I-43

КУРСЪ

СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

НИКОЛАЕВСКОЙ ИНЖЕНЕРНОЙ АКАДЕМІИ,

СОСТАВЛЕННЫЙ ПО ЛЕКЦІЯМЪ

Г. Е. ПАУКЕРА.

1885—1886 ГОДА.

БИБЛІОТЕКА
ИМПЕРАТОРСКАГО
Московскаго
ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

Типо-Литографія А. Ф. Маркова, Большая Итальянская, № 5.

1885.

Г-93
БИБЛІОТЕКА
ИМПЕРАТОРСКАГО
Московскаго
ТЕХНИЧЕСКАГО УЧИЛИЩА
ИЗ КУЗИ
ГОСУД. ПУБЛ. ИСТОРИЧЕСКАГО
По инвентарю 142
№ описи 3 8064
ПРОВЕРЕНО 1946
ПРОВЕРЕНО 1952

Курсъ Строительной механики

Николаевской Инженерной Академіи

1884-1885 года

Подъ названіемъ строительной механики понимаютъ ту часть строительнаго искусства, въ которой разсматриваются вопросы, относящіеся къ прочности и устойчивости зданій и выводимые на основаніи законовъ механики. Строительная механика можетъ быть раздѣлена на два отдѣла:

1) <u>Теорія сопротивленія матеріаловъ</u>, въ которой изслѣдуется дѣйствіе внѣшнихъ силъ на отдѣльныя матеріальныя тѣла, въ отношеніи измѣненія вида этихъ тѣлъ и вызываемаго въ нихъ сопротивленія разрушенію связи между ихъ частями.

2) <u>Теорія устойчивости и прочности зданій</u>, въ которой излагаются способы опредѣленія внѣшнихъ силъ дѣйствующихъ на различныя тѣла, входящія въ составъ данной части зданія, и тѣхъ измѣреній, которыя необходимы, чтобъ эта часть зданія могла выдерживать дѣйствіе внѣшнихъ силъ не повреждаясь. Такимъ образомъ теорія устойчивости и прочности зданій заключаетъ въ себѣ

приложенія теоріи сопротивленія матеріаловъ къ разрѣшенію вопросовъ, касающихся каменныхъ сводовъ и стѣнъ - деревянныхъ и желѣзныхъ стропилъ, мостовыхъ фермъ и пр.

Отдѣлъ I.

Теорія сопротивленія матеріаловъ.

Объ упругости тѣлъ.

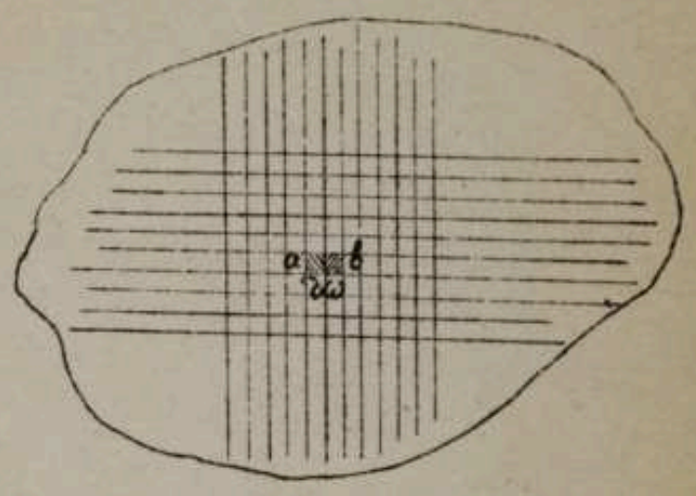
Всѣ твердыя тѣла, подверженныя дѣйствію внѣшнихъ силъ, измѣняютъ болѣе или менѣе свой видъ и это измѣненіе вида тѣлъ значительнѣе, чѣмъ значительнѣе дѣйствіе внѣшнихъ силъ, то есть чѣмъ болѣе напряженіе силъ и чѣмъ оно продолжительнѣе. Измѣненіе вида тѣла продолжается до тѣхъ поръ, пока дѣйствіе внѣшнихъ силъ не превзойдетъ извѣстнаго предѣла, за которымъ связь между частицами нарушается, или же пока сопротивленіе тѣла, постепенно возрастающее вмѣстѣ съ продолжающимся измѣненіемъ вида его, не успѣетъ уравновѣсить внѣшнія силы, и если въ семъ послѣднемъ случаѣ, дѣйствіе внѣшнихъ силъ прекратится, то тѣло послѣ нѣкоторыхъ качаній воспринимаетъ опять болѣе или менѣе совершенно свою первоначальную форму. Это свойство твердыхъ тѣлъ извѣстно подъ названіемъ упругости.

Чтобы быть въ состояніи приложить вычисленія къ изслѣдованію явленій, зависящихъ отъ свойства упругости тѣлъ, необходимо составить себѣ отчетливое понятіе объ образѣ проявленія этого свойства въ тѣлахъ и о томъ, какъ это проявленіе можетъ быть измѣрено и выражено числами. Для этого замѣтимъ, что всякое твердое тѣло можно себѣ представить составленнымъ изъ мелкихъ частицъ, другъ къ другу болѣе или менѣе плотно прилегающихъ. Смотря на тѣла съ этой точки зрѣнія, можно свойство упругости тѣлъ выразить слѣдующимъ образомъ: 1°, такъ какъ при измѣненіи вида тѣла очевидно должно происходить и перемѣщеніе его частицъ, однихъ относительно другихъ, и такъ какъ, по свойству упругости, тѣло сопротивляется измѣненію своего вида, то изъ этого слѣдуетъ, что при измѣненіи нормальнаго разстоянія между частицами, проявляются <u>внутреннія частичныя силы</u>, противодѣйствующія этому измѣненію разстоянія; 2°) такъ какъ сопротивленіе тѣла возрастаетъ вмѣстѣ съ измѣненіемъ вида тѣла, то есть будетъ тѣмъ значительнѣе чѣмъ болѣе измѣняется видъ, то изъ сего слѣдуетъ, что внутреннія частичныя силы должны имѣть такое свойство, что напряженіе ихъ возрастаетъ и убываетъ вмѣстѣ съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ измѣненія нормальныхъ разстояній частицъ;

3е. такъ какъ тѣло продолжаетъ сопротивляться измѣненію своего вида только до извѣстнаго предѣла, за которымъ прекращается связь между частицами, то внутреннія частичныя силы имѣютъ еще такое свойство, что онѣ могутъ увеличиваться только до извѣстнаго предѣла, далѣе котораго дѣйствіе ихъ прекращается;

4е. Такъ какъ по прекращеніи дѣйствія внѣшнихъ силъ тѣло, по свойству упругости стремится воспринять первоначальную свою форму, то внутреннія частичныя силы, возбужденныя дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, продолжаютъ существовать и по прекращеніи его дѣйствія, и перестаютъ проявляться только тогда, когда разстоянія между частицами опять достигнутъ своихъ нормальныхъ величинъ. Но какъ при измѣненіи нормальныхъ разстояній между частицами тѣла, онѣ могутъ расположиться одна относительно другихъ такъ, что воспрепятствуютъ болѣе или менѣе возвращенію къ первоначальному расположенію своему, то изъ этого слѣдуетъ, что по прекращеніи дѣйствія внѣшнихъ силъ, тѣло можетъ и не воспринять вполнѣ первоначальный свой видъ, а сохранить нѣкоторое постоянное или остающееся измѣненіе вида.

Чтобы составить себѣ понятіе о томъ, какъ измѣряется дѣйствіе внутреннихъ частичныхъ силъ тѣла и какимъ образомъ онѣ зависятъ отъ измѣненія вида тѣла, вообразимъ себѣ



какое нибудь тѣло раздѣленнымъ тремя системами взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, безконечно близкихъ между собою, на безконечно малые элементы и обратимъ пока вниманіе на внутреннія частичныя силы, проявляющіяся въ точкахъ элементарной поверхности dω, по которой касаются между собою два смежные элемента a и b. Если отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ на это тѣло измѣнится относительное положеніе частицъ элементовъ a b то въ точкахъ элементарной поверхности касанія dω проявятся внутреннія силы, которыя можно принять параллельными между собою и почти равными, потому что тѣло можно принять однороднымъ на безконечно маломъ протяженіи dω, въ вслѣдствіе чего всѣ частичныя силы, проявляющіяся въ точкахъ элемента dω будутъ имѣть одну равнодѣйствующую.

Эта равнодѣйствующая частичныхъ силъ, проявляющихся въ точкахъ элемента dω называется силою упругости, соотвѣтствующею элементарной поверхности dω. Что касается до направленія силы упругости, то такъ какъ эта сила сопротивляется измѣненію вида тѣла возлѣ точекъ dω, то очевидно направленіе силы упругости должно быть прямо противоположно тому перемѣщенію частицъ, которое внѣшнія силы стремятся произ-

вести; а чтобы найти выраженіе для величины силы упругости замѣтимъ, что мы здѣсь можемъ ограничиться разсматриваніемъ двухъ только случаевъ, а именно: первагo, когда сила упругости параллельна линіи, соединяющей центры элементовъ a и b; этотъ случай соотвѣтствуетъ растяженію или сжатію тѣла въ точкахъ dd; и второго случая, когда сила упругости существуетъ параллельно площади dd, случая который соотвѣтствуетъ скольженію одного элемента по другому, что можетъ произойти при скручиваніи и перекашиваніи тѣла. Третій же случай, когда сила упругости имѣетъ направленіе наклонное къ двумъ предъидущимъ направленіямъ можетъ быть сведенъ на оба первые случая, если разематривать вмѣсто одной силы упругости двѣ ея составляющія параллельныя двумъ вышеприведеннымъ направленіямъ.

Обращаясь сперва къ первому изъ этихъ случаевъ, то есть къ случаю когда вѣличія силы стремятся увеличить или уменьшить первоначальное разстояніе центровъ элементовъ a и b, обратимъ вниманіе на то, что напряженіе силы упругости, въ вслѣдствіе вышесказаннаго, должно быть тѣмъ больше, чѣмъ больше будетъ измѣненіе разстоянія ab относительно первоначальной величины этого разстоянія; а слѣдовательно изображая чрезъ γ первоначальную величину разстоянія ab

и чрезъ $d\nu$ положительное или отрицательное измѣненіе этого разстоянія, то есть удлиненіе его или укороченіе, легко видѣть, что напряженіе силы упругости будетъ нѣкоторою функціею отъ дроби $\frac{d\nu}{\nu}$, а такъ какъ кромѣ того, оно должно быть пропорціонально величинѣ площади $d\omega$, потому что, чѣмъ эта площадь больше, тѣмъ больше число равныхъ между собою частичныхъ силъ войдетъ въ составъ силы упругости, то по этому сила упругости можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ: $f\left(\frac{d\nu}{\nu}\right)d\omega$, гдѣ $\frac{d\nu}{\nu}$ есть относительное удлиненіе или укороченіе.

Эта функція должна имѣть слѣдующія свойства: 1, она должна обращаться въ нуль, если $\frac{d\nu}{\nu}=0$, то есть, когда разстояніе $\underline{a}\,\underline{b}$ во все неизмѣнено; 2, эта функція отъ $\frac{d\nu}{\nu}$ должна быть функціею непрерывною для величинъ количества $\frac{d\nu}{\nu}$ весьма малыхъ, потому что вмѣстѣ съ нечувствительнымъ измѣненіемъ вида тѣла и самое сопротивленіе тѣла измѣняется нечувствительно. Если же эта функція имѣетъ эти два свойства, то она можетъ быть развернута по теоремѣ Маклорена, по возрастающимъ степенямъ количества $\frac{d\nu}{\nu}$ и представлена въ видѣ:

$$f\left(\frac{d\nu}{\nu}\right)d\omega = d\omega\left[f(0)+\frac{d\nu}{\nu}f'(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\nu}{\nu}\right)^2 f''(0)+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d\nu}{\nu}\right)^3 f'''(0)+\ldots\ldots\right]$$

или такъ какъ первый членъ равенъ нулю, то

$$f\left(\frac{d\nu}{\nu}\right)d\omega = d\omega\left[f'(0)\frac{d\nu}{\nu}+\frac{1}{2}f''(0)\left(\frac{d\nu}{\nu}\right)^2+\frac{1}{2.3}f'''(0)\left(\frac{d\nu}{\nu}\right)^3+\ldots\ldots\right]$$

Отсюда видно, что если мы удовлетвуемся при-

близительною величиною $f(\frac{dr}{r})$, то вместо всего выведенного ряда можно взять только первый его членъ, потому что при весьма малыхъ величинахъ $\frac{dr}{r}$ остальные члены несравненно меньше перваго члена. Поэтому для чрезвычайно малыхъ величинъ дроби $\frac{dr}{r}$, или другими словами, для чрезвычайно малыхъ измѣненій вида тѣла, мы получимъ выраженіе силы упругости $f(0)\frac{dr}{r}d\omega$ —, въ которомъ первый множитель будетъ уже независимъ отъ количества $\frac{dr}{r}$, или отъ большаго или меньшаго измѣненія вида тѣла, но если тѣло неоднородное, то этотъ первый множитель можетъ зависѣть отъ положенія элементарной поверхности $d\omega$ внутри всего тѣла. Этотъ множитель обыкновенно выражается буквою E /extension/:

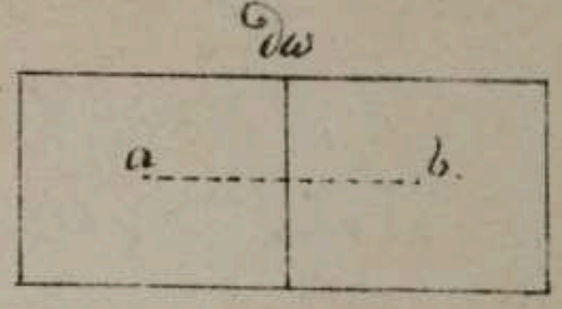
И такъ для растяженія или сжатія, сила упругости, соотвѣтствующая элементарной поверхности $d\omega$, выражается чрезъ:

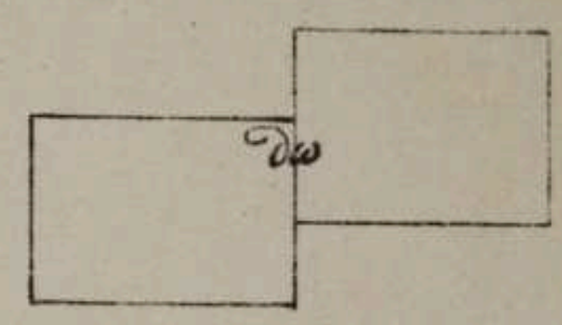
$$E\frac{dr}{r}d\omega.$$

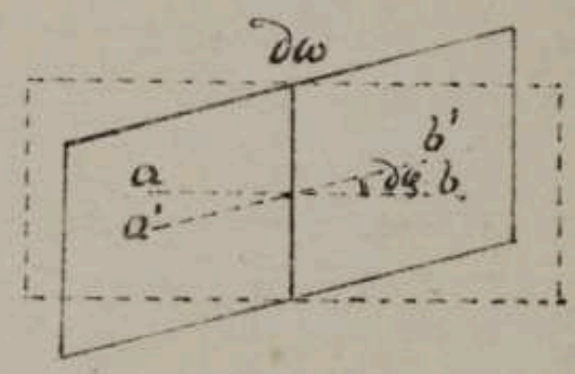
Выраженіе это показываетъ въ какой зависимости находится величина силы упругости отъ измѣненія вида тѣла при растяженіи или сжатіи.

Перейдемъ теперь ко второму случаю, когда вышняя сила стремится произвести скольженіе одного элемента относительно другого по поверхности ихъ прикосновенія. Если бы не было сцѣпленія внутри тѣла по поверхности $d\omega$, то въ

разсматриваемомъ случаѣ, элементы $\underline{a}$ и $\underline{b}$, сохраняя каждый свой видъ, передвинулись бы вдоль поверхности $d\omega$, но такъ какъ внутри всего тѣла связь между частицами предполагается еще не прекращенною, то это передвиженіе не будетъ имѣть мѣста, а вмѣсто него измѣнится только видъ обоихъ элементовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ положеніе ихъ центровъ, которые перейдутъ въ точки $\underline{a'}$ и $\underline{b'}$ и это измѣненіе вида очевидно







измѣряется чрезвычайно малымъ угломъ $d\varphi$ составляемымъ первоначальнымъ и измѣненнымъ положеніемъ линіи, соединяющей центры. Поэтому, разсуждая подобно предыдущему, найдемъ, что сила упругости, соотвѣтствующая элементу $d\omega$, въ разсматриваемомъ случаѣ выразится чрезъ: $F(d\varphi)d\omega$ и должна имѣть то свойство, что она не разрывна при величинахъ $d\varphi$ близкихъ къ нулю и что $F(0)$ должна быть равна нулю; а слѣдовательно можно написать:

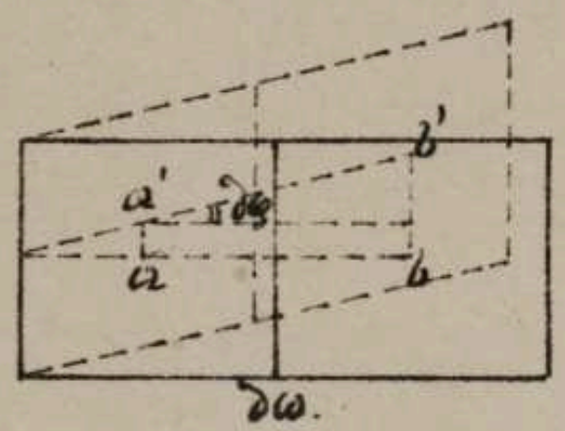
$$F(d\varphi)d\omega = d\omega\left[F'(0)d\varphi + \frac{1}{2}F''(0)d\varphi^2 + \frac{1}{2.3.}F'''(0)d\varphi^3 + \cdots\right];$$

откуда видно, что для чрезвычайно малыхъ величинъ количества $d\varphi$ сила упругости выразится

чрезъ: $\mathcal{F}(v)\,d\varphi.d\omega$, гдѣ $\mathcal{F}(v)$ представитъ количество вовсе независящее отъ измѣненія вида тѣла; этотъ множитель обыкновенно изображается буквою $\mathcal{J}$ / glissement. /. Итакъ въ случаѣ когда внѣшнія силы стремятся произвести скольженіе параллельно $d\omega$, то сила упругости соотвѣтствующая $d\omega$ выразится черезъ:

$$\mathcal{J}.d\varphi.d\omega.$$

Этому выраженію можно дать другой видъ, который иногда болѣе удобенъ для приложеній, если вспомнить, что система поверхностей раздѣляющихъ тѣло на элементы, выбраны такъ, чтобы линія соединяющая центры $\underline{a}$ и $\underline{b}$ была перпендикулярна къ поверхности $d\omega$. При такомъ раздѣленіи тѣла на элементы, изображая чрезъ v первоначальное разстояніе центровъ $\underline{a}$ и $\underline{b}$ и чрезъ dv перемѣщеніе центра $\underline{b}$ относительно $\underline{a}$ параллельно поверхности $d\omega$, мы имѣемъ изъ прямоугольнаго



треугольника, что $dv = v\,tg\,d\varphi$ или, такъ какъ для очень малыхъ величинъ $tg\,d\varphi$ равенъ своей дугѣ, то $dv = v\,d\varphi$ откуда $d\varphi = \frac{dv}{v}$, а слѣдовательно выраженіе силы упругости будетъ:

$$\mathcal{J}.\frac{dv}{v}.d\omega.$$

Это выраженіе совершенно сходно съ тѣмъ,

которое относится къ случаю растяженія или сжатія элементовъ; разница между ними та, что въ выраженіи $E\frac{\partial v}{v}\partial\omega$ количество ∂v представляетъ удлиненіе или укороченіе линіи, соединяющей центры, а во второмъ выраженіи: $J\frac{\partial r}{r}.d\omega,dr$ – представляетъ передвиженіе одного центра относительно другого параллельно поверхности косанія элементовъ.

Коэффиціенты E и J, входящіе въ выраженія силы упругости, называются коэффиціентами упругости, а именно первый называется коэффиціентомъ упругости, относящимся къ растяженію или сжатію тѣла, а другой коэффиціентомъ упругости при кручеміи или перекъзываніи тѣла.

Такъ какъ выраженія $E\frac{\partial r}{r}d\omega$ и $J\frac{\partial r}{r}d\omega$ представляютъ величину нѣкоторой силы, то они очевидно должны представить нѣкоторое число единицъ вѣса, а какъ $\frac{\partial v}{v}$ отвлеченное число, то количества $Ed\omega$ и $Jd\omega$ должны выразить извѣстное число единицъ вѣса. Вслѣдствіе этого числовыя величины коэффиціентовъ упругости E и J должны быть даны не только въ зависимости отъ принятой единицы вѣса, но еще въ зависимости отъ единицы мѣры площади, потому что если единица вѣса останется такая самая, а единица мѣры площади измѣнится, то произведенія $Ed\omega$ и $Jd\omega$ никакъ не могутъ удержать тоже самую величину, какъ если вмѣсто съ измѣненіемъ числа $d\omega$ будетъ измѣняться безъ

и коэффициенты въ E и Q. Напримѣръ, если, принимая за единицы пуды и квадратные дюймы, имѣемъ $E = 800{,}000$ пудовъ, то взявъ вмѣсто квадратныхъ дюймовъ, квадратные футы за единицу мѣры, надобно будетъ вмѣсто E взять число въ 144 раза большее, то есть 144.800,000 пудовъ, потому что одна и тоже площадь это въ первомъ случаѣ выразится числомъ квадратныхъ дюймовъ въ 144 раза большимъ, нежели число квадратныхъ футовъ во второмъ случаѣ. Если величина коэффиціента упругости дана въ килограммахъ для квадратнаго сантиметра, то она можетъ быть приведена къ пудамъ и русскимъ дюймамъ слѣдующимъ образомъ: 1 кв. сант. = 0,155 кв. дюймамъ, 1 килогр. = 0,06105 пуд., слѣдовательно сила въ E килограммовъ, дѣйствующая на 1 квадратный сантиметръ произведетъ силу въ $\frac{0{,}06105}{0{,}155} E$ пудовъ на 1 квадратный дюймъ, что составитъ $0{,}393903\,E$ пудовъ. Напримѣръ: для полосоваго желѣза $E = 2{,}000000$ килогр. на 1 квадратный сантиметръ или $0{,}3939 . 2.000000$ пуд $= 787'806$ пуд. на 1 квадр. дюймъ. Кромѣ этого коэффиціенты упругости очевидно также должны зависѣть отъ свойствъ вещества разсматриваемаго тѣла, и слѣдовательно они могутъ быть опредѣлены только изъ опытовъ. Здѣсь же слѣдуетъ замѣтить, что хотя, какъ видно изъ предъидущаго, коэффиціентъ упругости для растяженія есть тотъ же самый какъ и для сжатія, если только удлиненіе

вида тѣла очень мало, однако вообще придовольно малыя, но все таки уже чувствительныхъ, величинахъ количества $\frac{dv}{v}$ это равенство коэффиціентовъ упругости для растяженія и для сжатія перестаетъ имѣть мѣсто. Такъ и изъ опытовъ для обоихъ этихъ случаевъ выводятся различныя величины коэффиціентовъ упругости, имѣя-но одна величина коэффиціента E соотвѣтствуетъ растяженію, а другая сжатію. Это объясняется тѣмъ, что для вывода выраженія $E\frac{dv}{v}d\omega$ изъ полнаго выраженія силы упругости:

$$\frac{dr}{r}d\omega\left[f'(0)+\frac{1}{2}f''(0)\frac{dr}{r}+\frac{1}{2.3}f'''(0)\left(\frac{dr}{r}\right)^2+\ldots\ldots\right]$$

отбрасываются члены, заключающіе высшія степени количества $\frac{dr}{r}$, которые при хотя малыхъ но уже чувствительныхъ величинахъ количества $\frac{dr}{r}$ могутъ имѣть нѣкоторое ощутительное вліяніе на величину силы упругости и могутъ доставлять для множителя, находящагося въ скобкахъ два различныя величины, соотвѣтствующія dr положительному и dr отрицательному, то есть удлиненію и сжатію; а такъ какъ изъ опытовъ обыкновенно опредѣляютъ для E величину такую, при которой количество $E\frac{dv}{v}d\omega$ не только для чрезвычайно малыхъ, но и для чувствительныхъ величинъ количество $\frac{dv}{v}$, выражаетъ съ достаточною для практики точностію величину силы упругости, очевидно что изъ опытовъ, въ строгомъ смыслѣ, не опредѣляется для коэффиціента E

величина коэффиціента первого члена, то есть $f'(0)$, а опредѣляется для ε нѣкоторая средняя величина послѣдняго множителя выраженія силы упругости и хотя эта средняя величина вообще довольно много отличается отъ величины $f'(0)$, но двѣ среднія величины, одна для растяженія другая для сжатія, тѣмъ не менѣе могутъ отличаться другъ отъ друга довольно замѣтно, а именно на количество $f''(0)\frac{dr}{r}$, т. е. на величину въ два раза большую чѣмъ величина каждаго ряда безъ его перваго члена.

Чтобы возможно было примѣнить найденныя нами выраженія силы упругости $E\frac{dr}{r}dw$. $G\frac{dr}{r}dw$, къ разрѣшенію практическихъ вопросовъ, то конечно весьма важно знать до какого предѣла увеличиванія количества $\frac{dr}{r}$ и вмѣстѣ съ тѣмъ до какого предѣла увеличиванія всей силы упругости, эта сила выражается, еще съ достаточною для практики точностію, предъидущими количествами.

Наибольшая величина силы упругости, которая еще выражается съ достаточною вѣрностію одними изъ предъидущихъ количествъ, и которая слѣдовательно прямо пропорціональна количествамъ $\frac{dr}{r}$ и dw называется предѣломъ упругости тѣла.

Предѣлъ упругости, также какъ и коэффиціентъ упругости, можетъ быть опредѣленъ только изъ опытовъ, но такъ какъ опыты показали,

что вообще предѣлъ упругости тѣлъ большей величины силы упругости, при проявленіи которой въ тѣлахъ ихъ прочность уже недостаточно обезпечена и проявленіе которой слѣдовательно не должно допускать, то и нѣтъ нужды обращать особенное вниманіе на этотъ предѣлъ упругости. Изложенное здѣсь понятіе о предѣлѣ упругости нѣкоторымъ преобладаетъ надъ другимъ понятіемъ, которое прежде было общепринятымъ: Существованіе тѣлъ, что тѣла подвергшіяся дѣйствію внѣшнихъ силъ, по прекращеніи этого дѣйствія, могутъ возвращаться точнымъ образомъ къ первоначальному своему виду, если только измѣненіе ихъ вида не превосходило извѣстнаго предѣла. — Этотъ послѣдній предѣлъ называли предѣломъ упругости, и полагали что упругость тѣла остается совершенною или не нарушенною, когда измѣненіе вида тѣла до предѣла упругости не доходитъ, а если оно перейдетъ за этотъ предѣлъ, то упругость тѣла нарушается. Кромѣ того полагали, что до предѣла упругости, сила упругости пропорціональна количествамъ $dw = \frac{dr}{r}$, то есть площади поперечнаго сѣченія и измѣненію вида, и что эта пропорціональность перестаетъ, когда измѣненіе вида тѣла переходитъ за предѣлъ упругости. Но весьма точные и обширные опыты, произведенные въ послѣдствіи доказали, что

как бы мало ни было изменение вида, произведен-
ное въ тѣлѣ, оно вполнѣ не изчезаетъ и тѣла
всегда сохраняютъ нѣкоторое остающееся впечат-
лѣніе, которое въ продолженіи времени конечно мог-
да можетъ нѣсколько уменьшится, но все таки
не изчезнетъ. По этому понятія о совершенной и
о нарушенной упругости не должны болѣе доста-
точнаго основанія и должны быть оставлены, но
въ нихъ тѣмъ не менѣе слѣдуетъ упоминать
потому что они встрѣчаются еще иногда въ
весьма уважаемыхъ сочиненіяхъ.

Такъ какъ внутреннія частичныя силы мо-
гутъ существовать только до извѣстнаго предѣ-
ла измѣненія вида тѣла, за которымъ связь
между частицами разрушается и тѣло раз-
рывается, переламывается или перерѣзывает-
ся, то очевидно что и сила упругости, изнемога-
ющая дѣйствіе внутреннихъ частичныхъ силъ,
можетъ увеличиваться вмѣстѣ съ количест-
вомъ $\frac{dv}{v}$ только до извѣстнаго предѣла, послѣ
котораго дѣйствіе этой силы вдругъ прекращает-
ся и тѣло разрушается. Эта наибольшая вели-
чина силы упругости называется <u>предѣломъ
временнаго сопротивленія тѣла</u> и этотъ пре-
дѣлъ также, какъ и вообще сила упругости, имѣетъ
различныя величины въ различныхъ случаяхъ, а
именно: при разрываніи, раздробленіи, скручива-
ніи и проч.

Когда измѣненіе вида тѣла доведено до того,
что сила упругости достигла предѣла времен-

него сопротивленія, тогда уже наименьшее увеличеніе дѣйствія внѣшнихъ силъ, наименьшій толчекъ или сотрясеніе, достаточно для того, чтобы тѣло разорвалось или раздробилось. Нѣкоторые опыты даже достовѣряютъ полагать, что въ этомъ случаѣ одна только продолжительность дѣйствія внѣшнихъ силъ можетъ быть достаточна безъ нѣкоторыхъ толчковъ, чтобы произвести разъединеніе ихъ частей. Но въ частяхъ зданій тѣла безъ всякаго сомнѣнія должны имѣть достаточныя измѣненія, не только для того, чтобы они не разорвались или не раздробились отъ дѣйствія тѣхъ внѣшнихъ силъ, на которыя наперед расчитываютъ можно, но эти измѣненія должны быть еще достаточны, чтобы тѣла оставались прочными и при дѣйствіи другихъ временныхъ или случайныхъ силъ, которыхъ предвидѣть и опредѣлить иногда невозможно. Кромѣ того тѣла въ постройкахъ подвергаются часто не одному только вліянію механическихъ силъ, они подвергаются также иногда разрушенію химическимъ путемъ, дѣйствіемъ атмосфернаго воздуха, сырости, морозовъ и проч., поэтому измѣненія этихъ тѣлъ должны быть расчитаны такъ, чтобы возбуждаемая въ нихъ сила упругости всегда оставалась менѣе того, чѣмъ предѣлъ временнаго сопротивленія матеріала.

Наибольшая величина силы упругости, проявленіе которой въ практикѣ допускать можно. –

БИБЛІОТЕКА
ИМПЕРАТОРСКАГО
Московскаго.

съ тѣмъ чтобы тѣло постоянно имѣло достаточную прочность и противъ тѣхъ временныхъ или случайныхъ усилій, которымъ оно подвергаться можетъ и которыя такимъ образомъ напередъ опредѣлить невозможно называется предѣломъ прочнаго сопротивленія.

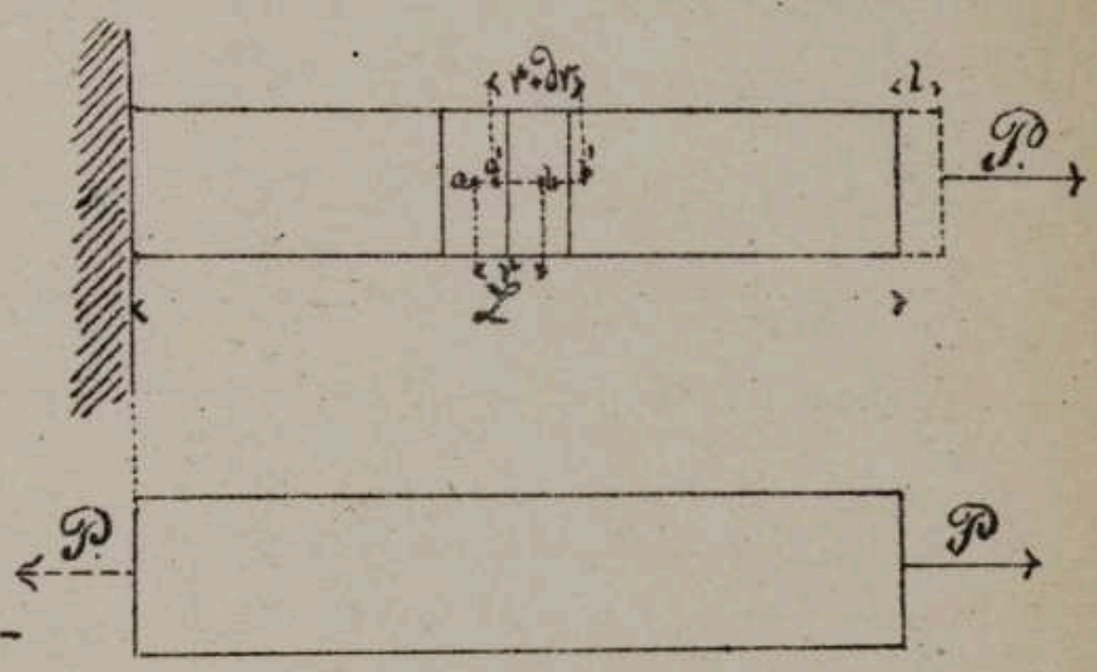
Легко видѣть что этотъ предѣлъ для одного и того же матеріала не всегда одинаковъ, потому что онъ зависитъ отъ назначенія зданія въ составѣ котораго входитъ этотъ матеріалъ. Для этого предѣла обыкновенно берутъ извѣстную часть предѣла временнаго сопротивленія, а именно вообще отъ $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{10}$ и даже до $\frac{1}{20}$.

Для простоты всѣ эти предѣлы обыкновенно приводятся къ единицѣ площади, у насъ обыкновенно къ квадратному дюйму. Такъ напримѣръ: предѣлъ временнаго сопротивленія мягкаго ковкаго желѣза, хорошаго качества, при растяженіи составляетъ около 1240 пудовъ на одинъ квадратный дюймъ, а предѣлъ прочнаго сопротивленія, допускаемый въ практикѣ, составляетъ около $\frac{1}{6}$ до $\frac{1}{3}$ перваго, то есть отъ 200-400 пудовъ на одинъ квадратный дюймъ, смотря по назначенію зданія; напр. если желѣзо употребляется для мостовой балки, подверженной значительному сотрясенію, то можно взять отъ 200 до 300 пудовъ на одинъ квадратный дюймъ; если же оно употребляется для стропилъ, на которыя дѣйствуетъ грузъ спокойный, котораго

величину легко можно определить, которой только мало можетъ измѣняться случайно, то можно взять при хорошемъ качествѣ матеріала отъ 300 до 400 пудовъ на квадратный дюймъ.

Перейдемъ теперь къ выводу формулы, выражающей зависимость между измѣненіемъ вида цилиндрическаго тѣла и силою его растягивающею.

Положимъ, что дано призматическое тѣло, которое растягивается силою P, направленною по его оси и приложенною къ одной его оконечности, между тѣмъ какъ другая не подвижно укреплена или же, что все равно, положимъ, что тѣло это растягивается двумя силами, равными P и направленными въ противныя стороны.



Положимъ еще, что поперечное сѣченіе этого тѣла одинакого по всей его длинѣ и равно ω, и пусть L длина тѣла, и E коэффиціентъ упругости при растяженіи. Тогда, если обратимъ вниманіе на различные элементы площади какого нибудь изъ поперечныхъ сѣченій этого тѣла, то для каждаго изъ этихъ элементовъ соотвѣтствующая ему сила упругости выразится чрезъ $E\frac{dv}{v}d\omega$, гдѣ v изображаетъ разстояніе параллельное длинѣ тѣла, между центрами α и β

двухъ смежныхъ элементовъ его объема и dr изме-
неніе этого разстоянія или его удлиненіе вслѣд-
ствіе дѣйствія силы F. Если это тѣло въ точ-
кахъ одного и того же поперечного сѣченія не
однородно, то количество dr при различныхъ
точкахъ этого сѣченія можетъ имѣть различныя
величины, но въ практикѣ большею частію при-
ходится разсматривать тѣла, хотя и не со-
вершенно однородныя, но все таки такого свойст-
ва, что для приближенныхъ выводовъ можно
пренебречь различіемъ между ихъ частицами
и принять, что для всѣхъ элементовъ одного и
того же поперечнаго сѣченія коэффиціентъ
упругости E одинъ и тотъ же, и что слѣдо-
вательно, отъ дѣйствія внѣшней силы, всѣ
частицы тѣла между двумя смежными по-
перечными сѣченіями удлиняются на одну
и ту же величину dr. Тогда если мы вообра-
зимъ, что все тѣло по длинѣ раздѣлено попе-
речными сѣченіями перпендикулярными къ
оси, на равныя части, которыхъ длину изобра-
зимъ чрезъ r при чемъ тоже r очевидно будетъ
равно разстоянію между центрами двухъ
смежныхъ элементовъ объема тѣла, и если
изобразимъ чрезъ dr удлиненіе каждаго изъ
этихъ элементовъ, то дробь $\frac{dr}{r}$ будетъ равняться
дроби $\frac{l}{L}$ гдѣ l изображаетъ полное удлине-
ніе всего тѣла; потому что, если число час-
тей тѣла изобразимъ чрезъ n то:

$$L = nr, \quad l = n.dr \quad \text{и} \quad \frac{dr}{r} = \frac{l}{L}$$

И такъ для каждаго элемента поперечнаго сѣченія мы имѣемъ силу упругости:

$$E \cdot \frac{dv}{r} \cdot d\omega = E \frac{l}{L} d\omega.$$

Но какъ всѣ эти силы упругости, дѣйствующія въ различныхъ элементарныхъ площадяхъ: $d\omega, d\omega', d\omega'', \ldots$ той же площади ω, вслѣдствіе однородности, будутъ направлены параллельно оси, то всѣ онѣ вмѣстѣ сложатся въ одну равнодѣйствующую, равную ихъ суммѣ, то есть равную:

$$E \frac{l}{L} \left[d\omega + d\omega' + d\omega'' + \ldots \ldots \right] = E \frac{l}{L} \omega.$$

Въ первое мгновеніе дѣйствія внѣшней силы P тѣло начинаетъ удлиняться и вмѣстѣ съ удлиненіемъ явленіе и возрастаетъ и сила упругости, такъ что если нѣтъ разрыва, то возрастая, она достигнетъ наконецъ величины внѣшней силы P, дѣйствіе которой въ это мгновеніе она уравновѣситъ; но такъ какъ въ слѣдствіе произведеннаго удлиненія частицы тѣла къ этому времени пріобрѣли нѣкоторую скорость, то по закону инерціи, тѣло будетъ продолжать удлиняться и сила упругости будетъ также продолжать увеличиваться до тѣхъ поръ, пока она не уничтожитъ пріобрѣтенной скорости частицъ тѣла. Такъ какъ въ это мгновеніе сила упругости больше растягивающей внѣшней силы и направлена въ противоположную сторону, то она начнетъ сжимать тѣло, уменьшая его длину, при чемъ сама будетъ уменьшаться до тѣхъ поръ, пока опять не уравновѣсится силою P

и не уничтожит скорости частиц тѣла пріобрѣтенной при его сжатіи. Такимъ образомъ окончность тѣла, подверженная силѣ $\underline{P}$, произведетъ нѣсколько качаній, размахи которыхъ будутъ все меньше и меньше и наконецъ совершенно уничтожатся. Въ это мгновеніе сила упругости сдѣлается равною силѣ P, растягивающей тѣло, а слѣдовательно когда оно прійдетъ къ состоянію покоя, послѣ нѣсколькихъ качаній, то будетъ существовать уравненіе:

$$C \frac{l}{I} \cdot \omega = P.$$

Изъ этого уравненія по данной силѣ P, можетъ быть опредѣлено удлиненіе $\underline{l}$ или на оборотъ, можетъ быть найдена величина P, производящей данное удлиненіе $\underline{l}$, если коэффиціентъ упругости матеріала и измѣренія тѣла извѣстны.

Такъ какъ выраженіе силы упругости, соотвѣтствующей элементарной площади до касанія двухъ элементовъ, остается тоже самое, какъ при растяженіи тѣла такъ и при сжатіи, то всѣ предъидущія сужденія остаются справедливыми и въ случаѣ, когда призматическое тѣло сжимается силою P, дѣйствующею по направленію оси тѣла, но при этомъ $\underline{l}$ вмѣсто удлиненія выразитъ уменьшеніе длины или укороченіе. Замѣтимъ однако, что при этомъ предполагается, что разсматриваемое призматическое тѣло не изгибается, иначе направленіе дѣйствую-

щей силы относительно оси тѣла измѣнится, отчего и результатъ ея дѣйствія будетъ другой.

Если изъ найденной формулы выведемъ величину удлиненія, то получимъ:

$$\frac{l}{L} = \frac{P}{E.\omega}.$$

откуда видно, что удлиненіе обратно пропорціонально коэфиціенту упругости и поперечному сѣченію, то есть чѣмъ больше коэфиціентъ упругости, тѣмъ меньше измѣненіе вида тѣла и на оборотъ.

Переходя отъ изслѣдованія измѣненія вида призматическаго тѣла, подверженнаго дѣйствію растягивающей или сдавливающей его силы, къ опредѣленію измѣреній тѣла, при которыхъ оно въ состояніи выдержать дѣйствіе данной силы безъ ущерба для его прочности, назовемъ чрезъ R предѣлъ прочнаго сопротивленія растяженію или сжатію матеріала тѣла. Согласно вышесказанному о предѣлахъ сопротивленія, R - представитъ въ пудахъ наибольшую силу упругости, проявленіе которой можно допускать на каждый квадратный дюймъ какого угодно поперечнаго сѣченія тѣла. Поэтому если сила P растягиваетъ или сдавливаетъ тѣло, распредѣляясь равномѣрно по точкамъ каждаго поперечнаго сѣченія, т. е. такъ, что всѣ части каждаго поперечнаго сѣченія одинаково натянуты или сжаты, то на всю величину поперечнаго сѣченія въ ω квадр. дюймовъ можетъ быть допущена сила упругости въ $R\omega$ пудовъ. А какъ въ разсматриваемомъ случаѣ сила упругости, проявляющаяся въ поперег-

ломъ сѣченіи тѣла, равна возбудившей ее внѣшней силѣ P, то имѣемъ:

$$R\omega = P.$$

Изъ этого уравненія по данной величинѣ R предѣла сопротивленія, - прямо получается наибольшая величина P растягивающей или сжимающей силы, дѣйствію которой можетъ подвергнуть тѣло, при данномъ поперечномъ сѣченіи его въ ω квадратныхъ дюймовъ.

Это же уравненіе можетъ служить также для опредѣленія поперечнаго сѣченія, при которомъ тѣло въ состояніи безопасно выдержать дѣйствіе данной силы P, потому что для этого изъ выведеннаго уравненія находимъ:

$$\omega = \frac{P}{R}.$$

Такъ напримѣръ, если для ковкаго желѣза допускается предѣлъ прочнаго сопротивленія растяженію $R=250$ пуд. на 1 кв. дюймъ, то желѣзная полоса, съ поперечнымъ сѣченіемъ въ 4 квадратныхъ дюйма, безопасно можетъ быть подвергнута растяженію силою:

$$P = 250.4 = 1000 \text{ пудовъ}.$$

Если предѣлъ прочнаго сопротивленія раздробленію чугуна принимается въ 500 пуд. на 1 кв. дюймъ, то чугунная призма, сжимаемая равномѣрно и безъ изгиба силою въ 3000 пудовъ, можетъ безопасно выдержать это сжатіе при поперечномъ сѣченіи по крайней мѣрѣ равномъ слѣдующему: $\omega = \frac{3000}{500} = 6$ кв. дюймовъ.

Разрѣшимъ еще для примѣненія изложенной теоріи слѣдующій вопросъ:

Извѣстно, что тѣла при пониженіи ихъ температуры, уменьшаются въ своихъ измѣреніяхъ; поэтому если объ оконечности призматическаго тѣла неподвижно закрѣплены, и за тѣмъ тѣло охлаждено, то небудучи въ состояніи уменьшиться въ своей длинѣ, оно очевидно будетъ находиться въ такомъ положеніи, какъ будто оно внѣшнею силою растянуто на столько, на сколько длина его уменьшилось бы, если бы концы его были свободны. Величина такой внѣшней силы въ тоже время будетъ равна сопротивленію, оказываемому закрѣпленіями концевъ тѣла ихъ сближенію, и также той силѣ, съ которою охлажденное тѣло стремится сблизить между собою предметы, къ которымъ его концы прикрѣплены (:напримѣръ желѣзная полоса, связывающая двѣ параллельныя между собою стѣны:). Предложимъ себѣ опредѣлить величину этой силы, соотвѣтствующую данному понижѣнію температуры призматическаго тѣла.

Пусть $\underline{t}$ градусовъ будетъ начальная температура призматическаго тѣла съ неподвижно укрѣпленными концами, t' уменьшенная температура его, $\underline{L}$ длина тѣла при температурѣ $\underline{t}$ $\underline{L+l}$ длина при температурѣ t, и $\underline{\delta}$ коэффиціентъ расширенія или сжатія тѣла отъ перемѣны его температуры, т.е. измѣненіе единицы длины при измѣненіи температуры на 1 градусъ стоградуснаго термометра, къ которому по этому относится

такое число градусов $\underline{t}$ и t'; для изображения остальных величин сохраним тѣже буквы которыя употребляли выше.

Если при уменьшенной температурѣ $\underline{t}'$, длина свободнаго тѣла равна $\underline{L}$, то при начальной температурѣ $\underline{t}$ длина его была:

$$L + l = L + \delta(t - t')L$$

слѣдовательно при температурѣ t' тѣло, вслѣдствіе неподвижности концевъ, вытянуто на количество:

$$l = \delta(t - t')L.$$

и этому измѣненію его нормальной длины соотвѣтствуетъ растягивающая сила $\mathcal{P}$ опредѣляемая уравненіемъ:

$$E\omega.\frac{l}{L} = \mathcal{P}.$$

или по подстановкѣ

$$E\omega.\delta(t - t') = \mathcal{P}.$$

Если бы пожелали опредѣлить наибольшее пониженіе температуры, которое можетъ быть допущено въ тѣлѣ съ неподвижно закрѣпленными концами, то стоило бы только вмѣсто $\underline{\mathcal{P}}$ подставить въ выведенное уравненіе наибольшую растягивающую силу, которую тѣло безопасно можетъ выдерживать, а именно $R\omega$; тогда получится:

$$E\omega\delta(t - t') = R\omega.$$

откуда наибольшее допускаемое пониженіе температуры:

$$t - t' = \frac{R}{E\delta}.$$

Для желѣза имѣются слѣдующія данныя:

$$\delta = \frac{1}{84600}, \quad E = 75000 \text{ пудовъ на } 1 \text{ кв. дюймъ}.$$

По этому железная полоса с сечением в 1 кв. дюйм, связывающая две стены, при охлаждении на 10° градусов Цельс., может оказывать на эти стены сближающее их усилие в

$$P = \frac{750000 \cdot 10}{84600} = 88,6 \text{ пуд.}$$

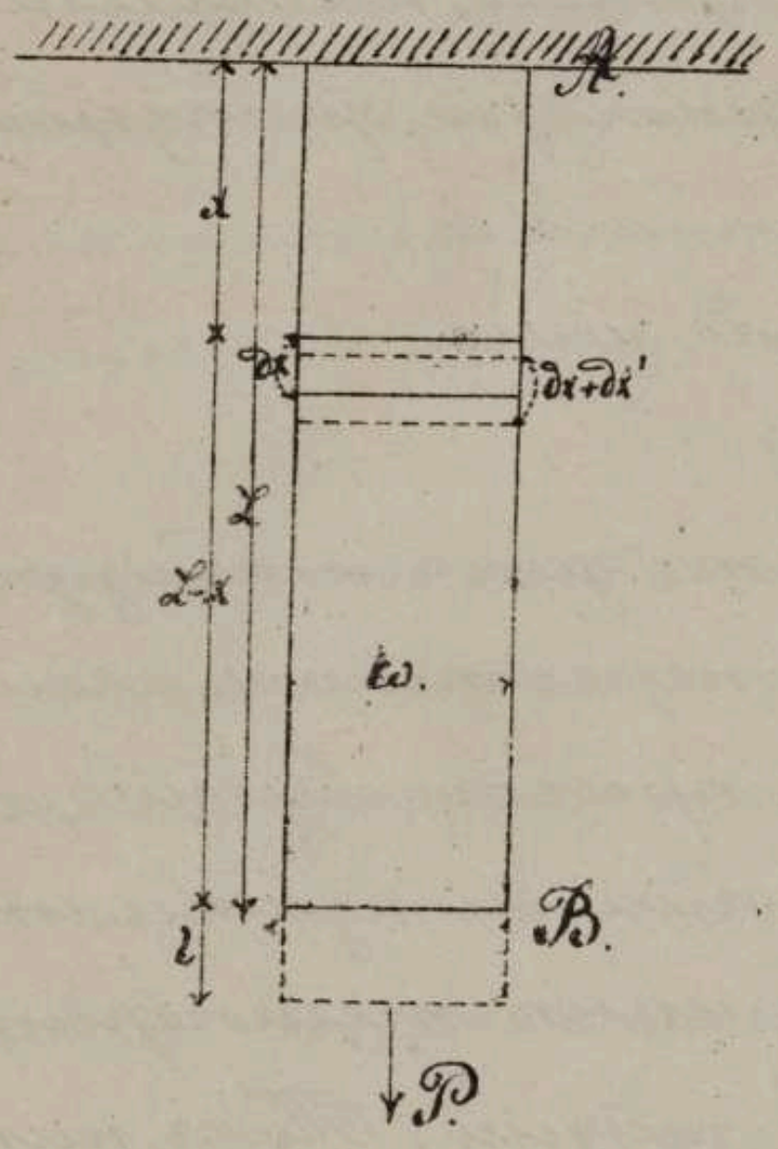
Допуская предел прочного сопротивления железа $R = 250$ пуд. на 1 кв. квадратный дюйм, наибольшее допускаемое понижение температуры железной полосы будет

$$t - t' = \frac{250 \cdot 84'600}{750'000} = 28,2 \text{ град. цельс.}$$

Результат этот объясняет для частей зданий, подверженных значительным перемкнам температуры, необходимость таких приспособлений, при которых эти части здания могли бы удлиняться в своих измерениях при перемкнах температуры, безъ ущерба для прочности зданий. Так напр. мыс, строенный, при переходе от летних жаров к зимним холодам, могут подвергаться вследствие климатных изменению температуры градусов на 60 по Реомюру, следовательно если бы они были устроены так, что части их не могут удлинять своих измерений вместе с переменами температуры, то не могли бы выдерживать действия морозов безъ повреждений.

Если тело растягивается по вертикальному направлению, и измерения и вес его значительны, тогда кромъ внешней растягающей силы P, надобно принять в соображение еще и вес самого тела. Чтобы показать каким образомъ это

можетъ быть сдѣлано, возмемъ призматическое тѣло, находящееся въ вертикальномъ положеніи, и положимъ, что верхній конецъ A тѣла неподвижно закрѣпленъ, а нижній B подверженъ растягивающему грузу P. Пусть L выражаетъ первоначальную его длину; l полное удлиненіе, произшедшее отъ дѣйствія силы P и вѣса тѣла; ω поперечное сѣченіе, одинаковое по всей длинѣ тѣла, и E коэффиціентъ упругости, соотвѣтствующій матеріалу; наконецъ изобразимъ еще чрезъ ρ вѣсъ единицы объема даннаго тѣла, такъ что вѣсъ всего тѣла будетъ $\rho L\omega$. На произвольномъ разстояніи x отъ конца A возмемъ элементъ, заключающійся между двумя поперечными сѣченіями, находящимися на безконечно маломъ другъ отъ друга разстояніи dx, и обозначимъ чрезъ dx' удлиненіе этого элемента отъ дѣйствія растягивающихъ силъ. Тогда, если тѣло примемъ однороднымъ, а растягивающія силы распредѣленными равномѣрно по поперечному сѣченію, то сила упругости въ разсматриваемомъ сѣченіи тѣла будетъ $E\frac{dx'}{dx}\cdot\omega$. Когда качанія тѣла, произведенныя удлиняющими силами прекратятся, то сила упругости сдѣлается равною



равнодействующей растягивающих сил, сосредоточенной из силы $\underline{P}$ и всех частиц тела, находящейся под рассматриваемым поперечным сечением, т. е. равной силе:

$$P + p(L - x)\omega ;$$

и по закону:

$$E\omega \frac{dx'}{dx} = P + p(L - x)\omega .$$

Чтобы отсюда определить удлинение l подобно вывести величину элементарного удлинения $\underline{dx'}$ и составить сумму всех значений $\underline{dx'}$ для всей длины L. Для этого имеем:

$$dx' = \frac{1}{E\omega}\left[P + p(L - x)\omega\right]dx .$$

сумма же всех элементарных удлинений $\underline{dx'}$ т. е. полное удлинение $\underline{l}$ будет:

$$l = \frac{1}{E\omega}\int_0^L \left[P + p(L - x)\omega\right]dx .$$

или:

$$l = \frac{1}{E\omega}\left[PL + \frac{p\omega L^2}{2}\right]$$

По этой формуле определяется удлинение произведенное в теле данного материала и данных поперечных сечений растягивающей силы и веса тела.

Если для сравнения с формулою $E\omega\frac{l}{L} = P$, выведенною формулу представить в виде:

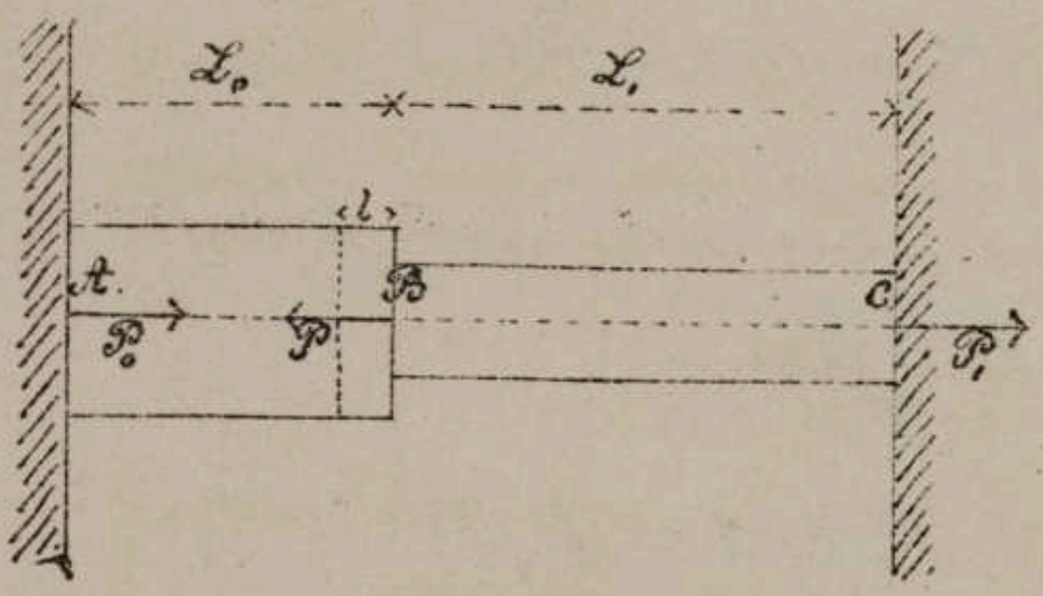
$$E\omega\frac{l}{L} = P + \frac{p\omega L}{2}$$

и обратить внимание на то, что $p\omega L$ выражает

въсъ всего тѣла, то выходитъ, что при совокупномъ дѣйствіи вѣса и растягивающей силы, удлиненіе тѣла будетъ такое, какъ будто на тѣло, кромѣ ихъ тяжести, дѣйствовала растягивающая сила, равная внѣшней силѣ, сложенной съ половиною вѣса тѣла.

Разсмотримъ еще случай, когда призматическое тѣло подвержено дѣйствію нѣсколькихъ силъ, направленныхъ по его оси и приложенныхъ въ различныхъ точкахъ ея.

Для этого вообразимъ, что тѣло ABC, въ точкѣ B ея оси, подвержено дѣйствію силы P, направленной вдоль оси; положимъ, что оба конца тѣла A и C неподвижно



закрѣплены, и опредѣлимъ величины сопротивленій P_0 и P_1, оказываемыхъ неподвижными точками A и C ея передвиженію дѣйствіемъ силы P.

Въ разсматриваемомъ случаѣ сила P_0, сопротивленіе точки A будетъ силою сжимающею часть AB тѣла, и слѣдовательно будетъ равна силѣ упругости, проявляющейся въ сжатой части тѣла. И такъ изображая чрезъ $\underline{\epsilon}$ уменьшеніе длины L_0 части AB тѣла, чрезъ E_0 и ω_0 коэффиціентъ упругости и поперечное сѣченіе этой части тѣла, имѣемъ:

$$P_0 = E_0 \omega_0 \cdot \frac{l}{L_0}$$

Другая же часть BC тѣла будетъ растянута

силою P_1, сопротивленіемъ неподвижной точки C_1 и будетъ удлинена на такое количество λ, на которое AB укорочена; слѣдовательно изображая чрезъ E_1, ω_1 и L_1 коэффиціентъ упругости, поперечное сѣченіе и длину части BC находимъ подобно предъидущему:

$$P_1 = E_1 \omega_1 \frac{l}{L_1}.$$

Въ выведенныхъ формулахъ находится еще неизвѣстная величина l изображающая передвиженіе точки B приложенія данной силы P. Для опредѣленія l или же для исключенія его изъ выраженій силъ P_0 и P_1 стоитъ только замѣтить, что три силы P, P_0 и P_1 должны находиться въ равновѣсіи, потому что иначе разсматриваемое тѣло немогло бы остаться въ покоѣ и слѣдовательно должно существовать уравненіе:

$$P = P_0 + P_1$$

съ помощію котораго легко опредѣлить l и исключить его изъ выраженій P_0 и P_1. Для сего напишемъ:

$$P = P_0 + P_1 = \left[\frac{E_0 \omega_0}{L_0} + \frac{E_1 \omega_1}{L_1}\right] l;$$

откуда:

$$l = \frac{P}{\frac{E_0 \omega_0}{L_0} + \frac{E_1 \omega_1}{L_1}}, \quad P_0 = \frac{P}{1 + \frac{E_1 \omega_1 L_0}{E_0 \omega_0 L_1}} \quad \text{и} \quad P_1 = \frac{P}{1 + \frac{E_0 \omega_0 L_1}{E_1 \omega_1 L_0}}.$$

Въ случаѣ, когда коэффиціенты упругости и поперечныя сѣченія обѣихъ частей тѣла между собою равны, т. е. когда

$$E_0 = E_1 = E \quad \text{и} \quad \omega_0 = \omega_1 = \omega,$$

имѣли бы:

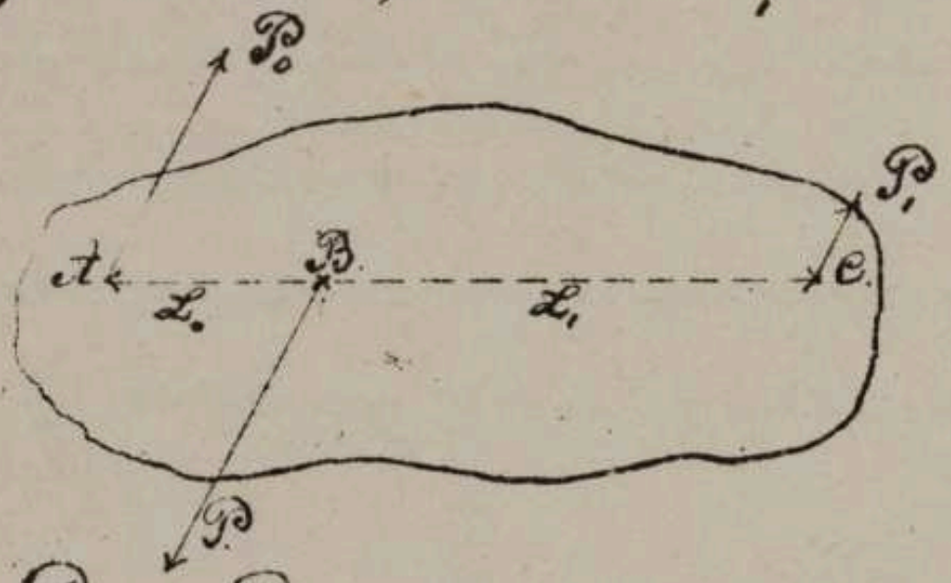
$$P_0 = P \frac{L_1}{L_0 + L_1} \quad \text{и} \quad P_1 = P \frac{L_0}{L_0 + L_1},$$

и слѣдовательно также:

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{L_1}{L_0},$$

откуда видно, что въ этомъ случаѣ сопротивленія опорныхъ точекъ P_0 и P_1 обратно пропорціональны ихъ разстояніямъ до точки приложенія силы P.

Изъ теоріи равновѣсія твердыхъ тѣлъ извѣстно, что если тѣло ABC какого угодно вида, съ неподвижными концами A и C подвержено дѣйствію силы P направленной подъ нѣкоторымъ угломъ къ линіи AC соединяющей неподвижные концы тѣла, то сопротивленія этихъ неподвижныхъ концевъ получаются чрезъ разложеніе силы P на двѣ параллельныя ея составляющія P_0 и P_1, проходящія чрезъ точки A и C и обратно пропорціональныя разстояніямъ ихъ l_0 и l_1 – до точки B приложенія силы P. Если же сила P направлена по линіи, соединяющей неподвижныя точки A и C, то для совершенно твердаго тѣла сопротивленія этихъ точекъ не могутъ быть опредѣлены, потому что подчиняются только условію, чтобы сумма ихъ, была равна силѣ P, чему удовлетворяетъ безчисленное



множество различныхъ величинъ сопротивленій P_0 и P_1. Изъ предъидущаго видно, что для упругихъ тѣлъ эта неопредѣленность сопротивленій неподвижныхъ точекъ перестаетъ существовать, но вмѣстѣ съ тѣмъ видно, что при дѣйствіи силы P вдоль линіи AC, сопротивленія имѣютъ

тѣхъ же величинъ, какъ и при дѣйствіи силы подъ угломъ къ AC, только въ случаѣ тѣла однороднаго и призматическаго т. е. когда коэффиціентъ упругости и поперечное сѣченіе одинаковы по всему протяженію тѣла.

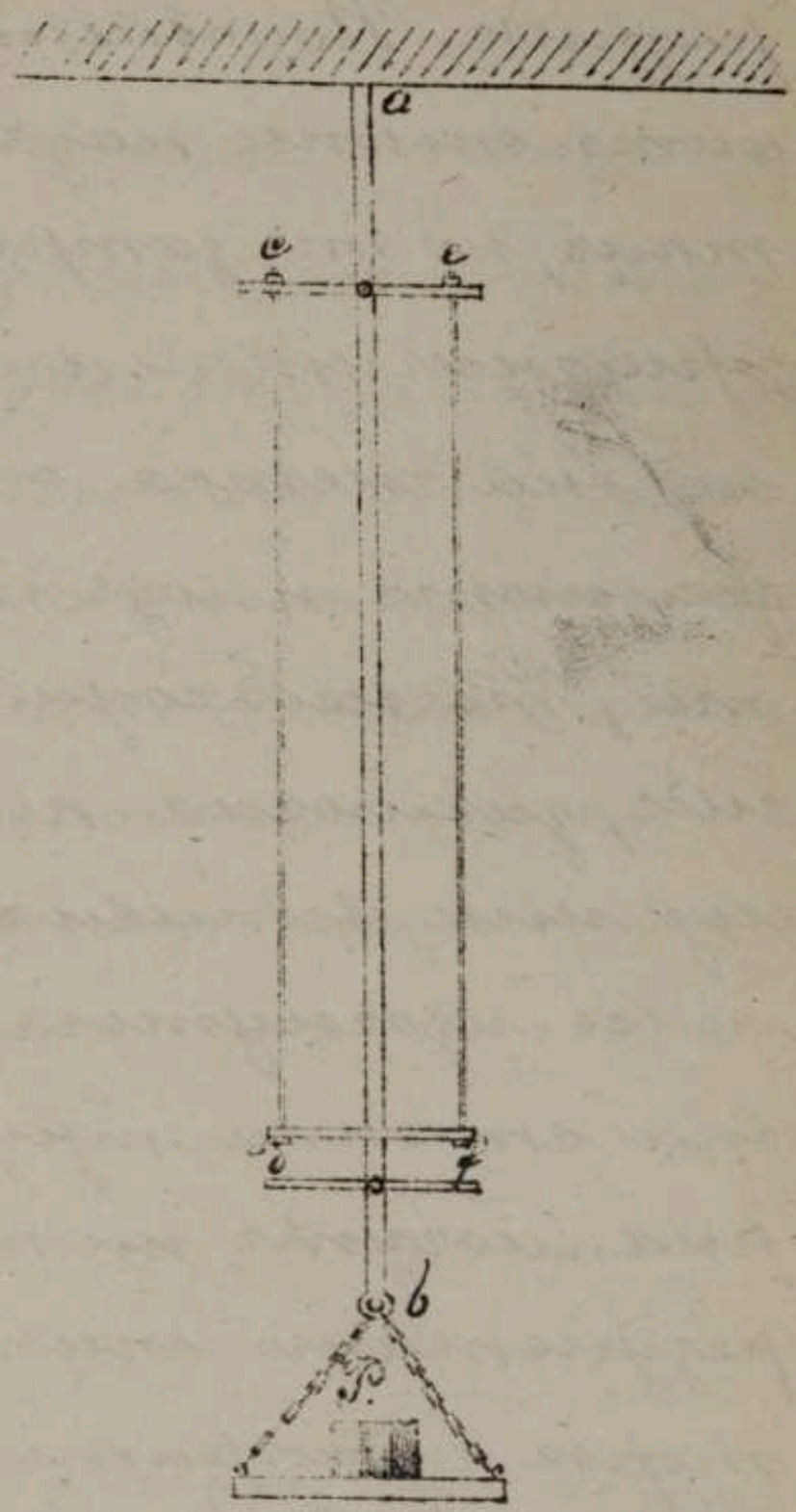
Строит. цех. Лисенко Э.

Результаты опытовъ относящихся къ растягиванію и разрыву тѣлъ.

Въ изслѣдованіяхъ, которыми мы до сихъ поръ занимались, встрѣчаются нѣкоторыя количества, зависящія отъ качествъ матеріала тѣлъ, именно: коэффиціентъ упругости, предѣлъ упругости, предѣлы временнаго и прочнаго сопротивленія, которыхъ величины могутъ быть опредѣлены только изъ опытовъ. Хотя по разнообразію произведенныхъ для сего опытовъ мы и не можемъ подробно ихъ разсмотрѣть, однако необходимо имѣть объ нихъ понятіе, и знать главнѣйшіе ихъ результаты.

Для опредѣленія коэффиціента упругости E, можно подвергать опыту полосу изъ даннаго для испытанія матеріала, по возможности большей длины, растягивая ее постепенно увеличивающимися силами. Это можетъ быть исполнено слѣдующимъ образомъ: Полоса ab закрѣпляется неподвижно у конца a, а къ нижнему ея концу b привѣшивается растягивающій грузъ P; по бокамъ полосы ab - прикрѣпляются двѣ прута cd и ef свободно висящія и служащія для наблюденія, соотвѣтствующихъ различнымъ величинамъ груза P, удлененій, посредствомъ ноніуса или стрѣлки на переклодинѣ df, связанной съ нижними концами прутьевъ. Прутья необходимо сдѣлать изъ того же матеріала какъ и испытываемая полоса ab, чтобы резуль-та-

тыя опытовъ не могли зависѣть отъ перемѣны температуры, потому что подобные опыты требуютъ довольно продолжительнаго времени. Для большой точности полоса ав должна быть по возможности длинные /: при нѣкоторыхъ опытахъ испытывались полосы въ 50 футовъ длины :/ потому что чѣмъ длиннѣе полоса, тѣмъ она болѣе удлиняется отъ растягивающаго груза, и чѣмъ большее удлиненіе, тѣмъ легче и точнѣе можно его измѣрить. Привѣсивъ такимъ образомъ къ нижнему концу полосы ав извѣстный грузъ P, выжидаютъ пока всѣ качанія, производимыя въ первое время послѣ приложенія груза, прекратятся, и тогда измѣряютъ произведенное удлиненіе e, за тѣмъ снимаютъ грузъ и по прошествіи нѣкотораго времени смотрятъ возвратилась ли полоса къ первоначальной своей длинѣ, или сохранилось нѣкоторое остающееся или постоянное удлиненіе. Тоже самое повторяется для другихъ величинъ груза P', P'', P''' и т. д. которымъ соотвѣтствуютъ удлиненія e', e'', e''' и т. д., при чемъ привѣшиваемые грузы слѣдуетъ брать все большіе и большіе, увели-



чивая ихъ постепенно до груза производящаго разрывъ. Подобнымъ же образомъ можно производить опыты надъ сухожиліемъ призматическихъ тѣлъ, но это затруднительнѣе, потому что при значительной длинѣ испытываемой полосы, она гнется отъ удлиняющаго груза, и если желаютъ получить надлежащіе результаты, то необходимо предупредить этотъ изгибъ, закрѣпляя полосу по всей ея длинѣ въ общую муфту или вставляя въ трубку. Полоса, стремясь изогнуться, конечно произведетъ на боковыя стѣнки трубы давленіе и треніе, которыя могутъ имѣть нѣкоторое вліяніе на результаты опытовъ, и при томъ вліяніе, которое измѣрить не возможно; но какъ это не можетъ быть весьма значительно, то въ большей части случаевъ имъ можно пренебречь.

Полученные при опытахъ результаты записываются въ таблицы, въ которыя помѣщаются также, соотвѣтствующія каждой величинѣ растягивающаго груза, коэффиціенты упругости, опредѣленные по формулѣ:

$$E\omega\frac{l}{\lambda} = P$$

откуда

$$E = \frac{P}{\omega}\cdot\frac{\lambda}{l};$$

или же въ случаѣ весьма длинной полосы, имѣющей значительный вѣсъ по формулѣ:

$$E\omega\frac{l}{\lambda} = P + \frac{p\omega\lambda}{2}$$

откуда

$$E = \frac{P + \frac{p\omega L}{2}}{\omega} \cdot \frac{L}{l} = \left[\frac{P}{\omega} + \frac{pL}{2}\right]\frac{L}{l}.$$

Увеличивая таким образом постоянно растягивающие или сжимающие грузы можно наконец дойти до груза $P^{(n)}$, разрывающего или раздробляющего полосу; зная эту величину $P^{(n)}$, найдем предел R' временного сопротивления разрыву или раздроблению, т. е. усилие производящее разрыв или раздробление полосы с поперечным сечением, равным единице меры, по формуле:

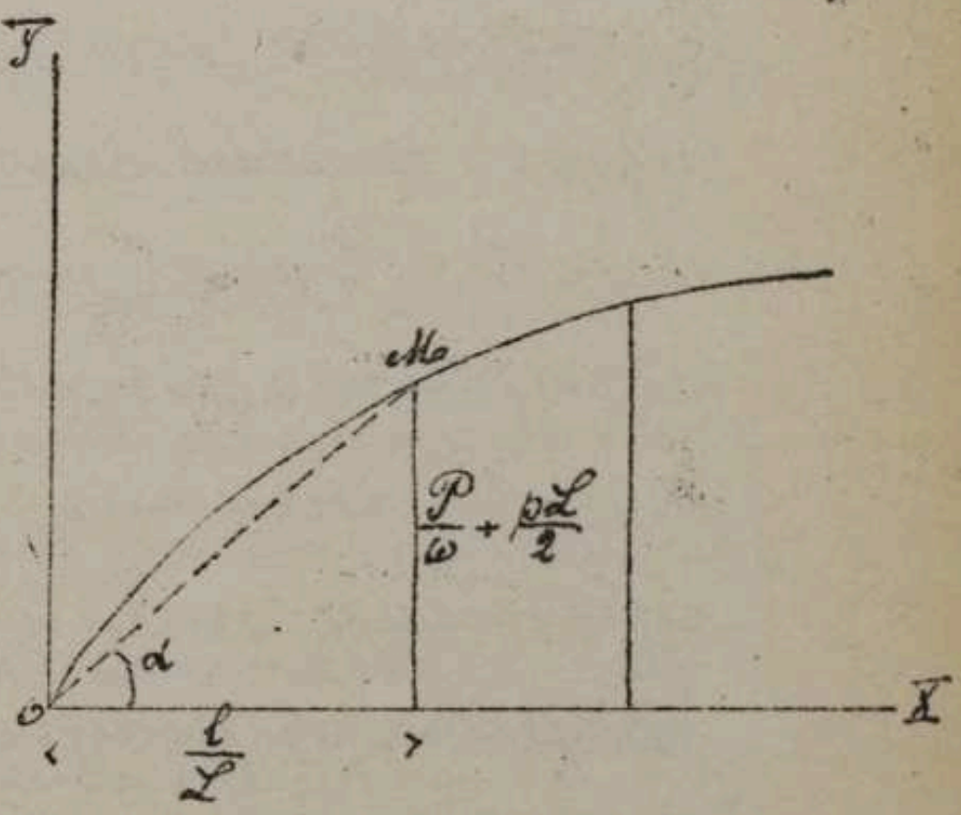
$$R'\omega = P^{(n)},$$

откуда

$$R' = \frac{P^{(n)}}{\omega}$$

Результаты опытов можно представить наглядным образом, если составить по ним чертеж.

Для этого проводят оси прямоугольных координат и, приняв довольно крупный масштаб, по одной из них напр. по оси абсцисс откладывают от начала координат относительные удлинения (т. е. отношения удлинений) их первоначальной единице $\frac{l}{L}$ и по ординатам соответствующие грузы, производящие эти удлинения, отнесенные к единице пло-



щади поперечного сѣченія; тогда получится рядъ точекъ соединеніемъ которыхъ образуется кривая, въ которой однакожъ надобно выгладить мелкія неправильности, могущія произойти отъ несовершенства инструментовъ, употребленныхъ для начертанія удлиненій. Съ помощью этой кривой, совокупность опытовъ легко одною какою нибудь полосою, представляется весьма удобно. Замѣтивъ что,

$$E = \frac{\frac{1}{\omega}\left(P + \frac{p\omega l}{2}\right)}{l}$$

т. е. что E равно отношенію ординаты къ абсциссѣ той же точки, можно сдѣлать

$$E = \operatorname{tng} \alpha .$$

гдѣ α представляетъ уголъ, составляемый осью абсциссъ секущею, проведеною чрезъ начало координатъ и разсматриваемую точку. По этому коэффиціентъ упругости E можетъ быть опредѣленъ по чертежу, проведя для этого чрезъ начало координатъ такую секущую, которая бы такъ близко подходила къ кривой, чтобы ее можно было принять сливающеюся съ кривою, тогда тангенсъ угла, соотвѣтствующаго этой секущей, будетъ искомою величиною E. Легко также удѣлится, что ординаты соотвѣтствующія концу секущей, представятъ числа предѣловъ упругости т. е. тотъ грузъ на единицу площади поперечнаго сѣченія, который съ достаточною для практическихъ примѣненій точностью можно принимать

удлиненія длины тѣла пропорціональными растягивающей или сжимающей силѣ, или, что все равно, тотъ грузъ, до котораго кривую линію онъ можетъ удлинить прямою. Соотвѣтствующая абсцисса представитъ произведеніе этимъ грузомъ относительное удлиненіе. Наконецъ ордината послѣдней точки кривой представитъ предѣлъ временнаго сопротивленія, т.е. величину разрывающаго или раздробляющаго груза, отнесеннаго къ единицѣ площади; соотвѣтствующая абсцисса изобразитъ наибольшее возможное относительное удлиненіе полосы, за которымъ слѣдуетъ уже разрывъ.

Впрочемъ коэффиціентъ упругости можетъ быть опредѣленъ и безъ кривой линіи, взявъ средняго величину изъ различныхъ, полученныхъ при опытахъ, величинъ количества:

$$E = \left(\frac{P}{\omega} + \frac{p\,l}{2}\right)\frac{l}{\lambda}$$

и ограничиваясь для него только тѣми величинами E, которыя съ достаточною точностію можно принять постоянными, т.е. мало другъ отъ друга отличающимися.

Надъ растяженіемъ желѣза и чугуна были произведены весьма разнообразные и обширные опыты, между которыми особенно замѣчательны тѣ, которые принадлежатъ англійскому профессору Kodgkinson'у и нѣсколькимъ другимъ англійскимъ и французскимъ инженерамъ.

Эти опыты относительно железа привели къ слѣдующимъ результатамъ.

Коэффиціентъ упругости железа больше для твердого, чѣмъ для мягкаго железа и больше для железа зернистаго сложенія, чѣмъ для землистаго. Коэффиціентъ упругости нѣсколько измѣняется съ величиною поперечнаго сѣченія испытываемой полосы, т.е. онъ наибольшій для железа крупныхъ измѣреній и наименьшій для листоваго и проволоки, такъ что отъ одного и того же усилія на одинъ квадратный дюймъ поперечнаго сѣченія проволока, относительно первоначальной длины своей, вытягивается больше нежели железо крупныхъ измѣреній. Это вѣроятно происходитъ отъ того, что при ковкѣ, прокаткѣ или вытягиваніи железо получаетъ съ поверхности землистое сложеніе, а какъ при железѣ мелкихъ измѣреній отношеніе между земнистою частью, близкой къ поверхности, и внутреннею зернистою больше, чѣмъ у железа крупныхъ измѣреній, то железо мелкихъ измѣреній по своимъ свойствамъ подходитъ ближе къ землистому, а крупное къ зернистому. Кромѣ того опыты показываютъ, что на величину коэффиціента упругости качество руды и способъ выдѣлки изъ нея железа имѣютъ вообще малое вліяніе, такъ что для этого коэффиціента можно принять одну среднюю величину около 2000000

килограммовъ на 1 квадратный сантиметръ, что составляетъ на русскія мѣры (: по умноженіи на 0,39 :) около 780 000 пудовъ на квадратный дюймъ.

Что касается до предѣла временнаго сопротивленія, т. е. до усилія, приходящагося на 1 квадр. дюймъ поперечнаго сѣченія при разрывѣ желѣза, то опыты показали, что онъ зависитъ отъ сорта желѣза, его цѣлости, способа выдѣлки и отъ руды, а именно предѣлъ временнаго сопротивленія колеблется между предѣлами отъ 700 – 3650 пуд. на одинъ квадр. дюймъ; послѣднее число относится къ лучшей желѣзной проволокѣ, для желѣза же крупныхъ цѣлостей онъ иногда доходитъ до 2350 пуд. на одинъ квадр. дюймъ, но такого качества желѣзо встрѣчается очень рѣдко. Изъ этого можно заключить, что въ каждомъ случаѣ нельзя руководствоваться при опредѣленіи цѣлостей желѣзныхъ частей зданія средними величинами, выведенными изъ опытовъ надъ различными сортами желѣза, а слѣдуетъ произвести опыты надъ тѣмъ желѣзомъ, которое для предпринимаемой постройки надлежитъ.

Вообще все для желѣза среднихъ качествъ и крупныхъ цѣлостей принимаютъ предѣлъ временнаго сопротивленія какъ среднюю величину, въ 20 англійск. тонъ (X), или около 1250 пуд. на одинъ квадр. дюймъ, а для лучшаго желѣза

(X) Англійскій тонъ 62 русскихъ пуда.

стальнаго, можно принимать до 1500 пуд. на одинъ квадр. дюймъ.

Относительно <u>железной проволоки</u> опыты французскаго инженера Vicat показываютъ, что проволока отъ груза, составляющаго только 1/3 той силы, отъ которой она можетъ разорваться, т.е. 1/3 предѣла временнаго сопротивленія, удлиняется постоянно, хотя и медленно, такъ что по прошествіи довольно долгаго времени (: около 1го или 1½ года :) она наконецъ разорвется, не смотря на то, что растягивающій ее грузъ въ 3 раза менѣе той силы, которую проволока можетъ выдержать въ теченіи короткаго времени. По опыты Leblanc произведенные по поводу постройки проволочнаго моста de la Roche Bernard заставляютъ полагать, что этотъ грузъ, отъ постояннаго дѣйствія котораго проволока удлиняется и наконецъ разрывается, не уменьшаетъ ея предѣла временнаго сопротивленія, если только проволока не слишкомъ долго подвергалась такому вытягиванію. Этотъ результатъ опытовъ Леблана важенъ потому, что въ строительномъ искусствѣ на сильное сопротивленіе проволоки приходится обращать вниманіе преимущественно при устройствѣ висячихъ проволочныхъ мостовъ, которые подвергаются значительнымъ грузамъ только временно, вслѣдствіе чего сила ихъ сопротивленія, какъ видно изъ этихъ опытовъ, не будетъ уменьшаться.

Кромѣ того, опыты Séguin, строителя первого проволочного моста во франціи, показываютъ, что предѣлъ временнаго сопротивленія проволоки уменьшается вмѣстѣ съ уменьшеніемъ діаметра, и при томъ такъ, что иногда проволока тонкая прочнѣе болѣе толстой, а иногда обратно. Впрочемъ эти уменьшенія не столь значительны, чтобы имѣть большое вліяніе на величину предѣла прочнаго сопротивленія, составляющаго только малую долю предѣла временнаго сопротивленія. Тѣмъ не менѣе изъ этого выходитъ, что и для проволоки слѣдуетъ въ важныхъ случаяхъ опредѣлять предѣлъ временнаго сопротивленія изъ непосредственныхъ опытовъ надъ тою проволокою, которую намѣрены употребить для постройки. Предѣлъ временнаго сопротивленія проволоки уменьшается, смотря по ея качествамъ, между величинами отъ 1700–3650 пуд. на одинъ квадратный дюймъ и какъ среднюю величину можно принимать 2500 пуд.

Опыты Stephenson'a строителя трубчатаго моста Britannia чрезъ проливъ Менэу показываютъ, что <u>мѣстовое желѣзо</u> сопротивляется болѣе разрыву вдоль фибръ, по направленію которыхъ оно подъ тягощими цилиндрами вытянуто и менѣе при растягиваніи по направленію поперечному: а именно онъ нашелъ, что въ первомъ случаѣ $R' = 1235$, а во второмъ $R' = 1040$ пуд. на одинъ квадратный дюймъ, такъ что эти двѣ величины предѣла временнаго сопро

тивленія относятся между собою какъ 6:5. —
Позднѣйшія опыты Англійскаго инженера Гай-
вайк'а, произведенные надъ мѣстовымъ желѣ-
зомъ, приготовленнымъ по усовершенствованно-
му способу, приводятъ къ-заключенію, что для
этого мѣстоваго желѣза сопротивленіе разрыву
вдоль и поперекъ фибръ одинаково подходитъ до
1400 пуд. на одинъ квадратный дюймъ.

Относительно вытягиванія чугуна Годкин-
сонъ заключаетъ изъ своихъ опытовъ, что сила, вы-
тягивающая чугунную полосу, пропорціональ-
на не первой степени относительнаго удлине-
нія, т. е. — отношенія $\frac{l}{2}$, какъ это вообще при-
нимается, но двумъ первымъ его степенямъ.
Годкинсонъ выразилъ это формулою, которая
по приведеніи къ русскимъ мѣрамъ слѣдующая

$$P = \omega\left[381880\,\frac{l}{2} - 74247600\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]$$

Этотъ результатъ опытовъ нимѣетъ ничего
противорѣчащаго общей теоріи упругости; по-
тому что по этой теоріи вообще:

$$P = \omega F\left(\frac{l}{2}\right) = \omega\left[f'(0)\frac{l}{2} + \frac{1}{2}f''(0)\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\right];$$ и не
мудрено, что существуетъ такой мате-
ріалъ, при которомъ, для извѣстной степе-
ни точности вывода, нельзя довольствовать-
ся однимъ только первымъ членомъ этой
формулы. Но если въ формулу Годкинсона
вставить тѣ весьма малыя величины
удлиненія $\frac{l}{2}$, которыя чугунная полоса мо-
жетъ представлять при дѣйствіи усилій,
могущихъ въ практикѣ встрѣчаться, то не-

трудно убѣдиться, что второй членъ, заключающій вторую степень удлиненія, будетъ не болѣе $\frac{1}{20}$ перваго члена т. е. будетъ такъ малъ въ сравненіи съ первымъ, что имъ для практическихъ примѣненій можно пренебречь, если для вознагражденія ошибки отъ этого происходящей, нѣсколько уменьшить коэффиціентъ перваго члена. Такимъ образомъ французскій артиллерійскій Генералъ Морінъ составилъ изъ предъидущей формулы, потомъ же опытами, другую, выраженную здѣсь въ русскихъ мѣрахъ и круглыхъ числахъ:

$$P = 360000.\omega.\frac{l}{d}$$

изъ которой видно, что онъ для чугуна принимаетъ коэффиціентъ упругости въ 360,000 пуд. на одинъ квадратный дюймъ.

Что касается до предѣла временнаго сопротивленія чугуна, то изъ опытовъ Годжинсона видно, что этотъ предѣлъ, такоже какъ и для желѣза, зависитъ отъ качества руды и способа выдѣлки, и колеблется между величинами 300 – 700 пуд. на одинъ квадратный дюймъ. — Для чугуна хорошаго качества принимаютъ, какъ среднюю величину, предѣлъ временнаго сопротивленія въ 500 пуд. на одинъ квадр. дюймъ. Кромѣ того изъ опытовъ видно, что даже одна и тожее полоса чугуна въ различныхъ частяхъ своихъ представляетъ различныя сопротивленія, которыя впрочемъ отличаются другъ отъ друга не болѣе чѣмъ на $\frac{1}{5}$ наименьшаго сопро-

тивленія. Сопротивленія разрыву чугунной призмы въ значительной степени зависитъ еще отъ того, дѣйствуетъ ли разрывающая сила по направленію оси тѣла или нѣтъ, такое самое впрочемъ имѣетъ мѣсто и при дескомъ. Сопротивленія чугуна отъ этого измѣненія направленія уменьшаются въ три раза, если направленіе растягивающей силы вмѣсто оси пройдетъ чрезъ ребро призмы.

Сравнивая между собою коэффиціенты упругости желѣза и чугуна легко видѣть, что отъ одной и той же силы чугунъ вытягивается болѣе нежели желѣзо; если возьмемъ двѣ полосы одинаковой длины l, одну желѣзную, а другую чугунную, которыя подвергаются растяженію одного и того же силою P, то удлиненія $\frac{l}{2}$ для желѣза, и $\frac{l'}{2}$ для чугуна получатся изъ слѣдующихъ формулъ:

для желѣза $P = 780000\ \omega\ \frac{l}{2}$

для чугуна $P = 360000\ \omega\ \frac{l'}{2}$

откуда $\frac{l'}{l} = \frac{780000}{360000} = 2{,}16$.

Чтобы узнать величину наибольшаго удлиненія, которое въ практикѣ можно допустить для этихъ металловъ, нужно вставить въ предъидущія формулы вмѣсто P предѣлъ прочнаго сопротивленія, а именно слѣдующій:

для желѣза $P = \frac{1250.\omega}{5} = 250\ \omega$

для чугуна $P = \frac{500.\omega.}{6} = 83\ \omega$

тогда для железа $250\ \omega = 780000\ \omega \frac{e}{l}$

" чугуна $83\ \omega = 360000\ \omega \frac{e'}{l}$

отсюда для железа $\frac{e}{l} = \frac{250}{780000} = \frac{1}{3120}$

а для чугуна . . . $\frac{e'}{l} = \frac{83}{360000} = \frac{1}{4340}$

Изъ этого видно, что отъ дѣйствія одной и той же растягивающей силы желѣзо удлиняется слишкомъ въ двое менѣе чугуна, между тѣмъ наибольшее удлиненіе, которое можетъ быть допущено для желѣза почти въ полтора раза болѣе такового для чугуна; наибольшая же растягивающая сила, которая можетъ быть допущена безъ ущерба прочности для желѣза въ три раза больше, чѣмъ для чугуна; отсюда слѣдуетъ, что для частей зданія, подвергающихъ растяженію, вообще выгоднѣе употреблять желѣзо, нежели чугунъ.

Для <u>литой</u> и <u>цементной</u> стали до сихъ поръ имѣется мало опытовъ, но какъ приблизительныя числа можно принимать:

$E = 900{,}000$ и до $1{,}000{,}000$ пуд. и $R' = 2.500$ пуд. на одинъ квадр. дюймъ, т. е. коэффиціентъ упругости стали больше въ 1,25 раза, а предѣлъ временнаго сопротивленія въ двое больше, чѣмъ для желѣза.

Для опредѣленія <u>коэффиціента упругости и предѣла временнаго сопротивленія дерева</u>. Были произведены весьма точные и замѣчательные опыты Wertheim'омъ. Изъ прежнихъ же опытовъ,

наименѣе достойные вниманія принадлежатъ Прусскому Инженеру Cytelwein'у и англійскому Barlow. Эти опыты приводятъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1, Коэффиціентъ упругости дерева зависитъ: отъ возраста дерева, качества почвы и мѣста произрастанія; именно онъ тѣмъ менѣе, чѣмъ дерево долѣе перешло за зрѣлый возрастъ, менѣе для молодаго, чѣмъ для зрѣлаго и напротивъ, тѣмъ больше, чѣмъ суше была почва и чѣмъ болѣе дерево было открыто дѣйствію сѣверныхъ, сѣверовосточныхъ и сѣверо западныхъ вѣтровъ.

2, Толщина древесныхъ слоевъ не имѣетъ большаго вліянія на коэффиціентъ упругости дерева, исключая ель, для которой онъ тѣмъ больше, чѣмъ она тонкослойнѣе.

Величина этого коэффиціента для породъ строительнаго лѣса колеблется между 30.000 и 50.000 пуд. на одинъ квадратн. дюймъ, и какъ средняя величины можно принимать:

для лиственницы, сосны и ели $E = 50.000$ пуд. на 1 кв. дюймъ.

" пихты и дуба . . . . . $E = 47{,}000$ пуд. на 1 кв. дюймъ.

3, Предѣлъ упругости въ томъ смыслѣ, какъ его прежде понимали т. е. какъ наибольшая сила упругости, до проявленія которой упругость матеріала еще не нарушается и остающихся удлиненій не бываетъ,

для дерева во все не существуетъ, потому что дерево всегда сохраняетъ нѣкоторое замѣтное остаточное удлиненіе послѣ дѣйствія растягивающей силы; но съ другой стороны, пропорціональность удлиненія дерева къ растягивающему грузу сохраняется тѣмъ дольше, чѣмъ дерево сухое; для дерева хорошо высушеннаго почти пропорціональность эта существуетъ почти до разрыва, т.е. почти до разрыва, удлиненія бываютъ пропорціональны растягивающей силѣ.

4, Предѣлъ временнаго сопротивленія дерева зависитъ также отъ его возраста, качества почвы, мѣста растенія; онъ наибольшій для дерева топкосклоннаго срубленнаго въ зрѣломъ возрастѣ, стоявшаго на почвѣ сухой и хорошо обвѣваемой вѣтромъ.

5, Время валки дерева не имѣетъ большого вліянія на величину предѣла временнаго сопротивленія, т. е. дерево, срубленное весною или лѣтомъ во время полносочія, выдерживаетъ почти то же усиліе, какъ и срубленное во время безсочія – осенью или зимою.

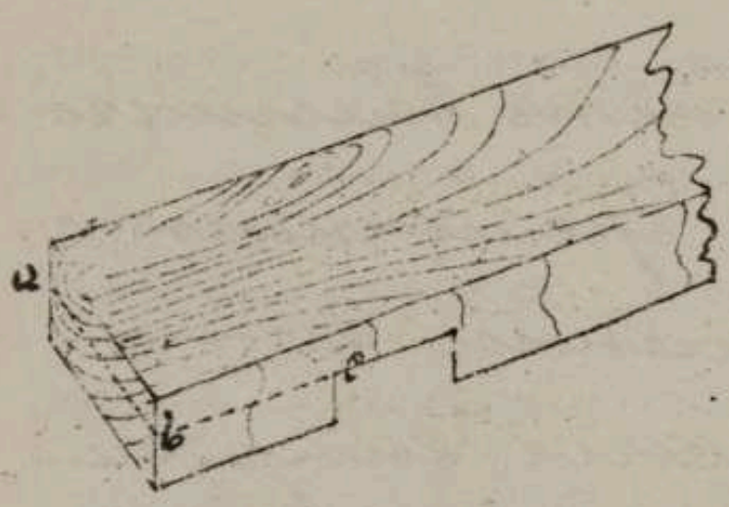
6, Предѣлъ временнаго сопротивленія замѣтно меньше для облони, чѣмъ для частей ближайшихъ къ сердцевинѣ.

Для нормъ строительнаго леса можно принимать слѣдующія среднія величины разрывающей силы на одинъ квадратный дюймъ поперечнаго сѣченія:

Для лиственницы 440 пудовъ
— сосны . . . . . 400 ——
— ели . . . . . 380 ——
— пихты . . . . . 320 ——
— дуба . . . . . 320 ——

Всѣ эти цифры относятся къ сопротивле-
нію разрыву вдоль фибръ. Поперекъ фибръ т. е.
по направленію діаметра поперечнаго сѣче-
нія, сопротивленіе разрыву значительно
меньше, но для опредѣленія его до сихъ поръ
было сдѣлано мало опытовъ. Изъ наблюденій
Вертгейма выходитъ, что для разрыва дерева
поперекъ фибръ нужно на одинъ квадратный
дюймъ площади разрыва:

для сосны . . . . . 8,75 пуд.
— дуба . . . . . 23 пуд.



Для скалыванія вдоль
слоевъ по площади a. b. c.
по тѣмъ же опытамъ
на одинъ квадратный
дюймъ площади скалы-
ванія нужна сила:
для сосны въ 11,75 пуд.
— дуба въ 16 пуд.

По опытамъ произведеннымъ при постро-
кѣ деревянныхъ мостовъ Никаевской желѣз-
ной дороги, для сосны Вышневолоцкихъ дачъ
сопротивленіе скалыванію найдено отъ 13 до
30 пуд. на одинъ квадр. дюймъ площади

скалыванія.

Кромѣ сего еще слѣдуетъ замѣтить, что сухое дерево вообще меньше сырого сопротивляется скалыванію; всѣ же предъидущіе выводы получены изъ опытовъ надъ деревомъ столь сухимъ, какъ оно обыкновенно употребляется при постройкахъ.

Что касается до коэффиціента упругости и предѣла временнаго сопротивленія разрыву камней, то до сихъ поръ еще нѣтъ достаточно полныхъ опытовъ для ихъ опредѣленія, но имѣются нѣкоторые результаты опытовъ надъ сопротивленіемъ разрыву известковыхъ растворовъ.

Результаты эти приводятся здѣсь только для приблизительныхъ соображеній, потому что сцѣпленіе растворовъ, завися отъ множества обстоятельствъ, бываетъ слишкомъ разнообразно, что-бы его можно было подвести подъ определенныя среднія величины:

Сопротивленіе разрыву раствора изъ жирной извести съ пескомъ, твердѣвшаго въ теченіи 14 мѣсяцевъ, найдено въ 1,65 пуд. на одинъ квадратн. дюймъ;

Раствора изъ гидравлической извести средней доброты съ пескомъ – 3,50 пуд. на одинъ квадратн. дюймъ;

Сильной гидравлической извести или цемента .... 6,00 пуд. на одинъ квадратн. дюймъ.

Въ отношеніи сцѣпленія съ камнями обыкно-

вѣсныхъ известковыхъ растворовъ, по прошествіи приблизительно полугода, можно принять на одинъ квадр. дюймъ.

Съ известковыми камня-

ми или плитой . . . . . 0,4-0,7 пуд.

Съ кирпичемъ . . . . . 1,0 —

Свѣжій известковый рас-

воръ хорошаго качества,

подымающій семь кирпи-

чей . . . . . 0,03 —

Петербургская Тосненская

известь, твердѣвшая 3 не-

дѣли . . . . . 0,22 —

Цементъ Дюма, твердѣв-

шій 3 недѣли . . . . . 0,85 —

Опыты, произведенные надъ сопротивленіемъ пеньковыхъ канатовъ и веревокъ, показываютъ, что вообще ихъ сопротивленіе не пропорціонально поперечному сѣченію, какъ это принимается для другихъ тѣлъ.

Для опредѣленія разрывающаго груза обыкновенно принимается формула:

$$13,5\,C^2.$$

выражающая въ пудахъ сопротивленіе разрыву каната, которато окружность C выражена въ дюймахъ. Но Моринъ, сличая результаты большого числа опытовъ, вывелъ вмѣсто этой формулы другую, болѣе вѣрную, именно:

$$(12,5 - 0,25\,C)\,C^2.$$

выраженную здѣсь въ пудахъ и дюймахъ.

Пробный грузъ для пеньковыхъ канатовъ принимается около 1/2, а прочное сопротивленіе отъ 1/3 до 1/2 разрывающаго груза.

При большой длинѣ каната необходимо принимать во вниманіе также и его вѣсъ, который для каната окружностью въ 1 дюймъ и длиною въ 1 сажень составляетъ около 1/4 фунта, т.е. 0,27 фунта, такъ что вѣсъ каната въ L саженъ длиною, имѣющаго C дюймовъ въ окружности будетъ

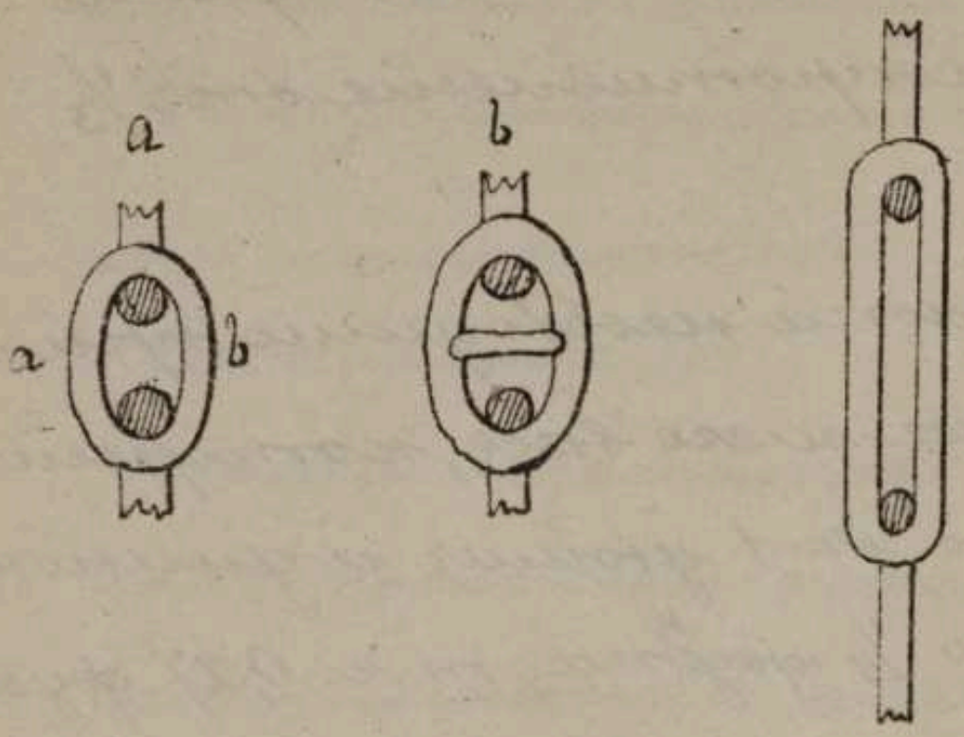
$$\frac{0,27}{40} LC^2 \text{ пуд.}$$

По опытамъ Coulomb'a смоленые канаты выдерживаютъ только 2/3 - 3/4 груза, разрывающаго несмоленые, а на основаніи опытовъ Dubuat'a сопротивленіе мокраго каната принимаютъ въ 1/3 сухаго.

Вейсахъ — предлагаетъ слѣдующія двѣ формулы для опредѣленія прочнаго сопротивленія канатовъ: для мягкихъ канатовъ, назначенныхъ для постояннаго движенія, т.е. свиванія и навиванія на колеса или валы при машинахъ, оно составляетъ $3,33\,C^2$ пудовъ; а для жесткихъ каната въ, которые должны выдерживать большіе грузы въ спокойно натянутомъ состояніи, прочное сопротивленіе составляетъ $5\,C^2$ пудовъ, гдѣ C выражено въ дюймахъ; послѣднія формулы какъ болѣе предпочтительныя удовлетворяютъ довѣрію.

Изъ опытовъ извѣстно, что сопротивленіе раз-

рывy <u>желѣзныхъ цѣпей съ короткими звѣньями</u>-



<u>ми</u> составляетъ только около 3/4 сопротивленія желѣзной полосы съ поперечнымъ сѣченіемъ равнымъ суммѣ сѣченій обѣихъ вѣтвей звѣна (:т. е. суммѣ его сѣченій a и b:); при цѣпяхъ же съ продолговатыми звѣньями, или съ распорками, сопротивленіе разрыву мало отличается отъ полнаго сопротивленія такой полосы.

Отношеніе вѣса цѣпи къ вѣсу прямой полосы одинаковой съ нею длины и толщины слѣдующіе:

Для цѣпи съ короткими эллиптическими звѣньями . . . . . 3,68 : 1

Для цѣпи съ продолговатыми звѣньями . . . . . 3,14 : 1

Для цѣпи съ распорками: за исключеніемъ вѣса распорки . . . 3,53 : 1

— " — " — вмѣстѣ съ вѣсомъ чугун. распорки . . . . 3,87 : 1

Положимъ, что нужно опредѣлить размѣры цѣпи, назначенной для подъема груза въ 500 пуд. Въ этомъ случаѣ для цѣпи съ короткими эллиптическими звѣньями, предпо-

мягая, что предѣлъ прочнаго сопротивленія желѣза составляетъ 300 пуд. на одинъ квадр. дюймъ, называя искомое поперечное сѣченіе каждой части звѣна цѣпи чрезъ ω, получимъ уравненіе

$$2 . \tfrac{3}{4} . 300 . \omega = 500 \text{ пуд.}$$

откуда

$$\omega = \frac{500 . 4}{2 . 3 . 300} = 1\tfrac{1}{9} \text{ кв. д.}$$

сравнивъ $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{10}{9}$, получимъ для діаметра сѣченія:

$$d = \sqrt{1,4191\ldots} = 1,14 \text{ д.}$$

Принимая, что длина цѣпи L футовъ, вѣсъ куб. фута желѣза 14 пудовъ, получимъ для вѣса цѣпи:

$$\frac{L . \omega}{144} . 14 . 3,68 = 0,39 L .$$

Напримѣръ, при длинѣ цѣпи въ 100 футовъ, вѣсъ ея будетъ 39 пудовъ.

Результаты опытовъ, относящіеся къ сѣченію и раздробленію тѣлъ.

До сихъ поръ для опредѣленія коэффиціента упругости, относящагося къ сѣченію тѣлъ, сдѣлано еще мало опытовъ; только опыты Годжинсона, касающіеся впрочемъ только желѣза и чугуна, достаточно обширны и точны, что бы изъ нихъ можно было вывести величины коэффиціента упругости для этихъ двухъ матеріаловъ; для прочихъ же тѣлъ этотъ коэффиціентъ принимается равнымъ коэффиціенту упругости при растяженіи.

Изъ опытовъ Годжинсона выходитъ, что коэффиціентъ упругости желѣза относящійся къ сжатію, въ круглыхъ числахъ равенъ 640,000 пуд. на одинъ квадр. дюймъ.

Для чугуна Годжинсонъ вывелъ формулу подобную той, которая имъ выведена для растяженія, и по которой сила упругости выражается въ зависимости отъ двухъ первыхъ степеней относительнаго сжатія; именно, по приведеніи къ русскимъ мѣрамъ, т. е. пудамъ и квадратнымъ дюймамъ, сжимающій грузъ выражается чрезъ:

$$P = \omega\left[358100\frac{l}{L} - 16.000.000\left(\frac{l}{L}\right)^2\right]$$

Но вмѣсто этой формулы, слишкомъ сложной для практическихъ примѣненій, можно, также какъ и для растяженія, принять другую болѣе простую и удобную:

$$P = 346.800\,\omega\frac{l}{L},$$

достаточно вѣрную для примѣненій; изъ нея видно, что коэффиціентъ упругости при сжатіи можно принять въ 346.800 пуд. на квадр. дюймъ.

Такъ какъ всѣ вычисленія, относящіяся къ изгибу тѣлъ, значительно упрощаются, если для сжатія и растяженія принимать одну и ту же среднюю величину коэффиціента упругости, потому что при изгибѣ въ одномъ слоѣ тѣла происходитъ сжатіе, а въ другомъ растяженіе, то какъ среднюю величину для сжатія и растяженія можно

принимать:

для чугуна . . . . . $E = 350000$ пуд. на 1 квадр. дюйм.

для железа . . . . . $E = 720000$ —"— —"— ————

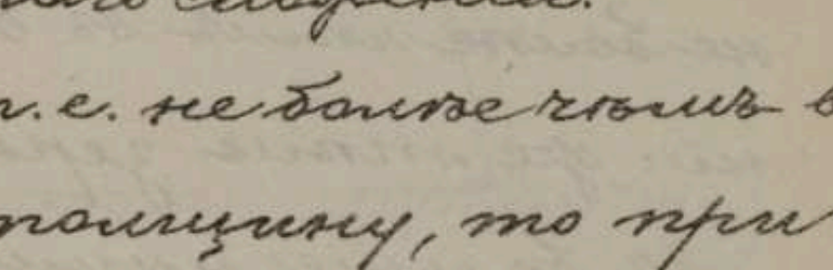
Опыты произведенные надъ сжатіемъ тѣлъ, большею частію иными цѣлью опредѣленіе предѣла временнаго сопротивленія, и въ этомъ отношеніи они привели къ слѣдующимъ общимъ заключеніямъ:

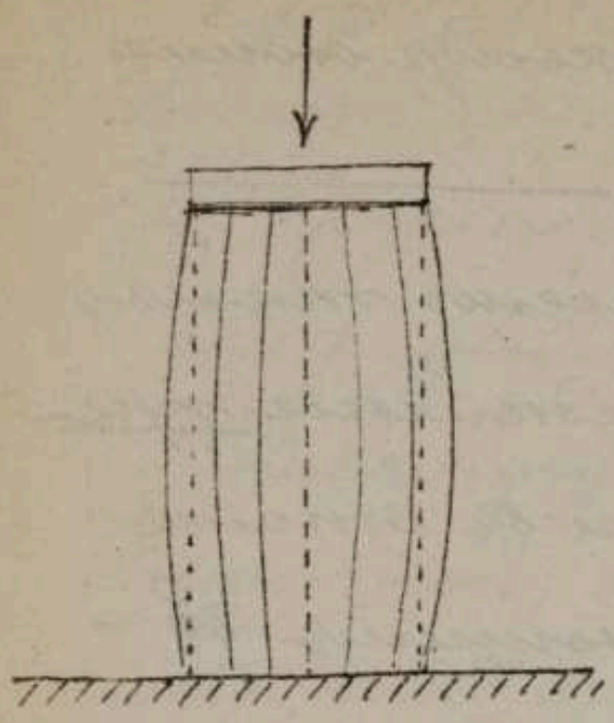
1, Сопротивленіе призматическихъ тѣлъ раздробленію зависитъ отъ отношенія длины тѣла къ его наименьшему поперечному измѣренію, предполагая, что давленіе направлено по длинѣ тѣла.

2, Не только сопротивленіе раздробленію, но и самый образъ или видъ раздробленія различны, смотря потому, будетъ ли тѣло длинное или короткое, зернистаго или волокнистаго сложенія.

Если длина тѣла мала, т.е. не болѣе чѣмъ въ полтора раза превосходитъ толщину, то при раздробленіи тѣлъ зернистаго сложенія, напр. камней и чугуна, образуются у верхняго и нижняго основанія трещины, отдѣляющія два коническія или пирамидныя части,

обращенныя вершинами къ срединѣ тѣла, которыя дѣйствуя на боковыя части тѣла подобно клиньямъ, раздвигаютъ ихъ, при чемъ самыя большею частію вдавливаются въ порошокъ.



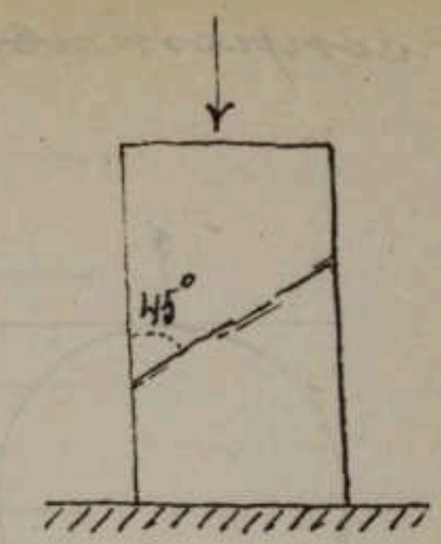


Тоже самое происходитъ при раздробленіи шаровидныхъ или цилиндрическихъ тѣлъ, сжимаемыхъ по направленію діаметра. Короткія тѣла зернистаго сложенія при раздробленіи сначала замѣтно укорачиваются, и выпучиваются около середины, за тѣмъ получаютъ продольныя трещины и наконецъ распадаются.

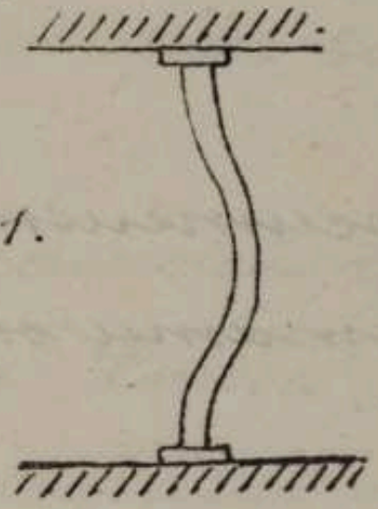
Подобнымъ образомъ происходитъ раздробленіе зернистыхъ тѣлъ и тогда, когда длина ихъ превосходитъ наименьшее поперечное измѣреніе не болѣе нежели въ 8 или 10 разъ. При раздробленіи же тѣлъ зернистаго сложенія, когда длина ихъ больше наименьшаго поперечнаго измѣренія отъ $1\frac{1}{2}$ до $8^{\text{ти}}$ или $10^{\text{ти}}$ разъ, они раздѣляются на части трещиною, составляющею съ осью тѣла уголъ около 45° и раздробленіе состоитъ въ томъ, что вдоль этой трещины одна часть тѣла скользитъ по другой.

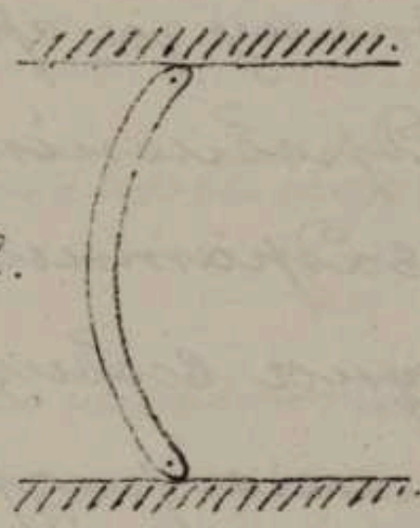
Если же длина тѣла превосходитъ наименьшее поперечное измѣреніе болѣе нежели въ 10 разъ, то сдавливаемое тѣло, какого бы оно ни было сложенія, изгибается сперва,

принимая видъ 1ій, 2ой или 3ій, и потомъ уже перемѣнивается въ томъ числѣ, гдѣ ось его наиболѣе изогнута. Видъ изгиба тѣла въ этомъ случаѣ зависитъ преимущественно отъ вида оконечностей тѣла, т.е. будутъ ли онѣ широкія и плоскія или круглыя, а также, отъ способа передачи давленія и отъ большей или меньшей не однородности матеріала.

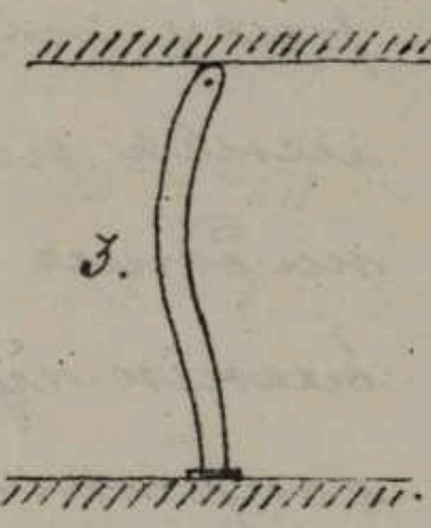


1.





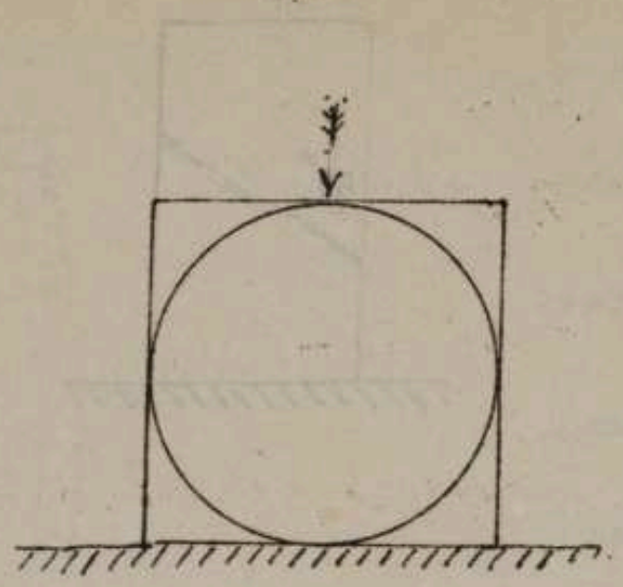
2.



3.

Вслѣдствіе этой зависимости сопротивленія раздробленію отъ отношенія длины тѣла къ его толщинѣ, предѣлъ временнаго сопротивленія матеріала всегда относится къ тѣламъ короткимъ, близко подходящимъ къ виду куба, и для такихъ тѣлъ опыты показали, что сопротивленіе раздробленію пропорціонально площади поперечнаго сѣченія, при чемъ до нѣкоторой степени оно зависитъ еще отъ вида тѣла, именно если сопротивленіе раздробленію куба принять за единицу,

то сопротивленіе вписаннаго въ этотъ кубъ



стоящаго цилиндра, со-
ставитъ 0,75, нежели
т. е. сдавленнаго по на-
правленію діаметра,
составитъ 0,33, а сопро-
тивленіе вписаннаго
шара 0,25.

Относительно короткихъ тѣлъ главнѣйшіе результаты опытовъ заключаются въ слѣдующемъ.

Сопротивленіе раздробленію чугуна составляетъ приблизительно $^4/_5$ сопротивленія разрыву; поэтому за средняго величину сопротивленія раздробленію можно принять $R' = \frac{1250.Y}{5} = 1000$ пуд. на одинъ квадратный дюймъ. Сопротивленіе раздробленію чугуна вообще около 6 разъ больше его сопротивленія разрыву и измѣняется между предѣлами отъ 1550–3350 пуд. смотря по сорту чугуна, и среднимъ числомъ можетъ быть принято въ 3000 пуд. на одинъ квадр. дюймъ.

Для большей части породъ строительнаго лѣса сопротивленіе раздробленію составляетъ около $^1/_2$ сопротивленія разрыву, и какъ средняя величины предѣла временнаго сопротивленія раздробленію на одинъ квадратный дюймъ можно принять:

Для листовенницы . . . . 220 пуд.
—— сосны . . . . . 200 ——
—— ели . . . . . 190 ——
—— пихты . . . . . 160 ——
—— дуба . . . . . 210 ——

Эти цифры относятся къ сопротивленію дерева раздавливанію вдоль волоконъ; поперекъ волоконъ оно вдвое и втрое меньше.

Сопротивленіе раздавливанію камней чрезвычайно разнообразно смотря по породѣ. Чтобы получить нѣкоторое о немъ понятіе, приводимъ слѣдующія цифры сопротивленія раздробленію на одинъ квадратный дюймъ.

Для гранита оно бываетъ . . . . . въ 150-300 пуд.
" плитъ известковой и мрамора - 25 - 250 —
" песчаниковъ . . . . . - 30 - 100 —
. Слабаго ракушечнаго известняка южной Россіи . . . . . - 5 - 10 —
Для кирпичной кладки хорошаго качества . . . . . 24 пуд.
Для кирпичной кладки слабой, худого кирпича . . . . . 15 —
Растворъ изъ обыкновенной, жирной, извести съ пескомъ, вполнѣ отвердѣвшій, выдерживаетъ до . . . . . 14 —
Растворъ изъ жирной извести съ кирпичной цемянкой . . . . . 18 —
Сильная гидравлическая известь или цементъ, твердѣвшій 2½ года выдерживаетъ ... 60 —

По опытамъ Прусскаго Инженера «Мандел'а надъ сопротивленіемъ разрыву и раздробленію при изгибѣ призмъ изъ Портландскаго цемента приготовленнаго въ Штеттинѣ, вполнѣ отвердѣвшій растворъ выдерживаетъ на одинъ квадратный дюймъ:

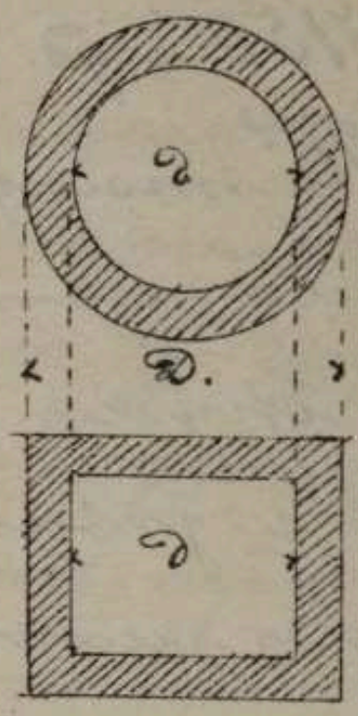
При чистомъ цементѣ —"— 24 пуд.
При 1ч. цемента и 1ч. песка —"— 18 —
— 1ч. ——— 2- ——— 12 —
— 1- ——— 3- ——— 6 —
— 1- ——— 4- ——— 4 —

Для опредѣленія зависимости сопротивленія раздавливанію длинныхъ призматическихъ тѣлъ, отъ отношенія длины къ толщинѣ, Гоёкинсонъ вывелъ изъ своихъ опытовъ эмпирическія формулы. Для чугунныхъ стоекъ или колонокъ съ широкими и плоскими основаніями онъ нашелъ, что сопротивленіе раздавливанію при круглыхъ или квадратныхъ, внутри полыхъ, поперечномъ сѣченіи составляетъ:

$$2740 \frac{D^{3,6}}{L^{1,7}} \text{ пуд.}$$

гдѣ D представляетъ діаметръ круглаго или сторону квадратнаго поперечнаго сѣченія, внутр. и полнаго, выраженный въ дюймахъ, а L длину тѣла, выраженную въ футахъ. — Формула эта относится только къ тѣмъ стойкамъ, для которыхъ отношеніе длины къ толщинѣ больше 30, т.е: $\frac{12L}{D} > 30$.

Для чугунных колонн, внутри пустых Годкинсон полагал возможным определить сопротивление раздавливанію вычитая изъ сопротивленія колонны внутри полной, сопротивленіе той части, которая внутри ея недостаетъ, а слѣдовательно въ семъ случаѣ сопротивленіе будетъ:



$$27/40 \frac{D^{3,6} - d^{3,6}}{L^{1,7}}.$$

Дробные показатели, входящіе въ эти формулы, затрудняютъ ихъ примѣненіе, по сему нѣкоторые инженеры вычислили по нимъ таблицы, изъ которыхъ, по данной длинѣ L и толстотѣ d стойки, можно прямо получить сопротивленіе раздавливанію, и на оборотъ, данному сопротивленію раздавливанію опредѣлить соотвѣтствующія измѣренія стоекъ. Хотя таблицы эти дѣйствительно могутъ облегчить употребленіе эмпирическихъ формулъ Годкинсона, но въ нихъ остается тотъ недостатокъ, что онѣ относятся только къ тому сорту чугуна, надъ которымъ Годкинсонъ производилъ опыты, т.е. что въ нихъ не выражена зависимость сопротивленія отъ качества и доброты чугуна, потому что для всѣхъ различныхъ родовъ чугуна формула остается неизмѣнною и вычисленія по ней измѣренія, мы найдемъ для хорошаго чугуна

слишкомъ большія, а для дурного слишкомъ малыя пластичности, и это тоже болѣе не выгодно, что чугунъ при опытахъ Годкинсона былъ отличнаго качества и выдерживалъ давленіе до 3150 пуд. на одинъ квадратный дюймъ.

По этому французскій инженеръ Love старался изъ тѣхъ же опытовъ Годкинсона вывести другія эмпирическія формулы, простѣйшія и зависящія отъ сопротивленія раздробленію матеріала стоекъ на квадратную единицу площади, относя это сопротивленіе къ короткому тѣлу. Формулы Лове, основываясь также какъ и предъидущія къ Эйлеровымъ съ плоскими и шарокими верхнимъ и нижнимъ оконечностями слѣдующія:

Для желѣза, въ случаѣ стоекъ квадратныхъ или круглыхъ, внутри полыхъ, если отношеніе $\frac{L}{D}$ длины къ діаметру или боку поперечнаго сѣченія больше 10 и меньше 180, то сопротивленіе раздавливанію будетъ:

$$\frac{R' \omega}{1,55 + 0,0005 \left(\frac{L}{D}\right)^2} \text{ пуд.}$$

гдѣ R' представляетъ сопротивленіе коротк. тѣла раздавливанію на квадратную единицу поперечнаго сѣченія ω; L и D представляютъ длину и поперечное измѣреніе тѣла, выраженныя въ одинаковыхъ мѣрахъ, т. е. оба въ дюймахъ или оба въ футахъ и т. д.

Для чугуна въ случаѣ внутри полыхъ или внутри пустыхъ круглыхъ или квадратныхъ

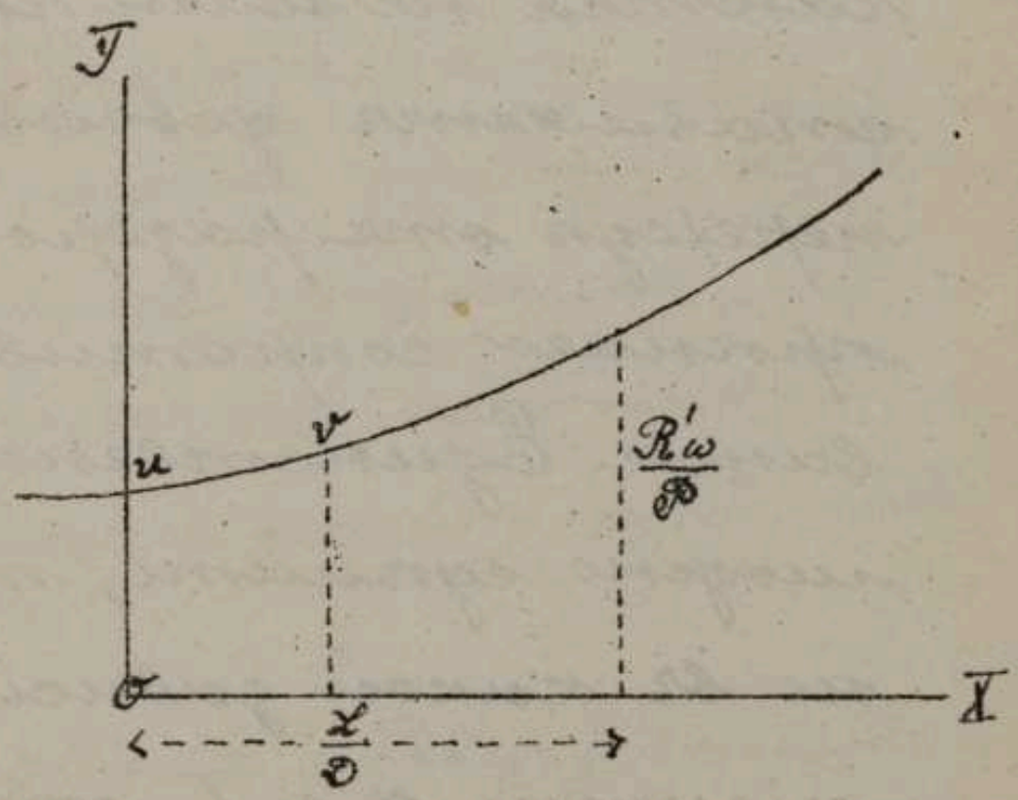
стоекъ, въ которыхъ $\frac{L}{D}$ заключается между предѣлами 4 и 120, сопротивленіе раздавливанію будетъ

$$\frac{R'_\omega}{1,45 + 0,00337\left(\frac{L}{D}\right)^2} \text{ пуд.}$$

Лове вывелъ свои формулы слѣдующимъ образомъ. Принимая, согласно результатамъ опытовъ Годжинсона, что отношеніе $\frac{R'_\omega}{P}$ груза, раздробляющаго короткое тѣло, къ грузу, раздробляющему тѣло большой длины, при тѣхъ же поперечныхъ измѣреніяхъ, увеличивается не пропорціонально первой степени отношенія $\frac{L}{D}$ длины къ толщинѣ, онъ предположилъ, что эти два количества находятся въ зависимости, выраженной уравненіемъ:

$$\frac{R'_\omega}{P} = a + b\left(\frac{L}{D}\right)^m$$

Для опредѣленія коэффиціентовъ a и b, онъ нанесъ на чертежѣ величины количествъ $\frac{R'_\omega}{P}$ и $\frac{L}{D}$, взятыя изъ таблицъ опытовъ, принимая $\frac{L}{D}$ за абсциссу и $\frac{R'_\omega}{P}$ за ординату кривой. Проведя самую кривую (u) и продолживъ её по плавному ходу до встрѣчи съ осью ординатъ въ u, онъ получилъ величину



$$a = Ou$$

За тѣмъ полагая на первый разъ

$$m = 2$$

съ тѣмъ, чтобы въ случаѣ неудачи пробовать и другія величины т, онъ опредѣлилъ нѣсколько величинъ $\underline{b}$, соотвѣтствующихъ нѣсколькимъ величинамъ $\frac{R'\omega}{P}$ и $\frac{l}{D}$, взятымъ изъ чертежа, и вывелъ для $\underline{b}$ среднюю величину.

Такимъ образомъ составилась формула:

$$P = \frac{R'\omega}{a + b\left(\frac{l}{D}\right)^2}$$

съ извѣстными коэффиціентами $\underline{a}$ и $\underline{b}$ для желѣза и чугуна, которая, по сравненіи съ результатами опытовъ, оказалась достаточно вѣрною для практическихъ приложеній.

По своей простотѣ формулы Лове заслуживаютъ полнаго вниманія; точность ихъ весьма удовлетворительна, такъ какъ онѣ отъ результатовъ опытовъ рѣдко удаляются не болѣе чѣмъ около $2\frac{5}{0}$, что составляетъ довольно малую разность при переходѣ отъ раздробляющаго груза къ предѣлу прочнаго сопротивленія тѣмъ раздробленію. Единственный упрекъ, который имъ можно сдѣлать, тотъ, что изъ нихъ не видно въ какой зависимости находятся коэффиціенты a и b отъ сорта матеріала.

Для объясненія результатовъ формулы Лове и для облегченія ихъ примѣненій, составлена по нимъ слѣдующая таблица предѣ-

ловъ временнаго сопротивленія на 1 квадратный дюймъ поперечнаго сѣченія желѣзныхъ и чугунныхъ стоекъ, съ широкими и плоскими основаніями, для различныхъ величинъ отношенія $\frac{l}{D}$ длины къ наименьшему поперечному измѣренію, принимая предѣлъ временнаго сопротивленія раздробленію короткой стойки желѣзной въ 1575 пуд. и чугунной въ 3150 пуд., что соотвѣтствуетъ матеріалу испытанному Hodgkinson'омъ.

Отношеніе $\frac{l}{D}$	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
Желѣзн. стойки	1575	985	900	788	670	562	470	394	332	281	240	пуд.
Чугунной стойки .	3150	1763	1126	702	460	319	232	175	138	109	91	пуд.

Эта таблица приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ объ относительной прочности желѣзныхъ и чугунныхъ стоекъ, а именно: при малой длинѣ желѣзныя стойки въ половину слабѣе чугунныхъ, при средней длинѣ, т. е. при $\frac{l}{D} = 30$ и тѣ и другія одинаково прочны; при $\frac{l}{D} = 60$, желѣзныя вдвое прочнѣе чугунныхъ, а при длинѣ около 100 разъ большей противъ толщины, желѣзныя стойки почти втрое прочнѣе чугунныхъ.

И такъ, въ частяхъ сооруженія подверженныхъ сжатію, выгоднѣе употреблять чугунъ для короткихъ или толстыхъ частей, а для длинныхъ и тонкихъ, напротивъ, выгоднѣе желѣзо.

Въ послѣдствіи Лове вывелъ еще, на основаніи тѣхъ же опытовъ Годкинсона, эмпирическую формулу для опредѣленія отношенія сопротивленія раздробленію желѣзной или чугунной стойки съ широкими основаніями, къ сопротивленію стойки, тѣхъ же размѣровъ, но съ круглыми или подвижными окончаніями.

Отношеніе это выражается формулою:

$$\frac{1,30 + 0,0127\left(\frac{L}{D}\right)^2}{1,45 + 0,00337\left(\frac{L}{D}\right)^2};$$

откуда видно что для величинъ $\frac{L}{D}$ равныхъ

10	30	60	100
1,4	2,8	3,4	3,6

отношеніе сопротивленій будетъ . . . .

Опыты Годкинсона надъ раздавливаніемъ стоекъ привели еще къ нѣкоторымъ замѣчаніямъ, заслуживающимъ вниманія:

Если сдавливаемая стойка находится въ такомъ положеніи, что равнодѣйствующая давленія проходитъ чрезъ ребро, то прочность стойки втрое меньше, чѣмъ когда давленіе дѣйствуетъ по оси.

Призматическимъ тѣламъ, подвергаемымъ значительному давленію по оси, часто даютъ поперечное сѣченіе крестообразное. По опытамъ Годкинсона, сопротивленіе раздробленію подобной стойки составляетъ около половины сопротивленія цилиндрической стойки внутри

пустой, при одинаковомъ въсѣ обѣихъ стоекъ.

Кромѣ указаннаго поперечнаго сѣченія, встрѣчаются еще другія виды, но до сихъ поръ нѣтъ достаточно обширныхъ опытовъ, изъ которыхъ можно было бы заключить что нибудь объ относительномъ достоинствѣ этихъ видовъ сѣченія; хотя, судя по предъидущему, вѣроятно, что цилиндрическія, внутри пустыя, стойки заслуживаютъ предпочтеніе предъ всѣми остальными.

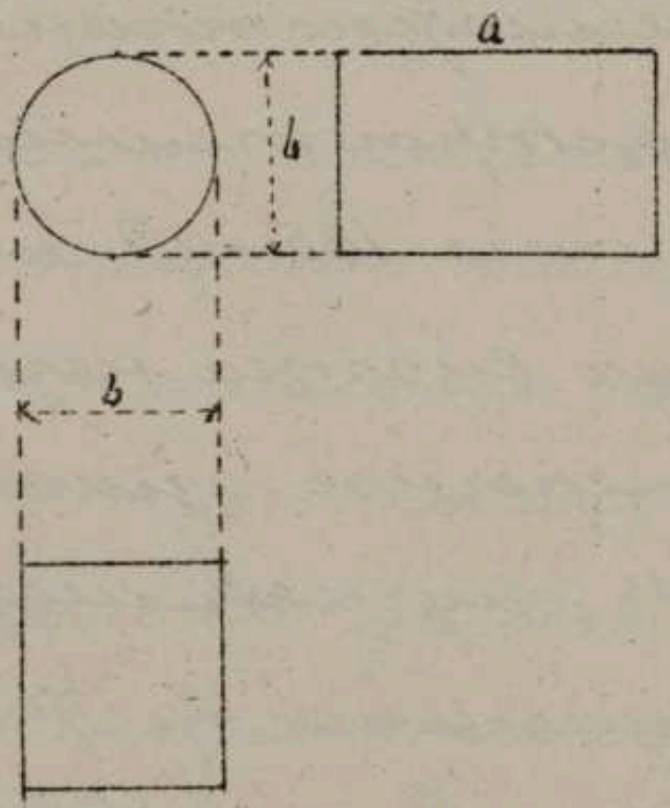
Относительно сопротивленія раздробленію дерева существуетъ довольно много опытовъ, но изъ всѣхъ ихъ только опыты Rondelet и Hodkinson'a имѣли предметомъ опредѣлить измѣненіе прочности деревянныхъ стоекъ, въ зависимости отъ отношенія ихъ высоты къ наименьшему поперечному измѣренію. Роннделе полагаетъ, что вообще можно принять, что обыкновеннаго качества строительный лѣсъ раздробляется отъ давленія 165 пуд. на 1 квадр. дюймъ, въ случаѣ когда высота незначительно превосходитъ поперечное измѣреніе, и что въ обыкновенныхъ случаяхъ можно допускать въ постройкахъ удвоеніе въ $\frac{1}{7}$ противъ предъидущаго, т. е. 24 пуда на 1 квадр. дюймъ, уменьшая грузъ, вмѣстѣ съ увеличеніемъ высоты стойки относительно поперечнаго измѣренія по слѣдующей таблицѣ:

$\frac{l}{D}$ =	1.	12	24	36	48	60	72.
Сопротивленіе	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
Предѣлъ прочнаго сопротивленія въ тудахъ на одинъ квадр. дюймъ	24.	20.	12.	8.	4.	2.	1.

Таблицу эту можно также замѣнить эмпирическою формулою

$$\frac{Rw}{1,2 + 0,08\left(\frac{l}{12D}\right)^3}$$

составленною на основаніи этой таблицы. Гаскинсонъ вывелъ изъ своихъ опытовъ надъ деревомъ эмпирическую формулу для опредѣленія сопротивленія раздавливанію стоекъ круглыхъ, квадратныхъ и прямо угольныхъ; а именно полный этотъ сопротивленіе, переведенное на русскія мѣры, будетъ для дуба хорошаго качества:



$$700\,w\left(\frac{b}{l}\right)^2 \text{ пуд.}$$

гдѣ длина l стойки выражена въ футахъ, а поперечныя измѣренія въ дюймахъ. Морень распространилъ эти результаты опытовъ Гаскинсона, и составилъ по его примѣру

Эмпирическія формулы для опредѣленія предѣла прочнаго сопротивленія стоекъ различныхъ породъ лѣса, сообразуясь при опредѣленіи коэффиціентовъ этихъ формулъ съ величинами предѣловъ временнаго сопротивленія, найденныхъ Гаскинсономъ, для различныхъ породъ лѣса. Предполагая что длина стойки означена чрезъ l футовъ, наименьшее поперечное измѣреніе чрезъ b, а другое измѣреніе, въ случаѣ прямоугольнаго сѣченія, изображено чрезъ a, при чемъ площадь то сѣченія будетъ равна ab или b^2, эмпирическія формулы для прочнаго сопротивленія выразятся слѣдующимъ образомъ:

	въ вершкахъ	въ дюймахъ
Дубъ крѣпкій . . .	$657\omega\left(\frac{b}{l}\right)^2$	$70\omega\left(\frac{b}{l}\right)^2$
—— слабый . . .	$461\omega\left(\frac{b}{l}\right)^2$	$49\omega\left(\frac{b}{l}\right)^2$
Ель крѣпкая или сосна рудовая . . .	$549\omega\left(\frac{b}{l}\right)^2$	$58\omega\left(\frac{b}{l}\right)^2$
Пихта, ель слабая, сосна мендовая . . .	$410\omega\left(\frac{b}{l}\right)^2$	$43\omega\left(\frac{b}{l}\right)^2$

Чтобы показать примѣръ употребленія этихъ формулъ, вычислимъ грузъ, безопасно выдерживаемый сосновою стойкою $6^{\text{тью}}$ вершковаго $3^{\text{хъ}}$ саженнаго лѣса; въ этомъ случаѣ имѣемъ: $l = 21^{\text{шн}}$ футу; $\omega = \frac{l.b^2}{4}$, квадр. вершковъ, или $\omega = \frac{22}{7}.9 = 28{,}3$ кв. в.; слѣдовательно прочное сопротивленіе этой

стойки будетъ

$$549 \cdot 28{,}3 \left(\frac{6}{21}\right)^2 = 549 \cdot 28{,}3 \cdot \frac{4}{49} = 1284{,}6 \text{ пуд.}$$

Если по этимъ формуламъ вычислить таблицу, подобную той, которая предложена Ронделе, то получится для сосноваго леса слѣдующая таблица:

$\frac{l}{d} =$	12	24	36	48	60	72
Прочное сопротивленіе въ пудахъ на 1 квадр. дюймъ:						
По Годкинсону	58,5	14,5	6,5	3,6	2,3	1,6
„ Ронделе	20	12	8	4	2	1.

Сравнивая цифры этой таблицы видно, что при малыхъ отношеніи высоты къ поперечному измѣренію, а именно $\frac{l}{d} \leqq 24$, сопротивленія, опредѣленныя по опытамъ Годкинсона, гораздо большіе сопротивленій, принимаемыхъ Ронделе, а при значительной величинѣ отношенія высоты къ толщинѣ, именно $\frac{l}{d} > 30$ выходитъ сопротивленіе по обоимъ авторамъ почти одинаковое.

При опытахъ Годкинсона наименьшая величина отношенія длины къ толщинѣ была равна $30^{\text{тп}}$ и результаты для меньшихъ величинъ этого отношенія выведены только по аналогіи, по этому едва ли можно признать его формулы вѣрными при $\frac{l}{d}$ меньшемъ $30^{\text{тп}}$.

Деревянныя сваи, вбитыя почти по всей длинѣ въ землю, тѣмъ самымъ безъ сомнѣнія предохраняются отъ значительнаго изгиба, несмотря на большую ихъ длину относительно толщины; по этому грузъ, который каждая свая можетъ выдержать безъ ущерба своей прочности, - не долженъ быть вычисленъ по предыдущимъ формуламъ. Обыкновенно полагаютъ, что на сваю можно безопасно положить отъ 12 до 14 пудовъ на каждый квадратный дюймъ поперечнаго сѣченія, но руководствуясь примѣрами существующихъ зданій, этотъ грузъ кажется - можно увеличить до 20 пудовъ на каждый квадратный дюймъ. Это основывается наблюденіяхъ Redtenbacher, что при діаметрѣ сваи въ 25 сантиметровъ, она можетъ выдерживать грузъ въ 25.000 килограммовъ, что и составляетъ около 20 пудовъ на 1 квадр. дюймъ. Впрочемъ такой способъ опредѣленія груза, выдерживаемаго сваею, относится только къ тѣмъ рѣдкимъ случаямъ, когда оконечность сваи надежнымъ образомъ опирается на непроницаемую скалу; если же свая поддерживается преимущественно треніемъ и сцѣпленіемъ грунта, то ея сопротивленіе углубленію исчисляется на другихъ основаніяхъ.

Что касается до камней, то сопротив-

ченіе раздавливанію въ нихъ также зависитъ отъ отношенія высоты къ толщинѣ или отъ числа слоевъ-кладки сжимаемаго столба, но до сихъ поръ нѣтъ опытовъ, изъ которыхъ эта зависимость могла бы быть опредѣлена съ достаточною вѣрностію, что впрочемъ и не имѣетъ большой важности, потому что, даже при самыхъ тонкихъ каменныхъ колоннахъ, отношеніе высоты къ нижнему діаметру бываетъ не болѣе 10. Всѣ результаты опытовъ относительно камней ограничиваются предѣломъ временнаго сопротивленія для камней малой высоты относительно къ поперечнаго измѣренія, о чемъ уже выше упомянуто.

