то для α, β и γ получимъ три выраженія дробныя съ общимъ знаменателемъ. Пусть эти рѣшенія будутъ

$$\alpha = \frac{P}{\Delta}; \beta = \frac{Q}{\Delta}; \gamma = \frac{R}{\Delta}$$

При рѣшеніи окажется, что общій знаменатель Δ, или опредѣлитель этихъ трехъ ур-ній будетъ слѣдующій:

$$\Delta = AA_1A_2 + 2BB_1B_2 - AB^2 - A_1B_1^2 - A_2B_2^2$$

Выраженіе это легко написать по извѣстному правилу для составленія опредѣлителя третьяго порядка. Если опредѣлитель $\Delta \neq 0$, то три ур-нія будутъ имѣть одну систему опредѣленныхъ рѣшеній и поверхность (1) будетъ имѣть одинъ центръ, координаты котораго будутъ извѣстны. Если же опредѣлитель $\Delta = 0$, то это значитъ одно изъ двухъ: или 1) данныя ур-нія несовмѣстны и слѣдовательно не удовлетворяются никакими значеніями x, y и z; въ этомъ случаѣ поверхность не имѣетъ центра; или 2) данныя ур-нія неопредѣленны, т. е. эти ур-нія приводятся или къ двумъ или къ одному, иначе говоря, одно изъ нихъ есть необходимое слѣдствіе двухъ другихъ и не представляетъ новаго ур-нія, или два ур-нія суть необходимое слѣдствіе одного. Въ этихъ случаяхъ существуетъ безчисленное множество значеній x, y, z, удовлетворяющихъ данной системѣ ур-ній. Поверхность въ такомъ случаѣ имѣетъ безчисленное множество центровъ.

При $\Delta = 0$ случай ~~случай~~ не существованія центра можно отличить отъ случая безчисленнаго множества центровъ при самомъ рѣшеніи этихъ трехъ ур-ній слѣдующимъ образомъ: положимъ, что наши ур-нія мы рѣшаемъ по способу подстановки; изъ 1го ур-нія выведемъ, положимъ, x и вставимъ его въ два другія. Затѣмъ изъ одного изъ двухъ полученныхъ ур-ній выведемъ y и вставимъ его въ другое. Если при такомъ ходѣ рѣшеній мы придемъ къ невозможному равенству въ родѣ $2=5$, $3=0$, то это покажетъ, что ур-нія несовмѣстны, и слѣдовательно центра нѣтъ. Если же выведя x и вставя его въ два другія ур-нія, мы увидимъ, что они обѣ обратятся въ тождества и по сокращеніи дадутъ $0=0$, то это покажетъ, что второе изъ данныхъ ур-ній есть необходимое слѣдствіе перваго и слѣдовательно вся система ур-ній приводится къ одному первому; центровъ будетъ безконечное множество. Или можетъ случиться, что если мы выведемъ x-ъ изъ первыхъ ур-ній и вставимъ въ третье, то третье обратится въ тождество (по сокращеніи дастъ $0=0$). Это значитъ, что третье есть слѣдствіе первыхъ двухъ и вся система приведется къ двумъ ур-ніямъ, - центровъ опять тоже безчисленное множество.

На ур-нія, служащія для опредѣленія центра

можно смотреть еще и съ геометрической стороны. Если мы каждое изъ этихъ ур-ній будемъ разсматривать отдѣльно, то можно сказать, что каждое изъ нихъ представляетъ нѣкоторую плоскость въ пространствѣ. Найти величины α, β, γ, удовлетворяющія этимъ тремъ ур-ніямъ значитъ найти точки общія этимъ тремъ плоскостямъ, т.е. точки пересѣченія трехъ плоскостей.

При этомъ могутъ представиться три случая:

1) Три плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ. Поверхность имѣетъ одинъ центръ въ этой точкѣ пересѣченія.

2) Три плоскости не имѣютъ ни одной общей точки. Это можетъ быть тогда, когда: а) три плоскости параллельны; в) Двѣ изъ нихъ параллельны; с) Одна изъ плоскостей параллельна прямой, по которой пересѣкаются двѣ другія плоскости. Въ этихъ случаяхъ центра не существуетъ.

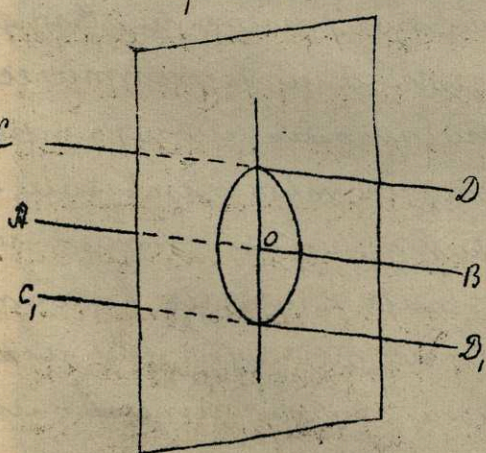
3) Три плоскости имѣютъ безчисленное множество точекъ, когда: а) три плоскости пересѣкаются по одной прямой линіи, по которой и расположены центры. Еще большая неопредѣленность получается когда: в) три плоскости совпадаютъ въ одну. При этомъ всѣ центры расположены въ одной плоскости. Первый изъ этихъ двухъ случаевъ представится, когда при рѣшеніи

ур-ний будет обнаруживаться, что одно из них есть следствие двух других и что система ур-ний приводится к двум ур-ниям, которые дадут прямую- геометрическое место бесчисленного множества центров. Второй случай представляется, когда обнаружится при решении, что два ур-ния суть следствия одного ур-ния; в этом случае вся система приведется к одному ур-нию, которое представляет плоскость- геометрическое место центров.

В случае бесчисленного множества центров можно определить до некоторой степени вид поверхности, представляемой ур-нием первым. С этою целью приведем следующия соображения:

1) Случай. Положим, что геометрическое место центров есть прямая линия. Пусть эта прямая будет AB (чр. 39). Проведем через эту прямую

Черт. 39.



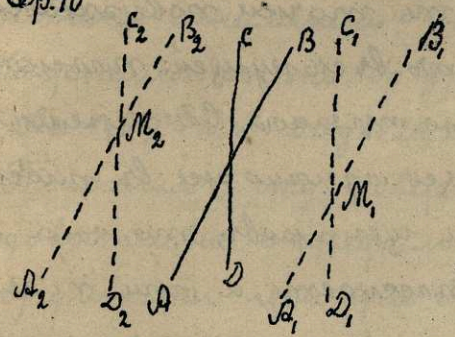
произвольную плоскость, которую примем за плоскость чертежа. Эта плоскость рассечет поверхность по кривой 2го порядка, и в этом сечении каждая точка прямой AB должна быть центром. Следовательно сечение это будет такая кривая

2го порядка, которая имѣетъ безчисленное множество центровъ, расположенныхъ на прямой AB. Мы знаемъ, что эта кривая будетъ совокупность двухъ параллельныхъ прямыхъ, равноотстоящихъ отъ прямой AB. Пусть эти прямыя будутъ CD и C_1D_1. Это заключеніе будетъ вѣрно для всякой плоскости, проходящей черезъ AB. Отсюда слѣдуетъ, что вся поверхность будетъ состоять изъ прямыхъ параллельныхъ AB и равноотстоящихъ отъ нея. Слѣдовательно разсматриваемая поверхность есть цилиндрическая. Чтобы узнать какой это цилиндръ, проведемъ другую плоскость, которая пересѣкала бы прямую AB въ точкѣ O. Эта точка должна быть центромъ сѣченія. Такъ какъ это сѣченіе есть кривая 2го порядка, имѣющая одинъ центръ, то она будетъ или (какъ у насъ на чертежѣ) эллипсъ, или же гипербола. Сѣченіе это будетъ направляющею цилиндрической поверхности. Слѣдовательно цилиндръ будетъ или эллиптическій или гиперболическій. При этомъ могутъ представиться частные случаи, соотвѣтствующіе частнымъ случаямъ эллипса: одной точки или мнимому мѣсту. Изъ этихъ случаевъ вмѣсто поверхности получимъ или прямую AB или мнимое мѣсто. Частный случай гиперболы

будутъ двѣ пересѣкающіяся прямыя. Въ этомъ случаѣ поверхность будетъ совокупность двухъ плоскостей, пересѣкающихся по прямой AB.

2-й Случай. Положимъ, что геометрическое мѣсто центровъ есть плоскость. Положимъ, для простоты представленія, что разсматриваемая плоскость центровъ со-впадаетъ съ плоскостью чертежа (черт. 40).

Черт. 40



Пересѣчемъ воображаемую поверхность плоскостью, наклонной къ плоскости чертежа, напримѣръ такой, которая пересѣчетъ самую плоскость центровъ по линіи AB. Для кривой второго порядка, получаемой въ сѣченіи, прямая AB будетъ линіей центровъ. Значитъ вмѣсто кривой въ сѣченіи съ поверхностью получится пара прямыхъ, параллельныхъ между собой и параллельныхъ линіи AB; пусть это будетъ прямая A_1B_1, расположенная напримѣръ впереди плоскости чертежа, и прямая A_2B_2, расположенная позади плоскости чертежа.

Пересѣчемъ поверхность новой плоскостью, напримѣръ такой, которая пересѣкаетъ ж плоскость центровъ по линіи CD, а прямыя A_1B_1 и A_2B_2

въ точкахъ M_1 и M_2. Пусть теперь для новаго сѣченія прямая CD есть линія центровъ, то само сѣченіе есть пара прямыхъ C_1D_1 и C_2D_2 параллельныхъ между собой и параллельныхъ предыдущей линіи центровъ. Эта прямая пройдетъ черезъ точки M_1 и M_2, потому что послѣднія суть точки поверхности и по предположенію лежатъ въ сѣкущей плоскости. Если вообразимъ теперь, что прямая CD перемѣщается какъ нибудь, оставаясь однако же въ плоскости чертежа, т. е. въ плоскости центровъ, то она можетъ описать всю эту плоскость, а при перемѣщеніи ея будутъ соотвѣтственно перемѣщаться прямыя C_1D_1 и C_2D_2, причемъ онѣ обѣ будутъ оставаться параллельными плоскости, въ которой лежитъ CD, т. е. плоскости чертежа, и въ то же время будутъ скользить соотвѣтственно — C_1D_1 по прямой A_1B_1, а C_2D_2 по прямой A_2B_2. Но при такомъ движеніи C_1D_1 опишетъ плоскость, лежащую впереди плоскости чертежа, а C_2D_2 плоскость лежащую позади той же плоскости и обѣ новыя плоскости будутъ параллельны плоскости чертежа, составляя въ совокупности сомую поверхность.

