81/5

Дескриптивная Геометрія

Лекціи Доц. К. А. Шапошникова.

Р 124102

Провер. 1935

ПРОВЕРЕНО
1952

Из книг Преф. А.П. Гефтмана

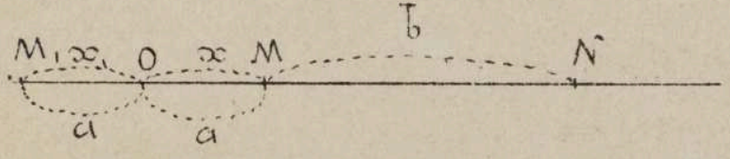
Моск. Высш. Техн. Училища
Библиотека
им. Н.Э. Баумана

1888–89 г.

Введеніе.

Опредѣленіе положенія точки на оси и правило знаковъ.

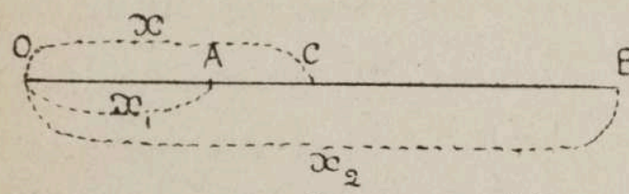
Для того, чтобы опредѣлить положеніе точки на оси, проводятъ прямую линію, называемую осью абсциссъ, берутъ на ней точку O, которую принимаютъ за начало и опредѣляютъ разстояніе точки M отъ O, называя его абсциссою точки M. Обозначимъ абсциссу точки M черезъ x, тогда OM = x. Затѣмъ для болѣе точнаго опредѣленія положенія точки M, вводятъ правило знаковъ, которое состоитъ въ томъ, что прямыя, лежащія вправо отъ точки O, считаютъ положительными, а лежащія влѣво отрицательными. Такъ OM, или абсцисса точки M будетъ положительна, т. е. въ вычисленія входитъ со знакомъ (+), а OM', абсцисса точки M', будетъ со знакомъ (−). Называя абсциссы точекъ M и M' черезъ x и x', а абсолютныя величины OM и равной ей OM' черезъ a, получимъ: x = +a, x' = −a. Всякому отрѣзку, отложенному гдѣ нибудь на оси отъ начала, принимаютъ также знакъ (+) или (−), смотря потому, отложенъ ли отрѣзокъ по направленію, или нѣтъ. Напримѣръ, MN = +b, а NM = −b. Считая ось абсциссъ съ лѣвой стороны на правую, всякому отрѣзку приписываетъ знакъ +



если онъ беретъ вправо и наоборотъ (−), если его берутъ влѣво. Это правило называется „правиломъ знаковъ". Введено оно Декартомъ, которому принадлежитъ открытіе аналитической геометріи.

Примѣръ: на оси даны точки A и B; найти точку C такъ, чтобы AC относилась къ CB, какъ m:n.

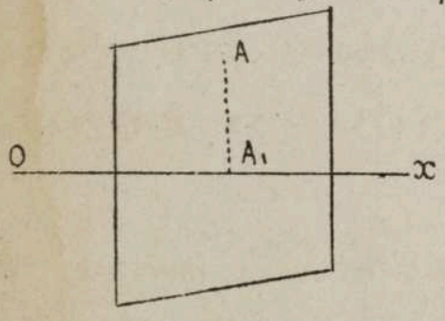
Эту задачу надо рѣшить такъ, чтобы получить общую формулу. $AB = x_2 - x_1$, гдѣ x_2 будетъ абсцисса точки B, а x_1 будетъ абсцисса точки A. тогда $AC = \frac{(x_2 - x_1)m}{m+n}$,



AC можетъ быть положительно или отрицательно. Назовемъ черезъ x искомую абсциссу, тогда $x = x_1 + AC$, или подставивъ величину AC, получимъ: самую общую формулу: $x = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)m}{m+n} = \frac{mx_1 + nx_1 + mx_2 - mx_1}{m+n} = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$. Формула эта всегда вѣрна. Въ частномъ случаѣ, когда $m = n = 1$; $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

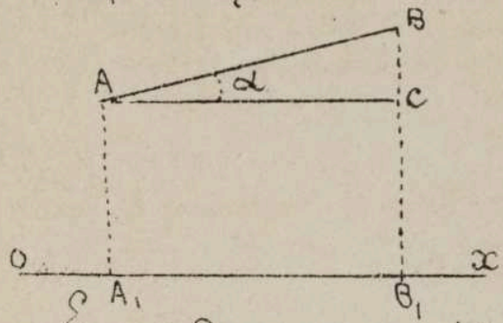
О проэкціяхъ

Проэкція на ось. Положимъ имѣемъ нѣкоторую точку A и прямую, называемую осью проэкцій; тогда, опуская изъ точки A перпендикуляръ на ось, или въ случаѣ построенія въ пространствѣ, проводя 1-ю плоскость, получимъ точку A_1, которая будетъ проэкціей точки A.



Чтобы найти проэкцію линіи, надо найти проэкціи

крайних ея точек и считать направление проекции отъ проекціи начала линіи до проекціи конца ея. Такъ A_1B_1 есть проекція AB, она идетъ по направленію оси проекцій и потому мы по правилу знаковъ, должны считать ее положительной.

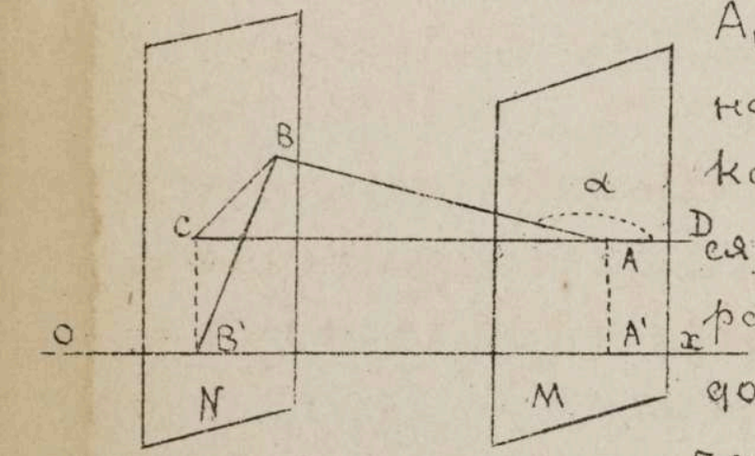


Если бы проекція шла въ лѣвую сторону, то мы взяли бы ее со знакомъ (−). Проекція AB равна разности абсциссъ точекъ B_1 и A_1, т.е. равна $x_2 - x_1$. Знакъ (+) или (−) зависитъ отъ угла линіи AB съ осью. Этотъ уголъ измѣряется, проведя черезъ точку A линію AC параллельно оси въ ту сторону, куда идетъ ось и взявши уголъ $CAB = \alpha$. Если этотъ уголъ α острый, то B_1 будетъ вправо отъ точки A_1 и проекція будетъ положительна; если онъ равенъ $90°$, то B_1 сольется съ A_1 и проекція будетъ равняться 0, если же $\alpha > 90°$, то B_1 будетъ лежать влѣво отъ A_1 и проекція будетъ отрицательна. Итакъ знакъ проекціи зависитъ отъ угла α.

Теорема. Проекція линіи на ось = произведенію проектируемой линіи на косинусъ угла, подъ которымъ проектируемая линія отклонена отъ оси проекцій.

Эта теорема опредѣляетъ не только величину проекціи, но и знакъ ея. Для доказательства проведемъ $AC \parallel A_1B_1$ до встрѣчи съ плоскостью N, тогда $A_1B_1 = AC$, $k\bar{k}$,

отрѣзки параллельныхъ между параллельными плоскостями; если соединимъ C съ B, то уголъ ACB будетъ прямой и слѣд. $AC = AB\cos\alpha$ (изъ ΔABC). Подставивъ сюда вмѣсто AC равную ей A_1B_1, получимъ $A_1B_1 = AB\cos\alpha$, т.е. проэкція $AB = AB\cos\alpha$. Теорема будетъ вѣрна, когда уголъ тупой и проэкція отрицательна. Въ послѣднемъ случаѣ имѣемъ: проэкція $AB = A_1B_1$; эта проэкція отрицательна, ибо она идетъ вѣтво. Уголъ, какъ мы указали, опредѣляется, проведя черезъ A линію AD параллельную оси ox вправо. Продолживъ эту линію вѣтво до встрѣчи съ плоскостью N, получимъ



$A_1B_1 = -CA = -AB\cos(CAB) = -AB\cos(180° - \alpha) = AB\cos\alpha$. Слѣд. (проэкція AB) $= AB\cos\alpha$. Ту же теорему можно доказать и въ томъ случаѣ, когда уголъ α больше двухъ прямыхъ и когда онъ больше трехъ прямыхъ.

Разсмотримъ частные случаи предыдущей теоремы.

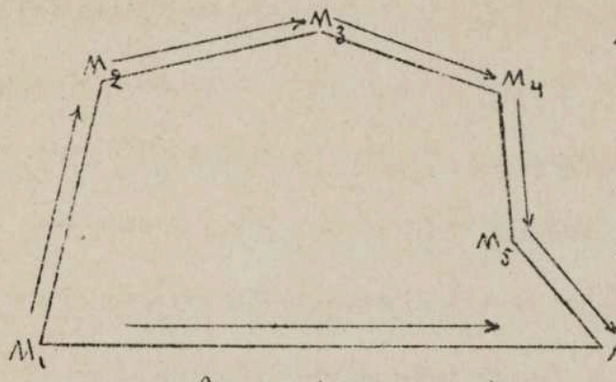
Когда $\alpha = 0°$ то $\cos\alpha = 1$ и проэкція $AB = AB$

" " $= 90°$ " " " $= 0$ " " " $= 0$

" " $= 180°$ " " " $= -1$ " " " $= -AB$.

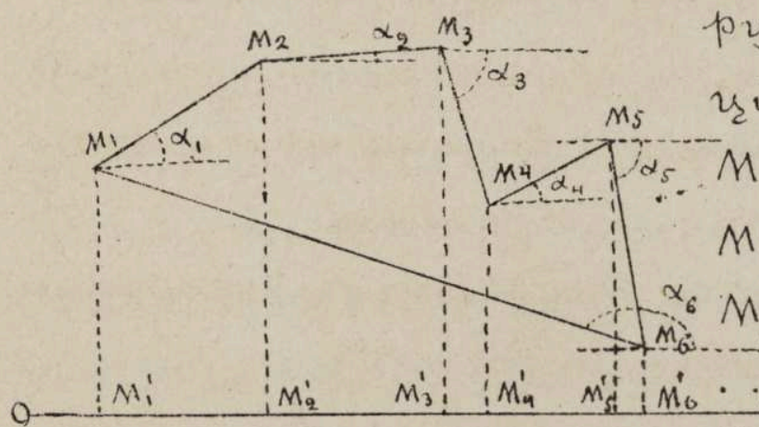
Разомкнутымъ многоугольникомъ называется многоугольникъ, у котораго одна сторона отнята. –

Напримѣръ, если сторона M_1M_6 у многоугольника $M_1M_2 \ldots M_6$ отнята, то онъ безъ нея разомкнутый, сторона эта M_1M_6 называется замыкающей стороной. Относительно направленія сторонъ разомкнутаго многоугольника и замыкающей стороны вводится условіе: направленіе сторонъ считаютъ въ одну сторону, а направленіе замыкающей стороны въ другую сторону, какъ представлено на чертежѣ.



Теорема. Сумма проэкцій сторонъ разомкнутаго многоугольника равна проэкціи замыкающей стороны.

Пусть имѣемъ многоугольникъ $M_1M_2 \cdots M_6$, проэктируемъ его стороны на ось проэкцій и берем абсциссы точекъ $M_1', M_2' \ldots M_6'$, тогда проэкція $M_1M_2 = M_1'M_2' = x_2 - x_1$, проэкція $M_2M_3 = M_2'M_3' = x_3 - x_2$



" . . . . . "

$M_5M_6 = M_5'M_6' = x_6 - x_5$.

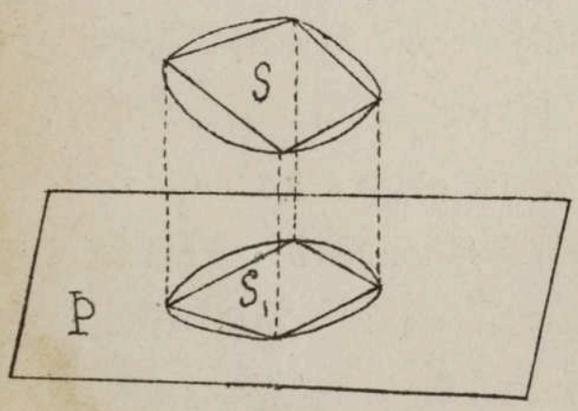
гдѣ $x_1, x_2 \ldots x_6$ суть абсциссы точекъ $M_1', M_2' \ldots M_6'$.

Складывая получимъ: $\text{пр. } M_1M_2 + \text{пр } M_2M_3 + \cdots + \text{пр } M_5M_6 = x_6 - x_1$, но $x_6 - x_1$ есть проэкція M_1M_6, слѣд. проэкція $M_1M_2 + \text{пр.} M_2M_3 + \cdots + \text{пр } M_5M_6 = \text{пр. } M_1M_6$.

Как слѣдствіе этой теоремы получаемъ, что сумма проэкцій всѣхъ сторонъ замкнутаго многоугольника равна 0. Мы имѣемъ: пр. M_1M_2 + пр. M_2M_3 + ... + пр. M_5M_6 + $x_1 - x_6 = 0$, но $x_1 - x_6$ есть проэк. M_6M_1, поэтому проэк. M_1M_2 + пр. M_2M_3 + ... + пр. $M_6M_1 = 0$. Въ этой формулѣ всѣ стороны многоугольника берутся въ одномъ направленіи. Проведя черезъ вершины M_1, M_2 .... M_6 линіи, параллельныя оси OX и опредѣливъ углы $\alpha_1, \alpha_2 .... \alpha_6$, а также и длины сторонъ $M_1M_2 = a_1$, $M_2M_3 = a_2$ ..... $M_6M_1 = a_6$, можемъ полученную формулу еще написать такъ $a_1 cs\alpha_1 + a_2 cs\alpha_2 + \cdots = 0$ или $\sum a cs\alpha = 0$.

Проэкціи площадей.

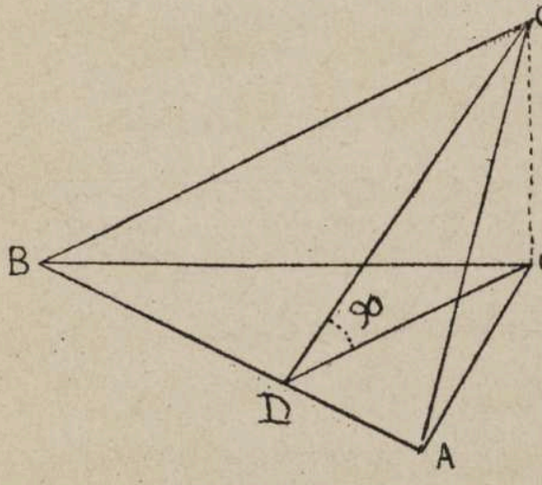
Возьмемъ въ пространствѣ площадь, ограниченную произвольнымъ контуромъ и проэктируемъ эту площадь на нѣкоторую данную плоскость P. Чтобы получить проэкцію разсматриваемой площади, мы вообразимъ, что изъ всѣхъ точекъ ея контура на плоскость P опущены перпендикуляры, подошвы этихъ перпендикуляровъ ограничатъ на плоскости P площадь, которая и называется проэкціей данной площади. Пусть величина данной площади есть S, а величина площади ея проэкціи



есть S_1. Положимъ далѣе, что плоскость, въ которой содержится площадь S, образуетъ съ плоскостью p уголъ φ, тогда мы докажемъ, что $S_1 = S\cos\varphi$.

Теорема. Проэкція площади равна проэктируемой площади нас. угла, образующаго ею съ плоскостью проэкцій.

Для доказательства мы начнемъ разсмотрѣніе съ простѣйшихъ фигуръ. Разсмотримъ вопервыхъ проэкцію площади треугольника, положивъ при томъ, что одна изъ сторонъ даннаго треугольника ABC параллельна плоскости проэкцій, пусть это будетъ сторона AB.

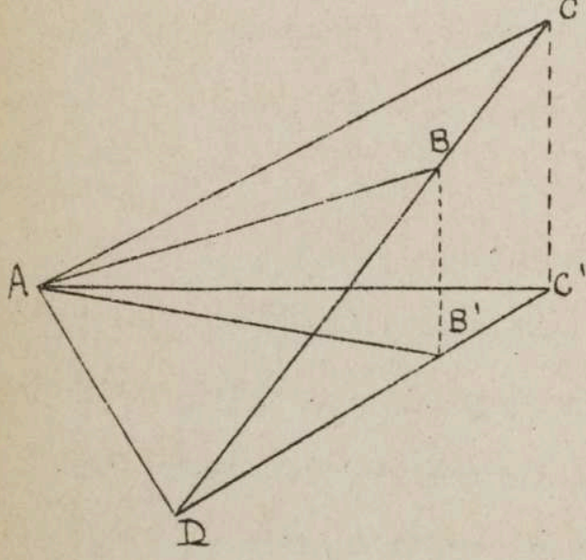


Тогда проведемъ черезъ AB плоскость, параллельную плоскости p и возмемъ проэкцію площади ABC на эту вспомогательную плоскость. Очевидно, что такая проэкція будетъ равна проэкціи на плоскости p. Чтобы получить эту проэкцію, опустимъ изъ точки C перпендикуляръ на плоскость, параллельную плоскости проэкцій и соединимъ подошву его C_1 съ точками A и B. Треугольникъ ABC_1 будетъ проэкціей треугольника ABC. Изъ точки C_1 на линію AB опустимъ перпендикуляръ C_1D и точку D соединимъ съ точкой C; линія CD будетъ очевидно перпендикулярна къ AB и уголъ $CDC_1 = \varphi$, причемъ φ есть уг=

нейный уголъ, которымъ измѣряется двугранный уголъ $CABC_1$. Въ треугольникѣ CDC_1 уголъ при C_1 есть прямой, слѣдовательно имѣемъ: $C_1D = CD\cos\varphi$. Помноживъ обѣ части этого равенства на $\frac{1}{2} AB$ будемъ имѣть:

$\frac{1}{2} AB.C_1D = \frac{1}{2} AB.CD\cos\varphi$, или площ. (ABC_1) = площ. $ABC\cos\varphi$.

Положимъ теперь, что ни одна изъ сторонъ треугольника ABC не параллельна плоскости проэкцій. Черезъ вершину A, ближайшую къ плоскости проэкцій проведемъ плоскость, параллельную этой плоскости и будемъ разсматривать проэкцію треугольника ABC на плоскость, параллельную плоскости проэкцій. Чтобы получить проэкцію треугольника, опустимъ изъ точекъ B и C перпендикуляры BB' и CC' на проведенную плоскость. Подошвы перпендикуляровъ B' и C' соединимъ между собою и съ точкой A, тогда Δкъ $AB'C'$ будетъ проэкцией треугольника ABC. Продолжимъ далѣе прямыя BC и B'C' до ихъ встрѣчи въ точкѣ D и соединимъ точку D съ точкой A; мы получимъ треугольникъ I $AB'C$, проэкцией котораго очевидно будетъ DAC', слѣд. мы можемъ написать, что $ADC' = ADC.\cos\varphi$. Подобно этому треугольникъ DAB' есть проэкція DAB, слѣдовательно $DAB' = DAB.\cos\varphi$. Вычитая изъ перваго равенства, второе, получимъ $B'AC' = BAC\cos\varphi$.



Докажемъ далѣе ту же теорему для площади произвольнаго многоугольника. Положимъ, что площадь даннаго многоугольника есть S; разобьемъ его діогоналями, проведенными изъ одной вершины на треугольники и площади этихъ треугольниковъ обозначимъ по порядку черезъ T_1, T_2 .... Будемъ имѣть: .... $S = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$

Проэктируемъ всѣ эти площади на плоскость проэкцій и назовемъ черезъ S' проэкцію площади многоугольника, а черезъ T_1', T_2', T_3', проэкціи площадей треугольниковъ T_1, T_2, T_3 .... будемъ имѣть, очевидно: $S' = T_1' + T_2' + \ldots$

Притомъ для проэкцій площадей треугольниковъ имѣемъ по доказанному: $T_1' = T_1 \cos\varphi$, $T_2' = T_2 \cos\varphi$; ....

Сложивъ всѣ эти равенства, получимъ: $S' = S\cos\varphi$.

Наконецъ легко будетъ доказать ту же теорему для произвольной криволинейной площади. Разсмотримъ произвольную криволинейную площадь S и ея проэкцію S_1. Впишемъ въ контуръ площади S произвольный многоугольникъ, который проэктируемъ также на плоскость проэкціи; онъ имѣетъ очевидно, проэкцією многоугольникъ, вписанный въ контуръ площади S! Площадь многоугольника, вписаннаго въ S, обозначимъ черезъ Q, а площадь многоугольника, вписаннаго въ S', который есть проэкція Q, обозначимъ черезъ Q, тогда будемъ имѣть:

$$Q' = Q\cos\varphi$$

Это равенство будетъ вѣрно, каково бы ни было число

сторонъ вписаннаго многочленника. Вообразимъ, что число сторонъ вписаннаго многочленника увеличивается до ∞ и что каждая изъ сторонъ стремится къ 0, тогда предѣлъ площади Δ будетъ площадь S, а предѣломъ площади Δ' будетъ площадь S' и по способу предѣловъ заключаемъ, что такое же равенство будетъ существовать и между предѣлами, слѣдовательно въ предѣлѣ получимъ

$$S' = S\cos\varphi.$$

Такимъ образомъ наша теорема вполнѣ доказана.

Опредѣленіе положенія точки на плоскости и въ пространствѣ=
ть помощію координатъ.

Координатами вообще называются величины, служащія для опредѣленія положенія точки. Употребленіе такихъ величинъ было введено Декартомъ.

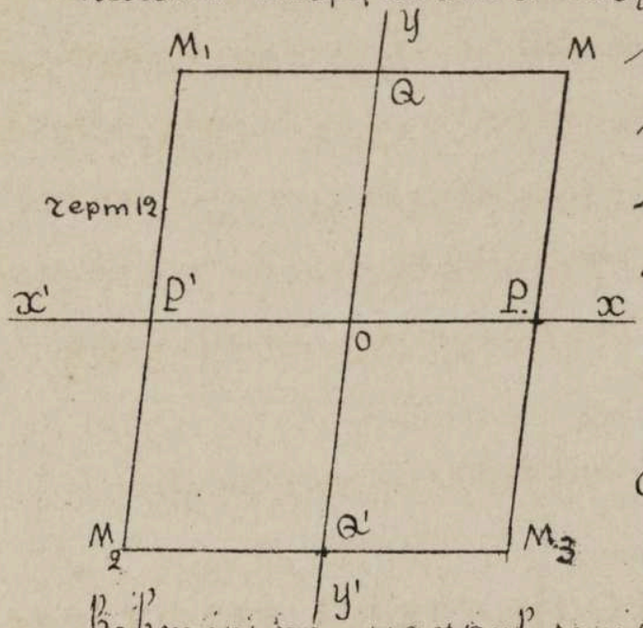
Координаты точки на плоскости.

Существуетъ много различныхъ системъ координатъ или различныхъ способовъ опредѣленія положенія точки на плоскости, но мы разсмотримъ только важнѣйшія двѣ системы координатъ.

1, координаты прямолинейныя.

Для опредѣленія положенія точки на плоскости ее относятъ къ двумъ постояннымъ неограниченнымъ прямымъ линіямъ, пересѣкающимся подъ произвольнымъ, но даннымъ угломъ эти прямыя xx' и yy'

называются осями координатъ. Точка О ихъ пересѣченія есть начало координатъ. Возьмемъ на плоскости произвольную точку М. Для опредѣленія ея положенія проведемъ черезъ нее двѣ прямыя линіи, параллельныя осямъ координатъ и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ осями; мы получимъ на осяхъ координатъ два отрѣзка ОQ и ОР.



чертъ 12

Если мы будемъ знать вопервыхъ величины этихъ двухъ отрѣзковъ и во вторыхъ направленія, по которымъ каждый изъ двухъ отрѣзковъ откладывается отъ начала координатъ по соотвѣтствующей оси, то положеніе точки М будетъ, очевидно вполнѣ опредѣлено, потому что отложивъ эти два отрѣзка и проведя черезъ точки Р и Q параллели осямъ, мы въ пересѣченіи этихъ параллелей получимъ точку М. Величины отрѣзковъ ОР и ОQ выражаются въ линейныхъ мѣрахъ, метрахъ, футахъ и т.п. Направленіе отрѣзковъ по принятому нами правилу знаковъ въ геометріи выражаются знаками (+) или (—), приписываемыми числамъ, представляющимъ величину отрѣзковъ. При этомъ мы примемъ слѣдующія условія: всѣ отрѣзки, получаемыя на части оси ОХ будемъ представлять числами со знакомъ (+), а на части Х'О числами со знакомъ (—) и будемъ всегда называть буквою Х алгебраическое количество, представляющее величину отрѣзка съ его

знакомъ. Это алгебраическое количество называется абсциссою точки M, или просто $x^{\text{отъ}}$ точки M. Ось xx' называется поэтому осью абсциссъ или осью $x^{\text{объ}}$. Подобно этому условимся отрѣзки, получаемые на OY, представлять числами со знакомъ (+), а на части оси Y'O числами со знакомъ (−) и будемъ обозначать черезъ y алгебраическое количество, представляющее величину отрѣзка, полученнаго на оси YY' съ его знакомъ; это алгебраическое количество называется ординатою точки M, или просто $y^{\text{коваго}}$ точки M. Ось YY' называется осью $y^{\text{ковъ}}$, или осью ординатъ. При такихъ условіяхъ, если OP = a и OQ = b, гдѣ a и b абсолютныя числа, тогда для точки M будемъ имѣть: $x = +a$, $y = +b$. Эти двѣ величины вмѣстѣ называются координатами точки M. Чтобы замѣтить различныя положенія, которыя можетъ имѣть точка на плоскости, дѣлаемъ такое построеніе: отложимъ на сторонѣ OX' оси $x^{\text{объ}}$ длину OP' = OP и проведемъ черезъ P и P' параллели оси OY; отложимъ также на оси $y^{\text{ковъ}}$ OQ' = OQ и проведемъ черезъ точки Q и Q' двѣ параллели оси $x^{\text{овъ}}$. Мы получимъ такимъ образомъ 4 точки: M, M_1, M_2 и M_3. Разсмотримъ координаты этихъ точекъ. Эти координаты будутъ для точки:

$$M \left| \begin{matrix} x = -a \\ y = +b \end{matrix} \right. \qquad M_2 \left| \begin{matrix} x = -a \\ y = -b \end{matrix} \right. \qquad M_3 \left| \begin{matrix} x = +a \\ y = -b \end{matrix} \right.$$

Очевидно такимъ образомъ, что при сдѣланныхъ нами

условіяхъ, каждая точка плоскости будетъ имѣть свои, ей только принадлежащія координаты. Замѣтимъ нѣкоторыя особенныя положенія точекъ:

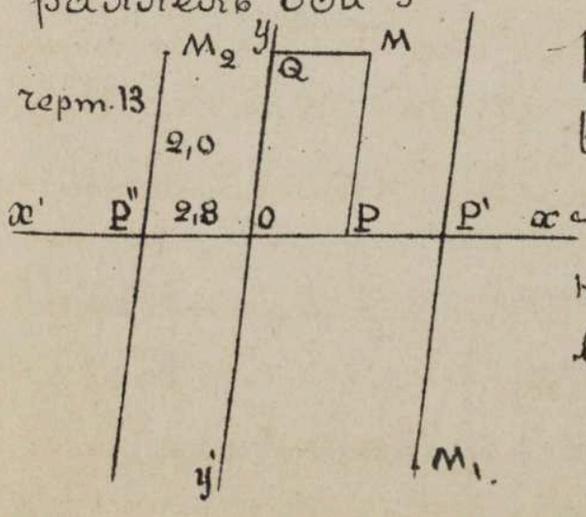
1, Точка находится на оси $x^{объ}$, какъ P, или P'. Для такихъ точекъ будемъ имѣть, очевидно: $y=0$, $x=+a$ или $x=-a$. (черт. 12.)

2, Если точка находится на оси $y^{объ}$, какъ точки Q или Q', то будемъ имѣть: $x=0$ и $y=+b$ или $y=-b$.

3, Для начала координатъ O будемъ имѣть: $x=0$, $y=0$.

Замѣтимъ, что для построенія координатъ точки нѣтъ надобности непремѣнно проводить двѣ параллели осямъ координатъ, достаточно провести одну изъ нихъ. Такъ, чтобы построить ординаты точки M, проведемъ черезъ нее параллель оси $y^{объ}$, ею будемъ имѣть тогда $X=OP$; $Y=MP$.

По даннымъ координатамъ всегда можно построить точку. Пусть напримѣръ (черт. 13) для нѣкоторой точки даны $X=+3,2$ т.; $Y=-1,6$ т. Чтобы получить эту точку, откладываемъ по оси $x^{объ}$ отъ O въ положительную сторону 3,2 т. до точки P' и черезъ P' проводимъ параллель оси $y^{объ}$

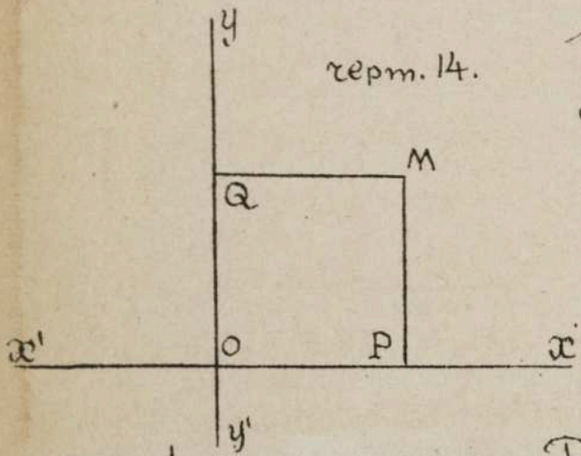


черт. 13

На этой параллели откладываемъ величину Y. Если бы Y былъ данъ положительнымъ, то его величину нужно было бы отложить вверхъ въ сторону OY, а такъ какъ онъ данъ отрицательнымъ, то отложимъ

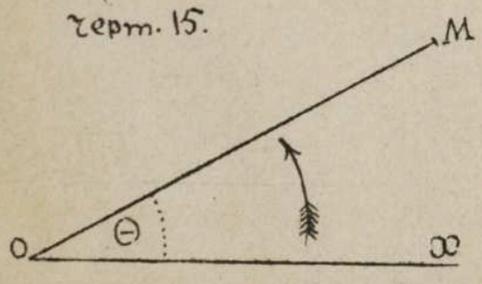
вниз длину $M'P' = 1,6$ т. Так что две данныя координаты определяют точку M'. Пусть еще даны координаты $x = -2,8$; $y = +2$. Для построения искомой точки откладываем от точки O по оси $x^{ов}$ влево длину, равную 2,8 до точки P'', так что $OP'' = 2,8$; проводим затем через P'' параллель оси $y^{ков}$, на ней откладываем вверх длину $P''M'' = 2$, получим таким образом точку M_2.

Разсмотренныя нами координаты называются прямолинейными, потому что они обе представляют длины прямых линий. Если уголь между осями координат острый, или тупой, то координаты называются косоугольными; если возмемъ уголь между осями прямой, то получимъ прямоугольную систему осей координатъ и прямоугольныя координаты x и y. (черт. 14). Употребление прямоугольныхъ координатъ во многихъ случаяхъ проще косоугольныхъ. Все, что было сказано о косоугольныхъ координатахъ, относится и къ прямоугольнымъ, причемъ построенный выше параллелограмъ $OQMP$ будетъ прямоугольникомъ и MP будетъ перпендикуляръ къ оси $X^{ов}$.



черт. 14.

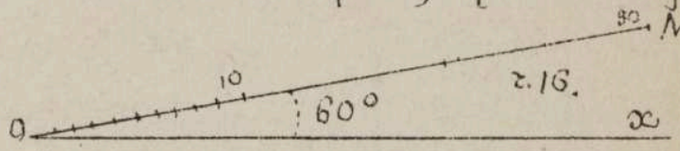
2. Координаты полярныя.



черт. 15.

Возмемъ (черт. 15) на плоскости постоянную точку O, которая будетъ называться ПОЛЮСОМЪ, проведемъ черезъ нее постоянную прямую OX, называемую ПОЛЯРНОЮ ОСЬЮ;

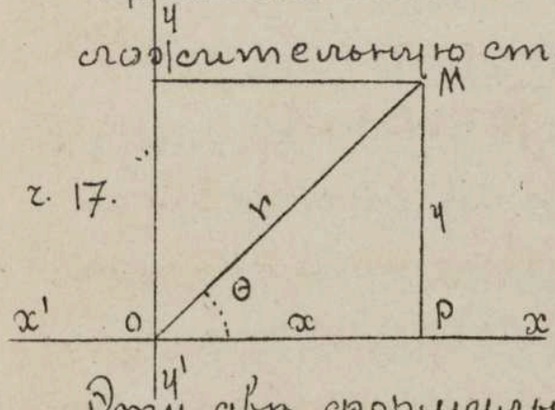
для определения положения произвольной точки M, соединивъ ее съ полюсомъ и измѣривъ уголъ $MOX=\Theta$, а также длину разстоянія $MO=r$. Если эти двѣ величины будутъ даны, то положеніе точки на плоскости будетъ, очевидно, вполнѣ опредѣлено. Величины Θ и r называются поэтому полярными координатами точки M. Уголъ Θ – полярный уголъ, или анома-лія, разстояніе r точки M отъ полюса есть радіусъ векторъ. Уголъ Θ считается отъ линіи OX въ одну сторону, противъ часовой стрѣлки отъ $0°$ до $360°$, или лучше отъ 0 до 2π. Радіусъ векторъ r можетъ получать для различныхъ точекъ плоскости всѣ величины отъ 0 до $+\infty$. Напр. (черт. 16) Если даны координаты $\Theta=60°$ и $r=30$, то указанное построеніе опредѣлитъ намъ точку M, означенную на чертежѣ.



ч. 16.

Соотношеніе между прямоугольными и полярными координатами.

Весьма часто прямоугольныя координаты разсматриваютъ вмѣстѣ съ полярными слѣдующимъ образомъ: примемъ начало координатъ за полюсъ (черт. 17) и положительную сторону OX оси X-овъ за полярную ось, тогда соединивъ точку O съ M, получимъ ея полярныя координаты: $\angle MOX=\Theta$ и $MO=r$. Изъ прямоугольнаго треугольника OMP находимъ: $X=r\cdot Cs\Theta$; $Y=r\,Sn\Theta$ ..... 1),



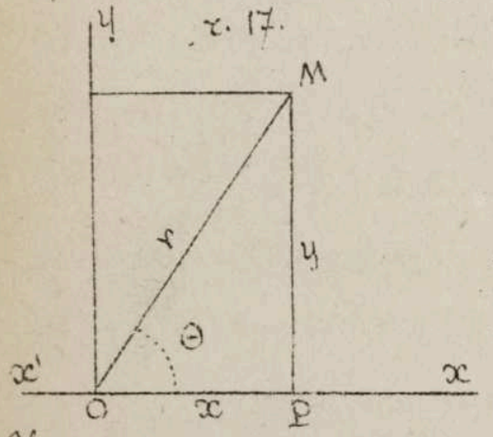
ч. 17.

Эти двѣ формулы показываютъ отношенія между прямоугольными и полярными координатами. По отмѣтѣ

БИБЛІОТЕКА
ИМПЕРАТОРСКАГО
Московскаго

Листъ 3-й

двумя формулами можно определить полярныя координаты, если даны прямоугольныя. Радіусъ r берутъ всегда положительнымъ; вслѣдствіе этого по формуламъ (1) $\cos\theta$ и $\sin\theta$ имѣютъ тѣ же знаки, какъ x и y; эти знаки опредѣляютъ четверть, въ которой лежитъ конецъ дуги θ. Полезно замѣтить, что формулы, выражающія связь между полярными и прямоугольными координатами точки, остаются всегда одни и тѣ же, гдѣ бы ни была взята точка на плоскости.



ч. 17.

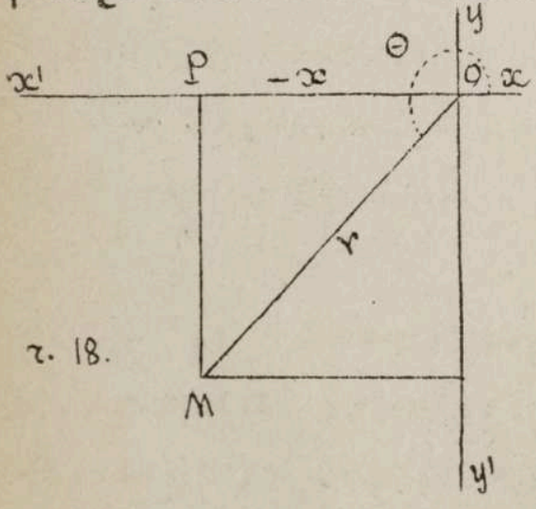
Напр. (черт. 18) для точки M, указанной на чертежѣ, имѣемъ $OP=-x$ и $MP=-y$ и изъ прямоугольника OPM получимъ:

$-x = r\cos(\theta-180^\circ) = -r\cos\theta$, слѣд. $x=r\cos\theta$;

$-y = r\sin(\theta-180^\circ) = -r\sin\theta$, и $y=r\sin\theta$.

Такимъ образомъ формулы $x=r\cos\theta$ и $y=r\sin\theta$ остаются тѣ-же и для такого положенія. M.

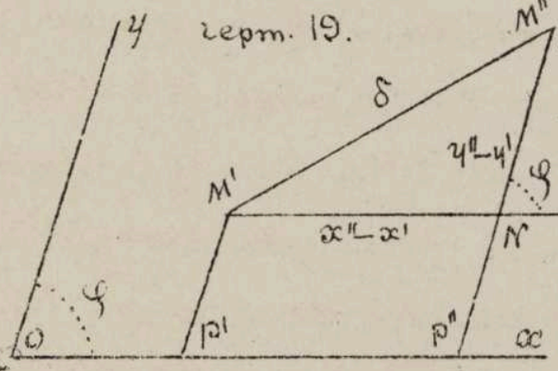
Задача 1. Даны прямоугольныя координаты двухъ точекъ на плоскости, найти разстояніе между этими точками.



ч. 18.

Пусть первая точка есть M', ея координаты (черт. 19) (x', y'); другая точка пусть будетъ M'', ея координаты (x'', y''), пусть оси координатъ будутъ OX и OY. Предположимъ ихъ сначала косоугольными и образующими уголъ φ. Построимъ двѣ данныя точки по ихъ координатамъ; искомое разстояніе будетъ-

$M_1M_2=\delta$, проведемъ черезъ M_1 параллель оси $x^{ов}$, уголъ $M''NR$ очевидно равенъ φ и уголъ $M''NM'=180°-\varphi$. Разсмотримъ $\Delta^{ник}$ $M'NM''$, въ немъ сторона $M'N=P'P''=x''-x'$, а сторона $NM''=y''-y'$. По извѣстной теоремѣ тригонометріи имѣемъ: $\delta^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2-2(x''-x')(y''-y')\cos(180°-\varphi)$, или $\delta^2=(x''-x')^2+(y^2-y')^2+2(x''-x')(y''-y')\cos\varphi$. Эта формула, очевидно рѣшаетъ вопросъ. Она будетъ вѣрна при всякихъ расположеніяхъ точекъ M' и M''. Если, напр, точки M' и M'' имѣютъ положеніе, представленное на черт. 20, то изъ



черт. 19.

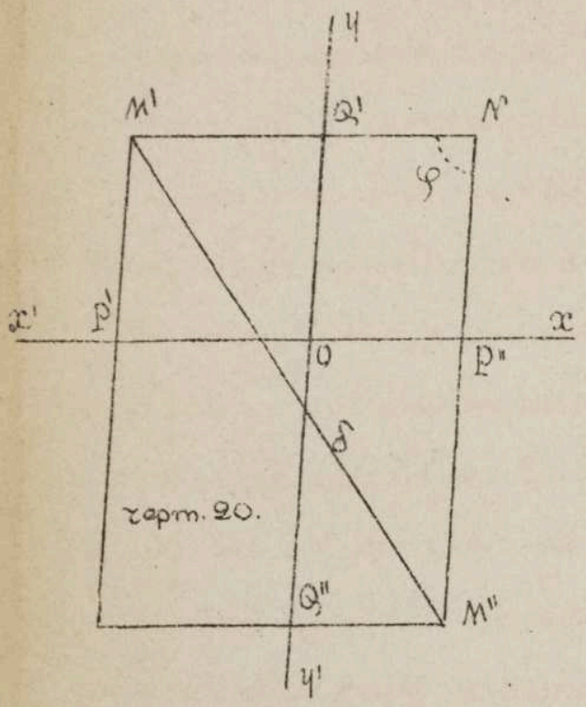
$\Delta^{ник}$ $M'NM''$ получимъ: $\delta^2=\overline{M'N}^2+\overline{M''N}^2-2\overline{M'N}.\overline{M''N}\cos\varphi$, подставивъ сюда φ $M'N=P'P''=x''-x'$; $M''N=Q''Q'=-(y''-y')$, найдемъ такую формулу

$$\delta^2=(x''-x')^2+(y_2^2-y')^2+2(x''-x')(y''-y')\cos\varphi.$$

Если положимъ, что оси координатъ прямоугольны, тогда будемъ имѣть: $\varphi=90°$ и $\cos\varphi=0$, поэтому формула приметъ видъ: $\delta^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2$. Въ частномъ случаѣ, когда одна изъ точекъ, напр. M', совпадаетъ съ началомъ координатъ, надо положить: $x'=0$ и $y'=0$, вслѣдствіе чего $\delta^2=x''^2+y''^2$. Эта формула даетъ разстояніе точки M'' отъ начала координатъ.

Задача II, даны координаты двухъ точекъ на плоскости, найти координаты точки, дѣлящей прямую, соединяющую двѣ данныя точки въ данномъ отношеніи, положимъ въ отношеніи m:n.

Пусть даны точки будут $M'(x', y')$ и $M''(x'', y'')$; положим координаты косоугольными и построим точки M' и M'' по данным координатам. Пусть точка R (черт. 21) будет искомая точка, тогда по условию должны иметь: $M'R : M''R = m : n$, координаты точки R обозначим через x и y. Проведем через точки M', R и M'' линии, параллельные оси ординат и определим точки P' Θ и P'', в которых они пересекают оси абсцисс, будем иметь:



черт. 20.

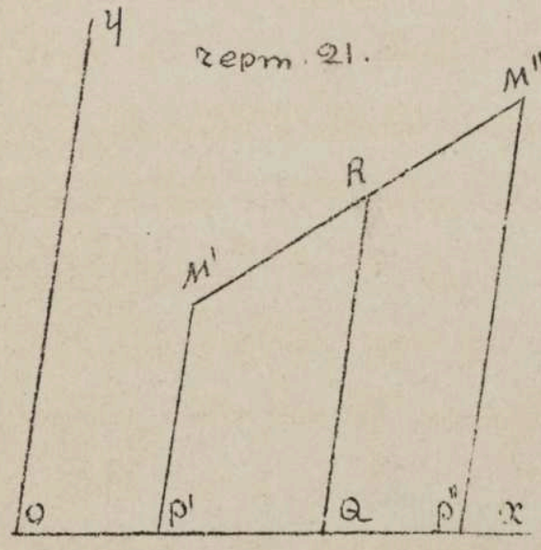
$\frac{P'\Theta}{\Theta P''} = \frac{M'R}{M''R} = \frac{m}{n}$. Вопрос об отыскании точки Θ сводится таким образом на разделение расстояния между точками P' и P'' в отношении m к n. Эта задача решена нами при определении положения точки на оси. Так как точка Θ имеет m-ое абсциссу, как точка R, то по вышеприведенной формуле будем иметь $x = \frac{nx' + mx''}{m+n}$. Также найдем, проведя через точки M', R и M'' параллели оси абсцисс, что $y = \frac{ny' + my''}{m+n}$. В частном случае, когда расстояние между точками M' и M'' делится пополам, надо положить $m=1$, $n=1$, это дает нам, что $x = \frac{x'+x''}{2}$, $y = \frac{y'+y''}{2}$.

Определение положения точки в пространстве.

1, Координаты прямолинейные.

Для определения положения точки в пространстве, ее относят к трем взаимно пересекающимся плоскостям

Которыя называются плоскостями координатъ. Эти плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ по тремъ прямымъ линіямъ, называемымъ осями координатъ. Общая точка пересѣченія трехъ плоскостей есть начало координатъ. Три плоскости координатъ, пересѣкаясь, образуютъ около начала восемь трехгранныхъ угловъ. Чтобы представить три плоскости координатъ на чертежѣ, вообразимъ, что одна изъ этихъ плоскостей совпадаетъ съ плоскостью чертежа, потомъ проведемъ третью плоскость (близко къ вертикальной), которая пересѣчется съ плоскостью чертежа по прямой линіи ZZ', а со второй (приблизительно горизонтальной), пересѣкающейся съ плоскостью чертежа по прямой линіи xx', по другой прямой линіи YY'. (черт. 22) Прямыя xx', yy', ZZ' суть оси координатъ. Эти три плоскости мы будемъ



черт. 21.

называть для краткости: плоскость xOy-плоскостью XY, плоскость xOz-плоскостью xZ и плоскость yOz-плоскостью YZ. При началѣ координатъ O мы имѣемъ восемь трехгранныхъ угловъ, изъ которыхъ четыре находятся надъ плоскостью XY, а именно углы: OXYZ, Ox'yz, Oxy'z и Ox'y'z. и другіе 4 подъ плоскостью XY.

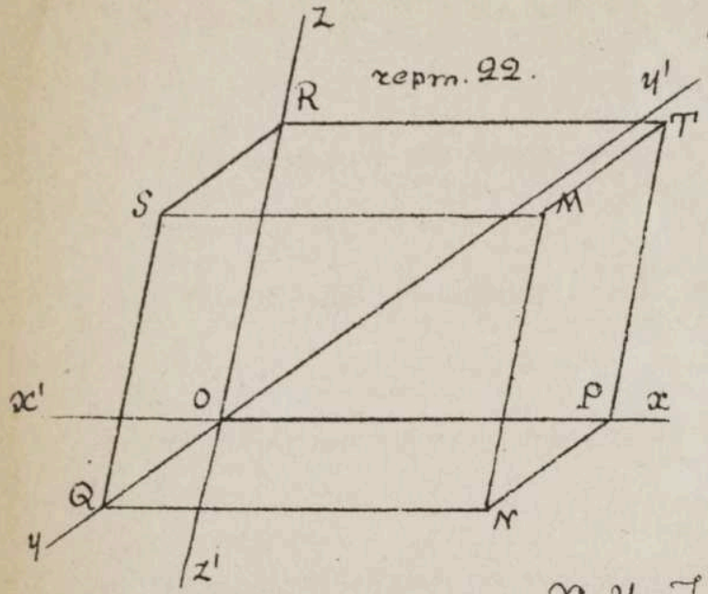
Пусть M будетъ произвольная точка въ пространствѣ. Черезъ эту точку проведемъ три плоскости, параллельныя плоскостямъ координатъ; эти три плоскости вмѣстѣ съ тремя плоскостями координатъ ограничатъ параллелѣ-

нець который будемъ косой, если оси координатъ образуютъ острые, или тупые углы. Начертимъ этотъ параллелепипедъ, полагая, что точка M находится внутри даннаго угла OXYZ. Проведенныя наши три плоскости, MP || YZ, MQ || XZ и MR || XY опредѣляютъ на всѣхъ трехъ отрѣзкахъ, считаемые отъ начала координатъ. На нашемъ чертежѣ эти отрѣзки суть: OP, OQ и OR. Очевидно, что если мы будемъ знать величины этихъ отрѣзковъ и направленіе, по которому каждый изъ нихъ долженъ быть отложенъ на соотвѣтствующей оси, то положеніе точки M будетъ вполнѣ опредѣлено. Дѣйствительно, отложивъ эти отрѣзки и проведя черезъ точки R, P и Q три плоскости, параллельныя плоскостямъ координатъ, мы въ пересѣченіи ихъ получимъ точку M. Направленіе этихъ отрѣзковъ обозначается посредствомъ знаковъ + и —, приписываемыхъ числамъ, выражающимъ длины отрѣзковъ. При этомъ принимаютъ слѣдующія условія: число, выражающее величину отрѣзка, полученнаго на части Ox, сопровождать знакомъ +, а на части Ox', знакомъ —; число, выражающее величину отрѣзка, полученнаго на части Oy, сопровождать знакомъ +, а на части Oy' знакомъ —. Принявъ это во вниманіе, будемъ называть буквою x алгебраическое количество, представляющее величину отрѣзка, полученнаго на оси xx' съ его знакомъ, такожде буквою y — алгебраическое количество, представляющее величину отрѣзка, полученнаго на оси yy' съ его знакомъ и наконецъ буквою z также алгебраическое количество, выражающее величину отрѣзка на оси zz' съ его знакомъ.

Тогда очевидно, что этих трех величин будет достаточно для определения положения точки въ пространствѣ и поэтому алгебраическія количества x, y и z называются координатами точки M. На нашемъ чертежѣ всѣ три отрѣзка положительны, пусть $OP=a$, $OQ=b$, $OR=c$, тогда для точки M будемъ имѣть координаты: $x=+a$, $y=+b$, $z=+c$. Замѣтимъ, что на нашемъ чертежѣ мы имѣемъ $OP=MS=TR=NQ$ и такъ какъ $x=MS$ то мы можемъ сказать, что координата x есть разстояніе точки M отъ плоскости YZ, считаемое по направленію, параллельному оси $x^{овъ}$ и сопровождаемое соотвѣтствующимъ знакомъ. Подобно этому, такъ какъ $NP=OQ=RS=MT$, то $y=MT$, сльдов. y есть разстояніе точки M отъ плоскости xz, взятое по направленію, параллельному оси $y^{кова}$ съ должнымъ знакомъ. Наконецъ, такъ какъ $MN=OR=PT=QS$, то $z=MN$ и слѣдовательно z есть разстояніе точки отъ плоскости xy, взятое по направленію, параллельному оси $z^{овъ}$ и сопровождаемое соотвѣтствующимъ знакомъ. Для построенія прямолинейныхъ координатъ данной точки нѣтъ надобности непремѣнно строить вышеуказанный полный параллелепипедъ, для этого достаточно, очевидно, построить ломаную линію $NMPO$, потому что три стороны этой линіи представляютъ три координаты точки M, а именно: $OP=x$, $PN=y$ и $NM=z$. Поэтому, чтобы получить координаты данной точки M, проводятъ черезъ эту точку параллель оси OZ до встрѣчи ея съ плоскостью xy въ точкѣ N, потомъ черезъ точку N проводятъ параллель оси OY до встрѣчи

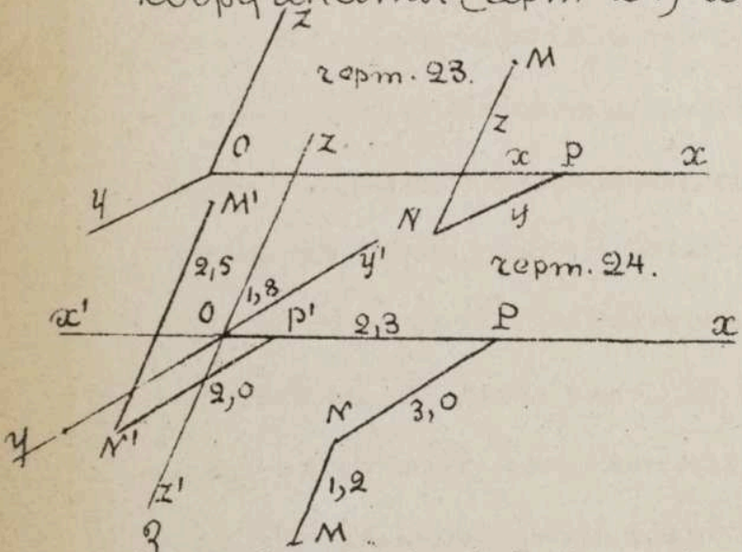
осью x ов, таким образом получим три координаты:

$OP = x$, $NP = y$ и $MN = z$



черт. 22.

Обратно, всякую точку, которой координаты даны, можно построить тем же способом, т.е. откладывая последовательно три стороны ломаной линии OPNM (чер. 23), причем направления этих сторон указываются знаками данных координат x, y и z. Таким образом, если даны три координаты (черт. 24) $x = +2,3$, $y = +3,0$ и $z = -1,2$, то мы построим ломаную линию OPNM, изображенную на чертеже и получим искомую точку M. Точно также, если даны координаты: $x = -1,8$; $y = +2,0$ и $z = +2,5$, то мы получим ломаную линию OP'N'M' и найдем искомую точку M'.



Заметим некоторые частные положения точек в пространстве:

1, Положим, что данная точка находится в плоскости YZ, как точка S, для такой точки будем иметь $x = 0$ и при том $y = b$, $z = c$ (черт. 22)

2, Если точка лежит в плоскости XY, как точка N, то будем иметь для нея $z = 0$, $x = a$; $y = b$.

3, Если точка лежит в плоскости XZ, как точка T, ус- для этой точки $y = 0$ и при том $x = a$, $z = c$.

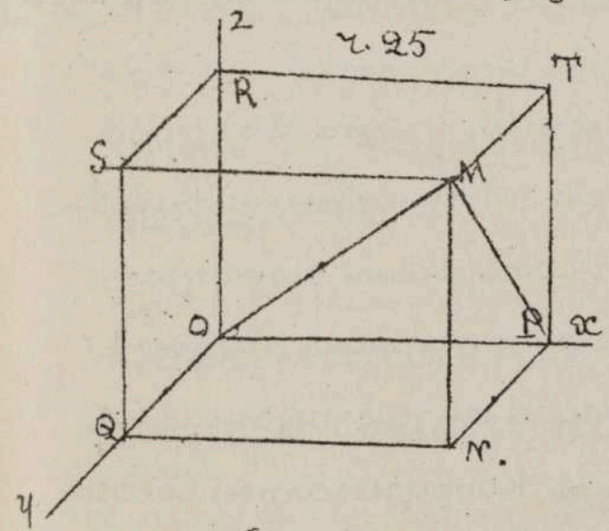
4) Если точка лежитъ на оси $X^{ов}$, какъ точка P, то для нея имѣемъ: $y=0, z=0, x=OP=a$.

5) Если точка лежитъ на оси $Y^{ковъ}$, какъ точка Q, то для нея имѣемъ: $x=0, z=0, y=b$.

6) Если точка лежитъ на оси $Z^{ов}$, какъ точка R, то $x=0, y=0$ и $z=c$.

7.) Если точка наконецъ лежитъ въ началѣ координатъ, то $x=y=z=0$.

Если плоскости координатъ пересѣкаются подъ произвольными углами, то они образуютъ Систему косоугольныхъ осей координатъ, въ частномъ случаѣ (черт. 25),



ч. 25

когда три плоскости координатъ взаимно перпендикулярны, то онѣ образуютъ систему прямоугольныхъ осей координатъ. Все, что было сказано о косоугольныхъ осяхъ координатъ примѣняется безъ всякаго измѣненія и къ прямоугольнымъ, разница будетъ только въ томъ, что построенный нами вмѣсто параллелепипедъ изъ косого сдѣлается прямоугольнымъ. Прямоугольную систему придется разсматривать часто и её представляютъ на чертежѣ обыкновенно слѣдующимъ образомъ: одну плоскость - вертикальною, совпадающею съ плоскостью чертежа, вторая (xy) пусть будетъ горизонтальная, а третью возьмемъ тоже вертикальною и перпендикулярною къ плоскости чертежа. Чтобы получить координаты

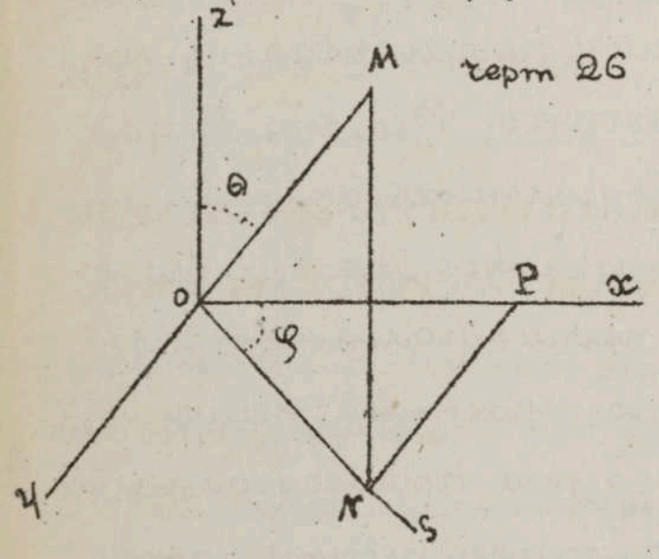
произвольной точки M, нужно изъ точки M на плоскость XY опустить перпендикуляръ; въ пересѣченіи его съ плоскостью XY получимъ точку N, изъ которой опустимъ въ свою очередь перпендикуляръ на оси $x^{ов}$, тогда будемъ имѣть:

$$OP = x, \quad PN = y, \quad MN = z.$$

Соединимъ точку O съ M. Линія $OM = r$ называется радіусомъ векторомъ точки M. Изъ чертежа видно, что x точки M есть горизонтальная проэкція радіуса вектора r на оси $x^{овъ}$, точно также y есть проэкція r на оси $y^{овъ}$, а $z = OR$ есть также ортогональная проэкція радіуса вектора r на оси $z^{ов}$

2, Полярныя координаты въ пространствѣ.

Полярныя координаты въ пространствѣ (черт. 26) разсматриваются обыкновенно вмѣстѣ съ прямоугольными слѣдующимъ образомъ: возьмемъ произвольную точку M и построимъ ея прямоугольныя координаты. Соединимъ начало O съ M, затѣмъ черезъ линію OM и ось $z^{ов}$ проведемъ плоскость; эта плоскость пересѣчетъ плоскость XY по прямой ON. Измѣримъ уголъ $XOS = \varphi$, служащій мѣрою двуграннаго угла, образуемаго плоскостями SOZ и XZ и измѣривъ еще уголъ ZOM, который обозначимъ черезъ θ, наконецъ измѣримъ разстояніе $OM = r$, этихъ трехъ величинъ φ, θ и r будетъ очевидно достаточно



черт 26

для определения положения точки M въ пространствѣ и потомъ эти три величины называются полярными координатами точки M въ пространствѣ. Уголъ φ считается отъ положительной оси X^{ob} къ положительной сторонѣ Y и можетъ получать для различныхъ точекъ пространства всѣ величины отъ 0° до 360°. Уголъ Θ считается отъ положительной оси Z^{ob} въ сторону къ отрицательной оси Z и можетъ получать всѣ величины отъ 0° до 180°, наконецъ разстояніе r можетъ получать всѣ величины отъ 0 до ∞. Разстояніе r называется радіусомъ векторомъ; уголъ φ называется долготою; уголъ Θ есть полярный уголъ или дополненіе широты. Широтою же называется уголъ $MOS = 90^\circ - \Theta$. Плоскость XY называется плоскостью экватора, а ZOS - плоскостью Меридіана.

Соотношеніе между прямоугольными и полярными координатами въ пространствѣ.

Эти соотношенія легко обнаружить изъ предыдущаго чертежа. Изъ прямоугольнаго Δ^{na} NOP получимъ:

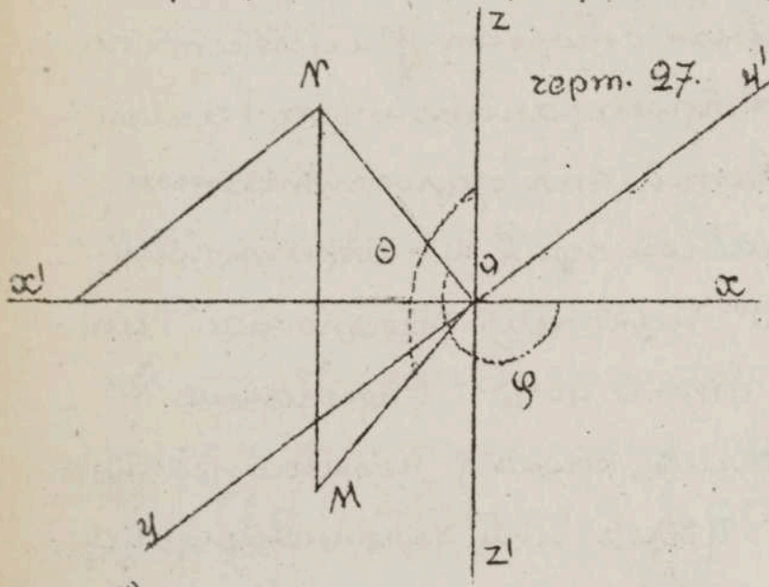
$$x = ON \cdot \cos\varphi \quad \text{и} \quad y = ON \sin\varphi.$$

Въ Δик ONM, ON есть катетъ, противолежащій къ углу Θ, такъ что $ON = r\sin\Theta$, а потому

$$x = r\sin\Theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\Theta\sin\varphi \qquad \text{и} \quad z = r\cos\Theta.$$

Вотъ три формулы, которыя даютъ прямоугольныя координаты x, y и z посредствомъ полярныхъ r, Θ и φ.

Эти формулы пишутся просто для всякого положения точки M. Если напр. возьмем точку M в угле противуположном трехгранному углу между положительными осями координат, то найдем (черт. 27)



черт. 27.

$$z = -MN = -r\cos(NMO) = -r\cos(180^\circ - \theta) = r\cos\theta.$$

$$ON = r\sin(NMO) = r\sin(180^\circ - \theta) = r\sin\theta.$$

$$x = -FO = -ON\cos(PON) = -r\sin\theta\cos(\varphi - 180^\circ) =$$

$$= r\sin\theta\cos\varphi.$$

$$y = -NF = -NO\sin(PON) = -r\sin\theta\sin(\varphi - 180^\circ) =$$

$$= r\sin\theta\sin\varphi.$$

Из найденных ур-ий можно вывести обратные формулы. Возведем наши три равенства в квадраты и сложим, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\{\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta\} = r^2, \text{ отсюда } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Для определения φ, разделим второе равенство на первое, получим: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$

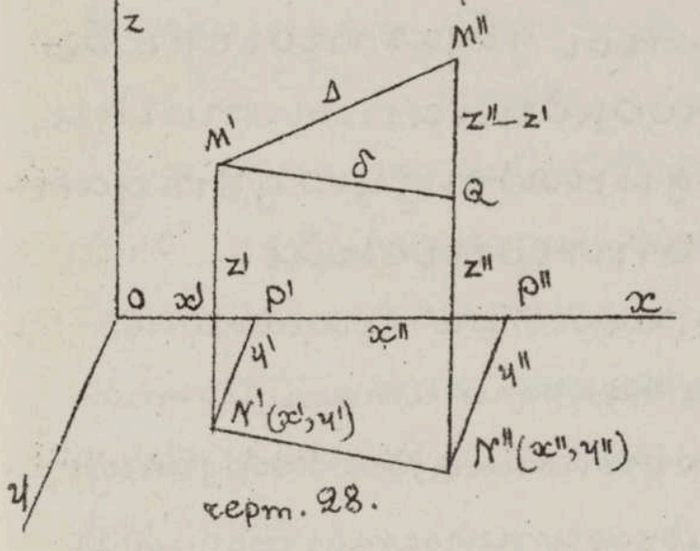
Наконец из третьего ур-ия определим $\cos\theta = \frac{z}{r}$ и подставим вместо r его величину, найдем:

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Задача 1. Даны прямоугольные координаты двух точек в пространстве, найти расстояние между этими точками.

При решении этой задачи мы будем для простоты полагать координаты прямоугольными. Пусть координаты двух данных точек $M'(x'y'z')$ и $M''(x'', y'', z'')$. Возьмем эти точки, расстояние между ними $M'M''$ обозначим через Δ. Из данных точек M' и M'' опустим-

перпендикуляры на плоскость xy: M'N' и M"N" и потом из точек N' и N" опустим перпендикуляры на ось $x^{ов}$. Мы получим этими построениями координаты точек M' и M", а именно:



черт. 28.

$x' = Op'$; $y' = p'N'$ и $z' = N'M'$, $x'' = Op''$, $y'' = p''N''$ и $z'' = N''M''$. Через M'N' и M"N" проведем плоскость, которая пересечет плоскость xy по линии N'N" и из точки M' спишем, параллельную N'N" и обозначим ее через δ, так что $M'\theta = N'N'' = \delta$. Из прямоугольного треугольника M'M"Q имеем: $\Delta^2 = \delta^2 + M''Q^2$, но $M''Q = z'' - z'$, так что $\Delta^2 = \delta^2 + (z'' - z')^2$.

Определим δ; для этого рассмотрим две точки N' и N", координаты которых на плоскости xy будут соответственно $(x'y')$ и $(x''y'')$, поэтому δ можно определить, как расстояние двух точек N' и N", данных на плоскости xy по формуле уже известной, именно: $\delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$. Вставив это выражение в предыдущее равенство, получим: $\Delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2$

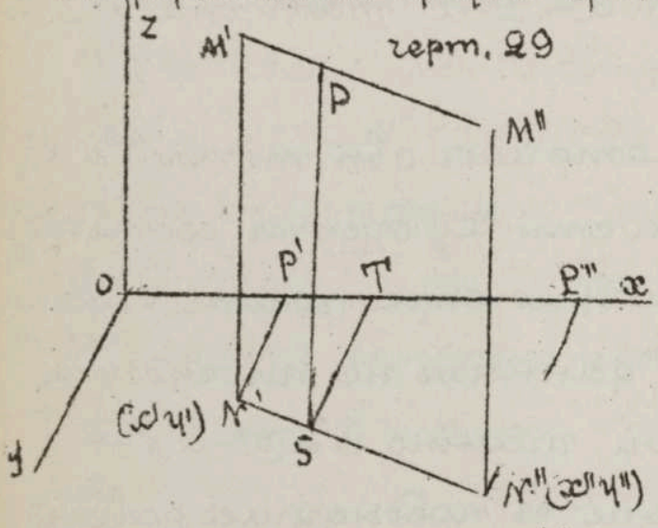
Эта формула определяет квадрат расстояния точек в пространстве для прямоугольных координат.

Заметим частный случай: если точка M' совпадает с началом координат O, то можно положить, $x' = y' = z' = 0$ и будем иметь: $\Delta^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$. Хотя формула квадрата расстояния между двумя точками была выведена при частном расположении данных точек, тем не

сечение мы можем быть увѣрены, что она будетъ общею и остается безъ перемѣны, гдѣ бы данная точка не находилась.

Задача 2, даны координаты двухъ точекъ въ пространствѣ, найти координаты точки, раздѣляющей линію, соединяющую двѣ данныя точки, въ данномъ отношеніи.

Эта задача рѣшается одинаково, какъ при прямоугольныхъ, такъ и при косоугольныхъ координатахъ. Поэтому будемъ разсматривать косоугольныя оси координатъ, чтобы получить болѣе общее доказательство формулъ, опредѣляющихъ искомыя координаты. Пусть (черт. 29) координаты двухъ данныхъ точекъ будутъ: $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'', z'')$. Возмемъ косоугольныя оси и построимъ координаты данныхъ точекъ. Соединимъ точку M' съ M'' прямою линіей. Пусть P есть искомая точка на линіи $M'M''$; тогда мы должны имѣть слѣдующую пропорцію: $PM' : PM'' = m : n$. Координаты точки P обозначимъ черезъ (x, y, z), ихъ надо намъ найти. Для этого проведемъ черезъ точки M', P и M'' плоскости, параллельныя yz и опредѣлимъ точки P', T и P'', въ которыхъ онѣ пересѣкаютъ ось x-овъ. Такъ какъ отрѣзки двухъ прямыхъ между тремя параллельными плоскостями пропорціональны, то $P'T : TP'' = M'P : PM'' = m : n$. Такимъ образомъ вопросъ объ отысканіи $OT = x$ приводится къ раздѣленію разстоя-

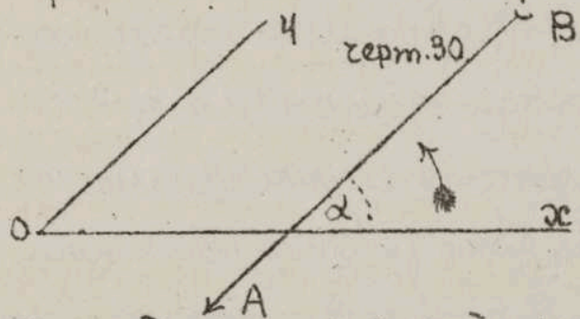


черт. 29

ния между двумя точками P' и P'' на оси OX въ отношеніи m:n. Эта задача рѣшена нами при опредѣленіи положенія точки на оси. Такъ какъ $OP' = x'$ и $OP'' = x''$ то:
$x = \frac{nx' + mx''}{m+n}$, такимъ же найдемъ $y = \frac{ny' + my''}{m+n}$ и $z = \frac{nz' + mz''}{m+n}$.
Если $m=n$, то $PM' = PM''$, тогда точка P будетъ серединa прямой $M'M''$ и ея координаты найдутся по тѣмъ же формуламъ которыя по сокращеніи ихъ на n будутъ: $x = \frac{x'+x''}{2}$, $y = \frac{y'+y''}{2}$ и $z = \frac{z'+z''}{2}$. Эти формулы опредѣляютъ координаты средины прямой, соединяющей двѣ данныя точки въ пространствѣ.

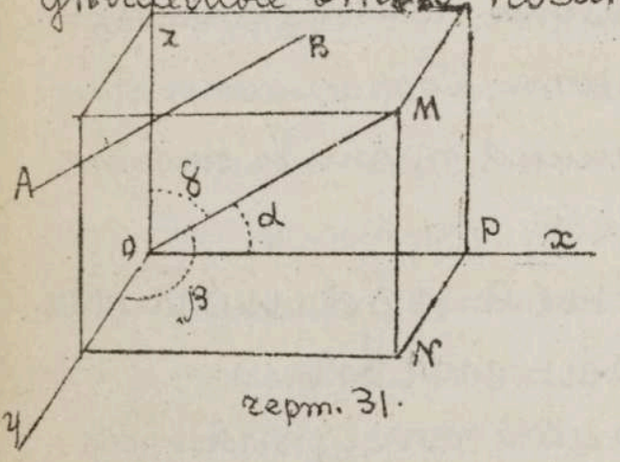
Опредѣленіе направленія прямой на плоскости и въ пространствѣ.

На плоскости направленіе прямой опредѣляется помощію угла, который она дѣлаетъ съ осью $X^{ов}$ (ч. 30), при чемъ этотъ уголъ считается отъ положительной стороны оси $X^{ов}$ къ положительной сторонѣ оси $Y^{ов}$ и можетъ получать въ величинѣ отъ 0° до 360°. Замѣтимъ, что для одной и той же прямой необходимо различать два прямо противуположныхъ направленія, именно направленіе отъ A къ B, или отъ B къ A. Для этого различаютъ два угла, дѣлаемые прямой съ направленіемъ OX, а именно, если направленіе отъ A къ B дѣлаетъ съ линіей OX уголъ острый, то направленіе отъ B къ A дѣлаетъ съ той же линіей OX уголъ развернутый, величина



которого будет = 180° + α.

Въ пространствѣ направленіе прямой опредѣляется помощію трехъ угловъ, которые эта прямая дѣлаетъ съ тремя осями координатъ. Чтобы получить эти три угла, черезъ начало координатъ (черт. 31) проведемъ прямую, параллельную данной и разсмотримъ три угла, дѣлаемые этою послѣднею прямою съ осями координатъ,



черт. 31.

потому что вообще уголъ между двумя не пересѣкающимися прямыми въ пространствѣ есть уголъ между прямыми, имъ параллельными и выходящими изъ одной точки. Разсмотримъ три оси координатъ. Если линіи AB приписываемъ направленіе отъ A къ B, то для опредѣленія ея угловъ съ осями координатъ, проводимъ черезъ начало прямую OM въ ту сторону, куда направлена AB и опредѣляемъ углы OM съ положительными осями Ox, Oy и Oz. Пусть эти углы будутъ α, β и γ. Если бы были даны только два угла изъ нихъ, напр. α и β, то можно бы было получить двѣ прямыя, которыя дѣлаютъ такіе углы съ осями координатъ x и y. Въ самомъ дѣлѣ мы могли бы во-первыхъ провести черезъ начало O произвольную прямую, дѣлающую съ осью $x^{ов}$ уголъ α. Заставивъ ее вращаться около оси $x^{ов}$ съ сохраненіемъ величины угла α, мы получимъ конусъ, каждая

образующая которого будет делать с осью $X^{ов}$ угол, равный α. Подобным же образом проведем через начало O другую прямую, делающую с осью $Y^{ов}$ угол β, вращая эту прямую около оси $Y^{ов}$, мы получим другой конец, всех образующих которого делают с осью $Y^{ов}$ угол β. Эти два конца перекаются по двум прямым, из которых каждая делает с осью $X^{ов}$ угол α, а с осью $Y^{ов}$ угол β.

Мы видим таким образом, что третий угол γ может при этом получить только два различных величины. Отсюда следует:

1) Что двух углов α и β было бы не достаточно для определения направления прямой.

2, Что между тремя углами α, β и γ должно существовать некоторое соотношение и именно такое, вследствие которого при данных α и β, угол γ может только получать две величины. Найдем это соотношение. Соотношение это выражается просто только тогда, когда оси координат прямоугольные, поэтому будем сейчас предполагать, что оси прямоугольные. На прямой OM возьмем произвольную точку M и пусть координаты этой точки будут (x, y, z), а расстояние $OM = r$. Построим координаты точки M. Выше было замечено, что три координаты (x, y, z) могут быть рассматриваемы, как ортогональные проекции радиуса вектора r на оси координат, на этом основании можно написать: $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$.

Возведя эти три равенства в квадрат и сложив их, по-

получимъ: $x^2+y^2+z^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$, но съ другой стороны намъ извѣстно, что $x^2+y^2+z^2 = r^2$, слѣдовательно предыдущее равенство сократится на r^2 и должны имѣть: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, или иначе оно представляется такъ: $\cos^2\angle x + \cos^2\angle y + \cos^2\angle z = 1$. Это равенство представляетъ искомое соотношеніе. Мы видимъ такимъ образомъ, что сумма квадратовъ косинусовъ угловъ, составленныхъ произвольной прямой съ тремя прямоугольными осями координатъ, всегда равна 1. Изъ этого уравненія видимъ также, что если два угла α и β будутъ даны, то найдемъ:

$$\cos^2\gamma = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta, \text{ или } \cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

По этой формулѣ для γ получимъ двѣ величины: 1) $\gamma < 90^\circ$, когда примемъ предъ корнемъ знакъ + и $\gamma_1 = (180^\circ-\gamma) > 90^\circ$, когда примемъ предъ корнемъ знакъ —. Это даетъ намъ двѣ прямыя линіи проходящія черезъ начало и симметрично расположенныя относительно плоскости xy.

Задача 1, По полярному углу Θ и долготѣ опредѣлить косинусы угловъ α, β и γ, которые радіусъ векторъ образуетъ съ осями координатъ.

Называя прямоугольныя координаты точки, лежащей на концѣ радіуса вектора r, черезъ x y и z, напишемъ:

$$x = r\cos\alpha\ ;\quad y = r\cos\beta\ ,\quad z = r\cos\gamma.$$

Съ другой стороны было выведено, что

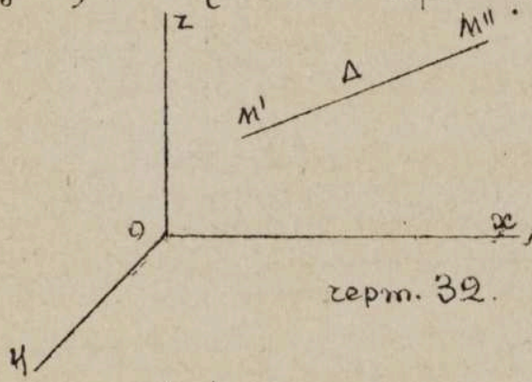
$$x = r\sin\Theta\cos\varphi\ ,\quad y = r\sin\Theta\sin\varphi\ ,\quad z = r\cos\Theta\ ,$$ слѣдовательно

$r\cos\alpha = r\sin\Theta\cos\varphi$, $r\cos\beta = r\sin\Theta\sin\varphi$, $r\cos\gamma = r\cos\Theta$.

Сокращаемъ на r: $\cos\alpha = \sin\Theta\cos\varphi$, $\cos\beta = \sin\Theta\sin\varphi$, $\cos\gamma = \cos\Theta$.

Задача 2. Найти косинусы угловъ, образуемыхъ прямой линіей, соединяющей двѣ данныя точки, съ осями координатъ.

Пусть (черт. 32) двѣ данныя точки будутъ $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'' z'')$. Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ. Разсмотримъ два направленія прямой отъ M' къ M'' и отъ M'' къ M'. Будемъ опредѣлять косинусы угловъ, образуемыхъ направленіемъ $M'M''$ съ осями координатъ. Искомые углы обозначимъ, какъ и выше черезъ α, β и γ. Проэктируемъ прямую $M'M''$ на ось x-овъ, ея проэкція будетъ равна съ одной стороны $x''-x'$, и съ другой же стороны она же равна $\Delta\cos\alpha$. Слѣдовательно имѣемъ: $x''-x'=\Delta\cos\alpha$. Возьмемъ точно такія же проэкціи длины Δ на оси y-овъ и z-овъ, будемъ имѣть: $y''-y'=\Delta\cos\beta$ и $z''-z'=\Delta\cos\gamma$. При этомъ разстояніе Δ извѣстно и мы знаемъ, что $\Delta=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}$



черт. 32.

Изъ предыдущихъ трехъ равенствъ находимъ:

$$\cos\alpha=\frac{x''-x'}{\Delta},\quad \cos\beta=\frac{y''-y'}{\Delta}\quad\text{и}\quad \cos\gamma=\frac{z''-z'}{\Delta}$$

Эти формулы рѣшаютъ вопросъ.

Задача 3. Опредѣлить направленіе прямой въ пространствѣ, зная, что три косинуса угловъ, образуемыхъ съ осями координатъ, соотвѣтственно пропорціональны тремъ данныхъ числамъ a, b и c.

Назовемъ по прежнему искомые углы черезъ α, β и γ. Мы обязаны имѣть по условію: $\cos\alpha=k\cdot a$, $\cos\beta=k\cdot b$ и $\cos\gamma=k\cdot c$.

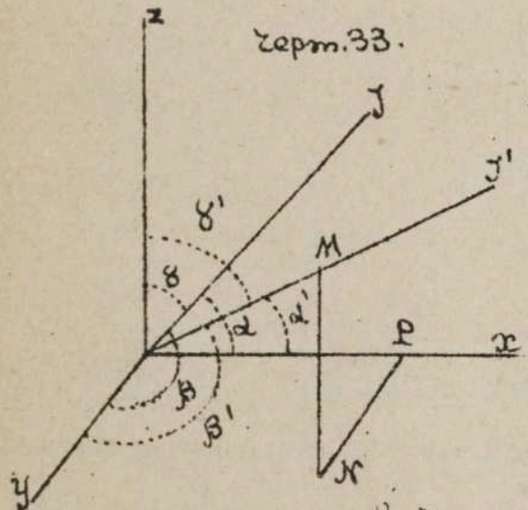
где k есть неизвестный коэффициент пропорциональности. Из этих равенств следует, что $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = k$.

Вопервых легко определить k; для этого возмем три предыдущия равенства, возведенныя в квадраты и сложим, получим:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = k^2(a^2+b^2+c^2)$, но $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, так что имьем: $k^2(a^2+b^2+c^2) = 1$ и $k^2 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$, откуда $k = \pm\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}}$, а затьм находим $\cos\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\beta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ и $\cos\beta = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Двоякой знакъ + и — соотвьтствует двумъ прямопротивоположнымъ направлениямъ разсматриваемой прямой. Эти два направления дьлают съ каждой изъ осей два угла, разнящіеся на 180° и сльдовательно ихъ косинусы должны быть равны и съ обратными знаками.

Уголъ двухъ прямыхъ въ пространствь.

Оси координатъ опять полагаемъ прямоугольными. Положимъ, что первая прямая дьлает съ осями Ox, Oy и Oz углы α, β и γ, а вторая прямая α', β' и γ'. Уголъ между двумя прямыми обозначимъ черезъ υ., его требуется найти. Чтобы построить этотъ уголъ, мы черезъ начало координатъ проведемъ 2 прямыя, параллельныя двумъ данным прямымъ: Oy параллельно первой прямой и OJ' параллельно второй прямой. Тогда будетъ имьть уголъ $JOJ' = \upsilon$. Прямая OJ дьлает съ осью $x^{ов}$ уголъ α, а съ осью $y^{ов}$ уголъ β и съ осью $z^{ов}$ уголъ γ. Прямая OJ' дьлает съ тьми же осями углы α', β' и γ'. Возмемъ на прямой OJ' произвольную точку M и пусть ея координаты



черт. 33.

будутъ (xyz), а разстояніе $OM = l$. Построимъ эти координаты. Разсмотримъ затѣмъ несомкнутый многоугольный контуръ $OPNM$ съ его замыкающей стороной OM и возмемъ сумму проэкцій сторонъ этого контура на какую либо ось; будемъ имѣть: $np(OP) + np.(PN) + np.(NM) = np.(OM)$. За ось проэкцій примемъ прямую OY, тогда это уравненіе будетъ, очевидно:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l\cos v.$$

Но сверхъ того мы знаемъ, что x, y, z могутъ быть разсматриваемы какъ проэкціи радіуса вектора l на оси координатъ; на этомъ основаніи можемъ написать $x = l\cos\alpha'$, $y = l\cos\beta'$ и $z = l\cos\gamma'$. Вставивъ эти три формулы въ предыдущее равенство получимъ: $l\cos\alpha\cos\alpha' + l\cos\beta\cos\beta' + l\cos\gamma\cos\gamma' = l\cos v$. Сокративъ это уравненіе на l, найдемъ формулу, которую намъ нужно было вывести, а именно. $\cos v = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$., т.е. косинусъ угла между двумя прямыми равняется суммѣ произведеній cs-овъ угловъ, образуемыхъ этими прямыми съ тремя осями координатъ.

Замѣтимъ частный случай этой задачи: Если двѣ данныя прямыя взаимно перпендикулярны, то $v = 90°$ и слѣдовательно въ этомъ случаѣ будемъ имѣть: $\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0$ Это равенство выражаетъ условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ въ пространствѣ.

Соотношеніе между площадью и проэкціями на трехъ прямоугольныхъ плоскостяхъ координатъ.

Пусть въ пространствѣ дана нѣкоторая площадь S;

проектируемъ её на три плоскости координатъ и положимъ, что ея проэкція на плоскости YZ есть S_x. Тогда, если α есть уголъ, образуемый площадью S съ плоскостью YZ, то будемъ имѣть:

$$S_x = S\cos\alpha$$

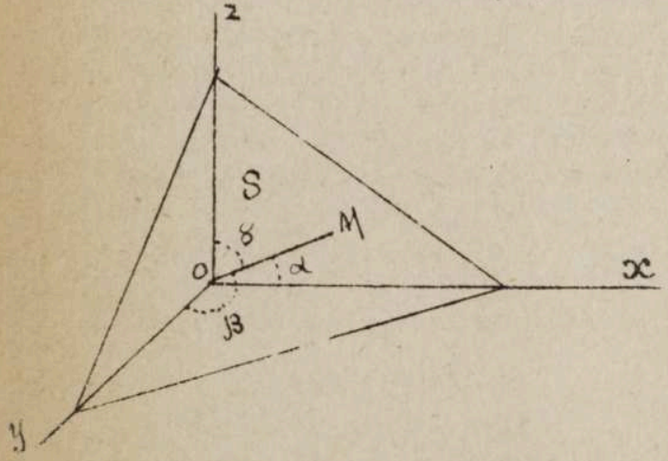
Точно также проэкція той же плоскости на плоскости XZ будетъ S_y и пусть β есть уголъ, дѣлаемый данной площадью съ плоскостью XZ, будемъ имѣть:

$$S_y = S\cos\beta.$$

Наконецъ, пусть проэкція S на плоскость XY есть S_z и γ - уголъ, дѣлаемый площадью S съ плоскостью XY, тогда

$$S_z = S\cos\gamma.$$

Черезъ начало координатъ проведемъ прямую линію, перпендикулярную къ площади S. Эта прямая будетъ дѣлать соотвѣтственно съ осями координатъ $x^{ов}$ $y^{ов}$ и $z^{ов}$ углы, равные α, β и γ на томъ основаніи, что уголъ между двумя прямыми равенъ углу между плоскостями къ нимъ перпендикулярными. Вслѣдствіе этого мы имѣемъ:



$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$ и сложивъ квадраты предыдущихъ трехъ равенствъ, получимъ:

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

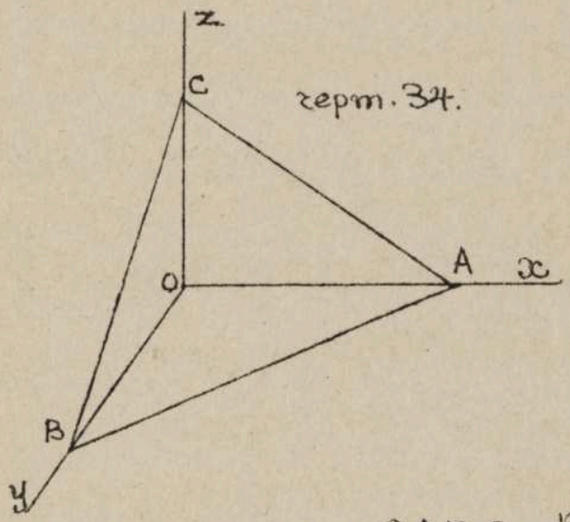
Такъ что будемъ имѣть:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

т. е. Квадратъ числа, представляющаго площадь въ-

пространствъ, равняется суммѣ квадратовъ числъ выражающихъ проэкціи той же площади на трехъ плоскостяхъ координатъ.

Доказанное нами соотношеніе площадей представляетъ нѣкоторую аналогію съ извѣстной теоремой Пифагора на плоскости и чтобы представить себѣ эту аналогію въ болѣе отчетливой формѣ, разсмотримъ частный случай. Возьмемъ (черт. 34) прямой трехгранный уголъ OXYZ и проведемъ произвольную плоскость, пересѣкающую три ребра его, получимъ трехгранникъ OABC. Въ немъ площадь грани, противолежащей прямому трехгранному углу, означимъ черезъ S, тогда, очевидно, что три грани, сходящіяся въ вершинѣ O, будутъ проэкціями этой площади на трехъ плоскостяхъ XY, YZ и XZ и слѣдовательно будемъ имѣть по вышесказанному:



черт. 34.

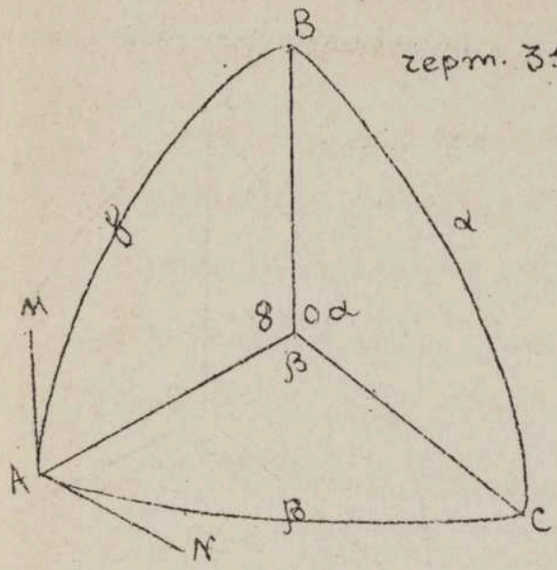
$$S^2 = (\overline{AOC})^2 + (\overline{BOC})^2 + (\overline{AOB})^2$$

Выводъ общихъ формулъ сферической тригонометріи.

Сферическая тригонометрія имѣетъ предметомъ рѣшеніе сферическихъ треугольниковъ. Припомнимъ предварительно нѣкоторыя свойства сферич. треугольниковъ

сферический треугольникъ есть часть поверхности сферы. Вообразимъ такой треугольникъ (черт. 36) на какой нибудь сферѣ. Вершины треугольника пусть будутъ A, B и C. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ различаютъ шесть частей: три стороны и три угла. Какъ стороны, такъ и углы выражаются обыкновенно въ градусахъ и при этомъ мѣрою сферическаго угла A служитъ линейный уголъ, составленный изъ касательныхъ AM и AN къ сторонамъ AB и AC сферическаго треугольника, такъ что уголъ A = MAN. Три угла сферическаго треугольника обозначимъ черезъ A, B и C а противолежащія имъ стороны черезъ α, β и γ. Если мы три вершины сферическаго треугольника соединимъ съ центромъ O сферы, на которой онъ лежитъ и затѣмъ проведемъ три плоскости AOC, COB и AOB, то получимъ при центрѣ трехгранный уголъ OABC, соотвѣтствующій разсматриваемому сферическому треугольнику. Въ этомъ трехгранномъ углѣ мы различаемъ также 8 частей три плоскихъ угла, его составляющіе. и три двугранныхъ угла. Плоскіе углы трехграннаго угла измѣряются сторонами сферическаго треугольника, имъ противолежащими, а двугранные углы трехграннаго угла имѣютъ линейковую мѣру съ угловъ сферическаго треугольника. Такимъ образомъ, напр. уголъ MAN = A служитъ мѣрою двугроннаго угла BOAC, потому что касательныя AM и AN перпендикулярны къ радіусу AO, т. е. къ ребру двугроннаго угла. Такимъ—

образомъ въ тригранномъ углѣ можно разсматривать тѣ же 6 частей, какъ и въ сферическомъ треугольникѣ, именно, если три плоскихъ угла будутъ α, β и γ и его двугранные углы будутъ A, B и C. Вслѣдствіе такой связи, существующей между сферическимъ треугольникомъ и соотвѣтствующимъ ему тригранным угломъ, разсмотрѣніе сферическаго треугольника можно часто замѣнить разсмотрѣніемъ соотвѣтствующаго ему тригранаго угла. Такъ какъ свойства тригранаго угла намъ извѣстны изъ начальной геометріи, то ограничимся тѣмъ, что напомнимъ только нѣкоторыя свойства тригранныхъ угловъ, выражая ихъ посредствомъ сторонъ и угловъ сферическаго $\Delta^{ка}$



черт. 35.

1, Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ каждая изъ его сторонъ меньше суммы двухъ прочихъ и потому, если имѣемъ $\alpha > \beta > \gamma$, то можемъ написать, что $\alpha < \beta + \gamma$.

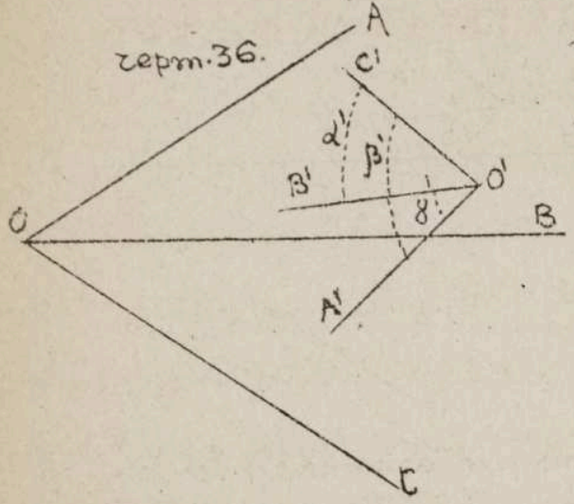
2, Сумма трехъ сторонъ сферическаго треугольника всегда меньше 360°, такъ что $\alpha + \beta + \gamma < 360°$

3, Сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника всегда больше 180° и меньше 540°, такъ что $A + B + C > 180°$ и $< 540°$.

Упомянемъ еще о дополнительномъ тригранномъ углѣ, (черт. 36), который получается слѣдующимъ образомъ: Возмемъ произвольный тригранный уголъ OABC. Внутри этого угла возмемъ произвольную точку O' и изъ этой точки опустимъ перпендикуляры O'A', O'B', O'C' на плоскости BOC, AOC и AOB.

трехгранного угла. Затемъ проведемъ три плоскости AO'B', B'O'C' и C'O'A'. Мы получимъ такимъ образомъ трехгранный уголъ O'A'B'C', который называется дополнительнымъ трехграннымъ угломъ для даннаго трехграннаго угла, обозначимъ черезъ α', β' и γ', а его двугранные углы черезъ A', B' и C'.

черт. 36.



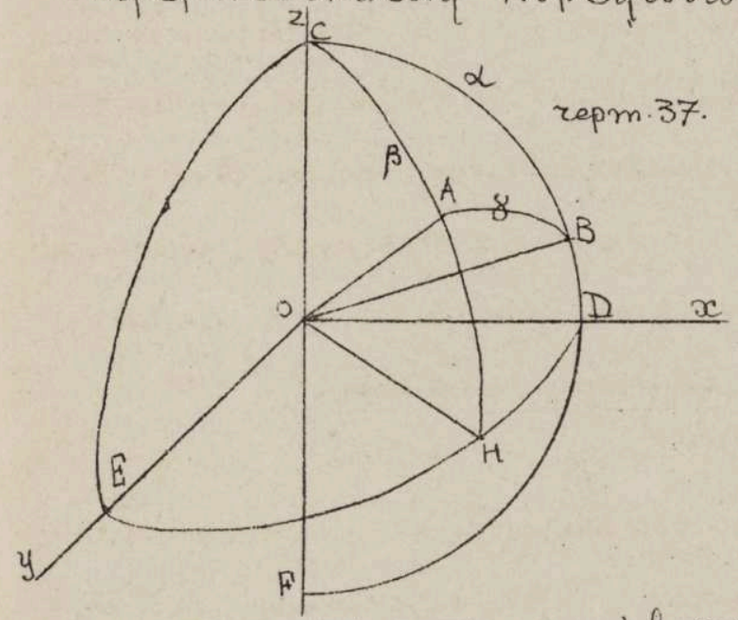
Между плоскими углами даннаго существуетъ простое соотношеніе, а именно легко доказать, что плоскіе углы дополнительнаго трехграннаго угла служатъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ двугранными углами даннаго трехграннаго уг-ла. Это свойство выражается тремя равенствами: $\alpha' + A = 180^\circ$, $\beta' + B = 180^\circ$ и $\gamma' + C = 180^\circ$. Обратно, такъ какъ очевидно, что данный трехгранный уголъ будетъ также дополнительнымъ для втораго трехграннаго угла, то будемъ имѣть:

$$\alpha + A' = 180^\circ \; ; \quad \beta + B' = 180^\circ \text{ и } \gamma + C' = 180^\circ$$

Данному трехгранному углу на сферѣ соотвѣтствуетъ нѣкоторый сферическій треугольникъ ABC съ углами A, B и C и сторонами α, β и γ. Дополнительному трехгранному уг-лу, если его вершину помѣстить въ центръ той же сферы, будетъ соотвѣтствовать другой сферическій треугольникъ на той же сферѣ, а именно A'B'C', котораго углы будутъ A', B' и C' и стороны α', β' и γ'. Этотъ второй сферическій тре-угольникъ называется дополнительнымъ для перваго или иногда полярнымъ. Между сторонами и углами этихъ $\Delta^{овъ}$ существуетъ зависимость, указанная написанными выше 6 ти.

Основная формула сферической тригонометрии.

Это так называемая формула косинуса стороны, т. е. формула, выражающая чему равен косинус стороны во всяком сферическом треугольнике. Она называется основною, потому что, как было показано Лапласом, из нея можно вывести все прочия формулы, относящияся к сферическому треугольнику. Пусть ABC (черт. 37) есть



черт. 37.

данный сферический треугольник и O есть центр той сферы, на которой он находится. Примем O за начало координат (прямоугольных), причем линию OX возьмем за ось $X^{ов}$, проведенную в плоскости BOC перпендикулярно к OC, где OC примем за ось $Z^{ов}$; осью $Y^{ов}$ будет служить линия OY, перпендикулярная к плоскости XOZ. Плоскость XZ пересекает сферу по дуге большого круга CBD, плоскость AOC пересекает ту же сферу по дуге CAH, наконец плоскость XY пересекается с сферою по дуге DHE. Плоские углы трехгранного угла OABC измеряются соответственно дугами сторон сферического треугольника ABC и потому $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Сферический угол C имеет одинаковую меру с двугранным углом HOCD и потому он измеряется линейным углом HOD = C. Рассмотрим две прямые AO и BO, выходящия из O.

Косинусъ угла между этими двумя прямыми можетъ быть выраженъ помощію косинусовъ угловъ, образуемыхъ этими прямыми съ осями координатъ, по извѣстной намъ формулѣ:

$$cs\varphi = cs(OA,x)cs(OB,x) + cs(OA,y)cs(OB,y) + cs(OA,z)cs(OB,z) \ldots (e)$$

гдѣ подъ обозначеніемъ (OA,x) мы разумѣемъ уголъ, дѣлаемый линіей OA съ осью $x^{ов}$ и т. д. Формула эта для нашего случая упрощается вслѣдствіе того, что такъ какъ линія OB перпендикулярна къ оси $y^{ов}$, то $cs(OB,y)=0$ и мы можемъ написать:

$$cs\varphi = cs(OA,x)cs(OB,x) + cs(OA,z)cs(OB,z)$$

Чтобы опредѣлить входящія сюда косинусы угловъ, воспользуемся задачею четвертою и напишемъ:

$$\left.\begin{array}{ll} cs(OA,x) = Sn\Theta\, cs\varphi; & cs(OB,x) = Sn\Theta' cs\varphi' \\ cs(OA,z) = cs\Theta; & cs(OB,z) = cs\Theta' \end{array}\right\} \ldots (K)$$

гдѣ Θ и φ суть полярный уголъ и долгота для точки A, а Θ' и φ' подобные же углы для точки B. Мы имѣемъ:

$$\Theta = \beta;\quad \varphi = C;\quad \Theta' = \alpha;\quad \varphi' = 0,$$ поэтому

$$cs(OA,x) = Sn\beta\, csC;\quad cs(OA,z) = cs\beta,\quad cs(OB,z) = cs\alpha;\quad cs(OB,x) = Sn\alpha,$$

откуда $cs\varphi = Sn\beta\, csC\, Sn\alpha + cs\beta\, cs\alpha$ или

$$cs\varphi = cs\alpha\, cs\beta + Sn\alpha\, Sn\beta\, csC \ldots\ldots (A)$$

Это равенство и составляетъ основную формулу сферической тригонометріи, она показываетъ, что косинусъ стороны сферическаго треугольника = произведенію косинусовъ двухъ прочихъ сторонъ + произведеніе синусовъ тѣхъ же сторонъ, умноженное на косинусъ угла между ними лежащаго.

Данное доказательство одинаково для всякого положения точки B на дуге CDF и для всякого положения точки A на поверхности сферы, ибо формулы: (C) и (K), на которых оно основано, верны для всех этих положений. Это доказывает, что формула (A) справедлива для всяких сферических треугольников.

Формула косинуса стороны может быть написана для каждой из сторон сферического треугольника, так что мы в нем будем иметь следующие три равенства.

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cos A \\ \cos\beta &= \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos B \\ \cos\gamma &= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos C \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (I)$$

Формула четырех синусов.

Так называется вторая из общих формул сферической тригонометрии. Она получается из формулы (I) следующим образом: Сложим и потом вычтем два первых из уравнений (I), будем иметь:

$$\cos\alpha + \cos\beta = (\cos\alpha + \cos\beta)\cos\gamma + \sin\gamma(\sin\beta\cos A + \sin\alpha\cos B)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -(\cos\alpha - \cos\beta)\cos\gamma + \sin\gamma(\sin\beta\cos A - \sin\alpha\cos B)$$

Перенеся первые члены из вторых равенств в первые части, мы получим отсюда:

$$(\cos\alpha + \cos\beta)(1 - \cos\gamma) = \sin\gamma(\sin\beta\cos A + \sin\alpha\cos B)$$

$$(\cos\alpha - \cos\beta)(1 + \cos\gamma) = \sin\gamma(\sin\beta\cos A - \sin\alpha\cos B)$$

Перемножая эти два равенства, находим:

$$(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)(1 - \cos^2\gamma) = \sin^2\gamma(\sin^2\beta\cos^2 A - \sin^2\alpha\cos^2 B)$$

или замечая, что $1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma$ и сокращая на $\sin^2\gamma$, имеем:

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin^2\beta\cos^2 A - \sin^2\alpha\cos^2 B.$$

Вместо каждого из квадратов косинусов поставимъ $1-\sin^2$, получимъ:

$1-\sin^2\alpha-1+\sin^2\beta=\sin^2\beta\sin^2A+\sin^2\beta-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2B$. или по сокращеніи. $\sin^2\beta\sin^2A=\sin^2\alpha\sin^2B$, по извлеченіи корня:

$$\sin\beta\sin A=\sin\alpha\sin B.$$

Мы ставимъ здѣсь знакъ + въ обѣихъ частяхъ равенства потому, что углы и стороны сферическаго треугольника послѣдняя меньшими 180°, а синусы такихъ дугъ, какъ извѣстно, положительны. Послѣднее равенство можно написать въ видѣ пропорціи: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin A}{\sin B}$, которая показываетъ, что во всякомъ сферическомъ треугольникѣ синусы сторонъ относятся между собою, какъ синусы угловъ, имъ противолежащихъ. Эту же пропорцію можно написать въ видѣ $\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}$

Если возмемъ двѣ стороны α и γ, то точно такимъ образомъ будемъ имѣть: $\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$, Объ послѣднія пропорціи можно соединить вмѣстѣ, написавъ, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}. \quad \ldots\ldots (II).$$

Формула косинуса угла.

Разсмотримъ дополнительный сферическій треугольникъ, котораго стороны пусть будутъ α', β' и γ', а углы A', B' и C'. Приложивъ къ этому треугольнику формулу косинуса стороны, мы можемъ написать, что:

$$\cos\alpha'=\cos\beta'\cos\gamma'+\sin\beta'\sin\gamma'\cos A'.$$

Но такъ какъ стороны дополнительнаго треугольника

суть дополненія до 180° къ угламъ даннаго треугольника, а его углы суть дополненія до 180° къ сторонамъ даннаго, то тождество можно еще написать въ видѣ:

$$\cos(180°-A) = \cos(180°-B)\cos(180°-C) + \sin(180°-B)\sin(180°-C)\cos(180°-\alpha)$$

При томъ, такъ какъ вообще $\cos(180°-x) = -\cos x$ и $\sin(180°-x) = \sin x$, то это равенство будетъ:

$$-\cos A = \cos B\cos C - \sin B\sin C\cos\alpha \text{ или } \cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$$

Эта формула даетъ косинусъ угла, выраженный помощію двухъ другихъ угловъ треугольника и стороны къ нимъ прилежащей. Такимъ образомъ для треугольника можно написать три формулы, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha \\ \cos B &= -\cos A\cos C + \sin A\sin C\cos\beta \\ \cos C &= -\cos B\cos A + \sin A\sin B\cos\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (III)$$

Наконецъ выведемъ послѣднюю общую формулу сферической тригонометріи, которая есть:

Формула съ котангенсами.

Напишемъ равенство $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$, исключимъ отсюда сторону γ и введемъ вмѣсто нее противолежащій ей уголъ C; для него замѣнимъ $\cos\gamma$ его выраженіемъ по формулѣ (I), именно:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

и вмѣсто $\sin\gamma$ вставимъ его выраженіе изъ равенства (II), т.е.

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha\sin C}{\sin A},$$ получимъ:

$$\cos\alpha = \cos\alpha\cos^2\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\beta\cos C + \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\sin C\cos A}{\sin A}$$

Перенесемъ первый членъ изъ второй части въ первую измѣнивъ,

что $\frac{cs\,A}{Sn\,A} = ctg\,A$, будемъ имѣть:

$$cs\alpha(1-cs^2\beta) = Sn\alpha Sn\beta cs\beta cs C + Sn\alpha sn\beta sn C ctg A$$

Подставивъ здѣсь вмѣсто $1-cs^2\beta = Sn^2\beta$ и сокративъ уравненіе на $Sn\beta$, получимъ

$$cs\alpha Sn\beta = Sn\alpha cs\beta cs C + Sn\alpha Sn C ctg A$$

Раздѣливъ всѣ обѣ части равенства на $Sn\alpha$, найдемъ формулу, которую всегда можно получить, а именно:

$$ctg\alpha . Sn\beta = ctg A sn C + cs C cs\beta .$$

Подобнымъ образомъ для одного треугольника можно написать шесть уравненій, а именно:

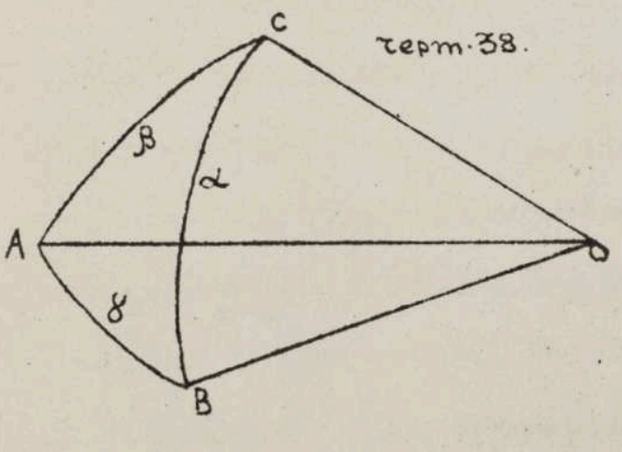
$$\left.\begin{aligned}
ctg\alpha Sn\beta &= ctg A sn C + cs C cs\beta \\
ctg\beta Sn\alpha &= ctg B sn C + cs C cs\alpha \\
ctg\alpha Sn\gamma &= ctg A sn B + cs B cs\gamma \\
ctg\gamma Sn\alpha &= ctg C sn B + cs B cs\alpha \\
ctg\beta Sn\gamma &= ctg B Sn A + cs A cs\gamma \\
ctg\gamma Sn\beta &= ctg C sn A + cs A cs\beta
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (IV)$$

Замѣчаніе. Общія формулы I, II, III и IV доставляютъ въ совокупности всего 15 уравненій для разсматриваемаго сферическаго треугольника. Въ каждое изъ этихъ уравненій входятъ 4 части: изъ 6^ти частей: $\alpha, \beta, \gamma, A, B$ и C, принадлежащихъ треугольнику и потому каждое изъ нихъ можетъ служить для опредѣленія одной неизвѣстной части по тремъ даннымъ. Число возможныхъ сочетаній изъ 6^ти частей по четыре и равно $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 15$ и слѣдовательно въ найденныхъ 15 уравненіяхъ входятъ всѣ возможныя сочетанія изъ 6^ти частей треугольника по 4, такъ что этихъ формулъ

будетъ вполнѣ достаточно для всѣхъ случаевъ, которые могутъ представиться при рѣшеніи треугольниковъ, когда по тремъ данными частями нужно опредѣлить четвертую неизвѣстную. Выведенныя формулы однако рѣдко употребляются на практикѣ при рѣшеніи треугольниковъ, потому что онѣ не имѣютъ логарифмическаго вида (кромѣ уравненій (II)), для этой цѣли выводятъ изъ нихъ другія формулы, вполнѣ удобныя для логарифмическихъ вычисленій. Этихъ новыхъ формулъ мы здѣсь выводить не будемъ.

Формулы для прямоугольнаго сферическаго треугольника. (чер 38)

Сферическій треугольникъ можетъ имѣть не только одинъ, но также два и три прямые угла. Треугольникъ ABC съ двумя прямыми углами A и B наз. двоякопрямоугольнымъ. Если въ такомъ треугольникѣ соединимъ его вершины съ центромъ сферы O, то получимъ трехгранный уголъ OABC, въ которомъ два двугранныхъ угла CAOB и CBOA будутъ прямые, слѣдовательно ребро CO будетъ перпендикулярно къ плоскости AOB. Плоскіе углы AOC и BOC, измѣряющіеся дугами AC=β и BC=α, будутъ также прямые, а потому стороны α=β=90°. Сферическій уголъ C имѣетъ общую мѣру съ линейнымъ угломъ AOB, который измѣряется дугою AB=γ, такъ что C=γ. Если всѣ въ сферическомъ треугольникѣ всѣ три угла прямые, то онъ называется троякопрямоугольный.



черт. 38.

Въ такомъ треугольникѣ всѣ три стороны, очевидно, по 90°. Оста-

новимся на рассмотрѣніи треугольника съ однимъ прямымъ угломъ. и положимъ, что этотъ уголъ есть A, противолежащая сторона α называется гипотенузой, другія же двѣ стороны β и γ суть катеты. Изъ выведенныхъ выше общихъ формулъ (I), (II), (III) и (IV) можно легко получить болѣе простыя частныя формулы для прямоугольнаго сферическаго треугольника. Сдѣлаемъ $A = 90°$ въ тѣхъ общихъ формулахъ, въ которыхъ входитъ этотъ уголъ. При этомъ первое изъ этихъ уравненій (I) даетъ:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \text{I}.$$

Изъ уравненія (II) при $A = 90°$, получимъ

$$\sin\beta = \sin\alpha\sin B \quad \ldots\ldots\ldots 2$$

$$\sin\gamma = \sin\alpha\sin C \quad \ldots\ldots\ldots 3.$$

Изъ втораго и третьяго уравненія системы (III) получимъ

$$\cos B = \cos\beta\sin C \quad \ldots\ldots\ldots 5$$

$$\cos C = \cos\gamma\sin B \quad \ldots\ldots\ldots 6.$$

Первое изъ уравненій (III) даетъ: $0 = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$, откуда

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C \quad \ldots\ldots 4.$$

Далѣе при $A = 90°$ первое и третье изъ уравненій (IV) обращаются въ слѣдующія:

$$\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha = \cos C\cos\beta$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma = \cos B\cos\gamma$$

Эти два равенства удобнѣе написать въ видѣ:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\cos C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cos B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 8$$

Наконецъ пятое и шестое изъ ур-ій (IV) даютъ:

$$\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma = \operatorname{ctg} B$$

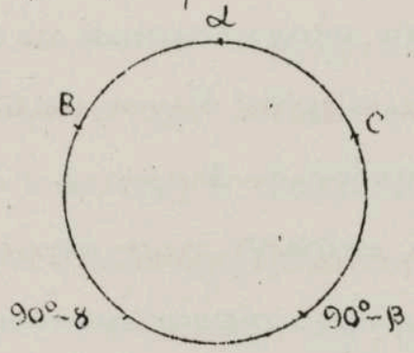
$$\operatorname{ctg}\gamma\sin\beta = \operatorname{ctg} C, \text{ или}$$

$$tg\beta = tgB\,Sn\gamma \ldots\ldots\ldots 9.$$

$$tg\gamma = tgC\,Sn\beta \ldots\ldots\ldots 10$$

Полученныхъ десяты уравнений будетъ вполнѣ достаточно для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ Во всѣхъ возможныхъ случаяхъ: по двумъ даннымъ частямъ всегда можно найти третью неизвѣстную часть. Эти десять формулъ весь извѣстны при томъ логарифмическій видъ и потому весьма удобны для логарифмическихъ вычисленій.

Примѣчаніе. Существуетъ очень простое и общее правило для запоминанія формулъ прямоугольнаго сферическаго треугольника. Для этого нужно вообразить всѣ части треугольника въ видѣ послѣдовательныхъ дугъ, расположивъ ихъ на окружности въ томъ порядкѣ, какъ они идутъ въ треугольникѣ и опуская A, какъ равное 90°, но при этомъ части β и γ, т.е. катеты замѣняютъ ихъ дополненіями до 90°. Тогда каждой величинѣ — двѣ величины прилежащія и двѣ противолежащія. Правило состоитъ въ томъ, что cs части равенъ произведенію $tg^{\text{смѣж}}$ прилежащихъ частей или $Sn^{\text{отв}}$ противолежащихъ. Такъ $cs\alpha = ctgB\,ctgC = Sn(90°-\beta)\,Sn(90°-\gamma) = cs\beta\,cs\gamma$ и т.д.



Аналитика. часть первая.

О уравненіяхъ линій на плоскости.

Прежде чѣмъ приступить къ объясненію предмета Аналитической геометріи и тѣхъ цѣлей, которыя она преслѣдуетъ,

необходимо ознакомиться съ нѣкоторыми основными понятіями въ ней употребляемыми и съ методами, служащими ей для изслѣдованія. Остановимся вопервыхъ на разъясненіяхъ и примѣрахъ, относящихся къ понятію о геометрическихъ мѣстахъ одному изъ важнѣйшихъ въ аналитической геометріи.

Понятіе о геометрическихъ мѣстахъ.

Понятіе о геометрическихъ мѣстахъ встрѣчается ранѣе въ начальной геометріи. Въ виду особой важности этого предмета для настоящаго курса, мы приведемъ здѣсь однако вновь объясненіе этого понятія, ограничиваясь разсмотрѣніемъ геометрическихъ мѣстъ на плоскости.

Когда въ какомъ либо вопросѣ плоской геометріи опредѣляются точки, которыя по своему положенію должны удовлетворять данному геометрическому условію и когда оказывается, по свойству даннаго условія, что подобныхъ точекъ можетъ быть найдено безчисленное множество, то обыкновенно довольствуются построеніемъ одной, или нѣсколькихъ такихъ точекъ, постараются найти законъ ихъ взаимнаго расположенія, т.е. опредѣлить мѣсто, на которомъ всѣ эти точки находятся. Такимъ геометрическимъ мѣстомъ безчисленнаго множества точекъ бываетъ обыкновенно нѣкоторая линія, прямая или кривая, причемъ каждая точка этой линіи удовлетворяетъ требуемому геометрическому условію и напротивъ того, что одна изъ точекъ плоскости, не лежащихъ на этой линіи, не будетъ удовлетворять тому-же условію. Отсюда слѣдующее опредѣленіе.

Геометрическимъ мѣстомъ наз: совокупность безчисленнаго множества точекъ, удовлетворяющихъ данному

и вполнѣ опредѣленному геометрическому условію.

Для того, чтобы пояснить это опредѣленіе, мы приведемъ здѣсь нѣсколько простѣйшихъ и извѣстнѣйшихъ примѣровъ изъ начальной геометріи.

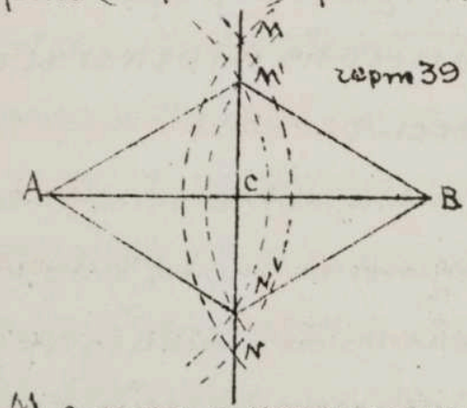
Примѣръ I. **Геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ на плоскости, есть прямая, проходящая черезъ средину прямой, соединяющей двѣ данныя точки и къ ней перпендикулярная.**

Въ этомъ вопросѣ геометрическое условіе, которому должны удовлетворять искомыя точки, состоитъ въ томъ, что каждая изъ этихъ точекъ должна находиться въ одинаковомъ разстояніи отъ данныхъ точекъ A и B. Очевидно, что можно найти безчисленное множество точекъ, удовлетворяющихъ требуемому условію: для этого стоитъ изъ точки A и B (черт. 39), какъ изъ центровъ описать равными, но произвольными по величинѣ радіусами двѣ окружности, тогда двѣ точки M и N пересѣченія этихъ двухъ окружностей, очевидно, равно удалены отъ точекъ A и B. Подобныхъ паръ точекъ можетъ быть найдено безчисленное множество, потому что общая величина радіусовъ двухъ окружностей можетъ быть взята произвольно лишь только, чтобы двѣ окружности пересѣкались, нужно только, чтобы величина радіуса была больше половины разстоянія между точками A и B. Очевидно далѣе, что всѣ точки, удовлетворяющія требуемому условію, т. е. точки равноотстоящія отъ A и B будутъ находиться на прямой линіи MN перпендикулярной къ AB.

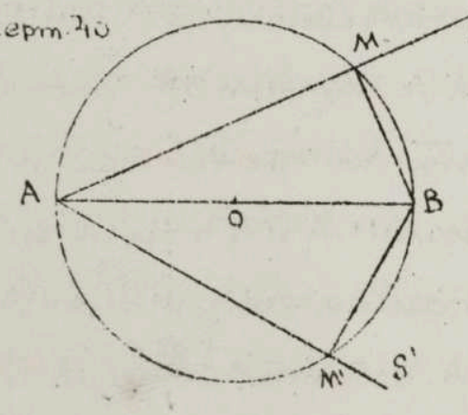
и проходящей через ея средину C. Такимъ образомъ AM=MB, AN=NB, AM'=M'B; AN'=N'B.

Примѣръ II. **Геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ прямоугольныхъ треугольниковъ, построенныхъ на общей гипотенузѣ, есть окружность, описанная на данной гипотенузѣ, какъ на діаметрѣ.**

Пусть (черт 40) данная гипотенуза есть AB. Чтобы получить точку, принадлежащую искомому геометрическому мѣсту, стоитъ только изъ точки A провести произвольную прямую AS, а потомъ изъ B опустить на эту прямую перпендикуляръ BM. Основа M этого перпендикуляра будетъ вершиною прямого угла прямоугольнаго треугольника AMB, построеннаго на гипотенузѣ AB. Точекъ, подобныхъ M, можно построить, очевидно, безчисленное множество, всѣ онѣ будутъ расположены на окружности, описанной на AB, какъ на діаметрѣ. Эта окружность будетъ слѣдовательно искомымъ геометрическимъ мѣстомъ.



черт 39



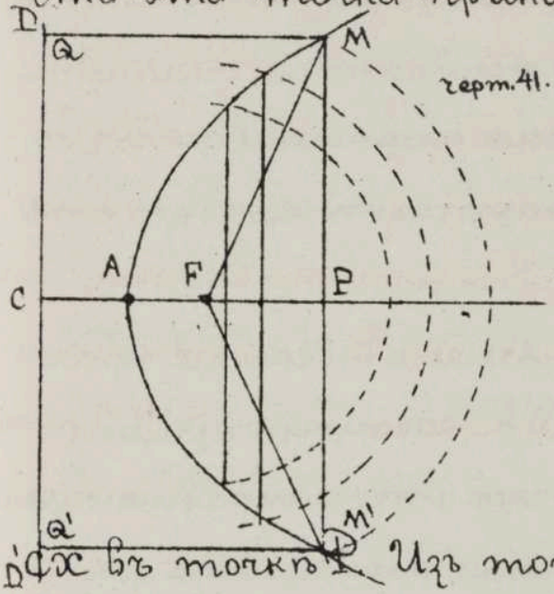
черт 40

Примѣръ III. **Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ данной неподвижной точки и отъ нѣкоторой постоянной прямой, есть кривая линія, называемая параболою.**

Данная точка, указанная въ опредѣленіи, есть фокусъ параболы

а постоянная прямая, до которой берутся расстояния, называется направляющей или директрисою параболы.

Параболу легко построить по точкам. Пусть F (черт. 41) есть данный фокус, а прямая DD' есть данная направляющая. Проведем через фокус F прямую CX, перпендикулярную к направлению DD', разделивъ разстояніе CF пополамъ точкою A, мы замѣтимъ что эта точка принадлежитъ параболѣ, такъ какъ ея разстояніе отъ фокуса – AF равно разстоянію отъ направляющей AC. Чтобы получить другія точки параболы, проведемъ рядъ прямыхъ линій, параллельныхъ направляющей DD' на различныхъ разстояніяхъ, большихъ AC. Пусть MM' есть одна изъ этихъ прямыхъ, пересѣкающая линію DCX въ точкѣ P. Изъ точки F, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ CP опишемъ окружность. Эта окружность пересѣчетъ прямую, нами проведенную, въ двухъ точкахъ M и M', которыя будутъ, очевидно, точками параболы. Въ самомъ дѣлѣ, опустивъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры MQ и M'Q' на направляющую DD', мы видимъ изъ чертежа, что каждой изъ нихъ, разстояніе отъ фокуса MF = M'F' равно CP = MQ = M'Q', т. е. равно разстоянію ихъ отъ направляющей. Повторяя то же построеніе для каждыхъ изъ прямыхъ, параллельныхъ DD', мы на каждой изъ нихъ опредѣлимъ двѣ точки параболы. Соединяя затѣмъ въ точки одной непрерывной чертой, мы получимъ приблизительно очертаніе кривой, представленное на чертежѣ. Парабола будетъ состоять, очевидно,



черт. 41.

изъ одной непрерывной вѣтви MAM', простирающейся до безконечности, такъ какъ на всякой параллели направляющей DD', хотя бы и чрезвычайно удаленной отъ нея всегда можно указать построеніемъ двѣ точки, принадлежащія параболѣ.

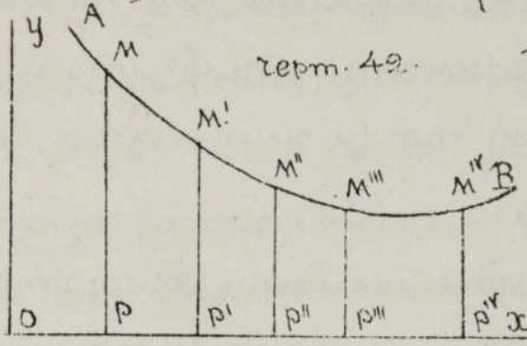
Не трудно усмотрѣть, что прямая CX будетъ ось параболы. Дѣйствительно изъ треугольниковъ MFP и M'FP видно, что MP=M'P и слѣдовательно двѣ точки параболы, находящіяся на одной изъ параллелей направляющей DD', будутъ расположены симметрично относительно прямой CX, которая поэтому есть ось параболы. Точка A, въ которой ось CX встрѣчаетъ кривую, есть вершина параболы.

Фигура параболы, т.е. большее или меньшее отверстіе, представляемое двумя ея половинами MA и M'A, соединяющимися въ точкѣ A, зависитъ отъ разстоянія фокуса отъ направляющей, чѣмъ меньше это разстояніе, тѣмъ меньше расходятся двѣ половины параболы и чѣмъ больше это разстояніе, тѣмъ больше отверстіе, образуемое кривой. Разстояніе это обыкновенно обозначается буквою P, такъ что CF=P и называется ПОЛОВИНОЮ параметра параболы.

Понятіе объ уравненіи кривой линіи

Положимъ, что нѣкоторая кривая, заданная какъ геометрическое мѣсто (черт. 42), отнесена къ двумъ неподвижнымъ осямъ координатъ. Это значитъ, что она занимаетъ относительно этихъ двухъ осей совершенно опредѣленное и намъ извѣстное положеніе. Пусть OX и OY данныя оси координатъ. Пусть AB часть разсматриваемой кривой. Тогда каждая

точка этой кривой будет иметь свои определенныя коор-
динаты, напр. точка M имеетъ координаты: $x = OP$ $y = MP$.



черт. 49.

Найдемъ координаты и прочихъ точекъ кривой AB.

M' ..... $x = OP'$; $y = M'P'$

M'' ..... $x = OP''$; $y = MP''$. и т.д.

Вообразимъ далѣе, что нѣкоторая перемѣщающаяся точка, координаты которой будутъ означены черезъ x и y, движется по плоскости и описываетъ кривую AB отъ A къ B послѣдовательно переходя черезъ точки M, M', M'', ... Ея координаты при этомъ будутъ мѣняться, но измѣняться такимъ образомъ, что всякому опредѣленному значенію x^a будетъ соотвѣтствовать совершенно опредѣленная величина y, такъ что,

Когда $x = OP'$, то $y = M'P'$

$x = OP''$, „ $y = M''P''$ и т.д.

Отсюда заключаемъ, что эти двѣ перемѣнныя величины x и y будутъ состоять между собою въ нѣкоторой зависимости и притомъ въ зависимости такого рода, что когда x будетъ принимать какое нибудь опредѣленное значеніе, то y получитъ также вполнѣ опредѣленное соотвѣтствующее значеніе. Словомъ x и y должны быть связаны между собою посредствомъ нѣкотораго уравненія, которое должно дать величину $y^{ка}$, когда $x^{ц}$ будетъ дано какое либо частное значеніе. Это уравненіе, связывающее перемѣнныя координаты x и y произвольной точки кривой, называется Уравненіемъ кривой линіи.

Листъ 8-й.

Этому уравнению должны удовлетворять координаты всякой точки, взятой на кривой. Координаты x и y произвольной точки кривой называются текущими координатами, въ отличіе отъ координатъ какой нибудь опредѣленной точки, имѣющихъ вполнѣ опредѣленныя значенія.

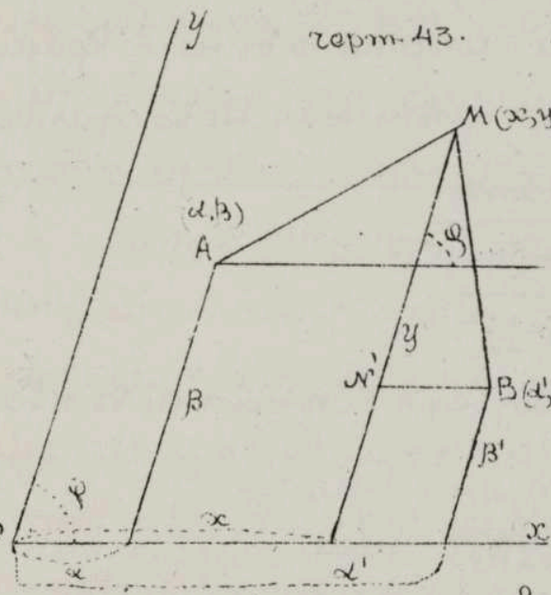
Изъ приведеннаго выше разсужденія должно быть ясно, что для всякой данной кривой линіи, отнесенной къ осямъ координатъ, существуетъ уравненіе, связывающее координаты x и y произвольной ея точки, но это уравненіе намъ неизвѣстно и оно должно быть составлено при помощи извѣстнаго намъ опредѣленія, какъ геометрическаго мѣста: составить уравненіе кривой, значитъ найти зависимость между координатами x и y произвольной ея точки; никакихъ прямыхъ и опредѣленныхъ указаній относительно того, какъ должно поступать при составленіи уравненія кривой – дать нельзя.

Приведемъ однако здѣсь слѣдующее общее заключеніе, которымъ должно при этомъ руководствоваться; для того, чтобы получить уравненіе кривой, должно на ней взять произвольную точку, обозначить ея координаты черезъ x и y и выразить для этой точки посредствомъ нѣкотораго равенства то геометрическое свойство, которое принадлежитъ всѣмъ точкамъ кривой и служитъ ей опредѣленіемъ, какъ геометрическаго мѣста.

Такимъ образомъ обыкновенно получится нѣкоторое уравненіе, въ которое необходимо войдутъ координаты x и y нѣкоторыя величины и если въ это уравненіе кромѣ перемѣнныхъ–

x и y других переменных входить не будетъ, то оно и представитъ намъ соотношеніе между координатами x и y для произвольной точки кривой, а потому будетъ уравненіе кривой. Если же въ него войдутъ кромѣ x и y другія величины, также переменныя, то ихъ надо исключить изъ равенства при помощи даннаго опредѣленія кривой и нѣкоторыхъ свойствъ разсматриваемаго чертежа. Пояснимъ это примѣрами:

Составить уравненіе геометрическаго мѣста точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ на плоскости. (черт. 43)



черт. 43.

Положимъ, что оси координатъ косоугольны. Пусть двѣ данныя точки будутъ A и B; положимъ, что координаты точки A будутъ α и β, а точки B – α', β'. Возмемъ произвольную точку геометрическаго мѣста, пусть она будетъ M и ея координаты (x, y); тогда основное свойство, служащее опредѣленіемъ разсматриваемаго геометрическаго мѣста, состоитъ въ томъ, что два разстоянія MA и MB должны быть равны между собою, т.е. $AM = BM$. Выразимъ AM и BM посредствомъ координатъ по формулѣ, опредѣляющей разстояніе между двумя точками. Будемъ искать изъ треугольника AMN:

$$AM^2 = AN^2 + MN^2 - 2AN \cdot MN \cos(180^\circ - \varphi) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\varphi.$$

точно также найдемъ величину BM. Но $AM = BM$, слѣдовательно

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\varphi = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + 2(x-\alpha')(y-\beta')\cos\varphi$$

или, раскрывая скобки и возводя в квадрат, получимъ:

$$x^2+\alpha^2-2x\alpha+y^2+\beta^2-2y\beta+2xy\cos\varphi-2x\beta\cos\varphi-2\alpha y\cos\varphi+2\alpha\beta\cos\varphi =$$
$$=x^2+\alpha'^2-2x\alpha'+y^2+\beta'^2-2y\beta'+2xy\cos\varphi-2x\beta'\cos\varphi-2\alpha' y\cos\varphi+2\alpha\beta'\cos\varphi$$

сокращаемъ и переносимъ члены, содержащіе x и y, въ первую часть уравненія, а несодержащіе во вторую:

$$-2x\alpha-2y\beta-2x\beta\cos\varphi+2x\alpha'+2y\beta'+2x\beta'\cos\varphi+2\alpha' y\cos\varphi-2\alpha y\cos\varphi =$$
$$=\alpha'^2+\beta'^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha'\beta'\cos\varphi-2\alpha\beta\cos\varphi, \text{ или}$$
$$2x\{\alpha'-\alpha+\cos\varphi(\beta'-\beta)\}+2y\{\beta'-\beta+\cos\varphi(\alpha'-\alpha)\}=\alpha'^2+\beta'^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha'\beta'\cos\varphi-2\alpha\beta\cos\varphi.$$

Это и есть уравненіе разсматриваемаго геометрическаго мѣста, ибо оно выражаетъ соотношеніе между перемѣнными координатами x и y произвольной точки мѣста и въ него кромѣ этихъ перемѣнныхъ x и y другихъ перемѣнныхъ не входитъ.

Въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ:

$$AM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}\ ;\ BM=\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2} \text{ и}$$
$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta)^2}$$

Это выраженіе можно упростить. Возведя обѣ части въ квадратъ, имѣемъ:

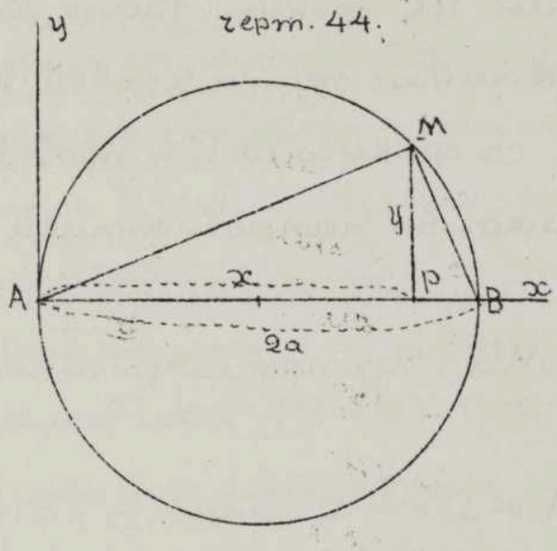
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2 \text{ или.}$$
$$x^2+\alpha^2-2x\alpha+y^2+\beta^2-2y\beta=x^2+\alpha'^2-2x\alpha'+y^2+\beta'^2-2y\beta'$$
$$2(\alpha'-\alpha)x+2(\beta'-\beta)y=\alpha'^2-\alpha^2+\beta'^2-\beta^2$$

Изъ этого примѣра видимъ, что для составленія уравненія намъ даже не нужно было знать, какая именно линія есть разсматриваемое геометрическое мѣсто, напр. въ разсматриваемомъ случаѣ намъ извѣстно, что геометрическое мѣсто есть прямая линія, но при составленіи уравненія мы не принимаемъ этого во вниманіе. Напротивъ того, какъ это мы увидимъ далѣе, по состав-

ленному уравнению можно будет узнавать какое рассматриваемое геометрическое место и какую именно линию, прямую или кривую, оно представляет.

Составить уравнение геометрического места точек вершин прямых углов прямоугольных треугольников, построенных на данной гипотенузе (круг). (фиг. 44)

Пусть данная гипотенуза есть AB и положим, что ее длина AB = 2a. Отнесем рассматриваемое геометрическое место к прямоугольным осям координат, причем примем точку A за начало, а линию ABX возьмем за ось $X^{ов}$; ось Y будет перпендикулярна к AB. Пусть M произвольная точка геометрического места; означим ее координаты через X и Y и построим их, причем X = AP, Y = MP. Чтобы выразить, что треугольник AMB есть прямоугольный, в котором AB есть гипотенуза, напишем по известной теореме, что перпендикуляр MP есть средняя пропорциональная величина между отрезками гипотенузы AP и BP, т.е. что $MP^2 = AP \cdot BP$



черт. 44.

В этом равенстве MP = y и AP = x, а BP = AB – AP = 2a – x

Вставив эти выражения в предыдущее равенство, получим:

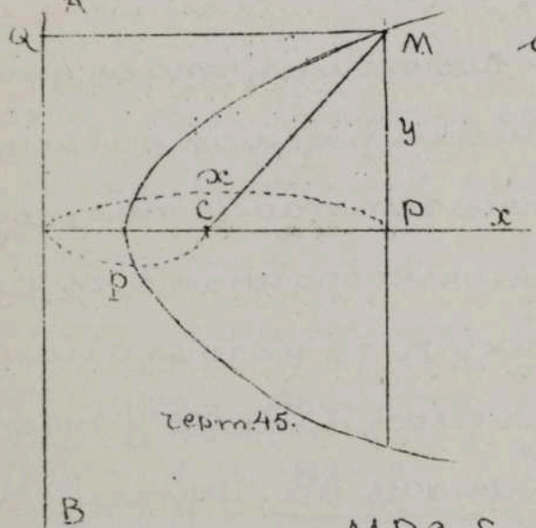
$$y^2 = x(2a - x) \text{ или } y^2 = 2ax - x^2$$

Это уравнение есть уравнение рассматриваемого геометрического места, потому что оно представляет зависимость

между координатами x и y произвольной его точки. Изъ извѣстно изъ геометріи, что разсматриваемое мѣсто есть кругъ, описанный на AB, какъ на гипотенузѣ, слѣдовательно послѣднее уравненіе, такъже, какъ и уравненіе предыдущаго примѣра, представляетъ кругъ, радіуса a.

Уравненіе параболы. (черт. 45).

Опредѣленіе этой кривой, какъ геометрическаго мѣста было дано выше. Пусть AB есть направляющая параболы и C - фокусъ. Точка, если M есть произвольная точка кривой, то, соединивъ ее съ фокусомъ C и проведя перпендикуляръ къ направляющей MQ мы должны имѣть по опредѣленію кривой MC = MQ. Изъ прямоугольнаго



черт. 45.

треугольника MPC будемъ имѣть:

$$MC = \sqrt{y^2 + (x-p)^2}\ ;\ MQ = DP = x \text{ или}$$

$$CM = MQ;\ \sqrt{y^2 + (x-p)^2} = x,\ \text{а } y^2 + (x-p)^2 = x^2$$

$$y^2 + x^2 - 2px + p^2 = x^2 \text{ или } y^2 = 2px - p^2$$

Это есть уравненіе параболы, которому будутъ удовлетворять координаты x и y всякой точки, взятой на параболѣ.

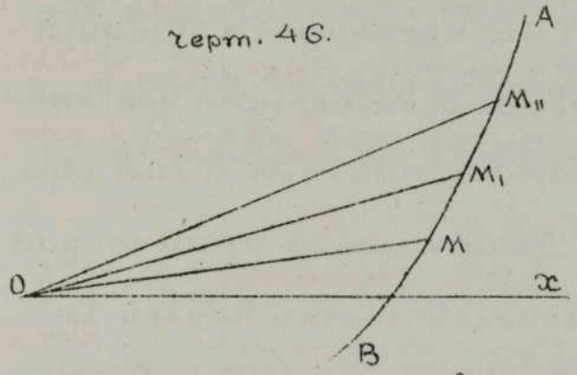
Координаты полярныя

Понятіе объ уравненіи линіи въ полярныхъ координатахъ.

Точки точки данной кривой линіи опредѣляются по полярнымъ координатамъ. Пусть AB нѣкоторая кривая линія

на плоскости (черт. 46). Возьмем на этой плоскости постоянную точку O и присвоим ей за полюс. Проведем определенную прямую OX и присвоим ей за полярную ось. Положим, что положение кривой AB относительно точки O и прямой OX вполне определено и нам известно. Тогда каждая точка кривой AB будет иметь свои определенные координаты. Тогда точка M, взятая на этой кривой будет определена полярным углом MOX и радиусом вектором OM. То же самое можно сказать относительно других точек M_1, M_{II}, M_{III} ... этой кривой. Вообразим далее перемещающуюся точку, которая движется по плоскости и описывает кривую AB. Переменные полярные координаты этой точки обозначим через (γ и Θ). При движении точки, ее координаты будут изменяться, но таким образом, что каждому определенному значению одной из них, напр. Θ, будет соответствовать совершенно определенное значение другой, напр. γ. Таким образом, когда $\Theta = \angle M_1OX$, то $\gamma = M_1O$ и т.д. Словом, каждому определенному значению Θ соответствует вполне определенное значение γ. Отсюда заключаем, что переменные γ и Θ должны быть связаны между собою некоторым уравнением, которое должно дать возможность определить величину γ, соответствующую определенным значениям, приписываемым переменному Θ.

черт. 46.

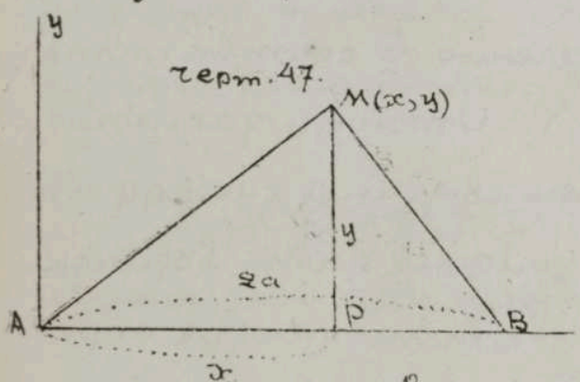


Уравнению этому должны удовлетворять полярныя координаты всякой точки кривой, оно называется полярнымъ уравненіемъ кривой и показываетъ связь, существующую между полярными координатами произвольной точки кривой. Координаты r и θ называются текущими координатами. Относительно составленія полярнаго уравненія данной кривой, нельзя дать никакихъ общихъ правилъ и мы ограничимся тѣмъ, что повторимъ прежнее замѣчаніе, а именно: для составленія уравненія должно для произвольной точки кривой выразить алгебраическимъ равенствомъ то основное свойство, которое по опредѣленію должно принадлежать всѣмъ точкамъ разсматриваемой кривой и если въ полученномъ уравненіи кромѣ перемѣнныхъ r и θ будутъ еще входить и другія перемѣнныя величины, то надо ихъ исключить помощію какихъ либо свойствъ разсматриваемой кривой, выводимыхъ изъ ея построенія.

Поясним сказанное примѣромъ:

Составить полярное уравненіе геометрическаго мѣста точекъ вершинъ прямыхъ угловъ прямоугольныхъ треугольниковъ, построенныхъ на общей гипотенузѣ. (черт. 47)

Мы знаемъ, что это геометрическое мѣсто есть кругъ, но при составленіи уравненія мы будемъ пользоваться только тѣмъ опредѣленіемъ, которое выражено заданіемъ. Пусть AB данная гипотенуза = 2a Примемъ точку A за полюсъ, а линію ABX за полярную ось и возьмемъ произвольную точку M разсматрива-



черт. 47.

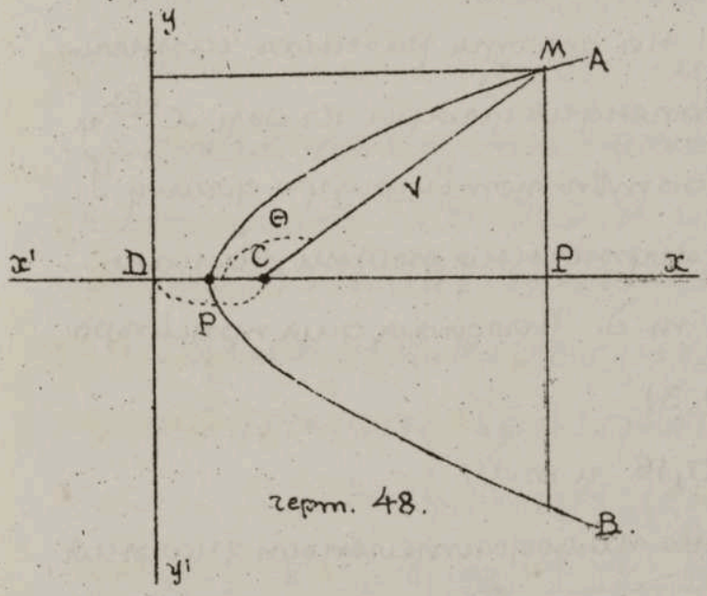
мого геометрического систа. Соединимъ эту точку съ A и B, ея полярныя координаты будутъ $AM=r$ и $\Theta=\angle MAB$. Намъ надо выразить, что треугольникъ MAB прямоугольный. Для этого только стоитъ написать какое нибудь равенство относительно прямоугольнаго треугольника, его характеризующее, напр:

$$r=2a\cdot\cos\Theta.$$

Это уравненіе выражаетъ зависимость между перемѣнными координатами r и Θ произвольной точки систа, а потому оно есть полярное уравненіе круга.

Полярное уравненіе параболы. (черт. 48)

Пусть C — фокусъ параболы и AB ея направляющая. Линія DCx, проведенная перпендикулярно къ AB, будетъ полярною осью; полюсъ эіе возмемъ въ фокусѣ C. Если M есть — произвольная точка параболы, то ея полярныя координаты $MC=r$, а $\angle MCx'=\Theta$. Полагая по предыдущему $DC=p$ мы имѣемъ по общему опредѣленію $MC=MQ$, но проведя Mp перпендикулярно Cx, мы имѣемъ:



черт. 48.

$$MQ=Dp=CD+Cp=p+r\cos(180^\circ-\Theta)$$

$$r=p-r\cos\Theta,\ \text{откуда}\ r=\frac{p}{1+\cos\Theta}.$$

Это есть полярное уравненіе параболы, такъ какъ оно выражаетъ зависимость между полярными координатами r и Θ произвольной точки кривой.

Замѣчаніе. При составленіи уравненія кривой всегда надо за—

имѣть къ какимъ координатамъ кривая отнесена, такъ какъ одна и та же кривая, отнесенная къ разнымъ координатамъ, какъ мы видѣли, выражается разными уравненіями.

Геометрическое значеніе уравненія съ двумя перемѣнными.

1, Координаты прямоугольныя.

Мы будемъ говорить объ одномъ какомъ нибудь уравненіи, напр. будемъ имѣть въ виду какое нибудь изъ слѣдующихъ уравненій, связывающихъ два перемѣнныя x и y:

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$x^2 - 2xy + x - y + 4 = 0$$

$$y = tg(a + x)$$

$$2x - 3y + 4 = 0.$$

Будемъ разсматривать перемѣнныя x и y, какъ координаты нѣкоторой точки на плоскости. Прежде всего замѣтимъ, что данное уравненіе неопредѣленное и имѣетъ поэтому безчисленное множество рѣшеній, т.е. существуетъ безчисленное множество паръ значеній x и y, удовлетворяющихъ разсматриваемому уравненію и что слѣдовательно можно найти безчисленное множество точекъ на плоскости, которыхъ координаты x и y будутъ удовлетворять этому уравненію. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ ось координатъ, дадимъ абсциссѣ x какое нибудь произвольное значеніе, напр. $x=a$. Вставивъ это значеніе x въ разсматриваемое уравненіе и найдемъ изъ него соотвѣтствующее значеніе y, положимъ $y=b$. Эти двѣ величины x и y, именно $(a$ и $b)$ во первыхъ удовлетворяютъ данному уравненію и во вторыхъ опредѣляютъ нѣкоторую точку

на плоскости. Пусть эта точка будет M. Таким образом мы нашли одну точку, координаты которой (a, b) удовлетворяют данному уравнению. Можно найти и другия такия точки. Сделав x равным другой произвольной величине, напр. $x = a'$ и вставив ее в рассматриваемое уравнение, определим из него опять соответствующее значение для y, получим напр. $y = b'$. Эти две величины a' и b' будут координатами x и y и дают другую точку M' на плоскости. Понятно, что таким образом можно будет построить сколько угодно точек M'', M'''..... которых координаты будут удовлетворять нашему рассматриваемому уравнению. Так положим, что:

при $x = a$ имеем $y = b$ и получим точку $M(a, b)$
" $x = a'$ " $y = b'$ " " $M'(a', b')$
" $x = a''$ " $y = b''$ " " $M''(a'', b'')$
. . . . . .

Словом, подобных точек, как M, M', M''.... можем найти бесчисленное множество и координатами x и y каждой из них данное уравнение удовлетворяться. Если теперь, вместо того, чтобы приписывать абсциссе x совершенно произвольныя значения, мы дадим ей ряд значений весьма близких одно от другого и вообразим именно, что ряд значений:

$$x = a, a', a'', a'''.....$$

есть ряд последовательных чисел, весьма мало одно от другого отличающихся, то и ряд соответствующих значений, полученных для y, т. е. ряд:

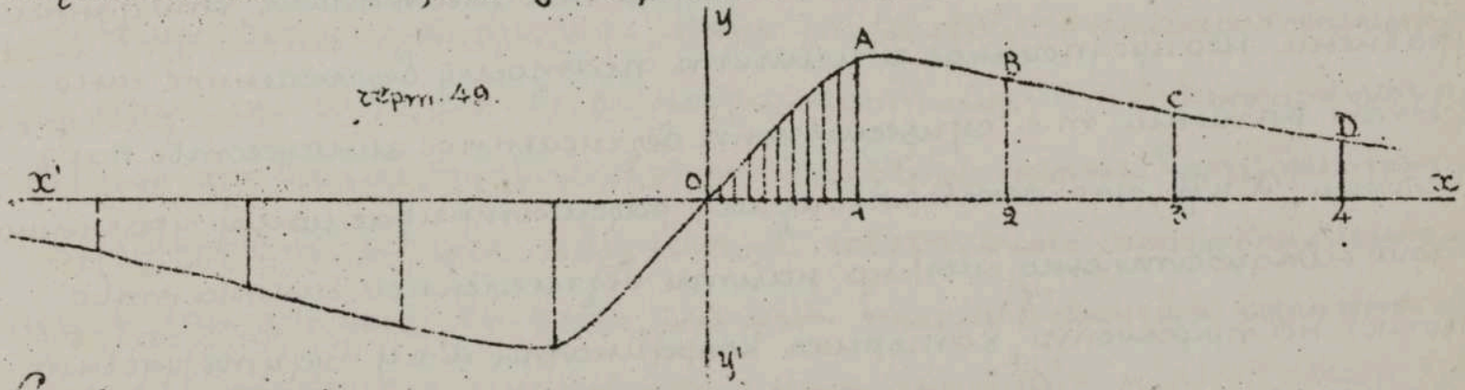
$$y = b, b', b'', b'''.....$$

будетъ также очевидно, рядомъ чиселъ весьма близкихъ одно отъ другаго; Вслѣдствіе чего послѣдовательныя точки M, M', M''.... вычисленныя будутъ расположены очень близко одна отъ другой. Мы можемъ сдѣлать ихъ еще болѣе близкими между собою, если только уменьшимъ еще болѣе промежутки, на которые измѣняется x при переходѣ изъ одного значенія въ другое послѣдующее. Такимъ образомъ мы видимъ, что возможно вообразить безчисленное множество точекъ, очень удобно близкихъ одна отъ другой и такихъ, что координаты каждой изъ нихъ будутъ удовлетворять данному уравненію. Если затѣмъ соединимъ всѣ эти точки послѣдовательно одною непрерывною чертою, то получимъ нѣкоторую кривую линію, эта кривая будетъ проходить черезъ всѣ точки плоскости, координаты которыхъ удовлетворяютъ данному уравненію и наоборотъ, координаты всякой точки, не взятой на этой кривой, не будутъ удовлетворять данному уравненію; кривая эта служитъ геометрическимъ представленіемъ даннаго уравненія, а данное уравненіе есть уравненіе кривой. Такимъ образомъ заключаемъ, что всякое уравненіе между перемѣнными x и y геометрически представляетъ кривую линію на плоскости. Изъ изложеннаго выше видимъ при томъ, какъ надо поступать—для того, чтобы построить по точкамъ кривую линію, которой уравненіе дано, т. е. какъ можно опредѣлить сколько угодно точекъ, принадлежащихъ кривой и произвольно близкихъ одна къ другой. Въ примѣръ построенія кривой по точкамъ возьмемъ слѣдующее уравненіе: $y = \frac{x}{1+x^2}$. Проведемъ ось координатъ и будемъ давать x^y рядъ послѣдовательныхъ—

значений, вычисляя соответственные значения для y. Находимъ во-первыхъ, что при $x=0$ имѣемъ $y=0$, что даетъ точку O (черт. 49)

при $x=1$ имѣемъ $y=\frac{1}{2}$, что даетъ точку A
" $x=2$ " $y=\frac{2}{5}$ " B
" $x=3$ " $y=\frac{3}{10}$ " C
" $x=4$ " $y=\frac{4}{17}$ " D
" $x=5$ " $y=\frac{5}{26}$ " H
. . . . . .
" $x=10$ " $y=\frac{10}{101}$ . . . . . .
" $x=100$ " $y=\frac{100}{10001}$ . . . . . .
. . . . . .

Строимъ теперь эти точки. Мы видимъ, что кривая идетъ отъ точки A къ B, затѣмъ переходитъ отъ B къ C, къ D, къ H и т.д., причемъ все болѣе и болѣе приближается къ оси $x^{ов}$, такъ что когда возьмемъ $x=1000$, то $y=0{,}000001$ и т.д.



черт. 49.

Словомъ, съ увеличеніемъ x, y кривой приближается къ O, не нуля y никогда не достигаетъ, изъ чего видно, что кривая продолжается въ правую сторону въ безконечность, идетъ надъ осью $x^{об}$ и приближается къ ней неопредѣленно, никогда ее не встрѣчая. Такая линія, къ которой кривая неопредѣленно приближается, никогда её не встрѣчая, наз. ассимптотою, а полу-

здѣсь ось x есть ассимптота кривой. Чтобы форма кривой стала обозначалась явственнѣе, необходимо построить возможно большее число промежуточныхъ точекъ, лежащихъ между точками A и B, B и C и т.д. Сдѣлаемъ вычисленіе, опредѣляющее точки кривой, расположенныя между точками A и B. Находимъ послѣдовательно, что когда

$$x=\frac{1}{10},\ \text{то}\ y=\frac{10}{101}$$
$$x=\frac{2}{10}\ \text{"}\ y=\frac{20}{104}$$
$$x=\frac{3}{10}\ \text{"}\ y=\frac{30}{109}$$
$$x=\frac{4}{10}\ \text{"}\ y=\frac{40}{116}\ \text{и т.д.}$$

Такимъ образомъ мы получимъ еще промежуточныя точки. Для построенія ихъ раздѣлимъ OI на десять равныхъ частей и черезъ точки дѣленія проведемъ перпендикуляры къ оси x-овъ и на каждомъ изъ нихъ отложимъ соотвѣтствующую длину y. Далѣе сможемъ опредѣлить промежуточныя точки, расположенныя между B и C, между C и D и т.д. Полагая для примѣра

$$x=1{,}5,\ \text{найдемъ}\ y=0{,}31$$
$$x=2{,}5\ \text{"}\ y=0{,}16\ \text{и т.д.}$$

До сихъ поръ мы давали x-у только положительныя значенія, но можно ему также давать и отрицательныя, измѣняя его отъ 0 до $-\infty$. При этомъ замѣтимъ, что такъ какъ x въ данномъ уравненіи входитъ въ 1-ой степени, то при отрицательныхъ значеніяхъ x-а, y будетъ имѣть такія же величины, но только отрицательныя, напримѣръ:

$$\text{при}\ x=-1\ \text{найдемъ}\ y=-\frac{1}{2}$$
$$\text{"}\ x=-2\ \text{"}\ y=-\frac{2}{5}$$
$$x=-3\ \text{"}\ y=-\frac{3}{10}\ \text{и т.д.}$$

Вслѣдствіе чего въ углѣ y'Ox' кривая пойдетъ такъ же, какъ она расположена въ углѣ yOx.

Примѣръ 2-й. **Построить кривую, выражаемую уравненіемъ: $xy-4=0$.**

Опредѣлимъ отсюда y: $y=\frac{4}{x}$ и будемъ придавать x всевозможныя значенія отъ 0 до ∞. Тогда имѣемъ: (черт. 50)

при $x=0$, $y=\infty$

" $x=1$, $y=4$, что дастъ точку A.

" $x=2$, $y=2$ " B

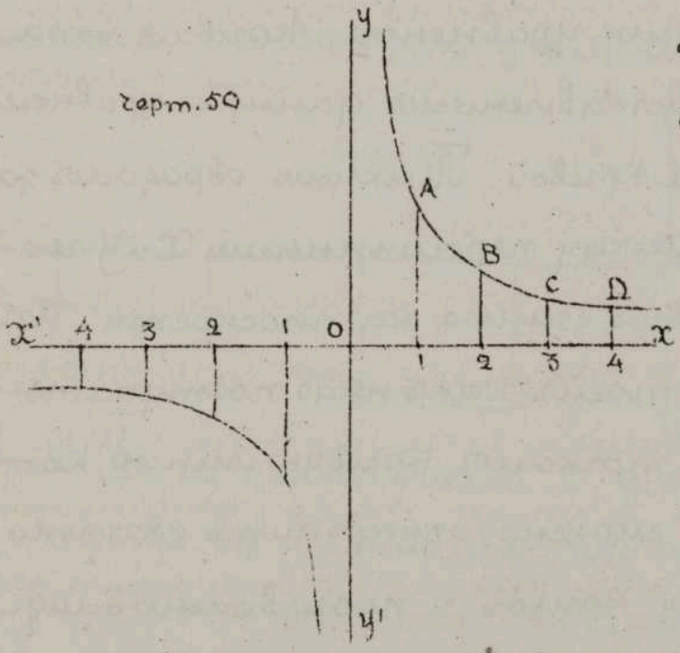
" $x=3$, $y=\frac{4}{3}$ " C

" $x=4$, $y=1$ " D

" $x=5$, $y=\frac{4}{5}$ " H

Строимъ теперь эти точки. Видимъ, что кривая идетъ изъ ∞ черезъ точку A, B, C, D, H и т.д., причемъ все болѣе и болѣе приближаясь къ оси x, но никогда ее не достигая, такъ что, когда возьмемъ:

черт. 50



$x=10$, то $y=\frac{2}{5}$

$x=100$ " $y=\frac{1}{25}$ и т.д.

т.е. съ увеличеніемъ x, y приближается къ 0, но никогда его недостигаетъ, вслѣдствіе чего и вѣтвь кривой идетъ въ бесконечность и ось x — ассимптота кривой. Для болѣе явственнаго обозначенія кривой, опредѣлимъ нѣсколько промежуточныхъ точекъ между 0 и 1. Находимъ, что

при $x=0{,}1$, $y=40$, $x=0{,}2$, $y=20$ и т.д.

Получили промежуточныя точки, которыя мы и опредѣляютъ кривую. Такимъ же точекъ можемъ построить между A и B, B и C и т.д.

Если x и y будемъ приписывать отрицательныя величины, измѣняя его отъ 0 до $-\infty$, то и y будетъ получать тѣже значенія, но только отрицательныя, такъ какъ x входятъ въ уравненіе въ 1ой степени. Отсюда слѣдуетъ, что кривая въ углѣ y'Ox' будетъ такого же расположенія, какъ и въ углѣ xOy. Эта кривая, состоящая изъ двухъ безконечно малыхъ вѣтвей, наз. гиперболой.

2. Координаты полярныя.

Вообразимъ какое угодно уравненіе между двумя перемѣнными r и θ, которыя пусть будутъ полярными координатами нѣкоторой точки на плоскости, напр:

$$r = a\theta \;,\; r = a(1-\cos\theta) \;,\; r = 2+3\cos 2\theta \text{ и т.д.}$$

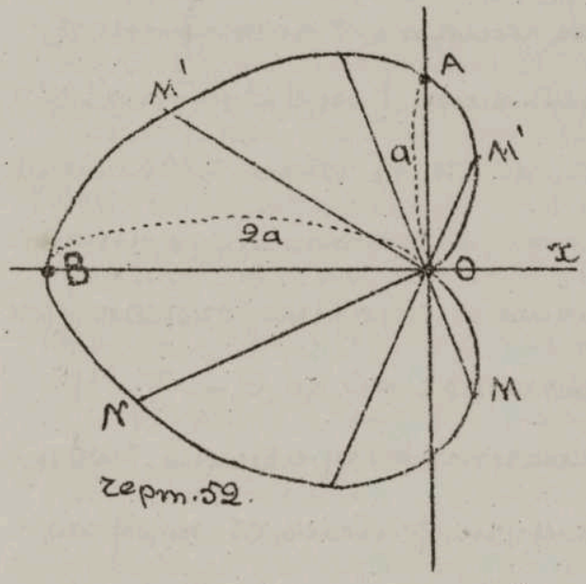
Разсматриваемое нами уравненіе будетъ неопредѣленное и потому можно найти безчисленное множество значеній для r и θ, удовлетворяющихъ этому уравненію. Иначе говоря, можно найти на плоскости безчисленное множество точекъ, которыхъ полярныя координаты будутъ удовлетворять данному уравненію. Для этого одному изъ перемѣнныхъ, напр. θ, приписываютъ совершенно опредѣленныя значенія: $\alpha, \alpha', \alpha''$ и т.д. (черт. 51) и изъ разсматриваемаго уравненія опредѣляютъ соотвѣтствующія значенія r. Пусть они будутъ: β, β', β'' и т.д. Тогда каждая пара соотвѣтственныхъ значеній для θ и r, напр. $(\alpha$ и $\beta)$, $(\alpha'$ и $\beta')$ ..... дастъ точку на плоскости. Пусть O есть полюсъ, а Ox – полярная ось. При $\theta = \alpha$ имѣемъ $r = \beta$, что дастъ

точку $M(\alpha, \beta)$

при $\theta = \alpha'$ имѣемъ $r = \beta'$, что даетъ точку $M'(\alpha', \beta')$

" $\theta = \alpha''$ " " $r = \beta''$, $M''(\alpha'', \beta'')$

. . . . . и т.д.

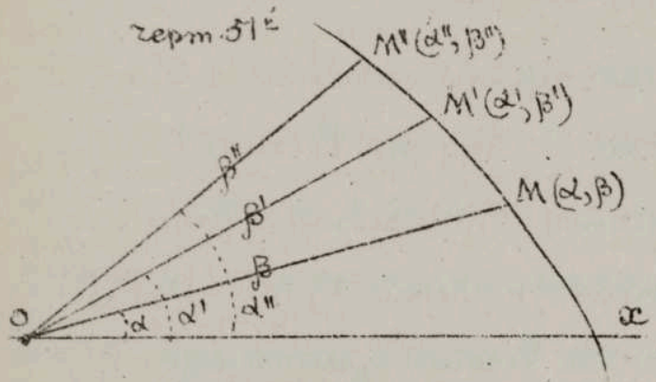


черт. 52.

Если значенія, принисываемыя θ, т.е. числа $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ будутъ весьма близки одно къ другому, то очевидно, что и соотвѣтственныя значенія r, т.е. $\beta, \beta', \beta'' \ldots$ будутъ также весьма близки одно къ другому, а потому мы получимъ на плоскости точки M, M', M'' и т.д. весьма близкія одна къ другой. Притомъ мы можемъ представить эти точки сколь угодно близкими между собою, для чего мы должны будемъ еще болѣе уменьшать промежутки между числами $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ Соединяя полученныя точки непрерывною чертою, мы получимъ кривую линію. Эта кривая будетъ проходить черезъ всѣ точки плоскости, которыхъ полярныя координаты удовлетворяютъ данному уравненію, которое называется полярнымъ уравненіемъ кривой, и обратно, координаты всякой точки, взятой на этой кривой будутъ удовлетворять данному уравненію и кривая въ этомъ случаѣ есть геометрическое представленіе даннаго уравненія.

Построимъ, напримѣръ, кривую, представляемую уравненіемъ: $r = a(1 - \cos\theta)$. Пусть (черт. 52) O-полюсъ и Ox — полярная ось. При $\theta = 0$, $r = 0$ и кривая начинается въ точкѣ O — полюсъ. Если θ увеличивается, то $\cos\theta$ уменьшается и r увеличивается. —

Дойдя до $\Theta = \frac{\pi}{2}$, получимъ $\gamma = a$, что дастъ точку A. Если Θ увеличивается далѣе то cos будетъ во второй четверти, почему будетъ отрицательнымъ, вслѣдствіе чего будетъ уменьшаться и мы будемъ имѣть γ постоянно увеличивающимся. Когда $\Theta = \pi$, то $\gamma = 2a$, что дастъ точку B. Построимъ эти точки. Теперь, вмѣсто того, чтобы Θ увеличивать далѣе, будемъ приписывать ему отрицательныя величины отъ $\Theta = 0$ до $\Theta = -\pi$. При этомъ замѣтимъ, что такъ какъ Θ входитъ въ уравненіе подъ знакомъ cos-инуса, а cos отрицательной дуги равенъ cos-инусу положительной дуги, то слѣдовательно, при измѣненіи Θ отъ 0 до $-\pi$ радіусъ векторъ γ будетъ получать тѣ-же самыя величины, какъ и при измѣненіи Θ отъ 0 до π. Отсюда заключаемъ, что внизъ отъ полюса и полярной оси OX, кривая будетъ расположена такъ-же, какъ и кверху отъ полярной оси OX. Другихъ точекъ у кривой не будетъ, такъ какъ cos. будетъ получать одни и тѣ-же величины. Эта кривая называется Кардіоида.



Предметъ аналитической геометріи и способы изслѣдованія, ею употребляемые.

Въ начальной геометріи изучаются только тѣ формы протяженія, которыя могутъ быть измѣряемы помощію циркуля и линейки. Такъ, въ планиметріи разсматриваются только 2 простыхъ линіи: прямая и окружность круга и только такія фигуры, которыя происходятъ отъ сочетанія этихъ

двухъ простѣйшихъ линій.

Въ Аналитической геометріи при изученіи линій на плоскости не ограничиваются прямою и кругомъ; здѣсь всякая кривая линія, опредѣленная какъ геометрическое мѣсто точекъ можетъ быть предметомъ изслѣдованія.

Для того, чтобы изслѣдовать опредѣленную такимъ образомъ кривую и открыть ея различныя свойства, въ аналитической геометріи составляютъ ея уравненіе. Уравненіе это, показывая зависимость, существующую между координатами всякой точки, взятой на кривой линіи, выражаетъ законъ теченія кривой. Вмѣсто разсмотрѣнія самой кривой линіи на чертежѣ, изучаютъ ея уравненіе и изслѣдуютъ его различныя формы, при этомъ всякое свойство, принадлежащее уравненію кривой выражаетъ собою нѣкоторое геометрическое свойство самой кривой линіи. Всякое преобразованіе, приложенное къ уравненію, даетъ соотвѣтствующее ему построеніе, относящееся къ кривой линіи, изображенной на чертежѣ. Такимъ образомъ въ аналитической геометріи изслѣдованіе свойствъ кривой линіи сводится къ изученію свойствъ ея уравненія. Изслѣдованіе кривыхъ линій ведется чисто аналитическимъ путемъ, причемъ, собственно говоря, нѣтъ необходимости прибѣгать къ помощи чертежа и если мы тѣмъ не менѣе нерѣдко будемъ обращаться къ чертежу, то только для того, чтобы облегчить себѣ работу воображенія или для того, чтобы сократить нѣкоторые выводы.

Необходимо прибавить однако, что если бы всякая кривая линія должна была бы быть опредѣлена, какъ геометрическое

мьста, то числа кривыхъ, подлежащихъ изученію было бы по необходимости ограничено и мы должны бы были изучать кривыя линіи по мѣрѣ того, какъ онѣ встрѣчались бы намъ въ различныхъ вопросахъ и приложеніяхъ математики. Но мы знаемъ, что всякое произвольно написанное уравненіе съ двумя перемѣнными x и y или r и θ представляютъ нѣкоторую кривую линію и такъ какъ число всевозможныхъ уравненій безконечно, то заключаемъ, что число кривыхъ линій, которыя могутъ быть разсматриваемы въ аналитической геометріи также безконечно. Чтобы установить нѣкоторый порядокъ въ изученіи безчисленнаго множества кривыхъ линій, намъ необходимо будетъ раздѣлить ихъ на классы по видамъ ихъ уравненій. Чѣмъ сложнѣе уравненіе кривой, тѣмъ, понятно, будетъ труднѣе его изслѣдовать и тѣмъ сложнѣе будетъ, вообще говоря и форма кривой, представляемой этимъ уравненіемъ. Простѣйшими линіями и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе важными для приложенія математики окажутся тѣ, которыя выразятся уравненіями первой и второй степени между прямолинейными координатами x и y. Изученію этихъ то линій, называемыхъ линіями перваго и второго порядка, мы и посвятимъ главнымъ образомъ нашъ Курсъ. Кромѣ этихъ линій мы будемъ впослѣдствіи разсматривать еще и другія кривыя линіи, представляющія нѣкоторыя важности для прикладныхъ частей математики.

И такъ предметъ аналитической геометріи на плоскости состоитъ въ изслѣдованіи свойствъ различныхъ плоскихъ кривыхъ линій, причемъ самое изслѣдованіе ведется путемъ аналитическимъ помощію уравненій, представляющихъ эти линіи.

Въ аналитической геометріи на плоскости ищутъ три главныхъ вопроса: найти уравненіе линіи, заданной какъ геометрическое мѣсто, построить кривую линію, выражаемую данныхъ уравненіемъ и наконецъ, найти соотношеніе, существующее между геометрическими свойствами фигуры и аналитическими свойствами уравненій.
Употребленіе координатъ для опредѣленія положенія точки на плоскости, а также способъ для выраженія кривыхъ линій посредствомъ уравненій былъ указанъ знаменитымъ французскимъ философомъ и геометромъ Декартомъ и геометрія иногда называется геометріей Декарта - Картезіанской геометріей. Сочиненіе первое вышло въ 1637 году. -

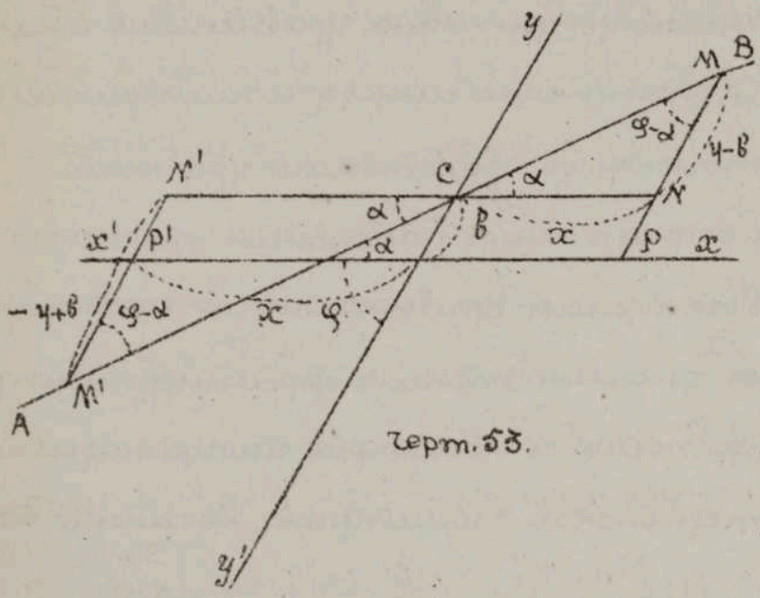
Простѣйшія ур-ія прямой линіи, параболы, эллипса и гиперболы въ прямолинейныхъ координатахъ.

Уравненіе прямой линіи

1, Координаты косоугольныя. (черт. 53)

Разсмотримъ произвольную прямую AB, отнесенную къ даннымъ косоугольнымъ осямъ Координатъ. Положеніе прямой AB относительно осей опредѣляется слѣдующими двумя величинами: 1, угломъ α, который прямая дѣлаетъ съ осью x и 2, отрѣзкомъ OC, который она дѣлаетъ на оси ординатъ. Уголъ α для различныхъ прямыхъ можетъ имѣть различныя значенія отъ 0 до 360°. Отрѣзокъ на оси ординатъ OC можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ. Величину этого отрѣзка съ его знакомъ будемъ означать черезъ b. Составить уравненіе прямой, значитъ найти соотношеніе между координатами x и y.

произвольной ея точки. Возьмемъ произвольную точку M на этой прямой, пусть ея координаты будутъ x и y. Построивъ ихъ, проведемъ черезъ точку C линію, параллельную оси x-овъ



черт. 53.

Изъ Δ-ка MCN, гдѣ $\angle C = \angle\alpha$, $\angle CMN = \angle MCy = \angle\varphi - \alpha$, имѣемъ:

$MC : CN = \sin\alpha : \sin(\varphi-\alpha)$ или $y-b : x = \sin\alpha : \sin(\varphi-\alpha)$

откуда $y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}x + b$

Это и есть уравненіе прямой. Обозначивъ $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = a$, гдѣ a есть постоянная величина, зависящая только отъ $\angle\alpha$ и называется угловымъ коэффиціентомъ прямой, получимъ уравненіе вида:

$$y = ax + b,$$

которое и есть уравненіе прямой. Найденное нами соотношеніе существуетъ въ томъ же самомъ видѣ для координатъ x и y всякой точки прямой. Напр. возьмемъ точку M' и обозначимъ попрежнему ея координаты черезъ x и y. Построивъ ихъ, дѣлаемъ то-же построеніе, какъ и при точкѣ M. Имѣемъ:

$x = -OP'$, $y = -M'P'$, откуда $OP' = -x$ и $M'P' = -y$.

Разсмотримъ треугольникъ $M'CN'$. Мы можемъ написать:

$$M'N' : CN' = \sin\alpha : \sin(\varphi-\alpha)$$

но $M'N' = M'P' + P'N' = M'P' + b = -y + b$ и $CN' = -x$.

Подставивъ найденныя величины въ данную пропорцію, имѣемъ: $-y+b : -x = \sin\alpha : \sin(\varphi-\alpha)$, или умноживъ 1-ю часть на -1, имѣемъ $y-b : x = a$, откуда $y = ax + b$. Получили то-же самое уравненіе. Замѣтимъ, что при составленіи уравненія прямой

мы брали $\angle\alpha < \angle\varphi$ и отрицательных. Но уравнение прямой получится одно и то же при каком бы то ни было α и при всяком b. Действительно, пусть $b = -oc$, откуда $oc = -b$. Взяв произвольную точку M, построим ее координаты x и y. Будем поступать здесь также, как и прежде. Из треугольника MCN (черт. 54) имеем:

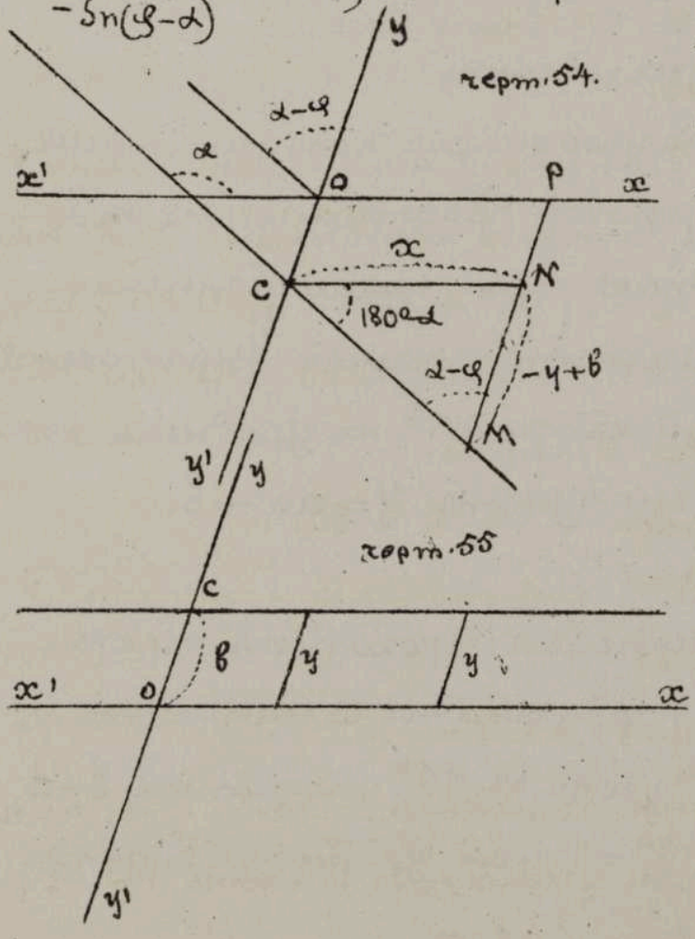
$$MN : NC = Sn(180-\alpha) : Sn(\alpha-\varphi), \text{ но}$$

$$MN = MP - NP = MP - OC = -y-(-b) = -y+b \text{ и } CN = OP = x$$

имеем: $$-y+b : x = Sn(180-\alpha) : Sn(\varphi-\alpha)$$

или умножив числителя и знаменателя первой части на -1, имеем: $y-b : -x = Sn\alpha : Sn(\alpha-\varphi)$ но $Sn\alpha : Sn(\alpha-\varphi) = -\frac{Sn\alpha}{Sn(\varphi-\alpha)} =$

$= \frac{Sn\alpha}{-Sn(\varphi-\alpha)} = -a$, то следовательно $\frac{y-b}{-x} = -a$, откуда $y = ax + b$.



черт. 54.

черт. 55

Рассмотрим некоторые частные случаи:

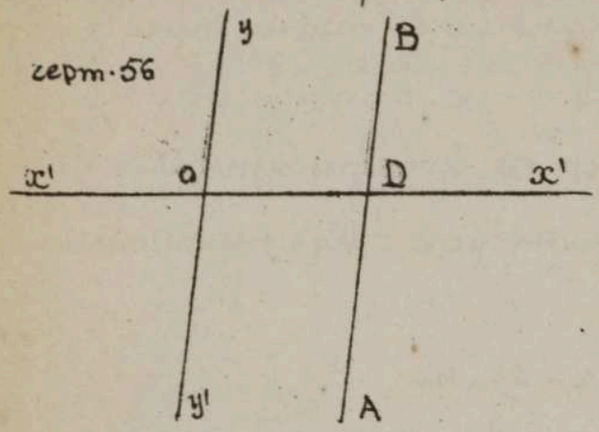
1, Если прямая проходит через начало координат, тогда ее отрезок $b=0$ и ее уравнение $y=ax$.

2., Если прямая параллельна оси абсцисс (черт. 55), тогда ее $\angle\alpha = 0$ и $Sn\alpha = 0$ и следовательно угловой коэффициент $a=0$ и ее уравнение: $y=b$.

3, Если прямая совпадает с осью $x^{ов}$, то $b=0$ и уравнение оси $x^{ов}$ $y=0$

Выведенные нами уравнения прямой не смогут однако предс-

тавить линію, параллельной оси y. Для такой прямой $\angle\alpha = \angle\varphi$ и $\sin(\varphi - \alpha) = 0$, вслѣдствіе чего и $a = \infty$ и необходимо, чтобы $x = 0$, т.е. кривая совпадаетъ съ осью $y^{ов}$. Если при $a = \infty$ и $b = \infty$, то данное уравненіе получитъ неопредѣленную форму. Въ этомъ случаѣ уравненіе прямой получится непосредственно изъ чертежа: Пусть (черт. 56) $OD = c$. Тогда для всѣхъ точекъ прямой (оси $y^{ов}$ параллельной) $x = c$. Это и есть уравненіе прямой, параллельной оси $y^{ов}$. Если при этомъ $c = 0$, то прямая совпадаетъ съ осью $y^{ов}$. Поэтому уравненіе оси $y^{ов}$ будетъ $x = 0$.

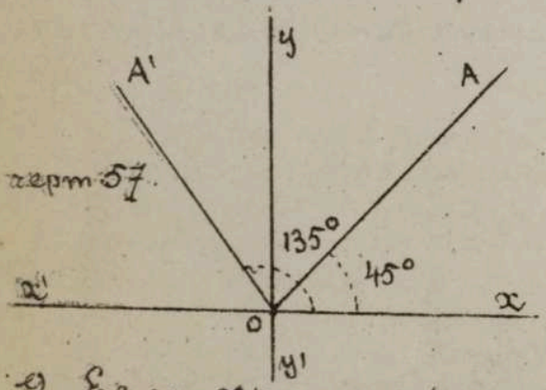


черт. 56

Координаты прямоугольныя.

Если прямая отнесена къ прямоугольнымъ координатамъ, то $\angle\varphi = 90°$. Въ этомъ случаѣ угловой коэффиціентъ прямой $a = \frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. Итакъ при прямоугольныхъ координатахъ угловой коэффиціентъ прямой выражается tg-омъ угла наклоненія прямой къ оси $x^{ов}$, но уравненіе прямой сохранитъ прежній видъ и оно будетъ $y = ax + b$.

Частные случаи:



черт. 57

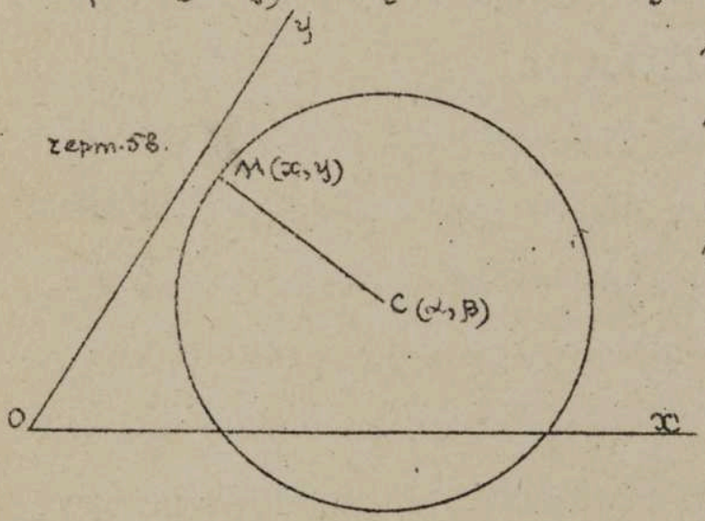
1, Если прямая проходитъ черезъ начало координатъ O и идетъ съ осью $x^{ов}$ уголъ въ 45°, то для нея $b = 0$, и $a = \operatorname{tg} 45° = 1$ и ея уравненіе будетъ $y = x$.

2, Если прямая (черт. 57) проходитъ черезъ начало координатъ O

О и дѣлаетъ съ осью $x^{ов}$ уголъ въ $135°$, то для нея $b=0$, а $a=tg\,135°=-1$
Поэтому ея уравненіе: $y=-x$.

Уравненіе круга.

Самое общее уравненіе круга получается тогда, когда предположимъ оси координатъ косоугольными и возьмемъ центръ круга въ произвольной точкѣ плоскости. Положеніе круга будетъ совершенно опредѣлено, если даны координаты его центра и величина его радіуса. Пусть (черт. 58) координаты центра C будутъ $(\alpha$ и $\beta)$ и радіусъ круга $= R$. Возьмемъ на кругѣ произвольную точку M, координаты которой (x, y). Возьмемъ по извѣстной намъ формулѣ квадратъ разстоянія точки отъ центра C, будемъ имѣть:



черт. 58.

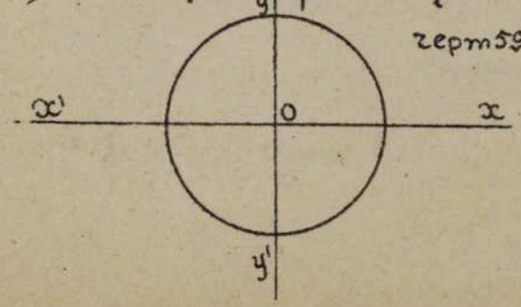
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\varphi=R^2$$

Этотъ квадратъ разстоянія имѣетъ величину постоянную и всегда должен быть равенъ R^2. Это самое общее уравненіе круга. Кругъ чаще приходится разсматривать при прямоугольныхъ осяхъ координатъ.

Если оси координатъ прямоугольны, то $\varphi=90°$ и $\cos\varphi=0$ и потому уравненіе круга будетъ: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$.

Нѣкоторыя частныя положенія круга.

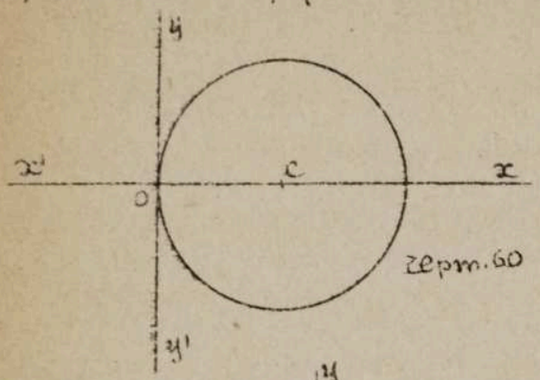
1) Положимъ, что центръ круга находится въ началѣ координатъ (черт. 59). Въ такомъ случаѣ имѣемъ: $\alpha=0$ и $\beta=0$ и уравненіе круга будетъ.



черт. 59.

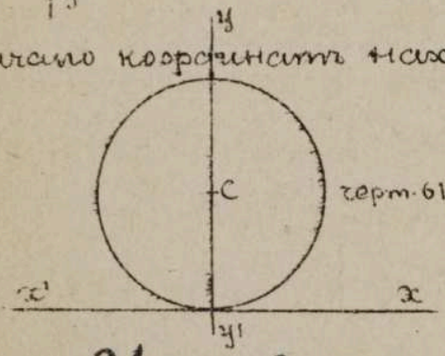
$$x^2+y^2=R^2.$$

2, Начало координат находится на окружности (черт. 60), а за ось x-ов взять диаметр, проходящий через эту точку. В этом случае имеем координаты центра $\alpha = R$ и $\beta = 0$, а потому уравнение круга будет $(x-R)^2+y^2=R^2$ или по упрощении $x^2+y^2=2Rx$.



черт. 60

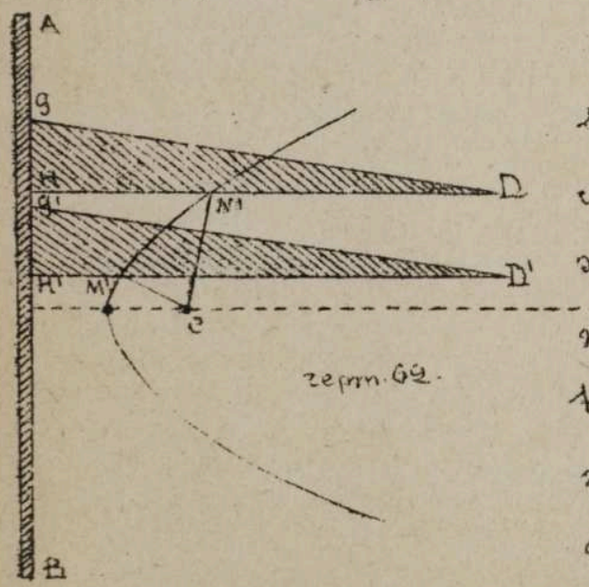
3, Начало координат находится на окружности (черт. 61), а за ось ординат взять диаметр, проходящий через эту точку. В этом случае имеем: $\alpha = 0$ и $\beta = R$ и уравнение круга будет: $x^2+(y-R)^2=R^2$ или $(x^2+y^2=2yR)$.



черт. 61

Уравнение параболы

Определение параболы, как геометрического места точек, уже было дано. Было указано также, как можно построить параболу по точкам. Параболу можно сверх того начертить непрерывным движением. Пусть AB (черт. 62) будет направляющая, а C - фокус параболы. Приложим ребро линейки к направляющей AB и укрепим линейку неподвижно в этом положении. К ребру линейки приложим прямоугольный треугольник, катет которого DH может свободно скользить по линейке. Возьмем нить, длина которой была бы равна другому катету DH и один из концов этой нити укрепим неподвижно в фокусе C, другой же конец прикрепим к вершине

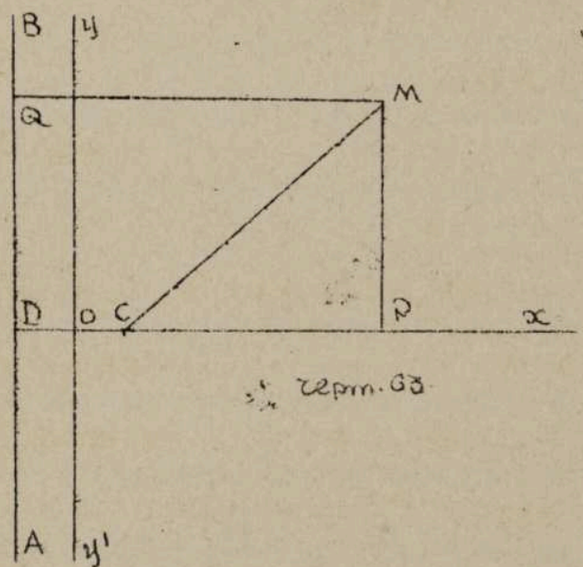


черт. 62.

D треугольника. Перемѣщая затѣмъ треугольникъ по линейкѣ, будемъ натягивать нить посредствомъ карандаша, прижимая остріе карандаша къ катету HD. Остріе будетъ очевидно описывать дугу параболы. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ треугольникъ въ какомъ нибудь положеніи, напр. H'g'D', тогда нить приметъ форму ломаной линіи D'M'C и остріе карандаша, ее натягивающее, будетъ находиться въ точкѣ M'. Легко видѣть, что точка M' принадлежитъ параболѣ, такъ какъ ея разстоянія отъ направляющей и отъ фокуса равны:

$$M'C = (D'M' + M'C) - D'M' = D'H' - D'M' = M'H'.$$

Перевернувъ треугольникъ и снова прижавъ катетъ Hg къ направляющей мы, очевидно, сможемъ такимъ же способомъ начертить и другую половину параболы. Составимъ теперь уравненіе параболы. Пусть AB (черт. 63) направленіе направляющей параболы и точка C ея фокусъ. Тогда, если M есть произвольная точка кривой, то соединивъ ее съ фокусомъ и проведя перпендикуляръ къ направляющей MQ, мы должны имѣть по опредѣленію параболы: MC = MQ. Изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на направляющую AB. Мы знаемъ уже, что Dx есть ось кривой. Для полученія болѣе простого уравненія кривой, всегда бываетъ выгодно по причинамъ, о которыхъ мы узнаемъ вскорѣ, ея ось принять за одну изъ осей координатъ. Поэтому здѣсь линію Dx примемъ за ось абсциссъ. Раздѣлимъ линію DC пополамъ въ точкѣ O, такъ что будемъ имѣть OC = OD. Точка O есть, очевидно, точка



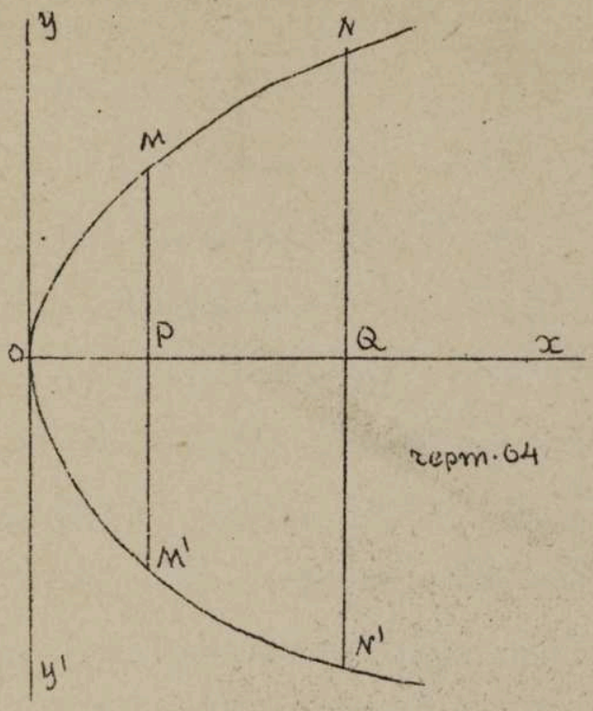
Черт. 63

параболы и притянем ее вершина. Мы примем точку O за начало прямоугольных осей координат. При таких образом выбранных осях координат получается самый простой вид уравнения параболы. Положим, что $CD = p$, тогда $OC = OD = \frac{p}{2}$. Координаты произвольной точки M обозначим через (x, y), координаты фокуса C будут $(\frac{p}{2}, 0)$. По формуле, определяющей расстояние между двумя точками имеем: $MC = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$. С другой стороны $MQ = DP = x + \frac{p}{2}$ и по главному свойству параболы получим равенство: $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$. Это уравнение представляет соотношение между координатами x и y произвольной точки параболы, есть уравнение этой кривой. Его можно упростить, возведя обе части в квадрат: $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ или $y^2 = 2px$. Это есть уравнение параболы, отнесенной к вершине и оси. Коэффициент $2p$ есть данная величина и называется параметром кривой.

Исследование фигуры параболы по ее уравнению.

Было сказано: чтобы исследовать кривую линию, т.е. определить ее фигуру и размеры, а также ее положение на плоскости в аналитической геометрии достаточно иметь ее уравнение, по которому кривая может быть построена. Предположим потому, что нам неизвестна ни фигура, ни расположение параболы. Тогда, руководствуясь геометрическим определением кривой, мы могли бы все-таки составить ее уравнение. Возьмем прямоугольные оси координат OXY. Решим данное нам уравнение относительно y: $y^2 = 2px$; $y = \pm\sqrt{2px}$. Отсюда видно (черт. 64), что если положим $x = 0$, то $y = 0$. Следовательно наша кривая проходит через начало координат. Если возьмем $x < 0$, то y

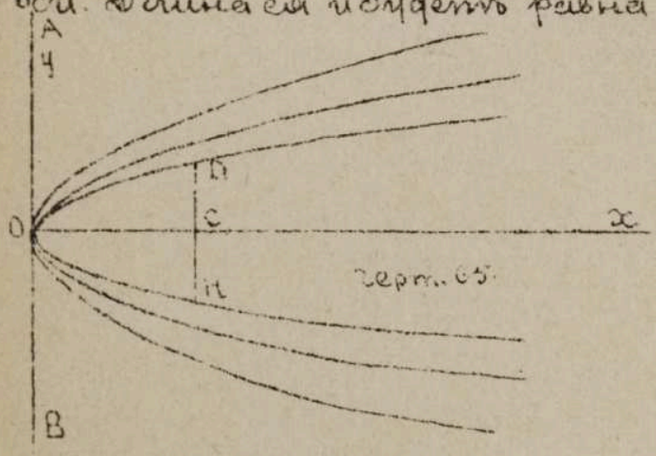
будет мнимое. Это значить, что по лѣвую сторону отъ Oy оси координатъ, точекъ не существуетъ. Будемъ полагать $x \geq 0$. Возьмемъ какое нибудь значеніе для x. Пусть напр. $x = OP$, тогда по данному уравненію мы получимъ соотвѣтствующую величину для y и ясно, что для y мы получимъ двѣ величины равныя и съ обратными знаками. Изъ этого мы заключимъ, что всѣ точки кривой, подобно точкамъ M и M' будутъ расположены симметрично относительно оси $x^{ов}$, а слѣдовательно ось $x^{ов}$ есть ось кривой. Вслѣдствіе этого достаточно разсмотрѣть часть кривой, находящуюся надъ осью $x^{ов}$, а нижняя вѣтвь можетъ быть построена прямо по симметріи ея относительно оси $x^{ов}$.



черт. 64

Для верхней части кривой будемъ имѣть: $y = +\sqrt{2px}$. Если отъ $x = 0$ будетъ x увеличиваться, тогда, очевидно, что y будетъ постоянно увеличиваться, это значитъ, что кривая отъ точки O идетъ въ правую сторону, постоянно поднимаясь надъ осью $x^{ов}$. Притомъ мы можемъ увеличивать x до $+\infty$, притомъ y будетъ всегда дѣйствителенъ и будетъ увеличиваться также до $+\infty$. Отсюда заключаемъ, что кривая имѣетъ одну непрерывную вѣтвь, которая, удаляясь отъ оси $x^{ов}$, простирается въ бесконечность. Если бы величина p была дана числомъ и если бы x^{y} мы стали приписывать на самомъ дѣлѣ числовыя значенія, то мы могли бы построить на чертежѣ сколько угодно

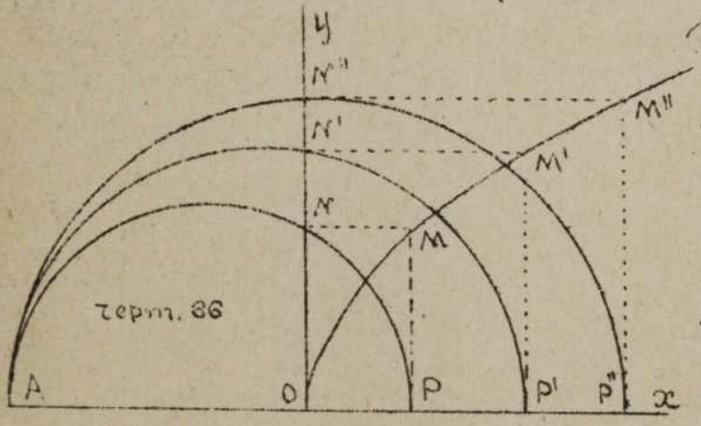
точек кривой. Соединивъ ихъ потомъ непрерывною чертою, мы получимъ вѣтвь параболы. Парабола имѣетъ менѣе или болѣе отверстіе смотря по величинѣ 2p. Чѣмъ больше 2p, тѣмъ быстрѣе растетъ y и слѣдовательно тѣмъ больше отверстіе параболы. Величина 2p опредѣляетъ поэтому родъ параболы. Когда парабола дана, тогда параметръ легко опредѣлить и построить. Для этого стоитъ только черезъ фокусъ параболы C провести хорду, перпендикулярную къ оси. Длина ея будетъ равна параметру. Пусть AB (черт. 65) направляющая. C – фокусъ. Мы знаемъ, что $CO = \frac{p}{2}$; $y = DC = \sqrt{2px} = \sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = p$; $DH = 2DC = 2p$, т.е. параметру параболы. Уравненіе $y = \sqrt{2px}$ называется уравненіемъ параболы, отнесенной къ вершинѣ и къ оси.



черт. 65.

Построеніе параболы по точкамъ, выводимое изъ ея уравненія.

Изъ уравненія параболы, отнесенной къ вершинѣ и къ оси вытекаетъ способъ построенія по точкамъ. (черт. 66). Уравненіе $y = \sqrt{2px}$ показываетъ, что каждая ордината есть величина средняя пропорціональная между постоянною длиною, равною 2p и абсциссою x. Отложимъ на оси OX въ отрицательную сторону длину OA = 2p. и взявъ затѣмъ произвольную абсциссу OP = x, мы на линіи AP, какъ на діаметрѣ опишемъ окруж-



черт. 66

ность, которая пересѣчетъ ось У въ точкѣ N. Затѣмъ, проведя въ точкѣ P перпендикуляръ къ оси $x^{ов}$, изъ точки N проведемъ еще параллель оси $X^{ов}$. Эта параллель пересѣчется съ перпендикуляромъ въ точкѣ M, которая будетъ принадлежать параболѣ. Въ самомъ дѣлѣ: въ Крив. ANP пол. вѣстной теоремы геометріи имѣемъ: $ON = MP = \sqrt{AO \cdot OP} = \sqrt{2px} = y$. Такъ какъ абсцисса $OP = x$ была взята произвольною, то повторяя всѣ построеніе при другихъ абсциссахъ, можно построить сколько угодно точекъ параболы произвольно близкихъ одна отъ другой. Для этого намъ надо будетъ описывать рѣзличныя окружности, центры которыхъ находились бы на Ax и которыя проходили бы черезъ точку A. Эти окружности пересѣкутъ ось $x^{ов}$ въ точкахъ P, P', P''... а ось $y^{ов}$ въ точкахъ N, N', N''.... Черезъ точки P, P', P''.... проведемъ перпендикуляры къ линіи Ox, а черезъ точки N, N', N''.... параллели той же оси. Точки пересѣченія M, M', M''.... будутъ точками параболы

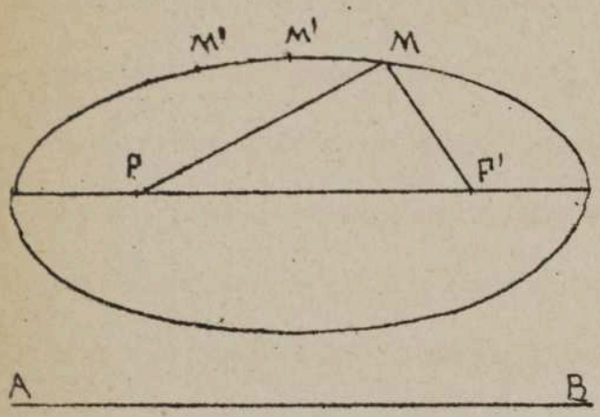
Эллипсъ, его построеніе и уравненіе.

Эллипсомъ называется кривая линія, представляющая геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ неподвижныхъ точекъ постоянна и равна данной длинѣ.

Двѣ постоянныя точки, которыя упомянаются въ опредѣленіи, называются фокусами эллипса. Для того, чтобы получить общее понятіе объ фигурѣ эллипса, мы укажемъ прежде всего, какъ можно начертить эту кривую непрерывнымъ движеніемъ карандаша. Пусть F' и F'' (черт. 67) суть два данные фокуса и AB данная длина равная 2a. Сумма разстояній каждой точки эллипса отъ двухъ

фокусах F и F' должна быть равна $2a$. Возьмем возможно тонкую и гибкую нерастягивающуюся нить, длина которой была бы равна $2a = AB$ и укрепим оба ее конца неподвижно в фокусах F и F'. Натянем эту нить карандашом так, чтобы она образовала треугольник FMF', причем острие карандаша будет находиться в точке M. Эта точка, очевидно будет принадлежать эллипсу, потому что сумма ее расстояний от двух фокусов, т.е. сумма $MF + MF'$ составляет полную длину нити и следовательно равна данной длине $2a$. Если теперь, удерживая нить в натянутом положении, будем двигать карандаш, то острие его будет очевидно описывать дугу эллипса $MM'M''\ldots$ и таким образом начертит эллипс. Из этого способа черчения эллипса можно усмотреть непосредственно, что эллипс есть непрерывная выпуклая и замкнутая кривая линия, похожая на круг более или менее растянутый. Ясно, что если расстояние между фокусами F и F' означить через $2c$, то необходимо должно быть $2c < 2a$, иначе эллипс был бы невозможен. При том очевидно, что фигура эллипса тем более будет растянутою, чем более будет $2c$ сравнительно с $2a$ или, все равно, чем ближе отношение этих длин, т.е. $\frac{c}{a}$ будет к единице. Напротив, чем менее будет $2c$ сравнительно с $2a$, т.е. чем менее будет правильная дробь $\frac{c}{a}$, тем ближе фигура эллипса будет подходить к фигуре круга. Когда, наконец, соединились оба

черт. 67.



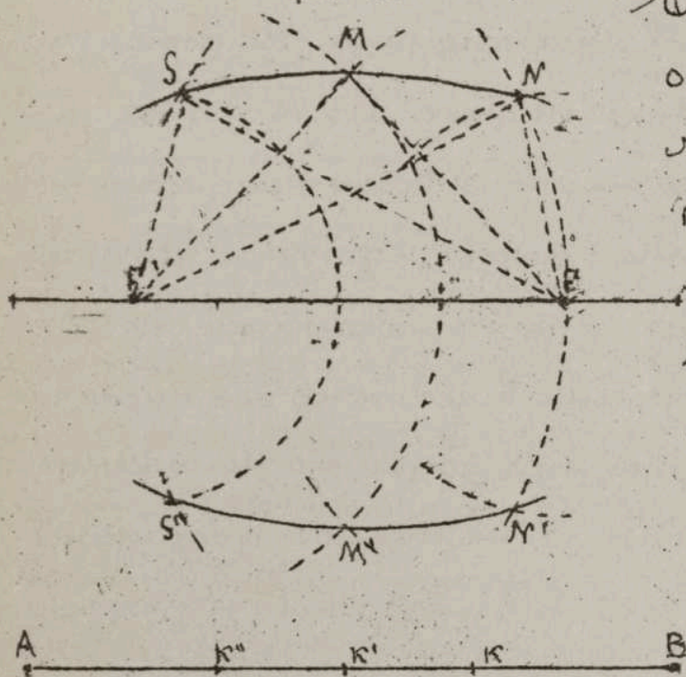
фокуса F и F' въ одну точку такъ, что будемъ имѣть $2c=0$ и такое отношеніе $\frac{c}{a}=0$, то эллипсъ, очевидно, обратится въ кругъ, радіуса a и точка, въ которой совмѣщаются оба фокуса будетъ центромъ круга.

Отношеніе двухъ длинъ $2c$ и $2a$, т.е. дробь $\frac{c}{a}$ есть число отвлеченное, всегда меньшее единицы, оно называется эксцентриситетомъ эллипса. По величинѣ эксцентриситета, какъ видимъ, можемъ судить о фигурѣ эллипса. Описанный способъ черченія эллипса непрерывнымъ движеніемъ карандаша употребляется въ разнаго рода искусствахъ и ремеслахъ, когда надо начертить эллипсъ наглазокъ. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда требуется большая точность и когда надо начертить эллипсъ на бумагѣ, употребляется другой способъ, который называется построеніемъ эллипса по точкамъ. Этотъ послѣдній способъ состоитъ въ геометрическомъ построеніи возможно большаго числа точекъ эллипса, весьма близко одну отъ другой расположенныхъ. Совокупность этихъ точекъ составитъ пунктирное изображеніе эллипса. Соединивъ эти точки послѣдовательно одною непрерывною чертою, мы получимъ непрерывную фигуру эллипса.

Приступая къ построенію эллипса по точкамъ, мы замѣтимъ вопервыхъ, что руководствуясь опредѣленіемъ этой кривой, мы можемъ построить сколько угодно точекъ, ей принадлежащихъ. Пусть F и F' два данныя фокуса (черт. 63) разстояніе между ними $FF'=2c$ и пусть $AB=2a$ есть данная сумма разстояній точекъ эллипса отъ двухъ данныхъ точекъ, называемыхъ фокусами. Возмемъ на линіи AB произвольную точку K изъ фокуса F' радіусомъ равнымъ BK, а изъ фокуса F радіусомъ равнымъ KA опишемъ двѣ окружности. Эти двѣ окружности пе-

ськаются въ двухъ точкахъ M и M', которыя, очевидно, будутъ принадлежать эллипсу, либо сумма ихъ разстояній отъ фокусовъ F и F' составляетъ 2a. Подобныхъ паръ точекъ, принадлежащихъ эллипсу, можно построить сколько угодно, такъ какъ для полученія другихъ паръ стоитъ только измѣнить величины двухъ радіусовъ окружностей, съ тѣмъ, чтобы ихъ сумма составила длину 2a.

фиг. 68

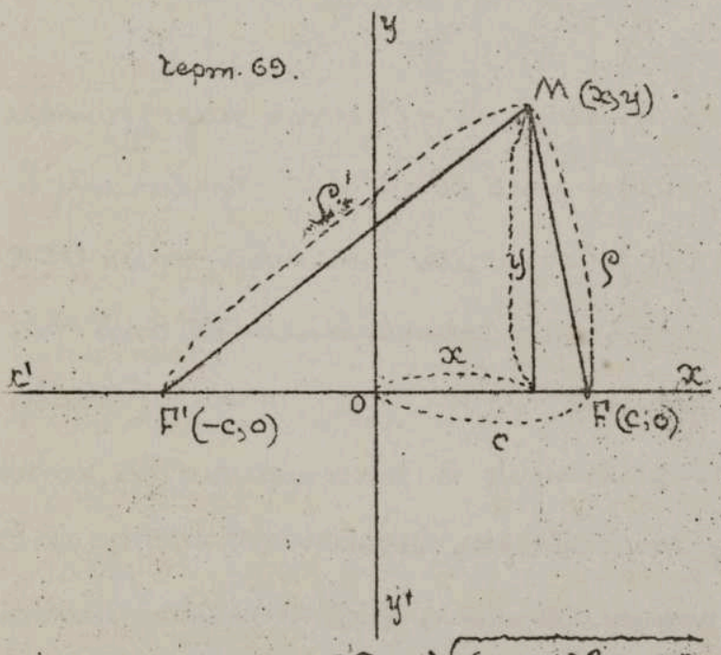


Одинъ изъ радіусовъ двухъ окружностей, описанныхъ изъ фокусовъ F и F' больше половины длины AB=2a, это очевидно. Такожде другой будетъ меньше половины той же длины. Пусть первый изъ радіусовъ будетъ равенъ a+d, тогда другой должен быть взятъ равнымъ 2a-(a+d) = a-d. Для того, чтобы было возможно образовать треугольникъ FMF', иначе говоря, для того, чтобы двѣ описанныя окружности пересѣкались, необходимо: 1) чтобы сумма двухъ сторонъ MF'+MF была больше третьей стороны FF', т.е., чтобы 2a было больше 2c. и 2) чтобы разность тѣхъ же сторонъ MF и MF' была бы меньше FF'. Первое изъ этихъ условій мы полагаемъ выполненнымъ, такъ какъ иначе самый эллипсъ былъ бы невозможенъ. Второе же условіе требуетъ, чтобы сумма a+d+(a+d)=2a была бы меньше 2c, т.е., чтобы a<c. Отсюда видно, что для полученія точекъ эллипса должно брать большій радіусъ меньше a+c, а меньшій радіусъ больше a-c. Наибольшею величиною для каждаго изъ радіусовъ будетъ a+c наименьшею a-c.

Уравнение эллипса.

Положимъ, что F и F' (черт. 69) два данные фокуса эллипса и разстояніе FF' = 2c. Пусть M есть произвольная точка кривой. Соединивъ ее съ фокусами и обозначивъ разстояніе MF и MF' черезъ ρ и ρ', по опредѣленію эллипса должны имѣть: $\rho + \rho' = 2a$, гдѣ 2a равно данной длинѣ.

Для составленія уравненія эллипса, линію F'Fx принимаемъ за ось x, а начало координатъ помѣстимъ въ точкѣ O, взятой на срединѣ FF' такъ что OF = OF' = c.



черт. 69.

Ось y-овъ будетъ перпендикулярна къ оси x-овъ. Такимъ образомъ за двѣ координаты точки примемъ оси эллипса. При такихъ осяхъ координатъ получается самое простое уравненіе эллипса. Координаты произвольной точки M эллипса пусть будутъ x и y, а координаты фокуса F будутъ (c,0). Поэтому имѣемъ:

$$\rho = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Для фокуса F' координаты будутъ (-c,0) и потому:

$$\rho' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Сумма $\rho + \rho'$ должна быть равна 2a, слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Это уравненіе представляетъ зависимость между координатами произвольной точки кривой и потому это есть уравненіе эллипса. Его можно представить въ простѣйшемъ видѣ, освободивъ его отъ радикаловъ. Напишемъ его въ видѣ:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+x^2-2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

откуда по сокращении:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2-4cx.$$

Сократив уравнение на 4 и возведя снова обе части в квадрат, имеем:

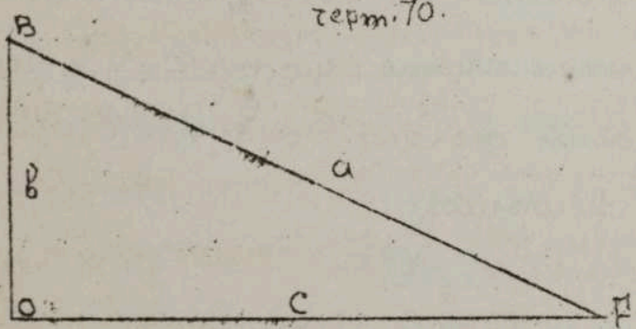
$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 = a^4-2a^2cx+c^2x^2$, или по упрощении:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \text{ или}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Заметим, что $a>c$ и потому разность a^2-c^2 есть положительная величина. Приравняем её b^2, так что $a^2-c^2=b^2$. Величину b легко построить. Для этого (черт. 70) возьмем прямой угол OXY.

черт. 70.



Отложив на стороне его OX от точки O длину $OF=c$, из точки F радиусом равным a отметим дугу, которая пересечет линию OY в точке B. В треугольнике OBF будем иметь: $OB^2=a^2-c^2$. Следовательно $OB^2=b^2$ и $OB=b$.

Таким образом b есть известная и вполне определенная величина и уравнение эллипса примет следующий окончательный вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

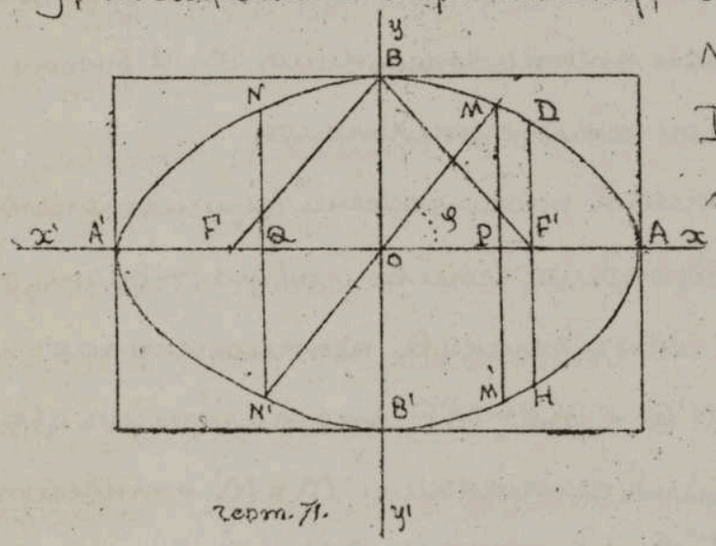
Освободив от знаменателя тоже уравнение нетрудно привести к виду: $a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$

Решая это уравнение относительно y, получим последовательно:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Будем давать x различные значения и рассмотрим соответ-

Вычисляя значения, получаемыя у-ом. Пусть $x=0$, тогда $y=\pm b$. Отложимъ отъ О по оси у-овъ длину $OB=OB'=b$. Точка В и точка В' суть точки кривой. Если х будемъ увеличивать, то изъ уравненія видно, что при этомъ у уменьшается по абсолютной величинѣ и стало быть отъ точки В въ правую сторону кривая пойдетъ, приближаясь къ оси х-овъ. Возмемъ произвольный х, положимъ ОР, т.е. $x=OP$; вычисливъ соотвѣтствующую величину у, построимъ эту величину, какъ координату MP. и другую координату M'P равную, но по знаку противоположную. Двѣ точки M и M' суть точки кривой, притомъ $MP=M'P$. Такъ какъ изъ уравненія кривой видно, что при всякомъ х, у получаетъ два значенія, равныя и съ обратными знаками, то отсюда заключаемъ, что всѣ точки кривой будутъ расположены симметрично



черт. 71.

относительно оси х-ов, подобно точкамъ M и M' нами построенныхъ. Слѣдовательно ось х-ов есть ось кривой и слѣдовательно намъ достаточно будетъ построить только верхнюю часть кривой, нижняя опредѣлится по симметріи. Дабы х можно увеличить отъ $x=0$ до $x=a$, причемъ ордината у постоянно уменьшается отъ $y=b$ до $y=0$. Отложимъ $OA=a$, получимъ точку А, которая есть также точка кривой. Когда х возмемъ больше а, тогда у получается мнимымъ, а потому, если черезъ точку А проведемъ перпендикуляръ къ оси х-ов, то по правую сторону отъ этого перпендикуляра точекъ кривой не существуетъ и самый перпендикуляръ будетъ касаться кривой въ одной точкѣ А. Если бы уравненіе было

са была дано числовыми, то мы на самомъ дѣлѣ могли бы построить сколько угодно точекъ и затѣмъ соединить ихъ непрерывною чертою. При томъ У всегда уменьшается. Часть кривой, расположенная ниже оси абсциссъ сложно начертить по симметріи.

До сихъ поръ мы давали x^4 только положительное значеній, будемъ теперь x^4 приписывать отрицательныя величины отъ $x=0$ до $x=-a$. При томъ мы замѣтимъ, что такъ какъ въ данномъ уравненіи x входитъ въ квадратѣ, то при отрицательномъ x, y будетъ получать тѣже значенія, какъ при положительномъ.

Изъ этого заключаемъ, что кривая расположена симметрично относительно оси У. Такимъ образомъ, если въ лѣвую сторону отложимъ $OQ=OP$ и возставимъ черезъ точку Q перпендикуляръ къ оси x, отложимъ на немъ $NQ=N'Q=MP=M'P$, то получимъ двѣ точки кривой N и N' симметричныя съ точками M и M' относительно оси $y^{ов}$. Отложивъ по оси У вправо длину $OA'=OA=a$, получимъ точку A', крайнюю точку (вершину) эллипса и затѣмъ начертимъ вѣтвь кривой BA'B' симметричную съ вѣтвью BAB' относительно оси $y^{ов}$.

Не трудно доказать, что точка O будетъ центромъ эллипса. Дѣйствительно, соединивъ точку O съ точками M и N', увидимъ, что два треугольника MOP и N'OQ равны, откуда слѣдуетъ, что углы MOP и QON равны, а потому линія MON' есть прямая. Сверхъ того имѣемъ: $OM=ON'$ и такъ какъ M есть произвольная точка эллипса, то слѣдовательно произвольная хорда эллипса MN', проведенная черезъ точку O, дѣлится этою точкою пополамъ, стало-быть точка O есть центръ эллипса и всѣ хорды

через нее проходящія, стоятся ею попасть. Такъ какъ y не можетъ быть больше b, а x не больше a, то слѣдовательно, если мы въ точкахъ A, A', B и B' проведемъ перпендикуляры къ осямъ, то получимъ прямоугольникъ, внутри котораго будетъ заключаться весь эллипсъ. При томъ, очевидно, что въ точкахъ A, A', B и B' эллипсъ касается къ сторонамъ построеннаго нами прямоугольника.

Дополнимъ это изслѣдованіе фигуры эллипса разсмотрѣніемъ, какъ измѣняется въ немъ радіусъ, проводимый черезъ центръ къ различнымъ точкамъ кривой, при переходѣ отъ точки A къ B. Пусть $OP=x$, $MP=y$, $OM=r$, тогда имѣемъ $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Но по уравненію эллипса $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. Вставивъ величину y въ уравненіе r, получимъ:

$$r=\sqrt{x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}=\sqrt{b^2+x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}.$$ Такъ какъ $b<a$ то $\frac{b}{a}$ также $\frac{b^2}{a^2}<1$, поэтому $\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)>0$. При переходѣ точки B къ A, x постоянно увеличивается и мы видимъ, что r – радіусъ будетъ также постоянно увеличиваться. Величина его при $x=a$ будетъ:

$$r=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-a^2)}=\sqrt{b^2+a^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}=a$$

Фокусы эллипса находятся на большой оси, причемъ $OF=OF'=c$. Соединивъ F' и M' съ B, въ ΔBOF имѣемъ: $BF^2=b^2+c^2$. Но мы нашли, что $a^2-c^2=b^2$, отсюда слѣдуетъ, что если даны оси эллипса, то чтобы получить фокусы, надо изъ конца B малой оси описать дугу радіусомъ a, точки пересѣченія этой дуги съ большой осью будутъ фокусы. И такъ $c^2=a^2-b^2$ и $c=\sqrt{a^2-b^2}$, то эксцентриситетъ $E=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$. Если въ эллипсѣ обѣ оси будутъ равны, то эллипсъ обратится въ окружность. Дѣйствительно, возьмемъ уравненіе эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а такъ какъ $b=a$,

то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и дастъ $x^2+y^2=a^2$,

а это есть уравненіе круга, котораго центръ въ началѣ координатъ и радіусъ $=a$. При этомъ, если $b=a$, то $c=0$. Слѣдовательно можно сказать, что кругъ - частный случай эллипса, это эллипсъ, у котораго эксцентриситетъ $=0$.

Наконецъ, параметръ эллипса есть хорда, проходящая черезъ фокусъ и перпендикулярная къ большой оси: $DH=2p$; $DF=FH=p$.

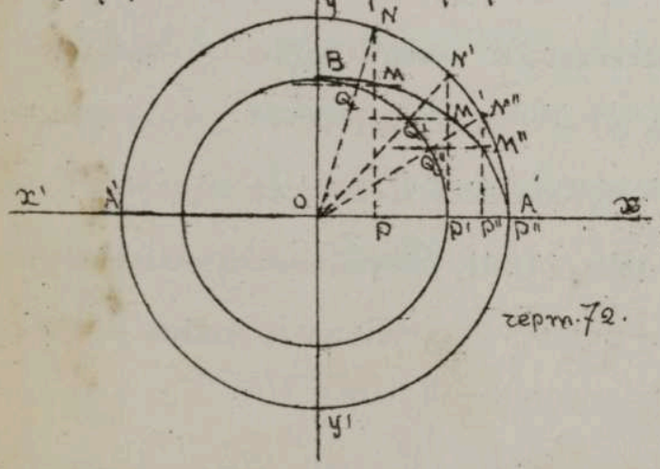
Полупараметръ p можно опредѣлить изъ уравненія эллипса:

$x=OF=c$, оно дастъ $y=DF=p=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$, но $a^2-c^2=b^2$;

$y=p=\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\frac{b^2}{a}$ и цѣлый параметръ $2p=\frac{2b^2}{a}$

Построеніе эллипса по точкамъ, выводимое изъ его уравненія.

Напишемъ уравненіе эллипса: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Возмемъ (черт. 72) двѣ прямоугольныя оси координатъ. Изъ центра O радіусомъ $=b$ опишемъ окружность и изъ этой же точки опишемъ еще другую концентрическую окружность радіусомъ $=a$. Возмемъ затѣмъ произвольную абсциссу OP и изъ точки P возставимъ перпендикуляръ къ оси x-овъ. Пусть N есть точка встрѣчи этого перпендикуляра съ окружностью радіуса $=a$. Соединимъ точку N съ точкою O и изъ точки Q пересѣченія линіи ON съ окружностью радіуса B проведемъ параллель QM оси x-овъ.



черт. 72.

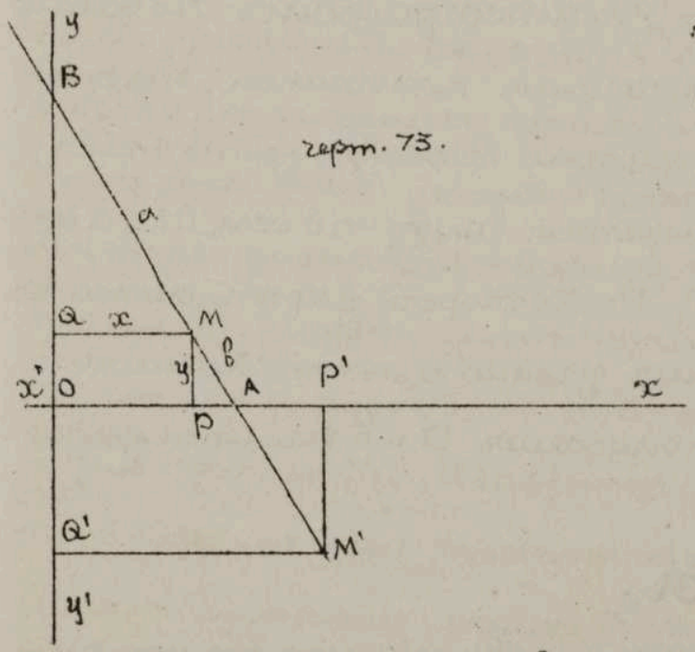
Тогда точка встрѣчи этой параллели съ перпендикуляромъ NP будетъ точка эллипса (M). Въ самомъ дѣлѣ, пусть $OP=x$ и такъ какъ $ON=a$ то изъ ΔONP

имѣемъ: $PN = \sqrt{a^2 - x^2}$. Затѣмъ, такъ какъ $OQ = b$, то написавъ пропорцію: $MN : OQ = NP : ON$ или $MP : b = \sqrt{a^2 - x^2} : a$, найдемъ отсюда $MP = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

И такъ мы видимъ, что $MP = y$, а потому точка M есть точка эллипса. Такимъ точекъ тѣмъ же построеніемъ можно получить сколько угодно. На чертежѣ обозначены точки $M, M', M'' \ldots$, принадлежащія эллипсу. Соединивъ ихъ непрерывною чертою, мы получимъ дугу кривой AB. Другую часть кривой можно построить по симметріи, или тѣмъ же способомъ - по точкамъ.

Свойство эллипса, служащее основаніемъ для устройства эллипсографа.

Возьмемъ двѣ прямоугольныя оси координатъ OX и OY. Положимъ что прямая линія AB имѣетъ постоянную длину и перемѣщается на плоскости такъ, что конецъ ея A скользитъ по оси X, а другой конецъ B перемѣщается въ то же время по оси Y. Мы докажемъ, что всякая точка, взятая на прямой AB будетъ описывать нѣкоторый эллипсъ, притомъ эллипсъ, которого центръ находится въ O и которого оси совпадаютъ съ осями координатъ.



чертѣ. 73.

Чтобы доказать это, возьмемъ произвольную точку M и положимъ, что разстоянія $AM = a$ и $BM = b$. Эти разстоянія постоянны. Обозначимъ координаты точки M черезъ (x, y), постро-

чимъ ихъ. Проведя MQ параллельно оси абсциссъ и положивъ $\angle OAB = \alpha$, найдемъ:

$$x = a\cos\alpha \qquad y = b\sin\alpha, \text{ откуда}$$

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha \qquad \frac{y}{b} = \sin\alpha \text{ или возведя въ квадратъ и складывая}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тоже самое получили бы, если бы мы взяли точку въ положеніи M' и положили $M'B = a$ и $M'A = b$. Мы нашли бы для точки M'

$$x = a\cdot\cos\alpha, \qquad y = -b\sin\alpha$$

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha \qquad \frac{y}{b} = -\sin\alpha$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

На основаніи этого свойства движенія точки M прямой AB устраиваютъ снарядъ для черченія эллипса помощью непрерывнаго движенія, который называется Эллипсографомъ. По осямъ Ox и Oy помѣщаютъ двѣ металлическія пластинки, третью линейку произвольной длины AB можно перемѣщать такъ, что постоянная точка ея A движется внизъ по оси Ox, а другая точка B по оси Oy. Точку M, въ которой укрѣпляется карандашъ, можно брать въ какомъ угодно смыслѣ линейки и такимъ образомъ можно дать полуосямъ a и b эллипса желаемые размѣры.

Гипербола.

Гиперболой называется Кривая, представляющая геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ постоянна и равна данной длинѣ.

Двѣ постоянныя точки, указанныя въ опредѣленіи, называются фокусами гиперболы. (черт. 74)

Хотя гипербола, подобно эллипсу можетъ быть начерчена непрерывнымъ движеніемъ карандаша, но такое черченіе кривой далеко не такъ удобно въ практикѣ, какъ для черченія эллипса, а потому мы здѣсь изложимъ прежде всего способъ для построенія гиперболы по точкамъ.

Пусть F и F' два данные фокуса гиперболы и пусть ихъ разстояніе $FF'=2c$. Положимъ далѣе, что $AB=2a$ есть данная длина. Разность разстояній каждой точки гиперболы отъ двухъ фокусовъ F и F' должна быть равна $2a$. Замѣтимъ вопервыхъ, что руководясь даннымъ опредѣленіемъ, мы можемъ построить сколько угодно точекъ гиперболы. Для этого на продолженіи линіи AB возьмемъ произвольную точку K и изъ точки F, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ BK, а изъ F' радіусомъ $=AK$ опишемъ двѣ окружности; положимъ, что эти окружности пересѣкутся въ двухъ точкахъ M и M'. Легко видѣть, что эти точки будутъ принадлежать разсматриваемой нами гиперболѣ. Въ самомъ дѣлѣ, для точки M будемъ имѣть, что разность ея разстояній отъ фокусовъ F и F' будетъ $MF'-MF=AK-BK=AB=2a$. Тоже будемъ имѣть и для точки M'. Подобныхъ паръ точекъ, принадлежащихъ гиперболѣ можно построить сколько угодно, такъ какъ, измѣняя положеніе точки K на продолженіи AB, т.е. измѣняя величину радіусовъ двухъ окружностей, будемъ имѣть всегда въ пересѣченіи этихъ окружностей точки гиперболы.

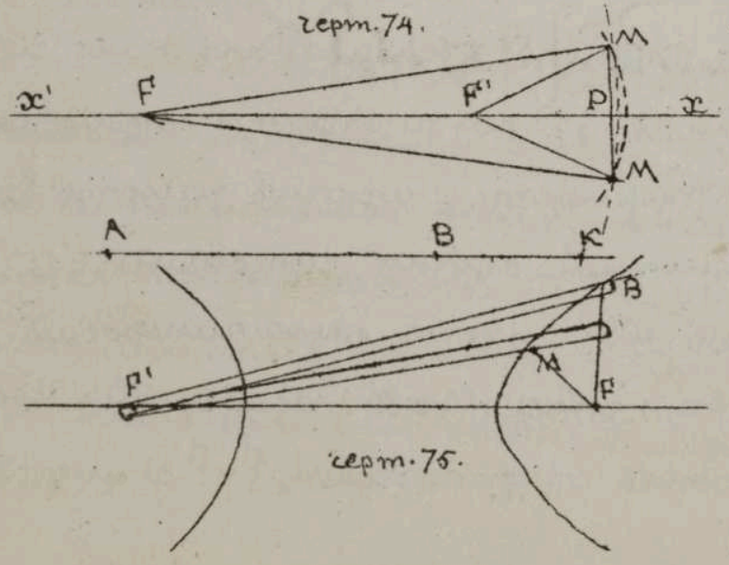
Замѣтимъ, что прямая xx' будетъ осью гиперболы. Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ двѣ точки M и M', полученныя выше построеніемъ двухъ окружностей съ фокусами F и F' и назовемъ собою

а затѣмъ изъ равенства треугольниковъ MFP и MFP заключаемъ, что $MP = M'P$ и что MM' перпендикулярна къ xx', кромѣ того изъ равенства треугольниковъ FMF' и $FM'F'$ имѣемъ, что углы MFx и $M'Fx$ равны между собою. Слѣдовательно двѣ точки M и M' расположены симметрично относительно прямой xx', которая потому будетъ осью гиперболы.

Не трудно замѣтить, что мы сможемъ получить еще новый рядъ точекъ гиперболы, если повторая предыдущее построеніе, будемъ описывать окружности меньшихъ радіусовъ изъ фокуса F, а окружности бо́льшихъ радіусовъ изъ фокуса F' и станемъ отмѣчать точки пересѣченія такихъ окружностей, разность радіусовъ которыхъ равна $AA = 2a$. Совокупности точекъ, такимъ образомъ построенныхъ, опредѣлитъ другую вѣтвь гиперболы $C'A'C'$, которая будетъ расположена относительно фокуса F' точно такъ же, какъ расположена вѣтвь CAC относительно фокуса F.

Построеніе гиперболы непрерывнымъ движеніемъ.

Дугу гиперболы можно построить также непрерывнымъ движеніемъ. Возмемъ (черт. 75) линейку и укрѣпимъ ея конецъ F' въ фокусѣ F', такъ, чтобы линейка могла свободно вращаться около точки F' въ плоскости чертежа, причемъ край линейки представляетъ прямую линію,



черт. 74.

черт. 75.

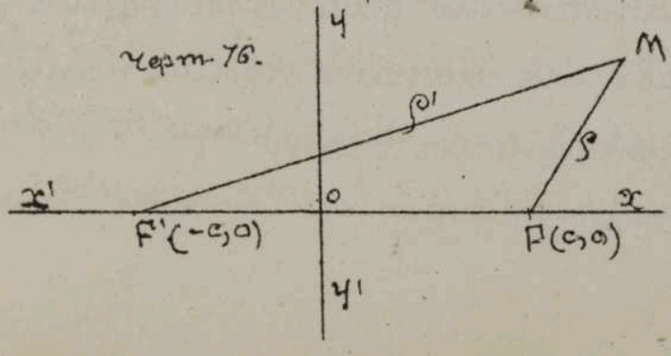
проходящую через точку F'. Далее возьмем совершенно гибкую и нерастяжимую нить, длина которой была бы меньше длины линейки $F'B$ на данную величину $2a$. Вращая линейку около фокуса F', натянем нить в прямую линию FB. Точка B будет, очевидно, точкою гиперболы, потому что разность ея расстояний от фокусов F и F' будет $BF'-BF=2a$. Если теперь, вращая линейку около фокуса F' слева направо, мы будем в то-же время натягивать нить посредством карандаша, прижимая острие карандаша к ребру линейки, то этим острием при непрерывности его движения мы опишем дугу гиперболы.

Действительно, положим, например, что линейка, приняла положение $F'B'$, тогда нить натянутая острием карандаша в точке M, будет иметь вид ломаной линии $B'MF$. Тогда M будет точкою гиперболы; в самом деле, для нея разность расстояний от фокусов будет $MF'-MF=B'F'-(B'M+MF)=2a$. При непрерывности движения линейки, острие карандаша будет описывать дугу гиперболы BMA.

Чтобы описать другую ветвь нужно переместить линейку, укрепить ея конец в фокусе F и потом точно таким же вращать ее около этого фокуса.

Уравнение гиперболы.

Пусть (черт. 76) F и F' два фокуса гиперболы, расстояние между ними $FF'=2c$, тогда, если M есть произвольная точка гиперболы,



черт. 76.

то соединив ее с фокусами F и F', получим два радиуса ρ и ρ' и по определению этой кривой должно быть что $\rho'-\rho=2a$, где $2a$ есть данная

длина, причемъ должно быть еще соблюдено условіе, что $a<c$. Чтобы составить уравненіе кривой, примемъ линію $FF'x$ за ось x-овъ, а средину линіи FF' – точку O за начало координатъ, причемъ будемъ имѣть, что $OF = OF' = c$. Координаты точки M пусть будутъ (x, y). Такимъ образомъ за оси координатъ мы приняли оси кривой, причемъ оси гиперболы помѣщаются въ самомъ простомъ видѣ. Замѣтимъ, что координаты точки F будутъ $(c, 0)$, а потому ρ, какъ разстояніе между двумя точками, будетъ равно:

$$\rho = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Затѣмъ координаты фокуса F' будутъ $(-c, 0)$, а потому разстояніе:

$$\rho' = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

По главному свойству гиперболы имѣемъ, что

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Это и есть уравненіе гиперболы. Сравнивъ его съ уравненіемъ эллипса, которое было выведено такимъ же путемъ, но въ которомъ было выражено, что $\rho+\rho' = 2a$, мы замѣтимъ, что уравненіе гиперболы отличается тѣмъ, что въ немъ предъ радикаломъ второмъ стоитъ знакъ минусъ.

Если же второй радикалъ мы перенесемъ во вторую часть уравненія и $2a$ въ первую, а затѣмъ возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ, то различіе между уравненіемъ эллипса и гиперболы совсѣмъ уничтожится. Отсюда заключаемъ, что не повторяя прежняго вычисленія, сдѣланнаго для освобожденія уравненія эллипса отъ радикаловъ, мы можемъ прямо написать уравненіе гиперболы въ окончательномъ видѣ:

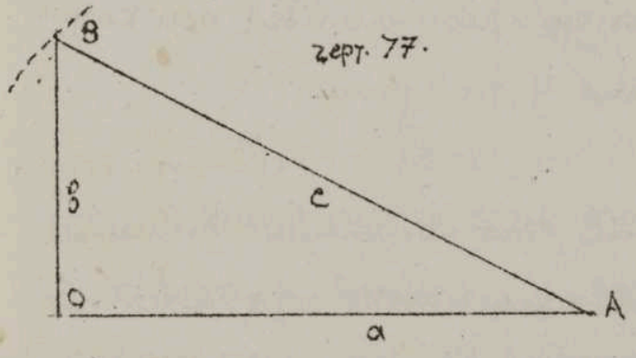
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Это уравнение по виду совершенно одинаково съ найденнымъ выше уравненіемъ эллипса, но тѣмъ не менѣе различіе между уравненіемъ эллипса и уравненіемъ гиперболы чрезвычайно значительно.

Это различіе заключается въ томъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ, т.е. въ гиперболѣ $a<c$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, разсмотримъ $\Delta F'MF$; въ немъ разность двухъ сторонъ меньше третьей, слѣдовательно $\rho'-\rho$ $2c$., но $\rho'-\rho=2a$ .... $2a<2c$, $a<c$ и стало быть $a^2<c^2$ или $a^2-c^2<0$. Вслѣдствіе этого намъ будетъ удобно написать наше уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

Положимъ теперь, что $c^2-a^2=b^2$. Величину b легко построить.



черт. 77.

Для этого, взявъ прямой уголъ YOX (черт. 77), отложимъ отъ точки O длину $OA=a$ и потомъ изъ точки A радіусомъ $=C$ опишемъ дугу, которая пересѣчетъ OY въ точкѣ B, тогда изъ ΔOAB, катетъ OB будетъ равенъ $\sqrt{c^2-a^2}=b$. Такимъ образомъ величина b будетъ извѣстна и уравненіе гиперболы приметъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если сравнить это уравненіе съ уравненіемъ эллипса, т.е. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то увидимъ, что уравненіе гиперболы получается по уравненію эллипса черезъ замѣну b^2 на $-b^2$, или черезъ перемѣну b на $b\sqrt{-1}$. Это замѣчаніе очень важно и на основаніи его можно выводы, сдѣланные для эллипса помощію его уравненія прямо примѣнять къ гиперболѣ, замѣняя только въ полученномъ

результатъ b^2 на $-b^2$.

Уравненіе гиперболы можно еще написать въ слѣдующемъ видѣ, который получится, освободивъ предыдущее уравненіе отъ знаменателя:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -b^2a^2$$

Если рѣшимъ это уравненіе относительно y, то найдемъ изъ него:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Это есть третій видъ того же уравненія. Всѣ эти три вида представляютъ гиперболу, отнесенную къ центру и осямъ.

Изслѣдованіе фигуры гиперболы по ея уравненію.

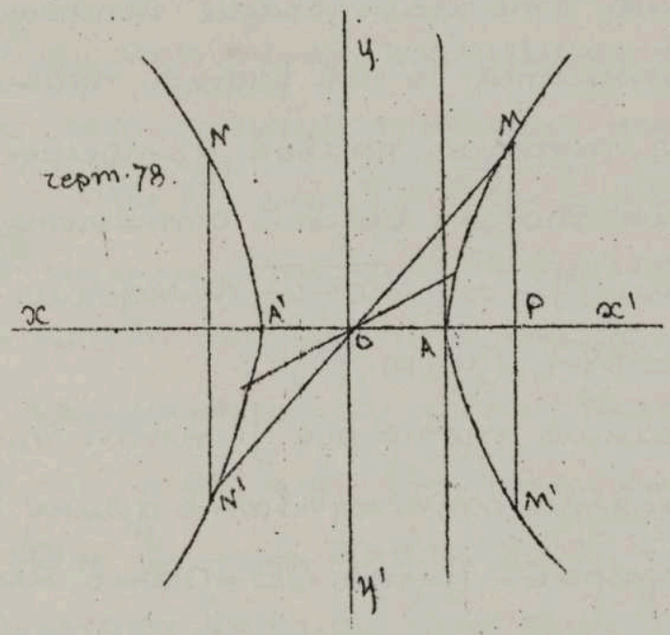
(черт. 78)

Положимъ, что намъ дано уравненіе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Построимъ кривую, имъ представляемую. Возмемъ прямоугольныя оси координатъ. Рѣшивъ уравненіе относительно y, получимъ:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Отсюда видимъ, что если сдѣлаемъ $x=0$, то получимъ y мнимымъ и что, если x будетъ увеличиваться отъ $x=0$ до $x=a$, то y остается мнимымъ покуда $x<a$. Когда же возмемъ $x=a$, то найдемъ $y=0$. Построимъ точку, опредѣляемую этими координатами, для этого отложимъ $OA=a$, точка A будетъ точкой кривой. Проведемъ черезъ A перпендикуляръ къ оси xовъ, мы можемъ утвержадать, что онъ будетъ перпендикуляромъ и осью yовъ кривой. Если затѣмъ x будетъ увеличиваться отъ $x=a$, то y будетъ постоянно увеличиваться по абсолютной величинѣ. Возмемъ какое либо $x=Op$ и вычислимъ для него соотвѣтствующій y, который будетъ имѣть два значенія, равныя и съ обратными знаками, то заключаемъ, что ось xовъ есть ось

кривой и что всѣ точки кривой будутъ расположены симметрично относительно этой оси подобно точкамъ M и M'. Абсциссу x можно увеличивать до $\pm\infty$. Изъ этого заключаемъ, что отъ точки A кривая въ правую сторону идетъ постоянно удаляясь отъ оси $x^{ов}$ и продолжается въ бесконечность, такъ какъ съ увеличеніемъ $x^{а}$, $y^{ос}$ остается дѣйствительнымъ и увеличивается тоже до $\pm\infty$. Если x будетъ принимать отрицательныя значенія отъ 0 до $-\infty$, то замѣчая, что x въ уравненіи входитъ въ квадратѣ, можно прямо сказать, что y при отрицательныхъ значеніяхъ $x^{а}$ получаетъ такія же значенія, какъ и при положительныхъ



чертъ 78.

Отсюда слѣдуетъ, что по лѣвую сторону оси $y^{а}$ получается другая вѣтвь кривой и при томъ точно такая же, какъ и по правую сторону, т.е. расположенная симметрично съ правою относительно $оси\ y^{ов}$. Вслѣдствіе этого, если мы отложимъ на оси x въ обѣ стороны отъ точки O длину $OA'=OA=a$, то A' будетъ точкой кривой, ея другою вершиною. По симметріи мы можемъ начертить лѣвую вѣтвь кривой. При этомъ, если возьмемъ абсциссу $OQ=OP$, то получимъ двѣ ординаты кривой $NQ=N'Q=MP$ и точки N и N' будутъ точки гиперболы. Легко доказать, что точка O есть кривой центръ. Соединивъ O съ M и N', получимъ два равныхъ треугольника OMP и ON'Q и изъ ихъ равенства заключаемъ, что въ нихъ углы при точкѣ O равны.

слѣдовательно линія $N'OM$ есть прямая, притомъ ея $N'O = MO$. Такимъ образомъ мы видимъ, что MN' есть произвольная хорда гиперболы, проходящая черезъ точку O. Эта хорда дѣлится точкою O пополамъ. Отсюда заключаемъ, что всякая хорда кривой, проведенная черезъ точку O дѣлится ею пополамъ, слѣдовательно точка O есть центръ кривой. Мы дополнимъ это изслѣдованіе гиперболы разсмотрѣніемъ того, какъ измѣняется въ ней радіусъ, проведенный изъ центра къ различнымъ точкамъ кривой, но прежде разсмотримъ предѣльныя положенія точекъ кривой относительно осей координатъ. Если въ уравненіи $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ положимъ $x = 0$, то получимъ: $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-a^2} = \pm b\sqrt{-1}$. (черт. 79).

Такъ какъ y получился мнимымъ, то на оси $y^{ов}$ нѣтъ точекъ гиперболы, тѣмъ не менѣе принято откладывать длину b на оси y вверхъ и внизъ отъ центра O. Пусть $OB = OB' = b$. Длина $BB' = 2b$ называется мнимою осью гиперболы. Иногда ось $2a$ называется пересѣкающеюся осью, а BB' пересѣкающею. Чтобы получить фокусы, отложимъ отъ точки O на главной оси въ обѣ стороны длину фокуснаго разстоянія $= c$, причемъ $c > a$, такъ что $OF = OF' = c$. Соединимъ A и B, треугольникъ BOA даетъ: $BA = \sqrt{b^2 + a^2}$, но $c^2 - a^2 = b^2$, отсюда $c^2 = a^2 + b^2$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Слѣдовательно $BA = c$ или $OF = OF' = BA$, такъ что два фокуса получаются, отложивъ отъ точки O въ обѣ стороны длину $= BA$. Отношеніе фокуснаго разстоянія къ главной полуоси, т.е. $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетомъ гиперболы.

Пусть $\frac{c}{a} = \varepsilon$. Такъ какъ $c > a$, то $\varepsilon > 1$, т.е. въ гиперболѣ эксцентриситетъ большe 1. Хорда, проходящая черезъ фокусъ

и перпендикулярная къ главной оси называется параметромъ гиперболы. $DH = 2p$, $DF = p$, называется полупараметромъ. Величину полупараметра можно выразить посредствомъ a и b изъ уравненія гиперболы. Въ данномъ случаѣ $x = OF = c$, слѣдовательно $y = DF = p = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}$ или $p = \frac{b}{a}\sqrt{b^2} = \frac{b^2}{a}$ ... $2p = \frac{2b^2}{a}$

Разсмотримъ измѣненіе радіуса, проведеннаго изъ центра къ различнымъ точкамъ нашей гиперболы. Пусть $OM = V$, тогда $V = \sqrt{x^2 + y^2}$ или $V = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \sqrt{x^2\varepsilon^2 - b^2}$.

Видимъ, что если x будетъ увеличиваться и слѣдовательно точка M будетъ перемѣщаться по гиперболѣ вправо, тогда V увеличивается до ∞. Разсмотримъ уголъ между V и осью x, т.е. $\angle MOx = \varphi$. Въ треугольникѣ MPO имѣемъ: $y = x\,tg\varphi$

$tg\varphi = \frac{y}{x}$ или $tg\varphi = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$

Отсюда видимъ, что если x будетъ увеличиваться до ∞, то $\frac{a^2}{x^2}$ будетъ стремиться къ нулю, а $tg\varphi$ къ $\frac{b}{a}$. Обозначимъ эту предѣльную величину $\angle\varphi$ черезъ α, будемъ имѣть $tg\alpha = \frac{b}{a}$. Уголъ φ будетъ всегда $< \alpha$, но можетъ приближаться къ α, какъ угодно близко. Построимъ прямую, которая составитъ съ осью x уголъ α и проходитъ черезъ центръ O. Для чего изъ точки A возставляемъ перпендикуляръ къ главной оси и отложимъ длину $AK = b$. Соединимъ точку O съ K, эта прямая будетъ асимптота. Дѣйствительно въ треугольникѣ AOK имѣемъ $tg\,AOK = \frac{b}{a}$. Такъ какъ гипербола расположена симметрично относительно осей x и y, то слѣдовательно внизъ отъ оси x будетъ существовать точно такая же прямая. Чтобы ее получить, стоитъ отложить $AK' = b = AK$. и точку O соединить съ точкою A.

Такимъ образомъ вся бесконечная вѣтвь гиперболы будетъ расположена симметрично относительно оси Y, симдовательно и левая вѣтвь гиперболы расположена въ углу SOS', образованномъ продолженіемъ прямыхъ OR и OR'. Въ двухъ же верхнихъ углахъ SOR и $S'OR'$ нѣтъ точекъ гиперболы. Прямыя $R'S$ и RS' называются асимптотами гиперболы. Напишемъ ихъ уравненія: прямая RS' дѣлаетъ съ осью X уголъ α и проходитъ черезъ начало координатъ, симдовательно ея уравненіе будетъ:

$$y = tg\alpha \cdot x \text{ или } y = \frac{b}{a}x.$$

Прямая RS дѣлаетъ съ осью X уголъ $(180^\circ - \alpha)$, ея уравненіе:

$$y = tg(180-\alpha)x \text{ или } y = -tg\alpha x = -\frac{b}{a}x.$$

Уравненіе двухъ асимптотъ можно написать вмѣстѣ:

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Слово „асимптота" значитъ - приближающаяся. Названіе это дано этимъ прямымъ потому, что вѣтви гиперболы по мѣрѣ ихъ продолженія въ бесконечность все ближе приближаются къ этимъ прямымъ. Такъ что разстояніе гиперболы отъ асимптотъ можно сдѣлать сколь угодно малымъ удаляющимся въ пути только въ предѣлѣ. И такъ, гипербола приближается къ асимптотамъ неопредѣленно, но никогда не достигаетъ ихъ.

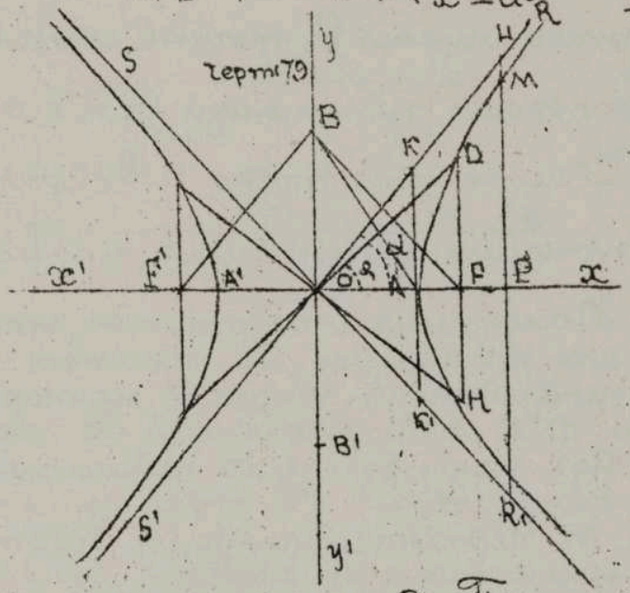
Чтобы это обнаружить, возьмемъ уравненіе кривой, рѣшенное относительно Y: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (черт. 80).

Положимъ, что мы разсматриваемъ асимптоту SR'. Уравненіе этой асимптоты: $y = +\frac{b}{a}x$. Возьмемъ на верхней части этой кривой точку M и построимъ MP, продолживъ ее до встрѣчи съ асимптотой въ точкѣ L, пусть $OP = x$ и $MP = y$.

Ординату асимптоты для отличия означим через y_1, так что $NP = y_1$, тогда по уравнению асимптоты будем имѣть: $y_1 = +\frac{b}{a}x$.

Возьмем разность ординат асимптоты и гиперболы, имѣемъ:

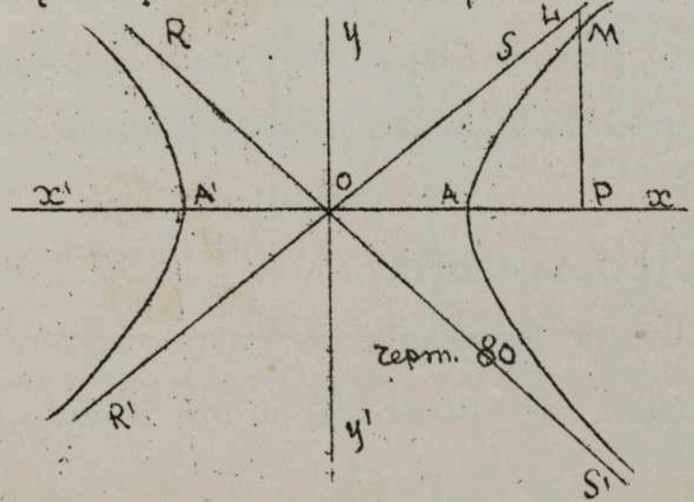
$$MN = \frac{b}{a}\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right] = \frac{b}{a}\left(\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right) = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$



Теперь, если точку M будемъ перемѣщать по гиперболѣ, удаляя ее въ правую сторону въ бесконечность, то ея абсцисса x будетъ увеличиваться до $+\infty$ и притомъ знаменатель дроби, выражающій разность координатъ MN, будетъ также увеличиваться до $+\infty$, а вся дробь будетъ уменьшаться до 0. Такимъ образомъ мы видимъ, что разность ординатъ асимптоты и гиперболы уменьшается неопредѣленно по мѣрѣ удаленія гиперболы въ бесконечность, эта разность однако никогда не достигаетъ 0, потому что дробь, выражающая MN обращается въ 0 только при $x = +\infty$.

Построеніе гиперболы по точкамъ.

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ центру и къ осямъ даетъ возможность построить эту кривую по точкамъ слѣдующимъ образомъ (чертѣжъ 81)



Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ. Уравненіе кривой есть: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

Отъ начала координатъ O вправо отложимъ длину $OA = a$

и проведемъ черезъ точку A перпендикуляръ AC къ оси x, отложимъ отъ него произвольную абсциссу x, которая должна быть $>a$, пусть она будетъ OP, такъ что $OP = x$, а черезъ точку P проведемъ другую линію, перпендикулярную къ оси x, затѣмъ изъ точки O радіусомъ OP опишемъ дугу, которая пересѣчетъ первый перпендикуляръ въ точкѣ C, соединимъ точку O съ C, тогда изъ Δ OCA, въ которомъ гипотенуза $OC = x$, а катетъ $OA = a$, имѣемъ $AC = \sqrt{x^2 - a^2}$. Далѣе отъ точки O въ правую сторону отложимъ длину $OB = b$, причемъ замѣтимъ, что b можетъ быть и больше и меньше a. Положимъ, напримѣръ, что $b < a$. Изъ точки B возставимъ перпендикуляръ къ оси x, который пересѣчетъ радіусъ OC въ точкѣ D, изъ нея проведемъ параллель оси x, продолжая её до пересѣченія съ перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ P въ точкѣ M. Утверждаемъ, что точка M будетъ принадлежать гиперболѣ. Чтобы это доказать, разсмотримъ подобные треугольники OCA и ODB, изъ которыхъ имѣемъ:

$$BD : OB = AC : AO \; ; \; MP : b = \sqrt{x^2 - a^2} : a, \text{ отсюда:}$$

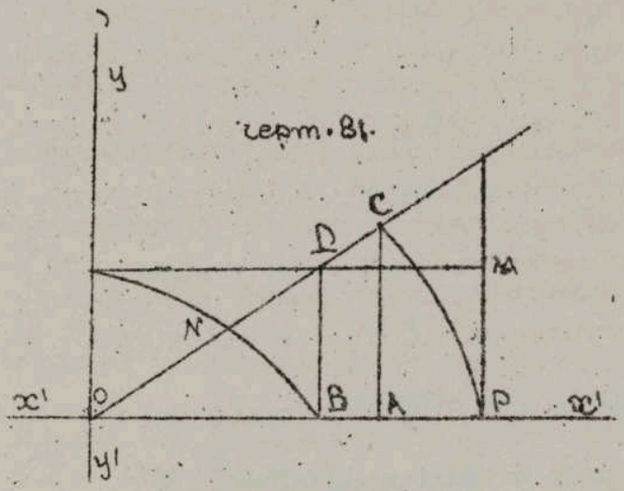
$$MP = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y.$$

Откуда видимъ, что M дѣйствительно есть точка гиперболы. Подобныхъ точекъ дѣйствительно можно найти безчисленное множество, повторяя описанное построеніе при различныхъ абсциссахъ x. При этомъ ясно, что эти точки могутъ быть построены произвольно близко одна къ другой, соединивъ ихъ непрерывною чертою, мы получимъ гиперболу.

Конхоида Никомеда.

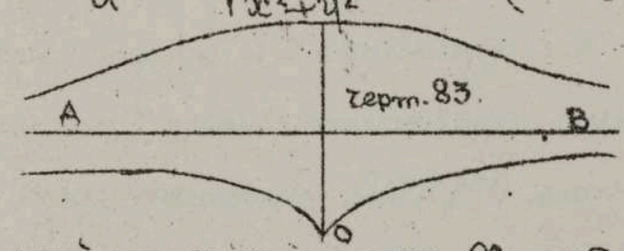
Возьмемъ прямую AB и точку O. Черезъ точку O станемъ проводить въ различныхъ направленіяхъ прямыя OD и отъ точки D.

въ которой эти прямыя пересѣкутъ AB, станемъ откладывать MD = M'D = a (черт. 82). Такимъ построеніемъ обрадимъ точекъ M и M' - опредѣлимъ кривую линію, называемую Конхоидой. Прямая AB называется направляющею конхоиды, а точка O - полюсомъ конхоиды. Видъ конхоиды зависитъ отъ двухъ параметровъ: отъ a и отъ OC = h. Если a < h, то конхоида будетъ имѣть видъ, представленный на чертежѣ 82, если a = h, то она получаетъ видъ, изображенный на черт. 83, наконецъ при a > h, она будетъ имѣть видъ, представленный на черт. 84. Составимъ уравненіе конхоиды, принявъ полюсъ O за начало прямоугольныхъ Декартовыхъ координатъ и проведя ось абсциссъ параллельно направляющей конхоиды. Мы имѣемъ: (черт. 82) изъ треугольника OMD ∽ △DME слѣдующую пропорцію:



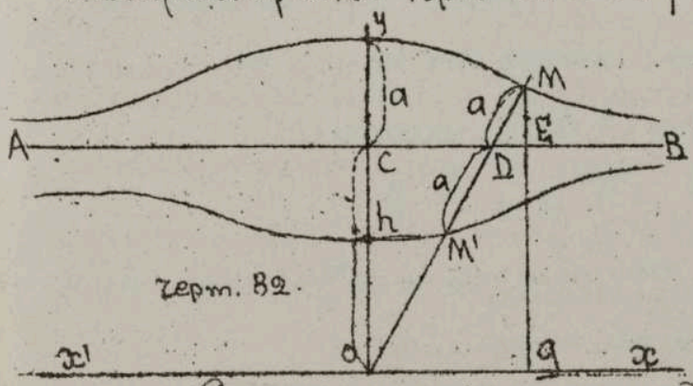
черт. 81.

$$\frac{y-h}{a} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ или $(x^2+y^2)(y-h)^2 = a^2y^2$. Это и есть уравненіе конхоиды, которое, какъ мы видимъ, будетъ четвертой степени. Если напишемъ его въ видѣ $y-h = \pm\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то



черт. 83.

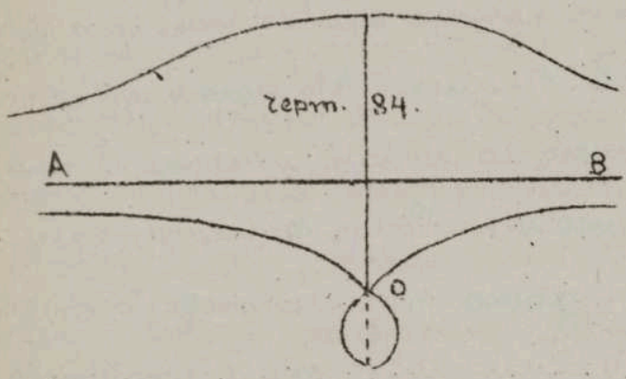
найдемъ, что при $x = \infty$, $y = h$. Это показываетъ намъ, что AB есть асимптота конхоиды.



черт. 82.

Конхоида была изобрѣтена Никомедомъ для раздѣленія угла на три равныя части. Это раздѣленіе дѣлается такъ: Отложимъ (черт. 85) изъ точки E, лежащей на одной сторонѣ даннаго угла COE, перпен-

циркуляръ EC на другую сторону, принимаемъ точку O за полюсъ, линію CE за направляющую конхоиду, параметръ которой $a = 2OE$. Строимъ эту конхоиду и проводимъ прямую $EM \parallel OC$ до пересѣченія съ верхнею вѣтвью ея въ точкѣ M. Если послѣ этого соединимъ точку O съ точкою M, то получимъ уголъ $COM = \psi$, который будетъ искомая треть даннаго угла COE. Для доказательства имѣемъ изъ треугольника DME:



$$ME = MD\cos\psi = a\cos\psi = 2OE\cos\psi.$$

Далѣе изъ треугольника OME имѣемъ пропорцію:

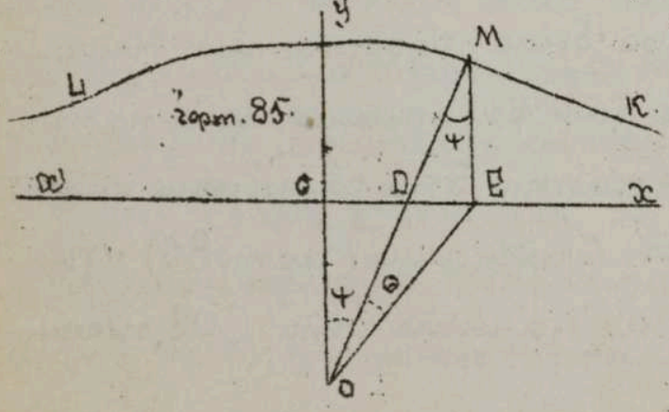
$$\frac{ME}{OE} = \frac{\sin\Theta}{\sin\psi} \text{ или } 2\cos\psi = \frac{\sin\Theta}{\sin\psi}, \text{ откуда } \sin\Theta = 2\sin\psi\cos\psi = \sin 2\psi.$$

или $\Theta = 2\psi$

Это доказываетъ желаемое.

Циссоида Діоклеса.

Пусть O (черт. 86) будетъ точка окружности радіуса r, называемая полюсомъ циссоиды. Проведемъ черезъ нее діаметръ OH, а черезъ точку H къ кругу касательную HB. Будемъ проводить черезъ O различныя прямыя OD и откладывать на нихъ $OM = ED$. Мѣсто точекъ M будетъ циссоида. Составимъ уравненіе циссоиды, принявъ за ось x діаметръ OK, а за ось y касательную къ кругу въ точкѣ O.



Изъ $\Delta OMd \sim ODE$ имѣемъ:

$$\frac{y}{x} = \frac{DH}{2r}, \quad DH = \frac{2ry}{x}$$

Далѣе по теоремѣ о касательной и секущей имѣемъ:

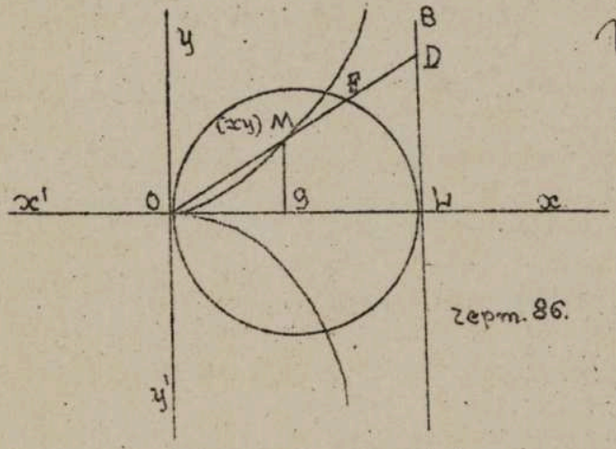
$$DH^2 = ED \cdot OD = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{4r^2+DH^2},$$ подставивъ DH, получимъ:

$\frac{4r^2y^2}{x^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{4r^2 + \frac{4r^2y^2}{x^2}} = \frac{2r\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ или

$\frac{2r^2y^2}{x} = x^2+y^2$. Разыскиваем относительно y^2:

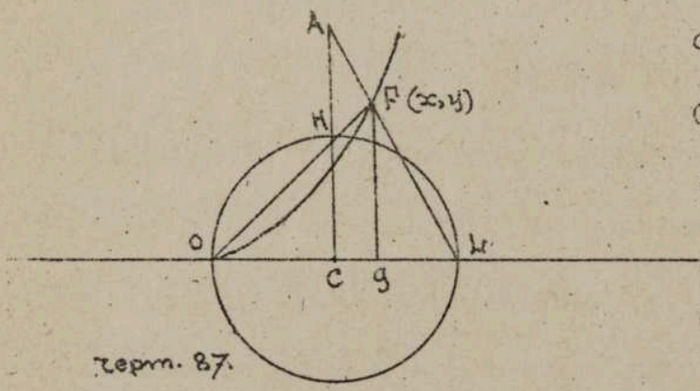
$y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$.

Это уравнение показывает, что с приближением x к $2r$ ордината циссоиды возрастает, а при $x=2r$ стремится в ∞. Таким образом HB есть асимптота циссоиды.



черт. 86.

Циссоида была изобретена Диокиссом для удвоения куба. Эта задача, как было показано в приложении Алгебры к Геометрии принадлежит к неразрешимым с помощью циркуля и линейки. Пусть дан куб, сторона которого r и требуется построить сторону куба двойного объема, т.е. линию $\sqrt[3]{2r^3}$. Для этого проводим (черт. 87) круг радиуса r, из его центра C восставляем перпендикуляр $AC = 2r$ к диаметру OH. Соединяем A с H и проводим для построенного круга циссоиду, полюс которой O. Пусть F будет точка



черт. 87.