Остается еще, для полноты данностей, извлеченныхъ изъ опытовъ и наблюденій, сказать нѣсколько словъ о <u>предѣлахъ прочнаго сопротивленія</u>, величины которыхъ опредѣляются изъ сравненія предѣловъ временнаго сопротивленія съ напряженіями, встрѣчающимися въ частяхъ зданій, прочность которыхъ доказывается продолжительностію ихъ существованія. Предѣлъ прочнаго сопротивленія металловъ, какъ для растяженія, такъ и для сжатія, принимается отъ $\frac{1}{4}$ – $\frac{1}{6}$ предѣла временнаго сопротивленія. Если же разсматриваемое тѣло

подвержено сотрясеніямъ, то предѣлъ прочнаго сопротивленія берутъ не болѣе $\frac{1}{5}$ временнаго сопротивленія, а часто и гораздо меньше, напр. для чугуна отъ $\frac{1}{10}$ до $\frac{1}{20}$. Въ частяхъ машинъ, гдѣ кромѣ прочности нужна еще незыблемость вида, прочное сопротивленіе матеріаловъ составляетъ $\frac{1}{10}$ до $\frac{1}{30}$ временнаго, а иногда даже не болѣе $\frac{1}{50}$.

Для деревянныхъ частей зданій, подверженныхъ растяженію или сжатію, берутъ $\frac{1}{7}$ до $\frac{1}{10}$; а для камней и растворовъ $\frac{1}{10}$ до $\frac{1}{30}$ временнаго сопротивленія, смотря по большей или меньшей правильности кладки.

При исчисленіи размѣровъ частей деревянныхъ мостовъ системы Гау на Николаевской желѣзной дорогѣ, были приняты слѣдующія величины прочныхъ сопротивленій, опредѣленныя большею частію согласно результатамъ особо произведенныхъ опытовъ.(·X·)

Для пояса сосноваго: растягиванію $R = 45$ пуд. на 1 кв. дюйм.

—— —— —— сжатію . . . 20 ——,——

—— раскосовъ сосновыхъ сжатію . . . 20 ——,——

(·X·) Журавскій. О мостахъ системы Гау. Петербургъ. 1855–1856, часть 2-я, стр. 86-я.

Для врубокъ разрушенію сжатіемъ:

а) при глубинѣ врубки въ 1 дюймъ 20 пуд. на 1 кв. дюймъ.

б) ——— ——— ——— отъ 1½ до 2 д. 15 ——— ———

Для врубокъ сосновыхъ скалыванію . . 4 ——— ———

— дубовыхъ брусковъ скалыванію . . 6 ——— ———

— волоконъ сосны давленію, нор-
мальному къ нимъ . . . . . 8 ——— ———

— волоконъ дуба нормально-
му къ нимъ давленію . . . . 15 ——— ———

— желѣзныхъ стержней растя-
гивающимъ:

а) когда они расположены по
парно . . . . . 180 ——— ———

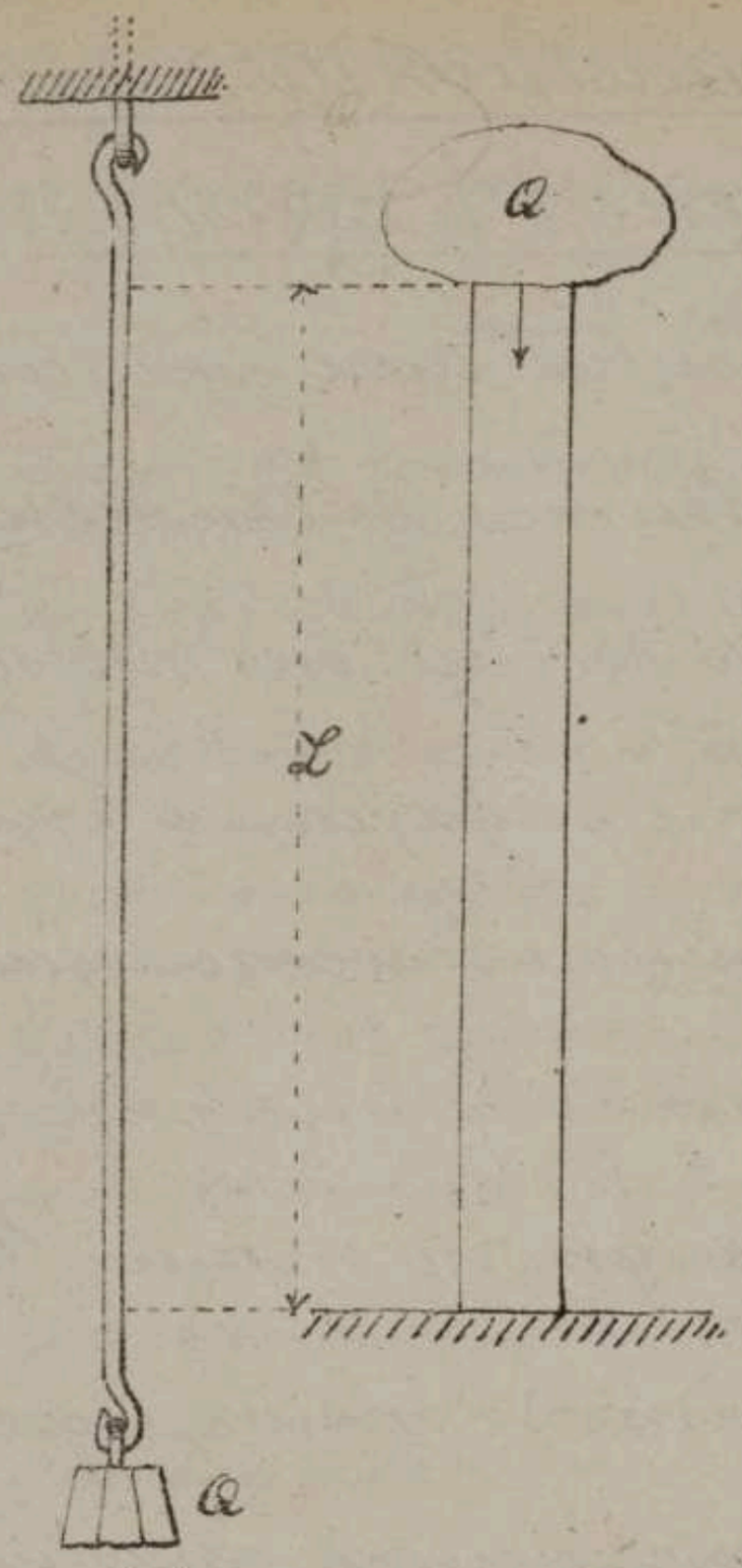
б) когда по одиночкѣ . . . . . 250 ——— ———

Для чугунной подкладки
при давленіи на нее гайки
и шпянки стержня . . . . . 60 ——— ———

О живой сопротивлении тыл при растяжении и сжатии.

Если грузъ, растягивающій или сжимающій какое нибудь тыло находится въ движеніи относительно этого тыла, то вообще онъ произведетъ въ немъ бо́льшее измѣненіе вида, чѣмъ если бы онъ существовалъ въ спокойномъ состояніи и въ слѣдствіе этого увеличится и напряженіе сжатія или растяженія внутри тыла. Чтобы получить понятіе (понятіе) о томъ, на сколько движеніе груза можетъ увеличить сжатіе или растяженіе призматическаго тыла и какое сопротивленіе при этомъ проявится въ тѣлѣ, постараемся изслѣдовать это дѣйствіе груза въ нѣкоторыхъ простыхъ случаяхъ.

Вообразимъ, что призматическое тыло, имѣющее длину L и поперечное сѣченіе ω, подвержено дѣйствію растягивающаго или сжимающаго груза Q, который въ первое мгновеніе своего дѣйствія на тѣло имѣлъ нѣкоторую скорость v_0. Если бы этотъ грузъ дѣй-



ствовали въ спокойномъ состояніи на разсматриваемое тѣло, то онъ произвелъ бы въ немъ удлиненіе длины l, опредѣляемое уравненіемъ:

$$Q = E\omega\frac{l}{l};$$

но находясь въ движеніи, грузъ произведетъ удлиненіе длины l', нѣсколько большее чѣмъ l, и которому очевидно будетъ соотвѣтствовать и большая сила упругости внутри тѣла, т. е. большее напряженіе сжатія или растяженія. Чтобы найти зависимость между грузомъ Q, его начальною скоростью v_0 и удлиненіемъ длины l', которое временно можетъ быть произведено этимъ грузомъ, удобнѣе чрезъ P величину силы упругости, сопротивляющейся дѣйствію груза Q въ то мгновеніе, когда призматическое тѣло удлинило свою длину на нѣкоторую величину x, меньшую чѣмъ l'. Тогда мы можемъ разсматривать грузъ Q какъ движущееся твердое тѣло, подверженное дѣйствію двухъ взаимно противоположныхъ силъ, т. е. дѣйствію вѣса Q и силы упругости P, вслѣдствіе

чего между массою $\frac{Q}{g}$ этого тела, его скоростя-
ми в первое и последнее мгновения движения,
изображенными через v_0 и v, силами P и Q, на
него действующими и путями, пройденными
точками приложения этих сил будет существовать по закону живых сил зависимость,
которая в рассматриваемом случае выра-
зится следующим уравнением:

$$Qx - \int_0^x P dx = \frac{Q}{g}\cdot\frac{v^2}{2} - \frac{Q}{g}\cdot\frac{v_0^2}{2}.$$

Если сила упругости ранее разрушения призма-
тического тела успеет остановить движение
вниз груза Q, то в мгновение остановки измы-
нение длины тела будет наибольшее, следова-
тельно в это мгновение $x = l'$; так как движе-
ние в это мгновение останавливается, и ско-
рость груза переменяет направление,
то тогда скорость v обращается в нуль
и мы получим:

$$Ql' - \int_0^{l'} P dx = -\frac{Q}{g}\frac{v_0^2}{2};$$

откуда

$$\int_0^{l'} P dx = Q\left(l_1 + \frac{v_0^2}{2g}\right).$$

Это уравнение и выражает искомую зависи-
мость между Q, v_0 и l'. Видим, что если измерения тела и свойства его мате-
риала таковы, что в нем работа силы упру-
гости, выражаемая интегралом $\int_0^{l'} P dx$, возрас-
тая вместе с изменением длины тела,

можетъ дойти до величины равной количеству $Q\left(l' + \frac{v_0^2}{2g}\right)$, то такое тѣло можетъ выдержать дѣйствіе груза Q, имѣющаго начальную скорость v_0, и послѣ нѣсколькихъ качаній остановить его движеніе; въ противномъ же случаѣ тѣло разрушится. — И такъ, сопротивленіе тѣла растяженію или сжатію дѣйствіемъ движущагося груза измѣряется величиною работы силы упругости. Эта величина посему и называется <u>живымъ сопротивленіемъ тѣла.</u>

Если извѣстна наибольшая величина, до которой, при постепенномъ возрастаніи измѣненій длины тѣла l' и силы упругости P, можетъ дойти работа силы упругости безъ ущерба прочности тѣла, то изъ выведеннаго уравненія можно опредѣлить и наибольшую величину груза Q или его начальной скорости v_0, при которыхъ прочность не нарушается. Вообще если извѣстна зависимость работы силы упругости отъ свойствъ матеріала тѣла и его измѣренія, то выведенное уравненіе можетъ служить для опредѣленія одной изъ величинъ Q, v_0 и l', по даннымъ двумъ другимъ.

И такъ для рѣшенія вопросовъ, относящихся къ неспокойному дѣйствію грузовъ, растя-

гивающимъ или сдавливающимъ призматическое тѣло, необходимо опредѣлить величину работы силы упругости, сопротивляющейся такому дѣйствію грузовъ, т.е. усилія сопротивленія и предѣлъ, до котораго оно можетъ увеличиваться.

Если для простоты изслѣдованія удовлетворяться приблизительнымъ рѣшеніемъ вопроса, то можемъ пренебречь вліяніемъ инерціи призматическаго тѣла на неравномѣрное распредѣленіе напряженій по различнымъ частямъ его длины, и слѣдовательно предположить, что въ каждое мгновеніе тѣло во всѣхъ своихъ частяхъ по всей длинѣ одинаково напряжено. Тогда, такъ какъ P есть величина силы упругости, соотвѣтствующая удлиненію длины x, то предполагая, что P не превосходитъ предѣла упругости, будетъ:

$$P = E\omega\frac{x}{l},$$

а слѣдовательно, пока P не перешло за предѣлъ упругости, имѣемъ:

$$\int_0^{l'} P\,dx = \frac{E\omega}{l}\int_0^{l'} x\,dx = \frac{E\omega l'^2}{2l}.$$

Эту величину можно написать и въ видѣ:

$$\int_0^{l'} P\,dx = \frac{El'^2}{2l^2}l\omega.$$

или же если изобразить чрезъ p величину силы упругости на квадратную единицу площади поперечнаго сѣченія, соотвѣтствующую изъ-

нению длины l', то:

$$\frac{E\omega l'}{l} = p\omega \quad \text{и} \quad \frac{l'^2}{l^2} = \frac{p^2}{E^2};$$

по сему

$$\int_0^{l'} P dx = \frac{El'^2}{2l^2} \cdot l\omega = \frac{p^2}{2E} l\omega$$

Въ этой формулѣ множитель $\frac{El'^2}{2l^2}$, или $\frac{p^2}{2E}$, не зависящій отъ измѣренія тѣла, а только отъ его матеріала и напряженія, отдѣленъ отъ втораго множителя $l\omega$, представляющаго объемъ тѣла и вовсе не зависящаго въ свою очередь отъ матеріала и напряженія. Количество:

$$\frac{El'^2}{2l^2} = \frac{p^2}{2E}$$

выражаетъ величину живаго сопротивленія упругаго тѣла, котораго объемъ равенъ единицѣ, и называется <u>живымъ сопротивленіемъ матеріала тѣла</u>. Если удлиненіе длины l' соотвѣтствуетъ прочному сопротивленію тѣла растяженію или сжатію, то $\frac{El'^2}{2l^2}$ называется предѣломъ <u>живого прочнаго сопротивленія матеріала тѣла</u>, если же l' соотвѣтствуетъ предѣлу упругости то $\frac{El'^2}{2l^2}$ называется предѣломъ <u>живого упругаго сопротивленія матеріала тѣла</u> и въ этомъ послѣднемъ случаѣ иногда изображается буквою: T_e (travail élastique) такъ что:

$$T_e = \frac{A^2}{2E},$$

гдѣ A изображаетъ предѣлъ упругости матеріала.

Если же, при измѣненіи длины тѣла, развивающаяся въ немъ сила упругости переходитъ за предѣлъ упругости, т.е. перестаетъ быть пропорціональною отношенію $\frac{x}{l}$ измѣненія длины тѣла къ первоначальной его длинѣ, тогда вмѣсто

$$P = E\omega\frac{x}{l}$$

надобно взять общее выраженіе силы упругости, въ зависимости отъ отношенія $\frac{x}{l}$ т.е.

$$P = \omega f\left(\frac{x}{l}\right)$$

и тогда:

$$\int_0^{l'} P\,dx = \int_0^{l'} \omega f\left(\frac{x}{l}\right)dx = l\omega \int_0^{\frac{l'}{l}} f\left(\frac{x}{l}\right)d\frac{x}{l}.$$

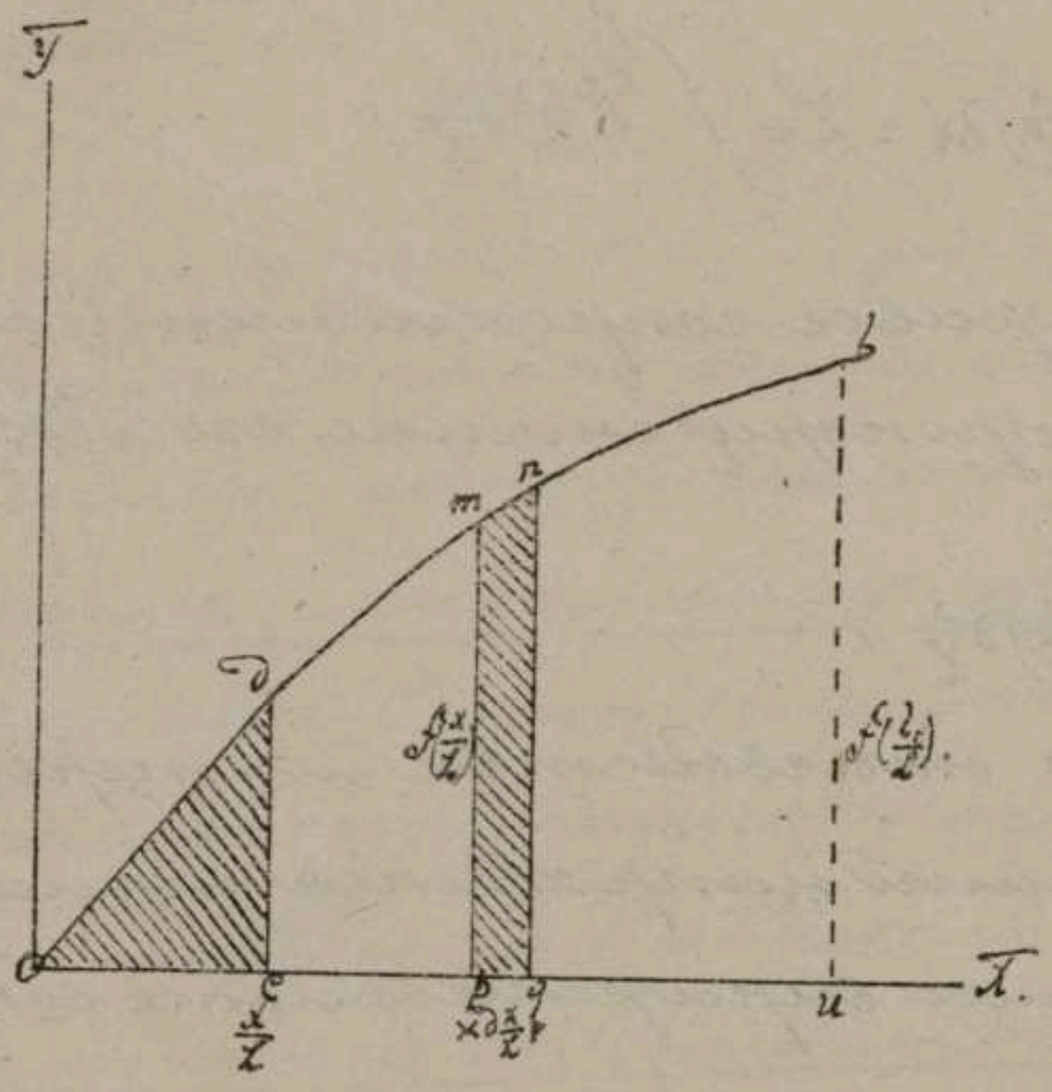
Въ этомъ случаѣ живое сопротивленіе тѣла какъ видно также пропорціонально его объему и количеству $\int_0^{\frac{l'}{l}} f\left(\frac{x}{l}\right)d\frac{x}{l}$,

которое зависитъ отъ свойства матеріала и измѣненія вида или напряженія тѣла, и представляетъ общее выраженіе живаго сопротивленія матеріала тѣла.

Если измѣненіе длины тѣла l' въ этомъ выраженіи имѣетъ ту величину, при которой происходитъ разрывъ или раздробленіе тѣла, то предъидущій интегралъ выражаетъ наибольшую возможную величину живаго сопротивленія тѣла дѣйствію движущагося груза при объемѣ тѣла равномъ единицѣ и называется <u>предѣломъ живаго сопротивленія</u>

материала тѣла разрыву или раздробленію.

Величина эта, изображаемая иногда чрезъ T_r (travail de rupture), для каждаго рода материала можетъ быть опредѣлена только изъ опытовъ, потому что ее аналитически нельзя выразить въ зависимости отъ свойствъ матеріала и измѣненія вида тѣла. Чтобы найти эту величину изъ опытовъ для даннаго материала можно примѣнить геометрическій способъ. Для сего можно на основаніи опытовъ, произведенныхъ надъ этимъ матеріаломъ, начертить кривую, принимая величины $\frac{x}{l}$, т.е. отношенія измѣненій длины къ ея первоначальной величинѣ, за абсциссы, а соотвѣтственныя величины силы упругости на квадратную единицу площади поперечнаго сѣченія, т.е. $\frac{P}{\omega}$, или $f\left(\frac{x}{l}\right)$, за ординаты. Если на этой кривой возьмемъ два бесконечно близкія точки т и п, такъ что разстояніе между ихъ ординатами тр . пq будетъ равно дифференціалу отъ абсциссы, то элемен-



тарная величина силы упругости на квадратную единицу площади поперечнаго сѣченія, т.е. $\frac{P}{\omega}$, или $f\left(\frac{x}{l}\right)$, за ординаты. Если на этой кривой возьмемъ два бесконечно близкія точки т и п, такъ что разстояніе между ихъ ординатами тр . пq будетъ равно дифференціалу отъ абсциссы, то элемен-

тарная площадь кривой mnq будетъ равна

$$\int f\left(\frac{x}{l}\right) d\frac{x}{l},$$

а сумма подобныхъ элементарныхъ площадей, начиная отъ абсциссы, соотвѣтствующей началу координатъ, до абсциссы оконечной точки, за которой происходитъ разрывъ или раздробленіе тѣла, представитъ наибольшую возможную величину интеграла:

$$\int_0^{\frac{l}{l}} f\left(\frac{x}{l}\right) d\frac{x}{l},$$

т.е. величину предѣла живого сопротивленія матеріала тѣла разрыву или раздробленію.

Подобнымъ же образомъ можно найти предѣлъ живого упругого сопротивленія матеріала, если при помощи чертежа опредѣлить по приближенію величину площади osd кривой линіи, ограниченной ординатою cd, изображающею предѣлъ упругости, до которой кривая можетъ быть принята за прямую. Такимъ образомъ Poncelet опредѣлилъ величины предѣловъ живого упругого сопротивленія растяженію и живого сопротивленія разрыву для мягкаго, кованнаго, желѣза крупныхъ измѣреній, на основаніи опытовъ Bouct, для желѣзной проволоки отожженной и слѣдовательно мягкой и для не отожженной, т.е. твердой, на основаніи опытовъ Ardant, а именно:

Для мягкаго желѣза $\begin{cases} T_c = 0,271 \\ T_r = 177,1 \end{cases}$ пудо-дюймовъ

крупность излома. . . . "

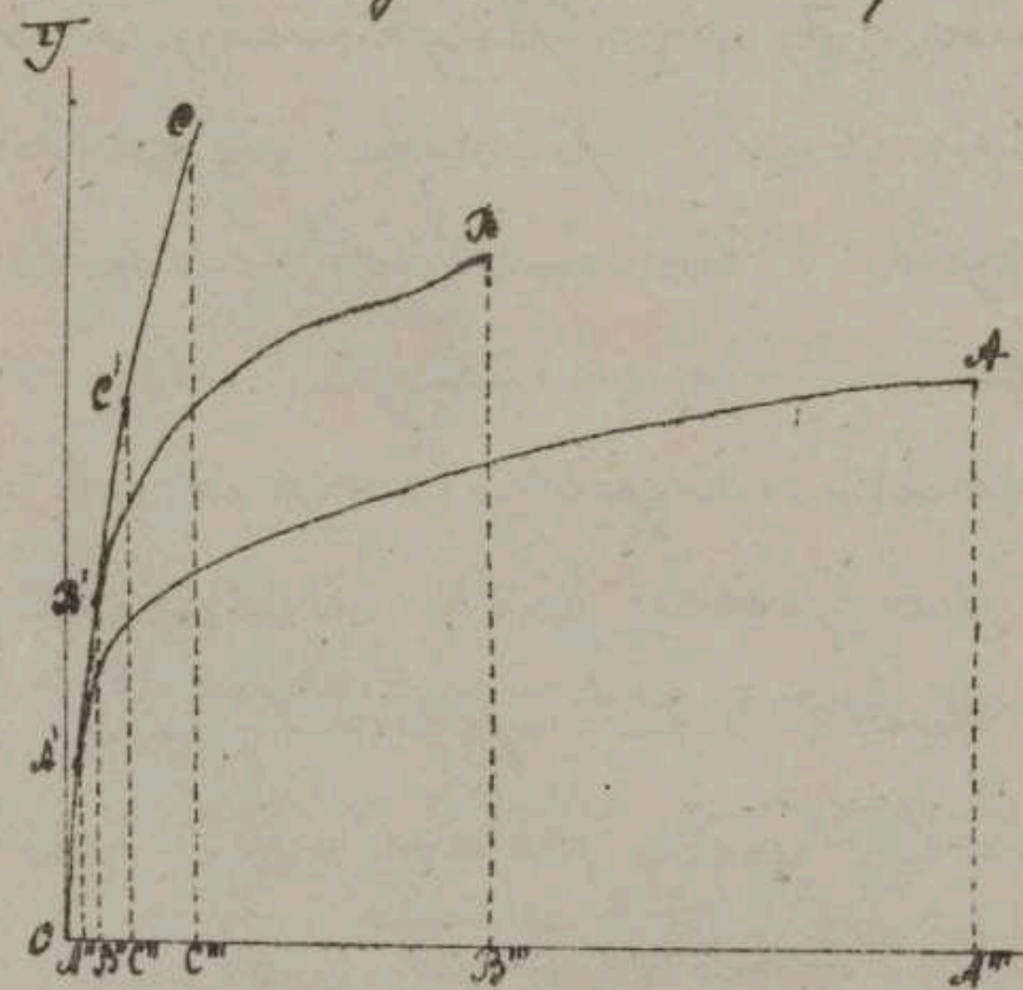
Для проволоки мягкой $\begin{cases} T_c = 0,26 \\ T_r = 19,7 \end{cases}$ "

т. е. отожженной . . . . "

Для проволоки твердой $\begin{cases} T_c = 0,23 \\ T_r = 3,19 \end{cases}$ "

т е не отожженой . . . "

Эти результаты приводятъ къ слѣдующему заключенію: для обоихъ родовъ желѣза, т. е. для мягкаго и твердаго, предѣлы живаго упругаго сопротивленія мало другъ отъ друга отличаются, но предѣлъ живаго сопротивленія разрыву для мягкаго желѣза гораздо больше, чѣмъ для твердаго, именно живое сопротивленіе разрыву мягкой проволоки въ 6 больше чѣмъ твердой, а живое сопротивленіе разрыву мягкаго коваинаго желѣза въ 60 разъ больше живаго сопротивленія твердой не отожженой проволоки. Кривыя по которымъ Ponselet вычислилъ эти величины предѣловъ живаго сопротивленія, имѣютъ видъ показанный на приложенномъ чертежѣ. Кривая OA соотвѣтствуетъ мягкому коваиному желѣзу, OB отожженой проволокѣ, а OC - не отожженой. Живое упру-



гое сопротивленіе при этихъ трехъ кривыхъ выражается площадями: OA'A", OB'B", OC'C"; а удѣльное сопротивленіе разрыву площадями:

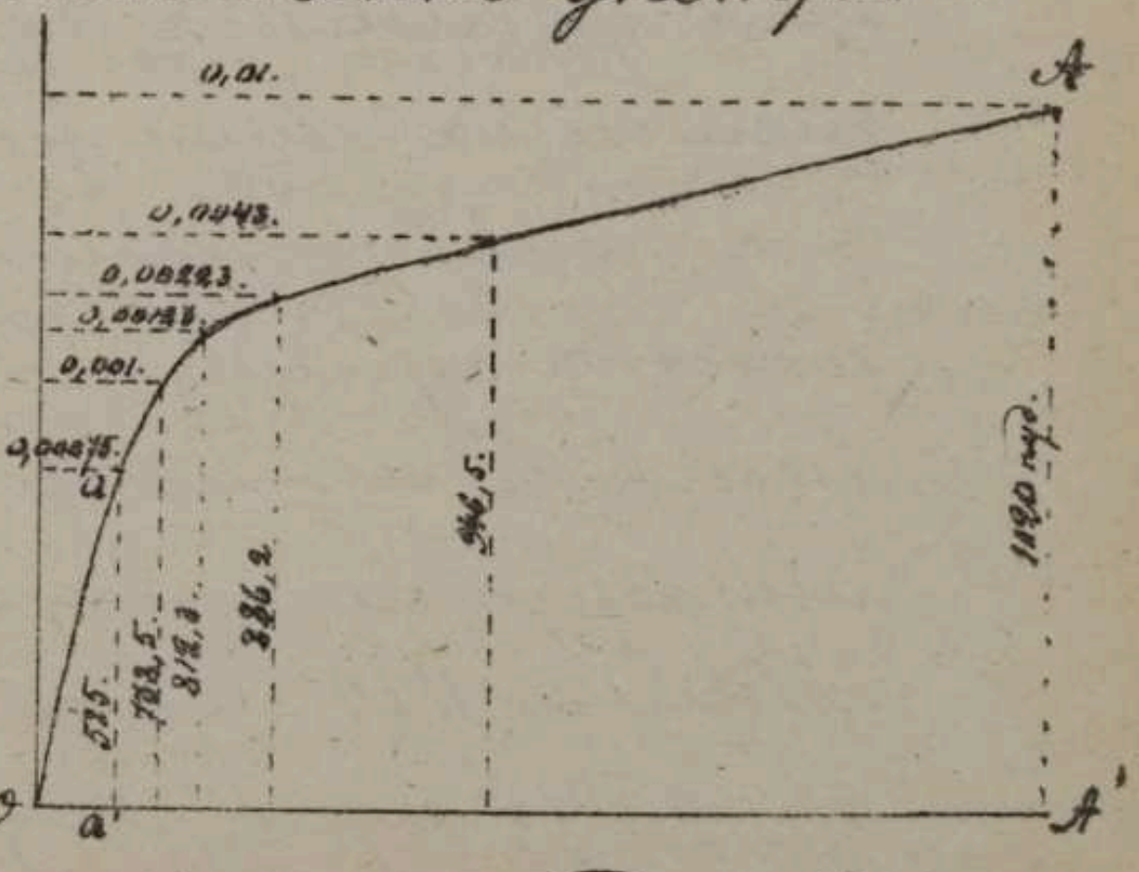
для ковкаго желѣза . . . . . OAA"

" мягкой проволоки . . . . . OBB"

" твердой проволоки . . . . . OCC"

Кривая OA'A, подобно тому какъ и другія кривыя, составленныя для мягкаго ковкаго желѣза, на основаніи другихъ опытовъ, представляетъ особенность, не встрѣчающуюся у кривыхъ соотвѣтствующихъ другимъ матеріаламъ, напр. чугуну, дереву и т. п. Она въ первой своей части OA', соотвѣтствующей предѣлу упругости, почти прямая, за тѣмъ вдругъ круто перегибается и потомъ опять имѣетъ малую кривизну до конца.

Здѣсь слѣдуетъ однако замѣтить, что опыты Борне, послужившіе Понселе для опредѣленія предѣловъ упругаго сопротивленія желѣза, были произведены надъ матеріаломъ такого качества, какое нынѣ рѣдко встрѣчается при строительныхъ работахъ. По сему полезно опредѣлить тѣ же предѣлы для желѣза обыкновенно употребляемаго. Для сего мы обратимся къ результатамъ опытовъ Годкинсона, руководствуясь данными, заключающимися въ сочиненіи Морэнъ.(*) Одна изъ



(*) Morin - Resistance des materiaux, 3me edition. Paris 1862, t I, p. 8-11.

испытанныхъ полосъ имѣла $\frac{1}{2}$ дюйма толщины, коэффиціентъ упругости ея опредѣляется Моренгеймъ въ 1'981'644 килограм. на 1 квадратный сантиметръ или въ 780'500 пуд. на 1 квадратный дюймъ, а предѣлъ упругости въ 1499,72 килогр. на 1 кв. сантиметръ или въ 585 пуд. на 1 квадр. дюймъ. Этому напряженію соотвѣтствовало относительное удлиненіе $\frac{l}{l}=0,00075$; за нимъ удлиненія увеличивались уже не пропорціонально растягивающимъ силамъ, и при растяженіи въ 2.812 килогр. на 1 кв. сантиметръ или въ 1120 пуд. на 1 кв. дюймъ, которому соотвѣтствовало удлиненіе $\frac{l}{l}=0,01$, удлиненія стали увеличиваться отъ одной только продолжительности дѣйствія силы; разорвалась же полоса отъ силы въ 3.745 килогр. на 1 квадр. сантиметръ или въ 1475 пуд. на 1 квадр. дюймъ. Эти результаты испытанія полосы представлены на прилагаемомъ чертежѣ, изображающемъ кривую линію, которой абсциссы выражаютъ относительныя удлиненія полосы, а ординаты растягивающія силы на 1 квадр. дюймъ поперечнаго сѣченія; площади Oaa' и OAA', предѣлъ-мяютъ предѣлы упругаго сопротивленія T_e и упругаго сопротивленія разрыву T_r матеріала, если для него принять напряженіе въ 1120 пуд. за предѣлъ временнаго сопротивленія разрыву. Вычисляя площади Oaa'

«ОАА', по изображенным на чертеже треугольнику и трапеціям не трудно найти:

$T_c = 0{,}2223$ пудодюйма на 1 куб. дюйм объема

$T_r = 9{,}18$ ——————— " ——————— " ———————

такъ что живое сопротивленіе разрыву всей полосы, при длинѣ въ l дюймовъ и поперечномъ сѣченіи въ ω квадр. дюйм. будетъ:

$$T_r l\omega = 9{,}18\, l\omega$$

Живое упругое сопротивленіе слѣдуетъ разсматривать для каждаго матеріала какъ предѣлъ, за который сопротивленіе его, вызывающее движущимся грузомъ, переходить не должно; потому что предѣлъ упругости вообще близокъ къ половинѣ предѣла временнаго сопротивленія тѣлъ, а это составляетъ такую величину силы упругости, при которой прочность тѣла уже едва обезпечена и за которою остановившіяся дѣйствія или сдвиги уже дѣлаются замѣтными. Поэтому полезно знать величины живаго упругаго сопротивленія различныхъ употребляемыхъ въ строительномъ дѣлѣ матеріаловъ, какъ для сдвига, такъ и для растяженія. Величины эти заключаются въ слѣдующей таблицѣ: (смотр. стран. 90).

/.

Таблица предѣловъ временнаго сопротивленія, предѣловъ упругости, коэффиціентовъ упругости и живыхъ сопротивленій упругости.

Матеріалъ.	R_1	R_2	A_1	A_2	E_1	E_2	$\frac{A_1^2}{2E_1}$	$\frac{A_2^2}{2E_2}$
Кованное желѣзо . .	1250	1000	$0{,}5R_1$	$0{,}4R_1$	780'000	640'020	0,250	0,195
Листовое желѣзо . .	1250	1000	$0{,}4R_1$	$0{,}3R_1$	750000	600000	0,167	0,117
Желѣзная проволока	2400	—	$0{,}25R_1$	—	750000	—	0,240	—
Чугунъ	500	3000	$\frac{4}{9}R_1$	$\frac{4}{3}R_1$	360000	340000	0,069	0,654
Лиственница . . .	440	220	$\frac{1}{4}R_1$	$\frac{1}{5}R_1$	50000	50000	0,121	0,077
Сосна	400	200	$\frac{1}{4}R_1$	$\frac{1}{5}R_1$	50000	50000	0,100	0,064
Ель	380	190	$\frac{1}{4}R_1$	$\frac{1}{5}R$	50000	50000	0,090	0,057
Пихта	320	160	$\frac{1}{4}R_1$	$\frac{1}{5}R_1$	47000	47000	0,068	0,043
Дубъ	320	210	$\frac{1}{3}R_1$	$\frac{1}{4}R_1$	47000	47000	0,121	0,068.

Значенія буквъ слѣдующія:

R_1 Предѣлъ временнаго сопротивленія разрыву въ пудахъ на 1 квадр. дюймъ.

R_2 Предѣлъ временнаго сопротивленія раздробленію

A_1 Предѣлъ упругости при растяженіи.

A_2 Предѣлъ упругости при сжатіи.

E_1 Коэффиціентъ упругости при растяженіи.

E_2 Коэффиціентъ упругости при сжатіи.

$\frac{A_1^2}{2E_1}$ Предѣлъ живого упругаго сопротивленія при растяженіи.

$\frac{A_2^2}{2E_2}$ Предѣлъ живого упругаго сопротивленія сжатію.

Послѣднія два количества выражаютъ въ пудо-дюймахъ приклы жесткаго упругаго сопротивленія матеріала тѣла, принимая за единицу объема $1^{\text{куб.}}$ дюймъ. Предѣлъ жесткаго упругаго сопротивленія всего тѣла получается черезъ умноженіе этихъ количествъ на объемъ тѣла, выраженный въ кубич. дюймахъ. По раздѣленіи на 12, живыя сопротивленія выразились бы въ пудофунтахъ.

Вышеизложенное изслѣдованіе дѣйствія движущагося груза Q на призматическое тѣло приводитъ къ слѣдующимъ результатамъ:

Если движущійся грузъ не производитъ разрыва или раздробленія тѣла, то для мгновенія наибольшаго изгибанія вида призмы при расширеніи или сжатіи существуетъ уравненіе:

$$\int_0^{l'} P_x = Q\left[l' + \frac{v_0^2}{2g}\right],$$

показывающее, что въ этомъ случаѣ работа силы упругости, произведенная въ продолженіи изгибанія вида призмы, должна быть равна работѣ Ql', движущагося груза, въ продолженіи того же времени, сложенной съ первоначальною живою силою $\frac{Qv_0^2}{2g}$, этого груза.

Изъ этого слѣдуетъ, что для движущійся грузъ неразрушимъ призматическаго тѣла, необходимо, чтобы сумма

$$Ql' + \frac{Qv_0^2}{2g}$$

была меньше наибольшей величины работы силы

упругости, могущей проявиться въ растяжении вдоль или сжимаемой ткань, т. е. необходимо чтобы было

$$Ql' + \frac{Qv_0^2}{2g} < P_r Lw;$$

гдѣ P_r выражаетъ предѣлъ живого сопротивленія разрыву или раздробленію матеріала ткъла.

Чтобы, при удлиненіи вида призмы, развивающаяся въ ней сила упругости не превосходила предѣла упругости, необходимо чтобы существовало условіе:

$$Ql' + \frac{Qv_0^2}{2g} < P_e Lw = \frac{A^2}{2E} Lw;$$

гдѣ P_e изображаетъ предѣлъ живого упругаго сопротивленія и A предѣлъ упругости матеріала.

Если при удлиненіи вида тѣла сила упругости не превосходитъ предѣла упругости, то существуетъ равенство:

$$Ql' + \frac{Qv_0^2}{2g} = \frac{E l'^2}{2l^2} Lw = \frac{p^2}{2E} Lw,$$

гдѣ p выражаетъ силу сжатія или растяженія тѣла на 1 квадр. дюймъ, соотвѣтствующую мгновенію, когда длина тѣла удлинилась на количество l' и сопротивленія тѣла остановило увеличеніе удлиненія вида. Это равенство можетъ служить для опредѣленія наибольшаго удлиненія l' длины тѣла и наибольшаго сжатія или растяженія p при дѣйствіи движущейся груза Q.

Для объясненія, примѣнимъ изложенную теорію къ нѣсколькимъ простымъ частнымъ случаямъ.

Вообразимъ, что грузъ Q въ первое мгновеніе своего дѣйствія на призматическое тѣло не имѣлъ никакой скорости, и, слѣдовательно, увеличился только вслѣдствіе производимаго имъ же удлиненія упругаго тѣла. Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$v_0 = 0 \quad \text{и} \quad Ql_1 = \frac{El^2}{2l^2} l\omega;$$

откуда

$$l_1 = 2\frac{Ql}{E\omega}.$$

Сравнивая эту формулу съ тою, которая соотвѣтствуетъ спокойному дѣйствію груза Q, т.е.

$$Q = E\omega\frac{l}{l}, \quad \text{откуда}: l = \frac{Ql}{E\omega},$$

находимъ что l_1 вдвое болѣе l. И такъ грузъ, приложенный къ призмѣ безъ первоначальной скорости, производитъ въ первое время своего дѣйствія удлиненіе вдвое большее противъ того, которое оказывается въ тѣлѣ въ послѣдствіи, по прекращеніи въ немъ качаній.

Переходя къ другому примѣру, вообразимъ, что тѣло, сжатое силою Q, вслѣдъ за тѣмъ подвергается растяженію тою же силою, измѣнившею направленіе своего дѣйствія. Дѣйствіе силы, подобное этому, встрѣчается при стержняхъ поршней паровыхъ цилиндровъ, насосовъ и т.п.

Для примѣненія предъидущихъ формулъ, надобно первоначально опредѣлить скорость v_0 груза Q, соотвѣтствующую мгновенію, когда призмѣ, возвратясь послѣ сжатія къ первоначальной

своей длины, начинает вытягиваться увлекаясь грузом Q. Принимая уравнение живых сил за промежутку времени, в продолжении которого сжатая пружина возвращается к первоначальной своей длине; замечая что в первое мгновение скорость груза Q есть нуль, в последнее мгновение скорость его будет v_0, работа груза Q, проходящего путь l, выражающий первоначальное укорочение тела от сжатия силою Q, будет Ql, и работа силы упругости $\int_0^l P dx$ будет направлена в ту же сторону как и Ql, потому что тело не сопротивляется, а напротив само стремится возвратиться к первоначальной своей длине. Тогда:

$$\frac{Qv_0^2}{2g} = Ql + \int_0^l P dx.$$

или так как:

$$\int_0^l P dx = \frac{Cl^2}{2} \cdot Lw,$$

то

$$\frac{Qv_0^2}{2g} = Ql + \frac{Cl^2}{2} \cdot Lw$$

это уравнение и определяет величину скорости v_0.

Переходя теперь к промежутку времени, в продолжение которого тело, по возвращении к первоначальной длине, начинает вытягиваться грузом Q с начальною скоростью v_0, имеем:

$$Ql_1 + \frac{Qv_0^2}{2g} = \frac{Cl_1^2}{2} Lw.$$

Искомая отсюда длина $\frac{Qv_0^2}{2g}$, определяемый

выше найденным уравнением, получим:

$$Ql_1 + Ql + \frac{El^2}{2L^2} l\omega = \frac{El_1^2}{2L^2} L\omega,$$

т.е. уравнение второй степени для определения неизвестной l_1. Для упрощения заменим Q его величиною:

$$Q = E\omega \frac{l}{L}$$

тогда по сокращении получаем:

$$l_1^2 - 2ll_1 = 3l^2, \qquad \text{откуда } l_1 = 3l.$$

И так при перемѣнномъ сжатіи и растяженіи призмы одним и тѣмъ же грузомъ, измѣненіе длины l_1 будетъ втрое больше того, которое соотвѣтствуетъ спокойному дѣйствію того же груза, и вслѣдствіе этого и сила упругости, проявляющаяся въ тѣлѣ отъ движущагося груза, въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ втрое болѣе силы упругости, соотвѣтствующей спокойному дѣйствію груза.

Такъ какъ въ частяхъ зданій подверженныхъ сотрясеніямъ, могутъ происходить явленія, подобныя разсмотрѣнному перемѣнному дѣйствію движущагося груза, то отсюда видно, что если при сотрясеніяхъ сила упругости не должна превзойти предѣла упругости составляющаго около $\frac{1}{2}$ разрывающаго или раздробляющаго груза, то въ спокойномъ состояніи въ тѣхъ никогда не должно допускать растяженія или сжатія, превосходящаго $\frac{1}{6}$ часть предѣла временнаго сопротивленія, потому что иначе при сотрясеніяхъ напряженіе внутри тѣла, увеличиваясь втрое,

могло бы превзойти $\frac{1}{2}$ предѣла временнаго сопротивленія.

Предъидущая теорія можетъ также примѣняться къ опредѣленію наибольшаго возможнаго сжатія сваи отъ удара бабы. Для этого вообразимъ сваю, встрѣтившую при углубленіи своемъ какой нибудь непроницаемый предметъ, отдѣльный камень, скалу или и т. п., препятствующій дальнѣйшему ея углубленію, такъ что свая, оставаясь неподвижною, должна принять на себя всю силу удара бабы, и опредѣлимъ наибольшее сжатіе, происходящее при этомъ внутри сваи. Пусть Q изобразитъ вѣсъ бабы, падающей на сваю съ высоты H, тогда скорость v_0 бабы въ первое мгновеніе ея удара о сваю опредѣлится какъ извѣстно уравненіемъ:

$$\frac{v_0^2}{2g} = H;$$

а слѣдовательно вышевыведенное уравненіе для опредѣленія наибольшаго сжатія p на каждый квадратный дюймъ поперечнаго сѣченія сваи, запишется слѣдующимъ:

$$Q[l_1 + H] = \frac{p^2}{2E} \cdot l\omega$$

Такъ какъ измѣненіе длины сваи l, очевидно чрезвычайно мало въ сравненіи съ высотою H паденія бабы, то для простоты вычисленія можно пренебречь l, и тогда получится:

$$p = \sqrt{\frac{2EQH}{l\omega}}$$

При 3^хъ сажейной 6^тивершковой сосновой свае, принимая средній діаметръ въ 7 вершковъ имѣемъ:

$L = 3.7.12 = 252$ дюймамъ; $\omega = 118$ кв. д., $E = 50.000$ пуд.

$$p = \sqrt{\frac{100000}{252.118}} QH = 1,83\sqrt{QH}.$$

При простомъ копрѣ, полагая $Q = 30$ пуд.; $H = 4$ фут. $= 48$ дюймовъ, получимъ бы:

$$p = 1,8\sqrt{1440} = 1,8.38 = 68,4 \text{ пуд.}$$

При машинномъ копрѣ, полагая $Q = 60$ пуд. и $H = 2\frac{1}{2}$ саж. $= 210$ дюйм., получимъ бы:

$$p = 1,8\sqrt{12600} = 1,8.112 = 210,6 \text{ пуд.}$$

При паровомъ копрѣ Нэсмита, полагая $Q = 80$ пуд. и $H = 3$ фута $= 36$ дюйм. выходитъ

$$p = 18\sqrt{2880} = 1,8.54 = 97 \text{ пуд.}$$

При 4^хъ сажейной сваѣ 7 вершковаго средняго діаметра и тѣхъ же высотахъ паденія бабы, нами бы для наибольшаго сжатія p слѣдующія величины:

60 пуд.; 175 пуд; 85 пуд.

Сравнивая эти величины съ предѣломъ временнаго сопротивленія раздробленію соснового дерева, т.е. 200 пуд., видно, что 6^тивершковыя сваи упирающіяся концемъ въ какое нибудь непроницаемое тѣло, безъ вреда могутъ выдерживать удары бабы простого и парового копра, но отъ ударовъ бабы машиннаго копра вѣсомъ въ 60 пудовъ, падающей съ высоты 2½ саж., могутъ раздробиться. Это впрочемъ вполнѣ подтверждается опытомъ, потому что при щебенистомъ грунтѣ

сваи, забитыя машинными копрами, и въ послѣдствіи выдернутыя и вытянутыя, часто оказываются въ низу своихъ частяхъ совершенно размочаленными и расщепленными.

Тѣхъ же результатовъ можно было бы достигнуть, сравнивая живую силу бабы въ моментъ удара о сваю съ живымъ упругимъ сопротивленіемъ послѣдней. Для сосноваго дерева живое упругое сопротивленіе сжатію на каждый кубическій дюймъ составляетъ какъ видно изъ таблицы (стр. 90).

0,064 пудодюйма,

а на весь объемъ $\frac{1}{3}$ саженной 6 вершковой сваи, т.е. на 252.118 = 29736 куб. дюйм.; живое упругое сопротивленіе будетъ:

0,064.29736 = 1905 пудодюймовъ.

Величины же живыхъ силъ бабы будутъ слѣдующія:

При простомъ копрѣ 30.48 = 1440 пудодюймовъ.

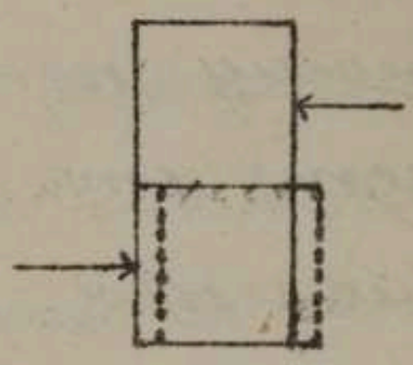
" машинномъ копрѣ 60.210 = 12600 пудодюймовъ.

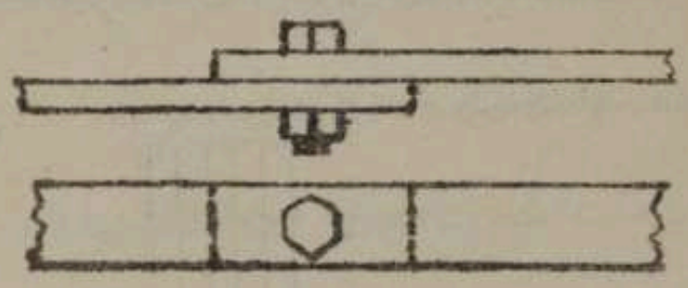
" паровомъ копрѣ 80.36 = 2880 пудодюймовъ.

Первая величина меньше, а послѣднія не многимъ больше живого упругаго сопротивленія сваи, но живая сила бабы машиннаго копра превосходитъ это сопротивленіе слишкомъ въ 6 разъ.

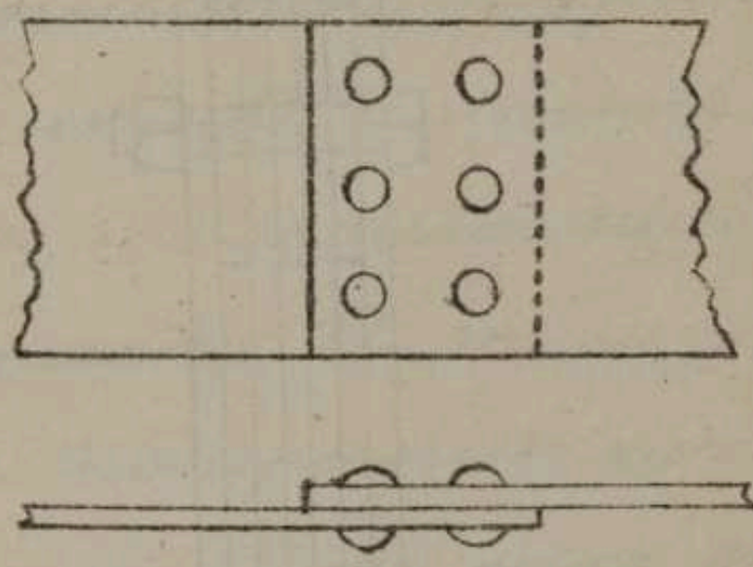
О перерѣзываніи и скалываніи.

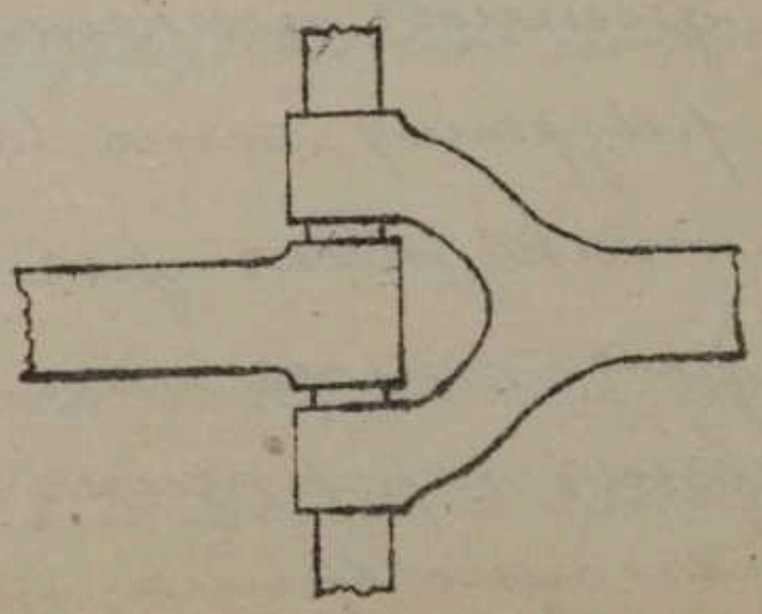
Если внѣшнія силы дѣйствуютъ на тѣло такъ, что стремятся произвести скольженіе одной его части относительно другой вдоль плоскости ихъ касанія, то изломъ или разъединеніе частей тѣла могущее при этомъ произойти называется <u>перерѣзываніемъ</u>. Если такое разъединеніе происходитъ вдоль волоконъ дерева́нного тѣла, то оно называется <u>скалываніемъ</u>.



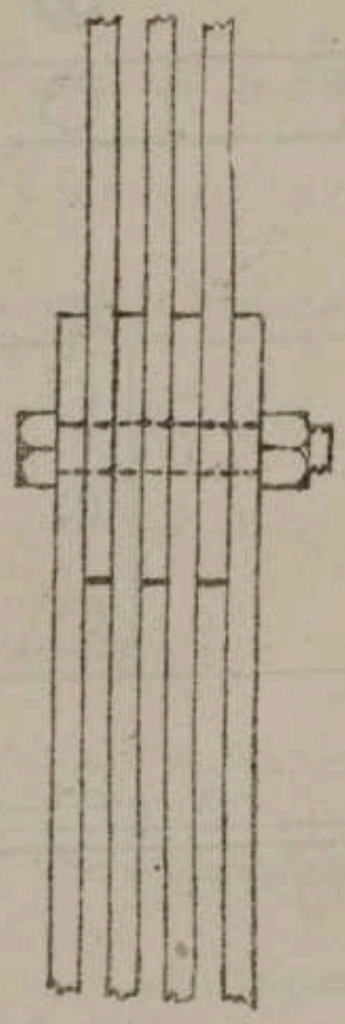


Перерѣзыванію можетъ подвергаться болтъ, соединяющій двѣ желѣзныя полосы растягиваемыя въ противныя стороны. Перерѣзываніе можетъ произойти, когда растягиваются два желѣзныхъ листа, соединенные заклепками; когда растягиваются желѣзныя связи надѣваемыя на шпыри, если при этомъ обухи связей между собою такъ близки, что шпырь между ними не гнется и т. п.





Для опредѣленія сопротивленія перерызыванію/ чугуна дерева, камней и пр. т. пока еще не имѣется удовлетворительныхъ опытовъ, но для желѣза изъ опытовъ, которые были произведены въ Англіи при постройкѣ трубчатаго моста Британнія и въ послѣдствіи такъ же во Франціи, можно заключить, что предѣлъ временнаго сопротивленія перерызыванію по одному поперечному сѣченію тѣла составляетъ отъ $\frac{3}{4}$ до $\frac{5}{6}$ предѣла временнаго сопротивленія разрыву. Сверхъ того изъ этихъ опытовъ видно, что внѣшняя сила, производящая перерызываніе, пропорціональна числу поперечныхъ сѣченій, подвергающихся перерызыванію въ одно время. — Такъ напр. если, какъ на приложенномъ чертежѣ, семь желѣзныхъ полосъ соединены между собою болтами, имѣющими поперечное сѣченіе въ квадратныхъ дюймовъ и предѣлъ временнаго сопротивленія разрыву есть R' пуд. на 1 квадр. дюймъ, то такъ какъ для отторженія нижнихъ частей полосъ отъ верхнихъ треб, нужно чтобы болтъ былъ перерѣзанъ въ шести различныхъ мѣстахъ въ одно время, то сопротивленіе болта пере-



разыванію по вышеприведенным опытам вы
разится слѣдующимъ образомъ:

$$6\alpha.R'.\omega,$$

гдѣ α представляетъ величину, заключающуюся
между $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$. Вообще, если n изображаетъ число
перерѣзываемыхъ сѣченій, изъ которыхъ каждое рав-
но $\overline{\omega}$, то временное сопротивленіе тѣла перер-
зыванію выразится чрезъ:

$$n\alpha.R'.\omega.$$

Для примѣра примѣненія этой формулы вы-
числимъ толщину четырегранника штыря, слу-
жащаго для соединенія двухобушной съ однообу-
шной желѣзной связью. Чтобы между изгибеніями
штыря и желѣзныхъ полосъ связи существовало
самое выгодное отношеніе, (то) нужно чтобы со-
противленіе желѣзной полосы разрыву было равно
сопротивленію штыря перерѣзыванію, въ против-
номъ случаѣ, или полоса или штырь имѣютъ
слишкомъ большія изгибенія, не сколько не содѣй-
ствующія прочности всей системы. Поэтому
изображая чрезъ $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'$ площади поперечныхъ сѣченій
штыря и полосы, мы найдемъ, что такъ какъ въ
разсматриваемомъ случаѣ два поперечныхъ сѣ-
ченія штыря должны въ одно время быть пере
рѣзаны, то сопротивленіе перерѣзыванію штыря
будетъ:

$$2\alpha.R'.\omega$$

а сопротивленіе разрыву полосы выразится, чрезъ
$R'\overline{\omega}'$, а слѣдовательно между $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}'$ должна существо-

есть зависимость:

$$2\alpha R'\omega = R'\omega';$$

откуда

$$\omega = \frac{\omega'}{2\alpha},$$

а принимая $\alpha = \frac{3}{4}$, выходит:

$$\omega = \frac{2}{3}\omega'.$$

По прочному положению въ каменныя стѣны слѣдуетъ закладывать связи изъ полосоваго желѣза толщиною отъ $\frac{1}{2}$ до $\frac{5}{8}$ дюйма и шириною въ 3 дюйма, т. е. весящія около $1^{1}/_{2}$ пуда въ каждой сажени; для такой связи имѣемъ:

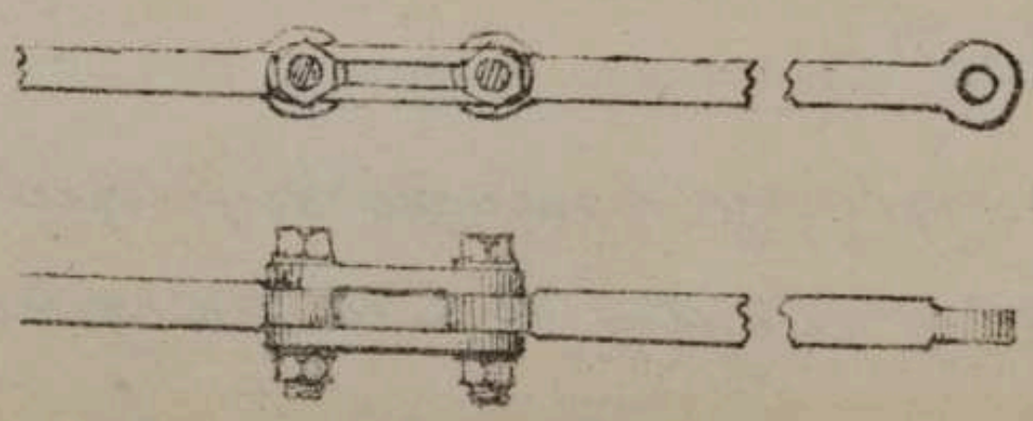
$\omega' = \frac{5}{8}\,3 = \frac{15}{8}$ кв. д. и $\omega = \frac{2}{3}\cdot\frac{15}{8} = \frac{5}{4}$ кв. дюйм.

Слѣдовательно толщина четырехграннаго штыря будетъ:

$$\sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{1{,}25} = 1\,\tfrac{1}{8} \text{ дюйма}$$

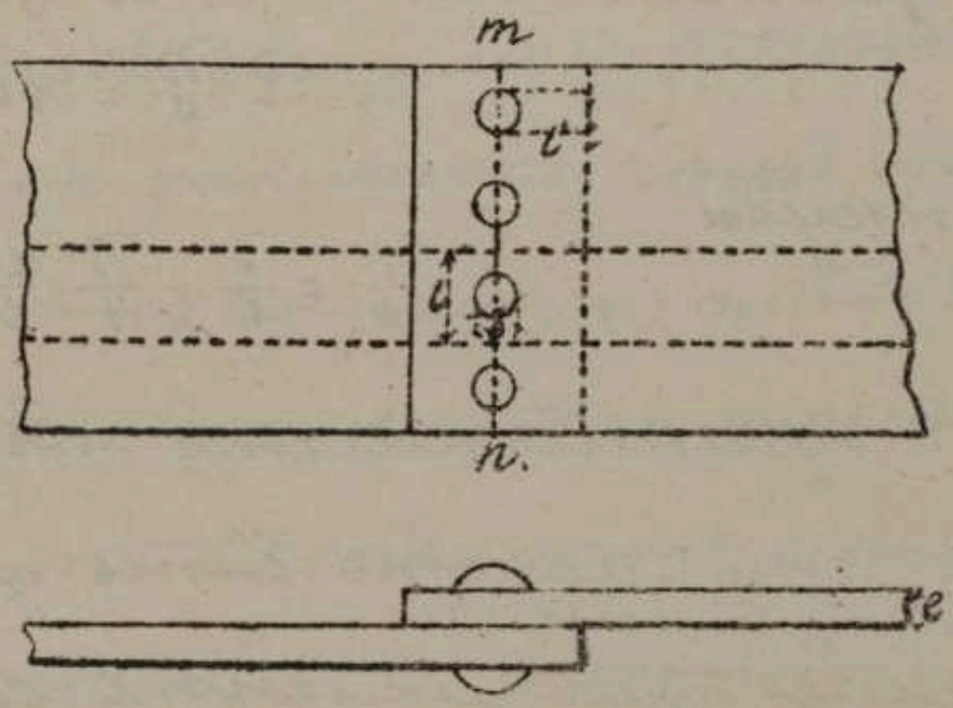
Строители обыкновенно назначаютъ для этихъ связей штыри изъ брускового желѣза толщиною $1^{1}/_{2}$ дюйма; слѣдовательно для разсматриваемаго случая такой штырь слишкомъ толстъ, но такъ какъ обувки, надѣваемые на штырь, не всегда такъ близки между собою, чтобы перекрываніе не обмелелось щеками, то для запаса прочности толщину въ $1^{1}/_{2}$ дюйма можно признать удовлетворительною.

Подобнымъ же образомъ можно вычислить толщину болтовъ, которыми соединяются связи изъ полосоваго желѣза, какіе строились-



ныхъ и мостовыхъ фермъ и проч.

Примѣнимъ сказанное о перерѣзываніи еще къ опредѣленію изгибающей заклепокъ, которыми связываются желѣзные листы. Положимъ что два желѣзныхъ листа соединены между собою двумя рядами заклепокъ. Чтобы эта система могла разорваться, то нужно чтобы всѣ заклепки въ одно время перерѣзывались, или чтобы слабѣйшая часть желѣзнаго листа разорвалась т.е. чтобы по линіи т п, соединяющей центры заклепокъ, произошелъ разрывъ, или наконецъ чтобы части листа между крайними отверстій заклепокъ и листа вырѣзывались изъ него. И такъ чтобы не было никакого матеріала ни въ заклепкахъ ни въ листахъ, то очевидно нужно, чтобы сопротивленіе заклепокъ перерѣзыванію было равно сопротивленію разрыву желѣзнаго листа по линіи т п и сопротивленію вырѣзыванію крайнихъ частей листа. Чтобы, основываясь на этомъ, вывести отношеніе между измѣреніями заклепокъ и листовъ, изобразимъ чрезъ l разстояніе между серединами двухъ смежныхъ промежутковъ, отдѣляющихъ заклепки другъ отъ друга, или же между центрами смежныхъ заклепокъ; а также изобразимъ чрезъ c толщину желѣзныхъ листовъ,

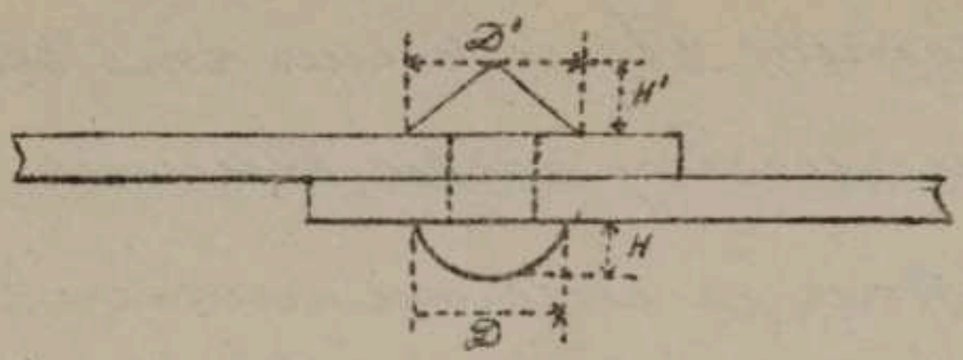


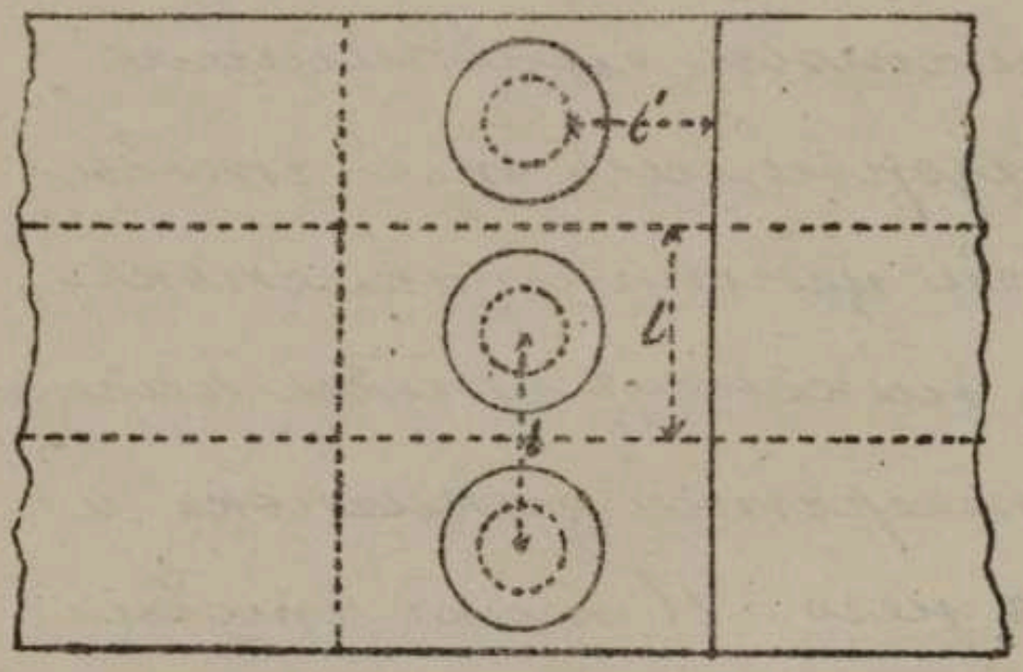
чрезъ d діаметръ заклепокъ и чрезъ ω поперечное сѣченіе одной заклепки. Тогда временное сопротивленіе перерѣзыванію заклепки будетъ:

$$\alpha . R' \omega,$$

гдѣ R' есть предѣлъ временнаго сопротивленія разрыву матеріала заклепокъ; временное сопротивленіе разрыву части желѣзнаго листа, соотвѣтствующей одной заклепкѣ будетъ:

$$R''e(l-d),$$





гдѣ R'' представляетъ предѣлъ временнаго сопротивленія разрыву листоваго желѣза. Равенство этихъ двухъ рядовъ сопротивленія приводитъ къ уравненію:

$$\alpha R' \omega = R'' e(l-d).$$

или, по подстановленіи вмѣсто ω его величины въ зависимости отъ діаметра заклепки:

$$\alpha R' \frac{\pi d^2}{4} = R'' e(l-d);$$

откуда:

$$\frac{l}{e} = \frac{d}{e} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\alpha R'}{R''} \left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

Я принимаю что $\alpha R'$ и R'' между собою равны, что можетъ быть допущено, потому что желѣзо для заклепокъ выдерживаетъ лучшаго качества, чѣмъ для листовъ, найдемъ простѣйшую приблизительную формулу:

$$\frac{l}{e} = \frac{d}{e} + \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

Но кромѣ этого, сопротивленіе выдергиванію одной изъ крайнихъ частей листа должно быть равно сопротивленію перерѣзыванію заклепки, слѣдовательно, изображая разстояніе между крайними заклепки и листа чрезъ l', найдемъ еще уравненіе:

$$\alpha . R' \frac{\pi d^2}{4} = \alpha' R'' 2el' .$$

откуда, полагая для простоты $\alpha R'$ и $\alpha' R''$ равными, получимъ приблизительную формулу:

$$\frac{l'}{e} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{e}\right)^2 .$$

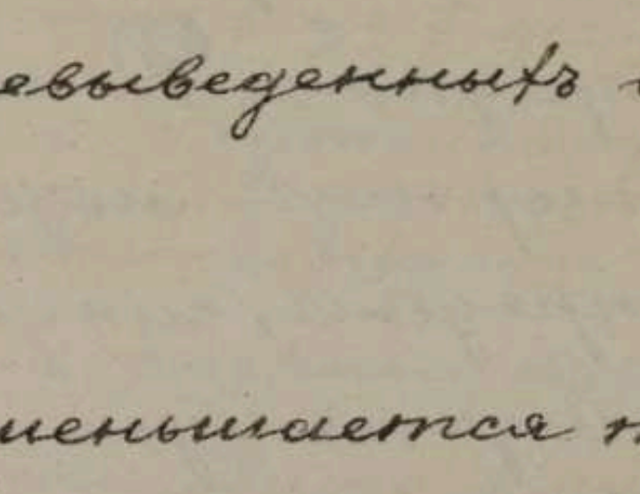
Чтобы судить о потерѣ сопротивленія разрыву, происходящей въ листѣ отъ того, что въ нихъ вынуты отверстія для заклепокъ, стоитъ только опредѣлить отношеніе между сопротивленіемъ разрыву цѣлаго листа и листа съ отверстіями. Это отношеніе будетъ:

$$r = \frac{R'' el}{R'' e(l-d)} = \frac{\frac{l}{e}}{\frac{l}{e} - \frac{d}{e}} ;$$

или же, по подстановленіи вышевыведенныхъ величинъ:

$$r = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{e}{d} .$$

Прочность листа очевидно уменьшается тѣмъ больше отъ отверстій для заклепокъ, чѣмъ отношеніе $\frac{e}{d}$ больше отличается отъ единицы, а слѣдовательно для прочности связи вообще выгодно увеличивать діаметръ заклепки d, т. е. соединять листы толстыми, рѣдко расположенными заклепками выгоднѣе, нежели тонкими и близкими другъ къ другу заклепками.



Но съ другой стороны надобно обратить вниманіе и на то, что если промежутки между заклепками очень велики, то растяженіе листовъ можетъ сдѣлаться неправильнымъ, и линія т п можетъ выгибаться волнообразно, при чемъ части листа близлежащія къ заклепкамъ будутъ болѣе напряжены, чѣмъ части промежуточныя, и сопротивленіе разрыву листа можетъ черезъ это уменьшиться. Кромѣ того если заклепка слишкомъ толста сравнительно съ листомъ, то при напорѣ на листъ, онъ можетъ быть смятъ, т. е. тонкій край отверстія листа можетъ растрескаться и перегибаться вдоль заклепки, по направленію перпендикулярному къ силамъ растяженія листовъ. И такъ увеличиваніе діаметра заклепокъ и разстаяніе между ихъ центрами полезно только до нѣкотораго предѣла. До сихъ поръ нѣтъ опытовъ, по которымъ можно было бы опредѣлить этотъ предѣлъ, слѣдовательно въ каждомъ частномъ случаѣ одно изъ количествъ $\frac{l}{e}$ или $\frac{d}{e}$ нужно принять за данное и по немъ вычислить остальныя величины. Въ практикѣ отношеніе $\frac{d}{e}$ берется обыкновенно не менѣе 1, 5 и не болѣе 3 хъ и сообразно этому опредѣляется отношеніе $\frac{l}{e}$.

Для опредѣленія разміровъ заклёпокъ Redtenbacher — предлагаетъ слѣдующія формулы, согласныя съ вышеизложенными, если при-

нять отношеніе $\frac{d}{e}$ заданное:

1, Для прочнаго связыванія желѣзныхъ листовъ (: листовыя балки :)

$d = 3e$, $l = 10e$, $l' + \frac{d}{2} = 5e$, $D = D' = 4{,}5e$ и $H = 2{,}25e$,

при чемъ приблизительно $r = \frac{3}{2}$ слѣдовательно потеря прочности 33 %.

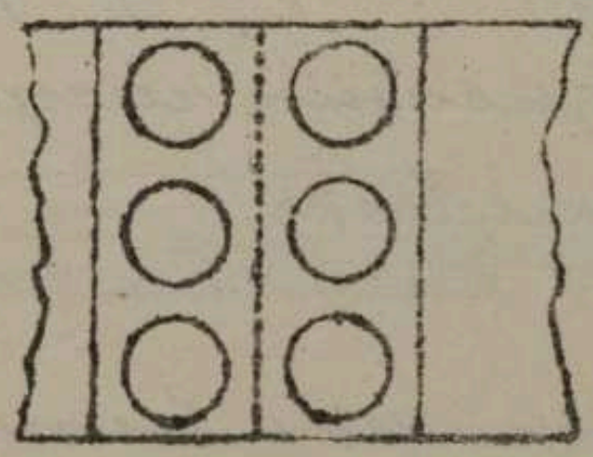
2, Для связыванія не только прочнаго, но и плот-наго (: котлы :).

$d = 2e$, $l = 5e$, $l' + \frac{d}{2} = 3e$, $D = 3e$, $D' = 4e$, $H = \frac{3}{2}e$.

при этомъ $r = \frac{5}{3}$ и потеря прочности 40 %. Аппендаид составилъ на основаніи существующихъ примѣровъ эмпирическія формулы для опредѣленія діаметра и взаимнаго разстоянія центровъ заклёпокъ при паровыхъ котлахъ; формулы его, приведен-ныя къ русскимъ мѣрамъ, слѣдующія

$d = 1{,}5e + \frac{3}{16}$ дюйм., $l = 3e + \frac{11}{16}$ дюйм. $= 2d + \frac{5}{16}$ дюймовъ.

Въ случаяхъ наиболѣе встрѣчающихся въ практи-кѣ, т. е. для толщины с листовъ отъ $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$ дюйма, результаты формулъ Ярманго и Редтенбахера почти одинаковы. Если два листа соединены съ помощью двухъ накладокъ, то для разрыва нужно, чтобы два сѣченія каждой заклепки одного ряда перерѣзались, или же чтобы слабѣйшая часть листа между крайними заклепокъ разорвалась, или наконецъ чтобы слабѣйшія части въ обѣихъ накладкахъ разорвались. По этому чтобы отношеніе между наименьшими этихъ частей было самое выгодное, нужно



чтобы сопротивленіе заклепокъ перерѣзыванію было равно порознь сопротивленію разрыву листа и сопротивленію разрѣзу накладокъ. Отсюда слѣдуетъ, что сопротивленія разрыву накладокъ и листа должны быть равны, а какъ на одинъ листъ приходятся двѣ накладки, то толщина накладокъ должна быть половина толщины листа, и остается только сравнивать сопротивленіе заклепокъ съ сопротивленіемъ листа. Сопротивленіе заклепки перерѣзыванію въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\alpha R' \cdot 2\omega = \alpha R' \cdot \frac{\pi d^2}{2};$$

слѣдовательно получится:

$$R'' e(l-d) = \alpha R' \frac{\pi d^2}{2}$$

или приблизительно:

$$\frac{l}{e} = \frac{d}{e} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{e}\right)^2;$$

откуда можно опредѣлить величину разстоянія между заклепками l, по данному отношенію $\frac{d}{e}$.

Для опредѣленія разстоянія l' края заклепки отъ края листа или накладки, имѣемъ условіе, выражающее, что сопротивленіе вырѣзыванію части листа или частей двухъ накладокъ:

$$\alpha' R'' 2el'$$

должно быть равно сопротивленію перерѣзыванію заклёпки, - что приводитъ къ уравненію:

$$\alpha' R'' 2el' = \alpha R' \frac{\pi d^2}{2}.$$

откуда приблизительно:

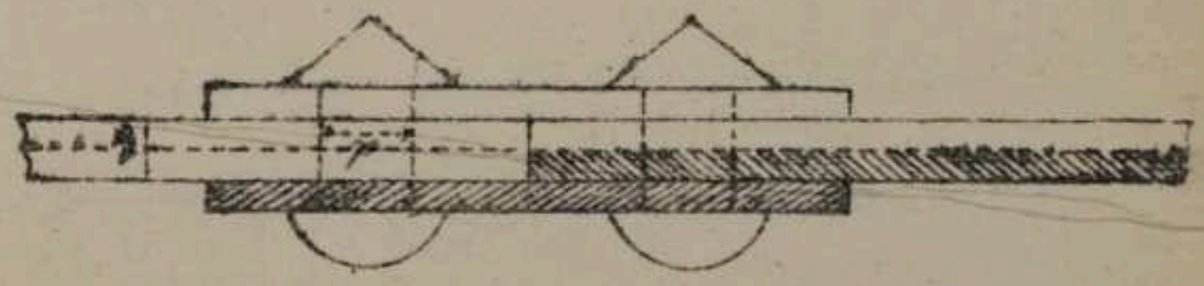
$$\frac{l'}{t} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{t}\right)^2.$$

Отсюда видно, что при соединеніи листовъ съ помощью накладокъ, крои ихъ должены вдвое далѣе отстоять отъ заклепокъ, чѣмъ при непосредственномъ соединеніи листовъ въ нахлестку.

Отношеніе между сопротивленіемъ цѣльнаго листа и сопротивленіемъ листовъ, связанныхъ заклёпками и накладками будетъ:

$$r = \frac{\frac{l}{t}}{\frac{l}{t} - \frac{d}{t}} = 1 + \frac{2}{\pi}\frac{t}{\delta}.$$

Формулы для опредѣленія наивыгодѣйшихъ шаговъ соединенія листовъ заклепками при помощи двухъ накладокъ, можно вывести и проще, пользуясь готовыми формулами для непосредственнаго соединенія листовъ безъ накладокъ, при томъ же числѣ рядовъ заклепокъ вдоль сѣченія листовъ. Для сего стоитъ только вообразить, что, соединяемые съ помощію накладокъ, листы раздѣлены пополамъ плоскостью, параллельною направленію листовъ и накладокъ, и обратить вниманіе на то, что тогда половина листа съ соотвѣтствующею ей накладкою будетъ въ такомъ же положеніи, какъ два листа одинаковой толщины, непосредственно соединенные между собою заклепками. По сему изслѣдованія шаговъ раздѣла-



тривaемого соединенія листовъ могутъ быть опредѣлены по формуламъ, выведеннымъ для непосредственнаго соединенія листовъ заклепками, подставляя въ нихъ толщину $\frac{e}{2}$ вмѣсто толщины e. Такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{2l}{e} = \frac{2d}{e} + \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{2d}{e}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{l}{e} = \frac{d}{e} + \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

$$\frac{2l'}{e} = \frac{\pi}{8}\cdot\left(\frac{2d}{e}\right)^2 \qquad \text{—"—} \quad \frac{l'}{e} = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

$$\gamma = 1 + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{e}{2d} \qquad \text{—"—} \quad \gamma = 1 + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{e}{d}.$$

Взявъ для примѣра $\frac{d}{e} = 2$, получимъ по этимъ формуламъ приблизительно;

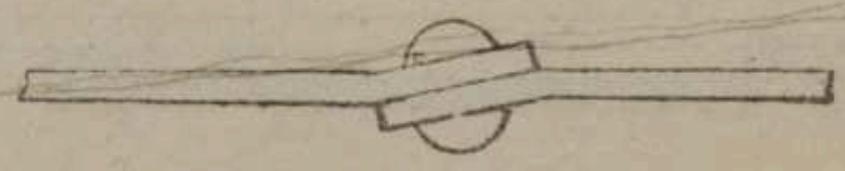
$$d = 2e,\ l = 8e,\ l' + \frac{d}{2} = 4e,\ \gamma = \frac{4}{3};$$

такъ что при соединеніи листовъ накладками изаклепками въ одинъ рядъ съ каждой стороны стыка, принимая заклепки вдвое толще листовъ, потеря прочности составитъ 25%.

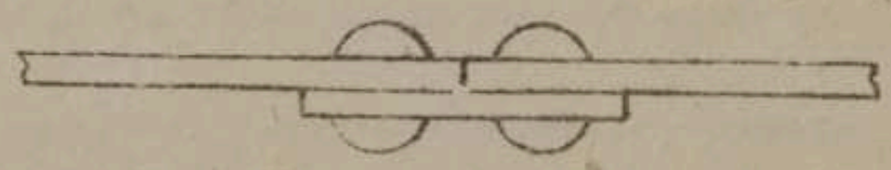
Очевидно, что при этомъ способѣ соединенія разстоянія l получатъ большую величину, чѣмъ при одномъ рядѣ заклепокъ, при томъ же діаметрѣ d; вслѣдствіе этого сопротивленіе разрыву листа, также будетъ больше.

И такъ соединеніе двухъ желѣзныхъ листовъ

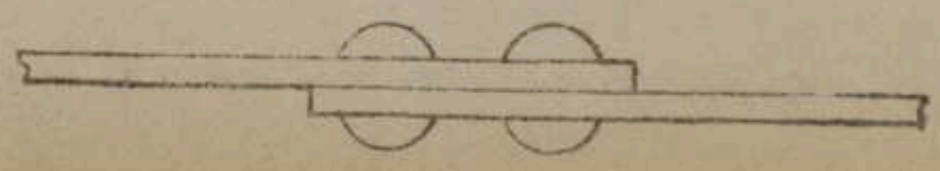
а.



б.



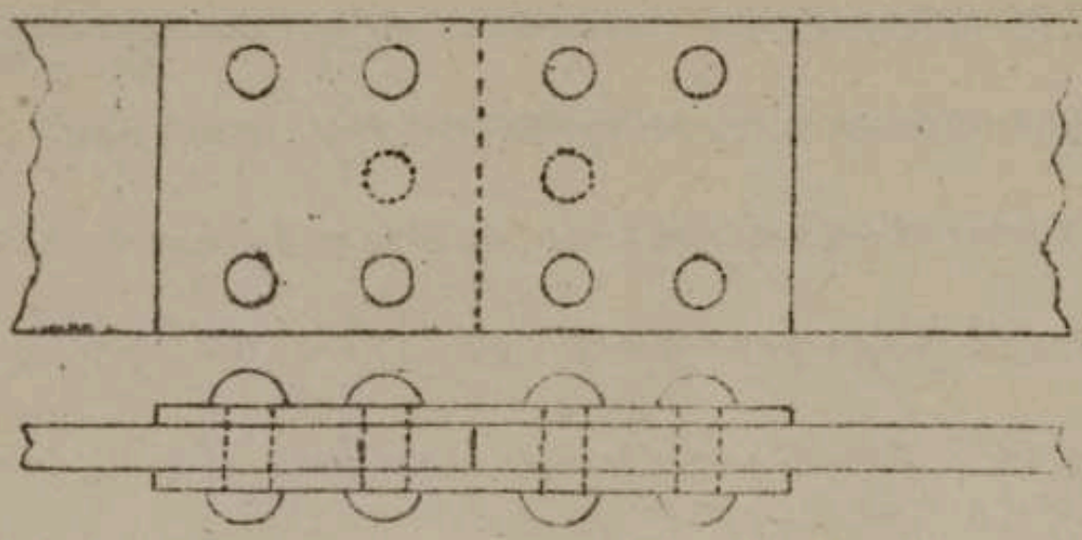
с



накладками прочнѣе, чѣмъ въ нахлестку. Кромѣ того первый способъ имѣетъ передъ вторымъ еще то преимущество, что въ немъ силы

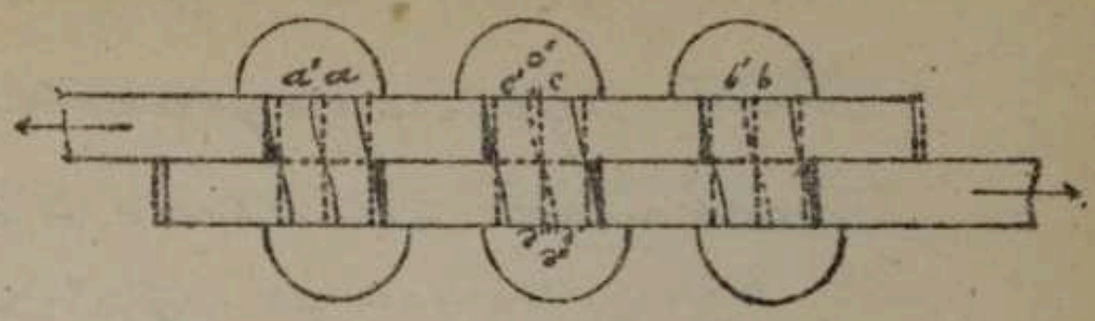
правильное существуют и не могут значительно изменять вида соединяемых листов, между тем как при соединении в нахлестку силы растягивающия листы могут произвести изгибъ как показано на чертеже а, но с другой стороны работа при заклепывании в нахлестку нѣсколько проще чѣм при накладках. Кромѣ того выступы, образуемые накладками предоставляют иногда неудобства, так при постройкѣ желѣзных судов выступающия накладки увеличивают сопротивление воды движению судна. Перегибъ листов в мѣстѣ их соединения и вообще неправильное растяжение листов могут быть до нѣкоторой степени уменьшены соединением листов одного только накладкою или же в нахлестку с расположением двух рядов заклепок, как показано на чертежах 6 и С.

Если при соединении двух листов заклепками расположить заклепки вместо одного в два ряда, но без изменения всего числа заклепок и их діаметра, то сопротивление заклепок перерѣзыванию останется без изменения, но сопротивление листов разрыву увеличится, потому что промежутки между заклепками в каждом ряду удвоятся. По этому увеличивая діаметръ заклепок настолько, чтобы сопротивление перерѣзыванию заклепок сделалъ равным увеличенному сопротивлению разрыву листов, очевидно можно достигнуть и увели-



ченія прочности всей системы. Такимъ же образомъ, легко объяснить, что и вообще прочность соединенія листовъ увеличивается вмѣстѣ съ увеличеніемъ числа рядовъ заклепокъ по крайней мѣрѣ до тѣхъ поръ, пока возрастающее при этомъ разстояніе между центрами заклепокъ не достигнетъ предѣла, при которомъ начинаетъ проявляться вредное вліяніе неравномѣрной натянутости листовъ въ промежуткахъ между заклепками. Но здѣсь слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что когда число рядовъ заклепокъ болѣе двухъ, то прочность соединенія листовъ при умноженіи рядовъ заклепокъ увеличивается только весьма мало. Это происходитъ отчасти отъ того, что тогда средніе ряды заклепокъ подвергаются меньшему перерѣзывающему усилію чѣмъ крайніе, и принимая на себя меньшую часть сопротивленія перерѣзыванію, средніе ряды мало содѣйствуютъ увеличиванію сопротивленія. — Для объясненія этаго вообразимъ себѣ два листа непосредственно связанные двумя рядами заклепокъ, и обратимъ вниманіе на то измѣненіе вида, которое произойдетъ въ листахъ и заклепкахъ, если первые подвергнутся растягивающимъ силамъ. Измѣненіе вида будетъ состоять въ слѣдующемъ. Края отвер-

стей листовъ, напирая на заклепки нѣсколько сожмут ся и притянутся, противоположныя края отверстій



отдалятся отъ заклепокъ и образуютъ зазоры. Заклепки, подвергаясь перерѣзывающему усилію перегнут ся, и центры ихъ шляпокъ a и b нѣсколько передвинутся въ a' и b', причемъ вслѣдствіе симметріи всей системы и условій равновѣсія отдѣльной заклепки, какъ это объяснится ниже, aa' будетъ равно bb'. Вмѣстѣ съ этимъ нѣкоторая линія cd, проходящая внутри листовъ, въ срединѣ между осями двухъ заклепокъ и перпендикулярная плоскости касанія листовъ, также перегнется и крайнія ея точки c и d перейдутъ въ c' и d', при чемъ очевидно будетъ:

$$cc' = dd' = aa' = bb'.$$

Но если затѣмъ вообразимъ, что между двумя разсматриваемыми рядами заклепокъ находится третій промежуточный рядъ заклепокъ, въ которомъ ось одной заклепки совпадаетъ съ линіею cd, то вліяніе этого промежуточнаго ряда на измѣненіе вида всей системы очевидно будетъ состоять въ томъ, что вслѣдствіе сопротивленія, оказываемаго средней заклепкой своему перегибу, промежутокъ листа ac будетъ болѣе растянутъ, чѣмъ промежутокъ того же листа bc. Но тогда центры шляпокъ средней заклепки c и d не могутъ передвинутся въ c' и d', при чемъ было бы: $a'c' = b'c'$

т. е. существовала бы одинаковая натянутость обоих промежутков, а должны передвинутые нѣсколько меньше – въ c″ и d″ чтобы могло быть

$$a'c'' > b'c''.$$

И такъ должно существовать неравенство

$$cc'' < aa' \text{ и } cc'' < bb'$$

Такимъ образомъ средняя заклепка подвергнет-ся меньшему изгибанію вида, чѣмъ каждая изъ крайнихъ, и слѣдовательно, имѣя одинаковыя съ ними изгибенія, она будетъ менѣе напряжена и окажетъ меньшее сопротивленіе передвиженію листовъ, чѣмъ каждая крайняя заклепка. Тоже самое произойдетъ съ среднимъ рядами заклепокъ и при четырехъ, пяти, шести и болѣе рядахъ. Сопротивленіе заклепокъ будутъ уменьшаться при переходѣ отъ крайнихъ рядовъ къ ближайшимъ среднимъ рядамъ, отъ нихъ къ третьимъ среднимъ рядамъ и т. д.

Обстоятельства, опредѣляющія уменьшеніе напряженія среднихъ рядовъ заклепокъ относительно рядовъ, ближайшихъ къ краямъ, едва ли могутъ быть подвергнуты исчисленію безъ участія достаточнаго числа опытовъ надъ сопротивленіемъ перегрузыванію заклепокъ, расположенныхъ въ три, четыре и болѣе рядовъ. Но такихъ опытовъ до сихъ поръ еще не имѣется, потому что тѣ немногіе опыты, которые были произведены надъ сопротив-

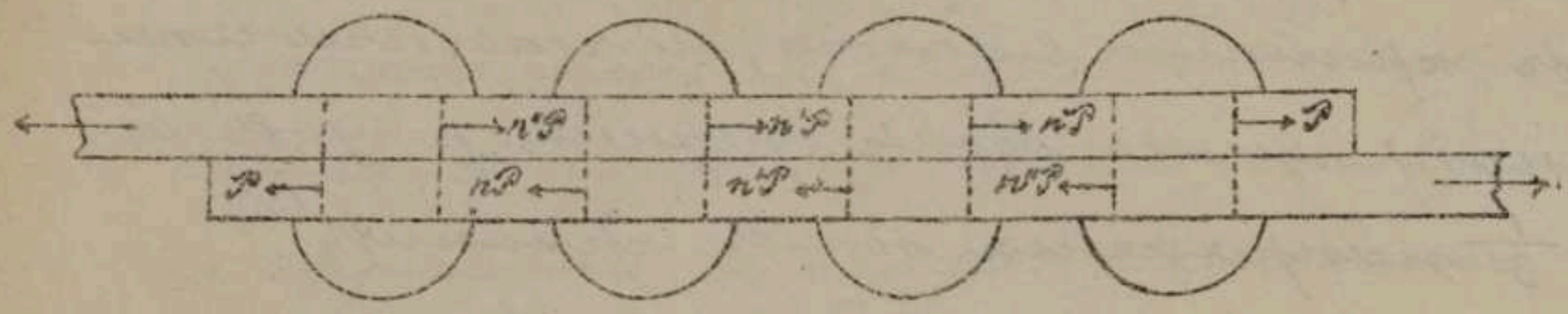
менiемъ разрыву листовъ соединенныхъ заклепками, совершенно недостаточны для (рѣшенiя) разсматриваемаго вопроса. При такомъ недостаткѣ положительныхъ данныхъ, остается прибѣгнуть къ предположенiямъ, и мы едва-ли много удалимся отъ истины, если примемъ, что при трехъ рядахъ заклепокъ напряженiе средняго ряда вдвое менѣе каждаго крайняго, или въ четыре раза менѣе обоихъ крайнихъ вмѣстѣ, и что-при четырехъ рядахъ напряженiя обоихъ среднихъ рядовъ составляютъ $\frac{1}{3}$ напряженiя обоихъ крайнихъ.(*)

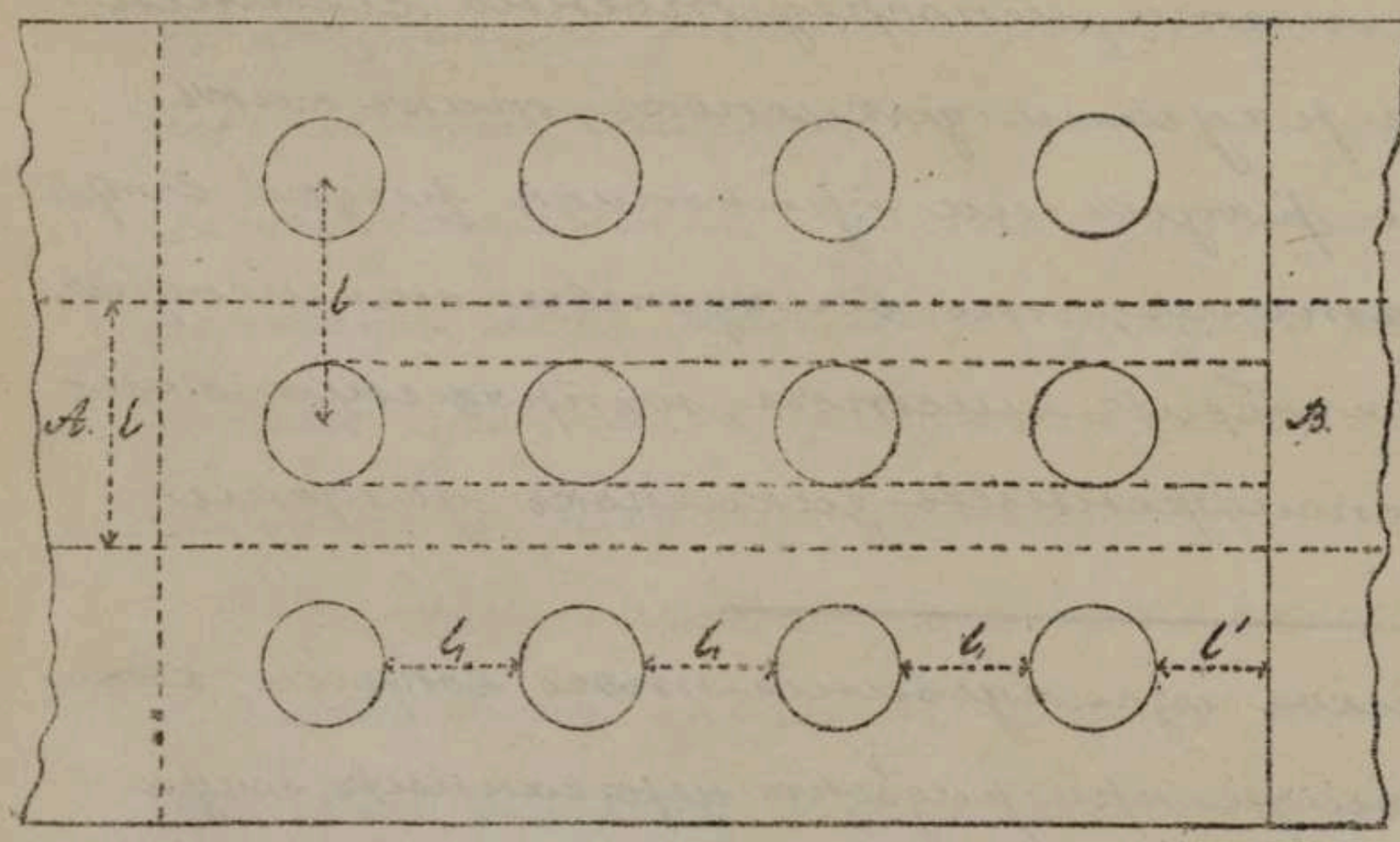
Для опредѣленiя удѣлившейся части листовъ, соединенныхъ заклепками въ нѣсколько рядовъ, возьмемъ два листа, непосредственно соединенные четырьмя рядами заклепокъ, такъ какъ большее число рядовъ на практикѣ рѣдко встрѣчается. Замѣтимъ, что вслѣдствiе симметричнаго положенiя обоихъ листовъ, напряженiя симметрично расположенныхъ заклепокъ должны

(*) Теоретическое изслѣдованiе этого вопроса, которое изложено ниже при разборѣ деревянныхъ соединенiй, приводитъ къ нѣсколько большимъ отношенiямъ напряженiй, а именно $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ вмѣсто $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Но какъ эта теорiя не вполнѣ примѣнима къ заклепкамъ, то послѣднiя величины отношенiй кажется слѣдуетъ удержать, какъ болѣе надежныя.

быть равны и назовемъ P напряженіе каждой заклепки перваго ряда у края каждаго листа, $n'P$ напряженія заклепки втораго ряда, считая отъ края листа, $n''P$ напряженіе третьяго ряда, $n'''P$ напряженіе четвертаго ряда.

Эти напряженія или сопротивленія заклепокъ





видно равны и пропорціональны числу заклепокъ, расположенныхъ въ одномъ поперечномъ сѣченіи листовъ. Такъ какъ каждая заклепка будетъ подвергаться двойственному противудействію

положенныхъ давленій параллельныхъ направленію растяженія листовъ, и при этомъ должна оставаться въ равновѣсіи, то сила дѣйствующая на нее въ одну сторону должна быть равна

сила, действующей въ противную сторону, а стремленіе пары силъ повернуть заклепку уничтожится сопротивленіемъ смятію и треніемъ по ея боковой поверхности. И такъ должны существовать равенства

$$P = n'' P; \quad n P = n' P$$

откуда

$$n'' = 1 \text{ и } n = n'$$

Хотя по этому можно было бы заключить букву n' буквою n, но мы ее удержимъ для того, чтобы по выводу формулъ для четырехъ рядовъ заклепокъ, можно было изъ нихъ тотчасъ же получить формулы для $3^{хъ}$ рядовъ заклепокъ, подставляя $n' = 0$. Формулы же для $2^{хъ}$ рядовъ заклепокъ получатся, если сдѣлаемъ:

$$n = 0 \text{ и } n' = 0$$

Отдѣлимъ отъ обоихъ соединенныхъ листовъ полосу AB плоскостями, перпендикулярными къ поверхности касанія листовъ и проходящими чрезъ средины промежутковъ между двумя смежными заклепками каждаго ряда. Ширина этой полосы будетъ очевидно равна разстоянію l между центрами заклепокъ одного ряда. Въ каждой полосѣ, подобной AB, сопротивленіе разрыву листа въ слабѣйшей его части будетъ:

$$R''(l-d)e.$$

Сопротивленіе же четырехъ заклепокъ парѣ ихъ листа будетъ:

$$P + n'P + n'P + P = (2 + n + n')P.$$

а такъ какъ сопротивленіе наиболѣе напряженной заклепки не можетъ превышать сопротивленія ея перерѣзыванію, то для наибольшей величины P имѣемъ:

$$P = \alpha R' \omega = \alpha R' \frac{\pi d^2}{4}.$$

и сопротивленіе всѣхъ четырехъ заклепокъ перерѣзыванію будетъ:

$$(2 + n' + n) \alpha R' \frac{\pi d^2}{4}.$$

Сравнивая два найденныя сопротивленія, получаемъ:

$$R''(l - d)e = (2 + n' + n) \alpha R' \frac{\pi d^2}{4}.$$

откуда

$$\frac{l}{e} = \frac{d}{e} + (2 + n' + n) \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

На основаніи этой формулы, отношеніе между сопротивленіемъ разрыву цѣльнаго листа и листа, ослабленнаго отверстіями для заклепокъ, выходитъ:

$$r = \frac{\frac{l}{e}}{\frac{l}{e} - \frac{d}{e}} = 1 + \frac{4}{(2 + n' + n)\pi} \cdot \frac{e}{d}.$$

Для опредѣленія разстояній между рядами заклепокъ и между крайними рядомъ и краемъ листа, назовемъ (край) l' разстояніе края отверстій перваго ряда заклепокъ отъ края листа и (край) l_1 разстояніе между краями отверстій двухъ смежныхъ рядовъ заклепокъ.

Тогда сопротивленіе выдергиванію части листа, ближайшей къ его краю будетъ:

$$2 \alpha' R'' l' e;$$

а усилія, съ которыми крайняя заклепка

напряжение на эту часть листа будет:

$$P = \alpha R' \frac{\pi d^2}{4}.$$

и наименьшая длина вырезывающейся части листа определится уравнением

$$2\alpha' R'' l' e = \alpha R' \frac{\pi d^2}{4};$$

откуда приблизительно:

$$\frac{l'}{e} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

Въ промежуткѣ между двумя смежными рядами заклепокъ, вырѣзываемая часть листа, которой длина есть b_1, подвергается не только вырѣзывающему усилію, оказываемому напирающею на неё заклепкою ближайшаго ряда, но еще и другому усилію, стремящемуся отодвинуть эту часть по тѣмъ же сѣченіямъ отъ остальной части листа, и происходящему отъ того что весь промежуточекъ листа между двумя смежными рядами заклепокъ растянутъ, и растяженіе это передается вырѣзываемой части посредствомъ силы сцѣпленія, существующей въ точкахъ площадей вырѣзыванія. Для опредѣленія этого вырѣзывающаго усилія, происходящаго отъ натянутости листа, замѣтимъ что полоса AB листа въ промежуткѣ между двумя рядами заклепокъ, ближайшими къ цѣльной части листа, растягивается напряженіемъ $(n' + n + 1) P$ трехъ заклепокъ, слѣдовательно на 1 кв. дюймъ поперечнаго сѣченія, перпендикулярнаго къ направленію растягивающей силы, въ этой части листа приходится растяженіе:

$$(n' + n + 1) \frac{P}{le}.$$

а на выгрызываемую часть, которой сѣченіе равно de приходится растяженіе

$$(n'+n+1)\frac{P}{le}.de, \text{ или } (1+n+n')P.\frac{d}{l},$$

которое и представитъ сумму перерѣзывающихъ усилій по обѣимъ плоскостямъ выгруза, проходящимъ отъ настоящности этой части листа.

Сверхъ этого усилія, напряженіе заклепки 4 ряда, т. е. P, также стремится вырвать часть листа, слѣдовательно все вырѣзывающее усиліе будетъ:

$$\left[(1+n+n')\frac{d}{l}+1\right]P \text{ или } \left[(1+n+n')\frac{d}{l}+1\right]\alpha R'\frac{\Pi d^2}{4}.$$

Съ другой стороны сопротивленіе вырѣзыванію по обѣимъ плоскостямъ будетъ:

$$2\alpha' R'' l, e$$

По сему наименьшая величина l_1, при которой не произойдетъ вырѣзыванія, опредѣлится уравненіемъ:

$$2\alpha R'' l, e = \alpha R'.\frac{\Pi d^2}{4}\left[(1+n+n')\frac{d}{l}+1\right]$$

откуда приблизительно

$$\frac{l_1}{l} = \left[(1+n+n')\frac{d}{l}+1\right]\frac{\Pi}{8}\left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

Принимая тоже соображенія къ опредѣленію длины промежутка между какими либо другими двумя слѣдующими рядами заклепокъ, не трудно убѣдиться, что въ этихъ промежут-

конъ выкызывающее усиліе будетъ меньше чѣмъ въ первомъ промежуткѣ, потому что вторые промежутки растягиваются меньшимъ числомъ заклепокъ, чѣмъ первый; а посему найденная наименьшая величина t_1 для перваго промежутка будетъ достаточна и для остальныхъ. Принимая

$$n = n' = \frac{1}{3},$$

выведенныя формулы для четырехъ рядовъ заклепокъ, соединяющихъ два листа безъ накладокъ представятся въ видѣ:

$$\frac{t}{c} = \frac{d}{c} + \frac{2}{3}\pi\left(\frac{d}{c}\right)^2; \quad \frac{t_1}{c} = \left[\frac{5}{3}\cdot\frac{d}{t} + 1\right]\frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{c}\right)^2 = \left[\frac{5}{3}\cdot\frac{d}{t} + 1\right]\frac{t'}{c};$$

$$\frac{t'}{c} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{c}\right)^2; \quad p = 1 + \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{c}{d}.$$

Изъ тѣхъ же общихъ формулъ можно вывести формулы для трехъ рядовъ заклепокъ соединяющихъ два листа безъ накладокъ, если положить $n' = 0$. Такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{t}{c} = \frac{d}{c} + (2+n)\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{d}{c}\right)^2; \text{ или при } n = \frac{1}{2}: \quad \frac{t}{c} = \frac{d}{c} + \frac{5\pi}{8}\cdot\left(\frac{d}{c}\right)^2$$

$$\frac{t'}{c} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{c}\right)^2 \quad " \quad \text{——} \quad " \quad \text{——} \quad \frac{t'}{c} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{c}\right)^2$$

$$\frac{t_1}{c} = \left[(1+n)\frac{d}{t} + 1\right]\frac{t'}{c} \quad " \quad \text{——} \quad " \quad \text{——} \quad \frac{t_1}{c} = \left[\frac{3}{2}\frac{d}{t} + 1\right]\frac{t'}{c}$$

$$p = 1 + \frac{4}{(2+n)\pi}\cdot\frac{t}{d} \quad \text{——} \quad \text{——} \quad p = 1 + \frac{8}{5\pi}\cdot\frac{c}{d}.$$

Если же въ этихъ формулахъ положить $n = 0$, то получатся слѣдующія формулы для двухъ рядовъ заклепокъ, соединяющихъ два листа безъ накладокъ

$$\frac{t}{c} = \frac{d}{c} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{c}\right)^2, \qquad \frac{t_1}{c} = \left(\frac{d}{t} + 1\right)\frac{t'}{c},$$

$$\frac{t'}{c} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{c}\right)^2 \qquad p = 1 + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{c}{d}.$$

Согласно вышеизложенному для вывода формул для соединения двух листов несколькими рядами заклепок, при помощи двойных накладок, стоит только в формулах, относящихся к непосредственному соединению двух листов в нахлестку, подставить $\frac{e}{2}$ вместо e. Тогда найдется:

Для четырех рядов заклепок при накладках:

$$\frac{l}{e} = \frac{d}{e} + (2 + n + n')\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{e}\right)^2 ; \quad \text{при } n = n' = \frac{1}{3} : \frac{l}{e} = \frac{d}{e} + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

$$\frac{l'}{e} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{e}\right)^2 \quad ; \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \frac{l'}{e} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

$$\frac{l_1}{e} = \left[(1 + n + n')\frac{d}{l} + 1\right]\frac{l'}{e} ; \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \frac{l_1}{e} = \left[\frac{5}{3}\frac{d}{l} + 1\right]\frac{l'}{e}.$$

$$\nu = 1 + \frac{2}{(2 + n + n')\pi}\cdot\frac{e}{d} ; \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \nu = 1 + \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{e}{d}.$$

Для трех рядов заклепок при накладках:

$$\frac{l}{e} = \frac{d}{e} + (2 + n)\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{e}\right)^2 ; \quad \text{при } n = \frac{1}{2} : \frac{l}{e} = \frac{d}{e} + \frac{5\pi}{4}\cdot\left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

$$\frac{l'}{e} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{e}\right)^2 ; \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \frac{l'}{e} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

$$\frac{l_1}{e} = \left[(1 + n)\frac{d}{l} + 1\right]\frac{l'}{e} ; \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \frac{l_1}{e} = \left[\frac{3}{2}\frac{d}{l} + 1\right]\frac{l'}{e}.$$

$$\nu = 1 + \frac{2}{(2 + n)\pi}\cdot\frac{e}{d} ; \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \nu = 1 + \frac{4}{5\pi}\cdot\frac{e}{d}.$$

Для двух рядов заклепок при накладках:

$$\frac{l}{e} = \frac{d}{e} + \pi\left(\frac{d}{e}\right)^2 ; \qquad \frac{l_1}{e} = \left(\frac{d}{l} + 1\right)\frac{l'}{e}$$

$$\frac{l'}{e} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{e}\right)^2 ; \qquad \nu = 1 + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{e}{d}.$$

Для объяснения выведенных формул, вычислены

при отношеніи $\frac{d}{t} = 2$ величины отношеній $\frac{l}{t}$, $\frac{l'}{t}$, $\frac{d}{2t}$, $\frac{l_1+d}{t}$, $\frac{1}{r}$, изъ которыхъ послѣднее выражаетъ какая часть сопротивленія разрыву цѣльнаго листа сохраняется при соединеніи двухъ листовъ заклепками.

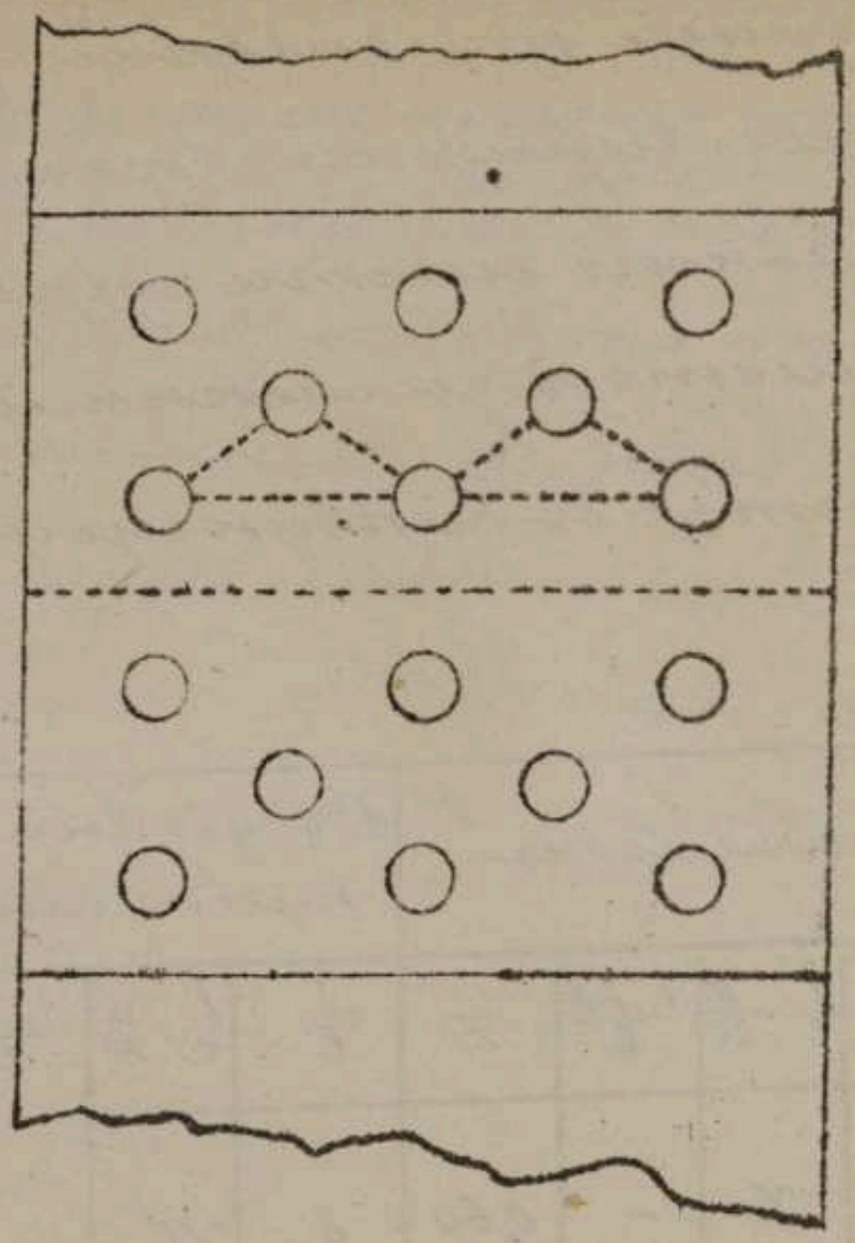
Величины эти заключаются въ слѣдующей таблицѣ:

Число рядовъ заклепокъ.	Безъ накладокъ					Съ двойными накладками.			
	$\frac{d}{t}$	$\frac{l}{t}$	$\frac{l'}{t}+\frac{d}{2t}$	$\frac{l_1+d}{t}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{l}{t}$	$\frac{l'}{t}+\frac{d}{2t}$	$\frac{l_1+d}{t}$	$\frac{1}{r}$
1.	2	5	3	–	0,60	8	4	–	0,75.
2.	2	8	3	4	0,75	14,5	4	5,5	0,86.
3.	2	10	3	4,5	0,80	17,7	4	5,6	0,89
4.	2	10	3	4,5	0,80	18,7	4	5,7	0,89

Изъ этой таблицы видно, что соединеніе листовъ посредствомъ двойныхъ накладокъ прочнѣе непосредственнаго ихъ соединенія въ нахлестку при одинаковомъ числѣ рядовъ, и что безполезно располагать болѣе трехъ рядовъ заклепокъ.

При расположеніи заклепокъ въ нѣсколько рядовъ ихъ часто размѣщаютъ въ шахматномъ порядкѣ, потому что опытъ показалъ, что тогда соединеніе листовъ прочнѣе, чѣмъ при продольныхъ и поперечныхъ рядахъ, взаимно перпендикуляр-

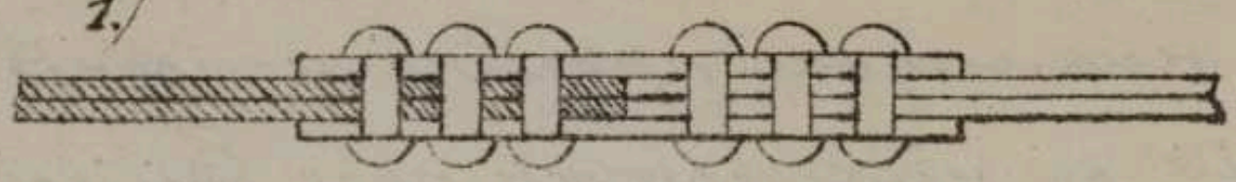
ныхъ.



При шахматномъ порядкѣ промежутки между продольными рядами могутъ быть нѣсколько меньше, чѣмъ при взаимно перпендикулярныхъ рядахъ, потому что сопротивленіе выкрызыванію гвоздей листовъ больше, но всякомъ случаѣ ломаная линія соединяющая края заклепокъ въ двухъ смѣжныхъ рядахъ должна быть больше прямой линіи, соединяющей края заклепокъ одного ряда, потому что иначе листъ могъ бы разорваться по ломаной линіи.

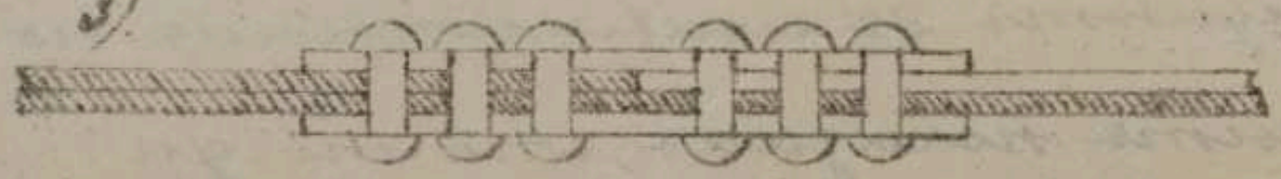
Для соединенія желѣзныхъ листовъ въ нѣсколько слоевъ употребляются преимущественно три способа, изображенные на чертежахъ $1^{\text{нч}}$, $2^{\text{нч}}$ и $3^{\text{нч}}$. Изъ нихъ самый простой способъ первый, при которомъ стыки всѣхъ слоевъ расположатся въ одной и той же плоскости и листы соединяются двумя

1/



2/

3/



наружными накладками, которых сложенная толщина равна сложенной толщине слоев листов. Расчет этого соединения тот же самый, как и при соединении двух листов двойными накладками. Способ этот применим только при небольшом числе слоев, потому что при большом числе их накладки выходят слишком толсты ми.

Второй способ, при котором стыки отдельных слоев несколько раздвинуты, представляет некоторый хотя и малый запас прочности, противя первого и принимается к какому угодно числу слоев, но применяется соединения занимает больше протяжение и дороже первого; при двух слоях оно в $1\frac{1}{2}$ раза длиннее и дороже.

Третий способ, вследствие неравномерной натянутости его частей не прочнее второго, но дороже его и также занимает больше протяжение, а именно при двух слоях на одну треть.

Сопротивление разрыву листов, соединенных заклепками, до некоторой степени зависит от трения, проявляющагося вдоль плоскостей касания листов, вследствие давления шляпок, заклепок прилегающих к листам при охлаждении после расклепывания. Но нельзя надеяться, чтобы трение заметно увеличивало прочность соединения, потому что оно может современем уменьшиться после сжимания

поверхностей листовъ отъ сотрясеній всей системы, и кромѣ того, если оно существуетъ, то вмѣстѣ съ тѣмъ должно существовать и нѣкоторое растяженіе заклепокъ по направленію ихъ осей, равное давленію листовъ на листы, и это растяженіе уменьшаетъ сопротивленіе заклепокъ перерѣзыванію, и при уменьшеніи заклепокъ иногда даже доходитъ до того, что разрываетъ заклепки или отрываетъ ихъ головки.

Гораздо большее вліяніе на прочность соединенія листовъ заклепками оказываетъ доброкачественность работы, какъ при образованіи отверстій, такъ и при расклепываніи для образованія головокъ. Отверстія въ листахъ продавливаются или просверливаются. Въ первомъ случаѣ края отверстій нѣсколько повреждаются и для предупрежденія образованія трещинъ, соединяющихъ смежныя отверстія, разстояніе между ними не должно быть меньше, чѣмъ въ $1\frac{1}{2}$ діаметра заклепокъ. Просверливаніе отверстій гораздо дороже продавливанія, но выгоднѣе для прочности соединенія листовъ, въ особенности когда заклепки должны проходить сквозь нѣсколько листовъ и накладокъ.

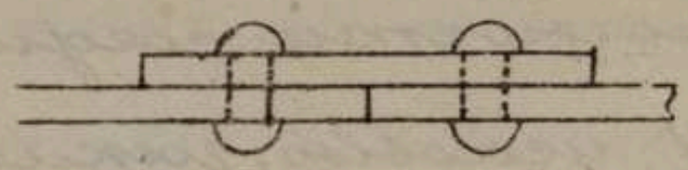
Для прочности соединенія необходимо, чтобы заклепки были плотно вдавлены въ отверстія листовъ, иначе могутъ образо-

вается зазоры вслѣдствіе чего произойдетъ не-
равномѣрное распредѣленіе силъ на различныя
заклепки, и уменьшеніе прочности соединенія.
Для удовлетворенія этому условію, заклепки
вставляются въ отверстія соединяемыхъ лис-
товъ раскаленными до бѣла и подъ ударами
молота должны осаживаться или выпучивать-
ся на столько, чтобы плотно заполнить от-
верстія. Чтобы при ручной работѣ молотомъ
въ 10 фунтовъ можно было произвести надлежа-
щее выпучиваніе заклепки по всей ея длинѣ, слож-
ная толщина соединяемыхъ листовъ не должна
на быть болѣе $2\frac{3}{4}$ дюйма и діаметръ заклепки
не болѣе $1^{\text{дм}}$ дюйма. Кромѣ того, чтобы при осад-
ленія головка заклепки была обезпечена отъ
срыванія необходимо, чтобы при данномъ діа-
метрѣ заклепки длина ея, равная сложенной
толщинѣ соединяемыхъ листовъ, не превосходи
ла извѣстнаго предѣла. Обыкновенно прини-
маютъ для заклепокъ діаметромъ:

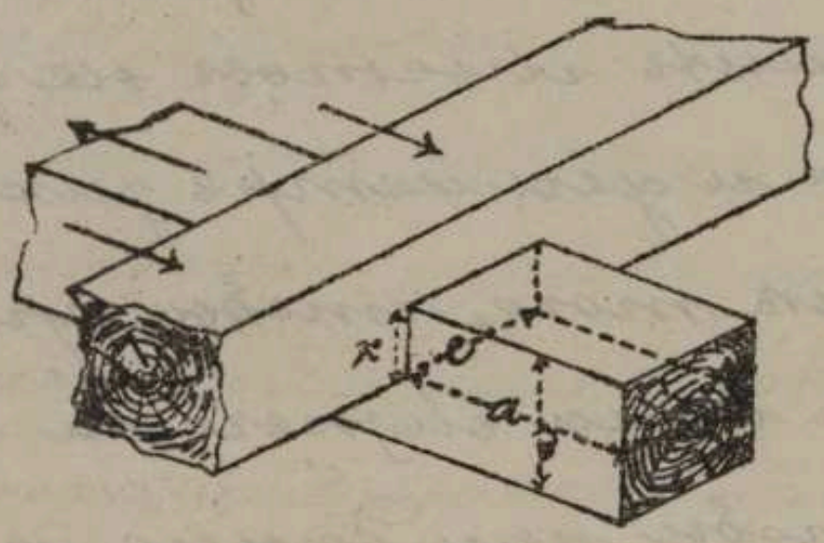
въ $\frac{1}{2}$ дюйма сложную толщину листовъ не болѣе $\frac{1}{2}$ дюйма
– $\frac{5}{8}$ ——— " ——— " ——— " ——— " ——— $\frac{3}{4}$ ———
– $\frac{3}{4}$ ——— " ——— " ——— " ——— " ——— $1\frac{3}{8}$ ———
– $\frac{7}{8}$ ——— " ——— " ——— " ——— " ——— 2 ———
– 1 ——— " ——— " ——— " ——— " ——— $2\frac{3}{4}$ ———

Если соединенные листы подвержены не рас-
тяженію, а сжатію, то они приставляются другъ
къ другу простымъ стыкомъ съ накладкою на
одной только сторонѣ, и заклепки могутъ

быть и тоньше и ближе расположены, чем при растяжении. Отверстия в листах при этом не уменьшают сопротивления листов сдвигу, так как давление передается через заклепки полным поперечным сечением листов. В этом случае можно принимать $d = 1{,}5\,c$ и $l = 10\,c$.



Обратимся теперь к исследованию соединений досок и брусьев, части которых подвержены скалыванию усилиями. Если соединение двух брусьев врубом под прямым углом подвергается сжатию стремящейся сколоть часть свободного конца бруса, то этот конец должен иметь достаточную длину для предупреждения скалывания. Называя a эту длину, c ширину бруса и k глубину врубки, заметим что соединение брусьев в рассматриваемом случае может разрушиться от скалывания части бруса по площади ac, или же от смятия или раздробления фибр боковой грани врубки kc. По этому скалываемой части следует дать такую длину, при которой сопротивление скалы-



ванію площади a с равно сопротивлению смятію площади kc.

Изображая чрезъ R_3 прочное сопротивленіе скалыванію и чрезъ R_4 прочное сопротивленіе смятію дерева на 1 кв. дюймъ, мы получимъ, для опредѣленія длины a, уравненіе:

$$R_3 ac = R_4 kc;$$

откуда

$$\frac{a}{k} = \frac{R_4}{R_3}.$$

Выше было сказано, что на основаніи опытовъ надъ сосновыми деревомъ можно принять

$$R_3 = 4 \text{ пуд.} \quad \text{и} \quad R_4 = 15 \text{ до } 20 \text{ пуд.}$$

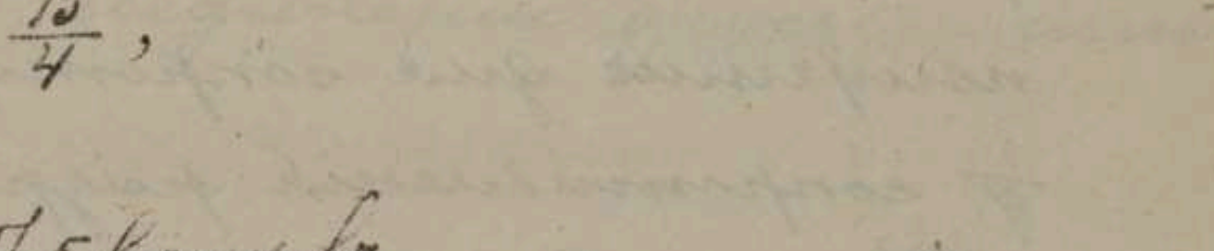
а именно R_4 берется въ 20 пуд. при глубинѣ врубки отъ 1 до $1\frac{1}{2}$ дюйма и въ 15 пуд. при глубинѣ врубки въ $1\frac{1}{2}$ дюйма и болѣе. По этому напримѣръ для сосноваго бруса толщиною d въ 4 верш., врубленнаго въ полдерева, такъ что $k = 2$ верш. получимъ:

$$\frac{a}{k} = \frac{15}{4},$$

откуда

$$a = 7{,}5 \text{ вершковъ}.$$

При продольномъ соединеніи двухъ брусьевъ прямыми зубомъ, для предупрежденія ломкости шейки зуба, принято толщину k зуба дѣлать не болѣе $\frac{1}{4}$ толщины бруса d. За тѣмъ для прочности соединенія, длина зуба a должна быть такова, чтобы сопротивленіе скалы-



вания зуба по плоскости ас было равно сопротивлению смятию зуба въ площади кс.

По этому также какъ и выше найдемъ:

$$\frac{a}{k} = \frac{R_4}{R_3}.$$

а предполагая глубину врубки не болѣе $1\frac{1}{2}$ дюйма, получимъ:

$$\frac{a}{k} = \frac{20}{4} = 5\ ;\quad k = \frac{d}{4}\ ;\quad a = \frac{5}{4}d.$$

и слѣдовательно длина всего соединенія будетъ

$$2a = 2{,}5\,d.$$

Чтобы сравнить прочность соединенія брусьевъ прямыми зубомъ съ прочностію цѣльнаго бруса имѣемъ:

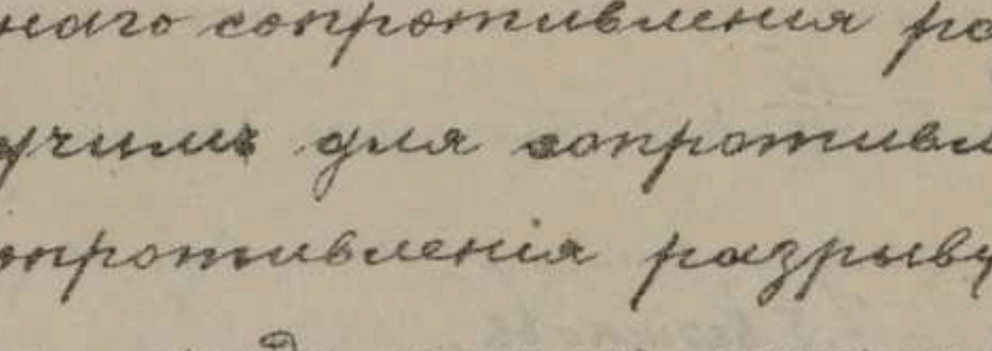
Сопротивленіе разрыву бруса . . . = $R_1 de$.

Сопротивленіе скалыванію бруса . . = $R_3 ak = R_3 \frac{5dc}{4}$

Отношеніе сопротивленій . . . . = $\frac{5}{4}\frac{R_3}{R_1}$.

Принимая для сосноваго дерева предѣлъ прочнаго сопротивленія разрыву $R_1 = 35$ пуд., получимъ для сопротивленія зуба $\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{35}$ или $\frac{1}{7}$ сопротивленія разрыву цѣльнаго бруса.

При продольномъ сращеніи брусьевъ косымъ зубомъ, принято толщину зуба дѣлать въ $\frac{1}{5}$ толщины бруса, такъ что $k = \frac{d}{5}$, и такую же толщину придаютъ тупымъ концамъ зуба. При этомъ для длины скалываемой части зуба найдемъ также какъ и выше:



$$\frac{a}{k} = \frac{R_4}{R_3} = 5 \text{ и слѣд. } a = d$$

и вся длина соединенія очевидно будетъ:

$$4a = 4d.$$

Для сравненія прочности брусьевъ соединенныхъ между собою косымъ зубомъ, съ прочностію цѣльнаго бруса имѣемъ:

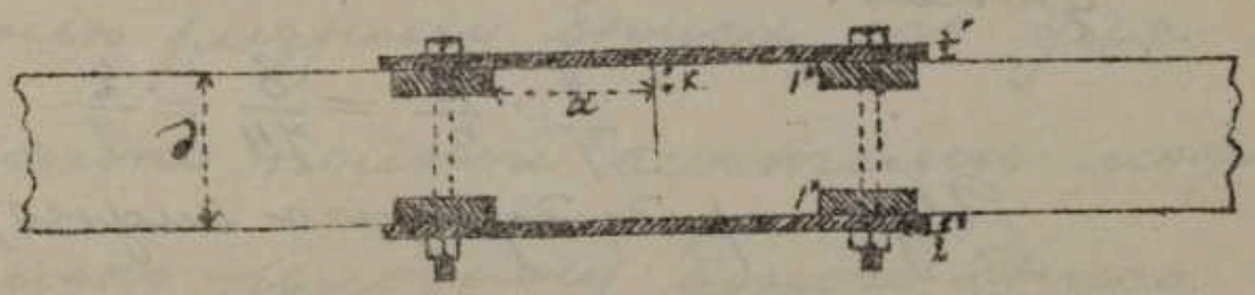
Сопротивленіе скалыванію зуба . . . $= R_3 ae - R_3 de.$

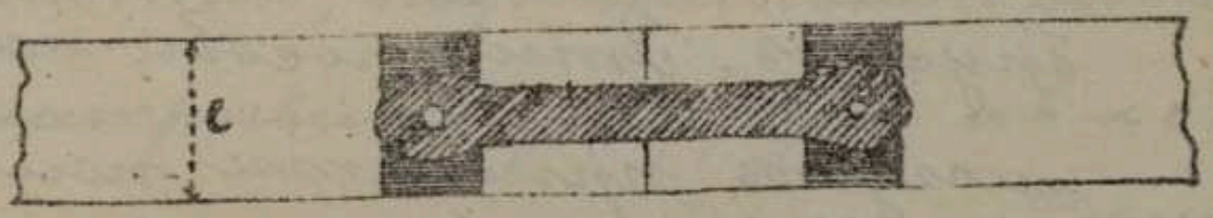
——————— разрыву цѣльнаго бруса .. $= R, de.$

Отношеніе сопротивленій . . . . . $= \frac{R_3}{R,} = \frac{4}{35} = \text{ок } \frac{1}{9}$

И такъ при соединеніи двухъ брусьевъ косымъ зубомъ сохраняется только $\frac{1}{9}$ сопротивленія разрыву цѣльнаго бруса. Соединеніе это иногда скрѣпляется болтами, но какъ болты легко вдавливаются въ дерево и перегибаются, то они мало увеличиваютъ прочность соединенія брусьевъ, а препятствуютъ только разъединенію ихъ перпендикулярно къ длинѣ:

При продольномъ соединеніи брусьевъ или досокъ желѣзными полосами съ чугунными шпонками и болтами изображенія черезъ к глубину врубки чугунной шпонки и черезъ а разстояніе края шпонки до стыка брусьевъ, найдемъ также какъ и для прямаго зуба.





$$\frac{a}{k} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{20}{4} = 5.$$

Въ этомъ случаѣ сопротивленіе скалы-
ванію по двумъ площадямъ ас будетъ

$$2R_{,ас} = 2.4.5\,кс,$$

а сопротивленіе разрыву цѣльнаго бруса
будетъ

$$R_{,дс} = 35\,дс.$$

и отношеніе сопротивленій

$$\frac{2R_{,ас}}{R_{,дс}} = \frac{в}{7}\cdot\frac{к}{д},$$

показываетъ, что при этомъ способѣ соедине-
нія сохраняется тѣмъ большая часть сопро-
тивленія разрыву цѣльнаго бруса, чѣмъ мень-
ше его толщина д, при одной и той же
глубинѣ врубки к. Такъ напр. при глубинѣ
врубки к въ 1 дюймъ, для 4^{хъ} вершковаго бру-
са сохраняемая часть сопротивленія будетъ,
при

$$д = 7\ дюйм.\quad \frac{в}{7}\cdot\frac{к}{д} = \frac{в}{49} = \frac{1}{6},$$

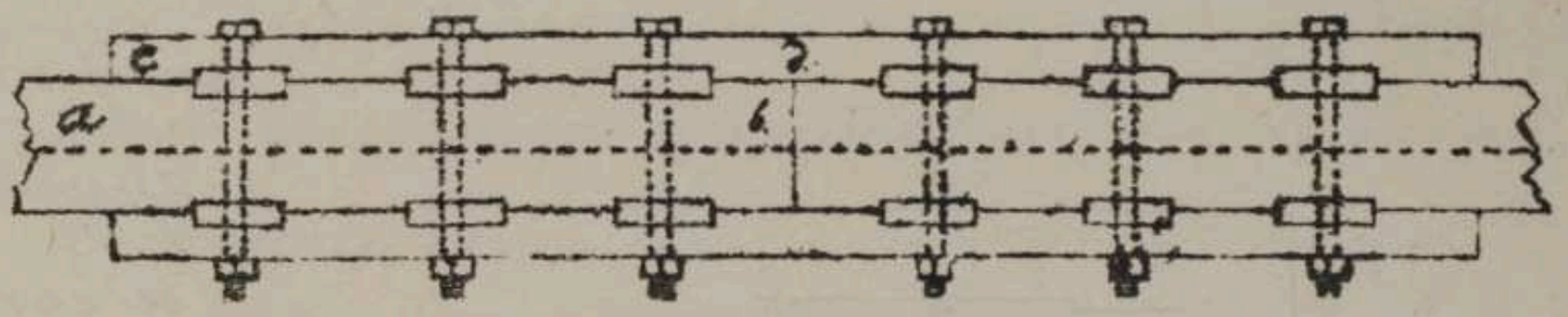
а для 4^{хъ} дюймовой доски выходитъ, при д = 4
дюйм.

$$\frac{в}{7}\cdot\frac{к}{д} = \frac{в}{7.4} = \frac{2}{7}$$

Изъ предыдущаго видно, что продольныя соеди-
ненія брусьевъ и досокъ зубомъ или желѣзными
накладками значительно слабѣе цѣльныхъ
брусьевъ. Эти способы соединенія по этому не
могутъ принести пользы въ случаяхъ, когда
требуется возможно большая прочность
продольнаго соединенія противъ разрыва.
Для такихъ случаевъ лучшій способъ состоитъ

въ соединеніи брусьевъ накладками изъ того же материала, прикрѣпленными къ брусьямъ посредствомъ дубовыхъ шпонокъ и желѣзныхъ болтовъ. Этотъ способъ, употребляемый при сооруженіи большихъ деревянныхъ стропильныхъ и мостовыхъ фермъ, заслуживаетъ особаго вниманія.

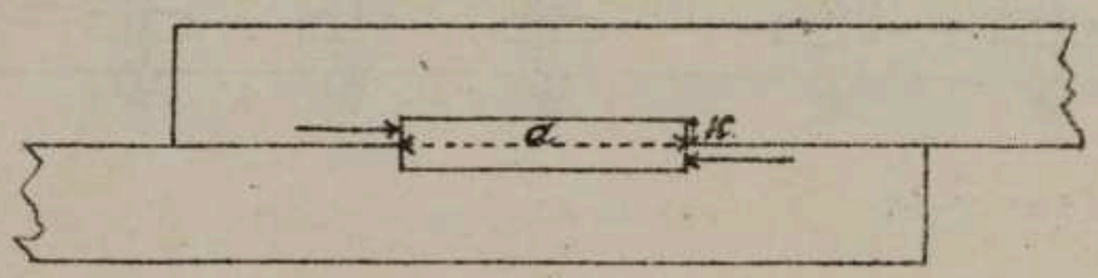
Для вычисленія размѣровъ частей такого соединенія брусьевъ, опредѣлимъ сперва размѣры дубовыхъ шпонокъ, потомъ разстояніе между краями



смѣжныхъ шпонокъ и наконецъ вычислимъ сопротивленія, оказываемыя шпонками растяженію системы; сумма сопротивленій всѣхъ шпонокъ одного бруса представитъ сопротивленіе разрыву всей системы. Пусть этомъ, такъ какъ толщина каждой накладки очевидно должна быть равна половинѣ толщины бруса, чтобы сопротивленіе обѣимъ накладкамъ было равно сопротивленію разрыву бруса, то для простоты выводовъ вмѣсто полной системы можно разсматривать только половину одного бруса съ принадлежащею къ ней накладкою, раздѣляя для сего брусъ пополамъ плоскостію, параллельною накладкамъ, т.е. можно разсматривать два бруса ав и сд одинаковой толщины, прилегающіе другъ къ другу боковыми плоскостями и связанные шпонками.

Что же касается до болтовъ, то они преимущественно служатъ для предупрежденія вращенія шпонокъ и отдъленія накладокъ отъ брусьевъ перпендикулярно къ направленію растягивающихъ силъ; на сопротивленіе болтовъ перерызыванію не слѣдуетъ расчитывать, какъ уже выше объяснено.

Называя к глубину врубки и а длину шпонки, легко найти, что для равенства между сопротивленіемъ врубки смятію и сопротивленіемъ шпонки скалыванію должно быть:



$$\frac{a}{k} = \frac{R_4}{R_3}$$

Глубину врубки к выгодно дѣлать въ 1 дюймъ, такъ какъ тогда сопротивленіе смятію больше чѣмъ привольнѣй глубинкѣ, а съ другой стороны, при меньшей глубинкѣ затрудняется вѣрное приложиваніе шпонки во врубкѣ. По сему въ предыдущую формулу слѣдуетъ для R_4 взять 20 пуд., а какъ шпонка предполагается дубовая, то прочное сопротивленіе скалыванію R_3 равно 6 пуд. и тогда

$$\frac{a}{k} = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{2}$$

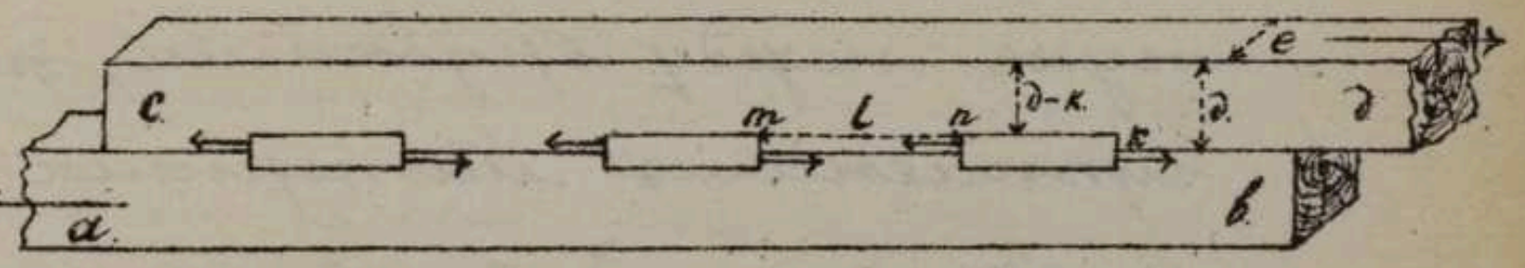
Но при такой малой длинѣ, шпонки легко

подвергаются нѣкоторому врашенію, вредящему правильности ихъ сопротивленія, поэтому длину шпонки совѣтуютъ брать вдвое болѣе найденной, т. е. приблизительно:

$$\frac{a}{\kappa} = 7.$$

Такимъ образомъ толщина шпонки берется въ 2 дюйма, а длина въ 7 дюймовъ.