Слѣдовательно геометрическое мѣсто 2го порядка, для котораго имѣется цѣлая плоскость центровъ, есть не иное что, какъ пара плоскостей, парал-

лельных плоскости центров и, очевидно, равноудаленных от последней.

Здесь могут быть частные случаи. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 совпадают в одну AB; тогда получим вместо двух параллельных плоскостей одну плоскость. Две параллельные прямые A_1B_1 и A_2B_2 могут оказаться мнимыми; тогда и ~~плоскость~~ поверхность будет мнимою.

Возвратимся опять к ур-нию:

$$Ax^2 + A_1y^2 + A_2z^2 + 2By_z + 2B_1xz + 2B_2xy + 2Cx + 2C_1y + 2C_2z + D = 0.$$

Положим, что поверхность имеет центр и слъдовательно определитель $\Delta \neq 0$. Тогда пусть координаты центра будут α, β, γ. Перенесем начало координат в центр, полагая $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$ и $z = z_1 + \gamma$. Новое ур-ние поверхности будет:

$$Ax_1^2 + A_1y_1^2 + A_2z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B_1x_1z_1 + 2B_2x_1y_1 + 2C'x_1 + 2C_1'y_1 + 2C_2'z_1 + D_1 = 0.$$

Но в настоящем случае будет $C' = 0$, $C_1' = 0$ и $C_2' = 0$.

Слъдовательно ур-ние будет:

$$Ax_1^2 + A_1y_1^2 + A_2z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B_1x_1z_1 + 2B_2x_1y_1 + D_1 = 0, \text{ где } D_1 = f(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= A\alpha^2 + A_1\beta^2 + A_2\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B_1\alpha\gamma + 2B_2\alpha\beta + 2C\alpha + 2C_1\beta + 2C_2\gamma + D$$

Чтобы вычислить этот член, нужно предварительно найти α, β, γ из слъдующих трех ур-ний.

$$A\alpha + B_1\gamma + B_2\beta + C = 0$$

$$A_1\beta + B\gamma + B_2\alpha + C_1 = 0$$

$$A_2\gamma + B\beta + B_1\alpha + C_2 = 0$$

Выражение извъстного члена упростится на ясно-

ваний следующего заключения. Умножаем последнее три ур-ния: первое на α, второе на β и третье на γ:

$$A\alpha^2 + B_1\alpha\gamma + B_2\alpha\beta + C\alpha = 0$$
$$A_1\beta^2 + B\beta\gamma + B_2\alpha\beta + C_1\beta = 0$$
$$A_2\gamma^2 + B\beta\gamma + B_1\alpha\gamma + C_2\gamma = 0$$

Затем, сложив эти три равенства, получим:

$$A\alpha^2 + A_1\beta^2 + A_2\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B_1\alpha\gamma + 2B_2\beta\alpha + C\alpha + C_1\beta + C_2\gamma = 0$$

А отсюда выходит что:

$$A\alpha^2 + A_1\beta^2 + A_2\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B_1\alpha\gamma + 2B_2\alpha\beta = -C\alpha - C_1\beta - C_2\gamma$$

Вследствие этого получим извъстный членъ:

$$D_1 = f(\alpha, \beta, \gamma) = -C\alpha - C_1\beta - C_2\gamma + 2C\alpha + 2C_1\beta + 2C_2\gamma + D;$$

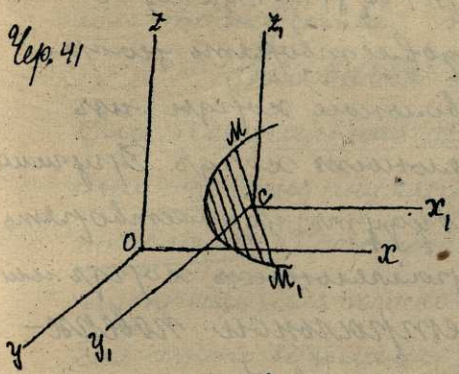
или $$D_1 = C\alpha + C_1\beta + C_2\gamma + D$$

По этой формулъ удобно вычислить извъстный членъ.

О діаметральныхъ плоскостяхъ поверхностей 2го порядка.

Будемъ опять разсматривать поверхность 2го порядка, представляемую ур-ніемъ $f(x, y, z) = 0$. Вообразимъ, что въ этой поверхности проведенъ рядъ параллельныхъ хордъ. Геометрическое мъсто серединъ этого ряда параллельныхъ хордъ образуетъ поверхность, называемую діаметральною поверхностью. Мы докажемъ прежде всего что діаметральная поверхность для поверхностей 2го порядка будетъ плоскость. Возьмемъ рядъ

параллельных хорд, угловые коэффициенты которых пусть будут m и n. Уравнения этих хорд относительно данной системы координат будут: $x = mz + p$, $y = nz + q$



Возьмем одну из параллельных хорд, положим MM_1 (чер. 41); отметим ее середину C и пусть координаты середины C будут α, β и γ. Перенесем начало координат в C, оставляя оси параллельными самим себе, т. е. полагая $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$ и $z = z_1 + \gamma$. Новое уравнение поверхности, как мы уже знаем, будет:

$$Ax_1^2 + A_1 y_1^2 + A_2 z_1^2 + 2B_3 y_1 z_1 + 2B_1 x_1 z_1 + 2B_2 x_1 y_1 + C_1' x_1 + C_1' y_1 + C_2' z_1 + f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Уравнения хорды MM_1 относительно новых осей будут: $x_1 = mz_1$ и $y_1 = nz_1$. Будем искать координаты точек пересечения этой хорды с поверхностью. Для этого исключим x_1 и y_1 и вставим в новое ур-ние поверхности, получим:

$$(Am^2 + A_1 n^2 + A_2 + 2B_3 n + 2B_1 m + 2B_2 mn) z_1^2 + (C_1' m + C_1' n + C_2') z_1 + f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

Это уравнение должно дать z_1 для точек M и M_1 (точек пересечения). Но так как по абсолютной своей величине $CM = CM_1$, то решения для z_1 должны быть равно-противоположны. Вследствие этого после-днее квадратное ур-ние не должно содержать члена с первою степенью z_1. Следовательно

мы. должны имѣть: $C'm + C_1'n + C_2' = 0$.

Взставляя сюда значенія для C', C_1' и C_2', получимъ:

$(A\alpha + B_1\gamma + B_2\beta + C)m + (A_1\beta + B\gamma + B_2\alpha + C_1)n + A_2\gamma + B\beta + B_1\alpha + C_2 = 0$

Этому уравненію должны удовлетворять координаты α, β и γ средины произвольной хорды изъ разсматриваемаго ряда параллельныхъ хордъ. Другими словами говоря, этому ур-нію будутъ удовлетворять координаты срединъ всѣхъ параллельныхъ хордъ или это есть ур-ніе самой *діаметральной поверхности*. Ур-ніе это есть ур-ніе первой степени относительно текущихъ координатъ α, β, γ. Слѣдовательно діаметральная поверхность будетъ всегда плоскостью. Текущія координаты удобнѣе обозначать черезъ x, y и z; поэтому впредь ур-ніе діаметральной поверхности мы будемъ писать сокращенно такъ $C'm + C_1'x + C_2' = 0$ или

$(Am + B_2n + B_1)x + (B_2m + A_1n + B)y + (B_1m + Bn + A_2)z + Cm + C_1n + C_2 = 0$.

Мы видимъ, что, вообще говоря, всякому данному ряду параллельныхъ хордъ, опредѣляемому угловыми коэффиціентами m и n, соотвѣтствуетъ одна діаметральная плоскость, дѣлящая этотъ рядъ хордъ пополамъ. Замѣтимъ, что если поверхность имѣетъ центръ, то всѣ діаметральныя плоскости проходятъ черезъ центръ, потому что координаты центра удовлетворяютъ 3-мъ ур-ніямъ $C'=0$, $C_1'=0$ и $C_2'=0$.

и мы довольно удовлетворяют ур-нию диаметральной плоскости, которое при этом обратится в тождество: $m.0 + n.0 + 0 = 0$.

Главныя диаметральныя плоскости.

Диаметральная плоскость называется главною, если она перпендикулярна къ тѣмъ хордамъ, которыя дѣлитъ пополамъ. Разсмотримъ существуютъ ли главныя диаметральныя плоскости въ поверхностяхъ 2го порядка.

Для этого возьмемъ ур-ніе діаметральной плоскости вообще

$$(Am + B_2 n + B_1)x + (B_2 m + A_1 n + B)y + (B_1 m + Bn + A_2)z + Cm + C_1 n + C_2 = 0.$$

Выразимъ, что эта плоскость перпендикулярна къ хордамъ, представляемымъ уравненіями:

$$x = mz + p \quad \text{и} \quad y = nz + q.$$

Условія перпендикулярности плоскости съ прямою будутъ въ настоящемъ случаѣ такова:

$$m = \frac{Am + B_2 n + B_1}{B_1 m + Bn + A_2}; \quad n = \frac{B_2 m + A_1 n + B}{B_1 m + Bn + A_2}$$

Въ этихъ ур-ніяхъ неизвѣстны m и n, т.е. угловые коэффиціенты тѣхъ хордъ, къ которымъ соотвѣтствующая діаметральная плоскость перпендикулярна. Будемъ эти хорды называть главными хордами.

Рѣшивъ послѣднія ур-нія относительно m и n, мы найдемъ въ нихъ угловые коэффиціенты m и n главныхъ хордъ. Эти два ур-нія оба 2ой степени. Если мы исключимъ одно изъ неизвѣстныхъ, положимъ n, то для другого получится, какъ увидимъ, уравненіе 3ей степени.

Для удобства вычисления мы представимъ уравненія этихъ ур-ній въ особомъ видѣ, вводя кромѣ m и n еще одно изъ неизвѣстныхъ. Именно пусть $B_1 m + B_2 n + A_2 = S$.