встречи циссоиды с прямой AH. Соединяем F с O и опрестляем точку пересечения H прямых AC и OF. Отрезок CH будет искомая сторона двойного куба, т.е. $\sqrt[3]{2r^3}$. Для доказательства из подобия $\triangle OCH \sim \triangle OgF$ напишем:

$\frac{y}{x} = \frac{HC}{r}$ ..... (α)

Далее из $\triangle HgF \sim \triangle HAC$ имеем: $\frac{y}{2r-x} = \frac{2x}{r} = 2$

Умножив уравнение циссоиды на y; получим:

$$y^3 = \frac{x^3 y}{2r - x} = 2x^3, \quad \frac{y^3}{x^3} = 2.$$

Отсюда по сроению x имеем:

$$\frac{HC^3}{r^3} = 2, \quad HC = \sqrt[3]{2r^3}.$$

Овалъ Коссини.

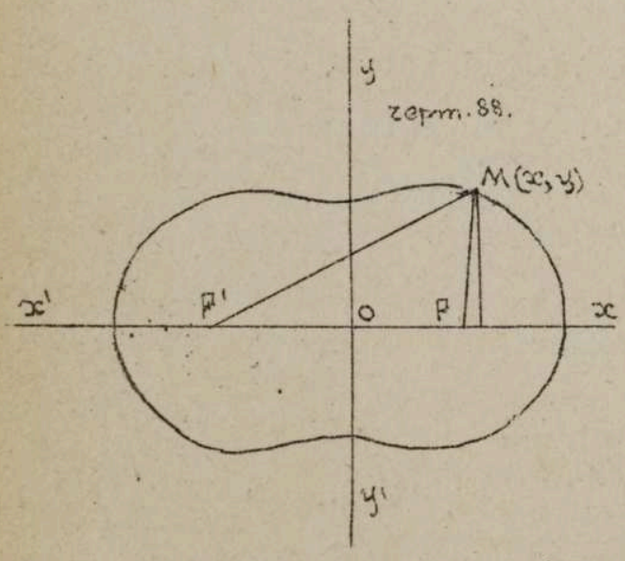
Овалом Коссини называется сисьсто точекъ, произведеніе разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная. Составимъ уравненіе этой кривой. Пусть F и F' (черт. 88) будутъ данныя точки, а m^2 постоянная величина произведеній разстоянія точекъ кривой отъ этихъ точекъ. Проведемъ ось абсцисъ черезъ точки F и F', а ось ординатъ черезъ средину линіи FF' перпендикулярно къ оси абсцисъ. Полагая $FF' = 2c$ найдемъ изъ чертежа:

$$\sqrt{y^2 + (x-c)^2}\,\sqrt{y^2 + (x+c)^2} = m^2 \text{ или}$$

$$\left[(y^2 + (x-c)^2\right]\left[y^2 + (x+c)^2\right] = (y^2 + x^2 + c^2 - 2xc)(y^2 + x^2 + c^2 + 2xc) =$$

$$= (y^2 + x^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 = m^4 \quad \ldots\ldots (3)$$

Это и есть искомое уравненіе овала. Мы должны разсмотрѣть здѣсь



черт. 88.

три случая:

При $m > c$ овалъ пересѣкаетъ ось Oy, потому что, полагая $x = 0$, находимъ для y дѣйствительную величину:

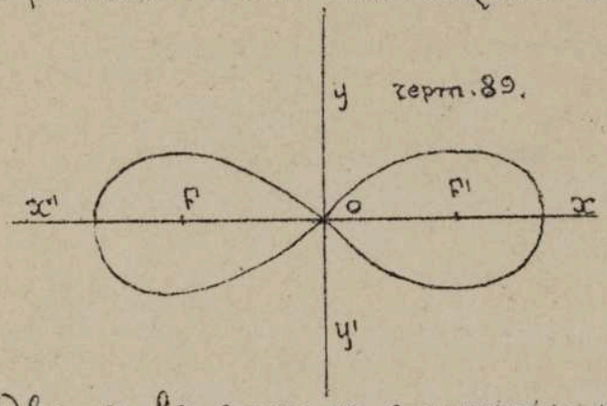
$(y^2 + c^2)^2 = m^4$. $\quad y = \sqrt{m^2 - c^2}$

Кривая имѣетъ видъ, представленный на черт. 88.

При $m = c$, уравненіе овала получитъ видъ: $(y^2 + x^2)^2 + 2c^2(y^2 + x^2) + c^4 - 4x^2c^2 = c^4$

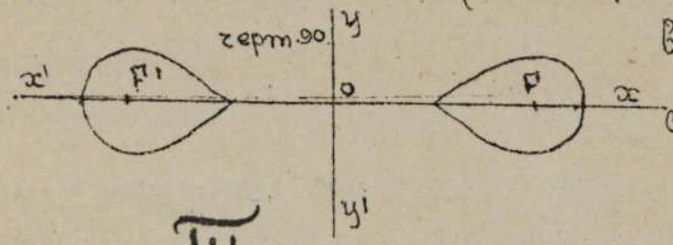
$$(y^2 + x^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = 0.$$

Это показывает, что кривая проходит через начало координат-ных как уравнение удовлетворяется координатами $x=0, y=0$. Кривая в этом случае имеет вид, изображенный на чертеже 89. и называется лемнискатою. При $m<c$ овал уже не пересекается с осью OY, потому что, полагая в уравнении 3, $x=0$, находим для y мнимую величину: $y=\sqrt{m^2-c^2}$



черт. 89.

Овал в этом случае представляет двумя замкнутыми кривыми, пересекающими с правой и левой стороны от оси OY (черт. 90.



черт. 90.

Трансцендентные кривые.

Перейдем теперь к описанию некоторых трансцендентных кривых, т.е. таких, уравнение которых не выражаются алгебраическими функциями.

Синусоида и Косинусоида.

Это есть кривые, выражаемые уравнениями:

$$y=a\sin x, \quad y=a\cos x.$$

Полагая $x=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \ldots, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \ldots$

найдем для синусоиды (черт. 91) $y=0, \frac{a}{\sqrt{2}}, a, 0, -a, 0, +a \ldots$

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}, -a, 0, a, 0, -a$$

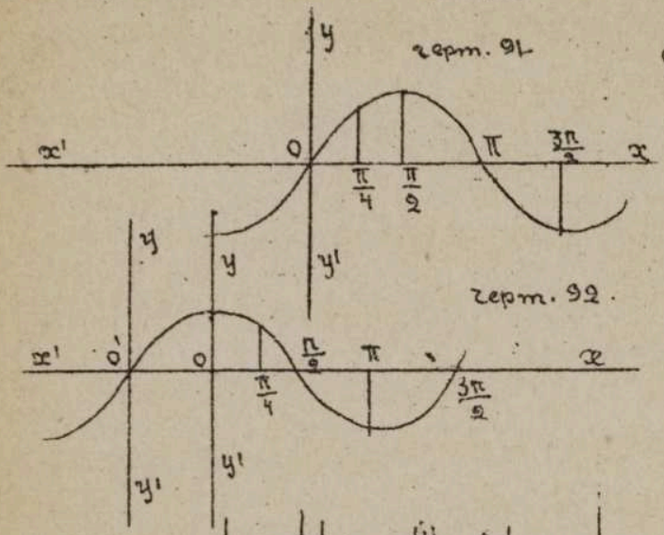
а для косинусоиды (черт. 92)

$$y=a, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -a, 0, a, 0 \ldots \frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -a, 0, a, 0.$$

Фигуры 91 и 92 показывают, что обе кривые одинаковы и имеют только различные расположения относительно осей. Если перенесем

на черт. 92 начало координатъ изъ O въ O', то синусоида будетъ выражаться косинусоидой уменьшить x на $x-\frac{\pi}{2}$, тогда получимъ уравненіе синусоиды:

$$y = a\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = a\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = a\sin x.$$



черт. 91.

Кривая тангенсовъ.

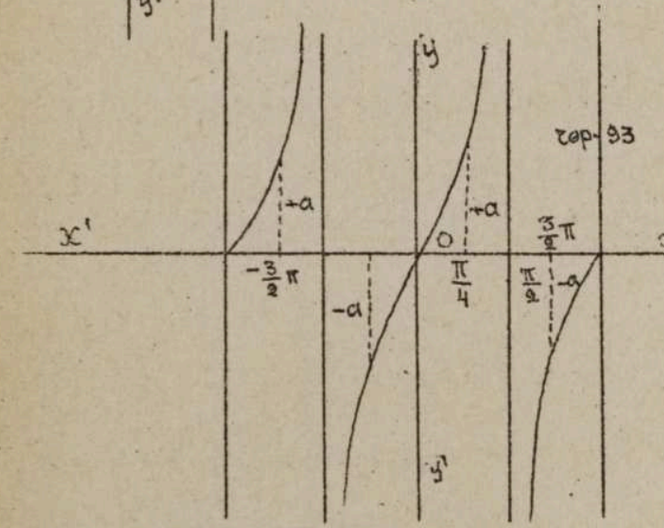
Эта кривая выражится уравненіемъ:

$$y = a\operatorname{tg} x.$$

Полагая $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \ldots, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\pi \ldots$

находимъ: $y = 0, a, \pm\infty, -a, -a, \mp\infty, +a \ldots$

Поэтому кривая имѣетъ видъ, представленный на чертежѣ 93.



черт. 92.

черт. 93

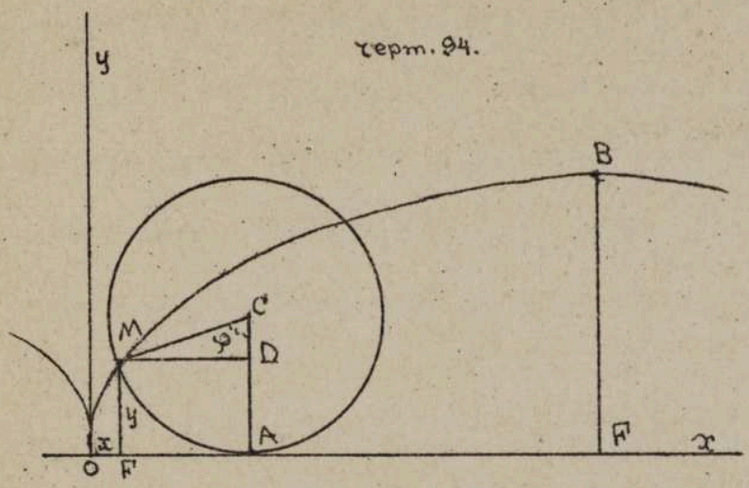
Она состоитъ изъ безконечнаго множества отдѣльныхъ вѣтвей, для которыхъ прямыя, параллельныя оси y и отстоящія отъ нея на разстояніи $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2} \ldots$ служатъ асимптотами.

Циклоида.

Циклоида есть кривая, описанная точкою окружности, катящейся по данной прямой. Окружность называется образующимъ кругомъ циклоиды, а прямая – направляющей кривой.

Отнесемъ циклоиду къ прямоугольнымъ Декартовымъ координатамъ, принявъ направляющую прямую за ось x, а за начало координатъ – ту точку направляющей, въ которой разсматриваемая точка окружности прикасается къ направляющей прямой. Пусть (черт. 94) OA будетъ пространство на которое прокатился кругъ C, при этомъ разсматриваемая точка этого

круга, займетъ положеніе M, такъ AM=AO. Назовемъ черезъ φ центральный уголъ, измѣряющій дугу AM, черезъ r - радіусъ образующаго круга и напишемъ изъ чертежа:



черт. 24.

$$x = AO - EO = AM - MD = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = CA - CD = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi)$$

Если опредѣлимъ изъ второго уравненія $\sin\varphi$ и дугу φ и подставимъ въ первое уравненіе, то найдемъ искомое уравненіе циклоиды. Мы имѣемъ: $\cos\varphi = \frac{r-y}{r}$, $\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{2ry-y^2}{r^2}}$; $\varphi = \arccos\frac{r-y}{r}$, откуда:

$$x = r \cdot \arccos\frac{r-y}{r} \pm \sqrt{2ry - y^2} \quad (8)$$

Это будетъ уравненіе циклоиды, изъ него видимъ, что наибольшая величина y^a есть $2r$, ибо при $y > 2r$, x дѣлается мнимымъ. Этому значенію y соотвѣтствуетъ значеніе $x = r\arccos(-1) = \pi r$.

Но слѣдуетъ замѣтить, что при данномъ y мы получаемъ не одно, а безчисленное множество значеній x, потому что $\arccos\frac{r-y}{r}$ есть функція многозначная. Вслѣдствіе этого для даннаго y мы кромѣ одной величины x можемъ брать всѣ величины, заключенныя въ формулѣ $2n\pi \pm x$, гдѣ n положительное или отрицательное цѣлое число. Такимъ образомъ уравненіе (8) представляетъ безконечное множество послѣдовательно повторяющихся вѣтвей OBF.

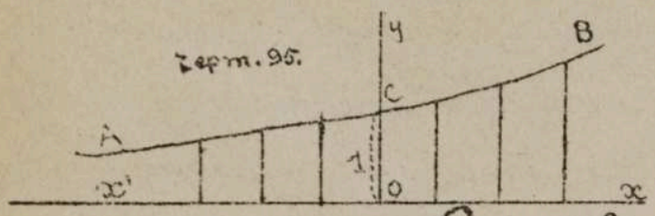
Кривая логарифмическая.

Она дается уравненіемъ: $x = \lg y$. или $y = e^x$.

Полагая послѣдовательно, $x = 0, 1, 2, 3 \ldots +\infty, -1, -2, -3 \ldots -\infty$

найдемъ $\ldots\ldots\ldots\ldots y = 1, e, e^2, e^3 \ldots \infty, \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3} \ldots 0.$

Полученная логарифмическая кривая будет иметь видъ, представленный на черт. 95.



черт. 95.

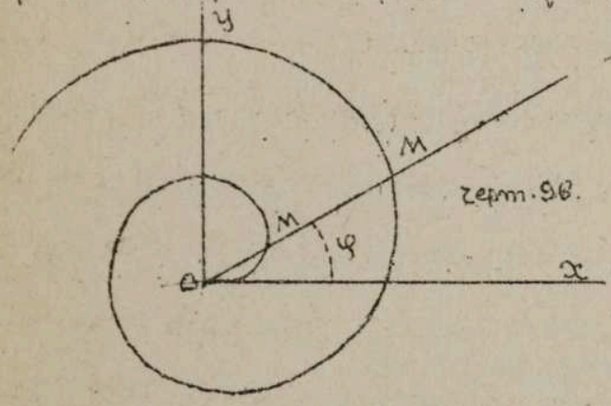
Ось xx' является ассимптотой кривой.

Спираль.

Спирали суть трансцендентныя кривыя, уравненія которыхъ выражаются гораздо проще въ полярныхъ координатахъ, нежели въ Декартовыхъ.

Архимедова спираль.

Архимедова спираль представляетъ мѣсто точекъ, радіусы векторы которыхъ прямо пропорціональны полярнымъ углу. Пусть O (черт. 96) будетъ полюсъ полярныхъ координатъ, который въ данномъ случаѣ называется полюсомъ Архимедовой спирали, а OX-полярною осью.



черт. 96.

Полярное уравненіе спирали будетъ:

$r = a\varphi$ ..... (α) Полагая $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$ ....

найдемъ $r = 0, \frac{\pi}{2}a, \pi a, \frac{3\pi}{2}a, 2\pi a, \frac{5\pi}{2}a$ ....

Такимъ образомъ съ возрастаніемъ дуги будетъ возрастать пропорціонально ей радіусъ векторъ и спираль будетъ дѣлать около полюса безконечное множество оборотовъ. На одномъ и томъ же радіусѣ векторѣ она будетъ отсѣкать части $MM' = 2\pi a$.

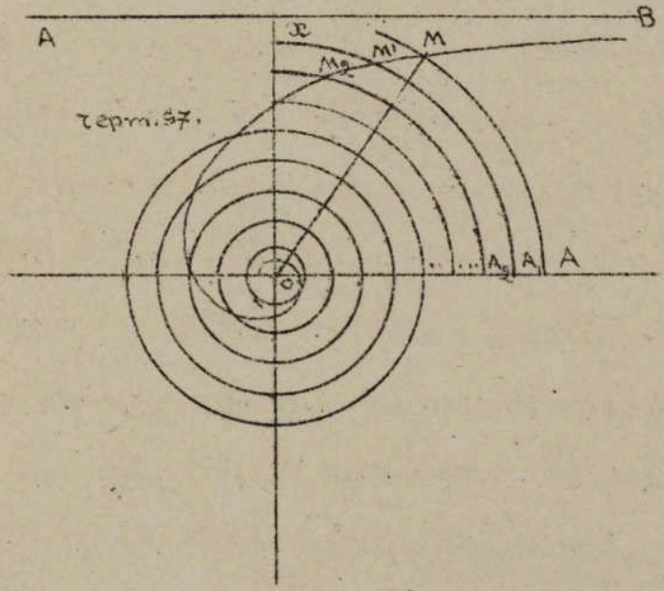
Преобразуя полярное уравненіе (α) въ декартовы координаты, принятыя на фигурѣ, найдемъ: $\sqrt{x^2+y^2} = a \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Гиперболическая спираль.

Это есть кривая, радіусъ векторъ которой обратно пропорціоналенъ полярному углу. Уравненіе этой кривой, отнесенной къ полярнымъ координатамъ (фиг. 97), будетъ: $r = \frac{a}{\varphi}$.

Для построенія этой кривой проводимъ изъ полюса O рядъ концентричныхъ отъ полярной оси дугъ: $AM_1 = A_1M_1 = M_2A_2 = \ldots = a$, послѣднія точки $M, M_1, M_2 \ldots$ будутъ лежать на гиперболической спирали. Это строго доказать такъ: соединяемъ точку M съ O и замѣчаемъ, что полярный уголъ $MOA = \varphi$ измѣряется длиною дуги при радіусѣ равномъ единицѣ, поэтому $MA = a = r\varphi$, откуда $r = \frac{a}{\varphi}$.

Понятно, что когда окружности сильно сближаются, то длину a придется наверстывать на нихъ въ нѣсколько оборотовъ, такъ что съ приближеніемъ къ полюсу, спираль дѣлаетъ все большія и большія обороты, никогда его не достигая. Такой полюсъ зовется асимптотическою точкою спирали.



черт. 97.

Преобразуя уравненіе (3) въ декартовы координаты, находимъ:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

Если умножимъ обѣ части этого уравненія на $\frac{y}{x}$, то найдемъ:

$$y\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{a\cdot\frac{y}{x}}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Полагая здѣсь $x=\infty$ и замѣчая, что $\lim \frac{\frac{y}{x}}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = 1$, получимъ $y=a$.

Такимъ образомъ прямая AB, проходящая параллельно оси Ox на разстояніи $OA=a$, будетъ асимптота гиперболической спирали.–

Логарифмическая спираль.

Эта кривая имеет следующее полярное уравнение: $r = e^{a\varphi}$ ... (8)

Называя через λ некоторый небольшой угол, полагаем:

$\varphi = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda \ldots \infty, -\lambda, -2\lambda, -3\lambda \ldots -\infty$. находим:

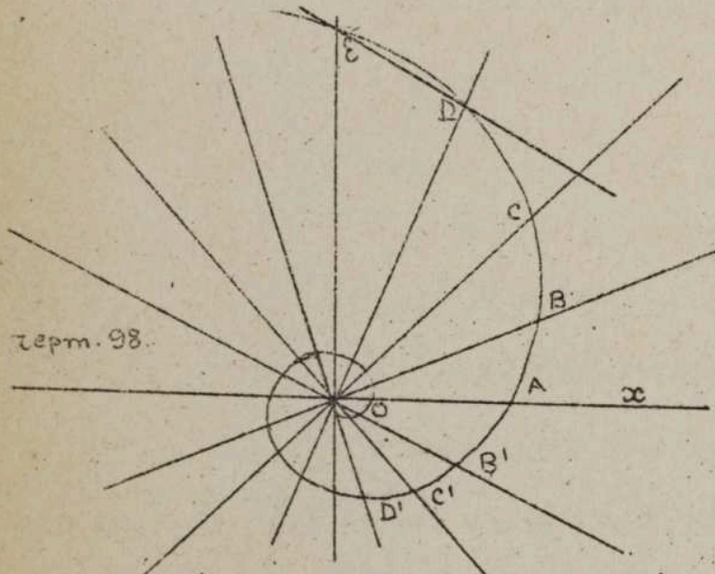
$r = 1, e^{a\lambda}, e^{2a\lambda}, e^{3a\lambda} \ldots \infty, e^{-a\lambda}, e^{-2a\lambda}, e^{-3a\lambda}, \ldots 0.$

Для построения этих величин r удобно поступить так: проводим (черт. 98) прямые $OB, OC, OD \ldots OB', OC', OD' \ldots$, образующие с полярною осью Ox углы $\lambda, 2\lambda, 3\lambda \ldots -\lambda, -2\lambda, -3\lambda \ldots$, откладываем $OA = 1$ и $OB = e^{a\lambda}$; соединяем точки A и B, строим при B угол $OBC = OAB$, потом строим при C угол $DCO = BAO$ и т.д. точно также строим при A угол $OAB' = OBA$, строим при B' угол $OB'C' = OBA$ и т.д. Полученные точки $A, B, C, D \ldots B', C', D' \ldots$ будут лежать на нашей кривой. Для доказательства, замечаем, что все треугольники: OBC, OCD, $ODE \ldots OAB'$, $OB'C'$, $OC'D' \ldots$ будут подобны треугольнику OAB. Из этого подобия имеем пропорции

$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{1}$, $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{1}$, $\frac{OE}{OD} = \frac{OB}{1}$, ...

$\frac{OB'}{1} = \frac{1}{OB}$, $\frac{OC'}{OB'} = \frac{1}{OB}$, $\frac{OD'}{OC'} = \frac{1}{OB}$, ...

И так как $OB = e^{a\lambda}$, то $OC = e^{2a\lambda}$, $OD = e^{3a\lambda}$, $OE = e^{4a\lambda}$,



черт. 98.

$OB' = e^{-a\lambda}$, $OC' = e^{-2a\lambda}$, $OD' = e^{-3a\lambda}$.

Из данного построения логарифмической спирали видно, что с одной стороны она удаляется в бесконечность, а с другой приближается к полюсу O, делая около него бесконечное множество оборотов, но никогда его не достигая, так что точка O являет-

ся и здѣсь, какъ и въ гиперболической спирали асимптотическою точкою. Въ данномъ нами построеніи мы могли-бы взять уголъ Λ сколь угодно малымъ; въ предѣлѣ, когда этотъ уголъ будетъ безконечно малъ, секущая EH обратится въ касательную, которая будетъ образовать съ радіусомъ векторомъ уголъ OEH, называемый отъ имя точки E. Такимъ образомъ касательная логарифмической спирали образуетъ съ радіусомъ векторомъ постоянный уголъ. Преобразуя уравненіе (8) въ Декартовы координаты, находимъ:

$$\sqrt{x^2+y^2} = e^{a \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

Опреобразованіи координатъ.

Намъ извѣстно, что одна и таже кривая, отнесенная къ разнымъ координатамъ, будетъ выражаться разными уравненіями. Такъ, мы видѣли, что кругъ, отнесенный къ прямоугольнымъ осямъ координатъ при произвольномъ положеніи центра, выражается уравненіемъ:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$$

Тотъ же кругъ, если начало координатъ будетъ помѣщено на окружности и за ось абсциссъ будетъ взятъ діаметръ, выразится уравненіемъ: $x^2+y^2 = R^2$

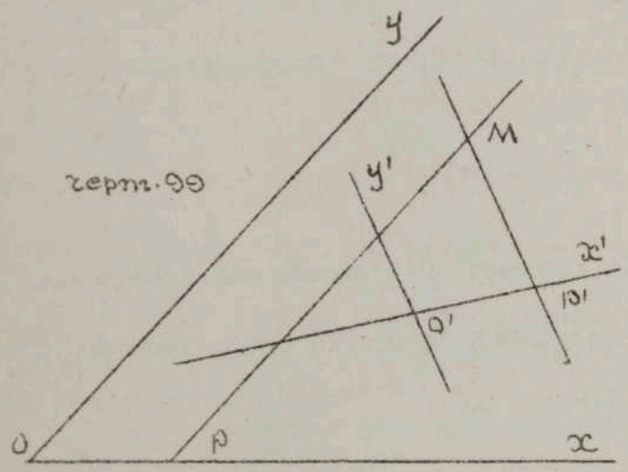
И такъ, съ перемѣной осей координатъ всегда будетъ измѣняться и видъ уравненія кривой. Относительно однѣхъ осей координатъ уравненіе кривой сначала выйдетъ проще, относительно другихъ сложнѣе. При изслѣдованіи свойствъ кривыхъ большая или меньшая простота ихъ уравненій играетъ очень важную роль. Чѣмъ проще уравненіе кривой, тѣмъ легче его изслѣдовать, поэтому для каждой кривой

необходимо выбирать такія оси координатъ, чтобы ея уравненіе получило возможно простой видъ.

Отсюда понятна всякость вопроса о преобразованіи координатъ, который заключается въ слѣдующемъ:

Дано уравненіе нѣкоторой кривой, отнесенной къ даннымъ осямъ координатъ, требуется составить уравненіе той же самой кривой относительно другой системы координатъ, причемъ положеніе второй системы относительно первой извѣстно.

Положимъ, что намъ дано уравненіе нѣкоторой кривой, отнесенной къ осямъ координатъ: Ox и Oy и что требуется получить уравненіе той же кривой относительно новой системы осей координатъ $O'x'$ и $O'y'$ (черт. 99). Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, возьмемъ произвольную точку M разсматриваемой кривой; назовемъ ея координаты относительно первой системы черезъ (x, y), причемъ $x = OP$ и $y = MP$, а координаты той же точки относительно новой системы черезъ (x', y'), причемъ $x' = O'P'$ и $y' = MP'$. Между этими координатами необходимо существуетъ нѣкоторая зависимость, которая можетъ быть обнаружена изъ чертежа. Отыскивая эту зависимость, мы будемъ стараться старыя координаты выразить черезъ новыя и когда такія



черт. 99

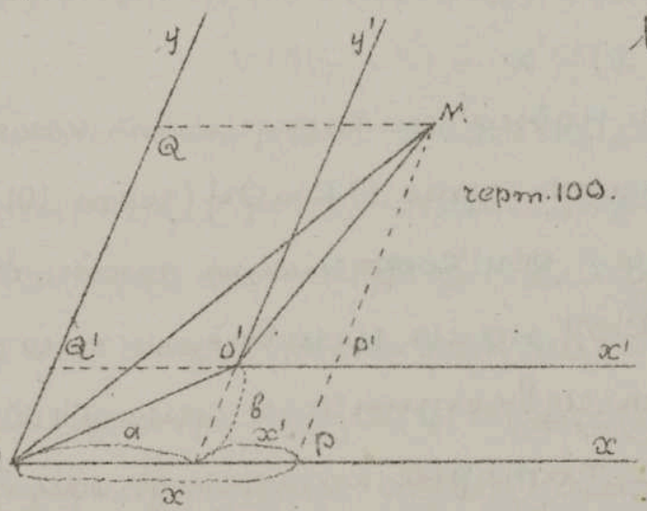
выражены будут найдены, то вставивъ ихъ въ данное уравненіе кривой вмѣсто x и y, мы получимъ новое уравненіе, которое выразитъ связь между новыми координатами x' y' произвольной точки кривой, это уравненіе и будетъ искомое уравненіе кривой относительно новыхъ осей координатъ; отсюда видно, что рѣшеніе вопроса о преобразованіи требуетъ вывода формулъ, которыя отвѣтили бы старыя координаты посредствомъ новыхъ.

Формулы для преобразованія координатъ.

При преобразованіи координатъ необходимо разсмотрѣть нѣсколько случаевъ. Начнемъ съ простѣйшаго:

Iслучай. Перенесеніе начала координатъ въ другую точку, оставляя оси координатъ параллельными прежнимъ направленіямъ.

Пусть данная система координатъ есть xOy (черт. 100), а новая система x'O'y', положимъ, что O'x' параллельно Ox и O'y' параллельно Oy. Въ этомъ случаѣ, чтобы опредѣлить положеніе новой системы, относительно старой, достаточно знать координаты новаго начала O', обозначимъ ихъ черезъ (x и y), а новыя черезъ (x' и y'). Соединивъ точку O' съ точками O и M и точку M съ O, разсмотримъ контуръ OO'M, съ его замыкающей стороной OM. Проэктируя этотъ контуръ на какую либо ось, будемъ имѣть: $пр(OM) = пр(OO') + пр(O'M)$.



черт. 100.

Взявъ за ось проэкцій ось $x^{ов}$, будемъ проэктировать на нее разсматриваемый контуръ линіями, параллельными оси y. При этомъ, очевидно, будемъ имѣть:

$$пр.\,OO' = a\,,\quad пр.\,OM = x \text{ и } пр.\,O'M = x'$$

и наше равенство обратится въ $x = a + x'$

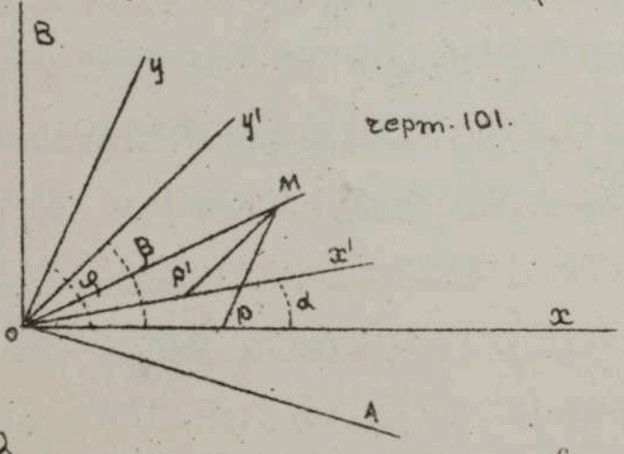
Если за ось проэкцій возмемъ ось $y^{ов}$ и будемъ проэктировать линіями параллельными оси x, то получимъ подобно предыдущему, что тоже равенство обратится въ $y = b + y'$

Двѣ формулы $x = a + x'$ и $y = b + y'$ послужатъ для перехода отъ старыхъ координатъ къ новымъ въ разсматриваемомъ нами случаѣ.

2 случай. Переходъ отъ однихъ осей координатъ къ другимъ, оставляя тоже начало, но измѣняя направленіе осей.

Этотъ случай преобразованія координатъ подраздѣляется на нѣсколько частныхъ:

а, Положимъ, что старыя и новыя оси координатъ косоугольны. Пусть старыя оси координатъ суть Ox и Oy (черт. 101) и уголъ между ними $xOy = \varphi$; новыя оси координатъ пусть будутъ Ox' и Oy', а уголъ между ними $x'Oy'$ намъ неизвѣстенъ, но зато намъ извѣстны два угла $x'Ox$ и $y'Ox$, которые эти оси дѣлаютъ съ прежнею осью абсциссъ Ox. Эти углы считаются отъ положительной оси x въ сторону положительной оси y отъ $0°$ до $180°$.



черт. 101.

Возмемъ затѣмъ произвольную точку кривой M и построимъ

ея старыя и новыя координаты, MP параллельно OY и MP' параллельно OY'. Будемъ имѣть старыя координаты: OP = x и MP = y, а новыя будутъ: OP' = x' и MP' = y'. Чтобы открыть зависимость между старыми и новыми координатами, замѣтимъ, что имѣемъ на чертежѣ два контура: OPM и OP'M. Эти два контура имѣютъ общую замыкающую сторону OM, а потому сумма проэкцій всѣхъ сторонъ на какую-нибудь изъ осей равны между собою, ибо каждая изъ этихъ суммъ равна проэкціи замыкающей стороны OM на ту же ось. На основаніи этого можемъ написать:

$$пр(OP) + пр(MP) \quad пр(OP') + пр(MP')$$

За ось проэкцій выберемъ сначала прямую OA, перпендикулярную къ оси Y и отстоящую отъ нея на 90° въ сторону къ оси X. Обозначая углы посредствомъ надписей тѣхъ же направленій, между которыми лежитъ разсматриваемый уголъ, получимъ при проэктированіи:

$$x\cos(x, A) = x'\cos(x', A) + y'\cos(y', A)$$

Здѣсь всѣ углы отсчитываются отъ оси OA и принимаются въ сторону противоположную часовой стрѣлки. Послѣ этого возьмемъ за ось проэкцій линію OB, перпендикулярную къ оси X и отстоящую отъ нея на 90° въ сторону къ оси Y. Проэктируя, получимъ: $y\cos(y, B) = x'\cos(x', B) + y'\cos(y', B)$

Здѣсь всѣ углы отсчитываются отъ оси OB и принимаются въ сторону по движенію часовой стрѣлки.

Выведенныя формулы неудобны въ томъ отношеніи, что углы въ нихъ отсчитываются не отъ данныхъ осей, а отъ посторонннихъ линій AO и BO. Но формулы можно легко преобра

зовать, основываясь на общей тригонометрической теории так называемых дополнительных углов. Если положить, что в первой из предыдущих формул все направления будут относиться не к оси OA, а к оси Y, ей перпендикулярной и отсчет углов от Oy будем производить по направлению противоположному прежнему отсчитыванию от OA, то вместо прежних углов войдут в формулу дополнительные им и формула примет вид:

$$x\,Sn(x,y) = x'Sn(x',y) + y'Sn(y',y)$$

Здесь все углы отсчитываются от оси Y и в сторону к оси X, т.е. на данном чертеже по движению часовой стрелки. Точно также, если во второй формуле будем отсчитывать углы не от OB, а от X и противоположно прежнему, т.е. противоположно движению часовой стрелки, то формула примет вид: $y\,Sn(x,y) = x'Sn(x',y) + y'Sn(y',x)$.

Здесь все углы отсчитываются от оси X и в сторону к оси Y, т.е. на данном чертеже противоположно движению часовой стрелки. Полученные формулы применяются во всех случаях преобразования координат с переменой направления осей. Иногда эти формулы приводятся к другому виду. Именно, если принять, что в обеих формулах углы отсчитываются от оси X, что углы старых координат-φ, а новые оси X' и Y' наклонены к оси X соответственно под углами α и β, то наше уравнение 1-е в синусоидальном виде: $x\,Sn\varphi = x'Sn(\varphi-\alpha) + y'Sn(\varphi-\beta)$, откуда:

$$x = \frac{x'Sn(\varphi-\alpha) + y'Sn(\varphi-\beta)}{Sn\varphi}$$

Эта формула дает одну из старых координат, именно X,

выраженную посредством новых x' и y'. Второе уравнение получится в виде: $y\sin\varphi = x'\sin\alpha + y'\sin\beta$, откуда

$$y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\varphi}$$

Таким образом переход от старых формул к новым в рассматриваемом случае совершается помощью двух формул:

$$x = \frac{x'\sin(\varphi-\alpha) + y'\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi}, \quad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\varphi}$$

b, старые оси косоугольны, а новые прямоугольны.

Этот случай можно рассматривать, как частный случай относительно предыдущего. Угол между новыми осями, т.е. угол $x'Oy' = \beta - \alpha$ в предыдущем преобразовании был произвольным, положим его теперь равным 90°, т.е. сделаем $\beta - \alpha = 90°$, откуда $\beta = 90 + \alpha$.

Заменив в предыдущих формулах величину β, найдем:

$\sin(\varphi - \beta) = \sin(\varphi - 90° - \alpha) = -\sin(90 + \alpha - \varphi) = -\sin(90 - (\varphi - \alpha)) = -\cos(\varphi - \alpha)$

и $\sin\beta = \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$.

и формула преобразования координат для настоящего случая примет вид:

$$x = \frac{x'\sin(\varphi-\alpha) - y'\cos(\varphi-\alpha)}{\sin\varphi} \qquad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\sin\varphi}.$$

c, старые оси координат прямоугольны, а новые косоугольны.

В этом случае будем иметь $\varphi = 90°$ и $\sin\varphi = 1$. Формулы выше выведенные для случая (a) обратятся при этом в следующие:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta \qquad y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta.$$

d, старые и новые оси координат прямоугольны.

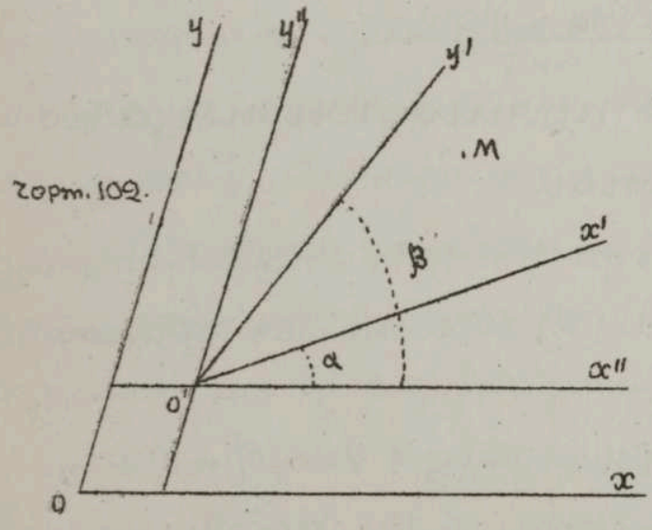
Чтобы получить формулы преобразования координат для

этого случая, стоить только въ послѣднихъ случаяхъ положить, что уголъ $\beta-\alpha$, образуемый новыми осями координатъ, равенъ $90°$, т.е. сдѣлаемъ $\beta-\alpha=90°$ или $\beta=90°+\alpha$. Тогда будемъ имѣть: $\cos\beta=\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha$ и $\sin\beta=\sin(90+\alpha)=\cos\alpha$. Слѣдовательно формулы преобразованія для разсматриваемаго случая будутъ:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

3-й случай. Переходъ отъ однихъ осей координатъ къ другимъ, причемъ измѣняется какъ начало, такъ и направленіе осей.

Положимъ для общности разсмотрѣнія, что старыя оси координатъ OX и OY (черт. 102) образуютъ уголъ φ, и что, какъ новыя, такъ и старыя косоугольны. Новыя оси координатъ пусть будутъ $O'X'$ и $O'Y'$. Чтобы опредѣлить положеніе новыхъ осей координатъ дадимъ координаты новаго начала O'; пусть онѣ будутъ (a,b) и дадимъ сверхъ того углы, которые дѣлаютъ новыя оси со старою осью абсциссъ OX. Чтобы получить эти углы, проведемъ черезъ O' прямую $O'x''$, параллельную OX; тогда уголъ, дѣлаемый новою осью $O'X'$ съ OX будетъ равенъ углу $x'O'x''=\alpha$ и уголъ, образуемый осью $O'Y'$ съ осью OX будетъ равенъ углу $y'O'x''=\beta$. Затѣмъ изъ O' проведемъ параллель оси Oy ..... $O'y''$ и будемъ еще



черт. 102.

разсматривать вспомогательную систему осей координатъ

$O'x''$ и $O'y''$.

Положимъ, что для произвольной точки M старыя координаты суть (x,y), новыя $(x'y')$, а вспомогательныя координаты пусть будутъ $(x''y'')$. Перейдемъ сначала отъ старыхъ осей координатъ къ вспомогательнымъ. На основаніи формулъ случая $1^{го}$ будемъ имѣть, очевидно:

$$x = a + x'' \quad \text{и} \quad y = b + y''$$

Затѣмъ перейдемъ отъ вспомогательныхъ осей къ новымъ по формуламъ 2 случая (а), которыя даютъ: $x'' = \frac{x'\sin(\varphi-\alpha) + y'\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi}$ и $y'' = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\varphi}$

Подставивъ эти выраженія въ предыдущія равенства, получимъ

$$x = a + \frac{x'\sin(\varphi-\alpha) + y'\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi} \quad \text{и} \quad y = b + \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\varphi}$$

Эти формулы рѣшаютъ вопросъ. Въ заключеніе сдѣлаемъ замѣчаніе объ одной особенности вида общихъ формулъ для преобразованія координатъ. Эта особенность заключается въ томъ что въ выраженіяхъ старыхъ координатъ посредствомъ новыхъ новыя координаты входятъ только въ $1^{ой}$ степени. Такого рода формулы называются линейными и слѣдовательно формулы для преобразованія координатъ будутъ линейныя относительно новыхъ координатъ. Самыя общія формулы для преобразованія координатъ имѣютъ такимъ образомъ слѣдующій видъ: $x = a + cx' + dy'$; $y = b + c'x' + d'y'$., гдѣ коэффиціенты c, d, c' и d' имѣютъ извѣстныя величины, зависящія отъ угловъ φ, α и β, а a и b суть координаты новаго начала.

Классификація кривыхъ линій

Всѣ кривыя линіи по виду ихъ уравненій раздѣляются на алгебраическія и трансцендентныя. Алгебраическими назы-

ваются кривыя линіи, выражаемыя алгебраическими уравненіями, т.е. такими, въ которыхъ надъ перемѣнными координатами x и y совершаются только алгебраическія дѣйствія, а именно: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возведеніе въ степень и извлеченіе корня. Трансцендентными называются тѣ, которыя выражаются трансцендентными уравненіями, т.е. такими, въ которыхъ надъ перемѣнными координатами совершаются не только алгебраическія дѣйствія, но въ которыхъ эти перемѣнныя входятъ, сверхъ того, подъ знакомъ логарифма или въ показателѣ, или подъ знакомъ одной изъ тригонометрическихъ или круговыхъ функцій. Не смотря на возможность представлять кривыя алгебраическія, но и нѣкоторыя трансцендентныя весьма важны для приложеній. Для классификаціи алгебраическихъ кривыхъ представимъ ихъ уравненія освобожденными отъ знаменателей и радикаловъ. Первая часть уравненія будетъ представлять цѣлый многочленъ, содержащій x и y въ разныхъ степеняхъ.

Алгебраическія кривыя разбиваются на порядки, причемъ линіями перваго порядка называются тѣ, которыя выражаются общимъ уравненіемъ $1^{\text{й}}$ степени съ двумя перемѣнными x и y. Это уравненіе будетъ:

$$Ax + By + C = 0$$

Мы видѣли, что прямая линія выражается уравненіемъ $1^{\text{й}}$ степени съ двумя перемѣнными x и y, именно: $y = ax + b$, слѣд. прямая линія есть линія $1^{\text{го}}$ порядка. Мы вскорѣ докажемъ, что всѣ линіи перваго порядка суть прямыя. Кривыми линіями $2^{\text{го}}$ порядка называются тѣ, которыя выражаются

общимъ уравненіемъ $2^{\text{й}}$ степени съ двумя перемѣнными x и y, будетъ:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + f = 0$. Къ этому порядку принадлежатъ уже разсмотрѣнныя нами кривыя: кругъ, парабола, эллипсъ и гипербола, изъ которыхъ каждая выражается уравненіемъ $2^{\text{й}}$ степени относительно x и y и слѣдовательно всѣ эти кривыя суть линіи $2^{\text{го}}$ порядка. Кривыми $3^{\text{го}}$ порядка называются линіи, представляемыя общимъ уравненіемъ $3^{\text{й}}$ степени, которое будетъ:

$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + gy^2 + Hx + Jy + K = 0$.

и т. д. и вообще кривая $m^{\text{го}}$ порядка будетъ кривая, представляемая уравненіемъ той же степени между двумя перемѣнными x и y, причемъ надо, чтобы покрайней мѣрѣ входилъ хотя одинъ членъ, сумма показателей котораго при x и y была бы равна m. Чтобы отношеніе кривыхъ по порядку имѣло смыслъ, необходимо, чтобы кривыя сохраняли свой порядокъ, къ какимъ бы осямъ координатъ онѣ ни были отнесены.

Теорема. Степень уравненія кривой линіи не измѣняется при преобразованіи координатъ.

Положимъ дано уравненіе $m^{\text{ой}}$ степени между x и y. Оно представляетъ кривую $m^{\text{го}}$ порядка. Вообразимъ, что всѣ члены этого уравненія перенесены въ первую часть, а во второй остается 0, тогда всѣ члены $1^{\text{й}}$ части будутъ имѣть такой общій видъ: Ax^py^q. Здѣсь сумма показателей будетъ или менѣе или равно m, т. е. $p+q \leq m$. Сумма подобныхъ членовъ равна 0, или $\Sigma Ax^py^q = 0$. Отнесемъ эту кривую къ новымъ осямъ координатъ $x'y'$. Чтобы перейти отъ старыхъ осей къ новыя, мы должны употребить формулы:

$$x = a + mx' + ny' \; ; \quad y = b + m'x' + n'y'.$$

Если мы эти формулы внесем вместо x и y в уравнение кривой, то мы получим уравнение кривой относительно новых осей координат. Это уравнение будет: $\Sigma A(a+mx'+ny')^p(\beta+m'x'+n'y')^q=0$.

Если мы раскроем скобки, сделаем указанное умножение, то так как в скобках x' и y' входят только в первых степенях, то от умножения мы не сможем получить членов, степень измерения которых была бы выше $p+q$, но так как $p+q\leq m$, то наибольшая степень нового уравнения, относительно x' и y' не сможет быть выше m. Это показывает, что при преобразовании координат степень уравнения кривой не может повыситься.

Из этого все рассуждения следует, что степень уравнения кривой не может и понизиться. В самом деле, если бы мы от новых координат перешли бы опять к старым, т.е. сделали бы обратное преобразование, тогда мы должны бы из уравнения второго получить уравнение первое; но если мы допустим, что степень уравнения первого ниже, то при обратном переходе, стало быть, степень уравнения должна повыситься, но мы сейчас только сказали, что при преобразовании координат степень уравнения повыситься не может.

Замечание. Иногда может случиться, что уравнение данной степени представляет не одну кривую того же порядка, но несколько линий низших порядков. Это бывает тогда, когда первая часть уравнения представляет произведение нескольких целых многочленов, например: $(y-ax-b)(x^2+y^2-R^2)=0$. Это уравнение $3^{\text{ей}}$ степени, но оно не представляет кривой $3^{\text{го}}$ порядка. Действительно, произведение тогда

только может быть равно 0, когда один из множителей равен 0 и следовательно мы должны иметь: или $(y-ax-b)=0$ или $(x^2+y^2-R^2)=0$. Предположив первое, получим: $y=ax+b$. Это представляет прямую линию. Предположив второе, получим: $x^2+y^2-R^2=0$. Следовательно наше уравнение представляет прямую линию и круг, т.е. одну линию 1го порядка и другую - второго.

Теория прямой линии.

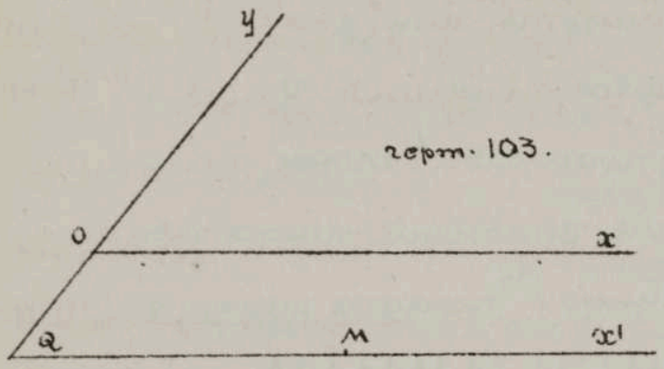
Мы видели, что всякая прямая линия представляется уравнением 1й степени с двумя переменными x и y, именно, мы нашли, что уравнение прямой линии есть: $y=ax+b$, где $a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$; причем α есть угол, образуемый прямою с осью абсцисс, а φ - есть угол между осями координат; b есть отрезок, отсекаемый прямою на оси ординат.

теорема. Всякое уравнение первой степени с двумя переменными x и y представляет некоторую прямую линию.

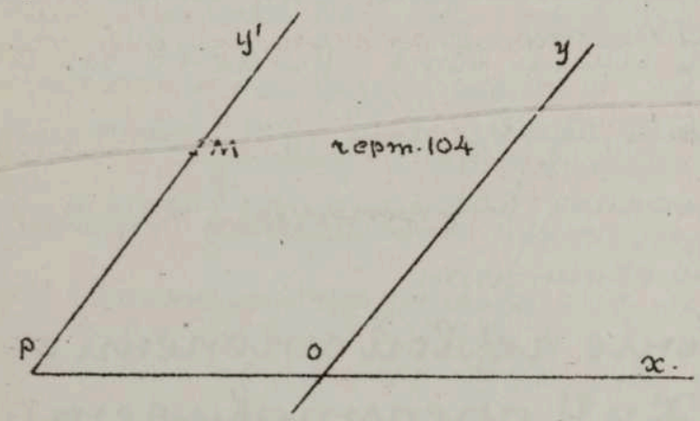
Общий вид такого уравнения следующий: $Ax+By+C=0$
Здесь коэффициенты A, B и C суть данные числа положительные или отрицательные. Они могут быть вычислены-случаи и нулями. Координаты для общности предполагаем косоугольными. Рассмотрим сначала частные случаи:

1) Пусть $A=0$, будем иметь: $By+C=0$, откуда $y=-\frac{C}{B}$
Здесь y имеет величину постоянную. Отложим на оси координат от точки O отрезок равный $-\frac{C}{B}$ в сторону, указываемую знаком. Пусть (черт. 103) $OQ=-\frac{C}{B}$. Проведем через Q параллель оси абсцисс. Для всякой точки M этой

параллели будем иметь: $y = OQ = -\frac{C}{B}$, следовательно это уравнение представляет прямую линию, параллельную оси абсцисс.



II, Пусть $B = 0$, уравнение будет $Ax + C = 0$, из него имеем $x = -\frac{C}{A}$. Здесь x равен постоянной величине. Возьмем оси координат OX и OY и на оси абсцисс отложим от точки O длину $OP = -\frac{C}{A}$. Через P проведем (черт. 104) параллель оси Y, PY'. Для всякой точки M этой параллели будем иметь: $x = OP = -\frac{C}{A}$. Следовательно в этом случае уравнение представляет прямую линию, параллельную оси Y. Рассмотрим общий случай и положим, что ни A, ни B, ни C не равно 0: $Ax + By + C = 0$. Мы докажем, что всегда существует такая прямая линия, которая будет выражаться этим самым уравнением. Из него выведем: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.



Сравним это уравнение с уравнением прямой, которое напишем так: $y = \frac{-\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}x + b$. Чтобы эти два уравнения были тождественны, мы должны иметь во первых: $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)} = -\frac{A}{B}$ и во вторых: $b = -\frac{C}{B}$. Первое равенство должно посредством определения неизвестного угла α. Мы докажем, что угол α всегда может быть найден. Этим и будет доказано сущест-

вание прямой линии, выражаемое данным уравнением. Будем определять α. Положим для краткости $-\frac{A}{B}=a$, где a дано и напишем: $\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}=a$ или $\sin\alpha=a\sin(\varphi-\alpha)$ или $\sin\alpha=a\sin\varphi\cos\alpha-a\cos\varphi\sin\alpha$ делим обе части на $\cos\alpha$, получим: $\operatorname{tg}\alpha=a\sin\varphi-a\cos\varphi\operatorname{tg}\alpha$ или

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sin\varphi}{1+a\cos\varphi}.$$

По этой формуле всегда можно определить угол α, потому что этот угол здесь определяется по $\operatorname{tg}^{cч}$, а tg может получать всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Итак теорема доказана и последняя формула решает следующий вопрос: дано уравнение прямой линии в виде $Ax+By+C=0$, определить угол α, ею делаемый с осью абсцисс. Если бы в данном уравнении или $C=0$, то уравнение было бы $Ax+By=0$. В этом случае отрезок $b=0=-\frac{C}{B}$ и следовательно прямая проходит через начало координат. Это и прямо видно по уравнению $Ax+By=0$, потому что оно удовлетворяется, когда $x=0$ и $y=0$.

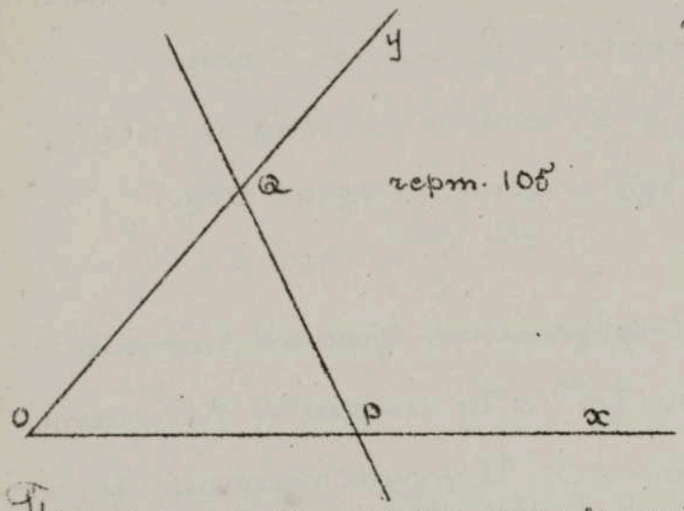
Если координаты прямоугольны, тогда формула, служащая для определения угла α, упрощается и будем иметь: $\varphi=90°$, $\sin\varphi=1$ и $\cos 90°=0$, вследствие чего $\operatorname{tg}\alpha=a=-\frac{A}{B}$.

Вторая форма уравнения прямой.

Мы выразили уравнение прямой по отрезку, который она образует на оси ординат и по угловому коэффициенту. Это первая форма уравнения. Перейдем теперь к составлению уравнения по двум отрезкам на осях. Определим прежде эти отрезки. Пусть дано: $Ax+By+C=0$.

Применим это уравнение к точке P, пересечения этой прямой

съ осью абсциссъ, т.е. выразимъ, что координаты (черт. 105) точки P



черт. 105

удовлетворяютъ нашему уравненію. Эти координаты будутъ: $y=0$ и $x=p$; на чертежѣ $OP=p$; поэтому получимъ: $Ap+C=0$, отсюда $p=-\frac{C}{A}$. P – есть отрѣзокъ, отсѣкаемый прямой на оси абсциссъ съ его знакомъ.

Применимъ наше уравненіе къ точкѣ Q пересѣченія прямой съ осью y. Въ этой точкѣ $x=0$; $y=OQ=q$. Будемъ имѣть: $Bq+C=0$, откуда $q=-\frac{C}{B}$. q – есть отрѣзокъ, отсѣкаемый прямой на оси ординатъ съ его знакомъ. Мы нашли, что $p=-\frac{C}{A}$, отсюда $Ap=-C$ и $A=-\frac{C}{p}$; сверхъ того $q=-\frac{C}{B}$, отсюда $Bq=-C$ и $B=-\frac{C}{q}$. Вставивъ эти выраженія въ данное уравненіе, получимъ: $-\frac{C}{p}x-\frac{C}{q}y+C=0$. Сокративъ на C, получимъ:

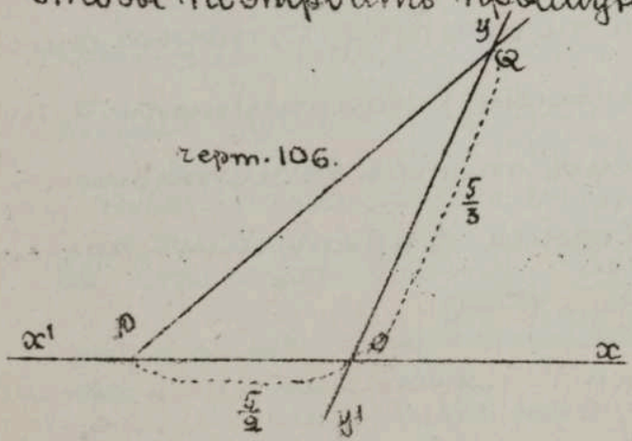
$$-\frac{x}{p}-\frac{y}{q}+1=0, \text{ или}$$

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1.$$

Это и есть уравненіе прямой во второй формѣ.

Задача I^{a}. Построить прямую линію по данному ея числовому уравненію.

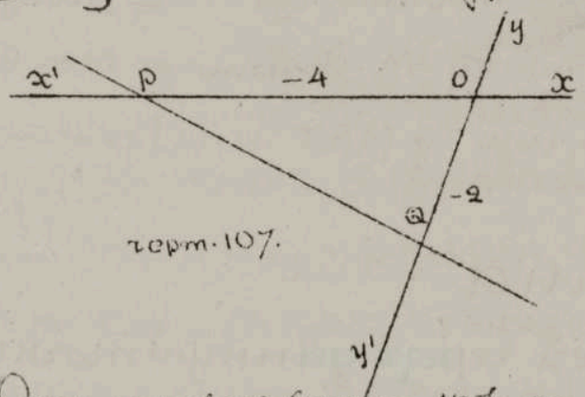
Чтобы построить прямую, достаточно опредѣлить двѣ точки. Мы будемъ для простоты опредѣлять точки пересѣченія прямой съ осями координатъ. Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе: $2x-3y+5=0$. Возьмемъ коорди-



черт. 106.

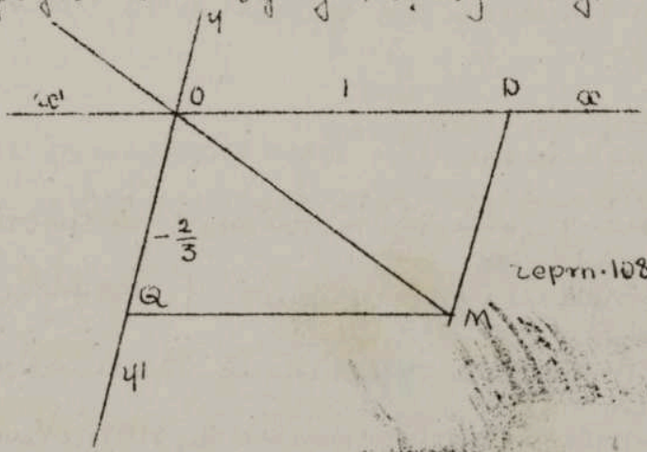
нами ось ОХ и ОУ (черт. 106). Для точки пересечения прямой с осью Х, мы должны иметь $y=0$ и следовательно уравнение будет: $2x+5=0$. Отсюда $x=-\frac{5}{2}$. Строим эту точку. Для точки пересечения прямой с осью ординат мы должны иметь: $x=0$ и следовательно уравнение будет: $-3y+5=0$, откуда $y=\frac{5}{3}$. Строим эту точку Q. Соединяем P с Q и эта прямая будет искомая.

Задача. Дано уравнение: $x+2y+4=0$. Возьмем оси ординат



черт. 107.

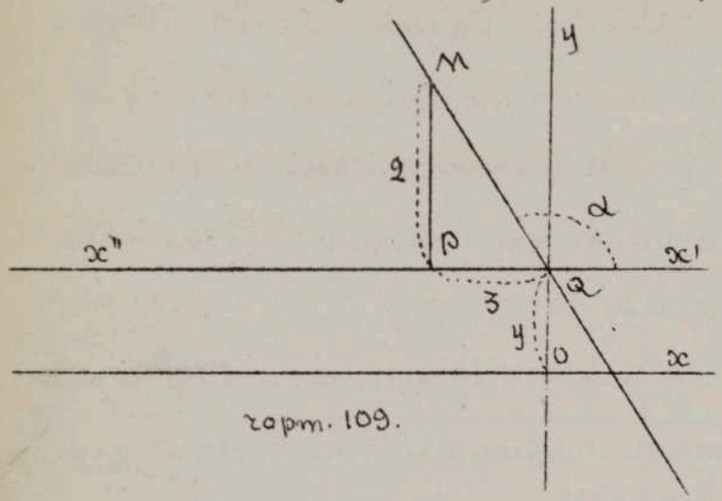
Для точки пересечения с осью Х, $y=0$. Тогда имеем $x+4=0$, откуда $x=-4$. Для точки пересечения с осью ординат имеем $x=0$ и следовательно получим: $2y+4=0$. Отсюда $y=-2$. Откладывая (черт. 107) до точки Q - OQ = -2 и OP = -4. и соединяя P с Q получим требуемую прямую. Если прямая проходит через начало координат, то для ее построения достаточно определить одну точку. Пусть дано уравнение: $2x+3y=0$, Возьмем оси координат (черт. 108) и произвольную абсциссу, например $x=1$ и определим соответствующую ординату, получим $2+3y=0$, откуда $y=-\frac{2}{3}$. Строим эту точку M и соединяем ее с началом координат, получим искомую прямую.



черт. 108.

Если прямая отнесена к прямоугольным осям координат, то ее можно построить по отрезку, который она вырезает на оси Y и по углу, его образующему с осью абсцисс. Пусть дано ура

нение: $2x+3y-4=0$, отсюда $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$. Сравнивъ это уравненіе съ уравненіемъ $y=ax+b$, имѣемъ: $b=\frac{4}{3}$, $a=-\frac{2}{3}$ или $tg\alpha=-\frac{2}{3}$.



черт. 109.

Возмемъ оси координатъ, отложимъ отрѣзокъ $\frac{4}{3}$ (черт. 109) до точки Q, черезъ Q проведемъ параллель оси $x^{ов}$ $\angle\alpha>90°$. Строимъ $tg\alpha=-\frac{2}{3}$, получимъ точку M. Соединяя M съ Q, получимъ требуемую прямую. Ясно, что $tg\,MQx'$ или $tg\alpha=$ $=-tg\,MQx''$ или $=-\frac{2}{3}$.

Третья форма.

Уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку.

Пусть координаты данной точки будутъ $(x'y')$. Уравненіе искомой прямой должно имѣть видъ: $y=ax+b$, здѣсь a и b неизвѣстны. Такъ какъ прямая проходитъ черезъ точку $(x'y')$, то координаты $(x'y')$ должны удовлетворять ея уравненію, слѣдовательно будетъ: $y'=ax'+b$.

Изъ одного уравненія нельзя опредѣлить два неизвѣстныхъ a и b. Можно только помощію его одно изъ неизвѣстныхъ исключить. Изъ него найдемъ: $b=y'-ax'$. Вставивъ, получимъ: $y=ax+y'-ax'$, или: $y-y'=a(x-x')$. Это будетъ искомое уравненіе. Въ немъ угловой коэффиціентъ A останется неизвѣстнымъ, потому что задача неопредѣленная: черезъ одну точку можно провести безчисленное множество прямыхъ линій.

Четвертая форма.

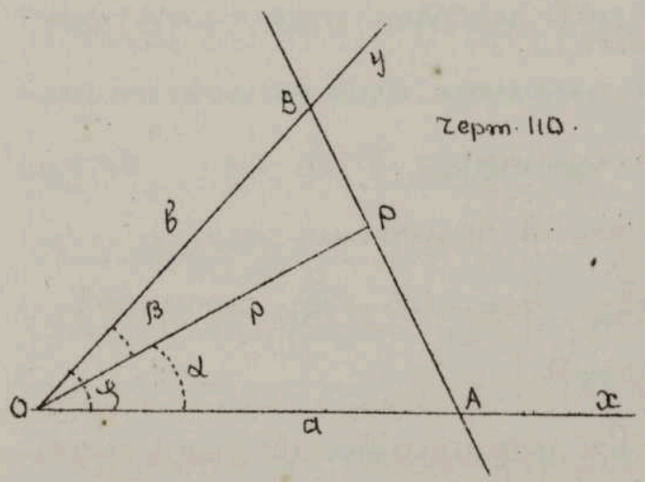
Уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки.

Пусть координаты данных точек будут: $(x'y')$ и $(x''y'')$. Уравнение прямой, как проходящей через первую точку, будет: $y-y'=a(x-x')$ Здесь a неизвестно, но координаты второй точки должны удовлетворять этому уравнению, следовательно $y''-y'=a(x''-x')$, отсюда находим: $a=\frac{y''-y'}{x''-x'}$. Теперь a известно и уравнение искомой прямой будет: $y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$.

Пятая форма

или так называемая нормальная форма.

Уравнение прямой линии, выраженное длиной перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую и по углам, образуемым этим перпендикуляром с осями координат.



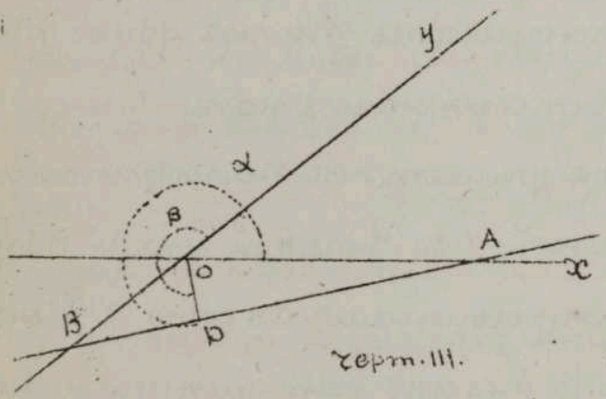
черт. 110.

Через начало координат (черт. 110) проведем прямую линию, перпендикулярную к данной прямой AB. и за направление этого перпендикуляра условимся принимать то из двух прямо противоположных направлений его, которое удалится от положительной стороны оси y-ов первый угол. Обозначим угол, образуемый этим направлением с осью x-ов через α и с осью y через β, причем угол β будет непременно меньше 90°, а угол α может для различных положений прямой AB получать разные величины от 0 до 180°. Длину перпендикуляра OP обозначим через p. Очевидно, что если дана длина

p и два угла α и β, причемъ на нашемъ чертежѣ $\alpha+\beta=\angle yox=\varphi$, то положеніе прямой AB будетъ вполнѣ опредѣлено. Составимъ ея уравненіе: Отмѣтимъ точки пересѣченія нашей прямой съ осями координатъ и отрѣзокъ, отсѣкаемый ею по оси x-въ зна-комъ обозначимъ попрежнему черезъ a, а отрѣзокъ по оси y черезъ b, тогда по формулѣ (2) можемъ написать уравненіе прямой въ видѣ: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, но изъ треугольника OPA мы имѣемъ, что $p=a\cos\alpha$ и отсюда $a=\frac{p}{\cos\alpha}$, затѣмъ изъ треугольника OPB имѣ-емъ $p=b\cos\beta$ или $b=\frac{p}{\cos\beta}$. Вставивъ эти величины a и b въ преды-дущее уравненіе прямой получимъ: $\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}}+\frac{y}{\frac{p}{\cos\beta}}=1$ или упрос-тивъ, будемъ имѣть уравненіе прямой въ такой формѣ:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=p. \quad \ldots\ldots 5$$

Для того, чтобы этотъ видъ уравненія смогъ имѣть мѣсто для всякаго положенія прямой AB, можно условиться считать направленіе перпендикуляра p отъ O до P и приписывать ему всегда знакъ +, углы же α и β отсчитывать отъ положитель-ныхъ осей OX и OY до этого перпендикуляра.



черт. III.

Изъ чертежа III имѣемъ:

$a=+OA=\frac{p}{\cos\alpha}$; $b=-OB=\frac{p}{\cos\beta}$, слѣдов.

$x\cos\alpha+y\cos\beta=p$.

Уравненіе въ нормальномъ видѣ имѣ-етъ большое примѣненіе при прямо-угольныхъ осяхъ. Въ этомъ случаѣ-

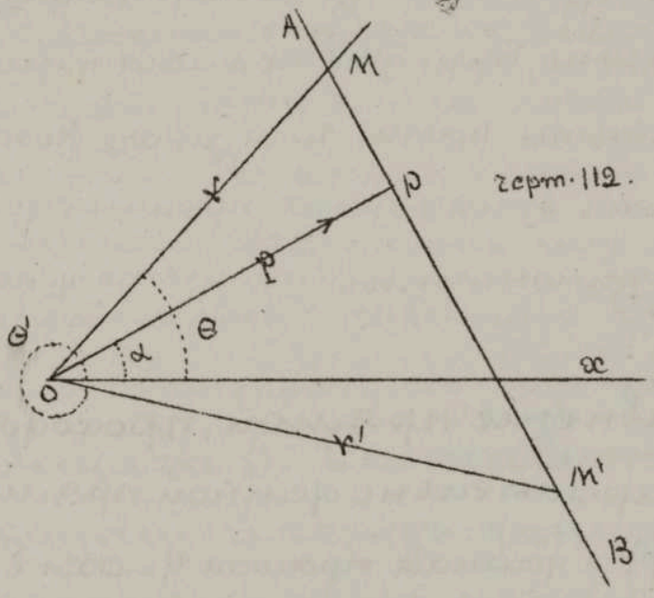
$\beta=\alpha-90°$; $\cos\beta=\cos(\alpha-90°)=\cos(90°-\alpha)=$

$=\sin\alpha$ и ур-іе будетъ: $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

Шестая формула.

или полярное уравненіе прямой.

Пусть точка O (черт. 112) есть полюсъ и OX – полярная ось и пусть AB произвольная прямая. Опустимъ изъ полюса на прямую AB перпендикуляръ и положимъ, что намъ даны разстояніе OP = p и уголъ pOx = α. Этими двумя величинами положеніе прямой будетъ вполнѣ опредѣлено. Возьмемъ произвольную точку M на этой прямой и построимъ ея полярныя координаты, онѣ будутъ: r = OM и Θ = углу MOx, Изъ прямоугольнаго Δка OMP имѣемъ: $p = r\cos(\Theta - \alpha)$, откуда $r = \frac{p}{\cos(\Theta - \alpha)}$.



черт. 112.

Это и есть полярное уравненіе прямой.

Это уравненіе имѣетъ полярными координатами r и Θ произвольной точки прямой, принадлежитъ всѣмъ ея точкамъ. Настаиваетъ, если бы взяли мы точку M' и ея полярныя координаты обозначили бы черезъ r' и Θ', то изъ прямоугольнаго Δка OPM' имѣемъ бы: $p = r'\cos(\alpha + 360^\circ - \Theta')$ или $p = r'\cos(\alpha - \Theta')$ или $p = r'\cos(\Theta' - \alpha)$ откуда $r' = \frac{p}{\cos(\Theta - \alpha)}$, а это есть тоже самое уравненіе.

Задача 2. Выразить условіе ∥-ти двухъ прямыхъ.

Пусть уравненія двухъ параллельныхъ прямыхъ будутъ:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{и} \quad A'x + B'y + C' = 0.$$

углы α и α', дѣлаемые этими прямыми съ осью абсциссъ, равны, какъ соотвѣтственные, слѣдовательно и угловые коэффиціенты этихъ прямыхъ должны быть равны. Пусть для первой прямой

угловой коэффициентъ есть a, а для второй a', должны имѣть: $a = a'$, найдемъ a и a' для обѣихъ прямыхъ. Для этого трансформируемъ данныя уравненія относительно y, получимъ: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ и $y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}$, стало быть $a = -\frac{A}{B}$ и $a' = -\frac{A'}{B'}$, слѣдовательно $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ или $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$, слѣдовательно, если двѣ прямыя параллельны, то ихъ угловые коэффициенты равны или иначе коэффиціенты при x и y въ уравненіяхъ этихъ двухъ прямыхъ должны быть соотвѣтственно пропорціональны. Это и есть условіе параллельности прямыхъ.

Задача 3. Составить уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку, параллельно данной прямой.

Пусть данная точка есть $(x'y')$ и данная прямая $y = ax + b$. Уравненіе искомой прямой, какъ проходящей черезъ данную точку $(x'y')$ будетъ: $y - y' = a'(x - x')$, но по условію параллельности будемъ имѣть: $a = a'$, поэтому окончательное уравненіе будетъ:

$$y - y' = (x - x')a.$$

Задача 4. Даны уравненія двухъ прямыхъ, найти координаты точки ихъ пересѣченія.

Пусть уравненія прямыхъ линій будутъ:

$$Ax + By + C = 0 \ldots\ldots 1), \quad A'x + B'y + C' = 0 \ldots\ldots 2),$$

Искомая точка слѣдуетъ въ одно и тоже время на прямой 1), и прямой 2), слѣдовательно ея координаты должны удовлетворять одновременно, какъ уравненію 1), такъ и уравненію 2), и чтобы ихъ найти, стоитъ только рѣшить эти два уравненія, вмѣстѣ взятыя, разсматривая въ нихъ x и y, какъ неизвѣстныя. Сдѣлаемъ это. Исключимъ y, умноживъ на

B' уравненіе 1, и на B уравненіе 2, получимъ:

$(AB' - BA')x + B'C - BC' = 0$, отсюда $x = \frac{BC' - B'C}{AB' - BA'}$

Теперь, умноживъ уравненія 1 и 2 на A и A' и вычтя ур 2 ур-1, получимъ $(AB' - A'B)y + AC' - A'C = 0$, отсюда $y = \frac{A'c - AC'}{AB' - A'B}$.

Найденныя для x и y величины будутъ всегда возможны за исключеніемъ того случая, когда $AB' - A'B = 0$, тогда получимъ: $x = \infty$ и $y = \infty$. Въ этомъ случаѣ прямыя пересѣкаются на безконечно большомъ разстояніи, иначе говоря, вовсе не пересѣкутся, т.е. онѣ параллельны. Равенство $AB' - A'B = 0$ выражаетъ условіе параллельности прямыхъ; изъ него получимъ: $AB' = A'B$ или $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$

Задача 5. Составить уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку и черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ, уравненія которыхъ даны.

Дана точка $(x'y')$ и двѣ прямыя: $Ax + By + C = 0$ ..1, $A'x + B'y + C' = 0$ .. 2,

Изъ двухъ уравненій 1 и 2 составимъ слѣдующимъ образомъ: умноживъ второе уравненіе на произвольный множитель λ и сложивъ съ первымъ: $Ax + By + C + \lambda(A'x + B'y + C') = 0$ 3,

Разсмотримъ, что представляетъ уравненіе 3. Во первыхъ оно первой степени относительно x и y, слѣдовательно оно выражаетъ прямую линію. Далѣе легко замѣтить, что эта прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ 1 и 2. Въ самомъ дѣлѣ, координаты этой точки удовлетворяютъ уравненію 1 и 2. вслѣдствіе, слѣдовательно они удовлетворяютъ и уравненію третьему, потому что будучи въ него подставлены, дадутъ: $0 + 0\lambda = 0$. Въ уравненіи (3) λ произвольно и это уравненіе выражаетъ не одну прямую, но безчисленное множество прямыхъ, проходящихъ

через точку пересечения прямых 1 и 2. Определить λ по условию, что прямая 3, проходит через данную точку $(x'y')$. Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению 3, следовательно:

$Ax' + By' + C + \lambda(A'x' + B'y' + C') = 0$, откуда $\lambda = -\frac{Ax' + By' + C}{A'x' + B'y' + C'}$ и

искомое уравнение будет:

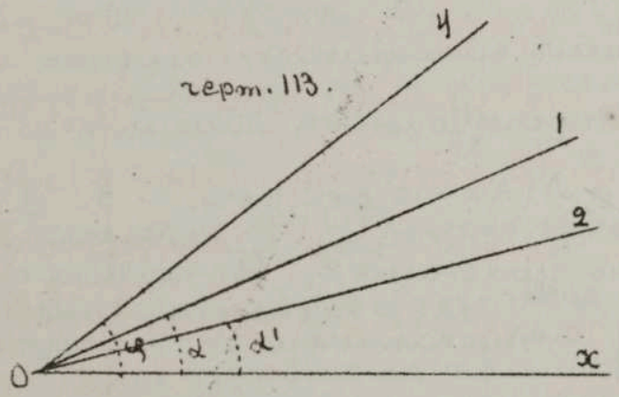
$$Ax + By + C - \frac{Ax' + By' + C}{A'x' + B'y' + C'}(A'x + B'y + C') = 0$$

Задача 6. Даны уравнения двух прямых: определить угол, образуемый этими прямыми.

Уравнения двух данных прямых представляются в виде:

$y = ax + b$ и $y = a'x + b'$.

Обозначим через α и α' углы, делаемые этими прямыми с осью x и через φ угол смежный осями координат. Через начало проведем прямые, параллельные данным; начертеж. 113 прямая, параллельная 1-й обозначена (1), а параллельная 2-й, знакомый (2) угол смежный прямыми назовем через v, будем иметь $v = (\alpha - \alpha')$. Возьмем $tg\,tgv = tg(\alpha - \alpha') = \frac{tg\alpha - tg\alpha'}{1 + tg\alpha\,tg\alpha'}$, но по выведенной выше формуле имеем: $tg\alpha = \frac{a\sin\varphi}{1 + a\cos\varphi}$ и $tg\alpha' = \frac{a'\sin\varphi}{1 + a'\cos\varphi}$. Вставляя находим: $tgv = \frac{\frac{a\sin\varphi}{1+a\cos\varphi} - \frac{a'\sin\varphi}{1+a'\cos\varphi}}{1 + \frac{aa'\sin^2\varphi}{(1+a\cos\varphi)(1+a'\cos\varphi)}}$, упрощая, будем иметь: $tgv = \frac{a\sin\varphi + aa'\sin\varphi\cos\varphi - a\sin\varphi - a'\sin\varphi}{1 + a\cos\varphi + a'\cos\varphi + aa'\cos^2\varphi + aa'\sin^2\varphi}$ или $tgv = \frac{(a - a')\sin\varphi}{1 + (a + a')\cos\varphi + aa'}$.



черт. 113.

Эта формула решает задачу. В частном случае, когда координаты прямоугольные, эта формула упрощается, тогда $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$ и будем иметь $tgv = \frac{a - a'}{1 + aa'}$.

Слѣдствіе. Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ: Если прямыя перпендикулярны, то $\angle v = 90°$, $\operatorname{tg} v = \infty$ и знаменатель въ формулѣ, выражающей $\operatorname{tg} v$ долженъ быть равенъ нулю, поэтому будемъ имѣть: $1 + (a + a')\cos\varphi + aa' = 0$ и при прямоугольныхъ координатахъ: $1 + aa' = 0$.

Эти два равенства и выражаютъ условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ. Выражается оно такъ: произведеніе tg-овъ угловъ наклоненія двухъ прямыхъ, сложенное съ единицею, должно быть равно 0., потому что оно будетъ для двухъ прямыхъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= a'x + b' \end{aligned}\right| \; aa' + 1 = 0.$$

Задача 7. Составить уравненіе прямой линіи, проходящей чрезъ данную точку и перпендикулярной къ данной прямой.

Пусть данная точка есть $(x'y')$, а данная прямая $y = ax + b$: Уравненіе искомой прямой, какъ проходящей черезъ данную точку, будетъ: $y - y' = a'(x - x')$. Здѣсь a' неизвѣстно, но по условію перпендикулярности двухъ прямыхъ имѣемъ $aa' + (a + a')\cos\varphi + 1 = 0$, гдѣ φ есть уголъ между осями координатъ, отсюда найдемъ a':

$$a'(a + \cos\varphi) + a\cos\varphi + 1 = 0$$

$$a' = -\frac{a\cos\varphi + 1}{a + \cos\varphi}$$

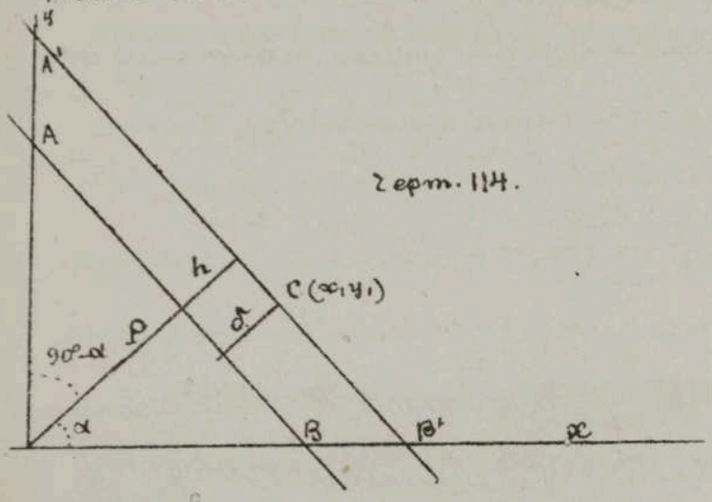
теперь a' извѣстно и уравненіе искомой прямой будетъ:

$$y - y' = -\frac{a\cos\varphi + 1}{a + \cos\varphi}(x - x').$$

Задача 8. Опредѣлить длину перпендикуляра опущеннаго изъ данной точки на прямую.

Рѣшимъ эту задачу въ предположеніи, что уравненіе пря-

мой AB дано въ нормальной формѣ относительно прямоугольныхъ осей:



черт. 114.

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \ldots\ldots 1.$

Проведемъ черезъ данную точку C (черт. 114) прямую A'B' параллельную AB и замѣтимъ, что уравненіе этой прямой будетъ:

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (p+h) = 0 \ldots 2.$

гдѣ h - разстояніе между прямыми A'B' и AB. Такъ какъ прямая, данная ур(2) проходитъ черезъ точку $C(x_1, y_1)$, то $x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - (p+h) = 0$, отсюда $\delta = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \ldots 3.$ Первая часть формулы (3) представляетъ искомый перпендикуляръ, опущенный изъ точки C на прямую AB; вторая его часть представляетъ намъ лѣвую часть ур(1), въ которую подставлены координаты точки C. Отсюда слѣдуетъ, что для рѣшенія предложенной задачи стоитъ только подставить координаты данной точки въ нормальное уравненіе данной прямой.

Если уравненіе прямой относительно прямоугольныхъ координатъ дано въ произвольной формѣ: $Ax + By + C = 0 \ldots 4$, то для рѣшенія предложенной задачи надо это уравненіе прежде привести къ нормальной формѣ. Для этого умножимъ ур. (4) на множитель λ и выберемъ его такъ, чтобы уравненіе: $A\lambda x + B\lambda y + C\lambda = 0 \ldots (5.)$ сдѣлалось тождественно съ ур. (1). Это требуетъ, чтобы: $A\lambda = \cos\alpha$, $B\lambda = \sin\alpha$ и $C\lambda = -p$. Чтобы опредѣлить λ возведемъ первыя два условія въ квад-

рать и складывать: $(A^2+B^2)\lambda^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ или

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Перед корнем берем знак (+), если C отрицательно и знак (−), если C положительно, чтобы p всегда выходило положительно. Подставляя λ в уравнение (5), находим:

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Итак, чтобы привести уравнение к нормальной форме, надо разделить его на корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при x и y.

На основании сказанного длина перпендикуляра, опущенного из точки (x_1, y_1) на прямую $Ax+By+C=0$ дается формулою:

$$h = \frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots\ldots 6.$$

В частном случае, когда точка C лежит в начале координат, имеем: $x_1 = y_1 = 0$, поэтому $h = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Замечание. Если в формуле 6 будем брать перед корнем знак, противоположный знаку C, то h будет положительно для всех точек C, лежащих с той стороны прямой AB, где нет начала координат, и отрицательно для точек C, лежащих с той стороны прямой AB, где находится начало координат.

В случае косоугольных осей преобразование общего ур-ия $Ax+By+C=0$ в нормальное также достигается одним условием, но вид синуса бывает более сложен. Сравнивая уравнения $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ и $x\cos\alpha + y\cos(\varphi-\alpha) - p = 0$, находим условия: $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \cos(\varphi-\alpha)$ и $\lambda C = -p$. Определение λ из этих условий основано на тригонометрическом

тождество: $\cos^2\alpha + \cos^2(\varphi-\alpha) - 2\cos\alpha\cos(\varphi-\alpha)\cos\varphi = \sin^2\varphi$, которое не трудно доказать, выполняя действия, указанные въ первой его части.

Чтобы опредѣлить λ, возводимъ два первыя условія въ квадратъ и составляемъ произведеніе тѣхъ же равенствъ между собою, умноженное на $2\cos\varphi$. Затѣмъ складываемъ два первыя изъ полученныхъ равенствъ и вычитаемъ третье, получится:

$$\lambda^2(A^2+B^2-2AB\cos\varphi) = \cos^2\alpha + \cos^2(\varphi-\alpha) - 2\cos\alpha\cos(\varphi-\alpha)\cos\varphi = \sin^2\varphi,$$

откуда находимъ: $\lambda = \pm\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\varphi}}$.

Знакъ λ опредѣляется изъ третьяго условія: $\lambda C = -p$.

Задача 9. Опредѣлить площадь треугольника, когда даны координаты его вершинъ.

Возмемъ для простоты прямоугольныя оси координатъ и назовемъ координаты вершинъ треугольника черезъ (x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3). Составимъ уравненіе прямой, проходящей черезъ первыя двѣ вершины: $y - y_1 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ ..... 1.

$$x(y_2-y_1) - y(x_2-x_1) + x_2y_1 - y_2x_1 = 0$$

Приведемъ это уравненіе къ нормальной формѣ:

$$\pm\frac{x(y_2-y_1)-(x_2-x_1)y+x_2y_1-y_2x_1}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}} = 0 \quad \ldots\ldots 2.$$

Если подставимъ сюда вмѣсто x и y координаты x_3 и y_3, то найдемъ длину перпендикуляра h, опущеннаго изъ точки (x_3y_3) на основаніе треугольника, соединяющее точки (x_1y_1) и (x_2y_2). Этотъ перпендикуляръ будетъ: $h = \pm\dfrac{x_3(y_2-y_1)-y_3(x_2-x_1)+x_2y_1-y_2x_1}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$.

Онъ представитъ высоту нашего треугольника, основаніе же нашего треугольника выразится разстояніемъ δ между тѣ-

Камн (x_1y_1) и (x_2y_2).... $\delta = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

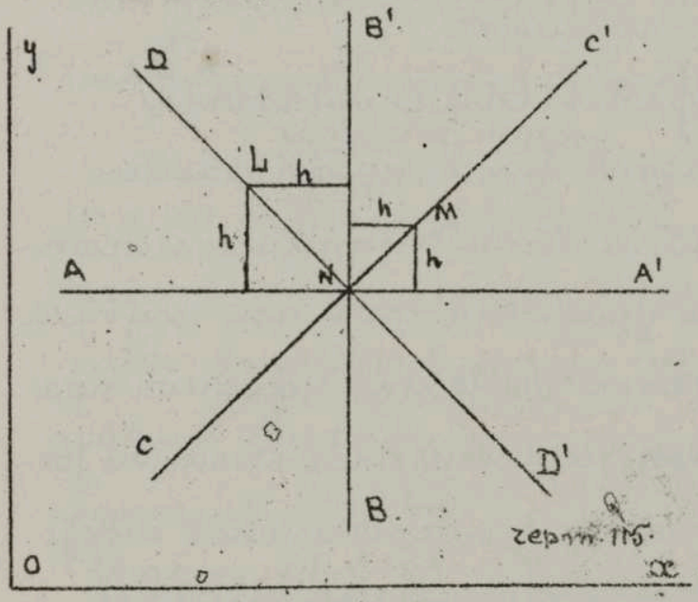
Отсюда слѣдуетъ, что искомая площадь будетъ:

$$S = \frac{1}{2} h\delta = \pm \frac{1}{2}\left\{x_3(y_2-y_1) - y_3(x_2-x_1) + x_2y_1 - y_2x_1\right\} \text{ или}$$

$$S = \pm\frac{1}{2}\left\{y_1(x_2-x_3) + y_2(x_3-x_1) + y_3(x_1-x_2)\right\} \ldots\ldots 3.$$

Такъ какъ площадь берутъ по абсолютной величинѣ, то въ этой формулѣ слѣдуетъ взять такой знакъ, чтобы вторая часть была положительна. Если площадь $S=0$, то это покажетъ, что три данныя точки лежатъ на одной прямой. Отсюда получается аналитическое условіе, при которомъ три данныя точки лежатъ на одной прямой: $y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)=0$

Задача 10. Составить ур-іе прямой, дѣлящей уголъ между двумя данными прямыми пополамъ.



чертѣ. 115.

Пусть (черт. 115) оси прямоугольны и уравненія прямыхъ AA' и BB' даны въ нормальной формѣ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \ldots\ldots 1$$

$$x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p' = 0 \ldots\ldots 2.$$

Если прямая CC' дѣлитъ уголъ B'NA' пополамъ, то длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ всякой точки M прямой CC' на прямыя AA' и BB' между собою равны. Эти длины получатся, когда подставимъ въ первыя части уравненій (1) и (2) координаты точки M; поэтому уравненіе прямой CC' будетъ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p';\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - p - (x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p') = 0$$

Откуда: уравнение биссектрисы двух данных прямых получается, приведя их уравнения к нормальной форме и вычитая их.

Существуют две биссектрисы. Другая будет DD', для нея ∆ОСЕ перпендикуляры должны быть равны, но если подставимъ координаты точки N въ первыя части формулъ (1) и (2), то найдемъ въ первомъ случаѣ отрицательную длину перпендикуляра (ибо N лежитъ относительно BB' съ той же стороны, какъ и начало O), а во второмъ - положительную. Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе прямой DD' можно написать такъ:

$$-(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) = x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p'.$$

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) + (x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p') = 0.$$

т.е. уравненіе другой биссектрисы получается, складывая нормальныя уравненія данныхъ прямыхъ.

Задачи на теорію прямыхъ линій.

На теорію прямой линіи могутъ быть предлагаемы различныя задачи, которыя могутъ быть раздѣлены насл-дующія четыре рода: составить уравненіе прямой подъ двумъ данными; доказать, что три точки лежатъ на одной прямой; доказать, что три прямыя пересѣкутся въ одной точкѣ; найти прямую, какъ нѣкоторое геометрическое мѣсто.

Примѣръ 1-й. Провести черезъ данную точку (x_1, y_1) прямую, которая съ прямою $y = ax + b$ образуетъ данный уголъ.

Пусть оси прямоугольны и m есть tg даннаго угла. Называя угловой коэффиціентъ искомой прямой черезъ a_1,

чительно: $m = \frac{a_1 - a}{1 + aa'}$, $a_1 = \frac{m + a}{1 - ma}$; зная a_1, находимъ для искомой прямой: $y - y_1 = \frac{m + a}{1 - ma}(x - x_1)$.

Задачи втораго рода. Для рѣшенія задачъ втораго рода слѣдуетъ составить уравненіе прямой, проходящей черезъ данныя точки и показать, что этому уравненію удовлетворяютъ координаты третьей точки; слѣдуетъ также въ случаѣ прямоугольныхъ осей пользоваться формулою:

$$y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1) = 0.$$

или замѣняющей ее $\begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 \\ 1 + x_2 y_2 \\ 1 + x_3 y_3 \end{vmatrix} = 0$

Наконецъ еще простой |случай| способъ состоитъ въ томъ, что разсматриваютъ координаты третьей точки и показываютъ, что онѣ имѣютъ форму:

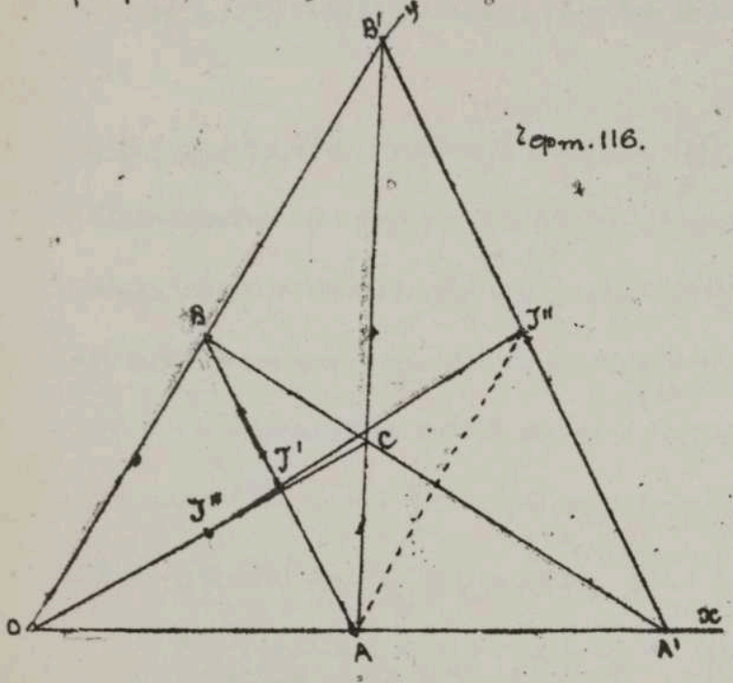
$$x_3 = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n}, \quad y_3 = \frac{my_1 + ny_2}{m + n}$$

гдѣ m и n суть какія нибудь положительныя или отрицательныя количества. Послѣдній способъ основанъ на формулѣ, выражающей координаты точки, дѣлящей разстояніе между двумя данными точками $(x_1 y_1), (x_2 y_2)$ въ отношеніи $n : m$.

Примѣръ 2-й. Доказать, что во всякомъ полномъ четыреугольникѣ средины его діагоналей лежатъ на одной прямой.

Полнымъ четыреугольникомъ называется совокупность четырехъ пересѣкающихся прямыхъ. За оси координатъ (черт. 116) возмемъ OA' и OB. Нужно доказать, что три

средины I' I'', I''' лежать на одной прямой. Пусть даны AO=a, A'O=a', OB=b, OB'=b'. Координаты точки A суть (a, 0); A'–(a', 0), B'–(0, b'); B–(0, b). Координаты средины I' суть (x'y') $x'=\frac{a+0}{2}=\frac{a}{2}$ и $y'=\frac{b}{2}$. Координаты I''...(x''y''). $x''=\frac{a'}{2}$; $y''=\frac{b'}{2}$. Координаты I'''....(x'''; y'''), чтобы их найти нужно предварительно найти координаты точки C; но точка C есть пересечение прямой AB' с A'B.



Черт. 116.

Уравнение AB'..... $\frac{x}{a}+\frac{y}{b'}=1$

" A'B..... $\frac{x}{a'}+\frac{y}{b}=1$.

Выпишем эти два уравнения: $b'x+ay=ab'$.

$bx+a'y=a'b$.

откуда... $x=\frac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab}$;

$y(a'b'-ab)=(a'-a)bb'$.

откуда... $y=\frac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab}$.

Теперь координаты I''' известны: $x'''=\frac{aa'(b'-b)}{2(a'b'-ab)}$

$y'''=\frac{bb'(a'-a)}{2(a'b'-ab)}$.

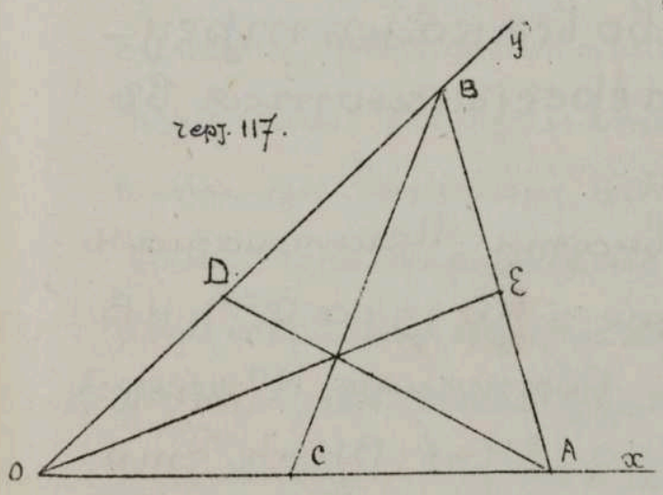
Далее составим угловые коэффициенты прямых I'I'' и I'I'''. Если эти прямые совпадают, то их угловые коэффициенты равны. Угловой коэффициент определяется по уравнению прямой, проходящей через две данные точки. (Это уравнение: $y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$, угловой коэффициент $=\frac{y''-y'}{x''-x'}$). Угловой коэффициент прямой $I'I''=\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{\frac{b'}{2}-\frac{b}{2}}{\frac{a'}{2}-\frac{a}{2}}=\frac{b'-b}{a'-a}$. Угловой коэффициент прямой I'I''' равен:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{\frac{bb'(a'-a)}{2(a'b-ab')}-\frac{b}{2}}{\frac{aa'(b'-b)}{2(a'b-ab')}-\frac{a}{2}}=\frac{a'bb'-abb'-a'bb'+ab^2}{aa'b'-aa'b-aa'b'+ba^2}=\frac{ab^2-abb'}{a^2b-aa'b'}=$$

$$=\frac{ab(b'-b)}{ab(a'-a)}=\frac{b'-b}{a'-a}.$$ что и требовалось доказать. Значит середины I', I'' и I''' лежатъ на одной прямой.

Задачи третьяго рода. Если три прямыя проходятъ черезъ одну точку, то уравненія этихъ прямыхъ должны быть совмѣстны. Самый общій способъ открыть такую совмѣстность уравненій состоитъ въ томъ, что составляютъ детерминантъ изъ всѣхъ коэффиціентовъ всѣхъ трехъ уравненій. Если по вычисленіи этого детерминанта онъ окажется равнымъ 0, то уравненія совмѣстны. Но иногда доказывать совмѣстность уравненій и другими простѣйшими способами, показывая, что одно изъ уравненій есть алгебраическое слѣдствіе двухъ другихъ.

Примѣръ 3-й. Доказать, что равнодѣляющія сторонъ треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.



черт. 117.

Направимъ оси координатъ (чер. 117) по двумъ сторонамъ треугольника. Пусть OA=a и OB=b.

Составимъ уравненія:

Прямой AD ... $\frac{x}{a}+\frac{y}{\frac{b}{2}}=1$

Прямой BE ... $\frac{x}{\frac{a}{2}}+\frac{y}{b}=1$

Прямой OE .... $y-0=\frac{\frac{b}{2}-0}{\frac{a}{2}-0}(x-0)$.

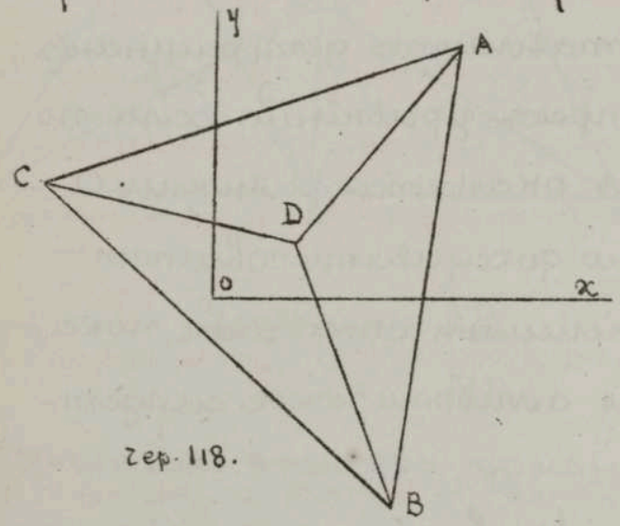
Представляемъ ихъ въ болѣе простомъ видѣ: $\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}-1=0$; $\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$; $\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=0$.

Мы имѣемъ: $-1\left(\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}-1\right)+\left(\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+\left(\frac{y}{b}+\frac{x}{a}\right)=0$

Это доказываетъ, что одно изъ уравненій есть алгебраическое слѣдствіе двухъ остальныхъ и потому прямыя AD, BC, OE пересѣкаются въ одной точкѣ.

Примѣръ 4-й. Доказать, что равнодѣлящія угловъ треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

Беремъ начало прямоугольныхъ осей (черт. 118) внутри даннаго треугольника ABC и напишемъ уравненія его сторонъ въ нормальной формѣ. Пусть для сокращенія эти уравненія будутъ: $\alpha=0$, $\beta=0$ и $\gamma=0$.

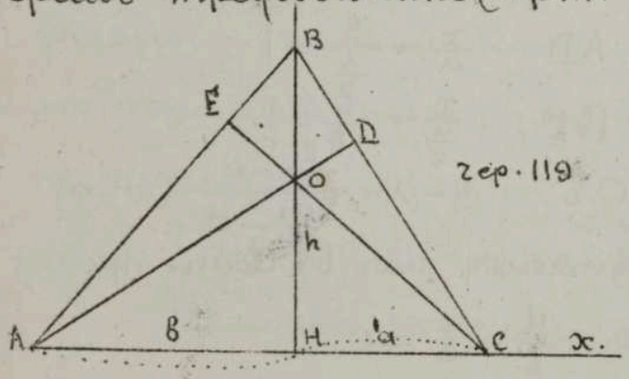


чер. 118.

Уравненія равнодѣлящихъ получатся, какъ было сказано, вычитая эти уравненія: $\beta-\alpha=0$; $\gamma-\beta=0$ и $\alpha-\gamma=0$. Мы имѣемъ $(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)+(\alpha-\gamma)=0$. Требуемое доказано.

Примѣръ 5. Доказать, что во всякомъ треугольникѣ три его высоты пересѣкаются въ одной точкѣ.

Беремъ треугольникъ (черт. 119) и его высоты. Принимаемъ H за начало и HC за ось x-овъ, а HB за ось y. Обозначимъ HC черезъ a, т. е. $HC=a$, $AH=b$, $BH=h$. Эти три величины извѣстны и вполнѣ опредѣляютъ треугольникъ.



чер. 119.

Уравненіе линіи BC .... $\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$. Рѣшивъ его относительно y, получимъ: $y=-\frac{h}{a}x+h$.

Угловой коэффиціентъ $=-\frac{h}{a}$. Координаты точки C $-(a,0)$ и A $-(-b,0)$. Уравненіе линіи AD будетъ: $y-0=m(x-(-b))$ или $y=m(x+b)$, гдѣ m неизвѣстно, но по условію перпендикулярности имѣемъ: $-\frac{h}{a}m+1=0$, откуда $m=\frac{a}{h}$ и окончательно уравненіе AD будетъ: ... $y=\frac{a}{h}(x+b)$. Уравненіе AB будетъ $\frac{x}{-b}+\frac{y}{h}=1$, отсюда $y=\frac{h}{b}x+h$. Угловой коэффиціентъ $=\frac{h}{b}$. Уравненіе CE будетъ: $y-0=m'(x-a)$ или $y=m'(x-a)$. Условіе перпендикулярности EC съ AB будетъ: $\frac{h}{b}m'+1=0$, отсюда $m'=-\frac{b}{h}$. Окончательное уравненіе CE будетъ: $y=-\frac{b}{h}(x-a)$.

Ищемъ координаты точки пересѣченія CE съ AD имѣемъ:

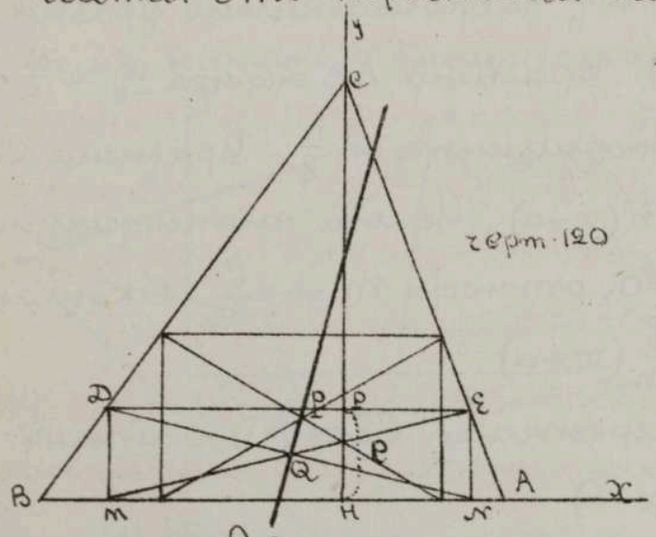
$$\frac{a}{h}(x+b)=-\frac{b}{h}(x-a)$$

$a(x+b)=-b(x-a)$ или $ax+ab=-bx+ab$ или $ax=-bx$, но a не равно b, слѣдовательно $x=0$ и точка лежитъ на оси ординатъ.

Задачи четвертаго рода. Задачи четвертаго рода объ опредѣленіи уравненія прямой, какъ заданнаго геометрическаго мѣста, рѣшаются, составляя изъ чертежа связь между текущими координатами. Для этого нужно выбрать перемѣнную величину, отъ измѣненія которой зависитъ образованіе геометрическаго мѣста и выразить координаты черезъ эту перемѣнную и черезъ данные параметры. Затѣмъ между полученными уравненіями исключить показанную перемѣнную. Весьма важно выбрать удобныя оси, за которыя слѣдуетъ принять болѣе характерныя прямыя данной фигуры. —

Примѣръ 6-й. Найти геометрическое мѣсто центровъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данномъ треугольникѣ.

Вписанный прямоугольникъ MDEN (черт. 120). Центръ его получается отъ пересѣченія его діагоналей. Начало координатъ въ точкѣ H, линія HAx – ось абсциссъ, HCy – ось y. пусть AH = a; BH = b, HC = h. Эти три величины даны. Положимъ, что HP = c (величина произвольная). Будемъ искать координаты точки Q; означимъ ихъ черезъ (xy). Очевидно, что $y = \frac{c}{2}$. Надо найти x. Абсцисса точки Q одинакова съ x – средины прямой DE. Будемъ искать x для средины DE, а для этого предварительно найдемъ x для крайнихъ точекъ: для E и D. Точка E есть пересѣченіе прямой DE съ прямой AC. Уравненіе DE будетъ: $y = c$. Уравненіе AC будетъ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$. Рѣшаемъ эти два уравненія, имѣемъ: $\frac{x}{a} + \frac{c}{h} = 1$, отсюда $x = a\left(1 - \frac{c}{h}\right)$. Это будетъ x точки E. Точка D есть пересѣченіе прямой DE съ прямой BC, имѣемъ: уравненіе DE .... $y = c$, уравненіе BC ... $\frac{x}{-b} + \frac{y}{h} = 1$. Рѣшаемъ ихъ: $-\frac{x}{b} + \frac{c}{h} = 1$ или x точки Q будетъ: $x = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{c}{h}\right) - \frac{b}{2}\left(1 - \frac{c}{h}\right)$ или $x = \left(\frac{a-b}{2}\right)\left(1 - \frac{c}{h}\right)$. Координаты точки Q будутъ: $x = \frac{a-b}{2}\left(1 - \frac{c}{h}\right)$, а $y = \frac{c}{2}$. Если будемъ измѣнять c, то точка Q будетъ двигаться. Спрашивается какую линію она будетъ описывать?



черт. 120

Исключимъ изъ этихъ двухъ формулъ c, тогда мы найдемъ зависимость, существующую между координатами x и y.

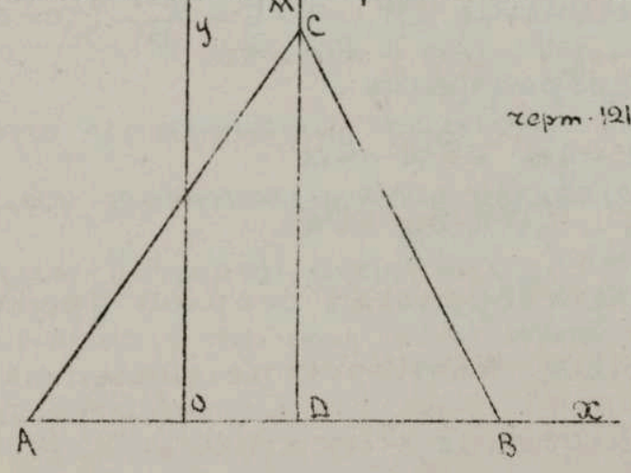
при всякомъ значеніи C. Это уравненіе слѣдовательно будетъ уравненіемъ линіи геометрическаго мѣста, къ которому принадлежитъ точка Q. Найдемъ его. Имѣемъ $C=2y$; вставивъ въ первое получимъ:

$$x=\left(\frac{a-b}{2}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right) \text{ или } \frac{2y}{h}+\frac{2x}{a-b}=1.$$

Это есть уравненіе прямой, такъ какъ оно первой степени относительно x и y. Точка Q описываетъ нѣкоторую прямую. Опредѣлимъ ея положеніе. Для пересѣченія съ осью x имѣемъ: $y=0$, слѣдовательно $\frac{2x}{a-b}=1$, отсюда $x=\frac{a-b}{2}$, но эта формула выражаетъ полусумму абсциссъ A и B, слѣдовательно это есть абсцисса средины AB. Искомая прямая проходитъ черезъ средину AB. Для пересѣченія съ осью Y имѣемъ $x=0$, слѣдовательно будетъ: $\frac{2y}{h}=1$, отсюда $y=\frac{h}{2}$.

Слѣдовательно также прямая проходитъ черезъ средину высоты.

Примѣръ 7. Дано основаніе треугольника и сумма двухъ другихъ сторонъ его; продолжая высоту, откладываютъ на ней длину одной изъ двухъ его сторонъ. Найти геометрическое мѣсто точекъ, такимъ образомъ построенныхъ?



черт. 121.

Пусть $AB=2a$ есть данное основаніе. Сумма двухъ другихъ сторонъ $=m$ (черт. 121); $2a$ и m даны. Такъ что $AC+CB=m$. Высота треугольника CD. Отложимъ $DM=AC$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M. Раздѣлимъ AB попо-

чаемъ, такъ что AO = BO = a Примемъ O за начало, а OB за ось x. Координаты точки M(xy) .... x = OD, а y = MD = AC, слѣдовательно BC = m - y. Въ треугольникѣ ABC имѣемъ: $BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB.AD$ или $(m-y)^2 = y^2 + 4a^2 - 4a(a+x)$.

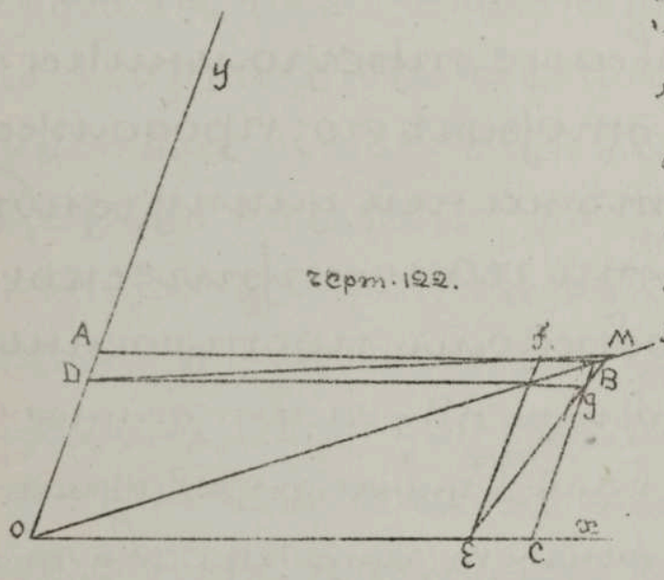
Это есть уравненіе искомаго мѣста. Раскрывая скобки, имѣемъ:

$$m^2 - 2my + y^2 = y^2 + 4a^2 - 4a^2 - 4ax$$

$$2my - 4ax = m^2.$$

Это уравненіе первой степени, стало быть искомое мѣсто есть прямая линія.

Примѣръ 8. Данъ параллелограмъ OABC (чер. 122) въ которомъ OC = a и AO = b, проводимъ произвольныя прямыя Dg ‖ oc и EE ‖ OA, соединяемъ прямыми точки D съ F и E съ g. Опредѣлить мѣсто точекъ пересѣченія M прямыхъ Eg и DF?



чер. 122.

Беремъ за оси координатъ стороны параллелограмма OC и OA; полагаемъ OE = a', OD = b', составляемъ уравненіе прямыхъ Eg и DF.

Уравненіе Eg ... $y - 0 = \frac{b'-0}{a-a'}(x-a')$

Уравненіе DF ... $y - b' = \frac{b-b'}{a'}(x-0)$

Преобразуемъ:

$ya - ya' = b'x - b'a'$

$ya' - b'a' = bx - b'x.$

Координаты точки M удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ, а слѣдовательно и тому, которое получится отъ сложенія ихъ. Совершая это сложеніе, находимъ:

$$ya - y\alpha' + y\alpha' - \beta'\alpha = \beta' x - \beta'\alpha' + \beta x - \beta' x$$

$$ya = \beta x, \text{ откуда } y = \frac{\beta}{a} x.$$

Это и есть искомое уравнение.

Теорія круга.

Будемъ разсматривать Кругъ при прямоугольныхъ осяхъ Координатъ. Общее уравненіе Круга есть слѣдующее:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

гдѣ α и β суть координаты центра, а R - радіусъ. Раскрывъ скобки, напишемъ его: $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$.

Это уравненіе второй степени, слѣдовательно Кругъ есть одна изъ Кривыхъ второго порядка. Сравнимъ это уравненіе съ общимъ уравненіемъ Кривыхъ второго порядка.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Изъ сравненія видимъ, что для того, чтобы второе уравненіе могло представить Кругъ, мы должны имѣть въ немъ $B=0$ и уравненіе будетъ:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \text{ или}$$

раздѣляя на A, получимъ: $x^2 + y^2 + \frac{D}{A} x + \frac{E}{A} y + \frac{F}{A} = 0$. Положивъ для краткости $\frac{D}{A} = a$, $\frac{E}{A} = b$ и $\frac{F}{A} = c$, будемъ имѣть:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ видъ совершенно одинаковый съ первымъ, поэтому это уравненіе есть самый общій видъ уравненія второй степени, которое можетъ представлять Кругъ. Положимъ теперь, что это намъ уравненіе дано и разсмотримъ, дѣйствительно ли оно представляетъ Кругъ и если представляетъ,

то какой именно. Для этого постараемся привести к первоначальному виду уравнения круга: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. Для этого перенесем c во вторую часть и к обеим частям равенства прибавим $\frac{a^2}{4}$ и $\frac{b^2}{4}$, получим:

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}, \text{ или}$$

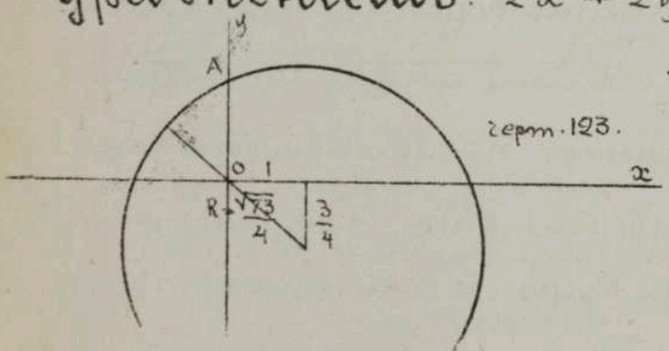
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

теперь это уравнение прямо есть уравнение круга, у которого $\alpha=-\frac{a}{2}$, $\beta=-\frac{b}{2}$ и $R^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$ или $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$. Мы нашли координаты центра и радиус, то отсюда же видно, что это уравнение не всегда будет представлять круг, потому что радиус иногда получиться мнимым и Круга не будет. Чтобы был круг, нужно, чтобы $a^2+b^2>4c$. Может еще случиться, что $a^2+b^2=4c$, то R будет равен нулю и Круг обратится в точку. Из ур-ия можно прямо видеть, что оно представляет точку. Мы нашли: $c=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$. Вставив в уравнение, будем иметь:

$$x^2+y^2+ax+by+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=0 \text{ или } \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=0$$

Но сумма двух Квадратов тогда только равна нулю, когда каждое из количеств, возводимых в Квадрат, равно 0, следовательно будем иметь: $x+\frac{a}{2}=0$ и $y+\frac{b}{2}=0$, откуда $x=-\frac{a}{2}$ и $y=-\frac{b}{2}$. Таким образом получаем одну точку.

Пример 1-й. Построить круг, представляемый уравнением: $2x^2+2y^2-4x+3y-6=0$ (черт. 123)



черт. 123.

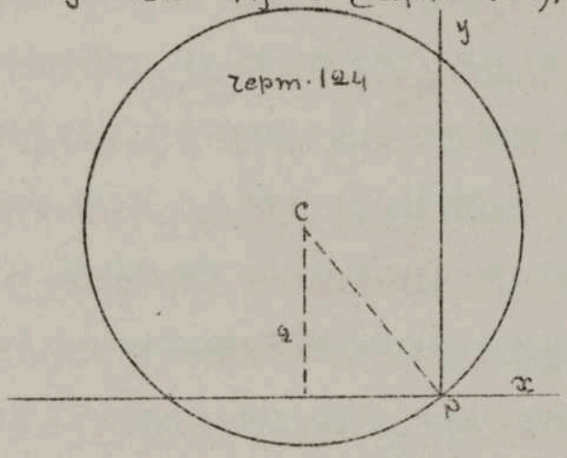
Приводим это уравнение к общему виду уравнения Круга, т.е. к виду: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. Делим его на 2:

$x^2+y^2-2x+\frac{3}{2}y-3=0$, дополняем Квадраты: $x^2-2x+1+y^2+\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}=3+1+\frac{9}{16}$.

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7\cdot 3}{16}.$$

Теперь видно, что $\alpha=1$, $\beta=-\frac{3}{4}$, $R^2=\frac{73}{16}$ и $R=\sqrt{\frac{73}{16}}$. Возьмем оси координат и строим по этим данным круг.

Пример 2-й. Построить круг, выражаемый уравнением: $x^2+y^2+2x-4y=0$ (черт. 124).



черт. 124

Приводим его к общему виду:

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=1+4$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5.$$

Здесь $\alpha=-1$, $\beta=2$, $R^2=5$, $R=\sqrt{5}$.

Берем оси координат и строим координаты центра и самый круг.

Пересечение круга с прямой.

Иногда при построении круга нужно определить точки его пересечения с осями координат. Пусть дано уравнение:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

В точках пересечения с осью x должны иметь $y=0$ и следовательно в этих точках $x^2+ax+c=0$, отсюда найдем x для точки пересечения. Если это уравнение имеет действительные корни, то получаются две точки пересечения; если корни мнимые, то круг не пересекает оси x. Если корни равны, то круг имеет только одну общую точку с осью x, т.е. он касается оси x. Для точки пересечения с осью ординат должны иметь $x=0$, получим:

$$y^2+by+c=0$$

Отсюда найдем y для этих точек. Возьмем первый пример (черт. 123). Для пересечения с осью ординат должно иметь $x=0$ и стало быть $2y^2+3y-6=0$ или $y^2+\frac{3}{2}y-3=0$, откуда

$$y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}+3} \quad \text{или} \quad y = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

На чертеже отметимъ эти точки A и B, будемъ имѣть:

$$AO = \frac{-3+\sqrt{57}}{4} \quad \text{и} \quad BO = -\frac{-3+\sqrt{57}}{4}.$$

Сдѣлаемъ общее замѣчаніе объ опредѣленіи точки пересѣченія круга съ данною прямою линіею. Положимъ, что данъ кругъ, уравненіе котораго: $x^2+y^2+ax+by+c=0$. и прямая линія $Ax+By+C=0$, требуется найти точки ихъ пересѣченія. Точка пересѣченія лежитъ въ одно и тоже время на кругѣ и на прямой, слѣдовательно ея координаты удовлетворяютъ и уравненію круга и уравненію прямой чтобы ихъ найти, стоитъ только рѣшить эти два уравненія, разсматривая въ нихъ x и y, какъ неизвѣстныя. Изъ уравненія прямой находимъ: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Это выраженіе нужно вставить въ уравненіе круга, тогда получится уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x. Уравненіе это, очевидно будетъ, квадратное. Положимъ, что оно будетъ имѣть такой видъ: $Mx^2+Nx+P=0$, гдѣ M, N и P извѣстны. Рѣшивъ это уравненіе, мы получимъ для x двѣ величины $x=x'$ и $x=x''$. Этимъ двумъ значеніямъ x будутъ соотвѣтствовать два значенія для y: $y' = -\frac{A}{B}x' - \frac{C}{B}$ и $y'' = -\frac{A}{B}x'' - \frac{C}{B}$.

Будемъ имѣть двѣ точки пересѣченія: одну $(x'y')$ и другую $(x''y'')$ Эти точки будутъ дѣйствительными только когда, координаты x' и x'' дѣйствительны.

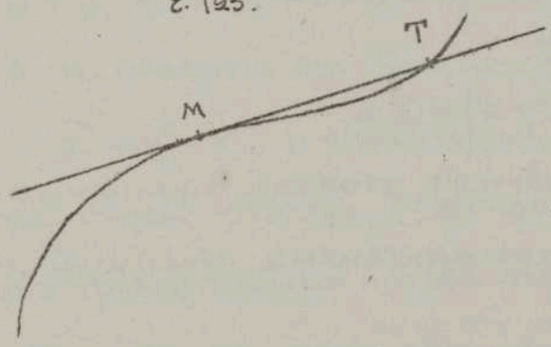
Если x' и x'' мнимы, то это значитъ, что прямая не пересѣкаетъ круга. Можетъ случиться, что $x'=x''$, тогда и $y'=y''$ и получится одна точка. Это значитъ, что кругъ касателенъ къ прямой, такъ какъ онъ имѣетъ одну съ ней общую точку.

Объ касательной линіи къ кругу.

Опредѣленіе. Касательной линіей къ произвольной кривой въ данной точкѣ называется предѣльное положеніе сѣкущей линіи, проходящей черезъ эту точку, при предположеніи, что другая точка пересѣченія сѣкущей съ кривою приближается неопредѣленно къ первой, стремясь съ ней совпасть.

Это опредѣленіе не требуетъ, чтобы касательная линія имѣла съ кривою только одну общую точку. Если кривая линія представляетъ изгибы, то касательная къ кривой въ одной точкѣ будучи продолжена, можетъ пересѣчь кривую въ другой точкѣ (ч. 125).

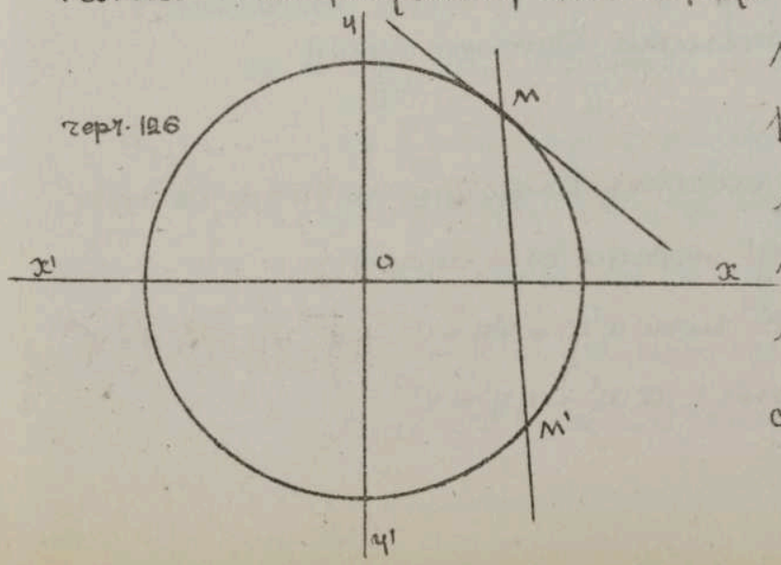
ч. 125.



Руководствуясь принятымъ опредѣленіемъ, составимъ уравненіе касательной къ кругу въ данной точкѣ. Возмемъ кругъ, котораго центръ въ началѣ координатъ (черт. 126) Уравненіе его дано: $x^2+y^2=r^2$.

Дана на кругѣ точка M, координаты которой $(x'y')$. Проведемъ въ этой точкѣ касательную. Требуется составить ея уравненіе. Вообразимъ, что черезъ точку M проходитъ сѣкущая MS. Эта сѣкущая пересѣкаетъ кругъ въ другой точкѣ M'. Координаты этой точки обозначимъ черезъ $(x''y'')$. Уравненіе сѣкущей, какъ прямой, проходящей черезъ двѣ точки будетъ: $y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$.

черт. 126



Если предположимъ, что точка M', перескакивая по кругу, совпадаетъ наконецъ съ точкою M, то секущая обратится въ касательную и тогда будемъ имѣть: $x''=x'$ и $y''=y'$.

При этомъ tg угла наклоненія секущей, т. е. $\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{0}{0}$, слѣдовательно такимъ образомъ нельзя перейти отъ уравненія секущей къ уравненію касательной; это потому, что мы до сихъ поръ не выразили ничѣмъ, что точка M' находится на кругѣ. Сдѣлаемъ это и представимъ уравненіе секущей въ другомъ видѣ: Координаты точки M и M' удовлетворяютъ уравненію круга и потому:

$$x'^2+y'^2=r^2 \quad \text{и} \quad x''^2+y''^2=r^2$$

Вычитая изъ второго уравненія первое, получимъ:

$$x''^2-y'^2+y''^2-x'^2=0 \text{ или}$$

$$(x''-x')(x''+x')+(y''-y')(y''+y')=0 \text{ и}$$

$$(x''-x')(x''+x')=-(y''-y')(y''+y'), \text{ отсюда пропорція:}$$

$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{x''+x'}{y''+y'}$. Теперь уравненіе секущей можно написать въ такомъ видѣ:

$$y-y'=-\frac{x''+x'}{y''+y'}(x-x')$$

Чтобы отъ этого уравненія перейти къ уравненію касательной, предположимъ, что точка M' совпадаетъ съ M, т. е. сдѣлаемъ: $x''=x'$ $y''=y'$, тогда будемъ имѣть уравненіе касательной:

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x')$$

Это уравненіе можно представить въ другомъ видѣ, болѣе простомъ, помноживъ его на y', тогда оно будетъ:

$$y'y-y'^2=-x'x+x'^2 \text{ или } x'x+y'y=x'^2+y'^2, \text{ но } x'^2+y'^2=r^2$$

и уравненіе касательной будетъ: $xx'+yy'=r^2$.

Уравненіе касательной къ кругу, выражаемое по tg-у угла, который она дѣлаетъ съ осью абсциссъ.

Пусть этотъ уголъ есть α и положимъ, что $\operatorname{tg}\alpha = m$. Изъ перваго уравненія касательной мы видимъ, что $m = -\frac{x'}{y'}$. Возмемъ уравненіе касательной и выводимъ изъ него y, получимъ:

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'} \text{ или } y = mx + \frac{r^2}{y'}$$

Выразимъ теперь y' черезъ m, мы получимъ: $-\frac{x'}{y'} = m$, отсюда $x' = -my'$, но сверхъ того $x'^2 + y'^2 = r^2$, то вставивъ, имѣемъ:

$$m^2y'^2 + y'^2 = r^2 \text{ или } y'^2(m^2+1) = r^2 \text{ или } y'^2 = \frac{r^2}{m^2+1}, \text{ отсюда:}$$

$y' = \frac{r}{\sqrt{m^2+1}}$ и уравненіе касательной будетъ:

$$y = mx + r\sqrt{m^2+1}$$

Это и будетъ искомое уравненіе. Докажемъ, что касательная линія имѣетъ съ кругомъ одну общую точку. Возмемъ ур-ія круга: $x^2 + y^2 = r^2$ и уравненіе касательной: $x'x + y'y = r^2$. $(x'y')$ суть координаты точки, взятой на кругѣ. Будемъ искать координаты точекъ пересѣченія этой прямой съ кругомъ. Для этого, какъ мы знаемъ, нужно эти два уравненія рѣшить относительно x и y. Сдѣлаемъ это. Изъ второго уравненія находимъ:

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'}$$

Вставивъ это значеніе y въ уравненіе первое, будемъ имѣть:

$$x^2 + \frac{x'^2}{y'^2}x^2 - \frac{2x'xr^2}{y'^2} + \frac{r^4}{y'^2} = r^2$$

Умноживъ знаменатели и вынеся x^2 за скобки:

$$(y'^2 + x'^2)x^2 + 2r^2x'x + r^4 - r^2y'^2 = 0 \text{ или}$$

$$r^2x^2 - 2r^2x'x + r^2(r^2 - y'^2) = 0$$

Сокративъ на r^2 и замѣтивъ, что $r^2 = y'^2 + x'^2$, получимъ:

$$x^2 - 2xx' + x'^2 = 0 \text{ или } (x-x')^2 = 0, \text{ отсюда одно рѣшеніе}$$

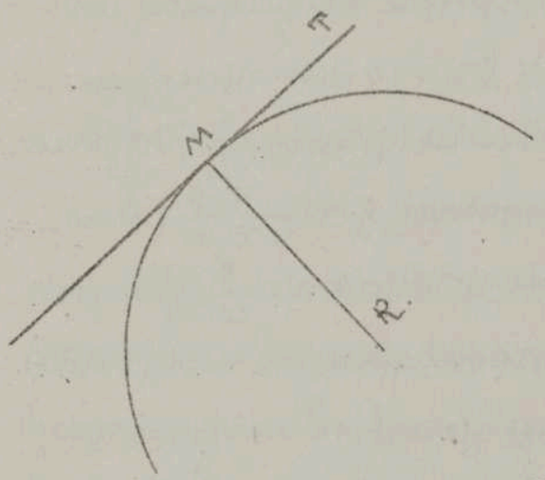
$x=x'$, а y будет равно: $y=-\frac{x'^2}{y'}+\frac{r^2}{y'}=\frac{r^2-x'^2}{y'}$ или $y=\frac{y'^2}{y'}=y'$.
Получилась одна общая точка. Это и требовалось доказать.

Задача. Провести касательную к кругу из данной точки. Положимъ, что центръ круга находится въ началѣ координатъ. Уравненіе круга будетъ: $x^2+y^2=r^2$. Пусть координаты данной точки будутъ (h,k). Вообразимъ, что касательная проведена. Координаты неизвѣстной намъ точки прикосновенія означимъ черезъ $(x'y')$. Намъ нужно будетъ найти эти координаты. Уравненіе касательной линіи въ этой точкѣ должно имѣть видъ: $xx'+yy'=r^2$.
Эта прямая по условію проходитъ черезъ данную точку (h,k) и координаты (h,k) должны удовлетворять этому уравненію. Вставивъ получимъ: $x'h+y'k=r^2$ или $hx'+ky'=r^2$.
Въ этомъ уравненіи 2 неизвѣстныхъ x' и y'. Надо найти еще другое уравненіе съ тѣми же неизвѣстными. Для этого замѣтимъ, что точка $(x'y')$ лежитъ на кругѣ и потому: $x'^2+y'^2=r^2$.
Остается для опредѣленія x' и y' рѣшить эти два уравненія относительно x' и y'. Изъ перваго имѣемъ: $y'=\frac{r^2-hx'}{k}$. Вставивъ во второе, имѣемъ: $x'^2+\frac{r^4-2r^2hx'+h^2x'^2}{k^2}=r^2$ или уничтожая знаменатель: $k^2x'^2+r^4-2r^2hx'+h^2x'^2-k^2r^2=0$ или $x'=\frac{r^2h\pm\sqrt{(h^2+k^2-r^2)r^2k}}{h^2+k^2}$.
Ордината y' найдется по формулѣ: $y'=\frac{r^2-hx'}{k}=\frac{h}{k}x'+\frac{r^2}{k}$.
Рѣшеніе, найденное нами для x', можетъ оказаться мнимымъ. Это будетъ тогда, когда $h^2+k^2<r^2$. Спрашивается, какое геометрическое значеніе имѣетъ этотъ случай? Разсмотримъ разстояніе точки, изъ которой проводится касательная до начала координатъ. Обозначимъ его черезъ d.

Известно, что $\delta^2 = h^2 + k^2$. Следовательно x' будет синусная тогда, когда $h^2 + k^2 < r^2$, т.е. когда $\delta^2 < r^2$ или когда $\delta < r$. т.е. когда данная точка находится внутри круга. Если же $h^2 + k^2 = r^2$, то тогда будет только одно решение и одна касательная; это потому, что в этом случае $\delta^2 = r^2$ или $\delta = r$ и точка находится на окружности; через такую точку можно провести только одну касательную.

Нормальною линией называется прямая, проходящая через точку прикосновения и перпендикулярная к касательной.

Составим уравнение нормальной линии к кругу. Уравнение этой линии, как прямой, проходящей через данную точку, будет: $y - y' = m'(x - x')$. m' есть неизвестный пока tg угла наклонения прямой с осью x, но по условию перпендикулярности этой прямой к касательной, имеем: $mm' + 1 = 0$, отсюда $m' = -\frac{1}{m}$, но $m = -\frac{x'}{y'}$, следовательно $m' = \frac{y'}{x'}$ и уравнение нормальной будет: $y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$



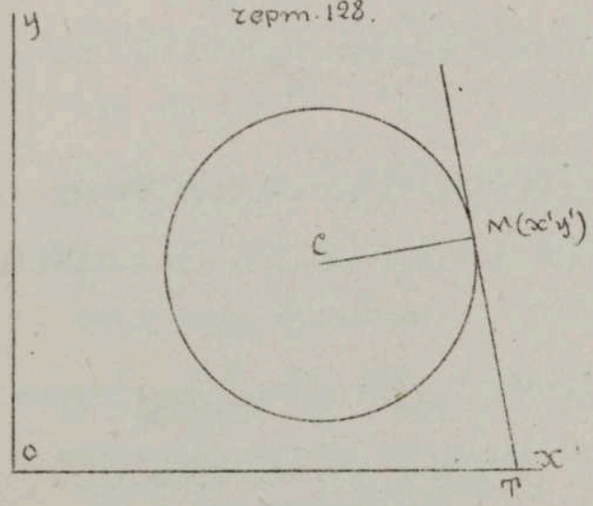
черт. 127.

Упростим его: $x'y - x'y' = y'x - x'y'$, получаем: $y = \frac{y'}{x'}x$. Это и есть уравнение нормальной. Из этого уравнения видно, что нормальная линия к кругу проходит через начало координат, следовательно она есть радиус круга. Мы доказали таким образом, что касательная линия перпендикулярна

къ радіусу, проведенному въ точку прикосновенія.

Задача. Составить уравненіе касательной къ кругу, котораго центръ не находится въ началѣ координатъ.

Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ (черт. 128), кругъ, на немъ точку M, которой координаты $(x'y')$. Проводимъ радіусъ и касательную. Уравненіе даннаго круга будетъ: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$

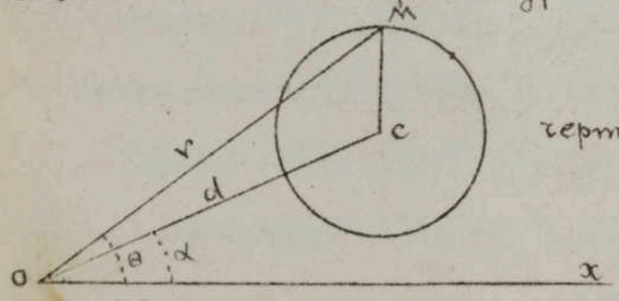


черт. 128.

Прежде всего уравненіе касательной получится, какъ прямой, перпендикулярной къ радіусу, проведенному въ точку прикосновенія. Уравненіе радіуса CM, какъ прямой, проходящей черезъ двѣ точки, будетъ: $y-\beta=\frac{y'-\beta}{x'-\alpha}(x-\alpha)$. Tg угла наклоненія это прямой съ осью x будетъ $\frac{y'-\beta}{x'-\alpha}=m'$. Уравненіе касательной, какъ прямой, проходящей черезъ данную точку, будетъ: $y-y'=m(x-x')$, но по условію перпендикулярности имѣемъ: $mm'+1=0$, откуда: $m=-\frac{1}{m'}=-\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}$ и уравненіе касательной будетъ: $y-y'=\frac{x'-\alpha}{y'-\beta}(x-x')$

Полярное уравненіе круга.

Составимъ полярное уравненіе круга. Пусть O (черт. 129) полюсъ, Ox - полярная ось. Соединимъ съ O и пусть $OC=d$; $\angle COx=\alpha$. Эти двѣ величины опредѣляютъ положеніе центра C. Сверхъ того



черт. 129.

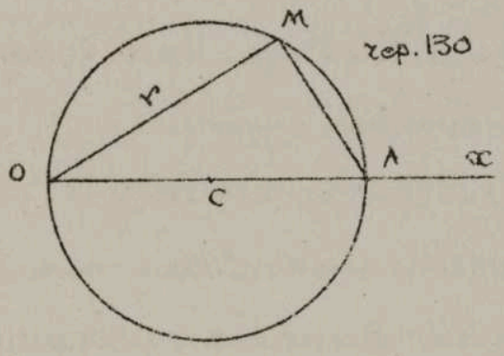
дань радіусъ круга R. Возмемъ на кругъ произвольную точку M. Ея полярныя координаты будутъ $OM=r$ и $\angle MOx=\Theta$. Соединимъ M съ C. Изъ треугольника MOC имѣемъ: $R^2=r^2+d^2-2dr\cos(\Theta-\alpha)$. Это есть полярное уравненіе круга.

частный случай. Пусть на окружности и діаметръ взятъ за полярную ось. Въ этомъ случаѣ $d=R$. $\angle\alpha=0$ и уравненіе будетъ:

$R^2=r^2+R^2-2Rr\cos\Theta$. или

$r^2=2Rr\cos\Theta$ или $r=2R\cdot\cos\Theta$.

Это уравненіе можно получить и прямо изъ чертежа изъ треугольника AOM (черт. 130).



чер. 130

Радикальная ось двухъ круговъ.

Когда дано уравненіе круга, то весьма просто опредѣлить длины касательныхъ, проведенныхъ къ кругу изъ внѣшней точки: стоитъ только перенести квадратъ радіуса въ первую часть и вставить въ уравненіе круга вмѣсто текущихъ координатъ координаты внѣшней точки, тогда первая часть уравненія будетъ представлять квадратъ длины искомой касательной.

Дѣйствительно, мы имѣемъ изъ чертежа 131.

$$AB^2=AC^2-R^2$$

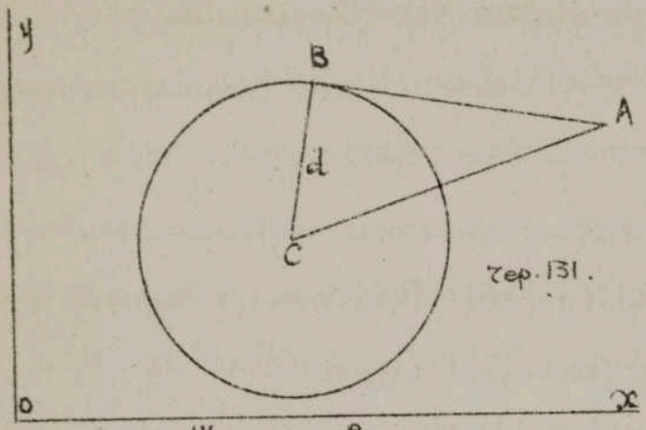
Если назовемъ координаты точки A черезъ $x'y'$, а координаты центра C черезъ α и β, то $AC^2=(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2$

слѣдовательно: $AB^2=(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2-R^2\ldots(1)$

что и требовалось доказать.

Пользуясь формулой (1) очень просто опредѣлить смыслъ точ-

обладающих тем свойством, что касательныя, проведенныя изъ нихъ къ двумъ даннымъ кругамъ равны между собою (черт. 132). Пусть уравненія круговъ будетъ:

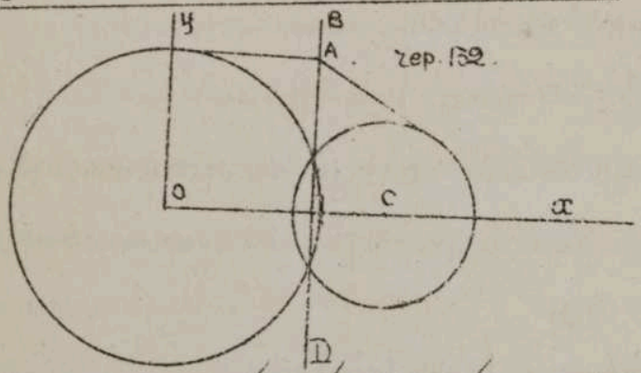


чер. 131.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$$

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-R'^2=0$$

На основаніи сказаннаго уравненіе искомаго синуса будетъ:



чер. 132.

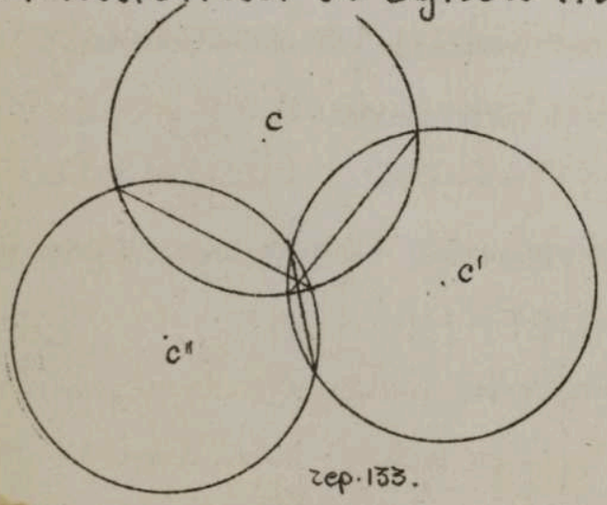
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-R'^2$$

Это будетъ нѣкоторая прямая, ибо квадраты координатъ сокращаются. Для большаго удобства беремъ $\alpha=\beta=\beta'=0$

Находимъ: $x^2+y^2-R^2=x^2-2x\alpha'+\alpha'^2+y^2-R'^2$; $x=\dfrac{R^2+\alpha'^2-R'^2}{2\alpha'}$

Это есть прямая DB, перпендикулярная къ OX и представляющая въ случаѣ пересѣченія, круговъ, хорду ихъ пересѣченія. Эта прямая называется радикальною осью 2-хъ круговъ.

Теорема. Радикальныя оси трехъ круговъ пересѣкаются въ одной точкѣ. (черт. 133)



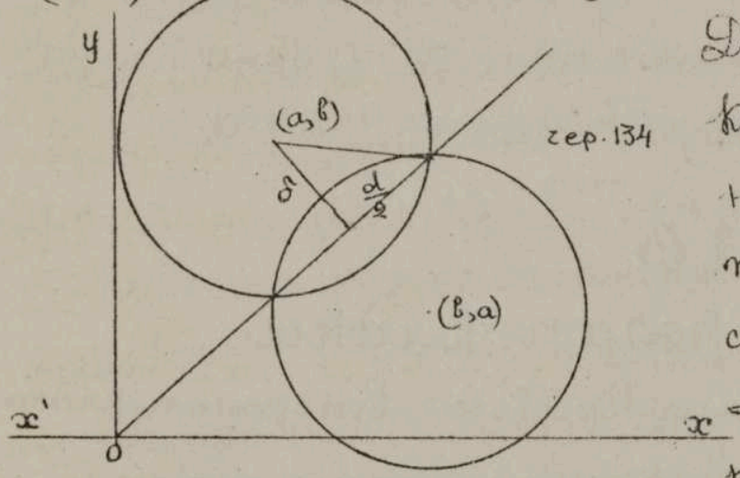
чер. 133.

Напишемъ для сокращенія, уравненія трехъ данныхъ круговъ въ видѣ $c=0$, $c'=0$, $c''=0$. Уравненія ихъ радикальныхъ осей: $c'-c=0$, $c''-c'=0$, $c-c''=0$. Эти три прямыя линіи пересѣкаются въ одной точкѣ, потому что имѣемъ тождество: $(c'-c)+(c''-c')+(c-c'')=0$.

Задачи на кругъ.

Задачи могутъ быть предложены или на построеніе круга по данными условіями, или на изслѣдованіе тѣла круга или на опредѣленіе геометрическаго мѣста, которое есть окружность. Возьмемъ примѣры:

Задача 1-я. Опредѣлить длину общей хорды двухъ круговъ, выраженныхъ уравненіями: $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$; $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$. Составляемъ прежде уравненіе радикальной оси: $(x-a)^2-(x-b)^2+(y-b)^2-(y-a)^2=0$ или $2x(b-a)+2y(a-b)=0$ или $x-y=0$..1,

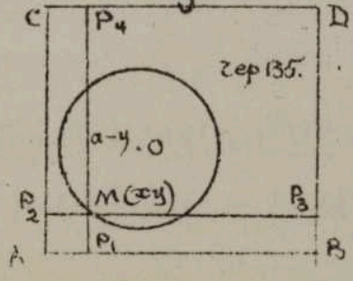


чер. 134

Далѣе опредѣлить длину перпендикуляра δ, опущеннаго изъ центра (a,b) на прямую (1) черт. 134. Для этого приводимъ уравненіе прямой въ нормальную форму, дѣля его на $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ и подставляемъ $x=a$, $y=b$, получимъ: $\delta=\pm\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ или $\delta^2=\frac{(a-b)^2}{2}$

называя искомую хорду черезъ d, найдемъ, что ея половина будетъ: $\frac{d}{2}=\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{2}}$, откуда $d=\sqrt{4c^2-2(a-b)^2}$.

Задача 2. Внутри даннаго квадрата точка движется такимъ образомъ, что сумма квадратовъ ея разстояній отъ четырехъ сторонъ квадрата сохраняетъ постоянную величину. Найти кривую, описываемую точкой? (черт. 135)



чер 135.

$AB=a$. Пусть точка M обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма квадратовъ ея разстояній отъ сторонъ

равняется постоянной величинѣ: $MP_1^2 + MP_2^2 + MP_3^2 + MP_4^2 = m^2$.
Точка движется, но такъ, что сумма остается постоянной. Ее обозначимъ черезъ m^2. Примемъ начало координатъ въ A, AB за ось x, AC за ось y. Координаты точки M (x, y), координата $MP_1 = y$, $MP_2 = x$, $MP_3 = a - x$, $MP_4 = a - y$. пишемъ: $y^2 + x^2 + (a-x)^2 + (a-y)^2 = m^2$
Это есть искомое уравненіе синуса. Раскрывъ скобки, получаемъ: $2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2ay + 2a^2 - m^2 = 0$ или $x^2 + y^2 - ax - ay - a^2 - \frac{m^2}{2} = 0$. По этому уравненію видимъ, что геометрическое синуса будетъ кругъ. Сами его сравнимъ съ общимъ уравненіемъ круга $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ или $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$, то будемъ имѣть: $2\alpha = a$, $2\beta = a$, откуда $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = \frac{a}{2}$. Слѣдовательно центръ его въ центрѣ квадрата.

2-ая Часть.

Теорія кривыхъ втораго порядка.

Построеніе общаго уравненія кривыхъ втораго порядка.

Возмемъ общее уравненіе второй степени съ двумя перемѣнными: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Прежде чѣмъ изслѣдовать виды кривыхъ, представляемыхъ этимъ уравненіемъ, сдѣлаемъ одно замѣчаніе, которое до извѣстной степени опредѣляетъ ихъ форму: произвольная прямая линія можетъ пересѣчь кривую втораго порядка не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ.

Возмемъ произвольную прямую; пусть ея уравненіе будетъ:

$$y = ax + b \quad \ldots \quad (2)$$

Координаты точекъ пересѣченія этой прямой съ кривой втораго порядка должны удовлетворять и первому и второму урав-

менять, а потому, чтобы найти координаты точек пересечения, нужно решить эти уравнения, принимая x и y за неизвестные.

Взявъ y изъ второго уравненія, вставивъ его въ первое, получимъ:

$$Ax^2 + Bx(ax+b) + C(ax+b)^2 + Dx + E(ax+b) + F = 0$$

Раскрывъ скобки, мы получимъ квадратное уравненіе, относительно x, общій видъ котораго будетъ:

$$Mx^2 + Nx + P = 0$$

Это уравненіе, какъ и всякое квадратное уравненіе, имѣетъ не болѣе двухъ корней x' и x''. Если эти корни дѣйствительны, то для каждаго изъ нихъ получимъ соотвѣтствующую величину y; именно по уравненію 2 имѣемъ:

$$y' = ax' + b' \quad . \quad y'' = ax'' + b$$

Такимъ образомъ найдутся двѣ точки пересѣченія прямой съ кривой второго порядка, координаты одной (x'y') и другой (x''y'')

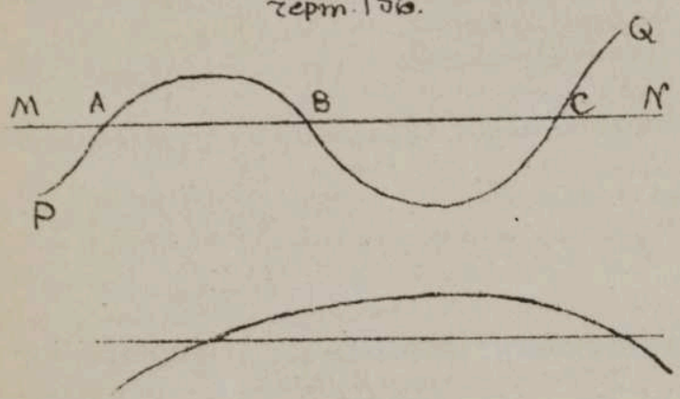
Очевидно, что кромѣ двухъ найденныхъ точекъ другихъ точекъ пересѣченія не можетъ быть найдено Но можетъ случиться, что два корня будутъ равны, такъ что $x' = x''$. Въ этомъ случаѣ и $y'' = y'$ и обѣ точки пересѣченія совпадутъ въ одну, слѣдовательно въ этомъ случаѣ прямая съ кривой имѣетъ только одну общую точку, т.е. касательная къ кривой. Если корни мнимы, то y' и y'' тоже мнимы и прямая не пересѣкаетъ кривой. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдствіе:

Всѣ кривыя второго порядка суть выпуклыя, т.е. не могутъ имѣть изгибовъ.

Дѣйствительно, если бы кривая имѣла изгибъ, то всегда можно было бы провести такую прямую, которая пересѣкала бы

кривую по крайней мѣрѣ въ тремъ точкамъ. представимъ кривую PQ (черт. 136) съ изгибомъ; она пересѣчется прямою MN въ точкахъ A, B и C. Слѣдовательно кривая второго порядка въ своемъ теченіи идетъ загибаясь всегда въ одну сторону и потому она можетъ пересѣкаться прямою линіею не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ. Это замѣчаніе опредѣляетъ до нѣкоторой степени форму кривой. Обратимся теперь къ построенію общаго уравненія кривыхъ второго порядка.

черт. 136.



$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

При этомъ построеніи можно брать оси и косоугольныя и прямоугольныя. Для общности возмемъ оси косоугольныя, тогда прямоугольныя оси могутъ быть разсматриваемы, какъ частный случай косоугольныхъ. Въ нашемъ общемъ уравненіи коэффиціенты A, B, C..... суть величины произвольныя, положительныя или отрицательныя, которые могутъ быть въ частности равными нулю. Положимъ, что коэффиціентъ C не равенъ 0, тогда уравненіе относительно y будетъ квадратнымъ.

Вторая часть.

Теорія кривыхъ второго порядка.

Возмемъ общее уравненіе $2^{\text{й}}$ степени съ $2^{\text{мя}}$ перемѣнными.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Прежде чем изследовать виды кривых, представляемых этими уравнениями, сделаем несколько вспомогательных замечаний относительно уравнений 2-й степени съ одним неизвестным. Общий видъ такихъ уравнений есть:

$$ax^2+bx+c=0$$

Припомнимъ принятую нами терминологію для такого ур-ія: Количества a, b и c называются коэффиціентами уравненія, изъ нихъ a и c называются крайними коэффиціентами, b-называется среднимъ коэффиціентомъ. Какъ извѣстно, рѣшеніе такого уравненія получается по формулѣ: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ..... (1), допускающей упрощеніе въ томъ случаѣ, когда средній коэффиціентъ b есть количество кратное 2, т.е. $b=2\beta$, ибо тогда имѣемъ: $x=\frac{-2\beta\pm\sqrt{4\beta^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\beta\pm\sqrt{4(\beta^2-ac)}}{2a}=\frac{-2\beta\pm2\sqrt{\beta^2-ac}}{2a}$ и окончательно получимъ: $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-ac}}{a}$

Обратимъ вниманіе на особую форму, въ которую можно обратить первую часть уравненія: $ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=$ (прибавляя и вычитая изъ выраженія въ скобкахъ $\frac{b^2}{4a^2}$) $=$
$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=$
$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ ..... I.

Въ послѣднихъ двухъ видахъ особенно удобно представлять 1-ю часть уравненія для облегченія его изследованій.

Возвращаемся къ равенству (1); изъ него видимъ, что корни уравненія зависятъ отъ подкореннаго выраженія b^2-4ac. Изъ этого видно, что когда: 1) $b^2>4ac$, т.е. $b^2-4ac>0$, уравненіе имѣетъ два дѣйствительныхъ корня; 2) $b^2=4ac$, т.е. $b^2-4ac=0$; уравненіе имѣетъ два равныхъ корня; 3) $b^2<4ac$, т.е. $b^2-4ac<0$; ур-іе

имѣетъ два мнимыхъ корня. Когда $b^2>4ac$, первая часть уравненія раскладается на два дѣйствительныхъ множителя 1-ой степени относительно x, именно по формулѣ I мы имѣемъ: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ или $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ ..... II.

Приравнивая это выраженіе нулю (ибо $ax^2+bx+c=0$) и зная, что a отлично отъ нуля, необходимо имѣемъ:

$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$ и $x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$, откуда получаемъ два дѣйствительныхъ корня: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

и тогда равенство II преобразится въ такое:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \ldots\ldots \text{III}.$$

Когда $b^2=4ac$, тогда изъ равенства II имѣемъ:

$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=$ (полагая a положительнымъ)

$=\left[\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ ..... IV.

И приравнявъ это выраженіе нулю, находимъ два равныхъ корня: $x_1=x_{11}=-\frac{b}{2a}$

Наконецъ, когда $b^2<4ac$, раскладемъ 1-ую часть такъ: Изъ равенства (1) имѣемъ: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$, откуда: $ax^2+bx+c=$

$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)(-1)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot i\right)^2\right]=$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\cdot i\right)$ ..... V.

И приравнивая это выраженіе нулю, находимъ два мнимыхъ сопряженныхъ корня уравненія:

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i. \quad x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i.$$

Теперь обратимся къ общему виду уравненія кривыхъ 2-го порядка. Располагая наше уравненіе по степенямъ y и рѣшая его относительно y, получимъ послѣдовательно:

$cy^2+(Bx+E)y+(Ax^2+Dx+F)=0$, откуда $y=\frac{-(Bx+E)}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(Bx+E)^2-4C(Ax^2+Dx+F)}$. Выражение подъ корнемъ располагаемъ по степенямъ x:

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+(E^2-4CF)}\ldots\ldots(1).$$

Для упрощенія введемъ сокращенныя обозначенія, полагая $B^2-4AC=M$, $BE-2CD=N$ и $E^2-4CF=P$;

тогда ур-ie (1) преобразится въ такое:

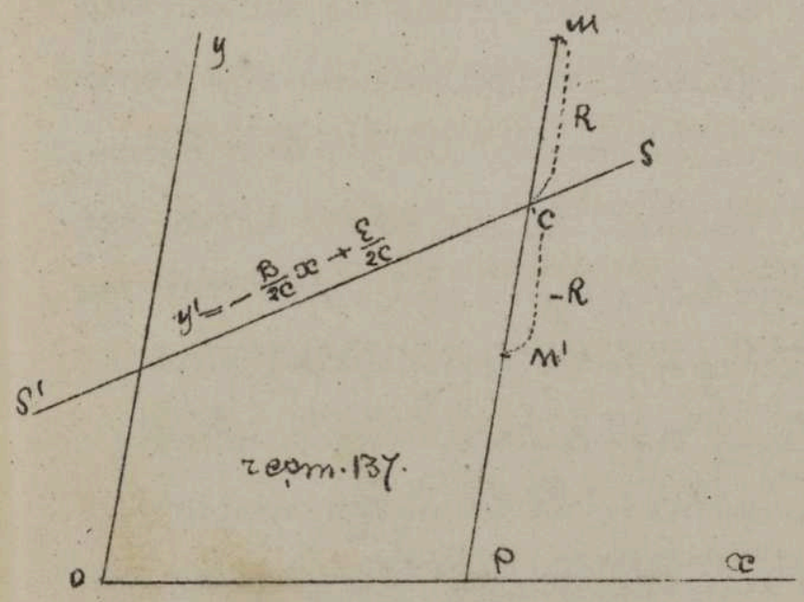
$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}\ldots\ldots(2)$$

или, полагая $\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}=R$, получимъ:

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm R\ldots(3)$$

Сравнимъ это уравненіе съ другимъ, которое получимъ, опустивши R и которое будетъ имѣть видъ: $y'=-\frac{Bx+E}{2C}$.

Если въ этомъ уравненіи x и y' за текущія координаты, то это уравненіе, будучи первой степени, представляетъ прямую: $y'=-\frac{B}{2C}x+\frac{E}{2C}$ (г. 137). Построимъ эту прямую, пусть она будетъ SS'. Сравнивая ординаты нашей кривой съ ординатами полученной прямой, мы замѣтимъ, что при одной и той же абсциссѣ x имѣемъ: $y=y'\pm R$



г. 137.

Это уравненіе показываетъ, что ординату y кривой легко построить по ординатѣ y'. Возмемъ $x=OP$, проведемъ черезъ точку P параллель оси y, пусть эта парал-

хочешь в открытый прямую SS' в точке C, тогда pc = y'. Прибавим к ординате y' величину R, вычисленную для того же значения x = op и вычтем её из y', получим 2 точки M и M', так что CM = CM' = R. Тогда очевидно, что MP = y' + R = y и M'p = y' - R = y. Следовательно точки M и M' суть точки нашей кривой. Таким образом точки кривой будут получаться, когда ординату y' будем прибавлять или отнимать R. Следовательно всякому значению x соответствует два значения y, т.е. для одного значения x (абсциссы) находим две точки кривых.
Линия MM', соединяющая две точки нашей кривой, есть хорда этой кривой; эта хорда параллельна оси ординат. Прямая SS' делит эту хорду в точке C пополам, отсюда вытекает следующее свойство этой прямой: она делит пополам все хорды кривой, параллельные оси ординат. Прямая, обладающая таким свойством, называется диаметром кривой. Следовательно SS' есть диаметр, делящий все хорды, параллельные оси ординат пополам, иначе говоря, это есть диаметр кривой, сопряженный хордам, параллельным оси y.

И так мы видим, что форма кривой зависит от величины R, которую и исследуем. Как увидим далее, вид кривой зависит главным образом от знака коэффициента при x^2, т.е. от знака двучлена $M = B^2 - 4ac$, поэтому и исследование распадается на три случая:

1, Когда $M = B^2 - 4ac < 0$ или $B^2 < 4ac$, въ этомъ случаѣ получается группа кривыхъ, называемыхъ эллипсами.

2, Когда $M = B^2 - 4ac > 0$ или $B^2 > 4ac$, въ этомъ случаѣ получается группа кривыхъ, называемыхъ гиперболами.

3, Когда $M = B^2 - 4ac = 0$ или $B^2 = 4ac$. Въ этомъ случаѣ получается группа кривыхъ, называемыхъ параболами.

Изслѣдуемъ эти группы поочередно:

Группа эллипсовъ.

Пусть $M = B^2 - 4AC < 0$.

Для удобства изслѣдованія выраженія $R = \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$, гдѣ $M = B^2 - 4AC$; $N = BE - 2CD$ и $P = E^2 - 4CF$; преобразуемъ подкоренной трехчленъ по извѣстному правилу въ произведеніе двухъ разностей, именно, полагая $Mx^2 + 2Nx + P = 0$ и рѣшая это квадратное уравненіе, по сокращенной формулѣ для случая, когда средній коэффиціентъ кратенъ 2, получимъ: $x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$. Найдемъ два корня уравненія, меньшій изъ нихъ обозначимъ черезъ x_1, большій черезъ x_2, такъ что $x_1 < x_2$. По выведенной формулѣ (III) имѣемъ:

$$Mx^2 + 2Nx + P = M(x - x_1)(x - x_2)$$

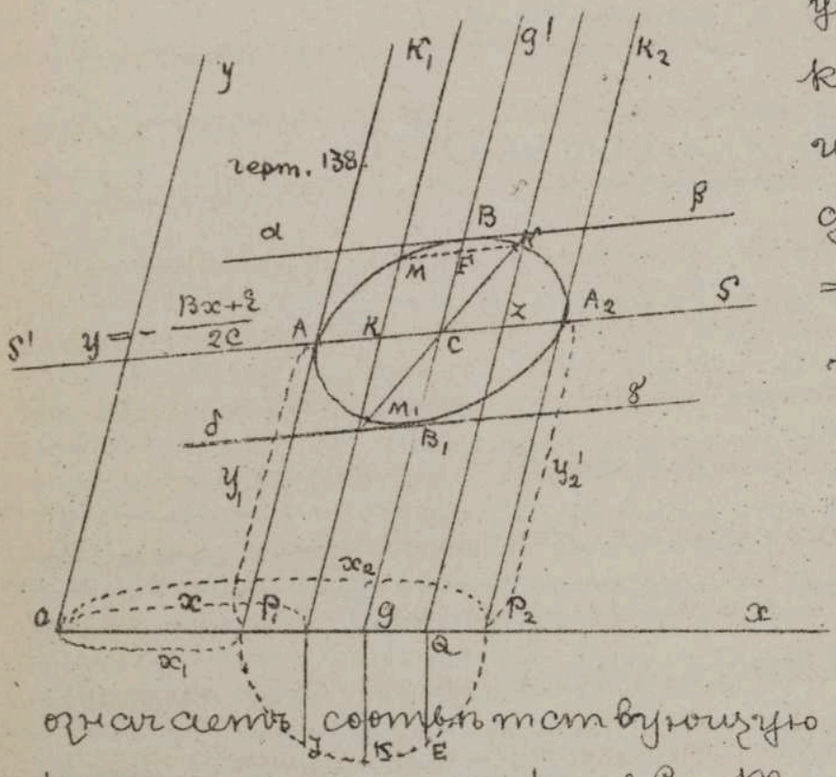
Слѣдовательно можно написать:

$$R = \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} = \frac{1}{2C}\sqrt{M(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{2C}\sqrt{-M(x - x_1)(x_2 - x)} =$$
$$= \frac{\sqrt{-M}}{2C}\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}$$

Такъ какъ по условію $M < 0$, т.е. отрицательно, то $\sqrt{-M}$ есть количество дѣйствительное. Изслѣдуя выраженіе $R = \frac{\sqrt{-M}}{2C}\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}$ съ геометрической точки зрѣнія, надо

прежде всего определить пределы изменения переменной абсциссы x, въ которыхъ R есть количество действительное.

Вопервыхъ положимъ $x = \alpha_1$. Въ такомъ случаѣ $R = 0$. Въ геометрическомъ смыслѣ это указываетъ на то, что такой абсциссѣ соотвѣтствуетъ одна точка кривой, находящаяся на діаметрѣ, сопряженномъ оси y. Дѣйствительно, мы привели общее уравненіе кривыхъ втораго порядка къ виду: $y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm R$. или, строя сопряженный оси y діаметръ по уравненію $y' = -\frac{Bx+E}{2C}$, окончательно имѣемъ $y = y' \pm R$ ..... (α)



гдѣ y означаетъ текущую ординату діаметра SS', соотвѣтствующую различнымъ значеніямъ абсциссы x, а y означаетъ соотвѣтствующую тѣмъ же значеніямъ x текущую ординату кривой. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $R = 0$, то имѣемъ: $y = y'_1$ (на черт. 138) $= P_1 A_1$. Такимъ образомъ хорда $P_1 K_1$ имѣетъ съ искомою кривою одну общую точку, слѣдовательно въ силу разсужденія, приведеннаго въ изслѣдованіи вопроса о точкахъ пересѣченія прямой съ кривой втораго порядка, эта хорда будетъ касательна къ искомой кривой въ точкѣ $A_1(x_1, y'_1)$.

Теперь положимъ $x = x_2$. Опять $R = 0$. Пусть соотвѣтствующее этому значенію x значеніе y' будетъ y'_2 (на черт.

если $OP_2 = x_2$ и $P_2K_2 \parallel Oy$) $= P_2A_2$. По формулѣ же (a) имѣемъ въ этомъ случаѣ $y = y'_2$, что опять указываетъ, что хорда P_2K_2 имѣетъ съ кривою одну общую точку $A_2(x_2, y'_2)$ и въ силу тѣхъ же разсужденій, какъ и въ 1-мъ случаѣ, видимъ, что хорда P_2K_2 будетъ касательна къ искомой кривой въ точкѣ A_2.

Чтобы K (а слѣдовательно и y) было дѣйствительно, x не должно быть менѣе x_1, ибо если $x < x_1$, то принимая еще во вниманіе условіе $x_1 < x_2$, видимъ, что подкоренное выраженіе $(x-x_1)(x_2-x)$ будетъ отрицательно. Также x не должно быть болѣе x_2, потому что въ противномъ случаѣ подкоренное выраженіе опять будетъ отрицательно, т. е. K, а слѣдовательно и y мнимы. Слѣдовательно x должно быть болѣе x_1 (меньшаго корня въ уравненіи $Mx^2 + 2Nx + P = 0$) и менѣе x_2 (большаго корня того же уравненія) т. е. $x_1 < x < x_2$. Геометрически это обозначаетъ, что всякая искомая кривая находится между касательными къ ней прямыми: P_1K_1 и P_2K_2, параллельными оси Y.

Будемъ теперь строить кривую, какъ обыкновенно, по точкамъ. Какъ мы видѣли, это сводится, разъ построенъ діаметръ SS' по уравненію $y' = -\frac{Bx+C}{2C}$ къ построенію $K = \frac{\sqrt{-M}}{2C}\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$. Выраженіе $\frac{\sqrt{-M}}{2C}$ есть величина постоянная и представляетъ собою числовой (въ разсматриваемомъ нами случаѣ) коэффиціентъ при ирраціональномъ множителѣ $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, который и надо

будетъ строить непосредственно. Мы видимъ, что этотъ множитель представляетъ среднюю пропорціональную между линіями $x-x_1$ и x_2-x. Применимъ къ построенію теорему о перпендикулярѣ, опущенномъ на діаметръ изъ конечной точки окружности, который, какъ извѣстно, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра. И такъ будемъ разсматривать $x-x_1$ и x_2-x какъ отрѣзки діаметра, слѣдовательно самый діаметръ будетъ равенъ суммѣ этихъ отрѣзковъ, т.е. $D=(x-x_1)+(x_2-x)=x_2-x_1=$(начерт.) $=P_1P_2$. Такимъ образомъ, если построимъ на P_1P_2, какъ на діаметрѣ изъ центра O полуокружность и будемъ проводить въ ней всевозможныя линіи перпендикулярно P_1P_2, то эти линіи будутъ выражать различныя величины ирраціональнаго множителя $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, соотвѣтствующія величинамъ x, выражаемымъ отрѣзками оси абсциссъ отъ начала координатъ до основанія соотвѣтственной хорды. Такъ $PJ \perp P_1P_2$ выражаетъ линейный множитель $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$ при $x=OP$. Для построенія соотвѣтствующихъ такому x (такой абсциссѣ) точекъ кривой проводимъ черезъ точку P параллель оси Y и потомъ параллели отъ точекъ K, пересѣченія этой параллели съ діаметромъ SS' откладываемъ въ обѣ стороны по $R=\frac{\sqrt{-M}}{2C}\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, т.е. откладываемъ найденный линейный множитель $PJ=\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)}$, увеличенный, или уменьшенный въ отношеніи $\frac{\sqrt{-M}}{2C}$, ($\sqrt{-M}$ къ $2C$).

И такъ откладываемъ $MK=M_1K=\frac{\sqrt{-M}}{2C}\cdot PJ$, получимъ двѣ

точки M и M', принадлежащія искомой кривой.

Такимъ то образомъ строимъ точки кривой, постепенно перемѣщая точку P изъ P_1 въ P_2. При такомъ перемѣщеніи хорда кривой обращается для точки P_1 въ точку A_1, пріобрѣтаетъ потомъ конечную величину и постепенно увеличивается, наибольшей величины она достигаетъ, когда точка P раздѣлитъ пополамъ прямую P_1P_2 въ точкѣ g, потому что въ этомъ положеніи точки P выраженіе R имѣетъ наибольшій линейный множитель $\sqrt{(x-x_1)(x_2-x)} = gH = \frac{P_1P_2}{2}$ т. е. въ этомъ случаѣ линейный множитель выраженія R равняется половинѣ наибольшей изъ хордъ круга: половинѣ его діаметра.

При дальнѣйшемъ перемѣщеніи точки P къ P_2 хорда кривой будетъ точно такъ же уменьшаться, и когда точка P совпадетъ съ P_2, то хорда обратится въ точку A_2. Изъ этого видно, что изслѣдуемая кривая есть кривая замкнутая.

Изслѣдуемъ свойства нѣкоторыхъ точекъ и прямыхъ въ этой кривой. Какъ мы видѣли наибольшая хорда BB, кривой соотвѣтствуетъ абсцисса $x = Og$. при условіи, что $P_1g = P_2g$. Если проведемъ черезъ точку B и B_1 параллели діаметру SS', то всѣ точки кривой будутъ расположены между этими параллелями. Мы имѣемъ такимъ образомъ параллелограмъ $\alpha\beta\gamma\delta$, внутри котораго будутъ расположены всѣ точки нашей кривой. Отмѣтимъ точку C, пересѣченія хорды BB' съ діаметромъ SS'.

Теперь возмемъ точку Q такъ, чтобы $QP_2 = P_1P$.

Строимъ соотвѣтствующія абсциссѣ OQ точки кривой N и N'. Изъ условія, что $QP_2 = PP_1$ и изъ геометрическаго способа построенія точекъ кривой, заключаемъ, что $\angle N = \angle N_1 = KM_1 = \frac{\sqrt{-M}}{2C} \cdot JP =$ $= \frac{\sqrt{-M}}{2C} \cdot QE$ (ибо $PJ = QE$), какъ хорды круга, равноудаленныя отъ центра. Соединимъ теперь точку M_1 съ C и точку N съ точкою C. Сравнимъ между собою треугольники: M_1KC и MZC. Мы видимъ, что $M_1K = NZ$; изъ трапеціи PKZQ, такъ какъ $Pg = gQ$, имѣемъ: $KC = CZ$, а изъ того, что $MP \parallel NQ$ заключаемъ, что $\angle M_1KC = \angle NZC$. Слѣдовательно $\triangle M_1KC$ и NZC равны между собою, такъ какъ они имѣютъ по равному углу, заключенному между равными сторонами.

Изъ равенства треугольниковъ заключаемъ, что $\angle KCM = \angle ZCN$ и такъ какъ KZ есть прямая, то и NCM' есть прямая линія, дѣлящаяся въ точкѣ C пополамъ.

Такъ какъ точки M_1 и N вполнѣ произвольны (они связаны между собою извѣстнымъ условіемъ, что $Pg = gQ$, но это условіе имѣетъ, такъ сказать, текущее значеніе и одно не опредѣляетъ собою положенія точекъ M_1 и N.) то и хорда M_1CN произвольна (но обусловливается прохожденіемъ черезъ точку C.) Такимъ образомъ точка C дѣлитъ всѣ проходящія черезъ нее хорды кривой пополамъ, а точка, обладающая такимъ свойствомъ, называется **центромъ кривой**., слѣд. C есть центръ искомой кривой.

Въ виду симметричности расположенія точекъ кривой относительно центра, отысканіе послѣдняго весьма важно въ смыслѣ облегченія построенія кривой. И такъ опре—

Найдемъ центръ искомой кривой, т.е. опредѣлимъ координаты точки C, причемъ достаточно опредѣлить одну абсциссу этой точки $Od = x_g$, напримѣръ точки g, что проще. Для чего черезъ нее параллель оси y, найдемъ центръ C' въ пересѣченіи этой параллели съ діаметромъ SS'. Изъ чертежа 198 имѣемъ: $x_g = Od = OP_1 + P_1g = x_1 + \frac{P_1P_2}{2} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, т.е. абсцисса центра искомой кривой есть среднее ариѳметическое между самой меньшей и самой большой абсциссой кривой (Аналитически все: абсцисса центра искомой кривой есть среднее ариѳметическое между корнями уравненія: $Mx^2 + 2Nx + P = 0$; но изъ этого уравненія $x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$, слѣд. имѣемъ: $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{N}{M}$).

Соединимъ теперь точки M и N между собою. Прямая MN пересѣчетъ прямую gg' въ точкѣ F. Очевидно $MN \parallel SS'$ (ибо $KH \# ZN$), а изъ трапеціи PMNQ, имѣя $Pg = gQ$ и $gg' \parallel MP$, получимъ $MF = NF$. Прямая MN есть произвольная хорда кривой, параллельная только діаметру SS'. Эта хорда дѣлитъ линію gg' пополамъ, стало-быть линія gg' есть тоже діаметръ кривой и притомъ этотъ діаметръ имѣетъ особое соотношеніе съ діаметромъ SS'. Мы видѣли, дѣйствительно, что эти діаметры таковы, что каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ рядъ хордъ, параллельныхъ другому. Такіе діаметры называются взаимно сопряженными діаметрами. Уравненіе діаметра gg' будетъ, очевидно: $x = -\frac{N}{M}$, потому что $gg' \parallel$ оси y а $Od = x_g = -\frac{N}{M}$.

Вспомним, что въ началѣ нашего изслѣдованія ось y была взята произвольно, а потому и положеніе діаметра SS' въ такой же степени произвольно. Поэтому можно сказать, что въ разсматриваемой кривой существуетъ безконечное множество паръ взаимно сопряженныхъ діаметровъ.

Совокупность всѣхъ вышеприведенныхъ замѣчаній достаточно опредѣляетъ видъ кривой, которая представляется выпуклою сомкнутою кривой, касающейся въ точкахъ A_1, A_2 и B_1, B_2, называемыхъ вершинами кривой, въ сторонахъ параллелограмма, попарно параллельныхъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ: $SS'\left(y=-\frac{Bx+E}{2C}\right)$ и $gg'\left(x=-\frac{N}{M}\right)$ и имѣющею O — центромъ. Эта сомкнутая кривая второго порядка и называется эллипсомъ.

До сихъ поръ мы вели наше изслѣдованіе въ предположеніи, что корни уравненія $Mx^2+2Nx+P=0$ дѣйствительны и неравны, т.е. въ предположеніи, что въ формулѣ $x=\frac{-N\pm\sqrt{N^2-MP}}{M}$ дано уравненіе: $N^2-MP>0$ или $N^2>MP$.

Теперь разсмотримъ второй случай, когда $N^2=MP$. Уравненіе $Mx^2+2Nx+P=0$; въ такомъ случаѣ имѣемъ два равныхъ корня: $x_0=-\frac{N}{M}$ и слѣдовательно имѣемъ: $Mx^2+2Nx+P=M(x-x_0)(x-x_0)=M(x-x_0)^2$, откуда получаемъ:
$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{M(x-x_0)^2}=$
$=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{\sqrt{M}}{2C}(x-x_0)\ldots(1)$ Но такъ какъ по условію $M<0$, то $\sqrt{M}$ есть количество мнимое. Поэтому, очевидно ур-іе (1) представляетъ собою двѣ (двойной знакъ при мнимомъ $\frac{x-x_0}{2C}\sqrt{M}$) мнимыя прямыя (ибо ур-іе 1-ой ст. относ. x).

Эти две линии прямые имеют одну общую действительную точку. В самом деле, полагая $x = x_0 = -\frac{N}{M}$, получаем для y действительную величину $y_0 = -\frac{Bx_0 + E}{2C}$. Этот случай можно рассматривать, как предел первого случая, когда $N^2 > MP$ при постепенном переходе от неравенства $N^2 > MP$ к равенству $N^2 = MP$, причем эллипс, представляемый в таком случае уравнением постепенно уменьшается через взаимное сближение точек A_1 и A_2 (ибо в таком процессе изменений x_1 стремится к равенству с x_2, т.е. точка P_1 стремится к совпадению с точкою P_2.), в предел при $N^2 = MP$ обращается в точку, именно в центр эллипса, так как и центр эллипса в таком случае имеет, как видим, те-же координаты: $x_0 = x_0 = -\frac{N}{M}$ и $y_0 = y_0 = -\frac{Bx + E}{2C}$.

Наконец рассмотрим случай, когда $N^2 < MP$. Легко видеть, что в таком случае уравнение не представляет собою никакого геометрического смысла. Действительно: $y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$, преобразуем 2-ую часть:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{\left[x^2 + \frac{2Nx}{M^2} + \frac{P}{M} - \frac{N^2}{M^2}\right]M} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{M}\sqrt{\left[\left(x^2 + \frac{2Nx}{M} + \frac{N^2}{M^2}\right) + \frac{PM - N^2}{M^2}\right]} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{M}\sqrt{\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{PM - N^2}{M^2}\right]}$$

Очевидно, что при всех действительных значениях x выражение y всегда имеет смысл, так как бы выражение $y^{ко}$ под корнем находится отрицательное количество, представляющее произведение двух множителей из которых один $\left[\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{PM - N^2}{M^2}\right]$ всегда в силу условия $N^2 < MP$, положителен, а другой M по условию

отрицателенъ.

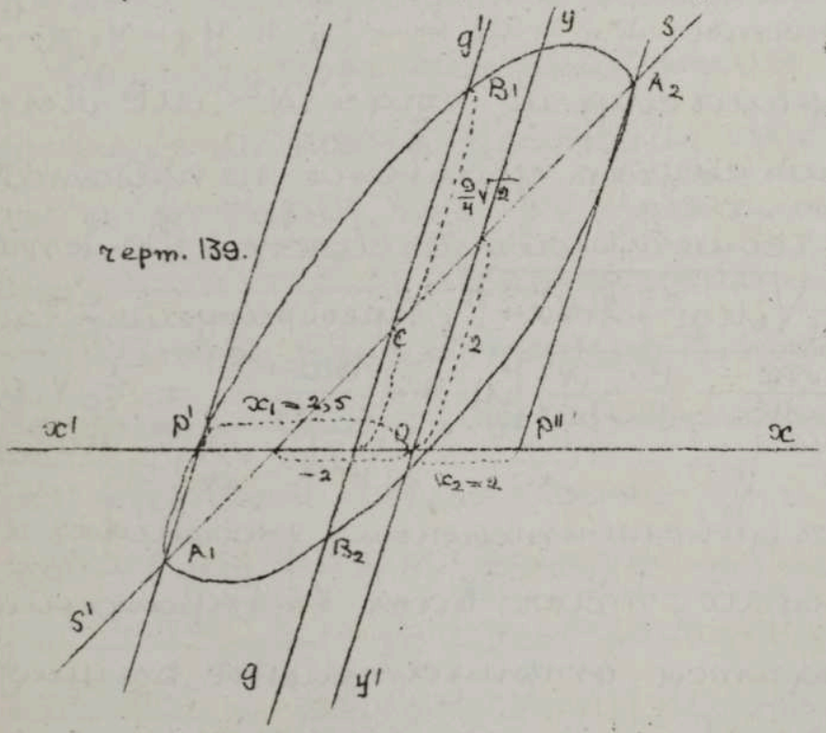
Такимъ образомъ, когда $N^2 < MP$, то уравненіе 2-й степени съ двумя перемѣнными не представляетъ собою никакого геометрическаго смысла. Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ:

Примѣръ 1-й. Построить уравненіе:

$$3x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 4y - 6 = 0.$$

Прежде всего посмотримъ, какую кривую представляетъ наше уравненіе; для этого составимъ выраженіе $B^2 - 4AC = 4 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$. Стало быть кривая относится къ эллипсамъ. Рѣшая уравненіе относительно y, напишемъ его въ видѣ $y^2 - 2(x+2)y + (3x^2 + 5x - 6) = 0$, откуда $y = x + 2 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 3x^2 - 5x + 6}$, упрощая, находимъ: $y = x + 2 \pm \sqrt{-2x^2 - x + 10}$.

Возьмемъ теперь оси координатъ (черт. 139) и прежде всего построимъ діаметръ SS', уравненіе котораго будетъ $y' = x + 2$. Для построенія SS' находимъ изъ этого ур-ія отрѣзки, отсѣкаемые прямою SS' отъ осей координатъ, именно, полагая $x = 0$, найдемъ отрѣзокъ по оси ординатъ, равный $+2$, полагая же $y' = 0$, найдемъ отрѣзокъ по оси абсциссъ, равный -2. Откладывая эти отрѣзки по осямъ и соединяя между собою полученныя точки, получимъ діаметръ SS'. Теперь построимъ вертикалы



черт. 139.

чрезъ точки P' и P'', абсциссы которыхъ $x_1 = 3{,}5$ и $x_2 = 2$, и найдемъ ординаты $P'A_1$ и $P'B_1$, $P''A_2$ и $P''B_2$ этихъ точекъ пересѣченія вертикаловъ съ кривою. Ординаты $P'A_1$ и $P''A_2$ найдемъ, подставляя x_1 и x_2 въ уравненіе кривой, ординаты же $P'B_1$ и $P''B_2$ найдемъ, подставляя x_1 и x_2 въ уравненіе діаметра SS'. Соединяя точки A_1, A_2, B_1, B_2, получимъ хорды, раздѣляемыя діаметромъ SS' пополамъ. Такимъ образомъ, построивъ нѣсколько хордъ, раздѣляемыхъ пополамъ діаметромъ SS', мы можемъ провести кривую.

A_1 и A_2. Какъ мы видѣли, это суть точки пересѣченія кривой съ діаметромъ SS' и абсциссы ихъ соотвѣтственно равны корнямъ уравненія $Mx^2+2Nx+P=0$, т. е. въ данномъ случаѣ корнямъ уравненія $-2x^2-x+10=0$. Эти корни будутъ: $x_1=-2{,}5$ и $x_2=2$.

Откладывая эти величины по оси абсциссъ отъ начала координатъ и проводя черезъ полученныя точки P' и P'' параллели оси Y, получимъ искомыя вершины A_1 и A_2 въ пересѣченіи этихъ параллелей съ діаметромъ SS'. Теперь опредѣлимъ центръ строимаго эллипса.

Какъ мы видѣли, эта точка геометрически опредѣляется какъ точка на діаметрѣ SS', абсцисса которой $x_g=\frac{x_1+x_2}{2}=$ (въ данномъ случаѣ) $=-\frac{1}{4}$; откладывая эту величину по оси $x^{ов}$ и проводя черезъ полученную точку g параллель оси Y, находимъ центръ C эллипса въ пересѣченіи діаметра SS' съ проведенною параллелью gg', причемъ послѣдній будетъ вторымъ діаметромъ эллипса, сопряженнымъ діаметру SS'.

Построимъ теперь вершины B_1 и B_2. Это суть точки пересѣченія кривой съ діаметромъ gg'. Сильдовательно ихъ сперва найдемъ; откладывая по gg' отъ точки C въ обѣ стороны величину $K=\sqrt{-2x^2-x+10}$, вычисленную для $x=cg=x_g=-\frac{1}{4}$, т. е. откладывая отъ C по gg' въ обѣ стороны по $\sqrt{\frac{81}{8}}=\frac{9}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$ [(видимъ, что $B_1C=CB_2=K$).. построится, какъ сторона квадрата, вписаннаго въ кругъ, радіусъ котораго $=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$.

Остальные точки кривой строить по указанному способу, т.е. проведя всевозможные параллельные оси Oy хорды, соответствующия различным значениям x (при условии, что $x_1 > x > x_2$) и откладывая полученныя хорды въ обе стороны отъ точекъ пересѣченія съ діаметромъ SS' величины R, вычисленныя для соотвѣтствующихъ хордамъ значеній x. Какъ мы видѣли, R можно вычислять непосредственно, но удобнѣе строить его геометрически.

Примѣръ 2-й. Дано уравненіе:

$$5x^2 + 4xy + y^2 - 22x - 10y + 26 = 0$$

Составляемъ дискриминантъ: $B^2 - 4AC = 16 - 20 = -4 < 0$. Слѣдовательно кривая относится къ эллипсамъ. Рѣшая уравненіе относительно y, напишемъ его въ видѣ: $y^2 + (4x - 10)y + (5x^2 - 22x + 26) = 0$. По извѣстной формулѣ $y = -2x + 5 \pm \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$. Здѣсь подъ корнемъ прямо напишемъ точный квадратъ и сможемъ написать:

$$y = -2x + 5 \pm \sqrt{-(x-1)^2} = -2x + 5 \pm (x-1)\sqrt{-1}.$$

Здѣсь y вообще мнимое, но при $x = 1$, мы получимъ $y = -2 + 5 = 3$. Мы видимъ, что въ данномъ примѣрѣ уравненіе представляетъ частный случай эллипса - точку, которой координаты суть $(1, 3)$.

Примѣръ 3-й. Дано уравненіе:

$$9x^2 + 4xy + y^2 - 18x - 6y + 12 = 0$$

Составляемъ выраженіе: $B^2 - 4AC = 16 - 36 = -20 < 0$. Слѣдовательно кривая относится къ эллипсамъ. Рѣшая уравненіе относительно y, напишемъ его въ видѣ

$y^2+(4x-6)y+(9x^2-18x+12)=0$. По извѣстной формулѣ имѣемъ: $y=-2x+3\pm\sqrt{4x^2-12x+9-9x^2+18x-12}$ или по приведеніи $y=-2x+3\pm\sqrt{-5x^2+6x-3}=-2x+3\pm\sqrt{5\left(-x^2+\frac{6x}{5}-\frac{3}{5}\right)}=-2x+3\pm\sqrt{5}\sqrt{-x^2+\frac{6x}{5}-\frac{3}{5}}=$ (прибавляя къ подкоренному количеству и отнимая отъ него $\frac{9}{25}$) $=-2x+3\pm\sqrt{5}\sqrt{-x^2+\frac{6x}{5}-\frac{9}{25}-\frac{3}{5}+\frac{9}{25}}=$ $=-2x+3\pm\sqrt{5}\sqrt{-\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{6}{25}}=-2x+3\pm\sqrt{5}\sqrt{\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{6}{25}}$. т. е. слѣдовательно y всегда синусъ даннное уравненіе не представляетъ собою никакого геометрическаго сѣченія, или, какъ говорятъ, въ видахъ общности „представляетъ мнимое сѣченіе."

Группа гиперболъ.

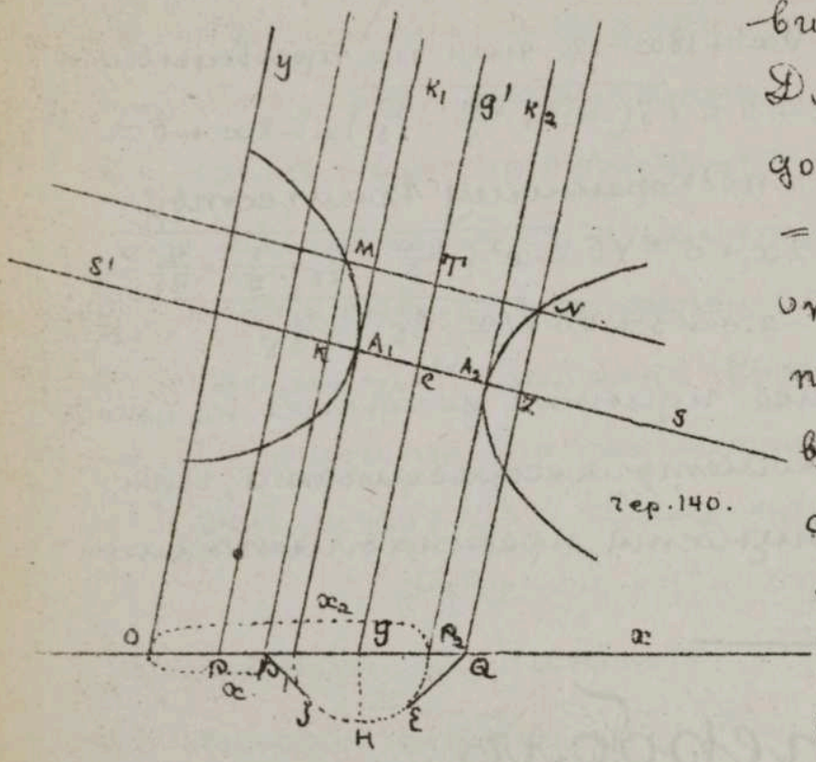
Уравненіе кривыхъ 2го порядка въ этомъ случаѣ отличается отъ случая эллипсовъ только тѣмъ, что $M=B^2-4AC>0$. Изслѣдованіе кривыхъ этой группы будетъ вести аналогично первому:

Имѣемъ: $y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}$, гдѣ $M=B^2-4AC$; $N=BE-2CD$ и $P=E^2-4CF$. Обозначая, какъ и прежде $\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}$ черезъ R, получаемъ:

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm R \quad \ldots\ldots (1).$$

Въ этомъ видѣ уравненіе удобно для построенія. Для общности оси координатъ возьмемъ косоугольныя. Прежде всего построимъ діаметръ (черт. 140), уравненіе котораго есть $y'=-\frac{Bx+E}{2C}$. Пусть этотъ діаметръ будетъ линія которая пряшая SS'. Съ проведеніемъ этой прямой построеніе точекъ кривой значительно упрощается, такъ какъ

ордината кривой выражается через ординату діаметра SS' въ видѣ $y = y' \pm R$.



чер. 140.

Для построенія точекъ кривой надо по данному x вычислить $R = \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}$ и величину R отложить по параллели оси $y^{ов}$, проведенной черезъ конецъ соотвѣтственной абсциссы x_1 въ обѣ стороны отъ діаметра SS' отъ точки пересѣченія его съ проведеннаго къ оси $y^{ов}$ параллельно. Слѣдовательно съ построеніемъ діаметра SS' весь вопросъ о построеніи точекъ кривой сводится къ построенію R. Для удобства изслѣдованія радикалъ подкоренное выраженіе въ произведеніе двухъ разностей, именно по извѣстной формулѣ имѣемъ:

$$R = \frac{1}{2c}\sqrt{M(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)},$$ гдѣ x_1 есть меньшій, а x_2 — большій корень уравненія $Mx^2+2Nx+P=0$. Изслѣдованіе наше распадается, какъ и въ случаѣ эллипсовъ, на три случая: 1) $N^2 > MP$, 2) $N^2 = MP$ и 3) $N^2 < MP$. Разберемъ каждый случай отдѣльно:

1) $N^2 > MP$. Узнаемъ, въ какихъ предѣлахъ дѣйствительныхъ значеній перемѣнной x соотвѣтствуютъ дѣйствительныя же значенія y. Во первыхъ, когда $x < x_1$ (а слѣд. $x < x_2$, ибо $x_1 < x_2$), то подкоренное количество въ выраженіи R

положительно и сльдовательно всевозможнымъ значеніямъ x, меньшимъ x_1, соотвѣтствуютъ дѣйствительныя значенія y и по такимъ значеніямъ x возможно сльдовательно построеніе точекъ кривой.

Когда $x=x_1$, тогда $R=0$, это показываетъ, что хорда кривой, постепенно уменьшаясь (при переходѣ отъ неравенства $x<x_1$ къ равенству $x=x_1$), обращается въ точку, когда $x=x_1$. Такимъ образомъ, если отложимъ $OP_1=x_1$ и проведемъ P_1K_1 параллельно оси y, то точка A_1 пересѣченія діаметра SS' съ проведенною параллелью будетъ точкой кривой, а параллель P_1K_1, очевидно, будетъ-касательна къ кривой въ точкѣ A_1.

Если $x>x_2$ (а сльдовательно $x>x_1$ ибо $x_2>x_1$), то подкоренное количество въ выраженіи R положительно и сльдовательно всевозможнымъ дѣйствительнымъ значеніямъ x большимъ x_2 соотвѣтствуютъ дѣйствительныя значенія y и по такимъ значеніямъ x возможно сльдовательно построеніе точекъ кривой. Когда $x=x_2$, тогда $R=0$. Получаемъ одну точку A_2 кривой на діаметрѣ SS'.

Разсуждая подобно предыдущему, заключаемъ, что прямая P_2A_2, параллельная оси y, касательна къ кривой въ точкѣ A_2.

Когда абсцисса x будетъ давать значенія промежуточныя между x_1 и x_2, т.е. когда $x_1<x<x_2$, тогда подкоренное количество въ выраженіи R отрицательно, а потому R, а сльдовательно и y мнимы. Это означаетъ, что такія значенія x не выражаютъ собою абсциссъ кривой и указываютъ въ то-же время, что между прямыми P_1K_1 и P_2K_2 нѣтъ точекъ кривой.

Из этого исследования видим, что искомая кривая имеет две ветви, в точках $A_1\left(x_1, \frac{Bx+E}{2C}\right)$ и $A_2\left(x_2, \frac{Bx+E}{2C}\right)$, пересекающие диаметр кривой $SS'\left(y'=\frac{Bx+E}{2C}\right)$; одна из этих ветвей расположена вся влево от линии K_1A_1, а другая вся вправо от линии K_2A_2.

Самую кривую построим по точкам, задаваясь какой нибудь величиной абсциссы x (в указанных пределах), откладывая эту величину по оси абсцисс от начала координат, проводя через полученную точку параллель оси y и откладывая по этой параллели от точки ея пересечения с диаметром SS' в обе стороны величину R, вычисленную для взятого значения x. Такой способ построения точек кривой основывается на выведенных нами уравнений: $y=y'\pm R$, представляя собою геометрическое толкование этого уравнения. Величину R удобнее всего определить геометрическим построением, именно: мы имеем $\frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$. Здесь $\frac{\sqrt{M}}{2C}$ есть величина постоянная и представляет собою числовой (в рассматриваемом общем случае неявно выраженный) коэффициент при множителе $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$, который будем строить непосредственно. Мы видим, что этот множитель есть среднее пропорциональное между линиями $x-x_1$ и $x-x_2$. Здесь к построению удобно применить теорему о касательной и секущей, проведенных из одной точки к кругу. Определим диаметр этого круга в предположении, что секущая всегда проходит через его центр, рассматривая

большую разность $x-x_1$, как всю секущую, а меньшую разность $x-x_2$, как внешний отрезок этой секущей, мы при сделанном предположении имеем, что искомый диаметр: $D=(x-x_1)-(x-x_2)=x_2-x_1=$(начерт. 140)$=P_1P_2$.

Таким образом, если построим на $P_1P_2=x_2-x_1$, как на диаметре из центра O окружность и из различных точек оси x будем проводить к этой окружности касательные, то величины последних выразят собою различные величины множителя $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$, соответствующие величине x, выражаемый расстоянием от взятой на оси x точки до начала координат. Умножая же последние линии в отношении $\frac{\sqrt{M}}{2c}$ будем получать различные величины R, соответствующие различным значениям x. Так, прямая PJ, проведенная из точки P касательно к окружности P_1OP_2 представляет собою множителя $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$ при $x=OP$. Проведя же PK параллельно оси y и откладывая $KM=KM'=\frac{\sqrt{M}}{2c}PJ=R$(при $x=OP$), получим две точки M и M', принадлежащие кривой.

Таким образом строим точки кривой, постепенно перемещая точку P по оси x влево от точки P_1 и вправо от точки P_2. При таком перемещении точки P хорды двух ветвей кривой, равные для точки P_1 и P_2 нулю с удалением точки P от P_1 и P_2 постепенно увеличиваются до бесконечности, причем очевидно, что хорды, соответствующие каким бы то ни было двум положениям точки P, равноудаленным от точек P_1 и P_2, равны между собою.

Изъ сказаннаго ясно, что вѣтви кривой безконечны, поэтому ихъ точки сходны между собою и обратно расположены.

Разыщемъ центръ изслѣдуемой кривой. Имѣя $P_1 g = P_2 g$ и проведя gg' параллельно оси y, изъ трапеціи $P_1 A_1 A_2 P_2$ получаемъ $A_1 C = A_2 C$. Не трудно показать, что точка C и есть центръ кривой. Возмемъ точку Q такъ, что $QP_2 = P_1 P_2$ и построимъ соотвѣтствующія абсциссѣ OQ точки кривой N и N'. Въ силу сказаннаго условія, что $QP_2 = P_1 P_2$, имѣемъ: $KM = -K_1 M_1 = z_1 Y = zN' = \frac{\sqrt{M}}{2c} \cdot PJ = \frac{\sqrt{M}}{2c} QE$ (ибо въ силу условія у насъ $QE = Pi$) Соединимъ теперь точку M_1 съ точкою C и точку N съ тою же точкою: $\Delta M'KC = \Delta NzC$, ибо эти треугольники имѣютъ по равному углу ($\angle M'KC = \angle CzN$, такъ какъ $KP \| zQ \| $ оси y) заключенному между двумя соотвѣтственно равными сторонами (изъ трапеціи $KZQP$, такъ какъ $Pg = gQ$, имѣемъ $KC = CZ$ и кромѣ того, какъ видно $KM' = zN$). Изъ равенства треугольниковъ заключаемъ, что $\angle KCM' = \angle ZCN$, а такъ какъ линія KZ прямая, то и линія $CM'CN$ есть также прямая. Кромѣ того изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ имѣемъ: $CM' = CN$. Прямая $M'N$ есть произвольная хорда кривой, обусловливаемая только прохожденіемъ черезъ точку C, которая дѣлитъ ее пополамъ. Слѣдовательно заключаемъ, что точка C дѣлитъ всѣ проходящія черезъ нее хорды пополамъ, т.е., что C есть центръ кривой. Для опредѣленія положенія точки C достаточно знать ея абсциссу Og, такъ какъ эта точка лежитъ на діаметрѣ SS'. Изъ чертежа же имѣемъ: $Og = OP_1 + P_1 g = OP_1 + \frac{P_1 P_2}{2} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{N}{M}$.

Если соединить между собою точки M и N, то линия MN будет хорда кривой, перпендикулярная диаметру SS'. Эта хорда в точке T делится прямой dd' пополам, следовательно прямая dd', проходящая через центр и параллельная оси Y, делит пополам все хорды кривой, параллельные диаметру SS', т.е. dd' есть тоже диаметр кривой и притом этот диаметр будет сопряженным диаметру SS' так как каждый из этих диаметров делит пополам ряд хорд, параллельных другому.

Вследствие произвола в выборе направления оси Y, надо заметить, что кривая имеет бесконечное множество пар сопряженных диаметров. Совокупность всех вышеприведенных замечаний достаточно определяет вид кривой. Эта кривая, состоящая, как мы видим, из двух ветвей, называется гиперболой.

II, Перейдем к случаю, когда в общем уравнении кривых второго порядка при $M \neq 0$ имеем $N^2 = MP$. Будем рассматривать этот случай, как частный, предельный случай 1^го при постепенном переходе от неравенства $N^2 > MP$ к равенству $N^2 = MP$, или что то же, при переходе от неравенства $x_1 < x_2$ к равенству $x_1 = x_2$. Геометрически такому переходу будет соответствовать сближение между собою точек P_1 и P_2 до совпадения их (при $N^2 = MP$ или что то же при $x_1 = x_2$) при этом касательные к кривой P_1A_1 и P_2A_2 совпадут в одну прямую и следовательно ветви кривой коснутся между собою в центре кривой.

Изследуем форму геометрического места. В этом слу-

чая обозначимъ $x_1 = x_2$ черезъ x_0. Можемъ написать $R = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{M}}{2c}\sqrt{(x-x_0)^2} = \frac{\sqrt{M}}{2c}(x-x_0)$ и уравненіе кривой $y = -\frac{Bx+E}{2c} \pm R$ принимаетъ видъ $y = -\frac{Bx+E}{2c} \pm \frac{\sqrt{M}}{2c}(x-x_0)$.

Разсмотрѣвши эту формулу, мы замѣтимъ, что y выражается функціей 1-й степени относительно x, стало быть это есть уравненіе прямой. Далѣе мы замѣтимъ, что здѣсь заключается собственно два уравненія; одно съ +, а другое съ – при членѣ $\frac{\sqrt{M}}{2c}(x-x_0)$ стало быть это уравненіе выражаетъ двѣ прямыя. Обѣ эти прямыя проходятъ черезъ точку, абсцисса которой есть x_0, такъ какъ обѣ прямыя имѣютъ при $x = x_0$ одинаковыя ординаты, а именно: $y = -\frac{Bx_0+E}{2c}$. Но эти двѣ прямыя имѣютъ различныя угловые коэффиціенты. Для первой прямой угловой коэффиціентъ равенъ $K = -\frac{B}{2c} + \frac{\sqrt{M}}{2c}$, а для второй прямой угловой коэффиціентъ $K_1 = -\frac{B}{2c} - \frac{\sqrt{M}}{2c}$. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ уравненіе представляетъ не кривую линію, а совокупность двухъ пересѣкающихся прямыхъ линій, что составляетъ частный случай гиперболы, опредѣляется вообще только условіемъ, что $M = B^2 - 4AC > 0$.

III) Пусть въ общемъ уравненіи кривыхъ 2-го порядка, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, т.е. при условіи $M = B^2 - 4AC > 0$, мы имѣемъ еще, что $N^2 < MP$. Рѣшая общее уравненіе относительно y, мы получимъ $y = -\frac{Bx+E}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}$ (1)

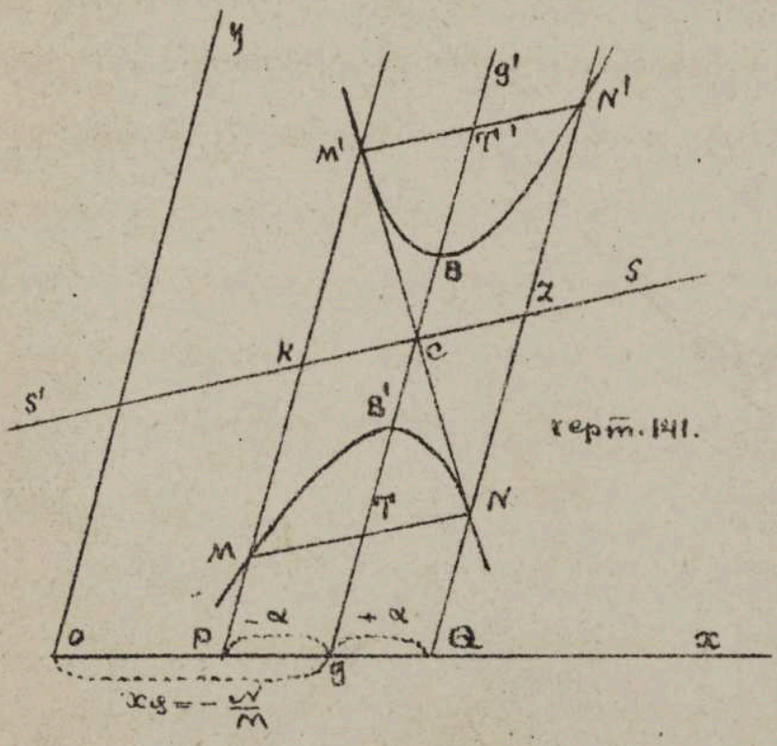
Если бы мы въ видахъ удобства изслѣдованія разложили подкоренной трехчленъ въ произведеніе двучленовъ, рѣшая уравненіе $Mx^2+2Nx+P=0$, мы получили бы корни этого ур-ія

$$x = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}$$

имѣемъ, такъ какъ по условію $N^2 < MP$. Постоимъ для изслѣдованія формулы (1), мы напишемъ ее въ другомъ видѣ:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{PM-N^2}{M^2}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Будемъ строить это уравненіе. Положимъ сначала, какъ выше, что радикалъ: $\frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+\frac{PM-N^2}{M^2}} = K$. Напишемъ уравненіе діаметра изслѣдуемой кривой $y' = -\frac{Bx+E}{2C}$. Такимъ образомъ уравненіе наше можно представить такъ: $y = y' \pm K$. Возьмемъ для общности косоугольныя оси координатъ и построимъ прежде всего діаметръ (черт. 141). Пусть этотъ діаметръ будетъ SS'. Теперь будемъ строить K и прежде всего замѣтимъ, что подъ



черт. 141.

корнемъ въ выраженіи K стоитъ сумма двухъ всегда положительныхъ количествъ, слѣдовательно K всегда дѣйствительно при всевозможныхъ значеніяхъ x. Наименьшая величина K будетъ очевидно при $x = -\frac{N}{M}$, причемъ K имѣетъ конечную величину, отличную отъ 0., именно $K = \frac{\sqrt{M}\sqrt{PM-N^2}}{2CM}$. Это указываетъ на то, что искомая кривая не имѣетъ общихъ точекъ съ діаметромъ SS'. Строимъ точки B и B' кривой, соотвѣтствующія $x = -\frac{N}{M}$, откладывая $Og = -\frac{N}{M}$, проводя

gg' параллельны оси Y и откладывая $CB = CB' = \frac{\sqrt{m}\sqrt{pm - n^2}}{2cm}$; потомъ строимъ самую кривую, какъ обыкновенно по точкамъ, вычисляя R по различнымъ значеніямъ текущей абсциссы x. Такое построеніе кривой, какъ мы видѣли, обозначается построеніемъ центра ея, т.е. точки, въ которой проходящія черезъ нее хорды кривой дѣлятся пополамъ.

Займемся разысканіемъ центра кривой. Къ равенству $x = -\frac{n}{m}$ мы можемъ придти двумя путями: x, могущее имѣть всѣ значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$, увеличиваясь или уменьшаясь, приближается къ величинѣ $-\frac{n}{m}$, такъ что текущее значеніе x мы можемъ замѣнить такимъ: $x = -\frac{n}{m} + \alpha$, гдѣ α можетъ имѣть всевозможныя значенія, положительныя и отрицательныя. Возмемъ два какихъ нибудь значенія α равныя по абсолютной величинѣ α', но противоположные по знаку, тогда мы получимъ: $x' = -\frac{n}{m} + \alpha'$ и $x'' = -\frac{n}{m} - \alpha'$. Для обѣихъ этихъ значеній x мы получаемъ одну и ту же величину $R = \frac{\sqrt{m}}{2c} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \frac{pm - n^2}{m^2}}$. Построимъ точки кривой, соотвѣтствующія взятымъ абсциссамъ. Откладываемъ $Pg = Qg = \alpha'$ (α' имѣетъ впрочемъ произвольное текущее значеніе) Проводимъ изъ точекъ P и Q параллели оси Y. Пусть эти параллели встрѣчаютъ діаметръ SS' въ точкахъ K и L. Откладываемъ отъ точки K вверхъ и внизъ соотвѣтствующій R до точекъ M и M' и отъ точки L вверхъ и внизъ до точекъ N и N' ту же величину R, такъ что $KM = KM' = LN = LN' = R = \frac{\sqrt{m}}{2c}\sqrt{\alpha^2 + \frac{pm - n^2}{m^2}}$. Такимъ образомъ мы получимъ четыре точки нашей кривой, именно M, M', N и N'. Соединивъ точку C съ точками M' и N

получимъ треугольникъ KCM' равенъ треугольнику ZCN. Эти треугольники равны, какъ имѣющіе по равному углу ($\angle M'KC = \angle CZN$, такъ какъ $MK \| ZN \| $ оси y^{os}) и заключенному между соотвѣтственно равными сторонами ($M'K = ZN$ и изъ трапеціи PKZQ, въ которой $Pq = qQ$ и $qC \| KP \| Pa \| $ оси y^{os}, мы имѣемъ $KC = CZ$). Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что углы при точкѣ C равны между собою и что $CM' = CN$. Изъ равенства угловъ слѣдуетъ, что линія $M'CN$ прямая и есть произвольная хорда Кривой, проходящая черезъ точку C и она дѣлится въ этой точкѣ пополамъ. Отсюда видно, что точка C дѣлитъ всѣ проходящія черезъ нее хорды Кривой пополамъ. Стало быть точка C есть центръ Кривой. Изъ построенія видно, что абсцисса центра $C\ldots x_q = -\frac{N}{M}$. Соединимъ между собою точки M и N, получимъ хорду MN параллельную діаметру SS'. Эта хорда дѣлится въ точкѣ T линіей qq' пополамъ (это видно изъ трапеціи PMNQ такъ какъ точка M произвольна, то и хорда MN такъ же произвольна, но она параллельна діаметру SS' и эта хорда дѣлится линіею qq' пополамъ. Такимъ образомъ прямая qq' дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя діаметру SS', стало быть прямая qq' есть тоже діаметръ Кривой. При томъ діаметры SS' и AA' сопряжены между собою, такъ какъ каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ рядъ хордъ, параллельныхъ другому.

Далѣе, если разсмотримъ выраженіе $x = -\frac{N}{M} \pm \alpha$, то замѣтимъ, что при всевозможныхъ значеніяхъ α отъ 0 до δ K будетъ всегда отлично отъ 0 и наименьшая его величина

будет при $x=-\frac{B}{2C}$ будет $R=\frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\frac{PM-N^2}{M^2}}$ и этой величине R соответствуют точки B и B', из этого видно, что кривая имеет два положительных и тождественных по форме бесконечных ветви, из которых одна расположена вся вверх над диаметрами SS' от точки B, а другая вся вниз под диаметром SS' от точки B'. Таким образом и в этом случае получим кривую, состоящую из двух бесконечных ветвей и называемую гиперболой.

Дополнение об ассимптотах гиперболы.

Выше мы строили уравнение кривую по уравнению такого вида:

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2-\frac{N^2-MP}{M^2}}.$$

При этом построении мы рассмотрели три случая: 1) Когда в этом уравнении $N^2>MP$, 2) Когда $N^2=MP$ и 3) Когда $N^2<MP$. В первом и последнем случаях мы получили две гиперболы различным образом расположенные относительно осей координат, во втором случае мы получили две пересекающиеся прямые, угловые коэффициенты которых суть: $K_1=-\frac{B}{2C}+\frac{\sqrt{M}}{2C}$ и $K_2=-\frac{B}{2C}-\frac{\sqrt{M}}{2C}$. Отнесем эти три геометрические места к одной и той же системе координат и рассмотрим их взаимное расположение. Мы видим, что все три геометрические места имеют другой общий диаметр, сопряженный первому и проходящий через общий центр тяжести, параллельной оси y и уравнение которого есть: $y'=-\frac{Bx+E}{2C}$. Взятые мы видим, что на общем диаметре обе гиперболы (для 1^го и 3^го случаев) имеют общий

центръ, абсцисса котораго $x_0 = -\frac{N}{M}$ и что этотъ центръ есть точка пересѣченія двухъ прямыхъ (для втораго случая). Затѣмъ видимъ, что всѣ три геометрическія хорды имѣютъ другой общій діаметръ, сопряженный первому и проходящій черезъ общій центръ линій, параллельной оси У и уравненіе котораго есть: $x_0 = -\frac{N}{M}$

Каждая изъ двухъ вѣтвей первой гиперболы пересѣкаетъ въ одной точкѣ первый діаметръ, относительно котораго эти вѣтви и расположены симметрично. Каждая изъ вѣтвей второй гиперболы пересѣкаетъ въ одной точкѣ второй діаметръ, относительно котораго эти вѣтви и располагающаяся симметрично. Вѣтви первой гиперболы располагаются по обѣ стороны (вправо и влѣво) отъ перваго діаметра, вѣтви второй гиперболы располагаются по обѣ стороны (вверхъ и внизъ) отъ втораго діаметра. Опредѣлимъ соотношеній отнюдь трехъ геометрическихъ хордъ, сравнивая ихъ ординаты, соотвѣтствующія одной и той же абсциссѣ. Для удобства такого сравненія преобразуемъ нѣсколько выраженіе для У и упростимъ его. Во первыхъ обозначимъ текущее значеніе ординаты для перваго случая черезъ $У_{гип.}$ для втораго черезъ $У_{пр.}$ и для третьяго $У'_{гип.}$ Въ силу условій имѣемъ:

$$У_{гип} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{N^2-MP}{M^2}}$$

$$У_{пр} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{2}\right)^2}$$

$$У'_{гип} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 - \frac{MP-N^2}{M^2}}$$

а принимая $-\frac{N}{M} = x_0$ и $\frac{N^2-MP}{M^2} = m^2$, получимъ:

$$У_{гип} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_0)^2 - m^2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y_{пр} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}(x-x_0) \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$y'_{гип} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_0)^2+m^2} \ldots\ldots (3).$$

Сравнивая эти выражения, мы видимъ, что $y_{гип} < y_{пр} < y'_{гип}$, т. е. вѣтви первой гиперболы располагаются въ одной парѣ противоположныхъ угловъ, образуемыхъ прямыми, именно въ углахъ, содержащихъ въ себѣ первый діаметръ кривыхъ, а вѣтви второй гиперболы располагаются въ другой парѣ противоположныхъ угловъ, именно въ углахъ, содержащихъ въ себѣ второй діаметръ кривыхъ. Сравнимъ эти величины ординатъ, вычитая почленно уравненіе 1 изъ 2 и 2 изъ 3, получимъ (опредѣляя одну абсолютную величину получающихся разностей

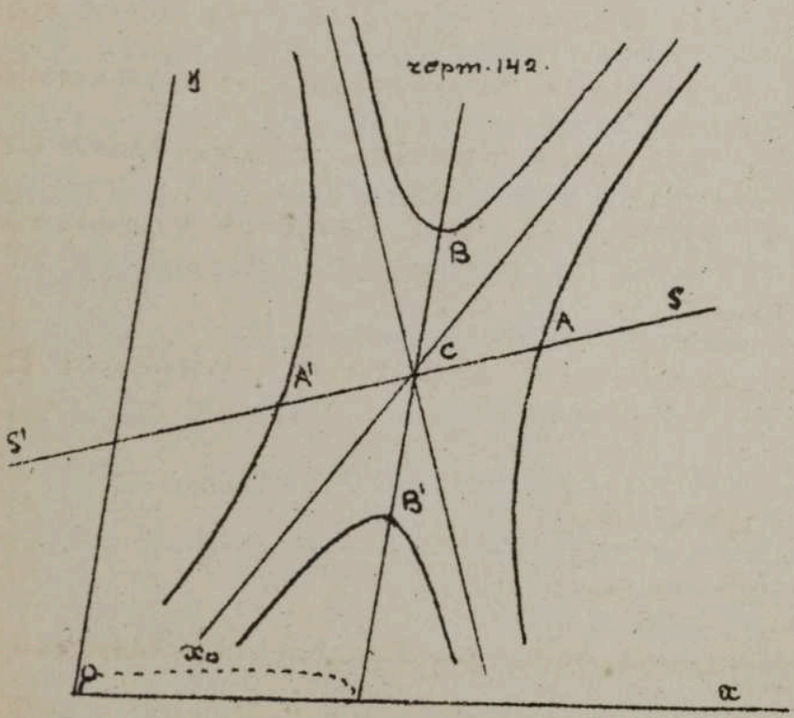
$$y_{пр} - y_{гип} = \frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x-x_0-\sqrt{(x-x_0)^2-m^2}\right)$$

$$y'_{гип} - y_{пр} = \frac{\sqrt{M}}{2C}\left[\sqrt{(x-x_0)^2+m^2}-(x-x_0)\right].$$

Преобразуемъ вторыя части этихъ равенствъ для удобства изслѣдованія ихъ измѣненій въ зависимости отъ измѣненій x. Именно, умножая и дѣля вторыя части на сопряженныя каждой выраженія, получимъ:

$$y_{пр} - y_{гип} = \frac{\sqrt{M}}{2C}\cdot\frac{m^2}{x-x_0+\sqrt{(x-x_0)^2-m^2}}$$

$$y'_{гип} - y_{пр} = \frac{\sqrt{M}}{2C}\cdot\frac{m^2}{x-x_0+\sqrt{(x-x_0)^2+m^2}}$$



Если теперь будемъ постепенно увеличивать x, то эти разности будутъ постепенно уменьшаться, т. е. вѣтви кривой будутъ постепенно приближаться къ прямымъ и такимъ-

образомъ сближаться между собою. Если же $x = \infty$, то въ предѣлѣ получимъ $\lim(y_{пр} - y_{кр}) = \lim(y_{кр} - y_{пр}) = 0$, слѣдовательно при безконечномъ продолженіи кривыя ихъ вѣтви все болѣе и болѣе приближаются къ прямымъ. Прямыя же, безконечно приближающіяся къ кривымъ при ихъ продолженіи, называются асимптотами этихъ кривыхъ. Слѣдовательно двѣ наши гиперболы имѣютъ общую систему асимптотъ, а кривыя, имѣющія общія асимптоты, называются сопряженными между собою. Итакъ мы видимъ, что всякая гипербола имѣетъ двѣ асимптоты, проходящія черезъ центръ ея и общее уравненіе которыхъ есть:

$$y_{асс} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}(x - x_0)$$

или такъ какъ $x_0 = -\frac{N}{M}$, имѣемъ:

$$y_{асс} = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x + \frac{N}{M}\right).$$

При построеніи гиперболы весьма удобно строить предварительно асимптоты, которыя опредѣляютъ до нѣкоторой степени направленіе теченія кривой, такъ какъ на достаточномъ разстояніи отъ центра кривая идетъ почти параллельно асимптотамъ.

Приложимъ наши разсужденія о группѣ гиперболъ къ нѣсколькимъ примѣрамъ.

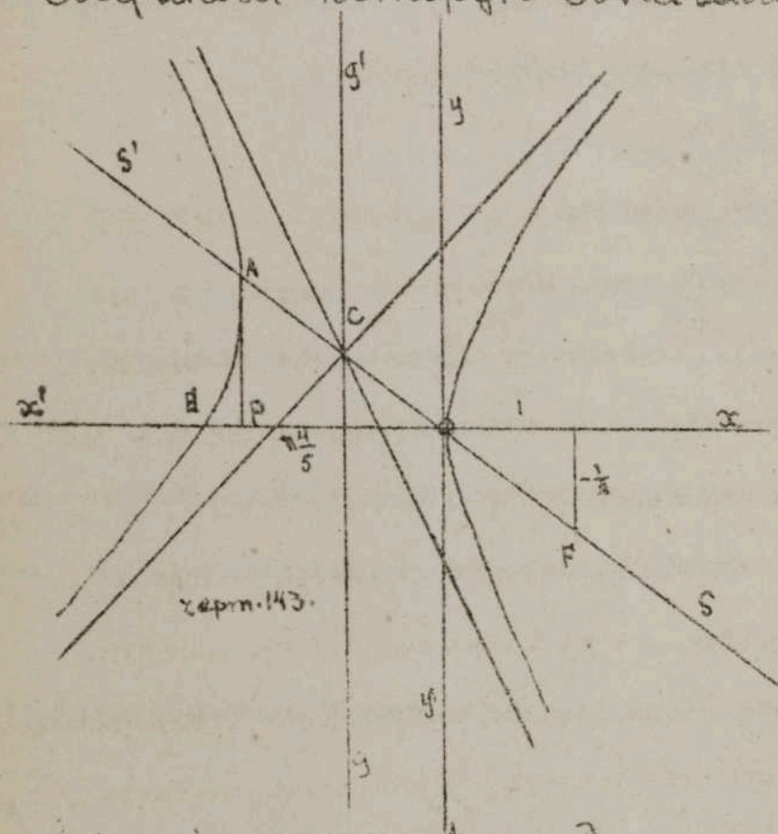
Примѣръ 1-й. Дано уравненіе:

$$y^2 + xy - x^2 - x = 0$$

Прежде всего, чтобы узнать, какую кривую представляетъ это уравненіе, составимъ биномъ: $B^2 - 4AC = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0$. Стало быть кривая должна быть гипербола. Рѣшая ур-іе

относительно y, находимъ: $y = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + x^2 + x}$. Дѣлая подъ корнемъ приведеніе и вынося знаменатель за знакъ корня, получаемъ: $y = \frac{-x \pm \sqrt{5x^2+4x}}{2}$

Для простоты отнесемъ построеніе уравненія къ прямоугольной системѣ координатъ. Прежде всего построимъ діаметръ SS', уравненіе котораго будетъ: $y' = -\frac{x}{2}$. Изъ этого ур-ія видно, что діаметръ проходитъ черезъ начало координатъ, опредѣлимъ еще какую нибудь точку прямой, для чего положимъ $x=1$, тогда $y' = -\frac{1}{2}$. Строимъ (черт. 143) эту точку F, соединяя которую съ началомъ координатъ, получимъ діаметръ SS'. Теперь будемъ строить кривую по точкамъ, зная, что $y = y' \pm R$, а $R = \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$, гдѣ x_1 и x_2 суть корни ур-ія: $Mx^2 + Nx + P = 0$.



Для даннаго случая x_1 и x_2 опредѣляются изъ уравненія $5x^2 + 4x = 0$, изъ котораго получаемъ: $x_1 = -\frac{4}{5}$ и $x_2 = 0$. При этихъ значеніяхъ x имѣемъ: $R = 0$, т.е. соотвѣтствующія точки кривой находятся на діаметрѣ SS'. Это будутъ точка A и начало координатъ O. Чтобы строить другія точки кривой по указанному нами способу, т.е. строимъ сперва линейный множитель $\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$, какъ касательную, проведенную изъ конца соотвѣтствующей абсциссы къ кругу,

построенному на $OA = x_1 + x_2$, как на диаметре и затем уменьшенная этою линейною функцией в постоянном отношении $\frac{\sqrt{M}}{2c}$.

Раздвинем разностной OP попеременно и проведем через полученную точку параллельно оси y. Пусть эта прямая пересечет диаметр в точке C. Точка C будет центром кривой, т. к. известно, что $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = (-\frac{4}{5}) : 2$

Чтобы лучше определить течение кривой построим ее асимптоты. Уравнение асимптот в общем виде есть:

$$y_{асс.} = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2c}(x - x_0)$$

где $x_0 = -\frac{N}{M} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, в данном случае имеем:

$$y_{асс} = -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\left(x + \frac{2}{5}\right)$$

Чтобы построить эти прямые, мы определяем, какие отрезки они делают на оси y-ов. Для этого положим $x = c$ и найдем p — отрезок по оси y-ов: $p = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{5} = \pm 0{,}4$. Откладываем вверх и вниз от точки O величину, равную $0{,}4$, получаем две точки, через которые проходят асимптоты. Теперь мы можем начертить и самую параболу, соединив предварительно полученные точки с центром C кривой (построив две асимптоты). Для построения кривой построим точки пересечения кривой с осью абсцисс. Для нахождения точек $y = 0$ и мы получаем из первоначального уравнения кривой такое уравнение: $-x^2 - x = 0$ или $x^2 + x = 0$ или $x(x+1) = 0$; отсюда получаем два решения $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$. Соответственно одна из искомых точек A начало координат, а другая будет точка E.

Примѣръ 2-й. Возьмемъ уравненіе:

$$5y^2 - 2xy - x^2 + 2y - 1 = 0.$$

Составляемъ биномъ $B^2 - 4AC = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 5 = 24 > 0$, слѣдовательно разсматриваемая кривая относится къ классу гиперболъ. Рѣшая это уравненіе относительно y, получимъ послѣдовательно:

$$5y^2 - 2(x-1)y - (x^2+1) = 0, \quad \dots \quad y = \frac{(x-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 5(x^2+1)}}{5}$$

$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{6x^2 - 2x + 6} = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{x^2 - \frac{1}{3}x + 1} \quad \dots (1)$$

Если бы мы для построенія кривой привели полученное уравненіе къ виду: $y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}$, то опредѣляя x_1 и x_2 изъ уравненія $x^2 - \frac{1}{3}x + 1 = 0$, мы получили бы для нихъ мнимыя значенія. Слѣдовательно данный примѣръ соотвѣтствуетъ случаю III. Поэтому и полученное ур-іе кривой удобнымъ для ея построенія, такъ какъ мы это дѣлали въ изслѣдованіи III-го случая, т.е. въ подкоренномъ выраженіи дополнимъ до полнаго квадрата сумму членовъ съ перемѣннымъ x. Произведя это, получимъ:

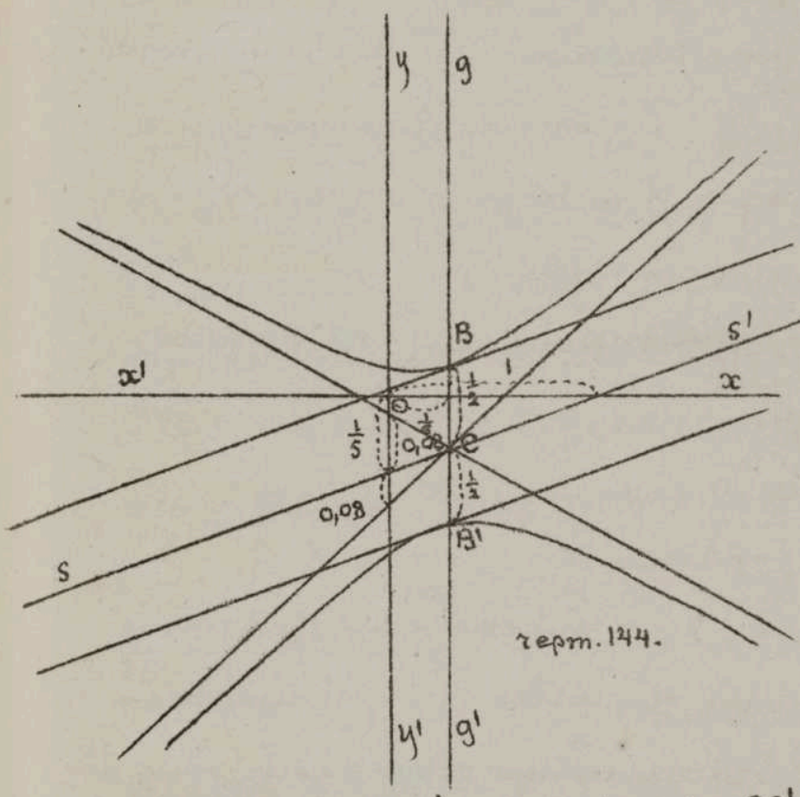
$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5} \cdot \sqrt{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + 1} \quad \text{или}$$

$$y = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{36}}.$$

Строимъ теперь это уравненіе (черт. 144). Беремъ прямоугольныя оси координатъ. Строимъ сначала діаметръ, уравненіе котораго будетъ $y' = \frac{x-1}{5}$.

Чтобы построить этотъ діаметръ, находимъ точки пересѣченія его съ осями координатъ. Отрѣзокъ на оси $y^{ов}$ есть $q = -\frac{1}{5}$. Отрѣзокъ на оси x есть $p = 1$. Строимъ $\frac{1}{2}$ діаметръ, пусть это будетъ прямая SS'. Обратимся —

теперь къ разсмотрѣнію радикала: $R = \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{(x-\frac{1}{6})^2 + \frac{35}{36}}$.
Этотъ радикалъ всегда дѣйствителенъ и отличенъ отъ нуля, а потому гипербола расположится вверхъ и внизъ отъ діаметра SS', который не пересѣчетъ кривой. Построимъ вершины гиперболы, т.е. точки пересѣченія ея съ другимъ ея діаметромъ, который при этомъ и проведемъ. Эти вершины имѣютъ соотвѣтствующія значенія R наименьшія, это имѣетъ мѣсто при $x = \frac{1}{6}$ и тогда $R = \frac{\sqrt{6}}{5}\sqrt{\frac{35}{36}} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{35}}{5 \cdot 6} = \frac{\sqrt{210}}{30} = \frac{14{,}5}{30} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$.



черт. 144.

Откладываемъ $x = \frac{1}{6}$; черезъ полученную на оси x точку проведемъ параллель gg' оси y. Точка встрѣчи этой параллели съ діаметромъ SS' дастъ центръ гиперболы C, а сама параллель будетъ другимъ діаметромъ кривой. Откладываемъ по gg' вверхъ и внизъ отъ точки C величину $R = 0{,}5 = \frac{1}{2}$, мы получимъ двѣ точки B и B', вершины гиперболы. Проведемъ черезъ B и B' параллели діаметру SS'. Одна вѣтвь гиперболы расположится надъ параллелью, проведенною изъ точки B, другая вѣтвь лишь параллели, проведенной изъ точки B'. Чтобы лучше представить значеніе кривой, построимъ ея асимптоты, уравненія которыхъ будетъ: $y_{асс} = \frac{x-1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}(x - \frac{1}{6})$.

Заметимъ, что ассимптоты проходятъ черезъ центръ гиперболы, стало быть, чтобы узнать расположеніе ассимптотъ, достаточно найти еще по одной точкѣ, принадлежащей этимъ прямымъ. Найдемъ, именно точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ осью y. Для этихъ точекъ имѣемъ: $x=0$, а потому $y_{acc} = -\frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{1}{6} =$ $= -0{,}2 \pm 0{,}08$, Здѣсь $-0{,}2 = -\frac{1}{5}$ выражаетъ собою y ординату точки F, пересѣченія діаметра SS съ осью y. Поэтому для полученія точекъ пересѣченія ассимптотъ съ осью y надо отъ точки F по оси y вверхъ и внизъ отложить величину $0{,}08$.

Найденныя точки соединяемъ съ центромъ C и получаемъ ассимптоты строимой гиперболы.

Примѣръ 3-й. Дано уравненіе:

$$y^2 - 6xy + 5x^2 - 14y + 22x + 24 = 0.$$

Составляемъ дискриминантъ $B^2 - 4AC = 36 - 4\cdot 5 = 16 =$ величинѣ > 0, стало быть кривая, выражаемая этимъ уравненіемъ, принадлежитъ къ группѣ гиперболъ. Рѣшая наше уравненіе относительно y, получимъ послѣдовательно:

$$y^2 - 2(3x+7)y + (5x^2+22x+24) = 0$$

$$y = 3x+7 \pm \sqrt{(3x+7)^2 - 5x^2 - 22x - 24}.$$

$$y = 3x+7 \pm \sqrt{4x^2+20x+25} = 3x+7 \pm \sqrt{(2x+5)^2}$$

или $y = 3x+7 \pm (2x+5)$

Мы видимъ, что y есть функція 1-й степени относительно x, слѣдовательно это уравненіе представляетъ двѣ прямыя, которыхъ уравненія: $y' = 5x+12$ и $y'' = x+2$. Обѣ прямыя проходятъ черезъ точку, абсцисса которой $x = -2\frac{1}{2}$. Эти прямыя легко построить. —

Группа ~ параболъ.

Возьмемъ опять общее уравненіе кривыхъ второго порядка. Рѣшая его относительно y, получимъ послѣдовательно:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-AC)x^2+2(BE-2CD)x+(E^2-4CF)},$$ а полагая $B^2-4AC=M$, $BE-2CD=N$ и $E^2-4CF=P$, получимъ

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P}. \quad \ldots\ldots (1)$$

Изслѣдуемъ теперь послѣдній изъ написанныхъ частныхъ случаевъ, т.е. случай, когда $M = B^2-4AC=0$. При такомъ условіи въ уравненіи (1) подъ корнемъ получается двучленъ 1-ой степени относительно x: $y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{2Nx+P}$

Приведемъ подкоренной двучленъ къ виду, удобному для его изслѣдованія. Для этого возьмемъ въ немъ $2N$ за скобку, получимъ:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{2N\left(x+\frac{P}{2N}\right)},$$ а полагая $2N=n$ и $\frac{P}{2N}=p$, имѣемъ окончательно $y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{n(x-p)}$.

Въ этомъ видѣ мы будемъ строить наше уравненіе. Прежде всего построимъ, какъ и прежде, діаметръ кривой, сопряженный оси y, т.е. прямую, дѣлящую пополамъ хорды кривой, параллельныя оси y-овъ. Не трудно замѣтить, что уравненіе этого діаметра есть $y' = -\frac{Bx+E}{2C}$

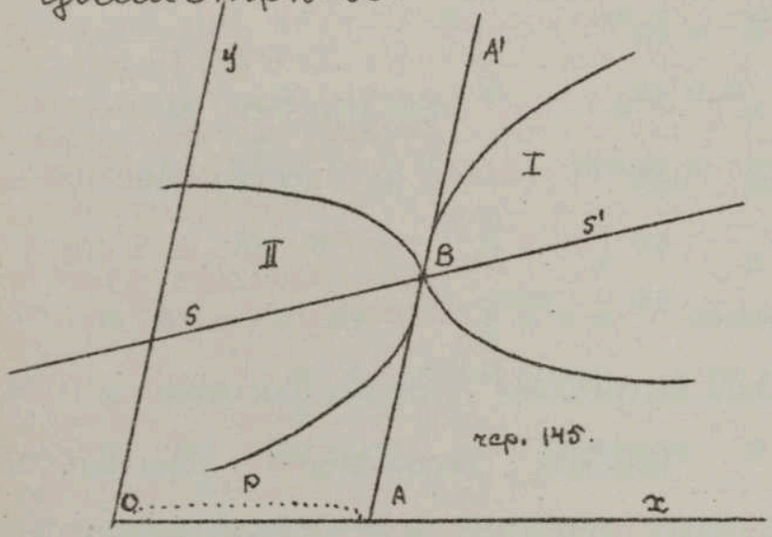
Возьмемъ для общности косоугольныя оси координатъ и построимъ діаметръ, пусть это будетъ прямая SS' (ч. 145).

Обратимся теперь къ радикалу и положимъ для краткости $\frac{1}{2C}\sqrt{n(x-p)}=R$, тогда наше уравненіе напишемъ такъ: $y = y' \pm R$.

Въ выраженіи R подъ корнемъ находится произведеніе двухъ множителей, поэтому изслѣдованіе кривой надо вести

въ зависимости отъ какого изъ этихъ множителей, но такъ какъ множитель $(x-p)$ содержитъ въ себѣ независимое перемѣнное x, то изслѣдованіе зависитъ только отъ постояннаго множителя n. И такъ разсмотримъ три случая: когда $n>0<0=0$.

1) Пусть $n>0$. Въ этомъ случаѣ R будетъ дѣйствительнымъ только тогда, когда $x>p$ (полагая p положительнымъ, что съ геометрической точки зрѣнія не существенно); когда же $x=p$, то $R=0$ и получимъ $y=y'$, т.е. точка кривой лежитъ на діаметрѣ SS'.



чер. 145.

Отложимъ начертаемъ $x_1=p=OA$, проведемъ черезъ точку A параллель AA_1 оси yовъ. Пусть эта параллель встрѣтитъ діаметръ въ точкѣ B. Точка B будетъ принадлежать кривой и будетъ ея вершиной (какъ точка пересѣченія кривой съ ея діаметромъ).

Далѣе, если x увеличивается отъ $x=p$ до $x=+\infty$, то R, оставаясь постоянно дѣйствительнымъ, будетъ также послѣдовательно увеличиваться отъ $R=0$ до $R=\infty$ и стало быть отъ точки B идетъ вправо одна бесконечная вѣтвь кривой, имѣющая прямую BS' своимъ діаметромъ и параллель AA' оси y, касательную въ точкѣ B. (если точку B разсматривать какъ результатъ слиянія концовъ хордъ, параллельной оси y при уменьшеніи x отъ $x=+\infty$

до $x=0$). Кривая, образуемая этою ветвью, называется параболой. Если $x<p$, то R будет оставаться, что показывает на то, что влево от прямой AA' кривой не существует.

II, Положимъ, что въ выраженіи R имѣемъ $n<0$. Ясно, что въ этомъ случаѣ R только тогда дѣйствительно, когда $x<p$, при томъ опять, когда $x=p$, то $R=0$ и $y=y'$ и это даетъ тутъ же точку кривой B на діаметрѣ.

Далѣе, если x измѣняется отъ $x=p$ до $x=-\infty$, то R, оставаясь постоянно дѣйствительнымъ, возрастаетъ отъ $R=0$ до $R=-\infty$. Въ этомъ случаѣ отъ точки B влѣво отъ прямой AA' идетъ одна безконечная вѣтвь кривой, причемъ она, безпрерывно все удаляется отъ SS'. Если въ этомъ случаѣ $x>p$, то R будетъ мнимымъ, это показываетъ, что вправо отъ прямой AA' точекъ кривой не существуетъ. Такимъ образомъ при $n<0$ получается также парабола, но только обращенная своимъ отверстіемъ въ сторону діаметра BS'.

III, Когда $n=0$, то мы не можемъ изслѣдовать непосредственно уравненіе: $y=y'\pm\frac{1}{2c}\sqrt{n(x-p)}$, какъ уравненіе, тождественное первоначальному: $y=y'\pm\frac{1}{2c}\sqrt{2Nx+P}$, изъ котораго мнимое уравненіе получается дѣленіемъ подкоренного количества и умноженіемъ его на $2N=n=0$, каковыя дѣйствія нужно, какъ извѣстно, умѣть производить нѣкоторые корни уравненія. И такъ въ этомъ случаѣ мы должны возвратиться къ уравненію:

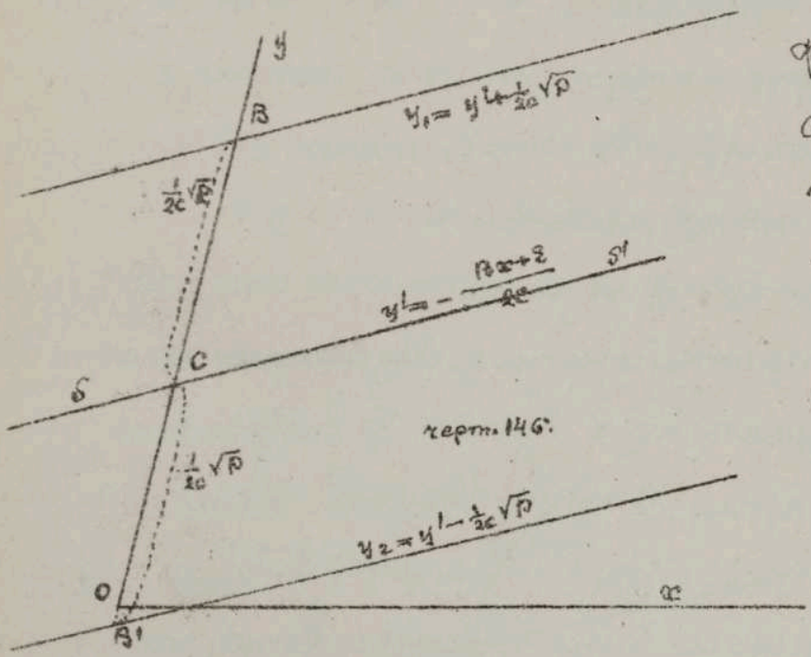
$y=y'\pm\frac{1}{2c}\sqrt{2Nx+P}$ Имѣя ввиду $2N=n=0$, получаемъ окончательно $y=y'\pm\frac{1}{2c}\sqrt{P}$. Очевидно, изслѣдованіе распадается

на три случая: $p>0$, $p=0$ и $p<0$.

1, Если $p>0$, то радикал всегда действителен и наше ур-ие $y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{p}$ представляет совокупность двух прямых, так как y выражен в ур-ии функцией первой степени относительно x. Уравнения этих прямых будут: (черт. 146)

$y_1=-\frac{Bx+E}{2C}+\frac{1}{2C}\sqrt{p}$ и

$y_2=-\frac{Bx+E}{2C}-\frac{1}{2C}\sqrt{p}$



Эти прямые параллельны между собою и параллельны диаметру $\left(y'=-\frac{Bx+E}{2C}\right)$, так как все три прямые имеют одну угловой коэффициент: $k=-\frac{B}{2C}$ (Прямая $y'=-\frac{Bx+E}{2C}$ есть диаметр для системы параллельных прямых, так как она делит пополам хорды, параллельные оси ординат и заключенные между теми параллельными прямыми). Не трудно видеть из сравнения уравнения прямых с уравнением их диаметра, что эти прямые расположены по разные стороны от диаметра и на равных от него расстояниях по оси y-ов: $R=\frac{1}{2C}\sqrt{p}$.

2, Если $p=0$, то мы можем рассматривать этот случай, как частный предыдущего, постепенно переходя от неравенства $p>0$ к равенству $p=0$, т.е. постепенно уменьшая p до 0. Такому аналитическому уменьшению p соответствует геометрическое сближение строящихся прямых

до совпадения ось съ діаметромъ, такъ какъ при $P=0$, сиѣ имѣемъ наше уравненіе въ такомъ видѣ $y=-\frac{Bx+E}{2C}=y'$. Въ виду такого происхожденія такого случая уравненіе представляетъ собою совокупность двухъ сливающихся прямыхъ.

3, Если $P<0$, то въ производимыхъ уравненій радикалъ синимъ, а потому и y тоже синимъ, слѣдовательно уравненіе представляетъ собою, какъ говорятъ для общности, совокупность двухъ синимыхъ прямыхъ.

Приложимъ наши разсужденія къ нѣсколькимъ примѣрамъ:

Примѣръ 1. Дано уравненіе:

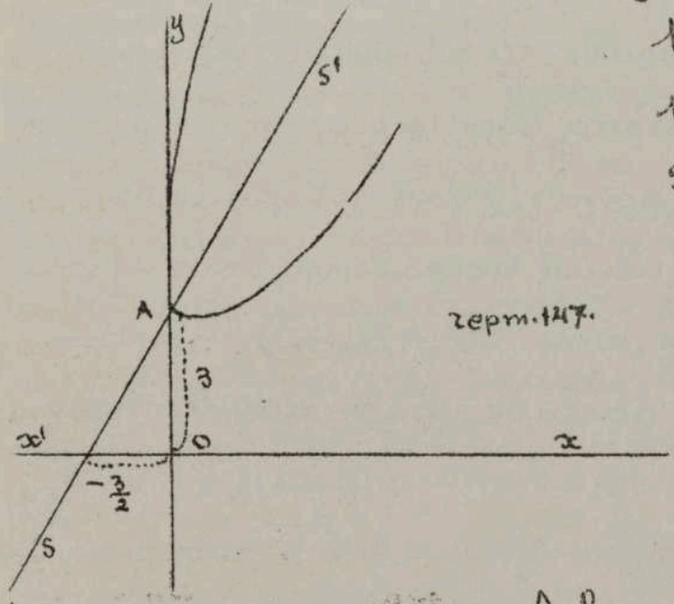
$$4x^2-4xy+y^2+7x-6y+9=0$$

Находимъ для него $B^2-4AC=16-4\cdot1\cdot4=0$ и потому заключаемъ, что оно представляетъ собою параболу. Рѣшая ур-іе относительно y находимъ послѣдовательно:

$$y^2-2(2x+3)y+(4x^2+7x+9)=0$$

$$y=2x+3\pm\sqrt{(2x+3)^2-4x^2-7x-9}=2x+3\pm\sqrt{4x^2+12x+9-4x^2-7x-9}=$$

$=0$ окончательно: $y=2x+3\pm\sqrt{5x}$.



черт. 147.

Построимъ діаметръ, уравненіе котораго: $y'=2x+3$.

Эта прямая дѣлаетъ на оси y отрѣзокъ $q=3$ и на оси x отрѣзокъ $p=-\frac{3}{2}$. Ордината кривой возможна только при $x\geq0$ и при $x=0$, имѣемъ: $y=y'=3=OA$.

Слѣдовательно кривая распространяется отъ точки A вправо отъ оси y, причемъ діаметръ AS'

дъсчитъ въ ней попонамъ всъ хорды, параллельныя оси Oy.

Примѣръ II. Пусть дано уравненіе:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2ax + 4ay = 0.$$

Здѣсь имѣемъ также $B^2 - 4AC = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ и слѣдовательно геометрическое мѣсто, представляемое даннымъ уравненіемъ, относится къ группѣ параболъ. Рѣшая уравненіе относительно y, находимъ:

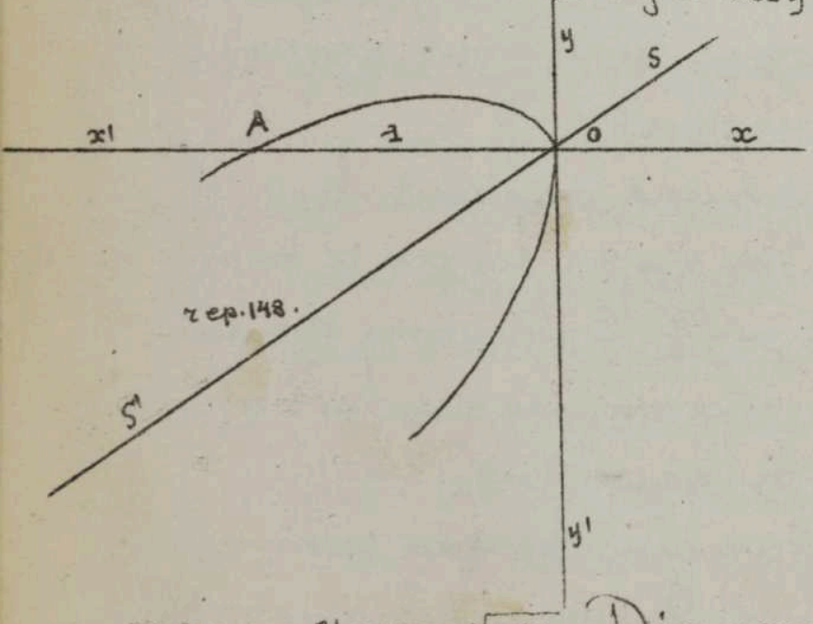
$$y^2 - (x-a)y + \frac{x^2 - 2ax}{4} = 0, \text{ откуда}$$

$$y = \frac{x-a}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2 - 2ax + a^2}{4} - \frac{x^2 - 2ax}{4}} = \frac{x-a}{2} \pm \frac{a}{2}$$

Слѣдовательно наше уравненіе представляетъ собою совокупность двухъ параллельныхъ прямыхъ, выражаемыхъ двумя отдѣльными уравненіями: $y_1 = \frac{x}{2}$ и $y_2 = \frac{x}{2} - a$. Прямая (діаметръ) уравненіе которой $y' = \frac{x}{2} - \frac{a}{2}$ дѣлитъ очевидно пополамъ разстояніе между двумя найденными параллельными прямыми.

Примѣръ III. Построить уравненіе

$$x^2 + y^2 - 2xy + x = 0, \text{ въ которомъ } B^2 - 4AC = 0.$$



Въ этомъ уравненіи первые три члена составляютъ полный квадратъ (какъ и вообще въ уравненіи параболы, въ силу условія, что $B^2 - 4AC = 0$) Такъ что данное уравненіе можно представить такъ: $(y-x)^2 = -x$, откуда $y - x = \pm\sqrt{-x}$ и окончательно $y = x \pm \sqrt{-x}$. Діаметръ этой параболы $y' = x$.

Очевидно эта прямая проходит через начало координат и есть биссектриса угла yOx (черт. 148). Здесь ордината y возможна только при $x<0$, а при $x=0$ будем иметь $y=y'=0$, откуда видим, что Кривая расположена внутри от оси y и проходя через начало, обращена своим отверстием в сторону OS' диаметра SS'. Нетрудно видеть, что кривая пересечет ось x кроме начала O, еще в точке A, причем $OA=1$.

Случай $C=0$.

Мы рассматривали кривыя второго порядка, представляемыя общим уравнением: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ и при этом в рассмотрении было сделано предположение, что C не равно нулю ($C\neq 0$), так как мы решали данное уравнение относительно y по формуле квадратного уравнения. Рассмотрим теперь наше уравнение в предположении, что $C=0$. Если $C=0$, то уравнение будет первой степени относительно y и его нельзя будет решать, как прежде. Если $C=0$, то уравнение примет такой вид: $Ax^2+Bxy+Dx+Ey+F=0$

Чтобы узнать, к какому классу принадлежит кривая, представляемая этим уравнением, составим биномъ: $B^2-4AC=B^2$, так как $C=0$, если B не равно нулю ($B\neq 0$) то заключаем, что Кривая, представляемая этим уравнением, относится к типу гиперболъ, так как B^2 всегда больше нуля ($B^2>0$). Если же $B=0$, то кривая, представляемая этим уравнением относится к классу параболъ, так как в этом случае $B^2-4AC=0$.

Положим сначала, что $B\neq 0$. Решим уравнение относительно y

Напишемъ его въ видѣ:

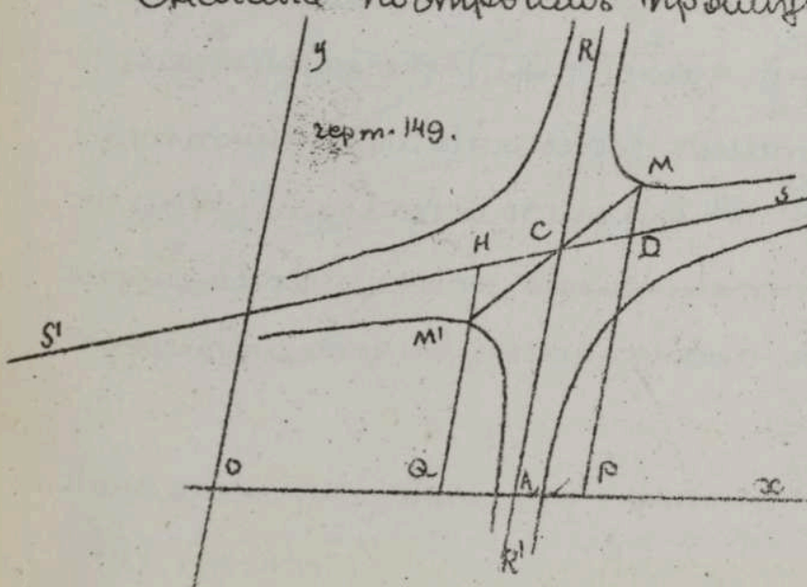
$(Bx+E)y = -Ax^2 - Bx - F$ и отсюда найдемъ: $y = \frac{-Ax^2 - Dx - F}{Bx+E}$.

Въ этой дроби числитель есть функція второй степени относительно x, а знаменатель функція первой степени, раздѣливъ числителя на знаменателя, получимъ въ частномъ функцію первой степени x.

Пусть частное отъ этого дѣленія будетъ $ax+b$, и положимъ, что получится нѣкоторый остатокъ R и несодержащій x, тогда наше уравненіе напишется въ видѣ: $y = ax+b+\frac{R}{Bx+E}$; раздѣливъ числителя изнаменателя полученной дроби на B, получимъ: $y = ax+b+\frac{\frac{R}{B}}{x+\frac{E}{B}}$. Положимъ для краткости $\frac{R}{B} = C$ и $\frac{E}{B} = -n$. Знакъ — передъ n не показываетъ отрицательности, такъ какъ n само по себѣ можетъ быть и положительно и отрицательно.

Теперь наше уравненіе представится такъ: $y = ax+b+\frac{C}{x-n}$. Въ этомъ видѣ мы и будемъ его строить. Это уравненіе одинаково строится, какъ при косоугольныхъ осяхъ координатъ, такъ и при прямоугольныхъ: для общности возьмемъ косоугольныя оси координатъ.

Сначала построимъ прямую, уравненіе которой будетъ:



$y' = ax+b$. Пусть эта прямая (черт. 149) будетъ SS'. Ордината кривой можетъ быть опредѣлена уравненіемъ $y = y' + \frac{C}{x-n}$. Положимъ для краткости $\frac{C}{x-n} = y$ и напишемъ $y = y' + y$. Изъ этого уравненія видно, что мы получимъ

ординату кривой, когда к ординате прямой SS' прибавимъ y. Само собою разумѣется, что прямая SS' не есть діаметръ, такъ какъ для полученія ординатъ кривой, къ ординатамъ прямой нужно только прибавить величину y, а не прибавлять и отнимать ее. Возмемъ абсциссу $x=n$, отложимъ отъ начала координатъ величину n; пусть это будетъ линія OA, такъ что $x=n=OA$. Проведемъ черезъ точку A параллель RR' оси ординатъ. Пусть эта параллель пересѣчетъ линію SS' въ точкѣ C. Изъ уравненія видно, что при $x=n$, имѣемъ $y=\infty$, такъ какъ въ этомъ случаѣ знаменатель дроби $\frac{c}{x-n}$ обращается въ нуль. Если $y=\infty$, то и $y=-\infty$. Это показываетъ, что прямая RR' пересѣкаетъ кривую въ бесконечности или, собственно говоря, не пересѣкаетъ кривой. Дадимъ условимся относительно знака c, такъ какъ c можетъ быть и положительно и отрицательно. Положимъ сначала, что $c>0$. Ясно, что въ этомъ случаѣ, когда $x>n$, то $y>0$ и стало быть $y>y'$, такъ какъ къ y' прибавляется нѣкоторая положительная величина, для полученія y. Если $y>y'$ при $x>n$, то это показываетъ, что по правую сторону отъ линіи RR', гдѣ $x>n$ ордината кривой всегда больше ординаты прямой SS', т.е. кривая будетъ расположена въ углѣ RCS. Если же возмемъ $x<n$, то будемъ имѣть $y<0$ и слѣдовательно $y<y'$, потому что отъ y' отнимается нѣкоторая положительная величина для полученія y. Если $y<y'$ при $x<n$, то это показываетъ, что по лѣвую сторону прямой RR', гдѣ $x<n$, ордината кривой меньше ординаты прямой и точки кривой будутъ находиться ниже прямой CS, т.е. кривая будетъ расположена въ двухъ противоположныхъ углахъ RCS и S'CR'.

Чтобы полнее проследить теченіе кривой, разсмотримъ измѣненіе y въ зависимости отъ измѣненія x.

$$y = \frac{c}{x-n}.$$

Если возмемъ x превышающій n на очень малую величину, то y будетъ весьма великъ, такъ какъ знаменатель дроби $\frac{c}{x-n}$ будетъ весьма малъ. При томъ, если x, оставаясь постоянно больше n, приближается къ n, то y, оставаясь положительнымъ, стремится къ безконечности. Это показываетъ, что кривая стремится вверхъ въ безконечность, приближаясь неопредѣленно къ прямой CR, такъ что CR есть ассимптота кривой, къ которой кривая приближается неопредѣленно. Если отъ $x = n$ абсцисса x увеличивается, то y уменьшается и кривая изъ безконечности постоянно приближается къ прямой CS. Если x весьма великъ, то y весьма малъ и если x стремится къ безконечности, то y стремится къ нулю. Отсюда слѣдуетъ, что кривая, удаляясь вправо отъ прямой CR въ безконечность, неопредѣленно приближается къ прямой CS, которая будетъ другою ассимптотою кривой. Изъ сказаннаго достаточно опредѣляется видъ и расположеніе кривой въ углѣ RCS, такъ что мы сможемъ ее начертить; она будетъ безконечная вѣтвь кривой съ двумя ассимптотами RS и CS. Положимъ теперь, что $x < n$; въ этомъ случаѣ будемъ имѣть $y < 0$. Если возмемъ двѣ абсциссы $x = n \pm \alpha$, гдѣ α произвольно, то при этихъ двухъ абсциссахъ найдемъ:

$$y = \frac{c}{n \pm \alpha - n} = \pm \frac{c}{\alpha};$$

т. е. при этихъ двухъ абсциссахъ, къ соотвѣтствующимъ ординатамъ прямой SS' прибавляется одно и тоже количество,

только съ обратными знаками для того, чтобы получить ординаты кривой.

Отъ точки A отложимъ вправо и влѣво величину α до точекъ P и Q, такъ что $AP = AQ = \alpha$, при этомъ мы будемъ имѣть:

$$OP = n + \alpha \text{ и } OQ = n - \alpha.$$

Проведемъ ординату, соотвѣтствующую абсциссѣ OP, пусть эта ордината пересѣчетъ прямую SS' въ точкѣ D, а кривую въ точкѣ M. Возмемъ другую ординату, соотвѣтствующую абсциссѣ OQ, пусть она пересѣчетъ прямую SS' въ точкѣ H; теперь, чтобы получить точку кривой въ углѣ S'CR' нужно отложить отъ H внизъ величину $\frac{c}{\alpha}$ до точки M', такъ, чтобы было: $HM' = DM = \frac{c}{\alpha}$. Точка M' будетъ точкой кривой. Соединимъ точки M и M' съ C, мы получимъ два равныхъ треугольника: $\Delta CDM = \Delta CHM'$. Треугольники эти равны, потому что $DM = HM'$ и такъ какъ $CD = CH$, что очевидно изъ трапеціи PQHD, въ которой одна изъ непараллельныхъ сторонъ PQ раздѣлена пополамъ линіею, параллельною параллельнымъ сторонамъ и пересѣкающей въ точкѣ C противоположную сторону. Сверхъ того углы при точкахъ D и H равны, какъ внутреннія накрестъ лежащія при параллельныхъ.

Изъ равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что углы при точкѣ C равны и что линія $M'C = MC$. Изъ равенства угловъ при точкѣ C слѣдуетъ, что линія MCM' есть прямая и такъ какъ точка M есть произвольная точка кривой, то прямая MM' есть произвольная хорда кривой, проведенная черезъ точку C и дѣлящаяся въ точкѣ C пополамъ. И такъ, точка C есть центръ кривой, такъ какъ она дѣлитъ всѣ проходящія черезъ нее хорды пополамъ.

Изъ послѣдняго обстоятельства вполнѣ выясняется положеніе вѣтви кривой въ углѣ S'CR', а именно точки этой вѣтви кривой расположатся симметрично относительно центра C съ точками вѣтвей кривой, расположенной въ углѣ RCS. Такимъ образомъ можно начертить вѣтвь кривой въ углѣ S'CR' безъ дальнѣйшаго изслѣдованія; линіи CS' и CR' будутъ, очевидно, ея асимптотами.

И такъ, въ разсматриваемомъ нами случаѣ данное уравненіе второй степени представляетъ гиперболу, у которой одна асимптота параллельна оси ординатъ, другая же имѣетъ особое направленіе.

Замѣтимъ далѣе, что въ сдѣланномъ нами изслѣдованіи мы полагаемъ, что $C \gtrless 0$. Положимъ теперь, что $C < 0$ и положимъ, какое измѣненіе произойдетъ отъ этого въ расположеніи кривой. Въ этомъ случаѣ, когда возьмемъ $x > n$, то будемъ имѣть $y < 0$ и стало быть $y < y'$; напротивъ, когда примемъ $x < n$, то будемъ имѣть $y > 0$ и потому $y > y'$, т. е. въ этомъ случаѣ по правую сторону прямой RR' точки кривой расположатся внѣ угла прямой SS', а по лѣвую сторону RR' точки кривой расположатся внѣ угла прямой SS'. Стало быть при $C < 0$ кривая расположится въ двухъ противоположныхъ углахъ — SCR' и S'CR. Все остальное разсмотрѣніе будетъ, очевидно, совершенно одинаково съ предыдущимъ и никакихъ измѣненій въ сдѣланныхъ заключеніяхъ не произойдетъ. Точка C – центръ кривой, а линія RR', а также SS' будутъ опять асимптотами. Расположеніе вѣтвей однако будетъ иное, оно показано на чертеж.

Займемся еще частным случаем, когда в общем уравнении кривых второго порядка не только $C=0$, но и $A=0$. В этом случае уравнение будет: $Bxy+Dx+Ey+F=0$. В выше приведенном решении этого уравнения $y=ax+b+\frac{c}{x-n}$ надо положить $a=0$, потому что член ax был получен от деления Ax^2 на Bx и стало быть теперь решение будет $y=b+\frac{c}{x-n}$. В этом случае уравнение асимптоты SS' будет $y'=b$. Это показывает, что прямая SS' будет параллельна оси x. И так этот частный случай представляет ту особенность, что обе асимптоты гиперболы параллельны осям координат.

К предыдущему прибавим еще одно замечание. Когда мы рассматривали решение данного уравнения относительно y, т.е. выражение $y=\frac{-Ax^2-Dx+F}{Bx+E}$, то мы полагали, что числитель этой дроби не делится нацело на знаменателя, ибо в ином случае вычисление остатка от деления R, полагая $R\neq 0$. Если же числитель делится на знаменателя без остатка, то означает по предыдущему частное от деления через $ax+b$, будет иметь: $-Ax^2-Dx-F=(ax+b)(Bx+E)$ и следовательно будет написать, что $y=\frac{(ax+b)(Bx+E)}{Bx+E}$.

Хотя эту дробь и следует сократить на $Bx+E$, но мы не будем делать этого сокращения, потому что действуя таким образом, как бы сами увидим, мы опустили бы одно решение. Умножая обе части последнего равенства на $Bx+E$ и перенеся потом все члены в первую часть, получим:

$$(Bx+E)y-(ax+b)(Bx+E)=0 \quad \text{или} \quad (Bx+E)(y-ax-b)=0.$$

Так как в уравнении этом указано, что произведение

двух сомножителей должно быть равно нулю, то удовлетворить этому уравнению можно не иначе, как положив один из сомножителей равным нулю, так что должно быть или $Bx+E=0$ или $y-ax-b=0$. Таким образом в рассматриваемом случае данное уравнение второй степени распадается на два представляющих уравнения, из которых каждое отдельно уравнением 1-й степени, представляет прямую линию, а следовательно данное уравнение представляет в этом случае совокупность двух пересекающихся прямых. Из этих двух уравнений первое, т.е. $Bx+E=0$ выражает прямую, параллельную оси ординат, так как оно дает $x=-\frac{E}{B}$.

Заметим, что здесь опять встретились с двумя пересекающимися прямыми, которые являются, как и прежде, частным случаем гиперболы. Рассмотрим теперь случай общего уравнения кривых второго порядка, когда $C=B=0$. В этом случае кривая, как нам известно, должна быть отнесена к классу парабол и ее уравнение будет:

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0$$

В этом случае всего удобнее будет решить уравнение относительно x, а y мы примем за переменное независимое. Решая данное уравнение, как квадратное, по известной формуле находим:

$$x=-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{-4AEy+D^2-4AF}$$

Вынеся $-4AE$ за скобку, получим:

$$x=-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{-4AE\left(y-\frac{D^2-4AF}{4AE}\right)}$$

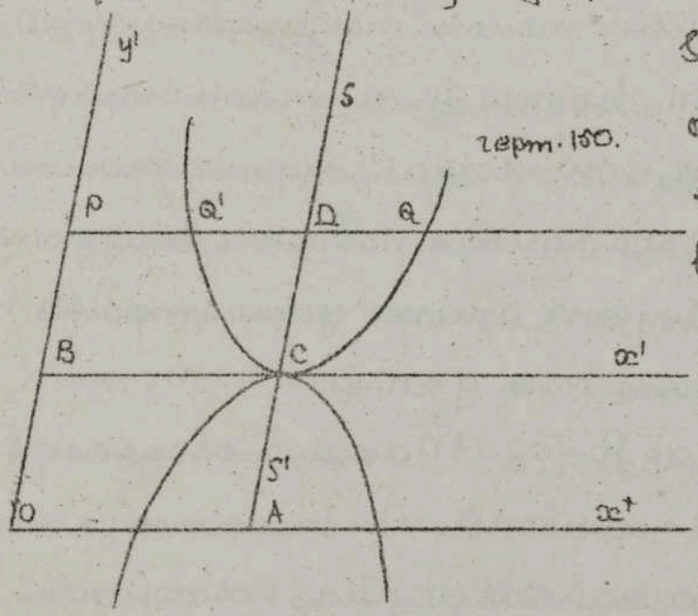
Положим для краткости, что $-4AE=a$ и $\frac{D^2-4AF}{4AE}=n$.