Предполагая, что шпонки размѣщены на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга, разстояніе между краями двухъ смежныхъ шпонокъ должно быть опредѣлено для того промежутка между шпонками, который наиболѣе напряженъ; а это будетъ промежутокъ ближайшій къ цѣльной части а или д бруса или накладки, потому что этотъ промежутокъ растяги-вается суммою напряженій всѣхъ шпонокъ, исключая одной крайней, ближайшей къ нему шпонки, остальные же промежутки растягиваются суммою напряженій меньшаго числа шпонокъ. Называя R, предѣлъ прочнаго сопротивленія разрыву матеріала брусьевъ, $д$ толщину и $е$ ширину



ихъ, полученный для прочнаго сопротивленія разрыву слабѣйшей части бруса при врубкѣ:

$$R_1 \cdot (д-к)\, е,$$

что вмѣстѣ съ тѣмъ представляетъ наиболь-

ную силу, растяженію которой связанные брусья могутъ подвергаться безъ ущерба ихъ прочности. Эта растягивающая сила, дѣйствующая на цѣльную часть бруса и на ослабленную часть при первой врубкѣ, не вполнѣ передается на слѣдующій за тѣмъ промежутокъ тп бруса между первыми двумя шпонками, потому что этой силѣ тамъ противодѣйствуетъ напряженіе первой шпонки, сжимающее этотъ промежутокъ.

Такъ какъ напряженіе первой шпонки опредѣляется сопротивленіемъ смятію врубки, то по сему сила, растягивающая промежутокъ тп, будетъ:

$$R_1(д-к)е - R_4 ке$$

Дѣйствуя на полное сѣченіе де бруса въ промежуткѣ тп, часть этой силы будетъ растягивать выступъ бруса между первыми двумя врубками, а именно

На 1 кв. дюймъ сѣченія де дѣйствуетъ $R_1\frac{д-к}{д} - R_4\frac{к}{д}$

На площадь сѣченія выступа ке

$$\left[R_1\frac{д-к}{д} - R_4\frac{к}{д}\right] ке.$$

Но найденная сила, растягивающая выступъ между врубками, передается ему сжатіемъ матеріала по плоскости тп, отдѣляющей выступъ отъ остальной части бруса, слѣдовательно матеріалъ при этомъ выдерживаетъ въ плоскости тп скалывающее усиліе, равное передаваемой силѣ,

растягивающей выступъ. Къ этому скалывающему усилію, зависящему отъ растяженія промежутка между шпонками, прибавляется еще скалывающее усиліе отъ напора первой шпонки, такъ что наибольшее скалывающее усиліе, могущее существовать въ плоскости т п, будетъ:

$$\left[R_1\left(1-\frac{\kappa'}{\delta}\right)-R_4\frac{\kappa'}{\delta}\right]k\varepsilon+R_4k\varepsilon,$$

или по сокращеніи:

$$(R_1+R_4)\left(1-\frac{\kappa}{\delta}\right)k\varepsilon.$$

Называя l длину промежутка т п, сопротивленіе скалыванію выступа будетъ

$$R_3 l\varepsilon,$$

и наименьшая величина l, для разсматриваемаго промежутка будетъ та, при которой сопротивленіе скалыванію равно усилію стремящемуся произвести скалываніе, т. е.

$$R_3 l\varepsilon=(R_1+R_4)\left(1-\frac{\kappa}{\delta}\right)k\varepsilon,$$

откуда длина промежутка между двумя шпонками выходитъ:

$$l\geqq\frac{R_1+R_4}{R_3}\left(1-\frac{\kappa}{\delta}\right)\kappa.$$

Такъ напримѣръ для сосновыхъ брусьевъ было бы:

$$l\geqq\frac{35+20}{4}\left(1-\frac{\kappa}{\delta}\right)\kappa=(\text{ок.})\,14\left(1-\frac{\kappa}{\delta}\right)\kappa.$$

Отсюда видно, что наименьшая длина промежутка между шпонками увеличивается вмѣстѣ съ толщиною брусьевъ, но только до предѣла:

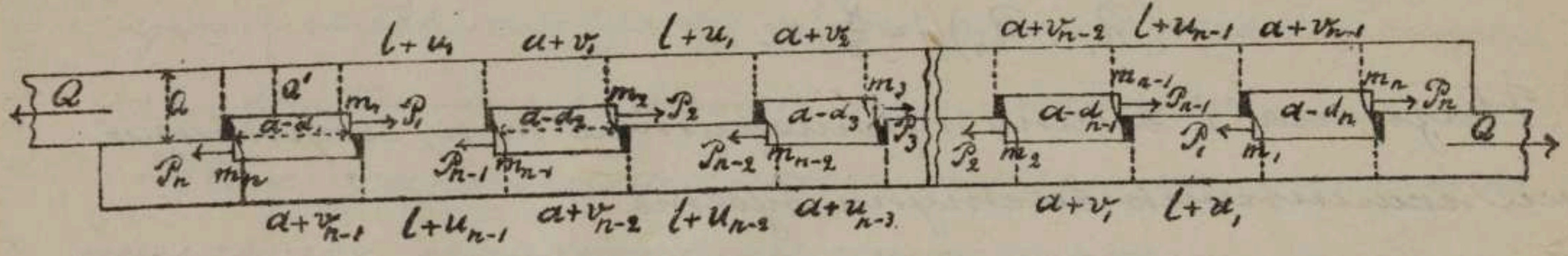
$$l=14\kappa.$$

Для 4 хъ дюймовыхъ досокъ, при глубинѣ врубки к

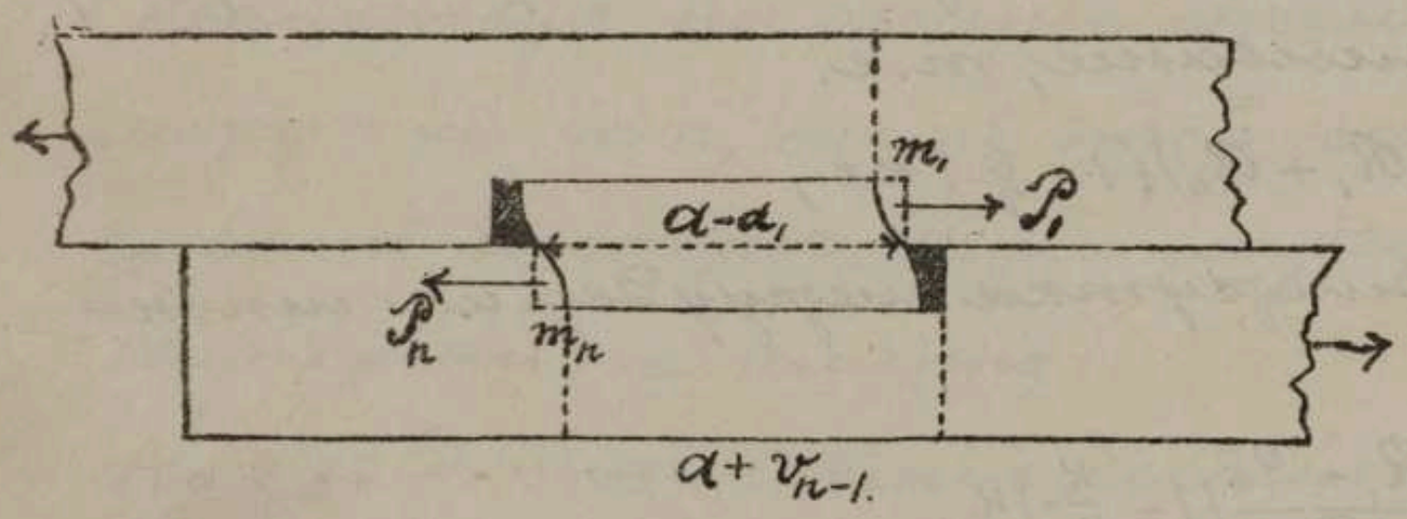
въ 1 дюймъ, имѣемъ бы:

$$l = 14\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10\frac{1}{2} \text{ дюйм.}$$

Переходя къ опредѣленію напряженія крайнихъ и среднихъ шпонокъ, замѣтимъ, что эти силы также какъ и при соединеніи деревянныхъ листовъ заклёпками, должны зависѣть отъ измѣненія вида системы при ея растягиваніи.



Измѣненіе вида системы очевидно будетъ состоять въ томъ, что всѣ части брусьевъ нѣсколько удлинятся, сообразно своимъ размѣрамъ и силамъ къ растягивающимъ; крюя врубокъ сомкнутся, шпонки укоротятся отъ сжимающихъ силъ и образуютъ во врубкахъ зазоры (: зачеркнутые на чертежѣ :); сверхъ того шпонки перекосятся отъ дѣйствія перерѣзывающихъ силъ, и оси ихъ нѣсколько отклонятся отъ направленія, перпендикулярнаго къ плоскости касанія брусьевъ.



Легко видѣть, что если части брусьевъ не-раз-
единяются, то ихъ удлиненія, равно какъ и уко-
роченія и отклоненія шпонокъ должны другъ отъ
друга зависѣть; но съ другой стороны они также
должны зависѣть и отъ силъ ихъ производящихъ,
т.е. отъ напряженій шпонокъ. И такъ если вы-
разимъ уравненіями взаимную зависимость
между удлиненіями, сжатіями и отклоненіями
частей системы, и другими уравненіями зави-
симость этихъ величинъ отъ напряженій шпо-
нокъ, то можно будетъ вывести и уравненія для
опредѣленія напряженій шпонокъ.

Для сего чрезъ α длину шпонки и
чрезъ l длину промежутка между двумя смеж-
ными шпонками до удлиненія вида систе-
мы; чрезъ

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n$$

укороченія длины α шпонокъ отъ ихъ сжатія, счи-
тая эти величины отъ 1ой шпонки близъ цѣлв-
ной части бруса до его конца; чрезъ

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_{n-1}$$

удлиненія промежутковъ l между первыми двумя,
вторыми двумя и т.д. смежными шпонками,
считая также какъ и выше; чрезъ

$$v_1, v_2, v_3, \ldots v_{n-1}$$

увеличенія длины α ослабленныхъ частей брусьевъ
при 2ой, 3ей, 4ой ... nой врубкахъ, и наконецъ чрезъ

$$w_1, w_2, w_3, \ldots w_{n-1}, w_n$$

отклонения кромокъ или реберъ гипонокъ отъ ихъ положенія, существовавшаго до цилиндрованія виды.

За тѣмъ выразимъ длину промежутка между сосѣдними ребрами первыхъ двухъ врубокъ одного бруса въ зависимости отъ цилиндрованныхъ цилиндрическихъ частей этого бруса, и потомъ тоже длину опредѣлимъ въ зависимости отъ цилиндрованныхъ цилиндрическихъ частей другого бруса и двухъ гипонокъ. Тождественность двухъ этихъ выраженій одной и той же величины очевидно дастъ одно изъ уравненій для рѣшенія вопроса. Такимъ образомъ найдемъ для одного бруса длину промежутка между ребрами врубокъ: $l + u_1 + a + v_1 + m_2 - m_1$ и такая длина, считаемая по другому брусу будетъ:

$$a - d_2 - m_{n-1} + l + u_{n-1} + a + v_{n-1} + m_n - a + d_1$$

Сравнивая эти два выраженія и сокращая, найдемъ:

$$u_1 - u_{n-1} + v_1 - v_{n-1} = d_1 - d_2 + m_1 - m_2 + m_n - m_{n-1}$$

Но для равновѣсія каждой гипонки необходимо, чтобы силы, сумма которыхъ ее въ обѣихъ сторонъ были между собою равны, и слѣдовательно въ каждой гипонкѣ противудѣйствія ея ребра должны отклоняться на ту же величину отъ первоначальнаго положенія; и такъ должно быть:

$$m_1 = m_n \quad \text{и} \quad m_2 = m_{n-1}.$$

Изменяя сообразно этому найденное уравнение, и составляя такія же уравненія для всѣхъ промежутковъ между сосѣдними ребрами двухъ смежныхъ врубокъ, получимъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u_{n-1} + v_1 - v_{n-1} &= \alpha_1 - \alpha_2 + 2(m_1 - m_2) \\ u_2 - u_{n-2} + v_2 - v_{n-2} &= \alpha_2 - \alpha_3 + 2(m_2 - m_3) \\ u_3 - u_{n-3} + v_3 - v_{n-3} &= \alpha_3 - \alpha_4 + 2(m_3 - m_4) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n-1} - u_1 + v_{n-1} - v_1 &= \alpha_{n-1} - \alpha_n + 2(m_{n-1} - m_n) \end{aligned}\right\} (u)$$

Число этихъ уравненій будетъ равно числу промежутковъ между шпонками, т. е. единицею меньше числа шпонокъ n.

Выразимъ теперь величины

$$u, v, \alpha, m$$

въ зависимости отъ напряженій шпонокъ или равныхъ имъ давленій врубокъ на грани шпонокъ, и для сего изобразимъ эти напряженія чрезъ

$$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots P_{n-1}, P_n,$$

причемъ тутъ же замѣтимъ, что такъ какъ давленія, дѣйствующія на двѣ противоположныя грани каждой шпонки, для ея равновѣсія, должны быть равны то:

$$P_1 = P_n\,;\; P_2 = P_{n-1}\,;\; P_3 = P_{n-2}\,;\; \ldots\ldots$$

Такъ какъ промежутокъ между первыми двумя шпонками и слѣдующая за ними ослабленная часть бруса у второй врубки растягиваются суммою напряженій всѣхъ шпонокъ за исключе-

ченіемъ первой пипонки, то сила, растягивающая эти двѣ части бруса выразится чрезъ:

$$P_2 + P_3 + P_4 + \ldots\ldots\ldots + P_n,$$

или если для краткости сдѣлаемъ

$$Q = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_n,$$

то это сила выразится чрезъ

$$Q - P_1,$$

гдѣ Q очевидно также выражаетъ силу растягивающую оба соединенные бруса.

Сила $Q - P_1$, дѣйствуя на промежутокъ l между первыми двумя пипонками, удлиняетъ его на u_1, слѣдовательно, изображая его поперечное сѣченіе черезъ Ω имѣемъ

$$Q - P_1 = E\Omega\frac{u_1}{l};$$

откуда

$$u_1 = \frac{l}{E\Omega}(Q - P_1).$$

Такая сила, дѣйствуя на ослабленную часть a бруса, которой поперечное сѣченіе пусть будетъ Ω', удлиняетъ ее на v_1 и слѣдовательно:

$$Q - P_1 = E\Omega'\frac{v_1}{a}$$

откуда

$$v_1 = \frac{a}{E\Omega'}(Q - P_1).$$

Такимъ же образомъ, для частей другого бруса, находящихся при тѣхъ же пипонкахъ какъ и разсмотрѣнныя части перваго бруса, легко видѣть, что такъ какъ они растя-

гиваются силою P_n, равною как выше сказано силе P_1, и так как эта сила удлиняет часть бруса l на u_{n-1}, и часть бруса a на v_{n-1}, то:

$$P_n = P_1 = E\Omega \frac{u_{n-1}}{l} \quad \text{и} \quad P_n = P_1 = E\Omega' \frac{v_{n-1}}{a};$$

откуда

$$u_{n-1} = \frac{l}{E\Omega} P_1 \quad \text{и} \quad v_{n-1} = \frac{a}{E\Omega'} P_1,$$

а с помощью этих выражений легко найти:

$$u_1 - u_{n-1} = \frac{l}{E\Omega}(Q - 2P_1)$$

$$v_1 - v_{n-1} = \frac{a}{E\Omega'}(Q - 2P_1)$$

$$u_1 - u_{n-1} + v_1 - v_{n-1} = \left(\frac{l}{E\Omega} + \frac{a}{E\Omega'}\right)(Q - 2P_1)$$

Действуя таким образом относительно промежутка между второю и третьею шпонками, растягиваемого силою,

$$Q - P_1 - P_2,$$

и относительно соответствующего ему промежутка в другом брусе, растягиваемого силою:

$$P_n + P_{n-1} \quad \text{или} \quad P_1 + P_2$$

получим, подобно предыдущему, уравнение:

$$u_2 - u_{n-2} + v_2 - v_{n-2} = \left(\frac{l}{E\Omega} + \frac{a}{E\Omega'}\right)(Q - 2P_1 - 2P_2).$$

и так и для прочих частей брусьев найдут-

ся уравнения:

$$u_3 - u_{n-3} + v_3 - v_{n-3} = \left(\frac{l}{E\Omega} + \frac{a}{E\Omega'}\right)(Q - 2P_1 - 2P_2 - 2P_3)$$

. . . . . и т. д. . . . . .

Для определения укорочения α, длины a первой шпонки, сжатой силою P_1, имеем, если изобра-

зимъ чрезъ то поперечное сѣченіе шпонки перпендикулярное къ плоскости ксаанія брусьевъ,

$$P_1 = \mathcal{E}\omega \frac{\alpha_1}{a} \; ; \quad \text{откуда} \quad \alpha_1 = \frac{a}{\mathcal{E}\omega} P_1$$

Такимъ же образомъ для 2ой и 3ей и т. д. шпонокъ найдемъ:

$$\alpha_2 = \frac{a}{\mathcal{E}\omega} P_2 \; , \quad \alpha_3 = \frac{a}{\mathcal{E}\omega} P_3 \; , \quad \alpha_4 = \frac{a}{\mathcal{E}\omega} P_4 , \; \ldots\ldots$$

и слѣдовательно

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{a}{\mathcal{E}\omega}(P_1 - P_2)$$

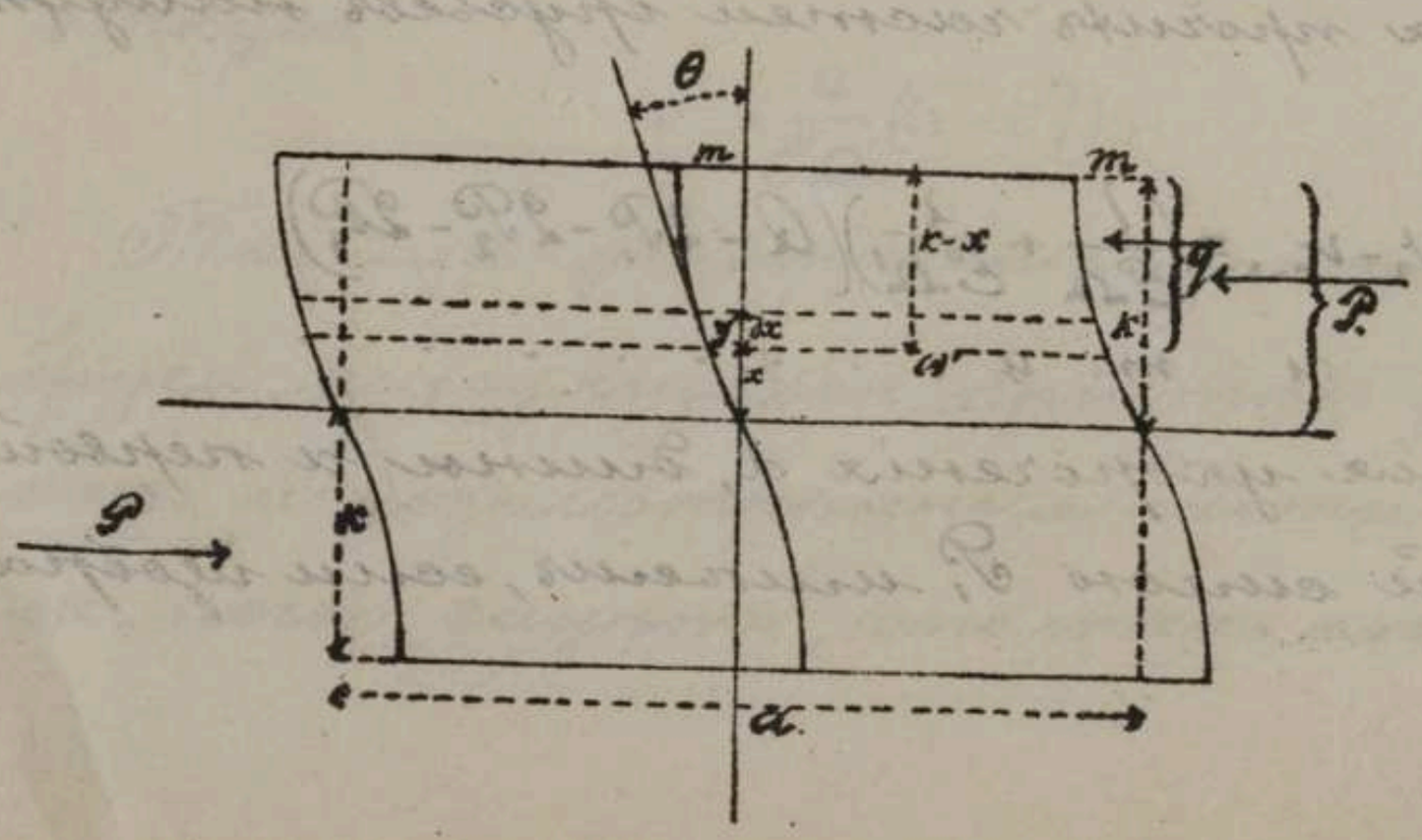
$$\alpha_2 - \alpha_3 = \frac{a}{\mathcal{E}\omega}(P_2 - P_3)$$

$$\alpha_3 - \alpha_4 = \frac{a}{\mathcal{E}\omega}(P_3 - P_4)$$

. . . и т. д. . . .

За тѣмъ остается опредѣлить еще отклоненія точекъ реберъ шпонокъ отъ положенія ихъ, существовавшаго до измѣненія вида, производимыя перерѣзывающими усиліями, дѣйствующими на шпонки. Для сего отдѣлимъ внутри шпонки безконечно тонкій слой, ограниченный плоскостями параллельными плоскости ксаанія брусьевъ,

и изображенный чрезъ θ уголъ наклоненія оси слоя къ первоначальному направленію ея, изображаемъ еще чрезъ q ту



часть давленія P, сжимающаго шпонку, которая производитъ наклоненіе оси слоя, стремясь перерѣзать шпонку по плоскости слоя, и черезъ то' поперечное сѣченіе шпонки, вдоль котораго сила q стремится перерѣзать шпонку. Тогда на основаніи сказаннаго въ общей теоріи упругости о силѣ упругости, проявляющейся въ тѣлѣ при дѣйствіи перерѣзывающихъ усилій, находимъ для силы упругости въ сѣченіи то' разсматриваемаго слоя шпонки выраженіе:

$$Q\omega'\theta.$$

гдѣ Q изображаетъ коэфиціентъ упругости, относящійся къ перерѣзыванію матеріала шпонки. Но какъ сила упругости, сопротивляющаяся перерѣзыванію, очевидно должна уравновѣсить силу q, стремящуюся произвести перерѣзываніе, то находимъ уравненіе

$$q = Q\omega'\theta.$$

Въ этомъ уравненіи, уголъ θ, по незначительности измѣненія вида шпонки, такъ мало, что можетъ быть замѣненъ черезъ $tg\,\theta$; а изображая черезъ x и y координаты центра сѣченія то' относительно первоначальной прямой оси шпонки, принимаемой за ось абсциссъ, и черезъ dx толщину разсматриваемаго слоя шпонки, находимъ:

$$\theta = tg\,\theta = \frac{dy}{dx}.$$

и вслѣдствіе сего:

$$q = Q\omega'\frac{dy}{dx}.$$

Это дифференціальное уравненіе, опредѣляющее зависимость между координатами x и y, представляетъ уравненіе кривой изогнутой оси шпонки. Чтобы изъ него опредѣлить ординату т крайней точки кривой, надобно предварительно найти величину силы q. Сила q, стремящаяся перерѣзать шпонку по плоскости то' слоя, очевидно равна той части давленія P, которая при распредѣленіи этого давленія по точкамъ сжатой грани шпонки, приходится на часть грани между разсматриваемымъ слоемъ и верхнею плоскостію шпонки, соотвѣтствующую части x – x оси. Пусть p изображаетъ давленіе на 1 квадр. дюймъ сжатой грани разсматриваемаго слоя, тогда давленіе на всю площадь e dx грани слоя будетъ:

$$p.e.dx$$

и сумма такихъ давленій, соотвѣтствующихъ всѣмъ слоямъ между абсциссою x и абсциссою k, представитъ давленіе q, стремящееся перерѣзать шпонку по площади $\overline{w}$, соотвѣтствующей абсциссѣ x, т.е.

$$q = e\int_x^k p\,dx.$$

Величина подъ интегральной функціи p зависитъ отъ того, какимъ образомъ распредѣляется давленіе P по различнымъ частямъ

сжатой грани шпонки. Так как шпонка сжимается врубкою бруса, и врубка очевидно претерпѣваетъ наибольшее измѣненіе вида у своего ребра, давящаго на средину грани шпонки, то давленія на различныя части грани шпонки должны увеличиваться начиная отъ ея ребра, соотвѣтствующаго абсциссѣ $x = k$ до ея средины, соотвѣтствующей абсциссѣ $x = 0$. Принимая по этому для приблизительнаго вывода, что давленіе p увеличивается пропорціонально разстоянію $k - x$ его точки приложенія отъ наименѣе сжатаго ребра грани шпонки, можно написать:

$$p = C(k - x),$$

гдѣ C изображаетъ неизвѣстную постоянную величину. — Но тогда

$$q = e\int_x^k p\,dx = Ce\int_x^k (k - x)\,dx = Ce\frac{(k-x)^2}{2};$$

а такъ какъ при $x = 0$ давленіе q дѣлается равнымъ давленію P, то

$$P = Ce\frac{k^2}{2}; \quad \text{откуда} \quad C = \frac{2}{ek^2}P.$$

и вслѣдствіе этаго:

$$q = \frac{(k-x)^2}{k^2}\cdot P.$$

Итакъ подставляя вмѣсто q и f ихъ величины, получаемъ для опредѣленія вида кривой оси шпонки, дифференціальное уравненіе:

$$\cdot\, fw\frac{dy}{dx} = \frac{P}{k^2}(k - x)^2.$$

Для определения ординаты крайней точки кривой выводимъ:

$$\partial y = \frac{P}{g\omega' k^2}(k-x)^2 \partial x,$$

а интегрируя между предѣлами $x=0$ и $x=k$, и замѣчая что при $x=0$ будетъ $y=0$, а при $x=k$ будетъ $y=m$, находимъ:

$$\int_0^m \partial y = \frac{P}{g\omega' k^2} \int_0^k (k-x)^2 \partial x ;$$

или:

$$m = \frac{P}{g\omega' k^2} \cdot \frac{k^3}{3} = P \cdot \frac{k}{3g\omega'} .$$

По этой формулѣ получаемъ для отклоненій реберъ, шпонокъ, связывающихъ брусья, слѣдующія выраженія:

$$m_1 = \frac{k}{3g\omega'} P_1 \; ; \quad m_2 = \frac{k}{3g\omega'} P_2 \; ; \quad m_3 = \frac{k}{3g\omega'} P_3 \quad \text{и т. д.}$$

вмѣстѣ съ тѣмъ находимъ

$$m_1 - m_2 = \frac{k}{3g\omega'}(P_1 - P_2)$$

$$m_2 - m_3 = \frac{k}{3g\omega'}(P_2 - P_3)$$

$$m_3 - m_4 = \frac{k}{3g\omega'}(P_3 - P_4)$$

. . . и т. д. . . .

Найдя зависимость количествъ

$$u, v, \alpha \text{ и } \tau$$

отъ напряженій шпонокъ, можемъ эти количества исключить изъ выше найденныхъ уравненій (и), выражающихъ взаимную зави-

сплошность ихъ, и получить уравнения для опредѣленія напряженій. Такимъ образомъ, первое изъ уравненій (и), т. е.

$$u_1 - u_{n-1} + v_1 - v_{n-1} = \alpha_1 - \alpha_2 + 2(m_1 - m_2)$$

вслѣдствіе найденныхъ равенствъ:

$$u_1 - u_{n-1} + v_1 - v_{n-1} = \left(\frac{l}{\mathcal{E}\Omega} + \frac{a}{\mathcal{E}\Omega'}\right)(Q - 2P_1)$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{a}{\mathcal{E}\omega}(P_1 - P_2)$$

$$m_1 - m_2 = \frac{K}{3G\omega'}(P_1 - P_2)$$

приметъ видъ:

$$\left(\frac{l}{\mathcal{E}\Omega} + \frac{a}{\mathcal{E}\Omega'}\right)(Q - 2P_1) = \left(\frac{a}{\mathcal{E}\omega} + \frac{2K}{3G\omega'}\right)(P_1 - P_2),$$

или

$$(Q - 2P_1) = \left[\frac{a\Omega\Omega'}{\omega(l\Omega' + a\Omega)} + \frac{2\mathcal{E}K\Omega\Omega'}{3G\omega'(l\Omega' + a\Omega)}\right](P_1 - P_2);$$

или же, сдѣлавъ для краткости:

$$A = \left[\frac{a\Omega\Omega'}{\omega(l\Omega' + a\Omega)} + \frac{2\mathcal{E}K\Omega\Omega'}{3G\omega'(l\Omega' + a\Omega)}\right],$$

выходитъ:

$$Q - 2P_1 = A(P_1 - P_2).$$

Примѣняя это преобразованіе ко всѣмъ уравненіямъ (и), не трудно найти уравненія:

$$Q - 2P_1 = A(P_1 - P_2)$$

$$Q - 2P_1 - 2P_2 = A(P_2 - P_3)$$

$$Q - 2P_1 - 2P_2 - 2P_3 = A(P_3 - P_4)$$

. . . . . и т. д.

Число этихъ уравненій, какъ выше сказано, единицею меньше числа опоръ или числа искомыхъ напряженій ихъ P_1, но если къ нимъ прибавимъ уравненіе:

$$Q = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots + P_n,$$

то получимъ число уравненій равное числу неизвѣстныхъ. Впрочемъ здѣсь можно замѣтить, что вслѣдствіе равенствъ

$$P_1 = P_n,\ P_2 = P_{n-1},\ P_3 = P_{n-2},\ \ldots\ldots\ldots,$$

получившихъ для вывода предъидущихъ уравненій, число неизвѣстныхъ сокращается на половину, и въ каждомъ частномъ случаѣ придется рѣшать только половинное число уравненій; остающіяся же уравненія обратятся въ тождества.

Примѣнимъ найденныя уравненія къ случаю, когда два бруса связаны $3^{мя}$ шпонками. Тогда для опредѣленія напряженій P_1, P_2 и P_3 имѣемъ уравненія:

$$Q = P_1 + P_2 + P_3$$

$$Q - 2P_1 = A(P_1 - P_2)$$

$$Q - 2P_1 - 2P_2 = A(P_2 - P_3);$$

и вслѣдствіе равенства: $P_1 = P_3$ остаются только двѣ неизвѣстныя P_1 и P_2, для опредѣленія которыхъ достаточно $2^{хъ}$ первыхъ уравненій, принимающихъ видъ:

$$Q = 2P_1 + P_2$$

$$Q - 2P_1 = A(P_1 - P_2);$$

третье же уравненіе есть тождество, потому что если его сложить совторымъ, то получается первое уравненіе.

Рѣшая уравненія легко найти:

$$P_1 = P_3 = \frac{A+1}{3A+2}Q;\quad P_2 = \frac{A}{3A+2}Q;\quad P_2 = \frac{A}{A+1}P_1.$$

Для опредѣленія напряженій $4^{хъ}$ шпонокъ,

связывающих два бруса, имеем равенства:

$$P_1 = P_4 \quad \text{и} \quad P_2 = P_3$$

и уравнения

$$Q = 2P_1 + 2P_2$$

$$Q - 2P_1 = A(P_1 - P_2),$$

откуда легко вывести

$$P_1 = P_4 = \frac{A+2}{4(A+1)} Q; \quad P_2 = P_3 = \frac{A}{4(A+1)} Q$$

$$\text{и } P_2 = \frac{A}{A+2} P_1.$$

Для соединения брусьев 5-ю шпонками, имеем равенства:

$$P_1 = P_5 \quad \text{и} \quad P_2 = P_4$$

и уравнения:

$$Q = 2P_1 + 2P_2 + P_3$$

$$Q - 2P_1 = A(P_1 - P_2)$$

$$Q - 2P_1 - 2P_2 = A(P_2 - P_3),$$

откуда легко найти следующия относительныя величины напряжений средних шпонокъ.

$$P_2 = P_4 = \frac{A(A+1)}{A^2+4A+2} P_1 \quad \text{и} \quad P_3 = \frac{A^2}{A^2+4A+2} P_1.$$

Чтобы выведенныя формулы могли служить для суждения о прочности соединения брусьевъ данныхъ размеровъ и материала, остается еще определить численную величину количества

$$A = \frac{a\Omega\Omega'}{\omega(l\Omega' + a\Omega)} + \frac{2Ek\Omega\Omega'}{3Gw'(l\Omega' + a\Omega)}.$$

Принимая выше выведенные размеры шпонокъ и промежутковъ между шпонками имеем:

$$a = 7k, \quad l = 14k, \quad \omega = 2ke, \quad \omega' = ae = 7ke, \quad \Omega = de, \quad \Omega' = (d-k)e;$$

подставляя эти величины и сокращая, находим:

$$A = \frac{\partial(\partial - к)}{2к(3\partial - 2к)}\left(1 + \frac{4\varepsilon}{147.g}\right)$$

Для дерева и железа можно принять для отношения коэффициентов упругости при близительную величину

$$\frac{\varepsilon}{g} = 3.$$

и тогда выходит

$$A = \frac{53(\partial - к).\partial}{98(3\partial - 2к)к}.$$

По этой формуле, для соединения 4 х дюймовых сосновых досок дубовыми шпонками, при глубине врубки $к = 1$ дюйм., находим:

$$A = \frac{53.4.3}{98.10} = 0{,}649,$$

или приблизительно:

$$A = \frac{3}{5}$$

При этой величине A имеем:

Для 3 х шпонок $P_2 = \frac{A}{A+1} P_1 = \frac{3}{8} P_1$

— 4 х — $P_2 = \frac{A}{A+2} P_1 = \frac{1}{4} P_1$

— 5 ти — $P_2 = \frac{A(A+1)}{A^2+4A+2} P_1 = \frac{1}{5} P_1$

— " — $P_3 = \frac{A^2}{A^2+4A+2} P_1 = \frac{3}{40} P_1 = \frac{3}{8} P_2$

При исчислении прочности поясов балок Веревьинского моста, Г. Журавский принимает, что при соединении 4 х дюйм. досок тремя шпонками, напряжение средней,

накладки равно $\frac{1}{2}$ напряжения каждой крайней, основываясь на томъ, что при опытахъ надъ растяженіемъ брусковъ, связанныхъ тремя накладками, зазоръ у средней накладки составлялъ около половины зазора у крайнихъ накладокъ. Выше выведенныя формулы приводятъ къ величинѣ относительнаго напряженія, мало отличающейся отъ принятой Г. Журавскимъ.

Изложенная теорія не вполнѣ можетъ быть применена къ опредѣленію отношеній между напряженіями заклепокъ, связывающихъ крайніе листы, потому что заклепки, при кругломъ поперечномъ сѣченіи, сминаются иначе по направленію діаметра сѣченія, чѣмъ накладки съ прямоугольнымъ поперечнымъ сѣченіемъ. Однако если предположить что круглыя заклепки замѣнены квадратными въ тою же толщиною, то изъ предыдущихъ формулъ, можно получить приблизительные выводы надъ заклепокъ. Такимъ образомъ для опредѣленія количества A, сохраняя буквамъ тѣ значенія, которыя имъ приданы при изложеніи теоріи заклепокъ, и предполагая толщину δ заклепокъ вдвое больше толщины соединяемыхъ листовъ, имѣемъ для трехъ и четырехъ рядовъ заклепокъ:

$$a = \delta = 2e;\ l = l_1 = \tfrac{5}{2}e;\ \omega = 2\delta e = 4e^2;\ \omega' = \delta^2 = 4e^2;\ \Omega = le = 10e^2;\ \Omega' = (l-d)e = 8e^2;\ K = 0;$$

а подставляя эти величины въ выраженіе A:

$$A = \frac{2.10.8.e^5}{4(20+20)e^5} + \frac{2.3.1.10.8.e^5}{3.1.4(20+20)e^5} = 2.$$

По этому для напряжений заклепокъ най-
демъ при 3^хъ рядахъ заклепокъ: $P_2 = \frac{A}{A+1} P_1 = \frac{2}{3} P_1$
— 4 ——— ——— $P_2 = \frac{A}{A+2} P_1 = \frac{1}{2} P_1$.

Возвращаясь къ изслѣдованію соединенія брусьевъ и досокъ шпонками, опредѣлимъ теперь сопротивленіе такого соединенія разрыву, взявъ для примѣра 4^хъ дюймовыя сосновыя доски, соединенныя дубовыми шпонками, при глубинѣ врубки к въ 1 дюймъ.

Сопротивленіе разрыву очевидно равно суммѣ напряженій всѣхъ шпонокъ, предполагая что наиболѣе напряженная шпонка производитъ на врубку давленіе, не превосходящее прочнаго сопротивленія врубки смятію, т. е. предполагая что напряженіе крайней шпонки P_1 опредѣляется равенствомъ:

$$P_1 = R_4 ke = 20e \text{ пуд.}$$

По этому для 3^хъ шпонокъ получимъ сопротивленіе разрыву соединенія досокъ:

$$Q = 2P_1 + P_2 = (2 + \tfrac{3}{8}) P_1 = 47{,}5\,e$$

Сопротивленіе же разрыву цѣльной 4^хъ дюймовой доски будетъ

$$R_1 de = 35.4\,e = 140\,e$$

и отношеніе

$$\frac{Q}{R_1 de} = \frac{47{,}5\,e}{140\,e} = 0{,}34$$

Итакъ, при трехъ шпонкахъ сохраняется 34 процента сопротивленія цѣльной доски разрыву.

Для четырех шпонок сопротивление разрыву соединения досок:

$$Q = 2P_1 + 2P_2 = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)P_1 = \frac{5}{2}\cdot 20.e = 50e.$$

и следовательно сокращается 36 процентов сопротивления цельной доски.

Для пяти шпонок сопротивление связи будет:

$$Q = 2P_1 + 2P_2 + P_3 = \left(2 + 2\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{40}\right) * P_1 = \frac{99}{40}\cdot 20.e = 50e$$

Итак соединение 4-х дюймовых досок пятью шпонками, нисколько не прочнее соединения их четырмя шпонками.

Эти выводы объясняют одно из главных затруднений, встречаемых при сооружении деревянных мостовых балок с большими пролетами. Не прочность продольных соединений брусьев и досок, заставляет придавать растягиваемым частям значительно большия измерения, чем те, которые были бы нужны, если бы части состояли из цельного материала. Увеличение же размеров частей влечет за собою увеличение веса балки, и на столько же уменьшает посторонний груз, который она в состоянии выдержать.

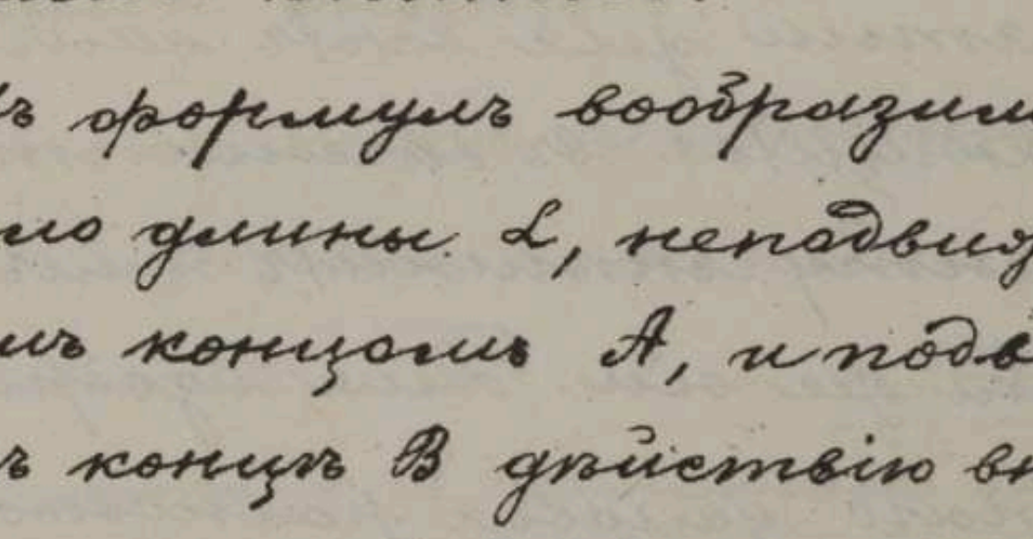
О скручиваніи

Если призматическое тѣло подвержено дѣйствію нѣсколькихъ силъ, перпендикулярныхъ къ его оси и стремящихся вращать его около оси въ противныя между собою стороны, то измѣненіе вида, отъ этого происходящее, называется скручиваніемъ тѣла. Если эти внѣшнія силы постепенно увеличиваются, то вмѣстѣ съ тѣмъ и самое измѣненіе вида тѣла, т. е. скручиваніе увеличивается и наконецъ можетъ произойти изломъ. Примѣры скручиванія часто встрѣчаются въ машинахъ, находящихся въ движеніи; такъ напр. если на валъ машины вращающемъ движителемъ расположены зубчатыя колеса, шкивы или какіе нибудь другіе приборы для сообщенія и преобразованія движенія, подверженные дѣйствію сопротивленій, которыя должны быть преодолѣваемы движителемъ, то движитель вращаетъ валъ въ одну сторону, а сопротивленія стремятся произвести вращеніе въ другую, противную сторону, и слѣдовательно валъ скручивается во время своего движенія.

Изъ этого видно, что можетъ встрѣчаться вопросъ, какія измѣренія должны дать-

скручивающему тому, чтобы, при действіи данныхъ внѣшнихъ силъ, измѣненіе его вида не переходило за извѣстный предѣлъ, за которымъ можетъ произойти неправильность или разстройство въ движеніи машины. Можетъ встрѣтиться и другой вопросъ, опредѣлить такія измѣренія тѣла, при которыхъ силы его скручивающія не въ состояніи произвести излома; или на оборотъ, опредѣлить какимъ скручивающимъ усиліямъ можно подвергать тѣло данныхъ измѣреній, безъ вреда для его прочности. Для этихъ вопросовъ не трудно вывести приблизительныя формулы, могущія служить для ихъ разрѣшенія, если нѣкоторые коэффиціенты, входящіе въ эти формулы, предварительно опредѣлить изъ сравненія результатовъ вычисленій съ результатами опытовъ.

Для вывода такихъ формулъ вообразимъ призматическое тѣло длины l, неподвижно закрѣпленное одними концомъ A, и подверженное на другомъ своемъ концѣ B дѣйствію внѣшнихъ силъ, изображеннымъ дѣйствіемъ силы P, – приложенной въ C на разстояніи l отъ оси тѣла и перпендикулярной къ этой оси. Обратимся вниманіе на одно изъ поперечныхъ сѣченій $m\,n$, по которому соприкасаются два безконечно тонкіе слоя тѣла, легко видно,



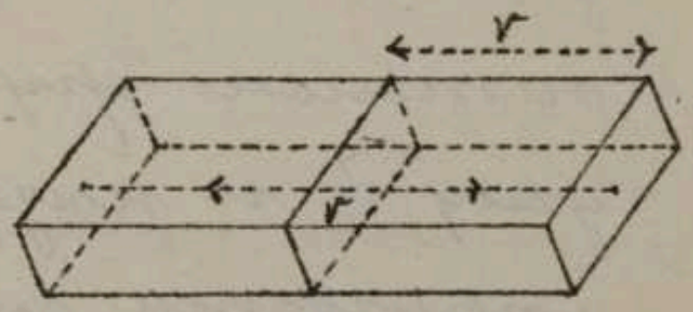
что если бы не было силы упругости въ поперечномъ сѣченіи m n, то часть тѣла m n B отъ дѣйствія скручивающихъ силъ повернулась бы около оси AB и скользя параллельно площади m n, отодвинулась бы отъ остальной части тѣла m n A; а слѣдовательно, если разъединенія при сѣченіи m n не происходитъ, то это значитъ, что силы упругости, сопротивляясь вращенію части m n B, уравновѣшиваютъ дѣйствіе внѣшнихъ силъ, производящихъ скручиваніе. Но внѣшнія силы перпендикулярны къ оси, и силы упругости, дѣйствующія въ сѣченіи m n и направленныя по плоскости этого сѣченія, также перпендикулярны къ оси, слѣдовательно для равновѣсія части m n B очевидно нужно, чтобы моментъ относительно оси тѣла, взятый для всѣхъ силъ упругости, проявляющихся въ сѣченіи m n, былъ равенъ моменту внѣшнихъ силъ относительно той же оси. Для изображенія уравненіемъ этого условія равновѣсія, заключающаго въ себѣ рѣшеніе вышеприведеннаго вопроса объ изгибаніи вида тѣла, нужно опредѣлить моментъ силъ упругости, относительно оси тѣла для какого нибудь поперечнаго сѣченія m n, и потомъ приравнять этотъ моментъ моменту внѣшнихъ силъ,

т.е. количеству Pl или вообще количеству M, изображающему моменть внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на часть т п В тѣла, сколько бы ихъ ни было. Чтобы найти моменть силъ упругости проявляющихся въ поперечномъ сѣченіи т п, надо сперва найти величину силы упругости, дѣйствующей въ какомъ нибудь безконечно малыхъ элементовъ до этого поперечнаго сѣченія, опредѣлить моменть ея относительно центра сѣченія, и потомъ взять сумму всѣхъ подобныхъ моментовъ для всѣхъ элементовъ поперечнаго сѣченія.

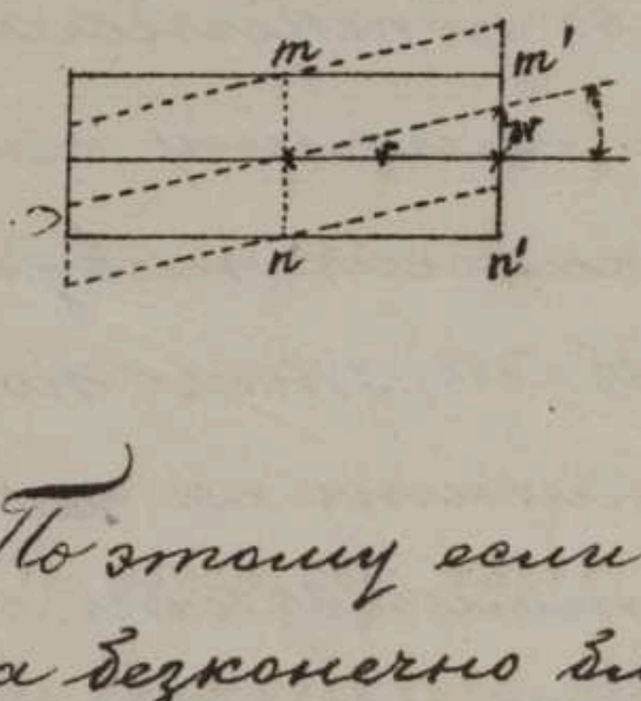
Такъ какъ здѣсь внѣшнія силы очевидно стремятся произвести скольженіе частицъ тѣла по плоскости сѣченія т п, то какъ извѣстно изъ предыдущаго сила упругости для элемента площади $d\omega$ будетъ

$$q\, d\omega\, \frac{dr}{r},$$

гдѣ r означаетъ разстояніе между центрами двухъ элементовъ тѣла, соприкасающихся по элементарной поверхности $d\omega$, или же r представитъ длину одного изъ элементовъ тѣла, въ случаѣ когда эта длина одна и таже для различныхъ элементовъ одной и той же продольной фибры тѣла ed; dr изобразитъ перемѣщеніе центра одного элемента тѣла относительно



центра другого смежного, или же когда всѣ элементы тѣла одинаковой длины, какъ это здѣсь принимается для большей простоты, то dr представитъ перемѣщеніе центра одного крайняго сѣченія элемента тѣла относительно центра другого его крайняго сѣченія.



Положимъ если возьмемъ въ разсмотрѣніе два безконечно близкія поперечныя сѣченія mn и $m'n'$, находящіяся другъ отъ друга на разстояніи r, и вслѣдствіе скручиванія повернувшіяся одно относительно другого на весьма малый уголъ α, въ плоскости $m'n'$,(*) тогда, изображая чрезъ ρ разстояніе элемента $d\omega$ до центра сѣченія тѣла, перемѣщеніе одной элементарной площади относительно другой будетъ пропорціонально углу α и разстоянію ρ; т.е. $dr = \rho\alpha$, и сила упругости для $d\omega$ будетъ:

$$y\, d\omega \frac{\rho\alpha}{r}.$$

(*) На чертежѣ радіусы oa и oa' предполагаются первый въ плоскости сѣченія mn, а второй въ $m'n'$; оба параллельны до скручиванія тѣла, а послѣ скручиванія составляютъ уголъ $aoa' = \alpha$.

Но если скручиваемое тѣло однородно и раздѣлено на элементы одинаковой длины, то во всѣхъ элементахъ проявится одинаковое скручиваніе, такъ что уголъ α и длина элемента r будутъ величины постоянныя для всѣхъ различныхъ сѣченій тѣла, подобныхъ т п, а слѣдовательно если число различныхъ поперечныхъ сѣченій по всей длинѣ тѣла отъ A до B изобразимъ чрезъ n, то $n\alpha$ будетъ равно углу θ, на который крайнее сѣченіе B при скручиваніи повернулось относительно другого крайняго сѣченія A, количество же nr представитъ длину L тѣла. По этому:

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{n\alpha}{nr} = \frac{\theta}{L}$$

а сила упругости будетъ:

$$g\frac{\theta}{L}\rho\, d\omega,$$

и затѣмъ моментъ этой силы относительно центра сѣченія будетъ:

$$g\frac{\theta}{L}\rho^2 d\omega.$$

Вслѣдствіе сего искомое уравненіе представится въ видѣ:

$$g\frac{\theta}{L}\int \rho^2 d\omega = M,$$

гдѣ $\int \rho^2 d\omega$ изображаетъ сумму произведеній изъ элементовъ площади сѣченія на квадраты ихъ разстояній до центра сѣченія, взятую для всѣхъ элементовъ до одного и того же сѣченія т п. Эта сумма, $\int \rho^2 d\omega$, зависящая очевидно только отъ вида и размѣровъ поперечнаго сѣченія т п, носитъ названіе полярнаго момента инерціи площади т п и

для краткости будетъ здѣсь изображена буквою I', такъ что предыдущее уравненіе приметъ видъ:

$$g\frac{\theta}{l}I' = M .$$

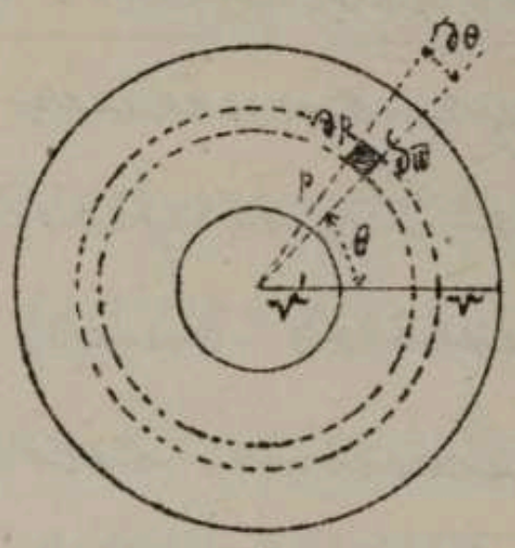
Чтобы это уравненіе могло быть примѣнено для опредѣленія измѣненія вида тѣла отъ дѣйствія внѣшнихъ силъ, т. е. для опредѣленія угла кручения θ, . очевидно нужно знать: во первыхъ величину момента инерціи I', въ зависимости отъ измѣренія поперечнаго сѣченія тѣла, и во вторыхъ величину коэффиціента упругости g соотвѣтствующаго матеріалу тѣла.

Изъ сравненія результатовъ этой формулы съ опытами оказалось, что она достаточно вѣрна для практики, когда поперечное сѣченіе тѣла есть кругъ или правильный многоугольникъ близко подходящій къ кругу, полный или пустой внутри; при другихъ же сѣченіяхъ, напр. при прямоугольникѣ, результаты формулы не сходны съ опытами, что происходитъ отъ того, что при скручиваніи тѣла съ прямоугольнымъ или другого вида поперечнымъ сѣченіемъ, сѣченія тѣла не остаются плоскими и не сохраняютъ своего вида, какъ это предполагалось при выводѣ предыдущей формулы. Впрочемъ рѣдко случается,

чтобы скручиваемыя тѣла имѣли сѣченіе значительно отличающееся отъ круглаго, а потому можно ограничиться выводомъ величины момента инерціи только для круглаго сѣченія.

Положимъ что круглое внутри пустое сѣченіе имѣетъ внѣшній радіусъ r и внутренній r'.

Возмемъ на этомъ сѣченіи элементъ $d\omega$, ограниченный двумя радіусами, образующими съ которымъ нибудь изъ діаметровъ углы θ и $\theta + d\theta$, и двумя дугами круга, которыхъ радіусы ρ и $\rho + d\rho$ тогда:



$$d\omega = \frac{d\theta(\rho + d\rho)^2}{2} - \frac{d\theta\rho^2}{2} = \frac{d\theta}{2}(2\rho \cdot d\rho + d\rho^2).$$

Въ этомъ выраженіи, количество $d\rho^2$ нужно отбросить, какъ безконечно малую величину высшаго порядка, не входящую въ выраженіе дифференціала $d\omega$, слѣдовательно:

$$d\omega = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta; \quad I' = \int \rho^2 d\omega = \int_{r'}^{r} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta.$$

и поэтому для круглаго сѣченія, внутри пустаго:

$$I' = \frac{\pi(r^4 - r'^4)}{2};$$

а въ случаѣ если сѣченіе внутри полно, то

$$r' = 0 \quad \text{и} \quad I' = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Эту формулу можно принять какъ приблизи-

тельную и въ случаѣ, когда сѣченіе тѣла правильный многоугольникъ, подставляя вмѣсто средняго величину между радіусами вписаннаго и описаннаго круговъ периметра многоугольника.

Что касается до коэфиціента упругости q, то его можно опредѣлить по опытамъ слѣдующимъ образомъ: произведя опытъ надъ скручиваніемъ призматическаго тѣла данныхъ измѣреній и при дѣйствіи на него данныхъ силъ, очевидно можно измѣрить моментъ внѣшнихъ силъ M, длину тѣла L, и уголъ θ, на который одно крайнее сѣченіе повернется относительно другаго, и кромѣ того, по данными измѣреніямъ поперечнаго сѣченія тѣла, можно вычислить величину I', и тогда величина коэфиціента упругости q найдется изъ выше выведенной формулы и будетъ:

$$q = \frac{M.L}{\theta.I'},$$

Произведя подобные опыты и вычисленія нѣсколько разъ и взявъ средняго изъ найденныхъ величинъ, можно для коэфиціента упругости получить приблизительную величину, соотвѣтствующую матеріалу тѣла, надъ которымъ опыты производились.

Такимъ образомъ найдены слѣдующія

1.

средняя величина коэффициента упругости

$g^{(x.)}$

Для железа кованного 240'000 пуд. на 1 кв. дюйм

—— стали литой

мелкозернистой . . 400'000 ———— „ ————

—— чугуна . . . . . 78'000 ———— „ ————

—— дуба . . . . . 15'750 ———— „ ————

—— ели
—— сосны } . . . . . 17'000 ———— „ ————

Съ помощію этихъ данностей можно по предыдущей формулѣ, опредѣлить измѣненіе вида, производимое дѣйствіемъ данныхъ силъ на данное тѣло, т. е. опредѣлить уголъ скручиванія θ, а именно:

$$\theta = \frac{Ml}{gI},$$

Изъ этой формулы видимъ, что уголъ скручиванія будетъ тѣмъ больше, чѣмъ менье коэффиціентъ упругости g; слѣдовательно наименьшее измѣненіе вида, при одинаковыхъ размѣрахъ и одинаковыхъ внѣшнихъ силахъ, претерпѣваетъ литая сталь; за нею слѣдуетъ желѣзо, потомъ чугунъ, который вторае больше противъ желѣза скручивается. и наконецъ наибольшій уголъ скручиванія соотвѣтствуетъ дереву.

Кромѣ того видно, что уголъ кручѣнія θ пропорціоналенъ длинѣ тѣла и моменту внѣшнихъ

(x.) Величины g, за исключеніемъ соотвѣтствующей чугуну, составляютъ около $\frac{1}{3}$ величинъ коэффиціента упругости E для растяженія и сжатія.

силъ и обратно пропорціоналенъ моменту инерціи; а такъ какъ моментъ инерціи при полномъ внутри сѣченіи, пропорціоналенъ четвертой степени толщины, то уголъ кручения будетъ обратно пропорціоналенъ четвертой степени толщины тѣла; т.е. напр. если толщина увеличится (вдвое, то уголъ кручения уменьшится) въ 16 разъ.

Легко также показать, что при одинаковомъ количествѣ матеріала или при одной и той же площади сѣченія, тѣло внутри пустое, при дѣйствіи тѣхъ же силъ, скрутится менѣе, чѣмъ тѣло полное. Если имѣется сѣченіе одного тѣла внутри пустое, съ радіусами R и R', и сѣченіе другого тѣла съ радіусомъ r, внутри полное, и если для обоихъ тѣлъ площадь поперечнаго сѣченія одинакова и равна ω такъ что

$$\omega = \pi(R^2 - R'^2) = \pi r^2,$$

то моментъ инерціи для перваго сѣченія будетъ:

$$I' = \frac{\pi(R^4 - R'^4)}{2} = \pi(R^2 - R'^2)\left(\frac{R^2 + R'^2}{2}\right) = \omega\,\frac{R^2 + R'^2}{2}$$

и для втораго:

$$I' = \frac{\pi r^4}{2} = \omega\frac{r^2}{2}.$$

Но такъ какъ очевидно R больше чѣмъ r, то также будетъ

$$\omega\left(\frac{R^2 + R'^2}{2}\right) > \omega\frac{r^2}{2},$$

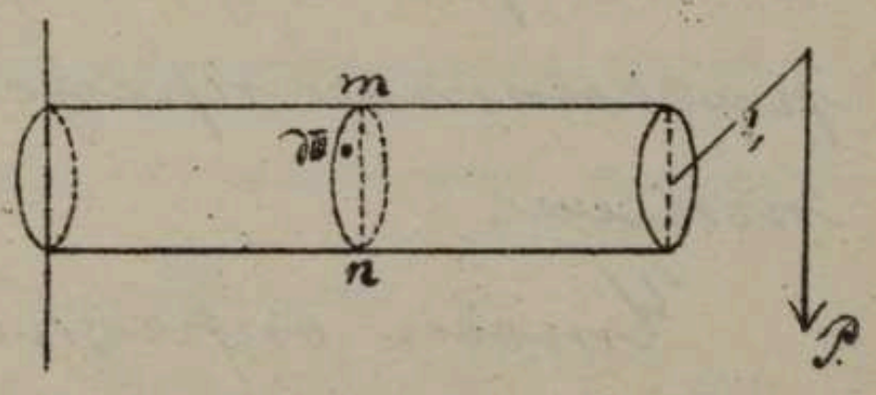
и слѣдовательно, для тѣла внутри пустого, моментъ инерціи больше, а уголъ кру-

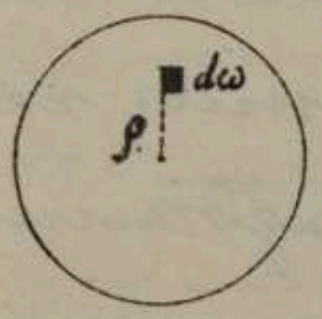
чения θ меньше, чѣмъ для тѣла внутри полнаго, при поперечномъ сѣченіи и высѣ одинаковыхъ для обоихъ тѣлъ.

Перейдемъ теперь къ рѣшенію другаго вопроса, а именно къ опредѣленію размѣровъ скручиваемаго призматическаго тѣла такъ, чтобы при дѣйствіи данныхъ силъ, оно оставалось прочнымъ, независимо отъ измѣненія его вида т.е. отъ величины угла кручения и также къ опредѣленію величинъ внѣшнихъ силъ, дѣйствію которыхъ можно подвергать тѣло данныхъ измѣреній, безъ ущерба его прочности. Для этого возьмемъ на которомъ нибудь изъ поперечныхъ сѣченій тѣ рассматриваемаго тѣла элементъ площади dω, для котораго повышенному сила упругости, выразится черезъ:

$$G\frac{\theta}{l}\cdot\rho^2 d\omega.$$

Чтобы прочность скручиваемаго тѣла была обезпечена нужно чтобы сила упругости, въ какомъ бы мѣстѣ тѣла она ни проявилась, была не болѣе предѣла прочнаго сопротивленія; по этому если назовемъ черезъ R этотъ предѣлъ прочнаго сопротивленія для площади равной квадратной единицѣ,





то для прочности тѣла нужно чтобы было:

$$\frac{G\theta}{l}\cdot\varsigma\,d\omega \leqq R\,d\omega \quad \text{или} \quad \frac{G\theta}{l}\varsigma \leqq R.$$

Но первая часть этого неравенства пропорціональна количеству ρ, т. е. разстоянію элемента $d\omega$ до оси тѣла, слѣдовательно она увеличивается вмѣстѣ съ увеличеваніемъ ρ и очевидно, что если неравенство удовлетворено для наибольшей величины ρ, то есть для элемента наиболѣе удаленного отъ оси, находящагося на поверхности тѣла, то это же неравенство будетъ удовлетворено и для всѣхъ прочихъ величинъ ρ. Поэтому мы будемъ подразумѣвать подъ буквою ρ наибольшее разстояніе точекъ наружной поверхности тѣла до оси т. е. радіусъ сѣченія, если оно круглое, и радіусъ описаннаго круга, если оно правильный многоугольникъ; тогда выведенное неравенство предоставитъ условіе прочности тѣла.

Чтобы опредѣлить величину R предѣла прочнаго сопротивленія скручиванію, замѣтимъ что если обѣ части неравенства раздѣлимъ на ς, то мы получимъ другое неравенство:

$$\frac{\theta\varsigma}{l} \leqq \frac{R}{g};$$

гдѣ первая часть очевидно зависитъ только

отъ измѣреній тѣла и угла кручения, а вторая часть только отъ свойствъ матеріала тѣла и слѣдовательно вторая часть будетъ величина постоянная для всѣхъ тѣлъ, состоящихъ изъ одного и того же матеріала; по этому стоитъ только опредѣлить изъ опытовъ или наблюденій наибольшую величину, до которой можетъ доходить количество $\frac{\theta\rho}{l}$, безъ ущерба для прочности тѣла, тогда эта наибольшая величина очевидно и будетъ равняться количеству $\frac{R}{E}$, а по ней и данной величинѣ E найдется и величина R.

Такимъ образомъ найдено по наблюденіямъ надъ частями машинъ, подвергающимися скручиванію и оказавшимися прочными и удовлетворяющими своему назначенію, что въ обыкновенныхъ случаяхъ при какомъ угодно матеріалѣ количество $\frac{\theta\rho}{l}$ не должно быть болѣе $\frac{1}{3000}$, но если требуется дать тѣлу по возможности меньшія измѣренія, что бы его сдѣлать по возможности легче, то при однородномъ хорошемъ матеріалѣ можно увеличивать количество $\frac{\theta\rho}{l}$ до $\frac{1}{1500}$. По сему находимъ:

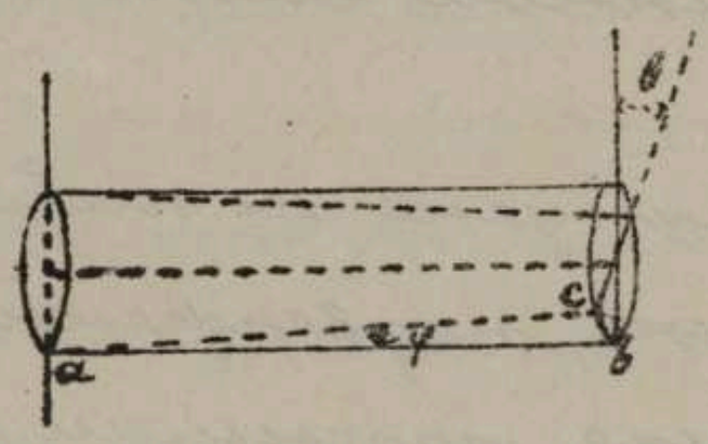
Для железа и цементной стали $R = 80$ до 150 пуд на $1\square$ дюймъ
— чугуна . . . . . — 26,0 — 52,0 ——— „ ———
— дуба . . . . . — 5,25 — 10,5 ——— „ ———
— ели и сосны . . . . . — 5,67 — 11,34 ——— „ ———

Къ этому можно прибавить, что какъ видно изъ

предыдущаго:

$$\frac{\Theta\rho}{l} = \frac{\alpha\varrho}{r} = \frac{\partial r}{r}$$

и что дробь $\frac{\partial r}{r}$ равна тангенсу угла между двумя нагарезными элементами продольной фибры до и после скручиванія. Но какъ $\frac{\Theta s}{l}$ постоянно для всѣхъ поперечныхъ сѣченій тѣла, при данной и той же наибольшей величинѣ s, принадлежащей данной изъ крайнихъ фибръ, то фибра эта при скручиваніи примѣтъ видъ винтовой спирали, которой уголъ наклоненія φ къ производящей цилиндрической ея поверхности будетъ опредѣленъ уравненіемъ:



$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\Theta s}{l}$$

При вышеуказанныхъ предѣлахъ количества $\frac{R}{G}$, величина угла φ составляетъ отъ $1^{\text{ой}}$ до $2^{\text{хъ}}$ минутъ.

И такъ, неравенство, которому изслѣдованія тѣла фибры удовлетворять, чтобы оно было прочно, будетъ:

$$\frac{G\Theta s}{l} \leq R,$$

гдѣ G и R имѣютъ одно изъ вышевыведенныхъ значеній. Чтобы изъ этой формулы исключить уголъ кручѣнія Θ совсѣмъ оставимъ

только величины, зависящія отъ внѣшнихъ силъ, матеріала и поперечнаго тѣла, нижеслѣдующее уравненіе, выведенное для опредѣленія угла кручения:

$$\frac{G\Theta}{l} = \frac{M}{I'}$$

При помощи этого уравненія, условіе прочности можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{\rho}{I'} M \leqq R.$$

Отсюда въ каждомъ частномъ случаѣ можно опредѣлить моментъ M внѣшнихъ силъ, дѣйствіемъ которыхъ тѣло данныхъ измѣреній и матеріала, можетъ быть подвергнуто безъ ущерба его прочности; или же опредѣливъ измѣренія тѣла, входящія въ моментъ инерціи I', по данному моменту внѣшнихъ силъ. Что же касается до длины тѣла l, то она, какъ видно, не имѣетъ никакого вліянія на прочное сопротивленіе его скручиванію.

Если изъ найденнаго неравенства, обращеннаго въ уравненіе, вывести величину момента внѣшнихъ силъ, т. е.

$$M = \frac{R I'}{\rho}$$

и предѣлу прочнаго сопротивленія R придавать одну изъ вышеуказанныхъ величинъ, опредѣленную по условію

$$\frac{R}{\rho} = \frac{1}{3000},$$

то не трудно узнать, во сколько разъ предѣлъ прочнаго сопротивленія R меньше предѣла временнаго

сопротивленія скручиванію. Для этого стоитъ только величины M, выведенныя изъ формулы, сравнивать съ величинами моментовъ скручивающихъ силъ, производящихъ излома тѣла и опредѣляемыхъ изъ непосредственныхъ опытовъ. Такимъ образомъ, можно замѣтить, что для дерева и чугуна предѣлъ прочнаго сопротивленія, $R = \frac{1}{3000} S$, приблизительно въ 32 раза меньше предѣла временнаго сопротивленія скручиванію. Такой значительный запасъ прочности необходимъ въ частяхъ машинъ, для предупрежденія неправильностей въ ихъ движеніи; но если подобныхъ неправильностей опасаться не нужно, какъ напримѣръ при опредѣленіи излома стержней сверлъ, то конечно величину предѣла прочнаго сопротивленія можно не только увеличить вдвое противъ $\frac{1}{3000} S$, но и въ 3 и 4 раза, т. е. принять:

$$\frac{R}{S} = \frac{1}{1000} \text{ и даже } \frac{R}{S} = \frac{1}{750},$$

безъ опасенія излома тѣла.

Для опредѣленія излома тѣла, скручиваемаго данными силами, найденная формула можетъ быть написана въ видѣ:

$$\frac{I'}{\rho} = \frac{M}{R}$$

Для облегченія примѣненій замѣнимъ количество $\frac{I'}{\rho}$ его величиною въ зависимости отъ діаметровъ d и d' круглаго поперечнаго

сьчения внутри полного или пустого. Тогда

$$I' = \frac{\pi(d^4 - d'^4)}{32} \; ; \; \rho = \frac{d}{2} \; ; \; \frac{I'}{\rho} = \frac{\pi(d^4 - d'^4)}{16d}.$$

и для цилиндра внутри пустого получается

$$\frac{d^4 - d'^4}{d} = \frac{16M}{\pi R}$$

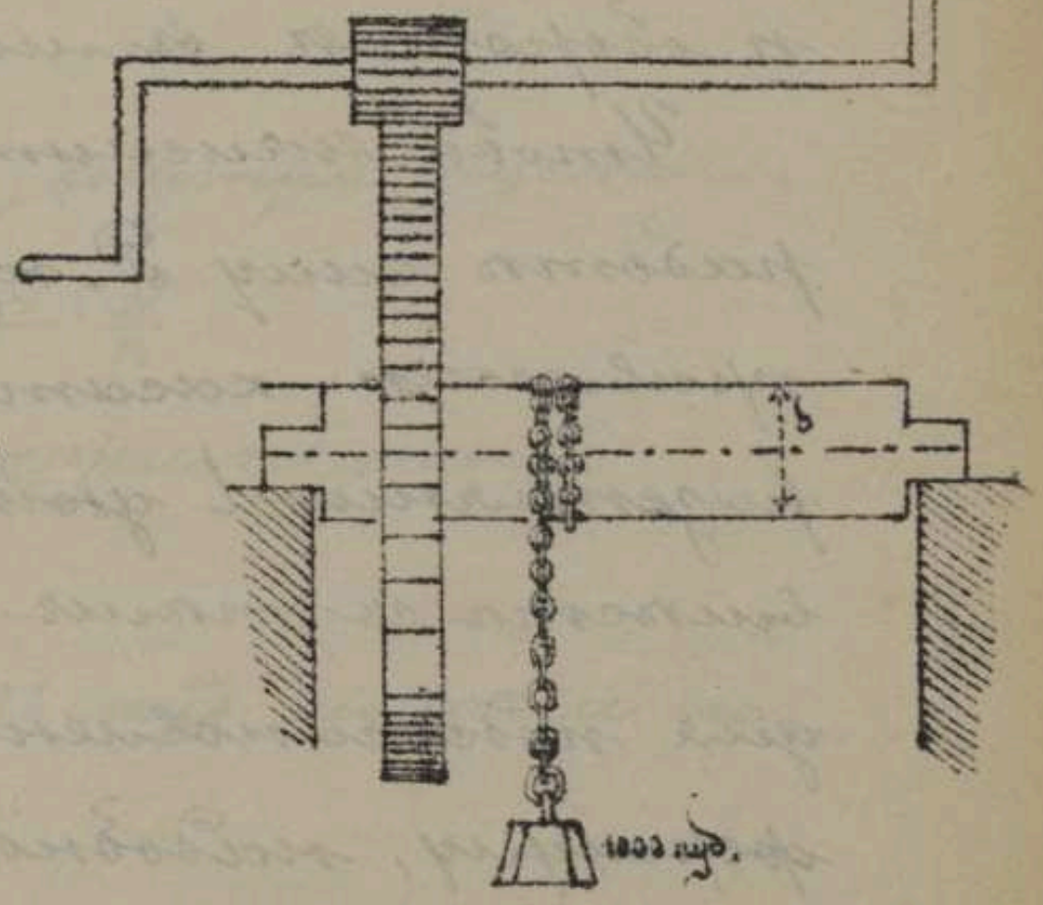
а для цилиндра внутри полного,

$$d' = 0 \quad \text{и} \quad d^3 = \frac{16M}{\pi R}.$$

Например, в случае чугунного цилиндрического вала внутри полного, имели бы при $R = 52$ пуд. на 1 кв. д.

$$d^3 = \frac{16.7}{22.52} M = 0{,}098\, M.$$

По этому, для чугунного ворота, назначенного для подъема тяжестей до 1000 пуд. посредством цепи, навиваемой на его вал, имели бы:



$$M = \frac{1000 . d}{2} = 500\, d$$

и $d^3 = 0{,}098 . 500\, d$ или $d^2 = 49$

откуда $d = 7$ дюймам.

Для чугунного вала внутри пустого было бы:

$$\frac{d^4 - d'^4}{d} = 0{,}098\, M$$

или, предполагая $d' = \frac{3}{5} d$,

$$\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4\right] d^3 = 0{,}098\, M \text{ или } d^3 = 0{,}1126\, M$$

Подставляя сюда $M = 500\,д$, выходитъ:

$$д^2 = 0,1126 . 500 = 56,30,$$

откуда $д = 7,5$ дюйма и $д' = 4,5$ дюйма

Иногда измѣренія вала машины приходится опредѣлять не по данному моменту скручивающихъ силъ, а по данной величинѣ работы движителя приводящаго валъ въ вращательное движеніе, и вслѣдствіе этаго скручивающаго его. Для объясненія способа опредѣленія измѣреній вала въ этомъ случаѣ, соображаемъ, что на валъ насажено колесо, котораго радіусъ обода равенъ l, которое на ободѣ своемъ принимаетъ работу движителя въ N паровыхъ лошадей и при этомъ дѣлаетъ n оборотовъ въ минуту.

Чтобы вычислить соотвѣтствующую такой работѣ силу $Р$ пудовъ, дѣйствующую по направленію касательной къ ободу колеса на разстояніи l дюймовъ отъ оси вращенія, и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлить моментъ $Pl = M$ для подстановленія его въ вышевыведенную формулу, надобно предварительно опредѣлить скорость v дюймовъ въ секунду, съ которою движется точка приложенія силы $Р$ на ободъ колеса.

Въ одинъ оборотъ колеса точка эта описываетъ путь $2\pi l$ дюйм., а въ $\frac{n}{60}$ оборотовъ, т.е. въ одну секунду, она описываетъ путь $\frac{2\pi l n}{60}$ дюйм., слѣдовательно:

$$v = \frac{2\pi l n}{60}$$

Вслѣдствіе этого работа силы P въ одну секунду будетъ:

$$Pv = \frac{2\pi}{60} n P l = \frac{\pi}{30} n M \text{ пудодюймовъ.}$$

Но эта работа очевидно должна быть равна работѣ передаваемой цилиндромъ, въ N паровыхъ лошадей или $15 \times 12\ N$ пудодюймовъ, слѣдовательно:

$$\frac{\pi}{30} n M = 15.12\ N$$

откуда

$$M = \frac{15.12.30}{\pi} \frac{N}{n}$$

Подставляя найденную величину въ условіе прочности скручиваемаго вала

$$\frac{I'}{\rho} = \frac{M}{R}$$

получимъ

$$\frac{I'}{\rho} = \frac{15.12.30}{\pi . R} \frac{N}{n}$$

или для цилиндрическаго вала, внутри пустого:

$$\frac{\partial^4 - \partial'^4}{\partial} = \frac{16.15.12.30}{\pi^2 R} \cdot \frac{N}{n} = \frac{8754}{R} \cdot \frac{N}{n}$$

и для цилиндрическаго вала внутри полнаго:

$$\partial^3 = \frac{8754}{R} \cdot \frac{N}{n}.$$

Для чугуннаго вала, взявъ $R = 26$ пуд., имѣли бы:

$$\partial^3 = \frac{8754}{26} \frac{N}{n} = 336{,}7 \frac{N}{n},$$

Откуда приблизительно

$$\partial = 7 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ дюймовъ;}$$

а для вала изъ сосноваго дерева, при $R = 5{,}67$ пуд. на 1 квадр. дюймъ, нашли бы:

$$\partial^3 = \frac{8754}{5{,}67} \cdot \frac{N}{n} = 1545 \frac{N}{n},$$

откуда приблизительно $\partial = 11{,}5 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ дюймовъ

Для примѣра положимъ, что на деревянный валъ насаженo гидравлическое колесо, дѣлающее 8 мин. оборотовъ въ минуту, и передающее валу полезную работу потока въ 27 паровыхъ лошадей. Въ этомъ случаѣ, если валъ внутри полый, получимъ:

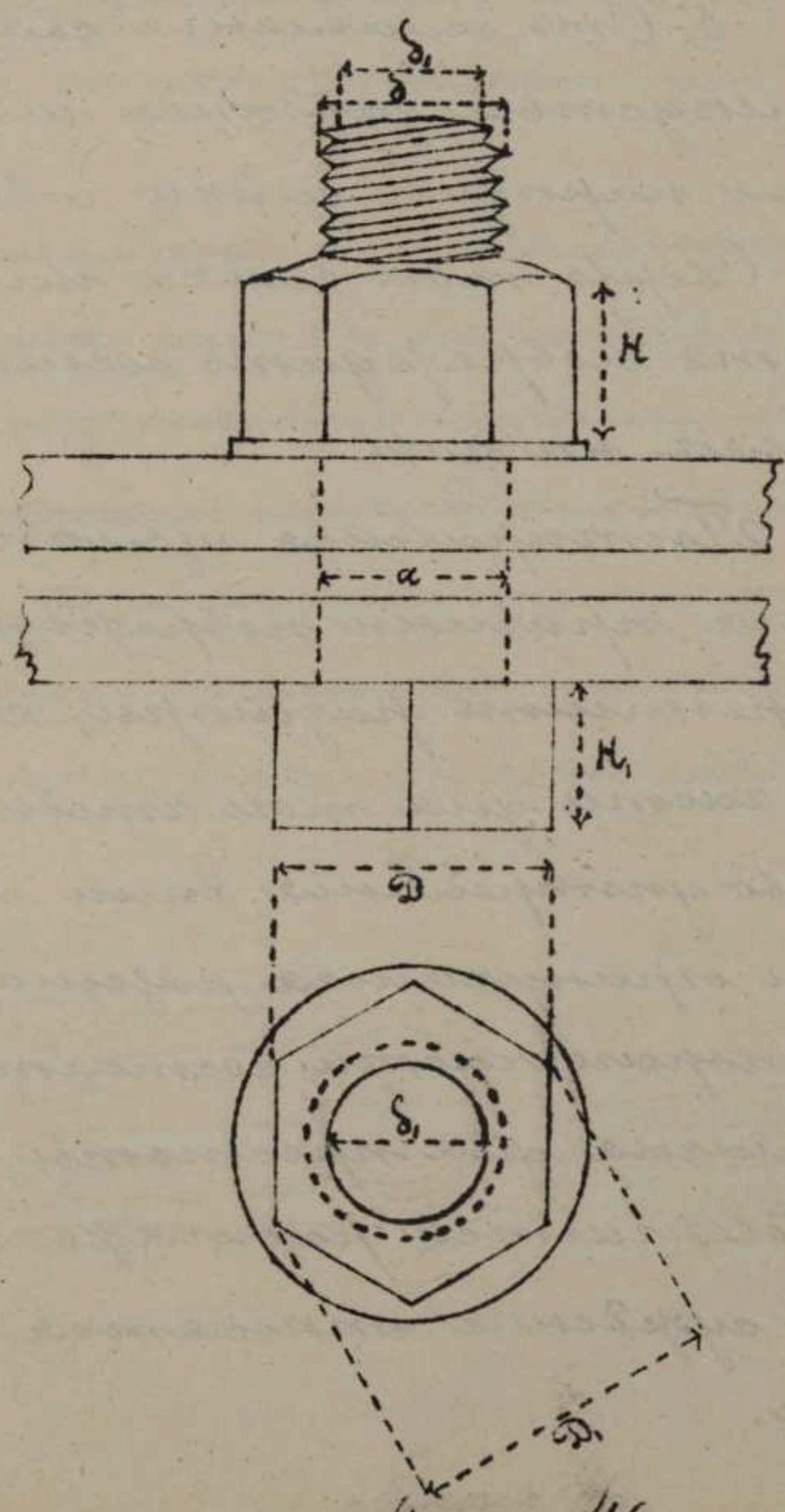
$$d = 11{,}5\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{11{,}5 \cdot 3}{2} = 17{,}25 \text{ дюйм.}$$

До сихъ поръ мы обращали вниманіе только на то измѣненіе вида и то сопротивленіе силъ упругости, которыя проявляются въ скручиваемомъ тѣлѣ, когда внѣшнія силы уравновѣшиваются внутренними силами и измѣненіе вида, произведенное въ тѣлѣ сохраняется въ продолженіи нѣкотораго времени безъ перемѣны. Такое дѣйствіе внѣшнихъ силъ, для сокращенія рѣчи, можно назвать спокойнымъ.

Если же внѣшнія силы дѣйствуютъ неспокойно, измѣняя въ каждое мгновеніе уголъ кручения тѣла, то тѣже силы могутъ произвести значительно большее скручиваніе и вызвать бо́льшія силы упругости тѣла, чѣмъ при спокойномъ дѣйствіи. Такъ напримѣръ въ началѣ приведенія вала машины въ вращательное движеніе или при перемѣнѣ направленія его вращенія, валъ подвергается колебаніямъ, при которыхъ уголъ кручения получаетъ то бо́льшую, то меньшую величину, чѣмъ та, которую онъ сохраняетъ по прекращеніи колеба-

О винтахъ.

Вышеизложенное о растяженіи, сжатіи, перерѣзываніи и скручиваніи тѣлъ можетъ быть применено между прочимъ къ опредѣленію работъ и поверокъ прочности одной изъ наиболѣе часто встрѣчающихся частей машинъ и зданій, а именно винта. Винты, служащіе для соединенія или скрѣпленія между собою частей зданій или машинъ, подвергаются дѣйствію силъ, направленныхъ поперекъ стержня или же вдоль его. Въ первомъ случаѣ сопротивленіе винта не отличается отъ сопротивленія призматическаго тѣла перерѣзыванію или изгибу, и не требуетъ особаго изслѣдованія. Во второмъ же случаѣ, т. е. при дѣйствіи силы растя-



Листъ 46.

гивающей или сжимающей винтъ по направленію оси его стержня, онъ можетъ повреждаться отъ слѣдующихъ причинъ.

1, Отъ скручиванія ядра нарѣзокъ при завертываніи гайки.

2, Отъ разрыва или раздробленія стержня или болта въ слабѣйшей его части, ядро нарѣзокъ.

3, Отъ срыванія гайки срѣзываніемъ нарѣзокъ.

4, Отъ срыванія шпянки винта.

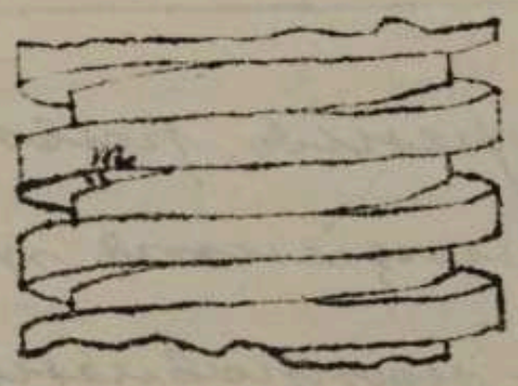
5, Отъ ослабленія связи болта съ гайкою вслѣдствіе заѣданія и постепеннаго стиранія нарѣзокъ гайки и болта.

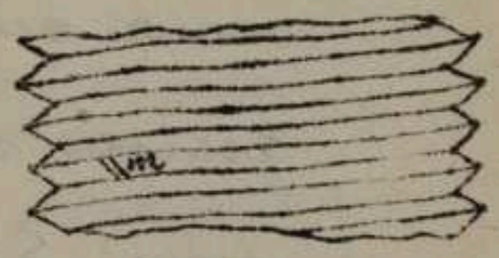
Сверхъ того гайка или шпянка винта могутъ повреждать соединяемыя тѣла давленіемъ на нихъ.

Постараемся прослѣдовать всѣ эти различныя причины поврежденій винта, съ цѣлію опредѣлить размѣры, которые должны имѣть его части для того чтобы его прочность и удобство употребленія были обезпечены. При этомъ мы ограничимся разсматриваніемъ винта, котораго части состоятъ изъ желѣза, - предполагая для простоты, что стержень винта подвергается растяженію, потому что тѣ же сужденія относятся и къ сжатію стержня.

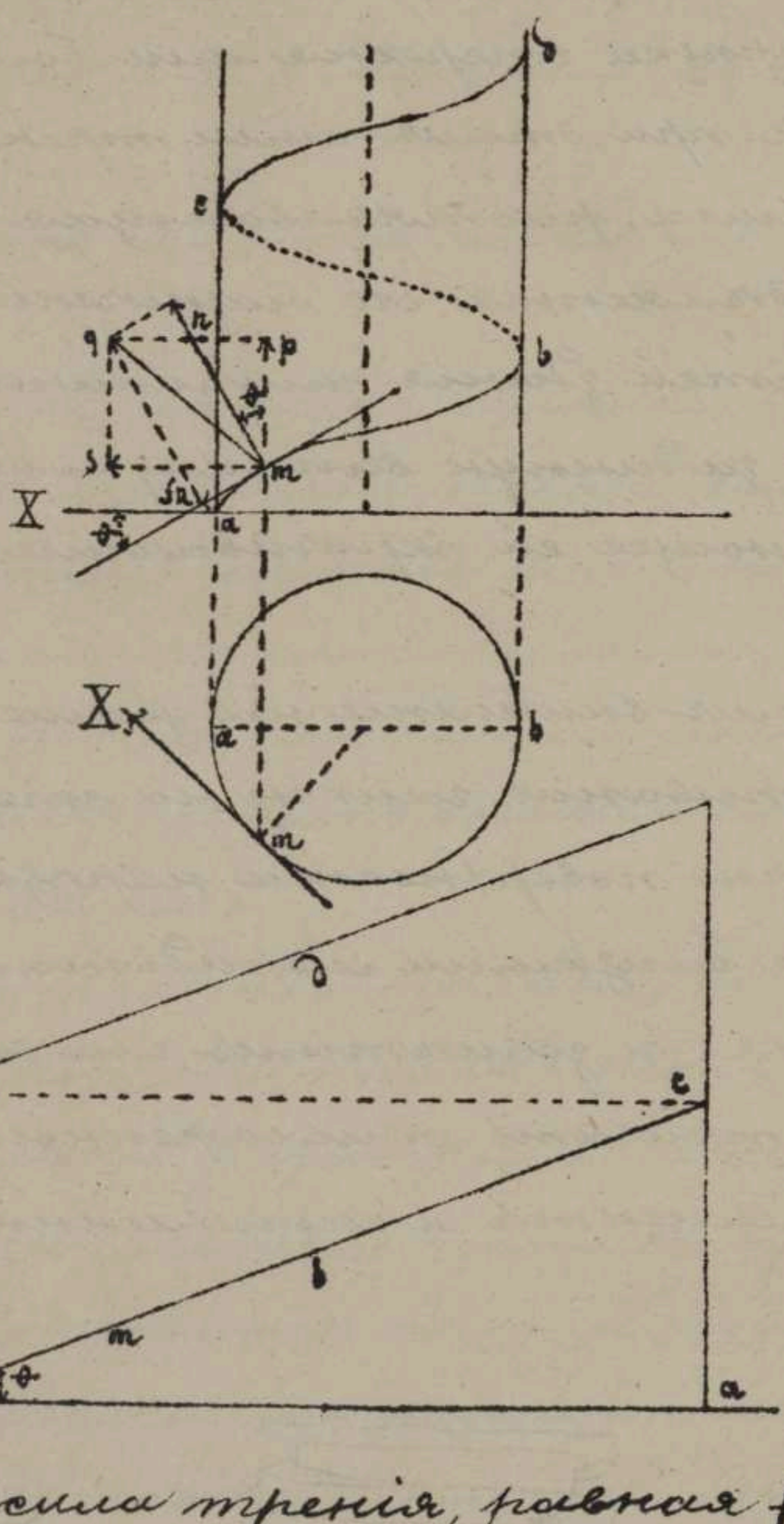
Если вращеніе стержня винта, равно какъ и передвиженіе его вдоль оси предупреждены тисками, на которыя опираются шпянка и гайка винта, то при завертываніи гайки, стержень винта растягивается и въ тоже время подвергается скручивающему усилію отъ давленія нарѣзокъ гайки на нарѣзки стержня или болта и отъ проявляющейся при этомъ силы трѣнія. — Предполагая, что сила, растягивающая стержень винта, опредѣляется его назначеніемъ для скрѣпленія частей зданія или машины, примемъ эту силу заданную величину и опредѣлимъ соотвѣтствующее ей скручивающее усиліе.

Для сего обратимъ вниманіе на усиліе окружное, при завертываніи, гайкою на стержень винта въ элементъ поверхности нарѣзки между двумя безконечно близкими меридіональными плоскостями ея, и замѣтимъ что это усиліе можно разсматривать приложеннымъ въ средней точкѣ т элемента и составленнымъ изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ силъ, одной направленной по нормали къ поверхности нарѣзки и выражающей давленіе на неё гайки,





и другой направленной по касательной при точке т къ винтовой спирали а в с д, которую можно провести на поверхности нарѣзки черезъ точку т; эта вторая сила есть сила трѣнія, пропорціональная нормальному давленію, дѣйствующая по направленію движенія точки т на нарѣзку гайки, и стремящаяся увлечь за собою стержень винта привращеніе гайки. При прямоугольной профилѣ нарѣзки обѣ силы, т.е. нормальное давленіе, которое изобразимъ чрезъ n, и касательная сила трѣнія, равная fn, если чрезъ f изобразимъ коэффиціентъ трѣнія матеріала винта, будутъ направлены по плоскости т X, касательной къ цилиндрической поверхности, заключающей въ себѣ спираль а в с д, и имѣющей



производящія, параллельныя оси винта. Объ эти силы n и fn очевидно могутъ быть замѣнены одною равнодѣйствующею q, составляющею съ направленіемъ силы n уголъ тренія α, опредѣляемый равенствомъ

$$tg\alpha = f .$$

Сила ея q, въ свою очередь, можетъ быть разложена на двѣ составляющія силы p и δ, одну параллельную оси винта и другую къ ней перпендикулярную. Первая изъ нихъ, p, составитъ съ нормалью n уголъ θ, равный углу между касательною къ спиралии a b c d при точкѣ m и плоскостію, перпендикулярною къ оси винта, а посему сила p съ силою q составитъ уголъ α + θ и мы получимъ для величинъ силъ p и δ равенства:

$$p = q\cos(\alpha+\theta),\ \delta = q\sin(\alpha+\theta),\ \delta = p\,tg(\alpha+\theta).$$

Легко видѣть, что сумма всѣхъ силъ, подобныхъ p, порождаемыхъ въ различныхъ элементахъ соприкасающихся поверхностей нарѣзокъ гайки и стержня въ точкахъ спирали a b c d, представляетъ полное усиліе P, растягивающее стержень винта, а сумма моментовъ относительно оси винта всѣхъ силъ, подобныхъ δ, на всей поверхности касанія нарѣзокъ въ точкахъ той же спирали, представитъ моментъ M всѣхъ силъ, скручивающихъ стержень винта.

Но, удваивая наружный діаметръ нарѣзокъ винта чрезъ d, а внутренній діаметръ ихъ чрезъ d_1, можно принять что всѣ силы δ, приложенныя

въ различныхъ точкахъ спирали $abcd$, заключающейся въ цилиндрической поверхности, находящейся ей серединѣ между наружною и внутреннею цилиндрическими поверхностями нарѣзокъ стержня, будутъ дѣйствовать на разстояніи $\frac{d+d_1}{4}$ отъ оси винта. Кромѣ того слѣдуетъ замѣтить, что по свойству винтовой спирали, касательныя линіи во всѣхъ ея точкахъ составляютъ одинъ и тотъ же уголъ θ съ плоскостію, перпендикулярною къ ея оси, такъ что при развертываніи цилиндрической поверхности, заключающей спираль, на плоскость параллельную оси, спираль образуетъ систему прямыхъ линій ac, cd или діагоналей прямоугольниковъ, которыхъ высота равна длинѣ хода или шага винта ac, а основаніе aa равно окружности круга, представляющаго поперечное сѣченіе цилиндрической поверхности. По сему, для величины суммы моментовъ скручивающихъ силъ относительно оси винта, не трудно вывести формулу:

$$M = P\,\frac{d+d_1}{4}\cdot tg\,(\alpha+\theta),$$

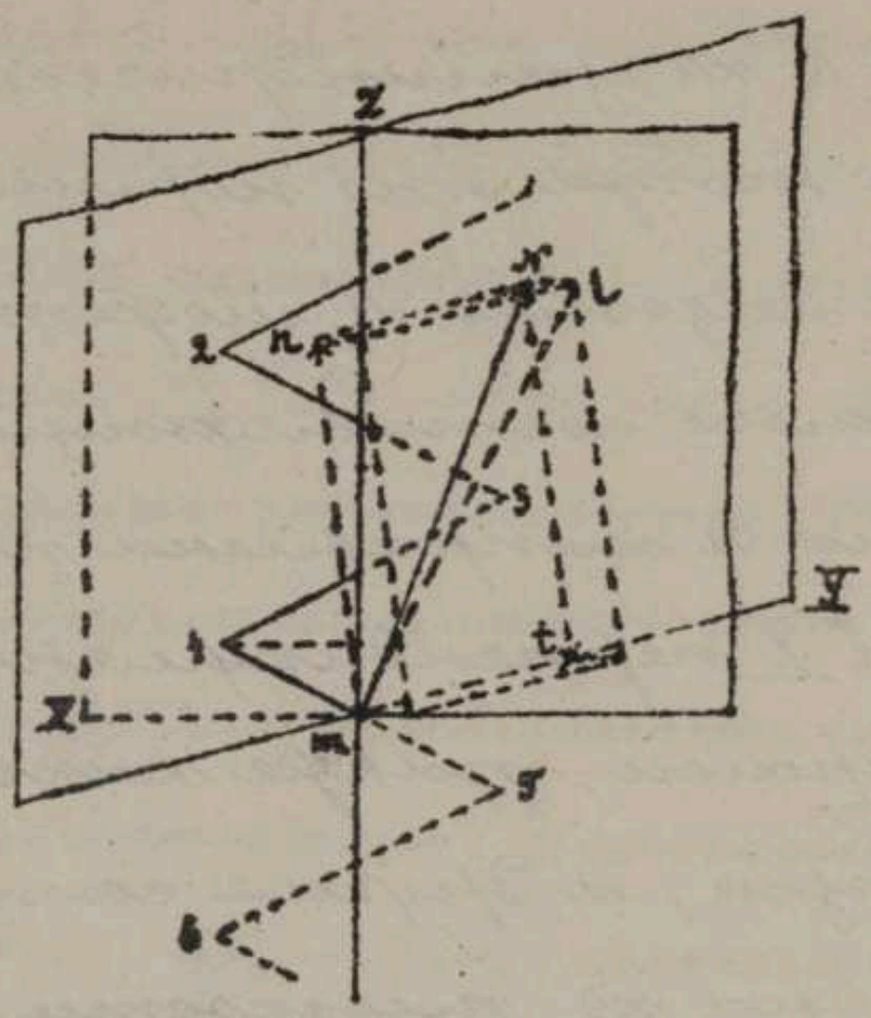
выражающую зависимость момента всѣхъ силъ, скручивающихъ стержень винта, отъ силы его растягивающей, при прямоугольной нарѣзкѣ.

Въ случаѣ треугольной нарѣзки, усиліе, оказываемое гайкою на элементъ поверхности

нарѣзки стержня винта при точкѣ т, произве-
детъ нормальное давленіе, не находящееся въ ка-
сательной плоскости т $\overline{X}$ къ цилиндрической
поверхности спирали, но тогда это норма́ль-
ное давленіе, которое мы назовемъ N, можетъ
быть замѣнено двумя своими составляющими
силами, изъ которыхъ одна n направлена по ка-
сательной плоскости т $\overline{X}$ перпендикулярно къ
касательной линіи спирали, такъ же какъ и
при прямоугольной нарѣзкѣ, а другая состав-
ляющая, перпендикулярна къ плоскости т $\overline{X}$,
и встрѣчаетъ ось винта подъ прямымъ угломъ,
а слѣдовательно не производитъ ни растяже-
нія ни скручиванія стержня, а только сжимаетъ
его по направленію діаметра и уравновѣшивает-
ся равною ей силою, развивающеюся на противу-
положной сторонѣ стержня. По сему, чтобы
воспользоваться предыдущимъ выводомъ мо-
мента скручивающихъ силъ для прямоуголь-
ной нарѣзки, постараемся опредѣлить для
треугольной нарѣзки величину силы тренія
fN, направленной по касательной къ спира-
ли въ точкѣ т, въ зависимости отъ силы n,
составляющей нормальнаго давленія N, заклю-
чающейся въ касательной плоскости т $\overline{X}$.

Замѣтимъ что линія направленія силы N,
т. е. нормальная линія т N къ винтовой по-
верхности при точкѣ т, должна быть перпен
дикулярна къ двумъ касательнымъ линіямъ

поверхности при той же точке, и слѣдовательно должны совпадать съ пересѣченіемъ двухъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ этимъ



касательнымъ и по сему легко можетъ быть построена. Проведемъ въ плоскости перпендикулярной къ оси винта черезъ точку т двѣ взаимно перпендикулярныя линіи т X и т Y, изъ которыхъ вторая проходитъ черезъ ось винта и слѣдовательно направлена по діаметру сѣченія цилиндрической поверхности, заключающей спираль а в с д, линія же т X касательна къ этому сѣченію. Проведемъ еще перпендикулярно къ т X и т Y производящую т Z цилиндрической поверхности. Тогда плоскость линій т X и т Z будетъ касательною къ цилиндру и заключитъ въ себѣ касательную линію къ спирали а в с д при т, которая вмѣстѣ съ тѣмъ и касательная къ поверхности винтовой нарѣзки, и плоскость линій т Y и т Z будетъ меридіональною плоскостію цилиндра и поверхности винтовой нарѣзки и заключитъ

въ себѣ треугольную профиль 1, 2, 3, 4, 5 нарѣзки, которой линія 4, 5 есть вторая касательная къ поверхности нарѣзки при точкѣ т.

Такъ какъ касательная къ спиралѣ составляетъ съ плоскостію т $\underline{X}$ $\underline{Y}$, а также и съ линіею т $\underline{X}$ уголъ θ, то линія тп, проведенная въ плоскости т $\underline{X}$ $\underline{Z}$ подъ угломъ θ къ линіи т Z, будетъ перпендикулярна къ касательной къ спиралѣ, и плоскость перпендикулярная къ этой касательной должна проходить чрезъ линію тп и сверхъ того чрезъ линію т $\underline{Y}$, также очевидно перпендикулярную къ касательной. Съ другой стороны, изображая чрезъ φ половинный уголъ при вершинѣ треугольной нарѣзки винта и проведя линію тl подъ угломъ φ къ производящей т Z по меридіональной плоскости т $\underline{Y}$ $\underline{Z}$, легко видѣть что линіи тl и т $\underline{X}$ представятъ два перпендикуляра къ касательной линіи 4, 5 къ поверхности винтовой нарѣзки, и что плоскость т $\underline{X}$ l будетъ перпендикулярна къ этой второй касательной линіи къ поверхности. И такъ нормальная линія т N къ поверхности нарѣзки при точкѣ т должна направиться по пересѣченію плоскостей т $\underline{Y}$ п и т $\underline{X}$ l, и если отложимъ по этой линіи длину т N, пропорціональную величинѣ нормальнаго давленія N, и проведемъ линіи Nп и N t параллельно т $\underline{Y}$ и тп, то получимъ линіи пропорціональныя вышеупомянутымъ составляющимъ

силами n и t нормальнаго давленія N, заключающимся въ касательной и меридіональной плоскостяхъ винтовой спирали. За тѣмъ назвавъ x, y и z величины, пропорціональныя координатамъ точки N относительно осей mX, mY и mZ, можемъ написать:

$$N = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z = n\cos\theta,\ y = z\,tg\varphi = n\cos\theta\,tg\varphi \text{ и } x = n\sin\theta$$

и посему

$$N = n\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta\,tg^2\varphi + \cos^2\theta} = n\sqrt{1 + \cos^2\theta\,tg^2\varphi},$$

но какъ уголъ наклоненія θ винтовой спирали къ плоскости, перпендикулярной къ оси винта, при треугольной нарѣзкѣ обыкновенно не болѣе 3°, такъ что

$$\cos\theta > \cos 3^\circ = 0{,}99863 \text{ и } \cos\theta < 1,$$

а слѣдовательно $\cos\theta$ весьма мало отличается отъ единицы, то съ приближеніемъ достаточнымъ для практическихъ цѣлей, можно принять:

$$\cos\theta = 1 \text{ и } N = n\sqrt{1 + tg^2\varphi} = \frac{n}{\cos\varphi}.$$

По сему для силы тренія, дѣйствующей на элементъ треугольной нарѣзки стержня винта при точкѣ m по касательной къ спирали получимъ:

$$fN = \frac{f}{\cos\varphi}\,n.$$

Найдя величину силы тренія въ этомъ видѣ, не трудно сообразить, что если при прямоугольной нарѣзкѣ стержня винта,

на элементъ которой дѣйствуютъ нормальная и касательная силы n и fn, направленныя по касательной плоскости цилиндрической поверхности, моментъ скручивающихъ силъ M опредѣляется формулою:

$$M = P\,\frac{d+d_1}{4}\,tg(\alpha+\theta),$$

гдѣ P изображаетъ силу, растягивающую стержень и уголъ α опредѣляется уравненіемъ:

$$tg\alpha = f,$$

то при треугольной нагрузкѣ, на элементъ которой дѣйствуютъ нормальная и касательная силы n и $\frac{f}{\cos\varphi}n$, направленныя по той же касательной плоскости, моментъ скручивающихъ силъ найдется по той же самой формулѣ, какъ и при прямоугольной нагрузкѣ, но только въ ней уголъ α опредѣлится уравненіемъ:

$$tg\alpha = \frac{f}{\cos\varphi}.$$

Имѣя величину M момента силъ, скручивающихъ винтъ, стержень котораго долженъ выдерживать данную растягивающую силу P, можно произвести повѣрку прочности скручиваемаго стержня винта съ помощію вышеприведенной общей формулы для повѣрки прочности скручиваемыхъ цилиндрическихъ тѣлъ, а именно:

$$\frac{S}{I}, M \leq R.$$

Для сего заметимъ, что изломъ отъ скручиванія легче всего произойдетъ въ слабѣйшемъ сѣченіи стержня винта, т. е. въ дѣлѣ его нарѣзокъ, и что для простоты вычисленія можно пренебречь незначительнымъ усиленіемъ ядра, отъ присутствія нанесенныхъ нарѣзокъ и разсматривать это ядро какъ цилиндръ съ діаметромъ d_1. Тогда имѣемъ: разстояніе оси до фибры наиболѣе удаленной $\rho = \frac{d_1}{2}$, моментъ инерціи сѣченія $I' = \frac{\pi d_1^4}{32}$, моментъ скручивающихъ силъ: $M = P \frac{d + d_1}{4} tg(\alpha+\theta)$ и условіе прочности стержня будетъ

$$\frac{S}{I'} M = \frac{4}{\pi} \frac{d+d_1}{d_1^3} tg(\alpha+\theta) \cdot P \leqq R$$

или

$$\frac{d_1^3}{d+d_1} \geqq \frac{4}{\pi R} tg(\alpha+\theta) \cdot P.$$

Такъ какъ при завертываніи гайки легко могутъ происходить удары, значительно увеличивающіе скручиваніе, то для предѣла прочнаго сопротивленія скручиванію желѣзныхъ винтовъ едва ли можно допускать величину большую, чѣмъ:

$$R = 80 \text{ пуд. на 1 кв. д.},$$

и тогда должно быть

$$\frac{d_1^3}{d+d_1} \geqq \frac{1}{20\pi} tg(\alpha+\theta) \cdot P,$$

гдѣ d и d_1 должны выражаться дюймами, а P пудами. Для примѣненія этой формулы къ повѣркѣ прочности желѣзныхъ винтовъ съ треугольн-

ною нарѣзкою, назначаемыхъ для скрѣпленія частей зданій и машинъ, можно руководствоваться слѣдующими данными:

Для ременныхъ винтовъ обыкновенныхъ размѣровъ, т.е. при наружномъ діаметрѣ нарѣзки d отъ $\frac{1}{4}$ до 2 дюймовъ, средняя величина отношенія между внутреннимъ и наружнымъ діаметрами нарѣзки можетъ быть принята:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{3}{4}$$

Уголъ 2φ при вершинѣ треугольной нарѣзки бываетъ около 55°, такъ что

$$\varphi = 27^\circ 30'.$$

Число k оборотовъ нарѣзки (: число нитей) на длинѣ, равной наружному діаметру нарѣзки, изключается между числами 5 и 9; по сему для угла θ наклоненія средней спирали нарѣзки къ плоскости перпендикулярной къ ея оси, имѣемъ:

при $d = \frac{1}{4}''$; $d_1 = \frac{3}{4} d$, $k = 5$, $ac = \frac{d}{k} = \frac{d}{5}$, $aa = \frac{\pi (d + d_1)}{2} = \frac{7\pi}{8} d$,

$$tg\theta = \frac{ac}{aa} = \frac{8}{5.7.\pi} = 0{,}073 \quad ,$$

при $d = 2''$; $d_1 = \frac{3}{4} d$, $k = 9$, $ac = \frac{d}{9}$, $aa = \frac{7\pi}{8} d$,

$$tg\theta = \frac{ac}{aa} = \frac{8}{9.7\pi} = 0{,}040,$$

такъ что за среднюю величину можно принять

$$tg\theta = 0{,}056.$$

Если предположить, что для уменьшения трения нарѣзки винта хорошо смазаны масломъ, то для коэффиціента трения эксплуатаціи можно принять

$$f = 0{,}08$$

и тогда для угла α получается уравненіе:

$$tg\alpha = \frac{f}{\cos\varphi} = \frac{0{,}08}{\cos 27°30'} = 0{,}09019 \ .$$

Если же нарѣзки винта сухи, то по опытамъ Bochet сила трения ползуна по ползуну можетъ значительно увеличиться и коэффиціентъ трения можетъ дойти до величины:

$$f = 0{,}35$$

и тогда для угла α получится:

$$tg\alpha = \frac{f}{\cos\varphi} = \frac{0{,}35}{\cos 27°30'} = 0{,}3946 .$$

Зависимость:

$$\frac{d_1^3}{d+d_1} = \frac{3^3 \cdot 4}{4^3 \cdot 7} d^2 = \frac{27}{16 \cdot 7} d^2 \text{ и } tg(\alpha+\theta) = \frac{tg\alpha + tg\theta}{1 - tg\alpha\, tg\theta}$$

и подставляя въ условіе прочности винта, получимъ для нарѣзокъ хорошо смазанныхъ масломъ:

$$\frac{27}{16 \cdot 7} d^2 \geqq \frac{7(0{,}0502 + 0{,}056)}{20 \cdot 22(1 - 0{,}0902 \cdot 0{,}056)} \cdot P$$

или $d^2 \geqq 0{,}0009661 \cdot P$ и $d \geqq 0{,}031\sqrt{P}$,

а для винтовъ, завертываемыхъ при сухой нарѣзкѣ:

$$\frac{27}{16 \cdot 7} d^2 \geqq \frac{7(0{,}3946 + 0{,}056)}{20 \cdot 22(-0{,}3946 \cdot 0{,}056} P$$

или

$$d^2 \geqq 0{,}0304\, P \text{ и } d \geqq 0{,}1744\sqrt{P}.$$

Изъ найденныхъ величинъ для діаметра стержня винта видно, какое значительное вліяніе на прочность скручиваемаго стержня оказываетъ надлежащее смазываніе нарѣзокъ: при сухихъ нарѣзкахъ діаметръ стержня долженъ быть съ минимумъ въ 5 разъ больше діаметра, необходимаго для прочности винта, если нарѣзки хорошо смазаны. Но какъ это смазываніе не всегда возможно, какъ напримѣръ при подвинчиваніи такихъ гаекъ, которыя не могутъ быть сняты для смазыванія, и такъ какъ не возможно положиться на то, что, смазываніе всегда будетъ дѣйствительно исполняться при завинчиваніи или подвинчиваніи гаекъ, даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда оно возможно, то при опредѣленіи размѣровъ частей винта слѣдуетъ расчитывать на наибольшую возможную скручивающую силу и посему изъ двухъ выведенныхъ формулъ выбрать послѣднюю, т.е.

$$d \geq 0{,}1744 \sqrt{P}.$$

Независимо отъ изложенной теоріи Redtenbacher и Ахтендаль вывели эмпирическую формулу для опредѣленія наружнаго діаметра нарѣзки или равнаго ему діаметра стержня винта, основываясь на тѣхъ размѣрахъ, которые приняты на практикѣ давать винтамъ, служащимъ для скрѣпленія крышекъ паровыхъ цилиндровъ съ бокамиъ, и предназначеннымъ для сопротивленія растяженію отъ дѣйствія давленія пара на крышки цилиндровъ. Формула этихъ гг.

ровъ, выраженная во французскихъ мѣрахъ, слѣдующая

$$d \text{ сантим.} = \frac{1}{9}\sqrt{P \text{ килогр.}},$$

по приведеніи ее къ русскимъ мѣрамъ, т.е. принимая d и P выраженными въ дюймахъ и пудахъ она была бы:

$$d \text{ дюйм.} = 0{,}178\sqrt{P \text{ пуд.}}$$

Формула эта такъ мало отличается отъ вышевыведенной, что обѣ онѣ очевидно могутъ быть безразлично приняты къ тѣмъ случаямъ, когда винты могутъ подвергаться значительному скручивающему усилію вслѣдствіе завинчиванія или подвинчиванія гаекъ именно въ то время, когда стержни растягиваются наибольшею силою, могущею на нихъ существовать. Такъ какъ эмпирическая формула приводитъ къ нѣсколько большей величинѣ діаметра болта, чѣмъ теоретическая, то для большей безопасности въ примѣненіяхъ слѣдуетъ отдать предпочтеніе эмпирической формулѣ.

Для большаго объясненія вліянія, которое имѣетъ вѣроятность скручиванія винта на опредѣленіе надлежащихъ размѣровъ его стержня, вычислимъ наибольшую растягивающую силу, которую въ этомъ случаѣ можно допускать на каждый квадратный дюймъ стержня винта, если діаметръ его равенъ наружному діаметру нарѣзки,

как это чаще всего бываетъ. Если P изображаетъ (стержня, котораго діаметръ равенъ)
полную силу растяженія d, то на 1 кв. дюймъ сѣ-
ченія стержня очевидно приходится растяже-
ніе:

$$\frac{4P}{\pi d^2} \text{ пуд.},$$

а подставивши вмѣсто d его величину, опредѣлен-
ную по формулѣ Ретенбахера, выходитъ:

$$\frac{4P}{\pi (0{,}178)^2 P} \text{ или } 40{,}19 \text{ пуд.},$$

что составляетъ около $\frac{1}{30}$ предѣла временнаго сопро-
тивленія разрыву желѣза

Итакъ въ тѣхъ случаяхъ, когда при завертываніи
гайки болтъ долженъ подвергаться значительной
растягивающей силѣ, прочное сопротивленіе болта
скручиванію требуетъ, чтобы эта сила была гораздо
меньшая той, которая могла бы быть допущена
при растягиваніи желѣзной полосы такого же
діаметра, какъ и болтъ, неослабленный винтовою
нарѣзкою. Но такъ какъ болтъ не всегда подвергается
наибольшей растягивающей силѣ, именно
во время завертыванія гайки, то слѣдуетъ опре
дѣлить еще и то напряженіе, которое можетъ
быть допущено при растягиваніи болта безъ
завертыванія въ тоже время гайки, т.е. когда
гайка завернута прежде, чѣмъ болтъ подвер-
гается значительному растяженію.

Очевидно, что если растягивающая сила дѣй-
ствуетъ въ спокойномъ состояніи и если раз-

мерные гайки таковы, что она не можетъ сорваться, то винтъ легче всего разорвется въ слабѣйшей своей части, т.е. при нарѣзкахъ и его сопротивленіе разрыву опредѣляется предѣломъ прочнаго сопротивленія на каждый квадратный дюймъ поперечнаго сѣченія ядра винта. Такимъ образомъ, называя предѣлъ прочнаго сопротивленія растяженію матеріала чрезъ R, прочное сопротивленіе винта-разрыву при спокойномъ дѣйствіи силы будетъ:

$$\frac{R\pi d_1^2}{4}$$

и если желаемъ опредѣлить, какое напряженіе при этомъ приходится на квадратный дюймъ остальной части болта, т.е. внѣ нарѣзки, то, раздѣляя предыдущую величину на площадь сѣченія стержня получимъ:

$$R\left(\frac{d_1}{d}\right)^2,$$

или, принимая какъ среднюю величину отношенія діаметровъ: $\frac{d_1}{d} = \frac{3}{4}$, получимъ сопротивленіе

$$R\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}R.$$

И такъ сопротивленіе разрыву болта съ винтовою нарѣзкою, при спокойномъ дѣйствіи силы составляетъ $\frac{9}{16}$ или нѣсколь-

ко болѣе половины сопротивленія части болта, неослабленной нарѣзкою. Но если растягивающая сила дѣйствуетъ неспокойно, напр. если при работѣ удары происходятъ толчки или сотрясенія, тогда прочность болта зависитъ отъ живого сопротивленія его разрыву, и напряженіе въ слабѣйшей части, т.е. въ ядрѣ винтовыхъ нарѣзокъ, можетъ значительно отличаться отъ вышевыведеннаго. Для объясненія этаго вообразимъ себѣ призму, подверженную растяженію и имѣющую на небольшой части своей длины уменьшенное поперечное сѣченіе, и опредѣлимъ ея живое сопротивленіе растяженію

Если назовемъ чрезъ d и d_1 діаметры полнаго и уменьшеннаго поперечныхъ сѣченій, которыя предполагаются круглыми, и чрезъ p напряженіе на каждый квадратный дюймъ въ полномъ, неуменьшенномъ сѣченіи, и обратимъ вниманіе на то, что при сравнительно малой длинѣ части съ уменьшеннымъ поперечнымъ сѣченіемъ, полоса будетъ удлиняться почти также, какъ если бы всѣ сѣченія были одинаковы, то легко видѣть, что живое ея сопротивленіе приблизительно выразится также, какъ при однообразной толщинѣ. Такимъ образомъ пока напряженіе не превосходитъ предѣла упругости, живое сопротивленіе будетъ приблизительно равно:

$$\frac{p^2 \cdot}$$

гдѣ значеніе буквъ тоже самое, какъ въ вышеизложенной теоріи упругаго сопротивленія растяженію призмъ.

Но если чрезъ A изобразимъ предѣлъ упругости матеріала, и замѣтимъ, что когда напряженіе въ уменьшенномъ поперечномъ сѣченіи достигнетъ до A пуд. на 1 квадр. дюймъ, то въ это время оно составляетъ только $p = A\left(\frac{d_1}{d}\right)^2$ пуд. на 1 квадр. дюймъ въ полномъ сѣченіи ω, то легко видѣть, что предѣлъ упругаго сопротивленія полосы, заключающей въ себѣ не большую часть съ уменьшеннымъ сѣченіемъ, будетъ:

$$\frac{A^2}{2E}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 L\omega$$

и въ случаѣ когда $\frac{d_1}{d} = \frac{3}{4}$, предѣлъ этотъ будетъ:

$$\frac{3^4}{4^4} \cdot \frac{A^2}{2E} \cdot L\omega = 0{,}316\ \frac{A^2}{2E} L\omega = 0{,}316\ T_e L\omega .$$

А между тѣмъ, если бы сѣченіе полосы было по всей ея длинѣ одинаково и равно ω, то предѣлъ упругаго сопротивленія ея былъ бы:

$$\frac{A^2}{2E} \cdot L\omega = T_e L\omega$$

Изъ этого можно заключить, что если на небольшой части длины болта находится вышеназванная нарѣзка, то предѣлъ упругаго сопротивленія болта растяженію отъ удара.

уменьшается въ отношеніи четвертыхъ степеней діаметровъ, т. е. какъ 1 къ 0,316, или болѣе чѣмъ въ 3 раза, если діаметръ ядра равенъ $\frac{3}{4}$ діаметра болта.

Но изъ теоріи упругаго сопротивленія тѣлъ растяженію извѣстно, что если требуется, чтобы сила Q, растягивающая призму при неспокойномъ дѣйствіи, не производила въ ней напряженія, превосходящаго предѣлъ упругости матеріала, то она должна удовлетворить тому условію, чтобы количество

$$Q\left(l'+\frac{v^2}{2g}\right)$$

не было болѣе предѣла упругаго сопротивленія призмы. Изъ этого слѣдуетъ, что наибольшая величина растягивающей силы Q, которая можетъ быть допущена для призмы съ одинаковымъ по всей длинѣ сѣченіемъ ω, будетъ относиться къ величинѣ силы, допускаемой для призмы, имѣющей на небольшой части своей длины уменьшенное сѣченіе $\left(\frac{d_1}{d}\right)^2\omega$, какъ соотвѣтствующія этимъ двумъ призмамъ величины упругаго сопротивленія упругости, т. е. какъ 1 къ $\left(\frac{d_1}{d}\right)^4$ или, въ случаѣ $\frac{d_1}{d}=\frac{3}{4}$, какъ 1 къ 0,316 почти какъ 1 къ $\frac{1}{3}$.

Поэтому чтобы въ ядрѣ винтовой нарѣзки болта, напряженіе не превосходило предѣла упругости, сила, растягивающая болтъ, не должна превзойти $\frac{1}{3}$ той силы, которую можно допустить для стержня болта безъ винто-

вой нарѣзки; такъ что если для послѣдняго можно допустить предѣлъ прочнаго сопротивленія въ $\frac{1}{6}$ предѣла временнаго сопротивленія R', то для болта съ нарѣзкою можно допустить R не болѣе $\frac{1}{18} R'$, т. е. не болѣе, чѣмъ $R = \frac{1240}{18} = 69$ пуд. на 1 квадр. дюймъ полнаго сѣченія стержня болта.

Постараемся еще опредѣлить, хотя приблизительно, насколько присутствіе винтовой нарѣзки можетъ уменьшить усилое сопротивленіе разрыву болта.

Для сего припомнимъ, что для одной изъ желѣзныхъ полосъ, испытанныхъ Кодфинсономъ, для которой коэффиціентъ упругости найденъ былъ въ 780'500 пуд., предѣлъ временнаго сопротивленія разрыву въ 1120 пуд., а предѣлъ упругости въ 585 пуд., выше исчисленъ былъ предѣлъ усилаго сопротивленія разрыву желѣза обыкновеннаго качества въ 9,18 пудодюймовъ.

Полоса изъ такого матеріала должна разорваться, когда въ слабѣйшемъ сѣченіи напряженіе дойдетъ до 1120 пуд. на 1 квадр. дюймъ, т. е. когда сила растягивающая всю полосу, дойдетъ до величины.

$$1120 \frac{\pi d_1^2}{4} \text{ пуд.},$$

или когда на каждый квадратный дюймъ полнаго поперечнаго сѣченія придется

растягивающая сила:

$$p = 1120 \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 \text{пуд.},$$

т. е. при $\frac{d_1}{d} = \frac{3}{4}$, $p = \frac{9}{16} \cdot 1120 = 630$ пуд.

Такъ какъ это напряженіе мало отличается отъ предѣла упругости матеріала, то живое сопротивленіе полосы при этомъ напряженіи не можетъ много отличаться отъ того, которое мы бы получили, предположивъ что удлиненія полосы пропорціональны напряженіямъ не только до вышеупомянутаго предѣла упругости въ 585 пуд., но до 630 пуд. на 1 квадр. дюймъ. По этому предѣлъ живого сопротивленія разрыву полосы съ уменьшеннымъ поперечнымъ сѣченіемъ долженъ быть приблизительно равенъ:

$$\frac{p^2}{2E} 2\overline{\omega} = \frac{630^2}{2.780\,500} 2\overline{\omega} = 0{,}254\, 2\overline{\omega},$$

и отношеніе между этою величиною и предѣломъ живого сопротивленія разрыву полосы съ полнымъ по всей длинѣ сѣченіемъ будетъ:

$$\frac{0{,}254\, 2\overline{\omega}}{9{,}18\, 2\overline{\omega}} = \frac{1}{36}$$

Итакъ если на небольшомъ протяженіи болта имѣется винтовая нарѣзка, при которой діаметръ ядра составляетъ около $\frac{3}{4}$ діаметра полнаго сѣченія болта, то живое сопротивленіе разрыву болта отъ этого уменьшается въ

36 разъ. Отсюда можно заключить, подобно предыдущему, что сила могущая ударомъ или сотрясеніями разорвать болтъ, ослабленный винтовою нарѣзкою, будетъ въ 36 разъ меньше такой же силы, разрывающей цѣльную полосу съ такимъ же поперечнымъ сѣченіемъ, какъ и болтъ безъ нарѣзки.

Изъ это слѣдуетъ, что, опредѣляя діаметръ болта по вышеприведенной эмпирической формулѣ,

$$d = 0{,}178\sqrt{P},$$

при которой предѣлъ прочнаго сопротивленія растяженію болта въ полномъ его сѣченіи выходитъ въ 40 пуд. на 1 квадр. дюймъ или около $\frac{1}{30}$ предѣла временнаго сопротивленія, мы допускаемъ можетъ быть далеко слишкомъ большой предѣлъ прочнаго сопротивленія, если болтъ можетъ подвергаться сильнымъ ударомъ или сотрясеніямъ.

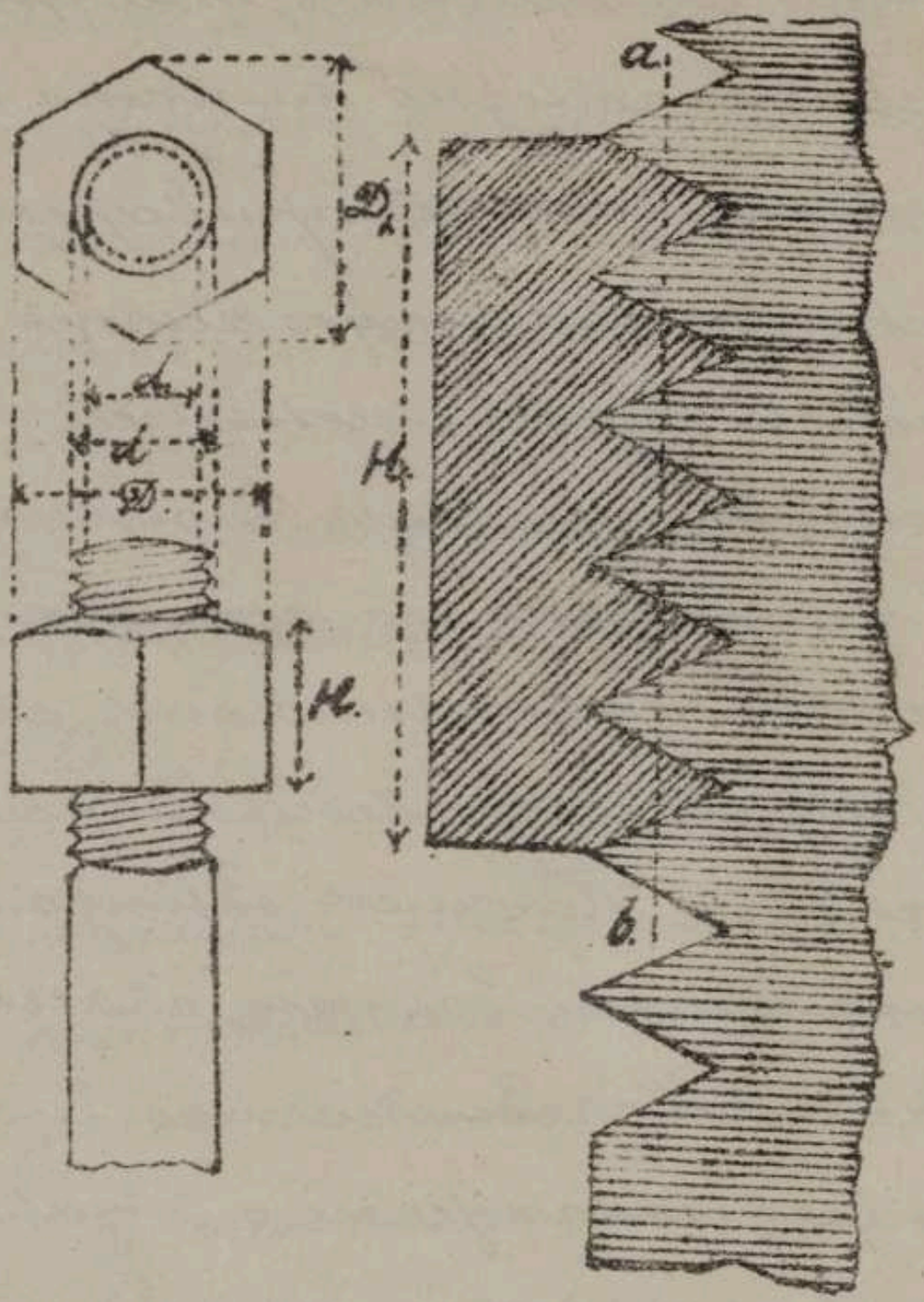
Вышеизложенное изслѣдованіе приводитъ къ тому заключенію, что причина слабаго сопротивленія разрыву болта съ винтовою нарѣзкою заключается въ уменьшеніи поперечнаго сѣченія его при нарѣзкѣ. И такъ, увеличивая діаметръ той части болта, на которой расположена нарѣзка на столько, чтобы ядро винта было одинаковой толщины съ остальною частію болта, можно сохранить болту полное его живое сопротивленіе

разрыву.

По сему во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда болты подвергаются растягивающимъ силамъ, дѣйствующимъ не спокойно, весьма полезно вмѣсто нарѣзыванія винта на самомъ болтѣ, приварить къ болту отдѣльно приготовленную часть съ винтовою нарѣзкою, которой ядро нѣсколько тоньше, чѣмъ стерженъ болта, при чемъ только мѣсто сварки должно быть утолщено на столько, чтобы вознаградить потерю прочности отъ сварки, которая при доброкачественной работѣ составляетъ не болѣе 25%. Такимъ образомъ напримѣръ были приготовлены болты, связывающіе верхній и нижній пояса Вересбинскаго моста, и по сему сопротивленіе растяженію этихъ болтовъ при опредѣленіи ихъ размѣровъ могло быть принято въ 250 пуд., на 1 квадр. дюймъ поперечнаго сѣченія болта или ядра его винтовой нарѣзки, тѣмъ болѣе что завертываніе гаекъ никогда не можетъ имѣть мѣсто при наибольшемъ растяженіи этихъ болтовъ, происходящемъ во время движенія поѣздовъ черезъ мостъ.

Такъ какъ сила, растягивающая винтъ, передается ему съ одной стороны гайкою, а съ другой шляпкою, то и та и другая должны имѣть достаточную высоту, чтобы онѣ не могли быть оторваны отъ винта срѣзываніемъ

нарѣзокъ гайки или выкрызываніемъ болта изъ шпильки, и кромѣ того гайка и шпилька должны имѣть достаточное сѣченіе чтобы не раздробиться отъ давленія на нихъ силы, растягивающей болтъ.



Опредѣлимъ снѣрва размѣры гайки. При одинаковомъ матеріалѣ нарѣзокъ гайки и винта, величина сопротивленія срѣзываніе опредѣляется тою поверхностію, по которой и тѣ и другія нарѣзки могутъ одновременно срѣзываться, оказывая одинаковыя сопротивленія, а это очевидно будетъ нѣкоторая цилиндрическая поверхность ab, занимающая средину между внутреннею и наружною цилиндрическими поверхностями нарѣзокъ, и имѣющая слѣдовательно діаметръ основанія средній между d и d_1, по сему за наименьшую возможную поверхность срѣзы-

вания можно принять поверхность ядра болта. — По этому высота H гайки должна быть такъ велика, чтобы сопротивление срѣзыванію по этой поверхности не было меньше сопротивления раз-рыву ядра. Такимъ образомъ изображая чрезъ R сопротивление разрыву и чрезъ $\frac{3}{4}$ R сопротивле-ние срѣзыванію на 1 квадр. дюймъ, получимъ усло-вие

$$\frac{3}{4} R . \pi d_1 H \geq \frac{R . \pi d_1^2}{4} \text{ откуда } H \geq \frac{d_1}{3},$$

или, при $d_1 = \frac{3}{4} d$, $H \geq \frac{d}{4}$

Если обратить вниманіе на то, что при срѣзыва-ніи нагрузка должно происходить нѣкоторое умень-шеніе сопротивления срѣзываніе отъ неодинковаго напряженія крайнихъ и среднихъ нагрузокъ, подобно тому что происходитъ при заклепкахъ и шпонкахъ, то должно полагать, что высота гайки въ $\frac{d}{4}$ нѣ-сколько менѣе той, которая дѣйствительно необхо-дима для предупрежденія срѣзыванія. Это впро-чемъ согласно и съ результатами непосредствен-ныхъ опытовъ надъ сопротивленіемъ нагрузокъ гайекъ срѣзыванію, потому что такіе опыты, произ-веденные въ Англіи, показали, что наименьшая высота гайки, при которой непроисходитъ срѣзы-ванія, равна $\frac{1}{3}$ наружнаго діаметра нагрузокъ т.е. $\frac{d}{3}$.

Впрочемъ и эту высоту еще нельзя считать доста-точною, потому что для правильнаго завинчиванія и предупрежденія загданія нагрузокъ, гайка должна

захватывать одновременно довольно большое число нарѣзокъ и по этому при треугольной нарѣзкѣ высота гайки дѣлается равною діаметру болта, т. е. $H = d$, а при прямоугольныхъ нарѣзкахъ, обыкновенно располагаемыхъ кругѣ треугольныхъ, она дѣлается въ 1½ раза больше, т. е. $H = \frac{3}{2} d$. При такихъ измѣреніяхъ очевидно срѣзываніе гайки никогда происходить немогло, такъ какъ сопротивленіе срѣзыванію второе больше сопротивленія разрыву ядра нарѣзокъ болта.

Переходя къ опредѣленію размѣровъ сѣченія гайки, перпендикулярнаго къ оси винта, замѣтимъ что при винтахъ, скрѣпляющихъ деревянныя части машинъ или зданій, гайки обыкновенно дѣлаются шестигранными для облегченія захватыванія ихъ ключами при завертываніи; для скрѣпленія же деревянныхъ частей, гайки дѣлаются большею частію четырехгранными. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ при тщательной работѣ свободная поверхность гайки нѣсколько закругляется, а именно шестигранныя гайки по шаровой поверхности, которой радіусъ отъ $2\frac{1}{2}$ до $3\frac{1}{2}$ разъ больше діаметра болта, а четырехгранныя только нѣсколько притупляются на ребрахъ. На противуположной же поверхности, подвергаемой давленію, углы нѣсколько срѣзываются во

изъѣжаніе защѣпленія при завинчиваніи. По сему
сжимаемая часть поверхности гайки будетъ
почти равна кольцеобразной площади между
окружностями болта и круга, вписаннаго въ много-
угольникъ сѣченія гайки. Чтобы сопротивленіе
сжатію этой площади было надлежащее, оно на
должно быть менѣе сопротивленія разрыву
болта, (а слѣдовательно площадь кольца круга
не должна быть менѣе сопротивленія раз-
рыву болта), а слѣдовательно площадь кольца
круга не должна быть менѣе площади сѣче-
нія болта, т. е. если D представитъ діаметръ
круга, вписаннаго въ многоугольникъ гайки, то
должно быть:

$$\frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \geq \frac{\pi d^2}{4} \text{ или } D^2 \geq 2d^2 \text{ и } D \geq d\sqrt{2} = 1{,}4\,d.$$

Для покрытія зазора, могущаго оказаться между
болтомъ и отверстіемъ, чрезъ которое онъ просу-
нутъ, эту величину увеличиваютъ еще на $\frac{1}{4}$ дюй-
ма, такъ что:

$$D = 1{,}4\,d + \tfrac{1}{4} \text{ дюйма.}$$

Называя чрезъ D, діаметръ круга описаннаго
около многоугольника гайки, легко видѣть, что
при шестигранной гайкѣ:

$$D_1 = \frac{D}{\cos 30^\circ} = 1{,}15\,D$$

а при четырехгранной гайкѣ:

$$D_1 = D\sqrt{2} = 1{,}4\,D = 2\,d.$$

Переходя къ опредѣленію размѣровъ шпянки болта,
замѣтимъ что площадь поперечнаго сѣченія шпян-
ки очевидно должна быть такая же, какъ у гайки,

и что для удерживанія болта отъ вращенія такимъ же ключемъ, какой употребляется для завинчиванія гайки, гнѣзда должны быть же вида, какъ и гайки, такъ что все различіе между гнѣздомъ и гайкою можетъ быть только въ ихъ высотѣ. Высота гнѣзда должна быть достаточно велика, чтобы болтъ не могъ быть изъ него вырванъ, посему, такъ же какъ и выше для гайки, легко найти что наименьшая высота гнѣзда должна быть $\frac{1}{3}$ діаметра болта.

Но такъ какъ желѣзо при осаживаніи или свариваніи для образованія гнѣзда можетъ нѣсколько ослабиться, и такъ какъ для придерживанія гнѣзда ключемъ она не должна быть слишкомъ тонка, то высота H_1 гнѣзда обыкновенно берется отъ $\frac{2}{3}d$ до $\frac{3}{4}d$, т. е. среднимъ числомъ:

$$H_1 = 0{,}7\,d.$$

Подъ гайки и гнѣзда винтовъ иногда кладутся желѣзныя или чугунныя подкладки; при скрытіи желѣзныхъ частей винтами, подкладки имѣютъ цѣлію уменьшить треніе гайки по поверхности скрытой части; въ этомъ случаѣ подкладки употребляются только, если поверхность скрытой части не чисто отдѣлана, и подкладкѣ дается толщина около $\frac{1}{11}$ діаметра болта и площадь нѣсколько большая, чѣмъ

кругъ описываемый ребромъ гайки при вращеніи. Если все скрѣпляемыя части состоятъ изъ матеріала менѣе прочнаго, чѣмъ винтъ, то подкладка должна служить для передачи давленія гайки или шляпки винта на площадь большую, чѣмъ площадь гайки, такъ, чтобы давленіе на каждую квадратную единицу площади не превосходило предѣла прочнаго сопротивленія матеріала менѣе прочнаго.

Легко видѣть, что площадь подкладки, прикасающаяся къ гайкѣ, можетъ быть почти равна площади гайки и опредѣляется также, какъ и выше но другая площадь касанія подкладки и скрѣпляемаго тѣла должна быть въ зависимости отъ наибольшаго давленія, передаваемаго винтомъ, и отъ предѣла прочнаго сопротивленія сжимаемаго тѣла. Изображая поперечное сѣченіе болта чрезъ ω, и искомую площадь подкладки чрезъ ω', напряженіе на 1 квадр. дюймъ сѣченія болта чрезъ R_1, и чрезъ R_2 предѣлъ прочнаго сопротивленія сжатію матеріала скрѣпляемаго тѣла, должно быть:

$$R_2\omega' \geq R_1\omega \quad \text{и} \quad \omega' \geq \frac{R_1}{R_2}\omega .$$

Для примѣра можно по этой формулѣ опредѣлить размѣры подкладокъ при скрѣпленіи сосновыхъ брусьевъ винтами. Если винтъ нарѣзанъ прямо на неутолщенной части болта, то выше выведено, что наибольшее напряженіе его будетъ около 40 пуд. на 1 квадр. дюймъ поперечнаго сѣченія

болта, а для сосноваго дерева, сдавливаемаго по перегъ фибръ, можно принять $R_2 = 8$ пуд, по этому:

$$\omega' \geq \frac{40}{8}\omega = 5\omega;$$

а слѣдовательно для круглой подкладки съ діаметромъ d', нимъ бы

$$\omega' = \frac{\pi(d'^2 - d^2)}{4}; \quad \omega = \frac{\pi d^2}{4}; \quad \pi\frac{(d'^2 - d^2)}{4} \geq \frac{5\pi d^2}{4},$$

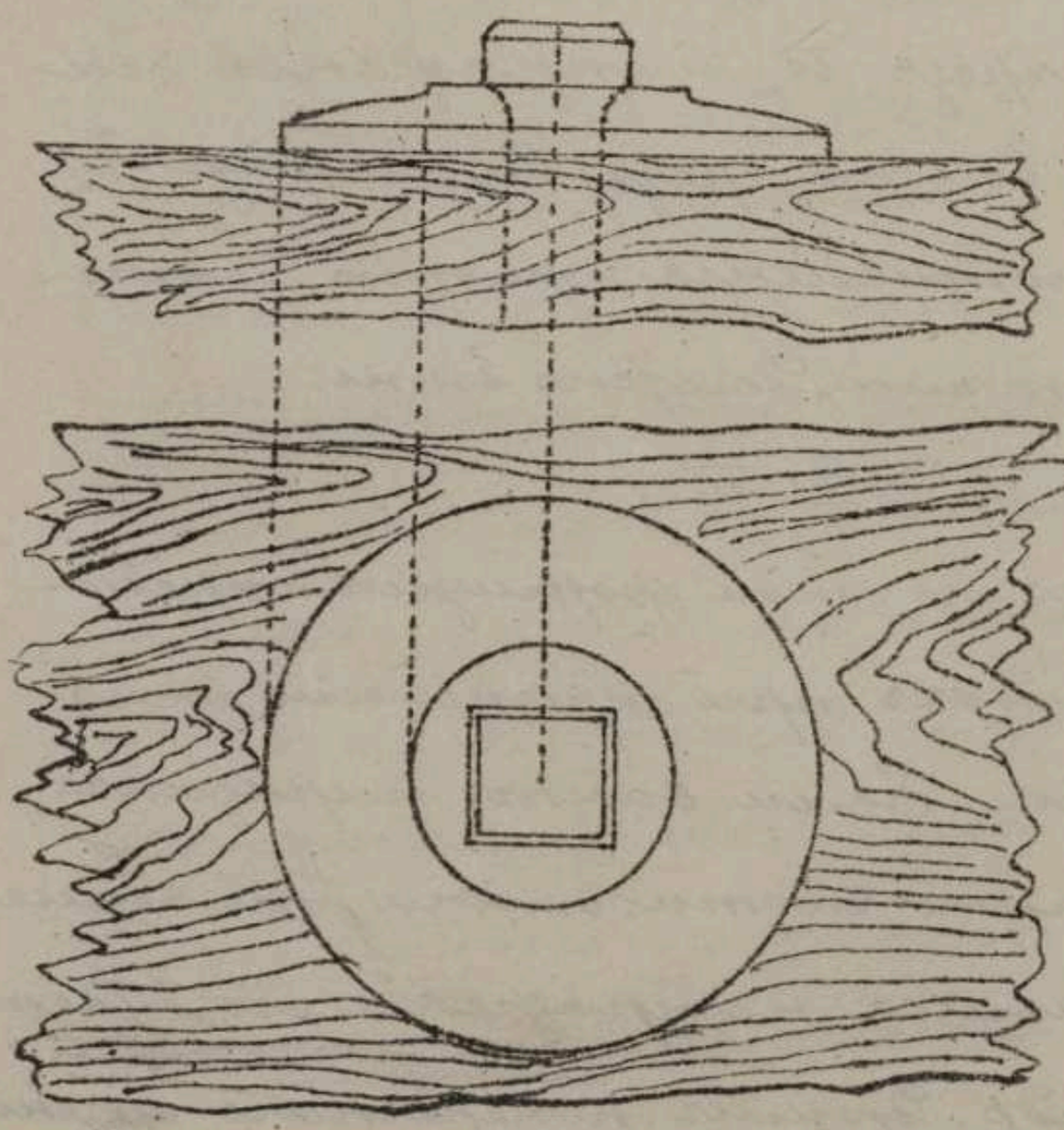
откуда

$$d'^2 \geq 6d \text{ и } d' \geq d\sqrt{6} = 2{,}45\,d.$$

Если же вмѣсто нарѣзанъ на утолщенной части болта, то можно принимать $R = 240$ пуд и тогда:

$$\omega' \geq \frac{240}{8}\omega; \quad \omega' \geq 30\omega; \quad d'^2 - d^2 \geq 30\,d^2; \quad d' \geq d\sqrt{31} = 5{,}5\,d.$$

Чтобы подкладка могла при такой значительной площади передавать давленіе гаек, чтобы оно разпространялось равномѣрно, она должна имѣть толщину достаточную для предупрежденія всякаго изгиба. При постройкѣ деревянныхъ раскосныхъ мостовъ на Николаевской желѣзной дорогѣ, круглыми подкладками болты были слѣдующія толщины:



При діаметрѣ болта отъ $1\frac{3}{4}$ до $2\frac{1}{2}$ дюйма.