Тогда будетъ: $A m + B_2 n + B_1 = mS$

$$B_2 m + A_1 n + B = nS$$

Теперь имѣемъ три ур-нія съ тремя неизвѣстными m, n и S. Перенесемъ въ этихъ ур-ніяхъ всѣ члены въ первыя части и напишемъ ур-нія въ слѣдующемъ видѣ:

$$(A - S)m + B_2 n + B_1 = 0$$

$$B_2 m + (A_1 - S)n + B = 0$$

$$B_1 m + B n + A_2 - S = 0$$

Между полученными ур-ніями можно исключить m и n. Для этого можно было бы руководствоваться пріемами элементарной алгебры, опредѣлить выраженія m и n изъ двухъ ур-ній и подставить найденныя выраженія въ третье ур-ніе. Но проще достигнуть результата, прибѣгнувъ теоріи детерминантовъ. Для этого разсмотримъ три данныя ур-нія, какъ совмѣстныя ур-нія съ двумя неизвѣстными m и n и зная, что условіе совмѣстности въ подобномъ случаѣ получается отъ приравниванія нулю детерминанта, составленнаго изъ всѣхъ коэффиціентовъ, находимъ это условіе или, что то же, результатъ исключенія въ видѣ:

$$\begin{vmatrix} A - S & B_2 & B_1 \\ B_2 & A_1 - S & B \\ B_1 & B & A_2 - S \end{vmatrix} = 0$$

По раскрытии выражения детерминанта наше равенство принимает вид кубического ур-ния относительно δ:

$$(\delta-A)(\delta-A_1)(\delta-A_2)-B_2^2(\delta-A_2)-B_1^2(\delta-A_1)-B^2(\delta-A)-2BB_1B_2=0.$$

Из этого урав-ния следует определить δ. Остановимся на рассмотрении предыдущего ур-ния, которое называется характеристическим. Раскрывая скобки в ур-нии получим: $\delta^3-(A+A_1+A_2)\delta^2+(A_1A_2-B^2+AA_2-B_1^2+AA_1-B_2^2)\delta-(AA_1A_2+2BB_1B_2-AB^2-A_1B_1^2-A_2B_2^2)=0$ или кратко $\delta^3+M\delta^2+N\delta-\Delta=0$

Здесь Δ представляет тот самый детерминант, который был рассмотрен выше в статье об изыскании центра поверхности. Ур-ние третьей степени имеет всегда корень действительный корень; следовательно есть, по крайней мере, одно действительное значение δ, удовлетворяющее ур-нию. Этому действительному значению δ будут соответствовать действительные значения m и n угловых коэффициентов главных хорд и при том во всякой поверхности 2го порядка. Но можно было бы доказать, что предыдущее ур-ние третьей степени имеет все три корня действительные и что следовательно во всякой поверхности 2го порядка существуют три направления главных хорд. Мы это доказательство опустим. Заметим только одно исключение, относящееся к предыдущему указанию. Если в ур-ние диаметральной плоскости введем δ, то это ур-ние напишется

въ слѣдующемъ видѣ:

$$m_1 x + n_1 y + \delta z + Cm + C_1 n + C_2 = 0$$

Изъ выведемъ δ за скобку; получится:

$$\delta(mx + ny + z) + Cm + C_1 n + C_2 = 0$$

Если вмѣсто δ подставимъ въ это ур-ніе одинъ изъ корней характеристическаго ур-нія, то это ур-ніе будетъ представлять ур-ніе главной діаметральной плоскости. Въ случаѣ когда поверхность не имѣетъ центра, тогда $\Delta = 0$ и характеристическое ур-ніе будетъ $\delta^3 + M\delta^2 + N\delta = 0$. Одинъ корень его будетъ $\delta = 0$. Главная діаметральная плоскость, соотвѣтствующая этому корню, должна выражаться ур-ніемъ:

$$O(mx + ny + z) + Cm + C_1 n + C_2 = 0$$

или

$$Cm + C_1 n + C_2 = 0.$$

Но это не есть ур-ніе какого либо геометрическаго мѣста, такъ какъ въ немъ не содержится x, y и z. При томъ въ разсматриваемомъ случаѣ это ур-ніе не будетъ удовлетворяться вообще. Слѣдовательно корню $\delta = 0$ не можетъ соотвѣтствовать главная діаметральная плоскость. Такимъ образомъ въ поверхностяхъ, не имѣющихъ центра не можетъ быть больше двухъ главныхъ діаметральныхъ плоскостей.

Упрощеніе ур-нія поверхностей 2го порядка чрезъ преобразованіе координатъ.

Положимъ, что опять намъ дана поверхность 2го

порядка, выражаемая ур-нiемъ $f(x, y, z) = 0$.

Для этой поверхности опредѣлимъ одно направленiе главныхъ осей (хордъ), которое, какъ мы доказали сейчасъ, всегда существуетъ. Затѣмъ вообразимъ, что сдѣлано преобразованiе координатъ, при чемъ за ось z овъ взята прямая, параллельная найденному направленiю главныхъ хордъ, а за оси x овъ и y овъ взяты произвольныя прямыя, перпендикулярныя оси z овъ. Ур-нiе поверхности относительно новыхъ осей вообще имѣетъ слѣдующiй видъ: $Ax^2 + A_1y^2 + A_2z^2 + 2B_1yz + 2B_1xz + 2B_2xy + 2Cx + 2C_1y + 2C_2z + D = 0$.

Но не трудно будетъ доказать, что при всякомъ направленiи, выбранномъ указаннымъ образомъ коэффiцiенты B_3 и B_3 будутъ нули. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ опять ур-нiя, служившiя для опредѣленiя коэффiцiентовъ m и n главныхъ хордъ. Эти ур-нiя, именно первыя два изъ трехъ имѣютъ видъ:

$$A_1m + B_2n + B_1 = mS \text{ и}$$

$$B_2m + A_1n + B = nS$$

Эти ур-нiя можно было бы приложить къ опредѣленiю угловыхъ коэффiцiентовъ m и n при новыхъ осяхъ. Но въ данномъ случаѣ угловые коэффiцiенты намъ напередъ извѣстны, такъ какъ мы знаемъ, что главныя хорды параллельны оси z овъ. Пусть α, β и γ суть углы, образуемые направленiемъ разсматриваемыхъ главныхъ хордъ съ осями координатъ. Тогда

$$m = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \text{ и } n = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Въ нашемъ случаѣ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ и $\gamma = 0$. Слѣдовательно у насъ должно быть $m = \frac{0}{1}$ и $n = \frac{0}{1}$. Эти величины m и n должны удовлетворять написаннымъ ур-ніямъ. Но при этомъ написанныя ур-нія дадутъ $B_1 = 0$ и $B = 0$. Слѣдовательно ур-ніе поверхности при выбранныхъ осяхъ будетъ имѣть такой видъ:

$$Ax^2 + A_1 y^2 + A_2 z^2 + 2B_2 xy + 2Cx + 2C_1 y + 2C_2 z + D = 0 \ldots (1)$$

Уравненный видъ ур-нія можетъ быть еще болѣе упрощенъ тѣмъ, что въ немъ можетъ быть уничтоженъ членъ съ xy. Для этого нужно сдѣлать новое преобразованіе координатъ. Именно, оставляя ось z ^{овъ} безъ перемѣны, повернемъ оси x ^{овъ} и y ^{овъ} на нѣкоторый уголъ θ. Формулы преобразованія будутъ: $x = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta$ и $y = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta$. Подставивъ эти выраженія въ наше ур-ніе и расположивъ члены въ новомъ порядкѣ, получимъ:

$$Px_1^2 + P_1 y_1^2 + P_2 z_1^2 + 2R x_1 y_1 + 2Q x_1 + 2Q_1 y_1 + 2Q_2 z_1 + D = 0$$

Коэффиціенты P, P_1, P_2, Q, Q_1, Q_2 и $2R$ легко было бы составить. Обратимъ однако вниманіе только на коэффиціентъ $2R$. Онъ будетъ:

$$2R = -2A \sin\theta \cos\theta + 2A_1 \sin\theta \cos\theta + 2B_2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

или $2R = 2(A_1 - A)\sin\theta\cos\theta + 2B_2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = (A_1 - A)\sin 2\theta + 2B_2 \cos 2\theta$

Уголъ θ мы можемъ взять какъ угодно; выберемъ его такъ, чтобы коэффиціентъ при $x_1 y_1$, т. е. $2R$, обратился въ нуль, т. е. примемъ $(A_1 - A)\sin\theta + 2B_2 \cos 2\theta = 0$. Отсюда найдемъ:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2B_2}{A - A_1}$$

По этой формуле всегда можно определить угол θ. При таком θ имѣемъ $2R = 0$ и ур-ніе поверхностей будетъ: $Px_1^2 + P_1 y_1^2 + P_2 z_1^2 + 2Q x_1 + 2Q_1 y_1 + 2Q_2 z_1 + L = 0$.

Конова бы ни была данная поверхность ея ур-ніе всегда можно привести къ этому виду. Поэтому послѣднее ур-ніе можно разсматривать, какъ заключающее въ себѣ всѣ виды поверхностей $2^{го}$ порядка. При новомъ исчисленіи мы не будемъ уже имѣть надобности въ разсмотрѣніи прежнихъ координатъ; поэтому опустимъ значки при x_1, y_1 и z_1 и напишемъ:

$$Px^2 + P_1 y^2 + P_2 z^2 + 2Q x + 2Q_1 y + 2Q_2 z + L = 0 \ldots (2)$$

Дальше для дальнѣйшаго упрощенія этого ур-нія перенесемъ начало координатъ въ произвольную точку a, b, c.

Формулы преобразованія будутъ: $x = x_1 + a$; $y = y_1 + b$; $z = z_1 + c$.

Новое ур-ніе будетъ:

$$P(x_1^2 + 2ax_1 + a^2) + P_1(y_1^2 + 2by_1 + b^2) + P_2(z_1^2 + 2cz_1 + c^2) + 2Q(x_1 + a) + 2Q_1(y_1 + b) + 2Q_2(z_1 + c) + D = 0.$$

или $Px_1^2 + P_1 y_1^2 + P_2 z_1^2 + 2(Pa + Q)x_1 + 2(P_1 b + Q_1)y_1 + 2(P_2 c + Q_2)z_1 + Pa^2 + P_1 b^2 + P_2 c^2 +$

$+ 2Qa + 2Q_1 b + 2Q_2 c + D = 0$

Предположимъ, что поверхность имѣетъ центръ и пусть точка (a, b, c) будетъ центромъ; тогда должны имѣть:

$Pa + Q = 0$; $P_1 b + Q_1 = 0$; $P_2 c + Q_2 = 0$. Отсюда $a = -\frac{Q}{P}$; $b = -\frac{Q_1}{P_1}$; $c = -\frac{Q_2}{P_2}$.