Здесь a и n могут быть и положительными и отрицательными количествами. Теперь наше уравнение примет вид:

$$x = -\frac{D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{a(y-n)}$$

В этом виде и будем его строить. Возьмем для абсциссы косоугольные оси координат. Построим прежде всего прямую, уравнение которой есть $x' = -\frac{D}{2A}$. Так как это уравнение показывает, что абсцисса постоянна, то соответствующая ур-ию прямая будет параллельна оси ординат. Пусть эта прямая будет SS' и пересечет ось x в точке A, так что $OA = x'$. Положим теперь, что $\frac{1}{2A}\sqrt{a(y-n)} = R$, тогда будем иметь: $x = x' \pm R$.

Если возьмем $y = n$, то при этом $R = 0$ и следовательно $x = x'$. Отложим на чертеже от начала координат величину по оси y до точки B, так что $OB = n$. Проведем через точку B параллель оси x; пусть эта параллель пересечет линию SS' в точке C; точка C будет очевидно принадлежать кривой, потому что при $y = n$ и $x = x'$.



Положим теперь, что $a > 0$. В этом случае R будет действительно только тогда, когда $y > n$, но при $y < n$ количество R будет мнимым. Это показывает, что от точки C кривая идет вверх, располагаясь выше параллели Bx!

Для того, чтобы точнее определить течение кривой, дадим –

тись, что при всякомъ значеніи y для R получаются двѣ равныя но противоположныя по знаку величины. Возьмемъ какую нибудь ординату; положимъ OP и построимъ соотвѣтствующій x, для чего проведемъ черезъ P параллель оси x; она пересѣчетъ линію SS' въ точкѣ D, тогда PD=x', а чтобы получить x, отложимъ вправо и влѣво отъ точки D |ординату| величину R до точекъ Q и Q', такъ что $DQ=DQ'=R=\frac{1}{2A}\sqrt{a(y-n)}$

Точки Q и Q' будутъ очевидно точками кривой. Хорда кривой QQ', параллельная оси x, дѣлится линіей SS' пополамъ, а стало быть линія SS' есть діаметръ кривой, дѣлящей всѣ хорды, параллельныя оси x, пополамъ. Замѣтимъ притомъ, что съ увеличеніемъ y отъ y=n до $y=\infty$ и R увеличивается отъ R=0 до $R=\infty$ и стало быть вверхъ отъ точки C идетъ безконечная вѣтвь кривой.

Эта кривая есть парабола. Если мы предположимъ, что a<0, то увидимъ, что R дѣйствительно только тогда, когда y<n, и строитъ R слѣдуетъ, когда y>n. Но при y=n, опять будемъ имѣть: R=0. Это показываетъ, что точка C будетъ такой кривой и въ этомъ случаѣ только кривая пойдетъ внизъ отъ точки C. Прямая CD' очевидно будетъ опять діаметромъ. Притомъ y будетъ уменьшаться отъ y=n до $y=-\infty$, то R будетъ увеличиваться отъ R=0 до $R=\infty$. Такимъ образомъ получится безконечная вѣтвь параболы, простирающаяся книзу отъ прямой Bx'. Въ послѣднемъ случаѣ, когда C=0 и B=0 нельзя предполагать, чтобы было и A=0, потому что уравненіе представилось бы тогда въ видѣ $Dx+Ey+F=0$.

и это уравнение, будучи первой степени не было бы уравнением кривой второго порядка. Но если $C=0$ и $B=0$, то может быть, что и $E=0$.

Въ этомъ частномъ случаѣ наше уравненіе напишется такъ: $Ax^2+Dx+F=0$. Это уравненіе не содержитъ y и будучи рѣшено относительно x, дастъ два корня: $x=a$ и $x=a'$. Если эти корни дѣйствительны, то найденныя рѣшенія представляютъ двѣ прямыя, параллельныя оси ординатъ и данное уравненіе представляетъ стало быть совокупность двухъ параллельныхъ прямыхъ. Если корни равны, т.е., если $a=a'$, то данное уравненіе представляетъ одну прямую, параллельную оси ординатъ. Наконецъ, если корни мнимые, то уравненіе представляетъ мнимое мѣсто. И такъ и на этотъ разъ мы замѣчаемъ тѣ же три частныхъ случая параболы, которые уже встрѣтились намъ, именно: 1) двѣ параллельныхъ прямыхъ 2) одна прямая, 3) мнимое мѣсто.

Представимъ въ заключеніе числовые примѣры, относящіеся къ послѣднимъ, разсмотрѣннымъ нами частнымъ случаямъ общаго уравненія второй степени съ двумя перемѣнными.

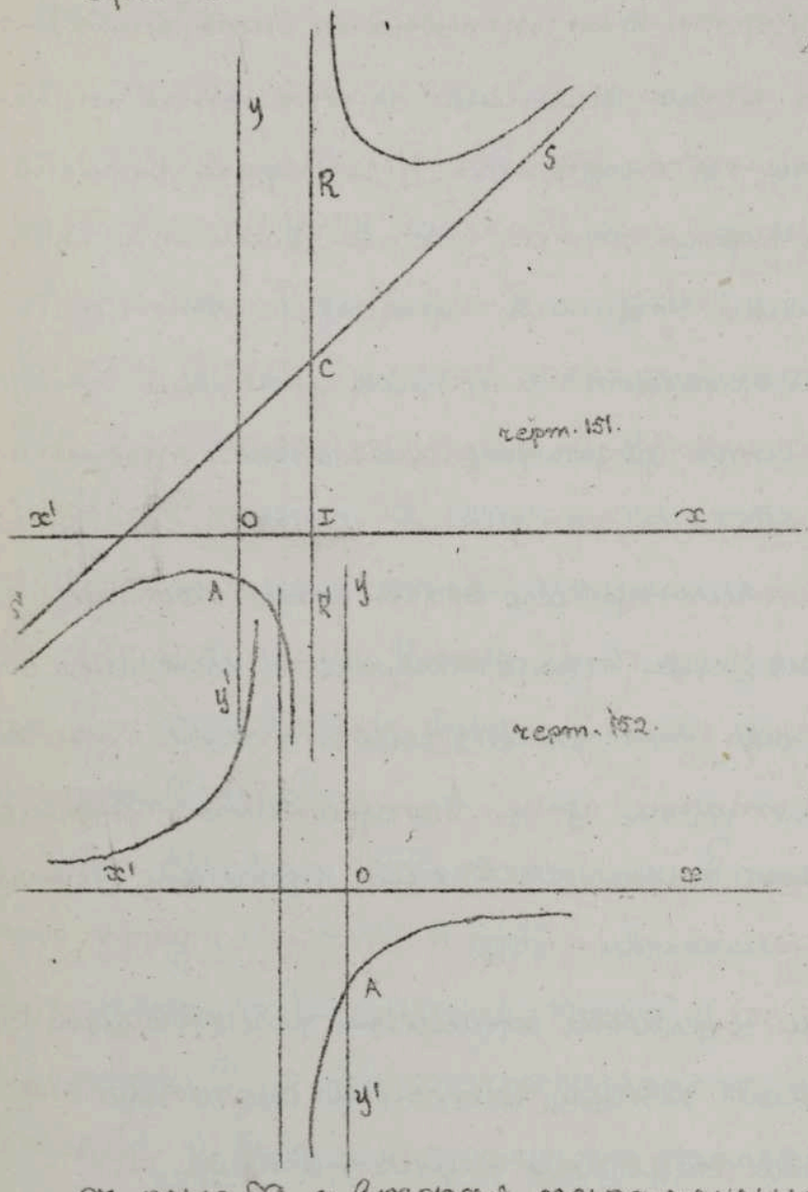
1) Построимъ кривую, представляемую уравненіемъ:

$$x^2-xy+x+y+1=0$$

Кривая относится къ классу гиперболъ, такъ какъ для этого уравненія имѣемъ: $B^2-4AC=1>0$. Рѣшая уравненіе относительно y, получимъ $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}$, или по раздѣленіи числителя на знаменателя: $y=x+2+\frac{3}{x-1}$.

Уравненія ассимптотъ этой гиперболы будутъ: $y=x+2$ и $x=1$. Построивъ эти ассимптоты и замѣтивъ, что при $x>1$, $y>y'$

а при $x<1$ и $y<y'$, мы сможем начертить кривую, представленную на черт. 151.



черт. 151.

Уравнение рассматриваемой кривой дает при $x=0$, $y+1=0$ или $y=-1$ и сильфовательно кривая пересекаясь ось y в точке A, причем OA = 1. Кривая не пересекает ось ox, ибо полагая $y=0$, получим уравнение $x^2+x+1=0$, имеющее мнимые корни.

2., Построим кривую линию, выраженную уравнением $2xy+2y+1=0$. Кривая эта будет гипербола (черт. 152) Уравнение дает: $y=-\frac{1}{2(x+1)}$. Уравнения ассимптот этой гиперболы будут: $y'=0$ и $x=-1$.

черт. 152.

Первая ассимптота совпадает с осью ox, а вторая параллельна оси ординат. Построив эту последнюю ассимптоту, мы начертим кривую, которая будет иметь расположение, указанное на чертеже. Эта кривая пересекает ось ординат в точке A, причем $OA=-\frac{1}{2}$, так как при $x=0$, уравнение будет $2y+1=0$ или $y=-\frac{1}{2}$.

3, Построим уравнение: $2x^2+6xy-5x-3y+2=0$

Здесь $B^2-4AC=36>0$. Выводим:

$$y=-\frac{2x^2-5x+2}{3(2x-1)}$$

Разлагая числителя на знаменателя, найдем, что

$$2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2).$$

А потому напишем наше уравнение в виде:

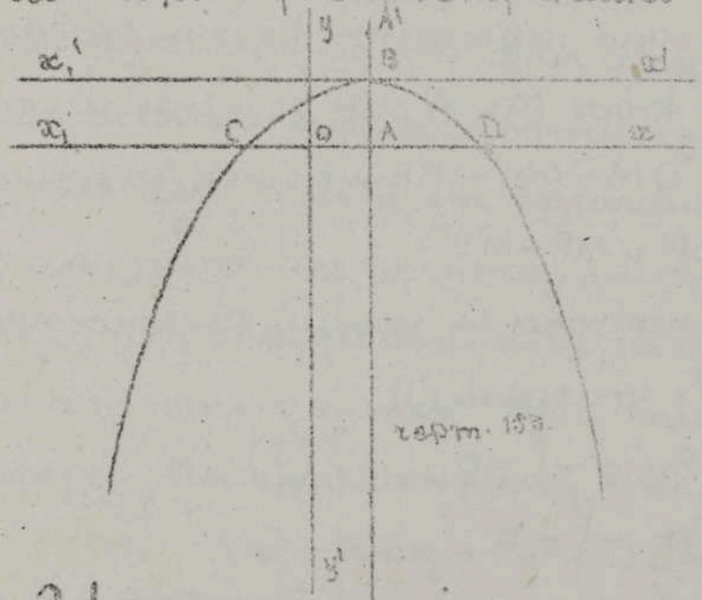
$$3(2x-1)y=-(2x-1)(x-2) \text{ или } (2x-1)(3y+x-2)=0.$$

Следовательно данное уравнение представляет две пересекающиеся прямыя, уравнения которых будут: $2x-1=0$ и $3y+x-2=0$

Прямыя эти легко построить.

4) Построить кривую $x^2-2x+y-1=0$.

Здесь $B^2-4AC=0$ и следовательно кривая относится къ классу парабол. Изъ даннаго уравненія выводимъ $x=1\pm\sqrt{2-y}$. Прямая $x'=1$, параллельная съ осью y, будет діаметромъ. Пусть эта прямая есть AA'. Отложимъ $AB=2$ и черезъ точку B проведемъ параллель оси x. Такъ какъ при $y=2$, $x=1$, то точка B будет точкой кривой и такъ какъ x дѣйствителенъ только при $y<2$, то кривая идетъ распространяясь внизъ отъ параллели $x_1x'_1$. Чтобы



черт. 153.

найти точки пересѣченія этой параболы съ осью x, совмѣстимъ въ ея уравненіи $y=0$, будемъ имѣть: $x^2-2x-1=0$, откуда находимъ: $x=1+\sqrt{2}=2{,}4$ и $x=1-\sqrt{2}=-0{,}4$. Послѣднія абсциссы построимъ и получимъ точки пересѣченія C и D, причемъ $OC=0{,}4$ и $OD=2{,}4$.

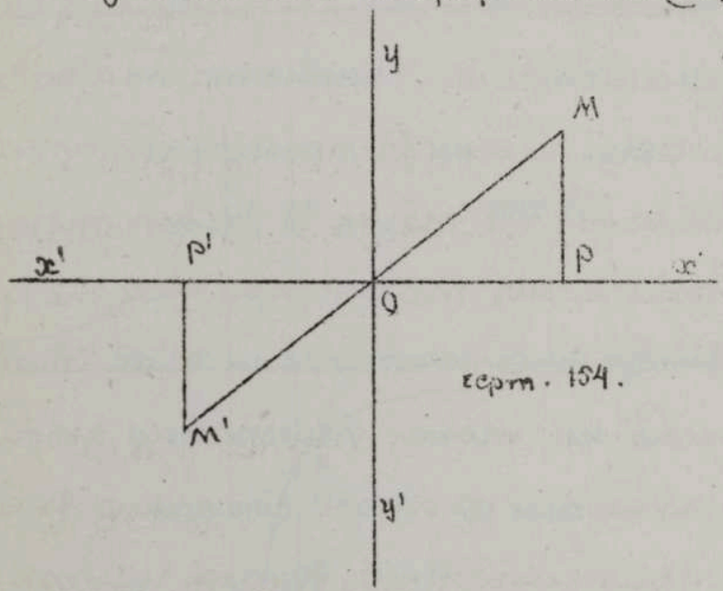
Изысканіе центра кривыхъ 2-го порядка.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad \ldots\ldots (1).$$

Центръ кривой вообще называется такая точка, которая дѣлитъ пополамъ всѣ проходящія черезъ нее хорды. Такая точка есть въ кругѣ, эллипсѣ, и гиперболѣ. Ее нѣтъ въ параболѣ. Изысканіе центра основывается на теоремѣ.

Теорема. Если кривая линія имѣетъ центръ и если начало координатъ будетъ помѣщено въ центрѣ, то уравненіе кривой не будетъ содержать членовъ съ первыми степенями координатъ.

Возьмемъ оси координатъ (черт. 154). Точка O есть центръ. Положимъ, что кривая выражается уравненіемъ (1). Черезъ начало проведемъ произвольную прямую. Уравненіе ея есть: $y = mx$, гдѣ m произвольно. Положимъ, что эта прямая пересѣчетъ кривую въ двухъ точкахъ M и M', они должны имѣть: OM = OM'. Построимъ координаты точекъ M и M', они будутъ OP = OP' и MP = M'P'.



черт. 154.

Будемъ искать координаты пересѣченія нашей кривой съ прямою. Вставивши значеніе y въ уравненіе (1)

$$Ax^2 + Bmx^2 + Cm^2x^2 + Dx + Emx + F = 0 \ldots\ldots (I)$$

или $(A + Bm + Cm^2)x^2 + (D + Em)x + F = 0$

Это уравненіе должно дать абсциссы двухъ точекъ пересѣченія M и M'. Но эти абсциссы равны и съ обратными знаками, слѣдовательно это уравненіе должно дать два корня равныя и съ обратными знаками, слѣдовательно въ немъ коэффиціентъ–

при x в 1ой степени должна быть 0, т.е. должно быть $D+Em=0$

Въ этомъ равенствѣ m произвольно, слѣдовательно оно можетъ быть удовлетворено только полагая одновременно $D=0$ и $E=0$, слѣдовательно уравненіе кривой должно быть:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+F'=0 \ldots\ldots (II)$$

т.е. въ немъ не должно быть членовъ съ x и y въ первой степени, что и требовалось доказать.

Обратно. Если кривая представляется уравненіемъ (II) которое не содержитъ членовъ съ первыми степенями координатъ, то начало координатъ есть центръ кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ начало проведемъ произвольную прямую $y=mx$, то для пересѣченія этой прямой съ кривою будемъ имѣть: $Ax^2+Bmx^2+Cm^2x^2+F'=0$ или

$$(A+Bm+Cm^2)x^2+F'=0$$

Это уравненіе даетъ для абсциссъ точекъ пересѣченія двѣ величины, равныя по обратнымъ знакамъ. По уравненію $y=mx$, получимъ двѣ такія же величины для y, слѣдовательно въ этомъ случаѣ (тотъ же чертежъ) имѣемъ, что $OP=OP'$ изъ чего изъ равенства треугольниковъ заключаемъ, что $OM=OM'$, т.е. что точка O есть центръ. Эта теорема служитъ для отысканія центра. Положимъ опять, что кривая дана уравненіемъ:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F'=0$$

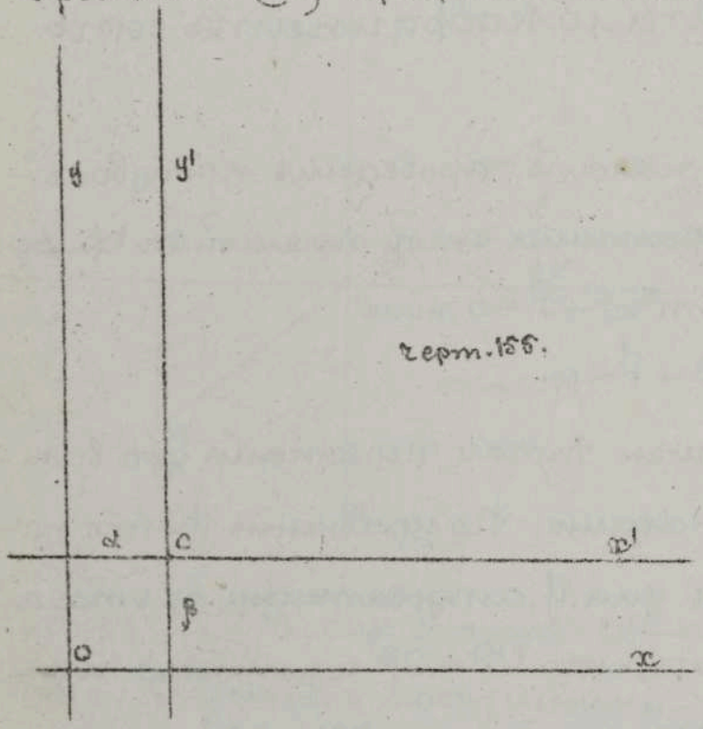
Въ немъ D и E не равны нулю, слѣдовательно начало координатъ не есть центръ и мы не знаемъ дано, имѣетъ ли эта кривая центръ или нѣтъ. Обозначимъ неизвѣстныя

координаты центра через α и β. Если центръ есть, то α и β будутъ возможныя величины, если нѣтъ, то невозможныя. Преобразуемъ координаты и перенесемъ начало въ центръ, оставляя оси параллельными самимъ себѣ (черт. 155). Формулы преобразованія будутъ: $x = \alpha + x'$, $y = \beta + y'$. Вставивъ въ уравненіе (I) получимъ: $(\alpha + x')^2 A + B(\alpha + x')(\beta + y') + C(\beta + y')^2 + D(\alpha + x') + E(\beta + y') + F = 0$.

или $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2\alpha A + B\beta + D)x' + (B\alpha + 2C\beta + E)y' + F' = 0 \ldots\ldots$ (III)

гдѣ для краткости $F' = A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F$.

Уравненіе (III) представляетъ тоже самую кривую, но относительно новыхъ осей, теперь предположимъ, что новое начало C есть центръ кривой, тогда коэффиціенты въ уравненіи (III) при x' и y' должны быть равны 0. $2A\alpha + B\beta + D = 0$ и $B\alpha + 2C\beta + E = 0$. Мы здѣсь имѣемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными α и β, въ первыхъ степеняхъ. Рѣшивъ ихъ, мы найдемъ α и β, т.е. координаты центра.



черт. 156.

Будемъ ихъ рѣшать: помноживъ первое на $2C$, а второе на B и вычитая, получимъ:

$$(B^2 - 4AC)\alpha + BE - 2CD = 0, \text{ отсюда}$$

$$\beta = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Эти двѣ формулы дадутъ для координатъ центра величины возможныя, если только знаменатель общій не равенъ нулю,

и слѣдовательно когда это уравненіе соблюдается, то кривая имѣетъ центръ и мы его найдемъ, но можетъ случиться, что $B^2-4AC=0$, тогда придется различить два случая: 1, когда числители въ α и β не равны нулю и когда они $=0$.

Положимъ сначала, что $2CD-BE\neq 0$, тогда получимъ $\alpha=\infty$. Положимъ, что $2AE-BD\neq 0$, тогда и $\beta=\infty$.; тогда центръ—можно разсматривать, какъ удаленный на безконечное разстояніе отъ начала; иными словами: его не существуетъ. Два уравненія, изъ которыхъ мы опредѣлили координаты центра будутъ въ этомъ случаѣ не совмѣстны. Чтобы отообнаружить, стоитъ только сравнить въ нихъ коэффиціенты при однихъ изъ неизвѣстныхъ. Помноживъ 1е на B и 2е на 2A, получимъ: $2AB\alpha+B^2\beta+DB=0$

$$2AB\alpha+4AC\beta+2AE=0$$

Теперь мы видимъ, что въ этихъ уравненіяхъ коэффиціенты при α равны и при β также одинаковы, но извѣстные члены неодинаковы, т.е. $BD\neq 2AE$., слѣдовательно эти уравненія не совмѣстны и имъ нельзя удовлетворить никакими величинами α и β, т.е. центра не существуетъ.

$2AE-BD=0$, тогда $\beta=\frac{0}{0}$, тогда можно доказать, что числитель $y\alpha$ тоже будетъ равенъ 0. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ: $B^2-4AC=0$, отсюда

$B^2=4AC$ и $\frac{2C}{B}=\frac{B}{2A}$ но $2AE=BD$, отсюда $\frac{B}{2A}=\frac{E}{D}$.

Сравнивая, найдемъ: $\frac{2C}{B}=\frac{E}{D}$ или $2CD=BE$ или $2CD-BE=0$. слѣд. $\alpha=\frac{0}{0}$ тоже.

Неопредѣленность рѣшенія указываетъ, что уравненія въ Томѣ

Листъ 30

случай приводятся к одному и в самом деле; сделаем, как и прежде, умножим 1е уравнение на B, а 2е на 2A, сим увидим, что два уравнения будут тождественны, потому что имеем $2AE - DB$. Следовательно в этом случае для определения α и β, мы имеем только одно уравнение, которое имеет бесконечное множество решений. В этом случае центров бесчисленное множество. И так из нашего исследования обнаружилось, что кривыя второго порядка могут быть разделены на 2 класса:

1, Кривыя, имеющия один центр. Этот класс характеризуется признаком $B^2 - 4AC \neq 0$.

2, Кривыя не имеющия центра. Этот класс характеризуется признаком $B^2 - 4AC = 0$

К последнему классу присоединим, как исключение, геометрическое место второго порядка, имеющее бесчисленное множество центров, которое характеризуется двумя признаками:

$$B^2 - 4AC = 0 \text{ и } 2CD - BE = 0 \text{ или } 2AE - BD = 0.$$

Кривыя, имеющия центр

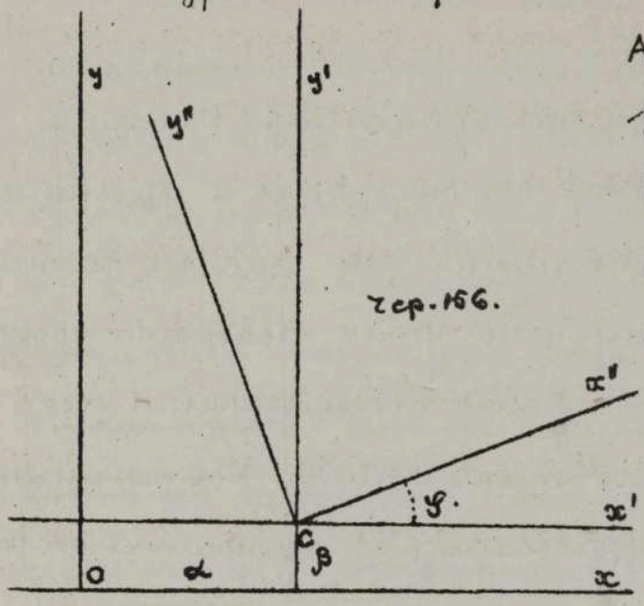
(случай $B^2 - 4AC \neq 0$)

Дано уравнение кривой:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Кривая имеет центр. Прежде всего найдем координаты центра α и β. Решив два уравнения: $2A\alpha + B\beta + D = 0$ и $B\alpha + 2C\beta + E = 0$. Сделаем преобразование координат, перенеся начало в центр, для чего служат формулы: $x = \alpha + x'$ и $y = \beta + y'$ (г. 156).

Новое уравнение кривой относительно осей Cx' и Cy' будет:



чер. 156.

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Вид этого уравнения

$$F' = A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F.$$

Эту формулу, по которой следовало бы вычислить F' можно упростить. Для этого возьмем уравнения, определяющия центр: Множим 1е на α, а второе на β и сложим их, получим:

$2A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + 2C\beta^2 + D\alpha + E\beta = 0$, отсюда

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = -\frac{D\alpha + E\beta}{2}.$$

Вставив это в выражение F', находим:

$$F' = -\frac{D\alpha + E\beta}{2} + D\alpha + E\beta + F \text{ или } F' = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F.$$

По этой формуле легко будет вычислить F'. Затем будем считать F' известным. Возьмем уравнение (2) и упростим его вид новым преобразованием координат. Для этого, оставляя тоже начало C, повернем оси координат на произвольный угол φ. Формулы для перехода к новым осям суть:

$x' = x''\cos\varphi - y''\sin\varphi$; $y' = x''\sin\varphi + y''\cos\varphi$. Вставив их в ур-ие (2) получим:

$$A(x''^2\cos^2\varphi - 2x''y''\sin\varphi\cos\varphi + y''^2\sin^2\varphi) + B(x''^2\sin\varphi\cos\varphi - x''y''\sin^2\varphi + x''y''\cos^2\varphi - y''^2\sin\varphi\cos\varphi) + C(x''^2\sin^2\varphi - 2x''y''\sin\varphi\cos\varphi + y''^2\cos^2\varphi) + F' = 0.$$

Раскрывая здесь скобки, беремъ члены съ x''^2, y''^2 и $x''y''$, получим ур-ие такого вида $Mx''^2 + Px''y'' + Ny''^2 + P' = 0 \quad \ldots\ldots (3)$

Здесь для краткости положено:

$$M = A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi$$

$$N = A\sin^2\varphi - B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi.$$

$$P = 2\sin\varphi\cos\varphi(C-A) + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Уравнение (3) представляет нашу кривую, отнесенную к осям Cx" и Cy". Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (2), следовательно нашим преобразованием мы еще не достигли никакого упрощения. Это потому, что угол поворота досих пор оставался произвольным. Теперь мы воспользуемся неопределенностью угла φ и выберем его так, чтобы коэффициент при произведении координат в уравнении (3) получился бы равным нулю, т.е., чтобы $P=$ было 0.

Посмотрим, возможно ли это? Мы должны иметь:

$$2\sin\varphi\cos\varphi(C-A) + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0.$$

Попробуем из этого уравнения определить угол φ, наименьший. Замечая, что $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$ и $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$, получим: $\sin 2\varphi(C-A) + B\cos 2\varphi = 0$. Разделив на $\cos 2\varphi$, имеем:

$$\operatorname{tg} 2\varphi(C-A) = -B, \text{ отсюда } \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{B}{C-A} = \frac{B}{A-C}.$$

По этой формуле всегда можно определить угол φ, потому что угол 2φ здесь определяется по тангенсу, а тангенс может получать всевозможные величины от $-\infty$ до $+\infty$, следовательно каковы ни были величины A, B и C, мы всегда найдем угол 2φ, а следовательно и φ. Есть однако одно исключение. Это случай, когда $A=C$ и $B=0$, тогда $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{0}{0}$. Но в этом случае, как мы уже знаем, уравнение будет представлять круг и этот круг можно будет построить. Устраним этот случай. По полученной нами формуле мы найдем для 2φ бесчисленное множество значений. Пусть

наименьшее положительное значение 2φ будетъ Θ, причемъ $\Theta < 180°$, тогда можемъ положить: $2\varphi = \Theta + K \cdot 180°$, гдѣ K можетъ быть $= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Отсюда $\varphi = \frac{\Theta}{2} + K \cdot 90°$. Всѣ эти рѣшенія, какъ легко видѣть, опредѣляютъ одну и ту же пару прямоугольныхъ осей. Взявъ рѣшеніе: $\varphi = \frac{\Theta}{2} < 90°$, мы видимъ, что другія вытекаютъ изъ него, прибавляя или вычитая нѣсколько разъ 90°. Очевидно, что при этомъ будутъ получаться тѣ же самыя направленія двухъ линій Cx'' и Cy''. Отсюда слѣдуетъ, что существуетъ только одна система прямоугольныхъ координатъ, при которыхъ въ уравненіи (3) будетъ $P = 0$ и относительно этой системы осей наша кривая будетъ выражена такимъ уравненіемъ:

$$M x''^2 + N y''^2 + F' = 0 \ldots\ldots (4)$$

Въ этомъ уравненіи намъ нужно будетъ вычислить коэффиціенты M и N. Составимъ для этого болѣе удобныя формулы. Наше вычисленіе начнется съ опредѣленія угла φ: $tg 2\varphi = \frac{B}{A - C}$. Мы возьмемъ для 2φ наименьшее положительное значеніе, т.е. примемъ $\varphi = \frac{\Theta}{2} < 90°$. Затѣмъ возьмемъ прежнее выраженіе $M \cdot N$. Составимъ изъ суммы и разность:

$$M + N = A(Cs^2\varphi + Sn^2\varphi) + C(Sn^2\varphi + Cs^2\varphi) = A + C$$

$$M - N = A(Cs^2\varphi - Sn^2\varphi) + 2B\,Sn\varphi\,Cs\varphi - C(Cs^2\varphi - Sn^2\varphi) = (A - C)Cs2\varphi + BSn2\varphi.$$

Выразимъ $Sn2\varphi$ и $Cs2\varphi$ черезъ tg:

$$Sn2\varphi = \frac{tg2\varphi}{\sqrt{1 + tg^2 2\varphi}} = \frac{\frac{B}{A-C}}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{(A-C)^2}}} = \frac{B}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}.$$

$$Cs2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{B^2}{(A-C)^2}}} = \frac{A - C}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}.$$

Въ этихъ формулахъ передъ корнемъ подразумѣвается двойной знакъ $\pm$ и намъ слѣдуетъ опредѣлить: какой знакъ

мы примемъ. Мы заметимъ для этого, что $2\varphi = \Theta < 180°$, слѣд. $\sin 2\varphi > 0$, а отсюда видно, что въ выраженіи $\sin 2\varphi$ мы должны передъ корнемъ принять знакъ одинаковый съ B. Замѣтивъ это, вставимъ $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$ въ выраженіе $M - N$, получимъ:

$$M - N = \frac{(A-C)^2 + B^2}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}} = \sqrt{(A-C)^2 + B^2}$$

Сюда присоединимъ, что $M + N = A + C$, затѣмъ, если сложимъ и раздѣлимъ на два, то получимъ:

$$M = \tfrac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right].$$

Если же изъ второго уравненія вычтемъ 1-е и раздѣлимъ на 2-е, получимъ: $N = \tfrac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$.

По этимъ формуламъ будетъ очень удобно вычислить M и N и такимъ образомъ уравненіе (4) будетъ вполнѣ составлено. По этому уравненію мы изслѣдуемъ кривую линію, выражаемую даннымъ. Форма кривой, какъ окажется далѣе, зависитъ главнымъ образомъ отъ того, будутъ ли коэффиціенты M и N имѣть знаки одинаковые или разные. Чтобы опредѣлить, будутъ ли коэффиціенты M и N имѣть знаки одинаковые или разные, мы разсмотримъ произведеніе M и N. По формуламъ находимъ:

$$M \cdot N = \tfrac{1}{4}\left[(A+C)^2 - (A-C)^2 - B^2\right] = \tfrac{1}{4}\left[A^2 + 2AC + C^2 - A^2 + 2AC - C^2 - B^2\right] = \tfrac{1}{4}\left[4AC - B^2\right]$$

или $M \cdot N = -\dfrac{B^2 - 4AC}{4}$

Въ разсматриваемомъ случаѣ $B^2 - 4AC \neq 0$, слѣдовательно или больше 0 или меньше 0. Если $B^2 - 4AC < 0$, тогда $M \cdot N > 0$. Въ этомъ случаѣ слѣдовательно M и N имѣютъ одинаковые знаки. Кривая, представляемая уравненіемъ (4), называется эллипсомъ. Если $B^2 - 4AC > 0$, то $M \cdot N < 0$, слѣдовательно M и N имѣютъ разные знаки и кривая, представляемая уравненіемъ, называется

гиперболою. Такимъ образомъ кривыя, имѣющія центръ, раздѣляются на два вида: первый характеризуется признакомъ: $B^2-4AC<0$, это эллипсы, а второй $B^2-4AC>0$... гиперболы.

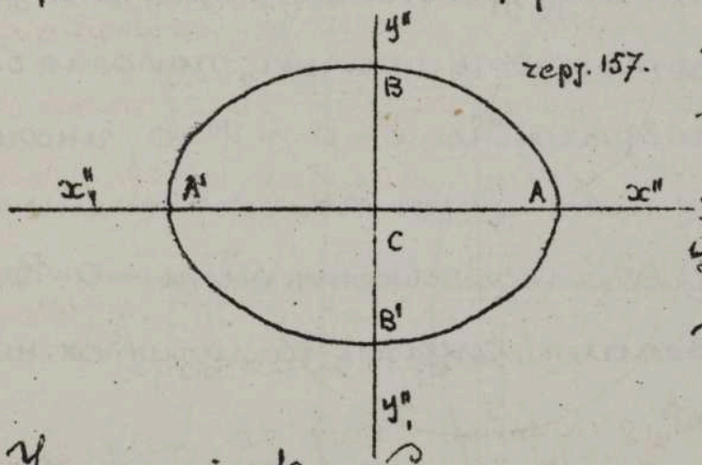
Эллипсы.

Построимъ кривую, представляемую уравненіемъ:

$$Mx''^2+Ny''^2=-F'.$$

Здѣсь M и N имѣютъ одинаковые знаки и примемъ ихъ положительными. Если бы они были отрицательны, тогда мы могли бы перемѣнить знаки въ обѣихъ частяхъ равенства. При построеніи этой кривой мы разсмотримъ три случая: 1) $-F'>0$, 2) $-F'=0$, 3) $-F'<0$.

1). Пусть $-F'>0$. Положимъ $-F'=H$ и напишемъ уравненіе такъ: $Mx''^2+Ny''^2=H$. Здѣсь M, N и H положительны. Возмемъ послѣднія оси координатъ. Опредѣлимъ точки пересѣченія этой кривой съ осями координатъ (черт. 157.) Положимъ $y''=0$, получимъ $Mx''^2=H$, отсюда $x'=\pm\sqrt{\frac{H}{M}}=\pm a$



черт. 157.

Получимъ двѣ точки пересѣченія A и A', причемъ $CA=CA'=a=\sqrt{\frac{H}{M}}$.

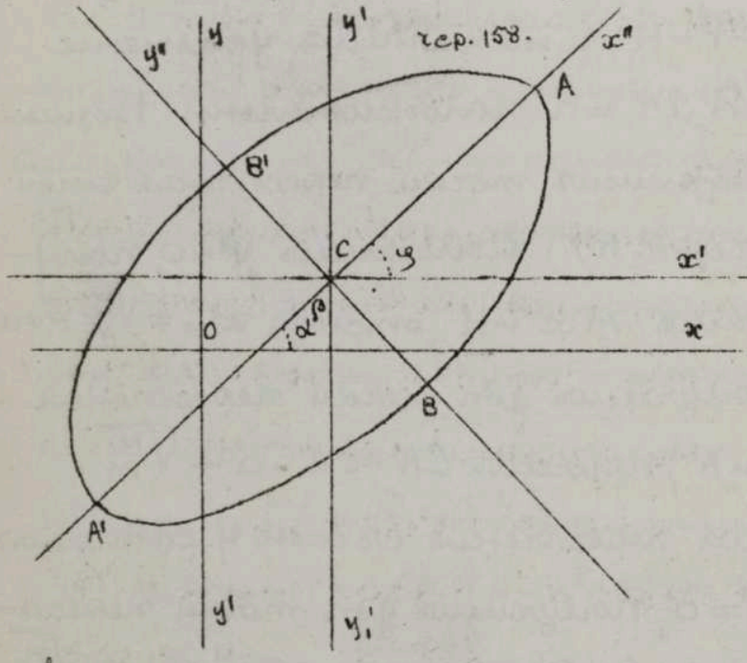
Для пересѣченія съ осью y, сдѣлаемъ $x''=0$, получимъ двѣ точки пересѣченія B и B', причемъ $CB=CB'=b=\sqrt{\frac{H}{N}}$

Уравненіе кривой напишется въ болѣе простомъ видѣ, если мы въ него вмѣсто коэффиціентовъ M, N и H введемъ величины a и b. Мы имѣемъ $\frac{H}{M}=a^2$, отсюда $M=\frac{H}{a^2}$, также $\frac{H}{N}=b^2$, отсюда $N=\frac{H}{b^2}$. Вставивъ, получимъ: $\frac{H}{a^2}x''^2+\frac{H}{b^2}y''^2=H$ или $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1$. Это уравненіе уже было нами построено и мы

знаемъ, что оно представляетъ эллипсъ, отнесенный къ центру и къ осямъ. Но не забудемъ, что цѣль наша состояла въ построеніи кривой, выраженной уравненіемъ (1), т.е. уравненіемъ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (1)$$

относительно первоначально данныхъ осей. Замѣтимъ, что построивъ эллипсъ относительно Cx'' и Cy'', мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ его положеніе и относительно старыхъ осей. Стоитъ только возстановить всѣ три системы осей. Замѣтимъ только еще, что въ послѣднемъ построеніи не всегда будетъ $a > b$, но можетъ случиться, что $a < b$. Это будетъ значить, что большая ось эллипса пойдетъ не по Cx'', а по Cy''.



Черт. 158.

2, Пусть $-F' = 0$, Уравненіе будетъ $Mx''^2 + Ny''^2 = 0$, Такъ какъ M и N положительны, то очевидно, что этому уравненію возможно удовлетворить только, полагая одновременно $x'' = 0$ и $y'' = 0$, иначе сумма двухъ положительныхъ чиселъ не можетъ быть $= 0$. Въ этомъ случаѣ получится не кривая а одна точка, именно C.

3, Положимъ, что $-F' < 0$. Уравненіе будетъ: $Mx''^2 + Ny''^2 = -F'$ Въ этомъ уравненіи первая часть всегда положительна, а вторая отрицательна, слѣдовательно ему нельзя удовлетворить никакими дѣйствительными значеніями x'' и y''. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что ур-е представляетъ мнимое

мнимого или мнимый эллипсъ. И такъ окончательно, если въ уравненіи (1) $B^2-4AC<0$, то это уравненіе представляетъ или эллипсъ, или точку, или мнимое мѣсто.

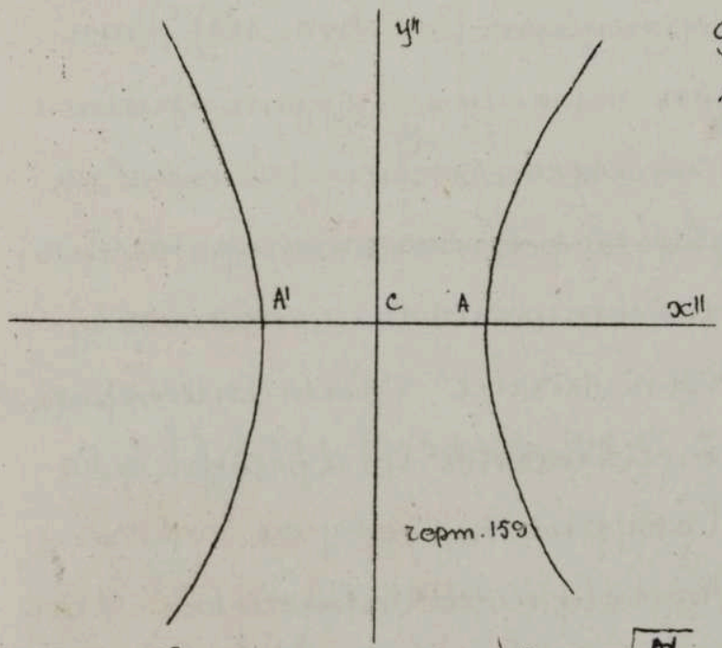
Гиперболы.

Мы разсмотримъ теперь, какія кривыя представляетъ ур-іе: $Mx''^2+Ny''^2=-F'$, въ которомъ M и N имѣютъ разные знаки. Мы будемъ полагать, что $M>0$, а $N<0$. Если бы было наоборотъ, то мы могли бы перемѣнить знаки въ обѣихъ частяхъ ур-ія. Здѣсь мы также различимъ три случая: 1) $-F'>0$, 2) $-F'=0$, 3) $-F'<0$.

1) Пусть $F'>0$. Положимъ, что $-F=H$ и сверхъ того поста- вимъ знакъ при N на видъ, положивъ $N=-N_1$), ур-іе будетъ

$$Mx''^2-N_1y''^2=H,$$

гдѣ M, N и H положительны. Возмемъ послѣднія оси координатъ и опредѣлимъ точки пересѣченія кривой съ осями. Въ точкахъ пересѣченія съ осью x имѣемъ: $y''=0$, $x''=\pm\sqrt{\frac{H}{M}}=\pm a$ (черт. 159), гдѣ черезъ a обозначено $\sqrt{\frac{H}{M}}$, получимъ двѣ точки пересѣченія A и A', причемъ $CA=CA'=\sqrt{\frac{H}{M}}=a$. Для пересѣченія съ осью y, $x''=0$ и уравненіе будетъ: $-N_1y''^2=H$, отсюда $y''=\pm\sqrt{-\frac{H}{N_1}}$. Эта величина мнимая, слѣдовательно кривая не пересѣкаетъ оси y! Тѣмъ не менѣе мы положимъ, что $\sqrt{-\frac{H}{N_1}}=b$ и введемъ въ ур-іе кривой величину



черт. 159

a и b. Мы имѣемъ $\frac{H}{M}=a^2$, отсюда $M=\frac{H}{a^2}$, далѣе $\frac{H}{N_1}=b^2$, отсюда $N_1=\frac{H}{b^2}$. Вставивъ въ уравненіе, получимъ:

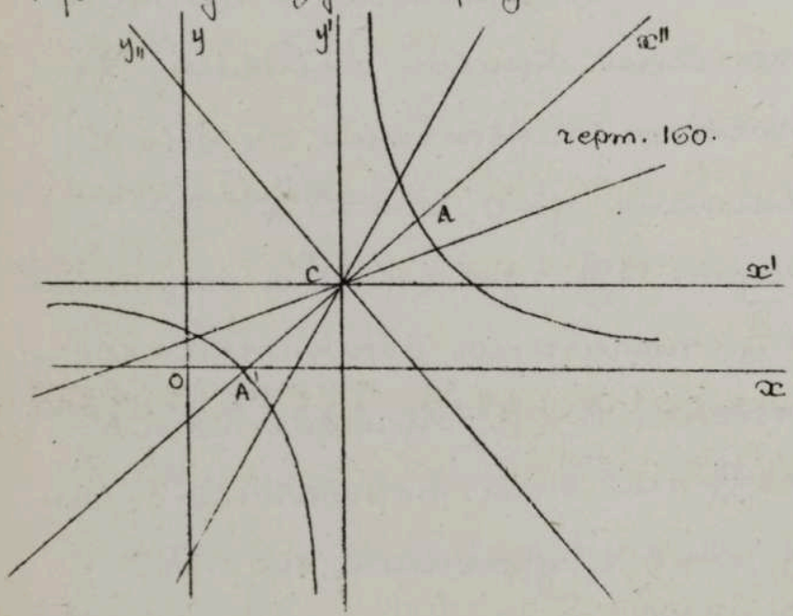
$$\frac{H}{a^2}x''^2-\frac{H}{b^2}y''^2=H \text{ или } \frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1.$$

Въ этомъ уравненіи мы прямо узнаемъ гиперболу, отнесенную къ центру и осямъ. A и A' двѣ вершины этой гиперболы и ея главная ось совпадаетъ съ осью cx''. Мы сможемъ эту гиперболу построить. Построивъ ее относительно осей cx'' и cy'', мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ ея положеніе относительно первоначальныхъ осей (какъ предложено на черт. 160).

2, Пусть $-F'=0$. Уравненіе наше будетъ:

$$Mx''^2-N_1y''^2=0,$$

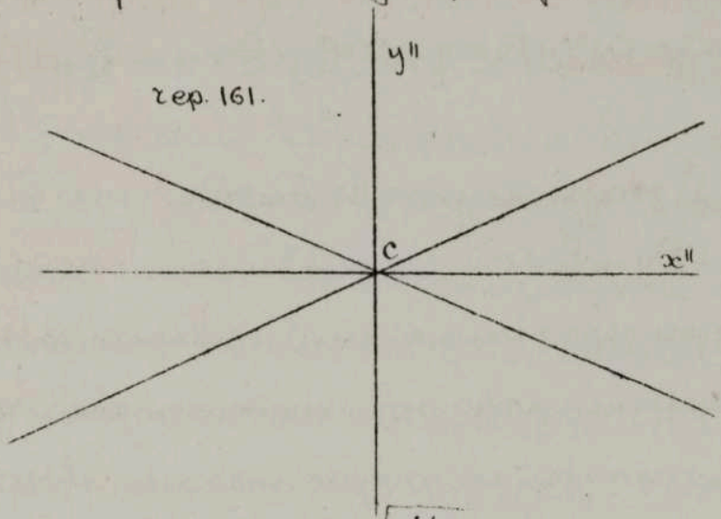
отсюда $y''^2=\frac{M}{N_1}x''^2$ или $y''=\pm\sqrt{\frac{M}{N_1}}x''$. Здѣсь два уравненія 1-й степени. Каждое изъ нихъ представляетъ прямую линію, проходящую черезъ начало координатъ C (черт. 161). Эти двѣ прямыя будутъ одинаково наклонены къ оси x'' съ двухъ разныхъ сторонъ. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ наше уравненіе представляетъ не кривую, а совокупность двухъ пересѣкающихся прямыхъ. Это частный случай гиперболы.



черт. 160.

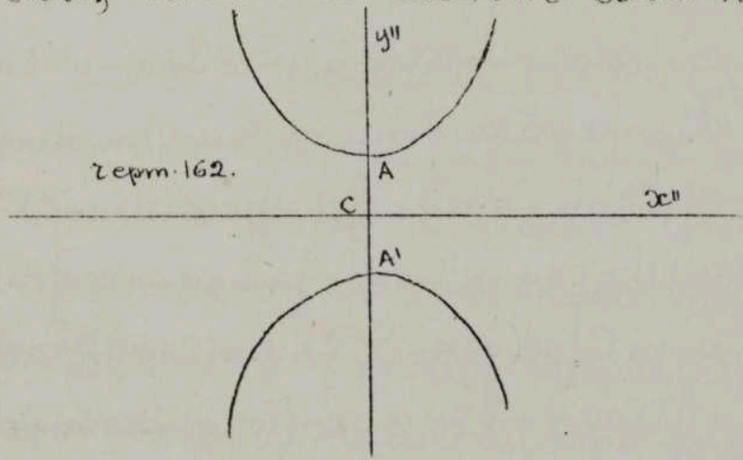
3, Положимъ, что $-F'<0$. Положимъ, что $F'=H$ и напишемъ $Mx''^2-N_1y''^2=H$. Перемѣнивъ знаки, имѣемъ $N_1y''^2-Mx''^2=H$.

Строимъ эту кривую относительно послѣднихъ осей. Для



чер. 161.

пересѣченія съ осью y'' будемъ имѣть $x''=0$ и слѣдовательно $N_1 y''^2 = H$, отсюда $y'' = \pm\sqrt{\frac{H}{N_1}} = \pm a$. Получимъ двѣ точки A и A', причемъ $CA = CA' = a$. Для пересѣченія съ осью x'' нужно положить $y''=0$, получимъ: $-Mx''^2 = H$, отсюда $x'' = \pm\sqrt{-\frac{H}{M}}$. Слѣдовательно ось x'' не пересѣкаетъ кривой, чтобы же имѣть мы положимъ: $\sqrt{\frac{H}{M}} = b$ и затѣмъ



чертѣ. 162.

введемъ въ уравненіе величины a и b, будемъ имѣть $\frac{H}{N_1} = a^2$, отсюда $N_1 = \frac{H}{a^2}$, $\frac{H}{M} = b^2$, отсюда $M = \frac{H}{b^2}$. Вставивъ, получимъ: $\frac{H}{a^2} y''^2 - \frac{H}{b^2} x''^2 = H$, или $\frac{y''^2}{a^2} - \frac{x''^2}{b^2} = 1$. Это уравненіе отличается отъ перваго случая только тѣмъ, что въ немъ перемѣнились x''-на y'' и y'' на x''; слѣдовательно это та-же гипербола, только ея мнимая ось будетъ совпадать съ осью Cy''.

Кривыя, не имѣющія центра.

(случай: $B^2 - 4AC = 0$).

Дано уравненіе кривой:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (1).$$

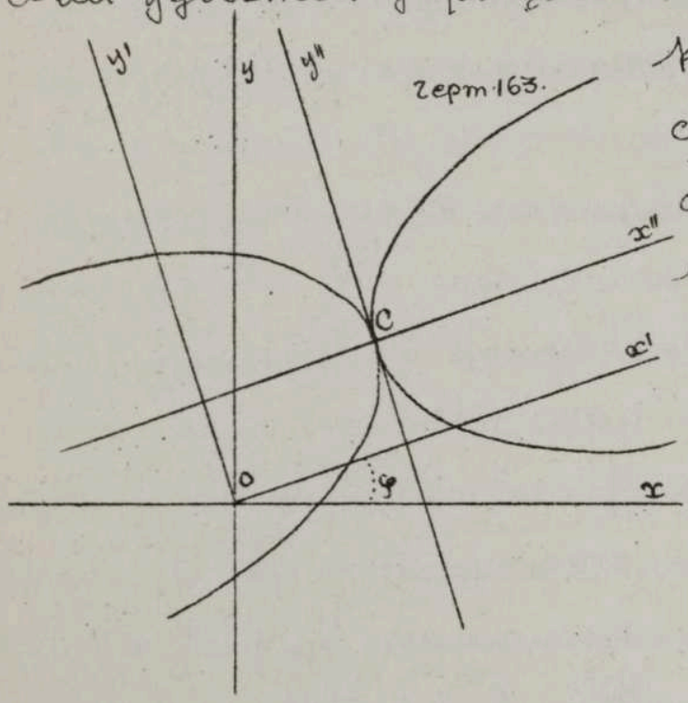
Прежде всего замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ первые три члена уравненія (1) образуютъ полный квадратъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ: $4AC=B^2$, отсюда $A=\frac{B^2}{4C}$, слѣдовательно $Ax^2+Bxy+Cy^2=\frac{B^2}{4C}x^2+Cy^2+Bxy=C\left(y^2+\frac{B}{C}xy+\frac{B^2}{4C^2}x^2\right)=$
$=C\left(y+\frac{B}{2C}x\right)^2$.

Вслѣдствіе этого уравненіе (1) напишется въ видѣ:

$$C\left(y+\frac{B}{2C}x\right)^2+Dx+Ey+F'=0 \ldots\ldots (I).$$

Для удобства упрощенія этого уравненія, мы повернемъ оси координатъ на нѣкоторый уголъ φ, оставляя тотъ же начало. Формулы преобразованія координатъ будутъ:



$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$ и $y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$.

Вставивъ эти формулы, получ:

$$C\left[x'\sin\varphi+y'\cos\varphi+\frac{B}{2C}(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2+\right.$$
$$\left.+D\left[x'\cos\varphi-y'\sin\varphi\right]+\left[x'\sin\varphi+y'\cos\varphi\right]E+F'=0.\right.$$

или $C\left[y'\left(\cos\varphi-\frac{B}{2C}\sin\varphi\right)+\left(\sin\varphi+\frac{B}{2C}\cos\varphi\right)x'\right]^2+$
$+\left[D\cos\varphi+E\sin\varphi\right]x'+\left(E\cos\varphi-D\sin\varphi\right)y'+F'=0$.

Воспользуемся неопредѣленностью угла φ и выберемъ его такъ, чтобы это уравненіе упростилось по составу. Именно мы возмемъ такой уголъ φ, чтобы коэффиціентъ при x' въ большой скобкѣ былъ бы равенъ нулю, т. е. положимъ $\sin\varphi+\frac{B}{2C}\cos\varphi=0$, отсюда опредѣлимъ уголъ φ: $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{B}{2C}$. Эта формула опредѣляетъ уголъ φ. Притомъ, такъ какъ этотъ уголъ опредѣляется по $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, то его всегда можно найти. Въ первыхъ двухъ четвертяхъ tg получаетъ всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому $\angle\varphi$ найдется или въ первой или во второй четверти; мы поэтому будемъ полагать

$\varphi < 180°$. При такомъ значеніи φ, уравненіе кривой будетъ имѣть видъ: $Ny_1^2 + Px' + Qy' + F = 0 \ldots\ldots (2)$.

Здѣсь для краткости положено: $N = C\left[\cos\varphi - \frac{B}{2C}\sin\varphi\right]^2$, $P = D\cos\varphi + E\sin\varphi$ и $Q = E\cos\varphi - D\sin\varphi$.

Эти три коэффиціента намъ нужно будетъ вычислить. Мы составимъ для этого болѣе удобныя формулы. Съ этою цѣлью предварительно выразимъ $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ черезъ коэффиціенты уравненія кривой; имѣемъ:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{-\frac{B}{2C}}{\sqrt{1+\frac{B^2}{4C^2}}} = \frac{-B}{\sqrt{4C^2+B^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{B^2}{4C^2}}} = \frac{2C}{\sqrt{4C^2+B^2}}$$

Въ этихъ формулахъ передъ корнемъ квадратнымъ подразумѣвается двойной знакъ. Чтобы опредѣлить, нужно ли взять $+$ или $-$, замѣтимъ, что такъ какъ $\angle\varphi < 180°$, то $\sin\varphi > 0$. Слѣдовательно, какъ видно изъ выраженія $\sin\varphi$, передъ корнемъ нужно принимать знакъ обратный со знакомъ B.

Далѣе вычисляемъ N:

$$N = C(\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi\sin\varphi)^2 = C\left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 = C\left(\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 = \frac{C}{\cos^2\varphi}.$$

или $N = C : \frac{4C^2}{4C^2+B^2} = 1 : \frac{4C}{4C^2+B^2} = C + \frac{B^2}{4C}$ или $N = A + C$.

$$P = \frac{2CD - BE}{\sqrt{4C^2+B^2}}.$$

Замѣтимъ, что $4C^2 + B^2 = 4C\left(C + \frac{B^2}{4C}\right) = 4C(C+A)$

Слѣдовательно $P = \frac{2CD - BE}{2\sqrt{C(C+A)}}$. Затѣмъ находимъ: $Q = \frac{2CE + BD}{2\sqrt{C(C+A)}}$. По найденнымъ выраженіямъ вычисляемъ P, N и Q. Возьмемъ теперь новое уравненіе кривой, т. е. $Ny'^2 + Px' + Qy' + F = 0 \ldots\ldots (2)$ Его можно еще болѣе упростить новымъ преобразованіемъ координатъ, именно, оставляя

ести параллельным самим себе, перенеся начало координат в другую точку. Координаты этой точки обозначим через (a, b) и оставим их пока произвольными.

Формулы перехода будут: $x' = x'' + a$; $y' = y'' + b$

Вставляя эти выражения в уравнение (2) получим:

$$N(y''+b)^2 + P(x''+a) + Q(y''+b) + F' = 0 \text{ или}$$

$$Ny''^2 + Px'' + (2Nb+Q)y'' + Nb^2 + Pa + Qb + F' = 0.$$

Это уравнение имеет пока тот же самый вид, как и уравнение (2). Воспользуемся неопределенностью координат a и b и выберем их такими, чтобы в последнем ур-ии коэффициенты при y'' и постоянное члены были бы $= 0$. Мы должны иметь $2Nb + Q = 0$ и $Nb^2 + Pa + Qb + F' = 0$. Из этих двух уравнений мы найдем неизвестные a и b, имеем: $b = \frac{Q}{2N}$ и вставив во второе, получим: $\frac{Q^2}{4N} + Pa + F' - \frac{Q^2}{2N} = 0$ или $Pa = \frac{Q^2}{2N} - \frac{Q^2}{4N} - F'$, отсюда $a = \frac{Q^2 - 4NF'}{4PN}$. Из этих решений мы видим, что a и b будут возможны, если только $N \neq 0$ и $P \neq 0$. Но если бы было $N = 0$, то тогда уравнение (2) имело бы вид: $Px' + Qy' + F' = 0$ и представляло бы прямую линию, которая является таким образом, частным случаем параболы.

Если же мы имели бы $P = 0$, тогда уравнение (2) было бы $Ny'^2 + Qy' + F' = 0$

Это уравнение содержит одно y' и его всегда можно решить относительно y', получатся два решения: $y' = \beta'$ и $y' = \beta''$. Эти два решения представляют две прямых линии, параллельных оси X, если они действительны. Если же они

синимы, то эти двѣ прямыя будутъ синисимыи. Наконецъ, если корни равны, то эти двѣ прямыя совпадаютъ въ одну. Такимъ образомъ двѣ прямыя и одна прямая и синисное сиъсто являются частными случаями параболы. Устранимъ эти частные случаи; мы скажемъ, что въ нашъ послѣдніе преобразованіе координатъ всегда возможно и при найденныхъ величинахъ a и b уравненіе (1) приметъ видъ:

$$Ny''^2 + Px'' = 0 \ldots\ldots (3).$$

Изъ него находимъ: $y''^2 = -\frac{P}{N}x''$. Различимъ два случая:

1, $-\frac{P}{N} > 0$. Положимъ тогда, что $-\frac{P}{N} = 2p$, будемъ имѣть: $y''^2 = 2px''$. Въ этомъ уравненіи узнаемъ извѣстную намъ параболу, отнесенную къ вершинѣ и къ оси.

2, $-\frac{P}{N} < 0$., тогда положимъ $-\frac{P}{N} = -2q$, уравненіе будетъ: $y''^2 = -2qx''$ или $y'' = \pm\sqrt{-2qx''}$. Въ этомъ случаѣ y'' будетъ дѣйствительно только при отрицательныхъ значеніяхъ x''. Затѣмъ это уравненіе выражаетъ ту-же параболу, но только ея ось будетъ направлена отъ вершины C въ противоположную сторону Cx''.

Сводъ формулъ, употребляемыхъ при изслѣдованіи кривыхъ 2го порядка черезъ преобразованіе координатъ.

Дано уравненіе: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots (1)$.

Прежде всего составимъ биномъ $B^2 - 4AC$. Если онъ не равенъ нулю, то кривая имѣетъ центръ, притомъ, если $B^2 - 4AC < 0$, то кривая будетъ эллипсъ. Если $B^2 - 4AC > 0$, то

гипербола. Далѣе нужно написать два уравненія, опредѣляющія центръ: $2A\alpha + B\beta + D = 0$ и $B\alpha + 2C\beta + E = 0$. Чтобы ихъ составить, сдѣлаемъ такое замѣчаніе: Эти уравненія получаются, когда возмемъ отъ первой части уравненія первую производную по x, оставивъ y постояннымъ и вторую производную по y, оставляя x постояннымъ и затѣмъ приравняемъ обѣ эти производныя 0. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ производныя, имѣемъ: $2Ax + By + D = 0$ и $Bx + 2Cy + E = 0$.

Далѣе изъ этихъ двухъ уравненій мы найдемъ координаты центра α и β. Затѣмъ перенесемъ координаты центра, полагая: $x = x' + \alpha$ и $y = y' + \beta$. Новое ур-іе кривой будетъ:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0 \ldots\ldots (2)$$

Въ немъ F' вычисляемъ по формулѣ: $F' = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F$.

Вычисляемъ потомъ уголъ φ, поворота осей, по формулѣ: $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A - C}$. Поворачиваемъ оси координатъ на уголъ φ, для чего служатъ формулы $x' = x''\cos\varphi - y''\sin\varphi$; $y' = x''\sin\varphi + y''\cos\varphi$. Причемъ $2\varphi < 180°$ и $\varphi < 90°$. Новое уравненіе кривой будетъ: $Mx''^2 + Ny''^2 + F' = 0 \ldots (3)$. Въ немъ коэффиціенты M и N вычисляются по формулѣ: $M = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$ и $N = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right]$; причемъ передъ корнемъ нужно перемѣнить знакъ, если $B < 0$. Наконецъ по уравненію (3) построимъ самую кривую, опредѣливъ ея полуоси.

Замѣчаніе. Если въ частномъ случаѣ у насъ выйдетъ $F' = 0$, тогда уравненіе (2) будетъ: $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = 0$. Въ этомъ случаѣ не нужно дѣлать послѣдняго преобразованія координатъ. Дѣйствительно, прямая этого ур-ія

легко видеть, что получатся две пересекающиеся прямые. Чтобы обнаружить это стоит только решить это уравнение относительно y': $y'^2 + \frac{B}{C}y'x' + \frac{A}{C}x'^2 = 0$, $y' = -\frac{B}{2C}x' \pm \sqrt{\frac{B^2}{4C^2}x'^2 - \frac{A}{C}x'^2}$; $y' = -\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}x'$.

Если $B^2 - 4AC > 0$, то это уравнение представляет две прямые проходящие через начало координат. Если же $B^2 - 4AC < 0$, то этому уравнению можно удовлетворить, полагая $x' = 0$ и $y' = 0$. и уравнение представляет точку.

Наконец, если $B^2 - 4AC = 0$, то получится одна прямая: $y' = -\frac{B}{2C}x'$. Вернемся опять к уравнению (1) и положим, что $B^2 - 4AC = 0$, но в то же время $2CD - BE \neq 0$, тогда получится парабола. Тогда прежде всего повернем оси координат, оставив то же начало, на угол φ, который вычисляется по формуле: $tg\varphi = -\frac{B}{2C}$. Формулы преобразования координат будут: $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$ и $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$. Новое уравнение будет: $Ny'^2 + Px' + Qy' + F = 0 \ldots\ldots (2)'$. Вычисляем коэффициенты по формулам: $N = A + C$; $P = \frac{2CD - BE}{2\sqrt{C(A+C)}}$ и $Q = \frac{2CE + DB}{2\sqrt{C(A+C)}}$. Здесь перед корнем надо принять знак обратный со знаком B. Угол φ всегда меньше 180°. Наконец перенесем начало координат, оставляя оси параллельными самим себе, в точку, находящуюся на кривой линии и уничтожив в новом уравнении член с y' во первой степени. Формулы преобразования будут: $x' = x'' + a$ и $y' = y'' + b$. Координаты a и b будут известны. Окончательно уравнение кривой будет: $Ny''^2 + Px'' = 0$. Строим параболу.

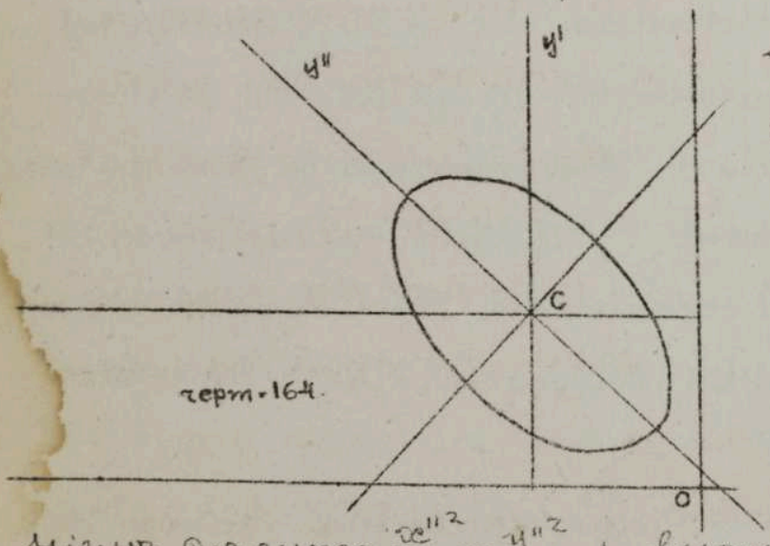
Замечание. Если нам задано уравнение такого вида

$Ax^2+Dx+Ey+F=0$., то тогда $B^2-4AC=0$ и это уравнение представляет параболу. Въ этомъ случаѣ не надо думать преобразованія координатъ относительно поворота осей, а положить только $x=x'+a$ и $y=y'+b$ и затѣмъ опредѣлить a и b такъ, чтобы въ новомъ уравненіи не было члена извѣстнаго и съ x въ первой степени, такъ что уравненіе получится въ видѣ: $Ax'^2+E'y'=0$. Это уравненіе представляетъ тоже параболу, но въ ней осью параболы служитъ ось yовъ

Примѣръ 1-й. Построить кривую, представляемую уравненіемъ: $3x^2+2xy+3y^2-16y+23=0$.... (1)

$B^2-4AC=4-4\cdot3\cdot3<0$... относится къ эллипсамъ. Уравненія центра будутъ: производныя по x: $6x+2y=0$, ... по y: $2x+6y-16=0$. Изъ перваго уравненія $y=-3x$. Вставивъ во второе, получимъ: $2x-18x-16=0$ или $-16x-16=0$, откуда $x=-1$ и $y=+3$. Перенесемъ начало въ центръ: $3x'^2+2x'y'+3y'^2+F'=0$... (2)

$F'=\frac{Dx+E\beta}{2}+F$, $x=-1$, $\beta=+3$, $D=0$, $E=-16$, $F=23$. Вставивъ, получимъ: $F'=\frac{-48}{2}+23=-1$. Уравненіе будетъ: $3x'^2+2x'y'+3y'^2-1=0$. ... (2)'. Дѣлаемъ поворотъ осей на уголъ φ: $tg2\varphi=\frac{B}{A-C}=\frac{2}{3-3}=\frac{2}{0}=\infty$;



черт. 164.

$\angle 2\varphi=90°$; $\angle\varphi=45°$. Уравненіе будетъ: $Mx''^2+Ny''^2+F'=0$ .... (3)

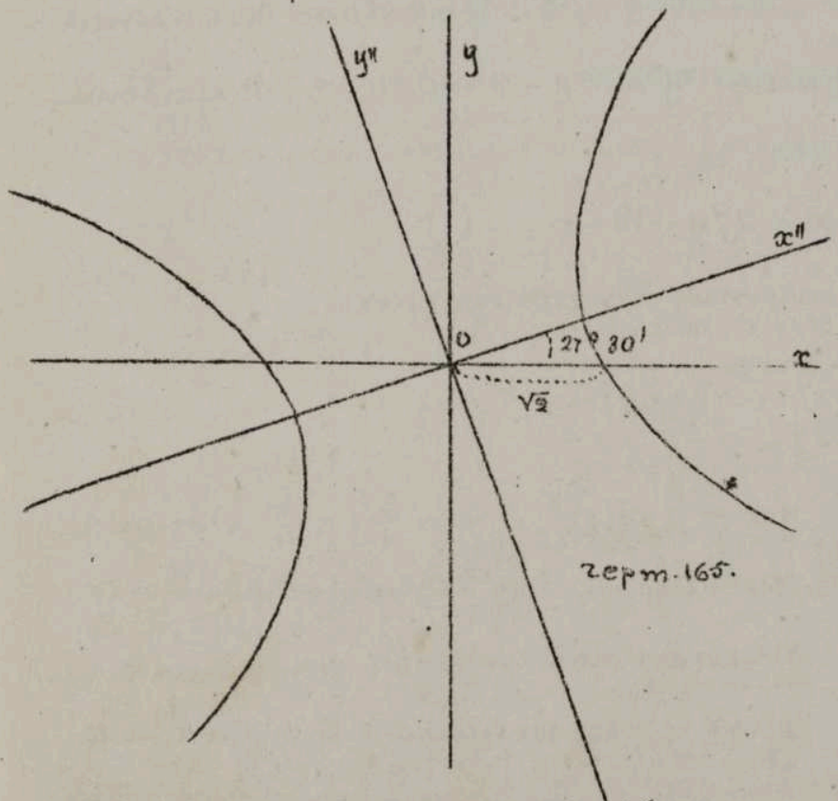
$M=\frac{1}{2}\left[A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right]=\frac{1}{2}\left[6+\sqrt{4}\right]=4.$

$N=\frac{1}{2}\left[A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right]=\frac{1}{2}\left[6-2\right]=2.$

Уравненіе (3) будетъ: $4x''^2+2y''^2=1$... (3) или $\frac{x''^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{y''^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1$. Сравнивая это уравненіе съ общимъ уравненіемъ эллипса $\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1$, видимъ, что $a=\frac{1}{2}$ и $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Строимъ

кривую относительно новых осей координат и восстановив старые оси, получим положение эллипса относительно данных осей.

Пример 2-й. Дано уравнение: $y^2 - 2xy - x^2 + 2 = 0 \ldots\ldots (1)$.
$B^2 - 4AC = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8 > 0 \ldots$ гипербола или ее частный случай.
Здесь начало координат в центр и переносить оси не надо.
$\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Делая поворот, вычисляем угол φ: $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{-2}{-1-1} = +1$, $2\varphi = 45^\circ$, $\varphi = 22^\circ 30'$. Уравнение будет: $Mx''^2 + Ny''^2 + F' = 0$; $F' = F = 2$. По формулам находим M и N, только корни нужно взять с обратными знаками, получим: $M = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{4+4}\right] = -\frac{\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}$; $N = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right] = +\sqrt{2}$. Уравнение (3) будет: $-\sqrt{2}x''^2 + \sqrt{2}y''^2 + 2 = 0$ или $\frac{\sqrt{2}}{2}x''^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y''^2 = 1$. или $\frac{x''^2}{(\sqrt[4]{2})^2} - \frac{y''^2}{(\sqrt[4]{2})^2} = 1$.



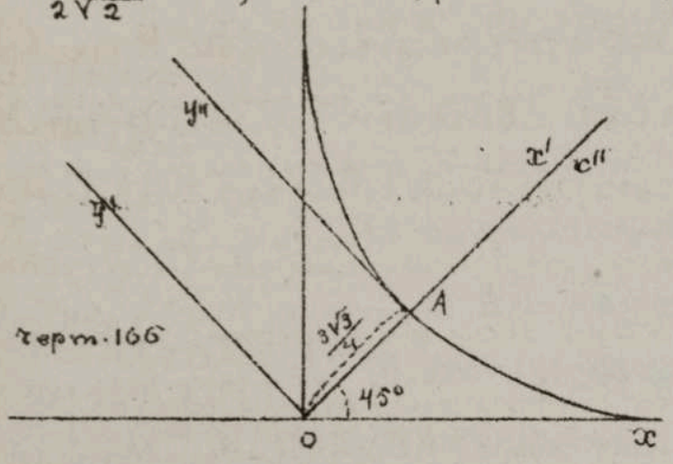
черт. 165.

Сравнивая это уравнение с уравнением гиперболы $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$, получим: $a = \sqrt[4]{2}$, $b = \sqrt[4]{2}$
Получили так называемую равносторонюю гиперболу.
Для пересечения с осью x, получим $y = 0$, тогда $-x^2 + 2 = 0$, $x^2 = 2$ и $x = \pm\sqrt{2}$.
Ось x гипербола пересечет в двух точках на расстоянии от начала на $\sqrt{2}$.

Пример 3-й. Дано уравнение: $y^2 - 2xy + x^2 - 6y - 6x + 9 = 0 \ldots (1)$
$B^2 - 4AC = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \ldots$ парабола. Поворачиваем оси на $\angle\varphi$;

$tg\,2\varphi = -\frac{B}{2C} = -\frac{-2}{2} = 1$, $2\varphi = 45°$, уравнение будет: $Ny'^2 + Px' + Qy' + F = 0 \ldots (2)$

$N = A + C = 1 + 1 = 2$; $P = \frac{2CD - BE}{2\sqrt{C(A+C)}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot -6 - 12}{2\sqrt{1 \cdot (2)}} = \frac{-24}{2\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}}$, $Q = \frac{2CE + BD}{2\sqrt{C(A+C)}} = \frac{-12 + 12}{2\sqrt{2}} = 0$; $F' = 9$. Уравнение будет: $2y'^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}x' + 9 = 0 \ldots (2)$ Перенесем оси координат по формулам: $x' = x'' + a$, $y' = y'' + b$, вставив, получим: $2(y''^2 + 2by'' + b^2) - \frac{12}{\sqrt{2}}(x'' + a) + 9 = 0$, но $b = 0$; $2b^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}a + 9 = 0$, откуда $a = \frac{9\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Уравнение будет: $2y''^2 - \frac{12}{\sqrt{2}}x'' = 0$ или $y''^2 = \frac{6}{\sqrt{2}}x'' = 3\sqrt{2}\,x''$. Вычертим чертеж. Для



черт. 166

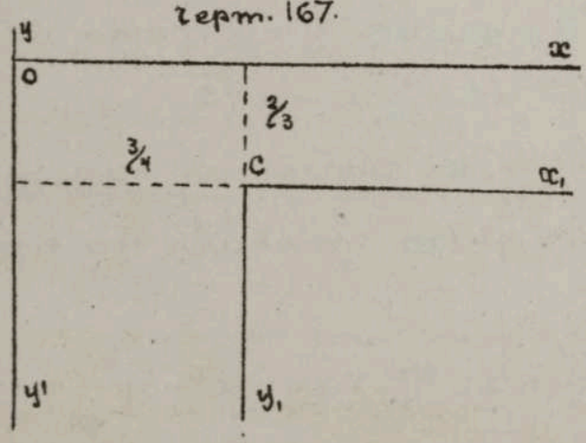
пересечения с осью x, $y = 0$, получим: $x^2 - 6x + 9 = 0$ или $x = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$. Парабола касается оси x. Со осью y, $x = 0$, получим: $y^2 + 6y + 9 = 0$, $y = 3$. Парабола касается оси y.

Пример 4-й: $12xy + 8x - 27y - 18 = 0 \ldots (1)$

$B^2 - 4AC = 14470$. Кривая относится к гиперболе.

Производная по x ..... $12y + 8 = 0$

" по y ..... $12x - 27 = 0$



черт. 167.

$y = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$; $x = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$. Общая формула $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$. представится в нашем случае уравнением: $12x'y' + F' = 0$,

$F' = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F = \frac{8 \cdot \frac{9}{4} + 27 \cdot \frac{2}{3}}{2} - 18 = \frac{18 + 18}{2} - 18 = 0$.

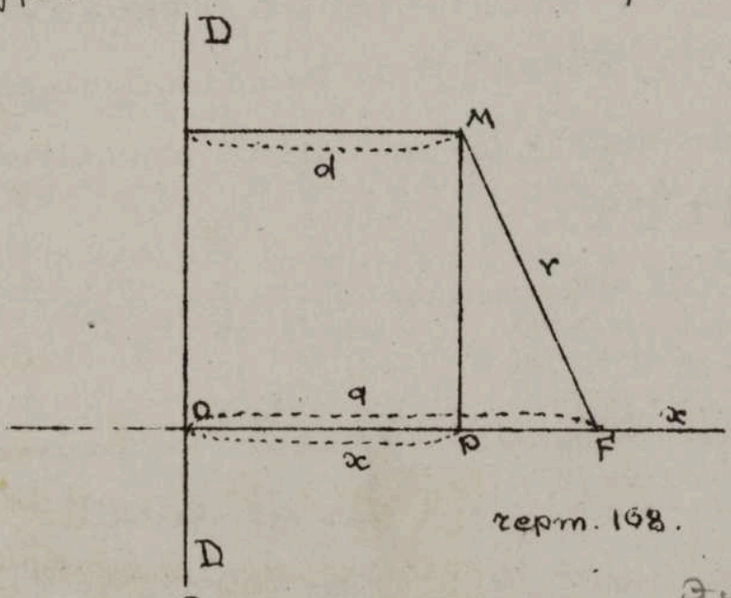
Уравнение будет $12x'y' = 0$ или $x' = 0$, $y' = 0$; если $x' = 0$, то получим ось y_1, а если $y' = 0$, то — ось x.

на чертежѣ показано расположеніе этихъ осей.

Примѣръ 5-й. $y^2 - 2xy + 3x^2 - 2y - 10x + 19 = 0$. Это уравненіе представляетъ точку.

Общее геометрическое опредѣленіе кривыхъ втораго порядка по ихъ свойствамъ относительно фокусовъ и направляющихъ линій.

Каждая изъ трехъ кривыхъ, эллипсъ, парабола и гипербола, можетъ быть опредѣлена какъ геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ данной неподвижной точки имѣютъ постоянное отношеніе къ разстоянію отъ нѣкоторой неподвижной прямой. Когда величина этого отношенія <1, тогда получается эллипсъ, если она $=1$, то парабола, если >1, то гипербола. Докажемъ это и съ этою цѣлью составимъ уравненіе такого геометрическаго мѣста. Пусть DD постоянная неподвижная прямая и F постоянная точка и пусть M нѣкоторая точка кривой. Проведемъ $MF = r$ и опустимъ $\perp$ на DD. По условію для всѣхъ точекъ кривой: $\frac{r}{d}$ = постоянной величинѣ, пусть $d = MQ$.



черт. 168.

Величину эту $\frac{r}{d}$ обозначимъ черезъ ε. Если $\varepsilon < 1$, то кривая эллипсъ и когда $\varepsilon > 1$, то гипербола. Случай параболы очевиденъ по предыдущему опредѣленію параболы, потому что когда $\varepsilon = 1$, т. е. $\frac{r}{d} = 1$, то будемъ имѣть $r = d$ и разстояніе точки кривой отъ постоянной точки равно разс-

тоянію отъ постоянной прямой, какъ и должно быть для парабо-лы. Точка F называется фокусомъ, а постоянная прямая DD' направляющей линіей. Опустимъ изъ фокуса на направляю-щую 1 ось ox. Точку O примемъ за начало координатъ, а линію ox за ось абсциссъ и OD' за ось y. Построимъ координаты точ-ки M. Будемъ имѣть: OP=x MP=y. Пусть разстояніе OF=q. Это разстояніе дано. Имѣемъ $\frac{r}{d}=\varepsilon$ или $r=\varepsilon\cdot d$ или $r^2=\varepsilon^2 d^2$, но $r^2=y^2+(x-q)^2$; Далѣе $d=x$, слѣдовательно вставивъ, имѣемъ:

$$y^2+(x-q)^2=\varepsilon^2x^2$$

Это есть уравненіе разсматриваемаго мѣста. Уравненіе это 2-й степени, слѣдовательно кривая будетъ второго порядка. Опре-дѣлимъ, какая это кривая. Перенесемъ всѣ члены въ 1-ю часть. $(1-\varepsilon^2)x^2+y^2-2qx+q^2=0$. Составимъ биномъ $B^2-4AC=-4(1-\varepsilon^2)=-4(\varepsilon^2-1)$. Прямо-видно теперь, что если $\varepsilon<1$ то $B^2-4AC<0$ и кри-вая будетъ эллипсъ. Если же $\varepsilon=1$, то $B^2-4AC=0$ и кривая будетъ парабола и если $\varepsilon>1$, то $B^2-4AC>0$ и кривая будетъ гипербола. Разсмотримъ эти три случая, каждый отдѣльно.

Эллипсъ.

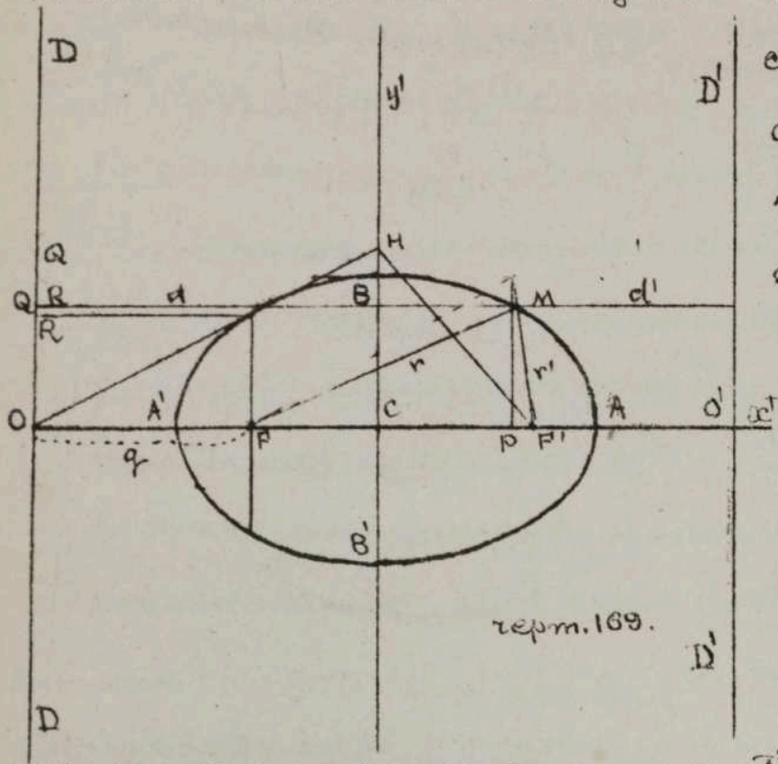
Пусть $\varepsilon<1$. Возмемъ уравненіе кривой:

$$(1-\varepsilon^2)x^2+y^2-2qx+q^2=0 \ldots\ldots (1)$$

Прежде всего опредѣлимъ центръ этой кривой. Коорди-наты центра, какъ мы знаемъ, найдутся изъ уравненій. Беремъ частную производную по x: $2(1-\varepsilon^2)x-2q=0$, по y: $2y=0$., слѣдовательно имѣемъ изъ перваго $x=\frac{q}{1-\varepsilon^2}=\alpha$, а изъ второго $y=0=\beta$; перенесемъ начало координатъ въ центръ, полагая: $x=x'+\alpha$ и $y=y'+\beta$ или $x=x'+\frac{q}{1-\varepsilon^2}$

и $y' = y'_1$. Новое уравнение кривой будет по общему правило: $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F'' = 0$ ..... (2)
или въ нашемъ случаѣ: $(1-\varepsilon^2)x'^2 + y'^2 + F'' = 0$, причемъ по извѣстнымъ формуламъ: $F'' = \frac{D\alpha + E\beta}{2} + F' = -\frac{q}{1+\varepsilon^2} + q^2 = -\frac{q^2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$
По этому уравненію опредѣлимъ полуоси нашего эллипса. Для этого напишемъ это уравненіе въ видѣ: $\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{q^2\varepsilon^2}x'^2 = 1 - \frac{(1-\varepsilon^2)}{q^2\varepsilon^2}y'^2$
или $\frac{x'^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} = 1$. Теперь, сравнивая это уравненіе извѣстнаго аналитическаго: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, получимъ полуоси: $a = \frac{q\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ и $b = \frac{q\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$; изъ сравненія видимъ, что $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ (т. к. $\varepsilon < 1$), то слѣдовательно $b < a$, т.е. a есть большая полуось. Мы опредѣлили положеніе центра и величину полуосей по отношенію къ данному фокусу и направляющей линіи; но надо научиться принимать за данныя въ эллипсѣ оси и разсматривать эллипсъ, отнесенный къ его центру и къ осямъ, тогда нужно будетъ наоборотъ опредѣлить положеніе (центра) фокуса и направляющей линіи относительно центра. Сдѣлаемъ это въ разсматриваемомъ случаѣ. Построимъ центръ. Абсцисса центра α очевидно больше q. Пусть $OC = \alpha$. Построимъ новыя оси Cx' и Cy'. Строимъ эллипсъ относительно новыхъ осей. Для опредѣленія фокуса вычислимъ разстояніе $CF' = c = OC - OK = \frac{q}{1-\varepsilon^2} + q = \frac{\varepsilon^2 q}{1-\varepsilon^2}$. Сравнивая c съ a, мы видимъ, что $c = a\varepsilon$. Положеніе направляющей опредѣлится разстояніемъ $x = x - \frac{c}{1-\varepsilon^2}$, слѣдовательно $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Постоянная величина ε называется эксцентрицитетомъ эллипса; онъ < 1; $c = CF'$ называется фокусовымъ разстояніемъ; (ст. 164). Эксцентрицитетъ

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, т.е. онъ есть отношеніе фокуснаго разстоянія къ большой полуоси. Это есть число отвлеченное. До сихъ поръ мы имѣемъ одинъ фокусъ F и одну направляющую линію DD, соотвѣтствующую этому фокусу, но замѣтивъ, что эллипсъ расположенъ симметрично относительно оси oy'. Построимъ имъ. Отложимъ $CF'=CF=c$, будемъ имѣть другой фокусъ F', а отложивъ $CO'=CO=\frac{a}{\varepsilon}$, получимъ другую направляющую DD'! Разстояніе OC или OC' легко построить. Именно, замѣтивъ, что $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{a}{\frac{c}{a}}=\frac{a^2}{c}$. Отложимъ на оси y' длину $CH=a$; соединимъ точку H съ F'. Въ точкѣ H возставимъ къ HF' перпендикуляръ. Этотъ перпендикуляръ пройдетъ черезъ точку O. Въ самомъ дѣлѣ, въ прямоугольномъ треугольникѣ имѣемъ: $HC^2=OC\cdot F'C$. и отсюда $OC=\frac{HC^2}{CF'}=\frac{a^2}{c}$. Выведемъ выраженія радіусовъ векторовъ эллипса въ функціи абсциссы, считаемой отъ центра; Возмемъ произвольную точку M, проведемъ два радіуса векторы FM и $F'M$, одинъ r, а другой r'. Проекція координаты $MP=y'$ имѣемъ $CP=x'$. Возмемъ разстояніе M отъ направляющихъ dd', будемъ имѣть: $r=\varepsilon d$, или $r=\varepsilon(OC+x')=\varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon}+x'\right)$ или $r=a+\varepsilon x'$. Точно также: $r'=\varepsilon d'=\varepsilon(OC-x')=\varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon}-x'\right)=a-\varepsilon x'$. Изъ этихъ выраженій получается главное



черт.169.

свойство всѣхъ точекъ эллипса относительно фокусовъ. Именно, сложивъ ихъ, $r+r'=2a$, или сумма радіусовъ векторовъ равна большой оси. Замѣтимъ въ заключеніе выраженіе параметровъ эллипса. Это есть хорда перпендикулярная къ большой оси и проведенная черезъ фокусъ $HE=2p$ есть полупараметръ $=H^1$. Взявъ разстояніе точки H отъ неподвижной HR имѣемъ: $HR=q$ и должны имѣть: $\frac{p}{q}=\varepsilon$, откуда $p=q\varepsilon$, такъ что можно написать полуоси: $a=\frac{p}{1-\varepsilon^2}$ и $b=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

Гиперболы.

Пусть DD есть неправляющая линія и F фокусъ. M – произвольная точка кривой. Имѣемъ: $OF=q$, $OP=x$, $Mp=y$. По опредѣленію имѣемъ: $\frac{r}{d}=\varepsilon$. ε есть эксцентрицитетъ и для параболы онъ больше 1. Мы получимъ уравненіе кривой въ такомъ видѣ: $y^2+(x-q)^2=\varepsilon^2x^2$ или $(\varepsilon^2-1)x^2-y^2+2qx-q^2=0$ (черт. 170). Опредѣлимъ центръ и полуоси гиперболы. Перенесемъ начало координатъ въ центръ, полагая $x=x'+\alpha$ и $y=y'+\beta$. Уравненіе кривой будетъ: $Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+F'=0$. Въ нашемъ случаѣ оно будетъ: $(\varepsilon^2-1)x'^2-y'^2+F'=0$, причемъ $F'=\frac{D\alpha+E\beta}{2}+F$. Для опредѣленія координатъ центра α и β составимъ два уравненія:

$$2(\varepsilon^2-1)x+2q=0 \qquad -2y=0$$

Находимъ: $x=-\frac{q}{\varepsilon^2-1}=\alpha$ и $y=0=\beta$. Слѣдовательно $F'=$

$= -\frac{q^2}{\varepsilon^2-1} - q^2 = -\frac{q^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}$, следовательно уравнение гиперболы, отнесенной к центру и к осям, будет: $(\varepsilon^2-1)x'^2 - y'^2 = \frac{q^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}$. Чтобы обнаружить ее полюсы, приведем это уравнение к виду: $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Имеем: $\frac{(\varepsilon^2-1)^2}{q^2\varepsilon^2}x'^2 - \frac{\varepsilon^2-1}{q^2\varepsilon^2}y'^2 = 1$. $\frac{x'^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\frac{q\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)^2} = 1$. Теперь имеем полюсы гиперболы: $a = \frac{q\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$; $b = \frac{q\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$. Так как q и ε даны, то следовательно по этим формулам a и b будут известны. Сравнение формулы, выражающей a и b, показывает, что $b = a\sqrt{\varepsilon^2-1}$. Если теперь полюсы a и b считать данными, то из последнего равенства легко определить эксцентрицитет. Имеем: $\sqrt{\varepsilon^2-1} = \frac{b}{a}$, $\varepsilon^2-1 = \frac{b^2}{a^2}$; $\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}+1 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ и $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. Построим на нашем чертеже центр и построим эту гиперболу. Имеем: $\alpha = -\frac{q}{\varepsilon^2-1}$ и $\beta = 0$. Так как $\varepsilon > 1$, то очевидно, что $\alpha < 0$, следовательно центр будет влево от O, помещаем в точку C, имеем $OC = -\alpha = \frac{q}{\varepsilon^2-1}$. Сравнивая a и OC, мы видим, что $a = \varepsilon \cdot OC$, следовательно a больше OC и имеем $OC = \frac{a}{\varepsilon}$. Это выражение определяет положение направляющей линии относительно центра. Положение фокуса относительно центра определится расстоянием CF', а $CF' = OC + OF' = \frac{q}{\varepsilon^2-1} + q = \frac{q\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}$, следовательно $CF' = a\varepsilon$. Отложим полюс AC, так что $AC = a$ и влево $CA' = CA = a$. Мы имеем один фокус и одну направляющую линию, но так как гипербола расположена симметрично относительно оси CY', то следовательно у нее должен быть другой фокус и другая направляющая линия, симметричная с первой. Отложим $CF'_1 = CF' = a\cdot\varepsilon = OC$; $O'C = OC = \frac{a}{\varepsilon}$. От двух фокусов в точку M можно провести два радиуса вектора, причем один $MF' = r$ и

$MF'=r'$. Выведем выражение радиусов векторов въ функции абсциссы, считаемой отъ центра. Продолжимъ MQ до точки Q' въ-тво. $MQ'=d$, и $MF'=r'$. Имѣемъ $\frac{r}{d}=\varepsilon$, $r=d\varepsilon$ или $r=\left[cp-\overline{co}\right]\varepsilon=\varepsilon\left[x-\frac{a}{\varepsilon}\right]=\varepsilon x-a$, точно такъ же $\frac{r'}{d'}=\varepsilon$; отсюда $r'=d'\varepsilon=\varepsilon(cp+co')=\varepsilon\left(x'+\frac{a}{\varepsilon}\right)=\varepsilon x'+a$

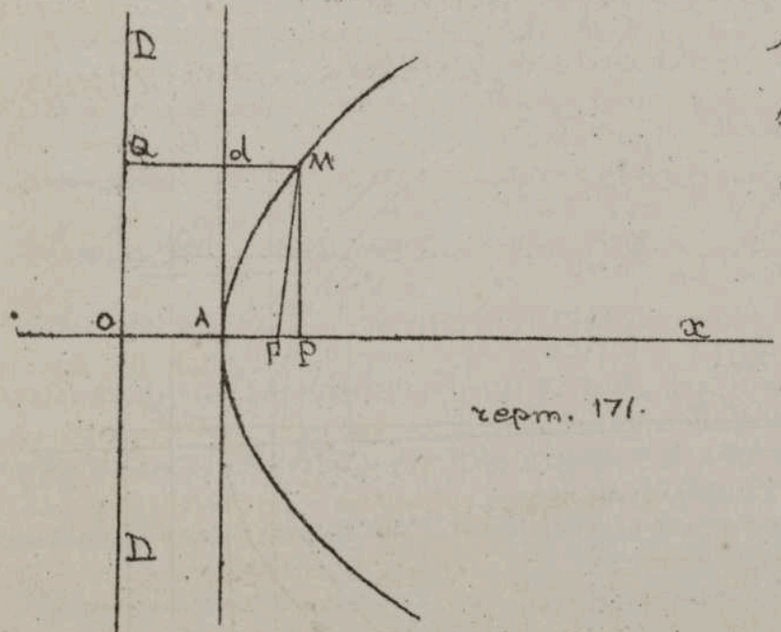
Изъ этихъ выраженій получаемъ главное свойство всѣхъ точекъ гиперболы относительно фокусовъ, именно, взявъ разность: $r-r'=2a$, т.е. разность радіусовъ векторовъ равна главной оси. Мы вывели выраженія радіусовъ векторовъ для правой вѣтви гиперболы, выведемъ ихъ и для лѣвой: возьмемъ точку M' и соединимъ ее съ фокусами. Положимъ $M'F=r_1$ и $M'F'=r_1'$; положимъ далѣе $M'Q=d_1$, а $M'Q'=d_1'$. Имѣемъ $cp'=-x'$, находимъ $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$, $r_1=d_1\varepsilon=\varepsilon(cp'+co)=\varepsilon\left(-x'+\frac{a}{\varepsilon}\right)=-\varepsilon x'+a$. Точно такъ же $\frac{r_1'}{d_1'}=\varepsilon$, $r_1'=d_1'\varepsilon=\varepsilon(cp'-co')=\varepsilon\left(-x'-\frac{a}{\varepsilon}\right)=-\varepsilon x'-a$. Изъ этихъ выраженій найдемъ: $r_1-r_1'=2a$.

Парабола.

Парабола получится, когда $\varepsilon=1$. При прежнихъ осяхъ координатъ уравненіе будетъ:

$y^2+(x-a)^2=x^2$ или $y^2-2ax+a^2=0$

для каждой точки имѣемъ: $r=d$, поэтому раздѣливъ OF' пополамъ въ точкѣ A, примемъ $OA=AF'=\frac{a}{2}$. Перенесемъ начало въ точку A. Полагаемъ $oc=x'+\frac{a}{2}$, а $y=y'$. Уравненіе будетъ:



черт. 171.

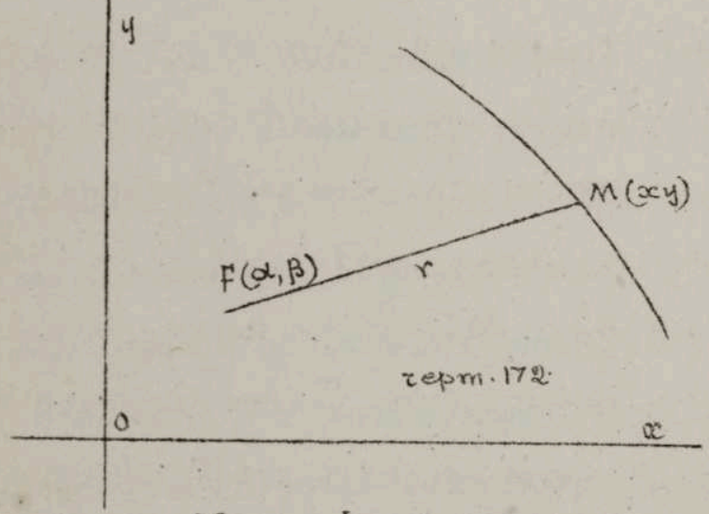
$y'^2-2a\left(x'+\frac{a}{2}\right)+a^2=0$ или $y'^2-2ax'-a^2+a^2=0$ или $y'^2=2ax'$.

Это есть уравненіе параболы, отнесенной къ вершинѣ и къ оси

Чертисъ ее. Замѣтимъ и для параболы выраженія радіусовъ Векторовъ въ функціи отъ абсциссы. Беремъ произвольную точку M и строимъ ея координаты. Имѣемъ: $r = d = OA + PA = x + d$. Слѣдовательно и въ параболѣ радіусъ векторъ выражается линейною функціей абсциссы.

Общее опредѣленіе фокуса кривой линіи.

Изъ сдѣланнаго нами изслѣдованія видно, что во всѣхъ Кривыхъ: эллипсѣ, параболѣ и гиперболѣ, радіусъ векторъ, т.е. разстояніе отъ фокуса до произвольной точки кривой выражается линейною функціей абсциссъ. Можно доказать, что только Кривыя второго порядка имѣютъ такія постоянныя точки, разстоянія которыхъ до произвольной точки Кривой выражаются линейною функціей координатъ этой точки. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что мы имѣемъ какую



чертѣ. 172.

нибудь кривую, отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ и положимъ, что для нея существуетъ такая постоянная точка F, то, если возьмемъ разстояніе FM_0 произвольной точки Кривой и обозначимъ его черезъ r_0, то будемъ имѣть: $r = Ax + By + C$, гдѣ A, B и C будутъ нѣкоторыя постоянныя коэффиціенты, тогда замѣтимъ съ другой стороны, что $r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ и слѣдовательно должны имѣть: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (Ax + By + C)^2$ или $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (Ax + By + C)^2 = 0$. Это уравненіе представляетъ зависимость между координ-

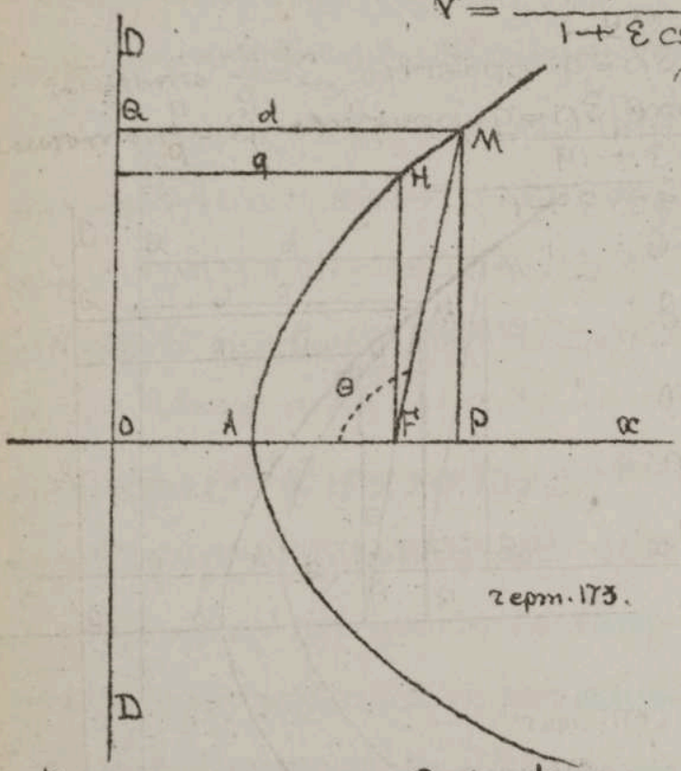
нами произвольной точки кривой, следовательно это есть уравнение кривой и оно 2ой степени относительно x и y, а потому разсматриваемая кривая есть одна изъ кривыхъ второго порядка. Вследствіе этого фокусы могутъ быть определены, какъ такія постоянныя точки, которыхъ разстоянія отъ произвольной точки кривой выразятся линейными функціями координатъ. Это опредѣленіе Зигера.

Общее полярное ур-іе 3хъ кривыхъ 2го порядка.

Всѣ три кривыя: эллипсъ, гипербола и парабола могутъ быть выражены однимъ полярнымъ уравненіемъ, если за полюсъ мы примемъ фокусъ, а за полярную ось примемъ ось, проходящую черезъ этотъ фокусъ и направленную въ ближайшую вершину. Пусть DD есть направляющая (черт. 173) и точка F — фокусъ. Проведемъ $\perp$ OF на направляющую. Пусть A вершина кривой. Представимъ самую кривую, которая или эллипсъ, или парабола или гипербола. Положимъ $OF = q$. Примемъ за полюсъ точку F, а за полярную ось линію Fx, тогда для точки M получимъ полярныя координаты: $MF = r$ и $\angle MFx = \theta$. Изъ M опустимъ перпендикуляръ $MQ = d$ на направляющую. По общему геометрическому опредѣленію всѣхъ трехъ кривыхъ, имѣемъ: $\frac{r}{d} = \varepsilon$, гдѣ $\varepsilon < 1$ въ случаѣ эллипса, $\varepsilon > 1$ въ случаѣ гиперболы и $\varepsilon = 1$ въ случаѣ параболы. Далѣе $r = \varepsilon d$, но $d = OP = OF + FP = q + r\cos(180^\circ - \theta) = q - r\cos\theta$, $r = q\varepsilon - r\varepsilon\cos\theta$ или $r(1 + \varepsilon\cos\theta) = q\varepsilon$. Отсюда $r = \frac{q\varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\theta}$. Проведемъ ординату черезъ фокусъ FH. Эта ордината FH есть полупараметръ p. Опустимъ изъ H перпендикуляръ на DD, получимъ разстояніе q и дополнительный

имѣть $\frac{p}{q}=\varepsilon$, отсюда $p=q\varepsilon$, такъ что можно написать:

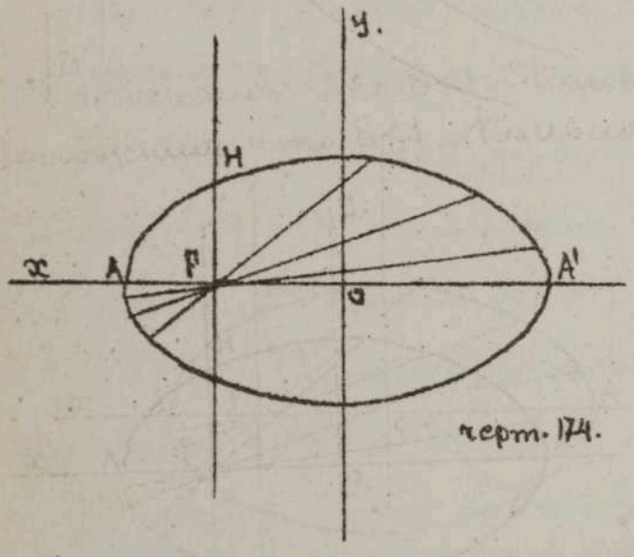
$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$



черт. 173.

Это есть общее полярное уравненіе всѣхъ трехъ кривыхъ. Въ немъ p – полупараметръ и это уравненіе представляетъ эллипсъ, если $\varepsilon<1$, параболу, если $\varepsilon=1$ и гиперболу, если $\varepsilon>1$. Если бы форма кривой не была бы намъ извѣстна, то мы могли бы ее возстановить по общему уравненію. Разсмотримъ три случая:

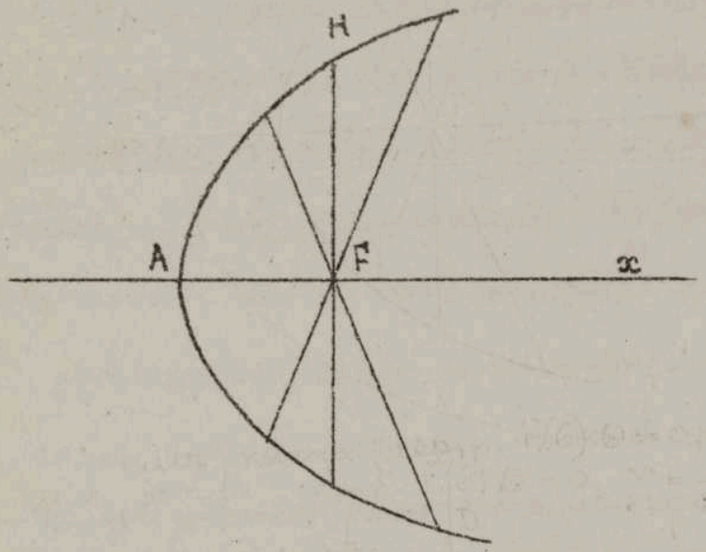
Положимъ, что $\varepsilon<1$. Кривая будетъ эллипсъ. Возьмемъ фокусъ F и полярную ось Fx, изъ уравненія видимъ, что когда $\theta=0$, то $r=\frac{p}{1+\varepsilon}$. Пусть эта величина будетъ FA. A – есть точка кривой. Далѣе, если θ увеличивается, $\cos\theta$ уменьшается и r увеличивается. Когда $\theta=\frac{\pi}{2}$, $r=p$. Построимъ FH=p Если θ еще болѣе увеличивается,



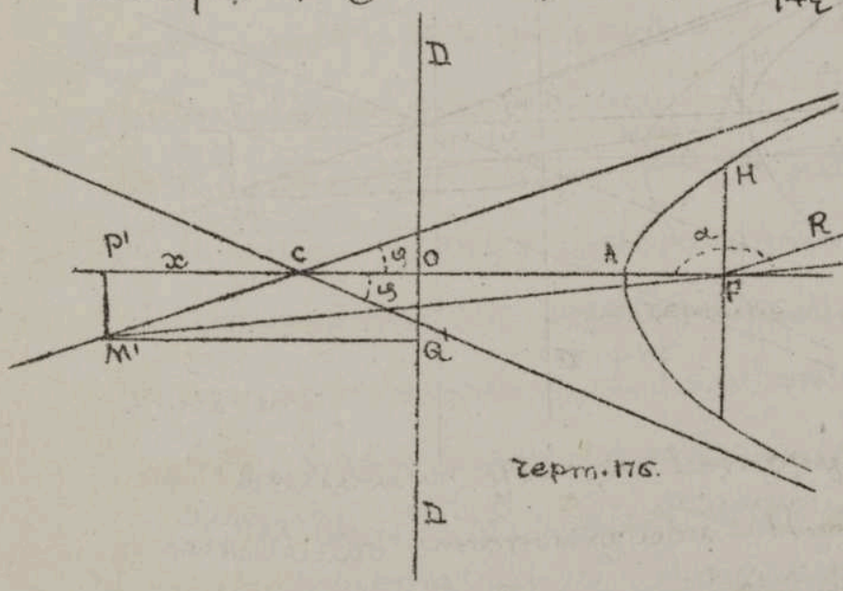
черт. 174.

то тоже увеличивается. Когда $\theta=\pi$, $r=\frac{p}{1-\varepsilon}$. Отложимъ эту величину до точки A_1. Теперь можемъ начертить верхнюю вѣтвь кривой. Далѣе, если θ будемъ давать отрицательныя значенія, то r будетъ получать тѣ же значенія, какъ и при положительномъ θ, такъ что внизъ отъ полярной оси

получится ветвь кривой, симметричная первой. Этим эллипса определяется. Пусть $\varepsilon = 1$, кривая будет парабола. Возьмем фокус F' и полярную ось $F'x$. Здесь имеем, когда $\theta = 0$, $r = \frac{p}{1+1} = \frac{p}{2} = F'A$. Если θ увеличивается, r тоже увеличивается. Когда $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = p = F'H$. Когда $\theta = \pi$, то $r = \infty$. Получим таким образом бесконечную ветвь. При отрицательном θ, r получает такие же значения, вследствие этого внизу от полярной оси получится ветвь симметричная верхней.



3, Пусть $\varepsilon > 1$. Возьмем фокус F' и полярную ось. Здесь имеем, когда (черт. 176) $\theta = 0$, $r = \frac{p}{1+\varepsilon} = F'A$. Когда θ увеличивается, r увеличивается, но в этом случае θ сможет увеличиваться только до известного предела, когда знаменатель обратится в нуль. Называя этот предел $\theta = \alpha$ будем иметь: $1 + \varepsilon \cos\alpha = 0$. Отсюда $\cos\alpha = -\frac{1}{\varepsilon}$. Это равенство определяет величину угла α, которую можно считать известною. Подробнее этот угол. Пусть он будет $AF'R$, так что $\angle AF'R = \alpha$; при этой величине $\theta = \alpha$, получим $r = \infty$. Начертим эту бесконечную ветвь. Линия $F'R$ уже не встретит этой ветви



черт. 176.

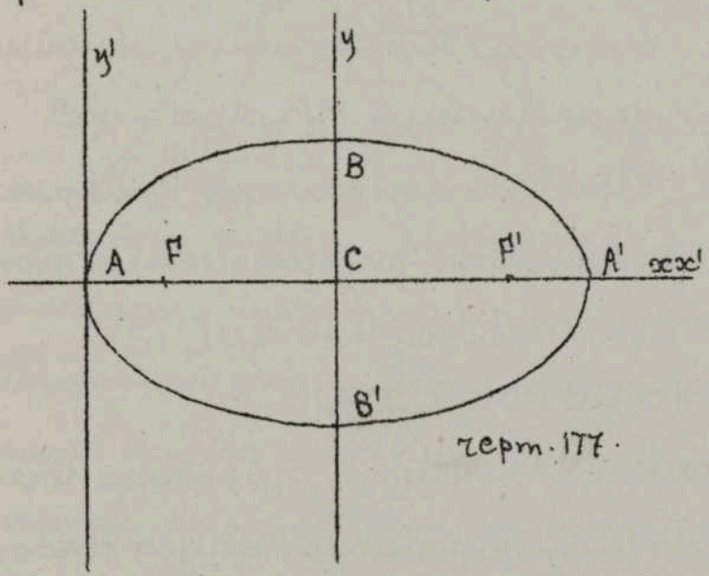
ими встретить только в бесконечности. Если θ будем принимать значения от $\theta=0$ до $\theta=-\alpha$, то r будет получать те же самые величины. Так что построив $\angle A'F'R'=-\alpha$, мы получим прямую, которая встретит кривую только в бесконечности. Таким образом наше уравнение дало только одну правую ветвь гиперболы. Чтобы еще определить направление $F'R$ и $F'R'$ вычислим угол φ. Очевидно, что $\varphi=180^\circ-\alpha$. Найдем его тангенс. $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon^2}}}{-\frac{1}{\varepsilon}}=+\sqrt{\varepsilon^2-1}$. Выразим ε через полуоси $\varepsilon^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$; следовательно $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}-1}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}$; окончательно получим $\operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{b}{a}$.

Это показывает, что эти две прямые параллельны асимптотам гиперболы. Точки левой ветви гиперболы получатся, когда мы θ будем изменять от $\theta=\alpha$ до $\theta=\pi$. и еще от $\theta=-\alpha$ до $\theta=\pi$. При этом значении θ мы будем иметь, что знаменатель $1+\varepsilon\cos\theta$ будет <0 и будем иметь $r<0$. Примем $r=-r_1$, где $r_1>0$. Возьмем какое-нибудь направление под углом большим α, $F'S$, тогда, так как r отрицательно, то чтобы получить точку кривой, нужно продолжить $F'S$ в противоположную сторону и отложить длину $F'M'=r_1$. Точка M' будет принадлежать гиперболе. В этом можно удостовериться и непосредственно. Проведем направляющую линию DD. Опустим из M' перпендикуляр на DD, $M'Q'$ и на полярную ось $M'P'$. Пусть $M'Q'=d_1$. Из чертежа имеем: $d_1=F'P'-OF'=r_1\cos(180^\circ-\theta)-q$ или $d_1=-r_1\cos\theta-q$, но $q=\frac{p}{\varepsilon}$, следовательно $d_1=-r_1\cos\theta-\frac{p}{\varepsilon}$; $-r_1=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$, следовательно $d_1=\frac{p\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}-\frac{p}{\varepsilon}=-\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon\cos\theta)}$.

Сравнивая d_1 съ r_1, мы прямо видимъ, что $d_1 = \frac{r_1}{\varepsilon}$ или $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$, а это показываетъ, что точка M' принадлежитъ гиперболѣ. И такъ наше полярное уравненіе даетъ не только всѣ точки правой вѣтви гиперболы, но и всѣ точки левой, если только будемъ строить отрицательныя значенія радіуса вектора.

Общее уравненіе трехъ кривыхъ 2го порядка, отнесенныхъ къ вершинѣ и фокальной оси.

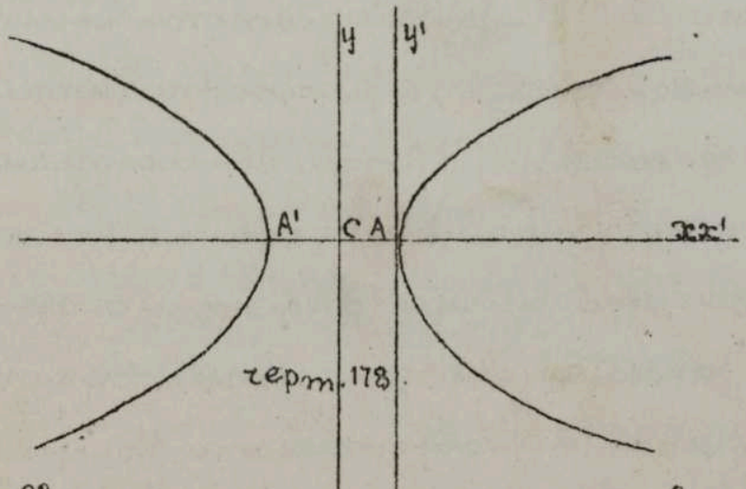
Разсмотримъ эллипсъ. Возмемъ его относительно центра и оси. Уравненіе эллипса есть: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перенесемъ начало координатъ въ вершину A (черт. 177), а за ось x примемъ ось Ax.



черт. 177.

Такъ какъ $AC = a$, то формулы перехода будутъ: $x = x' - a$, $y = y'$. Вставивъ въ уравненіе эллипса: $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{2x'}{a} + x' + \frac{y'^2}{b^2} = x'$, отсюда $y'^2 = \frac{2b^2}{a} x' - \frac{b^2}{a^2} x'^2$ или припомнивъ, что $\frac{b^2}{a} = p$ (полупараметру) $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a}$ и наше уравненіе будетъ $y'^2 = 2px' - \frac{p}{a} x'^2$.

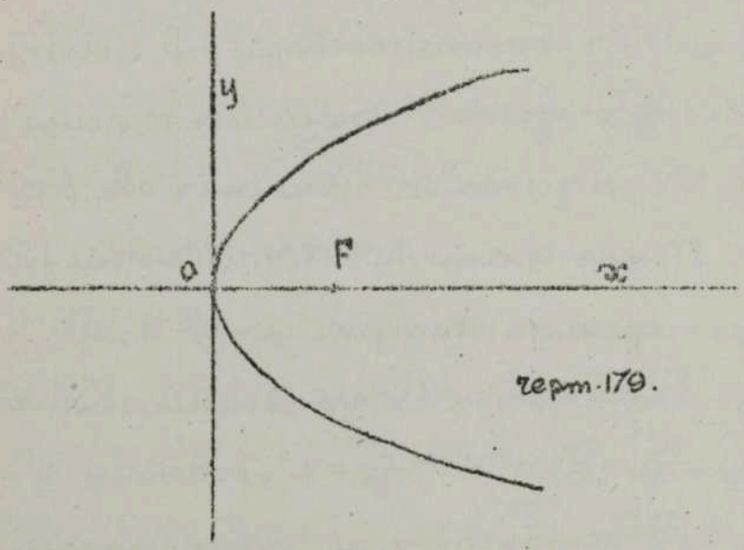
Возмемъ теперь гиперболу, отнесенную къ центру и къ осямъ



черт. 178.

Ея уравненіе будетъ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Перенесемъ координаты въ A. Формулы преобразованія будутъ: $x = x' + a$ и $y = y'$. Вставивъ это въ уравненіе, получимъ: $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{2x'}{a} + 1 - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, отсюда $y'^2 = \frac{2b^2}{a} x' + \frac{b^2}{a^2} x'^2$, если положимъ $\frac{b^2}{a} = p$, то уравненіе будетъ: $y'^2 = 2px' + \frac{p}{a} x'^2$.

Если къ уравненіямъ эллипса и гиперболы присоединимъ уравненіе параболы, отнесенной къ вершинѣ и сопряженной оси, т.е. уравненіе $y'^2 = 2px'$, то увидимъ, что всѣ эти три уравненія имѣютъ одинаковый видъ и сливаются въ общемъ уравненіи: $y^2 = 2px + qx^2$, гдѣ p есть полупараметръ кривой, а q для эллипса < 0 и равно $-\frac{p}{a}$, для гиперболы > 0 и равно $+\frac{p}{a}$ и для параболы $q = 0$. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что всѣ три кривыя: эллипсъ, гипербола и парабола, будучи отнесены къ вершинѣ и сопряженной оси будутъ выражаться общимъ уравненіемъ $y^2 = 2px + qx^2$.



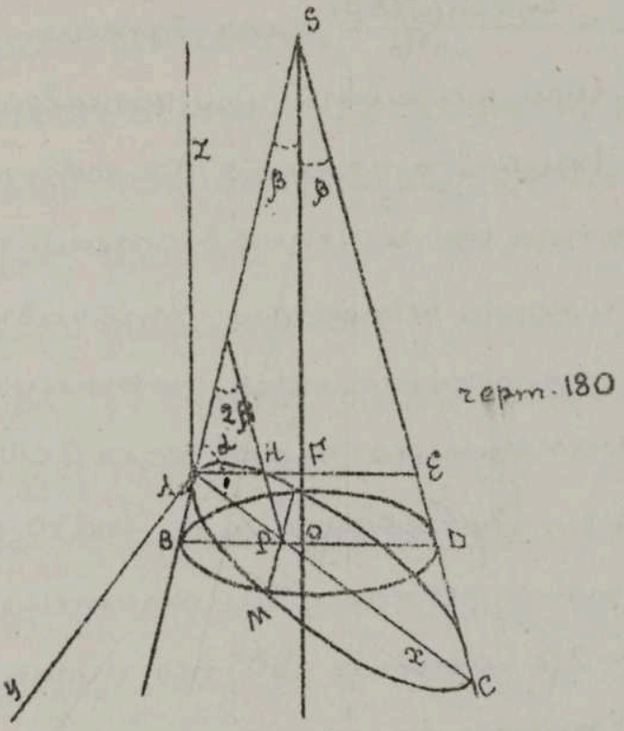
черт. 179.

При этомъ самая кривая имѣетъ расположеніе, показанное на чертежѣ (179).

О коническихъ сѣченіяхъ.

Всѣ три кривыя втораго порядка: эллипсъ, парабола и гипербола получаются при разсѣченіи прямаго конуса плоскостью въ различныхъ положеніяхъ. Возьмемъ прямой конусъ и пусть SS' есть ось конуса. Разсѣчемъ этотъ конусъ произвольною плоскостью и положимъ, что плоскость чертежа перпендикулярна къ сѣкущей плоскости. Тогда плоскость чертежа пересѣчетъ конусъ по двумъ прямымъ, одинаково наклоненнымъ къ оси. Пусть эти образующія сѣкутъ съ осью одинаковые углы $= \beta$. Пусть прямая Ax есть сѣченіе сѣкущей плоскости съ плоскостью чертежа. На поверхности конуса.

получится кривая линия AC. Положение секущей плоскости мы определим расстоянием AS=d и углом SAx=α. Чтобы изобразить кривую, полученную сечением, мы составим ее уравнение. Примем точку A за начало координат, прямую Ax за ось абсцисс. Ось ординат возьмем перпендикулярно к Ax в плоскости кривой. Возьмем на кривой произвольную точку M. Опустим из нее перпендикуляр MP на Ax. Будем иметь координаты точки: Ap=x; Mp=y. Прямая MP перпендикулярна к плоскости чертежа. Через эту прямую проведем плоскость, перпендикулярную к (плоскости чертежа) оси конуса SS'. Эта плоскость пересечет плоскость чертежа по прямой BD перпендикулярной к оси, а конус по кругу BMD. В круге BMD прямая PM будет средняя пропорциональная между отрезками диаметра PB и PD. Имеем поэтому: $y^2 = PB \cdot PD$. Рассмотрим Δ ABP. В нем имеем $\frac{PB}{x} = \frac{\sin(180-\alpha)}{\sin(90-\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$, откуда $BP = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}x$.



черт. 180

Чтобы выразить PD проведем через точку A параллель BD, линию AE; через P - линию PH, параллельно SC, имеем: $PD = BE = AE - AH = 2AF - AH = 2d\sin\beta - AH$. В треугольнике AHP, имеем: $\frac{AH}{x} = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\sin(90+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}$, отсюда $AH = \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}x$, откуда $PD = 2d\sin\beta - \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}x$. Выражение PB и PD вставим в выражение y^2, будем иметь $y^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}x\left(2d\sin\beta - \frac{\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}x\right)$ или

$y^2 = \frac{2d\,Sn\alpha\,Sn\beta}{Cs\beta} \cdot x - \frac{Sn(Sn\alpha + 2\beta)\,Sn\alpha}{Cs^2\beta} x^2$. Это есть уравнение нашей кривой и мы видимъ, что это уравнение имѣетъ такой видъ: $y^2 = 2px + qx^2$; здѣсь имѣемъ: $p = \frac{d\,Sn\alpha\,Sn\beta}{Cs\beta}$, а $q = -\frac{Sn\alpha \cdot Sn(\alpha+2\beta)}{Cs^2\beta}$, слѣдовательно кривая сѣченія есть или эллипсъ, или парабола или гипербола, причемъ начало A есть вершина кривой, а прямая Ax есть осевая ось кривой. Разсмотримъ, когда же именно въ сѣченіи получится эллипсъ, когда парабола и когда гипербола. Это зависитъ отъ знака q. Величина p всегда положительная, потомучто $Sn\beta$, $Sn\alpha$ и $Cs\beta$ величины положительныя, такъ какъ $\beta < 90°$, а $\alpha < 180°$ и слѣдовательно p всегда больше 0. Въ выраженіи q $Sn\alpha > 0$, $Cs^2\beta$ также же > 0 и знакъ q будетъ обратный со знакомъ множителя $Sn(\alpha+2\beta)$. Поэтому, если сумма угловъ $\alpha + 2\beta$ меньше 180°, то тогда $Sn(\alpha+2\beta)$ будетъ больше 0 и $q < 0$. Кривая будетъ эллипсъ. Если же $\alpha + 2\beta$ будетъ $= 180°$, то $Sn(\alpha+2\beta) = 0$ и $q = 0$. Кривая будетъ парабола. Наконецъ, если $\alpha + 2\beta > 180°$, то $Sn(\alpha+2\beta)$ будетъ < 0 и $q > 0$ и кривая будетъ гипербола; но обращаясь къ чертежу, мы видимъ, что углы α и 2β суть углы внутреннie, односторонніе относительно прямыхъ Ax и SD, слѣдовательно въ первомъ случаѣ эти прямыя будутъ пересѣкаться, во второмъ онѣ будутъ параллельны и въ третьемъ онѣ опять будутъ пересѣкаться, но при продолженіи ихъ въ противоположную сторону; но такъ какъ SD есть образующая конуса, то заключаемъ окончательно: 1), если секущая плоскость пересѣкаетъ всѣ образующія одной полости конуса, то въ сѣченіи получается эллипсъ. 2). Если секущая плоскость параллельна одной изъ образующихъ, то въ сѣченіи получимъ параболу и наконецъ, если секущая плоскость пересѣкаетъ образующую

обыкновенной полостей конуса, то в сечении получается гипербола. По обнаруженному свойству, кривыя второго порядка называются часто коническими сечениями.

Замѣчаніе о сѣченіи цилиндрическомъ.

Прямой круглый цилиндръ есть частный случай прямаго кругового конуса. Именно, чтобы этотъ конусъ перешелъ въ цилиндръ, стоитъ только уменьшать $\angle\beta$, удаляя вершину S въ ∞. Въ предѣлѣ образующая BS будетъ параллельна оси SS' и конусъ обратится въ цилиндръ, когда $\angle\beta$ будетъ $=0$. Изъ этого замѣчанія вытекаетъ возможность получить сѣченіе цилиндра, какъ частный случай разсмотрѣннаго нами коническаго сѣченія. Именно, примемъ точку A неподвижною, а вершину S будемъ удалять въ ∞. Положимъ, что $AB=R$. Эта величина будетъ оставаться постоянною. Изъ треугольника AOS имѣемъ: $R=d\sin\beta$ и уравненіе нашего сѣченія можно написать такъ: $y^2=\frac{2R\sin\alpha}{\cos\beta}x-\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}x^2$.

Чтобы получить цилиндрическое сѣченіе, нужно сдѣлать въ предѣлѣ $d=\infty$ и уголъ $\beta=0$. Уголъ α обратится въ уголъ $\angle Ax=\Theta$, причемъ Ax параллельна SS'. Въ предѣлѣ получимъ уравненіе:

$$y^2=2R\sin\Theta x-\sin^2\Theta x^2$$

Это уравненіе имѣетъ прежній видъ: $y^2=2px+qx^2$, но только здѣсь $q=-\sin^2\Theta$ и слѣдовательно всегда будемъ имѣть $q<0$.

Сѣченіе будетъ всегда Эллипсъ.

Объ касательныхъ линіяхъ къ кривымъ 2го порядка.

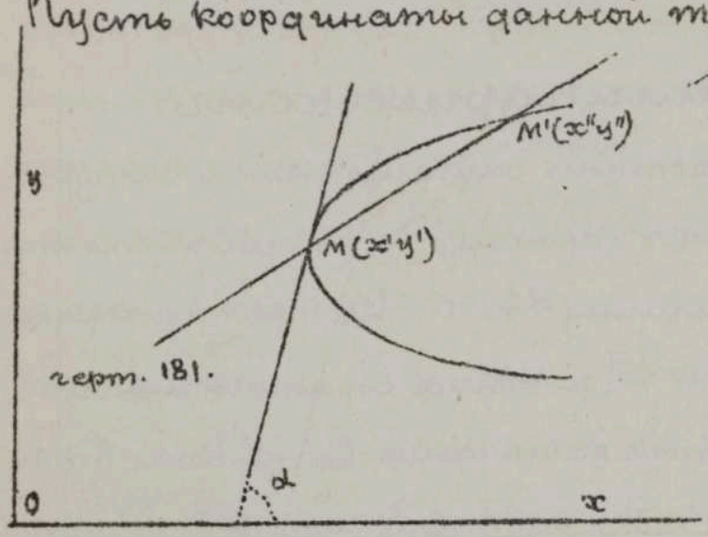
Составимъ впервыхъ общее уравненіе касательныхъ къ кривымъ второго порядка въ данной точкѣ. Пусть уравненіе кривой

будетъ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Пусть координаты данной точки M на кривой будутъ $(x'y')$. Проведемъ сначала секущую линію черезъ точку M, которая пересѣкаетъ кривую еще въ другой точкѣ $M'(x''y'')$. Затѣмъ представимъ себѣ, что точка M' перемѣщается по кривой и стремится совпасть съ точкою M. Касательная линія будетъ предѣльное положеніе секущей. Оно получится, когда точка M' совпадетъ съ M. Уравненіе секущей, какъ прямой, проходящей черезъ двѣ точки, будетъ: $y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x - x')$ и слѣдовательно $m = \frac{0}{0}$. Отсюда видно, что по этому выраженію m нельзя получить углового коэффиціента касательной. Это потому, что мы еще ничѣмъ не выразили, что точки M и M' лежатъ на данной кривой. Координаты этихъ точекъ M и M' удовлетворяютъ уравненію кривой, а потому имѣемъ:

$$Ax''^2 + Bx''y'' + Cy''^2 + Dx'' + Ey'' + F = 0$$
$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$



Вычитая отъ два уравненія получимъ:

$$A(x''^2 - x'^2) + B(x''y'' - x'y') + C(y''^2 - y'^2) + D(x'' - x') + E(y'' - y') = 0$$

Здѣсь въ коэффиціентъ при B прибавимъ и вычтемъ: $+x'y'' + x'y''$, затѣмъ напишемъ наше равенство такъ:

$$A(x'' - x')(x'' + x') + By''(x'' - x') + Bx'(y'' - y') + C(y'' - y')(y'' + y') + D(x'' - x') + E(y'' - y') = 0$$

или $(x'' - x')\left[A(x'' + x') + By'' + D\right] = -(y'' - y')\left[Bx' + C(y'' + y') + E\right]$. Отсюда пропорція: $\frac{y''-y'}{x''-x'} = -\frac{A(x''+x') + By'' + D}{Bx' + C(y''+y') + E}$. Это выраженіе представляетъ

угловой коэффициент секущей m, так что уравнение секущей можно написать так:

$$y - y' = -\frac{A(x''+x') + By'' + D}{Bx' + C(y''+y') + E}(x - x')$$

Чтобы перейти в касательной, нужно в этом уравнении положить:

$$x'' = x' \quad \text{и} \quad y'' = y'.$$

Получим уравнение касательной в точке $(x'y')$

$$y - y' = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}(x - x') \ldots\ldots (1)$$

Это уравнение касательной существует как при прямоугольных, так и при косоугольных осях. Если оси прямоугольные, то называя через α угол, образуемый касательной с осью абсцисс мы будем иметь: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}$

Уравнение касательной можно представить еще в другом виде. Для этого умножим на знаменатель и раскроем скобки:

$$[Bx' + 2Cy' + E]y - Bx'y' - 2Cy'^2 - Ey' = -[2Ax' + By' + D]x + 2Ax'^2 + Bx'y' + Dx'.$$

или $[2Ax' + By' + D]x + [Bx' + 2Cy' + E]y = 2(Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2) + Dx' + Ey'.$

Но $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = -Dx' - Ey' - F.$

Вставив, получим уравнение касательной:

$$[2Ax' + By' + D]x + [Bx' + 2Cy' + E]y + Dx' + Ey' + 2F = 0 \ldots\ldots (2)$$

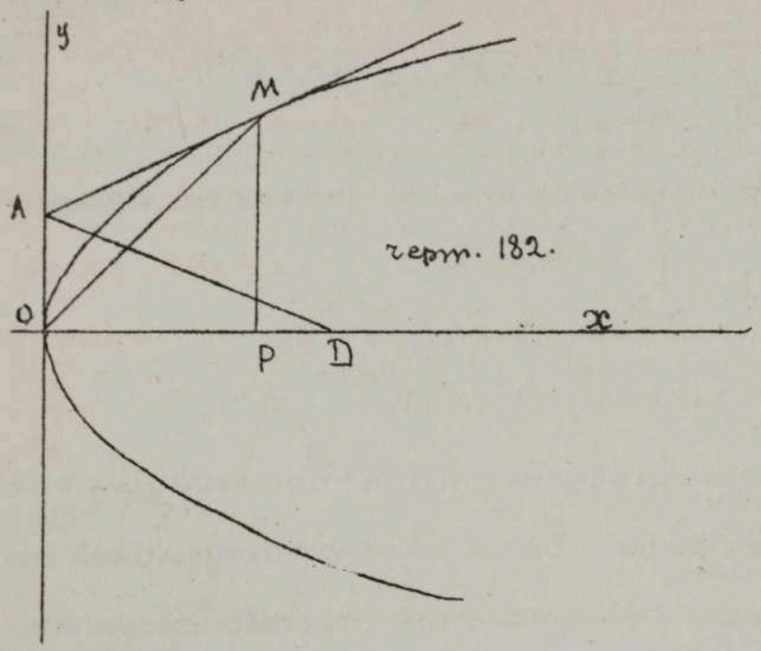
Зная уравнение касательной, мы можем построить касательную по ее уравнению. Построить касательную особенно удобно, когда кривая 2 порядка дана относительно вершины и осей. Припомнив, что в этом случае уравнение кривой есть: $y^2 - 2px - qx^2 = 0$

имеем в нем $A = -q$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -2p$, $E = 0$, $F = 0$.

Следовательно по формуле (1) уравнение касательной будет:

$$y - y' = -\frac{-2qx' - 2p}{2y}(x - x') = \frac{qx' + p}{y'}(x - x').$$

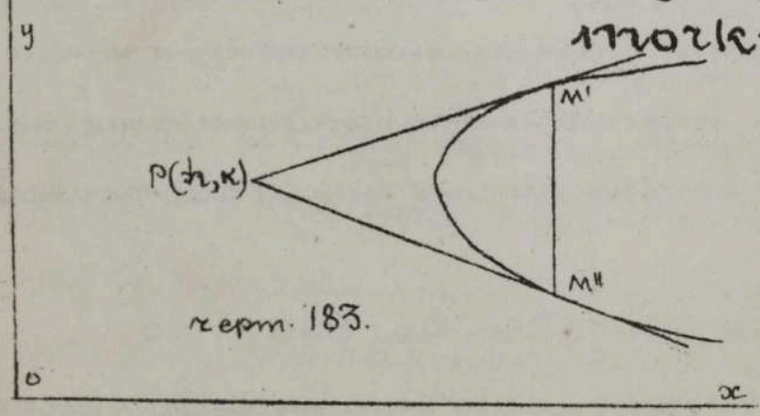
Вставимъ въ уравненіе (2). Пусть M есть данная точка $(x'y')$. Опредѣлимъ ординату точки пересѣченія касательной съ осью y; назовемъ эту ординату черезъ y_0, тогда для точекъ пересѣченія будемъ имѣть: $x=0$, а $y=y_0$ и уравненіе дастъ: $y_0-y_1=-\frac{qx'+px'}{y'}$, отсюда $y_0=y'-\frac{qx'+px'}{y'}$; $y_0=\frac{y'^2-qx'^2-px'}{y'}$ но $y'^2=2px'+qx'^2$, и потому $y_0=\frac{2px'+qx'^2-qx'^2-px'}{y'}=\frac{px'}{y'}$



черт. 182.

Эту величину можно построить слѣдующимъ образомъ (чер 182). Проведемъ ординату MP, отложимъ длину $OD=p$ (полупараметру), соединимъ O съ M и изъ точки D на линію OM опустимъ перпендикуляръ. Онъ пересѣчетъ ось y въ точкѣ A. Опредѣлимъ длину OA. $\Delta OMP \sim \Delta DAO$ и потому имѣемъ: $\frac{OA}{OD}=\frac{OP}{MP}$ или $\frac{OA}{p}=\frac{x'}{y'}$, отсюда $\frac{px'}{y'}=OA$. Мы видимъ, что $OA=y_0$, слѣдовательно, если точку A соединимъ съ M, то получимъ касательную.

Задача. Провести касательную къ кривой второго порядка изъ данной, внѣ лежащей, точки.



черт. 183.

Уравненіе кривой есть:
$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.
Пусть данная точка P имѣетъ координаты (h,k). Вообразимъ, что двѣ касательныя проведены. Пусть M' и M'' будутъ точки прикосновенія.

Прямая $M'M''$ называется хордою прикосновения, соответствующей точке P. Очевидно, что если мы составимъ уравнение этой хорды, то, построивъ эту прямую по ея уравнению, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ точки M' и M''. Затѣмъ, соединивъ эти точки съ P, мы получимъ двѣ требуемыя касательныя. И такъ рѣшеніе нашей задачи приводится къ составленію уравненія хорды соприкосновенія. Положимъ, что координаты точекъ M' и M'' суть $(x'y')$ и $(x''y'')$. Тогда уравненіе касательной $M'P$ по формулѣ (2) будетъ:

$$\left[2Ax' + By' + D\right]x + \left[Bx' + 2Cy' + E\right]y + Dx' + Ey' + 2F = 0$$

Координаты точки $P(h,k)$ должны удовлетворять этому уравненію. Поэтому будемъ имѣть:

$$\left[2Ax' + By' + D\right]h + \left[Bx' + 2Cy' + E\right]k + Dx' + Ey' + 2F = 0 \quad \ldots\ldots (1).$$

Точно такое уравненіе касательной PM'' по той же формулѣ (2) будетъ:

$$\left[2Ax'' + By'' + D\right)x + \left[Bx'' + 2Cy'' + E\right]y + Dx'' + Ey'' + 2F = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Напишемъ уравненіе (3) которое получится изъ уравненія (1) черезъ замѣну x' на x и y' на y, или изъ уравненія (2) черезъ замѣну x'' на x и y'' на y. Это уравненіе будетъ:

$$\left[2Ax + By + D\right)h + \left[Bx + 2Cy + E\right]k + Dx + Ey + 2F = 0 \quad \ldots\ldots (3).$$

Разсмотримъ, что представляетъ это уравненіе. Въ немъ x и y суть текущія координаты. Оно представляетъ нѣкоторую прямую линію, такъ какъ оно $1^{\text{ой}}$ степени относительно x и y. Эта прямая проходитъ черезъ точку M', потому что координаты этой точки x' и y', будучи вставлены вмѣсто x и y въ это уравненіе, удовлетворяютъ уравненію (3), какъ видно изъ равенства (1). Точно такая прямая (3) проходитъ черезъ точку M'', потому что, если координаты этой

точки вставимъ въ уравненіе (3), то оно обратится въ равенство (2), которое удовлетворяется, слѣдовательно прямая (3) проходитъ черезъ двѣ точки M' и M'' и потому эта прямая есть хорда соприкосновенія. Ея уравненіе напишутъ такъ:

$$[2Ah+Bk+D]x+[Bh+2Ck+E]y+Dh+Ek+2F=0 \ldots\ldots (a)$$

Если точка (h,k) такова, что изъ нея можно провести касательную къ кривой, то уравненіе (a) представитъ хорду соприкосновенія. Если точка (hk) лежитъ на самой кривой, то уравненіе (2) представляетъ касательную къ кривой въ этой точкѣ. Если точка (hk) такова, что изъ нея нельзя провести касательную, то уравненіе (a) представляетъ все таки совершенно опредѣленную прямую, этой точкѣ соотвѣтствующую. Прямая эта не должна пересѣкать кривой, потому что иначе она была бы хордою соприкосновенія и тогда, соединивъ точки ея пересѣченія съ кривой съ точкою (hk) мы должны бы были провести двѣ касательныя. Точка (hk) и соотвѣтствующая ей прямая (a) по отношенію къ данной кривой второго порядка носятъ особыя названія. Именно, точка (hk) называется полюсомъ, а прямая (a) полярою этой точки. Каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ своя полара. Главное свойство поляры заключается въ слѣдующей теоремѣ:

Если полара первой точки проходитъ черезъ полюсъ второй, то и полара второй точки проходитъ черезъ полюсъ первой.

Пусть имѣемъ точку $(x'y')$. Ея полара будетъ:

$$(2Ax'+By'+D)x+(Bx'+2Cy'+E)y+Dx'+Ey'+2F=0 \ldots\ldots (1)$$

Пусть другая точка есть $(x''y'')$. Ея полара будетъ:

$$(2Ax''+By''+D)x+(Bx''+2Cy''+E)y+Dx''+Ey''+2F=0 \ldots (2).$$

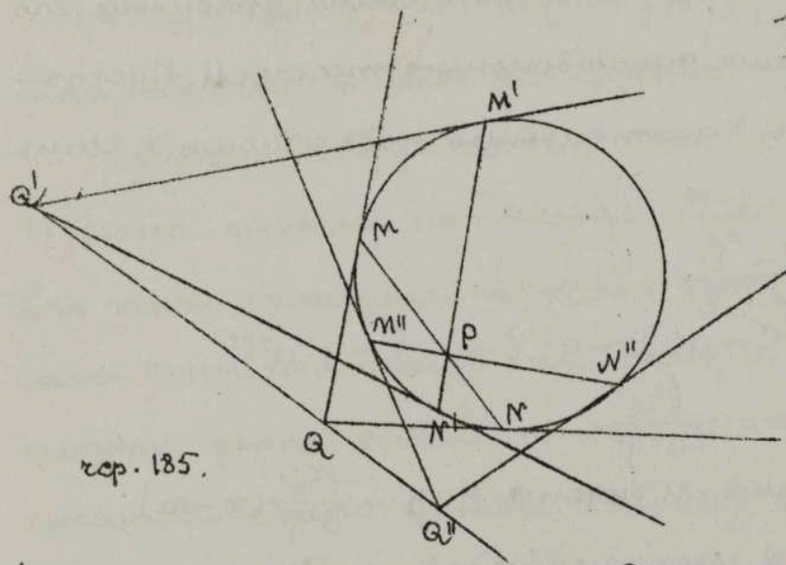
Положимъ, что первая прямая проходитъ черезъ полюсъ второй

значить координаты $(x''y'')$ удовлетворяют уравнению (1) и должны быть: $(2Ax'+By'+D)x''+(Bx'+2Cy'+E)y''+Dx'+Ey'+2F=0$

Это равенство можно написать в такомъ видѣ:

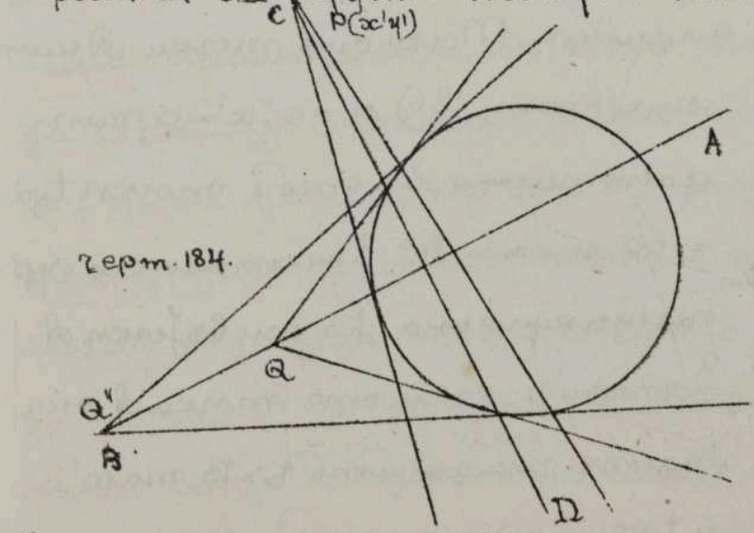
$$(2Ax''+By''+D)x'+(Bx''+2Cy''+E)y'+Dx''+Ey''+2F=0$$

Сравнивая это послѣднее равенство съ уравненіемъ (2) мы видимъ, что точка $(x'y')$ лежитъ на прямой (2), т.е. прямая (2) проходитъ черезъ полюсъ (1) прямой. Эта теорема даетъ замѣчательныя геометрическія построенія. Возьмемъ произвольную кривую второго порядка, для простоты кругъ. Пусть точка $(x'y')$ есть P и находится внѣ круга. Проведемъ двѣ касательныя и соединимъ точки прикосновенія. Прямая AB будетъ поляра точки P. Возьмемъ на ней произвольную точку Q. Ея координаты суть $(x''y'')$. Прямую AB назовемъ (1). Проведемъ изъ Q двѣ касательныя къ кругу и соединимъ точки прикосновенія.



чер. 185.

Прямая CD будетъ поляра точки Q, назовемъ ее (2). По теоремѣ она должна пройти черезъ точку P. Такъ будетъ для всякой другой точки, взятой на прямой AB. Возьмемъ теперь точку P внутри круга (черт. 185) Ея поляру можно получить по нашей теоремѣ такъ: проведемъ черезъ точку P произвольную хорду MN и въ точкахъ M и N



черт. 184.

касательныя къ кругу; ихъ пересѣченіе будетъ въ точкѣ Q. Q будетъ полюсъ прямой MN, сопряженной полюсу точки P должна проходить черезъ точку Q. Проведемъ черезъ точку P другую хорду N'M' и въ точкахъ M' и N' двѣ касательныя. Точка Q', ихъ пересѣченіе будетъ полюсомъ M'N', но прямая M'N' проходитъ черезъ P, сопряженною полюса точки P проходитъ черезъ O' и полярой точки P будетъ прямая QQ'. Отсюда слѣдуетъ, что если черезъ ту же точку P провести третью хорду N"M", то касательныя въ точкахъ M" и N" пересѣкутся на прямой QQ' въ нѣкоторой точкѣ Q".

Касательная къ эллипсу.

Возьмемъ эллипсъ, отнесенной къ центру и къ осямъ, уравненіе его будетъ $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$. Возьмемъ произвольную точку M. Пусть ея координаты $(x'y')$. Проведемъ касательную подъ угломъ α. Имѣемъ общую формулу

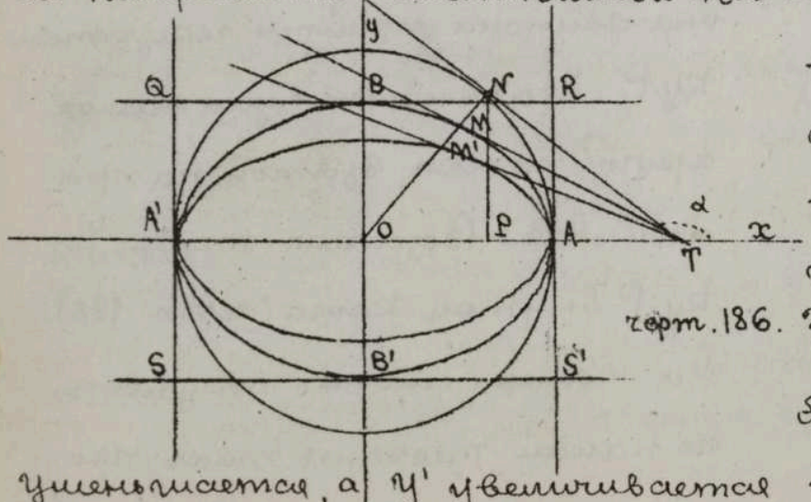
$$tg\alpha=-\frac{2Ax'+By'+D}{Bx'+2Cy'+E}$$

въ нашемъ случаѣ $A=b^2$, $B=0$, $C=a^2$, $D=0$, $E=0$, $F=-a^2b^2$

слѣдовательно $tg\alpha=-\frac{2b^2x'}{2a^2y'}=-\frac{b^2x'}{a^2y'}$.

Уравненіе касательной въ точкѣ M будетъ $y-y'=\frac{-b^2x'}{a^2y'}(x-x')$,

По формулѣ, выражающей $tg\alpha$, легко изслѣдовать, какъ измѣняется направленіе касательной на эллипсѣ. Такъ для точки A имѣемъ (черт. 186) $y'=0$, $x'=a$, слѣдовательно въ этой точкѣ $tg\alpha=-\infty$ и $\angle\alpha=90°$. Касательная перпендикулярна къ оси въ точкѣ A.



черт. 186.

Замѣтимъ, если отъ точки A она будетъ переходить къ B, то x' уменьшается, а y' увеличивается и $tg\alpha$ по абсолютной величинѣ

постоянно уменьшается, но он всегда будет отрицателен. Из этого следует, что угол, образуемый касательной с осью x будет всегда тупой и постоянно увеличиваться. В точке B будем иметь: $x'=0$, а $y'=b$, следовательно $\operatorname{tg}\alpha=0$ и угол $\alpha=180^\circ$, т.е. в точке B касательная параллельна оси x. Во второй четверти касательная запишется ряд подобных симметричных. Следовательно, если в вершинах эллипса провести четыре касательных, то получим прямоугольник, внутри которого заключен эллипс. Уравнение касательной к эллипсу можно написать еще в другой форме. Возьмем общее уравнение касательной:

$$(2Ax'+By'+D)x+(Bx'+2Cy'+E)y+Dx'+Ey'+2F=0$$

Для нашего случая оно будет:

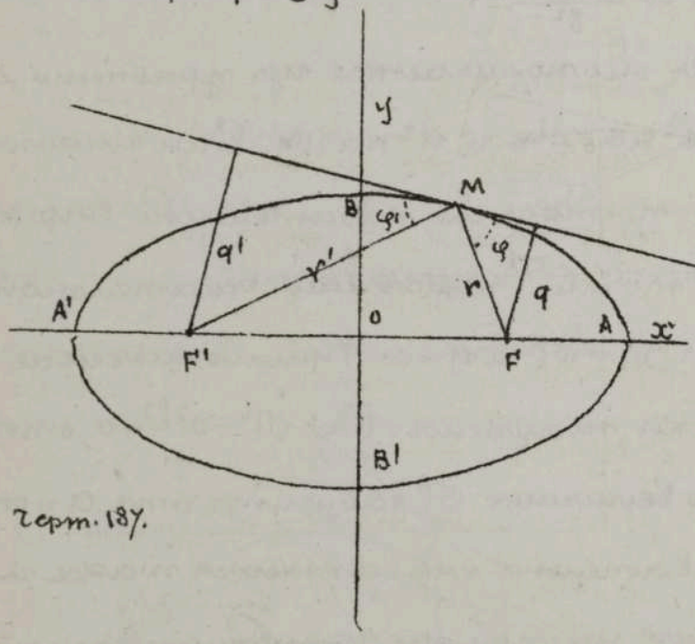
$$2b^2x'x+2a^2y'y-2a^2b^2=0 \text{ или } a^2y'y+b^2x'x-a^2b^2=0$$

Можно еще написать $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$.

Его легко запомнить, так как оно получается из уравнения самого эллипса через перемену x^2 на xx' и y^2 на yy'. Для эллипса можно дать особый способ для построения касательной. Определим с этою целью абсциссу точки T' пересечения касательной с осью x. В точке T' имеем: $x=OT'$ и $y=0$. Приравнивая уравнение касательной в этой точке, получим: $b^2x'\cdot OT'-a^2b^2=0$, откуда $OT'=\frac{a^2}{x'}$. Отсюда видно, что величина OT' зависит от a и от x', но не зависит от b, следовательно она остается также и для другого эллипса, построенного на той же большой оси, если на нем возьмем точку с тою же абсциссою x'. Так, возьмем ось до точки B' и построим эллипс, тогда касательная в M' пройдет через T'. Следовательно также величина OT' будет относиться

и къ точкѣ, взятой на кругѣ, описанномъ на большой оси, какъ на діаметрѣ, имѣющей тѣмъ же абсциссу x', потому что кругъ есть частный случай эллипса. Онъ получается, когда возьмемъ $b = a$. Опишемъ его, продолживъ MP до точки N; касательная въ точкѣ N пройдетъ черезъ T. Отсюда способъ для построенія касательной. Чтобы получить касательную къ эллипсу въ точкѣ M, изъ центра O, радіусомъ $= OA$ опишемъ полуокружность. Ординату MP продолженіемъ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ N. Точку N соединимъ съ O, изъ N къ OM возставимъ перпендикуляръ. Онъ пересѣчетъ ось x въ точкѣ T и точку T соединимъ съ M. Это и будетъ касательная. Кромѣ этого способа есть еще другой, который употребляется, когда даны фокусы эллипса. Онъ основанъ на слѣдующей теоремѣ:

Углы, образуемые касательной, съ радіусами векторами, равны между собою.



черт. 187.

Назовемъ эти углы черезъ φ и φ', а перпендикуляры, опущенные изъ фокусовъ на касательную черезъ q и q'. Уравненіе касательной будетъ: $b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2 = 0$

Для опредѣленія q и q' обращаемъ въ нормальный видъ и подставляемъ въ правую часть координаты точекъ $F(ae, 0)$ и $F'(-ae, 0)$;

$$q = -\frac{b^2 ae x' - a^2b^2}{\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}}$$

$$q' = -\frac{-b^2 ae x' - a^2b^2}{\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}}$$

Мы берем здесь знак (−) потому что точки F и F' лежат по одной стороны касательной, где начало координат.

Преобразуем: $q = \frac{ab^2(a-\varepsilon x')}{\sqrt{b^4x'^2+a^4y'^2}}$, $q' = \frac{ab^2(a+\varepsilon x')}{\sqrt{b^4x'^2+a^4y'^2}}$ ..... (К)

Применяем формулы радиусов векторов: $MF = r$ и $MF' = r'$,

$$r = a - \varepsilon x', \quad r' = a + \varepsilon x'$$

и имеем из формулы (К) $\frac{q}{r} = \frac{q'}{r'} = \frac{ab^2}{\sqrt{b^4x'^2+a^4y'^2}}$

Так как $\frac{q}{r} = \sin\varphi$, $\frac{q'}{r'} = \sin\varphi'$, то $\varphi = \varphi'$. Докажем теперь, что произведение перпендикуляров, опущенных из фокусов на касательную, равно квадрату малой полуоси.

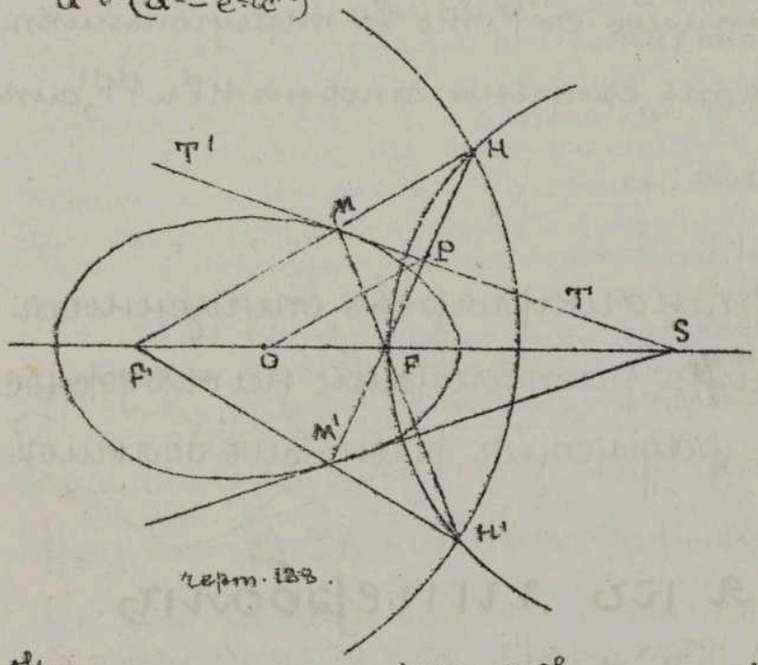
Перемножаем формулы (К) $qq' = \frac{a^2b^4(a^2-\varepsilon^2x'^2)}{b^4x'^2+a^4y'^2}$

Заменим здесь y'^2 через x'^2 из уравнения эллипса:

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2; \quad y'^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x'^2}{a^2}$$

получаем: $qq' = \frac{a^2b^4(a^2-\varepsilon^2x'^2)}{b^4x'^2+a^4b^2-a^2b^2x'^2} = \frac{a^2b^4(a^2-\varepsilon^2x'^2)}{a^2b^2(a^2-x'^2(1-\frac{b^2}{a^2}))} = \frac{a^2b^4(a^2-\varepsilon^2x'^2)}{a^2b^2\left[a^2-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x'^2\right]} =$

$= \frac{a^2b^4(a^2-\varepsilon^2x'^2)}{a^2b^2(a^2-\varepsilon^2x'^2)} = b^2$



черт. 128.

Равенство углов φ и φ' дает весьма простой способ для построения касательной в данной точке. Именно, положим, что касательная TT' проведена, продолжим $F'M$ и FP до точки H. Два треугольника FMP и HMP равны, следовательно $MH = MF$, а потому, чтобы получить касательную, нужно, продолжив $F'M$, отложить $MH = MF$, точку H соединить с F, линией HF раздвинуть положение и соединить точку деления с точкой прикосновения, это будет касательною. Наша теорема дает

способъ для проведенія касательной къ эллипсу изъ внѣшней точки. Пусть внѣшняя точка есть S и вообразимъ, что касательная ST проведена. Соединимъ S съ H и съ F'; изъ равенства треугольниковъ SPH и SPF' имѣемъ SH = SF', притомъ точка H отъ точки F' находится на разстояніи, равномъ MF'+MH = MF'+MF = 2a. Вслѣдствіе этого точка H опредѣлится, какъ пересѣченіе двухъ окружностей одной, описанной изъ F', радіусомъ равнымъ 2a и второй, описанной изъ S радіусомъ равнымъ SF. Когда точка H будетъ опредѣлена, то соединивъ H съ F и опустивъ изъ S перпендикуляръ на HF, мы получимъ касательную SPMP'. Двѣ описанныя нами окружности пересѣкутся въ двухъ точкахъ. Пусть H' будетъ другая точка изъ пересѣченія. Она послужитъ для проведенія другой касательной къ эллипсу. Именно соединивъ F съ H' и опустивъ изъ S на H'F перпендикуляръ, получимъ другую касательную S'M'. Наконецъ замѣтимъ, что если O соединимъ съ P, то въ треугольникѣ HFF' линія OP будетъ соединять средины сторонъ HF и FF', слѣдовательно $OP = \frac{1}{2} HF' = \frac{1}{2} 2a = a$.

Отсюда заключаемъ:

Теорема. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на касательную, расположены на окружности, описанной изъ центра радіусомъ, равнымъ большой полуоси.

Касательная къ гиперболѣ.

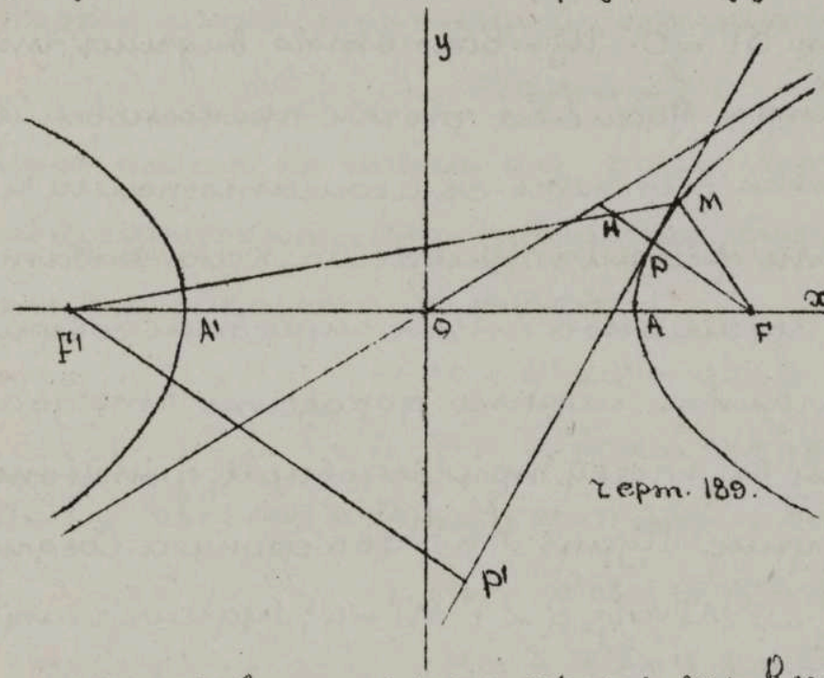
Уравненіе гиперболы есть $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$.

Оно получается изъ уравненія эллипса черезъ перемѣну b^2 на $-b^2$, поэтому уравненіе касательной къ гиперболѣ можно на—

писать прямо, взявъ уравненіе касательной къ эллипсу и перемѣнивъ въ немъ b^2 на $-b^2$. Получаемъ два вида уравненій:

$y-y'=\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x')$ и $a^2yy'-b^2x'x+a^2b^2=0$; $\frac{x'x}{a^2}-\frac{y'y}{b^2}=1$.

Послѣднее уравненіе касательной получается прямо изъ уравненія гиперболы черезъ перемѣны y^2 на yy' и x^2 на $x'x$. Разсмотримъ теперь, какъ измѣняется направленіе касательной линіи къ гиперболѣ. Мы имѣемъ $tg\alpha=\frac{b^2x'}{a^2y'}$ Въ точкѣ A имѣемъ $y=0$, $x=a$ и $tg\alpha=\infty$.



черт. 189.

Касательная перпендикулярна къ оси x въ точкѣ A. Если точку прикосновенія будемъ по верхней вѣтви удалять въ правую сторону, то всегда будетъ $tg\alpha>0$. и $\alpha<90°$ При этомъ x' увеличивается и y' увеличивается. Чтобы видѣть, какъ измѣняется $tg\alpha$, мы выразимъ его въ функціи одного x'. Изъ уравненія гиперболы найдемъ: $y'=\frac{b}{a}\sqrt{x'^2-a^2}$, слѣдовательно:

$$tg\alpha=\frac{b^2x'}{a^2\frac{b}{a}\sqrt{x'^2-a^2}}=\frac{bx'}{a\sqrt{x'^2-a^2}}=\frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x'^2}}}.$$

Теперь видно, что если x' увеличивается, то знаменатель увеличивается, а $tg\alpha$ и уголъ α уменьшается.

При $x'=\infty$, получимъ: $tg\alpha=\frac{b}{a}$.

но припомнимъ, что если черезъ φ обозначимъ уголъ, дѣлаемый ассимптотами съ осью x, то будемъ имѣть: $tg\varphi=\frac{b}{a}$, то слѣдовательно $\angle\alpha>\angle\varphi$ и $\angle\alpha$ стремится сдѣлаться равнымъ $\angle\varphi$ по мѣрѣ удаленія точки M въ бесконечность, такъ что $\lim\alpha=\varphi$

Разсмотримъ отрѣзокъ OT', отсѣкаемый касательной по оси x. Въ точкѣ T' будетъ $x = OT'$, а $y = 0$. Примѣняя уравненіе касательной, получимъ: $b^2 x \cdot OT' - a^2 b^2 = 0$, откуда $OT' = \frac{a^2}{x}$.

Отсюда видно, что $OT' > 0$ и точка T' всегда вправо отъ точки O. Съ удаленіемъ точки M въ безконечность, OT' стремится къ 0, такъ что при $x' = \infty$ вѣтъ $OT' = 0$. Изъ всего этого видимъ, что касательная линія по мѣрѣ удаленія точки прикосновенія въ безконечность стремится совпасть съ ассимптотами и ассимптота можетъ быть разсматриваема, какъ касательная въ точкѣ, безконечно удаленной. Для гиперболы совершенно такимъ же, какъ и для эллипса, можно доказать, что два радіуса вектора проведены въ точку прикосновенія, съ касательной равные углы. Пусть F и F' два фокуса. Соединимъ ихъ съ M и пусть $\angle FMT' = \varphi$ а $\angle F'MT = \varphi'$, будемъ имѣть $\varphi = \varphi'$.

Докажемъ это точно такимъ же вычисленіемъ, какъ и для эллипса. Разница будетъ состоять единственно въ томъ, что надо перемѣнить b^2 на $-b^2$. Называя два перпендикуляра, опущенные изъ фокусовъ на касательную черезъ q и q', получимъ точно такое же $q \cdot q' = b^2$.

Равенство угловъ φ и φ' даетъ простой способъ для построенія касательной. Именно проводимъ два радіуса вектора FM и $F'M$, отложимъ $MN = MF$. Соединимъ точку N съ F' и изъ M на линію $F'N$ опустимъ перпендикуляръ, это и будетъ касательная.

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ.

Возьмем гиперболу, отнесенную к ее осям и составим преобразование координат, принявъ за новыя оси ассимптоты гиперболы. Уравнение гиперболы, отнесенной къ осям, есть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть уголъ, образуемый ассимптотой съ осью x, есть φ, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

Принимая за новыя оси ассимптоты Ox' и Oy', получимъ: $\angle x'Oy' = 2\varphi$, слѣдовательно новыя оси будутъ косоугольныя. Формулы преобразования будутъ:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta.$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta.$$

но $\alpha = 360^\circ - \varphi$ и $\beta = \varphi$; формулы будутъ:

$$x = x'\cos\varphi + y'\cos\varphi$$

$$y = -x'\sin\varphi + y'\sin\varphi$$

или

$$x = (y' + x')\cos\varphi$$

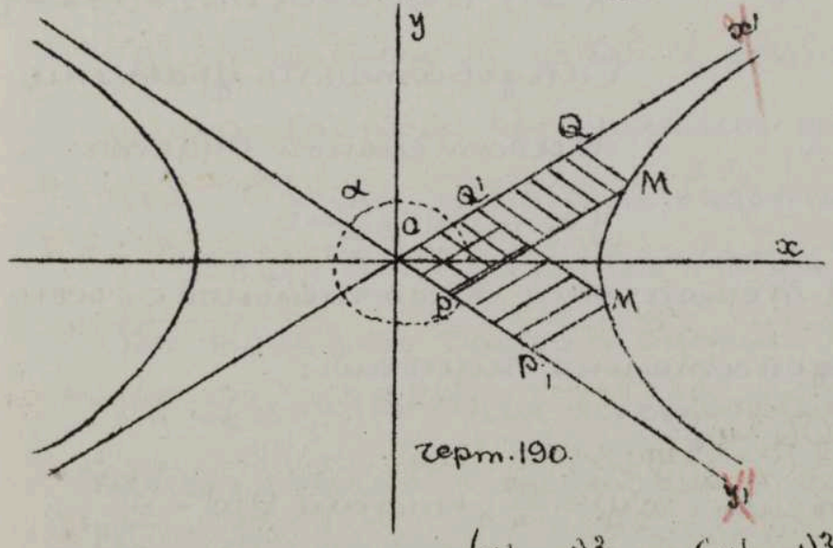
$$y = (y' - x')\sin\varphi.$$

Но $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $a\sqrt{a^2+b^2} = c$, слѣдовательно $\cos\varphi = \frac{a}{c}$.

$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{c}$; слѣдовательно формулы преобразования координатъ будутъ:

$$x = \frac{a}{c}(y' + x')$$

$$y = \frac{b}{c}(y' - x').$$

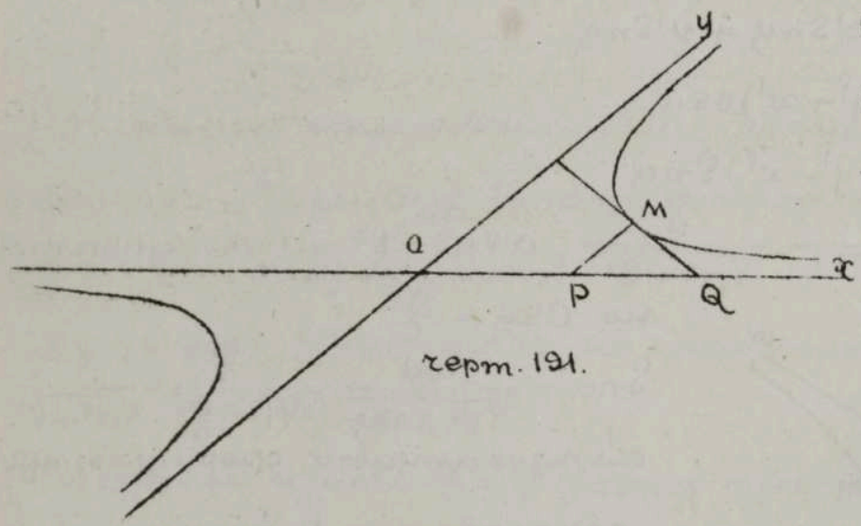


черт. 190.

Вставивъ въ уравнение кривой, получимъ: $\frac{(y'+x')^2}{c^2} - \frac{(y'-x')^2}{c^2} = 1$ или $y'^2 + 2x'y' + x'^2 - y'^2 + 2x'y' - x'^2 = c$ или $4x'y' = c$ или $x'y' = \frac{c^2}{4}$.

Это и есть уравнение гиперболы, отнесенной къ асимптотамъ. Это уравнение имѣетъ особое геометрическое симпато. и значеніе. Возьмемъ произвольную точку M на кривой и построимъ ея новыя координаты. Получимъ параллелограммъ OPMQ. Его площадь $OPMQ = x'y' \sin 2\varphi$ или площадь $OPMQ = \frac{c^2}{4} \sin 2\varphi$; слѣдовательно площадь параллелограмма, построеннаго на координатахъ гиперболы, отнесенной къ асимптотамъ, имѣетъ величину постоянную. Опредѣляя эту величину, мы имѣемъ: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{2ab}{c^2}$, слѣдовательно площадь $OPMQ = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{2ab}{c^2} = \frac{ab}{2}$. Эта площадь равна половинѣ площади прямоугольника, построеннаго на полуосяхъ. Возьмемъ отдѣльно гиперболу, отнесенную къ асимптотамъ. Ея уравненіе будетъ $xy = \frac{c^2}{4}$. Составимъ уравненіе касательной въ точкѣ $M(x'y')$. Общее ур-іе будетъ $[2Ax' + By' + D]x + [Bx' + 2Cy' + E]y + Dx' + Ey' + 2F = 0$. Въ нашемъ случаѣ $A = 0, B = 1, C = 0, D = E = 0, F = -\frac{c^2}{4}$. Слѣдовательно уравненіе касательной будетъ:

$$y'x + x'y - \frac{c^2}{2} = 0$$



черт. 121.

Найдемъ абсциссу точки Q пересѣченія касательной со осью x. Въ ней $y = 0, x = OQ$, слѣдовательно имѣемъ:

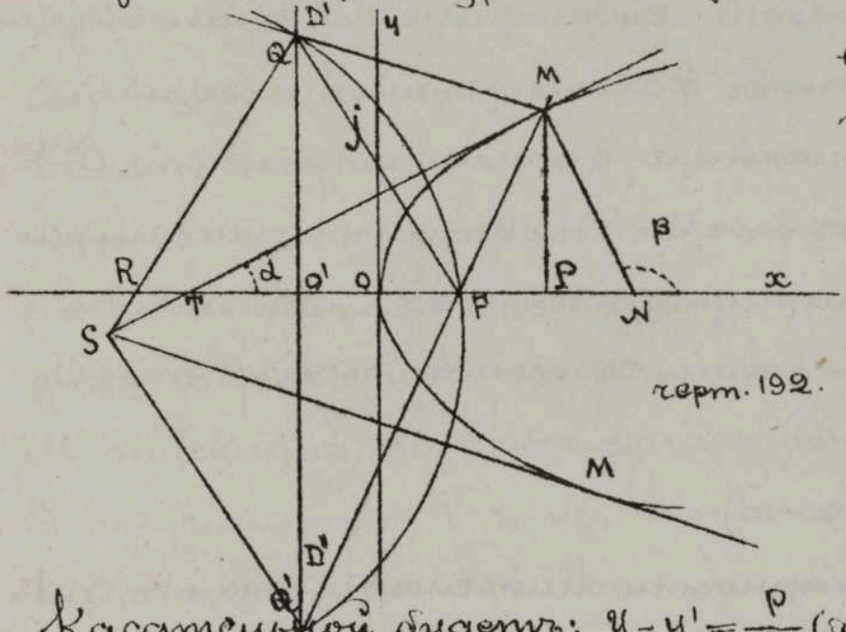
$$y' \cdot OQ = \frac{c^2}{2} \text{ и } OQ = \frac{c^2}{2y'}.$$

По уравненію кривой имѣемъ: $x'y' = \frac{c^2}{4}$, отсюда $2x' = \frac{c^2}{2y'}$, слѣдовательно: $OQ = 2x'$ или $OQ = 2OP$.

Отсюда следует, что получится касательная, если отложить от точки P вправо PQ = OP и точку Q соединить с M.

Касательная к параболе.

Возьмем параболу, отнесенную к вершине и к оси. Уравнение ее есть: $y^2 - 2px = 0$.



черт. 192.

Возьмем на ней точку $M(x'y')$

По общей формуле имеем:

$$tg\alpha = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}.$$

В нашем случае $A = B = E = F = 0$, $C = 1$, $D = -2p$, следовательно имеем:

$$tg\alpha = -\frac{-2p}{2y'} = \frac{p}{y'}.$$ Уравнение

Касательной будет: $y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$. Исследуем, как изменяется направление касательной на параболе. Для точки O имеем: $y' = 0$ и $tg\alpha = \infty$, следовательно $2\alpha = 90°$. Касательная перпендикулярна к оси. Если точка прикосновения с вершиной двигается вверх по параболе, то y' постоянно увеличивается и следовательно $tg\alpha$, оставаясь постоянно > 0, уменьшается и угол α, оставаясь постоянно острым, уменьшается. Составим другой вид уравнения касательной. Общее уравнение будет:

$$(2Ax' + By' + D)x + (Bx' + 2Cy' + E)y + Dx' + Ey' + 2F = 0$$

В нашем случае будем иметь: $-2px' + 2yy' - px = 0$ или $yy' = (x + x')p$. Для построения касательной определим абсциссу точки T' пересечения ее с осью x. В точке T' имеем: $x = -OT'$, $y = 0$, следовательно, вставив, получим:

$O = p(-OT' + x')$; $OT' = x'$.

Отрезок $T'p = 2x'$. Этот отрезок представляет разстояние отъ подошвы ординаты до точки встрѣчи касательной съ осью x. Онъ называется субтангенсомъ и мы видимъ, что въ параболѣ субтангенсъ равенъ двойной абсциссѣ. Чтобы построить касательную, довольно отложить $OT = OP$ и точку T' соединить съ M. Проведемъ нормальную линію, т.е. перпендикулярную къ касательной MN. Называя уголъ нормальной линіи съ осью x чрезъ β, напишемъ уравненіе нормальной:

$$y - y' = tg\beta(x - x')$$

Но по условію перпендикулярности имѣемъ: $tg\beta tg\alpha + 1 = 0$, или $tg\beta \frac{p}{y'} + 1 = 0$, отсюда $tg\beta = -\frac{y'}{p}$, слѣдовательно уравненіе нормальной будетъ: $y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$.

Опредѣлимъ точку N, пересѣченія нормальной съ осью x. Въ ней $x = ON$, а $y = 0$, слѣдовательно: $-y' = -\frac{y'}{p}(ON - x')$ или $p = ON - x'$, отсюда $ON = p + x'$. Слѣдовательно $PN = ON - x' = p$. Отрезокъ PN представляетъ разстояніе отъ подошвы ординаты до точки встрѣчи нормальной съ осью x. Онъ называется субнормальною и мы видимъ, что во всякой точкѣ параболы субнормальная имѣетъ величину постоянную и равную полупараметру p. Это даетъ способъ для построенія нормальной. Именно, отложивъ отъ точки P длину $PN = p$ и соединивъ точку N съ M, получимъ нормаль-ную. Есть еще способъ для построенія Касательной. Соединимъ точку M съ N хордою. По извѣстному выра-

ясенно радіуса вектора въ параболѣ имѣемъ:

$$MF' = \frac{p}{2} + x.$$

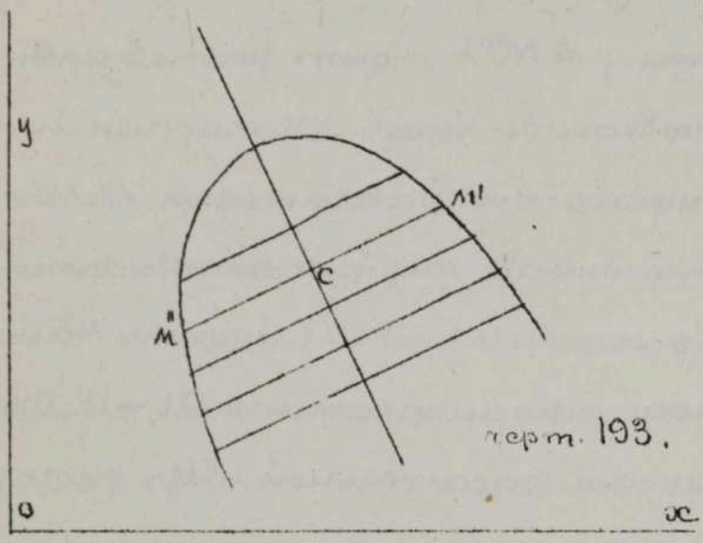
но съ другой стороны: $F'T = OF + OT = \frac{p}{2} + x$.

слѣдовательно $MF' = F'T$, а потому $\Delta MTF'$ будетъ равнобедренный и уголъ TMF' равенъ α. Проведемъ черезъ M параллельно оси параболы и пусть $D'D''$ будетъ направляющая. $\angle QMT = \alpha$. Если Q соединимъ съ F', то эта линія пересѣчетъ касательную въ точкѣ j и два треугольника QMj и $F'Mj$ будутъ равны, слѣдовательно эти треугольники прямоугольные и $Qj = jF'$. Отсюда такой способъ для построенія касательной. Изъ точки M опускаемъ перпендикуляръ MQ на направляющую, точку Q соединимъ съ F' и изъ точки M на линію QF' опускаемъ перпендикуляръ Mj. Это и будетъ касательная. Положимъ, что требуется провести касательную изъ внѣшней точки S. Соединимъ эту точку съ Q и съ F', сыи найдемъ, что $SQ = SF'$, а потому точку Q можно опредѣлить, описавъ изъ точки S радіусомъ, равнымъ SF' окружность, и когда опредѣлимъ точку Q, то соединивъ ее съ F', изъ точки S на линію QF' опустимъ перпендикуляръ. Это и будетъ касательная. При томъ описанная окружность пересѣчетъ направляющую ее въ другой точкѣ Q'. Соединивъ ее съ F' и опустивъ перпендикуляръ на $F'Q'$ изъ S, получимъ другую касательную.

О діаметрѣ кривыхъ 2го порядка.

Діаметромъ кривыхъ называется геометрическое мѣсто срединъ ряда параллельныхъ хордъ. Пусть уравненіе кривой будетъ: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ..... (1).

Положим координаты прямоугольными. Возьмем данную кривую и вообразим ряд параллельных хорд.



черт. 193.

Общее уравнение этих хорд будет $y = mx + k$ ..... (2).

Для всех хорд m одна и та же величина, а k переменная и изменяет свою величину при переходе от одной хорды до другой. Разместим одну из этих хорд $M'M''$. Пусть C ея средина. Координаты точек M' и M'' найдутся, решая два уравнения относительно x и y. (1) и (2) Будем решать их: исключим y:

$$Ax^2 + Bx(mx+k) + C(m^2x^2 + 2mxk + k^2) + Dx + E(mx+k) + F = 0.$$

или $(A + Bm + Cm^2)x^2 + (Bk + 2Cmk + D + Em)x + Ck^2 + Ek + F = 0.$

Это уравнение имеет два корня x' и x''. Эти корни суть абсциссы точек M' и M''. Координаты средины C обозначим через $(x'\,y')$, мы будем иметь:

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2} \qquad y_1 = mx_1 + k;$$

потому что точка C средина на прямой (2) по свойству корней квадратного уравнения имеем:

$$x' + x'' = -\frac{Bk + 2Cmk + D + Em}{A + Bm + Cm^2}$$

Следовательно будем иметь:

$$x_1 = -\frac{(B + 2Cm)k + D + Em}{2(A + Bm + Cm^2)}$$

$$y_1 = mx_1 + k.$$

Эти два равенства определяют координаты x_1, y_1 средины

нѣкоторой опредѣленной хорды, такъ какъ эти координаты зависятъ отъ K, но если мы изъ этихъ двухъ равенствъ исключимъ K, то мы получимъ нѣкоторую зависимость между координатами x_1 и y_1, эта зависимость будетъ существовать, какое бы значеніе не дали количеству K, слѣдовательно это будетъ соотношеніе между координатами средины какой угодно изъ даннаго ряда параллельныхъ хордъ, т.е. это и будетъ искомое уравненіе діаметра. Исключимъ же K:

$$K = y_1 - mx_1$$

$$x_1 = -\frac{(B+2Cm)(y_1-mx_1)+D+Em}{2(A+Bm+Cm^2)}$$

или $2(A+Bm+Cm^2)x_1+(B+2Cm)(y_1-mx_1)+D+Em=0$

или $(2A+2Bm+2Cm^2-Bm-2Cm^2)x_1+(B+2Cm)y_1+D+Em=0$

$$(2A+Bm)x_1+(B+2Cm)y_1+D+Em=0.$$

Это уравненіе будетъ первой степени относительно $x_1 y_1$, слѣдовательно оно представляетъ прямую линію, изъ чего слѣдуетъ, что діаметры кривыхъ второго порядка суть прямыя линіи. Такъ какъ теперь $x_1 y_1$ будутъ означать текущія координаты діаметра, то уравненіе это можно будетъ написать такъ:

$$(2A+Bm)x+(B+2Cm)y+D+Em=0$$

Иначе $2Ax+By+D+(Bx+2Cy+E)m=0$.

Это будетъ уравненіе діаметра, дѣлящаго пополамъ ряды параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Ясно, что для всякаго даннаго ряда параллельныхъ хордъ существуетъ соотвѣтствующій діаметръ, дѣлящій эти хорды пополамъ. Относительно расположенія діаметровъ кривыхъ второго порядка нужно различать кривыя, имѣющія центръ

и Крылья, не имеющія центра. 1, Если кривая имѣетъ центръ, то всѣ діаметры проходятъ черезъ центръ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть координаты центра будутъ α и β. Мы знаемъ, что эти координаты удовлетворяютъ такимъ уравненіямъ:

$$2A\alpha + B\beta + D = 0$$
$$B\alpha + 2C\beta + E = 0$$

Вслѣдствіе этого эти координаты удовлетворяютъ и уравненію всякаго діаметра, такъ какъ, вставляя ихъ въ уравненіе діаметра, мы получимъ: $[2A\alpha + B\beta + D] + m[B\alpha + 2C\beta + E] = 0 + m0 = 0$. Обратно, можно сказать, что всякая прямая, проходящая черезъ центръ, будетъ діаметромъ. Въ самомъ дѣлѣ, центръ можно разсматривать, какъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ линій, которыхъ уравненія суть:

$$2Ax + By + D = 0$$
$$Bx + 2Cy + E = 0$$

Но уравненіе всякой прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ, выразится такимъ уравненіемъ: $2Ax + By + D + \lambda(Bx + 2Cy + E) = 0$, гдѣ λ произвольный множитель, а сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ діаметра, мы видимъ, что оно представляетъ діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды съ угловымъ коэффиціентомъ λ, слѣдовательно всякая прямая, проходящая черезъ центръ, будетъ діаметромъ.

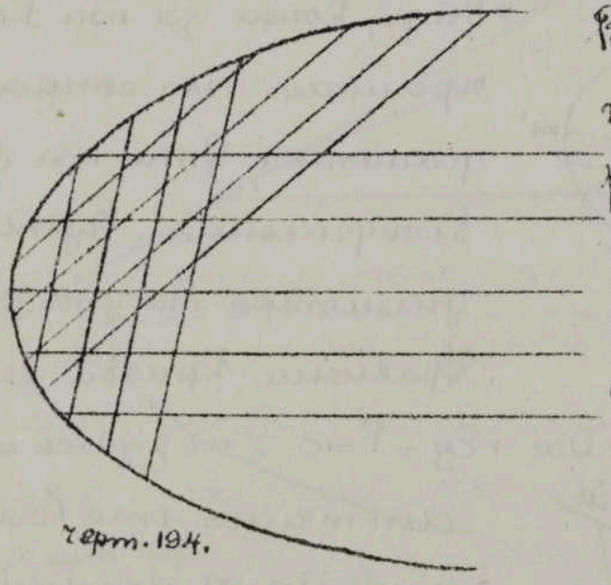
2, Въ параболѣ всѣ діаметры параллельны. Чтобы доказать это, напишемъ уравненіе діаметра такъ:

$$y = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm}x - \frac{D + Em}{B + 2Cm}.$$

и угловой коэффиціентъ діаметра будетъ m'. Онъ равенъ:

$$m' = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm}.$$

Но въ случаѣ параболы $B^2 - 4AC = 0$ или $B^2 = 4AC$ и отсюда $\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C}$, но съ другой стороны: $m' = -\frac{B\left(\frac{2A}{B} + m\right)}{2C\left(\frac{B}{2C} + m\right)} = -\frac{B}{2C}$, т.е. въ параболѣ угловой коэффиціентъ всѣхъ діаметровъ имѣетъ одну и ту же величину, такъ какъ онъ не зависитъ отъ углового коэффиціента хорды, слѣдовательно всѣ діаметры параллельны. При этомъ замѣтимъ, что ось параболы есть тоже одинъ изъ діаметровъ, такъ какъ она дѣлитъ пополамъ рядъ хордъ къ ней перпендикулярныхъ, слѣдовательно въ параболѣ всѣ діаметры параллельны оси. Всѣ діаметры въ параболѣ, какъ и ось пересѣкаютъ кривую въ одной только точкѣ.



черт. 194.

Вернемся опять къ кривымъ, имѣющимъ центръ. Возьмемъ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Діаметръ, дѣлящій эти хорды пополамъ, имѣетъ угловой коэффиціентъ: $m' = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm}$ ..... (1).

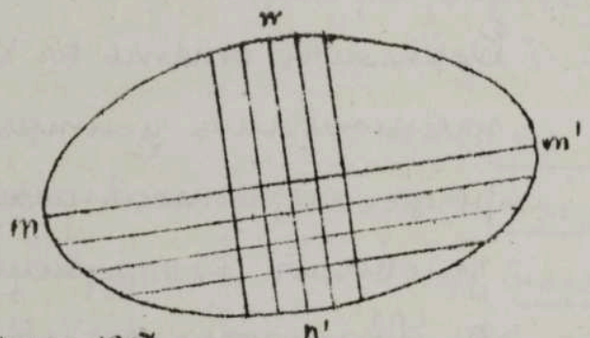
Назовемъ этотъ діаметръ (1). Возьмемъ другой рядъ хордъ, которыя были бы параллельны этому діаметру. Ихъ угловой коэффиціентъ будетъ m', а угловой коэффиціентъ діаметра, дѣлящаго эти хорды пополамъ будетъ:

$$m'' = -\frac{2A + Bm'}{B + 2Cm'} \quad \ldots\ldots (2)$$

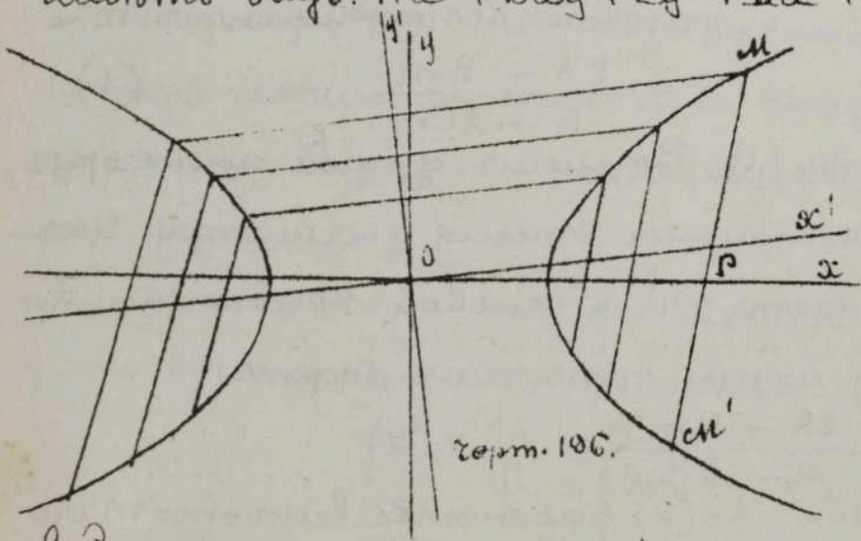
Назовемъ его (2). Вставимъ во (2) равенство вмѣсто m'его

Выражение $m'' = -\frac{2A - \frac{2AB + B^2 m}{B + 2Cm}}{B - \frac{4AC + 2BCm}{B + 2Cm}} = -\frac{2AB + 4ACm - 2AB - B^2 m}{B^2 + 2BCm - 4AC - 2BCm}$ или $m'' = \frac{(B^2 - 4AC)m}{B^2 - 4AC} = m$.

т. е. второй діаметръ будетъ параллеленъ тѣмъ хордамъ, которыя первый діаметръ дѣлитъ пополамъ, слѣдовательно въ кривыхъ, имѣющихъ центръ, всякому діаметру соотвѣтствуетъ другой, который дѣлитъ пополамъ рядъ хордъ, параллельныхъ первому діаметру и который самъ параллеленъ тѣмъ хордамъ, которыя первый діаметръ дѣлитъ пополамъ. Такіе два діаметра называются сопряженными. Въ эллипсѣ и гиперболѣ существуетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметровъ. Уравненіе эллипса и гиперболы принимаетъ очень простой видъ, когда за оси координатъ примемъ два сопряженныхъ діаметра. Эти оси будутъ косоугольныя. Пусть два діаметра будутъ ОХ и ОУ. Уравненіе кривой должно имѣть видъ: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$., но здѣсь мы замѣтимъ, что всякой величинѣ x должны соотвѣтствовать двѣ величины y, равныя по абсолютной величинѣ и обратныя по знаку. Слѣдовательно это уравненіе не должно содержать y въ первой степени, а потому коэффиціентъ при y долженъ быть—



черт. 195.



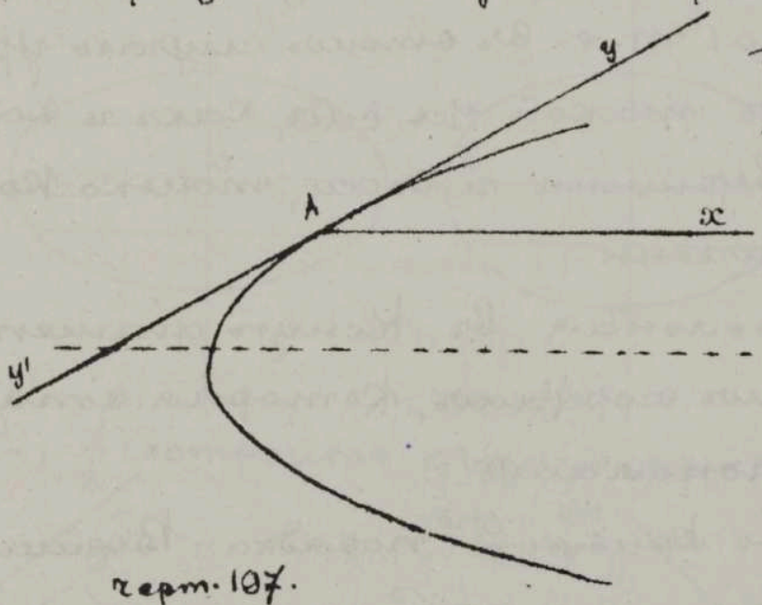
черт. 196.

равенъ нулю, такъ что: $Bx + E = 0$.

И такъ какъ это равенство должно существовать при всякой величинѣ x, то должны имѣть отдѣльно: $B=0$ и $E=0$, уравненіе будетъ: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = 0$. Всякому y должны соотвѣтствовать двѣ величины x, равныя по абсолютной величинѣ, но противоположныя по знакамъ, слѣдовательно уравненіе должно содержать x въ первой степени, т. е. должно быть: $D=0$. Такъ что уравненіе эллипса, гиперболы, отнесенныхъ къ сопряженнымъ діаметрамъ, должно имѣть видъ:

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Такъ что уравненіе эллипса и гиперболы, отнесенныхъ къ сопряженнымъ діаметрамъ, будетъ имѣть такой же видъ, какъ уравненіе эллипса и гиперболы, отнесенныхъ къ осямъ только въ послѣднемъ случаѣ они прямолинейны, а при сопряженныхъ діаметрахъ они косоугольны. Уравненіе параболы получаетъ весьма простой видъ, когда за оси координатъ принять одинъ изъ діаметровъ и касательную къ кривой въ концѣ діаметра. (черт. 197). Уравненіе будетъ имѣть видъ: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.



черт. 197.

Касательная параллельна хордѣ, которая дѣлитъ пополамъ. Въ этомъ случаѣ всякому x будутъ соотвѣтствовать два значенія y равныя и съ обратн-

ными значения, следовательно наше уравнение не должно содержать y въ первой степени, т. е. оно должно имѣть видъ: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = 0$, потому что $Bxy + E = 0$ и такъ это уравненіе должно имѣть мѣсто при всякомъ x, то должны имѣть: $B = 0$ и $E = 0$. Такъ какъ начало координатъ находится на кривой, то это уравненіе должно удовлетворяться, когда $x = 0$ и $y = 0$, слѣдовательно должны имѣть: $F = 0$. Уравненіе будетъ:

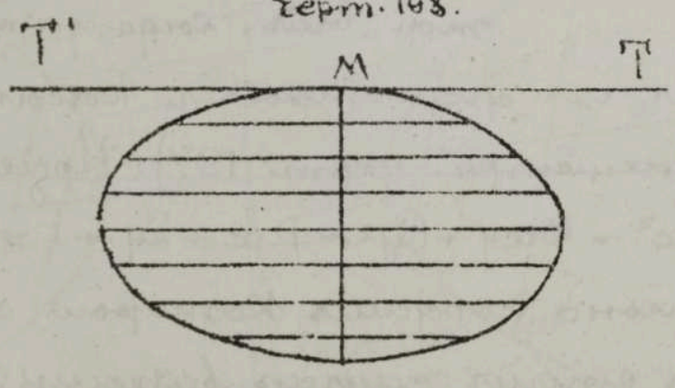
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx = 0.$$

Такъ какъ по свойству параболы $B^2 - 4AC = 0$, то должны имѣть или $A = 0$ или $C = 0$. Мы предполагаемъ, что данному x соотвѣтствуетъ два значенія y, поэтому: $A = 0$ и $Cy^2 + Dx = 0$, т. е. въ этомъ случаѣ уравненіе параболы имѣетъ такой же видъ, какъ и когда парабола отнесена къ вершинѣ и къ оси, только координаты будутъ косоугольныя.

Теорема. Касательная въ концѣ діаметра параллельна тѣмъ хордамъ, которыя этотъ діаметръ дѣлятъ пополамъ.

Возьмемъ произвольную кривую $2^{го}$ порядка. Возьмемъ на ней точку $M(x'y')$ Проведемъ черезъ эту точку діаметръ. Пусть будетъ угловой коэффиціентъ тѣхъ хордъ, которыя этотъ діаметръ дѣлятъ пополамъ. Напишемъ уравненіе такъ:

черт. 193.



$2Ax + By + D + m(Bx + 2Cy + E) = 0$. Координаты $x'y'$ должны удовлетворять этому уравнению, т.е. будет:

$$2Ax' + By' + D + m(Bx' + 2Cy' + E) = 0, \text{ отсюда}$$

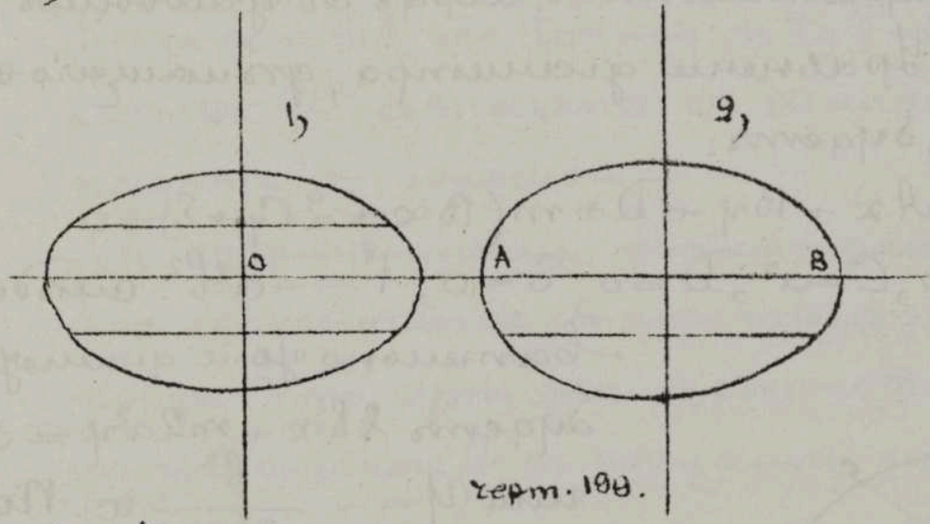
$$m = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}$$

Проведем в точке m касательную $'T'T'$ Угловой коэффициент этой касательной будет:

$$m' = -\frac{2Ax' + By' + D}{Bx' + 2Cy' + E}$$

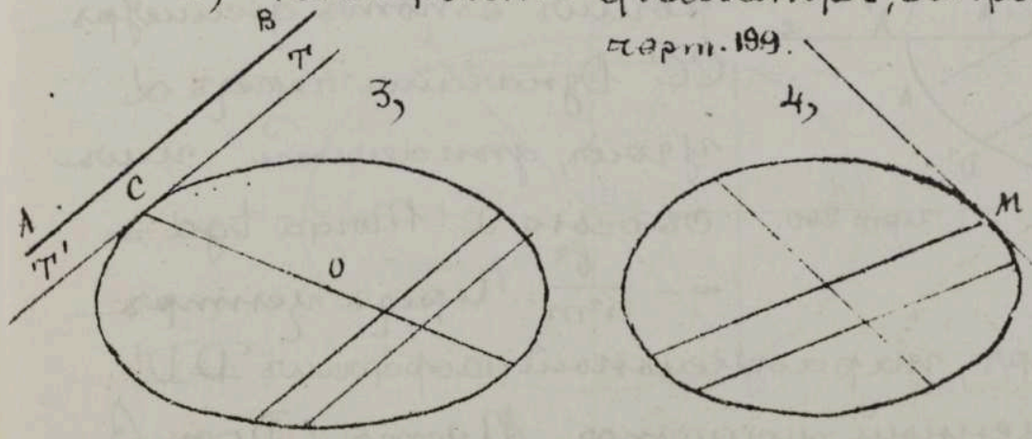
Следовательно $m = m'$, что и доказывает теорему. Доказанное свойство диаметров дают возможность решать некоторые графические задачи.

1, Дано очертание эллипса или гиперболы. Найти его центр. Проводим две параллельные хорды, соединим их прямыми, получим диаметр; разделим его пополам, будем иметь центр.



черт. 198.

2, Построить диаметр, сопряженный данному. Проводим хорду, параллельную диаметру AB. Разделим её пополам. Среднюю соединим с центром.



черт. 199.

3, Провести касательную, параллельную данной пр. AB. Проведем две хорды, параллельные AB; соединим их

средины и въ точкѣ C проведемъ параллель AB. Этотъ будетъ Касательнымъ.

4. Провести Касательную въ данной точкѣ M эллипса. Проведемъ черезъ нее діаметръ и хорду, параллельную с.ч. Ея средину соединимъ съ центромъ, получимъ діаметръ сопряженный. Черезъ точку M проводимъ параллельную этому діаметру. Это и будетъ Касательная.

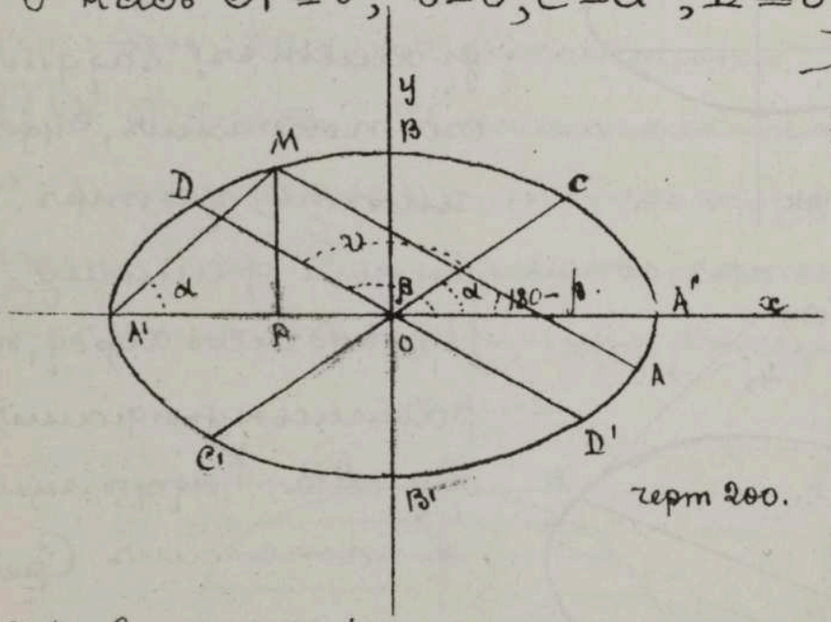
Свойства діаметровъ эллипса.

Возьмемъ эллипсъ, отнесенный къ центру и къ осямъ. Его уравненіе будетъ: $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0$.

Возьмемъ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Уравненіе діаметра, дѣлящаго эти хорды, пополамъ, будетъ:

$$2Ax+By+D+m(Bx+2Cy+E)=0$$

У насъ $A=b^2$, $B=0$, $C=a^2$, $D=0$, $E=0$, $F=-a^2b^2$. слѣдовательно ур-іе діаметра будетъ $2b^2x+m2a^2y=c$ или $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$. Построимъ этотъ діаметръ CC'. Означимъ черезъ α уголъ, дѣлаемый имъ съ осью x. Тогда $tg\alpha=-\frac{b^2}{a^2m}$. Черезъ центръ проведемъ діаметръ, параллельный хордамъ DD'. Это будетъ сопряженный діаметръ. Пусть $\angle DOx=\beta$. тогда $tg\beta=m$ и слѣдовательно $tg\alpha=-\frac{b^2}{a^2tg\beta}$ или $tg\alpha\cdot tg\beta=-\frac{b^2}{a^2}$. Изъ этого соотношенія легко видѣть,

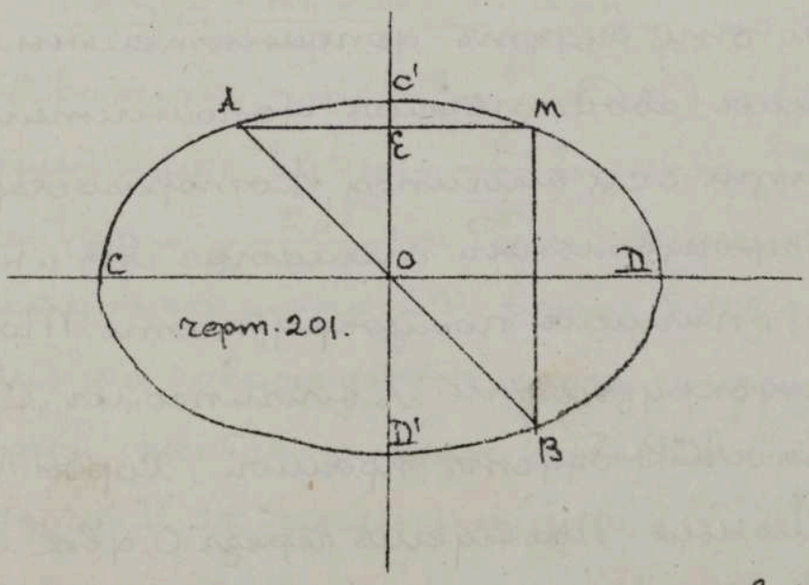


черт 200.

Какъ будетъ измѣняться положеніе діаметра, сопряженнаго съ данным. Имѣемъ: $tg\beta = -\frac{b^2}{a^2 tg\alpha}$

Если $\alpha = 0$, то діаметръ CC' совпадетъ съ большой осью AA', тогда $tg\beta = \infty$ и $\angle\beta = 90°$, т.е. діаметръ DD' совпадетъ съ малой осью, такъ что оси составляютъ также пару сопряженныхъ діаметровъ, образующихъ прямой уголъ. Если уголъ α будетъ увеличиваться, то $tg\beta$, оставаясь отрицательнымъ, будетъ уменьшаться по абсолютной величинѣ, слѣдовательно $\angle\beta$ будетъ больше 90° и будетъ увеличиваться постоянно и діаметръ DD' будетъ постоянно откланяться отъ оси BB' въ лѣвую сторону. Когда $\alpha = 90°$, то $tg\alpha = \infty$ и $tg\beta = 0$; $\angle\beta = 180°$, т.е. когда діаметръ CC' совпадетъ съ малою осью, то діаметръ DD' совпадетъ съ большою.

Съ сопряженными діаметрами имѣютъ весьма близкое соотношеніе, такъ называемыя дополнительныя хорды. Это суть двѣ хорды, соединяющія произвольную точку эллипса съ концами діаметра; AM и BM хорды дополнительныя.



чертъ. 201.

Теорема. Два діаметра, параллельные двумъ дополнительнымъ хордамъ, суть діаметры сопряженные.

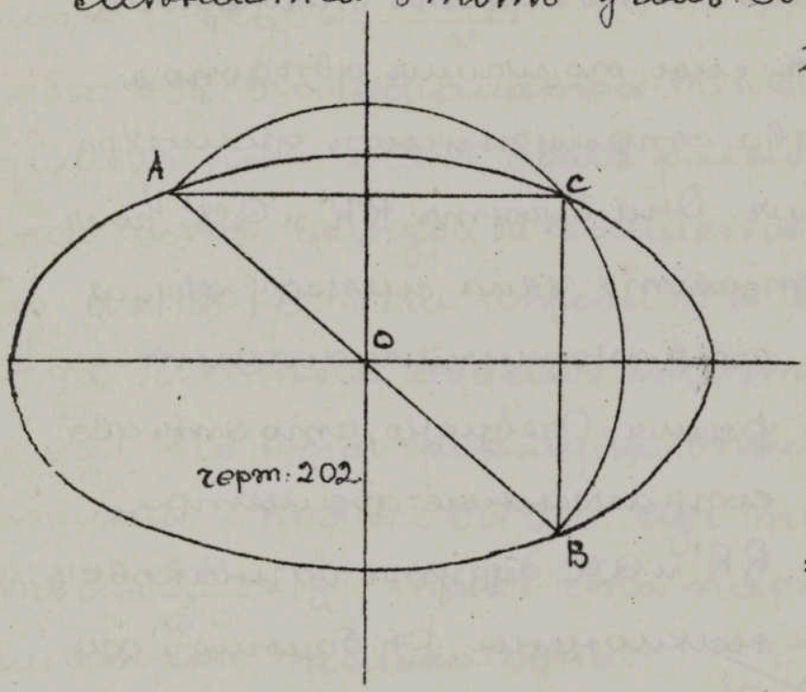
Проведемъ черезъ центръ O два діаметра параллельно AM и BM. Очевидно въ треуголь-

линія MAB: $OH \parallel AM$ и проходитъ черезъ средину AB. Слѣдовательно $MH = HB$.; точно такимъ $OE \parallel BM$ и проходитъ черезъ средину AB, слѣдовательно $ME = AE$, т. е. Каждый изъ діаметровъ CD и $C'D'$ дѣлитъ пополамъ хорду, параллельную другому, слѣдовательно они діаметры сопряженные.

Обратная теорема. Двѣ хорды, проведенныя изъ концовъ одного діаметра параллельно двумъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ, будутъ дополнительныя.

Пусть CD и $C'D'$ два данные и сопряженные діаметра и пусть AB произвольный діаметръ. Черезъ точку A проведемъ хорду $AM \parallel CD$. Эта хорда въ точкѣ E раздѣлится пополамъ. Такъ какъ прямая $AO = BO$, то, соединивъ M съ B, мы получимъ линію BM, которая будетъ параллельна OE или $C'D'$, слѣдовательно обратно, если изъ точки B проведемъ параллель $D'C'$, то она пройдетъ черезъ точку M, такъ что двѣ параллели AM и BM двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, пересѣкутся на эллипсѣ и слѣдовательно они будутъ дополнительными хордами. По доказаннымъ свойствамъ дополнительныхъ хордъ, можно найти оси эллипса, котораго очертанія дано. Возмемъ произвольный діаметръ AB и на немъ, какъ на діаметрѣ, опишемъ полуокружность. Точку пересѣченія этой полуокружности съ эллипсомъ, C, соединимъ съ A и B. Уголъ ACB будетъ прямой. Хорды AC и BC будутъ дополнительныя. Проведемъ черезъ O два

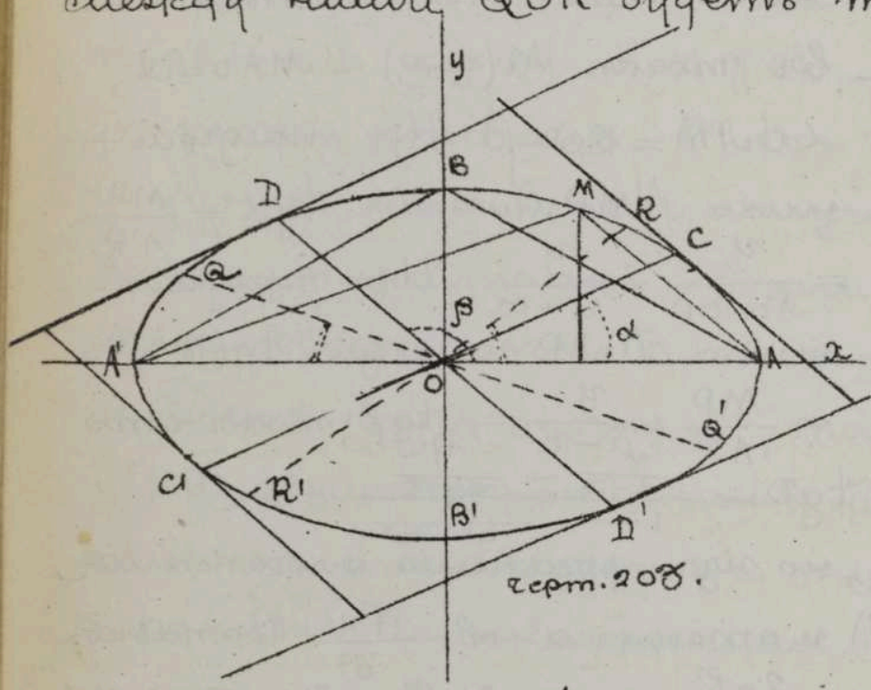
диаметра, параллельные этим хордам. Эти диаметры будут сопряженные и притом они образуют прямой угол, следовательно это оси эллипса. Рассмотрим угол, образуемый двумя сопряженными диаметрами эллипса. Это будет угол $COD = v = \beta - \alpha$. Рассмотрим, как изменяется этот угол с увеличением α. Имеем:



черт. 202.

$tg\,v = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$. Проведем через A и A' дополнительные хорды параллельно CC' и DD'. Они пересекутся в точке $M(x,y)$. $\angle MA'O = \alpha$, $\angle OAM = 180^\circ - \beta$. Из треугольника $A'MP$ имеем: $tg\alpha = \frac{MP}{A'P} = \frac{y}{A'O - OP} = \frac{y}{a+x}$; Из треугольника MAP имеем $tg(180^\circ - \beta) = \frac{MP}{AP} = \frac{y}{a-x} = -tg\beta$, так что $tg\beta = -\frac{y}{a-x}$, следовательно $tgD = \frac{\frac{a-x}{y} - \frac{a+x}{y}}{1 - \frac{a^2-x^2}{y^2}} = -\frac{ay + xy + ay - xy}{a^2 - x^2 - y^2} = -\frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2}$, но из уравнения эллипса мы выводим, что $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ и отсюда $a^2 - x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$. Вставив получим $tg\,v = -\frac{2ay}{\frac{a^2y^2}{b^2} + y^2} = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)y}$, но $a^2 - b^2 = c^2$, следовательно $tg\,v = -\frac{2ab^2}{c^2 y}$ и отсюда видим, что $tg\,v$ всегда меньше 0 следовательно $\angle v$ всегда $> 90^\circ$, т.е. два сопряженные диаметра образуют друг с другом тупой угол. Из этой же формулы можно видеть, как изменяется угол v с изменением $\angle\alpha$. Вообразим, что α увеличивается от $\alpha = 0$ до $\alpha = 90^\circ$. При этом точка M

будетъ переходить отъ точки A по направленію къ точкѣ B. Ордината MP = y и будетъ сначала увеличиваться; $tg\,v$ будетъ уменьшаться по абсолютной величинѣ, но такъ какъ $tg\,v < 0$, то уголъ v будетъ постоянно увеличиваться. Наибольшую величину этотъ уголъ получитъ, когда ордината y достигнетъ наибольшаго. Это будетъ тогда, когда M совпадетъ съ B. При этомъ мы получимъ двѣ дополнительныя хорды AB и A'B и два сопряженныхъ діаметра, параллельные этимъ хордамъ. Они будутъ RR' и QQ'. Уголъ смѣжный нашему QOR будетъ такимъ же. Уголъ смѣжный двумъ сопряженнымъ діаметрамъ. Очевидно, что эти два сопряженные діаметра RR' и QQ' будутъ одинаково наклонены къ большой оси съ двухъ разныхъ сторонъ, такъ что $\angle ROA = \angle QOA'$. Но такъ какъ эллипсъ расположенъ симметрично



черт. 208.

относительно оси y и x, то очевидно, что OR = OQ и также RR' = QQ', слѣдовательно пара сопряженныхъ діаметровъ, образующихъ наибольшій уголъ, есть пара равносопряженныхъ діаметровъ. Если мы уголъ v возмемъ больше угла ROA, то точка M будетъ перемѣщаться отъ B къ A' и ордината y уменьшается; вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ уменьшаться и $\angle v$, такъ что этотъ—

угол имеет только один максимум.

Придавши k этому, что кроме двух найденных нами сопряженных диаметров, эллипс не имеет других таких равных сопряженных диаметров. Это видно из следующего: Два угла α и β связаны между собою уравнением: $tg\alpha tg\beta = -\frac{b^2}{a^2}$.

Чтобы два полудиаметра OC и OD были равны, очевидно необходимо, чтобы $\angle COA$ был равен $\angle DOA'$, так как эллипс есть фигура симметричная, т.е. нужно, чтобы было: $\alpha = 180° - \beta$ или чтобы $\beta = 180° - \alpha$, но тогда $tg\beta = tg(180° - \alpha) = -tg\alpha$. Затем будем иметь: $-tg\alpha \cdot tg\alpha = -tg^2\alpha = -\frac{b^2}{a^2}$ и $tg\alpha = \frac{b}{a}$. Но эта формула определяет угол ROA. Действительно: $\angle ROA = \angle BA'O$ и из треугольника $BA'O$ имеем: $tg BA'O = \frac{OB}{A'O} = \frac{b}{a}$; так что пара равных сопряженных диаметров только одна.

Уравнение эллипса, отнесенного к сопряженным диаметрам.

Возьмем уравнение эллипса относительно главных осей: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. и преобразуем его в уравнение относительно сопряженных диаметров Ox' и Oy'. Которые образуют с прежней осью углы α и β, для этого подставляем вместо x и y их величины из формулы перехода:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta.$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta.$$

получим: $\frac{x'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\cos\beta + y'^2\cos^2\beta}{a^2} + \frac{x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\sin\beta + y'^2\sin^2\beta}{b^2} = 1.$

или $x'^2\left(\frac{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}\right) + \frac{2x'y'\cos\alpha\cos\beta}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} + tg\alpha tg\beta\right) + y'^2\left(\frac{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}{a^2b^2}\right) = 1.$

Коэффициентъ при $x'y'$ обращается въ нуль, ибо по свойству сопряженныхъ діаметровъ $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$ и мы получимъ

$$\frac{x'^2}{a_1^2} + \frac{y'^2}{b_1^2} = 1, \text{ гдѣ } a_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}, \quad b_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}.$$

Это есть простѣйшій видъ уравненія эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ. Мы видимъ, что это уравненіе совершенно одинаково съ уравненіемъ эллипса, отнесеннаго къ осямъ, только оси координатъ здѣсь косоугольныя. Въ частности, если мы за оси координатъ возьмемъ пару равныхъ сопряженныхъ діаметровъ RR' и QQ', тогда будетъ имѣть: $a_1 = b_1$ и уравненіе будетъ: $x'^2 + y'^2 = a_1^2$

Оно будетъ одинаково съ уравненіемъ круга, но только координаты косоугольныя. Уравненіе эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ, можно написать въ видѣ: $a_1^2y'^2 + b_1^2x_1^2 - a_1^2b_1^2 = 0$.

Теоремы Аполонія.

Для вывода этихъ теоремъ намъ послужатъ выраженія сопряженныхъ діаметровъ въ функціи угловъ α и β. Мы имѣемъ изъ равенствъ (a) и (b):

$$a_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$
$$b_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}.$$

Теорема I. Площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, постоянна по величинѣ и = площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

Въ точкахъ C, C', D' и D проведемъ касательныя къ эллипсу, получимъ параллелограммъ, построенный на сопряженныхъ діаметрахъ. Его площадь равна $2a_1 \cdot 2b_1 \sin\nu$. Она должна быть равна $2a \cdot 2b$. Иначе должно быть:

$$a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha) = ab.$$

Доказать эту теорему значитъ вывести послѣднее равенство. Съ этою цѣлью перемножимъ a_1^2 и b_1^2, получимъ:

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\beta + a^2 b^2 (\sin^2\alpha \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta)}$$

Но возьмемъ уравненіе

$$a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta = 0$$

возведя его въ квадратъ, получимъ:

$$a^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\beta = -2a^2 b^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta$$

Вставивъ, получимъ:

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^4 b^4}{-2a^2 b^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta + a^2 b^2 (\sin^2\alpha \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta)} = \frac{a^2 b^2}{\sin^2\alpha \cos^2\beta + \cos^2\alpha \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta}.$$

Въ знаменателѣ точный квадратъ, поэтому имѣемъ:

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{(\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta)^2} = \frac{a^2 b^2}{\sin^2(\alpha - \beta)} = \frac{a^2 b^2}{\sin^2(\beta - \alpha)}$$

Извлекая корень, получимъ:

$$a_1 b_1 = \frac{ab}{\sin(\beta - \alpha)} \quad \text{и отсюда} \quad a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha) = ab.$$

что и требовалось доказать.

Теорема II. Сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, постоянна и = суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на осяхъ.

Эта теорема выражается такимъ равенствомъ:

$$(2a_1)^2 + (2b_1)^2 = (2a)^2 + (2b)^2.$$

или $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$.

Доказать эту теорему значить вывести это равенство, а для этого нужно изъ двухъ равенствъ, выражающихъ a_1 и b_1 исключить углы α и β, а это сложно сдѣлать съ помощью уравненія:

$$tg\alpha\, tg\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

Мы имѣемъ: $a_1^2(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha) = a^2 b^2$

Выразивъ $\sin$ и $\cos$ черезъ tg, имѣемъ:

$$\frac{a_1^2 a^2 tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{a_1^2 b^2}{1+tg^2\alpha} = a^2 b^2$$

или имѣемъ: $a_1^2 a^2 tg^2\alpha + a_1^2 b_1^2 = a^2 b^2 + a^2 b^2 tg^2\alpha$.

Отсюда $tg^2\alpha = \frac{a^2 b^2 - a_1^2 b^2}{a^2 a_1^2 - a^2 b^2}$ или $tg^2\alpha = \frac{b^2(a^2 - a_1^2)}{a^2(a_1^2 - b^2)}$

Изъ равенства, опредѣляющаго b_1^2, мы точно такъ же выведемъ $tg^2\beta$ и, такъ какъ это равенство отличается только перемѣною a_1 на b_1 и α на β, то прямо имѣемъ:

$$tg^2\beta = \frac{b^2(a^2 - b_1^2)}{a^2(b_1^2 - b^2)}$$

Перемноживъ и замѣтивъ, что $tg\alpha\, tg\beta = -\frac{b^2}{a^2}$, получимъ:

$\frac{b^4(a^2 - a_1^2)(a^2 - b_1^2)}{a^4(a_1^2 - b^2)(b_1^2 - b^2)} = \frac{b^4}{a^4}$ или $(a^2 - a_1^2)(a^2 - b_1^2) = (a_1^2 - b^2)(b_1^2 - b^2)$ или

$a^4 - a^2 a_1^2 - a^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 = a_1^2 b_1^2 - b^2 b_1^2 - a_1^2 b^2 + b^4$ или $a^4 - b^4 = a^2(a_1^2 + b_1^2) - b^2(a_1^2 + b_1^2)$ или $a^4 - b^4 = (a_1^2 + b_1^2)(a^2 - b^2)$ или сокративъ на $a^2 - b^2$, получимъ:

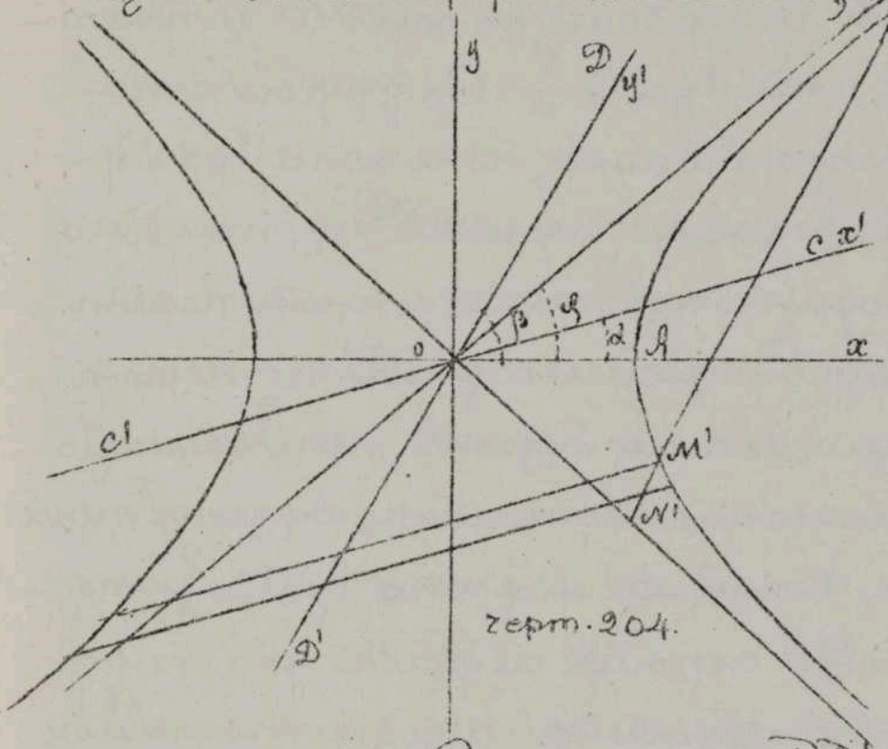
$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

Діаметры въ гиперболѣ.

Возьмемъ гиперболу, отнесенную къ осямъ; черезъ перемѣну въ уравненіи эллипса b^2 на $-b^2$, получимъ ур-іе гиперболы; оно будетъ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Возьмемъ въ гиперболѣ рядъ параллельныхъ хордъ съ

угловымъ коэффиціентомъ m. Уравненіе діаметра, дѣлящаго эти хорды пополамъ, получится изъ такого же уравненія діаметра, выведеннаго для эллипса черезъ перемѣну b^2 на $-b^2$. Сльдовательно это уравненіе будетъ: $y = +\frac{b^2}{a^2 m}x$. Проведемъ этотъ діаметръ CC'. Онъ дѣлаетъ съ осью x уголъ α и имѣемъ: $tg\alpha = \frac{b^2}{a^2 m}$. Проведемъ черезъ центръ діаметръ, параллельный хордамъ DD'. Это будетъ діаметръ сопряженный. Пусть β есть уголъ имъ образуемый съ осью x. Имѣемъ: $tg\beta = m$, $tg\alpha = \frac{b^2}{a^2 tg\beta}$ и отсюда $tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{b^2}{a^2}$. Это есть отношеніе между угломъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ съ главною осью гиперболы. Отсюда $tg\beta = \frac{b^2}{a^2 tg\alpha}$. По этой формулѣ можно изслѣдовать, какъ измѣняется направленіе діаметра, сопряженнаго съ даннымъ. Именно, если $\alpha = 0$, то $tg\beta = \infty$ и $\angle\beta = 90°$. Сльдовательно, когда діаметръ CC' совпадаетъ съ главною осью гиперболы, то діаметръ DD' совпадаетъ съ мнимою осью. Если α будетъ увеличиваться, то $tg\beta$ уменьшается и $\angle\beta$, оставаясь острымъ, уменьшается. Поэтому діаметръ DD' дѣлаетъ съ осью x уголъ острый и уголъ



черт. 204.

COD между двумя сопряженными діаметрами будет также острый. Обозначим через φ уголъ, образуемый ассимптотой гиперболы съ осью Ox и построимъ ее. Мы знаемъ, что $tg\varphi = \frac{b}{a}$. Съ другой стороны $tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a}$, отсюда видно, что если $tg\alpha$ будетъ менѣе $\frac{b}{a}$, то $tg\beta > \frac{b}{a}$, иначе, если $\angle\alpha < \varphi$, то $\angle\beta > \varphi$ и слѣдовательно, если одинъ изъ діаметровъ пересѣкаетъ гиперболу, то другой діаметръ DD' не пересѣкаетъ ее. Когда $\angle\alpha$, увеличиваясь, будетъ приближаться къ углу φ, то $\angle\beta$, уменьшаясь, также будетъ приближаться къ углу φ. и когда $\angle\alpha = \varphi$, то $tg\alpha = \frac{b}{a}$, тогда и $tg\beta = \frac{b}{a}$ и $\angle\beta = \angle\varphi$. Въ этомъ случаѣ два сопряженныхъ діаметра совпадутъ съ ассимптотами и слѣдовательно для всѣхъ параллельныхъ ассимптотамъ не существуетъ діаметровъ, которые бы ихъ пересѣкали. Это впрочемъ и такъ видно, потому что линія, параллельная ассимптотамъ пересѣкаетъ гиперболу въ одной только точкѣ. и поэтому не будутъ хордами. Когда $\angle\alpha$ сдѣлается $> \angle\varphi$, то $\angle\beta$ будетъ $< \varphi$ и два діаметра CC' и DD' пересѣкаются одинъ на другой. Докажемъ теорему:

Отрѣзки всякой сѣкущей, заключенные между гиперболою и ассимптотами, равны между собою.

Надо доказать, что для произвольной сѣкущей MN имѣемъ: $MN = M'N'$. Для этого напишемъ ур–іе:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ..... (К) и замѣтимъ, что оно представляетъ объ ассимптоты; ибо разлагается на множители: $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ и даетъ: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$; Разсмотримъ уравненіе (К), какъ уравненіе 2го порядка, мы можемъ отыскивать діаметръ, дѣлящій всѣ хорды, параллельныя NN', пополамъ. Если т будетъ тангенсъ угла NN' съ осью ox, то уравненіе этого діаметра будетъ: $y = \frac{b^2}{a^2 m}x$, т.е. будетъ такое же, какое имѣемъ для гиперболы. Такимъ образомъ, діаметръ OC' дѣлитъ пополамъ, какъ хорды NN', такъ и хорды MM'. Мы имѣемъ:

$$PN = PN' \quad ; \quad PM' = PM'.$$

Вычитая, найдемъ: $MN = M'N'$, что и треб. доказать.

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ.

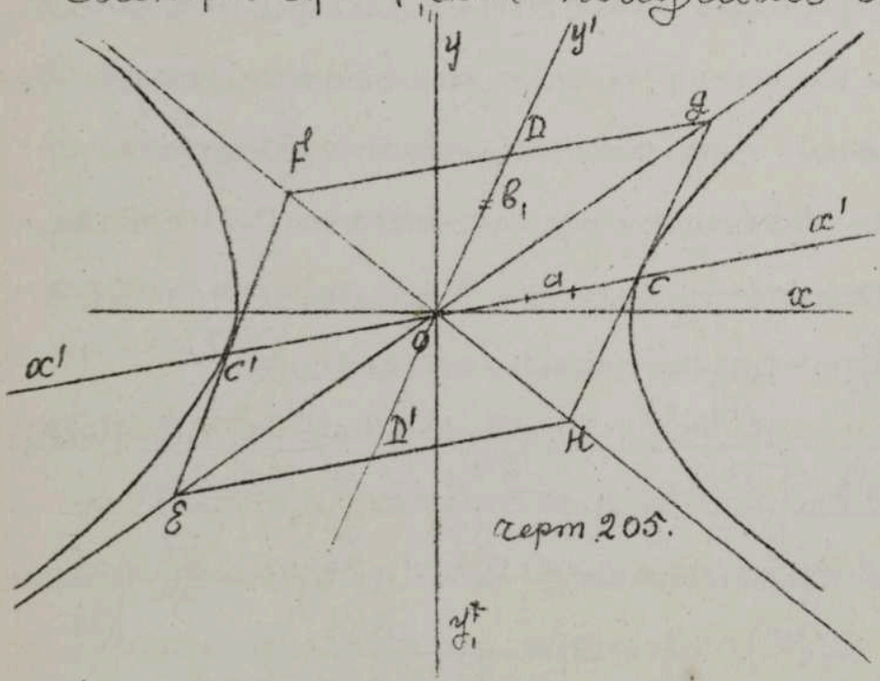
Возьмемъ уравненіе гиперболы, отнесенной къ главнымъ осямъ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ..... (1) и преобразуемъ его въ уравненіе относительно сопряженныхъ діаметровъ OC', OY', которые образуютъ съ осью ox углы α и β. Формулы перехода дадутъ намъ: $x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta$, $y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta$; поставивъ ихъ:

$$\frac{x'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\cos\beta + y'^2\cos^2\beta}{a^2} - \frac{x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\sin\alpha\sin\beta + y'^2\sin^2\beta}{b^2} = 1, \text{ или}$$

$$x'^2\frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2} + \frac{2x'y'\cos\alpha\cos\beta}{b^2}\left[\frac{b^2}{a^2} - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\right] - y'^2\frac{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}{a^2b^2} = 1.$$

Коэффиціентъ при $x'y'$ пропадаетъ, ибо $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$ и мы получаемъ: $\frac{x'^2}{a_1^2} - \frac{y'^2}{b_1^2} = 1$ ..... (2), гдѣ $a_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}$ и $b_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}$. Такимъ образомъ уравненіе гиперболы,

отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ, имѣютъ точно такой же видъ, какъ и уравненія гиперболъ, отнесенныхъ къ осямъ, только оси будутъ косоугольныя. Составимъ еще уравненія объихъ асимптотъ, отнесенныхъ къ осямъ, есть: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Если мы въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ тоже самое преобразованіе координатъ, то мы получимъ уравненіе асимптотъ относительно сопряженныхъ діаметровъ; но не имѣемъ надобности повторять вычисленіе, потому что первая часть послѣдняго уравненія отличается отъ первой части уравненія (1) только извѣстными членами, которые въ послѣднемъ равенствѣ равенъ нулю. Слѣдовательно вычисленіе все будетъ тоже, а результатъ будетъ слѣдующій: $x'^2\frac{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}-y'^2\frac{a^2\sin^2\beta-b^2\cos^2\beta}{a^2b^2}=0$ или вводя въ это уравненіе, какъ и прежде длины, полудіаметровъ a_1 и b_1, мы получимъ его въ видѣ: $\frac{x'^2}{a_1^2}-\frac{y_1^2}{b_1^2}=0$. Этого будетъ уравненіе двухъ асимптотъ, отнесенныхъ къ сопряженнымъ діаметрамъ. Пользуясь этимъ уравненіемъ, мы сможемъ сейчасъ все доказать, что вершины параллелограммовъ, построенныхъ на сопряженныхъ



черт 205.

діаметрахъ гиперболы, находятся на асимптотахъ.

Докажемъ, что четыре точки H, Q, F и E находятся на ассимптотахъ. Возьмемъ одну изъ нихъ, какую угодно, положимъ Q. Ея координаты будутъ $x' = a_1$ и $y' = b_1$. Вставивъ эти координаты въ уравненіе ассимптотъ, получимъ: $\frac{a_1^2}{a_1^2} - \frac{b_1^2}{b_1^2} = 0$, т. е. $0 = 0$.
Слѣдовательно точка Q находится на ассимптотѣ; а такъ же и для всякой другой точки.

Теоремы Аполлонія для гиперболы.

Онѣ выводятся изъ другихъ формулъ, выражающихъ сопряженные полудіаметры a_1 и b_1 въ функціи угловъ α и β или данныхъ съ главною осью. Эти формулы будутъ: $a_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}$; $b_1^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}$.
Первыя части въ этихъ двухъ формулахъ положительны, слѣдовательно и вторыя должны быть положительны. Легко убѣдиться, что это такъ и будетъ. Дѣйствительно, такъ какъ діаметръ CC' пересѣкаетъ гиперболу, то $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$ или $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} < \frac{b^2}{a^2}$; или $a^2\sin^2\alpha < b^2\cos^2\alpha$. Слѣдовательно въ первой формулѣ вторая часть положительна. Діаметръ DD' не пересѣкаетъ гиперболы, стало быть $\operatorname{tg}\beta > \frac{b}{a}$ или $\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} > \frac{b^2}{a^2}$ или $a^2\sin^2\beta > b^2\cos^2\beta$ слѣдовательно и вторая часть второй формулы положительна. Если мы сравнимъ формулы, выражающія a_1^2 и b_1^2 для гиперболы съ подобными же формулами для эллипса, то мы видимъ, что формулы для гиперболы получаются изъ формулъ эллипса черезъ перемѣну

b^2 на $-b^2$ и b_1^2 на $-b_1^2$. Теорема Аполлонія для эллипса была выведена, какъ слѣдствія этихъ двухъ формулъ. Выводъ этотъ прилагается къ послѣднимъ двумъ формуламъ съ перемѣною b^2 на $-b^2$ и b_1^2 на $-b_1^2$, слѣдовательно теорема Аполлонія для гиперболы получается изъ такихъ же теоремъ для эллипса черезъ перемѣну b^2 на $-b^2$ и b_1^2 на $-b_1^2$. Для эллипса были выведены два равенства: $a_1 b_1 \sin(\beta-\alpha) = ab$. и $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$. Перемѣнивъ въ первомъ уравненіи b на $b\sqrt{-1}$ и b_1 на $b_1\sqrt{-1}$, получимъ: $a_1 b_1 \sqrt{-1} \sin(\beta-\alpha) = ab\sqrt{-1}$. или $a_1 b_1 \sin(\beta-\alpha) = ab$; а второе равенство даетъ: $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$.

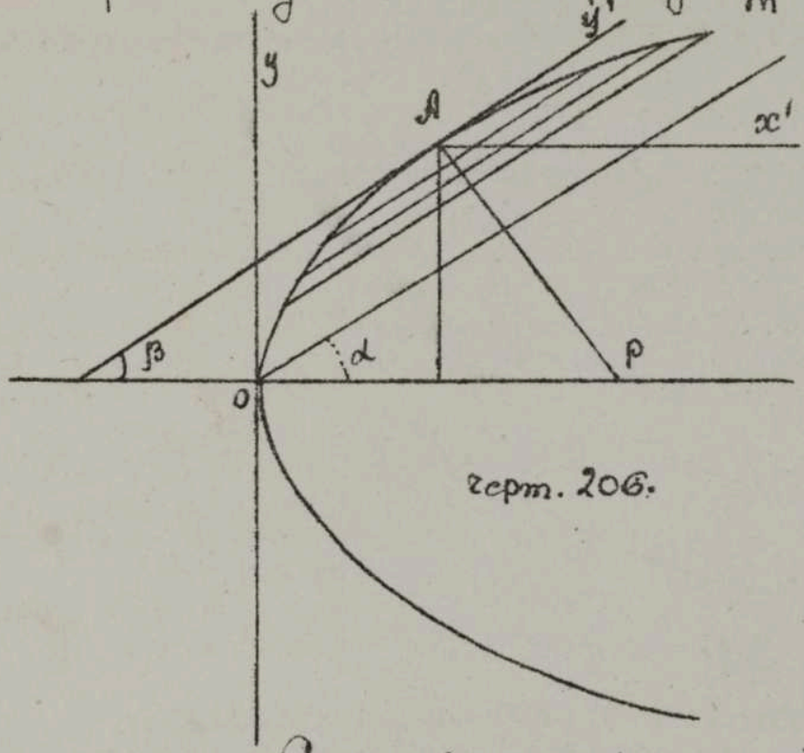
1) Въ гиперболѣ площадь параллелограмма, построеннаго на сопряженныхъ діаметрахъ, имѣетъ величину постоянную и равную площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

2) Разность площадей квадратовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ гиперболы, постоянна и равна разности площадей квадратовъ, построенныхъ на осяхъ.

Діаметры параболы.

Возмемъ параболу, отнесенную къ вершинѣ и къ оси. Ея уравненіе будетъ: $y^2 - 2px = 0$. Возмемъ рядъ параллельныхъ хордъ съ угловымъ коэффиціентомъ m. Діаметръ, дѣлящій пополамъ эти хорды, будетъ имѣть уравненіе: $2Ax + By + D + m(Bx + 2Cy + E) = 0$. У насъ: $A = B = E = 0$, $C = 1$, $D = -p$. Слѣд. будемъ имѣть:

$-2p + m \cdot 2y = 0$. Отсюда $y = \frac{p}{m} = const$. Сльдов. діаметръ — параллель оси Ox.



черт. 206.

При этомъ всякая параллель оси Ox будетъ діаметромъ. Дѣйствительно, пусть уравненіе нѣкоторой параллели будетъ $y = b$. Положимъ $b = \frac{p}{m}$, отсюда $m = \frac{p}{b}$ и это опредѣляетъ направленіе тѣхъ хордъ, которыя эта параллель дѣлитъ пополамъ. Составимъ уравненіе параболы, отнесенной къ діаметру и къ касательной въ концѣ діаметра. Возмемъ діаметръ Ax' и Ay'. Пусть координаты будутъ (a, b). Онѣ даны. Такъ какъ эта точка лежитъ на параболѣ, то имѣемъ: $b^2 = 2pa$. Формулы преобразованія координатъ будутъ: $x = a + x'\cos\alpha + y'\cos\beta$; $y = b + x'\sin\alpha + y'\sin\beta$. Въ нашемъ случаѣ $\angle\alpha = 0$, $\angle\beta = \angle y'Ax'$, слѣдовательно формулы будутъ $x = a + x' + y'\cos\beta$, $y = b + y'\sin\beta$.

Вставивъ въ уравненіе $y^2 = 2px$, получимъ:

$b^2 + 2b\sin\beta y' + \sin^2\beta y'^2 = 2pa + 2px' + 2p\cos\beta y'$, но $b^2 = 2pa$.

Такъ какъ β есть уголъ, дѣлаемый касательной къ параболѣ въ точкѣ, ордината которой равна b, но мы знаемъ, что $tg\beta = \frac{p}{b}$ или $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{p}{b}$ и отсюда $b\sin\beta = p\cos\beta$, слѣдов. члены съ y' въ обѣихъ частяхъ предыдущаго равенства можно сократить. Остается $\sin^2\beta y'^2 = 2px'$ или

$y'^2 = \frac{2p}{\sin^2\beta} x'$. Если для краткости положимъ, что $\frac{p}{\sin^2\beta} = p'$, то получимъ: $y'^2 = 2p'x'$. Такимъ образомъ уравненіе параболы, отнесенной къ діаметру и къ касательной въ концѣ его, имѣетъ совершенно такой же видъ, какъ уравненіе параболы, отнесенной къ вершинѣ и къ оси. Величина $2p'$ называется параметромъ параболы по отношенію къ діаметру Ax'. Покажемъ: какое значеніе имѣетъ этотъ новый параметръ. Мы имѣемъ: $p' = \frac{p}{\sin^2\beta}$, но $\sin^2\beta = \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\frac{p^2}{q^2}}{1+\frac{p^2}{q^2}} = \frac{p^2}{q^2+p^2} = \frac{p^2}{2pa+p^2} = \frac{p}{2a+p}$ и $p' = p : \frac{p}{2a+p} = 2a+p$.

Возьмемъ фокусъ параболы F, соединимъ его съ A. Припомнимъ, что радіусъ векторъ FA выражается посредствомъ абсциссы такъ: $FA = \frac{p}{2} + a$ или $2FA = p + 2a$, слѣд. находимъ, что новый параметръ равенъ $4FA$, т. е. онъ равенъ учетверенному разстоянію точки A отъ фокуса.

Конецъ.

Изд. Алексѣевъ.

М.Т.У.

Аналитическая геометрия

въ

пространствѣ.

2-й общ поток 1-я

Лекціи доцента Н.А. Шапошникова.

1888 - 89 г.

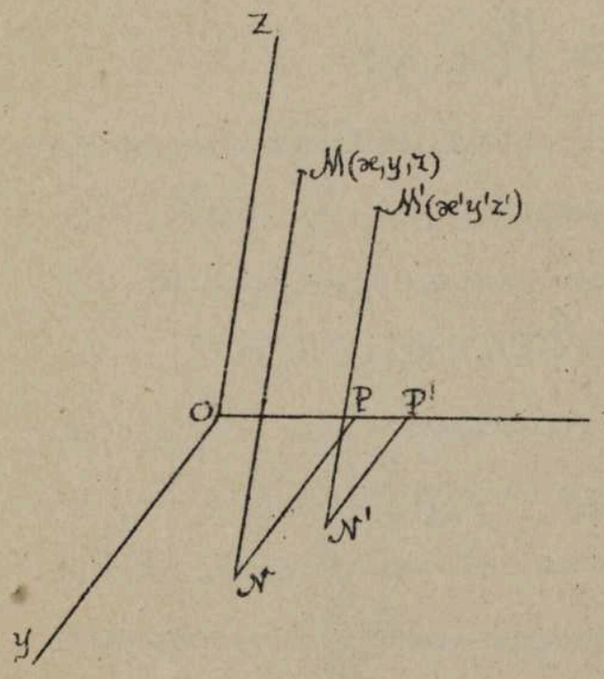
3

Изданіе разрѣшаю
Доцентъ Н. Шапошниковъ

Урав-ія поверхностей и линій въ пространствѣ.

Положеніе поверхностей и линій въ пространствѣ опредѣляется относительно трехъ плоскостей координатъ прямоугольныхъ или косоугольныхъ.

Теорема. Всякая поверхность, положеніе которой относительно трехъ плоскостей коор-тъ дано можетъ быть выражена алгебраически т. е. можетъ быть представлена посредствомъ ур-ія между тремя коор-ми произвольной ея точки.



Возьмемъ систему косоугольныхъ трехъ плоскостей коор-тъ (для общности): Положимъ, что нѣкоторая поверхность дана въ пространствѣ надъ плоскостью xy. Въ плоскости xy возьмемъ произвольную точку N; чтобъ получить ея коор-тія, проведемъ изъ $N \parallel$-но OY, они будутъ $OP = x$ и $NP = y$. Чрезъ N проведемъ $\parallel$-но оси Z-овъ, эта параллель встрѣтитъ нашу поверхность въ точкѣ M, причемъ опредѣлится коор-та этой точки Z. Такъ что три кординаты точки M будутъ x, y, z.

Если-бы мы взяли въ плоскости xy другую точку N', коор-та которой были-бы: $N'P' = y'$ и $OP' = x'$, то проведя чрезъ нее также $\parallel$-но оси Z-овъ, мы увидимъ, что эта $\parallel$-ая встрѣтитъ въ другой точкѣ M', причемъ опять опредѣлится Z этой точки, именно $M'N' = z'$. Такъ что три коор-тя точки M' будутъ x', y', z'.

Изъ этого видно, что взявъ совершенно произвольно двѣ коор-ты Ж и У мы всегда можемъ опредѣлить указанными построеніями величину Z для разсматриваемой поверхности (иначе для разсматриваемыхъ величинъ Ж и У).

Слѣдовательно три коор-ты Ж, У и Z произвольной точки поверхности должны состоять между собою въ нѣкоторой зависимости и именно въ зависимости такого рода, что-бы для произвольно назначенныхъ величинъ для Ж и У можно было-бы опредѣлить соотвѣтственную величину Z. Слѣдовательно должно существовать нѣкоторое ур-ніе связывающее Ж, У и Z. Это уравненіе будетъ опредѣлять Z какъ функцію Ж и У. Ур-іе это будетъ имѣть видъ общій такой:

$F(x, y, z)$: Изъ него получимъ: $z = f(x, y)$.

Этому ур-ію должны удовлетворять коор-ты всякой точки поверхности и она назыв. ур-емъ поверхности; Ж, У и Z въ него входящіе, т.е. коор-ты произвольной точки поверхности, назыв. текущими коор-ами поверхности.

Ур-іе поверхности можно получить на самомъ дѣлѣ тогда, когда дано опредѣленіе поверхности какъ геометрическія мѣста. Въ этомъ случаѣ, взявъ произвольну точку на плоскости (Ж, У, Z) нужно выразить для этой точки посредствомъ алгебраическаго равенства то геометрическое условіе, которое служитъ опредѣленіемъ поверхности. Въ это равенство взойдутъ коор-ты Ж, У и Z и если не будетъ входить другихъ перемѣнныхъ, то это равенство и будетъ уравненіе поверхности, потому что оно выразитъ соотношеніе между коор-ми Ж, У и Z произвольной точки поверхности. Если-же въ это равенство, кромѣ Ж, У и Z, взойдутъ другія перемѣнныя, то нужно сначала ис-

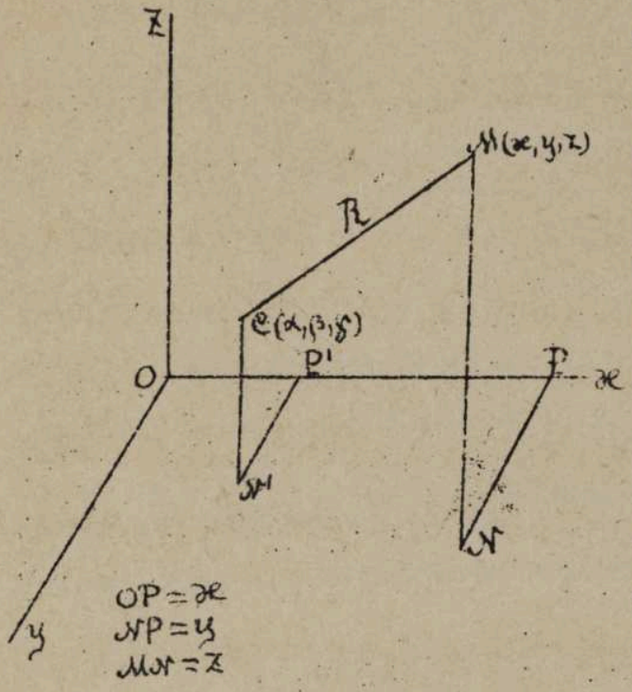
ключить изъ и потомъ получимъ ур-іе поверхности.

Ур-іе поверхности сферы.

Положимъ коор-ты прямоугольныя. Пусть точка C съ коор-ми α, β и γ есть центръ сферы, а R ея радіусъ. Возьмемъ на сферѣ произвольную точку, положимъ M; ея коор-ты x, y и z. Выразимъ квадратъ разстоянія точки M отъ C по извѣстной формулѣ, будемъ имѣть:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2.$$

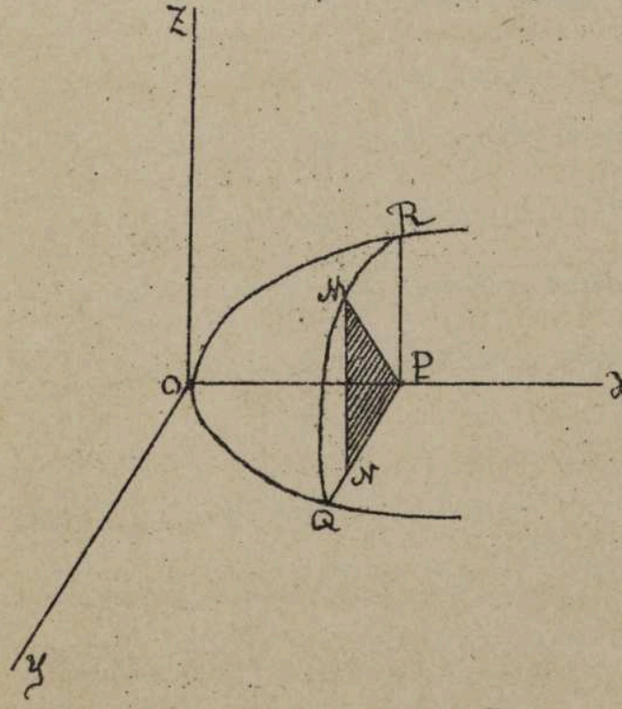
Это есть ур-іе сферы.



Урав-іе параболоида вращенія

Координаты прямоугольныя. Возьмемъ въ плоскости xz параболу, которой вершина будетъ въ O, а осью будетъ Ox. Ур-ніе этой (прям) параболы будетъ:

$$z^2=2px$$



Положимъ, что эта парабола вращается около оси x-овъ. Она опишетъ параболоидъ вращенія. Всѣ сѣченія плоскостями проходящими чрезъ ось x-въ будутъ парабола. Возьмемъ произвольную длину (на оси x-овъ) $OP=x$, а чрезъ точку P проведемъ перпендикуляръ къ оси x-овъ. Разсѣчемъ поверхность плоскостью проходящей чрезъ этотъ перпендикуляръ, въ сѣченіи получимъ кругъ. Изобразимъ четверть (этого) круга въ углѣ $Oxyz$. Будемъ имѣть

$PQ=PR$. На этомъ кругѣ возьмемъ произвольную точку M и она будетъ произвольной точкой поверхности. Построимъ ея коор-ты, онѣ будутъ $OP=x$, $NP=y$ и $MN=z$. Соединимъ точку M съ P. Изъ треугольника MNP имѣемъ:

$$y^2+z^2=MP^2=PQ^2$$

Но PQ можно опредѣлить по ур-нію параболы OQ, лежащей въ плоскости XY, имѣемъ:

$PQ^2=2px$. Слѣдовательно: $y^2+z^2=2px$

Это есть ур-ніе нашего параболоида вращенія

Обратное предложеніе.

Всякое ур-ніе между тремя перемѣнными коор-ми X, Y и Z произвольной точки пространства геометрически представляетъ нѣкоторую поверхность.

Общій видъ ур-нія съ тремя перемѣнными будетъ:

$$F(x,y,z)=0$$

Начнемъ съ разсматрѣнія частныхъ случаевъ, когда въ это ур-ніе не будетъ входить одной или двухъ коор-тъ

1) Урав-іе содержитъ одну только коор-ту.

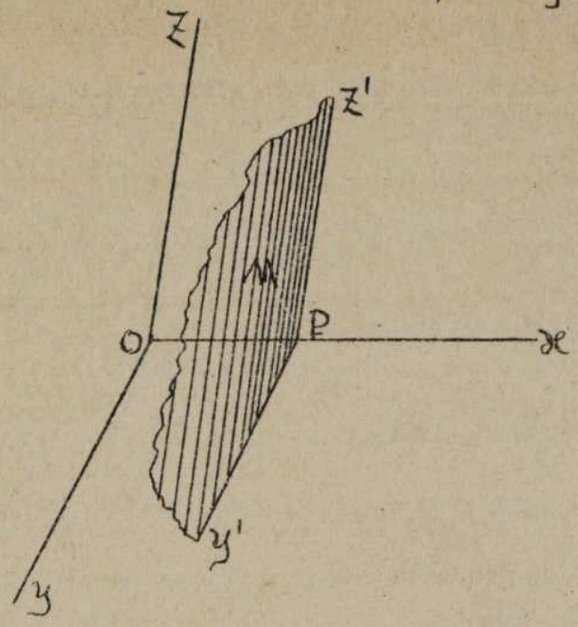
Пусть оно будетъ $F'(x)=0$. Это ур-ніе можно рѣшить относительно x. Положимъ, что оно имѣетъ нѣсколько дѣйствительныхъ рѣшеній (мнимыя не имѣютъ геометрическаго смысла)

$$x=a,\quad x=a',\quad x=a''\ldots\ldots$$

Разсмотримъ рѣшеніе $x=a$. Возьмемъ оси (косоуг.). Отложимъ на оси x-овъ длину $OP=a$ и чрезъ P плоскость $\parallel$-ую YZ; пусть эта будетъ $Y'PZ'$. Очевидно, что для всякой точки M этой плоскости, будемъ имѣть: $x=a$

Слѣдовательно равенство $x=a$ принадлежитъ всѣмъ точкамъ этой плоскости. Очевидно притомъ, что ежли точка не лежитъ

въ этой плоскости, то для нея не будетъ $x = a$.



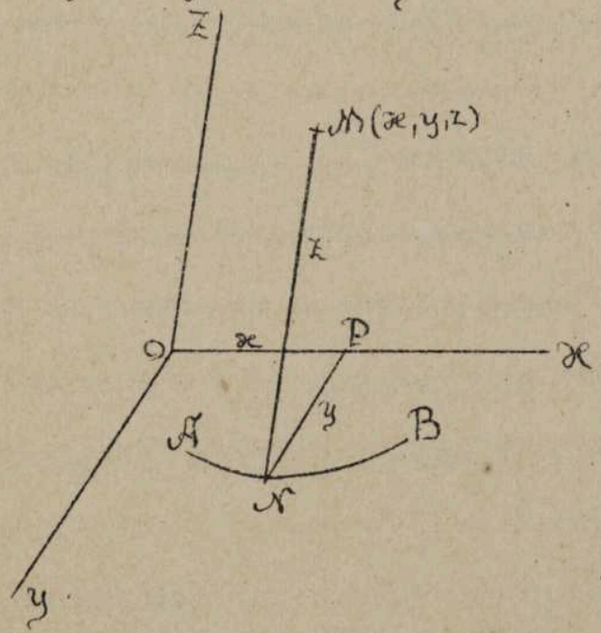
Равенство $x = a$ назыв. уравненіемъ этой плоскости и потому

$$F(x) = 0$$

представляетъ одну или нѣсколько нѣсколько плоскостей параллельныхъ yz. Точно такимъ же докажемъ, что ур-ніе вида $F(y) = 0$ будетъ представлять одну или нѣсколько плоскостей $\parallel$-ныхъ плоскости xz. Напр. ур-ніе $F(z) = 0$ представляетъ одну или нѣсколько плоскостей $\parallel$-хъ плоскости xy

2.) Ур-ніе содержитъ двѣ коор-ты.

Пусть дано $F(xy) = 0$. Возьмемъ оси коор-тъ (косоуг.) x, y, z.



Мы знаемъ, что въ плоскости xy это ур-ніе представляетъ нѣкоторую кривую линію; пусть эта кривая будетъ AB. Возьмемъ на ней произвольную точку N; ея коор-ты будутъ $OP = x$ и $PN = y$. Они удовлетворяютъ ур-ніе $F(x,y) = 0$. Проведемъ чрезъ N $\parallel$-ль оси z-овъ. Если мы на этой параллели возьмемъ гдѣ угодно точку M, то ея коор-ты будутъ: $x = OP$, $y = PN$ и $z = MN$ и мы можемъ сказать, что эти коор-ты удовлетворяютъ ур-нію $F(x,y) = 0$ Правда въ это ур-ніе не входитъ z намъ и не дано никакихъ условій. Такимъ образомъ, если мы возьмемъ совершенно произволь= ную прямую $\parallel$-ю оси z-овъ и проходящую чрезъ одну изъ точекъ кри-

вой AB, то мы можем сказать, что коор-ты всякой точки этой прямой будут удовлетворять данному ур-нію.

Следовательно, если мы вообразим, что прямая движется по прямой* AB, оставаясь параллельна оси $Z^{-ов}$, то она опишет цилиндрическую поверхность, направляющею кривой будет кривая AB и координаты всякой точки этой поверхности будут удовлетворять тому-же уравненію. Следовательно это ур-ніе представляет цилиндрическую поверхность, направляющая[x] которой служит кривая выраженная тем-же ур-ем и лежащая в плоскости XY; образующія-же этой поверхности будут параллельна оси $Z^{-ов}$.

Разсуждая точно такимже найдем, что ур-ію вида $F(x,z)=0$ представляет цилиндрическую поверхность, образующія которой параллельна оси $Y^{-ов}$, а направляющая служит кривая, лежащая в плоскости XZ и представляемая тем-же самым ур-ем.

Наконец ур-ію $F(y,z)=0$, представляющая цилиндрическую поверхность, образующія которой параллельна оси $X^{-ов}$, а направляющая служит кривая лежащая в плоскости YZ и представляемая тем-же самым ур-ем.

3.) Ур-ніе содержит все три коор-ты.

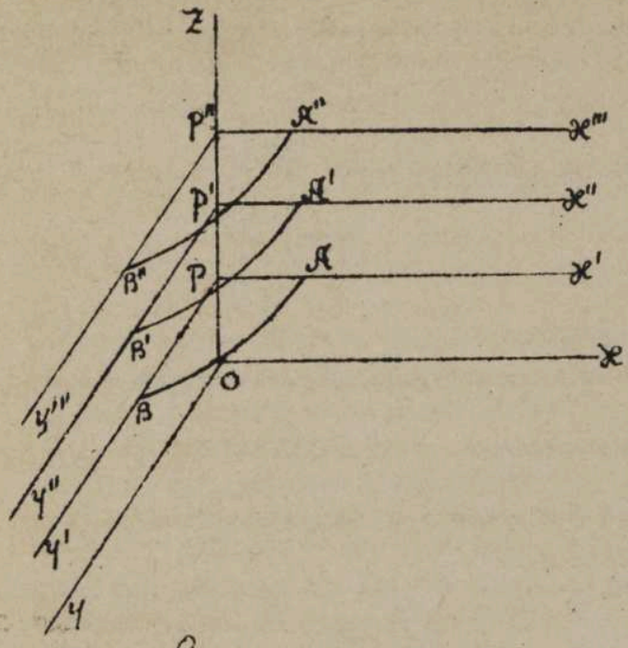
$$F(x,y,z)=0$$

Возьмем оси косоуг. Мы можем дать одной из неизвестных напр. z произв. значеніе, т.е. это ур-ію неопределенно; пусть $z=c$. Отложим OP (на оси $Z^{-ов}$) $=c$ и через точку P проведем плоскость $\parallel$-ю XY. Эта плоскость пересечет поверхность по кривой AB, по прямой $x'P'$ и плоскость ZY по прямой $P'y'$

---

*кривой, [x]направляющею

Это будет плоскость $x'Py'$; въ этой плоскости всегда будетъ $Z = C$. Затѣмъ въ этой плоскости X и Y должны удовлетворять ур-нію:



$$F(x, y, C) = 0$$

Это ур-іе содержитъ только двѣ коор-ты X и Y. Оно представляетъ нѣкоторую цилиндрическую поверхность образующія которой $\parallel$-на съ осью $Z^{-об}$. Искомыя точки должны лежать на поверхности и сверхъ того въ плоскости $x'Py'$, слѣдовательно онѣ будутъ лежать въ пересѣченіи плоскости съ цилиндрическою поверхностью. Это пересѣченіе будетъ нѣкоторая кривая, положимъ AB и коор-ты всякой точки этой кривой будутъ удовлетворять данному ур-нію. Точно такъ же, если дадимъ другія значенія: $Z = C'$, то отложивъ $OP' = C'$, опять проведемъ плоскость $\parallel$-ю XY, положимъ $y''P'x''$. Въ этой плоскости должна лежать искомая точка, а X и Y должны удовлетворять ур-нію:

$$F(x, y, C') = 0$$

которое опять представляетъ цилиндрическую поверхность съ образующими $\parallel$-ми оси $Z^{-ой}$. Поверхность эта пересѣчется плоскостью по кривой $A'B'$ и всякая точка этой кривой опять будетъ удовлетворять ур-нію: $F(x, y, C') = 0$. Понятно, что такихъ кривыхъ $AB, A'B' \ldots$ можно получить безчисленное множество. Если мы будемъ измѣнять непрерывно Z, давая ему рядъ безконечно близкихъ значеній, то мы получимъ рядъ безконечно близкихъ кривыхъ $AB, A'B', \ldots$, совокупность кривыхъ представитъ нѣкоторую поверхность.

Следовательно теорема доказана вообще.

Примеръ. Ур-ніе $x^2 - a^2 = 0$ даетъ $x = \sqrt{a^2} = \pm a$ и представляетъ двѣ плоскости ||-ыя ZY и равно отстоящія отъ послѣдней.

Ур-ніе $z = 0$, представляетъ самую плоскость XY.

" $y = 0$, " " " XZ

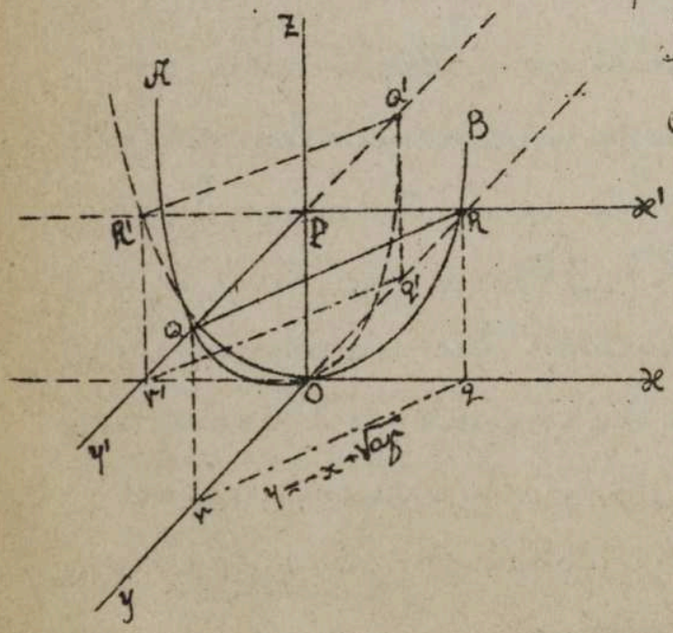
" $x = 0$, " " " YZ

Ур-ніе $x = az + p$ на плоскости XZ представляетъ прямую линію, а въ пространствѣ цилиндрическую поверхность у которой эта прямая будетъ направляющею, а образующія будутъ ||-ны оси Y-овъ. Ясно, что эта цилиндрическая поверхность будетъ собственно плоскость ||-я оси Y-овъ.