толщина подкладки 1 3/4 дюйма, при діаметрѣ болта отъ 2 дюйм. до 2 1/2 дюйм. толщина подкладки 2 дюйма.

Остается еще обратить вниманіе на размѣры и видъ самыхъ нарѣзокъ винтовъ. Нарѣзки винта должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: во 1 дюймѣ спиральная линія нарѣзокъ должна быть достаточно полога для того, чтобы не только можно было малымъ усиліемъ при завинчиваніи гайки произвести значительную натянутость болта, но еще чтобы по возможности предупредить саморазвинчиваніе гайки отъ давленій на нее или отъ сотрясеній и ударовъ и во 2 дюйм. глубина и толщина нарѣзокъ должна быть достаточна для предупрежденія неправильнаго движенія и загрязненія гайки и слишкомъ скораго стиранія нарѣзокъ. Условія эти невозможно подвести подъ вычисленіе и потому размѣры нарѣзокъ и ихъ видъ могутъ быть опредѣлены только опытомъ и практическими наблюденіями. Англійскій механикъ Іосифъ Уитвортъ первый предложилъ въ 1841 году правила, основанныя на изслѣдованіи лучшихъ образцовъ винтовъ и могущія служить для опредѣленія размѣровъ нарѣзокъ винта.

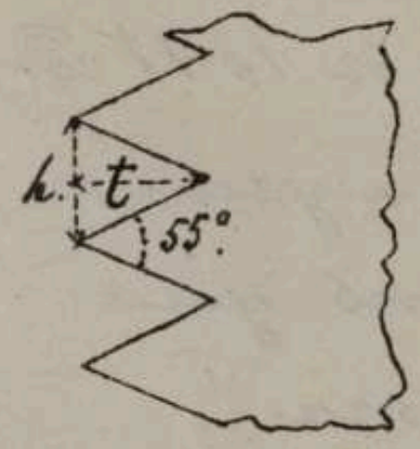
Эти правила съ маловажными измѣненіями приняты большинствомъ инженеровъ и механиковъ.

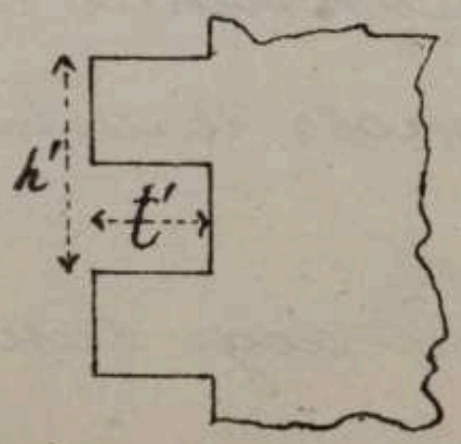
Наклоненіе или такъ называемый ходъ винтовой спирали Уитвортъ опредѣлилъ числомъ

нарѣзокъ, на части длины болта, равной его діаметру и составимъ таблицу, заключающую это число нарѣзокъ для различныхъ величинъ діаметра болта отъ $\frac{1}{4}$ дюйма до 6 дюймовъ. При четыреугольной профили нарѣзокъ ходъ винта вдвое круче, чѣмъ при треугольной. При послѣдней уголъ при вершинѣ треугольника составляетъ по Уитворту отъ 55° до 60°, и соотвѣтственно этому опредѣляется глубина нарѣзокъ. На основаніи таблицы Уитворта, Редтенбахеръ вывелъ эмпирическую формулу, выражающую съ достаточною вѣрностію тѣсную зависимость между діаметромъ болта и числомъ k оборотовъ спирали на длину, равную діаметру, а именно, если d выражено въ русскихъ дюймахъ,

$$k = \sqrt[3]{48 + 426\,d}\ .$$

Такъ какъ при углѣ вершины треугольной профили въ 55° высота хода винта h едва отличается отъ глубины нарѣзки t, то Редтенбахеръ принялъ ихъ равными между собою, и тогда для треугольной нарѣзки выходитъ:





$$t = h = \frac{d}{k} \text{ и } d_1 = d - 2t = \frac{k-2}{k}\,d.$$

Такъ какъ для четыреугольной нарѣзки число k' нарѣз—

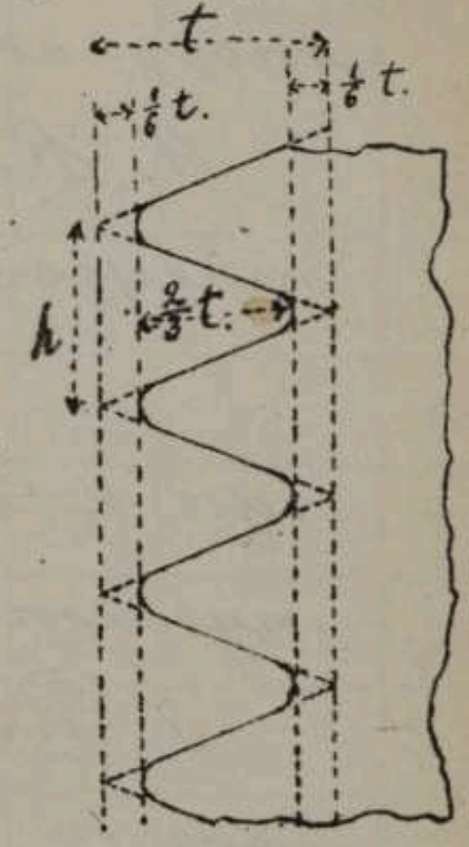
зокъ на длинѣ равной діаметру болта вдвое меньше, чѣмъ при треугольной нарѣзкѣ, то число нарѣзокъ:

$$\kappa' = \frac{\kappa}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{48+426d}\ ;$$

а какъ глубина t дѣлается равною толщинѣ $\frac{h'}{2}$ нарѣзки, то $t' = \frac{h'}{2} = \frac{d}{2\kappa'} = \frac{d}{\kappa}$ и $d_1 = d - 2t = \frac{\kappa-2}{\kappa}d$.

Треугольная нарѣзка винта по крайней своей спирали нѣсколько притупляется для предупрежденія загданія. Но если предполагается часто завинчивать и отвинчивать гайку и когда винтъ отдѣлывается тщательно, то какъ по наружной, такъ и по внутренней окружностямъ, нарѣзки срѣзываются на $\frac{1}{6}$ своей глубины и закругляются.

При этомъ глубина нарѣзки уменьшается на $\frac{1}{3}$ независимость между діаметромъ d болта и діаметромъ d_1 ядра винта будетъ:



$$d_1 = d - 2\frac{2}{3}t = d - \frac{4}{3}h = d - \frac{4}{3}\frac{d}{\kappa}$$

или

$$d_1 = \frac{3\kappa-4}{3\kappa}d\ .$$

Вышеизложенныя изслѣдованія приводятъ къ слѣдующему своду результатовъ и формулъ.

1, Если винтъ нарѣзанъ на болтъ безъ утолщенія его, то:

$d = 0{,}178\sqrt{P}$; $P = \left(\frac{1}{0{,}178}\right)^2 d^2 = 31{,}6\,d^2$ и $R = \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{31{,}6\cdot 4}{\pi} = 40$ пуд.

Если наибольшее растяженіе не можетъ происходить во время завертыванія и нѣтъ большихъ сотрясеній, то можно P и R взять вдвое болѣе, при

толщ ее діаметръ d.

2, Если винтъ нарѣзанъ на утолщенной части болта, такъ что діаметръ ядра винта не меньше діаметра болта, то:

$$d = 0,0728\sqrt{P}\,;\quad P = 188,5\,d^2 \text{ и } R = \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2} = 240 \text{ пуд.}$$

Сопротивленіе болта разрыву въ этомъ случаѣ въ 6 разъ больше, чѣмъ въ предыдущемъ.

3, Число нитей или оборотовъ спирали на длину, равную наружному діаметру треугольныхъ нарѣзокъ, опредѣляется согласно таблицъ Уитворта формулою Редтенбахера:

$$K = \sqrt[3]{48 + 426\,d}.$$

Для четыреугольныхъ нарѣзокъ это число оборотовъ спирали вдвое меньше.

4, Какъ для четыреугольныхъ, такъ и для треугольныхъ незакругленныхъ нарѣзокъ:

$$d_1 = \frac{K-2}{K}\,d\,,$$

гдѣ K имѣетъ значеніе, выраженное формулою пункта 3го.

5, Для треугольныхъ закругленныхъ нарѣзокъ:

$$d_1 = \frac{3K-4}{3K}\,d\,.$$

6, Высота гайки $H = \begin{cases} d \text{ для треугольн. нарѣзокъ} \\ \frac{3}{2}d \text{ — четыреугольн. ——} \end{cases}$

7, Высота шляпки $H_1 = 0,7\,d$.

8, Діаметръ вписаннаго круга площади основанія гайки опредѣляется формулою:

$$D = 1,4\,d + \tfrac{1}{4} \text{ дюйма.}$$

9, Діаметръ описан-ного круга $D_1 =$ { 1,15 D для шестигран. гаекъ и шляпокъ; 1,4 D — четыреграни. —— " ——

Для облегченія примѣненій главные результаты этихъ формулъ, относящіеся къ болтамъ безъ утолщенія ядра нарѣзокъ, помѣщены въ слѣдующей таблицѣ:

d	P	Треуголь-ная нарѣзка.		Закругленная нарѣзка.		Прямоуголь-ная нарѣзка.	
		K.	d_1	K	d_1	$K' = \frac{K}{2}$	d_1
Дюймы	Пуды		Дюймы		Дюймы		Дюймы
$\frac{1}{4}$	2	5,3	0,16	5,3	0,19	2,6	0,16.
$\frac{1}{2}$	8	6,4	0,35	6,4.	0,39	3,2	0,35
$\frac{3}{4}$	18	7,2	0,54	7,2	0,58	3,6	0,54
1	32	7,8	0,74	7,8	0,83	3,9	0,74.
$1\frac{1}{4}$	50	8,3	0,95	8,3.	1,05	4,1	0,95
$1\frac{1}{2}$	72	8,8	1,16.	8,8	1,27	4,4	1,16.
$1\frac{3}{4}$	98	9,3	1,37	9,3	1,47	4,6	1,37.
2	128	9,6	1,58	9,6	1,72	4,8	1,58
$2\frac{1}{2}$	200	10,3	2,01	10,3	2,18	5,2	2,01
3.	288	11	2,45	11	2,64	5,5	2,45.

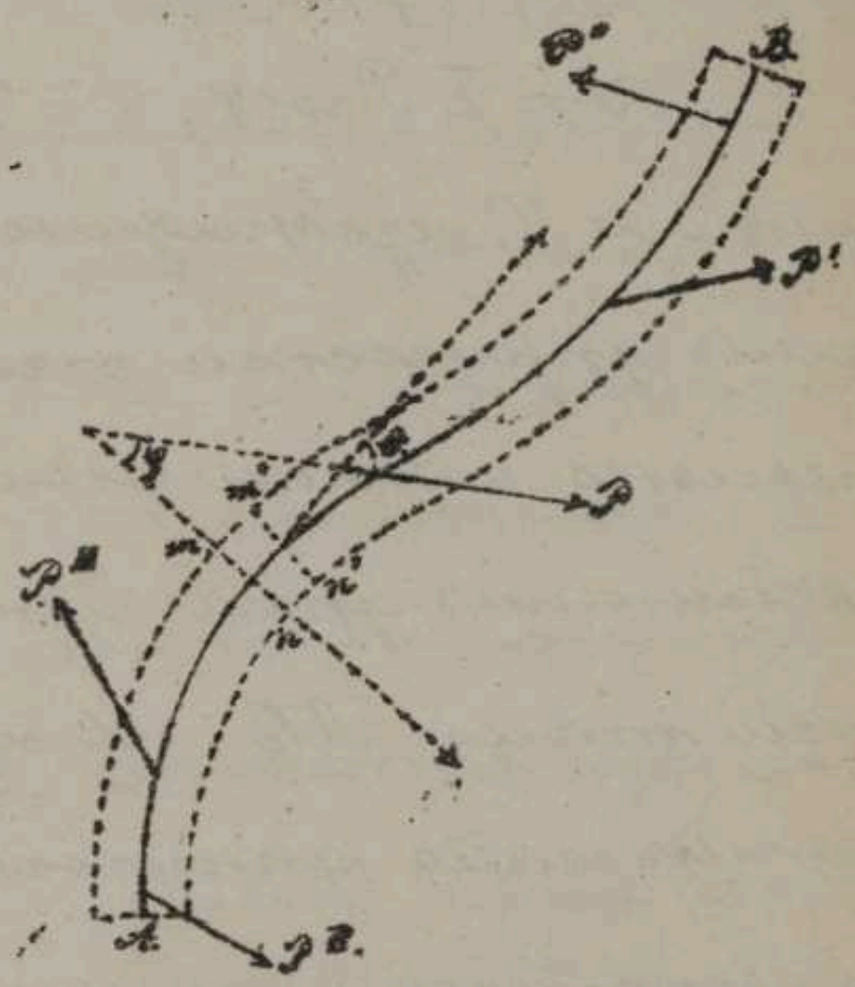
Теорія изгиба призматическихъ тѣлъ

Если тѣло въ различныхъ точкахъ своей оси подвержено дѣйствію внѣшнихъ силъ, направленныхъ какъ нибудь, т.е. не только параллельно оси тѣла, но также перпендикулярно или косвенно къ ней, то дѣйствіемъ этихъ силъ оно изгибается, и если внѣшнія силы достаточно значительны, то тѣло можетъ переломиться.

Этотъ родъ измѣненія вида тѣлъ встрѣчается весьма часто въ постройкахъ и посему для строителей особенно важно изученіе способовъ, по которымъ можно опредѣлить на сколько тѣло изгибается дѣйствіемъ данныхъ силъ и повернуть его прочность, или же по даннымъ измѣреніямъ тѣла опредѣлить величины силъ, дѣйствію которыхъ оно можетъ подвергаться безъ ущерба его прочности. Практически принимаемые способы, до сихъ поръ для этаго выработанные, относятся только къ тѣмъ случаямъ, которые наиболѣе часто встрѣчаются въ частяхъ зданій, а именно: когда <u>вопервыхъ</u>, измѣненіе вида тѣла незначительно, во <u>вторыхъ</u>, измѣренія поперечнаго сѣченія тѣла малы въ сравненіи съ его длиною и радіусомъ кривизны его оси, въ <u>третьихъ</u>, внѣшнія силы, таковы, что могутъ быть замѣнены равнодѣйствующими,

находящимися въ одной и той же плоскости, проходящей чрезъ ось тѣла, и въ <u>четвертыхъ</u> поперечное сѣченіе тѣла симметрически расположено по обѣ стороны плоскости, по которой направлены равнодѣйствующія внѣшнихъ силъ. Посему во всемъ нижеслѣдующемъ мы будемъ разсматривать только изгибъ призматическихъ тѣлъ, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ.

Пусть кривая AB представитъ изогнутую ось тѣла т. е. линію, проходящую чрезъ центры тяжести всѣхъ поперечныхъ сѣченій его. Положимъ что на эту ось дѣйствуютъ нѣсколько силъ, направленныхъ какъ нибудь по плоскости оси, а именно P, P', P'', P''', P^{IV}. Возьмемъ гдѣ нибудь поперечное сѣченіе mn, перпендикулярное къ оси, и положимъ, что качанія происходящія въ продолженіи изгибанія тѣла, уже прекратились и внѣшнія силы съ внутренними частичными силами уравновѣсились. Тогда каждую часть тѣла, какъ напримѣръ mnB, можно разсматривать какъ тѣло не измѣняемаго уже вида, т. е. какъ твердое тѣло, подверженное дѣйствію внѣшнихъ силъ $P, P', P''', \ldots$ и еще дѣйствію силъ упругости, проявляющихся въ точкахъ



сѣченія т п, и уравновѣшивающихъ внѣшнія силы, а посему всѣ эти силы, какъ внѣшнія такъ и внутренніе, должны удовлетворять общимъ условіямъ равновѣсія твердыхъ тѣлъ. Но какъ внутреннія силы, существующія близъ точекъ сѣченія т п, вслѣдствіе симметричнаго его вида, могутъ быть замѣнены силами, направленными по плоскости симметріи, въ которой заключаются также внѣшнія силы, то условія равновѣсія разсматриваемыхъ силъ могутъ быть выражены слѣдующими тремя уравненіями:

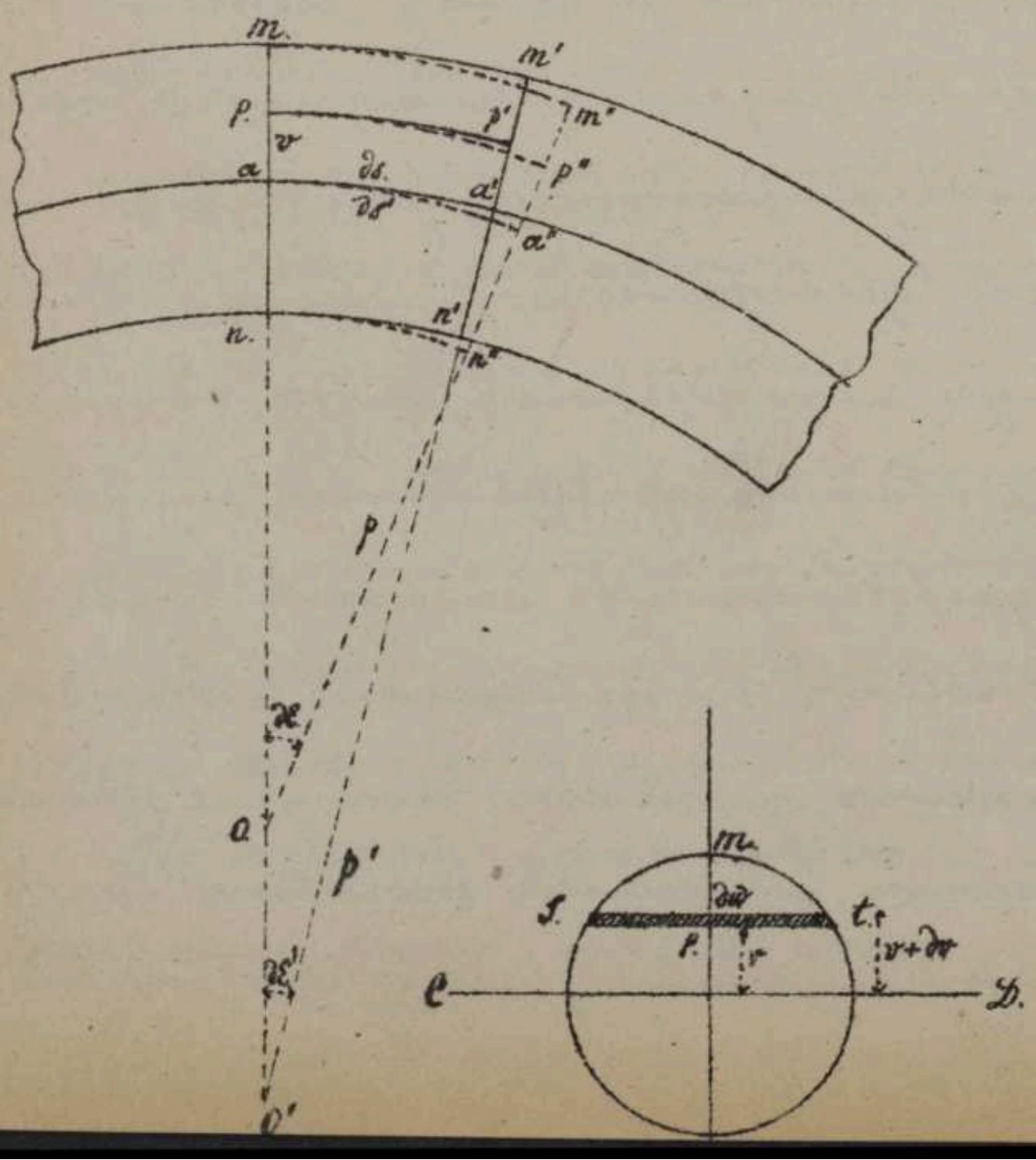
$$S = \Sigma P\cos\varphi,\ T = \Sigma P\cos\vartheta,\ M = \Sigma Pl,$$

гдѣ S и T изображаютъ суммы соотвѣтствующихъ силъ упругости сѣченія т п, разложенныхъ параллельно нормальной и касательной линіямъ, проведеннымъ чрезъ центръ тяжести сѣченія т п, къ оси тѣла AB; M изображаетъ сумму моментовъ этихъ силъ упругости относительно прямой, перпендикулярной къ плоскости дѣйствія силъ, и проходящей чрезъ центръ тяжести сѣченія; $P\cos\varphi$ и $P\cos\vartheta$ выражаютъ составляющія внѣшней силы P, параллельныя нормальной и касательной, и Pl представляетъ моментъ силы P относительно центра тяжести сѣченія т п, а знаки Σ изображаютъ суммы подобныхъ членовъ для всѣхъ внѣшнихъ силъ части т п B тѣла.

По этимъ уравненіямъ можно опредѣлить измѣненіе вида тѣла, если при данныхъ внѣшнихъ

силахъ $P, P', P'', \ldots$, дѣйствующихъ на какую угодно часть тѣла т-ра B, количества S, T и M выразить въ зависимости отъ координатъ тѣла и отъ качествъ матеріала, изъ котораго оно состоитъ. Чтобы найти такія выраженія для этихъ количествъ и дойти до возможно простого, хотя бы и только приблизительнаго рѣшенія вопроса объ изгибѣ призматическихъ тѣлъ, принято основываться на слѣдующихъ гипотезахъ: во первыхъ каждое поперечное сѣченіе, плоское до изгиба, остается плоскимъ и при изгибѣ; во вторыхъ взаимныя разстоянія продольныхъ фибръ тѣла остаются неизмѣненными во время изгибанія тѣла, т.е. видъ и размѣры поперечнаго сѣченія остаются постоянными; въ третьихъ плоское поперечное сѣченіе тѣла, перпендикулярное къ оси его до изгиба, остается перпендикулярнымъ къ оси и послѣ его изгиба. Эти гипотезы не вѣрны, но если разсматриваемыя тѣла удовлетворяютъ вышеуказаннымъ условіямъ и состоятъ изъ такого жесткаго и малосжимаемаго матеріала, какъ части зданій, то онѣ приводятъ къ выводамъ, настолько близкимъ къ результатамъ опытовъ надъ изгибомъ тѣлъ, что вполнѣ достигаютъ степени приближенія къ истинѣ, достаточной для практическихъ примѣненій, и кромѣ того эти гипотезы значительно упрощаютъ рѣшеніе вопроса.

Приступая затѣмъ къ выводу величинъ J, T и M, выдѣлимъ изъ разсматриваемаго тѣла безконечно тонкій слой его, заключающійся между двумя смежными поперечными сѣченіями mn и m'n', перпендикулярными къ оси, и обратимъ вниманіе на рядъ продольныхъ фибръ pp' этого слоя, ограниченный двумя безконечно близкими цилиндрическими поверхностями, перпендикулярными къ плоскости дѣйствія внѣшнихъ силъ и находящимися на разстояніяхъ v и v + dv отъ прямой CD, перпендикулярной къ той же плоскости и проходящей черезъ центръ тяжести сѣченія mn. На основаніи принятыхъ гипотезъ не трудно сообразить, что все измѣненіе вида разсматриваемаго ряда продольныхъ фибръ тѣла заключается только въ измѣненіи ихъ длины одинаковой по всей длинѣ st ряда, т.е. въ одномъ только растяженіи или сжатіи фибръ. Дѣйствительно если бы существовало стремленіе къ перекрещиванію фибръ параллельно поперечно-



сѣченію или же параллельно оси тѣла, то линія
pp' не могла бы остаться перпендикулярною къ
плоскости сѣченія и рядъ фибръ вмѣсто прямо-
угольнаго образовалъ бы косоугольный парал-
лелепипедъ, и если бы фибры были не одинаково ра-
стянуты или сжаты по всей ширинѣ St ряда,
то и длина ихъ измѣнилась бы не одинаково и
ихъ поперечное сѣченіе St, плоское до изгиба, не
могло бы остаться плоскимъ при изгибѣ. И
такъ если pp'' изображаетъ измѣненную длину
ряда фибръ pp', то элементъ поперечнаго сѣченія
tn, соотвѣтствующій этому ряду фибръ и E
коэффиціентъ упругости при растяженіи
и сжатіи матеріала тѣла, то сила упру-
гости, развивающаяся при элементѣ до вслѣд-
ствіе изгиба тѣла, можетъ быть выражена
черезъ

$$E \text{ до } \frac{pp''-pp'}{pp'}$$

и будетъ растяженіемъ или сжатіемъ, смотря
потому положительна или эта величина или
отрицательна; а моментъ этой силы относи-
тельно оси CD, перпендикулярной къ плоскости
дѣйствія внѣшнихъ силъ и проходящей черезъ
центръ тяжести его выразится черезъ

$$E v \text{ до } \frac{pp''-pp'}{pp'}$$

и за тѣмъ количества T и M въ уравненіяхъ равно-
вѣсія представятъ суммы подобныхъ величинъ для

всѣхъ элементовъ площади сѣченія т п и выразятся черезъ:

$$T = \int \mathcal{E} \delta\omega \frac{PP'' - PP'}{PP'} \quad \text{и} \quad M = \int \mathcal{E} v \delta\omega \frac{PP'' - PP'}{PP'}$$

Что же касается до суммы S силъ упругости, перпендикулярныхъ къ оси тѣла или параллельныхъ его поперечному сѣченію, то за отсутствіемъ сопротивленія перерѣзыванію параллельно т п, эта сумма будетъ равна нулю, и первое изъ выведенныхъ уравненій равновѣсія должно быть устранено, какъ не заключающее въ себѣ величинъ, имѣющихъ связь съ измѣненіемъ вида тѣла.

На этихъ суммахъ S конечно не будетъ равна нулю, а напротивъ равна суммѣ составляющихъ внѣшнихъ силъ, перпендикулярныхъ къ оси тѣла, которая въ свою очередь не можетъ быть всегда равна нулю при изгибѣ тѣла; но какъ устраненіе первого уравненія и сохраненіе двухъ только послѣднихъ уравненій равновѣсія, вытекающее изъ принятыхъ гипотезъ, приводитъ къ выводамъ достаточно близкимъ къ результатамъ опытовъ, то можно заключить, что сопротивленіе перерѣзыванію фибръ имѣетъ вообще такое малое вліяніе на измѣненіе вида тѣла и развивающіяся въ немъ напряженія, что имъ въ большей части случаевъ можно пренебречь. Впрочемъ въ послѣдствіи по окончаніи изложенія приблизительной теоріи изгиба, осно-

вакой на вышеприведенных гипотезах и пригод-
ной для решения весьма многих практических
вопросов; мы подвергнем особому исследованію
тѣ вопросы, касающіеся повѣрки прочности изог-
нутыхъ призматическихъ тѣлъ, при рѣшеніи ко-
торыхъ необходимо обратить вниманіе и на-
вліяніе силъ упругости, параллельныхъ попереч-
ному сѣченію тѣла.

Обращаясь затѣмъ къ преобразованію величины

$$\varepsilon d\sigma \frac{pp''-pp'}{pp'}$$

силы упругости элемента $d\sigma$, направленной па-
раллельно фибрѣ или элементу оси тѣла изобра-
женныхъ чрезъ:

ds и $d\varepsilon$ длину $\alpha\alpha''$ элемента оси и уголъ смежно-
сти $mo\,m''$ послѣ изгиба,

$ds' = \alpha\alpha'$ и $d\varepsilon' = \alpha o'\alpha'$, тѣже величины до изгиба, $v = \alpha p$
разстояніе разсматриваемой фибры до точки
α или до проходящей черезъ нее линіи CD (чер-
тежъ сѣченія mn), перпендикулярной къ плоско-
сти направленія силъ.

Тогда, проводя черезъ точку α' линію $\alpha' q$, парал-
лельную mn, легко вывести равенства:

$$pp' = pq + qp' = ds' + v\,d\varepsilon',$$

и такимъ же образомъ:

$$pp'' = ds + v\,d\varepsilon,$$

откуда

$$\frac{pp''-pp'}{pp'} = \frac{ds - ds' + v(d\varepsilon - d\varepsilon')}{ds' + v\,d\varepsilon'}$$

а слѣдовательно:

$$E d\omega \frac{pp''-pp'}{pp'} = E d\omega \frac{ds-ds'+v(d\varepsilon-d\varepsilon')}{ds'+v\,d\varepsilon'} .$$

Но при малыхъ поперечныхъ измѣреніяхъ тѣла, или малыхъ радіусахъ кривизны оси тѣла $a0'$, количество $v\,d\varepsilon'=qp'$ будетъ мало въ сравненіи съ $ds'=pq=a0'\,d\varepsilon'$ и слѣдовательно для приблизительнаго вычисленія можно пренебречь количествомъ $v\,d\varepsilon'$ въ знаменателѣ дроби въ сравненіи съ ds'.

Сверхъ того количества ds и ds' весьма мало другъ отъ друга отличаются, а слѣдовательно въ знаменателѣ дроби одно изъ нихъ можетъ быть замѣнено другимъ безъ вреда для приблизительной точности формулы. По этому сила упругости элемента $d\omega$ можетъ быть представлена въ слѣдующемъ простѣйшемъ видѣ:

$$E d\omega \frac{ds-ds'}{ds'} + E d\omega\, v\left(\frac{d\varepsilon}{ds}-\frac{d\varepsilon'}{ds'}\right)$$

Если же изобразимъ черезъ ρ' и ρ радіусы кривизны $a0'$ и $a0$ оси тѣла при a въ сѣченіи $m\,n$ до и послѣ изгиба, то имѣемъ:

$$\frac{d\varepsilon}{ds}=\frac{1}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{d\varepsilon'}{ds'}=\frac{1}{\rho'} ,$$

въ слѣдствіе чего выраженіе силы упругости, дѣйствующей въ элементѣ $d\omega$, перпендикулярно къ поперечному сѣченію $m\,n$, приметъ видъ:

$$E d\omega \frac{ds-ds'}{ds'} + E v\, d\omega \left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}\right) .$$

Найдя величину силы упругости, легко опредѣлить и моментъ этой силы относительно ли-

нія CD, проходящей чрезъ центръ тяжести сѣченія mn и перпендикулярной къ плоскости дѣйствія силъ. Моментъ этотъ получится чрезъ умноженіе величины силы упругости напряженія v, и будетъ:

$$E v\, d\omega\, \frac{ds - ds'}{ds'} + E v^2 d\omega \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)$$

Теперь не трудно также вывести величины компонентовъ T и M, изображающихъ для всего сѣченія mn сумму силъ упругости, перпендикулярныхъ къ плоскости mn, и сумму ихъ моментовъ относительно линіи CD, проведенной въ сѣченіи mn, чрезъ его центръ тяжести, перпендикулярно къ плоскости дѣйствія силъ. Для этого стоитъ только взять интегралы обыкъ выведенныхъ величинъ, въ предѣлахъ всей площади поперечнаго сѣченія mn. Такимъ образомъ въ слѣдствіе постоянства количествъ E, ds, ds', ρ и ρ' для всѣхъ точекъ одного и того же сѣченія mn найдется:

$$T = E \frac{ds - ds'}{ds'} \int d\omega + E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \int v\, d\omega,$$

$$M = E \frac{ds - ds'}{ds'} \int v\, d\omega + E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \int v^2 d\omega.$$

Въ этихъ выраженіяхъ заключаются три интеграла, изъ которыхъ первый представляетъ величину площади сѣченія mn, т. е.

$$\int d\omega = \omega;$$

второй выражаетъ сумму моментовъ элементарныхъ площадей, т. е. моментъ всей площади сѣченія

тн, относительно линіи СД, проходящей чрезъ центръ тяжести площади, и такъ какъ этотъ моментъ, какъ извѣстно изъ теоріи центровъ тяжести, долженъ быть равенъ нулю, то:

$$\int v\,d\omega = 0 .$$

Наконецъ третій интегралъ представляетъ моментъ инерціи площади сѣченія тн относительно линіи СД, проведенной чрезъ центръ тяжести площади тн, перпендикулярно къ плоскости всего тѣла. Изобразивъ этотъ моментъ инерціи чрезъ I, имѣемъ:

$$\int v^2\,d\omega = I .$$

Подставивъ величины этихъ трехъ интеграловъ, находимъ:

$$T = \mathcal{E}\,\frac{ds - ds'}{ds'}\,\omega \quad \text{и} \quad M = \mathcal{E} I \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) .$$

Вводя же эти величины въ вышеизложенныя уравненія равновѣсія тѣла, получаемъ наконецъ:

$$\mathcal{E}\,\frac{ds - ds'}{ds'}\,\omega = \sum P\cos\theta \quad \text{и} \quad \mathcal{E} I \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) = \sum Pl .$$

Эти уравненія вполнѣ опредѣляютъ измѣненіе вида тѣла при его изгибѣ данными силами. — Дѣйствительно первое уравненіе опредѣляетъ на сколько удлинится или укоротится каждый элементъ ds изогнутой оси противъ его длины ds' до изгиба, т. е дастъ величину элемента ds въ зависимости отъ ds', потому что изъ этого уравненія имѣемъ:

$$ds = ds'\left[1 + \frac{\sum P\cos\theta}{\mathcal{E}\omega}\right] ,$$

и отсюда посредствомъ интегрированія возможно опредѣлить длину s какой угодно части оси отъ конца тѣла A до поперечнаго сѣченія m_1, которой длина до изгиба была s'.

Второе же уравненіе опредѣляетъ видъ кривой оси послѣ изгиба въ зависимости отъ вида до кривой до изгиба. Дѣйствительно изъ него находимъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \frac{\Sigma \mathfrak{P} l}{EI}$$

т.е. уравненіе выражающее зависимость радіуса кривизны ρ при какой угодно точкѣ оси послѣ изгиба отъ радіуса кривизны ρ' при той же точкѣ оси до изгиба: Если выразить радіусъ кривизны въ зависимости отъ координатъ кривой линіи, то предыдущее уравненіе представитъ уравненіе кривой оси послѣ изгиба. Все это въ послѣдствіи еще болѣе объяснится примѣненіями выведенныхъ уравненій къ частнымъ случаямъ; здѣсь же пока только указывается на то, что уравненія равновѣсія тѣла заключаютъ въ себѣ рѣшеніе вопроса объ опредѣленіи измѣненія вида изгибаемаго тѣла, если при этомъ принять за основанія вышеприведенныя гипотезы.

Обратимся теперь къ вопросу о поверкѣ прочности изогнутаго тѣла. Тѣло признается прочнымъ, если ни въ одномъ изъ элементовъ до какого

угодно поперечнаго сѣченія т.п сила упругости, возбужденная при изгибѣ, не превосходитъ предѣла прочнаго сопротивленія матеріала. Но выше выведено, что сила упругости въ элементѣ $d\omega$, параллельная оси тѣла и происходящая отъ удлиненія или укороченія элемента продольной фибры, выражается чрезъ:

$$E\,d\omega\,\frac{ds-ds'}{ds'}+E\nu\,d\omega\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}\right),$$

слѣдовательно если R представляетъ предѣлъ прочнаго сопротивленія растяженію или сжатію на квадратную единицу площади сѣченія, такъ что предѣлъ этотъ для элемента площади $d\omega$ будетъ $R\,d\omega$, то условіе прочности тѣла выразится неравенствомъ

$$E\,d\omega\,\frac{ds-ds'}{ds'}+E\nu\,d\omega\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}\right)\leqq R\,d\omega,$$

или же

$$E\,\frac{ds-ds'}{ds'}+E\nu\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}\right)\leqq R.$$

Это неравенство предетавится въ видѣ болѣе удобномъ для примѣненій, если его члены замѣнимъ ихъ величинами изъ вышевыведенныхъ уравненій равновѣсія

$$E\,\frac{ds-ds'}{ds'}=\sum\frac{P\cos\theta}{\omega}\quad\text{и}\quad E\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho'}\right)=\frac{\sum Pl}{I},$$

и тогда выйдетъ:

$$\frac{\sum P\cos\theta}{\omega}+\frac{\nu}{I}\sum Pl\leqq R.$$

Чтобы тѣло было прочно, это неравенство должно быть удовлетворено для всѣхъ различныхъ элементовъ каждаго поперечнаго сѣченія тѣла; по этому

въ каждомъ частномъ случаѣ надобно опредѣлить наибольшую величину первой части неравенства, представляющей величину силы упругости, отнесенной къ единицѣ площади, и если эта наибольшая величина меньше предѣла прочнаго сопротивленія матеріала, то и остальныя меньшія величины силы упругости, возбужденныя при изгибѣ тѣла, не превзойдутъ этого предѣла и прочность тѣла будетъ обезпечена. Можно тутъ же замѣтить, что то мѣсто въ разсматриваемомъ тѣлѣ, которому соотвѣтствуетъ наибольшая величина силы упругости, будетъ очевидно ближе къ разрушенію, чѣмъ остальныя части тѣла, менѣе напряженныя, и слѣдовательно это мѣсто можетъ быть названо слабѣйшимъ въ тѣлѣ.

Для облегченія приложеній полезно обратить вниманіе на то, что представляетъ каждый изъ обоихъ членовъ первой части неравенства.

Сравнивая первое уравненіе равновѣсія

$$\varepsilon \frac{ds - ds'}{ds'} = \frac{\sum P \cos\theta}{\omega}$$

съ уравненіемъ

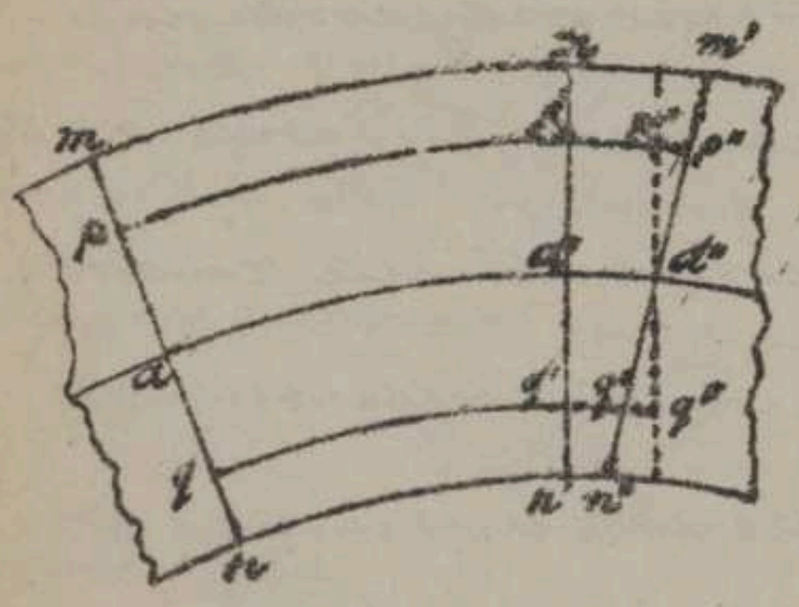
$$\varepsilon \frac{l}{L} = \frac{P}{\omega} ,$$

относящимся къ растяженію и сжатію призматическаго тѣла силою P, равномѣрно распредѣляющеюся по всему поперечному сѣченію его и производящею относительное удлиненіе $\frac{l}{L}$ его оси,

легко видеть, что если бы внѣшнія силы дѣйствовали на тѣло AB такъ, что близъ сѣченія mn производили бы только растяженіе или сжатіе, равномѣрно распредѣляемое по всему сѣченію mn, и слѣдовательно не изгибали бы тѣла въ томъ мѣстѣ, то удлиненіе или укороченіе всѣхъ фибръ при mn было бы одно и тоже, а именно равное измѣненію длины оси ds - ds', и на каждую квадратную единицу площади сѣченія то пришлось бы сила упругости равная первому члену

$$\frac{\Sigma P \cos\theta}{\omega}$$

вышевыведеннаго неравенства.



Но при изгибѣ тѣла, поперечное сѣченіе m'n', смежное съ mn, переходя въ m"n", не образуетъ параллельныхъ m'n' какъ бы это было при равномѣрномъ распредѣленіи силъ, а нѣсколько наклоняется къ своему первоначальному положенію. Вслѣдствіе этого въ каждой фибрѣ тѣла, исключая его ось, сила упругости будетъ или больше или меньше величины, соотвѣтствующей равномѣрному растяженію или сжатію. Эта прибавляемая или вычитаемая сила упругости, соотвѣтствующая одному только изгибу или вращенію поперечнаго сѣченія около оси, проходящей чрезъ его центръ тяжести и перпендикулярной къ плоскости оси тѣла, не зависящая отъ удлиненія или укороченія элемента оси тѣла, очевидно должна быть равна

второму члену вышевыведеннаго выраженія всей силы упругости, т. е.

$$E v \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \text{ или } \frac{v}{I} \Sigma \mathfrak{P} l.$$

Первая часть всей силы упругости элементарной фибры, смотря потому будетъ ли она положительна или отрицательна, представитъ растяженіе или сжатіе, одинаковое для всѣхъ точекъ сѣченія т п. Вторая же часть, заключая въ себѣ множитель v, положительный для точекъ сѣченія по одну сторону оси CD, и отрицательной для точекъ по другую сторону, представитъ растяженіе для одной части сѣченія т п, и сжатіе для другой. Поэтому, возможное ошибокъ въ примѣненіи формулъ, слѣдуетъ въ каждомъ частномъ случаѣ удостовѣриться для какой части поперечнаго сѣченія, т. е. соотвѣтствующей ли положительному или же отрицательному v, обѣ части силы упругости направлены въ одну и туже сторону, представляя обѣ или растяженіе или сжатіе, складываемыя между собою, и для какой части этого сѣченія, онѣ направлены въ противныя стороны, и должны быть взяты съ противными знаками. Затѣмъ, зная какого рода сила упругости, въ разсматриваемой фибрѣ проявляется, т. е. растяженіе ли или сжатіе,

можно съ предѣломъ прочнаго сопротивленія сравнивать только численную величину, независимо отъ знака. По сему, изображая предѣлъ прочнаго сопротивленія для растяженія чрезъ R_1, и для сжатія чрезъ R_2, условіе прочности можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

$$\text{Maximum числ. вел.} \left\{ \frac{\Sigma P \cos\theta}{\omega} \pm \frac{v}{I} \Sigma P l \right\} \leqq \begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases}$$

Впрочемъ, для приблизительныхъ вычисленій, достаточныхъ въ большей части случаевъ, обыкновенно принимается для растяженія и сжатія при изгибѣ одинъ средній предѣлъ прочнаго сопротивленія R, и тогда условіе прочности будетъ

$$\text{Max. чис. велич.} \left\{ \frac{\Sigma P \cos\theta}{\omega} \pm \frac{v}{I} \Sigma P l \right\} \leqq R .$$

Для приложенія выведенныхъ уравненій изгибанія вида изгибаемаго тѣла:

$$E \frac{\partial S - \partial S'}{\partial S'} \omega = \Sigma P \cos\theta \quad \text{и} \quad E I \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S'} \right) = \Sigma P l ,$$

и условія прочности

$$\text{Max. чис. велич.} \left\{ \frac{\Sigma P \cos\theta}{\omega} \pm \frac{v}{I} \Sigma P l \right\} \leqq R ,$$

необходимо знать величины количествъ E, R и момента инерціи I. Для коэффиціента упругости E при изгибѣ, принимается величина средняя между величинами, соотвѣтствую-

ными растяженію и сжатію того же матеріала и для приблизительныхъ вычисленій можно полагать:

Для желѣза $E = 720000$ пудовъ на 1 квадрат. дюймъ.

— чугуна $E = 75000$ — " — " ——— " ———

— сосны, ели

и лиственницы $E = 50000$ — " — " ——— " ———

Для дуба . . . $E = 47000$ — " — " ——— " ———

Предѣлъ прочнаго сопротивленія растяженію или сжатію при изгибѣ выводится изъ сравненія результатовъ опытовъ надъ изгибомъ и переломленіемъ тѣлъ съ результатами выведенныхъ формулъ, и на этомъ основаніи для R можно принимать слѣдующія среднія величины:

а) въ обыкновенныхъ случаяхъ:

Для желѣза $R = 240$ пудовъ на 1 квадрат. дюймъ

— чугуна . . $R = 120$ — " — " ——— " ———

— дерева . . $R = 24$ — " — " ——— " ———

б) при отсутствіи сотрясеній, отличномъ матеріалѣ и необходимости уменьшить изгибленія тѣла для уменьшенія его вѣса:

для желѣза $R = 320$ пуд. на 1 квадр. дюймъ

— чугуна $R = 160$ — — ——— ———

— дерева $R = 32$ — — ——— ———

Что же касается до момента инерціи поперечнаго сѣченія тѣла, относительно оси,

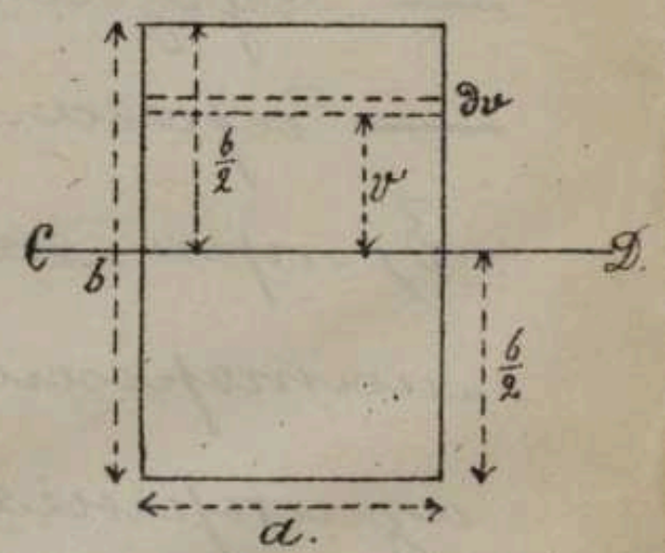
проходящей чрезъ его центръ тяжести и перпендикулярной къ плоскости, въ которой происходитъ изгибъ оси тѣла, то величину этого момента не трудно вывести для употребительнѣйшихъ видовъ поперечныхъ сѣченій.

При прямоугольномъ поперечномъ сѣченіи, котораго ширина, перпендикулярная къ плоскости изгиба, изображена чрезъ a, и высота чрезъ b, имѣемъ:

$$I = \int v^2 d\omega = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} v^2 a\, dv = \frac{ab^3}{12}.$$

и количество $\frac{v}{I}$, входящее въ формулу для повѣрки прочности изгибаемаго тѣла, въ этомъ случаѣ, отъ того что наибольшее разстояніе v отъ тѣла до линіи CD, проходящей чрезъ центръ тяжести, будетъ $\frac{b}{2}$, выразится чрезъ:

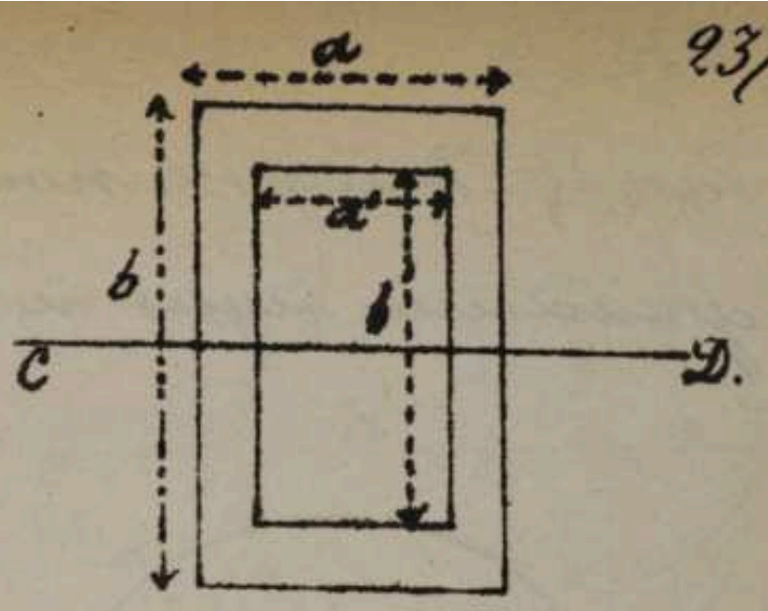
$$\frac{v}{I} = \frac{6}{ab^2}$$



При квадратномъ сѣченіи имѣемъ:

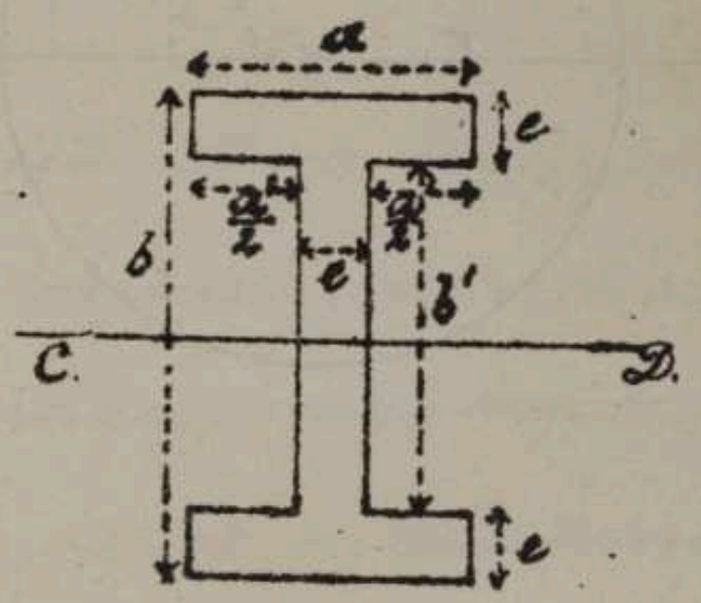
$$a = b, \quad I = \frac{a^4}{12}, \quad \frac{v}{I} = \frac{6}{a^3}.$$

Моментъ инерціи прямоугольнаго сѣченія, внутри пустого, но симметрическаго относительно линіи CD, проходящей чрезъ его центръ тяжести, очевидно найдется, если



изъ момента инерціи площади внѣшняго прямоугольника вычтемъ моментъ инерціи внутренняго. Итакъ въ этомъ случаѣ будетъ:

$$I = \frac{ab^3 - a'b'^3}{12}, \quad v = \frac{b}{2}, \quad \frac{v}{I} = \frac{6b}{ab^3 - a'b'^3}.$$



Тѣже выраженія относятся также къ поперечному сѣченію въ видѣ двойной буквы Т, отличающемуся отъ предыдущаго только тѣмъ, что боковыя стѣнки передвинуты въ средину отъ его площадей и разстояніе частицъ до линіи CD, а слѣдовательно и моментъ инерціи, ни сколько не измѣнятся.

Чтобы найти моментъ инерціи для круглаго сѣченія, котораго радіусъ равенъ r, проведемъ два радіуса ox и ox' подъ углами къ CD, равными θ и θ + dθ, и двѣ дуги радіусами: ρ и ρ + dρ; тогда образуется элементарная площадь:

$$dw = \rho . d\rho . d\theta ,$$

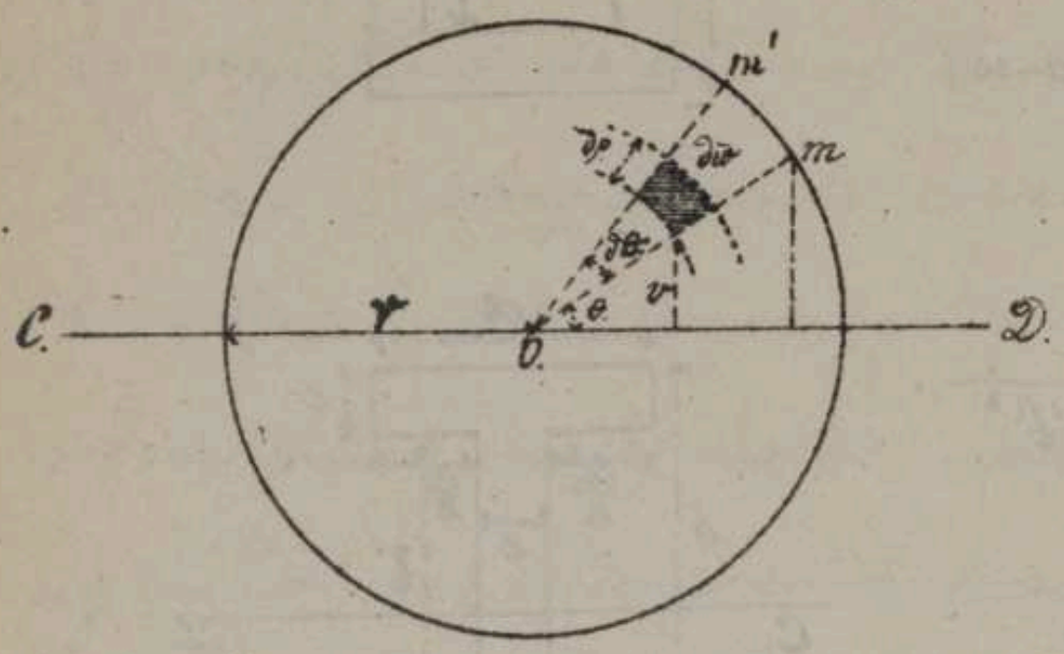
которой разстояніе до линіи CD будетъ:

$$v = \rho . \sin\theta .$$

По этому:

$$I = \int v^2 dw = \int \rho^3 \sin^2\theta . d\rho . d\theta ,$$

где ρ должно получать всѣ значенія между предѣлами нуль и r, а θ всѣ величины между предѣлами нуль и 2π, такъ что можно написать:



$$I = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta.$$

А для взятія остающагося интеграла, стоитъ только замѣтить что:

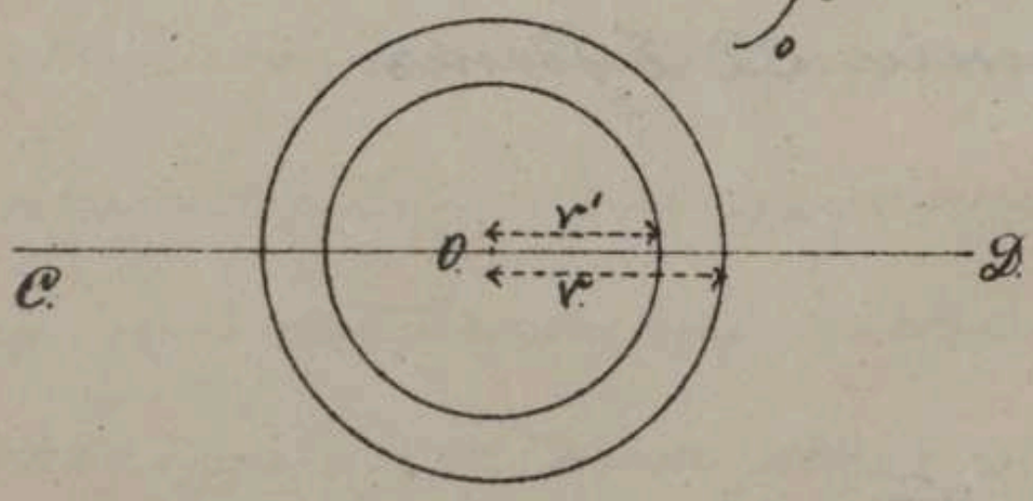
$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta,$$

потому что въ обоихъ этихъ интегралахъ, при послѣдовательномъ измѣненіи перемѣнной между предѣлами 0 и 2π, подъ интегральная функція получаетъ одни и тѣже величины только въ различномъ порядкѣ. Но какъ кромѣ того въ слѣдствіе равенства:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

имѣемъ:

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 2\pi,$$



то выходитъ, что

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \pi;$$

въ слѣдствіе чего находимъ:

$$I = \frac{\pi r^4}{4}, \quad \frac{v}{I} = \frac{4}{\pi r^3}$$

Для круга внутри пустого, при наружномъ радіусѣ r и внутреннемъ r', имѣли бы:

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r'^4) \; ; \; \frac{v}{I} = \frac{4r}{\pi(r^4 - r'^4)}.$$

Для вычисленія момента инерціи эллипса, котораго полюсъ a направленъ по линіи cd а полюсъ b перпендикулярна къ ней, замѣтимъ, что моментъ инерціи элемента mnq эллипса, какъ прямоугольника, котораго высота $mn = 2y$, и широта $pq = dx$, будетъ:

$$\frac{(2y)^3 dx}{12} \text{ или } \frac{2y^3 dx}{3}.$$

Но, описывая кругъ изъ центра эллипса радіусомъ a, и опредѣляя моментъ инерціи его элемента $m'n'q$, котораго высота $2y'$ и ширина dx получимъ:

$$\frac{(2y')^3 dx}{12} \text{ или } \frac{2y'^3 dx}{3}.$$

и если изъ уравненій круга и эллипса, выведемъ величины ординатъ y' и y круга и эллипса, то найдемъ:

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \; ;$$

откуда

$$y = \frac{b}{a} y'$$

и

слѣдовательно

$$\frac{2y^3 dx}{3} = \frac{b^3}{a^3} \frac{2y'^3 dx}{3}.$$

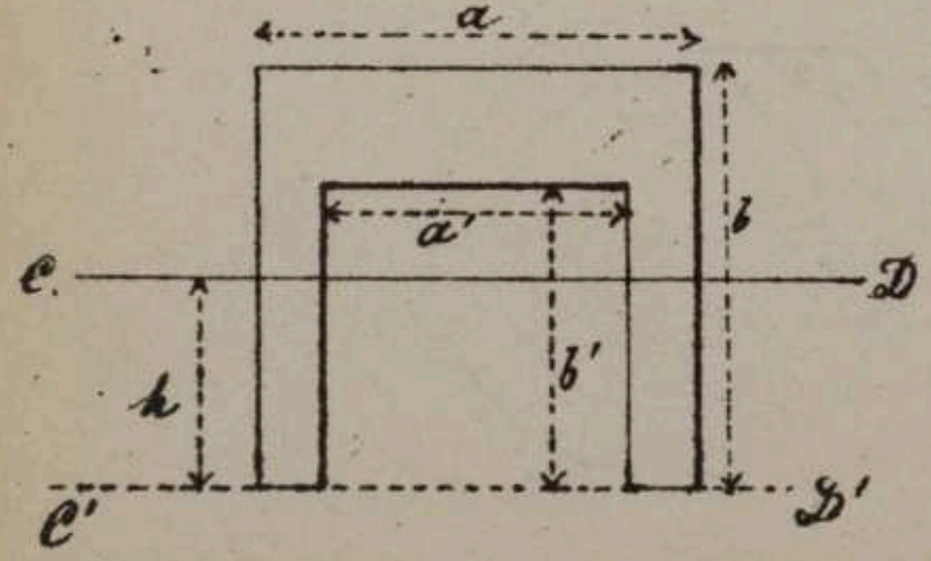
И такъ моментъ инерціи элемента эллипса получится изъ момента инерціи элемента круга, чрезъ умноженіе послѣдняго на отношеніе $\frac{b^3}{a^3}$, а по этому и моментъ инерціи цѣлаго эллипса будетъ равенъ моменту инерціи цѣлаго круга, умноженному на ту же дробь $\frac{b^3}{a^3}$, т. е. для эллипса найдется:

$$I = \frac{\Pi a^4}{4} \cdot \frac{b^3}{a^3} = \frac{\Pi a b^3}{4} \quad \text{и} \quad \frac{v}{I} = \frac{4}{\Pi a b^2}.$$

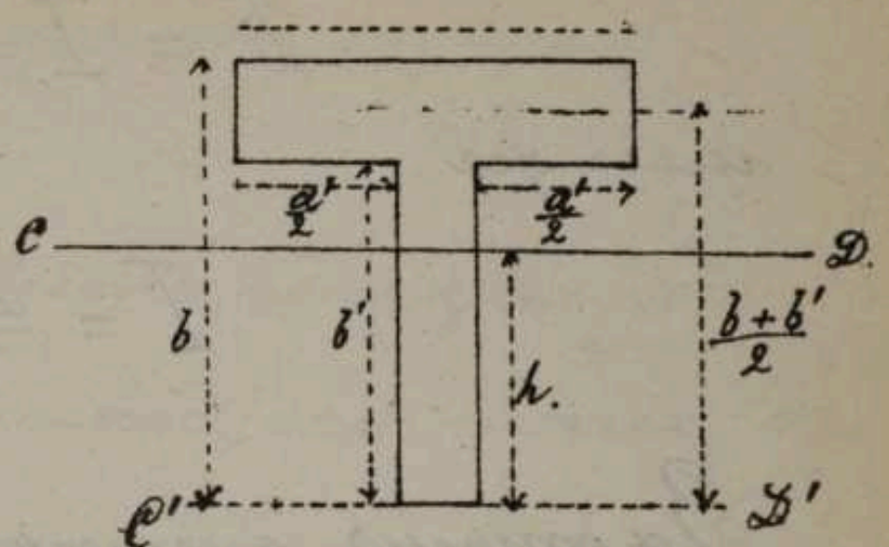
Для эллипса внутри пустого, котораго внутреннія полуоси суть a' и b', мы бы нашли:

$$I = \frac{\Pi}{4}(ab^3 - a'b'^3) \quad \text{и} \quad \frac{v}{I} = \frac{4b}{\Pi(ab^3 - a'b'^3)}.$$

Если поперечное сѣченіе тѣла имѣетъ видъ буквы Т, какъ напримѣръ въ тавровомъ желѣзѣ или видъ буквы П, то для опредѣленія момента инерціи, очевидно одинаковаго для обоихъ сѣченій, надобно предварительно найти разстояніе линіи CD, проходящей чрезъ центръ тяжести сѣченія, отъ верхней или нижней его точки. Изобразивъ разстояніе линіи CD до нижней точки сѣченія чрезъ h, имѣемъ для его нахожденія условіе, что моменты площади сѣченія относительно линіи CD, проведенной чрезъ



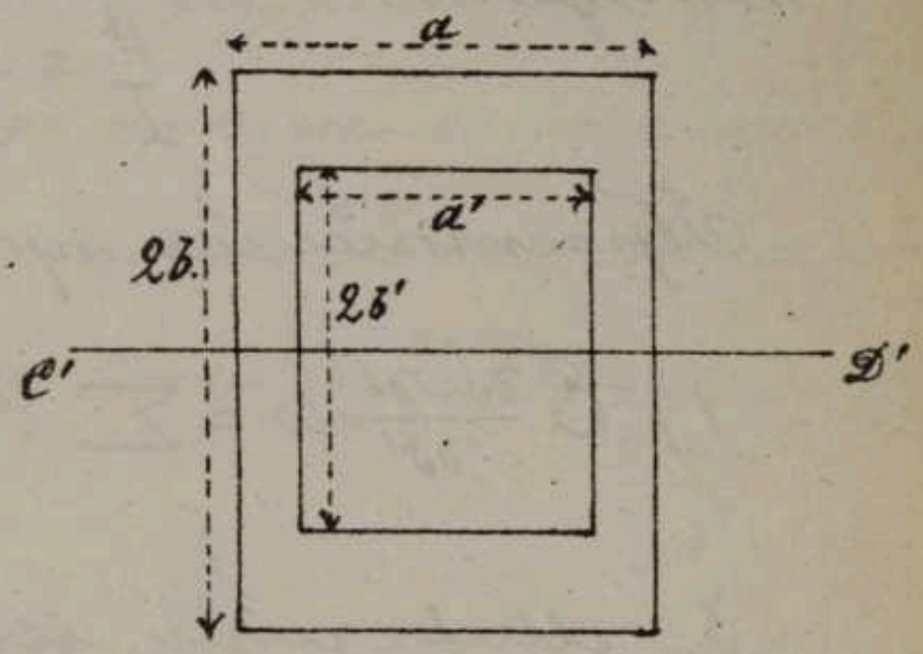
нижняя точки площади, должен быть равен произведению площади на разстояние h ея центра тяжести до линіи C'D' и найдемъ:



$$a(b-b')\frac{b+b'}{2}+\frac{(a-a')b'^2}{2}=h(ab-a'b'),$$

откуда:

$$h=\frac{ab^2-a'b'^2}{2(ab-a'b')}.$$



Чтобы за тѣмъ найти моментъ инерціи данной площади, опредѣленныя сперва по вышевыведенной формулѣ моментъ инерціи площади вдвое большей, прямоугольной внутри пустой. Этотъ моментъ инерціи очевидно будетъ:

$$\frac{a(2b)^3-a'(2b)^3}{12}\ \text{или}\ \frac{2(ab^3-a'b'^3)}{3},$$

а посему, моментъ инерціи I' данной площади относительно линіи C'D' будетъ:

$$I'=\frac{ab^3-a'b'^3}{3}.$$

Но по теоремѣ извѣстной изъ общей теоріи моментовъ инерціи, изображая чрезъ I искомый моментъ инерціи данной площади относительно линіи CD, проходящей чрезъ центръ тяжести площади, и чрезъ ω величину дан-

ной площади, мы имѣемъ уравненіе:

$$I' = I + \omega h^2 \quad \text{или} \quad I = I' - \omega h^2,$$

или же:

$$I = \frac{ab^3 - a'b'^3}{3} - (ab - a'b')h^2.$$

Затѣмъ, смотря потому будетъ ли $v = h$ или $v = b - h$, найдемъ:

$$\frac{v}{I} = \frac{h}{I} \quad \text{или} \quad \frac{v}{I} = \frac{b-h}{I}.$$

Простѣйшія примѣненія общихъ формулъ:

1.) $E\frac{\partial s - \partial s'}{\partial s'}\omega = \sum P \cos\theta$; 2) $EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) = \sum Pl$;

3.) Мах. числ. велич. $\left\{\frac{\sum P\cos\theta}{\omega} \pm \frac{v}{I}\sum Pl\right\} \leqq R$,

относятся къ призматическимъ тѣламъ, которыхъ ось до изгиба была прямая линія, и которыя подвержены дѣйствію изгибающихъ силъ, перпендикулярныхъ къ оси. Для этихъ тѣлъ имѣемъ

$$\rho' = \infty, \quad \theta = 90^\circ, \quad \frac{1}{\rho'} = 0 \quad \text{и} \quad \cos\theta = 0.$$

въ слѣдствіе чего общія формулы принимаютъ видъ:

1) $E\frac{\partial s - \partial s'}{\partial s'}\omega = 0$. 2) $\frac{EI}{\rho} = M$. 3) Мах. т. б. $\frac{v}{I}M \leqq R$,

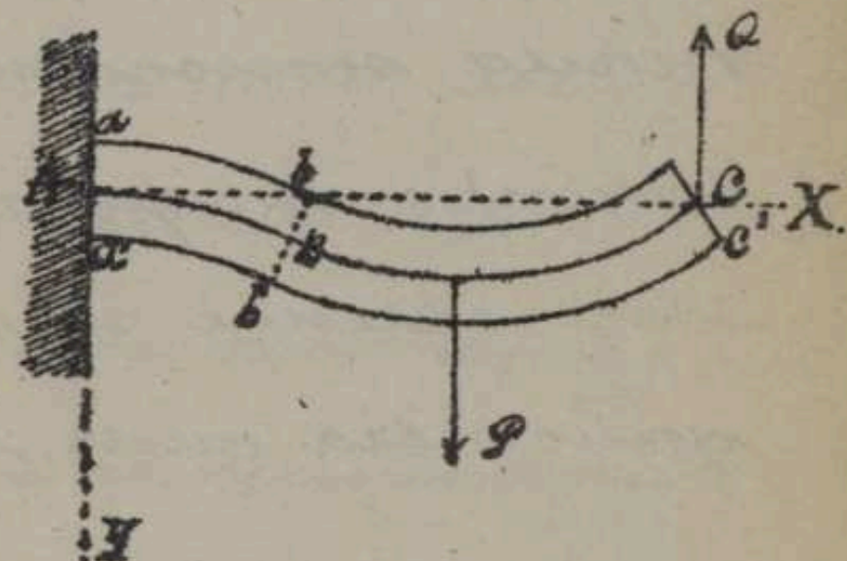
гдѣ для простоты буквою M изображена сумма моментовъ $\sum Pl$.

Изъ этихъ формулъ можно извлечь нѣкоторыя общія заключенія относительно изгиба

прямыхъ призматическихъ тѣлъ, произведеннаго дѣйствіемъ силъ, перпендикулярныхъ къ оси тѣлъ:

Изъ перваго уравненія выходитъ, что удлиненіе или укороченіе ds - ds' элемента оси тѣла въ этомъ случаѣ равно нулю, а отсюда слѣдуетъ, что рядъ фибръ, находящійся до изгиба въ плоскости, проходящей чрезъ ось тѣла и перпендикулярной къ направленію силъ, своей первоначальной длины не измѣняетъ при изгибѣ тѣла.

Такъ напримѣръ при изгибѣ, дѣйствіемъ силъ P и Q, тѣла ABC, котораго конецъ A наглухо закрѣпленъ, фибры находящіяся до изгиба въ плоскости, проходящей чрезъ ось ABC и перпендикулярной къ направленію силъ P и Q, составятъ рядъ фибръ неизмѣняемой длины при изгибѣ.



Но въ такомъ случаѣ также очевидно, что фибры, находящіяся между изогнутою осью и выпуклымъ краемъ тѣла, должны удлиниться т.е. быть вытянуты и фибры между осью и вогнутымъ краемъ должны уменьшиться въ длинѣ, т.е. быть сжаты.

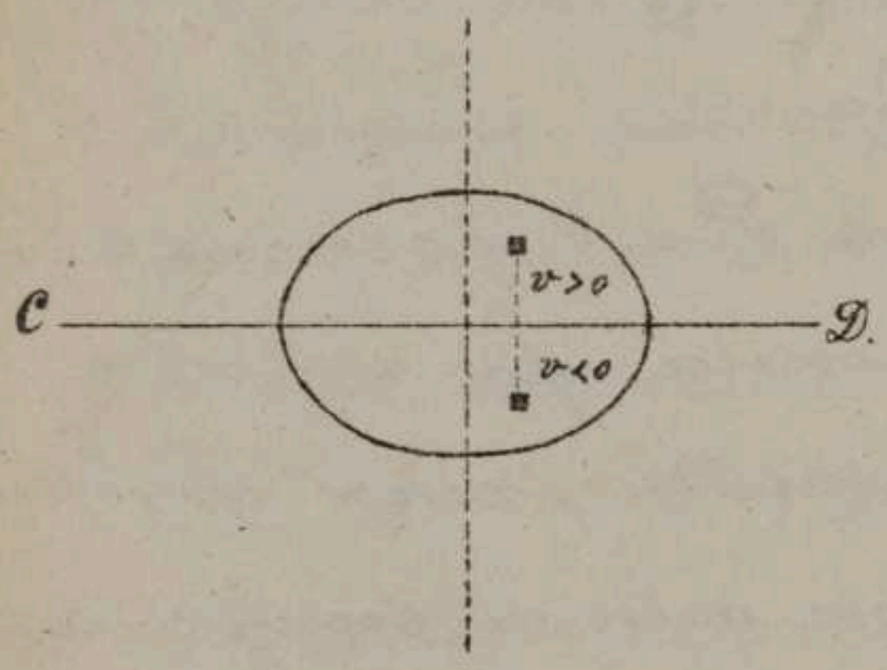
Такъ напримѣръ, при разсматриваемомъ изогнутомъ тѣлѣ, фибры между AB и ab и между BC и b'c' будутъ вытянуты, а фибры между AB и a'b' и между BC и bc будутъ сжаты.

Эти заключенія, выведенныя изъ теоріи изгиба, подтверждаются опытами, произведенными Dinkel, Dupin и Morin.

Можно еще прибавить, что такъ какъ сила упругости, параллельная оси, проявляющаяся въ данной точкѣ какого угодно поперечнаго сѣченія изогнутаго тѣла, въ случаѣ прямолинейной оси до изгиба, выражается, какъ видно изъ трубей формулы, чрезъ:

$$\frac{v}{I} M,$$

гдѣ v, т. е. ордината разсматриваемой точки тѣла относительно линіи проходящей чрезъ центръ тяжести соотвѣтствующаго поперечнаго сѣченія и перпендикулярной къ плоскости дѣйствія силъ, будетъ положительна для фибръ находящихся съ одной стороны оси, и отрицательна для фибръ на другой ея сторонѣ, то двѣ фибры, для которыхъ ординаты v въ разсматриваемомъ сѣченіи имѣютъ тоже численную величину, но противные знаки, будутъ одна натянута, а другая сжата съ одинаковымъ напряженіемъ, потому что выраженіе силы упругости для обѣихъ имѣетъ тоже численную величину, но противные знаки.



Чтобы привести второе уравнение къ виду болѣе удобному для опредѣленія изгиба оси тѣла, можно отнести эту линію къ двумъ осямъ координатъ Ax и Ay, и тогда, изображая искомое уравненіе изогнутой оси тѣла чрезъ

$$y = f(x) ,$$

имѣемъ для радіуса кривизны формулу:

$$\rho = \pm \frac{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} \quad \text{или} \quad \rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} .$$

Что $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$ представляетъ, какъ извѣстно, - величину тангенса угла касательной съ осью абсциссъ, и если ось AX параллельна или весьма мало наклонена къ прямой оси тѣла до изгиба, то этотъ уголъ и вмѣстѣ съ нимъ его тангенсъ, будетъ весьма мало въ сравненіи съ единицею при такомъ незначительномъ изгибѣ тѣла, какой здѣсь разсматривается; по этому безъ замѣтной погрѣшности можно отбросить количество $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, какъ имѣющее очень малое вліяніе на величину радіуса кривизны, и тогда имѣемъ:

$$\rho = \pm \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y}{dx^2} ;$$

а дифференціальное уравненіе изогнутой оси тѣла приметъ видъ:

$$\pm E I \frac{d^2y}{dx^2} = M .$$

Въ этомъ уравненіи находится двойной знакъ,

вомедий въ него отъ того, что въ выражении радіуса кривизны заключается квадратный корень. — Вмѣсто этого двойного знака въ каждомъ частномъ случаѣ надобно выбрать такой знакъ, при которомъ знакъ первой части одинаковъ со знакомъ второй части уравненія. Но выборъ знака передъ первою частію уравненія необходимо обращать вниманіе для избѣжанія ошибокъ, потому что знаки количествъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ и } M,$$

вполнѣ зависятъ отъ произвола выкладчика, опредѣляясь выборомъ положительнаго направленія осей координатъ и дѣйствія силъ. Чтобы облегчить этотъ выборъ знака, припомнимъ здѣсь, что при такомъ положеніи осей координатъ, которое представлено на предыдущемъ чертежѣ, количество $\frac{d^2y}{dx^2}$ будетъ положительно для части кривой AB, выпуклой къ верху, и отрицательно для части BC, вогнутой къ верху. Дѣйствительно, для выпуклой части AB тангенсъ угла касательной съ осью абсциссъ, т. е. $\frac{dy}{dx}$ увеличивается вмѣстѣ съ увеличиваніемъ x, слѣдовательно производная отъ $\frac{dy}{dx}$, т. е $\frac{d^2y}{dx^2}$, будетъ положительна; и для части BC имѣетъ мѣсто обратное. Руководствуясь этимъ замѣчаніемъ, можно почти всегда предугадывать знакъ количества $\frac{d^2y}{dx^2}$, хотя бы для

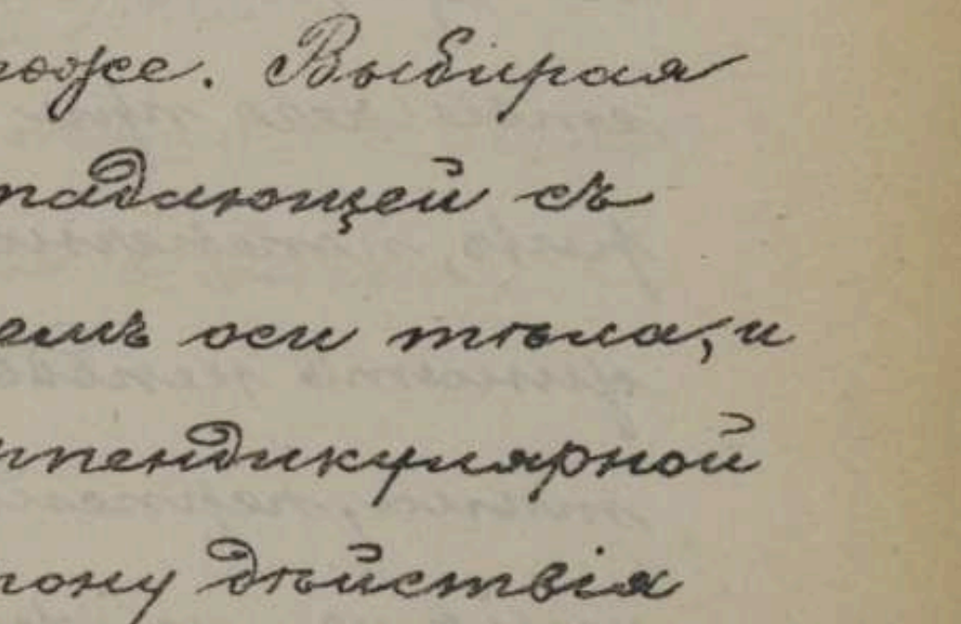
какой нибудь одной точки кривой, изменяя знакъ количества M для той же точки, выбросить знакъ передъ первою частію уравненія такъ, чтобы обѣ его части имѣли одинъ и тотъ же знакъ.

Для перваго примѣненія найденныхъ формулъ:

$$\pm EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \quad \text{и} \quad \text{max. числ. вел.} \frac{v}{I}M \leqq R,$$

разсмотримъ изгибъ призматическаго тѣла, котораго одинъ конецъ не подвижекъ, а на другой конецъ дѣйствуетъ сила P, перпендикулярная къ оси, и, кромѣ того, по всей длинѣ тѣла дѣйствуетъ грузъ, равномѣрно распредѣленный и измѣряемый грузомъ p на единицу длины тѣла.

Въ случаѣ если равномѣрно распредѣленный грузъ есть весь тѣла, то грузъ p будетъ весь единицы длины тѣла. Положимъ, что длина всего тѣла изображена чрезъ l и что поперечное сѣченіе его по всей длинѣ одно и тоже. Выбирая ось абсциссъ по линіи AB, совпадающей съ первоначальнымъ направленіемъ оси тѣла, и ось ординатъ по линіи AY, перпендикулярной къ AB, и направленной въ сторону дѣйствія внѣшнихъ силъ, предложимъ себѣ сперва опредѣлить уравненіе кривой AB', которую ось тѣла AB приметъ послѣ изгиба. Для этого, взявъ на кривой точку m, соотвѣтствующую абсциссѣ x и ординатѣ y, имѣемъ для опредѣленія зависимости



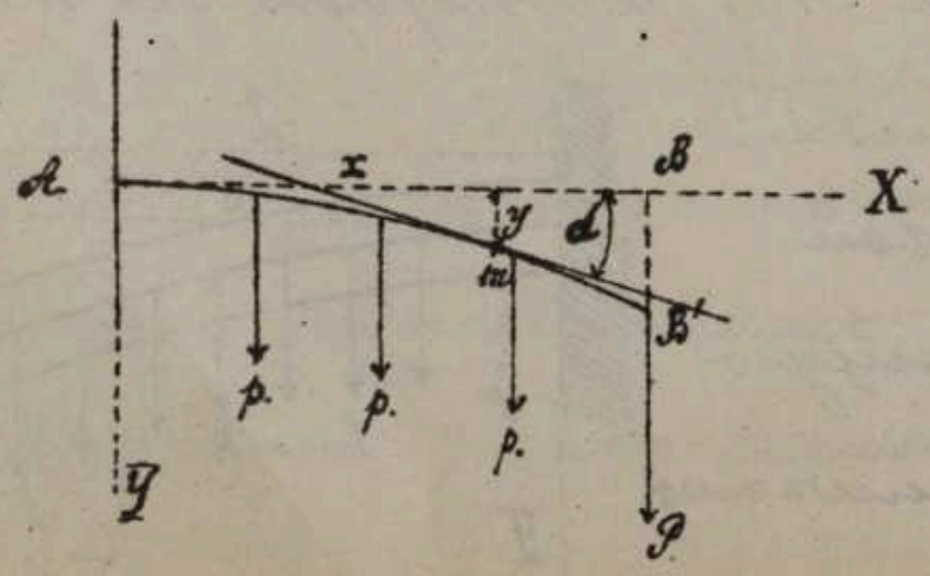
между x и y по первой формуле:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = P(L-x) + p\frac{(L-x)^2}{2}$$

Здѣсь, вмѣсто двойного знака ± въ первой части уравненія, взять знакъ + потому, что при точкѣ A, изогнутая ось выпукла къ верху, и моментъ силъ при той же точкѣ положительный, т.е.

$$\text{при } x=0,\ \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad \text{и} \quad M = PL + \frac{pL^2}{2} > 0.$$

Чтобы изъ найденнаго уравненія опредѣлить зависимость между y и x, (что) необходимо его два раза сряду проинтегрировать. При этомъ интегрированіи введутся произвольныя постоянныя величины, которыя должны быть опредѣлены изъ слѣдующихъ двухъ условій: во первыхъ, изогнутая ось проходитъ чрезъ начало координатъ, вслѣдствіе чего при $x=0$ должно быть и $y=0$; во вторыхъ, поперечное сѣченіе тѣла у начала координатъ неподвижно, а слѣдовательно и ось тѣла, перпендикулярная къ поперечнымъ сѣченіямъ, должна при изгибѣ принять такую кривизну чтобы ея касательная въ началѣ координатъ направилась по прямой линіи оси до изгиба, т.е. по оси абсциссъ, и если мы назовемъ чрезъ δ уголъ,



составляющий съ осью абсциссъ касательною къ изогнутой оси въ какой нибудь точкѣ, то какъ извѣстно имѣемъ:

$$tng\,\alpha = \frac{dy}{dx} ,$$

и вслѣдствіе сказаннаго должно быть:

$$\text{при } x=0, \quad tng\,\alpha_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0 .$$

Этихъ двухъ условій достаточно для опредѣленія двухъ произвольныхъ постоянныхъ, вводимыхъ при двойномъ интегрированіи. Взявъ первый интегралъ найденнаго уравненія, и замѣтивъ, что если принять тѣло однороднымъ и съ одинаковыми поперечными измѣреніями по всей его длинѣ, то количества E и I независятъ отъ перемѣнной x, получимъ:

$$EI\frac{dy}{dx} = P\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(L^2x - Lx^2 + \frac{x^3}{3}\right) + C .$$

Вставляя въ это уравненіе вмѣсто x его нуль, чтобы опредѣлить постоянную величину C, найдемъ по второму условію

$$0 = C ,$$

слѣдовательно:

$$EI\frac{dy}{dx} = P\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(L^2x - Lx^2 + \frac{x^3}{3}\right) .$$

Взявъ еще разъ неопредѣленный интегралъ, найдемъ:

$$EIy = P\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{2.3}\right) + \frac{p}{2}\left(\frac{L^2x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{3.4}\right) + C' ;$$

а поставивши сюда вместо x нуль, находимъ по первому условію:

$$0 = C',$$

и по этому, зависимость между у и x выразится следующимъ уравненіемъ:

$$EIy = P\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{2.3}\right) + \frac{p}{2}\left(\frac{L^2x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{3.4}\right),$$

которое и представитъ уравненіе изогнутой оси призматическаго тѣла.

Такъ какъ о значительности изгиба въ этомъ случаѣ лучше всего судить по величинѣ конечной ординаты BB', т.е. по такъ называемой <u>стрѣлкѣ прогиба</u>, то опредѣливши величину этой стрѣлы, изображая ее чрезъ f. Линія f очевидно есть ордината крайней точки кривой, которой абсцисса весьма мало отличается отъ величины длины оси тѣла до изгиба, слѣдовательно, замѣняя x чрезъ L, найдемъ изъ уравненія кривой:

$$EIf = \frac{PL^3}{3} + \frac{pL^4}{8}.$$

откуда

$$f = \frac{L^3}{EI}\left(\frac{P}{3} + \frac{pL}{8}\right).$$

Разсмотримъ теперь, какимъ условіямъ должны удовлетворять силы, дѣйствующія на призматическое тѣло, чтобъ оно было

прочно.

Для сего имѣемъ неравенство:

$$\text{Маѳ. числ. велич. } \frac{v}{I} M \leqq R,$$

которое въ разсматриваемомъ случаѣ замѣнится слѣдующимъ

$$\text{Маѳ. числ. велич. } \frac{v}{I}\left[P(l-x)+\frac{p(l-x)^2}{2}\right] \leqq R.$$

Первая часть неравенства, при положительномъ v всегда положительна, потому что l всегда больше x, и при томъ первая часть тѣмъ больше, чѣмъ меньше вычитаемое количество x. Итакъ наибольшая величина ея соотвѣтствуетъ значенію $x=0$ и мы получимъ:

$$\frac{v}{I}\left[Pl+p\frac{l^2}{2}\right] \leqq R.$$

Такъ какъ первая часть этого неравенства представляетъ величину силы упругости, проявляющейся въ поперечномъ сѣченіи, соотвѣтствующемъ абсциссѣ $x=0$, и въ той фибрѣ этого сѣченія, которая находится на разстояніи v отъ оси, то наибольшая сила упругости въ разсматриваемомъ случаѣ проявляется въ томъ поперечномъ сѣченіи, при которомъ тѣло закрѣплено, и въ той точкѣ этого сѣченія, при которой v, т.е разстояніе до оси, имѣетъ наибольшую положительную или отрицательную величину; и гдѣ величина силы упругости наибольшая, тамъ легче

всего можетъ произойти изломъ. И такъ въ разсматриваемомъ случаѣ изломъ легче всего произойдетъ въ верхнихъ и нижнихъ фибрахъ крайняго поперечнаго сѣченія A, въ верхнихъ разрывомъ и въ нижнихъ раздробленіемъ, и это сѣченіе слѣдовательно будетъ слабѣйшимъ.

Для изслѣдованія найденнаго уравненія изогнутой оси и условія прочности для тѣла, одинмъ концомъ неподвижно закрѣпленнаго, положимъ, что на тѣло дѣйствуетъ только сосредоточенный грузъ P, тогда имѣемъ:

$$p=0\ ,\quad \mathfrak{P}=\frac{RI}{vl}\quad \text{и}\quad f=\frac{l^3}{EI}\cdot\frac{P}{3}\ .$$

Отсюда видно, что наибольшій грузъ, который можно приложить къ концу призматическаго тѣла, будетъ $\frac{RI}{vl}$. Соотвѣтствующая этому грузу стрѣлка прогиба будетъ:

$$f=\frac{l^3}{EI}\cdot\frac{RI}{3vl}=\frac{R}{3E}\cdot\frac{l^2}{v},$$

откуда можно вывести что:

$$\frac{f}{l}=\frac{R}{3E}\cdot\frac{l}{v},$$

т.е. что отношеніе наибольшей допускаемой стрѣлы прогиба ко всей длинѣ тѣла пропорціонально отношенію длины къ разстоянію оси до наиболѣе напряженной фибры тѣла.

Въ случаѣ когда поперечное сѣченіе тѣла

есть прямоугольникъ, то какъ извѣстно изъ предыдущаго $\frac{v}{I} = \frac{6}{ab^2}$, а слѣдовательно тогда наибольшій грузъ, дѣйствіе котораго тѣло можетъ выдержать на концахъ своихъ, будетъ:

$$\frac{RI}{vL} = \frac{Rab^2}{6L};$$

откуда видно, что этотъ грузъ, измѣряющій сопротивленіе тѣла излому, будетъ прямо пропорціоналенъ ширинѣ a и квадрату толщины b, и обратно пропорціоналенъ длинѣ L тѣла. Кромѣ того, онъ еще пропорціоналенъ предѣлу прочнаго сопротивленія матеріала R.

Подобныя же слѣдствія можно было бы вывести и для другихъ видовъ поперечнаго сѣченія, подставляя вмѣсто I и v соотвѣтствующія выраженія.

Если тѣло подвержено только дѣйствію равномѣрно распредѣленнаго груза, т.е. когда $\mathcal{P} = 0$, то для величины всего равномѣрно распредѣленнаго груза имѣемъ:

$$pL \leq \frac{2RI}{vL},$$

и для стрѣлы прогиба:

$$f = \frac{pL^4}{8EI};$$

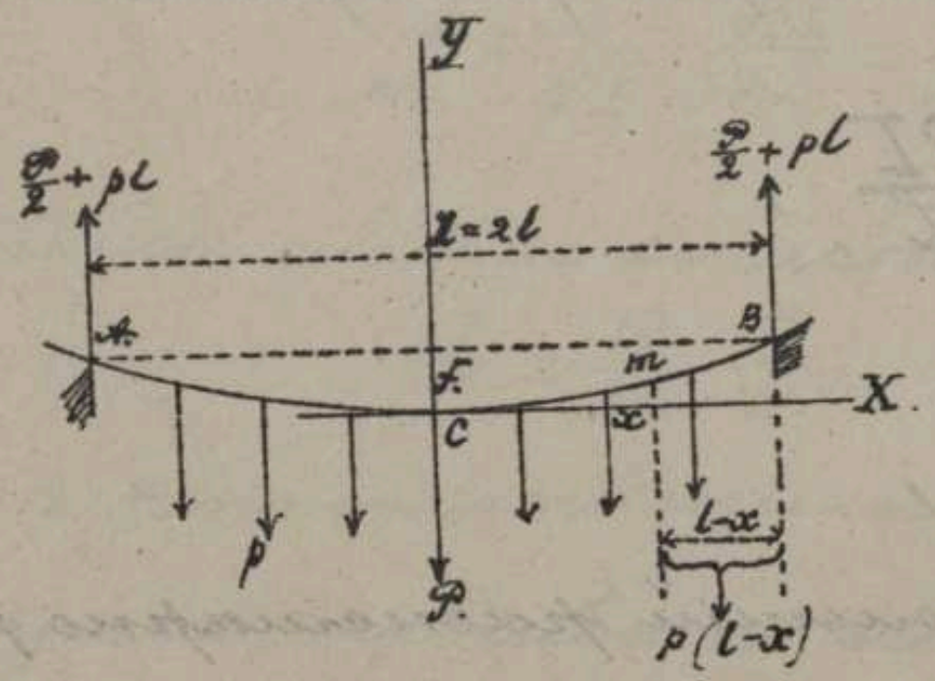
откуда видно, что наибольшій равномѣрно распредѣленный грузъ, который тѣло можетъ выдержать, будетъ $\frac{2RI}{vL}$ т.е. вдвое больше того груза, который тѣло можетъ выдержать въ случаѣ

когда онъ сосредоточенъ въ концѣ его. Стрѣла прогиба соотвѣтствующая наибольшему грузу будетъ:

$$f = \frac{2RI}{vl} \cdot \frac{l^3}{8EI} = \frac{R}{4E} \cdot \frac{l^2}{v}.$$

Изъ этаго слѣдуетъ, что стрѣла прогиба при наибольшемъ равномѣрно распредѣленномъ грузѣ, который тѣло можетъ выдержать, будетъ меньше стрѣлы прогиба, соотвѣтствующей наибольшему выдерживаемому грузу, дѣйствующему на конецъ тѣла; а именно, эти двѣ стрѣлы прогиба будутъ относиться между собою какъ 3.4.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію другаго случая изгиба, а именно когда призматическое тѣло лежитъ горизонтально на двухъ опорахъ и подвержено дѣйствію груза P, приложеннаго въ серединѣ, и груза pl, равномѣрно распредѣленнаго по всей длинѣ l тѣла. Въ этомъ случаѣ на каждую изъ опорныхъ точекъ оси тѣла дѣйствуетъ сила сопротивленія соотвѣтствующей опоры, равная половинѣ всего поддерживаемаго груза, а именно, если длина тѣла



между опорами есть $2l = 2l$, то сопротивление каждой изъ опоръ A и B выразится черезъ

$$\frac{P}{2} + pl,$$

и эти силы очевидно должны быть причислены къ силамъ, производящимъ изгибъ тѣла.

Такъ какъ обѣ половины тѣла симметричны относительно его середины C и одинаково нагружены, то обѣ вѣтви CA и CB изогнутой оси тѣла также будутъ одинаковы и мы можемъ ограничиться разсматриваніемъ одной изъ нихъ CB, и для вывода уравненія кривой принять за ось абсциссъ касательную при точкѣ C, очевидно горизонтальную и параллельную прямой оси тѣла до изгиба, а за ось ординатъ вертикальную линію CY, откладывая положительныя ординаты вверхъ, а положительныя абсциссы вправо отъ точки C. При такомъ выборѣ осей координатъ, тангенсъ $\frac{dy}{dx}$ угла, составляемаго касательною при какой угодно точкѣ m кривой съ осью абсциссъ, будетъ увеличиваться вмѣстѣ съ увеличиваніемъ абсциссы x точки касанія, а слѣдовательно производная его $\frac{d^2y}{dx^2}$ должна быть положительна. Съ другой стороны, если придадимъ положительный знакъ моментамъ силъ, соотвѣтствующимъ вращенію силы на право и сверху внизъ, то сумма

моментовъ M силъ, дѣйствующихъ на тѣло съ правой стороны точки m, будетъ отрицательна, потому что онѣ очевидно перегибаютъ тѣло, стремясь вращать его часть mB справа на лѣво и снизу вверхъ. По сему двойной знакъ первой части дифференціальнаго уравненія изогнутой оси тѣла долженъ быть замѣненъ отрицательнымъ знакомъ и уравненіе приметъ видъ:

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

Зная тѣмъ для суммы моментовъ M не трудно вывести величину:

$$M = -\left(\frac{P}{2} + pl\right)(l-x) + \frac{p(l-x)^2}{2} = -\frac{P}{2}(l-x) - \frac{p(l-x)}{2}(2l-l+x)$$

и, по подстановленіи и сокращеніи, найти уравненіе изогнутой оси:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2}(l-x) + \frac{p(l^2-x^2)}{2}.$$

Чтобы изъ этого дифференціальнаго уравненія вывести конечное уравненіе кривой, его слѣдуетъ два раза сряду интегрировать. Тогда, предполагая что поперечное сѣченіе тѣла одинаково по всей его длинѣ, такъ что моментъ инерціи I величина постоянная, находимъ:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2x - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

$$EIy = \frac{P}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{p}{2}\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + Cx + C'.$$

Для опредѣленія постоянныхъ величинъ C и C', вошедшихъ въ уравненіе при интегрированіи,

принимемъ, что оси координатъ выбраны такъ, что тангенсъ $\frac{dy}{dx}$ угла касательной съ осью абсциссъ при точкѣ кривой, соотвѣтствующей абсциссѣ x, равной нулю, равно какъ и ордината этой точки обращаются въ нуль; по сему, подставивши въ уравненія вмѣсто x нуль, находимъ

$$0 = C \quad \text{и} \quad 0 = C',$$

вслѣдствіе чего получаемъ:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{P}{2}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2x - \frac{x^3}{3}\right);$$

$$EI.y = \frac{P}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{p}{2}\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right).$$

Первое изъ этихъ уравненій опредѣляетъ тангенсъ угла, составляемаго касательною при какой угодно точкѣ кривой оси тѣла съ осью абсциссъ, а второе ординату этой точки въ зависимости отъ ея абсциссы.

Чтобы получить возможность судить о степени перегиба тѣла, можно опредѣлить стрѣлу прогиба оси тѣла въ ея серединѣ, т.е. разстояніе, на которое отклонилась ось въ этомъ мѣстѣ отъ ея первоначальнаго положенія. Стрѣла прогиба очевидно будетъ равна ординатѣ точки оси при ея опорѣ, т.е. ординатѣ соотвѣтствующей абсциссѣ равной половинѣ длины тѣла; по сему:

при $x = l = \frac{L}{2}$ будетъ $EI.f = \frac{Pl^3}{6} + \frac{5pl^4}{24}$,

а слѣдовательно, вводя въ формулу полную длину l тѣла, найдемъ для стрѣлы прогиба:

$$f = \frac{l^3}{48EI}\left[P + \frac{5}{8}pl\right].$$

Переходя за тѣмъ къ выводу формулы для повѣрки прочности разсматриваемаго призматическаго тѣла, замѣтимъ, что въ общей формулѣ

$$\text{Мах. числ. вел. } \frac{v}{I}M \leqq R,$$

въ данномъ случаѣ слѣдуетъ сдѣлать:

$$M = -\left(\frac{P}{2} + pl\right)(l-x) + \frac{p}{2}(l-x)^2 = -\left[\frac{P(l-x)}{2} + \frac{p(l^2-x^2)}{2}\right]$$

вслѣдствіе чего получается

$$\text{Мах. числ. вел. } \frac{v}{I}\left[P(l-x) + p(l^2-x^2)\right] \leqq R.$$

Наибольшая численная величина первой части этой формулы очевидно соотвѣтствуетъ наибольшей численной величинѣ v и наименьшей величинѣ абсциссы x, для вѣтви СВ кривой, т.е. величинѣ $x=0$. Изъ этого видно, что наибольшее напряженіе внутри изогнутаго тѣла проявится въ верхнихъ и нижнихъ фибрахъ средняго его поперечнаго сѣченія, причемъ, такъ какъ моментъ M внѣшнихъ силъ отрицателенъ, то верхнія фибры, для которыхъ v положительно и сила упругости $\frac{v}{I}M$ отрицательна будутъ сжаты, а нижнія фибры на оборотъ растянуты, и условіе прочности тѣла полу-

чится, если подставить въ него нуль вмѣсто x, въ видѣ:

$$P + pl \leqq \frac{2RI}{vl} \quad \text{или-же} \quad P + \frac{pL}{2} \leqq \frac{4RI}{vL}.$$

Въ случаѣ когда равномѣрно распредѣленный грузъ p равенъ нулю, наибольшій грузъ, который тѣло можетъ выдержать на срединѣ своей длины будетъ:

$$P = \frac{2RI}{vl},$$

и стрѣла прогиба, соотвѣтствующая этому грузу, будетъ:

$$f = \frac{R}{3E} \cdot \frac{l^2}{v}.$$

Въ случаѣ же когда тѣло подвержено только дѣйствію равномѣрно распредѣленнаго груза, т.е. когда P равно нулю, наибольшій равномѣрно распредѣленный грузъ, дѣйствующій на всю длину тѣла будетъ:

$$2pl = \frac{4RI}{vl},$$

т.е. вдвое больше, чѣмъ наибольшій грузъ сосредоточенный въ срединѣ, а стрѣла прогиба, соотвѣтствующая наибольшему равномѣрно распредѣленному грузу, будетъ:

$$f = \frac{5}{12} \cdot \frac{R}{E} \cdot \frac{l^2}{v}.$$

Отсюда видно, что стрѣлы прогиба въ обоихъ этихъ случаяхъ относятся между собою, какъ $\frac{1}{3} : \frac{5}{12} = 4:5$, т.е при равномѣрно распредѣленномъ грузѣ, наибольшемъ, какой тѣло можетъ выдержать,

прогибъ будетъ нѣсколько больше нежели при наибольшемъ грузѣ, въ срединѣ дѣйствующемъ.

Если же грузъ, въ срединѣ дѣйствующій, будетъ равенъ равномѣрно распредѣленному, то при второмъ стрѣлка прогиба будетъ меньше нежели при первомъ. Дѣйствительно, подставляя въ общее выраженіе стрѣлы прогиба сперва $p=0$, а потомъ $P=0$, найдемъ въ первомъ случаѣ:

$$f = \frac{l^3}{129} \cdot P,$$

а во второмъ

$$f = \frac{l^3}{129} \cdot \frac{5}{8} 2pl;$$

откуда видно, что стрѣлы прогиба при одномъ и томъ же грузѣ, дѣйствующемъ въ срединѣ, или же равномѣрно распредѣленномъ, будутъ относиться какъ $1 : \frac{5}{8}$.

Чтобы найденныя нами формулы применить къ повѣркѣ прочности, то надобно въ нихъ вмѣсто момента инерціи и предѣла прочнаго сопротивленія вставить тѣ величины, которыя соотвѣтствуютъ виду поперечнаго сѣченія и матеріалу разсматриваемаго тѣла.

Такъ напримѣръ въ случаѣ, когда поперечное сѣченіе прямоугольное внутри полое, то для прочности тѣла, поддерживающаго равномѣрно распредѣленный грузъ, измѣренія тѣла должны быть такія, чтобы удовлетворилось неравенство:

$$2pl \leq \frac{4R}{l} \cdot \frac{ab^2}{6} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{ab^2}{l},$$

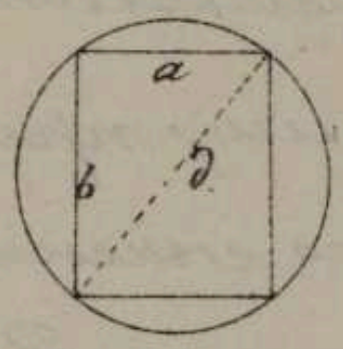
откуда видно, что сопротивление тыла пропорционально предълу прочного сопротивленія матеріала, первой степени ширины а тыла и квадрату толщины b, и обратно пропорціонально длинѣ тыла l.

Основываясь на этомъ, тесанныхъ на четыре канта деревянныхъ балкахъ выгодно дать такую профиль, чтобы, при данномъ діаметрѣ d бревна, произведеніе ab^2 изъ ширины на квадратъ толщины было наибольшее, а такъ какъ:

$$b^2 = d^2 - a^2,$$

то слѣдовательно ширина a должна имѣть такую величину, при которой функція:

$$a(d^2 - a^2)$$



имѣетъ наибольшую величину.

Взявъ производную этой функціи относительно a и приравнивая её нулю, получаемъ уравненіе:

$$d^2 - 3a^2 = 0$$

откуда

$$a = d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Соотвѣтствующая величина толщины b будетъ:

$$b = \sqrt{d^2 - a^2} = d\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

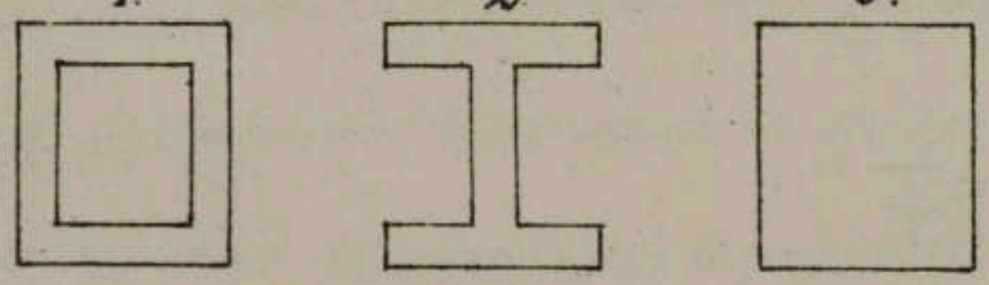
Слѣдовательно отношеніе между шириной и толщиной будетъ:

$$a : b = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1,414\ldots$$

приблизительное же отношение будетъ 5:7. – Это правило принято также въ уроченыхъ положеніяхъ для обтески брусьевъ, имѣющихъ горизонтально или выдерживающихъ усилія, перпендикулярныя къ ихъ оси.

Разсматривая вышевыведенныя формулы, относящіяся къ сопротивленію призматическихъ тѣлъ изгибу, видно что это сопротивленіе вообще будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше количество $\frac{I}{v}$, слѣдовательно при выборѣ вида поперечнаго сѣченія не должно упускать изъ виду то правило, чтобы при одномъ и томъ же количествѣ матеріала или другими словами, при одной и той же площади поперечнаго сѣченія, количества $\frac{I}{v}$ было по возможности больше. Вообще при данной площади сѣченія количество $\frac{I}{v}$ будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше высота сѣченія и чѣмъ большая часть матеріала сосредоточена въ крайнихъ фибрахъ, наиболѣе удаленныхъ отъ центра тяжести сѣченія, потому что этимъ числитель дроби I, заключающій квадраты разстояній элементовъ площади до ея центра тяжести, увеличится въ большей мѣрѣ, чѣмъ знаменатель v, представляющій

1. 2. 3.



большею частію половину высоты поперечнаго (сѣченія) въ первой степени; такъ напримѣръ сѣченія 1 и 2 оказываютъ большее сопротивленіе, чѣмъ сѣченіе 3 и т. под.

Выведенная формула:

$$2pl \leq \frac{\gamma R I}{v},$$

опредѣляющая наибольшій равномѣрно распредѣленный грузъ, дѣйствіе котораго можетъ выдержать призматическое тѣло, лежащее на двухъ опорахъ, можетъ быть применена къ повѣркѣ прочности деревянныхъ и металлическихъ половыхъ или потолочныхъ балокъ.

Обращаясь сперва къ деревяннымъ балкамъ, положимъ что поперечное сѣченіе балки прямоугольникъ съ шириною a и высотою b (: толщиною балки :), тогда:

$$\frac{I}{v} = \frac{ab^2}{6},$$

а, принимая всѣ размѣры выраженными въ дюймахъ, имѣемъ $R = 24$ пуд. на 1 квадр. дюймъ и слѣдовательно для груза равномѣрно разстоянного по всей длинѣ $2l$ балки находимъ:

$$2pl \leq \frac{4 \cdot 24 \cdot ab^2}{6l} = \frac{16ab^2}{l}.$$

Если же, для удобства повѣрки прочности, принять длину балки $2l$ выраженною въ саженяхъ, а ширину и толщину a и b въ вершкахъ, то представляя вмѣсто a, b, l и p въ найден-

ную формулу $\frac{7}{4}a$, $\frac{7}{4}b$, $84l$ и $\frac{P}{84}$, получимъ для груза $2pl$ на всю длину балки:

$$2pl \leqq \frac{16.7^3}{4^3.84}.\frac{ab^2}{l} = \frac{49}{48}.\frac{ab^2}{l};$$

или приблизительно:

$$2pl \leqq \frac{ab^2}{l}.$$

Отсюда для балокъ, вытесанныхъ на четыре канта изъ 8 вершковыхъ бревенъ на 7 вершк. толщины и 5 вершковъ ширины, выходитъ наибольшій безопасно выдерживаемый равномѣрно распредѣленный грузъ:

Для 3^х саж. балки на всю длину: $2pl \leqq \frac{2.5.7^2}{3} = 164$ пуд.

—— —— —— на погон. сажень $p \leqq 55$ п.

Для 4^х саж. балки на всю длину: $2pl \leqq \frac{5.7^2}{2} = 123$ п.

—— —— —— на погон. сажень $p \leqq 31$ п.

Для 5 саж. балки на всю длину $2pl \leqq \frac{2.5.7^2}{5} = 98$ п.

—— —— —— на погон. сажень $p \leqq 20$ п.

Чтобы судить о прочности балокъ, надобно сравнить найденные безопасно выдерживаемые грузы съ наибольшимъ грузомъ, который можетъ приходиться на погонную сажень балки при обыкновенномъ устройствѣ половъ. Этотъ грузъ состоитъ изъ вѣса людей, вѣса чистаго и чернаго пола, подшивки, смазки и вѣса самой балки. Для приблизительнаго вычисленія такого груза можно принять: что на каждой квадр. сажени пола, можетъ помѣститься до 9 человѣкъ, среднимъ вѣсомъ по $4\frac{1}{2}$ пуда; что вѣсъ кубическ. фута сухаго дерева

равенъ $1^{\frac{1}{4}}$ пуду; а вѣсъ кубическаго фута смолки равенъ $3^{\frac{1}{4}}$ пуд. и наконецъ, что вѣсомъ самой балки можно пренебречь, если его замѣнить вѣсомъ сплошного чернаго пола со смолкою. Тогда для каждой квадратной сажени пола имѣемъ:

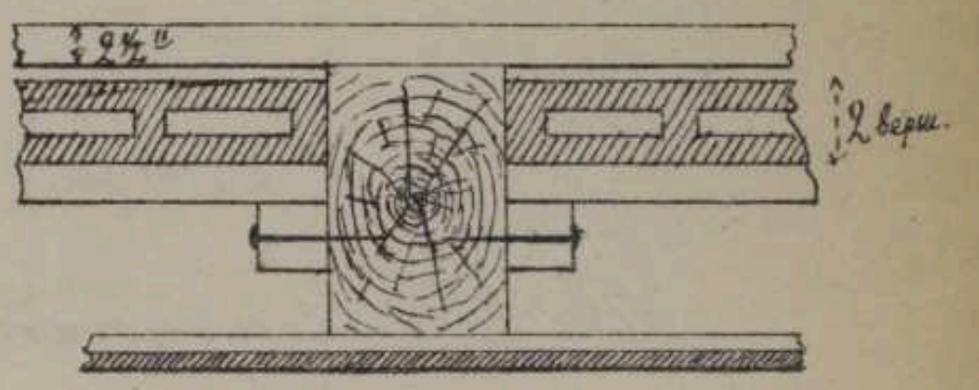
Вѣсъ 1 квадр. саж. чистаго пола (2½ дюйма) $= \frac{49.5}{2.12} = 10$ пуд.

— подбора ($2\frac{1}{8}$ дюйма) . . . 10 пуд.

— подшивки со штукатурк. 10 „

— смолки (толщины 2 вершк.) 40 „

9 человѣкъ по 4½ пуда . . . 40 „



Всего на 1 кв. саж. пола . . . 110 пуд.

А какъ балки обыкновенно кладутся на $\frac{1}{2}$ сажени разстоянія средина отъ средины, то на 1 пог. саж. балки приходится грузъ, соотвѣтствующій половинѣ квадратной сажени пола, т. е. до 55 пудовъ.

Изъ этого видно, что толщина въ 7 вершковъ при ширинѣ въ 5 вершк., для балокъ обтесанныхъ на 4 канта, удовлетворительна для $3^{хъ}$ саж. балокъ, но недостаточна для $4^{хъ}$ и $5^{ти}$ саж. балокъ. Для опредѣленія надлежащей толщины этихъ балокъ имѣемъ:

$$2.55.l \leqq \frac{ab^2}{l};$$

откуда

$$ab^2 \geqq 110\,l^2,$$

ими, при наивыгоднейшемъ отношеніи между
шириною и толщиною:

$$a = \frac{5}{7} b, \quad \frac{5}{7} b^3 \geq 110 l^2 \quad \text{и} \quad b \geq \sqrt[3]{154 l^2},$$

гдѣ b подразумѣваетъ толщину въ вершкахъ, и l поло-
вину длины балки въ саженяхъ.

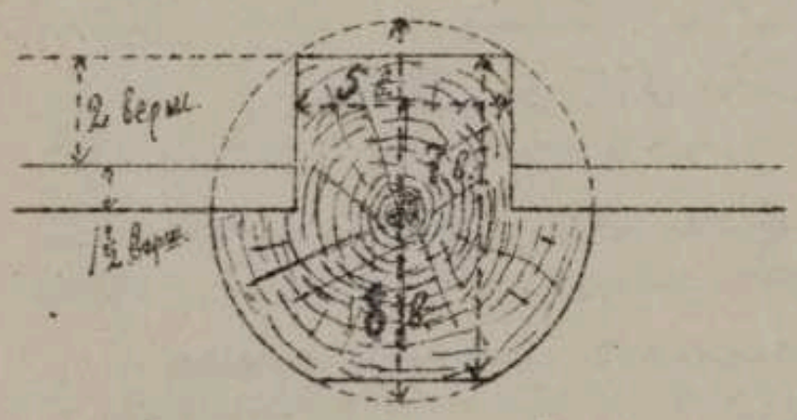
Отсюда для 4^хъ саженной балки:

$$l = 2; \quad b \geq \sqrt[3]{154 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{616} = 8{,}5 \text{ вершка};$$

и для 5^ти саженной балки:

$$l = 2{,}5; \quad b \geq \sqrt[3]{154 \cdot (2{,}5)^2} = \sqrt[3]{962{,}5} = 9{,}87 \text{ в.}$$

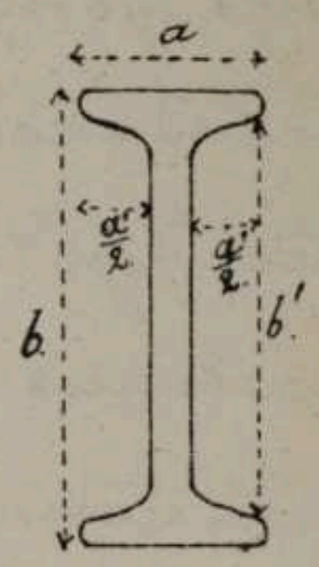
Въ Петербургѣ для балокъ съ пролетомъ въ 3, 4 и
до 5 саж. берутся 8 вершковыя бревна и обтесы-
ваются не съ 4^хъ сторонъ, а только съ верху и съ
низу на 7^ми вершковую толщину, и съ боку вы-
чтотая четверти для клейки подбора.



Такія балки прочныя тесан-
ныя на 4 конца, потому что
въ нихъ сохраняются на Боль-
шо протяженія боковыя части
заболони, но еще значитель-
ная доля умиренной кол-
левой части балки. Судя по вышеизложенному,
эти балки можно признать достаточно проч-
ными для пролета въ 4 сажени, но при 5^ти
саженяхъ слѣдовало бы употреблять лишь не
тонкіе 9^ти вершковъ, или же класть балки
ближе, чѣмъ на полсажени середина отъ середины.

Изъ всѣхъ желѣзныхъ балокъ преимущественно дается профиль въ видѣ двойной буквы Т. Сохраняя обозначеніе измѣреній, употребленное при выводѣ момента инерціи этого вида поперечнаго сѣченія, имѣемъ:

$$I = \frac{ab^3 - a'b'^3}{12}, \quad v = \frac{b}{2}, \quad \frac{I}{v} = \frac{ab^3 - a'b'^3}{6.b}.$$



По этому, наибольшій равномѣрно распредѣленный грузъ, выдерживаемый такою желѣзною балкою будетъ при $R = 240$ пудамъ на 1 квадр. д., и длинѣ балки $2l$, выраженной въ дюймахъ также какъ и размѣры a, b, a' и b' профиля:

$$2pl \leq \frac{4.240}{6} \cdot \frac{ab^3 - a'b'^3}{l.b} = \frac{160(ab^3 - a'b'^3)}{b.l}.$$

Если измѣренія балки, т. е. количества a, b, a', b' и $2l$, даны, то по этой формулѣ легко вычислить наибольшій выдерживаемый грузъ $2pl$. Но если на оборотъ по данному грузу и длинѣ балки требуется опредѣлить измѣренія ея профиля, то эта одна формула для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ a, b, a' и b' недостаточна. Въ этомъ случаѣ при выборѣ профиля балки можно поступать обратно, т. е. опредѣлить грузы, выдерживаемые балками требуемой длины при различныхъ поперечныхъ измѣреніяхъ, практически исполнимыхъ и имѣющихся въ продажѣ, и затѣмъ выбрать измѣренія. Балки наиболѣе

пригодныя для даннаго случая.

Для примѣра опредѣлимъ размѣры желѣзной половой или потолочной балки. Самая грузная изъ употребительныхъ системъ несгараемыхъ потолковъ съ желѣзными балками, состоитъ изъ устраиваемыхъ надъ балками монцовыхъ сводиковъ толщиною въ $\frac{1}{2}$ кирпича и подшивки изъ проволочной сѣтки, скрѣпленной поло-совымъ желѣзомъ и оштукатуренной снизу цементомъ, и тогда вѣсъ 1 кв. саж. потолка или пола со сводиками, подшивкою и грузомъ людей можетъ доходить до 150 пудовъ. Въ этомъ случаѣ при размѣщеніи балокъ на разстояніи полусажени другъ отъ друга, на одну погонную сажень балки придется грузъ равный вѣсу $\frac{1}{2}$ квадр. саж. пола, т. е. до 75 пудовъ.

Опредѣливъ теперь равномѣрно распредѣленный грузъ, который можетъ быть поддержанъ балкою изъ двутаврового желѣза (профиль двойное Т), длиною въ 1 сажень, высотою въ 9 дюймовъ шириною въ верхнемъ и нижнемъ поясахъ въ $3\frac{1}{2}$ дюйма. Тогда для искомаго груза $2pl$ имѣемъ формулу:

$$2pl = 160\,\frac{ab^3 - a'b'^3}{b.l.}$$

и слѣдующія данныя:

$$2l = 84'',\ a = 3\tfrac{1}{2}'',\ a' = 3'',\ b = 9''.\ b' = 8''$$

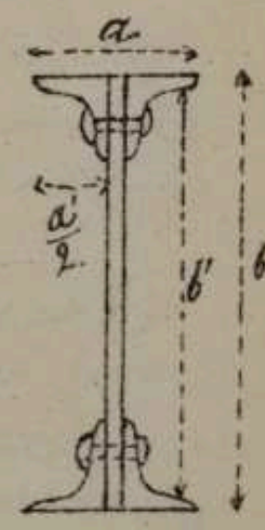
Подставляя эти величины получимъ:

$$2pl = \frac{160}{9\times 42}\left\{\frac{7}{2}\cdot 9^3 - 3.8^3\right\} = 429{,}8\ \text{пуд.}$$

Если къ этому прибавить, что грузъ безопасно поддерживаемый балкою, обратно пропорціоналенъ ея длинѣ, то выходитъ, что при данной профили балка можетъ поддерживать грузъ въ 430 пудовъ при длинѣ въ 1 сажень, 215 пудовъ при длинѣ въ 2 сажени, 140 пудовъ при длинѣ въ 3 сажени и т.д. А такъ грузъ для двухъ саженной половой балки составляетъ 150 пуд., то разсматриваемая профиль дастъ избытокъ прочности для такой балки.

Подобно этому очевидно можно было бы и для всякой другой данной профили опредѣлить предѣльную длину половой балки, и этимъ руководствоваться при выборѣ профили половой балки данной длины.

При длинѣ балки 2 хр сажень желѣзныя половыя (и) потолочныя балки часто дѣлаются изъ желѣзныхъ листовъ, поставленныхъ на ребро, соединенныхъ по длинѣ балки между собою заклепками и накладками и усиленныхъ сверху и снизу приклепанными къ обѣимъ сторонамъ листовъ полосами углового желѣза. Среднее ребро балки дѣлается толщиною отъ $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$ дюйма и высотою отъ 12 тиш до 24 дюймовъ, угловое желѣзо берется толщиною отъ $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$ дюйма, и отъ 2 до 4 дюймовъ въ боку угла; діаметръ заклепокъ $\frac{5}{8}$ до $\frac{3}{4}$ дюйма.



Если пренебречь сопротивлением загнутых частей углового железа, касающихся к листам, вследствие потери сопротивления частей листов, ослабленных отверстиями для заклепок, то поверка прочности балок из листового железа, равномерно нагруженных по всей длине, может быть произведена по той же формуле, которая выше выведена для цельных балок, выкатанных под профиль двойного Т. Таким образом взявъ:

$$a = 4\frac{1}{4}'', \quad b = 12'', \quad a' = 4'' \text{ и } b' = 11\frac{1}{2}''$$

и, полагая наибольший равномерно размещенный груз въ 75 пудовъ на 1 погонную сажень, имѣемъ для опредѣленія наибольшей длины балки $2l$, выраженной въ футахъ, уравненіе:

$$\frac{2.75.l}{7} = \frac{160}{12} \cdot \frac{ab^3 - a'b'^3}{b.l};$$

откуда:

$$l^2 = \frac{160.7.(4{,}25.12^3 - 4.11{,}5^3)}{12.2.75.12.} = 65{,}3593 \quad \text{и} \quad 2l = 16{,}17 \text{ фута}.$$

Если же принять:

$$a = 6\frac{3}{8}'', \quad b = 18'', \quad a' = 6'', \quad b' = 17\frac{1}{4}'', \quad (a - a') = \frac{1}{2}(b - b') = \frac{3}{8}'',$$

то, при томъ же грузѣ въ 75 пуд. на погонную сажень длина $2l$ балки въ футахъ, найдется изъ уравненія

$$\frac{2.75.l}{7} = \frac{160}{12} \cdot \frac{6{,}375.18^3 - 6.17{,}25^3}{18l};$$

откуда

$$l^2 = 220{,}59 \quad \text{и} \quad l = 29{,}6 \text{ фута}.$$

Наконецъ при болѣе значительныхъ размѣрахъ:

$$a = 8\frac{1}{2}'', \quad b = 24'', \quad a' = 8'', \quad b' = 23'', \quad a - a' = \frac{1}{2}(b - b') = \frac{1}{2}''$$

получаемъ

$$\frac{2.75.l}{7} = \frac{160}{12} \cdot \frac{8{,}5.24^3 - 8.23^3}{24l} =$$

откуда

$$l^2 = 543{,}61 \quad \text{и} \quad 2l = 46{,}62 \text{ фута}.$$

Свѣдѣнія изъ графической статики.

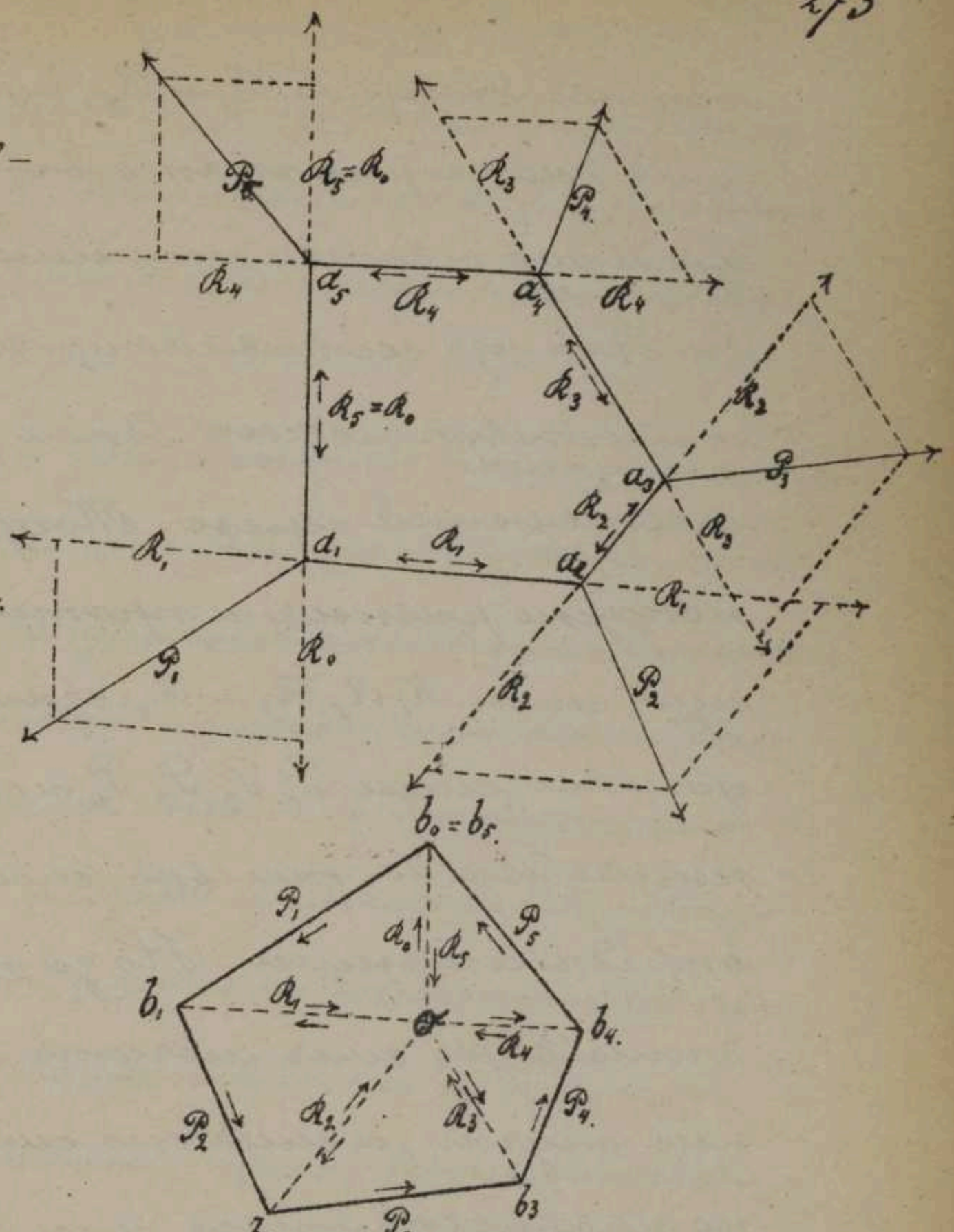
Изъ разобранныхъ здѣсь двухъ примѣровъ изгиба призматическихъ тѣлъ видно, какимъ образомъ подобные вопросы могутъ быть разрѣшены при помощи одного только анализа. Но надобно замѣтить, что хотя чисто аналитическіе способы и могутъ служить для разрѣшенія всякаго вопроса, подходящаго подъ изложенную общую теорію изгиба, но они не обладаютъ тою наглядностію, которая въ практическихъ приложеніяхъ значительно облегчаетъ ясное пониманіе всѣхъ подробностей хода рѣшенія вопроса и его результата. Этотъ недостатокъ тѣмъ болѣе ощутителенъ, что случаи изгиба тѣлъ встрѣчаются весьма часто и притомъ въ весьма разнообразныхъ видахъ, какъ по измѣреніямъ и составу изгибаемыхъ тѣлъ, такъ и по числу и образу дѣйствія на нихъ силъ. По сему, въ новѣйшее время, къ аналитическимъ способамъ стали соединять геометрическія соображенія, облегчающія рѣшеніе вопросовъ вслѣдствіе большей своей наглядности и, кромѣ того, приводящія къ геометрическому изображенію результатовъ и графическимъ способамъ рѣшенія вопросовъ. Этому развитію средствъ теоріи изгиба, наиболѣе содѣйствовали цюрихскій профессоръ Culmann и штутгартскій профес-

сочъ Мовг (*). Геометрическія соображенія при этомъ преимущественно основаны на свойствахъ такъ называемаго веревочнаго многоугольника или цѣпной линіи и многоугольника силъ. Кульманъ первый показалъ примѣненіе этихъ свойствъ къ изложенію всей статики твердыхъ тѣлъ, которому онъ и присвоилъ названіе графической статики, и при этомъ объяснилъ и геометрическое опредѣленіе суммы моментовъ силъ относительно данной оси; а Моръ прибавилъ къ этому способы геометрическаго опредѣленія кривой изогнутой оси призматическаго тѣла. Для объясненія примѣненій графической статики къ изслѣдованію изгиба тѣлъ, мы здѣсь ограничимся изложеніемъ только тѣхъ частей графической статики, которыя для этого необходимы, а именно частей касающихся совокупленія силъ дѣйствующихъ въ одной плоскости, и геометрическаго изображенія и изслѣдованія суммы моментовъ такихъ силъ, взятыхъ относительно какой угодно точки въ ихъ плоскости.

(*) Culmann – Graphische Statik. Zürich, 1866.

Труды Мора напечатаны въ различныхъ нумерахъ журнала Zeitschrift des Architecten und Ingenieur Vereins zu Hannover, 1868 г.; они переведены на русскій языкъ г. Недѣлковскимъ

Положимъ, что даны силы P_1 P_2 P_3 P_4 и P_5, направленныя какъ угодно по одной и той же данной плоскости и дѣйствующія на твердое тѣло. Для ихъ совокупленія, т.е. ихъ замѣны возможно меньшимъ числомъ силъ, можно поступить слѣдующимъ образомъ. Замѣнимъ одну изъ нихъ P_1 двумя ея составляющими R_0 и R_1, направленія которыхъ могутъ быть выбраны какъ угодно, также какъ и положеніе на направленіи силы P_1 общей ихъ точки приложенія a_1, замѣнимъ другую силу P_2 также двумя ея составляющими, но выбравъ одну изъ нихъ такъ, чтобы она была равна и противуположна составляющей R_1 первой силы P_1, и опредѣляя другую составляющую R_2 изъ параллелограмма силъ, продолживъ предварительно линію направленія силы R_1 до встрѣчи съ направленіемъ силы P_2, чтобы найти общую точку a_2 приложенія



составляющих R_1 и R_2; продолжить таким образом далее заменять остальныя силы P_3 P_4 и P_5 каждую двумя составляющими, выбранными так, чтобы одна из составляющих каждой силы была равна и противуположна одной из составляющих предшествующей силы. Тогда легко видеть, что всю попарно равныя и противуположныя составляющія силы R_1 R_2 R_3 и R_4 взаимно уравновѣсятся и данныя силы P_1 P_2 P_3 P_4 и P_5 окажутся замѣненными двумя только силами R_0 и R_5 = вполнѣ опредѣленными. Но за тѣмъ относительно этихъ двухъ силъ могутъ встрѣтиться различныя случаи, а именно силы R_0 и R_5 могутъ взаимно уравновѣситься или же, не уравновѣшиваясь, онѣ могутъ имѣть одну равнодѣйствующую силу. Въ первомъ случаѣ силы R_0 и R_5 должны быть равны и направлены въ различныя стороны по одной и той же прямой $a_1 a_5$, и тогда замѣняемыя ими силы P_1 P_2 P_3 P_4 и P_5 очевидно также взаимно уравновѣшиваются. Во второмъ же случаѣ, когда силы R_0 и R_5 не уравновѣшиваются, замѣняемыя силы также не находятся въ равновѣсіи, и могутъ быть замѣнены одною равнодѣйствующею силою, совпадающею съ равнодѣйствующею силъ R_0 и R_5, или же

онъ замыкается парою силъ R_0 и R_5, если послѣднія силы между собою равны и направлены въ различныя стороны по двумъ различнымъ, но параллельнымъ линіямъ.

Вникая въ изложенный здѣсь способъ совокупленія данныхъ силъ $P_1 P_2 \ldots P_5$, не трудно сообразить, что для совокупленія или же уравновѣшиванія данныхъ силъ $P_1 \ldots P_5$ нѣтъ надобности чтобы эти силы дѣйствовали на данное твердое тѣло, а достаточно чтобы совокупность ихъ точекъ приложенія образовала систему неизмѣняемую при дѣйствіи этихъ силъ, т.е. чтобы бока многоугольника $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ сохраняли неизмѣнную длину; такъ напримѣръ если эти бока, какъ показано на приложенномъ чертежѣ, растягиваются попарно равными составляющими данныхъ силъ, приложенныхъ къ ихъ концамъ, то достаточно чтобы многоугольникъ состоялъ изъ нерастяжимой нити, веревки или цѣпи, не подверженныхъ силамъ тяжести; если же бока многоугольника сжимаются попарно равными силами, приложенными къ ихъ концамъ, какъ это бы имѣло мѣсто, если бы силы $P_1 \ldots P_5$ имѣли направленія прямо противуположныя показаннымъ на чертежѣ, тогда достаточно, чтобы бока многоугольника состояли изъ нежимаемыхъ и не гибкихъ прутьевъ, цѣпей

двѣнѣевъ цѣпи и т. под.; вершины же многоугольники могли бы состоять и изъ маркировъ, допускающихъ вращеніе боковъ около этихъ точекъ, потому что разсматриваемыя силы подобнаго вращенія боковъ произвести не могутъ. Къ этому можно прибавить, что многоугольникъ $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$ представляетъ фигуру, которую образуетъ не растяжимая нить или цѣпь изъ несжимаемыхъ прутьевъ, если она подвергается дѣйствію силъ $P_1 \ldots P_5$ и двухъ силъ, изъ уравновѣшивающихъ и равныхъ и противуположныхъ составляющихъ A_0 и A_5 крайнихъ силъ P_1 и P_5. Вслѣдствіе сего многоугольникъ, составленный подобно многоугольнику $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_5$ изъ линій направленія попарно равныхъ и противуположныхъ составляющихъ силъ, принадлежащихъ данныхъ силамъ, приложеннымъ въ вершинахъ многоугольника, носитъ названіе <u>веревочнаго или цѣпнаго многоугольника</u>. –

Изъ сказаннаго до сихъ поръ о веревочномъ многоугольникѣ легко видѣть, что построеніе его для данныхъ силъ можетъ служить для ихъ совокупленія, и слѣдовательно также для изслѣдованія вопросовъ, касающихся совокупленія силъ и ихъ равновѣсія.

Замѣтимъ однако, что для построенія веревочнаго многоугольника нѣтъ надобности всегда

строить параллелограммы для каждой изъ данныхъ силъ, а можно поступать и по другому способу. Для объясненія этаго проведемъ линію $6_0 6_1$, равную, параллельную и одинаково направленную съ линіею, изображающею силу P_1, приложенную въ вершинѣ a, веревочнаго многоугольника, а изъ точекъ 6_0 и 6_1 проведемъ линіи $6_0 0$ и $6_1 0$, параллельныя составляющимъ R_0 и R_1 силы P_1, тогда изъ равенства треугольника $6_0 0 6_1$ съ половиною параллелограмма силъ P_1, R_0 и R_1 видно, что линіи $6_0 0$ и $0 6_1$ изображаютъ по величинѣ и направленію составляющія силы R_0 и R_1; далѣе изъ точки 6_1 проведемъ линію $6_1 6_2$ равную, параллельную и одинаково направленную съ линіею, выражающею вторую данную силу P_2, и соединимъ точку 6_2 съ прежде найденною точкою 0, тогда также легко видѣть, что линіи $6_1 0$ и $0 6_2$ выразятъ по величинѣ и направленію составляющія R_1 и R_2 силы P_2; продолжая такимъ же образомъ далѣе мы получимъ многоугольникъ $6_0 6_1 6_2 6_3 6_4 6_5$, котораго бока равны, параллельны и направлены кругомъ периметра его въ одинаковыя стороны съ линіями, изображающими данныя силы; такому многоугольнику присвоивается названіе <u>многоугольника силъ</u>. Вмѣстѣ съ тѣмъ получается точка 0,

называемая полюсомъ многоугольника силъ и имѣющая то свойство, что линіи или лучи, соединяющія её съ вершинами многоугольника силъ, изображаютъ по величинѣ и направленію составляющія силы $R_0 R_1 \ldots R_5$ данныхъ силъ $P_1 \ldots P_5$, вслѣдствіе чего эти лучи должены быть параллельны соотвѣтствующимъ имъ бокамъ веревочнаго многоугольника. Къ этому можно прибавить, что если силы R_0 и R_5, которыми данныхъ силы $P_1 \ldots P_5$ могутъ быть замѣнены между собою равны, параллельны и направлены въ противныя стороны, т.е. если данныя силы взаимно уравновѣшиваются или же приводятся къ нуравновѣшивающейся парѣ силъ, то лучи $6_0 0$ и $0 6_5$ и вмѣстѣ съ ними точки 6_0 и 6_5 должены совмѣститься, а слѣдовательно многоугольникъ силъ долженъ быть сомкнутый; если же силы R_0 и R_5 неравны; или не параллельны или же не направлены въ противуположныя стороны, т.е. если эти силы и вмѣстѣ съ ними данныя силы $P_1 P_2 \ldots P_5$ имѣютъ одну равнодѣйствующую, то эта равнодѣйствующая по величинѣ и направленію представится линіею $6_0 6_5$, образующею сомкнутый треугольникъ съ несовпадающими въ этомъ случаѣ лучами $6_0 0$ и $0 6_5$.

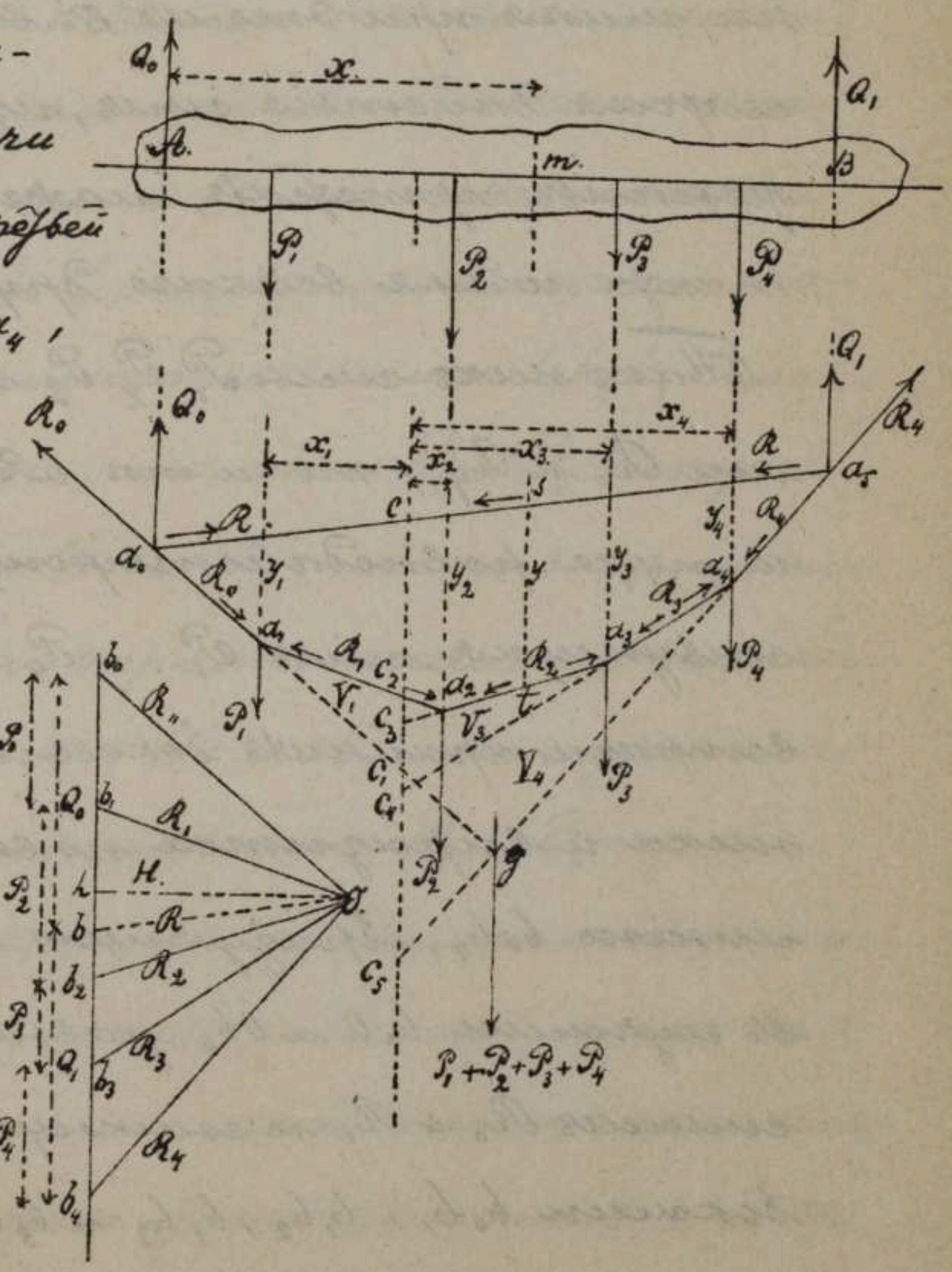
Соображая сказанное здѣсь о связи, существующей между веревочнымъ многоугольникомъ и многоугольникомъ силъ, не трудно убѣдиться, что построеніе обоихъ многоугольниковъ можно было бы произвести и въ обратномъ порядкѣ и тѣмъ нѣсколько облегчить построеніе перваго изъ нихъ. Дѣйствительно, если по даннымъ силамъ $P_1\ P_2 \ldots P_5$ построить сперва многоугольникъ силъ $b_0 b_1 \ldots b_5$, произвольно выбрать его полюсъ O, и провести лучи, соединяющіе полюсъ съ вершинами многоугольника силъ, то для построенія веревочнаго многоугольника $a_0 a_1 \ldots a_5$ стоитъ только черезъ точку a_1, произвольно взятую на линіи направленія данной силы P_1, провести двѣ линіи, параллельныя лучамъ Ob_0 и Ob_1, продолжая вторую изъ нихъ до точки a_2 встрѣчи съ направленіемъ силы P_2, провести черезъ точку a_2 линію, параллельную лучу Ob_2 до встрѣчи въ точкѣ a_3 съ направленіемъ силы P_3, изъ a_3 провести линію, параллельную лучу Ob_3 до встрѣчи въ a_4 съ направленіемъ силы P_4 и т.д. Линіи такимъ образомъ полученныя будутъ параллельны составляющимъ данныхъ силъ и очевидно образуютъ искомый веревочный многоугольникъ. При этомъ произвольность выбора направленій составляющихъ $R_0 \ldots R$, данной силы P, вполнѣ соотвѣтствуетъ произволь-

ности выбора полюса O многоугольника силъ, такъ какъ этимъ опредѣляются направленія лучей b_0 и Ob_1, параллельныя направленіямъ силъ R_0 и R_1.