Теперь видимъ, что опредѣленный центръ будетъ существовать тогда, когда ни одинъ изъ $3^{хъ}$ коэффиціентовъ P, P_1 и P_2 не будетъ равенъ нулю; тогда a, b и c войдутъ конечными величинами и ур-ніе поверхности, когда начало будетъ въ центрѣ

примет вид: $P x_1^2 + P_1 y_1^2 + P_2 z_1^2 + D_1 = 0$ ..... (III)

Это ур-ние будет представлять все поверхности, имеющие один центр. Из параллель с рассмотренным случаем мы поставили тот особый, когда один или два из коэффициентов P оказываются нулями, но при этом и соответствующие коэффициенты Q тоже будут нули. Заметим по этому поводу, что все три коэффициента P не могут быть нулями, потому что тогда новое ур-ние поверхности не было бы ур-нием второй степени. Если один из коэффициентов P, наприм. P_2, равен нулю и при этом тоже $Q_2 = 0$, то новое начало координат будет иметь координаты a, b и $\frac{Q}{0}$, т. е. вместо определенного центра получится прямая центров, имею параллельную оси Z-ов. Если два из коэффициентов P, напр. P_1 и P_2 равны нулю и при этом тоже $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$, то для упрощения ур-ния поверхности можно перенести начало в любую из точек с координатами $a, \frac{Q}{0}$ и $\frac{Q}{0}$, т. е. в любую точку плоскости центров. Положим теперь, что один из трех коэффициентов P, P_1 и P_2 равен нулю, причем соответствующий Q не равен нулю. Положим $P = 0$ и $Q \neq 0$; тогда $a = -\frac{Q}{0} = \infty$. Следовательно центра не существует и потому нельзя упростить ур-ние поверхности прежним способом. В этом случае мы можем одною координату a, b и c выбрать так, чтобы в ур-нии поверхности уничтожить члены с y_1 и z_1 и известный член D_1. При ур-ниях, где

которыхъ слѣдуетъ опредѣлить a, b и C будутъ въ этомъ случаѣ слѣдующія: $P_1 b + Q_1 = 0$; $P_2 c + Q_2 = 0$; $P_1 b^2 + P_2 c^2 + 2Qa + 2Q_1 b + 2Q_2 c + D = 0$
Изъ двухъ первыхъ имѣемъ $b = -\frac{Q_1}{P_1}$ и $c = -\frac{Q_2}{P_2}$. Изъ третьяго найдемъ a. Величина a будетъ непремѣнно конечная, потому что коэффиціентъ $Q \neq 0$. Затѣмъ при выбранныхъ точкѣ отчетомъ началѣ координатъ ур-ніе поверхности будетъ:

$$P_1 y_1^2 + P_2 z_1^2 + 2Q x_1 = 0 \ldots (IV)$$

Это ур-ніе представляетъ поверхность, не имѣющую центра. Есть еще случай, когда поверхность не имѣетъ центра, это именно тогда, когда изъ трехъ коэффиціентовъ P_1, P_2 и P_3 два будутъ равны нулю. Тогда получимъ $a = \infty$ и $b = \infty$ и центра не будетъ. Обратимся въ этомъ случаѣ прямо къ ур-нію (2); оно будетъ: $P_2 z^2 + 2Q_2 x + 2Q_1 y + 2Q_2 z + D = 0$.
Можно прямо по этому ур-нію узнать, какова будетъ эта поверхность. Для этого сдѣлаемъ сѣченіе этой поверхности плоскостью $\parallel$-ною xy. Ур-ніе такой плоскости $z = h$.
Исключивъ z, получимъ ур-ніе проэкціи сѣченія на плоскость xy; оно будетъ: $P_2 h^2 + 2Q x + 2Q_1 y + 2Q_2 h + D = 0$. Это ур-ніе представляетъ прямую линію. Слѣдовательно искомое сѣченіе есть тоже прямая. Если будемъ измѣнять h, то коэффиціенты при x и y не будутъ измѣняться, изъ чего слѣдуетъ, что всѣ прямыя, полученныя въ сѣченіи плоскостями параллельными xy будутъ прямыя параллельныя. Слѣдовательно поверхность состоитъ изъ безчисленнаго множества параллельныхъ прямыхъ, т. е. эта поверхность цилиндрическая. Чтобы получить

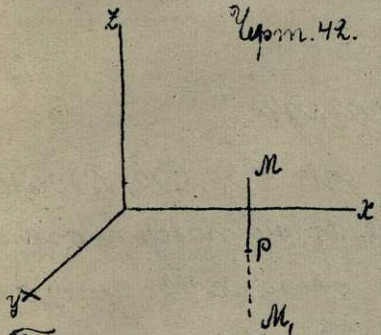
направляющую этого цилиндра, разсмотримъ сѣченіе его плоскостью yz. Положимъ $x=0$; получимъ ур-ніе сѣченія: $P_2z^2+2Q_1y+2Q_2z+D=0$. Эта кривая парабола, потому что для нея $B^2-4AC=0$. Слѣдовательно поверхность наша есть параболическій цилиндръ. Поверхность эта можетъ быть разсматриваема однако какъ частный случай поверхностей, представляемыхъ ур-ніемъ (IV), потому что если въ этомъ ур-ніи положить $P_1=0$, то получимъ: $P_2z^2+2Qx_1=0$. А это ур-ніе представляетъ, очевидно, тожже параболическій цилиндръ. Вслѣдствіе этого ур-ніе (IV) можно разсматривать, какъ заключающее въ себѣ всѣ виды поверхностей, не имѣющихъ центра. Изъ результата нашего изслѣдованія оказывается, что ур-ніе (III) представляетъ всѣ поверхности $2^{го}$ порядка, имѣющія одинъ или безчисленное множество центровъ, а ур-ніе (IV) – всѣ поверхности, не имѣющія центра.

Поверхности имѣющія центръ.

Онѣ представляются ур-ніемъ: $Px^2+P_1y^2+P_2z^2+D_1=0\ldots$ (III)
Мы уже знаемъ, что это общее ур-ніе представляетъ поверхности, имѣющія одинъ центръ, помѣщенный въ началѣ коор-тъ. Не трудно убѣдиться въ томъ, что плоскости координатъ будутъ главными діаметральными плоскостями. Дѣйствительно, если мы рѣшимъ это ур-ніе относительно одной изъ координатъ, напр. относительно z, то получимъ:

$$z = \pm\sqrt{\frac{-Px^2 - P_1y^2 - D}{P_2}}$$

Отсюда видимъ, что z будетъ имѣть двѣ величины равныя и съ обратными знаками. Это значитъ, что всякая хорда, перпендикулярная къ плоскости xy, дѣлится этой плоскостью пополамъ. Точно такимъ же пріемомъ обнаружится, что и плоскости xz и yz суть главныя діаметральныя плоскости.



Чрт. 42.

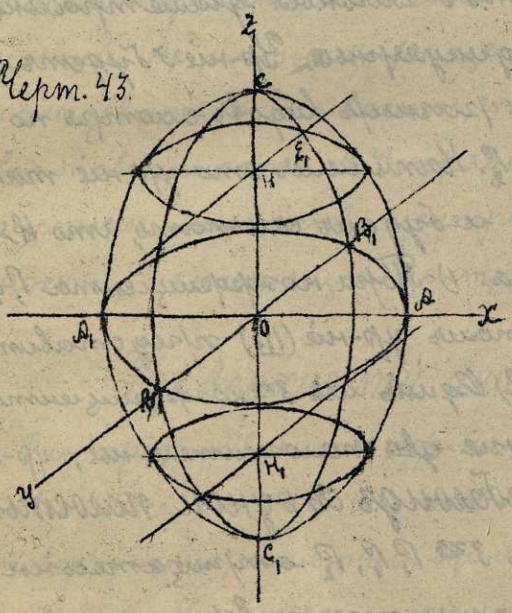
Такимъ образомъ мы видимъ, что поверхности, имѣющія одинъ центръ, имѣютъ 3 главныя діаметральныя плоскости взаимно перпендикулярныя. Ур-ніе 3 будетъ представлять поверхности разныхъ видовъ, смотря по знакамъ коэффиціентовъ P, P_1 и P_2. Напишемъ это ур-ніе такъ: $Px^2 + P_1y^2 + P_2z^2 = H$, гдѣ $H = -D$ и будемъ считать, что $H > 0$. Затѣмъ различимъ 4 случая: 1) Три коэффиціента P, P_1, P_2 всѣ положительны; при этомъ ур-ніе (III) представитъ **трехосный эллипсоидъ**. 2) Одинъ изъ 3-хъ коэффиціентовъ P, P_1, P_2 — отрицателенъ, а другіе два положительны; ур-ніе представитъ тогда **гиперболоидъ съ одной полостью**. 3) Два коэффиціента изъ 3-хъ P, P_1, P_2 отрицательны и одинъ положителенъ; получится поверхность, называемая **гиперболоидомъ съ двумя полостями**. 4) Всѣ три отрицательны; получится мнимое мѣсто. Послѣдній случай очевиденъ, такъ какъ первая часть

ур-ния при действительных значениях x, y, z будет всегда отрицательна, а 2-ая положительна; следовательно ур-нию нельзя удовлетворить никакими действительными значениями x, y и z.

Трехосный эллипсоид.

Его ур-ние будет $Px^2+P_1y^2+P_2z^2=H$, где $P>0, P_1>0, P_2>0$ и $H>0$. Прежде всего определим пересечения этой поверхности с осями координат. Находим ее с осью x-ов: $y=0, z=0$; $Px^2=H$. Отсюда $x=\pm\sqrt{\frac{H}{P}}=\pm a$. Получим две точки, равноотстоящия от начала (A и A_1). Для пересечения с осью y-ов $x=0, z=0$; $P_1y^2=H$. Отсюда $y=\pm\sqrt{\frac{H}{P_1}}=\pm b$. Получим опять две точки, равноотстоящия от начала (B и B_1). Для точки пересечения с осью z-ов $x=0$ и $y=0$; $P_2z^2=H$; $z=\pm\sqrt{\frac{H}{P_2}}=\pm c$. Получим опять две точки, равноотстоящия от начала (C и C_1). Покажем что на чертеже будем иметь $OA=OA_1$; $OB=OB_1$; $OC=OC_1$. Оси координат суть

Черт. 43.