Ур-іе $y = bz + q$ .... представляетъ плоскость ||-ю оси X-овъ

Ур-іе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... представляетъ эллиптическій цилиндръ образующ. котораго ||-а съ осью Z-овъ, а направляющей слѣдуетъ эллипсъ, представленный этимъ ур-іемъ и лежащій въ плоскости XY.

Ур-іе $(x+y)^2 = az$. Представляетъ нѣкоторую поверхность. Узнаемъ какая эта поверхность. Возьмемъ оси прямоугольн



Положимъ $x = 0$, получимъ $y^2 = az$ Это ур-іе на плоскости YZ даетъ параболу AO вершина которой въ O, а ось есть ось Z-овъ. Положимъ $y = 0$, получимъ $x^2 = az$. Это дастъ опять параболу въ плоскости XZ (параб. OB) вершина въ O, а ось OZ. Сдѣлаемъ $z = \gamma$, отложимъ $OP = y$. Проведемъ черезъ

Р плоскость ||-ю Ж(Ж'РУ'). Ур-ie этой плоскости есть $z = y$. Будемъ искать въ этой плоскости точки нашей поверхности; должны имѣть мѣсто:

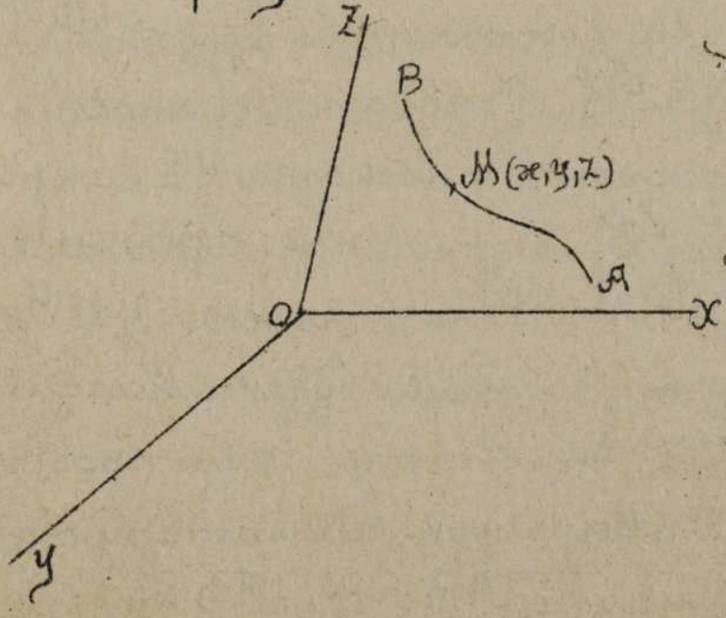
$$(x+y)^2 = az \text{ и } z = y, \text{ что:}$$

$$(x+y)^2 = ay, \text{ а отсюда:}$$

$$x+y = \pm\sqrt{ay} \quad \text{.....} \quad y = -x \pm \sqrt{ay}$$

Это ур-ие на плоскости ЖУ представляетъ двѣ прямыя линіи ||-ыя между собою и составляющія съ осью Ж-овъ уголъ въ 135°. Въ пространствѣ тоже ур-ie представляетъ двѣ плоскости ||-ыя оси Z-овъ и проходящія чрезъ эти прямыя; искомыя точки должны лежать въ этихъ плоскостяхъ, слѣдов. онѣ будутъ лежать въ пересѣченіи этихъ 2-хъ плоскостей съ плоскостью Ж'РУ'. Это будетъ, стало быть, двѣ параллельныя прямыя. Изъ этого видно, что наша поверхность будетъ состоять изъ совокупности прямыхъ линій ||-ыхъ между собою и лежащихъ на двухъ параболахъ ОА и ОВ и слѣдов. поверхность будетъ цилиндрическая, только ея образующія RQ и RQ' не будутъ параллельными коор-ами.

О представленіи линій въ пространствѣ.



Теорема. Всякая кривая въ пространствѣ, можетъ быть аналитически представлена посредствомъ двухъ ур-ій съ тремя коор-ами Ж, У и Z произвольной ея точки.

Дѣйствительно возьмемъ произвольную кривую въ пространствѣ АВ. Вообразимъ, что чрезъ

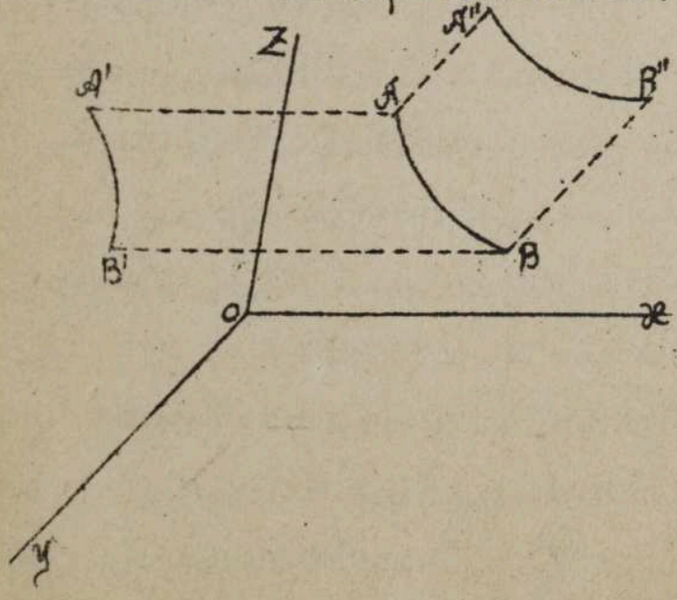
эту кривую проведем некоторую поверхность, ея ур-ние $f(x,y,z)=0$. Вообразим, что через тужне (поверхность) кривую проведена некоторая другая поверхность и пусть ур-ие этой послѣдней $\varphi(x,y,z)=0$. Разсматриваемая кривая вполнѣ опредѣлится, какъ пересѣчение этихъ двухъ поверхностей. И коор-ты произвольной ея точки $M(x,y,z)$ должны будутъ удовлетворять ур-ямъ двухъ поверхностей, обоимъ вмѣстѣ.

Понятно, что и обратно, если намъ даны два ур-ия

$$f(x,y,z)=0 \text{ и } \varphi(x,y,z)=0,$$

которыя должны удовлетворяться вмѣстѣ, то каждое изъ нихъ отдѣльно представитъ нѣкоторую поверхность, а вмѣстѣ взятыя опредѣляютъ тѣ точки, которыя лежатъ въ одно и тоже время на первой поверхности и на второй т.е. точки пересѣченія или кривую линію ихъ пересѣченія.

Весьма часто для опредѣленія кривой линіи, черезъ нее проводятъ двѣ цилиндрическія поверхности именно такія, образующія которыхъ ‖-ны осямъ Ox и Oy. Какъ показано на чертежѣ. Эти двѣ поверхности будутъ $AB A'B'$ и $AB A''B''$. Первая поверхность



пересѣкаетъ плоскость Yz по кривой $A'B'$, которая наз. проэкціею кривой AB на плоскости Yz. Ур-ие этой проэкціи будетъ всегда $\varphi(y,z)=0$. Это ур-ие въ пространствѣ выразитъ проэктирующій цилиндръ $AB A'B'$. Вторая

цилиндрическая поверхность пересечет плоскость XZ по кривой A''B'', которая назыв. проэкцией кривой AB на плоскости XZ. Ур-ие этой проэкции будетъ имѣть видъ: $\psi(x,z)=0$, а въ пространствѣ тожсе ур-ие представляетъ проэктирующій цилиндръ ABA''B''. Кривая AB опредѣляется, какъ пересѣченіе этихъ двухъ цилиндрическихъ поверхностей и будетъ выражена этими двумя ур-ями взятыми вмѣстѣ:

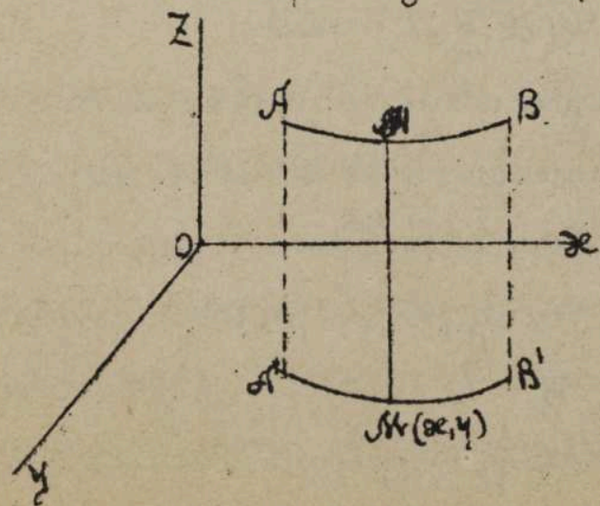
$$\varphi(y,z)=0 \quad и \quad \psi(x,z)=0$$

Если даны два ур-ія кривой въ пространствѣ и мы этиx 2-хъ ур-ій исключимъ одну изъ коор-тъ, то получимъ ур-ie, которое выразитъ проэкцію этой кривой на плоскости тѣхъ коор-тъ, которыя останутся въ ур-ie.

Пусть два ур-нія будутъ:

$$f(x,y,z)=0 \quad и \quad \varphi(x,y,z)=0$$

Они представляютъ кривую AB. Изъ нихъ z получимъ ур-ie вида: $\Phi(x,y)=0$. Вообразимъ цилиндрическую поверхность проходящую чрезъ AB, съ образующими ||-ми оси Z-овъ. Эта поверхность пересѣчетъ плоскость XY по кривой A'B'. Возьмемъ на этой кривой произвольную точку M, чрезъ нее проведемъ образующую MN и коор-ты x и y точки M будутъ одинаковы съ коор-тами x и y точки N. Но коор-ты точки N...(x и y) удовлетворятъ ур-нію $\Phi(x,y)=0$ слѣдов. и коор-ты точки M удовлетворятъ ур-ію $\Phi(x,y)=0$. Такимъ образомъ коор-ты всякой точки кривой A'B' будутъ



*изъ

удовлетворять ур-ию $\Phi(x,y)=0$ и слѣдов. это ур-ie представляетъ кривую $A'B'$, т.е. проэкцію кривой AB на плоскости XY

Примѣръ. Ур-ie $x^2+y^2+z^2=a^2$, представляетъ сферу радіуса a, которой центръ въ началѣ коор-тъ.

Ур-ie $x=mz$ представляетъ прямую линію, проходящую чрезъ ось Y-овъ, а въ пространствѣ плоскость проходящую чрезъ туже ось.

(Ур-ія) $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x=mz$, оба ур-ія представляютъ одну кривую линію, именно одинъ изъ большихъ круговъ сферы.

Ур-ie $x^2+z^2=a^2$, представляетъ круглый цилиндръ, котораго ось совпадаетъ съ осью Y-овъ.

Ур-ie $x+y=a$, представляетъ плоскость $\parallel$-ю оси Z-овъ. Оба ур-ія вмѣстѣ представятъ кривую пересѣченія цилиндра съ плоскости, которая будетъ нѣкоторый эллипсъ.

Ур-ie $y=bz+q$ представляетъ плоскость $\parallel$-ю оси x-овъ

Ур-ie $x=az+p$ " " " " y-овъ

Оба вмѣстѣ представятъ прямую линію, пересѣченія этихъ двухъ плоскостей.

Если даны три ур-ія съ тремя перемѣнными, то такая система опредѣлитъ одну или нѣсколько точекъ въ пространствѣ

Дѣйствительно, положимъ, что даны:

$$f(x,y,z)=0\ ,\ \varphi(x,y,z)=0\ \text{ и }\ \psi(x,y,z)=0$$

Каждое изъ этихъ ур-ій представитъ поверхность, вмѣстѣ взятыя-всѣ дадутъ точки пересѣченія этихъ трехъ поверхностей. Такихъ точекъ можетъ быть одна или нѣсколько. Коор-ты этихъ точекъ найдутся, рѣшая эти три ур-ія вмѣстѣ, найдемъ: $|x=a,\ y=b,\ z=c|$ ... одна точка.

Друг. рѣшен. $|x=a',\ y=b',\ z=c'|$ .... другая точка. (Сколько

рѣшен. столько и точекъ).

Замѣчанія. Доказанныя теоремы могутъ имѣть исключенія. Такъ одно ур-іе съ 3-мя перемѣнными можетъ вовсе не имѣть геометрическаго*. Напр. ур-іе

$$x^2+y^2+z^2+a^2=0,$$

очевидно не удовлетворится никакими дѣйствительными величинами x, y и z и потому не имѣетъ геометрическаго значенія — представляетъ только мнимую поверхность.

Одно ур-іе съ 3-мя перемѣнными, можетъ представить не поверхность, но одну или нѣсколько точекъ, напр. ур-іе:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=0,$$

будетъ удовлетворено только тогда, когда возьмемъ $x=\alpha$, $y=\beta$ и $z=\gamma$) вмѣстѣ, что — дастъ точку.

Одно ур-іе съ 3-мя перемѣнными можетъ представить, вмѣсто поверхности, одну линію. Напримѣръ ур-іе

$$(x^2+y^2+z^2-a^2)^2+(x-mz)^2=0$$

можетъ быть удовлетв. только тогда, когда будетъ имѣть вмѣстѣ $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ и $x-mz=0$. Эти два ур-ія даютъ нѣкоторый кругъ. Можетъ быть дано ур-ніе съ 3-мя перемѣнными, представляющее не одну, но нѣсколько различныхъ поверхностей. Напримѣръ:

$$(x+y-a)(x^2+z^2-a^2)=0$$

Ему можетъ удовлетв., 1.) положивъ что $x+y-a=0$, что дастъ плоскость $\parallel$-ю оси z-овъ, или 2.) положивъ

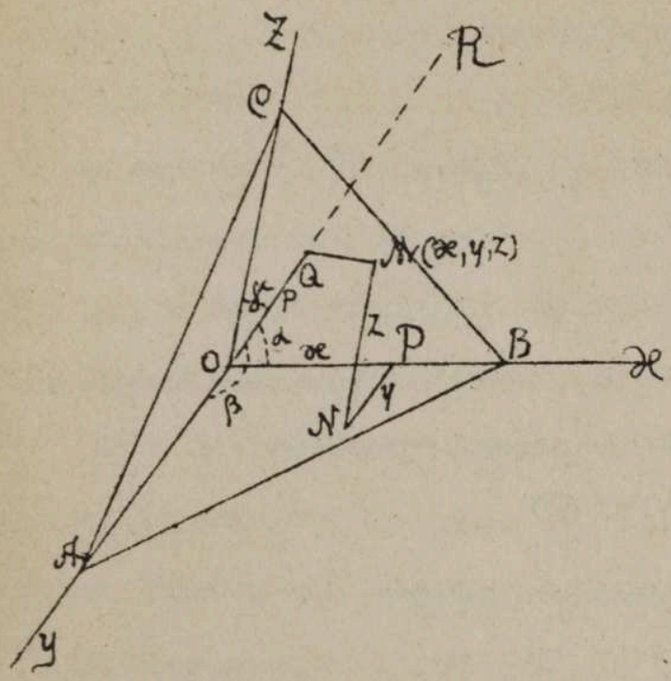
$$x^2+z^2-a^2=0$$

Что дастъ круглой цилиндръ, котораго ось совпадаетъ съ осью y-овъ. Слѣдовательно это ур-іе представляетъ двѣ поверхности — плоскость и цилиндръ.

*значенія

Ур-ія плоскости и прямой линіи въ пространствѣ.

Возьмемъ косоугольную систему осей коор-тъ OЖУZ. Разсмотримъ произвольную плоскость, не проходящую чрезъ начало коор-тъ. Положимъ, что эта плоскость пересѣкаетъ оси въ точкахъ, въ А ось У-овъ, въ В ось Ж-овъ, въ С ось Z-овъ.



Это суть прямыя пересѣченія плоскости съ плоскостями ЖУ, УZ и ЖZ. Наша плоскость, есть плоскость АВС. Опустимъ изъ начала коор-тъ на эту плоскость ⊥-ръ OR., который встрѣтитъ плоскость въ точкѣ Q. Пусть длина OQ = =p-дана-это есть разстояніе плоскости отъ начала коор-тъ. Положимъ, что сверхъ того, даны углы образуемые ⊥-ромъ OR съ тремя осями коор-тъ, именно уголъ ROЖ = α, уголъ ROУ = β и уголъ ROZ = γ. Величины p, α, β, γ даны и опредѣляютъ положеніе плоскости въ пространствѣ.

Составить ур-нія плоскости, значитъ найти соотношеніе между коор-ами Ж, У и Z произвольной ея точки.

Возьмемъ на плоскости произвольную точку M съ коор-ами x, y, z. Построимъ эти координаты; имѣемъ OP = x, PN = y и MN = z. Соединимъ M съ Q. Уголъ OQM = 90°. Затѣмъ разсмотримъ контуръ OPNMQ съ замыкающею стороною OQ и проэктируемъ этотъ контуръ на линію OR, получимъ равенство $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$. Это равенство и есть ур-ie плоскости. Ур-ie это и наз. нормальнымъ ур-емъ плоскости.

Если-бы плоскость проходила чрезъ начало коор-тъ, то выводъ ея ур-ія остался-бы безъ изслѣдованія съ тою только разницею что тогда было-бы $p=0$. И ур-іе плоскости было-бы:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

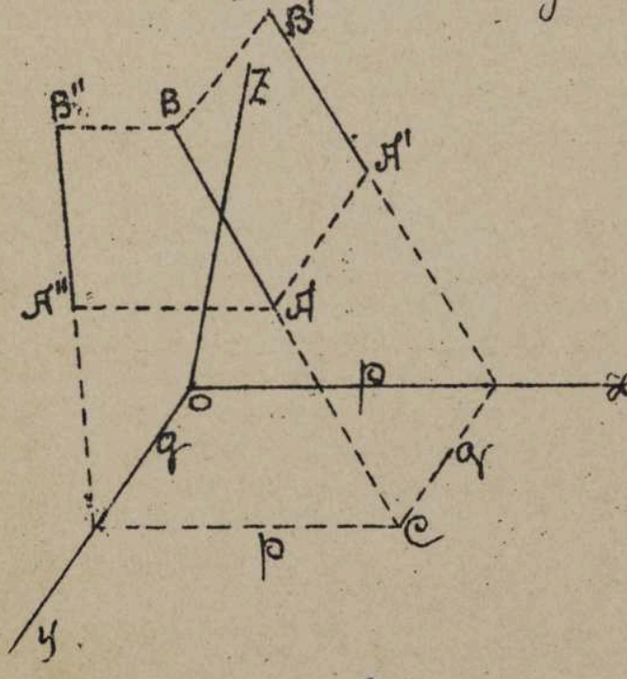
Изъ этихъ ур-ій видно что: плоскость выражается ур-іемъ первой степени относительно текущихъ коор-тъ x, y, z.

Углы α, β и γ не всѣ три произвольны. Между ними, какъ мы знаемъ, есть нѣкоторая зависимость. Эта зависимость при косоугольныхъ коор-ахъ выражается довольно сложно, но при прямоугольныхъ осяхъ также зависимость выражается очень просто, а именно ур-іе:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ур-іе прямой въ пространствѣ.

Возьмемъ опять косоугольную (для общности) систему коор тъ $OXYZ$. Пусть AB будетъ разсматриваемая прямая. Проведемъ чрезъ нее двѣ плоскости — одну ‖-ко оси Y-овъ, которую и продолжимъ до встрѣчи съ плоскостью XZ.



Пусть это будетъ плоскость $A'ABB'$; $A'B'$ будетъ проэкція прямой на плоскости XZ. Ур-іе этой проэкціи будетъ имѣть видъ: $x = mz + p$, гдѣ m есть угловой коэф-ентъ прямой $A'B'$. Это-же ур-іе въ пространствѣ будетъ представлять плоскость $AA'BB'$ (проэктир.) Проведемъ чрезъ прямую AB другую плоскость ‖-ко оси X-овъ и продолжимъ ее до встрѣчи съ плоскостью YZ.

Ур-ie этой прямой А"В"..... $y = nz + q$, гдѣ n угловой коэф—ентъ А"В". Въ пространствѣ тоже ур-ie представитъ плоскость А"А'В'В".

Прямая АВ опредѣлится, какъ пересѣченіе двухъ проведенныхъ нами плоскостей, и потому ея ур-ie будетъ:

$$x = mz + p$$
$$y = nz + q$$

и два коэф-ента m и n назыв. уже при этомъ угловыми коэф-тами прямой въ пространствѣ.

Если ур-ія прямой даны, то положеніе ея можно опредѣлить посредствомъ точекъ пересѣченія ея съ плоскостями коор-тъ. Такъ въ точкѣ пересѣченія прямой съ плоскостью xy, должна имѣть $z = 0$ и слѣдовательно $x = p$ и $y = q$; это есть коор-ты точки C. Для пересѣченія съ плоскостью yz будемъ имѣть $x = 0$ и слѣдовательно:

$mz + p = 0$ и $z = -\frac{p}{m}$ и

$nz + q = y$ Отсюда $y = -\frac{np}{m} + q$. Двѣ точки опредѣляютъ прямую.

Если изъ двухъ ур-ій прямой исключимъ z, то получимъ ур-ie ея проэкціи на плоскости xy. Имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} z = \frac{x-p}{m} \\ z = \frac{y-q}{m} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad \frac{x-p}{m} = \frac{y-q}{m}$$

. Это есть ур-ie проэкціи на плоскости xy.

Замѣтимъ нѣкоторыя частныя положенія прямой.

Если прямая $\parallel$-на одной изъ плоскостей коор-тъ, то ее обыкновенно опредѣляютъ двумя ур-іями:

1) ур-іемъ плоскости, чрезъ нее проходящей и $\perp$-ой той плоскости, которой прямая $\parallel$-на и 2) ... ур-іемъ плоскости, прохо-

дящей чрезъ прямую и ||-на плоскости, которой прямая ||-на.
На этомъ условіи ур-ie прямой ||-ой плоскости xy будетъ:

$$ax+by+c=0$$

Ур-ie плоскости ||-ой оси z-овъ и ⊥-ой къ плоскости xy.
Ур-ie плоскости ||-ой плоскости xy ; $z=d$
Если прямая ||-на плоскости xz; то ея ур-ie:

$$ax+bz+c=0$$

Ур-ie плоскости ||-ой оси y-овъ и ⊥-ой плоскости xz ; $y=d$
Ур-ie плоскости ||-ой плоскости xz ; $y=d$
Ур-ie прямой ||-ой плоскости yz, то ея ур-ie:

$$ay+bz+c=0$$

Ур-ie плоскости ||-ой оси x-овъ и ⊥-ой плоскости yz
Ур-ie плоскости ||-ой плоскости yz ; $x=d$
Если прямая ||-на одной изъ осей коор-тъ, то она опредѣляется двумя плоскостями, чрезъ нее проходящими и параллельными двумъ плоскостямъ коор-тъ.
1.) Прямая ||-оси x-овъ. Ур-ie плоскости ||-ой плоскости xz; ... $y=b$
Ур-ie плоскости ||-ой плоскости xy ; $z=c$
a.) Ур-ie самой оси x-овъ ; $y=0$; $z=0$
2.) Прямая ||-на оси y-овъ. Ур-ie плоскости ||-ой плоск. yz; ... $x=a$
Ур-ie плоскости ||-ой плоскости xy ; .... $z=c$
b.) Ур-ie самой оси y-овъ ; $x=0$; $z=0$
3.) Прямая ||-на оси z-овъ. Ур-ie плоскости ||-ой плоск. xz ; $y=b$
Ур-ie плоскости ||-ой плоскости yz ; ... $x=a$
c.) Ур-ie самой оси z-овъ ; $y=0$; $x=0$

Теорема. Всякое ур-ie первой степени съ тремя перемѣнными x, y и z, представляетъ въ пространствѣ нѣкоторую плоскость.

Общій видъ ур-ія съ тремя перемѣнными:

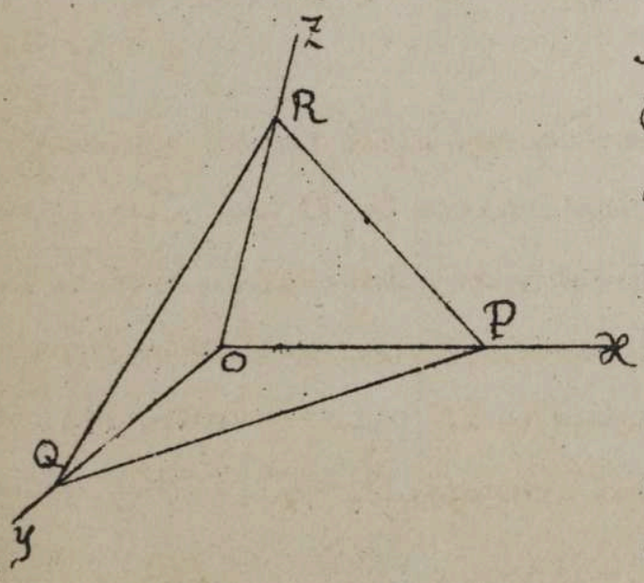
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Это ур-іе вообще должно представлять нѣкоторую поверхность. Проведемъ въ пространствѣ произвольную прямую и разсмотримъ ея пересѣченіе съ этой поверхностью. Ур-іе произвольной прямой: $x = mz + p$ и $y = nz + q$.

Точка пересѣченія должна лежать въ одно время на данной поверхности и на данной прямой. Слѣдов. ея коор-ты x, y и z должны удовлетворять одновременно тремъ написаннымъ ур-іямъ.

Слѣдов. коор-ты точки пересѣченія найдутся, рѣшивъ эти три ур-ія относительно x, y и z. Но эти ур-ія первой степени и ихъ система дастъ для x, y и z по одному только значенію. Слѣдовательно получится всегда одна только точка пересѣченія. Такимъ образомъ разсматриваемая поверхность можетъ быть пересѣчена прямою линіею не болѣе, какъ въ одной точкѣ. Слѣдов. эта поверхность есть плоскость.

На этомъ основаніи въ послѣдующемъ, мы будемъ общее ур-іе плоскости писать въ такомъ видѣ:



$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Если это ур-іе намъ дано, то чтобы опредѣлить положеніе ея относительно плоскостей коор-тъ, можно опредѣлить три отрѣзка, которые эта плоскость дѣлаетъ на трехъ осяхъ коор-тъ. Опредѣлимъ эти отрѣзки. Примѣнимъ данное ур-іе къ точкѣ пересѣченія плоскости

съ осью $x^{-ов}$. Здѣсь $z=0$, $y=0$ и пусть ..... $x=a$. Положимъ $Aa+D=0$. Отсюда $a=-\frac{D}{A}$. Это есть отрѣзокъ по оси $x^{-ов}$ (съ его знакомъ?). Примѣнимъ тоже ур-іе къ точкѣ пересѣченія съ осью $y^{-ов}$. Въ этой точкѣ $x=0$, $z=0$ и пусть $y=b$; получимъ $Bb+D=0$; отсюда $b=-\frac{D}{B}$.
Наконецъ въ точкѣ пересѣченія съ осью $z^{-ов}$; $x=0$, $y=0$ и пусть $z=c$, $Cc+D=0$ Откуда

$$c=-\frac{D}{C}$$

Величины a, b и c суть отрѣзки, дѣлаемые плоскостью на трехъ осяхъ коор-тъ. Эти отрѣзки могутъ быть положительна и отрицательна

Ур-іе плоскости весьма удобно можно выразить посредствомъ отрѣзковъ a, b и c, на трехъ осяхъ коор-тъ.
Дѣйствительно, мы будемъ имѣть:

$$A=-\frac{D}{a}$$
$$B=-\frac{D}{b}$$
$$C=-\frac{D}{c}$$

Вставимъ это въ ур-іе плоскости:

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0 \text{ . Или:}$$
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Это есть ур-іе плоскости, непроходящей чрезъ начало коор-тъ и дѣлающей отрѣзки на осяхъ a, b и c. Ур-іе это особенно удобно потому, что оно имѣетъ одинъ и тотъ же видъ при прямоугольныхъ и при косоугольныхъ осяхъ
Ур-іе это нельзя однако примѣнить къ плоскости проходящей чрезъ начало, потому что тогда $a=0$, $b=0$ и $c=0$.
Вообще, если плоскость проходитъ чрезъ начало, то не-

премѣнно должно быть $D=0$. потому что ур-іе должно удовлетвориться, полагая $x=0$, $y=0$ и $z=0$; такъ что ур-іе плоскости, проходящей чрезъ начало, будетъ:

$$Ax+By+Cz=0$$

Задача. Дано ур-іе плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (P)$$

отнесенной къ прямоугольной осямъ коор-тъ. Требуется 1.) опредѣлить углы ею дѣлаемые съ плоскостями коор-тъ и 2.) ея разстояніе отъ начала коор-тъ.

Вообразимъ, изъ начала координатъ на эту плоскость перпендикуляръ и пусть длина этого $\perp$-ра есть p, а углы дѣлаемые имъ ($\perp$-омъ p) съ осями, будутъ α, β и γ. Эти углы будутъ соотвѣтственно равны угламъ, дѣлаемымъ данною плоскостью съ плоскостями коор-тъ, на томъ основаніи, что уголъ между двумя прямыми, равенъ углу между двумя плоскостями къ нимъ $\perp$-ными.

Такъ, что можемъ представить это, въ такомъ видѣ:

$$\alpha = \widehat{p,x} = \widehat{P,yz}$$
$$\beta = \widehat{p,y} = \widehat{P,xz}$$
$$\gamma = \widehat{p,z} = \widehat{P,xy}$$

Нормальное ур-іе той-же самой плоскости (P), какъ извѣстно буд.:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

и это ур-іе должно быть тождественно съ даннымъ ур-іемъ, такъ они оба представляютъ одну и ту-же плоскость. Слѣдовательно существовать такой постоянной множитель μ, который, будучи введенъ въ данное ур-іе, обратитъ его въ нормальное. Помноживъ данное ур-іе на μ, получимъ:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

И затѣмъ : должна имѣть коэф-та при одинак. степ. x, y, z равн.

$$\cos\alpha = \mu A$$
$$\cos\beta = \mu B$$
$$\cos\gamma = \mu C$$

а также и извѣстные члены между собою равны:

$$-p = \mu D$$

Изъ этихъ ур-ій слѣдуетъ опредѣлить пять неизвѣстныхъ

$$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma, p \text{ и } \mu$$

Такъкакъ ур-ій четыре, то къ нимъ слѣдуетъ присоединить еще условіе:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Рѣшаемъ эти ур-ія. Возведя въ квадратъ первыя три ур-ія и складывая, получимъ:

$$(A^2+B^2+C^2)\mu^2 = 1 \qquad \mu^2 = \frac{1}{A^2+B^2+C^2}$$

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Затѣмъ

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \; ; \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \; ; \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

И наконецъ

$$p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

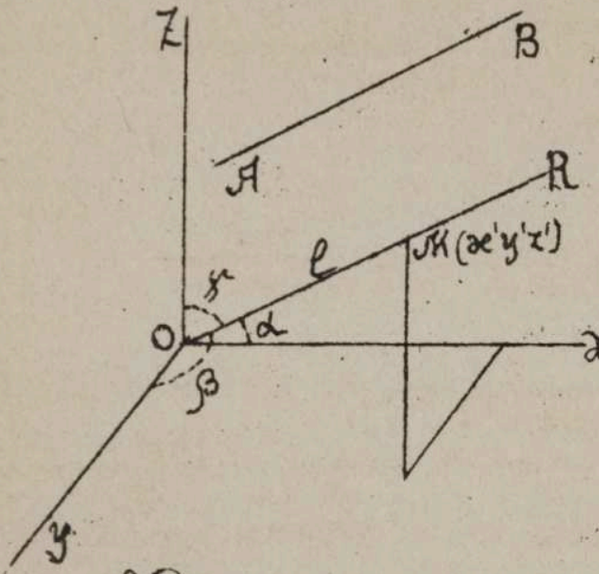
Эти четыре формулы рѣшаютъ нашу задачу.

Замѣчаніе. Чтобы знать, какой именно знакъ должно принимать предъ корнемъ, то должно обратить вниманіе на то, что $p > 0$, а потому предъ корнемъ надо взять знакъ обратный со знакомъ D, въ уравненіи, потому что только тогда получимъ $p > 0$.

Задача. Даны ур-ія прямой въ пространствѣ:

$$x = mz + p \quad \text{и} \quad y = nz + q$$

Положимъ, что эта прямая отнесена къ прямоугольной системѣ осей коор-тъ. Требуется найти α, β и γ, образуемые этою прямою съ тремя осями x, y, z - овыми.



Пусть AB данная прямая. Что-бъ получить угла α, β и γ, проведемъ* ||-ль AB и OR будетъ имѣть угла: $ROx = \alpha$; $ROy = \beta$; $ROz = \gamma$.

Такъ-какъ прямая OR параллельна прямой AB, то проэкціи OR на плоскости xz и yz ||-ны проэкціямъ AB на тѣхъ-же плоск. На этомъ основаніи, ур-ія данной прямой есть въ тоже время, ур-ія проэкцій. И эти два ур-ія вмѣстѣ представляютъ прямую OR въ пространствѣ.

Отложимъ на OR произвольную длину $OM = l$ и пусть коор-ты точки M будутъ x', y' и z'. Эти коор-ты удовлетворяютъ ур-ямъ $x = mz$ и $y = nz$, такъ что для точки M будемъ имѣть $x' = mz'$ и $y' = nz'$.

Съ другой стороны, эти коор-ты, суть проэкціи OM на оси: $x' = np_x OM$; $y' = np_y OM$ и $z' = np_z OM$, поэтому $x' = l\cos\alpha$; $y' = l\cos\beta$ и $z' = l\cos\gamma$.

Слѣдовательно:

$$l\cos\alpha = ml\cos\gamma$$
$$l\cos\beta = nl\cos\gamma$$

Сокративъ на l, получ. $\cos\alpha = m\cos\gamma$
$$\cos\beta = n\cos\gamma$$

Присоединимъ сюда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

*чрезъ начало

Изъ этихъ трехъ ур-ій опредѣлимъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$.

$$\cos^2\gamma(m^2+n^2+1)=1$$

Отсюда:

$$\cos^2\gamma=\frac{1}{m^2+n^2+1} \quad \text{и} \quad \cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

Такъ что будемъ имѣть:

$$\cos\alpha=\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}} \; ; \; \cos\beta=\frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

Эти три формулы рѣшаютъ нашу задачу. Двойной знакъ здѣсь является потому, что разсматриваемая прямая имѣетъ два противоположные направленія AB и BA. Если первое направленіе дѣлаетъ съ осью X-овъ уголъ α, то второе дѣлаетъ съ той-же осью $180-\alpha$ и $\cos$-ы этихъ угловъ равны, но съ обратными знаками.

Послѣднія формулы даютъ выраженія $\cos$-овъ угловъ, дѣлаемыхъ прямою съ осями, посредствомъ угловыхъ коэф-товъ m и n, которые даны; затѣмъ, замѣтимъ обратныя выраженія, т. е. выраженія угловыхъ коэф-товъ прямой, посредствомъ этихъ косинусовъ: $m=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$

$$n=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Задачи относительно плоскости и прямой линіи въ пространствѣ.

1.) **Задача.** Составить ур-іе прямой линіи, проходящей чрезъ данную точку.

Пусть коор-ты данной точки будутъ x', y' и z'. Ур-ія искомой прямой должны имѣть видъ:

$$x = mz + p \quad и \quad y = nz + q$$

Здесь четыре неизвестных m, n, p и q. Должно быть: $x' = mz' + p$ и $y' = nz' + q$

Имеем два ур-ия с четырьмя неизвестными. Помощью этих ур-ий можно два неизвестных, например: p и q - исключить, а другие два m и n остаются неизвестными

$$p = x' - mz'$$
$$q = y' - nz'$$

Вставивъ въ ур-нения прямой:

$$x = mz + x' - mz' \qquad x - x' = m(z - z')$$
$$y = nz + y' - nz' \quad \text{или} \quad y - y' = n(z - z')$$

Это суть ур-ия прямой, проходящей чрезъ данную точку Угловые коэф-енты m и n остались неизвестными, потому что чрезъ данную точку можно провести безчисленное множество прямыхъ.

2.) Задача. Составить ур-ие прямой, проходящей чрезъ данную точку и составляющей данные угла съ прямоугольными осями коор-тъ.

Пусть α, β и γ - суть углы, которые прямая должна делать съ осями x-овъ, y-овъ и z-овъ; а x' y' и z' суть коор-ты данной точки.

Ур-ия искомой прямой будутъ:

$$x - x' = m(z - z')$$
$$y - y' = n(z - z')$$

При томъ должно быть:

$$m = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \quad и \quad n = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Такъ что ур-ия прямой будутъ:

$$x - x' = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(z - z')$$

$$y - y' = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(z - z')$$

Эти ур-ия можно написать так:

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}$$

Замечание. Иногда вместо углов α, β и γ берут три числа a, b и c, которые должны быть соответственно пропорциональны косинусам углов α, β и γ.

В этом случае должно иметь:

$$\cos\alpha = ka$$
$$\cos\beta = kb$$
$$\cos\gamma = kc$$

где k — коэф-ент пропорциональности. И ур-ия прямой будут:

$$\frac{x - x'}{ka} = \frac{y - y'}{kb} = \frac{z - z'}{kc}$$

Или проще:

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}$$

При этом легко определить и самые косинусы углов, а именно находим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = k(a^2 + b^2 + c^2)$$

Отсюда:

$$k^2 = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{и}$$

следовательно:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3.) **Задача.** Составить ур-ие прямой линии, про-

ходящей через данную точку.

Пусть коор-ты данных точек будут: (x', y', z') и (x'', y'', z'')

Ур-ия искомой прямой, как проходящей через первую точку, должно иметь вид:

$$x - x' = m(z - z')$$
$$y - y' = n(z - z')$$

Здесь неизвестны m и n пока, но коор-ты второй точки должны удовлетворять этим ур-иям.

$$x'' - x' = m(z'' - z')$$
$$y'' - y' = n(z'' - z')$$

Отсюда:

$$m = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}$$
$$n = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}$$

Окончательно искомые ур-ия будут:

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z')$$
$$y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z')$$

4.) Задача. Составить ур-ия прямой, проходящей через данную точку и параллельно данной прямой.

Пусть дана точка (x', y', z') и дано:

$$x = mz + p$$
$$y = nz + q$$

Ур-ия искомой прямой должны иметь вид:

$$x - x' = m'(z - z')$$
$$y - y' = n'(z - z')$$

Но параллельные линии будут иметь, и проекции на плоскостях коор-т, также параллельные и потому

угловые коэф-енты проекций должны быть равны, т. е.

$$m' = m \quad \text{и} \quad n' = n .$$

Окончательно ур-ия будут:

$$x - x' = m(z - z')$$
$$y - y' = n(z - z')$$

5.) **Задача.** Даны ур-ия двух прямых, рассмотреть, пересекаются-ли эти прямые или нет и если пересекаются, то найти их точку пересечения.

Пусть ур-ия одной прямой будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + p \\ y &= nz + q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ур-ия другой прямой:

$$\left.\begin{aligned} x &= m'z + p' \\ y &= n'z + q' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Если прямая (1) пересекает прямую (2), то коор-ты пересечения, должны одновременно удовлетворять четырем написанным ур-ям.

Но так как неизвестных только три, а ур-ий четыре, то это возможно только условно.

Достаточно только трех ур-ий, чтобы определить X, Y и Z, а затем найденные величины должны будут удовлетворить и четвертому; если они ему удовлетворяют, то прямые пересекаются, а если не удовлетворяют, то прямые не пересекаются.

Определить X, Y и Z из трех ур-ий и вставить их в четвертое, значит исключить X, Y и Z из четырех ур-ий.

Ур-ie, которое получится въ результатѣ и будетъ условнымъ ур-иемъ, оно должно удовлетворяться для того, что-бы прямыя пересѣкались. Найдемъ это условіе Изъ ур-ій (1) и (2), получаемъ для точки пересѣченія:

$$mz+p=m'z+p'$$
$$nz+q=n'z+q'$$

Отсюда:

$$z=\frac{p'-p}{m-m'} \quad \text{и} \quad z=\frac{q'-q}{n-n'}$$

И должна имѣть:

$$\frac{p'-p}{m-m'}=\frac{q'-q}{n-n'}$$

Это есть условіе пересѣченія двухъ прямыхъ въ пространствѣ. Если оно выполнено, то прямыя пересѣкаются, если не выполнено, то онѣ не пересѣкаются. Если условіе выполнено, то легко опредѣлить коор-ты точки пересѣченія:

$$z=\frac{p'-p}{m-m'}$$

а x и y найдутся или изъ ур-ій (1)-хъ, или изъ ур-ій (2)-хъ.

6.) Задача. Опредѣлить пересѣченіе двухъ данныхъ плоскостей

Пусть ур-ія плоскостей:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Это пересѣченіе будетъ нѣкоторая прямая линія и совокупность двухъ ур-ій двухъ данныхъ плоскостей можетъ быть разсматриваема, какъ совокупность ур-ій прямой.

Что-бы получить ур-ія этой прямой въ прежнемъ видѣ, т.е. что-бы опредѣлить ея проэкціи на плоскости XZ и YZ, то должно исключить изъ этихъ двухъ ур-ій Y, получимъ ур-іе проэкціи на плоскости XZ. Это будетъ ур-іе первой степени между X и Z. Рѣшая его относительно X и ма представимъ его въ видѣ:

$$X = mZ + p$$

такимъ образомъ опредѣлятся m и p.
Точно такимъ исключая X, получимъ проэкцію на плоскости YZ и рѣшая это ур-іе относительно Y-ка должна имѣть видъ:

$$Y = nZ + q$$

Чрезъ что опредѣлиться n и q.
Когда угловые коэф-енты прямой m и n будутъ найдены, тогда, если коор-ты прямоуголь., можно будетъ опредѣлить углы, дѣлаемые этою прямою съ осями коор-тъ, по формуламъ:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

7) **Задача.** Составить ур-іе плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки.

Пусть даны три точки $x'y'z'$, $x''y''z''$ и $x'''y'''z'''$
Искомая плоскость выразится ур-ием, вида:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Здесь неизвестны четыре коэф-ента A, B, C и D.
Число неизвестных коэф-ентов можно привести к трем, разделивши на D все ур-ие:

$$\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z+1=0$$

Здесь три неизвестных $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ и $\frac{C}{D}$.
Коор-та данных точек должна удовлетворять этому ур-ию, поэтому:

$$\frac{A}{D}x'+\frac{B}{D}y'+\frac{C}{D}z'+1=0$$
$$\frac{A}{D}x''+\frac{B}{D}y''+\frac{C}{D}z''+1=0$$
$$\frac{A}{D}x'''+\frac{B}{D}y'''+\frac{C}{D}z'''+1=0$$

Из этих трех ур-ий первой степени можно найти три неизвестных и ур-ие плоскости будет известно.

8.) Задача. Составить ур-ие плоскости, проходящей через данную точку.

Пусть коор-та данной точки будут x', y' и z'. Ур-ие искомой плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Коор-та x', y' и z' должна удовлетворять этому ур-ию:

$$Ax'+By'+Cz'+D=0$$

Имеем одно ур-ие в нем четыре неизвестных A, B, C и D. Помощью этого ур-ия можно исключить одно из четырех, исключая D:

$$D = -Ax' - By' - Cz'$$

Вставивши во первое:

$$Ax + By + Cz - Ax' - By' - Cz' = 0 \quad \text{или}$$
$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0$$

Это есть ур-ie плоскости, проходящей через данную точку, в ней коэф-енты A, B и C остались неопределенными.

9.) Задача. Выразить условie параллельности двух плоскостей.

Пусть две данныя плоскости будут:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Если данныя плоскости параллельны, то и пересечения их съ плоскостями коор-тъ должны быть также параллельны. Но для пересечения съ плоскостью Yz и ур-ия пересечения будут:

$$By + Cz + D = 0$$
$$B'y + C'z + D' = 0 \; ; \text{ ибо } x = 0$$

Если эти двe прямыя параллельны, то будем имeть:

$$\frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$$

потому что:

$$y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B} \text{ и } y = -\frac{C'}{B'}z - \frac{D'}{B'}$$

Для пересечения съ плоскостью Xz будем имeть $y = 0$ И ур-ия пересечения будут:

$$Ax + Cz + D = 0$$
$$A'x + C'z + D = 0$$

Если эти прямыя параллельны, то

$$\frac{A'}{A} = \frac{C'}{C}$$

Двумя пересечениями съ двумя плоскостями коор-ты положеніе плоскости вполнѣ опредѣляется, а потому пересѣченія на 3-ей плоскости коор-ты можно не разсматривать. Такъ что, условіе параллельности выражается равенствами:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$$

Такъ что, если двѣ плоскости параллельны, то коэф-ты при x, y и z въ ихъ ур-іяхъ должны быть соотвѣтственно пропорціональны

10.) Задача. Составить ур-іе плоскости, проходящей чрезъ данную точку и параллельно данной плоскости.

Пусть дана точка $(x', y' и z')$ и ур-іе плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

Ур-іе плоскости, проходящей чрезъ данную точку, будетъ:

$$A'(x - x') + B'(y - y') + C'(z - z') = 0$$

Но по условію параллельности, имѣемъ:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = K, \text{ пусть равно } K.$$

Тогда:

$$A' = AK \; ; \; B' = BK \text{ и } C' = CK$$

Ур-іе искомой плоскости, тогда будетъ:

$$A(x - x')K + B(y - y')K + C(z - z')K = 0$$

или

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0$$

11.) Задача. Даны ур-ія прямой линіи и плоскости, найти коор-ты ихъ точки пересѣченія.

Пусть ур-ія данной прямой будутъ:

$$x = mz + p$$
$$y = nz + q$$

Ур-ie плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Коор-ты точки пересечения должны удовлетворять этим трем ур-иям. Вместе, они найдутся, решивъ эти три ур-ия:

$$A(mz+p)+B(nz+q)+Cz+D=0$$
$$(Am+Bn+C)z+Ap+Bq+D=0$$

$$z=-\frac{Ap+Bq+D}{Am+Bn+C}$$

Затемъ x и y найдутся по ур-иямъ прямой.

1.) Замѣчаніе. Если имѣемъ, что $Ap+Bq+D\neq 0$ и въ то-же время $Am+Bn+C=0$, то получимъ $z=\infty$, $x=\infty$ и $y=\infty$. Пересѣченіе происходитъ на безконечномъ разстояніи, иначе прямая не пересѣкается съ плоскостью и слѣдовательно ей параллельна.

Равенство $Am+Bn+C=0$ есть условіе параллельности линіи съ плоскостью.

2.) Замѣчаніе. Если имѣемъ въ одно время $Am+Bn+C=0$ и $Ap+Bq+D=0$, то получимъ $z=\frac{0}{0}$ и ур-ie изъ котораго опредѣлится z будетъ $0.z+0=0$ и ему удовлетворяетъ всякая величина z. Отсюда слѣдуетъ, что всякая точка прямой можетъ быть разсматриваема, какъ точка пересѣченія прямой съ плоскостью. Слѣдов., прямая совпадаетъ съ плоскостью.

12.) Задача. Составить ур-ie плоскости, проходящей чрезъ данную точку и чрезъ данную прямую линію.

Пусть дана точка (x',y',z') и данная прямая:

$$x = mz + p$$
$$y = nz + q$$

напишимъ эти ур-ія такъ:

$$x - mz - p = 0$$
$$y - nz - q = 0$$

Изъ этихъ ур-ій составимъ третье такимъ образомъ; умножимъ второе ур-ie на произвольное постоянное количество-λ, сложимъ его съ первымъ, получимъ:

$$x - mz - p + \lambda(y - nz - q) = 0$$

Затѣмъ спросимъ себя, что будетъ представлять это ур-ie, взятое само по себѣ? Это ур-ie 1-ой степени, слѣд. оно представляетъ нѣкоторую плоскость; утверждаемъ, что эта плоскость проходитъ черезъ данную нашу прямую. Въ самомъ дѣлѣ, если возьмемъ произвольную точку на этой прямой (x, y, z), то ея коор-ты удовлетворяютъ двумъ ур-іямъ прямой. Но вслѣдствіи этого тѣ же коор-ты удовлетворяютъ и ур-ію нашей плоскости, або они обратятъ это ур-ie въ тождество $0 + \lambda \cdot 0 = 0$; отсюда слѣдуетъ, что всякая точка данной прямой лежитъ въ этой плоскости, т. е., что вся данная прямая находится въ этой плоскости; измѣняя λ, мы будемъ получать безчисленное множество плоскостей, проходящихъ черезъ данную прямую.

Искомая плоскость должна проходить сверхъ того черезъ точку (x', y', z'), поэтому должно имѣть:

$$x' - mz' - p + \lambda(y' - nz' - q) = 0$$

Отсюда:

$$\lambda = -\frac{x' - mz' - p}{y' - nz' - q}$$

Ур-ie плоскости будетъ:

$$x - mz - p - \frac{x' - mz' - p}{y' - nz' - q}(y - nz - q) = 0$$

Замѣчаніе. Приведенные въ этой задачѣ разсужденія примѣняются въ какомъ-бы то видѣ не были даны ур-ія прямой; напр: если-бы прямая была дана ур-ями двухъ плоскостей, именно:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A'x + B'y + C'z + D = 0$$

то разсуждая подобно предыдущему заключили-бы, что ур-ie плоскости проходящей чрезъ данную прямую будетъ имѣть видъ:

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

13.) Задача. Выразить условіе перпендикулярности линіи съ плоскостью. (Коор-ты прямоуг.)

Выводъ этого условія будетъ основываться на слѣдующемъ замѣчаніи: если прямая ⊥-на къ плоскости, то ея ортогональная проэкція на другую плоскость будетъ ⊥-на къ пересѣченію первой плоскости со второй.

Возьмемъ произвольную плоскость: $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямую:

$$x = mz + p$$
$$y = nz + q$$

Положимъ, что эта прямая ⊥-на къ плоскости. Возьмемъ проэкцію прямой на плоскости Oz; она будетъ:

$$x = mz + p$$

Возьмемъ пересѣченіе данной плоскости съ плоскостью Oz; оно получится, сдѣлавъ въ ур-іи плоскости $y = 0$ и будетъ:

$$Ax + Cz + D = 0$$

Эти двѣ прямыя, обѣ лежащія въ плоскости Oz должны быть ⊥-ны. Выразимъ условіе ихъ перпендикулярности:

$$x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A}$$

и слѣдов. должно имѣть:

$$-\frac{C}{A}m + 1 = 0$$

Отсюда: $$m = \frac{A}{C}$$

Возьмемъ проэкцію прямой на плоскости yz ....

$$\ldots y = nz + q$$

и пересѣченіе данной плоскости, съ плоскостью yz; оно будетъ при $x = 0$ (въ ур-іи плоскости) $By + Cz + D = 0$; докажемъ, что эти прямыя $\perp$-ны, и имѣемъ: $y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B}$, слѣдовательно: $-\frac{C}{B}n + 1 = 0$, откуда $n = \frac{B}{C}$.

Мы получили такимъ образомъ два условія $\perp$-сти, — $m = \frac{A}{C}$ и $n = \frac{B}{C}$ — прямой съ плоскостью. Можно не разсматривать проэкцію прямой на третью плоскость коор-тъ xy, потому что положеніе прямой первыми двумя проэкціями вполнѣ опредѣляется, вслѣдствіи чего разсмотрѣніе 3-й проэкціи не дастъ новаго условія, а дастъ условіе вытекающее изъ первыхъ двухъ какъ слѣдствіе.

4) Задача. Составить ур-ія прямой, проходящей чрезъ данную точку, перпендикулярно данной плоскости.

Данная точка .... (x', y', z') и плоскость: $Ax + By + Cz + D = 0$

Ур-ія искомой прямой будутъ:

$$x - x' = m(z - z') \quad \text{и}$$

$$y - y' = n(z - z'),$$

а по условію $\perp$-сти $m = \frac{A}{C}$ и $n = \frac{B}{C}$, поэтому ур-ія прямой будутъ:

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z') \quad \text{и}$$

$$y - y' = \frac{B}{C}(z - z')$$

Иначе ур-ія прямой $\perp$-ой къ данной плоскости, буд.:

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}$$

Прибавимъ, что эти ур-ія можно было-бы написать и безъ всякаго вывода, ибо мы знаемъ, что косинусы угловъ, образуемыхъ ⊥-омъ къ плоскости съ осями коор-тъ буд. соотвѣтственно пропорціональны A, B и C.

15.) Задача. Составить ур-іе плоскости, проходящей чрезъ данную точку и перпендикулярно данной прямой.

Пусть точка $(x', y'$ и $z')$, данная прямая:

$$x = mz + p$$
$$y = nz + q$$

Ур-іе искомой плоскости будетъ:

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0$$

По условію ⊥ости $\frac{A}{C}=m$ и $\frac{B}{C}=n$. Отсюда $A=Cm$, а $B=Cn$, почему:

$$Cm(x-x')+Cn(y-y')+C(z-z')=0$$
$$m(x-x')+n(y-y')+z-z'=0$$

16.) Задача. Найти разстояніе отъ данной точки до данной плоскости.

Пусть $(x', y'$ и $z')$ данная точка и ур-іе плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Разстояніе измѣряется длиною перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на плоскость.

Ур-ія этого перпендикуляра будутъ:

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}$$

Положимъ, что этотъ ⊥-ръ пересѣкаетъ плоскость въ точкѣ $(x'', y''$ и $z'')$; тогда разстояніе отъ точки до плоскости, Δ, какъ разстояніе между двумя точками $(x', y'$ и $z')$ и $(x'', y''$ и $z'')$ будетъ:

$$\Delta = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}$$

Остается определить, x'', y'' и z''.

Эти коор-ты должны удовлетворять ур-ям прямой и ур-ю плоскости, следовательно, должно быть:

$$\frac{x''-x'}{A} = \frac{y''-y'}{B} = \frac{z''-z'}{C}$$

И:

$$Ax''+By''+Cz''+D=0$$

Из этих трех ур-ий первой степени всегда можно найти x'', y'' и z'' и затем вставить их в формулу Δ. Решение этих трех ур-ий можно произвести особым сокращенным способом. —

Пусть последнее отношение равно K. Напишем, возведя в квадрат:

$$\frac{(x''-x')^2}{A^2} = \frac{(y''-y')^2}{B^2} = \frac{(z''-z')^2}{C^2} = K^2$$

Отсюда:

$$\frac{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}{A^2+B^2+C^2} = K^2$$

Или:

$$\frac{\Delta^2}{A^2+B^2+C^2} = K^2. \text{ Отсюда } \Delta^2 = K^2(A^2+B^2+C^2)$$

И отсюда

$$\Delta = K\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

С другой стороны имеем:

$$\frac{A(x''-x')}{A^2} = \frac{B(y''-y')}{B^2} = \frac{C(z''-z')}{C^2} = K$$

$$\frac{A(x''-x')+B(y''-y')+C(z''-z')}{A^2+B^2+C^2} = K$$

$$K = \frac{Ax''+By''+Cz''-Ax'-By'-Cz'}{A^2+B^2+C^2};$$

Или еще:

$$Ax''+By''+Cz'' = -D$$

$$K = \frac{-Ax' - By' - Cz' - D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Слѣдовательно:

$$\Delta = \frac{-Ax' - By' - Cz' - D}{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$; Δ величина абсолютная знакъ не имѣетъ.

Или окончательно: $$\Delta = \pm \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Чтобъ запомнить эту формулу замѣтимъ, что числитель ея есть 1-я часть уравненія данной плоскости, въ которой вмѣсто текущихъ коор-тъ $(x, y$ и $z)$ поставлены коор-ты данной точки x', y' и z'; знаменатель-же есть корень квадратный изъ суммы квадратовъ при x, y и z

Замѣтимъ, что если-бы точка x', y', z' лежала въ данной плоскости, то имѣли-бы:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

Или:

$$\Delta = 0$$

Если-бы точка x', y' и z' совпадала съ началомъ коор-тъ, то имѣли-бы: $x' = y' = z = 0$ и тогда:

$$\Delta = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Эта формула даетъ разстояніе плоскости отъ начала коор-тъ; она намъ уже извѣстна. Относительно двойнаго знака $\pm$, слѣдуетъ замѣтить, что Δ всегда больше нуля, а потому если предъ числителемъ знакъ минусъ, то предъ корнемъ тотчасъ минусъ

17.) Задача. Найти разстояніе отъ данной точки до данной прямой линіи.

Пусть дана точка x', y' и z' и данная прямая:

$$x = mz + p \text{ и } y = nz + q$$

Чрезъ данную точку плоскость проведемъ $\perp$-но къ данной прямой. Ур-іе этой плоскости будетъ:

$$m(x-x')+n(y-y')+(z-z')=0$$

Эта плоскость пересекает прямую в некоторой точке x'', y'' и z''. Которая будет подошвой перпендикуляра опущенного из данной точки на прямую, следовательно расстояние от точки до прямой будет:

$$\Delta = \sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}$$

И нам осталось определить x'', y'' и z''. Но коор-та x'', y'', z'' должна удовлетворять 1.) ур-ию плоскости и
2.) ур-иям прямой, поэтому:

$$m(x''-x')+(y''-y')n+z''-z'=0$$

И: $x''=mz''+p$; $y''=nz''+q$

Из этих трех ур-ий 1-ой степени всегда можно найти x'', y'' и z'', вставляя их затем в выражение Δ, мы получим формулу, определяющую расстояние от точки до прямой.

18.) Задача. Даны ур-ия двух прямых линий; найти угол, образуемой этими прямыми.

Пусть первая прямая будет:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz+p \\ y &= nz+q \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Вторая:

$$\left.\begin{aligned} x &= m'z+p \\ y &= n'z+q \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Обозначим через α, β и γ углы образуемые первою прямою с тремя осями коор-т x, y и z и пусть α', β' и γ' — такие же углы для второй прямой. Угол между двумя прямыми пусть будет v. Тогда полная коор-та прямоуг. будет иметь: $\cos v = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma'$

Но мы видели раньше, что:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

Точно также: $\cos\alpha' = \frac{m'}{\sqrt{m'^2+n'^2+1}}$; $\cos\beta' = \frac{n'}{\sqrt{m'^2+n'^2+1}}$

$$\cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{m'^2+n'^2+1}}$$

Вставляя получимъ $\cos v = \frac{mm'+nn'+1}{\sqrt{m^2+n^2+1}\cdot\sqrt{m'^2+n'^2+1}}$

Эта формула рѣшаетъ задачу.

1.) Слѣдствіе. Если двѣ прямыя взаимно перпендикулярны, то уголъ $v = 90°$; $\cos v = 0$ и $mm'+nn'+1 = 0$

Это есть условіе ⊥-ности двухъ прямыхъ въ пространствѣ.

2.) Слѣдствіе. Если двѣ прямыя параллельны. Здѣсь $v = 0$; $\cos v = 1$ и тогда:

$$(m^2+n^2+1)(m'^2+n'^2+1) - (mm'+nn'+1)^2 = 0$$

Это условіе можно упростить, помощью слѣдующаго тождества, наз. тождествомъ Лагранжа.

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) - (aa'+bb'+cc')^2 =$$
$$= (ab'-a'b)^2 + (ac'-a'c)^2 + (bc'-b'c)^2$$

Это тождество провѣряется простымъ раскрытіемъ скобокъ.

Сравнивая первую часть этого тождества, съ первою частью нашего условія, положимъ $a = m$, $b = n$, $c = 1$; $a' = m'$, $b' = n'$; $c' = 1$.

И тогда наше условіе напишется въ новомъ видѣ:

$$(n'm - m'n)^2 + (m-m')^2 + (n-n')^2 = 0$$

Но это равенство разлагается на три:

$$mn' - m'n = 0 \; ; \; m - m' = 0 \; ; \; n - n' = 0$$

То есть $m = m'$ и $n = n'$

Третье-же равенство будетъ слѣдствіемъ этихъ двухъ,
И эти два равенства выражаютъ условія параллельности двухъ прямыхъ

19. Задача. Дана ур-ія двухъ плоскостей; найти уголъ ими образуемой.

Пусть 1-я плоскость буд. $Ax + By + Cz + D = 0$ ..... (1)

вторая плоскость: $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ ..... (2)

Уголъ между двумя плоскостями равенъ между перпендикулярами къ нимъ, проведенными чрезъ начало коор-тъ.

Пусть 1-ръ къ 1-ой плоскости дѣлаетъ съ осями коор-тъ угла α, β и γ, а перпенд. ко 2-ой плоскости съ тѣми-же осями дѣлаетъ углы α', β', γ' и пусть V уголъ между этими перпендикулярами:

$$\cos V = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma'$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Такія-же выраженія будутъ и для угловъ α', β' и γ', поэтому получимъ: $\cos^* = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$

Эта формула рѣшаетъ задачу.

Отсюда два слѣдствія: 1.) Если двѣ плоскости $\perp$-ны, то уголъ $V = 90^\circ$; $\cos V = 0$ и слѣд. $AA' + BB' + CC' = 0$, будетъ условіе $\perp$-сти двухъ плоскостей.

2.) Если плоскости $\parallel$-ны, то $V = 0$; $\cos V = 1$ и слѣдоват.

$$(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2) - (AA'+BB'+CC')^2 = 0$$

Преобразуемъ по тождеству Лагранжа, получимъ

*V

тогда условіе въ новомъ видѣ:

$$(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2 = 0$$

Что даетъ три равенства:

$$AB' - A'B = 0$$
$$AC' - A'C = 0$$
$$BC' - B'C = 0$$

Изъ первыхъ двухъ: $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$

Третье равенство будетъ слѣдствіемъ первыхъ двухъ.

Такимъ образомъ извѣстныя намъ условія параллельности двухъ плоскостей,

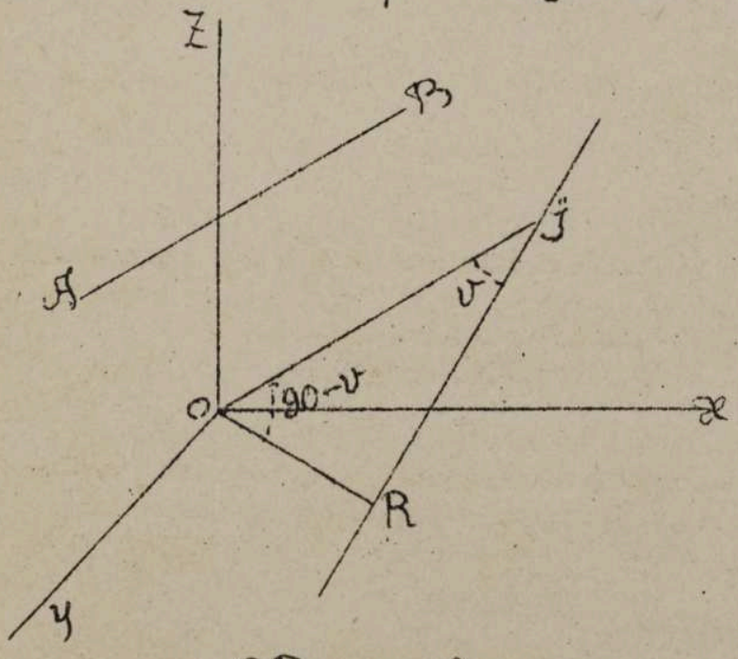
20.) Задача. Даны ур-ія прямой линіи и ур-ія плоскости; найти уголъ, образуемый прямой съ плоскостью.

Пусть ур-ія прямой: $x = mz + p$

$$y = nz + q$$

И плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$

Возьмемъ прямоугольныя оси коор-тъ и пусть прямая будетъ AB. Чрезъ начало O проведемъ прямую $O\ddot{J}$ параллельно AB. O-на дѣлаетъ такіе, какъ и AB съ осями три угла α, β и γ. Проведемъ чрезъ начало O 1-ую къ данной плоскости и пусть α', β' и γ' три угла, образуемые ими съ осями коор-атъ. Чрезъ прямую $O\ddot{J}$ и прямую OR проведемъ плоскость, эта плоскость пересѣчетъ данную плоскость по прямой $R\ddot{J}$ и получимъ треугольникъ ORJ — прямоугольной. Уголъ OJR равной V буд.



искомый уголъ прямой съ плоскостью. А уголъ $BO\ddot{J} = 90° - v$. Этотъ послѣдній уголъ, какъ уголъ между двумя прямыми $O\ddot{J}$ и OR опредѣлится по формулѣ:

$$Cs(90° - v) = Snv = Cs\alpha . Cs\alpha' + Cs\beta . Cs\beta' + Cs\gamma . Cs\gamma'$$

Вставляя вмѣсто Cs-овъ ихъ выраженія:

$$Snv = \frac{Am + Bn + C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} . \sqrt{m^2+n^2+1}}$$

Отсюда два слѣдствія:

1.) Если прямая $\parallel$-на плоскости, то $v = 0$ и $Snv = 0$, тогда: $Am + Bn + C = 0$.

Это есть уже извѣстное намъ условіе $\parallel$-сти линіи съ плоскостью.

2.) Если прямая $\perp$-на къ плоскости, то $v = 90°; Snv = 1$ и будемъ имѣть:

$$(A^2+B^2+C^2)(m^2+n^2+1) - (Am + Bn + C)^2 = 0$$

Преобразовавши по тождеству Лагранжа, получимъ:

$$(An - Bm)^2 + (A - Cm)^2 + (B - Cn)^2 = 0$$

Что даетъ три равенства:

$$An = Bm$$
$$A = Cm$$
$$B = Cn$$

Изъ два равенства даютъ: $m = \frac{A}{C}$ и $n = \frac{B}{C}$

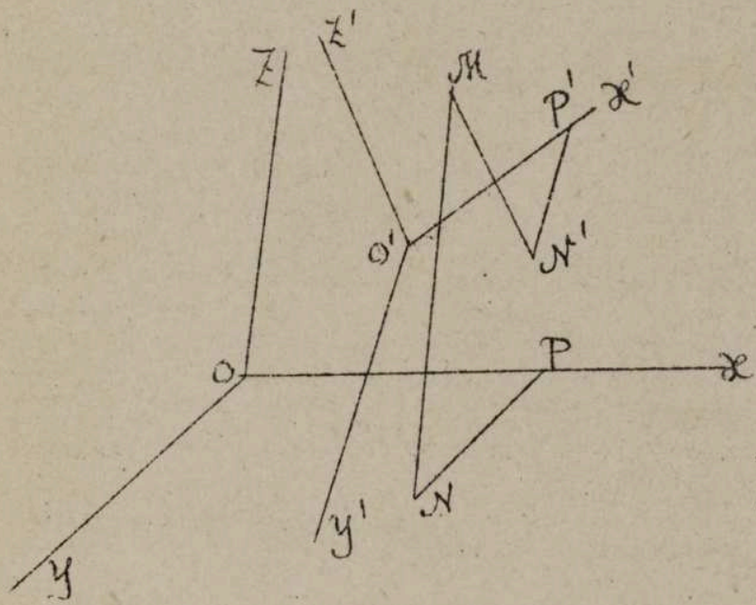
Третье равенство есть слѣдствіе этихъ двухъ; А эти два суть извѣстныя намъ условія перпендикулярности линіи съ плоскостью.

О преобразованіи координатъ.

Одна и таже поверхность, будучи отнесена къ различнымъ системамъ коор-тъ, выражается различно-

ми ур-іями и поэтому всегда возможно при изследовании поверхность отнести къ такимъ осямъ коор-тъ, что-бы ея ур-іе приняло возможно простой видъ.
Отсюда вопросъ о преобразованіи коор-тъ, который заключается въ слѣдующемъ.

Дано ур-іе поверхности, отнесенной къ системѣ осей $OXYZ$, $-f(x,y,z)=0$. Требуется составить ур-іе той же поверхности, отнесенной къ новой системѣ осей $O'X'Y'Z'$, полагая, что положеніе новой системы относительно первой извѣстно.



Для рѣшенія этого вопроса должно, взявъ произвольную точку поверхности (x,y,z) — выразить эти старыя коор-ты (x,y,z) въ коор-тахъ новыхъ $(x',y'z')$. Такія выраженія наз. формулами-преобразованія коор-тъ. Если эти выраженія будутъ вставлены въ данное ур-іе поверхности вмѣсто x,y,z, то получится новое ур-іе вида:

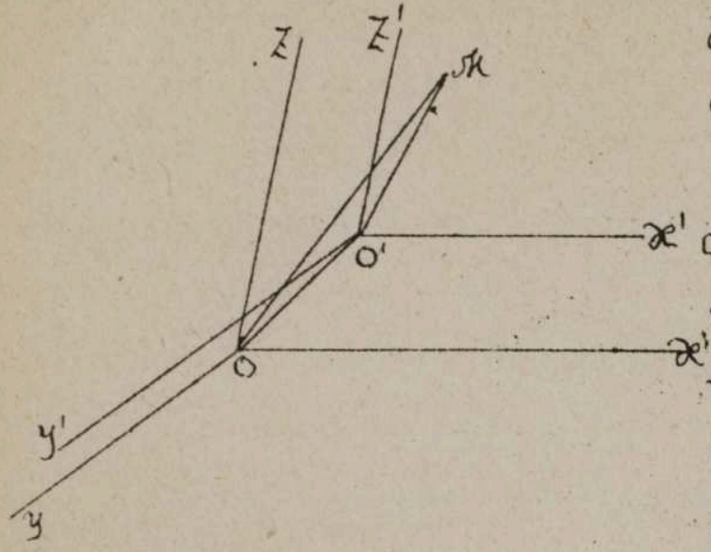
$$F(x',y',z')=0$$

Которое и будетъ ур-іемъ поверхности, относительно новыхъ осей коор-тъ.

Разсмотримъ различные случаи преобразованія коор-тъ.

1.) Переходъ отъ одной системы коор-тъ къ другой, оставляя оси ||-ми самимъ себѣ и перенося начало коор-тъ въ другую точку.

Пусть O, x, y, z старая система, а O'x'y'z' — новая система. Положим, что новая система будет известна, если будут: дана коор-та начала α, β и γ.



Возьмем произвольную точку M. Ея старая коор-та x, y, z и новая — x', y', z'. Проведем OO'; O'M и OM. Проэктируем контуръ OO'M съ замыкающею стороною OM на ось x-ов; проведя чрезъ M и O' двѣ плоскости ||-ыя плоскости yz. Тогда получимъ:

$$пр(OM) = пр(OO') + пр(O'M)$$

Или:

$$x = \alpha + x'$$

Точно такъже, если проэктируемъ тотъ-же контуръ на другія двѣ оси Oy и Oz, проводя проэктирующ. плоскости ||-но Mz и My, найдемъ такъже:

$$y = \beta + y' \quad и \quad z = \gamma + z'$$

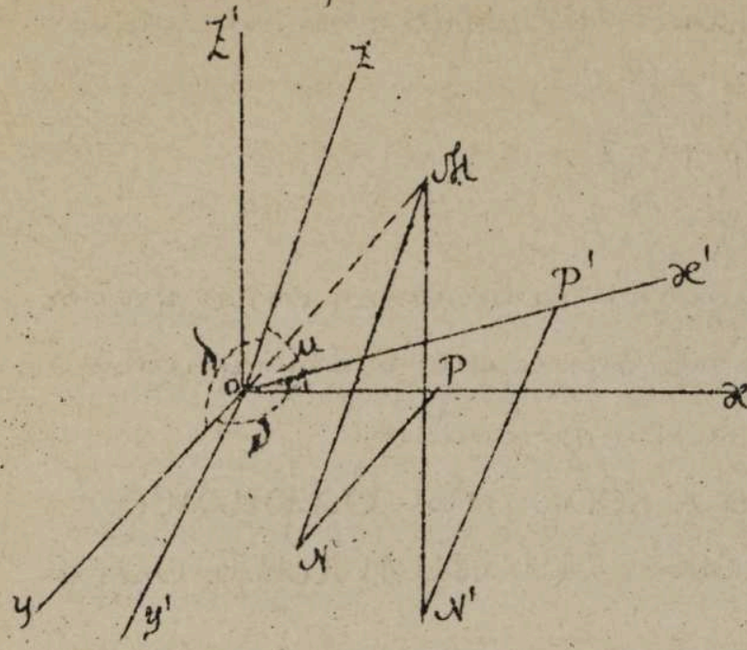
Эти три равенства суть формулы для преобразованія коор-тъ въ разсматриваемомъ случаѣ.

2.) Переходъ отъ одной системы косоугольныхъ осей коор-тъ къ другой такъже косоугольной, оставляя то-же начало и измѣняя направленіе осей.

Здѣсь должна быть дана угла между старыми осями, именно пусть уголъ $yOz = \lambda$, уг. $xOz = \mu$ и уг. $xOy = \nu$.

Затѣмъ должна быть дана углы образуемые новыми

осями и старыми, мы положили, что даны косинусы этих углов.



Эти косинусы представим в следующей таблице. Всего девять косинусов в этой таблице, между каждыми тремя косинусами углов, образуемых осями x', y' и z' со старыми осями, существует по одному соотношению, вследствие чего, эти девять косинусов связаны между собою тремя ур-ями и только шесть косинусов могут быть назначены произвольно.

	x'	y'	z'
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

Пусть M произвольная точка, построим ея старую и новую коор-ты. $OP = x$, $PN = y$, $MN = z$ и $OP' = x'$, $P'N' = y'$, $MN' = z'$. Проведем OM и рассмотрим два контура $OPNM$ и $OP'N'M'$ с общею замыкающею стороною MO и проэктируем оба контура на какую либо ось, будем иметь:

$$np(OP) + np(PN) + np(NM) = np(OP') + np(P'N') + np(M'N') = np(OM)$$

Примем за ось проэкций, ось x-ов:

$$x + y\cos\lambda + z\cos\mu = a_1x' + b_1y' + c_1z'$$

Проэктир. на ось y-ов, получим:

$$x\cos\lambda + y + z\cos\nu = a_2x' + b_2y' + c_2z'$$

Проэктир. на ось z-ов, получим:

$$x\cos\mu + y\cos\nu + z = a_3x' + b_3y' + c_3z'.$$

Формулы преобразования для настоящего случая получаются из этих ур-ий, если мы их решим относительно

x, y и z. Мы не будемъ рѣшать на самомъ дѣлѣ, а замѣтимъ только видъ послѣднихъ формулъ. Очевидно, что отсюда найдемъ:

$$x = A_1 x' + B_1 y' + C_1 z'$$
$$y = A_2 x' + B_2 y' + C_2 z'$$
$$z = A_3 x' + B_3 y' + C_3 z'$$

Гдѣ коэф-енты $A_1, B_1, C_1 \ldots\ldots$ будутъ зависить отъ угловъ, образуемыхъ новыми осями съ прежними и отъ угловъ образуемыхъ старыми осями между собою.

Важно замѣтить, что старыя коор-ты выражаются посредствомъ новыхъ-линейнымъ образомъ.

Частные случаи.

1.) Старыя оси прямоугольны, а новыя-косоугольны.

$\lambda = \mu = \nu = 90°$ и $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0$

Формулы будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' \\ z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

При этомъ соотношеніе между косинусами угловъ между новыми и старыми осями; будутъ, какъ извѣстно, при прямоугольныхъ осяхъ для новыхъ по отнош. къ старымъ:

$$\text{верт.} \left\{\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

2.) Старыя и новыя — прямоугольны

Формулы (1) останутся безъ измѣненія. Ур-ія (2) выражаютъ прямоугольность старыхъ осей. Прямоугольность-же новыхъ осей, выразятся еще други-

ми тремя уравненіями; именно:

$$\left.\begin{array}{l} cs\, x'Oy' = 0 \\ cs\, x'Oz' = 0 \\ cs\, y'Oz' = 0 \end{array}\right\} \text{Или:} \left\{\begin{array}{l} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ между 9-ю косинусами шесть соотношеній и слѣдовательно только три косинуса остаются произвольными. Замѣтимъ сверхъ того, что прямоугольность старыхъ и новыхъ осей можно выразить еще посредствомъ другихъ ур-ій. Именно, разсматривая старыя оси X,Y,Z относительно новыхъ тоже прямоугольныхъ, можно написать:

$$\text{горизонт.} \left\{\begin{array}{l} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Ур-ія (4) выражаютъ прямоугольность новыхъ осей т.е. то-же самое, что выражаютъ ур-ія (3)

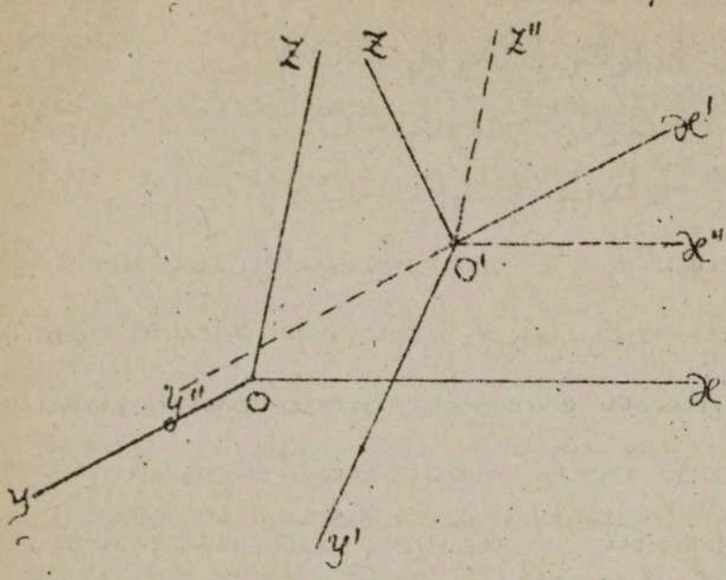
Далѣе, опять разсматривая старыя оси относительно новыхъ, можно написать:

$$\left.\begin{array}{l} cs\, xOy = 0 \\ cs\, xOz = 0 \\ cs\, yOz = 0 \end{array}\right\} \text{Или:} \left\{\begin{array}{l} a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0 \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Ур-ія (5) выражаютъ тоже, что и ур-ія (2), т.е. прямоугольность старыхъ осей (онѣ существ. только при прямоуг. осяхъ). Ур-ія (4) и (5) вмѣстѣ могутъ замѣнить (2) и (3), но онѣ не будутъ новыми ур-іями, потому что выражаютъ тоже самое.

3.) Переходъ отъ одной системы къ другой системѣ коор-тъ, при измѣненіи положе-

ния начала и направления осей.



Пусть коор-ты $O'\ldots(\alpha,\beta,\gamma)$. А направления новых осей относительно старых определяются тою-же тройницею косинусов углов. Возьмем вспомогательныя оси параллельно старым и имеющия начало въ O'. Это оси x'', y'' и z''. Пусть x,y,z — будут старыя коор-ты точки; $x''y''z''$ - вспомогательная коор-ты, а $x'y'z'$ - новая коор-ты, будем иметь: $x=\alpha+x''$; $y=\beta+y''$ и $z=\gamma+z''$. Замтим:

$$x''=A_1x'+B_1y'+C_1z'$$
$$y''=A_2x'+B_2y'+C_2z'$$
$$z''=A_3x'+B_3y'+C_3z'$$

И следовательно:

$$x=\alpha+A_1x'+B_1y'+C_1z'$$
$$y=\beta+A_2x'+B_2y'+C_2z'$$
$$z=\gamma+A_3x'+B_3y'+C_3z'$$

Отсюда видно, что въ самомъ общемъ случаѣ преобразованія коор-тъ, старыя выражаются посредствомъ новыхъ-линейными функціями новыхъ.

Формула Лагранжа.

Это суть формула обнаруживающая связь между 9-ю косинусами угловъ, образуемыхъ новыми прямоугольными осями со старыми также прямоугольными.

Мы уже указали выше въ какихъ соотношеніяхъ находятся формулы Лагранжа, которыя не представляютъ новыхъ соотношеній, а суть слѣдствія прежде выведенныхъ и получаются изъ нихъ. Напишимъ три извѣстныя равенства:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$
$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0$$
$$b_1c_1+b_2c_2+a_3c_3=0$$

Изъ первыхъ двухъ равенствъ исключимъ сначала a_3, а потомъ a_2: $a_1(b_1c_3-b_3c_1)+a_2(b_2c_3-b_3c_2)=0$. Или:

$$\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_1}=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{a_2}$$

$a_1(b_1c_2-b_2c_1)+a_3(b_3c_2-b_2c_3)=0$. Или:

$$\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_1}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_3}$$

Вмѣстѣ:

$$\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_1}=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{a_2}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_3}=K$$

Это равенство отношеній преобразуемъ и напишемъ, что корень квадратный изъ суммы квадратовъ предыдущихъ относится къ корню квадратному изъ суммы квадратовъ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему:

$$\frac{\sqrt{(b_2c_3-b_3c_2)^2+(b_3c_1-b_1c_3)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

Но мы уже знаемъ, что:

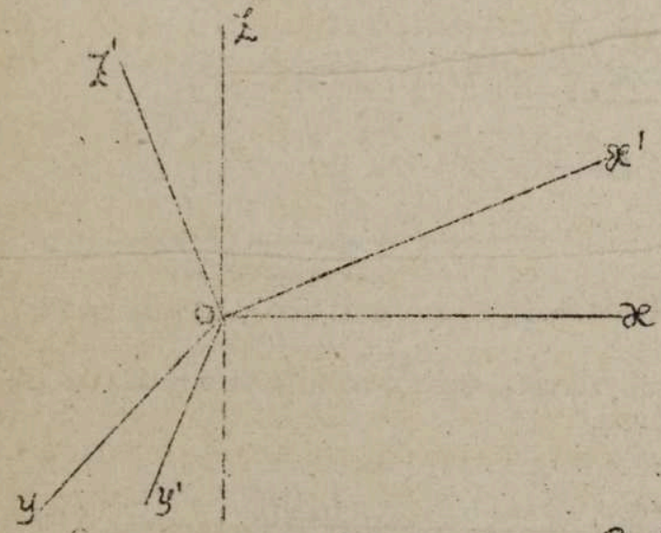
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$$

Затѣмъ по тождеству Лагранжа, имѣемъ:

$$(b_2c_3-b_3c_2)^2+(b_3c_1-b_1c_3)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2=$$
$$=(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)-\cancel{(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2}{}^{0}=1$$

Такъ какъ предъ корнемъ подразумѣвается знакъ $(\pm)$, то будемъ имѣть $K=\pm1$; слѣдовательно будемъ

имѣть: $\frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_1} = \pm 1$. Чтобы узнать, какой знакъ должно принять сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе:
Чтобы узнать какой знакъ должно принять замѣтимъ что, двѣ прямоугольныя систем. коор-тъ $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$ могутъ имѣть два различныхъ взаимныхъ расположенія. Именно вообразимъ, что мы новую систему приведемъ въ совпаденіе со старой, вращая около начала и положимъ при этомъ, что ось OX' совпала съ OX, а OY' совпала съ OY; тогда, если ось OZ' совпадаетъ съ OZ, или ось OZ' совпадаетъ съ отрицательною стороною OZ; то въ первомъ случаѣ расположеніе двухъ системъ назовемъ взаимно прямымъ, а во второмъ — взаимно обратнымъ.



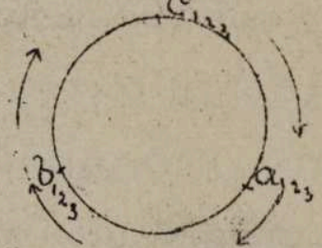
Условимся, что наши двѣ системы имѣютъ взаимно прямое расположеніе. Вспомнимъ таблицу косинусовъ угловъ. Вѣсь соотношенія между косинусами угловъ, которыя мы выводили прежде примѣнимая, каково-бы ни было положеніе новой системы относительно старой. Положимъ, что эти двѣ системы совпадаютъ; имѣя взаимное расположеніе, примѣнимъ къ этому случаю послѣднее равенство. При этомъ будемъ имѣть: $a_1 = b_2 = c_3 = 1$ и $a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$. Послѣднее равенство буд. $\frac{1}{1} = \pm 1$, а отсюда слѣдуетъ, что нужно въ этомъ равенствѣ принять знакъ (+). Очевидно, что если расположеніе двухъ системъ было взаимно-

обратномъ, то пришлось-бы принять знакъ (—). Итакъ $K=+1$; будемъ имѣть слѣдующія три формулы Лапланса:

$$b_2c_3 - c_2b_3 = a_1$$
$$b_3c_1 - b_1c_3 = a_2$$
$$b_1c_2 - b_2c_1 = a_3$$

Кромѣ этихъ трехъ формулъ можно получить еще шесть подобныхъ-же и для полученія ихъ можно, не повторяя вывода, удовлетвориться слѣдующимъ.

Замѣчаніе: Всѣ выведенныя нами соотношенія между косинусами угловъ таковы, что въ нихъ можно думать такъ называемое круговое замѣщеніе буквъ и при этомъ будутъ получаться тѣ-же самыя соотношенія. Дѣйствительно, возьмемъ два равенства, съ которыхъ мы начали выводъ и сдѣлаемъ въ нихъ круговое замѣщеніе буквъ, получимъ:



$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$$
$$b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = 0$$

Эти два равенства существуютъ; если теперь изъ этихъ двухъ равенствъ будемъ исключать сначала b_3, а потомъ b_2; подобно тому, какъ сначала исключали a_3, а потомъ a_2, и вообще повторимъ всѣ прежнія вычисленія на новыхъ двухъ равенствахъ, то понятно получимъ также три формулы подобныя, выведеннымъ выше формуламъ Лапланса; но только новыя три формулы получатся изъ прежнихъ чрезъ круговое замѣщеніе буквъ. Эти формулы будутъ:

$c_2a_3 - c_3a_2 = b_1$; $c_3a_1 - c_1a_3 = b_2$ и $c_1a_2 - c_2a_1 = b_3$

Точно также найдемъ, что тѣмъ-же способомъ

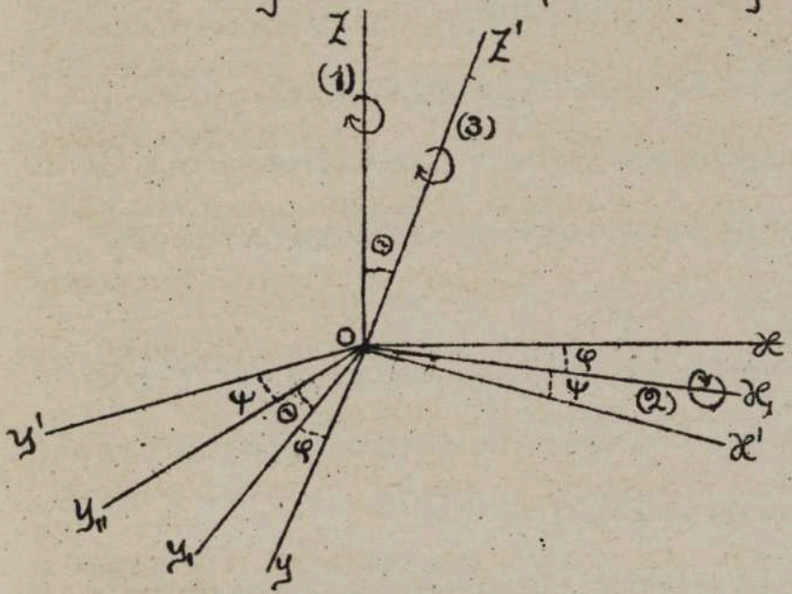
можно получить еще новыя три формулы, которыя короче получаются изъ послѣднихъ чрезъ круговое замѣщеніе буквъ. Онѣ будутъ:

$$a_2b_3 - a_3b_2 = c_1$$
$$a_3b_1 - a_1b_3 = c_2$$
$$a_1b_2 - a_2b_1 = c_3$$

Замѣчаніе. Что-бы узнать имѣютъ-ли двѣ прямоугольныя системы коор-тъ расположеніе взаимно прямое или взаимно обратное, слѣдуетъ поступать такъ: Вообразимъ, что на первой системѣ помѣщается наблюдатель ногами въ O, а головой въ Z, и что онъ вращаетъ систему около оси Z, при чемъ положительную ось $x^{-ов}$ направляетъ въ сторону положительной оси $y^{-ов}$, тогда для него вращеніе это будетъ совершаться или слѣва на право или справа налѣво. Затѣмъ вообразимъ тожде наблюдателя, помѣщеннаго также на второй системѣ коор-тъ, который вращаетъ систему около оси O'Z' и тоже такимъ образомъ, что-бъ положительную ось $x'^{-ов}$ — онъ направлялъ въ положительную сторону $y'^{-ов}$. Если оба наблюдателя увидятъ свои системы вращающимися въ одну сторону, то это значитъ, что они имѣютъ взаимно прямое расположеніе. Если эти двѣ системы вращаются въ различныя стороны, то они имѣютъ взаимно обратное расположеніе.

Формула для преобразованія коор-тъ Эйлера.

Эти формулы относятся къ одному случаю преобразованія, именно къ переходу отъ прямоугольныхъ осей къ прямоугольнымъ-же и притомъ-же началь. Для такого преобразованія вамъ уже были даны формулы. Эти формулы удобны по своему симметричному виду, но не удобны въ другомъ отношеніи, а именно въ нихъ входятъ 9-ть косинусовъ угловъ, которые свѣзаны между собою 6-ю ур-ями, такъ что при употребленіи этихъ формулъ приходится обращ: бть ся къ 9-ю равенствами, но положеніе новой системы



коор-тъ относительно старой опредѣляется только 3-мя величинами (косинус.), потому что остальныя 6-ть найдутся изъ 6-ти соотношеній. Было-бы удобнѣе, если-бы три величины, которыми положеніе новой системы коор-тъ опредѣляется непосредственно, входили-бы въ формулы для преобразованія коор-тъ съ тѣмъ, что-бы никакихъ другихъ соотношеній не пришлось-бы разсматривать. Формулы Эйлера имѣютъ именно эту цѣль, въ эти формулы прямо входятъ тѣ величины (углы), которыми опредѣляется положеніе новой системы относительно старой. Эти величина суть слѣдующія. Положимъ, что плоскость Ж'ОУ' пересѣкаетъ плоскость ЖОУ по прямой линіи ОЖ₁ и пусть уголъ ЖОЖ₁ = φ. Плоскость Ж'ОУ' съ плоскостью ЖОУ составляетъ двугранный уголъ равный углу .OZ', составленному перпендикулярами къ этимъ плос

костями. Пусть этотъ уголъ (ZOZ') равн. $=\Theta$.
Ось OX съ прямою пересѣченія OX_1 образуетъ уголъ Ψ, такъ что $X_1OX' = \Psi$. Для различныхъ расположеній новой системы относительно старой уголъ Φ, считаемый отъ оси OX въ сторону положительной оси OY, можетъ получить всѣ величины отъ $0°$ до $360°$. Уго. Θ, считаемый отъ положительной оси OZ до отрицательной стороны той-же оси, можетъ получать всѣ величины отъ $0°$ до $180°$. Наконецъ уголъ Ψ, также можетъ измѣняться отъ $0°$ до $360°$.
Очевидно, что если будутъ даны три угла Φ, Θ и Ψ, то положеніе новой систем. коор-тъ относительно старыхъ осей будетъ вполнѣ опредѣлено.
Замѣтимъ, что старыя оси могутъ быть приведены въ совпаденіе съ новыми посредствомъ трехъ послѣдов. вращеній около трехъ осей, слѣдующимъ образомъ:
1.) Повернемъ старую систему около оси Z-овъ слѣва направо, для наблюдателя стоящаго ногами въ O головой въ Z, на уголъ Φ, тогда ось OX совпадетъ съ линіею OX_1, а ось OY приметъ положеніе прямой OY_1, причемъ уголъ $YOY_1 = \Phi$; такимъ образомъ отъ системы $OXYZ$ мы перейдемъ къ системѣ OX_1Y_1Z.
2.) Второе вращеніе произведемъ около оси OX_1, также слѣва на право, для наблюдателя стоящаго ногами въ O головой въ X_1 на уголъ Θ. При этомъ замѣч. OZ и OZ' $\perp$-ны къ OX_1, мы видимъ, что ось OZ совпадаетъ съ OZ', а ось OY_1 приметъ положеніе OY_{11}, причемъ уголъ $Y_1OY_{11} = \Theta$. Такимъ образомъ мы отъ системы OX_1Y_1Z перейдемъ къ системѣ

$OX_1Y_{11}Z'$. 3.) Третье вращение производимъ около оси Z', также слѣва направо для наблюдателя, стоящаго ногами въ O головой въ Z' на уголъ Ψ, тогда ось OX_1 совпадетъ съ OX', а ось OY_{11} совпадетъ съ OY'. И такимъ образомъ отъ системы $OX_1Y_{11}Z'$ перейдемъ къ системѣ $OX'Y'Z'$ и старая система коорат̀ъ будетъ приведена въ совпаденіе съ новою.

Переходъ отъ старой системы коор-тъ XYZ къ новой $X'Y'Z'$, можно сдѣлать въ три пріема и при каждомъ изъ трехъ, преобразованія коор-тъ, одна изъ коор-тъ остается безъ измѣненія; преобразованіе совершается въ одной плоскости по извѣстнымъ формуламъ перехода отъ прямоугольныхъ осей къ прямоугольнымъ.

Такимъ образомъ при первомъ вращеніи, переходя отъ $OXYZ$ къ OX_1Y_1Z ..... $X = X_1\cos\varphi - Y_1\sin\varphi$

$$Y = X_1\sin\varphi + Y_1\cos\varphi$$

При второмъ вращеніи, при переходѣ отъ OX_1Y_1Z къ $OX_1Y_{11}Z'$, поворотъ дѣлается на уголъ Θ и потому, по тѣмъ-же форм.:

$$Y_1 = Y_{11}\cos\Theta - Z'\sin\Theta$$
$$Z = Y_{11}\sin\Theta + Z'\cos\Theta$$

Наконецъ при третьемъ вращеніи, при переходѣ отъ $OX_1Y_{11}Z$ къ $OX'Y'Z'$, повор. на уголъ Ψ ... $X_1 = X'\cos\Psi - Y'\sin\Psi$

$$Y_{11} = X'\sin\Psi + Y'\cos\Psi$$

Изъ этихъ ур-ій исключимъ X_1, Y_1 и Y_{11} и выразимъ XYZ чрезъ $X'Y'Z'$, получимъ:

$$X = \cos\varphi(X'\cos\Psi - Y'\sin\Psi) - \sin\varphi\left[\cos\Theta(X'\sin\Psi + Y'\cos\Psi) - Z'\sin\Theta\right]$$
$$Y = \sin\varphi(X'\cos\Psi - Y'\sin\Psi) + \cos\varphi\left[\cos\Theta(X'\sin\Psi + Y'\cos\Psi) - Z'\sin\Theta\right]$$
$$Z = \sin\Theta(X'\sin\Psi - Y'\cos\Psi) + Z'\cos\Theta.$$

Или раскрывая скобки, получимъ:

$$x=[\cos\varphi.\cos\psi-\sin\varphi.\sin\psi.\cos\vartheta]x'+[-\cos\varphi.\sin\psi-\sin\varphi.\cos\psi.\cos\vartheta]y'+\sin\varphi.\sin\vartheta.z'$$
$$y=[\sin\varphi.\cos\psi+\cos\varphi.\sin\psi.\cos\vartheta]x'+[-\sin\varphi.\sin\psi+\cos\varphi.\cos\psi.\cos\vartheta]y'-\cos\varphi.\sin\vartheta.z'$$
$$z=\sin\psi.\sin\vartheta.x'+\cos\psi.\sin\vartheta.y'+\cos\vartheta.z'$$

Эти три равенства суть формулы Эйлера.

Эти формулы сложные для преобразования коорд-ть, но зато имеют то преимущество, что в них прямо входят три величины φ, ϑ и ψ, которыми определяется положение новых осей. Конечно эти формулы должны быть тождественны с прежними, которая были:

$$x=a_1x'+b_1y'+c_1z'$$
$$y=a_2x'+b_2y'+c_2z'$$
$$z=a_3x'+b_3y'+c_3z'$$

и потому сравнение этих формул приводит к:

$$a_1=\cos\varphi.\cos\psi-\sin\varphi.\sin\psi.\cos\vartheta$$
$$b_1=-\cos\varphi.\sin\psi-\sin\varphi.\cos\psi.\cos\vartheta$$
$$c_1=\sin\varphi.\sin\vartheta$$

. . . . . .

При выводе формул Эйлера мы предположили, что две системы $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$ имеют взаимно прямое расположение; если-бы эти системы имели взаимно обратное расположение, то пришлось-бы Z' переменить на $(-Z')$.

Классификація поверхностей

Всѣ поверхности по виду ихъ ур-ій раздѣляются прежде всего на алгебраическія и трансцендентныя.

Алгебраическія поверхности раздѣляются на порядки по

степенямъ ихъ ур-ій.

Полагая, что ур-ія освобождены отъ радикала и знаменателей. Поверхность назыв. $m^{-го}$ порядка, если въ ур-іи есть хотъ одинъ членъ $m^{-го}$ измѣренія относительно x, y и z.

Поверхность $1^{-го}$ порядка суть тѣ, которыя выражаются ур-іемъ $1^{-й}$ степени:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Это суть плоскости.

Поверхности $2^{-го}$ порядка суть тѣ, которыя представляются общимъ ур-іемъ $2^{ой}$ степени съ $3^{мя}$ перемѣнными:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

Поверхности $3^{-го}$ порядка заключаются въ общемъ ур-іи $3^{-й}$ степени съ $3^{мя}$ перемѣнными и т. д.

Для того, что-бы это дѣленіе поверхностей имѣло смыслъ необходимо, что-бы при преобразованіи коор-тъ степень ур-ія не измѣнялась. Это такъ и будетъ; доказывается въ этомъ случаѣ, какъ и для плоскихъ кривыхъ. Такая теор.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ ..... (1) будетъ ур-іе $m^{го}$ степени и представляетъ поверхность $m^{го}$ порядка. Преобразуемъ коорты и перейдемъ отъ данной системы $Oxyz$ къ какой угодно другой $O'x'y'z'$. Формула преобразованія будетъ имѣть:

$$x = \alpha + A'x' + B'y' + C'z'$$
$$y = \beta + A_2x' + B_2y' + C_2z'$$
$$z = \gamma + A_3x' + B_3y' + C_3z'$$

и новое ур-іе той-же поверхности будетъ:

(II) $F(\alpha + A'x' + B'y' + C'z', \beta + A_2x' + B_2y' + C_2z', \gamma + A_3x' + B_3y' + C_3z') = 0$

Такъ какъ старыя коор-ты выражаются ур-ями $1^{-го}$ степени новыхъ, то понятно, что степень послѣдняго ур-ія не

можетъ быть выше степени ур-ія $I^{го}$. Такимъ образомъ при преобразованіи коор-тъ степень ур-ія не можетъ повыситься, но она и не можетъ понизиться, потому что, если бы допустимъ, что степень ур-ія (II) ниже степени ур-ія (I), то сдѣлавъ обратное преобразованіе коор-тъ мы перешли-бы отъ ур-ія $(II)^{го}$ къ $(I)^{му}$, и при этомъ степень ур-ія повысилась-бы, чего быть не можетъ.

Докажемъ еще двѣ слѣдующія теорема.

Теорема. Если поверхность $m^{го}$ порядка разсѣчена плоскостью, то въ сѣченіи получится кривая, порядокъ которой не можетъ быть выше m.

Пусть опять ур-ie $F(x,y,z)=0$ есть ур-ie $m^{ой}$ степени и представляетъ поверхность $m^{го}$ порядка.

Разсѣчемъ ее плоскостью и сдѣлаемъ такое преобразованіе, что-бы сѣкущая плоскость была новою плоскостью $x'y'$. Новое ур-ie поверхности будетъ:

$$f(x',y',z')=0$$

и это ур-ie также будетъ $m^{ой}$ степени. Если въ этомъ послѣднемъ ур-іи положимъ $z'=0$, то получимъ:

$$f(x'y',0)=0$$

Это будетъ ур-ie сѣченія поверхности плоскостью $x'y'$ т. е. это будетъ ур-ie разсматриваемаго сѣченія всѣго плоскости, но это ур-ie очевидно не можетъ быть выше степени m и слѣдов. кривая сѣченія будетъ не выше $m^{го}$ порядка. Отсюда слѣдуетъ, что поверхность разсѣкается плоскостью вообще по кривой $m^{го}$ порядка и въ частности, въ сѣченіи можетъ получиться кривая низ-

шаго порядка.

Теорема. Произвольная прямая линія пересѣкаетъ поверхность $m^{-го}$ порядка не болѣе, какъ въ m точкахъ.

Пусть опять $F(x,y,z)=0$ ..... (1) есть ур-ie $m^{-ой}$ степени и представляетъ поверхность $m^{-го}$ порядка. Возьмемъ произвольную прямую: $x=mz+p$

$$y=nz+q$$

Для точки пересѣченія вставимъ эти выраженія въ ур-ie (1), получимъ: $F(mz+p, nz+q, z)=0$

Это ур-ie должно дать z для точки пересѣченія, но такъ какъ x и y выражаются чрезъ z линейнымъ образомъ, то полученное ур-ie относительно z будетъ не выше, какъ $m^{-ой}$ степени и слѣдовательно оно не можетъ имѣть больше m рѣшеній. Если всѣ эти рѣшенія дѣйствительны, то получится m точекъ въ рѣшеніи, а если нѣкоторыя рѣшенія мнимы, то получится менѣе m точекъ.

Ур-нія нѣкоторыхъ поверхностей.

Ур-ie сферической поверхности.

Положимъ коор-ты прямоугольныя. Пусть α, β и γ коор-ты центра и R радіусъ сферы. Ея ур-ie будетъ какъ извѣстно:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

Если центръ въ началѣ коор-тъ, то:

$\alpha=\beta=\gamma=0$ и ур-ie сферы будетъ:

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Раскрывъ скобки, общее ур-ie сферы напишется:

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2=0$$

Мы видимъ, что сфера есть одна изъ поверхностей втораго порядка. Сравнимъ это ур-ie съ общимъ ур-iемъ поверхностей 2-го порядка, которое есть:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

Что-бы это послѣднее ур-ie могло представлять сферу необходимо, что-бы было $B=0$, $B'=0$ и $B''=0$.

Тогда ур-ie будетъ:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

Затѣмъ, сверхъ того, должно имѣть* сферу, такъ какъ оно имѣетъ видъ одинаковой съ ур-iемъ сферы. Что-бы узнать представляетъ-ли оно дѣйствительно сферу? Постараемся привести его къ первоначальному виду ур-ія сферы. Преобразуемъ его для этого такъ:

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}+z^2+cz+\frac{c^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d$$

Или перв. три, 2-ой три и 3-и три члена первой части составляютъ полной квадратъ, получ.:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$$

Это ур-ie представляетъ сферу, у которой коор-ты центра будутъ: $\alpha=-\frac{a}{2}$; $\beta=-\frac{b}{2}$ и $\gamma=-\frac{c}{2}$

и радіусъ:

$$R^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4} \text{ или } R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$$

Теперь видимъ, что сфера будетъ тогда только дѣйствитель-

*Пропущено: $A=A'=A''$ и тогда раздѣливъ все ур-ie на A, получимъ его въ видѣ:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

Это ур-ie можетъ представлять

на, когда $a^2+b^2+c^2>4d$. Если-же $a^2+b^2+c^2<4d$, то получится R мнимое и сферы собственно не существует.
Въ этомъ случаѣ ур-іе не имѣетъ геометрическаго значенія. Наконецъ если $a^2+b^2+c^2=4d$, то $R=0$ и сфера въ этомъ* обратится въ точку. Ур-іе въ этомъ случаѣ представляетъ точку.

Поверхности, опредѣляемыя движеніемъ линій.

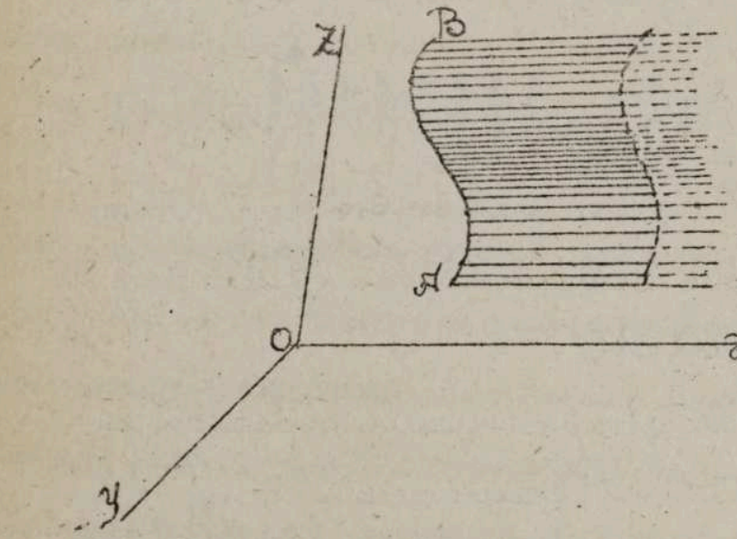
Если кривая линія движется въ пространствѣ по извѣстному закону, то она опишетъ поверхность. Движущаяся линія назыв. образующею.
Если поверхность описывается движеніемъ прямой линіи, то она назыв. линейчатою. А если она можетъ быть описана только движеніемъ кривой, то она назыв. кривою поверхностью.
Между линейчатыми поверхностями намъ извѣстны: цилиндрическія, коническія, коноидальныя и друг.
Линейчатыя поверхности бываютъ: развертывающіяся и косыя. Развертывающіяся тѣ линіи назыв. тѣ, которыя могутъ быть развернуты въ одну плоскость безъ разрыва частей. Таковы цилиндрическія и коническія.
Если-же линейчатая поверхность не можетъ быть развернута въ плоскость, то поверхность эта будетъ косою поверхностью.

Поверхности цилиндрическія.

*случаѣ

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямой линии по данной кривой — направляющей, причем образующая прямая остается во всех своих положениях ||-ой самой себе.

Можно составить общее ур-ие всех цилиндрических поверхностей. Возьмем произвольную косоуг. систему коор-т OXYZ и пусть AB данная кривая — направляющая. Эта кривая может быть совершенно произвольная линия и потому ее ур-ие напишем просто. В таком виде оно буд.: $f(x,z,y)=0, \varphi(xyz)=0$, где f и φ совершенно произвольна. Представим себе далее движущуюся образующую. Ур-ие образующей, как прямой вообще



будет: $x = mz + p$; $y = nz + q$.

При переходе от одной образующей к другой угловые коэф-енты (m и n) не изменяются, так как все эти прямые ||-ы; напротив p и q будут изменяться; эти последние величины назыв. переменными параметрами образующей. Прежде всего выразим условие, что прямая образующая пересекается с направляющей. Для этого заметим, что в точке пересечения должна удовлетворяться два ур-ия направляющей и два ур-ия образующей, иметь одними и теми-же величинами x, y и z. Сиздов. четыре ур-ия должна удовлетворяться тремя величинами x, y и z. Это возможно только условно. Условие это получится, если, мы из трех ур-ий испре-

дъ имѣемъ x, y и z, а въ 4-е ихъ вставимъ. Это послѣднее должно удовлетворяться само собою. Ур-іе это получится какъ результатъ исключенія x, y и z изъ 4-хъ написанныхъ ур-ій. Въ это ур-іе не будутъ входить x, y и z, но войдутъ перемѣнные параметры p и q, такъ оно будетъ имѣть видъ:

$$F(p,q)=0$$

Или отсюда выведемъ: $q=\psi(p)$

(Видъ функціи ψ или F все равно, будетъ зависить отъ вида фун-ій f и φ и для общаго случая нельзя опредѣлить видъ ψ, можно только замѣтить, что функ-ію ψ можемъ считать совершенно произвольною, ибо f и φ оставлены нами совершенно произвольными.

Ур-іе $q=\psi(p)$ наз. условнымъ ур-емъ между параметрами. Оно непремѣнно должно быть удовлетворено для того, что-бы образующая пересѣкала направляющую. Но съ другой стороны изъ ур-ій образующей мы всегда имѣемъ:

$$p=x-mz \quad \text{и} \quad q=y-nz, \text{ отсюда:}$$

$$y-nz=\psi(x-mz)$$

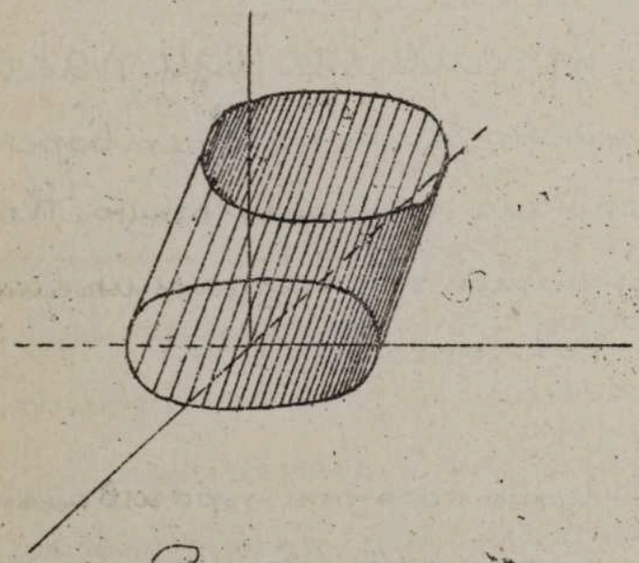
x, y и z, которыя сюда входятъ — суть коор-ты произвольной точки одной изъ образующихъ; слѣдов. это суть коорты произвольной точки разсматриваемой цилиндрической поверхности, а потому послѣднее ур-іе есть ур-іе цилиндрической поверхности. Это ур-іе при томъ есть общее ур-іе всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей, такъ какъ видъ и положеніе направляющей оставлено нами совершенно произвольно. Если мы ф-ію ψ будемъ приписывать различные виды, то будутъ получаться частныя случаи цилиндрическихъ поверхностей. Такъ: $y-nz=(x-z)^2$;

$y = l(x - z)$ и т. д.

Когда направляющая линия на самом деле дана, то поступая, как указано при выводе общего ур-ия, мы можем получить ур-ие цилиндрической поверхности для каждого частного случая.

Пример. Ур-ие косого цилиндра со эллиптическим основанием.

Оси прямоугольные. Пусть направляющая будет эллипс в плоскости XY, причем центр его в начале коор-т, а оси совпадают с осями OX и OY. Тогда ур-ия направляющей будут: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $z = 0$ — направляющая.



Ур-ия образующей будут: $x = mz + p$ и $y = nz + q$ — образующая. Исключаем x, y и z из четырех ур-ий, находим: $z = 0$; $x = p$ и $y = q$. Вставим в 4-е, получим:

$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$. Это есть условное ур-ие между параметрами. Взятых из ур-ий образующей, имеем:

$$p = x - mz \text{ и } q = y - nz$$

$$\frac{(x - mz)^2}{a^2} + \frac{(y - nz)^2}{b^2} = 1$$

Это есть искомое ур-ие цилиндрической поверхности. Если положим $a = b$, то получим ур-ие косого цилиндра с круговым основанием, оно будет:

$$(x - mz)^2 + (y - nz)^2 = a^2.$$

2) Ур-ие цилиндрической поверхности, у которой направляющей служит произвольная

кривая 2-го порядка.

Положим, что кривая лежит в плоскости XY. Тогда ур-ие направляющей будет:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \text{ и } z=0$$

Ур-ия образующей будут: $x=mz+p$ и $y=nz+q$.

Исключим x, y и z из четырех ур-ий, находим: $z=0$; $x=p$ и $y=q$.

Получим: $Ap^2+Bpq+Cq^2+Dp+Eq+F=0$

Это есть условное ур-ие между параметрами p и q. Затем имеем: $p=x-mz$

$$q=y-nz$$

и вставляя, получим:

$$A(x-mz)^2+B(x-mz)(y-nz)+C(y-nz)^2+D(x-mz)+E(y-nz)+F=0$$

Это есть ур-ие цилиндрической поверхности.

Заметим, что это есть поверхность второго порядка и вообще, если направляющая цилиндрической поверхности есть кривая 2-го порядка, то сама поверхность будет 2-го порядка.

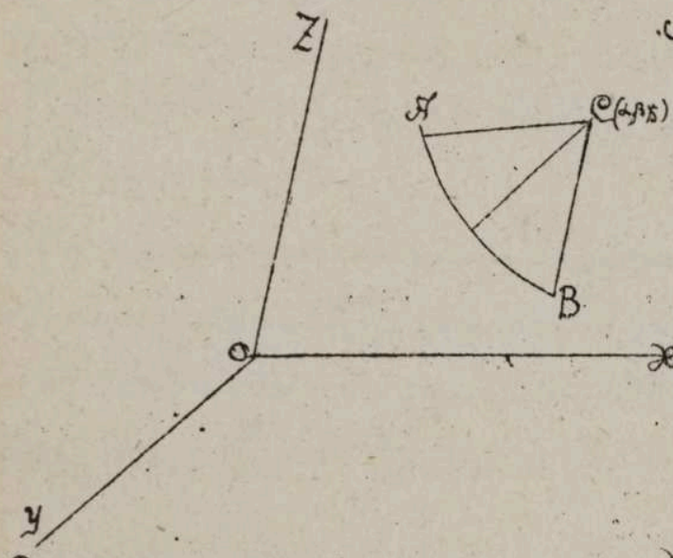
Поверхности конического

вида.

Конические поверхности образуются движением прямой по направляющей кривой, причем образующая прямая во всякое свое положение проходит через одну и ту же неподвижную точку — вершину поверхности.

Можно составить общее ур-ие конических поверхностей. Положим коор-ты косоугольные. Пусть направляющая

кривая AB-дана двумя ур-іями: $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$. Направляющую мы будемъ разсматривать, какъ совершенно произвольную кривую линію, а потому и ф-іи f и φ будемъ считать совершенно произвольными.



Пусть точка C съ коор-ами α,β и γ, есть вершина поверхности. Вообразимъ рядъ образующихъ (прям. проходящ. чрезъ C). Ур-іе одной изъ образующихъ, какъ прямой проходящей чрезъ точку C.

$$x-\alpha=m(z-\gamma)$$
$$y-\beta=n(z-\gamma)$$

При переходѣ отъ одной образующей къ другой, угловые коэффиц. m и n измѣняются. Поэтому m и n – суть перемѣнные параметры образующей.

Выразимъ условіе пересѣченія образующей съ направляющей. Въ точкахъ пересѣченія, написанныя четыре ур-ія, должны удовлетворяться вмѣстѣ, т.е. три коор-ты x, y и z точки пересѣченія – должны удовлетворять 4-мъ ур-іямъ; это возможно только условно и условіе пересѣченія получится, исключивъ x, y и z изъ написанныхъ 4-хъ ур-ій. Въ это условное ур-іе уже не будутъ входить x, y и z, но войдутъ параметры m и n и оно будетъ имѣть видъ:

$$F(m,n)=0 \text{ или отсюда } n=\psi(m)$$

Это есть условное ур-іе между параметрами. Видъ функціи ψ или F зависитъ отъ вида ф-ій f и φ и такъ какъ эти двѣ ф-іи произвольны, то и ф-ію ψ мы должны считать произвольною. Взявъ изъ ур-ій образующ. имѣемъ:

$$m=\frac{x-\alpha}{z-\delta} \text{ и } n=\frac{y-\beta}{z-\delta}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{y-\beta}{z-\delta}=\varphi\left(\frac{x-\alpha}{z-\delta}\right)$$

Коор-ты x, y и z входящія въ это ур-іе, суть коор-ты произвольной точки одной изъ образующихъ, стало-быть x, y и z – суть коор-ты произвольной точки, разсматриваемой поверхности и послѣднее ур-іе есть общее ур-іе всѣхъ коническихъ поверхностей. Давая ф-іи φ разные виды, будемъ получать разныя коническія поверхности. Напримѣръ:

$$\frac{y-\beta}{z-\delta}=\left(\frac{x-\alpha}{z-\delta}\right)^3; \quad \frac{y}{z}=l\frac{x-1}{z} \text{ и т. д.}$$

Это есть ур-іе конической поверхн. гдѣ $\beta=0$; $\gamma=0$ и $\alpha=1$.

Частный случай. Если вершина конуса находится въ началѣ коор-тъ, то $\alpha=0$; $\beta=0$ и $\gamma=0$ и ур-іе конической поверхности будетъ:

$$\frac{y}{z}=\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$$

Напр. ур-іе: $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0$ есть однородное относительно x и y и потому представляетъ конусъ имѣющій вершину въ началѣ коор-тъ.

Въ самомъ дѣлѣ:

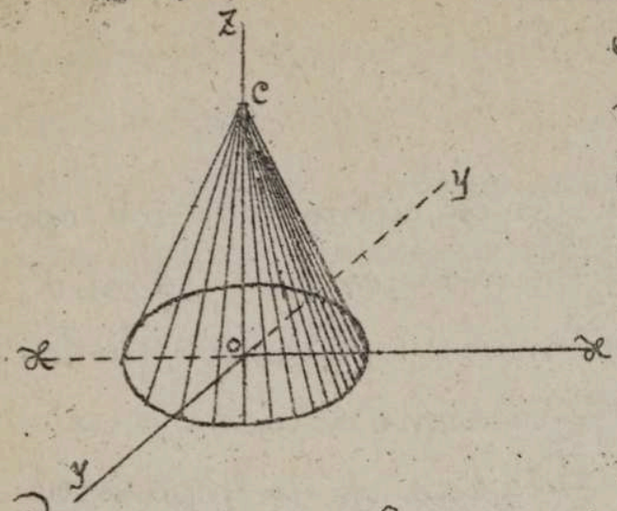
$$A\left(\frac{x}{z}\right)^2+A'\left(\frac{y}{z}\right)^2+A''+2B\left(\frac{y}{z}\right)+2B'\left(\frac{x}{z}\right)+2B''\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{z}\right)=0$$

Теперь видимъ, что здѣсь входятъ два неизвѣстныхъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$, а если мы введемъ $\frac{x}{z}$, то оно получится, какъ нѣкоторая ф-ія $\frac{y}{z}$, такъ что, найдетъ: $\frac{x}{z}=\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$, а ур-іе такого вида представляетъ конусъ съ вершиною въ началѣ коор-тъ.

Примѣръ. Составить ур-іе прямаго конуса съ круговымъ основаніемъ.

Оси прямоугольны. Пусть будетъ направляющею кругъ,

лежащей въ плоскости XY. Его ур-ie будетъ $x^2+y^2=a^2$ и $z=0$



Пусть вершина будетъ на оси Z, въ точкѣ C, которой коор-ты будутъ $(0,0$ и $h)$, гдѣ $h=OC$, тогда ур-ie образующей будетъ: $x=m(z-h)$ и $y=n(z-h)$. Исключивъ x, y и z, наход. $z=0$; $x=-mh$; $y=-nh$. Вставивъ въ 1-е, получ. $m^2h^2+n^2h^2=a^2$.

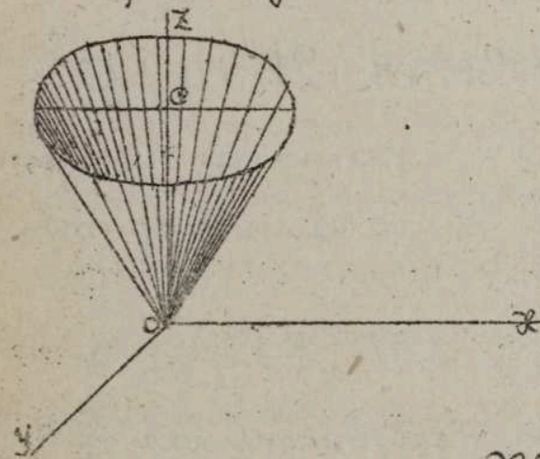
Это есть условное ур-ie между параметрами. Затѣмъ изъ ур-ia образующей, получ: $m=\frac{x}{z-h}$; $n=\frac{y}{z-h}$. Вставивъ получ.:

$$\frac{h^2x^2}{(z-h)^2}+\frac{h^2y^2}{(z-h)^2}=a^2 \text{ или } x^2+y^2=\frac{a^2}{h^2}(z-h)^2$$

Это есть ур-ie конуса.

2.) Составить ур-ie эллиптическаго прямаго конуса имѣющаго вершину въ началѣ коор-тъ.

Оси прямоугольны. За направляющую примемъ эллипсъ, котораго центръ находится въ C на оси Z-въ и пусть $OC=h$. Плоскость эллипса ‖-на плоскости XY, а оси его ‖-на осямъ X-овъ и Y-овъ. Тогда ур-ie эллипса получ-ся взявъ ур-ie его плоскости, которое будетъ $z=h$ и во вторыхъ, взявъ проэкцію эллипса на плоскость XY, или все равно ур-ie проэктирующаго цилиндра, которое будетъ:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } z=h.$$ Это ур-ie направл.

Образующія пойдутъ изъ точки O. Ур-ія образующей будутъ:

$$x=mz \text{ и } y=nz$$

Исключимъ x, y и z. Находимъ: $z=h$, $x=mh$ и $y=nh$

Вставляя получимъ $\frac{m^2h^2}{a^2} + \frac{n^2h^2}{b^2} = 1$. Это есть условное ур-ie между параметрами. Изъ ур-ий-же образующей имѣемъ: $m = \frac{x}{z}$ и $n = \frac{y}{z}$. Отсюда: $\frac{h^2x^2}{a^2z^2} + \frac{y^2h^2}{b^2z^2} = 1$

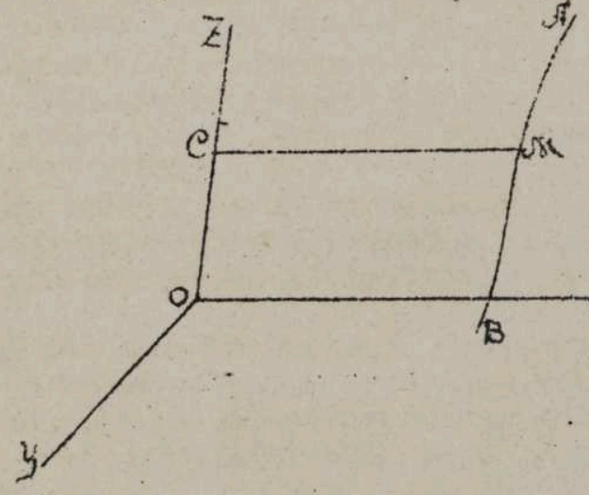
Или:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0$$

Это есть ур-ie конуса.

Поверхности конoидальныя.

Конoидальная поверхность образуется движеніемъ прямой образующей по двумъ направляющимъ, изъ коихъ одна прямая, а другая можетъ быть и кривая, причемъ образующая во всѣхъ своихъ положеніяхъ остается параллельною одной и той-же плоскости. Для вывода простѣйшаго ур-ія, мы примемъ направляющую прямую за ось Z-овъ, а за плоскость XY — плоскость, параллельно которой движется образующая. При этомъ ось Z-овъ вообще не будетъ $\perp$-на плоскости XY. Пусть другая направляющая — кривая AB, ея ур-ія даны: $f(x,y,z) = 0$ и $\varphi(x,y,z) = 0$



Будемъ разсматривать какъ и прежде фун-іи f и φ совершенно произвольныя. Что-бы получить образующую, проведемъ произвольную плоскость $\parallel$-ную плоскости XY и положимъ, что плоскость пересѣкаетъ ось Z-овъ въ точкѣ C, а кривую AB въ точкѣ M; тогда прямая CM будетъ одна изъ образующихъ. Что-бы написать ея ур-ія, возьмемъ во первыхъ плоскость $\parallel$-ную XY, въ которой эта прямая находится.

Ур-ie этой плоскости будетъ $Z = \beta$. Во второмъ возьмемъ плоскость проходящую чрезъ ось $Z^{-ов}$ и чрезъ прямую CM; ур-ie будетъ $y = \alpha x$. Эти два ур-ія вмѣстѣ ($Z = \beta$ и $y = \alpha x$) выражаютъ образующую. При движеніи образующей будутъ измѣняться α и β. Слѣдов. α и β будутъ **перемѣнными параметрами**. Выразимъ условіе пересѣченія образующей съ направляющей; это условіе получится, исключивъ x, y и z изъ написанныхъ 4-хъ ур-ій. Это условное ур-ie будетъ имѣть видъ: $F(\alpha, \beta) = 0$. Или: $\beta = \Psi(\alpha)$. Это есть условное ур-ie между параметрами.

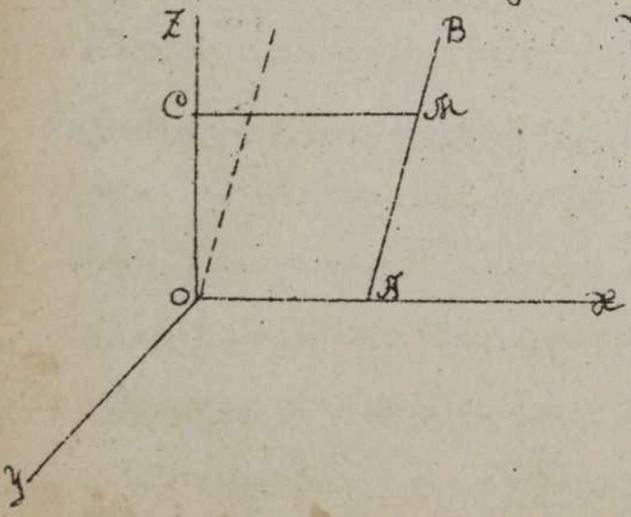
Фун-ію Ψ мы должны считать произвольною, потому что фи f и Φ были оставлены произвольными. Затѣмъ изъ ур-ій образующей имѣемъ: $\beta = z$, $\alpha = \frac{y}{x}$.

Слѣдовательно:

$$z = \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Это есть общее ур-ie коноидальныхъ поверхностей, потому что x, y и z въ него входящіе, суть коор-ты произвольной точки, какой нибудь изъ образующихъ т. е. коор-ты произвольной точки поверхности.

1) **Примѣръ.** Составить ур-ie прямаго коноида, у котораго обѣ направляющія суть прямыя линіи.



Коноидъ наз. прямымъ, если одна изъ направляющихъ $\perp$-на, плоскости $\parallel$-но которой движется образующая. Слѣдов. коор-ты прямоугольныя. Другая направляющая будетъ прямая AB, проходящая чрезъ A на оси $x^{-ов}$, причемъ $OA = a$ и расположен-

най въ плоскости ||-ой yz. Тогда ур-ie этой прямой буд.: $x = a$ и $y = bz$, направляющая.
Ур-ia образующей CM по прежнему будутъ:

$$z = \beta$$
$$y = \alpha x$$

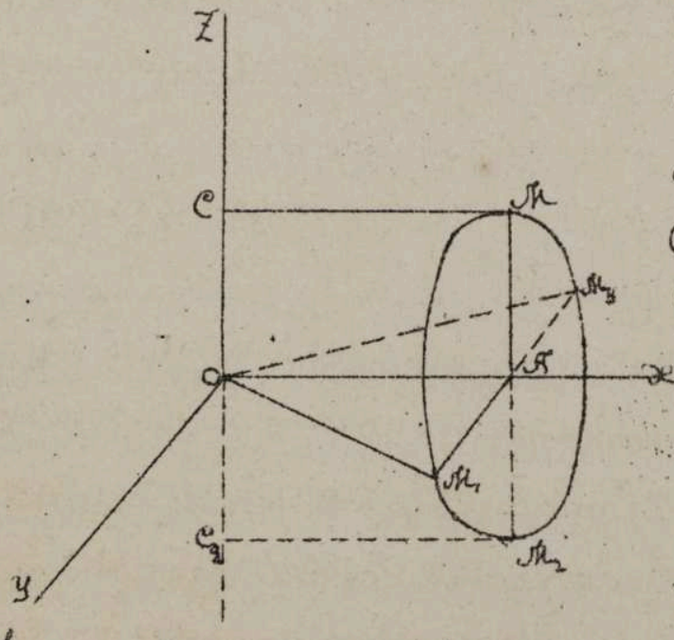
Исключимъ x, y и z. Находимъ: $x = a$; $z = \beta$ и $y = b\beta$
И слѣдов.: $b\beta = \alpha a$. Это есть условное* между параметрами. Изъ ур-ій образующей, имѣемъ:

$$\beta = z \text{ и } \alpha = \frac{y}{x}$$
$$bz = \frac{ay}{x}$$

Или: $ay = bxz$. Это есть ур-ie коноида. Этотъ коноидъ въ частности наз. гиперболическимъ параболоидомъ, или иначе косою плоскостью.

2.) Примѣръ. Составить ур-ie поверхности наз. коноидальнымъ клиномъ.

(Возьмемъ опять прямоугольныя оси. Одною направляющею будетъ ось $z^{-ов}$, а другою - пусть буд. эллипсъ, котораго центръ находится на оси $x^{-ов}$ въ точкѣ A, причемъ $OA = a$, а плоскость эллипса ||-на yz, а оси эллипса ||-ны осямъ $y^{-ов}$ и $z^{-ов}$.



Ур-ia направляющей будутъ:

$$x = a \text{ и } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ур-ia образующей будутъ: $z = \beta$ и $y = \alpha x$. Исключимъ x, y и z, получимъ: $x = a$; $z = \beta$ и $y = \alpha a$; подставляемъ:

$$\frac{a^2\alpha^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = 1.$$ Это есть условн. ур-ie

*ур-ie

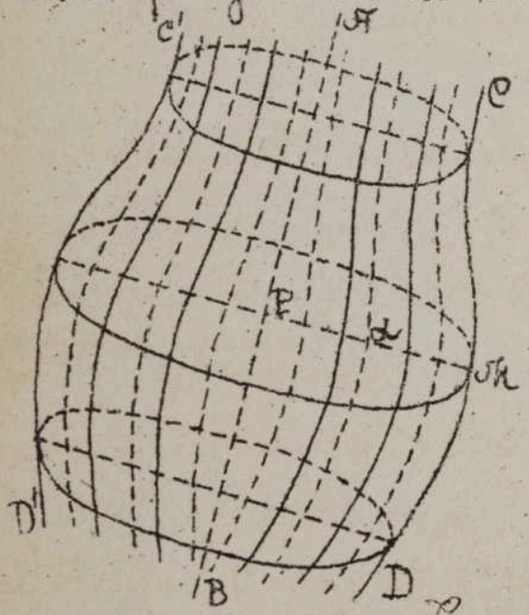
Отсюда: $\frac{a^2y^2}{b^2x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Или будемъ имѣть:

$$a^2c^2y^2 + b^2x^2z^2 = b^2c^2x^2$$

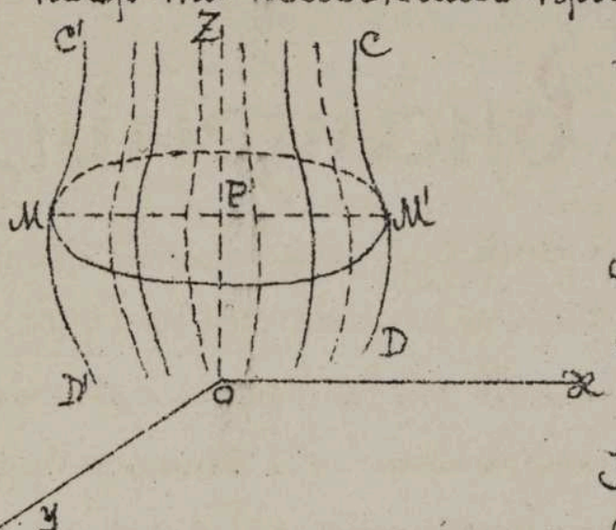
Это есть ур-іе поверхности, она-же будетъ поверхностью 4-го порядка.

Поверхности вращенія.

Поверхность вращенія происходитъ отъ вращенія какой угодно кривой во кругъ неподвижной прямой, называемой осью вращенія, причемъ произвольная точка M этой кривой описываетъ кругъ, котораго радіусъ равенъ разстоянію MP отъ оси вращенія и котораго плоскость ⊥-на къ оси вращенія. При такомъ образованіи поверхности очевидно, что всѣ сѣченія ея плоскостями ⊥-ми оси, будутъ круги, которыхъ центра расположены на оси вращенія, эти круги наз. параллелями. Всѣ сѣченія поверхности плоскостями проходящими чрезъ ось дадутъ кривыя наз. меридіанами поверхности. Для того, что-бы составить ур-іе поверхности вращенія ей даютъ нѣсколько иное образованіе. Вообразимъ неподвижную ось вращенія и неподвижную-же кривую CD, эту кривую мы примемъ за направляющую линію, образующее-же будетъ кругъ перемѣннаго радіуса, который двигаясь такъ, что его центръ перемѣщается по оси вращенія, его плоскость остается ⊥-ю къ оси вращенія, а радіусъ его измѣняется такъ, что кругъ остается въ постоянномъ соприкасновеніи съ кривою CD. Очевидно, что этотъ кругъ опишетъ разсматриваемую поверхность.



Составимъ общее ур-ie поверхности вращенія. Сначала примемъ за ось вращенія одну изъ осей коор-тъ, напр. ось Z-овъ; коор-ты положимъ прямоугольныя. Пусть CD есть кривая, которая должна вращаться около оси Z-овъ и производить поверхность, но мы примемъ ее за направляющую



Положимъ, что ур-ia кривой CD будутъ: $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$

Кривую эту мы будемъ считать произвольною и потому ф-ии f и φ будемъ разсматривать совершенно произвольными. Далѣе вообразимъ образующій кругъ въ какомъ нибудь изъ его положеній MM' (центръ его P). Плоскость этого круга $\parallel$-на плоскости XY и ур-ie этой плоскости будетъ: $z=\delta$

Далѣе пусть радіусъ этого круга $=\delta$, проэктируемъ этотъ кругъ на плоскость XY. Ур-ia проэктирующаго цилиндра будутъ:

$$x^2+y^2=\delta^2 \text{ и } z=\delta$$

Совокупность этихъ двухъ ур-ій опредѣляетъ образующій кругъ. При движеніи этого круга δ и δ будутъ измѣняться, слѣдовательно δ и δ — суть перемѣнныя параметра образующей. Выразимъ условіе пересѣченія образующей съ направляющей. Въ точкѣ пересѣченія всѣ 4 ур-ія должны удовлетворяться вмѣстѣ. Исключивъ изъ нихъ x, y и z, получимъ условное ур-ie между параметрами δ^2 и δ. Это ур-ie будетъ имѣть видъ: $F(\delta^2,\delta)=0$. Или: $\delta=\psi(\delta^2)$

Видъ ф-ій ψ и F зависитъ отъ вида ф-ій f и φ, а такъ какъ эти двѣ ф-ии произвольны, то и ф-ію ψ нужно считать совершенно произвольною. Вставимъ вмѣсто δ^2 и δ ихъ вы-

ражения изъ ур-ій образующей, получимъ:

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

Коор-ты X, Y и Z, входящія въ это ур-іе суть коор-ты произвольной точки образующаго круга въ произвольномъ его положеніи, слѣдовательно это суть коор-ты произвольной точки поверхности вращенія и это есть общее ур-іе поверхности вращенія, у которой осью вращенія служитъ ось $Z^{-ов}$.

Давая ф-іи φ разное видо будемъ получать разныя поверхности вращеній; такъ ур-іе: $z = (x^2 + y^2)^3$; $z = e^{-x^2-y^2}$ .....

Суть ур-ія поверхностей вращенія.

Если ось вращенія служитъ ось $x^{-ох}$, то ур-іе поверхности будетъ имѣть видъ: $x = \varphi(y^2 + z^2)$

А если осью вращенія будетъ ось $y^{-оу}$, то ур-іе поверхности вращенія будетъ: $y = \Theta(x^2 + z^2)$

Примѣръ. Составить ур-іе параболоида вращенія; въ плоскости XZ. Возьмемъ параболу, ур-іе которой $z^2 = 2px$. Эта парабола, вращаясь около оси $x^{-ох}$ описываетъ поверхность — параболоидъ вращенія.

Параболу эту мы будемъ однако разсматривать, какъ неподвижную и будемъ разсматривать, какъ направляющую.

Ур-ія этой направляющей, какъ кривой въ пространствѣ, буд.:

$$z^2 = 2px \text{ и } y = 0$$

Возьмемъ образующій кругъ; его ур-ія будутъ очевидно:

$$y^2 + z^2 = \alpha^2 \text{ и } x = \xi$$

Исключимъ x, y и z, находимъ: $y = 0$; $x = \xi$ и $z = \alpha$.

Вставимъ въ 1-ое — получимъ: $\alpha^2 = 2p\xi$

Это есть условное ур-іе между параметрами. Вставимъ вмѣсто α^2 и ξ ихъ выраженія изъ ур-ій образующ., получ.:

$$y^2 + z^2 = 2px$$

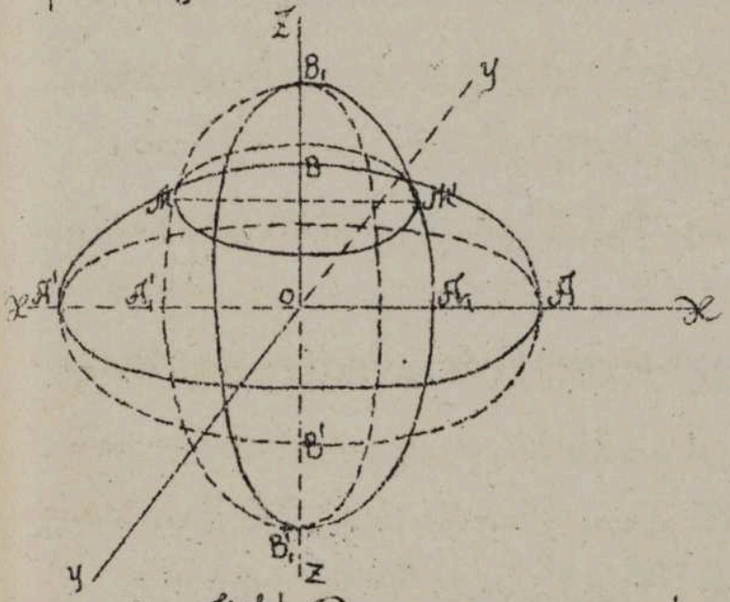
Это есть параболоида вращения. Как видимъ, это есть поверхность 2-го порядка.

2.) Составить ур-е эллипсоида вращения.

Въ плоскости ZX возьмемъ эллипсъ, котораго ур-ie есть:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Если этотъ эллипсъ будетъ вращаться около оси Z-ов, то онъ опишетъ поверхность эллипсоида вращения. При этомъ, если $a > b$, то получимъ эллипсоидъ A, A', B, B' — сжатый или сферойдъ. Если-же $a < b$, то получимъ эллипсоидъ $AA'BB'$ — удлиненный. Что-бы составить ур-ie эллипсоида вращения, мы будемъ разсматривать эллипсъ въ плоскости XZ, какъ не подвижной и примемъ его за направляющую. Ур-ія его, какъ кривой въ пространствѣ, будутъ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ и $y = 0$



Затѣмъ вообразимъ образующій кругъ MM'. Его плоскость $\perp$-на къ оси Z-ов и его ур-ія будутъ:

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \text{ и } z = \gamma$$

Исключивъ x, y и z, находимъ: $y = 0$; $x = \alpha$ и $z = \gamma$. Вставивъ въ 1-ое — получимъ: $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} = 1$. Это есть условное ур-ie между параметрами. Вставимъ вмѣсто α^2 и γ^2 ихъ выраженія изъ ур-ій образующей, получимъ:

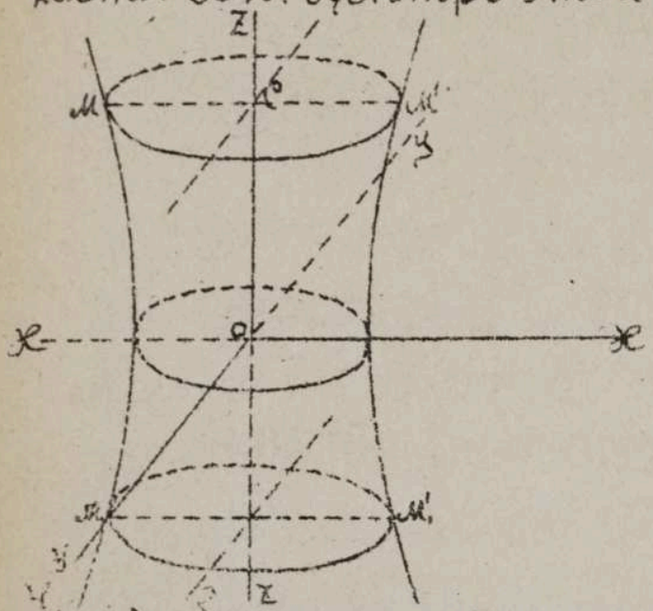
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Это есть ур-ie эллипсоида вращения. Оно также предоставляетъ поверхность 2-го порядка.

3.) Составить ур-ie гиперболоида вращения съ одною по-

лостью.

(Примемъ за направляющую линію гиперболу, лежащую въ плоскости XZ. Центръ этой гиперболы находится въ началѣ координатъ, а ее мнимая ось совпадаетъ съ осью Z-въ. Ур-ія этой гиперболы будутъ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ и $y = 0$ — направляющая. Гиперболоидъ вращенія, получится собственно отъ вращенія гиперболы около оси Z-въ и это будетъ-безконечная поверхность съ одною пустою полостью внутри.



Ур-ія, образующаго круга здѣсь, будутъ: $x^2 + y^2 = \alpha^2$ и $Z = \beta$.

Помноживъ X, Y и Z, получимъ: $y = 0$; $x = \alpha$ и $Z = \beta$, получ.:

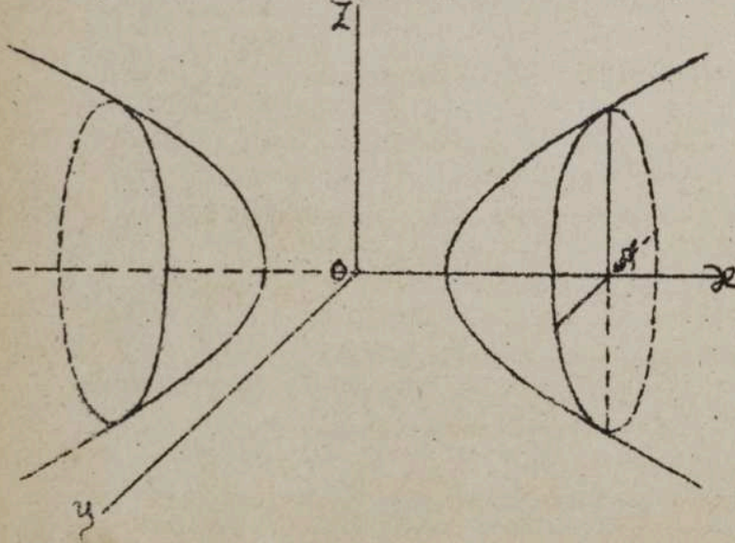
$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

Это есть условное ур-ie между параметрами. Затѣмъ ур-ie гиперболоида вращенія будетъ:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

4.) Составить ур-ia гиперболоида вращенія съ двумя полостями.

Примемъ за направляющую линію гиперболу лежащую въ плоскости XZ и расположенную точно такъ же, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ. Гиперболоидъ съ двумя полостями получится, если эта гипербола будетъ вращаться около своей главной оси, т. е около оси X-въ. При этомъ получится безконечная поверхность сос-



тоящая изъ двухъ раздѣльныхъ полостей. Эту гиперболу мы примемъ за направляющую. Ея ур-ія будутъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ и } y = 0$$

Плоскость образующаго круга будетъ здѣсь ⊥-на оси X-овъ, а потому ур-ія образующаго круга будутъ:

$$y^2 + z^2 = \alpha^2 \text{ и } x = \xi$$

Исключимъ x, y и z, получимъ: $y = 0$; $x = \xi$ и $z = \alpha$

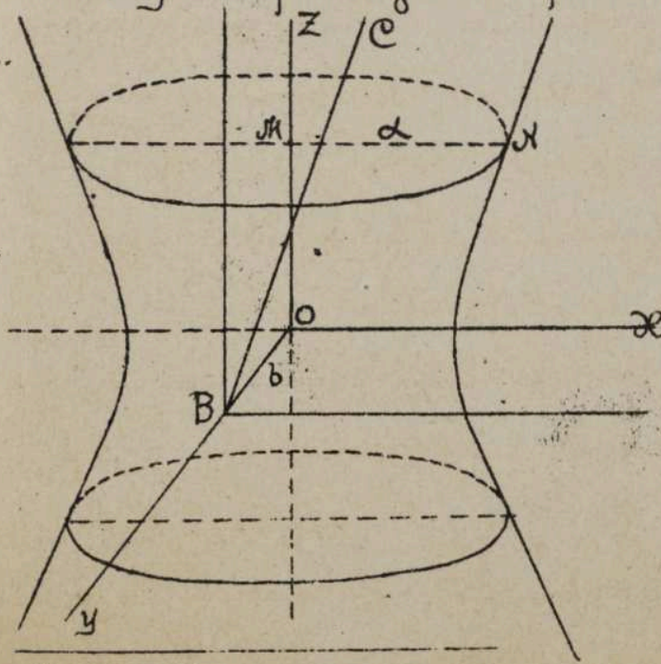
Слѣдовательно, подставивъ получимъ: $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{b^2} = 1$

Это есть условное ур-ie; а ур-ie гиперболоида съ двумя полостями, будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Составить ур-ie поверхности вращенія, происходящей отъ вращенія одной прямой около другой, полагая, что эти двѣ прямыя не находятся въ одной плоскости.

Возьмемъ опять прямоугольныя оси коор-тъ. На оси Y-овъ возьмемъ произвольную точку B и пусть $OB = b$. Чрезъ эту точку проведемъ плоскость ||-ную XZ и въ этой плоскости чрезъ точку B проведемъ произвольную прямую положимъ BC.



Вообразимъ далѣе, что прямая BC вращается около оси Z-овъ. Составимъ ур-ie этой поверхности вращенія. При этомъ мы примемъ прямую BC за направляющую линію. Ея ур-ія будутъ очевидно: $x = az$ и $y = b$. Образующій кругъ будетъ имѣть центръ, перемѣщающійся по оси Z-овъ и плоскость этого круга буд.

Т-на кр. оси Z-ов. Ур-ія образующаго круга будутъ:

$$x^2+y^2=\alpha^2 \text{ и } z=\beta$$

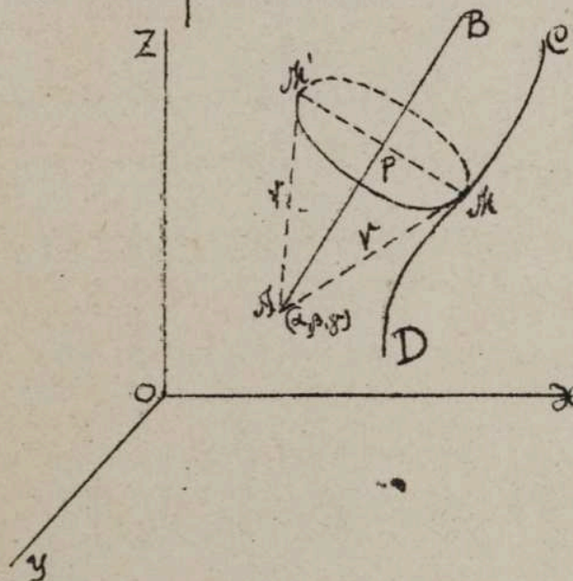
Исключимъ x, y и z, получимъ: $y=b$, $z=\beta$ и $x=a\beta$.

Подставимъ: $a^2\beta^2+b^2=\alpha^2$. Это есть ур-ie условное между параметрами. Замѣнивъ въ немъ α^2 и β ихъ выраженіями ихъ ур-ій образующей, получимъ: $a^2z^2+b^2=x^2+y^2$;

или:
$$\frac{x^2+y^2}{a^2b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

Въ этомъ ур-іи мы узнаемъ гиперболоидъ вращенія съ одною полостью.

Общее ур-ie поверхностей вращенія около произвольной оси.



Возьмемъ точку A коор-ты ея α, β и γ и проведемъ чрезъ эту точку прямую AB, которая дѣлаетъ съ осями коор-тъ углы, косинусы которыхъ соотвѣтственно пропорціональны тремъ числамъ a, b и c. Ур-ія этой прямой буд.:

$$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$$

Пусть эта прямая, совершенно произвольная, будетъ осью вращенія. Далѣе пусть CD — кривая линія, которая вращаясь около AB производитъ поверхность вращенія. Эту кривую примемъ за направляющую — ея ур-ія пусть будутъ:

$$f(x,y,z)=0 \text{ и } \varphi(x,y,z)=0$$

гдѣ f и φ совершенно произвольныя. Далѣе вообразимъ образующій кругъ въ произвольномъ положеніи MM'. Чтобъ составить уравненіе этого круга, мы во первыхъ* точку A съ M и вообразимъ сферу, центръ которой въ A, а радіусъ которой

*соединимъ

есть $AM = r$. Ур-ie этой сферы будет:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Далее рассечем эту сферу плоскостью $\perp$-ною AB и проходящею через точку M. Очевидно, что в сечении получится образующий круг MM'. Ур-ie секущей плоскости, как $\perp$-ной к прямой AB, будет: $ax+by+cz=d$ ..... (II)

Эти два ур-ия будут выражать образующий круг. С изменением положения образующего круга, будут изменяться r и d. Но d зависит от расстояния от начала коор-т секущей плоскости. Припомним, что $p=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Отсюда: $d=p\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. С изменением p будет изменяться и d. Таким образом p и d — перемен. параметра образующей. Исключим x, y и z из двух ур-ий направляющей и двух ур-ий образующей. Получим условное ур-ie между параметрами: $F(d, r^2)=0$ или $d=\psi(r^2)$; причем ψ совершенно произвольная фун-ия.

Заменив d и r^2 их выражениями из ур-ий образующей, получ.:

$$ax+by+cz=\psi\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]$$

Это и будет общее ур-ie поверхности вращения.

Частный случай. Если ось вращения проходит через начало коор-т, то тогда можно взять точку A совпадающую с O и тогда: $\alpha=\beta=\gamma=0$ и

$$ax+by+cz=\psi(x^2+y^2+z^2)$$

Если ось вращения совпадает с осью z-ов, то косинусы углов ею с осями x-ов и y-ов будут нули и тогда $a=0$ и $b=0$. Ур-ie будет: $cz=\psi(x^2+y^2+z^2)$

Это ур-ie было бы очень полезно запомнить, оно встречается в задачах довольно часто, но его легко вывести из предыдущего; действительно,

если положить: $x^2+y^2=u$, то: $Cz=\varphi(u+z^2)$

А если это послѣднее ур-іе рѣшимъ относительно z, то найдемъ: $z=\phi(u)$, то есть:

$$z=\phi(x^2+y^2)$$

А это ур-іе имѣетъ прежній видъ.

О поверхностяхъ 2-го порядка.

Мы будемъ разсматривать поверхности представляемая общимъ ур-іемъ 2-ой степени съ тремя перемѣнными и это ур-іе всегда будемъ писать такъ:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0 \ldots\ldots(1)$$

При этомъ для краткости фун-ію стоящую въ 1-ой части будемъ писать чрезъ $f(x,y,z)=0$.

Ур-іе это написано полнымъ, но оно можетъ быть и неполнымъ, когда нѣкоторые изъ коэфф-товъ будутъ равны нулю.

Но въ этомъ ур-іи долженъ остаться хотъ одинъ членъ 2-го порядка, для того, что-бы оно представляло поверхность 2-го порядка.

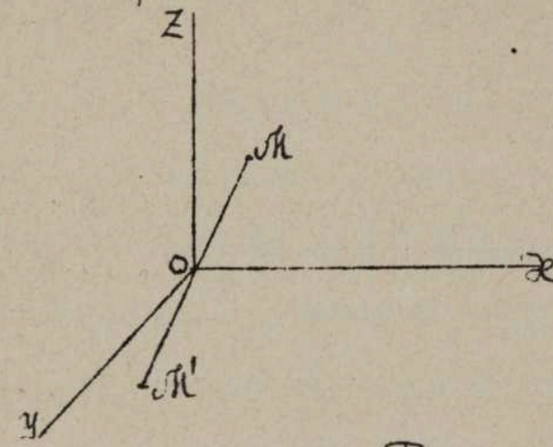
О центрѣ поверхностей 2-го порядка.

Центромъ называется такая точка, относительно которой всѣ точки поверхности расположены симметрично по двѣ, а такъ какъ прямая линія пересѣкаетъ поверхность 2-го порядка вообще въ двухъ точкахъ, то если прямая проходитъ чрезъ центръ, тогда хорда образуемая этою прямою въ поверхности дѣлится центромъ пополамъ.

Теорема. Если начало коор-тъ помѣщено въ центръ поверхности 2-го порядка, то ур-іе этой по-

верхности не будетъ заключать членовъ съ первыми степенями коор-тъ.

Дѣйствительно предположимъ, что начало коор-тъ есть центръ поверхности и что поверхность представляется ур-іемъ (1)-мъ. Проведемъ чрезъ начало произвольную прямую линію. Ур-іе этой прямой $x = mz$ и $y = nz$, гдѣ m и n - произвольны.



Эта прямая пересѣкаетъ поверхность въ 2-хъ точкахъ; причемъ будемъ имѣть $OM = OM'$ и очевидно, что коор-ты этихъ двухъ точекъ будутъ равны, но съ обратными знаками; будемъ искать коор-ты точекъ пересѣченія прямой съ поверхностью. Для этого рѣшимъ три написанныя ур-ія относительно x, y и z. Находимъ:

$$Am^2z^2 + An^2z^2 + Cz^2 + 2Bmnz^2 + 2B'mz^2 + 2B''nz^2 + 2Cmz + 2C'nz + 2C''z + D = 0$$

Или: $(Am^2 + An^2 + C + 2Bmn + 2B'm + 2B''n)z^2 + 2(Cm + C'n + C'')z + D = 0$

Это ур-іе должно дать z для точки M и M'; слѣдов. это ур-іе должно имѣть два рѣшенія равныя и съ обратными знаками, и, слѣдов., въ немъ коэф-ентъ при первой степени z равенъ нулю:

$$Cm + C'n + C'' = 0$$

При томъ это равенство должно удовлетворяться при всевозможныхъ значеніяхъ m и n, а что-бы это было, необходимо чтобы $C = 0$; $C' = 0$ и $C'' = 0$, т.е. ур-іе поверхности въ этомъ случаѣ должно имѣть видъ:

$$Ax^2 + An^2 + Cz^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Что и требовалось доказать.

Теорема обратная. Если данное ур-іе поверхности не содержитъ членовъ съ первыми степенями

ми x, y и z, то начала коор-тъ есть центръ этой поверхности.

Дѣйствительно положимъ, что дана намъ поверхность выраж. ур-іемъ (2), тогда проведемъ чрезъ начало произвольную прямую: $x = mz$ и $y = nz$ и опредѣлимъ коор-та точекъ пересѣченія этой прямой съ поверхностью:

$$(Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn)z^2 + D = 0$$

Это ур-іе даетъ для z двѣ величины равныя и съ обратными знаками (ибо оно неполное содержитъ только z^2). Для x и y получимъ только двѣ величины равныя и съ обратными знаками. Слѣдовательно произвольная прямая, проходящая чрезъ начало, пересѣкаетъ поверхность въ двухъ точкахъ, которыхъ коор-та равны и съ обратными знаками

Слѣдовательно начало коор-тъ есть центръ поверхности, ибо эти двѣ точки симметрично.

Обратимся теперь къ изысканію центра и положимъ намъ дана поверхность представл. ур-іемъ (1)

У этой поверхности можетъ быть центръ, но только онъ не въ началѣ коор-тъ. Обозначимъ неизвѣстныя коор-та центра чрезъ α, β и γ и перенесемъ начало коор-тъ въ центръ, оставляя оси $\parallel$-ми самимъ себѣ. Будемъ имѣть формулы:

$$x = \alpha + x'; \quad y = \beta + y' \quad \text{и} \quad z = \gamma + z'$$

Новое ур-іе поверхности будетъ:

$$f(\alpha + x'; y' + \beta; \gamma + z') = 0$$

Или, вычисливъ его подробно:

$$A(x' + \alpha)^2 + A'(y' + \beta)^2 + A''(z' + \gamma)^2 + 2B(y' + \beta)(z' + \gamma) + 2B'(x' + \alpha)(z' + \gamma) +$$
$$+ 2B''(x' + \alpha)(y' + \beta) + 2C(x' + \alpha) + 2C'(y' + \beta) + 2C''(z' + \gamma) + D = 0$$

Если въ этомъ ур-іи на самомъ дѣлѣ раскроемъ всѣ скобки

и затѣмъ расположимъ члена по степенямъ новыхъ перемѣнныхъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ они раньше были расположены по степенямъ прежнихъ, то ур-іе представится въ видѣ:

$$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+2By'z'+2B'x'z'+2B''x'y'+2(A\alpha+B''\beta+B'\gamma+C)x'+$$
$$+2(B''\alpha+A'\beta+B\gamma+C')y'+2(B'\alpha+B\beta+A''\gamma+C'')z'+A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+$$
$$+2B'\alpha\gamma+2B''\alpha\beta+2C\alpha+2C'\beta+2C''\gamma+D=0$$

При разсматриваніи полученнаго ур-ія обнаруживается что отъ выполненія нами преобразованія коэф-ты всѣхъ коэф-ентовъ членовъ второй степени совсѣмъ не измѣняются. Измѣняются лишь коэф-енты членовъ первой степени и извѣстный членъ. Если обозначимъ эти коэф-енты по аналогіи съ прежнимъ обозначеніемъ чрезъ: C_1, C_1', C_1'' и D_1, то находимъ: $C_1=2(A\alpha+B''\beta+B'\gamma+C)$;
$C_1'=2(B''\alpha+A'\beta+B\gamma+C')$; $C_1''=2(B'\alpha+B\beta+A''\gamma+C'')$ и
$$D_1=A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\alpha\gamma+2B''\alpha\beta+2C\alpha+2C'\beta+2C''\gamma+D$$

Нетрудно запомнить составъ этихъ выраженій по связи его съ составомъ первой части даннаго ур-ія поверхности. Именно оказывается, что коэф-енты при x', y' и z' представляютъ выраженія частныхъ производныхъ отъ $f(x,y,z)$, взятыхъ соотвѣтственно по x, y и z съ замѣной въ нихъ x, y и z соотвѣтственно чрезъ α, β и γ. Такимъ образомъ, вводя извѣстныя символическія выраженія, имѣемъ:

$$2C_1=f_x'(\alpha,\beta,\gamma);\ 2C_1'=f_y'(\alpha,\beta,\gamma)\text{ и }2C_1''=f_z'(\alpha,\beta,\gamma).$$

Что-же касается до коэф-ента D_1, то выраженіе его представляетъ результатъ подстановки α, β и γ, вмѣсто x, y и z въ выраженіе самой функціи $f(x,y,z)$ и потому:

$$D_1=f(\alpha,\beta,\gamma)$$

Возвратимся теперь къ вопросу о разысканіи центра. Если точка съ коор-тами α, β и γ есть центръ данной поверхности,

то послѣ сдѣланнаго нами преобразованія, состоящаго въ перенесеніи начала коор-тъ въ эту точку, ур-ія не должно содержать членовъ съ первыми степенями x', y', z'. Поэтому коор-ты центра должны удовлетворять тремъ ур-ямъ: $C_1=0$, $C_1'=0$ и $C_1''=0$

Выписывая эти ур-ія подробно, имѣемъ:

$$Ax+B'y+B''z+C=0\ ;\ A'z+By+B''x+C'=0$$
$$A''y+Bz+B'x+C''=0$$

Мы получимъ такимъ образомъ три ур-ія 1-ой степени, которымъ должны удовлетворять коор-ты центра α, β и γ, если онъ существуетъ. Ур-ія эти какъ видно легко получить, взявъ частныя производныя отъ 1-ой части данныхъ ур-ій поверхн. и приравнивая каждую изъ нихъ нулю. Перемѣняя α, β и γ на x, y и z ур-ія напишутся такъ:

$$Ax+B''y+B'z+C=0\ ;\ B''x+A'y+Bz+C'=0\ \text{и}$$
$$B'x+By+A''z+C''=0$$

Рѣшивъ эти ур-ія найдемъ: $x=\alpha$, $y=\beta$ и $z=\gamma$ — коор-ты центра.

Мы имѣемъ 3 ур-ія 1-ой степени съ 3-мя перемѣнными, если ихъ рѣшимъ, то для x, y и z получимъ три выраженія дробныя съ общимъ знаменателемъ. Пусть эти рѣшенія будутъ:

$$x=\frac{P}{\Delta}\ ;\ y=\frac{Q}{\Delta}\ \text{и}\ z=\frac{R}{\Delta}$$

При рѣшеніи окажется что общій знаменатель Δ, или какъ говорятъ опредѣлитель этихъ 3-хъ ур-ій будетъ слѣдующій:

$$\Delta=AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2$$

Что-бы запомнить составъ этого опредѣлителя, укажемъ слѣдующее правило. Напишемъ таблицу. Изъ суммы произведеній горизонтальныхъ рядовъ вычтемъ сумму произведеній вертикальныхъ рядовъ. Если опредѣ-

A	A'	A''
B	B'	B''
B	B'	B''

литель $\Delta \neq 0$, то 3 ур-ія будутъ имѣть одну систему опредѣленныхъ рѣшеній и поверхность I будетъ имѣть одинъ центръ котораго коор-ты будутъ извѣстны. Если-же опредѣлитель $\Delta = 0$, то это значитъ одно изъ двухъ, или 1) данныя ур-ія несовмѣстны и слѣдовательно не удовлетворяются никакими значеніями x, y и z. Въ этомъ случаѣ поверхность не имѣетъ центра, или 2) данныя ур-ія неопредѣленны, т.е. эти три ур-ія приводятся или ко 2-му, или къ 1-му, т.е. одно изъ нихъ есть необходимое слѣдствіе двухъ другихъ и не представляетъ новаго ур-ія. Или два ур-ія суть необходимыя слѣдствія одного.

Въ этихъ случаяхъ существуетъ безчисленное множество значеній x, y и z, удовлетворяющихъ данной системѣ ур-ій. Поверхность въ этомъ случаѣ имѣетъ слѣдовательно безчисленное множество центровъ.

При $\Delta = 0$, случай несуществованія центра, отъ случая безчисленнаго множества центровъ можно отличить при самомъ рѣшеніи этихъ трехъ ур-ій, слѣдующимъ образомъ: положимъ, что наши ур-ія мы рѣшаемъ по способу подстановки, изъ 1-го ур-ія выведемъ положимъ x и вставимъ его въ два другія. Затѣмъ изъ одного, изъ двухъ полученныхъ ур-ій, выведемъ y и вставимъ его въ другое. Если при такомъ ходѣ рѣшеній, мы придемъ къ невозможному равенству, напр. $2 = 5$, $3 = 0$, то это покажетъ, что ур-ія несовмѣстны и слѣдов., что центра нѣтъ.

Если-же, выведя x и вставляя его въ два другія ур-ія, мы увидимъ, что они оба обратятся въ тождество и послѣ сокращеній дадутъ $0 = 0$; то это покажетъ, что два изъ данныхъ ур-ій есть необходимое слѣдствіе 1-го изъ нихъ.

вся система ур-ий приводится к одному первому: центров бесчисленное множество.

Или можем случая, что мы если введем Z и для первых двух и вставим в 3-е, то третье обратится в тождество (по сокращ. дадут 0 = 0). Это значит 3-е есть следствие 1-х двух и вся система приведется к двум ур-иям, центров все опять будет бесчисленное множество.

На ур-ия, следующая для определения центра можно смотреть еще со геометрической стороны. Если мы каждое из этих ур-ий будем рассматривать отдельно, то можно сказать, что каждое из них представляет некоторую плоскость в пространстве. Найти величины X, Y и Z, удовлетворяющие этим трем ур-иям вместе, значит найти точки общия этим трем плоскостям, т.е. точки пересечения трех плоскостей. При этом могут представиться три случая:

1.) При плоскости пересекаются в одной точке. Поверхность имеет один центр в этой точке пересечения.

2.) При плоскости не имеют никакой общей точки. Это может быть тогда, когда: а) три плоскости ∥ пл; b) две из них ∥ и c) одна из плоскостей ∥-на прямой, по которой пересекаются две другия плоскости. В этих случаях центра не существует.

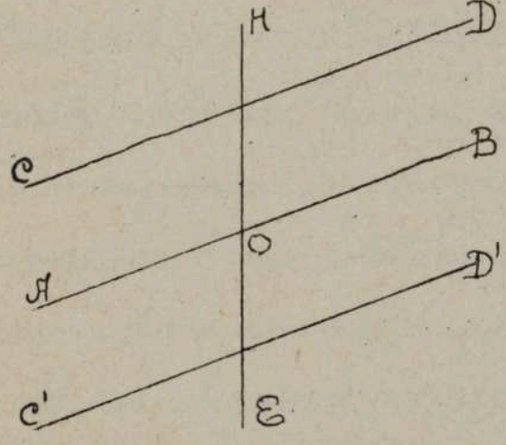
3.) При плоскости имеют бесчисленное множество общих точек, когда: а) три плоскости пересекаются по одной прямой линии и b.) три плоскости совпадают в одну. В этом случае центров будет бесчисленное множество, при этом или а) все центры расположены на одной прямой-геометрич. места центров, или-же b) все центры расположены в

одной плоскости также — геометр. места-центровъ. Первой изъ этихъ двухъ случаевъ представится, когда при рѣшеніи ур-ій будетъ обнаруживаться, что одно изъ нихъ будетъ слѣдствіемъ двухъ другихъ и что система ур-ій приводится къ 2-мъ ур-ямъ, которыя дадутъ прямую — геометр. мѣсто безчисл. множества центровъ.

Второй случай представляется, когда обнаружится при рѣшеніи два суть слѣдствія 1-го ур-ія, въ этомъ случаѣ вся система приведется къ одному ур-ію, которое представляетъ плоскость геометрическаго мѣста центровъ.

Въ случаѣ безчисленнаго множества центровъ, можно до нѣкоторой степени опредѣлить видъ поверхности, представляемой ур-емъ (1)-мъ. Съ этою цѣлью приведемъ слѣдующія соображенія.

1.) Случай. Положимъ, что геометрич. мѣсто центровъ есть прямая линія. Пусть эта прямая будетъ AB. Проведемъ

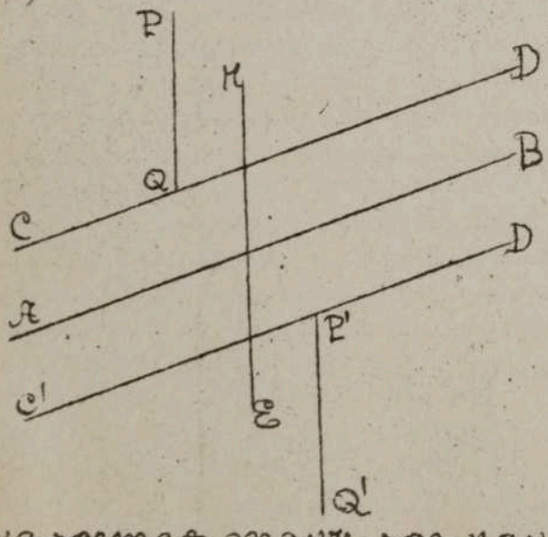


чрезъ эту прямую произвольную плоскость (плоскость черт.). Эта плоскость разсѣчетъ поверхность по кривой 2-го порядка, и въ этомъ сѣченіи каждая точка прямой AB должна быть центромъ. Слѣдов. сѣченіе это будетъ такая кривая 2-го порядка, которая имѣетъ безчисленное множество центровъ, расположенныхъ на прямой AB. Мы знаемъ, что эта кривая будетъ совокупность двухъ параллельныхъ линій, равноотстоящихъ отъ прямой AB. Пусть эти линіи будутъ CD и C'D'. Это заключеніе будетъ вѣрно для всякой плоскости, проходящей чрезъ AB. Отсюда слѣдуетъ, что вся поверхность будетъ состоять изъ

прямых линий ||-ых AB и равностоящих от нея. Следовательно эта поверхность есть цилиндрическая. Чтобы узнать какой это цилиндр, проведем другую плоскость, которая пересекала-бы прямую AB, положимъ HE, въ точкѣ O. Эта точка должна быть центромъ этого сѣченія; следовательно это сѣченіе есть кривая 2-го порядка, имѣющая одинъ центръ, т.е. она будетъ или эллипсъ или гипербола. Сѣченія эти будутъ направляющею цилиндрической поверхности. Следовательно цилиндръ будетъ или эллиптическій или гиперболическій. При этомъ могутъ представиться частные случаи, такъ частные случаи эллипса: одна точка или мнимое мѣсто. Въ этихъ случаяхъ вмѣсто поверхности получимъ или прямую AB, или мнимую поверхность. Частной случай гиперболы буд. двѣ пересѣкающіяся прямыя. (Въ этомъ случаѣ поверхность будетъ совокупность двухъ плоскостей, пересѣкающихся по прямой AB.

2.) Случай безчисленнаго множества центровъ.

Положимъ, что геометрическое мѣсто центровъ есть плоскость. Пусть эта будетъ плоскость чертежа. Каждая точка этой плоскости есть центръ. Проведемъ въ ней прямую линію AB. Каждая точка этой прямой, такожде будетъ центромъ. Чрезъ прямую AB проведемъ другую произвольную сѣкущую плоскость. Эта плоскость разсѣчетъ поверхность по 2-мъ прямымъ линіямъ ||-мъ AB и равностоящимъ отъ нея. Это до-



кажется такъ-же, какъ и выше. Следовательно и въ этомъ

случай поверхность будет цилиндрическая, образующія которой ||-ы АВ. Чтобы узнать направляющую этой цилиндрической поверхности, Пересѣчемъ прямую АВ другой плоскостью ⊥-ной къ плоскости чертежа. Эта плоскость пересѣчетъ плоскость чертежа по прямой НЕ, каждая точка прямой НЕ отнуда будетъ центромъ Слѣдовательно вторая искомая плоскость такожде пересѣчетъ поверхность по двумъ прямымъ линіямъ ||-мъ НЕ и равноотстоящихъ отъ нея. Пусть эти прямыя будутъ PQ и PQ'. Прямыя эти будутъ направляющія цилиндрической поверхности. Слѣдовательно сама цилиндрическая поверхность будетъ въ этомъ случаѣ двѣ плоскости ||-ныя плоскости чертежа и равноотстоящихъ отъ нея.

Здѣсь такожде могутъ быть частные случаи:

Прямыя PQ и PQ'-совпасть въ одну НЕ, тогда получимъ вмѣсто двухъ ||-хъ плоскостей, одна плоскость

Двѣ ||-ныя прямыя PQ и PQ'** оказаться линіями, тогда и поверхность будетъ линіею. Приступимъ къ дальнѣйшему:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2Cy+2C''z+D=0$$

Положимъ, что эта поверхность имѣетъ центръ и слѣдовательно, что опредѣлитель $\Delta \neq 0$; тогда пусть коорд-ты центра будутъ α, β и γ. Перенесемъ начала коор-тъ въ центръ, полагая: $x=x'+\alpha$; $y=y'+\beta$ и $z=z'+\gamma$

Новое ур-іе поверхности будетъ:

$$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+2Byz'+2B'x'z'+2B''x'y'+C_1x'+C_1'y'+C_1''z'+f(\alpha,\beta,\gamma)=0$$

Но въ настоящемъ случаѣ будетъ: $C_1=0$; $C_1'=0$ и $C_1''=0$. Слѣд. ур. будетъ*

Здѣсь извѣстный членъ будетъ:

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\alpha\gamma+2B''\alpha\beta+2C\alpha+2C'\beta+2C''\gamma+D$$

Чтобъ вычислить этотъ членъ, нужно предварительно найти

---

*$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+f(\alpha,\beta,\gamma)=0$; **могутъ

α, β и γ изъ слѣдующихъ трехъ ур-ій:

$$A\alpha + B'\gamma + B''\beta + C = 0 \; ; \; A'\beta + B\gamma + B''\alpha + C' = 0 \text{ и}$$
$$A''\gamma + B\beta + B'\alpha + C'' = 0$$

Выраженіе извѣстнаго члена упростится помощью слѣдующаго замѣчанія. Умножаемъ послѣднія три ур-ія первое на α, второе на β и третье на γ и сложимъ:

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0 \; .$$

Отсюда выходитъ, что:

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta = -C\alpha - C'\beta - C''\gamma$$

Вслѣдствіе этого получимъ извѣстной членъ:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = D_1 = -C\alpha - C'\beta - C''\gamma + 2C\alpha + 2C'\beta + 2C''\gamma + D$$

Или: $D_1 = C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D$

По этой формулѣ будетъ удобно вычислять извѣстной членъ.

Діаметральныя плоскости поверхностей 2-го порядка.

Будемъ опять разсматривать поверхность 2-го порядка представляемую ур-емъ $f(x, y, z) = 0$. Вообразимъ, что въ этой поверхности проведенъ рядъ $\parallel$-ныхъ хордъ. Геометрическое мѣсто срединъ этого ряда $\parallel$-ныхъ хордъ образуетъ поверхность назыв. діаметральною поверхностью.

Мы докажемъ прежде всего, что діаметральная поверхность для поверхностей 2-го порядка будетъ плоскость.

Возьмемъ рядъ $\parallel$-ныхъ хордъ, угловые коэф-ты которыхъ пусть будутъ m и n. Ур-ія этихъ хордъ будутъ: $x = mz + p$ и $y = nz + q$. Возьмемъ одну изъ $\parallel$-ныхъ хордъ, положимъ MM' этимъ тѣмъ ея средину C и пусть коэф-ты средины C будутъ α, β и γ. Перенесемъ начало коэф-тъ въ C, оставляя оси $\parallel$-ны

самимъ себѣ, полагая $x = x' + \alpha$; $y = y' + \beta$ и $z = z' + \gamma$.
Новое ур-іе поверхности, какъ мы знаемъ уже, будетъ:
$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By'z' + 2B'x'z' + 2B''x'y' + C_1x' + C_1'y' + C_1''z' + f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$
Ур-ія хорды MM' относительно новыхъ осей будутъ: $x' = mz'$, $y' = nz'$. Будемъ искать коор-ты точекъ пересѣченія этой хорды съ поверхностью. Для этого исключимъ x' и y'; и вставимъ въ новое ур-іе поверхности, получимъ:
$(Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn)z'^2 + (C_1m + C_1'n + C_1'')z' + f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$
Это ур-іе должно дать z' для точекъ M и M' (точекъ перес.). Но такъ какъ $CM = CM'$, то z' для точекъ M и M' должно быть равно и съ обратными знаками, вслѣдствіе этого послѣднее квадратное ур-іе не должно содержать члена съ первою степенью z'.
Слѣдовательно должно имѣть: $C_1m + C_1'n + C_1'' = 0$.
Или вставляя значенія для C_1, C_1' и C_1'', получимъ:
$(A\alpha + B'\gamma + B''\beta + C)m + (A'\beta + B\gamma + B''\alpha + C')n + A''\gamma + B\beta + B'\alpha + C'' = 0$
Этому ур-ію должны удовлетворять коор-ты α, β и γ – средины произвольной хордъ изъ разсматриваемаго ряда $\parallel$-ныхъ хордъ; другими словами говоря – этому ур-ію будутъ удовлетворять коор-ты средины всѣхъ $\parallel$-ныхъ хордъ, т.е. это ур-іе есть ур-іе геометр. мѣста средины данныхъ рядовъ $\parallel$-ныхъ хордъ, или это есть ур-іе діаметральной поверхности. Ур-е это есть 1-ой степени относительно текущихъ коор-тъ α, β и γ. Слѣдовательно діаметральная поверхность будетъ всегда плоскость.
Текущія коор-ты удобнѣе обозначить чрезъ x, y и z, поэтому впредь ур-іе діаметральной плоскости мы будемъ писать сокращенно такъ: $C_1m + C_1'n + C_1'' = 0$. Или:
$(Am + B''n + B')x + (B''m + A'n + B)y + (B'm + Bn + A'')z + Cm + C'n + C'' = 0$
Мы видимъ, что для всякаго даннаго ряда $\parallel$-ныхъ хордъ, опредѣ-

мѣмаго угловыми коэф-ентами m и n, соотвѣтствуетъ одна діаметральная плоскость, дѣлящая этотъ рядъ хордъ пополамъ. Замѣтимъ, что если поверхность имѣетъ центръ, то всѣ діаметральныя плоскости проходятъ чрезъ центръ, потому что коэф-ты удовлетворяютъ этимъ тремъ ур-іямъ: $C_1=0$; $C_1'=0$ и $C_1''=0$ и слѣдовательно удовлетворяютъ ур-ію діаметральной плоскости, которое при этомъ обратится въ такое: $m.0+n.0+0=0$, какова-бы ни была діаметральная плоскость.

Главныя діаметральныя плоскости.

Діаметральная плоскость назыв. главною, если она $\perp$-на къ тѣмъ хордамъ, которыя дѣлитъ пополамъ.

Разсмотримъ существуютъ-ли главныя діаметральныя плоскости въ поверхностяхъ 2-го порядка. Для этого возьмемъ ур-ію діаметральной плоскости вообще:

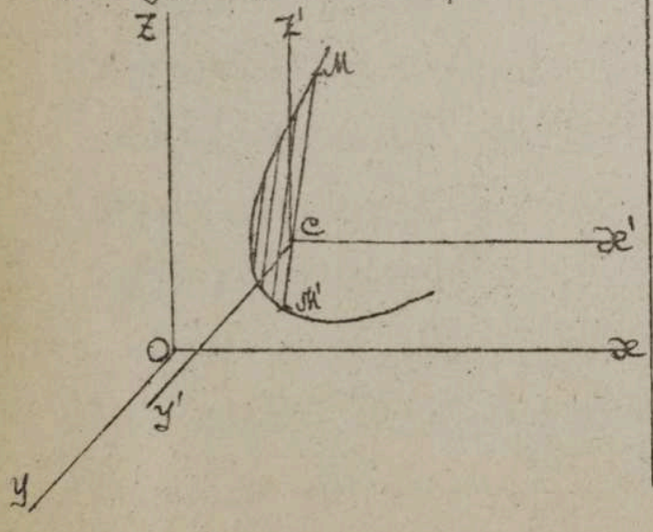
$$(Am+B''n+B')x+(B''m+A'n+B)y+(B'm+Bn+A'')z+Cm+C'n+C''=0$$

и выразимъ, что эта плоскость $\perp$-на къ хордамъ, представляемымъ ур-іями: $x=mz+p$ и $y=nz+q$. Условіе $\perp$-сти плоскости съ прямою дадутъ въ настоящемъ случаѣ:

$$m=\frac{Am+B''n+B'}{B'm+Bn+A''}\quad;\quad n=\frac{B''m+A'n+B}{B'm+Bn+A''}$$

. Въ этихъ ур-яхъ неизвѣстны m и n, т.е. угловые коэф-ты тѣхъ хордъ, къ которымъ соотвѣтствующая діаметральная плоскость $\perp$-на. Будемъ эти хорды назыв. главными хордами. Рѣшивъ послѣд. ур-ія относительно m и n, мы найдемъ тѣхъ угловые коэф-ты m и n главныхъ хордъ. Эти ур-ія оба 2-ой степени.

Француз. Серт. къ стр. 94 и 95



Если мы исключим одно изъ неизвѣстныхъ, положимъ m, то для другого получится ур-ie 3-ей степени. Для удобства, мы рѣшеніе этихъ ур-ій представимъ въ особенномъ видѣ и введемъ, кромѣ m и n, еще одно изъ неизвѣстныхъ. Именно пусть: $B'm+Bn+A''=S$, тогда будетъ:

$$Am+B'n+B'=mS$$
$$B''m+A'n+B=nS$$

Теперь имѣемъ три ур-ія съ тремя неизвѣстными m, n и S, изъ послѣднихъ двухъ опредѣлимъ сначала m и n въ ф-іи S, а потомъ эти выраженія вставимъ въ 1-е ур-ie:

$$\begin{array}{l|l|l} (S-A)m-B''n=B' & S-A' & B'' \\ -B''m+(S-A')n=B & B'' & S-A \end{array}$$

$$[(S-A)(S-A')-B''^2]m=B'(S-A')+BB''$$

Отсюда: $$m=\frac{B'(S-A')+BB''}{(S-A)(S-A')-B''^2}$$

Исключимъ теперь n:

$$[(S-A)(S-A')-B''^2]n=B(S-A)+BB''$$

Отсюда: $$n=\frac{B(S-A)+BB''}{(S-A)(S-A')-B''^2}$$

По этимъ формуламъ опредѣляются m и n, когда будетъ извѣстно S. Что-бы получить ур-ie съ одним неизвѣстнымъ S, вставимъ вмѣсто m и n ихъ значенія въ первыхъ выраженіяхъ:

$$\frac{B'^2(S-A')+BB'B'+B^2(S-A)+BB'B''}{(S-A)(S-A')-B''^2}+A''=S$$

$$(S-A)(S-A')(S-A'')-B^2(S-A)-B'^2(S-A')-B''^2(S-A'')-2BB'B''=0$$

Изъ этого ур-ія слѣдуетъ опредѣлить S. Остановимся на разсмотрѣніи ур-ія S (характеристическое ур-ie). Обозначимъ чрезъ:

$$\varphi(S)=(S-A)(S-A')(S-A'')-B^2(S-A)-B'^2(S-A')-B''^2(S-A'')-2BB'B''$$

Это ур-ie 3-ей степени; раскроемъ скобки:

$$S^3-(A+A'+A'')S^2+(AA''-B^2+AA''-B'^2+AA'-B''^2)S-(AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2)=0$$

Или кратко: $S^3+MS^2+NS-\Delta=0$. Ур-ie 3-ей степени имѣ-

есть всегда одинъ дѣйствительной корень, слѣдовательно, есть по крайней мѣрѣ одно дѣйствительное значеніе S, удовлетворяющее этому ур-ію. Этому дѣйствительному значенію S будутъ соотвѣтствовать дѣйствительныя величины m и n угловыхъ коэф-товъ главныхъ хордъ. Т.е. непремѣнно существуетъ хотя одно направленіе главныхъ хордъ и притомъ, во всякой поверхности 2-го порядка.

Можно было-бы доказать, что это ур-ie 3-ей степени, всѣ три корня дѣйствительные и что слѣдовательно во всякой поверхности 2-го порядка, существуетъ три направленія главныхъ хордъ, но мы это доказательство опустимъ. Замѣтимъ однако одно исключеніе, относящееся къ предыдущему указанію.

Если въ ур-іе діаметральной плоскости введемъ S, то оно напишется въ слѣдующемъ видѣ:

$$mSx + nSy + Sz + C_m + C'_n + C'' = 0$$

Или выведемъ S за скобку:

$$S(mx + ny + z) + C_m + C'_n + C'' = 0$$

Если вмѣсто S подставимъ въ это ур-іе одинъ изъ корней характеристическаго ур-ія, то это ур-іе будетъ представлять ур-іе главной діаметральной плоскости.

Если поверхность не имѣетъ центра или имѣетъ безчисл. множество центровъ, тогда $\Delta = 0$ и характеристическое ур-іе будетъ: $S^3 + MS^2 + NS = 0$

Одинъ корень его будетъ: $S = 0$. Главная діаметральная плоскость, соотвѣтствующая этому корню должна имѣть видъ, слѣдующ.:

$$0(mx + ny + z) + C_m + C'_n + C'' = 0$$

или: $C_m + C'_n + C'' = 0$. Но это не есть ур-іе діаметраль-

ная плоскость, такая какъ въ ней не содержится X, Y и Z, притомъ это ур-іе не будетъ удовлетворяться вообще. Слѣдов. корню $S=0$ не соотвѣтствуетъ главная діаметральная плоскость. И потому въ поверхностяхъ неимѣющихъ центра не можетъ быть больше двухъ главныхъ діаметральныхъ плоскостей.

Упрощеніе ур-ія поверх-тей 2-го порядка чрезъ преобр-ваніе коорд-тъ.

Положимъ, что опять намъ дана поверхность: $f(X,Y,Z)=0$. Для этой поверхности опредѣлимъ одно направленіе главныхъ хордъ, которое-какъ мы доказали сейчасъ, всегда существуетъ. Затѣмъ вообразимъ, что сдѣлали преобразованіе коор-тъ, причемъ за ось Z-овъ взята прямая ‖-ая найденному направленію главныхъ хордъ, а за оси X-овъ и Y-овъ взяты произвольныя прямыя ⊥-ыя оси Z-овъ. Ур-іе поверхности относительно всякихъ осей вообще имѣетъ видъ, слѣдующій:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

Но не трудно будетъ доказать, что при новыхъ коор-тъ, выбранныхъ указаннымъ способомъ—коэф-ентъ B и B' будутъ нули. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ опять ур-іе, служащее для опредѣленія M и N—угловыхъ коэф-ентовъ главныхъ хордъ. Приложимъ это ур-іе къ опредѣленію угловыхъ коэф-овъ M и N при новыхъ осяхъ. Эти угловые коэф-ты намъ напередъ извѣстны, такъ какъ мы знаемъ, что главныя хорды теперь ‖-ны оси Z-овъ. Пусть α, β и γ—суть углы, дѣлаемые главными хордами съ осями коор-тъ. Тогда: $M=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$ и $N=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. Въ нашемъ случаѣ $\alpha=90°$; $\beta=90°$ и $\gamma=0°$. Слѣдовательно

у нас должно быть $m = \frac{0}{1}$ и $n = 0$. Эти величины m и n должны удовлетворять написанным ур-ям, а при этом 2-е и 3-е изъ написанныхъ ур-ій дадутъ $B' = 0$ и $B = 0$. Слѣдовательно ур-іе поверхности при такихъ осяхъ будетъ имѣть слѣдующій видъ: $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''yx + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$ ..... (1)

Этотъ видъ ур-ія можетъ быть еще болѣе упрощенъ, а именно въ немъ можетъ быть уничтоженъ членъ съ x, y. Для этого нужно сдѣлать новое преобразованіе, а именно оставляя ось z-овъ безъ перемѣны, повернемъ оси x-овъ и y-овъ на нѣкоторый уголъ Θ. Формулы преобразованія будутъ: $x = x'\cos\Theta - y'\sin\Theta$; $y = x'\sin\Theta + y'\cos\Theta$.

Вставивъ эти формулы въ наше ур-іе и расположивъ члены вновь парядкъ получимъ:

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + 2Rxy' + 2Qx' + 2Q'y' + 2Q''z' + D = 0$$

Коэф-ты $P, P', P'', R, Q, Q' Q''$ легко было-бы составить. Обратимъ вниманіе только на коэф-тъ R, онъ будетъ:

$$R = -\sin\Theta.\cos\Theta.A + \sin\Theta.\cos\Theta.A' + B''(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta).$$

Или: $$R = (A' - A)\sin\Theta.\cos\Theta + B''(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta)$$

Уголъ Θ мы можемъ взять какъ угодно, выберемъ его такъ, чтобы коэф-тъ при R обратился въ нуль, то есть:

$$(A' - A)\sin\Theta.\cos\Theta + B''(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) = 0.$$

Или такъ какъ: $2\sin\Theta.\cos\Theta = \sin 2\Theta$ и $\cos^2\Theta - \sin^2\Theta = \cos 2\Theta$, то

$$\tfrac{1}{2}(A' - A)\sin 2\Theta + B''\cos 2\Theta = 0$$

Отсюда найдемъ: $\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{2B''}{A - A'}$. По этой формулѣ всегда можно опредѣлить уголъ Θ. При такомъ Θ, $R = 0$ и ур-іе будетъ:

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + 2Qx' + 2Q'y' + 2Q''z' + D = 0$$

Какова-бы ни была данная поверхность ея ур-іе всегда можно къ этому виду привести. Поэтому это ур-іе (послѣднее) можно разсматривать, какъ заключающее въ себѣ весь видъ поверх-

частей 2-го порядка. При дальнейшем рассматривании мы не будем уже иметь надобности въ рассматриваніи прежнихъ коорд-тъ, поэтому опустимъ значки при x', y' и z' и напишемъ:

$$Px^2+P'y^2+P''z^2+2Qx+2Q'y+2Q''z+D=0 \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Для дальнѣйшаго упрощенія этого ур-ія, перенесемъ начало коор-тъ въ произвольную точку a, b, c. Формулы преобраз. будутъ:

$x=x'+a$; $y=y'+b$ и $z=z'+c$. Новое ур-іе будетъ:

$$P(x'^2+2ax'+a^2)+P'(y'^2+2by'+b^2)+P''(z'^2+2cz'+c^2)+2Q(x'+a)+$$
$$+2Q'(y'+b)+2Q''(z'+c)+D=0$$

Или: $$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2+2(Pa+Q)x'+2(P'b+Q')y'+2(P''c+Q'')z'+Pa^2+$$
$$+P'b^2+P''c^2+2Qa+2Q'b+2Q''c+D=0$$

Предположимъ, что поверхность имѣетъ центръ и пусть точка (a, b, c) будетъ центромъ, тогда должно имѣть:

$$Pa+Q=0 \; ; \; P'b+Q'=0 \text{ и } P''c+Q''=0$$

Отсюда: $a=-\frac{Q}{P}$; $b=-\frac{Q'}{P'}$ и $c=-\frac{Q''}{P''}$

Теперь видимъ, что центръ будетъ существовать тогда, когда ни одинъ изъ трехъ коэф-товъ P, P', P'' не будетъ равенъ нулю. Тогда a, b и c войдутъ величинами конечными и ур-іе поверхности, когда начало будетъ въ центрѣ, приметъ видъ:

$$Px'^2+P'y'^2+P''z'^2+D_1=0 \quad \ldots\ldots\ldots (111)$$

Это ур-іе будетъ представлять всѣ поверхности, имѣющія одинъ центръ. Положимъ теперь, что одинъ изъ трехъ коэф-овъ P, P', P'' — равенъ нулю, положимъ $P=0$ и $Q\neq 0$, тогда — $a=-\frac{Q}{0}=\infty$, въ этомъ случаѣ центра несуществуетъ и потому начало не можетъ быть центромъ. Въ этомъ случаѣ, мы можемъ однако коэф-та a, b и c выбрать такъ, чтобы въ ур-іи поверхности уничтожались члены съ y' и z' и извѣстной члены D. При ур-іи, въ которыхъ нѣтъ членовъ второй

a, b и c, будутъ слѣдующія въ этомъ случаѣ: $P'b+Q'=0$
$P''c+Q''=0$; $P'b^2+P''c^2+2Qa+2Q'b+2Q''c+D=0$
Изъ нихъ: $b=-\frac{Q'}{P'}$ и $c=-\frac{Q''}{P''}$. Изъ третьяго-найдемъ a, величина a будетъ непремѣнно конечная, потому что коэф-тъ $Q\neq 0$. Затѣмъ при выбранномъ такимъ образомъ началѣ коорд-тъ, ур-іе поверхности будетъ:

$$P'y^2+P''z^2+2Qx=0 \qquad \text{(IV)}$$

Это ур-іе представляетъ поверхность не имѣющую центра. Есть еще случай, когда поверхность не имѣетъ центра, это именно, когда изъ трехъ коэф-товъ P, P', P'', два будутъ равны нулю. Напримѣръ $P=0$ и $P'=0$ и въ тоже время Q и Q' не равны нулю, тогда получимъ: $a=\infty$ и $b=\infty$, центра не будетъ. Обратимся въ этомъ случаѣ прямо къ ур-ію (II); оно будетъ:

$$P''z^2+2Qx+2Q'y+2Q''z+D=0$$

Можно прямо по этому ур-ію узнать какая будетъ эта поверхность. Для этого сдѣлаемъ сѣченіе этой поверхности плоскостью ||-ою XY. Ур-іе такой плоскости есть $z=h$. Исключивъ z, получимъ ур-іе проэкціи сѣченія на плоскость XY; оно будетъ: $P''h^2+2Qx+2Q'y+2Q''h+D=0$
Это ур-іе представляетъ прямую линію. Слѣдовательно искомое сѣченіе есть также прямая. Если будемъ измѣнять h, то коэф-ты при x и y не будутъ измѣняться, изъ чего слѣдуетъ, что всѣ прямыя получаемыя въ сѣченіи плоскостями ||-ми XY—будутъ ||-ыя. Слѣдов. поверхность состоитъ изъ безчисленнаго множества ||-ныхъ прямыхъ; т.е. эта поверхность цилиндрическая. Что-бы получить направляющую этого цилиндра, разсмотримъ сѣченіе его плоскостью YZ; положимъ $x=0$, получимъ ур-іе сѣченія: $P''z^2+2Q'y+2Q''z+D=0$

Эта кривая есть парабола, потому что для нее $B^2-4AC=0$
Следов. поверхность наша есть параболический цилиндр.
Эта поверхность также не имеет центра. Поверхность эта может быть рассматриваема, однако, как частный случай поверхностей, представляемых ур-ем (IV)-ым; потому что, если в этом ур-ии, положим $P'=0$, то получим:

$$P''z^2+2Qx=0$$

А это ур-ie представляет параболический цилиндр. Вследствие этого ур-ie (IV)-е можно рассматривать, как заключающее в себе все поверхности не имеющие центра. Дальше отметим случаи - бесчисленного множества центров. Они получатся, когда коор-ты центра представятся неопределенными. Тут возможна следующия два случая:

1.) Пусть $P=0$ и $Q=0$; будем иметь: $a=\frac{0}{0}$; В этом случае ур-ie (II)-е будет: $P'y^2+P''z^2+2Q'y+2Q''z+D=0$
Это ур-ie на плоскости YZ представляет эллипс или гиперболу, потому что $B^2-4AC=-4P'P''>0$. А в пространстве тоже ур-ie представит эллиптический или гиперболический цилиндр.
Эти поверхности заключаются, как частные случаи в ур-ии (III). Действительно, если $P=0$, то ур-ie 3-е обратится в:

$$P'y^2+P''z^2+D_1=0$$

и будет представлять эллиптический или гиперболический цилиндр.
II.) Пусть $P=0$ и $Q=0$ и сверх того $P'=0$ и $Q'=0$; тогда $a=\frac{0}{0}$ и $b=\frac{0}{0}$ ... тоже бесчисленное множество центров. При этом ур-ie (II)-е будет: $P''z^2+2Q''z+D=0$, Решивъ его получим два решения: $z=\gamma_1$ и $z=\gamma_2$. Это будут две плоскости ||-ые XY. Этот случай также заключается в ур-ии (III), потому что если в нем положим $P'=0$ и $P=0$, то оно буд.:

$P''Z'^2+D_1=0$, изъ него находимъ: $Z'=\pm\sqrt{\frac{D_1}{P''}}$. Получимъ двѣ плоскости ‖-ныя XY и равноотстоящія отъ нея. Т.о. ур-ie (III)-е представляетъ всѣ поверхности 2-го порядка, имѣющія одинъ или безчисленное множество центровъ. А ур-ie (IV)-е — всѣ поверхности не имѣющія центра.

Поверхности имѣющія центръ.

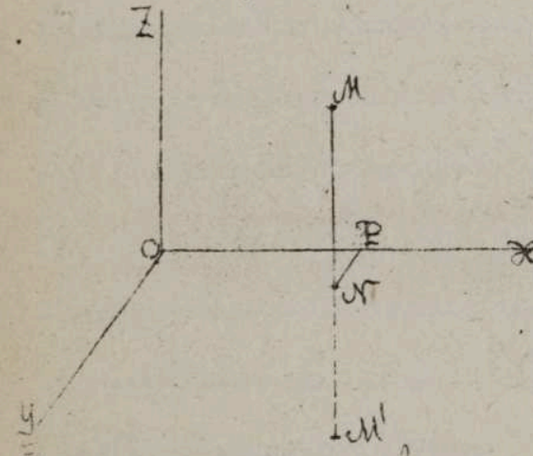
Онѣ представляются общимъ ур-іемъ:

$$Px^2+P'y^2+P''z^2+D_1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

Мы уже знаемъ, что это ур-ie представляетъ поверхность имѣющую одинъ центръ (въ началѣ коор-тъ)

Не трудно убѣдиться, что три плоскости коор-тъ будутъ главными діаметральными плоскостями. Дѣйствительно, если мы рѣшимъ относительно одной изъ коор-тъ это ур-ie, то получимъ; напримѣръ относительно Z:

$$Z=\pm\sqrt{\frac{-Px^2-P'y^2-D_1}{P''}}$$, т.е Z будетъ имѣть двѣ величины равныя и съ обратными знаками. Это значитъ, что всякая хорда $\perp$-ая къ плоскости XY (какъ MM'), дѣлится этою плоскостью пополамъ; слѣдовательно плоскость XY есть главная діаметральная плоскость. Такимъ же докажемъ, что плоскость XZ и YZ — суть главныя діаметральныя плоскости; т.е. мы видимъ, что поверхности имѣющія одинъ центръ, имѣютъ три главныя діаметральныя плоскости взаимно $\perp$-я.

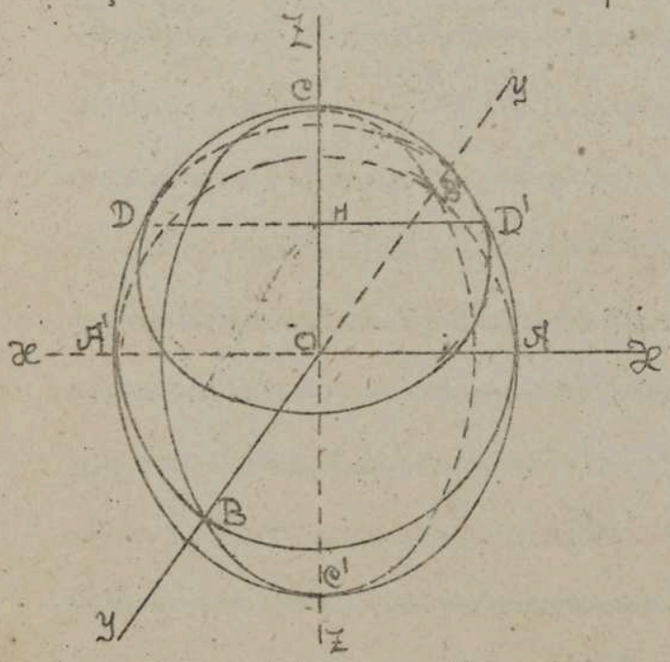


Ур-ie (II)-е будетъ представлять поверхности разныхъ видовъ; смотря по знакамъ коор-товъ P, P', P''. Напишемъ это ур-ie такъ: $Px^2+P'y^2+P''z^2=H$, гдѣ $H=-D$ и будемъ считать, что

Н>0 всегда. Затѣмъ различимъ 4 случая: 1.) три коэф-та P, P', P'' всѣ положительны, при этомъ ур-іе (III)^{е} — трехосный эллипсъ; 2.) одинъ изъ трехъ коэф-товъ P, P', P'' отрицательный, а другіе два положительные; ур-іе представляетъ — гиперболоидъ съ одною полостью; 3.) два коэф-та изъ трехъ (P, P', P'') отрицательны, а одинъ положительный — поверхность будетъ гиперболоидъ съ двумя полостями; 4.) всѣ три коэф-та P, P', P'' отрицательны, получимъ мнимое мѣсто. Послѣднее очевидно, такъ какъ при этомъ первая часть ур-ія будетъ отрицательная, а вторая положительная и слѣдовательно ур-іе нельзя удовлетворить никакими дѣйствительными значеніями x, y и z.

Трехосный эллипсоидъ.

Его ур-іе будетъ: $Px^2+P'y^2+P''z^2=H$, гдѣ: $P>0$, $P>0$, $P''>0$ и $H>0$. Возьмемъ оси коор-тъ $OXYZ$. Прежде всего опредѣлимъ пересѣченіе этой поверхности съ осями коор-тъ. Находимъ съ осью x-овъ, $y=0$ и $z=0$; $Px^2=H$ и $x=\pm\sqrt{\frac{H}{P}}=\pm a$ (ариѳм. величина корня) получимъ двѣ точки равноотстоящія отъ O; направо A, а налѣво A'. Далѣе съ осью y-овъ, $x=0$ и $z=0$; $P'y^2=H$, откуда $y=\pm\sqrt{\frac{H}{P'}}=\pm b$. Получимъ опять двѣ точки равноотстоящія отъ начала O, будутъ B и B', такъ что въ первомъ случаѣ $OA=OA'=a$, а во второмъ — $OB=OB'=b$. Пересѣченіе съ осью z-овъ, $x=0$ и $y=0$, получимъ ур-іе:



$P''y^2 = H$ и $z = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}} = \pm C$

получимъ двѣ точки C и C', причемъ $OC = OC' = C$. Оси координатъ суть пересѣченія главныхъ діаметральныхъ плоскостей, эти прямыя наз. осями поверхности. Точки встрѣчи осей съ поверхностью наз. вершинами поверхности. Мы нашли для эллипсоида 6 вершинъ A, A', B, B', C и C'.

Ур-іе эллипсоида напишется въ болѣе простомъ видѣ, если въ него введемъ величины полуосей a, b и c; $\frac{H}{P} = a^2$, отсюда $P = \frac{H}{a^2}$; $\frac{H}{P'} = b^2$, отсюда $P' = \frac{H}{b^2}$; $\frac{H}{P''} = C^2$, отсюда $P'' = \frac{H}{C^2}$. Подставивъ въ ур-іе эллипсоида, получимъ:

$$\frac{H}{a^2}x^2 + \frac{H}{b^2}y^2 + \frac{H}{C^2}z^2 = H$$

Или по H сократимъ, получимъ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$

Это есть простѣйшій видъ трехоснаго эллипсоида.

Замѣтимъ сѣченія поверхности съ главными діаметральными плоскостями, т. е. главныя сѣченія. Сѣченіе съ плоскостью YZ, получимъ при $x = 0$; ур-іе примитъ видъ: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$. Это есть эллипсъ, у котораго BB' и CC' суть оси. Сѣченіе съ плоскостью XZ, получимъ при $y = 0$; ур-іе примитъ видъ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ Это будетъ эллипсъ, котораго оси будутъ AA' и CC'. Сѣченіе съ плоскостью XY, получимъ при $z = 0$; ур-іе примитъ видъ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это будетъ эллипсъ, котораго оси AA' и BB'.

Что-бы формула поверхности представлялась съ полною ясностью, разсмотримъ сѣченіе ее произвольной плоскостью $\parallel$-ой XY. Пусть плоскость будетъ $z = h$; исключимъ z, получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{C^2}$$

Это ур-іе представляетъ проэкцію сѣченія на плоскость XY и такъ какъ плоскость сѣченія $\parallel$-на XY, то это ур-іе можно разсматривать, какъ ур-іе самаго сѣченія въ его плоскос-

ти. Ур-ie это, если только $h<C$ представляет эллипс, которого центр на оси Z и которого оси ||-ны осям X и Y.
Напишем это ур-ie так: $\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$. Или отсюда: $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$.
Тогда получим отсюда: $A=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $B=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$.
С увеличением h эти полуоси уменьшаются и при $h=C$, получим $A=0$ и $B=0$; эллипс обратится в точку C. Если же возьмем $h>C$, то A и B сделаются мнимыми и сечения не получится. Если-же рассматривать сечения ||-ми другим плоскостям коор-т, то очевидно прими-дя к подобному-же заключению, так что вся поверхность будет заключаться внутри параллелипипеда ограничен.: 1.) двумя плоскостями ||-ми XY и проведенными через C и C'; 2.) двумя плоскостями ||-ми XZ и проведенными через B и B' и 3.) двумя плоскостями ||-ми YZ и проведенными через A и A'.
Ур-ie эллипсоида было: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
Поверхности эллипсоида можно дать такое образование: вообразим, что в плоскости XZ и YZ начерчены два главных эллипса. Пусть эти эллипсы будут направляющими линиями. Затем, вообразим движущийся переменный эллипс, которого центр перемещается по оси Z и которого плоскость ||-на плоскости XY. Оси-же этого эллипса изменяются во время движения, так что его вершины перемещаются по главным эллипсам в плоскостях XZ и YZ. Этот эллипс своим движением опишет очевидно поверхность эллипсоида.
Эллипсоид есть поверхность замкнутая и притом выпуклой со всех сторон, вследствии этого всякое сечение

эллипсоида плоскостью даст сомкнутую кривую, но мы знаем, что в сечении поверхности 2-го порядка плоскостью получается кривая 2-го порядка - т. е. эллипс, поэтому-то эта поверхность и назыв. эллипсоидомъ.

Заметимъ частные случаи: 1.) Пусть если $a=b$, то ур-ie примитъ видъ такой: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. При этомъ всякое сеченіе плоскостью ||-ной XY будетъ кругъ; поверхность будетъ эллипсоидъ вращенія и его можно образовать, вращая главный эллипсъ, лежащій въ плоскости XZ около оси Z-овъ. 2.) Наконецъ, если $a=b=c$, то ур-ie будетъ: $x^2+y^2+z^2=a^2$ и эллипсоидъ обратится въ сферу, которой центръ въ началѣ коор-тъ.

Гиперболоидъ съ одною полостью

Эта поверхность представляется ур-іемъ поверхностей 2-го порядка, имѣющихъ центръ:

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=H,$$ когда въ немъ одинъ изъ коэф-товъ P, P', P'' отрицателенъ. Положимъ, что коэф-тъ при z^2 — отрицательный и поставивъ его знакъ назадъ. Будемъ стало-быть разсматривать ур-ie:

$$Px^2+P'y^2-P''z^2=H$$

Возьмемъ оси коор-тъ. Здѣсь такимъ — плоскости коор-тъ суть главныя діаметральныя плоскости, а оси коор-тъ суть поверхности. Опредѣлимъ сѣченія осей коор-тъ съ поверхностью; съ осью X-овъ сѣченіе получится изъ ур-ія, при $y=0$ и $z=0$; $Px^2=H$, отсюда $x=\pm\sqrt{\frac{H}{P}}=\pm a$. Получимъ двѣ точки A и A'. Съ осью Y-овъ сѣченіе получится изъ ур-ія, при $x=0$ и $z=0$; $P'y^2=H$, отсюда $y=\pm\sqrt{\frac{H}{P'}}=\pm b$. Получаемъ двѣ вер-

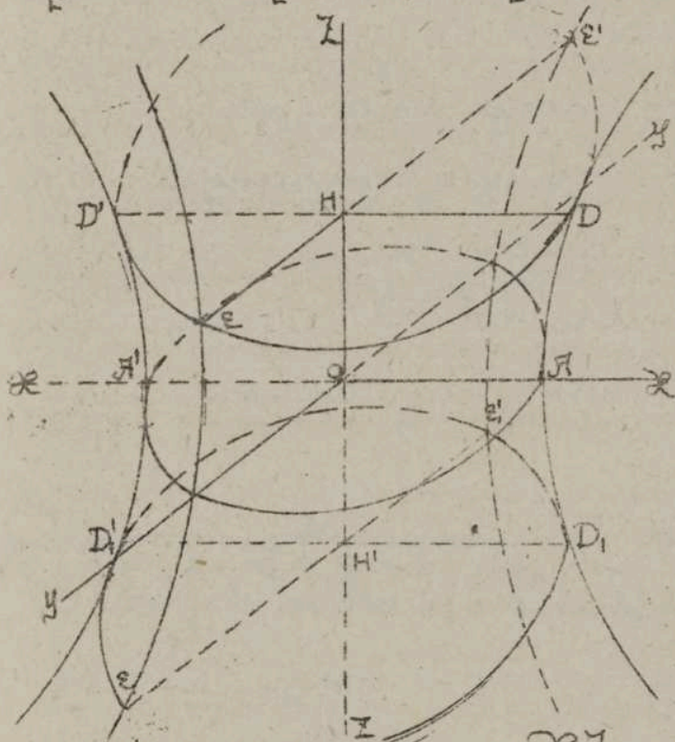
шина: двѣ на оси x-овъ и двѣ на оси y-овъ; пусть $OA = OA' = a$ и $OB = OB = b$. Точки A, A', B и B' суть вершины. Съ осью z-овъ сѣченіе получится изъ ур-ія, при $x = 0$ и $y = 0$; $P''z^2 = H$, отсюда: $z = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}}$, или: $z = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}}\cdot\sqrt{-1}$; т.е. на оси z-овъ нѣтъ вершинъ и ось z-овъ непересѣкаетъ поверхность, помножимъ однако $\sqrt{\frac{H}{P''}} = c$

Введемъ въ ур-іе поверхности величины a, b и c, имѣемъ:

$\frac{H}{P} = a^2$; $\frac{H}{P'} = b^2$ и $\frac{H}{P''}$, отсюда $P = \frac{H}{a^2}$; $P' = \frac{H}{b^2}$ и $P'' = \frac{H}{c^2}$. Подставляя въ ур-іе поверхности получ.:

$$\frac{H}{a^2}x^2 + \frac{H}{b^2}y^2 - \frac{H}{c^2}z^2 = 1;$$ или отсюда, сокращая по H, получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Разсмотримъ главныя сѣченія поверхности. 1.) Съ плоскостью yz — полагаемъ $x = 0$, получимъ: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Это есть гипербола, главная ось которой BB', а мнимая совпадаетъ съ осью z-овъ. Сѣченіе съ плоскостью xz получимъ при $y = 0$.... $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Это опять гипербола, главная ось которой AA', а мнимая также совпадаетъ съ осью z-овъ. Сѣченіе съ плоскостью xy, полагаемъ $z = 0$, получимъ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Это есть эллипсъ, полуоси котораго суть OA, OA', OB и OB'. Дабы составилось ученіе о формѣ поверхности, разсѣчемъ ее плоскостью $\parallel$-ною xy, пусть эта плоскость будетъ $z = h$. Исключимъ z, получимъ ур-іе проэкціи сѣченія на плоскость xy: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$. Это все ур-іе представляетъ и само сѣченіе — всю плоскости. Сѣченіе это есть эллипсъ, котораго центръ на оси z-овъ и которая оси $\parallel$-ны осямъ x-овъ и y-овъ. Напишемъ ур-іе такъ: $\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$

Или отсюда: $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$; тогда полуоси эллипса будут:

$$A=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad B=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

Начертим эллипс; отложим OH, пусть $OH=h$; проводим через H плоскость $\parallel$-ую XY. Эта плоскость пересечет плоскость XZ по прямой DD', которая будет осью эллипса.

Плоскость YZ рассечет по прямой EE', которая также будет осью эллипса, центр'ь которая в'ь H. Понятно, если возьмем $z=-h$, то получим то же сечение, ибо в'ь ур-ie h входит в'ь квадрат'ь. Съ увеличением h до ∞, тогда и полуоси a и b будут увеличиваться до ∞-ти; наименьшую величину a и b получат'ь тогда, когда $h=0$ и в'ь этом'ь случа'ь получится эллипс (горловой), лежащий в'ь плоскости $XY(AA'BB')$. Такимъ образомъ эта поверхность состоитъ, какъ видимъ изъ одной безконечной полости.

Разсмотримъ сечение этой поверхности произвольною плоскостью; пусть ур-ie поверхности будетъ:

$$Px^2+P'y^2-P''z^2=H$$ и ур-ie секущей плоскости будетъ: $z=mx+ny+p$. Исключивъ z, получимъ ур-ie проэкции сечения на плоскость XY, она будетъ:

$$Px^2+P'y^2-P''(mx+ny+p)^2=H$$

Это-отъ ур-ie въ пространствѣ предоставитъ проэктирующий цилиндръ, причемъ проэкция будетъ направляющей этого цилиндра. Очевидно, что если цилиндръ будетъ эллиптическій, то и сечение будетъ эллипсъ, если цилиндръ параболическій, то и сечение — парабола; если цилиндръ гиперболическій, то и сечение-гипербола. Поэтому, что бы опредѣлить родъ сечения, достаточно опредѣлить родъ проэкции сечения; приложимъ признакъ: $B^2-4AC=4P''^2n^2m^2-4(P-P''m^2)(P'-P''n^2)$,

а это ур-ie $= -H(PP' - P'P''m^2 - PP''n^2)$. Очевидно, что смотря потому какiя величины будутъ даны m и n, получимъ $B^2 - 4AC \gtrless 0$ Слѣдовательно, смотря по направленiю сѣкущей плоскости въ, въ сѣченiи можетъ получиться и эллипсъ и гипербола и парабола.

Частные случаи. 1.) $a = b$. Ур-ie будетъ $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Это есть гиперболоидъ вращенiя; въ этомъ случаѣ эллипсъ $DED'E'$ будетъ кругъ и поверхность можно образовать, вращая главную гиперболу лежащую въ плоскости XZ около оси $Z^{ов}$. Прибавимъ, что гиперболоидъ съ одною полостью также можетъ быть образованъ движенiемъ перемѣннаго эллипса. Именно вообразимъ, что построены двѣ главныя гиперболы въ плоскости XZ и YZ и затѣмъ, что движется эллипсъ, котораго центръ перемѣщается по оси $Z^{-ов}$, его плоскость остается $\parallel$-ой плоскости XY, а его оси измѣняются во время движенiя, такъ что вершины $DD'EE'$ скользятъ по главнымъ гиперболамъ.

Гиперболоидъ съ двумя полостями.

Эта поверхность получится, когда въ общемъ ур-iи цилиндрической поверхности два коэф-та изъ трехъ $P, P'P''$, отрицательны. Пусть будутъ коэф-та при y^2 и z^2 отрицательны; поставимъ ихъ значенiя на видъ и разсмотримъ:

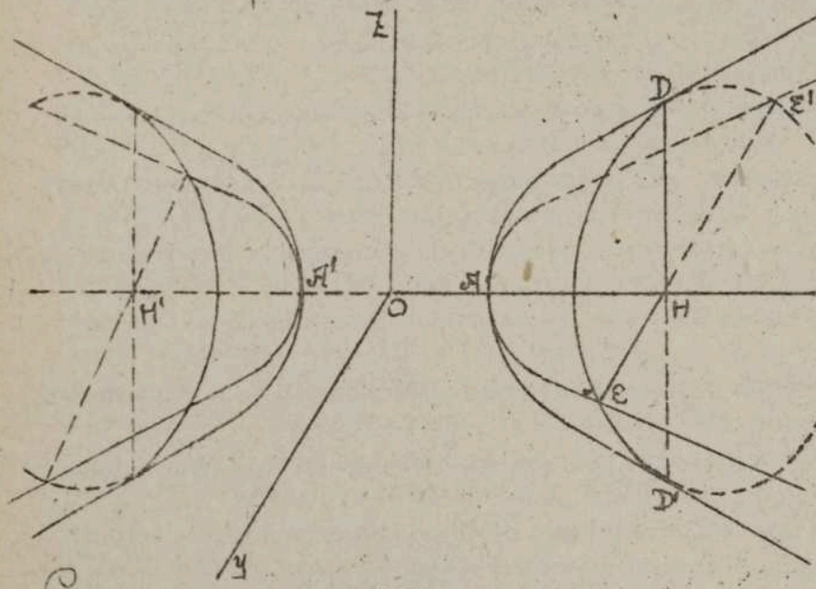
$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = H$$

Опредѣляемъ сѣченiя съ осями коэф-тъ. Съ осью $x^{ов}$; $y=0$ и $z=0$ ..... $Px^2 = H$, отсюда $x = \pm\sqrt{\frac{H}{P}} = \pm a$. На оси $x^{ов}$ получатся два вершины. Съ осью $y^{-ов}$; $x=0$ и $z=0$ ..... $-P'y^2 = H$, отсюда: $y = \pm\sqrt{\frac{-H}{P'}} = \pm\sqrt{\frac{H}{P'}}\cdot\sqrt{-1} = \pm b\sqrt{-1}$. Ось $y^{-ов}$ не пересѣкаетъ поверхности. Съ осью $Z^{ов}$; $x=0$ и $y=0$ ..... $-P''z^2 = H$, отсюда

$z = \pm\sqrt{\frac{-H}{P''}} = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}}\cdot\sqrt{-1} = \pm c\sqrt{-1}$. Ось $Z^{-ов}$ также не пересѣкаетъ

поверхности. Следовательно эта поверхность имеет только две вершины. Введем a, b и c в ур-ие: $\frac{H}{P}=a^2$, отсюда $P=\frac{H}{a^2}$; $\frac{H}{P'}=b^2$, отсюда $P'=\frac{H}{b^2}$; $\frac{H}{P''}=c^2$, отсюда $P''=\frac{H}{c^2}$. Простейшее ур-ие поверхности будет: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Рассмотрим главные сечения этой поверхности. Сеч. ХZ ... $y=0$, получим: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, это ур. гипербола, главная ось которой AA'($OA=OA'=a$), а мнимая — совпадает с осью Z. Сеч. XY ... $z=0$, получим: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



Это опять гипербола с тою же главною осью AA', но с мнимая ось направлена по оси Y-ов.

С плоскостью YZ ... $x=0$, получим: $-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Ур-ие представляет мнимое место и плоскость YZ не пересекает поверхности. Рассмотрим сечения ||-ых плоскости YZ; пусть $x=h$, есть ур-ие секущей плоскости. Тогда, исключив x, получим ур-ие проекции на плоскости YZ, именно:

$\frac{h^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Или отсюда: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}-1$. Пока $h<a$ ... вторая часть отрицательна и ур-ие это представляет мнимое место, т.е. сечения не получится; при $h=a$, ур-ие примет вид: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$. Это удовлетворяется только, полагая $y=0$ и $z=0$. Это дает одну точку A, ибо тогда b и c полуоси эллипса равны нулю; так что если через точку A проведем плоскость ||-ую YZ, то между этою плоскостью и плоскостью YZ нет точек поверхности, а эта плоскость будет касаться поверхности в одной точке A. Затем положим $h>a$, тогда в сечении получится эллипс, его ур-ие:

$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)} = 1$; или: $\frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C^2} = 1$; гдѣ: $B = \frac{b\sqrt{h^2-a^2}}{a}$;
и $C = \frac{c\sqrt{h^2-a^2}}{a}$

Центръ этого эллипса находится на оси x^{-ax}, а его полуоси B и C будутъ ||-ны осямъ y^{-ab} и z^{-ab}. Начертимъ этотъ эллипсъ, пусть $OH = h$. Плоскость ||-ая разсѣчетъ плоскость xz по DD', а плоскость xy по прямой EE'.

Съ измѣненіемъ h отъ $h = a$ до $h = +\infty$, эллипсъ идетъ расширяясь увеличивается до ∞-сти и получается такимъ образомъ одна безконечная полость постоянно расширяясь и идущая отъ A вправо. Если будемъ приписывать отрицат. значенія отъ $h = 0$ до $h = -a$ и до $h = -\infty$, то увидимъ, что по лѣвую сторону существуетъ другая полость поверхности такая-же, какъ первая, которая начинается въ A' и идетъ расширяясь до безконечности влѣво; т.е. вся поверхность состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ полостей. Поверхность эта можетъ быть образована эллипса, котораго оси ||-ны осямъ y^{-ab} и z^{-ac}, центръ перемѣщается по оси x^{-ax}, плоскость его перпендикулярна къ оси x^{-ax}, а вершины его скользятъ по гиперболамъ въ плоскостяхъ xz и xy. Если въ частномъ случаѣ, положимъ что $b = c$, то: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$. Это будетъ гиперболоидъ вращенія около оси x^{-ax}.

Сѣченіе поверхности произвольною плоскостью, разсматривается также, какъ это было сдѣлано для гиперболоида съ одною полостью съ тою только разницею, что P придется замѣнить на $-P'$, а именно смотря по значеніямъ m и n въ ур-іи отъ куцей плоскости: $z = mx + ny + p$; въ сѣченіи можетъ получиться эллипсъ, парабола, или гипербола. [*движѣніемъ]

Частные случаи поверхностей, имеющих центр.

Эти частные случаи получаются из общего ур-ия:

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=H, \text{ где } H=-D,$$

когда в нем некоторые из коэф-тов P, P', P'' и H равны нулю.

1.) Пусть пусть $H=0$, ур-ие будет: $Px^2+P'y^2+P''z^2=0$. Если здесь P, P' и P'' положительны, то ур-ию можно удовлетворить только полагая: $x=y=z=0$; получается одна точка (начало коор-т).

2.) Пусть $H=0$ и один из коэф-тов P, P' и P'' отрицательный: $Px^2+P'y^2-P''z^2=0$, разделим это ур-ие на z^2, получим: $P\left(\frac{x}{z}\right)^2+P'\left(\frac{y}{z}\right)^2-P''=0$. Если отсюда выведем $\frac{y}{z}$, то получим:

$$\frac{y}{z}=\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$$

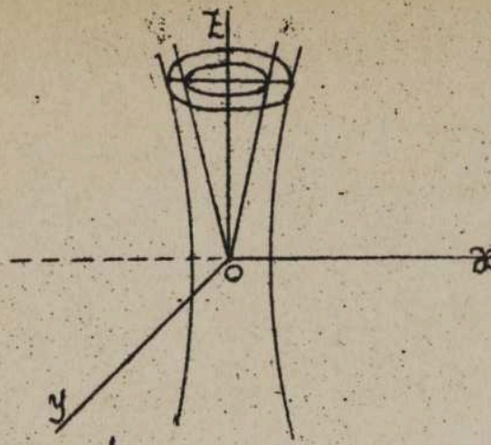
а ур-ие такого вида представляет конус, имеющий вершину в начале коор-т. Этот конус имеет замечательное соотношение с гиперболоидом с одной полостью, представляемой ур-ием с такою-же первою частью. Именно рассмотр. гиперболоид с одною полостью: $Px^2+P'y^2-P''z^2=H$, где $H\neq 0$

Утверждаем, что этот конус будет ассимптотическим конусом для этого гиперболоида. Что-бы доказать это, сравним z-ты поверхностей, соответствующих одним и тем-же величинам x, y. Для z гиперболоида означим через z_1; находим: $z\sqrt{P''}=\sqrt{Px^2+P'y^2}$ это для конуса, а для гиперболоида: $z_1\sqrt{P''}=\sqrt{Px^2+P'y^2-H}$. Отсюда видно, что $z>z_1$. Следовательно конус пойдет вне гиперболоида. Возьмем разность:

$$(z-z_1)\sqrt{P''}=\sqrt{Px^2+P'y^2}-\sqrt{Px^2+P'y^2-H}$$

Или преобразовавая, получим:

$$(z-z_1)\sqrt{P''}=\frac{H}{\sqrt{Px^2+P'y^2}+\sqrt{Px^2+P'y^2-H}}. \text{ Отсюда}$$



видно, что если коор-ты x, y будемъ увеличивать до ∞-ти, то разность z—Z, стремится къ нулю, т.е. конусъ будетъ стремиться неопредѣленно къ гиперболоиду, т.е. конусъ будетъ для него асимптотическимъ.

3.) Пусть H=0 и два изъ коор-товъ P, P' и P'' отрицательны:

$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = 0$, или $P'y^2 + P''z^2 - Px^2 = 0$

Очевидно, что это будетъ опять конусъ, котораго ось только будетъ совпадать съ осью x-овъ.

4.) Пусть одинъ изъ коор-товъ P, P' P'' равенъ нулю, напр. P''=0 тогда получимъ ур-іе такова вида: $Px^2 + P'y^2 = H$. Это ур-іе представитъ цилиндръ эллиптическій или гиперболическій, котораго ось совпадаетъ съ осью Z-овъ. Частные случаи этого цилиндра могутъ быть: a) прямая линія совпадающая съ осью Z-овъ; b) двѣ плоскости пересѣкающіяся по оси Z-овъ и c) мнимое мѣсто. 5.) Пусть P'=0 и P''=0, получимъ $Px^2 = H$. Это ур-іе представляетъ двѣ плоскости ||-ыя YZ или частные случаи: a) одну плоскость YZ и b.) мнимое мѣсто.

Поверхности 2-го порядка имѣющія центръ.

Всѣ эти поверхности представляются общимъ ур-іемъ (3)

$$Py^2 + P'z^2 + 2Qx = 0$$

Прежде всего замѣтимъ, что это ур-іе, будучи рѣшено относительно x, дастъ два рѣшенія равныя и съ обратными знаками. Слѣдовательно плоскость YZ есть главная діаметральная плоскость. Точно также ур-іе, рѣшенное отно-

сительно Y — дасть двѣ величины равныя и съ обратными знаками. Слѣдовательно и плоскость XZ есть главная діаметральная плоскость. Т.е. въ этихъ поверхностяхъ встрѣчаются двѣ діаметральныя плоскости (главныя) XY и XZ. Онѣ пересѣкаются по оси $X^{ав}$, слѣдов. ось $X^{-ав}$ есть единственная ось поверхности. Эта ось пересѣкаетъ поверхность въ точкѣ $x=y=z=0$ и начало коор-тъ есть единственная вершина поверхности. Напишемъ ур-іе такъ: $Py^2+P'z^2=-2Qx$, здѣсь можно всегда полагать, что $-2Q>0$, потому что, если-бы было $-2Q<0$, то мы могли-бы перемѣнить направленіе оси $X^{ав}$ на прямопротивоположное, т.е. положивъ $x=-x'$ и тогда коэф-тъ при x' вмѣсто-бы положительномъ, поэтому будемъ писать такъ: $Py^2+P'z^2=2Qx$ и примемъ, что $2Q>0$.

Затѣмъ разсмотримъ три случая:

I.)..... P и P' оба больше нуля поверхность въ этомъ случаѣ полу. эллиптическій параболоидъ.

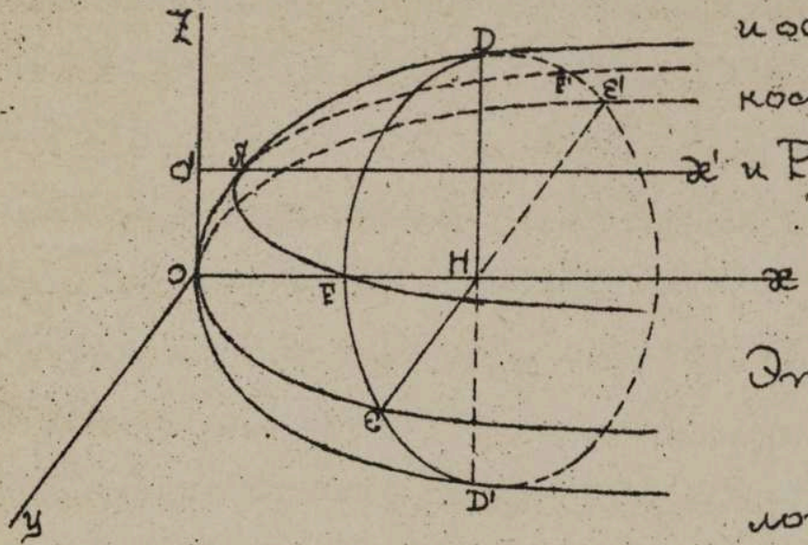
II.)..... P и P' оба <0, поверхность въ этомъ случаѣ получ: гиперболическій параболоидъ

III.)..... $P<0$ и $P'<0$, въ послѣднемъ случаѣ можно положить $x=-x'$ и затѣмъ уничтоживъ минусы получимъ первый случай. Останутся два случая только и мы ихъ разсмотримъ.

Эллиптическій параболоидъ.

$Py^2+P'z^2=2Qx$, гдѣ P, P' и $2Q>0$. Разсмотримъ главныя сѣченія съ плоскостью XZ, тогда $y=0$; ур-іе примитъ видъ: $P'z^2=2Qx$, отсюда $z^2=\frac{2Q}{P'}x$. Пусть $\frac{Q}{P}=q$ ..... $z^2=2qx$. Это-парабола, имѣющая вершину въ O и ось

ось x-ов. Сечение с плоскостью xy ... $z=0$, тогда ур-ие примет вид: $Py^2=2Qx$, отсюда: $y^2=\frac{2Q}{P}x$; пусть $\frac{Q}{P}=p$ ... ур-ие будет: $y^2=2px$. Это опять парабола, имеющая вершину в O и ось совпадает с осью x-ов (в плоскости xy. Теперь имеем $P=\frac{Q}{p}$ и $P'=\frac{Q}{q}$; ур-ие будет:



$$\frac{Q}{p}y^2+\frac{Q}{q}z^2=2Qx, \text{ отсюда}$$
$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x.$$

Это есть простейшее ур-ие эллиптического гиперболоида. Рассмотрим сечение плоскостью $\parallel$-ой yz; пусть плоскость будет: $x=h$, тогда ур-ие будет: $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2h$, или: $\frac{y^2}{2ph}+\frac{z^2}{2qh}=1$. Это сечение есть эллипс, которого центр на оси x-ов, а оси $\parallel$-ны осям y-ов и z-ов; вершины его DD' и EE'. С увеличением h от $h=0$ до $h=+\infty$, эллипс идет, расширяясь до ∞-сти. При $h=0$, эллипс обратится в точку O; т.е. эта поверхность состоит из одной бесконечной полости, распространяющейся вправо по оси x-ов. При $h<0$, эллипс сечения будет мнимый и следов. по левую сторону плоскости yz поверхности не существует. Представим ур-ие в таком виде: $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2h$, или: $\frac{y^2}{2ph}+\frac{z^2}{2qh}=1$, где $B=\sqrt{2ph}$ и $C=\sqrt{2qh}$, отсюда получим: $\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1$.

Этой поверхности очевидно можно дать следующее образование. Вообразим, что в плоскостях xy и xz построено две главных параболы, затем вообразим переменный эллипс, который движется так, что его центр перемещается по оси x-ов, его плоскость остается $\perp$-ой к оси x-ов. Вершины всех этого эллипса скользят по главным параболам; этот эллипс очевидно

отнесет эллиптический параболоид. Той-же поверхности можно дать еще другое образование. Для этого разсмотрим сьчение плоскостью ||-ою XY; ур-ie этой плоскости есть $z = \gamma$. Исключим z, получим: $\frac{y^2}{p} + \frac{\gamma^2}{q} = 2x$, или: $y^2 = 2p\left(x - \frac{\gamma^2}{2q}\right)$; это есть ур-ie проэкции сьчения на плоскости XY (так как мы исключили z) или все равно ур-ie самого сьчения въ его плоскости. Въ этом ур-ie узнаем параболу, которой вершина находится на оси x-овъ (ибо она проэкция); ея ось совпадает съ осью x-овъ; параметръ этой параболы будет $2p$. Вершина ея находится на положительной сторонѣ оси x-овъ, въ разстояніи $= \frac{\gamma^2}{2q}$ отъ начала коор-тъ. Что-бы перенести начало коор-тъ въ вершину надо положить: $x = x' + \frac{\gamma^2}{2q}$ и тогда ур-ie будет: $y^2 = 2px'$. Отсюда видно, что эта парабола получаемая въ сьчении будет одинакова съ главной параболой EOE'. Представимъ эту параболу на чертежѣ. Пусть на оси z-овъ $OO' = \gamma$. Чрезъ O' проведем плоскость ||-у плоскости XY; эта плоскость пересечет XZ по $O'x'$ и главную параболу DOD' въ точкѣ A; парабола будет EAE'.

Изъ этого слѣдует, что поверхность можетъ быть образована так: Вообразимъ, что начерчена въ плоскости XZ главная парабола DOD'. Затѣмъ представимъ себѣ, что другая парабола EOE' движется так, что ея вершина A описываетъ параболу DOD', ея плоскость остается ||-ою плоскости XY, а ея ось остается ||-ою оси x-овъ. Эта парабола очевидно отнесетъ нашу поверхность. Разсмотримъ наконецъ сьчение этой поверхности проэктирующей плоскостью; пусть ур-ie ськущей плоскости есть: $z = mx + ny + p$, а ур-ie разсматриваемой поверхности пусть будетъ: $P'y^2 + P''z^2 = 2Qx$; исключимъ z, получимъ:

$P'y^2+P''(mx+ny+p)^2-2Qx=0$; или раскроем скобки, получимъ:

$$(P'+P''n^2)y^2+P''m^2x^2+2P''mnxy+\ldots\ldots=0$$

Это есть ур-ie проэкціи сѣченія на плоскости XY. Опредѣлимъ родъ этой кривой 2-го порядка, мы знаемъ, что кривая того-же рода будетъ и въ сѣченіи. Такимъ будетъ:
$B^2-4AC=4P''^2m^2n^2-4P'P''m^2(P'+P''n^2)=-4P'P''m^2$. Это выраженіе всегда меньше нуля и сѣченіе вообще будетъ эллипсъ, кромѣ однако того случая когда $m=0$, ибо тогда $B^2-4AC=0$ и сѣченіе будетъ парабола. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ ур-ie сѣкущей плоскости будетъ: $z=ny+p$. Это есть плоскость ||-ая оси x-овъ, слѣдовательно всякое сѣченіе плоскостью ||-ой оси x-овъ будетъ парабола, а всякое другое сѣченіе будетъ эллипсъ отсюда названіе эллиптическій параболоидъ.
Въ заключеніи замѣтимъ частной случай этой поверхности; когда въ ур-іи: $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x$, гдѣ $p=q$, тогда ур-ie буд.: $y^2+z^2=2qx$. Оно предоставляетъ параболоидъ вращенія, который можетъ быть произведенъ вращеніемъ параболы EOE' около оси x-овъ.

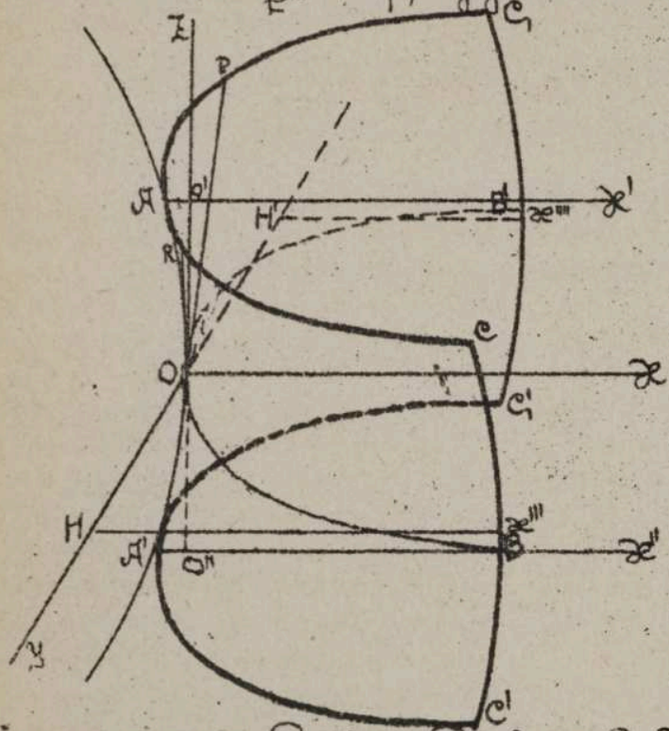
Гиперболическій параболоидъ.

Этотъ видъ поверхности получится когда въ общемъ ур-іи:

$$P'y^2+P''z^2=2Qx$$

поверхностей не имѣющихъ центра, два коэф-та P' и P'' имѣютъ разные знаки; поставимъ это на видъ и будемъ разсматривать ур-ie: $P'y^2-P''z^2=2Qx$; въ которомъ P', P'' и Q – положительны. Опредѣлимъ главныя сѣченія. Съ плоскостью XY.... $\ldots z=0$, тогда ур-ie приметъ видъ: $P'y^2=2Qx$, отсюда: $y^2=2\frac{Q}{P'}x$; положимъ $\frac{Q}{P'}=p$, будемъ имѣть: $y^2=2px$. Это

есть парабола, которой вершина въ O и которой ось совпадает съ осью x-въ. Разсмотримъ съченіе съ плоскостью xz ..... $y=0$, тогда ур-іе приметъ видъ: $-P''z^2=2Qx$, отсюда: $z^2=-2\frac{Q}{P''}x$; обозначимъ $\frac{Q}{P''}=q$, будемъ имѣть: $z^2=-2qx$. Это тоже парабола, которой вершина въ началѣ коор-тъ O, по которой ось направлена въ сторону отрицательныхъ x-въ. Далѣе, чтобы опредѣлилась форма поверхности, разсмотримъ съченіе плоскостью ||-ою xy. Пусть $z=\gamma$, есть ур-іе этой плоскости. Введемъ въ ур-іе поверхности величина p и q, имѣемъ $P'=\frac{Q}{p}$ и $P''=\frac{Q}{q}$; вставивъ



получимъ: $\frac{Q}{p}y^2-\frac{Q}{q}z^2=2Qx$, или сокративъ: $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$ Это есть простѣйшее ур-іе гиперболическаго параболоида. Рѣшимъ ур-ія для отысканія общихъ точекъ, т.е точекъ съченія: $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$ и $z=\gamma$. Исключивъ z, находимъ ур-іе: $\frac{y^2}{p}-\frac{\gamma^2}{q}=2x$; или: $y^2=2p(x+\frac{\gamma^2}{2q})$. Это есть ур-іе проэкціи съченія на плоскости xy или все равно ур-іе самого съченія въ его плоскости. Ур-іе это представляетъ параболу, которой вершина находится на отрицательной сторонѣ оси x-въ въ разстояніи отъ начала равномъ $\frac{\gamma^2}{2q}$. Ось этой параболы (ибо она проэкція) совпадаетъ съ осью x-въ (отриц.). Чтобы перенести начало въ вершину, нужно что-бы $x=x'-\frac{\gamma^2}{2q}$, отсюда $y^2=2qx'$. Отсюда видно, что эта парабола равна главной параболѣ, лежащей въ плоскости xy. Отложимъ $O'O=\gamma$. Сдѣлаемъ на чертежѣ еще съченіе плоскостью $z=-\gamma$. Пусть $OO''=\beta$, отсюда видно, какое образованіе

можно дать этой поверхности. Вообразим, что в плоскости $Жz$ начерчена главная парабола AOA'. Затем вообразим, что другая парабола движется так, что ея вершина описывает параболу AOA'. Плоскость этой параболы остается $\parallel$-ой плоскости $ЖУ$, а ея ось постоянно $\parallel$-на положительному направлению оси $Ж$-ов. Эта парабола описывает своим движением гиперболический параболоидъ.

Разсмотримъ еще сѣченія этой поверхности плоскостями $\parallel$-ми $Жz$. Пусть $y = \beta$ есть ур-іе одной изъ этихъ плоскостей; исключимъ y, получимъ ур-іе: $\frac{\beta^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$, отсюда $z^2 = -2q(x - \frac{\beta^2}{2q})$. Это также парабола, которой вершина на оси $Ж$-ов (положит. стор.) и которой ось направлена въ сторону отрицательныхъ $Ж$-овъ. Чтобы перенести начало коор-тъ въ вершину, нужно положить, что $x = x' + \frac{\beta^2}{2q}$, получимъ: $z^2 = -2qx'$. Откуда видимъ, что это парабола-равка параболы AOA' и точно такого же расположенную. Начертимъ это сѣченіе; на оси y-овъ возьмемъ $HO = \beta$. Станемъ искать разсѣчь плоскость $ЖУ$ по прямой Hx''. Получимъ такимъ CBC', вершина которой будетъ въ B. Если бы взять сѣченіе плоскостью $y = -\beta$ (съ той стороны плоск. чертежа), то получили бы точно такую-же параболу $C_1B_1C_1'$. Начертимъ начертимъ часть поверхности заключенной между плоскостями:

$z = +\gamma$ и $z = -\gamma$, далѣе: $y = +\beta$ и $y = -\beta$; это будетъ поверхность: $C'A'C_1'B_1C_1ACBC'$. Эта поверхность имѣетъ форму сѣдла—сѣдлообразную форму. Ур-іе гиперболическаго параболоида въ простѣйшемъ видѣ: $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$. Замѣтимъ еще сѣченіе этой поверхности плоскостью $Уz$, въ этой плоскости $x = 0$, поэтому будемъ имѣть ур-іе такого вида: $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0$, откуда: $y^2 = \frac{p}{q}z^2$; $y = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}z$. Мы видимъ, что въ

сьчения получимъ двѣ прямыя линіи проходящія чрезъ начало и составляющія съ осью Z-овъ равные углы по обѣ стороны.

Разсмотримъ еще сѣченіе той-же поверхности произвольной плоскостью. Возьмемъ ур-іе гиперболическаго параболоида въ видѣ: $P'y^2 - P''z^2 = 2Qx$; ур-іе сѣкущей плоскости будетъ: $z = mx + ny + p$, исключивъ z, получимъ ур-іе: $P'y^2 - P''(mx + ny + p)^2 = 2Qx$. Это ур-іе представляетъ проэкцію кривой сѣченія на плоскости XY. Видъ этой кривой будетъ одинаковъ съ разомъ кривой, получаемой въ самомъ сѣченіи. Разсматривая тоже сѣченіе для эллиптическаго параболоида, мы нашли $B^2 - 4AC = -4P'P''m^2$; въ настоящемъ случаѣ P'' должно измѣнить знакъ на $-P''$..... $B^2 - 4AC = +4P'P''m^2$, что больше нуля. Слѣдовательно въ сѣченіи всегда — гипербола, за исключеніемъ того случая, когда $m = 0$..... $B^2 - 4AC = 0$, будетъ парабола и ур-іе сѣкущей плоскости будетъ: $z = ny + p$, эта плоскость $\parallel$-на оси X-овъ. Слѣдовательно всякое сѣченіе гиперболическаго параболоида плоскостью будетъ гипербола, кромѣ сѣченія плоскостью $\parallel$-ной оси X-овъ, которое будетъ всегда парабола.

О прямолинейныхъ образующихъ поверхностей 2-го порядка.

Между поверхностями 2-го порядка есть линейчатыя поверхности, т.е. такія, которыя могутъ быть образованы движеніемъ прямой линіи, таковы цилиндрическія и коническія поверхности, у которыхъ образующія прямыя линіи. Затѣмъ мы видимъ, что гиперболоидъ вращенія можетъ быть образованъ вращеніемъ одной прямой около другой, не лежащей съ нею въ одной плоскости; слѣдов. эта поверхность тоже линейчатая. Какъ примѣръ конуса мы видимъ, что при движеніи

прямой не находящейся въ одной плоскости, если двигающаяся прямая остается ||-ай одной и той-же плоскости; получимъ поверх. 2-го порядка. Эта поверхность есть гиперболический параболоидъ, и какъ ее наз. „косая плоскость". Итакъ несомненно, что между поверхностями есть линейчатыя.

Разсмотримъ близко, какія изъ поверхностей 2го порядка могутъ быть линейчатыми? Очевидно эллипсоидъ, какъ поверхность замкнутая не можетъ быть линейчатой. Равнымъ образомъ гиперболоидъ съ двумя полостями и эллиптическій параболоидъ также не могутъ быть линейчаты, потому что эта поверхность, состоящія изъ двухъ полостей замкнутыхъ съ одной стороны. Затѣмъ остаются двѣ поверхности: гиперболоидъ съ одною полостью и гиперболическій параболоидъ, могущія образов. движеніемъ прямой. Первая изъ нихъ въ частномъ случаѣ, когда она есть поверхность вращенія - есть поверхность линейчатая; мы докажемъ, что и вообще эта поверхность есть линейтая. Гиперболическій параболоидъ можетъ быть линейчатою, потому что мы видѣли, что сѣченіе его плоскостью $Y=k$ суть прямыя линіи.

Прямолинейныя образующія гиперболоида съ одною полостью.

Ур-іе этой поверхности будетъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ .....(1)

Возьмемъ произвольную прямую, ея ур-іями будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= mz+\alpha \\ y &= nz+\beta \end{aligned}\right\} \quad \text{.....(2)}$$

Въ этихъ ур-іяхъ параметры m, n, α и β будемъ считать совершенно произвольными. Будемъ искать пересѣченіе прямой (2) съ поверхностью (1); исключая x и y, получимъ:

$\frac{(mz+\alpha)^2}{a^2}+\frac{(nz+\beta)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$. Отсюда, дѣлая раскр. скобки:

$$\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{m\alpha}{a^2}+\frac{n\beta}{b^2}\right)z+\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1=0$$

Это ур-іе должно дать z для точекъ пересѣченія. Ур-іе это вообще имѣетъ только 2 рѣшенія, но въ частномъ случаѣ оно можетъ получить безчисленное множество рѣшеній, именно это будетъ тогда, когда коэфф-ты при z^2 и z и извѣстной члены $=0$; т.е. когда параметра m, n, α и β такова, что удовлетворяютъ ур-іямъ:

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0 \quad\ldots\ldots\ldots(3);\qquad \frac{m\alpha}{a^2}+\frac{n\beta}{b^2}=0 \quad\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1=0 \quad\ldots\ldots\ldots(5)$$

Тогда получимъ: $0.z^2+0.z+0=0$ и этому ур-ію удовлетворитъ всякая величина z. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ всякая точка взятая на прямой 2-ой, будетъ точкою пересѣченія этой прямой съ поверхностью; иначе говоря, въ этомъ случаѣ вся точки прямой, т.е. вся прямая будетъ лежать на поверхности (1)^{ой}. Разсмотримъ теперь, могутъ-ли параметра m, n, α и β имѣть такія значенія, что-бы ур-ія (3), (4) и (5) удовлетворялись. Мы напишемъ здѣсь 3 ур-ія съ четырьмя неизвѣстными. Такая система имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, слѣдовательно уже поэтому мы можемъ предполагать, что существуетъ безчисленное множество прямыхъ, лежащихъ на поверхности (1)^{ой}. Вмѣсто того, чтобы опредѣлять m, n, α и β изъ ур-ій (3), (4) и (5), мы поступимъ иначе: построимъ такую прямую, которой параметра удовлетворяли-бы ур-іямъ (3), (4) и (5). Разсмотримъ для этого, какое геометрическое значеніе имѣютъ ур-ія связывающія m, n, α и β. Чрезъ начало проведемъ прямую ‖-ную прямой $\left(\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\right)$; ея ур-ія будутъ: $x=mz$ и $y=nz$ ……(6). Затѣмъ возьмемъ конусъ асимптотическій съ гиперболоидомъ; ур-ія этого конуса можно получить, взявъ только первую часть и положивъ въ 2-ой — нуль,

ано будетъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Разсмотримъ сѣченіе прямой (6)^{ая} съ ассимптотическимъ конусомъ, получимъ: $\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0$ Но это ур-ію видимъ (5), что это ур-іе будетъ $0.z^2=0$, ему удовлетворяетъ всякая величина z; слѣдовательно прямая (6) не пересѣкаетъ ассимптотическій конусъ, но лежитъ на немъ во всю длину. Иначе говоря прямая (6) есть одна изъ образующихъ ассимптотическаго конуса. Далѣе разсмотримъ ур-іе (5), т.е. ур-іе: $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$; замѣтимъ, что если въ ур-іяхъ (2) сдѣлать $z=0$, то $x=\alpha$ и $y=\beta$. Это доказываетъ, что α и β суть коор-ты точки пересѣченія прямой (2) съ плоскостью xy. Замѣтимъ ур-іе горловаго эллипса, полагая $z=0$; ано будетъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Сравнивая это ур-іе съ ур-іемъ (5), мы видимъ, что ур-іе (5) показываетъ, что точка, которой коор-ты въ плоскости xy суть α и β лежатъ на горловомъ эллипсѣ. Слѣдовательно ур-іе (5) показываетъ, что прямая (2) пересѣкаетъ плоскость xy въ одной изъ точекъ горловаго эллипса.

Наконецъ разсмотримъ ур-іе (4), но предварительно составимъ ур-іе проэкціи прямой (2) на плоскости xy; для сего исключимъ z, получимъ: $z=\frac{x-\alpha}{m}$ и $z=\frac{y-\beta}{n}$ и потому: $\frac{y-\beta}{n}=\frac{x-\alpha}{m}$, или $y-\beta=\frac{n}{m}(x-\alpha)$. Съ другой стороны изъ (4) имѣемъ:

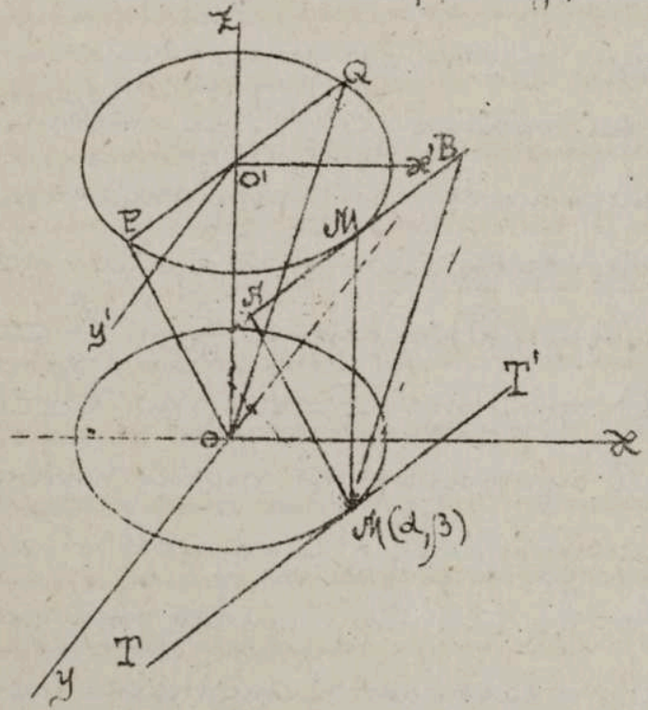
$$\frac{m\alpha}{a^2}=-\frac{n\beta}{b^2}\ldots\ldots-\frac{n}{m}=-\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}.$$ Слѣдовательно ур-іе проэкціи прямой (2) на плоскость xy, будетъ:

$$y-\beta=-\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}(x-\alpha).$$

Сличая это ур-іе съ ур-іемъ горловаго эллипса мы видимъ, что эта прямая представляетъ касательную къ эллипсѣ горловомъ, которой коор-ты суть α и β и которая, какъ мы видѣли выше

лежить на горловом эллипсе. И так ур-ие (4) выражает, что проэкция прямой (2) на плоскость XY есть касательная к горловому эллипсу. По доказанным трем геометрическим свойствам прямой (2), мы можем эту прямую построить.

Возьмем оси OXYZ и ур-ие поверхности: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.



Положим $Z=0$ .... горловой эллипс будет: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; строим этот эллипс. Возьмем точку M с коор-тами α, β и построим образующую, которая проходит через (α,β); потом строим ассимптотический конус, его ур-ие будет:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Сделаем сечение конуса плоскостью ||-ной XY и на расстоянии C от начала O; ур-ие этой плоскости будет: $Z=C$, так что $OO'=C$. Только что проведенная нами плоскость, рассекает XY по прямой ||-ой оси x-ов — $O'x'$, а YZ — по $O'y'$ ||-ной OY; исключим Z, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

Это есть ур-ие проэкции сечения на плоскости XY, или все равно ур-ие самого сечения в его плоскости. Мы видим, что это сечение будет тождественно с горловым эллипсом, поэтому в плоскости $x'O'y'$ строим эллипс равный горловому эллипсу. Образующие конуса идут к различным точкам вершина эллипса от точки O. Проведем в точке M касательную к горловому эллипсу и еще 1-ую к плоскости XY. Эта касательная есть проэкция искомой образующей на плоскость XY; а плоскость проходящая через касательную к 1-ую MM', будет проэкти-

рующая плоскость, въ которой и должна находиться искомая образующая. При этомъ образующая должна быть ||-на нѣкоторой образующей асимптотическаго конуса. Что-бы получить такую образующую, мы чрезъ ось z-овъ проведемъ плоскость ||-ную плоскости TMM'; эта плоскость пересѣчетъ вершей эллипса по прямой PQ ||-ой касательной прямой TT' и пересѣчетъ конусъ по двумъ образующимъ OP и OQ. Затѣмъ въ плоскости вершаго эллипса чрезъ точку M' проведемъ ||-ль PQ и TT', получимъ касательную къ эллипсу (вершему); на этой прямой касательной отъ M' отложимъ двѣ длины равныя $O'Q$ или $O'P$ (все равно) $M'A = M'B$, точки A и B соединимъ съ M. Каждая изъ двухъ прямыхъ MA и MB будетъ образующею гиперболоида съ одною полостью, потому что каждая изъ нихъ удовлетворяетъ всѣмъ 3-мъ найденнымъ нами условіямъ, а именно: а) прямая MA ||-на образующей OP — асимптотическаго конуса, а прямая MB ||-на образующей OQ того-этого конуса; б) обѣ эти прямыя проходятъ чрезъ точку M горловаго эллипса и в) проэкція обѣихъ прямыхъ есть касательная TT' горловому эллипсу. Такъ какъ точка M была взята произвольно на горловомъ эллипсѣ, то слѣдовательно чрезъ взятую точку взятую на горловомъ эллипсѣ проходятъ двѣ прямолинейныя образующія. И если мы ограничимся построеніемъ одной изъ образующихъ, напр. MA, то перемѣщая точку M по горловому эллипсу и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ перемѣщаться MA въ пространствѣ, въ слѣдствіи чего MA опишетъ поверхность гиперболоида съ одною полостью, точно такъ же и MB.

Займёмся теперь составленіемъ

ур-ій образующихъ

Онѣ суть: $x = mz + \alpha$ и $y = nz + \beta$, гдѣ α и β должа-

на удовлетворять ур-іямъ: $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$; параметры всѣ m и n можно выразить въ ф-іи α и β изъ двухъ ур-ій:

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3);\qquad \frac{m\alpha}{a^2}+\frac{n\beta}{b^2}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Находимъ изъ (4)... $m=-\frac{a^2\beta}{b^2\alpha}n$. Вставивъ въ (3), получимъ:

$\frac{a^2\beta^2}{b^4\alpha^2}\cdot n^2+\frac{n^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0$; или отсюда: $n^2\left(\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{b^4\alpha^2}\right)=\frac{1}{c^2}$.

Но по ур-ію (5) (умноживъ его на a^2b^2)... $b^2\alpha^2+a^2\beta^2=a^2b^2$

Слѣдовательно:

$$n^2\left(\frac{a^2b^2}{b^4\alpha^2}\right)=\frac{1}{c^2}\ldots\ldots n^2\frac{a^2}{b^2\alpha^2}=\frac{1}{c^2};\ \text{отсюда:}$$

$$n^2=\frac{b^2\alpha^2}{a^2c^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\text{и}\quad n=\pm\frac{b\alpha}{ac}.$$

Слѣдовательно:

$$m=\pm\frac{a^2\beta}{b^2\alpha}\cdot\frac{b\alpha}{ac}=\pm\frac{a\beta}{bc}$$

Примемъ нижній знакъ, получимъ одну прямую:

$$\left.\begin{aligned}x&=-\frac{a\beta}{bc}\cdot z+\alpha\\ y&=+\frac{b\alpha}{ac}z+\beta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

Примемъ верхній знакъ, получимъ другую прямую:

$$\left.\begin{aligned}x&=+\frac{a\beta}{bc}\cdot z+\alpha\\ y&=-\frac{b\alpha}{ac}z+\beta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

То есть и вычисленія подтверждаютъ, что чрезъ всякую точку гиперболы эллипса (α,β) проходятъ двѣ прямолинейныя образующія, именно (A) и прямая (B). Измѣняя (α,β) мы изъ ур-ій (A) получимъ цѣлую систему образующихъ (A) изъ ур-ій же (B) — другую систему образующихъ (B). Выразимъ, въ формѣ слѣдующей теоремы, свойства образующихъ.

Теорема. Чрезъ всякую точку, взятую на гиперболоидѣ съ одною полостью, можно провести двѣ прямолинейныя образующія, — одну принадлежащую системѣ (A), другую системѣ (B).

Возьмемъ на поверхности (1) произвольную точку $x'y'z'$.

Эти коор-ты удовлетворяют ур-ию (1) так что получимъ:
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$. Будемъ доказывать, что чрезъ эту точку можно провести одну образующую систему (A), точно также доказывается, что чрезъ эту точку можно провести и одну образующую систему (B). Коор-ты $x', y' z'$ должны удовлетворять ур-ямъ (A), то есть должны имѣть:

$$x'=-\frac{ab}{bc}z'+\alpha \text{ и } y'=\frac{b\alpha}{ac}z'+\beta$$

Въ эти ур-ия входятъ два неизвѣстныхъ α и β и эти величины можно послѣдовательно изъ ур-ий опредѣлить, т.е. мы найдемъ два параметра искомой образующей α и β, причемъ эти два параметра должны оказаться дѣйствительными и конечными, а во вторыхъ они должны удовлетворять условному ур-ию (5) $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1$. Если мы найдемъ, что параметра α и β тому и другому требованію удовлетворяютъ, то этимъ самымъ мы и опредѣлимъ такую образующую, которая принадлежитъ къ системѣ (A) и проходитъ чрезъ точку $(x'y'z')$, что и докажетъ существованіе образующей системы (A). Опредѣлимъ α и β:

$$c\ldots\ldots cb\alpha-az'\beta=bcx'\ldots\ldots z'$$
$$z'\ldots\ldots bz'\alpha+ac\beta=acy'\ldots\ldots c$$
$$b(c^2+z'^2)\alpha=c(bcx'+ay'z'), \text{ отсюда } \alpha=\frac{c(bcx'+ay'z')}{b(c^2+z'^2)}$$
$$a(c^2+z'^2)\beta=c(acy'-bx'z'), \text{ отсюда}$$
$$\beta=\frac{c(acy'-bx'z')}{a(c^2+z'^2)}$$

Мы видимъ, что α и β будутъ дѣйствительны и конечны. Вставимъ ихъ въ ур-ie (5) и посмотримъ удовлетворяютъ ли они ур-ию (5):

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1\ldots \text{т.е.} \frac{c^2(bcx'+ay'z')^2}{a^2b^2(c^2+z'^2)^2}+\frac{c^2(acy'-bx'z')^2}{a^2b^2(c^2+z'^2)^2}=1$$

Это равенство должно быть тождество:

$$\frac{c^2}{a^2b^2}\cdot\frac{b^2c^2x'^2+a^2y'^2z'^2+a^2c^2y'^2+b^2x'^2z'^2}{(c^2+z'^2)^2}=1$$

$\frac{c^2}{a^2b^2}\cdot\frac{(c^2+z'^2)(b^2x'^2+a^2y'^2)}{(c^2+z'^2)^2}=1$; отсюда: $\frac{c^2}{a^2b^2}\cdot\frac{(b^2x'^2+a^2y'^2)}{c^2+z'^2}=1$

Имѣемъ: $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1+\frac{z'^2}{c^2}$ или:

$$\frac{b^2x'^2+a^2y'^2}{a^2b^2}=\frac{c^2+z'^2}{c^2}$$

Отсюда: $\frac{b^2x'^2+a^2y'^2}{c^2+z'^2}=\frac{a^2b^2}{c^2}$. Наше равенство приведется къ:

$$\frac{c^2}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{c^2}=1, \text{ или: } 1=1$$

Такъ параметры α и β дѣйствительно удовлетворяютъ ур-ію (5) и теорема доказана.

Теорема 2. Двѣ образующія одной и той-же системы не пересѣкаются, слѣдовательно не находятся въ одной плоскости.

Возьмемъ образующую (A); перемѣнимъ параметры α и β на α' и β', получимъ другую образующую той-же системы:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{a\beta'}{bc}z+\alpha'\\ y&=+\frac{b\alpha'}{ac}z+\beta'\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)'$$

*Найдя z-ты, сравнимъ ихъ, такъ какъ въ точкѣ пересѣченія коор-ты должны быть равны: $z=\frac{bc}{a}\cdot\frac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}$ и $z=\frac{ac}{b}\cdot\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'}$, отсюда $\frac{bc}{a}\cdot\frac{\alpha'-\alpha}{\beta'-\beta}=\frac{ac}{b}\cdot\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'}$. Это есть условіе пересѣченія, которое должно удовлетворяться само собою, если пересѣченіе существуетъ. Условіе это будетъ:

$$-b^2(\alpha-\alpha')^2=a^2(\beta'-\beta)^2$$

Въ этомъ равенствѣ первая часть отрицательна, а вторая положительна, чего быть не можетъ.

Теорема 3. Двѣ образующія двухъ различныхъ

*Чтобъ доказать, что двѣ прямыя (A) и $(A)'$ не пересѣкаются, будемъ опредѣлять точку пересѣченія этихъ прямыхъ. Въ этой точкѣ тогда ур-ія (A) и $(A)'$ должны удовлетворяться вмѣстѣ:

$$\begin{aligned}-\frac{a\beta}{bc}z+\alpha&=-\frac{a\beta'}{bc}z+\alpha'\\ +\frac{b\alpha'}{ac}z+\beta'&=+\frac{b\alpha}{ac}z+\beta\end{aligned}$$

системъ всегда пересѣкаются и слѣдовательно находятся въ одной плоскости.