Эти способы построенія веревочнаго многоугольника и многоугольника силъ очевидно могутъ привести къ сколькимъ угодно различнымъ видамъ этихъ многоугольниковъ для одних и тѣхъ же данныхъ силъ, смотря по выбору полюса или направленій двухъ составляющихъ одной изъ данныхъ силъ и по выбору порядка послѣдовательнаго совокупленія данныхъ силъ или продолженія звеньевъ многоугольника силъ.

Обратимся теперь къ изслѣдованію веревочнаго многоугольника и многоугоугольника силъ въ случаѣ, когда всѣ данныя силы между собою параллельны, какъ это имѣетъ мѣсто при изгибѣ призматическаго тѣла силами, перпендикулярными къ его оси, прямолинейной до изгиба; и при этомъ для простоты рѣчи положимъ, что всѣ данныя силы дѣйствуютъ по вертикальнымъ направленіямъ сверху внизъ или же снизу вверхъ.

Пусть AB представитъ твердое тѣло, на которое дѣйствуютъ данныя вертикальныя силы $P_1 P_2 P_3 P_4$. Тогда въ слѣдствіе параллельности силъ многоугольникъ силъ представится прямою линіею $b_0 b_1 b_2 \ldots b_4$. За тѣмъ выбравъ произвольно полюсъ O и проведя лучи $Ob_0, Ob_1, \ldots Ob_4$, получимъ веревочный многоугольникъ слѣдующимъ образомъ: изъ точки a_1, произвольно взятой на направленіи данной силы P_1, проведемъ линію $a_1 a_0$, параллельную лучу Ob_0, и линію $a_1 a_2$, параллельную лучу Ob_1 и встрѣчающую направленіе второй данной силы P_2 въ точкѣ a_2; изъ точки a_2 проведемъ линію $a_2 a_3$, параллельную лучу Ob_2, до встрѣчи въ a_3 съ направленіемъ третьей силы P_3, изъ a_3 линію $a_3 a_4$, параллельно лучу Ob_3, до встрѣчи въ a_4 съ направленіемъ послѣдней данной силы P_4 и изъ точки a_4 линію $a_4 a_5$, параллельно лучу Ob_4. Образующійся такимъ образомъ веревочный многоугольникъ $a_0 a_1 \ldots a_5$ вообще будетъ не сомкнутый, такъ какъ вообще данныя силы не будутъ въ равновѣсіи.



Каждые два смежные бока его представят направления двух составляющих силъ данной силы, приложенной въ ихъ общей точкѣ пересѣченія, и крайніе два бока a_0a_1 и a_5a_4 представятъ направленія двухъ силъ R_0 и R_4, которыми всѣ данныя силы могутъ быть замѣнены, · величины же всѣхъ составляющихъ данныхъ силъ выразятся параллельными имъ сторонами многоугольника силъ.

Разберемъ теперь послѣдовательно важнѣйшія свойства веревочнаго многоугольника и многоугольника силъ, когда эти силы между собою параллельны, имѣя при этомъ въ виду, что то, (что) выведемъ для случая дѣйствія силъ, изображеннаго на приложенномъ чертежѣ, можетъ быть выведено точно также и для всякаго другого подобнаго случая.

Такъ какъ силы P_1 P_2 P_3 и P_4 замѣняются силами R_0 и R_4, то и тѣ и другія силы имѣютъ одну и ту же равнодѣйствующую, а посему равнодѣйствующая силъ $P_1 \ldots P_4$ пройдетъ черезъ точку d встрѣчи крайнихъ боковъ веревочнаго многоугольника и выразится по величинѣ и направленію линіею b_0b_4, образующею замкнутый треугольникъ съ лучами b_0O и Ob_4, равными и параллельными силамъ R_0 и R_4 и замкнутый многоугольникъ съ боками b_0b_1, b_1b_2, b_2b_3 и b_3b_4, равными и параллельными силамъ P_1 P_2 P_3 и P_4. Прибавляя къ числу данныхъ силъ еще силу, равную и противуположную

ихъ равнодѣйствующей и дополняя для нея построе-
ніе веревочнаго многоугольника и многоугольника
силъ, мы получимъ бы два сомкнутыхъ многоуголь-
ника $a_1 a_2 a_3 a_4$ и a_1 и $b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 b_0$.

Такъ какъ звена веревочнаго многоугольника строят-
ся одинъ за другимъ по одному и тому же способу
вмѣстѣ съ соотвѣтствующими имъ частями
многоугольника силъ, то очевидно каждую часть
веревочнаго многоугольника, состоящую изъ нѣ-
сколькихъ послѣдовательныхъ его боковъ, можно
разсматривать какъ особый веревочный много-
угольникъ, которому принадлежитъ свой много-
угольникъ силъ, составляющій также часть цѣ-
лаго многоугольника силъ. Такъ напримѣръ
$a_1 a_2 a_3 c_4$ есть веревочный многоугольникъ, кото-
рому соотвѣтствуетъ многоугольникъ $b_1 b_2 b_3$ силъ
P_2 и P_3. Изъ этого слѣдуетъ, что силы P_2 и P_3 могутъ
быть замѣнены силами R_1 и R_3, направленными
по линіямъ $a_1 a_2$ и $a_4 a_3$ и выраженными по величи-
нѣ и направленію лучами b_0 и $0 b_3$ многоуголь-
ника силъ; равнодѣйствующая силъ P_2 и P_3 прой-
детъ черезъ точку пересѣченія продолженныхъ ли-
ній $a_1 a_2$ и $a_4 a_3$ и выразится замыкающимъ бо-
комъ $b_1 b_3$ соотвѣтствующаго многоугольника силъ.
Такимъ же образомъ можно удостовѣриться и въ
томъ, что вообще равнодѣйствующая какого
угодно числа слѣдованныхъ силъ веревочнаго многоуголь-

ника пройдетъ чрезъ точку пересѣченія продолженныхъ крайнихъ боковъ части веревочнаго многоугольника, соответствующей этимъ силамъ, и выражится по величинѣ и направленію линіею, замыкающею соответствующую часть многоугольника силъ.

Вмѣсто опредѣленія одной силы, равнодѣйствующей нѣсколькихъ данныхъ силъ или одной силы ихъ уравновѣшивающей, можно также предложить себѣ опредѣлить двѣ силы, параллельныя даннымъ силамъ, проходящія черезъ двѣ данныя точки и уравновѣшивающія данныя силы, какъ напримѣръ сопротивленія двухъ опоръ на которыхъ лежитъ призматическое тѣло, подверженное дѣйствію данныхъ силъ. Назовемъ Q_0 и Q_1, искомыя двѣ силы, уравновѣшивающія данныя силы P_1 P_2 P_3 и P_4 и приложенныя въ точкахъ A и B даннаго твердаго тѣла; вообразимъ, что силы Q_0 и Q_1 перенесены вдоль линій ихъ направленія въ точки a_0 и a_5 встрѣчи этихъ линій съ линіями направленія крайнихъ составляющихъ R_0 и R_4 данныхъ силъ P_1 и P_4 и разложимъ при точкѣ a_0 силу Q_0 на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна равна и противуположна составляющей R_0 силы P_1 и съ нею уравновѣшивается, а другая опредѣлится изъ соответствующаго параллелограмма или треугольника силъ, а при точкѣ a_5 разложимъ такимъ же образомъ силу Q_1 на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна

равна и противуположна составляющей R_4 силы P_4 и съ нею уравновѣшивается, а другая опредѣлится изъ треугольника силъ. Тогда двѣ вторыя составляющія силъ Q_0 и Q_1 могутъ замѣнить всю совокупность силъ $Q_0 P_1 \ldots P_4 Q$; но эти послѣднія силы взаимно уравновѣшиваются, а слѣдовательно и вторыя составляющія силъ Q_0 и Q_1 должны взаимно уравновѣситься. Посему эти составляющія должны имѣть одну и туже величину, которую обозначимъ черезъ R, и дѣйствовать въ противныя стороны по одной и тойже прямой $a_0 a_5$, соединяющей нѣкоторыя точки приложенія и вмѣстѣ съ тѣмъ замыкающей веревочный многоугольникъ. Кромѣ того треугольники силъ, которыхъ бока опредѣляютъ по величинѣ и направленію силы R и имѣютъ съ ними искомыя силы Q_0 и Q_1, получатся если въ многоугольникѣ силъ проведемъ лучь $0b$ параллельно замыкающему боку $a_0 a_5$ веревочнаго многоугольника. Дѣйствительно линіи $b0$ и $0b_0$ выразятъ по величинѣ и направленію составляющія силы R и R_0 и линія bb_0 нѣкъ равнодѣйствующую Q_0; такимъ же образомъ линіи $b_4 0$ и $0b$ представятъ составляющія R_4 и R, и линія $b_4 b$ нѣкъ равнодѣйствующую Q_1; а вмѣстѣ съ этимъ получается сомкнутый многоугольникъ $b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 b b_0$ взаимно уравновѣшивающихся силъ $P_1 P_2 P_3 P_4 Q_1$ и Q_0.

Разсматривая веревочный многоугольникъ какъ систему линій неизменной длины или совершенно твердыхъ и гибкихъ звѣньевъ, соединенныхъ между собою шарнирами въ точкахъ приложенія силъ, можно себѣ представить каждый бокъ многоугольника или звѣно какъ твердое тѣло, растянутое или сжатое двумя равными и противуположенными силами, приложенными къ его концамъ и представляющими составляющія силы двухъ смежныхъ силъ, дѣйствующихъ въ прилегающихъ вершинахъ многоугольника. Силу растяженія или сжатія бока или звѣна веревочнаго многоугольника мы будемъ иногда для краткости рѣчи называть <u>напряженіемъ</u> этого бока.

Если какую угодно часть веревочнаго многоугольника представимъ себѣ уравновѣшенною при дѣйствіи на ея вершины данныхъ силъ и на два крайніе бока двухъ силъ, равныхъ и противуположенныхъ силамъ, удерживающимъ данныя, или же если имѣется сомкнутый веревочный многоугольникъ, на вершины котораго дѣйствуютъ взаимно — уравновѣшивающіяся силы, то каждую вершину можно принять за точку, находящуюся въ равновѣсіи при дѣйствіи на нее трехъ силъ, изъ которыхъ одна есть данная внѣшняя сила, а двѣ другія можно назвать <u>сопротивленіями</u>

двухъ смежныхъ боковъ къ растяженію или сжатію. Эти сопротивленія равны и противуположны напряженіямъ этихъ боковъ и также составляющимъ силамъ данной внѣшней силы.

Величины этихъ напряженій или сопротивленій боковъ веревочнаго многоугольника выражаются длинами соотвѣтствующихъ лучей многоугольника силъ и направленія ихъ параллельны этимъ лучамъ.

Силы сопротивленія и напряженія боковъ веревочнаго многоугольника, подверженнаго дѣйствію вертикальныхъ внѣшнихъ силъ, будучи разложены каждая на одну горизонтальную и одну вертикальную составляющую, имѣютъ горизонтальныя составляющія равныя между собою. Величину этой горизонтальной составляющей, общую всѣмъ напряженіямъ боковъ веревочнаго многоугольника мы будемъ называть къ <u>горизонтальнымъ напряженіемъ</u> и изображать преимущественно буквою H. Величина этой силы выражается горизонтальнымъ лучемъ Oh, проведеннымъ въ многоугольникѣ силъ. Такъ напримѣръ напряженіе R, бока a, a_2 изображается лучемъ Ob, и его составляющія выражаются вертикальною линіею hb, и горизонтальною линіею Oh; такимъ же образомъ составляющія напряженія R выражаются вертикальною линіею hb и тою же горизон-

тольною линіею Ok, и т.д.

Одно изъ главныхъ свойствъ веревочного многоугольника, котораго внѣшнія силы между собою параллельны, заключается въ томъ, что моментъ одной силы суммы моментовъ нѣсколькихъ смежныхъ внѣшнихъ силъ относительно какой угодно данной точки въ плоскости силъ, выражается произведеніемъ изъ горизонтальнаго напряженія H на отрѣзокъ линіи, проведенной черезъ данную точку параллельно внѣшнимъ силамъ, ограниченный пересѣченіями съ этою линіею продолженныхъ крайнихъ боковъ той части веревочного многоугольника, на которую эти силы дѣйствуютъ. Для доказательства положимъ, что черезъ точку, относительно которой берутся моменты, проведена линія CC_5 параллельная внѣшнимъ силамъ, дѣйствующимъ на веревочный многоугольникъ, и замѣтимъ что разстояніе каждой точки этой линіи до параллельнаго ей направленія какой либо одной изъ внѣшнихъ силъ одно и тоже, а слѣдовательно и моментъ внѣшней силы одинъ и тотъ же, къ какой бы точкѣ на линіи CC_5 онъ ни относился. Затѣмъ опредѣлимъ моментъ силы P_1 относительно точки на линіи CC_5. Для сего выдѣлимъ часть веревочнаго многоугольника $a_0 a_1 a_2$ заключающую силу P_1, и замѣнимъ силу P_1 двумя силами R_0 и R_1, направленными по крайнимъ бокамъ $a_0 a_1$ и $a_2 a_1$ этой

части многоугольника, перенесемъ эти силы въ точки C_1 и C_2 пересѣченія ихъ направленій съ линіею CC_5 и разложимъ ихъ тамъ на ихъ составляющія по вертикальному и горизонтальному направленіямъ. Тогда моменты вертикальныхъ составляющихъ относительно каждой точки на линіи CC_5 ихъ собственнаго направленія будутъ равны нулю; горизонтальныя же составляющія образуютъ пару силъ, равныхъ горизонтальному напряженію H, которой плечо будетъ отрѣзокъ C_1C_2 линіи CC_5, и стремленіе къ вращенію направлено справа на лѣво и снизу вверхъ. По сему, принимая это направленіе, какъ и выше за отрицательное, получаемъ для момента силы P, относительно какой угодно точки на линіи CC_5 величину момента пары

$$-H.\overline{C_1C_2}.$$

Дѣйствуя точно такъ же относительно другихъ силъ, можно вывести для моментовъ силъ $P_2\ P_3\ P_4\ Q$ и Q_0 послѣдовательныя величины:

$$H.\overline{C_2C_3},\ H.\overline{C_3C_4},\ H.\overline{C_4C_5},\ -H.\overline{C_5C},\ H\overline{CC_1},$$

а выдѣляя часть $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ веревочнаго многоугольника, заключающую нѣсколько смѣженныхъ внѣшнихъ силъ $P_2\ P_3$ и P_4, и замѣняя эти силы напряженіями R_1 и R_4 крайнихъ боковъ, мы найдемъ, что моментъ равнодѣйствующей этихъ силъ или сумма моментовъ силъ $P_2\ P_3$ и P_4 относительно какой угодно точки на линіи CC_5 выразился бы

черезъ

$$H.\overline{C_2C_5}.$$

Изъ этого между прочимъ также слѣдуетъ, что если бы при изслѣдованіи изгиба призматическаго тѣла AB, лежащаго на двухъ опорахъ A и B и подверженнаго дѣйствію грузовъ P_1 P_2 P_3 и P_4, требовалось опредѣлить сумму моментовъ относительно точки m на оси тѣла силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны этой точки, то стоило бы только въ предварительно построенномъ веревочномъ многоугольникѣ провести соотвѣтствующую точкѣ m вертикальную линію st, и тогда, назвавъ y величину отрѣзка ея между сторонами a_2a_3 и a_5a_0, получили бы для суммы моментовъ силъ P_3 P_4 и Q, величину

$$-Hy$$

Отсюда видно, что для такого тѣла сумма моментовъ силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны даннаго поперечнаго сѣченія, взятая относительно центра тяжести этого сѣченія, пропорціональна соотвѣтствующей вертикальной ординатѣ веревочнаго многоугольника, откладывае-мой отъ оси абсциссъ, направленной по замыкающему боку многоугольника.

Другое замѣчательное свойство веревочнаго многоугольника для силъ параллельныхъ и направленныхъ въ одну сторону касается вели-

чины суммы произведений этих сил на квадраты их разстояний до данной точки или до линіи, параллельной направленіямъ силъ; свойство это приводитъ, какъ это объяснится ниже (KK) къ графическому опредѣленію момента инерціи плоскости поперечнаго сѣченія тѣла. Для вывода этого свойства обратимъ вниманіе на треугольникъ a, c, c_2, образуемый продолженными боковыми веревочнаго многоугольника, прилегающими къ силѣ P_1, и произвольно проведенною линіею cc_5, параллельною направленію силъ. Треугольникъ этотъ очевидно подобенъ треугольнику $Ob.b$, многоугольника силъ, образуемому линіями, выражающими силу P_1 и ея двѣ составляющія R_0 и R_1; въ слѣдствіе этого площади обоихъ треугольниковъ должны относиться между собою, какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ или ихъ высотъ, а посему изображая черезъ V_1 площадь треугольника a, c_1, c_2 и черезъ x_1 его высоту, равную разстоянію силы P_1 до любой точки на линіи cc_5, мы имѣемъ равенство

$$\frac{V_1}{\frac{1}{2}HP_1} = \frac{x_1^2}{H^2}, \quad \text{откуда} \quad P_1 x_1^2 = 2HV_1.$$

Такимъ же образомъ изображая черезъ $V_2\ V_3\ V_4$ площади треугольниковъ $a_2 c_2 c_3$, $a_3 c_3 c_4$ и $a_4 c_4 c_5$, къ вершинамъ которыхъ приложены силы $P_2\ P_3$ и P_4, дѣйствующія на разстояніяхъ $x_2\ x_3$ и x_4 отъ линіи

с c_5, мы бы получили

$$P_2x_2^2 = 2HV_2, \quad P_3x_3^2 = 2HV_3, \quad P_4x_4^2 = 2HV_4;$$

и затем изображая через V сумму $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ площадей треугольников найдем

$$P_1x_1^2 + P_2x_2^2 + P_3x_3^2 + P_4x_4^2 = 2HV.$$

Отсюда видно, что сумма произведений сил, параллельных и направленных в одну сторону, на квадраты их расстояний до данной точки в их плоскости равна удвоенному произведению из горизонтального напряжения боков их веревочного многоугольника на площадь, ограниченную веревочным многоугольником, линией, проходящею через данную точку и параллельною силам и крайними боками многоугольника, продолженными до встречи с этою линией.

Для удобства применения свойств веревочного многоугольника, принадлежащего данным силам, иногда полезно из различных возможных видов его при данных и тех же горизонтальном напряжении выбрать такой, в котором один из боков многоугольника параллелен данной линии, один или два бока его проходят через одну или две данные точки и т. под. В таких случаях, построив веревочный многоугольник и многоугольник сил, не удовлетворяющие требуемому условию, стоит только передвинуть полюс многоугольника сил, не изменяя его расстояния до него—

угольника, т.е., сохраняя тудже величину горизонтальнаго напряженія, такъ чтобы второй веревочный многоугольникъ, построенный по измѣненному многоугольнику силъ удовлетворялъ условію, что всегда оканчивался возлагаемымъ, потому что перемѣщеніемъ полюса вдоль вертикальной линіи можно послѣдовательно придавать каждому отдѣльному лучу, а слѣдовательно параллельному съ нимъ боку веревочнаго многоугольника, всѣ возможныя направленія въ одной и той же плоскости. Можно также, опредѣливъ сообразно условіямъ положеніе одного или двухъ боковъ втораго веревочнаго многоугольника; опредѣлить остальные боки такъ, чтобы отрѣзки каждой вертикальной линіи, проведенной между продолженіями данныхъ боковъ обоихъ веревочныхъ многоугольниковъ, были между собою равны.

Такъ напримѣръ если для тѣла AB, подвер-

жесткого действія силъ P_1 и P_2 и сопротивленій Q_0 и Q_1, требуется построить веревочный многоугольникъ, котораго бокъ $a'_1 a'_2$, соединяющій точки приложенія силъ P_1 и P_2, былъ параллеленъ данной линіи DJ, то можно построить многоугольникъ силъ $b_0 b_1 b_2 b b_0$ съ данными составляющими H, но выбравъ для его полюса O' такое мѣсто на вертикальной линіи, какое дается по данному разстоянію Oh отъ линіи многоугольника силъ, чтобы лучъ $b_1 O'$, параллельный боку $a'_1 a'_2$ искомаго веревочнаго многоугольника, былъ параллеленъ данной линіи DJ; тогда веревочный многоугольникъ $a'_0 a'_1 a'_2 a'_3$, подобный многоугольнику, удовлетворитъ условію. Если бы уже существовалъ веревочный многоугольникъ $a_0 a_1 a_2 a_3$ и многоугольникъ силъ $b_0 b_1 b_2 b b_0$ съ полюсомъ O, построенные независимо отъ даннаго условія для того же тѣла и тѣхъ же силъ, то можно было бы провести между линіями направленія силъ P_1 и P_2 бокъ $a'_1 a'_2$ параллельно данной линіи DJ, тогда точки a'_1 и a'_2 будутъ вершинами веревочнаго многоугольника, въ которыхъ приложены силы P_1 и P_2; а задача для опредѣленія остальныхъ вершинъ a'_0 и a'_3 сведется только къ продолженію боковъ $a_1 a_2$ и $a'_1 a'_2$ обоихъ веревочныхъ многоугольниковъ до встрѣчи съ направле-

ніями остальныхъ силъ въ точкахъ C_0, C_3 и C_0', C_3'; и отложить отрѣзки вертикальныхъ линій $C_0' d_0'$ равно $C_0 d_0$ и $C_3' d_3'$ равно $C_3 d_3$. Два первые отрѣзка должны быть равны между собою, потому что каждый изъ нихъ, по умноженіи на горизонтальное натяженіе H, долженъ быть равенъ моменту силы P_1 относительно какой угодно точки на вертикальной линіи направленія силы Q_0; два вторые отрѣзка равны, потому что имѣютъ такое же значеніе относительно силъ P_2 и Q_1. Можно было также опредѣлить положеніе точекъ d_0', d_3' проведя черезъ точки C_1' и C_2', выбранныя на направленіяхъ силъ P_1 и P_2 такъ чтобы отрѣзки вертикальныхъ линій $d_1' c_1'$ и $d_2' d_2'$ одного многоугольника были порознь равны отрѣзкамъ $d_1 c_1$ и $d_2 c_2$ другого, потому что они должны быть пропорціональны одинъ и тѣмъ же моментамъ силъ взятымъ многоугольниками.

Если бы требовалось построить веревочный многоугольникъ $d_0' d_1' d_2' d_3'$ такъ, чтобы бока $d_1' d_2'$ и $d_2' d_3'$, къ общей вершинѣ которыхъ приложена сила P_2, проходили черезъ двѣ данныя точки D и E, то можно поступать слѣдующимъ образомъ. Черезъ точку O'', произвольно взятую на направленіи силы P_2, провести двѣ взаимно перпендикулярныя линіи $D'G'$ и $F'E'$ такъ, чтобы отрѣзокъ $b_1'' b_2''$ вертикальной линіи, находящейся отъ точки O'' на

разстояній равномѣрно линіи, выражающей горизонтальное напряженіе H, будетъ равенъ линіи $b_1 b_2$, выражающей силу P_2; тогда треугольникъ $b_1'' b_2'' 0''$ представитъ часть многоугольника силъ, принадлежащую силѣ P_2. Затѣмъ чтобы въ этомъ треугольникѣ передвинуть полюсъ согласно условіямъ проса, проведемъ черезъ данныя точки D и E вертикальныя линіи пересѣкающія линіи $D'J'$ и $F'E'$ въ точкахъ $D'J'F'$ и E' отложимъ по нимъ части DF и EJ, равныя отрѣзкамъ тѣхъ же вертикальныхъ линій $D'F'$ и $E'J'$ и проведемъ прямыя DJ и FE, которыя пересѣкутся въ точкѣ a_2', находящейся на направленіи силы P_2, потому что въ двухъ парахъ подобныхъ треугольниковъ DFa_2' съ EJa_2' и $D'F'0''$ съ $E'J'0''$ отношеніе основаній $\frac{DF}{EJ}$ и $\frac{D'F'}{E'J'}$ равны, и слѣдовательно и отношенія высотъ должны быть равны и точки a_2' и $0''$ должны лежать на одной и той же линіи, параллельной основаніямъ. Затѣмъ продолжая вертикальную линію $b_1'' b_2''$ до встрѣчи въ точкахъ b_1' и b_2' съ линіями DJ и FE, получимъ на ней отрѣзокъ $b_1' b_2'$, равный $b_1'' b_2''$ и изображающій по силѣ по величинѣ и направленію силу P_2. Дѣйствительно, изображая черезъ H' горизонтальную силу, выражаемую длиною разстоянія точекъ $0''$ и a_2' до вертикальной линіи DF', получаемъ двѣ пары подобныхъ между собою треугольниковъ, изъ которыхъ

выходитъ, что

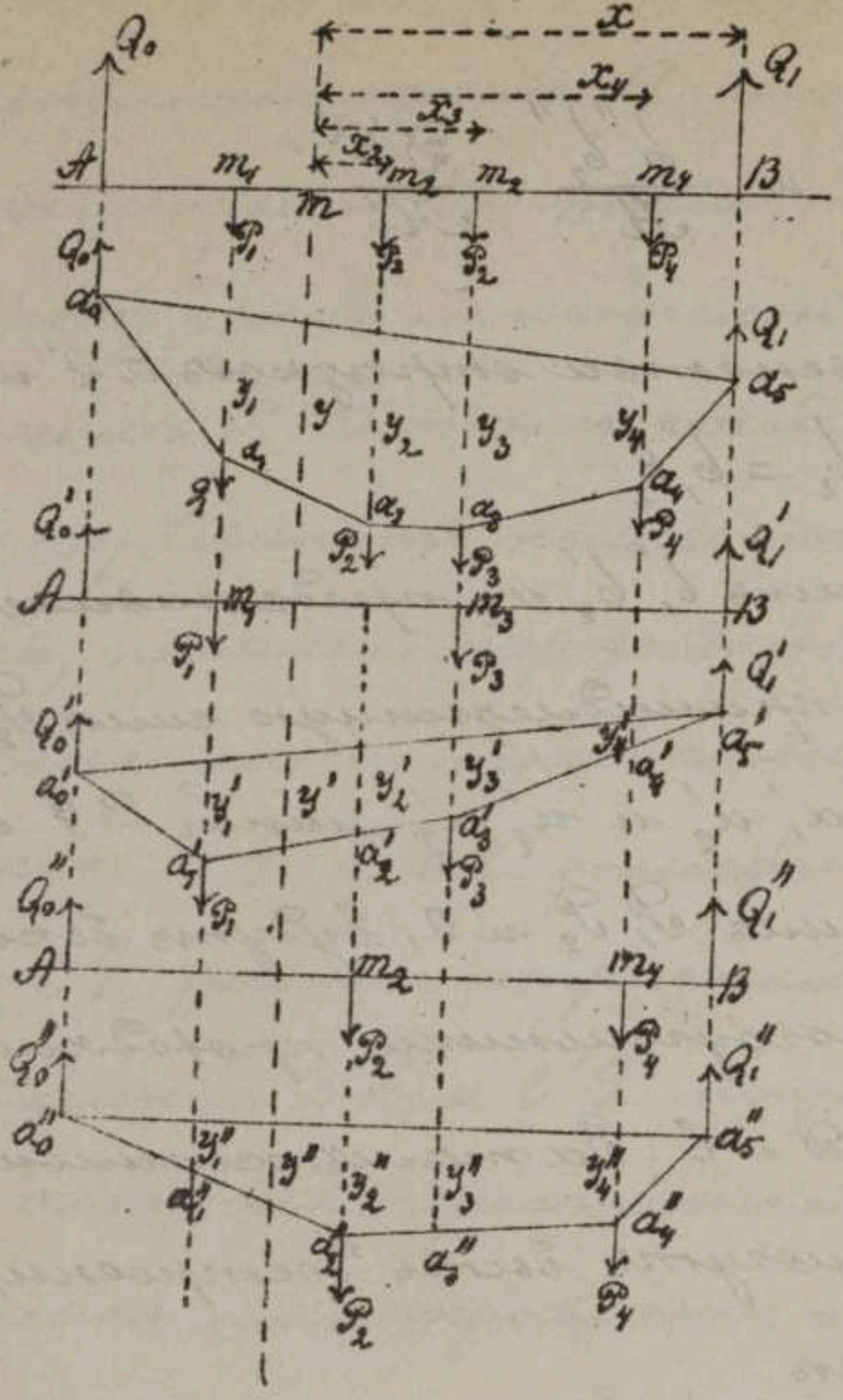
$$\frac{b_1' b_2'}{H} = \frac{DF}{H'} \quad \text{и} \quad \frac{b_1'' b_2''}{H} = \frac{D'F'}{H'},$$

откуда вслѣдствіе равенства отрѣзковъ DF и $D'F'$

$$b_1' b_2' = b_1'' b_2''.$$

Но тогда треугольникъ $b_1' b_2' a_2'$ представляетъ часть многоугольника силъ, принадлежащую силѣ P_2, а слѣдовательно отрѣзки $a_1' a_2'$ и $a_2' a_3'$ линій DF и FE между направленіями силъ P_1 P_2 и Q, будутъ боковыми неизмѣнаго веревочнаго многоугольника, проходящими черезъ данныя точки D и E. За тѣмъ остальные бока многоугольника уже могутъ быть достроены, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

Если имѣется два различныхъ веревочныхъ многоугольника, принадлежащихъ двумъ различнымъ системамъ параллельныхъ силъ, но построенныхъ при одномъ и томъ же горизонтальномъ напряженіи боковъ, то не трудно по нимъ построить веревочный многоугольникъ, принадлежащій общимъ системамъ силъ, одновременно дѣйствующимъ на данное твердое тѣло. Для объясненія этого положенія, что имѣются три веревочныхъ многоугольника съ данными и тѣмъ же горизонтальнымъ напряженіемъ H, изъ которыхъ первый $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ относится къ дѣйствію на данное тѣло AB силъ P_1 P_2 P_3 и P_4, приложенныхъ въ точкахъ m_1 m_2



m_3 и m_4, и уравновѣшивающихъ ихъ сопротивленій Q_0 и Q_1, приложенныхъ въ точкахъ A и B; вторый многоугольникъ $a_0' a_1' a_3' a_5'$ относится къ дѣйствію на тѣло силъ P_1 и P_3, приложенныхъ въ m_1 и m_3, и уравновѣшивающихъ ихъ сопротивленій Q_0' и Q_1', приложенныхъ въ A и B, а третій многоугольникъ $a_0'' a_2'' a_4'' a_5''$ относится къ дѣйствію на тѣло силъ P_2 и P_4, приложенныхъ въ m_2 и m_4, и уравновѣшивающихъ ихъ сопротивленій Q_0'' и Q_1'', приложенныхъ въ A и B. Тогда, проведя черезъ какую угодно точку m линіи AB вертикальную линію и назвавъ y, y' и y'' отрѣзки этой вертикальной линіи, заключающіеся между перпендикулярами и замыкающею линіею перваго, втораго и третьяго многоугольниковъ, а x_2 x_3 x_4 и x ея разстоянія отъ силъ P_2 P_3 P_4 и общей точки приложенія B сопротивленій Q_1, Q_1' и Q_1'', мы по предыдущему получимъ уравненія моментовъ силъ относи-

тельно точки m:

$$-Hy = P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 - Q_0 x$$

$$-Hy' = P_3 x_3 - Q_0' x \quad \text{и} \quad -Hy'' = P_2 x_2 + P_4 x_4 - Q_0'' x$$

а складывая два последнія уравненія найдемъ:

$$-H(y'+y'') = P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 - (Q_0' + Q_0'') x.$$

Но прикладывая къ данному тълу одновременно обѣ послѣднія системы силъ и сопротивленій, мы очевидно получимъ обѣ фигуры сопротивленій въ точкахъ A и B равенства:

$$Q_0 = Q_0' + Q_0'' \quad \text{и} \quad Q_1 = Q_1' + Q_1'',$$

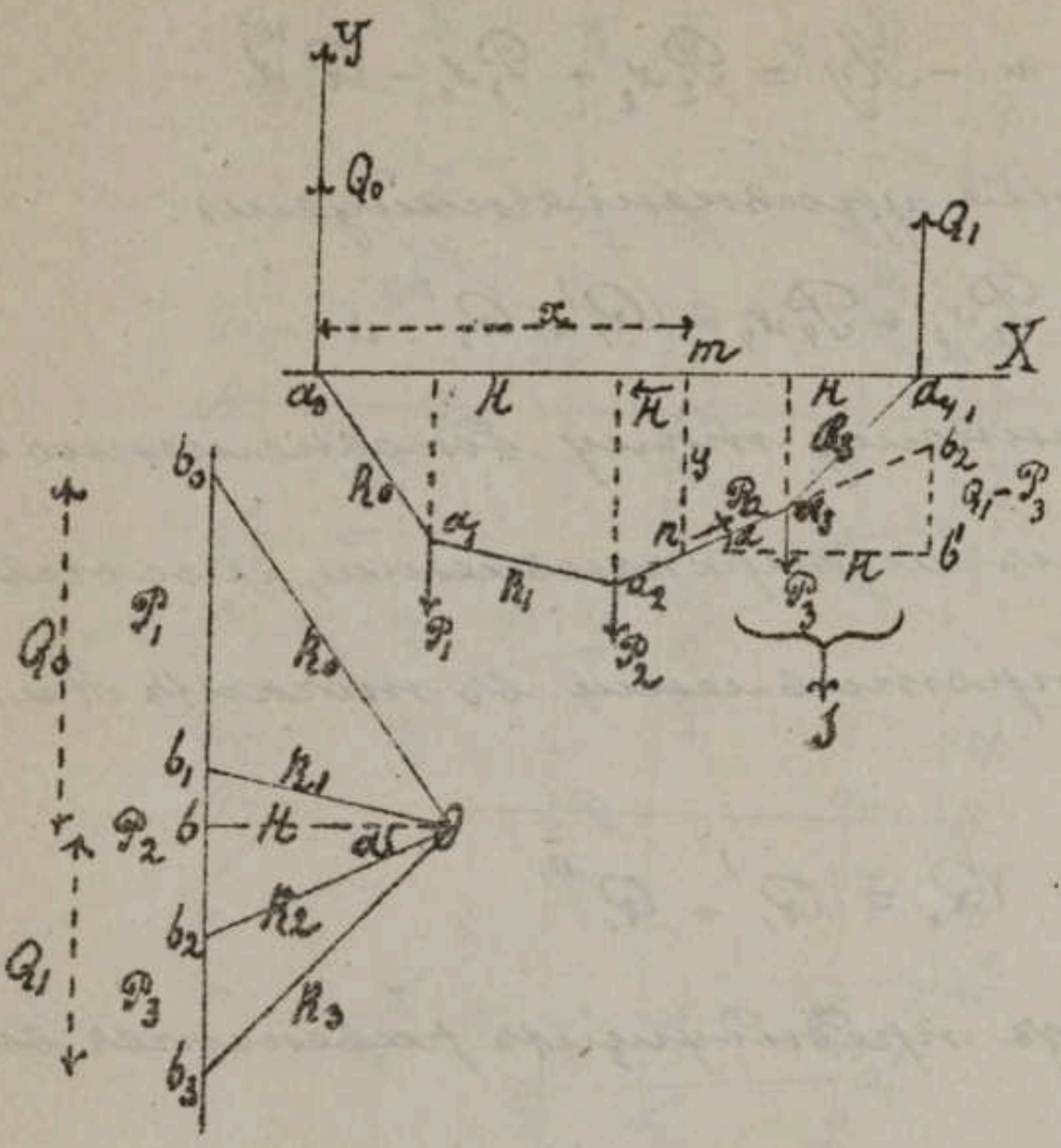
вслѣдствіе которыхъ изъ предыдущихъ равенствъ выводимъ:

$$y = y' + y''$$

Къ этому слѣдуетъ прибавить, что если бы отрѣзки или ординаты y' и y'' находились не по одну, а по обѣ стороны замыкающихъ боковъ своихъ многоугольниковъ, то во второй части уравненія вмѣсто суммы получилась бы разность. Такимъ образомъ выходитъ, что отрѣзокъ какой угодно вертикальной линіи перваго веревочнаго многоугольника равенъ алгебрической суммѣ отрѣзковъ той же вертикальной линіи втораго и третьяго многоугольниковъ, что очевидно дастъ весьма простое средство для построенія перваго многоугольника по даннымъ двумъ остальнымъ.

Во многихъ случаяхъ и въ особенности при выводѣ формулъ, основанномъ на разсматриваніи веревочнаго многоугольника для параллельныхъ

сил полезно представить этот многоугольник в таком виде, что-бы один из его боков, и преимущественно замыкающий бок, был перпендикулярен к направлению сил, что как видно из предыдущего всегда можетъ быть достигнуто. Что-бы объяснить отличительныя свойства веревочнаго многоугольника такого вида, положимъ что



на данное тело действуютъ данныя вертикальныя силы P_1 P_2 и P_3 и уравновѣшиваются съ сопротивленія Q_0 и Q_1, и что для нихъ построены многоугольникъ силъ $b_0 b_1 b_2 b_3 b b_0$ и веревочный многоугольникъ $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4$ такъ, что замыкающій бокъ $a_0 a_4$ послѣдняго, и слѣдовательно также и 06 перваго многоугольника, горизонталенъ. Тогда легко видно, что напряженіе (сжатіе) замыкающаго бока будетъ равно горизонтальному напряженію всѣхъ остальныхъ боковъ, т.е. горизонтальной составляющей каждаго изъ этихъ напряженій (растяженій). Затѣмъ если пересѣчемъ веревочный многоугольникъ вертикальною линіею m n, то можемъ отдѣлить отъ него часть $n a_3 a_4 m$,

представляющую въ свою очередь также веревочный многоугольникъ, но такой, на вершины a_3 и a_4 котораго дѣйствуютъ силы P_3 и Q_1, а по его крайнимъ бокамъ a_3 и a_4 т направлены силы R_2 и H, замыкающія силы P_3 и Q_1. Но какъ силы P_3 и Q_1 вертикальны, то равнодѣйствующая горизонтальныхъ составляющихъ силъ R_2 и H должна быть равна нулю, а равнодѣйствующая вертикальныхъ составляющихъ силъ R_2 и H, т. е. одна вертикальная составляющая силы R_2, должна быть равна равнодѣйствующей силъ P_3 и Q_1. По сему, изобразивъ уголъ, составляемый силою R_2 или бокомъ $a_2 a_3$ съ горизонтальною линіею, черезъ α, найдемъ для величины равнодѣйствующей силъ P_3 и Q_1 выраженіе:

$$Q_1 - P_3 = H . tg\alpha,$$

справедливость котораго впрочемъ видна и изъ треугольника силъ $n b' b_2'$, равнаго треугольнику $O b b_2$, входящему въ составъ многоугольника силъ.

Въ послѣдствіи мы большею частію будемъ принимать горизонтальную замыкающій бокъ $a_0 a_4$, направленный въ право, за ось абсциссъ, и вертикальную линію проходящую черезъ точку a и направленную вверхъ, за ось ординатъ и будемъ считать положительными силы, дѣйствующія подобно тяжести сверху внизъ,

и моменты сил, стремящихся вращать тело слѣва на право и сверху внизъ, кромѣ того мы будемъ изображать черезъ Σ сумму силъ, дѣйствующихъ на тѣло съ правой стороны вертикальной линіи mn, находящейся на перемѣнномъ разстояніи x отъ начала координатъ a_0, и черезъ M сумму моментовъ этихъ силъ относительно какой угодно точки на этой вертикальной линіи. При такихъ условіяхъ для выраженія суммы моментовъ и суммы силъ получаются согласно вышеизложенному, формулы:

$$M = H.y \quad , \quad S = -H \operatorname{tng} \alpha = -H \frac{dy}{dx} .$$

Прибавимъ къ этому, что такъ какъ суммы моментовъ M и сумма S силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны линіи mn, зависятъ отъ положенія этой линіи, а слѣдовательно и отъ абсциссы x, опредѣляющей это положеніе, то каждая изъ найденныхъ формулъ можетъ быть разсматриваема какъ уравненіе между абсциссою и ординатою любой точки периметра вереваго многоугольника, короче какъ уравненіе этого периметра; первая формула будетъ конечнымъ, а вторая дифференціальнымъ его уравненіемъ. Эти уравненія представляютъ только ту особенность, что ихъ коэффиціенты, зависящіе отъ силъ, имѣютъ различныя величины, смотря

потому на которомъ изъ боковъ многоугольника находится разсматриваемая точка n.

Въ случаяхъ когда величина горизонтальнаго напряженія можетъ быть выбрана по произволу, можно для простоты найденныхъ уравненій принять горизонтальное напряженіе равнымъ единицѣ масштаба силъ, и тогда

$$H = 1 \quad ; \quad M = y \quad \text{и} \quad S = -\frac{dy}{dx}$$

Но при данныхъ единицахъ масштаба силъ и линій найденныя уравненія, представленныя въ видѣ

$$y = \frac{M}{H} \quad \text{и} \quad tang\,\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{S}{H},$$

показываютъ, что ордината и тангенсъ угла наклоненія бока веревочнаго многоугольника относительно его замыкающаго бока обратно пропорціональны величинѣ горизонтальнаго напряженія, т. е. для увеличиванія ординатъ и угловъ наклоненія боковъ многоугольника стоитъ только уменьшить горизонтальное напряженіе, выбирая соотвѣтственно этому положеніе полюса многоугольника силъ.

До сихъ поръ здѣсь разсматривались только силы, имѣющія конечныя величины и дѣйствіе которыхъ не было сосредоточено въ извѣстныхъ его точкахъ; но при изслѣдованіи равновѣсія призматическаго тѣла необходимо разсматривать и такія силы, которыхъ дѣйствіе распредѣляется непрерывно по всей

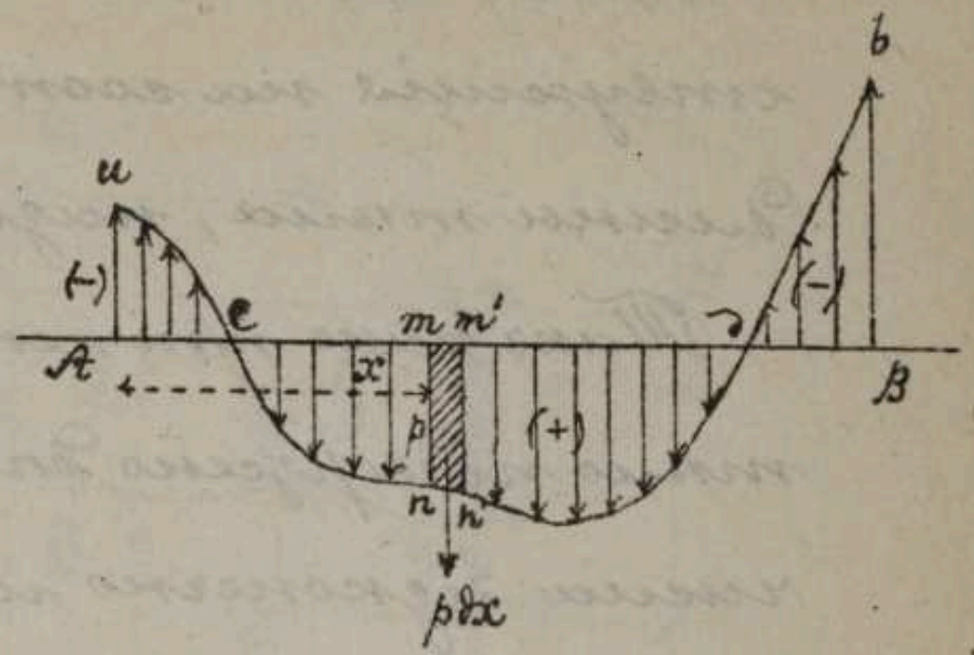
длинѣ тѣла или только по нѣкоторымъ частямъ ея, причемъ дѣйствіе силъ при какой угодно точкѣ оси тѣла изображается тою безконечно малою частію ихъ, которая приходится на долю элемента длины оси прилежащаго къ разсматриваемой точкѣ. По сему необходимо дополнить изложеніе общихъ свойствъ веревочнаго многоугольника свойствами его при дѣйствіи на тѣло силъ, непрерывно распредѣленныхъ.

Если изобразимъ черезъ dx элементъ длины оси тѣла при точкѣ m, опредѣляемой переменною абсциссою x, и черезъ p какую угодно конечную величину, зависящую отъ x или же постоянную, то произведеніе pdx можетъ служить для изображенія величины вертикальной силы, дѣйствующей на элементъ длины оси тѣла, и также для выраженія направленія силы, если условимся придавать величинѣ p положительный или отрицательный знакъ, смотря потому дѣйствуетъ ли сила внизъ или вверхъ. —

При этомъ количество p можемъ называть силою, дѣйствующею на единицу длины тѣла при разсматриваемой точкѣ m, потому что если бы каждый элементъ dx единицы длины былъ нагруженъ одинаково силою pdx, то на всю единицу длины дѣйствовала бы сумма силъ:

$$p(dx + dx + \ldots\ldots) = p$$

Такую нагрузку тыла по его длине АВ можно изобразить геометрически, проводя прямую линію АВ и при ней кривую линію асnдb, которой ординаты выражаютъ различныя величины p, соотвѣтствующія различнымъ элемен-



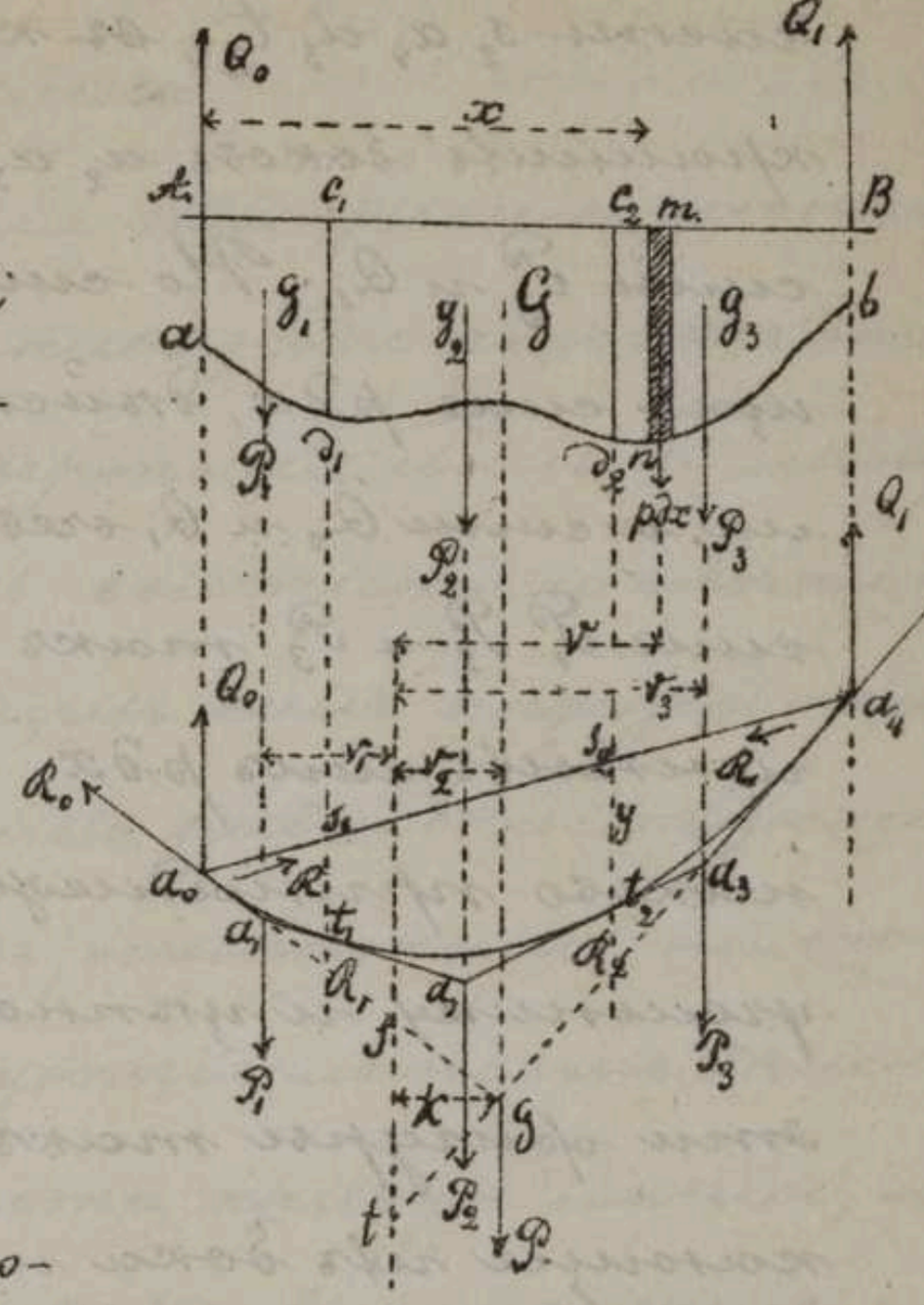
тамъ длины АВ тыла. Тогда сила, дѣйствующая на элементъ dx при точкѣ m, опредѣляемой абсциссою x, выразится элементомъ m n m'n' площади кривой, равнымъ pdx и положительнымъ или отрицательнымъ, смотря потому, находится ли онъ нижe или выше оси АВ, т.е. смотря потому, направлена ли сила внизъ или вверхъ; а величина равнодѣйствующей силъ, распредѣленныхъ на извѣстной части длины АВ, выразится алгебрическою суммою элементовъ площади кривой, ограниченной ординатами крайнихъ точекъ этой части. Такъ напримѣръ равнодѣйствующая силъ дѣйствующихъ на часть mВ тыла выразится разностію площадей mnd и dbB, а равнодѣйствующая силъ, непрерывно распредѣленныхъ по всей длинѣ АВ тыла, выразится положительною площадью cnd безъ двухъ отрицательныхъ площадей caA и dbB; равнодѣйствующая направлена внизъ, если ея величина положительна,

и вверхъ въ противномъ случаѣ. Площадь кривой, которой элементы выражаютъ силы, дѣйствующія на соотвѣтствующіе элементы длины тѣла, называется грузовою площадью.

Такъ какъ при непрерывномъ распредѣленіи силъ, тѣло подвержено дѣйствію безконечно большаго числа безконечно малыхъ и безконечно близко другъ къ другу приложенныхъ силъ, то веревочный многоугольникъ для этихъ силъ очевидно обратится въ непрерывную кривую линію. Этой линіи присвоивается названіе цѣпной линіи. Каждый элементъ цѣпной линіи очевидно представляетъ безконечно малый бокъ веревочнаго многоугольника, а слѣдовательно линія направленія такого элемента, т. е. касательная линія къ кривой при немъ, совпадаетъ съ направленіемъ составляющей вертикальной силы $p\,dx$, дѣйствующей на соотвѣтствующій элементъ длины тѣла; а величина этой составляющей представляетъ напряженіе или же сопротивленіе растяженію или сжатію элемента цѣпной линіи.

Чтобы объяснить способъ построенія цѣпной линіи для данныхъ непрерывно распредѣленныхъ силъ положимъ, что площадь кривой $A a n b B$ представляетъ грузовую площадь соотвѣтствующую силамъ, дѣйствую-

щимъ на тѣло AB. Раздѣлимъ эту площадь вертикальными линіями $c_1 d_1$ и $c_2 d_2$ на части, и найдемъ равнодѣйствующія симъ, соотвѣтствующихъ этимъ частямъ чрезъ P_1, P_2 и P_3; силы эти измѣряются величинами частей грузовой площади и проходятъ черезъ ихъ центры тяжести g_1, g_2 и g_3. Затѣмъ построимъ веревочный многоугольникъ $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4$ для данныхъ силъ P_1, P_2 и P_3, который если угодно можно дополнить и условно-



щимъ бокомъ $a_0 a_4$, если къ даннымъ силамъ прибавить уравновѣшивающія ихъ силы Q_0 и Q_1, приложенныя въ точкахъ A и B тѣла. Тогда не трудно убѣдиться въ томъ, что искомая цѣпная линія, построенная при томъ же горизонтальномъ напряженіи и томъ же полюсѣ многоугольника силъ, какъ и веревочный многоугольникъ, должна касаться къ бокамъ его въ точкахъ a_0, t_1, t_2 и a_4, соотвѣтствующихъ вертикальнымъ линіямъ Aa, $c_1 d_1$, $c_2 d_2$ и Bb, ограничивающимъ разсматриваемыя части грузовой площади. Дѣйствительно, продолжая напримѣръ, вертикальную линію дѣленія $c_2 d_2$ до

встрѣчи въ точкахъ s_2 и t_2 съ боками $a_0 a_4$ и $a_2 a_3$ многоугольника, мы отъ него отдѣлимъ часть $s_2 a_4 a_3 t_2$, въ которой напряженія R_2 и R крайнихъ боковъ $a_2 a_3$ и $a_4 s_2$ могутъ уравновѣсить силы P_3 и Q_1. Но сила P_3 есть равнодѣйствующая силъ $p\,dx$, дѣйствующихъ на часть $c_2 B$ тѣла, а силы Q_0 и Q_1 очевидно одни и тѣже, какъ для силъ P_1 P_2 и P_3 такъ и для непрерывно распредѣленныхъ силъ $p\,dx$, слѣдовательно Q_0 и Q_1, одинаково принадлежатъ и веревочному многоугольнику и цѣпной линіи. И такъ если объ эти фигуры такъ построены, чтобы заключающіе ихъ боки и полюсы ихъ многоугольниковъ силъ, а слѣдовательно и горизонтальныя напряженія были одинаковы, то напряженія R заключающихъ боковъ также будутъ одинаковы въ обоихъ случаяхъ, потому что представятъ одну и тѣже составляющую силы Q_1, разложенной по двумъ даннымъ направленіямъ $a_4 a_0$ и $a_3 a_4$. Но тогда очевидно, что силы R и R_2 одинаково уравновѣшиваютъ какъ силы Q_1 и P_3 веревочнаго многоугольника, такъ и непрерывно распредѣленныя силы $p\,dx$ части $c_2 B$ тѣла (выключая изъ Зоны дѣйствія силы Q_1), принадлежащія цѣпной линіи, а слѣдовательно сила R_2 есть напряженіе цѣпной линіи въ точкѣ встрѣчи ея съ вертикальною линіею $s_2 t_2$ и направлена

по ея касательной, и эта касательная совпадаетъ съ боковой веревочкой многоугольника, по которому сила R_2 направлена.

Изъ этого видно, что для построенія цѣпной линіи по данной грузовой площади стоитъ только раздѣлить послѣднюю вертикальными линіями на части, опредѣлить величины и точки приложенія равнодѣйствующихъ силъ каждой такой части, построить для этихъ равнодѣйствующихъ веревочный многоугольникъ, нанизать на его боковыя точки, соотвѣтствующія линіямъ дѣленія грузовой площади и провести кривую линію, касающуюся въ этихъ точкахъ къ боковымъ веревочнаго многоугольника. Чѣмъ больше число частей грузовой площади, тѣмъ большее число касательныхъ опредѣлится, и тѣмъ точнее будетъ построеніе цѣпной линіи.

Цѣпная линія какъ веревочный многоугольникъ безконечно большого числа сторонъ должна имѣть и тѣ свойства, которыя принадлежатъ всякому веревочному многоугольнику, построенному для параллельныхъ силъ. Для облегченія послѣдующихъ изысканій полезно здѣсь же указать на нѣкоторые изъ этихъ свойствъ.

Равнодѣйствующая силъ, непрерывно распредѣленныхъ по данной части длины AB тѣла, проходитъ черезъ точку встрѣчи касательныхъ линій,

проведенныхъ къ крайнимъ точкамъ соотвѣтствующей части цѣпной линіи, потому что эти касательныя представляютъ направленія двухъ силъ, которыми замѣняются разсматриваемыя непрерывно распредѣленныя силы. Такъ напримѣръ равнодѣйствующая P силъ pdx, распредѣленныхъ по всей длинѣ AB, пройдетъ черезъ точку g встрѣчи крайнихъ касательныхъ цѣпной линіи. Отсюда слѣдуетъ, что центръ тяжести S грузовой площади долженъ находиться на вертикальной линіи gE, проходящей черезъ эту точку встрѣчи крайнихъ касательныхъ. Это свойство цѣпной линіи можетъ служить для опредѣленія мѣста центра тяжести криволинейной площади, если ея разсматривать какъ грузовую площадь.

Если черезъ грузовую площадь и принадлежащую ей цѣпную линію проведемъ вертикальную линію, пересѣкающую крайнія касательныя цѣпной линіи въ точкахъ s и t, и изобразимъ черезъ v перемѣнное разстояніе силы pdx до этой вертикальной линіи, черезъ H горизонтальное напряженіе цѣпной линіи и черезъ V площадь $a_0 t_1 t_2 a_4 t s$, заключающуюся между вертикальною линіею, цѣпною линіею и крайними ея касательными, то по предыдущему найдемъ, что сумма всѣхъ силъ pdx, умноженныхъ на квадраты ихъ разстояній v до вертикальной линіи,

равна произведению $2V.H$, вследствіе чего, замѣняя дифференціалъ dx черезъ dv, можно написать формулу

$$\int pr^2 dv = 2V.H.$$

Легко видно, что первая часть этой формулы представляетъ ничто иное, какъ моментъ инерціи грузовой площади отностительно вертикальной оси st, и что выведенное свойство цѣпной линіи можетъ быть применено къ опредѣленію момента инерціи какой угодно площади относительно оси, заключающейся въ ея плоскости. Для этого стоитъ только раздѣлить данную площадь на элементы линіями параллельными данной оси и поступать съ ними, какъ съ элементами pdv грузовой площади относительно вертикальной оси.

Въ случаѣ, когда вертикальная ось проходитъ черезъ центръ тяжести грузовой площади, а слѣдовательно и черезъ точку g пересѣченія крайнихъ касательныхъ цѣпной линіи, площадь треугольника stg обращается въ нуль и площадь V принимаетъ свою наименьшую величину V_1, равную площади, заключающейся между цѣпною линіею и двумя крайними ея касательными, а слѣдовательно тогда и моментъ инерціи площади принимаетъ свою наименьшую величину. Чтобы опредѣлить разность величинъ моментовъ инер-

ціи той же площади, относительно двух парал-
лельных между собою осей, изъ которыхъ одна про-
ходитъ черезъ центръ тяжести площади, стоитъ
только сравнить между собою величины $2V.H$ и
$2V,H$ обоихъ моментовъ инерціи. Для сего изобра-
зимъ черезъ K высоту треугольника stg, равную
разстоянію центра тяжести грузовой площа-
ди до вертикальной оси st, и замѣтимъ, что
изъ веревочнаго многоугольника $a_0 g a_4$, принадле-
жащаго равнодѣйствующей P силъ $p\,dx$, не-
прерывно распредѣленныхъ по сей длинѣ AB,
видно что основаніе st разсматриваемаго
треугольника stg пропорціонально моменту
силы P относительно какой угодно точки на
линіи st, а именно:

$$H.\overline{st} = P.k.$$

Пользуясь уже этимъ уравненіемъ, не трудно
вывести и слѣдующія уравненія

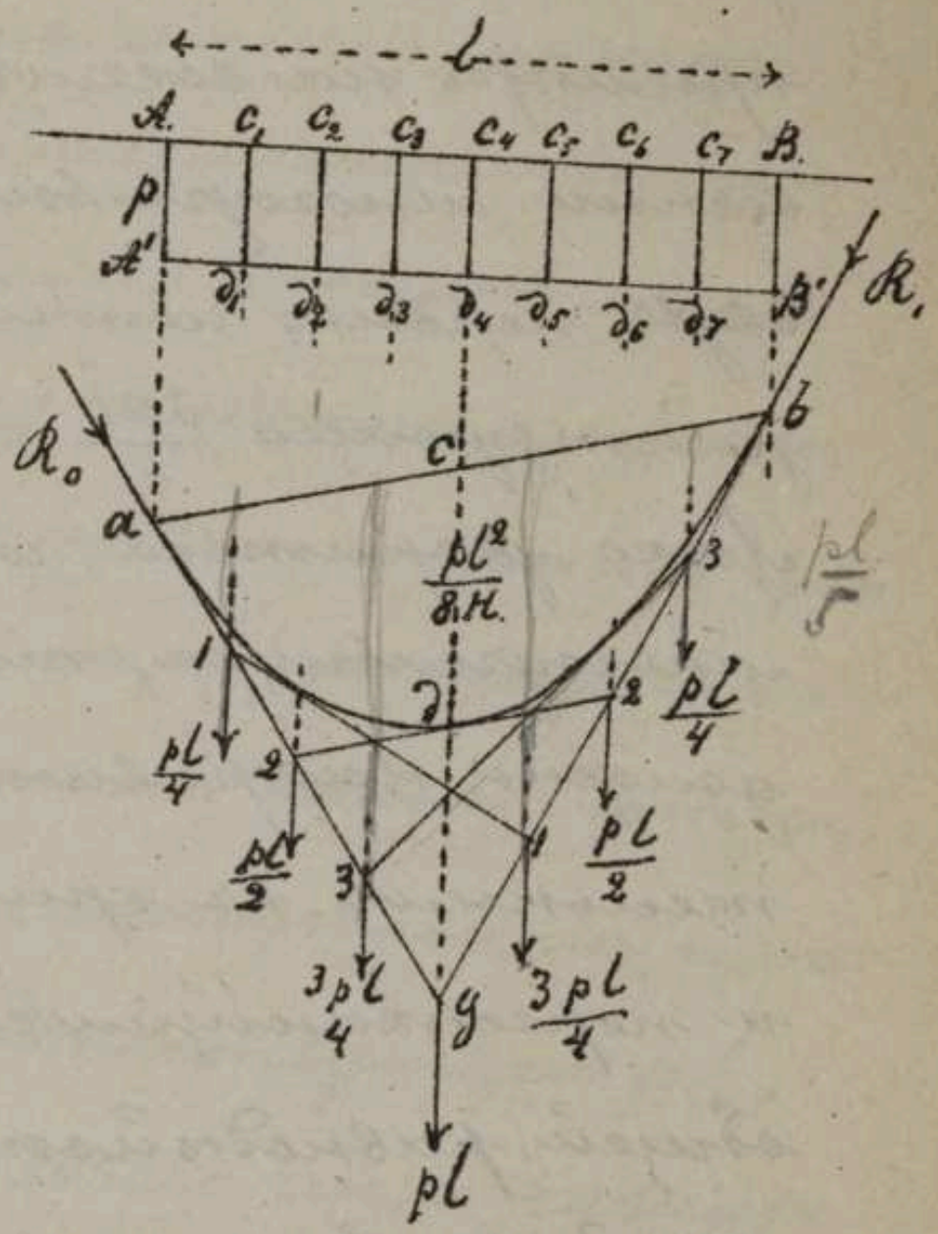
$$\overline{V} = \overline{V}' + \frac{st.k}{2} = \overline{V}' + \frac{P_k^2}{2H}$$

$$2\overline{V}H = 2\overline{V}'H + P_k^2$$

и если замѣтимъ, что величина силы P изме-
ряется величиною всей грузовой площади,
то изъ послѣдняго уравненія можемъ заклю-
чить, что моментъ-инерціи $2VH$ площади
относительно какой угодно оси st равенъ мо-
менту инерціи $2V,H$ площади относительно

какой угодно оси St равенъ моменту инерціи $2V, H$ той же площади относительно оси, параллельной первой и проходящей черезъ центръ тяжести площади, съ прибавленіемъ произведенія изъ величины P площади на квадратъ разстоянія k между обѣими осями.

Для объясненія сказаннаго разсмотримъ простой примѣръ. Положимъ, что на тѣло дѣйствуетъ грузъ непрерывно и вмѣстѣ съ тѣмъ равномѣрно распредѣленный, такъ что сила p, приходящаяся на единицу длины тѣла одна и также для всѣхъ элементовъ этой длины AB, которую изобразимъ черезъ l. Тогда грузовая площадь $AB\,A'B'$ будетъ прямоугольникъ, котораго основаніе равно l, высота равна p, а площадь pl представитъ величину равнодѣйствующей всего равномѣрно распредѣленнаго груза.



Для построенія цѣпной линіи для такого груза вообразимъ, что при какомъ угодно выборѣ полюса многоугольника силъ, котораго здѣсь нѣтъ особой нужды чертить, построенъ веревочный многоугольникъ $a\,d\,b$ для равнодѣйствующей pl всѣхъ непрерывно размѣщенныхъ силъ. Тогда напряженія R_0 и R_1 боковъ $a\,d$ и $b\,d$ этого многоугольника замѣняютъ собою равнодѣйствующую pl и также всѣ непрерывно

распредѣленныя силы нѣкоторой цѣпной линіи, а слѣдовательно направленія силъ R_0 и R_1 должны быть касательныя къ цѣпной линіи въ крайнихъ ея точкахъ a и b, соотвѣтствующихъ крайнимъ точкамъ длины AB тѣла. Для нахожденія другихъ касательныхъ линій, раздѣлимъ грузовую площадь на какое удобно четное число равныхъ между собою частей, напримѣръ на восемь частей. За тѣмъ построимъ веревочный многоугольникъ для равнодѣйствующей $\frac{pl}{4}$ силъ двухъ первыхъ частей $AA'C_2D_2$ грузовой площади и равнодѣйствующей $\frac{3pl}{4}$ силъ остальныхъ частей C_2D_2BB'. — Легко увѣриться, что крайніе бока этого веревочнаго многоугольника, также какъ и предшествующаго, должны направиться по линіямъ ad и bd касательныхъ къ крайнимъ точкамъ цѣпной линіи и пересѣкающимися въ точкѣ d на направленіи общей равнодѣйствующей pl. Но вмѣстѣ съ тѣмъ крайніе бока должны ограничиваться точками встрѣчи съ направленіями c_1d_1 и c_5d_5 силъ $\frac{pl}{4}$ и $\frac{3pl}{4}$, которыя составляющія должны направиться по этимъ бокамъ, а слѣдовательно получается веревочный многоугольникъ a,1,1,b, и средній бокъ 1,1 его будетъ касательною линіею цѣпной линіи въ точкѣ его встрѣчи съ продолженною линіею раздѣла C_2D_2. Продолжая такимъ же образомъ строить веревочный многоугольникъ a,2,2,b для силъ $\frac{pl}{2}$ и $\frac{pl}{2}$ четырехъ частей $AA'C_4D_4$ и четырехъ частей C_4D_4BB' грузовой площади, получимъ средній его бокъ 2,2 очевидно

параллельной линіи $a\,b$ и касающійся къ цѣпной линіи въ точкѣ пересѣченія съ продолженною линіею раздѣла $c_4\,д_4$; и наконецъ для силъ $\frac{3pl}{4}$ и $\frac{pl}{4}$ шести первыхъ и двухъ остальныхъ частей грузовой площади найдемъ веревочный многоугольникъ $a,3,3,b$ и точку касанія на продолженной линіи раздѣла $c_7\,д_7$.

Обобщая этотъ способъ, представляющій, приспособленное къ частному случаю, видоизмѣненіе вышеизложеннаго общаго способа построенія цѣпной линіи по предварительно построенному веревочному многоугольнику, можно заключить, что для построенія цѣпной линіи, принадлежащей силамъ, непрерывно и равномѣрно распредѣленнымъ по извѣстной длинѣ l тѣла, слѣдуетъ построить веревочный многоугольникъ или треугольникъ $a\,д\,b$ для ихъ равнодѣйствующей $p\,l$, раздѣлить бока $a\,д$ и $д\,b$ на одинаковое число равныхъ между собою частей, придать точкамъ дѣленія послѣдовательные нумера отъ a до $д$ и также отъ $д$ до b, и соединить одноименныя точки прямыми линіями; тогда крайнія точки a и b и средія точки боковъ, образовавшагося внутренняго многоугольника, будутъ точками касанія этихъ боковъ къ цѣпной линіи, которая по нимъ и очертится. Къ этому можно прибавить, что изъ теоріи коническихъ сѣченій извѣстно, что линія, начерченная по изложенному способу, есть парабола, а слѣдовательно для груза, непрерывно и равномѣрно распредѣленнаго по данной

длины тѣла, цѣпная линія обращается въ параболу.

Такъ какъ эта парабола иногда можетъ быть начерчена и проще по данной хордѣ ab и средней вертикальной ординатѣ cd, то опредѣливъ величину cd въ зависимости отъ груза pl и горизонтальнаго напряженія H элементовъ цѣпной линіи, помня изъ вышесказаннаго, что отъ выбора величины горизонтальнаго напряженія, выражающаго разстояніе полюса до многоугольника силъ, зависитъ большее или меньшее наклоненіе боковъ веревочнаго многоугольника, а слѣдовательно и кривизна цѣпной линіи. Для сего замѣтимъ, что изъ чертежа параболы видно, что средняя вертикальная ея ордината cd равна половинѣ ординаты Cg точки g встрѣчи крайнихъ касательныхъ параболы, и что съ другой стороны въ веревочномъ многоугольникѣ a, 2, 2b отрѣзокъ dg вертикальной линіи пропорціоналенъ моменту силы $\frac{pl}{2}$ относительно какой угодно точки этой вертикальной линіи; по сему находимъ:

$$H.dg = \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} \quad \text{и} \quad cd = dg = \frac{pl^2}{8H}.$$

Продолжая примѣненіе вышеизложенныхъ общихъ свойствъ цѣпной линіи къ случаю равномѣрно распредѣленнаго груза, опредѣлимъ еще моменты

инерціи прямоугольной грузовой площади относительно вертикальной линіи, проходящей черезъ ея центръ тяжести. Въ этомъ случаѣ величина площади V_1, ограниченной параболою и двумя ея крайними касательными, получится если изъ площади треугольника $a\,d\,b$ вычтемъ площадь сѣченія $a\,d\,b$ параболы; посему

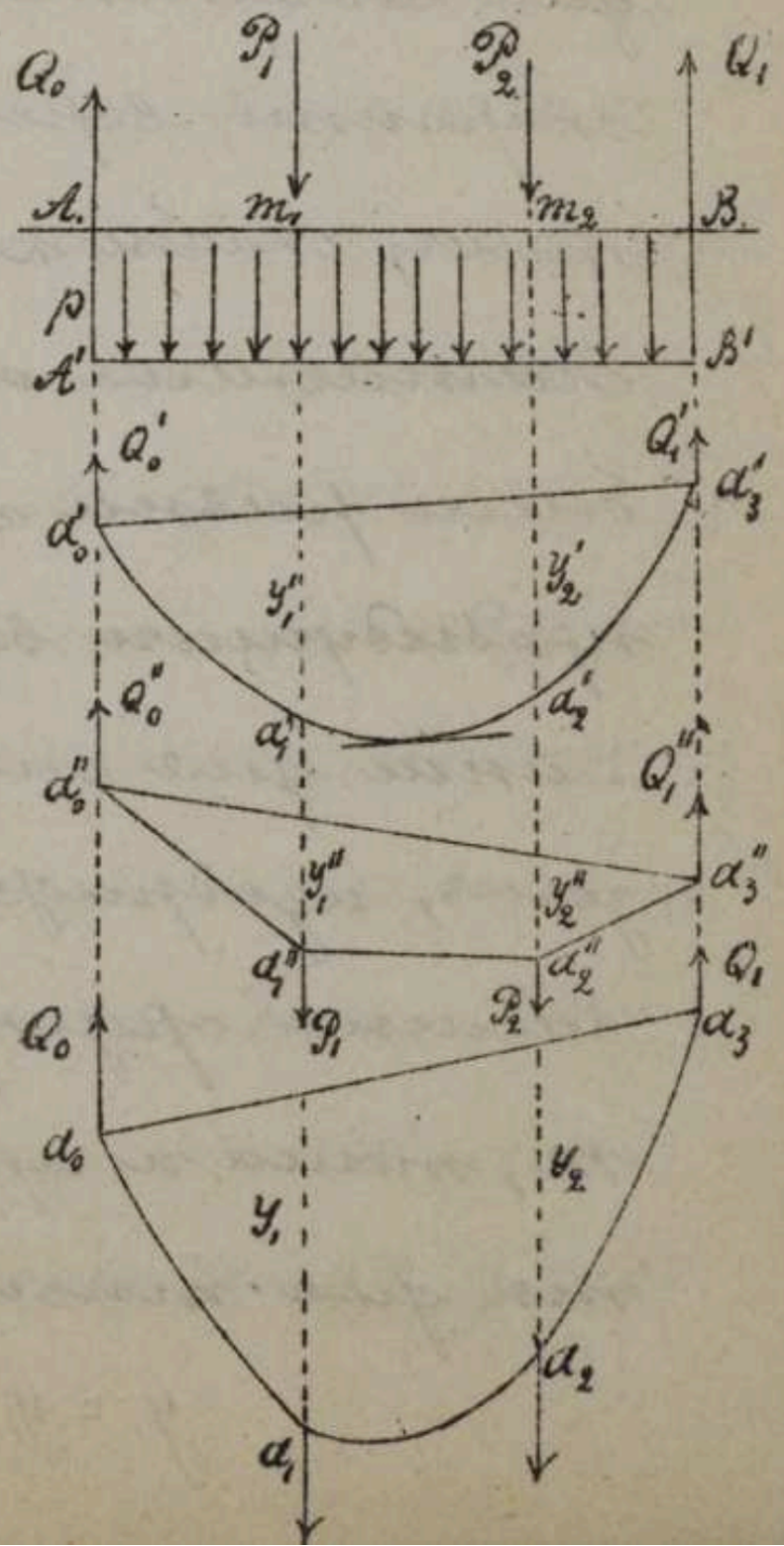
$$\overline{V}_1 = \frac{l \cdot \overline{cb}}{2} - \frac{2}{3} l \cdot \overline{cd} = \frac{pl^3}{8H} - \frac{2}{3}\frac{pl^3}{8H} = \frac{pl^3}{12H},$$

и для момента инерціи найдемъ:

$$2\overline{V}_1 H = \frac{pl^3}{12}$$

Такъ какъ величина момента инерціи площади прямоугольника найдена выше аналитическимъ способомъ.

Возвращаясь къ изслѣдованію общихъ свойствъ кой линіи и веревочнаго многоугольника для какихъ угодно параллельныхъ силъ, положимъ что на тѣло $A\,B$ дѣйствуютъ не только не прерывно распредѣленныя силы $p\,dx$, но еще и нѣсколько силъ $P_1, P_2 \ldots$ сосредоточенныхъ въ данныхъ точкахъ тѣла. Въ такомъ случаѣ веревочный многоугольникъ или кривая линія для обоихъ этихъ родовъ силъ вмѣстѣ можно построить, пользуясь вышеизложеннымъ способомъ совокупленія



двух веревочных многоугольников, из которых каждый принадлежит особой системе параллельных сил. Так например если по длине тела AB равномерно распределен груз, которого величина на единицу длины тела равна p, и кроме того в точках m_1 и m_2 действуют сосредоточенные силы P_1 и P_2, а в крайних точках A и B приложены силы сопротивления Q_0 и Q_1, уравновешивающия все данныя силы, то можно построить цепную линию $a_0' a_1' a_2' a_3'$ для равномерно распределенного груза и уравновешивающих его сопротивлений Q_0' и Q_1', приложенных в крайних точках A и B тела, и веревочный многоугольник $a_0'' a_1'' a_2'' a_3''$ для сосредоточенных сил P_1 и P_2 и уравновешивающих их сопротивлений Q_0'' и Q_1'', а затем для совместнаго действия обоих родов сил построить веревочный многоугольник $a_0 a_1 a_2 a_3$ так, чтобы каждая его вертикальная ордината, считаемая от замыкающаго его бока $a_0 a_3$, была равна алгебраической сумме ординат предыдущаго веревочнаго многоугольника и цепной линии для той же точки тела. Таким образом, изображая через y_1, y_1' и y_1'' три разсматриваемыя ординаты, соответствующия точке m_1 тела и через y_2, y_2' и y_2'' три такия же ординаты для точки m_2 тела, имеем:

$$y_1 = y_1' + y_1'' \quad \text{и} \quad y_2 = y_2' + y_2''$$

кромѣ того для сихъ сопротивленія будутъ существовать уравненія

$$Q_0 = Q_0' + Q_0'' \quad \text{и} \quad Q_1 = Q_1' + Q_1''$$

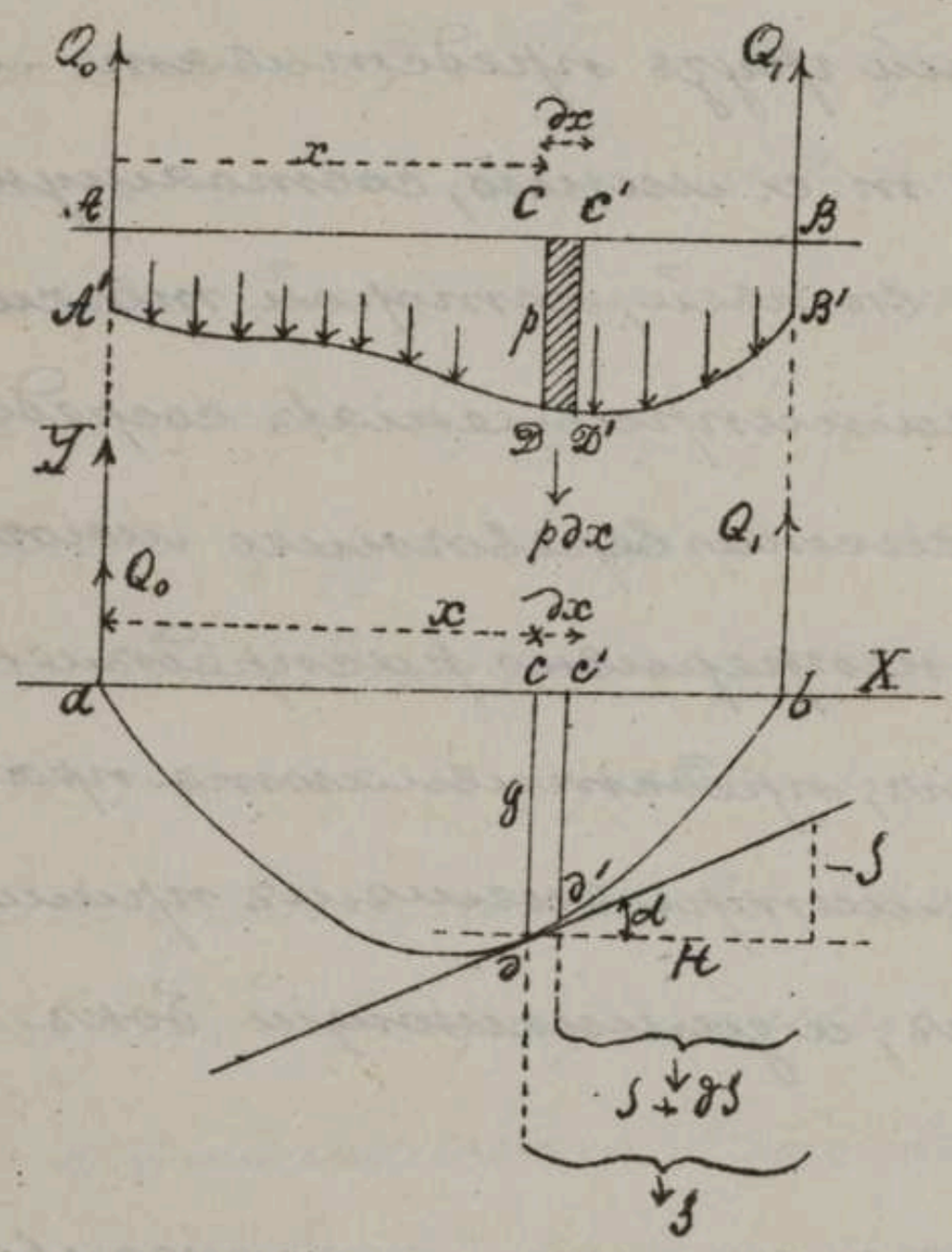
Разсматривая полученный такимъ образомъ веревочный многоугольникъ, легко видѣть, что тѣ его части, на которыя дѣйствуетъ непрерывно распредѣленный грузъ представятъ ломанную кривую линію, т. е. линію, состоящую изъ отдѣльныхъ кривыхъ вѣтвей, которой точки перелома находятся на направленіяхъ сосредоточенныхъ силъ; тѣже части веревочнаго многоугольника, на которыя непрерывно распредѣленныя силы не дѣйствуютъ, представляютъ прямолинейные боки. Въ разсматриваемомъ примѣрѣ изъ вѣтвей параболъ, а замыкающій бокъ $a_0 a_3$ прямой.

Если изъ различныхъ веревочныхъ многоугольниковъ, которые могутъ быть построены для однихъ и тѣхъ же параллельныхъ силъ дѣйствующихъ не тѣло, при одномъ и томъже горизонтальномъ напряженіи H, выберемъ тотъ многоугольникъ, котораго замыкающій бокъ перпендикулярен къ направленію силъ, то, принявъ этотъ бокъ за ось абсциссъ x, считаемыхъ отъ лѣвой крайней точки многоугольника и линію, направленную параллельно силамъ вверхъ, за ось

ординатъ y точекъ периметра многоугольника, получаемъ по вышеизложенному два вида уравненій периметра, а именно:

$$Hy = M \quad \text{и} \quad H\frac{dy}{dx} = -S.$$

гдѣ M и S представляютъ сумму моментовъ



относительно точки, опредѣляемой абсциссою x, и суммы силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны этой точки, включая и силу сопротивленія Q_1. Но къ этимъ двумъ уравненіямъ въ случаѣ существованія непрерывно распредѣленныхъ силъ, т. е. когда многоугольникъ обращается въ кривую линію въ видѣ плавной или ломанной кривой, можно прибавить еще и третье, получаемое черезъ дифференцированіе втораго уравненія. Дѣйствительно изъ втораго уравненія выводимъ, что

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dS}{dx};$$

но такъ какъ сумма S силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны точки, опредѣляемой абсциссою x,

очевидно равна суммѣ $S+dS$ силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны точки, опредѣляемой абсциссою $x+dx$, сложенной съ силою $p\,dx$, дѣйствующею на элементъ длины dx, то имѣемъ:

$$S = S+dS+p\,dx, \quad dS = -p\,dx \quad \text{и} \quad \frac{dS}{dx} = -p$$

и черезъ подстановленіе получаемъ:

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = p.$$

Это уравненіе, такъже какъ и оба предыдущія очевидно принадлежитъ цѣпной линіи и отличается отъ нихъ только тѣмъ, что заключаетъ производную второго порядка ординаты этой линіи.

Когда имѣются одни только сосредоточенныя силы, то послѣднее уравненіе не имѣетъ особаго значенія потому что принимаетъ видъ

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

и показываетъ только, что при точкѣ опредѣляемой абсциссою x тангенсъ $\frac{dy}{dx}$ угла касательной къ цѣпной линіи съ осью абсциссъ постоянекъ и кривая обращается въ прямолинейный бокъ веревочнаго многоугольника.

Найденныя три вида уравненія цѣпной линіи справедливы также и въ случаѣ, когда заимствующій бокъ, принятый за ось абсциссъ, не перпендикуляренъ къ направленію силъ, но они тогда относятся къ косоугольнымъ координатамъ x и y цѣпной линіи и абсцисса x точки на этой линіи,

считаемая вдоль замыкающаго бока, не равна разстоянію соотвѣтствующей точки оси AB тѣла до ея начальной точки A, что можетъ усложнять примѣненія уравненій.

Изъ этихъ уравненій можно вывести нѣкоторыя замѣчательныя свойства веревочнаго многоугольника и цѣпной линіи. Такъ напримѣръ изъ сопоставленія уравненій

$$Hy = M, \quad H\frac{dy}{dx} = -S, \quad H\frac{d^2y}{dx^2} = p.$$

получаются уравненія

$$\frac{dM}{dx} = -S \quad \text{и} \quad \frac{d^2M}{dx^2} = p.$$

выражающія, что первая производная суммы моментовъ относительно данной точки тѣла силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны этой точки, равна суммѣ этихъ силъ, взятой съ противнымъ знакомъ; а вторая производная той же суммы моментовъ равна силѣ, дѣйствующей на единицу длины тѣла при этой точкѣ его.

Если послѣднее уравненіе проинтегрировать два раза сряду, то получается уравненіе

$$M = \int dx \int p\,dx.$$

показывающее, что разсматриваемая здѣсь сумма моментовъ силъ равна двойному интегралу силы $p\,dx$, дѣйствующей на элементъ длины

тыла; но при этомъ не слѣдуетъ терять изъ виду, что двойной интегралъ сопровождается двумя произвольными постоянными величинами, которыя должны быть опредѣлены въ каждомъ частномъ случаѣ сообразно условіямъ вопроса, напримѣръ по двумъ даннымъ величинамъ суммы моментовъ, соотвѣтствующимъ двумъ даннымъ точкамъ тыла. Отсюда вытекаетъ также способъ геометрическаго построенія величины двойного интеграла изъ какой угодно функціи p отъ перемѣнной x. Для сего стоитъ только начертить грузовую площадь, ограниченную кривою, которой ординаты представляютъ величины функціи p, соотвѣтствующія различнымъ величинамъ абсциссы x, и, при произвольно выбранномъ горизонтальномъ напряженіи H, построить для этой грузовой площади цѣпную линію; тогда ордината у цѣпной линіи, умноженная на горизонтальное напряженіе H, будетъ отличаться отъ искомой величины двойного интеграла только цѣлою и раціональною функціею первой степени

$$Cx + C',$$

которой постоянные коэффиціенты C и C' въ каждомъ частномъ случаѣ должны быть опредѣлены сообразно съ условіями вопроса.

Изъ предыдущаго извѣстно, что видъ кривой

изогнутой оси призматического тѣла, подвергнутаго дѣйствію какихъ угодно силъ, перпендикулярныхъ къ прямой оси тѣла до его изгиба, опредѣляется уравненіемъ:

$$E I \frac{d^2 y}{dx^2} = -M,$$

если, какъ это здѣсь преимущественно принимается, ось абсциссъ направлена слѣва направо по прямолинейной до изгиба оси тѣла, ось ординатъ направлена перпендикулярно къ ней вверхъ и сумма моментовъ считается положительною, когда она соотвѣтствуетъ вращенію тѣла слѣва на право и сверху внизъ. Сравнивая это дифференціальное уравненіе, съ вышеизведеннымъ, не трудно убѣдиться, что выражаемая имъ кривая есть цѣпная линія, и вывести способъ геометрическаго построенія этой кривой. Для сего положимъ сперва, что поперечное сѣченіе изгибаемаго (призматическаго) тѣла одинаково по всей его длинѣ и что слѣдовательно его моментъ инерціи I постоянная величина и изобразимъ черезъ y' ординату цѣпной линіи, построенной для силъ, непрерывно распредѣленныхъ по всей длинѣ тѣла и уравновѣшиваемыхъ силою, равною M, дѣйствующею на единицу длины элемента дх тѣла, и для двухъ сопротивленій, уравновѣшивающихъ эти силы и приложенныхъ въ крайнихъ точкахъ

разсматриваемой длины тѣла; горизонтальное же напряженіе цѣпной линіи примемъ равнымъ количеству EI. Тогда уравненіе такой цѣпной линіи съ горизонтальнымъ замыкающимъ бокомъ будетъ:

$$EI\frac{d^2y'}{dx^2} = -M .$$

Изобразимъ еще черезъ y'' ординату прощвольной прямой линіи, данной уравненіемъ

$$y'' = Cx + C' ,$$

гдѣ C и C' какія угодно постоянныя величины.

Тогда очевидно

$$\frac{d^2y''}{dx^2} = 0 .$$

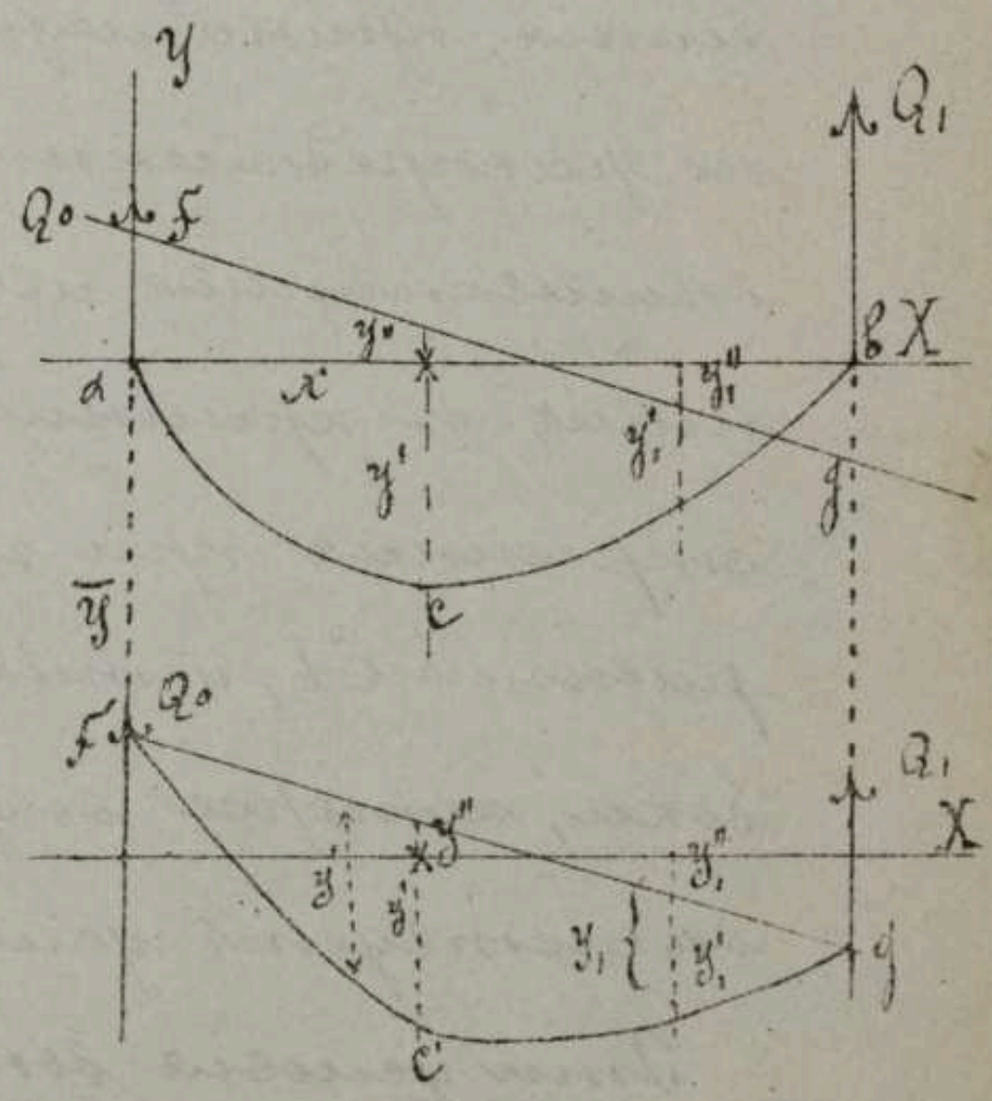
и, складывая это уравненіе съ предыдущимъ полученнымъ

$$EI\frac{d^2(y'+y'')}{dx^2} = -M$$

Отсюда видно, что ордината y, данная уравненіемъ

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

можетъ быть разсматриваема какъ алгебрическая сумма ординатъ опредѣленной цѣпной линіи acb и неопредѣленной прямой линіи fg и для построенія кривой, которой ординаты выражаются черезъ y стоитъ только для каждой данной абсциссы x отложить ординату y' цѣпной линіи acb не отъ оси абсциссъ,



а отъ прямой линіи fg, тогда и получится кривая fc'g, каждая ордината y которой будетъ равна алгебрической суммѣ ординатъ y' и y'' линій acb и fg. Но изъ предыдущаго извѣстно, что этимъ построеніемъ опредѣляется цѣпная же линія fc'g, отличающаяся отъ цѣпной линіи acb только положеніемъ замыкающаго бока fg, и что объ цѣпныя линіи принадлежатъ однимъ и тѣмъ же параллельнымъ сѣчѣніямъ и имѣютъ одно и тоже горизонтальное напряженіе.

Изъ этого слѣдуетъ, что кривая изогнутая ось призматическаго тѣла съ постояннымъ поперечнымъ сѣченіемъ, опредѣляемая уравненіемъ

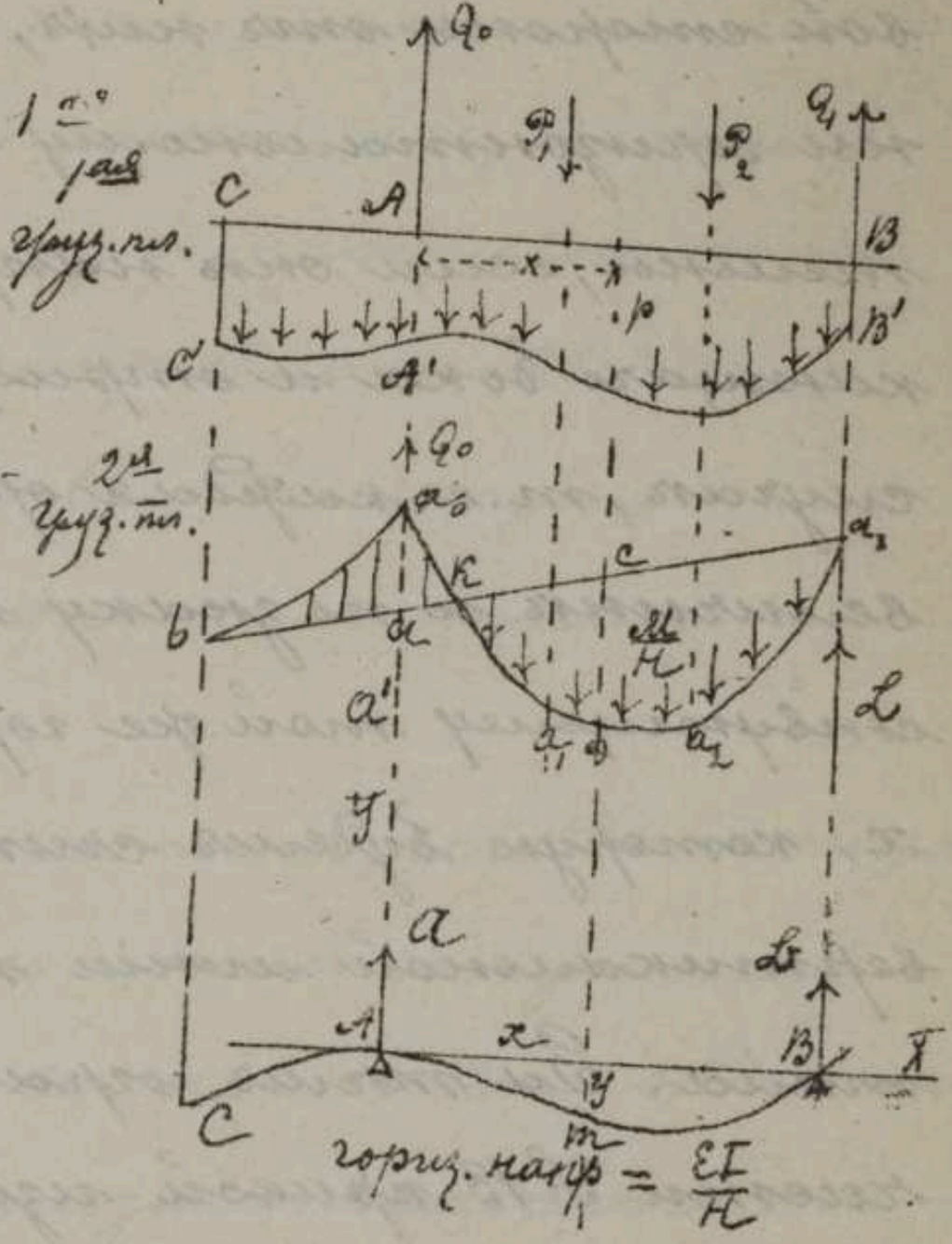
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M.$$

можетъ быть разсматриваема какъ цѣпная линія, принадлежащая силамъ $-M\,dx$, непрерывно распредѣленнымъ по длинѣ тѣла, и уравновѣшивающимъ ихъ сопротивленіямъ, приложеннымъ въ крайнихъ точкахъ длины тѣла, и построенная при горизонтальномъ напряженіи, равномъ EI, и такомъ положеніи замыкающаго бока, которое въ данномъ частномъ случаѣ соотвѣтствуетъ условіямъ вопроса.

Эти условія вопроса могутъ заключаться въ томъ, чтобы кривошинейная ось тѣла проходила черезъ двѣ данныя точки, или чтобы, проходя

через одну данную точку, она въ извѣстномъ мѣстѣ пишла касательную, параллельную данной прямой или т. под.

На основаніи сказаннаго здѣсь о кривой изогнутой оси призматическаго тѣла не трудно вывести способъ геометрическаго построенія этой кривой по-данными силами, дѣйствующими на тѣло. Для сего положимъ, что на призматическое тѣло дѣйствуютъ сосредоточенныя силы P_1 и P_2 и силы $p\,dx$, непрерывно распредѣленныя по всей длинѣ CB его оси, и что оно лежитъ на двухъ опорахъ, которыхъ сопротивленія Q_0 и Q_1 проходятъ черезъ точки A и B оси тѣла. Выбравъ какіе угодно масштабы для линій и силъ, начертимъ для непрерывно распредѣленныхъ силъ грузовую площадь $CC'A'B'B$, которую назовемъ <u>первою грузовою площадью</u>, построимъ для всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на разсматриваемое тѣло, и при какомъ угодно горизонтальномъ напряженіи H веревочный многоугольникъ или цѣпную линію $ba_0a_1a_2a_3$ съ замыкающимъ закомъ ba_3 направ-



ленными какъ угодно. Тогда вертикальныя ординаты этой цѣпной линіи, считаемыя отъ язычка конецкаго бока, будутъ прямо пропорціональны суммамъ моментовъ M силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны отъ нихъ, обратно пропорціональны горизонтальному напряженію H, положительны, если онѣ направлены вверхъ отъ язычка конецкаго бока и отрицательны въ противномъ случаѣ, т.е. каждая ордината будетъ равна по величинѣ и по знаку количеству $\frac{M}{H}$, соотвѣтствующему той же горизонтальной абсциссѣ x, которую будемъ считать отложенною отъ вертикальной линіи проходящей черезъ точку A тѣла. За тѣмъ, ограничиваясь опредѣленіемъ части AB кривой изогнутой оси тѣла, замѣтимъ, что уравненіе этой линіи можетъ быть написано въ видѣ:

$$(EI:H).\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M}{H}$$

и что посему эта линія можетъ быть разсматриваема какъ цѣпная линія, построенная при горизонтальномъ напряженіи $\frac{EI}{H}$ для непрерывно распредѣленныхъ силъ $-\frac{M}{H}\partial x$ и двухъ ихъ уравновѣшивающихъ сопротивленій приложенныхъ въ данныхъ, неподвижныхъ точкахъ A и B. И такъ остается только, руководствуясь вышеизложеннымъ, построить такую цѣпную линію A m B, принявъ для сего площадь $a a_0 k a_1 a_2 a_3 k$

за грузовую площадь; для отличія этой площади отъ первой мы присвоимъ ей названіе <u>второй грузовой площади</u>. При этомъ силы, выражаемыя ея элементами $-\frac{M}{H}dx$, будутъ положительны и направлены внизъ, если эти элементы находятся ниже замыкающей линіи a_3 потому что тогда M отрицательно, въ противномъ же случаѣ эти силы будутъ направлены вверхъ.— Величины сопротивленій A и B могутъ быть опредѣлены вмѣстѣ съ построеніемъ цѣпной линіи A m B.

Здѣсь слѣдуетъ однако замѣтить, что дѣйствуя по изложенному способу мы почти всегда получимъ чрезвычайно малыя величины для ординатъ у кривой изогнутой оси призматическаго тѣла, потому что прогибъ такого тѣла вообще весьма малъ, а на чертежѣ онъ еще значительно уменьшится въ слѣдствіе изображенія его въ уменьшенномъ масштабѣ. Во избѣжаніе этого неудобства можно, изобразивъ черезъ 0 какое угодно, но довольно большое число, написать уравненіе искомой кривой изогнутой оси въ видѣ

$$\frac{EI}{\Theta H}\cdot\frac{d^2(\Theta y)}{dx^2}=-\frac{M}{H}$$

и затѣмъ построить не цѣпную линію съ ординатами y и горизонтальнымъ напряженіемъ

$\frac{EI}{H}$, по другую цѣпную линію съ значительно большими ординатами θy и уменьшеннымъ горизонтальнымъ напряженіемъ $\frac{EI}{\theta H}$. Такимъ образомъ напримѣръ если чертежъ составляется въ масштабѣ, равномъ $\frac{1}{300}$ истинной величины, то принявъ θ равнымъ 300 получимъ кривую изогнутую ось съ уменьшеннаго въ 300 разъ длиною, но съ ординатами, равными дѣйствительнымъ прогибамъ тѣла.

Изложенныя здѣсь свѣдѣнія изъ графической статики достаточны для объясненія приложеній ея къ рѣшенію вопросовъ, касающихся вышеизложенной общей теоріи изгиба призматическихъ тѣлъ, изъятыхъ мы и переходимъ къ разсмотрѣнію этихъ вопросовъ.

О балкахъ, лежащихъ горизонтально на двухъ, трехъ или болѣе опорахъ и подверженныхъ дѣйствію грузовъ, распредѣленныхъ какъ угодно.

Между различными приложеніями изложенной теоріи изгиба заслуживаетъ особаго вниманія, то которое относится къ призматическимъ балкамъ съ первоначально прямолинейною осью, нагруженнымъ и подпертымъ такъ, какъ это случается при балкахъ и фермахъ, поддерживающихъ полотно моста, а

иногда и при поперечныхъ и поперечныхъ балкахъ.
Силы, дѣйствующія на мостовую балку и опредѣляющія размѣры ея составныхъ частей, слѣдующія. Во первыхъ собственный вѣсъ балки и та часть всѣхъ мостового полотна и соединеній между смежными балками, которая приходится на долю одной изъ нихъ; эти силы съ достаточнымъ приближеніемъ могутъ быть приняты равномѣрно распредѣленными по всей длинѣ балки. Во вторыхъ мостовая балка подвергается временно дѣйствію передвижнаго груза, т.е. приходящейся на нее части всѣхъ людей, повозокъ, поѣздовъ желѣзной дороги и т.п., которые временно могутъ находиться на мостовомъ полотнѣ, поддерживаемомъ балками. — Этотъ грузъ при балкахъ значительныхъ размѣровъ на пролетахъ между быками принимаютъ не менѣе 15 саженъ, также можетъ быть разсматриваемъ какъ грузъ равномѣрно распредѣленный, но не всегда по всей длинѣ балки, а иногда только по нѣкоторымъ частямъ ея длины, при чемъ одинъ и тотъ же передвижной грузъ можетъ вызвать большія или меньшія напряженія въ частяхъ балки, смотря потому на какомъ мѣстѣ онъ находится.

Такіе постоянные и временные грузы можно ввести въ исчисленія, предполагая, что въ каждомъ

данномъ мѣстѣ балки на безконечно малую часть ея длины дѣйствуетъ вертикальная сила, измѣряемая извѣстнымъ вѣсомъ на единицу длины балки, по которому одна часть, постоянная для всей длины ея, изображаетъ собственный вѣсъ балки вмѣстѣ съ соотвѣтствующими частями мостa, а другая, перемѣнная, изображаетъ дѣйствіе передвижного груза, можетъ придаваемомъ размѣщеніи этого груза на мосту имѣть различныя величины для различныхъ мѣстъ балки, и при передвиженіи груза принимать различныя величины для одного и того же мѣста балки, измѣняясь отъ нуля до предѣла, принадлежащаго наибольшей нагрузкѣ соотвѣтствующей части моста. Въ нижеслѣдующемъ мы будемъ изображать черезъ p весь грузъ на единицу длины балки, дѣйствующій на безконечно малую часть dz ея длины на разстояніи z отъ одной изъ ея опоръ, разсматривая p какъ функцію отъ z, которой - величина можетъ измѣняться между предѣлами p' и $p'+p''$, гдѣ p' соотвѣтствуетъ постоянной величинѣ собственнаго вѣса балки и принадлежащимъ къ ней частей моста, а p'' при балкахъ значительной длины выражаетъ постоянную же величину возможно большой временной нагрузки единицы длины балки.

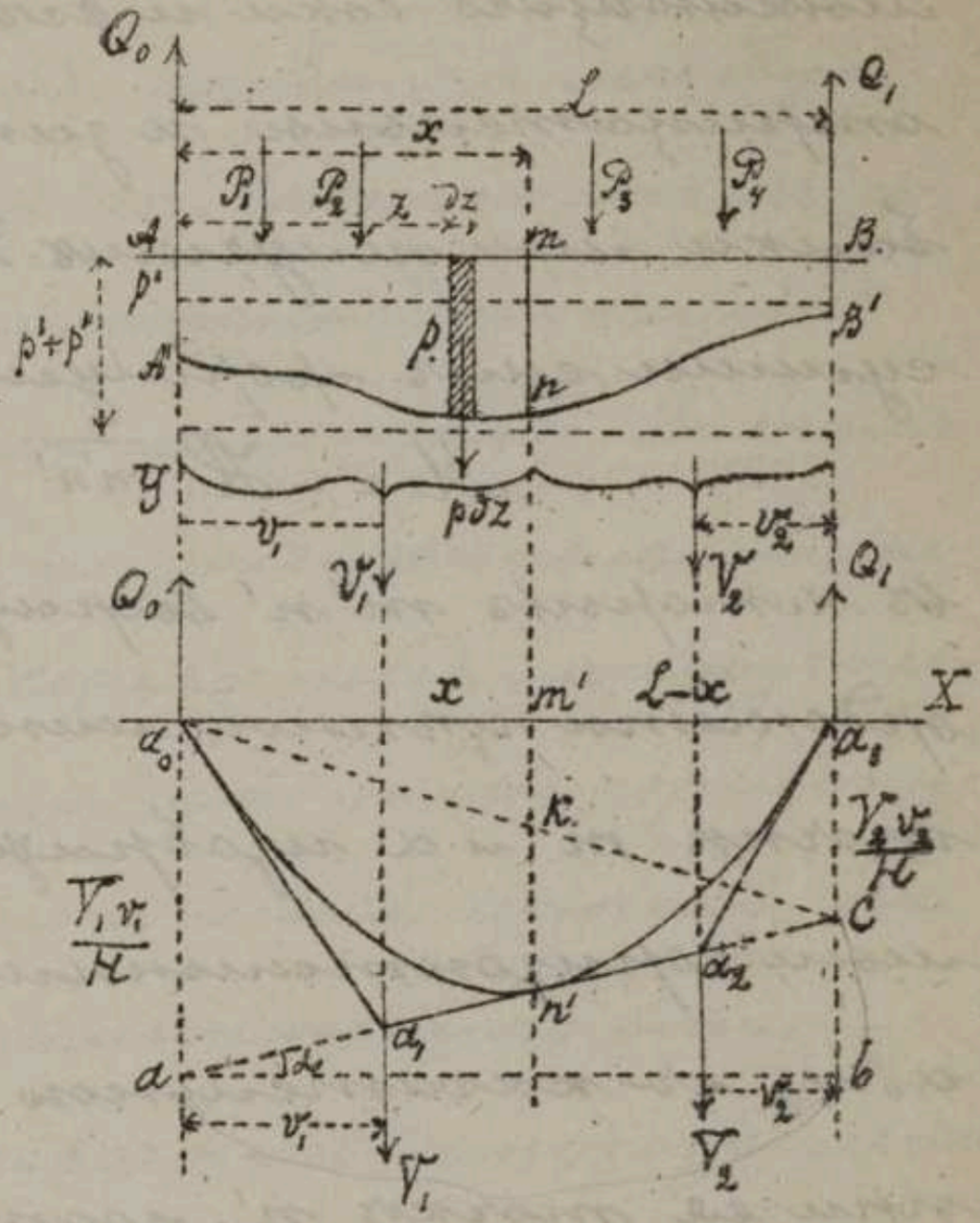
Но при балках сравнительно малых размеров, на пролетах, не превосходящих 10 или 15 сажень, передвижной грузъ можетъ быть такъ великъ въ сравненіи съ собственнымъ вѣсомъ частей моста, и можетъ дѣйствовать въ такомъ числѣ мѣстъ балки, другъ отъ друга на столько удаленныхъ въ сравненіи съ длиною ея, что эту сосредоточенность дѣйствія передвижного груза необходимо принять во вниманіе. Въ такомъ случаѣ можно пользоваться тѣмъ же вышеуказаннымъ способомъ изображенія силъ, но только для временнаго груза не будетъ существовать предѣла p; а долженъ быть данъ предѣлъ груза P, сосредоточеннаго на балкѣ или менѣе незначительной части длины балки въ данномъ мѣстѣ, напримѣръ на части длины, занимаемой скрѣпленіемъ съ балкою переклады передающей грузъ на балку, при чемъ въ промежуткахъ между мѣстами, въ которыхъ дѣйствуютъ сосредоточенные грузы, передвижной грузъ равенъ нулю.

Имѣя въ виду вывести способы для повѣрки прочности и опредѣленія прогиба балки въ данномъ мѣстѣ ея, принимаемъ, что по вышеизложенному напряженіе продольныхъ слоевъ призматической балки въ данномъ поперечникѣ ея измѣняется пропорціонально суммѣ

моментовъ относительно центра тяжести сѣченія внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на балку между разсматриваемымъ сѣченіемъ и однимъ изъ ея концовъ, напр. правымъ, что фибры при данной точкѣ сѣченія сжаты или растянуты смотря потому какой знакъ имѣетъ величина суммы моментовъ (и что даже сумма моментовъ), выраженная въ зависимости отъ разстоянія поперечнаго сѣченія призмы до одного изъ концовъ ея, входитъ въ составъ дифференціальнаго уравненія изогнутой оси. Сверхъ того замѣтимъ, что какъ это объяснится въ нижеизложенныхъ статьяхъ, напряженія крайней изогнутой балки, направленныя вообще по нормали къ сѣченію и опредѣляющія необходимые для прочности размѣры промежуточныхъ слоевъ балки, связывающихъ между собою наиболѣе сжатыя или растянутыя крайнія продольныя фибры, зависятъ не только отъ суммы моментовъ внѣшнихъ силъ, а преимущественно отъ суммы внѣшнихъ силъ дѣйствующихъ на часть балки между разсматриваемымъ поперечнымъ сѣченіемъ и однимъ изъ ея концовъ. Поэтому займемся предварительно опредѣленіемъ суммы моментовъ внѣшнихъ силъ и суммы самихъ этихъ силъ при выше объясненной нагрузкѣ балки, и изложеніемъ того соображенія, съ помощію котораго можно опредѣлить

наибольшія численныя величины этихъ количествъ.

Для этого разсмотримъ сперва балку, лежащую на двухъ опорахъ, поддерживающихъ крайнія точки A и B ея горизонтальной оси, находящіяся на разстояніи l другъ отъ друга. Положимъ, что на эту балку дѣйствуютъ какіе угодно сосредоточенные грузы P_1, P_2, P_3, и непрерывно распредѣленные грузы $p\,dz$ на каждый элементъ dz длины балки надъ пролетомъ между ея опорами; пусть



сила p, приходящаяся отъ этихъ грузовъ на единицу длины, выражающаяся ординатою грузовой площади $\underline{AA'}\,\underline{B'B}$, заключающейся между данными предѣлами p' и $p'+p''$.

Сопротивленія, оказываемыя опорами, на точки A и B оси балки, изображаемъ черезъ Q_0 и Q_1.

Для опредѣленія суммы M моментовъ относительно какой угодно точки m, находящейся на разстояніи x отъ лѣвой опоры A и суммы δ силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны точки m совключеніемъ сопротивленія Q_1 правой опоры, можно по данному смыслу построить цѣпную линію $a_0 n' a_2$, принявъ для этого какое угодно

горизонтальное напряженіе H и направивъ для простоты изслѣдованія замыкающій бокъ $a_0 a_3$ ея перпендикулярно къ направленію силъ. Такъ какъ всѣ данныя силы направлены сверху внизъ, то всѣ точки цѣпной линіи расположатся ниже замыкающаго бока и всѣ ихъ ординаты будутъ отрицательны, и затѣмъ для точки m на оси балки мы получимъ для суммы моментовъ и суммы силъ формулы.

$$M = -H.\overline{m'n'} \quad \text{и} \quad S = -H.tg\alpha = -H\frac{bc}{ab}.$$

въ которыхъ $m'n'$ выражаетъ численную величину ординаты цѣпной линіи, соотвѣтствующей точкѣ m и α изображаетъ уголъ, составляемый горизонтальнымъ замыкающимъ бокомъ $a_0 a_3$ съ касательною ac къ цѣпной линіи при ея точкѣ n', соотвѣтствующей точкѣ m оси балки, причемъ α положительно или отрицательно, смотря потому направлена ли касательная слѣва направо вверхъ или же внизъ.

Хотя такимъ образомъ искомыя величины M и S всегда могутъ быть опредѣлены геометрическимъ построеніемъ, однако изслѣдованіе вліянія на нихъ величинъ и точекъ приложенія данныхъ силъ удобнѣе, если эти величины выражены формулами, которыя сверхъ того допускаютъ и большую точность вычисленія. Для вывода такихъ

формулы изображенных через V_1 равнодействующую всех сосредоточенных и непрерывно разпределенных сил, действующих на балку между левою ея опорою A и разсматриваемою точкою m, и через v_1 разстояніе силы V_1 до левой опоры A, такимъ же образомъ изображенныя через V_2 равнодействующую всех силъ, приложенныхъ къ балкѣ между правою ея опорою B и точкою m, совокупленіемъ и сосредоточенной силы, приложенной въ самой точкѣ m, если такая сила имѣется. Такимъ построеніемъ для силъ V_1 и V_2 и уравновѣшивающихъ ихъ сопротивленій Q_0 и Q_1, веревочный многоугольникъ $a_0 a_1 a_2 a_3$ принявъ для него тоже горизонтальное напряженіе H, какъ и для цѣпной линіи и тоже направленія замыкающаго бока. — Тогда средній бокъ $a_1 a_2$ веревочнаго многоугольника будетъ направленъ по касательной ac къ цѣпной линіи при ея точкѣ n', а слѣдовательно для цѣпной линіи и для веревочнаго многоугольника ордината m'n' и тангенсъ угла наклоненія α будутъ одни и тѣже. Но къ помощію веревочнаго многоугольника обѣ эти величины легко выразить въ зависимости отъ данныхъ силъ. Для сего замѣтимъ, что линія $a_0 a$ есть отрѣзокъ вертикальной линіи, заключающійся между продолженіями боковъ $a_0 a_1$ и $a_1 a_2$

веревочного многоугольника, по которым направляются составляющія силы V_1, и линія a_3c есть такой же отрѣзокъ вертикальной линіи относительно силы V_2, а по вышеизложенному такіе отрѣзки пропорціональны моментамъ силъ V_1 и V_2 относительно точекъ лежащихъ на этихъ отрѣзкахъ или ихъ продолженіяхъ, а именно имѣются равенства:

$$H.\overline{a_0a} = \overline{V_1v_1}, \quad H.\overline{a_3c} = \overline{V_2v_2} \quad \text{или} \quad a_0a = \frac{\overline{V_1v_1}}{H}, \quad a_3c = \frac{\overline{V_2v_2}}{H}.$$

По даннымъ же линіямъ a_0a и a_3c легко найти линіи $m'n'$ и bc, входящія въ вышеприведенныя выраженія суммы M моментовъ и суммы S силъ. Дѣйствительно, проведя линію a_0c пересѣкающую линію $m'n'$ въ точкѣ k, имѣемъ изъ образующихся подобныхъ треугольниковъ

$$kn' = \frac{l-x}{l} \cdot \frac{\overline{V_1v_1}}{H}, \quad m'k = \frac{x}{l} \cdot \frac{\overline{V_2v_2}}{H}.$$

$$m'n' = kn' + m'k = \frac{1}{H}\left\{\frac{l-x}{l} \cdot \overline{V_1v_1} + \frac{x}{l} \cdot \overline{V_2v_2}\right\}$$

и сверхъ того легко видѣть, что

$$bc = a_0a - a_3c \quad \text{и} \quad \frac{bc}{ab} = \frac{1}{H}\left\{\frac{1}{l} \cdot \overline{V_1v_1} - \frac{1}{l} \cdot \overline{V_2v_2}\right\}$$

Подставляя найденныя величины въ выраженія суммы M моментовъ и суммы S силъ, получаемъ формулы

$$M = -\left\{\frac{l-x}{l} \cdot \overline{V_1v_1} + \frac{x}{l} \cdot \overline{V_2v_2}\right\} \quad \text{и} \quad S = -\frac{1}{l}\overline{V_1v_1} + \frac{1}{l} \cdot \overline{V_2v_2}$$

Въ этихъ формулахъ первое изъ количествъ

$$\overline{V_1v_1} \quad \text{и} \quad \overline{V_2v_2}$$

представляетъ сумму моментовъ относительно лѣвой опоры A всѣхъ грузовъ, дѣйствующихъ по лѣвую сторону разсматриваемой точки m на оси балки, а второе представляетъ сумму моментовъ относительно правой опоры B всѣхъ грузовъ, дѣйствующихъ по правую сторону точки m, совокупленіемъ однако и того сосредоточенного груза, который можетъ быть приложенъ въ самой точкѣ m.

Изъ этого можно заключить, что такъ какъ въ формулѣ для M оба члена имѣютъ отрицательные знаки, и сумма моментовъ M всегда отрицательна; то наибольшая численная величина ея, т. е. самая невыгодная для напряженія продольныхъ фибръ балки, вообще получится при наибольшей временной нагрузкѣ, распредѣленной по всей длинѣ балки; въ случаѣ же, когда наибольшій грузъ не можетъ дѣйствовать одновременно на всю длину балки или же можетъ только сосредоточиваться въ данныхъ мѣстахъ ея, самое невыгодное размѣщеніе временнаго груза должно опредѣлиться для каждаго мѣста m, принимая въ соображеніе не только величины количествъ $V_1 v_1$ и $V_2 v_2$, но и величины ихъ множителей $l-x$ и x, т. е. не только величины моментовъ ихъ относительно опоръ, но и разстоянія разсматриваемой точки оси балки до опоръ.

Съ другой стороны такъ какъ въ формулахъ для суммы силъ S обѣ члена сопровождаются противными между собою знаками, то наибольшая численная величина суммы силъ придаваемая длинѣ x балки получится всегда при наибольшей величинѣ одного изъ этихъ членовъ и наименьшей величинѣ другого, т. е. или тогда, когда весь временной грузъ находится съ лѣвой стороны точки m, ближе къ ней, или же когда на оборотъ весь временной грузъ такимъ же образомъ сконценъ съ правой стороны точки m.

Чтобы подробнѣе разъяснить вліяніе размѣщенія временнаго груза на величины суммы моментовъ M и суммы силъ S придаваемой длинѣ x балки, разсмотримъ отдѣльно случаи размѣщенія грузовъ, равномѣрно распредѣленныхъ и сосредоточенныхъ въ цѣлости на только длинѣ балки.

Положимъ сперва, что весь грузъ p на единицу длины балки можетъ получать различныя величины между предѣлами p' и $p'+p''$, въ которыхъ p' и p'' изображаютъ величины постоянныя для всей длины балки, зависящія первая отъ собственнаго вѣса балки и частей моста, а вторая отъ временнаго передвижнаго груза. Въ такомъ случаѣ, такъ какъ сумма моментовъ M

всегда отрицательна и слѣдовательно тѣмъ
болѣе, чѣмъ меньше ея численная величина,
то согласно вышесказанному наибольшая величина
M получится при $p = p'$; тогда

$$V_1 = p'x \quad , \quad v_1 = \frac{x}{2} \quad , \quad V_2 = p'(l-x) \quad , \quad v_2 = \frac{l-x}{2}$$

и по подстановкѣ въ формулу для M, находимъ

$$Max.\ M = -\left\{\frac{l-x}{l}\,\frac{p'x^2}{2} + \frac{x}{l}\,\frac{p'(l-x)^2}{2}\right\} = -\frac{p'}{2}\,x(l-x).$$

Такимъ же образомъ наименьшая величина M
получится при $p = p' + p''$ и будетъ

$$Min.\ M = -\frac{p'+p''}{2}\,x(l-x).$$

Въ наибольшей же величинѣ суммы силъ б положительный членъ V_2 v_2 долженъ быть возможно большій, а отрицательный V_1 v_1 возможно меньшій, т.е. часть mB длины балки должна быть нагружена грузомъ $p = p' + p''$ на единицу длины, а часть Am грузомъ $p = p'$ на единицу длины, при чемъ

$$V_1 = p'x \quad , \quad V_2 = (p'+p'')(l-x)$$

и мы найдемъ

$$Max.\ S = \frac{p'+p''}{2l}(l-x)^2 - \frac{p'x^2}{2l} \quad ,$$

а при обратномъ распредѣленіи грузовъ

$$Min.\ S = \frac{p'}{2l}(l-x)^2 - \frac{p'+p''}{2l}x^2 \quad .$$

Для наглядного представленія совокупности раз-
личныхъ значеній наибольшихъ и наименьшихъ вели-
чинъ M и S при переходѣ точки m отъ опоры A къ
опорѣ B, можно ихъ изобразить ординатами кривыхъ

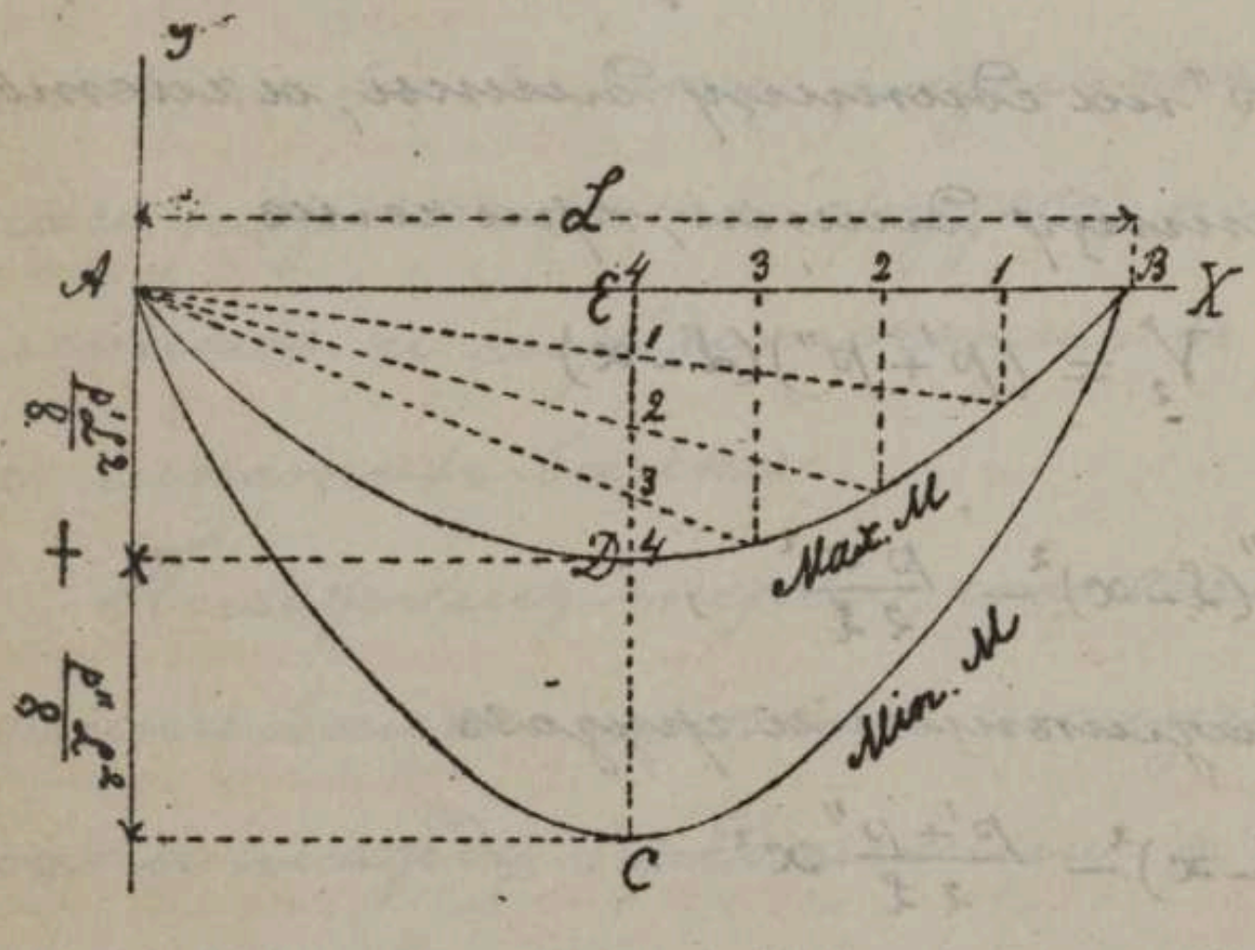
линій, представленныхъ на чертежѣ. Для сего

дѣлаемъ:

$$Max.M = y = -\frac{p'}{2}x(l-x)$$

$$Min.M = y' = -\frac{p'+p''}{2}x(l-x)\ ;$$

тогда видно, какъ это уже было объяснено выше геометрически, что эти кривыя, представляемыя этими уравненіями, будутъ параболы, которыхъ оси, перпендикулярны къ оси абсциссъ, потому что ординаты ихъ выражаются цѣлыми функціями второй степени отъ абсциссъ. Кромѣ того эти кривыя пересѣкаются съ осью абсциссъ въ точкахъ A и B, соотвѣтствующихъ опорамъ балки, потому что ординаты y и y' обращаются въ нуль какъ при $x=0$, такъ и при $x=l$.



Такимъ образомъ линія AB есть хорда одной изъ параболъ, перпендикулярныя къ оси каждой изъ нихъ, и слѣдовательно оси параболъ должны эту хорду дѣлить пополамъ и направиться по одной и той же линіи CDE, перпендикулярной къ линіи AB и проходящей черезъ ея средину E. Затѣмъ

ординаты вершин параболъ должны соответствовать абсциссѣ $x = \frac{l}{2}$ и будутъ:

для Max. M ..... $y = -\frac{p'l^2}{8}$

для Min. M ..... $y' = -\frac{(p'+p'')l^2}{8}$.

По данной вершинѣ параболы и одной изъ ея хордъ, перпендикулярныхъ къ ея оси, кривая легко можетъ быть построена по точкамъ по какому либо изъ извѣстныхъ для сего способовъ. Одинъ изъ простѣйшихъ способовъ тотъ, по которому каждая полухорда дѣлится на данное число равныхъ между собою частей, на такое же число частей дѣлится участокъ оси между хордою и вершиною, въ точкахъ дѣленія хорды возстановляются къ ней перпендикуляры и изъ каждаго конца хорды проводятся прямыя черезъ точки дѣленія оси; тогда пересѣченія этихъ прямыхъ съ перпендикулярами одинаковыхъ съ ними нумеровъ опредѣляютъ точки на параболѣ въ желаемомъ числѣ, по которымъ она легко можетъ быть проведена.

Чертежъ параболъ Max. M и Min. M, составленный по даннымъ величинамъ l, p' и p'', даетъ средство къ опредѣленію величинъ Max. M и Min. M для какого угодно поперечнаго сѣченія балки простымъ измѣреніемъ ординатъ по масштабу. Къ этому можно прибавить, что обѣ эти параболы очевидно ничто иное, какъ цѣпныя линіи, построенныя при горизонтальномъ напряженіи, равномъ ве-

мцъ.

Ограничась къ величинамъ Max. δ и Min δ, будемъ

$$Max.\ \delta = y = \frac{p'+p''}{2l}(l-x)^2 - \frac{p'}{2l}x^2$$

$$Min.\ \delta = y' = \frac{p'}{2l}(l-x)^2 - \frac{p'+p''}{2l}x^2 .$$

Здѣсь ординаты кривыхъ также выразятся цѣлыми функціями второй степени отъ абсциссы, слѣдовательно кривыя также будутъ параболы, которыхъ оси перпендикулярны къ оси абсциссъ. Для опредѣленія абсциссъ точекъ пересѣченія кривой Max. δ съ линіею опоръ AB имѣемъ:

$$0 = (p'+p'')(l-x)^2 - p'x^2 = (p'+p'')l^2 - 2(p'+p'')lx + p''x^2$$

откуда

$$x = \frac{p'+p''}{p''}l \pm \sqrt{\left(\frac{p'+p''}{p''}\right)^2 l^2 - \frac{p'+p''}{p''}l^2} = l\,\frac{\sqrt{p'+p''}}{p''}\left(\sqrt{p'+p''} \pm \sqrt{p'}\right) .$$

Найденные два корня уравненія предоставляютъ абсциссы двухъ точекъ пересѣченія кривой съ осью абсциссъ AB, и какъ оба корня положительны, то обѣ эти точки находятся въ право отъ опоры A. Абсцисса вершины, находящейся на перпендикулярѣ къ линіи AB, раздѣляющемъ по поламъ разстояніе между точками пересѣченія кривой съ линіею AB, должна быть равна полусуммѣ абсциссъ этихъ точекъ. Поэтому находимъ для абсциссы вершины параболы Max δ

$$x = \frac{p'+p''}{p''}l = l + \frac{p'}{p''}l ,$$

а для ея ординаты чрезъ подстановленіе этой величины въ уравненіе Max. δ.

$$y = -\frac{p'(p'+p'')}{2p''}l .$$

Сверхъ того ординаты кривой, соотвѣтствующія опорамъ A и B и средней точкѣ C балки, будутъ:

для опоры A, при $x=0$ ..... $y=\frac{p'+p''}{2}l$

— — B, — $x=l$ ..... $y=-\frac{p'}{2}l$

— середины C, — $x=\frac{l}{2}$ ..... $y=\frac{p''}{8}l$

Этихъ данныхъ совершенно достаточно для построенія кривой Max δ, если l, p' и p'' извѣстны.

(получаемъ изъ уравненія Max δ,

Уравненіе Min δ) если p' замѣнить черезъ $p'+p''$, а $p'+p''$ замѣнить черезъ p' или же p'', равное $(p'+p'')-p'$, замѣнить черезъ $p'-(p'+p'')$, т.е черезъ $-p''$. По сему всѣ предыдущіе результаты выводовъ, для уравненія Max. δ, дадутъ прямо соотвѣтствующіе результаты для Min. δ, если вмѣсто p' и p'' вставимъ $p'+p''$ и $-p''$. Такимъ образомъ находимъ для абсциссъ точекъ пересѣченія кривой Min δ съ линіею опоръ AB:

$$x=-l\frac{\sqrt{p'}}{p''}\left(\sqrt{p'}\pm\sqrt{p'+p''}\right),$$

для абсциссы вершины параболы

$$x=-\frac{p'}{p''}l$$

и для ея ординаты

$$y=\frac{p'(p'+p'')}{2p''}l,$$

для опоры A, при $x=0$, $y=\frac{p'}{2}l$

для опоры B, при $x=l$, $y=\frac{p'+p''}{2}l$

для середины C, при $x=\frac{l}{2}$, $y=-\frac{p''}{8}l$.

Разсматривая кривыя Max. δ и Min δ, ординаты которыхъ опредѣляютъ предѣлы, между которыми для каждаго сѣченія балки можетъ измѣняться величина суммы смѣ δ при перемѣщеніи временнаго груза, легко заключить, что сумма смѣ δ всегда положительна для нѣкоторой части AD_2 длины балки, близъ лѣвой опоры, всегда отрицательна для части BD, близъ правой опоры, и можетъ имѣть положительныя или отрицательныя величины въ средней части $D_1 D_2$ балки, смотря по разположенію временнаго передвижного груза. Кромѣ того симметричное расположеніе обѣихъ кривыхъ по обѣ стороны середины балки показываетъ во первыхъ, что части AD_2 и BD_1 длины балки между собою равны, и во вторыхъ что наибольшія численныя величины суммы смѣ одинаковы для сѣченій балки, равно удаленныхъ справа и слѣва отъ средины ея и уменьшаются начиная отъ опоръ A и B къ среднему сѣченію C.

Величина участка $D_1 D_2$ длины балки, въ предѣлахъ котораго сумма смѣ δ можетъ быть и положительна и отрицательна, смотря по разположенію передвижного груза, опредѣлится если возьмемъ разность абсциссъ точекъ D_1 и D_2; такимъ образомъ получается формула,

$$D_1 D_2 = \lambda \frac{\sqrt{p'+p''}}{p''}\left(\sqrt{p'+p''}-\sqrt{p'}\right)+\lambda\frac{\sqrt{p'}}{p''}\left(\sqrt{p'}-\sqrt{p'+p''}\right)=\lambda\frac{\left(\sqrt{p'+p''}-\sqrt{p'}\right)^2}{p''},$$

которая представится въ видѣ, болѣе удобномъ для изслѣдованія если замѣтимъ что

$$p'' = (p' + p'') - p' = \left(\sqrt{p'+p''} + \sqrt{p'}\right)\left(\sqrt{p'+p''} - \sqrt{p'}\right)$$

вслѣдствіе чего

$$D_1 D_2 = \mathfrak{L}\,\frac{\sqrt{p'+p''} - \sqrt{p'}}{\sqrt{p'+p''} + \sqrt{p'}} = \mathfrak{L}\,\frac{1 - \sqrt{\frac{p'}{p'+p''}}}{1 + \sqrt{\frac{p'}{p'+p''}}}$$

откуда видно, что $D_1 D_2$ тѣмъ больше, чѣмъ больше передвижной грузъ p'' въ сравненіи съ постояннымъ p' и что $D_1 D_2$ обращается въ нуль, если $p''=0$, т. е. когда имѣется только грузъ, равномѣрно размѣщенный на всей длинѣ балки. Послѣднее видно и изъ того, что при $p''=0$ уравненія обѣихъ кривыхъ Max. δ и Min. δ обращаются въ одно и тоже уравненіе первой степени, изображающее одну только прямую линію проходящую черезъ середину оси AB.

Совокупность наибольшихъ числанныхъ величинъ суммы силъ δ наглядно представляется начертаніемъ, если величины отрицательныхъ ординатъ кривой Min δ отложить отъ линіи AB въ сторону положительныхъ ординатъ; тогда ординаты ломанной кривой EFJ изображаютъ наибольшія числанныя величины δ. Вѣтви EF и FJ этой кривой такъ пологи, что для простоты опредѣленія наибольшихъ числанныхъ величинъ δ, эти вѣтви въ большой части случаевъ могутъ быть замѣнены своими хордами EF и FJ.

Перейдемъ теперь къ тому случаю, когда балка

кромѣ груза, равномѣрно размѣщеннаго по всей ея длинѣ и интенсивности всѣмъ p' на единицу длины, поддерживаетъ еще нѣсколько сосредоточенныхъ грузовъ $P_1, P_2, P_3 \ldots$, дѣйствующихъ на разстояніяхъ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ отъ лѣвой опоры A.

Въ этомъ случаѣ, предполагая, что абсцисса x разсматриваемой точки оси AB балки заключается между абсциссами x_{i-1} и x_i двухъ смежныхъ сосредоточенныхъ грузовъ P_{i-1} и P_i, такъ что всѣ силы $P_1 P_2 \ldots P_{i-1}$ находятся съ лѣвой стороны точки m, а всѣ силы $P_i P_{i+1} \ldots$ до послѣдней силы P_{n-1} находятся съ правой стороны этой точки, мы получимъ для момента $V_1 v_1$ сумму моментовъ относительно лѣвой опоры равномѣрно распредѣленныхъ грузовъ $p'dx$ и сосредоточенныхъ грузовъ, дѣйствующихъ слѣва отъ точки m, т.е.

$$V_1 v_1 = \frac{p'x^2}{2} + P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_{i-1} x_{i-1} = \frac{p'x^2}{2} + \sum_1^{i-1} P_k x_k ,$$

гдѣ k изображаетъ цѣлое число послѣдовательно измѣняющееся между предѣлами 1 и $i-1$; такимъ же образомъ найдемъ для момента $V_2 v_2$ выраженіе

$$V_2 v_2 = \frac{p'(l-x)^2}{2} + P_i (l-x_i) + \cdots + P_{n-1}(l-x_{n-1}) = \frac{p'(l-x)^2}{2} + \sum_i^{n-1} P_\nu (l-x_\nu) ,$$

гдѣ ν есть цѣлое число, измѣняющееся между предѣлами i и $n-1$. Подстановленіе этихъ выраженій въ вышеизложенныя общія формулы для M и δ приводитъ, послѣ нѣкоторыхъ сокра-

../.

щенiй къ формуламъ:

$$M = -\frac{p'}{2}(l-x)x - \frac{l-x}{l}\sum_{1}^{i-1} P_k x_k - \frac{x}{l}\sum_{i}^{n-1} P_r (l-x_r) \qquad 347$$

$$S = \frac{p'}{2}(l-2x) - \frac{1}{l}\sum_{1}^{i-1} P_k x_k + \frac{1}{l}\sum_{i}^{n-1} P_r (l-x_r)$$

Въ случаѣ, когда грузы $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ приложены на равныхъ между собою разстояніяхъ и точки ихъ приложенія дѣлятъ длину l балки на n равныхъ частей, какъ напримѣръ при передачѣ временнаго груза на продольную мостовую балку посредствомъ поперечныхъ балокъ, имѣемъ

$$\frac{x_k}{l} = \frac{k}{n}\ , \quad \frac{x_r}{l} = \frac{r}{n} \quad \text{и} \quad \frac{l-x_r}{l} = \frac{n-r}{n}$$

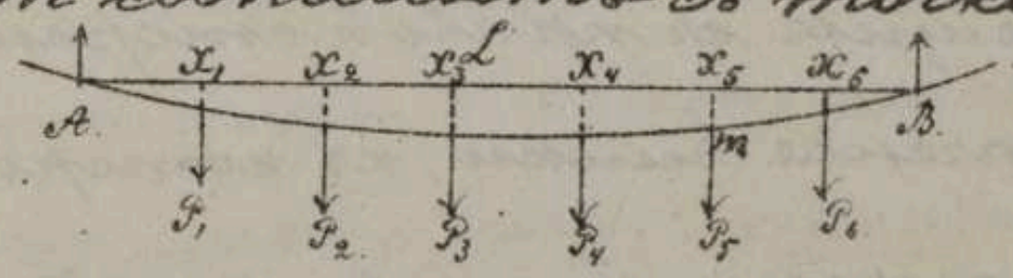
$$M = -\frac{p'}{2}(l-x)x - \frac{l-x}{n}\sum_{1}^{i-1} k P_k - \frac{x}{n}\sum_{i}^{n-1}(n-r)P_r$$

$$S = \frac{p'}{2}(l-2x) - \frac{1}{n}\sum_{1}^{i-1} k P_k + \frac{1}{n}\sum_{i}^{i_{n-1}}(n-r)P_r$$

Для частнаго примѣра положимъ, что

$$n = 7\ , \quad x = x_5 = \frac{5}{7}l \quad \text{и} \quad l - x = \frac{2}{7}l$$

т. е. что точка m совпадаетъ съ точкою приложенія силы P_5.



