

Библиотека Императ
скаго Техническаго училища

262517

1.

28.

БИБЛИОТЕКА

Московского

ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЩА

Геометрическое разъясненіе нѣкоторыхъ во-
просовъ теоріи уравненій
съ частными производными.

ПРОВЕРЕНО

1952

(Профессора Н. Жуковского).

Фундамен

✓ Для разъясненія учащимся главныхъ приѣмовъ инте-
грированія уравненій съ частными производными пер-
ваго порядка, мы излагаемъ здѣсь эти приѣмы въ видѣ
рѣшенія нѣкоторыхъ геометрическихъ задачъ.

Задача 1. Даны направленія касательныхъ семейства
кривыхъ линій; провести чрезъ данную точку прост-
ранства поверхность, перпендикулярную этому се-
мейству.

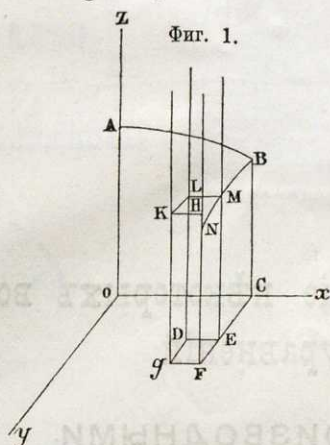
Вообразимъ прямоугольныя оси координатъ и пред-
положимъ, что косинусы угловъ, которые касательная,
проведенная чрезъ точку (x, y, z) , образуетъ съ этими
осями, находятся въ отношеніи

$$P: Q: R,$$

гдѣ P, Q и R функціи x, y и z .

Прежде нежели приступить къ рѣшенію задачи, опре-
дѣлимъ условіе ея возможности.

Начертимъ (фиг. 1) на плоскости xy бесконечно малый прямоугольникъ $DEFG$, стороны котораго параллельны осямъ ox и oy и равны dx и dy . На этомъ прямоугольнике, какъ на основаніи, построимъ прямоугольную призму и проведемъ по ея сторонамъ непрерывную линію $NMLKH$, ортогональную данному семейству линій.



Понятно, что условіе возможности нашей задачи состоитъ въ томъ, чтобы эта линія замыкалась, т. е. $NH=0$.

Для опредѣленія NH , обозначаемъ чрезъ dz , δz , $d'z$ $\delta'z$ бесконечно малыя измѣненія z при переходахъ: отъ L къ M , отъ L къ K , отъ K къ H и отъ M къ N . Получимъ:

$$NH = d'z - dz - (\delta'z - \delta z).$$

Но

$$dz = -\frac{P}{R} dx,$$

$$\delta z = -\frac{Q}{R} dy,$$

$$d'z - dz = -\frac{\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dP}{dz} \frac{Q}{R}\right)R - \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dR}{dz} \frac{Q}{R}\right)P}{R^2} dx dy;$$

$$\delta'z - \delta z = -\frac{\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dQ}{dz} \frac{P}{R}\right)R - \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dR}{dz} \frac{P}{R}\right)Q}{R^2} dx dy;$$

поэтому

$$NH = -\frac{dxdy}{R^2} \left\{ P \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + Q \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + R \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) \right\}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что искомое условіе будетъ:

$$P \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + Q \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + R \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) = 0. \quad (1)$$

Положимъ, что это условіе удовлетворено, и оси координатъ взяты такъ, что точка A , чрезъ которую надо провести поверхность, лежитъ на оси oz . Проведемъ сначала чрезъ эту точку кривую AB по плоскости xz ортогонально данному семейству линий. Для этого интегрируемъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R},$$

положивъ въ немъ $y=0$. Произвольное постоянное определяемъ подъ условіемъ, что при $x=0, z=0$. Пусть найденный интегралъ, по замѣнѣ въ немъ z на c будетъ

$$f(x, c) = 0. \quad (2)$$

Чрезъ произвольную точку B найденной кривой проведемъ плоскость параллельно yz и на ней построимъ кривую BN , ортогональную данному семейству линий. Чтобы найти уравненіе этой кривой, интегрируемъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R},$$

считая x постояннымъ, и определяемъ произвольное постоянное, полагая при $y=0, z=c$. Найдемъ интегралъ

$$\varphi(x, y, z, c) = 0. \quad (3)$$

Если теперь исключимъ c изъ ур. (2) и (3), то очевидно найдемъ уравненіе искомой поверхности.

Называя чрезъ dx , dy , dz дифференціалы координатъ при переходѣ отъ одной точки этой поверхности къ другой бесконечно близкой и замѣчая, что элементъ дуги, соединяющій эти двѣ точки, долженъ быть перпендикуляренъ къ касательной даннаго семейства кривыхъ, найдемъ уравненіе съ полными дифференціалами

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \quad (4)$$

которому должна удовлетворять наша поверхность. Поэтому рѣшенная нами задача заключаетъ въ себѣ способъ интегрированія этого уравненія.

Задача 2. Даны направленія касательныхъ семейства кривыхъ линій; провести поверхность, образованную линіями этого семейства, проходящими чрезъ точки данной кривой.