Возьмемъ одну образующую (A) и другую (B); ходя такъ чтобы эта вторая образующая была совершенно произвольная, для этого въ ур-іяхъ образующей системы (B) мы перемѣнимъ α на α' и β на β', получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= +\frac{a\beta'}{bc}z + \alpha' \\ y &= -\frac{b\alpha'}{ac}z + \beta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)'$$

Будемъ искать пересѣченіе (A) съ $(B)'$. Находимъ z равнами

$$-\frac{a\beta}{bc}\cdot z + \alpha = \frac{a\beta'}{bc}z + \alpha'$$

$$\frac{b\alpha}{ac}\cdot z + \beta = -\frac{b\alpha'}{ac}\cdot z + \beta'$$

Отсюда: $z = \frac{bc}{a}\cdot\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\beta'}$, и $z = \frac{ac}{b}\cdot\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'}$; отсюда:

$$\frac{bc}{a}\cdot\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\beta'} = \frac{ac}{b}\cdot\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'}$$

Это есть условіе пересѣченія образующихъ; оно должно удовлетворяться само собою: $\frac{\alpha^2-\alpha'^2}{a^2} = \frac{\beta'^2-\beta^2}{b^2}$. Или отсюда:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2}$$

Ноно условному ур-ію (5) первая и вторая часть этого равенства равна каждая единицѣ, такъ что получимъ: $1 = 1$ и слѣдовательно прямыя пересѣкаются.

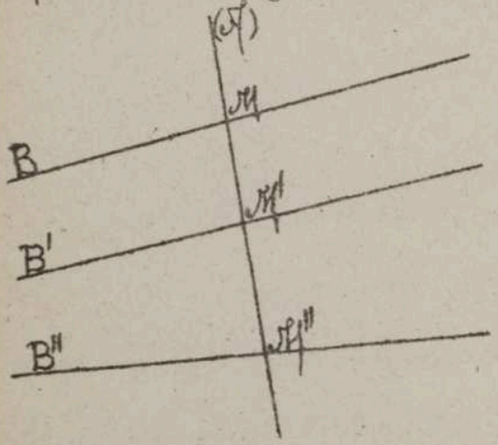
Теорема 4. Въ двухъ различныхъ системахъ образующихъ, существуютъ пара соотвѣтствующихъ образующихъ, которыя параллельны.

Возьмемъ образующую (A).... она пересѣкаетъ плоскость ху въ точкѣ (α, β). Возьмемъ на гиперболѣ эллипса точку діаметрально противоположную, ея коор-ты будутъ $(-\alpha, -\beta)$. Чрезъ эту точку, какъ и чрезъ всякую точку гиперболоида эллипса проходятъ двѣ образующія, одна системы (A), а другая системы (B),

Возьмемъ образующую $(B)_{II}$ я ур-ія получимъ чрезъ замѣну въ ур-іяхъ (B) α на $-\alpha$ и β на $-\beta$:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{ab}{bc}\cdot z - \alpha \\ y &= +\frac{ba}{ac}\cdot z - \beta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)_{II}$$

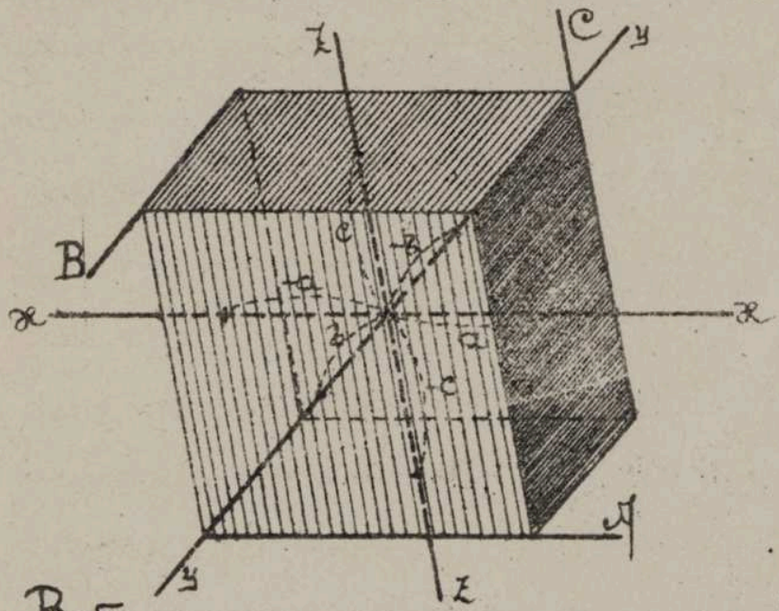
Сравнивъ (A) съ прямою $(B)_{II}$ мы видимъ, что у нихъ угловые коэффты одинаковы. Слѣдовательно эти двѣ прямыя параллельны. Изъ доказаннаго свойства образующихъ выполняется законъ образованія гиперболоида съ одною полостью. Именно онъ можетъ быть образованъ движеніемъ одной образующей системы (A) по тремъ неподвижнымъ образующимъ системы (B). Эти три прямыя расположены такъ, что любыя двѣ изъ нихъ не пересѣкаются и слѣдовательно не находятся въ одной плоскости. Возьмемъ на прямой B произвольную точку M чрезъ эту точку должна проходить образующая системы (A). Что-бы ее построить замѣтимъ, что эта образующая должна пересѣчь прямыя B' и B''; проведемъ плоскость чрезъ точку M и чрезъ прямую B''. Эта плоскость пересѣчетъ прямую B' въ нѣкоторой точкѣ M'; соединимъ M съ M', получимъ прямую, пересѣкающую прямую B'' въ точкѣ M''. Эта прямая и будетъ слѣдовательно образующая система (A), т. е. чрезъ каждую точку прямой B проходитъ одна образующая системы (A). Поэтому, если мы точку M будемъ двигать по прямой B, то прямая A будетъ вмѣстѣ съ нею перемѣщаться по тремъ прямымъ B, B' и B'', описывая поверхность гиперболоида. Отсюда видимъ: поверхность гиперболоида съ одною полостью образуется движеніемъ одной прямой по тремъ неподвижнымъ прямымъ такъ расположеннымъ, что всѣмъ двѣ



изъ нихъ не лежатъ въ одной плоскости. Такое образованіе гиперболоида мы докажемъ, рѣшая слѣдующую задачу:

Задача. Составить ур-іе поверхности, образуемой движеніемъ прямой по 3-мъ неподвижнымъ прямымъ произвольно взятымъ, но такъ расположеннымъ, что любыя двѣ изъ нихъ не лежатъ въ одной плоскости.

Мы докажемъ, что эта поверхность есть гиперболоидъ съ одною полостью. Положимъ намъ даны прямыя A, B и C, причемъ любыя двѣ изъ нихъ не находятся въ одной плоскости. Чрезъ каждую изъ нихъ проведемъ двѣ плоскости ||-ныя двумъ другимъ прямымъ. Эти шесть плоскостей ограничатъ нѣкоторый косой параллелепипедъ представляемой на чертежѣ.



Ребра этого параллелепипеда ||-ныя прямой A.... назовемъ чрезъ 2a, —||-ныя B—чрезъ 2b; прямую C—чрезъ 2c. Возьмемъ центръ этого параллелепипеда за начало коор-тъ, центръ этотъ будетъ въ точкѣ пересѣченія діагоналей. Ось x-овъ проведемъ ||-но прямой A, ось y-овъ —||-но прямой B и ось z-овъ —||-но прямой C. Всѣ три взятыя нами прямыя A, B и C, представятся каждая изъ нихъ двумя плоскостями чрезъ нее проведенными:

$y = b$ и $z = -c$, это будутъ ур-ія прямой A. Ур-ія прямой B будутъ: $x = -a$ и $z = c$. Ур-ія прямой C будутъ: $x = a$ и $y = -b$. Имѣемъ: $y - b = 0$ и $z + c = 0$.... A; $x + a = 0$ и $z - c = 0$ .... B; $x - a = 0$ и $y + b = 0$.... C. Теперь составимъ ур-е

образующей, которая должна двигаться по трем прямым A, B и C; для этого через прямую A произвольную плоскость. Ур-ие этой плоскости будет: $y-b+\lambda(z+c)=0$, где λ произвольный параметр. Проведем другую произвольную плоскость через прямую B, ея ур-ие будет: $x+a+M(z-c)=0$, где M произвольный параметр; эти две плоскости вместе взятая представляют некоторую прямую, которая будет пересекаться с прямою A и с прямою B, стало-быть эта прямая и будет образующею. Тогда она должна, сверх того, пересечь и прямую C. Это возможно только при некотором условии, которому должны будут удовлетворить переменные параметры λ и M.

Выразим условие пересечения образующей с третьей прямой C. Должны иметь в точке пересечения: $x=a$ и $y=-b$ и следов.:

$$-2b+\lambda(z+c)=0$$

$$2a+M(z-c)=0$$

Отсюда: $z=\frac{2b}{\lambda}-c$ и $z=-\frac{2a}{M}+c$ и следовательно: $\frac{2b}{\lambda}-c=-\frac{2a}{M}+c$. Или: $\frac{2b}{\lambda}+\frac{2a}{M}=2c$, сократив на 2, получим: $\frac{b}{\lambda}+\frac{a}{M}=c$. Это есть условие между параметрами λ и M, которое должно быть удовлетворено, для того, что-бы образующая пересекала и прямую C.

Что-бы перейти к ур-ию поверхности замечаем, что: $\lambda=-\frac{y-b}{z+c}$ и $M=-\frac{x+a}{z-c}$. Вставим эти выражения в условное ур-ие, получим: $-\frac{b(z+c)}{y-b}-\frac{a(z-c)}{x+a}=c$. В этом ур-ии x, y и z означают коор-ты произвольной точки произвольной образующей, в произвольном ея положении; т.е. полученное ур-ие будет ур-ием поверхности вообще. Рассмотрим эту поверхность. Уничтожив знаменат.: $a(y-b)(z-c)+b(x+a)(z+c)+c(x+a)(y-b)=0$. Или перемножив, а потом сократив.

получимъ: $ayz-abz-acy+abc+bxz+abz+bcz+abc+cxy+acy-bcx-abc=0$

$$ayz+bxz+cxy+abc=0$$

Это ур-ie 2-ой степени, при томъ оно не содержитъ членовъ съ первыми степенями x, y и z. Слѣдовательно это есть поверхность 2-го порядка при томъ, имѣющая центръ въ началѣ коор-тъ и кромѣ того эта поверхность есть линейчатая (образов. движ. прямой линіи); причемъ прямая образующая не проходитъ постоянно чрезъ одну и ту же точку, не остается ||-ой самой себѣ, то слѣдовательно эта поверхность не можетъ быть ни конической, ни цилиндрической, а потому заключаемъ, что эта поверхность есть гиперболоидъ съ одною полостью.

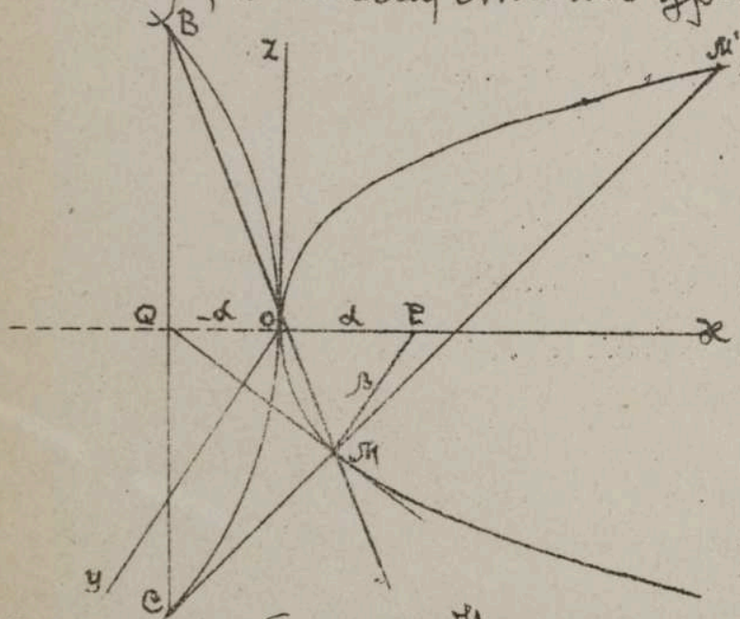
Прямолинейныя образующ. гиперболическаго параболоида.

Ур-ie этой поверхности было: $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$ ..... (1). Возьмемъ произвольную прямую линію: $x=mz+\delta$ и $y=nz+\beta$ ..... (2)

Будемъ опредѣлять точки пересѣченія прямой съ поверхностью; исключимъ x и y, получимъ: $\frac{(nz+\beta)^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2(mz+\delta)=0$, отсюда: $\left(\frac{n^2}{p}-\frac{1}{q}\right)z^2+2\left(\frac{n\beta}{p}-m\right)z+\frac{\beta^2}{p}-2\delta=0$. Это ур-ie дастъ z для двухъ точекъ пересѣченія, а x и y найдутся по ур-іямъ (2), полагая параметры m, n, δ и β произвольными; мы положимъ, что они имѣютъ значенія, удовлетворяющія слѣдующ. тремъ ур-іямъ: $\frac{n^2}{p}-\frac{1}{q}=0$ ..... (3); $\frac{n\beta}{p}-m=0$ ..... (4) и $\frac{\beta^2}{p}-2\delta=0$ ..... (5)

При томъ ур-ie, изъ котораго опредѣляется z, обратится въ тождество: $0.z^2+0.z+0=0$, а ему будетъ удовлетворять всякая величина z. Это значитъ, что всякая точка прямой (2) — будетъ точкою прямой пересѣченія съ поверхностью; иначе — пря-

мая лежать на поверхности, т. е. будет образующая поверхности. Рассмотрим близкие ур-ия (3), (4) и (5), которым удовлетворяют параметры m, n, α и β нашей образующей. У нас для четырех параметров получилось 3 ур-ия; отсюда три параметра напр. m, n и β можно определить в ф-ии α, а 4-ый параметр α останется неопределенным и значит вообще будет существовать не одна, а бесконечное множество образующих поверхности. Предварительно рассмотрим геометрическое значение ур-ий (3), (4) и (5) и потом займемся построением образующ. (2). Во первых вообразим поверхность (1)^{то}. Построим главные сечения, полагая $z=0$, получим $y^2=2px$, это-парабола в плоскости xz. Возьмем ур-ие (5)^{е} ..... $\beta^2=2p\alpha$. С другой стороны прямая (2) пересекает плоскость xy в точке, которой координаты α и β, потому что из ур-ий (2) при $z=0$, $x=\alpha$ и $y=\beta$



Сравним ур-ие (3) с ур-ием главной параболы $y^2=2px$; мы видим, что ур-ие (5) показывает, что (α и β) находятся на главной параболе. И так ур-ие (5) выражает, что прямая (2) пересекает плоскость xy в некоторой точке на главной параболе, пусть она будет M и пусть ее коор-ты $OP=\alpha$, $MP=\beta$. Возьмем ур-ие (3), оно дает: $n^2=\frac{p}{q}$ отсюда $n=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}$. Здесь n есть угловой коэф-ент проекции прямой (2) на плоскость xy, с другой стороны рассмотрим сечение поверхности (1) с плоскостью yz, полагая $x=0$, получим: $\frac{y^2}{p}=\frac{z^2}{q}$, отсюда $y^2=\frac{p}{q}z^2$, или: $y=\pm z\sqrt{\frac{p}{q}}$. Мы видим, что поверхность пересекает плоскость

УZ по двумъ прямымъ, проходящимъ чрезъ начало и одинаково наклоненнымъ съ обѣихъ сторонъ къ оси Z-овъ.

Сравнимъ угловые коэф-енты этихъ прямыхъ съ N, мы замѣтимъ, что проэкціи образующихъ на УZ будутъ ||-ны прямымъ по которымъ поверхность (1) пересѣкается съ УZ. Этихъ прямыхъ двѣ, образующихъ, проходящихъ чрезъ точку поверхности M тоже двѣ. Объяснимъ ур-іе (4); но сначала составимъ ур-іе проэкціи прямой (2) на плоскости ЖЧ, для чего исключаемъ z, изъ ур-ій (2) находимъ: $z = \frac{x-\alpha}{m}$; $z = \frac{y-\beta}{n}$ отсюда: $\frac{y-\beta}{n} = \frac{x-\alpha}{m}$ или: $y-\beta = \frac{n}{m}(x-\alpha)$ Это есть искомая проэкція; но изъ ур-ія (4) имѣемъ: $n\beta = mp$ или: $\frac{n}{m} = \frac{p}{\beta}$; значитъ ур-іе проэкціи прямой (2) на плоскости ЖЧ будетъ: $y-\beta = \frac{p}{\beta}(x-\alpha)$. Сравнимъ это ур-іе съ ур-іемъ параболы: $y^2 = 2px$, мы узнаемъ въ немъ ур-іе, ур-іе касательной къ парабалѣ въ точкѣ (α,β). Значитъ прямая (2), проэктируется показательной линіи къ главной параболѣ въ точкѣ M. Прежде чѣмъ строить образующую, составимъ ея ур-іе. Для этого изъ ур-ій (3), (4) и (5) m, n, β выведемъ въ ф-ію α, находимъ изъ (5): $\beta^2 = 2p\alpha$ отсюда: $\beta = \pm\sqrt{2p\alpha}$. Понятно, что одно изъ значеній β положительное соотвѣтствуетъ точкѣ M, а отрицательное точкѣ M'. Мы будемъ разсматривать точку M и примемъ: $\beta = +\sqrt{2p\alpha}$. Ур-іе (3) даетъ: $n = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}$. Ур-іе (4) даетъ: $m = \frac{n\beta}{p} = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot\frac{\sqrt{2p\alpha}}{p} = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{q}}$. Примемъ верхній знакъ получимъ: $x = +\sqrt{\frac{2\alpha}{q}}\cdot z + \alpha$ и $y = +\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot z + \sqrt{2p\alpha}$ ..... (A). Примемъ нижній знакъ: $x = -\sqrt{\frac{2\alpha}{q}}\cdot z + \alpha$ и $y = -\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot z + \sqrt{2p\alpha}$ ..... (B). Построимъ обѣ эти системы образующихъ. Для этого чрезъ M проведемъ касательную къ парабалѣ. Для этого существуетъ такое построеніе: на оси $Ж$-овъ отъ O отложимъ $OQ = OP$ и Q соединимъ съ точкою M; прямая QM есть проэкція образующей въ плоскости ЖЧ.

Проведем плоскость через Q ||-ко OZ; эта плоскость пересечет XZ по прямой CB, в этой плоскости ||-ой OZ дол жна находить-ся обь образующія. Возьмем прямую A, ея пересьченіе съ плос-костью XZ, получимь, полагая $y=0$, имѣемь: $\sqrt{\frac{p}{q}}z+\sqrt{2pd}=0$ отсюда: $z=-\sqrt{2qd}$. Далье: $x=-\sqrt{\frac{2d}{q}}\cdot\sqrt{2qd}+d=-2d+d=-d$. Эти коор-ты x и z очевидно опредѣляютъ C на XZ. Для этой точки $x=-OQ=-d$, а $z=-QC=-\sqrt{-2q(-d)}=-\sqrt{2qd}$. Значитъ, чтобы получить положеніе образующей надо M соединить съ C. Далье возьмемъ прямую B и, образующую ея пересѣченія съ плоскостью XZ; $y=0$, получимъ: $z=\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot\sqrt{2pd}$; $x=-\sqrt{\frac{2d}{q}}\cdot\sqrt{2qd}+d=-2d+d=-d$. Очевидно, что эти величины x и z даютъ точку B; и такъ полу-чимъ образующую, соединивши M съ B. Такимъ образомъ имѣ-емъ MB и MC — двѣ образующихъ, системы (A) и системы (B), проходя-щихъ черезъ одну точку M.

Понятно, что для точки M' надо примѣнять тѣже разсужденія и результатъ будетъ тотъ-же. Обратимся теперь къ разсмотрѣ-нію свойствъ образующихъ гиперболическаго параболоида и раз-смотримъ ихъ въ нижеслѣдующихъ теоремахъ. Урав-ія этихъ образующихъ суть:

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{\tfrac{2d}{q}}\cdot z+d\\ y&=\sqrt{\tfrac{p}{q}}\cdot z+\sqrt{2pd}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(A)\qquad \left.\begin{aligned} x&=-\sqrt{\tfrac{2d}{q}}\cdot z+d\\ y&=-\sqrt{\tfrac{p}{q}}\cdot z+\sqrt{2pd}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(B)$$

Теорема. Черезъ всякую точку гиперболическаго пара-болоида проходятъ двѣ образующія, одна принадле-жащая къ системѣ (A), а другая къ системѣ (B).

$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$. Возьмемъ на ней точку $(x',y'\text{и}z')$, будемъ имѣть: $\frac{y'^2}{p}-\frac{z'^2}{q}=2x'$. Докажемъ, что черезъ нее проходитъ образующая (A), точно такимъ докажемъ, что черезъ нее проходитъ и образу-ющая (B). Коор-ты $(x'y'z')$ должны удовлетворять ур-іямъ (A):

$x' = \sqrt{\frac{2\alpha}{q}} \cdot z' + \alpha$ и $y' = \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot z' + \sqrt{2p\alpha}$. Въ эти равенства входитъ неизвѣстный параметръ α. Этотъ параметръ долженъ удовлетворять двумъ ур-ямъ, и если онъ въ самомъ дѣлѣ удовлетворяетъ этимъ двумъ ур-ямъ, то слѣдовательно параметръ α можно опредѣлить и черезъ это получимъ образующую (A), проходящую черезъ точку x', y' и z'. Возьмемъ два ур-ія относительно α и посмотримъ удовлетворяются-ли они одною и тою-же величиною α: $\sqrt{\alpha} = \frac{y'}{\sqrt{2p}} - \frac{z'}{\sqrt{2q}}$. Вставимъ въ (перв.) ур-ie: $x' = \sqrt{\frac{2}{q}}\left(\frac{y'}{\sqrt{2p}} - \frac{z'}{\sqrt{2q}}\right)z' + \frac{y'^2}{2p} - \frac{y'z'}{\sqrt{pq}} + \frac{z'^2}{2q}$. Или $x' = -\frac{z'^2}{q} + \frac{y'^2}{2p} + \frac{z'^2}{2q} = \frac{y'^2}{2p} - \frac{z'^2}{2q}$
Это равенство есть тождество. Слѣдовательно параметръ α можно опредѣлить и теорема доказана.

Теорема 2-я. Двѣ образующія одной и той-же системы не пересѣкаются и слѣдовательно не находятся въ одной плоскости.

Возьмемъ образующую (A), перемѣнимъ α на α', получимъ другую образующую той-же системы: $x = \sqrt{\frac{2\alpha'}{q}} \cdot z + \alpha'$ и $y = \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot z + \sqrt{2p\alpha'}$ ..... (A'). Докажемъ, что прямыя (A) и (A') не пересѣкаются. Въ точкѣ пересѣченія должно бы-ли-бы имѣть одинъ и тотъ-же x и одинъ и тотъ-же z, слѣдовательно: $\sqrt{2p\alpha} = \sqrt{2p\alpha'}$. Но это равенство невозможно, ибо $\alpha \neq \alpha'$ и прямыя не пересѣкаются; если-бы $\alpha = \alpha'$, то прямыя совпадали-бы.

Теорема 3. Двѣ образующія двухъ различныхъ системъ всегда пересѣкаются и слѣдовательно расположены въ одной плоскости.

Положимъ противное, что двѣ образующія (A) и (B) пересѣкаются въ точкѣ, лежащей въ плоскости xy. Чтобы доказать теорему вообще, будемъ ур-іями (B) перемѣнимъ параметръ α на α' и разсмотримъ другую образующую системы (B)

она будет: $x = -\sqrt{\frac{2\alpha}{q}}\cdot z + \alpha'$ и $y = -\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot z + \sqrt{2p\alpha'}$ .....(B'). Докажем, что прямая (A) и (B') пересекаются; во точка пересечения будем иметь:

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{q}}\cdot z + \alpha = -\sqrt{\frac{2\alpha}{q}}\cdot z + \alpha'$$
$$\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot z + \sqrt{2p\alpha} = -\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot z + \sqrt{2p\alpha'}$$

Отсюда находим: $z = \sqrt{\frac{q}{2}}\cdot\frac{\alpha'-\alpha}{\sqrt{\alpha'}+\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{p}{2}}(\sqrt{\alpha'}-\sqrt{\alpha})$

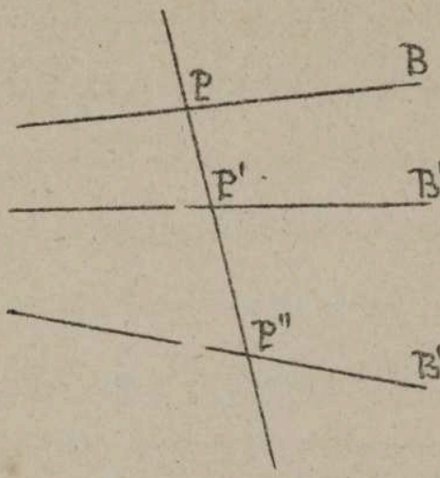
$$z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\cdot\sqrt{2p}(\sqrt{\alpha'}-\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\frac{q}{2}}(\sqrt{\alpha'}-\sqrt{\alpha})$$

Мы видим, что z найденной нами двумя ур-ий одинаков и условие пересечения удовлетворяется.

Теорема 4. Все образующие одной и той же системы параллельны одной плоскости.

Рассмотрим систему образующих (A); одно из ур-ий прямой (A) есть: $y = \sqrt{\frac{p}{q}}\cdot z + \sqrt{2p\alpha}$. Это есть ур-ие плоскости проектирующей прямую (A) на плоскость yz и в этой плоскости находится прямая (A), но эта плоскость, каково-бы ни было параметра α, всегда ||-на плоскости, ур-ие которой есть $y = \sqrt{\frac{p}{q}}\cdot z$. Следовательно все прямые (A) будут ||-ны этой последней плоскости. Плоскость эта, очевидно проходит через ось $x^{ов}$ и еще через одну прямую, по которой поверхность гиперболического параболоида пересекается с плоскостью yz. Точно также докажем, что все образующие системы (B) ||-ны плоскости представленной ур-ием: $y = -\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot z$, это есть плоскость проходящая через ось $x^{ов}$ и через другую прямую, по которой поверхность пересекается с плоскостью yz. Подказанными двумя системами образующей не трудно представить себе образование гиперболического параболоида. Именно вообразим три образующие системы (B), пусть они будут B, B' и B''. Эти образующие расположены так, что все они ||-ны одной и той-же плоскости и никакие две из них не находятся в одной плоскости. Заставим B вместить

произвольную точку P. Через P должна проходить одна из образующих (A). Эта образующая должна пересекаться с образующими B' и B'', ее легко построить следующим образом: проведем плоскость через точку P и прямую B'; эта плоскость пересечет прямую B'' в некоторой точке P''. Затем соединим P'' с P, получ. прямую пересекающую прямую B' в P'. Эта прямая буд. образующей (A), т.е. через P проходит только одна образующая (A).



Вообраз., что P перемещается по прямой B, вместе с тем буд. перемещаться по трем прямым B, B' и B'' и прямая образующей (A), перемещаясь она опишет гиперболич. параболоид. П.е. поверхность гиперболического параболоида образуется движением прямой по трем прямым направляющим, так расположен., что во первых все три направляющия ||-ны одной и той-же плоскости и во вторых каждая две из направляющих не находятся в одной плоскости. Нужно доказать вообще, что гиперболический параболоид образ. движением прямой - по трем направляющим прямым произвольно взятым, но так расположенным, что все три прямые ||-ны одной и той-же плоскости, и что при том каждые две из них не находятся в одной плоскости. Возьмем три таких прямых, пусть они будут A, B и C и положим, что прямые B и C ||-ны некоторой плоскости проходящей через прямую A - эту плоскость мы примем за плоскость XY, прямую A возьмем за ось x. Представим себе одно какое нибудь положение прямой образующей, она пересекает все три прямые. Пусть D ее пересечение с прямой A, мы примем за начало координат, а саму прямую за ось x. Затем

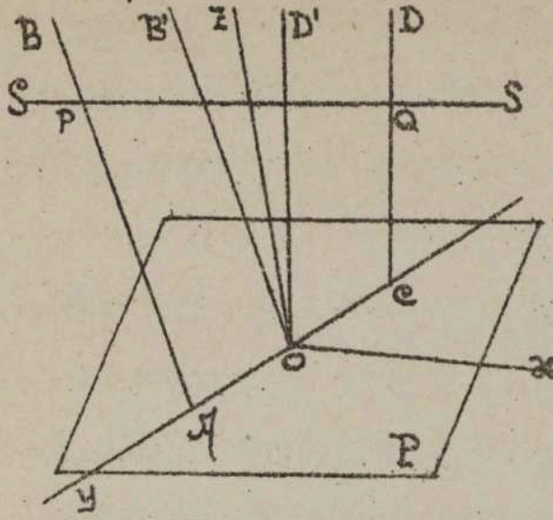
мы проведем плоскость через прямые OZ и B. Эта плоскость пересечет плоскость XY по прямой OY ||-ой B. Прямую OY возьмем за ось y. Теперь буд. составлять ур-ие поверхности, образуемой движением прямой - по трем прямым A, B и C. Для этого сначала

напишемъ ур-ія направляющихъ. Ур-ія прямой А будутъ очевидно: $y=0$ и $z=0$. Ур-ія прямой В... ...$x=0$ и $z-b=0$. Наконецъ прямой С.... $x-c=0$ и $y-az=0$. Далѣе составимъ ур-ія произвольной прямой, которая пересѣкала бы двѣ прямыя линіи А и В. Для этого проведемъ черезъ прямую А произвольную плоскость, ур-ія этой плоскости будетъ: $y+\lambda z=0$, гдѣ λ - произв. направ. множитель. Затѣмъ проведемъ произвольную плоскость черезъ прямую В; ур-ія этой плоскости будутъ: $x+\mu(z-b)=0$, гдѣ μ направ. множитель. Эти двѣ плоскости пересѣкаются по нѣкоторой прямой, которая пересѣкается съ прямою А и съ В. Ур-ія этой прямой буд. совокупность двухъ ур-ій, двухъ проведенныхъ плоскостей. Пусть эта прямая и буд. образующей, тогда λ и μ буд. перемѣнныя параметра образующей. Образующая должна сверхъ того пересѣкать прямую С. Выразимъ условіе пересѣченія, въ точкѣ пересѣченія должно имѣть: $z=c$; $y=\lambda c$ и $x=-\mu(c-b)$, $\lambda=\frac{y}{z}$, слѣдов.: $-\frac{yc}{z}-\mu(c-b)=0$. Это есть условное ур-іе между параметрами λ и μ. Отъ этого ур-ія можно перейти къ ур-ію искомой поверхности, стоитъ только параметра λ и μ замѣнить ихъ выраженіями, взятыми изъ ур-ій образующей; именно: $\lambda=-\frac{y}{z}$ и $\mu=-\frac{x}{z-b}$. Вставивъ въ условное уравненіе: $\frac{cy}{az}-\frac{(c-b)x}{z-b}=0$ ..... $by(z-b)-a(c-b)xz=0$. Это есть ур-ія поверхности. Изъ вида ея, что эта поверхность 2-го порядка. Что-бы узнать какая эта поверхность, разсмотримъ имѣетъ-ли она центръ. Для этого составимъ ур-ія, изъ которыхъ опредѣлились-бы координаты центра; они будутъ: $-a(c-b)z=0$; $c(z-b)=0$; $by-a(c-b)x=0$. Эти ур-ія несовмѣстныя, потому что первое дастъ $z=0$ и второе $z=b$. Слѣдов. поверхность не имѣетъ центра; при томъ эта поверхность линейчатая, такихъ поверхностей двѣ: гиперболическій параболоидъ и втор. параболическій цилиндръ, но наша поверхность не есть цилиндрическая, потому что образующія при движеніи не остаются $\|$ - ными самой себѣ. Слѣдовательно, эта поверхность есть гиперболическій параболоидъ. Что и требовалось доказать.

Существуетъ еще другой способъ образованія гиперболическаго параболоида движеніемъ линіи, это именно слѣдующее. Гиперболическій параболоидъ образуется движеніемъ прямой линіи по двумъ направляющимъ прямымъ, не находящимся въ одной плоскости, при чемъ образующая прямая остается $\|$ - ой одной и той-же изъ плоскостей. Докажемъ это.

Пусть Р есть плоскость $\|$ - ая которой движется образующая. Пусть АВ и

CD прямая направляющая. Они не находятся в одной плоскости и перекрещиваются плоскостью



P в точках A и C. Соединим C с A и пусть AC = 2b. Пусть O середина AC, так что OC = OA = b. Через точку O проведем две прямые ‖-ные AB и CD. Пусть эти прямые буд. OB' и OD'. Угол B'OD' разделим пополам и его биссектор OE примем за ось $\xi^{-ов}$. Точку O возьмем за начало коорд-т, а прямую OA за ось $\eta^{-ов}$. Проведем плоскость B'OD', эта плоскость перекрещивающ плоскость P по прямой Ox, которую возьмем за ось $x^{-ов}$; затем будем составлять ур-ия новой поверхности. Для этого напишем предварительно ур-ия направляющих AB и CD. Чтобы написать ур-ия AB нам нужно, что во первых она лежит в плоскости ‖-ой Oz, ур-ие которой есть: $\eta - b = 0$, во вторых она лежит в плоскости, проходящей через ось $\eta^{-ов}$ и проектирующей эту плоскость на плоскость Oz по прямой OB'; ур-ие этой плоскости будет однотипово со ур-ием со ур-ием OB': $x = az$. Эти два ур-ия определяют прямую AB. Ур-ия прямой CD подобно этому будут: $\eta + b = 0$ и $x = -az$. Возьмем образующую в произвольном положении. Пусть эта прямая SS, которая пересекает AB и CD в точках P и Q и она ‖-на плоскости Oz. Эта прямая во первых лежит на плоскости ‖-ой Oz и ур-ие которой будет: $z = \gamma$; во вторых проведем через нее плоскость ‖-ную оси $\xi^{-ов}$ и проектирующую на плоскость Oz. Ур-ие этой плоскости будет вообще: $\eta = \lambda x + M$ и $z = \gamma$. Эти два ур-ия вместе представляют образующую; в них γ, λ и M суть переменные параметры образующей. Выразим условие, что эта образующая пересекает ее прямой AB. Для пересечения будем иметь: $x = a\eta$; $\eta = b$ и $z = \gamma$ и следовательно: $b = a\lambda + M$. Это есть условное ур-ие между параметрами γ, λ и M. Затем выразим условие, что образующая пересекает и ось прямую CD. Для пересечения имеем: $\eta = -b$; $z = \gamma$ и $x = -a\eta$ и следов. $-b = -a\lambda + M$. Это есть другое условное ур-ие между параметрами. Т. е. здесь имеем две условных ур-ия между тремя параметрами γ, λ и M. Сложивши эти два условных ур-ия получим: $2M = 0$, или $M = 0$. Т. е. один параметр M исключен, а остается λ и γ, которые

связана между собою одним ур-ием, именно: $b = a\lambda\mu$. Ур-ия образующей будут: $z = \mu$ и $y = \lambda x$. По этим ур-иям видно, что эта образующая перекатится с осью z-ов. Затем, чтобы от условного ур-ия перейти к ур-ию поверхности, надо параметры λ и μ заменить их общими выражениями взятыми из ур-ий образующей. Имеем: $\mu = z$ и $\lambda = \frac{y}{x}$. Получим ур-ие поверхности: $b = \frac{ayz}{x}$, или: $ayz - bx = 0$

Это есть поверхность 2-го порядка, при том она не имеет центра, потому что частная производная по x есть $-b$ и не равная нулю. Следовательно эта поверхность есть гиперболический параболоид. По этому закону образования, плоскость получается, как частный случай гиперболического параболоида. Именно если две прямые AB и CD будут расположены в одной плоскости, то получится одна плоскость. Если-же одна из этих прямых, хотя немного отклонится от положения в одной плоскости, то получится гиперболический параболоид.

На этом основании гиперболический параболоид иногда косою плоскостью.

Конецъ

Издатель: В. Глихаковъ.

Задачи

На вступление и геометрическия мѣста

1. Въ которомъ углѣ лежитъ точка $(8,-3)$? Отв. въ 4^{мъ}.

2. Если точка лежитъ въ третьемъ углѣ прямоугольной системы координатъ на разстояніи 2 единицъ отъ оси абсциссъ и 5 единицъ отъ оси ординатъ, то какія будутъ ея координаты? Отв $(-5,-2)$

3. На какой изъ осей координатъ лежитъ точка $(0,\frac{1}{2})$? отв. на оси Y.

4. На какой изъ осей координатъ лежитъ точка $(-2,0)$? Отв. на оси X.

5. Опредѣлить на плоскости смыслъ точекъ $(-4,2{,}5)$; $(1,-0{,}8)$; $(-2,-2)$; $(0,-3)$ и $(-10,0)$ при данной прямоугольной системѣ координатъ?

6. Опредѣлить на плоскости смыслъ точекъ $(-5-\frac{3}{4})$ и еще $(1,-1)$ при данной косоугольной системѣ координатъ, когда извѣстно, что уголъ наклоненія осей координатъ равенъ 45°?

7. Опредѣлить разстояніе между точками: $(1,-2)$ и $(-4,6)$ при прямоугольной системѣ координатъ? Отв. $\sqrt{89} = 9{,}43$.

8. Опредѣлить разстояніе отъ точки $(3,-4)$ до начала прямоугольной системы координатъ. Отв. 5.

9. Опредѣлить разстояніе между двумя точками $(0,3)$ и $(-2,-1)$ при косоугольной системѣ координатъ, когда уголъ наклоненія осей равенъ 60°? Отв. $\sqrt{28}$.

10. Опредѣлить разстояніе отъ точки $(-1,-1\frac{2}{3})$ до начала косоугольной системы координатъ, когда уголъ наклоненія осей равенъ $175^\circ 42' 36''$? Отв. $\sqrt{34-30\cos 4^\circ 17' 24''} = 0{,}67$.

11. Определить площадь треугольника, вершины которого при прямоугольной системе суть: $(0,-1)$; $(2,3)$ и $(-4,-2)$? Отв. 7 площ. един. (квадр.)

12. Определить площадь треугольника, координаты вершин которого при косоугольной системе, имеющей угол смежный осями в 120°, суть: $(1,-3)$; $(-2,0)$ и $(1,1)$? Отв. $3\sqrt{3}$ □ единиц.

13. Определить координаты средины прямой, соединяющей точки: $(-5,3)$ и $(-1,-8)$? Отв. $\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$.

14. Определить при прямоугольной системе координат расстояние от точки $(-1,3)$ до средины прямой, соединяющей точки: $(-3,4)$ и $(2,2)$. Отв. 0,5.

15. Определить координаты точек, делящих в отношении $m:n:p$ прямую, соединяющую точки (x_1,y_1); (x_2,y_2)? Отв. $\left\{\frac{mx_2+(n+p)x_1}{m+n+p}, \frac{my_2+(n+p)y_1}{m+n+p}\right\}$ и $\left\{\frac{(m+n)x_2+px_1}{m+n+p}, \frac{(m+n)y_2+py_1}{m+n+p}\right\}$.

16. Даны треугольник, координаты вершин которого при прямоугольной системе координат суть: (x_1,y_1) $(x_2\,y_2)$ и $(x_3\,y_3)$. Определить длину прямой, соединяющей вершину (x_1,y_1) со средины противоположной стороны? Отв. $\sqrt{\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$.

17. Даны треугольник, координаты вершин которого суть: (x_1,y_1), $(x_2\,y_2)$, $(x_3\,y_3)$. Определить координаты точки, которая делит в отношении 2 к 1 прямую, соединяющую вершину (x_1,y_1) со средины противоположной стороны? Отв: $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

18. Определить площадь многоугольника, прямоугольные координаты вершин которого суть: (x_1,y_1), $(x_2\,y_2)\ldots\ldots(x_n,y_n)$. Отв. $\frac{1}{2}\{x_1(y_n-y_2)+x_2(y_1-y_3)+x_3(y_2-y_4)+\ldots\ldots+x_{n-1}(y_{n-2}-y_n)+x_n(y_{n-1}-y_1)$.

19. Даны n точек $A(x_1,y_1)$; $B(x_2\,y_2)$; $C(x_3\,y_3)\ldots\ldots$ и n чисел $m_1, m_2\ldots\ldots m_n$, которые соответствуют этим точкам. На прямой AB

возьмемъ такую точку N_1, чтобы разстояния этой точки до двухъ первыхъ были бы въ отношеніи m_1 къ m_2; на прямой N_1C_1 соединяющей N_1 съ третьею точкою C опредѣлить точку N_2 такъ, чтобы разстоянія отъ нея до точекъ N_1 и C были бы въ отношеніи m_3 къ m_1+m_2; на прямой N_2D опредѣлить точку N_3, чтобы разстояніе отъ нея до точекъ N_2 и D были бы въ отношеніи m_4 къ $m_1+m_2+m_3$ и т. д., пока не дойдемъ до послѣднихъ данныхъ точекъ.

Опредѣлить координаты послѣдней точки дѣленія, называемой центромъ пропорціональныхъ (дѣленій) разстояній?

Когда числа $m_1, m_2 \ldots$ равны между собою, то эта послѣдняя точка дѣленія наз. центромъ среднихъ разстояній.

Отв. $\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}, \frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\right)$.

20. Узнать, точка $(0,-2)$ лежитъ ли на линіи $3x-2y=4$ и также на линіи $2y+5=0$? Отв: на первой лежитъ и на второй нѣтъ.

21. Узнать, точка $(-3,4)$ лежитъ ли на линіи $x^3+y=0$? Отв. нѣтъ.

22. Проходитъ ли линія $2x^2+3y^3=\frac{5}{6}$ черезъ точку $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ Отв. не проходитъ.

23. Проходитъ ли линія $y^3=x^2-4$ черезъ точку $(1,-1)$? Отв. не проход.

24. Проходитъ ли линія $x^2+2=0$ черезъ точку $(4,2)$? Отв. не проход.

25. Проходитъ ли линія $x^2-x=y^2$ черезъ начало координатъ. Отв. проходитъ.

26. Найти на линіи $3x+y=4$ ординату точки, для которой абсцисса равна -5? Отв. 19.

27. Найти абсциссу точки линіи $2x^2-xy-y^2-11=0$, для которой ордината $=3$. Отв. 4, $2\frac{1}{2}$.

28. Найти на линіи $12y^2+4x-5=0$ точки, равноотстоящія отъ

осей координат? Отв. $(0,5;0,5)$ и $(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$.

29. Есть ли на линии $2x^2+y^2=3$ точка, для которой абсцисса равна 5, или ордината 4? Отв. нет.

30. Которую из осей координат пересекают линия $2x+5=0$? Отв. ось абсцисс.

31. Которую из осей координат пересекает линия $y=4$? Отв. ось ординат.

32. Найти точки пересечения линии $x^2+y^2-2x+1=0$ с осью абсцисс? Отв. $(1,0)$.

33. Найти точки пересечения линии $x=2y^2$ с осью ординат? Отв. $(0,0)$.

34. Найти точки пересечения линии: $x^2-2y^2=4$ с осью ординат? Отв. точек нет.

35. Найти точки пересечения линии $x^2-2y+1=0$ с осью абсцисс? Отв. нет.

36. Которую из осей координат пересекает линия $x^2+y^2+6x-18y+17=0$? Отв. ось ординат.

Найти точки пересечения линий:

37. $2x=y$ и $x=4y$. Отв. $(0,0)$

38. $2x+4y=1$ и $5x+3y=0,4$. Отв. $(-0,1)(0,3)$

39. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8$ и $\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11$. Отв. $(18,6)$.

40. $x-y=2$ и $x^2+y^2=74$. Отв. $(7,5)$ и $(-5,-7)$.

41. $x+y=5$ и $x^3+y^3=65$. Отв $(1,4)$ и $(4,1)$

42. $4(x+y)=3xy$ и $x+y+x^2+y^2=26$. Отв. $(4,2)$ и $(2,4)$

Начертить линии.

43. $3x=2$

44. $2y+5=0$.

45. $x^2+y^2=4$ 46. $xy=4$.

47. $x^2=y$ 48. $y=x^2-x+1$

49. $y^2+x-1=0$ 50. $x^2+4y^2=9$

51. $y=x+1+\frac{1}{x}$ 52. $y=\sin x$

53. $y=\operatorname{tg} x$ 54 $x=2$.

Определить геометрические значения уравнений:

55. $2x^4+y^4+9=0$? Отв. Никакого геометрич. смысла.

56. $x^2=-2y^2$? Отв. Представляет точку $(0,0)$

57. $(x-a)^2+(y-b)^2=0$? Отв. Представляет точку $(a;b)$.

58 $y^4(x^3-8)^2+x^4(y^3+1)^2=0$? Отв. две точки $(0,0)$ и $(2,-1)$

59. $\sqrt{y-1}=3$? Отв. прямую $(y=10)$, параллельную оси абсцисс.

60. $y^2-9=0$? Отв. Две прямые $(y=3, y=-3)$ параллельные оси абсцисс.

61. $xy=0$? Отв. Две прямые $(x=0, y=0)$, т.е. оси координат.

62. $x^2+3x+2=0$? Отв. Две прямые $(x=-1, x=-2)$, параллельные оси ординат.

63. $x^3+xy^2=0$. Отв. Точку $(0,0)$ и прямую $x=0$.

64. $xy+x=y+1$. Отв. Две прямые: $x=-1$, $y=-1$.

——— Узнать которые из линий (78–79) алгебраические и которые трансцендентные. Кроме того определить: какого порядка. Какого порядка каждая из алгебраических линий:

65. $2x^2+y^2=1$? Отв. Алгебраическая.

66. $x\sqrt{2}+3y^2=0$? Отв. Алгебраич.

67. $x\cos y=y$? Отв. Трансц.

68. $2\sin x=0{,}5$? Отв. Трансц.

69. $(x^2-1)+y^3=4$? Отв. Алгебраич.

70. $\sqrt[3]{x^3-1}=2-y$? Отв. Алгебраич.

71. $\lg y = \frac{x}{y}$? Отв. Трансц.

72. $10^{x^2+y} = 100$? Отв. Алгебраич.

73. $\sqrt[3]{3y+2} = x$

74. $\arccos x = 0{,}12$. Отв. Трансц.

75. $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 3$? Отв. Трансц.

76. $x\sqrt{x} + y = \lg 3$? Отв. Трансц.

77. Найти уравнение геометрического места вершин прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу, данную по величине и направлению и положению? Отв. Окружность.

78. Найти уравнение геометрического места точек, разделяющих в отношении m к n всякую прямую, соединяющую данную точку с точками данной прямой. Отв. Прямая.

79. Найти уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная. Отв. Прямая?

80. Найти уравнение геометрического места точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная. Отв. Окружность.

81. Через A, данную точку на окружности, проведем хорду AB и на ее продолжении возьмем точку M, так, чтобы $AB \cdot AM = K^2$, где K есть определенная длина. Найти уравнение геометрического места точек M. Отв. Прямая.

82. Даны две прямые AB и CD по величине и положению. Найти уравнение геометрического места таких точек, что если какую либо из них M соединить с точками A, B, C и D, то площади $\Delta^{ков}$ AMB и CMD были бы равны. Отв. Прямая.

83. Даны двѣ точки A и B. Найти уравненіе геометрическаго мѣста такихъ точекъ M, для которыхъ AM = m.BM., гдѣ M есть число положительное и не равное единицѣ. Отв. Окружность.

84. Найти мѣсто такихъ точекъ, для которыхъ сумма произведеній квадратовъ разстояній отъ n данныхъ точекъ на постоянныя величины $m, m_1, m_2 \cdots m_n$, есть величина постоянная.

85. Найти мѣсто центровъ круговъ, которые видны изъ двухъ данныхъ точекъ подъ равными углами.

Отдѣлъ II.

На преобразованіе координатъ.

1. Дано уравненіе $x^4+y^2=2$ нѣкоторой линіи, написать уравненіе этой линіи, когда за ось абсциссъ примемъ ось ординатъ и обратно? Отв. $y^4+x^2=2$.

2. Дано уравненіе $2y^2+x=0$ нѣкоторой линіи, написать у-іе этой линіи, когда ось ординатъ оставимъ безъ перемѣны, а положительную часть абсциссъ примемъ за отрицательную часть оси же абсциссъ? Отв. $2y^2-x=0$.

3. Уравненіе линіи есть $xy+x^2\sqrt{2}=4$, написать уравненіе этой же линіи, когда положительныя части осей координатъ примемъ соотвѣтственно за отрицательныя части осей же координатъ? Отв. $xy+x^2\sqrt{2}=4$.

4. Уравненіе линіи есть: $x^2-y+x=5$. написать уравненіе этой линіи, когда положительную часть оси абсциссъ примемъ за отрицательную часть ординатъ, а положительную часть оси ординатъ за положительную часть оси абсциссъ? Отв. $y^2-x-y=5$.

5. Дано уравнение линии: $2x^2+3y^2=8$. Написать уравнение этой линии, когда ось абсцисс оставим без перемены, а ось ординат передвинем в сторону положительных абсцисс на 4 единицы, не изменяя ее направления. Отв. $2x^2+3y^2+8x=0$.

6. Дано уравнение линии: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Написать уравнение этой линии, когда ось ординат оставим без перемены, а ось абсцисс передвинем в сторону отрицательных ординат на b, не изменяя направления осей. Отв. $a^2y^2-2a^2by+b^2x^2=0$.

7. Уравнение линии есть $x^2+y^2-4x+6y+3=0$. Написать уравнение этой линии, отнесенной к новой системе координат, в которых оси параллельны прежним осям, а координаты нового начала относительно прежней системы суть: I(2,–3) II(0,1) и III($\sqrt{2}$,0)? Отв. I, $x^2+y^2=10$, II, $x^2+y^2-4x+8y+10=0$, III, $x^2+y^2-2(2-\sqrt{2})x+6y+5-4\sqrt{2}=0$.

8. Дано уравнение $2x^2+3y^2-8x+6y+5=0$ некоторой линии. Написать уравнение этой линии, когда отнесем ее к новой системе, в которой оси параллельны осям прежней системы, а координаты начала новой системы относительно прежних суть: (2,–1). Отв. $2x^2+3y^2=6$.

9. Уравнение линии, отнесенной к прямоугольной системе координат, есть $x^2-y^2=4$. Написать уравнение этой линии, отнесенной к новой прямоугольной системе координат, имеющей то же начало и в которой ось абсцисс составляет с осью абсцисс прежней системы угол в 45°. Отв. $xy+2=0$.

10. Уравнение линии, отнесенной к прямоугольной системе координат, есть: $4x^2+y^2=1/4$. Написать уравнение этой

линіи, отнесенной къ новой системѣ прямоугольныхъ координатъ, имѣющей тоже начало и въ которой ось абсциссъ составляетъ съ осью абсциссъ прежней системы уголъ въ 150°. Отв. $7y^2+6xy\sqrt{3}+13x^2=1$.

11. Уравненіе прямой линіи, отнесенной къ прямоугольной системѣ координатъ есть $xy\sqrt{3}=4+y^2$. Написать уравненіе этой линіи, отнесенной къ новой системѣ прямоугольныхъ координатъ, имѣющей то же начало, когда извѣстно, что уголъ, составляемый новой осью ординатъ съ прежней осью абсциссъ, равенъ 300°. Отв. $x^2-3y^2=8$.

12. Уравненіе линіи, отнесенной къ новой прямоугольной же системѣ координатъ, есть $y^2=2px$. Написать уравненіе этой линіи, отнесенной къ прямоугольной же системѣ координатъ, когда координаты начала новой системы относительно прежней, суть: $\frac{1}{2}p$ и 0., а ось абсциссъ составляетъ съ осью абсциссъ прежней системы уголъ въ 315°. Отв. $(y-x)^2=2\sqrt{2}\,p(x+y)+2p^2$.

13. Уравненіе линіи, отнесенной къ прямоугольной системѣ, есть: $y^2-3x^2+3=0$. Написать уравненіе этой линіи, отнесенной къ косоугольной системѣ координатъ, въ которой ось x составляетъ съ осью x^{os} прежней системы уголъ въ 60°, а ось y^{os} новой системы съ осью x^{os} прежней системы уголъ въ 120°. Отв. $x^2+y^2-10xy=12$.

14. Уравненіе линіи, отнесенной къ косоугольной системѣ, въ которой уголъ смежныхъ осями равенъ 45°, есть $xy=1-y^2$. Написать уравненіе этой линіи, отнесенной къ прямоугольной системѣ, въ которой начало и ось абсциссъ совпадаютъ съ началомъ и осью абсциссъ прежней системы. Отв. $2xy=1$.

Показать, что при всякой системе координат, имеющей тоже начало: $x^2+y^2+2xy\cos xOy = x^2+y^2+2xy\cos xOy$?

Преобразовать уравнение: $x^2+y^2=5mx$. въ полярное. Отв. $\rho=5m\cos\theta$.

Преобразовать уравнение: $x^2-y^2=a^2$ въ полярное. Отв. $\rho^2\cos 2\theta=a^2$.

Изъять полярныя координаты въ прямоугольныя: въ уравнении: $\rho^2\sin 2\theta=2a^2$? Отв. $xy=a^2$.

Изъять полярныя координаты въ прямоугольныя въ уравнении: $\rho^2=a^2\cos 2\theta$? Отв. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Изъять полярныя координаты въ прямоугольныя въ уравнении: $\rho^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta$. Отв. $(x^2+2y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$

Отдѣлъ III.

На теорію прямой линіи.

Узнать, точка $(3,-1)$ лежитъ ли на прямой $2x+3y=3$? Отв. лежитъ.

Узнать, точка $(0,-5)$ лежитъ ли на прямой $x+2=0$? Отв. не лежитъ.

Проходитъ ли прямая $2y=3$ черезъ точку $(-2,1)$? Отв. не проходитъ.

Если въ уравненіи прямой не написано x, какъ, напр., въ уравненіи $3y+4=0$, то почему не написано члена съ x и что за величина x?

Отв. Не написанъ членъ съ x потому, что коэффиціентъ при x есть 0, а такіе члены уравненія принято не писать, величина x есть произвольная, потому что, если написанное данное уравненіе полное: $0x+3y+4=0$, то убѣдимся, что дан-

ное уравненіе будетъ удовлетворяться всякою величиною x.

5. Если въ уравненіи прямой не написано y, какъ напр. въ уравненіи $2x=1$, то почему его не написано и какая величина y?

Отвѣтъ сходенъ съ отвѣтомъ предыдущей задачи.

6. $4x+2y=1$
7. $y=2x$
8. $x+4=0$
9. $2y=5$.
10. $x+1=y$
11. $\frac{1}{2}(x-3)=2x$
12. $y+0,4=4-2y$
13. $4x+0,8(y-5)=4+y$.

Указать: 1) тѣхъ, которыя проходятъ черезъ начало и тѣхъ, которыя не проходятъ, 2) тѣхъ, которыя параллельны оси $x^{ов}$ и 3, тѣхъ, которыя параллельны оси y.

Отв. (6-13) 1; 7; 2, 9 и 12; 3) 8 и 11.

Построить прямыя.

14. $x+3y=1$
15. $4x+3y=0$
16. $2x=5$.
17. $y-2=0$
18. $\frac{2x-3}{x}+\frac{3}{2x-3}=2$.
19. $y=9-\left(\frac{y-2}{4}+\frac{2}{3}\right)$.
20. $\frac{4x-3y-7}{5}=0,3x-\frac{29}{15}-\frac{5}{6}$.

21. Опредѣлить точку пересѣченія прямыхъ: $\frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5$ и $\frac{5y-7}{2}+\frac{4x+3}{6}=18-5x$? Отв (3,2).

22. Опредѣлить точку пересѣченія прямыхъ: $3x+4y=7$ и $2y=2,2+\frac{2y-x}{5}$. Отв. Точки пересѣченія нѣтъ.

23. Опредѣлить точку пересѣченія прямыхъ: $3x+5=0$ и $y=-4$. Отв $\left(-\frac{5}{3},-4\right)$.

24. Опредѣлить точку пересѣченія прямыхъ: $4y=3$ и $y+1=0$ Отв. Нѣтъ.

25. Опредѣлить точки пересѣченія прямой съ осями: $\frac{1}{2}x-y=2$ съ осями координатъ! Отв. $(4,0)$ и $(0,-2)$.

26. Определить площадь треугольника, ограниченного прямоугольными осями координат и прямою $2x+3y+5=0$. Отв. $2\frac{1}{2}$ □ единицъ.

27. Определить длины сторонъ и площадь треугольника, ограниченного прямыми: $3x=1-2y$; $x=3y-7$; $y=4x-5$. Отв. $5\frac{1}{2}$ □ единицъ.

28. Определить площадь треугольника, ограниченного прямыми: $5x+4y+11=0$; $y=7x-11$ и $x=\frac{1}{2}\left\{x+y-\frac{11-3y}{2}\right\}$. Отв. 16,5 □ единицъ.

29. Определить площадь треугольника, ограниченного осью ординатъ и прямыми: $y=xm_1+n_1$ и $y=xm_2+n_2$? Отв. $\pm\frac{(n_2-n_1)^2}{2(m_2-m_1)}$.

30. Показать, что площадь треугольника, ограниченного прямыми: $y=ax-\frac{bc}{2}$; $y=bx-\frac{ac}{2}$; $y=cx-\frac{ab}{2}$ есть $\frac{1}{8}(a-b)(b-c)(c-a)$.

31. При косоугольной системѣ, въ которой уголъ между осями равенъ 135°, даны прямыя: $x+4=0$; $3x=4y$ и $2y+3=0$. Определить длины сторонъ и площадь треугольника, ограниченного этими прямыми? Отв. $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ □ единицъ.

32. Если $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ и $\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1$ суть уравненія двухъ прямыхъ, которыя составляютъ съ осями координатъ треугольники, имѣющіе равныя площади, а x_1 и y_1 координаты точки пересѣченія этихъ прямыхъ, то $y_1:x_1=(b-b_1):(a-a_1)$

33. Показать, что площадь треугольника, ограниченного прямыми: $y=x\operatorname{tg}\alpha$; $y=x\operatorname{tg}\beta$ и $y=x\operatorname{tg}\gamma$ есть $\frac{c^2}{2}\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos^2\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\gamma)}$.

34. Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $(-2,-4)$? Отв. $(y+4)=m(x+2)$

35. Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Отв. $y=kx$.

36. Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $(0,-5)$ и составляющей съ осью x уголъ въ 135°. Отв. $x+y=0$.

37. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью x угол в $60°$. Отв. $y = x\sqrt{3}$.

38. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(0, -5)$ и составляющей с осью y угол в $45°$. Отв. $y = \pm x - 5$.

39. Найти уравнение прямой проходящей через точку $(-2, 3)$ и составляющей с осью y угол в $90°$. Отв. $y = 3$.

40. Написать уравнение прямой, пересекающую отрицательную часть оси y в расстоянии 2 единиц от начала и составляющей с осью x угол в $80°$. Отв. $y = x\operatorname{tg} 80°$.

41. Написать уравнение прямой, пересекающую отрицательную часть оси x в расстоянии 5 единиц от начала координат и составляющей с осью x угол в $22°30'$. Отв. $y = (x+5)(\sqrt{2}-1)$

42. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-1, 2)$ и составляющей с осью x угол, tg которого равен $0{,}8$. Отв. $y - 2 = \pm \frac{4}{5}(x+1)$

43. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(+2, 1)$ и составляющей с осью x угол вдвое бо́льший того, который составляет с той же осью прямая $3y - x = 4$? Отв. $3x - 4y - 10 = 0$.

44. При косоугольной системе координат, в которой угол между осями равен $120°$, найти уравнения прямых, проходящих через точку $(-1, -3)$ и составляющих с осью абсцисс углы в $30°$, $60°$ и $90°$. Отв. $x - 2y - 5 = 0$, $x - y - 2 = 0$; $2x - y - 1 = 0$.

45. Найти уравнение прямой, проходящей через точки: $(-1, 4)$ $(-3, -2)$. Отв. $y - 3x - 7 = 0$.

46. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $(0, 6)$ и $(\frac{2}{3}, 6)$. Отв. $y = 6$.

47. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $(m, -n)$? Отв. $nx+my=0$.

48. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $(-4, \frac{1}{2})$ и $(-4, -1)$.

49. Найти уравнения прямых, проходящих через каждые две средины сторон треугольника, вершины которого суть $(0,0)$ $(-1,3)$ и $(-2,-2)$? Отв. $7x-y+6=0$; $x-y+3=0$; $5x+y+6=0$.

50. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (a, b) и точку пересечения прямых: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ и $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$. Отв. $a^2y-b^2x-ab(a-b)=0$.

51. Написать уравнение диагоналей выпуклого четырехугольника, ограниченного прямыми: $x=5$, $y=4$ и $y=2x$, $y=x$. Отв. $x-3y+10=0$ и $y-6x+20=0$.

52. ABCDEF правильный шестиугольник. Пусть A – начало координат, направление стороны AB – ось x., а прямая, проходящая через точку A, перпендикулярно к AB, есть y. Написать уравнения сторон и диагоналей этого шести-угольника. Отв. Пусть a означает длину стороны шести-угольника, тогда уравнения будут: AB… $y=0$, AC… $y\sqrt{3}=x$, AD… $-y=x\sqrt{3}$, AE… $x=0$, AF… $y+x\sqrt{3}=0$, BC… $y=\sqrt{3}(x-a)$, DB… $x=a$, BE… $y+\sqrt{3}(x-a)=0$, BF… $y\sqrt{3}+x-a=0$, CD… $y+x\sqrt{3}=2a\sqrt{3}$, EE… $y\sqrt{3}+x=3a$, CF… $2y=a\sqrt{3}$, DE… $-y=a\sqrt{3}$, DF… $y\sqrt{3}-x=2a$, EF… $y=(x+a)\sqrt{3}$.

Определить углы, составленные осями координат прямоугольной системы с прямыми.

53. $2x=3$. Отв. с осью x… 90° с осью y… 0°.

54. $3-2x=0{,}8(1+x)$? Отв. См. 53 зад.

55. $y+4=0$. Отв. съ осью x ... $0°$, съ осью y ... $90°$.

56. $5x-7y=0$. Отв. съ осью x ... $35°32'16''$. съ осью y ... $54°27'44''$.

57. $x+2y=4$. Отв. " x $150°26'6''$, " y ... $65°26'6''$.

58. $3x+4y=5$ Отв. " x $147°7'48''$ " y ... $53°7'48''$.

Опредѣлить углы, составленные прямыми съ осями косоугольной системы координатъ, когда уголъ между осями = $30°$.

59. $3x+5=0$. Отв. Съ осью x ... $30°$ ..... y .... $0°$.

60. $y=0,5$. Отв. " x ... $0°$ ..... y .... $30°$

61. $2x=3y$ Отв. " x ... $105°$ ..... y ... $75°$ (къ задачѣ 62)

62. $x+y+5=0$ Отв. " x ... $11°55'57''$ .. y .... $18°4'3''$ (къ задачѣ 63)

63. $4x+2y=5$ Отв. " x ... $53°47'55''$ ... y .... $23°47'55''$

64. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $(2,4)$, параллельно оси ординатъ. Отв $(x=2)$

65. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $(1,-\sqrt{2})$ параллельно оси абсциссъ? Отв. $y+\sqrt{2}=0$.

66. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $(1,-1)$ параллельно оси ординатъ?

Найти ур-іе прямой, проходящей черезъ точку и параллельно данной прямой въ слѣдующихъ задачахъ:

67. $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ и $2a+5y=0$? Отв. $4x+10y+3=0$.

68. $(0-3)$ и $4,5x-1=0$? Отв. $x=0$.

69. $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ и $y+4=0$? Отв. $y+\sqrt{3}=0$.

70. Найти уравненіе прямой, параллельной прямой $3x+2y=1$ и пересѣкающей положительную часть оси ординатъ на разстояніи 3 единицъ отъ начала координатъ. Отв. $3x+2y-6=0$.

71. Найти уравнение прямой, прп. прямой $y=3x$ и пересекающей отрицательную часть оси абсцисс на расстоянии 2 единицы от начала координат. Отв. $y=3x+6$.

72. При косоугольной системе координат, в которой угол наклонения осей равен 120°, найти уравнение каждой из прямых, проходящих через точку $(-3,-4)$ параллельно: 1) прямой: $x+2y+1=0$, 2) $3x=4$ и 3) $y+8=0$. Отв. 1) $x+2y+11=0$, 2) $x+3=0$ и 3) $y+4=0$.

73. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-1,-2)$ и перпендикулярно оси Ox. Отв. $x+1=0$.

74. Найти уравнение прямой, проходящей через точку 0,5, перпендикулярно к оси y. Отв. $y=5$.

Найти ур-ие прямой, проходящей через точку перпендикулярно прямой в следующих задачах.

75. $(1,-3)$ и $0,8x+1=-1+4y$? Отв. $y+5x-2=0$.

76. $(0,\frac{4}{7})$ и $2x+3=0$? Отв. $y=\frac{4}{7}$.

77. $(-2,2)$ и $y=-\frac{1}{2}$? Отв. $x+2=0$

78. При косоугольной системе координат, в которой угол между осями равен 60°, найти уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данной прямой. 1) $(-\frac{1}{2},1)$ и $x-3y+2=y$; 2) $(-4,0)$ и $3x+4=0$; 3) $(0,-3)$ и $y=1$. Отв. 1, $6x+4y-1=0$; 2, $x+2y+4=0$ и 3) $y+2x+3=0$.

79. При косоугольной системе координат, в которой угол между осями координат 25°16', найти уравнение прямой, проходящей через точку $(3,3)$ перпендикулярно к оси Симпсе оси y. Отв. $x-3=-\cos 25°16'(y+3)$ и $y+3=-\cos 25°16'(x-3)$

80. Найти уравнение высоты треугольника, координаты вершин которого суть: (2,1); (3,-2) и (-4,-1)? Отв. $7x-y=15$; $3x+y=7$ и $3y-x=1$.

81. Найти уравнение перпендикуляров, возставленных из средины боков в предыдущем треугольнике? Отв. $7x-y=-2$, $3x+y+3=0$ и $3y-x+4=0$

82. Показать, что диагонали параллелограмма делят друг-друга пополам.

83. Показать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Определить расстояние от точки до прямой в следующих задачах.

84. $(-3,2)$ и $\frac{x-4}{2}+4=3y$. Отв. $\sqrt{1,62}$

85. $(-\frac{2}{3},0)$ и $4x=-3$ Отв. $\frac{1}{12}$.

86. $(-1,-5)$ и $y-4=0$ Отв. 9.

87. (a,b) и $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ Отв. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

88. Определить от начала координат до прямой $4x+3y=10$ Отв. 2.

89. При косоугольной системе координат, в которой угол между осями равен $75°$, определить расстояние от точки $(0,-2)$ до прямой $2x=y-4$. Отв. $\frac{6\sin 75°}{\sqrt{5+4\cos 75°}}=2,359$.

90. При косоугольной системе координат, в которой угол между осями равен $80°$, определить расстояние от начала координат до прямой $3x=1$. Отв. $\frac{1}{3}\sin 80°=0,32827$.

91. Определить длины высот треугольника, координаты вершин которого суть: $(0,0)$; $(-1,3)$ и $(2,2)$ Отв. $2\sqrt{2}$; $\frac{8}{\sqrt{10}}$ > $\frac{8}{\sqrt{10}}$.

92. Определить угол, составленный прямыми: $3x+5=2$ и $4x+0,8y=3$. Отв. $47°43'32''$.

Задачи.

93. Определить угол, составленный двумя прямыми: $x+\frac{2}{3}y-1=0$ и $3x=1$. Отв. $35°, 41'24''$.

94. Определить угол смежный такими прямыми: $x+y\sqrt{3}=0$ и $x-y\sqrt{3}=0$. Отв. $120°$.

95. Чему равен угол смежный прямыми: $5x=2$ и $x+3=0$. Отв. 0.

Чему равен угол смежный прямыми: $4x=7y$ и $y=\frac{2}{3}$. Отв. $29°44'42''$.

96. Найти угол смежный двумя прямыми: $x=10$ и $4y-1=0$. Отв. $90°$.

97. Как велик угол смежный прямыми: $x+8y=0$ и $2y-16x+3=0$. Отв. $90°$.

98. Сколькими градусами равен угол смежный прямыми: $1{,}5x+1=2y$ и $x=1\frac{1}{3}y$. Отв. $0°$.

99. Определить углы треугольника, стороны которого суть: $x+y=1$, $x+4=0$ и $2x-3y+1=0$. Отв. $45°, 56°18'36''$ и $78°41'25''$.

100. Определить углы треугольника, вершины которого суть: $(3,-2)$; $(0,5)$ и $(3,1)$. Отв. $13°40'16''$, $23°11'55''$ и $143°7'48''$.

101. Определить углы треугольника, координаты вершин которого суть: $(-2,4)$, $(-2,-2)$ и $(\frac{1}{3}-2)$. Отв. $90°, 58°44'57'', 31°15'3''$.

102. Определить угол смежный прямыми: I, $x+3y+1=0$ и $2y=x$, II, $x+2=0$ и $2x-3=y$ и III, $x=y+2$ и $y=3$. при косоугольной системе координат, в которой угол смежный осями координат $=36°48'$. Отв. I, $152°41'29''$, II, $65°16'22''$ и III, $18°24'$.

103. Найти tg угла смежный прямыми: $y-mx=0$ и $my+x=0$. Отв. $\frac{m^2+1}{m^2-1}\operatorname{tg}\omega$.

104. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2-1)$ и составляющей с прямой $y=3x$ угол в $30°$. Отв.

$y+1=-\frac{1}{3}(5\sqrt{3}+6)(x-2)$ или же: $y+1=\frac{1}{3}(5\sqrt{3}-6)(x-2)$.

105. При косоугольной системе осей координат, в которой угол между осями равен 120°, найти уравнение прямой, проходящей через точку (3,4) и составляющей с прямою $x+y+1=0$ угол в 45°. Отв. $y-4=\operatorname{tg}105(x-3)$ или $y-4=\operatorname{tg}15^{\circ}(x-3)$

106. Найти уравнение прямой, проходящей через начало координат прямоугольной системы и составляющей с прямою $x+2=0$ угол в 60°. Отв. $y=\pm\sqrt{\frac{x}{3}}$.

107. Если оси координат под углом ω, то чтобы прямые $Ax+By+C=0$ и $A'x+B'y+C'=0$ были бы равно наклонены к оси x в противоположных направлениях, необходимо, чтобы $\frac{B}{A}+\frac{B'}{A'}=2\cos\omega$.

Следующия уравнения прямых привести к нормальному виду и определить угол α. (угол между осью x и перпендикуляром из начала на (ось) прямую и δ - расстояние прямой от начала.

108. $4x=\frac{1}{2}y-3$? Отв. $-\frac{8}{\sqrt{65}}x+\frac{1}{\sqrt{65}}y-\frac{6}{\sqrt{65}}=0$; $\alpha=172^{\circ}52'30''$ и $\delta=6:\sqrt{65}=0,7442$.

109. $y-x\sqrt{3}=4$. Отв. $-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{y}{2}-2=0$, $\alpha=150^{\circ}$; $\delta=2$.

110. $0,2x=3y$. Отв. $\alpha=93^{\circ}48'51''$ или $273^{\circ}48'51''$; $\delta=0$.

111. $2x=3$. Отв. $x-1\frac{1}{2}=0$ или $x-\frac{3}{2}=0$, $\alpha=0^{\circ}$ и $\delta=1\frac{1}{2}$.

112. $y=-1\frac{3}{4}$. Отв. $-y-1\frac{3}{4}=0$; $\alpha=270^{\circ}$ и $\delta=1\frac{3}{4}$.

113. $x\cos 10^{\circ}+y\sin 10^{\circ}+4=0$. Отв. $x\cos 190^{\circ}+y\sin 190^{\circ}-4=0$, $\alpha=190^{\circ}$ и $\delta=4$.

114. $x\cos 20^{\circ}+x\sin 20^{\circ}+20=0$. Отв. $-x-10\sqrt{2}\sec 25^{\circ}=0$; $\alpha=180^{\circ}$ и $\delta=10\sqrt{2}\sec 25^{\circ}=15,604$.

115. $x\cos 7°6' - y\sin 7°6' - 2 = 0$. Отв. $x\cos 352°54' - 2 = 0$, $\alpha = 352°54'$ и $\delta = 2$.

116 $x\sin\psi + y\cos\psi - q = 0$. Отв. $x\cos(90-\psi) + y\sin(90-\psi) - q = 0$; $\alpha = 90 - \psi$ и $\delta = q$.

117. $-x\cos 4° + y\sin 4° = 24$. Отв. $x\cos 176° + y\sin 176° - 24 = 0$; $\alpha = 176°$; $\delta = 24$.

118. Найти точку пересечения прямых: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$ и $x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - \delta' = 0$, а также и определить угол между ними? Отв. $\frac{\delta\cos\alpha' - \delta'\cos\alpha}{\sin(\alpha-\alpha')}$; $\frac{\delta\sin\alpha - \delta\sin\alpha'}{\sin(\alpha-\alpha')}$; $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha'}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'}$.

119. Написать уравнение, равноклонящей угол между прямыми $3x = 4$ и $y + 5 = 0$. Отв. $y + 5 = \pm(x - 1\frac{1}{3})$.

120. Найти уравнение равноклонящей угла, составленного прямыми: $3x + 4y = 0$ и $y = 4$. Отв. $3x - y + 20 = 0$ или $3x + 9y - 20 = 0$.

121 Найти уравнение равноклонящей угол между прямыми: $y = 3x$ и $12x + 5y = 3$. Отв. $y = x + 1$ или $y = -x + 8$.

122. Написать уравнение равноклонящей угол между двумя прямыми: $x = 5$ и $12y + 5x = 0$. Отв. $6y - 4x + 31 = 0$ или $6y + 9x - 34 = 0$.

123. Написать уравнение равноклонящей угла между двумя прямыми: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$ и $x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - \delta' = 0$. Отв. $\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') + 90°\right] + y\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') + 90°\right] + \frac{p-p'}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')} = 0$ и $x\cos\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') + y\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha') + \frac{p+p'}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')} = 0$.

124 Написать условие, при котором прямые: $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$ и $A''x + B''y + C'' = 0$ имеют общую точку пересечения? Отв. $A''(BC' - B'C) + B''(A'C - AC') + C''(AB' - A'B) = 0$.

125. Показать, что прямые $3x - 4y + 6y = 0$, $\frac{1}{2}x - 1$ и $y = 2x - 1$ проходят через одну точку. Отв. См. предыдущ. задачу.

126 Прямыя $x+y=4$, $2x=3y$, $x=2$ и $x-2y-1=0$. имѣютъ ли онѣ общую точку. Отв. Не имѣютъ.

127. Показать, что высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ?

128. Показать, что перпендикуляры, возставленные изъ средины сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ?

129. Показать, что прямыя, соединяющія средины сторонъ съ противоположными вершинами треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

Опредѣлить геометрическія мѣста, даныя ур-іями.

130. $(x-y)(x+3)=0$. Отв. Двѣ прямыя: $x=y$ и $x+3=0$.

131. $(2x-y)^2(x-y-1)=0$. Отв. Двѣ прямыя: $y=2x$ и $y=x-1$.

132. $(x\cdot(y-a)=0$. Отв. Двѣ прямыя: $x=0$ и $y=a$.

133. $(x-a)(y-b)=0$. Отв. Двѣ прямыя: $x=a$, $y=b$.

134. Опредѣлить геометрическое мѣсто, данное уравненіемъ: $xy-2-2x+y=0$. Отв. двѣ прямыя: $x=-1$ и $y=2$.

135. Найти геометрическое мѣсто, опредѣляемое ур-іемъ: $2x^2-xy+2x^2-y^2+y=0$. Отв. Двѣ прямыя: $y=-2x$ и $y=x+1$.

136. Показать, что уравненіе $2y^2-8xy+8x^2+5y-10x-3=0$ представляетъ уравненіе двухъ прямыхъ параллельныхъ между собою?

137. Показать, что уравненіе: $-3x^2-8xy+3y^2+30x-27=0$ есть уравненіе двухъ прямыхъ перпендикулярныхъ между собою?

138 Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, когда извѣстно, что сумма разстояній каждой изъ нихъ до двухъ данныхъ прямыхъ есть величина постоянная? Отв. Прямая.

139. Дань уголъ xoy и прямая KH. Проведемъ прямую параллельно KH, которая пересѣчетъ прямыя ox и oy въ точкахъ A и B. Изъ точекъ A и B возставимъ перпендикуляры къ бокамъ угла, которые пересѣкутся въ точкѣ M. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ [M, дѣлящихъ (предыдущая задача) прямую AB въ отношеніи m къ n?] Отв. Прямая.

140. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ M, дѣлящихъ прямую AB въ отношеніи m къ n? Отв. прямая.

141. Въ треугольникѣ ABC, въ которомъ основаніе AB дано по величинѣ и положенію, сумма двухъ другихъ сторонъ постоянна. Изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на основаніе и, продолживъ DC, отложимъ части DM = AC. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ M? Отв. прямая.

142. Въ треугольникѣ ABC дань уголъ A и сумма 2хъ сторонъ AB и AC. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ M, раздѣляющихъ сторону AC въ данномъ отношеніи. Отв. прямая.

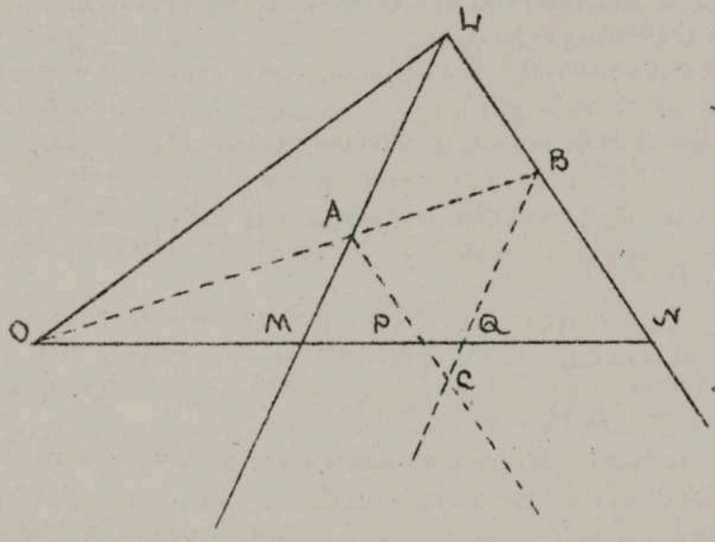
143. Даны двѣ точки A и B, лежащія на оси X и Y системы координатъ. На тѣхъ же осяхъ возмемъ точки A' и B' такъ, чтобы OA' + OB' = OA + OB. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ AB' и A'B. Отв. Прямая.

Геометрическія мѣста пересѣченія прямыхъ.

1. Даны основанія и сумма площадей извѣстнаго числа — треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину; найти

ее геометрическое место. Пусть будут уравнения оснований: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$; $x\cos\beta - y\sin\beta - p_1 = 0$; $x\cos\delta + y\sin\delta - p_2 = 0$ ... числа сторон a, b, c ..., пусть сумма площадей будет m^2. Так как $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ будет перпендикуляр, опущенный из точки xy на первую линию, то $Q(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)$ будет двойная площадь первого треугольника и т. д. и уравнение места будет $a(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) + b(x\cos\beta + y\sin\beta - p_1) + c(x\cos\delta + y\sin\delta - p_2) + \ldots = 2m^2$, очевидно прямая.

I_1. Даны вершины треугольника двигаются по данным прямым HM и HN, три стороны проходят через данные точки O, P и Q на одной прямой; найти место третьей вершины?

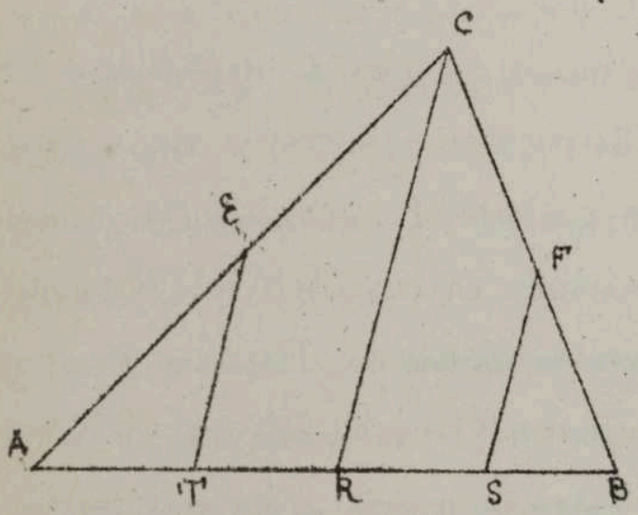


Возьмем за ось x прямую OP, на которой лежат три данные, за ось y – линию OH, соединяющую точку пересечения данных линий HM и HN с точкою O, через которую проходит основание. Пусть координаты точки C будут $x'y'$ и пусть $OH = b$, $OM = a$, $OK = a_1$, $OP = c$, $OQ = c_1$. Очевидно, что уравнения прямых HM и HN будут: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$. Уравнение CP через $x'y'$ и P $(y = 0, x = c)$ есть $(x' - c)y - y'x + cy' = 0$. Координаты пересечения этой линии с $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ суть: $x_1 = \frac{ab(x' - c) + acy'}{b(x' - c) + ay'}$; $y_1 = \frac{b(a - c)y'}{b(x' - c) + ay'}$. Координаты точки B найдутся, давая значки буквам в предыдущих: $x_2 = \frac{a_1 b(x' - c) + a'c'y'}{b'(x' - c) + a'y'}$ и

$y_2 = \frac{b(a'-c')y'}{b(x'-c')+a'y'}$. Но точки $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ лежатъ на прямой, проходящей черезъ начало координатъ, слѣдовательно $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ Откуда $\frac{b(a-c)y}{ab(x-c)+acy} = \frac{b(a'-c')y'}{a'b'(x'-c')+a'c'y'}$. Приводя къ одному знаменателю и для простоты отбрасывая знаки у x' и y' получимъ: $(a-c)[a'b(x-c')+a'c'y] = (a'-c')[ab(x-c)+acy]$ или $\frac{(ac'-a'c)x}{a'(a-a')-aa'(c-c')} + \frac{y}{b} = 1$, уравненіе прямой, проходящей черезъ точку H.

2. Проведена параллельная къ основанію треугольника, черезъ точки встрѣчи ея со сторонами возставлены перпендикуляры; найти геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченій?

3 На основаніи треугольника взяты части AT' съ одной стороны и BS съ другой въ данномъ отношеніи, черезъ S и T', проведенныя параллельно данной прямой CR, найти мѣсто точки встрѣчи BE и AF.

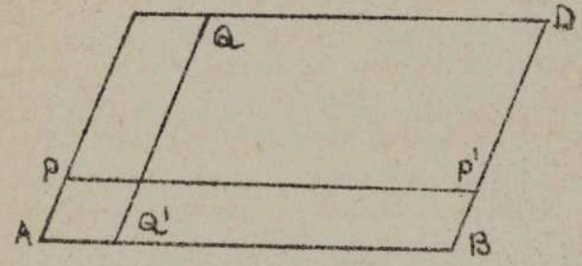


Возьмемъ CR за ось y, пусть AT'=K RB=s, AR=s', C'R=p. Пусть постоянное отношеніе будетъ m, то BS=mk. Координаты точки S будутъ (S-mk, 0), а точки T' {-(s'-k), c)} Координаты точекъ E и F найдутся, подставляя эти величины x въ уравненія AC и BC, получимъ: для E ... $x = -(s'-k)$, $y = \frac{pk}{s}$, для F .... $x = s-mk$, $y = \frac{mpk}{s}$. Теперь уравненія будутъ: $(s+s'-k)y + \frac{pk}{s'}x - \frac{pks}{s'} = 0$. Чтобы исключить K, вычтемъ одно изъ другого и раздѣлимъ на K получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста:

$$(m-1)y + \left(\frac{mp}{s} + \frac{p}{s'}\right)x + \left(\frac{mps'}{s} - \frac{ps}{s'}\right) = 0.$$

4. PP' и QQ' двѣ какія нибудь параллельныя сторонамъ параллелограмма, найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія линій PQ и P'Q'?

5. Черезъ какую нибудь точку основанія треугольника проведена линія данной длины; параллельно данному направленію, такъ, что она основаніемъ пересѣкается пополамъ. Найти мѣсто точки пересѣченія линій, соединяющихъ концы сей послѣдней съ концами основанія?



6. Дано основаніе треугольника, стороны его пересѣкаютъ постоянную AB, параллельную основанію, въ точкахъ C и D, такъ что отношеніе AC и BD постоянно. Найти геометрическое мѣсто вершинъ?

7. Даны: сумма сторонъ и уголъ между ними заключающійся, найти геометрическое мѣсто точки, которая дѣлитъ основаніе въ данномъ отношеніи.

8. Даны двѣ точки A и B, каждая на одной изъ осей; взяты двѣ точки A' и B' на осяхъ, такъ что $A'O+OB'=AO+OB$. Найти мѣсто пересѣченій линій AB' и A'B?

Примѣры на условіе прохожденія прямой черезъ постоянную точку.

Даны: сумма обратныхъ (обратное, напр. количеству a. есть, какъ извѣстно, $\frac{1}{a}$) сторонъ треугольника и уголъ между ними заключающійся: доказать, что основаніе всегда проходитъ черезъ постоянную точку.

Возмемъ стороны за оси; уравненіе основанія есть $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,

а данное условіе $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ или $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}$. Слѣдовательно уравненія основанія изъ мѣнятся въ $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-\frac{y}{a}=1$, гдѣ C постоянное, а A непремѣнное, или $\frac{1}{a}(x-y)+\frac{y}{c}-1=0$.

Отсюда видимъ, что основаніе всегда пройдетъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ: $x-y=0$; $\frac{y}{c}-1=0$.

2. Прямая будетъ проходить черезъ постоянную точку, если сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ данныхъ точекъ и умноженныхъ на постоянныя количества, равна нулю.

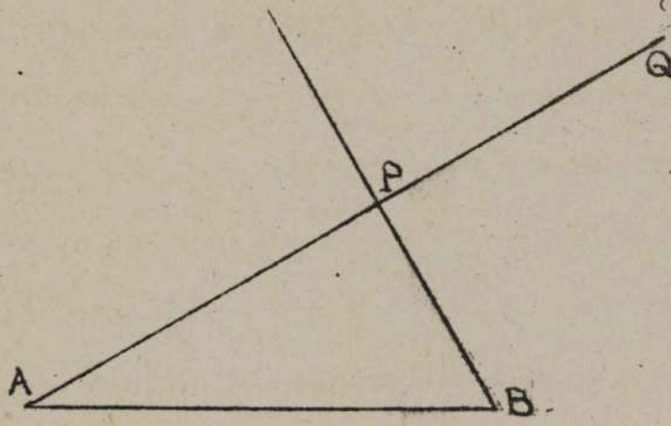
Пусть уравненіе линіи будетъ: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, тогда перпендикуляръ на нее изъ $x'y'$ выразится: $x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p$, а условіе задачи дастъ намъ: $m'(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-p)+m''(x''\cos\alpha+y''\sin\alpha-p)+$ $+m'''(x'''\cos\alpha+y'''\sin\alpha-p)+\cdots=0$. или же означая для краткости сумму (алгебраическую): $m'x'+m''x''+m'''x'''+\cdots$ черезъ $\Sigma(mx')$ сумму $m'y'+m''y''+\cdots$ черезъ $\Sigma(my')$, а $m'+m''+m''+\cdots$ черезъ $\Sigma(m)$ мы можемъ написать предыдущее уравненіе такъ: $\Sigma(mx')\cos\alpha+$ $+\Sigma(my')\sin\alpha-p\Sigma(m)=0$. Подставляя въ начальное уравненіе величину p, полученную изъ предыдущаго уравненія, получимъ уравненіе требуемой линіи: $x\Sigma(m)\cos\alpha+y\Sigma(m)\sin\alpha-\Sigma(mx')\cos\alpha+$ $+\Sigma(my')\sin\alpha=0$. Или: $x\Sigma(m)-\Sigma(mx')+\{y\Sigma(m)-\Sigma(my')\}\operatorname{tg}\alpha=0$.

Теперь, такъ какъ въ это уравненіе входитъ неопредѣленное $\operatorname{tg}\alpha$, въ первой степени, то слѣдовательно, прямая проходитъ черезъ постоянную точку, которая дается, очевидно двумя уравненіями: $x\Sigma(m)-\Sigma(mx')=0$. $y\Sigma(m)-\Sigma(my')=0$. Отсюда можемъ найти: $x=\frac{\Sigma(mx')}{\Sigma(m)}=\frac{m'x'+m''x''+m'''x'''+\cdots\cdots}{m'+m''+m'''+\cdots\cdots}$

$$y=\frac{\Sigma(my')}{\Sigma(m)}=\frac{m'y'+m''y''+m'''y'''+\cdots\cdots}{m'+m''+m'''+\cdots\cdots}$$

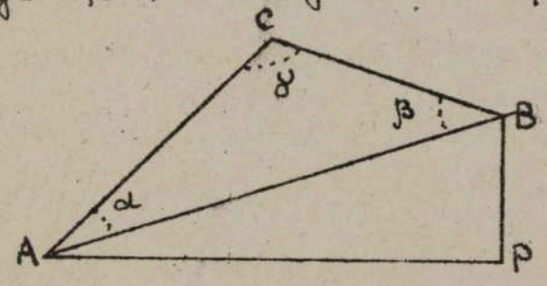
Эту точку можно назвать центромъ средняго положенія данныхъ точекъ.

3. Даны две точки A и B; через точку B проведена какая нибудь прямая; из точки A опустим на нее перпендикуляр AQ и продолжим так, чтобы прямоугольник AP.AQ был постоянный; найти место точек Q?

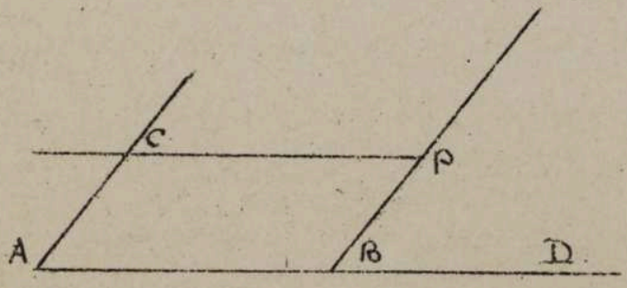


Возьмем A за полюс и AB за постоянную ось; AO будет радиус вектор, который означим через ρ; угол QAB означим через θ; остается только найти зависимость между θ и ρ. Пусть длина AB = c; из прямоугольного треугольника APB имеем: AP = c cosθ, но AP.AQ = K², следовательно ρ cosθ = K² или $\rho\cos\theta = \frac{K^2}{c}$. Это будет прямая перпендикулярная к AB на расстоянии $\frac{K^2}{c}$ от A.

4. Даны углы треугольника, вершина A постоянна; другая B движется по данной прямой. Найти геометрическое место третьей вершины. (Координаты полярные).



5. Даны основание и сумма сторон треугольника; через оконечность B основания восставим к прилежащей стороне перпендикуляр; проведем внешний биссектор угла, противолежащего основанию найти место точки пересечения этого биссектора с перпендикуляром.



Отдѣлъ IV.

На кругъ.

1 Дана окружность: $x^2+y^2=7$ и точки $(1,0)$; $(4,-5)$, $(-8,0)$, $(\sqrt{5},-2)$, $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ и $(2,\sqrt{3})$. Которыя изъ этихъ точекъ лежатъ: 1) на окружности круга; 2) внутри круга, 3) внѣ круга? Отв. Точка 6 лежитъ на окружности; 1 и 5 - внутри круга; 2, 3 и 4 внѣ круга.

2. Опредѣлить координаты центра и радіусъ окружности: $x^2+y^2-2x+4y+1=0$. Отв. $(1,-2)$ и $r=2$. (r - радіусъ).

3. Опредѣлить координаты центра и радіусъ окружности: $x^2+y^2-6x=0$. Отв. $(3,0)$ и $r=3$.

4. Опредѣлить координаты центра и радіусъ окружности: $36x^2+36y^2-36x+24y-11=0$. Отв. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$, $r=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Опредѣлить геометрическое значеніе уравненія: $x^2+y^2-10x+30=0$. Отв. Никакого геометрическаго мѣста.

6. Найти точки пересѣченія окружности: $x^2+y^2-5x-7y+6=0$ съ осями координатъ. Отв. $(2,0)$, $(3,0)$, $(0,6)$ и $(0,1)$.

7. Найти точки пересѣченія окружности $x^2+y^2=25$ съ прямыми: 1) $x+y=1$, 2) $x+4=-5$ и 3) $3x+4y+25=0$. Отв. $(3,-4)$ и $(-4,3)$ и II, $(0,-5)$ и $(-5,0)$; III, $(-3,-4)$.

8. Найти точки пересѣченія окружности $x^2+y^2=r^2$ съ прямою: $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$. Отв. $x=p\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{r^2-p^2}$ и $y=p\sin\varphi\pm\cos\varphi\sqrt{r^2-p^2}$.

9. Найти на окружности $x^2+y^2-6x+4y-4=0$ точки, равноотстоящія отъ осей координатъ? Отв. $(2,2)$; $(-1,-1)$, $\left\{\frac{1}{2}(5+\sqrt{33})-\frac{1}{2}(5+\sqrt{33})\right\}$ и $\left\{\frac{1}{2}(5-\sqrt{33})\ \ \frac{1}{2}(5-\sqrt{33})\right\}$.

10. Найти точки пересѣченія окружностей: $x^2+y^2=2$ и

и $x^2+y^2-x-y=0$. Отв. $(1,1)$.

11. Найти точки пересечения окружностей $x^2+y^2+6x-2y-19=0$. Отв. $(2,3)$ и $(2\frac{5}{13}, 1\frac{1}{13})$.

12. Найти уравнение прямой, проходящей через точки пересечения окружностей: $x^2+y^2=2y$ и $x^2+y^2=2x$. Отв. $y=x$.

13. Найти такую величину для r, что-бы окружности: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ и $(x-b)^2+(y-a)^2=r^2$ касались бы? Отв. Нить.

14. Показать, что длина хорды, соединяющей точки пересечения окружностей $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ и $(x-b)^2+(y-a)^2=r^2$ есть $\sqrt{4r^2-2(a-b)^2}$.

15. Показать, что центры окружностей, проходящих через точки (x_1,y_1) и (x_2,y), находятся на прямой: $(x_1-x_2)(x-\frac{x_1+x_2}{2})+(y_1-y_2)(y-\frac{y_1+y_2}{2})=0$.

16. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и пересекающей положительную ось абсцисс на расстоянии a и положительную часть оси ординат на расстоянии b от начала координат? Отв. $x^2+y^2-ax-by=0$.

17. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $(1,-1)$ и $(2,3)$ и которой центр лежит на прямой $y=x$? Отв. $5x^2+5y^2+11x-11y-10=0$.

18. Найти уравнение окружности, проходящей через точки $(0,0)$, $(1,-2)$ и $(2,1)$. Отв. $x^2+y^2-3x+y=0$.

19. ABC – равносторонний треугольник. За принимают за начало координат прямоугольной системы, а направление стороны AB за положительное направление оси x? Написать уравнение окружности, описанной около этого треугольника. Отв: $x^2+y^2-ax-\frac{ay}{\sqrt{3}}=0$.

20. Написать уравнение окружности при косоугольной системе координатъ; радіусъ = 3, а оси координатъ наклонены подъ угломъ въ 45°? Отв. $x^2+y^2+xy\sqrt{2}-9=0$.

21. Написать уравнение окружности, отнесенной къ косоугольной системе координатъ, въ которой оси проведены подъ угломъ въ 60°, когда извѣстно, что радіусъ окружности равенъ $\sqrt{\frac{4}{3}}$, а координаты центра: $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Отв. $x^2+y^2+xy+x+y-1=0$.

22. Оси координатъ наклонены подъ угломъ ω; найти радіусъ окружности, которой уравненіе при этой системе есть слѣдующее: $x^2+y^2+2xy\cos\omega-hx-ky=0$. Отв. $\sqrt{\frac{h^2+k^2-2hk\cos\omega}{2\sin\omega}}$.

23. Подъ какимъ угломъ должны быть наклонены оси координатъ, чтобы уравненіе $x^2+y^2-xy-hx-ky=0$ принадлежало окружности? Опредѣлить положеніе круга и радіусъ его? Подъ угломъ въ 120°, координаты центра (h, h) и радіусъ h.

24. Подъ какимъ угломъ должны быть наклонены оси координатъ, чтобы уравненіе $x^2+y^2+xy-hx-hy=0$ принадлежало окружности. Опредѣлить положеніе центра и радіусъ окружности. Отв. подъ угломъ въ 60°, координаты центра $(\frac{h}{3}, \frac{h}{3})$ и $r=\frac{h}{\sqrt{3}}$.

25. Написать уравненіе касательной и нормальной къ окружности $x^2+y^2=17$, проведенной черезъ точку $(-1, -4)$. Отв. $x+4y+17=0$ и $y=4x$.

26. Написать уравненіе касательной къ окружности, проведенной черезъ точку (α, β), лежащей внѣ круга? Отв. $(r\alpha \pm \beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2-r^2})x+(r\beta \mp \alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2-r^2})y=r(\alpha^2+\beta^2)$

27. Написать уравненіе касательной къ окружности $x^2+y^2=8$, проведенной черезъ точку $(3, -1)$? Отв. $x-y=4$ и $7x+y=20$.

28. Найти уравнение нормали, проведенной из точки $(2, \frac{1}{2})$ к окружности $x^2+y^2=8$. Отв. $x=4y$.

29. Найти уравнение касательной к окружности $2x^2+2y^2=3$, проведенной параллельно прямой: $x+3y=1$. Отв. $x+3y\pm\sqrt{15}=0$.

30. Найти уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=10$ проведенной параллельно прямой $x+1=0$. Отв. $x=\pm\sqrt{10}$.

31. Найти уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=20$, проведенной перпендикулярно прямой $2x+y+3=0$. Отв. $x-2y\pm 10=0$.

32. Найти уравнение нормали к окружности $3x^2+3y^2=4$, проведенной параллельно прямой: $y+2x-1=0$? Отв. $y=-2x$.

33. Найти уравнение нормали к окружности $x^2+y^2=\frac{1}{2}$, проведенной перпендикулярно прямой $3x+4=0$. Отв. $y=0$.

34. Написать уравнение окружности, которой центр — в начале координат и когда известно еще, что уравнение касательной в одной из ее точек есть $x+2y=5$? Отв. $x^2+y^2=5$

35. Найти на окружности круга: $x^2+y^2=r^2$ такую точку, через которую, если проведем касательную, то она составит с осью x угол в $60°$. Отв. $\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$ и $\left(-\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$.

36. Найти на окружности $x^2+y^2=r^2$ такую точку, если через которую проведем нормальную, то она составила бы с осью абсцисс угол в $105°$? Отв. $\pm\frac{r(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{r(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$.

37. Вывести уравнение касательной и нормали к окружности, которой уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Отв. Уравнение касат. $y-y_1=-\frac{x_1-a}{y_1-b}(x-x_1)$ и ур-ие норм. $y-y_1=\frac{y_1-b}{x_1-a}(x-x_1)$.

38. Вывести уравнение касательной и нормальной к окружности, которой уравнение $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Отв. у-ие касательной $y-y_1=\frac{2x_1+A}{2y_1+B}(x-x_1)$, ур-ие нормалью $y-y_1=\frac{2y_1+B}{2x_1+A}\cdot(x-x_1)$.

39. Найти уравнение касательной, проведенной через начало координат к окружности $x^2+y^2-2y-3x=0$. Отв. $2y+3x=0$.

40. Написать уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=-2x+4y-21=0$, проведенной из точки $(-3,4)$. Отв. $y-5x=19$.

41. Найти уравнение нормалью, проведенной из точки $(3,4)$ к окружности $x^2+y^2-2x-4=0$. Отв. $y=2(x-1)$.

42. Найти уравнение касательной к окружности: $x^2+y^2-3x+2y=0$, проведенной параллельно прямой $3x+2y=4$. Отв. $2y+3x-9=0$ и $2y+3x+4=0$.

43. Найти уравнение касательной к окружности $x^2+y^2+2x+4y-4=0$, проведенной перпендикулярно прямой: $x\sqrt{3}=4$. Отв. $y=1$, $y=-5$.

44. Найти уравнение окружности, которой центр в точке $(3,1)$ и когда уравнение касательной к одной из ея точек есть $x=4$? Отв. $x^2+y^2-6x+2y+9=0$.

45. Составить уравнение касательной к окружностям: $x^2+y^2=\frac{1}{9}$ и $x^2-6x+y^2=0$? Отв. $8x\pm y\sqrt{17}+3=0$.

46. Написать уравнение окружности, лежащей во второмъ углу, касающейся осей координат, когда радиусъ окружности $=\sqrt{3}$. Отв. $x^2+y^2+2x\sqrt{3}-2y\sqrt{3}+3=0$.

47. Составить уравнение касательной къ окружностямъ: $x^2+y^2=\frac{1}{9}$ и $x^2-6x+y^2=0$? Отв. $8x\pm\sqrt{17}\cdot y+3=0$.

48. Написать уравнение окружности, лежащей во второмъ углу и касающейся осей координатъ, когда радіусъ окружности равенъ $\sqrt{3}$. Отв. $x^2+y^2+2x\sqrt{3}-2y\sqrt{3}+3=0$.

49. Найти уравнение окружности, касающейся отрицательныхъ осей координатъ на разстояніи a отъ начала координатъ. Отв. $x^2+y^2+2ax+2ay+a^2=0$.

50. Написать уравнение окружности, касательной оси абсциссъ и равнодѣлящей уголъ, составленный положительными направленіями осей координатъ, когда радіусъ окружности R. Отв. $\left[x-R(\sqrt{2}+1)\right]^2=R^2$.

51. Показать, что уравнение окружности радіуса r, касающейся осей координатъ, проведенныхъ подъ угломъ ω, есть: $x^2+y^2+2xy\cos\omega-2(x+y)r\operatorname{Ctg}\frac{\omega}{2}+r^2\operatorname{Ctg}^2\frac{\omega}{2}=0$.

52. Показать, что предыдущее уравнение можно написать слѣдующимъ образомъ: $x+y-2\sqrt{xy}\cdot\sin\frac{\omega}{2}=r\operatorname{Ctg}\frac{\omega}{2}$.

53. Найти уравнение окружности, проходящей черезъ точку (1 и касающейся прямой $x-2y+5=0$ въ точкѣ, которой абсцисса $=1$. Отв. $x^2+y^2-4x-2y=0$

54. Найти уравнение окружности, проходящей черезъ точки: $(1,2)$, $(2,-1)$ и касающейся прямой $y=-7x-7$. Отв. $2x^2+2y^2-y-5=0$.

55. Найти уравнение окружности, проходящей черезъ точку $(6,3)$ и касающейся осей координатъ. Отв. $x^2+y^2-6x-6y+9=0$ и $x^2+y^2-30x-30y+225=0$.

56. Найти уравнение окружности, проходящей через точку (1,1) и касающейся прямых: $y+7=3$ и $7y+x-3=0$. Отв. $x^2+y^2-7x-7y+12=0$ и $9x+9y^2-13x-13y+8=0$

57. Найти уравнение окружности, касающейся трех прямых: $x=7$; $y=2$ и $y+8=0$? Отв. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ и $x^2+y^2-24x+6y+128=0$.

58. Найти уравнение окружности, проходящей через точки: (12,9) (8,1) и касающейся окружности $x^2+y^2=25$. Отв. $x^2+y^2-16x-12y+75=0$.

59. Показать, что уравнение $(hy-kx)^2=r^2\left[(x-h)^2+(y-k)^2\right]$ представляет уравнение двух касательных к окружности $x^2+y^2=r^2$, проведенных из точки (h,k)?

60. Дано основание AB треугольника ABC и сумма квадратов AB и BC двух других его сторон. Определить геометрическое место вершины C, когда AB не изменяет своего положения, а две другие изменяют. Отв. Окружность.

61. Даны две точки $A(a,b)$ и $B(c,d)$. определить геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию: $m\,AM^2 \pm n\,BM^2=l^2$, где m и n числа положительные, а l определенная длина? Отв. Окружность.

62. Даны две точки: $A(a,b)$ и $B(c,d)$, определить геометрическое место точек M, для которых $AM=m\,Bm$, где m число положительное не равное 1. Отв. Окружность.

23. Через точку A, взятую на окружности, проведем хорду AB и продолжим её. на продолжении возьмем такую точку M, чтобы произведение AB на AM было постоянно, какъ бы ни проводили хорду? Определить геометрическое место точки M. Отв. Прямая.

64. Точка M движется так, что сумма квадратов расстояний от нея до n данных точек есть величина постоянная. Определить геометрическое место точек M. Отв. Окружность.

65. Точка M движется так, что сумма квадратов расстояний от нея до четырех сторон данного квадрата есть величина постоянная. Определить геометрическое место точек M? Отв. Круг.

66. Точка движется так, что сумма квадратов расстояний до трех сторон данного правильного треугольника есть величина постоянная. Определить геометрическое место точек M. Отв. Круг.

67. Найти уравнение геометрического места вершин треугольников, имеющих тоже основание и тот же угол? Отв. Окружность.

68. Прямая движется так, что сумма перпендикуляров AP и BQ, опущенных на нее из данных точек A и B есть величина постоянная. Определить геометрическое место середин PQ. Отв. Круг.

69. Дан равносторонний треугольник ABC. Определить геометрическое место таких точек M, для которых $MA = MB + MC$? Отв. Круг.

Часть 2-я

Теорія кривыхъ 2-го порядка.

1) На параболу.

1. Даны точки: $(-1,4)$ $(3,3)$ $(\frac{1}{2},-3)$ $(\frac{1}{3},-1)$ $(-1,-2)$ $(5,2)$ и парабола, которой уравненіе $y^2=3x$. Указать, которая изъ этихъ точекъ лежатъ на параболѣ, внѣ параболы и внутри параболы? Отв. 2 и 4 на параболѣ; 1 и 5 внѣ параболы. 3 и 6 внутри параболы.

2. Опредѣлить параметръ параболы, которой уравненіе есть: $2y^2-3x=0$. Отв. $\frac{3}{2}$.

3. Найти точки пересѣченія параболы $2x^2=y$ съ прямою, которой уравненіе есть $2x+y+4=0$. Отв. Нѣтъ.

4. Найти точки пересѣченія параболы $y^2=3x$ съ прямою $x+3y=0$. Отв. $(0,0)$ и $(27,-9)$.

5. Найти точки пересѣченія параболы $4y^2+x=0$ съ прямою $x+8=0$. Отв. $(-8\pm\sqrt{2})$.

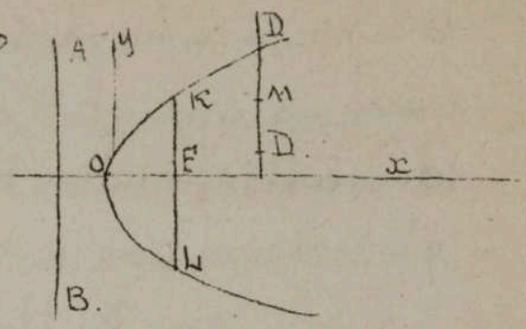
6. Найти точки на параболѣ, директриса которыя равныя координатѣ? Отв. $(0,0)$ и $[2p,2p)$

7. Опредѣлить геометрическое значеніе уравненія $2x^2-y=0$. Отв. Парабола, которой ось совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ оси y.

8. Построить кривую: $x^2+3y=0$. Отвѣтъ. Парабола, которой ось совпадаетъ съ отрицательнымъ направленіемъ оси y.

9. Найти уравненія прямой, проходящей черезъ точки O и K. Отв. $y=2x$.

Найти уравнение окружности, проходящей через точки O, K и N.
Отв. $y^2 - \frac{5}{2}px + x^2 = 0$.



на гиперболу.

1. Дана гипербола $x^2 - 3y^2 = 4$ и точки $(1,1)\ (2,0)\ (-3,-2)\ (-4,2)\ (3,\frac{1}{2})$ и $(-4,-\frac{1}{3})$ Которые из этих точек лежат на данной гиперболе, между ветвями гиперболы и внутри гиперболы. Отв. 2 и 4 на гиперболе; 5 и 6 между ветвями гиперболы и 1 и 3 внутри гиперболы.

2. Определить полуоси гиперболы, уравнение которой есть: $x^2 - 4y^2 = 9$. Отв. 3 и $\frac{3}{2}$.

3. Определить эксцентриситет гиперболы, уравнение которой есть: $4y^2 - x^2 = 9$ Отв. $\sqrt{5}$.

4. Начертить кривую: $16x^2 - 9y^2 = 25$. Отв. Гипербола, которая пересекает ось абсцисс; действительная ось равна $\frac{5}{2}$, а мнимая равна $\frac{10}{3}$.

5. Написать уравнение гиперболы, когда направление мнимой оси принять за ось абсцисс, а направление действительной оси за ось ординат. Отв. $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

6. Начертить кривую: $9y^2 - 16x^2 = 25$. Отв. Гипербола, которая пересекает ось ординат; действительная ось равна $\frac{10}{3}$, а мнимая $\frac{5}{4}$.

7. Написать уравнение гиперболы, когда начало координат принять в точку (h,k), лежащую на гиперболе и направление осей координат оставить прежде! Отв. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2\left(\frac{hx}{a^2} - \frac{ky}{b^2}\right) = 0$.

8. Найти точки пересечения гиперболы $xy = 6$ с прямой $x + 3y = 11$. Отв. $(2,3)$ и $(9,\frac{2}{3})$.

9. Определить точки пересѣченія гиперболы: $x^2-y^2=4$ съ прямою $2x+3y=8$. Отв. $(1,2)$ и $\left(-\frac{23}{7}, \frac{34}{7}\right)$.

10. Найти точки пересѣченія гиперболы: $x^2-y^2=4$ съ прямою $x^2+y^2=4$. съ прямою $x-y=4$. Отв. $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

3, На Эллипсѣ.

1. Даны точки: $\left(2, 1\frac{1}{2}\right)$ $(-1,0)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -1\right)$ $(0,4,1)$ и эллипсъ $3x^2+y^2=3$. Которыя изъ этихъ точекъ лежатъ на эллипсѣ, внутри или внѣ эллипса? Отв. 2-я и 4-я на эллипсѣ; 3 и 5 внутри и 1-я внѣ эллипса.

2. Опредѣлить полуоси эллипса, котораго ур-іе: $2x^2+3y^2=4$. Отв. $\sqrt{2}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. Опредѣлить эксцентриситетъ эллипса, котораго уравненіе $3x^2+2y^2=3$. Отв. $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

4. Начертить кривую $4x^2+9y^2=16$. Отв. Эллипсъ, котораго полуоси суть: $a=2$ и $b=\frac{4}{3}$.

5. Найти на эллипсѣ точки, равноотстоящія отъ начала координатъ. Отв. $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

6. Найти точки пересѣченія эллипса: $4x^2+y^2=17$ съ прямою $3x-y=5$. Отв. $(2,1)$ и $\left(\frac{4}{13}, -4\frac{1}{13}\right)$

7. Найти точки пересѣченія эллипса $4x^2+9y^2=32$ съ прямою $2x-3y+8=0$. Отв $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$

8. Найти точки пересѣченія эллипса $5x^2+3y^2=3$ съ прямою $x+6=0$. Отв. Нѣтъ

9. Опредѣлить абсциссу точки пересѣченія касательной въ эллипсѣ съ осью абсциссъ? Отв. $\frac{a^2}{x_1}$

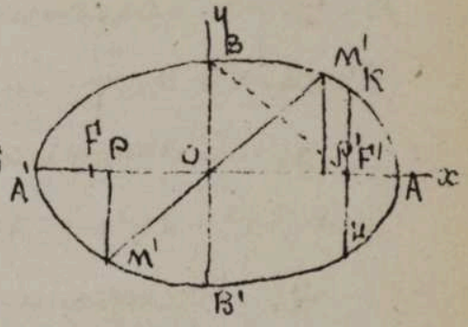
10. Найти точки пересѣченія эллипса съ окружностью, ко—

торой центръ сливается съ центромъ эллипса. Отв. $\left(\pm\frac{a}{c}\sqrt{R^2-b^2}, \pm\frac{b}{c}\sqrt{a^2-R^2}\right)$

11. Найти точки пересѣченія эллипса съ параболою, которой вершина находится въ центрѣ эллипса и фокусъ совпадаетъ съ фокусомъ эллипса, лежащимъ на положительной части оси абсциссъ? Отв. $\left[\frac{a(1-e)}{1+e} \pm 2a\sqrt{\frac{e(1-e)}{1+e}}\right)$

12. Написать уравненіе эллипса, когда направленіе большой оси примемъ за ось ординатъ, а прямую, проходящую черезъ конецъ (вершину) В сидой оси, параллельной большой оси эллипса, за ось абсциссъ? Отв. $a^2y^2 + 2a^2[illegible] = 0$.

13. Написать уравненіе эллипса, когда за ось абсциссъ примемъ прямую, проходящую черезъ точку B' параллельно большой оси эллипса, а за ось ординатъ прямую, проходящую черезъ вершину A', параллельно сиенышей оси. Отв. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{u}{b}\right) + 1 = 0$



14. Найти уравненіе эллипса, когда начало координатъ перенесемъ въ точку (h, k), лежащую на эллипсѣ, а направленіе осей координатъ оставимъ тоже самое. Отв. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2hx}{a^2} + \frac{2ky}{b^2} = 0$.

Опредѣлить геометрическія мѣста нижеслѣдующихъ ур-ій т.е. представляетъ ли каждое изъ этихъ уравненій точку или одну прямую или двѣ прямыя или же линію второго порядка. Розыскать центръ кривой, если она имѣетъ, а также и оси кривыя:

1 $x^2 + 2y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$. Отв. Эллипсъ: $4x^2 + 8y^2 = 43$; $n = \frac{3}{2}$, $k = 1$

2. $14x^2-4xy+11y^2+60=0$. Отв. Эллипс: $2x^2+3y^2=12$. $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{4}{3}$.

3. $5x^2-3xy+y^2+1=0$. Отв. Никакого геометрич. смысла.

4. $2x^2-2xy+y^2-6x+9=0$. Отв. точку $(3,3)$.

5. $2x^2+4xy+3y^2-x+3y-42=0$. Отв. Эллипс: $(5+\sqrt{37})x^2+(7-\sqrt{37})y^2=2$. $h=-\frac{7}{6}$ и $K=-1$ $\alpha=40°16'8''$ (см. отв. зад. 6)

6. $3x^2-6yx+4y^2+x+y+\frac{1}{12}=0$. Отв. Эллипс. Отв. $(5+\sqrt{17})x^2+(5-\sqrt{17})y^2=72$. $h=2\frac{1}{4}$ и $K=-2$. (См. отв. зад. 5).

7. $3x^2-2xy-y^2+8x+4y-3=0$. Отв. Две прямые: $y+3x=1$ и $y-x=3$.

8. $2x^2-y^2+x-2=0$ Отв. Гипербола: $16x^2-8y=17$, $h=1/4$, $K=0$.

9. $3x^2+8xy-3y^2+10=0$ Отв. Гипербола: $x^2-y^2+2=0$. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{4}{5}$.

10. $11x^2+84xy-24y^2=156$ Отв Гипербола: $3x^2-4y^2=12$. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{84}{35}$.

11. $2x^2-xy-y^2+3x+y=0$. Отв. Гипербола: $9(\sqrt{10}+1)x^2+9(\sqrt{10}-1)y^2=20$ $h=-7/9$ и $K=1/9$.

12. $x^2-3xy-3y^2+2x-y-\frac{4}{21}=0$. Отв. Гипербола. $3x^2-7y^2=2$, $h=-\frac{5}{7}$ и $K=\frac{4}{21}$; $\operatorname{tg}2\alpha=-0{,}75$.

13. $xy+3x+2y+12=0$. Отв. Гипербола $y^2-x^2=12$, $\alpha=45°$; $h=-2$ $K=-3$.

14. $4x^2-12xy+9y^2+2x-3y+10=0$. Отв. Две прямые; одна $3x-2x-2$ и $3y-2x=-1$.

15. $x^2+6xy+9y^2+x+3y+0{,}8=0$. Отв. Никакого геометр. смысла.

16. $y^2+3x-4=0$. Отв. Парабола: $y^2=-3x$; $\alpha=0$; $h=\frac{4}{3}$ и $K=0$.

17. $x^2-2xy+y^2+x=0$. Отв. Парабола: $2\sqrt{2}y^2+x=0$. $\alpha=45°$, $h=\frac{1}{8}\sqrt{2}$ и $K=\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

18. $4x^2-4xy+y^2+x-2=0$. Отв. Парабола: $5\sqrt{5}y^2+x=0$ и $\operatorname{tg} 2\alpha=2$.

19. $x^2-2xy+y^2-x-y=0+1$. Отв. парабола: $y^2=\sqrt{\frac{1}{2}}x$, $\alpha=45°$, $h=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $k=0$.

Определить ассимптоты гиперболы.

1. $x^2-xy-x-3y-10=0$. Отв. $x=-3$, $y=-4$.

2. $xy-x=y+2=0$. Отв. $y=1$, $x=1$.

3. $y=\pm\sqrt{x^2-3x+2}$? Отв. $y=\pm\left(x-\frac{3}{2}\right)$

4. $y=\pm\sqrt{x^2+2x+2}$. Отв. $y=\pm(x+1)$

5. $y=\frac{x^2+x+1}{x-1}$. Отв. $y=x+2$ и $x=1$.

6. $y=\frac{x^2}{1-x}$. Отв. $x=1$, $y=-x-1$

7. $y=x+1+\frac{1}{x}$, Отв. $y=x+1$, $x=0$

8. $y=\frac{x}{1+x}$. Отв. $y=1$, $x=-1$.

1. Определить условие, при котором ур-ие $y=\frac{x^2+px+a}{x+l}$ представляет уравнение двух прямых. Отв. Условие: $l^2-pl+q=0$ уравнения прямых суть: $y=x+p-l$ и $x+l=0$.

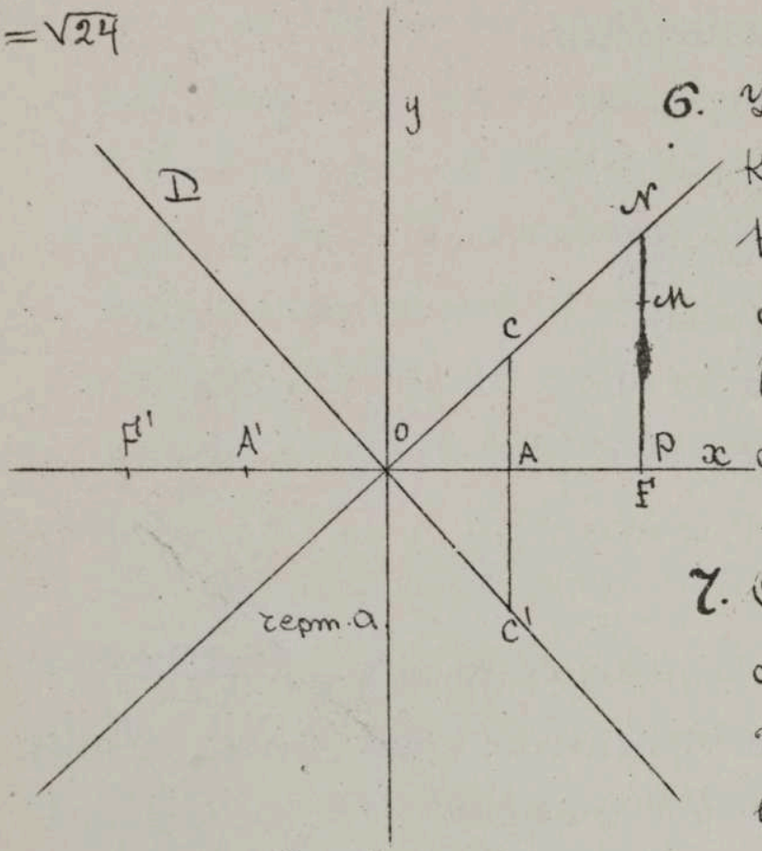
2. Определить геометрическое значение уравнения: $(y-x)^2+$ $+(m^2-1)x^2=2\left(m-\frac{1}{2}\right)(m-1)$. Отв. при $m=-\infty$ две прямые от $m=-\infty$ до $m=-1$. представляет эллипсъ, от $m=1$ до $m=\frac{1}{2}$ гиперболу, при $m=\frac{1}{2}$ уравнение представляет две прямыя; при изменении m от $m=\frac{1}{2}$ до $m=1$ представляет гиперболу; при $m=1$ прямую $y=x$; при $m>1$ - эллипсъ, а при $m=\infty$ две параллельныя прямыя.

3. Определить произведение разстояний какой нибудь точки гиперболы $x^2-4y^2=5$ до ея асимптотъ? Отв. 1.

4. Уравнение гиперболы есть $2x^2-3y^2=4$. Написать ур-ия ея асимптотъ. Отв. $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot x$.

5. Дано ур-ие гиперболы $2x^2-3y^2=6$. Написать ур-ие

этой гиперболы, отнесенной къ ея ассимптотамъ и опредѣлить уголъ COC' (черт. а) смежный ассимптотами. Отв. $xy=\frac{5}{4}$, $\operatorname{tg} COC'=\sqrt{24}$



6. Уравненіе гиперболы, отнесенной къ ея ассимптотамъ есть $xy=2$. Написать ур-іе гиперболы въ обыкновенномъ видѣ, когда извѣстно, что уголъ смежный ассимптотами $=60°$. Отв. $x^2-3y^2=6$.

7. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ неравныхъ окружностей, которыхъ центры O и O' и $R>R'$, то искомое геометрическое мѣсто есть гипербола, у которой дѣйствительная ось есть $R-R'$, а фокусы въ точкахъ O и O'.

8. Опредѣлить геометрическое мѣсто центровъ круговъ, касающихся двухъ неравныхъ круговъ. Отв. см. предыдущее рѣшеніе.

9. Изъ какой нибудь точки гиперболы (M) опустимъ перпендикуляръ MP, перпендикулярный ось, продолжимъ MP, отложимъ на немъ часть $MN=PM$. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ N. Отв. Гипербола, у которой оси суть: $2a$ и $4b$.

10 Черезъ какую нибудь точку гиперболы проведемъ нор-

мальную, которая встретить пересекающую ось въ точкѣ C. Продолживъ прямую CM, возмемъ на ней такую точку N, для которой $CN = n\,CM$. Опредѣлить геометрическое мѣсто отв. Гипербола, укоторой оси суть: $\frac{2(c^2 - nb^2)}{a}$ и $2nb$.

11. Возмемъ какую нибудь точку M на гиперболѣ и соединимъ её съ фокусами F и F^1. Черезъ вершину A и средину радіуса вектора F^1M проведемъ прямую, которая пересѣчетъ радіусъ векторъ F^1M въ точкѣ N. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ N? Отв. Гипербола, у которой оси будутъ равны: $a+c$ и $\frac{b(a+c)}{a}$.

На касательныя нормали къ параболѣ.

1. Опредѣлить уголъ между касательною, проведенною въ точкѣ K параболы и прямою OK. Отв. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

2. Найти такую точку на параболѣ, въ которой касательная наклонена къ оси абсциссъ подъ угломъ въ 30°. Отв. $\frac{3}{2}p$, $p\sqrt{3}$.

3. Найти такую точку на параболѣ, черезъ которую если проведемъ нормальную, то она составлялась бы съ осью абсциссъ уголъ въ 60°. Отв. $\left(\frac{3}{2}p, -p\sqrt{3}\right)$.

4. Найти уравненіе касательной къ параболѣ, проходящей черезъ точку K и опредѣлить уголъ, составленный этой касательной съ осью абсциссъ? $y = -x - \frac{p}{2}$, уголъ $= 135°$.

5. Найти такія точки на параболѣ, если черезъ которыя проведемъ касательныя, то разстояніе до каждой изъ нихъ до точки пересѣченія директрисы со осью параболы

было бы равно четверти параметра. Отв. $(0,0)$, $\left(\frac{3}{2}p, p\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{3}{2}p, -p\sqrt{3}\right)$.

6. Найти на параболе $y^2 = 2px$ такую точку, что если через нее провести касательную, то длина касательной была бы равна a. Отв. $\left\{\frac{\sqrt{p^2+4a^2}-p}{4} \pm \sqrt{\frac{p}{2}\left(\sqrt{p^2+4a^2}-p\right)}\right\}$.

7. Написать уравнение параболы в обыкновенном виде, когда известно, что поднормаль в одной из ее точек $= 7$. Отв. $y^2 = 14x$.

8. Написать уравнение параболы в обыкновенном виде, когда известно, что парабола проходит через точку $(3,3)$. Отв. $y^2 = \frac{25}{3}x$.

9. Из точки, взятой вне параболы, провести касательную к параболе. Отв. Положим дана парабола, которой фокус есть F и директриса AB; требуется из точки N, взятой вне параболы провести к ней касательную. Из точки N опишем окружность радиусом NF, которая пересечет директрису AB в точках K и K'. Прямая, проходящая через точку N перпендикулярно к прямой FK есть одна искомая касательная, а прямая, проходящая через точку N перпендикулярно к прямой FK' есть другая искомая касательная.

10. Провести касательную к параболе нормально или перпендикулярно данной прямой. Отв. Положим дана парабола, которой фокус есть F и директриса AB; требуется провести касательную параллельно прямой PQ. Опустим из точки F перпендикуляр на прямую PQ, которая

пересечет директрису в точке K, тогда прямая, проходящая через середину прямой FK перпендикулярно к ней есть искомая касательная. Если же надо провести касательную перпендикулярно к данной прямой, то решение будет одинаковое с предыдущим, только прямую FK надо провести параллельно данной прямой.

11. Провести касательную к параболе под данным углом к данной прямой? Отв. Касательная, проведенная параллельно прямой, составляющей данный угол с данной прямой, будет искомой.

12. Найти ур-ие касательной к параболе $y=x^2$, проведенной через точку кривой, когда абсцисса этой точки равна 3. Отв. $y-6x+9=0$.

13. Найти уравнение нормали к параболе $x^2=2y$, проведенной через точку $(-4,8)$ кривой? Отв. $\pm x-4y+36=0$.

14. Найти уравнение касательной к параболе $y^2=4x$, проведенной из точки $(-3,2)$. Отв. $3y=x+9$ и $y+x+1=0$.

15. Найти уравнение нормали к параболе $2y^2=x$, проведенной параллельно прямой $x+2y=1$. Отв. $2x+4y+1=0$.

16. Найти ур-ие касательной к параболе $y^2=3x$, проведенной перпендикулярно прямой $y=2x$. Отв. $x+2y+3=0$.

17. Найти уравнение касательной к параболе $y^2=2px$, проведенной перпендикулярно прямой $x=a$. Отв. Задача невозможная.

18. Найти ур-ie касательной къ парабомъ $y^2=4x$, проведенной подъ угломъ 60° къ прямой $y=x\sqrt{3}+1$. Отв. $y=-x\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

19. Найти уравненie нормальной къ парабомъ $2x^2=y$, проведенной параллельно прямой $x+4y=3$. Отв. $4y+x-9=0$.

20. Найти уравненie нормальной къ парабомъ $x^2+3y=0$, проведенной перпендикулярно прямой $2x+3y=6$. Отв. $2x-6y+7=0$.

21. Найти уравненie касательной къ парабомъ $4x^2+y=0$, проведенной перпендикулярно прямой $x+16y=0$. Отв $y=16x+24$.

22. Написать ур-ie касательной и нормальной для параболы, когда директриса принята за ось ординатъ, а ось параболы за ось абсциссъ? Отв. Ур-ie касательной $yy'=p(x+x'-p)$, а ур-ie нормальной $y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x')$

23. Найти ур-ie касательной къ парабомъ, когда начало Координатъ перенесемъ въ фокусъ параболы, оставивъ тоже направленie осей. Отв. Уравненie касательной $yy'=p(x+x'+p)$ или $y=m\left(x+\frac{p}{2}\right)+\frac{p}{2m}$.

24. Написать уравненie параболы въ обыкновенномъ видѣ, когда извѣстно, что она касается прямой $x=8(y-1)$. Отв. $y^2=\frac{1}{2}x$.

Къ Эллипсу.

1. Найти уравненie касательной къ эллипсу $x^2+3y^2=4$, проведенной изъ точки $(5,3)$. Отв. $x-3y+4=0$, $23x-21y=52$.

2. Найти уравненie касательной къ эллипсу: $3x^2+4y^2=13$, параллельной прямой $y=3x+4$. Отв. $2y-6x=13$ и $6x-2y=13$.

3. Найти уравнение касательной к эллипсу $5x^2+y^2=5$, параллельной прямой $2x+3=0$. Отв. $x=\pm 1$.

4. Найти уравнение касательной к эллипсу $2x^2+9y^2=8$, параллельной прямой $y=4$. Отв. $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

5. Найти уравнение касательной к эллипсу $4x^2+9y^2=32$, перпендикулярной к прямой $2y+3x-7=0$. Отв. $2x-3y\pm 8=0$.

6. Найти уравнение касательной к эллипсу $x^2+0{,}5y^2=3$, перпендикулярной к прямой $x=2$. Отв. $y=\pm\sqrt{6}$.

7. Найти уравнение касательной к эллипсу $4x^2+y^2=9$, перпендикулярной к прямой $2y-1=0$. Отв. $x=\pm 1{,}5$.

8. Найти уравнение нормали к эллипсу $2x^2+y^2=3$, проведенной перпендикулярно прямой $y+2x=0$. Отв. $x-2y\pm 1=0$.

9. Определить длины нормали и поднормали для эллипса $x^2+4y^2=4$, когда нормаль параллельна прямой $2x+3y=0$. Отв. $N=\sqrt{\frac{13}{40}}$, $N_B=\sqrt{\frac{9}{40}}$

10. Показать, что из точки, взятой вне эллипса, можно к нему провести только две касательные. Отв. Положим, дан эллипс, которого уравнение: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ и точка вне его (α,β). Означим буквами (x',y') координаты точки касания, для касательной, проведенной из точки (α,β) найдем, что ея уравнение есть $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$. Но эта касательная проходит через точку (α,β), а потому $a^2\beta y'+b^2\alpha x'=a^2b^2$. Кроме того точка (x',y') сидит на эллипсе, а потому $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$. Решив эти два последния уравнения относительно x', y', найдем две пары решений, т.е., что из-

точки (α, β) къ эллипсу можно провести только двѣ касательныхъ.

11. Найти такую точку на эллипсѣ, чтобы касательная, проведенная черезъ эту точку была бы равно наклонена къ обѣимъ осямъ его. Отв. $\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

12. Найти на эллипсѣ такую точку, чтобы касательная, проведенная черезъ эту точку, отсѣкала на осяхъ равные отрѣзки, которые были бы пропорціональны данными соотвѣтствующимъ осей. Отв. $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

13. Найти на эллипсѣ такую точку, если черезъ которую проведемъ касательную, то она составила бы съ осью абсциссъ уголъ въ 45°. Отв. $\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

14. Найти на эллипсѣ такую точку, если черезъ которую проведемъ нормальную, то она составила бы съ осью абсциссъ уголъ въ 135°. Отв. См. отв. 11 задачи.

15. Найти условіе, при которомъ прямая $y=mx+n$. была бы касательна къ эллипсу $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Отв. при $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

Къ гиперболѣ.

1. Найти уравненіе касательной къ гиперболѣ $2x^2-3y^2=5$, проведенной изъ точки $(1,3)$. Отв. $3y-4x=5$ и $16x+3y=25$.

2. Найти уравненіе касательной къ гиперболѣ $4x^2-y^2=15$, параллельной прямой $8x-y=3$. Отв. $8x-y=15$ и $8x-y=-15$.

3. Найти уравненіе касательной къ гиперболѣ $5y^2-3x^2+2=0$

Высшій анализъ.

Часть 2-я

Лекціи доцента

Н. А. Шапошникова.

О безконечно-малыхъ количествахъ различныхъ порядковъ.

Количествами безконечно-малыми, какъ намъ извѣстно, называются такія перемѣнныя количества, которыя имѣютъ своимъ предѣломъ 0; т.е. такія перемѣнныя, которыя неопредѣленно уменьшаются и могутъ сдѣлаться сколь угодно малыми. Такъ, если положимъ, что x стремится къ 0, то количества: $\sin^2 x$; $1-\sqrt{1+x}$; $1-\cos x$; $\operatorname{tg}^2 x$ и т. д. тоже приближаются всѣ къ 0 вмѣстѣ съ x, а потому это будутъ количества безконечно-малыя. Если въ какомъ нибудь вопросѣ входятъ нѣсколько безконечно-малыхъ, то ихъ размѣщаютъ между собою, раздѣляя ихъ на порядки по степени быстроты, съ которою они стремятся къ 0. Основаніемъ, для дѣленія безконечно-малыхъ на порядки, ставятъ слѣдующее соображеніе. Положимъ, что α есть безконечно малое количество и разсмотримъ вмѣстѣ съ нимъ послѣдовательныя его степени $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ и т. д. Всѣ эти степени въ одно время съ α приближаются къ 0, но очевидно съ различною степенью быстроты, а именно, чѣмъ выше степень α, тѣмъ быстрѣе она приближается къ 0. Положимъ напр., что α уменьшаясь достигла весьма малой величины $\frac{1}{10^{10}}$, то α^2 въ то-же время достигнетъ величины гораздо меньшей $=\frac{1}{10^{20}}$, α^3 сдѣлается тогда равнымъ еще меньшей величинѣ $\frac{1}{10^{30}}$ и т. д. чѣмъ выше возьмемъ степень α, тѣмъ меньше будетъ ея величина и тѣмъ ближе она будетъ подходить къ 0. Такимъ образомъ мы видимъ, что между послѣдовательными степенями одного и того-же безконечно-малаго, есть весьма значительное различіе въ степени быстроты, съ которою они приближаются къ 0. Подобное-же различіе, какъ сейчасъ увидимъ, можетъ быть вообще между

разными бесконечномалыми одновременно приближающимися къ нулю.

Предположимъ, что въ разсматриваемомъ нами вопросѣ входитъ нѣсколько бесконечно малыхъ количествъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots$ и такъ далѣе, которыя всѣ одновременно стремятся къ О. Выберемъ изъ этихъ колич. простѣйшее по виду, пусть это — будетъ α; назовемъ его главнымъ бесконечномалымъ количествомъ и будемъ съ нимъ сравнивать другія бесконечно-малыя количества $\beta, \gamma, \delta \ldots\ldots$ Для опредѣленія порядка различныхъ бесконечно-малыхъ, мы примемъ въ основаніе слѣдующее опредѣленіе. Бесконечно-малымъ перваго порядка, мы будемъ называть такое бесконечно-малое количество, которое отношеніе къ первой степени главнаго бесконечно-малаго имѣетъ предѣломъ величину конечную, не равную нулю. Поэтому опредѣленію β, напримѣръ, будетъ бесконечно-малымъ перваго порядка, если $\lim \frac{\beta}{\alpha} = K$, гдѣ К есть количество конечное, не равное нулю.

Бесконечно-малымъ втораго порядка, мы будемъ называть такое бесконечно-малое, которое отношеніе ко второй степени главнаго бесконечно-малаго имѣетъ предѣломъ величину конечную не равную нулю. Такимъ образомъ γ, напр., есть бесконечномалое втораго порядка, если $\lim \frac{\gamma}{\alpha^2} = K$, гдѣ К есть величина конечная не равная О или ∞. Вообще бесконечно-малымъ $n^{го}$ порядка назыв. такое бесконечно-малое количество, отношеніе котораго къ $n^{ой}$ степени главнаго бесконечно-малаго имѣетъ предѣломъ нѣкоторую конечную величину К, причемъ $K \neq 0$. На основаніи этого опредѣленія ε будетъ бесконечно-малымъ $n^{го}$ порядка, если $\lim \frac{\varepsilon}{\alpha^n} = K$, гдѣ $K \neq 0$ и $K \neq \infty$.

Руководясь этимъ послѣднимъ опредѣленіемъ, можно дать общую формулу или общее выраженіе для бесконечно-малаго ко-

личества $n^{го}$ порядка. Если ε есть безконечно-малое $n^{го}$ порядка, то отношение ε къ α^n, т. е. дробь $\frac{\varepsilon}{\alpha^n}$, съ уменьшением α стремится къ K, и при весьма маломъ значеніи α, это отношеніе будетъ слѣдовательно, весьма мало отличаться отъ K. На этомъ основаніи мы можемъ положить, что $\frac{\varepsilon}{\alpha^n} = K + \omega$, гдѣ ω есть количество нельзя-кое положительное или отрицательное, но такое, которое съ уменьшеніемъ α также стремится къ 0; словомъ ω здѣсь есть также безконечно-малое количество. Изъ полученнаго равенства имѣемъ:

$$\varepsilon = \alpha^n (K + \omega)$$

Это и есть общая формула выражающая безконечно-малое $n^{го}$ порядка. Если положимъ что $K + \omega = M$, то послѣдняя формула напишется такъ $\varepsilon = M . \alpha^n$, гдѣ M есть количество перемѣнное, но конечное, такъ какъ имѣетъ конечный предѣлъ, именно: $\lim M = K$

Изъ полученной нами формулы уже можно усмотрѣть, что чѣмъ выше порядокъ безконечно-малаго, тѣмъ быстрѣе оно стремится къ нулю. Дѣйствительно въ выраженіе ε входитъ множителемъ α^n, а этотъ множитель, тѣмъ быстрѣе стремится къ 0 вмѣстѣ съ α, чѣмъ больше n. Это заключеніе еще сдѣлается явственнѣе изъ другихъ соображеній, которыя будутъ указаны ниже. Приведемъ теперь примѣры безконечно-малыхъ порядковъ.

Пусть x есть главное безконечно-малое. Нетрудно усмотрѣть, что притомъ $\sin ax$ есть также безконечно-малое и при томъ первaго порядка. Что-бы доказать это, найдемъ $\lim \frac{\sin ax}{x}$. Помножимъ числитель и знаменатель дроби на a, мы напишемъ это выраженіе въ видѣ $\lim . a . \frac{\sin ax}{ax}$. Теперь мы имѣемъ множителемъ отношеніе синуса безконечно-малой дуги къ самой дугѣ, а такое отношеніе, какъ извѣстно, – имѣетъ предѣломъ 1 (единицу) и потому мы будемъ имѣть: $\lim \frac{\sin ax}{x} = \lim . a \frac{\sin ax}{ax} = a$. И такъ отнош.

данного безконечно-малого $\sin x$ къ первой степени главнаго, т.е. къ x имѣетъ предѣломъ величину конечную, стало-быть данное безконечно-малое есть перваго порядка.

Точно также разность $\sqrt{1+x}-1$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ x, а потому есть безконечно-малое количество. Увѣримся, что оно будетъ безконечно-малое перваго порядка; дѣйствительно, легко найти, что:

$$\lim \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}, \text{ при } x=0 \text{ (см. курсъ анализа часть I}^{\text{я}})$$

а это показываетъ, что отношеніе даннаго безконечно-малаго, т.е. разности $\sqrt{1+x}-1$ къ первой степени главнаго, т.е. къ x, имѣетъ предѣломъ величину конечную не равную 0, слѣдовательно, данное безконечно-малое — перваго порядка.

Возьмемъ еще разность $1-\cos x$. Это выраженіе также стремится къ 0 вмѣстѣ съ x, и стало быть есть безконечно малое количество. Можно доказать, что оно будетъ втораго порядка. Что-бы убѣдиться въ этомъ, мы должны показать, что $\lim \frac{1-\cos x}{x^2}$ есть количество конечное не равное 0. Мы имѣемъ, что $\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$, или раздѣливъ числителя и знаменателя на 4, получимъ:

$$\lim \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \lim \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

Здѣсь мы имѣемъ множителемъ квадратъ отношенія синуса безконечно-малой дуги къ самой дугѣ; предѣлъ такого отношенія равенъ единицѣ. Слѣдовательно мы будемъ имѣть: $\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Отсюда видимъ, что $1-\cos x$ есть безконечно-малое втораго порядка. Возьмемъ еще $\operatorname{tg} x - \sin x$. Это выраженіе тоже стремится къ нулю вмѣстѣ съ x и есть слѣдовательно безконечно-малое количество. Оно будетъ третьяго порядка, ибо можно показать, что: $\lim \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ есть количество конечное не равное 0. Въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ во первыхъ: $\lim \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3}$

или сделавъ вычитаніе, напишемъ тотъ-же предѣлъ въ видѣ:

$$\lim \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} = \lim \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

но мы знаемъ, что: $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ и притомъ $\lim \frac{1}{\cos x} = 1$. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\lim \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Отсюда заключаемъ, что $\operatorname{tg} x - \sin x$ есть безконечно-малое третьяго порядка. Остановимся внимательнѣе на объясненіи того, что чѣмъ выше порядокъ безконечно-малаго, тѣмъ быстрѣе оно приближается къ нулю.

Разсмотримъ съ этой цѣлью отношеніе двухъ безконечно-малыхъ различныхъ порядковъ. Положимъ, что ε есть безконечно-малое $n^{го}$ порядка и означимъ чрезъ α главное безконечно малое. Какъ видѣли выше, мы можемъ ε представить формулою: $\varepsilon = \alpha^n(K+\omega)$, гдѣ K есть величина конечная, а ω безконечно-малое, которое вмѣстѣ съ α стремится къ 0. Пусть ε' есть другое безконечно-малое $m^{го}$ порядка. Подобно предыдущему, оно выразится слѣдующей формулой: $\varepsilon' = \alpha^m(K'+\omega')$. Примемъ, что $n > m$ и возьмемъ отношеніе

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \alpha^{n-m} \cdot \frac{K+\omega}{K'+\omega'}$$

Положимъ теперь, что α стремится къ 0 и перейдемъ въ этомъ равенствѣ къ предѣламъ. Такъ какъ $\lim \alpha^{n-m} = 0$ и $\lim \omega = 0$, то мы будемъ имѣть: $\lim \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 0 \cdot \frac{K}{K'} = 0$.

Мы видимъ отсюда, что отношеніе безконечно-малаго высшаго порядка къ безконечно-малому низшаго порядка стремится къ нулю и имѣетъ предѣломъ нуль. Если будемъ разсматривать обратное отношеніе ε' и ε, то замѣтимъ, что: $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)}$. Если въ этомъ равенствѣ перейдемъ къ предѣламъ, то получимъ:

$$\lim \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{1}{\lim\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе безконечно-малаго низшаго порядка

ка къ безконечно-малому высшаго порядка, увеличивается неопредѣленно и отремится къ ∞.

Теперь мы можемъ вывести заключеніе, что такъ какъ отношеніе безконечно-малаго низшаго порядка къ безконечно-малому высшаго, т.е. $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ стремится къ ∞, то стало-быть это отношеніе можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ. Положимъ, что это отношеніе имѣетъ чрезвычайно большую величину; это будетъ означать, что числитель ε' превышаетъ знаменатель ε въ чрезвычайно большое число разъ. Положимъ, напр., что это отношеніе сдѣлалось равнымъ 1000000, тогда будемъ имѣть, что $\varepsilon' = 1000000.\varepsilon$ и слѣдовательно ε будетъ меньше ε' въ 1000000 разъ. Ясно притомъ, что мы можемъ положить, что ε меньше ε' не только въ 1000000 разъ, но и въ какое угодно чрезвычайно-большое число разъ. Мы видимъ такимъ образомъ, какое различіе существуетъ между двумя безконечно-малыми различныхъ порядковъ: оба они одновременно отремятся къ нулю, но по мѣрѣ того какъ они становятся меньше, различіе между ними становится все значительнѣе и безконечно малое высшаго порядка дѣлается несравненно меньше безконечно-малаго низшаго порядка; такъ что, хотя обѣ эти величины, приближаясь къ нулю, становятся чрезвычайно малы, но все-таки одна изъ нихъ будетъ превосходить другую въ чрезвычайно большое число разъ. Не должно, конечно, удивляться тому, что одно изъ весьма малыхъ количествъ можетъ превышать другое въ чрезвычайно большое число разъ. Положимъ, напр., что ε' очень мало и равно $\frac{1}{10^{100}}$, а ε тоже очень мало и равно, напр., $\frac{1}{10^{200}}$. Эти оба количества весьма малы, но однако, если возьмемъ отношеніе ε' къ ε, то увидимъ, что ε' въ громадное число разъ больше ε; именно:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{10^{200}}{10^{100}} = 10^{100}$$

Такимъ образомъ, между безконечно малыми количествами, мы ума-

приваемъ весьма значительное разнообразіе.

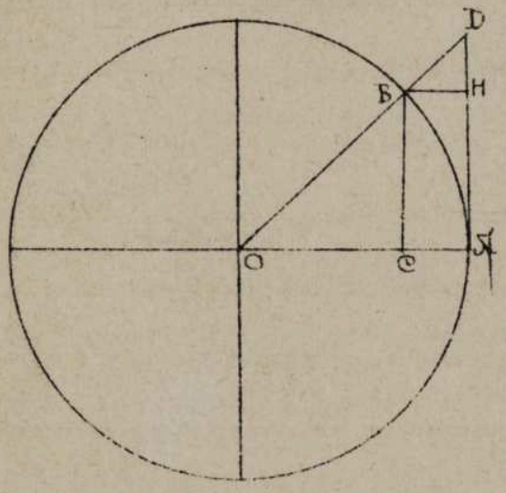
Въ дополненіе къ этому, разсмотримъ отношеніе двухъ безконечно-малыхъ одинаковаго порядка, т.е. положимъ въ предыдущихъ формулахъ, выражающихъ ε и ε', что $m = n$. Взявъ отношеніе безконечно-малыхъ, найдемъ въ настоящемъ случаѣ:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{k' + \omega'}{k + \omega}$$

Переходя въ этомъ равенствѣ къ предѣламъ, мы получимъ, что:

$$\lim \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{k'}{k}$$

Слѣдовательно отношеніе двухъ безконечно-малыхъ одинаковаго порядка имѣетъ предѣломъ величину конечную не равную 0. Изъ приведенныхъ примѣровъ безконечно-малыхъ, мы можемъ представить геометрически. Это представленіе дастъ намъ возможность еще болѣе наглядно судить о ихъ относительной величинѣ.



Возьмемъ кругъ и въ немъ два перпендикулярныхъ діаметра; пусть А есть начало дуги. Возьмемъ дугу $x = AB$ и построимъ для этой дуги $\sin$, $\cos$ и tg. Проведемъ чрезъ точку В ⊥-ръ къ ОА и въ точкѣ А касательную къ кругу. Соединимъ О съ В и продолжимъ СВ до пересѣченія съ касательной AD въ точкѣ D. Проведемъ изъ точки В параллель радіусу ОА. Изъ чертежа мы видимъ, что $BC = \sin x$. Если точки В стремятся совпасть съ А, т.е. если дуга x стремится къ нулю, то $\sin x$ будетъ безконечно-малымъ и при томъ перваго порядка; такожде $AC = 1 - \cos x$, есть безконечно-малое второго порядка; $DH = \operatorname{tg} x - \sin x$ есть безконечно-малое третьяго порядка. Это обстоятельство на порядокъ указываетъ на то, что если мы возьмемъ дугу x — постоянную, но весьма малой, положимъ, что $x = 0{,}001''$, то всѣ три величины BC,

AC и BH будутъ чрезвычайно малы, но все-же между ними будутъ огромныя разницы. Такъ если возьмемъ отношеніе $\frac{BC}{AC}$, то замѣтимъ, что это отношеніе будетъ весьма большимъ числомъ и что, слѣдовательно, длина BC будетъ превышать AC въ весьма большое число разъ. Точно также, взявъ отношеніе $\frac{AC}{DH}$, мы найдемъ и это отношеніе чрезвычайно большимъ и отсюда замѣтимъ, что AC въ свою очередь превышаетъ въ чрезвычайно большое число разъ DH.

Въ теоріи производныхъ функцій, мы опредѣлили производную какъ предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія функціи къ безконечно-малому приращенію независимаго перемѣннаго. Такъ если имѣемъ $y = f(x)$ и положимъ, что x измѣняется безконечно-мало на $x + \Delta x$, причемъ функція, полагая ее непрерывною, получитъ безконечно-малое приращеніе Δy, которое есть:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

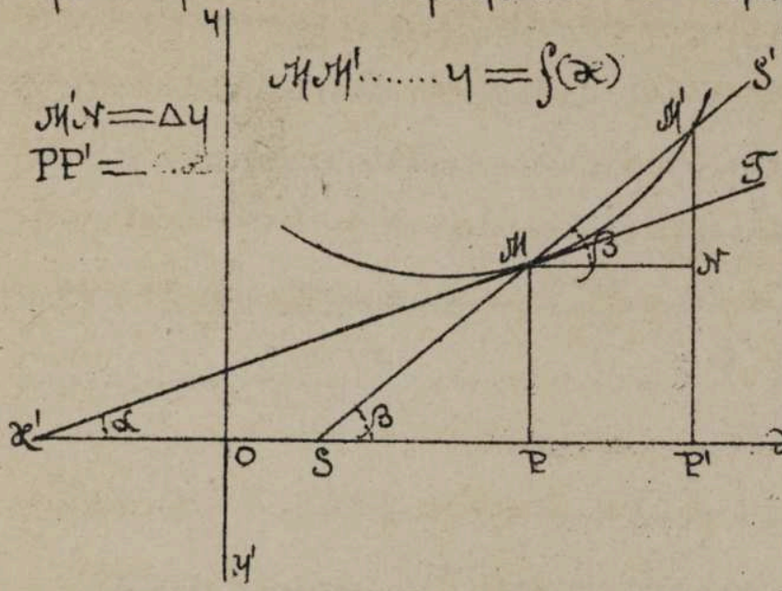
отсюда будемъ имѣть, что:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

т.е. этотъ предѣлъ равенъ производной функціи, которая есть величина конечная и вообще не равная нулю. Отсюда слѣдуетъ, что если Δx примемъ за главное безконечно-малое, то Δy т.е. приращеніе функціи будетъ вообще безконечно-малое количество перваго порядка. Величины Δx и Δy, какъ нами извѣстно могутъ быть представлены на чертежѣ.

Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ и вообразимъ начертежѣ кривую линію, выражаемую ур-іемъ $y = f(x)$. Возьмемъ на этой кривой произвольную точку M и построимъ ея коор-ты x и y (чер. см. на слѣдующей стр.) Дадимъ абсциссѣ x приращеніе $\Delta x = PP'$ и проведемъ новую коор-ту кривой $M'P'$. Проведемъ черезъ точку M параллель оси x'овъ; тогда величина MM' представитъ приращеніе

функціи, т.е. Δy. Соединимъ M съ M', мы получимъ секущую SS', обозначимъ уголъ $M'MN$ или уголъ, образуемый секущей съ осью x-въ черезъ β. Изъ прямоугольнаго треугольника $M'MN$ имѣемъ: $tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Если перейдемъ въ этомъ равенствѣ къ предѣламъ, полагая что Δx стремится къ нулю, т.е. полагая что точка M' стремится совпасть съ точкой M, то при этомъ секущая SS' стремится къ своему предѣльному положенію, т.е. къ касательной въ точкѣ M. Положимъ, что эта касательная образуетъ съ осью x-въ уголъ α; тогда будемъ имѣть:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim . tg\beta = tg\alpha$$

Такъ какъ $tg\alpha$ есть вообще величина конечная не равная 0, то отсюда мы заключаемъ, что приращенія Δx и Δy вообще суть безконечно-малыя количества одинаковаго порядка.

Только въ тѣхъ точкахъ кривой, въ которыхъ имѣетъ уголъ $\alpha = 0$ или $\alpha = 90°$, т.е. когда $tg\alpha = 0$ или $tg\alpha = \infty$, только въ этихъ точкахъ, очевидно исключительныхъ, величины Δx и Δy будутъ неодинаковаго порядка. Если для какой нибудь точки кривой имѣемъ $f'(x) = 0$ или $tg\alpha = 0$, то будемъ имѣть $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, а это показываетъ, что въ этомъ случаѣ приращеніе функціи Δy будетъ безконечно-малымъ высшаго порядка сравнительно съ Δx. Такъ будетъ въ точкахъ кривой, въ которыхъ касательная параллельна оси абсциссъ, напр. въ точкахъ наибольшихъ или наименьшихъ ординатъ. Если напротивъ того, въ нѣкоторой точкѣ кривой касательная перпендикулярна къ оси абсциссъ, то: $tg\alpha = f'(x) = \infty$ или $\lim . \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$; въ этомъ случаѣ приращеніе Δy будетъ безконечно малымъ низшаго порядка срав-

нительно къ Δx. Докажемъ въ заключеніи слѣдующія двѣ теоремы, служащія для опредѣленія порядка безконечно-малыхъ.

Теорема 1-я. Произведеніе двухъ безконечно-малыхъ будетъ количество безконечно-малое, котораго порядокъ равенъ суммѣ порядковъ перемножаемыхъ безконечно-малыхъ.

Возьмемъ ε и ε' два безконечно-малыхъ количества, причемъ ε — n-го порядка, а ε' — m-го порядка. Выразивъ ихъ приведенными выше формулами и перемноживъ, получимъ:

$$\varepsilon\varepsilon' = \alpha^{m+n}(K+\omega)(K'+\omega')$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на α^{m+n}, будемъ имѣть:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha^{m+n}} = (K+\omega)(K'+\omega')$$

Перейдемъ въ этомъ равенствѣ къ предѣламъ, полагая, что α стремится къ нулю, найдемъ: $\lim \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\alpha^{m+n}} = K.K'$. Отсюда видно, что отношеніе безконечно-малаго приращенія $\varepsilon.\varepsilon'$ къ $m+n$-ой степени главнаго имѣетъ предѣломъ величину конечную; слѣдовательно это произведеніе есть безконечно-малое $m+n$-го порядка.

На основаніи этой теоремы, можно иногда опредѣлить порядокъ безконечно-малаго, безъ особаго вычисленія.

Такъ мы можемъ заключить, что если x есть главное безконечно-малое, то произведеніе $\sin 2x(1-\cos x)^2$ будетъ безконечно-малымъ пятаго порядка, потому что $\sin 2x$ есть безконечно-малое перваго порядка, и $(1-\cos x)^2$ есть безконечно-малое четвертаго порядка.

Теорема 2-я. Сумма нѣсколькихъ безконечно-малыхъ есть количество безконечно-малое, котораго порядокъ равенъ низшему изъ порядковъ слагаемыхъ безконечно-малыхъ.

Положимъ, что β, γ, δ..... суть безконечно-малыя, порядки ко-

порядок соответственно будут: $m, n, p \ldots\ldots$ причем $m < n < p \ldots\ldots$
Возьмем сумму этих бесконечно-малых: $\beta + \gamma + \delta \ldots\ldots$ Утверждаем, что эта сумма есть бесконечно-малое количество $m^{го}$ порядка. Положим, что α есть главное бесконечно-малое и рассмотрим предельные отношения:

$$\lim \frac{\beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots}{\alpha^m} = \lim\left(\frac{\beta}{\alpha^m} + \frac{\gamma}{\alpha^m} + \frac{\delta}{\alpha^m} + \ldots\ldots\right) = \lim \frac{\beta}{\alpha^m} + \lim \frac{\gamma}{\alpha^m} + \lim \frac{\delta}{\alpha^m} + \ldots$$

Так как бесконечно-малое β — $m^{го}$ порядка, то $\lim \frac{\beta}{\alpha^m}$ будет равен некоторой конечной величине K, не равной нулю. Предельные же отношения $\lim \frac{\gamma}{\alpha^m} = 0$, ибо это есть предельные отношения бесконечно малого высшего порядка к бесконечно-малому низшего порядка. На тех же основаниях имеем $\lim \frac{\delta}{\alpha^m} = 0$ и т. д. Следовательно получ.:

$$\lim \frac{\beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots}{\alpha^m} = K$$

где $K \neq 0$ и $K \neq \infty$. А это показывает, что сумма: $\beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots$ есть бесконечно-малое $m^{го}$ порядка. На основании этой теоремы можно также иногда определить порядок бесконечно-малого.
Пусть x есть главное бесконечно-малое, тогда по доказанной теореме, мы можем сказать, что сумма: $x^2 + x^2 \sin 2x$ есть бесконечно-малое второго порядка, потому что первое слагаемое x^2 второго порядка и второе слагаемое $x^2 \sin 2x$ третьего порядка, и следовательно сумма будет бесконечно-малым второго порядка.
Напишем формулу выражающую теорему Тейлора:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{2.3} + \ldots\ldots + \frac{f^{n-1}(x+\Theta h)h^{n+1}}{2.3.4\ldots\ldots(n+1)}$$

Положим, что приращение x т. е. h есть главное бесконечно-малое, тогда все члены, составляющие сумму, стоящую во второй части, будут бесконечно-малыя величины, при том первый член первого порядка, второй — второго и т. д., а потому и вся сумма будет первого порядка, следовательно разность: $f(x+h) - f(x)$ вообще есть величина бесконечно-малая первого порядка. Если же мы разомкнем кривую

такое значеніе перемѣннаго x, при которомъ $f'(x)=0$, тогда первый членъ суммы уничтожится и сумма безконечно-малыхъ стоящихъ во второй части, а слѣдовательно и разность:

$f(x+h)-f(x)$ будетъ

безконечно-малымъ втораго порядка.

Если далѣе при разсматриваемомъ значеніи x имѣемъ не только $f'(x)=0$, но и $f''(x)=0$, то вторая часть, а потому и разность

$$f(x+h)-f(x)$$

будетъ безконечно-малое третьяго порядка и т. д.

Способъ безконечно-малыхъ.

Способъ безконечно-малыхъ, есть способъ исчисленія конѣчныхъ величинъ помощію безконечно-малыхъ количествъ.

Безконечно-малыя количества вводятся въ вычисленіе, какъ величины вспомогательныя для того, что-бы съ помощію ихъ можно было дѣлать заключенія о величинахъ конечныхъ. Предметомъ-же исчисленія въ нашемъ анализѣ, какъ и въ начальной математикѣ служатъ величины конечныя. Безконечно-малыя входятъ только въ вычисленіе, но исчезаютъ въ результатѣ.

Конечныя величины, будучи разсматриваемы при помощи безконечно малыхъ количествъ, выражаются въ двухъ формахъ.

1) Конечная величина можетъ быть представлена въ формѣ предѣла отношенія двухъ безконечно-малыхъ одинаковаго порядка. Такой предѣлъ, какъ намъ извѣстно, всегда есть конечное количество. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ для того, что-бы найти неизвѣстную конечную величину, нужно опредѣлить какой-нибудь предѣлъ отношенія двухъ безконечно-малыхъ. Такой способъ исчисленія конечныхъ величинъ употребляется въ той части высшаго анализа,

которая называется дифференціальнымъ исчисленіемъ.

2.) Конечная величина можетъ быть представлена, какъ предѣлъ суммы безконечно-малыхъ количествъ, суммы, въ которой число слагаемыхъ увеличивается неопредѣленно, и въ тоже время каждое изъ слагаемыхъ отдѣльно стремится къ нулю; иначе говоря, конечная величина можетъ быть представлена, какъ предѣлъ суммы безконечно малыхъ количествъ въ неопредѣленно возрастающемъ числѣ.

Такой способъ исчисленія конечныхъ употребляется въ интегральномъ исчисленіи.

Отсюда способъ безконечно-малыхъ раздѣляется на двѣ части изъ которыхъ каждая основывается на особой теоремѣ.

Теорема. Предѣлъ отношенія двухъ безконечно-малыхъ количествъ не измѣнится, если каждое изъ безконечно-малыхъ, входящихъ въ отношеніе, будетъ замѣнено другимъ не равнымъ замѣняемому, но такимъ, которое отношеніе къ замѣняемому имѣетъ предѣломъ 1.

Положимъ, что β и α два безконечно-малыя что нибудь предѣлъ ихъ отношенія $\frac{\beta}{\alpha}$. Пусть β' и α' два другія безконечно-малыя количества и что они не равны первымъ, но приближаются къ нулю вмѣстѣ съ первыми и при томъ такія, что будетъ имѣть:

$\lim \frac{\beta'}{\beta} = 1$, и $\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$. Утверждаемъ, что при такихъ условіяхъ, отыскивая величину предѣла отношенія $\lim \frac{\beta}{\alpha}$, мы можемъ безконечно-малое β замѣнить безконечно-малымъ β' и безконечно-малое α чрезъ α'; такъ что мы можемъ написать:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

Это требуется доказать. Для доказательства замѣтимъ, что такъ какъ отношеніе $\frac{\beta'}{\beta}$ стремится къ 1, то можно положить,

что: $\frac{\beta'}{\beta} = 1 + \omega$, где ω есть неизвестное количество положительное или отрицательное, но стремится к нулю при приближении к пределу, так что: $\lim \omega = 0$. Словом ω есть безконечно-малое количество. На тожь-же основании мы можемъ написать, что: $\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \omega'$, где ω' есть безконечно-малое, приближающееся к нулю при переходе к пределу. Изъ написанныхъ равенствъ имѣемъ:

$$\beta' = \beta(1 + \omega) \text{ и } \alpha' = \alpha(1 + \omega')$$

отсюда: $\beta = \frac{\beta'}{1+\omega}$ и $\alpha = \frac{\alpha'}{1+\omega'}$.

Раздѣливъ β на α, получимъ: $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'(1+\omega')}{\alpha'(1+\omega)}$ или представимъ вторую часть въ видѣ произведенія:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{1+\omega'}{1+\omega}$$

Въ этомъ равенствѣ перейдемъ къ предѣламъ, получимъ:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{1+\omega'}{1+\omega}$$

но ω и ω' въ предѣлѣ равны нулю и слѣдовательно: $\lim \frac{1+\omega'}{1+\omega} = 1$, а потому будемъ имѣть:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

Это равенство выражаетъ теорему, которую мы желали доказать.

Эту-же теорему можно выразить и въ другой формѣ. Сдѣлаемъ для этого предварительно слѣдующее замѣчаніе. Если два безконечно-малыхъ количества таковы, что предѣлъ ихъ отношенія равенъ 1, то эти безконечно-малыя, будучи одного порядка, отличаются другъ отъ друга на безконечно-малое высшаго порядка.

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ безконечно-малыя величины β и β', предѣлъ ихъ отношенія пусть будетъ: $\lim \frac{\beta'}{\beta} = 1$. Въ этомъ случаѣ, какъ видно, мы можемъ положить: $\frac{\beta'}{\beta} = 1 + \omega$, где ω — безконечно-малое количество; отсюда: $\beta' = \beta + \beta\omega$.

Здѣсь β и β' - безконечно-малыя одинаковаго порядка - и мы видимъ, что они различаются другъ отъ друга на $\beta\omega$; но $\beta\omega$ есть произведеніе двухъ безконечно-малыхъ, стало-быть это есть безконечно-малое, порядокъ котораго равенъ суммѣ порядковъ перемножаемыхъ количествъ, а потому, понятно, что порядокъ безконечно-малаго $\beta\omega$ будетъ выше порядка безконечно-малаго β, т.е. $\beta\omega$ есть безконечно-малое высшаго порядка сравнительно съ β и β'. Такимъ образомъ β' отличается отъ β на безконечно-малое высшаго порядка.

Подобно этому, такъ какъ мы имѣемъ также: $\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$, то и безконечно-малое α' отличается отъ α на безконечно-малое высшаго порядка, ибо, полагая: $\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \omega'$ будемъ имѣть:

$$\alpha' = \alpha + \alpha\omega.$$

а $\alpha\omega$ есть безконечно-малое высшаго порядка.

Сущность, доказанной выше, теоремы состоитъ въ томъ, что при опредѣленіи предѣла отношенія $\lim \frac{\beta}{\alpha}$, мы можемъ поставить вмѣсто $\alpha \ldots \alpha'$ и вмѣсто $\beta \ldots \beta'$. Изъ сдѣланныхъ нами замѣчаній, мы видимъ теперь, что теорему можно выразить еще въ слѣдующей формѣ.

При опредѣленіи предѣла отношенія двухъ безконечно-малыхъ, мы можемъ каждое изъ безконечно-малыхъ, входящихъ въ отношеніе, замѣнить другимъ безконечно-малымъ, отличающимся отъ замѣняемаго на безконечно-малое высшаго порядка.

Иначе говоря въ равенствахъ: $\beta' = \beta + \beta\omega$ и $\alpha' = \alpha + \alpha\omega'$, мы можемъ отбросить $\beta\omega$ и $\alpha\omega'$ и при вычисленіи предѣла $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ поступать такъ, какъ будто β' и α' были точно равны β и α.

Въ вычисленіяхъ начальной математики, мы привыкли замѣнять одно количество посредствомъ другихъ равныхъ; и въ высш

емъ знаемъ, при примѣненіи способа безконечно-малыхъ мы видимъ возможность замѣнять одно безконечно-малое количество другимъ ему не равнымъ, но отличающимся отъ замѣняемаго на безконечно-малое высшаго порядка, причемъ результатъ вычисленія, какъ было указано выше остается совершенно точнымъ.

Итакъ, при отысканіи предѣла отношенія двухъ безконечно-малыхъ, мы можемъ безконечно-малыя высшаго порядка отбрасывать передъ безконечно-малыми низшаго порядка. Остановимся на этомъ выраженіи теоремы, что-бы сдѣлать еще слѣдующее замѣчаніе.

Отбрасываніе безконечно-малаго высшаго порядка передъ безконечно малымъ низшаго порядка, не имѣетъ ничего общаго съ такъ называемымъ приближеннымъ вычисленіемъ, въ которомъ то-же безконечно-малая величина высшихъ порядковъ отбрасываются передъ малыми величинами низшихъ порядковъ. Существенная разница въ этихъ двухъ пріемахъ исчисленія заключается въ томъ, что отбрасываніе безконечно-малыхъ количествъ въ приближенномъ вычисленіи непремѣнно производитъ нѣкоторую погрѣшность, но эта погрѣшность можетъ-быть такъ мала, что не произведетъ существеннаго вліянія на результатъ, который нужно получить съ извѣстною степенью точности.

Такъ при вычисленіи съ точностью до 0,001 результатъ будетъ точенъ до 0,001, но погрѣшность въ немъ все-же существуетъ, мы не принимаемъ ее во вниманіе.

Отбрасываніе-же безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ передъ безконечно-малыми низшихъ порядковъ, при исчисленіи по способу безконечно-малыхъ, мы дѣлаемъ на томъ основаніи, что отъ этого не произойдетъ въ результатѣ никакой погрѣшности; объ этомъ было доказано выше; онъ получится абсолютно-точнымъ.

Таким образом способ бесконечно-малых, есть способ надля приближенного, но для совершенно точного исчисления.

Для более ясного представления доказанной теоремы приведем следующий простой пример.

Положим, что нам дано найти предель отношения:

$$\lim \frac{3x^2 + \sin^3 2x}{\sin^2 3x + 4x^4}$$

при x приближающемся к нулю.

Здесь нужно найти предель отношения двух бесконечно-малых количеств. Заметим, что числитель $3x^2 + \sin^3 2x$ представляет сумму двух бесконечно-малых, из которых первое $3x^2$ второго порядка, а второе $\sin^3 2x$ третьего порядка, а потому, на основании нашей теоремы, мы можем отбросить бесконечно-малое высшего порядка, т.е. $\sin^3 2x$.

Подобно этому, знаменатель $\sin^2 3x$ представляет то-же сумму бесконечно-малых, из которых первое — второго порядка, а второе — четвертого порядка; второе, т.е $4x^4$, как бесконечно-малое высшего порядка, по на основании нашей теоремы, можем отбросить его. Таким образом мы получим:

$$\lim \frac{3x^2 + \sin^3 2x}{\sin^2 3x + 4x^4} = \lim \frac{3x^2}{\sin^2 3x}$$

Кроме этого вместо $\sin^2 3x$ мы можем взять $(3x)^2$, так как предель отношения:

$$\lim \frac{\sin^2 3x}{3x^2} = \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 = 1$$

Сделав эту замену найдем:

$$\lim \frac{3x^2}{\sin^2 3x} = \lim \frac{3x^2}{(3x)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Заметим, что предель отношения двух бесконечно-малых в этом простом примере, можно также определить и не прибегая к помощи доказанной теоремы. Результат при этом, конечно, должен получиться тот-же.

Возьмем данное отношение и разделим числитель и знаменатель на x^2, получим:

$$\lim \frac{3x^2 + \sin^2 2x}{\sin^2 3x + 4x^4} = \frac{3 + \frac{\sin^2 2x}{x^2}}{\frac{\sin^2 3x}{x^2} + 4x^4}$$

Напишем это выражение так:

$$\lim \frac{3 + \frac{\sin^2 2x}{x^2}}{\frac{\sin^2 3x}{x^2} + 4x^4} = \lim \frac{3 + 4\sin 2x \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2}{9\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 + 4x^2}$$

Переходя к пределам, замытим, что:

$$\lim \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \; ; \; \lim \frac{\sin 3x}{3x} = 1 \; ; \; \lim 4\sin 2x = 0 \text{ и } \lim 4x^2 = 0$$

Так что будем иметь:

$$\lim \frac{3x^2 + \sin^2 2x}{\sin^2 3x + 4x^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Результат одинаковый с выше найденным.

Теорема. Предель суммы бесконечно-малых в ся тех же в неопределенно возрастающем числе, не изменится, если каждое из бесконечно-малых будет заменено другим бесконечно-малым не равным заменяемому, но таким предель отношения, которого к заменяемому равен 1.

При доказательстве мы будем полагать, что рассматриваемый предель имеет величину конечную. Положим, что имеем ряд бесконечно-малых:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n$$

Все они одновременно-приближаются к 0 при неопределенном увеличении числа чех n. Пусть требуется найти: $\lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n)$, при $n = \infty$.

Полагаем при этом, что рассматриваемый предель имеет некоторую конечную величину C, хотя и неизвестную. Вообразим, что мы имеем другой ряд бесконечно малых, в одинаковом с первыми числе. Пусть эти

; бесконечно-малыя будутъ: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_n$

Всѣ эти бесконечно-малыя, такъже какъ и первыя приближаются къ 0, при неопредѣленномъ увеличеніи числа n; при томъ эти бесконечно-малыя не равны первымъ, но таковы что:

$\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1$; $\lim \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1$ и т. д. и вообще $\lim \frac{\beta_i}{\alpha_i} = 1$

Доказавъ теперь, что при неопредѣленномъ увеличеніи разсматриваемаго предѣла сумма бесконечно-малыхъ, можно вмѣсто α_1 подставить β_1; вмѣсто $\alpha_2 \ldots\ldots \beta_2 \ldots$ и вообще вмѣсто α_i можно подставить β_i, т. е. доказавъ, что:

$$\lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots \alpha_n) = \lim(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots + \beta_n)$$

Доказать это равенство — значитъ доказать нашу теорему.

Для доказательства замѣтимъ, что такъ какъ отношеніе $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ стремится къ единицѣ, то мы можемъ представить это отношеніе въ видѣ: $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1$, гдѣ ε_1 неопредѣленно, но при приближеніи къ предѣлу стремится къ 0; словомъ ε_1 есть то-же бесконечно-малая величина. Точно такъже можно написать:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2;\ \frac{\beta_3}{\alpha_3} = 1 + \varepsilon_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + \varepsilon_n$$

Сложивъ эти всѣ равенства и освободивъ отъ знаменат. нашли:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n$$

Вторую часть равенства будемъ разсматривать какъ сумму двухъ членовъ:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n) \text{ и } (\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \ldots\ldots + \alpha_n\varepsilon_n)$$

Въ этомъ равенствѣ существующемъ при всякомъ значеніи n, а также и при n возрастающемъ до бесконечности, перейдемъ къ предѣламъ; будемъ имѣть:

$$\lim(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots+\beta_n)=\lim(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_n)+$$
$$+\lim(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots\ldots\alpha_n\varepsilon_n)$$

Пределья берутся при N возрастающемъ до ∞-сти, перейдемъ къ предѣламъ; будемъ имѣть — предыдущее равенство, разсматривая которое, мы замѣчаемъ, что для того что-бы доказать нашу теорему мы должны доказать, что:

$$\lim(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots\ldots+\alpha_n\varepsilon_n)=0, \text{ при } N=\infty$$

Что-бы доказать это, замѣтимъ что хотя всѣ безконечно-малыя $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\ldots\ldots\varepsilon_n$ при переходѣ къ предѣлу приближаются къ нулю, но при этомъ одно изъ нихъ необходимо будетъ по абсолютной величинѣ большее всѣхъ прочихъ, хотя и оно вмѣстѣ со всѣми приближается къ 0.

Назовемъ это наибольшее изъ безконечно-малыхъ черезъ ε. Если теперь въ сумму: $\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots\ldots+\alpha_n\varepsilon_n$; везде вмѣсто множителей $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots\ldots\varepsilon_n$ подставимъ наибольшее изъ этихъ безконечно-малыхъ, т.е. ε, то мы увеличимъ каждой члѣнъ этой суммы, а стало-быть увеличимъ всю сумму; поэтому очевидно будемъ имѣть:

$$\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots\ldots\alpha_n\varepsilon_n<\alpha_1\varepsilon+\alpha_2\varepsilon+\ldots\ldots+\alpha_n\varepsilon, \text{ или:}$$
$$\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots\ldots+\alpha_n\varepsilon_n<\varepsilon(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n)$$

Это неравенство, каково-нибудь-бы N, будетъ существовать. Переходимъ въ этомъ неравенствѣ къ предѣламъ, полагая N увеличивающимся неопредѣленно.

Мы замѣтимъ при этомъ, что вторая часть неравенства:

$$\varepsilon(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_n)$$

представляетъ произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ первый ε стремится къ 0, другой-же множитель, т.е. сумма $\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n$ по предположенію стремится къ нѣкоторой конечной величинѣ C и стало-быть все произведеніе

стремится къ О.С, т. е. къ нулю. Если-же вторая, т. е. большая по абсолютной величинѣ часть неравенства стремится къ О, то слѣдовательно, первая меньшая и подавно приближается къ О, а потому заключаемъ, что:

$$\lim(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3+\ldots\ldots+\alpha_n\varepsilon_n)=0 \text{ при } n=\infty$$

Изъ этого слѣдуетъ, какъ было замѣчено, что:

$$\lim(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots+\beta_n)=\lim(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_n)$$

Такимъ образомъ наша теорема доказана. Эта теорема, подобно первой теоремѣ, можетъ быть выражена такъ же иначе. Обратимъ вниманіе на равенства:

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_1\varepsilon_1 \text{ ; } \beta_2=\alpha_2+\alpha_2\varepsilon_2 \text{ ; } \ldots\ldots\ldots$$

Изъ этихъ равенствъ мы видимъ, что безконечно-малое β_1 отличается отъ безконечно-малаго α_1, на безконечно-малое высшаго порядка, такъ же β_2 отличается отъ α_2 и т. д., поэтому нашу теорему можно выразить такъ:

При опредѣленіи суммы безконечно-малыхъ, въ неопредѣленно возрастающемъ числѣ, мы можемъ безконечно-малыя высшихъ порядковъ отбрасывать передъ безконечно-малыми низшихъ порядковъ.

Понятіе о дифференціалѣ.

Понятіе о дифференціалѣ связано тѣснымъ образомъ съ понятіемъ о производной функціи. Пусть имѣемъ производную функцію:

$$y=f(x)$$

Измѣнимъ въ этой функціи x на $x+\Delta x$, гдѣ Δx есть безконечно-малое приращеніе перемѣннаго независимаго x, тогда и величина функціи y измѣнится на $y+\Delta y$, гдѣ Δy

есть безконечно-малое приращение функціи; такимъ образомъ мы получимъ:

$y+\Delta y = f(x+\Delta x)$, отсюда: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Возьмемъ теперь отношеніе безконечно-малаго приращенія функціи къ безконечно-малому приращенію перемѣннаго независимаго, то есть $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и положимъ, что въ этомъ отношеніи Δx стремится къ нулю; вмѣстѣ съ Δx и Δy то-же будетъ стремиться къ нулю; при этомъ предѣлъ нѣкотораго отношенія есть функція x, которая и называется производной ф-ціей отъ ф-ціи $y = f(x)$. Такимъ образомъ:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = y'$$

Предѣлъ этотъ берется при Δx уменьшающемся неопредѣленно, короче говоря, при $\Delta x = 0$

И такъ производная ф-ціи, есть предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія ф-ціи къ безконечно-малому приращенію перемѣннаго независимаго.

Разсмотримъ теперь отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, не въ предѣлѣ, но при Δx весьма маломъ; это отношеніе будетъ тогда весьма мало отличаться отъ своего предѣла, т.е. отъ производной ф-ціи и мы можемъ положить, что:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

Здѣсь α есть неизвѣстная величина, положительная или отрицательная, но такая, которая стремится къ 0 съ приближеніемъ Δx къ 0, такъ что $\lim \alpha = 0$ при $\Delta x = 0$. Словомъ α есть нѣкоторое безконечно-малое количество.

Изъ предыдущаго равенства мы имѣемъ: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha . \Delta x$

Разсматривая это равенство мы можемъ сказать, что безконечно-

малое приращение функции Δy, состоить изъ двухъ частей: первая часть есть произведение $f'(x)\Delta x$ безконечно малое количество перваго порядка, полагая Δx главнымъ безконечно-малымъ; вторая часть есть произведение $\delta.\Delta x$, это есть безконечно-малое высшаго порядка, такъ какъ оно представляетъ произведение двухъ безконечно-малыхъ и порядокъ его равенъ поэтому суммѣ порядковъ производителей.

Такимъ образомъ мы видимъ, что приращение функции Δy есть величина безконечно-малая и при томъ перваго порядка, полагая, что $f'(x)$ есть величина конечная.

Изъ послѣдняго равенства мы видимъ при-томъ, что безконечно-малое приращение функции Δy отличается отъ произведения $f'(x)\Delta x$ на $\delta.\Delta x$, т.е. на безконечно-малое высшаго порядка. Вслѣдствіи этого, какъ мы знаемъ изъ способа безконечно-малыхъ въ извѣстныхъ случаяхъ, а именно при опредѣленіи предѣла отношенія двухъ безконечно-малыхъ и при опредѣленіи предѣла суммы безконечно-малыхъ въ неопредѣленно возрастающемъ числѣ, мы можемъ замѣнить безконечно-малое Δy безконечно-малымъ $f'(x)\Delta x$.

Такая замѣна будетъ всегда выгодна для вычисленія, потому что въ выраженіи Δy, членъ $\delta.\Delta x$ обыкновенно представляется наиболѣе сложнымъ, а потому отбросивъ произведение $\delta.\Delta x$, мы значительно упростимъ выражение безконечно-малаго приращенія Δy.

Изъ сказаннаго видно, то особенное значеніе, которое имѣетъ произведение $f'(x)\Delta x$. Произведение это называется дифференціаломъ ф-ціи $f(x)$ и обозначается такъ: $df(x) = dy$ и что опредѣленіе имѣетъ, что: $dy = f'(x).\Delta x$.

Такимъ образомъ дифференціалъ функціи есть произве-

дение производной функции на бесконечно-малое приращение перемѣннаго независимаго.

Если это опредѣленіе примѣнимъ къ наипростѣйшей изъ всѣхъ ф-цій, именно если положимъ, что $y = f(x) = x$, то навѣрно будемъ имѣть: $y' = f'(x) = 1$ и слѣдовательно $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$, т.е. $dx = \Delta x$. Отсюда видно, что бесконечно-малое приращеніе перемѣннаго независимаго равно диф-алу этого перемѣннаго; а потому вмѣсто Δx обыкновенно пишутъ dx и выраженіе диф-ала функціи будетъ: $dy = df(x) = f'(x) \cdot dx$

т.е. диф-алъ ф-ціи равенъ произведенію производной ф-іи на диф-алъ перемѣннаго независимаго.

Въ этомъ равенствѣ dx есть бесконечно-малое, но произвольное приращеніе x, иначе говоря, dx есть неопредѣленное бесконечно-малое количество и слѣдовательно выраженіе диф-ала ф-іи будетъ извѣстно, когда будетъ извѣстна производная ф-ія; вслѣдствіи этого, нахожденіе диф-аловъ различныхъ ф-ій и нахожденіе ихъ производныхъ, есть въ сущности одно и то-же дѣйствіе, которое и называется **дифференцированіемъ** ф-ціи.

Припомнимъ выраженія производныхъ ф-ій отъ трехъ основныхъ ф-ій и напишемъ ихъ дифференціалы:

1.) Диф-алъ степени.

Положимъ, что дана ф-ія: $y = x^m$, ея производная, какъ извѣстно, будетъ: $y' = m \cdot x^{m-1}$. Напишемъ теперь диф-алъ отъ этой ф-ціи; на основаніи общаго опредѣленія диф-ала—имѣемъ:

$$dy = dx^m = mx^{m-1} \cdot dx$$

2.) Диф-алъ синуса.

Пусть $y = \sin x$, было найдено, что $y' = \cos x$, а потому будемъ имѣть: $dy = d\sin x = \cos x \cdot dx$.

3.) Диф—аль логарифма.

Положимъ, что $y = \ln x$ извѣстно, что $y' = \frac{1}{x}$, а потому будемъ имѣть: $dy = d\ln x = \frac{dx}{x}$.

Изъ выраженія диф-ала ф-іи $dy = f'(x).dx$ мы получимъ диф—альное выраженіе производной ф-іи, именно:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

это показываетъ, что производная ф-ія равна диф—алу ф-іи раздѣленному на диф—аль перемѣнной независимаго.

Такое обозначеніе производной функ-іи употребляется весьма часто и даже предпочитается тому, которое мы употребляли до сихъ поръ. Обозначеніе это особенно удобно, когда ф-ія представлена одной буквой

Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую ф-ію U; ея производная по предложенному обозначенію будетъ U', при такомъ обозначеніи невидно, что означаетъ независимую перемѣнную, если-же мы напишемъ производную въ видѣ $\frac{du}{dx}$, то это будетъ означать, что производная взята по перемѣнному x, если-бы было написано $\frac{du}{dy}$, то это значило-бы, что производная эта ф-іи U взята по перемѣнному y; если производная взята по z, то мы будемъ имѣть $\frac{du}{dz}$ и т.д. Напишемъ теперь выраженіе безконечно-малаго приращенія ф-іи, введя въ выраженіе Δy диф-аль функ-іи; будемъ имѣть $\Delta y = dy + \alpha.dx$. Если это равенство раздѣлимъ на dy, то получимъ:

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha.dx}{dy} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha}{\frac{dy}{dx}}$$

но такъ какъ: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, то можно написать такъ:

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha}{f'(x)}$$

Положимъ, что въ этомъ равенствѣ Δx или dx стремится

к 0, тогда Δy, dy и α также стремится к 0, а потому переходя к пределам мы найдем, что:

$$\lim \frac{\Delta y}{dy} = 1$$

Таким образом мы видим, что предел отношения бесконечно малого приращения ф-ии к диф-алу этой ф-ии равен 1; из этого заключаем сл-ва, что при вычислении по способу бесконечно-малых можно бесконечно-малое Δy заменять через dy.

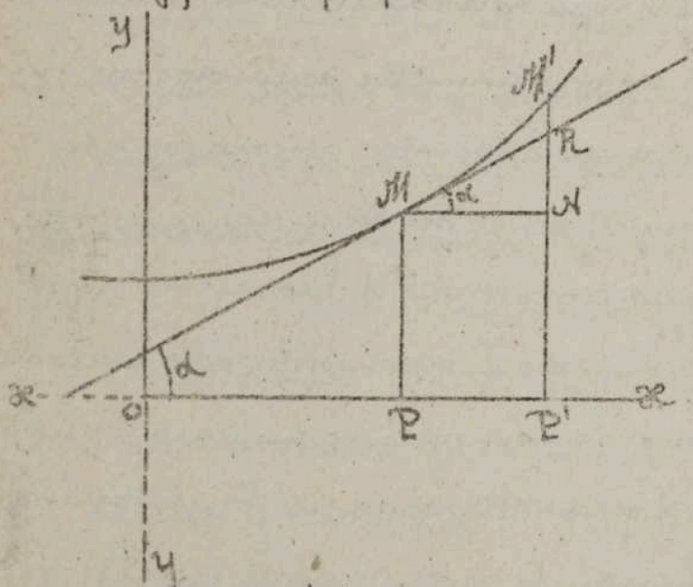
Нам известно геометрическое значение производной ф-ии; это есть tg угла наклонения касательной к кривой, представляемой уравнением $y = f(x)$, с осью абсцисс.

Геометрическое значение диф-ала ф-ции.

Пусть имеем уравнение: $y = f(x)$

Это ур-ие представляет некоторую кривую, возьмем на этой кривой произвольную точку M; пусть ея коор-ты будут:

$$OP = x \text{ и } MP = y$$



и построим ординату соответствующую новой абсциссе, которую мы получим, если дадим абсциссе x бесконечно-малое приращение PP' так, что $PP' = \Delta x$, новую ординату $M'P'$ будем иметь: $M'P' = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Проведем теперь через точку M линию $\parallel$-ную оси x-ов и пусть эта линия пересечет ординату $M'P'$ в точке N; мы будем иметь, очевидно: $\Delta y = M'N$. Проведем в точке M касательную к кривой, положим, что она образует с осью x-ов угол α, тогда и угол

RMN также равен α. Мы знаем, что $\operatorname{tg}\alpha = f'(x) = y'$, таково геометрическое значение производной.

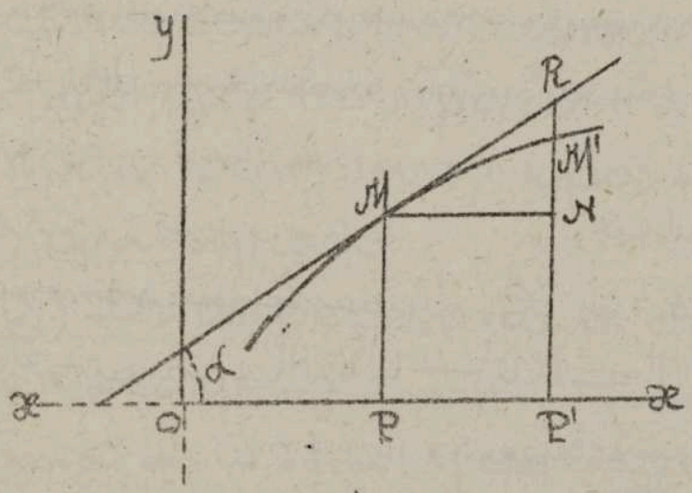
Из треугольника RNM мы имеем $RN = MN \operatorname{tg}\alpha$, или так как $MN = PP' = \Delta x$, то:

$$RN = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

Но выражение $f'(x)dx$ представляет дифференциал функции, а потому $RN = dy$.

И так геометрически дифференциал функции представляет бесконечно-малое приращение ординаты касательной к кривой, при переходе от точки прикасновения к смежной точке кривой.

Таким образом Δy есть приращение ординаты кривой, а dy есть приращение касательной. На нашем чертеже Δy больше dy, но, понятно, что Δy может быть и меньше dy, именно когда кривая обращена своею выпуклостью к оси x-ов, будем иметь $\Delta y < dy$, как это видно из чертежа.



Вообще из равенства: $\Delta y = dy + \varepsilon dx$ видно, что, при $dx > 0$, Δy будет больше dy, когда $\varepsilon > 0$ и $\Delta y < dy$ при $\varepsilon < 0$

Заметим мимоходом, что разность $\Delta y - dy$, на чертеже представляется величиной $M'R$ и это есть бесконечно-малая величина высшего порядка, обыкновенно второго.

Сделаем теперь обозрение известных нам правил дифференцирования, которые были выражены, как правила для составления производных; выразим их теперь, как правила для

составления дифференциалов функций.

1.) Диф-ал алгебраической суммы.

Пусть $y = u + v - z$, где u, v и z суть ф-ии x, а x есть переменное независимое. Для производной ф-ии, имеем выражение: $y' = u' + v' - z'$. Напишем это равенство в диф-алюжных знаках; будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dz}{dx}$$

Умножив все равенство на dx, получим:

$$dy = d(u + v - z) = du + dv - dz$$

т.е. диф-ал алгебраической суммы равень алгебраической сумме диф-алов.

Диф-ал от постоянного количества, очевидно, равень 0, ибо производная постоянного — равна 0, так что количество C не зависит от x и следовательно есть постоянное — то $dC = 0$.

Диф-ал двух ф-ий отличающихся друг от друга на постоянное количество, очевидно, равна между собой; так что: $d(u + C) = du + dc = du$.

2.) Диф-ал произведения

Пусть $y = u.v$, где u и v суть ф-ии x. Производная этого произвения, как известно, есть $y' = uv' + u'v$. Напишем это равенство в диф-альных знаках; будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

Помножив на dx обе части, получим:

$$dy = u.dv + v.du$$

т.е. диф-ал произведения двух ф-ий равень первой ф-ии, умноженной на диф-ал второй — плюс вторая ф-ия, умноженная на диф-ал первой.

Въ частномъ случаѣ, если имѣемъ $y=au$, гдѣ a есть нѣкоторое постоянное количество, то по выведенной формулѣ $dy=a.du+u.da=a.du$, такъ какъ $da=0$, а слѣдовательно $d(au)=a.du$. Это равенство показываетъ слѣдующее, что при диф-ованіи постоянной множитель можно выводить за знакъ диф-ала.

Пусть имѣемъ далѣе произведеніе какого угодно числа ф-ій, напр.: $y=u.v.z.w$. Взявъ производную будемъ имѣть, какъ извѣстно:

$$y'=v.z.w.u'+u.z.w.v'+u.v.z.w'+uv.w.z'$$

Напишемъ это равенство въ диф-альныхъ знакахъ, т.е.

$$\frac{dy}{dx}=v.z.w.\frac{du}{dx}+u.z.w.\frac{dv}{dx}+u.v.z\frac{dw}{dx}+u.v.w.\frac{dz}{dx}$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на dx, получимъ:

$$dy=v.z.w.du+u.z.w.dv+u.v.z.dw+u.v.w.dz.$$

Т.е. диф-аль отъ произведенія нѣсколькихъ производителей равенъ произведенію всѣхъ производителей, кромѣ перваго, на диф-аль перваго + произведеніе всѣхъ производителей, кромѣ втораго, на диф-аль втораго + и т.д. + произведеніе всѣхъ производителей, кромѣ послѣдняго, на диф-аль послѣдняго.

3.) Дифференціалъ дроби.

Пусть $y=\frac{u}{v}$, гдѣ u и v суть функціи x. Производная отъ этой ф-іи есть: $y'=\frac{v.u'-uv'}{v^2}$, и выразивъ это равенство въ диф-альныхъ знакахъ, будемъ имѣть: $\frac{dy}{dx}=\frac{v.\frac{du}{dx}-u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$, или умноживъ на dx, получимъ:

$$dy=\frac{v.du-u.dv}{v^2}$$

т.е. диф-аль дроби равенъ произведенію знаменателя на диф-аль числителя, безъ числителя умноженнаго на диф-аль знаменателя и все

дъленное на квадратъ знаменателя.

4.) Дифференціалъ функціи отъ функціи.

Пусть $y = f(u)$, гдѣ $u = \varphi(x)$. Производная y, разсматривая ее какъ ф-ію x, будемъ писать: $y' = f'(u).u'$, или въ диф-альномъ видѣ: $\frac{dy}{dx} = f'(u).\frac{du}{dx}$, умноживъ на dx, получимъ:

$$dy = f'(u).du$$

Это равенство показываетъ, что диф-алъ ф-іи отъ ф-іи составляется точно такимъ, какъ если-бы перемѣнное, отъ котораго зависитъ данная ф-ія было независимымъ.

Дѣйствительно, если-бы было дано $y = f(u)$, а u было-бы перемѣннымъ независимымъ, то имѣли-бы:

$$dy = f'(u).du$$

Это самое равенство, какъ видимъ выше, будетъ имѣть мѣсто и тогда, когда u есть перемѣнное независимое, но само представляетъ изъ себя нѣкоторую ф-ію перемѣннаго независимаго x, только, въ послѣднемъ случаѣ, множитель du будетъ обозначать диф-алъ нѣкоторой ф-іи, именно: $u = \varphi(x)$, то $du = \varphi'(x).dx$. Равенство $dy = f'(u).du$, гдѣ u есть ф-ія x, пишутъ еще иначе, употребляя вмѣсто $f'(u)$ такое диф—альное обозначеніе, именно, можно положить $f'(u) = \frac{dy}{du}$, причемъ u уже разсматривается, какъ перемѣнное независимое; а потому du здѣсь есть произвольное безконечно-малое количество. Если вставимъ это выраженіе $f'(u)$ въ предыдущее равенство, то получимъ: $dy = \frac{dy}{du}.du$. Это равенство не есть тождество, потому что въ немъ du знаменателя и du множителя имѣютъ различныя значенія, такъ какъ du знаменателя, есть диф-алъ перемѣннаго независимаго, а потому есть произвольное безконечно-малое; тогда какъ множитель du, есть диф-алъ ф-іи $\varphi(x)$ и потому

равенъ $du = \varphi'(x).dx$. Эта послѣдняя величина du зависитъ отъ dx, а уже не произвольна, которое есть произвольное безконечно малое. Иногда написанное выше равенство пишутъ еще иначе, замѣчая, что множитель du можно написать такъ:

$$du = \varphi'(x).dx = \frac{du}{dx}.dx$$

а потому будемъ имѣть:

$$dy = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.dx$$

а отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Здѣсь du въ знаменателѣ и въ числителѣ также не могутъ быть сокращены. Вообще нужно замѣтить, что когда для производной употребляется диф-альное обозначеніе $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$ и т.д., то это выраженіе не разсматривается, какъ дробь, а какъ нѣкоторый символъ, въ которомъ числитель неотдѣляется отъ знаменателя.

При помощи правила диф-ированія ф-іи отъ ф-іи, мы можемъ находить диф-ала отъ основныхъ ф-ій.

1.) Дифференціалъ степени.

Пусть $y = u^m$, гдѣ u есть функція x; на основаніи правила дифференціированія функціи отъ функціи, прямо напишемъ:

$$dy = du^m = mu^{m-1}.du$$

т.е. диф-аль степени равенъ показателю степени умноженному на степень единицею меньше и на диф-аль количества возводимаго въ степень.

2.) Диф-аль отъ показательной функціи.

Пусть $y = a^u$, взявъ дифференціалъ получимъ

$$dy = da^u = a^u.la.du$$

и такъ диф-аль отъ показательной функціи

равенъ самой функціи, умноженной на Неперовъ логарифмъ основанія и на дифференціалъ показателя.

3.) Дифференціалъ логарифма.

Пусть $y = lu$, взявъ диф-алъ получимъ:

$$dy = dlu = \frac{du}{u}$$

т.е. диф-алъ Неперова логарифма равенъ диф-алу перемѣннаго, раздѣленному на самое перемѣнное.

4.) Дифференціалъ синуса.

Пусть $y = \sin u$, будемъ имѣть:

$$dy = d\sin u = \cos u . du$$

т.е. дифференціалъ синуса равенъ косинусу, умноженному на дифференціалъ перемѣннаго.

5.) Дифференціалъ косинуса.

Пусть $y = \cos u$, будемъ имѣть: $dy = -\sin u . du$

т.е. дифференціалъ косинуса равенъ минусъ синусу, умноженному на дифференціалъ перемѣннаго.

5.) Дифференціалъ тангенса.

Пусть $y = tgu$, будемъ имѣть: $dy = \frac{du}{\cos^2 u}$

т.е. дифференціалъ тангенса равенъ диф-алу перемѣннаго, раздѣленному на квадратъ косинуса.

7.) Дифференціалъ котангенса.

Пусть $y = ctgu$, будемъ имѣть: $dy = -\frac{du}{\sin^2 u}$

т.е. дифференціалъ котангенса равенъ минусу диф-алу перемѣннаго, раздѣленному на квадратъ синуса.

8.) Дифференціалъ арксинуса.

Пусть $y = \arcsin u$, будемъ имѣть: $dy = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

т.е. диф-алъ арксинуса равенъ диф-алу перемѣннаго, раздѣленному на корень квадратный изъ единицы безъ квадрата перемѣннаго.

9.) Дифференціалъ арккосинуса.

Пусть $y = \arccos u$, будемъ имѣть: $dy = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

т.е. диф-алъ арккосинуса отличается отъ диф-ала арксинуса только знакомъ минусъ.

10.) Дифференціалъ арктангенса.

Пусть $y = \operatorname{arctg} u$, будемъ имѣть: $dy = \frac{du}{1+u^2}$

т.е. диф-алъ арктангенса равенъ диф-алу перемѣннаго, раздѣленному на единицу плюсъ квадратъ перемѣннаго.

11.) Дифференціалъ арккотангенса.

Пусть $y = \operatorname{arcctg} u$, будемъ имѣть: $dy = -\frac{du}{1+u^2}$

т.е. диф-алъ арккотангенса равенъ диф-алу арктангенса, только со знакомъ минусъ.

При помощи этихъ правилъ можно найти диф-алъ отъ всякой явной ф-іи съ одной перемѣнной независимой.

Точно такимъ же образомъ можемъ найти и диф-алъ отъ всякой неявной ф-іи съ одной перемѣнной независимой. Положимъ, что имѣемъ неразрѣшенное ур-іе съ двумя перемѣнными: $f(x,y)=0$ гдѣ y разсматривается, какъ неявная ф-ія перемѣннаго независимаго x.

Изъ даннаго намъ ур-ія, по извѣстнымъ намъ правиламъ, мы можемъ опредѣлить производную y' и затѣмъ будемъ имѣть: $dy = y' \cdot dx$. При диф-ованіи неявныхъ ф-ій мы будемъ впредь упо-

требуют диф-альные знаки, т.е. вместо y' будем писать $\frac{dy}{dx}$.

Положим, например, что нам дано ур-ие: $y^2 = 2px$.

Диф-цируя это ур-ие по x, находим:

$$2y\frac{dy}{dx} = 2p, \text{ отсюда: } \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Подобным образом будем диф-овать и нескольких ур-ий, определяющих столько-же ф-ий одного переменного независимого.

Пусть, например, нам даны два ур-ия:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ и } x^2 + y^2 - az = 0$$

Эти два ур-ия со тремя переменными x, y и z; два из этих переменных, например y и z можно считать неявными ф-иями переменного x. Диф-цируя эти ур-ия по x, находим:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{2z}{c^2}\cdot\frac{dz}{dx} = 0 \text{ и } 2x + 2y\cdot\frac{dy}{dx} - a = 0$$

Решим теперь два ур-ия первой степени с двумя неизвестными $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$; решив эти ур-ия-найдем искомые произведения.

Остановимся на рассмотрении дифференциалов высших порядков.

Для данной ф-ии $y = f(x)$, мы можем получить ея производная различных порядков, именно: $y' = f'(x)$; $y'' = f''(x)$ и т.д.

Производные различных порядков соответствуют диф-алы различных порядков.

Возьмем первый дифференциал от функции $y = f(x)$; получим:

$$dy = f'(x)\cdot dx$$

Это есть диф-ал первого порядка; он представляет некоторую ф-ию x, а потому от него можно опять взять диф-ал.

Заметим только при этом, что во второй части нашего равенства множителем $f'(x)$ есть ф-ия x, но множитель dx, хотя, есть тоже переменное количество, но они должны быть рассматриваемы, как постоянное — относительно x. В самом

дель dx изменяется независимо отъ x, такъ какъ можемъ, оставляя x постояннымъ, измѣнять одно dx, т.е. одному и тому же значенію x можно давать различныя приращенія и точно такимъ же образомъ можемъ dx оставить постояннымъ и измѣнять x, т.е. различнымъ x можно давать одно и тоже приращеніе dx. Поэтому dx есть постоянное количество относительно x, такъ какъ оно измѣняется не вслѣдствіи измѣненія x, а само по себѣ. Взявъ дифференціалъ отъ dy, мы будемъ имѣть слѣдовательно:

$$d(dy) = d^2y = f''(x)dx^2$$

Это есть дифференціалъ втораго порядка; отъ него можно взять опять дифференціалъ, этотъ новый дифференціалъ будетъ третьяго порядка; напишемъ:

$$d(d^2y) = d^3y = f'''(x).dx^3 \text{ и т.д. вообще:}$$
$$d^ny = f^n(x).dx^n$$

есть общее выраженіе дифференціала $n^{го}$ порядка. Замѣтимъ, что порядокъ дифференціала всегда обозначается цифрой, которая ставится справа и сверху знака дифференціала. Выраженіе dx^n означаетъ собственно $(dx)^n$ и недолжно быть смѣшиваемо съ $d.x^n$, т.е. съ дифференціаломъ степени $d(x^n)$.

Такъ какъ dx обыкновенно считается главнымъ безконечно-малымъ, то dy есть безконечно-малое перваго порядка; d^2y будетъ безконечно-малымъ втораго порядка и т.д. вообще d^ny есть безконечно-малое $n^{го}$ порядка.

Изъ выраженій дифференціаловъ различныхъ порядковъ получаются дифференціальныя выраженія для производныхъ различныхъ порядковъ; именно имѣемъ:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}\ ;\ f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Эти выраженія употребляются такъ же часто, какъ и дифферен-

ренціальное выраженіе первой производной. Такимъ образомъ мы можемъ находить дифференціалы различныхъ порядковъ отъ какой угодно ф-іи одного независимаго перемѣннаго.

Въ заключеніи этого обзора дифференціаловъ ф-ій, укажемъ на связь существующую между безконечно-малымъ приращеніемъ ф-іи и ея дифференціалами различныхъ порядковъ. Эта связь выражается теоремой Тейлора. Пусть имѣемъ: $y = f(x)$ дадимъ x безконечно-малое приращеніе h и разложимъ эту ф-ію по формулѣ Тейлора, получимъ:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + f''(x)\frac{h^2}{2} + \ldots\ldots\ldots + f^n(x)\frac{h^n}{2.3\ldots n} + R$$

Остатокъ R, по формулѣ Лагранжа будетъ, какъ извѣстно;

$$R = \frac{f^{n+1}(x+\Theta h)\,h^{n+1}}{2.3.4.5\ldots\ldots n+1}$$

гдѣ Θ неизвѣстное количество больше 0, но меньше 1. Такое разложеніе ф-іи по формулѣ Тейлора можно написать въ иномъ видѣ. Будемъ вмѣсто безконечно малаго приращенія h писать безконечно-малое Δx и первый членъ второй части равенства перенесемъ въ первую, получимъ:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2} + \ldots\ldots\ldots + f^n(x)\frac{\Delta x^n}{2.3\ldots n} + R$$

Первая часть этого равенства выражаетъ безконечно-малое приращеніе ф-іи $f(x)$, т.е. представляетъ Δy. Во второй части равенства послѣдовательно входятъ въ сумму дифференціалъ перваго порядка-первый членъ, дифференціалъ втораго порядка-второй членъ и т.д.; такимъ образомъ мы можемъ написать это равенство въ видѣ:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2.3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{d^ny}{2.3.4\ldots n} + R$$

Это показываетъ намъ, какъ безконечно-малое приращеніе ф-іи составляется изъ ея послѣдовательныхъ дифференціаловъ. Помощію указанныхъ выше правилъ, мы можемъ находить

диф-ала для всякой данной и известной функции; но во многих случаях бывает возможно определить диф-алы таких функций, которая, будучи определены геометрически или по своим физическим и механическим свойствам, оказываются однако неизвестными в их аналитическом выражении. Целых родов ф-ий нередко встречается в прикладных науках. Остановимся на рассмотрении подобных ф-ий, встречаемых в Геометрии.

Диф-алы некоторых ф-ций определяемых геометрически.

Функция называется определенной геометрически, когда величина ея для каждаго данного значения переменнаго независимаго, может быть построена, но при этом аналитическое ея выражение неизвестно.

Из таких функций мы разсмотрим здесь три, а именно:
1.) Площадь кривой. 2.) Длина дуги кривой. и
3.) Объемъ. Мы найдем выражения дифференциаловъ этих функций.

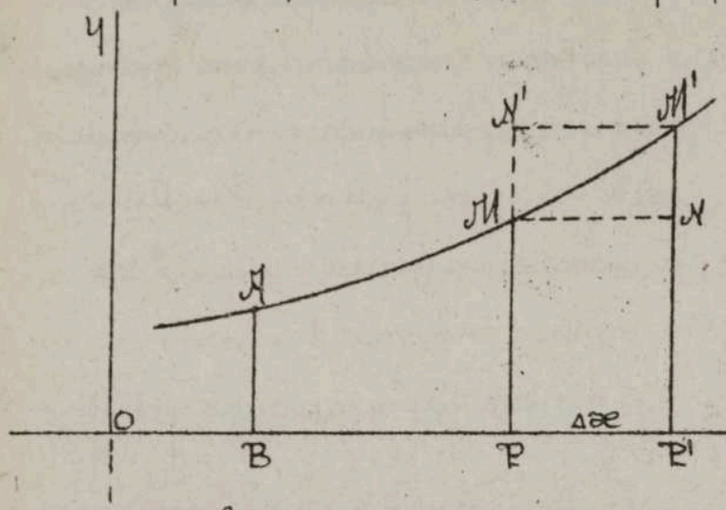
Диф-алъ площади кривой.

Мы разсмотрим два случая: во первых кривую, отнесенную к прямоугольным координатам и во вторых кривую, отнесенную к полярным координатам.

1.) Площадь кривой, отнесенной к прямоугольным координатам.

Пусть уравнение данной кривой есть: $y = f(x)$. Изобразим часть этой кривой и возьмем на ней постоянную точку A, построим ея орд-ту AB. Возьмем на той-же кривой про-

бильную переменную точку M и построим ея коор-ты, пусть: $OP = x$ и $MP = y$. Мы говорим, что точка M переменная, потому что ея абсцисса OP может измѣняться. Нашимъ построеніемъ опредѣляется площадь $BAMP$, величину которой обозначимъ чрезъ U;

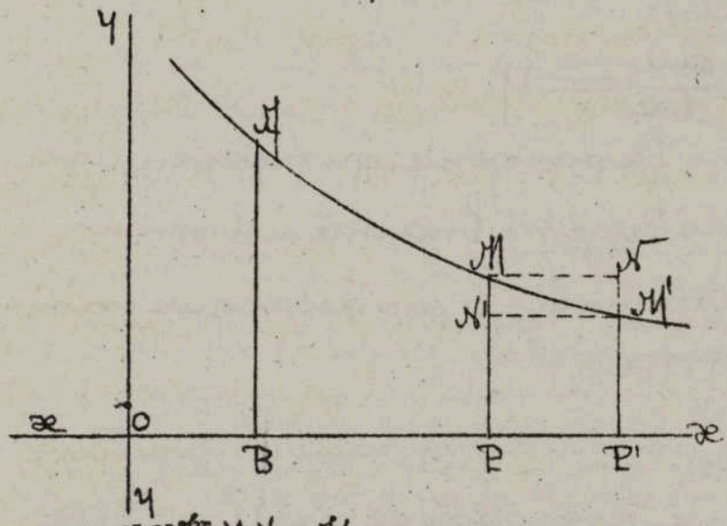


эта площадь, какъ видимъ, ограничена двумя ординатами, осью абсциссъ и частью данной кривой, площадь эта-для краткости, называется площадью кривой.

Очевидно, что величина площади кривой, т.е. U зависитъ отъ абсциссы x; съ измѣненіемъ абсциссы x измѣняется и величина площади, при томъ всякому опредѣленному значенію x соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная величина U. Слѣдовательно U есть функція x. Эта функція опредѣлена однако только геометрически, такъ какъ мы можемъ построить ея величину для каждаго значенія x, но аналитическое ея выраженіе неизвѣстно. Не зная выраженія самой ф-іи, мы однако можемъ найти ея дифференціалъ.

Что-бы найти дифференціалъ функціи, надо прежде найти производную и потомъ помножить ее на dx. Производная разсматриваемой ф-іи по опредѣленію будетъ: $f'(x) = \frac{dU}{dx} = \lim \frac{\Delta U}{\Delta x}$ при $\Delta x = 0$. Измѣнимъ x на $x + \Delta x$ и пусть $PP' = \Delta x$, проведя соотвѣтствующую ординату $M'P'$, мы получимъ точку M' кривой соотвѣтствующую новой абсциссѣ $x + \Delta x$. Полученная при этомъ площадь $PMM'P'$ представляетъ очевидно приращеніе ф-іи ΔU, происшедшее вслѣдствіи измѣненія x на $x + \Delta x$. Замѣтимъ, что мы имѣемъ въ виду найти предѣлъ отношенія $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ и этотъ предѣлъ мы должны брать при Δx, приближающемся къ нулю.

Точка M' будетъ при этомъ неопредѣленно приближаться къ M и мы можемъ поэтому въ нашемъ разсмотрѣніи точку M' полагать сколь угодно близкой къ точкѣ M. Мы будемъ предполагать, что точка M' на столько близка къ M, что кривая линія въ промежуткѣ отъ M до M' не представляетъ изгибовъ. Очевидно, что это всегда возможно, такъ какъ, если-бы мы взяли сначала точку M' такъ, что кривая въ промежуткѣ отъ M до M' дѣлала-бы изгибъ, то мы могли перемѣщать точку M', приближая ее къ M, до тѣхъ поръ пока въ промежуткѣ MM' не будетъ изгибовъ.



При такомъ условіи въ промежуткѣ отъ M до M' ординаты идутъ или постоянно увеличиваясь, какъ на предыдущемъ чертежѣ, или при другомъ расположеніи кривой, онѣ будутъ постоянно уменьшаться.

Проведемъ изъ точки M параллельно оси x-въ MN. Мы имѣемъ площадь прямоугольника $PMNP' = y \cdot \Delta x$

Величину ординаты $M'P'$ обозначимъ чрезъ $y + \Delta y$, такъ что $M'N = \Delta y$. Разсматривая площадь прямоугольника $PM'N'P'$ мы будемъ имѣть, что площадь $PM'N'P' = (y + \Delta y)\Delta x$. Площадь ΔM очевидно заключается между этими двумя площадями, такъ что:

$$(y + \Delta y)\Delta x > \Delta M > y \cdot \Delta x$$

Эти неравенства суще будутъ при произвольно маломъ Δx причемъ мы предположимъ, что въ промежуткѣ отъ M до M' ординаты увеличиваются. Если-бы ординаты уменьшались, то понятно, что Δy было-бы меньше 0 и неравенства сдѣлались-бы обратными, т.е. тогда имѣли-бы:

$$(y + \Delta y)\Delta x < \Delta M < y \cdot \Delta x$$

Возьмемъ-ли мы тотъ или другія неравенства заключеніе не измѣнится. Раздѣливъ эти неравенства на Δx, напишемъ ихъ такимъ-образомъ вмѣстѣ:

$$y + \Delta y \geqslant \frac{\Delta u}{\Delta x} \geqslant y$$

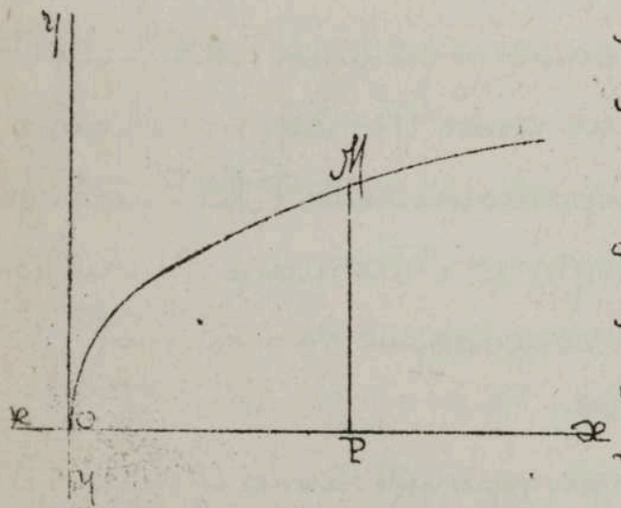
Вообразимъ, что Δx стремится къ 0, въ то-же время и Δy будетъ стремиться къ 0 и мы видимъ, что наше отношеніе $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ заключается между двумя величинами, изъ которыхъ одна есть y, а другая стремится къ y. Стало-быть, при неопредѣленномъ увеличеніи Δx и наше отношеніе также стремится къ y, а потому при $\Delta x = 0$:

$$\lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = y \text{ или } \frac{du}{dx} = y$$

отсюда: $du = y.dx$. Это есть выраженіе дифференціала площади кривой. Выраженіе это будетъ вполнѣ извѣстно, ибо въ немъ $y = f(x)$ т.е. данной функціи и мы можемъ написать:

$$du = f(x).dx$$

Положимъ напримѣръ, что мы разсматриваемъ параболу, ур-іе которой есть: $y^2 = 2px$



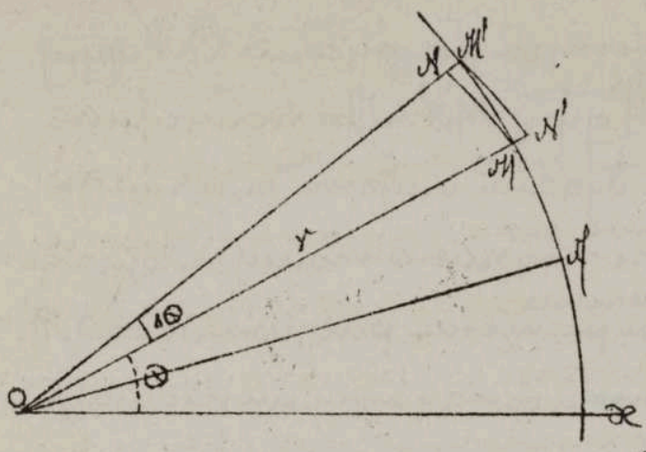
Возьмемъ произвольную точку на параболѣ M, построимъ ея координаты: $OP = x$ и $MP = y$ и положимъ, что площадь $OPM = u$; намъ неизвѣстно чему равна эта площадь, но она есть ф-ія x-са, а ея дифференціалъ мы можемъ опредѣлить:

$$du = y.dx = \sqrt{2px}.dx$$

Площадь кривой, отнесенной къ полярнымъ координатамъ.

Пусть точка O есть полюсъ, а прямая OX полярная ось.

Пусть полярное ур-ie данной кривой есть: $r = f(\Theta)$.



Возьмем произвольную, но постоянную точку M на этой кривой и соединим ее с полюсом; возьмем на этой-же кривой, другую-переменную точку M' и положим, что угол $M'OX$, образуемый радиусом вектором OM' с полярной осью, равен Θ, а $OM = r$. Таким образом мы построим площадь криволинейного сектора MOM', которую назовем через U. Величина этой площади нам неизвестна; но очевидно, что она зависит от угла Θ; с изменением Θ, меняется и U, при том всякому определенному значению Θ соответствует совершенно определенная величина U, т.-е. U есть функция Θ. Нам однако неизвестно, выражение этой ф-ии, так как она определена только геометрически. Предположим себе найти диф-ал этой ф-ии dU. Найдем предварительно производную, т.е.

$$\frac{dU}{d\Theta} = \lim \frac{\Delta U}{\Delta \Theta} \quad \text{при } \Theta' = 0$$

Что-бы получить ΔU, изменим Θ на $\Theta + \Delta\Theta$, тогда радиус вектор получит приращение Δr, при чем площадь $OMM' = \Delta U$ при переходе к предыду, точка M' неопределенно приближается к M и мы можем поэтому в каждом рассмотрении предполагать ее сколь угодно близкой к точке M. Мы приблизим точку M' к M на столько, что-бы кривая в промежутке от M' до M не имела изгибов. Это, очевидно, всегда возможно; если кривая в этом промежутке не имеет изгибов, то радиус вектор или постоянно увеличивается при пере-

ходя от M к M', или постоянно уменьшается, если кривая дана расположенного иначе.

Отметим на точки O как из центра радиусом OM дугу MN и из точки-эксе O-радиусом OM' дугу $M'N'$. Мы получим два круговых сектора MOM и $M'OM'$ и будем иметь площадь: $MOM = \frac{MO}{2} \cdot \text{arc}\, MN = \frac{r}{2} \cdot r \cdot \Delta\Theta = \frac{r^2}{2} \cdot \Delta\Theta$ и подобно тому площадь: $MOM' = \frac{MO}{2} \text{arc}\, M'N' = \frac{(r+\Delta r)^2}{2} \cdot \Delta\Theta$, где приращение радиуса $\Delta r = NN'$. Очевидно, что площадь ΔU заключается между этими площадями и мы можем написать, что:

$$\frac{r^2}{2} \cdot \Delta\Theta > \Delta U > \frac{(r-\Delta r)^2}{2} \cdot \Delta\Theta$$

причем $\Delta r < 0$. Разделим эти неравенства на $\Delta\Theta$, напишем их вместе таким образом:

$$\frac{r^2}{2} > \frac{\Delta U}{\Delta\Theta} > \frac{1}{2}(r-\Delta r)^2$$

Будем теперь $\Delta\Theta$ приближать к 0, причем Δr тоже будет стремиться к 0. Очевидно, что отношение $\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}$ заключается между двумя величинами, из которых одна равна $\frac{r}{2}$, а другая стремится к $\frac{r^2}{2}$, при приближении к пределу, а потому заключаем, что и само отношение $\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}$ тоже стремится к $\frac{r^2}{2}$; так что в пределе будем иметь: $\lim \frac{\Delta U}{\Delta\Theta} = \frac{r^2}{2}$ или $\frac{dU}{d\Theta} = \frac{r^2}{2}$, откуда:

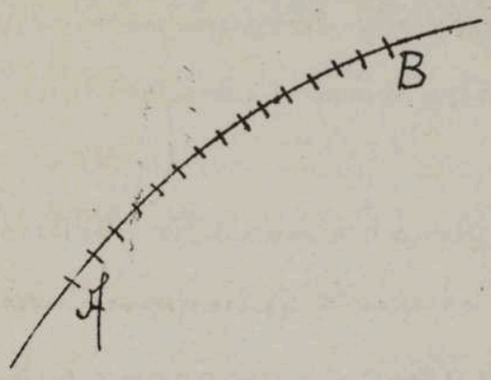
$$dU = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\Theta$$

Это и есть диф-ал площади кривой, отнесенной к полярным коор-атам. Это выражение вполне определено, так как r есть известная и данная функция Θ.

Определение длины кривой линии.

Положим, что требуется определить длину некоторой кривой, все равно, будет ли это плоская кривая и кривая двоякой кривизны, т. е. кривая, точки которой не лежат в одной плоскости.

Возьмем на данной кривой два произвольных, но постоянных точки A и B и положим, что требуется определить длину дуги. arc AB = S.



Способы начальной геометрии к разматриваемому вопросу, очевидно неприложимы, так как они позволяют только измерять длина прямых линий или окружностей, причем, что-бы измерить какую нибудь длину, сравнивают ее съ длиной, принятой за единицу, употребляя для сравнения наложение одной линии на другую; но на кривой линии произвольной формы, очевидно нельзя уложить ни прямой линии, ни дуги круга. Отсюда слѣдует, что для определения длина кривой, мы должна прежде всего составить себѣ понятіе о томъ, что мы будемъ называть длиною. Въ этомъ случаѣ вообразимъ, что въ кривую AB вписана ломаная линія съ весьма большимъ числомъ весьма малыхъ сторонъ.

Положимъ, что послѣдовательныя стороны имѣютъ длины соотвѣтственно равныя $d_1, d_2, d_3 \ldots\ldots d_n$. Периметръ этой ломаной линіи, по этому будетъ:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots + d_n$$

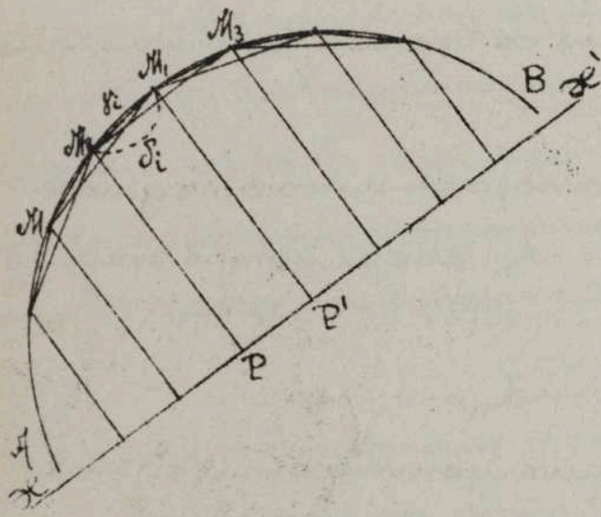
Понятно, что этотъ периметръ тѣмъ меньше отличается отъ длина AB, чѣмъ больше будетъ взято сторонъ у ломаной линіи и чѣмъ эти стороны будутъ меньше. Будемъ теперь полагать, что число сторонъ увеличивается до ∞-ти и что каждая изъ сторонъ неопредѣленно уменьшается, въ этомъ случаѣ сумма сторонъ, т. е. периметръ ломаной линіи будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу; этотъ-то предѣлъ мы будемъ называть

длиной дуги AB. Пишут что по определению:

$$\lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n) = S$$

Предель этот берется при условии, что слагаемые увеличиваются до бесконечности и что каждое из слагаемых стремится к 0. Это определение называется надобность следующее замечание.

Пишут как ломанная линия совершенно произвольная, то ничто не убеждает нас в том, что если вписать другую ломанную линию и будем также увеличивать число ее сторон до бесконечности, то мы получим непременно тут-же самую величину для предела. Необходимо поэтому доказать, что предель периметра описанной ломанной линии не зависит от вида ея и от закона уменьшения ея сторон, а будет всегда один и тот-же, лишь-бы число сторон увеличивалось до бесконечности



Возьмем в пространстве произвольную ось xx'. Впишем в данную кривую другую ломанную линию; стороны ея по порядку, обозначим чрез: $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_m$ примем $m \neq n$. Возьмем предель суммы этих бесконечно-малых и положим, что:

$$\lim(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots + \beta_m) = S'$$

при $m = \infty$. Требуется доказать, что $S = S'$. Что-бы доказать это, вообразим на одной чертеже две вписанныя ломанныя линии, потом чрез все вершины обеих периметров ломанных линий проведем плоскости $\perp$-ные к оси xx'.

эти плоскости разделять, как первой так и второй периметра на новые элементы, число которых в обоих будет одинаково и пусть оно будет p. Пусть элементы первой ломанной линии будут: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\ldots \gamma_p$ сумма их очевидно будет равна периметру ломанной линии, т.е.

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots\ldots + \gamma_p = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n$$

Назовем подобно этому элементы, на которые разбивается вторая ломанная линия через: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots\ldots \delta_p$ сумма этих элементов будет равна периметру второй ломанной линии, т.е.:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots\ldots + \delta_p = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots\ldots + \beta_m$$

Сравним два соответственных элемента первого и второго периметров, пусть элемент первого будет γ_i, а элемент второго δ_i. Положим, что первый элемент образует с осью проекций $\angle\varphi_i$, а другой элемент $\angle\psi_i$; причем φ_i и ψ_i оба берутся острыми. Общая проекция этих элементов на ось проекций будет будет PP' и мы найдем, что:

$$PP' = \gamma_i \cos\varphi_i = \delta_i \cos\psi_i$$

Из этого равенства можем написать такую пропорцию:

$$\frac{\gamma_i}{\delta_i} = \frac{\cos\psi_i}{\cos\varphi_i}$$

В этом равенстве переходим к пределам, взяв пределы первой части равными пределу второй; будем иметь:

$$\lim \frac{\gamma_i}{\delta_i} = \lim \frac{\cos\psi_i}{\cos\varphi_i}$$

Но заметим, что угол ψ_i и угол φ_i будут весьма мало отличаться один от другого, так что отношение $\frac{\cos\psi_i}{\cos\varphi_i}$ будет весьма мало отличаться от 1. Но, при переходе к пределу, точки кривой M_2 и M_1, а также и смежная точки M и M_3 стремятся совпасть в одну точку, а хорды стремятся обратиться в касательную в этой точке, а потому оба угла φ_i и ψ_i;

будутъ стремиться къ общему предѣлу, который есть уголъ, образуемой касательной съ осью проэкцій. Слѣдовательно эти два угла въ предѣлѣ будутъ равны, т.е. $\lim \frac{\cos\varphi_i}{\cos\delta_i} = 1$, а потому и $\lim \frac{\varphi_i}{\delta_i} = 1$. Слѣдовательно, если возьмемъ предѣлы:

$$\lim(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_n) = \lim(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots\ldots+\beta_p) = S$$

то на основаніи второй теоремы способа безконечно-малыхъ, имѣемъ право поставить вмѣсто $\beta_1 \ldots\ldots \delta_1$; вмѣсто $\beta_2 \ldots\ldots \delta_2$ и вмѣсто $\beta_p \ldots\ldots \delta_p$, потому что предѣлы ихъ отношенія равны 1. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

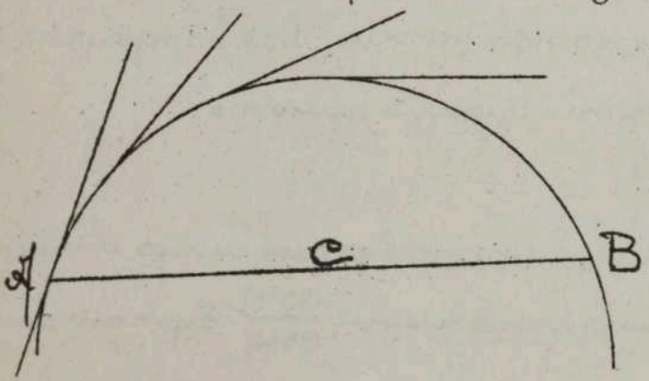
$$\lim(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots\ldots+\gamma_p) = \lim(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\ldots\ldots+\delta_p)$$

Иначе говоря мы доказали равенство $S = S'$. Отсюда заключаемъ, что какъ-бы мы не вписывали въ кривую ломанной линіи, предѣлъ суммы ея сторонъ всегда будетъ одинъ и тотъ-же.

Докажемъ еще слѣдующую теорему важную для опредѣленія длины кривой.

Теорема. Предѣлъ отношенія безконечно-малой дуги къ стягивающей ее хордѣ = 1

Возьмемъ произвольную кривую и на ней конечную дугу $\overset{\frown}{AB}$.



Положимъ, что длина дуги $\overset{\frown}{AB} = S$, т.е. что $\text{arc.}\overset{\frown}{AB} = S$. Соединимъ A съ B, положимъ что длина хорды $\overline{AB}$ равна C, т.е. $\overline{AB} = C$. Впишемъ въ дугу $\overset{\frown}{AB}$ ломанную линію съ безконечно-большимъ числомъ весьма малыхъ сторонъ. Обозначимъ эти стороны послѣдовательно чрезъ: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$. Обозначимъ углы, образуемые этими сторонами съ хордой, послѣдовательно чрезъ: $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n$

причемъ всѣ угла беремъ острые. Проэктируемъ периметръ ломанной линіи на хорду AB, понятно, что сумма ея сторонъ будетъ равна длинѣ хорды AB, т. е. что:

$$\alpha_1 \cos\varphi_1 + \alpha_2 \cos\varphi_2 + \ldots\ldots + \alpha_n \cos\varphi_n = c$$

Обозначимъ наибольшій изъ всѣхъ угловъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots\ldots \varphi_n$ чрезъ φ', а наименьшій чрезъ φ''.

Если въ нашемъ равенствѣ поставимъ вмѣсто угловъ $\varphi_1, \varphi_2 \varphi_3 \ldots$ $\ldots \varphi_n$ вездѣ уголъ φ', то косинусъ угловъ уменьшится и вся сумма тоже уменьшится, а потому будемъ имѣть:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n)\cos\varphi' < c$$

Если-же вездѣ возьмемъ вмѣсто: $\varphi_1, \varphi_2 \varphi_3, \ldots\ldots \varphi_n$ уголъ φ'', то косинусъ увеличатся и вся сумма увеличится, получимъ:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n)\cos\varphi'' > c$$

Обозначимъ, для краткости, сумму всѣхъ α чрезъ $\Sigma\alpha$. Изъ нашихъ неравенствъ имѣемъ: $\frac{\Sigma\alpha}{c} < \frac{1}{\cos\varphi'}$ и $\frac{\Sigma\alpha}{c} > \frac{1}{\cos\varphi''}$. Отсюда видно, что необходимо существуетъ такой уголъ φ_0 меньше угла φ' и больше угла φ'', при которомъ будетъ имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{\Sigma\alpha}{c} = \frac{1}{\cos\varphi_0}$$

Это равенство существуетъ, каково-бы ни было n и какъ-бы малы ни были стороны ломанной линіи. Но при переходѣ къ предѣлу, всѣ эти стороны обратятся въ касательныя въ различныхъ точкахъ кривой AB и уголъ φ_0 будетъ среднимъ угломъ, между наибольшимъ и наименьшимъ угломъ изъ образуемыхъ хордой съ касательными. Сумма $\Sigma\alpha$ въ предѣлѣ есть длина дуги AB, т. е. $\lim \Sigma\alpha = S$, такъ что въ предѣлѣ будемъ имѣть: $\frac{S}{c} = \frac{1}{\cos\varphi_0}$. Теперь отъ этого равенства легко перейдти къ нашей теоремѣ; вообразимъ что точка B перемѣщается по кривой AB, причемъ B стремится совпасть съ точкой A, при

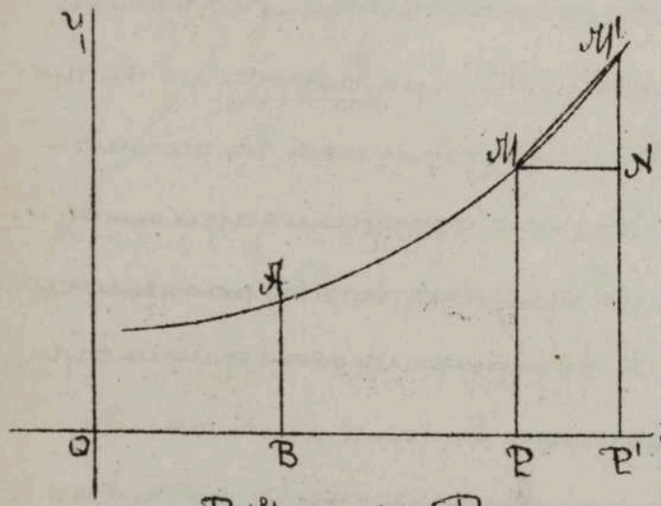
чемъ, какъ дуга AB такъ и хорда AB, сдѣлаются безконечно-малыми. По мѣрѣ уменьшенія дуги AB, углы образуемые различными касательными съ хордой AB будутъ становиться все меньшие и меньшие, ибо всѣ касательныя при этомъ стремятся совпасть со хордой AB, которая сама обратится въ предѣлъ въ касательную въ точкѣ A. Наибольшій и наименьшій изъ угловъ, дѣлаемыхъ касательными въ различныхъ точкахъ дуги AB съ хордой AB обратится въ 0, а стало-быть и средній-между-ними уголъ φ_0 въ предѣлѣ обратится тоже въ 0; такъ что будемъ имѣть $\lim \varphi_0 = 0$ и потому $\lim \cos \varphi_0 = 1$. Такимъ образомъ, перейдя къ предѣлу, получимъ, что предѣлъ отношенія безконечно-малой дуги къ ея хордѣ, будетъ:

$$\lim \frac{S}{C} = 1$$

Что и требовалось доказать.

Диф-алъ дуги кривой линіи.

Возьмемъ сначала кривую, отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ коор-тъ, (кривая плоская.)



Пусть ур-іе этой кривой будетъ: $y = f(x)$. Возьмемъ на кривой постоянную точку A и построимъ ея коор-ты OB и AB; полагая ихъ данными. Возьмемъ на той-же кривой другую переменную точку M, ея абсцисса есть $OP = x$, а ордината $PM = y$. Разсмотримъ длину дуги MM' и назовемъ ее чрезъ S, т.е. положимъ дугу $MM' = S$. Длина дуги MM' можетъ быть разсматриваема, какъ ф-ія абсциссы x, ибо съ измѣ-

нением x изменяется и длина дуги S, причем всякому определенному значению x, соответствует вполне определенная величина S; следовательно S есть ф-ия x. Эта ф-ия определена вполне геометрически, аналитическое же ее выражение нам неизвестно. Чтобы найти диф-ал дуги S, ищем сначала ее производную, т.е. предел:

$$\frac{dS}{dx} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta x} \quad \text{при } \Delta x = 0$$

Дав абсциссе x бесконечно-малое приращение $PP' = \Delta x$, мы увеличим дугу S на длину MM', так что дуге $MM' = \Delta S$. Проведем хорду MM', и припомним, что предел отношения бесконечно-малой дуги, к стягивающей ее хорде равен 1, т.е. $\lim \frac{\Delta S}{MM'} = 1$. Вследствие этого при отыскивании предела отношения $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, на основании (предела) первой теоремы способа бесконечно-малых, мы можем вместо бесконечно-малого ΔS взять бесконечно-малое MM'; стало-быть:

$$\lim \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim \frac{MM'}{\Delta x}$$

Проведем через точку M линию $MN \parallel$-ую оси $x^{ов}$, мы получим при этом треугольник MNM' в котором будет иметь $M'N = \Delta y$ и гипотенузу $MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Следовательно искомый предел будет:

$$\lim \frac{MM'}{\Delta x} = \lim \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} \quad \text{или:}$$

$$\lim \frac{MM'}{\Delta x} = \lim \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Переходя к пределу, заметим, что предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет производная ф-ия y' и мы найдем вследствие этого, что:

$$\lim \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \; ; \; \lim \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Таким образом будем иметь:

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ отсюда } dS = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ или также:}$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Это есть выражение диф-ала дуги плоской кривой, отне-

сенной къ прямоугольнымъ осямъ коор-тъ. Найденное выраженіе dS будетъ вполнѣ извѣстнымъ выраженіемъ, такъ какъ входящая въ него производная $\frac{dy}{dx}$ всегда можетъ быть получена изъ даннаго уравненія кривой.

Дифференціалъ дуги кривой въ пространствѣ.

Оси прямоугольны. Положимъ, что мы имѣемъ въ пространствѣ нѣкоторую кривую, которая представлена двумя данными уравненіями:

$$f(x,y,z)=0 \text{ и } \varphi(x,y,z)=0$$

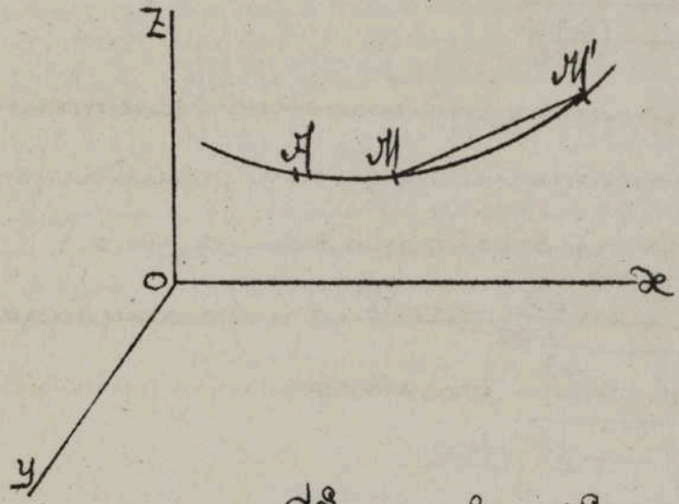
Такъ какъ мы здѣсь имѣемъ два ур-ія съ тремя перемѣнными, то понятно, что два изъ нихъ должны быть разсматриваемы, какъ неявныя функціи третьяго.

Пусть y и z будутъ ф-іи x-а, которое мы будемъ считать перемѣннымъ независимымъ. Если-бы мы рѣшили эти ур-ія относительно y и z, то мы могли-бы представить ихъ въ видѣ:

$$y=\psi(x) \quad \text{и} \quad z=F(x)$$

причемъ y и z сдѣлались-бы явными ф-іями x. Если эти ур-ія нельзя рѣшить относительно y и z, то все-таки мы должны представлять y и z какъ совершенно опредѣленныя, хотя и неявныя ф-іи x. Возьмемъ на этой кривой постоянную, хотя и произвольную точку A, пусть ея коор-ты будутъ x_0, y_0, z_0. Возьмемъ на этой-же кривой произвольную точку M, коор-ты которой пусть будутъ x, y, z. Обозначимъ чрезъ S длину дуги $\overset{\frown}{AM}=S$, причемъ считаемъ эту длину отъ точки A. Эта длина S очевидно будетъ совершенно опредѣленной ф-іей абсциссы (перем. независимаго), такъ какъ всякому опредѣленному значенію x соотвѣтствуютъ вполнѣ опредѣленныя

значения Y и Z, по ур-иям кривой, а потому каждому определенному значению x соответствуют вполне определенное положение точки M на кривой и вполне определенная длина дуги S; с изменением x изменятся Y и Z, т.е. изменяется положение точки M, а потому изменяется и длина S, отсюда заключаем, что S есть ф-ия x, вполне определенная



геометрически, хотя аналитическое ея выражение найти и невозможно. Предположим себе найти диф-ал этой ф-ии dS.

Что-бы найти диф-ал, найдем сначала производную этой ф-ии, т.е. $\frac{dS}{dx}$, которая по определению есть: $\frac{dS}{dx} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta x}$, при x уменьшающемся неопределенно, короче — при $\Delta x = 0$. Что-бы получить ΔS, изменим x безконечно-мало на $x + \Delta x$, вследствии этого и Y и Z как функции x, получат соответствующия приращения и обратятся в $Y + \Delta Y$ и $Z + \Delta Z$. Коор-ты $x + \Delta x$, $Y + \Delta Y$ и $Z + \Delta Z$ определяют новую точку M' на кривой, при этом дуга MM получит некоторое приращение MM', так что $\text{arc}\,MM' = \Delta S$. Проведем безконечно-малую хорду MM'. Мы знаем, что предел отношения безконечно-малой дуги к стягивающей ее хорде $= 1$, а потому: $\lim \frac{\Delta S}{MM'} = 1$. На этом основании при отыскании предела отношения $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ мы можем взять вместо безконечно-малого ΔS, безконечно-малое MM' и будем писать:

$$\frac{dS}{dx} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim \frac{MM'}{\Delta x}$$

Но длину хорды MM' можно выразить по формуле, определяющей расстояние между двумя точками в пространстве,

ых которыхъ одной коор-ты (x, y, z), а другой $(x+\Delta x; y+\Delta y; z+\Delta z)$. Эта формула дастъ:

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Вставивъ вмѣсто MM' это выраженіе, получимъ:

$$\frac{ds}{dx} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim \frac{MM'}{\Delta x} = \lim \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta x}$$

Или подвода Δx подъ корень, будемъ имѣть:

$$\frac{ds}{dx} = \lim \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

Взявъ предѣлъ замѣтимъ, что предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія ф-іи y къ безконечно малому приращенію перемѣннаго независимаго есть производная ф-ія, т.е.:

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$; точно такожде и $\lim \frac{\Delta z}{\Delta x} = z'$, а потому будемъ имѣть:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$ отсюда:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

Выраженія производныхъ y' и z' могутъ быть найдены изъ ур-ій кривой по извѣстнымъ намъ правиламъ, а потому и диф-ал дуги ds будетъ имѣть выраженіе вполнѣ опредѣленное.

Диф-ал дуги пишутъ обыкновенно, употребляя диф-альныя обозначенія производной; а именно въ такомъ видѣ:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

или вводя dx подъ корень, получимъ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

или также: $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Эта формула заключаетъ въ себѣ какъ частной случай формулу, выведенную прежде для диф-ала дуги плоской кривой. Положимъ, что кривая лежитъ въ плоскости xy, тогда для всѣхъ точекъ этой кривой имѣемъ $z = 0$, а потому и $dz = 0$ и выраженіе диф-ала для плоской кривой, получимъ въ видѣ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Эта та самая формула, которая была выведена выше для плоской кривой. Заметим, что формула:

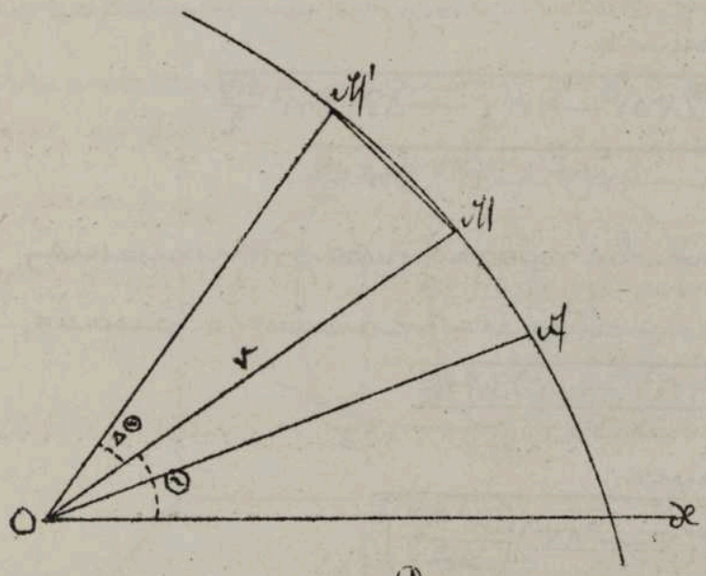
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

служит для определения диф-ала дуги, как кривой двойной кривизны, так и плоской кривой, если эта последняя не лежит ни в одной из плоскостей коор-т.

Дифференциал дуги плоской кривой, отнесенной к полярным коор-там.

Положим, что точка O есть полюс, прямая Ox есть полярная ось. Пусть дана кривая, полярное ур-ие которой есть:

$$r = f(\Theta)$$



Возьмем на этой кривой постоянную, хотя и произвольную точку M, от которой будем считать дуги. Возьмем на той-же кривой переменную точку M, полярные коор-ты, которой суть r и θ. Пусть длина дуги MM, т.е. arc MM = S. Ясно, что эта длина S есть ф-ия θ, так как каждому определенному значению θ соответствует определенная длина дуги S. Таким образом S есть ф-ия θ, определенная геометрически, а аналитическое ее выражение мы не знаем.

Попробуем найти диф-ал этой ф-ии. Для этого сначала мы отыщем производную, т.е.: $\frac{dS}{d\Theta} = \lim \frac{\Delta S}{\Delta \Theta}$, при $\Delta\Theta$ уменьшающимся неопределенно. Что-бы получить ΔS, дадим углу θ бесконечно-малое приращение $\Delta\Theta$, новому полярному углу

$\Theta + \Delta\Theta$ будетъ соотвѣтствовать и новая точка M' на кривой, радіусъ векторъ этой точки будетъ $r + \Delta r$ и такимъ образомъ дуга получила приращеніе $\text{дуг } MM' = \Delta S$. Проведемъ безконечно-малую хорду MM'. Мы знаемъ, что предѣлъ отношенія безконечно-малой дуги къ стягивающей ее хордѣ равенъ 1, т.е. $\lim \frac{MM'}{\Delta S} = 1$. На этомъ основаніи мы можемъ написать, что:

$$\lim \frac{\Delta S}{\Delta \Theta} = \lim \frac{MM'}{\Delta \Theta}$$

Но хорда MM', можетъ быть выражена изъ треугольника MOM', по формулѣ квадрата стороны, лежащей противъ угла $\Delta\Theta$; эта формула даетъ:

$$MM' = \sqrt{r^2 + (r + \Delta r)^2 - 2r(r + \Delta r)\cos\Delta\Theta}$$

Или раскрывъ скобки и подставивъ вмѣсто $\cos\Delta\Theta$ равную ему величину $1 - 2\sin^2\frac{\Delta\Theta}{2}$, получимъ:

$$MM' = \sqrt{2r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - 2r^2 - 2r\Delta r - 4r(r + \Delta r)\sin^2\frac{\Delta\Theta}{2}}$$

Сокративъ найдемъ: $MM' = \sqrt{\Delta r^2 + 4r(r + \Delta r).\sin^2\frac{\Delta\Theta}{2}}$

Теперь вставимъ это выраженіе въ предѣлъ отношенія, предѣлъ котораго мы ищемъ; мы найдемъ такимъ образомъ, что: $\frac{dS}{d\Theta} = \lim \frac{MM'}{\Delta\Theta} = \lim \frac{\sqrt{\Delta r^2 + 4r(r + \Delta r)\sin^2\frac{\Delta\Theta}{2}}}{\Delta\Theta}$

Подводя $\Delta\Theta$ подъ корень, получимъ:

$$\frac{dS}{d\Theta} = \lim \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{\Delta\Theta}\right)^2 + r(r + \Delta r)\left(\frac{\sin^2\frac{\Delta\Theta}{2}}{\frac{\Delta\Theta}{2}}\right)^2}$$

Переходя къ предѣлу, замѣтимъ что:

$$\lim \frac{\Delta r}{\Delta\Theta} = r' = f'(\Theta)$$

такъ какъ это есть предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія ф-іи r къ безконечно-малому приращенію перемѣннаго независимаго Θ; кромѣ того въ предѣлѣ Δr обратится въ 0, а $r + \Delta r$ въ r; наконецъ: $\lim \frac{\sin\frac{\Delta\Theta}{2}}{\frac{\Delta\Theta}{2}} = 1$.

Такимъ образомъ въ предѣлѣ получимъ:

$$\frac{dS}{d\Theta} = \sqrt{r'^2 + r^2}, \text{ а отсюда: } dS = \sqrt{r'^2 + r^2}.d\Theta.$$

Это выражение диф-ала будет вполне определенным, так как $r = f(\Theta)$ есть извѣстная ф-ія Θ, а производная $r' = f'(\Theta)$ всегда может быть найдена. Напишем это выражение въ диф-альныхъ знакахъ; будемъ имѣть:

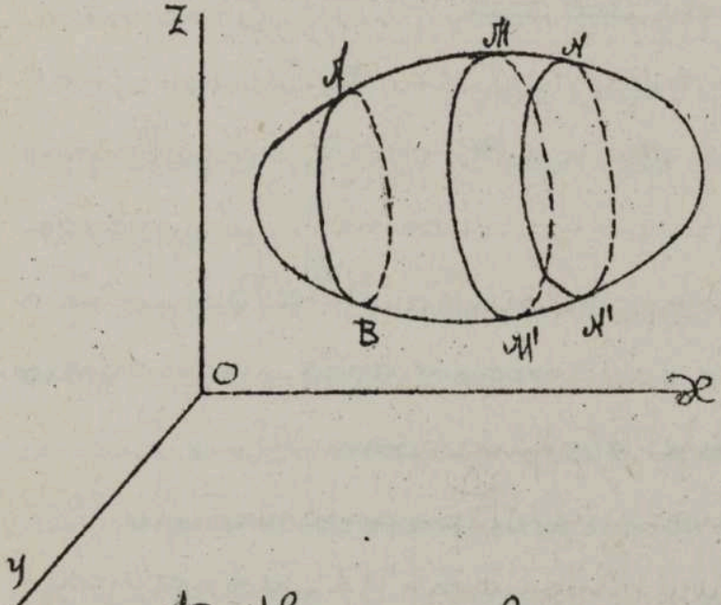
$$dS = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 + r^2}\, d\Theta$$

Или подводя $d\Theta$ подъ корень найдемъ:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\Theta^2}$$ или также: $dS^2 = dr^2 + r^2 (d\Theta)^2$.

Дифференціалъ объема.

Разсмотримъ тѣло какой угодно, но данной формы, отнесенное къ прямоугольнымъ осямъ координатъ въ пространствѣ. При этомъ будемъ полагать, что намъ даны, какъ поверхности, ограничивающія это тѣло, такъ и положеніе его относительно осей координатъ.



Проведемъ произвольную, но постоянную сѣкущую плоскость ||-ную плоскости YZ, на опредѣленномъ разстояніи отъ начала O, положимъ на разстояніи X_0. Эта плоскость разсѣкаетъ наше тѣло и въ сѣченіи получится нѣкоторая площадь AB. На произвольномъ, но перемѣнномъ разстояніи X отъ начала O, проведемъ другую сѣкущую плоскость также ||-ную плоскость YZ; эта плоскость также разсѣчетъ наше тѣло и въ сѣченіи мы получимъ площадь MM'.

Между этими двумя плоскостями (||-ми) будетъ заключаться вполнѣ опредѣленная часть нашего тѣла, которая ограничена съ двухъ сторонъ двумя сѣкущими плоскостями, ||-ми

между собой, а с прочими сторонами плоскостями тела. Назовем объем полученного таким образом отрезка через V, так что объем $ABMM' = V$.

Пока как положение тела дано, то очевидно, что объем V есть вполне определенная ф-ия перпендикулярного расстояния x плоскости MM' от плоскости yz, так как всякому определенному значению x будет соответствовать определенное положение плоскости MM', а стало-быть и определенная величина объема V и понятно, что с изменением x будет изменяться и объем V. Словом объем V есть ф-ия x, пока неизвестная, но вполне определенная геометрически. Предложим себе найти диф-ал этой функции.

Предварительно мы найдем производную этой ф-ии, т.е.

$$\frac{dV}{dx} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad \text{при } \Delta x = 0$$

Что-бы определить ΔV, дадим расстоянию x бесконечно-малое приращение, перемещая его на $x + \Delta x$ и проведем на этом расстоянии новую секущую плоскость $\parallel$-ную плоскости yz; в сечении мы получим новую площадь NN'. Весь объем получит при этом приращение заключающееся между плоскостями MM' и NN'; это приращение объема есть ΔV.

Сделаем теперь следующее замечание. При рассечении ... конца тела плоскостями $\parallel$-ми плоскости yz, мы получим в сечении всегда определенной величины площади; так что в сечении на расстоянии x от плоскости yz, мы получим площадь MM', назовем ее через U. Понятно, что величина площади U есть определенная ф-ия расстояния x, так как всякому определенному значению x соответствует вполне определенная величина площади U. Стало-быть U есть так-

нас ф-ія x, тоже неизвѣстная и опредѣленная только геометрически. Когда x измѣнится на $x+\Delta x$, то въ сѣченіи получится новая площадь $N'N'$, которая должна быть представлена чрезъ: $U+\Delta U$, обозначая чрезъ ΔU безконечно-малое приращеніе ф-іи U, полученное его вслѣдствіи измѣненія x на $x+\Delta x$. Замѣтивъ это, найдемъ теперь предѣлъ, между которыми заключается приращеніе объема ΔV.

Изъ всѣхъ точекъ контура площади $M'M'$ на плоскость $N'N'$ опустимъ перпендикуляры; такимъ образомъ мы построимъ безконечно-малой цилиндръ, основаніемъ котораго служитъ площадь $M'M'$, а высотой Δx, и понятно, что объемъ этого цилиндра равенъ $U.\Delta x$.

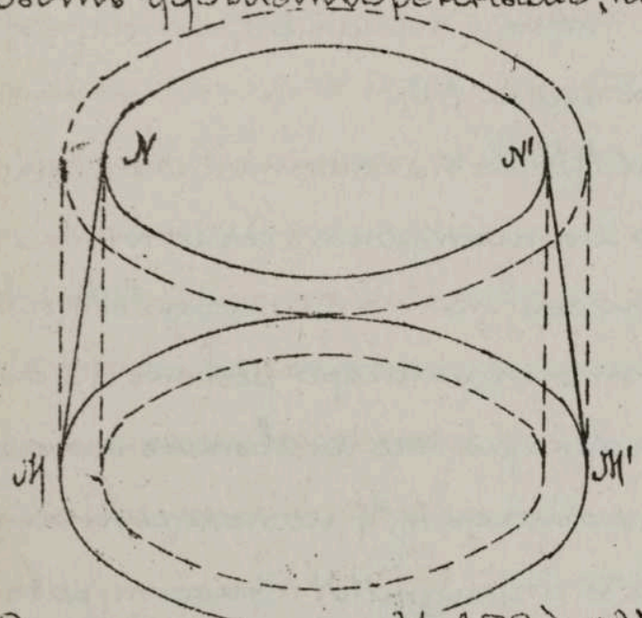
Теперь построимъ другой цилиндръ, для чего изъ всѣхъ точекъ контура $N'N'$ опустимъ $\perp$-ры на площадь $M'M'$, но полученной цилиндръ будетъ имѣть основаніемъ площадь $N'N'$ и высоту равную Δx, а потому и объемъ его будетъ равенъ: $(U+\Delta U).\Delta x$.

Сравнимъ теперь объемъ ΔV съ объемами двухъ полученныхъ цилиндровъ.

Полагая Δx безконечно-малымъ и, слѣдовательно, предполагая себѣ площадь $N'N'$ произвольно близкой къ площади $M'M'$: мы различимъ при этомъ два случая, такъ какъ цилиндры могутъ быть расположены двоякимъ образомъ относительно другъ друга, а именно или одинъ цилиндръ входитъ въ другой, или-же эти цилиндры пересѣкаются своими боковыми поверхностями.

Положимъ сначала, что одинъ цилиндръ входитъ внутрь другаго, и поверхность ограничивающая объемъ ΔV, идетъ между боковыми поверхностями этихъ двухъ цилиндровъ, причемъ одно изъ основаній объема ΔV, одинаково съ основаніемъ меньшаго цилиндра, а другое его основаніе одинаково съ основаніемъ

большого цилиндра. Что боковая поверхность объема ΔV будет расположена между боковыми поверхностями двух цилиндров, — то мы можем допустить это на том основании, что это условие будет непременно удовлетворено, когда возьмем Δx достаточно малым; это условие не перестанет быть удовлетворенным, когда мы Δx будем приближать к 0.



При таком расположении цилиндров ясно, что объем ΔV будет заключаться между объемами этих цилиндров и мы будем иметь им. следующия два неравенства:

$$U.\Delta x < \Delta V < (U + \Delta U).\Delta x$$

при ΔU положительном, или, когда приращение ΔU отрицательно, мы будем иметь: $U.\Delta x > \Delta V > (U + \Delta U).\Delta x$. Разделив эти неравенства на Δx, мы напишем их вместо таким образом:

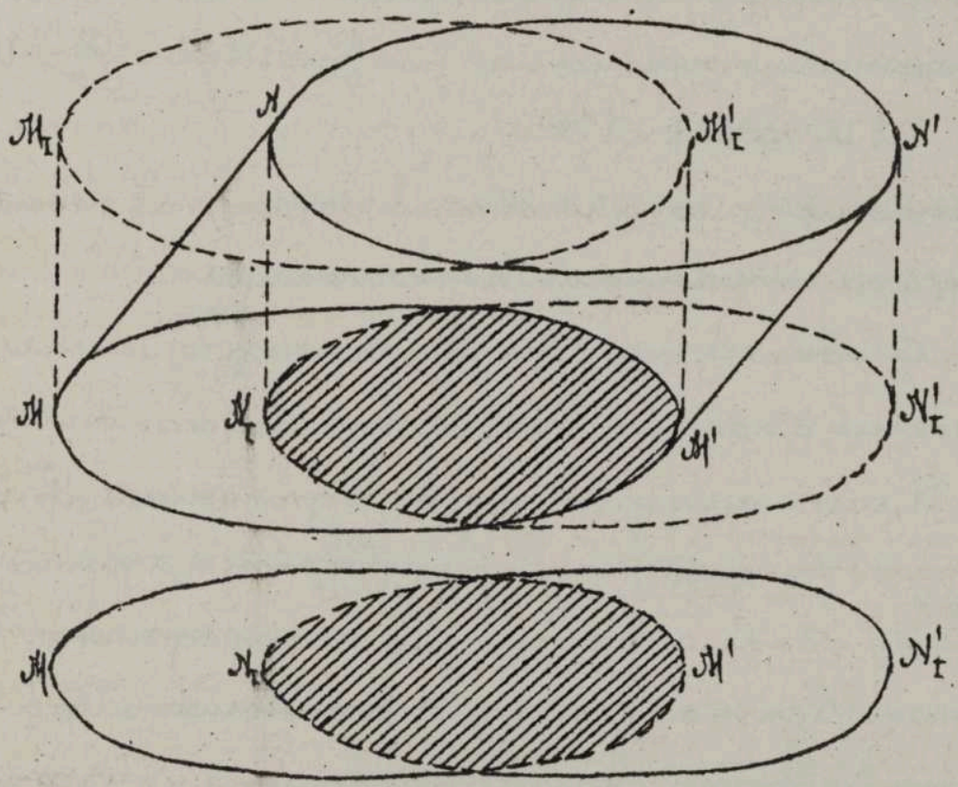
$$U \leqslant \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqslant (U + \Delta U)$$

Положим теперь, что Δx стремится к 0, при этом понятно, что сечение MM' стремится совпасть с сечением MM', а стало-быть при этом и ΔU также стремится к 0, и мы видим, что отношение $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ заключается между двумя количествами, из которых одно есть U, а другое стремится к U; стало-быть и само отношение $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ также стремится к U и мы будем иметь в пределе: $\lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = U$ или $\frac{dV}{dx} = U$, отсюда:

$$dV = U.dx$$

Разберем теперь второй случай, когда два цилиндра, построенные нами, пересекаются своими боковыми поверхностями. Вообразим два таких бесконечно-малых цилиндра и положим,

что одинъ цилиндръ есть $MM'M_1M_1'$, а другой $NN'N_1N_1'$. Объемъ ΔV ограниченъ поверхностью, которая идетъ отъ контура NN' къ контуру MM'. Что-бы въ этомъ случаѣ опредѣлить подобно предыдущему два объема, между которыми будетъ заключаться объемъ ΔV, мы, вмѣсто построенныхъ нами двухъ цилиндровъ, разсмотримъ два другіе цилиндра той-же высоты ΔZ; основаніемъ для большаго цилиндра, мы возьмемъ площадь ограниченную внѣшнимъ контуромъ MN_1'; эта площадь MN_1' будетъ больше площади MM' и потому она можетъ быть представлена чрезъ $U+\delta$, гдѣ δ есть безконечно-малое, которое стремится къ нулю съ уменьшеніемъ ΔZ. Объемъ этого цилиндра равенъ очевидно $(U+\delta)\cdot\Delta Z$ и очевидно, что этотъ объемъ будетъ больше объема ΔV,



которой содержится внутри разсматриваемаго цилиндра. Построимъ теперь другой цилиндръ, у котораго за основаніе примемъ площадь, ограниченную внутреннимъ контуромъ, N_1M' (площадь заштрихованная). Площадь этого основанія N_1M' очевидно меньше U и эту площадь можемо представить чрезъ $U-\beta$, гдѣ β есть безконечно-малое и приближается къ 0, съ уменьшеніемъ ΔZ; объемъ этого цилиндра будетъ равенъ $(U-\beta)\cdot\Delta Z$ и очевидно онъ меньше объема ΔV. Такимъ

образомъ имѣемъ такія два неравенства:

$$(U+\alpha).\Delta x > \Delta V > (U-\beta).\Delta x$$

Раздѣлимъ эти неравенства на Δx, получимъ слѣдующее:

$$U+\alpha > \frac{\Delta V}{\Delta x} > U-\beta$$

Съ приближеніемъ Δx къ 0, двѣ плоскости MM' и NN' стремятся совпасть и при этомъ, какъ замѣчено уже выше, α и β стремятся къ 0; а потому мы видимъ, что отношеніе $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ будетъ такожде стремиться къ U, такъ какъ $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ заключается между двумя количествами, изъ которыхъ каждое стремится къ U. Такимъ образомъ въ предѣлѣ мы получимъ: $\lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = U$ или $\frac{dv}{dx} = U$, отсюда:

$$dv = u.dx$$

Слѣдовательно выраженіе диф-ала объема остается тоже самое, какъ и въ вышерассмотрѣнномъ первомъ случаѣ.

Относительно диф-ала объема, мы сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе. Въ это выраженіе диф-ала входитъ площадь сѣченія U, эта величина U есть совершенно опредѣленная ф-ія x-са, но выраженіе U, какъ ф-ія x намъ неизвѣстно, а потому и выраженіе диф-ала объема вообще еще не опредѣлено. Но мы увидимъ впослѣдствіи, что площадь U во многихъ случаяхъ для даннаго объема, можетъ быть опредѣлена, какъ ф-ія x и тогда выраженіе диф-ала объема будетъ такожде вполнѣ опредѣленнымъ выраженіемъ.

Объ опредѣленныхъ видахъ.

Нерѣдко случается, что разсматриваемая ф-ія: $y = F(x)$ при какомъ либо частномъ значеніи перемѣннаго независимаго, напр. при $x = a$ представляется въ одномъ изъ, такъ называемыхъ, неопредѣленныхъ видахъ; виды эти суть: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$,

∞^0, 1^∞, 0^0 и $\infty - \infty$. Въ такомъ случаѣ ф-ія не можетъ быть вычислена непосредственно и можно даже сказать, что эта ф-ія при $x = a$ перестаетъ существовать; но въ виду непрерывности измѣненія ф-іи, въ подобныхъ случаяхъ принято разсматривать предѣлъ, къ которому ф-ія неопредѣленно приближается, въ то время какъ x неопредѣленно приближается къ a; этотъ предѣлъ наз. истиннымъ значеніемъ ф-іи при $x = a$. Пусть это истинное значеніе есть y_a, тогда $y_a = \lim f(x)$, при $x = a$

Изъ обозначенныхъ неопредѣленныхъ видовъ важнѣйшее есть $\frac{0}{0}$ и всѣ остальные — приводятся къ этому виду; а потому и начнемъ разсмотрѣніе ихъ съ него.