Тогда, взявъ $i=5$, будемъ имѣть:

$$M = -\frac{5}{49}p'l^2 - \frac{l}{49}\left[2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 10P_5 + 5P_6\right]$$

$$S = -\frac{3}{14}p'l - \frac{1}{7}\left[P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 2P_5 - P_6\right]$$

если же принять $i-1=5$, то для M получится также самая величина, но для S найдемъ

$$S = -\frac{3}{14}p'l - \frac{1}{7}\left[P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 - P_6\right]$$

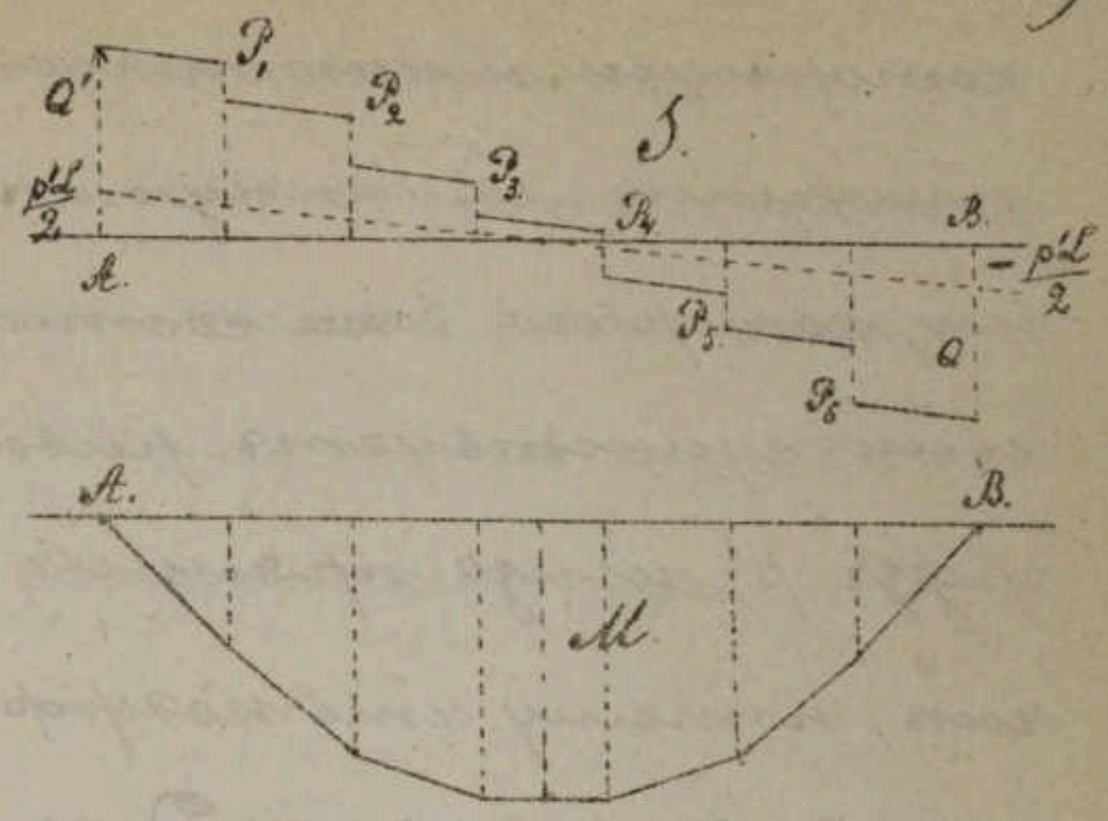
Причина различія этихъ двухъ величинъ S заключается въ томъ, что общая формула для S выведена въ томъ предположеніи, что точка m находится между точками приложенія грузовъ P_{i-1} и P_i. —

348. Тогда, принимая $i=5$ и $x=x_5$, мы переносимъ т слѣва направо къ точкѣ приложенія силы P_5, вслѣдствіе чего эта сила входитъ въ сумму силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны т; принимая же $i-1=5$ и $x=x_5$, мы приближаемся т справа налѣво къ силѣ P_5, которая тогда не входитъ въ число силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны т. Такимъ образомъ мы очевидно должны получить двѣ различныя величины суммы силъ S, разнящіяся между собою на величину силы P_5, что и подтверждается, если вторую изъ найденныхъ величинъ S вычесть изъ первой.

Это замѣчаніе, сдѣланное здѣсь въ частномъ случаѣ, остается однако справедливымъ вообще и указываетъ на то, что опредѣляя сумму силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны такого поперечнаго сѣченія балки, къ которому приложенъ одинъ изъ сосредоточенныхъ грузовъ, должно каждый разъ обратить вниманіе на то, слѣдуетъ ли включить этотъ сосредоточенный грузъ въ число силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны сѣченія или нѣтъ; въ первомъ случаѣ поперечное сѣченіе находится какъ бы возлѣ линіи направленія сосредоточеннаго груза съ лѣвой стороны, а во второмъ съ правой.

Изъ того же замѣчанія можно вывести еще другое заключеніе, а именно, что если мы поперечно-

му сѣченію т придавши послѣдовательно всѣ различныя положенія, начиная отъ одного конца балки до другого, то соотвѣтствующія величины суммы силъ S при переходѣ черезъ каждую точку приложенія одного изъ сосредоточенныхъ грузовъ будутъ измѣняться разомъ на величину этого груза, а въ промежуткахъ сумма сосредоточенныхъ грузовъ не измѣнится; и если изобразимъ величины S при различныхъ положеніяхъ ординатами, перпендикулярными къ оси абсциссъ AB, то концы ординатъ расположатся по ломаной линіи, которая въ случаѣ существованія равномѣрно распредѣленнаго груза p', будетъ состоять изъ ряда параллельныхъ между собою наклонныхъ прямыхъ, соединенныхъ вертикальными линіями, если же груза p' нѣтъ, то наклонныя линіи замѣнятся горизонтальными. Къ этому слѣдуетъ однако прибавить, что если принять въ соображеніе непрерывность распредѣленія каждаго сосредоточеннаго груза на небольшой части длины балки, то углы ломаной линіи замѣнятся небольшими закругленіями.

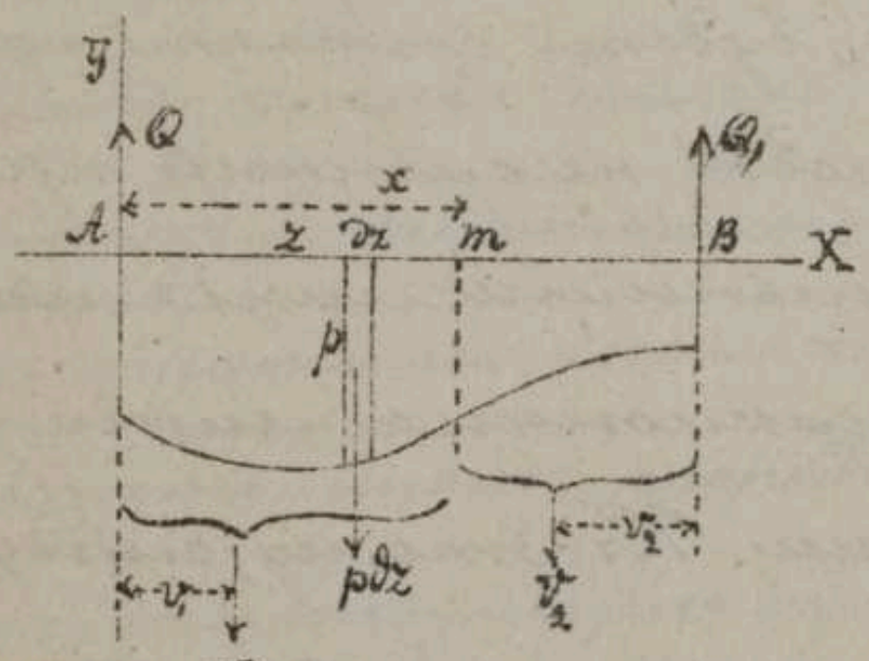


Если такое же построеніе сдѣлаемъ для разли-

350. ных величинъ суммы моментовъ M силъ, между которыми имѣются сосредоточенные грузы, то получимъ ломанную кривую линію въ видѣ полигона, котораго бока составятся изъ вѣтвей параболъ, если существуетъ равномѣрно разлитый грузъ p', и изъ прямыхъ линій въ противномъ случаѣ, потому что коэффиціенты сосредоточенныхъ грузовъ въ формулахъ для M заключаютъ абсциссу x въ первой степени, а въ коэффиціентъ равномѣрно разлитаго груза x входитъ во второй степени.

Легко видѣть, что эта ломанная линія будетъ цѣпная линія или веревочный многоугольникъ съ горизонтальнымъ напряженіемъ равнымъ единицѣ.

Къ изложеннымъ здѣсь выводамъ формулъ для опредѣленія суммы моментовъ M и суммы силъ S слѣдуетъ еще прибавить формулы, относящіяся къ случаю, когда призматическое тѣло подвергается дѣйствію даннаго непрерывно, но не равномѣрно разлитаго груза, изображаемаго грузомъ p на единицу длины dz, разсматриваемыхъ какъ функція отъ абсциссы z этого элемента. Въ этомъ случаѣ моменты $V_1 v_1$,



относительно опоры A равнодействующей силъ $p dz$, дѣйствующихъ съ лѣвой стороны точки t тѣла, опредѣляемой абсциссою x, равенъ суммѣ моментовъ $p z dz$ каждой изъ этихъ силъ относительно той же опоры, и выразится опредѣленнымъ интеграломъ съ предѣлами нуль и x для перемѣнной z, т.е.

$$\gamma_1 v_1 = \int_0^x p z dz .$$

Такимъ же образомъ не трудно написать и выраженіе для (числовой величины) момента $\gamma_2 v_2$ другой равнодѣйствующей относительно правой опоры силъ $p dz$, дѣйствующихъ съ правой стороны точки t, т.е.

$$\gamma_2 v_2 = \int_x^l p(l-z) dz .$$

Вводя эти два выраженія въ общія формулы для M и δ, получимъ

$$M = -\frac{l-x}{l}\int_0^x p z dz - \frac{x}{l}\int_x^l p(l-z) dz$$

$$\delta = -\frac{1}{l}\int_0^x p z dz + \frac{1}{l}\int_x^l p(l-z) dz$$

Эти двѣ формулы, въ которыхъ сила p, приходящаяся въ данномъ мѣстѣ тѣла на единицу его длины, разсматривается какъ перемѣнная величина, заключаютъ въ себѣ всѣ остальныя формулы для количествъ M и δ какъ частные виды.

Обратимся теперь къ опредѣленію вида кривой изогнутой оси балки, лежащей горизонтально на двухъ опорахъ и подверженной дѣйствію разсматриваемыхъ здѣсь силъ.

352. Оставляя въ сторонѣ графическій способъ опредѣленія этой кривой, подробно изложенный въ предыдущей статьѣ, перейдемъ къ выводу ея уравненія изъ общаго дифференціальнаго уравненія:

$$E^0 I \frac{d^2 y}{dx^2} = -M .$$

Такъ какъ опредѣленіе прогиба балки, лежащей надвухъ опорахъ, не представляетъ особой важности для практическихъ приложеній, то мы здѣсь ограничимся случаемъ, когда поперечныя сѣченія балки одинаковы по всей ея длинѣ и моментъ инерціи I ихъ площади имѣетъ постоянную величину. Въ этомъ случаѣ приведенное уравненіе можно написать въ видѣ

$$\frac{d^2 EIy}{dx^2} = -M$$

и тогда, приложивъ вышеизложенное, не трудно сообразить, что оно выражаетъ цѣпную линію, принадлежащую непрерывно распредѣленнымъ силамъ, измѣряемымъ силою $-M$ на единицу длины тѣла, когда эта цѣпная линія построена при горизонтальномъ натяженіи, равномъ единицѣ, и съ уклоняющимъ бокомъ, совпадающимъ съ осью AB тѣла, до его изгиба.

Но изъ вышеизложеннаго видно, что для ординаты M, опредѣляемой уравненіемъ

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p$$

и принадлежащей такой же цѣпной линіи св

тѣмъ же защемляющимъ болтомъ и тѣмъ же горизонтальнымъ напряженіемъ, равнымъ единицѣ, но соотвѣтствующей непрерывно распредѣленному грузу p на единицу длины тѣла, получается уравненіе

$$M = -\frac{l-x}{l}\int_0^x pz\,dz - \frac{x}{l}\int_x^l p(l-z)\,dz;$$

а слѣдовательно для вывода искомаго уравненія кривой изогнутой оси тѣла, стоитъ только въ послѣднемъ уравненіи замѣнить количество M черезъ $EI\cdot y$ и подъ интегралами p черезъ $-M$, разсматриваемое какъ функція отъ перемѣнной z. Такимъ образомъ находимъ уравненіе кривой изогнутой оси балки въ видѣ

$$EI_y = \frac{l-x}{l}\int_0^x Mz\,dz + \frac{x}{l}\int_x^l M(l-z)\,dz,$$

гдѣ какъ и въ предыдущихъ уравненіяхъ ордината кривой откладывается вверхъ отъ оси абсциссъ, совпадающей съ осью AB тѣла, если она положительна и внизъ, если отрицательна.

Изъ предыдущаго извѣстно, что величина M для всѣхъ точекъ оси балки, т. е. для всѣхъ разсматриваемыхъ величинъ z отрицательна и имѣетъ наибольшую числовую величину при такомъ распредѣленіи грузовъ, при которомъ въ каждомъ сѣченіи балки дѣйствуетъ возможно большій грузъ. По сему ордината y по всей длинѣ балки будетъ отрицательна и получитъ свою наибольшую числовую величину $\mathrm{Max}(-y)$ при возможно

 балкой нагрузкъ балки. Такимъ образомъ въ случаѣ, когда наибольшій грузъ разпространяется равномѣрно, такъ что согласно предыдущимъ выводамъ

$$M = -\frac{p' + p''}{2}(l - z)z,$$

то для наибольшаго прогиба въ какомъ угодно мѣстѣ балки найдемъ:

$$Max\left(-EIy\right) = \frac{p' + p''}{2l}\left[(l - x)\int_0^x (l - z)z^2 dz + x\int_x^l (l - z)^2 z\, dz\right]$$

или по совершеніи интегрированія и сокращеніи

$$Max(-y) = \frac{p' + p''}{24EI}\left(l^3 x - 2lx^3 + x^4\right),$$

а для наибольшаго прогиба f середины балки

$$Max\, f = \frac{5}{384} \cdot \frac{(p' + p'')l^3}{EI},$$

что совпадаетъ съ формулою, выведенною въ предшествующей статьѣ для стрѣлы прогиба призмы, лежащей на двухъ опорахъ и поддерживающей равномѣрный грузъ.

Чтобы дать средства къ примѣненію всего здѣсь изложеннаго, остается еще указать на нѣкоторыя данныя, касающіяся величинъ грузовъ постояннаго и временнаго, и наиболѣе употребительныхъ профилей балокъ. Всѣ мосты, опредѣленная часть которыхъ составляетъ постоянный равномѣрнораспредѣленный грузъ, поддерживаемый балкою, могутъ быть опредѣлены по предварительному проекту моста или же и по соображенію всѣхъ существующихъ мостовъ. Для этого имѣется нѣсколько эмпирическихъ

формулъ, изъ которыхъ приведемъ одну изъ простѣй-
шихъ, данную прусскимъ инженеромъ Шведлеромъ(X)
для желѣзныхъ балочныхъ мостовъ, устроивае-
мыхъ подъ желѣзныя дороги. По этой формулѣ,
приведенной къ русскимъ мѣрамъ, постоянный
вѣсъ моста на одинъ погонный футъ одного рельсо-
вого пути, при пролетѣ въ L футовъ, непревосхо-
дящемъ 250 футовъ, выражается чрезъ

$$15 + 0{,}18\,L \text{ пудовъ};$$

при пролетахъ же, превосходящихъ 250 футъ, коэф-
фиціентъ второго члена долженъ быть увели-
ченъ, а именно при пролетахъ въ 300, 400, 450 футъ,
коэффиціенты будутъ: 0,204; 0,282; 0,336.

Если рельсовый путь поддерживается двумя балками, то на каждую изъ нихъ дѣйствуетъ только половина груза, опредѣляемаго этою фор-
мулою; если же два пути поддерживаются дву-
мя балками, то на каждую дѣйствуетъ цѣ-
лый грузъ, и столько же дѣйствуетъ на среднюю
балку, если два пути поддерживаются тремя
мостовыми балками.

Величина передвижнаго груза на единицу длины одного рельсоваго пути опредѣляется не одинаково различными инженерами. Англійскіе инженеры

(X) Schwedler – Ueber Brückenbalkensysteme. Berlin 1863, Zeitschrift für Bauwesen.

356. Большею частію принимаютъ, что грузъ поѣзда на желѣзной дорогѣ составляетъ около 1½ тона или 62 пуда на 1 погонный футъ пути. Французскіе инженеры принимаютъ для временнаго груза тѣмъ большую величину, чѣмъ меньше пролетъ, покрываемый мостовыми балками, основываясь на томъ, что удары и толчки при движеніи поѣзда, имѣютъ тѣмъ большее вліяніе на прочность балки, чѣмъ меньше ея вѣсъ сравнительно съ грузомъ поѣзда, и что чѣмъ короче балка, тѣмъ бо́льшая часть ея длины можетъ подвергаться дѣйствію самой тяжелой части поѣзда паровоза. Слѣдующая таблица, опредѣляющая временной равномѣрно распредѣленный грузъ на единицу длины одного пути въ зависимости отъ величины пролета, заимствована изъ сочиненія г.г. Молино и Пронье.(*)

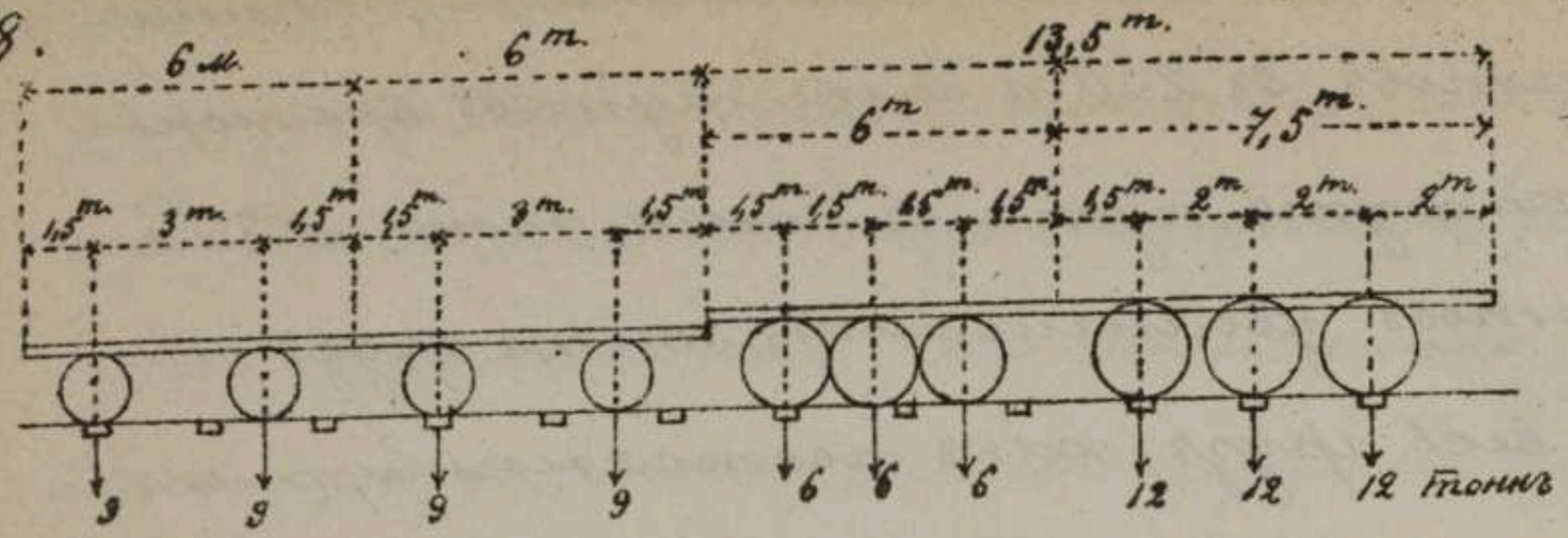
Пролетъ	въ метрахъ..	4	6	10	15.	20	25-50	60.
	въ футахъ...	13.	19,5.	32,8	49,2	65,6	82-164	197.
Временной грузъ.	въ килогр. на 1 мет.	8000	7000	6000	5000	4700	4500	4000.
	въ пуд. на 1 футъ	148,8	130,2	111,6	93.	87,4	83,7	74,4.

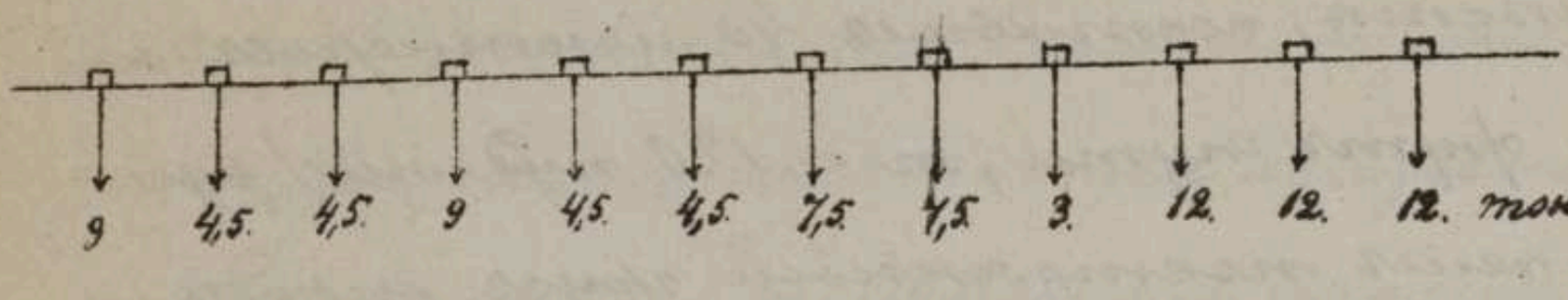
(*) Molinos et Pronier. Traité de la construction des ponts métalliques. Paris 1857.

Нѣкоторые германскіе инженеры (Шведлеръ), принимаютъ для пролетовъ въ 250 и болѣе футовъ временной грузъ на 1 пог. футъ пути въ 1 англ. тонъ, а для меньшихъ пролетовъ увеличиваютъ этотъ грузъ на столько, чтобы весь грузъ, какъ постоянный, такъ и временной вмѣстѣ, составилъ 40 центнеровъ на 1 погон. прусскій футъ пути, т. е. 120 пуд. на 1 русскій футъ; при чемъ постоянный грузъ опредѣляется по вышеприведенной формулѣ. Согласно этому вычислена слѣдующая таблица:

Пролеты въ футахъ.		15	30	50	75.	100	150	200	250	300	400
Грузы въ пудахъ на 1 пог. футъ.	Постоянный	17,7	20,4	24,0	28,5	33,0	42,0	51,0	60	76,2	127,8.
	временной	103,3	99,6	96.	91,5	87,0	78	69	62	62	62.
	сложный	120	120	120	120	120	120	120	122	138	190.

Разнообразіе новѣйшихъ системъ паровозовъ и преимущественно значительное различіе ихъ вѣса и размѣровъ, заставляетъ однако отнестись съ большою осторожностію къ приблизительнымъ данностямъ о величинѣ равномѣрно распредѣленнаго груза. Чтобы провѣрить эти данности, разсмотримъ примѣрный составъ тяжелаго поѣзда, заимствованный изъ сочиненія г. г. Лейле





и Шюблера.(*) Паровозъ, длиною въ 7,5 метр. между буферами, производитъ давленіе въ 12 тоновъ (по 62 пуда или 1000 килогр.) на каждую пару колесъ или каждую изъ трехъ своихъ осей, находящихся другъ отъ друга на разстояніи въ 2 метра. Тендеръ длиною въ 6 метр. давитъ 6-ю тоннами на каждую изъ трехъ осей, разставленныхъ на 1,5 метр. другъ отъ друга. Вагоны длиною въ 6 метровъ, передаютъ давленіе въ 9 тон. на каждую изъ двухъ осей, удаленныхъ другъ отъ друга на 3 метра.

Съ перваго же взгляда на чертежъ видно, что если бы паровозъ средней своей осью находился надъ серединою балки съ пролетомъ $l = 4$ метр. $= 13,12$ фут., то дѣйствовалъ бы какъ сосредоточенный грузъ $P = 12$ тон., что какъ извѣстно равносильно дѣйствію двойного груза, распредѣленнаго на всю длину балки, т. е. груза $p'' = 6$ тон. на 1 метръ или 111,6 пуд. на 1 пог. футъ, что близко подходитъ къ грузу, указанному во второй таблицѣ. Но это относится только къ

(*) Laisle und Schübler. Der Bau der Brückenträger. 2te Aufl. Stuttgart, 1864.

величинъ момента силъ M. Если же вычислимъ величину суммы силъ S для средняго сѣченія то получимъ для сосредоточеннаго груза, пренебрегая для простоты весомъ балки.

$$S = P - Q = 12 - 6 = 6 \text{ тон.},$$

а для груза, равномѣрно распредѣленнаго на одну половину балки, при $p'' = 6$ тоновъ, $p' = 0$, $l = 4$ метра, $x = \frac{l}{2} = 2$ метра:

$$\text{Max } S = \frac{p' + p''}{2l}(l - x)^2 - \frac{p'}{2l}x^2 = \frac{6}{2.4} \cdot 2^2 = 3 \text{ тонны},$$

откуда видно, что замѣняя сосредоточенный грузъ равномѣрно распредѣленнымъ, можно для короткой балки ошибаться на 50% при вычисленіи суммы силъ.

Возьмемъ еще примѣръ балки большей длины. Положимъ, что $l = 14$ метр. $= 46$ фут. и что балка нагружена двумя паровозами, приставленными другъ къ другу лбами, что конечно представляетъ весьма значительный грузъ. Тогда получимъ равномѣрно распредѣленный грузъ

$$p'' = \frac{72}{14} = \frac{36}{7} = 5{,}14 \text{ тон. на 1 метръ}$$

или

$$p'' = 95{,}6 \text{ пуд. на 1 пог. футъ},$$

что также согласно съ вышеприведенными таблицами. Вычисляя по этому наибольшую численную величину S для двухъ лѣвыхъ балки, находимъ по формулѣ

$$\text{Min. } S = \frac{p'}{2l}(l - x)^2 - \frac{p' + p''}{2l}x^2$$

360. при $p'=0$, $p''=\frac{36}{7}$ тона, $l=14$ метр. и $x=\frac{l}{2}=7$ метр.

$$Min.\,S=-\frac{36}{2.7.14}\cdot 7^2=-9 \text{ тонов}$$

и для $x=\frac{5}{7}l=10$ м.,

$$Min.\,S=-\frac{36}{2.7.14}\cdot 10^2=-18{,}6 \text{ тона}$$

Но если предположить, что груз поезда передается балке посредством поперечин, расположенных на расстоянии в 2 метра друг от друга, то в случае когда оси паровоза находятся над поперечинами, поезд с одним только паровозом тендером и вагонами произведет на балку, как видно из чертежа ряд сосредоточенных давлений

$$4{,}5\ ;\ 9\ ;\ 4{,}5\ ;\ 4{,}5\ ;\ 7{,}5\ ;\ 7{,}5\ ;\ 3\ ;\ 12\ ;\ 12\ ;\ 12 \text{ тонов},$$

а если давления поперечин на балку изобразим чрез $P_1\ P_2 \ldots\ldots P_6$, считая нумера слева на право, и поставим поезд на левую половину балки, так что:

$$P_1=P_2=P_3=12 \text{ тон}\ .\ P_4=P_5=P_6=0,$$

то по формуле

$$S=\frac{p'}{2}(l-2x)-\frac{1}{n}\sum_{1}^{i-1}\text{и}\,P_k+\frac{1}{n}\sum_{i}^{n-1}(n-r)P_r$$

при $p'=0$; $l=14$ метр.; $n=7$; $x=\frac{l}{2}$ и $i=4$, получаем

$$S=-\frac{1}{7}(P_1+2P_2+\underbrace{3P_3}_{(-3P_4)}-2P_5-P_6)=-\frac{72}{7}=-10\tfrac{2}{7} \text{ тона}.$$

а если поезд поставим так, чтобы пять поперечин, начиная с левой оконечности балки, были им покрыты, при чем

$$P_1=7{,}5\ ;\ P_2=3\ ;\ P_3=P_4=P_5=12 \text{ тон}\ \text{и}\ P_6=0,$$

то, при $x=\frac{5}{7}l$ и $i=6$, находим

$$S=-\frac{1}{7}(P_1+2P_2+3P_3+4P_4+5P_5-P_6)=-\frac{157{,}5}{7}=-22{,}5 \text{ тона}.$$

Отсюда видно, что даже не увеличивая груза поезда 361.
прибавкою второго паровоза, мы при сосредоточенной
передаче давлений получаем для суммы сил S боль-
шія величины, чѣмъ при равномѣрномъ распре-
дѣленіи увеличеннаго груза поезда, для середины
балки на 14 % и при пятой поперечинѣ на 21 %.
Хотя ошибка для балки въ 14 метровъ и значитель-
но меньше чѣмъ для балки въ 4 метра, однако
примѣръ этотъ тѣмъ не менѣе указываетъ на
то, что дѣйствіе сосредоточенныхъ грузовъ слѣ-
дуетъ принять во вниманіе по крайней мѣрѣ для
балокъ, которыхъ длина не превосходитъ 20 или
30 метровъ, т. е. 10 или 15 сажень. Можно прибав-
вить, что при малой длинѣ балокъ число попе-
речинъ или точекъ приложенія сосредоточенныхъ
грузовъ также невелико, а слѣдовательно и не
представится особыхъ затрудненій въ выпискѣ
формулъ суммы моментовъ M и суммы силъ S
для тѣхъ поперечныхъ сѣченій, при которыхъ дѣй-
ствуютъ грузы, и затѣмъ въ выборѣ ряда вели-
чинъ различныхъ сосредоточенныхъ грузовъ для
каждаго сѣченія такъ, чтобы получились нуж-
ныя числовыя величины M и S.

Для балокъ мостовъ, устроенныхъ подъ обыкно-
венныя дороги, постоянный равномѣрно распредѣлен-
ный грузъ долженъ быть опредѣленъ по предвари-
тельному проекту моста, необходимому въ особен-

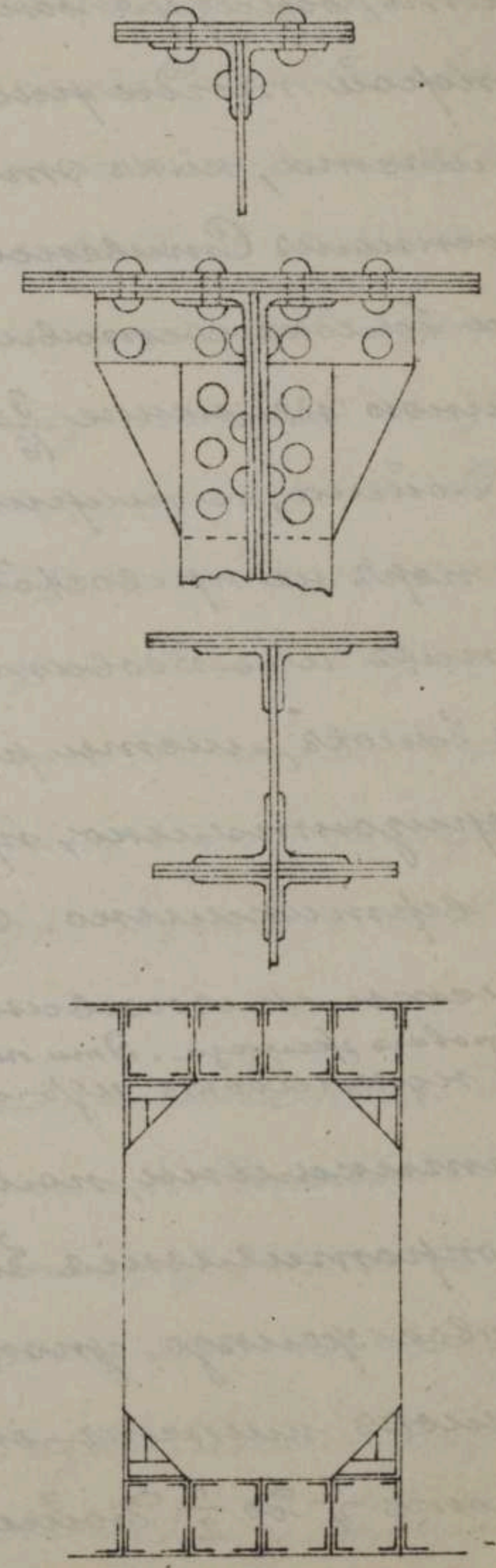
 ности для вычисленія веса балокъ сообразно ширинѣ моста.

При этомъ можно расчитывать приблизительно на деревянныя подкладки и настилъ всего $1\frac{1}{4}$ пуд. на 1 квадр. футъ, на щебенную насыпь толщиною въ 8 дюймовъ или на булыжную мостовую по $2\frac{1}{3}$ пуда и на грузъ снѣга до $\frac{1}{2}$ пуда на 1 кв. ф. Наибольшій временной грузъ при большихъ пролетахъ почти всегда получится, когда на мосту находится густая толпа людей, при чемъ полагая по 2 кв. фута на человѣка, давленіе на 1 кв. футъ будетъ около $2\frac{1}{4}$ пуда. При малыхъ же пролетахъ балокъ мостовъ, по которымъ могутъ переѣзжать болѣе тяжелые грузы, слѣдуетъ расчитывать на сосредоточенное давленіе повозокъ, подобныхъ тяжелымъ вагонамъ желѣзныхъ дорогъ.

Изложенная здѣсь теорія можетъ быть применена къ сплошнымъ желѣзнодорожнымъ балкамъ, съ одинаковою высотою профиля по всей длинѣ. Этимъ балкамъ обыкновенно даютъ профиль, при которой матеріалъ по возможности болѣе сосредоточенъ въ верхней и нижней частяхъ балки, въ такъ называемыхъ <u>поясахъ</u>, оставляя въ средней части, <u>ребрѣ</u> балки, только матеріалъ, необходимый для соединенія между собою обоихъ поясовъ и передачи напряженій отъ

одного къ другому, потому что такія профили, какъ напримѣръ профиль въ видѣ двойной буквы Т, соотвѣтствуютъ вообще требованію удовлетворительной прочности при наименьшей тратѣ матеріала.

Поясъ балки, при маломъ пролетѣ, напримѣръ половой и потолочной балки, состоитъ изъ двухъ угловыхъ желѣзъ, приклепанныхъ къ ребру по обѣ его стороны. При балкѣ значительномъ пролетѣ эти угловые желѣза перекрываются желѣзными къ нимъ приклепанными листами въ одинъ или нѣсколько слоевъ. Ширину листовъ можно довести приблизительно до 12 дюймовъ безъ особыхъ скрѣпленій; но если возбужденіе слишкомъ большой толщины слоевъ, неудобной для соединенія ихъ заклепками обыкновеннаго размѣровъ, необходимо увеличить ширину листовъ, то располагаются въ нѣсколькихъ



364. листах по длине балки наугольники или консоли между ребрами и поясом для предупреждения перегиба краев его. В этом случае поясу можно также дать профиль в виде двойного или даже тройного Т. При весьма значительных пролетах можно пояса двух смежных балок между собою соединить, образуя одну трубчатую балку, внутри которой тогда располагается проезжая часть моста, как это сделано в мосту Britannia, построенном Стивенсоном над проливом Менау.

Ребра балок составляются из железных листов, толщиною не менее $\frac{3}{16}$ дюйма, и обыкновенно от $\frac{5}{16}$ до $\frac{1}{2}$ дюйма, а шириною до 3 футъ; длина листов до сихъ поръ не превосходила 2½ саж. При малых пролетах и следовательно, незначительной высоте балок, листы располагаются длиною своего горизонтально, при большей же ее высоте балок вертикально. В том и другом случае листы склепываются между собою с помощью накладок из листового (или лаврового железа. Эти полосы лаврового железа, если они вертикальны, полезны также для увеличения сопротивления балки боковому перегибу.

Угловое железо, употребляемое для мостовых балок имеет от 3 до 4 дюймов в боку и от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$ дюйма средней толщины. — Стыки его скрепляются особыми угловыми накладками.

Высота профиля мостовых балокъ обыкновенно заключается между предѣлами $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{12}$ величины пролета большею частію держится отъ $\frac{1}{9}$ до $\frac{1}{10}$ и только въ крайнихъ случаяхъ уменьшается до $\frac{1}{18}$ пролета. При меньшей высотѣ балки слишкомъ прогибаются, и потому меньшія отношенія иногда допускаются только для потолочныхъ балокъ. Увеличеніе высоты балки вообще выгодно для ея прочности, но оно невыгодно для устойчивости балки, и вообще высота для предупрежденія выпуклости моста не должна превзойти полуторнаго разстоянія между двумя смежными балками. Принимая ширину моста для одного пути желѣзной дороги приблизительно въ 2 саж., а для двухъ путей въ $3\frac{1}{2}$ сажени, наибольшая высота двухъ балокъ, поддерживающихъ одинъ путь получилась бы въ 3 саж., а при двухъ путяхъ въ 4 1/2 сажени.

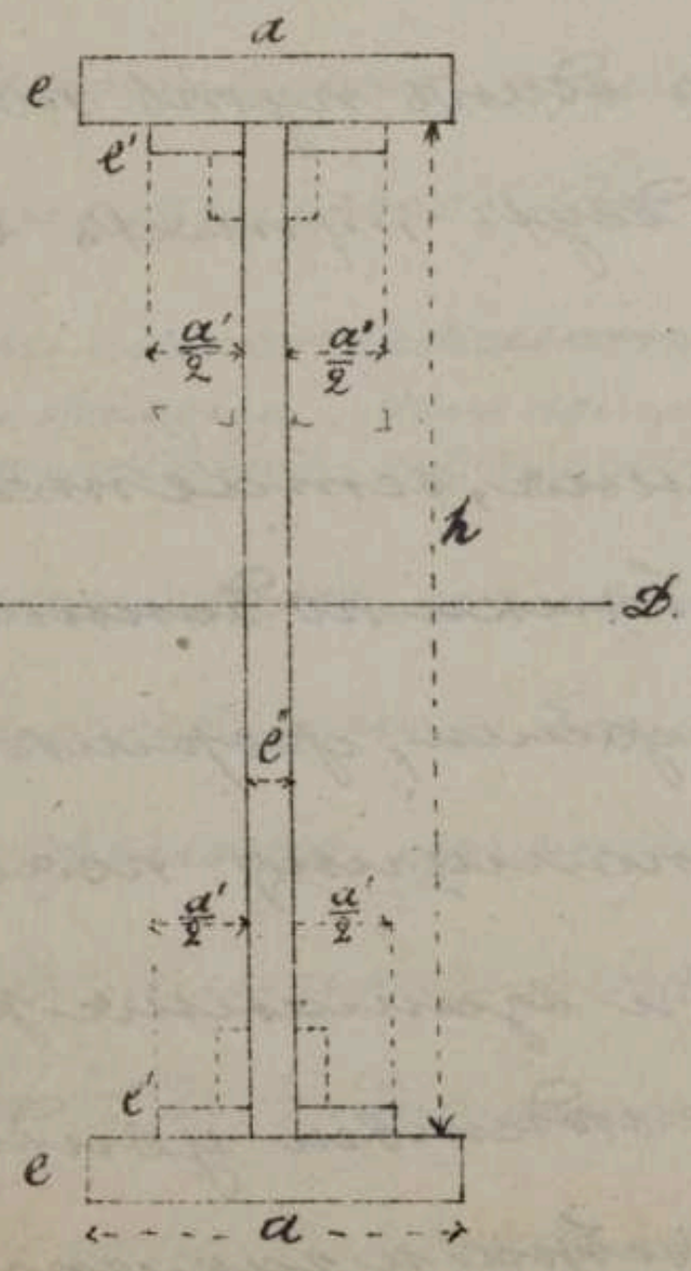
Имѣя въ виду эти данныя, остается для опредѣленія размѣровъ балки по данными пролету, грузу, высотѣ профиля, формѣ и ширинѣ поясовъ, вычислить толщину поясовъ, толщину ребра, діаметры и взаимныя разстоянія заклепокъ. Мы впослѣдствіи увидимъ, какимъ образомъ размѣры ребра и заклепокъ опредѣляются преимущественно въ зависимости

 отъ величины суммы силъ S, а по сему изложенная теорія намъ пока можетъ только служить для опредѣленія толщины поясовъ. Для сего имѣемъ условіе прочности балки

$$\text{Мах. мом. велич. } M \leqq \frac{RI}{v},$$

для примѣненія котораго слѣдуетъ предварительно задаваться данною толщиною ребра балки, чтобы оставалась только одна неизвѣстная величина толщина поясовъ.

Примѣненіе этаго неравенства можетъ быть облегчено, если предварительно упростить выраженіе количества $\frac{I}{v}$ въ зависимости отъ размѣровъ прорѣзной балки. Предполагая профиль въ видѣ двойной буквы T, примемъ для изображенія ея размѣровъ буквы, показанныя на прилагаемомъ чертежѣ, и дѣлитимъ, что моментъ инерціи I всей профильной равенъ суммѣ моментовъ инерціи I, I', I'' и I''' ребра балки, угловыхъ желѣзъ и обоихъ поясовъ т. е.



$$I = I' + I'' + I''',$$

и что на основаніи извѣстныхъ формулъ получается: для момента инерціи ребра балки относительно линіи CD проходя-

щей чрезъ центръ тяжести профиля

$$I' = \frac{e'' h^3}{12};$$

для момента инерціи угловыхъ желѣзъ, если ихъ заклепочныя прямоугольныя части, прилегающія къ поясамъ и пренебреженныя части приклепанныя къ ребру въ вознагражденіе ослабленія первыхъ частей отъ отверстій для заклепокъ

$$I'' = \frac{a'h^3 - a'(h-2e')^3}{12} = \frac{ae'h^2}{2}\left(1 - \frac{2e'}{h} + \frac{4e'^2}{3h^2}\right);$$

и для момента инерціи поясовъ:

$$I''' = \frac{a(h+2e)^3 - ah^3}{12} = \frac{aeh^2}{2}\left(1 + \frac{2e}{h} + \frac{4e^2}{3h^2}\right).$$

Кромѣ того, разстояніе крайней фибры отъ оси балки будетъ:

$$v = \frac{h}{2} + e = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{2e}{h}\right).$$

Всѣ эти формулы можно упростить, если обратить вниманіе на то, что толщины e, e', e'', изъ которыхъ наибольшая не превосходитъ $2\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{2}$ дюймовъ, такъ малы въ сравненіи съ высотою балки h, что безъ вреда для примѣнимости формулъ можно пренебречь дробями $\frac{e}{h}$ и $\frac{e'}{h}$ въ сравненіи съ единицею.

Тогда находимъ

$$I' = \frac{e''h^3}{12}, \quad I'' = \frac{a'e'h^2}{2}, \quad I''' = \frac{aeh^2}{2} \quad \text{и} \quad v = \frac{h}{2}$$

и вслѣдствіе этого

$$\frac{I}{v} = \frac{I' + I'' + I'''}{v} = \frac{e''h^2}{6} + a'e'h + aeh;$$

а неравенство для опредѣленія наименьшей тол-

368. шины с поясов, представится в виде:

$$\text{Max. числ. вел. } M \leqq R\left(\frac{e''h^2}{6} + a'e'h + ach\right).$$

Для мостовой балки изъ листоваго желѣза, покрывающей пролетъ въ 100 фут и назначенной для поддержанія половины рельсоваго пути, можно принять слѣдующія данныя:

$l = 100' = 1200''$; $p' + p'' = 60$ пуд. на $1' = 5$ пудамъ на $1''$ погонный.

$R = 240$ пуд. на $1''$ кв., $h = 120''$; $a = 12''$; $a' = 7''$ и $e' = e'' = \frac{3}{8}''$

Подставляя эти величины въ неравенство находимъ:

$$\text{Max. ч. в. } M \leqq 240\left(\frac{3.120^2}{6.8} + \frac{7.3.120}{8}\right) + 240.12.120.e$$

или

$$\text{Max. ч. в. } M \leqq 291600 + 345600e.$$

Если балка по всей своей длинѣ должна имѣть одну и туже толщину поясовъ, то въ неравенство слѣдуетъ подставить наибольшую численную величину M для всей балки, т.е. ту, которая соотвѣтствуетъ ея серединѣ, а именно

$$\text{Max. ч. в. } M \leqq \frac{p' + p''}{8} l^2 = \frac{5.1200^2}{8} = 900000.$$

и тогда для толщины поясовъ получаемъ

$$900000 \leqq 291600 + 345600e \text{ или } e \geqq 1{,}76 \text{ дюйма}$$

Предполагая, что пояса балки составлены изъ нѣсколькихъ слоевъ желѣзныхъ листовъ, толщиною каждый въ $\frac{3}{8}$ дюйма, легко видѣть, что для образованія найденной толщины поясовъ число слоевъ должно быть пять.

Если же для уменьшенія матеріала толщина

поясовъ должно измѣняться сообразно съ напряженіемъ въ различныхъ частяхъ длины балки, то надобно опредѣлить наименьшее число листовъ толщиною въ $\frac{3}{8}$ дюйма, изъ которыхъ долженъ состоять поясъ балки въ каждой части ея длины, чтобы постоянно удовлетворялось неравенство:

$$\text{Мат. ч. в. } M \leqq \frac{RI}{v} = 291600 + 345600\,e$$

Для сего стоитъ только вычислить различныя величины $\frac{RI}{v}$, соотвѣтствующія толщинѣ поясовъ въ одинъ, два, три и т.д. листа, а именно:

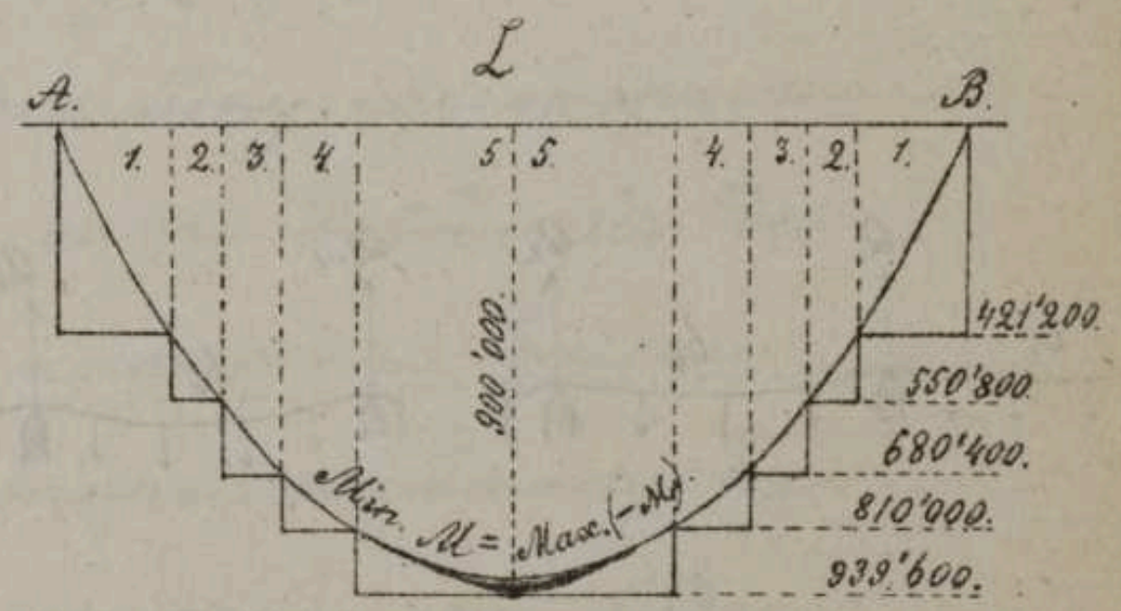
для $e = \frac{3}{8}$ дюйм: $\frac{RI}{v} = 421'200$

— $e = 2\frac{3}{8}$ —— — $= 550'800$

— $e = 3\frac{3}{8}$ —— — $= 680'400$

— $e = 4\frac{3}{8}$ —— — $= 810'100$

— $e = 5\frac{3}{8}$ —— — $= 939'600$;



за тѣмъ, на чертежѣ кривой, ординаты которой изображаютъ численныя величины суммы моментовъ M для различныхъ точекъ оси балки, провести рядъ прямыхъ

линій, параллельныхъ оси AB, которыхъ ординаты изображаютъ найденныя величины количества $\frac{RI}{v}$, и проводя черезъ точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ кривою линіи, перпендикулярныя къ оси AB, образовать ломанную линію, которой ординаты вездѣ

превышают ординаты кривой. Тогда очевидно, что если при каждомъ поперечномъ сѣченіи балки пояса будутъ имѣть ту толщину, которая соотвѣтствуетъ ординатѣ участка ломанной линіи, принадлежащаго этому сѣченію, то толщина поясовъ будетъ вездѣ достаточна для прочности балки.— Участки ломанной линіи, параллельные оси AB, вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлятъ тѣ части балки, изъ которыхъ каждая должна имѣть свою особую профиль изъ числа предварительно выбранныхъ.

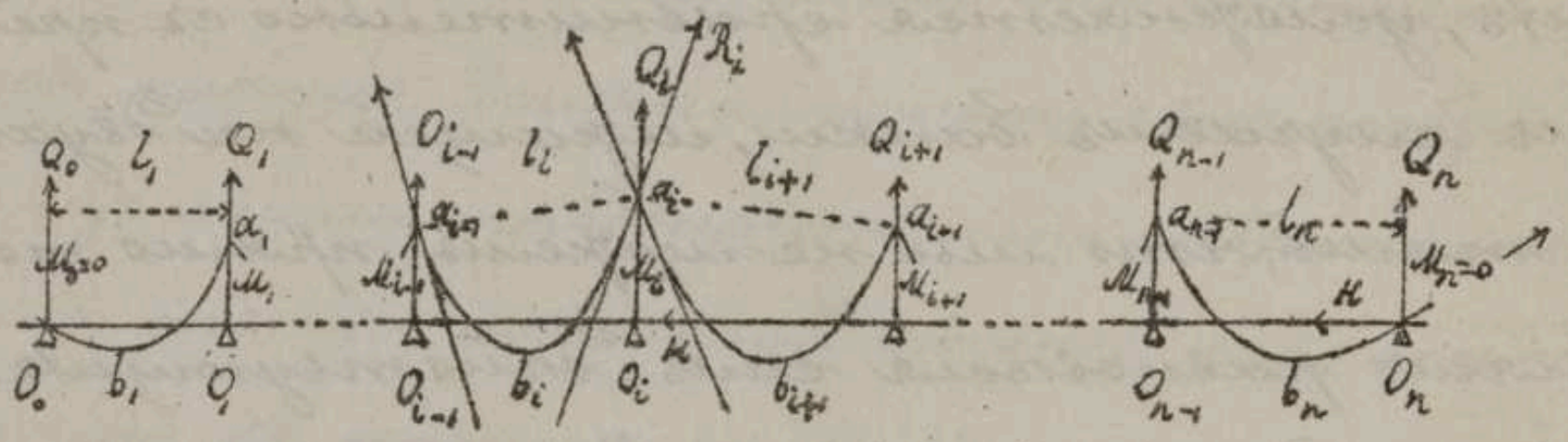
Перейдемъ теперь ко второй части вопроса, предложеннаго въ началѣ этой статьи, а именно къ выводу формулъ для повѣрки прочности и опредѣленія прогиба балки съ первоначально прямолинейною осью, при дѣйствіи на нее грузовъ, какъ угодно размѣщенныхъ по ея длинѣ, но предполагая, что балка лежитъ не на двухъ только опорахъ, а на какомъ угодно числѣ ихъ.

Здѣсь такъ же какъ и въ случаѣ двухъ только опоръ, сущность вопроса заключается въ томъ, чтобы для даннаго поперечнаго сѣченія балки, въ какомъ угодно ея пролетѣ или промежуткѣ между двумя

смежными опорами, опредѣлить величину суммы
M моментовъ относительно центра тяжести
сѣченія, всѣхъ силъ, дѣйствующихъ съ правой сто-
роны сѣченія на балку, и величину S суммы этихъ
силъ. Но, въ разсматриваемомъ случаѣ, опредѣле-
ніе величинъ M и S по даннымъ величинамъ гру-
зовъ, дѣйствующихъ на балку въ различныхъ ея про-
летахъ, усложняется сравнительно съ предыду-
щимъ случаемъ балки, лежащей на двухъ опо-
рахъ, тѣмъ, что мы не можемъ прямо по даннымъ
условіямъ равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на
балку, опредѣлить величины сопротивленій
$Q_0\ Q_1\ Q_2 \ldots\ldots Q_{n-1}\ Q_n$ опоръ, потому что эти сопротив-
ленія зависятъ отъ изгиба балки. Въ этомъ
легко убѣдиться слѣдующимъ разсужденіемъ:
положимъ, что мы имѣемъ возможность нѣсколь-
ко возвышать или понижать одну изъ опоръ, и
что постепенно понижая опору доводимъ до
того, что она едва только коснется балки;
тогда очевидно дѣйствіе опоры на балку бу-
детъ почти равно нулю, и грузъ балки будетъ
поддерживаться остальными опорами; если
же станемъ постепенно возвышать опору,
то можемъ дойти до того, что балка перегнется
вверхъ на столько, что снимется со смежныхъ
опоръ, и тогда сопротивленіе разсматриваемой
опоры конечно будетъ больше того, которое суще-

ствует, когда все опоры участвуют в поддержании балки. Отсюда видно, что при неразрывности балки, лежащей на нескольких опорах, сопротивления их и вместе с ними и суммы моментов M и сумма сил S при каком угодно поперечном сечении, и от вида кривой, по которой изогнется ось балки.

(зависят от относительной высоты опор)

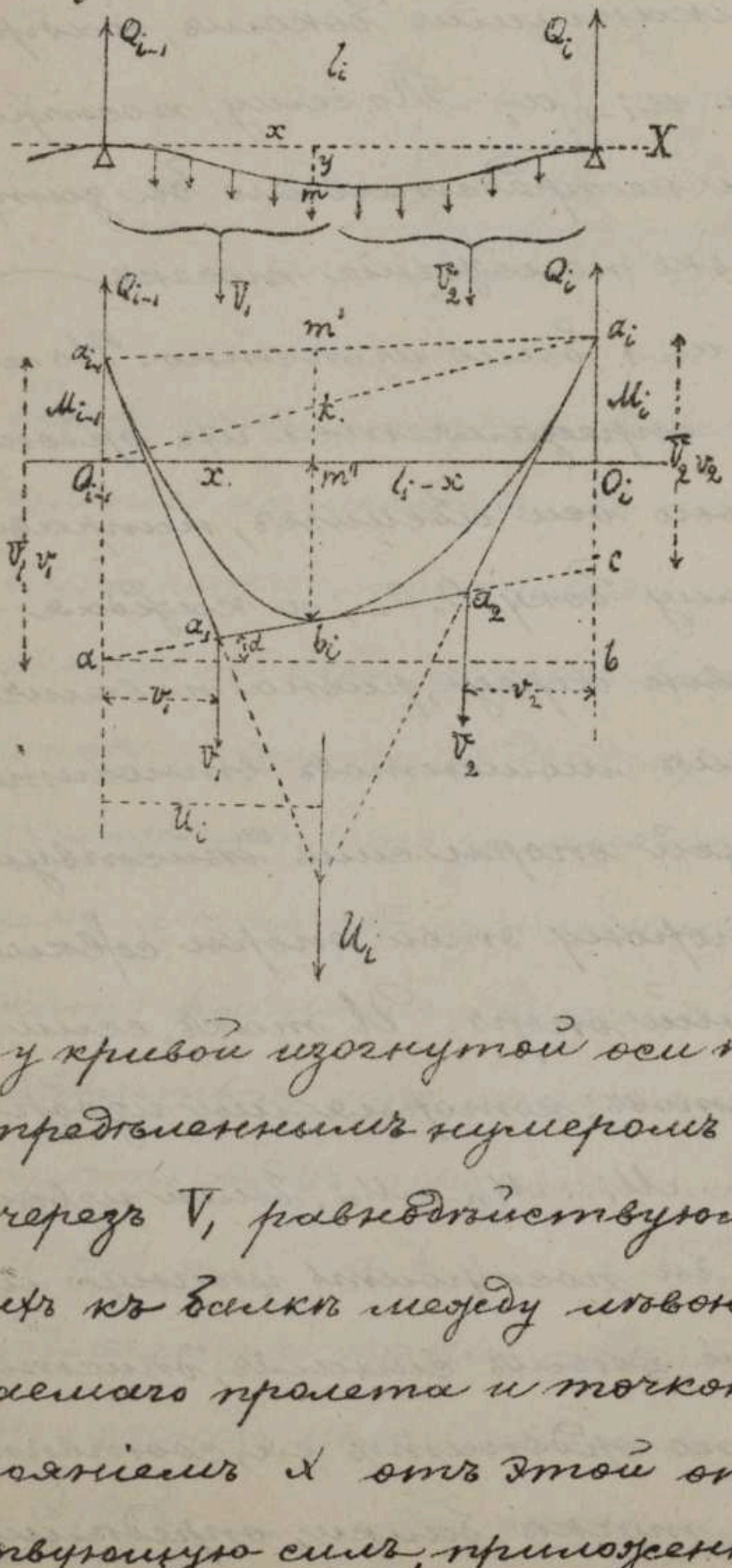


Чтобы в этом случае вывести способы для определения количеств M и S, вообразимъ себѣ цѣпную линію, построенную для грузовъ, распределенныхъ по всей длинѣ балки, и сопротивленія опоръ, при чемъ для простоты сужденій предположимъ, что замыкающій бокъ горизонталенъ и что горизонтальное напряженіе принято равнымъ единицѣ силъ. Тогда не трудно увѣриться, что такая цѣпная линія должна имѣть видъ представленной на чертежѣ линіи $O_0 b_1 a_1 \ldots a_{i-1} b_i a_i \ldots a_{n-1} b_n O_n$, потому что она уподобляется цѣпи, подверженной дѣйствію грузовъ, къ ней провѣшенныхъ, и вертикальныхъ силъ $O_0 Q_1 Q_2 \ldots Q_n$, направленныхъ снизу вверхъ и ее поддерживающихъ. Если отъ всей этой

цѣпной линіи отдѣлимъ часть $a_{i-1}\, b_i\, a_i$, при-
надлежащую какому либо одному пролету съ
неопредѣленнымъ нумеромъ i, то эта часть
очевидно представитъ цѣпную линію, постро-
ную для одних только данныхъ грузовъ, дѣйст-
вующихъ въ этомъ пролетѣ, но притомъ-же об-
щемъ горизонтальномъ напряженіи, равномъ
единицѣ, и съ замыкающимъ звеномъ, направ-
леннымъ по линіи $a_{i-1}\, a_i$. По сему, построеніе
всей цѣпной линіи не представило бы затруд-
неній, если бы только положеніе точекъ
$a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_{i-1}\, a_i \ldots\ldots a_{n-1}$ было извѣстно. Но поло-
женіе этихъ точекъ опредѣляется изъ ордина-
тами относительно оси абсциссъ, направлен-
ной по замыкающему звеку $O_0\, O_n$, и каждая изъ
этихъ ординатъ, въ свою очередь, равна по вели-
чинѣ и по знаку суммѣ моментовъ относитель-
но соотвѣтствующей опоры силъ дѣйствую-
щихъ по правую сторону этой опоры совокуп-
ленію и сопротивленій опоръ. И такъ, если бы
эти суммы моментовъ, которыя мы изобра-
зимъ черезъ $M_0\, M_1 \ldots\ldots M_i \ldots M_{n-1}\, M_n$, были извѣст-
ны, то можно было бы построить цѣпную ли-
нію, принадлежащую всѣмъ силамъ, дѣйствую-
щимъ на балку и по ординатѣ ея, соотвѣт-
ствующей данной точкѣ балки, опредѣлить
сумму моментовъ силъ M относительно этой
точки; по тангенсу угла наклоненія касатель-

ной къ цѣпной линіи, опредѣлить сумму силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны точки касанія, и, по образовавшейся второй грузовой площади, найти вторую цѣпную линію, представляющую изогнутую ось тѣла.

Чтобы эту зависимость рѣшенія всего вопроса отъ предвари-



тельного опредѣленія величинъ суммъ моментовъ еще болѣе выяснить, выведемъ величины суммы моментовъ M, суммы силъ S, сопротивленія опоры Q_i и ордонаты у кривой изогнутой оси тѣла для пролета съ неопредѣленнымъ нумеромъ i. Для сего изобразимъ черезъ V, равнодѣйствующую силъ приложенныхъ къ балкѣ между лѣвою опорою O_i разсматриваемаго пролета и точкою m опредѣленною разстояніемъ x отъ этой опоры; черезъ V_2 равнодѣйствующую силъ, приложенныхъ къ балкѣ между тою же ея точкою m и правою опорою O_i пролета,

включая и ту сосредоточенную силу, которая мо- 375.
жетъ быть приложена въ самой точкѣ т, и черезъ
v_1 и v_2 разстоянія этихъ силъ до лѣвой и правой опоръ.
Затѣмъ, построимъ веревочный многоугольникъ
$a_{i-1}\, a, a_2\, a_i$, принадлежащій силамъ V_1 и V_2 и уравно-
вѣшивающимъ ихъ сопротивленіямъ, приложеннымъ
въ опорныхъ точкахъ O_{i-1} и O_i, принимая горизонталь-
ное напряженіе равнымъ единицѣ и направляя
замыкающій бокъ по линіи $a_{i-1}\, a_i$. Тогда, какъ
извѣстно изъ предыдущаго, средній бокъ a, a_2 этого
многоугольника будетъ касательною къ части
$a_{i-1}\, b_i\, a_i$ цѣпной линіи, принадлежащей силамъ,
дѣйствующимъ на разсматриваемую часть бал-
ки, при точкѣ b_i ея встрѣчи съ вертикальною ли-
ніею т b_i раздѣла силъ; а посему, ордината точки b_i
и тангенсъ угла наклоненія касательнаго къ
ней бока a, a_2 съ горизонтальною линіею $O_{i-1}\, O_i$, при-
нятою за ось абсциссъ, выразятъ величины сум-
мы моментовъ и суммы силъ, а именно

$$M = -m'' b_i \quad \text{и} \quad S = -\operatorname{tng} \alpha = -\frac{bc}{ab}$$

Но продолжая бокъ a, a_2 до встрѣчи въ точкахъ
a и c съ вертикальными линіями, проходящи-
ми черезъ опоры, проведя горизонтальную линію
$a\, b$, равную длинѣ b_i пролета, и вертикаль-
ную линію $m' b_i$, равную разстоянію точки b_i
части цѣпной линіи до замыкающаго ея бока
$a_{i-1}\, a_i$, получимъ также какъ и при балкѣ

 лежащей на двух только опорах

$$m'b_i = \frac{l_i - x}{l_i} V_1 v_1 + \frac{x}{l_i} V_2 v_2 ;$$

а замѣтивъ, что линіи $O_{i-1}\,a_{i-1}$ и $O_i\,a_i$ равны величинамъ моментовъ M_{i-1} и M_i и проведя линію $O_{i-1}\,a_i$, встрѣчающую вертикальную линію $m'b_i$ въ точкѣ k, находимъ изъ образующихся такимъ образомъ подобныхъ треугольниковъ:

$$m'k = \frac{l_i - x}{l_i} M_{i-1} \quad \text{и} \quad m''k = \frac{x}{l_i} M_i ;$$

кромѣ того:

$$\frac{bc}{ab} = \frac{O_{i-1}a - O_i c}{ab} = \frac{V_1 v_1 - M_{i-1} - (V_2 v_2 - M_i)}{l_i}$$

$$m''b_i = m'b_i - m'k - m''k.$$

Подставивши это въ выраженія суммы моментовъ M и суммы силъ S, получимъ:

$$M = \frac{l_i - x}{l_i} M_{i-1} + \frac{x}{l_i} M_i - \frac{l_i - x}{l_i} V_1 v_1 - \frac{x}{l_i} V_2 v_2$$

$$S = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} - \frac{1}{l_i} V_1 v_1 + \frac{1}{l_i} V_2 v_2$$

Въ этихъ выраженіяхъ, неизвѣстны пока только величины суммъ моментовъ M_{i-1} и M_i относительно опорныхъ точекъ разсматриваемаго пролета, силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны этихъ точекъ, потому что моменты $V_1 v_1$ и $V_2 v_2$ зависятъ только отъ данныхъ грузовъ, дѣйствующихъ по обѣ стороны точки m; и всегда могутъ быть опредѣлены по нимъ.

Чтобы найти сопротивленіе Q_i опоры O_i, обратимъ вниманіе на то, что сумма S' силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны нѣкоторой точки m, взятой въ пролетѣ $O_i\,O_{i+1}$, смежномъ съ тѣмъ, который до сихъ поръ разсматривали, не будетъ

заключать въ себѣ сопротивленія опоры O_i, что слѣдовательно, совмѣщая эту точку т съ опорою O_i, мы получимъ для нея сумму силъ δ_i, отличающуюся на величину силы Q_i отъ суммы силъ δ_i, которую мы бы получили, если бы вычислили сумму δ силъ для точки т пролета $O_{i-1}\,O_i$, и передвинули бы эту точку слѣва направо до совмѣщенія съ опорою O_i; по силу, замѣчая, что сила Q_i, дѣйствующая снизу вверхъ, входитъ въ составъ суммы силъ δ_i съ отрицательнымъ знакомъ, имѣемъ

$$\delta_i = \delta_i' - Q_i \quad \text{и} \quad Q_i = \delta_i' - \delta_i$$

Но, для опредѣленія суммы δ' въ пролетѣ $O_i\,O_{i+1}$, очевидно можно примѣнить формулу, выведенную для суммы δ въ пролетѣ $O_{i-1}O_i$, измѣняя только нумера и отличая моменты данныхъ силъ, дѣйствующихъ по обѣ стороны точки т, прибавляемыми къ нимъ значками, и тогда:

$$\delta' = \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}} - \frac{1}{l_{i+1}} V_1' v_1' + \frac{1}{l_{i+1}} V_2' v_2'$$

Если затѣмъ въ обѣихъ выведенныхъ формулахъ для δ и δ', совмѣстимъ точки т, къ которымъ онѣ относятся съ среднею опорою O_i обоихъ смежныхъ пролетовъ, то въ первомъ пролетѣ сила V_2, а во второмъ сила V_1', какъ равнодѣйствующія силъ, приложенныхъ между точками т и опорою O_i, обратятся въ нули, а силы V_1 и V_2' сдѣлаются равными: первая равнодѣйствующей U_i всѣхъ данныхъ силъ, дѣйствующихъ въ лѣвомъ пролетѣ $O_{i-1}\,O_i$,

а вторая равнодействующей U_{i+1}, всех данных сил правого пролета $O_i O_{i+1}$. По сему, изображая через u_i и u_{i+1} абсциссы точек приложения этих равнодействующих относительно ближайших к ним левых опор, получаем для определения сил S_i и S_i' равенства

$$T_1 v_1 = U_i u_i \,,\quad T_2 v_2 = 0 \,,\quad T_1 v_1 = 0 \,,\quad T_2' v_2' = U_{i+1}(l_{i+1} - u_{i+1}) .$$

$$S_i = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} - \frac{1}{l_i} U_i u_i \,;\; S_i' = \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+1}} U_{i+1}(l_{i+1} - u_{i+1})$$

и затем, для сопротивления средней опоры:

$$Q_i = -\frac{M_{i-1}}{l_i} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) M_i - \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_i} U_i u_i + \frac{1}{l_{i+1}} U_{i+1}(l_{i+1} - u_{i+1}) .$$

По этой формуле сопротивления $Q_1, Q_2 \ldots Q_{n-1}$ всех средних опор могут быть найдены, когда известны величины моментов сил относительно каждой опоры. Итожде касается до сопротивлений Q_0 и Q_n двух крайних опор балки, то для определения второй из этих сил легко написать для последнего пролета $Q_{n-1} Q_n$ уравнение:

$$M_{n-1} = U_n u_n - Q_n l_n$$

откуда

$$Q_n = \frac{M_{n-1}}{l_n} + \frac{1}{l_n} U_n u_n \,;$$

и сопротивление Q_0 может быть найдено при помощи условия равновесия всех сил, действующих на балку, по которому сумма моментов всех сил относительно какой угодно точки должна быть равна нулю; применяя это условие к опорной точке O_1 первого пролета, нахо-

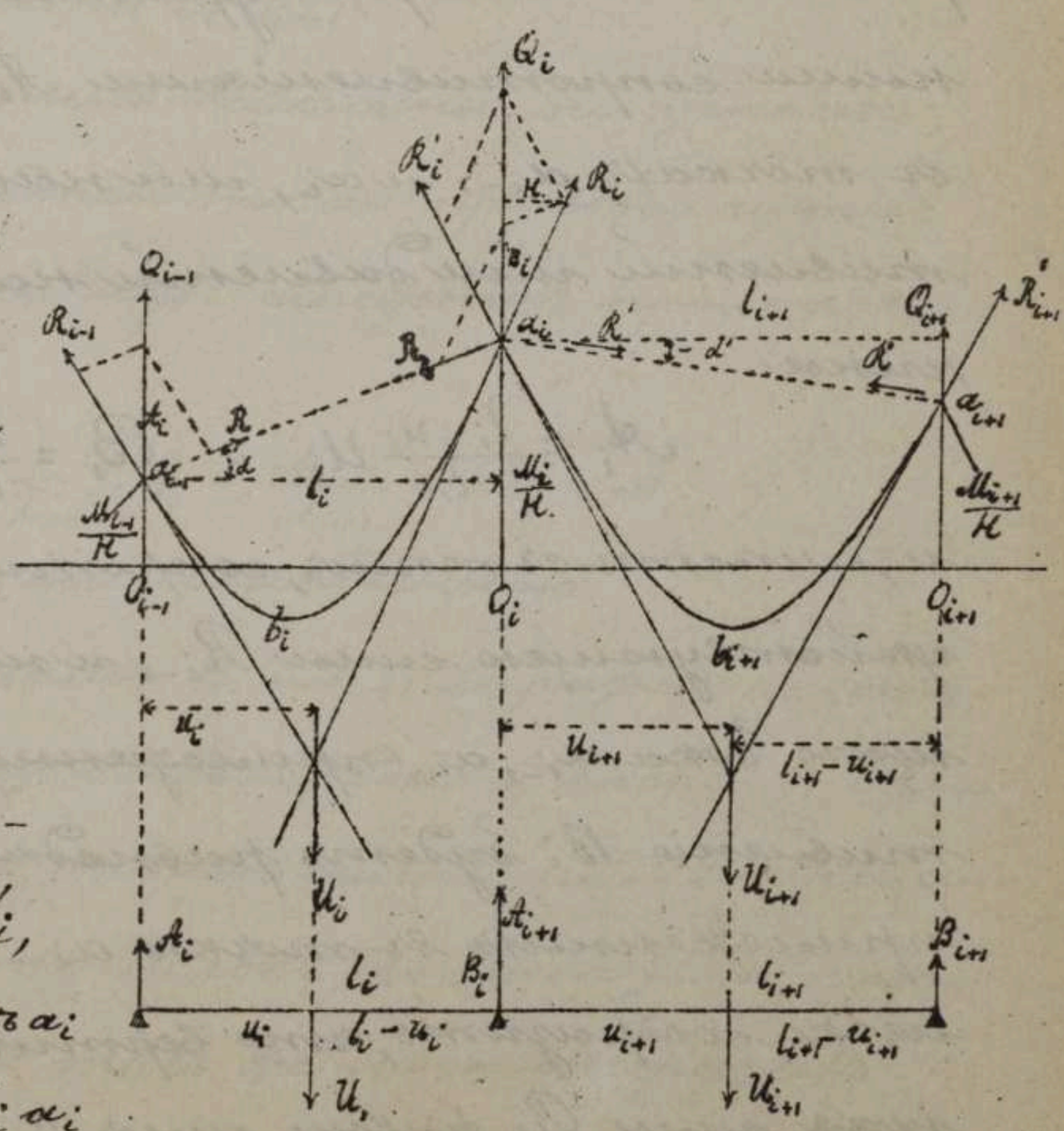
дить для суммы моментовъ всѣхъ силъ относительно ее

$$M_1 + Q_0 l_1 - U_1(l_1 - u_1) = 0.$$

откуда

$$Q_0 = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{l_1} U_1(l_1 - u_1)$$

Выведенная здѣсь формула для сопротивленія Q_i средней опоры двухъ смежныхъ пролетовъ имѣетъ нѣсколько сложный видъ, а потому не безполезно разъяснить значеніе ея членовъ. Для сего замѣтимъ, что сопротивленіе Q_i опоры O_i балки можно также разсматривать, какъ сопротивленіе средней точки a_i привѣса цѣпи $O_0 a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} a_{n-1} O_n$, несущей такую-же нагрузку, какъ и балка, и имѣющая такую длину и кривизну надъ каждымъ пролетомъ, что горизонтальное напряженіе во всѣхъ ея частяхъ одно и тоже и равно данной силѣ H, которой сохранимъ ея неопредѣленную величину для однородности выводимыхъ формулъ. Тогда легко видѣть, что сила Q_i должна быть равна равнодѣйствующей напряженій R_i и R'_i, прилегающихъ къ точкѣ a_i элементовъ нитей $a_{i-1} b_i a_i$



380. и $\alpha_i b_{i+1} a_{i+1}$ цѣпной линіи, принадлежащихъ двумъ смежнымъ пролетамъ $O_{i-1} O_i$ и $O_i O_{i+1}$, ближе, такъ какъ горизонтальныя составляющія силъ R_i и R'_i равны одной и той же силѣ H и взаимно противуположны, а слѣдовательно взаимно уравновѣшиваются, то сила Q_i будетъ равна суммѣ вертикальныхъ составляющихъ силъ R_i и R'_i. Чтобы найти эти вертикальныя составляющія, полученныя при разложеніи силъ R_i и R'_i по вертикальному и горизонтальному направленіямъ, замѣтимъ, что разсматривая вѣтвь $\alpha_{i-1} b_i \alpha_i$ какъ отдѣльную цѣпную линію съ несжимаемымъ замыкающимъ бокомъ $\alpha_{i-1} \alpha_i$, принадлежащую даннымъ грузамъ, которыхъ равнодѣйствующая равна U_i и которые уравновѣшены вертикальными сопротивленіями A_i и B_i, приложенными въ точкахъ α_{i-1} и α_i, мы найдемъ для этихъ сопротивленій или давленій опорныя точки величины

$$A_i = \frac{l_i - u_i}{l_i} U_i \quad \text{и} \quad B_i = \frac{u_i}{l_i} U_i$$

и, вмѣстѣ съ тѣмъ, сопротивленіе A_i будетъ равнодѣйствующею силы R_{i-1} и напряженія A замыкающаго бока $\alpha_{i-1} \alpha_i$, приложеннаго въ точкѣ α_{i-1}; а сопротивленіе B_i будетъ равнодѣйствующею силъ R_i и R, приложенныхъ въ точкѣ α_i. Вслѣдствіе этого, легко сообразить, что вертикальная составляющая силы R_i равна силѣ B_i, сложенной съ вертикальною составляющею H. tga силы R, гдѣ α изобра-

ждает уголъ между силою R и ея горизонтальною составляющею H. Но если горизонтальное напряженіе цѣпной линіи равно H, то ординаты точекъ α_{i-1} и α_i будутъ $\frac{M_{i-1}}{H}$ и $\frac{M_i}{H}$, а потому

$$tng\,\alpha = \frac{1}{l_i}\left(\frac{M_i}{H} - \frac{M_{i-1}}{H}\right)$$

и для искомой вертикальной составляющей силы R_i найдется величина

$$\frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + B_i \quad или \quad \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + \frac{1}{l_i} U_i u_i$$

Такимъ же образомъ легко найти для вертикальной составляющей силы R'_i крайняго элемента при точкѣ α_i вѣтви цѣпной линіи $\alpha_i b_{i+1} \alpha_{i+1}$ величину

$$\frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}} + A_{i+1} \quad или \quad \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+1}} U_{i+1}(l_{i+1} - u_{i+1}),$$

гдѣ A_{i+1} представляетъ давленіе на опору O_i груза U_{i+1}, существующаго въ пролетѣ $O_i O_{i+1}$.

Складывая же найденныя величины, получимъ для сопротивленія средней точки привѣса цѣпи или же и средней опоры двухъ смежныхъ пролетовъ балки формулу:

$$Q_i = -\frac{M_{i-1}}{l_i} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) M_i - \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}} + B_i + A_{i+1}),$$

очевидно одинаковую съ вышевыведенною.

Въ этой формулѣ сумма $B_i + A_{i+1}$ выражаетъ сопротивленіе, которое оказала бы средняя опора O_i, если-бы вмѣсто одной неразрывной балки надъ опорами лежалъ рядъ отдѣльныхъ балокъ, по одной надъ каждымъ пролетомъ, при тѣхъ же данныхъ грузахъ. — Изъ формулы также видно, что сопротивленіе O_i опоры подъ неразрывною балкою больше или меньше

382. суммы сопротивлений той же опоры подъ двумя отдѣльными балками, смотря потому, находится ли средняя точка прикрѣпа вѣтвей цѣпной линіи двухъ смежныхъ пролетовъ выше или ниже прямой линіи, соединяющей двѣ крайнія точки прикрѣпа. Когда же всѣ три точки прикрѣпа находятся на одной прямой, то

$$Q_i = A_{i+1} + B_i$$

Переходя къ выводу уравненія кривой изогнутой оси призмы, въ зависимости отъ суммъ моментовъ $M_0, M_1, M_2, \ldots M_n$ силъ относительно опорныхъ точекъ балки, выпишемъ предварительно величину суммы моментовъ M относительно какой угодно точки пролета подъ номеромъ i, для случая когда балка нагружена непрерывно распредѣленнымъ грузомъ, причемъ на единицу длины элемента dz разсматриваемаго пролета приходится грузъ p_i, вообще измѣняющійся вмѣстѣ съ абсциссою z элемента относительно ближайшей лѣвой опоры. Въ такомъ случаѣ также какъ и для балки, лежащей на двухъ только опорахъ легко найти:

$$V_1 v_1 = \int_0^x p_i z\,dz \quad \text{и} \quad V_2 v_2 = \int_x^{l_i} p_i (l_i - z)\,dz$$

и, подставляя въ вышевыведенную общую формулу для суммы моментовъ силъ, представить ее въ видѣ

$$M = \frac{l_i - x}{l_i} M_{i-1} + \frac{x}{l_i} M_i - \frac{l_i - x}{l_i} \int_0^x p_i z\,dz - \frac{x}{l_i} \int_x^{l_i} p_i (l_i - z)\,dz .$$

Это уравнение можетъ быть принято за уравне- 383.
ніе изогнутой линіи, которой перемѣщенная ордина-
та изображена черезъ M, положеніе же крайнихъ
точекъ опредѣлено ихъ ординатами M_{i-1} и M_i, и
дифференціальное уравненіе втораго порядка
имѣетъ видъ

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p_i$$

Отсюда слѣдуетъ, что для кривой изогнутой оси
балки надъ пролетомъ $O_{i-1}\,O_i$, которой дифферен-
ціальное уравненіе можетъ быть написано въ видѣ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

и которой крайнія точки опредѣлены ордината-
ми y_{i-1} и y_i, получится уравненіе, если въ преды-
дущемъ уравненіи для M замѣнимъ ординаты
M, M_{i-1} и M_i ординатами y, y_{i-1}, и y_i и единичный
грузъ p_i грузомъ $-\frac{M}{EI}$, разсматриваемымъ какъ
перемѣнная величина, зависящая отъ абсциссы
элемента длины оси. Такимъ образомъ найдемъ

$$y = \frac{l_i - x}{l_i}y_{i-1} + \frac{x}{l_i}y_i + \frac{l_i - x}{l_i}\int_0^x \frac{M}{EI}z\,dz + \frac{x}{l_i}\int_x^{l_i} \frac{M}{EI}(l_i - z)\,dz \ .$$

Въ случаѣ же когда всѣ опорныя точки оси нахо-
дятся на одной горизонтальной линіи, по кото-
рой тогда и направится ось абсциссъ, такъ
что ординаты y_{i-1} и y_i обратятся въ нуль и когда
поперечныя сѣченія балки одинаковы по всей ея
длинѣ, такъ что моментъ инерціи постоянная
величина, уравненіе кривой изогнутой оси надъ
пролетомъ $O_{i-1}\,O_i$ предстанвится въ балкѣ про-

384. стоитъ видъ

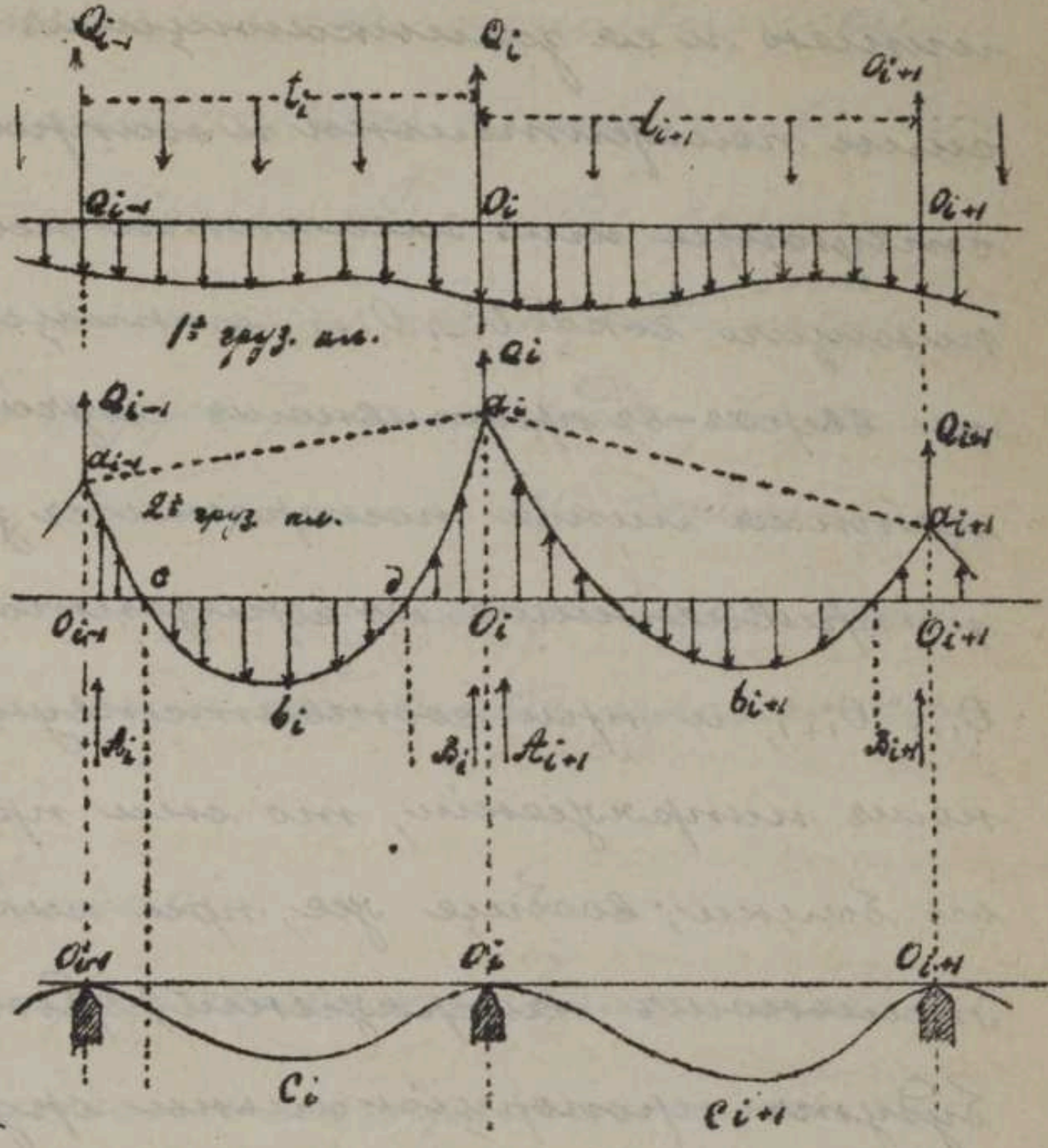
$$EI_y = \frac{l_i - x}{l_i} \int_0^x M z\,dz + \frac{x}{l_i} \int_x^{l_i} M(l_i - z)\,dz.$$

Въ подъ интегральныхъ функціяхъ этого уравненія заключается величина M, которая такъже какъ и величины δ и Q_i зависитъ отъ суммъ моментовъ M_0, M_1, M_2, ... M_n ихъ, относительно опорныхъ точекъ балки. И такъ, для опредѣленія всѣхъ этихъ величинъ, надобно предварительно найти величины суммъ моментовъ относительно опорныхъ точекъ. Для сего замѣтимъ, что существованіе величинъ нѣкоихъ суммъ моментовъ зависитъ единственно отъ неразрывности балки надъ всѣми ея опорами, потому что если бы надъ каждыми двумя смежными опорами неразрѣзная балка, то грузы и сопротивленія опоръ находились бы въ равновѣсіи въ каждомъ пролетѣ отдѣльно и суммы моментовъ ихъ, относительно какой угодно опоры, были бы равны нулю, потому что принадлежащія бы силамъ взаимно уравновѣшивающимся. Условіе же непрерывности балки очевидно равнозначущее съ тѣмъ, чтобы изогнутая ось балки образовала непрерывную кривую линію, плавно и безъ переломовъ проходящую черезъ всѣ ея опорныя точки.

Чтобы найти средства для опредѣленія нѣкоихъ суммъ моментовъ съ помощію этого условія, приложимъ здѣсь вышеизложенный общій

геометрический способъ опредѣленія кривой изгиба-

той оси тѣла, предположивъ для простоты сужденій, что поперечное сѣченіе балки и его моментъ инерціи одинаковы по всей ея длинѣ, и что всѣ опорныя точки оси балки находятся на одной горизонтальной линіи. По этому способу слѣдуетъ начать съ построенія цѣпной линіи для всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на балку, включая слѣдовательно не только данныя силы, какъ сосредоточенныя, такъ и непрерывно распредѣленныя, выражаемыя элементами первой грузовой площади, но и сопротивленія всѣхъ опорныхъ точекъ оси; принимаемыя пока за данныя. Положимъ, что линія $a_{i-1}\ b_i\ a_i\ b_{i+1}\ a_{i+1}$ представляетъ часть такой цѣпной линіи, соотвѣтствующую двумъ слѣдующимъ пролетамъ съ нумераціи i и $i+1$; что цѣпная линія эта построена при горизонтальномъ напряженіи равномъ единицѣ и съ масштабомъ, направленнымъ по горизонтальной линіи $O_{i-1}\ O_{i+1}$. За тѣмъ, слѣдуетъ построить вторую



 цѣпную линію для одной только непрерывно распре-
дѣленной силы, выражаемой элементами второй
грузовой площади, ограниченной первою цѣпною
линіею и ея замыкающими боками; причемъ эти
силы положительны и направлены внизъ, если соотвѣт-
ствующіе имъ элементы находятся ниже замы-
кающаго бока $O_{i-1}\,O_{i+1}$, отрицательны и направле-
ны вверхъ — въ противномъ случаѣ. Тогда, если вторая
цѣпная линія построена съ замыкающимъ бокомъ,
направленнымъ по горизонтальной линіи опоръ
$O_{i-1}\;O_{i+1}$, и при соотвѣтствующемъ горизонталь-
номъ напряженіи, то она представитъ изогнутую
ось балки; вообще же, при какомъ угодно горизон-
тальномъ напряженіи, ординаты цѣпной линіи
будутъ пропорціональны ординатамъ изогнутой
оси балки относительно прямолинейной до изги-
ба оси, принятой за ось абсциссъ.

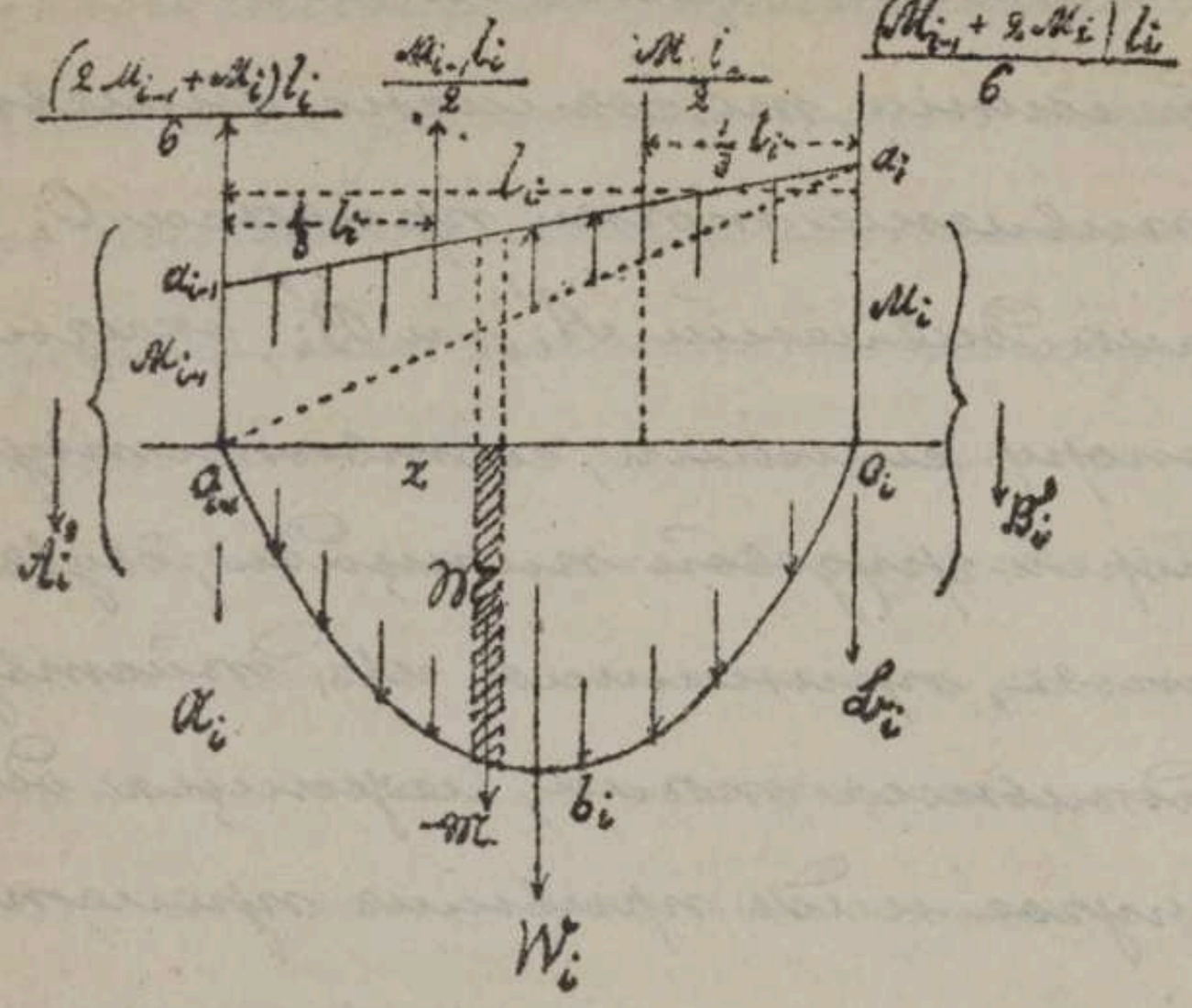
По условію неразрывности балки надъ опорою
O_i, часть $O_{i-1}\,c_i\,O_i\,c_{i+1}\,O_{i+1}$ второй цѣпной линіи, долж-
на пройти черезъ точку O_i въ видѣ плавной, не ло-
маной кривой, а, судя по вышеизложеннымъ об-
щимъ свойствамъ цѣпныхъ линій, это возможно
только тогда, когда между силами, которыми
она принадлежитъ, нѣтъ силы сосредоточенной въ
точкѣ O_i. Поэтому, если мы примемъ опорныя точки
оси балки за точки привѣса второй цѣпной линіи,
подверженной непрерывно распредѣленнымъ силамъ
второй грузовой площади, направленнымъ книзу

внизъ, частію же вверхъ, то сопротивленія каждой такой точки привѣса цѣпи должно быть равно нулю. Но какъ всѣ точки привѣса находятся на одной прямой линіи, то, согласно вышеизложенному, сопротивленіе точки привѣса O_i будетъ равно суммѣ давленій A'_{i+1} и B'_i, оказываемыхъ на эту опору смежными частями второй грузовой площади, двухъ слѣдующихъ пролетовъ, принимая ихъ дѣйствующими на два отдѣльныя тѣла, находящіяся одно надъ лѣвымъ, а другое надъ правымъ пролетомъ. И такъ уравненіе

$$B'_i + A'_{i+1} = 0$$

выражаетъ условіе непрерывности балки надъ среднею ея опорою O_i, и если его приложить ко всѣмъ среднимъ опорамъ, занимая неопредѣленный номеръ i послѣдовательно числами $1, 2, 3, \ldots n-1$, при полномъ числѣ n пролетовъ, то получается $n-1$ условное уравненія.

Чтобы воспользоваться этими уравненіями для опредѣленія нѣсколькихъ суммъ моментовъ $M_0, M_1, M_2, \ldots M_{n-1}, M_n$ изъ которыхъ только $n-1$ неизвѣстны, потому что моменты M_0 и M_n относительно крайнихъ опоръ очевидно равны нулю, когда балка внѣ крайнихъ опоръ не нагружена, слѣдуетъ теперь выразить величины B'_i и A'_{i+1} въ зависимости отъ нѣсколькихъ суммъ моментовъ и данныхъ силъ. Для сего, обращаясь



ствующей пролету $o_{i-1}\,o_i$, заметим, что ее можно рассматривать как сумму двух площадей, из которых одна принадлежит трапеции $a_{i-1}\,o_{i-1}\,o_i\,a_i$ и имеет отрицательные элементы, выражающие непрерывно распределенные силы направленные вверх, а вторая площадь $o_{i-1}\,b_i\,o_i$ принадлежит цепной линии, построенной для одних только данных грузов рассматриваемого пролета и уравновешивающих их сопротивлений, и имеет элементы положительные, выражающие непрерывно распределенные силы, направленные вниз. Давления трапецоидальной части второй грузовой площади на опоры o_{i-1} и o_i будут направлены вверх и их нетрудно определить, разделяя трапецию на два треугольника прямою $o_{i-1}\,a_i$. Тогда этими треугольниками будут соответствовать равнодействующия непрерывно распределенных

сил, изображенныя площадями $\frac{M_{i-1}b_i}{2}$ и $\frac{M_i l_i}{2}$, и проходящія черезъ центры тяжести треугольниковъ, т. е. направленныя по вертикальнымъ линіямъ, раздѣляющимъ длину пролета на три равныя части. Разлагая каждую изъ этихъ двухъ силъ на параллельныя имъ составляющія, приложенныя къ опорнымъ точкамъ, получимъ для давленія на опору O_{i-1} величину:

$$\frac{(2M_{i-1}+M_i)l_i}{6},$$

а для давленія на опору O_i величину:

$$\frac{(M_{i-1}+2M_i)l_i}{6}$$

Что же касается до давленій A_i и B_i, производимыхъ на опоры O_{i-1} и O_i по направленію сверху внизъ силами, соотвѣтствующими криволинейной части второй грузовой площади, то они очевидно зависятъ только отъ грузовъ, дѣйствующихъ на разсматриваемую часть балки, и въ каждомъ частномъ случаѣ опредѣляются сообразно роду этихъ грузовъ. — Такъ напримѣръ, когда надъ разсматриваемымъ пролетомъ балка нагружена равномѣрно распредѣленнымъ грузомъ p_i на единицу ея длины, кривая линія $O_{i-1}b_iO_i$ будетъ парабола, ордината которой раздѣляетъ пролетъ по полонамъ и равна $\frac{p_i l_i^2}{8}$, такъ что равнодѣйствующая W_i непрерывно распредѣленныхъ силъ криволинейной части второй грузовой площади выразится площадью параболы, т. е.

$$W_i = \frac{2l_i}{3}\cdot\frac{p_i l_i^2}{8} = \frac{p_i l_i^3}{12},$$

390. и произведетъ на опоры O_{i-1} и O_i давленія

$$A_i = B_i = \frac{p_i l_i}{24}^3 .$$

Въ случаѣ же, когда на часть $O_{i-1}\,O_i$ балки дѣйствуетъ какой угодно сосредоточенный грузъ P_i, приложенный на разстояніи z отъ лѣвой опоры O_{i-1}, то упругая линія $O_{i-1}\,b_i\,O_i$ обратится въ веревочный треугольникъ, принадлежащій данному грузу P_i и уравновѣшивающимъ его сопротивленіямъ

$$\frac{P_i(l_i - z)}{l_i} \quad \text{и} \quad \frac{P_i z}{l_i},$$

приложеннымъ въ точкахъ O_{i-1} и O_i. Въ этомъ треугольникѣ, ордината вершины предъявляетъ величину момента сопротивленій правой опоры относительно точки приложенія силы P_i и будетъ равна

$$\frac{P_i(l_i - z)z}{l_i}$$

и равнодѣйствующая непрерывно распредѣленныхъ силъ, измѣряемыхъ элементами площади треугольника, представится величиною этой площади

$$W_i = \frac{P_i(l_i - z)z}{2}$$

и будетъ приложена въ ея центрѣ тяжести, на разстояніяхъ

$$\frac{l_i + z}{3} \quad \text{и} \quad \frac{2l_i - z}{3}$$

отъ опорныхъ точекъ O_{i-1} и O_i; а посему для давленій на эти опоры получимъ

$$A_i = \frac{P_i(l_i - z)z}{2} \cdot \frac{2l_i - z}{3l_i} = \frac{1}{6l_i} P_i(2l_i^2 z - 3l_i z^2 + z^3)$$

$$B_i = \frac{P_i(l_i - z)z}{2} \cdot \frac{l_i + z}{3l_i} = \frac{1}{6l_i} P_i(l_i^2 z - z^3)$$

Если на разсматриваемую часть балки дѣйствуетъ нѣсколько сосредоточенныхъ силъ, въ какомъ угодно числѣ, то каждую изъ нихъ можно разсматривать какъ особую величину функціи P, отъ абсциссы z ея точки приложенія, а площадь цѣпной линіи $O_{i-1} b_i O_i$ — какъ сумму площадей веревочныхъ треугольниковъ, изъ которыхъ каждый соотвѣтствуетъ одной изъ различныхъ силъ P_i, и тогда давленіе непрерывно размѣщенныхъ силъ, представляемыхъ элементами площади $O_{i-1} b_i O_i$, на каждую изъ опоръ O_{i-1} и O_i, очевидно будетъ равно суммѣ давленій на тѣ же опору силъ, соотвѣтствующихъ элементамъ всѣхъ треугольниковъ, и мы найдемъ формулы:

$$A_i = \frac{1}{6 l_i} \int_0^{l_i} P_i (2 l_i^2 z - 3 l_i z^2 + z^3)$$

$$B_i = \frac{1}{6 l_i} \int_0^{l_i} P_i (l_i^2 z - z^3);$$

гдѣ знакъ $\int$ изображаетъ сумму различныхъ значеній приписанной къ нему функціи, соотвѣтствующихъ всѣмъ различнымъ значеніямъ абсциссы z между предѣлами нуль и l_i, опредѣляющими точки приложенія силъ, дѣйствующихъ на балку въ разсматриваемомъ пролетѣ съ нумеромъ i.

Такимъ же образомъ суммированіемъ площадей цѣпной линіи и веревочныхъ треугольниковъ легко увѣриться въ томъ, что если бы на разсматриваемую часть балки дѣйствовала равномѣрно размѣщенный грузъ p_i на единицу длины и, сверхъ того, сосредоточенные грузы,

392. то получили бы:

$$A_i = \frac{p_i l_i^3}{24} + \frac{1}{6 l_i} \sum_{0}^{l_i} P_i (2 l_i^2 z - 3 l_i z^2 + z^3)$$

$$B_i = \frac{p_i l_i^3}{24} + \frac{1}{6 l_i} \sum_{0}^{l_i} P_i (l_i^2 z - z^3).$$

Наконец, если бы на всю длину балки надо пролетом $O_{i-1} O_i$ действовала непрерывно, но вообще не равномерно распределенный груз, изменяемый величиною p_i на единицу длины элемента dz оси балки, то стоило бы только рассматривать каждый бесконечно малый груз $p_i dz$ как отдельный сосредоточенный груз P_i; тогда суммы заменятся определенными интегралами и мы найдем

$$A_i = \frac{1}{6 l_i} \int_0^{l_i} p_i (2 l_i^2 z - 3 l_i z^2 + z^3) dz \quad \text{и} \quad B_i = \frac{1}{6 l_i} \int_0^{l_i} p_i (l_i^2 z - z^3) dz.$$

Определивъ такимъ образомъ, въ зависимости отъ данныхъ силъ и искомыхъ моментовъ M_{i-1} и M_i, давленія на опоры O_{i-1} и O_i, какъ положительной, такъ и отрицательной части второй грузовой площади, мы легко найдемъ для полныхъ ея давлений на эти опоры величины

$$A_i' = A_i - \frac{(2 M_{i-1} + M_i) l_i}{6} \quad \text{и} \quad B_i' = B_i - \frac{(M_{i-1} + 2 M_i) l_i}{6};$$

и, такимъ же образомъ, нашли бы и для другого смежнаго пролета $O_i O_{i+1}$ величины:

$$A_{i+1}' = A_{i+1} - \frac{(2 M_i + M_{i-1}) l_{i+1}}{6} \quad \text{и} \quad B_{i+1}' = B_{i+1} - \frac{(M_i + 2 M_{i+1}) l_i}{6}.$$

Возвращаясь за тѣмъ къ вышеизложенному уравненію

$$B_i' + A_{i+1}' = 0,$$

выражающему условіе непрерывности балки надъ

опорою Oi, не трудно написать его после нѣкоторыхъ сокращеній въ видѣ:

$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} = 6 b_i + 6 a_{i+1};$$

и, подставляя въ него вмѣсто неопредѣленнаго нуме-ра i всѣ цѣлыя числа начиная отъ единицы до числа n всѣхъ пролетовъ балки, получить столько уравненій сколько имѣется промежуточныхъ опоръ балки и сколько нужно для опредѣленія неизвѣстныхъ суммъ моментовъ относительно этихъ промежуточныхъ опоръ. Суммы же моментовъ M_0 и M_n относительно двухъ крайнихъ опоръ равны нулю, если за крайними опорами нѣтъ силъ, дѣйствующихъ на балку; и если на свѣшенные за крайними опорами концы балки дѣйствуютъ данныя силы, то моменты этихъ силъ относительно прилегающихъ къ нимъ крайнихъ опоръ и будутъ равны величинамъ M_0 и M_n, которыя по сему могутъ всегда считаться извѣстными.

Для объясненія приведемъ нѣсколько простыхъ примѣровъ вычисленія суммъ моментовъ относительно опорныхъ точекъ балки, предполагая всѣ пролеты одинаковой длины l.

Для балки, лежащей на двухъ пролетахъ, найдемъ при $i = 1$:

$$M_0 = M_2 = 0; \quad 4 M_1 = 6 b_1 + 6 a_2; \quad M_1 = \frac{3}{2l}(b_1 + a_2);$$

для трехъ пролетовъ, сдѣлавъ послѣдовательно $i = 1$ и $i = 2$, получимъ:

$$M_0 = M_3 = 0; \quad 4 M_1 + M_2 = \frac{6}{l}(b_1 + a_2) \text{ и } M_1 + 4 M_2 = \frac{6}{l}(b_2 + a_3),$$

394. откуда:

$$M_1 = \frac{8}{5l}(b_1 + a_2) - \frac{2}{5l}(b_2 + a_3);\quad M_2 = -\frac{2}{5l}(b_1 + a_2) + \frac{8}{5l}(b_2 + a_3);$$

для четырех пролетов, при $i=1$, $i=2$, $i=3$, выйдет:

$$M_0 = M_4 = 0,\quad 4M_1 + M_2 = \frac{6}{l}(b_1 + a_2)$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = \frac{6}{l}(b_2 + a_3);$$

$$M_2 + 4M_3 = \frac{6}{l}(b_3 + a_4)$$

откуда:

$$M_1 = \frac{45}{281}(b_1 + a_2) - \frac{3}{71}(b_2 + a_3) + \frac{3}{281}(b_3 + a_4)$$

$$M_2 = -\frac{3}{71}(b_1 + a_2) + \frac{12}{71}(b_2 + a_3) - \frac{3}{71}(b_3 + a_4)$$

$$M_3 = \frac{3}{281}(b_1 + a_2) - \frac{3}{71}(b_2 + a_3) + \frac{45}{281}(b_3 + a_4)$$

и так далее.

Когда таким образом, в данном частном случае, суммы моментов $M_0\ M_1\ M_2 \ldots M_n$ определятся в зависимости от количеств $a_2, a_3 \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, в свою очередь известным образом зависящих от данных грузов, поддерживаемых балкою над различными ея пролетами, то легко также найти величины M и δ для какого угодно сечения балки на расстоянии x от ближайшей левой опоры,

над пролетом какого угодно номера i, а также величину сопротивления Q_i опоры по формулам

$$M = \frac{l_i - x}{l_i} M_{i-1} + \frac{x}{l_i} M_i - \frac{l_i - x}{l_i} V_1 v_1 - \frac{x}{l_i} V_2 v_2$$

$$\delta = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} - \frac{1}{l_i} V_1 v_1 + \frac{1}{l_i} V_2 v_2$$

$$Q_i = -\frac{M_{i-1}}{l_i} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) M_i - \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_i} U_i u_i + \frac{1}{l_{i+1}} U_{i+1}(l_{i+1} - u_{i+1}).$$

Применение этих формулъ къ частнымъ случаямъ не представляетъ никакихъ затрудненій, если грузы дѣйствующіе на балку имѣютъ опредѣленныя и неизмѣняемыя величины. Но когда грузы могутъ получать различныя величины, измѣняясь между данными предѣлами, какъ временные передвиженые грузы при мостовыхъ балкахъ, тогда вопросъ усложняется требованіемъ опредѣленія наибольшихъ численныхъ величинъ количествъ M, S и Q_i, или же наибольшихъ и наименьшихъ изъ величинъ, потому что наибольшая численная величина можетъ принадлежать наименьшей отрицательной величинѣ. Для объясненія хода рѣшенія вопроса въ этомъ случаѣ, представимъ величины, входящія въ выведенныя формулы, въ такомъ видѣ, при которомъ зависимость количествъ M, S и Q_i отъ величинъ данныхъ грузовъ ясно выражается.

Изобразимъ черезъ P_i грузъ, дѣйствующій въ точкѣ, опредѣленной абсциссою z, на балку надъ пролетомъ нумера i, при чемъ P_i будетъ имѣть конечную величину, если представляетъ грузъ сосредоточенный, и безконечно малую величину, равную $p_i\,dz$, если представляетъ элементъ непрерывно распредѣленнаго груза; но въ обоихъ случаяхъ величину P_i можно разсматривать какъ функцію отъ абсциссы z точки приложенія груза. Тогда принимая значеніе количествъ $V_1 v_1$, $V_2 v_2$, $U_i u_i$, не трудно составить фор-

мулы:

$$Y_1 v_1 = \sum_{\circ}^{z} P_i z \quad ; \quad Y_2 v_2 = \sum_{x}^{l_i} P_i (l_i - z)$$

$$U_i u_i = \sum_{\circ}^{l_i} P_i z \quad ; \quad U_{i+1} (l_{i+1} - u_{i+1}) = \sum_{\circ}^{l_{i+1}} P_{i+1} (l_{i+1} - z),$$

къ которымъ прибавимъ еще выше-выведенныя формулы:

$$A_i = \frac{1}{6 l_i} \sum_{\circ}^{l_i} P_i (2 l_i^2 z - 3 l_i z^2 + z^3) \quad \text{и} \quad B_i = \frac{1}{6 l_i} \sum_{\circ}^{l_i} P_i (l_i^2 z - z^3)$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ знакъ Σ изображаетъ сумму всѣхъ значеній, принимаемыхъ приписаннаго къ нему функціею при всѣхъ разсматриваемыхъ въ данномъ случаѣ значеніяхъ абсциссы z между нижнимъ и верхнимъ предѣлами знака Σ.

Вникая въ составъ этихъ формулъ и сближая ихъ съ формулами для количествъ $M_1, M_2, \ldots$ не трудно сообразить, что каждое изъ количествъ M, S и Q_i выразится суммою извѣстнаго числа членовъ вида

$$P f(x, z) \text{ или } P F(z),$$

гдѣ P представляетъ одну изъ конечныхъ или безконечно малыхъ силъ, дѣйствующихъ на балку, надъ разсматриваемымъ или же надъ какимъ либо другимъ пролетомъ, а множители: $f(x, z)$ или $F(z)$ представляютъ цѣлыя и раціональныя функціи отъ абсциссы z, точки приложенія силы P въ томъ пролетѣ, гдѣ эта сила дѣйствуетъ, и отъ абсциссы x точки, къ которой относятся количества M и S въ данномъ пролетѣ; въ формулахъ же для сопротивленія Q_i опоры, величина x не входитъ въ составъ множителей силы P. Затѣмъ ясно, что если велики

ны силъ P могутъ измѣняться между извѣстными предѣлами, тогда для полученія наибольшихъ величинъ количествъ M, S и Q; надобно придать наибольшую величину каждой изъ силъ P, которой множитель въ выраженіи разсматриваемаго количества имѣетъ положительный знакъ и наименьшую величину каждой изъ силъ P, которой множитель отрицателенъ; для полученія же наименьшихъ величинъ надобно поступать обратно, т.е. придать наименьшія величины положительнымъ членамъ формулъ и наибольшія величины отрицательнымъ.

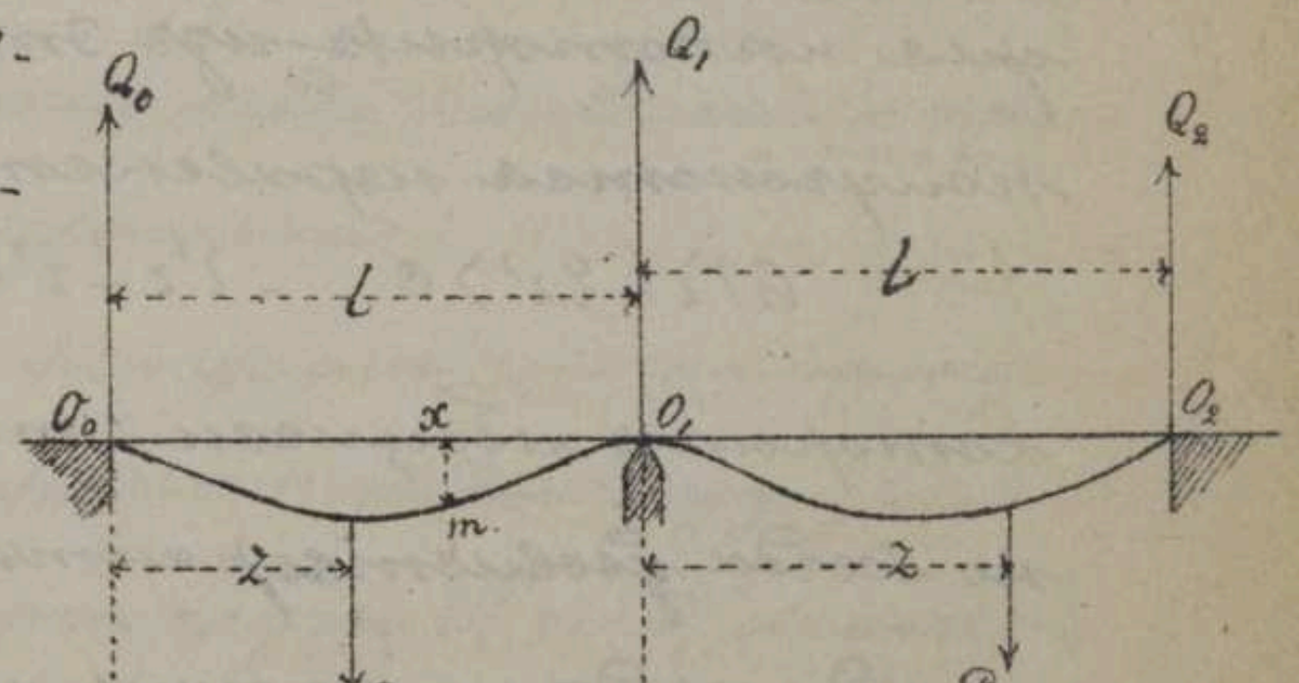
Для объясненія изложенной здѣсь теоріи приложимъ ее къ частному случаю, когда балка лежитъ на трехъ опорахъ и покрываетъ два равные между собою пролета.

Въ этомъ случаѣ по вышеизложенному имѣемъ:

$$M_0 = M_2 = 0\,; \quad M_1 = \frac{3}{2l}(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)\,; \quad \mathfrak{L}_1 = \frac{1}{6l}\sum_0^l P_1(l^2z - z^3) \text{ и } \mathfrak{L}_2 = \frac{1}{6l}\sum_0^2 P_2(2l^2z - 3lz + z^3).$$

$$M_1 = \frac{1}{4l^2}\sum_0^l P_1(l^2z - z^3) + \frac{1}{4l^2}\sum_0^l P_2(2l^2z - 3lz^2 + z^3).$$

Для опредѣленія сопротивленій Q_0 Q_1 и Q_2 опорныхъ точекъ оси балки, получаемъ изъ общихъ формулъ для разсматриваемаго случая:



$$Q_0 = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{l}U_1(l_1 - u_1)\,; \quad Q_1 = \frac{2M_1}{l} + \frac{1}{l}U_1u_1 + \frac{1}{l}U_2(l - u_2)$$

$$Q_2 = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{l}U_2u_2$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$U_1u_1 = \sum_0^l P_1z\,, \quad U_1(l - u_1) = \sum_0^l P_1(l - z)\,, \quad U_2u_2 = \sum_0^l P_2z \text{ и } U_2(l - u_2) = \sum_0^2 P_2(l - z)$$

Подставляя и приводя въ одинъ членъ всѣ члены,

398. заключающіе тѣже величину P_1 или P_2, получимъ:

$$Q_0 = \frac{1}{4l^3}\sum_0^2 P_1(4l^3 - 5l^2z + z^3) + \frac{1}{4l^3}\sum_0^1 P_2(-2l^2z + 3lz^2 - z^3)$$

$$Q_1 = \frac{1}{4l^3}\sum_0^2 P_1(6l^2z - 2z^3) + \frac{1}{4l^3}\sum_0^1 P_2(4l^3 - 6lz^2 + 2z^3)$$

$$Q_2 = \frac{1}{4l^3}\sum_0^2 P_1(-l^2z + z^3) + \frac{1}{4l^3}\sum_0^2 P_2(2l^2z + 3lz^2 - z^3)$$

По этимъ формуламъ не трудно вычислить величины сопротивленій опоръ, каковы бы ни были данныя силы P_1 и P_2, дѣйствующія въ первомъ и второмъ пролетѣ. Но если величины этихъ силъ могутъ измѣняться между извѣстными предѣлами, сохраняя однако свои точки приложенія, и если требуется опредѣлить: при какихъ величинахъ силъ сопротивленія опоръ получаютъ свои наибольшія и наименьшія величины, то слѣдуетъ обратить вниманіе на знаки, сопровождающіе множитель каждой силы въ выраженіи сопротивленія опоры. Для сего замѣтимъ, что для нѣкоторыхъ изъ этихъ множителей прямо получаются неравенства

$$6l^2z - 2z^3 > 0\,,\quad -l^2z + z^3 < 0\,.\quad 2l^2z + 3lz^2 - z^3 > 0\,,$$

которымъ абсциссы z точекъ приложенія силъ очевидно всегда удовлетворяютъ, потому что заключаются между предѣлами нуль и l; для опредѣленія же знаковъ остальныхъ множителей, можно ихъ представить въ видѣ произведеній изъ множителей, заключающихъ ихъ корни, и тогда найдутся неравенства

$$4l^3 - 5l^2z + z^3 = (l-z)(4l^2 - lz - z^2) > 0$$

$$-2l^2z + 3lz^2 - z^3 = -z(l-z)(2l-z) < 0$$

$$4l^3 - 6lz^2 + 2z^3 = 2(l-z)(2l^2 + 2lz - z^2) > 0$$

которыми также очевидно удовлетворяют абсциссы точек всех сил. Отсюда следует, что величина сопротивления Q_0 заключает в себе величины всех сил первого пролета с положительными величины всех сил второго пролета с отрицательными знаками; с величиною сопротивления Q_2 имеет место обратное, а величина сопротивления Q_1 средней опоры заключает в себе величины всех сил, как первого, так и второго пролета с положительными знаками. Поэтому, чем больше каждая сила в первом пролете чем меньше каждая сила во втором, тем больше будет сопротивление первой опоры и обратно; а чем больше каждая сила в обоих пролетах, тем больше сопротивления средней опоры. Таким образом и определяются те величины сил, при которых сопротивления Q_0, Q_1 и Q_2 получают свои наибольшия и наименьшия величины, когда наибольшия предельныя величины сил известны.

Для частного примера положим, что на балку действуют в каждом пролете по два груза, а именно: в первом пролете грузы P_1' и P_1'' в точках, определяемых абсциссами $\frac{l}{3}$ и $\frac{2l}{3}$, и во втором пролете грузы P_2' и P_2'', в точках с такими же абсциссами; тогда для сопротивления Q_0 левой опоры получим Z_0, подставляя вместо λ первую дробь величин, множителями сил P_1' и P_2' и вторую

100. величину вспомогательной силы P_1'' и P_2'', выражение:

$$Q_0 = \frac{16}{27} P_1' + \frac{13}{54} P_1'' - \frac{5}{54} P_2' - \frac{2}{27} P_2''.$$

Если на балку действует груз равномерно распределенный, в первом пролете p_1 и во втором p_2 на единицу длины, тогда в формулах для сопротивлений опор можно каждую из сил P_1 и P_2 заменить соответствующею бесконечно малою силою $p_1 dz$ и $p_2 dz$, изменив суммирование заменить определенными интегралами. Таким образом при постоянных величинах p_1 и p_2 нашли бы

$$Q_0 = \frac{1}{4l^3}\int_0^l p_1(4l^3 - 5l^2 z + z^3)\,dz + \frac{1}{4l^3}\int_0^l p_2(-2l^2 z + 3lz^2 - z^3)\,dz;$$

или, по совершении интегрирований,

$$Q_0 = \frac{7}{16} p_1 l - \frac{1}{16} p_2 l;$$

и, подобно этому, получили бы также:

$$Q_1 = \frac{5}{8} p_1 l + \frac{5}{8} p_2 l \quad \text{и} \quad Q_2 = -\frac{1}{16} p_1 l + \frac{7}{16} p_2 l.$$

Из этих формул можно заключить во первых, что сопротивление средней опоры положительно, т.е. направлено вверх, как при наибольшей, так и при наименьшей нагрузках пролетов, и что его наибольшая величина получается при наибольшей одновременной нагрузке обоих пролетов; во вторых, что сопротивление каждой из крайних опор наибольшее, когда прилегающий к ней пролет нагружен возможно более, т.е. и постоянным и временным грузом, а другой пролет нагружен возможно менее, т.е. одним только постоянным грузом; в третьих, что если случится, что груз одного пролета более, чем в семь

разъ превзойдетъ грузъ другого пролета, то сопротивленіе крайней опоры послѣдняго сдѣлается отрицательнымъ, а это показываетъ, что если балка не прикрѣплена къ опорѣ; то она отъ нея отдѣлится. Такой случай конечно можетъ встрѣтиться только при малыхъ пролетахъ, перекрываемыхъ легкими балками, и если онъ возможенъ, то по прекращеніи дѣйствія временнаго груза, поднявшаго конецъ балки, произойдетъ каждый разъ ударъ балки объ опору.

Обратимся теперь къ опредѣленію суммы моментовъ M силъ, дѣйствующихъ съ правой стороны какой либо точки x на оси балки въ первомъ ея пролетѣ, разсмотрѣніемъ котораго можно ограничиться, потому что въ слѣдствіе симметріи обоихъ пролетовъ все, что окажется въ первомъ пролетѣ, можетъ быть отнесено и ко второму. —

Для сего имѣемъ согласно общимъ формуламъ:

$$M = \frac{x}{l} M_1 - \frac{l-x}{l} \overline{V_1 v_1} - \frac{x}{l} \overline{V_2 v_2}$$

$$M_1 = \frac{1}{4l^2} \sum_0^l P_1 (l^2 z - z^3) + \frac{1}{4l^2} \sum_0^l P_2 (2l^2 z - 3lz^2 + z^3)$$

$$\overline{V_1 v_1} = \sum_0^x P_1 z \quad \text{и} \quad \overline{V_2 v_2} = \sum_0^l P_1 (l - z).$$

и, по подстановкѣ, первая формула предетавится въ видѣ:

$$M = \frac{1}{4l^2} \sum_0^l P_1 (l^2 xz - xz^3) - \frac{1}{4l^3} \sum_0^x P_1 (4l^3 z - 4l^2 xz) - \frac{1}{4l^3} \sum_x^l P_1 (4l^3 x - 4l^2 xz) + \frac{1}{4l^3} \sum_0^l P_2 (2l^2 z - 3lz^2 + z^3).$$

Но, чтобы судить о вліяніи на величину M каждой отдѣльной силы P_1, соотвѣтствующей данной абсциссѣ z, нужно чтобы эта сила не заключалась въ двухъ различныхъ суммахъ, а посему ко второй и третьей суммамъ членовъ слѣдуетъ присоединить

402. тѣ части первой суммы, которыя заключаютъ-тѣ же силы, а именно ко второй суммѣ часть первой, относящуюся къ силамъ, которыхъ точки приложенія имѣютъ абсциссы z между предѣлами нуль и x, а къ третьей суммѣ часть первой, относящуюся къ величинамъ z между предѣлами x и l; для этого стоитъ только первую сумму написать въ видѣ:

$$\frac{1}{4l^3}\sum_{0}^{x} P_1(l^2xz - xz^3) + \frac{1}{4l^3}\sum_{x}^{l} P_1(l^2xz - xz^3)$$

и тогда не трудно найти формулу:

$$M = \frac{1}{4l^3}\sum_{0}^{x} P_1(-4l^3z + 5l^2xz - xz^3) + \frac{x}{4l^3}\sum_{x}^{l} P_1(-4l^3 + 5l^2z - z^3) + \frac{x}{4l^3}\sum_{0}^{l} P_2(2l^2z - 3lz^2 + z^3)$$

Въ случаѣ же непрерывно разпредѣленныхъ грузовъ p_1 и p_2 на единицу длины перваго и втораго пролетовъ, мы бы получили, замѣняя P_1 и P_2 черезъ $p_1 dz$ и $p_2 dz$ и суммы конечныя членовъ опредѣленными интегралами:

$$M = \frac{1}{4l^3}\int_{0}^{x} p_1(-4l^3z + 5l^2xz - xz^3)dz + \frac{x}{4l^3}\int_{x}^{l} p_1(-4l^3 + 5l^2z - z^3)dz + \frac{x}{4l^3}\int_{0}^{l} p_2(2l^2z - 3lz^2 + z^3)dz.$$

По этимъ формуламъ величина M можетъ быть вычислена для каждой абсциссы x точки T на оси балки, если величины и разпредѣленія грузовъ даны, т.е. если силы P_1 и P_2 или p_1 и p_2 извѣстны для каждой величины перемѣнной абсциссы z. Но если силы эти могутъ измѣняться между данными предѣлами, какъ напримѣръ въ случаѣ равномѣрнаго разпредѣленія постояннаго груза p' по всей длинѣ балки и временнаго p'' только на нѣкоторой части ея длины, то можетъ требоваться опредѣлить наибольшую и наименьшую величину M для данной абсциссы x

точки т, и тогда надобно узнать какими знаками 403.
въ формулѣ сопровождаются грузы $p_1 dz$ и $p_2 dz$, дѣйствующія на различныя мѣста балки. Для этого надобно увѣриться сохраняютъ ли подъ интегральныя функціи одинаковый знакъ для величинъ z въ предѣлахъ интеграла и если нѣтъ, то раздробить интегралы на такія части, чтобы условіе неизмѣняемости знака подъ интегральныхъ функцій было удовлетворено, и тогда предѣлы и знаки интеграловъ укажутъ въ какихъ частяхъ балки слѣдуетъ увеличить и въ какихъ уменьшить грузы p_1 и p_2, чтобы получить наибольшую или наименьшую величину M.

Подъ интегральная функція третьяго члена величины M, относящагося ко второму пролету, представленная въ видѣ

$$2lz^2 - 3lz^2 + z^3 = z(l-z)(2l-z),$$

очевидно всегда положительна для положительныхъ величинъ z, меньшихъ чѣмъ l, и слѣдовательно всѣ грузы $p_2 dz$ увеличиваютъ величину M. Посему, для наибольшей величины M, грузъ p_2 долженъ быть равенъ $p' + p''$, а для наименьшей равенъ p'; въ обоихъ случаяхъ онъ будетъ постояннымъ для всей длины второго пролета, и слѣдовательно можетъ быть выведенъ за знакъ интеграла, при чемъ получится

$$\frac{x}{42^3} \int_0^{2l} p_2 (2lz^2 - 3lz^2 + z^3) dz = \frac{p_2 l^4}{16}.$$

Вторая подъ интегральная функція, относящаяся къ части перваго пролета между точкою т и сре-

нею опорою O_1, можетъ быть представлена въ видѣ

$$-4l^3+5l^2z-z^3=-(l-z)(4l^2-lz-z^2),$$

показывающемъ, что она отрицательна для всѣхъ разсматриваемыхъ величинъ z; по сему всѣ грузы $p_1 dz$, дѣйствующіе между точкою m и среднею опорою O_1, уменьшаютъ величину момента M, и должны быть равны $p' dz$ для наибольшей и равны $(p'+p'')dz$ для наименьшей величины M.

Подъ интегральная функція перваго члена выраженія M, относящаяся къ части перваго пролета между лѣвою опорою и точкою m, можетъ быть написана слѣдующимъ образомъ.

$$-4l^3z+5l^2xz-xz^3=-xz\left\{\frac{(4l-5x)l^2}{x}+z^2\right\};$$

и тогда видно, что она отрицательна для всѣхъ величинъ z между предѣлами 0 и x интеграла, если абсцисса x точки m такова, что

$$4l-5x\geqq 0 \quad \text{или} \quad x\leqq\frac{4}{5}l,$$

т.е. когда точка m находится въ части пролета, простирающейся отъ лѣвой опоры до $\frac{4}{5}$ всей длины его. Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, грузы $p_1 dz$, дѣйствующіе на часть $O_0 m$, будутъ уменьшать величину M, такъ же какъ и грузы, дѣйствующіе на часть mO_1, т.е. величина M будетъ наибольшая при наименьшей нагрузкѣ всего перваго пролета и наименьшая при наибольшей его нагрузкѣ.

Но если точка m, къ которой относится сумма моментовъ M, находится ближе къ средней опорѣ, такъ что абсцисса ея удовлетворяетъ нера-

венству:

$$x > \frac{4}{5} l \quad \text{или} \quad 4l - 5x < 0,$$

тогда подъинтегральная функція перваго члена выраженія M положительна для величинъ z удовлетворяющихъ неравенству:

$$\frac{(4l-5x)l^2}{x} + z^2 < 0 \quad \text{или} \quad z < l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}},$$

и отрицательна для величинъ z, ему неудовлетворяющихъ; и нетрудно увѣриться, что между величинами z, меньшими чѣмъ x, т.е. принадлежащими разсматриваемой части 0. т пролета, дѣйствительно имѣются такія, которыя этому неравенству неудовлетворяютъ, потому что если для наибольшей величины $z = x$ написать неравенство

$$x > l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}},$$

и представить его въ видѣ:

$$x^3 - 5l^2x + 4l^3 = (l-x)(4l^2 - lx - x^2) > 0,$$

то очевидно, что оно всегда удовлетворяется абсциссою x точки m. - Въ этомъ случаѣ грузы, дѣйствующіе на часть перваго пролета, прилегающую къ лѣвой опорѣ и простирающуюся на длину

$$l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}$$

будутъ въ выраженіи M сопровождаться положительнымъ знакомъ, и слѣдовательно увеличивать величину M; а грузы дѣйствующіе на остальную часть пролета до точки m будутъ имѣть отрицательный знакъ и уменьшать величину M, такъ же какъ и грузы, дѣйствующіе за точкою m вплоть до средней опоры. - Чтобы получить понятіе о длинѣ лѣвой части перваго

406. пролета которой грузы увеличивают величину M в этом случае, стоит только вычислить её для нескольких величин x, больших чем $\frac{4}{5}l$; такими образами получим

при $x=\frac{4}{5}l$ . . . . . $l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}=0$.

при $x=\frac{7}{8}l$ . . . . . $l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}=l\sqrt{\frac{3}{7}}=0,655l$, почти $\frac{2}{3}l$.

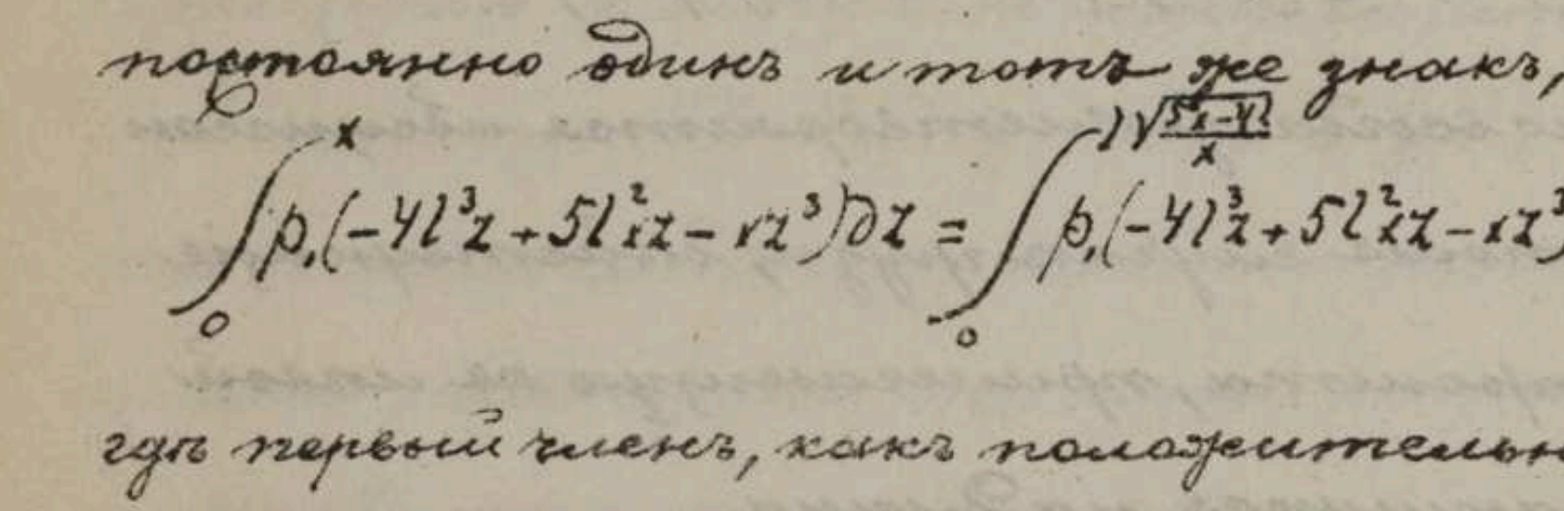
при $x=\frac{9}{10}l$ . . . . . $l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}=l\sqrt{\frac{5}{9}}=0,745l$ — . — $\frac{3}{4}l$.

при $x=l$ . . . . . $l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}=l$

Чтобы для этого случая положения точки m, дальше, чем на $\frac{4}{5}l$ от крайней левой опоры, отделить силы $p_1 dz$, сопровождаемые положительным знаком, от тех, при которых имеется знак отрицательный, надобно первый член выражения разложить на два интеграла с такими пределами, между которыми под интегральными функциями удерживают постоянно один и тот же знак, т.е. сделать

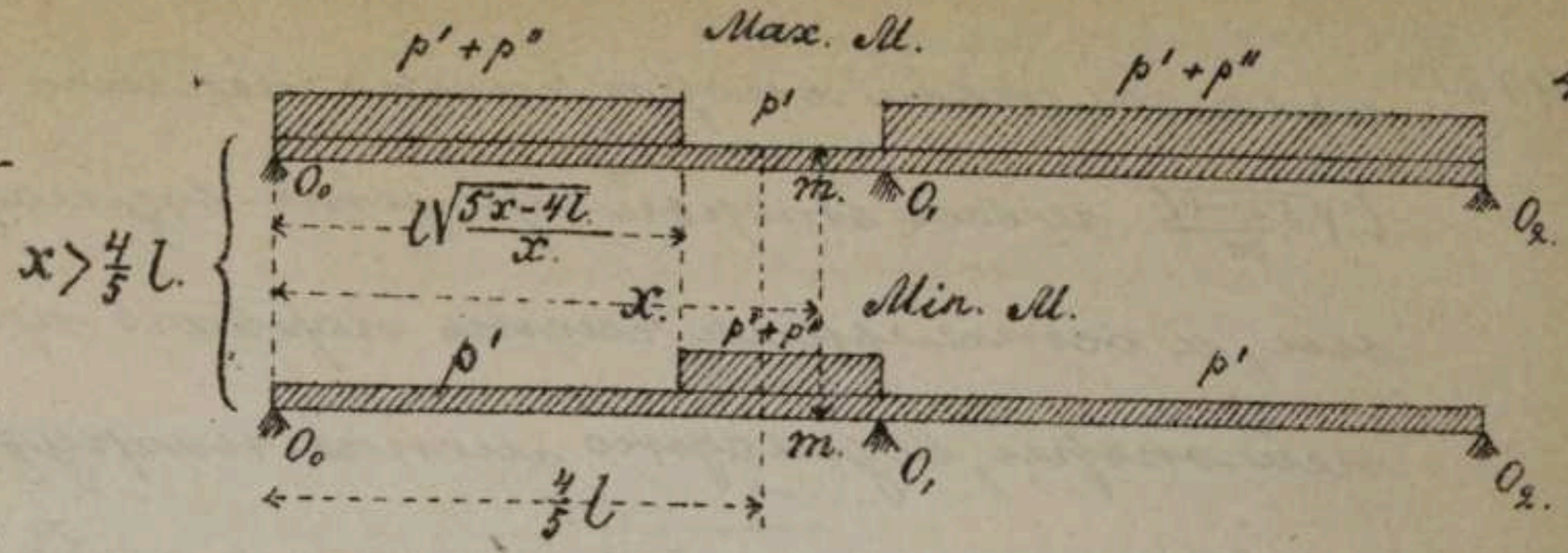
$$\int_0^x p_1(-4l^3z+5l^2z^2-xz^3)dz=\int_0^{l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}} p_1(-4l^3z+5l^2z^2-xz^3)dz+\int_{l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}}^x p_1(-4l^3z+5l^2z^2-xz^3)dz,$$

где первый член, как положительный, заключает силы $p_1 dz$, увеличивающие величину M, а второй, отрицательный, заключает силы $p_1 dz$, ее уменьшающие.



Приложение чертежи изображают разделение временного груза,

соответствующее наибольшей и наименьшей величинам суммы моментов M в обоих здесь указанных случаях.



Соображая все здѣсь сказанное, не трудно вывести формулы для опредѣленія наибольшей и наименьшей величинъ суммы моментовъ M. Въ случаѣ, когда абсцисса точки m, относительно которой берутся моменты, удовлетворяетъ неравенству

$$x \leqq \frac{4}{5} l$$

наибольшая величина M получится, если во всѣхъ участкахъ выраженія M предположить

$$p_1 = p' \quad , \quad p_2 = p' + p'' ;$$

а наименьшая величина M получится противоположномъ предположеніи. По сему:

$$\text{Max. } M = \frac{p'}{4l^3}\left[\int_0^x (-4l^3 z + 5l^2 xz - xz^3)\,dz + \int_x^l (-4l^3 x + 5l^2 xz - xz^3)\,dz\right] + \frac{(p'+p'')2x}{16} .$$

или по совершеніи интегрированія

$$\text{Max. } M = -\frac{p'x(7l-8x)}{16} + \frac{(p'+p'')lx}{16} = -\frac{p'x(3l-4x)}{8} + \frac{p''lx}{16} ;$$

и, такимъ же образомъ, при $p_1 = p' + p''$ и $p_2 = p'$

$$\text{Min. } M = -\frac{(p'+p'')(7l-8x)x}{16} + \frac{p'lx}{16} = -\frac{p'x(3l-4x)}{8} - \frac{p''x(7l-8x)}{16} .$$

Если же абсцисса точки m удовлетворяетъ неравенству:

$$x > \frac{4}{5} l ,$$

то наибольшая величина M получится, если прилегаю-

щая къ лѣвой опорѣ часть перваго пролета длиною $l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}$ и весь второй пролетъ возможно болѣе нагружены, а остальная часть перваго пролета, близь средней опоры, возможно менѣе нагружена; наименьшая же величина получится при обратномъ размѣщеніи грузовъ. Въ этомъ случаѣ формула для Max. M представится въ видѣ:

$$Max.\ M = \frac{p'+p''}{4l^3}\int_0^{l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}}(-4l^3z+5l^2xz-xz^3)dz+\frac{p'}{4l^3}\int_{l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}}^{x}(-4l^3z+5l^2xz-xz^3)dz+$$

$$+\frac{p'x}{4l^3}\int_x^l(-4l^3+5l^2xz-z^3)dz+\frac{(p'+p'')lx}{16};$$

или же, если замѣтить, что всѣ члены, заключающіе p', должны дать тоже сумму, какъ и въ предыдущемъ случаѣ при $x < \frac{4}{5}l$:

$$Max.\ M = -\frac{p'x(7l-8x)}{16}+\frac{p''}{4l^3}\int_0^{l\sqrt{\frac{5x-4l}{x}}}(-4l^3z+5l^2xz-xz^3)dz+\frac{(p'+p'')lx}{16}.$$

При совершеніи интегрированія получится

$$Max.\ M = -\frac{p'x(7l-8x)}{16}+\frac{p''l(5x-4l)^2}{16x}+\frac{(p'+p'')lx}{16};$$

и, по сокращеніи:

$$Max.\ M = \frac{p'x(4x-3l)}{8}+\frac{p''l}{16}\cdot\frac{(5x-4l)^2+x^2}{x}.$$

Чтобы упростить опредѣленіе величины Min. M, стоитъ только замѣтить, что ей соотвѣтствуетъ размѣщеніе грузовъ обратное тому, при которомъ получается Max. M, т. е. тѣ части балки, на которыя при Max. M дѣйствуютъ грузы p' и $p'+p''$, при Min M на оборотъ поддерживаютъ грузы $p'+p''$ и p'; а слѣдовательно, величина Min M получится, если въ выраженіи Max. M замѣнить p' чрезъ $p'+p''$ и $p'+p''$ чрезъ p' или же p'', равное $(p'+p'')-p'$,

замѣнить чрезъ $p'-(p'+p'')$, равное $-p''$. Посему можно написать:

$$Min.\,M = \frac{(p'+p'')x.(4x-3l)}{8} - \frac{p''l}{16}.\frac{(5x-4l)^2+x^2}{x};$$

или же, по сокращеніи:

$$Min.\,M = \frac{p'x(4x-3l)}{8} - \frac{p''(l-x)^2(2l-x)}{2x}.$$

Такъ какъ наименьшая величина M можетъ быть отрицательною и наибольшая величина можетъ иногда быть больше наибольшей величины M, то разсмотримъ при какихъ величинахъ абсциссы x точки m это будетъ имѣть мѣсто. Для сего надобно рѣшить неравенство

$$-Min.\,M > Max.\,M \text{ или } Max.\,M + Min.\,M < 0$$

Величину первой части втораго неравенства легко найти, если замѣтить, что въ каждой изъ величинъ Max. M и Min. M заключается сумма моментовъ постояннаго груза p', распредѣленнаго по всей длинѣ, а слѣдовательно въ суммѣ величинъ Max. M и Min. M грузъ p' долженъ заключаться вдвойнѣ; временной же грузъ p'' заключается въ Max. M какъ распредѣленный только на нѣкоторыя части балки, и въ Min. M только какъ распредѣленный на всѣ остальныя части балки; слѣдовательно, въ суммѣ Max. M и Min M, онъ долженъ заключаться какъ распредѣленный по всей длинѣ балки.