пересечения главных диаметральных плоскостей, и эти прямыя называются осями поверхности; точки встречи осей с поверхностью называются вершинами

поверхности; мы нашли для эллипсоида 6 вершин. Ур-ние эллипсоида напишется въ болѣе удобномъ видѣ, если введемъ въ него величины полуосей a, b, c. Имѣемъ $\frac{H}{p}=a^2$, откуда $p=\frac{H}{a^2}$. Далѣе $\frac{H}{p_1}=b^2 \ldots p_1=\frac{H}{b^2}$. Наконецъ $\frac{H}{p_2}=c^2, \ldots p_2=\frac{H}{c^2}$. Внося въ ур-ніе эллипсоида вмѣсто p, p_1 и p_2 эти ихъ выраженія, найдемъ: $\frac{H}{a^2}x^2+\frac{H}{b^2}y^2+\frac{H}{c^2}z^2=H$. Сокращая на H, получимъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Замѣтимъ теперь сѣченія поверхности главными діаметральными плоскостями, т. е. плоскостями координатъ называемыя главныя сѣченія. Для пересѣченія съ плоскостью yz, $x=0$ и ур-ніе будетъ $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Это есть эллипсъ, у котораго B_1B и C_1C суть оси. Съ плоскостью xz — $y=0$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Это есть эллипсъ, у котораго A_1A и C_1C суть оси. Найдемъ наконецъ пересѣченіе съ плоскостью xy, въ которой $z=0$. Ур-ніе будетъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. И это будетъ эллипсъ, у котораго осей суть A_1A и B_1B. Чтобы форма поверхности обозначилась съ большею ясностью, разсмотримъ произвольное ея сѣченіе плоскостью параллельной плоскости xy. Пусть эта плоскость будетъ $z=h$. Исключивъ z, получимъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$. Это ур-ніе представляетъ проэкцію сѣченія на плоскости xy, или тоже самое плоскость сѣченія параллельной плоскости xy, то это ур-ніе можно разсматривать, какъ ур-ніе самого сѣченія въ его плоскости. Ур-ніе это, если только $h<c$, представляетъ эллипсъ, котораго центръ на оси z-овъ и оси параллельныя осямъ x-овъ и y-овъ.

Сокращая это ур-ние на h: $\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$

или $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$

Полуоси будут: $A = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $B = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. С увеличением h эти полуоси уменьшаются и при $h=c$ получим, что $A=0$ и $B=0$ — эллипс обратится в точку C. Если же h возьмем большим C, то A и B будут мнимы и сечения не получается. Если бы рассмотрели сечения параллельными другим плоскостям координат, то пришли бы очевидно к подобного же рода заключениям, тем что можно убедиться, что наша поверхность заключена внутри параллелепипеда, ограниченного двумя плоскостями параллельными xy и проведенными через C и C_1, двумя плоскостями параллельными плоскости xz и проведенными через B и B_1 и двумя плоскостями параллельными yz и проведенными через A и A_1. Поверхности эллипсоида можно дать следующее образование. Вообразим, что в плоскости xz и yz начерчены два главных эллипса. Пусть эти эллипсы будут направляющими линиями; затем вообразим движущийся переменный эллипс, которого центр перемещается по оси z и которого плоскость остается параллельной плоскости xy, оси же этого эллипса изменяются во время движения так, что его вершины перемещаются по главным эллипсам в плоскостях xz и yz. Этот эллипс своим движением опишет очевидно поверхность эллипсоида.

Эллипсоидъ есть поверхность сомкнутая со всѣхъ сторонъ и при томъ выпуклая, вслѣдствіе чего всякое сѣченіе его плоскостью даетъ сомкнутую кривую, но мы знаемъ, что въ сѣченіи поверхности $2^{го}$ порядка плоскостью получается кривая $2^{го}$ порядка; въ настоящемъ случаѣ это есть сомкнутая кривая $2^{го}$ порядка, значитъ эллипсъ; потому то поверхность и называется эллипсоидомъ. Замѣтимъ частный случай этой поверхности. Пусть, если $a=b$, то ур-ніе эллипсоида обратится въ ур-ніе: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. При этомъ всякое сѣченіе плоскостью, параллельной плоскости xy будетъ кругъ; поверхность, представляемая ур-ніемъ, будетъ эллипсоидомъ вращенія, и ее можно образовать, вращая главный эллипсъ, лежащій въ плоскости xz, около оси $z^{овъ}$. Наконецъ, если имѣемъ $a=b=c$, то ур-ніе будетъ: $x^2+y^2+z^2=a^2$ и эллипсоидъ обратится въ сферу, центръ которой въ началѣ координатъ.

Гиперболоидъ съ одной полостью.

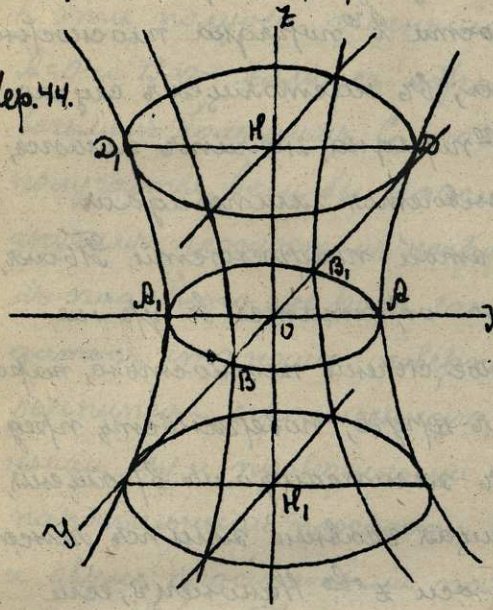
Эта поверхность представляется ур-ніемъ поверхностей $2^{го}$ порядка, имѣющихъ центръ, т. е. ур-ніемъ:

$$Px^2+P_1y^2+P_2z^2=H,$$

когда въ немъ одинъ изъ коэффиціентовъ P, P_1, P_2 – отрицателенъ. Положимъ, что коэффиціентъ при z отрицателенъ, и поставимъ его знакъ на видъ. Будемъ разсматривать ур-ніе: $P_1x^2+P_1y^2-P_2z^2=H$, въ которомъ

p, p_1, p_2 и H. Здѣсь точки плоскости координатъ суть главныя діаметральныя плоскости, а оси координатъ суть оси поверхности. Опредѣлимъ пересѣченія осей координатъ съ поверхностью. Для сѣченія съ осью $x^{ов}$ коор. положимъ $y=0$ и $z=0$; получимъ $px^2=H$; $x=\pm\sqrt{\frac{H}{p}}=\pm a$. Для сѣченія съ осью $y^{ов}$ $x=0$ и $z=0$; ур-ніе будетъ: $p_1y^2=H$, откуда $y=\pm\sqrt{\frac{H}{p_1}}=\pm b$.

Чер. 44.



Получимъ четыре вершины — двѣ на оси $x^{ов}$ (A, A_1) и двѣ на оси $y^{ов}$ (B, B_1); откладываемъ по оси $x^{ов}$ $OA=OA_1=a$ и по оси $y^{ов}$ $OB=OB_1=b$. Для пересѣченія съ осью $z^{ов}$ положимъ $x=0$, $y=0$; ур-ніе будетъ: $-p_2z^2=H$; $z=\pm\sqrt{-\frac{H}{p_2}}=\pm\sqrt{\frac{H}{p_2}}\sqrt{-1}$. Изъ этого корня видимъ, что z имѣетъ для пересѣченія мнимую величину, стало быть ось $z^{ов}$ вовсе не пересѣкаетъ поверхности. Положимъ однако $\sqrt{\frac{H}{p_2}}=c$.

Введемъ въ ур-ніе величины a, b и c. Имѣемъ: $\frac{H}{p}=a^2$, откуда $p=\frac{H}{a^2}$; $\frac{H}{p_1}=b^2$, откуда $p_1=\frac{H}{b^2}$; $\frac{H}{p_2}=c^2$, откуда $p_2=\frac{H}{c^2}$.

Внося въ ур-ніе гиперболоида найдемъ: $\frac{H}{a^2}x^2+\frac{H}{b^2}y^2-\frac{H}{c^2}z^2=H$.

Сокращая на H, получимъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Разсмотримъ главныя сѣченія поверхности.

1) Съ плоскостью yz. Положимъ $x=0$, найдемъ $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Это есть гипербола, главная ось которой есть B_1B, а мнимая

совпадает съ осью z (obz) та же, что и у поверхности).

2) Пересѣченіе съ плоскостью xz найдется, полагая $y=0$; получимъ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это опять гипербола, главная ось которой есть AA_1, а мнимая та же самая и совпадает съ осью z (obz).

3) Пересѣченіе съ плоскостью xy: $z=0$ и ур-ніе обратится въ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Это есть эллипсъ, оси котораго AA_1 и BB_1. Дабы что бы лучше выяснилась форма поверхности, сдѣлаемъ сѣченіе ея плоскостью, параллельной плоскости xy. Пусть такая плоскость есть $z=h$. Исключая z, получимъ ур-ніе проэкціи сѣченія на плоскости xy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$. Это же ур-ніе представитъ и само сѣченіе въ его плоскости. Сѣченіе это есть эллипсъ, котораго центръ на оси z (obz), а оси параллельны осямъ x (obx) и y (oby). Напишемъ это ур-ніе такъ: $\frac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})}=1$. или $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$. Тогда полуоси эллипса будутъ: $A=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $B=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Если возьмемъ плоскость $z=-h$, то получимъ точно такое же сѣченіе (такъ какъ h входитъ въ ур-ніе во 2-ой степени). На чертежѣ центръ этого эллипса будетъ H_1, при чемъ $OH_1=-h$. Съ увеличеніемъ h до безконечности полуоси A и B увеличиваются такожде до безконечности; наименьшую же величину A и B получатъ тогда, когда $h=0$; въ этомъ случаѣ получится эллипсъ (горловой), лежащій въ плоскости xy (AA_1BB_1). Такимъ образомъ поверхность состоитъ, какъ видимъ, изъ одной безконечной полости.