Видъ $\frac{0}{0}$ представляется при слѣдующихъ условіяхъ; положимъ что данная разсматриваемая ф-ія представляется въ видѣ дроби: $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и при $x = a$, имѣемъ: $f(x) = 0 = \varphi(x)$, тогда: $y_a = \frac{0}{0}$. Сдѣлаемъ x равнымъ $a + h$ и будемъ h приближать къ 0, тогда:

$$y_a = \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{1.2} + \dots + \frac{h^n}{1.2\dots n} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{1.2\dots n(n+1)} f^{n+1}(a+\Theta h)}{\varphi(a) + \varphi'(a)h + \frac{h^2\varphi''(a)}{1.2} + \dots + \frac{h^n}{1.2\dots n}\varphi^n(a) + \frac{h^{n+1}}{1.2\dots n(n+1)}\varphi^{n+1}(a+\Theta h)}$$

обозначимъ его черезъ (1)

но $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$, сокращая на h, получимъ:

$$y_a = \frac{f'(a) + \frac{h}{2} f''(a) + \frac{h^2}{2.3} f'''(a) \dots}{\varphi'(a) + \frac{h}{2}\varphi''(a) + \frac{h^2}{2.3}\varphi'''(a) \dots}$$

При приближеніи h къ 0 въ предѣлѣ получимъ: $y_a = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$; это и есть искомое истинное значеніе, но при этомъ можетъ случиться, что $f'(a) = 0$ и $\varphi'(a) = 0$ и въ этомъ случаѣ снова войдетъ: $y_a = \frac{0}{0}$; но обращаясь къ предыдущему равенству (1) и замѣчая, что въ этомъ случаѣ (при $f'(a) = \varphi'(a) = 0$) первые два члена обращаются въ нули, получимъ, сокращая дробь на $\frac{h^2}{2}$, что: $y_a = \frac{f''(a) + \frac{h}{3} f'''(a)}{\varphi''(a) + \frac{h}{3}\varphi'''(a)}$ и если въ этомъ равенствѣ перейдемъ къ предѣлу, положивъ $h = 0$, то получимъ: $y_a = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$;

Здѣсь опять можетъ получиться неопредѣленный видъ, именно можетъ быть, что $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ и тогда $y_a = \frac{0}{0}$. Но обращаясь снова къ первоначальному равенству, мы видимъ, что въ этомъ случаѣ при первыхъ членахъ въ числителѣ и знаменателѣ $= 0$ и, сокративъ тогда дробь на $\frac{h^3}{1.2.3}$, получ.:

$$y_a = \frac{f'''(a) + \frac{h}{1.2.3.4} f^{IV}(a) + \dots}{\varphi'''(a) + \frac{h}{1.2.3.4} \varphi^{IV}(a) + \dots};$$

перейдя опять къ предѣлу, получимъ:

$$y_a = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)} \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что такимъ образомъ мы найдемъ дѣйствительное значеніе y_a, ибо всѣ производныя: $f'(a), f''(a), f'''(a) \dots$ не могутъ быть нулями, потому что тогда было-бы, что $f(a+h) = 0$, т.е. $f(x) = 0$. Это разсмотрѣніе приводитъ насъ къ такому правилу. Если дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x = a$ обращается въ $\frac{0}{0}$, то должно составить новую дробь, взявъ производную отъ числителя и знаменателя и въ этой новой дроби сдѣлать $x = a$. Если при этомъ вновь получится неопредѣленность, то къ новой дроби нужно приложить тоже правило; т.е. составить изъ нее дробь $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ и опять сдѣлать $x = a$ и т. д. Такъ нужно продолжать до тѣхъ поръ, пока неопредѣленность не уничтожится. Введенное нами правило можно выразить такимъ равенствомъ: $y_a = \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ и т.д., при $x = a$.

Примѣръ. Чему равняется y при $x = 0$ въ выраженіи

$$y = \frac{\cos x - \cos nx}{\sin x - \sin nx} \text{ при } x = 0,$$

находимъ: $y_0 = \frac{1-1}{0-0} = \frac{0}{0}$. Приложимъ къ этому выраженію правило, получимъ: $y_0 = \lim \frac{-\sin x + n \cdot \sin nx}{\cos x - n \cdot \sin nx}$ при $x = 0$ имѣемъ: $y_0 = \frac{0}{1-n} = 0$.

2.) Найти чему равна ф-ія: $y = \frac{\cos x - \cos ax}{\cos x - \cos bx}$ при $x = 0$?

При $x = 0$ имѣемъ: $y_0 = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$. Приложимъ правило:

$y_0 = \lim \frac{-\sin x + a\sin ax}{-\sin x + b\sin bx}$ при $x=0$ опять получаем: $y_0 = \frac{0}{0}$.
Применяем к новой дроби правило, получим:

$$y_0 = \lim \frac{-\cos x + a^2\cos ax}{-\cos x + b^2\cos bx}$$ и при $x=0$, получим:

$$y_0 = \frac{-1+a^2}{-1+b^2} = \frac{a^2-1}{b^2-1}$$

3.) Вычислить обратится ф-ия: $y = \frac{x - \sin x}{x^3}$ при $x=0$?
При $x=0$ имеем: $y_0 = \frac{0}{0}$. Применяем правило:
$y_0 = \lim \frac{1-\cos x}{3x^2}$; при $x=0$, опять $y_0 = \frac{0}{0}$; $y_0 = \lim \frac{\sin x}{6x}$, при $x=0$; $y_0 = \frac{0}{0}$; $y_0 = \lim \frac{\cos x}{6}$; при $x=0$, $y_0 = \frac{1}{6}$.

Примечание. При выводе правила мы предполагали, что неопределенность $\frac{0}{0}$ получилась при конечном значении $x=a$, но такая неопределенность может получиться и при $x=\infty$. К этому случаю наш вывод неприложим, ибо бесконечной величине x^{-a} нельзя было-бы дать приращение h и следовательно нельзя было-бы применить формулу Тейлора. Что-бы устранить это затруднение, рассмотрим опять ф-ию $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и положим, что при $x=\infty$ имеем $f(x)=0$ и $\varphi(x)=0$, так что $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{0}$. Вместо x введем новое переменное, полагая $x = \frac{1}{z}$; тогда $z = \frac{1}{x}$ или при $x=\infty$, $z = \frac{1}{\infty} = 0$. При $x = \frac{1}{z}$ будем иметь:
$y = \frac{f'(\frac{1}{z})}{\varphi'(\frac{1}{z})}$ ....(1). В этой дроби неопределенность получится при $z=0$ и так как z есть величина конечная, то по отношению к дроби (1) мы можем применить прежнее правило и тогда, получим: $y_\infty = \lim \frac{-f'(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2}}{-\varphi'(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2}} = \lim \frac{f'(\frac{1}{z})}{\varphi'(\frac{1}{z})} =$
$= \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x=\infty$. Отсюда видим, что правило осталось тоже.

Вид $\frac{\infty}{\infty}$

Он получится при следующем условии. Положим, что $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и пусть при $x=a$, $f(a) = \varphi(a) = \infty$, тогда $y_a = \frac{\infty}{\infty}$

Приведемъ этотъ видъ къ виду $\frac{0}{0}$. Стоитъ только написать уравненіе въ такомъ видѣ: $y = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$. Теперь при $x = a$, получимъ: $y_a = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$. Приложивъ правило къ новому виду дроби, получ.:

$$y_a = \lim \frac{\frac{-\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}}{\frac{-f'(x)}{f(x)^2}} = \lim \frac{\varphi'(x) \cdot f(x)^2}{f'(x) \cdot \varphi(x)^2} = \lim \frac{\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2}{\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}$$ или, взявъ предѣлъ,

получимъ: $y_a = \frac{\lim\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2}{\lim\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]}$, но $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = y_a$, стало-быть:

$y_a = \frac{y_a^2}{\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}$; отсюда получимъ, что $y_a = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Это показываетъ, что правило, служащее для отысканія истиннаго значенія $\frac{\infty}{\infty}$ осталось такое, какъ и для отысканія истиннаго значенія вида $\frac{0}{0}$.

Примѣчаніе. Въ этомъ выводѣ мы допускали сокращеніе на y_a, что возможно только тогда, когда $y_a \neq 0$ и $y_a \neq \infty$. Между тѣмъ можетъ случиться, что $y_a = 0$; спрашивается, остается-ли наше правило и для этого случая вѣрнымъ? Можно доказать, что правило остается тѣмъ-же; дѣйствительно пусть $y_a = 0$, тогда $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ и мѣсто этой дроби разсмотримъ новую: $y = \frac{f(x) + K\varphi(x)}{\varphi(x)}$. Эта дробь при $x = a$, также будетъ $\frac{\infty}{\infty}$, но ее истинное значеніе легко найти; именно, имѣемъ: $\frac{f(x) + K\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} + K$ и слѣдовательно при $x = a$, величина ее есть K. Такъ какъ эта величина не есть 0 или ∞, то къ этой дроби приложимо все выведенное нами правило и будемъ имѣть:

$\lim \frac{f(x) + K\varphi(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x) + K\varphi'(x)}{\varphi'(x)}$ и съ другой стороны мы знаемъ, что это должно быть $= K$, иначе это равно будетъ $\lim\left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} + K\right] = K$ и $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0$. Изъ этого разсмотрѣнія видно, что и въ этомъ случаѣ существуетъ равенство $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} =$

$= \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Рассмотрим теперь частный случай, когда $y_a = \infty$. Напишем y въ такомъ видѣ $y = \frac{1}{\frac{\varphi(x)}{f(x)}}$; применимъ правило, получимъ: $y_a = \frac{1}{\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}}$ и такъ какъ $y_a = \infty$, то въ этомъ случаѣ $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0$ и какъ сейчасъ доказано, будемъ имѣть, что $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0$. Но $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{1}{\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}}$ и потому при $x = a$, получимъ: $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{1}{0} = \infty$. Слѣдовательно и въ разсматриваемомъ случаѣ будемъ имѣть: $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Изъ этихъ замѣчаній слѣдуетъ, что выведенное нами правило приложимо во всѣхъ случаяхъ.

Примѣръ. Найти истинное значеніе ф-іи: $y = \frac{\lg(x-a)}{\lg(e^x - e^a)}$ при $x = a$? При $x = a$, получимъ $y_a = \frac{\lg 0}{\lg 0} = \frac{\infty}{\infty}$. Применимъ правило: $y_a = \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x - e^a}} = \lim \frac{e^x - e^a}{e^x(x-a)}$ при $x = a$, получимъ: $y_a = \frac{0}{0}$ Снова прилагая правило, получимъ: $y_a = \lim \frac{e^x}{e^x + e^x(x-a)} = 1$

Видъ. 0.∞.

Пусть $y = f(x).\varphi(x)$ и положимъ, что при $x = a$, имѣемъ: $f(a) = 0$, а $\varphi(a) = \infty$, тогда и получится $y_a = 0.\infty$. Этотъ видъ прямо приводится къ виду $\frac{0}{0}$, стоитъ только написать ф-ію въ видѣ: $y = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, тогда при $x = a$, получимъ: $y_a = \frac{0}{0}$. Можно также это выраженіе представить въ видѣ $\frac{\infty}{\infty}$, написавъ его такъ $y = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ и при $x = a$, получимъ $y_a = \frac{\infty}{\infty}$. Приведя-же его къ виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, можемъ применить предыдущее правило.

Примѣръ. Чему равна ф-ія $y = x^2 \lg(1 - \frac{1}{x})$ при $x = \infty$? Находимъ: $y_\infty = \infty.\lg 1 = \infty.0$. Напишемъ ф-ію такъ: $y = \frac{\lg(1 - \frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}$, тогда при $x = \infty$, получимъ: $y_\infty = \frac{0}{0}$. Прилагаемъ правило, получимъ: $y_\infty = \lim \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{x-1}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim \frac{x^2}{2(x-1)} = \lim \frac{x}{2(1 - \frac{1}{x})}$ при $x = \infty$, $y_\infty = \frac{\infty}{2} = \infty$.

Виды: ∞^0, 1^∞ и 0^0

Они получаются при слѣдующихъ условіяхъ: Пусть есть ф-ія $y = f(x)^{\varphi(x)}$ и при $x = a$ получаемъ $f(a) = \infty$, а $\varphi(a) = 0$, тогда данная ф-ія приметъ видъ $y_a = \infty^0$. Если при $x = a$, ф-ія имѣетъ $f(a) = 1$, а $\varphi(a) = \infty$, тогда она будетъ $y_a = 1^\infty$. Наконецъ, если въ нашей ф-іи $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$, тогда она будетъ $y_a = 0^0$. Всѣ эти три вида приводятся къ одному: $0.\infty$, если только вмѣсто y будемъ искать Неперовъ логарифмъ y. Дѣйствительно $\lg y = \varphi(x).\lg f(x)$ и теперь при $x = a$ въ первомъ случаѣ получимъ: $\lg y_a = 0.\infty$; во второмъ случаѣ, получимъ: $\lg y_a = \infty.0$ и въ третьемъ случаѣ, получимъ: $\lg y_a = 0.\infty$, а съ другой стороны имѣемъ всегда: $y = e^{\lg y}$ и потому, зная $\lg y$, будемъ знать и само y.

Примѣчаніе. Пусть $y = x^{\frac{1}{1-x}}$ при $x = 1$, получимъ: $y_1 = 1^0 = 1^\infty$. Разсмотримъ логарифмъ этой ф-іи $\lg y = \frac{1}{1-x}.\lg x$; при $x = 1$, имѣемъ $\lg y_1 = \infty.0$. Напишемъ иначе $\lg y = \frac{\lg x}{1-x}$ и при $x = 1$, получимъ $\lg y_1 = \frac{0}{0}$; прилагаемъ правило, получ.: $\lg y_1 = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim(-\frac{1}{x}) = -1$ при $x = 1$; слѣдовательно: $y_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Видъ $\infty - \infty$

Положимъ, что дана ф-ія $y = f(x) - \varphi(x)$ и пусть при $x = a$, $f(a) = \infty = \varphi(a)$; тогда наше ур-іе приметъ видъ $y_a = \infty - \infty$. Что-бы привести этотъ видъ къ виду $\frac{0}{0}$, положимъ, что $f(x) = \frac{1}{f_1(x)}$, откуда $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ и слѣдовательно будетъ извѣстна; положимъ также $\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)}$, откуда: $\varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$. Такимъ образомъ первоначальное ур-іе будетъ: $y = \frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{\varphi_1(x)}$ и при $x = a$, получимъ $f_1(a) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{\infty} = 0$; также и $\varphi_1(a) = \frac{1}{\varphi(a)} = \frac{1}{\infty} = 0$, и слѣдовательно:

$y=\frac{\varphi(x)-\varphi_1(x)}{f_1(x)-\varphi_1(x)}$, при $x=a$, будемъ имѣть: $y_a=\frac{0}{0}$, т.е. придемъ къ предѣлу неопредѣленному вида.

Примѣръ. Найти истинное значеніе ф-іи: $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}$ при $x=0$? Полагая прямо $x=0$, получимъ неопредѣленность: $y_{x=0}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$, но сдѣлавъ вычитаніе на самомъ дѣлѣ, получимъ: $y=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$, теперь при $x=0$, получимъ неопредѣленный видъ: $y_0=\frac{0}{0}$. Къ послѣдней дроби приложимъ правило, получимъ: $y_0=\lim\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}=\frac{0}{0}$ при $x=0$; опять приложимъ правило, получимъ: $y_0=\frac{e^x}{xe^x+e^x+e^x}$ и при $x=0$ получимъ: $y_0=\frac{1}{2}$; это и есть истинное значеніе функціи.

Замѣчаніе о неопредѣленныхъ видахъ въ неявныхъ функціяхъ.

Дано уравненіе $f(x,y)=0$, опредѣляющее y какъ неявную ф-ію x-а. Изъ этого ур-ія можно найти производную $\frac{dy}{dx}$, которая, вообще говоря, выразится дробью, содержащей въ числителѣ и знаменателѣ x, y, такъ что $\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi(x,y)}{F(x,y)}$. Положимъ, что при нѣкоторомъ частномъ значеніи x-а, напримѣръ при $x=a$, соотвѣтственная величина y-а будетъ b, а производная будетъ: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a=\frac{\varphi(a,b)}{F(a,b)}$. Можетъ случиться, что $\varphi(a,b)=0=F(a,b)$, тогда $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a=\frac{0}{0}$. Правило для отысканія истиннаго значенія $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ остается тоже самое, ибо, такъ какъ y есть ф-ія x-а, то въ выраженіи $\frac{dy}{dx}$ числитель и знаменатель будутъ ф-іями x-а и слѣдовательно надо взять производную отъ числителя и раздѣлить на производную знаменателя и потомъ сдѣлать $x=a$, а $y=b$. Особенность вычисленія будетъ заключаться въ томъ, что когда возьмемъ производныя, то въ числителѣ и знаменателѣ войдетъ $\frac{dy}{dx}$, а когда сдѣлаемъ $x=a$, то войдетъ искомая величина $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ и слѣдовательно мы получимъ

не прямо $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, а ур-ie, изъ котораго надо будетъ опредѣлить $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$. Это ур-ie будетъ квадратнымъ и изъ него для $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ получатся два значенія. Можетъ случиться, что приложивъ правило, мы встрѣтимся съ видомъ $\frac{0}{0}$; то придется прилагать правило еще разъ и ур-ie, изъ котораго опредѣлится $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, будетъ уже кубичнымъ.

Примѣръ. Дано ур-ie: $y^4+3y^2-4xy-x^2=0$, найти частное значеніе $\frac{dy}{dx}$ при $x=0$?

Найдемъ $\frac{dy}{dx}$; дифф-цируя, получимъ:

$$4y^3\frac{dy}{dx}+6y\cdot\frac{dy}{dx}-4x\cdot\frac{dy}{dx}-4y-2x=0 \text{ или:}$$

$$(2y^3+3y-2x)\frac{dy}{dx}=2y+x, \text{ отсюда: } \frac{dy}{dx}=\frac{2y+x}{2y^3+3y-2x}.$$

Найдемъ $\frac{dy}{dx}$ при $x=0$; въ этомъ случаѣ ур-ie будетъ:

$y^4+3y^2=0$ или $y^2(y^2+3)=0$; откуда $y=0$. И такъ при $x=0$ и $y=0$ и $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{0}{0}$. Прилагаемъ правило, получимъ:

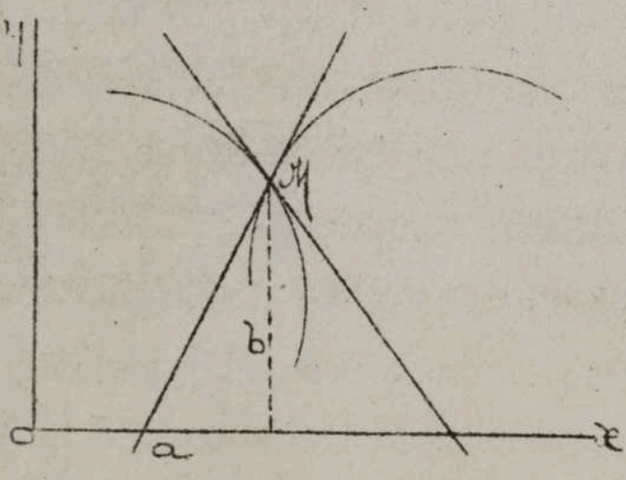
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\lim\frac{2\frac{dy}{dx}+1}{6y^2\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}-2} \text{ при } x=0 \text{ и } y=0 : \left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+1}{3\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-2}$$

Приведемъ къ одному знаменателю и рѣшимъ ур-ie:

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2-2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+1 \text{ или } 3\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2-4\left(\frac{dy}{dx}\right)_0-1=0, \text{ отсюда:}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}.$$

Посмотримъ какое геометрическое значеніе имѣетъ разсматриваемый нами случай неопредѣленности. Пусть дано ур-ie $f(x,y)=0$, оно, какъ извѣстно представляетъ нѣкоторую кривую и $\frac{dy}{dx}$ есть tg-съ угла наклона касательной къ кривой съ осью x-въ:



$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$. Въ нашемъ случаѣ точка прикасновенія M имѣетъ коор-ты $x=a$ и $y=b$, Такъ какъ для

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$ мы получимъ два различія, то стало-быть въ точкѣ M можно провести двѣ касательныя и слѣдовательно въ этой точкѣ сходятся двѣ вѣтви кривой, такая точка кривой называется двойной точкой кривой.

О наибольшемъ и наименьшемъ значеніи ф-іи со 1-мъ независимымъ перемѣнымъ.

Разсмотримъ произвольную функцію: $y = f(x)$.

Значеніями ф—іи смежными съ разсматриваемымъ наз. тѣ, которыя получаются изъ разсматриваемаго чрезъ безконечно-малое измѣненіе x-а въ положительную и отрицательную сторону.

Такъ что, если $f(x)$ есть разсматриваемое значеніе ф-іи, то смежными съ нимъ - будутъ: $f(x+\varepsilon)$ и $f(x-\varepsilon)$, гдѣ ε есть безконечно-малое количество.

Наибольшимъ значеніемъ-или maximum-омъ наз. большее изъ смежныхъ съ нимъ значеній.

Наименьшимъ значеніемъ ф-іи или minimum-омъ наз. меньшее значеніе изъ смежныхъ съ нимъ.

По этимъ опредѣленіямъ должно имѣть, что если $f(x)$ есть maximum, то $f(x) > f(x+\varepsilon)$ и $> f(x-\varepsilon)$, а если $f(x)$ есть minimum, то $f(x) < f(x+\varepsilon)$ и $< f(x-\varepsilon)$. Итакъ, если $+\varepsilon$ и $-\varepsilon = h$, гдѣ h положительное или отрицательное количество, то въ случаѣ maximum-а должно имѣть: $f(h+x) < f(x)$, а въ случаѣ minimum-а — $f(x+h) > f(x)$ или, наконецъ, въ случаѣ maxi-

max-а: $f(x+h)-f(x)<0$, а в случае min-а: $f(x+h)-f(x)>0$ и при том эти два неравенства должны иметь место при всяком значении h, но только бесконечно малом, положительном или отрицательном.

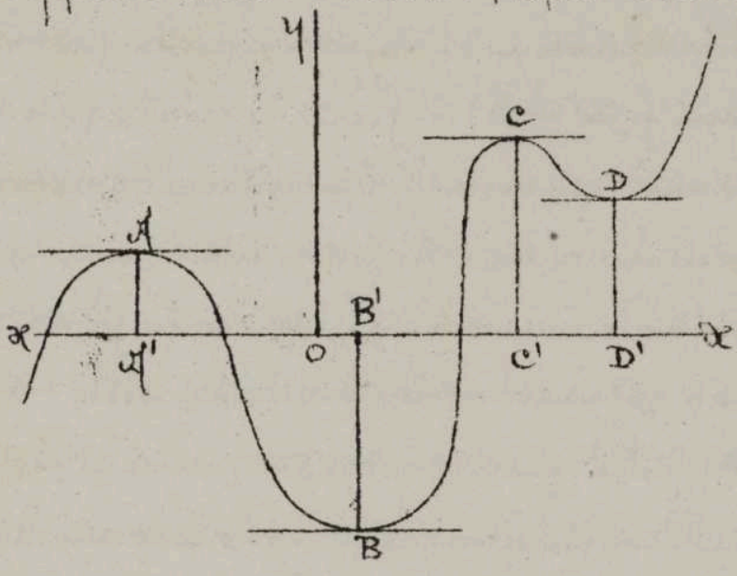
Неравенства эти и представляют первое признаки наибольшего или наименьшего значения ф-ии.

К ним мы вернемся после, а теперь дополним общее определение.

Из определения max-а ясно, что это вовсе не есть самая большая величина, получаемая ф-ией, а только величина большая всякой близкой с ней; точно также и min — не есть самая меньшая величина ф-ии. Одна и также ф-ия может иметь несколько max-ов и несколько min-ов, но только при разных значениях x-а; при этом может случиться, что иной max-м меньше minimum-а. Что-бы уяснить это, представим некоторую ф-ию $y=f(x)$, будем в ней изменять x, давая ему все возможные действительные значения от $x=-\infty$ ($x=0$) до $x=+\infty$; тогда при возрастании x-а ф-ия может изменяться весьма разнообразно. Положим, что она идет, то увеличиваясь, то уменьшаясь, тогда увеличиваясь она дойдет до некоторого maximum-а, затем начнет уменьшаться до некоторого minimum-а; потом снова будет увеличиваться до нового maximum-а, затем дойдет до нового minimum-а и так далее.

Геометрически $y=f(x)$ представляет некоторую кривую и y есть ордината этой кривой. Положим, что кривая идет так, как представлено на чертеже. Отметим на ней точки, в которых касательная к кривой $\parallel$-на оси x-ов; точки A, B, C и D. В этих точках ордината

получаетъ или наибольшее или наименьшее значеніе, такъ въ точкѣ A при $x = -OA'$ имѣемъ $y = +A'A$ и это есть maximum, при $x = OB'$, $y = -BB'$ и это есть minimum, при $x = OC'$, $y = CC'$, будетъ maximum, при $x = OD'$ опять y — minimum и т. д.



Въ этомъ примѣрѣ видимъ, что $\min DD' >$ max $A'A$. Отрицательный — же minimum BB' будетъ, собственно, max. по абсолютной величинѣ.

Задача теоріи наибольшихъ и наименьшихъ значеній зачастую въ слѣдующемъ: дана ф-ія $y = f(x)$, требуется опредѣлить, при какихъ значеніяхъ x эта ф-ія получаетъ наибольшій или наименьшій значенія. Дадимъ x-у безконечно-малое приращеніе h положительное или отрицательное; разсмотримъ разность $f(x+h) - f(x)$, которую разложимъ по строкѣ Тейлора, получимъ:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x) + R$$

гдѣ $R = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}f^{n+1}(x+\Theta h)$, гдѣ $\Theta > 0$ и < 1. По признакамъ, приведеннымъ выше, въ случаѣ max-а или min-а разность эта имѣетъ одинъ и тотъ-же знакъ при h положительномъ и при h отрицательномъ, именно въ случаѣ max-а разность должна быть < 0, а при min-ѣ она > 0. Попробуемъ опредѣлить знакъ разности по второй части. Вторая часть есть сумма безконечно-малыхъ различныхъ порядковъ; первый членъ есть безконечно-малое $1^{го}$ порядка, а сумма всѣхъ остальныхъ составитъ одно безконечно-малое $2^{го}$ порядка. При чрезвычайно маломъ, безконечно-малое $1^{го}$ порядка превзойдетъ

бесконечно-малое 2-го порядка во бесконечно-большое число раз, вследствіи того при h достаточно маломъ первый членъ будетъ по абсолютной величинѣ значительно больше суммы всѣхъ остальныхъ членовъ и тогда знакъ всей второй части будетъ одинаковъ со знакомъ перваго члена. И такъ при h достаточно-маломъ знакъ разности $f(x+h)-f(x)$ будетъ одинаковъ со знакомъ $hf'(x)$. Но въ этомъ членѣ h входитъ въ первой степени и потому знакъ этого члена будетъ мѣняться съ измѣненіемъ знака при h; отсюда заключаемъ, что если $f'(x) \neq 0$, то разность мѣняетъ знакъ съ измѣненіемъ знака у h. Такимъ образомъ ф-ія $f(x)$ будетъ имѣть max. или min. только тогда, когда $f'(x)=0$. Возьмемъ одно изъ значеній x, удовлетворяющее этому ур-ію, тогда будемъ имѣть:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\frac{h^4}{2.3.4}f^{IV}(x)+\dots\dots+R$$

Здѣсь первый членъ во второй части есть бесконечно-малое 2-го порядка, а сумма всѣхъ слѣдующихъ за нимъ членовъ составитъ бесконечно-малое 3-го порядка; вслѣдствіи того при достаточно-маломъ h, первый членъ превзойдетъ сумму всѣхъ остальныхъ членовъ въ бесконечно-большое число разъ, а стало-быть знакъ разности будетъ одинаковъ со знакомъ перваго члена, т.е. со знакомъ: $\frac{h^2}{2}f''(x)$. Но этотъ членъ содержитъ h въ квадратѣ и слѣдовательно не мѣняетъ своего знака съ измѣненіемъ знака у h; такъ что если $f''(x)>0$, то и разность: $f(x+h)-f(x)>0$ и значитъ ф-ія $f(x)$ будетъ имѣть min-альное значеніе, если же $f''(x)<0$, т.е. разность <0, то значитъ ф-ія $f(x)$ имѣетъ max-альное значеніе. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ такое правило max-а и min-а:

Надо взять производную данной ф-іи — $f'(x)$ и

приравнять ее нулю, из этого ур-ия определить x, тогда только при найденном значении, ф-ия может получить max- или min-ум; взяв одно из этих значений x-а (если таковые будут иметься) нужно вторично его во вторую производную и уже определить ее знак; если окажется, что $f''(x) < 0$, то ф-ия будет max, если же $f''(x) > 0$, то ф-ия — min.

Пример. Найти при каком значении x-а ф-ия: $y = \frac{\lg x}{x}$ будет иметь max или min?

Поступаем по правилу: производная первого порядка будет: $\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \lg x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \lg x}{x^2}$, приравнивая нулю, получим: $\frac{1 - \lg x}{x^2} = 0$ или $1 - \lg x = 0$, отсюда: $\lg x = 1$, или $x = e$.

Берем вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$, будем иметь: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1 - 2x(1 - \lg x)}{x^4}$, отсюда: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3 + 2\lg x}{x^3}$, полагая $x = e$, получим: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3+2}{e^3} = \frac{-1}{e^3}$, а $\frac{-1}{e^3} < 0$. Следовательно при $x = e$ ф-ия имеет max и он будет: $y = \frac{\lg e}{e} = \frac{1}{e}$ и так как имеет один только MAX., то значит это и есть самая большая величина, получаемая ф-ей.

Может случиться, что величина x, найденная из ур-ия $f'(x) = 0$, будучи вставлена во вторую производную даст $f''(x) = 0$, тогда надо ее будет вставить в 3-ю производную; но может быть, что и $f'''(x) = 0$ и т.д.; что-бы сразу все это исключить, положим, что определили x из ур-ия $f'(x) = 0$ и, вставляя в следующие производные, мы получили первую необращающуюся в 0 производную n-го порядка, т.е. что производная ф-ии от $f''(x)$ до $f^{n-1}(x) = 0$ и только уже $f^n(x) \neq 0$; тогда

наше разложение будет:

$$f(x+h)-f(x)=f^{n}(x)\frac{h^{n}}{1.2\ldots n}+f^{n+1}(x)\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}+\ldots\ldots\ldots+R$$

Ряд этих равенств будем рассуждать так же, как и ранее и замятим, что при h достаточно малом первый член второй части будет больше суммы всех остальных членов и потому знак разности будет одинаков со знаком первого члена. При этом нужно разыскать два случая: когда n четное и — нечетное число. Если n четное, то первый член $\frac{h^{n}}{1.2.3\ldots n}\cdot f^{n}(x)$ не будет изменять знака с изменением его h и потому, если в этом случае $f^{n}(x)<0$, то и разность: $f(x+h)-f(x)<0$ при h положительном или отрицательном, т.е. $f(x)$ будет max. Если $f^{n}(x)>0$, то и разность >0 и ф-ия будет min. Если n число нечетное, то тогда первый член будет менять знаки с изменением знака при h, так же будет и с разностью; в этом случае $f(x)$ не будет иметь ни max., ни min.; отсюда следующее правило: если величина x, найденная из ур-ия $f'(x)$ обращает в нуль 2-ю производную, то нужно вставить ее в 3-ю производную, если она ее обращает в 0, тогда в 4-ю и т.д. до тех пор, пока дойдем до производной, необращающейся в 0 и если эта производная четного порядка, то ф-ия имеет или max. или min, смотря по знаку производной; если-же производная нечетного порядка, то ф-ия не имеет ни max. ни min.

Пример. Найти при какой величине x ф-ия: $y=e^{x}+e^{-x}+2\cos x$ имеет max или min?

Находимъ первую производную $\frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x} + 2\sin x$, приравниваемъ ее нулю: $e^x - e^{-x} + 2\sin x = 0$. Видимъ что это ур-іе удовлетворяется при $x=0$. Вставивъ эту величину во 2-ю производную, получимъ: $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^{-x} - 2\cos x = 0$, при $x=0$; вставляемъ въ 3-ю производную, получимъ: $\frac{d^3y}{dx^3} = e^x - e^{-x} + 2\sin x = 0$, при $x=0$; $\frac{d^4y}{dx^4} = e^x + e^{-x} + 2\cos x = 0$ при $x=0$ обращается въ $\frac{d^4y}{dx^4} = 4 > 0$. Слѣдовательно данная ф-ія при $x=0$ имѣетъ минимумъ, такъ что при $x=0$, имѣемъ: $y = 1+1+2 = 4$.

Приложеніе теоріи наибольшихъ и наименьшихъ значеній ф-іи къ неявнымъ функціямъ.

Эта теорія примѣняется и къ неявнымъ ф-іямъ, только съ нѣкоторыми измѣненіями въ вычисленіяхъ. Пусть дана ф-ія: $F(x,y) = 0$, гдѣ y есть неявная ф-ія x-а, требуется опредѣлить при какомъ значеніи x, y будетъ max или min. Находимъ производную $\frac{dy}{dx}$, она выразится дробью, въ которой числитель и знаменатель будутъ содержать x и y, пусть напримѣръ: $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x,y)}{f(x,y)}$; чтобъ опредѣлить величину x нужно приравнять эту производную нулю, при этомъ получимъ $\varphi(x,y)=0$, но это ур-іе содержитъ два неизвѣстныхъ x и y, вслѣдствіи чего нужно присоединить еще данное ур-іе $F(x,y)=0$, тогда изъ двухъ ур-ій найдемъ x, y; пусть $x=a$ и $y=b$, тогда a и есть та величина, при которой y будетъ имѣть max или min значенія.

Что-бъ узнать будетъ-ли это maximum или minimum, обратимся ко второй производной, которая по вычисленію также предстанетъ въ видѣ ф-іи отъ x и y, получимъ: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi(x,y)}{f_1(x,y)}$. Вставивъ сюда $x=a$ и $y=b$, найдемъ:

$\varphi(a,b) \geq 0$. Если $\varphi(a,b) < 0$, то $y = b$ будет max., а если $\varphi(a,b) > 0$, то y – min.

Пример. Требуется определить при каком значении x-а, в ур-ии: $3a^2y^2 + xy^3 + 4ax^3 = 0$, y получает max или min и чему y при этом значении x-а равен?

Дано ур-ие: $3a^2y^2 + xy^3 + 4ax^3 = 0$; диф-цируя, получим: $6a^2y\frac{dy}{dx} + 3xy^2\frac{dy}{dx} + y^3 + 12ax^2 = 0$; отсюда: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+12ax^2}{6a^2y+3xy^2}$ приравнивая это выражение 0, получим: $y^3 + 12ax^2 = 0$. Решая это ур-ие вместе с данным, имеем: $y^3 = -12ax^2$ или $y = -\sqrt[3]{3.2^2ax^2}$; подставляя эту величину в данное ур-ие: $3a^2(-\sqrt[3]{3.2^2ax^2})^2 - 12ax^3 + 4ax^3 = 0$ или $6a^2x\sqrt[3]{3^2.2a^2x} = 8ax^3$ или $3^5.a^5 = 2^5.x^5$, или $x^5 = \frac{3^5.a^5}{2^5}$, или $x = \frac{3a}{2}$. Находим $y = -\sqrt[3]{3.2^2.ax^2}$, или $y = -\sqrt[3]{3.2^2.a\frac{3^2.a^2}{2^2}} = -3a$. Теперь надо узнать, что это max или min. Находим вторую производную, для чего диф-цируем выражение, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(6ay^2 + 3xy^2)(3y^2\frac{dy}{dx} + 24ax) - (y^3 + 12ax^2)(6a^2\frac{dy}{dx} + 6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2)}{(6a^2y + 3xy^2)^2}$$

Вставив в это выражение величину $y_a = -3a$ и сделав сокращение, получим: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{36ax}{-18a^3 + \frac{81}{2}a^3} < 0$. Значит $y = -3a$ есть max.

Признаки наибольших и наименьших значений, выводимые из рассмотрения первой производной.

Рассмотрим возрастающую ф-ию: $f(x)$ и положим, что при $x = a$, для ф-ии получается max-альное значение, так что $f(a)$ есть max. В этом случае, согласно определению max-а, должно быть: $f(a-\varepsilon) < f(a)$ и $f(a+\varepsilon) > f(a)$, где ε есть бесконечно-малая положительная величина.

Возьмем производную ф-ию $f'(x)$ и рассмотрим, как будет в этом случае она изменяться с изменением x от $x = a - \varepsilon$ до $x = a$ и до $x = a + \varepsilon$. В промежутке от $a - \varepsilon$ до a ф-ия $f(x)$ идет возрастая и следовательно в этом промежутке производная имеет знак $+$; напротив в промежутке от a до $a + \varepsilon$ ф-ия $f(x)$ идет убывая и ея производная в этом промежутке имеет знак $-$. Таким образом видим, что при maximum-е ф-ия $f'(x)$ при переходе x-а через a меняет свой знак с $+$ на $-$ (при увеличении x-а).

Рассмотрим теперь случай minimum-а, положим, что при $x = b$ ф-ия $f(b)$ есть minimum, тогда согласно определению min-а будем иметь: $f(b-\varepsilon) > f(b) < f(b+\varepsilon)$. Рассмотрим опять $f'(x)$ и проследим, как она изменяется, когда в ней x будет изменяться от $x = b - \varepsilon$ до $x = b$ и до $x = b + \varepsilon$. В промежутке от $x = b - \varepsilon$ до $x = b$ ф-ия $f(x)$ убавляет и знак при $f'(x)$ будет $-$; напротив того между b и $b + \varepsilon$ ф-ия $f(x)$ возрастает и значит знак при $f'(x)$ будет $+$. Отсюда видно, что производная в случае minimum-а, при возрастании x, меняет свой знак с $-$ на $+$. Из этого разсмотрения следует, что maximum или minimum, ф-ия получается при тех значениях x-а при которых ея производная меняет свой знак с $+$ на $-$ в maximum-е и с $-$ на $+$ в minimum-е при возрастании x-а. Производная $f'(x)$ может менять свой знак от разных причин. Самый важный случай и та на которую встречающийся есть тот, когда производная меняет свой знак при переходе через 0. Что-бы открыть тот

значенія x-а, при которыхъ это можетъ быть, надо $f'(x)$ приравнять нулю и рѣшить ур-іе $f'(x)=0$ относительно x-а. Положимъ, что нашли $x=a$; если при этомъ значеніи производная мѣняетъ свой знакъ съ $+$ на $-$, или съ $-$ на $+$, то ф-ія будетъ имѣть или max. или min., а если не мѣняетъ знака, то ф-ія будетъ имѣть ни max. ни min. Это суть тѣ самые случаи max. или min., которые мы имѣли прежде; но послѣднее разсмотрѣніе даетъ возможность открывать max. или min. въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ. Имѣнно производная $f'(x)$ можетъ перемѣнить свой знакъ не только, обращаясь въ 0, но обращаясь еще въ ∞. Чтобы найти то значеніе x-а, при которомъ это обращеніе въ ∞ совершается, надо $f'(x)$ приравнять безконечности и изъ ур-ія $f'(x)=\infty$ опредѣлить x-а; имѣемъ: $\frac{1}{f'(x)}=0$, если это ур-іе имѣетъ рѣшеніе, положимъ $x=0$, то при этомъ значеніи можетъ быть max и min и надо опять разсмотрѣть, перемѣняетъ-ли свой знакъ $f'(x)$ при переходѣ x-а черезъ 0, и какъ она его мѣняетъ. Если мѣняетъ, то будетъ или max. или min, если не мѣняетъ, то не будетъ ни max. ни min.

Наконецъ можетъ быть третій случай, хотя весьма рѣдкій, имѣнно производная $f(x)$ при нѣкоторомъ значеніи $x=a$ можетъ перемѣнить свой знакъ, переходя сразу съ положительнаго значенія на отрицательное, это есть тотъ случай, когда производная при $x=a$ разрывается, т.е. дѣлается прерывной.

Примѣръ. Имѣетъ-ли ф-ія: $y=b+\sqrt[3]{\frac{(2ax-x^2)^2}{a}}$, max. или min. въ тѣхъ случаяхъ, когда $\frac{dy}{dx}=0$ и $\frac{dy}{dx}=\infty$?

Изъ данной ур-ія имѣемъ: $y=b+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}(2ax+x^2)^{\frac{2}{3}}$.

Находимъ, что: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}}(2ax - x^2)^{-\frac{1}{3}}(2a - 2x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{a-x}{\sqrt[3]{x(2a-x)}}$ (1)

Прежде разберемъ случай $\frac{dy}{dx} = \infty$; это будетъ, когда $a - x = 0$, т.е. при $x = a$. Разсмотримъ мѣняется-ли при этомъ значеніи x-а знакъ у $f'(x)$. Если возьмемъ x немного $< a$, то числитель дроби (1) будетъ > 0 и знаменатель > 0, слѣдовательно $\frac{dy}{dx} > 0$ и $f'(x)$ будетъ имѣть знакъ $+$. Возьмемъ x немного $> a$, тогда числитель отрицательный, а знаменатель положительной и $\frac{dy}{dx} < 0$. Слѣдовательно при возрастаніи x-а, $f(x)$ мѣняетъ свой знакъ съ $+$ на $-$, а это значитъ, что ф-ія будетъ при $x = a$.

Разсмотримъ теперь, при какомъ значеніи x-а, $\frac{dy}{dx} = 0$, изъ разсмотрѣнія дроби (1) видимъ, что это будетъ при: $x(2a - x) = 0$; т.е: при $x = 0$ или $x = 2a$. Посмотримъ мѣняетъ-ли знакъ проходя при возрастаніи x-а.

Беремъ x немного менѣе 0, тогда числитель въ дроби (1) будетъ > 0, а знаменатель < 0 и вся дробь отрицательна. Когда x немного > 0, то числитель положительной, знаменатель положительной и вся дробь положительна. Значитъ дробь при $x = 0$ имѣетъ minimum. Беремъ x немного $< 2a$ и подставляя въ выраженіе (1), получимъ: $\frac{dy}{dx} < 0$; а при x немного $> 2a$, получаемъ $\frac{dy}{dx} > 0$, слѣдовательно и при этомъ значеніи x-а, ф-ія $f(x)$ имѣетъ minimum.

Такимъ образомъ ф-ія $f(x)$ при $\frac{dy}{dx} = 0$ и при $\frac{dy}{dx} = \infty$ имѣетъ два minimum-а и одинъ-maximum.

Понятіе о неопредѣленномъ интегралѣ.

Интегрированіе есть дѣйствіе обратное дифференцированію. Интегрировать данной дифференціалъ значитъ найти такую функцію, дифференціалъ которой былъ-бы равенъ данному. Общій видъ дифференціала функціи съ однимъ перемѣннымъ независимымъ, есть: $f(x).dx$. Интеграломъ этого диф-ала называется функція $\varphi(x)$, которой диф-алъ равенъ данному диф-алу, т.е.:

$$d:\varphi(x) = f(x).dx$$

Интегралъ обозначается видоизмѣненной буквой S, именно: знакомъ $\int$ и пишется такъ:

$$\int f(x).dx = \varphi(x)$$

Понятно, что такъ какъ диф-алъ ф-іи $\varphi(x)$ равенъ по опредѣленію $\varphi'(x).dx$ и притомъ такъ какъ съ другой стороны онъ долженъ быть равенъ $f(x).dx$, то мы будемъ имѣть, что:

$$f(x) = \varphi'(x)$$

Данная ф-ія $f(x)$ называется подъинтегральной функціей и мы можемъ также сказать, что найти интегралъ отъ какого нибудь диф-ала значитъ найти такую ф-ію $\varphi(x)$, производная которой $\varphi'(x)$ равна подъинтегральной ф-іи $f(x)$. Согласно данному опредѣленію интеграла, можемъ прямо написать, для примѣра, что: $\int x^3.dx = \frac{x^4}{4}$, такъ какъ: $d\frac{x^4}{4} = \frac{4x^3.dx}{4} = x^3.dx$.

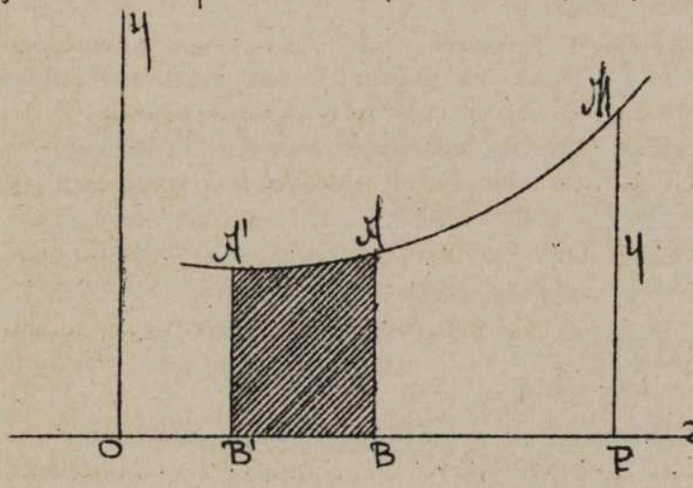
Здесь подынтегральная ф-ія x^3 есть производная отъ $\frac{x^4}{4}$.
Почему такое будемъ писать:

$$\int \cos x . dx = \sin x$$

такъ какъ: $d \sin x = \cos x . dx$.

Докажемъ прежде всего, что интегралъ отъ всякаго даннаго диф-ала всегда существуетъ.

Пусть данный диф-алъ есть: $f(x).dx$. Положимъ, что: $f(x) = y$. Это ур-іе представляетъ нѣкоторую кривую; построимъ ее. Возьмемъ на этой кривой постоянную, но произвольную точку A и проведемъ ея ординату AB; возьмемъ затѣмъ еще другую перемѣнную точку M, ея абсциссу OP обозначимъ чрезъ x, а ординату MP чрезъ y. Такимъ образомъ мы получимъ площадь $ABPM$, которая называется площадью кривой. Назовемъ разсматриваемую площадь чрезъ U. Очевидно, что эта площадь есть опредѣленная ф-ія x, именно опредѣленная геометрически, такъ какъ величина ея для всякаго даннаго значенія x можетъ быть построена.



Припомнимъ выраженіе диф-ала этой-функціи; мы нашли прежде, что:

$$dU = y . dx = f(x) . dx$$

Такимъ образомъ U и есть та ф-ія, диф-алъ которой равенъ: $f(x).dx$ и мы можемъ написать, что:

$$\int f(x) . dx = U$$

Это доказываетъ намъ, что интегралъ: $\int f(x).dx$, какъ нѣкоторая ф-ія x, несомнѣнно существуетъ; онъ представ-

ляет при том некоторую площадь и мы можем построить эту площадь, хотя ея аналитическое выражение пока остается неизвестным.

Замѣтимъ, что интегралъ, понятіе о которомъ мы вамъ опредѣлили, остается неопредѣленнымъ въ смыслѣ величины. Въ самомъ дѣлѣ намъ извѣстно, что дифф-ія, отвѣчающія на постоянное количество, имѣютъ равныя производныя и равные дифф-алы. Если мы предположимъ, что:

$$d\varphi(x) = f(x).dx$$

и если къ этой ф-іи $\varphi(x)$ прибавимъ какое нибудь постоянное количество C, то мы будемъ имѣть такое, что:

$$d[\varphi(x)+C] = f(x).dx$$

Поэтому, если прежде мы могли написать, что:

$$\int f(x).dx = \varphi(x)$$

то очевидно, что мы такое можемъ написать теперь:

$$\int f(x).dx = \varphi(x)+C$$

гдѣ C - совершенно произвольное, но постоянное количество. Слѣдовательно интегралъ въ смыслѣ величины остается неопредѣленнымъ. Къ тому-же заключенію, если остановимся на геометрическомъ значеніи интеграла. Дѣйствительно мы разсматривали площадь $MBPM = U$, взявъ постоянную точку совершенно произвольной, если поэтому мы возьмемъ вмѣсто точки M, точку M' и проведемъ ординату, то получимъ другую площадь $M'B'N'P = U_1$, эта площадь будетъ очевидно такою-же ф-іей x; если возьмемъ дифф-алъ площади, получимъ такое:

$$dU_1 = y.dx = f(x).dx$$

И по тому, если мы прежде положили, что: $\int f(x).dx = U$

то теперь мы можем написать также:

$$\int f(x)\cdot dx = U_1$$

Сравнивая площадь U_1 с площадью U, мы замечаем, что: $U_1 = U + \text{пл. } AA'B'B$. Площадь $AA'B'B$ не изменяется с изменением x, а потому это есть величина постоянная, назовем ее чрез C; мы будем иметь: $U_1 = U + C$. Величина площади C может быть считаема произвольной, так как точка A' на кривой была взята совершенно произвольна

Из этих замечаний следует, что каждый раз, как мы найдем выражение интеграла, можем прибавить к этому выражению какое угодно постоянное количество и формула интеграла остается верной; так напр. можем написать, что: $\int x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4} + C$

где C есть произвольное постоянное количество. Дадим C какое нибудь частное значение, например: $C = -\frac{1}{4}$, получим при этом: $\int x^3 dx = \frac{x^4 - 1}{4}$.

Точно также можем написать, что:

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

где C - постоянное, произвольное количество.

Отсюда выводим также следствие: что-бы получить общее выражение интеграла, необходимо всегда прибавлять, к найденному для него выражению постоянное, произвольное количество.

Нетрудно убедиться в том, что прибавив к выражению интеграла произвольное постоянное количество, мы получим самое общее выражение интеграла, так что других выражений для него уже не будет существовать..

Действительно, допустим, что для одного и того-же интеграла, мы получим два различных выражения, а именно:

$$\int f(x).dx = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \int f(x).dx = \psi(x)$$

Посмотрим, чем могут отличаться одна от другой эти две ф-ии, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Мы должны иметь по определению:

$$d\varphi(x) = f(x).dx \text{ и } d\psi(x) = f(x).dx$$

Взявъ разность этихъ диф-ловъ, найдемъ:

$$d\varphi(x) - d\psi(x) = 0 \text{ или } d[\varphi(x) - \psi(x)] = 0$$

Обозначимъ количество, стоящее въ скобкахъ чрезъ $F(x)$, т.е. положимъ, что: $\varphi(x) - \psi(x) = F(x)$; будемъ имѣть:

$$dF(x) = 0 \text{ или } F'(x).dx = 0$$

Мы имѣемъ здѣсь, что произведеніе двухъ множителей $= 0$; слѣдовательно, хотя одинъ изъ множителей долженъ равняться нулю. Но dx не равно 0, а потому мы должны имѣть: $F'(x) = 0$. Слѣдовательно $F(x)$ есть такая ф-ія x-а, производная которой равна 0.

Но припомнимъ, если производная ф-ія равна 0, то сама ф-ія есть количество постоянное. Поэтому имѣемъ: $F(x) = C$, гдѣ C есть количество постоянное, неизмѣняющееся со измѣненіемъ x-а. Слѣдовательно разность: $\varphi(x) - \psi(x) = C$, отсюда: $\varphi(x) = \psi(x) + C$, т.е. два выраженія одного и того-же интеграла могутъ отличаться другъ отъ друга только на постоянное количество.

Стало-быть, прибавивъ произвольное постоянное количество къ выраженію интеграла, мы получимъ самое общее выраженіе его.

Интегралы разсмотрѣнные нами называются **неопредѣленными**, потому что въ нихъ выраженія входятъ

неопределенная постоянная количества.

Выражение интеграла неопределенно только въ смыслѣ его величины, но видъ ф-іи представляющей данный интегралъ, отъ этого, не измѣнится отъ того, что постоянное количество въ нее входящее, принимаетъ различныя значенія. Такъ, если возьмемъ выражение:

$$\int x^3 . dx = \frac{x^4}{4} + C$$

то замѣтимъ, что, хотя величина $\frac{x^4}{4} + C$ остается неопредѣленной, — однакожъ это выражение представляетъ ф—ію совершенно опредѣленнаго вида, отличающаго ее отъ всѣхъ другихъ ф—ій.

Что-бы уничтожить неопредѣленность интеграла въ смыслѣ величины, можно прибавить новое требование, которому должна удовлетворять ф-ія, представляющая нѣкоторый интегралъ. Обыкновенно это требование заключается въ томъ, что-бы ф-ія, представляющая интегралъ, обращалась въ 0 при нѣкоторомъ данномъ и опредѣленномъ значеніи x-а. Въ этомъ случаѣ ф-ія, выражающая интегралъ, дѣлается опредѣленной не только по виду, но и по величинѣ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что мы разсматриваемъ интегралъ: $\int f(x) . dx$ и пусть опять $\varphi(x)$ есть такая ф-ія, производная которой равна $f(x)$, такъ что: $\varphi'(x) = f(x)$. Мы можемъ поэтому написать, что: $\int f(x) . dx = \varphi(x) + C$ гдѣ C произвольное постоянное количество. Положимъ теперь, что требуется, сверхъ того, что-бы ф-ія, представляющая интегралъ, обращалась въ 0, при нѣкоторомъ частномъ значеніи x, напримѣръ при $x = x_0$. Тогда надлежитъ имѣть: $\varphi(x_0) + C = 0$, откуда $C = -\varphi(x_0)$.

Теперь C перестало быть произвольнымъ и мы будемъ имѣть:

$$\int f(x).dx = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

Это выраженіе представляетъ такое, такую ф-ію, производная которой будетъ: $\varphi'(x) = f(x)$, но притомъ эта ф-ія такова, что обращается въ 0 при частномъ значеніи $x = x_0$. Такъ какъ тогда величина ф-іи будетъ: $\varphi(x_0) - \varphi(x_0) = 0$. Разсмотрѣнный нами интегралъ наз. исчезающимъ при $x = x_0$ и, слѣдовательно, исчезающій интегралъ есть такая ф-ія, производная которой равна подъинтегральной ф-іи и которая, сверхъ того, обращается въ нуль при данномъ значеніи $x = x_0$.

Предъидущій видъ интеграла называется также между предѣльнымъ, или иногда одно предѣльнымъ.

Основныя формулы интегральнаго исчисленія.

Такъ какъ интегрированіе есть дѣйствіе обратное—дифференцированію, то и основныя формулы интегральнаго исчисленія получаются изъ основныхъ формулъ дифференціальнаго исчисленія, черезъ ихъ обращеніе.

Разсмотримъ по порядку формулы дифференціальнаго исчисленія и выведемъ изъ нихъ обратныя формулы для интегрированія.

1.) Намъ извѣстно, что: $dx^{m+1} = (m+1)x^m.dx$ изъ этого равенства имѣемъ: $x^m.dx = d\frac{x^{m+1}}{m+1}$ и отсюда получимъ обратную формулу:

$$\int x^m.dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

т.е. интегралъ степени равенъ степени

единицей больше, раздѣленной на новаго показателя.

2.) Извѣстно также, что: $da^x = a^x . la . dx$, раздѣлимъ на la, получимъ: $a^x . dx = d\frac{a^x}{la}$, а отсюда будемъ имѣть:

$$\int a^x . dx = \frac{a^x}{la} + C \quad \ldots\ldots (2)$$

Въ частномъ случаѣ, когда $a = e$, получимъ:

$$\int e^x . dx = e^x + C \quad \ldots\ldots (2)'$$

3.) $dlx = \frac{dx}{x}$, а отсюда.

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C \quad \ldots\ldots (3)$$

4.) $d\,snx = cs\,x . dx$, отсюда:

$$\int cs\,x . dx = snx + C \quad \ldots\ldots (4)$$

5.) $d\,csx = -snx . dx$. Переносимъ знакъ минусъ въ первую часть подъ знакъ дифференціала, получимъ: $d(-csx) = snx . dx$, отсюда:

$$\int snx . dx = -csx + C \quad \ldots\ldots (5)$$

6.) $d\,tgx = \frac{dx}{cs^2 x}$, обратно имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{cs^2 x} = tgx + C \quad \ldots\ldots (6)$$

7.) $d\,ctgx = -\frac{dx}{sn^2 x}$, или $d(-ctgx) = \frac{dx}{sn^2 x}$, а отсюда:

$$\int \frac{dx}{sn^2 x} = -ctgx + C \quad \ldots\ldots (7)$$

8.) $d\,arc.snx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, обратно имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc.snx + C \quad \ldots\ldots (8)$$

9.) $d\,arc.cosx = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ или $d(-arc.cosx) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, отсюда:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -arc.csx + C \quad \ldots\ldots (8)'$$

10.) $d\,arctgx = \frac{dx}{1+x^2}$, обратно имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C \quad \ldots\ldots (9)$$

11.) $d\,arcctgx = -\frac{dx}{1+x^2}$ или $d(-arc.ctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$, отсюда:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -arc.ctgx + C \quad \ldots\ldots (9)'$$

Вотъ девять основныхъ формулъ интегральнаго исчисленія.

Васій Ананьевъ.

Листъ 12-ый

Сдѣлаемъ замѣчанія относительно нѣкоторыхъ изъ основныхъ формулъ.

1) Такъ какъ въ формулѣ (1) показатель m можетъ быть какимъ угодно количествомъ, положительнымъ или отрицательнымъ, цѣлымъ или дробнымъ, то показалось-бы, что изъ формулы (1) можно получить, какъ частный случай и формулу (3); стоитъ только сдѣлать $m = -1$ и мы получимъ интегралъ: $\int x^{-1} \cdot dx = \int \frac{dx}{x}$. Но однако формула первая для этого случая даетъ: $\int \frac{dx}{x} = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C$, или:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0} + C = \frac{1}{0} + C = \infty + C$$

Изъ этого видно, что формула (1), къ разсматриваемому частному случаю прямо не приложима. Это происходитъ отъ того, что въ формулѣ (1) интегралъ представляетъ вообще алгебраическую ф-ію, и только въ частномъ случаѣ, когда $m = -1$, этотъ интегралъ будетъ трансцендентною ф-іею; трансцендентная-же ф-ія въ нашемъ случаѣ $\ln x$, никакой алгебраической формулой, содержащей въ себѣ конечное число алгебраическихъ дѣйствій, не можетъ быть выражена, а потому и формула (1) должна оказаться не приложимой къ выраженію интеграла $\int \frac{dx}{x}$. Замѣтимъ однако, что формула (3) можетъ быть получена изъ формулы (1), причемъ нужно будетъ перейти чрезъ неопредѣленность.

Въ формулѣ (1) замѣнимъ произвольное постоянное C другимъ тоже произвольнымъ постояннымъ, полагая:

$C = \frac{-1}{m+1} + C'$, гдѣ C' есть новое произвольное постоянное.

Подставивъ въ формулу (1) вмѣсто C это выраженіе, будемъ имѣть:

$$\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} + C'$$

Сдѣлаемъ теперь въ этомъ равенствѣ $m=-1$; мы получимъ:

$$\int x^{-1}\cdot dx=\int\frac{dx}{x}=\frac{x^0-1}{-1+1}+C'=\frac{0}{0}+C'$$

Но неопредѣленность здѣсь можно уничтожить, опредѣливъ истинное значеніе дроби: $\frac{x^{m+1}-1}{m+1}$ при $m=-1$; т.е. опредѣливъ предѣлъ, къ которому стремится—это выраженіе при неопредѣленномъ приближеніи m къ -1. Что-бы найти этотъ предѣлъ, нужно, какъ извѣстно, взявъ производную числителя раздѣлить ее на производную знаменателя и потомъ положить $m=-1$; сдѣлавъ это получимъ:

$$\int\frac{dx}{x}=\lim\left[\frac{x^{m+1}\cdot lx\cdot 1}{1}\right]_{m=-1}+C'$$

отсюда будемъ имѣть:

$$\int\frac{dx}{x}=\lim\left[\frac{x^0\cdot lx\cdot 1}{1}\right]+C'=lx+C'$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что между формулами (1) и (3) нѣтъ противорѣчія.

Замѣтимъ еще, что въ формулѣ (1) количество m совершенно произвольно и можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, цѣлымъ или дробнымъ, и потому формула (1) содержитъ много частныхъ случаевъ.

Такъ напримѣръ мы можемъ написать выраженія слѣдующихъ интеграловъ:

$$\int\frac{dx}{x^n}=\int x^{-n}\cdot dx=\frac{x^{-n+1}}{-n+1}+C=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+C;$$

$$\int\sqrt[3]{x^2}\cdot dx=\int x^{\frac{2}{3}}\cdot dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}}=\int x^{-\frac{3}{2}}\cdot dx=\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=-2x^{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$$

Сдѣлаемъ еще замѣчаніе о формулахъ (8) и (8)'. Обѣ эти формулы выражаютъ одинъ и тотъ-же интегралъ, но выра-

мичных формах; по формуле (8) мы имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc.sin}x + C;$$

а по формуле (8)', тот-же интеграл будет:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\text{arc.cos}x + C$$

Это легко объясняется, так как мы знаем, что один и тот-же интеграл может быть представлен двумя выражениями; но только такими, которые отличаются друг от друга на постоянное количество. Что-бы убедиться в том, что последния два выражения отличаются на постоянное количество, возьмем разность вторых частей последних равенств, поставим во второй формуле, для отличия, вместо C величину C'; тогда получим: $\text{arc.sin}x + \text{arc.cos}x + C - C'$, но при помощи, что: $\text{arc.sin}x + \text{arc.cos}x$, есть сумма двух дополнительных дуг, а потому имеем:

$$\text{arc.sin}x + \text{arc.cos}x + C - C' = \frac{\pi}{2} + C - C'$$

Таким образом видим, что два выражения (8) и (8)' отличаются на постоянное количество.

То-же самое можно замечать о формулах (9) и (9)'. обе эти формулы определяют один и тот-же интеграл, но в различных выражениях, отличающихся друг от друга на постоянное количество.

И действительно, если возьмем разность вторых частей в формулах (9) и (9)', то получим:

$$\text{arctg}x + \text{arc.ctg}x + C - C'$$

Здесь опять входит сумма дополнительных дуг равная $\frac{\pi}{2}$, а потому имеем:

$$\text{arctg}x + \text{arc.ctg}x + C - C' = \frac{\pi}{2} + C - C'$$

Это показывает, что два выражения (9) и (9)', полученные

для одного и того-же интеграла оба возможны, такъ какъ они отличаются другъ отъ друга на постоянное количество.

Понятіе объ опредѣленномъ интегралѣ.

При изученіи способа безконечно-малыхъ было замѣчено, что конечныя величины могутъ быть разсматриваемы, какъ предѣлы безконечно-малыхъ, взятыхъ въ неопредѣленно возрастающемъ числѣ. Для того что-бы представлять конечную величину такимъ образомъ, надо эту конечную величину разбить на безконечное множество безконечно малыхъ элементовъ. Если опредѣляемая величина площади, то она можетъ быть представлена въ видѣ предѣла суммы безконечно-малыхъ площадей; конечной объемъ можетъ быть представленъ, какъ предѣлъ суммы безконечно-малыхъ объемовъ; если опредѣляемъ поверхность, то ее можно представить въ видѣ суммы безконечно-малыхъ поверхностей и т.д. Но какова-бы разсматриваемая величина ни была, при ея опредѣленіи путемъ аналитическимъ, мы встрѣчаемся всегда съ одной и той-же задачей анализа, которую можно формулировать слѣдующимъ образомъ: Пусть мы имѣемъ нѣкоторую ф-ію $f(x)$; положимъ, что эта ф-ія остается непрерывной и конечной при измѣненіи въ ней перемѣннаго независимаго x отъ величина $x = x_0$ до $x = X$, гдѣ x_0 и X суть данныя и вполнѣ опредѣленныя числа. Представимъ себѣ непрерывное измѣненіе x между означенными предѣлами такимъ образомъ: перем. x мы будемъ давать ряды безконечно-малыхъ приращеній

причемъ x перейдетъ непрерывно съ величины x_0 на величину X. Первое значеніе x есть x_0, слѣдующее значеніе будетъ $x_0 + \Delta x_0$, гдѣ Δx_0 есть безконечно-малое приращеніе x_0; назовемъ величину $x_0 + \Delta x_0$ черезъ x_1; слѣдующее значеніе x-а будетъ $x_1 + \Delta x_1$ обозначимъ его черезъ x_2, гдѣсь Δx_1 есть безконечно-малое приращеніе x_1; слѣдующее значеніе x-а будетъ $x_2 + \Delta x_2$, которое обозначимъ черезъ x_3, гдѣсь Δx_2 есть безконечно-малое приращеніе x_2; слѣдующее значеніе x-а есть $x_3 + \Delta x_3$ равное x_4 и т.д. и наконецъ мы дойдемъ такимъ образомъ до нѣкоторой величины x_{n-1}, которая получивъ соотвѣтствующее приращеніе Δx_{n-1}, обратится въ предѣльную величину $x_n = X$, такъ что:

$$x_{n-1} + \Delta x_{n-1} = x_n = X$$

Такимъ образомъ x при переходѣ отъ величины x_0 до X будетъ принимать рядъ слѣдующихъ значеній:

$$x_0,\ x_0 + \Delta x_0 = x_1,\ x_1 + \Delta x_1 = x_2,\ x_2 + \Delta x_2 = x_3 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots x_{n-1} + \Delta x_{n-1} = x_n = X$$

Рядъ послѣдовательныхъ приращеній, получаемыхъ при этомъ x-омъ будетъ слѣдующій.

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,\ \Delta x_1 = x_2 - x_1,\ \Delta x_2 = x_3 - x_2 \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta x_{n-1} = X - x_{n-1}$$

Сумма этихъ безконечно-малыхъ приращеній, очевидно будетъ: $\Delta x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots\ldots\ldots + \Delta x_{n-1} = X - x_0$, т.е. сумма безконечно-малыхъ приращеній x-а составитъ полное приращеніе x-а при переходѣ его отъ величины x_0 къ X и она равна $X - x_0$. Такимъ образомъ мы будемъ измѣнять x въ промежуткѣ отъ x_0 до X.

Разсмотримъ теперь произведеніе $f(x).\Delta x$ и будемъ вычислять

приписывать x-ту последовательно ряд значений:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{n-1}$$

и потом взять сумму таких произведений. Это сумма будет:

$$f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

В этом ряде значений, мы не приписываем x-ту крайнего значения X, так как это значение не получает уже никакого приращения, ибо последнее приращение, полученное x-ом есть Δx_{n-1}.

Пусть сумму можно сокращенно представить так:

$$f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} =$$
$$= \sum_{x=x_0}^{x=X} f(x)\Delta x$$

Вообразим теперь, что число n промежутков, на которые разбили полный промежуток от x_0 до X, увеличивается неопределенно, и что вместе с тем последовательные приращения:

$$\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots\ldots\ldots \Delta x_{n-1}$$

уменьшаются неопределенно, приближаясь к 0. Мы будем таким образом представлять себе, что все последовательные приращения x-а зависят от числа n промежутков и при том так, что при неопределенном увеличении n, все они одновременно стремятся к 0. Если в самом деле будем увеличивать n до бесконечности, то рассматриваемая сумма будет суммою бесконечно-малых количеств, в которой число слагаемых n неопределенно увеличивается, а каждое из слагаемых в то же время стремится к 0.

Предполагаем себе найти предел, к которому стремится эта сумма, при n возрастающем до бесконечности

т.е. $\lim \sum_{x_0}^{X} f(x).\Delta x$. Этотъ предѣлъ наз. опредѣленнымъ интеграломъ отъ элемента $f(x)\Delta x$, взятымъ между предѣлами x_0 до X.

Такъ какъ безконечно-малое приращеніе перемѣннаго Δx все равно, что дифференціалъ его dx, то вмѣсто Δx всюду можно подставить dx. Предѣлъ разсматриваемой суммы безконечно-малыхъ обозначается такъ:

$$\lim \sum_{x_0}^{X} f(x)\Delta x = \int_{x_0}^{X} f(x).dx$$

Знакъ $\int_{x_0}^{X}$ есть знакъ опредѣленнаго интеграла, взятаго между предѣлами x_0 до X отъ элемента $f(x).dx$; x_0 — есть нижній предѣлъ интеграла, а X — верхній.

Символъ $\int$ есть первая буква слова Summa.

Мы увидимъ впослѣдствіи, что всѣ задачи геометріи и механики, въ которыхъ искомая величина разсматривается, какъ сумма безконечно-малыхъ, приводятся къ опредѣленію предѣла суммы безконечно-малыхъ именно такого вида, какой указанъ выше. Къ опредѣленію подобныхъ предѣловъ суммъ безконечно-малыхъ, приводятся вопросы о вычисленіи площадей, объемовъ, моментовъ инерціи и пр.

Въ данномъ выше опредѣленіи интеграла надо обратить особенное вниманіе на условіе, по которому ф-ія $f(x)$ должна оставаться непрерывной и конечной между предѣлами x_0 и X. Это условіе необходимо должно быть соблюдено. Если-же предположить, что ф-ія $f(x)$ обращается въ безконечность между предѣлами x_0 до X при какомъ нибудь одномъ значеніи $x=a$, такъ какъ въ разсматриваемой суммѣ безконечно-малыхъ, перемѣнное x должно принимать всевозможныя значенія отъ x_0 до X, то, понятно, что это

между прочим приняты и то значение, при которомъ функция $f(x)$ обращается въ безконечность. Такимъ образомъ въ разсматриваемой суммѣ будетъ между прочимъ и такой членъ $f(x)\Delta x$, въ которомъ первый множитель $f(x)$ съ приближеніемъ x къ значенію, обращающему функцію $f(x)$ въ безконечность, приближается къ безконечности, а второй множитель Δx въ то же время стремится къ 0; въ предѣлѣ это произведеніе представится въ видѣ $\infty.0$. Такое выраженіе, какъ намъ извѣстно, означаетъ неопредѣленность и нельзя утверждать, что предѣлъ подобнаго произведенія будетъ непремѣнно равенъ 0, или, что это произведеніе на самомъ дѣлѣ есть безконечно малое количество. Такимъ образомъ въ разсматриваемой суммѣ являются члены, которые вообще будутъ не безконечно малыми, и наша сумма, слѣдовательно, не будетъ суммой безконечно малыхъ, а потому и нельзя будетъ прилагать къ ея вычисленію тѣхъ способовъ, которые будутъ нами указаны впослѣдствіи

Такимъ образомъ мы будемъ впредь считать функцію $f(x)$ непрерывной и конечной при измѣненіи x отъ x_0 до X. Что же касается до закона, по которому измѣняется x, въ промежуткѣ отъ x_0 до X, то этотъ законъ можетъ быть совер-

с листа 13-го

менно произвольны; требуется только одно условие, что-бы при переходе к пределу, т.е. при $n=\infty$, все приращения: $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2 \ldots\ldots \Delta x_{n-1}$, получаемые $x^{ом}$ одновременно приближались к 0. В частности случаях, которыми нередко допускают, принимают, что последовательные приращения, получаемые $x^{ом}$ равны между собой, таким образом x изменяется, принимая бесконечно малые и равные приращения, так что

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots\ldots = \Delta x_{n-1}$$

Обозначим таким образом общую величину таких приращений через Δx; ясно, что тогда сумма всех приращений будет $n\Delta x = x - x_0$

а отсюда $$\Delta x = \frac{x - x_0}{n}$$

Здесь прямо видно, как с увеличением n до бесконечности величина приращения Δx стремится к нулю.

В этом случае мы будем иметь

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$x_2 = x_0 + 2\Delta x$$
$$x_3 = x_0 + 3\Delta x$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1} = x_0 + (n-1)\Delta x$$
$$x = x_0 + n\cdot\Delta x$$

и предыдущая рассматриваемой суммы будет

$$\lim \sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x = \lim \Delta x \left[f(x_0) + f(x_0+\Delta x) + f(x_0+2\Delta x) + \ldots\ldots + f(x_0+n-1\,\Delta x) \right] = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

Этот предел есть тот же определенный интеграл от $f(x)dx$ при изменении x от x_0 до X. Предел суммы берется, полагая $n=\infty$

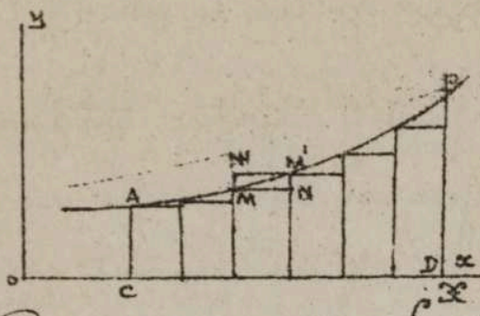
Давши такое определение интегралу нужно доказать, что рассматриваемый предел суммы бесконечно малых всегда существует и что при том этот предел есть количество вполне определенное и точное; кроме того нужно показать, что предел этот не зависит от закона, по которому изменяются приращения Δx, и будет всегда один и тот же при одном только условии, что при приближении к пределу все приращения x стремятся к 0 вместе с увеличением n до бесконечности.

Докажем, во первых, геометрическим путем, что предел рассматриваемой суммы бесконечно-малых всегда существует и имеет величину конечную.

Возьмем кривую линию, представляемую уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ данная функция. Пусть эта кривая отнесена к прямоугольным осям координат. Начертим кривую, пусть AB будет дуга кривой.

Возьмем на этой кривой две точки A и B, абсциссы которых суть $OC=x_0$ и $OD=X$. Построим соответствующия ординаты AC и BD.

Сделав это построение, мы получили некоторую площадь CABD, ограниченную двумя ординатами осью $x^{ов}$ и частью данной кривой линии.



Докажем, что рассматриваемый предель суммы бесконечно малых чисел наш определенный интеграль $\int_{x_0} f(x)\,dx$ представляет именно эту площадь, величина которой будет вполне определенною и конечною, так как все ординаты кривой по условию не могут простираться бесконечны.

Чтобы показать это, составимся на чертеже рассматриваемую сумму. Отложим величины $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, X$, как абсциссы, через все полученныя таким образом точки проведем соответствующия ординаты кривой. Таким образом основание CD разобьется на n частей, эти части по порядку будут Δx_0, следующая часть будет Δx_1, потом Δx_2 и т.д. и наконец Δx_{n-1}. Затем из всех точек деления кривой AB, построенными ординатами, проведем линии параллельныя оси $x^{ов}$, причем каждую из этих параллелей проведем в правую сторону, до встречи со смежной ординатой; таким образом мы получим ряд прямоугольников. Высоты этих прямоугольников, которые называются вписанными, как видно из

уравнения кривой по порядку будут соответственно: для первого прямоугольника $f(x_0)$, для второго $f(x_1)$, для третьего $f(x_2)$ и т. д. и наконец высота последнего будет $f(x_{n-1})$. Площади этих прямоугольников найдем по порядку через: $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \beta_{n-1}$

Эти площади равны, каждая произведению основания на высоту, т.е.

$$\beta_0 = f(x_0)\Delta x$$
$$\beta_1 = f(x_1)\Delta x_1$$
$$\beta_2 = f(x_2)\Delta x_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\beta_{n-1} = f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

Эти площади, как видим, и выразились тем бесконечно малым, которые мы суммировали выше. Взяв предельную сумму бесконечно малых мы получили соответственно

$$\sum_{x_0}^{x} f(x)dx = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots\dots + \beta_{n-1}$$

Величина, которую мы назвали определенным интегралом, будет равна пределу этой суммы так, что будем иметь

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \lim(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots\dots + \beta_{n-1})$$

при n возрастающем до бесконечности и при предположении, что все приращения $\Delta x_0, \Delta x_1$ и т. д. стремятся при этом одновременно к 0.

Очевидно, что при переходе к пределу все произведения наших ординат стремятся обратиться

и совпасть, и что при возрастании n до бесконечности и число ординат возрастает до бесконечности, а стало быть и число описанных прямоугольников будет также увеличиваться до бесконечности. При таком условии нам надо определить предель этой суммы вписанных прямоугольников. Для нахождения этого предела будем рассматривать кроме площади вписанных прямоугольников еще площади, ограниченные двумя смежными ординатами, осью абсцисс и частью кривой AB.

Число этих площадей будет также n, назовем эти площади по порядку через $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$. Площади эти суть части, рассматриваемой площади $CABD$ и сумма их очевидно составит всю площадь $CABD$, т.е.

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} = \text{пл.}CABD = V$$

Будем сравнивать теперь площади α со соответствующими площадями прямоугольников β. Понятно, что при переходе к пределу все площади α также стремятся к 0 и следовательно становятся бесконечно малыми величинами. Сравнивая какую-нибудь площадь α_i со соответствующей ей площадью β_i. Пусть на чертеже на кривой AB возьмем две очень близкие точки M и M' абсциссы их пусть будут OP и OP'; через точку M проведена параллель оси x-ов MQ

рая пересекает ординату M'P' в точке N. Теперь мы имеем

$$\alpha_i = \text{пл. } PMM'P' \quad \text{и} \quad \beta_i = \text{пл. } PMNP'$$

Эти площади суть бесконечно малые и сравнение между ними легко сделать, введя в рассмотрение еще третье бесконечно малое; проведем для этого через точку M' параллель оси x^{ek}, до встречи ее в точке N' с продолжением ординаты MP. Мы получим новую бесконечно малую площадь $PM'N'P'$, которую назовем через γ_i

Две площади β_i и γ_i, как площади прямоугольников, имеющих одинаковые основания, относятся между собою, как их высоты, т.е.

$$\frac{\gamma_i}{\beta_i} = \frac{M'P'}{MP}$$

При переходе к пределу, как было замечено выше, ординаты MP и M'P' сближаются и точка M' стремится совпасть с точкой M, вследствие чего ординаты MP и M'P' стремятся сделаться равными, а стало быть в пределе будем иметь:

$$\lim \frac{\gamma_i}{\beta_i} = 1.$$

С другой стороны из чертежа мы видим, что

$$\beta_i < \alpha_i < \gamma_i$$

Чтобы написать это неравенство, нужно было предположить, что ординаты кривой от точки M до точки M' постоянно увеличиваются, а потому эта пло-

ки M до точки M' кривая не должна иметь изгибов. Мы имеем полное право сделать это предположение, так как точка M' есть точка произвольно близкая к M, и мы можем взять ее столь близкою отъ M, что кривая въ промежутокъ MM' не будетъ имѣть изгибовъ. Ибо ординаты кривой могутъ такимъ образомъ расположеніемъ кривой идти въ промежутокъ отъ M до M' не увеличиваясь, а уменьшаясь и тогда сия будетъ, очевидно, имѣть неравенства обратныя т.е. тогда будетъ

$$\beta_i > \alpha_i > \gamma_i$$

Чтобы не отдѣлять эти два случая соединимъ эти неравенства вмѣстѣ и напишемъ:

$$\beta \gtrless \alpha_i \gtrless \gamma_i$$

Такимъ образомъ во всякомъ случаѣ площадь α_i будетъ заключаться между площадями β_i и γ_i. Раздѣлимъ эти неравенства на β_i, получимъ

$$1 \gtrless \frac{\alpha_i}{\beta_i} \gtrless \frac{\gamma_i}{\beta_i}$$

Если теперь будемъ переходить къ предѣлу, полагая n увеличивающимся до безконечности, то замѣтимъ, что такъ какъ отношеніе $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ заключается между двумя величинами, изъ которыхъ одна есть 1, а другая $\frac{\gamma_i}{\beta_i}$ стремится къ 1, то слѣдовательно промежуточная величина $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ тоже будетъ стремиться къ 1 и мы можемъ написать, что $\lim \frac{\alpha_i}{\beta_i} = 1$.

или обратно — $\lim \frac{\beta_i}{\alpha_i} = 1$

Замѣтимъ, что предѣлъ этого отношенія найдемъ при произвольномъ i и мы можемъ полагать i равнымъ $0, 1, 2, 3 \ldots n-1$ и будемъ имѣть на основаніи доказаннаго, что $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1$, $\lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$; $\lim \frac{\alpha_3}{\beta_3} = 1$ и т. д. до $\lim \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = 1$

Вернемся теперь къ опредѣленію предѣла суммы

$$\lim (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1})$$

Такъ какъ это есть предѣлъ суммы безконечно малыхъ за неопредѣленно возрастающемъ числѣ, то мы знаемъ лишь способа безконечно малыхъ, что этотъ предѣлъ не измѣнится по величинѣ, если вмѣсто безконечно малыхъ въ него входящихъ мы возьмемъ другія безконечно малыя не равныя первымъ; но такія, отношеніе которыхъ къ замѣняемымъ = 1. Вслѣдствіе этого мы можемъ въ разсматриваемой суммѣ вмѣсто безконечно малыхъ β_0, β_1 и т. д. поставить безконечно малыя α_0, α_1 и т. д. и мы будемъ имѣть

$$\lim (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1}) = \lim (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_{n-1}) = \lim \Sigma \alpha$$

Но эта послѣдняя сумма $\Sigma \alpha$ составляетъ площадь кривой U, и какова бы ни была n, величина этой суммы останется постоянною и всегда представляетъ площадь кривой, т.е. площадь CABD. Вслѣдствіе этого разсматриваемый нами предѣлъ будетъ

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = U = \text{пл. CABD}$$

Отсюда заключаемъ, что опредѣленный интегралъ всегда представляетъ нѣкоторую, вполнѣ опредѣленную площадь кривой линіи, которую можно построить и отсюда все слѣдуетъ, что опредѣленный

интеграль имѣетъ всегда величину конечную и опредѣленную.

Доказавъ существованіе опредѣленнаго интеграла, нужно найти способъ для нахожденія его величины.

По данному выше опредѣленію опредѣленнаго интеграла мы имѣемъ

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \left[f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \dots\dots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} \right]$$

при n возрастающемъ до безконечности и при условіи, что всѣ приращенія $\Delta x_0, \Delta x_1$ и т. д. одновременно стремятся къ 0. Разсматривая эту сумму безконечно малыхъ замѣчаемъ, что она представляетъ сумму дифференціаловъ нѣкоторой функціи, сумму, въ которой x получаетъ всевозможныя значенія отъ $x = x_0$ до $x = X$. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ суммируемыя здѣсь безконечно малыя имѣютъ видъ $f(x)\Delta x$ или все равно $f(x)dx$; т. е. всѣ они представляютъ произведеніе нѣкоторой функціи x-а на безконечно малое приращеніе перемѣннаго независимаго Δx, а такое произведеніе представляетъ дифференціалъ нѣкоторой функціи x-а. Мы уже доказали преждe, что непремѣнно существуетъ такая функція $y = \varphi(x)$, дифференціалъ которой равенъ данному дифференціалу $f(x)dx$, такъ что будемъ имѣть:

$$d\varphi(x) = dy = f(x)\,dx$$

Такая функція была названа нами неопредѣленнымъ интеграломъ отъ дифференціала $f(x)dx$. Такъ какъ разсматриваемая нами сумма представляетъ сумму всевозможныхъ значеній дифференціала функціи y, когда x-у приписываютъ всевозможныя значенія отъ x_0 до X,

то стало быть эту сумму мы можем изобразить такимъ образомъ

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \sum_{x_0}^{X} f(x)\cdot\Delta x = \lim \sum_{x_0}^{X} dy$$

Сравнимъ безконечно малое dy съ безконечно малымъ приращеніемъ функціи Δy, которое есть $\Delta y = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$. Мы знаемъ, что эти два безконечно малыя Δy и dy не равны между собой, но отличаются другъ отъ друга на безконечно малое высшаго порядка или иначе говоря, эти безконечно малыя таковы, что предѣлъ ихъ отношенія равенъ 1.

Такимъ образомъ имѣемъ $\lim \frac{\Delta y}{dy} = 1$.

Ва этомъ основаніи при опредѣленіи, выше описанного предѣла суммы безконечно малыхъ безконечно малыя dy, мы можемъ замѣнить соотвѣтствующими безконечно малыми Δy. Сдѣлавъ эту замѣну, мы можемъ написать, что

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \sum_{x=x_0}^{x=X} \Delta y$$

Разсмотримъ теперь какова это сумма $\sum \Delta y$. Эту сумму можно представить иначе такъ:

$$\sum_{x_0}^{X} \Delta y = \sum_{x_0}^{X} [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]$$

Чтобы получить весь смыслъ этой суммы, мы должны давать $x^{ы}$ всевозможныя значенія отъ x_0 до X, т.е. сдѣлать x послѣдовательно равными $x_0, x_1, x_2 \ldots$ до x_{n-1} и затѣмъ взять сумму всѣхъ этихъ членовъ; такимъ образомъ получимъ

$$\sum_{x_0}^{X} \Delta y = \varphi(x_0+\Delta x_0) - \varphi(x_0) + \varphi(x_1-\Delta x_1) - \varphi(x_1) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \varphi(x_{n-1}+\Delta x_{n-1}) - \varphi(x_{n-1})$$

или такъ какъ

$x_0 + \Delta x_0 = x_1$; $x_1 + \Delta x_1 = x_2$; и так далее, то будем иметь

$$\sum_{x_0}^{X} \Delta y = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) + \varphi(x_2) - \varphi(x_1) + \dots\dots\dots + \varphi(X) - \varphi(x_{n-1})$$

Рассматривая эту сумму, мы видим, что в ней все члены сократятся за исключением двух, и мы получим $\sum_{x_0}^{X} \Delta y = \varphi(X) - \varphi(x_0)$

и наконец,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \left[\varphi(X) - \varphi(x_0)\right]$$

Но эта разность есть величина постоянная и потому мы можем написать:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0)$$

Это равенство показывает, как можно получить величину определенного интеграла.

Из равенство видно, что для того чтобы получить определенный интеграл, найти надо предварительно неопределенный интеграл, т.е. надо найти такую функцию $\varphi(x)$, дифференциал которой равен $f(x)\,dx$ и в эту функцию вставить вместо x сначала верхний предел X, потом нижний x_0 и затем взять разность полученных результатов. Таким образом мы видим, что нахождение определенного интеграла сводится к определению неопределенного интеграла. Так как последние, выведенное нами, равенство выражает одно из основных предложений интегрального исчисления, то мы предложим для него еще другое геометрическое доказательство.

Пусть опять нам дан определенный интеграл

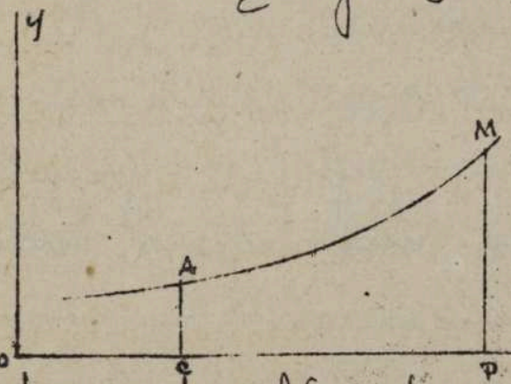
$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Верхний предель X здесь есть количество постоянное, но совершенно произвольное, при соблюдении условия, что функция $f(x)$ оставалась непрерывной между пределами x_0 и X. Поставим вместо постоянной величины X переменное количество x и будем рассматривать определенный интеграл вида: $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$

Этот интеграл представляет также некоторую площадь кривой, как и всякий определенный интеграл. Построим эту площадь. Для этого построим вначале кривую $y = f(x)$ и возьмем на этой кривой точку A, абсцисса которой равнялась бы x_0, так что $OC = x_0$; затем другую точку M, абсцисса которой равнялась бы x, и мы сможем сказать на основании предыдущего, что

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \text{пл. } CAMP = u.$$

Но если, считая x переменным, мы будем изменять абсциссу x, т.е. OP, то площадь u будет также изменяться, так что площадь эта есть функция x, определенная геометрически.



Мы знаем сверх того, что дифференциал этой площади будет $du = y \cdot dx = f(x)\,dx$, так что u есть такая функция x, дифференциал которой равен $f(x)\,dx$.

Обозначим через $\varphi(x)$ одну такую функцию, дифференциал которой равен $f(x)\,dx$; тогда самый общий вид функции, дифференциал которой равен $f(x)\,dx$, будет $\varphi(x) + c$, где c есть произвольное постоянное.

Искомая функция и должна, следовательно, заключаться во этом общем виде, то есть мы должны иметь

$$u = \varphi(x) + c$$

Здесь неизвестно c; ясно, однако, что оно не может оставаться неопределенным, ибо функция и совершенно определенная. Легко найти c. Вообразим, что точка M приближается по кривой ко точке A, очевидно, что когда точка M совпадет со точкой A, и абсцисса x сделается равною x_0, то площадь и обратится в 0, и мы должны иметь поэтому $\varphi(x_0) + c = 0$, а отсюда

$$c = -\varphi(x_0)$$

Затем выражение для площади и будет следовательно

$$u = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

И мы будем иметь

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = u = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

Если в этом равенстве верхний предел интегрирования равный X, то получим

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0)$$

Таким образом мы пришли другим путем к равенству, дающему способ для нахождения величины определенного интеграла

При вычислении определенного интеграла, найденным нами путем, обыкновенно пишут сначала неопределенный интеграл, заключая его в скобки и отмечая при скобках пределы верхний и нижний, а затем уже вычисляют величину определенного интеграла, как было указано выше. Таким образом будем иметь

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \left[\varphi(x) + c\right]_{x_0}^{X} = \varphi(X) - \varphi(x_0)$$

Теперь мы можем для примера выполнить нам самому здесь вычисление некоторых простых определенных интегралов.

Итак найдем:

$$\int_0 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{arctg} x + c\right]_0^1 = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4} = \frac{3{,}14159}{4} =$$

$$= 0{,}785\ldots.$$

Мы видим, что определенный интеграл, при данных и постоянных пределах выражается определенным числом.

Подобно предыдущему находим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x + c\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

$$\int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5} + c\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \left[\ln x + c\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Каждый из этих интегралов определяет величину некоторой площади ограниченной кривой линии.

Приемы интегрирования.

Сделаем предварительно два следующих замечания:

1) Действия интегрирования и дифференцирования взаимно уничтожаются. Это следует прямо из определения интеграла; таким образом мы видим очевидно, что $d\int f(x)\,dx = f(x).dx$ или также

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x)$$

потому что неопределенный интеграл есть такая функция, дифференциал которой равен подынтегральному дифференциалу. Но очевидно, что мож-

но написать также: $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + c$

Дифференциал исчезающего интеграла равен тоже подынтегральной функции, т.е.:

$$d\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = d\{\varphi(x) - \varphi(x_0)\} = d\varphi(x) = f(x)\,dx$$

Но дифференциал определенного интеграла равен 0, так как определенный интеграл есть количество постоянное, т.е.: $d\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = 0$

2) При интегрировании, как и при дифференцировании, постоянный множитель можно выводить за знак интеграла; таким образом будем иметь

$$\int A f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$$

Чтобы доказать это, возьмем дифференциал второй части равенства, получим

$$Ad\int f(x)\,dx = A f(x)\,dx$$

отсюда видим, что дифференциал этой функции равен подынтегральному и потому написанное равенство верно. Тоже замечание применяется и к определенному интегралу, так что будем иметь

$$\int_{x_0}^{x} A f(x)\,dx = A\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

Это равенство очевидно, если рассматривать интеграл, как сумму бесконечно малых: первая часть этого уравнения показывает, что в ней каждый член суммы помножен на A, а во 2-ой части вся сумма помножена на A, что соответствует выведенному общему множителя за скобку.

Для интегрирования существуют следующие четыре приема:

1) Интегрирование непосредственное.

2) Интегрирование через разложения.
3) Интегрирование по частям.-
4) Интегрирование через введение нового переменного.

Интегрирование непосредственное.

Этот приём состоит в употреблении данных выше девяти основных формул интегрального исчисления. Эти формулы могут быть при том обобщены так, что каждая из них представит не одно только интеграл, но бесчисленное множество интегралов.

Это обобщение основано на следующем замечании: если для какого нибудь неопределенного интеграла будет найдено его выражение, так что например $\int f(x)dx = \varphi(x)+c$, то это равенство останется справедливым и тогда, когда в нем вместо x подставим какую угодно функцию x т. е. будет иметь

$$\int f[\varphi(x)]\, d\varphi(x) = \varphi[\varphi(x)] + c$$

Чтобы доказать справедливость этого последнего равенства повторим его, для чего возьмем дифференциал второй части и если этот дифференциал будет равен подынтегральному, то заключим, что это равенство верно.

Выходим по правилу дифференцирования функции от функции

$$d[\varphi\{\varphi(x)\} + c] = d\varphi\{\varphi(x)\} = \varphi'\{\varphi(x)\}\, d\varphi(x)$$

но функция $\varphi(x)$ такова, что ея производная $\varphi'(x) = f(x)$

и это равенство, как тождество, существует при всяких значениях x. Вместо x мы можем в нем поставить z и будем иметь $\varphi'(z) = f(z)$

Сделав $z = \varphi(x)$ мы получим $\varphi'[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]$ и следовательно будем иметь

$$d[\varphi[\varphi(x)] + c] = f[\varphi(x)]\, d\varphi(x)$$, что и доказывает справедливость нашего заключения. На основании сделанного заключения вышеполученная девять формулу мы можем написать в более общем виде, заменив в них x произвольной функцией $f(x)$.

Будем иметь, например:

$$\int [f(x)]^m d f(x) = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1} + c \quad \ldots\ldots (1)$$

Это есть общее выражение интеграла степени. Подобно этому $\int a^{f(x)} \cdot d f(x) = \frac{a^{f(x)}}{la} + c \quad \ldots\ldots (2)$

Это есть общее выражение интеграла показательной функции. Далее $\int \frac{d f(x)}{f(x)} = l f(x) + c \quad \ldots\ldots (3)$

Таким же образом могут быть обобщены и все остальные основные формулы.

Всякая из полученных таким образом формул заключает в себе бесчисленное множество различных по виду интегралов потому что под функцией $f(x)$ мы можем разуметь какую угодно функцию x.

Сделаем несколько приложений основных формул в обобщенном виде.

Стоя получилось выражение интеграла $\int \frac{dx}{(a+x)^3}$, заметим, что его можно представить так:

$$\int \frac{dx}{(a+x)^3} = \int (a+x)^{-3} dx = \int (a+x)^{-3} d(a+x)$$

и пользуясь первой основной формулой, найдем

$$\int \frac{dx}{(a+x)^3} = \frac{(a+x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(a+x)^2} + C$$

Примеры на непосредственное интегрирование.

1) $\int \frac{3x^2 dx}{a^3+x^3} = l(a^3+x^3) + c.$

Этот интеграл непосредственный, так как числитель в подынтегральной функции есть дифференциал знаменателя, а потому этот интеграл представляет собой логарифм знаменателя.

2) $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^3 x \, d(\sin x)$

а этот интеграл непосредственный и представляет степень; именно $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}}$

Заметим, что дробь $\frac{dx}{x}$ представляет дифференциал Неперова логарифма, а потому данный интеграл можем написать так

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}} = \int \frac{dlx}{\sqrt{1-(lx)^2}}$$

Этот интеграл есть непосредственный и представляет арксинус, а потому получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}} = \arcsin(lx) + C$$

Далее легко найдем, что:

4) $\int \cos(a+x)dx = \int \cos(a+x)\, d(a+x) = \sin(a+x) + C$

5) $\int \frac{a\,dx}{\cos^2(ax+b)} = \int \frac{d(ax+b)}{\cos^2(ax+b)} = tg(ax+b) + C$

Весьма часто случается, что для того чтобы данный интеграл подходил под одну из формул непосредственного интегрирования надо под знак интеграла ввести некоторый постоянный множитель; это всегда возможно, так как этот же постоянный множитель

можно поставить перед знаком интеграла дъяитель. Приведем несколько примеров, в которых употребляется подобный прием:

1) $\int \frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Рассматривая этот интеграл, мы замечаем, что числитель содержится дифференциалом подкоренного количества, если будет помножен на -2, поставим перед знаком интеграла дъяитель -2, интеграл от этого не изменится; так как и числитель помножим на -2.

$$\int \frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Напишем затем интеграл так

$$\int \frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2-x^2)$$

Этот интеграл уже подставлен в форме непосредственной и по формуле (I) можно написать

$$\int \frac{x.dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2-x^2) = -\frac{1}{2}\,\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= -\sqrt{a^2-x^2} + c$$

2) $\int \frac{x.dx}{(a+bx^2)^n}$. Заметьтесь опять, что знаменатель здесь есть функция x в $n^{ой}$ степени; чтобы числитель был дифференциалом количества, возводимого в степень, нужно его помножить на $2b$ и чтобы интеграл не изменился по величине нужно перед его знаком поставить и дъяитель $2b$, а потому имеем:

$$\int \frac{x.dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b}\int \frac{2bx.dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b}\int \frac{d(a+bx^2)}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b}\int (a+bx^2)^{-n} d(a+bx^2)$$

а этот интеграл есть непосредственный, а потому находим:

$$\int \frac{x.dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b}\,\frac{(a+bx^2)^{-n+1}}{-n+1} + c = -\frac{1}{2b(n-1)(a+bx^2)^{n-1}} + c$$

3) $\int \frac{\sin x.dx}{a+b.\cos x}$. Числитель этого интеграла будет дифференциалом знаменателя, если его помножить на $-b$ и

тогда интеграль представить в виде произведения логарифма знаменателя. Помножим все числителя на -b и поставимо b дробителем перед знаком интеграла., отчего интеграль не изменится и мы будем иметь:

$$\int \frac{\sin x \cdot dx}{a + b\cos x} = -\frac{1}{b}\int \frac{d(a + b\cos x)}{a + b\cdot\cos x} = -\frac{1}{b}\ln(a + b\cos x) + c$$

4) $\int e^{-x^2} \cdot x \cdot dx$. Чтобы этот интеграль был непосредственный - нужно бы подынтегральную функцию ввести множителя -2. Помножив ее на -2 и разделив интеграль на -2, получим:

$$\int e^{-x^2} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2} \cdot d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

Подобными же приемами найдем:

5) $\int \cos 3x \cdot dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x \cdot d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + c$

6) $\int \sin ax \cdot dx = \frac{1}{a}\int \sin ax \cdot d(ax) = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2(a-bx)} = -\frac{1}{b}\int \frac{d(a-bx)}{\cos^2(a-bx)} = \frac{1}{b}\operatorname{tg}(a-bx) + c$

Займемся два следующие интеграла часто встречающиеся

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Этот интеграль представился бы арксинусом, если бы в знаменатель вместо a^2 стояло 1. Вынеся под корня выведем множителя a, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

9) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$. Этот интеграль представился бы арктангенсом, если бы в знаменатель вместо a^2 стояла 1. Разделив числителя и знаменателя на a^2, находим

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a}\sqrt{1-\frac{bx^2}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}}$ а этот интеграль приводится в арксинусу, именно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a}{b}}\int \frac{d\left(x\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + c$$

Подобно этому находим

11) $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \int \frac{dx}{a\left(1+\frac{bx^2}{a}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\int \frac{d\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{1+\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C$

Примеры на непосредственное интегрирование:

1) $\int x^2\sqrt{a+bx^3}\,dx$

2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{a-bx^3}}$

3) $\int \frac{\sin x\,.\,dx}{(a+b\cos x)^n}$

4) $\int \sin^n x \cos x\,.\,dx$

5) $\int \frac{\ell x\sqrt{1+(\ell x)^2}}{x}\,dx$

6) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$

7) $\int \frac{x\,.\,\ell(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$

8) $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$

9) $\int \frac{x^2dx}{a-bx^3}$

10) $\int \frac{\sin x\,.\,\cos x}{a\cos^2 x + b\,.\,\sin^2 x}\,dx$

11) $\int \frac{1-4\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$

12) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

13) $\int x\sin(x^2)\,dx$

14) $\int \frac{\cos(m\,.\,\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

15) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

16) $\int \operatorname{tg} x\,.\,dx$.

Интегрирование через разложение.

Этот приём интегрирования основан на применении следующей теоремы:

Интеграл от алгебраической суммы нескольких дифференциалов равен алгебраической сумме интегралов.

Эта теорема выражается следующим равенством

$$\int [f(x)+\varphi(x)-\varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \varphi(x)\,dx.$$

Равенство это доказывается поверкой. Чтобы повторить его, возьмем дифференциал второй части равенства и если после этого подынтегральная дифференциал, стоящий в первой части равенство, то теорема будет доказана. Но заметим, что вторая часть равенства представляет алгебраическую сумму, а дифференциал алгебраической суммы равен сумме дифференциалов, находим, что дифференциал второй части равен

$$d\int f(x)dx + d\int \varphi(x)dx - d\int \varphi(x)dx = f(x)dx + \varphi(x)dx - \varphi(x)dx$$

а это и есть подынтегральный дифференциал первой части; таким образом теорема доказана.

Эта же теорема распространяется и на определенные интегралы.

Таким образом будем иметь также

$$\int_{x_0}^{X}[f(x)+\varphi(x)-\varphi(x)]dx = \int_{x_0}^{X} f(x)dx + \int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx - \int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx.$$

Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, заметим, что для вычисления определенного интеграла нужно взять предварительно неопределенный интеграл, потом подставить вместо X сначала верхний предел, потом нижний и вычесть один результат из другого. В первой части равенства указано сделать эти действия над всей суммой, стоящей под знаком интеграла, а во второй части равенства указано сделать те же самые действия над каждой членом суммы отдельно. Понятно, что результаты действий будут одинаковы.

На основании этой теоремы можно интегрировать всякую сумму алгебраических *) членов; таким образом находим, что

$$\int(Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots)dx = A\int x^m dx + B\int x^n dx + C\int x^p dx +$$
$$+ \dots = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{Bx^{n+1}}{n+1} + \frac{Cx^{p+1}}{p+1} + \dots + C$$

Точно также вычислим интеграл

$$\int \frac{Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots}{x^3}dx$$

Стоит только сделать указанное здесь действие на каждый член и мы получим опять сумму алгебраических одночленов, которую и будем интегрировать, как

*) одночленов

это сделали выше.

Самый приём интегрирования через разложение состоит в том, что данную подынтегральную функцию стараются разложить на сумму или разность других простейших функций, которые могли бы интегрироваться непосредственно.

Предъявить такие образом несколько интегралов.

1) $\int \frac{n+mx}{a^2+x^2}\,dx = \int\left(\frac{n}{a^2+x^2} + \frac{mx}{a^2+x^2}\right)dx = n\int\frac{dx}{a^2+x^2} + m\int\frac{x\,dx}{a^2+x^2}$

Первый из этих двух интегралов нами уже было вычислено выше, а второй легко вычислить, если заметить, что помножив на 2 числителя и поставив 2 делителем перед знаком интеграла, будем иметь в числителе подынтегральной функции дифференциал знаменателя, а потому этот интеграл представляет непосредственно знаменатель, таким образом найдем

$$n\int\frac{dx}{a^2+x^2} + m\int\frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{n}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{m}{2}\ell\left(a^2+x^2\right) + c$$

2) $\int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx$. Чтобы разложить подынтегральную функцию будем делить числителя на знаменателя; найдем

$$x^3 : \left(x^2+1\right) = x - \frac{x}{x^2+1}\,,\ \text{а потому}$$

$$\int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int x\,dx - \int\frac{x\,dx}{x^2+1}\,.$$ Эти два интеграла непосредственные, а потому имеем:

$$\int\frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ell\left(x^2+1\right) + c$$

3) $\int\cos^2 x\,dx$. Заменим $\cos^2 x$, по известной нам формуле косинуса половинной дуги; получим

$$\int\cos^2 x\,dx = \int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int\frac{dx}{2} + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

4) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. Помножим числителя и знаменателя на числителя, получим:

$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Первый интеграл непосредственный, а второй уже знаем как вычислять, а потому пишем:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Примеры на интегрирование через разложение.

1) $\int (1-2x+3x^2)^2 x^3\,dx$
2) $\int \frac{(a+bx)^3}{x^4}\,dx$
3) $\int \frac{x^3-x}{\sqrt{a^4+x^4}}\,dx$
4) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$
5) $\int \frac{x^3+2x-3}{x-1}\,dx$
6) $\int \frac{x^3\,dx}{1+x^2}$
7) $\int \sin^3 x\,dx$
8) $\int tg^2 x\,dx$
9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$
10) $\int \sin^2 x\,dx$
11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$
12) $\int \frac{x^4}{a+bx}\,dx$
13) $\int \frac{x-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$
14) $\int \frac{x\,dx}{(1-x)^5}$
15) $\int (1-\cos x)^2\,dx$

Интегрирование по частям.

Этот способ состоит в употреблении особой формулы называемой формулой интегрирования по частям. Эта формула есть обратная той, которая выражает дифференциал произведения двух множителей u и v причем u и v суть функции от x.

Эта формула как известно следующая

$$d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du.$$

Взяв от обоих частей равенства неопределенный интеграл, получим: $u\cdot v = \int u\,dv + \int v\,du$ и отсюда

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Эта формула и есть формула для интегрирования по частям.

Чтобы применить эту формулу к вычислению

нъкотораго данного интеграла $\int f(x)dx$ нужно подынтегральную функцію представить въ видѣ $u.dv$, т.е. въ видѣ произведенія нъкоторой функціи на дифференціалъ другой и тогда уже прилагать формулу. Употребляя эту формулу, мы вмѣсто даннаго интеграла получимъ во второй части, другой интегралъ, который можетъ быть проще даннаго, или можетъ получиться такой, который возможно вычислить непосредственно, тогда какъ данный интегралъ мы не можемъ вычислить непосредственно.

Такимъ образомъ, употребляя эту формулу, мы можемъ, или упростить данный интегралъ, или окончательно его вычислить.

Представить данное подынтегральное дифференціалъ $f(x)dx$ въ видѣ $u.dv$ можно безчисленнымъ множествомъ способовъ. Такъ въ первыхъ если положимъ $f(x)=u$ и $x=v$, то по нашей формулѣ будемъ имѣть:

$$\int f(x)\,dx = x f(x) - \int x f'(x)\,dx$$

Видимъ этого, если въ подынтегральную функцію введемъ множителемъ и дѣлителемъ произвольную функцію $\varphi'(x)$, то получимъ

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \cdot \varphi'(x)\,dx = \int \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \cdot d\varphi(x)$$

Обозначивъ теперь $\frac{f(x)}{\varphi'(x)}$ черезъ u и $\varphi(x)$ черезъ v, мы получимъ опять нашъ интегралъ въ видѣ $\int u.dv$ и затѣмъ можемъ приложить къ нему формулу интегрированія по частямъ. Подъ функціей $\varphi(x)$ можно при томъ подразумѣвать безчисленное множество всевозможныхъ функцій, откуда вытекаетъ воз-

числение множество способов для представления данного интеграла в виде $\int u\,dv$.

Представим несколько примеров на применение формулы для интегрирования по частям.-

1) $\int x^n \ln x\,dx$. Соединим множитель x^n с dx и напишем данный интеграл в виде:

$$\int x^n \ln x\,dx = \int \ln x\, x^n dx = \int \ln x\, d\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Назовем теперь $\ln x$ через u, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ через v и применим к этому интегралу известную нам формулу; найдем:

$$\int \ln x\, d\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^n\,dx}{n+1}$$

Теперь полученный здесь интеграл есть непосредственный, а потому напишем:

$$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left\{\ln x - \frac{1}{n+1}\right\} + C$$

2) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Пусть $\operatorname{arctg} x = u$ и $x = v$. По известной формуле найдем:

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\,d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

Этот интеграл может быть вычислен непосредственно, если подынтегральное умножается на 2 и перед знаком интеграла поставим дополнительный 2. Таким образом находим

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

3) $\int x\ln(1+x^2)\,dx$

Разложим $x\,dx$, как дифференциал функции $\frac{x^2}{2}$, тогда интеграл напишется так:

$$\int x\ln(1+x^2)\,dx = \int \ln(1+x^2)\,d\frac{x^2}{2}$$

Применим теперь к этому интегралу формулу

интегрирования по частям, полагая $l(1+x^2)=u$, и $\frac{x^2}{2}=v$, находим:

$$\int l(1+x^2)\,d\frac{x^2}{2} = l(1+x^2)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,dl(1+x^2) = \frac{x^2}{2}l(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

Последний интеграл легко взять через разложение так, это было указано раньше. (Пример 2-ой предыдущей статьи) и мы получим:

$$\int x\,l(1+x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}l(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}l(x^2+1) + c = \frac{x^2}{2}\left[l(1+x^2)-1\right] + \frac{1}{2}l(x^2+1) + c$$

Иногда для того чтобы вычислить интеграл по частям, приходится прибегать формулу несколько раз, и при каждой последовательности применения интеграл, получающийся во второй части равенства, изменяется по виду и должен последовательно упрощаться.

Предложение на это следующий пример-

4) $\int x^3 e^{-x}\,dx = -\int x^3\,de^{-x}$

Применяя формулу интегрирования по частям к этому интегралу, полагая $x^3=u$, а $e^{-x}=v$, находим $-\int x^3\,de^{-x} = -x^3e^{-x} + 3\int x^2e^{-x}dx$

Интеграл, стоящий во второй части, проще первоначального, хотя он еще также неизвестен; упрощение заключается в том, что степень x в подынтегральной функции понизилась на единицу.

К новому интегралу опять можно применить формулу интегрирования по частям; мы получим таким образом:

$$\int x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x} + 3\int x^2e^{-x}dx = -x^3e^{-x} - 3\int x^2\,de^{-x} =$$
$$= -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} + 6\int xe^{-x}dx.$$

Последний интеграл еще проще, так как в нем-

степень x еще понизилась на единицу. Применяя ту же формулу интегрирования по частям, находим

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6\int x\, d(e^{-x}) = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} + 6\int e^{-x} dx$$

Последний интеграл есть непосредственный, а потому имеем:

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + c = -e^{-x}\left[x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right] + c$$

Формула интегрирования по частям применяется во вычислению определенного интеграла; так очевидно будем иметь: $\int_{x_0}^{X} u\,dv = [u.v]_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} v\,du$,

где символ $[u.v.]_{x_0}^{X}$ означает разность результатов, которые получаются, когда в выражении $u.v.$ вместо x сначала X, а потом x_0

Применение формулы интегрирования иногда может оказаться неудобным, именно тогда, когда во второй части получится интеграл сложнее данного, тогда нужно или переменить прием интегрирования, или применить способ интегрирования по частям во иной форме. Так если интеграл предыдущего примера представить в следующей форме:

$$\int x^3 e^{-x} dx = \int e^{-x} d\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

и принимая e^{-x} за u, $\frac{x^4}{4}$ за v, будем интегрировать по частям, то получим:

$$\int e^{-x} d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{x^4}{4} e^{-x} + \frac{1}{4}\int x^4 e^{-x} dx$$

Ясно, что во второй части равенства получается интеграл сложнее данного, так как степень x повышается; таким образом во этой форме интегрирования по частям к данному интегралу не сво-

всегда быть применено.

Примеры на интегрирование по частям.

1) $\int \arcsin x \cdot dx$
2) $\int x \sin 3x \cdot dx$
3) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$
4) $\int l(1+x)\,dx$
5) $\int x \operatorname{arctg} x \cdot dx$
6) $\int x^2 \cos ax \cdot dx$
7) $\int x^n (lx)^2 dx$
8) $\int e^{ax} \cos bx \cdot dx$
9) $\int_0^{2a} \arccos \frac{a-x}{a}\,dx = \pi a$
10) $\int_0^{\pi} x^2 \cos dx = -2\pi$
11) $\int_0^e \frac{lx \cdot dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 0{,}6263\ldots$
12) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-\varphi} \cos^3 \varphi\, d\varphi = \frac{3}{10}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

Интегрирование через введение нового переменного.-

Положим, что мы имеем: $\int f(x)\,dx$.

Здесь x есть переменное независимое и может поэтому изменяться как угодно; мы можем вообразить поэтому, что x есть некоторая функция нового переменного Z, так что $x = \varphi(z)$

Таким образом Z будет изменяться произвольно, а x будет изменяться теперь в зависимости от Z.

Вводя это новое переменное, мы будем иметь наш интеграл в виде $\int f[\varphi(z)]\varphi'_z\,dz$.

Этот интеграл уже совершенно иной по составу, чем данный; здесь интегрирование придется производить по новому переменному Z, и подынтегральный дифференциал может оказаться проще первоначального данного, при этом возможно также, что новый интеграл может быть и непосредственно вычислен.-

Вычислив последний интеграл, мы в результате получим некоторую функцию z, так что будем иметь:

$$\int f[\varphi(z)]\varphi' z \cdot dz = F(z) + c$$

Но данный интеграл есть функция x, следовательно и результат должен быть выражен также функцией x, чтобы достигнуть этого, стоит только z представить функцией x^m, это легко сделать при помощи уравнения связывающего эти два переменных. Из этого уравнения мы получим: $z = \varphi(x)$

Вставляя вместо z, в полученный результат это выражение найдем:

$$\int f[\varphi(z)]\varphi' z\, dz = F(z) + c = F[\varphi(x)] + c$$

Таким образом данный интеграл будет выражен функцией x^m

Предложенный способ применим на этот класс интегрирования.-

1) $\int \frac{x^2 dx}{a - bx^3}$. Этот интеграл мог бы быть вычислен через приведение его к непосредственному, но его можно также получить и вновь указанным способом

Положим что $a - bx^3 = z$, дифференцируя, находим: $-3bx^2 dx = dz$ и отсюда $x^2 dx = -\frac{1}{3b} dz$.

Теперь наш интеграл будет:

$$\int \frac{x^2 dx}{a - bx^3} = -\frac{1}{3b} \int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{3b} lz + c$$

Выразив результат во функции x^m, получим:

$$\int \frac{x^2 dx}{a - bx^3} = -\frac{1}{3b} lz + c = \frac{1}{3b} l(a - bx^3) + c$$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ Положим при этом, что $a > x$; иначе под-

интегральная функция была бы синусом. Введем новое переменное, полагая $x = a \cdot \sin\varphi$, где φ новое переменное. Находим теперь дифференциал x

$$dx = a \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi.$$

$a\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\varphi} = a\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = a \cdot \cos\varphi$. Вставляя эти величины в выражение интеграла, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\cos\varphi \cdot d\varphi}{a \cdot \cos\varphi} = \int d\varphi = \varphi + c$$

Но результат должен быть выражен в функции x, поэтому определяем φ, как функцию x; из уравнения, связывающего эти два переменных, находим: $\sin\varphi = \frac{x}{a}$, а отсюда $\varphi = \arcsin\frac{x}{a}$. Таким образом, подставив вместо φ его величину, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \varphi + c = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

При вычислении интегралов по указанному способу нельзя указать правил относительно того, что именно нужно принимать за новое переменное, и весьма часто вводится новое переменное таким образом, что с первого взгляда нельзя и сказать, что интеграл через это упростится и сможет быть вычислен. Возьмем например $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Чтобы вычислить этот интеграл введем новое переменное z, полагая $\frac{a^2 + x^2}{x^2} = z$. Отсюда имеем: $a^2 + x^2 = x^2 z$ и $a^2 = x^2(z-1)$, а отсюда $x^2 = \frac{a^2}{z-1}$ и наконец $x = \frac{a}{\sqrt{z-1}}$ или $x = a(z-1)^{-\frac{1}{2}}$

Дифференцируя это выражение, находим

$$dx = -\frac{a}{2}(z-1)^{-\frac{3}{2}}dx$$

Далее $a^2 + x^2 = x^2 z = \frac{a^2 z}{z-1} = a^2 z(z-1)^{-1}$. Вставляя эти два величина в выражение данного интеграла, по-

если иметь

$$\int \frac{dx}{(a^2+x)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\frac{a}{2}(z-1)^{-\frac{3}{2}}\,dz}{a^3 z^{\frac{3}{2}}(z-1)^{-\frac{3}{2}}}$$

сократив получим

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2a^2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz = -\frac{1}{2a^2}\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{a^2 z^{\frac{1}{2}}} + C = \frac{1}{a^2\sqrt{z}} + C$$

Вставив теперь вместо z его величину, выраженную функцией $x^{ея}$; получим:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2\sqrt{z}} + C = \frac{1}{a^2\sqrt{\frac{a^2+x^2}{x^2}}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

Рассмотрим теперь, какъ отразится введение новаго перемѣннаго въ опредѣленныхъ интегралахъ. Пусть намъ дано $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$. Требуется новое перемѣнное, полагая $x = \varphi(z)$. Значитъ неопредѣленный интегралъ отъ того же дифференціала через $\varphi(x)+C$, т.е. положимъ, что

$$\int \varphi(x)\cdot dx = \varphi(x) + C,$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть такая функція, производная которой равна подынтегральной функціи, т.е. $\varphi'(x) = f(x)$

Теперь нашъ опредѣленный интегралъ, мы можемъ представить такъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0)$$

Если въ данномъ интегралѣ перемѣнное измѣняется отъ $x = x_0$ до $x = X$, то по уравненію, связывающему старое перемѣнное съ новымъ, не трудно узнать между какими соотвѣтствующими предѣлами будетъ измѣняться новое перемѣнное z.

Если въ уравненіи связывающемъ x и z согласить $x = x_0$, т.е. возьмемъ уравненіе: $x_0 = \varphi(z)$ и отсюда опредѣлимъ соотвѣтствующее значеніе z, положимъ

оно будет $Z = Z_0$, то получим следующее тождество $x_0 = \varphi(Z_0)$

Когда бы тоже все уравнения согласили $x = X$, т.е. возьмем уравнение $X = \varphi(Z)$ и отсюда опять определим соответствующее значение Z, пусть оно будет $z = Z$, то будем иметь тождество

$$X = \varphi(Z)$$

Таким образом мы видим, что при изменении x между пределами x_0 и X переменное Z будет изменяться между соответствующими пределами Z_0 и Z, которые могут быть определены.

Возвратившись опять к рассмотрению данного интеграла и, на основании доказанных тождеств, напишем его так

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0) = \varphi[\psi(Z)] - \varphi[\psi(z_0)]$$

Теперь рассмотрим функцию $\varphi[\psi(z)]$ и найдем ее дифференциал; получим

$$d\varphi[\psi(z)] = \varphi'[\psi(z)]\psi'(z)\,dz$$

Но, как нами было замечено выше, функция $\varphi'(x) = f(x)$, при совершенно произвольности значения x, то вместо функции $\varphi'[\psi(z)]$ можем поставить функцию $f[\psi(z)]$, и будем иметь

$$d\varphi[\psi(z)] = f[\psi(z)]\psi'(z)\,dz$$

В полученном равенстве возьмем отчет обеих частей интеграл в пределах от z_0 до Z; мы получим

$$\int_{z_0}^{Z} d\varphi[\psi(z)] = \int_{z_0}^{Z} f[\psi(z)]\psi'(z)\,dz$$

или

$$\varphi[\psi(z)] - \varphi[\psi(z_0)] = \int_{z_0}^{z} f[\psi(z)]\psi'(z)\,dz$$

Сравнивая это последнее равенство с прежде полученным, мы приходимся к следующему равенству

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{z_0}^{z} f[\psi(z)]\psi'(z)\,dz$$

Это равенство и выражает правило для введения нового переменного в определенном интеграле. Мы видим, что при введении нового переменного в определенном интеграле под знак интеграла новое переменное вводится также, как и в неопределенных интегралах; но пределы нового интеграла будут другие; эти пределы суть значения нового переменного, соответствующие тем значениям старого переменного, которые эти последние принимают при верхнем и нижнем пределах. Новые пределы определяются из уравнения, связывающего старое переменное с новым, как было указано выше.

Предложим примеры:

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$

Введем новое переменное, полагая $tg\varphi = z$, тогда

$\operatorname{arctg} z = \varphi$; $d\varphi = \frac{dz}{1+z^2}$; $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+tg^2\varphi} = \frac{1}{1+z^2}$; $\sin^2\varphi = \frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi} = \frac{z^2}{1+z^2}$

Найдем пределы нового переменного

при $\varphi = 0$ и $z = tg\varphi = tg\,0 = 0$

при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $z = tg\varphi = tg\frac{\pi}{4} = 1$

Теперь мы можем прямо написать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \int_0^1 \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{a^2}{1+z^2} + \frac{b^2z^2}{1+z^2}} = \int_0^1 \frac{dz}{a^2+b^2z^2} = \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{dz}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + z^2}$$

Последний интеграл может быть вычислен, по формуле

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$$

На основании которой будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{dz}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + z^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{a}\right) + c\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Примеры на интегрирование через введение нового переменного.-

1) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ . . . . . $x-\alpha = \beta z$

2) $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ . . . . . $\cos x = z$

3) $\int \frac{dz}{x\sqrt{a+bx}}$ . . . . . $a+bx = z$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ . . . . . $x = a-z$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$ . . . . . $x = \frac{a}{1-z}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ . . . . . $\sqrt{a^2+x^2} = z-x$

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ . . . . . $x = \frac{1}{z}$

8) $\int x^2\sqrt{a+x}\cdot dx$ . . . . . $\sqrt{a+x} = z$

9) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ . . . . . $\frac{1+x^2}{x^2} = z^2$

10) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ . . . . . $x = a\cdot\sin\varphi$

11) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\cdot dx =$ . . . . . $x-a = a\cos\varphi$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cdot\cos^3\varphi\cdot d\varphi = \frac{2}{15}$ . . . . . $\sin\varphi = x$

13) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = J_1$ . . . . . $x-\frac{1}{2} = u$

14) $\int_0^1 \frac{v(1-v)^2}{(1+v)^6}\,dv = \frac{1}{60}$ . . . . . $x = 1+v$

15) $\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}}\cdot dx}{\sqrt{a-x}} = \frac{5\pi a^3}{16}$ . . . . . $x = a\cdot\sin\varphi$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+a\cos\varphi} = \frac{\operatorname{arc}\cos a}{\sqrt{1-a^2}}$ . . . . . $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = z \ldots a<1$

В заключение, сославшись нашим обозрением приемов интегрирования, скажем несколько слов о процессе интегрирования вообще.-

Процесса интегрирования, как уже можно видеть из предшествующего, существенно отличается от процесса дифференцирования. Всякая функция может быть одифференцирована по определенным правилам; совершенно иначе приходится поступать при интегрировании. Далеко не всякий данный дифференциал может быть проинтегрирован и скорее можно сказать, что дифференциалы, которые могут быть проинтегрированы, представляют исключения. Далее общих способов для интегрирования не существует, и задача интегрального исчисления будет: указать те классы функций, которые могут быть проинтегрированы. Заметим, что возможность интегрирования не зависит от большей или меньшей простоты дифференциала; бывают очень простые функции по виду, которых однако нельзя проинтегрировать.-

Интеграл от всякой функции непременно существует, и поэтому нельзя сказать, чтобы интеграл от той функции, которую мы не можем проинтегрировать, был невозможен. Если мы не можем найти какого-нибудь интеграла, то это значит только, что этот интеграл представляет такую функцию, которую мы не можем выразить помощью известных нам зна-

ков, так что этот интеграл представляет особого рода трансцендентную функцию. Интегрирование открывает нам целый ряд трансцендентных неизвестных нам функций и интегральное исчисление сможет быть истолковано безмысленного множества только функций. Трудность интегрирования, как уже сказано выше, не зависит от большей или меньшей сложности интегрируемого дифференциала. Так интеграл $\int e^{-x^2} \cdot x \cdot dx$, как нам известно, есть непосредственный, но стоит только опустить в нем x и мы получим интеграл: $\int e^{-x^2} \cdot dx$, который представляет трансцендентную функцию и уже не сможет быть выражен в конечной виде, помощью известных нам функций.

Подобно этому интеграл:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx.$$

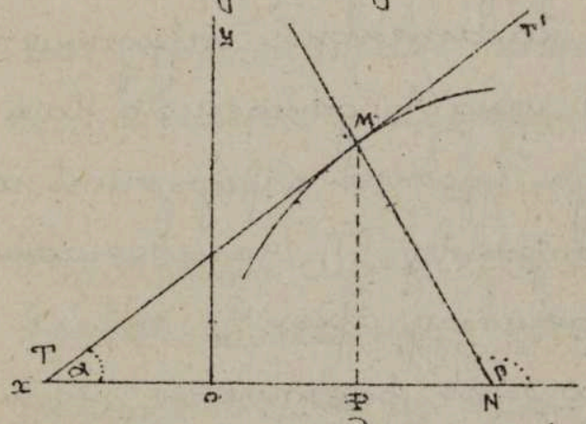
тоже представляет такую функцию, которая не сможет быть выражена помощью известных нам знаковых функций. -

Приложение дифференциального исчисления

Къ геометрии.

О Касательныхъ къ плоскимъ кривымъ.

Сначала разсмотримъ Касательныя къ кривымъ, отнесеннымъ къ прямоугольнымъ осямъ Координатъ. Разсмотримъ произвольную кривую линію, уравненіе которой пусть будетъ $y = f(x)$. Возьмемъ на этой кривой произвольную точку M, координаты которой суть x и y. Проведемъ въ этой точкѣ къ кривой касательную; пусть она пересѣчетъ ось x-овъ въ точкѣ T и образуетъ съ осью x-овъ уголъ α. Въ этомъ случаѣ мы знаемъ - существуетъ такое равенство:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x);$$

зная $\operatorname{tg}\alpha$, мы можемъ написать ур-е Касательной, какъ линіи проходящей черезъ данную точку M и образующей съ осью x-овъ извѣстный уголъ α; это уравненіе будетъ:

$$\underline{Y} - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$ гдѣ X и Y суть текущія координаты, а x и y координаты данной точки M. Когда извѣстно уравненіе Касательной, то легко построить и самую Касательную. Если ур-е кривой дано въ такомъ видѣ $F(x, y) = 0$, гдѣ y есть

неявная ф-ия x; то чтобы получить уравнение касательной, надо предварительно определить $\frac{dy}{dx}$.
Дифференцируя по x ур-е кривой, находим

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

откуда $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$. Вставив в уравнение касательной найденное выражение, получим —

$$Y - y = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}(X - x)$$

Умножив обе части равенства на $\frac{dF}{dy}$ и перенося все во вторую часть, получим:

$$\frac{dF}{dy}(Y - y) + \frac{dF}{dx}(X - x) = 0$$

Это ур-е касательной иногда употребляется в том случае, когда уравнение кривой дано не разрешенным относительно y. Положение касательной определяется обыкновенно посредством угла α, образованного касательной с осью x'ов; но иногда удобнее определять положение касательной по отрезку PT, называемому субтангенсом и обозначаемому через S_t; таким что $PT = S_t$. Субтангенс это есть расстояние подошвы ординаты той точки, в которой проведена касательная, до встречи этой касательной с осью x'ов.
Выражение субтангенса получим из ΔTMP, из которого имеем:

$$S_t = y \operatorname{Ctg} \alpha = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = y \cdot \frac{dx}{dy}$$

При выведении этой формулы предполагалось, что точка T лежит влево от точки P, а потому если бы субтангенс получился отрицательным, то

это значило бы, что точка T лежит вправо отъ P

Нормальною линіею назыв. прямая, проходящая черезъ точку прикосновенія и перпендикулярная къ касательной. Пусть это будетъ линія NN'. Означимъ уголъ, отсѣкаемый ею съ осью x^{ch} черезъ β; тогда ур-іе ея мы можемъ написать такимъ образомъ:

$$Y - y = \operatorname{tg}\beta\,(X - x)$$

$\operatorname{tg}\beta$ опредѣлится изъ условія перпендикулярности этой прямой съ касательной; по условію перпендикулярности имѣемъ: $\operatorname{tg}\beta \frac{dy}{dx} + 1 = 0$

отсюда $\operatorname{tg}\beta = -\frac{dx}{dy}$, а слѣдовательно ур-іе нормальной линіи будетъ:

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

или уничтоживъ знаменатель и перенеся все въ 1-ю часть, получимъ:

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0$$

Въ этомъ ур-іи dy опредѣлится изъ уравненія кривой имѣемъ: $dy = f'(x)\,dx$, вставивъ это выраженіе въ ур-іе нормальной, мы можемъ сократить все уравненіе на dx и полученное затѣмъ ур-іе уже не будетъ содержать дифференціаловъ.

По найденному ур-ію нормальной линіи можно построить и самую линію. Иногда для построенія нормальной линіи отыскиваютъ отрѣзокъ PN, называемый *субнормалью* и обозначаемый черезъ S_n, такъ что $PN = S_n$, это есть раз-

стояние отъ подошвы ординаты разсматриваемой точки, до точки встрѣчи нормальной линіи съ осью $x^{ов}$. Выраженіе субнормали получится изъ Δ-ка MNP, откуда имѣемъ:

$$S_n = y \cdot \operatorname{tg}\alpha = y \frac{dy}{dx}$$

При выводѣ этой формулы мы предполагали, что точка N лежитъ вправо отъ точки P, и потому если бы субнормаль получилась отрицательной, то это показало бы, что точка N лежитъ влѣво отъ P. Иногда для опредѣленія нормальной линіи или для другихъ цѣлей опредѣляютъ длину отрѣзка MN, т.е. части нормальной линіи, заключающейся между точкою прикосновенія и точкою встрѣчи нормальной линіи съ осью $x^{ов}$; этотъ отрѣзокъ наз. нормалью и обозначается черезъ N. Выраженіе нормали получится изъ Δ-ка MNP, откуда имѣемъ:

$$N^2 = y^2 + S_n^2 = y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2} = y^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

а извлекая корень, получимъ:

$$N = \pm y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Выведенныя формулы достаточно для опредѣленія положенія касательной и нормальной линіи къ кривой, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Слѣдующее приложеніе этихъ формулъ.

Касательныя къ трохоидѣ.

Трохоидой наз. кривая линія, описываемая точкою, неизмѣнно соединенною съ прямою

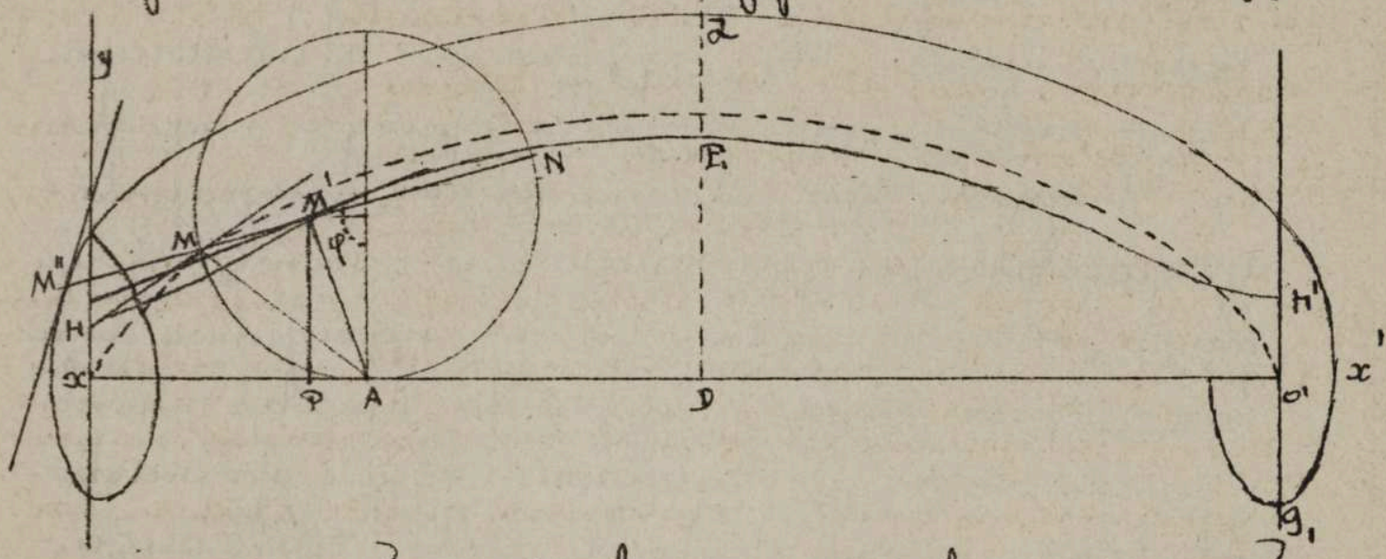
которой катится без скольжения по неограниченной прямой линии.-

В частном случае, когда точка, описывающая кривую находится на окружности, катящегося круга. Эта кривая наз. циклоидой; когда точка, описывающая кривую, находится внутри катящегося круга, получается укороченная циклоида; и наконец, когда точка, описывающая кривую, находится вне катящегося круга, полученная кривая назыв. удлиненной циклоидой. Общее все название всех трех кривых есть трохоида.-

Возьмем образующий круг, пусть его центр точка C; проведем в этом круге произвольный радиус, на котором рассмотрим 3 точки: одну на окружности точку M, другую внутри окружности точку M' и третью M'' вне окружности. Эти 3 точки при движении круга по прямой xx' опишут три названные выше кривые.-

Пусть при начале движения точка M совпадает с точкою O, при своем движении она опишет циклоиду, которая представлена пунктиром. Примем теперь точку O за начало координат, линию Ox за ось x-ов, а перпендикуляр Oy за ось y-ов. Положим, что точка M' при начале движения будет находиться в точке N. Затем, когда точка N круга ов

падает съ точкою D направляющей прямой xx', то точка M' будетъ находиться въ точкѣ E и кривая HEH', ею описанная, будетъ укороченная циклоида. Далѣе точка M" будетъ описывать удлиненную циклоиду; въ началѣ движенія точка M' находится въ точкѣ Q и при совпаденіи точки N круга съ точкою D точка M" совпадетъ съ L; кривая, описываемая точкою M" будетъ QM"Lq'. Для этихъ 3-хъ кривыхъ можно составить общее уравненіе. Положимъ, что разстояніе точки описывающей кривую отъ центра равно h, такъ что разсматривая въ частности точку M' будемъ имѣть CM'=h; когда h<a, гдѣ a радіусъ образующаго круга, то получается укороченная циклоида; *) когда h>a, то удлиненная циклоида. Уравненіе для всѣхъ трехъ кривыхъ составляется одинаково.



Построимъ координаты точки M'; обозначимъ уголъ поворота круга около центра черезъ φ

*) При h=a получается обык. цик.

и проведем через точку M' параллель оси x^h до точки Q. Из чертежа имеем:

$x = OP = OA - M'Q$. Но по свойству движения круга (катится без скольжения): $OA = \text{дуге } AM = a\varphi$, а из треугольника $M'CQ$, имеем: $M'Q = h\sin\varphi$.

следовательно: $x = a\varphi - h\sin\varphi$

Из чертежа имеем также:

$$y = CA - CQ = a - h\cos\varphi.$$

Эти 2 ур-ия вместе взятые представляют рассматриваемую кривую, причем φ есть переменное независимое. Давая φ всевозможные значения, будем получать различные точки кривой. Из этих 2-х уравнений можно было бы исключить φ и тогда получим бы ур-е кривой в обыкновенной форме, т.е. в виде соотношения между координатами x и y; но такой вид ур-ия менее удобен. Рассмотрим теперь касательную к этой кривой. Для построения касательной здесь будет всего удобнее определить субнормаль и предварительно построить нормаль. Как известно формула для субнормали есть:

$$S_n = \frac{y \cdot dy}{dx}$$

из уравнения кривой находим:

$$dx = (a - h\cos\varphi)\,d\varphi = y \cdot d\varphi$$

$$dy = h \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$$

Вставляя найденные выражения в выражение субнормали, получаем:

$$S_n = \frac{y \cdot h \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi}{y \cdot dy} = h\sin\varphi.$$

Но чертежу эта величина представляет M'Q, т.е.

$$S_n = h.\sin\varphi = M'Q = PA.$$

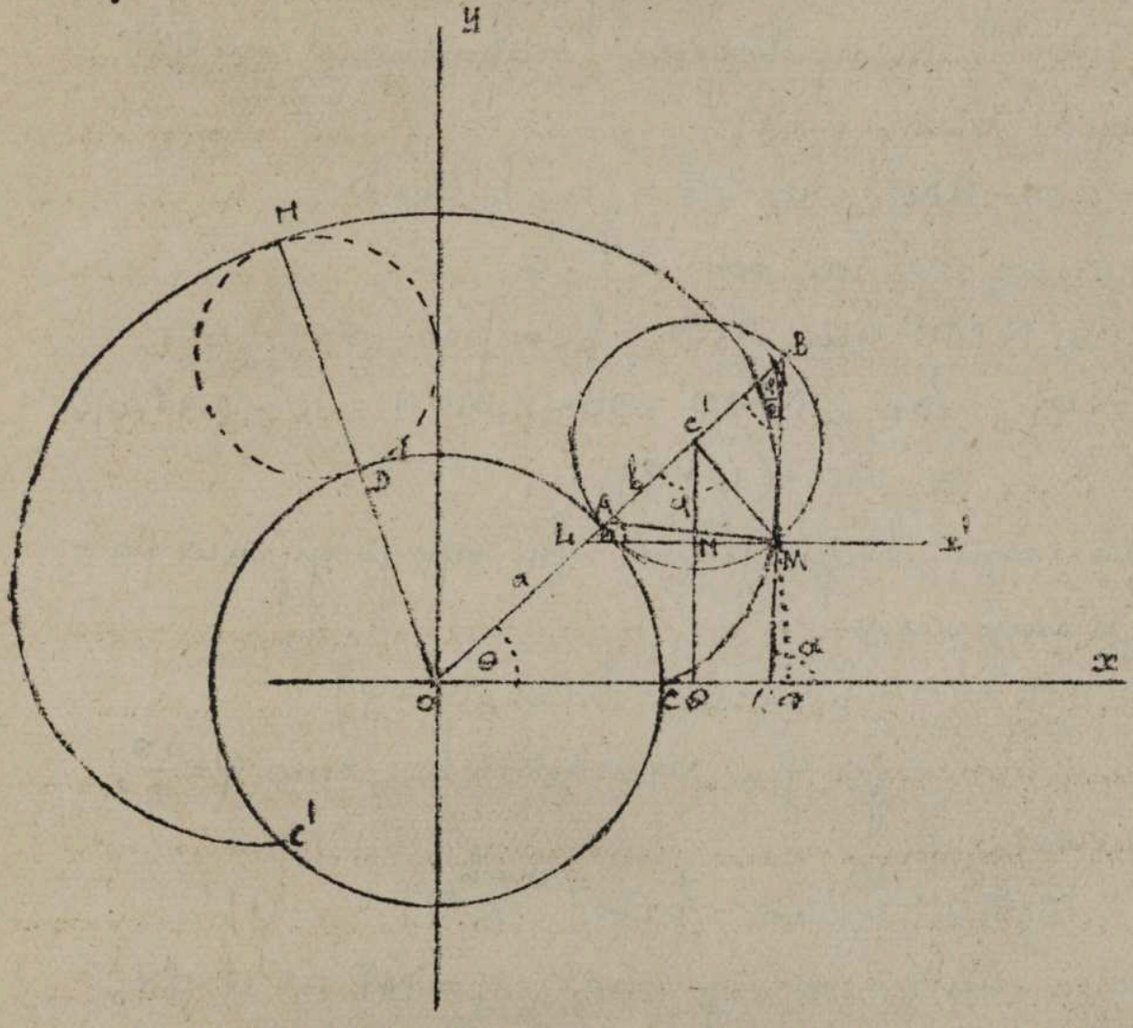
Следов. нормальная линия получится, соединив точку M' со точкою A прикосновения образующего круга.-

Наш вывод, в котором h произвольно, очевидно также относится к циклоиде. Если соединим точку A с точкою M, то получим нормаль к циклоиде, если соединим точку M' с A, то получим нормаль к удлиненной циклоиде. Вообще, что если известна нормальная, то известна и касательная, которая перпендикулярна к нормали

Касательная к эпициклоиде.-

Эпициклоидой называется кривая, описываемая точкой окружности круга, находящегося вне соприкосновения со внешней стороны неподвижного круга. Пусть центр неподвижного круга есть O и a его радиус. Пусть центр образующего круга есть O' и его радиус b; точка соприкосновения этих окружностей пусть будет A, тогда AO=a; O'A=b. Положив, что точка M есть точка, описывающая кривую, и пусть в начале движения она совпадает с точкою C, соединим точку O с M и обозначим ∠AOM через φ, а угол AOC через Θ. При движении круга O' точка M будет сначала удаляться

отъ центра O и по свойству движения будетъ
имѣть arc AM = arc AC.
Но arc AM = bq и arc AC = ab, подставивъ эти
величины въ предыдущее равенство, получимъ
bq = ab. Чтобы построить самое дальнее поло-
женіе точки M относительно центра O, отло-



жимъ по неподвиж-
ному кругу отъ
точки C полови-
ну окружно-
сти вправо-
до точки
D, такъ
что arc CD =
R.b и за-

тѣмъ соединимъ точку D съ O и отложимъ отъ
точки D величину: DH = 2b, получимъ, что то-
чка H есть самое дальнее положеніе точки M
относительно O. При своемъ дальнѣйшемъ
движеніи точка M займетъ очевидно рядъ поло-
женій симметричныхъ съ первыми относительно

по прямой Ox, которая будет осью вогнутости CC' эпициклоиды.

Принимая за начало координат точку O, за ось x-ов линию OC, а за ось y-ов линию перпендикулярную $-Oy$. Построим коор-ты точки $M(x,y)$; из точки O' опустим перпендикуляр $O'Q$ на ось x-ов, а из точки M проведем параллель оси x-ов

Из чертежа имеем:

$$x = OP = OQ + NM \text{, но } OQ = (a+b)\cos\Theta,$$

Есть проекция OO' на ось x-ов, а

$MN = b.\cos NMO'$ или $MN = b\cos[180-(\Theta+\varphi)] =$

$= -b.\cos(\Theta+\varphi)$, ибо $\angle NMO' = 90 - \angle MO'N = 90^\circ - (\varphi - 90^\circ + \Theta) =$

$= 180 - (\Theta+\varphi)$

Вставляя эти выражения в предыдущее равенство, получим:

$$x = (a+b)\cos\Theta - b\cos(\Theta+\varphi)$$

Исключим отсюда φ, заметив, что $\varphi = \frac{a\Theta}{b}$, мы получим

$$x = (a+b)\cos\Theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\Theta\right) \quad \ldots (1)$$

Из чертежа имеем далее: $y = MP = O'Q - O'N$; но из $\Delta OO'Q$ имеем: $O'Q = (a+b)\sin\Theta$, а из $\Delta O'NM$ получим: $O'N = b.\sin(\Theta+\varphi)$, а потому: $y = (a+b)\sin\Theta - b\sin(\Theta+\varphi)$

Или исключая φ, получим:

$$y = (a+b)\sin\Theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\Theta\right) \quad \ldots (2)$$

Эти 2 ур-ия (1) и (2) вместе взятые представляют эпициклоиду. Угол Θ примем за независимое переменное, и тогда давая Θ

всевозможные значения от 0 до 2π, от 2π до 4π и т.д. будем получать различные точки кривой. Займемся теперь проведением касательной к этой кривой. Определим прежде всего tg-угла образуемого касательной с осью x т.е. $tg\alpha$, по известной формуле имеем: $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$

Определим теперь dy и dx из первого и второго ур-ий, дифференцируя, находим:

$$dy = [(a+b)\cos\Theta - (a+b)\cos(\tfrac{a+b}{b}\Theta)]\,d\Theta \text{ и}$$

$$dx = [(a+b)\sin(\tfrac{a+b}{b}\Theta) - (a+b)\sin\Theta]\,d\Theta$$

Разделим первое из полученных равенств на второе и сократив, находим:

$$tg\alpha = \frac{\cos\Theta - \cos\frac{a+b}{b}\Theta}{\sin\frac{a+b}{b}\Theta - \sin\Theta}$$

или заменяя разности Sin-ов и Cos-ов через произведения Sin и Cos, по известным формулам тригонометрии, находим:

$$tg\alpha = \frac{-2\sin(-\frac{a\Theta}{2b})\sin(\frac{2a+2b}{2b}\Theta)}{2\sin\frac{a\Theta}{2b}\cos(\frac{a+2b}{2b}\Theta)}$$

Убрав знак перед Sin-ом и под знаком Sin-а, получим по сокращению:

$$tg\alpha = tg(\frac{a+2b}{2b}\Theta)$$

Положим, что ... $\varphi = \frac{a\Theta}{b}$

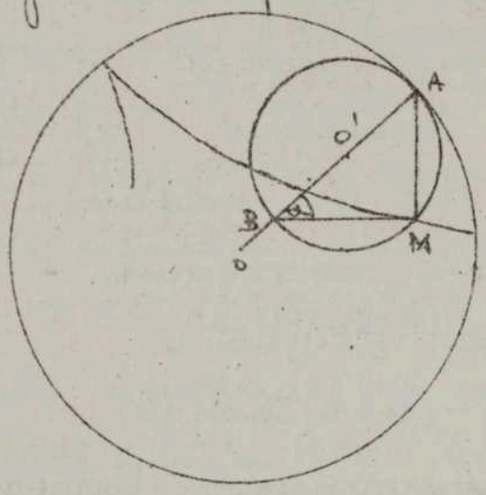
Вводя эту величину в полученное равенство, находим $tg\alpha = tg(\Theta + \frac{\varphi}{2})$ и отсюда

$$\alpha = \Theta + \frac{\varphi}{2}$$

Это дает простой способ построения на-

Высшей Алгебры

сательной к эпициклоиде. Действительно, возьмем на окружности O' точку B противоположную точке A; соединим точку B с точкой M, построенная прямая BM и будет касательная



В самом деле рассмотрим $\angle BMx'$, этот угол, как внешний относительно ΔLBM равен сумме углов с ним не смежных, т.

$$\angle BMx' = \angle L + B = \Theta + \frac{\varphi}{2} = \alpha$$

А потому линия BM есть касательная; понятно, что соединив точку M с A, мы получим нормальную линию, так как $\angle BMA$, как опирающийся на окружности и опирающийся на диаметр есть прямой. В тесной связи с эпициклоидой находится другая кривая гипоциклоида; эта кривая описывается точкою окружности круга, катящегося без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности. Уравнение гипоциклоиды выводится совершенно также, как и ур-е эпициклоиды, только радиусы в образующих круга должны взять в противоположную сторону. от точки прикосновения A двух окружностей; в результате получится такое ур-ие, как и выше, только в них в

и замкнится на $-b$, так что ур-ія гипоциклоиды будетъ:

$$x = (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta \text{ и}$$
$$y = (a-b)\sin\theta + b\sin\frac{a-b}{b}\theta$$

Къ этой кривой относится такъ-же и тотъ-же самое построеніе нормальной линіи, какъ и къ эпициклоидѣ, именно, если соединимъ точку A прикосновенія образующаго круга съ соотвѣтствующей точкой M кривой, то получимъ нормальную линію AM къ гипоциклоидѣ.—

Касательная къ цѣпной линіи.—

Цѣпной линіей наз. кривая линія, представляемая такъ-сказать нерастяжимой, но гибкой нитью, укрѣпленной въ 2-хъ точкахъ и подверженной одной силѣ тяжести. Ур-іе цѣпной линіи, введенное въ Механикѣ, есть:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

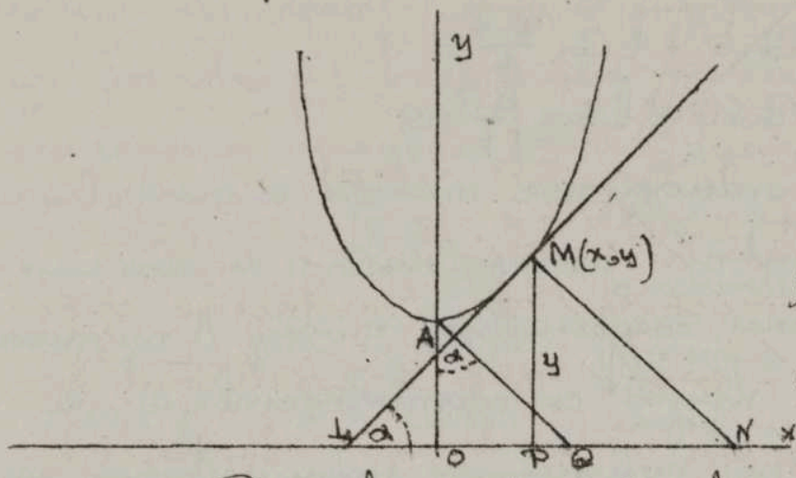
гдѣ e - основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, а a есть нѣкоторое постоянное количество. Возмемъ прямоугольныя оси коор-атъ. Изъ ур-ія цѣпной линіи видимъ, что при $x = 0$

$$y = \frac{a}{2}(1+1) = a = OA,$$

что дастъ точку A на оси ординатъ. Разсмотримъ теперь первую производную $\frac{dy}{dx}$; дифференцируя ур-іе кривой, находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Если теперь в этом выражении станем увеличивать x от $x=0$, то из этой формулы видно, что при этом $\frac{dy}{dx}$ всегда больше 0 и следовательно y постоянно возрастает. Следовательно кривая от точки A выпукло будет подниматься кверху. При том при отрицательных значениях x значения y получаются такие, как и при положительных, так как при перемене x на $-x$ не изменяется и самое ур-е, следов. кривая расположится симметрично относительно оси oy. Для точки A, где $x=0$ имеем $\frac{dy}{dx}=0$. Следовательно касательная в точке A $\parallel$ оси x-ов.



Возьмем произвольную точку M на кривой и определим в ней положение касательной для чего выразим производную: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ в ф-ии y. Это легко сделать следующим образом: возьмем выражение $\frac{y}{a}$ и возведем в квадрат, получим:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

с другой стороны заметим, что

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right);$$

если возьмем разность этих квадратов, то получим:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

и отсюда следует, что:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2-a^2}{a^2} \quad \text{или}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}$$

Это выражение легко построить. Проведем ординату $MP = y$, потом из точки A радиусом равным MP опишем дугу, пусть она пересечет ось $x^{ов}$ в точке Q, так что $AQ = y$. Тогда из треугольника OAQ имеем: $OQ = \sqrt{y^2-a^2}$, следовательно $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OQ}{OA}$, но это выражение представляет tg - угла OAQ, а потому $\angle OAQ = \alpha$.

Доказав это, утверждаем, что если через точку M проведем линию $\parallel^{но}$ линии AQ, то получим нормальную линию данной линии, если же через точку M проведем перпендикуляр к нормальной линии, то получим касательную. Действительно, угол образуемый касательной с осью $x^{ов}$ равен $\angle OAQ$, как угол с перпендикулярными сторонами, а потому: $\angle M \perp x = \alpha$.

5 Выпуклости и вогнутости плоских кривых.

Рассмотрим произвольную кривую линию, ур-ие которой дано и есть $F(x,y)=0$ или в явном виде: $y = \varphi(x)$.

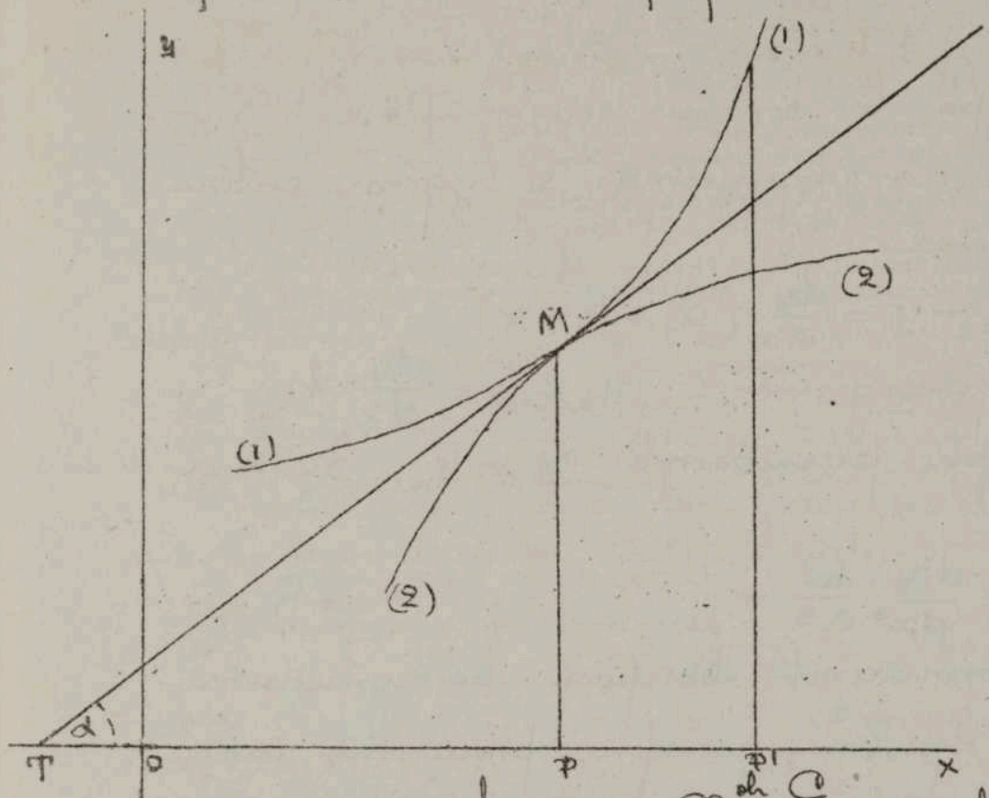
Пусть точка M есть произвольная точка кривой и пусть ее коор-ты будут x и y. Проведем к кривой в точке M касательную; чтобы провести касательную, нужно вычислить α, образуемый касательной с осью x^{ab}; так известно α определяется по формуле $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$
В точке M кривая будет касательна к прямой TT' и при том она может быть расположена выше или ниже прямой TT' в смежности с точкою M. Если кривая лежит выше прямой TT', то она выпукла относительно оси x^{ax}, если ниже, то она вогнута относительно оси x^{ax}

Предположим себе найти признаки, по которым можно было бы узнать, будет ли кривая, данная ур-ием выпукла или вогнута в известной точке относительно оси x^{ax}

Дадим x бесконечно малое приращение h положительное или отрицательное и рассмотрим ординату кривой, соответствующую абсциссе $x + h = P'O$.

Через точку P' проведем ординату и обозначим ее через y_1. Сравним ординату кривой с ординатой касательной, соответствующей той же самой абсциссе $x+h$. Назовем ординату касательной, соответствующую абсциссе $x+h$ через y_2. Если при сравнении орди-

нить оказается, что при положительном или отрицательном приращении h ординаты:



$y_1 > y_2$ или $y_1 - y_2 > 0$, то это показывает, что кривая идет выше касательной, следов. в этом случае кривая в рассматриваемой точке будет выпукла относительно оси x. Если же окажется, что $y_1 < y_2$ или $y_1 - y_2 < 0$, то это значит, что кривая идет ниже касательной, т.е. в этом случае кривая будет вогнута в точке M. Чтобы различить эти два случая составим выражение разности $y_1 - y_2$

Составим, во первых, выражение y_1. Ордината кривой изобразится: $y_1 = f(x+h)$

Разложим эту функцию по формуле Маклорена, получим:

$$y_1 = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \dots + R$$

Выражение производной y_n по x мы пишем в виде $\frac{dy}{dx}$, а не в виде $f'(x)$, потому что у может быть и неявной ф-ии x^9. Чтобы соста-

вить выражение y_2, начиная прежде ур-й касательной

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Положим теперь в этом ур-и $X = x + h$, тогда соответствующая ордината Y будет равна y_2 и мы получим

$$y_2 - y = \frac{dy}{dx}(x + h - x)$$

или сократив, находим: $y_2 = y + \frac{dy}{dx} \cdot h$

Возьмем теперь разность $y_1 - y_2$, будем иметь:

$$y_1 - y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + R$$

Теперь, чтобы решить вопрос выпуклости или вогнутости кривой, достаточно решить какой знак имеет эта разность при h бесконечно малом положительном или отрицательном.-

Рассматривая это выражение, мы замечаем во второй части равенства сумму бесконечно малых, при чем первый член второго порядка, второй член 3-го порядка и т.д. Мы знаем, что в таком случае h можно взять столь малым, что первый член суммы будет превосходить по абсолютной величине сумму всех остальных членов в произвольно большое число раз, так как сумма всех остальных членов составит только бесконечно малое 3-го порядка, а 1-ый член есть

знак множителя $2^{го}$ порядка и следовательно знак всей суммы будет одинаков со знаком первого члена, но первый член содержит h во второй степени, вследствие чего и при h положительном и при h отрицательном знак $1^{го}$ члена будет одинаков со знаком второй производной, а потому и знак разности $y - y_2$ будет одинаков со знаком $\frac{d^2y}{dx^2}$. На этом основании заключаем, что, если в рассматриваемой точке $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, то кривая вогнута относительно оси x-ов, если же $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, то кривая выпукла в этой точке относительно оси x-ов.

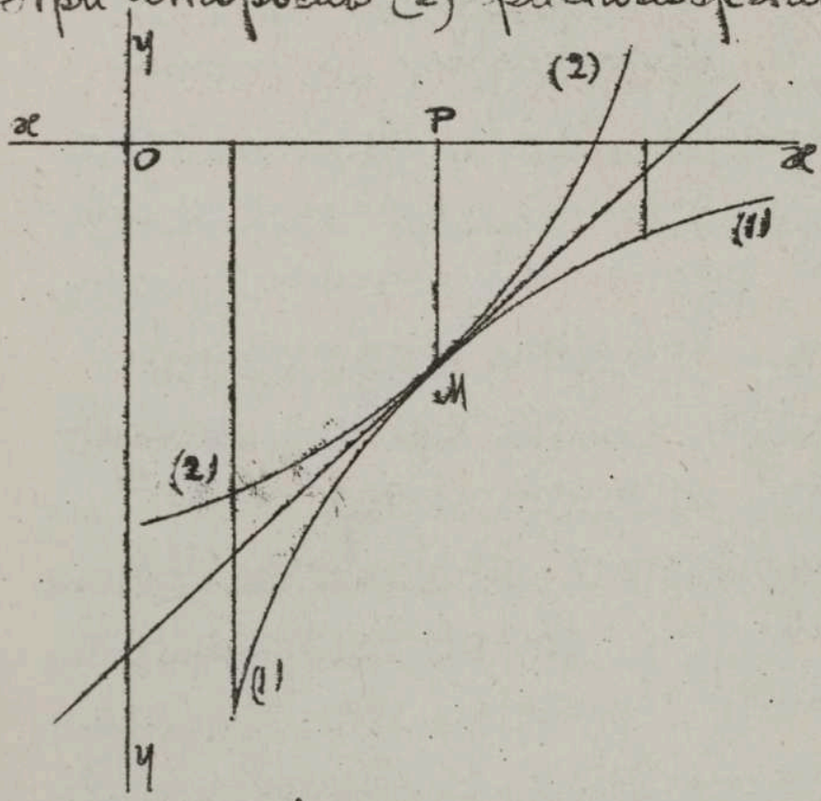
На этом рассмотрение предыдущего следующее. При выводе признака выпуклости или вогнутости кривой, мы предполагали, что ордината $y > 0$, а следовательно и смежные ординаты y_1 и y_2 также > 0, оставив условие рассматриваемой точку кривой, расположенную вблизи оси x-ов.

Если бы рассматривали точку вблизи оси x-ов, то признаки для вогнутости и выпуклости получились бы обратные. В самом деле в этом случае, когда кривая выпукла, т.е. имеет расположение (1), то ордината кривой по абсолютной величине остается больше ординаты касательной

ной, но для ординаты отрицательной и потому ордината касательной взятая со знаком будет больше ординаты кривой со знаком т.е. будем иметь

$$y_1 < y_2 \text{ или } y_1 - y_2 < 0$$

При второмом (2) расположении кривой будем иметь на том же основании:



$y_1 > y_2$ или $y_1 - y_2 > 0$

Заметим выражения для y_1 и y_2 остануться те же самые, какие выше, но заключения, из них выводимые будут обратными; так что во втором случае найдем, что если $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, то кривая вогнута, если же $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, то кривая будет выпукла

Можно эти 2 рода признаков соединить в один, стоит только заметить, что во втором случае, если кривая выпукла, то вторая производная имеет знак одинаковый со знаком y, в том же случае где кривая вогнута, знак второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$ будет обратный со знаком y. Поэтому во первом случае произведение $y\frac{d^2y}{dx^2}$

будет положительно, а во второй отрицательно. Таким образом, не обращая внимания на знак ординаты, можем сказать, что, если $y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}>0$, то кривая выпукла, а если $y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}<0$, то кривая вогнута.

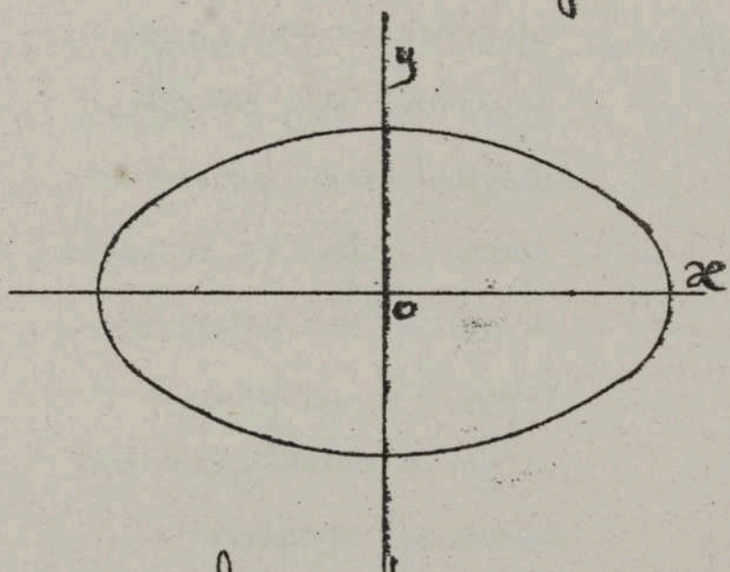
Возьмем для примера эллипс, отнесенный к центру и осям, и приложим к нему признаки выпуклости и вогнутости; уравнение такого эллипса есть

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2;$$

из этого уравнения прямо находим, что

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b^4}{a^2y^3};$$ возьмем для этой кривой произведение $y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b^4}{a^2y^2}$.

Так как y входит во второй степени в квадрате, то вторая часть всегда отрицательна и таким образом для всех точек кривой будем иметь



$$y\frac{d^2y}{dx^2}<0$$

и следовательно эллипс есть кривая вогнутая относительно большой оси во всех своих точках.

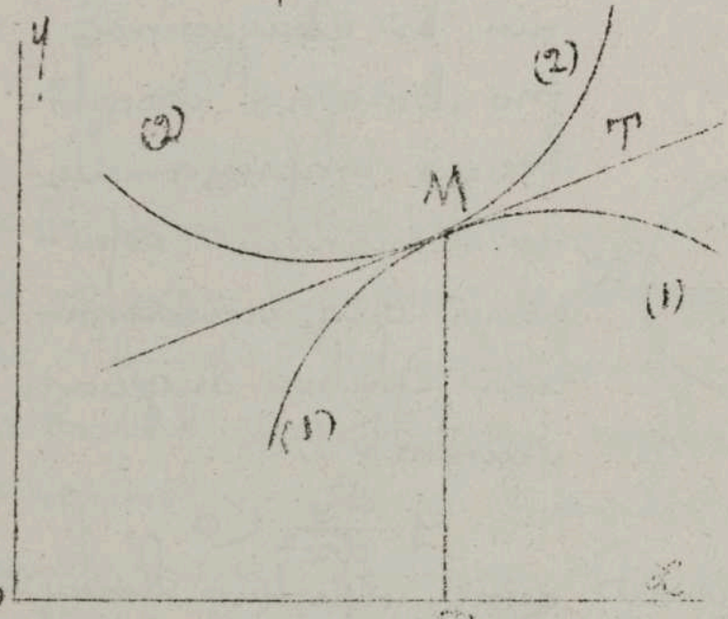
Замечание об особенных точках кривых, называемых точками перегиба. Если во точке взятой на кривой отрезок,

что $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, то по данному выше признаку нельзя сказать выпукла или вогнута кривая в рассматриваемой точке. Рассмотрим более общее расположение относительно касательной имеет в этом случае кривая в окрестности точки M.

Вернемся снова к выражению разности $y_1 - y_2$, там где $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, что в этом случае имеем:

$$y_1 - y_2 = \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\cdot\frac{h^4}{2.3.4} + \ldots + R$$

Положим, что h есть бесконечно малая величина; рассуждая как и прежде, заметим, что знак второй части будет одинаков со знаком первого члена, но первый член многочлена содержит h^3, знак которого различен при h положительном и при h отрицательном, а потому и знак разности будет изменяться, с изменением знака h, а потому если при $h > 0$ мы имеем $y_1 - y_2 > 0$ или $y_1 > y_2$, то при $h < 0$ будем иметь $y_1 - y_2 < 0$ или $y_1 < y_2$ или наоборот, если в первом случае $y_1 < y_2$, то при $h < 0$ будем иметь



$y_1 ? y_2$. Геометрически это значит, что если по правую сторону от точки M кривая пойдет выше касательной, то по левую сторону точки M кривая пойдет ниже касательной или наоборот, т.е. кривая заменит или расположение (1) или расположение (2).

Во том и другом случае касательная будет пересекать кривую; и кривая переходя через эту точку делается то выпуклой или наоборот, поэтому та точка M наз. точкою перегиба. Точка перегиба характеризуется тем, что разность равенством $\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

Чтобы определить точку перегиба, надо предварительно найти вторую производную и приравнять её нулю и из полученного таким образом уравнения определить x, которым и будет абсцисса точки перегиба. Помним, что если в это ур-е кроме x войдет и y (это будет, когда ур-е кривой дано не в виде $F(x,y)=0$), тогда по этому ур-ю достаточно присоединить ур-е кривой, и из этих 2-х ур-ий определить и x и y для точки перегиба. При построении кривой по данному ур-ю надо всякий раз определять точки перегиба. Сделанное нами общее замечание о построении кривой по данному уравнению.

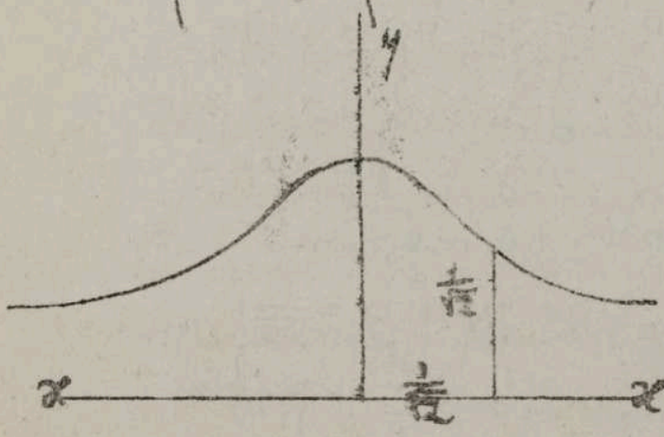
Пусть нам дано уравнение кривой относительно y, пусть оно будет $y=f(x)$. Прежде всего нам нужно вывести первую и вторую производные т.е. $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, затем определить те точки, во которых кривая пересекает ось абсцисс. Абсциссы точек пересечения кривой со осью x-ов найдутся из ур-ия $f(x)=0$; из этого мы узнаем во каких промежутках ордината положительна и во каких отрицательна, т.е. во каких промежутках кривая расположена выше оси x-ов и во каких - ниже оси x-ов. Затем, рассматривая первую производную $\frac{dy}{dx}$ и приравнивая ее нулю получим ур-е, из которого определением абсциссы точек, во которых касательная ко кривой параллельна оси абсцисс. Если при этом производная $\frac{dy}{dx}$, изменяясь во Δ, меняет свой знак, то заключаем, что во этих точках ордината y имеет значение наибольшее или наименьшее. Эти точки необходимо построить, затем остается рассмотреть при каких абсциссах $\frac{dy}{dx}>0$ и при каких $\frac{dy}{dx}<0$.

Этим мы отыскиваем те промежутки, во которых ординаты идут возрастая, те точки, во которых ордината

уменьшаются. Затем обратимся ко второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$ и приравняв её нулю, определяем абсциссы точек перегиба, если они существуют. Эти точки необходимо построить, так как они определяют части кривой, во которых она выпукла, от тех, во которых она вогнута. Потом следует рассмотреть, при каких абсциссах $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ и при каких $\frac{d^2y}{dx^2}<0$, через что узнаем, где кривая выпукла и где кривая вогнута. Из совокупности этих замечаний о течении кривой, ея форма и положение вполне определяется. Во примере изыскания точек перегиба кривой, найдем точки перегиба кривой, ур-ие которой есть $y=e^{-x^2}$; эта кривая называется кривой вероятностей.

Построим эту кривую, замечая, что при $x=\pm\infty$, $y=+1$.

Возьмем оси координат и по оси $y^{ов}$ отложим расстояние $OA=1$. Точка A будет принадлежать кривой. Если x начинает увеличиваться от нуля, то y уменьшается, но при этом постоянно остается больше 0 и во пределе при $x=\infty$, получаем $y=0$. Следовательно



по правую сторону оси y ордината постоянно увеличивается, а кривая, располагаясь выше оси x, приближается неограниченно к оси x. При отрицательных значениях x получаются все значения и соответственно кривая симметрична относительно оси y. Кривая встречает ось x только в ∞ и потому ось x есть асимптота кривой. Возьмем первую производную $\frac{dy}{dx}$, получим $\frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2}$. Отсюда заключаем, что при $x=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$. Следовательно касательная в точке $A \parallel$ оси x. Возьмем теперь вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2} = (4x^2-2)e^{-x^2}$. Для определения точки перегиба, приравнявши ее нулю, находим:

$$4(x^2-2)e^{-x^2} = 0$$

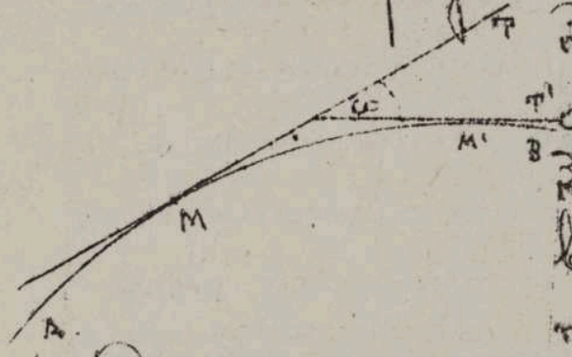
Так как $e^{-x^2} \neq 0$, то получится $4x^2-2=0$, откуда $x^2 = \frac{1}{2}$ или $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Это и есть абсцисса точки перегиба.

Если x возьмем сначала $\frac{1}{\sqrt{2}}$, то получим очевидно $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, это показывает, что кривая во промежутке от $x=0$ до $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ вогнута. При x больших $\frac{1}{\sqrt{2}}$ получим $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, т.е. кривая становится выпуклою и так продолжается до бесконечности. Чтоб построить точки перегиба, заметим, что при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $y = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. С другой стороны оси y кривая симметрична с ветвью, расположенной

вправо отъ оси $y^{ы}$ и потому имѣетъ еще другую точку перѣза симметричную со первой относительно оси $y^{ы}$.

5. Кривизна плоскихъ кривыхъ линій.-

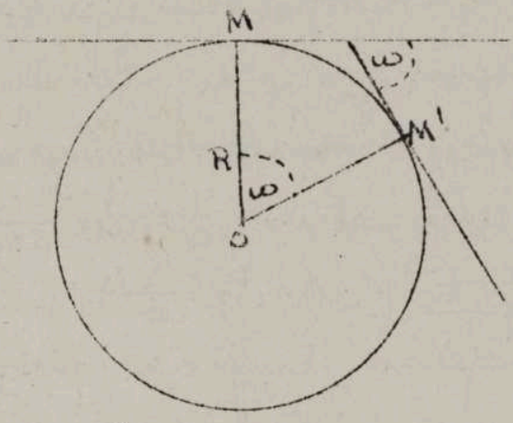
Разсмотримъ произвольную линію AB. Чтобы составить понятіе о кривизнѣ ея въ данной точкѣ M, проведемъ въ кривой въ этой точкѣ касательную MT. Подъ направленіе касательной опредѣлимъ направленіе теченія кривой въ точкѣ M. Нарѣдемъ отъ точки M въ точку M' васьма близкой отъ первой и проведемъ въ этой точкѣ новую касательную M'T'. Разсмотримъ теперь $\angle\omega$, образуемый касательными. Этотъ уголъ показываетъ на сколько уклоняется теченіе кривой отъ первоначальнаго направленія при переходѣ отъ точки M къ точкѣ M'. Два этихъ основанія кривизну дуги MM' принимаютъ пропорціональную этому углу ω. Но одного этого угла недостаточно, чтобы судить о кривизнѣ дуги MM' кривой, необходимо еще принять во вниманіе самую длину дуги MM', на протяженіи которой произошло



Васильевъ Анализъ

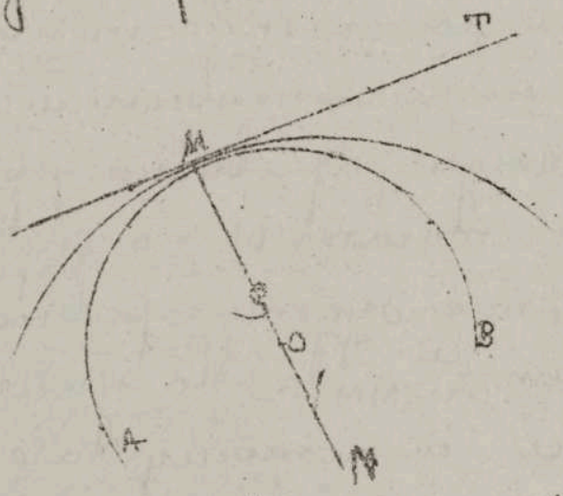
отношение касательной равное ω. Очевидно, что чтобы на системах дуг произвольно данной величины отношение ω, тысячи кривизна рассматриваемой дуги достигнет и наоборот. На этом основании кривизну дуги принимают обратно пропорциональной длине этой дуги MM'. Рассмотрим поэтому отношение $\frac{\omega}{\text{arc } MM'}$. Это отношение по определению наз. среднею кривизною дуги MM'. Величина этого отношения даст нам более точное понятие о кривизне кривой в соприкосновении со точкою M, чем мы имели, если возьмем дугу MM'. Поэтому мы будем рассматривать предел, к которому стремится это отношение при неопределенном приближении точки M' к точке M и этот предел отношения двух бесконечно малых количеств мы назовем кривизною кривой в точке M. Итак по определению имеем, что кривизна кривой в точке M равна $\lim \frac{\omega}{\text{arc } MM'}$. Угол ω между бесконечно близкими касательными наз. углом соприкосновения. Чтобы повторить принятое нами определение кривизны кривой, применимо его к окружности, которая есть самая простая из всех кривых. Если провести диаметр в точке

положения по обе стороны отъ нея кривая всегда представитъ одно и тоже расположение и потому кривизна этой кривой во всякой точкѣ должна быть принимаема одинаковою. Возьмемъ 2 близкія точки M и M' и проведемъ въ нихъ касательныя. Уголъ между этими касательными обозначимъ черезъ ω. Тогда кривизна кривой въ точкѣ M по опредѣленію будетъ равна: $\lim \frac{\omega}{\text{дуг.}MM'}$. Но уголъ $MOM' = \omega$, а потому дуга $MM' = R\omega$ и кривизна кривой въ точкѣ M будетъ равна $\lim \frac{\omega}{\omega \cdot R} = \frac{1}{R} = \text{const}$.



Слѣдовательно по принятому опредѣленію находимъ согласно съ очевидностью, что кривизна окружности во всѣхъ точкахъ одинакова, есть величина постоянная, равная $\frac{1}{R}$. Очевидно отсюда, что кривизна окружности тѣмъ больше, чѣмъ радіусъ этой окружности меньше и наоборотъ. Возвратимся опять къ произвольной кривой и замѣтимъ, что такъ какъ понятіе о кривизнѣ окружности составляется весьма просто, то всего удобнѣе было бы сравнивать кривизну кривой въ данной точкѣ съ кривизной нѣкоторой окруж-

ности. Такъ и дѣлаютъ и обыкновенно опредѣляютъ для данной точки разсматриваемой кривой радіусъ такого круга, кривизна котораго была бы одинакова со кривизною кривой въ этой точкѣ; этотъ радіусъ принято обозначать ρ и его наз. радіусомъ кривизны кривой въ данной точкѣ.



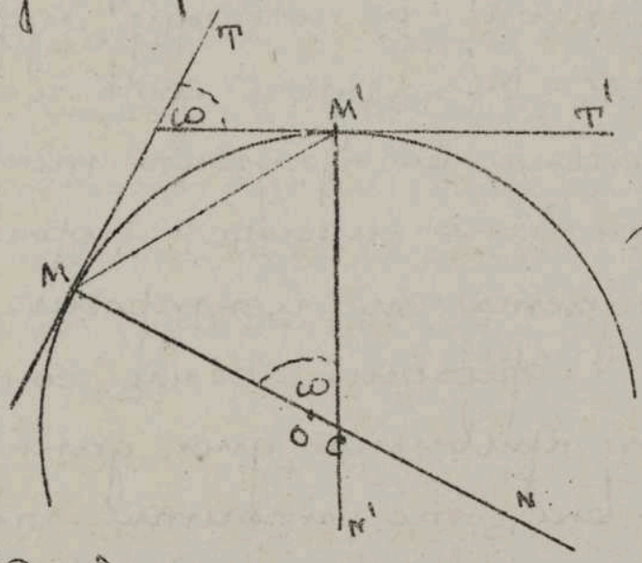
Кривизна кривой будетъ $=\frac{1}{\rho}$ и по данному выше опредѣленію напишемъ $\frac{1}{\rho}=\lim\frac{\omega}{\text{arc } MM'}$

или $\rho=\frac{1}{\lim\frac{\omega}{\text{arc } MM'}}=\frac{1}{\lim\frac{\omega}{\text{arc } MM'}}=\lim\frac{\text{arc } MM'}{\omega}$

Кругъ, радіусъ котораго равенъ радіусу кривизны наз. Круговой кривизны. Кругъ этотъ обыкновенно строится при той точкѣ, кривизна которой разсматривается. Положимъ, что данная кривая есть AB, точка M есть точка, въ которой мы разсматриваемъ кривизну кривой, проведемъ черезъ точку M касательную MT къ кривой и нормаль MN, на этой нормали со вогнутой стороны кривой отъ точки M откладываемъ радіусъ кривизны ρ до точки O. Затѣмъ изъ точки O радіусомъ равнымъ ρ описываемъ окружность, которая и будетъ Круговой кривизны для

точки M; точка C наз. центром кривизны для точки M. Относительно центра кривизны кривой можно доказать следующее предложение. Центр кривизны можно рассматривать, как точку пересечения двух бесконечно близких нормалей к кривой.

Пусть имеется кривая AB, возьмем на ней точку M и проведем через нее касательную MT и нормаль MN ко кривой, затем возьмем точку M' бесконечно близкую ко M и проведем через неё также касательную M'T' и нормаль M'N', угол между касательными, равный углу между нормалями обозначим через ω. Проведем хорду MM' и точку пересечения нормалей назовем через C.



Тогда из $\Delta MCM'$ будет иметь:

$$\frac{MC}{MM'} = \frac{\sin MM'C}{\sin MCM'}$$

а отсюда находим:

$$MC = \frac{MM'}{\sin \omega} \cdot \sin MM'C.$$

Вообразим теперь, что точка M' неопределенно приближается ко точке M и рассмотрим ко какому пределу стремится величина MC, для этого заметим, что угол $MM'C$ очевидно стремится ко прямому, потому что, когда точка M' совпа-

дается съ точкою M, касательная M'T' совпадает съ MT и нормаль M'C съ нормалью MC, а потому и $\lim \sin MM'C = \sin 90^\circ = 1$.

Замѣтивъ это, переходимъ въ предыдущемъ равенствѣ къ предѣлу, получимъ

$$\lim MC = \lim \frac{MM'}{\sin \omega}.$$

При опредѣленіи предѣла этого отношенія 2-ая безконечно-малая, или множитель, по-вычитаемому правилу, взять вмѣсто безконечно малой хорды MM' б.м. дугу arc. MM' и вмѣсто $\sin \omega$ взять уголъ ω. Тогда образуемъ, получимъ: $\lim MC = \lim \frac{arc\, MM'}{\omega}$ но это послѣднее выраженіе представляетъ радіусъ кривизны S, а потому будемъ имѣть: $\lim MC = S = MO$, гдѣ O есть центръ кривизны. Слѣдовательно въ предѣлѣ точка пересѣченія 2-хъ безконечно смежныхъ нормальныхъ линій совпадаетъ съ центромъ кривизны O. Такимъ образомъ, если хотимъ отыскать центръ кривизны для данной точки приблизительно, то стоитъ только провести нормали въ данной точкѣ и весьма близкой къ ней точкѣ и пересѣченіе этихъ нормалей и будетъ приблизительно центръ кривизны въ данной точкѣ.

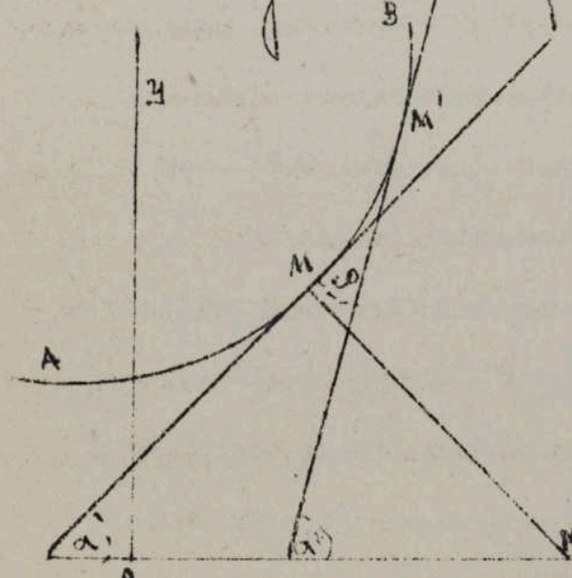
Опредѣленіе. Кривизною кривой въ данной точкѣ называется къ опредѣленію ра-

уса кривизны S, поэтому весьма редко говорят о кривизне кривой, но всегда о радиусе кривизны. Введем теперь формулу, служащую для определения радиуса кривизны, когда ур-е кривой дано. Возьмем кривую, отнесенную к прямоугольным осям координат, пусть ур-е ея дано в виде:

$$F(x,y)=0 \text{ или } y=f(x)$$

Пусть кривая эта есть AB, возьмем на этой кривой точку M, координаты которой x и y. Проведем к кривой в этой точке касательную, и пусть эта касательная образует с осью $x^{ов}$ угол α. Возьмем на этой же кривой весь. Возьмем точку M точку M' и проведем через нее новую касательную и пусть эта касательная образует с осью $x^{ов}$ угол α'. Назовем угол между касательными через ω; тогда по данному определению напишем:

$$S=\lim \frac{\text{arc } MM'}{\omega}$$



Будем теперь дугу кривой считать от некоторой постоянной точки A и положим, что $\text{arc } AM = S$. При сделанном выше предположении переменная α будет независимой

точка M переместится во M' и дуга AM получит приращение: $\text{arc } MM' = \Delta S$

При этом все изменения переменного независимого угла α изменятся в α' и мы будем иметь: $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha$ есть бесконечно малое приращение, посредством которого угол α при бесконечно малом изменении переменного независимого.

Из чертежа ясно, что $\omega = \alpha' - \alpha = \Delta\alpha$. и теперь мы можем написать: $\varphi = \lim \frac{\Delta S}{\Delta\alpha}$

За переменное независимое можно взять одну из координат, т.е. x или y, но для большей общности всегда можно все координаты x и y рассматривать, как ф-ии третьего независимого переменного t. Во самом деле, имея ур-ие кривой $F(x,y)=0$ и взяв, напр., x сначала за независимое переменное мы вправе изменять его как угодно и можем потому положить ур-ие $x=\varphi(t)$, где φ есть совершенно произвольная ф-ия нового переменного независимого t; ордината y, будучи ф-ией x, сделается при этом также функцией t: $y=\psi(t)$. Эта последняя ф-ия определится помощью ур-ия кривой; таким образом рассматриваемая кривая будет представлена двумя ур-ниями

$$x=\varphi(t) \quad \text{и} \quad y=\psi(t)$$

и изменяя t, мы будем получать координаты различных всевозможных точек кривой. Такое представление кривой помощью 2-х ур-ий будет более общее, чем если бы мы прямо взяли за переменное независимое x, потому если мы захотим взять переменную независимую x, то стоит только положить $x=t$, что будет частный случай того, когда x и y выражены, как ф-ии t. Теперь всякому определенному значению t будут соответствовать вполне определенные величины x и y и определенная точка M на кривой. С изменением t на $t+\Delta t$ и координаты x и y изменятся на $x+\Delta x$ и $y+\Delta y$ и мы получим новую точку M' на кривой. Так как x и y суть ф-ии t, то и $\Delta\alpha$, которой есть ф-ия x и y будет ф-ией t. Дуга S есть также ф-ия независимого переменного t. Чтобы получить предел, дающий выражение S, мы разделим приращения ΔS и значение $\Delta\alpha$ на Δt и напишем, что $S=\lim \frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}$. Заметим, переходя к пределу, заметим, что $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ в пределе суть производные и потому можем написать:

$$S=\frac{\frac{dS}{\Delta t}}{\frac{d\alpha}{\Delta t}}$$ или, умножая и числителя и знаменателя на dt, получим $S=\frac{dS}{d\alpha}$

Выражение дифференциала дуги нам известно, именно:

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

Чтобы получить $d\alpha$, надо заметить, что

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad \alpha = arctg\frac{dy}{dx}$$

Диф-уя это выражение, находим:

$$d\alpha = \frac{d\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Если все x и y суть ф-ии переменного независимого t, то и dx и dy суть также ф-ии t и потому в этом случае придется взять диф-ал от $\frac{dy}{dx}$, как диф-ал дроби и мы получим:

$$d\alpha = \frac{\frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx^2}}{\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2+dy^2}$$

Вставив найденные выражения в S получим:

$$S = \frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{dx^2+dy^2} : \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2+dy^2}$$

или

$$S = \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Это и есть формула для вычисления S радиуса кривизны в этом случае, когда коорд-аты x и y представлены в ф-ии t, т.е. когда кривая представится двумя ур-иями:

$$x = \varphi(t) \quad \text{и} \quad y = \psi(t)$$

Тогда из этих ур-ий известными образом найдем dy, d^2y и dx и d^2x и вставив найденные выражения в данную выше формулу, получим S радиус кривизны. Эта формула наз. выражением радиуса кривизны при произвольности переменной независимой. Ибо так как часто за независимое переменное приходится

брать абсциссу x, то и составим формулу для определения радиуса кривизны во этом случае. Если x переменное независимое, то dx есть количество постоянное и тогда d^2x, т.е. $d(dx)=0$ и потому формула несколько упрощается и мы получим:

$$\rho = \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx \cdot d^2y}$$

Эти формулы пишут иначе, разделяя числитель и знаменатель на dx^3 и получают:

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Эта формула употребляется при переменном независимом x. Во эту формулу входят производная $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, которая легко определяются из ур-ия кривой $F(x,y)=0$. Понятно, что ρ есть величина, не имеющая знака, но в формуле для ρ можно получить во знаменателе и $+$ и $-$; но так как в числителе стоит квадратный корень, перед которым мы смогем поставить и $+$ и $-$, то мы условимся принимать в числителе знак одинаковый со знаком знаменателя, для того чтобы ρ всегда выходило положительным. Иначе говоря, мы можем вовсе не обращать внимания на знак при ρ и если будем получать при ρ знак $-$, то должны его отбросить

Иногда выражают радиус кривизны посредством длины нормали, проведенной выра-

смотрящей точке кривой. Мы раньше нашли, что длина нормали N есть:

$$N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

и отсюда $\frac{N}{y} = \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}$.

Вследствие этого мы можем написать:

$$S = \frac{\left(\frac{N}{y}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{N^3}{y^3\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Для применения выведенных формул определимся, вначале, с радиусом кривизны конических сечений.

Напишем ур-е всех конических сечений, отнесенных к вершине и фокальной оси, это ур-е, как известно, есть: $y^2 = 2px + qx^2$

Диф-уя это ур-ие, находим: $y\cdot\frac{dy}{dx} = p + qx$

откуда $\frac{dy}{dx} = \frac{p+qx}{y}$; диф-уя ещё раз, получим

$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q$ и отсюда:

$$y\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = q - \frac{p^2+2pqx+q^2x^2}{y^2} \quad \text{или}$$

$$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = 2pqx + q^2x^2 - p^2 - 2pqx - q^2x^2 = -p^2$$

и пользуясь последней формулой, определяющей S, можем написать для нашего случая:

$$S = \frac{N^3}{p^2}$$

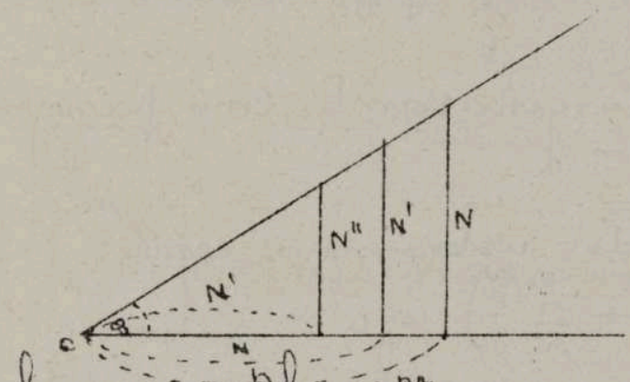
Из этой формулы видно, что во всех конических сечениях, отнесенных к вершине и фокальной оси, радиус кривизны равен кубу нормали, разделенному на квадрат полупараметра. Это выражение легко построить, именно, представим его так

$S = N\left(\frac{N}{p}\right)^2$ и получим, что $\frac{N}{p} = \operatorname{tg}\beta$

Пара этого $\angle\beta$ легко построить. Возьмем

прямую линию, отложимъ на ней величину p, возставимъ изъ конца этой длины перпендикуляръ, на которомъ отложимъ величину N; соединимъ конецъ этихъ сторонъ, получимъ $\Delta^{ник}$, въ которомъ противъ сторона, равная N, будетъ $\angle\varphi$, такъ какъ очевидно, что $tg\varphi = \frac{N}{p}$

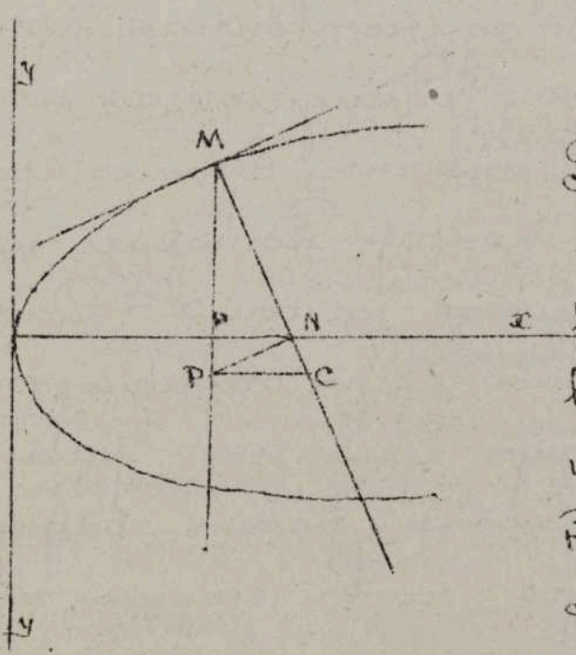
Если затѣмъ отъ точки O отложимъ величину N и возставимъ перпендикуляръ, то длина этого $1^{ка}$ $N = N' tg\varphi$.



Если затѣмъ отложимъ отъ O длину N' и возставимъ снова $1^{ка}$, то длина его будетъ:

$$N'' = N' tg\varphi = N tg^2\varphi = N\left(\frac{N}{p}\right)^2 = S$$

Построеніе это совершить не затруднительно. Но изъ тѣхъ же формулъ, выражающей радіусъ кривизны плоскихъ сѣченій, вытекаетъ слѣдующій еще болѣе простой способъ построенія радіуса кривизны. Положимъ, что намъ нужно въ точкѣ M построить радіусъ кривизны. Проведемъ въ точкѣ M касательную и нормаль. Соединимъ точку M съ произвольной точкой кривой и продолжимъ эту линію; затѣмъ изъ точки N, пересѣченія нормальной линіи съ осью x-въ возставимъ перпендикуляръ къ нормали, который пересѣчетъ линію



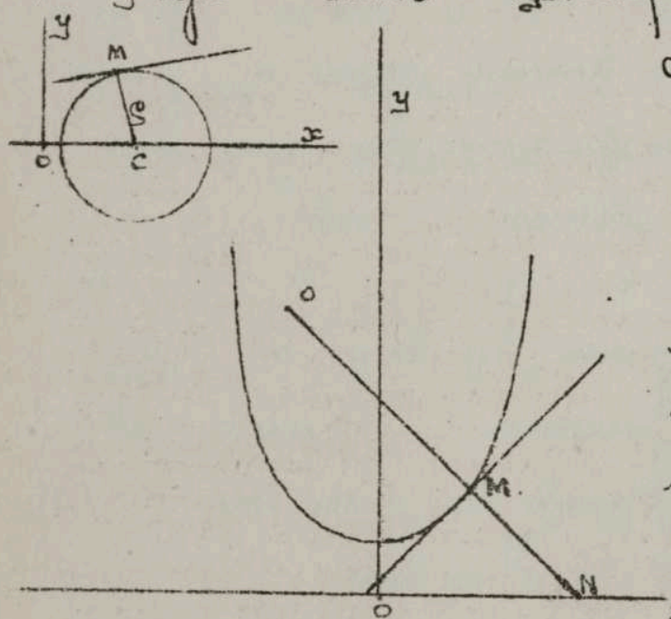
MP положим в точке P. Из точки P к линии MT восставляем перпендикуляр, который пересечет линию MN в точке C. Точка C есть центр кривизны. Оставляем это построение без доказательства. (Доказательство основано на известном выражении тригонометрических ф-ий угла между касательной и радиусом вектором)

Для цепной линии легко доказать, что радиус кривизны = нормали.

Ур-е цепной линии, как известно, есть:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Принимая x за переменное независимое легко вычислить нормаль N и мы получим: $N = \frac{y^2}{a}$, а по формуле радиуса кривизны, найдем, что $\rho = \frac{y^2}{a}$, так что будем иметь $\rho = N$ и потому MO = MN, где O есть центр кривизны для точки M.



Это единственная кривая, обладающая этим свойством, кроме круга, центр которого находится на оси x. Для такого круга очевидно, что радиус кривизны равен нормали, равен радиусу круга; но в этом случае радиус кривизны совпадает с нормалью, тогда как в цепной линии они сходятся на продолжении нормали.-

Радиус кривизны циклоиды равен двойной нормали.

Действительно, взяв ур-ия циклоиды в виде

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) \quad \text{и} \quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

и приняв за переменное независимое φ, мы получим:

$$S = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = 2a\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$$

Сравнивая эти два результата, получаем, что

$$S = 2N.$$

О развертках плоских кривых.

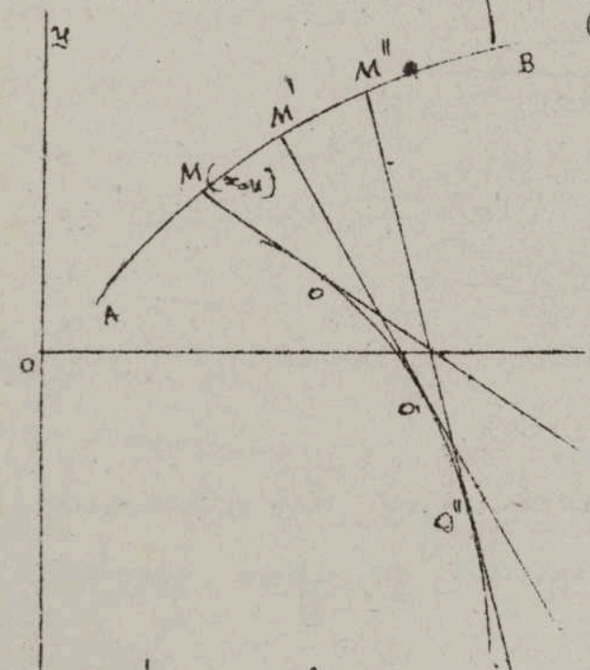
Разверткой кривой наз. геометрическое место центров ея кривизны.

Возьмем кривую, отнесенную к прямоугольным осям координат; ея ур-ие есть:

$$F(x,y) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Пусть на чертеже эта кривая есть AB. Возьмем на кривой произвольную точку M, координаты ея x и y. Проведем в этой точке к кривой нормальную линию, отложим на ней радиус кривизны ϱ, так чтобы: $MO = \varrho$. Точка O есть центр кривизны. Возьмем другую точку M' на кривой, проведем в этой точке кривой нормаль, отложим на ней соответствующий радиус кривизны и получим новый центр кривизны O'. Для следующей точки M'' соответствующая построения

и найдем новый центр кривизны O'' и т. д. Если точка M, перемещаясь непрерывно, будет описывать кривую AB, причем проходить через точки M', M'' и т. д., то вместе с точкою M будет двигаться по плоскости и соответствующий ей центр кривизны, причем они последовательно будут занимать положения O, O' и O'' и т. д., при этом движении центр кривизны опишет кривую, называемую развертной кривой AB. Для этой развертки расположатся центры кривизны всех точек кривой AB, а потому эта кривая и есть геометрическое место центров кривизны.



Чтобы получить ур-ие развертки, составим предварительно два ур-ия, служащие для определения координат центра кривизны. Каждой точке $M(x,y)$ кривой соответствует центр кривизны O, координаты его пусть будут α и β. Точка O лежит на нормальной линии, а потому ее коор-ты должны удовлетворять ур-ию нормальной линии. А ур-ие нормальной линии есть

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

Полагая здесь: $x = \alpha$ и $y = \beta$, мы получим

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x);$$

или умножая все ур. на $\frac{dy}{dx}$ и перенося всѣ члены въ первую часть, находимъ:

$$(\beta - y)\frac{dy}{dx} + \alpha - x = 0$$ или перемѣняя знаки, напишемъ такъ:

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

Это ур-ie представляетъ соотношение между неизвѣстными α и β и служитъ для опредѣленія координатъ центра кривизны; но такъ какъ неизвѣстныхъ два, то для этого напишемъ выраженіе квадрата разстоянія точки M отъ точки O, находимъ: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2$; вставивъ вмѣсто ρ его выраженіе, а вмѣсто $(x-\alpha)$ его выраженіе изъ ур-ія (1) имѣемъ:

$$x - \alpha = -(y-\beta)\frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

подставляя, находимъ:

$$(y-\beta)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$ или взявъ за скобку $(y-\beta)^2$,

$$(y-\beta)^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right] = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

сокращая и уничтожая знаменатели, получимъ:

$$(y-\beta)^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2$$

извлекая квадратный корень, получаемъ:

$$\pm (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Чтобы опредѣлить какой знакъ надо взять въ первой части, замѣтимъ, что вторая часть положительна, а слѣдовательно и первая часть должна быть также положительна, вслѣдствіе чего можно доказать, что въ 1-ой части равенства нужно принять знакъ –. Въ этомъ

Высшій Анализъ. Листъ 23"

легко убедиться, действительно, положивши, что $y>\beta$, тогда если кривая вогнута, то ясно, что $y-\beta>0$ или $y>\beta$. Но при этом, как нам известно $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ и следовательно, чтобы получить в первой части величину положительную, нужно в ней принять знак $-$. Если кривая выпукла, тогда точка O выше точки M и $y-\beta<0$, но за то при этом $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ так как кривая выпукла и опять видим, что для того чтобы в первой части получилась величина положительная нужно в ней взять знак $-$; точно также доказывается, что нужно принять знак $-$ и при $y<0$. А потому, чтобы первая часть была положительна, необходимо всегда принимать в ней знак $-$. Два этих основания последнее равенство напишем так:

$$-(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Таким образом мы получили два ур-ия, определяющия координаты центра кривизны, именно:

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots\ldots (1) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \ldots (2)$$

Из этих ур-ий найдутся α и β, коор-аты центра кривизны.

Чтобы получить ур-ие развертки, присоединим к этим 2 ур-иям еще ур. данной кривой $F(x,y)=0$. Таким образом мы получим 3 ур-ия содержащия переменныя x, y, α и β.

Если из этих 3 урав-ий исключим x и y, то

мы получили одно ур-е, в которое будут входить только переменные α и β и его можно представить так: $\varphi(\alpha,\beta)=0$. Это ур-е представляет соотношение между координатами α и β произвольной точки развертки, следовательно это ур-е и есть ур-е развертки.

Но прежде чем представить примеры развертки, мы рассмотрим сначала главные свойства этих кривых, выраженные в 2 следующих теоремах:

Теорема 1-я. Нормальная линии данной кривой служит к касательными к развертке.-

Возьмем ур-е (1) для определения координат центра кривизны:

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0$$

Дифференцируем это ур-е по x и при том заметим, что не только y, но также α и β нужно рассматривать как ф-ии x, так как всякому значению x соответствует определенный y, и следов., определенный центр кривизны (α,β). Дифференцируя, находим:

$$1-\frac{d\alpha}{dx}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\right)\frac{dy}{dx}=0.$$ Раскрывая скобки, получим:

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Сумма первых трех членов по ур-ю (2) равна нулю, а потому будем иметь:

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dx}\frac{dy}{dx}=0;$$

сокращая на dx и отбросив на $d\alpha$, получим:

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}+1=0.$$

Но $\frac{dy}{dx}$ есть угловой коэффициент касательной в точке M к данной кривой; точно также $\frac{d\beta}{d\alpha}$ есть угловой коэффициент к развертке в рассматриваемой точке O. Последнее ур-е указывает, что произведение этих угловых коэффициентов, сложенное с единицею $=0$, а это есть условие перпендикулярности этих 2-х линий; т.е. если в точке O проведем к развертке касательную, то она должна быть перпендикулярна к касательной MT.

Следов. эта касательная должна совпасть с нормалью MO. Таким образом видим, что нормальные линии будут касательны к развертке в соответствующих центрах кривизны. На этом основании развертка представляет огибающую нормальных линий данной кривой.

Теорема 2. Дифференциал дуги развертки равен дифференциалу радиуса кривизны.

Возьмем равенство, выражающее квадрат расстояния точки M от точки O: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$

Дифференцируем это равенство, причем вспомним, что x изменится также и y, α, β и ϱ; дифференцируя, находим:

$$2(x-\alpha)(dx-d\alpha)+2(y-\beta)(dy-d\beta)=2\varrho\cdot d\varrho$$

Сокращая и раскрывая скобки, получим:

$$(x-\alpha)dx+(y-\beta)dy-(x-\alpha)d\alpha-(y-\beta)d\beta=\varrho d\varrho$$

Если ур-ие (1) для определения коорд-т центра кривизны дифференцировать по dx, то получим:

$$(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy = 0$$

Ибо в этом основании два первые члена предыдущего ур-ия $=0$ и потому будем иметь:

$$(x-\alpha)d\alpha + (y-\beta)d\beta = -\varrho\, d\varrho$$

Возьмем теперь ур-ие, выражающее первое свойство развертки и выведем из него:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\alpha}{d\beta}$$

подставив это выражение $\frac{dy}{dx}$ в ур.(1), получим:

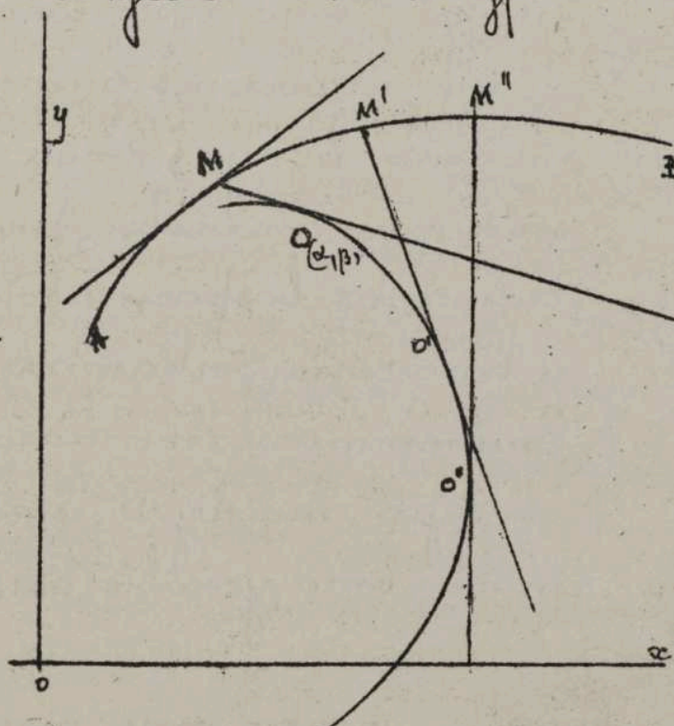
$$(x-\alpha) - (y-\beta)\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$$

Дифференцируем обе части на $d\beta$ и присоединим это ур-ие к полученному, таким образом будем иметь 2 следующие ур-ия:

$$(x-\alpha)d\beta - (y-\beta)d\alpha = 0$$

$$(x-\alpha)dx + (y-\beta)d\beta = -\varrho\, d\varrho$$

Возведем эти 2 ур-ия в квадрат, сложим и получим:



$$(x-\alpha)^2(d\alpha^2+d\beta^2) + (y-\beta)^2(d\beta^2+d\alpha^2) = \varrho^2 d\varrho^2$$

или

$$(d\alpha^2+d\beta^2)[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2] = \varrho^2 d\varrho^2$$

по основному равенству имеем:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \varrho^2$$

и следовательно

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = d\varrho^2$$

Возвращаясь к чертежу и будем считать длину дуги развертки от нек-рой постоянной точки D; обозначим длину

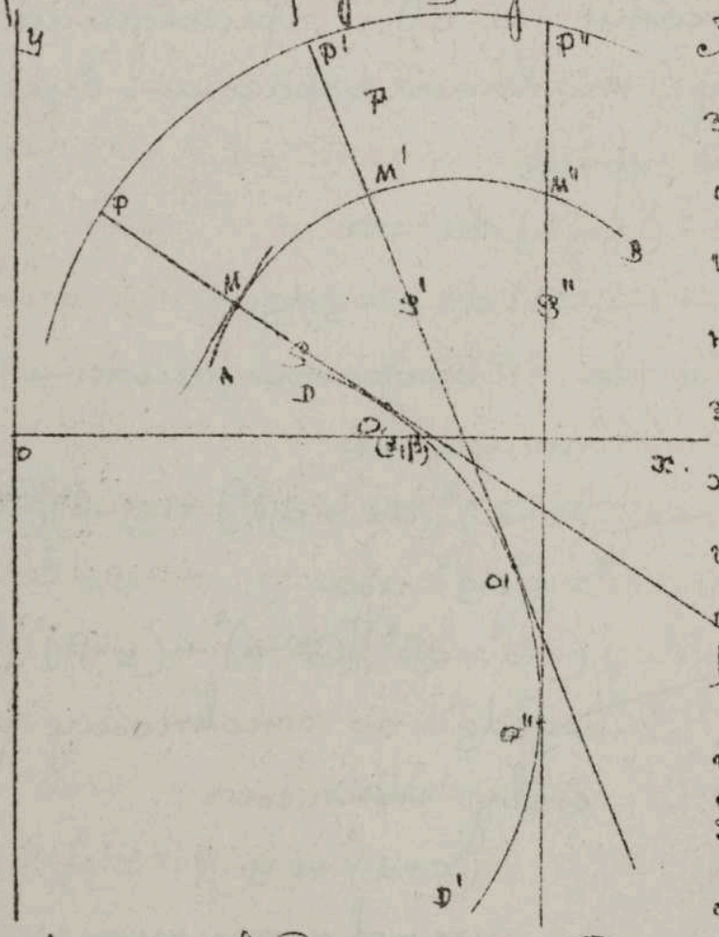
дуги, оканчивающейся в точке O через σ, так что arc DO = σ. Приписывая выражение квадрата диф-ала дуги, это выражение есть:

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

поэтому предыдущее равенство можно написать так: $d\sigma^2 = d\varsigma^2$. Извлекая квадратный корень, получаем: $d\sigma = d\varsigma$. Это равенство выражает нашу теорему.

Сделаем следующее замечание.

При извлечении квадратного корня мы должны принять перед $d\varsigma$ двойной знак $d\sigma = \pm d\varsigma$



Мы примем +, это значит, что диф-алы двух ф-ий ς и σ или их производные имеют один и тот же знак, это предположение удовлетворится тогда, когда эти ф-ии таковы, что вместе возрастают и вместе убывают.

Заметим, что начало дуги, точку D, всегда выбрать так, чтобы это условие было выполнено. Мы видим, что на нашем чертеже точку D нужно взять вблизи от точки O, и, направив, очевидно, что нельзя за начало дуги принять точку D', потому что мы-

да с увеличением дуги σ радиус кривизны ρ тоже увеличивается.

Обратимся к следствию из этой теоремы. Мы нашли, что $d\sigma = d\rho$, но нам известно, что если дифференциалы равны, то функции отличаются на постоянную величину, а потому интегрируя предыдущее выражение получим $\sigma = \rho + C$. Применим полученное равенство к другой точке данной кривой, положим на точку M'; положим, что в этой точке будет другой радиус $M'\sigma' = \rho'$ и длина дуги $\cup\sigma' = \sigma'$; теперь для точки M' можем написать равенство: $\sigma' = \rho' + C$

Вычитая одно равенство из другого находим:

$$\sigma' - \sigma = \rho' - \rho$$

но разность $\sigma' - \sigma = \text{arc}\, OO'$

а потому $\text{arc}\, OO' = \rho' - \rho$

Это равенство выражает, что длина дуги развертки = разности радиусов кривизны соответствующих крайних точек этой дуги. Отсюда следует, что развертка данной кривой есть кривая всегда выпрямляемая, т.е. такая кривая, длину дуги которой можно всегда найти и представить в виде прямой линии.

Из этого рассуждения вытекает механический способ образования кривой помощью ее развертки. Вообразим, что развертка на-

черена, положим далее, что эта развертка обтянута тонкой нерастяжимою нитью, укрепленной одним концом, положим в точке O', другой конец пусть будет натянут и находится в точке M. В точке M к нити прикрепим карандаш, сохраняя нить натянутою, поведем острие карандаша в правую сторону, при этом движении карандаш и опишет данную кривую.

Этот способ образования кривой прямо следует из доказанных выше свойств развертки.–

Действительно пусть нить совпадает со касательной к развертке, то положим, что конец карандаша находится в некоторой точке N', и докажем, что эта точка N' должна совпасть с точкою M'

Пусть дуга нити остается постоянною, то мы можем написать, что

$$O'N' = \text{arc}\,OO' + OM$$

или
$$O'N' = \varsigma' - \varsigma + \varsigma = \varsigma' = O'M'$$

Следоват. точка N' должна совпасть со точкою M'.

По этому свойству кривая по отношению к своей развертке называется развертывающейся.

Понятно, что одной и той же развертке может соответствовать бесчисленное множество развертывающихся

так как при описывании кривой указанным способом первоначальную длину нити можно взять произвольную.-

Иногда развертку называют эвольютой, а развертывающую эвольвентой.-

---

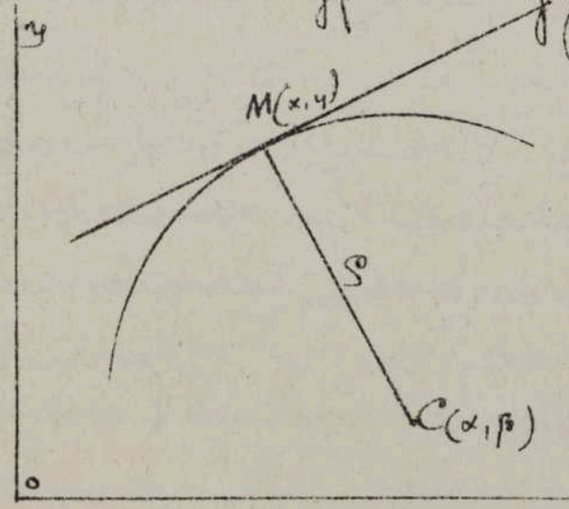
Составление ур-ия развертки.

Возьмем ур-ия, совокупность для определения координат центра кривизны; они суть

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots (1) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad (2)$$

В этих 2-х уравнениях x и y суть коор-ты произвольной точки кривой, а α и β суть коор-ты центра кривизны, соответствующего этой точке. К этим 2-м ур-ям присоединим еще ур. данной кривой $F(x,y)=0$. (3)

Теперь, если из этих 3-х ур-ий исключим x и y, то и последнее ур-ие развертки, ибо это ур-ие будет представлять соотношение между 2-мя переменными координатами α и β, произвольной точки развертки и будет иметь такой вид $\varphi(\alpha,\beta)=0$. Обозначим для удобства вычисления самое исключение x и y совершается таким образом: для ур-ия второго определяют $y-\beta$:



Взятый с Знаком

Лист 24

$y-\beta = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$; вставим это выражение в ур-ие (1), находим:

$$x-\alpha = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx}.$$

Запишем из ур-ия кривой, продифференцируя его два раза, найдем производные: $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$. Выражения производных вставим в полученные 2 ур-ия, и запишем производные уже не будут входить в наши ур-ия, а будут входить только переменные x, y, α и β. Решая полученную таким образом 2 ур-ия относительно x и y, при чем x и y выражаются в ф-иях α и β, так что $x=\varphi_1(\alpha,\beta)$ и $y=\varphi_2(\alpha,\beta)$

Найденные выражения для x и y вставим в ур-ие данной кривой $F(x,y)=0$ и тогда получим соотношение между координатами α и β, т.е. ур. развертки.

Такое рассмотрение вычисления не необходимо, но его удобно применять по крайней мере в таких примерах, которые мы предполагаем, но вообще говоря нужно только исключить x и y из ур-ий 1, 2 и 3 и делать так способом мы не делали это исключение, результат конечно будет один и тот же и будет представлять ур-ие развертки

Радиус кривизны и развертка параболы.

Возьмем ур-е параболы, отнесенной к вершине и фокальной оси: $y^2 = 2px$, чтобы найти выражение радиуса кривизны, прежде всего найдем производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, для чего дифференцируем данное ур-е два раза:

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 2p.$$

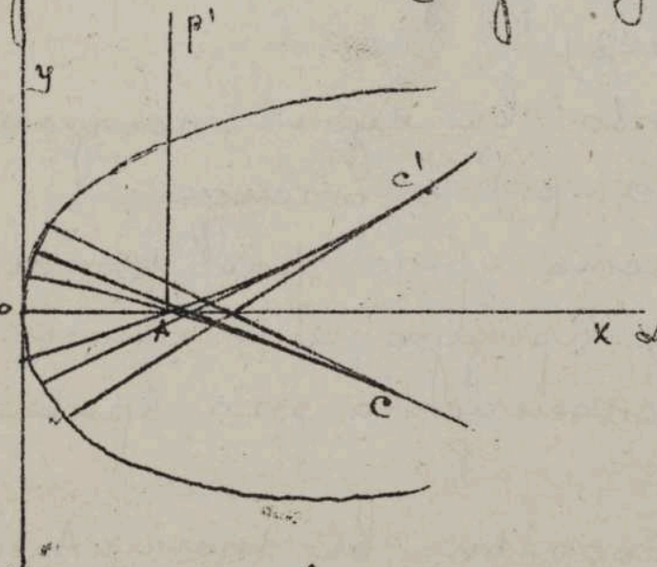
откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

Диф-я снова находим: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{p^2}{y^3}$. Затем вычисляем радиус кривизны:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \pm \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{3/2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = \frac{\left(y^2 + p^2\right)^{3/2}}{p^2}$$

Из этого выражения видно, что наименьшая величина радиуса кривизны получится для точки O, где $y = 0$; это наименьшая величина будет: $\rho = \frac{p^3}{p^2} = p$



Следов. в этой точке кривая обладает наименьшей кривизной. С удалением от вершины y увеличивается и радиус кривизны тоже увеличивается, а кривизна кривой уменьшается. Затем обратимся к составлению ур-ия развертки.

Берем выражения

$$y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \text{и} \quad x - \alpha = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Вставляя вместо производных их выражения, мы получим:

$$y-\beta = -\frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = \frac{y^2+p^2}{y^2}\cdot\frac{y^3}{p^2} = \frac{y^2+p^2}{p^2}\cdot y = \frac{y^3}{p^2}+y.$$

Затем, сокращая во первых и вторых частях по y, получим: $-\beta = \frac{y^3}{p^2}$

и отсюда

$$y^3 = -p^2\beta \quad \text{и} \quad y = -p^{2/3}\beta^{1/3}$$

Составляем теперь выражение: $x-\alpha: \frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}}\cdot\frac{p}{y}$

Упрощая, получаем следующее равенство:

$$x-\alpha = -\frac{y^2+p^2}{y^2}\cdot\frac{y^3}{p^2}\cdot\frac{y}{p} = -\frac{y^2+p^2}{p}$$

Теперь вместо y^2 вставим его выражение в ф-ии x, получаемое из ур-ия кривой.

$$x-\alpha = -\frac{2px+p^2}{p} = -2x-p$$

откуда $\quad 3x = \alpha - p \quad$ и $\quad x = \frac{\alpha-\beta}{3}$

Вставим эти выражения x и y во ур-е кривой, получим $p^{4/3}\beta^{2/3} = 2p\cdot\frac{\alpha-\beta}{3}$ или сокращая на p: $p^{1/3}\beta^{2/3} = \frac{2}{3}(\alpha-\beta)$

Возведем это равенство в куб., получим:

$$p\cdot\beta^2 = \frac{8}{27}(\alpha-p)^3 \quad \text{и отсюда}$$

$\beta^2 = \frac{8}{27}p(\alpha-p)^3$. Это есть ур-е развертки.

Чтобы построить эту кривую или чтобы рассмотреть как расположена эта кривая, упростим это уравнение.

Перенесем начало коор-т в точку A, лежащую на оси x-ов и отстоящую от начала O на расстоянии $OA = p$, при этом формула для перехода от старых осей к новым будет: $x = p+\alpha'$ и $y = \beta'$

Ур-ие развертки относительно новых осей напишется таким образом: $\beta'^2 = \frac{8}{27p} a'^3$
Из этого ур-ия находим: $\beta' = \pm \sqrt{\frac{8}{27p}} a'^{3/2}$
Будем строить эту кривую. При $\alpha' = 0$ и $\beta' = 0$, т.е. кривая начинается в точке A; если возьмем α' отрицательным, то β' будет иметь и сообщ. по левой стороне оси $A\beta'$ точек кривой не будет. Если от $\alpha' = 0$ будем увеличивать α', то и β' будет также увеличиваться и при том всякой величине α' будут соответствовать две величины β' равные, но с обратными знаками; следов. ось x^{ax} служит осью кривой, при том α' может увеличиваться до бесконечности, а вместе с α' и β' также увеличивается до бесконечности и следов. кривая простирается вправо от точки A в бесконечность.
Будем рассматривать только верхнюю ветвь кривой, т.е. положим: $\beta' = + \sqrt{\frac{8}{27p}} a'^{3/2}$
Найдем первую производную: $\frac{d\beta'}{d\alpha'} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{8}{27p}} a'^{1/2}$
при $\alpha' = 0$ и производная $\frac{d\beta'}{d\alpha'} = 0$, т.е. в точке A кривая касательна к оси x^{ax} и также как эта производная постоянно остается больше 0, то ордината следов. постоянно возрастает. Возьмем теперь вторую производную: $\frac{d^2\beta'}{d\alpha'^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{27p}} \cdot a'^{-\frac{1}{2}}$; эта производная никогда не обращается в нуль и

и сходов. Кривая не имеет точек перегиба и так как $\frac{d^2y'}{dx'^2} > 0$, то сходов. кривая постоянно выпукла к оси x'.

Снизу оси x' кривая пойдет симметрично с верхней ветвью. Полученная кривая наз. полукубической параболой или параболой Нейля.

Если бы потребовалось при помощи этой развертки описать самую кривую, то для этого нужно предположить, что один конец нити, натянутой и нерастяжимой нитки укреплен в некоторой точке C развертки, полюс нити описал развертку и свободный конец помещается в точке O. К этому концу прикреплено острие карандаша. Если теперь сохраняя нить в натянутом положении будем вести карандаш в правую сторону, пока острие карандаша опишет верхнюю ветвь параболы, точно таким образом можно получить и нижнюю ветвь параболы, посредством ветви AC' развертки.

Радиус кривизны и развертка эллипса.

Возьмем ур-е эллипса в виде: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ это есть ур-е эллипса, отнесенного к центру и к осям. Вычислим радиус кривизны;

для этого найдем сначала первую и вторую производные. Диф-я ур-ие находим: $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$. По известной формуле

$$S = \frac{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^2y^2}\right)^{3/2}}{b^4/a^2y^3} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$$

Чтобы исследовать удобнее изменения кривизны кривой на окружности эллипса, выразим S в ф-ии одного x; для этого заметим, что ур-ия эллипса имеет вид: $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$

Вставим это в выражение S, получим:

$$S = \frac{(a^4b^2 - a^2b^2x^2 + b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$$

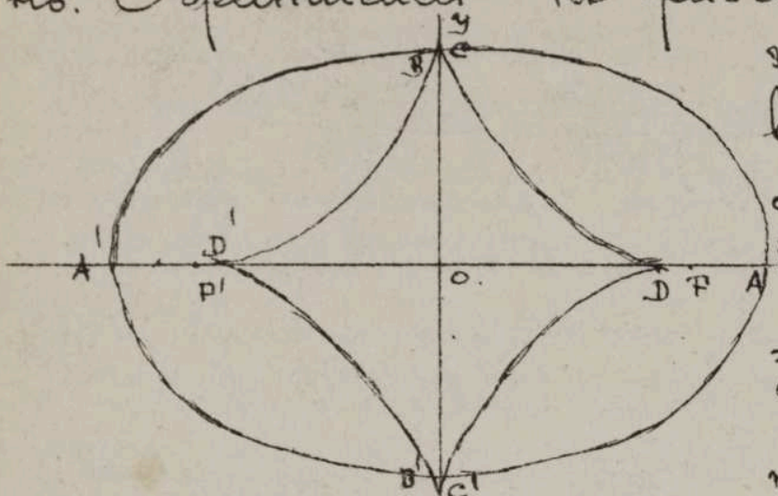
Вынося $(b^2)^{3/2}$ за скобки и сокращая, получим: $S = \frac{[a^4 - (a^2-b^2)x^2]^{3/2}}{a^4b}$.

но так как $a^2 - b^2 = c^2 = a^2\varepsilon^2$, где ε есть эксцентриситет, то вставляя это в выражение S и вынося $(a^2)^{3/2}$ за скобки, получим по сокращении: $S = \frac{(a^2 - \varepsilon^2x^2)^{3/2}}{ab}$. Теперь при помощи этого выражения рассмотрим, как изменяется кривизна эллипса. Мы видим, что наибольшую величину радиуса кривизны получаем при $x=0$, следовательно в точке B есть наименьшая кривизна и для этой точки имеем: $S = \frac{a^2}{b^2}$. В удалении от точки B кривизна кривой увеличивается, а радиус кривизны уменьшается и в точке A радиус кривизны S получает наименьшую величину и эта величина есть $S = \frac{b^2}{a}$.

Приносимся, что последнее выражение S равно полупараметру, так что наименьшая величина радиуса кривизны равна полупараметру.–

Кривизна эллипса от точки B до вершины A

идет таким образом увеличиваясь постоянно. Обратимся к рассмотрению развертки эллипса. Составим выражение $y-\beta$, находим:



$$y-\beta = -\frac{1+\frac{b^4x^2}{a^2y^2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = -\frac{a^4y^2+b^4x^2}{b^4}y$$

Исключая отсюда x посредством ур. эллипса, имеем: $b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2$. Вставляя это выражение, но $a^2-b^2=c^2$, а потому:

$$y-\beta = \frac{b^4+c^2y^2}{b^4}y = y + \frac{c^2y^3}{b^4}$$

Сокращая y в первой и во второй частях, получим: $-\beta = \frac{c^2y^3}{b^4}$, откуда $y^3 = -\frac{b^4\beta}{c^2}$ и затем $y = -\frac{b^{4/3}\beta^{1/3}}{c^{2/3}}$. Возьмем выражение:

$$x-\alpha = \frac{1+\frac{b^4x^2}{a^2y^2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}\cdot\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^4}\cdot\frac{a^2y^3}{b^4}\cdot\frac{b^2x}{a^2y}$$

Сокращая, получим: $x-\alpha = \frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4b^2}\cdot x$

исключая y из ур-ия эллипса, имеем: $a^2y^2 = b^2a^2 - b^2x^2$

Вставляя это ур-ие в предыдущее выражение, получим: $x-\alpha = \frac{a^4b^2-a^2b^2x^2+b^4x^2}{a^4b^2}x = \frac{a^4-a^2x^2+b^2x^2}{a^4} = \frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^4}x$

но $a^2-b^2=c^2$. Вводя это выражение в предыдущее ур-ие, получим: $x-\alpha = \frac{a^4-c^2x^2}{a^4}x = x - \frac{c^2x^3}{a^4}$

Сокращая на x, получим: $\alpha = \frac{c^2x^3}{a^4}$, откуда $x^3 = \frac{a^4\alpha}{c^2}$ и наконец $x = \frac{a^{4/3}\alpha^{1/3}}{c^{2/3}}$.

Теперь мы получили x или y, выраженными в ф-ии α и β; вставим это выражение в ур-ие эллипса, которое предварительно представим таким образом: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ – в предыдущее равенство, получим: $y-\beta = \frac{a^4y^2+a^2b^4-a^2b^2}{a^2b^2}y = \frac{a^2y^2+b^4-b^2y^2}{b^4}y$

Из выражения x и y по ф-лам α и β имеем $\frac{x}{a} = \frac{a^{2/3}\alpha^{1/3}}{c^{2/3}} = \left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{1/3}$ и $\frac{y}{b} = -\frac{b^{2/3}\beta^{1/3}}{c^{2/3}} = -\left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{1/3}$. Вставляя это выражение в ур-ие эллипса, получаем $\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{2/3} = 1$. Это есть ур-ие развертки эллипса, его пишут иногда иначе, именно, полагают $\frac{c^2}{a} = A$ и $\frac{c^2}{b} = B$ и тогда ур-ие развертки напишется так: $\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{B}\right)^{2/3} = 1$. По этому ур-ию развертки эллипса можно построить и самую развертку. Решив это ур-ие относительно β, получим: $\beta = \pm B\left[1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^{2/3}\right]^{3/2}$. Из это ур-ия видно что развертка расположена симметрично относительно оси x'ов, так как β при одном и том же значении α, получает 2 значения равные, но со обратными знаками. Если $\alpha = 0$, то $\beta = \pm B$, но так как $B = \frac{c^2}{b} = \frac{c}{b} \cdot c$. и так как $\frac{c}{b}$ может быть и > 1 и < 1, то и B может быть и больше c и меньше c, а потому может быть также и больше b и меньше b, поэтому точка развертки на оси y'ов может лежать и внутри эллипса и вне эллипса; последнее что во всех случаях точка развертки C лежит вне эллипса на оси y'ов. С увеличением α, β увеличивается и след. отв точки C кривая пойдет приближаясь к оси x'ов при $\alpha = 0$; $\beta = 0$, но так как: $A = \frac{c^2}{a} = \frac{c}{a} \cdot c$, то $A < c$. Если точка F есть фокус, то точка развертки D, лежащая на оси x'ов находится дальше от центра O, чем точка F.

Вместо эллипса

Лист 25

При отрицательных α мы получим для β тайже все значения, как и при положительных и след. развертка расположена симметрично относительно оси y-ов. Точка O будет центром этой кривой. Затем вовьмем производную $\frac{d\beta}{d\alpha}$ и рассматривая верхнюю ветвь кривой получим:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{3}{2} B \left[1-\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{3/2}\right]^{1/2} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{A} = -\frac{B}{A}\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left[1-\left(\frac{\alpha}{A}\right)^{2/3}\right]^{1/2}$$

Из этого выражения видно, что при $\alpha=0$, $\frac{d\beta}{d\alpha}=\infty$ Следовательно в точке C Касательная к развертке совпадает со осью y-ов. При $\alpha=A$ и $\frac{d\beta}{d\alpha}=0$ Следовательно в точке D Касательная к развертке совпадает со осью x-ов. Если возьмем теперь вторую производную $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$, то увидим без затруднения, что она всегда положительна и для верхней ветви CD, а отсюда заключаем, что развертка не имеет точек перегиба и всегда вогнута к оси абсцисс, а след. она расположится так как указано на чертеже. Кривая эта наз. астроидой. Если в точке C укрепить конец нерастяжимой нити, плотно натягивая нить, довести ее вплоть развертки CD и к свободному концу нити, помещенному в точке A прикрепить острие карандаша, то при описании карандашом всей кривой нить должна вставать касательно, острие его опишет вплоть до сомк-

са AB.

Легко определить длину развертки, так как мы знаем, что длина развертки = разности радиусов кривизны, соответствующих крайним точкам, а потому можем написать $\text{дуга } DC^1 = BC^1 - DA = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}$.

Радиус кривизны и развертка циклоиды.

Возьмем ур-я циклоиды в виде:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) \text{ и } y = a(1 - \cos\varphi)$$

Найдем предварительно 1-ю и 2-ю производные; для-я данных ур-ий, находим:

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\cdot d\varphi = y\cdot d\varphi \;;\; dy = a\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi \;;\; \frac{dy}{dx} = \frac{a\cdot\sin\varphi}{y}$$

Вычислим теперь $\sin\varphi$. Из ур-ия циклоиды имеем: $1 - \cos\varphi = \frac{y}{a}$, откуда $\cos\varphi = 1 - \frac{y}{a} = \frac{a-y}{a}$, а потому $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{a^2 - 2ay + y^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$.

Подставляя это выражение в найденную выше производную, получим: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$. Возведем в квадрат, получим $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a}{y} - 1$.

Диф-я еще раз, находим: $2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a\cdot dy}{y^2\cdot dx}$, откуда $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$. Теперь берем выражение радиуса кривизны ρ: $\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Вставляя найденные выражения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ производных, получаем окончательно выражение:

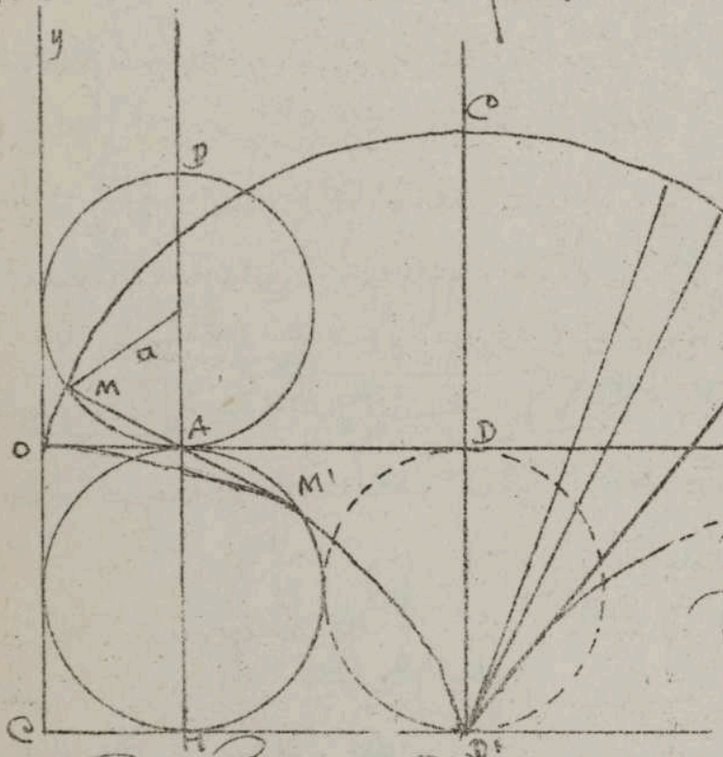
$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{2a}{y} - 1\right)^{3/2}}{-\frac{a}{y^2}} = \sqrt{8}\cdot a^{3/2} y^{1/2} = 2\sqrt{2ay}.$$

Вычислим теперь длину дуги циклоиды; по известной формуле имеем:

есть: $N = y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+\frac{2a}{y}-1} = \sqrt{2ay}$

Сравнивая теперь ϱ с N, мы прямо видим, что $\varrho = 2N$ или радиус Кривизны = двойной нормали.

Развертку циклоиды можно получить, составляя ур-е, но ее проще построить геометрическим путем. Продолжаем диаметр образующего круга, взятый от точки прикосновения с направляющей на расстояние равное диаметру образующего круга до точки H, так что $AH = HB$. Через точку H проведем линию $\parallel$ направляющей OO'; затем на AH, как на диаметре, опишем окружность, соединим точку M с A, продолжим эту линию до пересечения с нижней окружностью в точке M'. Докажем, что линия AM есть нормаль и кроме того очевидно, что $AM = AM'$ и стягив. $MM' = 2AM = 2N = \varrho$. След. точка M' есть центр Кривизны для точки M. Докажем, что по свойству движения образующего круга имеем $\text{arc } AM = OA$. Затем, полагая радиус образующего круга равным a, мы знаем, что $(\varrho = 2\sqrt{2a \cdot 2a} = 4a)$ $OD = \frac{1}{4}a$. С другой стор-



ровна длине посл-ти $AM'H$ можно выразить так: $\text{arc } AM + \text{arc } M'H = \overline{Ha} = OA + AD$, но так как $AM = AM'$, то и $\text{arc } AM = \text{arc } AM'$ и потому $\text{arc } AM' = OA$ и сокращая, получим, что $\text{arc } M'H = AD = HD'$

Построим теперь другую циклоиду одинаковую с данной, но так, чтобы ее вершина находилась в точке O, а ее начало в точке D'. Эта вторая циклоида очевидно может быть образована движением круга, равного образующему и катящегося по нижней направляющей, при этом, если точка, описывающая циклоиду в начале движения находилась в D', то при движении круга в данную сторону, эта точка опишет циклоиду, которая пройдет через точку M', так как $\text{arc } H'M' = HD'$. Таким образом центр кривизны, соответствующий точке M окружности на нижней циклоиде в точке M'; и так как точка M совершенно произвольна, то заключаем, что центр кривизны всякой точки левой половины верхней циклоиды расположен на нижней и след. нижняя циклоида будет развертка для верхней. Для правой половины верхней циклоиды развертою будет служить другая ветвь нижней циклоиды.

Таким образом развертка циклоиды состоит из двух половин, причем развертка =

= развертывающей, но расположена иначе. Теперь весьма легко определить и длину циклоиды. По известному свойству развертки имеем: дуг $OD' = CD' - O = 4a$, где радиус кривизны в точке O', судя по общему его выражению равен нулю. Это длина половины циклоиды, длина всей циклоиды $= 8a$. Если бы мы писали ур-ия развертки, то написали бы их очень просто, по общему правилу, но мы сразу бы не узнали, что это ур-ия циклоиды, потому что они получились бы в несколько иной форме, чем обыкновенно, так как расположение развертки относительно осей это-то другое, чем то, которое обыкновенно принимают, а потому чтобы получить ур. развертки в обыкновенной форме ур-ия циклоиды нам пришлось бы сделать преобразование коор-т, перенеся начало коор-т в точку D' и оставив оси параллельными самим себе, причем новую ось x^1 нужно бы взять в противоположную прежнему направлению.-

Кривые, отнесенные к полярной координатам.-

Рассмотрим определение положения касательной и вычисление радиуса кривизны для кривых отнесенных к полярным коор-динатам.-

Возьмется кривую, полярное ур-е которой есть $r=f(\Theta)$; возьмется на этой кривой точку M, координаты ее пусть будут r и Θ. Вместо полярной системы будем рассматривать (будем) и прямоугольную. Коор-та, принимая за начало точку O - полюс, а за ось $x^{ов}$ полярную ось. Обозначим полярная коор-та точки M через x и y. При этом между прямоугольными и полярными коор-ми будет следующая зависимость: $x=r\cdot\cos\Theta$ и $y=r\cdot\sin\Theta$. Проведем касательную к кривой во точке M и пусть, что она образует с осью $x^{ов}$ $\angle\alpha$; при прямоугольных осях коор-т угловой α определяется положение касательной и мы знаем, что $tg\alpha=\frac{dy}{dx}$. Можно бы было вычислить $tg\alpha$ и во полярных коор-т, но формула получается очень сложная. Вместо этого построим угол, образуемый касательной с радиусом вектором, обозначим его через φ. Из чертежа имеем $\varphi=\alpha-\Theta$, поэтому $tg\varphi=\frac{tg\alpha-tg\Theta}{1+tg\alpha\cdot tg\Theta}$. Сначала выразим эту формулу по прямоугольным координатам, а потом преобразуем ее во полярные коор-ты. Нам известно, что $tg\alpha=\frac{dy}{dx}$, а из чертежа $tg\Theta=\frac{y}{x}$. Вставим эти выражения во предыдущую формулу, получим $tg\varphi=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}}$ или уничтожив знаменатель, получим: $tg\varphi=\frac{x\cdot dy-y\cdot dx}{x\cdot dx+y\cdot dy}$. Преобразо-

бывая формулу в полярных коор-тах запишем, что $x^2+y^2=r^2$. Диф-я это выражение и сокращая на 2, находим $x\cdot dx + y\,dy = r\cdot dr$. Потом возьмем равенство $\frac{y}{x} = tg\Theta$. Диф-я его находим:

$$\frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{x^2} = \frac{d\Theta}{\cos^2\Theta}$$

Помножив на x^2, находим.

$$x dy - y\cdot dx = x^2\frac{d\Theta}{\cos^2\Theta} = \frac{r^2\cos^2\Theta\cdot d\Theta}{\cos^2\Theta} = r^2 d\Theta$$

Чтобы выразить в полярных коор-ах $tg\varphi$, вставив в предыдущую формулу найденные выражения, получим:

$$tg\varphi = \frac{r^2 d\Theta}{r\cdot dr} = r\cdot\frac{d\Theta}{dr}$$

. По этой формуле можно определить $\angle\varphi$ и определить, следов., направление касательной линии. Иногда для определения касательной определяют так наз. полярную субтангенсу или еще полярную субнормаль.

Через полюс проведем перпендикуляр к радиусу вектору, пересечение этого перпендикуляра обозначим через P, тогда линия OP наз. полярной субтангенсой и обозначается через S_t', зная величину полярного субтангенса, можно построить и касательную. Выражение полярного суб-

тангенса получим из ΔOPM, откуда напишем: $S_1 = OP = r \cdot \operatorname{tg}\varphi = r^2 \frac{d\theta}{dr}$. Проведем нормальную линию в точке M и покажем, что она встречает продолжение линии OP в точке N, тогда отрезок ON наз. полярной субнормалью и обозначается S_n'. Выразим субнормаль полярной получим из ΔONM, откуда:

$$S_n' = ON = r \cdot \operatorname{ctg}\varphi = \frac{r}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{r}{r \cdot \frac{d\theta}{dr}} = \frac{dr}{d\theta}.$$

Это и есть выражение полярной субнормали. Формула радиуса кривизны для полярных координат получается прямо из формулы, полученной для прямоугольных коор-т, через преобразование коор-т.

Возьмем формулу, выражающую при прямоугольных независимого переменного. Эта формула есть: $S = \frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx \cdot d^2y - dy\, d^2x}$ но так как $ds^2 = dx^2 + dy^2$, то нашу формулу можно написать так: $S = \frac{ds^3}{dx \cdot d^2y - dy\, d^2x}$. Преобразуем теперь к полярным коор-там; по полярным коор-там как известно ds выражается так: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$. Затем определим dx, dy, d^2y и d^2x. Для этого возьмем ур-е $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$ и дифференцируем их, причем за переменное независимое примем θ. Получим: $dx = \cos\theta \cdot dr - r \cdot \sin\theta \cdot d\theta$ и $dy = \sin\theta \cdot dr + r\cos\theta \cdot d\theta$. Диф-я еще раз находим. $d^2x = \cos\theta \cdot d^2r - 2\sin\theta \cdot d\theta \cdot dr - r\cos\theta\, d\theta^2$ и

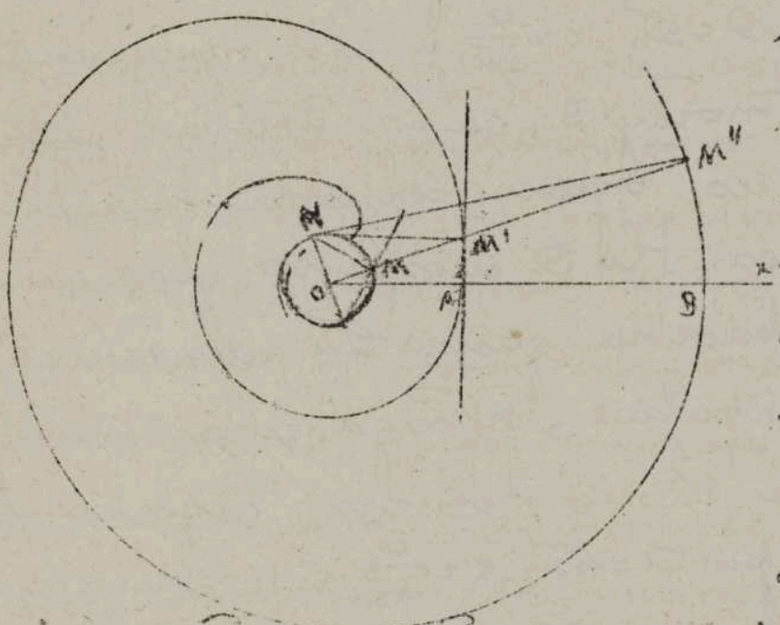
$$d^2y = \sin\theta \cdot d^2r + 2\cos\theta\, dr \cdot d\theta - r \cdot \sin\theta \cdot d\theta^2.$$

Вот выражения фнф-лов; теперь, чтобы посчитать ϱ остается только эти выражения вставить во формулу, определяющую ϱ и потом произвести вычисления. Сделать это вычисление весьма легко и его написание прямо окончательный результат: $\varrho = \frac{[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$. В этой формуле можно вычислить ϱ; в ее выражение входят только производные $\frac{dr}{d\theta}$ и $\frac{d^2r}{d\theta^2}$, которые найдутся из данного ур-ия кривой $r = f(\theta)$. Таким образом вычисление ϱ в полярных координатах не представляет никаких затруднений. Приложим полученную формулу к примерам.

Спираль Архимеда.

Эта кривая выражается ур-ием: $r = a\theta$. Пусть O полюс, а Ox – полярная ось. Форма кривой после ур-ия очень легко изследовать; при $\theta = 0$ и $r = 0$, соответ. кривая начинается в полюсе и при этом она касательна к полярной оси. С увеличением θ и r постоянно увеличиваются. При $\theta = 2\pi$, $r = 2a\pi$; таким образом получили одну ветвь кривой после полюса O, причем кривая идет от точки O до точки A. При θ дальше: увеличиваться и далее 2π и вместо $a\theta$ и r будет продолжать увеличиваться и сделает: кривая пройдя через точку A сделает новый оборот около полюса; при $\theta = 4\pi$ и $r = 4a\pi$ и т. д. получая точки B. При дальнейшем увеличении θ,

кривая будет иметь асимптотой прямую, параллельную оси полюсов и отстоящую от нее на расстоянии a. Действительно, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{r'}$, откуда $r' = r\operatorname{ctg}\varphi$, и при $\varphi \to 0$ имеем $r' \to \infty$, $r \to a$, $r\operatorname{ctg}\varphi \to a$.



Построение касательной к спирали Архимеда. Пусть M — точка спирали, $OM = r$, $OA = a$. Проведем окружность радиуса OM с центром O и отложим на ней дугу AB, равную MA. Тогда $\angle AOB = \varphi$. Проведем $OK \perp OM$ и $BN \perp OB$. Из подобия $\triangle OMA \sim \triangle OBN$ имеем $\frac{ON}{OB} = \frac{OM}{OA}$, откуда $ON = \frac{OM \cdot OB}{OA} = \frac{r \cdot r\varphi}{a} = \frac{r^2\varphi}{a}$. Отложим $OK = ON$ и проведем $KM' \perp OK$. Тогда KM' — касательная, MN — нормаль, ON — полярная подкасательная.

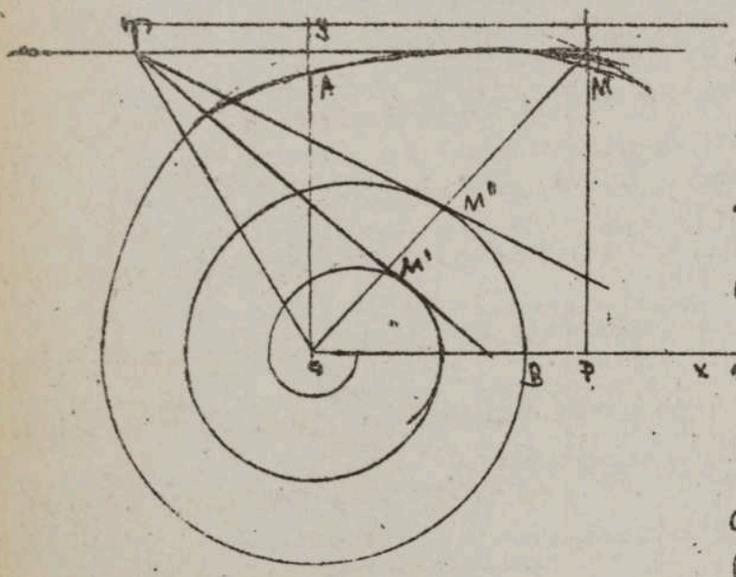
Найдем полярную подкасательную $S_n = \frac{dr}{d\varphi} = a = \text{const}$. Следовательно, спираль Архимеда обладает тем свойством, что полярная подкасательная для нее постоянна и равна a.

Отметим на полюсе O, как из центра, окружность радиуса a, на этой окружности должны быть расположены концы всех субнормалей. Далее, чтобы получить субнормаль, соответствующую данной точке M, соединим эту точку с полюсом и из полюса восставим перпендикуляр к этому радиусу вектору, отметим точку N пересечения этого радиуса с окружностью, тогда отрезок ON и есть субнормаль. Соединяя данную точку N с данной точкой M, получим нормаль, а перпендикуляр к нормали в точке M и есть касательная. Одна и та же субнормаль будет для точки M, так и для точек M', M'' и т. д., т. е. для всех точек кривой, лежащих на одном радиусе, образующем с полярной осью $\angle\varphi$. Если теперь соединить точку M'' с N, то линия $M''N$ есть нормаль к кривой в точке M'' и т. д.

Спираль гиперболическая.

Ур. этой кривой есть $r\cdot\Theta = a$, отсюда $r = \frac{a}{\Theta}$

Чтобы построить эту кривую возьмем за полюс точку O и за полярную ось линию ox. Возьмем $\Theta = \frac{\pi}{2}$, тогда $r = \frac{2a}{\pi}$, построим эту точку; восставим для этого в точке O к линии ox $\perp$ и на нем отложим от точки O величину $= \frac{2a}{\pi}$, получим точку A. С увеличением Θ, r уменьшается и при $\Theta = \frac{3\pi}{4}$, $r = \frac{a}{\frac{3\pi}{4}}$ и мы получим точку B, след. кривая сделала один оборот около полюса. На Θ продолжая увеличиваться далее $\frac{3\pi}{4}$ причем r будет уменьшаться и кривая, пройдя через точку B, совершает новый оборот около полюса, постоянно к нему приближаясь; при $\Theta = 4\pi$, $r = \frac{a}{4\pi}$ и очевидно, что с дальнейшим увеличением Θ кривая будет описать бесчисленное множество оборотов около полюса, постоянно к нему приближаясь, но никогда не достигая его. Полюс имеет поэтому особое значение для этой кривой и его нужно назвать асимптотической точкой, так как кривая стремится к ней, но никогда её не достигает. С увеличением Θ от $\frac{\pi}{2}$, радиус вектор r будет постоянно возрастать и отсюда дальше. Кривая пойдет вправо в бесконечность, так как только при $\Theta = 0$, $r = \infty$.



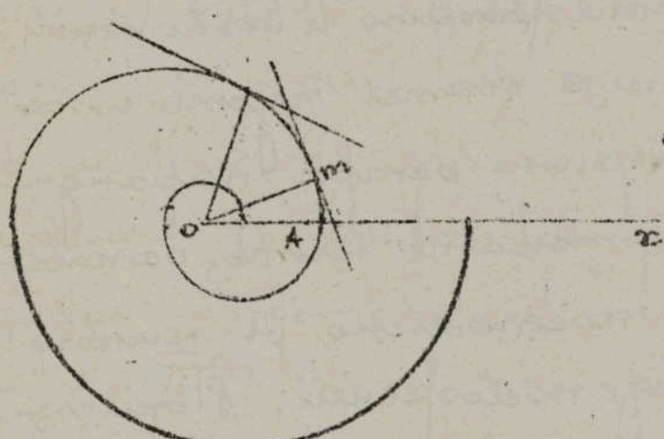
Следов. эта кривая удаляется в бесконечность, но чтобы узнать, как она при этом расположена, возьмем на рассматриваемой ветви кривой точку M и вычислим длину перпендикуляра MP, опущенного из M на полярную ось. Из Δ MOP имеем $MP = r \cdot \sin\Theta$. Подставив вместо r его величину, получим: $MP = \frac{a \cdot \sin\Theta}{\Theta}$. Отсюда видно, что если угол Θ приближается к 0, то отношение $\frac{\sin\Theta}{\Theta}$ стремится к единице, а MP при этом стремится к a. Так как при этом имеем постоянно $MP < a$, то отсюда заключаем, что точка ветви кривой приближается к прямой $\parallel$ оси $x^{ой}$ и отстоящей от нее на расстоянии a. Отсюда следует, что если на расстоянии $PQ = a$ от полярной оси провести линию $\parallel$ этой оси, то к этой прямой кривая приближается неопределенно, но никогда ее не достигая; следов. эта прямая есть асимптота кривой. Чтобы построить касательную к этой кривой, рассмотрим, рассмотрим полярный субтангенс, имеем: $S_t' = \frac{r^2 \cdot d\Theta}{dr} = \frac{a^2 \cdot d\Theta}{-a \cdot \frac{d\Theta}{\Theta^2}} = -a = Const.$, т. е. субтангенс постоянен и $= -a$. Вследствие этого, чтобы построить касательную в точке M, возставляем к радиусу вектору MO перпендикуляр из полюса и откладываем на нем величину $= a$, только в сторону противоположную той, которую нужно иметь полярной и, соединив полученную таким образом точку K с точкою M, получим касательную

Соединяя тут же точку T со точками M', M''... кривой, получим, очевидно, касательную в этой точке.

Спираль логарифмическая. Ур-ие этой кривой есть $r = ae^{m\theta}$, где a и m постоянные положительные величины, а e основание Непаровых логарифмов. Ур-ие это можно несколько упростить. Напишем равенство $a = e^{la}$; теперь ур-ие кривой можно представить так: $r = e^{la} \cdot e^{m\theta} = e^{la + m\theta}$ или $r = e^{m(\theta + \frac{la}{m})}$, но $\frac{la}{m}$ есть постоянное количество, которое мы обозначим через α, и наше ур-ие кривой теперь так: $r = e^{m(\theta + \alpha)}$.

Положим, что точка O есть полюс и линия OX есть полярная ось; возьмем на данной кривой произвольную точку M, координаты ее пусть будут r и θ. Построим $\angle\alpha$ при точке O снизу полярной оси, если она положительная, тогда $\angle MOX' = \theta' = \theta + \alpha$. Теперь, если вместо полярной оси OX примем за полярную ось OX', то ур-ие кривой примет такой вид: $r = e^{m\theta'}$. Это ур-ие представляет тут же спираль, но она проще и теперь мы будем ее рассматривать в этом виде, при таком виде нашего ур-ия нет надобности в старых координатах, то мы будем писать ур.-кривой таким образом $r = e^{m\theta}$. Будем строить эту кривую после ур-ия, заметим, что при $\theta = 0$; $r = 1$, пусть это будет точка A кривой. Если θ или $\theta = 0$ увеличиваются, то и r увеличивается и при том r возрастает больше, чем показательная ф-я. Следов. от точки A кривая описа-

ста оборота около полюса, постоянно удаляясь от него и при $\theta = 2\pi$; $r = e^{m.2\pi}$, причем кривая совпадет полным оборотом около полюса. При дальнейшем увеличении θ кривая очевидно опишет бесчисленное множество оборотов около полюса постоянно от него удаляясь и простираясь в бесконечность. Кроме того, чему θ можно приписывать и отрицательные значения, при этом с уменьшением θ будет уменьшаться радиус вектор, оставаясь положительным, и кривая будет делать новые обороты около полюса, приближаясь к нему. Когда θ будет стремиться к отрицательной бесконечности, r будет стремиться к 0 и кривая совершает около полюса бесчисленное множество оборотов, приближаясь к нему, но не достигая его; в этом случае полюс будет опять асимптотической точкой. Чтобы провести касательную к этой кривой определим $\operatorname{tg}\varphi$. Выражение $\operatorname{tg}\varphi$ нам известно, оно есть: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{e^{m\theta}\,d\theta}{m\,e^{m\theta}\,d\theta} = \frac{1}{m} = Const$

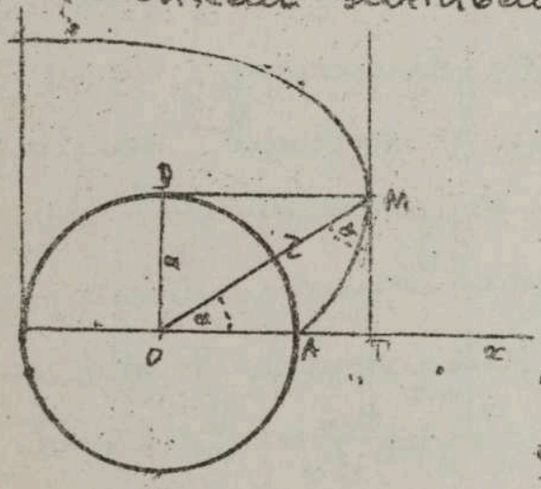


Здесь φ, а следов. и угол ψ постоянны, поэтому легко построить касательную. Если возьмем точку M на кривой и проведем к ней касательную, то угол между касательной и радиусом вектором равен постоянной величине $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{m}\right)$ и для всякой точки кривой этот угол один и тот же. Эта

Кривая обладает целым рядом интересных свойств, что все прямые, выходящие из полюса пересекают кривую под одинаковым и только все углом φ, поэтому спираль называют также равноугольной. Кроме логарифмической спирали только круг обладает подобным же свойством именно все прямые, проходящие через центр встречаются с окружностью под прямым углом.

Развертывающая круга –

Возьмем неподвижный круг, центр которого O, радиус его есть a. Вообразим, что круг обернут бесконечно тонкой гибкой нерастягиваемой и бесконечно тонкой нитью. Свободный конец нити пусть находится в A, и к нему приперто острие карандаша. Начнем затем развертывать нить, оставляя ее постоянно в натянутом положении. Понятно, что если продолжим дугу нити бесконечно, то сам опишем т. зр. кривую обладающую бесконечно большим радиусом кривизны.



Примем точку O за полюс и линию OAx за полярную ось и рассмотрим точку M на кривой. Положение, что когда конец нити находится в M, то в это время нить касается круга в точке B. По свойству образования кривой можем написать, что

$BM = a\omega$ дл. дуги BA. Тогда дл. BM есть расстояние дуги BA. Обозначим $\angle BOA$ через ω, тогда $BM = a\omega$. Теперь рассмотрим $\triangle BOM$; в нем $r^2 = a^2 + a^2\omega^2 = a^2(1+\omega^2)$. Извлекая корень получим $r = a\sqrt{1+\omega^2}$. В $\triangle MOB$ $\angle MOB = \omega - \Theta$ и tg этого $\angle$ определяется из чертежа $\operatorname{tg}(\omega - \Theta) = \frac{a\omega}{a} = \omega$ и отсюда $\omega - \Theta = \operatorname{arctg}\omega$ или $\Theta = \omega - \operatorname{arctg}\omega$. Присоединим к этому ур-ию, ур-ие $r = a\sqrt{1+\omega^2}$. Вот эти 2 последние ур-ия вместе взятые и представляют искомую кривую. В этих ур-иях за переменн. независимое надо принимать ω, и каждому значению ω будет соответствовать вполне определенные значения r и Θ и следов. определенная точка кривой и с изменением ω изменяется r и Θ; тай. обр. эти 2 ур. и представляют кривую. Но можно из этих ур-ий исключить ω и тогда получим ур. кривой в обыкновенной форме, т.е. оно будет представлять тогда соотношение между координ-ми r и Θ, но это ур-ие менее удобно.

Записанная кривая называется развертывающей круга. Из ее развития видно, что круг есть развертка этой кривой, а потому линия BM должна быть перпендикулярна к касательной в точке M; но так как прямая BM перпендикулярна к радиусу круга BO, то след. касательная должна быть перпендикулярна к радиусу BO. Продолжим это вычисление $\operatorname{tg}\varphi$; по формуле имеем: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\,d\omega}{dr}$ но $d\Theta = d\omega - \frac{d\omega}{1+\omega^2} = \frac{\omega^2 d\omega}{1+\omega^2}$ и $dr = \frac{1}{2}a\,\omega\,d\omega$. Вставляя эти выражения в формулу для искомую $\operatorname{tg}\varphi$, находим: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{1+\omega^2}\,\frac{\omega^2 d\omega}{1+\omega^2}}{\frac{a\,\omega\,d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}} =$

Дост. Власенко. Лист 27

$= \frac{a(1+\omega^2)\omega^2 d\omega}{(1+\omega^2)a\cdot\omega\cdot d\omega} = \omega$, но $\omega = tg(\omega+\Theta)$, а потому $tg\varphi = tg(\omega-\Theta)$ и следов. $\varphi = \omega - \Theta$. Посмотрим, что дает это = на чертеже. $\angle OMT$, надо сейчас вывели $= \omega - \Theta$, но надо было указано выше и $\angle BOM$ также $= \omega - \Theta$ и при том эти углы на крестнолежащие, следов. линии OB и OT $\parallel$. Понятно, что радиус кривизны для точки M должен быть равен MB, это также можно доказать непосредственно вычислением. Пользуемся формулой: $\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\Theta^2}}$. Для получения величины ρ нужно только вставить в эту формулу вместо производных их выражения; но заметим, что у нас за переменное независимое взято ω, а в дан. формуле переменн. независ. есть Θ и при нахождении производных это нужно принять во внимание. Уже уже вычислено dr и $d\Theta$, а потому $\frac{dr}{d\Theta} = \frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}$. Обозначим эту производную через r'. Потом вычислим dr' и разделив dr' на $d\Theta$, получим вторую производную $\frac{d^2r}{d\Theta^2}$. Находим так. обр. $\frac{dr}{d\Theta} = r' = \frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega}$; $dr' = -\frac{a}{\omega^2\sqrt{1+\omega^2}}d\omega$; $\frac{dr'}{d\Theta} = \frac{d\frac{dr}{d\Theta}}{d\Theta} = \frac{d^2r}{d\Theta^2} = -\frac{a\sqrt{1+\omega^2}}{\omega^3}$. И наконец, подставив эти выражения в предыдущую формулу, найдем по сокращении, что

$$\rho = a\omega = MB.$$

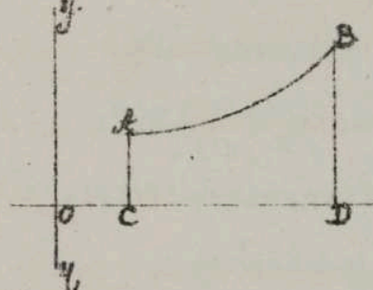
Конец.

Изд. Петрановъ

Приложеніе интегральнаго исчисленія къ Геометріи.

О вычисленіи площадей плоскихъ кривыхъ.