Посему, эта сумма получится если опредѣлить величину M при грузѣ $2p'+p''$, распредѣлен-

410. ноль по всей длине балки, также как это до сих пор предполагалось для груза p', и неравенство представится в виде

$$\frac{(2p'+p'')x(4x-3l)}{16} < 0.$$

откуда

$$x < \frac{3}{4}l.$$

Итак, для первых трех четвертей длины пролета, ближайших к крайней опоре, наибольшая численная величина M будет принадлежать $Min.M$. Чтобы с наглядностью представить совокупность различных величин $Max.M$ и $Min\,M$, соответствующих различным частям первого пролета балки, можно эти величины изобразить на чертеже в виде ординат кривых линий, которых абсциссы совпадают с абсциссами точки m, к которой относится сумма моментов M. Для сего, обращаясь сперва к части первого пролета, в которой:

$$x < \frac{4}{5}l,$$

имеем уравнения кривых линий

$$Max.M = y = -\frac{p'x(3l-4x)}{8} + \frac{p''lx}{16}$$

$$Min.M = y' = -\frac{p'x(3l-4x)}{8} - \frac{p''(7l-8x)x}{16}.$$

Так как ординаты обеих кривых выражаются целыми и рациональными функциями второй степени от абсциссы, то обе кривые будут параболы, которых оси перпендикулярны к оси абсцисс. Для начертания парабол определим положение главнейших точек их. Точки пересечения с осью

абсцисса $O_0 O_1$ параболы Max. M, определяются из 411.
уравнения:

$$-\frac{p'x(3l-4x)}{8}+\frac{p''lx}{16}=0, \quad \text{откуда} \quad x=0 \text{ и } x=\frac{6p'-p''}{8p'}\cdot l;$$

поэтому абсцисса и ордината вершины параболы
Max. M будут

$$x=\frac{6p'-p''}{16p'}\cdot l \quad \text{и} \quad y=-\left(\frac{6p'-p''}{16}\right)^2\frac{l^2}{2p'};$$

координаты же крайней точки ветви параболы
Max. M, для рассматриваемой части пролета
будут:

$$x=\frac{4}{5}l \quad \text{и} \quad y=\frac{2p'+5p''}{100}\cdot l^2;$$

наконец, координаты точки, соответствующей
средней опоре O_1 на продолжении параболы, будут:

$$x=l \quad \text{и} \quad y=\frac{2p'+p''}{16}\cdot l^2.$$

Уравнение параболы Min M, как видно из преди-
дущего, получается из уравнения параболы Max. M
заменою p' через $p'+p''$ и p'' через $-p''$. Поэтому для пара-
болы Min. M легко найти:

Абсциссы точек пересечения с осью абсцисс

$$x=0 \quad \text{и} \quad x=\frac{6p'+7p''}{8(p'+p'')}\cdot l,$$

координаты вершины:

$$x=\frac{6p'+7p''}{16(p'+p'')}l \text{ и } y'=-\left(\frac{6p'+7p''}{16}\right)^2\frac{l^2}{2(p'+p'')};$$

координаты крайней точки ветви параболы:

$$x=\frac{4}{5}l \quad \text{и} \quad y'=\frac{2p'-3p''}{100}\cdot l^2$$

и координаты точки продолжения параболы Min. M
для средней опоры O_1:

$$x=l \quad \text{и} \quad y=\frac{2p'+p''}{16}l^2.$$

Для остальной части первого пролета, въ которой

$$x > \frac{4}{5} l,$$

Уравненія кривыхъ линій будутъ:

$$y = \text{Max. } M = \frac{p'x(4x-3l)}{8} + \frac{p''l}{16} \cdot \frac{(5x-4l)^2 + x^2}{x}$$

$$y' = \text{Min. } M = \frac{(p'+p'')x(4x-3l)}{8} - \frac{p''l}{16} \cdot \frac{(5x-4l)^2 + x^2}{x}.$$

и какъ ординаты выражаются дробными функціями отъ абсциссъ, то кривыя здѣсь не будутъ парабо-лы. Для начертанія ихъ, опредѣлимъ ординаты ихъ крайнихъ точекъ и одной изъ среднихъ, а именно:

при $x = \frac{4}{5} l$ . . . . . $y = \frac{2p' + 5p''}{100} \cdot l^2$

$$y' = \frac{2p' - 3p''}{100} \cdot l^2$$

при $x = \frac{7}{8} l$ . . . . . $y = \frac{49p' + 58p''}{896} \cdot l^2$

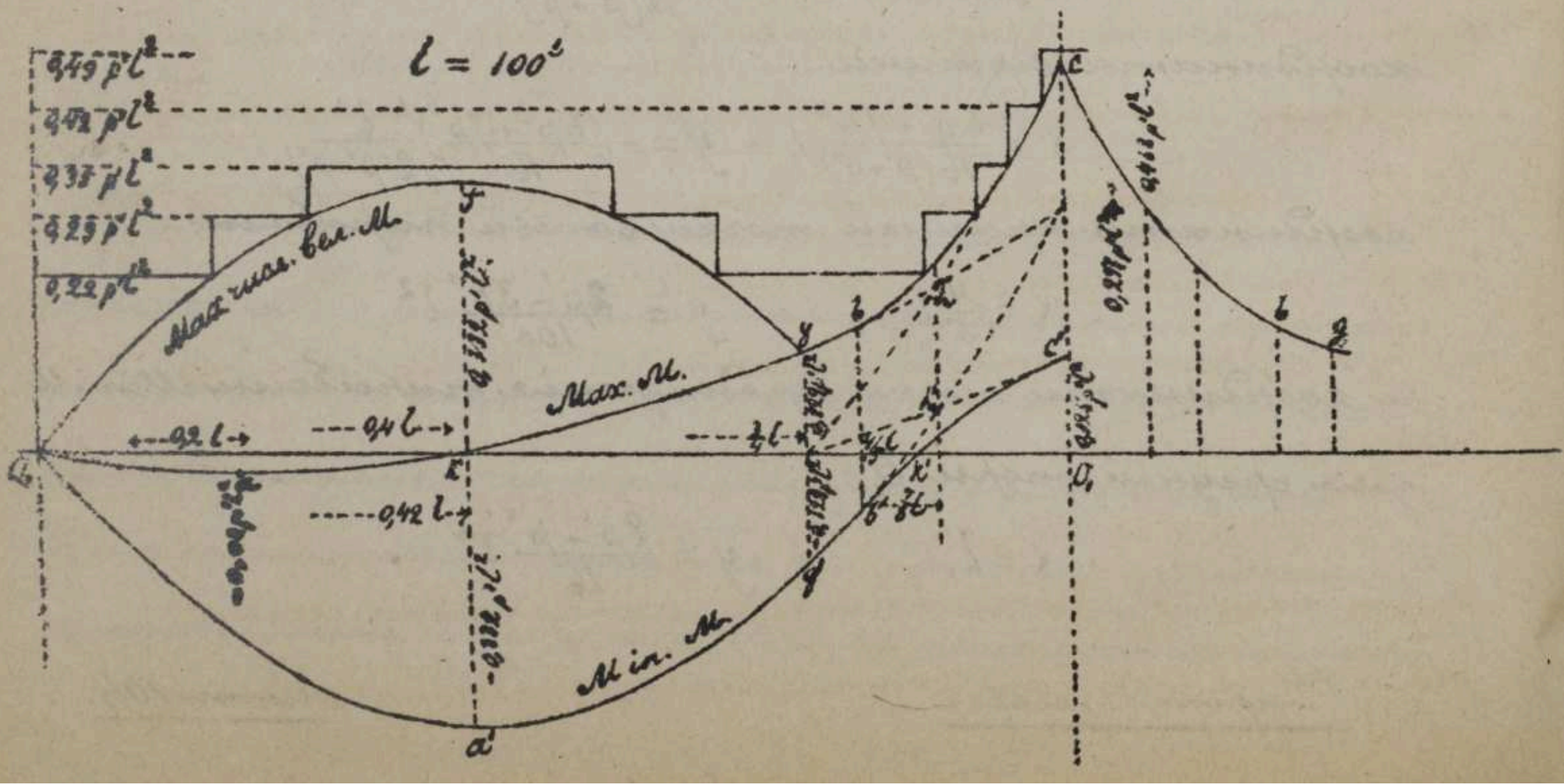
$$y' = \frac{49p' - 9p''}{896} \cdot l^2$$

при $x = l$ . . . . . $y = \frac{p' + p''}{8} \cdot l^2$

$$y' = \frac{p'}{8} \cdot l^2$$

Начертаніе кривыхъ линій по этимъ даннымъ не трудно исполнить, если извѣстны величины грузовъ p' и p''.

Чтобы сравнить между собою размѣры проэкти-



балки при двухъ и при трехъ опорахъ, и при одинаковой длинѣ пролетовъ, положимъ что подобно вышеразсмотрѣнному примѣру, балка назначена для поддержанія половины рельсоваго пути на мосту, покрывающемъ два пролета по 100 футовъ, и сообразно этому сдѣлаемъ:

$$l = 100' = 1200'' \; ; \quad p' = 16 \text{ пуд. на } 1' \; , = 1\tfrac{1}{3} \text{ пуд. на } 1'' .$$

$$p'' = 44 \text{ пуд. на } 1' = 3\tfrac{2}{3} \text{ пуд. на } 1'' = \tfrac{11}{4} p' .$$

Тогда не трудно составить чертежъ кривыхъ, подобный приложенному, на которомъ, для уменьшенія чиселъ, ординаты Max. M и Min. M выражены величинами, пропорціональными $p' l^2$, а абсциссы-величинами пропорціональными l. На приложенномъ чертежѣ кривая $O_0 a k b c$ принадлежитъ величинѣ Max. M и кривая $O_0 a' b' k' c'$ величинѣ Min. M; а кривая $O_0 f g b c$ наибольшей численной величинѣ суммы моментовъ M. Послѣдняя кривая получается перемѣною отрицательнаго знака ординатъ кривой Min. M для части пролета въ $\frac{3}{4}$ всей его длины близъ крайней опоры, и откладываніемъ ихъ въ сторону положительныхъ ординатъ.

Изъ разсматриванія этихъ кривыхъ можно вывести слѣдующія заключенія:

Для части перваго пролета, длина которой равна

$$O_0 k = \frac{6p' - p''}{8p'} . l = 0{,}406\, l \; ;$$

величины M, заключенныя между предѣлами Max. M и Min. M, постоянно отрицательны;

414. следовательно напряженіе продольныхъ фибръ балки, выражаемое черезъ

$$\frac{v}{I} M ,$$

будетъ отрицательно для положительныхъ величинъ v, и положительно для отрицательныхъ; и по сему, верхнія фибры балки въ части $O_0 x$ будутъ всегда сжаты, а нижнія всегда растянуты. — Для части пролета:

$$K K' = O_0 K' - O K = 0,846\, l - 0,406\, l = 0,440\, l ,$$

ограниченной точками пересѣченія съ осью абсциссъ кривыхъ Max. M и Min. M, величина M, смотря по величинѣ и различенію временнаго груза, можетъ быть положительна или отрицательна. По сему, въ этой части балки, верхнія ея фибры иногда будутъ сжаты и иногда растянуты, и тоже самое произойдетъ и съ нижними ея фибрами. А какъ различеніе временнаго груза особенно на мостахъ желѣзныхъ дорогъ можетъ измѣняться весьма быстро, то съ тою же быстротою и сжатіе фибръ замѣнится ихъ растяженіемъ или наоборотъ второе первымъ, что всегда не выгодно для прочности соединеній частей балки. И такъ, въ этихъ мѣстахъ балки, соединенія ея частей должны быть такъ устроены, чтобы могли выдерживать и растяженіе частей и ихъ сжатіе, съ надлежащимъ запасомъ прочности.

Въ части $K' O_1$, ближайшей къ средней опорѣ и простирающейся приблизительно на $\frac{1}{17}$ длины

пролета, величины M постоянно положительны, а следовательно продольныя фибры балки здѣсь всегда растянуты въ верхнихъ частяхъ поперечныхъ сѣченій балки и сжаты въ нижнихъ.

Наибольшая численная величина M соотвѣтствуетъ частямъ балки близъ средней опоры; отсюда, до разстоянія въ $\frac{1}{4}$ длины пролета, величина M быстро уменьшается почти до величины вчетверо меньшей, за тѣмъ далѣе увеличивается до разстоянія приблизительно въ $\frac{3}{5}$ пролета отъ средней опоры, гдѣ достигаетъ до $\frac{3}{4}$ наибольшей величины, и за тѣмъ уменьшается до нуля при крайней опорѣ. По сему, при одинаковой профили по всей длинѣ балки, т.е. при постоянной величинѣ количества $\frac{v}{I}$, напряженіе продольныхъ фибръ балки наибольшее надъ среднею опорою, нѣсколько меньшее близъ середины пролета, а наименьшее близъ крайней опоры и на разстояніи четверти пролета отъ средней.

Если, для уменьшенія стоимости, желаютъ дать балкѣ различныя профили, съ тѣмъ чтобы въ каждой части ея длины она удовлетворяла условію прочности:

$$\text{Max. числ. вел. } M \leq \frac{RI}{v},$$

то надобно опредѣлить части длины балки, въ которыхъ ей можетъ быть дана одна изъ ряда профилей, выбранныхъ сообразно имѣющимся сортамъ матеріала и проектированной формѣ

 балки. Тогда можно определить для этих профилей ряд величин количеств

$$\frac{RI}{v}$$

и за тем на чертеже линіи, которой ординаты выражают наибольшія численныя величины суммы моментовъ силъ, провести рядъ линій, параллельныхъ оси абсциссъ, на разстояніяхъ отъ нея равныхъ различнымъ величинамъ $\frac{RI}{v}$. Абсциссы точекъ пересѣченія этихъ линій съ кривою опредѣлятъ части балки, въ которыхъ каждая изъ выбранныхъ профилей соотвѣтствуетъ условію прочности.

На приложенномъ чертежѣ нанесены тѣже величины $\frac{RI}{v}$, которыя выше вычислены для балки на двухъ опорахъ, но для удобства сравненія съ ординатами кривой $0_0 f g c$, онѣ выражены числами, пропорціональными количеству $p' l^2$, причемъ получились слѣдующія величины, соотвѣтствующія различнымъ толщинамъ поясовъ:

при $e = \frac{3}{8}$ дюйм. . . . . $\frac{RI}{v} = 421\,200 = 0{,}22\ p' l^2$

— $e = 2.\frac{3}{8}$ — . . . . . — $= 550\,800 = 0{,}29\ p' l^2$

— $e = 3.\frac{3}{8}$ — . . . . . — $= 680\,400 = 0{,}35\ p' l^2$

— $e = 4.\frac{3}{8}$ — . . . . . — $= 810\,000 = 0{,}42\ p' l^2$

— $e = 5.\frac{3}{8}$ — . . . . . — $= 939\,600 = 0{,}49\ p' l^2$

Сравненіе чертежей для балки на двухъ опорахъ и для балки на трехъ опорахъ, при одинаковой длинѣ пролетовъ показываетъ, что послѣдняя требуетъ нѣсколько менѣе матеріала, но что однако разница между обѣими балками въ дѣлѣ

отношеніи не настолько велика, чтобы вызвать ръ-
шительное предпочтеніе устройства одной непре-
рывной балки на двух пролетахъ вмѣсто двухъ от-
дѣльныхъ для каждаго пролета.

Вышеизложенное изслѣдованіе показываетъ, что
наибольшая и наименьшая величины суммы
моментовъ M для $\frac{4}{5}$ длины пролета, ближай-
шаго къ крайней опорѣ балки, получаются при
дѣйствіи постояннаго и временнаго грузовъ на
всю длину одного изъ пролетовъ и при дѣйствіи
одного только постояннаго груза на всю длину
другого пролета, и только для $\frac{1}{5}$ длины пролета,
ближайшей къ средней опорѣ эти величины M
соотвѣтствуютъ дѣйствію временнаго груза
на нѣкоторую только часть длины пролета.
Изъ этого можно заключить, что наибольшая
и наименьшая величины M едва ли много бы
измѣнились, если бы для упрощенія изслѣдова-
нія приняли во вниманіе только такую нагруз-
ку балки, при которой вся длина пролета на-
гружена постояннымъ и временнымъ грузами,
или только однимъ постояннымъ грузомъ. Та-
кое предположеніе о дѣйствіи временнаго гру-
за дѣйствительно упрощаетъ изслѣдованіе вели-
чинъ M, но независимо отъ недостатка вѣро-
ятности результатовъ, оно приводитъ къ форму-
ламъ, заключающимъ только равномѣрно разли-

щенные грузы и непримыкающих къ пользованію вліянія сосредоточенныхъ грузовъ. Тѣмъ не менѣе, это предположеніе до сихъ поръ было общепринято, и поэтому разсмотримъ его и здѣсь.

Если временной грузъ p'' на единицу длины можетъ дѣйствовать только на всю длину пролета, или во все не дѣйствовать на пролетъ балки, то для всѣхъ величинъ абсциссы z въ одномъ пролетѣ грузы p_1 и p_2 будутъ имѣть одна и тѣже величины, равныя p' или $p'+p''$; смотря потому на который изъ пролетовъ дѣйствуетъ временной грузъ. Поэтому, возвращаясь къ формуламъ общей теоріи, можно во всѣхъ интегралахъ разсматривать p_1 и p_2 какъ постоянныя величины, и слѣдовательно произвести обозначенныя въ нихъ интегрированія. Такимъ образомъ найдемъ:

$$6\mathfrak{D}_1 = \frac{1}{l}\int_0^l p_1(l^2z - z^3)\,dz = \frac{p_1 l^3}{4}, \quad 6\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{l}\int_0^l p_2(2l^2z - 3lz^2 + z^3)\,dz = \frac{p_2 l^3}{4}$$

$$M_1 = \frac{6\mathfrak{D}_1 + 6\mathfrak{A}_2}{4l} = \frac{(p_1+p_2)l^2}{16}$$

$$M = \frac{x M_1}{l} - \frac{l-x}{l}\int_0^x p_1 z\,dz + \int_x^l p_1(z-x)\,dz = p_1\frac{(8x^2 - 7lx)}{16} + p_2\frac{lx}{16}.$$

Тогда легко видѣть, что въ выраженіи M членъ заключающій p_1 положителенъ или отрицателенъ смотря потому, будетъ ли абсцисса x точки m, къ которой относятся моменты, больше или меньше чѣмъ $\frac{7}{8}l$; x членъ заключающій p_2 положителенъ для всѣхъ величинъ x. Поэтому, наибольшія и наименьшія величины M будутъ:

въ случаѣ когда $x < \frac{7}{8}l$

при $p_1 = p'$ и $p_2 = p' + p''$, Max. $M = -\frac{p'x(3l-4x)}{8} + \frac{p''lx}{16}$ 419.

при $p_1 = p' + p''$ и $p_2 = p'$; Min. $M = -\frac{p'x(3l-4x)}{8} - \frac{p''x(7l-8x)}{16}$. ;

и въ случаѣ когда $x > \frac{7}{8}l$

при $p_1 = p' + p''$ и $p_2 = p' + p''$, Max. $M = \frac{(p'+p'')x(4x-3l)}{8}$

при $p_1 = p'$ и $p_2 = p'$, Min. $M = \frac{p'x(4x-3l)}{8}$

Для опредѣленія, до какой величины x численная величина Min. M больше Max M, имѣемъ:

$-$ Min. $M >$ Max. M, Max. $M +$ Min. $M < 0$, $\frac{2p'+p''}{8}x(4x-3l) < 0$;

откуда

$$x < \frac{3}{4}l.$$

Изображая найденныя величины Max. M и Min M ординатами кривыхъ линій, получимъ для Max. M линію $O_0 a b h c$, для Min M линію $O_0 a' b' h' c'$ и для наибольшихъ численныхъ величинъ M линію $O_0 f g b h c$ (черт. стр. 412). Сравненіе этихъ кривыхъ съ тѣми, которыя соотвѣтствуютъ дѣйствію временнаго груза не на всю длину балки, показываетъ, что онѣ различествуютъ только для части балки въ $\frac{1}{5}$ длины пролета, ближайшей къ средней опорѣ, сливаясь на концахъ этой части, и что наибольшая разность величинъ Max. M соотвѣтствуетъ абсциссѣ $x = \frac{7}{8}l$. Чтобы получить понятіе о значеніи различія величинъ M, опредѣлимъ отношеніе ординатъ наиболѣе другъ отъ друга отличающихся.

Для сего сдѣлавъ для кривой $O_0 f g b h c$

$$y' = \text{Max. } M = \frac{(p'+p'')x(4x-3l)}{8}$$

и подставляя $x = \frac{7}{8}l$, найдемъ:

$$y' = \frac{7}{128}(p'+p'')l^2;$$

420. по выше найдена ордината:

$$y = \frac{49p' + 58p''}{896} \cdot l^2 = \frac{49}{896}(p' + p'')l^2 + \frac{9}{896}p''l^2,$$

для кривой 0,5 g b c при той же абсциссѣ; по сему:

$$\frac{y}{y'} = 1 + \frac{9}{49} \cdot \frac{p''}{p' + p''}.$$

Отношеніе это увеличивается вмѣстѣ съ возрастаніемъ величины временнаго груза сравнительно съ постояннымъ, т. е. вообще съ уменьшеніемъ длины пролета балки. Предѣлъ же увеличенія отношенія будетъ

$$1 + \frac{9}{49} = 1,183,$$

откуда видно, что предположеніе о дѣйствіи временнаго груза не на часть пролета, а на всю его длину, при опредѣленіи наибольшей величины суммы моментовъ ея, ведетъ къ ошибкѣ, не превосходящей 18 %

Въ разсматриваемомъ здѣсь частномъ примѣрѣ числа бы:

при $p'' = \frac{11}{4}p'$, $\frac{y}{y'} = 1 + \frac{9}{49} \cdot \frac{11}{15} = 1,134$

т. е. ошибка не превосходила бы 13 %.

До сихъ поръ предполагалось, что балка, лежащая на трехъ опорахъ, подвергается дѣйствію грузовъ, равномѣрно разлитыхъ на всю длину пролета или только на часть его. Обратимся теперь къ выводу формулъ для опредѣленія суммы моментовъ ея въ случаѣ, когда имѣются, сверхъ равномѣрно разлитыхъ, еще грузы, сосредоточенные на извѣстныхъ мѣстахъ балки.

Положимъ что сверхъ груза p' на единицу длины, равномѣрно-распредѣленнаго по всей длинѣ балки, въ первомъ пролетѣ ея дѣйствуютъ еще сосредоточенные грузы $P_1, P_2, \ldots P_m$, приложенные на разстояніяхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ отъ лѣвой опоры O_0, и во второмъ пролетѣ:

сосредоточенные грузы $P_1', P_2', \ldots P_{m'}$, приложенные на разстояніяхъ $x_1', x_2', \ldots x_{m'}$ отъ средней опоры O_1, и пусть требуется опредѣлить сумму моментовъ M относительно точки m, взятой на оси балки, въ первомъ ея пролетѣ, абсциссою x, заключающейся между абсциссами x_{i-1} и x_i двухъ смежныхъ сосредоточенныхъ грузовъ P_{i-1} и P_i. Для сего по вышеизложенному слѣдуетъ въ общемъ выраженіи для M:

$$M = \frac{1}{4l^3}\int_0^x p_1(-4l^2z + 5l^2xz - xz^3)\,dz + \frac{x}{4l^3}\int_x^l p_1(-4l^3 + 5l^2z - z^3)\,dz + \frac{x}{4l^3}\int_0^l p_2(2l^2z - 3lz^2 + z^3)\,dz,$$

оставить подъ интегралами только равномѣрно распредѣленный грузъ p', выдѣлить изъ нихъ суммы сосредоточенныхъ грузовъ, умноженныхъ каждый на подъ интегральную функцію того интеграла, между предѣлами котораго заключается абсцисса точки приложенія груза, и замѣнить этою абсциссою перемѣнную, къ которой относится интегрированіе. Такимъ образомъ замѣтивъ, что всѣ грузы $P_1, P_2, \ldots P_{i-1}$,

422. Дѣйствующіе въ первомъ пролетѣ съ лѣвой стороны точки т, принадлежатъ первому интегралу, всѣ грузы $P_i, P_{i+1}, \ldots P_m$, дѣйствующіе въ томъ же пролетѣ съ правой стороны точки т, принадлежатъ второму интегралу и всѣ остальные грузы $P_1', P_2', \ldots P_{m'}'$, дѣйствующіе во второмъ пролетѣ, входятъ въ составъ третьяго интеграла, не трудно, совершивъ интегрированіе для постоянныхъ грузовъ $p'dz$, написать формулу:

$$M = \frac{p'x(4x-3l)}{8} + \frac{1}{4l^3}\sum_{1}^{i-1} P_k(-4l^3x_k + 5l^2x x_k - x x_k^3) + \frac{x}{4l^3}\sum_{i}^{m} P_r(-4l^3 + 5l^2x_r - x_r^3) +$$
$$+ \frac{x}{4l^3}\sum_{1}^{m'} P_s'(2l^2x_s' - 3l x_s'^2 + x_s'^3) .$$

Если точки приложенія сосредоточенныхъ грузовъ находятся на равныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ, и дѣлятъ каждый пролетъ на т равныхъ между собою частей, то:

$$m = m' \quad , \quad x_k = \frac{k}{m}\cdot l \quad , \quad x_r = \frac{r}{m}\cdot l \quad , \quad x_s = \frac{s}{m}\cdot l$$

$$M = \frac{p'x(4x-3l}{8} + \frac{1}{4}\sum_{1}^{i-1} P_k\left[-4l\cdot\frac{k}{m} + 5x\cdot\frac{k}{m} - x\left(\frac{k}{m}\right)^3\right] + \frac{x}{4}\sum_{i}^{m} P_r\left[-4 + 5\frac{r}{m} - \left(\frac{r}{m}\right)^3\right] +$$
$$+ \frac{x}{4}\sum_{1}^{m} P_s'\left[2\frac{s}{m} - 3\left(\frac{s}{m}\right)^2 + \left(\frac{s}{m}\right)^3\right] .$$

Если для примѣра возьмемъ $m = 10$ и точку т совмѣстимъ съ точкою приложенія груза P_i, то:

$$x = x_i = \frac{i}{10}\,l .$$

$$M = \frac{p'l^2(4i-30)i}{800} + \frac{il}{40}\sum_{1}^{i-1} P_k\left[\frac{5i-40}{i}\cdot\frac{k}{10} - \left(\frac{k}{10}\right)^3\right] + \frac{il}{40}\sum_{i}^{10} P_r\left[-4 + 5\cdot\frac{r}{10} - \left(\frac{r}{10}\right)^3\right] +$$
$$+ \frac{il}{40}\sum_{1}^{10} P_s'\left[2\frac{s}{10} - 3\left(\frac{s}{10}\right)^2 + \left(\frac{s}{10}\right)^3\right] .$$

По этой формулѣ найдемъ для суммы моментовъ силъ относительно точки приложенія ближайшаго къ средней опорѣ груза, т. е. при $i = 9$, придавая k во второмъ членѣ послѣдовательно значенія 1, 2, 3, ... 8, а r въ третьемъ членѣ значе-

ния 9 и 10, и 5 въ четвертомъ членѣ значенія 1, 2, 3 ... 10 423.

$$M = \frac{27}{400} p' l^2 + \frac{9}{40} l \left[0{,}054 P_1 + 0{,}103 P_2 + 0{,}139 P_3 + 0{,}158 P_4 + 0{,}152 P_5 + 0{,}117 P_6 + \right.$$
$$\left. + 0{,}026 P_7 - 0{,}062 P_8 - 0{,}229 P_9 \right] +$$
$$+ \frac{9}{40} l \left[0{,}171 P_1' + 0{,}288 P_2' + 0{,}357 P_3' + 0{,}384 P_4' + 0{,}375 P_5' + 0{,}336 P_6' + \right.$$
$$\left. + 0{,}273 P_7' + 0{,}192 P_8' + 0{,}099 P_9' \right]$$

Коэффиціенты различныхъ сосредоточенныхъ грузовъ въ этой формулѣ ясно указываютъ на степень вліянія каждаго груза на величину M. Такъ напримѣръ, подтверждается то, что выше было выведено для равномѣрно распредѣленныхъ грузовъ, а именно, что для точки, находящейся отъ средней опоры не далѣе $\frac{1}{5}$ длины пролета сумма моментовъ увеличивается грузами $P_1, P_2, \ldots P_7$, ближайшими къ крайней опорѣ того же пролета, и уменьшается грузами P_8 и P_9, ближайшими къ средней опорѣ. Кромѣ того видно, что наибольшее вліяніе на разсматриваемую величину M, и слѣдовательно также на напряженіе продольныхъ фибръ балки при точкѣ x_9, имѣютъ грузы P_4, P_5 и P_9 перваго пролета и грузы P_4' и P_5' втораго пролета, т. е. тѣ, которые дѣйствуютъ близъ серединъ обоихъ пролетовъ, въ первомъ пролетѣ нѣсколько далѣе отъ средней опоры, чѣмъ отъ крайней, а во второмъ на оборотъ ближе къ средней; и сверхъ того грузъ, приложенный при той точкѣ, къ которой относится сумма моментовъ M.

При одинаковой профили балки по всей ея длинѣ

 продольныя фибры наибольше напряжены надъ среднею опорою, посему опредѣлимъ еще сумму моментовъ M_1 для этой опоры. Для сего имѣемъ:

$$i = m = 10\,, \quad x = x_i = l\,;$$

$$M_1 = \frac{p'l^2}{8} + \frac{l}{4}\sum_{1}^{9} P_k\left[\frac{k}{10} - \left(\frac{k}{10}\right)^3\right] + \frac{l}{4}\sum_{1}^{10} P_s'\left[2\frac{s}{10} - 3\left(\frac{s}{10}\right)^2 + \left(\frac{s}{10}\right)^3\right]\,;$$

и, подставляя вмѣсто k и s послѣдовательно числа 1, 2, 3..., въ предѣлахъ указанныхъ формулою, находимъ:

$$M_1 = \frac{p'l^2}{8} + \frac{l}{4}\Big[0{,}099(P_1 + P_9') + 0{,}191(P_2 + P_8') + 0{,}273(P_3 + P_7') + 0{,}336(P_4 + P_6') +$$

$$+ 0{,}375(P_5 + P_5') + 0{,}384(P_6 + P_4') + 0{,}357(P_7 + P_3') + 0{,}288(P_8 + P_2') + 0{,}171(P_9 + P_1')\Big]\,.$$

Коэффиціенты грузовъ въ этой формулѣ показываютъ, что наибольшее вліяніе на напряженіе фибръ балки надъ среднею опорою, имѣютъ грузы P_5 и P_6 перваго пролета и грузы P_5' и P_4' втораго пролета, т. е. въ обоихъ пролетахъ грузы, дѣйствующіе близъ середины пролета, но нѣсколько ближе къ средней, чѣмъ къ крайнимъ опорамъ балки.

Примѣры эти достаточно объясняютъ, какимъ образомъ съ помощію выведенныхъ формулъ можно пользоваться вліяніе сосредоточенныхъ грузовъ на напряженіе продольныхъ фибръ балки, лежащей на нѣсколькихъ опорахъ, и въ какомъ мѣстѣ такой балки слѣдуетъ приложить данный передвижной сосредоточенный грузъ, чтобы вліяніе его было наибольше невыгоднымъ для прочности балки.

Переходя затѣмъ къ пользованію суммы S

силъ, дѣйствующихъ на балку съ правой стороны точки m, данной на оси балки абсциссою x въ первомъ пролетѣ, имѣемъ выше-изложенную общую формулу:

$$\Im = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} - \frac{1}{l_i}\overline{Y_1 v_1} + \frac{1}{l_i}\overline{Y_2 v_2},$$

которая, въ разсматриваемомъ случаѣ, при:

$$i = 1;\ l_i = l;\ M_0 = 0;\ \overline{Y_1 v_1} = \int_0^x \rho_1 z\,dz;\ \overline{Y_2 v_2} = \int_x^l \rho_2 (l - z)\,dz,$$

$$M_1 = \frac{1}{4l^2}\int_0^l \rho_1 (l^2 z - z^3)\,dz + \frac{1}{4l^2}\int_0^l \rho_2 (2l^2 z - 3lz^2 + z^3)\,dz;$$

обращается въ слѣдующую:

$$\Im = -\frac{1}{4l^3}\int_0^l \rho_1 (l^2 z - z^3)\,dz - \frac{1}{2}\int_0^x \rho_1 z\,dz + \int_x^l \rho_1 dz - \frac{1}{4l^3}\int_0^l \rho_2 (2l^2 z - 3lz^2 + z^3)\,dz;$$

и, приводя члены къ одному знаменателю, соединяя интегралы съ одинаковыми предѣлами въ одинъ и, разлагая за тѣмъ интегралы такъ, чтобы каждая изъ силъ $\rho_1 dz$, соотвѣтствующая извѣстной величинѣ перемѣнной z, вошла въ составъ одного только интеграла, находимъ:

$$\Im = \frac{1}{4l^3}\int_0^x \rho_1 (-5l^2 z + z^3)\,dz + \frac{1}{4l^3}\int_x^l \rho_1 (4l^3 - 5l^2 z + z^3)\,dz + \frac{1}{4l^3}\int_0^l \rho_2 (-2l^2 z + 3lz^2 - z^3)\,dz$$

Если предположимъ, что балка нагружена грузомъ ρ' на единицу длины, размѣщеннымъ по всей ея длинѣ и, сверхъ того, грузомъ ρ'' на единицу длины, могущимъ временно дѣйствовать на какую угодно ея часть, то для опредѣленія размѣщенія груза ρ'', которому соотвѣтствуетъ наибольшая и наименьшая величина $\Im$, надобно предварительно узнать, какіе знаки принимаютъ подъ интегральныя функціи для различныхъ величинъ перемѣнной z, заключающихся между предѣлами каждаго интеграла. Представивъ

426. подъ интегральныя функціи въ видѣ:

$$-5l^2z+z^3=-z(5l^2-z^2),\quad 4l^3-5l^2z+z^3=(l-z)(4l^2-lz-z^2),$$

$$-2l^2z+3lz^2-z^3=-z(l-z)(2l-z),$$

легко сообразить, что всѣ онѣ удерживаютъ постоянный знакъ, и при томъ первая и третья всегда отрицательны, а вторая положительна. Посему, грузы $p_1 dz$ въ части балки по лѣвую сторону точки m, опредѣленной абсциссою x, и грузы $p_2 dz$ втораго пролета, уменьшаютъ величину S; а грузы $p_1 dz$ въ части балки по правую сторону точки m въ первомъ пролетѣ увеличиваютъ величину S. Разсуждая сего, разсуждая также, какъ при опредѣленіи Max. M и Min M, получимъ:

$$\text{Max. } S=\frac{p'}{4l^3}\int_0^x(-5l^2z+z^3)dz+\frac{p'+p''}{4l^3}\int_x^l(4l^3-5l^2z+z^3)dz+\frac{p'}{4l^3}\int_0^2(-2l^2z+3lz^2-z^3)dz$$

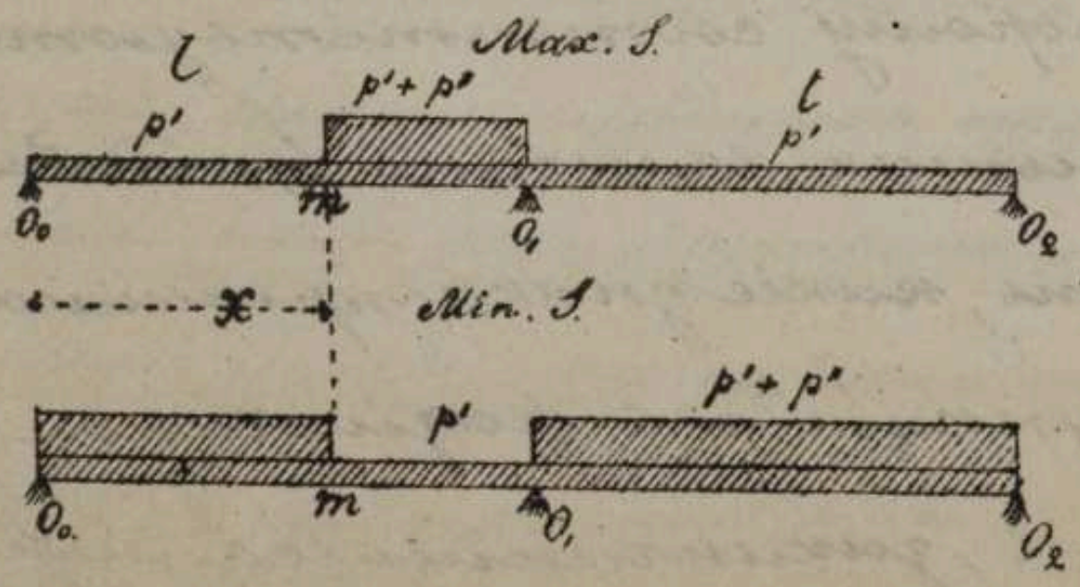
$$\text{Min. } S=\frac{p'+p''}{4l^3}\int_0^x(-5l^2z+z^3)dz+\frac{p'}{4l^3}\int_x^l(4l^3-5l^2z+z^3)dz+\frac{p'+p''}{4l^3}\int_0^2(-2l^2z+3lz^2-z^3)dz$$

или совершивъ интегрированіе и отдѣливъ другъ отъ друга члены, заключающіе множителями p' и p'', найдемъ:

$$\text{Max. } S=\frac{p'(3l-8x)}{8}+\frac{p''}{16l^3}(7l^4-16l^3x+10l^2x^2-x^4)$$

$$\text{Min. } S=\frac{p'(3l-8x)}{8}-\frac{p''}{16l^3}(l^4+10l^2x^2-x^4);$$

причемъ Max. S соотвѣтствуетъ дѣйствію временнаго груза p'' по часть $m0$, балки между точкою m и среднею опорою, а Min. S дѣйствію временнаго груза на весь второй пролетъ и на



часть O_0 т первого пролета между точкою т и крайнею опорою, какъ предъявлено на прилоjженномъ чертежѣ. Чтобы узнать, при какихъ величинахъ абсциссы x точки т, числовая величина Min. δ больше, чѣмъ Max. δ, надобно рѣшить неравенство

$$-\text{Min. } \delta > \text{Max. } \delta \text{ или: } \text{Max. } \delta + \text{Min } \delta < 0;$$

или, по подстановленіи величинъ Max. δ и Min δ,

$$\frac{(2p' + p'')(3l - 8x)}{8} < 0, \quad \text{откуда: } x > \frac{3}{8} l.$$

Вслѣдствіе этого имѣемъ:

при $x < \frac{3}{8} l$ . . . . Max. числ. вел. $\delta = \text{Max } \delta = \frac{p'(3l-8x)}{8} + \frac{p''}{16l^3}(7l^4 - 16l^3x + 10l^2x^2 - x^4)$

при $x > \frac{3}{8} l$ . . . . Max. числ. вел. $\delta = -\text{Min. } \delta = -\frac{p'(3l-8x)}{8} + \frac{p''}{16l^3}(l^4 + 10l^2x^2 - x^4)$.

Совокупность величинъ Max. δ и Min δ, соотвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ точки т, наглядно можетъ быть выражена кривыми линіями. Для сего вычислимъ:

$$\text{Max. } \delta = y = \frac{p'(3l-8x)}{8} + \frac{p''}{16l^3}(7l^4 - 16l^3x + 10l^2x^2 - x^4)$$

$$\text{Min } \delta = y' = \frac{p'(3l-8x)}{8} - \frac{p''}{16l^3}(l^4 + 10l^2x^2 - x^4);$$

и, для черченія кривыхъ по точкамъ, подобно предыдущему, вычислимъ, принявъ какъ и выше для начертанія кривыхъ Max. M и Min. M, что балки, длиною въ 100 футовъ, назначены для поддержанія половины одного рельсоваго пути, такъ что

$l = 1200''$, $p' = 1\frac{1}{3}$ пуд. на 1 погонный дюймъ, $p'' = 3\frac{3}{4}$ п. на $1'' = \frac{11}{4} p'$,

и изобразимъ абсциссы числами, пропорціональными l, а ординаты числами пропорціональными $p'l$. При этомъ для кривой Max. δ полу-

428. имеем:

Для $x=0$ . . . . $y = 0,375\,p'l + 0,437\,p''l = 1,578\,p'l$.

— $x=\frac{3}{8}l$ . . . $y = 0,149\,p''l = 0,410\,p'l$.

— $x=\frac{1}{2}l$ . . . . $y = -0,125\,p'l + 0,029\,p''l = 0,122\,p'l$.

— $x=0,56\,l$ . . . $y = -0,185\,p'l + 0,067\,p''l = 0,00022\,p'l$.

— $x=0,60\,l$ . . . $y = -0,255\,p'l + 0,054\,p''l = -0,075\,p'l$.

— $x=l$ . . . . $y = -0,625\,p'l$.

а для кривой Min. δ:

для $x=0$ . . . . $y = 0,375\,p'l - 0,0625\,p''l = 0,203\,p'l$.

— $x=0,15\,l$ . . $y = 0,225\,p'l - 0,0765\,p''l = 0,014\,p'l$.

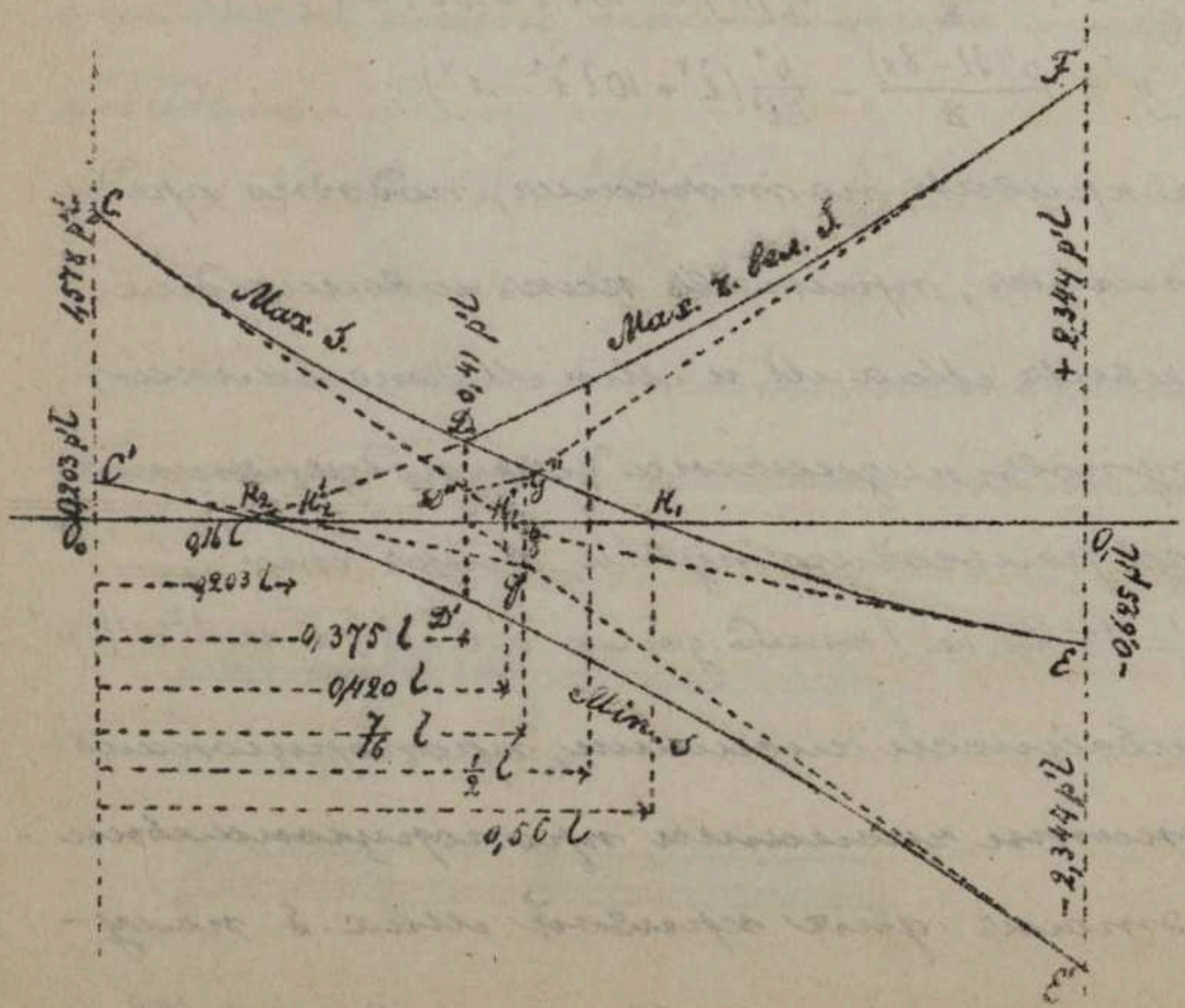
— $x=0,16\,l$ . . $y = 0,215\,p'l - 0,0724\,p''l = -0,00076\,p'l$.

— $x=\frac{3}{8}l$ . . $y = -0,149\,p''l = -0,410\,p'l$

— $x=\frac{1}{2}l$ . . . $y = -0,125\,p'l - 0,2148\,p''l = -0,716\,p'l$.

— $x=l$ . . . $y = -0,625\,p'l - 0,625\,p''l = -2,344\,p'l$.

По этим данным составлен приложенный чертеж, на котором ординаты кривой CDH_2E изображают величины Max. δ, а ординаты кривой $C'H_2D'E'$ величины Min. δ, а кроме того нанесением отрицательных ординат Min. δ в положительную сторону образовалась



ломанная кривая CDF, которой ординаты изобра-
жают наибольшія числовыя величины суммы
смъ δ. Изъ этого чертежа видно, что величины
суммы смъ δ, какъ заключенныя между предъла-
ми Max. δ и Min. δ, всегда положительны для
части перваго пролета близъ крайней опоры на
длину:

$$O_1 H_2 = 0{,}16\,l;$$

что для средней части пролета, на длину:

$$H_1 H_2 = 0{,}56\,l - 0{,}16\,l = 0{,}40\,l,$$

сумма смъ δ можетъ быть и положительна и
отрицательна, смотря по разположенію времен-
наго груза, что для остальной части пролета

$$H_1 O_1 = l - 0{,}56\,l = 0{,}44\,l$$

сумма смъ δ постоянно отрицательна, кромѣ
того наибольшія числовыя величины суммы
соотвѣтствуютъ средней опорѣ и за тѣмъ край-
ней, а отъ обѣихъ опоръ эти величины умень-
шаются по мѣрѣ приближенія къ точкѣ оси
на разстояніи $^3/_8$ длины пролета отъ крайней
опоры.

Примѣненіе наибольшихъ величинъ суммы
смъ δ къ повѣркѣ прочности среднихъ частей,
соединяющихъ между собою пояса балки, будетъ
изложено въ двухъ изъ слѣдующихъ статей.

Опредѣленіе величинъ Max. δ и Min δ могло бы
упроститься, если бы предположеніи, что времен-
ной грузъ можетъ дѣйствовать только на всю

430. длину одного изъ пролетовъ, а не на нѣкоторую только часть его.

При такомъ предположеніи грузы p_1 и p_2 представляютъ постоянныя величины для всѣхъ нитей каждого пролета, посему нити бы согласно вышеобъясненному:

$$S = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} - \frac{1}{l_i}\int_0^{l_i} p_1 z\,dz + \int_x^{l_i} p_1\,dz = -\frac{M_1}{l} + p_1\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{l}\int_0^l p_1(l^2 z - x^3)\,dz = \frac{p_1 l^3}{4}, \quad B_2 = \frac{1}{l}\int_0^l p_2(2l^2 z - 3lx^2 + x^3)\,dz = \frac{p_2 l^3}{4}.$$

$$M_1 = \frac{A_1 + B_2}{4l} = \frac{p_1 l^2 + p_2 l^2}{16};$$

и слѣдовательно:

$$S = \frac{p'(7l - 16x)}{16} - \frac{p_2 l}{16}.$$

Изъ этой формулы видно, что если временной грузъ дѣйствуетъ на всю длину пролета, то дѣйствуя во вторыхъ пролетахъ онъ уменьшаетъ величину суммы силъ S для всѣхъ сѣченій перваго пролета балки, а дѣйствуя въ первомъ пролетѣ онъ увеличиваетъ S для сѣченій ближайшихъ къ крайней опорѣ до абсциссы

$$x = \frac{7}{16} l,$$

и уменьшаетъ S для остальныхъ сѣченій, ближайшихъ къ средней опорѣ. Вслѣдствіе этого имѣемъ:

для $x < \frac{7}{16} l$

при $p_1 = p' + p''$ и $p_2 = p'$ $\quad max.\, S = \frac{p'(3l - 8x)}{8} + \frac{p''(7l - 16x)}{16}$

и при $p_1 = p''$ и $p_2 = p' + p''$ $\quad min.\, S = \frac{p'(3l - 8x)}{8} - \frac{p'' l}{16}$,

а для $x > \frac{7}{16} l$

при $p_1 = p_2 = p'$ . . . . . $max.\, S = -\frac{p'(8x - 3l)}{8}$

при $p_1 = p_2 = p' + p''$ . . . . . $min\, S = -\frac{(p' + p'')(8x - 3l)}{8}$

мы emax S могутъ быть изображены ординатами линій, также какъ и при предыдущемъ предположеніи касательно размѣщенія временнаго груза, и такъ какъ онѣ зависятъ только отъ первой степени абсциссы x, то онѣ выражаются ординатами двухъ ломаныхъ прямыхъ линій, точки перелома которыхъ соотвѣтствуютъ абсциссѣ $x=\frac{7}{16}l$. Если принять данныя:

$l = 1^{s}10$ дюймаш, $p' = 1\frac{1}{3}$ пуд. на 1 погон. дюймъ и $p_2 = \frac{11}{4}p'$,

то получаются изображенныя на чертежѣ (стран. 429) линіи $CH_1'JE$ для Max. S, $C'H_2'J'E'$ для Min. S и $CD''J''F$ для наибольшихъ числовыхъ величинъ S. Сравнивая эти линіи, соотвѣтствующія дѣйствію временнаго груза на цѣлые пролеты балки съ тѣми, которыя получаются при дѣйствіи временнаго груза на какую угодно часть каждаго пролета, видно, что кривая и ломаная прямая какъ для Max. S такъ и для Min. S мало другъ отъ друга отличаются близъ опоръ балки, но близъ середины пролета ордината D кривой вдвое больше ординаты D'' ломаной прямой, и такимъ же образомъ часть длины пролета, въ которой сумма emax S можетъ быть и положительна и отрицательна, смотря по размѣщенію временнаго груза; и которая опредѣляется разстояніемъ между точками пересѣченія линій Max. S и Min S съ осью абсциссъ, вдвое больше при дѣйствіи времен-

него груза на часть пролета, чѣмъ при дѣйствіи его на цѣлый пролетъ. Это различіе результатовъ при двухъ предположеніяхъ относительно дѣйствія временнаго груза, такъ велико, что при опредѣленіи величинъ суммы силъ S для повѣрки прочности или исчисленія размѣровъ среднихъ частей мостовой балки, соединяющихъ между собою ея верхній и нижній пояса, нельзя ограничиться предположеніемъ о дѣйствіи временнаго груза не на часть пролета, а на цѣлый только пролетъ, какъ это до сихъ поръ часто дѣлалось, и какъ это можетъ быть допущено при опредѣленіи суммы моментовъ M силъ.

Выведемъ теперь величину суммы силъ S въ зависимости отъ сосредоточенныхъ грузовъ, дѣйствію которыхъ балка можетъ быть подвержена сверхъ равномѣрно размѣщеннаго по всей ея длинѣ груза p' на единицу длины. Положимъ также какъ и выше, что въ первомъ пролетѣ дѣйствуютъ грузы $P_1, P_2, P_3, \ldots P_m$, приложенные на разстояніяхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ отъ левой опоры O_0 и во второмъ пролетѣ грузы $P_1', P_2', \ldots P_m'$, приложенные на разстояніяхъ $x_1', x_2', \ldots x_m'$ отъ средней опоры O_1. Тогда на основаніи вышеизложеннаго общаго способа, можно отъ вышеприведенной общей формулы

$$S = \frac{1}{4l^3}\int_0^l p_1(-5l^2z+z^3)\,dz + \frac{1}{4l^3}\int_l^{2l} p_1(4l^3-5l^2z+z^3)\,dz + \frac{1}{4l^3}\int_0^{l} p_2(-2l^2z+3lz^2-z^3)\,dz,$$

перейти къ слѣдующей:

$$S = \frac{p'(3l-8x)}{8} + \frac{1}{4l^3}\sum_1^{i-1} P_x[-5l^2x_x+x_x^3] + \frac{1}{4l^3}\sum_i^m P_x(4l^3-5l^2x_x+x_x^3) + \frac{1}{4l^3}\sum_1^{n'} P_x'(-2l^2x_x'+3lx_x'^2-x_x'^3),$$

где точка m, къ которой относится сумма силъ S предполагается находящеюся между точками приложенія грузовъ P_{i-1} и P_i.

Въ случаѣ когда точки приложенія сосредоточенныхъ грузовъ дѣлятъ каждый пролетъ на равныя части, т. е. когда

$$m = m', \quad x_k = \frac{k}{m} l, \quad x_r = \frac{r}{m} l, \quad x'_s = \frac{s}{m} l.$$

формула приметъ видъ

$$S = \frac{b'(3l - 8x)}{8} + \frac{1}{4}\sum_1^{i-1} P_k \left[-5\frac{k}{m} + \left(\frac{k}{m}\right)^3\right] + \frac{1}{4}\sum_i^{m} P_r \left[4 - 6\frac{r}{m} + \left(\frac{r}{m}\right)^3\right] + \frac{1}{4}\sum_1^{m} P'_s \left[-2\frac{s}{m} + 3\left(\frac{s}{m}\right)^2 - \left(\frac{s}{m}\right)^3\right]$$

Если для примѣра положимъ $m = 10$, и совмѣстимъ точку m съ точкою приложенія груза P_4, то смотря потому придвинемъ ли точку m къ лѣвому этого груза съ правой или съ лѣвой стороны получимъ въ первомъ случаѣ при $i = 5$ и $x = \frac{4}{10} l$

$$S_4 = -\frac{b'2}{40} - \frac{1}{4}\left[0{,}499 P_1 + 0{,}992 P_2 + 1{,}473 P_3 + 1{,}936 P_4\right] + \frac{1}{4}\left[1{,}625 P_5 + 1{,}216 P_6 + 0{,}845 P_7 + 0{,}512 P_8 + 0{,}229 P_9\right] - \frac{1}{4}\left[0{,}171 P'_1 + 0{,}288 P'_2 + 0{,}357 P'_3 + 0{,}384 P'_4 + 0{,}375 P'_5 + 0{,}336 P'_6 + 0{,}273 P'_7 + 0{,}192 P'_8 + 0{,}099 P'_9\right];$$

а во второмъ случаѣ, при $i = 4$, всѣ члены останутся безъ перемѣны, за исключеніемъ члена

$$-\frac{1}{4} \cdot 1{,}936\, P_4,$$

который замѣнится членомъ

$$+\frac{1}{4} \cdot 2{,}064\, P_4,$$

отличающимся отъ перваго величиною груза P_4. Эта двойственность величины суммы силъ S, въ случаѣ когда она опредѣляется для точки приложенія одного

изъ сосредоточенныхъ грузовъ, какъ уже выше было объясне-
но, происходитъ отъ того, что придвигая точку т
слѣва къ точкѣ приложенія груза, мы вводимъ его
въ составъ суммы силъ S, а придвигая къ нему точ-
ку т справа оставляемъ его внѣ этой суммы.

Разсмотрѣвши найденную величину суммы силъ
S_4 видимъ, что грузы, дѣйствующіе въ первомъ про-
летѣ, увеличиваютъ или уменьшаютъ величину
S_4, смотря потому, приложены ли они справа
или слѣва отъ точки т, къ которой относится
величина S_4, и оказываютъ тѣмъ большее вліяніе
на нее, чѣмъ ближе къ точкѣ т они приложены;
грузы же втораго пролета уменьшаютъ величи-
ну S_4, и изъ нихъ наибольшее вліяніе имѣютъ
грузы P_4' и P_5', т. е. тѣ которые дѣйствуютъ
близъ середины втораго пролета и нѣсколько
ближе къ средней, чѣмъ къ крайней опорѣ. Легко
также видно, что коэффиціенты грузовъ втораго
пролета остаются одинаковыми для всѣхъ
возможныхъ положеній точки т въ первомъ про-
летѣ.

Въ заключеніе этой статьи, остается еще обра-
тить вниманіе на нѣкоторыя общія соображе-
нія о степени вѣрности результатовъ теоріи
балокъ на нѣсколькихъ опорахъ и о выгодахъ и не-
выгодахъ устройства непрерывныхъ балокъ, покры-
вающихъ нѣсколько пролетовъ моста сряду, срав-
нительно съ рядомъ отдѣльныхъ балокъ покры-
вающихъ только по одному пролету.

Въ изложенной здѣсь теоріи для упрощенія выводовъ предполагается, что балка лежащая на нѣсколькихъ опорахъ, имѣетъ по всей своей длинѣ одинаковую профиль, и сообразно измѣненію вида такой балки отъ грузовъ, ею поддерживаемыхъ, опредѣляются сопротивленія опоръ, моменты и суммы силъ, на неё дѣйствующихъ, а затѣмъ по этимъ величинамъ повѣряется прочность не только балки одинаковой профили, но и такой балки, которой профиль измѣняется сообразно предполагаемымъ напряженіямъ различныхъ ея частей. Хотя такой способъ повѣрки прочности балки съ перемѣннаго профиля по формуламъ, выведеннымъ для однообразной профили, очевидно не вѣренъ, однако онъ до сихъ поръ по своей относительной простотѣ постоянно принимается при сооруженіи мостовъ съ непрерывными балками, и практика пока еще не указала на какое либо вредное послѣдствіе этого способа.

Но вѣрность результатовъ теоріи непрерывныхъ балокъ можетъ подвергаться сомнѣнію съ другой точки зрѣнія, зависящей не отъ ея основныхъ предположеній, а отъ самой сущности условій вопроса. Напряженія въ различныхъ частяхъ непрерывной балки, подверженной дѣйствію данныхъ грузовъ, зависятъ отъ перегиба, принимаемаго осью балки сообразно высотѣ ея опорныхъ точекъ, но какъ перегибъ балки весьма малъ, то очевидно что

436. весьма малое изменение высоты одной изъ опоръ, можетъ имѣть значительное вліяніе на этотъ перегибъ, а слѣдовательно и на напряженія частей балки. Поэтому опредѣленіе величинъ этихъ напряженій оказывается невозможнымъ, если въ данномъ случаѣ нельзя быть увѣреннымъ въ томъ, что ни одна изъ опоръ непрерывной балки не осядетъ далѣе на одинъ или на два дюйма подъ грузомъ моста, а такая увѣренность конечно достигнется только въ рѣдкихъ случаяхъ.

Впрочемъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣтъ повода опасаться, что въ непрерывной балкѣ могутъ проявиться напряженія, значительно отличающіяся отъ предвидѣнныхъ по теоретическимъ соображеніямъ, такой балкѣ всѣ таки вообще нельзя отдать преимущества передъ рядомъ отдѣльныхъ балокъ, перекрывающихъ тѣ же пролеты. Въ балкѣ, лежащей на двухъ только опорахъ, сумма моментовъ силъ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ по всей длинѣ балки, имѣетъ наибольшую численную величину въ серединѣ пролета и равна нулю надъ опорами балки. Въ части непрерывной балки, перекрывающей такой же пролетъ, какъ и отдѣльная балка на двухъ опорахъ, сумма моментовъ имѣетъ свою наибольшую численную величину надъ опорой, почти равную той, которая соотвѣтствуетъ сере-

ти отдельной балки, въ серединѣ же пролета непре-
рывной балки сумма моментовъ нѣсколько меньше,
но за то на нѣкоторой части пролета, примѣрно
$\frac{4}{9}$ длины его, сумма моментовъ въ непрерывной бал-
кѣ мѣняетъ свой знакъ вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ
временнаго груза, вслѣдствіе чего и растяженіе про-
дольныхъ фибръ переходитъ въ сжатіе ихъ и обратно
отъ сжатія въ растяженіе. Сумма силъ имѣетъ свою нѣкоторую
числовую величину въ балкѣ обоихъ видовъ
надъ опорами, но въ непрерывной балкѣ эта вели-
чина для средней опоры больше, чѣмъ въ отдѣльной
балкѣ, въ обѣихъ балкахъ сумма силъ вмѣстѣ съ
перемѣщеніемъ временнаго груза перемѣняетъ свой
знакъ на нѣкоторой части длины пролета, но эта
часть пролета больше въ непрерывной балкѣ, чѣмъ
въ отдѣльной. Соображая все это нетрудно вывести
заключенія, что балки обоихъ видовъ для перекры-
тія одного и того же пролета потребуютъ прибли-
зительно одинаковое количество матеріала, но
что въ большей части случаевъ ряды отдѣльныхъ
балокъ, перекрывающихъ нѣсколько смежныхъ про-
летовъ, представятъ больше ручательства въ надле-
жащей прочности, чѣмъ непрерывная балка, пере-
крывающая тѣже пролеты.

Къ недостаткамъ непрерывныхъ балокъ можно
отнести еще и то, что измѣненіе длины отъ
перемѣнъ температуры больше ощутительно,
чѣмъ въ одиночныхъ балкахъ, что сотрясенія, возбуж-

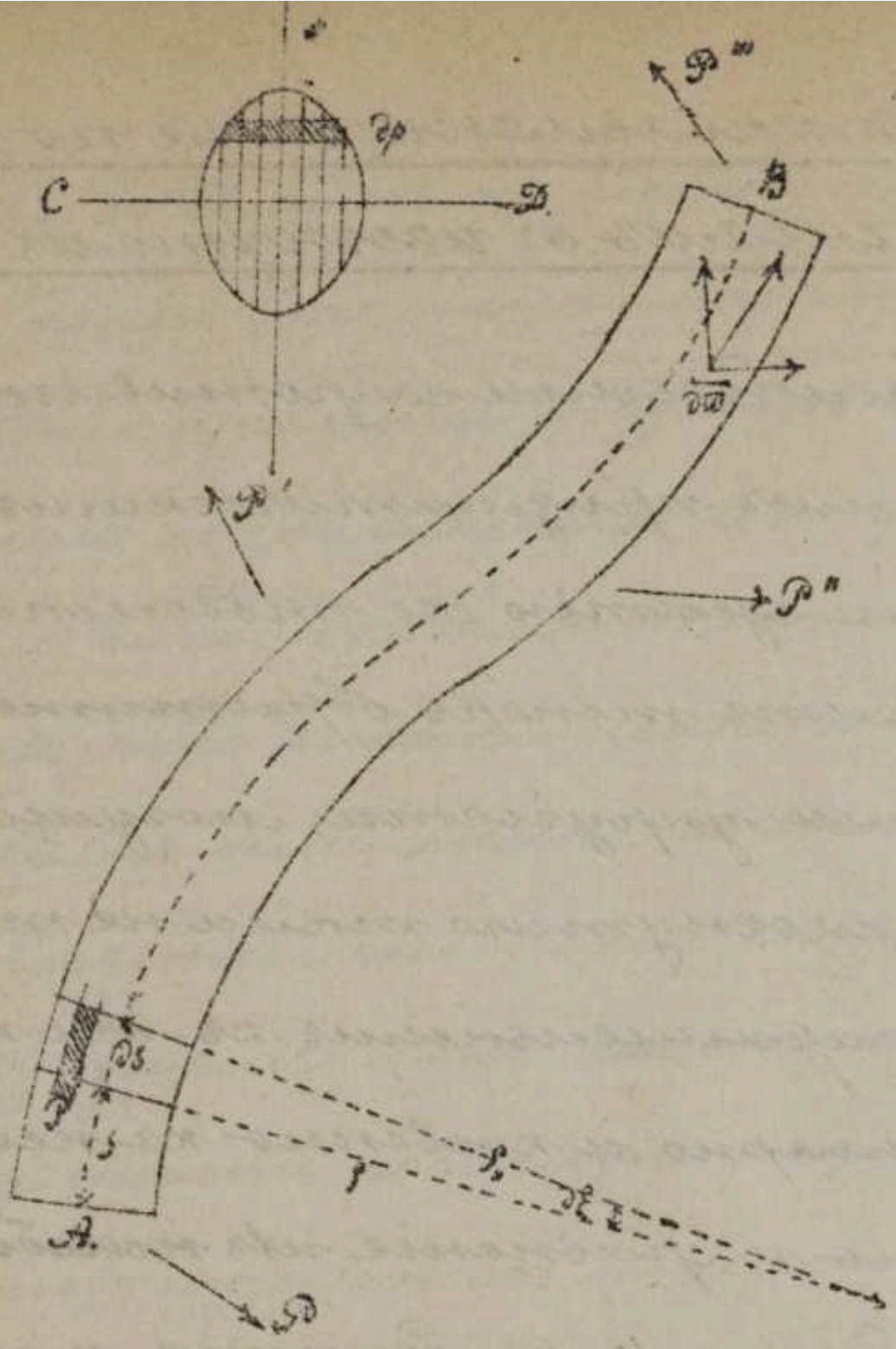
длиныя въ одномъ пролетѣ, передаются всѣмъ остальным, такъ что напримѣръ на мосту желѣзной дороги, средніе пролеты дрожатъ когда поѣздъ до нихъ еще не дошелъ, и сотрясенія непрерывной балки по сему должны быть продолжительнѣе, чѣмъ въ отдѣльныхъ балкахъ; что высота непрерывной балки должна быть болѣе или менѣе одинакова по всей ея длинѣ и слѣдовательно пояса должны быть прямые, между тѣмъ какъ высоту отдѣльныхъ балокъ можно измѣнять сообразно различнымъ длинамъ отдѣльныхъ пролетовъ и поясамъ расположить не только по прямымъ, но и по кривымъ линіямъ, что иногда можетъ быть выгодно.

Съ другой стороны прогибъ непрерывной балки вообще меньше, чѣмъ въ отдѣльныхъ балкахъ каждый изъ всѣхъ пролетами, непрерывная балка лучше сопротивляется и боковому прогибу вслѣдствіе связи между частями по всей длинѣ балки; въ тѣхъ случаяхъ, когда по значительности высоты опоръ или по другимъ обстоятельствамъ сборка мостовыхъ балокъ должна быть произведена не съ лѣсовъ опорными съ лѣсовъ, но на берегу, накатываніе непрерывныхъ балокъ на опоры вообще гораздо легче, чѣмъ поднятіе отдѣльныхъ балокъ на мѣсто.

О напряженіяхъ проявляющихся по различнымъ направленіямъ въ изогнутомъ тѣлѣ.

До сихъ поръ мы изслѣдовали сопротивленія, оказываемыя изогнутымъ призматическимъ тѣломъ растяженію или сжатію его продольныхъ слоевъ. Намъ предстоитъ теперь обратить вниманіе и на другія силы упругости, могущія проявиться внутри изогнутаго тѣла не только по направленіямъ, параллельнымъ къ оси тѣла, но также перпендикулярно и косвенно къ ней. — Отысканіе этихъ силъ и сравненіе ихъ наибольшихъ величинъ, приведенныхъ къ единицѣ площади, съ предѣломъ прочнаго сопротивленія ма-теріала при растяженіи или сжатіи, перерѣзываніи или скалываніи приведетъ насъ къ формулѣ для повѣрки прочности тѣлъ, могущихъ во многихъ случаяхъ служить необходимымъ дополненіемъ къ выведеннымъ въ предыдущихъ главахъ.

Вообразимъ призматическое тѣло AB, изогнутое дѣйствіемъ силъ $P, P', P'', \ldots$, и внутри его безконечно малую площадь $d\omega$, направленную подъ какимъ угодно угломъ къ оси AB тѣла. Такъ какъ между всѣми смежными частицами тѣла существуютъ частичныя



силы, то и между частицами, находящимися по обѣ стороны элементарной площади dw, также будутъ существовать частичныя силы, дѣйствующія по какимъ нибудь направленіямъ, пересѣкающимъ эту площадь. Частичныя силы при изслѣдованіи видатыла, окажутъ сопротивленіе и тѣмъ породятъ силу упругости, соотвѣтствующую разсматриваемой элементарной площади. Эта сила упругости въ каждомъ частномъ случаѣ, при извѣстныхъ внѣшнихъ силахъ, размѣрахъ и свойствахъ тѣла, будетъ имѣть опредѣленную величину и направленіе, вообще косвенное къ плоскости элемента, и можетъ быть разложена двумя своими составляющими, одною перпендикулярною и другою параллельною къ этой плоскости. Изъ нихъ первая представитъ проявляющееся при разсматриваемомъ элементѣ внутри тѣла сопротивленіе растяженію или сжатію перпендикулярное къ плоскости

элемента, а вторая сопротивленіе перерѣзыва-
нію или скалыванію, параллельное къ его плос-
кости. Вопросъ заключается въ томъ, чтобы опре-
дѣлить величину каждой изъ этихъ составляю-
щихъ силы упругости, и за тѣмъ, такъ какъ эти
силы при одной и той же точкѣ внутри тѣла
могутъ имѣть различныя величины, смотря
по направленію плоскости элемента, то найти
ихъ наибольшія величины и соотвѣтствующія
имъ направленія этой плоскости.

Чтобы упростить изслѣдованіе ограничимся
разсмотрѣніемъ такихъ тѣлъ, какія въ строи-
тельномъ дѣлѣ преимущественно встрѣчают-
ся, а именно призматическихъ тѣлъ, которыхъ
ось до изгиба прямая или плоская кривая ли-
нія, которыя изгибаются дѣйствіемъ внѣшнихъ
силъ, уравновѣшивающихся, направ-
ленныхъ въ одной плоскости съ осью и имѣютъ
поперечныя сѣченія симметричнаго вида относи-
тельно плоскости дѣйствія силъ. Кромѣ того
мы предположимъ, что внѣшнія силы, изгибаю-
щія тѣло, приложены къ нему такъ, что изги-
баютъ одинаково всѣ его слои, заключающіеся меж-
ду плоскостями, параллельными плоскости
дѣйствія силъ, т. е. плоскости симметріи попе-
речныхъ сѣченій. Тогда въ этихъ плоскостяхъ час-
тицы двухъ смежныхъ слоевъ не подвергнутся нака-

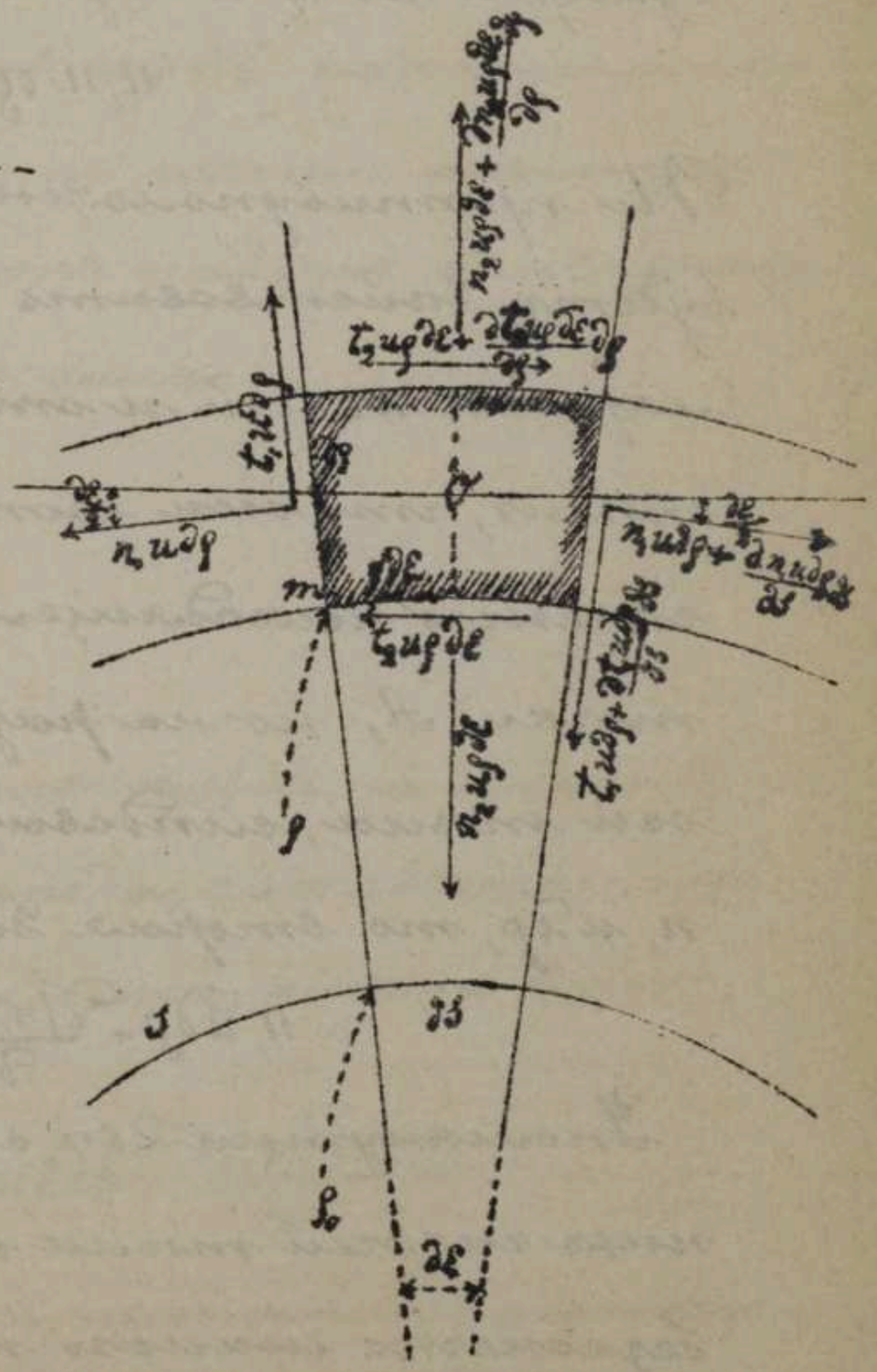
442. ному относительному перемѣщенію, а слѣдовательно въ элементахъ этихъ плоскостей не возбудятся силы упругости и нимъ остается разсматривать только силы упругости, проявляющіяся въ элементахъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ плоскости симметріи, заключающей въ себѣ ось тѣла и равнодѣйствующія внѣшнихъ силъ.

Сообразно этому вообразимъ себѣ элементарную площадь, перпендикулярную къ плоскости симметріи и представляющую діагональную плоскость безконечно малаго параллелипипеда, который можно выдѣлить въ изогнутомъ тѣлѣ при нѣкоторой точкѣ т двумя безконечно близкими между собою поперечными сѣченіями, перпендикулярными къ оси тѣла.

и двумя также безконечно близкими продольными сѣченіями, параллельными оси и перпендикулярными къ плоскости симметріи тѣла. Разсмотримъ сначала величины силъ упругости, дѣйствующихъ на всѣ четыре грани, которыми параллелипедъ касается къ смежнымъ частямъ тѣла, изслѣдуемъ взаимную зависимость этихъ силъ и увѣримся въ возможности ихъ опредѣленія; а затѣмъ, взявъ половину параллелипипеда, ограниченную двумя взаимно перпендикулярными гранями и діагональною плоскостію, постараемся

опредѣлить и силы упругости, дѣйствующія на діа-
гональную грань, съ помощію условій равновѣсія раз-
сматриваемой половины параллелипипеда. Изме-
няя же отношеніе между толщиною и длиною
параллелипипеда, т.е. между взаимными разстоя-
ніями двухъ смежныхъ продольныхъ и двухъ смежныхъ
поперечныхъ сѣченій тѣла, мы можемъ придать діаго-
нальной плоскости всѣ возможные углы наклоне-
нія къ оси тѣла, и опредѣлить тѣ изъ этихъ угловъ,
которымъ соотвѣтствуютъ наибольшія величины
сопротивленій растяженію, сжатію и перерѣзы-
ванію при разсматриваемой элементарной
площадкѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлить и эти наи-
большія величины.

Изобразимъ черезъ ρ радіусъ кри-
визны при точкѣ m кривой
продольной фибры, концентри-
ческой съ осью тѣла, черезъ ds
толщину параллелипипеда,
черезъ $d\varepsilon$ уголъ между двумя
смежными поперечными сѣ-
ченіями тѣла, такъ что
$\rho\, d\varepsilon$ представитъ длину
параллелипипеда, и обозна-
чимъ черезъ n, силу упругости,
дѣйствующую при точкѣ m
на квадратную единицу площади нормально къ грани



параллелепипеда, заключающейся въ поперечномъ сѣченіи, перпендикулярномъ къ оси тѣла, и соотвѣтствующемъ дугѣ δ, считаемой по оси отъ конца A тѣла.

Такъ какъ толщина параллелепипеда безконечно мала, то принимая, какъ выше сказано, измѣненіе вида тѣла одинаковымъ по всей ширинѣ его по обѣ стороны плоскости симметріи, мы вправѣ предположить, что напряженіе p_i будетъ одно и тоже во всѣхъ точкахъ грани параллелепипеда, продолженной на всю ширину u тѣла при точкѣ m; а такъ какъ площадь этой грани есть $u\,d\varsigma$, то величина силы упругости, дѣйствующей перпендикулярно къ ней будетъ

$$p_i u\,d\varsigma.$$

На противуположенную грань параллелепипеда будетъ дѣйствовать сила упругости, перпендикулярная къ ней и отличающаяся отъ первой силы тѣмъ, что она соотвѣтствуетъ поперечному сѣченію, находящемуся не на разстояніи δ отъ точки A, но на разстояніи $\delta + d\delta$, считая вдоль оси тѣла, слѣдовательно если первая сила есть $p_i u\,d\varsigma$, то вторая должна быть

$$p_i u\,d\varsigma + \frac{d(p_i u\,d\varsigma)}{d\delta}d\delta + \ldots\ldots$$

Упомянутыя двѣ силы выражаютъ дѣйствіе смежныхъ частей тѣла на двѣ противуположныя грани безконечно малаго параллелепипеда, а посему онѣ очевидно будутъ направлены въ противныя стороны

Изображая чрезъ t, силу упругости на единицу площади, дѣйствующую вдоль грани параллелипипеда въ поперечномъ сѣченіи при точкѣ m, получимъ подобно предыдущему для силы упругости во всей грани $ud\rho$ величину:

$$t, ud\varsigma ;$$

а для противуположной грани:

$$t, ud\varsigma + \frac{\partial(t, ud\varsigma)}{\partial s} ds + \ldots\ldots$$

Обѣ эти силы, также какъ и двѣ предыдущія, должны быть направлены въ противныя стороны другъ къ другу по плоскости симметріи.

Такимъ же образомъ, изображая черезъ n_2 и t_2 силы упругости на единицу площади, дѣйствующія нормально и касательно на грань $\rho d\varepsilon$ параллелипипеда, находящуюся въ продольномъ сѣченіи тѣла при точкѣ, которой соотвѣтствуетъ радіусъ кривизны ρ, мы получимъ для нормальной силы

$$n_2 u.\varsigma.d\varepsilon,$$

и для касательной:

$$t_2 u.\varsigma.d\varepsilon;$$

и легко видѣть, что силы дѣйствующія на противуположенную грань параллелипипеда, соотвѣтствующую радіусу кривизны $\rho+d\rho$, будутъ имѣть величины:

$$n_2 u\varsigma d\varepsilon + \frac{\partial n_2 u\varsigma d\varepsilon}{\partial s} ds + \ldots\ldots \quad \text{и} \quad t_2 u\varsigma d\varepsilon + \frac{\partial t_2 u\varsigma d\varepsilon}{\partial s} ds$$

и будутъ направлены въ стороны, противныя соотвѣтствующимъ имъ силамъ противулежащей грани.

446. Относительно направлений всех этих сил заме-
тим еще, что во всех нижеследующих мы будем
предполагать, что силы нормальные к граням парал-
лелипипеда представляют растяжения а силы
параллельныя к граням стремятся вращать
параллелипипед слова на право и сверху вниз около
оси, перпендикулярной к плоскости действія сил
и проходящей чрезъ центръ параллелипипеда. —
Вследствіе сего силы сжатія и силы, стремящіяся
вращать справа на лево, выразятся отрицатель-
ными величинами.

Кромѣ упомянутыхъ здѣсь силъ на элементъ
объема тѣла могутъ дѣйствовать еще силы, ко-
торыя подобно силѣ тяжести пропорціональны
массѣ или объему элемента тѣла. Но для тѣхъ
притяженій, которыя здѣсь имѣются въ виду, нѣтъ
нужды обращать вниманіе на эти силы при раз-
сматриваніи отдѣльнаго элемента, а достаточ-
но включать ихъ равнодѣйствующія въ число
внѣшнихъ силъ, приложенныхъ въ опредѣленныхъ
мѣстахъ тѣла.

Когда всѣ качанія при изгибаніи тѣла прекра-
тились и оно уже сохраняетъ въ продолженіи нѣ-
котораго времени безъ перемѣны принятое имъ
измѣненіе вида, то внѣшнія силы должны взаим-
но уравновѣшиваться, а слѣдовательно между
силами, дѣйствующими на элементъ тѣла,

представляющій въ свою очередь также тѣло, изъ-
нившее свой видъ, должна существовать зависимость,
выражаемая условіями равновѣсія; а именно такъ
какъ всѣ эти силы заключаются въ одной и той же
плоскости симметріи, то суммы проекцій силъ на
двѣ взаимно перпендикулярныя оси и сумма момен-
товъ силъ относительно какой угодно точки въ
плоскости симметріи должны быть равны нулю.

Чтобы упростить составленіе этихъ уравненій,
замѣтимъ что въ двухъ первыхъ изъ нихъ должны
исчезнуть всѣ члены, заключающіе безконечно ма-
лыя величины перваго порядка, потому что каж-
дой силѣ соотвѣтствуетъ другая ей противупо-
ложенная и отличающаяся отъ нея только безко-
нечно мало по величинѣ и направленію. Сверхъ того
если за оси проекцій примемъ нормальную и ка-
сательную, проведенныя чрезъ центръ О параллели-
пипеда къ дугѣ, параллельной оси тѣла, то на-
правленія силъ, дѣйствующихъ въ поперечныхъ
сѣченіяхъ, составятъ съ осями проекцій углы
$\frac{\partial\varepsilon}{2}$, $90^\circ+\frac{\partial\varepsilon}{2}$ и $180^\circ-\frac{\partial\varepsilon}{2}$, а силы продольныхъ сѣченій
будутъ параллельны каждая одной изъ осей, и
устраняя безконечно малыя величины выше 2го
порядка, можемъ при проектированіи силъ поло-
жить:

$$\cos\frac{\partial\varepsilon}{2}=1\ ;\ \cos\left(90^\circ+\frac{\partial\varepsilon}{2}\right)=-\sin\frac{\partial\varepsilon}{2}=-\frac{\partial\varepsilon}{2}\ ;\ \cos\left(180^\circ-\frac{\partial\varepsilon}{2}\right)=-\cos\frac{\partial\varepsilon}{2}=-1.$$

$$\sin\frac{\partial\varepsilon}{2}=\frac{\partial\varepsilon}{2}\ ;\ \sin\left(90^\circ+\frac{\partial\varepsilon}{2}\right)=\cos\frac{\partial\varepsilon}{2}=1\ ;\ \sin\left(180^\circ-\frac{\partial\varepsilon}{2}\right)=\sin\frac{\partial\varepsilon}{2}=\frac{\partial\varepsilon}{2}.$$

448. Тогда находимъ для суммы проекцій на касательную:

$$0 = \frac{\partial n_1 u \partial s}{\partial s} \partial s + \frac{\partial t_2 u_s \partial \varepsilon}{\partial s} \partial s - t_1 u \partial s \partial \varepsilon ;$$

для суммы проекцій на нормальную.

$$0 = \frac{\partial n_2 u_s \partial \varepsilon}{\partial s} \partial s - \frac{\partial t_1 u \partial s}{\partial s} \partial s - n_1 u \partial s \partial \varepsilon$$

и для суммы моментовъ относительно центра параллелипипеда:

$$0 = t_1 u \partial s \partial \Sigma_s + t_2 u_s \partial \varepsilon \partial \sigma$$

Сдѣлаемъ въ этихъ уравненіяхъ нѣкоторыя упрощенія. Величину $d\varepsilon$, независящую отъ перемѣнной ρ, вынесемъ за знакъ дифференціала тамъ гдѣ онъ относится къ ρ; такимъ же образомъ выведемъ dr, независящій отъ дуги δ, за знакъ дифференціала, взятаго относительно δ; замѣнимъ множитель въ видѣ $\rho . d\varepsilon$, изображая черезъ ρ_0 радіусъ кривизны оси тѣла въ точкѣ, соотвѣтствующей дугѣ δ. Тогда за сокращеніемъ общихъ множителей получимъ:

$$0 = \rho_0 \frac{\partial n_1 u}{\partial \delta} + \frac{\partial t_2 \rho . u}{\partial \rho} - t_1 u$$

$$0 = \frac{\partial n_2 \rho u}{\partial \rho} - \rho_0 \frac{\partial t_1 u}{\partial \delta} - n_1 u$$

$$0 = t_1 + t_2 .$$

Третье изъ этихъ уравненій показываетъ, что при каждой точкѣ внутри тѣла сопротивленіе t_2 перерѣзыванію, параллельное оси тѣла равно сопротивленію t_1 перерѣзыванію, перпендикулярному къ оси, и оба эти сопротивленія имѣютъ такія направленія, при которыхъ они стремятся

вращать элементарный параллелипипедъ въ противныя стороны, какъ это видно изъ того, что величины t_1 и t_2 имѣютъ противные знаки.

Вслѣдствіе этого въ выведенныя уравненія можно ввести $-t_1$ вмѣсто t_2 и писать ихъ въ видѣ:

$$\frac{\partial t_1 \varrho u}{\partial s} + t_1 u = \varrho_0 \frac{\partial n_1 u}{\partial s}$$

$$\frac{\partial n_2 \varrho u}{\partial s} = \varrho_0 \frac{\partial t_1 u}{\partial s} + n_1 u$$

$$t_2 = -t_1$$

Такимъ образомъ условія равновѣсія элементарнаго параллелипипеда приводятъ къ тремъ (связывающимъ четыре силы упругости) уравненіямъ, n_1, n_2, t_1, t_2, и слѣдовательно для опредѣленія этихъ силъ остается найти еще одно уравненіе. Это дополнительное уравненіе очевидно должно выразить связь между упомянутыми силами упругости и внѣшними силами, дѣйствующими на тѣло; оно по этому можетъ быть выведено только принимая во вниманіе измѣненіе вида элемента тѣла при дѣйствіи внѣшнихъ силъ. Для многихъ вопросовъ, допускающихъ приблизительное рѣшеніе, можно руководствоваться при этомъ теоріею изгиба призматическихъ тѣлъ, изложенною въ предыдущей главѣ и прибавить къ тремъ найденнымъ уравненіямъ выводимую въ этой теоріи величину силы упругости n_1, т.е. растяженія или сжатія продольныхъ фибръ призмы, и затѣмъ опредѣлить и силы n_2, t_1 и t_2. Но вообще выводъ четвертаго уравненія

450. и въ особенности интегрированіе найденныхъ дифференціальныхъ уравненій представляетъ большія затрудненія и облегчается только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, примѣръ которыхъ будетъ изложенъ нижее. Здѣсь же мы пока не будемъ останавливаться на выводѣ четвертаго уравненія, представляя себѣ отнести дальнѣйшія изслѣдованія къ такимъ случаямъ, въ которыхъ приблизительное или точное опредѣленіе натуры силъ упругости удобоисполнимо.

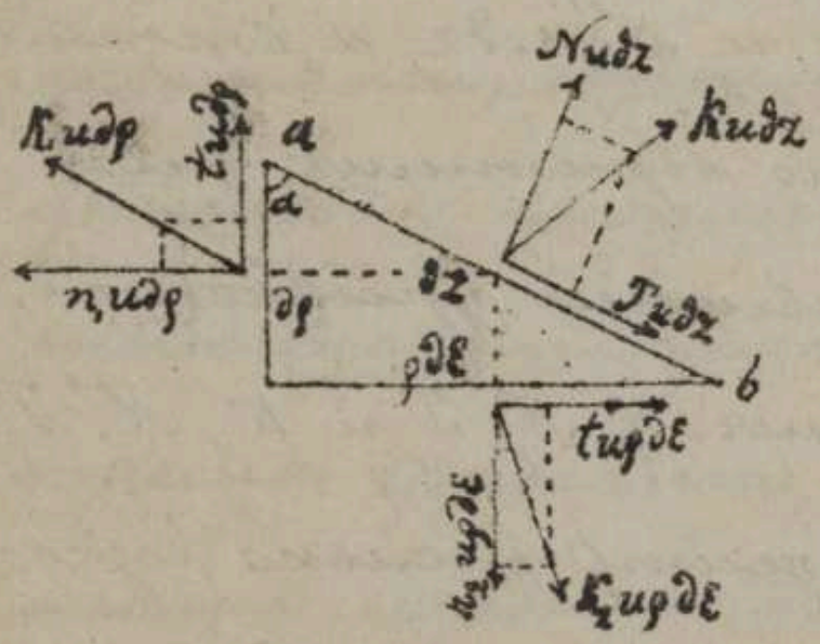
За тѣмъ перейдемъ къ другой части вопроса, т.е. къ опредѣленію силъ, дѣйствующихъ на діагональную плоскость элементарнаго параллелипипеда. Параллелипипедъ этотъ можетъ быть раздѣленъ пополамъ двумя діагональными плоскостями, перпендикулярными къ плоскости дѣйствія внѣшнихъ силъ, и тогда каждая половина его отдѣляется отъ смѣжныхъ частей тѣла тремя гранями, двумя взаимно перпендикулярными и одною діагональною. Для того чтобы каждая половина параллелипипеда могла быть въ равновѣсіи очевидно необходимо, чтобы на діагональную ея грань смѣжныя части тѣла производили такое дѣйствіе, которое уравновѣшивается дѣйствіе силъ, приложенныхъ къ взаимно перпендикулярнымъ граняхъ. Посему равнодѣйствующая силы упругости для каждой

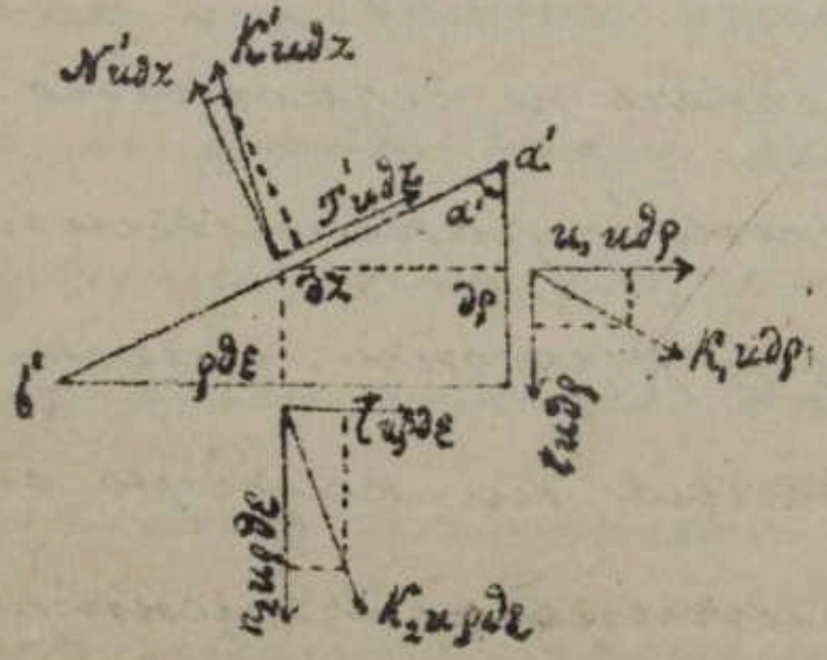
діагональной грани можетъ быть опредѣлена изъ условій равновѣсія соотвѣтствующей половины параллелипипеда, если считать данными силы, дѣйствующія на взаимно перпендикулярныя грани.

Для сего изобразимъ чрезъ dz длину діагональной грани, черезъ $K.u.dz$ равнодѣйствующую силъ упругости, приложенныхъ къ одной изъ двухъ діагональныхъ граней параллелипипеда и чрезъ $K'.u.dz$ такую же равнодѣйствующую для другой діагональной грани. Эти силы вообще будутъ направлены подъ нѣкоторыми углами къ діагональнымъ гранямъ, и посему растяженія выразятся изъ составляющихъ, нормальныхъ къ гранямъ, а силы перерѣзыванія представятся составля—— ющими, параллельными гранямъ. Мы изобразимъ первыя составляющія чрезъ $N.u.dz$ и $N'.u.dz$, а вторыя чрезъ $\Gamma.u.dz$ и $\Gamma'.u.dz$. Кромѣ того обратимъ вниманіе на то, что при составленіи уравненій, выражающихъ зависимость силъ K, N, Γ и K', N', Γ' отъ силъ n_1, n_2, t_1, надобно удержать только безконечно малыя величины низшаго порядка, а слѣдовательно можно пренебречь и безконечно малыми отклоненіями граней параллелипипеда отъ взаимной перпендикулярности. Затѣмъ, перенеся силы, дѣйствующія на каждую отдѣльную половину параллелипипеда въ центръ ея діагональной плоскости и замѣтивъ, что моменты

силъ $t_1 и др$ и $t_2 и рдε$ относительно этого центра взаимно уничтожаются, легко видѣть, что остается разсматривать только равновѣсіе силъ, направленныхъ въ плоскости симметріи и проходящихъ чрезъ данную точку для каждой отдѣльной половины параллелепипеда.

Эти условія равновѣсія принимаютъ весьма простой видъ, если въ нихъ ввести вмѣсто силъ $n_1 и др$ и $t_1 и др$ одной грани параллелепипеда ихъ равнодѣйствующую $K_1 и др$, вмѣсто силъ $n_2 и рдε$ и $t_2 и рдε$ или $-t_1 и рдε$ другой грани ихъ равнодѣйствующую $K_2 и рдε$ и такимъ же образомъ равнодѣйствующія $K.и.dz$ и $K'.и.dz$ силъ, приложенныхъ къ каждой діагональной грани. Дѣйствительно тогда равновѣсіе будетъ существовать, если въ первой половинѣ параллелепипеда сила $K.и.dz$, а во второй сила $K'.и.dz$, равна и параллельна силѣ, выражаемой діагональю параллелограмма, построеннаго на линіяхъ, выражающихъ силы равныя и противуположныя силамъ $K_1 и др$ и $K_2 и рдε$. Если же величины обѣихъ силъ раздѣ-





лить на ndz и изобразимъ
чрезъ α и α' углы, составляе-
мые первою и второю діаго-
нальными гранями съ
направленіемъ радіуса
кривизны продольной
фибры при разсматри-
ваемой точкѣ тѣла,
такъ что для первой
половины параллелепи-
педа:

$$\frac{ndy}{ndz} = \cos\alpha \quad \text{и} \quad \frac{n\xi d\Sigma}{ndz} = \sin\alpha$$

и для второй

$$\frac{ndy}{ndz} = \cos\alpha' \quad \text{и} \quad \frac{n\xi d\Sigma}{ndz} = \sin\alpha'$$

то для равновѣсія нужно, чтобы сила K была діаго-
налью параллелограмма силъ противуположе-
(и чтобы сила K' была діагональю параллелогр. силъ противоположныхъ силамъ $K_1\cos\alpha'$, $K_2\sin\alpha'$)
ныхъ силамъ $K_1\cos\alpha$ и $K_2\sin\alpha$. Но сдѣлавъ:

$$K_1\cos\alpha = x \qquad K_2\sin\alpha = y, \qquad K_1\cos\alpha' = x' \text{ и } K_2\sin\alpha' = y',$$

откуда:

$$\cos\alpha = \frac{x}{K_1} \qquad \sin\alpha = \frac{y}{K_2}, \qquad \cos\alpha' = \frac{x'}{K_1} \text{ и } \sin\alpha' = \frac{y'}{K_2}$$

находимъ, вслѣдствіе равенствъ:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \text{ и } \cos^2\alpha' + \sin^2\alpha' = 1,$$

уравненія:

$$\frac{x^2}{K_1^2} + \frac{y^2}{K_2^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x'^2}{K_1^2} + \frac{y'^2}{K_2^2} = 1,$$

которыя оба принадлежатъ одному и тому же эллип-
су, отнесенному къ косоугольнымъ осямъ, параллель-
нымъ и противуположеннымъ направленіямъ силъ
K_1 и K_2 каждой половины параллелепипеда, и совпадаю-

 цилиндръ съ двумя сопряженными діаметрами $2K_1$ и $2K_2$ эллипса, т.е. такими діаметрами, изъ которыхъ каждый дѣлитъ пополамъ всѣ хорды эллипса, параллельныя другому.

Изъ этого видно, что если мы придадимъ безконечно малой площади придонной точкѣ внутри изогнутаго призматическаго тѣла послѣдовательно всѣ возможныя положенія діагональной плоскости первой половины параллелипипеда, изливныя уголъ α между предѣлами нуль и 90° и за тѣмъ и всѣ остальныя для нея возможныя положенія діагональной плоскости второй половины параллелипипеда, изливныя уголъ α' между нулемъ и 90°, для чего стоитъ только измѣнять отношенія между толщиною dp и длиною pE параллелипипеда, то концы линій, изображающихъ величины и направленія силъ упругости K и K', приведенныхъ къ единицѣ площади и соотвѣтствующихъ всѣмъ различнымъ положеніямъ элементарной площади, будутъ лежать на одной половинѣ эллипса, заключающей въ себѣ полудіаметръ равный и противуположный K_2 и опредѣленный съ нимъ діаметръ $2K_1$. Этотъ эллипсъ называется <u>эллипсомъ напряженій</u> придонной точки тѣла.

Существованіе эллипса напряженій приводитъ между прочимъ къ заключенію, что если бы безконечно тонкій параллелипипедъ внутри призматическаго тѣла замѣнить безконечно тонкимъ цилиндромъ съ

круговым сечением, то при изгибе такое сечение цилиндра должно принять вид эллипса, потому что по радиусам круга проявятся силы упругости, пропорциональные полудиаметрам эллипса напряжений.

Если имеется чертеж эллипса напряжений для данной точки изгибаемого тела, то по нему легко определить величины силы упругости K или K', соответствующей положениям данной площади, составляющей с направлением радиуса кривизны продольной фибры эту точку данные углы α или α', или же по данной силе упругости K или K' определить соответствующее ей положение площади, т. е. угол α или α'. Для сего на чертеже эллипса напряжений, в которомъ сопряженные полудиаметры Ok'_1 и Ok'_2, противуположные направлениям сил упругости K_1 и K_2 первой половины параллелепипеда, принимаются за косоугольные оси координатъ OX и OY, проведемъ линию OK, изображающую по величине и направлению данную силу упругости, обозначимъ координаты x и y точки K, и тогда для определения угла α

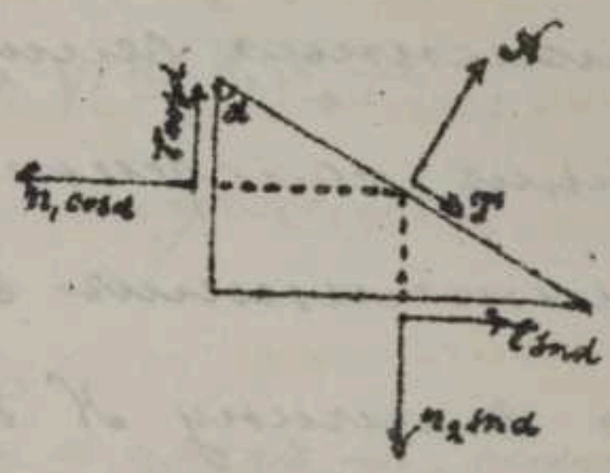
наклоненія діагональной плоскости, соответствующей силе K, на основаніи уравненія

$$x = K_1 \cos\alpha$$

стоитъ только на координатѣ Ox какъ катетъ построить прямоугольный треугольникъ, которого гипотенуза равна K_1, т.е. длинѣ Ok$_1$; острый уголъ при Ox будетъ искомый уголъ α. Зная для опредѣленія положенія діагональной плоскости Ob, остается только этотъ уголъ отложить при O отъ линіи Op направленія радіуса кривизны продольной фибры тѣла. Такимъ же образомъ можно построить уголъ α' и положеніе діагональной плоскости Ob$'$ второй половины параллелипипеда, соотвѣтствующія силѣ упругости K$'$ во второмъ углѣ координатъ YOX$'$. Зная уголъ α или α' по величинѣ и направленіе соотвѣтствующей ему силы упругости Ok или Ok$'$ опредѣляется обратнымъ построеніемъ. Зная такимъ образомъ данныя силы K и K$'$ и направленія діагональныхъ плоскостей Ob и Ob$'$ можно найти и ихъ составляющія силы N и T, N$'$ и T$'$, проектируя линіи Ok и Ok$'$ на направленія этихъ силъ, т.е. на направленія перпендикулярныя и параллельныя линіямъ Ob и Ob$'$.

Но этотъ графическій способъ не всегда удобоприменимъ, а потому полезно вывести формулы для опредѣленія величинъ и направленій силъ N, T, N$'$ и T$'$ по даннымъ угламъ α и α'. Для чего стоитъ только написать уравненія равновѣсія силъ, принявъ за

положительныя направленія осей проекцій, парал-
лельныя искомымъ силамъ, т.е. по которымъ силы
N и N' вырождаются растяженія, а силы T и T' стре-
мятся вращать слѣва
направо половину па-
раллелипипеда около ея
центра. Тогда получаемъ:



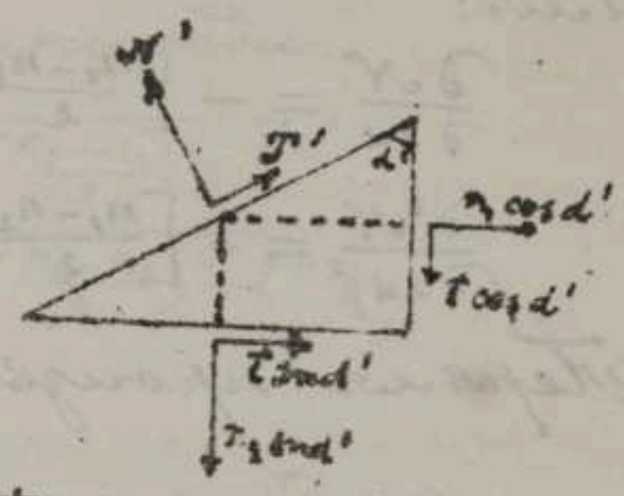
$$N = n_1\cos^2\alpha + n_2\sin^2\alpha - 2t\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$T = (n_1 - n_2)\sin\alpha\cos\alpha + t(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha);$$

или же, вводя двойные углы,
по формуламъ:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2},\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

найдемъ



$$N = \frac{n_1+n_2}{2} + \frac{n_1-n_2}{2}\cos 2\alpha - t\sin 2\alpha;\quad T = \frac{n_1-n_2}{2}\sin 2\alpha + t\cos 2\alpha.$$

Такимъ же образомъ получимъ:

$$N' = \frac{n_1+n_2}{2} + \frac{n_1-n_2}{2}\cos 2\alpha' + t\sin 2\alpha';\quad T' = -\frac{n_1-n_2}{2}\sin 2\alpha' + t\cos 2\alpha';$$

откуда видно, что величины N' и T' могутъ быть пря-
мо написаны по величинамъ N и T, замѣняя по-
слѣдній α чрезъ $-\alpha'$.

Эти формулы при данной величинѣ α или α' да-
дутъ положительныя величины для N или N', если
эти силы представляютъ растяженія, и отри-
цательныя величины, если онѣ выражаютъ сжа-
тія; положительныя же величины T и T', направ-
ленныя вдоль діагональныхъ плоскостей, соот-
вѣтствуютъ вращенію половины параллелипи-
педа слѣва на право, а отрицательныя противу-
положенному направленію.

458. Чтобы найти наибольшія числовыя величины силъ N, T, N' и T' и соотвѣтствующія имъ положенія діагональныхъ плоскостей, опредѣляемыя углами α и α', надобно отыскать наибольшія и наименьшія величины этихъ силъ, потому что наибольшія числовыя величины могутъ принадлежать наибольшимъ положительнымъ или наименьшимъ отрицательнымъ величинамъ. Для сего, дифференцируя величину N два раза относительно 2α, находимъ:

$$\frac{\partial N}{\partial 2\alpha} = -\left[\frac{n_1-n_2}{2}\sin 2\alpha + t\cos 2\alpha\right] = -T$$

$$\frac{\partial^2 N}{(\partial 2\alpha)^2} = -\left[\frac{n_1-n_2}{2}\cos 2\alpha - t\sin 2\alpha\right] = \left[N - \frac{n_1+n_2}{2}\right].$$

Первая производная обращается въ нуль при величинѣ 2α, для которой

$$tg\, 2\alpha = -\frac{2t}{n_1-n_2},$$

и выводимъ изъ того

$$\sin 2\alpha = \frac{tg\, 2\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{-2t}{\pm\sqrt{(n_1-n_2)^2+4t^2}}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{n_1-n_2}{\pm\sqrt{(n_1-n_2)^2+4t^2}}$$

$$\frac{\partial^2 N}{(\partial 2\alpha)^2} = \frac{-\left[(n_1-n_2)^2+4t^2\right]}{\pm 2\sqrt{(n_1-n_2)^2+4t^2}} = \mp\sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2+t^2} = -\left[N - \frac{n_1+n_2}{2}\right].$$

Но уголъ α можетъ измѣняться только между предѣлами нуль и 90°, а слѣдовательно $\sin 2\alpha$ долженъ быть положителенъ, по сему если t положительно, т.е. если сила t, въ поперечномъ сѣченіи тѣла направлена въ сторону сращенія параллелипеда слѣва на право, то передъ квадратнымъ корнемъ слѣдуетъ двойной знакъ замѣнить низшимъ и тогда положительная величина $\frac{\partial^2 N}{(\partial 2\alpha)^2}$

указываетъ на существованіе наименьшей величины 459.
N; если же t отрицательно, то передъ корнемъ должно брать верхній знакъ и тогда получается наибольшая величина N. И такъ для первой половины параллелипипеда находимъ, что

при $t>0$ будетъ $Min.\ N = \frac{n_1+n_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2+t^2}$

при $t<0$ . . . . $Max\ N = \frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2+t^2}$;

и для обоихъ направленій силы получаемъ:

$$tg\,2\alpha = -\frac{2t}{n_1-n_2}\ .$$

Такимъ же образомъ, замѣняя α чрезъ $-\alpha'$, найдемъ для второй половины параллелипипеда:

при $t>0$ . . . . . $Max.\ N' = \frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2+t^2}$

при $t<0$ . . . . $Min.\ N' = \frac{n_1+n_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2+t^2}$;

и для обоихъ направленій силы t:

$$tg\,2\alpha' = \frac{2t}{n_1-n_2}\ .$$

Замѣтимъ здѣсь, что изъ предыдущихъ формулъ легко вывести равенства:

$$\frac{dN}{d2\alpha} = -T \quad \text{и} \quad \frac{dN'}{d2\alpha'} = T';$$

а отсюда слѣдуетъ, что тѣ величины угловъ α и α', которымъ соотвѣтствуютъ наибольшія и наименьшія величины силъ N и N', обращаютъ въ нуль силы T и T', т.е. силы K и K' тогда измѣняютъ составляющія параллельныя діагональнымъ плоскостямъ, совпадаютъ съ силами N и N' и слѣдовательно должны быть перпендикулярны къ своимъ діагональнымъ плоскостямъ.

Кромѣ этого съ помощію формулы

$$tg(2\alpha+2\alpha') = \frac{tg\,2\alpha + tg\,2\alpha'}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,2\alpha'}$$

видно, что углы α и α' наибольшихъ и наименьшихъ величинъ

(Отнош. сил.

N и N' удовлетворяют уравнению

$$tg(2\alpha + 2\alpha') = 0 .$$

Но углы α и α' не могут быть больше 90° и должны иметь положительныя величины, посему должно существовать уравнение

$$2\alpha + 2\alpha' = 180° \quad или \quad \alpha + \alpha' = 90°,$$

откуда видно что наибольшія и наименьшія силы N и N' соответствуют двум взаимно перпендикулярным діагональным граням.

Заметимъ еще, что если выразимъ величины силъ упругости K и K' съ помощію составляющихъ силъ N, T и N', T' въ зависимости отъ угловъ α и α', то получимъ:

$$K^2 = N^2 + T^2 = \left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2 + (n_1+n_2)\left(\frac{n_1-n_2}{2}\cos 2\alpha - t\sin 2\alpha\right)$$

или вслѣдствіе того, что

$$\frac{n_1-n_2}{2}\cos 2\alpha - t\sin 2\alpha = N - \frac{n_1+n_2}{2},$$

найдемъ

$$K^2 = t^2 - n_1 n_2 + (n_1+n_2)N$$

и такимъ же образомъ

$$K'^2 = t^2 - n_1 n_2 + (n_1+n_2)N' ,$$

а отсюда видно, что силы упругости K и K' принимаютъ свои наибольшія и наименьшія величины при томъ же углахъ α и α', т.е. при тѣхъ же положеніяхъ діагональныхъ плоскостей, при которыхъ силы N и N' имѣютъ наибольшія и наименьшія величины и какъ выше сказано совпадаютъ съ силами K и K'. –

Изъ всего этого слѣдуетъ, что наибольшая и наименьшая величины силъ N и N' совпадаютъ съ большею и меньшею полуосями эллипса напряженій, и что соотвѣтствующія имъ направленія діагональныхъ плос-

костей параллелепипеда совпадают съ тѣми же по-
осями, но только въ обратномъ порядкѣ, т. е. наибольшей
силѣ соотвѣтствуетъ плоскость, направленная по
наименьшей оси эллипса и обратно.

Переходя за тѣмъ къ отысканію наибольшихъ и
наименьшихъ величинъ силъ T и T', имѣемъ при
дифференцированіи относительно 2α:

$$\frac{\partial T}{\partial 2\alpha} = \frac{n_1 - n_2}{2}\cos 2\alpha - t \sin 2\alpha = N - \frac{n_1 + n_2}{2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{(\partial 2\alpha)^2} = -\left[\frac{n_1 - n_2}{2}\sin 2\alpha + t\cos 2\alpha\right] = -T$$

и если чрезъ β изобразимъ уголъ между радіусомъ кри-
визны и діагональною плоскостію первой половины
параллелепипеда, соотвѣтствующій наибольшей
или наименьшей величинѣ T, то обращая первую
производную въ нуль, находимъ для этого угла

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{n_1 - n_2}{2t}$$

и въ томъ же время

$$\sin 2\beta = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\beta}} = \frac{n_1 - n_2}{\pm\sqrt{(n_1 - n_2)^2 + 4t^2}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\beta}} = \frac{2t}{\pm\sqrt{(n_1 - n_2)^2 + 4t^2}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{(\partial 2\alpha)^2} = \frac{-\left[(n_1 - n_2)^2 + 4t^2\right]}{\pm\sqrt{(n_1 - n_2)^2 + 4t^2}} = \mp\sqrt{\left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2 + t^2}\ .$$

Но какъ $\sin 2\beta$ всегда долженъ быть положителенъ,
то сообразно этому слѣдуетъ выбрать знакъ передъ
квадратнымъ корнемъ, и посему

при $n_1 - n_2 > 0$ имѣемъ $\dfrac{\partial^2 T}{(\partial 2\alpha)^2} < 0$ и $\mathit{Max.}\ T = \sqrt{\left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2 + t^2}$

при $n_1 - n_2 < 0$ . . . . . $\dfrac{\partial^2 T}{(\partial 2\alpha)^2} > 0$ и $\mathit{Min.}\ T = -\sqrt{\left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2 + t^2}$

и для обоихъ этихъ случаевъ:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{n_1 - n_2}{2t}\ .$$

Такимъ же образомъ, называя β' уголъ, составляе-

мый съ радіусомъ кривизны діагональною плоскостью второй половины параллелипипеда при наибольшей или наименьшей величинѣ силы T', напишемъ, что

при $n_1 - n_2 > 0$ имѣемъ $\quad Мін.\ T' = -\sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2}$

при $n_1 - n_2 < 0$ . . . . . $\quad Мах.\ T' = \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2}$

и во обоихъ случаяхъ

$$tg\, 2\beta' = -\frac{n_1 - n_2}{2t} .$$

Здѣсь также какъ и выше находимъ:

$$tg(2\beta + 2\beta') = 0 , \quad 2\beta + 2\beta' = 180^\circ \quad и \quad \beta + \beta' = 90^\circ ,$$

а слѣдовательно направленія діагональныхъ плоскостей, которымъ соотвѣтствуютъ наибольшая и наименьшая величины силъ перекрызыванія T и T' взаимно перпендикулярны.

Кромѣ того легко видѣть, что

$$tg\, 2\alpha \cdot tg\, 2\beta = -1 ,$$

и что слѣдовательно числовая величина

$$tg(2\alpha - 2\beta) = \frac{tg\, 2\alpha - tg\, 2\beta}{1 + tg\, 2\alpha \cdot tg\, 2\beta}$$

безконечно велика, а посему

$$2\alpha - 2\beta = \pm 90^\circ \quad и \quad \alpha - \beta = \pm 45^\circ .$$

Отсюда выходитъ, что въ каждой половинѣ параллелипипеда два направленія діагональной плоскости, которымъ соотвѣтствуютъ наибольшая или наименьшая сила N и наибольшая или наименьшая сила T, составляютъ между собою уголъ въ 45°.

Прибавимъ еще къ сказанному слѣдующія замѣчанія касательно силъ T, T', N и N':

Наибольшая сила перекрызыванія имѣетъ одинаковую величину

$$\sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2}$$

въ обыкъ половинахъ параллелипипеда, но различныя направленія: если въ одной половинѣ она стремится вращать слѣва на право, то въ другой справа на лѣво; вращеніе слѣва на право относится къ правой половинѣ, если $n_1 - n_2$ положительно, и ко второй въ противномъ случаѣ.

Въ обыкъ половинахъ параллелипипеда существуютъ одни только растяженія, если всѣ величины силъ N и N' положительны, что будетъ имѣть мѣсто если удовлетворено неравенство

$$\frac{n_1+n_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2} \geqq 0 \ ,$$

которое удовлетворяется при совмѣстномъ существованіи слѣдующихъ неравенствъ

$$n_1 + n_2 > 0 \quad \text{и} \quad n_1 n_2 \geqq t^2 .$$

Въ одной половинѣ параллелипипеда проявится наибольшее растяженіе, а въ другой наибольшее сжатіе, если существуютъ неравенства

$$\frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2} > 0 \ \text{и} \ \frac{n_1+n_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2} < 0 \ ,$$

которыя могутъ быть замѣнены простѣйшими

$$n_1 n_2 < t^2 .$$

Въ этомъ случаѣ наибольшее растяженіе превосходитъ наибольшее сжатіе, если

$$\frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2} > -\frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2}$$

т.е. когда

$$n_1 + n_2 > 0 \ ;$$

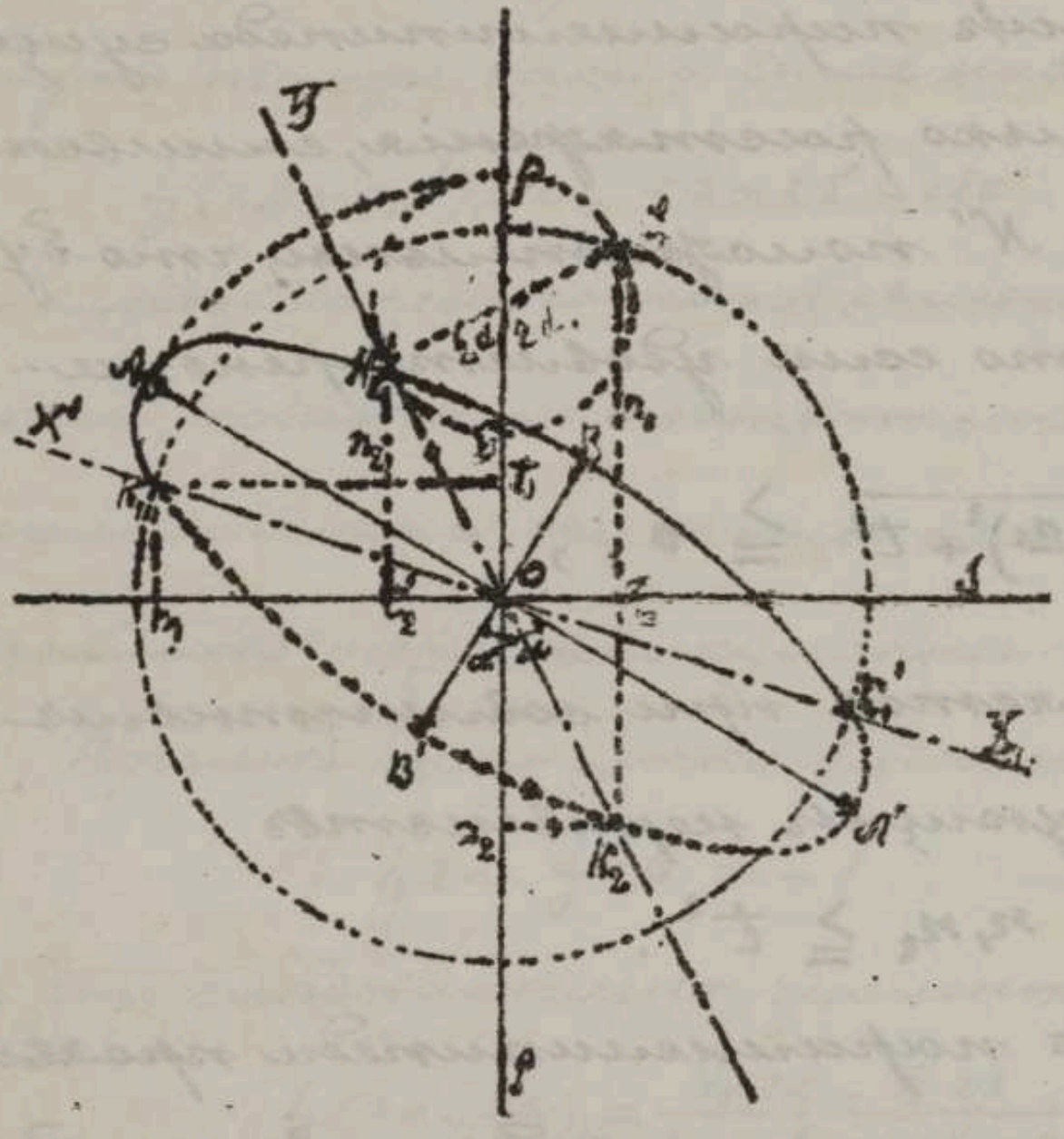
если же n_1+n_2 отрицательно, то преобладаетъ наибольшее сжатіе.

Въ обыкъ половинахъ параллелипипеда проявятся одни только силы сжатія, если удовлетворено неравенство

$$\frac{n_1+n_2}{2}+\sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2+t^2} \leqq 0 ,$$

которое можетъ быть замѣнено простѣйшимъ неравенствомъ

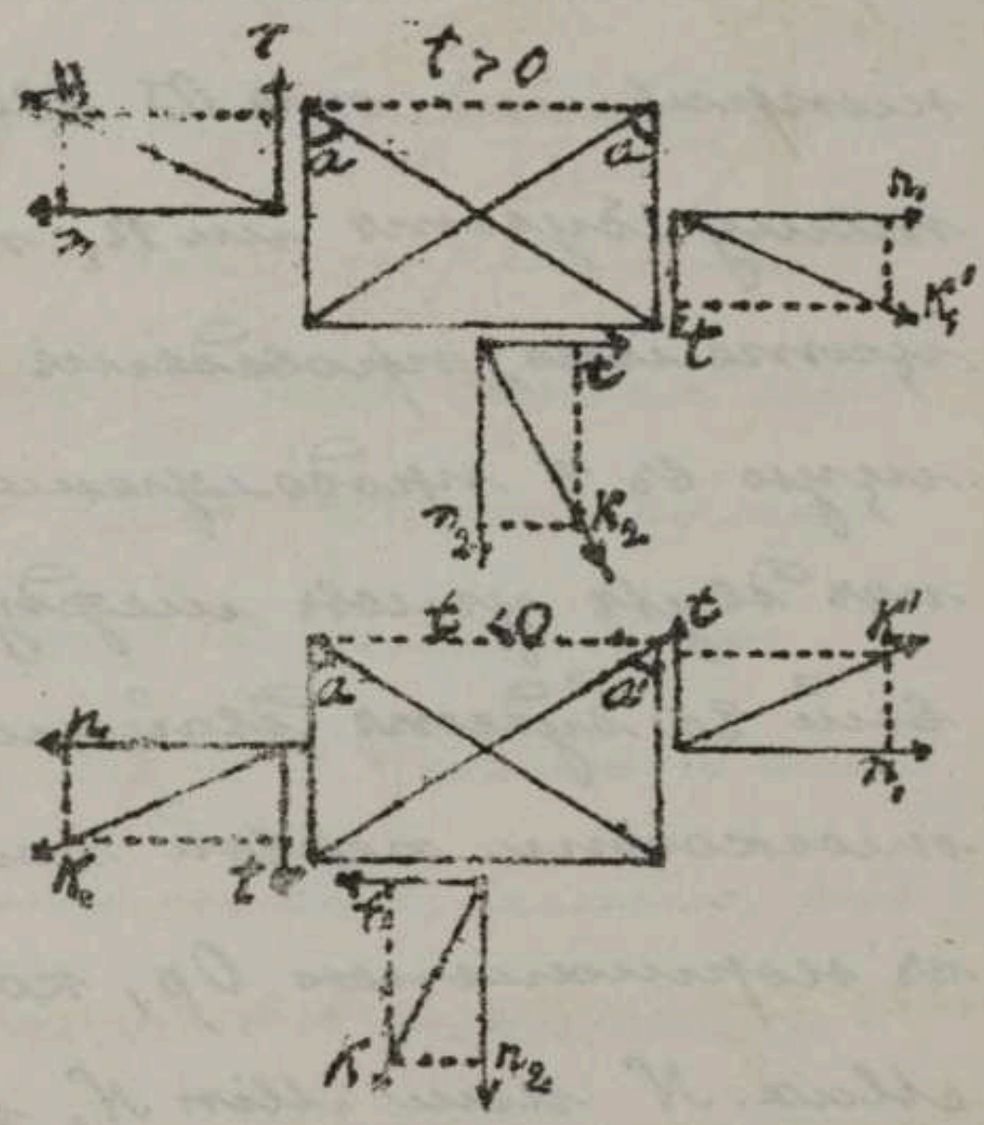
$$n_1+n_2<0 \text{ и } n_1 n_2 \geqq t^2 .$$



Если нѣсколько видоизмѣнить въ выше-выведенныя формулы, опредѣляющія углы α и α', которымъ соотвѣтствуютъ наибольшія и наименьшія величины силъ N и N' при обычныхъ возможныхъ направленіяхъ силы t, то легко видѣть, что наибольшее растяженіе или наименьшее сжатіе соотвѣтствуютъ той половинѣ параллелипипеда, въ которой уголъ діагональной плоскости съ постояннымъ направленіемъ радіуса кривизны уменьшается по направленію противулежащей ему силы t, параллельной продольной фибрѣ тѣла, и на оборотъ наименьшее растяженіе или наибольшее сжатіе соотвѣтствуетъ другой половинѣ параллелипипеда,

липипеда, въ которой уголъ діагональной плоскости съ радіусомъ кривизны увеличивается по направленію силы t.

Остается еще показать способъ геометрическаго построенія эллипса напряженій для данной точки внутри изогнутаго тѣла, если силы n_1, n_2 и t для этой точки даны по величинѣ и направленію. — Для сего проведемъ двѣ взаимно перпендикулярныя линіи Оs и Ор направленія продольной фибры тѣла и ея радіуса кривизны или нормальной линіи придан-ной точкѣ О; отложимъ по этимъ линіямъ части On_1 и Ot_1, On_2 и Ot_2, пропорціональныя и параллельныя силамъ n_1 и t, n_2 и t, дѣйствующимъ на взаимно перпендикулярныя грани первой половины параллелипипеда, построимъ діагонали Ok_1 и Ok_2 параллелограммовъ, выражающія силы K_1 и K_2 и отложимъ по тѣмъ же діагоналямъ равныя имъ величины Ok_1' и Ok_2' въ противную сторону. Тогда линіи K_1K_1' и K_2K_2' представятъ сопряженные діаметры эллипса напряженій, оси координатъ $O\underline{X}$ и $O\underline{Y}$, о которыхъ выше упомянуто направляется по линіямъ Ok_1' и Ok_2', и половина эллипса, заключающая концы линій выражающихъ



силы упругости при разсматриваемой точкѣ тѣла, пройдетъ черезъ точки K, K_2' и K_1'. Для опредѣленія полуосей эллипса, выражающихъ наибольшее и наименьшее сжатія, перпендикулярныя соотвѣтствующимъ діагональнымъ плоскостямъ отложимъ отъ точки t_2 по перпендикуляру къ Os часть $t_2 n_1'$, пропорціональную силѣ n_1, вверхъ если она положительна, внизъ въ противномъ случаѣ; опустимъ изъ K_2' перпендикуляръ $K_2' t_2'$ на Os, который очевидно пропорціоналенъ силѣ n_2 и направленъ отъ Os вверхъ или внизъ, смотря потому будетъ ли n_2 положительно или отрицательно; проведемъ линію $K_2' n_1'$, пересѣкающую въ r продолженіе радіуса кривизны Op. Тогда изъ двухъ угловъ между линіями $K_2' n_1'$ и Op правый 2α будетъ двойнымъ угломъ діагональной плоскости первой половины параллелипипеда съ нормальною Op, которому соотвѣтствуетъ $Max.\ N$ или $Min\ N$, а лѣвый уголъ $2\alpha'$ будетъ двойнымъ угломъ діагонали второй половины соотвѣтствующей $Max.\ N'$ или $Min.\ N'$, потому что, какъ легко видно изъ чертежа, каковы бы ни были знаки силъ n, n_2 и t, эти углы удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$tg\, 2\alpha = -\frac{2t}{n_1 - n_2} \quad \text{и} \quad tg\, 2\alpha' = \frac{2t}{n_1 - n_2}$$

и поэтому проведя линіи AOA' и BOB' параллельно линіямъ, раздѣляющимъ углы 2α и $2\alpha'$ при V положенія, мы получимъ два взаимно перпендикуляр-

ныя направленія діагональныхъ плоскостей и перпендикулярныхъ къ нимъ силъ Max. N, Min. N, Max. N и Min. N', а вмѣстѣ съ тѣмъ направленія полуосей эллипса напряженій. Чтобы опредѣлить величины полуосей, замѣтимъ, что какъ видно изъ чертежа

$$Or = \frac{n_1 + n_2}{2} \quad \text{и} \quad rn_1' = \sqrt{\left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2 + t^2},$$

и поэтому, откладывая отъ точки r по линіи Or части равныя rn', вверхъ до p и внизъ до q, мы получимъ линіи

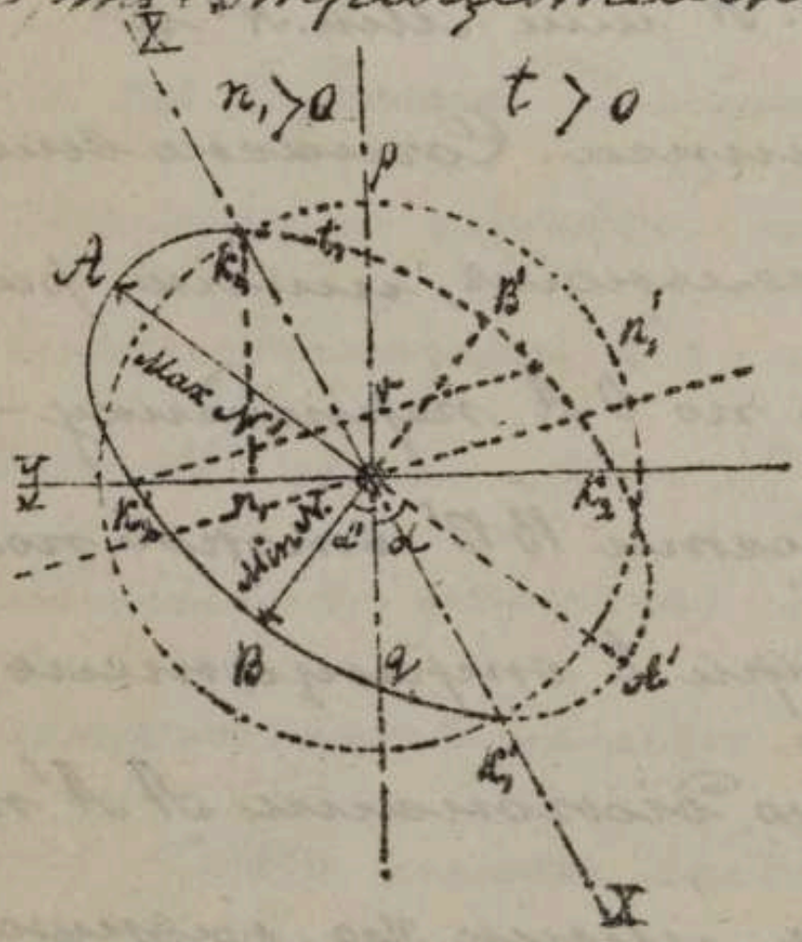
$$Op = \frac{n_1 + n_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2 + t^2} \quad \text{и} \quad Oq = \frac{n_1 + n_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2 + t^2},$$

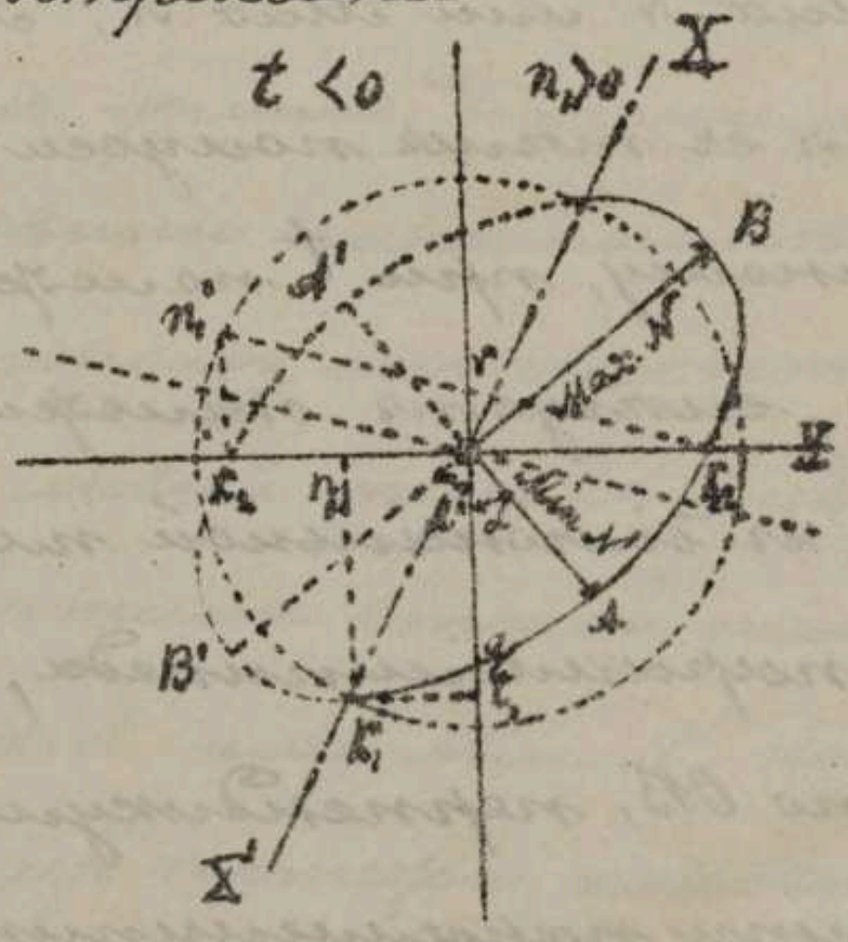
выражающія положительныя или отрицательныя величины, смотря потому находятся ли точки p и q выше или ниже OS, и представляющія Max. N или Max. N', Min. N или Min. N' и вмѣстѣ съ тѣмъ полуоси эллипса. Согласно вышесказанному, при t положительномъ, линію, равную Op, слѣдуетъ отложить по OA перпендикулярно къ діагональной плоскости BB' второй половины параллелепипеда, а при t отрицательномъ по OB, перпендикулярно діагонали AA' первой части параллелепипеда; линію же равную Oq подобно отложить по другой оси эллипса. Объ линіи Op и Oq откладываются выше линіи OS, т.е. въ сторону растяженій, если они положительны, а въ противномъ случаѣ ниже OS. Полученныя такимъ образомъ линіи OA и OB выразятъ по величинѣ

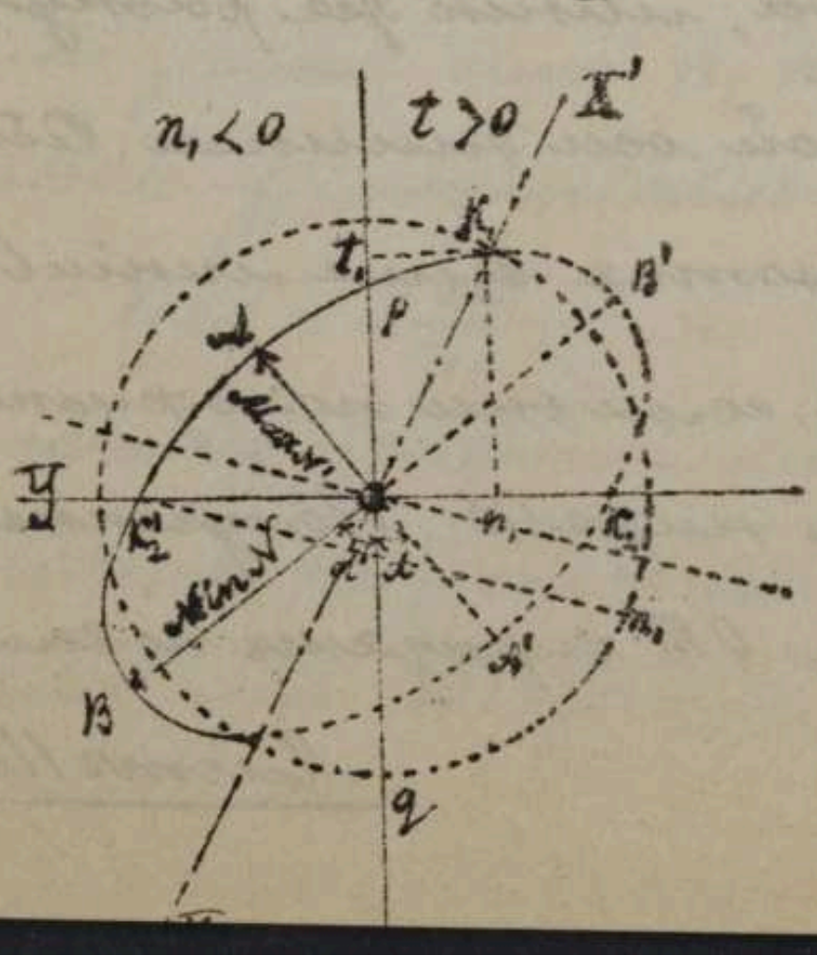
и направлению наибольшее и наименьшее растяжение или сжатие придонной точке изогнутого тела; линия же оси эллипса напряжений построение всей кривой не представить затруднений.

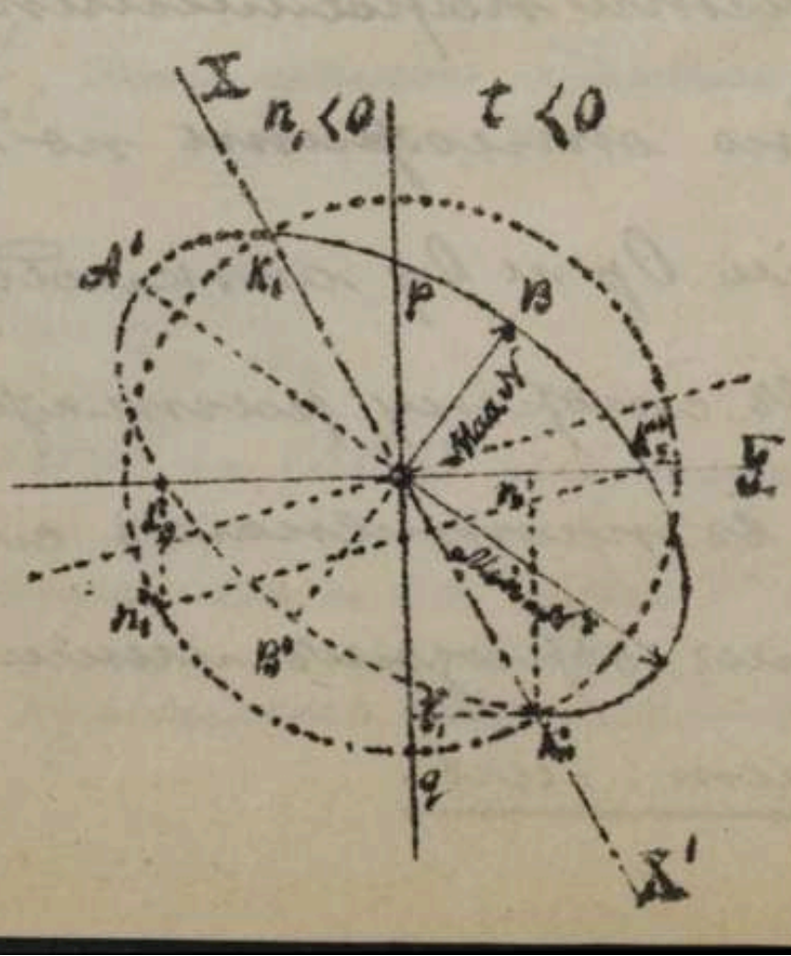
Наибольшая величина объемных сил перерезывания T и T' выражается линией vn', а направления этих сил, совпадающие с соответствующими косогональными плоскостями, разделяют пополам углы между осями эллипса.

Приложенные здесь чертежи представляют эллипсы напряжений для часто встречающегося случая, когда сила n_2 не существует или так мала, что ею можно пренебречь. В первых двух чертежах n_1 растяжение, а двух других сжатие, а сила t имеет то положительное или отрицательное направление.