Разсмотримъ сѣченіе этой поверхности произвольной плоскостью; пусть ур-ніе поверхности будетъ:

совпадает съ осью z (ось z та же, что и у поверхности).

2) Пересѣченіе съ плоскостью xz найдется, полагая $y=0$; получимъ: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это опять гипербола, главная ось которой есть AA_1, а мнимая та же самая и совпадает съ осью z.

3) Пересѣченіе съ плоскостью xy: $z=0$ и ур-ніе обратится въ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Это есть эллипсъ, оси котораго AA_1 и BB_1. Далѣе что бы лучше выяснилась форма поверхности, сдѣлаемъ сѣченіе ея плоскостью, параллельной плоскости xy. Пусть такая плоскость есть $z=h$. Исключая z, получимъ ур-ніе проэкціи сѣченія на плоскости xy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$. Это же ур-ніе представитъ и само сѣченіе въ его плоскости. Сѣченіе это есть эллипсъ, котораго центръ на оси z, а оси параллельны осямъ x и y. Напишемъ это ур-ніе такъ: $\frac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})}=1$. или $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$. Тогда полуоси эллипса будутъ: $A=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $B=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Если возьмемъ плоскость $z=-h$, то получимъ точно такое же сѣченіе (такъ какъ h входитъ въ ур-ніе во 2-ой степени). На чертежѣ центръ этого эллипса будетъ H_1, при чемъ $OH_1=-h$. Съ увеличеніемъ h до безконечности полуоси A и B увеличиваются такожде до безконечности; наименьшую же величину A и B получатъ тогда, когда $h=0$; въ этомъ случаѣ получится эллипсъ (горловой), лежащій въ плоскости xy (AA_1BB_1). Такимъ образомъ поверхность состоитъ, какъ видимъ, изъ одной безконечной полости.

Разсмотримъ сѣченіе этой поверхности произвольной плоскостью; пусть ур-ніе поверхности будетъ:

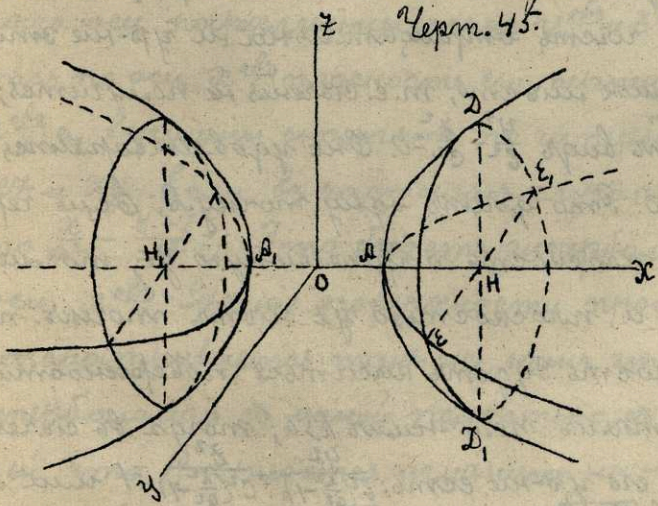
$P_1x^2+P_1y^2-P_2z^2=H$. Ур-ние сѣкущей плоскости будетъ: $z=mx+ny+p$. Исключивъ z, получимъ ур-ние проэкціи сѣченія на плоскости xy; оно будетъ: $P_1x^2+P_1y^2-P_2(mx+ny+p)^2=H$. Это же ур-ніе въ пространствѣ представитъ проэктирующій цилиндръ, причемъ проэкція будетъ направляющей этого цилиндра. Очевидно, что если цилиндръ будетъ эллиптическій, то и сѣченіе будетъ эллипсъ; если цилиндръ будетъ параболическій, то сѣченіе парабола; если цилиндръ гиперболическій, то сѣченіе гипербола. Поэтому, чтобы опредѣлить родъ сѣченія достаточно опредѣлить родъ проэкціи сѣченія; приложимъ признакъ: $B^2-4AC=4P_2^2m^2n^2-4(P_1-P_2m^2)(P_1-P_2n^2)=$
$=-4(PP_1-P_1P_2m^2-PP_2n^2)$. Очевидно, что смотря потому, какія величины будутъ даны m и n, получимъ: $B^2-4AC\gtrless 0$.
Слѣдовательно, смотря по направленію сѣкущей плоскости въ сѣченіи можетъ получиться и эллипсъ, и парабола, и гипербола. Замѣтимъ, что гиперболоидъ съ одной полостью можетъ быть образованъ движеніемъ перемѣннаго эллипса. Именно, вообразимъ, что построены двѣ главныя гиперболы въ плоскостяхъ xz и yz и положимъ, что движется эллипсъ, центръ котораго перемѣщается по оси z, $\frac{a}{b}$ его плоскость остается параллельна плоскости xy, а его оси измѣняются во время движенія такъ, что вершины D, D_1, E, E_1 скользятъ по гиперболѣ.
Частные случаи. 1) $a=b$. Ур-ніе будетъ: $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это есть гиперболоидъ вращенія; въ этомъ случаѣ эллипсъ.

$D_1 D_1$, очевидно, круглое и поверхность можно образовать, вращая главную гиперболу, лежащую в плоскости xz, около оси z ^{ов}.

Гиперболоид с двумя полостями.

Ур-ние этой поверхности получится, когда в общем ур-нии центра поверхностей 2го порядка 2 коэффициента из трех P, P_1, P_2 отрицательны. Пусть будут коэффициенты при y^2 и z^2 отрицательны; поставим их знаки на виду: $Px^2 - P_1y^2 - P_2z^2 = H$. Определяем сечения с осями координат. Для пересечения с осью x ^{ов} имеем: $y=0; z=0$; $Px^2 = H$, отсюда $x = \pm\sqrt{\frac{H}{P}} = \pm a$. На оси x ^{ов} получатся две вершины. Для пересечения с осью y ^{ов} имеем $z=0, x=0$; $-P_1y^2 = H$; $y = \pm\sqrt{-\frac{H}{P_1}} = \pm\sqrt{\frac{H}{P_1}}\sqrt{-1}$; $y = \pm b\sqrt{-1}$. Следовательно ось y ^{ов} не пересекает поверхности. Для пересечения с осью z ^{ов} имеем: $x=0, y=0$ $-P_2z^2 = H$; $z = \pm\sqrt{-\frac{H}{P_2}} = \pm\sqrt{\frac{H}{P_2}}\sqrt{-1}$;

Черт. 45.



$z = \pm c\sqrt{-1}$. Ось z ^{ов} также не пересекает поверхности. Следовательно эта поверхность имеет только две вершины. Введем a, b и c в ур-ние. Имеем $\frac{H}{P} = a^2$, отсюда $P = \frac{H}{a^2}$. Далее $\frac{H}{P_1} = b^2$, отсюда $P_1 = \frac{H}{b^2}$. Наконец $\frac{H}{P_2} = c^2$; отсюда $P_2 = \frac{H}{c^2}$.

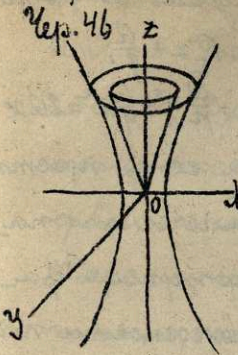
Простейшее ур-ние поверхности будет: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
Рассмотрим главные сечения этой поверхности. Для пересечения с xz имеем $y=0$; получим $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это есть гипербола, главная ось которой $A_1A_2(OA_1=OA_2=a)$, а мнимая совпадает с осью z'ов. Для пересечения с xy имеем $z=0$; получим $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Это опять гипербола с главною осью A_1A_2, но ея мнимая ось направлена по оси y'ов. С плоскостью yz ... $x=0$; получим $-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Ур-ние представляет мнимое место и плоскость yz не пересекает поверхности. Рассмотрим сечения параллельныя плоскости yz; пусть $x=h$ есть ур-ние секущей плоскости. Тогда, исключив x получим ур-ние проекции сечения на плоскости yz, именно $\frac{h^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Отсюда $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}-1$.
Пока $h<a$, вторая часть отрицательна и ур-ние это представляет мнимое место, т. е. сечения не получится; при $h=a$ ур-ние примет вид $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$. Оно удовлетворяется только при $y=0$ и $z=0$. Это дает одну точку A. Если через точку A проведем плоскость параллельную yz, то между этой плоскостью и плоскостью yz нет точек поверхности, а эта плоскость будет касаться поверхности в одной точке A. Зостьмъ положимъ $h>a$; тогда в сечении получится эллипсъ; его ур-ние есть: $\frac{y^2}{b^2(\frac{h^2}{a^2}-1)}+\frac{z^2}{c^2(\frac{h^2}{a^2}-1)}=1$ или $\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1$, гдѣ $B=\frac{b\sqrt{h^2-a^2}}{a}$ и $C=\frac{c\sqrt{h^2-a^2}}{a}$.
Центръ этого эллипса находится на оси x'ов, а его оси будут параллельны осямъ y'ов и z'ов. Начертимъ этотъ эллипсъ; пусть $OH=h$. Плоскость параллельная плоскости

плоскость xz по $2Q_1$, а плоскость xy по прямой EE_1.
Съ измѣненіемъ h отъ $h=a$ до $h=+\infty$ эллипсъ идетъ расширяясь, увеличивается до ∞-ти и получается такимъ образомъ безконечная полость постоянно расширяющаяся и идущая отъ A вправо. Если будемъ приписывать отрицательныя значенія h отъ $h=0$ до $h=-a$ и до $h=-\infty$, то увидимъ, что по лѣвую сторону существуетъ другая полость поверхности, тождественная съ первой, которая начинается въ A_1 и идетъ расширяясь до безконечности влѣво. Такимъ образомъ вся поверхность состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ, изолированныхъ другъ отъ друга, полостей. Поверхность эта можетъ быть образована движеніемъ эллипса, котораго оси параллельны осямъ $y^{ось}$ и $z^{ось}$, центръ перемѣщается по оси $x^{ось}$, плоскость его перпендикулярна къ оси $x^{ось}$, а вершины скользятъ по гиперболамъ въ плоскостяхъ xz и xy. Если въ частномъ случаѣ положимъ, что $b=c$, то $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$. Это будетъ гиперболоидъ вращенія около оси $x^{ось}$. Сѣченіе поверхности произвольною плоскостью разсматривается такъ же, какъ это было сдѣлано для гиперболоида съ одной полостью съ тою только разницей, что P_1 придется измѣнить на $-P_1$. Смотря по значенію m и n въ ур-ніи сѣкущей плоскости $z=mx+ny+p$ въ сѣченіи получится эллипсъ, парабола или гипербола.