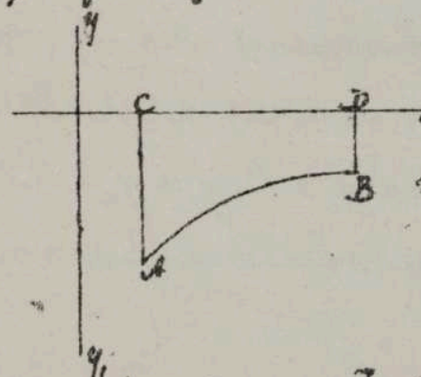
Положимъ, что дано ур-іе кривой линіи $y=f(x)$, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ коор-тъ; возьмемъ на кривой двѣ постоянныя точки A и B, пусть $OC=x_0$ и



$OD=X$. Разсмотримъ площадь $CABD=u$, она называется площадью кривой, эта площадь

$$u=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{X} y\,dx.$$

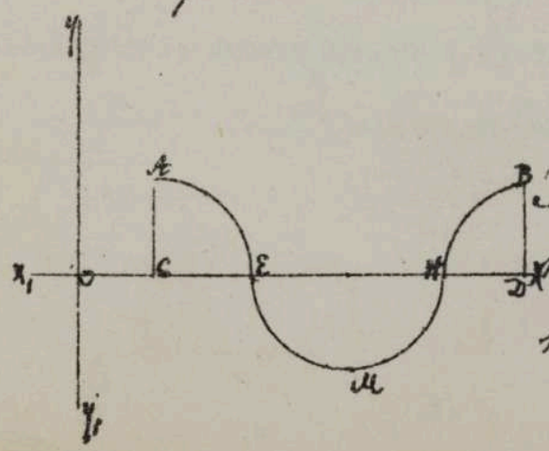
Эта формула наз. формулой квадратуръ; ее иногда пишутъ кратко, опуская предѣлы: $u=\int y\,dx$. Мы выводимъ ее, предполагая, что $y>0$; если бы было $y<0$, то очевидно, что та же формула дала бы туже площадь, только со знакомъ (-)



пл. $CABD=-\int_{x_0}^{X} y\,dx$

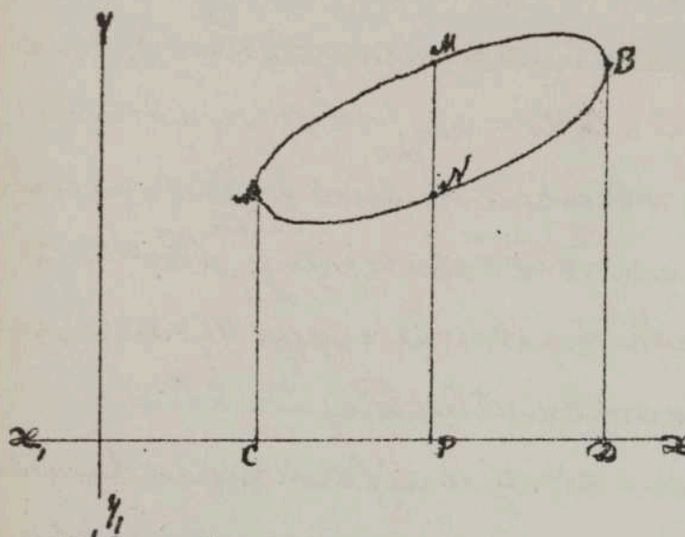
Если данная кривая пересѣкаетъ ось x, тогда $\int_{x_0}^{X} y\,dx$ не будетъ выражать опредѣленной площади; означимъ точки пересѣченія черезъ E и H и пусть $OE=x_1$, а $OH=x_2$. Разобьемъ интегралъ на 3 части:

$$\int_{x_0}^{X} y\,dx=\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} y\,dx}_{CAE}+\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} y\,dx}_{EMH}+\underbrace{\int_{x_2}^{X} y\,dx}_{HBD}=$$



Разсмотримъ опредѣленіе площади самонакнутой кривой линіи, пусть ея уравненіе $F(x,y)=0$. Возьмемъ прямоугольныя

оси координатъ; проведемъ 2 касательныя $\parallel$ оси y черезъ AC и BD, пусть $OC = x_0$, а $OD = X$, эти абсцисы пока неизвѣстны. Если возьмемъ какой нибудь $x = OP$, такъ что $OP > x_0$ и $OP < X$, ему соотвѣтствуютъ 2 ординаты $MP = y_1$ и $NP = y_2$; эти ординаты опредѣляются изъ уравненія кривой, которое будучи рѣшено относительно y, даетъ 2 рѣшенія



$$y_1 = f_1(x) \text{ и } y_2 = f_2(x).$$

Функціи y_1 и y_2 можно считать извѣстными. Искомая площадь и есть разность площадей:

$$\text{Сф } AMBD - \text{Сф } ANBD,$$

слѣдовательно:

$$u = \int_{x_0}^{X} y_1\,dx - \int_{x_0}^{X} y_2\,dx = \int_{x_0}^{X} (y_1 - y_2)\,dx.$$

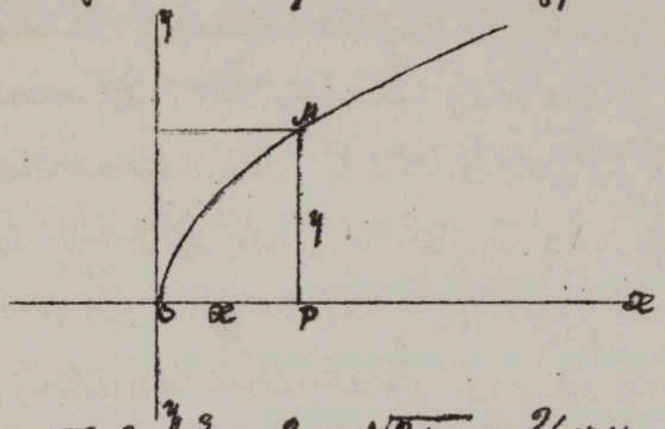
Для вычисленія u нужно знать X и x_0, которыя легко опредѣлить; пусть M приближается къ A, очевидно, что при этомъ y_1 и y_2 будутъ стремиться къ равенству и въ точкѣ A, $y_1 = y_2 = AC$, также въ точкѣ B, $y_1 = y_2 = BD$. Такимъ образомъ абсцисы точекъ A и B удовлетворяютъ условію:

$$y_1 = y_2$$

или $f_1(x) = f_2(x)$; изъ этого уравненія найдемъ абсцисы точекъ A и B, такъ что получимъ 2 корня:

$$x = x_0 \text{ и } x = X.$$

Площадь параболы. Возьмемъ параболу, отнесенную къ вершинѣ; уравненіе ея $y^2 = 2px$; возьмемъ на ней произвольную точку M съ координатами $x = OP$ и $y = MP$ и вычислимъ площадь OMP. Площадь $OMP = u = \int y\,dx$; предѣлы $x_0 = 0$ и $X = x$, слѣдовательно

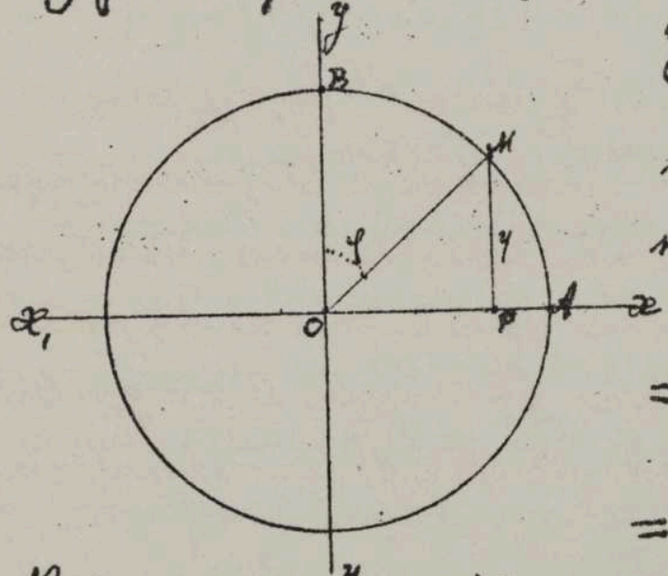


$$u = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^x \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \sqrt{2p}\,\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{2px} = \underline{\tfrac{2}{3}xy}.$$

Такъ какъ площадь прямоугольника $OAMP = xy$, то $u = \frac{2}{3}$ площади $OAMP$.

Площадь круга. Ур-ie его $x^2 + y^2 = a^2$ (начало координатъ въ центрѣ круга). Возьмемъ произвольную точку M и вычислимъ площадь $OBMP = u$ по формулѣ квадратуръ $u = \int y\,dx$; предѣлы будутъ 0 (нижній) и x (верхній), но $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (изъ ур. круга), слѣдовательно



$$u = \int_a^X \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Вычислимъ теперь $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, интегрируя по частямъ:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$

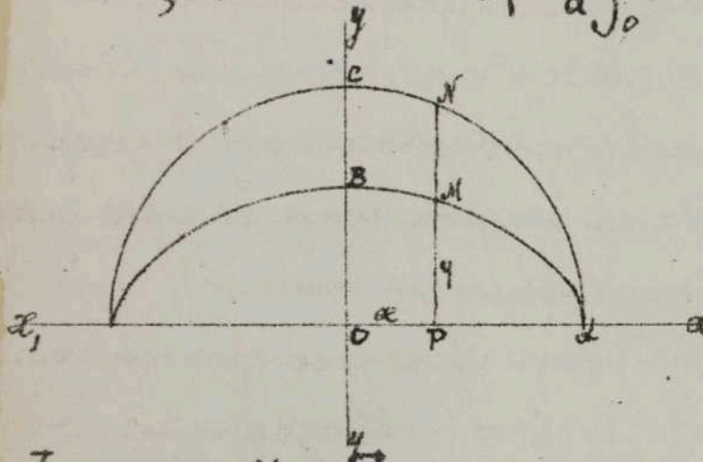
$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Перенося послѣдній интегралъ въ 1-ю часть, получимъ $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$ $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$. Слѣдовательно $u = \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$ $+ \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$. Мы получили бы проще формулу, если бы стали вычислять площадь по способу начальной Геометріи. Дѣйствительно, соединивъ точку M съ O мы получимъ:

u = площ. $\triangle OMP$ + пл. сект. OMB.

Но площадь треугольника $OMP = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$, а площадь $OMB = \frac{a}{2}\,\text{arc}\,MB$. Означивъ уголъ MOB черезъ φ, получимъ, что площадь сектора $OMB = \frac{a}{2}a\varphi$; $x = a\sin\varphi$; $\sin\varphi = \frac{x}{a}$; $\varphi = \text{arc}\sin\frac{x}{a}$, слѣд. $u = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc}\sin\frac{x}{a}$. Если точка M совпадетъ съ A, то $x = a$ и площадь $OBA = \frac{a^2}{2}\text{arc}\sin(1) = \frac{\pi a^2}{4}$; вся площадь круга $= 4OBA = \pi a^2$.

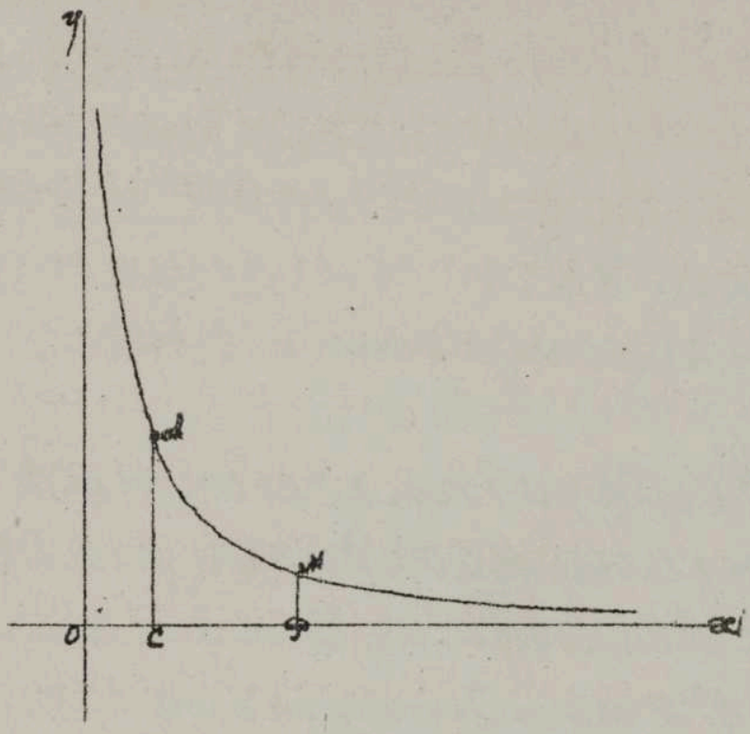
Площадь эллипса. Возьмемъ ур. эллипса, отнесеннаго къ центру и къ осямъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, откуда $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; возьмемъ произвольную точку M; площадь $OBMP = u_1 = \int y\,dx$ предѣлы суть 0 и x, слѣдоват. $u_1 = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Если изъ точки O радіусомъ a опишемъ полуокружность, то ур. этого круга будетъ: $x^2+y^2=a^2$. Продолжимъ ординату MP до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ N, тогда площадь $OCNP = u = \int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; сравнивая u_1 съ u, видимъ, что $u_1 = \frac{b}{a}u$ или $\frac{u_1}{u} = \frac{b}{a}$; тоже отношеніе будетъ, если точка M совпадетъ съ A, тогда u сдѣлается равнымъ $OCA = \frac{\pi a^2}{4}$, а площадь u_1 сдѣлается $= OBA = \frac{u}{4}$, гдѣ u площадь всего эллипса, слѣдовательно $\frac{u}{4} = \frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{4}$ и слѣдовательно $u = \pi ab$; такъ какъ $u = \pi(\sqrt{ab})^2$, то, полагая $\sqrt{ab} = r$, получимъ $u = \pi r^2$, т.е. площадь эллипса равна площади круга, котораго радіусъ есть средняя геометрическая величина между полуосями эллипса a и b.



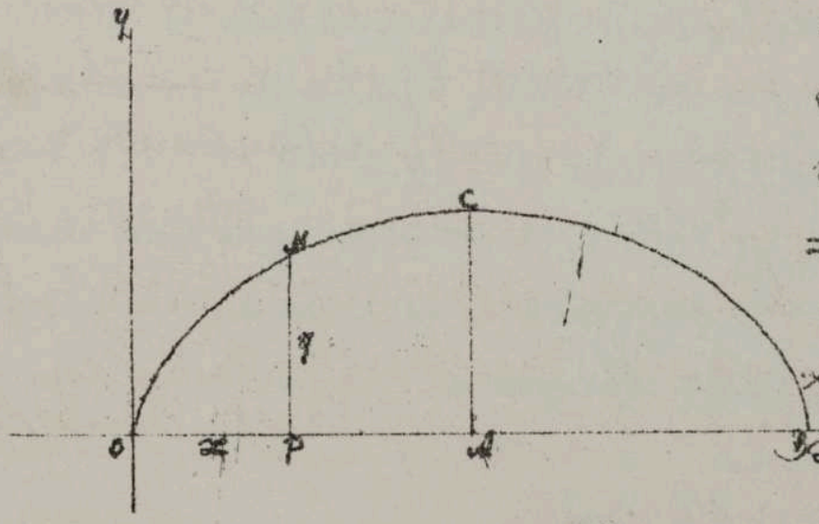
Площадь равносторонней гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ.

Уравненіе ея $xy = \frac{a^2}{2}$; возьмемъ на гиперболѣ точку A

абсциса которой $OC = x$; возьмем другую произвольную точку M, $OP = x$, $MP = y$; вычислим площадь $CAMP$; площадь $CAMP = u = \int y\,dx$ предълы x_0 и x; изъ уравненія гиперболы имѣемъ: $y = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{x}$, слѣдовательно $u = \frac{a^2}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = \frac{a^2}{2}l\left(\frac{x}{x_0}\right)$. Если $x_0 = 1$, то $u = \frac{a^2}{2}l(x)$. Площадь эта возрастаетъ пропорціонально Непе-ровымъ Логарифмамъ абс-циссъ, если $a = \sqrt{2}$, то $u = l(x)$. Поэтому Неперовы логарифмы называются гипер-болическими.



Площадь циклоиды. Уравненіе циклоиды: $x = a(\varphi - \sin\varphi)$ и $y = a(1 - \cos\varphi)$. Возьмемъ на циклоидѣ произвольную точку M и вычислимъ площадь OMP. Площадь $OMP = u = \int y\,dx$, предѣлы 0 и x. Вставляемъ вмѣсто u и dx ихъ величины и дифференцируемъ: $du = y\,dx = a(1-\cos\varphi)\,dx$; площадь $OMP = u = a^2\int(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$; когда $x = 0$, то $\varphi = 0$, когда $x = x$, то φ получаетъ соотвѣтствующее зна-

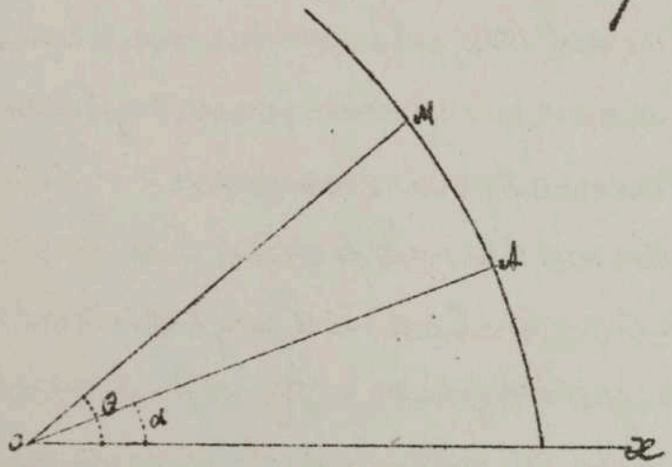


жение φ; слѣдовательно.

$$u = a^2\int_0^{\varphi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\varphi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = a^2\left[\varphi - 2\sin\varphi + \int_0^{\varphi}\cos^2\varphi\, d\varphi\right];$$

$\int_0^{\varphi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi$ (замѣняя $\cos^2\varphi$ черезъ косинусъ двойной дуги); $\int_0^{\varphi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi$. Слѣдовательно площадь $u = a^2\left[\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]$. Предположимъ, что точка M совпадаетъ съ B_1, тогда для B $-\varphi = 2\pi$ и площадь (циклоиды) $OCB = u = 3\pi a^2$, т.е. площадь циклоиды равна утроенной площади образующаго круга.

Площади кривыхъ, отнесенныхъ къ полярнымъ координатамъ.



Положимъ O есть полюсъ, Ox полярная ось, уравненіе кривой $r = f(\theta)$. Возьмемъ на кривой постоянную точку A, опредѣляемую угломъ α и другую перемѣнную $M(r, \theta)$. Площадь $AOM = u$ есть функція угла θ и въ дифференціальномъ исчисленіи было найдено, что $du = \frac{1}{2}r^2 d\theta$; взявъ интегралъ отъ обѣихъ частей, получимъ $u = \int\frac{1}{2}r^2 d\theta + C$. Постоянное C опредѣляется изъ условія, что площадь и такова, что при углѣ $\theta = \angle\alpha$, площадь $u = 0$; такимъ образомъ интегралъ долженъ быть исчезающимъ при $\angle\theta = \angle\alpha$, слѣдовательно

$$u = \int_{\alpha}^{\theta}\frac{1}{2}r^2 d\theta.$$

Случается нерѣдко, что площади кривыхъ, отне-

сеньчь къ прямоугольнымъ осямъ координатъ легче вычислить, преобразуя прямоугольныя координаты въ полярныя.

Возьмемъ уравн. $x^3+y^3-3axy=0$ (Декартовъ листъ). Оно 3-ей степени и его неудобно рѣшить относительно y; преобразуемъ прямоугольныя оси въ полярныя: $x=r\cos\theta$ и $y=r\sin\theta$. Вставивъ въ ур-іе эти величины, получимъ:

$$r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta-3ar^2\sin\theta\cos\theta=0$$

отсюда $$r=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$$

Это и есть полярное уравненіе кривой.

При $\theta=0$ и $r=0$ кривая касательна къ оси ox-овъ и начинается въ точкѣ O; если θ увеличивается, то r увеличивается, но потомъ опять уменьшается и при $\theta=\frac{\pi}{2}$, $r=0$, кривая касательна къ оси y; въ углѣ xOy кривая образуетъ петлю; вычислимъ площадь этой петли $=u$, найдемъ $u=\frac{1}{2}\int r^2d\theta$; предѣлы $\theta=0$ и $\theta=\frac{\pi}{2}$. Вставивъ вмѣсто r^2 его величину, получимъ $u=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}d\theta$, раздѣлимъ числителя и знаменателя на $\cos^6\theta$:

$$u=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}^2\theta\cdot d\theta}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2\cos^2\theta}$$

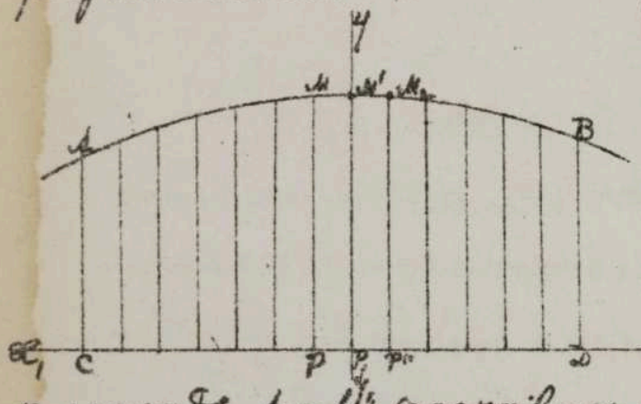
полагая $\operatorname{tg}\theta=z$, имѣемъ:

$$u=\frac{9a^2}{2}\int\frac{z^2}{(1+z^3)^2}dz$$

когда $\theta=0$, тогда $z=0$, когда $\theta=\frac{\pi}{2}$, тогда $z=+\infty$ и мы получимъ: $u=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{z^2}{(1+z^3)^2}dz=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+z^3}\right]_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}$.

Формула Симпсона для приближенной квадратуры.

Положимъ, что на бумагѣ тщательно начерчена нѣкоторая кривая, ур. которой неизвѣстно; проведемъ изъ $2^{xъ}$ точекъ A и B перпендикуляры на ось $x^{ов}$; требуется опредѣлить площадь CABD = и съ возможной точностью. Основаніе CD раздѣлимъ на четное и большое число n равныхъ частей и изъ всѣхъ точекъ проведемъ ординаты; пусть $\frac{CD}{n} = h$; вся площадь раздѣлится на n площадей; ординаты $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ можно измѣрить циркулемъ. Положимъ данными требуется вычислить площадь кривой. Будемъ соединять по 2 малыя площади, начиная съ AC и разсмотримъ всю площадь, какъ (составную) составляющую изъ паръ площадей.



Возмемъ одну пару $PMM'M''P'P''$; пусть $MP = y_{i-1}$, $M'P' = y_i$, $M''P'' = y_{i+1}$. Примемъ точку P' за начало координатъ, а $P'y'$ за ось $y^{ов}$; ур. кривой неизвѣстно, напишемъ его въ видѣ $y = f(x)$. На протяженіи кривой $MM'M''$ абсцисса x очень мала, $x < h$; вообразимъ, что ф-ція $f(x)$ разложена по строкѣ Маклорена, тогда

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$$

Здѣсь x очень мало, и слѣдовательно рядъ будетъ вообще быстро сходящійся, поэтому при вычисленіи его сумма можно ограничиться нѣсколькими членами, напр. если x малая дробь, то x^2 и члены съ x^3, x^4 и т.д. (будутъ) можно отбросить; тогда $y = a + bx$; это ур. представляетъ прямую и слѣд. такое приближеніе соотвѣтствуетъ замѣнѣ кривой линіи прямой, то есть хордой;

это приближение вообще недостаточно, или части h нужно было бы взять очень малыми. Положим, что мы пренебрегаем x^3 и высшими членами, тогда $y = a + bx + cx^2$ и это ур. может заменить неизвестное ур. кривой; оно представляет параболу $B^2 - 4AC = 0$, при том так как всякому x соответствует одна величина y то всякая прямая $\parallel$ оси $oy^{ов}$ пересекает параболу в одной точке, след. ось параболы $\parallel$ оси $y^{ов}$, коэффициенты a, b, c, пока неизвестны, но их можно определить, ибо парабола проходит через 3 точки M, M', M'', которых коор-ты даны. Итак при таком приближении будем рассматривать дугу кривой, как дугу параболы; на малом протяжении эта парабола будет почти сливаться со кривой; вычислим эту площадь параболы, площ. $PMM'M''P'' = \int y dx$; пределы интегрирования суть: $-h$ и h, след. $\int_{-h}^{+h} y dx =$
$= \int_{-h}^{+h} (a + bx + cx^2) dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3}\right]_{-h}^{+h} = 2ah + \frac{2}{3}ch^3 = \frac{2h}{3}(3a + ch^2)$.
Нужно найти величину $3a + ch^2$. Выразим условие прохождения кривой через 3 точки M, M' M''; имеем для точки M.... $(x = -h)$; $y_1 = a - bh + ch^2$; для точки M' $(x = 0)$, $y_1 = a$;

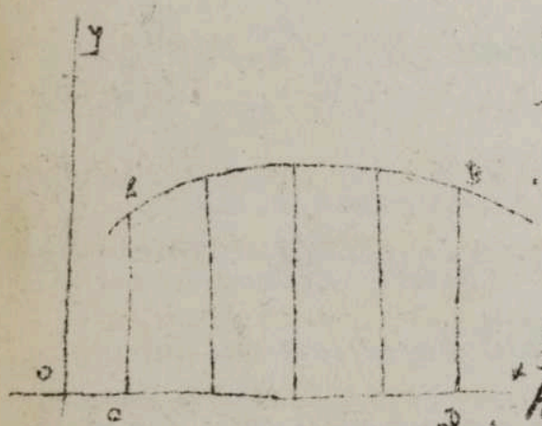
Из 3-ей стран. Площадь лемнискаты. Лемниската есть вид овала Кассини. Овалы Кассини есть множество точек, произведение расстояний которых от 2-х данных точек есть величина постоянная. Ур-ие лемнискаты есть: $(x^2 + y^2)^2 + a^2(y^2 - x^2) = 0$. Но такое ур. неудобно при вычислении площади, то преобразуя ось в полярную, получим ур: $r^2 - a^2 r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$ или $r^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2\cos 2\theta$. При $\theta = 0$; $r = a$; при увеличении θ от $0°$ до $\frac{\pi}{4}$ (для того, чтобы 2θ увеличилось от 0 до $\frac{\pi}{2}$) радиус вектор уменьшается и при $2\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 0$ и заканчивается полови. равнодействующей угла. Определим площадь

для точки $M''(x-h)$ и $y_{i+1} = a + bh + ch^2$. Помножив 1-е ур. на единицу, 2-е на 4 и 3-е на 1 и сложив их, получим: $y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1} = 6a + 2ch^2$, разделив на 2 получим получим: $3a + ch^2 = \frac{y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}}{2}$. Окончательно: пл. $P_1M_1M''P'' = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$

Применяя эту формулу ко каждой паре площадей, будем иметь, что полная площадь кривой $u = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$ или $u = \frac{h}{3}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]$. Полная формула, наз. формулой Симпсона, помогает вычислить приближенно площадь данной кривой линии. Заметим, что она применима ко приближенному определению величины определенного интеграла, ибо если положить:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = u$$

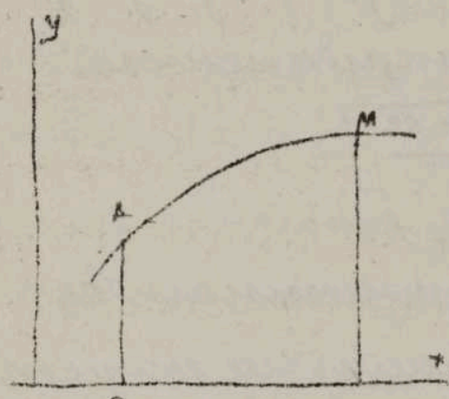
где $f(x)$ есть, по данному, что он представляет определенную площадь кривой CBD, ур. которой $y = f(x)$, при чем $OC = x_0$, а $OD = X$ и сохранен. u = пл. $CBDE$. Предполагая, что ординаты $y_0, y_1 \dots$ вычислены, т.е. ур. кривой дано и соотв. ординаты их не нужно, тогда $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 + h)$, $y_2 = f(x_0 + 2h)$ ....., при чем $h = \frac{CD}{n} = \frac{X - x_0}{n}$. Площадь $u = CEFD$ и вопрос о приближенном вычислении $\int_a^b$ сводится ко вопросу о приближенном вычислении этой площади.



Правая часть ур. при $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{5\pi}{4}$; $u_1 = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta =$
$= \frac{a^2}{2}[\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}(1 - (-1)) = \frac{a^2}{2}$; площадь $= a^2$

О спрямлении кривых.

Спрямить кривую линию, значит найти такую прямую линию которая была бы равна по длине данной кривой линии. Рассмотрим плоскую кривую, ур. которой $F(x,y)=0$ или $y=f(x)$. Возьмем на кривой постоянную точку A, при чем $x=x_0$ и другую переменную точку $M(x,y)$; требуется определить длину дуги $AM=S$. Мы знаем, что длина дуги есть ф-ия абсциссы и $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. За переменное независимое можно взять или x или y. Если за независимое переменное взять x, то $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, при чем $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ найдется из ур. кривой. Интегрируя (пределы интегрирования x_0 и x) получим:

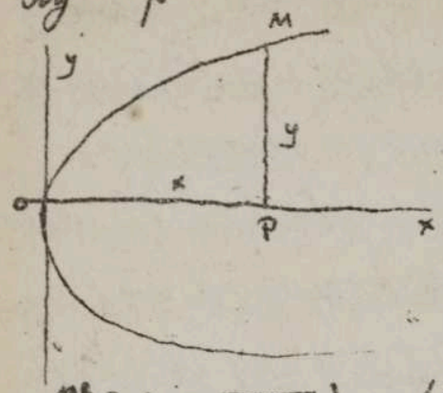


$$S=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

ибо ф-ия S такова, что при $x=x_0$, т.е. когда M совпадает с A, то $S=0$ (интеграл исчезающий). Иногда удобнее за независимое переменное взять y, тогда $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$. Величина $\frac{dx}{dy}$ найдется из ур. кривой x в ф-ии y. Интегрируя это выражение, считая, что $AC=y_0$, замечаем, что $S=0$, когда точка M совпадает с A, т.е. когда $y=y_0$ (интеграл исчезающий при $y=y_0$) получим: $S=\int_{y_0}^{y}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$.

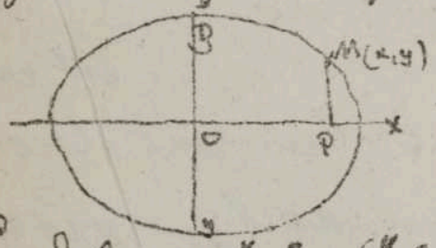
Спрямление параболы. Ур-ие ее $y^2=2px$; определить дугу от. $OM=S$; дифф. ур-ие параболы $2y\frac{dy}{dx}=2p$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$.

Здесь удобнее за независимое переменное взять y, тогда $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$. Сегодня. $s = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dy$ (пределы интегрирования по y) или $s = \frac{1}{p}\int_0^y \sqrt{y^2+p^2}\, dy$. Находим сначала неопределенный интеграл, интегрируя почастям: $\int \sqrt{y^2+p^2}\, dy =$



$= y\sqrt{y^2+p^2} - \int \frac{y^2+p^2-p^2}{\sqrt{y^2+p^2}}\, dy = y\sqrt{y^2+p^2} - \int \sqrt{y^2+p^2}\, dy +$
$+ p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}}$ или иначе: $\int \sqrt{y^2+p^2}\, dy = y\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{2} +$
$+ \frac{p^2}{2} \lg\left(y + \sqrt{y^2+p^2}\right)$. Наконец находим определенный интеграл $s = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{p^2}{2} \lg\left[\frac{y + \sqrt{y^2+p^2}}{p}\right]$.

Спрямление эллипса. Ур-ие эллипса отнесенного к центру и осям: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Возьмем на эллипсе произвольную точку $M(x,y)$ и вычислим дугу $AM = s$. По общей формуле находим $s = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (пределы интегрирования 0 и x), но из ур-ия эллипса находим, что $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$, след. $s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\, dx = \frac{1}{a^2}\int_0^x \frac{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}{y}\, dx$.
Определим теперь y в функции x; из ур-ия эллипса



имеем $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$, следовательно.
$a^2y^2 + b^4x^2 = a^2b^2 - a^2b^2x^2 + b^4x^2 = b^2(a^2 - (a^2-b^2)x^2)$, но
$a^2 - b^2 = c^2 = a^2\varepsilon^2$, где $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (эксцентриситет).
Следовательно. $a^2y^2 + b^4x^2 = b^2(a^2 - (a^2-b^2)x^2) = b^2(a^2 - a^2\varepsilon^2x^2) = a^2b^2(1 - \varepsilon^2x^2)$,
сверх того $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (из ур. эллипса). Вставляя получаем:

$$s = \frac{1}{a^2}\int_0^x \frac{ab\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \int_0^x \frac{\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$$

Этот интеграл в конечном виде нельзя, ибо приводится к эллиптическому интегралу в нормальной форме; действ. так как $x < a$, то

пусть $x = a\sin\varphi$, где φ новая переменная; тогда $dx = a\cos\varphi\,d\varphi$
$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2\varphi)} = a\cos\varphi$; когда $x = 0$, то $\varphi = 0$, при $x = x_0$
φ получает соответствующее значение, предыдущ. φ и $\cos$ подставляя получимъ:

$$S = \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{a^2 - a^2\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{a\cos\varphi}\, a\cos\varphi\, d\varphi = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

Мы получили эллиптический интегралъ второго рода $S = aE(\varepsilon, \varphi)$, гдѣ ε есть модуль, при чемъ $\varepsilon < 1$; такимъ образомъ дуга эллипса выражается эллиптическимъ интеграломъ (отс. и назв. эллиптический).
Эти интегралы вычисляются помощью преобразованія рядовъ и посредствомъ способовъ, изложенныхъ въ теоріи эллиптическихъ ф-ій. Вычисленіе этого интеграла первымъ способомъ, для чего разложимъ подынтегральную функцію въ рядъ по биному Ньютона

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi} = (1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi + \frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}}{1\cdot 2}\varepsilon^4\sin^4\varphi - \frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^6\sin^6\varphi \ldots$$

Упрощая получимъ:

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\varepsilon^4\sin^4\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\varepsilon^6\sin^6\varphi - \ldots$$

Помноживъ обѣ части равенства на $d\varphi$ и беря отъ обѣихъ частей интегралъ отъ 0 до φ, будемъ имѣть:

$$S = a\left[\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\varepsilon^4\int_0^{\varphi}\sin^4 d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\varepsilon^6\int_0^{\varphi}\sin^6\varphi\, d\varphi - \ldots\right]$$

Всѣ интегралы во второй части равенства можно вычислить (по формуламъ понижения степени) и мы получимъ рядъ, законъ составленія котораго можно опредѣлить.

Частный случай. Положимъ, что нужно опредѣлить долготу $\frac{1}{4}$ эллипса; тогда для точки $A(x = a)$, $\sin\varphi = \frac{x}{a}$

след. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ отсюда: $\frac{1}{4}S = a\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\varepsilon^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\varepsilon^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\,d\varphi \ldots\right]$

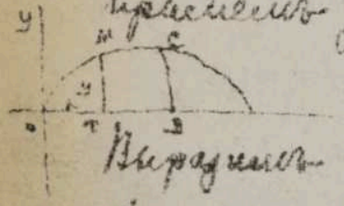
Все интегралы во второй части вычисляются по формуле:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots n}\cdot\frac{\pi}{2} \quad (n \text{ чётное}).$$

Следовательно окончательно будем иметь:

$$S = 4a\,\frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\varepsilon^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\right)\varepsilon^6 \ldots\right\}.$$

<u>Спрямление циклоиды</u> Ур-ия циклоиды суть: $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$. Возьмем на циклоиде произвольную точку M и вычислим длину дуги $AM = S$. За переменное независимое примем y, предполагая интегрирование будем вести от O к y, тогда:



$$S = \int_0^y \sqrt{\left(1 - \frac{dx}{dy}\right)}\,dy.$$

Вычислим $\frac{dx}{dy}$ из ф-ии y; находим $dx = a(1-\cos\varphi)\,d\varphi = y\,d\varphi$; $dy = a\sin\varphi\,d\varphi$; $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a\sin\varphi}$; но в Диф. исч. было выведено, что $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$, след. $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}}$, отсюда заключаем, что

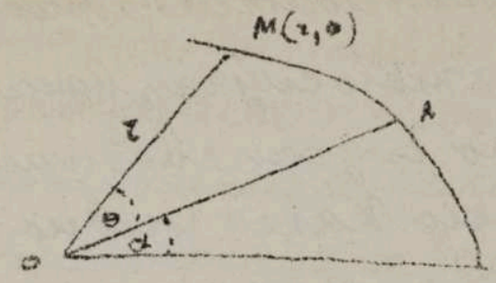
$$S = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{a}{2ay - y^2}}\,dy = \int_0^y \sqrt{\frac{2ay}{2ay - y^2}}\,dy = \sqrt{2a}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2a - y}} \text{ или.}$$

$$S = \sqrt{2a}\left[-2\sqrt{2a - y} + C\right]_0^y = -2\sqrt{2a(2a - y)} + 4a.$$ Для получения длины половины циклоиды, положим, что y совпадет с C, тогда $y = CD = 2a$; $\frac{1}{2}S = 4a$; $S = 8a$, где a радиус образующего круга.

Спрямление кривых, отнесенных к полярным координатам.

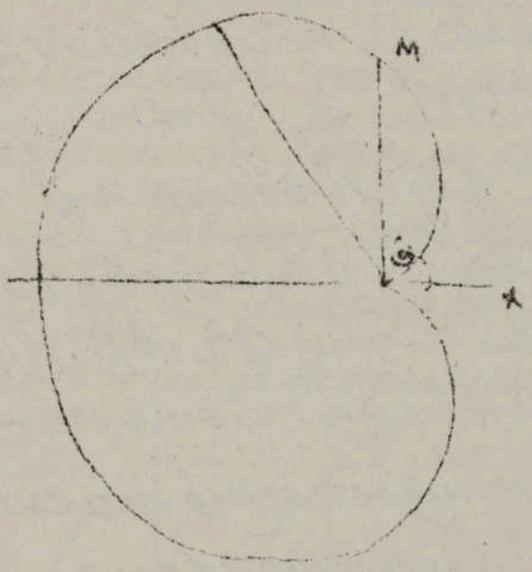
Пусть дана полярная ось; ур. кривой: $r = f(\theta)$. Положение данной подвижной точки, определяемой углом x; $M(r, \theta)$ переменной точки; дуга $AM = S$ причем S есть ф-ия

Ло и бе Дифференц. найдено, что $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.



Интегрируя обе части этого равенства и замечая, что ф-ия S такова, что при $\theta = \alpha$ и $S = 0$, т.е. когда точка M совпадает с A (интегрирование производится) получим $S = \int_{\alpha}^{\theta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$.

Спрямление кардиоиды. Ур-ие ее $r = a(1 - \cos\theta)$. Возьмем на кардиоиде движущуюся точку M и определим дугу $OM = S$. Найдем производную ур-ия кардиоиды: $\frac{dr}{d\theta} = a \sin\theta$, следовательно $r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = a^2[1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta] = 2a^2[1 - \cos\theta] = 4a^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$. Предыдущий интеграл от 0 до θ, значит: $S = 2a\int_0^{\theta} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a\left[-\cos\frac{\theta}{2} + C\right]_0^{\theta} = 4a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$. Если $\theta = 2\pi$, то длина всей кардиоиды $= S = 8a$.

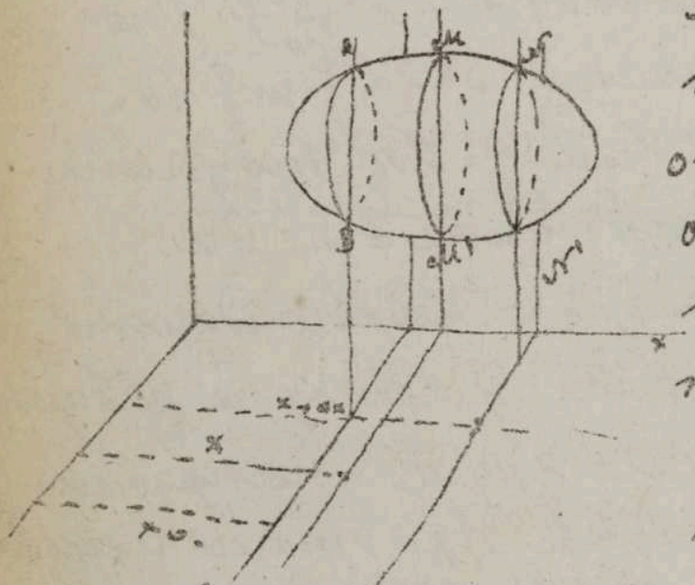


Заметим, что кардиоида есть улитка, у которой радиус образующего круга равен радиусу образующего круга. Поэтому, если круг радиуса a катится по прямой и по кругу, то мы получим в 1-м случае кардиоиду, длина которой $= 8a$, а во втором кардиоиду, длина которой $= 6a$.

О вычислении объемов помощью одного интеграла.

Вычисление объемов, отрезки которых даны или

поверхностями, требует двойного интегрирования, но есть частные случаи, где объем определяется одним интегрированием; рассмотрение этого случая важно потому, что рассмотрение общего случая сводится к частному. Рассмотрим тело какой угодно, но данной формы, отнесенное к прямоугольным осям координат в пространстве. Предположим, что нам даны, как поверхности ограничивающего тело, так и положение его относительно осей координат. Проведем произвольную постоянную плоскость $\parallel$ плоскости yz, на определенном расстоянии от начала O, положим на расстоянии x_0. Эта плоскость рассечет наше тело и в сечении получится некоторая площадь AB. На произвольном и переменном расстоянии x от начала O проведем другую секущую плоскость также $\parallel$ плоск. yz; эта плоскость также рассечет наше тело и в сечении мы получим площадь $A'B'$. Между этими двумя параллельными плоскостями будет заключаться искомый нами объем тела. Назовем объем полученного нами тела образом отрезка x, так что объем $(AB\,A'B') = v$. Так как положение тела дано, то очевидно, что объем есть вполне опре-



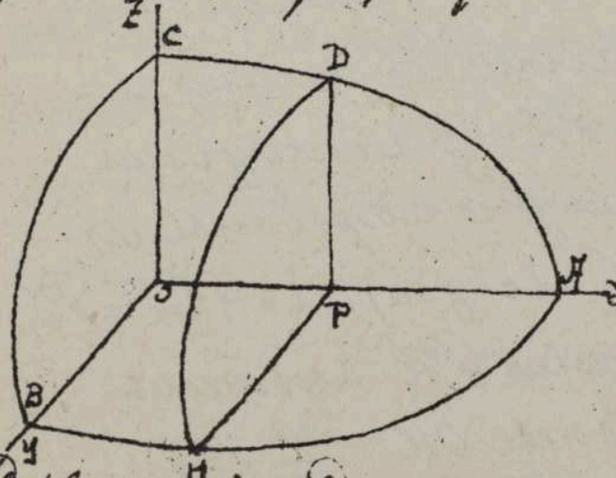
Данная ф-ія переменного расстоянія x плоскости MM' отъ плоскости yz, такъ какъ всякому опредѣленному значенію x будетъ соотвѣтствовать опредѣленное положеніе плоскости MM', а стало быть и опредѣленная величина объема v, и понятно, что съ измѣненіемъ x будетъ измѣняться и объемъ v. Словомъ v есть ф-ія x, опредѣленная геометрически. Извѣстно, что диффер. ея равенъ $dv = u\,dx$, гдѣ u есть площадь сѣченія MM'.

Объемъ эллиптической зоны и цѣлаго эллипсоида

Возьмемъ ур-іе трехоснаго эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

отложимъ главныя сѣченія; проводимъ плоскость $\parallel$ ур yz на разстояніи $OP = x$; эта плоскость разсѣчетъ эллипсоидъ по эллипсу, котораго оси $\parallel$ осямъ yz. Вычислимъ объемъ зоны между плоскостями yz и NPD. Выразимъ площадь сѣченія плоскостью $\parallel yz$ въ ф-іи x; площадь сѣченія есть величина $= u = \pi \cdot PD \cdot PN$ (извѣстная формула площади эллипса). Величина



PD есть ордината эллипса AOC, соотвѣтствующая абсциссѣ x; ур-іе эллипса есть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; (изъ ур-ія эллипсоида при $y = 0$) отсюда $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = PD$. Величина PN есть ордината эллипса, ур-іе котораго $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (изъ ур эл-ида при $z = 0$); отсюда

$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ = РК. Следовательно $u = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, так как это непрерывная ф-ия x; применяя общую формулу, полагая пределы интеграции 0 и x, получим:

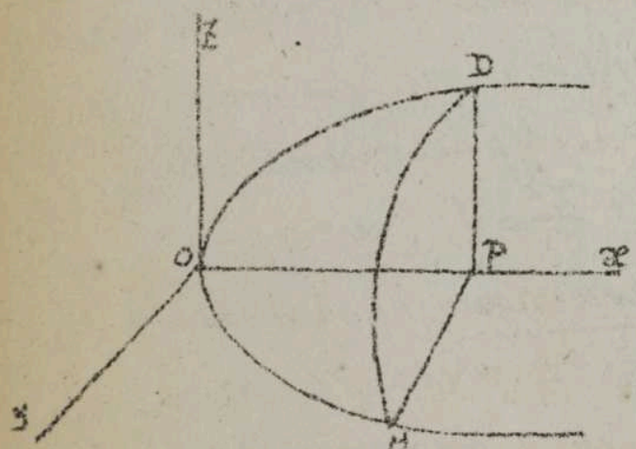
$$v = \pi bc \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Если в этой формуле положить $x = a$, т.е. когда точка Р совпадет с т. А, то получим объем $\frac{1}{2}$ эл-ида, т.е. $\frac{1}{2}v = \pi bc\left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi abc$; отсюда объем всего эллипсоида: $v = \frac{4}{3}\pi abc$.

Ищем в той формуле, как частный случай получается выражение объема эл-ида вращения; действительно, если $b = c$ (оси – оси вращения) то $v = \frac{4}{3}\pi ab^2$. Для шара $a = b = c$ и $v = \frac{4}{3}\pi a^3$, т.к. a радиус-шара.

Объем отрезка параболоида

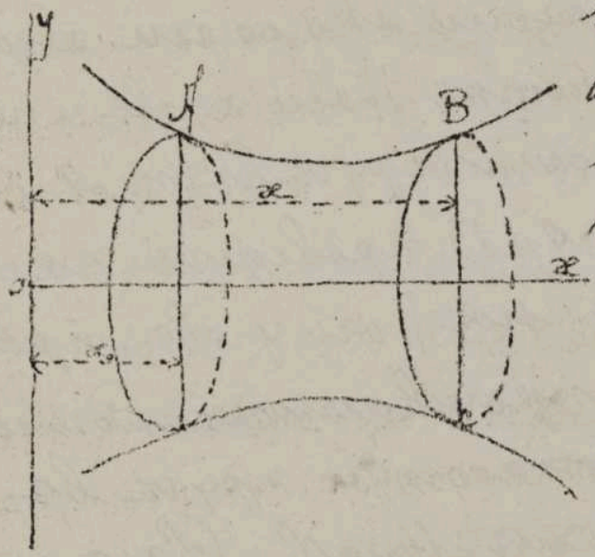
Возьмем ур. пар-ида: $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$, ось его совпадает с осью x-ов. Проведем сечение плоскостью Пер. на расстоянии $OP = x$ (сечение эллипс) и вычислим объем отрезка; площадь сечения $u = \pi \cdot PD \cdot PK$. Для получения PD возьмем ур-е параболы Oz: $\frac{z^2}{q} = 2x$ (или $y = 0$); $z = \sqrt{2qx} = PD$; для получения PK возьмем ур-е параболы OK: $\frac{y^2}{p} = 2x$; $(z = 0)$; $y = \sqrt{2px} = PK$. Следов. площадь $u = PD \cdot PK \cdot \pi = 2\pi\sqrt{pq}\, x^2$; отсюда $v = \int_0^x u\,dx = 2\pi\sqrt{p \cdot q} \int_0^a x\,dx = \pi\sqrt{pq}\, x^2$. Сравнивая объемы



отрѣзка съ объемомъ цилиндра, имѣющаго тоже основаніе и туже высоту; пусть объемъ цилиндра v'; тогда $v' = 2\pi\sqrt{p \cdot q} \cdot x^2$; видимъ, что $v' = 2v$, т.е. объемъ отрѣзка параболоида $= \frac{1}{2}$ объема цилиндра, имѣющаго одно и тоже основаніе и одну высоту

Объемы тѣлъ вращенія

Объемы тѣлъ вращенія можно опредѣлять по выведенной формулѣ. Разсмотримъ въ плоскости xy нѣкоторую кривую AB, ур. которой $y = f(x)$, пусть она вращается около оси x-въ; получимъ нѣкоторую поверхность вращенія; разсѣчемъ ее двумя плоскостями перпендикулярными къ оси x-въ, одною на разстояніи a_0 другою на разстояніи $x = OP$; площадь круга на разстояніи x назовемъ черезъ u, радіусъ круга $= BP = y$, поэтому $u = \pi y^2$, гдѣ y есть извѣстная ф-ія x, ибо у кривой ф-ія дана. Называя объемъ тѣла вращенія черезъ v между плоскостями найдемъ:



$$v = \int_{x_0}^{x} u\,dx = \pi \int_{x_0}^{x} y^2\,dx$$

Это общая формула для вычисленія объемовъ тѣлъ вращенія.

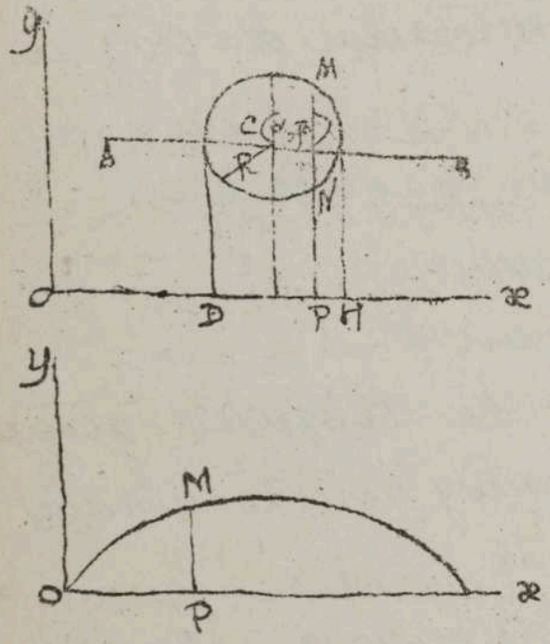
Объемъ отъ вращенія циклоиды около ея основанія. Ур-ія ея: $x = a(\varphi - \sin\varphi)$; $y = (1 - \cos\varphi)a$. Вернемся на циклоиду произвольную точку M и опредѣлимъ объемъ отъ вращенія площади OMP около оси x-въ; полагая $OP = x$, найдемъ

$v = \pi \int_0^x y^2 dx$ (прямых оси x). Введем новое переменное φ и будем интегрировать по φ; находим: $dx = a(1-\cos\varphi)d\varphi$
$v = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos\varphi)^3 d\varphi = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi) d\varphi = \pi a^3 [\varphi - 3\sin\varphi + 3\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi d\varphi]$; но $\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi$;
$\int_0^{2\pi} \cos^3\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} (1-\sin^2\varphi) d\sin\varphi = \sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}] = \pi a^3 [\frac{5}{2}\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin^3\varphi - 4\sin\varphi]$; Если $\varphi = 2\pi$, то объем, происходящий от вращения всей циклоиды $v = 5\pi^2 a^3$.

Объем тора

На плоскости xy возьмем круг, координаты его центра суть α и β, радиус R; тогда ур-ие круга будет: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.

Положим, что он вращается около оси x-ов, проведем через центр диаметр $\parallel$ оси x-ов и пересекающий круг в т. A и B. В т. A и B проведем касательные $\parallel$ оси y-ов; проведем произвольную ординату пересекающую круг в точках M и N. Рассмотрим 2 объема: один, происходящий от вращения площади $DAMBK$ около оси x-ов,



другой от вращения площади $DANBK$; разность этих объемов и даст объем тора. Назовем объем, происходящий от вращения пл. $DAMBK$ через v_1, а объем от вращения $DANBK$ через v_2, то объем тора $v = v_1 - v_2$. Из ур-ия круга имеем $y = \beta \pm \sqrt{R^2 - (x-\alpha)^2}$, так что, если $OP = x$

то получим 2 значения у: $y_1 = \beta + \sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}$ = MP и $y_2 = \beta - \sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}$ = NP. По общей формуле находим, что $v_1 = \pi \int_{\alpha-R}^{\alpha+R} y_1^2 dx$; $v_2 = \pi \int_{\alpha-R}^{\alpha+R} y_2 dx$ (пределы интеграции $\alpha-R$ и $\alpha-R$ $\alpha+R$), следовательно: $v = v_1 - v_2 =$

$$= \pi \int_{\alpha-R}^{\alpha+R} y_1^2 dx - \pi \int_{\alpha-R}^{\alpha+R} y_2^2 dx = \pi \int_{\alpha-R}^{\alpha+R} (y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_{\alpha-R}^{\alpha+R} (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)\, dx$$

Но $y_1 + y_2 = 2\beta$; $y_1 - y_2 = 2\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}$; следовательно

$$v = 4\pi\beta \int_{\alpha-R}^{\alpha+R} \sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\, dx$$

Положим $x-\alpha = x_1$; $dx = dx_1$; далее, когда:

$x = \alpha - R$; то $x_1 = -R$

когда $x = \alpha + R$, то $x_1 = +R$; отсюда получим:

$$v = 4\pi\beta \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x_1^2}\, dx_1$$

Интеграл входящий в эту формулу нам известен; он выражает квадратуру круга. Подставляя его выражение, мы найдем:

$$v = 4\pi\beta \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2-x_1^2}\, dx_1 = 4\pi\beta \left[\frac{x_1}{2}\sqrt{R^2-x_1^2} + \frac{R^2}{2} \operatorname{arc\,sin}\frac{x_1}{R} + C\right]_{-R}^{+R} = 4\pi\beta \frac{R^2}{2}\left[\operatorname{arc\,sin}(+1) - \operatorname{arc\,sin}(-1)\right] =$$

$= 2\pi\beta R^2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 2\pi^2\beta R^2$. Заметим, что площадь образующего круга $= u = \pi R^2$ и $v = u \cdot 2\pi\beta$; но $2\pi\beta$ = длине окружности радиуса β. Следовательно объем тора = площади образующего круга, умноженной на длину окружности описанной центром круга.

Об вычислении поверхности вращения

Общий вопрос о вычислении поверхности вращения требует двойного интегрирования, но в некоторых случаях поверхность вращения можно находить с помощью одного только интегрирования.

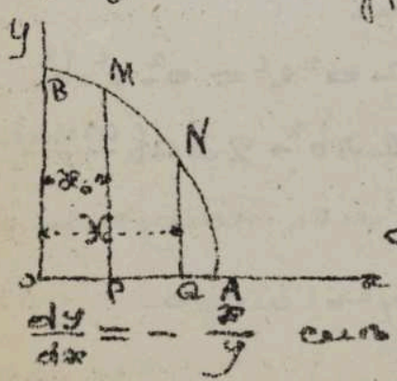
Предположим, что на плоскости xy дана кривая, уравнение которой $y = f(x)$ и на ней 2 постоянные точки A и B, абсциссы которых $OC = a$, и $OP = x$. Кривая AB вращается около оси x-ов и требуется вычислить поверхность вращения дуги AB. Вообразим, что в AB вписана ломаная линия со столь большим числом звеньев настолько малых, что каждое из них будет стягивать дугу, а она сливается с дугой AB, описывая поверхность вращения, отличающуюся от поверхности опис. с AB на весьма малую величину; поверхность ломаной поверхности можно рассматривать как сумму поверхностей, описанных ломаной линией, сколько звеньев: Δx, Δs, а каждая из них стремится к 0; вычислим поверхность описанной ломаной линией; пусть MM' есть одна из дуг; проведем ординаты MP и M'P'; координаты точки M (x, y), координаты т. M' $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Прямая MM' вращаясь около оси x-ов, описывает поверхность усеченного конуса, основания которого PP', а образующая MM', — боковая поверхность конуса α = полусумме окружностей оснований умноженной на образующую, следовательно $\alpha = \frac{1}{2}[2\pi y + 2\pi(y + \Delta y)]\, MM' = (2\pi y + \pi \Delta y)\, MM'$

Тогда точно такая же поверхность боковая поверхность произведения от вращения других прямых; сумма таких поверхно-

стей составить полную боковую поверхность тел вращения ломаной линии около оси x's и это поверх. $= \Sigma\alpha$; поверх. же целая будет предел этой суммы, т.е. что $S = \lim \Sigma\alpha$. Количество α бесконечно мало, следов. S есть предел суммы бесконечно мал. бесконечных. При вычислении такого предела, бесконечно малые сегменты поверхностей можно отбрасывать, а поэтому в выраже. $\alpha = 2\pi y_{MM'} + \Delta y \pi MM'$ второй член как бесконечно мал. высшего порядка, можно отбросить, т.е. $S = \lim \Sigma 2\pi y_{MM'} = 2\pi \lim \Sigma y_{MM'}$. Обозначим дугу кривой, отсчитываемую от точки M через S: $\text{arc}AM = S$, тогда $\text{arc}MM' = \Delta S$. При нахождении предела Σ бесконечно мал. $y_{MM'}$ можно заменить через $y_{\text{arc}}\Delta S$, так что $y_{MM'} = y_{\text{arc}MM'} = y_{\Delta S}$ ибо отнош. $\frac{\text{arc}MM'}{MM'}$ стремится к 1. Тогда $S = 2\pi \lim \Sigma y_{\Delta S}$, но вместо $y_{\Delta S}$ можно заменить через y_{ds}, ибо $\lim \frac{\Delta S}{ds} = 1$, т.е. $S = 2\pi \lim \Sigma y_{ds}$ но $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, следов. $S = 2\pi \lim \Sigma y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Во время вращения, чтобы найти всю площадь, нужно взять все дуги от x до X. Этот предел суммы, где $y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ предел. опред. ф-ии x, изобразим так: $S = 2\pi \lim \sum_{x=x_0}^{x=X} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, а это выражение есть опред. интеграл и поэтому $S = 2\pi \int_{x_0}^{X} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Это есть общая формула для вычисления поверхностей тел вращения.

Вычисление поверхности сферического пояса.

Возьмем ур-ие круга $x^2 + y^2 = R^2$ (центр в нач. коорд.) и на окружности 2 точки M и N; пусть $\text{abs}\,OQ = X$. Вычислим поверхность полученную от вращения дуги MN около оси x's.



Дифферен. ур-ие круга найдем, что $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, следов. $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{R}{y}$

Отсюда $S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \cdot \frac{R}{y} \cdot dx = 2\pi R(x - x_0) = 2\pi R h$, где $h = (x - x_0)$ есть высота зоны. И так поверхность зоны = окружности большого круга умнож. на высоту зоны.

Поверхность эллипсоида вращения

Ур-ие эллипса $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; если эллипс вращается около большой оси, то эллипсоид называется сжатым, если около малой оси, то вытянутым. Вычислим поверхность эллипсоида вращения около оси x; вычислим поверхность описываемую дугой BM. Поверхность $(BM) = S = 2\pi \int_0^x y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. (предполож. интеграция о и x). Из ур-ия эллипса $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$;

$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}$ Представим это выражение в ф-ии x. Из ур-ия эллипса $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$ следовательно $y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4b^2 - a^2b^2x^2 + b^4x^2} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}$ (ибо $a^2 - b^2 = c^2 = a^2\varepsilon^2$) Вставим получим: $S = \frac{2\pi b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}\,dx = \frac{2\pi b\varepsilon}{a}\int_0^x \sqrt{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2 - x^2}\,dx =$

$= \frac{2\pi b\varepsilon}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon^2}\arcsin\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2\right]_0^x$ (интеграл квадратуры круга) Следовательно:

$$S = \frac{2\pi b\varepsilon}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} - x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon^2}\arcsin\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)\right]$$

Чтобы получить поверхность целого эллипсоида = A, предположим, что $x = a$ Тогда получим

$\frac{1}{2}A = \frac{2\pi b\varepsilon}{a}\left[\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2}} + \frac{a^2}{2\varepsilon^2}\arcsin(\varepsilon)\right]$, но $a^2 - a^2\varepsilon^2 = a^2 - c^2 = b^2$ следов. $\frac{1}{2}A = \pi b^2 + \pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$, отсюда $A = 2\pi b^2 + 2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$

Если $\varepsilon = 0$, то $a = b$; но $\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon} = 1$ при $\varepsilon = 0$ и мы получим поверхность шара $A = 4\pi a^2$, где a радиус шара

Вычислим теперь поверхность вытянутого эллипсоида. Ось y есть ось вращения, следов. переписав x чер. y и наоборот получим формулу

$$S = 2\pi \int_{y_0}^{y} x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Вследствие симметрии поверхность всего эллипсоида $A' = 2\pi \int_{-b}^{+b} x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$. Из ур-ия эллипса находим: $\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}$, следов. $x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = x\sqrt{1+\frac{a^4y^2}{b^4x^2}} = \frac{1}{b^2}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}$; выразим теперь x чер. y; Из ур-ия эллипса находим $b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2$, следовательно

$$x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{b^2}\sqrt{b^4x^2+a^4y^2} = \frac{1}{b^2}\sqrt{a^2b^4 - a^2b^2y^2 + a^4y^2} =$$

$$= \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4+(a^2-b^2)y^2} = \frac{a}{b^2}\sqrt{b^4+c^2y^2};$$ подставив получим:

$$A' = \frac{2\pi a}{b^2}\int_{-b}^{+b}\sqrt{b^4+c^2y^2}\,dy = \frac{2\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{+b}\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+y^2}\,dy$$

Этот интеграл был нами вычислен, поэтому прямо пишем:

$$A' = \frac{2\pi ac}{b^2}\left[\frac{y}{2}\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+y^2} + \frac{b^4}{2c^2}\ln\left(y+\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+y^2}\right)+c\right]_{-b}^{+b}$$

Отсюда

$$A' = \frac{2\pi ac}{b^2}\left[b\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+b^2} + \frac{b^4}{2c^2}\ln\left\{\frac{b+\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+b^2}}{-b+\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+b^2}}\right\}\right]$$

Но $\sqrt{\frac{b^4}{c^2}+b^2} = \frac{b\sqrt{b^2+c^2}}{c} = \frac{ab}{c}$ (ибо $\sqrt{b^2+c^2} = a$) следовательно

$$A' = \frac{2\pi ac}{b^2}\cdot\frac{ab}{c} + \frac{2\pi ac}{b^2}\cdot\frac{b^4}{2c^2}\ln\left(\frac{b}{-b}\cdot\frac{-\frac{ab}{c}}{+\frac{ab}{c}}\right) =$$

$$= 2\pi a^2 + \frac{\pi ab^2}{c}\ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right) = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

Конец.

Лекціи по дифференціальному исчисленію. 1888 г.

доц. Н. А. Шапошниковъ

Дифференціальное исчисленіе для функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ

Весь курсъ дифференціальнаго исчисленія, который мы прежде разсматривали вмѣстѣ со всѣми приложеніями этого исчисленія, относился къ функціямъ одного перемѣннаго независимаго. Намъ предстоитъ теперь заняться второй частью дифференціальнаго исчисленія, дифференцированіемъ функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Прежде однако, чѣмъ вступить въ этотъ новый отдѣлъ математики, мы разовьемъ переходную, промежуточную статью, трактующую о дифференцированіи функцій, зависящихъ въ существѣ своемъ отъ одного главнаго перемѣннаго, но содержащихъ въ своемъ составѣ нѣсколько отдѣльныхъ аргументовъ.

Дифференцированіе сложныхъ функцій.

Если имѣемъ $y=f(u,v)$, гдѣ $u=F(x)$, а $v=\varphi(x)$, то функція y, зависящая отъ двухъ аргументовъ, представляющихъ функціи отъ x, называется сложной функціей.

Будемъ пока разсматривать и u и v какъ независимыя перемѣнныя и вообразимъ прежде всего такой процессъ

изменения, в которомъ изменяется одно u. Измѣненіе функціи y, происходящее отъ измѣненія одного u, мы будемъ называть частнымъ измѣненіемъ и обозначать черезъ $\Delta_u y$, такъ что $\Delta_u y = f(u+\Delta u, v) - f(u,v)$. Раздѣливъ на Δu, получимъ частное разностное отношеніе $\frac{\Delta_u y}{\Delta u} = \frac{f(u+\Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta u}$. Переходя къ предѣлу, найдемъ частную производную, которую условимся обозначать черезъ $\frac{\partial y}{\partial u}$ (съ круглой буквой ∂), такъ что $\lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u+\Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \varphi(u,v)$. До предѣла разностное отношеніе отличается отъ производной на нѣкоторое безконечно-малое α, т.е. $\frac{f(u+\Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta u} = \varphi(u,v) + \alpha$.

Подобнымъ образомъ, давая приращеніе одному v составляемъ частную производную относительно v, именно $\lim \frac{f(u, v+\Delta v) - f(u,v)}{\Delta v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \psi(u,v)$; до предѣла $\frac{f(u, v+\Delta v) - f(u,v)}{\Delta v} = \psi(u,v) + \beta$. Эти частныя производныя отыскиваются по извѣстнымъ правиламъ дифференцированія функцій одного перемѣннаго. Такъ если положимъ $y = u^v$, то $\frac{\partial y}{\partial u} = v u^{v-1}$, а $\frac{\partial y}{\partial v} = u^v \ln u$.

Обратимся теперь къ составленію выраженія полной производной отъ функціи $y = f(u,v)$. Поставимъ въ 1-е равенство $v+\Delta v$ вмѣсто v, тогда получимъ:

$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} = \varphi(u, v+\Delta v) + \alpha$. Такъ какъ безконечно малое α есть, вообще говоря, функція отъ u и v, то съ измѣненіемъ послѣднихъ и оно измѣняется и

изменённое его значение мы обозначим через α_1. Произведем сложение 2 и 3-го равенства, уничтожив в них предварительно знаменатели. Тогда получим $f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u,v) = [\varphi(u, v+\Delta v)+\alpha_1]\Delta u + [\psi(u,v)+\beta]\Delta v$. Выражение первой части соответствует уже данному процессу изменения, в котором изменяются и u и v одновременно. Это будет полное приращение функции. Возвращаясь теперь к предположению, что и u и v суть функции x, разделим обе части полученного равенства на Δx, найдем, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = [\varphi(u, v+\Delta v)+\alpha_1]\frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u,v)+\beta]\frac{\Delta v}{\Delta x}$. Переходя к пределу, т.е. приближая Δx, а следовательно также и Δu и Δv к нулю, в пределе находим $\frac{dy}{dx} = \varphi(u,v)\cdot\frac{du}{dx} + \psi(u,v)\frac{dv}{dx}$. Мы получили формулу, выражающую производную сложной функции при посредстве двух частных производных, соответствующих особым процессам изменения. Так как $\varphi(u,v) = \frac{\partial y}{\partial u}$ и $\psi(u,v) = \frac{\partial y}{\partial v}$, то предыдущую формулу можно написать иначе, именно $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$. Таким образом для составления полной производной от сложной функции, берем частную производную, считая один из аргументов постоянным, умножаем её на производную от изменяемого аргумента по независимому переменному и.

и къ этому произведенію прибавляемъ произведеніе подобныхъ же производныхъ, взятыхъ, относительно другого аргумента. Умноживъ обѣ части на dx, получимъ выраженіе полнаго дифференціала: $dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv$. Здѣсь каждое изъ произведеній частный произвѣдній на дифференціалъ соотвѣтствующаго перемѣннаго называется частнымъ дифференціаломъ. Первый изъ нихъ есть $d_u y = \frac{\partial y}{\partial u} du$, а второй $d_v y = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv$. Такимъ образомъ полный дифференціалъ равенъ суммѣ частныхъ дифференціаловъ, составленныхъ для каждаго изъ аргументовъ.

Повторимъ подобное же доказательство для функціи трехъ аргументовъ. Пусть $y = f(u,v,w)$, гдѣ $u = F(x)$, $v = \varphi(x)$ и $w = \psi(x)$. Положимъ, что дифференцируя частнымъ образомъ по одному аргументу u, мы находимъ: $\lim \frac{f(u+\Delta u, v, w) - f(u,v,w)}{\Delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} = \varphi(u,v,w)$.

При частномъ дифференцированіи по v пусть будетъ: $\lim \frac{f(u, v+\Delta v, w) - f(u,v,w)}{\Delta v} = \frac{\partial f}{\partial v} = \psi(u,v,w)$.

Наконецъ пусть также при дифференцированіи по w будетъ: $\lim \frac{f(u,v,w+\Delta w) - f(u,v,w)}{\Delta w} = \frac{\partial f}{\partial w} = \omega(u,v,w)$

Въ такомъ случаѣ разсматривая разностныя отношенія до предѣла, получимъ:

$$f(u+\Delta u, v, w) - f(u,v,w) = [\varphi(u,v,w) + \alpha]\Delta u$$

$$f(u, v+\Delta v, w) - f(u, v, w) = [\psi(u, v, w) + \beta]\Delta v$$
$$f(u, v, w+\Delta w) - f(u, v, w) = [\omega(u, v, w) + \gamma]\Delta w .$$

При этомъ α, β и γ суть безконечномалыя, обращающія-ся въ нуль α вмѣстѣ съ Δu, β вмѣстѣ съ Δv и γ вмѣстѣ съ Δw; каждое изъ этихъ безконечномалыхъ зависитъ вообще говоря отъ всѣхъ трехъ аргументовъ u, v и w. Измѣнимъ въ первомъ изъ предыдущихъ равенствъ v въ $v+\Delta v$ и w въ $w+\Delta w$, во второмъ измѣнимъ w въ $w+\Delta w$, а третье равенство оставимъ безъ измѣненія. Получимъ новыя равенства:

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) = [\varphi(u, v+\Delta v, w+\Delta w) + \alpha_2]\Delta u$$
$$f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w+\Delta w) = [\psi(u, v, w+\Delta w) + \beta_1]\Delta v$$
$$f(u, v, w+\Delta w) - f(u, v, w) = [\omega(u, v, w) + \gamma]\Delta w,$$

въ которыхъ α_2, β_1 будутъ обозначать измѣненныя значенія прежнихъ безконечномалыхъ, — все же безконечно-малыя въ прежнемъ смыслѣ. Сложеніе предыдущихъ равенствъ дастъ результатъ: $f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w) = [\varphi(u, v+\Delta v, w+\Delta w) + \alpha_2]\Delta u + [\psi(u, v, w+\Delta w) + \beta_1]\Delta v + [\omega(u, v, w) + \gamma]\Delta w$. Замѣнивъ первую часть сокращеннымъ обозначеніемъ Δy и раздѣливъ обѣ части равенства на Δx, находимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [\varphi(u, v+\Delta v, w+\Delta w) + \alpha_2]\frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u, v, w+\Delta w) + \beta_1]\frac{\Delta v}{\Delta x} + [\omega(u, v, w) + \gamma]\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Переходя теперь къ предѣлу, получимъ искомое

выражение полной производной отъ сложной функціи

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u,v,w)\cdot\frac{du}{dx} + \psi(u,v,w)\cdot\frac{dv}{dx} + \omega(u,v,w)\cdot\frac{dw}{dx} =$$

$$= \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

или выражение полнаго дифференціала

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot dv + \frac{\partial y}{\partial w}\cdot dw = \partial_u y + \partial_v y + \partial_w y.$$

Итакъ опять полный дифференціалъ сложной функціи равенъ суммѣ частныхъ дифференціаловъ.

Такимъ же образомъ теорема эта доказывается для 4хъ, 5ти и т. д. аргументовъ. Въ общемъ видѣ если $y = f(u_1, u_2 \ldots u_n)$, гдѣ $u_1 = F_1(x)$, $u_2 = F_2(x) \ldots u_n = F_n(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u_1}\cdot\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u_2}\cdot\frac{du_2}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u_3}\cdot\frac{du_3}{dx} + \ldots\ldots + \frac{\partial y}{\partial u_n}\cdot\frac{du_n}{dx} \text{ и}$$

$$dy = \partial_{u_1} y + \partial_{u_2} y + \partial_{u_3} y + \ldots\ldots + \partial_{u_n} y.$$

Чтобы выяснить примѣненіе правила для дифференцированія сложной функціи разсмотримъ частный примѣръ $y = u^v$, гдѣ u и v суть функціи xа. Это выраженіе при различныхъ процессахъ измѣненія имѣетъ разное значеніе. Если вообразимъ измѣненіе одного u, то y будетъ считаться степенью съ постояннымъ показателемъ v. Поэтому дифференцируя частнымъ образомъ по u, найдемъ: $\frac{\partial y}{\partial u} = v u^{v-1}$. Наоборотъ, при измѣненіи одного v выраженіе y нужно считать показательной

функцией съ постояннымъ основаніемъ u. Вслѣдствіе этого $\frac{\partial y}{\partial v} = u^v \ln u$. Полная же производная отъ y выразится на основаніи доказаннаго правила такъ: $\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \cdot \frac{dv}{dx}$. Этотъ результатъ можно вывести безъ примѣненія предыдущей теоремы. Логарифмируя выраженіе функціи, находимъ $\ln y = v \ln u$. Послѣ этого дифференцируемъ, получится $\frac{dy}{y} = v\cdot\frac{du}{u} + \ln u \cdot dv$. Наконецъ, помножая на y (или на u^v) и дѣля на dx, получимъ прежній результатъ: $\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$. Въ томъ случаѣ, когда выраженія u и v будутъ извѣстны, надо будетъ составить еще производныя $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$ и подставить ихъ выраженія въ предыдущую формулу.

Производныя высшихъ порядковъ сложныхъ функцій.

Положимъ дана функція $y = f(u, v)$, зависящая отъ двухъ аргументовъ u и v, которые будутъ измѣняться или независимо одинъ отъ другаго или оба будутъ функціи одного перемѣннаго x. Извѣстно, что разсматривая особые процессы измѣненія, когда измѣняется одно u или одно v, можно составить частныя производныя $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$. Оба эти выраженія суть функціи отъ u и v. Дифференцируя ихъ опять по u или v, можемъ составить частныя производныя втораго порядка: $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$, которыя условимся обозначать въ видѣ: $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$. Весьма важно доказать, что оба среднія изъ этихъ выраженій равны между собою, хотя они получаются – первое, дифференцируя у сначала по v, затѣмъ по u, а второе, дифференцируя у сначала по u, а потомъ по v. Доказать другими словами, что результатъ дифференцированія функціи по двумъ ея аргументамъ не зависитъ отъ порядка дифференцированія. Условимся ввести слѣдующія обозначенія: $\frac{\partial f}{\partial u} = \varphi(u,v)$ и $\frac{\partial f}{\partial v} = \psi(u,v)$.

Разсматривая тотъ процессъ измѣненія, когда измѣняется одно u и считая слѣдовательно у функціей одного этого перемѣннаго, составимъ въ такомъ смыслѣ разностное отношеніе и замѣнимъ его производной, соотвѣтствующей этому процессу измѣненія и отнесенной къ среднему значенію перемѣннаго; тогда получимъ:

$$\frac{f(u+\Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta u} = \varphi(u+\alpha\Delta u, v),$$

гдѣ α есть неизвѣстное число, меньшее 1. Первая часть этого равенства, или все равно вторая, представляетъ выраженіе, содержащее и и v (также и Δu). Разсматривая измѣненія одного v, составимъ разностное отношеніе для этой новой функціи относительно v; получимъ (измѣняя v на $v+\Delta v$, вычитая прежнее значеніе функціи и дѣля на приращеніе новаго перемѣннаго):

$$\frac{\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u} - \frac{f(u+\Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta u}}{\Delta v}$$

или упрощая и приравнивая разностное отношение производной, взятой при среднемъ значеніи измѣняющагося перемѣннаго, находимъ:

$$(A)\ldots\ldots \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v)-f(u+\Delta u, v)+f(u,v)}{\Delta u.\Delta v}=\varphi_v'(u+\alpha\Delta u, v+\beta\Delta v),$$

гдѣ β есть число меньшее 1, а φ_v' означаетъ производную отъ прежней второй части равенства по v. Произведемъ теперь тѣ же операціи разностнаго отношенія надъ v въ обратномъ порядкѣ, измѣняя сначала v и затѣмъ u. Подобно предыдущему получимъ:

$$\frac{f(u, v+\Delta v)-f(u, v)}{\Delta v}=\psi(u, v+\gamma\Delta v),$$

гдѣ γ меньше 1, затѣмъ выраженіе:

$$\frac{\dfrac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u+\Delta u, v)}{\Delta v}-\dfrac{f(u, v+\Delta v)-f(u,v)}{\Delta v}}{\Delta u}$$

и наконецъ равенство:

$$(B)\ldots\ldots \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u+\Delta u, v)-f(u, v+\Delta v)+f(u,v)}{\Delta v.\Delta u}=\psi_u'(u+\delta\Delta u, v+\gamma\Delta v)$$

Сравнивая формулы (A) и (B), замѣчаемъ, что первыя части равны, вслѣдствіе чего находимъ:

$$\varphi_v'(u+\alpha\Delta u, v+\beta\Delta v)=\psi_u'(u+\delta\Delta u, v+\gamma\Delta v).$$

Полученное равенство справедливо при какихъ значеніяхъ Δu и Δv и потому должно быть справедливо въ предѣлѣ того процесса измѣненія, въ которомъ Δu и Δv приближаются къ нулю, но переходя къ предѣлу находимъ: $\varphi_v'(u, v)=\psi_u'(u, v)$ или $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$, что и требовалось доказать. Такимъ образомъ сложная

функція двухъ аргументовъ имѣетъ три частныхъ производныхъ 2^{аго} порядка: $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$. Частныхъ производныхъ 3^{аго} порядка можно составить четыре, именно $\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v^2}$ и $\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}$. До сихъ поръ на u и v не было наложено никакого условія. Положимъ теперь, что эти перемѣнныя суть функціи x и будемъ разсматривать составленіе производныхъ отъ y, какъ отъ сложной функціи того же перемѣннаго. Мы знаемъ, что первая производная выражается равенствомъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx},$$

которое и выражаетъ правило дифференцированія функціи двухъ аргументовъ. Продифференцируемъ обѣ части этого равенства, принимая въ разсчетъ правило для дифференцированія произведенія и замѣтивъ, что $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$ суть сложныя функціи, а $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dv}{dx}$ простыя функціи x. Дифференцируя во второй части сначала первые множители, а потомъ вторые, получимъ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{dv}{dx}\right] + \frac{dv}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{dv}{dx}\right] + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d^2 v}{dx^2}$$

или упрощая

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Составъ первыхъ 3^{хъ} членовъ 2^{ой} части представляетъ аналогію съ квадратомъ двучлена. Если выраженія f,

и и v извѣстны, то вычисливъ отдѣльно всѣ частныя и полныя производныя, входящія во вторую часть равенства, мы получимъ выраженіе $\frac{d^2y}{dx^2}$, произведя тѣ дѣйствія, которыя во второй части указаны.

Дифференцируя предыдущее равенство и примѣняя подобно предыдущему правило дифференцированія сложныхъ функцій, найдемъ формулу, указывающую путь для вычисленія $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Дифференцированіе сложныхъ функцій 3-хъ и бо́льшаго числа аргументовъ выполняется такими же пріемами.

Дифференцированіе неявныхъ функцій

Если связь между независимымъ перемѣннымъ x и его функціей y выражается равенствомъ $F(x,y)=0$, которое не можетъ быть рѣшено относительно y, или которое мы просто не считаемъ нужнымъ рѣшать, то y называется неявной функціей x. Отысканіе производныхъ неявной функціи представляетъ прямое примѣненіе правила дифференцированія сложной функціи. Основаніемъ служитъ слѣдующее разсужденіе. Такъ какъ въ силу даннаго уравненія y есть функція x, положимъ, что если бы это было рѣшено, то оказалось бы $y=\varphi(x)$, то придавая y это значеніе надо си-

тать $F(x,y)$ сложной функцией x, входящаго явно первымъ аргументомъ и черезъ посредство втораго аргумента y. Вмѣстѣ съ этимъ F послѣ замѣны y черезъ $\varphi(x)$ обращается въ нуль при всякомъ x (потому что замѣна y черезъ $\varphi(x)$ представляла бы повѣрку (*) даннаго ур-ія). Поэтому полная производная отъ F все равно, что производная отъ постояннаго и должна быть равна нулю (послѣ замѣны y выраженіе F есть функція только по виду). Примѣняя правило дифференцированія сложной функціи двухъ аргументовъ (причемъ полагаемъ $u=x$, а $v=y=\varphi(x)$) находимъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0, \text{ откуда } \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Положимъ, напр., что дано ур-іе эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Тогда замѣтивъ, что $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, находимъ $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$, откуда по выведенной формулѣ получимъ: $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$. Возьмемъ еще ур-іе $x^3+y^3=3axy$. Здѣсь $F=x^3+y^3-3axy$. Поэтому $\frac{\partial F}{\partial x}=3(x^2-ay)$, $\frac{\partial F}{\partial y}=3(y^2-ax)$ и слѣдовательно $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$.

Если связь между независимымъ перемѣннымъ x и двумя перемѣнными y и z выражается двумя равенствами $F(x,y,z)=0$ и $f(x,y,z)=0$, которыя оставляются неразрѣшенными относительно y и z, то эти перемѣнныя считаются неявными функціями x.

(*) пропущено: „рѣшенія"

Положимъ, что рѣшенія предыдущихъ равенствъ суть $y=\varphi(x)$ и $z=\psi(x)$. Тогда $F(x,\varphi(x),\psi(x))$ и $f(x,\varphi(x),\psi(x))$ будутъ по-вид. функціями x, но послѣ сокращенія обращаются въ нули сообразно съ данными условіями. Слѣдовательно, какъ скоро при дифференцированіи равенствъ будемъ разсматривать y и z какъ функціи x, то окажется:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=0.$$

Представивъ эти равенства въ видѣ: $\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}$ и рѣшая ихъ относительно производныхъ y и z найдемъ:

$$\frac{dy}{dx}\ \frac{\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dx}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

По этимъ формуламъ, вычисливъ отдѣльно всѣ частныя производныя, найдемъ и искомыя производныя отъ y и z. Какъ напр. если даны ур-ія $x^2+y^2+z^2=k^2$ и $ax+by+cz=d$, то окажется $\frac{dy}{dx}=\frac{az-cx}{cy-bz}$ и $\frac{dz}{dx}=\frac{bx+ay}{cy-bz}$. Производныя высшихъ порядковъ неявныхъ функцій опредѣляются также безъ затрудненій. Разсматривая случай одной функціи, возьмемъ выведенное раньше ур-ie: $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ и разсматривая первую часть его какъ сложную функцію x, входящаго явно и черезъ посредство y и $\frac{dy}{dx}$, дифференцируемъ въ этомъ смыслѣ, приравнивая результатъ полнаго дифференцированія нулю, такъ какъ сама дифференцируемая функція сохраняетъ

постоянно нулевое значеніе. Выраженія $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ разсматриваемъ какъ сложныя функціи, первымъ аргументомъ которыхъ служитъ x, а вторымъ $y=\varphi(x)$. Находимъ: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$

или упрощая,—

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Если въ послѣднемъ равенствѣ замѣнимъ $\frac{dy}{dx}$ найденнымъ для него выраженіемъ, то послѣ этого найдемъ выраженіе для $\frac{d^2y}{dx^2}$. Разсматривая напр. случай эллипса, мы имѣемъ: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{2}{a^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{2}{b^2}$. Вставляя въ выведенную формулу, какъ эти выраженія такъ и $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$, получимъ $\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}\cdot\frac{b^4x^2}{a^4y^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2}=0$, откуда $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^2}$. Такъ какъ на основаніи ур-ія эллипса имѣемъ $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, то предыдущее выраженіе приводится къ виду: $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$. Случай двухъ функцій не представляетъ ничего особаго; только вычисленія будутъ значительно сложнѣе.

Функціи многихъ перемѣнныхъ.

Функціей нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ называется такое перемѣнное, измѣненіе котораго зависитъ отъ измѣненія нѣсколькихъ другихъ перемѣнныхъ, имѣющихъ между собою не связанныхъ. Если z есть функція x и y, то пишутъ $z=f(x,y)$. Въ общемъ случаѣ

выражение $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ означаетъ функцію n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Разсматривая z, можно вообразить или такіе процессы измѣненія, когда измѣняются одновременно нѣкоторые изъ независимыхъ перемѣнныхъ, или когда они измѣняются всѣ. Въ первомъ случаѣ составляемъ частныя приращенія, частныя производныя и частные дифференціалы функціи, во второмъ – полное приращеніе и полный дифференціалъ ея (полной производной понятно не можетъ быть). Такъ, если въ выраженіи $z = f(x,y)$ вообразимъ измѣненіе одного x, то выраженіе $f(x+\Delta x, y) - f($ $= \Delta_x z$ будетъ частной разностью; $\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ – частнымъ разностнымъ отношеніемъ; $\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$ $\frac{\partial z}{\partial x}$ частной производной и наконецъ $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x$ или $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx =$ $= d_x z$ частнымъ дифференціаломъ. Совершенно подобныя предыдущимъ выраженія могутъ быть составлены по отношенію къ другому перемѣнному y. Въ обоихъ случаяхъ примѣняются правила, выведенныя для функціи одного перемѣннаго, такъ какъ другое разсматривается какъ постоянное количество. Замѣтимъ, что для обозначенія частныхъ производныхъ употребляются въ интересахъ сокращенія буквы $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Подобно этому въ случаѣ

$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ вводятъ сокращенныя обозначенія $\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1$, $\frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2$ $\ldots\ldots$ $\frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$. Обратимся къ разсмотрѣнію полнаго приращенія и полнаго дифференціала функціи многихъ перемѣнныхъ. Если $z = f(x,y)$ есть функція двухъ перемѣнныхъ, то и частныя производныя отъ z суть функціи тѣхъ-же перемѣнныхъ. Введемъ на время обозначенія $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \psi(x,y)$. Такъ какъ $\lim \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \varphi(x,y)$, то до предѣла $\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \varphi(x,y) + \alpha$, гдѣ α есть безконечно-малое вмѣстѣ съ Δx. Подобно этому и $\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \psi(x,y) + \beta$, гдѣ β есть безконечно-малое съ Δy. Въ первомъ изъ предыдущихъ равенствъ замѣнимъ y черезъ $y + \Delta y$ и помножимъ обѣ части на Δx. Во второмъ помножимъ обѣ части на Δy. Получимъ вмѣсто 1го равенства: $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = [\varphi(x, y+\Delta y) + \alpha_1]\Delta x$, гдѣ α_1 означаетъ измѣненное значеніе безконечно-малаго α, относительно котораго можно предполагать, что измѣненія его зависятъ отъ измѣненія y, и вмѣсто 2го равенства $f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = [\psi(x,y) + \beta]\Delta y$. Въ первомъ изъ равенствъ сдѣлаемъ еще одно преобразованіе. Такъ какъ $\varphi(x, y+\Delta y)$ безконечно-мало отличается отъ $\varphi(x,y)$, то вмѣсто перваго изъ этихъ значеній функціи φ подставимъ другое, отнеся разницу къ безконечно-малому α_2, которое обратится отъ

этого въ другое безконечно-малое ε_2. Послѣ этого сложимъ оба равенства: $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = (\varphi(x,y)+\varepsilon_2)\Delta x$ и $f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = (\psi(x,y)+\beta)\Delta y$, отчего получимъ результатъ искомый видъ $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [\varphi(x,y)\Delta x + \psi(x,y)\Delta y] + (\varepsilon_2\Delta x + \beta\Delta y)$. Первая часть предыдущаго равенства составляетъ такъ называемое полное приращеніе функціи Z. Оно обозначается черезъ ΔZ. Во второй части мы соединимъ всѣ слагаемыя въ двѣ группы. Вторая изъ нихъ, какъ сумма произведеній безконечномалыхъ попарно представляетъ безконечномалое высшаго порядка, чѣмъ первая, и потому при переходѣ къ предѣлу на нее не обращаемъ вниманія. Первая группа, представляющая сумму произведеній частныхъ производныхъ данной функціи на приращенія или дифференціалы соотвѣтствующихъ независимыхъ перемѣнныхъ, называется полнымъ дифференціаломъ или просто дифференціаломъ функціи и обозначается черезъ dZ. Такъ обр. $dZ = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = p\,dx + q\,dy$. Точно также въ случаѣ функціи $Z = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ полнымъ дифференціаломъ условимся назыв. выраженіе: $dZ = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n = p_1 dx_1 + \ldots\ldots + p_n dx_n$, гдѣ $dx_1 \ldots dx_n$ суть приращенія или дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ. Всѣ эти приращенія $dx_1, \ldots dx_n$ мы можемъ по про-

изволу считать болье или менье близкими къ нулю. Предыдущее опредѣленіе дифференціала содержитъ въ себѣ всю теорію дифференцированія функцій многихъ перемѣнныхъ, которая просто выводится изъ него при посредствѣ тѣхъ положеній, которыя были доказаны въ теоріи функціи одного независимаго перемѣннаго. Докажемъ, что дифференціалъ функціи Z, постоянной при всякихъ измѣненіяхъ x и y тождественно равенъ абсолютному нулю и обратно, если дифференціалъ тождественно равенъ нулю, то Z есть постоянное количество. Положимъ во первыхъ, что Z есть постоянное. Тогда разсматривая измѣненія одного x, т. е. считая Z функціей одного перемѣннаго, найдемъ по свойству такихъ функцій, $\frac{\partial z}{\partial x}=0$. Точно также разсматривая Z, какъ функцію одного y, выйдетъ $\frac{\partial z}{\partial y}=0$. А вслѣдствіе этого по формулѣ $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$ заключимъ, что $dz=0$, какови-бы ни были x, y, dx и dy. Положимъ во вторыхъ, что дано $dz=0$ или $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy=0$ и что равенство это справедливо при всякихъ значеніяхъ dx и dy. Вслѣдствіе такого произвола этихъ дифференціаловъ данное условіе можетъ быть удовлетворено только тогда, когда отдѣльно $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$. А эти выводы по теоремѣ, относящейся къ функціямъ одного перемѣннаго, показываютъ, что Z не измѣняется отъ измѣненія

ни x, ни y и слѣдовательно есть постоянное количество. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что 2 функціи, различающіяся на постоянное количество равные дифференціалы и наоборотъ, если дифференціалы двухъ функцій равны, то эти функціи могутъ отличаться одна отъ другой только на постоянное количество. По опредѣленію дифференціала функціи многихъ перемѣнныхъ отысканіе его сводится къ вычисленію частныхъ производныхъ, т.е. къ примѣненію извѣстныхъ намъ правилъ дифференцированія функцій одного перемѣннаго. Положимъ, напр. что дано $z = ax_1^2 + \frac{bx_2}{x_1 x_3}$. Тогда имѣемъ $\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2ax_1 - \frac{bx_2}{x_1^2 x_3}$; $\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{b}{x_1 x_3}$ и $\frac{\partial z}{\partial x_3} = -\frac{bx_2}{x_1 x_3^2}$ и поэтому $dz = \left(2ax_1 - \frac{bx_2}{x_1^2 x_3}\right) \cdot dx_1 + \frac{b}{x_1 x_3} dx_2 - \frac{bx_2}{x_1 \cdot x_3^2} dx_3$. Разсмотримъ составленіе дифференціаловъ высшихъ порядковъ. Возьмемъ первый дифференціалъ $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$. Условимся разсматривать только равномѣрныя измѣненія x и y, при которыхъ дифференціалы dx и dy можно считать постоянными. Будемъ разсматривать выраженіе dz какъ данную функцію x и y и составимъ полный дифференціалъ его, который означимъ черезъ d^2z. Выписывая сначала выраженія частныхъ производныхъ имѣемъ: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \cdot dy$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$. Производныя $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}$ какъ извѣстно равны между собою, такъ какъ порядокъ дифференцированія не вліяетъ на результатъ. Помножая найден-

ныя выраженія частныхъ производныхъ на дифференціалы соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ и складывая найдемъ полный дифференціалъ: $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx.dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} . dy^2$. Частныя производныя 2 порядка обозначаются сокращенно: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = s$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = t$, такъ что найденное выраженіе полнаго втораго дифференціала пишется въ видѣ $dz = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2$. Выраженія 2го и высшихъ дифференціаловъ функціи многихъ перемѣнныхъ представляютъ полное сходство со степенями многочленовъ. Иногда этимъ сходствомъ пользуются для символическаго представленія высшихъ дифференціаловъ. Такъ въ случаѣ двухъ перемѣнныхъ пишутъ: $d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}.dx + \frac{\partial z}{\partial y}.dy\right)^{(2)}$, а въ случаѣ многихъ перемѣнныхъ $d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}.dx_n\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}.dx_n^2$

Сложныя и неявныя функціи многихъ перемѣнныхъ.

Положимъ, что $z = f(u,v,w)$, гдѣ u, v и w суть какія-нибудь функціи независимыхъ перемѣнныхъ x, y. Составимъ въ этомъ смыслѣ выраженіе dz. Такъ какъ при составленіи частныхъ производныхъ мы разсматриваемъ z какъ функцію одного только независимаго перемѣннаго, а для этого случая намъ извѣстно правило дифференцированія сложной функціи, то составляя частныя производныя, имѣемъ: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial y}$.

Помноживъ эти выраженія на дифференціалы соотвѣтствующихъ перемѣнныхъ dx и dy и сложивъ произведенія ихъ и найдемъ полный дифференціалъ:

$$dZ = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cdot dy$$

Замѣтимъ теперь, что этому дифференціалу можно придать весьма простой видъ. Расположивъ члены въ группы иначе, напишемъ:—

$$dZ = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot dy\right) + \frac{\partial f}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot dy\right),$$

а это можно написать въ видѣ:

$$dZ = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot dv + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot dw,$$

гдѣ du, dv, dw означаютъ полные дифференціалы функцій u, v и w. Предыдущая формула показываетъ, что какъ при одномъ такъ и при многихъ независимыхъ перемѣнныхъ дифференціалъ функціи нѣсколькихъ аргументовъ равенъ суммѣ частныхъ производныхъ этой функціи по всѣмъ ея аргументамъ, помноженныхъ на дифференціалы соотвѣтствующихъ аргументовъ. Мы видимъ, что правила составленія дифференціаловъ различныхъ порядковъ функціи многихъ перемѣнныхъ сходны съ правилами дифференцированія сложныхъ функцій многихъ аргументовъ. Выраженія первыхъ дифференціаловъ совершенно сходны. Выраженія дифференціаловъ $2^{го}$ и высшихъ порядковъ различаются, вслѣдствіе того, что въ случаѣ независимыхъ между со-

бою аргументовъ дифференціалы ихъ можно считать постоянными, а въ случаѣ аргументовъ зависимыхъ надо при дифференцированіи принимать въ расчетъ измѣняемость дифференціаловъ, отъ чего формулы усложняются. Зная правила дифференцированія сложныхъ функцій легко найти выраженія полныхъ дифференціаловъ неявной функціи. Положимъ, что дано уравненіе $F(x,y,z)=0$, въ которомъ z должно считаться неявной функціей двухъ перемѣнныхъ x и y. Первую часть этого уравненія можно на этомъ основаніи считать сложной функціей тѣхъ же перемѣнныхъ, входящихъ явно и черезъ посредство z. При томъ послѣ замѣны z его выраженіемъ черезъ x и y, выраженіе $F(x,y,z)$ тождественно равняется нулю, слѣдовательно и дифференціалъ этого выраженія также есть нуль. Такимъ образомъ имѣемъ равенство $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot dz=0$, откуда: $dz=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy$. Изъ найденнаго выраженія полнаго дифференціала мы видимъ, что частныя производныя неявной функціи опредѣляются равенствами $p=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ и $q=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Переходя къ опредѣленію втораго дифференціала z дифференцируемъ еще разъ то равенство, которое послужило къ опредѣленію dz. При этомъ дифференціалы dx и dy считаемъ постоянными, а dz перемѣннымъ. Получимъ, дифференцируя каждый членъ от-

дифференцируя: $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}dz\right)dx+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\cdot dz\right)dy+$

$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\cdot dx+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz\right)dz+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot d^2z=0$ или по упрощении:

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}dydz+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz^2+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot d^2z=0.$

Замѣнивъ въ этомъ равенствѣ dz найденнымъ для него прежде выраженіемъ мы будемъ въ состояніи на основаніи преобразованнаго равенства опредѣлить выраженіе d^2z, а вмѣстѣ съ этимъ также выраженія производныхъ r, s, t.

Иногда для неявной функціи требуется отыскать только нѣкоторыя изъ частныхъ производныхъ ея. Тогда ихъ предпочитаютъ вычислять отдѣльно. Покажемъ, какъ это дѣлается. Припомнимъ, что какъ скоро въ равенствѣ $F(x,y,z)=0$ перемѣнное z замѣняется его выраженіемъ черезъ x, y, то это равенство тождественно удовлетворяется. Предположивъ такую замѣну отнесемъ F къ процессу измѣненія, въ которомъ измѣняется одинъ x. Тогда F представляетъ сложную функцію x, имѣющей постоянно нулевое значеніе. Дифференцируя въ этомъ смыслѣ получимъ: $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=0$, откуда $p=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Подобно этому, вообразивъ измѣненіе одного y, найдемъ: $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q=0$, откуда $q=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Первое изъ предыдущихъ равенствъ продифференцируемъ отдѣльно по x и по y, принимая опять, что эти перемѣнныя входятъ какъ явно такъ и черезъ посредство z. Въ первомъ случаѣ получимъ дифференцируя отдѣльно каждый членъ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}p+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}p\right)p+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot r=0 \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} p + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} p^2 + \frac{\partial F}{\partial z} r = 0.$$

Во вторыхъ случаѣ имѣемъ сначала: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} q + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} q\right) p + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot s = 0$ или по упрощеніи: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} q + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} p + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} pq + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot s = 0$. Подобно этому, дифференцируя то равенство, изъ котораго мы опредѣляли q, сначала по x, а затѣмъ отдѣльно по y, получимъ во 1-мъ: $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} p + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} p\right) q + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot s = 0$ или $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} p + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} pq + \frac{\partial F}{\partial z} s = 0$ и во 2-мъ: $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} q + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} q\right) q + \frac{\partial F}{\partial z} t = 0$ или: $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} q + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} q^2 + \frac{\partial F}{\partial z} t = 0$.

Между выведенными нами четырьмя равенствами, которыя служатъ къ вычисленію r, s и t, равенства 2-е и 3-е совершенно одинаковы. Этого и нужно было ожидать, такъ какъ производная $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ будетъ одна и та же, въ какомъ-бы порядкѣ дифференцированія она ни была получена. —

Теорема Тейлора для функцій со многими перемѣнными.

Возьмемъ для простоты функцію двухъ перемѣнныхъ, именно:

$$u = f(x, y).$$

Дадимъ перемѣннымъ x и y приращенія h и k и будемъ разсматривать функцію: $f(x+h, y+k)$. Формула Тейлора должна дать разложеніе въ рядъ этой функціи по цѣлымъ положительнымъ и возрастающимъ степенямъ приращеній h и k, т. е. должна дать рядъ такого вида:

$$f(x+h, y+k) = A + Bh + Ck + Dh^2 + Ehk + Hk^2 + Gh^3 + Ih^2k + Pk^2h + \cdots$$

В этомъ ряду одночленъ A не зависитъ отъ h и k; два слѣдующіе члена 1го измѣренія относительно h и k, затѣмъ три члена 2го измѣренія, 4е члена 3го и т.д. Чтобы получить это разложеніе употребимъ выводъ Коши. Перемѣнимъ сначала h на ht и k на kt, гдѣ t произвольный множитель и будемъ разсматривать выраженіе:

$$f(x+ht, y+kt) = u = \varphi(t),$$

причемъ u будемъ считать нѣкоторою функціею перемѣннаго t. Если разложимъ теперь эту функцію по строкѣ Маклорена, по степенямъ буквы t, то этотъ рядъ будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ расположенъ и по степенямъ h и k, такъ какъ t входитъ въ эту функцію не иначе какъ помноженнымъ на h или k. Затѣмъ, когда мы получимъ это разложеніе, мы сдѣлаемъ въ немъ $t=1$ и тогда будемъ имѣть разложеніе въ рядъ выраженія: $\varphi(1) = f(x+h, y+k)$, т.е. мы получимъ такимъ образомъ требуемое разложеніе. Выполнимъ на самомъ дѣлѣ это вычисленіе. Формула Маклорена намъ извѣстна, она даетъ:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \varphi''(0)\cdot\frac{t^2}{2} + \varphi'''(0)\frac{t^3}{1\cdot2\cdot3} + \cdots\cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)\cdot t^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n} + R$$

Положивъ здѣсь $t=1$, получимъ:

$$\varphi(1) = f(x+h, y+k) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{1\cdot2} + \frac{\varphi'''(0)}{1\cdot2\cdot3} + \cdots\cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1\cdot2\cdot3\cdots n} + R_I \quad \cdots\cdots (\alpha),$$

гдѣ R_I означаетъ то, во что должно обратиться R, когда сдѣлаемъ въ немъ $t=1$, но такъ какъ по формулѣ Лагранжа имѣемъ:

$$R = \frac{t^{n+1}}{1\cdot2\cdot3\cdots(n+1)}\cdot\varphi^{(n+1)}(\theta t),$$

то если положимъ $t=1$, найдемъ:

$$R_I = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n+1)}, \text{ гдѣ } 0 \leqslant \theta < 1.$$

Равенство (a) должно дать искомое разложение, только въ немъ намъ надо предварительно опредѣлить $\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0)\ldots$ Съ этою цѣлью опредѣлимъ предварительно $\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)\ldots$ и потомъ сдѣлаемъ въ нихъ $t=0$. Вычисляя $\varphi(t), \varphi'(t)\ldots$ положимъ, что $x+ht=p$ и $y+kt=q$, тогда будемъ имѣть:

$$\varphi(t) = u = f(p,q).$$

Дифференцируемъ по t нѣсколько разъ это выраженіе, разсматривая p и q какъ функціи t. По правилу функціи отъ функціи получимъ:

$$\varphi'(t) = \frac{du}{dp}\cdot\frac{dp}{dt} + \frac{du}{dq}\cdot\frac{dq}{dt}, \text{ (*) но производныя } \frac{dp}{dt}=h \text{ и } \frac{dq}{dt}=k,$$

а потому напишемъ, что:

$$\varphi'(t) = \frac{du}{dp}\cdot h + \frac{du}{dq}\cdot k.$$

Беремъ вторую производную, причемъ du надо дифференцировать и по p и по q, разсматривая ихъ какъ функціи t, получимъ:

$$\varphi''(t) = \frac{d^2u}{dp^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dpdq}\cdot h\cdot k + \frac{d^2u}{dq^2}k^2.$$

Точно также найдемъ третью производную:

$$\varphi'''(t) = \frac{d^3u}{dp^3}\cdot h^3 + 3\frac{d^3u}{dp^2dq}h^2k + 3\frac{d^3u}{dpdq^2}hk^2 + \frac{d^3u}{dq^3}k^3.$$

Также получимъ и производныя высшихъ порядковъ. Разсматривая законъ составленія этихъ производныхъ замѣчаемъ, что найденныя выраженія подобно тому какъ было замѣчено при составленіи полныхъ дифференціаловъ, могутъ быть представлены символически слѣдующимъ образомъ. Вторую производную можно написать

(*) Указавъ раньше различіе полныхъ и частныхъ производныхъ, для чего мы, какъ ду прочемъ, и обозначали ихъ различными буквами d, мы теперь для простоты объясненія оставимъ только одну характеристику d.

въ видѣ : $\varphi'(t) = \left(\frac{du}{dp}h + \frac{du}{dq}k\right)^{(2)}$, гдѣ выраженіе во второй части должно возвести въ квадратъ, но вмѣсто du^2 надо въ результатѣ поставить d^2u. Подобно этому можно написать :

$$\varphi'''(t) = \left(\frac{du}{dp}h + \frac{du}{dq}\cdot k\right)^{(3)}.$$

Разумѣя при этомъ, что нужно возвести во второй части тоже самое въ кубъ, но въ результатѣ вездѣ писать d^3u вмѣсто du^3. Этотъ законъ можетъ быть провѣренъ и на производныя высшихъ порядковъ, такъ что будемъ имѣть вообще символическую формулу :

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(\frac{du}{dp}h + \frac{du}{dq}\cdot k\right)^{(n)}.$$

Если положимъ теперь въ этой общей формулѣ послѣдовательно $n = 1, 2, 3 \ldots$, то и получимъ всѣ послѣдовательныя производныя, причемъ во второй части двучленъ возводится въ степень n по формулѣ бинома Ньютона и вездѣ вмѣсто du^n пишутъ d^nu. Наконецъ согласимъ $t = 0$, тогда $u = f(x, y) = u$ и такъ какъ p приростомъ обращается въ x, а q, въ y, то будемъ имѣть :

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)}.$$

Давая въ этой формулѣ n послѣдовательно равныя $1, 2, 3 \ldots$ получимъ $\varphi'(0), \varphi''(0), \varphi'''(0) \ldots$, т.е всѣ искомыя величины. Вставляя всѣ эти выраженія въ ур-іе (a) будемъ имѣть такое разложеніе: $f(x+h, y+k) =$

$$= u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(2)} + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(3)} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{(n)} + R_n.$$

Это и есть формула Тейлора для функціи съ двумя перемѣнными. Если развернемъ на самомъ дѣлѣ всѣ эти степени, то и получимъ окончательно разложеніе такого вида, которое искали, т.е.

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dx}\cdot h + \frac{du}{dy}\cdot k + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \frac{d^2u}{dxdy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right) + \ldots\ldots + R_1$$

Остается написать выражение остатка R_1, которое как мы видели выше есть: $R_1 = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{1.2.3\ldots(n+1)}$. Чтобы определить $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ возьмем сначала $\varphi^{(n)}(t)$ и изменим в нем n на $n+1$, а вместо t поставим θ и тогда для $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ получим такое выражение:

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{du}{dp}\cdot h + \frac{du}{dq}\cdot k\right)^{(n+1)} \text{ и потому}$$

$$R_1 = \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\left(\frac{du}{dp}h + \frac{du}{dq}k\right)^{(n+1)}$$

Здесь $u = f(p,q)$, причем $p = x + \theta h$, а $q = y + \theta k$.

Хотя мы сделали вывод теоремы Тейлора только для функций двух переменных, но по ходу доказательства видно, что тот-же вывод применяется и ко функции с каким угодно числом переменных. Возьмем функцию нескольких переменных:

$$f(x, y, z \ldots\ldots m) = u$$

Для нее будем иметь такое разложение по формуле Тейлора:

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) = u + \left(\frac{du}{dx}\cdot h + \frac{du}{dy}\cdot k + \frac{du}{dz}l + \ldots\ldots\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}\cdot k + \frac{du}{dz}l + \ldots\right)^{(2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{du}{dx}\cdot h + \frac{du}{dy}\cdot k + \frac{du}{dz}\cdot l + \ldots\right)^{(n)} + R_1$$

Здесь прибавились только новые линии члены, формула же осталась та же. Эту формулу можно также написать сокращенно следующим образом. Приращения $h, k, l \ldots$ суть произвольные величины, и мы вместо них можем взять поэтому дифференциалы переменного независимого, т. е. положить:

$$h = dx,\quad k = dy,\quad l = dz \text{ и т. д.}$$

и если сверх того из 2ой части равенства перенесем и в 1ую то по-

получимъ: $f(x+dx, y+dy, z+dz, \dots) - f(x, y, z \dots) = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \dots$

$\dots + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz \dots\right)^{(2)} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n}\left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz \dots\right)^{(n)} + R_x$

Припомнимъ выраженіе полнаго дифференціала функціи; оно есть:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \dots,$$

а полный дифференціалъ $n^{\text{-аго}}$ степени равенъ той же суммѣ, возведенной въ $n^{\text{ую}}$ символическую степень, т.е.

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \dots\right)^{(n)}$$

Замѣтивъ это, мы можемъ написать формулу Тейлора, такимъ образомъ:

$$f(x+dx, y+dy, z+dz, \dots) - f(x, y, z, \dots) = du + \frac{d^2u}{2} + \frac{d^3u}{2.3} + \dots + \frac{d^nu}{2.3 \dots n} + R_x$$

Въ этомъ видѣ теорема Тейлора показываетъ, какъ полное приращеніе функціи составляется изъ ея послѣдовательныхъ полныхъ дифференціаловъ различныхъ порядковъ. Въ этомъ видѣ формула Тейлора для функціи со многими перемѣнными имѣетъ то же самое внѣшнее изображеніе, какъ и для функціи съ однимъ перемѣннымъ, только здѣсь du, d^2u, d^3u .... означаютъ полные дифференціалы функціи. Этимъ объясняется значеніе полныхъ дифференціаловъ различныхъ порядковъ для функцій со многими перемѣнными. Какъ въ функціяхъ съ однимъ перемѣннымъ приращеніе функціи составляется изъ послѣдовательныхъ ея дифференціаловъ, такъ и въ функціяхъ со многими перемѣнными полное приращеніе функціи такимъ же образомъ составляется изъ ея полныхъ послѣдовательныхъ дифференціаловъ.

О наибольших и наименьших значениях функции со многими переменными независимыми.

Возьмем функцию нескольких переменных независимых.

$$u = f(x, y, z \ldots\ldots).$$

Наибольшим значением или maximum'ом такой функции называется значение большее всех смежных ея значений, смежными же называются здесь значения, получаемыя из разсматриваемаго через безконечномалыя изменения переменных независимых в положительную или отрицательную сторону; поэтому, если $f(x, y, z \ldots)$ есть maximum, то должно быть:

$$f(x, y, z \ldots\ldots) > f(x+h, y+k, z+l, \ldots\ldots),$$

где $h, k, l \ldots$ суть безконечномалыя положительныя или отрицательныя и при том произвольныя, так что в частности они могут быть и нулями. Наименьшим же значением или minimum'ом функции называется значение меньшее всех смежных значений, так что если $f(x, y, z \ldots)$ есть minimum, то

$$f(x, y, z \ldots\ldots) < f(x+h, y+k, z+l, \ldots\ldots).$$

Если будем разсматривать следующую разность:

$$f(x+h, y+k, z+l \ldots\ldots) - f(x, y, z \ldots\ldots)$$

то можем сказать, что разность эта в случае maximum'а будет < 0, а в случае minimum'а также разность будет > 0, т. е.

$f(x+h, y+k, z+l, \ldots\ldots) - f(x, y, z \ldots\ldots) < 0$ для maximum'а

и $f(x+h, y+k, z+l, \ldots\ldots) - f(x, y, z, \ldots\ldots) > 0$ для minimum'а.

причемъ каждое изъ этихъ неравенствъ должно удовлетворяться при всевозможныхъ значеніяхъ безконечномалыхъ приращеній $h, k, l \ldots$ какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ. Безконечномалыя $h, k, l \ldots$ суть произвольныя приращенія перемѣнныхъ независимыхъ, слѣдовательно это суть дифференціалы перемѣнныхъ независимыхъ и мы можемъ полагать, что $h = dx$, $k = dy$, $l = dz$ и т.о.; и тогда первая часть неравенства можетъ быть представлена по формулѣ Тейлора слѣдующимъ образомъ:

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) - f(x, y, z \ldots) = du + \frac{d^2u}{2} + \ldots + R.$$

Здѣсь du есть полный дифференціалъ перваго порядка разсматриваемой функціи, такъ что $du = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \ldots$ и вообще $d^n u$, т.е. полный дифференціалъ $n^{\text{аго}}$ порядка можетъ быть представленъ такой символической формулой:

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \ldots\right)^{(n)},$$

гдѣ символическая степень (n) означаетъ, что нужно возвести эту сумму въ (n) степень по извѣстному способу и въ результатѣ вездѣ писать $d^n u$, вмѣсто du^n. Затѣмъ, если въ послѣдней формулѣ положимъ $n = 1, 2, 3 \ldots$, то и получимъ всѣ послѣдовательные полные дифференціалы $du, d^2u, d^3u \ldots$

Обратимся теперь къ равенству, выражающему приращеніе функціи по формулѣ Тейлора. Во второй части этого равенства мы имѣемъ сумму безконечно-малыхъ различныхъ порядковъ; первый

членъ 1^го порядка, второй - 2^го, третій - 3^го и т.д. Первый членъ есть безконечномалое низшаго, т.е. 1^го порядка, а мы знаемъ, что сумма всѣхъ остальныхъ членовъ составитъ безконечномалое только второго порядка и вслѣдствіе чего при приближеніи безконечномалыхъ h, k, l... къ 0. первый членъ превзойдетъ по абсолютной величинѣ сумму всѣхъ остальныхъ членовъ въ произвольно большое число разъ. Поэтому при достаточномалыхъ h, k, l... знакъ всей второй части будетъ одинаковъ со знакомъ перваго члена, а слѣдовательно и знакъ всей разности: $f(x+h, y+k\ldots) - f(x,y\ldots)$ будетъ одинаковъ со знакомъ du.

Но разсматривая выраженіе du мы видимъ, что въ него входитъ h, k... въ первыхъ степеняхъ и вслѣдствіе этого du не можетъ сохранять своего знака при всевозможныхъ значеніяхъ h, k, l... Въ самомъ дѣлѣ, если измѣнимъ h, k, l... на $-h, -k, -l, \ldots$, то знакъ du измѣнится и слѣдовательно если $du \neq 0$, то съ измѣненіемъ знаковъ при h, k, l..... знакъ du, а слѣдовательно и знакъ разности: $f(x+h, y+k\ldots) - f(x,y\ldots)$ будетъ мѣняться, а отсюда прямо слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ функція $f(x,y,z\ldots)$ не будетъ ни maximum'омъ, ни minimum'омъ, ибо при maximum'ѣ эта разность должна быть всегда меньше 0, а при minimum'ѣ всегда больше 0, а потому, если $du \neq 0$, то функція не имѣетъ ни maximum'а, ни minimum'а.

Отсюда заключаемъ обратно, что функція $f(x,y,z\ldots) =$ и можетъ быть maximum'омъ или minimum'омъ только тогда, когда $du = 0$.

Напишемъ послѣднее условіе подробнѣй: оно будетъ:

$$\frac{du}{dx}\cdot h + \frac{du}{dy}\cdot k + \frac{du}{dz}\, l + \ldots\ldots = 0.$$

Раздѣлимъ разсматриваемое равенство на h, причемъ положимъ, что $\frac{k}{h} = m$, $\frac{l}{h} = n \ldots$, тогда получимъ: $\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} m + \frac{du}{dz}\cdot n + \cdots = 0$. Замѣтимъ, что здѣсь количества $m, n \ldots$ представляютъ отношенія двухъ безконечномалыхъ совершенно произвольныхъ и другъ отъ друга не зависящихъ, а такое отношеніе можетъ быть равно всякому конечному числу положительному или отрицательному; поэтому количества $m, n \ldots$ будутъ совершенно произвольныя, которымъ можно приписывать всевозможныя значенія отъ $+\infty$ до $-\infty$ и при всевозможныхъ значеніяхъ $m, n \ldots\ldots$, вышенаписанное равенство должно имѣть мѣсто, а слѣдовательно въ частномъ случаѣ и при $m = 0$, $n = 0 \ldots$; но тогда должны имѣть: $\frac{du}{dx} = 0$. Отнявъ этотъ членъ въ предыдущемъ равенствѣ, напишемъ:

$$\frac{du}{dy} m + \frac{du}{dz}\, n + \cdots\cdots = 0.$$

Положимъ теперь $m = 1$, а $n = 0, \ldots$, мы найдемъ, что должно быть

$$\frac{du}{dy} = 0. \text{ и т. д.}$$

Словомъ разсматриваемое нами равенство можетъ существовать только тогда, когда всѣ частныя производныя отдѣльно равны 0, т. е. $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, $\frac{du}{dz} = 0 \ldots\ldots$ Этихъ уравненій будетъ столько, сколько перемѣнныхъ содержитъ функція u. Поэтому рѣшивъ эти ур-ія, мы опредѣлимъ величины всѣхъ перемѣнныхъ и можемъ сказать, что только при этихъ значеніяхъ перемѣнныхъ функція u можетъ получить значеніе maximum'a или minimum'a

Если условія: $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{du}{dy}=0$, $\frac{du}{dz}=0$.... соблюдаются, то переходимъ къ разсмотрѣнію d^2u; такъ какъ на основаніи равенства

$$f(x+h, y+k, z+l, \dots)-f(x, y, z \dots)=\frac{1}{2} d^2u+\frac{1}{2.3} d^3u \dots$$

знакъ этой разности зависитъ отъ знака d^2u. Если $d^2u=+$, то найденное значеніе f есть minimum этой функціи, если же $d^2u=-$ то- maximum ея. Можетъ случиться, что d^2u тождественно обращается въ нуль; тогда изслѣдованіе вопроса, какъ и въ функціяхъ одного перемѣннаго, требуетъ изученія свойствъ высшихъ дифференціаловъ.

Посмотримъ, какимъ путемъ можно опредѣлить знакъ члена d^2u. Разсмотримъ функцію двухъ перемѣнныхъ $f(x,y)=u$ и положимъ, что x_0, y_0 суть именно тѣ значенія перемѣнныхъ, при которыхъ $f(x,y)=u$ будетъ maximum'омъ или minimum'омъ

Тогда: $f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{1.2.}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}k.h+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.k^2\right)+\dots$

Опредѣлимъ соотношеніе, которое должно существовать между частными производными $2^{\text{аго}}$ порядка для того, чтобы выраженіе $d^2u=d^2f$ сохраняло одинъ и тотъ-же знакъ при всякихъ значеніяхъ безконечномалыхъ h и k. Представимъ выраженіе $d^2f=d^2u$ въ такомъ видѣ:

$$d^2f=k^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\left(\frac{h}{k}\right)^2+2.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{h}{k}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right].$$

Замѣнивъ $\frac{h}{k}$ черезъ p и положивъ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=B$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=C$, найдемъ: $d^2f=\frac{k^2}{1.2}\left[Ap^2+Bp+C\right]$ ..... (a).

Для того, чтобы знакъ трехчлена: $Ap^2+2Bp+C$ не зависѣлъ отъ p

которое можно считать вполне произвольным, нужно только, чтобы корни этого трехчлена были мнимы. Докажем это, для чего преобразуем трехчлен:

$$Ap^2+2Bp+C = A\left[p^2+2.\frac{B}{A}p+\frac{C}{A}\right] = A\left[p^2+2.\frac{B}{A}p+\frac{B^2}{A^2}-\frac{B^2}{A^2}+\frac{C}{A}\right] =$$

$$= A\left[\left(p+\frac{B}{A}\right)^2-\frac{B^2-AC}{A^2}\right].$$

Если $B^2-AC>0$, то знак — перед вторым членом в скобках есть знак окончательный, и все выражение, заключенное в скобки будет менять свой знак с изменением величины p. Пока первый член меньше второго $\frac{B^2-AC}{A^2}$, оно будет отрицательно, когда же первый член $\left(p+\frac{B}{A}\right)^2$ сделается больше второго, оно переменит знак минус на +. Поэтому, чтобы d^2f имело постоянный знак, необходимо, чтобы соблюдалось неравенство $B^2-AC<0$, потому что в этом случае выражение, заключенное в скобки, представляет сумму положительных количеств и сохраняет знак + при всяких действительных значениях h и k. При этом знак d^2f определяется знаком выражения $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Следовательно, если соблюдается условие: $B^2<AC$ или $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, то рассматриваемое значение функции f co. maximum, если $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ имеет знак минус, и minimum, если выражение $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ имеет знак плюс.

Заметим, что вместо того, чтобы определять знак $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ мы можем определять знак $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, потому что на основании предыдущего неравенства произведение $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ положительно

изъ чего заключаемъ, что производныя $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ имѣютъ одинаковые знаки.

Примѣръ. Требуется построить параллелипипедъ такъ, чтобы сумма трехъ его измѣреній была равна a и объемъ былъ-бы наибольшій.

Если обозначимъ черезъ x, y, z три измѣренія параллелипипеда, то найдемъ:

$$x+y+z=a \quad \text{и} \quad v=x.y.z.$$

Есть функція собственно двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, потому что перемѣнныя x, y и z связаны между собою однимъ уравненіемъ. Изъ этого уравненія опредѣляемъ z въ функціи x и y и вставляемъ полученный результатъ въ выраженіе v: Найдемъ: $v=xy(a-x-y)$. Дифференцируемъ функцію v, сначала по x, а потомъ по y и полученныя частныя производныя приравниваемъ нулю, находимъ:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=y(a-x-y)-xy=ay-2xy-y^2=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=x(a-x-y)-xy=ax-2xy-x^2=0$$

и изъ этихъ уравненій находимъ x и y:

$$\begin{array}{l|l} a-2x-y=0\,; \quad a-2y-x=0 & x=\frac{a}{3} \\ y=a-2x\,; \quad 3x-a=0 & y=a-2x=\frac{a}{3} \end{array} \Bigg| \; z=a-x-y=\frac{a}{3}.$$

Рѣшенія же $x=0$ и $y=0$, какъ не соотвѣтствующія вопросу, нами отброшены. Чтобы убѣдиться, что найденныя выраженія соотвѣтствуютъ maximum'y или minimum'y

функціи v, составляемъ выраженія $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, замѣняемъ въ нихъ x, y, z черезъ $\frac{a}{3}$, будемъ имѣть во первыхъ:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y = -\frac{a}{3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2y = -\frac{2}{3}a$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2x = -\frac{2}{3}a$$

и во вторыхъ: $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{4a^2}{9}$, отсюда видно, что условіе $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ въ этомъ случаѣ соблюдается и кромѣ того $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -$, слѣдовательно $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$ и $z = \frac{a}{3}$ соотвѣтствуютъ maximum'у функціи v, а потому искомый параллелепипедъ есть кубъ, ребро котораго $= \frac{a}{3}$.

Обратимся теперь къ функціямъ трехъ перемѣнныхъ.

Положимъ, что имѣемъ функцію $F(x, y, z)$, первый дифференціалъ которой равенъ нулю при $x = a$, $y = b$ и $z = c$. Составимъ выраженіе втораго дифференціала, называя приращеніе x^a черезъ h, y^a черезъ k и z^a — черезъ l, найдемъ:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} hl + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} kl + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} l^2.$$

Введемъ для краткости слѣдующія обозначенія: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = A$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = B$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = C$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = D$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = E$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = F$, $\frac{h}{e} = p$ и $\frac{k}{e} = q$.

Что касается p и q, то они неопредѣленны, потому что h, k и l, какъ приращенія независимыхъ перемѣнныхъ суть совершенно произвольныя дѣйствительныя количества.

При новыхъ обозначеніяхъ будемъ имѣть:

$$d^2F = l^2\left[Ap^2 + 2Dpq + Bq^2 + 2Ep + 2Fq + C\right]$$

Так как l действительно, то l^2 положительно и потому свойство сохранять свой знак зависеть отъ такого же свойства выраженія: $Ap^2+2Dpq+Bq^2+2Ep+2Fq+C$ или $Ap^2+2(Dq+E)p+Bq^2+2Fq+C$. Чтобы послѣднее выраженіе сохраняло свой знакъ независимо отъ значенія p, необходимо, чтобы корни его относительно p были мнимы, а для этого должно существовать слѣдующее соотношеніе между коэфиціентами:

$$(Dq+E)^2 < A(Bq^2+2Fq+C).$$

Это неравенство можно привести къ виду:

$$ABq^2+2AFq+AC-D^2q^2-2DEq-E^2>0 \text{ или } (AB-D^2)q^2+2(AF-DE)q+AC-E^2>0$$

Изъ этого видно, что первая часть предыдущаго неравенства, независимо отъ значеній q, должна сохранять $+$, что можетъ быть только въ томъ случаѣ, когда удовлетворяются слѣдующія два условія

$$(AF-DE)^2 < (AB-D^2)(AC-E^2) \text{ и } AB>D^2,$$

откуда слѣдуетъ еще, что $AC>E^2$. Послѣднія условія показываютъ, что производныя A, B и C имѣютъ одинакіе знаки. Выражая найденныя условія въ полной формѣ, получимъ

$$\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z}\right)^2 < \left[\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z}\right)^2\right] \ldots (I);$$

$$\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial y^2} \ldots (II)$$

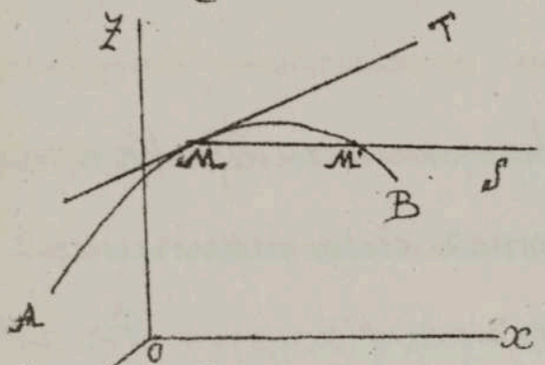
Эти условія будутъ соблюдаться или нѣтъ, смотря потому, соотвѣтствуютъ или не соотвѣтствуютъ данныя значенія перемѣнныхъ a, b и c maximum'у или minimum'у функціи. Если условія соблюдаются и одна изъ производныхъ 2го пор. отрицат., то имѣемъ дѣло съ maximum'омъ, если же положительна, то съ minimum'омъ.

„Приложенія дифференціальнаго исчисленія къ Геометріи"—

О касательныхъ къ кривымъ въ пространствѣ. Уравненіе нормальной плоскости.

Разсмотримъ въ пространствѣ кривую, отнесенную къ тремъ осямъ координатъ; кривая опредѣляется какъ пересѣченіе 2 поверхностей, ур-ія которыхъ суть: $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$. Въ эти два ур-ія входятъ 3 перемѣнныхъ: одно независимое и два его неявныя функціи; такъ, если x независимое, то y и z суть функціи x. Кривую въ пространствѣ можно также представить еще 3-мя ур-іями, причемъ 3 координаты x,y,z будутъ выражены въ функціяхъ 4-аго независимаго t: что можно получить, опредѣливши изъ ур-ій: $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$ y и z въ функціяхъ x-а и положивши, затѣмъ, что и само x есть функція какого-нибудь перемѣннаго t, т.е. что $x=\psi_1(t)$ послѣднее можно сдѣлать на томъ основаніи, что x, какъ независимое перемѣнное, можетъ измѣняться какъ угодно; затѣмъ можемъ взять t за независимое и вслѣдствіе измѣненія t будетъ измѣняться и x. Принявъ это, найдемъ, что такъ какъ y и z суть опредѣленныя функціи x, то теперь они функціи t и притомъ совершенно опредѣленныя, если функція $\psi_1(t)$ выбрана и найдемъ $y=\psi_2(t)$ и $z=\psi_3(t)$. Эти 3 ур-ія представляютъ

кривую въ пространствѣ, потомучто каждому опредѣленному значенію t соотвѣтствуютъ опредѣленныя значенія x, y и z и слѣдовательно опредѣленная точка M на кривой AB. Съ измѣненіемъ t точка перемѣщается и описываетъ кривую AB. Такое выраженіе кривой употребляется въ Механикѣ, гдѣ t означаетъ время и послѣднія 3 ур-ія опредѣляютъ движеніе точки въ пространствѣ, описывающей траекторію AB.



Черт. 1.

Въ послѣдующихъ разсмотрѣніяхъ будемъ разсматривать 3 координаты x, y и z какъ функціи независимаго t; но мы не будемъ опредѣлять самый видъ этихъ функцій, т. е. не будемъ назначать функціи $\varphi(t)$, оставляя ее произвольной. При такомъ разсмотрѣніи получается та выгода, что всѣ три координаты будутъ функціи t и такъ какъ въ вычисленіе будутъ входить и ихъ дифференціалы $dx, dy, dz, d^2x \ldots$, то всѣ формулы будутъ симметричны относительно координатъ. Этого не было бы, если-бы взяли одну изъ координатъ за независимое перемѣнное, ибо если x независимо, то dx = постоянному и $d^2x = 0$, $d^3x = 0 \ldots$, слѣдовательно дифференціалы выше 1го порядка отъ x не входили-бы въ вычисленія.

Пусть величинѣ t соотвѣтствуютъ координаты x, y, z точки M на кривой. Измѣнимъ t на $t + \Delta t$, координаты будутъ $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Онѣ опредѣляютъ безконечно-близкую точку M' на кривой (черт. 1.). Проведемъ секущую MM', напишемъ ея ур-іе, какъ прямой, проходящей черезъ 2 точки,

оно будетъ: $X-x=\frac{\Delta x}{\Delta z}(Z-z)$ и $Y-y=\frac{\Delta y}{\Delta z}(Z-z)$, гдѣ X, Y и Z суть текущія координаты. Чтобы перейти отъ сѣкущей къ касательной, положимъ, что Δt стремиться къ 0, тогда точка M' стремиться совпасть съ точкой M и въ предѣлѣ сѣкущая MS обратится въ касательную MT. Посмотримъ, во что обратятся ур-ія касательной; опредѣлимъ $\lim \frac{\Delta x}{\Delta z}$, раздѣливъ числителя и знаменателя на Δt, находимъ: $\lim \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}=\frac{dx}{dz}$; также и $\lim \frac{\Delta y}{\Delta z}=\frac{dy}{dz}$; слѣдовательно ура касательной будутъ:

$$X-x=\frac{dx}{dz}(Z-z) \text{ и } Y-y=\frac{dy}{dz}(Z-z) \cdots\cdots (a.)$$

или написавъ ихъ вмѣстѣ, будемъ имѣть:

$$\boxed{\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}}$$

Назовемъ черезъ α, β, γ углы, дѣлаемые касательной съ осями, тогда по извѣстнымъ формуламъ имѣемъ:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};\ \cos\beta=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};\ \cos\gamma=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};$$

или замѣтивъ, что дифференціалъ дуги кривой, оканчивающейся въ точкѣ M' есть $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, имѣемъ $\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$, $\cos\beta=\frac{dy}{ds}$ и $\cos\gamma=\frac{dz}{ds}$.

Уравненія касательной могутъ быть представлены еще въ другой формѣ. Возьмемъ ур-ія касательной (a). Для опредѣленія угловыхъ коэффиціентовъ должно дифференцировать ура кривой. Возьмемъ дифференціалы этихъ ур-ій и раздѣлимъ ихъ на dz:

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{df}{dz}=0 \cdots (1) \text{ и } \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{dz}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{d\varphi}{dz}=0 \cdots (2).$$

Отсюда найдемъ $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{dy}{dz}$ и вставимъ въ ур-ія касательной. Слѣдовательно для полученія уравненій касательной мы должны исключить $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{dy}{dz}$ изъ 4 ур-ій; но результатъ исключенія будетъ

одинъ и тотъ же, какъ бы мы его не производили, т.е. въ томъ смыслѣ одинъ и тотъ же, что два ур-ія, которыя получатся въ результатѣ будутъ однозначущи съ двумя полученными другимъ способомъ. Въ нашемъ случаѣ исключеніе будетъ проще, если найдемъ $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{dy}{dz}$ изъ ур-ій касательной и потомъ вставимъ ихъ въ дифференціальныя уравненія. Изъ ур-ій касательной имѣемъ:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{X-x}{Z-z} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Y-y}{Z-z}.$$

Вставивъ эти два выраженія въ ур-ія (1) и (2) и умноживъ на $(Z-z)$, получимъ

$$\frac{df}{dx}(X-x) + \frac{df}{dy}(Y-y) + \frac{df}{dz}(Z-z) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{dx}(X-x) + \frac{d\varphi}{dy}(Y-y) + \frac{d\varphi}{dz}(Z-z) = 0.$$

Въ этихъ ур-іяхъ входятъ координаты X, Y, Z произвольной точки касательной, слѣдовательно они представляютъ касательную въ пространствѣ, ибо они первой степени; слѣдовательно каждое отдѣльно представляетъ плоскость, а пересѣченіе этихъ плоскостей опредѣляетъ касательную. —

<u>Нормальной плоскостью</u> называется плоскость, проходящая черезъ точку прикосновенія и перпендикулярная къ касательной. —

Уравненіе ея, какъ плоскости, проходящей черезъ точку M, будетъ:

$$\cos\alpha(X-x) + \cos\beta(Y-y) + \cos\gamma(Z-z) = 0$$

потому что α, β, γ — углы, образуемые перпендикуляромъ къ плоскости съ осями. Вставивъ ихъ выраженія, получимъ:

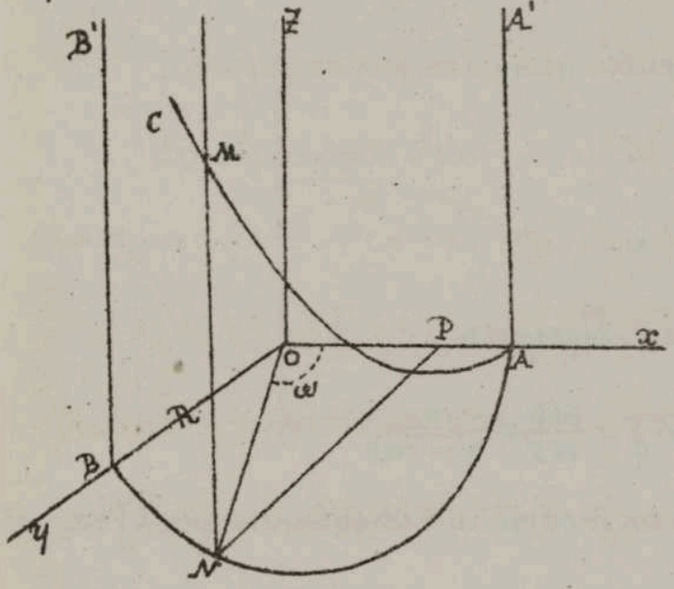
$$\frac{dx}{ds}(X-x) + \frac{dy}{ds}(Y-y) + \frac{dz}{ds}(Z-z) = 0 \quad \text{или}$$

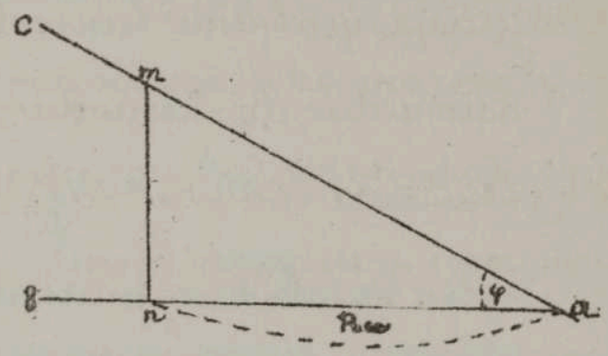
$$\boxed{(X-x)dx + (Y-y)dy + (Z-z)dz = 0}$$

Это и есть уравненіе нормальной плоскости въ простѣйшемъ видѣ.

Для примѣра разсмотримъ винтовую линію

Вообразимъ цилиндрическую поверхность; ось ея совпадаетъ съ осью $Z^{овъ}$, а направляющая кругъ въ плоскости (XY), центръ котораго вначалѣ. Возьмемъ произвольный плоскій уголъ $=\varphi$ и плоскость этого угла будемъ накладывать на цилиндрическую поверхность, обертывая цилиндръ такъ, чтобы вершина съ точкой A, сторона ab ошбала дугу AB; тогда сторона ac рас-





положится на цилиндрической поверхности кривой AC, которая и есть винтовая линія. Такъ какъ плоскость угла не ограничена, то и винтовую линію надо представлять безконечной, понятно, что винтовая линія пойдетъ и книзу отъ плоскости XY. Составимъ ур-іе кривой. Пусть радіусъ круга $=R$; возьмемъ на винтовой линіи точку M, изъ нея опускаемъ на XY перпендикуляръ MN, N соединяемъ съ точкой O; пусть уголъ $\angle NOP=\omega$. Изъ чертежа имѣемъ:

$$x=R\cos\omega \text{ и } y=R\sin\omega.$$

Для полученія Z замѣтимъ, что $\text{arc}\,NA=R\omega$. На плоскости угла ac отложимъ по сторонѣ ab.... $R\omega=an$; проведемъ перпендикуляръ mn. Понятно, что $mn=MN=Z$. Изъ $\triangle amn$ имѣемъ: $Z=R\omega\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi=m=\text{const}$. Имѣемъ

$$\boxed{x=R\cos\omega,\ y=R\sin\omega;\ z=Rm\omega}$$

Эти три уравненія представляютъ линію въ пространствѣ, и есть

переменное независимое и всякому ω соответствует определенная точка винтовой. Можно исключить ω, а именно:

$$z = R m \omega \ldots\ \omega = \frac{z}{Rm} \text{ и } x = R\cos\frac{z}{Rm} \text{ и } y = R\sin\frac{z}{Rm}.$$

Эти два уравнения также представляют винтовую линию.

Определить направление касательной к винтовой в точке M. Дифференцируя уравнение винтовой в прежней форме, находим:

$dx = -R\sin\omega\, d\omega$; $dy = R\cos\omega\, d\omega$; $dz = Rm\, d\omega$ и $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$

$(\sin^2\omega + \cos^2\omega + m^2)\, d\omega^2$; $ds = R\sqrt{1+m^2}\, d\omega$.

Косинусы углов касательной с осями будут:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = -\frac{\sin\omega}{\sqrt{1+m^2}};\ \cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{1+m^2}};\ \cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Последняя формула показывает, что $\cos\gamma = \text{const}$ и следовательно $\angle\gamma = \text{const}$, т. е. во всех точках касательная имеет один и тот же угол с осью Oz. Можно определить:

$m = \operatorname{tg}\varphi$; $\cos\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi)$ и следовательно $\gamma = 90^\circ - \varphi$,

т. е. угол, образуемый касательной с плоскостью XY будет дополнительный и равен φ. Легко было бы написать уравнения касательной линии и нормальной плоскости.

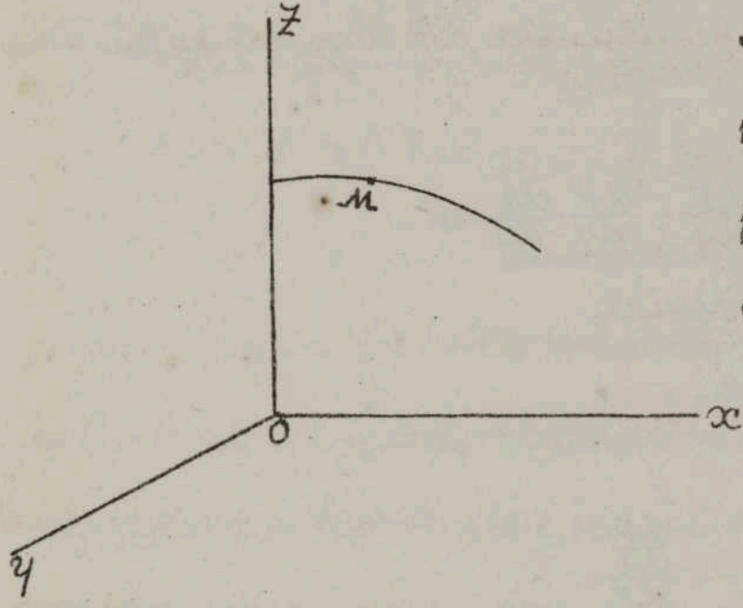
Касательная плоскость и нормальная линия к кривой поверхности.

Рассмотрим произвольную поверхность, отнесенную к трем прямоугольным осям координат. Уравнение ея есть:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Возьмем произвольную точку M, координаты которой x, y, z. —

Касательной плоскостью къ поверхности въ данной точкѣ называется геометрическое мѣсто касательныхъ прямыхъ линій, проведенныхъ къ различнымъ кривымъ, проходящимъ черезъ эту точку по данной поверхности. Это опредѣленіе требуетъ доказательства, что геометрическое мѣсто касательныхъ будетъ плоскость, а не коническая поверхность.



При выводѣ уравненія касательной плоскости будетъ доказано, что и геометрическое мѣсто касательныхъ есть плоскость. Чтобы получить произвольную касательную линію, проходящую черезъ точку M; проведемъ черезъ эту точку произвольную поверхность, пересѣченіе которой съ данной дастъ произвольную кривую, лежащую на данной поверхности; пусть ур-іе другой поверхности будетъ: $\varphi(x,y,z)=0$, тогда, если ур-іе 1-ой поверхности есть: $F(x,y,z)=0$, кривая представится совокупностью 2-хъ ур-ій: $\varphi(x,y,z)=0$ и $F(x,y,z)=0$. Уравненіе касательной линіи къ этой кривой въ точкѣ M будутъ:

$$\frac{dF}{dx}(X-x)+\frac{dF}{dy}(Y-y)+\frac{dF}{dz}(Z-z)=0 \text{ и } \frac{d\varphi}{dx}(X-x)+\frac{d\varphi}{dy}(Y-y)+\frac{d\varphi}{dz}(Z-z)=0.$$

Уравненія эти представляютъ двѣ плоскости, пересѣченіе которыхъ дастъ касательную. Если мы для полученія различныхъ кривыхъ будемъ измѣнять видъ функціи φ, тогда изъ этихъ 2-хъ плоскостей будетъ измѣняться только вторая; первая же не содержащая функціи φ, будетъ постоянно одна и таже и въ этой 1-ой плоскости будутъ

заключаться всѣ касательныя, проведенныя къ различнымъ кривымъ, проходящимъ черезъ точку M; слѣдовательно она и есть касательная плоскость и ур-іе ея къ кривой $F(x,y,z)=0$ въ точкѣ (x,y,z), будетъ:

$$\boxed{\frac{dF}{dx}(X-x)+\frac{dF}{dy}(Y-y)+\frac{dF}{dz}(Z-z)=0}$$

Это ур-іе иногда пишутъ такъ: ур-іе поверхности берутъ сначала и принимаютъ x и y за независимыя перемѣнныя, а z ихъ функціей. Дифференцируя по x и y, получимъ:

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0 \text{ и } \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0$$

Обыкновенно берутъ слѣдующія обозначенія:

$$\frac{dz}{dx}=p \text{ и } \frac{dz}{dy}=q,$$

тогда будемъ имѣть, что

$$p=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}} \text{ и } q=-\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}.$$

Возьмемъ уравненіе касательной плоскости и раздѣлимъ его на $\frac{dF}{dz}$, получимъ:

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}}(X-x)+\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}(Y-y)+(Z-z)=0$$

или такъ $-p(X-x)-q(Y-y)+(Z-z)=0$ или

$$\boxed{Z-z=p(X-x)+q(Y-y).}$$

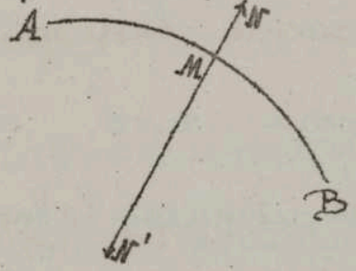
<u>Нормальной линіей</u> называется прямая, проходящая черезъ точку прикосновенія и перпендикулярная касательной плоскости. Уравненія этой прямой могутъ быть написаны, какъ ур-іе прямой, проходящей черезъ данную точку и перпендикулярной данной плоскости:

$$\frac{X-x}{\frac{dF}{dx}}=\frac{Y-y}{\frac{dF}{dy}}=\frac{Z-z}{\frac{dF}{dz}} \text{ иначе } \frac{X-x}{-p}=\frac{Y-y}{-q}=\frac{Z-z}{1}.$$ Означимъ черезъ α,β,γ углы, дѣлаемые нормалью съ $3^{мя}$ осями. На основаніи формулъ Аналитической Геометріи:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},\ \cos\beta=\frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},\ \cos\gamma=\frac{\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$ или иначе:

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\ ;\quad \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\ .$$

Въ этихъ формулахъ передъ корнемъ подразумѣвается (±); эти два знака соотвѣтствуютъ двумъ направленіямъ нормальной, считая отъ точки соприкосновенія. Если MN дѣлаетъ уголъ α, то $MN' = 180-\alpha$ и косинусы имѣютъ равныя и съ обратными знаками.—



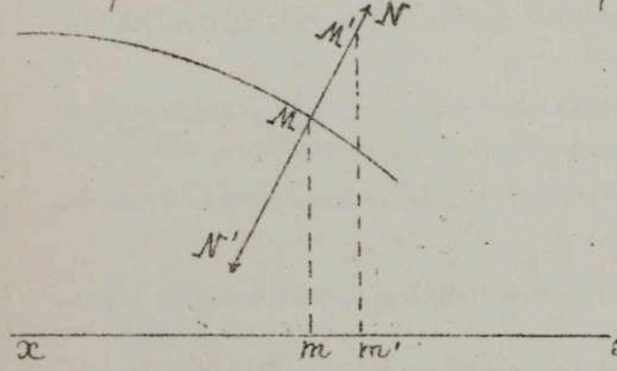
Въ нѣкоторыхъ вопросахъ Геометріи бываетъ необходимо различать направленія нормальныхъ. Для этого нужно различить двѣ стороны поверхности. Пусть данная поверхность.... $F(x,y,z)=0$. Будемъ функцію, стоящую въ первой части разсматривать отдѣльно $F(x,y,z)=u$. Тогда эта функція для всякой произвольной точки пространства будетъ имѣть опредѣленную величину. Она будетъ равна 0 только для точекъ лежащихъ на поверхности. Если точка (x,y,z) не лежитъ на поверхности, то въ этой точкѣ функція u будетъ имѣть величину положительную или отрицательную. Обыкновенно бываетъ такъ, что функція по одну сторону поверхности имѣетъ величину >0, а по другую <0; тогда та сторона поверхности, для которой $F(x,y,z)>0$ называется внѣшней, а для которой $F(x,y,z)<0$ — внутренней. Если въ нѣкоторой точкѣ, лежащей по одну сторону поверхности $u>0$, то и для всѣхъ точекъ, лежащихъ по ту же сторону поверхности $u>0$. Это очевидно потому, что функція не можетъ перемѣнить свой знакъ иначе, какъ обращаясь въ 0, а въ 0 она обращается тогда, когда перейдетъ съ точки (x,y,z),

на другую сторону поверхности.

Рассмотрим поверхность эллипсоида..... $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. Обозначимъ первую часть черезъ u. Если возьмемъ точку близкую къ центру, т.е (x,y,z) весьма малыми, то $u<0$; напротивъ, если возьмемъ точку, удаленную отъ центра, т.е. x,y,z весьма велики, то $u>0$, такъ что поверхность эллипсоида разсѣкаетъ поверхность пространство на двѣ части: внѣшнюю гдѣ $u>0$ и внутреннюю..... $u<0$; на самой поверхности.... $u=0$.

Будемъ называть <u>внѣшней нормалью</u> — нормаль, идущую во внѣшнюю сторону, и <u>внутренней</u> .... нормаль, идущую во внутреннюю сторону. Пусть MN внѣшняя нормаль и $u>0$, MN'.. внутренняя и $u<0$.

Отложимъ по внѣшнюю сторону $MM'=\varepsilon>0$. Координаты точки M'....



x',y',z'. Для нея будетъ $F(x',y',z')>0$. Назовемъ черезъ α,β,γ углы, дѣлаемые внѣшней нормалью съ осями, тогда x точки M' получится, прибавивъ къ x точки M проэкцію MM' на ось $x^{ов}$..... $mm'=\varepsilon\cos\alpha$; тогда $x'=x+\varepsilon\cos\alpha$; также $y'=y+\varepsilon\cos\beta$; $z'=z+\varepsilon\cos\gamma$ и по условію имѣемъ:

$$F(x+\varepsilon\cos\alpha,\ y+\varepsilon\cos\beta,+z+\varepsilon\cos\gamma)>0$$

Первую часть разложимъ по строкѣ Тейлора:

$F(x,y,z)+\varepsilon\left(\frac{dF}{dx}\cos\alpha+\frac{dF}{dy}\cos\beta+\frac{dF}{dz}\cdot\cos\gamma\right)+$членыъ высшими степенями $\varepsilon>0$. Здѣсь $F(x,y,z)=0$, ибо точка на поверхности; такъ какъ ε безконечно мало, то въ этой суммѣ первый членъ какъ безконечно-малое низшаго порядка будетъ превосходить по абсолютной величинѣ сумму всѣхъ

остальныхъ и знакъ суммы одинаковъ сознакомъ 1-го члена, а потому:

$$\varepsilon\left(\frac{dF}{dx}\cos\alpha+\frac{dF}{dy}\cos\beta+\frac{dF}{dz}\cos\gamma\right)>0.$$

Опустимъ ε, ибо $\varepsilon>0$ и вставивъ вмѣсто косинусовъ ихъ выраженія, найдемъ:

$$\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}{\pm\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}>0.$$

Числитель положителенъ, а потому для внѣшняго направленія нормали въ формулахъ, дающихъ косинусы, передъ корнемъ надо принять (+), а для внутренняго знакъ (−).

Составленіе ур-ія касательной плоскости для данной поверхности не представляетъ никакого затрудненія. Напр. поверхность эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Пусть первая часть ..... F, тогда имѣемъ:

$$\frac{dF}{dx}=+\frac{2x}{a^2};\ \frac{dF}{dy}=+\frac{2y}{b^2};\ \frac{dF}{dz}=+\frac{2z}{c^2}.$$

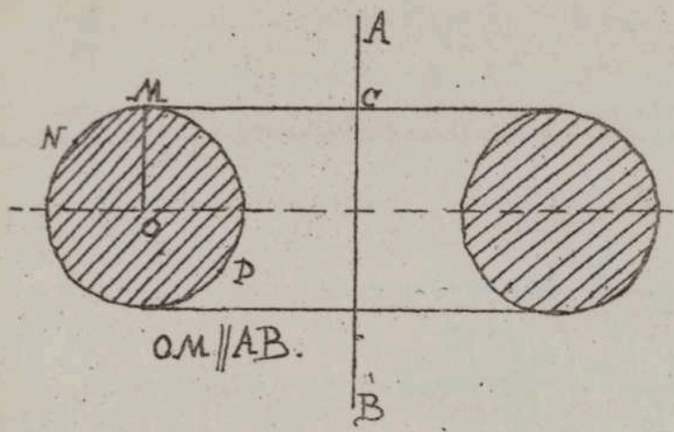
Вставимъ въ уравненіе касательной плоскости, найдемъ:

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0 \text{ или}$$

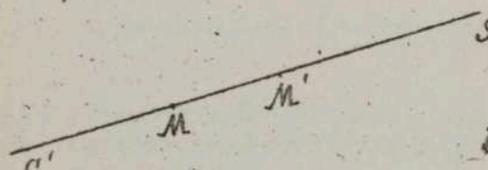
$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Разсмотримъ, какъ можетъ быть расположена касательная плоскость относительно поверхности; она можетъ касаться въ одной точкѣ (для выпуклой поверхности), можетъ касаться по линіи кривой или прямой. Возьмемъ для примѣра поверхность тора, — это суть поверхность вращенія, происходящая отъ вращенія круга около прямой. Очевидно, если проведемъ касательную въ точкѣ M, то касательная плоскость коснется

по цѣлой окружности. Касательная въ точкѣ N прикоснется въ одной точкѣ и касательная въ точкѣ P, взятой на внутренней сторонѣ, пересѣчетъ поверхность.



Обратимъ вниманіе на линейчатыя поверхности, образующіяся движеніемъ прямой въ пространствѣ. Черезъ каждую точку такой поверхности можетъ быть проведена по крайней мѣрѣ одна прямолинейная образующая SS'; слѣдовательно эта прямая есть одна изъ линій,

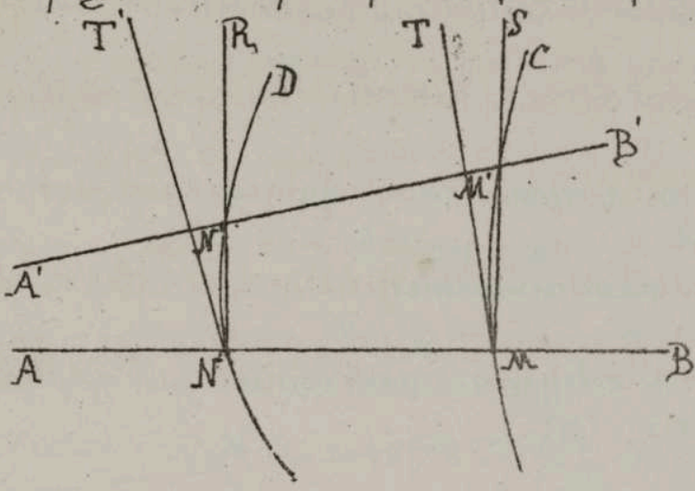


проходящихъ черезъ точку M на поверхности и касательная плоскость плоскость должна заключать касательную линію къ этой линіи; но касательная къ прямой, очевидно, есть сама прямая, потомучто если возьмемъ безконечно-близкую точку M', то, сѣкущая MM' сливается съ линіей. Отсюда заключаемъ, что касательная плоскость должна проходить черезъ образующую SS'.

Линейчатыя поверхности бываютъ двухъ родовъ: развивающіяся и Косыя. Развивающіяся поверхности бываютъ тогда, когда двѣ безконечноблизкія образующія могутъ быть разсматриваемы какъ лежащія въ одной плоскости и въ этомъ случаѣ касательная плоскость къ поверхности во всѣхъ точкахъ образующей будетъ одна и та же.

Пусть двѣ смежныя образующія поверхности будутъ AB и A'B'. Возьмемъ на AB точку M и на конечномъ разстояніи отъ нея точку N. Проведемъ черезъ M произвольную кривую по поверхности MC,

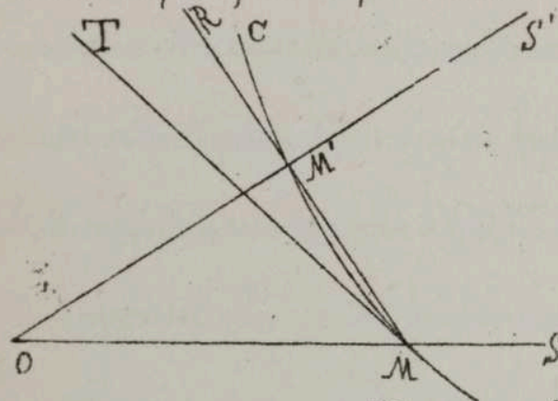
которая пересѣчетъ смежную образующую A'B' въ точкѣ M'; такъ же и черезъ N..... кривую ND, которая пересѣчетъ A'B' въ точкѣ N'. Соединимъ M съ M' и N съ N'. Если черезъ AB проведемъ двѣ плоскости: одну черезъ сѣкущую MS, а другую черезъ сѣкущую NR и если эти двѣ плоскости образуютъ между собой безконечно малый уголъ, стремящійся къ 0 по мѣрѣ приближенія образующей A'B' къ AB, то двѣ безконечноблизкія образующія AB и A'B' можно разсматривать какъ лежащія въ одной плоскости. Въ этомъ случаѣ, если образующая A'B' стремится совпасть съ AB, двѣ плоскости SMB и RNB стремятся къ совпаденію. Общій предѣлъ ихъ будетъ касательная плоскость къ поверхности одна и та же какъ для точки M, такъ и для точки N. Эта плоскость будетъ проходить черезъ AB и черезъ двѣ касательныя: 1) MT къ кривой MC и черезъ 2) NT' къ кривой ND. Такимъ образомъ въ двухъ точкахъ M и N касательныя плоскость будетъ одна и та же; линейчатая поверхность, обладающая такимъ свойствомъ называется развивающейся; въ ней касательная плоскость соприкасается съ поверхностью по всей длинѣ одной образующей.



Напротивъ, если двѣ плоскости SMB и RNB проходящія черезъ AB, причемъ первая проведена черезъ сѣкущую MS, а вторая черезъ сѣкущую NR, образуютъ конечной величины уголъ, то говорятъ, что двѣ безконечноблизкія образующія AB и A'B' находятся въ различныхъ плоскостяхъ и предѣлами этихъ двухъ плоскостей будутъ двѣ различныя касательныя плоскости

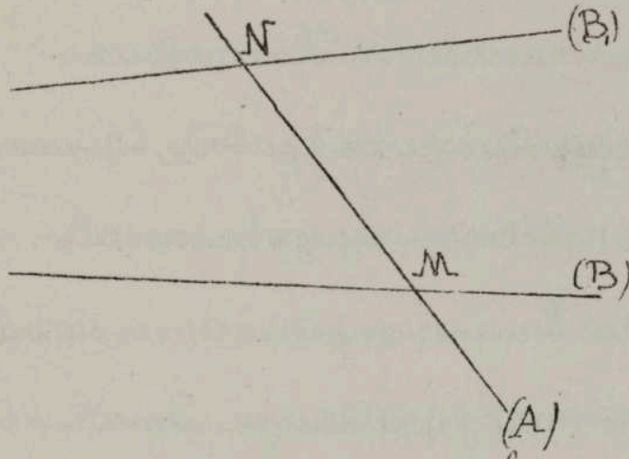
одна будетъ касательною въ точкѣ M..... TMAB, а другая касается поверхности въ точкѣ N..... T'NAB и онѣ образуютъ конечной величины уголъ; такая линейчатая поверхность называется косой. Въ этой поверхности въ различныхъ точкахъ одной и той же образующей будутъ различныя касательныя плоскости, и плоскость касательная поверхности въ одной точкѣ образующей будетъ секущей плоскостью для другихъ точекъ той-же образующей. —

Разсмотримъ въ частности соприкосновеніе касательной плоскости съ конической поверхностью. Пусть OS и OS' двѣ безконечноблизкія образующія этой поверхности. Возьмемъ на первой точку M. Касательная плоскость въ этой точкѣ должна проходить черезъ прямую OS. Проведемъ по поверхности произвольную кривую MC; она пересѣчетъ смежную образующую въ точкѣ M'; соединимъ M съ M'; получимъ секущую MR. Линія MR въ предѣлѣ, когда OS' совпадетъ съ OS, обратится въ касательную MT къ кривой MC и слѣдовательно касательная плоскость въ точкѣ M будетъ TMO и она можетъ быть разсматриваема, какъ предѣльное положеніе плоскости RMO, т.е. плоскости, проходящей черезъ двѣ смежныя образующія OS и OS'. Тоже будетъ для всякой другой точки, взятой на образующей OS и во всѣхъ точкахъ одной образующей будетъ общая касательная плоскость. Такимъ образомъ коническая поверхность есть поверхность развивающаяся.

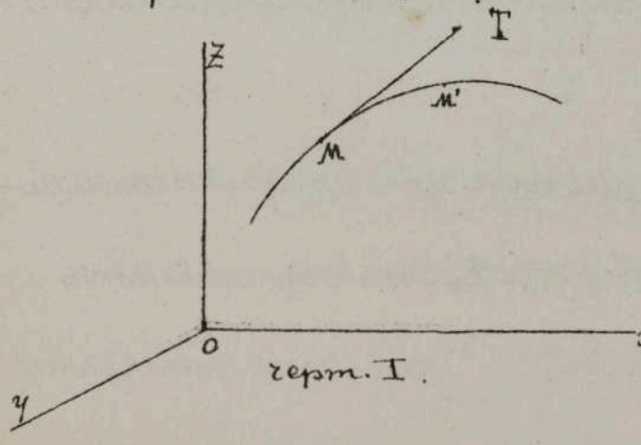


Разсмотримъ для примѣра неразвивающейся поверхности одну изъ

линейчатыхъ поверхностей втораго порядка: гиперболическій параболоидъ или гиперболоидъ съ одной полостью. Извѣстно, что черезъ каждую точку этой поверхности проходятъ двѣ прямолинейныя образующія: одна системы A, а другая системы B. Касательная плоскость должна проходить черезъ обѣ образующія и въ точкѣ M (точка пересѣченія этихъ образующихъ) касательная плоскость будетъ AMB и только въ точкѣ M, въ другихъ точкахъ той же образующей (A) она будетъ скрещей. Если на образующей (A) возьмемъ другую точку N, то черезъ нее должна проходить другая образующая системы B, положимъ B_1, и касательная плоскость въ точкѣ N будетъ плоскость, проходящая черезъ образующія A и B_1, но B и B_1 образуютъ между собой конечной величины уголъ, слѣдовательно двѣ касательныя плоскости въ точкахъ M и N одной образующей A будутъ различны — BMA и B_1NA. Эта поверхность есть поэтому неразвертывающаяся — косая. —



О соприкасающейся плоскости кривыхъ въ пространствѣ.



черт. I.

Соприкасающаяся плоскость, можетъ быть опредѣлена какъ плоскость, которая изъ всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку на кривой наближе всѣхъ подходитъ къ смежности съ разсматриваемой

точкой. Возьмемъ произвольную кривую, отнесенную къ 3осямъ; ур-ія кривой $\ldots f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$. Какъ мы уже замѣтили выше, можемъ всѣ три координаты разсматривать функціями перемѣннаго независимаго t. Тогда величинѣ t соотвѣтствуетъ нѣкоторая точка M на кривой. Проведемъ въ этой точкѣ касательную къ кривой, черезъ касательную проведемъ плоскость, которая будетъ подходить къ кривой ближе, чѣмъ всякая произвольная плоскость. Но чтобы получить плоскость, которая подходила-бы еще ближе къ кривой, возьмемъ на кривой смежную точку M' и проведемъ плоскость черезъ касательную и точку M'; тогда положеніе плоскости вполнѣ опредѣлено и заставить ее пройти черезъ другую произвольную точку уже нельзя. Эта плоскость будетъ подходить тѣмъ ближе къ кривой въ смежности съ точкой M, чѣмъ будетъ ближе взята M' къ M. Будемъ разсматривать предѣльное положеніе, къ которому стремиться плоскость, проходящая черезъ касательную и точку M', когда M' стремиться совпасть съ M и примемъ слѣдующее опредѣленіе: соприкасающейся плоскостью называется предѣльное положеніе плоскости, проходящей черезъ касательную и точку, безконечно-близкую къ точкѣ соприкосновенія.

Руководствуясь этимъ опредѣленіемъ составимъ ур-ія соприкасающейся плоскости. Пусть величина перемѣннаго t соотвѣтствуетъ координатамъ x, y, z точки кривой M (черт. I). Уравненіе плоскости какъ проходящей черезъ точку M, будетъ:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Выразимъ условіе, что плоскость проходитъ черезъ касательную.

Уравненіе касательной MT:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}=k$$

Здѣсь k величина отношенія. Координаты произвольной точки касательной должны удовлетворять уравненію плоскости; но изъ уравненія касательной имѣемъ:

$$X-x=kdx;\ Y-y=kdy;\ Z-z=kdz.$$

Вставивъ эти выраженія въ уравненіе плоскости и сокративъ на k, получимъ

$$Adx+Bdy+Cdz=0 \ldots\ldots (1)$$

Выразимъ теперь условіе, что плоскость проходитъ черезъ M'. Чтобы получить координаты точки M', увеличимъ t на Δt, тогда имѣемъ:

$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z.$$

Эти координаты опредѣляютъ точку M' и должны удовлетворять уравненію плоскости. Вставимъ въ это уравненіе вмѣсто $x \ldots x+\Delta x$, $Y \ldots y+\Delta y$ и $Z \ldots z+\Delta z$, получимъ:

$$A\Delta x+B\Delta y+C\cdot\Delta z=0.$$

x есть функція t и Δx можемъ выразить формулою Тейлора:

$$\Delta x=\frac{dx}{dt}\cdot\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\right)$$

Здѣсь $\varepsilon_0=\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t}{3}+\frac{d^4x}{dt^4}\cdot\frac{\Delta t^2}{3\cdot4}+\ldots\ldots$ при $\Delta t=0$ имѣемъ $\varepsilon=0$.

Также напишемъ для Δy вмѣсто Δz; имѣемъ три формулы:

$$\Delta x=\frac{dx}{dt}\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon_0\right);$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon_1\right);$$

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon_2\right).$$

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ обращаются въ 0 при $\Delta t = 0$. Вставивъ эти выраженія въ наше условное уравненіе получимъ:

$$\Delta t\left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\left\{A\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\right) + B\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon_1\right) + C\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon_2\right)\right\} = 0.$$

На основаніи условія (1), членъ съ $\Delta t = 0$. Сокративъ на $\frac{\Delta t^2}{2}$, получимъ:

$$A\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\right) + B\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon_1\right) + C\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon_2\right) = 0.$$

Это условіе въ предѣлѣ, когда точка M' стремится совпасть съ M, т.е. при $\Delta t = 0$ обращается въ слѣдующее: $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$; dt^2 можно сократить и окончательный результатъ будетъ:

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0 \ldots\ldots (2)$$

Это условіе относится къ опредѣленному положенію плоскости, т.е къ соприкасающейся плоскости. Для опредѣленія соприкасающейся плоскости имѣемъ два условія:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0 \ldots\ldots (2)$$

Хотя здѣсь три коэффиціента, но неизвѣстныхъ два, потому что уравненіе можно раздѣлить на одинъ изъ коэффиціентовъ, напр. на C:

$$\frac{A}{C}(X - x) + \frac{B}{C}(Y - y) + (Z - z) = 0.$$

Взявши уравненія (1) и (2), исключаемъ B, умноживъ (1) на d^2y, а (2) на dy и вычитая изъ перваго второе, получимъ:

$$A(dx\,d^2y - dy\,d^2x) + C(dz\,d^2y - dy\,d^2z) = 0 \text{ и отсюда:}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Теперь исключимъ A..... (1) умноживъ на d^2x, (2) на dx и вычитая изъ (2) первое, получимъ:

$$B(dx\,d^2y - dy\,d^2x) + C(dx\,d^2z - dz\,d^2x) = 0$$

$$\frac{B}{C} = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{dx\,d^2z - dz\,d^2x}$$

Вставивъ въ ур^е соприкасающейся плоскости и сокративъ на общаго знаменателя:

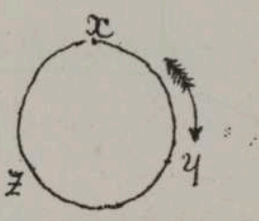
$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(X-x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)(Y-y) + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)(Z-z) = 0$$

Замѣтимъ составъ коэффиціентовъ: въ коэффиціентъ при $(X-x)$ не входитъ dx, при $Y-y$..... dy и при $(Z-z)$..... dz. Если напишемъ первый коэффиціентъ то остальные получатся круговымъ замѣщеніемъ буквъ въ правильномъ порядкѣ:

1 коэф. $dy\,d^2z - dz\,d^2y$

2 ..... $dz\,d^2x - dx\,d^2z$

3 ..... $dx\,d^2y - dy\,d^2x$



1^ый коэффиціентъ пишется и съ dz и съ dy и если-бы были $dz\,d^2y - dy\,d^2z$: то это соотвѣтствовало-бы перемѣнѣ знаковъ другихъ коэффиціентовъ.

Замѣтимъ, что наше уравненіе примѣнимо, когда перемѣнное независимое произвольно. Если x перемѣнное независимое, то

$$dx = const \text{ и } d^2x = 0.$$

Уравненіе будетъ:

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)(X-x) - dx\,d^2z(Y-y) + dx\,d^2y(Z-z) = 0.$$

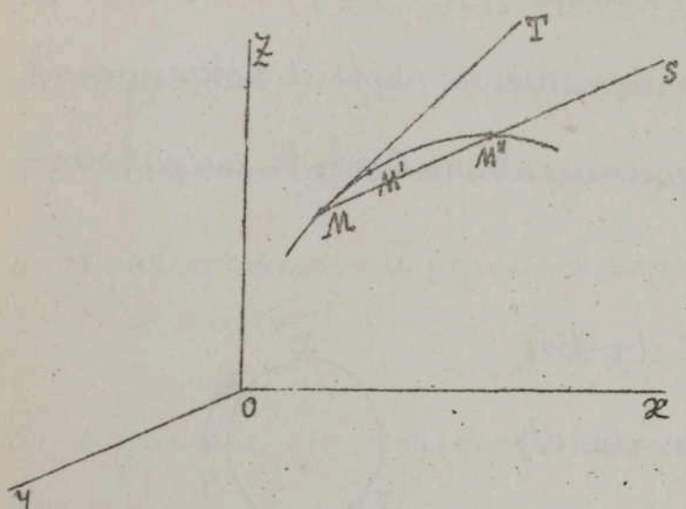
Оно короче, но менѣе симметрично. Раздѣлимъ на dx^2:

$$\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)(X-x) - \frac{d^2z}{dx^2}(Y-y) + \frac{d^2y}{dx^2}(Z-z) = 0$$

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ найдутся изъ данныхъ уравнений кривой: $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$.

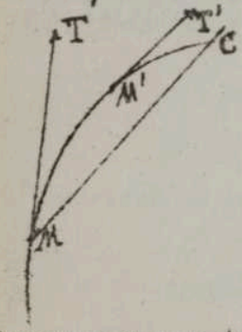
Соприкасающаяся плоскость можетъ быть опредѣлена какъ плоскость, проходящая черезъ три безконечно-близкія точки.

Въ самомъ дѣлѣ, если кромѣ точки M' возьмемъ безконечно-близкую точку M'' и черезъ 3 точки M, M' и M'' проведемъ плоскость. Эта плоскость проходитъ черезъ сѣкущую MM'S и черезъ M', но сѣкущая MS при приближеніи M'' къ M стремится совпасть съ касательной MT. Въ предѣлѣ сѣкущая MS обратится въ касательную MT и получится плоскость, проходящая черезъ касательную MT и точку M' смежную съ точкой прикосновенія. Видимъ, что новое опредѣленіе совпадаетъ съ предыдущимъ.



Разсмотримъ третье опредѣленіе соприкасающейся плоскости, которое употребляется въ Кинематикѣ.

Соприкасающаяся плоскость есть предѣльное положеніе плоскости, проходящей черезъ касательную линію ∥ касательной въ смежной точкѣ и проведенной черезъ точку прикосновенія.



Проведемъ касательную MT и смежную съ ней M'T'. Черезъ M проведемъ MC ∥ M'T' и проведемъ плоскость TMC. Положеніе приближенія M' къ M плоскость TMC стремится къ предѣльному положенію, которое и будетъ соприкасающейся плоскостью. Докажемъ это. Пусть координаты точки M.... x, y, z. Уравненіе искомой

плоскости представится: $A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$. Выразимъ условіе, что эта плоскость проходитъ черезъ касательную; по предыдущему будетъ слѣдующее:

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0 \ldots (1).$$

Назовемъ черезъ a, b, c косинусы угловъ, образованныя касательной MT съ осями:

$$a=\frac{dx}{ds};\quad b=\frac{dy}{ds}\ \text{и}\ c=\frac{dz}{ds};$$

они суть функціи того-же перемѣннаго t. Если измѣнимъ t на $t+\Delta t$, то перейдемъ отъ точки M къ сосѣдней точкѣ M' и отъ касательной MT къ касательной M'T'; косинусы получатъ соотвѣтствующія приращенія: $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $c+\Delta c$. Уравненіе линіи MC, какъ прямой, проходящей черезъ точку M и $\parallel$ M'T' будетъ:

$$\frac{X-x}{a+\Delta a}=\frac{Y-y}{b+\Delta b}=\frac{Z-z}{c+\Delta c}=k'.$$

Выразимъ условіе, что плоскость проходитъ черезъ MC. Имѣемъ:

$$X-x=k'(a+\Delta a),\ Y-y=k'(b+\Delta b),\ Z-z=k'(c+\Delta c).$$

Такъ координаты произвольной точки, взятой на MC, должны удовлетворять уравненію плоскости, то вставивъ въ него выраженія $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ и сокративъ на k', получимъ:

$$A(a+\Delta a)+B(b+\Delta b)+C(c+\Delta c)=0 \text{ или раскрывъ скобки}$$

$$Aa+Bb+Cc+A\Delta a+B\Delta b+C\Delta c=0, \text{ но мы имѣемъ, что}$$

$$Aa+Bb+Cc=A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}+C\frac{dz}{ds}=0 \text{ по основному условію (I)}$$

Слѣдовательно имѣемъ:

$$A\Delta a+B\Delta b+C\Delta c=0 \text{ или, раздѣливъ на } \Delta t:$$

$$A\frac{\Delta a}{\Delta t}+B\frac{\Delta b}{\Delta t}+C\frac{\Delta c}{\Delta t}=0.$$

Это равенство выражаетъ, что плоскость проходитъ черезъ MC. Чтобы

получить условіе для предѣльной плоскости, надо положить $\Delta t = 0$, тогда условіе будетъ: $A\frac{da}{dt} + B\cdot\frac{db}{dt} + C\cdot\frac{dc}{dt} = 0$ или умноживъ на dt

$$A\,da + B\,db + C\,dc = 0$$ и замѣнивъ a, b, c ихъ выраженіями

$$A\,d\frac{dx}{ds} + B\cdot d\frac{dy}{ds} + C\cdot d\cdot\frac{dz}{ds} = 0.$$

Условіе можно упростить, если возьмемъ дифференціалы:

$$A\,\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2} + B\cdot\frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2} + C\,\frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2} = 0.$$

или умноживъ на ds^2 и соединивъ члены положительные и отрицательные:

$$ds\left(A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z\right) - d^2s\left(\cancel{A\,dx + B\,dy + C\,dz}^{\,0}\right) = 0$$

Членъ при d^2s равенъ 0 на основаніи условія (1). Сокративъ на ds, найдемъ:

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0 \quad \ldots (2)$$

Условныя уравненія получились тѣже, что и при первомъ опредѣленіи, слѣдовательно для $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ получатся тѣ же выраженія

Главная нормаль.

Въ данной точкѣ кривой пространства можно провести безчисленное множество нормальныхъ линій, т.е. прямыхъ перпендикулярныхъ касательной, - всѣ онѣ лягутъ въ нормальной плоскости. Между этими нормалями замѣчательна та, которая представляется пересѣченіемъ нормальной плоскости съ соприкасающейся, - она нормаль называется главной. Уравненія этой прямой получатся, если возьмемъ два уравненія: уравненіе нормальной и уравненіе соприкасающейся плоскостей. Уравненіе нормальной плоскости есть:

$$dx(X-x) + dy(Y-y) + dz(Z-z) = 0,$$

а уравненіе соприкасающейся плоскости:

$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$, где

$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y$; $B=dz.d^2x-dx.d^2z$; $C=dx.d^2y-dy.d^2x$.

Совокупность этих ур-ий определяет главную нормаль. Уравнение главной нормали можно представить в удобном виде, определив три ея проекции на плоскости координат. Исключим из уравнений Y-y, умножим первое на B, а второе на dy и вычитая второе из первого:

$$(B\,dx-A\,dy)(X-x)+(B\,dz-C.dy)(Z-z)=0 \text{ или}$$

$$\frac{X-x}{C.dy-B\,dz}=\frac{Z-z}{B\,dx-A\,dy}.$$

Это есть ур-ие проекции на плоскость xz. Теперь исключим $(X-x)$; 1-е умножим на A, второе на dx и, вычитая из 2-ого 1-ое, получим:

$$(B\,dx-A\,dy)(Y-y)+(C\,dx-A\,dz)(Z-z)=0 \text{ или}$$

$$\frac{Y-y}{A\,dz-C\,dx}=\frac{Z-z}{B\,dx-A\,dy}.$$

Это есть ур-ие проекции на плоскость yz. Напишем эти ура вместе:

$$\frac{X-x}{C\,dy-B\,dz}=\frac{Y-y}{A\,dz-C\,dx}=\frac{Z-z}{B\,dx-A\,dy}.$$

Знаменатели могут быть значительно упрощены. Возьмем

$$C\,dy-B\,dz=(dx\,d^2y-dy\,d^2x)\,dy-(dz\,d^2x-dx\,d^2z)\,dz=dx\,(dy.d^2y+dz.d^2z)-d^2x\,(dy^2+dz^2).$$

Воспользуемся следующим равенством: $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, где s дуга, оканчивающаяся в точке M и считаемся откуда угодно. Продифференцировав это ур-ие и сократив на 2, получим:

$$dx\,d^2x+dy.d^2y+dz.d^2z=ds\,d^2s;$$

теперь можем написать: $C\,dy-B\,dz=dx\,(ds\,d^2s-dx\,d^2x)-d^2x\,(ds^2-dx^2)=ds\,(dx\,d^2s-ds\,d^2x)$.

Умножив на ds^2 и разделив на ds^3, имеем:

$$C.dy-B\,dz=-ds^3\,\frac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{ds^2}=-ds^3\,d\left(\frac{dx}{ds}\right).$$

Такимъ же образомъ преобразуемъ два другіе знаменателя, но вычисленія повторять не надо: стоитъ замѣтить, что знаменатель при y-ѣ получается изъ знаменателя при x-ѣ черезъ круговое замѣщеніе буквъ: $Cdy - B dz \ldots$ $\ldots A dz - C dx$, поэтому прямо пишемъ:

$$A dy - C dx = -ds^3 d\left(\frac{dy}{ds}\right);$$

$$B dx - A dy = -ds^3 d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Если эти выраженія вставимъ въ др-ія и умножимъ на $(-ds^3)$, то получимъ уравненія главной нормали:

$$\boxed{\frac{X-x}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{d.\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{d.\frac{dz}{ds}}.}$$

Напишемъ выраженія косинусовъ угловъ, λ, μ, ν, образуемыхъ главной нормалью съ осями. По формуламъ Аналитической Геометріи имѣемъ:

$$\cos\lambda = \frac{d.\frac{dx}{ds}}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}; \quad \cos\mu = \frac{d.\frac{dy}{ds}}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

$$\text{и} \quad \cos\nu = \frac{d.\frac{dz}{ds}}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}.$$

Напишемъ эти выраженія иначе, введя слѣдующее обозначеніе:

$$\frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}} = \rho = \text{величинѣ конечной. Здѣсь } \rho$$

есть радіусъ кривизны. Вводя въ выраженія косинусовъ это обозначеніе, найдемъ:

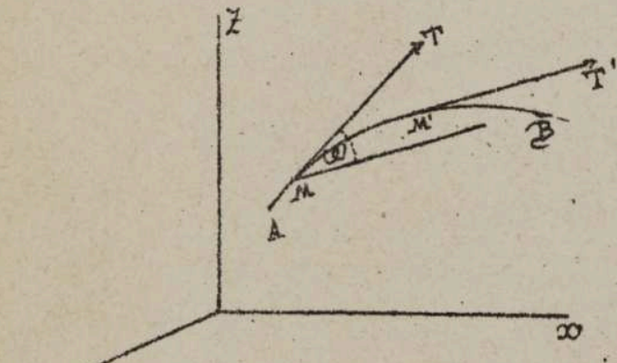
$$\cos\lambda = \rho \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}; \quad \cos\mu = \rho \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}; \quad \cos\nu = \rho . \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Эти формулы опредѣляютъ направленіе главной нормали въ пространствѣ.

О кривизнѣ кривыхъ въ пространствѣ.

Понятіе о кривизнѣ кривыхъ въ пространствѣ остается такъ же какъ и для плоскихъ кривыхъ. Возьмемъ произвольную кривую, др-ія

которой суть: $f(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$. Будемъ разсматривать координаты x,y,z какъ функціи перемѣннаго независимаго t; тогда опредѣленной величинѣ t соотвѣтствуютъ координаты X,Y,Z, опредѣляющія нѣкоторую точку M на кривой. Чтобы получить точку безконечно-близкую къ точкѣ M, измѣнимъ t на $t+\Delta t$; тогда соотвѣтственно $X+\Delta X$, $Y+\Delta Y$ и $Z+\Delta Z$ опредѣлятъ точку M'. Проведемъ касательныя MT и $M'T'$; эти касательныя образуютъ между собой уголъ ω; такъ какъ касательныя не пересѣкаются, то $\angle\omega$ получится, проведя изъ точки M линію $\parallel M'T'$..... MC. Этотъ уголъ показываетъ отклоненіе направленія теченія кривой при переходѣ отъ точки M къ точкѣ M' и называется Угломъ смежности. Кривизна дуги MM' принимается прямо-пропорціональной углу смежности. Но кривизна зависитъ отъ длины дуги $M.M'$, на протяженіи которой произошло такое отклоненіе ω и чѣмъ на большой дугѣ произошло отклоненіе, тѣмъ меньше кривизна; слѣдовательно кривизна обратно-пропорціональна длинѣ дуги $M.M'$. Отношеніе $\frac{\omega}{\text{arc}MM'}$ называется средней кривизной дуги $M.M'$. Предѣлъ этого отношенія при предположеніи, что M' стремится совпасть съ M называется кривизной кривой въ точкѣ M и по опредѣленію $\lim\frac{\omega}{\text{arc}MM'}$, есть кривизна кривой въ точкѣ M. Кривизна кривой въ пространствѣ сравнивается съ кривизной нѣкоторой окружности. Пусть ρ есть радіусъ такого круга, кривизна котораго равна кривизнѣ кривой въ точкѣ M, онъ называется радіусомъ кривизны. Намъ извѣстно, что кривизна круга будетъ $\frac{1}{\rho}$ и по опредѣленію должны имѣть: $\frac{1}{\rho}=\lim\frac{\omega}{\text{arc}MM'}$, и $\rho=\lim\frac{\text{arc}MM'}{\omega}$.



Послѣднее равенство послужитъ намъ для составленія формулы, служащей къ вычисленію ζ. Означимъ $arc MM'$ черезъ ΔS, гдѣ $S = arc AM$, тогда $\zeta = \lim \frac{\Delta S}{\omega}$ или раздѣливъ числителя и знаменателя на Δt, имѣемъ: $\zeta = \lim \cdot \frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{\frac{\omega}{\Delta t}}$. Переходя къ предѣлу при $\Delta t = 0$, получимъ $\zeta = \frac{\frac{ds}{dt}}{\lim \frac{\omega}{\Delta t}}$. Найдемъ величину $\lim \frac{\omega}{\Delta t}$; обозначимъ косинусы угловъ, образованныхъ касательной MT съ осями черезъ a, b, c. Эти косинусы будутъ:

$$a = \frac{dx}{ds}; \quad b = \frac{dy}{ds}; \quad c = \frac{dz}{ds}.$$

Когда измѣнимъ t на $t + \Delta t$, то, значитъ, перейдемъ отъ точки M къ точкѣ M' и отъ касательной MT къ касательной $M'T'$, при этомъ косинусы измѣнятся, получая соотвѣтствующія приращенія: $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$. По извѣстной формулѣ Аналитической Геометріи выразимъ $\cos\omega$, какъ $\cos$ угла между двумя прямыми:

$\cos\omega = a(a + \Delta a) + b(b + \Delta b) + c(c + \Delta c) = a^2 + b^2 + c^2 + a \cdot \Delta a + b \cdot \Delta b + c \cdot \Delta c$, но $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, слѣдовательно $\cos\omega = 1 + a \cdot \Delta a + b \Delta b + c \cdot \Delta c$. Съ другой стороны возьмемъ сумму квадратовъ косинусовъ угловъ, образуемыхъ касательной MT' съ осями: $(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + (c + \Delta c)^2 = 1$ или ~~$a^2 + b^2 + c^2$~~ $+ 2(a \cdot \Delta a + b \cdot \Delta b + c \cdot \Delta c) + \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 = 1$, отсюда:

$$a \cdot \Delta a + b \cdot \Delta b + c \cdot \Delta c = -\frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}{2} \text{ и}$$

$$\cos\omega = 1 - \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}{2}$$

$$1 - \cos\omega = \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}{2}$$

Замѣнимъ $1 - \cos\omega$ черезъ $2 \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}$ и по извлеченіи корня, находимъ:

$$2 \cdot \sin \frac{\omega}{2} = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}$$

При отысканіи $\lim \frac{\omega}{\Delta t}$ вмѣсто безконечно-малаго угла ω можемъ взять $2 \cdot \sin \frac{\omega}{2}$, потому что отношеніе этихъ двухъ безконечно-малыхъ имѣетъ

предѣломъ 1 .... $\lim \frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega} = \lim \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = 1$. Пользуясь выраженіемъ $2\sin\frac{\omega}{2}$, имѣемъ:

$$\lim \frac{\omega}{\Delta t} = \lim \frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\Delta t} = \lim \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}}{\Delta t} = \lim \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2}.$$

Теперь имѣемъ:

$$S = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2}} = \frac{ds}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}} = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}} \quad \cdots (1)$$

Кромѣ этой формулы употребляются двѣ другія, получаемыя изъ (1) черезъ преобразованіе: Возвысивъ дифференціалы дробей въ знаменателѣ и умноживъ числителя и знаменателя на ds^2, получимъ:

$$S = \frac{ds^3}{\sqrt{(ds.d^2x - dx.d^2s)^2 + (ds.d^2y - dy.d^2s)^2 + (ds.d^2z - dz.d^2s)^2}}.$$

Раскрывъ квадраты, получимъ слѣдующее:

$$S = \frac{ds^3}{\sqrt{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - 2ds.d^2s(dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z) + d^2s^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}},$$

Но мы имѣемъ, что $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (*). Одифференцировавъ это равенство и сокративъ на 2, получимъ: $ds\,d^2s = dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z$.

$$S = \frac{ds^3}{\sqrt{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - 2.ds^2.d^2s^2 + ds^2.d^2s^2}} = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}} \quad \cdots (2)$$

Предпослѣднее равенство можемъ написать такъ:

$$S = \frac{ds^3}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z)^2}}$$

Воспользуемся тожествомъ Лагранжа:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + c.c_1)^2 = (ab_1 - a_1b)^2 + (ac_1 - a_1c)^2 + (bc_1 - b_1c)^2$$

Чтобы приложить это къ нашей формулѣ, надо замѣнить a, b, c соотвѣственно черезъ dx, dy, dz, а a_1, b_1, c_1 черезъ d^2x, d^2y, d^2z, тогда получимъ:

$$S = \frac{ds^3}{\sqrt{(dx.d^2y - dy.d^2x)^2 + (dx.d^2z - dz.d^2x)^2 + (dy.d^2z - dz.d^2y)^2}}$$

Замѣтимъ, что эти три формулы приложимы и къ плоскимъ кривымъ, потому что кривая въ пространствѣ можетъ быть въ частности плоской. Пусть кривая плоская и лежитъ въ плоскости xy, тог-

(*) ниже это будетъ доказано

да $z=0$, $dz=d^2z=0$ и будетъ:

$$S=\frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$S=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2}} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$S=\frac{ds^3}{dx\,d^2y-dy.d^2x} \quad \ldots\ldots (3)$$

Для плоской кривой имѣемъ:

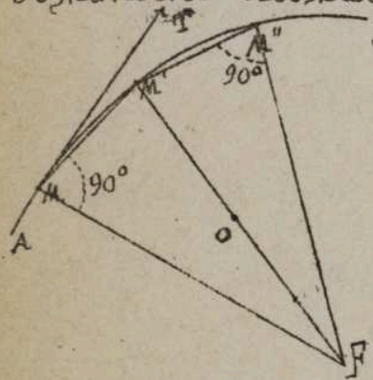
$=(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$, тогда:

$$S=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx.d^2y-dy.d^2x}.$$

Это и есть та формула, которая была дана раньше для плоской кривой при произвольномъ перемѣнномъ независимомъ; первыя же двѣ суть новыя формулы. —.

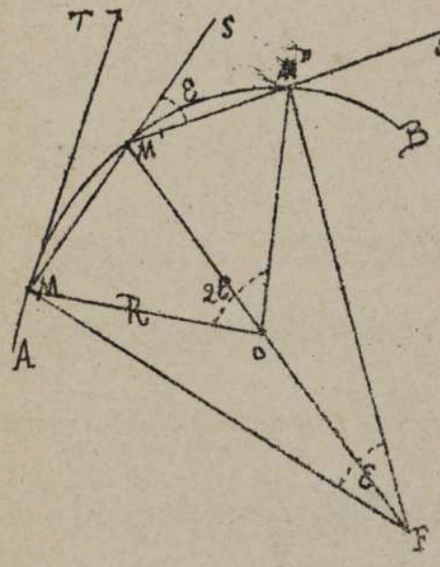
Кругъ кривизны кривыхъ въ пространствѣ.

Этотъ кругъ можетъ быть опредѣленъ какъ кругъ, проходящій черезъ три безконечно-близкія точки кривой. Пусть AB произвольная кривая въ пространствѣ; возьмемъ три безконечно-близкія точки M, M' и M''. Вообразимъ плоскость, проходящую черезъ нихъ; точки M и M', M' и M'' соединимъ, въ точкѣ M возставимъ



перпендикуляръ къ MM' и въ точкѣ M''⊥къ M'M''; пересѣченіе ихъ будетъ точка F. Точку M' соединимъ съ F, M'F раздѣлимъ пополамъ въ точкѣ O и опишемъ окружность радіусомъ OM=R. Эта окружность пройдетъ черезъ точки M и M'', ибо углы при M и M' прямые. Чтобы получить кругъ кривизны въ собственномъ смыслѣ этого слова, должно вообразить, что точки M' и M'' приближаются неопредѣленно къ M, тогда кругъ будетъ стремиться къ опредѣленному положенію. Этотъ предѣльный

кругъ и будетъ кругомъ кривизны для точки M. Замѣтимъ положеніе этого предѣльнаго круга. Плоскость этого круга, какъ плоскость, проходящая черезъ три безконечно-близкія точки, въ предѣлѣ будетъ соприкасающеюся плоскостью для точки M; слѣдовательно кругъ кривизны лежитъ въ соприкасающейся плоскости. Хорда MM' при приближеніи M' къ M стремится совпасть съ касательной MT; эта хорда въ предѣлѣ будетъ касательной и къ кругу, такъ какъ MM' есть хорда круга; слѣдовательно кругъ кривизны имѣетъ съ точкой M кривой общую касательную. Уголъ MM'F есть острый, но онъ стремится къ прямому и въ предѣлѣ, когда хорда MM' обратится въ касательную MT, этотъ уголъ будетъ прямой и линія M'F главная нормаль (нормаль, лежащая въ соприкасающейся плоскости); но на линіи M'F лежитъ центръ O, слѣдовательно центръ круга кривизны лежитъ на главной нормали. Наконецъ опредѣлимъ радіусъ



круга кривизны; этотъ радіусъ будетъ предѣльной величиной радиуса R. Докажемъ, что $\lim R = \infty$, т.е радіусъ кривизны есть радіусъ круга кривизны. —— . Пусть x, y, z суть функціи t и пусть величинѣ t соотвѣтствуютъ координаты x, y, z опредѣленной точки M на кривой. Чтобы получить смежную точку M' измѣнимъ t на $t+\Delta t$. Этой величинѣ соотвѣтствуетъ точка M' на кривой. Измѣнимъ t еще, придавъ новое приращеніе Δt, тогда получимъ $t+2\Delta t$, — этой величинѣ соотвѣтствуетъ точка M''. Воспользуемся предыдущимъ чертежомъ. Обозначимъ $\angle MPM''$ черезъ ε,

видимъ, что $\angle SM'S' = \angle MFM'' = \varepsilon$ и $\angle MOM'' = 2\varepsilon$. Имѣемъ, что дуга круга $MM'M'' = R2\varepsilon$, т. е $arc\,MM'M''$ есть дуга круга $= R.2\varepsilon$ и $R = \frac{arc\,MM'M''}{2\varepsilon}$. Возьмемъ предѣлъ: $\lim R = \frac{\lim arc\,MM'M''}{2\varepsilon}$ (*); здѣсь $arc\,MM'M''$ есть дуга круга, но мы можемъ замѣнить ее кривой, потому что эти дуги безконечно-малыя и могутъ быть замѣнены стягивающей ихъ хордой MM''. Пусть дуга кривой, оканчивающаяся въ точкѣ M равна S. При переходѣ отъ точки M къ M', дуга получитъ приращеніе $MM' = \Delta S$. При переходѣ отъ точки M' къ M'' дуга $S + \Delta S = arc\,AM'$ получитъ приращеніе $\Delta(S+\Delta S) = \Delta S + \Delta^2 S = arc\,M'M''$. Слѣдовательно: $arc\,MM'M'' = \Delta S + \Delta S + \Delta^2 S = 2\Delta S + \Delta^2 S$ и $\lim R = \lim \frac{2\Delta S + \Delta^2 S}{2\varepsilon}$.

Раздѣливъ числителя и знаменателя на $2\Delta t$, получимъ:

$$\lim R = \lim \frac{\frac{\Delta S}{\Delta t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta^2 S}{\Delta t^2}\cdot\Delta t}{\frac{\varepsilon}{\Delta t}}.$$

Въ предѣлѣ при $\Delta t = 0$ ... $\lim \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$. Докажемъ, что $\lim \frac{\Delta^2 S}{\Delta t^2} = \frac{d^2 S}{dt^2}$.

Пусть $f(t) = S$; перемѣнимъ t на $t+\Delta t$, тогда будетъ:

$$\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t).$$

Чтобы получить $\Delta.\Delta S = \Delta^2 S$, надо t перемѣнить на $t+\Delta t$ и вычесть прежнее значеніе:

$$\Delta^2 S = f(t+2\Delta t) - f(t+\Delta t) - f(t+\Delta t) + f(t) = f(t+2\Delta t) - 2f(t+\Delta t) + f(t).$$

Разложимъ первые два члена по формулѣ Тейлора, ограничиваясь двумя членами, гдѣ $2\Delta t$ и Δt ... приращенія

$$\Delta^2 S = \cancel{f(t)} + 2\Delta t f'(t) + \frac{4\Delta t^2}{2} f''(t + 0\cdot 2\Delta t) - \cancel{2f(t)} - 2\Delta t f'(t) - 2\cdot\frac{\Delta t^2}{2} f''(t + \theta'\Delta t) - \cancel{f(t)}$$

Раздѣлимъ на Δt^2:

$$\frac{\Delta^2 S}{\Delta t^2} = 2f''(t + \theta\cdot 2\Delta t) - f''(t + \theta'\Delta t).$$ Въ предѣлѣ при $\Delta t = 0$

$$\lim \frac{\Delta^2 S}{\Delta t^2} = 2f''(t) - f''(t) = f''(t) = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Итакъ $\lim \frac{\Delta^2 S}{\Delta t^2} = \frac{d^2 S}{dt^2}$ = величинѣ конечной, слѣдовательно $\frac{\Delta^2 S}{\Delta t^2}\cdot\Delta t$ имѣетъ

(*) $\lim R = \lim \frac{arc\,MM'M''}{2\varepsilon}$.

предѣломъ 0, тогда $\lim R = \frac{ds}{\lim \frac{\varepsilon}{\delta t}}$. Найдемъ $\lim \frac{\varepsilon}{\delta t}$, для этого употребимъ способъ, который былъ приложенъ при выводѣ радиуса кривизны для нахожденія $\lim \frac{\omega}{\delta t}$.

Разсмотримъ сѣкущую MS; она дѣлаетъ съ осями углы, которыхъ косинусы $\dots a_1, b_1, c_1$. Чтобы перейти отъ сѣкущей MS къ сѣкущей $M'S'$, дадимъ t приращеніе δt; косинусы получатъ соотвѣтственныя приращенія: $a_1+\delta a_1, b_1+\delta b_1$, $c_1+\delta c_1$; — это суть косинусы угловъ, дѣлаемыхъ сѣкущей $M'S'$ съ осями.

Возьмемъ косинусъ ε по теоремѣ объ углѣ между двумя прямыми:

$$\cos\varepsilon = a_1(a_1+\delta a_1) + b_1(b_1+\delta b_1) + c_1(c_1+\delta c_1) = 1 + a_1\delta a_1 + b_1\delta b_1 + c_1\delta c_1, \text{ ибо } a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

Повторяя выводъ какъ и для косинуса ω, найдемъ:

$$2\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\delta a_1^2 + \delta b_1^2 + \delta c_1^2}.$$

Безконечно-малое ε можемъ замѣнить черезъ $2\sin\frac{\varepsilon}{2}$, ибо $\lim \frac{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon} = \lim \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} = 1$.

Тогда $\lim \frac{\varepsilon}{\delta t} = \lim \frac{2\cdot\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\delta t} = \lim \sqrt{\left(\frac{\delta a_1}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta b_1}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta c_1}{\delta t}\right)^2}$

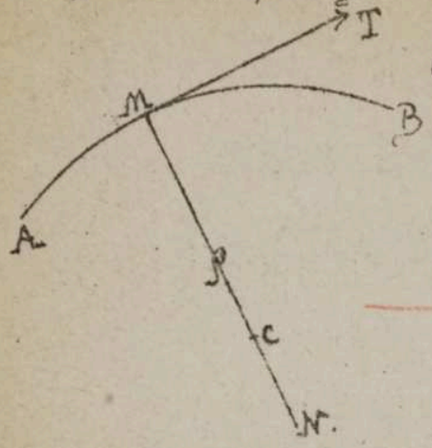
Переходя къ предѣлу и замѣтивъ, что сѣкущая MS обратится въ касательную MT, косинусы a_1, b_1, c_1 обратятся въ a, b, c, гдѣ $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$, $c = \frac{dz}{ds}$, найдемъ: $\lim \frac{\varepsilon}{\delta t} = \sqrt{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2}$ и наконецъ получимъ:

$$\lim R = \frac{ds}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}} = \rho$$

Центръ круга кривизны называется центромъ кривизны.

Выразимъ координаты центра кривизны. Проведемъ касательную MT, главную нормаль MN; отложимъ на нормали длину $MC = \rho$. Изъ точки C радіусомъ ρ въ соприкасающейся плоскости TMN опишемъ окружность. Это будетъ кругъ кривизны. — C есть центръ кривизны. Координаты: точки $M \dots (x, y, z)$; точки $C \dots (\xi, \eta, \zeta)$. Пусть $\lambda, \mu, \nu \dots$ углы, дѣлаемые главной нормалью съ осями. Извѣстно, что $\cos\lambda = \rho\cdot\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}$; $\cos\mu = \rho\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$, $\cos\nu = \rho\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$.

Возьмемъ проэкціи MC на оси. Проэкція на ось x получится, когда изъ x точки



С вычтемъ x точки M:

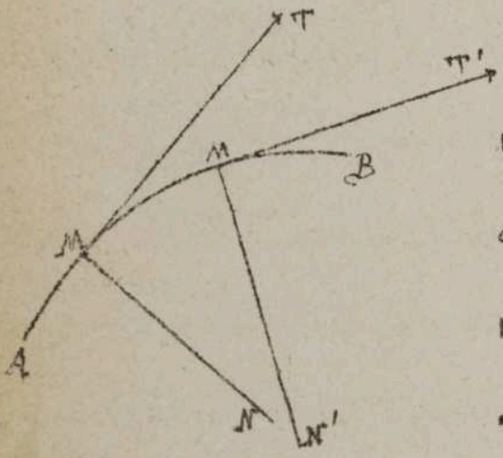
$\xi - x = \rho \cos\lambda$; также $\eta - y = \rho\cos\mu$; $\zeta - z = \rho\cos\nu$ или

$$\xi - x = \rho^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds};\quad \eta - y = \rho^2 \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds};\quad \zeta - z = \rho^2 \cdot \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Эти уравненія служатъ для опредѣленія координатъ центра кривизны.

Вторая кривизна кривыхъ въ пространствѣ.

Возьмемъ кривую AB; въ точкѣ M проведемъ соприкасающуюся плоскость, которая опредѣлится касательной MT и главной нормалью MN. Это будетъ



плоскость TMN. Перейдемъ отъ точки M къ смежной точкѣ M', въ которой соприкасающейся плоскостью будетъ другая, опредѣляемая касательной MT' и главной нормалью M'N'. ..... плоскость T'M'N'. Уголъ между этими двумя плоскостями будетъ Ω; онъ представляетъ уклоненіе соприкасающейся плоскости при переходѣ отъ точки M къ M'. Вторая кривизна принимается прямо-пропорціональной этому углу Ω, который называется угломъ кручения кривой.

Существованіе угла кручения составляетъ единственное отличіе кривыхъ двойной кривизны отъ кривыхъ плоскихъ, которыя не имѣютъ угла кручения или вѣрнѣе у нихъ $\Omega = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если предположимъ, что AB плоская кривая, то взявъ на ней точки M, M', M'', знаемъ, что соприкасающаяся плоскость проходитъ черезъ три безконечно-близкія точки и эта плоскость

совпадает съ плоскостью кривой, и такъ во всѣхъ точкахъ; слѣдовательно соприкасающаяся плоскость во всѣхъ точкахъ одна и та же и слѣдовательно не происходитъ никакого уклоненія и $\Omega = 0$. Но въ кривыхъ, точки которыхъ не лежатъ въ одной плоскости, Ω существуетъ, а слѣдовательно и существуетъ вторая кривизна.

Уклоненіе Ω происходитъ на протяженіи дуги MM' и вторая кривизна, тѣмъ значительнѣе, чѣмъ на меньшей дугѣ произойдетъ данной величины отклоненіе, а потому разсмотримъ $\frac{\Omega}{\text{arc } MM'}$. Это отношеніе называется средней второй кривизной или среднимъ кручѣніемъ дуги MM'.

Разсмотримъ предѣлъ, къ которому стремится это отношеніе. Предѣлъ этотъ называется кручѣніемъ въ точкѣ M или второй кривизной.

Вторая кривизна для большей ясности сравнивается съ кривизной нѣкотораго круга; пусть радіусъ этого круга r; кривизна этого круга равна кручѣнію кривой въ точкѣ M; радіусъ же r называется радіусомъ кручѣнія.

Имѣемъ: $\frac{1}{r} = \lim \frac{\Omega}{\text{arc } MM'}$ и $r = \lim \frac{\text{arc } MM'}{\Omega}$. Составимъ формулу для вычисленія радіуса кручѣнія.

Пусть α, β, γ косинусы угловъ, образуемыхъ перпендикуляромъ къ соприкасающейся плоскости TMN съ осями. Чтобы получить косинусы угловъ, образуемыхъ $\perp$къ соприкасающейся плоскости $T'M'N'$ съ осями, надо перемѣнить t на $t + \Delta t$, тогда имѣемъ: $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$, $\gamma + \Delta\gamma$. Уголъ между этими двумя перпендикулярами равенъ углу между двумя соприкасающимися плоскостями, т.е. равенъ углу между двумя соприкасающимися плоскостями, т.е равенъ $\angle\Omega$.

Можемъ написать: $\cos\Omega = \alpha(\alpha + \Delta\alpha) + \beta(\beta + \Delta\beta) + \gamma(\gamma + \Delta\gamma) = 1 + \alpha \cdot \Delta\alpha + \beta \cdot \Delta\beta + \gamma \cdot \Delta\gamma$, ибо $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Отсюда по предыдущему:

$$2\sin\frac{\Omega}{2}=\sqrt{\Delta\alpha^2+\Delta\beta^2+\Delta\gamma^2}.$$

Возьмем выражение ν и раздробим числителя и знаменателя на Δt, получим: $\nu=\lim\frac{\frac{\Delta S}{\Delta t}}{\frac{\Omega}{\Delta t}}$, где $\Delta S=\text{arc}\,MM'$ или переходя к пределу: $\nu=\frac{\frac{dS}{dt}}{\lim\frac{\Omega}{\Delta t}}$. Определим теперь: $\lim\frac{\Omega}{\Delta t}=\lim\frac{2\sin\frac{\Omega}{2}}{\Delta t}=\lim\sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta\beta}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta t}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2}$.

Подставляя это выражение в ν и сократив на на dt:

$$\nu=\frac{dS}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}}.$$

Чтобы можно было определить ν, надо выразить α, β и γ. Возьмем ур-ие соприкасающейся плоскости TMN:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

Здесь $A=dy\,d^2z-dz\,d^2y$; $B=dz\,d^2x-dx\,d^2z$, $C=dx\,d^2y-dy\,d^2x$. По формулам Аналитической Геометрии косинусы углов, образуемых $\perp$ к соприкасающейся плоскости с осями: $\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ или полагая: $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=D$, имеем: $\alpha=\frac{A}{D}$, $\beta=\frac{B}{D}$; $\gamma=\frac{C}{D}$. Отсюда нетрудно получить $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$; но эти выражения, а тем более выражение ν, будут очень сложны и для ν получится симметричная, но неудобная формула.

Заметим, что, так как a, b, c зависят от дифференциалов 1-го и 2-го порядка, то $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ будут зависеть от дифференциалов 3-го пор. и 1-ая кривизна зависит от дифференциалов 1-го и 2-го порядков, а 2-ая кривизна от дифференциалов 3-го порядка.

Применим все выведенные нами формулы к винтовой линии.

Ур-ия винтовой линии: $x=R\cos\varphi$; $y=R\sin\varphi$ и $z=R\varphi$. Определим ра-

дiусъ 1ой кривизны: $\rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}$; находимъ, что:

$$dx = -R.\sin\varphi\, d\varphi;\ dy = R\cos\varphi.d\varphi;\ dz = Rm\,d\varphi;$$

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = R^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+m^2\right)d\varphi^2;\ ds = R\sqrt{1+m^2}.d\varphi.$$

Отсюда: $\frac{dx}{ds} = -\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2}}$; $\frac{dy}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+m^2}}$; $\frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ и

$$d.\frac{dx}{ds} = \frac{-\cos\varphi}{\sqrt{1+m^2}}d\varphi;\ d.\frac{dy}{ds} = \frac{-\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2}};\ d.\frac{dz}{ds} = 0.$$

Вставляя въ выражение ρ:

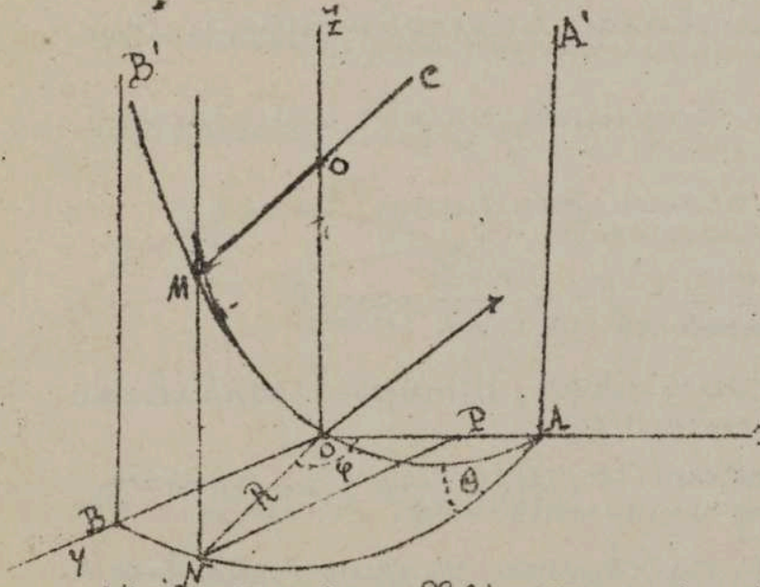
$$\rho = \frac{R.\sqrt{1+m^2}.d\varphi}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{1+m^2}.d\varphi^2+\frac{\sin^2\varphi}{1+m^2}.d\varphi^2}} = R(1+m^2) = \text{const}.$$

Видимъ, что радiусъ кривизны, а слѣдовательно и 1ая кривизна во всѣхъ точкахъ одна и та же. Это свойство для плоскихъ кривыхъ принадлежитъ кругу, а для кривыхъ двойной кривизны—винтовой линiи. Опредѣлимъ направленiе главной нормали; называя углы, образуемые ею съ осями, λ, μ и ν, имѣемъ

$$\cos\lambda = \rho.\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} = R(1+m^2).\frac{-\cos\varphi}{R\sqrt{1+m^2}.d\varphi} = -\cos\varphi;$$

$$\cos\mu = \rho.\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} = R(1+m^2).\frac{-\sin\varphi}{R\sqrt{1+m^2}.d\varphi} = -\sin\varphi;$$

$$\cos\nu = \rho.\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = 0 \ldots\ldots \nu = 90^\circ.$$



Слѣдовательно главная нормаль $\perp$ оси Z-овъ и $\parallel$ плоск. (XY) и слѣдовательно углы, которые она дѣлаетъ съ осями X и Y будутъ одинаковые съ углами, которые дѣлаетъ ея проэкцiя съ осями X, Y, поэтому имѣемъ: $\cos\lambda = -\cos\varphi$ и $\cos\mu = -\sin\varphi$. Замѣтимъ, что $\mu = 90^\circ - \lambda$; слѣд.: $\cos\mu = \cos(90^\circ-\lambda) = \sin\lambda = -\sin\varphi$. Углы λ и φ имѣютъ синусы и косинусы равные и съ обратными знаками, слѣдовательно $\lambda = 180+\varphi$. Проэкцiя главной нормали проходитъ черезъ точку N и дѣлаетъ уголъ $180^\circ+\varphi$ и идетъ отъ N къ O. Главная нормаль получится, когда изъ

М проведем параллель NO, которая встретится с Z в точке O'. Чтобы получить радиус кривизны, надо отложить $\rho = R(1+m^2) = R + m^2R$; отложив $O'C = m^2R$, получим $\rho = CM$; C есть центр кривизны.

Рассмотрим соприкасающуюся плоскость этой кривой.

Ур-ие соприкасающейся плоскости: $A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$.

Возьмем: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = Rm\varphi$; $dx = -R\sin\varphi d\varphi$, $dy = R\cos\varphi d\varphi$, $dz = Rm d\varphi$; $d^2x = -R\cos\varphi d\varphi^2$, $d^2y = -R\sin\varphi d\varphi^2$; $d^2z = 0$ (*).

$$A = dy \cdot d^2z - dz\, d^2y = R^2 m \sin\varphi \cdot d\varphi^3$$

$$B = dz\, d^2x - dx\, d^2z = -R^2 m \cos\varphi d\varphi^3$$

$$C = dx\, d^2y - dy \cdot d^2x = R^2\sin^2\varphi \cdot d\varphi^3 + R^2\cos^2\varphi d\varphi^3 = R^2 d\varphi^3.$$

Вставив в ур-ие и сократив на $R^2 d\varphi^3$, получим:

$$\boxed{m\sin\varphi(X-x) - m\cos\varphi(Y-y) + (Z-z) = 0}$$

Это и есть ур-ие соприкасающейся плоскости винтовой линии. Определим вторую кривизну: вычисляя косинусы углов, образуемых ⊥ к соприкасающейся плоскости с осями, получим:

$$\alpha = \frac{m\sin\varphi}{\sqrt{m^2\sin^2\varphi + m^2\cos^2\varphi + 1}} = \frac{m\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2}}; \quad \beta = \frac{-m\cos\varphi}{\sqrt{1+m^2}}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \text{const}.$$

Видим, что γ постоянно. Обозначим угол, который соприкасающаяся плоскость образует с плоскостью (XY) через ψ, но этот угол дополняет ⊥ к соприкасающейся плоскости с осью Z, следовательно

$$\cos\psi = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \text{const},$$

т.е. соприкасающаяся плоскость во всех точках кривой делает с плоскостью (XY) один и тот же угол. Этот угол легко определить. Мы имеем: тогда, где Φ есть величина того угла, который накручивается на цилиндр; ось

(*) $d^2z = 0$.

равенъ $\angle MAB$, $\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \cos\theta$ (по форм. Тригонометріи),

отсюда $\psi = \theta$; Вычислимъ радіусъ кривизны

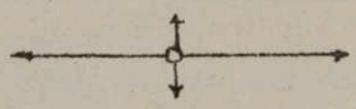
$$r = \frac{ds}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}.$$

Находимъ: $d\alpha = \frac{m\cos\varphi}{\sqrt{1+m^2}}\,d\varphi$; $d\beta = \frac{m\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2}}\,d\varphi$; $d\gamma = 0$.

Возведя эти дифференціалы въ квадратъ, вставимъ въ выраженіе r:

$$r = \frac{R\cdot\sqrt{1+m^2}\,d\varphi}{\sqrt{\frac{m^2\cos^2\varphi}{1+m^2}d\varphi^2 + \frac{m^2\sin^2\varphi}{1+m^2}d\varphi^2}} = R\cdot\frac{1+m^2}{m} = \text{const}.$$

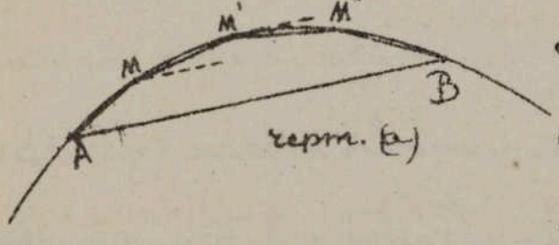
Слѣдовательно и вторая кривизна во всѣхъ точкахъ одна и та же.



Дифференціалъ дуги.

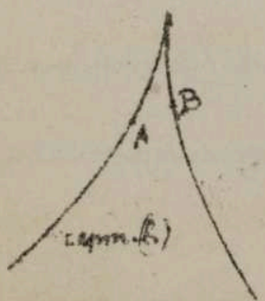
Выводъ основанъ на томъ, что lim отношенія хорды къ дугѣ равенъ единицѣ.

Предположимъ, что имѣемъ произвольную кривую въ пространствѣ; возьмемъ произвольную дугу AB, предполагая, что на протяженіи этой дуги нѣтъ особыхъ точекъ, въ противномъ случаѣ теорема не можетъ быть доказана (черт. в). Пусть длина дуги AB есть S, а хорды AB ... c. Надо доказать, что $\lim \frac{\Delta S}{\Delta c} = 1$.



черт. (а)

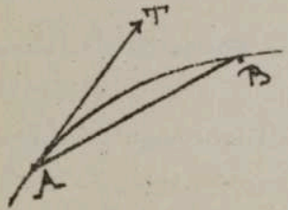
Возьмемъ произвольное число точекъ на дугѣ AB и впишемъ ломаную линію—съ произвольно большимъ числомъ чрезвычайно малыхъ сторонъ, длины которыхъ пусть будутъ: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$; углы, образуемые этими λ съ AB пусть будутъ соотвѣтственно: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$. Спроэктируемъ всѣ стороны ломаной линіи на AB, тогда $\lambda_1\cos\varphi_1 + \lambda_2\cos\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\cos\varphi_n = c$. Между числами φ найдемъ наименьшій и наибольшій, пусть первый φ', а второй φ'', тогда если вмѣсто $\cos\varphi_1, \cos\varphi_2 \ldots$ поставить $\cos\varphi'$, получимъ: $\lambda_1\cos\varphi' + \lambda_2\cos\varphi' + \ldots + \lambda_n\cos\varphi' = c$; напротивъ, если вмѣсто $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ поставить φ'', то $\lambda_1\cos\varphi'' + \lambda_2\cos\varphi'' + \ldots + \lambda_n\cos\varphi'' > c$, или $\cos\varphi'' \cdot S > c$



черт. (в)

$\cos\varphi'' \Sigma\alpha > c$ или $\frac{\Sigma\alpha}{c} < \frac{1}{\cos\varphi'}$ и $\frac{\Sigma\alpha}{c} > \frac{1}{\cos\varphi''}$, отсюда слѣдуетъ, что при условіи непрерывности дуги и хорды, т.е. непрерывности этихъ функцій, долженъ существовать такой уголъ φ_0, содержащійся по величинѣ между φ' и φ'', для котораго имѣемъ $\frac{\Sigma\alpha}{c} = \frac{1}{\cos\varphi_0}$. Послѣднее равенство существуетъ какъ-бы ни было велико число сторонъ n и какъ-бы ни были они малы; положимъ, что n возрастаетъ до ∞ и что каждая сторона стремится къ 0, тогда $\Sigma\alpha$ будетъ стремиться къ длинѣ дуги AB, такъ что $\lim \Sigma\alpha = S$ (это мы принимаемъ безъ доказательства, какъ постулатъ); въ предѣлѣ стороны сольются касательными къ кривой AB въ разныхъ ея точкахъ и уголъ φ_0 въ предѣлѣ будетъ заключаться между наибольшимъ и наименьшимъ изъ угловъ, образуемыхъ различными касательными съ хордой; такимъ образомъ въ предѣлѣ: $\frac{\delta}{c} = \frac{1}{\cos\varphi_0}$. Въ этомъ равенствѣ S и C пока конечны.

Представимъ теперь, что точка B перемѣщаясь по кривой стремится совпасть съ точкой A, причемъ S и C будутъ стремиться къ 0, т.е. сдѣлаются безконечно-малыми. Посмотримъ, во что обратится наше послѣднее равенство въ предѣлѣ. Касательныя въ различныхъ точкахъ кривой будутъ стремиться

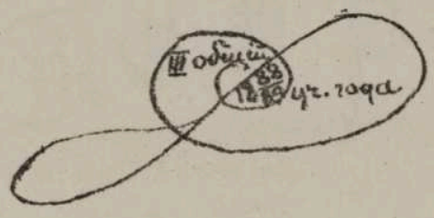


совпасть съ касательной къ кривой въ точкѣ A; сама хорда AB будетъ стремиться также совпасть съ касательной и слѣдовательно всѣ углы, образуемые различными касательными съ хордой AB будутъ стремиться къ 0, а потому наибольшій и наименьшій будутъ также 0, стало быть и уголъ φ_0 будетъ въ предѣлѣ 0, а косинусъ его единица, такъ что

$$\lim \frac{\delta S}{\delta C} = \lim \frac{1}{\cos\varphi_0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Кривая двойной кривизны дается двумя уравненіями: $F(x,y,z)=0$ и $\varphi(x,y,z)=0$; здѣсь x, напримѣръ можно считать независимымъ перемѣннымъ.

Определимъ $\frac{ds}{dx}$; возьмемъ на кривой точку $A(x,y,z)$ и безконечно близкую точку $B(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$; дугу AB обозначимъ черезъ Δs, а хорду AB черезъ Δc. $\frac{ds}{dx}$ надо разсматривать какъ $\lim \frac{\Delta s}{\Delta x}$. Хорда Δc есть діагональ параллелепипеда, сльд. $\Delta c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, отсюда $\frac{\Delta c}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$; по основной теоремѣ дифференціальнаго исчисленія имѣемъ, что $\lim \frac{\Delta c}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta x}$, слѣдовательно, переходя къ предѣлу имѣемъ: $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ или $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, что и требовалось доказать. ——



Интерлинеарное исчисление

B 88/89 2.

Понятіе о неопредѣленномъ интегралѣ.

Интегрированіе есть дѣйствіе обратное дифференцированію. Интегрировать данный дифференціалъ значитъ найти такую функцію, дифференціалъ которой былъ-бы равенъ данному.

Общій видъ дифференціала функціи съ одною независимою перемѣнною есть: $f(x)\,dx$. Интеграломъ этого дифференціала называется такая функція $\varphi(x)$, для которой имѣемъ: $d\varphi(x)=f(x)\,dx$. Интегралъ обозначается искаженной буквой $\int$ и пишется такъ:

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x).$$

Понятно, что такъ какъ дифференціалъ функціи $\varphi(x)$ равенъ $\varphi'(x)\,dx$ и при томъ такъ какъ съ другой стороны онъ долженъ быть равенъ $f(x)\,dx$, то мы будемъ имѣть, что: $f(x)=\varphi'(x)$.

Данная функція $f(x)$ называется подъинтегральной функціей и мы можемъ сказать, что найти интегралъ отъ какого-нибудь дифференціала значитъ найдти такую функцію $\varphi(x)$, производная которой $\varphi'(x)$ равна подъинтегральной функціи $f(x)$.

Согласно данному опредѣленію интеграла, мы можемъ прямо написать для примѣра, что

$$\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4},\ \text{такъ какъ}\ d\frac{x^4}{4}=\frac{4x^3\,dx}{4}=x^3\,dx.$$

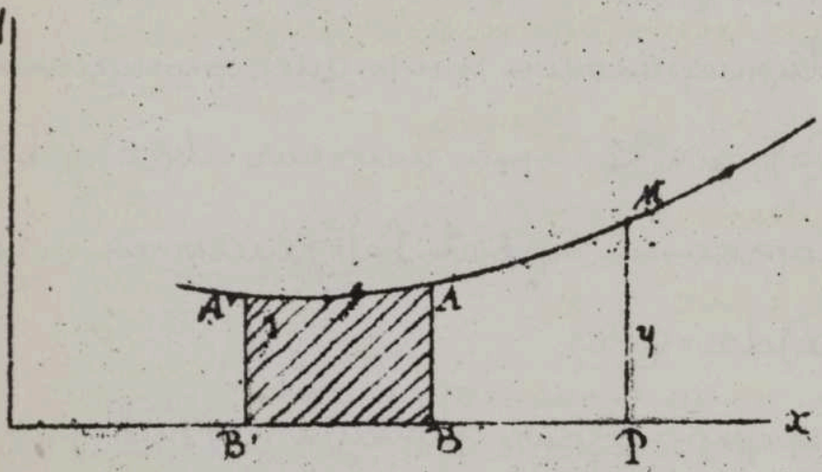
Здѣсь подъинтегральная функція x^3 есть производная отъ $\frac{x^4}{4}$.

Точно также будемъ имѣть:

$$\int\cos x\,dx=\sin x,\ \text{такъ какъ}\ d\sin x=\cos x\,dx.$$

Докажемъ прежде всего, что интегралъ отъ всякаго даннаго диф-

дифференциала всегда существует. Найти данный дифференциал есть: $f(x)dx$. Положимъ, что $f(x)=y$. Это ур-ie представляетъ какую-нибудь кривую; построимъ эту кривую. Возьмемъ на этой кривой постоянную, но произвольную точку A и проведемъ ея ординату AB, возьмемъ затѣмъ еще другую переменную точку M, ея абсциссу OP обозначимъ черезъ x, а ординату MP черезъ y. Такимъ образомъ мы получимъ площадь ABPM, которая называется площадью кривой. Назовемъ разсматриваемую площадь черезъ U. Очевидно, что эта площадь есть опредѣленная функція x^a, именно опредѣленная геометрически, такъ какъ величина ея для всякаго даннаго значенія x^a можетъ быть построена.



Припомнимъ выраженіе дифференціала этой функціи, мы нашли прежде, что $dU = y\,dx = f(x)\,dx$.

Такимъ образомъ U и есть та функція дифференціалъ которой равенъ $f(x)dx$ и мы можемъ написать потому, что

$$\int f(x)dx = U.$$

Это доказываетъ намъ, что $\int f(x)dx$, какъ нѣкоторая функція x, несомнѣнно существуетъ, она представляетъ при томъ нѣкоторую площадь и мы можемъ построить эту площадь, хотя ея аналитическое выраженіе и остается неизвѣстнымъ.

Замѣтимъ, что интегралъ, понятіе о которомъ выше опредѣлили, остается неопредѣленнымъ въ смыслѣ величины его. Въ самомъ дѣлѣ намъ извѣстно, что двѣ функціи, отличающіяся на постоянное количество, имѣютъ равныя производныя и равные дифференціалы. Если мы предположимъ поэтому, что $d\varphi(x) = f(x)\,dx$ и если къ функціи $\varphi(x)$ прибавимъ какое угодно постоянное количество C, то мы будемъ имѣть также, что $d(\varphi(x)+C) = f(x)\,dx$.

И если мы прежде имѣли написать, что:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x),$$

то очевидно, что мы также можемъ написать теперь:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x)+C,$$

гдѣ C совершенно произвольное, но постоянное количество. Слѣдовательно интегралъ въ смыслѣ величины остается неопредѣленнымъ. Къ этому же заключенію придемъ, если остановимся на геометрическомъ значеніи интеграла. Дѣйствительно мы разсматривали площадь $ABPM = U$, взявъ постоянную точку совершенно произвольной; если поэтому мы возьмемъ вмѣсто точки A точку A' и проведемъ ея ординату, то мы получимъ другую площадь $A'B'PM = U_x$; эта площадь будетъ очевидно также функціей x и если возьмемъ дифференціалъ этой площади, то получимъ также:

$$dU_x = y\,dx = f(x)\,dx.$$

И поэтому если мы прежде положили, что $\int f(x)\,dx = U$, то теперь можемъ написать также, что $\int f(x)\,dx = U_x$.

Сравнивая площадь U_1 с площадью U мы замечаем, что

$$U_1 = U + \text{площадь } B'A'AB.$$

Площадь $B'A'AB$ не изменяется с изменением x, а потому есть величина постоянная; назовем ее через C; мы будем иметь: $U_1 = U + C$.

Величина площади C может быть считаема произвольной, так как точка A' на кривой была взята совершенно произвольно.

Из этих замечаний следует, что каждый раз, как мы найдем выражение интеграла, мы можем прибавить к этому выражению какое угодно постоянное количество и формула интеграла останется верной, так например мы можем написать, что

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

где C произвольное постоянное количество. Давая C какие нибудь частные значения, например $C = -\frac{1}{4}$, мы получим при этом:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4 - 1}{4}.$$

Точно также можем написать, что

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

где C произвольное постоянное количество.

Отсюда выводим такое заключение: чтобы получить общее выражение интеграла, необходимо всегда прибавлять к найденному для него выражению произвольное постоянное количество. Нетрудно убедиться в том, что прибавив к выражению интеграла произвольное постоянное количество, мы получим самое общее выражение интеграла, так что другим выражений для него уже —

не будет существовать. Действительно, допустим, что для одного и того же интеграла, мы получили два различных выражения:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) \text{ и } \int f(x)\,dx = \psi(x).$$

Посмотрим, чем могут отличаться одна от другой эти две функции: $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Мы должны иметь по определению:

$$d\varphi(x) = f(x)\cdot dx \text{ и } d\psi(x) = f(x)\,dx.$$

Взяв разность этих дифференциалов найдем:

$$d\varphi(x) - d\psi(x) = 0 \text{ или } d\left[\varphi(x) - \psi(x)\right] = 0.$$

Обозначим количество, стоящее в скобках через $F(x)$, т.е. положим, что

$$\varphi(x) - \psi(x) = F(x),$$

тогда будем иметь:

$$dF(x) = 0 \text{ или } F'(x)\,dx = 0.$$

Мы получили здесь произведение двух множителей $= 0$, следовательно хотя один из множителей другой равняется нулю, но $dx \neq 0$, а потому мы должны иметь $F'(x) = 0$. Следовательно $F(x)$ есть такая функция x, производная которой равна 0.

Но если производная функция всегда равна 0, то сама функция есть количество постоянное, а потому имеем:

$$F(x) = C,$$

где C постоянное количество, не изменяющееся с изменением x.

Следовательно разность

$$\varphi(x) - \psi(x) = C$$

и отсюда $$\varphi(x) = \psi(x) + C$$

т.е. два выражения одного и того же интеграла могут отличаться друг от друга только на постоянное количество.

Стало быть прибавив произвольное постоянное количество к выражению интеграла мы получим самое общее выражение его.

Интегралы, рассмотренные нами называются неопределенными, потому что в их выражения входят неопределенные постоянные количества.

Выражение интеграла неопределенно только в смысле его величины, но видъ функции, представляющей данный интеграль, очевидно не изменяется отъ того, что постоянное количество въ него входящее принимаетъ различныя значения. Такъ если возьмемъ:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

то заметимъ, что хотя величина $\frac{x^4}{4} + C$ остается неопределенной, - однако-жъ это выражение представляетъ функцию совершенно определеннаго вида, отличающаго ее отъ всѣхъ другихъ функций.

Чтобы уничтожить неопределенность интеграла въ смыслѣ величины, можно прибавить новое требованіе, которому должна удовлетворять функція, представляющая нѣкоторый интеграль.

Обыкновенно это требованіе, которому должна удовлетворять функція - интеграль, заключается въ томъ, чтобы эта функція обращалась въ О при нѣкоторомъ данномъ и опредѣленномъ значеніи x^0. Въ этомъ случаѣ функція, выражающая интеграль, опредѣляется не только по виду, но и по величинѣ. Въ самомъ

ибыть, положимъ, что мы разсматриваемъ интегралъ: $\int f(x)dx$ и пусть опять $\varphi(x)$ есть такая функція, производная которой равна $f(x)$, такъ что

$$\varphi'(x) = f(x).$$

мы можемъ пожалуй написать что $\int f(x)dx = \varphi(x) + C$, гдѣ C произвольное постоянное количество. Положимъ теперь, что требуется сверхъ того, что бы функція, представляющая интегралъ, обращалась въ 0 при нѣкоторомъ частномъ значеніи x, напримѣръ при $x = x_0$. Тогда будемъ имѣть:

$$\varphi(x_0) + C = 0,$$

откуда $C = -\varphi(x_0)$. Теперь C перестаетъ быть произвольнымъ и мы имѣемъ

$$\int f(x)dx = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

Это выраженіе представляетъ также функцію, производная которой будетъ

$$\varphi'(x) = f(x),$$

но при томъ эта функція такова, что обращается въ 0 при частномъ значеніи $x = x_0$. Такъ какъ тогда величина функціи будетъ:

$$\varphi(x_0) - \varphi(x_0) = 0.$$

Разсмотрѣнный нами интегралъ называется **исчезающимъ** при $x = x_0$, и, слѣдовательно, **исчезающій интегралъ** есть такая функція, производная которой равна подынтегральной функціи и которая сверхъ того обращается въ 0 при нѣкоторомъ частномъ значеніи $x = x_0$

Основныя формулы интегральнаго исчисленія.

Такъ какъ интегрированіе есть дѣйствіе обратное дифференцированію, то и основныя формулы интегральнаго исчисленія получаются изъ основныхъ формулъ дифференціальнаго исчисленія черезъ ихъ обращеніе. Ученикъ 2-ой

щение. Разсмотримъ по порядку формулы дифференціальнаго исчисле-
нія и выведемъ изъ нихъ обратныя формулы для интегрированія.

1) Намъ извѣстно, что

$$dx^{m+1} = (m+1)x^m dx$$

Изъ этого равенства имѣемъ:

$$x^m dx = d\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

и отсюда получимъ обратную формулу:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \ldots\ldots (1),$$

т. е. интегралъ степени равенъ степени единицей большей,
раздѣленной на новаго показателя.

2). Намъ извѣстно, что

$$da^x = a^x la\, dx$$

Раздѣливъ на la получимъ

$$a^x dx = d\frac{a^x}{la},$$

а отсюда будемъ имѣть:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C \ldots\ldots (2)$$

въ частномъ случаѣ, когда $a = e$, получимъ:

$$\int e^x dx = e^x + C \ldots\ldots (2)'$$

3) $d lx = \frac{dx}{x}$ и отсюда

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C \ldots\ldots (3).$$

4) $d\sin x = \cos x\, dx$ и отсюда

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \ldots (4).$$

5) $d\cos x = -\sin x\, dx$. Перенесемъ знакъ минусъ въ первую

часть подъ знакъ дифференціала, то получимъ:

$$d(-\cos x) = \sin x\,dx,$$

а отсюда:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \ldots\ldots (5)$$

6) $d\,tgx = \frac{dx}{\cos^2 x}$; обратно имѣемъ:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \ldots\ldots (6)$$

7) $d\,ctgx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ или $d(-ctgx) = \frac{dx}{\sin^2 x}$ и отсюда:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \ldots\ldots (7)$$

8) $d\,arc\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и обратно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C \ldots\ldots (8)$$

9) $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ или $d(-\arccos x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, отсюда:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C \ldots\ldots (8)'$$

10) $d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$ и обратно

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C \ldots\ldots (9)$$

11) $d(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$ или $d(-\operatorname{arccotg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$, слѣдовательно

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccotg} x + C \ldots\ldots (9)'$$

Вотъ девять основныхъ формулъ интегральнаго исчисленія. Сдѣлаемъ замѣчаніе относительно(*) изъ основныхъ формулъ. Такъ какъ въ формулѣ (1) показатель m можетъ быть какимъ-угодно количествомъ, положительнымъ или отрицательнымъ, цѣлымъ или дробнымъ, то кажется-бы, что изъ формулы (1) можно получить, какъ частный случай, и формулу (3); стоитъ только сдѣлать $m = -1$ и мы получимъ интегралъ:

(*) нѣкоторыхъ

$$\int x^{-1} \cdot dx = \int \frac{dx}{x}.$$

Но однако формула первая для этого случая даетъ:

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + c \quad \text{или}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0} + c = \frac{1}{0} + c = \infty + c.$$

Это показываетъ, что формула (1) къ этому частному случаю не приложима. Это происходитъ отъ того, что въ формулѣ первой интегралъ представляетъ вообще алгебраическую функцію, и только въ частномъ случаѣ, когда $m=-1$, этотъ интегралъ будетъ трансцендентной функціей; трансцендентная же функція, въ нашемъ случаѣ lx, никакой алгебраической формулой, содержащей въ себѣ конечное число алгебраическихъ дѣйствій, не можетъ быть выражена, а потому и формула (1) должна оказаться не приложимой къ выраженію интеграла $\int \frac{dx}{x}$. Замѣтимъ однако, что формула (3) можетъ быть получена изъ формулы (1), причемъ нужно будетъ перейти черезъ неопредѣленность.

Въ формулѣ (1) замѣнимъ произвольное постоянное c другимъ тоже произвольнымъ постояннымъ, положивъ:

$$c = \frac{-1}{-m+1} + c',$$

гдѣ c' есть новое произвольное постоянное.

Подставивъ въ формулу (1) вмѣсто c это выраженіе, получимъ:

$$\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1} - 1}{m+1} + c'$$

Сдѣлаемъ теперь въ этомъ равенствѣ $m=-1$, мы получимъ:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \frac{x^0 - 1}{-1+1} + c' = \frac{0}{0} + c'$$

Но неопределенность здесь можно уничтожить, определивъ истинное значеніе дроби: $\frac{x^{m+1}-1}{m+1}$ при $m=-1$, т.е. опредѣливъ предѣлъ, къ которому стремится это выраженіе при неопредѣленномъ приближеніи m къ -1. Чтобы найдти этотъ предѣлъ, нужно, какъ извѣстно, взять производную числителя, раздѣлить ее на производную знаменателя и послѣ сего положить $m=-1$; сдѣлавъ это получимъ:

$$\int\frac{dx}{x}=\lim\left[\frac{x^{m+1}lx\cdot 1}{1}\right]_{m=-1}+C' \text{ и будемъ имѣть:}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\lim\left[\frac{x^0 lx\cdot 1}{1}\right]+C'=lx+C'$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что между (1) и (3) нѣтъ противорѣчія. Замѣтимъ еще, что въ формулѣ (1) количество n совершенно произвольно и можетъ быть положительно или отрицательно, цѣлымъ или дробнымъ, и потому формула (1) содержитъ много частныхъ случаевъ.

Такъ напримѣръ, мы можемъ написать выраженіе слѣдующихъ интеграловъ:

$$\int\frac{dx}{x^n}=\int x^{-n}dx=\frac{x^{-n+1}}{-n+1}+C=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+C.$$

$$\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}}=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=-2x^{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}}+C.$$

Сдѣлаемъ еще замѣчаніе о формулахъ (8) и (8)'. Обѣ эти формулы выражаютъ одинъ и тотъ же интегралъ, но въ различныхъ формахъ; по формулѣ (8) мы имѣемъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C, \text{ а по (8')}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C.$$

Мы не должны удивляться этому, так как мы знаем, что один и тот же интеграл может быть представлен двумя выражениями, но только такими, которые отличаются друг от друга на постоянное количество. Чтобы убедиться в том, что последние два выражения отличаются на постоянное количество, возьмем разность вторых частей последних равенств, поставив во второй формуле для отличия вместо c величину c', тогда получим:

$$\arcsin x + \arccos x + c - c',$$

но припомним, что

$$\arcsin x + \arccos x$$

есть сумма двух дополнительных дуг, а потому получим:

$$\arcsin x + \arccos x + c - c' = \frac{\pi}{2} + c - c'$$

Таким образом видим, что оба выражения (8) и (8)' отличаются на постоянное количество.

Тоже самое можно заметить о формулах (9) и (9)'.

Понятие об определенном интеграле.

При изучении способа бесконечно-малых было замечено, что конечные величины могут быть рассматриваемы, как пределы суммы бесконечно-малых, взятых в неопределенно-возрастающем числе. Для того чтобы представлять конечную величину таким образом, надо эту конечную величину разбить на бесконечное множество бесконечно-малых элементов. Если определяемая величина площади, то она может быть представлена в виде предела суммы бесконечно-

малых площадей; конечный объем может быть представлен, как предел суммы безконечно-малых объемов; если определяем поверхность, то ее можно представить видом суммы безконечно-малых поверхностей и т. д. Но какова бы разсматриваемая величина ни была, при ея определении путем аналитическим, мы встречаемся всегда с одной и той-же задачей анализа, которую можно-сформулировать слѣдующим образом:

Пусть мы имѣем некоторую функцию $f(x)$; положим, что эта функция остается непрерывной и конечной при изменении в ней переменного независимого от величины $x = x_0$ до $x = X$, гдѣ x_0 и X суть данныя и вполнѣ определенныя числа. Представим себѣ непрерывное изменение x между означенными предѣлами таким образом: переменному x мы будем давать ряд безконечно-малых приращений, при чем x перейдет непрерывно от величины x_0 ко величину X. Первое значение x есть x_0, слѣдующее будет $x_0 + \Delta x_0$, гдѣ Δx_0 есть безконечно-малое приращение x_0; назовем величину $x_0 + \Delta x_0$ чрезъ x_1; слѣдующее значение x будет $x_1 + \Delta x_1$, обозначим его чрезъ x_2; здѣсь Δx_1 есть безконечно-малое приращение x_1; слѣдующее значение x будет: $x_2 + \Delta x_2$, которое обозначим чрезъ x_3, здѣсь Δx_2 есть безконечно-малое приращение x_2; слѣдующее значение x есть $x_3 + \Delta x_3$ равное x_4 и т. д. и наконецъ мы дойдем такимъ образом до нѣкоторой величины x_{n-1}, которая получив соответствующее приращение Δx_{n-1} обратится в предѣльную величину $x_n = X$, так что

$$x_{n-1} + \Delta x_{n-1} = x_n = X.$$

Такимъ образомъ x при переходѣ отъ величины x_0 до X будетъ принимать рядъ слѣдующихъ значеній:

$$x_0$$

$$x_0 + \Delta x_0 = x_I$$

$$x_I + \Delta x_I = x_2$$

$$x_2 + \Delta x_2 = x_3$$

.....

$$x_{n-1} + \Delta x_{n-1} = x_n = X$$

Рядъ послѣдовательныхъ приращеній, получаемыхъ при этомъ $x^{ому}$ будетъ слѣдующій:

$$\Delta x_0 = x_I - x_0$$

$$\Delta x_I = x_2 - x_I$$

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2$$

.....

$$\Delta x_{n-1} = X - x_{n-1}$$

Сумма этихъ безконечно-малыхъ приращеній очевидно будетъ:

$$\Delta x_0 + \Delta x_I + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta x_{n-1} = X - x_0,$$ т. е. сумма безконечно-малыхъ приращеній x^a составляетъ полное приращеніе x^a при переходѣ его отъ величины x_0 къ X и она равна $X - x_0$.

Такимъ образомъ мы будемъ измѣнять x въ промежуткѣ отъ x_0 до X.

Разсмотримъ теперь произведеніе $f(x)\Delta x$ и будемъ въ немъ приписывать x^a послѣдовательный рядъ значеній: $x_0, x_I, x_2 \ldots\ldots\ldots x_{n-1}$

и потомъ возьмемъ сумму такихъ произведеній. Эта сумма будетъ:

$$f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}.$$

Въ этомъ рядѣ значеній мы не приписываемъ X крайняго значенія X, такъ какъ это значеніе не получаетъ уже никакого приращенія, ибо послѣднее приращеніе, полученное x есть Δx_{n-1}.

Тотъ же сумму можно сокращенно представить такъ:

$$f(x_0)\Delta x_0 + f_1(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots\cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{x=x_0}^{x=X} f(x)\Delta x.$$

Вообразимъ теперь, что число n промежутковъ, на которыя раздѣлили полный промежутокъ отъ x_0 до X, увеличивается неопредѣленно, и что вмѣстѣ съ этимъ послѣдовательныя приращенія:

$$\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2 \cdots\cdots \Delta x_{n-1}$$

уменьшаются непрерывно, приближаясь къ 0. Мы будемъ такимъ образомъ представлять себѣ, что всѣ послѣдовательныя приращенія x зависятъ отъ числа n промежутковъ, и при томъ такъ, что при неопредѣленномъ увеличеніи n они всѣ одновременно стремятся къ 0. Если въ семъ дѣлѣ будемъ увеличивать n до безконечности, то разсматриваемая сумма будетъ суммою безконечно-малыхъ количествъ, въ которой число слагаемыхъ n неопредѣленно увеличивается, а каждое изъ слагаемыхъ въ тоже время стремится къ 0.

Попробуемъ себѣ найти предѣлъ, къ которому стремится эта сумма при n возрастающемъ до безконечности, т. е

$$\lim \sum_{x_0}^{X} f(x)\Delta x.$$

Этотъ предѣлъ называется опредѣленнымъ интеграломъ отъ элемента $f(x)\Delta x$, взятымъ между предѣлами x_0 и X.

Такъ какъ безконечно-малое приращеніе перемѣннаго Δx все равно, что-дифференціалъ его dx, то вмѣсто Δx вездѣ можно подставить dx. Предѣлъ разсматриваемой суммы безконечно-малыхъ обозначается такъ:

$$\lim \sum_{x_0}^{X} f(x)\Delta x = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Знакъ $\int_{x_0}^{X}$ есть знакъ опредѣленнаго интеграла взятаго между предѣлами x_0 до X отъ элемента $f(x)dx$; x_0 — есть нижній предѣлъ интеграла, а X — верхній. Символъ $\int$ есть первая буква слова Summa.

Мы увидимъ впослѣдствіи, что всѣ задачи Геометріи и Механики, въ которыхъ конечныя величины разсматриваются какъ суммы безконечно-малыхъ, приводятся къ опредѣленію предѣла суммы безконечно-малыхъ имѣющихъ такого вида, какой указанъ выше. къ опредѣленію подобныхъ предѣловъ суммъ безконечно-малыхъ приводятся вопросы о вычисленіи площадей, объемовъ, моментовъ инерціи и проч.

Въ данномъ выше опредѣленіи интеграла надо обратить особенное вниманіе на условіе, по которому функція $f(x)$ должна оставаться непрерывной и конечной между предѣлами x_0 и X. Это условіе, необходимо должно быть соблюдено. Если же предположимъ, что $f(x)$ обращается въ безконечность между предѣлами x_0 и X при какомъ-нибудь одномъ изъ значеній $x=c$, то, такъ какъ въ разсматриваемой суммѣ безконечно-малыхъ перемѣнное x должно принимать всѣ воз-

можныя значенія отъ x_0 до X, понятно, что оно между прочимъ приметъ и то значеніе, при которомъ функція $f(x)$ обращается въ безконечность. Такимъ образомъ въ разсматриваемой суммѣ будетъ между прочими и такой членъ $f(x)\Delta x$, въ которомъ первый множитель $f(x)$ съ приближеніемъ x къ значенію, обращающему $f(x)$ въ безконечность, приближается къ безконечности, а второй множитель Δx въ то же время стремится къ 0; въ предѣлѣ это произведеніе представится видомъ $\infty \cdot 0$. Такое выраженіе, какъ намъ извѣстно, означаетъ неопредѣленность и нельзя утверждать, что предѣлъ подобнаго выраженія будетъ непремѣнно равенъ 0, или, что это произведеніе на самомъ дѣлѣ есть безконечно-малое количество. Такимъ образомъ въ разсматриваемой суммѣ явятся члены, которые вообще будутъ не безконечно-малыми, и наша сумма, слѣдовательно, не будетъ суммой безконечно-малыхъ, а потому и нельзя будетъ прилагать къ ея вычисленію тѣхъ способовъ, которые будутъ нами указаны впослѣдствіи.

Такимъ образомъ мы будемъ впредь считать функцію $f(x)$ непрерывной и конечной при измѣненіи x отъ x_0 до X. Что же касается до закона, по которому измѣняется x, въ промежуткѣ отъ x_0 до X, то этотъ законъ можетъ быть совершенно произволенъ; требуется только-лишь одно условіе, чтобы при переходѣ къ предѣлу, т.е. при $n = \infty$, всѣ приращенія: $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2 \ldots\ldots \Delta x_{n-1}$, получаемыя x-омъ одновременно приближались къ нулю.

Въ частномъ случаѣ, который нерѣдко допускаютъ, принимаютъ, что послѣдовательныя приращенія, получаемыя x отъ x_0 равны между собою, такимъ образомъ x измѣняется, принимая безконечно-малыя и равныя приращенія, такъ что:

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_{n-1}.$$

Обозначимъ общую величину приращенія черезъ Δx; ясно, что тогда сумма всѣхъ приращеній будетъ:

$$n \cdot \Delta x = X - x_0, \text{ а отсюда:}$$

$$\Delta x = \frac{X - x_0}{n}.$$

Здѣсь прямо видно, что съ увеличеніемъ n до безконечности величина приращенія Δx стремится къ 0.

Въ этомъ частномъ случаѣ мы будемъ имѣть:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$x_2 = x_0 + 2 \cdot \Delta x$$

$$x_3 = x_0 + 3 \Delta x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = x_0 + (n-1) \Delta x$$

$$X = x_0 + n \cdot \Delta x$$

и предѣлъ разсматриваемой суммы будетъ:

$$\lim \sum_{x_0}^{X} f(x)\,\Delta x = \lim \Delta x \left[f(x_0) + f(x_0 + \Delta x_0) + f(x_0 + 2\Delta x) + \right.$$
$$\left. + \cdots\cdots\cdots + f(x_0 + \overline{n-1}\,\Delta x) \right] = \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot dx.$$

Этотъ предѣлъ есть тотъ же опредѣленный интегралъ отъ $f(x)\,dx$ при измѣненіи x отъ x_0 до X. Предѣлъ берется, полагая $n = \infty$

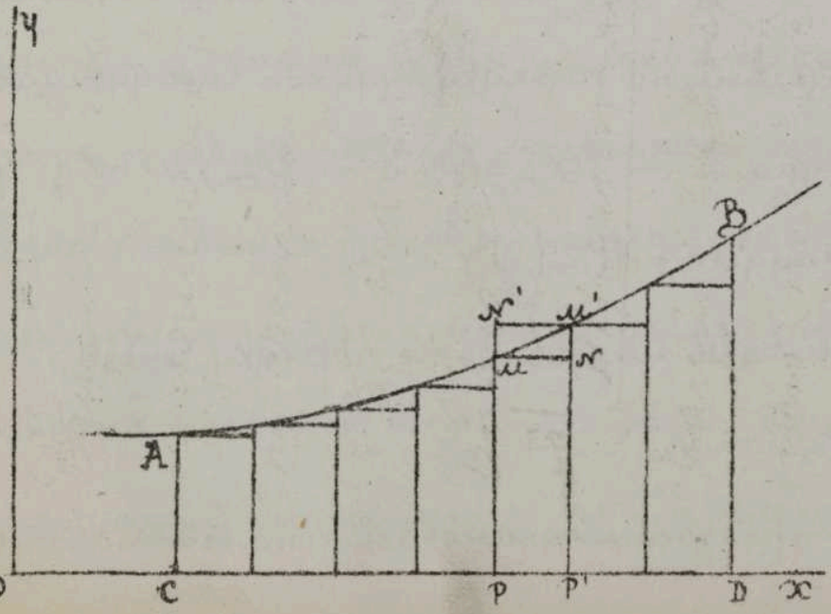
Давши такое определение интегралу нужно доказать, что разсматриваемый предѣлъ суммы безконечно-малыхъ всегда существуетъ и что при томъ этотъ предѣлъ есть количество вполнѣ опредѣленное и конечное; кромѣ того нужно показать, что предѣлъ этотъ не зависитъ отъ закона, по которому измѣняется приращеніе Δx, и будетъ всегда одинъ и тотъ же при одномъ только условіи, что при приближеніи къ предѣлу всѣ приращенія x-овъ стремятся къ 0 вмѣстѣ съ увеличеніемъ n до безконечности.

Докажемъ, во первыхъ, геометрическимъ путемъ, что предѣлъ разсматриваемой суммы безконечно-малыхъ всегда существуетъ и имѣетъ величину конечную.

Возьмемъ кривую линію, представляемую уравненіемъ:

$$y = f(x),$$

гдѣ $f(x)$ данная функція. Пусть эта кривая отнесена къ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Начертимъ эту кривую. Пусть AB дуга этой кривой. Возьмемъ на этой кривой двѣ точки A и B, абсциссы которыхъ суть: $OC = x_0$ и $OD = X$. Построимъ соотвѣтствующія ординаты: AC и BD. Сдѣлавъ это построеніе, мы получимъ криволинейную площадь $CABD$, ограниченную двумя ординатами, осью X-овъ



и частью данной кривой линіи. Докажемъ, что разсматриваемый предѣлъ суммы безконечно-малыхъ или иначе опредѣленный интегралъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

представляетъ именно эту площадь, величина которой будетъ вполнѣ опредѣленною и конечною, такъ какъ всѣ ординаты кривой по условію въ этомъ промежуткѣ конечны.

Чтобы показать это, составимъ на чертежѣ разсматриваемую сумму. Отложимъ величины:

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{n-1}, X$$

какъ абсциссы и черезъ всѣ, полученныя такимъ образомъ, точки проведемъ ординаты кривой. Такимъ образомъ основаніе CD раздѣлится на n частей; эти части по порядку будутъ: $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2 \ldots\ldots \Delta x_{n-1}$. Затѣмъ изъ всѣхъ точекъ дѣленія кривой AB построенными ординатами проведемъ линіи $\parallel$ оси X, причемъ каждая изъ этихъ параллелей будетъ проведена въ правую сторону до встрѣчи съ смежной ординатой; такимъ образомъ получится рядъ прямоугольниковъ. Высоты этихъ прямоугольниковъ, которые называются вписанными, какъ видно изъ чертежа кривой по порядку будутъ слѣдующія: для 1^го прямоугольника $f(x_0)$, для 2^го — $f(x_1)$, для 3^го — $f(x_2)$ и т. д. и наконецъ высота послѣдняго будетъ $f(x_{n-1})$.

Площади этихъ прямоугольниковъ назовемъ по порядку черезъ:

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots\ldots \beta_{n-1}.$$

Эти площади равны, каждая, произведенію основанія на высоту, т. е.

$$\beta_0 = f(x_0)\,\Delta x_0$$

$$\beta_1 = f(x_1)\,\Delta x_1$$

$$\beta_2 = f(x_2)\,\Delta x_2$$

. . . . . .

$$\beta_{n-1} = f(x_{n-1})\,\Delta x_{n-1}.$$

Эти площади, как видим, и выражаются тем бесконечно-малым, которые мы суммировали выше. Взявши прежнюю сумму бесконечно-малых, мы получим соответственно:

$$\sum_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots\cdots + \beta_{n-1}.$$

Величина, которую мы назвали определенным интегралом, будет равна пределу этой суммы, так что будем иметь:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_{n-1}\right).$$

при n возрастающем до бесконечности и при предположении, что все приращения: $\Delta x_0, \Delta x_1 \ldots$ стремятся при этом одновременно к 0.

Очевидно, что при переходе к пределу все проведенные нами ординаты стремятся сблизиться и совпасть, и что при возрастании n до бесконечности и число ординат возрастает до бесконечности, а стало быть и число вписанных прямоугольников будет также увеличиваться до бесконечности.

При таком условии нам надо определить предел этой суммы вписанных прямоугольников.

Для нахождения этого предела, будем рассматривать кроме площадей вписанных прямоугольников еще площади, огра-

ченныя двумя смежными ординатами, осью абсциссъ и частью кривой AB.

Число этихъ площадей будетъ также n, назовемъ эти площади по порядку черезъ: α_0; α_1, α_2, α_3 ..... α_n.

Площади эти суть части разсматриваемой площади CABD и сумма ихъ очевидно составитъ всю площадь CABD, т. е.

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = \text{пл. CABD} = V.$$

Будемъ сравнивать теперь площади α съ соотвѣтствующими площадями прямоугольниковъ β. Понятно, что при переходѣ къ предѣлу всѣ площади α также стремятся къ 0 и слѣдовательно-становятся безконечно-малыми величинами. Сравнимъ какую-нибудь площадь α_i съ соотвѣтствующей площадью β_i. Пусть на чертежѣ на кривой AB имѣемъ двѣ очень близкія точки M и M', абсциссы которыхъ OP и OP'; черезъ точку M проведемъ параллель оси $x^{ов}$, которая пересѣчетъ ординату M'P' въ точкѣ N. Теперь мы имѣемъ:

$$\alpha_i = \text{пл. PMMP'} \quad \text{и} \quad \beta_i = \text{пл. PMNP'}.$$

Эти площади обѣ безконечно-малыя и сравненіе между ними легко сдѣлать, введя въ разсмотрѣніе еще 3-ю безконечно-малую; проведемъ для этого черезъ точку M' параллель оси $x^{ов}$ до встрѣчи ея въ точкѣ N' съ продолженіемъ ординаты MP. Мы получимъ новую безконечно-малую площадь PM'N'P', которую назовемъ черезъ γ_i.

Двѣ площади β_i и γ_i, какъ площади прямоугольниковъ, имѣющихъ одинаковыя основанія, относятся между собою какъ ихъ высоты, т. е.

$$\frac{\gamma_i}{\beta_i} = \frac{MP'}{MP}.$$

При переходѣ къ предѣлу, какъ было замѣчено выше, ординаты MP и M'P' сближаются и точка M' стремится совпасть съ точкой M, вслѣдствіе чего ординаты MP и M'P' стремятся сдѣлаться равными, а стало быть въ предѣлѣ будемъ имѣть:

$$\lim \frac{\gamma_i}{\beta_i} = 1.$$

Съ другой стороны видимъ, что

$$\beta_i < \alpha_i < \gamma_i$$

Чтобы написать это неравенство, нужно было предположить, что ординаты кривой отъ точки M до точки M' постоянно увеличиваются, а потому отъ точки M до точки M' кривая не должна имѣть изгибовъ. Мы имѣемъ полное право сдѣлать такое предположеніе, такъ какъ точка M' есть точка произвольно-близкая къ M и мы можемъ взять ее столь близкою отъ точки M, что кривая на протяженіи MM' не будетъ имѣть изгибовъ. Но ординаты кривой могутъ также, при другомъ расположеніи кривой, и идти въ промежуткѣ отъ M до M' не увеличиваясь, а уменьшаясь, и тогда имъ будемъ имѣть очевидно неравенства обратныя, т.е. тогда будетъ.

$$\beta_i > \alpha_i > \gamma_i$$

Чтобы не открывать эти два случая соединимъ эти неравенства вмѣстѣ и напишемъ:

$$\beta_i \gtrless \alpha_i \gtrless \gamma_i$$

Такимъ образомъ во всякомъ случаѣ площадь α_i будетъ заключаться между площадями β_i и γ_i. Раздѣлимъ эти неравенства на β_i, найдемъ

$$1 \gtrless \frac{\alpha_i}{\beta_i} \gtrless \frac{\gamma_i}{\beta_i}.$$

Если теперь будем переходить к пределу, полагая n увеличивающимся до бесконечности, то заметим, что так как отношение $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ заключается между двумя величинами, из которых одна есть 1, а другая $\frac{\gamma_i}{\beta_i}$ стремится к 1, то следовательно промежуточная величина $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ тоже будет стремиться к 1 и мы можем написать, что

$$\lim \frac{\alpha_i}{\beta_i} = 1 \text{ или обратно } \lim \frac{\beta_i}{\alpha_i} = 1.$$

Заметим, что предель этого отношения найдем при произвольном i и мы можем полагать i равным: 0, 1, 2, 3, ..., n−1, и будем иметь на основании доказанного, что

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1, \quad \lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1, \quad \lim \frac{\alpha_3}{\beta_3} = 1 \text{ и т. д. до } \lim \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = 1.$$

Вернемся теперь к определению предела суммы:

$$\lim (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1})$$

Так как это есть предель суммы бесконечно-малых в конечном возрастающем числе, то мы знаем из способа бесконечно-малых, что этот предель не изменится по величине, если вместо бесконечно-малых в нем входящих мы возьмем другия бесконечно-малыя не равныя первым, но такия, отношения которых к заменяемым = 1. Вследствие этого мы можем в разсматриваемой сумме вместо бесконечно-малых β_0, β_1 и т. д. поставить бесконечно-малыя α_0, α_1 и т. д. и мы будем иметь:

$$\lim (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1}) = \lim (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}) = \lim \Sigma\alpha.$$

Но эта последняя сумма $\Sigma\alpha$ составляет площадь кривой и, каково бы ни было число n, величина этой суммы остается

постоянною и всегда представляетъ и всегда представляетъ площадь кривой, т.е. площадь CABD. Вслѣдствіе этого разсматриваемый нами предѣлъ будетъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = u = \text{пл. } CABD.$$

Отсюда заключаемъ, что опредѣленный интегралъ всегда представляетъ нѣкоторую, вполнѣ опредѣленную площадь кривой линіи, которую можно построить, и отсюда же слѣдуетъ, что опредѣленный интегралъ имѣетъ всегда величину конечную и опредѣленную.

Доказавъ существованіе опредѣленнаго интеграла, нужно найти способъ для нахожденія его величины.

По данному выше опредѣленію этого интеграла, мы имѣемъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left[f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \cdots\cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}\right]$$

при n возрастающемъ до безконечности и при условіи, что всѣ приращенія: Δx_0, Δx_1, Δx_2..... одновременно стремятся къ 0.

Разсматривая эту сумму безконечно-малыхъ мы замѣчаемъ, что она представляетъ сумму дифференціаловъ нѣкоторой функціи, сумму, въ которой X получаетъ всевозможныя значенія отъ $x = x_0$ до $x = X$.

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ суммируемыя здѣсь безконечно-малыя имѣютъ видъ $f(x)\Delta x$ или все равно $f(x)dx$, т.е. они представляютъ произведеніе нѣкоторой функціи x^a на безконечно-малое приращеніе перемѣннаго независимаго Δx, а такое произведеніе представляетъ дифференціалъ нѣкоторой функціи x^a. Мы уже доказали прежде, что непремѣнно существуетъ такая функція $y = \varphi(x)$, дифференціалъ ко-

торой равенъ данному дифференціалу $f(x)dx$, такъ что будетъ имѣть:

$$d\varphi(x) = dy = f(x)dx.$$

Такая функція была названа нами неопредѣленнымъ интеграломъ отъ дифференціала $f(x)dx$. Такъ какъ разсматриваемая нами сумма представляетъ сумму всевозможныхъ значеній дифференціала функціи y, когда x принимаютъ всевозможныя значенія отъ x_0 до X, то сталобыть эти елементы можемъ изобразить такимъ образомъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim \sum_{x_0}^{X} f(x)\Delta x = \lim \sum_{x_0}^{X} dy.$$

Сравнимъ безконечно-малое dy съ безконечно-малымъ приращеніемъ функціи Δy, которое есть:

$$\Delta y = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x).$$

Мы знаемъ, что эти два безконечно-малыя суть dy не равны между собой, но отличаются другъ отъ друга на безконечно-малое высшаго порядка, иначе говоря эти безконечно-малыя таковы, что предѣлъ ихъ отношенія равенъ 1. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\lim \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

На этомъ основаніи при опредѣленіи вышенаписаннаго предѣла суммы безконечно-малыхъ безконечно-малыя dy мы можемъ замѣнить соотвѣтствующими безконечно-малыми Δy. Сдѣлавъ это, можно написать, что

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim \sum_{x=x_0}^{x=X} \Delta y.$$

Разсмотримъ теперь, какова эта сумма $\Sigma \Delta y$. Эту сумму можно представить иначе такъ:

$$\sum_{x_0}^{X} \Delta y = \sum_{x_0}^{X} [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]$$

Чтобы получить всѣ члены этой суммы, мы должны давать X^1 всевозможныя значенія отъ x_0 до X, т.е. сдѣлать X послѣдовательно равными

$$x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}$$

и затѣмъ взять сумму всѣхъ этихъ членовъ, тогда получимъ:

$$\sum_{x_0}^{X} \Delta y = \varphi(x_0+\Delta x_0) - \varphi(x_0) + \varphi(x_1+\Delta x_1) - \varphi(x_1) + \varphi(x_2+\Delta x_2) - \varphi(x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \varphi(x_{n-1}+\Delta x_{n-1}) - \varphi(x_{n-1})$$

или такъ какъ $x_0+\Delta x_0 = x_1$; $x_1+\Delta x_1 = x_2$, $x_2+\Delta x_2 = x_3$; $\ldots\ldots$ то будемъ имѣть

$$\sum_{x_0}^{X} \Delta y = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) + \varphi(x_2) - \varphi(x_1) + \varphi(x_3) - \varphi(x_2) + \ldots\ldots + \varphi(X) - \varphi(x_{n-1}).$$

Разсматривая эту сумму, мы видимъ, что въ ней всѣ члены сократятся за исключеніемъ двухъ и мы получимъ:

$$\sum_{x_0}^{X} \Delta y = \varphi(X) - \varphi(x_0) \text{ и наконецъ:}$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left[\varphi(X) - \varphi(x_0)\right]$$

Но эта разность есть величина постоянная и потому можно написать:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0).$$

Это равенство показываетъ, какъ можно получить величину опред. интеграла.

Изъ этого равенства видно, что для того, чтобы получить опредѣленный интегралъ, надо найти предварительно неопредѣленный интегралъ, т.е. надо найти такую функцію $\varphi(x)$, дифференціалъ которой равенъ $f(x)dx$ и въ эту функцію вставить вмѣсто x сначала верхній предѣлъ X, потомъ нижній x_0 и затѣмъ взять разность полученныхъ результатовъ.

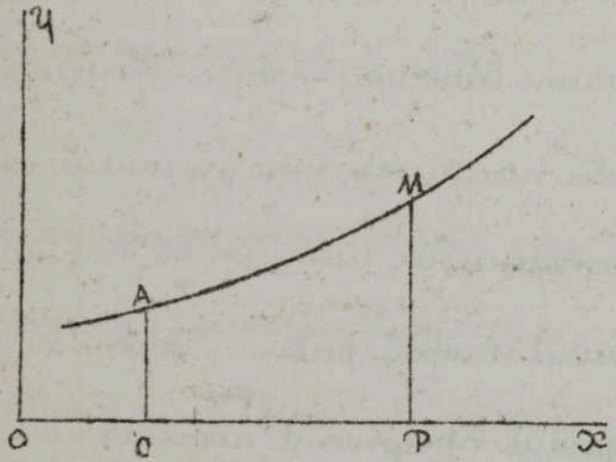
Такимъ образомъ мы видимъ, что нахожденіе опредѣленнаго интеграла сводится къ опредѣленію неопредѣленнаго интеграла. Такъ какъ послѣдняя, выведенная нами, равенство выражаетъ одну изъ основныхъ теоремъ

жений интегрального исчисления, то мы предложим для него еще другое геометрическое доказательство.