Пусть касательныя даны отношеніемъ косинусовъ

$$P : Q : R.$$

Прежде всего опредѣляемъ уравненія линій даннаго семейства, интегрируя совмѣстныя дифференціальныя уравненія

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= a, \\ f(x, y, z) &= b \end{aligned} \quad (5)$$

будутъ ихъ интегралы. Послѣ этого обращаемся къ кривой, чрезъ которую должна проходить искомая поверхность. Положимъ, что уравненія кривой суть:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= 0, \\ \varphi_1(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Исключивъ изъ ур. (5) и (6) x, y, z найдемъ связь между параметрами a и b

$$a = \Theta(b), \quad (7)$$

которая должна имѣть мѣсто для всѣхъ линій даннаго семейства, пересѣкающихъ кривую (6). Замѣняя въ ур. (7) a и b ихъ величинами изъ ур. (5), найдемъ уравненіе искомой поверхности.

Если теперь предположимъ, что это уравненіе рѣшено относительно z и назовемъ чрезъ p и q частныя производныя z по x и y , то направленіе нормалей поверхности будетъ опредѣляться отношеніемъ косинусовъ угловъ

$$p : q : -1,$$

и такъ какъ эти нормали должны быть перпендикулярны касательнымъ семейства линій, то искомая поверхность должна удовлетворять линейному уравненію съ частными производными

$$Pr + Qq = R. \quad (8)$$

Найденный способъ рѣшенія задачи даетъ намъ способъ интегрированія этого уравненія.

Задача 3. Въ каждой точкѣ пространства построить конусъ; провести чрезъ данную кривую поверхность, нормали которой направлены по образующимъ этихъ конусовъ.

Предположимъ, что косинусы угловъ образующихъ конуса находятся въ отношеніи

$$p : q : -1,$$

гдѣ p и q связаны уравненіемъ

$$F(p, q, x, y, z) = 0. \quad (9)$$

Воображаемъ въ каждой точкѣ пространства другіе конусы

$$\varphi(p, q, x, y) = 0 \quad (10)$$

и выбираемъ ихъ такъ, чтобы образующія, по которымъ онѣ пересѣкаются съ конусами (9), давали направленія касательныхъ семейства линій, къ которому можно провести ортогональную поверхность.

Это требуетъ, по фор. (1), чтобы величины p и q , опредѣленные изъ ур. (9) и (10), удовлетворяли условію

$$p \frac{dq}{dz} - q \frac{dp}{dz} - \frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dx} = 0. \quad (11)$$

Подставляемъ сюда по фор. (9) и (10)

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{dF}{dx} \frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{dF}{dp} \right),$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{d\varphi}{dy} \frac{dF}{dq} - \frac{dF}{dy} \frac{d\varphi}{dq} \right),$$

$$\frac{dp}{dz} = - \frac{1}{\Delta} \frac{dF}{dz} \frac{d\varphi}{dq},$$

$$\frac{dq}{dz} = \frac{1}{\Delta} \frac{dF}{dz} \frac{d\varphi}{dp},$$

гдѣ

$$\Delta = \frac{dF}{dp} \frac{d\varphi}{dq} - \frac{dF}{dq} \frac{d\varphi}{dp}.$$

Находимъ

$$- \frac{d\varphi}{dx} \frac{dF}{dp} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{dF}{dq} + \frac{d\varphi}{dp} \left(\frac{dF}{dx} + p \frac{dF}{dz} \right) + \frac{d\varphi}{dq} \left(\frac{dF}{dy} + q \frac{dF}{dz} \right) = 0. \quad (12)$$

Это уравненіе, изъ котораго z можетъ быть исклю-

чено съ помощію фор. (9), представляетъ линейное уравненіе съ частными производными, изъ котораго можно опредѣлить функцію φ .

Для этого надо обратиться къ совмѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$-\frac{dx}{dF} = -\frac{dy}{dF} = \frac{dp}{\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz}} = \frac{dq}{\frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz}}; \quad (13)$$

причемъ достаточно будетъ опредѣлить только два интеграла этихъ уравненій

$$\begin{aligned} f(x, y, p, q) &= a, \\ f_1(x, y, p, q) &= b. \end{aligned} \quad (14)$$

Получивъ эти интегралы, обращаемся къ уравненію кривой

$$\begin{aligned} x &= \psi(z), \\ y &= \psi_1(z), \end{aligned} \quad (15)$$

чрезъ которую должна проходить наша поверхность. Понятно, что на этой кривой направленіе нормали нашей поверхности вполне опредѣлено, такъ какъ она должна не только быть направлена по образующей конуса (9), но и должна быть перпендикулярна этой кривой. Такимъ образомъ на данной кривой p и q удовлетворяютъ условію

$$p \psi'(z) + q \psi_1'(z) - 1 = 0. \quad (16)$$

Опредѣляя изъ ур. (9), (15) и (16) x , y , p , и q , какъ функціи z , и подставляя въ ур. (14), найдемъ два уравненія, изъ которыхъ можемъ исключить z и получить

$$\Theta(a, b) = 0. \quad (17)$$

Подставляя сюда аргументы a и b изъ фор. (14), найдемъ искомую нами связь

$$\varphi(p, q, x, y) = 0,$$

которая вмѣстѣ съ даннымъ ур. (9) позволитъ опредѣлить для каждой точки направленіе касательной семейства линій, къ которому можно провести ортогональную поверхность. Послѣ этого остается только чрезъ какую нибудь точку заданной кривой (15) провести такую ортогональную поверхность, которая и будетъ искомая.

Если бы мы рѣшили уравненіе искомой поверхности относительно z и положили бы

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

то нашли бы, что она должна удовлетворять нелинейному уравненію съ частными производными

$$F(p, q, x, y, z) = 0.$$

Поэтому найденное нами рѣшеніе задачи даетъ способъ интегрированія этого уравненія.