и перерезывания по данным силам n_1 n_2 и t_1, действующим на грани элементарного параллелипипеда, может быть произведено и по чисто графическому способу, который хотя для общего исследования менее удобен, чем вышеизложенный аналитический способ, но в частных случаях может оказаться простейшим и более наглядным. Этот графический способ, принадлежащий Кульману (*), основывается на том, что если несколько сил взаимно уравновешиваются, то можно составить замкнутый многоугольник, которого бока параллельны направлениям этих сил и пропорциональны их величинам, а посему если только одна из уравновешивающихся сил неизвестна, то она определится по боку, замыкающему многоугольник которого остальные бока соответствуют данным силам. Чтобы сообразно этому начертить многоугольник сил для каждой половины параллелипипеда так, чтобы удобно определить наибольшия величины растяжения, сжатия и перерезывания, соответствующия диагональным плоскостям, надобно силы, действующия на грани половины параллелипипеда, заменить силами

(*) Culmann. Graphische Statik. 1866. p. 226.

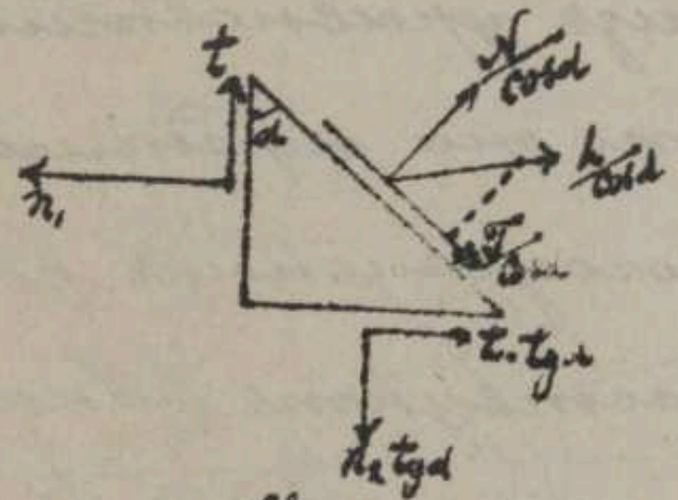
или пропорціональными, раздѣливъ ихъ величины на множитель и др, сопровождающій силы n, и др и t, и др нормальной грани (черт. стран.) Тогда замѣчая, что для первой половины параллелипипеда

$$\frac{и р д \xi}{и д р} = tg\alpha \quad и \quad \frac{и д z}{и д р} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

и для второй

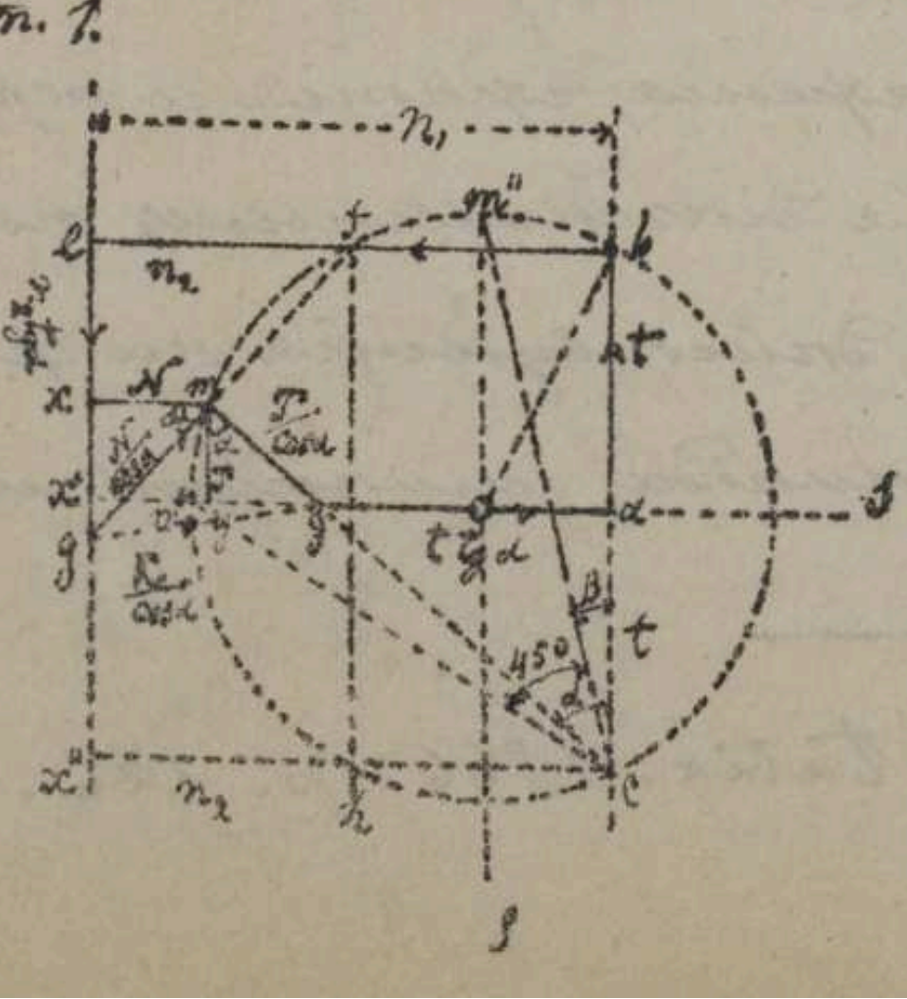
$$\frac{и р д \xi}{и д р} = tg\alpha' \quad и \quad \frac{и д z}{и д р} = \frac{1}{\cos\alpha'},$$

получимъ для обѣихъ половинъ параллелипипеда величины силъ, обозначенныя на приложенныхъ чертежахъ (стран. 470-472), и построеніе многоугольника силъ можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ для каждой половины параллелипипеда отдѣльно. Изъ произвольной точки a на линіи OS, параллельной оси изогнутаго тѣла, возставимъ перпендикуляръ и отложимъ по немъ по направленію силы t нормальной грани длину $a6$, пропорціональную величинѣ этой силы; чтобы построить линію da, параллельную и пропорціональную силѣ $t.tg\alpha$, отложимъ по линіи $a6$ перпендикуляръ $6c$ противъ силы



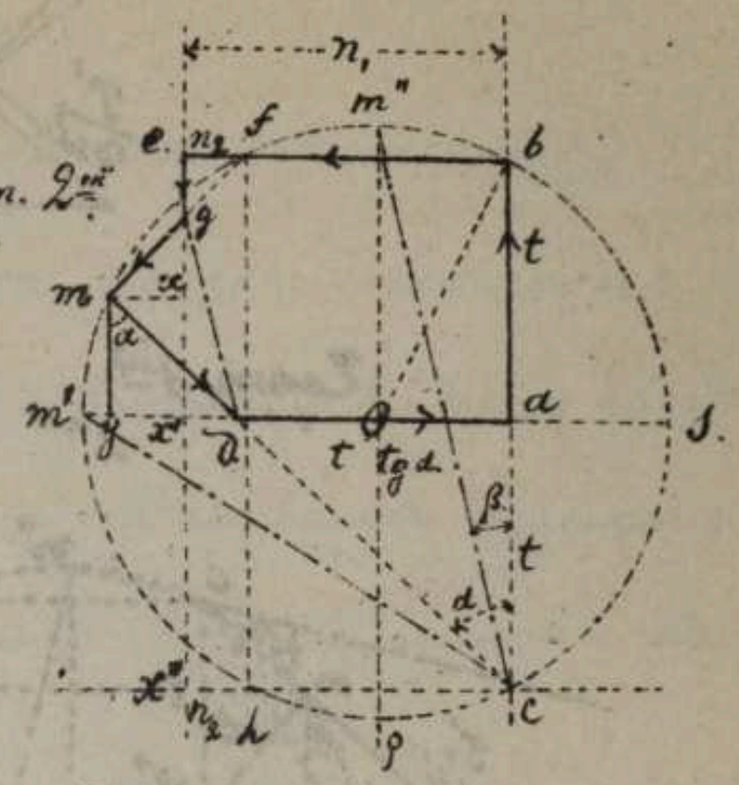
1 $\frac{аа}{2}$ половина.

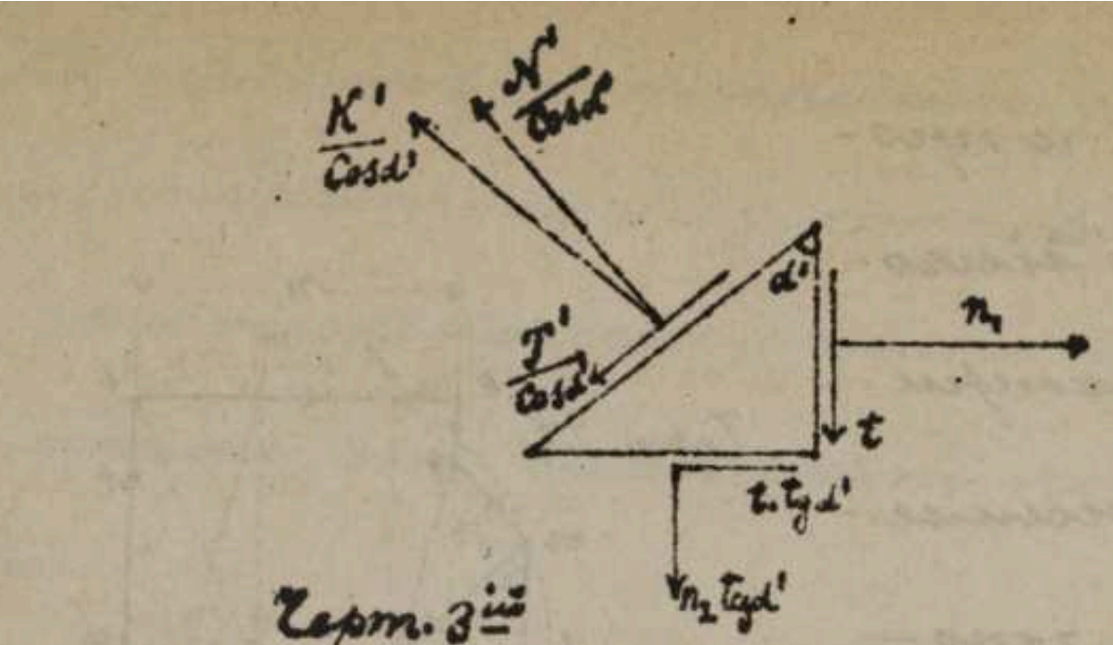
Черт. 1.



длину ac, равную ab, и проведемъ cd параллельно діагональной грани разсматриваемой половины параллелипипеда, т. е. такъ чтобы уголъ acd былъ равенъ α; за тѣмъ отъ точки b въ сторону дѣйствія силы n_1 нормальной грани отложимъ be пропорціонально n_1 и параллельно os; а чтобы построить линію eg, выражающую силу $n_2 tg\alpha$, отложимъ по линіи eb длину ef, пропорціональную n_2 въ сторону точки b, если силы n_1 и n_2 съ одинаковыми знаками и въ сторону противную, если ихъ знаки различны, и изъ точки f проведемъ fg перпендикулярно къ діагональной грани или линіи cd. Такимъ образомъ получится многоугольникъ силъ, котораго замыкающій бокъ gd представитъ по величинѣ и направленію силу $\frac{K}{\cos\alpha}$, дѣйствующую на діагональную грань разсматриваемой половины параллелипипеда, и чтобы построить линіи gt и td, выражающія по величинѣ и направленію силы $\frac{N}{\cos\alpha}$ и $\frac{T}{\cos\alpha}$, составляющія силы $\frac{K}{\cos\alpha}$, стоитъ только провести gt и td перпендикулярно и параллельно діагональной грани; а затѣмъ перпендикуляры

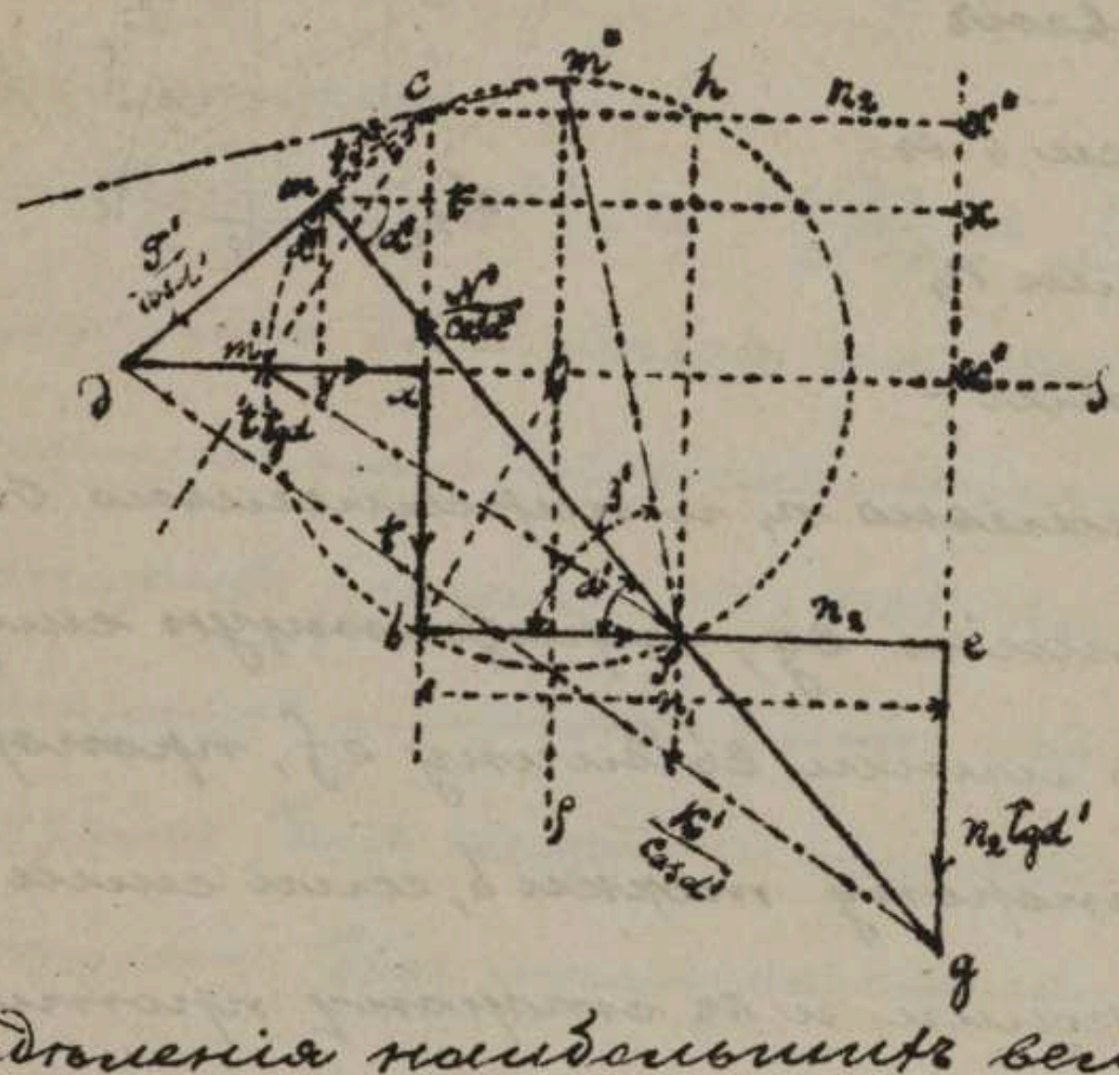
Черт. 2-й





Черт. 3ий

2ая половина.



тх и ту, опущен-
ные изъ точки т
на линіи eg и Of,
будутъ пропорціо-
нальны величи-
намъ силъ N и T,
какъ это легко ви-
дѣть изъ прямо-
угольныхъ треу-
гольниковъ тдх
и тду, которыхъ
углы при точкѣ
т равны α. Для
опредѣленія наибольшихъ величинъ силъ N и T и
соотвѣтствующихъ имъ направленій діаго-
нальной грани или параллельной ей линіи
тс надобно обратить вниманіе на то, что
точки т, с, b и f представляютъ вершины четыре-
угольника, въ которомъ сумма противулежа-
щихъ угловъ т и b равна двумъ прямымъ, вслѣд-
ствіе чего точка т должна находиться на окруж-
ности круга, проведеннаго чрезъ точки b, c и f,
которой положеніе опредѣляется по величинамъ
силъ n_1, n_2 и t и независитъ отъ направленія
діагонали параллелипипеда. Пользуясь этимъ
замѣчаніемъ легко видѣть изъ чертежа 1го, отно-
сящагося къ первой половинѣ параллелипипеда

и къ случаю когда

$$t > 0 \ , \quad n_1 > 0 \quad и \quad n_2 > 0 \ ,$$

что если величина угла α изменяется между предѣлами нуль и $90°$, то линія Cm принимаетъ послѣдовательно всѣ положенія начиная отъ Cb до Ck, величина силы N оставаясь растяженіемъ уменьшается отъ величины n_1 до своей наименьшей величины:

$$Min.\, N = m'x' = Ox' - Om' = \frac{n_1 + n_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2 + t^2} \ ,$$

которой соотвѣтствуетъ положеніе діагонали $m'C$ и уголъ α, опредѣляемый уравненіемъ

$$tg\, 2\alpha = tg\, m'Ob = -\frac{2t}{n_1 - n_2} \ ;$$

послѣ чего величина силы N увеличивается до величины n_2; и изъ чертежа $2^{го}$, отличающагося отъ $1^{го}$ только тѣмъ, что линія ed пересѣкаетъ въ нѣкоторомъ кругѣ, видно, что при томъ же послѣдовательномъ измѣненіи угла α, сила N отъ растяженія n_1 уменьшается до нуля, когда m доходитъ до пересѣченія линіи ed съ кругомъ, сжатіемъ увеличивается до

$$Max.(-N) = -MinN = m'x' = Om' - Ox' = \frac{n_1 + n_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2 + t^2}$$

при томъ же углѣ α, для котораго

$$tg\, 2\alpha = tg\, m'Ob = -\frac{2t}{n_1 - n_2} \ ;$$

за тѣмъ сила N уменьшается опять до нуля, переходитъ въ растяженіе и увеличивается до n_2. Изъ двухъ разсмотрѣнныхъ чертежей слѣдуетъ выбрать первый, если данныя силы n_1, n_2 и t удовлетворяютъ

474. неравенству

$$Ox' > Om' \text{, т.е. } \frac{n_1+n_2}{2} > \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2+t^2} \text{ или } n_1 n_2 > t^2$$

и второй чертежъ въ противномъ случаѣ.

При томъ же измѣненіи угла α между предѣлами нуль и $90°$ видно изъ обоихъ чертежей, что сила T, выражаемая линіею my, увеличивается, начиная отъ величины t до своей наибольшей величины:

$$Max.T = m''O = \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2+t^2} \text{ ,}$$

соотвѣтствующей діагональной плоскости $m''C$, для которой

$$tg\,2\beta = tg\,m''Ob = \frac{n_1-n_2}{2t} \text{ ,}$$

за тѣмъ уменьшается до нуля при діагональной плоскости $m'c$, соотвѣтствующей $Min.N$, и перемѣнивъ направленіе опять достигаетъ величины t при діагональной плоскости ch.

Кромѣ того изъ обоихъ чертежей легко видно, что

$$\angle m'Cm'' = \frac{1}{2}\angle m'Om'' = 45° \text{ ,}$$

т.е. что направленія діагональной плоскости первой комбинаціи параллелипипеда, которымъ соотвѣтствуютъ силы $Min.N$ и $max.T$, составляютъ между собою уголъ въ $45°$.-

Обращаясь за тѣмъ къ чертежу 3^{mu} многоугольника для второй половины параллелипипеда, относящемуся также къ случаю, когда

$$t > 0 \text{ , } n_1 > 0 \text{ , } n_2 > 0 \text{ ,}$$

и взявъ въ немъ уголъ α', равный тѣмъ же

между предыдущими нуль и 90°, видно что сила рас- 475.
тяженія N', выражаемая линіею m x, оставаясь
растяженіемъ постепенно увеличивается, начи-
ная отъ n, до своей наибольшей величины

$$Max.\,N' = m'x' = Ox' + Om' = \frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2},$$

соотвѣтствующей діагональной плоскости m'c,
для которой

$$\not\angle 2d' = \not\angle 2m'fl = \not\angle m'Ol = \frac{2t}{n_1-n_2},$$

и за тѣмъ уменьшается до величины n_2. Сила
же перерѣзыванія T', выражаемая линіею ty,
уменьшается, начиная отъ величины t, до нуля
при діагональной плоскости, соотвѣтствующей
Max. N', и перемѣнивъ знакъ, т.е. принявъ направ-
леніе вращенія половины параллелипипеда справа
на лѣво, уменьшается до своей наименьшей отри-
цательной величины.

$$Min.\,T' = -m''O = -\sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2},$$

соотвѣтствующей діагональной плоскости m"c,
для которой

$$\not\angle 2\beta' = \not\angle 2m''fl = \not\angle m''Ol = -\frac{n_1-n_2}{2t}.$$

Положенія m'c и m"c діагональной плоскости вто-
рой половины параллелипипеда, соотвѣтствую-
щія силамъ Max. N' и Min. T', составляютъ меж-
ду собою, такъже какъ и для первой половины, острой
уголъ при c, равный углу m'f m", т.е. 45°. Кромѣ того,
если чертежъ 1^го или 2^го положить на чертежъ 3^го,
такъ чтобы линіи Ol обоихъ чертежей совпадали,

476. то легко видѣть, что діагональныя плоскости т'с и т"с первой половины параллелипипеда, которымъ соотвѣтствуютъ силы Min. N и Max. Г, перпендикулярны діагональнымъ плоскостямъ т'с и т"с второй половины, соотвѣтствующимъ силамъ Max. N' и Min. Г'.

Хотя разсмотрѣнные здѣсь чертежи многоугольниковъ силъ относятся къ случаю когда обѣ силы n_1 и n_2 положительны, т.е. представляютъ растяженія, но руководствуясь вышеизложенными общими указаніями не трудно составить чертежи и для случая, когда силы n_1 и n_2 имѣютъ различные знаки, т.е. когда одна изъ нихъ, напримѣръ n_2, представляетъ сжатіе, и вывести формулы для наибольшихъ и наименьшихъ величинъ силъ N, N', Г и Г', отличающіяся отъ выведенныхъ здѣсь только знакомъ силы, изображаемой буквою n_2. По составленіи же такихъ чертежей, вѣрность выведенныхъ формулъ для всѣхъ возможныхъ направленій силъ n_1, n_2 и t доказывается слѣдующимъ соображеніемъ: если чертежи повернуть около линіи Oz, то найдется, что чертежи 1^ый^ и 2^ой^ будутъ соотвѣтствовать второй половинѣ параллелипипеда, а 3^ій^ первой половинѣ, при сохраненіи направленія силы t и измѣненіи направленія силъ n_1 и n_2 въ противуположное, т.е. поворотомъ около линіи Oz перемѣняется нумеръ

половины параллелипипеда направленіе силъ n_1 и n_2; если же повернуть чертежи около линіи, перпендикулярной къ Os, то найдется, что этимъ измѣняется нумеръ половины параллелипипеда и знакъ силы t, сохраняя знаки силъ n_1 и n_2; наконецъ если повернуть чертежи около линіи Os и затѣмъ еще разъ около перпендикулярной къ ней линіи, то нумеръ половины параллелипипеда останется неизмѣннымъ, но перемѣнятся знаки у всѣхъ трехъ силъ n, n_2 и t. Этими переворачиваніями чертежей, составленныхъ какъ для случая, когда n_1 и n_2 имѣютъ одинаковые знаки, такъ и для случая, когда у нихъ знаки различные, исчерпываются всѣ случаи различныхъ направленій силъ n_1, n_2 и t, а между тѣмъ величины линій и взаимное ихъ положеніе въ чертежахъ остаются очевидно неизмѣнными; поэтому формулы, выведенныя изъ чертежей перваго случая, должны быть справедливы и для всѣхъ другихъ.

Узнавъ какимъ образомъ по даннымъ силамъ n_1, n_2 и t, дѣйствующимъ на единицу площади граней элементарнаго параллелипипеда, опредѣляются величины и направленія наибольшихъ силъ растяженія, сжатія и перерѣзыванія, могущихъ проявиться внутри изогнутаго тѣла при этомъ элементѣ его объема, перейдемъ теперь къ примѣненію изложенной теоріи. Для

478. ского обратимся къ призматическому тѣлу съ прямолинейною осью, изогнутому дѣйствіемъ силъ, перпендикулярныхъ къ этой оси и направленныхъ по данной съ нею плоскости, раздѣляющей поперечныя сѣченія т. н α на двѣ симметричныя части, и положимъ что поперечныя измѣренія столь малы въ сравненіи съ длиною тѣла и изгибъ столь незначителенъ, что съ достаточною вѣрностію можно напряженіе продольныхъ фибръ тѣла опредѣлить по извѣстной формулѣ

$$n_1 = \pm \frac{v}{I} M .$$

Тогда эта формула вмѣстѣ съ вышевыведенными тремя дифференціальными уравненіями, выражающими зависимость между четырмя силами n_1 n_2 t_1 и t_2 можетъ служить для опредѣленія этихъ силъ; а затѣмъ могутъ быть найдены и наибольшія величины силъ N N' T и T' растяженія, сдвига и перерѣзыванія и направленія, по которымъ онѣ проявляются внутри тѣла.

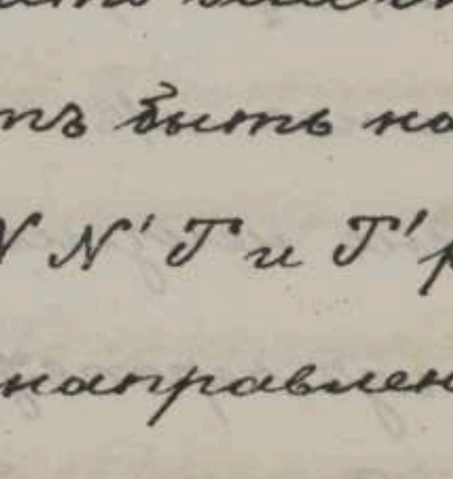
Приступая къ сему, слѣдуетъ однако предварительно упростить имѣющіяся четыре уравненія

$$\frac{\partial t_1 \rho u}{\partial \rho} + t_1 u = \rho_0 \frac{\partial n_1 u}{\partial s}$$

$$\frac{\partial n_2 \rho u}{\partial \rho} = \rho_0 \frac{\partial t_1 u}{\partial s} + n_1 u$$

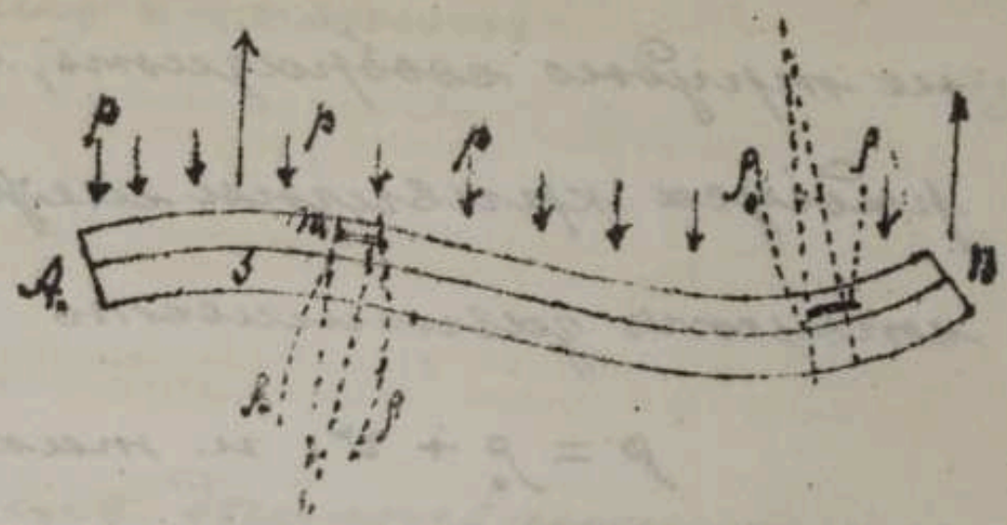
$$t_2 = - t_1$$

$$n_1 = \pm \frac{v}{I} M ,$$



сообразно условіямъ разсматриваемаго случая

изгиба тѣла. Дѣйствительно во первыхъ перемѣнныя ρ и ν имѣютъ между собою зависимость, слѣдствіе которой одна изъ нихъ можетъ



быть исключена; и во вторыхъ если ось тѣла до изгиба была прямолинейна, то радіусъ кривизны ρ_0 изогнутой оси будетъ такъ великъ, что по раздѣленіи уравненій на ρ_0 можно пренебречь всѣми членами, заключающими ρ_0 въ знаменателѣ, въ сравненіи съ остальными членами.

Принимая въ соображеніе выше выведенную формулу

$$\frac{EI}{\rho_0} = M \ ,$$

опредѣляющую радіусъ кривизны изогнутой оси призмы, легко видѣть, что для вывода общихъ формулъ, относящихся къ тому, изогнутому какъ въ одну, такъ и въ другую стороны, слѣдуетъ радіусу кривизны ρ_0 придать одинаковый знакъ съ моментомъ M относительно оси поперечнаго сѣченія тѣла силъ, дѣйствующихъ на части т B его.

Посему, считая положительнымъ моментъ, соотвѣтствующій вращенію слѣва на право, радіусъ кривизны будетъ положителенъ въ частяхъ тѣла выпуклыхъ къ верху, и отрицателенъ въ остальныхъ. Если же считать положительною ординату ν для элементовъ тѣла выше его оси и

отрицательною для остальныхъ элементовъ, то не трудно сообразить, что при какомъ угодно знакѣ радіуса кривизны между нимъ и ординатою v существуетъ зависимость

$$\rho = \rho_0 + v \quad \text{и такъ же} \quad d\rho = dv .$$

Подставивши эти величины ρ и $d\rho$ въ предыдущія уравненія, находимъ

$$\frac{dt_1 u(\rho_0+v)}{dv} + t_1 u = \rho_0 \frac{dn_1 u}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{dn_2 u(\rho_0+v)}{dv} = \rho_0 \frac{dt_1 u}{ds} + n_1 u$$

и затѣмъ по раздѣленіи на ρ_0, независящаго отъ перемѣнной v, и по уничтоженіи членовъ, заключающихъ ρ_0 въ знаменателѣ, получаются для опредѣленія силъ n_1, n_2, t_1 и t_2 слѣдующія уравненія

$$\frac{dt_1 u}{dv} = \frac{dn_1 u}{ds}, \quad \frac{dn_2 u}{dv} = \frac{dt_1 u}{ds}, \quad t_2 = -t_1, \quad n_1 = \frac{v}{I} M,$$

гдѣ въ послѣднемъ двойной знакъ замѣненъ положительнымъ, чтобы сообразно принятымъ знакамъ количествъ v и M, сила n_1 имѣла положительную величину, когда она выражаетъ растяженіе, и отрицательную въ противномъ случаѣ.

Чтобы изъ найденныхъ уравненій вывести величину силы t_1, соединимъ первое уравненіе съ четвертымъ и замѣтимъ, что въ призматическомъ тѣлѣ моментъ инерціи I поперечнаго сѣченія, ширина i и ордината v элемента его не зависятъ отъ разстоянія s сѣченія отъ конца тѣла A, какъ въ случаѣ когда поперечное сѣченіе одинаково по всей длинѣ тѣла, такъ и въ случаѣ когда оно одинаково на опредѣленныхъ участкахъ длины, измѣняясь только при переходѣ изъ

одного участка въ другой. По сему выходитъ:

$$\frac{\partial t,u}{\partial v} = \frac{vu}{I}\frac{\partial M}{\partial s} .$$

Но выше было найдено, что

$$\frac{\partial M}{\partial s} = -S ,$$

гдѣ S представляетъ сумму силъ дѣйствующихъ на часть mB тѣла, причемъ эта сумма считается положительною, если она выражаетъ силу, направленную сверху внизъ; и по сему

$$\frac{\partial t,u}{\partial v} = -\frac{S}{I} v u \partial v .$$

Интегрируя это уравненіе между предѣлами v и наибольшею величиною v, этой ординаты, находимъ

$$(t,u)_{v_1} - t,u = -\frac{S}{I}\int_v^{v_1} v.u\partial v .$$

Здѣсь подъ интеграломъ находится моментъ $v.u\,dv$ элемента $u\,dv$ или $d\omega$ площади поперечнаго сѣченія относительно оси его, а посему интегралъ очевидно выражаетъ моментъ относительно оси сѣченія той части этого сѣченія, которая заключается между ординатами v и v_1; мы изобразимъ этотъ моментъ чрезъ m, такъ что

$$m = \int_v^{v_1} v.u\,dv = \int_v^{v_1} v.d\omega .$$

Кромѣ того слѣдуетъ замѣтить, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$(t,u)_{v_1} = 0 :$$

дѣйствительно по своей численной величинѣ двѣ силы t_1 и t_2 равны между собою; а при ордина-

тѣ v_1 сила t_2 представляетъ силу, дѣйствующую параллельно оси вдоль верхней поверхности тѣла и слѣдовательно несуществующую, когда всѣ внѣшнія силы направлены перпендикулярно къ оси.

И такъ для сопротивленія перерѣзыванію параллельно поперечному сѣченію приэлементъ, опредѣляемый ординатою v, находимъ

$$t_1 = \frac{m}{uI} \cdot S ,$$

и для сопротивленія перерѣзыванію или разложенію параллельно оси тѣла

$$t_2 = -\frac{m}{uI} \cdot S .$$

Переходя къ опредѣленію силы n_2, подставимъ найденную величину t, во второе изъ вышевыведенныхъ дифференціальныхъ уравненій, тогда, замѣчая что m и I независятъ отъ разстоянія S, получимъ

$$\frac{\partial n_2 u}{\partial v} = \frac{m}{I} \frac{\partial S}{\partial s} ,$$

или, замѣняя m его величиною въ зависимости отъ v,

$$\partial n_2 u = \frac{1}{I} \cdot \frac{\partial S}{\partial s} \partial v \int_v^{v_1} v \, \partial \omega ,$$

откуда, интегрируя между предѣлами v и v_1,

$$(n_2 u)_{v_1} - n_2 u = \frac{1}{I} \frac{\partial S}{\partial s} \int_v^{v_1} \partial v \int_v^{v_1} v \, \partial \omega .$$

Двойной интегралъ, заключающійся въ этомъ уравненіи, можетъ быть упрощенъ интегрированіемъ по частямъ по формулѣ

$$\int p \, dq = pq - \int q \, dp .$$

Полагая

$$p = \int_v^{v_1} v\,d\varpi\,, \quad dp = -v\,d\varpi\,, \quad q = v\,, \quad dq = dv\,,$$

получимъ

$$\int dv \int_v^{v_1} v\,d\varpi = v\int_v^{v_1} v\,d\varpi + \int v^2\,d\varpi$$

а подставивъ предѣлы, и замѣтивъ, что при $v = v_1$ первый членъ второй части изчезаетъ, вслѣдствіе равенства предѣловъ интеграла, находимъ

$$\int_v^{v_1} dv \int_v^{v_1} v\,d\varpi = -v\int_v^{v_1} v\,d\varpi + \int_v^{v_1} v^2\,d\varpi\,.$$

Въ первомъ членѣ второй части этой формулы заключается интегралъ, выражающій моментъ верхней части поперечнаго сѣченія, между ординатами v и v_1, взятый относительно оси сѣченія; а второй членъ очевидно выражаетъ моментъ инерціи той же части поперечнаго сѣченія относительно его оси. Посему изображая этотъ моментъ инерціи чрезъ I' для отличія отъ момента инерціи I всего сѣченія, т.е. дѣлая

$$\int_v^{v_1} v^2\,d\varpi = I'\,,$$

получаемъ

$$\int_v^{v_1} dv \int_v^{v_1} v\,d\varpi = I' - vm\,,$$

а затѣмъ для силы n_2, дѣйствующей на единицу площади нормально къ грани элементарнаго параллелипипеда, параллельной оси тѣла, находимъ

$$n_2 = \frac{1}{u}(n_2 u)_{v_1} - \frac{I' - vm}{uI}\cdot\frac{dS}{ds}\,,$$

гдѣ $(n_2 u)_{v_1}$ изображаетъ величину внѣшней силы,

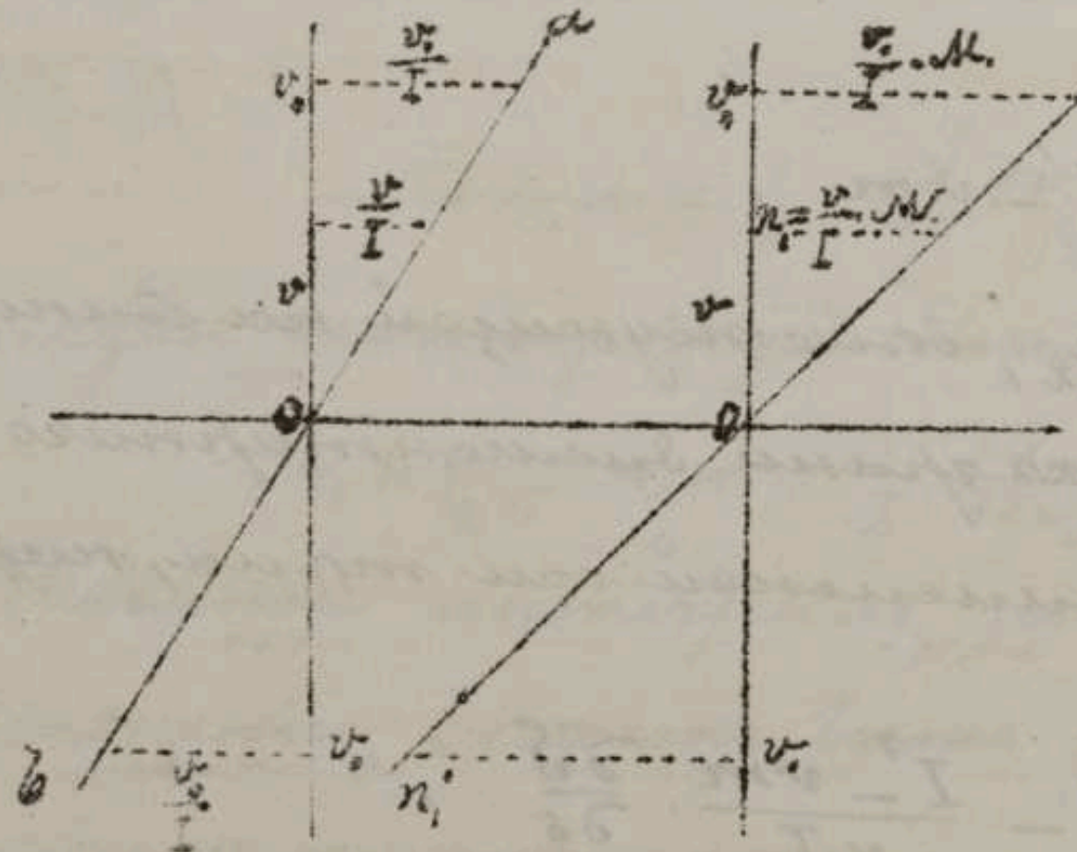
484. растяженія, дѣйствующей перпендикулярно къ оси тѣла на единицу длины и на всю ширину верхней поверхности тѣла при разсматриваемомъ поперечномъ его сѣченіи. Эта сила положительна, если представляетъ растяженіе и отрицательна въ противномъ случаѣ.

Чтобы объяснить значеніе силъ n_1, n_2, t_1 и t_2 для различныхъ частныхъ случаевъ, полезно изслѣдовать найденныя формулы и выразить графически величины этихъ силъ для различныхъ положеній элементарнаго параллелипипеда внутри изогнутаго тѣла, при данномъ поперечномъ сѣченіи его.

Обращаясь сперва къ формулѣ

$$n_1 = \frac{v}{I} M,$$

опредѣляющей величину растяженія или сжатія продольныхъ фибръ въ данномъ мѣстѣ изогнутаго тѣла, замѣтимъ что сила n_1 въ различныхъ элементахъ одного и того же поперечнаго сѣченія пропорціональна количеству $\frac{v}{I}$, которое для различныхъ положительныхъ и отрицательныхъ величинъ v могутъ быть графически изображены ординатами прямой линіи ab,



отнесенной къ оси абсциссъ Ox, по которой, начиная 485.
отъ точки O, откладываются положительныя и
отрицательныя величины разстоянія r разсма-
триваемаго элемента до оси тѣла. Линія ab обна-
ея неизмѣнною для различныхъ поперечныхъ сѣче-
ній тѣла, одинаковыхъ по виду и размѣрамъ, и по
ней для каждаго изъ этихъ сѣченій легко можетъ
быть начерчена прямая n, n_1', отнесенная къ
той же оси абсциссъ Ox, и выражающая своими
ординатами положительныя и отрицатель-
ныя величины силы N, т. е. растяженія и сжа-
тія продольныхъ фибръ въ различныхъ элемен-
тахъ сѣченія. Линія n, n_1' наиболѣе отклоняет-
ся отъ оси абсциссъ Ox при тѣхъ поперечныхъ
сѣченіяхъ, для которыхъ сумма моментовъ M
внѣшнихъ силъ имѣетъ наибольшую числен-
ную величину, т. е. какъ видно изъ формулы

$$\frac{EI}{\rho_0} = M \quad ,$$

тамъ гдѣ радіусъ кривизны ρ_0 оси тѣла наи-
меньшій и ось наиболѣе изогнута. Линія
n, n_1' совпадаетъ съ осью Ox, и напряженія про-
дольныхъ фибръ тѣла равны нулю въ тѣхъ сѣ-
ченіяхъ, для которыхъ сумма моментовъ M
обращается въ нуль, т. е. гдѣ радіусъ кривизны
ρ_0 безконечно великъ, и ось тѣла прямолиней-
на, напримѣръ при крайнихъ опорахъ, а также

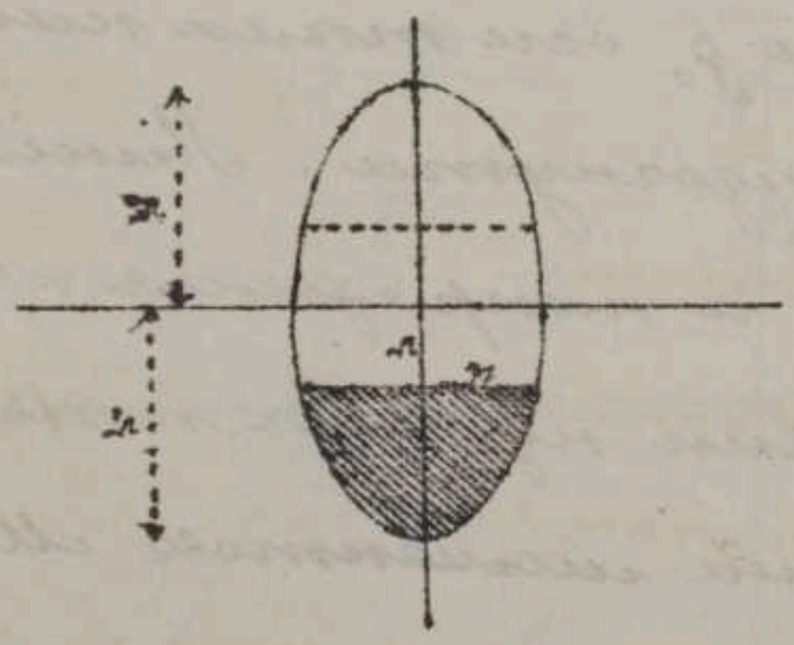
 при точкахъ перегиба оси балки, гдѣ ось отъ выпуклости переходитъ къ вогнутости или обратно, а радіусъ кривизны ρ_0 перемѣняетъ свой знакъ. Переходя къ формулѣ

$$t_1 = \frac{m}{uI} \cdot \delta = - t_2 \quad ,$$

опредѣляющей сопротивленіе t_1, перерѣзыванію тѣла перпендикулярно къ его оси или равное съ нимъ сопротивленіе t_2 перерѣзыванію или разслоенію тѣла параллельно его оси на квадратную единицу площади, вратимъ сперва вниманіе на множитель

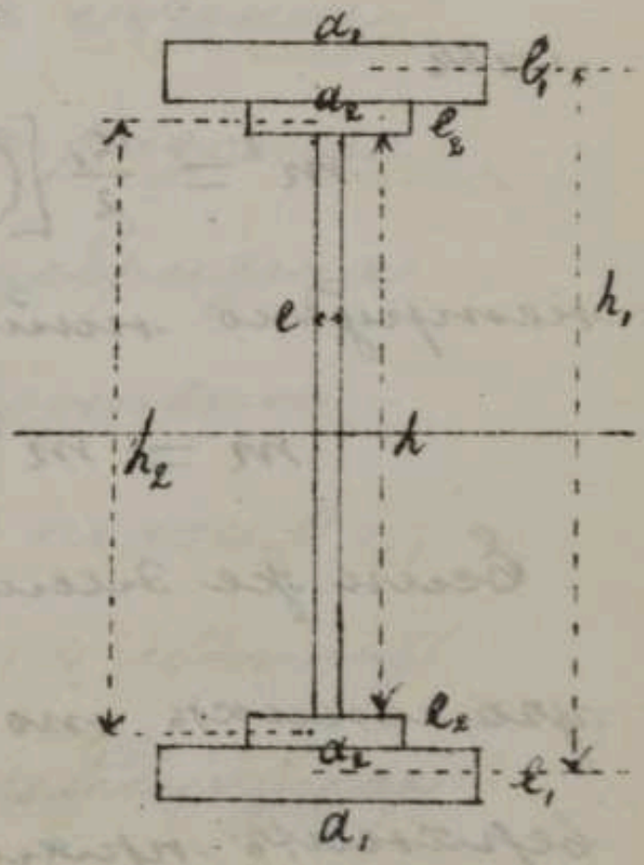
$$\frac{m}{I} \, .$$

Знаменатель I, представляющій моментъ инерціи всего поперечнаго сѣченія, сохраняетъ постоянную величину для всей длины призматическаго тѣла или по крайней мѣрѣ для каждой отдѣльной части его, имѣющей одинаковую профиль. Числитель же m представляетъ моментъ относительно оси сѣченія той его части, которая находится надъ разсматриваемымъ элементомъ сѣченія, удаленнымъ отъ его оси на положительное или отрицательное разстояніе v. Этотъ моментъ равенъ нулю для верхнихъ фибръ тѣла при $v = v_1$, увеличивается вмѣстѣ съ уменьшеніемъ положительнаго разстоянія v, достигаетъ своей наибольш-



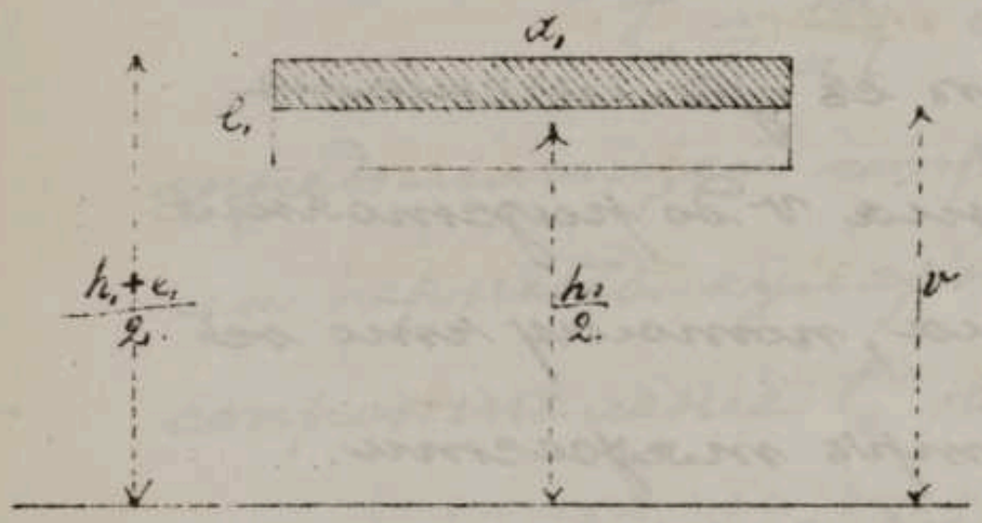
гией величины при $v=0$, когда элементъ сѣченія находится у его оси, и за тѣмъ при переходѣ элемента въ нижнюю часть тѣла, часть момента, соотвѣтствующая отрицательнымъ величинамъ v дѣлается отрицательною и моментъ уменьшается до нуля вмѣстѣ съ увеличеніемъ численной величины разстоянія v до разстоянія v_0 нижней крайней фибры тѣла, потому что ось сѣченія проходитъ черезъ его центръ тяжести.

Чтобы объяснить вычисленіе количества $\frac{m}{I}$ и графическое изображеніе совокупности величинъ $\frac{m}{I}$ для даннаго поперечнаго сѣченія, возьмемъ для примѣра сѣченіе, состоящее изъ нѣсколькихъ прямоугольниковъ съ бокомъ, параллельными и перпендикулярными къ его оси, и могущее представить профиль желѣзной мостовой или половой балки, симметричное относительно оси, проходящей черезъ ея центръ тяжести. Пусть h выразитъ высоту средняго прямоугольника, ребра балки, котораго толщина $= e$, пусть h_1 разстояніе между центрами тяжести двухъ крайнихъ прямоугольниковъ, поясовъ балки, которыхъ толщина $= e_1$ и ширина $= a_1$, и пусть h_2 разстояніе между центрами тяжести остальныхъ двухъ прямоугольниковъ, угловыхъ желѣзъ, которыхъ толщина $= e_2$



ширина $= a_2$. Тогда для момента инерции профиля съ приближеніемъ, совершенно достаточнымъ для практическихъ приложеній, получимъ

$$I = \frac{e h^3}{12} + \frac{a_1 e_1 h_1^2}{2} + \frac{a_2 b_2 h_2}{2} .$$



Чтобы составить выраженіе момента т положимъ, что разсматриваемый элементъ поперечнаго сѣченія находится въ верхнемъ прямоугольникѣ; тогда легко найти

$$m = a_1 \left(\frac{h_1 + e_1}{2} - v \right) \left(\frac{\frac{h_1 + e_1}{2} + v}{2} \right)$$

или

$$m = \frac{a_1}{2} \left[\left(\frac{h_1 + e_1}{2} \right)^2 - v^2 \right] .$$

Если элементъ сѣченія находится во второмъ прямоугольникѣ сверху, то изображая черезъ m' моментъ перваго верхняго прямоугольника, т.е. сдѣлавъ

$$m' = \frac{a_1}{2} \left[\left(\frac{h_1 + e_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_1 - e_1}{2} \right)^2 \right] = \frac{a_1 e_1 h_1}{2} ,$$

нетрудно найти

$$m = m' + \frac{a_2}{2} \left[\left(\frac{h_2 + e_2}{2} \right)^2 - v^2 \right] .$$

Если же элементъ находится въ среднемъ прямоугольникѣ, то изображая черезъ m'' моментъ двухъ верхнихъ прямоугольниковъ, т.е. сдѣлавъ

$$m'' = \frac{a_1 e_1 h_1}{2} + \frac{a_2 e_2 h_2}{2} ,$$

получится

$$m = m'' + \frac{e}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - v^2 \right] .$$

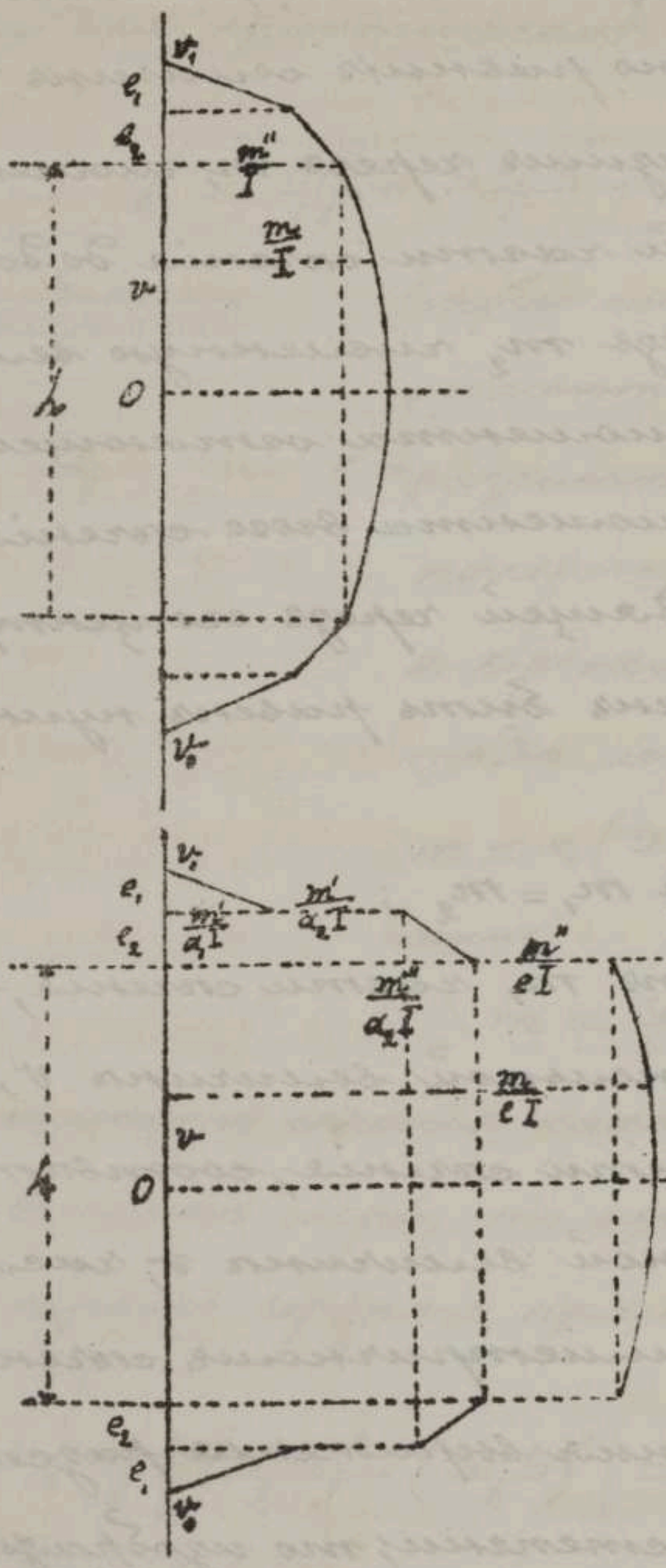
Вслѣдствіе симметричности сѣченія относительно

сго оси выведенныя формулы остаются справедли-
выми не только для положительныхъ, но и для
отрицательныхъ, численно равныхъ величинъ v,
потому что если изобразимъ черезъ m моментъ
относительно оси вертикальной части сѣченія до дан-
наго разстоянія v, а черезъ m_2 численную вели-
чину отрицательнаго момента остающейся
части сѣченія, то для момента всего сѣченія
относительно оси, проходящей черезъ его центръ
тяжести, который долженъ быть равенъ нулю,
получится

$$0 = m_1 - m_2 \quad \text{откуда} \quad m_1 = m_2 \; ;$$

а слѣдовательно моментъ m_1 части сѣченія, соб-
ственствующей отрицательной величинѣ v,
равенъ моменту m_2 части сѣченія, соотвѣт-
ствующей положительной величинѣ v, числен-
но равной первой въ симметричномъ сѣченіи.

Такъ какъ во всѣ выведенныя выраженія разстоя-
ніе v входитъ во второй степени, то изображая
величины m ординатою кривой линіи, соотвѣт-
ствующею абсциссѣ v, откладываемой по оси Ov,
легко сообразить, что кривая эта будетъ состоять
изъ вѣтвей параболъ, которыхъ ось перпендикуляр-
на къ Ov, и проходитъ черезъ точку O, потому
что съ перемѣною знака абсциссы v, величина и
знакъ соотвѣтствующей ей ординаты не измѣ-
няются, и слѣдовательно вѣтви параболъ должны



быть симметрично расположены выше и ниже точки O.

Такой же многоугольник с параболическими боками очевидно представит и линія, которой ордината при той же оси абсцисъ выражаетъ величину

$$\frac{m}{I},$$

пропорціональную моменту m.

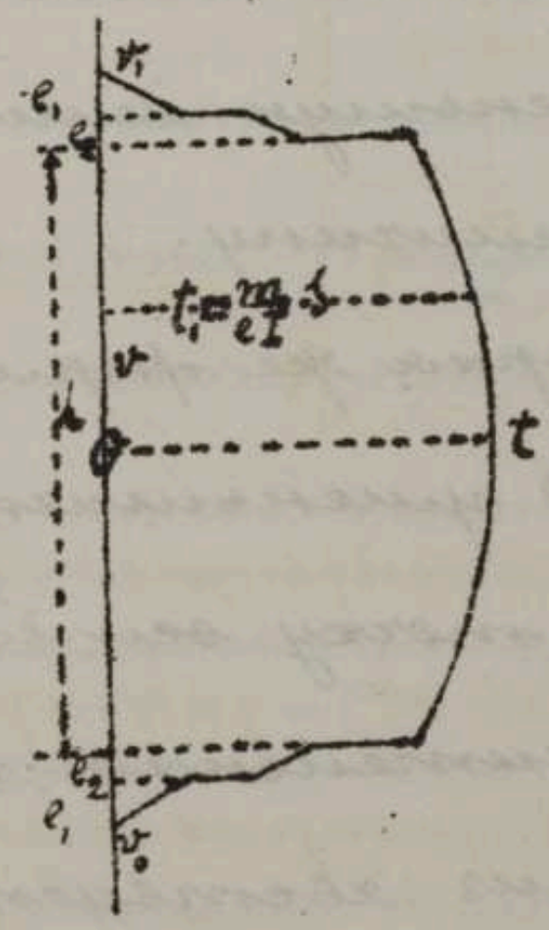
Если за тотъ образъ примется къ графическому изображенію количества

$$\frac{m}{vI},$$

отличающагося отъ предыдущаго только дѣлителемъ v, изображающимъ ширину профиля при разсматриваемой величинѣ v одинаковую для элементовъ каждой отдѣльной части профиля, но измѣняющуюся при переходѣ отъ одной части къ другой, то легко видно, что для каждой такой части профиля количество $\frac{m}{vI}$ выразится ординатою параболы, пропорціональною ординатѣ параболы коли-

чества $\frac{m}{I}$, но при переходѣ отъ высшей къ слѣдую-
щей за нею низшей части съ меньшею шириною,
ордоната разомъ увеличится въ обратномъ отно-
шеніи ширинъ обѣихъ смежныхъ частей. Такимъ
образомъ кривая, ордонатою которой выразится
количество $\frac{m}{uI}$ приметъ видъ, изображенный на
приложенномъ чертежѣ.

Количество $\frac{m}{uI}$ зависитъ только отъ вида и раз-
мѣровъ поперечнаго сѣченія тѣла и отъ положенія
въ немъ элемента площади, а потому оно сохра-
няетъ одну и ту же величину для всѣхъ частей
тѣла, имѣющихъ одинаковыя поперечныя сѣченія.
Это количество очевидно представляетъ величину
сопротивленія перерѣзыванію t, для суммы силъ
5 равной единицѣ; а посему величина сопротив-
ленія перерѣзыванію вдоль
даннаго поперечнаго сѣченія
тѣла можетъ быть предста-
влена ординатною кривой, по-
добной той, которая отно-
сится къ количеству $\frac{m}{uI}$, и
полученною черезъ умноже-
ніе ординатъ послѣдней на
число S.

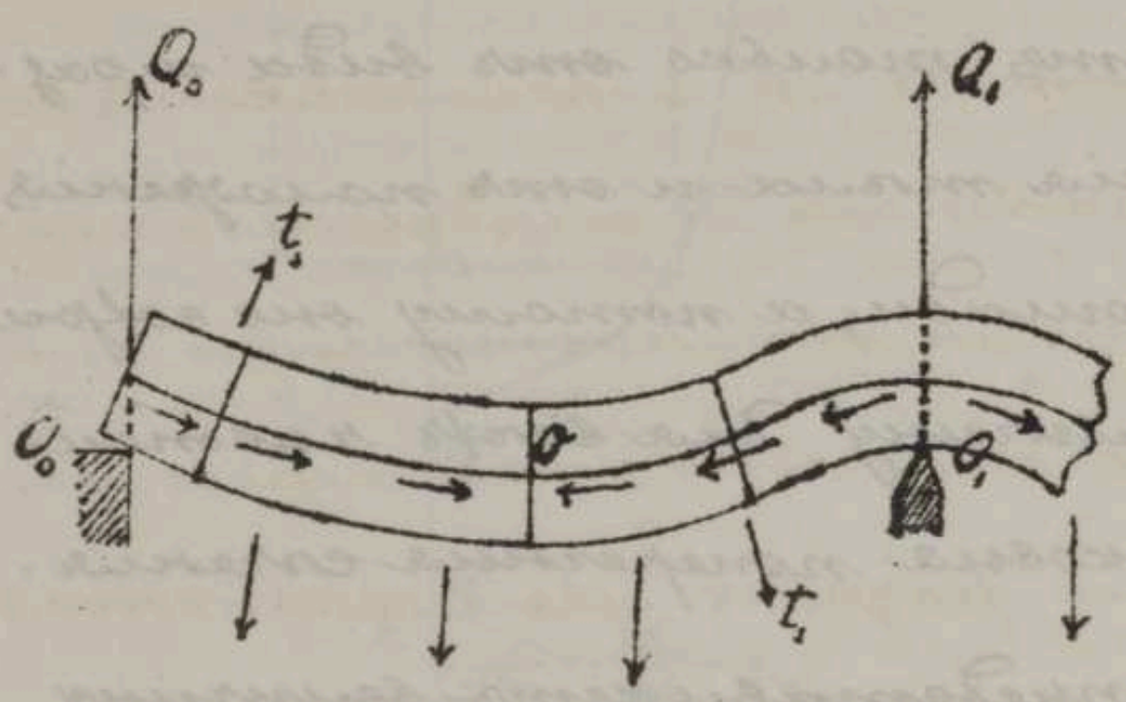


Такъ какъ согласно формулѣ

$$t_1 = \frac{m}{uI} S = - t_2$$

сопротивленія перерѣзыванію t_1 и раздавленію t_2 при

492. каждом поперечном сечении пропорциональны сум-
мы S сил, действующих на тело с правой стороны
этого сечения, и направления их определяются
знаком этой суммы, то и рассмотрим здесь как
изменяется величина и знак суммы сил S.



Для сего при-
мем выше выведен-
ные формулы
$S = -\frac{\partial M}{\partial s}$ и $\frac{\partial S}{\partial s} = -p$.
Первая из этих
формул показы-
вает, что сумма
сил S переходит
через нуль при
том поперечном сечении, при котором сумма
моментов M получает свою наибольшую или
наименьшую величину т. е. свою наибольшую числен-
ную величину.

Вторая же формула показывает, что сумма
сил S уменьшается при переходе слева на право
через точку оси балки, в которой приложена сила
положительная, т. е. направленная вниз, что
впрочем явствует и из выше составленных
чертежей линий, которых ординаты выражают
эту сумму сил. Но при любой крайней опоре
балки сумма сил S должна быть равна и
противуположна сопротивлению Q_0 опоры, потому

что должна съ нею уравновѣшиваться. И такъ сум- 493.
ма силъ S имѣетъ наибольшую положительную ве-
личину при этой опорѣ, затѣмъ при переходѣ попе-
речнаго сѣченія, къ которому относится сумма
силъ, силы на право до конца балки, сумма силъ
уменьшается до средняго сѣченія 0 перваго пролета,
которому соотвѣтствуетъ наибольшая численная
величина суммы моментовъ M, перемѣняетъ знакъ
и продолжаетъ уменьшаться до слѣдующей опоры
O_1, гдѣ имѣетъ наименьшую отрицательную или
наибольшую численную величину; при переходѣ
черезъ среднюю опору 0, она разомъ увеличивается
на величину силы Q, сопротивленія опоры, направ-
ленной вверхъ, дѣлается положительною и придоль-
нымъ переходѣ поперечнаго сѣченія по второму
пролету опять постепенно уменьшается, пере-
мѣняетъ знакъ при средней точкѣ пролета и т. д.

Изъ этого не трудно заключить, что въ каждомъ
отдѣльномъ пролетѣ сопротивленіе перерѣзыва-
нію t_1, вырождающееся дѣйствіе лѣвой части тѣла
на правую при разсматриваемомъ поперечномъ
сѣченіи, будетъ направлено вверхъ въ части про-
лета между лѣвою опорою и среднимъ поперечнымъ
сѣченіемъ, соотвѣтствующимъ наибольшей чис-
ленной величинѣ M, т. е. наибольшему напря-
женію продольныхъ фибръ балки, и это сопротив-
леніе направлено внизъ между среднею точкою и

 правою опорою балки въ томъ же пролетѣ. Сопротивленіе же разложенію t_2, вырождающее дѣйствіе нижней части балки на верхнюю при данномъ числѣ продольнаго ея сѣченія, будетъ направлено слѣва на право между лѣвою опорою и серединою пролета и справа на лѣво между серединою и правою опорою въ томъ же пролетѣ.

Обратимся теперь къ формулѣ

$$n_2 = \frac{1}{u}(n_2 u)_{v_1} - \frac{I' - vm}{uI}\frac{\partial S}{\partial s},$$

выражающей величину n_2 сопротивленія элемента тѣла растяженію, перпендикулярному къ оси тѣла и приведенному къ единицѣ площади грани элемента. Если изобразимъ черезъ p, какъ и выше, грузъ дѣйствующій на единицу длины тѣла при разсматриваемомъ поперечномъ сѣченіи и черезъ q' и q'' силы растяженія на единицу длины, приложенныя непосредственно къ верхней и нижней поверхности тѣла и передающія ему дѣйствіе груза p, то имѣемъ

$$p = q'' - q', \quad (n_2 u)_{v_1} = q', \quad (n_2 u)_{v_0} = q'' \text{ и } \frac{\partial S}{\partial s} = -p = q' - q''$$

и разсматриваемая формула можетъ быть написана въ видѣ

$$n_2 = \frac{q'}{u} - \frac{I' - mv}{uI}(q' - q''),$$

показывающемъ зависимость сопротивленія отъ силъ, дѣйствующихъ непосредственно на поверхности тѣла. Затѣмъ разсмотримъ величину

$$\frac{I' - mv}{I}$$

и для сего замѣтимъ, что какъ видно изъ ея свойствъ 495.

$$\frac{I'-mv}{I} = \frac{1}{I}\int_v^{v_1} dv \int_v^{v_1} v\,d\varpi \;;\; \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{I'-mv}{I}\right] = -\frac{1}{I}\int_v^{v_1} v\,d\varpi = -\frac{m}{I}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left[\frac{I'-mv}{I}\right] = \frac{v}{I}\frac{\partial \varpi}{\partial v} = \frac{vu}{I}\,.$$

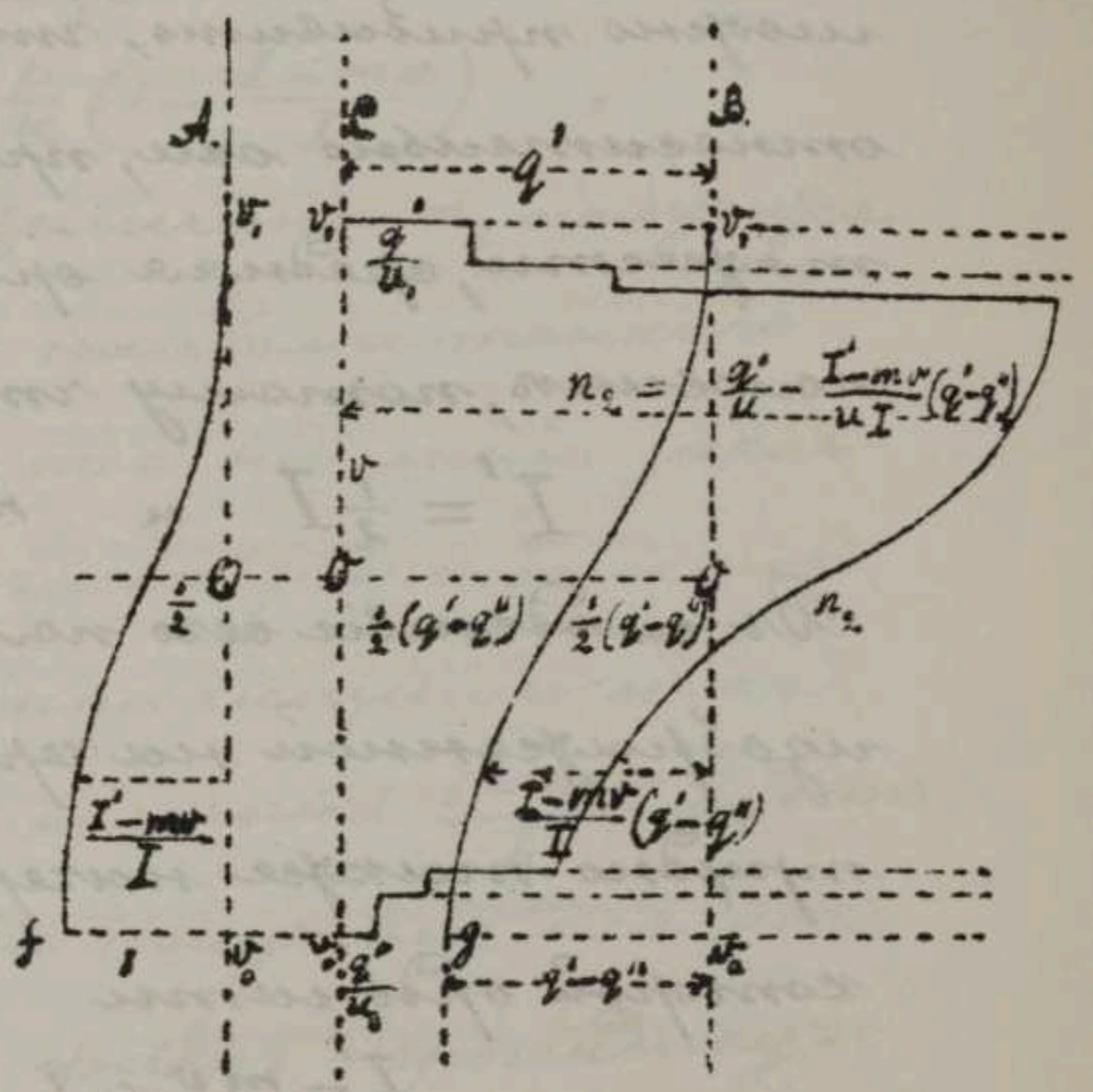
Изъ этихъ формулъ можно заключить, что если изобразимъ различныя величины количества $\frac{I'-mv}{I}$, принадлежащія различнымъ элементамъ площади сѣченія тѣла, ординатами кривой, соотвѣтствующими абсциссамъ v этихъ элементовъ, отложенными по линіи OA, то при переходѣ абсциссы отъ предѣла v_0, относящагося къ нижнимъ фибрамъ тѣла, до предѣла v_1, относящагося къ верхнимъ фибрамъ, ординаты кривой будутъ постоянно положительны, потому что выражаютъ сумму

$$\frac{1}{I}\int_v^{v_1} m\,dv$$

положительныхъ величинъ

$$\frac{m\,dv}{I}\,,$$

ординаты будутъ постоянно уменьшаться съ увеличеніемъ абсциссы v, потому что производная каждой изъ нихъ равна $-\frac{m}{I}$ и слѣдовательно отрицательна; касательныя въ крайнихъ точкахъ кривой будутъ параллельны оси абсциссъ, потому что при этихъ



точкой производная ординаты равна нулю; в серединѣ же кривой будетъ точка перегиба, потому что тамъ производная второго порядка ординаты равна нулю; наконецъ ордината при абсциссѣ v_1 равна нулю, потому что при верхней оконечности сѣченія моментъ инерціи I' и моментъ m равны нулю, а при абсциссѣ v_0 ордината равна единицѣ, потому что m равно нулю и I' уменьшается равнымъ моменту инерціи I всего сѣченія. Къ этому можно прибавить, что, при сѣченіи симметричномъ относительно оси, проходящей черезъ его центръ тяжести, средняя ордината кривой равна одной половинѣ, потому что при $v=0$

$$I' = \tfrac{1}{2} I \quad \text{и} \quad mv = 0.$$

Въ слѣдствіе сего получится кривая $f v_1$, подобная изображенной на чертежѣ. По этой кривой не трудно также начертить другую кривую $g v_1$, которой ординаты

$$\frac{I' - mv}{I} (q' - q'')$$

при оси абсциссъ OB получатся черезъ умноженіе ординатъ первой на разность силъ $q' - q''$.

Относя же эту кривую къ другой оси абсциссъ OC, параллельной OB и находящейся отъ нея на разстояніи q' мы получимъ кривую, которой ординаты выразятъ величину количества

$$q' - \frac{I' - mv}{I} (q' - q'').$$

За тѣмъ если ординаты, отнесенныя къ абсциссѣ OC,

раздѣлимъ на соотвѣтствующія величины ширины и сѣченія, то найдемъ кривую $v_0 n_2 v_1$, которой ординаты представятъ величины силы

$$n_2 = \frac{q'}{u} - \frac{I' - mv}{uI}(q' - q'') \ .$$

Чтобы получить понятіе о томъ, какъ велика можетъ быть эта сила въ различныхъ слояхъ тѣла при данномъ поперечномъ сѣченіи, положимъ что тѣло изгибается непрерывно распредѣленнымъ грузомъ p на единицу длины, который весь давитъ на верхнюю поверхность тѣла. Тогда

$$q' = -p \ , \ q'' = 0 \quad \text{и} \quad n_2 = -\frac{p}{u}\left(1 - \frac{I' - mv}{I}\right) \ ,$$

а наибольшая численная величина n_2 получится при верхнемъ слоѣ средняго наиболѣе тонкаго прямоугольника профиля, т. е. на линіи закле-покъ, соединяющихъ верхнюю часть ребра балки съ угловыми желѣзами, прикрѣпляющими ее къ поясамъ. Въ этомъ листѣ величина $\frac{I' - mv}{I}$ будетъ весьма мала и по сему мы получимъ для наибольшей величины сжатія фибръ перпендикулярно къ оси величину $\frac{p}{u}$, весьма близкую къ истинной. Но въ мостовыхъ балкахъ грузъ p рѣдко превосходитъ 120 пудовъ на погонный футъ или 10 пудовъ на погонный дюймъ длины, толщина же и ребра рѣдко менѣе $^3/_8$ дюйма, слѣдовательно при непрерывномъ размѣщеніи груза наибольшее поперечное сжатіе ребра большею частію не превзойдетъ 27 пудовъ на квадратный

 дюйма. Эта сила такъ мала въ сравненіи съ предѣломъ прочнаго сопротивленія желѣза, что ею можно пренебречь при повѣркѣ прочности ребра балки въ виду значительнаго упрощенія расчета, которое этимъ достигается. Если же грузъ, дѣйствующій на мостовую балку, передается ей только въ мѣстахъ ея соединенія съ поперечными балками, то въ промежуткахъ сила p, а слѣдовательно и сдвигающая T_2, равны нулю; въ мѣстахъ же соединенія балка, хотя и подвержена значительнымъ давленіямъ, но за то въ этихъ мѣстахъ она обыкновенно имѣетъ значительный запасъ прочности, потому что тутъ ребро балки усиливается угловыми желѣзками и накладками, необходимыми какъ для прикрѣпленія къ нему поперечинъ, такъ и для соединенія желѣзныхъ листовъ, образующихъ ребро. Единственныя мѣста въ мостовой балкѣ, гдѣ сдвигающая, перпендикулярное къ оси, можетъ оказать вредное вліяніе на прочность балки, находятся тамъ, гдѣ балка опирается на свои опоры. Въ этихъ мѣстахъ ребро балки должно быть настолько утолщено, чтобы на каждый квадратный дюймъ горизонтальнаго сѣченія этой части ребра сдвигающая не превосходила бы предѣла прочнаго сопротивленія, допускаемаго при соображеніи толщины съ высотою сжимаемой части.

Когда согласно изложенному найдены величины сил упругости n_1, n_2 t_1 и t_2, соответствующия граням элементарного параллелипипеда при данномъ мѣстѣ тѣла, то уже не трудно опредѣлить наибольшія сопротивленія растяженію или сжатію, соотвѣтствующія діагональнымъ граням этого параллелипипеда, пользуясь для сего вышевыведенными формулами, по которымъ:

при $t_1 > 0$: $Min.\,N = \frac{n_1+n_2}{2} - \sqrt{(\frac{n_1-n_2}{2})^2 + t^2}$ и $Max.\,N' = \frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{(\frac{n_1-n_2}{2})^2 + t^2}$

при $t_1 < 0$: $Max.\,N = \frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{(\frac{n_1-n_2}{2})^2 + t^2}$ и $Min.\,N' = \frac{n_1+n_2}{2} - \sqrt{(\frac{n_1-n_2}{2})^2 + t^2}$,

и вмѣстѣ съ тѣмъ найти направленія этихъ силъ и соотвѣтствующихъ имъ діагональныхъ граней по формуламъ

$$tg\,2\alpha = -\frac{2t_1}{n_1-n_2} \quad и \quad tg\,2\alpha' = \frac{2t_1}{n_1-n_2}\ ;$$

а затѣмъ для повѣрки прочности тѣла относительно косвенныхъ напряженій, внутри его вызываемыхъ при его изгибѣ, послужатъ условныя неравенства

$$Max.\ числ.\ вел.\left\{\frac{n_1+n_2}{2} + \sqrt{(\frac{n_1-n_2}{2})^2 + t^2}\right\} \leqq R_1$$

$$Max.\ числ.\ вел.\left\{\frac{n_1-n_2}{2} - \sqrt{(\frac{n_1-n_2}{2})^2 + t^2}\right\} \leqq R_2\ ,$$

гдѣ R_1 и R_2 выражаютъ предѣлы прочнаго сопротивленія растяженію и сжатію. Впрочемъ во многихъ случаяхъ можно для приблизительныхъ расчетовъ принять оба предѣла равными между

собою, и тогда получается одно общее условное неравенство

$$\text{Max. час. вел.} \left\{ \frac{n_1+n_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1-n_2}{2}\right)^2 + t^2} \right\} \leqq R .$$

Здѣсь однако слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что изгибаемое тѣло по качеству своего матеріала или по способу соединенія между собою отдѣльныхъ частей, изъ которыхъ оно составлено, часто оказываетъ неодинаковое сопротивленіе растяженію, сжатію, перерѣзыванію или разслоенію въ различныхъ мѣстахъ и по различнымъ направленіямъ. Тогда очевидно повѣрка прочности должна относиться къ слабѣйшимъ мѣстамъ. Такъ напримѣръ, предѣлъ прочнаго сопротивленія деревянной балки раскалыванію или скалыванію параллельно ея продольнымъ фибрамъ, изображенный выше черезъ R_3, значительно меньше сопротивленія перерѣзыванію по другимъ направленіямъ и также растяженію и сжатію; поэтому при повѣркѣ прочности деревянныхъ балокъ слѣдуетъ принять въ расчетъ условное неравенство

$$\text{Мах. т. вел. } t_2 = \text{Мах т. в. } \frac{m}{nI} S \leqq R_3 .$$

При усиленіи составныхъ балокъ въ мѣстахъ соединенія ребра съ поясами, листы ребра, ослабленные отверстіями для заклепокъ, оказываютъ меньшее сопротивленіе перерѣзыванію или срѣзыванію промежутковъ между заклепками, чѣмъ въ другихъ цѣльныхъ сѣченіяхъ,

а посему можетъ встрѣтиться надобность въ повѣркѣ прочности этой части балки. Если чрезъ d данный діаметръ заклепокъ, чрезъ l разстояніе центровъ двухъ смежныхъ заклепокъ и чрезъ e толщину листа, то сопротивленіе срѣзыванію части листа между двумя заклепками выразится чрезъ

$$R(l-d)e\ ,$$

а вызываемое при изгибѣ сопротивленіе перерѣзыванію на протяженіи le квадратныхъ двойныхъ горизонтальныхъ сѣченій по линіи заклепокъ будетъ

$$t_2 le \quad или \quad -\frac{m}{I}\delta l\ ,$$

а посему для прочности тѣла по линіи заклепокъ должно существовать неравенство

$$Мак.\ г.\ в.\ \frac{ml}{I}\delta \leqq R(l-d)e\ ,$$

гдѣ m изображаетъ моментъ сѣченія пояса вмѣстѣ съ верхними частями угловыхъ желѣзъ, взятый относительно центра тяжести поперечнаго сѣченія балки. Это неравенство можетъ также служить для опредѣленія наименьшаго разстоянія l между центрами заклепокъ по данному имъ діаметру d и толщинѣ e листа, если это разстояніе не опредѣляется другими соображеніями, какъ напримѣръ плотностію соединенія листовъ, удобствами работы и т. п.

Для объясненія изложенной теоріи приложимъ ее къ повѣркѣ прочности ребра мостовой балки, лежащей на нѣсколькихъ опорахъ. Въ этомъ случаѣ, какъ выше объяснено можно пренебречь силою n_2 растяженія или сжатія, перпендикулярною къ оси тѣла, и тогда формулы для N и N' представляются въ простѣйшемъ видѣ:

при $t_1 > 0$ ... $\text{Min. } N = \frac{n_1}{2} - \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2}$, $\text{Max. } N' = \frac{n_1}{2} + \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2}$

при $t_1 < 0$ ... $\text{Max. } N = \frac{n_1}{2} + \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2}$, $\text{Min. } N' = \frac{n_1}{2} - \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2}$

$$tg\, 2\alpha = -\frac{2t_1}{n_1} \quad \text{и} \quad tg\, 2\alpha' = \frac{2t_1}{n_1} .$$

Прибавивъ къ этимъ формуламъ еще выраженія

$$n_1 = \frac{v}{I} M \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{m}{nI} \delta ,$$

изъ нихъ нетрудно вывести слѣдующія заключенія.

Если въ данномъ мѣстѣ балки продольныя фибры растянуты, т.е. если

$$n_1 > 0 ,$$

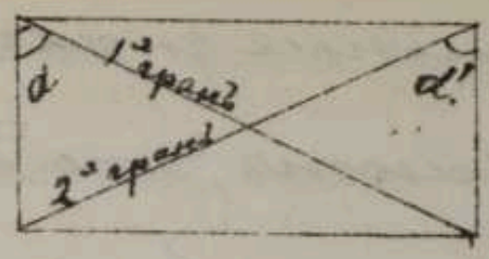
то для наибольшей численной величины косого напряженія въ этомъ же мѣстѣ найдемъ:

при $t_1 > 0$ или $\delta > 0$ $\text{Max. } N' = \frac{n_1}{2} + \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2}$ и $tg\, 2\alpha' > 0$

при $t_1 < 0$ или $\delta < 0$ $\text{Max. } N = \frac{n_1}{2} + \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2}$ и $tg\, 2\alpha > 0$;

а посему это наибольшее косое напряженіе будетъ растяженіемъ, перпендикулярнымъ въ первомъ случаѣ къ второй діагональной грани поперечнаго сѣченія и во второмъ случаѣ къ первой діагональной грани. Если же въ раз-

смотрящемся мысль продольныя фибры сжаты т. е.



$$n_1 < 0,$$

то для наибольшей численной величины косого напряженія найдемъ:

при $t_1 > 0$ или $\delta > 0$ $Min.\ N = \frac{n_1}{2} - \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2} < 0$ и $tg\,2\alpha > 0$

при $t_1 < 0$ или $\delta < 0$ $Min.\ N' = \frac{n_1}{2} - \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2} < 0$ и $tg\,2\alpha' > 0$;

а слѣдовательно наибольшее косое напряженіе будетъ сжатіемъ перпендикулярнымъ въ первомъ случаѣ къ первой и во второмъ случаѣ ко второй діагональной грани полупараллелипипеда. Но какъ въ каждомъ поперечномъ сѣченіи, если оно симметрично относительно оси балки, въ продольныхъ фибрахъ, одинаковаго удаленныхъ отъ оси тѣлъ по обѣ ея стороны, всегда существуетъ съ одной стороны оси растяженіе, а съ другой сжатіе такой же величины и также равныя сопротивленія перерѣзыванію, то должны существовать и попарно равныя и противуположенныя наибольшія косыя напряженія съ одной стороны оси растяженія, а съ другой ея стороны сжатія. Изъ этого слѣдуетъ, что при повѣркѣ прочности ребра балки съ симметричнымъ относительно оси поперечнымъ сѣченіемъ можно ограничиться опредѣленіемъ косыхъ напряженій только для одной половины поперечнаго сѣченія. Положен-

тельные знаки тангенсовъ двойныхъ угловъ показываютъ, что діагональныя грани, соотвѣтствующія наибольшимъ численнымъ величинамъ косыхъ напряженій, составляютъ съ плоскостію поперечнаго сѣченія углы, меньшіе чѣмъ въ 45°.

Такъ какъ при одномъ и томъ же величинахъ силъ n_1 и t_1 или момента M и суммы силъ S наибольшее косое напряженіе при той же діагональной грани выразится или первою или второю изъ двухъ величинъ

$$\frac{n_1}{2} + \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2} \quad \text{и} \quad \frac{n_1}{2} - \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2},$$

смотря потому будетъ ли сумма силъ S положительна или отрицательна, и такъ какъ знаки этихъ двухъ величинъ всегда другъ другу противуположны, то въ балкахъ, на которыя можетъ дѣйствовать временной грузъ, различно распредѣленный, и въ каждомъ пролетѣ которыхъ поэтому есть такая часть, гдѣ сумма силъ S можетъ быть (при одномъ и отрицательна) положительна при другомъ распредѣленіи груза, наибольшее косое напряженіе при одной и той же діагональной грани въ этой части балки будетъ растяженіемъ при одномъ распредѣленіи временнаго груза и сжатіемъ при другомъ.

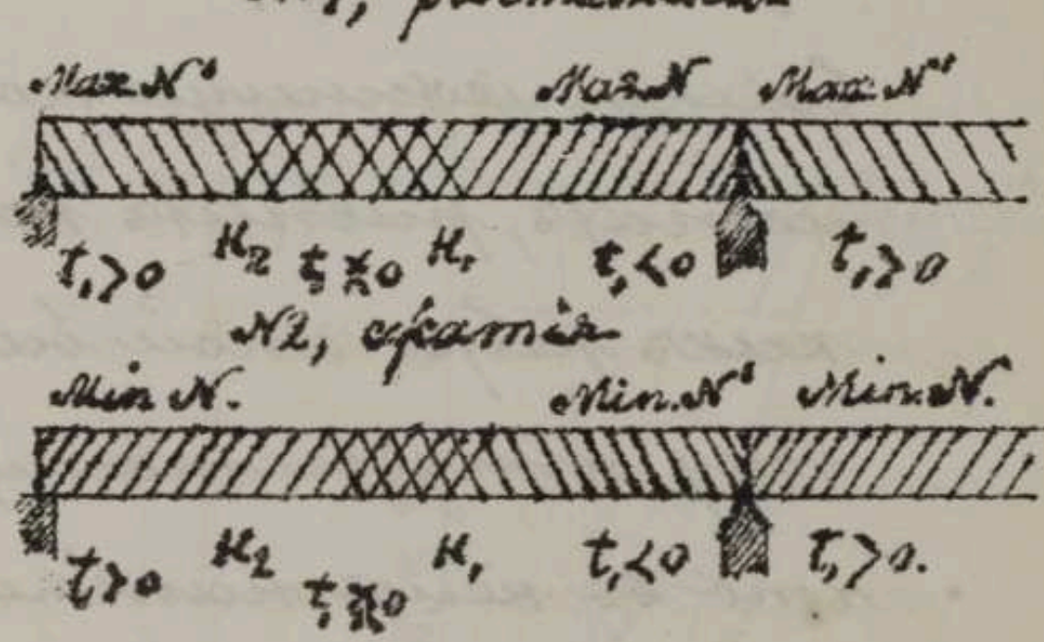
Въ томъ же предѣлѣ тѣла второй діагональной грани, перпендикулярной къ первой, будутъ соотвѣтствовать наибольшія косыя напряже-

ния противуположного рода, т.е. сжатие при первомъ распредѣленіи груза и растяженіе при второмъ. Разность ихъ численныхъ величинъ

$$\sqrt{\frac{n_1^2}{4}+t^2}+\frac{n_1}{2}-\left[\sqrt{\frac{n_1^2}{4}+t^2}-\frac{n_1}{2}\right]=n_1,$$

двухъ одновременно существующихъ, взаимно перпендикулярныхъ наибольшихъ косыхъ напряженій, изъ которыхъ одно есть растяженіе, а другое сжатіе, всегда равна напряженію n_1, продольныхъ оприбъ тѣла въ томъ же мѣстѣ внутри его.

Такимъ образомъ напримѣръ для элемента поперечнаго сѣченія на оси тѣла на высотѣ:



$$v=0 \quad ; \quad n_1=0$$

и всюдѣ вѣсь его

при $t_1>0$

$$Max.N'=-Min.N=t_1>0 \; ; \; tg\,2\alpha=-\infty \; ; \; tg\,2\alpha'=\infty \; ; \; \alpha=\alpha'=45^\circ,$$

а при $t_1<0$

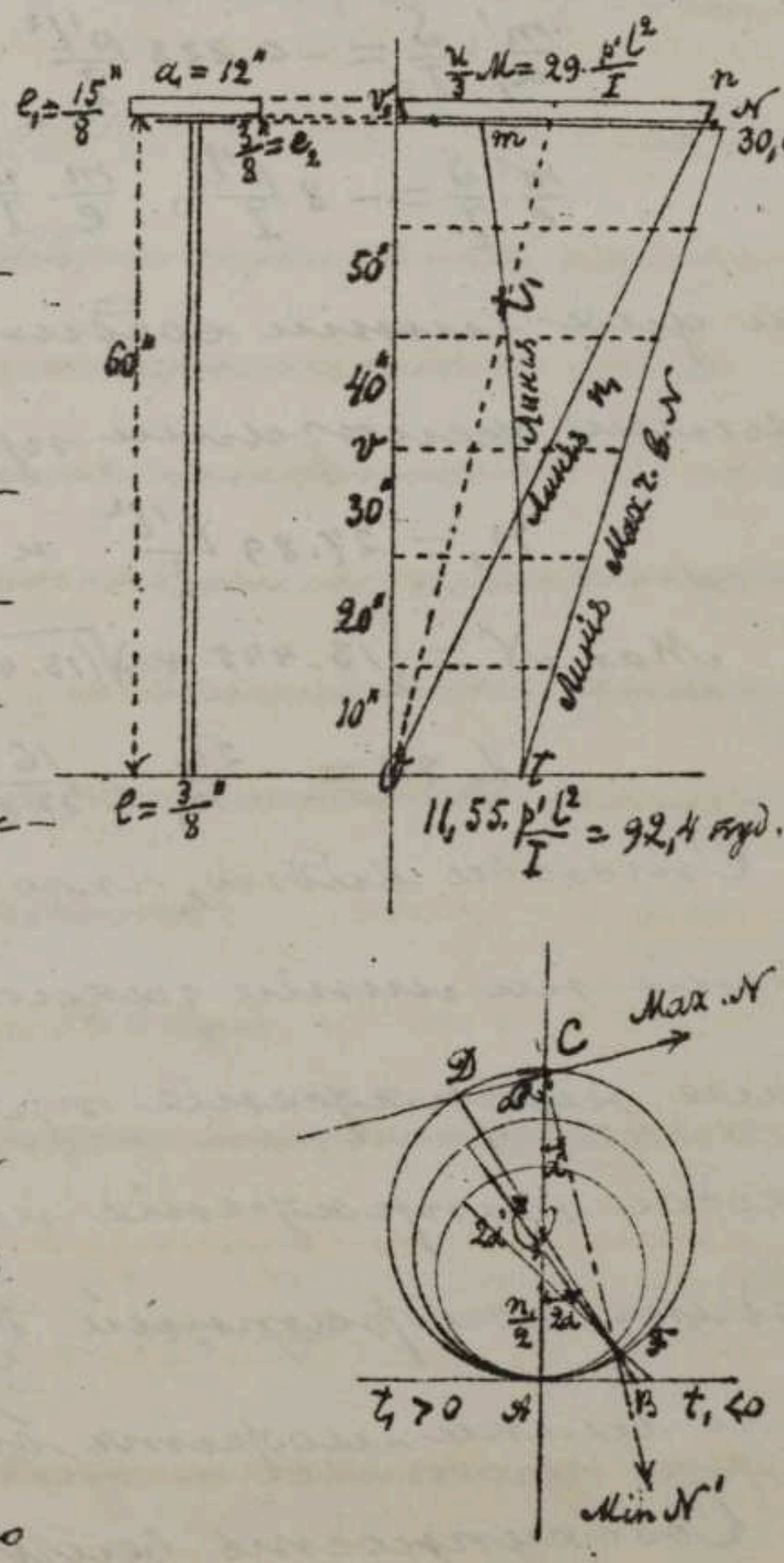
$$Max.N=-Min.N'=-t_1>0 \; ; \; tg\,2\alpha=\infty \; ; \; tg\,2\alpha'=-\infty \; ; \; \alpha=\alpha'=45^\circ,$$

и отсюда ясно видно одновременное существованіе растяженія $Max.N'$, перпендикулярнаго второй діагональной грани, и сжатія $Min.N$, перпендикулярнаго первой діагональной грани или же растяженія $Max.N$ и сжатія $Min.N'$, перпендикулярныхъ тѣмъ же діагональнымъ гранямъ

въ обратномъ порядкѣ, причемъ въ обоихъ случаяхъ обѣ діагональныя грани составляютъ углы въ 45° съ плоскостію поперечнаго сѣченія по обѣ ея стороны. Кромѣ того найденныя выраженія показываютъ, что на осн балки наибольшія величины косыхъ растяженій и сжатій равны величинамъ сопротивленій перерѣзыванію поперекъ оси тѣла и вдоль ея при той же поперечномъ сѣченіи.

Для численнаго примѣра повѣрки прочности возьмемъ туже вышеразсмотрѣнную мостовую балку, лежащую на трехъ опорахъ при двухъ пролетахъ, равныхъ каждый 100 футамъ. Такъ какъ ребро этой балки по всей ея длинѣ имѣетъ одну и туже толщину, то легко сообразить, что въ ней наибольшія косыя напряженія проявятся надъ средней опорой, потому что тамъ n_1 и t_1 наибольшія; поэтому мы и подвергнемъ повѣркѣ поперечное сѣченіе балки надъ среднею опорою. При этомъ поперечномъ сѣченіи, какъ видно изъ вышеизложеннаго изслѣдованія балки, наибольшія величины силъ n_1 и t_1, соотвѣтствующія наибольшимъ величинамъ M и S, получаются при одномъ и томъ же распредѣленіи временнаго груза, а именно когда оба пролета сплошь возможно балки нагружены, а поэтому повѣрку прочности очевидно

следует произвести именно въ предположеніи 507.
такого наиболѣе невыгоднаго распредѣленія гру-
за. При другихъ же поперечныхъ сѣченіяхъ наиболь-
шія величины силъ n_1 и t_1, соотвѣтствуютъ двумъ
различнымъ случаямъ распредѣленія груза, не
могущимъ существовать одновременно, но какъ
опредѣленіе наибольшихъ косыхъ напряженій по
величинамъ силъ n_1 и t_1, соотвѣтствующимъ одно-
му и тому же распредѣленію груза значительно
бы усложнило рѣшеніе вопроса, то можно допустить
для силъ n_1 и t_1 ихъ наиболь-
шія величины, хотя бы и
относящіяся къ различ-
нымъ распредѣленіямъ гру-
за, потому что чѣмъ боль-
ше каждая изъ этихъ вели-
чинъ, тѣмъ большія вели-
чины опредѣляются и для
наибольшихъ косыхъ напря-
женій, и слѣдовательно
ошибка не послужитъ ко
вреду, тѣмъ болѣе что она
въ большей части случаевъ
и незначительна.



Для разсматриваемаго
здѣсь случая имѣются

508. следующія данныя:

$l = 100' = 1200$ дюйм., $p' = \frac{4}{3}$ пуд. и $p'' = \frac{11}{4}$ пуд. на 1 дюйм.

$h = 120'' - \frac{3}{4}'' = 119\frac{1}{4}''$, $h_1 = 121\frac{7}{8}''$, $h_2 = 119\frac{5}{8}''$, $e = \frac{3}{8}''$, $e_1 = \frac{15}{8}''$,

$e_2 = \frac{3}{8}''$, $a_1 = 12''$, $a_2 = 7\frac{3}{8}''$, $R = 240$ пуд. на 1 кв. дюйм.

Кромѣ того по вышеизложеннымъ мѣстамъ имѣемъ:

$$M = 0.468\, p' l^2, \quad S = -2.344\, p' l = -0.00195\, p' l^2,$$

$$n_1 = \frac{v}{I} M \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{m}{nI} S.$$

Затѣмъ получаются слѣдующія величины:

$$I = 240227, \quad p' l^2 = 1920000, \quad \frac{p' l^2}{I} = 8$$

$$\frac{v_1}{I} M = 29 \frac{p' l^2}{I} = 232 \text{ пуда};$$

$$\frac{m'}{a_1} \cdot \frac{S}{I} = -0.223 \frac{p' l^2}{I}, \quad \frac{m'}{a_2} \cdot \frac{S}{I} = -0.363 \frac{p' l^2}{I}, \quad \frac{m''}{a_2} \cdot \frac{S}{I} = -0.407 \frac{p'' l^2}{I},$$

$$\frac{m''}{e} \cdot \frac{S}{I} = -8 \frac{p' l^2}{I}, \quad \frac{m}{e} \cdot \frac{S}{I} = -(11.55 - 0.000975 v^2) \frac{p' l^2}{I}$$

и для линіи соединенія ребра балки съ угловыми фермами при $v = 59\frac{5}{8}$ дюйма:

$$n_1 = 27.89 \frac{p' l^2}{I} \quad \text{и} \quad t_1 = -8 \frac{p' l^2}{I}$$

$$\text{Max. } N = \left[13.445 + \sqrt{(13.445)^2 + 8^2}\right] \frac{p' l^2}{I} = 30.01 \frac{p' l^2}{I} = 240 \text{ пуд.}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2t_1}{n_1} = \frac{16}{27.89}, \quad \alpha = 15°.$$

Отсюда видно, что наибольшее косое напряженіе на линіи заклепокъ больше, чѣмъ наибольшее напряженія продольныхъ фибръ, но косое напряженіе не превосходитъ 240 пуд. на одинъ квадратный дюймъ діагональной грани, то балка можетъ быть признана прочною.

Совокупность величинъ силъ n, t, и max. N представлена на приложенномъ чертежѣ. При осяхъ абсциссъ Ov, на основаніи вышеизложен-

него начерчены линіи On и tmv_1, которыхъ ордо-
наты пропорціональны синусамъ n_1 и t_1, и задаютъ
для полученія какой либо изъ ординатъ линіи
tNn, пропорціональной Max. N, отъ точки A
по вертикальной линіи отложено разстоя-
ніе AO, пропорціональное $\frac{n_1}{2}$, а по горизонталь-
ной линіи разстояніе AB, пропорціональное t_1,
изъ центра O радіусомъ AO проведенъ кругъ $AFCD$ и
въ немъ продолженный діаметръ BOD, встрѣчаю-
щій кругъ въ точкахъ D и F. Тогда легко видно,
что

$$BO = \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2}\ , \quad BF = \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2} - \frac{n_1}{2} \quad \text{и} \quad BD = \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + t^2} + \frac{n_1}{2} = Max.N\ ;$$

$$tg\, AOB = -\frac{2t_1}{n_1} = tg\, 2\alpha\ ; \quad \angle ACF = \frac{1}{2}\angle AOB = \alpha, \quad \angle DCF = 90^\circ - \angle ACF = \alpha'.$$

Для повѣрки прочности ребра противъ срѣзыва-
нія промежутковъ между отверстіями для
заклепокъ, полагаемъ что для плотности соеди-
ненія разстояніе между центрами смежныхъ
заклепокъ взято въ 6 дюйм., а діаметръ заклe-
покъ въ $\frac{3}{4}$ дюйма. Тогда срѣзывающее усиліе
для одного промежутка будетъ:

$$t_1 \cdot 6 \cdot \frac{3}{8} = \frac{m''}{e} \cdot \frac{S}{I} \cdot \frac{9}{4} = -18\,\frac{p''l^2}{I} = -144 \text{ пуд.},$$

а сопротивленіе промежутка листа срѣзыва-
нію будетъ

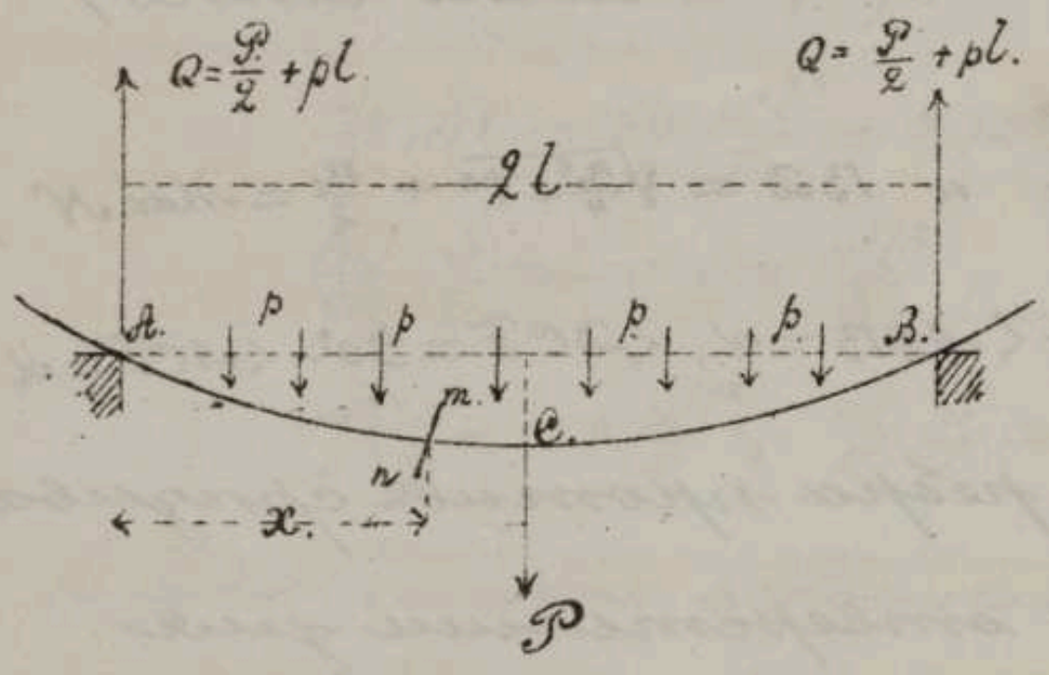
$$R\left(6 - \tfrac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{8} = 240 \cdot \frac{21}{4} \cdot \frac{3}{8} = 472 \text{ пуд.},$$

и сопротивленіе перерѣзыванію заклепки по
двумъ сѣченіямъ:

$$2R\,\frac{\pi d^2}{4} = 2 \cdot 240 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{3^2}{4 \cdot 4^2} = 212 \text{ пуд.}$$

слѣдовательно условіе прочности удовлетворено.

510. Другое применение изложенной теории заключается в поверке прочности против разделения цельных и составных деревянных балок. Для объяснения этого разсмотрим призматическое тело, лежащее на двух опорах A и B и изгибаемое силами, перпендикулярными к оси, а именно равномерно распределенным грузом p на единицу длины тела и сосредоточенным грузом P, приложенным в середине C длины тела.



Для вывода величины сопротивления разделению

$$\frac{m}{nI}\,\delta\,,$$

определяемым сперва сумму сил δ, действующих на тело с правой стороны поперечного сечения mn, взятого на произвольном расстоянии x от опоры A.

Изображая длину тела через $2l$ и сопротивление каждой опорной точки через Q, так что:

$$Q = \frac{P}{2} + pl$$

и придавая положительный знак силам, действующим сверху вниз, находим для сечения в части AC тела, где $x < l$:

$$\delta = p(2l - x) + P - Q = \frac{P}{2} + p(l - x).$$

Количество это имеет наибольшую величину при $x = 0$, т. е. при опоре A, а именно:

$$\text{Max. } \delta = \frac{P}{2} + pl = Q\,.$$

Начиная отъ этой величины сумма δ уменьшается 5 об.
ся при увеличиваніи x отъ нуля до l, оставаясь
постоянно положительною, и наименьшая ея
величина будетъ при $x = l$, т.е. при точкѣ C, а
именно:

$$Min.\,\delta = \frac{P}{2}\,.$$

Для поперечнаго сѣченія въ части тѣла BC, для
которой $x > l$, имѣемъ:

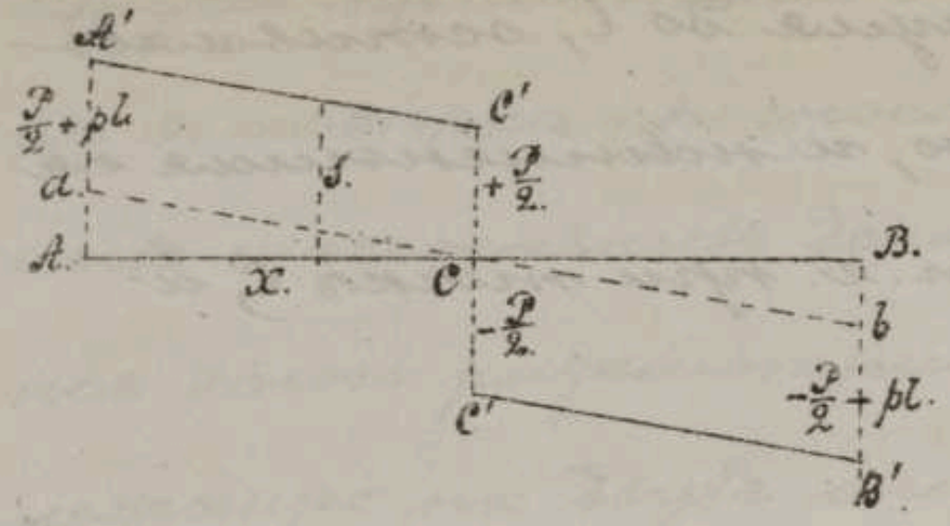
$$\delta = p(2l - x) - Q = -\left[\frac{P}{2} + p(x - l)\right]$$

и легко видѣть, что здѣсь δ всегда отрицательно,
и что численная величина его увеличивается при
переходѣ отъ точки C къ B, т.е. при увеличиваніи
x отъ l до $2.l$; такъ что при точкѣ C: $Min.z.b.\,\delta = \frac{P}{2}$,
а при точкѣ B: $Max.z.b.\,\delta = \frac{P}{2} + pl = Q$.

И такъ сумма силъ δ имѣетъ наибольшую
численную величину надъ опорами A и B, гдѣ она
равна сопротивленію этихъ опоръ, и наимень-
шую численную величину въ серединѣ тѣла C,
гдѣ она равна половинѣ сосредоточеннаго груза.
Эта сумма δ положительна въ части тѣла
AC и отрицательна въ части BC, имѣетъ
точку раздѣла C и переходитъ при этой точкѣ
отъ величины $+\frac{P}{2}$ къ величинѣ $-\frac{P}{2}$.

Измѣненія величины суммы силъ δ въ зависи-
мости отъ разстоянія x поперечнаго сѣченія
до опоры A, могутъ быть выражены чертежемъ,
если принять величины x и δ за абсциссу и ордо-
нату линіи, отнесенной къ осямъ абсциссъ совпа-

512. ющей съ осью AB тѣла. Такъ какъ δ есть функція первой степени отъ x, но не одинаковая для обоихъ частей тѣла AC и BC, то линія, которой δ ограничитъ ординатою, будетъ состоять изъ двухъ



прямолинейныхъ частей A'C' и C'B', изъ которыхъ одна расположена по одну сторону оси абсциссъ, а другая, для которой ординаты имѣютъ знакъ противный ординатамъ первой, будетъ расположена по другую сторону оси. Въ случаѣ когда сосредоточеннаго груза нѣтъ, т.е. когда $P=0$, обѣ части A'C' и B'C' составятъ одну непрерывную прямую a b, пересѣкающую ось AB въ серединѣ ея въ точкѣ C; а въ случаѣ когда равномѣрно распредѣленнаго груза нѣтъ, т. е. когда $p=0$, то обѣ линіи A'C' и C'B' параллельны оси.

Обращаясь затѣмъ къ выраженію сопротивленія разслоенію тѣла на квадратную единицу площади:

$$\frac{m}{nI}\delta\ ,$$

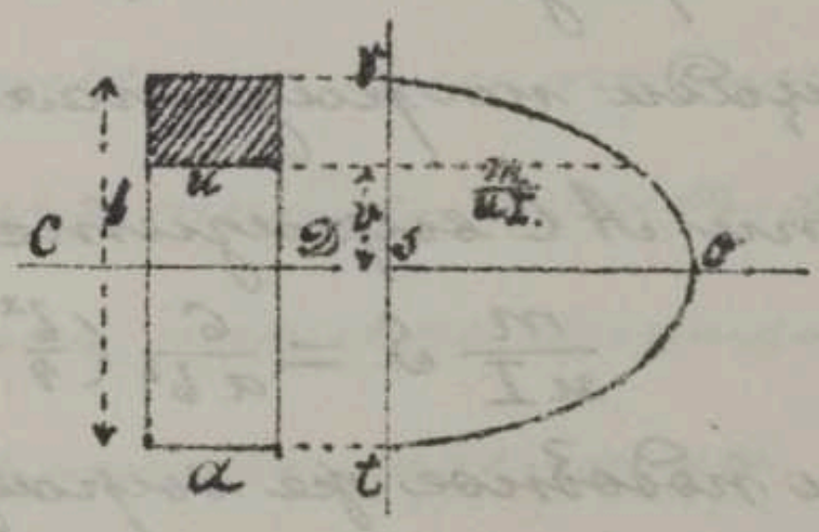
легко видѣть, что при данномъ разстояніи v плоскости разслоенія отъ оси, при чемъ множитель $\frac{m}{nI}$ остается неизмѣннымъ, сопротивленіе разслоенію, вызываемое въ изогнутомъ тѣлѣ будетъ наибольшее при поперечныхъ сѣченіяхъ надъ

объими опорами A и B тѣла, гдѣ сумма S имѣетъ наибольшую численную величину; и слѣдовательно эти мѣста будутъ слабѣйшими въ тѣлѣ относительно сопротивленія разложенію. При томъ такъ какъ сумма S имѣетъ противные знаки въ частяхъ тѣла AC и BC, то и сопротивленія разложенію въ объихъ этихъ частяхъ будутъ дѣйствовать по противуположеннымъ направленіямъ; а именно сопротивленіе разложенію, выражающее дѣйствіе нижнихъ растянутыхъ слоевъ тѣла на верхніе сжатые слои, будетъ направлено въ части BC на оборотъ справа на лѣво.

Разсмотримъ теперь другой множитель $\frac{m}{uI}$ выраженія сопротивленія разложенію, и предположимъ для сего что профиль изгибаемаго тѣла прямоугольникъ съ широтою a и высотою b. Тогда имѣемъ

$$I = \frac{a b^3}{12} \quad \text{и} \quad u = a ,$$

а для момента m верхней части поперечнаго сѣченія относительно оси CD найдемъ:



$$m = a\left(\frac{b}{2} - v\right)\frac{\frac{b}{2} + v}{2} = \frac{a}{2}\left(\frac{b^2}{4} - v^2\right) ,$$

а слѣдовательно

$$\frac{m}{uI} = \frac{a}{2}\left(\frac{b^2}{4} - v^2\right) \cdot \frac{12}{a \cdot a b^3} = \frac{6}{a b^3}\left(\frac{b^2}{4} - v^2\right) .$$

Количество это равно нулю при $v = \pm \frac{b}{2}$, т. е. при верхней и нижней фибрахъ тѣла, и имѣетъ

514. наибольшую величину при $v = 0$, т. е. когда плоскость разслоения проходит через ось тыла при чем

$$Max.\frac{m}{uI} = \frac{3}{2ab}.$$

Изменения величины $\frac{m}{uI}$ в зависимости от v могут быть выражены чертежем, если обе эти величины принять за абсциссу и ординату кривой линии $r\,o\,t$. Так как ордината выражается целою функцией второй степени от абсциссы v, то кривая $r\,o\,t$ будет парабола, которой ось перпендикулярна к хорде rt, и которой вершина находится в O, на разстоянии от хорды равном

$$Os = \frac{3}{2ab}.$$

Из всех этих выводов можно заключить:

1, что при поперечном сечении разсматриваемого изогнутого тыла, взятом на разстоянии x от левой опоры A, сопротивление разслоению на квадратную единицу площади на разстоянии v от оси тыла, в части AC выразится через:

$$\frac{m}{uI}S = \frac{6}{ab^3}\left(\frac{b^2}{4} - v^2\right)\left[\frac{P}{2} + p(l-x)\right]$$

и подобное же выражение может быть составлено и для части BC, которую однако незачем разсматривать так как она симметрична с AC.

2, При том же поперечном сечении сопротивление разслоению равно нулю у крайних фибр, наиболее удаленных от оси, увеличивается к

крайнихъ къ среднимъ фибрамъ и наибольшее сопротивленіе вызывается въ плоскости, проходящей черезъ ось тѣла, и величина его будетъ

$$\frac{3}{2ab}\left[\frac{P}{2}+p(l-x)\right].$$

3, Наибольшее сопротивленіе разслоенію проявляется при поперечныхъ сѣченіяхъ надъ опорами тѣла, и величина его будетъ при среднихъ фибрахъ тѣла:

$$\pm\frac{3}{2ab}\left[\frac{P}{2}+pl\right].$$

4, Такъ какъ для прочности изгибаемаго тѣла необходимо, чтобы наибольшія величины сопротивленія разслоенію не превосходили предѣла прочнаго сопротивленія R_3 перерѣзыванію матеріала, то условіе прочности для разсматриваемаго тѣла выразится чрезъ

$$\frac{3}{2ab}\left[\frac{P}{2}+pl\right]\leqq R_3 \quad или \quad P+2pl\leqq\frac{4ab}{3}R_3.$$

Если бы желали узнать, какой видъ разрушенія въ разсматриваемомъ изгибаемомъ тѣлѣ легче встрѣтится, разслоеніе или переломъ отъ разрыва или раздробленія продольныхъ фибръ тѣла, то для этого стоитъ только выписать условіе прочности тѣла противъ перелома, и опредѣлить, которое изъ условій прочности, относящихся къ обоимъ видамъ разрушенія, требуетъ меньшихъ величинъ для изгибающихъ силъ P и p. Видъ разрушенія, для котораго потребны меньшія силы, очевидно, произойдетъ легче другого въ данномъ тѣлѣ.

516. Условіе прочности тѣла противъ переломa разрываніемъ или раздробленіемъ продольныхъ фибръ:

$$\text{Max. т. в. } \frac{v}{I} M \leqq R$$

въ разсматриваемомъ случаѣ, гдѣ для части AC, симметричной съ BC, имѣемъ:

$$\frac{v}{I} = \frac{6}{ab^2} \quad \text{и} \quad M = P(l-x) + \frac{p(2l-x)^2}{2} - Q(2l-x) = -\left[\frac{Px}{2} + \frac{px(2l-x)}{2}\right],$$

и при $x = l$, т. е. при точкѣ C

$$\text{Max. т. в. } M = \frac{Pl}{2} + \frac{pl^2}{2},$$

обратится въ

$$\frac{3}{ab^2}(Pl + pl^2) \leqq R \quad \text{или} \quad P + pl \leqq \frac{ab^2}{3l} R.$$

Если равномѣрно распредѣленнаго груза нѣтъ, т. е. если $p = 0$, то найдемъ для наибольшаго сосредоточеннаго груза, допускаемаго условіями прочности тѣла:

противъ раздробленія: $P = \frac{4ab}{3} \cdot R_3$

противъ перелома: $P = \frac{ab^2}{3l} \cdot R$.

Отсюда видно, что при $p = 0$ переломъ произойдетъ легче раздробленія если

$$\frac{ab^2}{3l} R < \frac{4ab}{3} R_3 \quad \text{или} \quad \frac{b}{2l} < \frac{2R_3}{R}.$$

Если же сосредоточеннаго груза нѣтъ, т. е. $P = 0$, то наибольшіе грузы, допускаемые прочностію тѣла будутъ:

противъ раздробленія: $2pl = \frac{4ab}{3} R_3$

противъ перелома: $2pl = \frac{2ab^2}{3l} R$,

и переломъ произойдетъ легче раздробленія, когда

$$\frac{2ab^2}{3l} R < \frac{4ab}{3} R_3 \quad \text{или} \quad \frac{b}{2l} < \frac{R_3}{R}.$$

Напримѣръ для сосноваго дерева, для котораго принимаются предѣлы прочнаго сопротив-

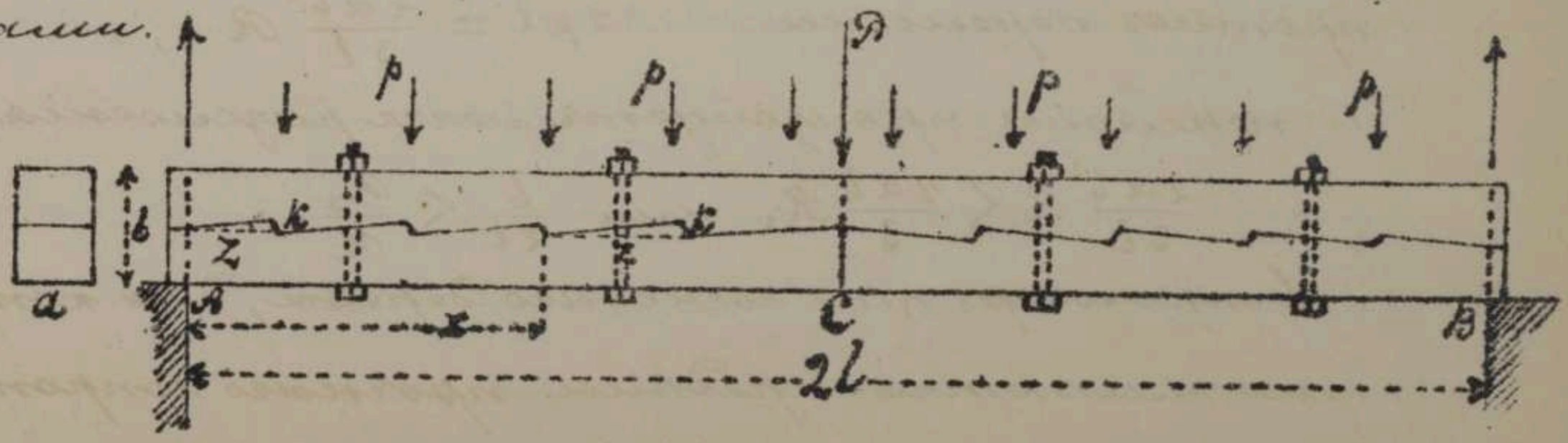
ленія:

$$R_3 = 4 \text{ пуд.} \quad \text{и} \quad R = 24 \text{ пуд.}$$

находимъ что переломъ произойдетъ легче раздвоенія отъ дѣйствія сосредоточеннаго груза, если $\frac{b}{2l} < \frac{1}{3}$, т.е. когда толщина тѣла меньше $\frac{1}{3}$ его длины, а отъ дѣйствія равномѣрно распредѣленнаго груза переломъ произойдетъ легче раздвоенія, когда $\frac{b}{2l} < \frac{1}{6}$, т.е. когда толщина тѣла меньше $\frac{1}{6}$ длины его.

Итакъ при изгибѣ деревянныхъ тѣлъ съ прямоугольною профилью разслоеніе можетъ произойти только, когда они очень коротки въ сравненіи съ толщиною и тогда наибольшая величина изгибающей силы, дѣйствіе которой тѣло можетъ выдержать безъ ущерба прочности, прямо пропорціональна площади поперечнаго сѣченія и предѣлу прочнаго сопротивленія матеріала разслоенію или продольному перерѣзыванію.

Перейдемъ теперь къ разсматриванію составныхъ деревянныхъ балокъ, состоящихъ изъ двухъ брусьевъ одинаковыхъ размѣровъ, наложенныхъ другъ на друга, соединенныхъ зубьями для предупрежденія разслоенія и скрѣпленныхъ болтами.



518. При обозначениях на чертежах направлений изгибающих сил, т. е. равномерно распределенного груза p на единицу длины балки и сосредоточенного P, приложенного въ ея средине, нижняя часть балки будетъ растянута, а верхняя сжата, и дѣйствія одной части балки на другую, сопротивляющееся разслоенію, должно быть направлено такъ, чтобы противудѣйствовать стремленію каждой части балки возвратиться къ первоначальной своей длинѣ, посему и зубья должны быть расположены такъ, чтобы препятствовать передвиженію объихъ половинъ верхней части балки по направленію отъ середины къ обоимъ концамъ, и нижней отъ концовъ къ серединѣ.

Зубья составной балки, сопротивляющіеся разслоенію ея, при этомъ очевидно будутъ подвергаться давленіямъ на короткія грани врубокъ, могущимъ смять или раздробить эти грани или же скалоть зубья по плоскости параллельной оси балки; посему для прочности балки очевидно нужно, чтобы давленія на короткія грани зубьевъ не превосходило предѣла ихъ прочнаго сопротивленія смятію, а равное этому давленію, стремленіе къ скалыванію зубьевъ не превосходило бы предѣла ихъ прочнаго сопротивленія скалыванію. Для опредѣленія размѣровъ зубьевъ, сообразно этимъ условіямъ

прочности балки, изображенных через к глубину 519.
врубки зубьев и через z длину зуба, левый конец которого находится на расстоянии x от левой опоры A балки в части AC, и положим что поперечное сечение балки есть прямоугольник с шириною a и высотою b. Тогда по вышеизложенному правилу для сопротивления скалыванию на единицу площади при абсциссе x величину:

$$\frac{3}{2ab}\left[\frac{P}{2}+p(l-x)\right] ,$$

а на всю площадь az скалывания зуба, полагая что сопротивление скалыванию по всей длине зуба равно своей наибольшей величине у левого конца зуба, получим

$$\frac{3z}{4b}\left[P+2p(l-x)\right] .$$

С другой стороны пределы прочного сопротивления скалыванию по площади az и смятию по площади ak будут

$$R_3 az \quad \text{и} \quad R_4 ak ,$$

а следовательно условия прочности балки выразятся неравенствами

$$\frac{3z}{4b}\left[P+2p(l-x)\right] \leqq R_3 az \text{ и } \frac{3z}{4b}\left[P+2p(l-x)\right] \leqq R_4 ak .$$

Первое из этих неравенств, приведенное к упрощенному виду

$$P+2p(l-x) \leqq \frac{4R_3 ab}{3} ,$$

определяет наибольшия величины грузов $P_{ир}$, при которых балка может сопротивляться скалыванию зубьев; и так как это неравенство

520. должно быть удовлетворено при всякой величине x, и следовательно и при наименее выгодной для него величине X, равной нулю, то оно может быть заменено следующим

$$P + 2pl \leqq \frac{4 R_3 a b}{3} .$$

Это неравенство очевидно может служить для определения наибольших величин сил P пр в тех случаях, когда оно для этих сил даст меньшія величины, чѣмъ тѣ, которыя опредѣляются условіемъ прочности балки противъ перелома разрывомъ или раздробленіемъ продольныхъ ея фибръ, т.е., какъ видно изъ предыдущаго, когда напримѣръ въ сосновой балкѣ при сосредоточенномъ грузѣ толщина балки не менѣе $\frac{1}{3}$ ея длины $2l$, а при равномѣрно распредѣленномъ грузѣ толщина не менѣе $\frac{1}{6}$ ея длины.

Второе же неравенство, приведенное къ виду

$$z \leqq \frac{4}{3} \frac{R_4 a b \kappa}{P + 2p(l-x)} ,$$

опредѣляетъ наибольшую длину z, разсматриваемаго зуба, по данным силам P пр и p.

Изъ него видно, что если на балку дѣйствуетъ равномѣрно разпредѣленный грузъ, то длина зуба можетъ быть тѣмъ больше чѣмъ больше x, т.е. чѣмъ ближе зубъ къ серединѣ балки. Если же равномѣрно разпредѣленнаго груза нѣтъ, а

имѣется только сосредоточенный грузъ P, то наибольшая длина зубьевъ одна и таже по всей длинѣ балки и равна

$$\frac{4}{3}\,\frac{R_1 a b k}{P}\,.$$

Если, какъ это обыкновенно случается, длина балки на столько превосходитъ ея толщину, что переломъ балки можетъ быть произведенъ меньшею силою, чѣмъ раздавленіе, то наибольшія величины силъ опредѣляются не равенствомъ:

$$P + pl \leqq \frac{R a b^2}{3l}\,.$$

Отсюда, въ случаѣ когда $p=0$, получаемъ для наибольшей величины сосредоточеннаго груза

$$P = \frac{R a b^2}{3l}$$

и подставляя, находимъ для наибольшей длины зубьевъ балки

$$z = \frac{2R_1}{R}\cdot\frac{2l}{b}\cdot k\,,$$

т. е. при сосновомъ деревѣ, глубинѣ врубки k не болѣе $1\frac{1}{2}$ дюйма и отношеніи длины балки къ ея толщинѣ равномъ 18

$$R_1 = 20 \text{ пуд.},\quad R = 24 \text{ пуд.},\quad \frac{2l}{b} = 18 \quad \text{и} \quad z = 30k\,.$$

Если же $P=0$, то для наибольшаго равномѣрно распредѣленнаго груза на единицу длины длины зубьевъ:

$$p = \frac{R a b^2}{3l^2}$$

и затѣмъ

$$z = \frac{R_1}{R}\cdot\frac{2l}{b}\cdot\frac{l}{l-x}\cdot k\,,$$

т. е. при предыдущихъ данныхъ

$$z = 15\,\frac{l}{l-x}\cdot k\,.$$

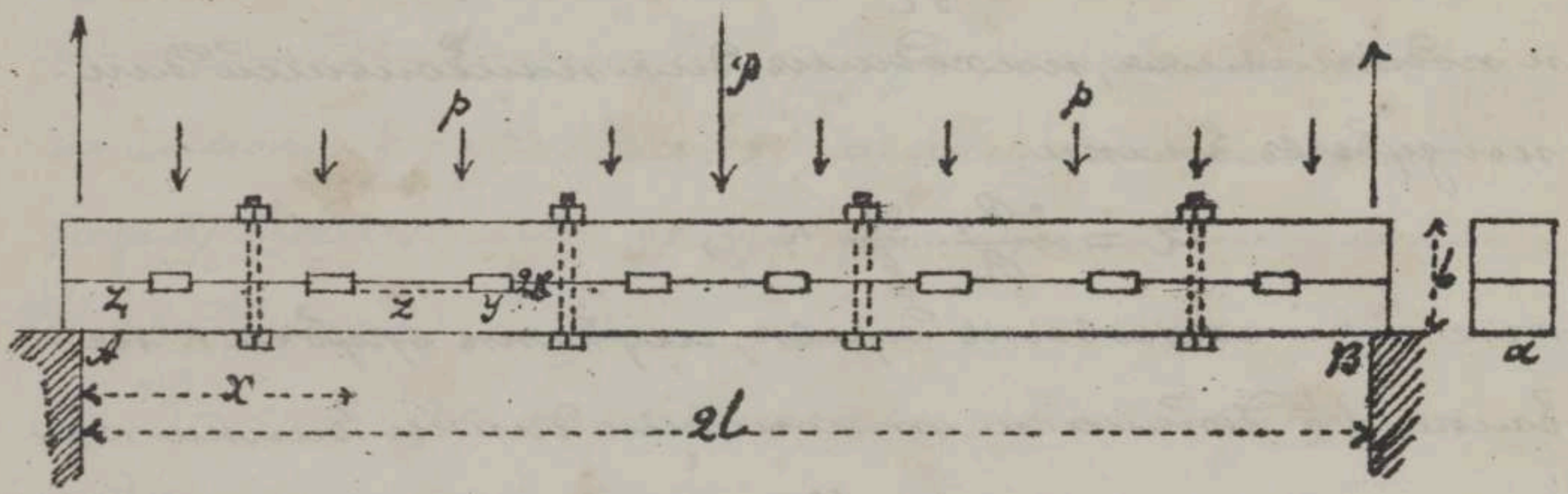
522. По сему для первого зуба, ближайшего к опоре получим

$$x = 0 \quad \text{и} \quad z_1 = 15k ,$$

и эту же длину z_1 можно принять и для остальных зубьев, если желают всем им придать одинаковую длину; в противном случае для второго зуба найдется несколько большая длина z_2, а именно при

$$x = z_1 \ , \ z_2 = 15\frac{l}{l - z_1}\cdot k \ ; \ \text{и т. д.}$$

Рассмотрим еще составную балку из двух частей, связанных шпонками и болтами, подверженную



на середине своей длины сосредоточенному грузу P и по всей длине равномерно распределенному грузу p на единицу длины. Изобразим через k глубину врубки шпонок, так что 2k представит толщину каждой шпонки; пусть y обозначит ширину шпонки, равную для деревянной шпонки примерно от 5k до 7k, и пусть z представит ширину промежутка между

двумя смежными шпонками въ части AC балки, которого левый конецъ исходится на разстояніи x отъ опоры A. Профиль балки примемъ прямоугольною съ шириною a и высотою b.

Если составная балка отъ дѣйствія грузовъ P и p прогибается какъ цѣльная той же профили, то при абсциссѣ x близъ оси балки проявится стремленіе къ раздвиженію

$$\frac{3}{2ab}\left[\frac{P}{2}+p(l-x)\right]$$

на единицу площади, а на площадь $a(z+y)$ шпонки и промежутка, если её примемъ по всей длинѣ столько же напряженною, какъ у левого наиболѣе напряженнаго конца, стремленіе къ раздвиженію будетъ

$$\frac{3(z+y)}{4b}\left[P+2p(l-x)\right].$$

Эта сила представитъ давленіе шпонки на гранъ врубки и вмѣстѣ съ тѣмъ стремленіе къ скалыванію промежутка между шпонками по площади az. Посему для прочности балки, какъ противъ скалыванія, такъ и противъ смятія врубки, должны быть удовлетворены неравенства

$$\frac{3(z+y)}{4b}\left[P+2p(l-x)\right] \leqq R_3 az \quad \text{и} \quad \frac{3(y+z)}{4b}\left[P+2p(l-x)\right] \leqq R_4 ax,$$

которыя могутъ служить для опредѣленія предѣловъ, между которыми должна заключаться длина промежутка z или разстояніе $z+y$ между

524. центрами двух смежных пилонок, если размеры a, b и $2l$ балки и грузы P и p даны. Для сего из первого из равенства имеем

$$z \geqq \frac{3y[P+2p(l-x)]}{4R_3ab-3[P+2p(l-x)]} \quad \text{или} \quad z+y \geqq \frac{4R_3ab\,y}{4R_3ab-3[P+2p(l-x)]},$$

а из второго неравенства

$$z+y \leqq \frac{4R_4abx}{3[P+2p(l-x)]}.$$

Но здесь следует заметить, что оба последние неравенства могут существовать вместе только тогда, когда вторая часть второго неравенства больше второй части первого, т. е. когда размеры балки и силы, на неё действующия в свою очередь удовлетворяют третьему неравенству

$$\frac{4R_4abx}{3[P+2p(l-x)]} \geqq \frac{4R_3aby}{4R_3ab-3[P+2p(l-x)]},$$

которое для удобства дальнейших суждений легко может быть представлено в более простом виде:

$$P+2p(l-x) \leqq \frac{4R_3ab}{3\left(1+\frac{R_3}{R_4}\cdot\frac{y}{x}\right)},$$

или же, так как оно должно быть удовлетворено для всех величин x между пределами нуль и l, еще в простейшем виде:

$$P+2pl \leqq \frac{4R_3ab}{3\left(1+\frac{R_3}{R_4}\cdot\frac{y}{x}\right)}.$$

Это неравенство определяет наибольшия величины сил P и p, при которых предупреждение разслоения балки посредством пилонок еще возможно, и его следует брать в расчет во всех тех случаях, когда оно приводит к меньшим величинам сил P и p, чем условие прочности балки

противъ перелома разрывомъ или раздробленіемъ продольныхъ фибръ, т.е.

$$P + pl \leqq \frac{R a b^2}{3l} .$$

Такъ напримѣръ для сосновой балки, связанной шпонками и болтами, при

$$R = 24 \text{ пуд.}, \quad R_3 = 4 \text{ пуд.} \quad \text{и} \quad R_4 = 20 \text{ пуд.}$$

силы, непроизводящія разслоенія должны удовле-творить неравенству

$$P + 2pl \leqq \frac{4.4 a b}{3\left(1 + \frac{4}{20} \cdot \frac{y}{k}\right)} = \frac{16 a b}{3\left(1 + \frac{y}{5k}\right)} ,$$

а силы, непроизводящія перелома, неравенству

$$P + pl \leqq \frac{24 a b^2}{3l} = \frac{8 a b^2}{l}$$

и наибольшія грузы, дѣйствію которыхъ балка можетъ подвергаться, опредѣляются по условію прочности противъ перелома, въ случаѣ когда $p = 0$, если

$$P = \frac{8 a b^2}{l} \leqq \frac{16 a b}{3\left(1 + \frac{y}{5k}\right)} , \quad \text{откуда} \quad \frac{b}{2l} \leqq \frac{1}{3\left(1 + \frac{y}{5k}\right)}$$

или при

$$y = 5k \quad , \quad \frac{b}{2l} < \frac{1}{6}$$

и при

$$y = 7k \quad , \quad \frac{b}{2l} < \frac{1}{7.2} \quad ,$$

а въ случаѣ, когда $P = 0$, если

$$2pl = \frac{16 a b^2}{l} \leqq \frac{16 a b}{3\left(1 + \frac{y}{5k}\right)} , \quad \text{откуда} \quad \frac{b}{2l} \leqq \frac{1}{6\left(1 + \frac{y}{5k}\right)}$$

или при

$$y = 5k \quad , \quad \frac{b}{2l} \leqq \frac{1}{12}$$

и при

$$y = 7k \quad , \quad \frac{b}{2l} \leqq \frac{1}{14.4} .$$

526 Сравнивая эти результаты съ вышеприведенными для составной балки, связанной зубьями видно, что для сохраненія составной балкой полной прочности цѣльной балки такимъ же размѣровъ противъ перелома, требуется большій предѣлъ отношенія длины къ толщинѣ при употребленіи шпонокъ, чѣмъ при употребленіи зубьевъ.

Если въ составной балкѣ, связанной шпонками, отношеніе длины къ толщинѣ такъ велико, что наибольшіе грузы, безопасно поддерживаемые балкою, опредѣляются условіемъ прочности противъ перелома и мы пожелаемъ опредѣлить разстояніе между центрами двухъ смежныхъ шпонокъ, такъ чтобы оно соотвѣтствовало наибольшимъ величинамъ грузовъ P и p, то можемъ поступать слѣдующимъ образомъ:

полагая $p=0$ и $P=\frac{Rab^2}{3l}$,

получимъ изъ первыхъ двухъ неравенствъ

$$z+y \geqq \frac{4R_3 ab y}{4R_3 ab - 3\frac{Rab^2}{3l}} = \frac{y}{1-\frac{R}{2R_3}\cdot\frac{b}{2l}}$$

$$z+y \leqq \frac{4R_4 ab kl}{Rab^2} = \frac{2R_4}{R}\cdot\frac{2l}{b}\cdot k,$$

т.е. для основной балки при $y=7k$ и $\frac{b}{2l}=\frac{1}{18}$

$$z+y \geqq 8.4k \quad и \quad z+y \leqq 30k;$$

а полагая $P=0$, $2pl=\frac{2Rab^2}{3l}$ и $x=0$,

получимъ для шпонки, ближайшей къ опорѣ:

$$z+y \geqq \frac{y}{1-\frac{R}{R_3}\cdot\frac{b}{2l}} \quad и \quad z+y \leqq \frac{R_4}{R}\cdot\frac{2l}{b}\cdot k,$$

т.е. при предыдущихъ данныхъ

$$z+y \geqq 10.5k \quad и \quad z+y \leqq 15k.$$

Если же отношение длины балки къ ея толщинѣ таково, что наибольшія грузы, поддерживаемые балкою, опредѣляются по условію прочности продив разрушенія

$$P + 2pl \leqq \frac{4 R_3 a b}{3\left(1 + \frac{R_4}{R_0} \cdot \frac{y}{x}\right)},$$

тогда для шпонки, ближайшей къ опорѣ при $x=0$, подставленіе наибольшей величины $P+2pl$ въ оба неравенства, опредѣляющія предѣлы величины $z+y$, приводитъ къ формулѣ

$$z = \frac{R_4}{R_0} \cdot x ,$$

такъ что для сосновой балки при

$$R = 24 \text{ пуд.}, \quad R_3 = 4 \text{ пуд.}, \quad R_4 = 20 \text{ пуд.} \quad \text{и} \quad y = 7x ,$$

получаются формулы

$$P + 2pl \leqq \frac{20}{9} ab \quad \text{и} \quad z = 5x \quad \text{или} \quad z + y = 12x ,$$

опредѣляющія наибольшіе грузы и разстояніе шпонокъ.

Связываніе составныхъ балокъ зубьями имѣетъ то преимущество передъ связываніемъ ихъ шпонками, что не требуетъ употребленія цѣннаго матеріала дубовыхъ шпонокъ. Но съ другой стороны связываніе зубьевъ уменьшаетъ сложенную толщину балки и вслѣдствіе этого ея сопротивленіе поперечному. Плотное прилаживаніе зубьевъ, необходимое для надлежащаго сопротивленія разрушенію балки, требуетъ весьма тщательной работы, доступной только для искуснаго плотника. Зубья,

сопротивляясь разслоенію балки только по одному направленію, перестаютъ дѣйствовать, если дѣленіе къ разслоенію проявится по направленію, противуположному тому, для котораго зубья разсчитаны; а это можетъ случиться вслѣдствіе колебаній при сотрясеніяхъ или по какой либо другой причинѣ балка подвергнется гнутью не только въ одну, но и въ другую противуположную сторону; во вторыхъ когда гнибающія грузы могутъ измѣнять свое мѣсто, потому что при перемѣнѣ точекъ приложенія грузовъ перемѣщается и точка раздѣла суммы силъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ измѣняется и направленіе стремленія къ разслоенію въ части балки, заключающейся между различными положеніями точки раздѣла.

Вслѣдствіе этихъ недостатковъ составныя балокъ съ зубьями или вообще слѣдуетъ предпочитать балки, скрѣпленныя шпонками. — При употребленіи шпонокъ протяженіе плоскости, по которой можетъ произойти разслоеніе, уменьшается на столько, сколько занимаютъ врубки для шпонокъ, и вслѣдствіе этого сопротивленіе разслоенію балки со шпонками нѣсколько меньше, чѣмъ въ цѣльной балкѣ одинаковыхъ съ нею размѣровъ. Но какъ при томъ

отношении длины балки къ ея толщинѣ, кото-
рое въ зданіяхъ большею частію встрѣчается,
опредѣленіе къ разслоенію балокъ не достигаетъ
предѣла прочности сопротивленія разслоенію
въ цѣльной балкѣ, то уменьшеніе этаго со-
противленія въ составной балкѣ отъ вре-
зыванія шпонокъ рѣдко вредитъ ихъ проч-
ности.

Для облегченія правильной пригонки шпо-
нокъ къ врубкамъ имъ слѣдуетъ дать видъ
клиньевъ, и вогнать ихъ съ боку во врубленныя
гнѣзда между частями балки, предварительно
на соединенныхъ болтами или хомутами.
Болты или хомуты въ составныхъ балкахъ
располагаются преимущественно для воспре-
пятствованія отдѣленію одной части балки
отъ другой по направленію, перпендикулярному
къ ихъ поверхности касанія. Если они туго стя-
нуты, то они нѣсколько увеличиваютъ сопро-
тивленіе разслоенію тренія, соотвѣт-
ствующимъ давленію, имъ производимому.
Но затянутыя сопротивленіе перерѣзыванію
самихъ болтовъ, не увеличиваетъ прочности
балокъ замѣтнымъ образомъ, потому что
болты легко перегибаются или же смещаются