Частные случаи поверхностей, имѣющихъ центръ. Эти случаи получаются изъ общаго ур-нія

$Px^2+P_1y^2+P_2z^2=H$, гдѣ $H=-D$, когда въ немъ нѣкоторые изъ коэффиціентовъ P, P_1, P_2 и H равны нулю. 1) Пусть $H=0$; ур-ніе будетъ $Px^2+P_1y^2+P_2z^2=0$. Если гдѣ-нибудь P, P_1 и P_2 положительны, то ур-нію можно удовлетворить только полагая $x=y=z=0$; получается одна точка (начало координатъ). 2) Пусть $H=0$ и одинъ изъ коэффиціентовъ P, P_1 и P_2 отрицательный: $Px^2+P_1y^2-P_2z^2=0$; раздѣлимъ это ур-ніе на z^2, получимъ: $P\left(\frac{x}{z}\right)^2+P_1\left(\frac{y}{z}\right)^2-P_2=0$. Если отсюда выразимъ $\frac{y}{z}$, то получимъ $\frac{y}{z}=\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$, а ур-ніе такого вида представляетъ конусъ, имѣющій вершину въ началѣ координатъ. Этотъ конусъ имѣетъ замѣчательное соотношеніе съ гиперболоидомъ однополостнымъ, который представляется ур-ніемъ съ такого же первого члена. Именно разсмотримъ гиперболоидъ съ одной полостью: $Px^2+P_1y^2-P_2z^2=H$, гдѣ $H\neq 0$. Утверждаемъ, что указанный конусъ будетъ асимптотическимъ конусомъ для этого гиперболоида. Чтобы доказать это, сравнимъ z-ты обѣихъ поверхностей, соотвѣтствующія однимъ и тѣмъ же величинамъ x и y; z для гиперболоида обозначимъ черезъ z_1. Имѣемъ для конуса $z\sqrt{P_2}=\sqrt{Px^2+P_1y^2}$, а для гиперболоида $z_1\sqrt{P_2}=\sqrt{Px^2+P_1y^2-H}$. Отсюда видно, что $z>z_1$. Слѣдовательно конусъ пойдетъ внутри гиперболоида. Возьмемъ разность $(z-z_1)\sqrt{P_2}=\sqrt{Px^2+P_1y^2}-\sqrt{Px^2+P_1y^2-H}$. Преобразовывая, получимъ: $(z-z_1)\sqrt{P_2}=\frac{H}{\sqrt{Px^2+P_1y^2}+\sqrt{Px^2+P_1y^2-H}}$. Отсюда видно, что если координаты x и y будемъ увеличивать до ∞-ти,

то разность $z-\bar{z}$ стремится къ нулю, т. е. конусъ будетъ стремиться неопредѣленно къ гиперболоиду и конусъ будетъ для гиперболоида асимптотическимъ. 3) Пусть $H=0$ и два изъ коэффиціентовъ P, P_1, P_2 отрицательны.



$Px^2-P_1y^2-P_2z^2=0$ или $P_1y^2+P_2z^2-Px^2=0$. Очевидно, что будетъ опять конусъ, ось котораго будетъ совпадать съ осью $x^{вл}$. 4) Пусть одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 0, наприм. $P_2=0$. Тогда получимъ ур-ніе такого вида $Px^2+P_1y^2=H$. Это ур-ніе представитъ цилиндръ эллиптическій или гиперболическій, ось котораго совпадаетъ съ осью $z^{вл}$. Частные случаи такого цилиндра могутъ быть: а) прямая линія, совпадающаяся съ осью $z^{вл}$, в) двѣ плоскости, пересѣкающіяся по оси $z^{вл}$, с) мнимое мѣсто.

5) Пусть $P_1=0$ и $P_2=0$, получимъ $Px^2=H$. Это ур-ніе представляетъ двѣ плоскости, параллельныя уz или частные случаи: а) одну плоскость уz или в) мнимое мѣсто.

Поверхности 2го порядка, имѣющія центръ.

Всѣ эти поверхности представляются ур-ніемъ: $P_1y^2+P_2z^2+2Qx=0$. Замѣтимъ, что это ур-ніе будучи рѣшено относительно z, даетъ два рѣшенія съ обратными знаками и равныя, слѣдовательно плоскость xy есть главная діаметральная плоскость. Точно также ур-ніе рѣшенное относительно y дастъ тоже два рѣшенія, равныя, но съ обратными знаками, и слѣдовательно плоскость xz есть тоже главная діаметральная плоскость. Такимъ образомъ поверхность эллиптическаго типа $P_1y^2+P_2z^2+2Qx=0$, имѣетъ только двѣ главныя діаметральныя плоскости, пересѣкающіяся по оси $x^{вл}$, слѣдовательно ось $x^{вл}$ есть

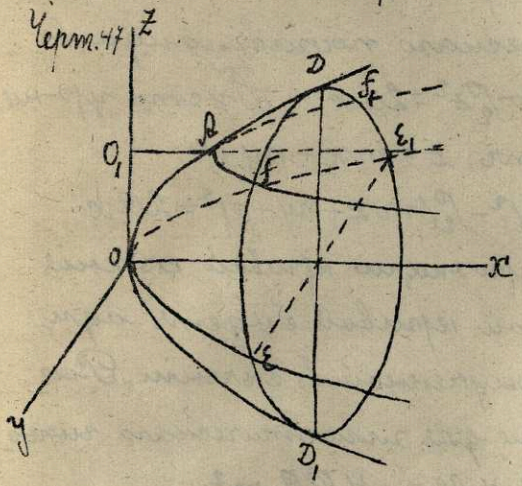
единственная ось поверхности. Эта ось пересъкаетъ поверхность въ точкѣ $x=y=z=0$, т. е. въ началѣ координатъ, и начало координатъ есть единственная вершина поверхности. Напишемъ ур-ніе такъ: $p_1y^2+p_2z^2=-2qx$. Здѣсь можно всегда полагать, что $-2q>0$, потому что, если бы было $-2q<0$, то мы могли бы перемѣнить направленіе оси $x^{ов}$ на прямопротивуположное и этой перемѣной сдѣлать членъ $2qx$ по знаку противуположнымъ прежнему. Поэтому мы будемъ писать ур-ніе такъ: $p_1y^2+p_2z^2=2qx$, принимая $2q>0$. Зотѣмъ надо разсмотрѣть 2 случая. 1) Когда p_1 и p_2 оба больше нуля. Получается поверхность называемая эллиптическимъ параболоидомъ. 2) Когда $p_1>0$ и $p_2<0$. Получаемая въ этомъ случаѣ поверхность называется гиперболическимъ параболоидомъ. Есть еще 3-й случай, когда p_1 и p_2 оба меньше нуля, но онъ не представляетъ ничего новаго, такъ какъ въ этомъ случаѣ можно перемѣнить знаки въ ур-ніи на обратные, и p_1 и p_2 оба будутъ положительны, знакъ же x при q по допущенному не существенъ.

I-й случай. Эллиптическій параболоидъ.

Его ур-ніе есть $p_1y^2+p_2z^2=2qx$, гдѣ p_1, p_2 и $2q$ больше нуля. Разсмотримъ главныя сѣченія. Для сѣченія съ плоскостью xz, $y=0$; ур-ніе обратится въ $p_2z^2=2qx$, отсюда $z^2=\frac{2q}{p_2}x$. Обозначимъ $\frac{q}{p_2}$ черезъ q; тогда $z^2=2qx$. Это будетъ парабола, имѣющая вершину въ O и осью — ось $x^{ов}$. Съ плоскостью xy поверхность пересѣкается по кривой, получаемой изъ ур-нія поверхности при $z=0$ и именно сѣченіе будетъ: $p_1y^2=2qx$ или $y^2=\frac{2q}{p_1}x$. Пусть $\frac{q}{p_1}=p$, тогда $y^2=2px$. Это опять

параболы, имеющая вершину в O и ось, совпадающую с осью $x^{ов}$. Теперь имеем $p = \frac{Q}{q}$; $p_1 = \frac{Q}{p}$. Внося наши обозначения в ур-ние поверхности, получаем $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$. Это есть простейшее ур-ние эллиптического параболоида. Рассмотрим сечение нашей поверхности плоскостью, параллельной плоскости yz. Ур-ние ея будет $x = h$. Исключая x, получаем: $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2h$ или $\frac{y^2}{2ph} + \frac{z^2}{2qh} = 1$. Это сечение есть эллипс, центр которого лежит на оси $x^{ов}$, а оси параллельны осям $y^{ов}$ и $z^{ов}$. С увеличением h от $h = 0$ до $h = +\infty$ эллипс идет расширяясь до бесконечности; при $h = 0$ эллипс обращается в точку O.

Черт. 47



Таким образом эта поверхность состоит из одной бесконечной полости, распространяющейся вправо по оси $x^{ов}$. При $h < 0$ сечение эллипс будет мнимым и следовательно по левую сторону плоскости yz поверхности не существует. Этой поверхности очевидно можно дать следующее образование. Вообразим, что в плоскостях xy и xz построены две главные параболы. Затем вообразим переменный эллипс, который движется так, что центр его перемещается по оси $x^{ов}$, плоскость его остается параллельной плоскости yz, вершины же его скользят по главным параболам. Этот эллипс очевидно опишет эллиптический параболоид.

Рассмотрим сечение конической поверхности плоскостью, параллельною плоскости xy. Ур-ние такой плоскости будет напр. $z=\gamma$. Исключив z, получим: $\frac{y^2}{p}+\frac{\gamma^2}{q}=2x$ или $y^2=2p(x-\frac{\gamma^2}{2q})$. Это есть ур-ние проекции сечения на плоскость xy, в этом ур-нии узнаем параболу, вершина которой находится на оси $x^{ов}$, ея ось совпадает съ осью $x^{ов}$, параметр этой параболы есть $2p$; вершина ея находится на положительной стороне оси $x^{ов}$, на разстоянии равномъ $\frac{\gamma^2}{2q}$ отъ начала коор-тъ. Чтобы перенести начало коор-тъ въ вершину, надо положить $x=x_1+\frac{\gamma^2}{2q}$ и тогда ур-ние будетъ: $y^2=2px_1$. Отсюда видно, что эта парабола, получаемая въ сѣчении плоскостью, параллельной плоскости xy, будетъ подобна съ главной параболой EOE_1; это будетъ парабола FDF_1. Изъ этого слѣдуетъ, что поверхность можетъ быть образована такимъ и слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ, что начерчена главная парабола DOD_1 въ плоскости xz; представимъ себѣ, что другая парабола, равная параболѣ EOE_1, движется такъ, что ея ось остается параллельною оси $x^{ов}$ и ея вершина скользитъ по главной параболѣ DOD_1. Эта парабола очевидно опишетъ нашу поверхность. Разсмотримъ сѣчение этой поверхности произвольной плоскостью, выраженной ур-ніемъ $z=mx+ny+p$. Ур-ние эллиптическаго параболоида есть: $p_1y^2+p_2z^2=2px$. Для нахожденія ур-нія сѣченія исключимъ z: $p_1y^2+p_2(mx+ny+p)^2-2px=0$ или: $(p_1+p_2n^2)y^2+p_2m^2x^2+2p_2mnxy+\ldots=0$. Это есть ур-ние проекціи сѣченія на плоскость xy. Опредѣлимъ родъ этого сѣченія. Проекція будетъ кривая $2^{го}$ порядка, и мы

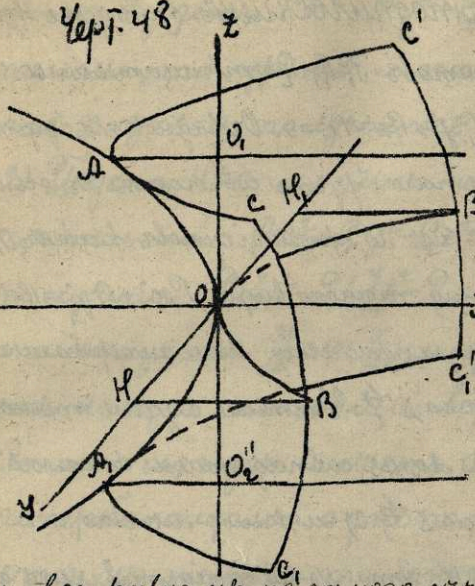
знаемъ, что кривая того же рода будетъ и въ сѣченіи. Составимъ бином: $B^2-4AC=4p_2^2m^2n^2-4p_2m^2(p_1+p_2n^2)=-4p_1p_2m^2<0$. Слѣдовательно сѣченіе вообще будетъ эллипсъ, кромѣ того случая, когда $m=0$, тогда и $B^2-4AC=0$, тоесть что въ сѣченіи будетъ парабола. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ ур-ніе сѣкущей плоскости будетъ $z=nY+p$. Это есть плоскость параллельная оси $x^{ов}$ слѣдовательно всякое сѣченіе плоскостью параллельной оси $x^{ов}$ будетъ парабола, а всякое другое сѣченіе будетъ эллипсъ; отсюда названіе поверхности эллиптическій параболоидъ.

Въ заключеніи замѣтимъ частный случай этой поверхности, когда въ ея ур-ніи $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x$ имѣемъ $p=q$, тогда ур-ніе будетъ: $y^2+z^2=2px$. Оно представляетъ параболоидъ вращенія, который можетъ быть произведенъ вращеніемъ параболы EOE_1 около оси $x^{ов}$.

Гиперболическій параболоидъ.

Этотъ видъ поверхности получается, когда въ общемъ ур-ніи $p_1y^2+p_2z^2=2ax$, поверхностей не имѣющихъ центра, два коэффиціента p_1 и p_2 имѣютъ разные знаки. Поставимъ это на видъ и будемъ разсматривать ур-ніе $p_1y^2-p_2z^2=2ax$, въ которомъ p_1, p_2 и a положительны. Далѣе опредѣлимъ главныя сѣченія. Сѣченіе съ плоскостью xy получится при $z=0$, оно будетъ: $p_1y^2=2ax$ или $y^2=\frac{2a}{p_1}x$; положивъ, что $\frac{a}{p_1}=p$, будемъ имѣть ур-ніе сѣченія $y^2=2px$ — и оно представитъ параболу, вершина которой въ O и ось совпадаетъ съ осью $x^{ов}$. Для сѣченія съ плоскостью xz $y=0$ и ур-ніе сѣченія будетъ: $-p_2z^2=2ax$, отсюда $z^2=-\frac{2a}{p_2}x$ и если положимъ $\frac{a}{p_2}=q$, то будемъ имѣть $z^2=-2qx$. Это сѣченіе, какъ видно, тоже парабола, вершина которой въ началѣ координатъ, но ось на-

проведена в сторону отрицательных $x^{ов}$. Введем в ур-ние поверхности величины p и q. Имеем: $p_1 = \frac{a}{p}$ и $p_2 = +\frac{a}{q}$; Черт. 48



вставив, найдем: $\frac{a}{p}y^2 - \frac{a}{q}z^2 = 2ax$ или $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$. Это есть простейшее ур-ние гиперболического параболоида. Рассмотрим данное сечение этой поверхности плоскостью, параллельной плоскости xy. Пусть $z = \gamma$ – ур-ние этой плоскости. Исключив z, найдем: $\frac{y^2}{p} - \frac{\gamma^2}{q} = 2x$ или $y^2 = 2p\left(x + \frac{\gamma^2}{2q}\right)$. Это есть ур-ние проекции сечения на плоскость xy или все равно ур-ние самого сечения в его плоскости. Ур-ние это представляет параболу, вершина которой находится на отрицательной стороне оси $x^{ов}$ в расстоянии от начала равном $\frac{\gamma^2}{2q}$. Ось этой параболы совпадает с осью $x^{ов}$ (имеет с нею одно направление). Чтобы перенести в ее вершину начало коор-т, надо положить $x = x_1 - \frac{\gamma^2}{2q}$; тогда будем иметь: $y^2 = 2px_1$. Отсюда видно, что эта парабола равна главной параболе, лежащей в плоскости xy. Начертим это сечение. Представим для полноты на чертеже еще сечение плоскостью, параллельной плоскости xy, и пусть ур-ние этой плоскости будет: $z = -\delta$; на чертеже возьмем $OO_2 = -\delta$. Отсюда видно, какое образование можно дать этой поверхности. Вообразим, что в плоскости xz начерчена главная парабола AOA_1. Заставим вообразить, что другая парабола движется так, что ее

вершина описывает параболу AOA_1; плоскость этой параболы остается при движении параллельной плоскости xy, а ее ось постоянно параллельна положительному направлению оси $x^{ов}$; эта парабола своим движением опишет гиперболический параболоид. Рассмотрим еще сечение этой поверхности плоскостями, параллельными плоскости xz. Пусть $y=\beta$ есть ур-ние такой плоскости. Исключим y:
$\frac{\beta^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$ или $z^2=-2q\left(x-\frac{\beta^2}{2p}\right)$. Это тоже парабола, вершина которой на оси $x^{ов}$ в положительную сторону, а ось направлена в сторону отрицательных $x^{ов}$. Чтобы перенести начало координат в вершину, надо положить $x=x_1+\frac{\beta^2}{2p}$.

Тогда получим: $z^2=-2qx_1$

Отсюда видно, что эта парабола равна параболе AOA_1 и точно такого же расположения. Начертим это сечение; на чертеже это пусть будет парабола $CBC_1=AOA_1$. Если бы взяли сечение плоскостью $y=-\beta$, то получили бы конечно точно такую же параболу. Вычертим образующие на чертеже у нас выделилось благодаря этим сечениям часть поверхности между 4-мя плоскостями: $x=+\delta$; $x=-\delta$; $y=+\beta$ и $y=-\beta$. Это будет поверхность $C'A'C_1'B_1C_1ACBC'$. Она имеет форму седла и называется потому <u>седлообразною поверхностью</u>.

Возьмем еще сечение этой поверхности плоскостью yz. На этой плоскости $x=0$, и ур-ние будет: $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=0$,

откуда $y^2 = \frac{10}{9} z^2$ или $y = \pm\sqrt{\frac{10}{9}}\, z$. Мы видимъ такимъ образомъ, что въ сѣченіи получаются двѣ прямыя, проходящія черезъ начало и составляющія съ осью z двѣ равные углы по обѣ стороны. Разсмотримъ еще сѣченіе той же поверхности произвольной плоскостью. Возьмемъ ур-ніе гиперболическаго параболоида въ первоначальномъ видѣ: $p_1 y^2 - p_2 z^2 = 2qx$. Пусть ур-ніе сѣкущей плоскости будетъ: $z = mx + ny + p$.
Исключивъ z, получимъ: $p_1 y^2 - p_2 (mx + ny + p)^2 = 2qx$
Это ур-ніе представляетъ проэкцію кривой сѣченія на плоскости xy. Родъ этой кривой будетъ одинаковъ съ родомъ кривой, полученной въ сѣченіи. Разсмотривая такое же сѣченіе для эллиптическаго параболоида, мы нашли: $B^2 - 4AC = -4 p_1 p_2 m^2$.
Въ настоящемъ случаѣ надо $+p_2$ перемѣнить на $-p_2$, и получимъ: $B^2 - 4AC = +4 p_1 p_2 m^2$, что больше нуля; слѣдовательно сѣченіе всегда будетъ гипербола, за исключеніемъ одного того случая, когда $m = 0$; тогда $B^2 - 4AC = 0$ и въ сѣченіи будетъ парабола. Въ послѣднемъ случаѣ ур-ніе сѣкущей плоскости будетъ: $z = ny + p$. Эта плоскость параллельна оси x-въ, слѣдовательно всякое сѣченіе гиперболическаго параболоида плоскостью будетъ гипербола, кромѣ сѣченія плоскостью параллельною оси x-въ, которое будетъ всегда парабола.

Конецъ