Пусть опять нам дан определенный интеграл: $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$.

Верхний предел X здесь есть количество постоянное, но совершенно произвольное при соблюдении условия, что функция $f(x)$ остается непрерывной между пределами x_0 и X. Поставим вместо постоянной величины X переменное количество x и будем рассматривать определенный интеграл вида: $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$.

Этот интеграл представляет также некоторую площадь кривой, как и всякий определенный интеграл. Построим эту площадь. Для этого построим во-первых кривую: $y = f(x)$ и возьмем на этой кривой точку A, абсцисса которой равнялась-бы x_0, так что $OC = x_0$; затем возьмем другую точку M, абсцисса, которой равнялась-бы x, и мы можем сказать на основании предыдущего, что $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \text{пл. } CAMP = u$.



но если, считая x переменным, мы будем изменять абсциссу x, т.е OP, то площадь u будет также изменяться, так что площадь эта есть функция x, но только определенная геометрически. Мы знаем сверх того, что дифференциал этой площади будет $du = ydx = f(x)dx$, так что u есть такая функция x, дифференциал которой равен $f(x)dx$. Обозначим через $\varphi(x)$ одну такую функцию, дифференциал которой равен $f(x)dx$; тогда самый общий вид функции, дифференциал которой равен $f(x)dx$, будет: $\varphi(x) + C$.

где C есть произвольное постоянное. Искомая функция u должна, следовательно заключаться в этом общем виде, т. е. мы должны иметь:

$$u = \varphi(x) + C.$$

Здесь неизвестно C; ясно, однако, что оно не может оставаться неопределенным, ибо функция u совершенно определенная. Нетрудно найти и C. Вообразим, что точка M приближается по кривой к точке A; очевидно, что когда точка M совпадет с точкой A, и абсцисса x сделается равною x_0, то площадь u обратится в 0 и мы должны иметь поэтому:

$$\varphi(x_0) + C = 0, \text{ а отсюда } C = -\varphi(x_0).$$

Затем выражение для площади u будет следовательно:

$$u = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

и мы будем иметь:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = u = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Если в этом равенстве верхний предел интеграла сделаем $= X$, то получим

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0).$$

Таким образом мы пришли другим путем к равенству, дающему способ для нахождения величины определенного интеграла.

При вычислении определенного интеграла, найденным нами путем, обыкновенно пишут сначала неопределенный интеграл, заключая его в скобки и отмечая при скобках пределы верхний и нижний, а затем уже вычисляют величину определенного интеграла, как было указано выше. Таким образом будем иметь:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \Big[\varphi(x) + C\Big]_{x_0}^{X} = \varphi(X) - \varphi(x_0)$$

Теперь мы можем для примера выполнить на самом деле вычисление некоторых простых определенных интегралов. Так найдем:

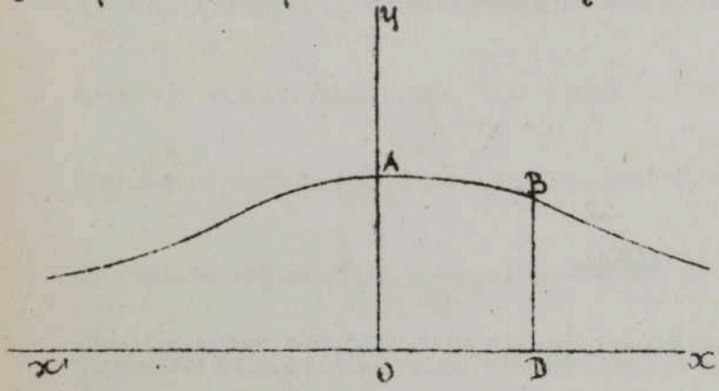
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x + C]_0^1 = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4} = \frac{3,14159}{4} = 0,785\ldots\ldots$$

Мы видим, что определенный интеграл при данных и постоянных пределах выражается определенным числом.

Если обратится к геометрическому значению интеграла, то заметим, что он представляет некоторую площадь кривой. Построим для данного случая эту площадь. Возьмем для этого кривую, ур-ие которой есть:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

Вид этой кривой нам известен; начертим эту кривую. Нам интеграл взять между пределами 0 и 1.



Возьмем абсциссу равную 0; эта абсцисса даст на кривой точку A; положим, что OD = 1, и пусть точка кривой, соотвествующая абсциссе равной 1, будет точка B. Стало быть наш интеграл представляет площадь OABD, которая равна 0,785..... как нами выше.

Подобно предыдущему найдем: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x + C]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

$$\int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5} + C\right]_0^1 = \frac{1}{5}; \qquad \int_1^2 \frac{dx}{x} = [\ln x + C]_1^2 = l_2 - l_1 = l_2.$$

каждый из этих интегралов определяет величину некоторой площади; площади эти легко было-бы построить.

В заключение заметим, что тот интеграл, который мы рассматривали в предыдущей статье и назвали изгезающим, со-

жетъ быть разсматриваемъ также, какъ интегралъ опредѣленный. Дѣйствительно, мы нашли выше, что

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

Мы видимъ, что этотъ опредѣленный интегралъ есть такая функція x, дифференціалъ которой равенъ подынтегральному дифференціалу, ибо $d[\varphi(x) - \varphi(x_0)] = d\varphi(x) = f(x)\,dx$.

Кромѣ того эта функція обращается въ 0 при $x = x_0$. Слѣдовательно эта функція есть интегралъ исчезающій при $x = x_0$, а потому исчезающій интегралъ есть интегралъ опредѣленный, взятый въ предѣлахъ отъ x_0 до x, причемъ верхній предѣлъ его x есть количество перемѣнное.

Пріемы интегрированія.

Сдѣлаемъ предварительно два слѣдующихъ замѣчанія:

1) Дѣйствія интегрированія и дифференцированія взаимно уничтожаются. Это слѣдуетъ прямо изъ опредѣленія интеграла, такимъ образомъ можемъ очевидно что

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \text{ и также } \int d\varphi(x) = \varphi(x),$$

потому что неопредѣленный интегралъ есть такая функція, дифференціалъ которой равенъ подынтегральному дифференціалу. Но очевидно, что можно написать также:

$$\int d\varphi = \varphi(x) + c \quad *$$

Дифференціалъ исчезающаго интеграла равенъ также подынтегральной функціи, т.е.: $d\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = d[\varphi(x) - \varphi(x_0)] = d\varphi(x) = f(x)\,dx$.

Но дифференціалъ опредѣленнаго интеграла равенъ 0, такъ какъ

определенный интеграль есть количество постоянное, т.е

$$d\int_{x_0}^{x} f(x)dx = 0.$$

2) При интегрировании, как и при дифференцировании, постоянный множитель можно выводить за знакъ интеграла; такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\int A f(x)dx = A\int f(x)dx$$

Чтобы доказать это, возьмемъ дифференціалъ второй части равенства, получимъ: $A\,d\int f(x)dx = A\,f(x)dx$, отсюда видимъ, что дифференціалъ этой функціи равенъ подынтегральному и потому написанное равенство вѣрно. Это замѣчаніе относится къ опредѣленному интегралу, такъ что будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{x} A f(x)dx = A\int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Это равенство очевидно, если разсматривать интегралъ, какъ сумму безконечно-малыхъ: первая часть этого ура показываетъ, что въ ней каждый членъ суммы помноженъ на A, а во 2ой части вся сумма помножена на A, что соотвѣтствуетъ выведенію общаго множителя за скобку.

Для интегрированія существуютъ слѣдующіе 4 пріема:

1) Интегрированіе непосредственное
2) Интегрированіе черезъ разложеніе
3) Интегрированіе по частямъ
4) Интегрированіе черезъ введеніе новаго перемѣннаго.

Интегрированіе непосредственное

Этотъ пріемъ состоитъ въ употребленіи данныхъ выше девяти основныхъ формулъ интегральнаго исчисленія. Эти формулы

могутъ быть при томъ обобщены такъ, что каждая изъ нихъ представитъ не одинъ только интегралъ, но безчисленное множество интеграловъ. Это обобщеніе основано на слѣдующемъ замѣчаніи: если для какого-нибудь неопредѣленнаго интеграла будетъ найдено выраженіе, такъ что, напримѣръ:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

то это равенство останется справедливымъ и тогда, когда въ немъ вмѣсто x поставимъ какую-угодно функцію $x = \psi$, т.е. будемъ имѣть:

$$\int f[\psi(x)]\,d\psi(x) = \varphi[\psi(x)] + C.$$

Чтобы доказать справедливость этого послѣдняго равенства повѣримъ его, для чего возьмемъ дифференціаломъ вторую часть и если этотъ дифференціалъ будетъ равенъ подынтегральному, то заключимъ, что это равенство — вѣрно.

Находимъ по правилу дифференцированія функціи отъ функціи:

$$d[\varphi(\psi(x)) + C] = d\varphi\{\psi(x)\} = \varphi'\{\psi(x)\}\,d\psi(x).$$

но функція $\varphi(x)$ такова, что ея производная $\varphi'(x) = f(x)$ и это равенство, какъ тожество, существуетъ при всякомъ значеніи x. Вмѣсто x мы можемъ въ немъ поставить z и будемъ имѣть:

$$\varphi'(z) = f(z),$$

сдѣлавъ $z = \psi(x)$, мы получимъ: $\varphi'(\psi(x)) = f(\psi(x))$ и слѣдовательно будетъ имѣть мѣсто: $d\left[\varphi(\psi(x)) + C\right] = f\left[\psi(x)\right]d\psi(x)$. Что и доказываетъ справедливость нашего замѣчанія. На основаніи этого замѣчанія, выше полученныя, девять формулъ мы можемъ написать въ болѣе общей формѣ, замѣняя въ нихъ x произвольной функціей

$f(x)$. Будемъ имѣть, напримѣръ:

$$\int [f(x)]^m df(x) = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1} + C \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I.}$$

Это есть общее выраженіе интеграла степени. Подобно этому:

$$\int a^{f(x)} df(x) = \frac{a^{f(x)}}{la} + C \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.}$$

Это есть общее выраженіе интеграла показательной функціи. Далѣе:

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = l f(x) + C \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III.}$$

Такимъ же образомъ могутъ быть обобщены и всѣ остальныя основныя формулы. Всякая изъ полученныхъ такимъ образомъ формулъ заключаетъ въ себѣ безчисленное множество различныхъ по виду интеграловъ, потому, что подъ функціей $f(x)$ мы можемъ разумѣть какую угодно функцію x. Сдѣлаемъ нѣсколько приложеній основныхъ формулъ въ обобщенномъ видѣ.

Чтобы получить выраженіе интеграла: $\int \frac{dx}{(a+x)^3}$, замѣтимъ, что его можно представить такъ:

$$\int \frac{dx}{(a+x)^3} = \int (a+x)^{-3} dx = \int (a+x)^{-3} d(a+x),$$ что по 1-ой основной формулѣ даетъ:

$$\int \frac{dx}{(a+x)^3} = \frac{(a+x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(a+x)^2} + C.$$

Примѣры на непосредственное интегрированіе.

1) $$\int \frac{3x^2 dx}{a^3 + x^3} = l(a^3 + x^3) + C$$

Этотъ интегралъ непосредственный, такъ какъ числитель въ подъинтегральной функціи есть дифференціалъ знаменателя, а потому этотъ интегралъ представляетъ Непероваго логарифмъ знаменателя.

2) $$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d\sin x,$$

а этотъ интегралъ непосредственный и представляетъ степень

именно: $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}}$.

Замечаем, что дробь $\frac{dx}{x}$ представляет дифференциал Неперова логарифма, а потому данный интеграл можно написать так:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}} = \int \frac{d\,lx}{\sqrt{1-(lx)^2}}$$

Этот интеграл непосредственный и представляет arcsin, а потому имеем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(lx)^2}} = \arcsin(lx) + C.$$

4) $\int \cos(a+x)\,dx = \int \cos(a+x)\,d(a+x) = \sin(a+x) + C$

5) $\int \frac{a\,dx}{\cos^2(ax+b)} = \int \frac{d(ax+b)}{\cos^2(ax+b)} =$ $= tg(ax+b) + C.$

Весьма часто случается, что для того, чтобы данный интеграл подходил подъ одну изъ формулъ непосредственнаго интегрированія, надо подъ знакъ интеграла ввести нѣкоторый постоянный множитель; это всегда возможно, такъ какъ этотъ же постоянный множитель можно поставить передъ знакомъ интеграла дѣлителемъ. Приведемъ нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ употребляется этотъ пріемъ:

1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Разсматривая этотъ интегралъ, мы замѣчаемъ, что числитель составляетъ дифференціалъ подкоренного количества, если будетъ помноженъ на -2; поставимъ передъ знакомъ интеграла дѣлителемъ -2; интегралъ отъ этого не измѣнится, такъ какъ и числитель помножимъ на -2.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2-x^2).$$

Этотъ интегралъ уже представленъ въ формѣ непосредственнаго, и по формулѣ (I) можно написать:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(a^2-x^2) = -\frac{1}{2}\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

2) $\int\frac{xdx}{(a+bx^2)^n}$. Замѣтимъ опять, что знаменатель здѣсь есть функція x въ $n^{ой}$ степени, чтобы числитель былъ дифференціаломъ количества, возводимаго въ степень, нужно его помножить на $2b$ и чтобы интегралъ не измѣнился по величинѣ, нужно передъ его знакомъ поставить тотъ-же дѣлитель $2b$, а потомъ писать:

$$\int\frac{xdx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b}\int\frac{2bxdx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b}\int\frac{d(a+bx^2)}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b}\int(a+bx^2)^{-n}d(a+bx^2),$$

а этотъ интегралъ непосредственный, а потому находимъ:

$$\int\frac{xdx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{2b}\frac{(a+bx^2)^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2b(n-1)(a+bx^2)^{n-1}} + C.$$

3) $\int\frac{\sin x dx}{a+b\cos x}$.

Числитель этого интеграла будетъ дифференціаломъ знаменателя, если его помножить на $-b$ и тогда интегралъ представить непремѣнно логарифмомъ знаменателя. Помножимъ же числителя на $-b$ и поставимъ $-b$ дѣлителемъ передъ знакомъ интеграла, получимъ:

$$\int\frac{\sin x dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\int\frac{d(a+b\cos x)}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}l(a+b\cos x) + C.$$

4) $\int e^{-x^2}xdx$.

Чтобы этотъ интегралъ былъ непосредственнымъ, нужно въ подъинтегральную функцію ввести множителемъ -2. Помножимъ ее на -2 и, раздѣливъ интегралъ на -2, получимъ:

$$\int e^{-x^2}xdx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Подобными же пріемами найдемъ:

5) $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C;$

6) $\int \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int \sin ax\,d(ax) = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2(a-bx)} = -\frac{1}{b}\int \frac{d(a-bx)}{\cos^2(a-bx)} = -\frac{1}{b}\operatorname{tg}(a-bx) + C.$

Запишем два следующие интеграла, часто встречающиеся

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ Этот интеграл представляет бы arcsin, если бы в знаменателе вместо a^2 стояла 1; из под корня вынесем множителя a, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

9) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

Этот интеграл представлял-бы arctg, если бы в знаменателе вместо a^2 стояла 1. Разделив числителя и знаменателя на a^2, найдем:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a}\sqrt{1-\frac{b}{a}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}},$

а этот интеграл приводится к арксинусу, именно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{a}{b}}\int \frac{d\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

Подобно этому находим:

11) $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \int \frac{dx}{a\left(1+\frac{b}{a}x^2\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\int \frac{d\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{1+\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$

Примеры на непосредственное интегрирование:

1) $\int x^2\sqrt{a+bx^3}\,dx$

2) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{a-bx^3}}$

3) $\int \frac{\sin x\,dx}{(a+b\cos x)^n}$

4) $\int \sin^n x\cos x\,dx$

5) $\int \frac{\ln x\sqrt{1+(\ln x)^2}}{x}\,dx$

6) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$

7) $\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$

8) $\int \frac{\cos x}{e^{3\sin x}}\,dx$

9) $\int \frac{x^2\,dx}{a-bx^3}$

10) $\int \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos x + b^2\sin x}\,dx$

11) $\int \frac{1-4\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\,dx$ 12) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

13) $\int x\sin(x^2)\,dx$ 14) $\int \frac{\cos(m\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

15) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ 16) $\int \operatorname{tg}x\,dx$.

Интегрированіе черезъ разложеніе.

Этотъ пріемъ интегрированія основанъ на примѣненіи слѣдующей теоремы.

Теорема. Интегралъ отъ алгебраической суммы нѣсколькихъ функцій равенъ алгебраической суммѣ интеграловъ.

Эта теорема выражается слѣдующимъ равенствомъ:

$$\int [f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \psi(x)\,dx.$$

Равенство это доказывается повѣркой. Чтобы повѣрить его возьмемъ дифференціалъ второй части равенства и если получимъ подъ-интегральный дифференціалъ, стоящій въ первой части равенства, то теорема будетъ доказана. Но замѣтивъ, что вторая часть равенства представляетъ алгебраическую сумму, а дифференціалъ алгебраической суммы равенъ суммѣ дифференціаловъ, находимъ, что дифференціалъ второй части равенъ:

$$d\int f(x)\,dx + d\int \varphi(x)\,dx - d\int \psi(x)\,dx = f(x)\,dx + \varphi(x)\,dx - \psi(x)\,dx,$$

а это и есть подъ-интегральный дифференціалъ первой части; такимъ образомъ теорема доказана.

Эта же теорема распространяется и на опредѣленные интегралы. Такимъ образомъ будемъ имѣть также:

$$\int_{x_0}^{X} [f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости этого равенства, замѣтимъ, что для вычисленія опредѣленнаго интеграла нужно взять предварительно неопредѣленный интегралъ, потомъ подставить вмѣсто x сначала верхній предѣлъ, потомъ нижній и вычесть одинъ результатъ изъ другаго. Въ первой части равенства указано сдѣлать эти дѣйствія надъ всей суммой, стоящей подъ знакомъ интеграла, а во второй — тѣ же самыя дѣйствія надъ каждымъ членомъ отдѣльно. Понятно, что результаты этихъ дѣйствій будутъ одинаковы.

На основаніи этой теоремы можно интегрировать всякую сумму алгебраическихъ одночленовъ; такимъ образомъ находимъ, что

$$\int\left(Ax^m+Bx^n+Cx^p+\dots\right)dx = A\int x^m dx + B\int x^n dx + C\int x^p dx + \dots = \frac{Ax^{m+1}}{m+1}+\frac{Bx^{n+1}}{n+1}+\frac{Cx^{p+1}}{p+1}+\dots+C$$

Точно также вычисляемъ интегралъ: $\int\frac{Ax^m+Bx^n+Cx^p+\dots}{x^3}dx$

Стоитъ только сдѣлать указанное здѣсь дѣленіе на самомъ дѣлѣ и мы опять получимъ сумму алгебраическихъ одночленовъ, которую и будемъ интегрировать, какъ это сдѣлано выше.

Самый пріемъ интегрированія чрезъ разложеніе состоитъ въ томъ, что данную подъинтегральную функцію стараются разложить на сумму или разность другихъ простѣйшихъ функцій, которыя могли-бы интегрироваться непосредственно. Опредѣлимъ такимъ образомъ интегралы:

1) $\int\frac{n+mx}{a^2+x^2}dx = \int\left(\frac{n}{a^2+x^2}+\frac{mx}{a^2+x^2}\right)dx = n\int\frac{dx}{a^2+x^2}+m\int\frac{xdx}{a^2+x^2}$.

Первый изъ этихъ интеграловъ былъ уже вычисленъ намиъ, а второй легко вычислить, если замѣтимъ, что помноживъ на 2 числителя и поставивъ

2 дробителем перед знаком интеграла. Будем иметь в числителе подынтегральной функции дифференциал знаменателя, а потому весь интеграл представляет Непером логарифм знаменателя; таким образом найдем:

$$n\int\frac{dx}{a^2+x^2}+m\int\frac{xdx}{a^3+x^2}=\frac{n}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{m}{2}l(a^2+x^2)+C.$$

2) $\int\frac{x^3}{1+x^2}dx$

Чтобы разложить подынтегральную функцию будем делить числителя на знаменателя; найдем: $x^3:(x^2+1)=x-\frac{x}{x^2+1}$, а потому

$$\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int xdx-\int\frac{xdx}{x^2+1}.$$

Оба эти интеграла непосредственные, а потому:

$$\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}l(x^2+1)+C.$$

3) $\int\cos^2x\,dx$.

Заменяем $\cos^2x$ по извѣстной намъ формулѣ косинуса половинной дуги, получимъ:

$$\int\cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\int\frac{dx}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

4) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Помножимъ числителя и знаменателя на числителя, получимъ:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Первый интегралъ непосредственный, а второй уже былъ намъ вычисленъ, а потому имѣемъ:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Примѣры на интегрированіе чрезъ разложеніе.

1) $\int(1-2x+3x^2)^2x^3dx$

2) $\int\frac{(a+bx)^3}{x^4}dx$

3) $\int \frac{x^3 - x}{\sqrt{a^4 - x^4}}\,dx$

4) $\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos 2x}\,dx$

5) $\int \frac{x^3 + 2x - 3}{x-1}\,dx$

6) $\int \frac{x^3\,dx}{1+x^2}$

7) $\int 8\sin^3 x\,dx$

8) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

10) $\int 8\sin^2 x\,dx$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

12) $\int \frac{x^4}{a+bx}\,dx$

13) $\int \frac{x - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

14) $\int (1-\cos x)^2\,dx$

и 15) $\int \frac{x\,dx}{(1-x)^3}$.

Интегрированіе по частамъ.

Этотъ способъ состоитъ въ употребленіи особой формулы, называемой формулой интегрированія по частямъ. Эта формула есть обратная той, которая выражаетъ дифференціалъ произведенія двухъ множителей U и V, причемъ U и V суть функціи x.

Эта формула какъ извѣстно слѣдующая:

$$d(U.V) = U.dV + V\,dU.$$

Взявъ отъ обѣихъ частей интегралъ, получимъ:

$$U.V = \int U.dV + \int V.dU \text{ и отсюда:}$$

$$\int U.dV = U.V - \int V.dU$$

Эта формула и есть формула для интегрированія по частямъ.

Чтобы примѣнить эту формулу къ вычисленію нѣкотораго даннаго интеграла $\int f(x)dx$, нужно подынтегральную функцію представить въ видѣ $U.dV$, т.е. въ видѣ произведенія нѣкоторой функціи на дифференціалъ другой, и тогда уже примѣнять эту формулу. Употребляя эту формулу, мы вмѣсто даннаго интеграла получимъ во 2$^{\text{ой}}$ части другой интегралъ, ко-

порый, можетъ быть, будетъ проще данного, или можетъ получиться такой, который можно вычислить непосредственно, тогда какъ данный интегралъ мы не можемъ вычислить непосредственно. Такимъ образомъ, употребляя эту формулу, мы можемъ, или упростить данный интегралъ, или окончательно его вычислить.

Представимъ данный подъинтегральный дифференціалъ $f(x)\,dx$ въ видѣ $u\,dv$ можно безчисленнымъ множествомъ способовъ. Такъ во первыхъ, если положимъ $f(x) = u$ и $x = v$, то по нашей формулѣ будемъ имѣть:

$$\int f(x)\,dx = x f(x) - \int x f'(x)\,dx.$$

Кромѣ того, если въ подъинтегральную функцію введемъ множителемъ и дѣлителемъ произвольную функцію $\varphi'(x)$, то получимъ:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \varphi'(x)\,dx = \int \frac{f(x)}{\varphi'(x)}\, d\varphi(x).$$

Обозначимъ теперь $\frac{f(x)}{\varphi'(x)}$ черезъ u и $\varphi(x)$ черезъ v, мы получимъ опять нашъ интегралъ въ видѣ $\int u\,dv$ и здѣсь можемъ приложить къ нему формулу интегрированія по частямъ. Вообще функцію $\varphi(x)$ можно приписать подразумѣвать безчисленное множество всевозможныхъ функцій, откуда вытекаетъ безчисленное множество способовъ для представленія даннаго интеграла въ видѣ $\int u\,dv$.

Представимъ нѣсколько примѣровъ на приложеніе формулы для интегрированія по частямъ.

1) $\int x^n \ln x\,dx.$

Соединимъ множитель x^n съ dx и напишемъ данный интегралъ въ видѣ:

$$\int x^n \ln x\,dx = \int \ln x\, x^n dx = \int \ln x\, d\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Назовем теперь $\ln x$ через u, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ через v и применим к этому интегралу известную нам формулу, найдем:

$$\int \ln x\, d\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^n dx}{n+1}.$$

Теперь полученный здесь интеграл есть непосредственный, а потому напишем:

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x + \frac{1}{n+1}\right) + C$$

2) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$

Пусть $\operatorname{arctg} x = u$, а $x = v$. По известной формуле найдем:

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\, d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2}$$

Этот интеграл может быть вычислен непосредственно, если помножим числителя на 2 и перед знаком интеграла поставим дополнителем 2. Таким образом находим:

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

3) $\int x \ln(1+x^2)\, dx$.

Разложим $x dx$ как дифференциал функции $\frac{x^2}{2}$, тогда интеграл напишется так:

$$\int x \ln(1+x^2)\, dx = \int \ln(1+x^2)\, d\frac{x^2}{2}.$$

Применим теперь к этому интегралу формулу интегрирования по частям, полагая $\ln(1+x^2) = u$, а $\frac{x^2}{2} = v$, находим:

$$\int \ln(1+x^2)\, d\frac{x^2}{2} = \ln(1+x^2)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} d\ln(1+x^2) = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2} dx.$$

Последний интеграл легко взять через разложение, как это было указано раньше (пример 2-й предыдущей статьи) и тем получим:

$$\int x \ln(1+x^2)\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \frac{x^2}{2}\left[\ln(1+x^2) - 1\right] + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Иногда для того, чтобы вычислить интеграль по частям приходится применять формулу несколько раз и при каждой последовательной применении интеграль, получаемый во второй части равенства, изменяется по виду и должен последовательно упрощаться.

Предложим на это следующий пример:

4) $\int x^3 e^{-x} dx = -\int x^3 de^{-x}$

Применим формулу интегрирования по частям к этому интегралу, полагая $x^3 = u$, а $e^{-x} = v$, находим: $-\int x^3 de^{-x} = -x^3 e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x} dx$.

Интеграль, стоящий во второй части, проще первоначального, хотя он также не из простых; упрощение заключается в том, что степень x в подынтегральной функции понизилась на единицу.

К новому интегралу опять можно применить формулу интегрирования по частям; мы получим таким образом:

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} + 3\int x^2 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - 3\int x^2 de^{-x} = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6\int x e^{-x} dx.$$

Последний интеграль еще проще, так как в нем степень x еще понизилась на единицу. Применим еще раз формулу интегрирования по частям, находим:

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6\int x d(e^{-x}) = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} + 6\int e^{-x} dx.$$

Последний интеграль непосредственный, а потому имеем:

$$\int x^3 e^{-x} dx = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6x e^{-x} - 6e^{-x} + C = -e^{-x}\left[x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right] + C.$$

(Формула интегрирования по частям применяется и к вычислению определенных интегралов; так очевидно будем иметь:

$$\int_{x_0}^{x} u\,dv = \left[u\,v\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} v\,du.$$

гать символъ $\left[U.V\right]_{x_0}^{X}$ означаетъ разность результатовъ, которые получаются, когда въ выраженіи $U.V$ вставимъ вмѣсто X сначала X, а потомъ x_0.

Примѣненіе формулы интегрированія иногда можетъ оказаться неудобнымъ, именно тогда, когда во второй части получится интегралъ сложнѣе даннаго, тогда нужно или перемѣнить пріемъ интегрированія, или приложить способъ интегрированія по частямъ въ иной формѣ.

Такъ если интегралъ предыдущаго примѣра представить въ формѣ:

$$\int x^3 e^{-x} dx = \int e^{-x} d\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

и принимая e^{-x} за U, $\frac{x^4}{4}$ за V, будемъ интегрировать по частямъ, то получимъ

$$\int e^{-x} d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{x^4}{4} e^{-x} + \frac{1}{4}\int x^4 e^{-x} dx$$

Ясно, что во второй части равенства получается интегралъ сложнѣе даннаго, такъ какъ степень x повышается; такимъ образомъ въ этой формѣ интегрированіе по частямъ къ данному интегралу не можетъ быть приложено.

Примѣры на интегрированіе по частямъ.

1) $\int \arcsin x\,dx$

2) $\int x \sin 3x\,dx$

3) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$

4) $\int l(1+x)\,dx$

5) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$

6) $\int x^2 \cos ax\,dx$

7) $\int x^m (lx)^2 dx$

8) $\int e^{ax} \cos bx\,dx$

9) $\int_0^{2a} \arccos \frac{a-x}{a} dx = \pi a$

10) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx = -2\pi$

11) $\int_0^e \frac{lx\,dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 0{,}6236\ldots$

12) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\varphi} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{3}{10}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

Интегрированіе черезъ введеніе новаго перемѣннаго.

Положимъ, что мы имѣемъ $\int f(x)dx$. Здѣсь x есть перемѣнное независимое и можетъ поэтому измѣняться какъ угодно; мы можемъ вообразить поэтому, что x есть нѣкоторая функція новаго перемѣннаго z, такъ что $x = \varphi(z)$. Такимъ образомъ z будетъ измѣняться произвольно, а x будетъ измѣняться теперь въ зависимости отъ z. Введя новое перемѣнное мы будемъ имѣть подъ интеграломъ въ видѣ:

$$\int f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz$$

Этотъ интегралъ уже совершенно иной по составу, чѣмъ данный; здѣсь интегрированіе придется произвести по нѣкоторому перемѣнному z, и подъ интегральный дифференціалъ можетъ оказаться проще первоначальнаго даннаго, при этомъ возможно также, что новый интегралъ можетъ быть и непосредственно вычисленъ.

Вычисливши послѣдній интегралъ, мы въ результатѣ получимъ нѣкоторую функцію z, такъ что будемъ имѣть:

$$\int f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)\,dz = F(z) + C.$$

Но данный интегралъ есть функція x, слѣдовательно и результатъ долженъ быть выраженъ также функціею x; чтобы достигнуть этого стоитъ только z представить функціею x, это легко сдѣлать при помощи ур-ія, связывающаго эти два перемѣнныя. Изъ этого ур-ія мы получимъ: $z = \Psi(x)$. Вставивъ вмѣсто z въ полученный результатъ его выраженіе, найдемъ:

$$\int f\left[\varphi(z)\right]\varphi'(z)\,dz = F(z) + C = F\left(\Psi(x)\right) + C.$$

Такимъ образомъ данный интегралъ будетъ выраженъ функціею x.

Предположимъ нѣсколько примѣровъ на этотъ пріемъ интегрированія.

1) $\int \frac{x^2 dx}{a-bx^3}$.

Этотъ интегралъ могъ-бы быть вычисленъ черезъ приведеніе его къ интегральному, но его можно также получить и вновь указаннымъ способомъ. Положимъ, что $a-bx^3=z$. Дифференцируя находимъ:

$$-3bx^2dx=dz \text{ и отсюда } x^2dx=-\frac{1}{3b}dz.$$

Теперь нашъ интегралъ будетъ:

$$\int\frac{x^2dx}{a-bx^3}=-\frac{1}{3b}\int\frac{dz}{z}=-\frac{1}{3b}lz+C.$$

Выражая результатъ въ функціи x^a, получимъ:

$$\int\frac{x^2dx}{a-bx^3}=-\frac{1}{3b}lz+C=-\frac{1}{3b}l(a-bx^3)+C.$$

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Положимъ, что при этомъ $a>x$, иначе подъинтегральная функція была-бы мнимою. Введемъ новое перемѣнное, полагая $x=a\sin\varphi$, гдѣ φ новое перемѣнное. Находимъ теперь дифференціалъ x: $dx=a\cos\varphi.d\varphi$ и $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\varphi}=a\sqrt{1-\sin^2\varphi}=a\cos\varphi$. Вставляя эти величины въ выраженіе интеграла, получимъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos\varphi d\varphi}{a\cos\varphi}=\int d\varphi=\varphi+C.$$

Но результатъ долженъ быть выраженъ въ функціи x^a, поэтому опредѣляемъ φ какъ функцію x; изъ ур-ія, связывающаго эти два перемѣнныя, находимъ: $\sin\varphi=\frac{x}{a}$, а отсюда $\varphi=\arcsin\frac{x}{a}$. Такимъ образомъ, подставивъ вмѣсто φ его величину, получимъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\varphi+C=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

При вычисленіи интеграловъ по сказанному способу нельзя указать правилъ относительно того, что именно нужно принимать за новое пере-

лѣзное, и весьма часто случается, что вводится новое перемѣнное такимъ образомъ, что съ перваго взгляда нельзя и думать, что интегралъ чрезъ это упростится и можетъ быть вычисленъ. Возьмемъ напримѣръ:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Чтобы вычислить этотъ интегралъ введемъ новое перемѣнное z, полагая

$$\frac{a^2+x^2}{x^2} = z.$$

Отсюда имѣемъ: $a^2+x^2 = x^2 z$ и $a^2 = x^2(z-1)$, а отсюда $x^2 = \frac{a^2}{z-1}$ и наконецъ $x = \frac{a}{\sqrt{z-1}}$ или $x = a(z-1)^{-\frac{1}{2}}$. Дифференцируя это выраженіе, находимъ:

$$dx = -\frac{a}{2}(z-1)^{-\frac{3}{2}}dz.$$

Далѣе $a^2+x^2 = x^2 z = \frac{a^2 z}{z-1} = a^2 z (z-1)^{-1}$. Вставивъ эти двѣ величины въ выраженіе даннаго интеграла, будемъ имѣть:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-\frac{a}{2}\cdot(z-1)^{-\frac{3}{2}}dz}{a^3 z^{\frac{3}{2}}(z-1)^{\frac{3}{2}}},$$

сокращая получимъ:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2a^2}\int z^{-\frac{3}{2}}dz = -\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2 z^{\frac{1}{2}}} + C = \frac{1}{a^2\sqrt{z}} + C$$

Вставимъ теперь вмѣсто z его величину, выраженную функціею x^a, получимъ:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2\sqrt{z}} + C = \frac{1}{a^2\sqrt{\frac{a^2+x^2}{x^2}}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

Разсмотримъ теперь, какъ дѣлается введеніе новаго перемѣннаго въ опредѣленныхъ интегралахъ. Пусть имѣемъ данъ:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Требуется ввести новое перемѣнное, полагая $x = \psi(z)$. Означимъ неопредѣленный интегралъ отъ того-же дифференціала черезъ $\varphi(x)+C$, т. е. положимъ, что

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C.$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть такая функція, производная которой равна подынтегральной, т.е. $\varphi'(x) = f(x)$. Теперь нашъ опредѣленный интегралъ мы можемъ представить такъ: $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0)$.

Если въ данномъ интегралѣ перемѣнное измѣняется отъ x_0 до X, то по уравненію, связывающему старое и новое перемѣнное, нетрудно узнать между какими соотвѣтствующими предѣлами будетъ измѣняться новое перемѣнное Z.

Если въ ур-іи, связывающемъ x и z сдѣлаемъ $x = x_0$, т.е. возьмемъ ур-іе $x_0 = \psi(z)$ и отсюда опредѣлимъ соотвѣтствующее значеніе z, положимъ оно будетъ $z = z_0$, то получимъ слѣдующее тожество: $x_0 = \psi(z_0)$. Когда въ томъ же ур-іи сдѣлаемъ $x = X$, т.е. возьмемъ ур-іе $X = \psi(z)$ и отсюда опять опредѣлимъ соотвѣтствующее значеніе z, пусть оно будетъ $z = Z$, то будемъ имѣть тожество: $X = \psi(Z)$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что при измѣненіи x между предѣлами x_0 и X перемѣнное z будетъ измѣняться между соотвѣтствующими предѣлами z_0 и Z, которые могутъ быть опредѣлены.

Возвратившись опять къ разсмотрѣнію даннаго интеграла и, на основаніи выведенныхъ тожествъ, напишемъ его такъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0) = \varphi\left[\psi(Z)\right] - \varphi\left[\psi(z_0)\right].$$

Теперь разсмотримъ функцію $\varphi\left[\psi(z)\right]$ и найдемъ ея дифференціалъ; получимъ:

$$d\varphi\left[\psi(z)\right] = \varphi'\left[\psi(z)\right]\psi'(z)\,dz.$$

Но какъ было нами замѣчено выше функція $\varphi'(x) = f(x)$ при совершен-

ко произвольному значению x, то вместо функции $\varphi'[\psi(z)]$ можем поставить $f[\psi(z)]$ и будем иметь:

$$d\varphi[\psi(z)] = f[\psi(z)]\psi'(z)dz.$$

Въ полученномъ равенствѣ возьмемъ отъ обѣихъ частей интегралъ въ предѣлахъ отъ z_0 до z; мы получимъ:

$$\int_{z_0}^{z} d\varphi[\psi(z)] = \int_{z_0}^{z} f[\psi(z)]\psi'(z)dz \quad \text{или}$$

$$\varphi[\psi(z)] - \varphi[\psi(z_0)] = \int_{z_0}^{z} f[\psi(z)]\psi'(z)dz$$

Сравнивая это послѣднее равенство съ прежде полученнымъ, мы приходимъ къ слѣдующему равенству:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{z_0}^{z} f[\psi(z)]\psi'(z)dz.$$

Это равенство и выражаетъ правило для введенія новаго перемѣннаго въ опредѣленномъ интегралѣ.

Мы видимъ, что при введеніи новаго перемѣннаго въ опредѣленномъ интегралѣ подъ знакъ интеграла новое перемѣнное вводится также, какъ и въ неопредѣленномъ интегралѣ, но предѣлы новаго интеграла будутъ другіе; эти предѣлы суть значенія новаго перемѣннаго, соотвѣтствующія тѣмъ значеніямъ стараго перемѣннаго, которыя это послѣднее принимаетъ при нижнемъ и верхнемъ предѣлахъ. Новые предѣлы опредѣляются изъ уравненія, связывающаго старое перемѣнное съ новымъ, какъ было указано выше. Предположимъ примѣры:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$

Введемъ новое перемѣнное, полагая $tg\varphi = z$, тогда $arctgz = \varphi$, $d\varphi = \frac{dz}{1+z^2}$, $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+tg^2\varphi} = \frac{1}{1+z^2}$, $\sin^2\varphi = \frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi} = \frac{z^2}{1+z^2}$

Найдем пределы нового переменного:

при $\varphi = 0$ $\quad z = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 0 = 0$

..... $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .... $z = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$

Теперь мы можем прямо написать, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \int_0^1 \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{a^2}{1+z^2} + \frac{b^2 z^2}{1+z^2}} = \int_0^1 \frac{dz}{a^2 + b^2 z^2} = \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{dz}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + z^2}$$

Последний интеграл может быть вычислен по формуле:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

На основании которой будем иметь:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{dz}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + z^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{a}\right) + C\right]_0^1 = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Примеры на интегрирование через введение нового переменного.

1) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$ ..... $x - \alpha = \beta z$

2) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ ..... $\cos x = z$

3) $\int \frac{dz}{x\sqrt{a + b\ln x}}$ ..... $a + b\ln x = z$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ ..... $x = a - z$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}}$ ..... $x = \frac{a}{1 - z}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ..... $\sqrt{a^2 + x^2} = z - x$

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ ..... $x = \frac{1}{z}$

8) $\int x^2\sqrt{a + x}\, dx$ ..... $\sqrt{a + x} = z$

9) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$ ..... $\frac{1 + x^2}{x^2} = z^2$

10) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ ..... $x = a\sin\varphi$

11) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}$ ..... $x - a = a\cos\varphi$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cdot \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{2}{15}$ ..... $\sin\varphi = x$

13) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$ . . . . . $x - \frac{1}{2} = u$

14) $\int_0^1 \frac{v(1-v)^2}{(1+v)^5} dv = \frac{1}{60}$ . . . . . $x = 1+v$

15) $\int_0^a \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{\sqrt{a-x}} = \frac{5\pi a^3}{16}$ . . . . . $x = a\sin^2\varphi$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+a\cos\varphi} = \frac{\operatorname{arc}\cos a}{\sqrt{1-a^2}}$ . . . . . $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = z$ . . . . $a<1$

В заключение сделанного нами обозрения пріемов интегрированія скажемъ нѣсколько словъ о процессѣ интегрированія вообще.

Процессъ интегрированія, какъ уже можно видѣть изъ предыдущаго, существенно отличается отъ процесса интегрированія (**). Всякая функція можетъ быть одиферепцирована по опредѣленнымъ правиламъ; совершено иначе приходится поступать при интегрированіи. Далеко не далеко не всякій данный диферепціалъ можетъ быть обынтегрированъ и скорѣе можно сказать, что диферепціалы, которые могутъ быть обынтегрированы, представляютъ исключенія. Даже общихъ способовъ для интегрированія не существуетъ, и задача Интегральнаго исчисленія будетъ: указать тѣ классы функцій, которые могутъ быть обынтегрированы. Замѣтимъ, что возможность интегрированія не зависитъ отъ большей или меньшей простоты диферепціаловъ; бываютъ однако очень простыя функціи по виду, которыя нельзя обынтегрировать.

Интегралъ отъ всякой функціи непремѣнно существуетъ, и поэтому нельзя сказать, чтобы интегралъ отъ той функціи, которую мы не можемъ обынтегрировать, былъ невозможенъ. Если мы не можемъ найти какого-нибудь интеграла, то это значитъ только, что этотъ интегралъ представляетъ такую функцію, которую мы не можемъ выразить помощью

(**) диферепцированія

извѣстныхъ намъ знаковъ, такъ что этотъ интегралъ представляетъ особаго рода трансцендентную функцію. Интегрированіе открываетъ намъ цѣлый рядъ трансцендентныхъ, неизвѣстныхъ намъ функцій, и интегральное исчисленіе можетъ быть источникомъ безчисленнаго множества такихъ функцій. Трудность интегрированія, какъ уже сказано выше, не зависитъ отъ большей или меньшей сложности интегрируемаго дифференціала. Такъ интегралъ

$$\int e^{-x^2} x\,dx$$

какъ намъ извѣстно есть непосредственный, но стоитъ только вмѣсто x и dx поставить интегралъ:

$$\int e^{-x^2} dx$$

который представляетъ трансцендентную функцію и уже не можетъ быть выраженъ въ конечномъ видѣ, помощью извѣстныхъ намъ функцій.

Подобно этому интегралъ:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

то же представляетъ такую функцію, которая не можетъ быть выражена помощью извѣстныхъ намъ знаковъ функцій.

Такимъ образомъ при изученіи процессовъ интегрированія прежде всего нужно выдѣлить тѣ классы функцій, которые могутъ быть обынтегрированы, для того, чтобы не пытаться безполезно интегрировать тѣ функціи, которыя не интегрируются.

Наиболѣе обширный классъ функцій, которыя могутъ быть обынтегрированы, представляетъ классъ алгебраическихъ раціональныхъ функцій

Этотъ классъ не только важенъ самъ по себѣ, но и потому, что другія функціи, которыя интегрируются, нерѣдко приводятся черезъ разнаго рода преобразованія къ этому же виду.

Интегрированіе алгебраическихъ раціональныхъ функцій

Общій видъ алгебраической раціональной функціи есть слѣдующій

$$\frac{F(x)}{f(x)},$$

гдѣ $F(x)$ и $f(x)$ двѣ цѣлыя раціональныя функціи, различныхъ степеней и различныя по составу.

Дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ называется также раціональной дробью, и интегралъ,

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx$$

который мы предполагаемъ себѣ найти, называется интеграломъ отъ раціональной дроби.

Интегралъ отъ раціональной дроби, въ которой степень числителя равна или больше степени знаменателя, можно привести къ интегралу отъ другой дроби, степень числителя которой будетъ меньше степени знаменателя; для этого стоитъ только числителя данной дроби раздѣлить на знаменателя.

Положимъ, что степень $F(x)$ ~ степени $f(x)$ и произведемъ дѣленіе $F(x)$ на $f(x)$. Придѣленіи въ частномъ мы получимъ нѣкоторую цѣлую функцію Q и въ остаткѣ другую цѣлую функцію $\varphi(x)$, степень которой будетъ меньше степени дѣлителя $f(x)$ и мы будемъ тождественно имѣть:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q + \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

Умноживъ обѣ части на dx и взявъ отъ обѣихъ частей интегралъ, найдемъ.

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx = \int\left[Q + \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]dx = \int Q\,dx + \int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$$

Во второй части этого равенства имѣемъ сумму двухъ интеграловъ изъ которыхъ первый есть интегралъ отъ цѣлой функціи и всегда можетъ быть вычисленъ, а второй есть интегралъ отъ раціональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Интегрированіе раціональной дроби совершается всегда черезъ разложеніе, причемъ данная дробь представляется всегда видѣ алгебраической суммы нѣсколькихъ дробей простѣйшаго вида, которыя легко бы было обынтегрировать; эти дроби называются частными или элементарными дробями. Первое дѣйствіе при интегрированіи раціональной дроби должно поэтому заключаться въ разложеніи ея на дроби-части. Видъ разложенія будетъ различенъ, смотря потому, какіе корни имѣетъ функція стоящая въ знаменателѣ, т.е. будутъ-ли эти корни дѣйствительными или мнимыми, простыми или кратными.

Разсмотримъ эти различные случаи по порядку.

1) Случай простыхъ и дѣйствительныхъ корней знаменателя.

Положимъ, что нужно вычислить интегралъ:

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$$

Функція, стоящая въ знаменателѣ, пусть будетъ:

$$f(x) = x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + A_m$$

Въ этой функціи коэффиціентъ при высшей степени x, т. е при x^m, мы положимъ равнымъ 1; если-бы онъ не былъ равенъ 1, то мы могли-бы предварительно числителя и знаменателя данной дроби раздѣ

лишь на этотъ коэффициентъ и при старшей степени x въ знаменателѣ мы получимъ такимъ образомъ коэффициентъ равный 1. Функція $f(x)$, будучи $m^{ой}$ степени имѣетъ m корней и положимъ, что всѣ ея корни суть простые, т.е. что между ними нѣтъ корней равныхъ. Самые корни пусть будутъ:

$$a, b, c \ldots\ldots l;$$

разлагая функцію $f(x)$ на множители, будемъ имѣть:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-l) \text{ или}$$

$$f(x) = (x-a)\,f_1(x), \text{ гдѣ } f_1(x) = (x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-l).$$

Ясно, что $f_1(x)$ будетъ цѣлая функція $m-1$ степени, которая при томъ не обращается въ 0 при $x=a$ и слѣдовательно не дѣлится на разность $x-a$

Возьмемъ теперь данную раціональную дробь:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)f_1(x)}$$

и положимъ, что она несократима, т.е. что въ ней числитель $\varphi(x)$ и знаменатель $f(x)$ не имѣютъ общихъ множителей. Очевидно, что если бы въ данной дроби были общіе множители, то мы могли-бы, найдя общаго наибольшаго дѣлителя двухъ функцій $\varphi(x)$ и $f(x)$, сократить ихъ предварительно. Утверждаемъ далѣе, что данная раціональная дробь всегда можетъ быть представлена въ видѣ суммы двухъ дробей, слѣдующаго вида:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)},$$

гдѣ A представляетъ нѣкоторое опредѣленное и постоянное количество, а $\varphi_1(x)$ нѣкоторую цѣлую функцію $x^{ой}$ совершенно опредѣленную.

Чтобы доказать это замѣтимъ, что написанное нами равенство

должно быть тождеством, т. е. должно существовать при всяком значении x. Уничтожив знаменатели в этом равенстве получим его в виде: $\varphi(x) = Af_1(x) + \varphi_1(x)(x-a)$.

Определяя отсюда $\varphi_1(x)$, находим:

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - Af_1(x)}{(x-a)}.$$

Но так как функция $\varphi_1(x)$, согласно требованию, должна быть целою функцией, то следовательно действие, обозначенное здесь во второй части, должно совершаться без остатка; но так как вычитаемое:

$$\varphi(x) - Af_1(x)$$

есть целая функция, то для делимости ея на $x-a$ надо, чтобы она обращалась в 0 при $x=a$. Таким образом мы должны иметь:

$$\varphi(a) - Af_1(a) = 0 \text{ отсюда}$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}.$$

Обратно, если A будет иметь эту величину, то функция

$$\varphi(x) - Af_1(x)$$

обратится в 0 при $x=a$ и будет делиться без остатка на $x-a$.

Разсмотрим ближе формулу, служащую для определения A. В ней знаменатель $f_1(a)$ не может быть равен 0, потому что функция $f_1(x)$ не имеет корня равнаго a, а потому A никогда не может быть бесконечностью. Очевидно также, что A не может быть равным 0, потому что это требует, чтобы было $\varphi(a)=0$, но $\varphi(a)$ не может быть 0, так как функция $\varphi(x)$ не имеет множителем $(x-a)$, иначе дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ сократилась-бы на $(x-a)$, а мы приняли ее выше несократимой.

Такимъ образомъ A не можетъ быть ни безконечностью ни 0, а потому это есть величина конечная и опредѣленная.

Функція $\varphi(x)$ есть вполнѣ опредѣленная цѣлая функція и находится простымъ дѣленіемъ.

Отсюда заключаемъ, что предложенное нами разложеніе дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ всегда возможно и при томъ единственнымъ простымъ способомъ для вычисленія коэффиціента A и для нахожденія $\varphi_1(x)$.

Въ полученномъ нами разложеніи:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$$

во второй части равенства мы имѣемъ рациональную дробь $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$.

Не трудно доказать, что эта дробь, такъ же какъ и первоначально данная, будетъ дробью несократимою, и что въ ней также степень числителя меньше степени знаменателя.

Въ самомъ дѣлѣ изъ равенства: $\varphi(x) = A f_1(x) + (x-a)\varphi_1(x)$ видно, что если-бы функціи $\varphi_1(x)$ и $f_1(x)$ имѣли какого-либо общаго множителя вида $x-k$, то вся вторая часть, а слѣдовательно и функція $\varphi(x)$, стоящая въ первой части дѣлилась-бы на того-же множителя. Этотъ множитель входилъ-бы при томъ и въ $f(x)$, ибо $f(x)$ есть произведеніе $(x-a)$ на $f_1(x)$, и слѣдовательно дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ сокращалась-бы на $(x-k)$; но такъ какъ эта дробь несократима, то заключаемъ, что и дробь $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ не можетъ быть сократимою.

Далѣе, такъ какъ степень $f(x)$ есть m, то степень $\varphi(x)$ не можетъ быть выше $m-1$ и изъ равенства: $\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - A f_1(x)}{(x-a)}$, опредѣляющаго функцію $\varphi_1(x)$ прямо видно, что степень $\varphi_1(x)$ не можетъ быть выше $m-2$.

Такимъ образомъ въ дроби $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ степень числителя будетъ менѣе степени знаменателя. Эта послѣдняя дробь находится, слѣдовательно, въ тѣхъ же условіяхъ, какъ и первоначально данная, а именно: она несократима, въ ней степень числителя менѣе степени знаменателя, и ея знаменатель имѣетъ только простые корни. Вслѣдствіе этого разложеніе дроби можетъ быть разложена опять на сумму двухъ дробей; именно, если въ $f_1(x)$ выдѣлимъ множитель $(x-b)$ и положимъ, что:

$$f_1(x) = (x-b) f_2(x),$$

то будемъ имѣть подобно предыдущему:

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B}{x-a} + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)},$$

гдѣ B есть постоянное количество конечное и вполнѣ опредѣленное, а $\varphi_2(x)$ есть цѣлая функція x, которая опредѣляется помощію равенія.

Дробь $\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)}$ опять будетъ дробью несократимою, въ которой степень числителя менѣе степени знаменателя. Съ этой дробью можемъ снова поступить такъ же какъ съ предыдущими и разложить ее на сумму двухъ дробей. Именно, если положимъ, что

$$f_2(x) = (x-c) f_3(x)$$

то будемъ имѣть: $$\frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} = \frac{C}{x-c} + \frac{\varphi_3(x)}{f_3(x)}$$

и т. д. Мы можемъ такимъ образомъ производить разложеніе раціональной дроби до тѣхъ поръ, пока отберемъ послѣдовательно всѣ множители $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ .... въ знаменатель и выдѣлимъ въ разложеніи простыя дроби, этимъ множителямъ соотвѣтствующія. Когда наконецъ получимъ во второй части дроби $\frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)}$, то замѣтимъ, что знаменатель дро-

дроби будет очевидно $f_{n-1}(x) = x - l$, числитель же $\varphi_{n-1}(x)$ будет постоянным количеством, так как степень этой дроби, будучи меньше степени знаменателя, должна быть нулю. Положив $\varphi_{n-1}(x) = \mathcal{L}$, будем иметь:

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} = \frac{\mathcal{L}}{x-l}$$

Эта дробь будет последнею в разложении. Последовательная вставка полученных нами разложений в первое из них даст:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots\cdots + \frac{\mathcal{L}}{x-l}.$$

Это и есть то самое разложение данной рациональной дроби на дроби частные, которое мы желали вывести. Приведенный выше вывод не только доказывает, что найденное нами разложение рациональной дроби в сумму, когда в знаменателе имеем только простые корни, всегда существует, но и дает способ для последовательного вычисления всех коэффициентов разложения: A, B, C..... .

Величины всех этих коэффициентов могут быть еще определяемы по другому способу, более удобному, который мы теперь и укажем.

Умножив обе части последнего равенства на $f(x)$, напишем его в виде:

$$\varphi(x) = A\cdot\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + C\frac{f(x)}{x-c} + \cdots\cdots + \mathcal{L}\frac{f(x)}{x-l}$$

Так как это равенство есть тождество, то оно должно существовать при всевозможных значениях x. Положим здесь $x = a$; тогда заключая, что $f(a) = 0$, мы будем иметь:

$$\varphi(a) = A\cdot\lim\left[\frac{f(x)}{x-a}\right]_{x=a} = A\cdot\lim\left[\frac{f'(a)}{1}\right]_{x=a} = A\cdot f'(a)$$

и следовательно для A будем иметь величину:

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}$$

Подобно этому, если сократить на множитель $x-b$, то так как $f(b)=0$, мы будем иметь:

$$\varphi(b) = B\lim\left[\frac{f(x)}{x-b}\right]_{x=b} = B\lim\left[\frac{f'(a)}{1}\right]_{x=b} = B\cdot f'(b) \text{ и отсюда:}$$

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}.$$

Также найдем, что $C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}$ и т. д. Таким образом коэффициенты $A, B, C \ldots\ldots$ найдутся по следующему способу: Составим дробь $\frac{\varphi(x)}{f'(x)}$ и определим величины, ею принимаемые, при $x=a, b, c \ldots\ldots$ Эти величины дадут коэффициенты разложения $A, B, C \ldots\ldots$

Положим теперь, что разложение рациональной дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ на дроби частные нам сделано, тогда интегрирование этой дроби не представляет никакого затруднения. Будем иметь:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx = A\int\frac{dx}{x-a} + B\int\frac{dx}{x-b} + C\int\frac{dx}{x-c} + \ldots\ldots + L\int\frac{dx}{x-l}$$

Все эти интегралы непосредственные и представляют Неперовы логарифмы, так что получим:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx = A\,l(x-a) + B\,l(x-b) + C\,l(x-c) + \ldots\ldots\ldots + L\,l(x-l) + const.$$

Предложим примеры на рассматриваемый нами случай интегрирования рациональной дроби.

1) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$.

Здесь подынтегральная функция есть дробь $\frac{1}{x^2-a^2}$, в которой знаменатель имеет простые корни $+a$ и $-a$. Сделаем прежде всего разложение дроби, оно должно иметь вид:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Для определения коэффициентов разложения A и B составим дробь:

$\frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2x}$. Чтобы получить A подставимъ въ это выраженіе $+a$ вместо x, а чтобы получить B подставимъ $-a$; найдемъ: $A = \frac{1}{2a}$, а $B = -\frac{1}{2a}$.

Теперь наше разложеніе напишется такъ: $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a}$.

Помножимъ обѣ части на dx и возьмемъ интегралъ отъ обѣихъ частей; получимъ:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a};$$

каждый интегралъ есть непосредственный и представляетъ Неперовъ логарифмъ; такъ что напишемъ:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}l(x-a) - \frac{1}{2a}l(x+a) + C = \frac{1}{2a}l\frac{x-a}{x+a} + C.$$

Такимъ образомъ интегрированіе совершается очень просто, если корни знаменателя извѣстны. Вычислимъ для примѣра:

$$\int\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\cdot dx.$$

Прежде всего найдемъ корни знаменателя данной дроби, для чего приравняемъ его нулю и рѣшимъ полученное ур-іе какъ квадратное. Имѣемъ:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Рѣшая находимъ: $x^2 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}-4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$; отсюда $x_1^2 = \frac{8}{2} = 4$, $x_2^2 = \frac{2}{2} = 1$, слѣдовательно $x_1 = \pm 2$, $x_2 = \pm 1$.

Всѣ четыре корня дѣйствительные и различные, а потому знаменатель разлагается на множители такимъ образомъ:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

Теперь беремъ рациональную дробь и разлагаемъ ее на частныя дроби; это разложеніе имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}.$$

Для определения $A, B, C \ldots$ по данному выше правилу составимъ дробь

$$\frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{x^2-x+2}{4x^3-10x}$$

и полагая въ ней последовательно $x = +1, -1, +2$ и -2, находимъ:

$$A = \frac{1-1+2}{4-10} = -\frac{1}{3}$$

$$B = \frac{1+1+2}{-4+10} = \frac{2}{3}$$

$$C = \frac{4-2+2}{32-20} = \frac{1}{3}$$

$$D = \frac{4+2+2}{-32+20} = -\frac{2}{3}$$

Вставивъ теперь вместо рациональной дроби въ данный интегралъ ея выражение, получимъ:

$$\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx = \int\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx.$$

Взявъ затемъ интегралъ отъ суммы, который равенъ суммѣ интеграловъ, мы видимъ, что каждый изъ нихъ будетъ непосредственный и представитъ интегралъ логарифмъ. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx = -\frac{1}{3}l(x-1) + \frac{2}{3}l(x+1) + \frac{1}{3}l(x-2) - \frac{2}{3}l(x+2) + C =$$

$$= \frac{1}{3}l\,\frac{x-2}{x-1} + \frac{2}{3}l\,\frac{x-1}{x+2} + C = l\,\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}}} + C.$$

Такимъ же образомъ решаются и всѣ задачи на интегрирование рациональныхъ дробей, когда корни знаменателя дѣйствительны и различны.

Приведемъ въ заключеніе нѣсколько примѣровъ для упражненій.

$$\int \frac{5x^3+1}{x^2-3x+2} = \frac{5x^2}{2} + 15x - 6l(x-1) + 41l(x-2) + C$$

$$\int \frac{3x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}lx + \frac{5}{6}l(x-2) - \frac{4}{3}l(x+1) + C$$

$$\int \frac{12x^2+17x-5}{x^3+2x^2-x-2}\,dx = 4l(x-1) + 5l(x+1) + 3l(x+2) + C$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^2-4}\,dx = x - l\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{3}{4}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2}l\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right) + C.$$

2) Случай простых и мнимых корней знаменателя.

Положимъ опять, что намъ дано вычислить интегралъ:

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx$$

Будемъ принимать, какъ и прежде, что всѣ корни знаменателя $f(x)$ различны, но что между ними есть и мнимые. Обозначимъ корни $f(x)$ черезъ $a, b, c, d \ldots\ldots l$. Разложивъ знаменатель на множителей, будемъ имѣть по предыдущему:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l)$$

Указанный выше способъ разложенія раціональной дроби очевидно примѣняется безъ измѣненія и въ случаѣ, когда нѣкоторые корни знаменателя будутъ мнимые, лишь-бы между ними не было равныхъ корней. Такъ что будутъ-ли корни дѣйствительные или мнимые разложеніе раціональной дроби въ разсматриваемомъ случаѣ всегда имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots\ldots + \frac{L}{x-l}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, существованіе этого разложенія доказывается независимо отъ того, будутъ-ли корни знаменателя дѣйствительные или мнимые, лишь-бы всѣ они были между собою различны. Но въ случаѣ мнимыхъ корней знаменателя найденное нами разложеніе будетъ осложнено мнимыми выраженіями и сдѣлается поэтому неудобнымъ для интегрированія и въ интегралы войдутъ мнимыя величины, которыя однако не должны быть въ результатѣ, такъ какъ въ интегралѣ, данномъ для вычисленія, нѣтъ мнимыхъ.

Чтобы избѣжать мнимыхъ выраженій, припомнимъ, что мнимые корни дѣйствительной и цѣлой функціи всегда бываютъ парными и сопряженными. Пусть одинъ изъ корней мнимыхъ функціи $f(x)$ есть:

$$a = \alpha + \beta i \text{, гдѣ } i = \sqrt{-1}.$$

Тогда у той-же функціи $f(x)$ существуетъ другой мнимый сопряженный корень. Вспомнимъ потомъ, что:

$$b = \alpha - \beta i.$$

Разсмотримъ въ данномъ выше разложеніи двѣ простыя дроби, соотвѣтствующія этимъ двумъ мнимымъ сопряженнымъ корнямъ. Соединяя ихъ вмѣстѣ разсмотримъ ихъ сумму, которая будетъ:

$$\frac{A}{x-\alpha-\beta i} + \frac{B}{x-\alpha+\beta i}.$$

Здѣсь коэфиціенты A и B также мнимые, какъ это легко видѣть изъ формулъ, опредѣляющихъ эти коэфиціенты. Эти формулы даютъ именно:

$$A = \frac{\varphi(\alpha+\beta i)}{f'(\alpha+\beta i)} \text{ и } B = \frac{\varphi(\alpha-\beta i)}{f'(\alpha-\beta i)}$$

Теперь, если въ этомъ выраженіи A произведемъ надъ самими числами всѣ указанныя дѣйствія надъ мнимой величиной $\alpha+\beta i$, то замѣтимъ, что всѣ эти дѣйствія алгебраическія, мы получимъ какъ извѣстно въ результатѣ также нѣкоторое мнимое выраженіе общаго вида, и будемъ имѣть

$$A = M + N i.$$

гдѣ M и N суть опредѣленныя дѣйствительныя количества.

Если подобно этому мы выполнимъ всѣ дѣйствія, указанныя въ формулѣ опредѣляющей B, то въ результатѣ мы опять получимъ такое же

выражений, как и для A; только знаки перед i будут другой, так что

$$B = M - Ni$$

Таким образом сумма соответствующая двум рассматриваемым нами мнимым сопряженным корням будет: $\frac{M+Ni}{x-\alpha-\beta i} + \frac{M-Ni}{x-\alpha+\beta i}$.

Сложив на самом деле эти две дроби, получим одну дробь: $\frac{2M(x-\alpha)-2N\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$. Отсюда видим, что от соединения двух дробей, соответствующих двум мнимым сопряженным корням получается одна действительная дробь, у которой знаменатель второй степени относительно x, а числитель первой. Знаменатель этой дроби есть:

$$(x-\alpha)^2+\beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Он представляет произведение двух множителей, соответствующих в разложении функции $f(x)$ двум мнимым сопряженным корням. Это произведение действительно и представляет трехчлен второй степени, который можно написать в виде:

$$x^2 + px + q,$$

полагая для краткости $\alpha^2+\beta^2 = q$ и $-2\alpha = p$. Заметим, что полученный нами трехчлен не разлагается на действительные, а только на мнимые множители. Числитель полученной нами дроби представляет функцию первой степени x и может быть представлен в форме: $Px + Q$. Таким образом рассматриваемой нами паре мнимых сопряженных корней: $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$ в разложении рациональной дроби будет соответствовать одна действительная и простая дробь вида: $\frac{Px+Q}{x^2+px+q}$. Ясно, что подобно этому кор-

дой пары сопряженных мнимых корней будет соответствовать в разложении одна действительная дробь со знаменателем второй степени относительно x. Соединяя таким образом попарно все дроби, соответствующия мнимым и сопряженным корням — мы будем иметь в разложении данной рациональной дроби столько действительных простых дробей. В этих дробях нам будут неизвестны коэфициенты их числителей (P и Q), коэфициенты эти можно определить, находя предварительно коэфициенты M и N, так как мы имеем: $P = 2\alpha M$ и $Q = -2\alpha M\lambda - 2\alpha^2 p$.

Но такой способ определения не может быть признан всегда удобным, так как при этом нам придется делать довольно продолжительныя преобразования с мнимыми выражениями.

Поэтому-то в случаях мнимых корней знаменателя обращаются для определения коэфициентов P и Q к способу неопределенных коэфициентов.

Способ неопределенных коэфициентов.

Способ неопределенных коэфициентов состоит в применении теоремы Декарта, которая состоит в следующем: Если имеем два многочлена, расположенных по возрастающим степеням одного и того-же переменного, и если эти многочлены равны между собою при всевозможных значениях переменного, т. е. если многочлены даны равными тождественно, то коэфициенты при одинаковых степенях переменного в обоих многочленах будут соответствен-

Пусть опять данная рациональная дробь есть: $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ причем:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l)$$

Положим, что все корни функции $f(x)$ различны, но что некоторые из них действительны, а другие мнимы. Множителю, соответствующему паре мнимых сопряженных корней, соединим вместе равных. Пусть имеем равенство:

$$\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 x + \mathcal{A}_2 x^2 + \ldots\ldots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots$$

Если это равенство есть тождество и по условию должно существовать при всевозможных значениях переменного x, то оно возможно только тогда, когда $\mathcal{A}_0 = B_0$, $\mathcal{A}_1 = B_1$, $\mathcal{A}_2 = B_2$, ……

Чтобы доказать это заметим, что так как данное равенство есть тождество, то оно должно существовать и при $x = 0$, из чего следует, что должно иметь $\mathcal{A}_0 = B_0$. Отнимем затем в первой части $\mathcal{A}_0$, а во второй B_0 и разделим полное данное равенство на x, получим:

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 x + \mathcal{A}_3 x^2 + \ldots\ldots = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \ldots\ldots$$

Это новое равенство опять есть тождество и также должно существовать при всяком значении x, а следовательно и при $x = 0$; отсюда видим, что должно быть $\mathcal{A}_1 = B_1$. Уничтожив затем $\mathcal{A}_1$ в первой части и B_1 во второй и сократив полученное равенство на x, получим: $\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 x + \ldots\ldots = B_2 + B_3 x + \ldots\ldots$. Поступая таким образом далее, докажем, что должны иметь: $\mathcal{A}_2 = B_2$, $\mathcal{A}_3 = B_3$, $\mathcal{A}_4 = B_4$ и т. д. и теорема будет доказана. В применении этой теоремы и состоит способ неопределенных коэффициентов.

стиъ; произведеніе двухъ такихъ множителей дастъ трехчленъ второй степени, не разлагающійся на дѣйствительные множители. Такихъ трехчленовъ мы получимъ столько, сколько паръ мнимыхъ корней содержитъ функція $f(x)$. Разложеніе функціи $f(x)$ на множители будетъ такимъ образомъ представлено въ видѣ:

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+p'x+q')(x-c)(x-d)\cdots\cdots$$

Затѣмъ разложеніе рациональной дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ мы можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Px+Q}{x^2+px+q} + \frac{P'x+Q'}{x^2+p'x+q'} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} + \cdots\cdots$$

Въ этомъ разложеніи имѣемъ неизвѣстные коэффиціенты: $P, Q, P', Q', C, D \ldots$ Этихъ корней будетъ очевидно столько, сколько корней имѣетъ функція $f(x)$, такъ какъ каждому дѣйствительному корню соотвѣтствуетъ одинъ коэффиціентъ, а каждой парѣ мнимыхъ корней соотвѣтствуетъ два коэффиціента.

Написанное нами равенство есть тождество и должно существовать при всевозможныхъ значеніяхъ x. Умножимъ въ этомъ равенствѣ знаменателей, для чего обѣ части его помножимъ на $f(x)$. Въ первой части мы получимъ тогда $\varphi(x)$, а во второй части получимъ нѣкоторую цѣлую функцію $m-1$ степени, означая черезъ m степень функціи $f(x)$. Полученная во второй части цѣлая функція будетъ $(m-1)$ степени, потому что въ каждой изъ дробей умноженныхъ на $f(x)$ степень числителя единицею менѣе степени знаменателя. Такимъ образомъ мы получимъ равенство:

$\psi(x)$ = некоторой целой функции $(m-1)$ степени.

Въ составъ коэфициентовъ функціи, стоящей во второй части этого равенства войдутъ неизвѣстные коэфициенты $P, Q, P', Q', C, D \ldots\ldots$ и при томъ очевидно въ первыхъ степеняхъ.

А такъ какъ полученное равенство должно быть тождественно, то по теоремѣ Декарта коэфициенты при одинаковыхъ степеняхъ въ обѣихъ частяхъ равенства должны быть соотвѣтственно равны. Всѣхъ коэфициентовъ при различныхъ степеняхъ x во второй части равенства, представляющемъ цѣлую функцію $(m-1)$ степени, будетъ очевидно m. Сравнивая эти коэфициенты, мы получимъ всего m уравненій, въ которыя войдутъ всѣ m неизвѣстныхъ коэфициентовъ. Для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ коэфициентовъ нужно будетъ рѣшить эти m уравненій первой степени. Уравненія эти не могутъ быть несовмѣстными или неопредѣленными, такъ какъ ранѣе было доказано, что коэфициенты $P, Q, P', Q', C, D \ldots$ должны быть [illegible] конечными и опредѣленными величинами.

При интегрированіи раціональной дроби въ случаѣ мнимыхъ простыхъ корней знаменателя мы необходимо встрѣтимся съ интегралами такого вида:

$$\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q}\,dx,$$

гдѣ трехчленъ второй степени x^2+px+q имѣетъ мнимые корни и потому не разлагается на дѣйствительныхъ множителей.

Займемся вычисленіемъ этого интеграла и съ этой цѣлью напишемъ

его такъ, чтобы въ одинъ изъ членовъ числителя входилъ множителемъ — производная знаменателя, т. е. $2x+p$. Для этого помножимъ и раздѣлимъ числителя на 2, прибавимъ и отнимемъ членъ Pp, получимъ:

$$\int\frac{Px+Q}{x^2+px+q}dx=\frac{1}{2}\int\frac{P(2x+p)+2Q-Pp}{x^2+px+q}dx.$$

Теперь разсматривая подынтегральную функцію, какъ сумму двухъ дробей, получимъ:

$$\int\frac{Px+Q}{x^2+px+q}dx=\frac{P}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\frac{2Q-Pp}{2}\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Въ этихъ двухъ интегралахъ первый есть непосредственный и представляетъ логарифмъ, а потому:

$$\int\frac{Px+Q}{x^2+px+q}dx=\frac{P}{2}l(x^2+px+q)+\frac{2Q-Pp}{2}\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Вычислимъ теперь:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Дополнимъ въ знаменателѣ къ двумъ первымъ членамъ еще членъ до полнаго квадрата и напишемъ:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

Вводимъ теперь новое перемѣнное, полагая: $x+\frac{p}{2}=z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, гдѣ z есть новое перемѣнное; отсюда $dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dz$. Вставивъ эти величины въ данный интегралъ, получимъ:

$$\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}=\int\frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dz}{z^2(q-\frac{p^2}{4})+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctang}z+C.$$

Выразимъ теперь z черезъ x, имѣемъ: $z=\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$, а потому:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

При употребленіи послѣдней формулы мы предполагаемъ, что $q-\frac{p^2}{4}>0$, потому что иначе въ результатѣ получились бы мнимости

условие это $\left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$ всегда выполнимо, если трехчлен x^2+px+q имеет мнимые корни, потому что эти корни выражаются формулой: $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, в которой $\frac{p^2}{4} - q < 0$, а потому $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Вставляя последнюю формулу в выше полученное выражение рассматриваемого нами интеграла, находим окончательно:

$$\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q}\,dx = \frac{P}{2} l\left(x^2+px+q\right) + \frac{2Q-Pp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{P}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + \text{const.}$$

Будет удобнее однако при вычислениях подобных интегралов всякий раз повторять сделанное выше вычисление на данном примере, вместо того, чтобы пользоваться полученною общею формулой.

Для примера вычислим интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Чтобы разложить здесь рациональную дробь надо найти корни ур-ия:

$$x^3+1=0.$$

Один из корней очевиден:

$$x=-1.$$

Чтобы найти два других корня, заметим, что x^3+1 должно делиться на $x+1$; по разделении получим:

$$\left(x^3+1\right) = (x+1)\left(x^2-x+1\right).$$

Два других корня мнимые и определяются из ур-ия:

$$x^2-x+1=0, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1}.$$

Так как корни мнимые, то трехчлен x^2-x+1 не должно быть разделяется на множители.

Возьмемъ теперь рациональную дробь и напишемъ ея разложеніе, оно должно имѣть видъ:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Опредѣлимъ коэффиціенты A, B, C по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Умноживъ обѣ части равенства на знаменатель, получимъ:

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1).$$

Раскрывая скобки, находимъ:

$$1 = (A+B)x^2 + (B+C-A)x + A + C.$$

Это равенство должно быть тождествомъ и должно существовать при всякомъ значеніи x, а потому коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ должны быть равны. Но въ первой части равенства нѣтъ членовъ съ x^2, это значитъ, что коэффиціентъ при x^2 равенъ 0; коэффиціентъ при x въ первой степени также равенъ нулю. Сравнивая коэффиціенты, находимъ три ур-ія:

$$A+B=0\ ;\ B+C-A=0\ ;\ A+C=1.$$

Исключая B изъ двухъ первыхъ урій, находимъ:

$$2A-C=0 \text{ и } A+C=1.$$

Складывая, находимъ: $3A=1$ или $A=\frac{1}{3}$. Затѣмъ найдемъ:

$$C=2A=\frac{2}{3} \text{ и } B=-A=-\frac{1}{3}$$

Подставляя вмѣсто A, B, C въ разложеніи дроби ихъ величины, напишемъ его такъ:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Теперь берем данный интеграл и разложим его на два более простых интеграла, следующим образом:

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-x+1}.$$

Первый из этих интегралов есть непосредственный и выражается через логарифмы.

Вычислим 2-ой интеграл по указанному выше способу, находим:

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Первый интеграл есть опять непосредственный и представляет логарифм, а именно:

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}l\left(x^2-x+1\right).$$

Последний интеграл представим в виде:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

и введем в него новое переменное, полагая: $x-\frac{1}{2} = z\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда

$$z = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \text{ и } dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dz.$$

Подставляя эти выражения, получим:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dz}{z^2\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\cdot 3}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} z + C$$

Подставляя вместо z его выражение по x, находим:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Таким образом будем иметь окончательно для заданного интеграла следующее выражение:

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}l(x+1) - \frac{1}{6}l\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Приведем несколько примеров для упражнения:

$$\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{4a^3}l\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + \text{constant}.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x+b)} = \frac{1}{b^2+a^2}\left\{ l\frac{x+b}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right\} + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x+x^2+x^3)} = l\frac{x}{\sqrt{1+x}\sqrt[4]{1+x^2}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \text{const.}$$

$$\int \frac{x^5 dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left[x^3 + l(x^3-1)\right] + C$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-2} = \frac{1}{6} l\frac{x-1}{x+1} + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{\sqrt{2^5}} l\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \text{const.}$$

3). Случай действительных кратных корней знаменателя.

Будем опять иметь дело вычислить интеграл:

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx.$$

Положим теперь, что функция $f(x)$ имеет действительный корень a и пусть этот корень будет кратный степени n. В разложении $f(x)$ на множители этому корню будет соответствовать множитель $(x-a)^n$, так что будем иметь:

$$f(x) = (x-a)^n f_1(x),$$

где $f_1(x)$ есть произведение множителей, соответствующих всем остальным корням. Функция $f_1(x)$ есть целая функция, не делящаяся на $(x-a)$, и следовательно $f_1(a)$ не равна нулю.

Вместо данной дроби рассмотрим вначале рациональную дробь:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a) f_1(x)}$$

В этой дроби знаменатель имеет простой действительный корень a, а потому эта дробь, как было показано выше, может быть разложена на сумму двух других дробей следующим образом:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a) f_1(x)} = \frac{A_0}{x-a} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}, \text{ где}$$

$$A_0 = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)}, \text{ а } \varphi_1(x) = \frac{\varphi(x) - A_0 f_1(x)}{x-a},$$

причем A_0 есть величина конечная не равная 0, а $\varphi_1(x)$ есть целая конечная функция, так что A_0 и $\varphi_1(x)$ можно считать известными.

Если разделить обе части предыдущего равенства на $(x-a)^{n-1}$, то получим:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n f_1(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1} f_1(x)}.$$

Здесь ко второй дроби, стоящей во второй части, можно применить опять тот-же способ разложения дроби, который мы сейчас употребили для разложения дроби $\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n f_1(x)}$.

В новой дроби вместо $\varphi(x)$ мы напишем $\varphi_1(x)$ и степень множителя $(x-a)$ в знаменателе понизим на 1.

Таким образом будем иметь подобно предыдущему:

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)(x-a)^{n-1}} = \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2} f_1(x)};$$

Здесь A_1 и $\varphi_2(x)$ определяются по формулам:

$$A_1 = \frac{\varphi_1(a)}{f_1(a)} \text{ и } \varphi_2(x) = \frac{\varphi_1(x) - A_1 f_1(x)}{x-a}.$$

Коэфициент A_1 также как и A_0 не может быть равен бесконечности, но A_1 может быть равно 0, так как нельзя утверждать, что $\varphi_1(a) \neq 0$ или что функция $\varphi_1(x)$ не имеет делителя $(x-a)$.

Если n больше 2, то ко второй дроби второй части равенства опять можем применить тот-же способ разложения и получим таким образом:

$$\frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{n-2} f_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \frac{\varphi_3(x)}{(x-a)^{n-3} f_1(x)},$$

где $A_2 = \frac{\varphi_2(a)}{f_1(a)}$ причем оно не может быть бесконечностью, но в

частном случае может быть нулем.

Таким образом мы можем продолжать разложение до тех пор, пока в знаменателе второй дроби во второй части равенства степень множителя $(x-a)$ понизится до нуля, иначе говоря до тех пор, когда множитель $(x-a)$ не будет уже входить в знаменатель второй дроби. Тогда дадим последовательные вставки, будем иметь:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n f_1(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \cdots\cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}.$$

Таким образом кратному корню $n^{\text{ой}}$ степени знаменателя соответствует в разложении рациональной дроби на дроби частные и простых дробей указанного выше вида.

Понятно, что если бы в знаменателе рациональной дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ содержались кроме a другие кратные корни, то разложение добавочной дроби $\frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}$ могло-бы быть сделано по тому же самому способу. Будем полагать, что

$$f_1(x) = (x-b)^r f_2(x),$$

где $f_2(x)$ произведение всех множителей, соответствующих всем остальным корням кроме a и b, при чем $f_2(b) \neq 0$.

Подобно предыдущему мы можем получить разложение такого вида:

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B_0}{(x-b)^r} + \frac{B_1}{(x-b)^{r-1}} + \frac{B_2}{(x-b)^{r-2}} + \cdots\cdots + \frac{B_{r-1}}{x-b} + \frac{\varphi_{n+r}(x)}{f_2(x)}$$

Здесь все коэффициенты $B_0, B_1, B_2 \ldots B_r$ будут иметь величины конечные и вполне определенные, а коэффициент B_0, сверх того, не может быть равен нулю. Добавочная дробь:

$$\frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}, \frac{\varphi_{n+1}(x)}{f_2(x)} \ldots\ldots\ldots$$

какъ легко видѣть будутъ дробями несократимыми, если первоначальная дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ дана несократимою; это можно-бы было доказать такимъ-же точно разсужденіемъ, какъ и въ случаѣ корней простыхъ. Сверхъ того очевидно, что во всѣхъ этихъ дробяхъ степень числителя будетъ меньше степени соотвѣтствующаго знаменателя. Выведенное нами разложеніе рациональной дроби въ случаѣ кратныхъ корней знаменателя дастъ намъ способъ для опредѣленія коэффиціентовъ: $A_0, A_1, A_2 \ldots B_0, B_1 \ldots\ldots$, но при опредѣленіи этихъ коэффиціентовъ по этому способу намъ будетъ нужно вычислять функціи:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \ldots\ldots$$

которыя опредѣляются помощію дѣленія. Такой способъ опредѣленія коэффиціентовъ требуетъ довольно продолжительныхъ вычисленій. Будетъ полезно намъ указать другой способъ вычисленія, при помощи котораго въ случаѣ кратныхъ корней знаменателя можно ограничиться только дѣленіемъ опредѣлить коэффиціенты всѣхъ дробей, соотвѣтствующихъ одному какому-либо кратному корню.

Положимъ слова, что намъ разложить дробь:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n f_1(x)}$$

Сдѣлаемъ здѣсь $x-a=h$, тогда $x=h+a$ и наша дробь напишется такимъ образомъ:

(**) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n f_1(x)} = \frac{\varphi(a+h)}{h^n f_1(a+h)}$$

Здѣсь числитель $\varphi(a+h)$ и знаменатель $f_1(a+h)$, если въ нихъ произвесши указанныя дѣйствія надъ $(a+h)$ представляются въ видѣ многочленовъ, которые мы расположимъ по возрастающимъ степенямъ h. Данную дробь привести при этомъ такой видъ:

$$\frac{\varphi(a+h)}{h^n f_1(a+h)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 \ldots\ldots}{h^n(\beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \beta_3 h^3 \ldots\ldots)}$$

Многочленъ, стоящій въ числителѣ будемъ дѣлить на многочленъ, стоящій въ знаменателѣ, получимъ:

$$\begin{array}{l|l} \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 \ldots\ldots & \beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \ldots\ldots \\ \hline \delta_0 + \delta_1 h + \delta_2 h^2 + \ldots + \delta_{n-1} h^{n-1} & \end{array}$$

Это дѣленіе можетъ быть продолжено въ безконечность, такъ какъ данная намъ дробь несократима, но мы будемъ продолжать это дѣленіе только до извѣстнаго остатка. Въ частномъ будетъ получаться нѣкоторый многочленъ, расположенный по восходящимъ степенямъ h. Послѣдовательные остатки, получаемые при этомъ дѣленіи очевидно будутъ также многочленами, расположенными по восходящимъ степенямъ h, при чемъ степени первыхъ членовъ послѣдовательныхъ остатковъ будутъ идти увеличиваясь. Мы будемъ продолжать это дѣленіе до тѣхъ поръ, пока степень перваго члена остатка будетъ не менѣе n не превзойдетъ n. Такимъ образомъ нашъ послѣдній остатокъ будетъ имѣть видъ: $\gamma_0 h^n + \gamma_1 h^{n+1} + \gamma_2 h^{n+2} + \ldots\ldots$

Послѣдній же членъ полученнаго нами частнаго будетъ членъ со-

держащей h не выше какъ въ $(n-1)$ степени; пусть этотъ членъ будетъ:

$$A_{n-1}h^{n-1}$$

Напишемъ затѣмъ, что дѣленное разрѣшенное на дѣлителя равно частному сложенному съ остаткомъ разрѣшеннымъ на дѣлителя, будемъ имѣть:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n f_1(x)} = \frac{1}{h^n}\left[A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots + A_{n-1}h^{n-1} + \frac{\gamma_0 h^n + \gamma_1 h^{n+1} + \gamma_2 h^{n+2} + \cdots}{\beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \cdots}\right]$$

и введя дѣлителя h^n въ скобки получимъ:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n f_1(x)} = \frac{A_0}{h^n} + \frac{A_1}{h^{n-1}} + \frac{A_2}{h^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{h} + \frac{\gamma_0 + \gamma_1 h + \gamma_2 h^2 + \cdots}{\beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \cdots}$$

Теперь поставимъ вмѣсто h его величину $(x-a)$, получимъ:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n f_1(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}.$$

Здѣсь $\varphi_n(x) = \gamma_0 + \gamma_1(x-a) + \gamma_2(x-a)^2 + \cdots$

Такимъ образомъ одними дѣленіями мы нашли всѣ дроби; этотъ способъ обыкновенно и употребляется при вычисленіяхъ.

Самое интегрированіе разсматриваемыхъ дробей не представляетъ никакого затрудненія, такъ какъ при этомъ приходится встрѣчаться только съ интегралами слѣдующаго вида:

$$\int \frac{A_0}{(x-a)^n} dx = A_0 \int (x-a)^{-n} dx,$$

а это есть непосредственный интегралъ и представляетъ степень, а именно:

$$\int \frac{A_0}{(x-a)^n} dx = A_0 \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{A_0}{(n-1)(x-a)^{n-1}}.$$

Разсмотримъ частный примѣръ на случай Кориой дѣйствительныхъ и Кратныхъ. Нужно вычислить:

$$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx$$

Разложимъ подынтегральную дробь на дроби частныя. Замѣтимъ, что здѣсь въ знаменателѣ есть одинъ тройной корень; вычислимъ дробь, соотвѣтствующую этому корню, для чего положимъ:

$$x-1=h,$$

а отсюда $x=1+h$. Теперь нашу рациональную дробь можно написать такъ:

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{3(1+h)^2+(1+h)-2}{h^3(1+2h+h^2+1)} = \frac{2+7h+3h^2}{h^3(2+2h+h^2)}.$$

Чтобы найти частныя дроби, будемъ дѣлить числителя на знаменателя, найдемъ:

$$\begin{array}{r|l} 2+7h+3h^2 & 2+2h+h^2 \\ \hline -2\mp 2h\mp h^2 & 1+\frac{5}{2}h\mp\frac{3}{2}h^2 \\ \hline 5h+2h^2 & \\ -5h\mp 5h^2\mp\frac{5}{2}h^3 & \\ \hline -3h^2-\frac{5}{2}h^3 & \\ \pm 3h^2\pm 3h^3\pm\frac{3}{2}h^4 & \\ \hline \frac{1}{2}h^3+\frac{3}{2}h^4 & \end{array}$$

Такъ какъ въ послѣднемъ остаткѣ степень перваго члена получилась уже $=3$, т.е. степени кратности корня $+1$, то на этомъ остановимся дѣленіе остановить. Теперь нашу дробь можемъ написать такъ:

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{h^3}\left[1+\frac{5}{2}h-\frac{3}{2}h^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{h^3+3h^4}{2+2h+h^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{h^3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{h^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+3h}{2+2h+h^2}.$$

Вставимъ теперь вмѣсто h его выраженіе $(x-1)$, получимъ:

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{(x-1)^3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3x-2}{x^2+1}.$$

Теперь разсужденіе сложно, остается взять интегралъ; найдемъ:

$$\int\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3\cdot(x^2+1)}\,dx = \int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-1)}+\frac{1}{2}\int\frac{3x-2}{x^2+1}\,dx.$$

Всѣ интегралы, исключая послѣдняго, непосредственны; послѣдній интегралъ легко вычислить; разложивъ на 2 интеграла, находимъ:

$$\int\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{5}{2(x-1)}-\frac{3}{2}l(x-1)+\frac{3}{4}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Теперь и эти два послѣдніе интеграла суть непосредственные, а потому пишемъ окончательно:

$$\int\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{5}{2(x-1)}-\frac{3}{2}l(x-1)+\frac{3}{4}l(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C.$$

Приведемъ нѣсколько примѣровъ на вычисленіе:

$$\int\frac{x}{(x+2)(x+3)^2}dx = -\frac{3}{x+3}+l\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2+C$$

$$\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}dx = -\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+l\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$$

$$\int\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{5}{2(x-1)}+\frac{3}{2}l\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}-\operatorname{arctg}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{x^3+x^2-x^4-x^5} = \frac{2-2x-5x^2}{4(1+x)x^2}+l\sqrt[8]{\frac{(x-1)(x+1)^9}{(1+x^2)x^8}}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$$

$$\int\frac{dx}{x^4(a+bx^3)} = -\frac{1}{3ax^3}+\frac{b}{3a^2}l\left(\frac{a+bx^3}{x^3}\right)+C.$$

//

4) Случай мнимыхъ и кратныхъ корней знаменателя.

Пусть дано вычислить интегралъ: $\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$ и положимъ, что функція $f(x)$ имѣетъ два мнимыхъ сопряженныхъ корня: $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$ причемъ эти корни суть кратные $n^{ой}$ степени.

Разложивъ функцію $f(x)$ на множители и выдѣливъ множители, соотвѣтствующіе этимъ корнямъ, получимъ:

$$f(x)=(x-\alpha-\beta i)^n(x-\alpha+\beta i)^n f_1(x),$$

гдѣ $f_1(x)$ есть произведеніе остальныхъ множителей, соотвѣтствующихъ всѣмъ прочимъ корнямъ. Возьмемъ произведеніе этихъ 2^{xn} множителей и напишемъ разложеніе такъ:

$$f(x)=\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n f_1(x)=\left[x^2+px+q\right]^n f_1(x).$$

где x^2+px+q есть произведение, не разлагающийся на действительных производителей. Теперь подынтегральную дробь мы можем написать видя:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}.$$

Разсмотрим сначала дробь:

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)f_1(x)}$$

Эту дробь в знаменателе которой множитель x^2+px+q стоит в первой степени и соответствует простым мнимым корням, как известно, можно представить видя суммы двух дробей следующим образом:

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)f_1(x)}=\frac{P_0x+Q_0}{x^2+px+q}+\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$$

где P_0, Q_0 суть некоторые постоянные, конечные и определенные величины, которые не могут быть обе вместе равны нулю, а $\varphi_1(x)$ есть целая функция x, которую всегда можно найти. Разрешив обе части последнего равенства на $(x^2+px+q)^{n-1}$, найдем:

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)}=\frac{P_0x+Q_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi_1(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}.$$

Таким образом мы получим разложение данной подынтегральной дроби на сумму двух дробей, из которых первая есть дробь простая, уже не подлежащая дальнейшему разложению; вторая же дробь в этом разложении имеет тот-же самый вид, как и данная, только вместо функции $\varphi(x)$ в числителе стоит функция $\varphi_1(x)$, а в знаменателе множитель x^2+px+q, соответствую-

щій кратными мнимыми корнями, входить въ степени единицею меньшей. Эту новую дробь подобно первоначальной, мы сможемъ разложить опять на сумму двухъ дробей слѣдующаго вида:

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x^2+px+q)^{n-2} f_2(x)}$$

Въ этомъ разложеніи коэффиціенты P_1 и Q_1 будутъ также нѣкоторыя постоянныя и конечныя величины, которыя однако въ частномъ случаѣ могутъ быть обѣ равны 0, такъ какъ дробь, стоящая въ первой части равенства, можетъ оказаться сократимою, и $\varphi_2(x)$ есть нѣкоторая цѣлая функція x.

Вторую дробь второй части равенства, можно опять представить точно такимъ же образомъ въ видѣ суммы двухъ дробей и при этомъ степень множителя (x^2+px+q) въ знаменателѣ понизится еще на 1 и т. д. Мы будемъ продолжать подобное разложеніе до тѣхъ поръ, пока въ знаменателѣ второй дроби во второй части равенства множитель (x^2+px+q) войдетъ въ степени 0, иначе говоря совсѣмъ не будетъ входить; тогда, сдѣлавъ послѣдовательныя подстановки, мы получимъ:

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n f_1(x)} = \frac{P_0 x + Q_0}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{\varphi_n(x)}{f_1(x)}.$$

Такимъ образомъ будутъ выдѣлены въ разложеніи всѣ простыя дроби, соотвѣтствующія множителю $(x^2+px+q)^n$. Этою формулой опредѣляется видъ разложенія раціональной дроби для того случая, когда между корнями знаменателя есть мнимые, кратные корни. Если бы у знаменателя $f(x)$ были еще другіе мнимые

сопряженные кратные корни, то для каждой пары таких корней мы получили-бы ряд простых дробей такого-же вида как выше написанный.

Способ, употребленный нами выше для обнаружения вида разложения рациональной дроби в случаях кратных и мнимых корней знаменателя, может служить в то-же время и для последовательного определения величин коэффициентов: $P_0, Q_0, P_1, Q_1, \ldots$ но на практике такой способ вычисления оказывается очень продолжительным и для получения коэффициентов разложения рациональной дроби при мнимых и кратных корнях знаменателя обыкновенно обращаются к способу неопределенных коэффициентов.

Чтобы представить в общем виде, как применяется этот способ к разложению рациональной дроби на дроби частные, положим, что функция $f(x)$ имеет корни различных свойств, а именно: один корень α действительный и простой, другой корень β также действительный, но кратный $n^{\text{ой}}$ степени; пусть два мнимых сопряженных: $\lambda \pm \mu i$ кратных степени ν и наконец пары сопряженных простых корней $\gamma \pm \delta i$.

При таком составе корней функция $f(x)$ разлагается на множители так:

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^n (x^2+px+q)^{\nu} (x^2+rx+s)$$

где множитель x^2+px+q соответствует мнимым сопряжен-

имѣть корнями: $2 \pm 3i$; а множитель: $x^2 + rx + s$ соотвѣтствуетъ парѣ мнимыхъ корней:

$$\gamma \pm \delta i.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ разложеніе раціональной дроби на дроби частныя должно имѣть слѣдующій видъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{x-a} + \frac{B_0}{(x-b)^n} + \frac{B_1}{(x-b)^{n-1}} + \cdots\cdots + \frac{B_{n-1}}{x-b} + \frac{P_0 x + Q_0}{(x^2+px+q)^l} +$$
$$+ \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+px+q)^{l-1}} + \cdots\cdots + \frac{P_{l-1}x + Q_{l-1}}{x^2+px+q} + \frac{Rx+S}{x^2+rx+s}.$$

Извѣстно, что функція $f(x)$ $m^{\text{ой}}$ степени, имѣетъ очевидно:

$$m = 1 + n + 2l + 2.$$

Составимъ число неизвѣстныхъ коэффиціентовъ разложенія; ихъ будетъ очевидно также m, а именно:

$$A_0, B_0, B_1, B_2 \cdots\cdots B_{n-1}, P_0, Q_0, P_1, Q_1 \cdots\cdots P_{l-1}, Q_{l-1}, R \text{ и } S.$$

Въ написанномъ выше разложеніи уничтожимъ знаменатели, для чего помножимъ обѣ части равенства на $f(x)$; тогда въ первой части мы получимъ $\varphi(x)$, а во второй будемъ имѣть нѣкоторую цѣлую функцію $m-1$ степени:

$$\varphi(x) = \text{цѣлой функціи } m-1 \text{ степени.}$$

Въ составъ цѣлой функціи, полученной нами во второй части равенства, войдутъ очевидно всѣ неизвѣстные коэффиціенты предположеннаго разложенія и войдутъ приномъ въ $1^{\text{ой}}$ степеняхъ.

Если теперь къ полученному равенству мы приложимъ теорему Декарта и сравнимъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ равенства, то мы получимъ очевидно — m урав-

первой степени съ m неизвѣстными коэффиціентами; всѣ эти уравненія непремѣнно будутъ совмѣстны, такъ какъ мы доказали выше, что всѣ коэффиціенты разложенія суть величины конечныя и опредѣленныя, нѣкоторые изъ нихъ могутъ быть нулями, но ни одинъ не можетъ быть ни безконечнымъ, ни неопредѣленнымъ.

Обратимся теперь къ самому интегрированію раціональной дроби въ случаѣ линейныхъ и кратныхъ корней знаменателя. При интегрированіи мы встрѣчаемся въ этомъ случаѣ не только съ извѣстными намъ интегралами, но и еще съ интегралами такого вида: $\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} dx$, гдѣ трехчленъ x^2+px+q не разлагается на дѣйствительныхъ множителей.

Предположимъ себѣ вычислить этотъ послѣдній интегралъ. Съ этой цѣлью напишемъ во первыхъ подынтегральную дробь такъ, чтобы въ числителѣ ея одинъ членъ содержалъ множителемъ производную знаменателя, для чего помножимъ и раздѣлимъ числителя на 2, потомъ прибавимъ и отнимемъ членъ Pp, тогда получимъ:

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{P(2x+p)+2Q-Pp}{(x^2+px+q)^n} dx.$$

Этотъ интегралъ разсматривается какъ сумма двухъ интеграловъ, а именно:

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{P}{2} \int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} + \frac{2Q-Pp}{2} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Первый изъ этихъ 2^хъ интеграловъ есть непосредственный, такъ

Как в нем в числителе стоит дифференциал трехчлена x^2+px+q, а потому можем написать его как степень и будем иметь:

$$\int \frac{px+Q}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{p}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1} + \frac{2Q-pp}{2}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Для того, чтобы вычислить второй интеграл дополним к двум первым членам трехчлена x^2+px+q новый член до точного квадрата и напишем:

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int\frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}$$

Введем затем новые переменные, полагая:

$$x+\frac{p}{2} = z\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}, \text{ откуда } dx = dz\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Теперь последний интеграл будет:

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{2Q-pp}{2}\cdot\frac{1}{(q-\frac{p^2}{4})^{n-\frac{1}{2}}}\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

Таким образом вычисление интеграла рассматриваемого нами вида приводится к вычислению интеграла

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}.$$

Рассмотрим этот интеграл отдельно. Для вычисления мы составим особую формулу, называемую формулою понижения степени. Посредством этой формулы вычисление последнего интеграла приводится к вычислению интеграла того же самого вида, в котором степень знаменателя будет на единицу меньше.

Взяв интеграл

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}$$

прибавим и вычтем из знаменателя z^2, получим:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int\frac{1+z^2-z^2}{(z^2+1)^n}dz.$$

Этотъ интегралъ разложимъ на два такимъ образомъ:

$$\int\frac{1+z^2-z^2}{(z^2+1)^n}dz=\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}-\int\frac{z^2}{(z^2+1)^n}dz.$$

Разсмотримъ теперь отдѣльно интегралъ:

$$\int\frac{z^2}{(z^2+1)^n}dz.$$

Примѣнивъ къ этому интегралу способъ интегрированія почастямъ, находимъ:

$$\int\frac{z^2}{(z^2+1)^n}dz=\int z\cdot\frac{z\,dz}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int z\,d\frac{(z^2+1)^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{1}{2(n-1)}\int z\,d\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{n-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}$$

Внеся это выраженіе въ предъидущее равенство, получимъ:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}$$

или сдѣлавъ приведеніе, будемъ имѣть:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{z}{(z^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}.$$

Это и есть формула понижения степени.

Изъ нея мы видимъ, что данный интегралъ приводится къ интегралу того же вида, стоящему во второй части, причемъ степень знаменателя уменьшается на единицу; если къ интегралу, стоящему во второй части послѣдняго равенства примѣнимъ опять тѣ-же формулу понижения степени, то получимъ новый интегралъ того же вида и знаменатель будетъ имѣть степень, которая понизится еще на единицу; продолжая такимъ образомъ послѣдовательно примѣнять эту формулу, мы наконецъ придемъ къ интегралу:

$$\int\frac{dz}{z^2+1},$$

который берется непосредственно, так как:

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z.$$

Таким образом мы рассмотрели все случаи интегрирования рациональной дроби.

Предположим пример вычисления для случая кратных комплексных корней знаменателя.

Положим нам надо вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

Возьмем подынтегральную рациональную дробь и разложим ее на дроби частные; в настоящем случае разложение дроби будет вида:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+H}{x^2+1}$$

Определяем шесть неизвестных коэффициентов по способу неопределенных коэффициентов. Уничтожив знаменатели, найдем:

$$1 = A(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2 + (Cx+D)(x-1)^2 + (Ex+H)(x-1)^2(x^2+1).$$

Раскрывая скобки, находим:

$$1 = A(x^4+2x^2+1) + (Bx-B)(x^4+2x^2+1) + (Cx+D)(x^2-2x+1) +$$
$$+ (Ex+H)(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)$$

и располагая многочлен по нисходящим степеням x:

$$1 = (B+E)x^5 + [A-B-2E+H]x^4 + [2B+C+2E-2H]x^3 +$$
$$+ [2A-2B-2C+D-2E+2H]x^2 + [B+C-2D+E-2H)x + A-B+D+H.$$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях и известные члены, находим систему уравнений:

$$B + E = 0$$

$$A - B - 2E + H = 0$$

$$2B + C + 2E - 2H = 0$$

$$2A - 2B - 2C + D - 2E + 2H = 0$$

$$B + C - 2D + E - 2H = 0$$

$$A - B + D + H = 1.$$

Изъ перваго уравненія имѣемъ: $E = -B$. Вставивъ въ слѣдующія ур-ія получимъ:

$$A + B + H = 0 \; ; \; C - 2H = 0$$

$$2A - 2C + D + 2H = 0 \; ; \; C - 2D - 2H = 0$$

$$A - B + D + H = 1.$$

Исключая C, имѣемъ изъ втораго уравненія $C = 2H$. Вставляя въ остальныя ур-ія, получимъ:

$$A + B + H = 0$$

$$2A + D - 2H = 0$$

$$-2D = 0$$

$$A - B + D + H = 1$$

Изъ третьяго ур-ія $D = 0$; затѣмъ имѣемъ:

$$A + B + H = 0$$

$$A - H = 0$$

$$A - B + H = 1$$

Изъ втораго ур-ія $H = A$, и исключая H, получимъ:

$$2A + B = 0 \text{ и } 2A - B = 1.$$

Откуда через сложение находимъ, что $A = \frac{1}{4}$, а затѣмъ:

$$B = -2A = -\frac{1}{2} \text{ и}$$

$$M = \frac{1}{4},\ D = 0,\ C = \frac{1}{2},\ E = \frac{1}{2}.$$

Разложеніе рациональной дроби приметъ такой видъ:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2x+1}{x^2+1}$$

Беремъ интегралы получимъ:

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx.$$

Здѣсь всѣ интегралы непосредственные, для третьяго и четвертаго находимъ:

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1};\ \text{а}$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+1}\cdot dx = \int\frac{2xdx}{x^2+1} + \int\frac{dx}{x^2+1} = l(x^2+1) + \operatorname{arctg} x.$$

Подставивши найденныя выраженія въ данный интегралъ, получимъ окончательно:

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2}l(x-1) - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4}l(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C.$$

Вычисленія, которыя приходится дѣлать при разложеніи рациональной дроби, особенно въ случаѣ мнимыхъ и кратныхъ корней, вообще довольно продолжительны когда степень знаменателя высока и когда употребляютъ способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, такъ какъ при этомъ получается большое число уравненій съ большимъ числомъ неизвѣстныхъ. Чтобы избѣжать этого прибѣгаютъ иногда къ другимъ способамъ для нахожденія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ при разложеніи рациональной дроби. Эти другіе способы также основаны на томъ, что равенство, опредѣляющее видъ разло-

жения данной рациональной дроби и все полученные из него равенства суть тождества и следовательно существуют при всевозможных значениях x. Если поэтому мы припишем x такое произвольное значение, при котором равенство упрощается, например тем, что в нем уничтожается несколько членов, то из полученного таким образом равенства, найдем уже будет легче определить неизвестные коэффициенты. Поясним сказанное на следующем примере.

Пусть надо вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}\,dx.$$

Возьмем подынтегральную рациональную дробь и разложим ее на дроби частные. Разложение должно иметь следующий вид:

$$\frac{x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{H}{x+1}.$$

Уничтожив знаменателей, будем иметь:

$$x^2-3x-2 = (Ax+B)(x+1)^2 + (Cx+D)(x^2+x+1)(x+1)^2 + E(x^2+x+1)^2 + H(x+1)(x^2+x+1)^2$$

Это равенство есть тождество и существует при всевозможных значениях x; положим в нем $x=-1$, тогда наше равенство примет вид: $1+3-2 = E(1-1+1)^2$, откуда $E=2$.

Подставляя в предыдущее равенство вместо E его величину и перенося член $2(x^2+x+1)^2$ в первую часть получим:

$$x^2-3x-2-2(x^2+x+1)^2 = (Ax+B)(x+1)^2 + (Cx+D)(x^2+x+1)(x+1)^2 + H(x+1)(x^2+x+1)^2$$

Вторая часть этого равенства делится на $(x+1)$, а поэтому и первая часть должна делиться на $(x+1)$; производя деление на

самому делу, получимъ:

$$\left(-2x^4-4x^3-5x^2-7x-4\right):(x+1) = -2x^3-2x^2-3x-4.$$

Разделивъ обѣ части на $(x+1)$, получимъ такимъ образомъ новое тождество:

$$-2x^3-2x^2-3x-4 = (Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)(x+1)+H(x^2+x+1)^2$$

Полагая въ этомъ тождествѣ $x=-1$, находимъ: $-2+2+3-4 = H(1+1-1)^2$ откуда $-1=H$ или $H=-1$. Вставляя вмѣсто H его величину и перенося члены съ H въ первую часть, получимъ:

$$-2x^3-2x^2-3x-4+x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x = (Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)(x+1)$$

Вторая часть дѣлится на $(x+1)$ безъ остатка, стало-быть и первая часть должна дѣлиться на $(x+1)$ и производя дѣленіе на самомъ дѣлѣ, находимъ:

$$\left(x^4+x^2-x+3\right):(x+1) = x^3-x^2+2x-3.$$

Затѣмъ наше тождество напишется такъ:

$$x^3-x^2+2x-3 = Ax+B+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

Теперь дадимъ такое значеніе x, при которомъ $x^2+x+1=0$, при этомъ x будетъ мнимымъ, но $x^2=-x-1$, а $x^3=-x^2-x$. Теперь наше тождество обратится въ слѣдующее:

$$-x^2-x+x+1+2x-3 = Ax+B$$

или подставляя вмѣсто x^2 опять $-x-1$, получимъ:

$$x+1+1+2x-3 = Ax+B \text{ или } 3x-1 = Ax+B.$$

Такъ какъ здѣсь x есть мнимое количество, (*) можетъ существовать только тогда, когда $A=3$ и $B=-1$. Вернемся теперь

(*) то это равенство

знать къ послѣднему тождеству и вставить въ немъ вмѣсто A и B ихъ величины; напишемъ его такъ:

$$x^3 - x^2 + 2x - 3 - 3x + 1 = (Cx + D)(x^2 + x + 1)$$

Здѣсь первая часть должна дѣлиться на $x^2 + x + 1$, ибо вторая часть дѣлится на это выраженіе, а потому произведя дѣленіе, найдемъ

$$(x^3 - x^2 - x + 2) : (x^2 + x + 1) = x - 2$$

и слѣдовательно будемъ имѣть при произвольномъ x

$$x - 2 = Cx + D,$$

а отсюда заключаемъ, что $C = 1$ и $D = -2$.

Такимъ образомъ мы вычислили всѣ коэффиціенты разложенія. Этотъ способъ имѣетъ то преимущество, что въ немъ всѣ дѣйствія постоянно провѣряются сами собою — и если ошибка, то она сейчасъ же обнаруживается. Такъ если-бы одно изъ приведенныхъ выше дѣленій получилось съ остаткомъ, что противорѣчило-бы приведенному разложенію, то это показало-бы намъ, что въ предшествующихъ вычисленіяхъ была сдѣлана какая-нибудь ошибка и было-бы необходимо это вычисленіе провѣрить. Обратимся теперь къ самому интегрированію данной раціональной дроби. Мы получимъ:

$$\int \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + x + 1)^2 (x + 1)^2} = \underset{(2)}{\int \frac{3x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx} + \int \frac{x - 2}{x^2 + x + 1} dx + 2 \int \frac{dx}{(x + 1)^2} - \underset{(1)}{\int \frac{dx}{x + 1}}.$$

Здѣсь два первые интеграла неопредѣленные, а два послѣдніе могутъ вычислить. Вычислимъ сначала первый интегралъ по указанному выше способу. Умноживъ числителя и знаменателя

на 2, отнимая в числителе производную от x^2+x+1; получим

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3(2x+1)-5}{(x^2+x+1)^2}dx.$$

Разлагая этот интеграл на 2, находим:

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)^2} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{3}{2(x^2+x+1)} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Вычислим теперь последний интеграл; дополняя квадрат в знаменателе, напишем:

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}$$

Вводим теперь новое переменное z, полагая

$$x+\frac{1}{2} = z\sqrt{\frac{3}{4}}; \text{ отсюда } z = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \text{ и } dx = \sqrt{\frac{3}{4}}dz.$$

Рассматриваемый интеграл обратится в следующий

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{9}{16}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Применяя затем формулу понижения степени, находим:

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1}\right] = \frac{4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{4x^2+4x+1}{3}+1} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \text{ или}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Наконец окончательно имеем:

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{3}{2(x^2+x+1)} - \frac{5}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{10\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Вычислим теперь второй интеграл, то есть

$$\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx.$$

Выделяя в числителе производную знаменателя, находим:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-5}{x^2+x+1}dx.$$

Разлагая этот интеграл, получим:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - 5\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}l\left(x^2+x+1\right) - 5\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Вычислим теперь интеграл: $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$. Дополним в знаменателе к двум первым членам еще член до полного квадрата и напишем:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Введем новую переменную, полагая: $x+\frac{1}{2} = z\sqrt{\frac{3}{4}}$; отсюда:

$$z = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \text{ и } dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dz$$

Вставим эти величины в рассматриваемый интеграл, получим:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}} \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} z$$

или вставляя вместо z его выражение, находим:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Вставляя последнюю формулу в вышеприведенное равенство, находим:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2} l(x^2+x+1) - \frac{10}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Вставляя всюду полученные выражения в вышеданный интеграл, окончательно находим:

$$\int \frac{x^3-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}dx = -\frac{3}{2(x^2+x+1)} - \frac{5}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{10\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \\ + \frac{1}{2} l(x^2+x+1) - \frac{10}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{x+1} - l(x+1)$$

или, сделав приведения, получим:

$$\int \frac{x^3-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}dx = -\frac{9+5(2x+1)}{6(x^2+x+1)} - \frac{30(1+3)}{9\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \\ + \frac{1}{2} l(x^2+x+1) - \frac{2}{x+1} - l(x+1).$$

Приведем в заключение несколько примеров для упражнения:

$$\int \frac{x^5}{(1+x^2)^3}dx = \left(x^2+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{(1+x^2)^2} + l\left(\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)^2} = -\left(\frac{1}{3x^3} - \frac{5}{3x} - \frac{5x}{2}\right)\frac{1}{1+x^2} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg} x + c.$$

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x+x^2)^2} = -\frac{x+2}{3(1+x+x^2)} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^3)^2} = \frac{1}{3(1+x^3)} - l\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}} + C$$

$$\int \frac{8x^4 - 3x^3 + 5}{x(x^2+2x+3)^3}\,dx = \frac{5}{27}\,l\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}} + \frac{62x+25}{12(x^2+2x+3)^2} - \frac{217x+485}{72(x^2+2x+3)} -$$
$$- \frac{691}{216\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \text{const}.$$

Рассмотрев различные случаи интегрирования рациональной дроби, заключаем, что всякий интеграл от алгебраической рациональной функции может быть вычислен. Вычисление интеграла $\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$ находится в зависимости от определения корней знаменателя и предварительно надо решить уравнение $f(x)=0$. Этот последний вопрос, хотя и не всегда разрешимый, не относится к интегральному исчислению; итак задачу интегрального исчисления по отношению к рациональной функции мы можем считать вполне разрешенной.

Припомним, что уравнение $f(x)=0$ можно решить если оно числовое; если же оно буквенное и степень его выше четвертой, то его вообще решить нельзя; но когда коэффициенты функции $f(x)$ будут приняты числовыя значения, то корни уравнения $f(x)=0$ можно будет найти с произвольной степенью точности и интеграл можно будет вычислить.

При пределе способов интегрирования рассмотренный нами класс алгебраических рациональных функций можно считать наиболее важным, так как интегрирование функций этого

вида встречается чаще других и кроме того интегралы этих других видов функций нередко приводятся через преобразование к интегралам этих функций рациональных.

Интегрирование алгебраических иррациональных функций

Число иррациональных функций, подлежащих интегрированию довольно ограничено, так что скоро можно считать исключительно тот случай, когда иррациональная функция может быть проинтегрирована.

Остановимся на разсмотрении простейших из таких случаев.

1) Интегралы содержащие иррациональные одночлены.

Общий вид этих интегралов есть следующий:

$$\int f\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}} \ldots\ldots\right) dx$$

Въ этом интеграле подынтегральная функция f представляет совокупность рациональных действий, совершаемых надъ x и надъ дробными степенями x^{α}. Такой интеграл через введение новаго переменнаго всегда может быть обращен въ интеграл отъ рациональных функций.

Вообразим, что все дроби, стоящия показателями, приведены къ общему знаменателю δ, так что:

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{\delta}; \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{\delta}; \ldots\ldots$$

Теперь данный интеграл напишется так:

$$\int f(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}} \dots) dx = \int f(x, x^{\frac{m'}{s}}, x^{\frac{p'}{s}} \dots) dx.$$

Введем новое переменное, полагая $x^{\frac{1}{s}} = z$, тогда

$$x = z^s \text{ и } dx = s z^{s-1} dz$$

и интеграл будет:

$$\int f(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}} \dots) dx = \int f(z^s, z^{m'}, z^{p'} \dots) s z^{s-1} dz.$$

Теперь под знаком интеграла стоит функция f, означающая совокупность рациональных действий, совершаемых над целыми степенями z, следовательно подынтегральная функция будет рациональною относительно z, а потому интеграл может быть вычислен.

Положим, напр., что надо вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx.$$

Написавъ его въ видѣ:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} dx = \int \frac{x^{\frac{3}{6}}}{1+x^{\frac{2}{6}}} dx,$$

введемъ въ него новое переменное, полагая:

$$x^{\frac{1}{6}} = z \; ; \; x = z^6 ; \; \text{и } dx = 6z^5 dz,$$

мы будемъ имѣть интегралъ:

$$\int \frac{z^3}{1+z^2} 6z^5 dz = 6 \int \frac{z^8}{z^2+1} dz,$$

въ которомъ подынтегральная функція рациональна относительно z и который, поэтому, можно вычислить. Въ результатѣ вмѣсто z нужно будетъ поставить $x^{\frac{1}{6}}$.

Примѣры на упражненія:

$$\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} = \frac{2}{3} l(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{3} l(x-\sqrt{x}+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}} + c.$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx = \ln x + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + \text{const}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}dx = x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 3\ln\left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} + 1\right) +$$

$$+ 2\sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Разсмотрѣнный видъ интеграловъ можетъ быть обобщенъ; именно при помощи того же способа можно вычислять интегралъ, въ которомъ подынтегральная функція представляетъ совокупность раціональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ x и надъ дробными степенями функціи первой степени относительно x.

Общій видъ такихъ интеграловъ есть слѣдующій:

$$\int f\left[x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, (ax+b)^{\frac{p}{q}} \ldots\right]dx$$

Приведемъ опять дроби показателей къ общему знаменателю s, получимъ какъ и выше что:

$$\int f\left[x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, (ax+b)^{\frac{p}{q}} \ldots\right]dx = \int f\left[x, (ax+b)^{\frac{m'}{s}}, (ax+b)^{\frac{p'}{s}} \ldots\right]dx$$

Введемъ новое перемѣнное, полагая,

$$(ax+b)^{\frac{1}{s}} = z\,;\ (ax+b) = z^s \text{ и } x = \frac{z^s-b}{a}, \text{ и } dx = \frac{sz^{s-1}dz}{a}$$

При этомъ интегралъ будетъ:

$$\int f\left[x, (ax+b)^{\frac{m'}{s}}, (ax+b)^{\frac{p'}{s}} \ldots\right]dx = \int f\left(\frac{z^s-b}{a}, z^{m'}, z^{p'} \ldots\right)\frac{sz^{s-1}dz}{a}$$

Въ послѣднемъ интегралѣ подынтегральная функція представляетъ совокупность раціональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ цѣлыми степенями z, слѣдовательно подынтегральная функція раціональна относительно z и интегралъ можно будетъ вычислить по извѣстнымъ уже правиламъ.

Предоставимъ примѣръ. Данъ интегралъ:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x}}$$

Введем новое переменное полагая $\sqrt{a+x}=z$, откуда $a+x=z^2$, а отсюда $x=z^2-a$ и следовательно $dx=2dz\,dz$

Теперь наш интеграл будет:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x}} = \int \frac{2z\,dz}{(z^2-a)z} = 2\int \frac{dz}{z^2-a}$$

Въ последнемъ интегралъ подынтегральная функція раціональна и слѣд. его можно вычислить.

Примѣры для упражненія:

$$\int \frac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}} - 3(1-x)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x2}\,dx = \frac{1}{4}\,l\,\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} - \frac{\sqrt{2x+1}}{4x} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2+x}}{3+2\sqrt{2+x}}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2+x} + \frac{9}{4}\,l\left(3+2\sqrt{2+x}\right) + C.$$

Разсматривавшій видъ интеграловъ можно еще болѣе обобщить, а именно тѣмъ же способомъ можно вычислить интегралъ, въ которомъ подынтегральная функція представляетъ совокупность раціональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ x и надъ дробными степенями дроби, числитель и знаменатель которой суть функціи первой степени относительно x.

Общій видъ такихъ интеграловъ есть слѣдующій:

$$\int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\ldots\right] dx,$$

гдѣ f означаетъ совокупность раціональныхъ дѣйствій.

Точно также какъ и прежде приведемъ во первыхъ, всѣ дробные показатели къ общему знаменателю s и потомъ введемъ новое перемѣнное, полагая $\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{1}{s}} = z$, откуда $\frac{ax+b}{a'x+b'} = z^s$.

Решая это ур-е, найдем x; имеем: $ax+b = a'z^3x + b'z^3$ и отсюда:

$$x = \frac{b'z^3 - b}{a - a'z^3}$$

Таким образом x выражается рациональной функцией z; дифференциал от x будет очевидно рациональная функция z и следовательно по введении нового переменного z весь интеграл обратится в интеграл от рациональной функции относительно z.

Предположим например себе вычислить интеграл:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Вводим в него новое переменное, полагая:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = z, \text{ откуда } \frac{1+x}{1-x} = z^2.$$

Решая это ур-е относительно x, находим:

$$1+x = z^2 - xz^2 \text{ и } x = \frac{z^2-1}{z^2+1}$$

Затем имеем:

$$dx = \frac{2z(z^2+1) - 2z(z^2-1)}{(z^2+1)^2} dz = \frac{4z\,dz}{(z^2+1)^2}.$$

Вставляя полученное выражение в данный интеграл, находим: $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int z \frac{z^2+1}{z^2-1} \cdot \frac{4z\,dz}{(z^2+1)^2} = 2\int \frac{z^2\,dz}{z^4-1}$

А этот интеграл есть интеграл от рациональной функции и его можно вычислить по известным правилам

Примеры на упражнения:

$$\int \sqrt{\frac{6+x}{x}}\,dx = 3l\left(6+2x+2\sqrt{6x+x^2}\right) + \sqrt{6x-x^2} + C.$$

$$\int x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)a^3$$

$$\int x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot dx = \frac{1}{2}\arcsin x - \left(1+\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2} + C.$$

2) Случай интегрированія ирраціональныхъ функцій, когда подынтегральная функція представляетъ совокупность раціональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ x и надъ корнемъ квадратнымъ изъ функцій второй степени относительно x.

Общій видъ интеграловъ этого класса есть слѣдующій:

$$\int f(x, R)\, dx, \text{ гдѣ}$$

$$R = \sqrt{A + Bx + Cx^2},$$

а функція f означаетъ совокупность раціональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ x и R.

Для вычисленія интеграловъ этого вида употребляются — различные пріемы, смотря потому, какой знакъ имѣетъ коэффиціентъ C при x^2 подъ знакомъ корня.

Ввиду этого упростимъ нѣсколько форму радикала R.

Такъ какъ C можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, то обозначимъ черезъ C_1 абсолютную величину C и вынесемъ C_1 за скобку множителемъ, получимъ:

$$R = \sqrt{C_1\left(\frac{A}{C_1} + \frac{B}{C_1}x \pm x^2\right)}$$

или полагая: $\frac{A}{C_1} = a$ и $\frac{B}{C_1} = b$ будемъ имѣть:

$$R = \sqrt{C_1(a + bx \pm x^2)} = \sqrt{C_1}\sqrt{a + bx \pm x^2}.$$

Такъ какъ множитель $\sqrt{C_1}$ не содержитъ x, то его можно не ставить на видъ и данный интегралъ напишется такъ:

$$\int f\left(x, \sqrt{a + bx \pm x^2}\right) dx$$

или короче, онъ будетъ: $\int f(x, X)\,dx$, гдѣ $X=\sqrt{a+bx\pm x^2}$

Этотъ интегралъ можетъ быть обращенъ черезъ введеніе новаго перемѣннаго въ интегралъ отъ рациональной функціи при помощи трехъ различныхъ преобразованій.

I) Преобразованіе. Оно примѣняется когда $X=\sqrt{a+bx+x^2}$, т.е. когда передъ x^2 подъ знакомъ корня стоитъ знакъ +. Въ этомъ случаѣ введемъ новое перемѣнное, полагая:

$$\sqrt{a+bx+x^2}=z-x, \text{ откуда:}$$

$$a+bx+x^2=z^2-2zx+x^2 \text{ и } x=\frac{z^2-a}{2z+b} \text{ и наконецъ}$$

$$dx=\frac{2z(2z+b)-2(z^2-a)}{(b+2z)^2}\,dz \text{ или}$$

$$dx=\frac{2z^2+2bz+2a}{(2z+b)^2}\,dz$$

Находимъ теперь x:

$$X=z-x=z-\frac{z^2-a}{2z+b}=\frac{z^2+bz+a}{2z+b}.$$

Подставляя полученныя выраженія въ данный интегралъ получимъ:

$$\int f(x, X)\,dx=\int f\left(\frac{z^2-a}{2z+b}, \frac{z^2+bz+a}{2z+b}\right)\frac{2(z^2+bz+a)}{(2z+b)^2}\,dz.$$

Въ этомъ интегралѣ подынтегральная функція представляетъ совокупность рациональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ выраженіями рациональными относительно z, а потому полученный интегралъ есть интегралъ отъ рациональной функціи и его можно вычислить.

Предположимъ напримѣръ вычислить интегралъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}$$

Введем новое переменное, полагая: $\sqrt{a+bx+x^2} = z - x$

Пользуясь предыдущими выводами, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \int \frac{2z+b}{z^2+bz+a} \cdot \frac{2(z^2+bz+a)}{(2z+b)^2}\, dz = \int \frac{2dz}{2z+b} = \int \frac{dz}{z+\frac{b}{2}} =$$
$$= l\left(\frac{b}{2}+z\right) + C$$

но $z = x + \sqrt{a+bx+x^2}$. Вставляя вместо z его выражение, находим окончательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = l\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a+bx+x^2}\right) + C.$$

Заметим частный случай, когда $b=0$. Будем иметь:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = l\left(x+\sqrt{a+x^2}\right) + C.$$

Примеры на упражнение.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = l\left(\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}\,\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x-1+\sqrt{3-4x+x^2}} = -\frac{1}{2}\, l\left(-x+\sqrt{3-4x+x^2}\right) - \frac{1}{2}\, l\left(2-x+\sqrt{3-4x+x^2}\right) + C.$$

II) Преобразование. Оно применяется тогда, когда под корнем квадратным перед x^2 стоит знак $-$, т.е. когда

$$x = \sqrt{a+bx-x^2}.$$

Найдем корни трехчлена

$$a+bx-x^2,$$

для чего положим $a+bx-x^2 = 0$ или $x^2-bx-a=0$, откуда по известной формуле имеем:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4}+a}$$

Будем теперь принимать корни разматриваемого трехчлена действительными; для этого требуется, чтобы было:

$$\frac{\beta^2}{4}+\alpha>0$$

и очевидно, что это условие будет непременно (*), если $\alpha>0$; но может быть выполнено и при $\alpha<0$, если только: $\alpha>-\frac{\beta^2}{4}$

Итак, полагая, что корни трехчлена действительны, назовем их через λ и β. Разложив трехчлен на множители, получим:

$$\alpha+\beta x-x^2=-1(x-\lambda)(x-\beta)=(x-\lambda)(\beta-x)$$ следовательно

$$X=\sqrt{(x-\lambda)(\beta-x)}$$

Второе преобразование состоит в том, что в разыскиваемый интеграл вводится новое переменное, полагая

$$\sqrt{(x-\lambda)(\beta-x)}=(x-\lambda)z \quad \ldots\ldots (1)$$

или

$$\sqrt{(x-\lambda)(\beta-x)}=(\beta-x)z \quad \ldots\ldots (2)$$

Введем переменное, как указано в равенстве (1), тогда

$$z=\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\lambda}}$$

Выразим теперь x через z: для чего, возводя в квадрат равенство (1), находим:

$$(x-\lambda)(\beta-x)=(x-\lambda)^2z^2 \text{ или по сокращении}$$

$$\beta-x=(x-\lambda)z^2 \text{ и отсюда } x=\frac{\lambda z^2+\beta}{z^2+1}$$

Выразим также dx через z, найдем:

$$dx=\frac{2\lambda z(z^2+1)-2z(\lambda z^2+\beta)}{(z^2+1)^2}dz=\frac{2(\lambda-\beta)z}{(z^2+1)^2}dz \text{ и наконец:}$$

$$X=(x-\lambda)z=\left(\frac{\lambda z^2+\beta}{z^2+1}-\lambda\right)z=\frac{(\beta-\lambda)z}{z^2+1}.$$

Вставим полученные выражения в данный интеграл, найдем:

$$\int f(x,X)\,dx=\int R\left(\frac{\lambda z^2+\beta}{z^2+1},\ \frac{(\beta-\lambda)z}{z^2+1}\right)\frac{2(\lambda-\beta)z}{(z^2+1)^2}dz.$$

Здесь подынтегральная функция представляет совокупность рациональных действий, совершаемых над выражениями рациональными относительно z и следовательно данный интеграл зависящий интегрально от рациональной функции, который можно вычислить по вышеуказанным правилам.

Применим это преобразование к интегралу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$$

Воспользуясь предыдущими выводами, находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{z^2+1}{(\beta-\alpha)z} \cdot \frac{2(\alpha-\beta)z}{(z^2+1)^2}\, dz = -2\int \frac{dz}{z^2+1} = -2\operatorname{arctg} z + C, \text{ но}$$

$$z = \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}, \text{ следовательно}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}} + C.$$

В этот окончательный результат вместо α и β надо подставить их значения, которые будут:

$$\alpha = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4}+a} \text{ и } \beta = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4}+a}$$

Сделаем теперь дополнительное замечание о вторичном преобразовании.

Это преобразование, как мы заметили выше, применимо только тогда, когда корни трехчлена, стоящего под радикалом

$$x = \sqrt{a+bx-x^2}$$

действительны. Если корни α и β мнимы, что будет когда $\frac{b^2}{4}+a<0$ или когда $a<-\frac{b^2}{4}$, то указанное преобразование, хотя и может быть применено, но полученный результат будет мнимый. Не трудно доказать, что когда корни трехчлена

$$a + bx - x^2$$

минусъ, то и X будетъ также минусъ, ибо трехчленъ, стоящій подъ знакомъ радикала въ этомъ случаѣ будетъ всегда числомъ отрицательнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, если трехчленъ:

$$a + bx - x^2$$

имѣетъ мнимые корни, то онъ не обращается въ 0 ни при какомъ дѣйствительномъ значеніи x и слѣдовательно при непрерывномъ измѣненіи x отъ $x = -\infty$ до $x = +\infty$ онъ будетъ сохранять одинъ и тотъ же знакъ, ибо перемѣнить свой знакъ этотъ трехчленъ могъ-бы только обратившись въ 0, а въ 0 онъ не обращается. Чтобы опредѣлить, какой именно знакъ имѣетъ этотъ трехчленъ достаточно опредѣлить знакъ при какомъ-нибудь частномъ значеніи x^{α}, напримѣръ при $x = 0$. При этомъ значеніи x^{α} величина трехчлена есть a и потому заключаемъ, что знакъ трехчлена всегда будетъ одинаковъ со знакомъ a; но a отрицательно, такъ какъ оно мнимое $-\frac{b^2}{4}$ и слѣдовательно и трехчленъ

$$a + bx - x^2$$

при всевозможныхъ значеніяхъ x будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ отрицательнымъ.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ въ данномъ интегралѣ:

$$\int f(x, X)\, dx$$

радикалъ X будетъ мнимымъ, такъ что мнимость будетъ

въ самомъ заданіи, а потому и результатъ не можетъ быть освобожденъ отъ мнимости. Такіе интегралы рѣдко встрѣчаются въ приложеніяхъ, но замѣтимъ однако, что ихъ вычисленіе не можетъ представить затрудненій; именно, стоитъ только поставить мнимость на видъ, вынося $\sqrt{-1}$ за знакъ радикала и написавъ, что-

$$\mathcal{R} = \sqrt{-1}\sqrt{-a-bx+x^2}$$

Затѣмъ передъ x^2 подъ знакомъ корня будетъ уже стоять знакъ + и одно преобразованіе интеграла въ интегралъ отъ раціональной функціи смогло будетъ применить первое преобразованіе. Очевидно однако, что множитель $\sqrt{-1}$ будетъ при этомъ входить во всѣ вычисленія и понятно, что онъ найдетъ и въ результатѣ. Интегралъ будетъ также мнимымъ.

Такимъ образомъ случай когда передъ x^2 подъ знакомъ корня стоитъ знакъ — и когда въ то же время корни трехчлена $a+bx-x^2$ мнимы, хотя и возможенъ, но не имѣетъ важности, такъ какъ онъ не встрѣчается въ приложеніяхъ.

Примѣры на упражненія:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = \operatorname{arctg}\frac{1+3x}{2\sqrt{1+x-x^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{3a^2x^2}(a+2x) + C$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \rho\left(\frac{x+3-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right) + C$$

$$\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{2}$$

II) Преобразованіе. Это преобразованіе применяется только

тогда, когда $a>0$ и состоить въ томъ, что въ интегралъ вводятъ новое перемѣнное, полагая

$$\sqrt{a+bx\pm x^2}=\sqrt{a}+xz,$$

гдѣ z есть новое перемѣнное. Опредѣлимъ отсюда x въ функціи z, для чего возведемъ равенство въ квадратъ, получимъ:

$$a+bx\pm x^2=a+2\sqrt{a}\cdot xz+x^2z^2$$

или по сокращеніи:

$$b\pm x=2\sqrt{a}\cdot z+xz^2 \text{ и отсюда } x=\frac{b-2\sqrt{a}z}{z^2\pm 1}.$$

Дифференцируя получимъ:

$$dx=\frac{-2\sqrt{a}(z^2\pm1)-2z(b-2\sqrt{a}\cdot z)}{(z^2\pm1)^2}dz=\frac{2\sqrt{a}z^2-2bz\pm2\sqrt{a}}{(z^2\pm1)^2}dz$$

Находимъ теперь $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X}=\sqrt{a}+xz=\sqrt{a}+\frac{bz-2\sqrt{a}\cdot z^2}{z^2\pm1}=\frac{-\sqrt{a}\cdot z^2+bz\pm\sqrt{a}}{z^2\pm1}.$$

Подставляя найденныя выраженія въ данный интегралъ, найдемъ

$$\int f(x,\mathcal{X})dx=\int f\left(\frac{b-2\sqrt{a}\cdot z}{z^2\pm1},\ \frac{-\sqrt{a}\cdot z^2+bz\pm\sqrt{a}}{z^2\pm1}\right)\frac{2\sqrt{a}\cdot z^2-2bz\pm2\sqrt{a}}{(z^2\pm1)^2}dz.$$

Здѣсь подъ знакомъ интеграла опять указана совокупность рациональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ выраженіями рациональными относительно z, и слѣдовательно новая подынтегральная функція будетъ рациональна относительно z. Преобразованіе это возможно при условіи, что $a>0$; иначе послѣдній интегралъ будетъ освобожденъ отъ иррациональныхъ выраженій.

Предлагаемъ для примѣра найти интегралъ:

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Введем новое, переменное, полагая:

$$\sqrt{1+x-x^2} = 1+xz.$$

Возводим в квадрат и определяем x:

$1+x-x^2 = 1+2xz+x^2z^2$ или $1-x = 2z+xz^2$; $x = \frac{1-2z}{z^2+1}$ и

$$dx = \frac{-2(z^2+1)-2z(1-2z)}{(z^2+1)^2}dz = \frac{2z^2-2z-2}{(z^2+1)^2}dz = 2\frac{z^2-z-1}{(z^2+1)^2}dz.$$

Выразим теперь $1+x$ при помощи z:

$1+x = 1+\frac{1-2z}{z^2+1} = \frac{z^2-2z+2}{z^2+1}$ и наконец находим:

$$\sqrt{1+x-x^2} = 1+\frac{z-2z^2}{z^2+1} = \frac{-z^2+z+1}{z^2+1} = -\frac{(z^2-z-1)}{z^2+1}.$$

Подставляя все полученные выражения в данный интеграл, находим:

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -\int\frac{z^2+1}{z^2-2z+2}\cdot\frac{z^2+1}{z^2-z-1}\cdot 2\frac{z^2-z-1}{(z^2+1)^2}dz = -2\int\frac{dz}{z^2-2z-2}$$

Находим корни знаменателя, для чего решим ур-ие:

$z^2-2z-2=0$ откуда $z = 1\pm\sqrt{1+2} = 1\pm\sqrt{3}$

и следовательно подынтегральная дробь разлагается так:

$\frac{1}{z^2-2z-2} = \frac{A}{z-1-\sqrt{3}}+\frac{B}{z-1+\sqrt{3}}$. Составим выражение $\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = \frac{1}{2(z-1)}$.

Вставляя вместо z два корня знаменателя, находим:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ и } B = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Теперь полученный интеграл будет:

$$-2\int\frac{dz}{z^2-2z-2} = -2\int\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{z-1-\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{z-1+\sqrt{3}}\right)dz = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ell\frac{z-1-\sqrt{3}}{z-1+\sqrt{3}}+\text{const}.$$

Подставляя вместо z его выражение, находим:

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ell\frac{\frac{x-1}{x}-1-\sqrt{3}}{\frac{x-1}{x}-1+\sqrt{3}}+\text{const} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ell\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1+(1+\sqrt{3})x}{\sqrt{1+x-x^2}-1-(1-\sqrt{3})x}+\text{const}.$$

Примеры на упражнения

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ell\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C$$

$$\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{\pi a^3}{2} \quad ; \quad \int \frac{dx}{(2ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x+a}{a^2\sqrt{2ax+x^2}} + C.$$

Такимъ образомъ помощію указанныхъ выше преобразованій всегда можно вычислить интегралы отъ ирраціональныхъ функцій, содержащихъ квадратный корень изъ функцій второй степени. Не смотря однако на существованіе общихъ пріемовъ для вычисленія упомянутыхъ интеграловъ нельзя оставить безъ вниманія нѣкоторыхъ частныхъ пріемовъ съ помощію которыхъ нѣкоторые интегралы разсматриваемаго класса могутъ быть получены помощію гораздо болѣе простыхъ вычисленій.

Такъ интегралъ $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$, уже вычисленный нами по общему способу можетъ быть полученъ другимъ способомъ, дающимъ его въ видѣ болѣе простомъ. Дополнимъ ко второму и 3^{ему} членамъ, стоящимъ подъ радикаломъ, одинъ — членъ до полнаго квадрата, именно напишемъ данный интегралъ такъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+bx-x^2}}.$$

Три послѣдніе члена подъ радикаломъ представляютъ теперь полный квадратъ и можно написать, что:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}.$$

Припомнимъ теперь одну изъ непосредственныхъ формулъ а именно: $\int \frac{dz}{\sqrt{A^2-z^2}} = \arcsin\frac{z}{A}+C$. Применяя эту формулу къ предыдущему интегралу находимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \arcsin \frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}} + C.$$

Это выражение отличается отъ прежде полученнаго: именно мы нашли выше, что:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b-x}{x-a}} + C$$

Вновь полученное выражение проще прежде полученнаго по виду, но можно бы было доказать, что эти два выражения одного интеграла отличаются только на постоянное количество.

Примеры: $\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{5\pi}{8}a^4.$

$$\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^2)\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{1}{\kappa\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a+bx^2}}{\kappa x} + C, \text{ где } \kappa = \sqrt{\frac{a\beta-b\alpha}{\alpha}} \text{ при } \frac{a\beta-b\alpha}{\alpha} > 0$$

$$\int \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n dx = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{n+1}}{2n+2} + \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{n-1}}{2n-2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2x}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right) + \arcsin x + C.$$

Интегрированіе дифференціальныхъ двучленовъ.

Переходимъ къ интегрированію болѣе сложныхъ дифференціаловъ. Разсмотримъ такъ называемые дифференціальные двучлены, которые въ общемъ видѣ суть:

$$dX = x^m(a+bx^n)^p dx \ldots\ldots (1)$$

Въ этомъ выраженіи x независимое перемѣнное, а a и b какія-угодно постоянныя, m и n также количества постоянныя, но на которыя наложатся условіе, чтобы они были не цѣлыми. Это условіе всегда можетъ быть удовлетво-

верно, потому что если даже m и n делятся дробными, то их всегда можно без изменения вида дифференциала заменить целыми числами. Докажем это. Положим, что m и n суть дробные количества и что r их общий знаменатель; в таком случае произведения mr и nr будут целыми количествами.

Положим что $x = z^r$, тогда $dx = rz^{r-1}dz$; вставив эти выражения в равенство (1) найдем:

$$dX = z^{mr}(a + bz^{nr})^p r z^{r-1} dz = r z^{mr+r-1}(a + bz^{nr})^p dz.$$

Легко видеть, что полученное выражение принадлежит к тому же типу какой и первоначальное, только является целой функцией, а вместо прежних показателей взяли показатели $mr+r-1$ и nr, которые суть числа целые. Будем называть n первым показателем, m — $2^{ым}$, p — $3^{ым}$ и покажем, что первый показатель можно считать положительным, потому что его всегда можно сделать таким. Действительно, если n отрицательно, то мы дробим и множим выражение, стоящее в скобках в равенстве (1), на x^n и получаем:

$$dX = x^m(ax^{-n} + b)^p x^{np} dx = x^{m+np}(b + ax^{-n})^p dx.$$

От такого преобразования форма выражения не изменилась, но $1^{ый}$ показатель получил знак (—) и потому сделался количеством положительным.

Итак, мы можем условиться в том, что 1-ый и 2-ой показатель количества целые и что при том 1-ый показатель количество положительное; относительно же 3-го показателя мы не делаем никаких ограничений.

Случаи интегрируемости.

Посмотрим, когда возможно интегрирование дифференциального двучлена. Если p есть число целое и положительное, то выражение, заключенное в скобки, может быть разложено по биному Ньютона, и таким образом данный дифференциал разбивается на сумму простейших, которые допускают весьма простую интеграцию. Если p есть количество целое, но отрицательное, то выражение $(a+bx^n)^p$ можно перенести знаменателем, откуда p заменится положительным показателем и дифференциал dx обратится в рациональную дробь, интегрирование которой было указано. Наконец, если p есть дробь, то $(a+bx^n)^p$ иррационально, и интегрирование, вообще говоря, возможно только в 2 случаях, которые мы и разсмотрим теперь.

1) Преобразуем дифференциал dx, употребляя следующую подстановку: положим $a+bx^n=z$, тогда $x^n=\frac{z-a}{b}$, $x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz$; вставляя эти выражения в дифференциал dx, получим:

$$dx=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}z^p\cdot\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz=\frac{1}{nb}z^p\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz.$$

Полученное выражение представляет, также как и первоначальное, дифференциальный двучлен, интегрируемость которого зависит от 3-го показателя. Если $\frac{m+1}{n}$ есть количество целое, то выражение dX рационально, за исключением слишком степени z^p, которая соответственной подстановкой также может быть заменена рациональной степенью, и интегрирование возможно. Итак, 1-ый случай интегрируемости дифференциала dX при p дробном представляется тогда, когда второй показатель, увеличенный на единицу, делится на целое на p-го показателя. Возьмем пример:

Надо найти $X=\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x^5 (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$. Составляя выражение $\frac{m+1}{n}$, находим: $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{2} = 3$ – число целое, следовательно интегрирование возможно. Применяем способ подстановки и полагаем: $a^2-x^2=z^2$; $x^2=a^2-z^2$, $x=(a^2-z^2)^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}(a^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2z\,dz$ $=-z(a^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}dz$, тогда:

$$X=\int (a^2-z^2)^{\frac{5}{2}} z^{-1} \cdot -z(a^2-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz = -\int (a^2-z^2)^2 dz = -\int (a^4-2a^2z^2+z^4) dz =$$

$$= a^4\int dz + 2a^2\int z^2 dz - \int z^4 dz = -a^4 z + \frac{2a^2 z^3}{3} - \frac{z^5}{5} = \left[\frac{2a^2}{3}(a^2-x^2) - a^4 - \frac{(a^2-x^2)^2}{5}\right]\sqrt{a^2-x^2} =$$

$$= -\left(\frac{x^4}{5} + \frac{4a^2x^2}{15} + \frac{3a^4}{15}\right)\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

2) Рассмотрим 2-ой случай интегрируемости дифференциала dX при p дробном, для чего сначала преобразуем данный дифференциал, вводя x^n дополнительным множителем в выражение, заключенное в скобки. Получим:

$$dX = x^m\left(ax^{-n}+b\right)^p x^{np} dx = x^{m+np}\left(ax^{-n}+b\right)^p dx \ldots\ldots \quad (\text{II})$$

Положимъ, что $ax^{-n}+b=z$ или $a+bx^n=zx^n$. Замѣтимъ, что дифференціалъ (II) отличается отъ (I) тѣмъ, что m въ немъ замѣняется черезъ $m+np$, n черезъ $-n$ и буквы a и b сливаются рознями; поэтому, если мы сдѣлаемъ соотвѣтствующія измѣненія въ результатѣ полученномъ отъ подстановки въ дифференціалъ (I), то это будетъ равносильно подстановкѣ z вмѣсто $ax^{-n}+b$ въ дифференціалъ (II).

Итакъ, сдѣлавъ указанныя измѣненія въ выраженіи $dx=\frac{1}{nb}z^p\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz$, найдемъ $dx=-\frac{1}{na}z^p\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{m+np+1}{-n}-1}dz=-\frac{1}{na}z^p\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{m+1}{n}-p-1}dz$. Такъ какъ полученное выраженіе предетавляетъ дифференціальный двучленъ, то интегрированіе будетъ возможно, если 3-й показатель есть количество цѣлое. Въ данномъ случаѣ условіе это выразится такъ: $\frac{m+1}{n}+p$ должно быть цѣлымъ количествомъ. Разсмотримъ 2-й случай интегрируемости на примѣрѣ. Положимъ, что надо найти: $x=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^3}}=\int x^3(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}dx$. Такъ какъ $\frac{m+1}{n}+p=\frac{3+1}{3}-\frac{1}{2}=0$ — число цѣлое, слѣдовательно интегрированіе возможно, и если употребимъ слѣдующую подстановку: положимъ: $1+x^3=z^2x^3$; тогда $x^3(z^2-1)=1$; $x=\frac{1}{\sqrt[3]{z^2-1}}=(z^2-1)^{-\frac{1}{3}}$; $dx=-\frac{1}{3}(z^2-1)^{-\frac{4}{3}}dz$.

Вставляя эти выраженія въ данный интегралъ, находимъ:
$x=\int(z^2-1)^{-\frac{2}{3}}z^{-\frac{1}{2}}(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot-\frac{1}{3}(z^2-1)^{-\frac{4}{3}}dz=-\frac{1}{3}\int(z^2-1)^{-1}z^{-\frac{1}{2}}dz$. Положимъ $z=t^2$ и $dz=2tdt$, тогда:
$x=-\frac{1}{3}\int t^{-1}(t^2-1)^{-1}2tdt=-\frac{1}{4}\int(t^2-1)^{-1}dt=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-1}$; $\frac{1}{t^2-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}=\frac{(A+B)t+A-B}{t^2-1}$, отсюда:
$A+B=0$, $A-B=1$; слѣд. $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$; $x=-\frac{1}{4}\left[\frac{dt}{t^2-1}\right.=-\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right]dt=$
$=-\frac{1}{8}\mathcal{L}(t-1)+\frac{1}{8}\mathcal{L}(t+1)=\frac{1}{8}\mathcal{L}\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}+C=\frac{1}{8}\mathcal{L}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}+1}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}-1}+C=\frac{1}{8}\mathcal{L}\frac{\sqrt{1+x^2}+x^4}{\sqrt{1+x^2}-x^4}+C$.

Примѣры для упражненія.

$$\int x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{5x^2-2}{35}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + C.$$

$$\int \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\frac{x^5}{6} + \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right]\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{16}\arcsin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{(2ax+x^2)^{\frac{5}{2}}} = -\left[\frac{1}{3(2ax+x^2)} - \frac{2}{3a^2}\right]\frac{x+a}{a^2\sqrt{2ax+x^2}} + C$$

$$\int_0^{2a} x^3\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{7\cdot\pi a^5}{8}$$

$$\int \frac{x^3dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^3}{3a(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

Приведеніе дифференціальныхъ двучленовъ.

Если ни одно изъ выведенныхъ нами условій интегрируемости не соблюдается, то прибѣгаютъ къ особымъ формуламъ служащимъ для упрощенія данныхъ дифференціальныхъ двучленовъ. Выведемъ эти формулы.

Имѣемъ дифференціалъ: $dX = x^m(a+bx^n)^p dx$; для краткости обозначимъ $a+bx^n = A$; $dX = x^m A^p dx$. Введемъ въ послѣднее выраженіе множителей x^{n-1} и x^{-n+1}, получимъ: $dX = x^{m-n+1}A^p x^{n-1}dx$.

Примѣнимъ теперь къ полученному дифференціалу способъ интегрированія по частямъ, для чего положимъ что $x^{m-n+1} = u$, $(a+bx^n)^p x^{n-1}dx = dv$, $du = (m-n+1)x^{m-n}dx$, $v = \int(a+bx^n)^p x^{n-1}dx =$

$$= \frac{1}{nb}\int(a+bx^n)^p nb\,x^{n-1}dx = \frac{1}{nb}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{p+1}$$ и

$$X = \frac{x^{m-n+1}A^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int A^{p+1}x^{m-n}dx \quad \ldots\ (1)$$

Это и есть первая формула; она примѣняется тогда, когда m положительно, а p отрицательно, потому что въ такомъ случаѣ вычитаніе m (2) изъ n (1) и прибавленіе къ p единицы

можетъ служить къ уменьшенію обоихъ показателей. Изъ формулы (1) легко выводится другая формула, для этого надо выражение, стоящее подъ знакомъ интеграла разложить на 2 множителя $(a+bx^n)^p$ и $(a+bx^n)$ и затѣмъ разбить этотъ интегралъ на 2, по средствомъ умноженія на a и на bx^n.

$$X = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n+1)}{bn(p+1)}\int (a+bx^n)^{p+1} x^{m-n}\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} -$$

$$- \frac{a(m-n+1)}{bn(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m (a+bx^n)^p dx.$$

Такъ какъ второй интегралъ второй части равенства есть ничто иное какъ X, то если перенесемъ его въ 1-ую часть равенства и вынесемъ X за скобки. Получимъ:

$$\left[1+\frac{m-n+1}{n(p+1)}\right]X = \frac{x^{m-n+1}A^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{a(m-n+1)}{bn(p+1)}\int x^{m-n}A^p dx \text{ или}$$

$$X = \frac{x^{m-n+1}A^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}A^p dx \ldots\ldots (2)$$

Эту формулу удобно принимать тогда, когда 2-ой показатель есть количество положительное, потому что въ такомъ случаѣ $m-n<m$.

Перейдемъ къ выводу 3-ей формулы, для чего применимъ къ данному интегралу иной, чѣмъ прежде, способъ интегрированія по частямъ. Имѣемъ: $dX = x^m(a+bx^n)^p dx$; положимъ, что $(a+bx^n)^p = u$, $x^m dx = dv$, $du = bnp(a+bx^n)^{p-1}x^{n-1}dx$; $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, слѣдовательно:

$$X = \frac{x^{m+1}A^p}{m+1} - \frac{bnp}{m+1}\int x^{m+n}A^{p-1}dx \ldots\ldots (3)$$

Эта формула представляетъ удобство при отрицательномъ n и p положительномъ, потому что въ такомъ

случать абсолютная величина $(m+n) \lessgtr m$ и $(p-1) \lessgtr p$. Изъ формулы (3) выводимъ формулу (4) посредствомъ преобразованія такого рода: полагаемъ: $x^n = \frac{a+bx^n-a}{b} = \frac{A}{b} - \frac{a}{b}$ и вставляемъ вместо x^n въ подынтегральное выраженіе:

$$X = \frac{x^{m+1}A^p}{m+1} - \frac{bnp}{m+1}\int x^m \left(\frac{A}{b} - \frac{a}{b}\right) A^{p-1} dx \text{ или}$$

$$X = \frac{x^{m+1}A^p}{m+1} - \frac{np}{m+1}\int x^m A^p dx + \frac{anp}{m+1}\int x^m A^{p-1} dx;$$

3^ій членъ второй части переносимъ въ первую часть и беремъ X общимъ множителемъ:

$$\left(1+\frac{n}{p}\right)X = \frac{x^{m+1}A^p}{m+1} + \frac{anp}{m+1}\int x^m A^{p-1} dx \text{ или}$$

$$X = \frac{x^{m+1}A^p}{m+np+1} + \frac{anp}{m+np+1}\int x^m A^{p-1} dx \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Въ этой формулѣ измѣнился 3^ій показатель, къ которому прибавился -1 и потому онъ представляетъ дробь тогда, когда этотъ показатель есть количество положительное.

Изъ формулы (2) можно вывести новую формулу, выражая интегралъ, стоящій во второй части равенства черезъ x:

$$\frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}\int x^{m-n} A^p dx = \frac{x^{m-n+1}A^{p+1}}{b(m+np+1)} - \int x^m A^p dx \text{ или}$$

$$\int x^{m-n} A^p dx = \frac{x^{m-n+1}A^{p+1}}{a(m-n+1)} - \frac{b(m+np+1)}{a(m-n+1)}\int x^m A^p dx.$$

Замѣняя въ обѣихъ частяхъ равенства m черезъ $m+n$, найдемъ

$$\int x^m A^p dx = X = \frac{x^{m+1}A^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(m+np+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n} A^p dx \ldots\ldots (5)$$

Формула (5) служитъ къ уменьшенію второго показателя въ томъ случаѣ, когда онъ отрицательный. Подобнымъ же образомъ изъ формулы (4) можно вывести формулу (6):

$$\frac{anp}{m+np+1}\int x^m A^{p-1} dx = \int x^m A^p dx - \frac{x^{m+1}A^p}{m+np+1} \text{ или}$$

$\int x^m A^{p-1} dx = \frac{m+np+1}{anp} \int x^m A^p dx - \frac{x^{m+1} A^p}{anp}$. Введя въ равенствъ $p+1$ вмѣсто p, получимъ:

$$\int x^m A^p dx = X = -\frac{x^{m+1} A^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{m+np+n+1}{an(p+1)} \int x^m A^{p+1} dx \ldots\ldots (6)$$

Послѣдняя формула служитъ къ уменьшенію $3^{aго}$ показателя въ томъ случаѣ, если этотъ показатель величина отрицательная.

Замѣчанія объ эллиптическихъ интегралахъ и функціяхъ.

Теорія эллиптическихъ интеграловъ и функцій не входитъ въ элементарный курсъ высшаго анализа, но въ простѣйшихъ ихъ выраженіяхъ эллиптическіе интегралы не рѣдко встрѣчаются въ приложеніяхъ и потому хотя поверхностное знакомство съ ними необходимо.

Эллиптическимъ интегрированіемъ называется вообще интегралы, содержащіе корень квадратный изъ функцій третьей и четвертой степеней.

Общій видъ такихъ интеграловъ есть слѣдующій:

$$\int f(x, X)\, dx, \text{ гдѣ}$$

$$X = \sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4},$$

а f означаетъ совокупность раціональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ x и X.

Подъ корнемъ въ выраженіи X стоитъ функція четвертой степени, если же $e = 0$, то эта функція будетъ $3^{ей}$ степени.

Относительно интегралов этого рода известно во первых, что они не могут быть вычислены, как выше разсмотренные нами интегралы, т.е. интегралы этого рода не могут быть выражены посредством известных нам функций, как алгебраических так и трансцендентных.

Таким образом эти интегралы сами по себе представляют особого рода трансцендентные функции, свойства которых должны быть изучаемы по их выражениям.

Задача интегрального исчисления по отношению к эллиптическим интегралам состоит потому не в том, чтобы найдти выражения этих интегралов, но чтобы привести их к возможно простому виду и указать способы для их числового определения. По изследованиям Лежандра оказалось, что все интегралы этого класса можно привести к трем простейшим видам, за которые принимаются следующие интегралы:

$$1)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$2)\quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$3)\quad \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Эти три интеграла и называются в частности собственно эллиптическими интегралами, при чем первый интеграл называется эллиптическим интегралом первого рода, второй — эллиптическим интегралом второго рода, третий —

эллиптическими интегралами третьего рода. Эти интегралы получаются сначала неопределенными, но чтобы удобнее изучать их свойство, принято принимать их исчезающими при $x=0$ или определенными между 0 и x; тогда при каждом значении x функция, представляемая одним из этих интегралов, будет иметь определенную величину и теория должна указать способы для определения числовых значений этих функций при всяком значении x.

Лежандр представляет эти три интеграла в несколько иной форме, вводя вместо переменного x тригонометрическую функцию. Он полагает:

$$x = \sin\varphi, \text{ тогда } dx = \cos\varphi\, d\varphi$$

$$\text{и } \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi.$$

При этом эллиптический интеграл первого рода принимает вид:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \equiv F(k,\varphi)$$

Этот последний интеграл и называется собственно эллиптическим интегралом Лежандра. Мы видим, что величина этого интеграла зависит собственно от k и φ и следовательно есть функция k и φ и Лежандр обозначает эту функцию через $F(k,\varphi)$, где k называется модулем интеграла и, как доказывается в теории, это постоянное может быть положено всегда меньше единицы; предел интеграла φ назы-

вается амплитудой интеграла.

Этотъ интегралъ есть самый важный изъ эллиптическихъ интеграловъ и Лежандръ указалъ способы для его вычисленія по данному модулю и амплитудѣ и даже составилъ таблицы на подобіе логарифмическихъ таблицъ, въ которыхъ даны числовыя величины такихъ интеграловъ. Если приложимъ также преобразованіе къ эллиптическому интегралу второго рода, то получимъ, сдѣлавъ:

$$x = a\sin\varphi$$

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

Лежандръ привелъ этотъ интегралъ къ другому простѣйшему слѣдующимъ образомъ. Возвысивъ и раздѣливъ его на k^2, прибавимъ и вычтемъ отъ числителя единицу и напишемъ:

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{[1-(1-k^2\sin^2\varphi)]\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} -$$
$$-\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Вмѣсто одного интеграла мы получили такимъ образомъ два, изъ первый интегралъ есть эллиптическій интегралъ перваго рода, а второй есть новый интегралъ, который Лежандръ разсматривалъ отдѣльно, обозначая его черезъ:

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(k,\varphi),$$

гдѣ k есть модуль и именно единица, а дугѣ интеграла φ есть амплитуда. Этотъ интегралъ называется Лежандровымъ эллиптическимъ интеграломъ второго рода. Ми-

увидимъ впослѣдствіи, что именно этотъ интегралъ выражаетъ длину дуги эллипса; отсюда произошло общее названіе интеграловъ разсматриваемаго класса эллиптическими.

Сдѣлавъ то-же преобразованіе съ третьимъ интеграломъ, т.е. положивъ въ немъ:

$$x = a\sin\varphi,$$

найдемъ:

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Pi(n,k,\varphi)$$

здѣсь n называется аргументомъ интеграла, а k и φ носятъ прежнія названія. Это и есть Лежандровъ эллиптическій интегралъ третьяго рода.

Теорія эллиптическихъ интеграловъ представляется довольно сложною, но она упрощается помощію разсмотрѣнія эллиптическихъ функцій.

Эллиптическими функціями называются функціи обратныя эллиптическимъ интеграламъ. Понятіе объ этихъ функціяхъ получается слѣдующимъ образомъ.

Разсмотримъ интегралъ перваго рода и обозначимъ его величину черезъ u:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u.$$

Изъ этого равенства видно, что u есть нѣкоторая функція x, эта функція называется эллиптическимъ интеграломъ.

Понятно, что если u есть функція x, то обратно и x есть

функция u; эта функция обратная первой обозначается так:

$$x = \lambda(u).$$

Вот эта-то функция и называется эллиптической функцией. Другие свойства эллиптических функций вытекают, чтобы изучение эллиптических интегралов.

До некоторой степени можно объяснить, почему именно такая точка зрения упрощает теорию эллиптических интегралов. Обратимся сразу только к частному случаю этих интегралов, когда $x=0$.

Интеграл первого рода обращается при этом в:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u.$$

Интеграл этот представляет известную нам функцию, а именно:

$$u = \arcsin x.$$

Совершенно ясно, если бы мы не знали этой функции и стали бы искать ее свойства по интегралу, ее выражающему, то нам пришлось бы искать свойства алгебр, не зная свойств тригонометрических функций. Если же мы догадались бы рассмотреть предварительно обратную функцию, которая есть $x = \sin u$, то, во первых, мы воспользовались бы ее функцией простейшей, а во вторых, из свойств этой функции (2) последней мы вывели бы свойства первой. Что (1) функция алгебр много сложнее обратной, т.е. $\sin u$, это

прямо видно изъ того, что первая изъ этихъ функцій есть — многозначная, имѣющая безчисленное множество значеній и дѣйствительная только при измѣненіи x отъ

$$x=-1, \text{ до } x=+1$$

тогда, какъ вторая есть функція однозначная, періодическая и всегда дѣйствительная при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Подобныя-же соображенія могутъ быть приложены къ эллиптическимъ интеграламъ и функціямъ. Теорія первыхъ гораздо сложнѣе теоріи вторыхъ и свойства эллиптическихъ интеграловъ гораздо удобнѣе открываются при помощи предварительнаго изученія свойствъ эллиптическихъ функцій Лежендръ въ своихъ собственныхъ изслѣдованіяхъ исключительно держался первой точки зрѣнія, т. е. изучалъ непосредственно свойства эллиптическихъ интеграловъ. Теорія же эллиптическихъ функцій создана трудами двухъ знаменитыхъ ученыхъ Абеля и Якоби.

Кромѣ эллиптической функціи $\lambda(u)$ разсматриваются еще двѣ другія, находящіяся въ простомъ соотношеніи съ первой, именно:

$$\mu(u)=\sqrt{1-\lambda^2(u)} \quad \text{и} \quad \nu(u)=\sqrt{1-k^2\lambda^2(u)}$$

Эти двѣ функціи не самостоятельныя, состоящія въ опредѣленной зависимости отъ $\lambda(u)$.

Эти три функціи $\lambda(u)$, $\mu(u)$ и $\nu(u)$ были разсматрива-

Абель и Якоби разсматривали тѣ-же функціи, но предпочли ихъ нѣсколько въ иномъ видѣ, именно положивъ:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u$$

они разсматривали амплитуду φ какъ функцію u и обозначали эту функцію такимъ образомъ: $\varphi = am(u)$, тогда $x = \sin\varphi = \sin am(u)$ и это есть первая эллиптическая функція по Якоби. Другія двѣ функціи будутъ по обозначенію Якоби: $\mu(u) = \sqrt{1-\sin^2(am(u))} = \cos am(u)$ и $\nu(u) = \sqrt{1-k^2\sin^2 am(u)} = \Delta am(u)$

Мы указывали здѣсь на эллиптическіе интегралы только для того, чтобы можно было-бы узнать когда они встрѣчаются въ приложеніяхъ и не пытаться ихъ вычислять пріемами, примѣнимыми къ интеграламъ простѣйшимъ. Эти интегралы вычисляются, какъ было уже замѣчено выше, или по особымъ указаніямъ Лежандра, или помощію разложенія ихъ въ безконечные ряды, или наконецъ ихъ числовыя значенія опредѣляются изъ таблицъ.

Эллиптическіе интегралы дѣлятъ, какъ видимъ повидимому къ разсмотрѣнію новыхъ трансцендентныхъ, а именно обратныхъ эллиптическихъ функцій, но существуетъ множество еще другихъ видовъ интеграловъ отъ ирраціональныхъ функцій, которые можно изслѣдовать и которые открываютъ еще новые ряды трансцендентныхъ функцій.

Какъ за разсмотрѣніемъ нами интеграловъ въ томъ-

въ относительномъ порядкѣ классификаціи слѣдуютъ интегралы, содержащіе корни квадратные изъ функцій цѣлой 4-й степени. Эти интегралы и обратные имъ функціи были уже отчасти разсмотрѣны Абелемъ и называются ультраэллиптическими или Абелевыми.

Но этимъ не исчерпываются интегралы, дающіе новыя трансцендентныя функціи, такъ могутъ быть разсматриваемы данные интегралы, содержащіе корни квадратные изъ функцій высшихъ степеней, а также интегралы, содержащіе корни высшихъ степеней изъ цѣлыхъ функцій и пр. и эти интегралы подадутъ повидимому къ другимъ новымъ трансцендентнымъ функціямъ.

Интегрированіе функцій трансцендентныхъ.

Эти функціи интегрируются весьма рѣдко и для нихъ не существуетъ никакой классификаціи, кромѣ той, которая разсматриваетъ функціи: логарифмическія, тригонометрическія, показательныя и круговыя.

Для интегрированія трансцендентныхъ функцій употребляется преимущественно пріемъ интегрированія по частямъ.

Интеграловъ трансцендентныхъ функцій придется указать не много, и въ каждомъ классѣ ихъ отмѣтимъ только двѣ или три формы, которыя могутъ быть проинтегрированы.

Интегралы содержащіе логарифмическія функціи.

Здѣсь мы укажемъ три формы интеграловъ, которыя могутъ быть найдены.

1) $\int f(lx)\,dx$,

гдѣ f означаетъ цѣлую алгебраическую функцію. Этотъ интегралъ вычисляется весьма просто. Интегрируемъ его по частямъ, полагая въ общей формѣ:

$f(lx) = u$ и $x = v$, находимъ:

$$\int f(lx)\,dx = f(lx)\,x - \int f'(lx)\,\frac{dx}{x}\cdot x = f(lx)\,x - \int f'(lx)\,dx.$$

Во второй части мы получили интегралъ того-же самого вида какъ и въ первой; упрощеніе наше достигнутое состоитъ въ томъ, что степень новой цѣлой функціи $f'(lx)$ единицей меньше степени функціи $f(lx)$

Повторивши еще разъ интегрированіе по частямъ мы уменьшимъ степень функціи $f'(lx)$ понизимъ опять на единицу; получимъ по той-же формулѣ будемъ имѣть:

$$\int f'(lx)\,dx = f'(lx)\,x - \int f''(lx)\,dx.$$

Продолжая такимъ образомъ интегрированіе по частямъ, и полагая, что функція $f(lx)$ $n^{\text{ой}}$ степени, мы наконецъ дойдемъ до интеграла:

$$\int f^{(n)}(lx)\,dx,$$

но $f^{(n)}(lx)$, т. е. производная $n^{\text{ого}}$ порядка отъ цѣлой функціи $n^{\text{ой}}$ степени есть количество постоянное, а потому пос-

...ьный интеграль получится непосредственно. Если теперь сделать последовательныя вставки, то получимъ общую формулу:

$$\int f(bx)dx = xf(bx) - xf'(bx) + xf''(bx) - \dots + C = x\left\{f(bx) - f'(bx) + f''(bx) - \dots\right\} + C.$$

Такимъ образомъ интегрированіе будетъ окончено.

Разсмотримъ частный случай, когда

$$f(bx) = (bx)^n$$

причемъ n число цѣлое и положительное. На основаніи предъидущей формулы имѣемъ:

$$\int (bx)^n dx = x\left\{(bx)^n - n(bx)^{n-1} + n(n-1)(bx)^{n-2} - (n)(n-1)(n-2)(bx)^{n-3} + \dots\right\} + C.$$

Разсмотрѣнный видъ интеграловъ можетъ быть обобщенъ, именно иногда можно взять интегралъ вида:

$$\int f(bx)\,\varphi(x)\,dx,$$

гдѣ f обозначаетъ цѣлую алгебраическую функцію, а функція φ представляетъ раціональную функцію, удовлетворяющую нѣкоторымъ условіямъ, которыя выясняются при самомъ интегрированіи. Будемъ интегрировать по частямъ. Положимъ, во первыхъ, что мы можемъ взять интегралъ отъ дифференціала:

$$\varphi(x)dx,$$

т. е. положимъ что $\varphi(x)dx = d\varphi_1(x)$,

гдѣ $\varphi_1(x)$ извѣстна. Теперь нашъ интегралъ представимъ такъ:

$$\int f(bx)\,\varphi(x)dx = \int f(bx)\,d\varphi_1(x)$$

Запишемъ, интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int f(bx)\,d\varphi_1(x) = f(bx)\,\varphi_1(x) - \int f'(bx)\cdot\frac{\varphi_1(x)dx}{x}$$

Здесь во второй части стоит интеграл, въ которомъ степень цѣлой функціи f понизилась на единицу.

Интегрированіе по частямъ можно продолжать, если возможно обинтегрировать выраженіе:

$$\frac{\varphi_1(x)\,dx}{x},$$

тогда положимъ, что

$$\frac{\varphi_1(x)\,dx}{x} = d\varphi_2(x),$$

гдѣ $\varphi_2(x)$ будетъ извѣстна; мы будемъ имѣть:

$$\int f(lx)\,d\varphi_1(x) = f(lx)\varphi_1(x) - \int f'(lx)\,d\varphi_2(x)$$

Интегрируя теперь по частямъ второй интегралъ, находимъ:

$$\int f(lx)\,d\varphi_1(x) = f(lx)\varphi_1(x) - f'(lx)\varphi_2(x) + \int f''(lx)\,\frac{\varphi_2(x)\,dx}{x}.$$

Въ послѣднемъ интегралѣ степень цѣлой функціи f понизилась еще на единицу. Интегрированіе можно продолжать, если мы будемъ въ состояніи обинтегрировать выраженіе:

$$\frac{\varphi_2(x)\,dx}{x},$$

именно положивъ что: $\frac{\varphi_2(x)\,dx}{x} = d\varphi_3(x)$, гдѣ $\varphi_3(x)$ извѣстна, мы сможемъ послѣдній интегралъ опять обинтегрировать, по частямъ, чѣмъ достигнемъ пониженія(**) цѣлой функціи f еще на единицу. Мы можемъ такимъ образомъ продолжать интегрированіе до тѣхъ поръ пока не дойдемъ до функціи

$$f^n(lx)$$

равной постоянному количеству, если n есть степень функціи $f(lx)$. Двумя послѣдовательными подстановками, найдемъ

(**) степени

общую формулу такого вида:

$$\int f(lx)\varphi(x)dx = f(lx)\varphi_1(x) - f'(lx)\varphi_2(x) + f''(lx)\varphi_3(x) - \cdots$$

Ряд очевидно кончится сам собой, ибо функция $f(lx)$ имеет ограниченное число производных. В этой формуле функции:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x)\cdots$$

определяются равенствами:

$$\varphi_1(x) = \int \varphi(x)dx;\quad \varphi_2(x) = \int \frac{\varphi_1(x)dx}{x};\quad \varphi_3(x) = \int \frac{\varphi_2(x)dx}{x} \text{ и т. д.}$$

Для примера покажем, что

$$f(lx) = (lx)^m,\ \text{а}\ \varphi(x) = x^m,$$

где m целое и положительное количество. В этом случае будем иметь:

$$\varphi_1(x) = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$\varphi_2(x) = \int \frac{x^m dx}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

$$\varphi_3(x) = \int \frac{x^m dx}{(m+1)^2} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$$

И следовательно данный интеграл представится формулой:

$$\int (lx)^n x^m dx = (lx)^n \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - n(lx)^{n-1} \cdot \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + n(n-1)(lx)^{n-2} \cdot \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3} - \cdots =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(lx)^n - \frac{n}{m+1}(lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(lx)^{n-2} - \cdots\right\} + C.$$

Рассмотрим теперь еще один вид интегралов, содержащих логарифмические функции. Положим именно, что дано вычислить интеграл:

$$\int f\left[f(x)\right]dx,$$

где f рациональная функция. Интегрируя почастям, найдем:

$$\int f\left[f(x)\right]dx = xf\left[f(x)\right] - \int \frac{f'(x)dx}{f(x)}dx$$

Здесь во второй части стоит интеграл от рациональной функции, а потому его можно вычислить.

Возьмем пример. Поступая как сказано, найдем:

$$\int l(x^3-x+2)\,dx = xl(x^3-x+2) - \int \frac{3x^2-2x}{x^3-2x+2}\,dx,$$

последний интеграл легко может быть вычислен.

Примеры для упражнения:

$$\int \frac{lx\,dx}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x} lx - l(1+x) + C;$$

$$\int \frac{l(\alpha^2+\beta^2x^2)}{x^2}\,dx = \frac{2\beta}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\beta x}{\alpha} - \frac{l(\alpha^2+\beta^2x^2)}{x} + C$$

$$\int \frac{lx\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x\,lx}{\sqrt{1+x^2}} - l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{lx\,dx}{\sqrt{1+x}} = 2\left\{(lx-2)\sqrt{1+x} + l\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\right\} + C.$$

Интегралы с показательными функциями.

Укажем на две формы интегралов от таких функций, которые могут быть вычислены.

1) $\int f(a^x)\,dx.$

где f есть рациональная функция. Введем в этот интеграл новое переменное, полагая

$$a^x = z, \text{ тогда } x\,la = lz \text{ и } x = \frac{lz}{la}, \text{ и } dx = \frac{dz}{laz}.$$

Вставляя найденные выражения в данный интеграл, находим:

$$\int f(a^x)\,dx = \int f(z)\frac{dz}{laz} = \frac{1}{la}\int \frac{f(z)}{z}\,dz,$$

а последний интеграл есть интеграл от рациональной функции и следовательно его можно вычислить.

2) Второй вид интеграла, содержащего показательную функцию

который можно вычислить, есть следующий:

$$\int a^{mx} f(x)\,dx,$$

где f представляет целую функцию x. Будем интегрировать по частям, для чего данный интеграл представим следующим образом:

$$\int a^{mx} f(x)\,dx = \frac{1}{m \ln a} \int f(x)\, d(a^{mx}).$$

Теперь интегрируя находим:

$$\int a^{mx} f(x)\,dx = \frac{1}{m \ln a} f(x)\, a^{mx} - \frac{1}{m \ln a} \int a^{mx} f'(x)\,dx.$$

Во второй части равенства мы получим интеграл точно такого-же вида как и данный, только вместо $f(x)$ в нем входит функция $f'(x)$, которой степень меньше на единицу. Полученный интеграл мы опять будем интегрировать по частям, также как и данный, и получим:

$$\int a^{mx} f(x)\,dx = \frac{1}{m \ln a} f(x)\, a^{mx} - \frac{1}{m^2 (\ln a)^2} f'(x)\, a^{mx} + \frac{1}{m^2 (\ln a)^2} \int a^{mx} f''(x)\,dx.$$

Степень целой функции под знаком интеграла понизилась еще на единицу.

Продолжая таким образом интегрировать по частям мы будем понижать степень целой функции до тех пор, пока — дойдем до производной $f^{(x)}(x)$ равной постоянному количеству и тогда во второй части равенства получим интеграл $\int a^{mx}\,dx$, который берется непосредственно. Таким образом мы получим общую формулу, выражающую рассматриваемый интеграл, именно —:

$$\int a^{mx} f(x)\,dx = \frac{a^{mx}}{m(la)}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{mla} + \frac{f''(x)}{m^2(la)^2} - \dots\right\} + C.$$

Число слагаемых здесь ограничено и ряд оканчивается сам собой.

Вычислить для примера, что $a=e$, $m=-1$ и $f(x)=x^n$, где n целое и положительное число. Пользуясь вышенайденной формулой можно написать:

$$\int e^{-x} x^n\,dx = -e^{-x}\left\{x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots\right\} + C$$

Примеры для упражнения:

$$\int \frac{dx}{(a+be^{nx})^2} = \frac{1}{na^2}\left\{nx + \frac{a}{a+be^{nx}} - l\left(a+be^{nx}\right)\right\} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{nx}}} = \frac{1}{n} l\left(\frac{\sqrt{1+e^{nx}}-1}{\sqrt{1+e^{nx}}+1}\right) + C$$

$$\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx = e^x \cdot \frac{x-1}{x+1} + C$$

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{xe^x}{(e^x-1)^3}\,dx = l\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{e^x-1}\left\{1 + \frac{x}{2(e^x-1)}\right\} + C.$$

Интегрирование выражений, содержащих круговыя функціи.

Разсмотримъ нѣкоторые интегралы, содержащіе круговыя функціи, которые могутъ быть вычислены.

1) $\int f(x)\,Z\cdot dx$ (*)

гдѣ $f(x)$ раціональная функція, а Z есть одна изъ круговыхъ функцій и можетъ быть равна: $\operatorname{arc\,hin} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$.

Положимъ, что:

$$f(x)\,dx = d f_1(x),$$

гдѣ $f_1(x)$ будетъ извѣстна; тогда мы можемъ нашъ интегралъ (*) $\int f(x) Z\cdot dx$.

предыдущим въ видѣ:

$$\int f(x) z \cdot dx = \int z \cdot f_1(x) .$$

Интегрируя по частямъ получимъ:

$$\int f(x) \cdot z \cdot dx = z \cdot f_1(x) - \int f_1(x) dz .$$

Если функція $f_1(x)$ раціональна, то полученный интегралъ можетъ быть вычисленъ. Дѣйствительно, если

$z = \arcsin x$ или $z = \arccos x$, то

$$dz = \pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Въ этомъ случаѣ въ полученномъ интегралѣ подъинтегральная функція будетъ ирраціональна, но ея ирраціональность состоитъ въ томъ, что въ ней входитъ корень квадратный изъ функцій второй степени, а такіе интегралы, какъ намъ извѣстно могутъ быть вычислены. Если же

$z = \operatorname{arctg} x$ или $z = \operatorname{arcctg} x$, то

$$dz = \pm \frac{dx}{1+x^2}$$

и въ этомъ случаѣ полученный интегралъ есть интегралъ отъ раціональной функціи и всегда можетъ быть вычисленъ.

2) $\int f(\operatorname{arc\,tg} x)\, dx$

гдѣ f означаетъ цѣлую алгебраическую функцію. Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int f(\operatorname{arc\,tg} x)\, dx = x f(\operatorname{arc\,tg} x) - \int f'(\operatorname{arc\,tg} x) \cdot \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

во вновь полученномъ интегралѣ степень цѣлой функціи, стоящей подъ знакомъ интеграла, понизилась на единицу

Сравнительно с данной. Интегрирование по частям мы можем продолжать далее, предварительно замечая, что $\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\,d\sqrt{1-x^2}$, вследствие чего можем написать, что

$$\int f(\arcsin x)\,dx = x f(\arcsin x) + \int f'(\arcsin x)\,d\sqrt{1-x^2}.$$

Интегрируя по частям находим далее:

$$\int f(\arcsin x)\,dx = x f(\arcsin x) + \sqrt{1-x^2} f'(\arcsin x) - \int f''(\arcsin x)\,dx.$$

Теперь во второй части имеем интеграл такого-же вида как и данный, только степень целой функции под знаком интеграла, понизилась на две единицы. Последний интеграл можно выразить по той-же самой формуле; таким образом получим:

$$\int f''(\arcsin x)\,dx = x f''(\arcsin x) + \sqrt{1-x^2} f'''(\arcsin x) - \int f'''(\arcsin x)\,dx.$$

Такое интегрирование мы будем продолжать до тех пор, пока степень целой функции не понизится до нуля, т. е пока не дойдем до производной $f^{(n)}(\arcsin x)$ - равной постоянному количеству, тогда интегрирование будет окончено. Дальнейшая последовательная подстановки получим общую формулу, выражающую разыскиваемый интеграл, именно:

$$\int f(\arcsin x)\,dx = x\left\{f(\arcsin x) - f''(\arcsin x) + f^{IV}(\arcsin x) - \dots\dots\right\} +$$
$$+ \sqrt{1-x^2}\left\{f'(\arcsin x - f'''(\arcsin x) + \dots\dots\right\} + C.$$

Таким же образом вычисляется интеграл

$$\int f(\arccos x)\,dx$$

Разница в результате будет состоять только в том, что

передъ $\sqrt{1-x^2}$ будетъ стоять знакъ —.

Помощью помѣченной формулы легко написать выраженіе интеграловъ: $\int (\arcsin x)^n dx$ и $\int (\arccos x)^n dx$, гдѣ n число цѣлое и положительное.

Послѣдній видъ интеграловъ можетъ быть обобщенъ; иногда можно получить интегралъ такого вида:

$$\int f(\arcsin x)\,\varphi(x)\,dx,$$

гдѣ f цѣлая функція, а $\varphi(x)$ есть рациональная функція, удовлетворяющая нѣкоторымъ условіямъ. Будемъ интегрировать по частямъ и предположимъ во первыхъ, что мы можемъ обынтегрировать выраженіе $\varphi(x)dx$ и пусть

$$\varphi(x)\,dx = d\varphi_1(x),$$

гдѣ $\varphi_1(x)$ есть цѣлая функція, извѣстная намъ. Написавъ нашъ интегралъ видомъ: $\int f(\arcsin x)\,\varphi(x)\,dx = \int f(\arcsin x)\,d\varphi_1(x)$ и интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int f(\arcsin x)\,\varphi(x)\,dx = f(\arcsin x)\,\varphi_1(x) - \int \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,f'(\arcsin x)$$

Во вновь полученномъ интегралѣ степень цѣлой функціи, стоящей подъ знакомъ интеграла, понизилась на единицу. Чтобы продолжить интегрированіе надо предварительно обынтегрировать выраженіе $\frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; положимъ, что это возможно и пусть $\frac{\varphi_1(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi_2(x)$, гдѣ функція $\varphi_2(x)$ намъ извѣстна; тогда продолжая интегрировать по частямъ, найдемъ

$$\int f(\arcsin x)\,\varphi(x)\,dx = f(\arcsin x)\,\varphi_1(x) - f'(\arcsin x)\,\varphi_2(x) + \int \frac{\varphi_2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,f''(\arcsin x).$$

Степень целой функции въ послѣдующемъ интегралѣ еще понижена на единицу; чтобы продолжить интегрированіе, нужно предварительно обынтегрировать выраженіе $\frac{\varphi_2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и представивши его въ интегрирующемъ видѣ: $\frac{\varphi_2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\varphi_3(x)$, можемъ послѣдній интегралъ опять взять по частямъ. Такимъ образомъ мы будемъ продолжать интегрированіе до тѣхъ поръ, пока степень цѣлой функціи подъ знакомъ интеграла не сдѣлается равною нулю. Замѣтимъ, однако, что вычисленіе, сейчасъ указанное, возможно только при условіи, что функціи:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x)\ldots\ldots$$

могутъ быть найдены, а опредѣленіе каждой изъ нихъ предшествуетъ вычисленію интеграла.

Указаннымъ способомъ мы можемъ вычислить интегралы:

$$\int(\arcsin x)^n x^m\,dx \text{ и } \int(\arccos x)^n x^m\,dx.$$

Общій формулы, выражающія эти два интеграла довольно сложны и мы не будемъ ихъ приводить здѣсь.

Примѣры для упражненій:

$$\int x\arcsin x\,dx = \frac{\arcsin x}{4}(2x^2-1) + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int x\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$$

$$\int \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x\,dx = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + l\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

$$\int x^2\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{x}{a}}\,dx = \frac{x^3+a^3}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{\sqrt{ax}}{3}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{ax}{3} + a^2\right) + C.$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = l\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \frac{\arcsin x}{x} + C.$$

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.$$

$$\int x^3 (\arcsin x)^3 dx = \frac{8x^4-3}{32}(\arcsin x)^3 + \frac{3(2x^3+3x)}{32}\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2 -$$

$$- \frac{3(x^4+3x^2)}{32}\arcsin x + \frac{45}{256}\arcsin x - \frac{3(2x^3+15x)}{256}\sqrt{1+x^2} + C.$$

Интегрированіе выраженій, содержащихъ тригонометрическія функціи.

Этотъ классъ интеграловъ есть самый важный изъ интеграловъ, имѣющихъ трансцендентныхъ функцій, такъ какъ интегралы съ тригонометрическими функціями встрѣчаются весьма часто. Къ этому классу относится, во первыхъ, довольно обширный видъ интеграловъ, которые могутъ быть вычислены; это именно интегралы подъ интегральная функція которыхъ представляетъ совокупность рациональныхъ дѣйствій, совершаемыхъ надъ тригонометрическими величинами: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и т. д. Пусть данъ интегралъ:

$$\int f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sec x, \operatorname{cosec} x)\, dx.$$

Мы можемъ написать этотъ интегралъ въ болѣе простой формѣ, замѣтивъ что $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ выражаются рационально черезъ $\sin x$ и $\cos x$, а именно:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ и } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Вслѣдствіе этого подынтегральную функцію мы можемъ разсматривать, какъ рациональную функцію двухъ перемѣнныхъ $\sin x$ и $\cos x$ и данный интегралъ представимъ въ видѣ:

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx.$$

где f есть рациональная функция. Этот интеграл через введение новой переменной обращается в интеграл от рациональной функции. Введем в него переменное, полагая

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z,$$ откуда $$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} z$$ или $$x = 2\operatorname{arctg} z$$ и

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

Рассматривая x как двойную дугу, найдем:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} = \frac{2z}{1+z^2}$$ и,

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Вставляя полученные выражения в данный интеграл, находим:

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}.$$

В этом интеграле подынтегральная функция (*) представляет рациональную функцию от выражений рациональных относительно z, а следовательно вся подынтегральная функция рациональна относительно z, а потому этот интеграл может быть вычислен.

Заметим, что в частном случае, когда $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях, для интегрирования таких функций можно предложить еще другой способ, кроме указанного. В этом случае подынтегральную (*) можно рассматривать как рациональную функцию от квадратов $\sin x$ и $\cos x$ и вследствие этого интеграл

(*) функцию

можно написать в виде: где

$$\int f(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx.$$

Указанное выше введение нового переменного применимо и в этом случае, но предпочтение теперь еще другое преобразование, посредством которого интеграл вычисляется обыкновенно проще.

Введем в подынтегральное новое переменное, полагая:

$$\operatorname{tg} x = z, \text{ откуда } x = \operatorname{arctg} z$$

$$\text{и } dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{z^2}{1+z^2} \quad \text{и} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+z^2}$$

При этом данный интеграл представится в виде:

$$\int f(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx = \int f\left(\frac{z^2}{1+z^2}, \frac{1}{1+z^2}\right) \frac{dz}{1+z^2}.$$

Теперь мы видим, что подынтегральная функция представляет совокупность рациональных дробей, составленных над выражениями рациональными относительно z; таким образом данный интеграл должен быть вычислен. Для примера вычислим интеграл:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}.$$

Вводим новое переменное, полагая

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \text{ откуда } x = 2\operatorname{arctg} z \text{ и}$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{2z}{1+z^2} \text{ и}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Вставляя полученные выражения в данный интеграл, находим:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2az}{1+z^2} + b\frac{(1-z^2)}{1+z^2}} = 2\int \frac{dz}{b + 2az - bz^2}$$

Найдем корни знаменателя, для чего решим ур-ие:

$bz^2 - 2az - b = 0$ или $z^2 - \frac{2a}{b}z - 1 = 0$, откуда $z = \frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1} = \frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$

Представим теперь данный интеграл следующим образом:

$$2\int \frac{dz}{b + 2az - bz^2} = -\frac{2}{b}\int \frac{dz}{z^2 - 2\frac{a}{b}z - 1}$$

и положим что $\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} = \alpha$, а $\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b} = \beta$.

Так как корни знаменателя действительные, то разлагая подынтегральную дробь на дробно-частные, получим:

$$\frac{1}{z^2 - \frac{2a}{b}z - 1} = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z-\beta}.$$

Для определения коэффициентов A и B, как известно, надо составить дробь: $\frac{\varphi(z)}{f'(z)} = \frac{1}{2z - \frac{2a}{b}} = \frac{b}{2(bz-a)}$

Давая здесь для z значение α, получим A, именно:

$A = \frac{b}{2(b\alpha - a)} = \frac{b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$, при $z = \beta$, получим B, именно $B =$

$= \frac{b}{2(b\beta - a)} = \frac{-b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. Теперь наш интеграл разложится на 2 интеграла, которые вычисляются непосредственно; будем иметь:

$$-\frac{2}{b}\int \frac{dz}{z^2 - \frac{2a}{b}z - 1} = -\frac{2}{b}\left[A\lg(z-\alpha) + B\lg(z-\beta)\right] = +\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\lg\frac{z-\beta}{z-\alpha}$$ (*)

Таким образом данный интеграл будет иметь следующее выражение:

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\lg\frac{b\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - a + \sqrt{a^2+b^2}}{b\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - a - \sqrt{a^2+b^2}}$$

(*) опибка, надо $\frac{z-\beta}{z-\alpha}$.

Часть примеров для второго преобразования укажем на интеграл $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$, который можно вычислить вводя новое переменное, полагая $tgx = z$.

Примеры для упражнения:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\,dx}{1+a\cos x} = \frac{a^2-1}{a^3}\,l(1+a) + \frac{2-a}{2a^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\,d\theta = \frac{4}{3}.$$

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \frac{1}{4}\,l\,\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+b\,tgx} = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{ax + b\,l(a\cos x + b\sin x)\right\} + C$$

$$\int \frac{\sin^2\theta\,d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{1}{4}\,l\,\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} + C.$$

Кроме рассмотренного общего приема вычисления интегралов от тригонометрических функций, укажем еще, как вычисляются интегралы от некоторых простейших тригонометрических функций, чаще встречающихся. Эти интегралы вычисляются большею частью частными приемами, при употреблении которых вычисление длится проще. Запишем, во первых, наиболее простые интегралы от тригонометрических функций, начиная с непосредственных: $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

$$\int \sin^n x\cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C;\quad \int \cos^n x\sin x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$$

$$\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -l\cos x + C;\quad \int ctgx\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = l\sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x\cdot\sin x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{tgx} = l\,tgx + C$$

$\int \frac{dx}{\sin x}$ — чтобы вычислить этот интеграл будем раз-

смотреть x как двойную дугу, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Если изменить в этом интеграле x на $\frac{\pi}{2} - x$, то dx изменится на $d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -dx$ и $\sin x$ на $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$. Таким образом наш интеграл обратится в:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ — чтобы проинтегрировать это выражение помножим числителя на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, тогда получим:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Рассмотрим еще три следующих интеграла:

$$\int \sin(ax+b)\sin(a'x+b')\,dx$$
$$\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\,dx$$
$$\int \sin(ax+b)\cos(a'x+b')\,dx.$$

Все эти три интеграла берутся одинаковым образом, именно произведение синусов и косинусов заменяется в них алгебраической суммой синусов и косинусов, после чего интеграл разлагается на два непосредственных. Чтобы получить, например, формулу, выражающую произведение синуса на косинус, возьмем два равенства: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ и $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$. Складывая эти два выражения находим, что:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Пользуясь этой формулой разлагаем последний из разбир-

ливаемых через интегралов таким образом:

$$\int \sin(ax+b)\cos(a'x+b')dx = \frac{1}{2}\int \sin((a+a')x+b+b')dx + \frac{1}{2}\int \sin[(a-a')x+b-b']dx =$$

$$= -\frac{\cos((a+a')x+b+b')}{2(a+a')} - \frac{\cos[(a-a')x+b-b']}{2(a-a')}.$$

Подобным же образом могут быть получены и другие два интеграла.

Рассмотрим теперь следующие пять интегралов, встречающихся очень часто в приложениях.

1) $\int \sin^n x\,dx$; 2) $\int \cos^n x\,dx$; 3) $\int tg^n x\,dx$; 4) $\int ctg^n x\,dx$; 5) $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$, где n и m числа целые положительные или отрицательные.

В этих интегралах можно применить первое или второе преобразование, но все пять интегралов удобнее вычисляются через интегрирование по частям.

Вычислим, во первых, интеграл: $\int \sin^n x\,dx$.

Отделим в подынтегральной функции один множитель $\sin x$ и соединим его с dx, тогда получим, интегрируя по частям:

$$\int \sin^n x\,dx = -\int \sin^{n-1} x\,d\cos x = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx.$$

Заменим в последнем интеграле $\cos^2 x$ через $1-\sin^2 x$ и разделим его на 2 интеграла, находим:

$$\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx.$$

Перенесем последний интеграл, одинаковый с данным, в первую часть и разделим почленно обе части нан, найдем:

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \quad \ldots\ldots (1)$$

Эта формула служит для вычисления первого интеграла.

Вычисление данного интеграла по этой формуле сводится,

на вычисление интеграла такого же вида, но ещё с показателем степени синуса двумя единицами меньше. Если $n \neq 2$, то применяя эту формулу несколько раз, мы будем каждый раз понижать степень синуса на две единицы и в случае n чётного придем наконец к интегралу:

$$\int \sin^0 x\,dx = \int dx = x;$$

если же n нечётное, то мы дойдем таким образом до интеграла: $\int \sin x\,dx = -\cos x$.

Последняя формула очевидно не может быть с пользой употреблена, если n отрицательно, так как при этом степень синуса повысится, но однако из этой же формулы можно вывести другую формулу, годную для случая, когда n отрицательно. Решая ур-ие (1) относительно интеграла, стоящего во второй части, получим:

$$\int \sin^{n-2} x\,dx = \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n-1} + \frac{n}{n-1}\int \sin^n x\,dx.$$

Так как здесь n совершенно произвольно, то переписывая n на $-n+2$, тогда получим:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{\cos}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \quad \ldots\ldots (2).$$

Эта формула применяется при отрицательной степени $\sin x$, причем степень синуса в знаменателе понижается на 2 единицы. Применяя эту формулу в случае $n \neq 2$ несколько раз мы придем наконец к интегралу $\int \frac{dx}{\sin^0 x} = \int dx = x$, если n четное; если же n нечетное, то к интегралу $\int \frac{dx}{\sin x}$, выражение

которого было дано выше. Таким образом при помощи первой и второй формулы мы можем вычислить $\int \sin^n x\,dx$, будет ли числа степень n положительна или отрицательна.

Для вычисления второго интеграла, то есть

$$\int \cos^n x\,dx$$

могут быть выведены 2 формулы, понижающие степень косинуса, также не менее удобные. Эти формулы могут быть также получены прямо из выведенных наших формул (I) и (II), переставляя в них x на $\frac{\pi}{2}-x$. Сделав такую замену во формуле (I), находим:

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx \ldots\ldots (3)$$

Помощью этой формулы рассматриваемый интеграл вычисляется, когда n положительно.

Если же сделаем такую замену во второй формуле, то получим:

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}x} \ldots\ldots (4).$$

Эта формула служит для вычисления второго интеграла при n отрицательном.

Вычислим теперь третий интеграл, то есть:

$$\int tg^n x\,dx.$$

Отделяем в подынтегральной функции множитель $tg^2 x$ и представляем его видом $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, причем $\sin^2 x$ заме-

ниить через $1-\cos^2 x$, получить:

$$\int tg^n x\,dx = \int tg^{n-2} x \,\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx .$$

Разложить затем этот интеграл на 2, будем иметь:

$$\int tg^n x\,dx = \int tg^{n-2} x \,\frac{dx}{\cos^2 x} - \int tg^{n-2} x\,dx$$

Первый из этих интегралов непосредственный, а потому можем написать что

$$\int tg^n x\,dx = \frac{tg^{n-1} x}{n-1} - \int tg^{n-2} dx \ldots\ldots (5).$$

Иногда приходится для получения интеграла применять эту формулу несколько раз, пока дойдем до интеграла

$$\int tg^0 x\,dx = \int dx = x,$$

если n четное, или до интеграла

$$\int tg x\,dx,$$

если n нечетное; последний интеграл найти известно.

Если n отрицательно, то интеграл третий обращается в интеграл четвертый; формулу для вычисления интеграла четвертого можно получить из формулы (5) переменная в ней x на $\frac{\pi}{2} - x$. Сделав такую замену в формуле (5), получим:

$$\int cotg^n x\,dx = -\frac{cotg^{n-1} x}{n-1} - \int cotg^{n-2} x\,dx \ldots\ldots (6).$$

По формуле (6) вычисляются интегралы четвертого вида.

Мы вычислили выше интегралы от степеней синуса и косинуса. Вычислим теперь величину определенного интеграла, полагая

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,$$

где n число целое и положительное. Применим формулу понижения степени для неопределенного интеграла, именно:

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$$

Взяв теперь определенный интеграл между пределами 0 и $\frac{\pi}{2}$ получим отсюда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx,$$

так как член $-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}$ при обоих пределах равен 0

Величина рассматриваемого интеграла зависит только от n и потому данный интеграл есть функция n, обозначим его через U_n, тогда последнее равенство напишется так:

$$U_n = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx = \frac{n-1}{n}U_{n-2}.$$

Если переменить в этом равенстве n на $n-2$, то найдем:

$$U_{n-2} = \frac{n-3}{n-2}U_{n-4}$$

Если переменить в предыдущем равенстве n на $n-2$, то получим также:

$$U_{n-4} = \frac{n-5}{n-4}U_{n-6}$$

и т. д. Таким образом мы будем последовательно понижать степень синуса, стоящего под знаком интеграла, на две единицы. Если n число четное, то окажется, что отнимая от него последовательно по две единицы, мы дойдем до U_2, которое на основании первого равенства будет:

$$U_2 = \frac{1}{2}U_0, \text{ а } U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

Заметим, сделав последовательные вставки, находим:

$$u_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Это выражение удобнее написать так:

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Числитель здесь представляет произведение нечетных чисел от 1 до $n-1$, а знаменатель произведение четных чисел от 2 до n; это равенство очевидно потому смысла только при n четном. Если же n нечетное, то понижая, как было выше указано, степень синуса последовательно на 2, дойдем до u_3, причем на основании 1го равенства будем иметь:

$$u_3 = \frac{2}{3} u_1 \text{ и}$$

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x + C\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Вследствие последовательной подстановки, получим в настоящем случае:

$$u_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \text{ или}$$

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots n}$$

при n нечетном.

Из последних двух формул можно получить выражение для π, называемое Валлисовым (Wallis). Предварительно напишем следующее замечание. Величина интеграла:

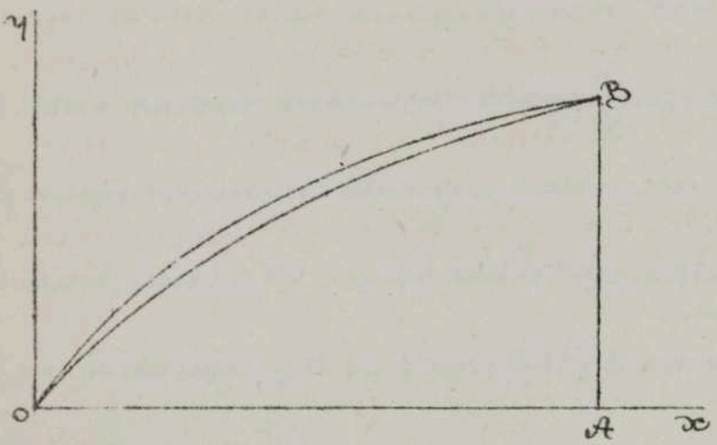
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = u_n$$

будет тем меньше, чем число n больше. Это легко убедиться, рассматривая площадь кривой, пред-

ставляющую этим интегралом. Действительно, ур-ие кривой, площадь которой представляет данный интеграл, есть

$$y = \sin^n x.$$

Построим эту кривую. Отложим абсциссу $OA = \frac{\pi}{2}$; при $x = \frac{\pi}{2}$ имеем $y = 1 = AB$. Очевидно, что кривая идет от O к B, причем ордината ея постоянно увеличивается. Данный интеграл следовательно представляет площадь $OBA = U_n$. Но так как $\sin x$ в рассматриваемом промежутке от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$ положителен и меньше 1, то его $n^{\text{ая}}$ степень тем меньше, чем n больше. Если поэтому мы увеличим n и вместо n возьмем какое-нибудь n', так что $n' > n$ и возьмем ур-ие новой кривой:



$$y_I = \sin^{n'} x,$$

то будем иметь, что при одном и том же x новая ордината $y_I < y$ и поэтому новая кривая пойдет ниже прежней кривой, хотя крайния ея точки O и B будут одни и те же; понятно поэтому, что и площадь новой кривой будет меньше площади прежней кривой; откуда заключаем, что с увеличением n величина интеграла уменьшается. Заметив это, обратимся к выводу Валлисова выражения для π.

Возьмем n четным, тогда на основании только что

сделанного замечания можно написать:

$$U_{n+1} < U_n < U_{n-1}$$

Вставивши вместо U_{n+1}, U_n, U_{n-1} их выражения по формулам первой и второй. Так как $n+1$ есть число нечетное, то U_{n+1} выразится по второй формуле, где n нужно изменить на $n+1$. По этой же формуле получим выражение для U_{n-1}, переменивши n на $n-1$, так как $n-1$ есть тоже число нечетное. Таким образом получим:

$$\frac{2.4.6\ldots n}{3.5.7\ldots(n+1)} < \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6.8\ldots n}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6\ldots(n-2)}{3.5.7\ldots(n-1)}.$$

Помножим эти неравенства на дробь $\frac{2.4.6.8\ldots n}{3.5\ldots7\ldots(n-1)}$, — это есть дробь обратная той, которая стоит в левой части при $\frac{\pi}{2}$. Будем иметь:

$$\frac{2.4.6\ldots n}{3.5.7\ldots(n+1)}\cdot\frac{2.4.6\ldots n}{3.5.7\ldots(n-1)} < \frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6\ldots(n-2)}{3.5.7\ldots(n-1)}\cdot\frac{2.4.6\ldots n}{3.5.7\ldots(n-1)}.$$

Входящие здесь произведения напишем в иной виде, а именно будем их рассматривать как произведения дробей в следующем виде:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{n}{n-1}.$$

Таким образом получим два предела, между которыми заключается $\frac{\pi}{2}$. Сравним эти два предела, для чего возьмем отношение большего из них к меньшему. По сокращении общих сомножителей это отношение будет:

$$1:\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}.$$

Если число n весьма велико, то это отношение весьма мало

отличается отъ 1 и въ этомъ случаѣ предѣлы, между которыми заключается $\frac{\pi}{2}$ весьма близки одинъ къ другому, а $\frac{\pi}{2}$ слѣдовательно весьма мало отличается отъ каждаго изъ нихъ. Когда, переходя къ предѣлу, положимъ n равнымъ безконечности, то отношеніе предѣловъ сдѣлается равнымъ 1; отсюда видно, что два произведенія, между которыми заключается $\frac{\pi}{2}$, стремятся къ нѣкоторому общему предѣлу и $\frac{\pi}{2}$, которое всегда содержится между ними, будетъ равно этому общему предѣлу. Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что полагая $n = \infty$ будемъ имѣть:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots\cdots$$

это и есть Валлисово выраженіе π въ видѣ безконечнаго произведенія. Въ составѣ этого выраженія входятъ, какъ видимъ, всѣ натуральныя числа отъ 1 до ∞.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію пятаго интеграла, т.е.

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx.$$

Гдѣ m и n цѣлыя числа. Этотъ интегралъ очевидно заключаетъ въ себѣ первые разсмотрѣнные выше интегралы, какъ частные случаи. Такъ если $m = 0$, то изъ него получимъ изъ него первый интегралъ; если $n = 0$, то онъ обратится во второй; наконецъ если $m = -n$, то изъ него получится интегралъ третій или четвертый.

Выведемъ для этого интеграла формулы понижения степени

синуса и косинуса последовательным интегрированием по частям.

Отделив под знаком интеграла один множитель $\sin x$, и соединив его с dx, получим дифференциал $\cos x$, так что данный интеграл можно написать в виде:

$$-\int \sin^{n+1} x \cos^m x \, d\cos x = -\int \sin^{n-1} x \, d\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}.$$

Применяя приведенную формулу интегрирования по частям, находим:

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = -\sin^{n-1} x \cdot \frac{\cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{n-2} x \cos^{m+2} x \, dx \ldots\ldots (a)$$

Заметим, что это равенство можно будет применять по отношению степени синуса и косинуса в тех случаях, когда степень синуса положительна, а степень косинуса отрицательна, так как при этом степени синуса и косинуса одновременно понижаются каждая на 2 единицы. Формулу (a) мы, впрочем, переходная; мы выведем из нее формулу, в которой будет понижаться степень одного синуса, а степень косинуса оставлена без изменения.

В интеграле, стоящей во 2-ой части равенства (a) входит

$$\cos^{m+2} x,$$

заменим его следующим образом:

$$\cos^{m+2} x = \cos^m x \cos^2 x = \cos^m x (1 - \sin^2 x) = \cos^m x - \sin^2 x \cos^m x.$$

Подставив вместо $\cos^{m+2} x$ это выражение разложим разсмотренный интеграл на два, будем иметь:

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = -\sin^{n-1} x \cdot \frac{\cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^m x\, dx - \frac{n-1}{m+1}\int \sin^n x \cos^m x\, dx.$$

Замѣтимъ такъ какъ въ этомъ равенствѣ послѣдній интегралъ одинаковъ со стоящимъ въ первой части, то его переносимъ въ первую часть и соединяемъ съ даннымъ интеграломъ. При этомъ мы получимъ въ первой части при интегралѣ коэффиціентъ

$$1 + \frac{n-1}{m+1} = \frac{m+n}{m+1}$$

и чтобы сдѣлать въ первой части коэффиціентъ равнымъ единицѣ, мы помножимъ обѣ части на дробь обратную этой дроби, т.е. на $\frac{m+1}{m+n}$, тогда найдемъ:

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} x \cos^m x\, dx \ldots\ldots (7)$$

Эта формула приложима, когда $n>2$ и помощію ея понижается только степень sin, а степень cos остается безъ перемѣны.

Въ случаѣ, когда n отрицательно эта формула не приложима, но изъ этой же формулы можно получить и формулу пониженія степени при n отрицательномъ.

Опредѣливъ изъ послѣдняго урѣза интегралъ, стоящій во второй части равенства, получимъ:

$$\int \sin^{n-2} x \cos^m x\, dx = \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}\int \sin^n x \cos^m x\, dx.$$

Такъ какъ въ этомъ равенствѣ n совершенно произвольно, то перемѣнивъ его на $-n+2$, получимъ.

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\, dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x}\, dx \ldots\ldots (8).$$

Помощію этой формулы степень синуса понизится

на двѣ единицы, если $\sin$ находится въ знаменателѣ, т.е. при отрицательномъ n.

При n четномъ, понижая послѣдовательно степень синуса помощью формулъ (7) и (8) мы дойдемъ до интеграла

$$\int \cos^m x \cdot dx$$

для вычисленія котораго мы выведемъ выше особую формулу.

Въ самомъ-же n нечетномъ мы придемъ къ интеграламъ:

$$\int \cos^m x \sin x dx \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos^m x}{\sin x} dx,$$

изъ которыхъ первый есть непосредственный, а второй берется посредствомъ формулы, понижающей степень косинуса, которую сейчасъ выведемъ.

Совершенно подобно предыдущему можетъ быть выведена формула для понижения степени $\cos$. Подобныя формулы можно также получить изъ формулъ (7) и (8), измѣнивъ въ нихъ x на $\frac{\pi}{2} - x$, причемъ $\cos$ перемѣнится на $\sin$, а $\sin$ на $\cos$. Такъ какъ при этомъ и степени перемѣнятся, то чтобы имѣть формулу для прежняго интеграла переставимъ въ ней n на m, а m на n; такимъ образомъ находимъ изъ формулы (7):

$$\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} - \frac{m-1}{n+m} \int \cos^{m-2} \sin^n x dx \ldots\ldots (9)$$

А изъ формулы (8) получимъ:

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx = \frac{\sin^{n+1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\sin^n x}{\cos^{m-2} x} dx \ldots\ldots (10)$$

Эти формулы служатъ для понижения степени сомножителей.

Последняя четыре формулы достаточны для получения, рассматриваемого нами пятого интеграла во всяких случаях.

Заметим в заключение, что есть один частный случай, в котором вместо выведенных формул удобнее употреблять другой способ вычисления интеграла, что именно, когда один из показателей m или n есть число положительное и нечетное. Положим, например, что n положительно и нечетно, тогда его можно представить в виде: $n = 2p+1$

При этом рассматриваемый интеграл будет иметь вид:

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int \sin^{2p+1} x \cos^m x\, dx.$$

Отделим здесь один множитель $\sin x$ и напишем весь интеграл таким образом:

$$\int \sin^{2p+1} x \cos^m x\, dx = -\int (\sin^2 x)^p \cos^m x\, d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^p \cos^m x\, d\cos x.$$

Вводя новое переменное, полагаем $\cos x = Z$; тогда интеграл примет такой вид:

$$\int \sin^{2p+1} x \cos^m x\, dx = -\int Z^m (1-Z^2)^p\, dZ$$

Если двучлен $1-Z^2$ возвести в степень p по формуле бинома Ньютона, потом перемножить на Z^m, тогда нам придется брать интеграл от суммы алгебраических одночленов и таким образом интеграл будет вычислен.

Указанный способ интегрирования применим и к тому случаю, когда $m=0$, т.е. когда вычисляется интеграл:

$$\int \sin^n x\, dx \text{ при } n \text{ нечетном.}$$

Подобно этому, если в данном интеграле

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx,$$

n нечетное, т.е $n = 2q+1$, то интеграл можно написать таким образом:

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int \sin^n x \cos^{2q+1} x\, dx = \int \sin^n x (\cos^2 x)^q d\sin x = \int \sin^n x (1-\sin^2 x)^q d\sin x.$$

Вводя сюда новое переменное $\sin x = z$, находим:

$$\int \sin x \cos^{2q+1} x\, dx = \int z^n (1-z^2)^q dz.$$

В правой части двучлен $1-z^2$ в степени q по формуле бинома Ньютона, или почленно интегрируя отнесем алгебраическую одночленов. Этот же способ вычисления применяется и в том случае, когда $n=0$, т.е. когда вычисляется $\int \cos^m x\, dx$ при m нечетном.

Приведем для упражнения:

$$\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{3}{5}\left(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x\right) + \frac{1}{5}\left(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{ctg}^3 x\right) + C.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^7 x\, dx = \frac{5}{12} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C.$$

$$\int \cos^6 x\, dx = \sin x \left\{ \frac{\cos^5 x}{6} + \frac{5\cos^3 x}{24} + \frac{5\cos x}{16} \right\} + \frac{5x}{16} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{\cos^3 x}\left\{ \sin^2 x - \frac{2}{3} \right\} + C.$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = \left\{ \cos^3 x - \frac{3}{2}\cos x \right\} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Нередко при помощи введения нового переменного интегрирование от рациональных и иррациональных функций приво-

дается къ интегрированію отъ тригонометрическихъ функцій и тогда при вычисленіи интеграла приходится пользоваться выведенными выше формулами понижения степени синуса и косинуса. Пусть напр. дано вычислить:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ при } x<a$$

Хотя этотъ интегралъ можетъ быть вычисленъ и безъ введенія тригонометрическихъ функцій, но его удобнѣе вычислять, вводя новое перемѣнное, именно полагая:

$$x = a\sin\varphi;\ dx = a\cos\varphi\, d\varphi,$$

гдѣ φ новое перемѣнное. При этомъ будемъ имѣть:

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^m \sin^m\varphi\, a\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\varphi}} = a^m \frac{\sin^m\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = a^m \sin^m\varphi\, d\varphi.$$

Послѣдній интегралъ вычисляется по формулѣ понижения степени $\sin$. Когда вычисленъ этотъ интегралъ, то въ результатѣ вмѣсто φ подставимъ его величину

$$\varphi = \operatorname{arc}\sin\frac{x}{a}.$$

При этомъ вычисленіи показатель m можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ.

Подобно этому можно вычислить интегралъ:

$$\int x^m \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

Этотъ интегралъ можетъ быть вычисленъ по данному выше правилу, но можно также для вычисленія его ввести новое перемѣнное, полагая $x = a\sin\varphi$. При этомъ имѣемъ:

$$\int x^m \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int a^m \sin^m\varphi \sqrt{a^2-a^2\sin^2\varphi}\, a\cos\varphi\, d\varphi = a^{m+2} \int \sin^m\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi;$$

или заменяя $\cos^2\varphi$ через $1-\sin^2\varphi$ и разделяя полученный интеграл на два, находимъ:

$$\int x^m\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^{m+2}\int \sin^m\varphi\,d\varphi - a^{m+2}\int \sin^{m+2}\varphi\,d\varphi.$$

Понизивши степень $\sin$ во второмъ интегралѣ на 2, или получимъ интегралъ одинаковый съ первымъ и тогда придется считать дѣло только съ однимъ интеграломъ.

Разсмотримъ еще интегралъ:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Такъ какъ здѣсь x можетъ быть и больше и меньше a, то вводимъ новое перемѣнное, полагая

$$x = a\operatorname{tg}\varphi, \text{ тогда } dx = \frac{a\,d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

и данный интегралъ будетъ:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a^m \operatorname{tg}^m\varphi \cdot \frac{a\,d\varphi}{\cos^2\varphi}}{\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2\varphi}} = a^m\int \frac{\operatorname{tg}^m\varphi}{\cos^2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = a^m\int \frac{\sin^m\varphi}{\cos^{m+1}\varphi}\,d\varphi.$$

Здѣсь удобно будетъ примѣнить формулу (a)

Подобное преобразованіе примѣняется къ интегралу:

$$\int x^m\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$$

Разсмотримъ еще интегралъ: $\int \frac{dz}{(1+z^2)^m}$.

Введемъ новое перемѣнное, полагая что

$$z = \operatorname{tg}\varphi, \text{ тогда } dz = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}; \text{ слѣдовательно}$$

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^m}, \text{ но } 1+\operatorname{tg}^2\varphi = \sec^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

слѣдовательно будемъ имѣть, что

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^m} = \int \cos^{2m-2}\varphi\,d\varphi.$$

//

Свойства определенных интегралов.

Понятие об определенном интеграле было составлено выше; мы разсмотрим теперь некоторыя свойства определенных интегралов, причем выразим их въ видѣ теоремъ:

Теорема I. Во всякомъ определенномъ интегралѣ можно перемѣнить мѣста предѣловъ, измѣнивъ передъ интеграломъ только знакъ.

Разсмотримъ интегралъ: $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ и положимъ, что въ неопредѣленномъ видѣ имѣемъ: $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$, гдѣ φ такая функція, производная которой равна подынтегральной функціи, такъ что $\varphi'(x) = f(x)$. При этомъ будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0).$$

Наша теорема выражается равенствомъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости этого равенства, стоитъ только подставить вмѣсто определенныхъ интеграловъ ихъ выраженія помощію функціи φ. Будемъ имѣть:

$$\varphi(X) - \varphi(x_0) = -\left[\varphi(x_0) - \varphi(X)\right],$$

а это равенство очевидно.

Теорема II. Всякій определенный интегралъ можетъ быть представленъ въ видѣ суммы нѣсколькихъ другихъ определенныхъ интеграловъ отъ той-же самой подынтегральной

функции.

Покажем, например, что мы хотим разложить данный интеграл на четыре интеграла и докажем, что интеграл:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

может быть представлен в виде суммы четырех интегралов. Возьмем три числа: x_1, x_2, x_3, заключающиеся между пределами x_0 и X или, все равно, не заключающиеся между x_0 и X, но напишем их между пределами в таком порядке: x_0, x_1, x_2, x_3, X.

Мы докажем, что рассматриваемый наш интеграл может быть разложен на сумму четырех других следующим образом:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{X} f(x)\,dx.$$

Числа x_1, x_2 x_3 здесь совершенно произвольны при условии, что подынтегральная функция $f(x)$ остается непрерывной и конечной при изменении ея аргумента от одного из этих чисел до следующаго за ним, т.е. от x_0 до x_1, от x_1 до x_2 и т.д.

Это условие необходимо иначе интегралы второй части равенства не могли бы быть разсматриваемыми, ибо определенные интегралы возможно разсматривать только тогда, когда подынтегральная функция непрерывна и конечна между пределами интеграла. Чтобы убедиться в справедливости написаннаго равенства, стоит только вспомнить вы-

по определенному интегралову имѣ выражения черезъ функцію φ; сим получимъ такимъ образомъ, что предыдущее равенство приводится къ слѣдующему.

$$\varphi(X) - \varphi(x_0) = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) + \varphi(x_2) - \varphi(x_1) + \varphi(x_3) - \varphi(x_2) + \varphi(X) - \varphi(x_3).$$

Сдѣлавъ сокращенія во второй части, сим видимъ, что вторая часть приводится къ выраженію $\varphi(X) - \varphi(x_0)$.

Отсюда заключаемъ, что написанное выше равенство дѣйствительно есть тождество.

Если числа X и x_0 возьмемъ не при числа, а больше, то и данный интегралъ разлагается тѣмъ же способомъ на сумму большаго числа интеграловъ.

Переходя къ слѣдующей теоремѣ сдѣлаемъ предварительно такое замѣчаніе. Опредѣленный интегралъ съ постоянными предѣлами не зависитъ отъ перемѣннаго, по которому производится интегрированіе, и величина его постоянно не измѣнится, если перемѣнное, по которому интегрируютъ, обозначимъ другою буквою.

Такъ очевидно, что если $\varphi'(x) = f(x)$ и $\int_{x_0}^{X_1} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0)$, то и

$$\int_{x_0}^{X} f(z)\,dz = [\varphi(z) + c] = \varphi(X) - \varphi(x_0)$$

и слѣдовательно $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(z)\,dz$.

Теорема III. Эта теорема выражаетъ собой одно преобразованіе, которое можно сдѣлать надъ интегаломъ, у которого верхній и нижній предѣлы равны по абсолютной

величины, но меняют обратные знаки.

Напишем прямо равенство, выражающее эту теорему; оно есть следующее:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{+a} \left[f(x) + f(-x) \right] dx .$$

Чтобы доказать это равенство возьмем данный интеграл

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$$

и на основании второй теоремы разложим его на 2 интеграла вставив нуль, как среднее число между пределами $(+a)$ и $(-a)$

Получим: $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+a} f(x)\,dx .$

Рассмотрим первый из полученных интегралов, т. е. интеграл: $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ отдельно.

Введем в него новое переменное, полагая $x = -z$ и $dx = -dz$

Пределы интеграла при этом изменяются, именно когда $x = -a$, то $z = -(-a) = +a$; когда же $x = 0$, то и $z = 0$. Следовательно преобразованный интеграл будет:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{+a}^{0} f(-z)\,dz .$$

Применяя к этому интегралу теорему первую изменяем знаки пределов; получим:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = +\int_{0}^{+a} f(-z)\,dz$$

Применяя здесь к полученному во второй части интегралу, сделанное выше, замечание, переименуем в нем букву z, по которой производится интегрирование, на букву x; - найдем:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx .$$

Возвратимся теперь к равенству, которое мы должны доказать:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{+a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

Подставляя вместо второго интеграла его выражение, будем иметь, что:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{+a} f(x)\,dx + \int_{0}^{+a} f(-x)\,dx.$$

Во второй части здесь мы имеем сумму двух интегралов, взятых между одними и теми-же пределами, а потому мы можем их заменить интегралом от суммы, находим:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{+a} [f(x) + f(-x)]\,dx.$$

Последнее равенство есть то, которое мы хотели доказать. Из этой теоремы выведем два следствия.

Следствие I. Допустим, что подынтегральная функция есть четная, т.е такая, которая при перемене x на (-x) не изменяет ни своей величины, ни своего знака, так что $f(x) = f(-x)$. Таких функций существует очевидно бесчисленное множество, например:

$$\cos x,\quad x^2\sqrt{1+x^4},\quad \sin^4 x \text{ и т. д.}$$

Для четной функции будем иметь: $f(x) + f(-x) = 2f(x)$ и равенство, выражающее нашу теорему обратится в следующее:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{+a} f(x)\,dx.$$

Следствие II. Допустим, что $f(x)$ есть нечетная функция, т.е такая, которая при перемене x на (-x) не изменяет своей абсолютной величины, но изменяет только знак, так что

$$-f(x) = +f(-x).$$

Таким функций очевидно также бесчисленное множество, напр.

$$\sin^5 x,\ x^3\sqrt{1+x^2+x^4}\ \text{и т. д.}$$

Для нечетных функций будем иметь: $f(x) + f(-x) = 0$ и в равенстве, выражающем теорему первую, в интеграле второй части подынтегральная функция обращается в 0, а потому и весь интеграл будет равен 0.

Таким образом в случае нечетной подынтегральной функции теорема первая дает:

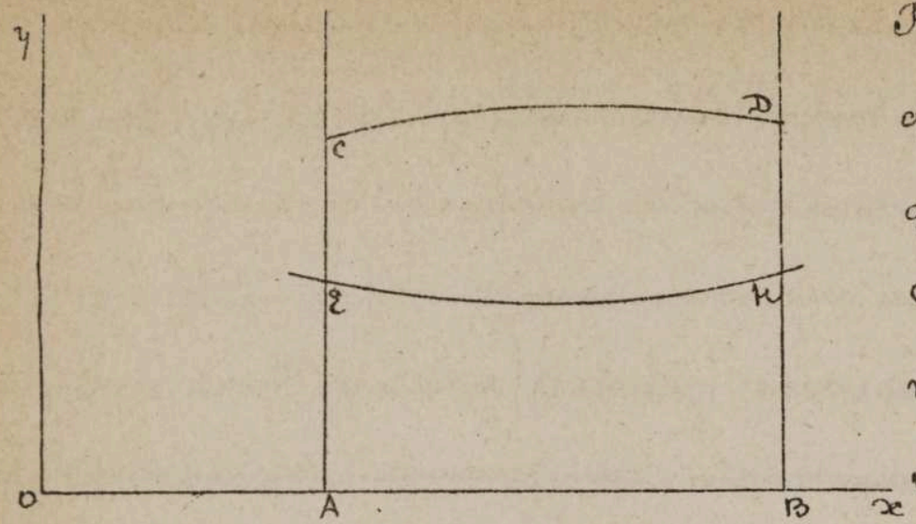
$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$$

Это замечание может освободить нас вычисления некоторых интегралов, так будем иметь без вычисления, что $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = 0$, поскольку здесь подынтегральная функция нечетная. Точно также очевидно, что $\int_{-1}^{+1} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^6}} = 0$.

Два определенных интеграла, у которых пределы одинаковы, могут быть иногда сравниваемы между собою по величине, нетрудно строго доказать, что если некоторая функция $F(x)$ при всех значениях x, содержащихся между пределами x_0 и X, остается постоянно больше другой функции $f(x)$, то мы будем иметь следующее неравенство:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx > \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Это неравенство доказывается прежде всего разложением, площадей, выражающих эти два определенных интеграла.



Возьмем оси координат и отложим на оси абсцисс $OA = x_0$ и $OB = X$. Проведем через точки A и B линии параллельные оси ординат и между этими прямыми построим две кривые, ур-ия которых суть: $y_1 = F(x) \cdots (1)$ и $y = f(x) \cdots (2)$

Так как мы рассматриваем промежуток ординат $y_1 > y$, то и кривая первая пойдет выше кривой второй. Пусть первая кривая есть CD, а вторая gH.

Тогда понятно будем иметь:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \text{пл. } AgHB,$$

$$a \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \text{пл. } ACDB.$$

и первая площадь очевидно меньше второй, а потому:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx > \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Руководствуясь последним заключением мы введем еще определение, при помощи которой всякий определенный интеграл может быть выражен через среднее значение подынтегральной функции.

Рассмотрим интеграл: $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$; положим, что при изменении x от x_0 до X M есть самое большое значение, получаемое функцией $f(x)$ в этом промежутке, а m самое малое —

ше, значение, получаемое тою же функцией. Мы будем иметь таким образом два (интеграла) неравенства: $m < f(x) < M$ при всех значениях x от $x = x_0$ до $x = X$. На основании сделанного выше замечания мы можем написать, что

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx < \int_{x_0}^{X} M\,dx = M(X - x_0) \text{ и что } \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx > \int_{x_0}^{X} m\,dx = m(X - x_0)$$

Сравнивая эти два неравенства, мы заключаем, что между M и m должно существовать некоторое среднее число k, удовлетворяющее такому равенству:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = k(X - x_0),$$

где k неизвестно, но оно заключается между m и M. Так как подынтегральная функция в промежутке от x_0 до X непрерывна и переходит от величины M на величину m или наоборот, то следовательно этого перехода она не может совершить иначе, как пройдя через все промежуточные значения и потому при некотором значении x_1, содержащемся между x_0 и X эта функция должна сделаться равною k и мы получим: $f(x_1) = k$. Так как x_1 содержится между x_0 и X, то его можно выразить формулой: $x_1 = x_0 + \theta(X - x_0)$, где $\theta > 0$ и меньше 1.

Вставляя вместо k его выражение, получим:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X - x_0)\, f\left[x_0 + \theta(X - x_0)\right].$$

Это и есть формула, которую хотели вывести; она показывает, что: Всякий определенный интеграл равен разности между верхним и нижним пределом, умноженной на

нѣкоторое среднее значеніе подъинтегральной функціи, которое неизвѣстно, но содержится между наибольшимъ и наименьшимъ значеніями подъинтегральной функціи. Этою формулою опредѣляется до нѣкоторой степени величина интеграла, который иногда невозможно бываетъ точно опредѣлить.

Замѣчаніе объ интегралахъ съ безконечными предѣлами

Возьмемъ опредѣленный интегралъ $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$. Разсматривая такой интегралъ мы полагаемъ, что предѣлы x_0 и X суть величины конечныя, хотя и произвольныя и что подъинтегральная функція $f(x)$ остается также конечной между предѣлами интегрированія. Подобный интегралъ, если его вычислить, будетъ представлять функцію предѣловъ x_0 и X и если предѣлы остаются произвольными, то въ этой функціи каждое изъ количествъ x_0 и X можно увеличивать неопредѣленно отъ нуля, чтобы разсматривать предѣлы, къ которымъ стремится принимать сама функція. Такимъ образомъ могутъ быть получаемы интегралы съ безконечными предѣлами.

Такъ интегралъ $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ (*) можно разсматривать какъ предѣлъ отъ интеграла $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ при X увеличивающемся до безконечности. Конечно разсмотрѣніе такого интеграла пре-

(*) $\int_{x_0}^{X=+\infty} f(x)dx$.

будет, чтобы подынтегральная функция оставалась непрерывной и конечной при изменении x от x_0 до $X = \infty$.

Подобно этому интеграл: $\int_{-\infty}^{X} f(x)dx$ должен быть разматриваем как предел интеграла $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ при $x_0 = -\infty$.

Наконец интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ должен рассматриваться как предел интеграла $\int_{-X}^{+X} f(x)dx$ при $X = \infty$.

Таким образом интегралы с бесконечными пределами, рассматриваемые как пределы некоторых функций, по-этому-то эти интегралы могут быть не только конечными величинами, но также бесконечными и неопределенными; эти интегралы с бесконечными пределами отличаются от интегралов с конечными пределами, которые всегда представляют конечные величины, если только подынтегральная функция сохраняет конечную величину между пределами интегрирования.

Представим примеры интегралов со бесконечными пределами.

Найдем величину интеграла:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx \quad \text{при } a > 0.$$

Вычислим сначала неопределенный интеграл, который — можно написать в виде:

$$\int e^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{1}{b}\int e^{-ax} d\cos bx$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int e^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{-ax} \cos bx - \frac{a}{b}\int e^{-ax} \cos bx\, dx$$

Новый интеграль также неизвестенъ, но интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = +\frac{1}{b}\int e^{-ax}\,d\sin bx = +\frac{1}{b}\cdot e^{-ax}\sin bx + \frac{a}{b}\int e^{-ax}\sin bx\,dx.$$

Вставляя полученное выраженіе интеграла въ предыдущее равенство, находимъ:

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{-ax}\cos bx - \frac{a}{b^2}e^{-ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{-ax}\sin bx\,dx.$$

Перенеся интеграль, стоящій во второй части, въ первую и соединивъ его съ цѣлымъ, тогда передъ интеграломъ получимъ Коэффиціентъ:

$$1+\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2},$$

а чтобы сдѣлать Коэффиціентъ при знакомъ интегралъ равнымъ 1, помножимъ всѣ три объ части равенства на $\frac{b^2}{a^2+b^2}$, тогда получимъ:

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{-ax}(b\cos bx + a\sin bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Если возьмемъ этотъ интегралъ между предѣлами отъ 0 до $+\infty$, то замѣтимъ что при x, увеличивающемся неопредѣленно, множитель e^{-ax}, гдѣ $a>0$, будетъ стремиться къ 0 и слѣдовательно въ предѣлѣ при $x=+\infty$ вся дробь обратится въ 0; при $x=0$, будемъ имѣть $e^0=1$, $\cos 0=1$, $\sin 0=0$. Итакъ окончательно нашъ интегралъ будетъ:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Точно такимъ преобразомъ найдемъ выраженіе интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Этот интеграл представляет пример интегрирования с бесконечными пределами, которые имеют конечные величины.

Разсмотрим теперь интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{a+x}}.$$

он должен быть разсматриваем как предел интеграла

$$\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{a+x}} \text{ при } x = +\infty.$$

Этот интеграл непосредственный и мы получим:

$$\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{a+x}} = \left[2\sqrt{a+x} + c\right]_0^{x} = \left[2\sqrt{a+x} - 2\sqrt{a}\right]$$

при $x = \infty$ корень обратится в бесконечность и если будем иметь попрежнему $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{a+x}} = \infty$.

Это пример интеграла с бесконечным пределом и конечной разностью бесконечности.

Разсмотрим еще интеграл: $\int_0^{+\infty} \sin bx\, dx$. Этот интеграл должно разсматривать как предел: $\int_0^{x} \sin bx\, dx$ при $x = \infty$. Вместо непосредственно взять этот интеграл неопределенный, а потому можем прямо написать, что:

$$\int_0^{+\infty} \sin bx\, dx = \lim\left[-\frac{1}{b}\cdot \cos bx + c\right]_0^{x} = \lim\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{b}\cos x\right].$$

Чтобы перейти к пределу должно x увеличиться до бесконечности, и мы получим: $\cos(\infty)$, а это выражение должно быть принято за неопределенное, так как $\cos$ изменяется периодически от 1 до 0 и -1 и ясно, что увеличивая дугу до бесконечности мы не будем приближаться $\cos$ ни к какому пределу, а он поэтому будет изменяться от

+1 до −1 и потому выражение $\cos(-\theta)$ должно быть принимаемым однозначащимъ съ $\frac{0}{0}$, вследствіе этого данный интегралъ съ безконечнымъ предѣломъ представляетъ выраженіе неопредѣленное. Этотъ интегралъ, казалось-бы, могъ бы быть полученъ изъ выраженія интеграла, нами полученнаго выше, именно изъ интеграла:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

полагая въ немъ $a=0$, тогда будемъ имѣть:

$$\int_0^{\infty} \sin bx\, dx = \frac{b}{b^2} = \frac{1}{b}.$$

Это полученное равенство не можетъ быть однако принято, потому что вычисляя предыдущій интегралъ мы полагали $a>0$ и потому только могли сказать, что при $x=\infty$ число e^{-ax} стремится къ 0; но въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ мы положили $a=0$, при чемъ будемъ имѣть $e^{-ax}=1$ и слѣдовательно не можемъ уже утверждать, какъ было, что e^{-ax} стремится къ 0 при x увеличивающемся неопредѣленно. Такъ что формулою, выведенною помощью предыдущій интегралъ, мы не имѣемъ права пользоваться въ частномъ случаѣ, когда $a=0$.

Если въ вычисленіи входятъ интегралы съ безконечными предѣлами, то надо быть увѣреннымъ, что эти интегралы представляютъ конечныя величины, если-же они представляютъ безконечность или неопредѣленность, то

такие интегралы нельзя вводить в вычисление, так как употребляя в вычислении интегралы неопределенные или бесконечные можно получить ложные результаты.

Замечание об интегралах, в которых подынтегральная функция обращается в бесконечность при одном из пределов.

Когда вычисляют определенный интеграл, то вообще полагают, что подынтегральная функция $f(x)$ остается непрерывной и конечной при изменении x от начального предела x_0 до верхнего X; тем не менее встречаются интегралы, в которых подынтегральная функция, хотя и остается непрерывной и конечной между пределами, но обращается в бесконечность при значении x равном одному из пределов. Разсмотрим опять интеграл $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ и допустим, что $x_0 < X$. Положим при этом, что функция $f(x)$ такова что при $x = X$, т. е. что $f(X) = \infty$.

В этом случае нельзя прямо взять интеграла от дифференциала $f(x)\,dx$ изменяя x от $x = x_0$ до $x = X$, так как при верхнем пределе функция $f(x)$ обращается в бесконечность. Устранимся помощью несколько верхней пределы и возьмем интеграл между новыми пределами от $x = x_0$ до $x = X - \varepsilon$, где ε малая положительная величина и будем разсматривать интеграл $\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx$

Этот интеграл не представляет затруднений и может быть вычислен, так как в нем подынтегральная функция остается непрерывной и конечной не только между пределами x_0 и $X-\varepsilon$, но и при самых пределах.

Вообразим далее, что мы вычислили этот интеграл, тогда очевидно, что он представится в виде некоторой функций от количества ε, где ε малая, но произвольная величина. Предположим затем, что ε в этой функции стремится к 0 и будем искать предел, к которому стремится функция при $\varepsilon=0$; этот предел мы и примем по определению за величину интеграла $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, таким образом будем иметь $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim \int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon=0$.

Подобно этому, если подынтегральная функция $f(x)$ при $x=x_0$ обращается в бесконечность, так что $f(x_0)=\infty$, но так как мы не можем разъединивать этот интеграл прямо с данными пределами, но мы должны будем взять интеграл или лучше дифференциал между новыми пределами, а именно от $x=x_0+\varepsilon$ до $x=X$, т. е. мы должны будем взять сначала интеграл $\int_{x_0+\varepsilon}^{X} f(x)dx$, где ε малая положительная величина. Этот последний интеграл мы можем разъединивать, потому что в нем подынтегральная функция конечна как между пределами, так и при самых пределах. Этот последний интеграл его

функция количества ε, где ε произвольна; положим, что ε стремится к 0 и разыскиваем предел, к которому приближается в это время сама функция; этот предел, подобно предыдущему, представляет интеграл: $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, так что будем иметь по определению:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx \quad \text{при } \varepsilon = 0 .$$

Таким образом подобного рода интегралы разъясняются как пределы некоторых функций, а потому они могут быть не только конечными, но и бесконечными и неопределенными.

Представим примеры таких интегралов. Пусть имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Это интеграл неопределенный, но в нем подынтегральная функция представляет ту особенность, что при верхнем пределе, т. е. при $x=1$, она обращается в бесконечность. а потому этот интеграл надо разъяснять, как предел некоторого другого интеграла, а именно

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{при } \varepsilon = 0 \text{ или}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim \left\{ \arcsin(1-\varepsilon) \right\}_{\text{при } \varepsilon = 0} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом этот интеграл представляет вполне конечную величину. Возьмем еще интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

В этом интеграле подынтегральная функция также обращается в бесконечность при x равном верхнему пределу.

помощью данный интеграл надо разматривать как предел другого интеграла, именно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \lim \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \lim \left[2(1-x)^{-\frac{1}{2}} + c \right]_0^{1-\varepsilon} = \lim \left[\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - 2 \right) = \infty \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Здесь мы имеем пример интеграла, у которого подынтегральная функция обращается в ∞ при одном из пределов и который равен бесконечности.

Замечание об интегралах, в которых подынтегральная функция обращается в бесконечность между пределами интегрирования.

При первоначальном данном определении интеграла $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ мы предполагали, что подынтегральная функция $f(x)$ не обращается в бесконечность между пределами интегрирования, поэтому мы вовсе недопустимо рассматривать таких интегралов, в которых это условие нарушается и подынтегральная функция прерывается между пределами. К подобным интегралам вовсе не следует быть применяемы и теоремы, относящиеся к определенным интегралам, которые были доказаны выше. Употребление такого рода интегралов может привести к ложным заключениям.

Рассмотрим для примера интеграл: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$.

Если бы мы стали его вычислять по обыкновенному способу, то мы получили-бы для него величину -2, именно:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{+1} = -1 - 1 = -2.$$

Но вглядываясь в такой интеграл или замечая, что такой результат не может быть верен. Действительно, так как определенный интеграл есть предел суммы бесконечно-малых, то мы должны иметь:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \lim \sum_{-1}^{+1} \frac{\Delta x}{x^2}.$$

В этой сумме бесконечно-малых конечно бесконечно-малое положительное, так как знаменатель x^2 всегда положителен, а положительная сумма бесконечно-малых, а также и ее предел может быть отрицательным. Следовательно, что полученный результат -2 неверен. Эта невозможность произошла от того, что в разложенном интеграле подинтегральная функция обращается в бесконечность между пределами интегрирования, именно при $x = 0$, а следовательно к этому интегралу нельзя применять наш теорем, по которой мы получаем величину определенного интеграла вообще.

Такого рода интегралы не могут быть рассматриваемы как обыкновенные определенные интегралы. Нельзя однако сказать, что интеграл, в котором

лишь подынтегральная функция обращается в бесконечность внутри промежутка, быть может несколько изуродованный. Мы укажем здесь, что к таким интегралам нельзя применять обычных способов интегрального исчисления. Этот интересный результат принадлежит к теории функций комплексного переменного, где на интеграцию вообще уже смотрят особым образом, по которому переменное x в интеграле изменяется от нижнего предела до верхнего, проходя его через ряд комплексных значений. При этом если даже подынтегральная функция обращается в бесконечность внутри промежутка интегрирования, можно изменять x непрерывно от нижнего предела до верхнего, не проходя его через то значение, при котором подынтегральная функция обращается в бесконечность.

Формула Тейлора с выражением остатка через определенный интеграл.

Возьмем произвольную функцию $f(x)$ и напишем следующее очевидное тождество:

$$f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} f'(y)\,dy.$$

Это равенство мы назовем тождеством, помня, что здесь интеграл, стоящий во второй части, может быть взят по самому пути и тогда мы получим для него то самое выражение, которое стоит в первой части равенства.

Введем в интеграл новое переменное, полагая

$$y = x+h-t$$

где t новое переменное, а x и h постоянные величины. Понятно, что $dy = -dt$. При новом переменном изменяется и пределы, когда $y = x$, то $t = h$, когда $y = x+h$, то $t = 0$. Вставляя полученные величины в наше равенство, находим:

$$f(x+h) - f(x) = -\int_h^0 f'(x+h-t)\,dt,$$

меняя переменные местами пределов и знаки перед интегралом, получим:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+h-t)\,dt.$$

Из этого равенства помощью интегрирования по частям мы легко получим формулу Тейлора. Полагая

$$f'(x+h-t) = u \text{ и } t = v$$

интегрируя по частям, получим:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+h-t)\,dt = \left[f'(x+h-t)\cdot t\right]_0^h + \int_0^h f''(x+h-t)\,t\,dt =$$
$$= hf'(x) + \int_0^h f''(x+h-t)\,d\frac{t^2}{2}.$$

Продолжая интегрирование по частям последовательно, находим:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \left[\frac{t^2}{2}\cdot f''(x+h-t)\right]_0^h + \frac{1}{2}\int_0^h f'''(x+h-t)\,t^2\,dt = hf'(x) +$$
$$+ \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{1}{2}\int_0^h f'''(x+h-t)\,d\frac{t^3}{3} = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{2\cdot 3}f'''(x) + \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^h f^{IV}(x+h-t)\,t^3\,dt$$

Таким образом можно продолжать интегрирование далее и после n интегрирований, найдем:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{2.3\cdots n}f^{(n)}(x)+$$
$$+\frac{1}{2.3.4\cdots n}\int_0^h f^{(n+1)}(x+h-t)\,t^n\,dt.$$

Или перенося из первой части $f(x)$ во вторую, напишем это равенство в виде:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{2.3\cdots n}f^{(n)}(x)+R.$$

Это равенство представляет строку Тейлора, причем остаток R выражается определенным интегралом, именно имеем:

$$R=\frac{1}{2.3.4\cdots(n+1)}\int_0^h f^{(n+1)}(x+h-t)\,t^n\,dt.$$

Эта формула была дана Лагранжем.

Обратимся внимание на условия, которым должны быть подчинены, чтобы выведенное наше равенство имело смысло. В этом выводе являются функции под интегральным функции производные:

$$f'(x+h-t),\ f''(x+h-t),\ f'''(x+h-t)\ \text{до}\ f^{(n+1)}(x+h-t)$$

Чтобы такого рода интегралы могли быть разыскиваемы, необходимо, чтобы функция эти оставались непрерывными и конечными между пределами интегрирования, т. е. при изменении t от $t=0$ до $t=h$. Во всех этих функциях переменное представляется вида $(x+h-t)$ обозначим его через y, тогда при изменении t от 0 до h переменное y будет изменяться от $y=x+h$ до $y=x$. Следовательно сказанное условие может быть выражено таким обра-

зоемъ: функціи $f'(y)$. $f''(y)$, $f'''(y)$ .... до $f^{(n+1)}(y)$ всѣ функціи должны непрерывны и конечны при измѣненіи y отъ $y=x$ до $x+h=y$. Припомнимъ, что нами это условіе было наложено на производныя отъ функціи $f(y)$ при выводѣ формулы Тейлора въ дифференціальномъ исчисленіи. Наконецъ замѣтимъ, что изъ найденнаго выраженія остатка можно вывести формулу остатка, данную Лорентценъ и потомъ Шлемильхомъ въ дифференціальномъ исчисленіи. Возьмемъ формулу, выражающую остатокъ, то есть

$$R = \frac{1}{2.3.4 \ldots n} \int_0^h f^{(n+1)}(x+h-t)\, t^n\, dt$$

и разсмотримъ въ подынтегральной функціи множитель $f^{(n+1)}(x+h-t)$, въ которомъ перемѣнное t измѣняется отъ $t=0$ до $t=h$ и при этомъ перемѣнная $(x+h-t)=y$ измѣняется отъ $y=x+h$, до $y=x$. Обозначимъ черезъ M и m самую большую и самую малую величину, которая получаетъ функція $f^{(n+1)}(y)$ при измѣненіи y отъ $y=x$ до $y=x+h$, тогда при всевозможныхъ значеніяхъ t отъ $t=0$ до $t=h$ будемъ имѣть что:

$$f^{(n+1)}(x+h-t) \lessgtr \begin{matrix} M \\ m \end{matrix}.$$

Замѣтивъ это можемъ написать такое неравенство:

$$\int_0^h f^{(n+1)}(x+h-t)\, t^n\, dt < \int_0^h M t^n\, dt.$$

но интегралъ отъ второй части можемъ легко взять, а потому получимъ:

$$\int_0^h f^{(n+1)}(x+h-t)\, t^n\, dt < M \cdot \frac{h^{n+1}}{n+1}.$$

Понятно, что если бы вместо m взяли m, то пришли бы к такому неравенству:

$$\int_0^h f^{(n+1)}(x+h-t)\,t^n\,dt > m\cdot\frac{h^{n+1}}{n+1}.$$

Из этих двух неравенств заключаем, что между M и m существует некоторая величина K, которая, будучи взята между M и m, даёт следующее равенство:

$$\int_0^h f^{(n+1)}(x+h-t)\,t^n\,dt = K\cdot\frac{h^{n+1}}{n+1},$$

где K неизвестно, но $K \lessgtr \begin{matrix} M \\ m \end{matrix}$.

Так как функция $f^{(n+1)}(y)$ непрерывна и так как эта функция при изменении y от $y = x+h$ до $y = x$, переходит от величины M на величину m, или обратно, то опыт перехода она совершит не иначе, как пройдя через значение K и следовательно при некотором значении y, содержащемся между $x+h$ и x, эта функция функция сделается равною K.

Положим, что это функция сделается при $y = x'$, так что

$$f^{(n+1)}(x') = K.$$

Так как x' содержится между $x+h$ и x, то его можно представить формулой $x' = x+\Theta h$, где $\Theta \lessgtr \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$, а потому можно написать, что $K = f^{(n+1)}(x+\Theta h)$ и след. будем иметь:

$$\int_0^h f^{(n+1)}(x+h-t)\,t^n\,dt = \frac{h^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(x+\Theta h)$$

и наконец будем иметь остаток $R = \frac{h^{n+1}}{(n+1)\cdot n \cdots 4\cdot 3\cdot 2} f^{(n+1)}(x+\Theta h)$

Это и есть формула, которую мы назвали по дифференциальному исчислению формулой Лагранжа.

О разложении функций въ безконечные ряды.

Предпосылаемъ этому предмету вводную статью:

О рядахъ и ихъ сходимости.

Безконечнымъ рядомъ чиселъ или строкою называется неограниченный рядъ чиселъ или алгебраическихъ количествъ, слѣдующихъ одно за другимъ по опредѣленному и данному закону.

Подобные ряды встрѣчались еще въ Алгебрѣ, при изученіи ариѳметической и геометрической прогрессій. Общій видъ ариѳметической прогрессіи есть слѣдующій:

$$a, a+b, a+2b, a+3b \ldots$$

Это безконечный рядъ чиселъ, въ которомъ каждый послѣдующій получается изъ предыдущаго, прибавляя къ нему одно и то-же количество.

Геометрическая прогрессія въ общемъ видѣ есть рядъ количествъ:

$$a, aq, aq^2, aq^3 \ldots$$

Это безконечный рядъ, въ которомъ каждый послѣдующій получается изъ предыдущаго, умноженіемъ его на знаменателя отношенія.

Но кромѣ этихъ двухъ видовъ рядовъ могутъ быть другіе виды рядовъ, въ которыхъ члены измѣняются по какому-либо другому опредѣленному закону. Намъ здѣсь будетъ нужно разсматривать безконечный рядъ:

$$\frac{x}{1}, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4} \ldots \text{ и т. п.}$$

Количеств, составляющие ряд, называются членами ряда. Так как мы будем рассматривать не определенные ряды, но ряды вообще, то надо принять общее изображение ряда. Ряд вообще мы будем изображать так:

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots,$$

где u_1, u_2 ... суть члены ряда первый, второй и т. д. Общий член ряда будет член, стоящий на произвольном $n^{ом}$ месте, так что общий член обозначается через u_n, следующие члены за ним будут: u_{n+1}, u_{n+2} ... Если закон ряда известен, то всегда можно написать выражение общего члена ряда. Наоборот, если дан общий член ряда, то ряд может быть воспроизведен. Так если дано

$$u_n = \frac{x^n}{1.2.3 \ldots n},$$

то полагая $n = 1, 2, 3 \ldots$, получим $u_1, u_2, u_3 \ldots$ причем ряд будет: $\frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$ до ∞.

Сказанное, что если общий член ряда дан, то ряд может быть восстановлен, а потому, найти закон ряда или найти общий член этого ряда есть один и тот же вопрос.

Когда рассматривают ряды, то рассматривают сумму всех членов ряда, а потому ряд обыкновенно пишут, соединяя члены этого ряда знаком +. Таким образом общее выражение ряда мы будем писать так:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \text{ &}.$$

Но сумма всех членов ряда не есть простая сумма подобная сумме конечного числа членов, так как сложить на самом деле бесконечное число членов невозможно, то условимся, что мы будем подразумевать под суммой бесконечного числа слагаемых.

Сумма бесконечного ряда составляется следующим образом. Возьмем ряд в общем виде: $u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$. Возьмем сначала сумму не всех членов, а только n первых членов и обозначим ее через S_n; эта сумма есть вполне определенное количество: $S_n = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$. Очевидно, что эта сумма зависит от n, числа взятых членов, и вообще говоря это есть некоторая вполне определенная функция n, так что эту сумму можно представить так: $S_n = f(n)$. Вообразим теперь, что n неограниченно возрастает до ∞ и будем искать предел, к которому стремится эта функция при $n=\infty$. Этот-то предел мы будем называть суммой бесконечного ряда. Сумму эту обозначим через S, именно

$$S = \lim S_n = \lim f(n) \text{ при } n=\infty$$

Итак, сумма ряда есть предел, к которому стремится сумма n членов ряда, при n неограниченно возрастающем до ∞.

При такой определении суммы ряда, надо различать случаи, когда этот предел будет иметь конечную величину, и когда он будет бесконечностью или неопределенностью. В первом случае,

Когда сумма всех членов ряда есть величина конечная, то рассматриваемый ряд называется сходящимся. Во втором случае случае, когда сумма членов ряда равна бесконечности, ряд называется расходящимся; в третьем случае, когда сумма ряда получается неопределенного, то ряд называется неопределенным или колеблющимся; самый последний вид рядов относится также к расходящимся рядам.

Так как разсмотрение рядов имеет цель ввести в вычисление сумму всех членов ряда, то понятно, что эта сумма могла быть введена только тогда, когда ряд сходящийся.

Если сумма равна бесконечности или неопределенности, то такая сумма очевидно не может быть введена в вычисление и потому расходящиеся ряды не могут быть употребляемы, так как ввода в вычисление бесконечности или неопределенности, мы могли придти к ложным результатам.

Отсюда понятна важность вопроса нахождения признаков, отличающих сходящиеся ряды от расходящихся, т.е. необходимо иметь признаки сходимости рядов; и только узнав наверно, что ряд будет сходящимся, можно будет ввести его в вычисление.

Интегрированіе съ помощію безконечныхъ радовъ.

Это интегрированіе служитъ для приближеннаго вычисленія числовыхъ величинъ опредѣленныхъ интеграловъ въ тѣхъ случаяхъ когда эти интегралы не могутъ быть вычислены непосредственно

Если имѣемъ неопредѣленный интегралъ: $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$, то этотъ $\int$ можетъ быть вычисленъ только тогда, когда извѣстенъ интегралъ неопредѣленный: $\int f(x)dx = \varphi(x)+C$, тогда $\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \varphi(x)-\varphi(x_0)$, но не рѣдко случается, что встрѣчается неопредѣленный $\int$, который не могутъ быть взятъ непосредственно. Въ этомъ случаѣ необходимо имѣть средство вычислять эти $\int$ съ произвольною степенью точности. Для этой-то цѣли и служитъ способъ разложенія интеграловъ въ ряды.

Пусть, напримѣръ, требуется вычислить опредѣленный $\int$ $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$, который невозможно взять непосредственно; такой $\int$ можно будетъ вычислить, если намъ удастся разложить функцію $f(x)$ въ какой-нибудь сходящійся рядъ и пусть эта функція выражается такимъ сходящимся рядомъ: $f(x) = u_1+u_2+u_3+\ldots$

Тогда, если вмѣсто подынтегральной функціи вставимъ это разложеніе и возьмемъ $\int$ отъ суммы, то онъ тогда представится такою безконечною суммою:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x} u_1 dx + \int_{x_0}^{x} u_2 dx + \int_{x_0}^{x} u_3 dx + \ldots$$

Такимъ образомъ нашъ интегралъ представится въ видѣ безконечнаго ряда интеграловъ, изъ которыхъ интегрированіе по

большей части могутъ быть выполнены, такъ какъ функціи: $u_1, u_2, u_3 \ldots$ обыкновенно функціи простыя. Впрочемъ этимъ разсмотрѣніемъ нельзя ограничиться при разложеніи интеграловъ въ безконечные ряды. Разложеніе, которое мы сейчасъ сдѣлали, можетъ допустить нѣкоторое сомнѣніе. Первое требованіе, которое должно быть удовлетворено при употребленіи безконечныхъ рядовъ заключается въ томъ, чтобы рядъ былъ сходящійся, послѣдній при разложеніи функціи $f(x)$, но изъ этого еще не слѣдуетъ, чтобы рядъ, чтобы рядъ, которымъ мы пользуемся для опредѣленія $\int_a^b$, былъ тоже сходящійся; если онъ будетъ расходящійся, тогда сумма будетъ безконечна и уже не будетъ представлять приближенную величину нашего $\int_a^b$, такъ какъ теорема, что $\int$ отъ суммы = сумма $\int$ относится только для ограниченнаго числа членовъ, но ни какъ не для безконечнаго числа членовъ, такъ что при этой замѣнѣ функціи рядомъ могутъ возникнуть нѣкоторыя неопредѣленности, которыя слѣдуетъ устранить болѣе строгимъ разсмотрѣніемъ. Положимъ, мы хотимъ вычислить $\int_0^x f(x)\,dx$, гдѣ подынтегральная функція $f(x)$ раскладывается въ сходящійся рядъ, такъ что $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + r_n$ и пусть этотъ рядъ остается сходящимся при всѣхъ значеніяхъ x отъ x_0 до $x = X$, что требованіе необходимо, ибо въ нашемъ $\int_a^b$ x можетъ имѣть всѣ эти значенія. Такъ какъ этотъ рядъ есть сходящійся, то $\lim r_n = 0$ при $n = \infty$ и слѣдуетъ за-

заметим, что это будет при всевозможных значениях x, содержащихся между x_0 и X, так как при всех этих значениях ряд есть сходящийся. Если в написанном $\int$ вместо функции $f(x)$ подставить эту сумму, то эта сумма будет конечно-непрерывна будет взять интеграл от суммы и мы получим:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \int_{x_0}^{X} u_2\,dx + \int_{x_0}^{X} u_3\,dx + \dots + \int_{x_0}^{X} u_n\,dx + \int_{x_0}^{X} r_n\,dx.$$

Равенство это существует при n произвольно большом.

Перейдем теперь к пределу, полагая n увеличивающимся до ∞, тогда при $n=\infty$ наш интеграл обратится в сходящийся:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \int_{x_0}^{X} u_2\,dx + \int_{x_0}^{X} u_3\,dx + \dots + \lim \int_{x_0}^{X} r_n\,dx$$

Чтобы можно было употреблять это равенство нужно определить предельное основательно число. Так как функция r_n при неопределенном увеличении n стремится к 0 то мы всегда можем взять n столь-большим, что функция r_n сделается менее последнего произвольно-малого ε, так что $\varepsilon > r_n$, тогда $\int_{x_0}^{X} r_n\,dx < \int_{x_0}^{X} \varepsilon\,dx$; последний интеграл можно вычислить, он будет $= \varepsilon(X-x_0)$; следовательно $\int_{x_0}^{X} r_n\,dx$ всегда может быть представлен менее произведения $\varepsilon(X-x_0)$, но это произведение $\varepsilon(X-x_0)$ может быть представлено произвольно-малым количеством, так как это произведение состоит из двух множителей, из которых 1-ый есть количество произвольно-малое, а следовательно наш $\int_{x_0}^{X} r_n\,dx$ при достаточно большом n может быть сделан менее всякой данной величины, так

что предѣлъ этого интеграла $=0$, т.е $\lim \int_{x_0}^{X} r_n dx = 0$ и тогда наше разложеніе предѣлъ такъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \int_{x_0}^{X} u_2 dx + \int_{x_0}^{X} u_3 dx + \dots$$

Такимъ образомъ доказано существованіе этого предѣла, и кромѣ того выяснено съ какимъ доказаніемъ, что рядъ, который получился во второй части есть сходящійся, поэтому что мы выяснили съ выводомъ этого ряда получили и сумму, которая стоитъ въ первой части и есть величина Коленная.

Разсматривая послѣднюю сумму убѣждаемся въ томъ, что для того, чтобы получить разложеніе $\int u_n$ въ рядъ, должно взять подынтегральную функцію и разложить ее въ рядъ, а затѣмъ, если этотъ рядъ сходящійся, надо взять $\int u_n$ отъ каждаго члена. Къ этому разсмотрѣнію прибавимъ слѣдующее замѣчаніе. Можетъ случиться, что рядъ, представляющій разложеніе подынтегральной функціи $f(x)$, именно рядъ: $u_1+u_2+u_3+\dots$, будучи сходящимся при всѣхъ значеніяхъ x отъ $x=x_0$ до $x=X$, окажется расходящимся при одномъ изъ крайнихъ значеній, напримѣръ при $x=X$, надо тогда доказать, что рядъ, который получится послѣ интегрированія есть рядъ сходящійся. Пусть $X>x_0$; мы не можемъ прямо произвести интегрированіе отъ x_0 до X, но зато мы можемъ произвести интегрированіе отъ x_0 до $X-\varepsilon$, такъ какъ въ этихъ предѣлахъ получается сходящійся рядъ, и мы получимъ въ этомъ

случай ряда такого вида: $\int_{x_0}^{x-\xi} f(x)dx = \int_{x_0}^{x-\xi} u_1 dx + \int_{x_0}^{x-\xi} u_2 dx + \dots\dots$ и ряд, полученный во второй части будет сходящимся, так как $x-\xi$ будет находиться между x_0 и X; но с другой стороны это равенство существует при ξ произвольно-малом; в пределе мы можем взять этот ряд при ξ непрерывно стремящимся к 0, т.е при $\xi = 0$ и это может быть, если ξ будет приближаться к 0, но разность $x-\xi$ остается существующей, и в пределе наше равенство должно оставаться справедливым, так как ряд остается все таки сходящимся, но в пределе мы и получим прежнее равенство, то есть что: $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \int_{x_0}^{X} u_2 dx + \dots$, которое будет справедливо и в этом смысле.

Представим пример подобного интегрирования. Пусть требуется вычислить интеграл такого вида: $\int_0^x e^{-x^2} dx$. Выпишем ряд интеграл в последнюю разность, т.е представим его в виде бесконечного ряда; заметим, что непосредственно этот интеграл вычислить нельзя. Если этот интеграл получился как решение какого-либо вопроса, то его легко найдем при помощи разложения. Возьмем подынтегральную функцию e^{-x^2}; мы знаем, что $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \dots$ и было раньше обнаружено, что этот ряд есть сходящийся при всевозможных значениях x. Положим $x = -x^2$, тогда получим: $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2.3} + \dots$ Подставим это в наш $\int$ и проинтегрируем, найдем:

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{x^9}{9} - \ldots\ldots$$

Таким образом мы получили ряд, закон которого очевиден. По этому ряду мы можем вычислить определенный $\int$ с произвольной степенью точности при всяком данном x.

Вычислим Лежандровский $\int$ 1го рода, взятый между пределами 0 и $\frac{\pi}{2}$, т.е. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, где $k^2 < 1$. Подынтегральную функцию $\frac{1}{1-k^2\sin^2\varphi} = (1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ можно разложить и представить в виде бесконечного ряда, для этого сначала возведем в степень $-\frac{1}{2}$ по формуле бинома Ньютона. Сделаем это:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = (1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot2}k^4\sin^4\varphi - \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1\cdot2\cdot3}k^6\sin^6\varphi + \ldots$$

данный ряд будет сходящийся, ибо $k^2\sin^2\varphi < 1$. Итак

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\varphi + \ldots.$$ Подставляя это в данный $\int$ получим:

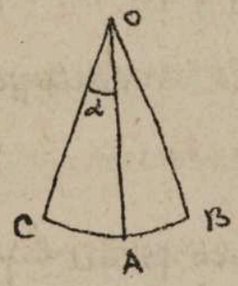
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi + \ldots\ldots \quad (A)$$

Чтобы вычислить или определенный интеграл надо вычислить неопред. $\int$, а этот последний вычисляется по формулам понижения степени: $\int \sin^n x\,dx = \frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$. Положим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi\, d\varphi = \left[\frac{\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi.$$ Первый член обратится в 0, когда подставим в него пределы. Если в этой формуле положить $n=2$, то получим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, если положим $n=4$, то $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\pi}{2}$; если сделаем $n=6$, то $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\pi}{2}$ и т.д. Подставим эти величины в равенство (A) вместо определенных $\int$; таким образом получим данный $\int$ в виде такого бесконечного ряда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 x^6+\ldots\ldots\right\}$$

Вычисление этого интеграла необходимо при решении механического вопроса о времени размаха маятника при амплитуде колебания не незначительной.



Положим, что O точка привеса; линія OA вертикальная линія. Маятникъ качается около вертикальной линіи; уголъ наибольшаго отклоненія, положимъ будетъ α. Тогда время размаха выражается такою формулою $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, гдѣ l длина маятника, g ускореніе силы тяжести $= 9{,}808\ldots$, а π есть число тоже какъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}$, гдѣ $x = \sin\frac{\alpha}{2}$. Слѣдовательно для опредѣленія полнаго размаха маятника необходимо вычислить π. Въ элементарной физикѣ указывается другая формула съ довольно-грубымъ приближеніемъ $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; при этомъ полагаютъ $\alpha = 0$, тогда $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$. Послѣдняя формула можетъ быть употребляема тогда, когда амплитуда мала, т.-е. когда α незначительна. Когда же $\angle\alpha$ не малъ, то употребляютъ 1^ую формулу.

Разложеніе функцій въ ряды помощію интегрированія безконечныхъ рядовъ.

Въ дифференціальномъ исчисленіи были даны общіе способы, которые заключаются въ употребленіи формулы Тейлора и Мак-

лорена, но при употреблении этих формул в отличие от запрещения в отыскании последовательных производных $f'(x), f''(x), f'''(x)\ldots$ но этого еще недостаточно для того, чтобы открыть закон ряда, нужно составить выражение $n^{ой}$ производной, которое далеко не для всякой функции может быть так легко найдено, как мы нашли для некоторых простых функций.

Со помощью формулы Маклорена мы разложили в ряды e^x, $\cos x$, $\sin x$, $l(1+x)$, но мы не можем разложить помощью этой формулы $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x$ и пр., потому что выражение $n^{ых}$ производных очень сложно, поэтому разложение функций в ряды по формулам Тейлора и Маклорена не всегда применимо.

Один из более удобных способов дает нам интегральное исчисление.

Положим нужно разложить функцию $f(x)$ в ряд. Напишем следующее очевидное тождество:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx .$$

Это тождество очевидно, ибо $\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx = f(x) - f(x_0)$. Мы можем взять x_0 таким, чтобы $f(x_0) = 0$ тогда $\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx = f(x)$. Положим, что $f'(x)$ мы можем каким-то путем легко разложить в ряд, хотя первоначальная функция $f(x)$ не разлагается. Это иногда бывает. Так что $f'(x) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$

Если вместо $f'(x)$ подставить в данный интеграл, то

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} u_1 dx + \int_{x_0}^{x} u_2 dx + \int_{x_0}^{x} u_3 dx + \dots$$

Вот в чем заключается этот способ. Интегрирование, как обыкновенно бывает, здесь легко произвести. Перейдем это разложение к примерам.

Положим требуется разложить $l(1+x)$. Хотя для разложения этой функции производили уже по способу дифференцирования, но мы ее разложим по новому способу. Итак $f(x) = l(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$. Возвышаем в степень по формуле бинома: $(1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{-1 \cdot -2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{-1 \cdot -2 \cdot -3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

Этот ряд будет сходящийся, если $x < 1$. Подставив в данный $\int$ и произведя интегрирование, получим:

$$l(1+x) = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Так как функция $l(1+x)$ обращается в 0 при $x=0$, то нижний предел $\int$ будет 0, а верхний произв. x.

Примеры. Возьмем арксинус $\arcsin x$, производная от которого $= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Так как $\arcsin x$ обращается в 0 при $x=0$, то можем написать $\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Возьмем подынтегральную функцию и разложим ее в ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{1 \cdot 2} x^4 + \dots = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots$$

Этот ряд сходящийся при $x^2 < 1$. Подставляя в $\int$ произведя $\int$, получим: $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$

Получили таким образом ряд, который будет сходящ.

ся при $x<1$. Это разложение можно написать иначе, полагая $x=\sin\varphi$, тогда $\varphi=\arcsin x$; подставляя эти величины в ряд, найдем: $\varphi=\sin x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^5 x}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\sin^7 x}{7}+\ldots$

Имеем таким образом разложение дуги по степеням ее $\sin$. Можно вывести из этого разложения еще другое. Напр., положим $x=\frac{1}{2}$, тогда $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{2\cdot5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{2^7}+\ldots$

Найдем разложение $\operatorname{arctg}x$. Производная $=\frac{1}{1+x^2}$. Эта функция обращается в 0 при $x=0$ ($\operatorname{arctg}0=0$), поэтому можем написать: $\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}$. Разложим подынтегральную функцию в ряд: $\frac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ Этот ряд сходящийся при $x^2<1$. Подставляя в $\int$ и производя $\int$ почленно, получим:

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots$$ — ряд сходится при $x<1$.

Если сделать $x=1$, то хотя по сделанному замечанию ряд должен быть расходящийся, тем не менее ряд полученный после подстановки будет сходящийся при этом предполагаемом значении x. Подставим за это значение x, тогда: $\operatorname{arctg}(1)=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\ldots$. Если положить $\varphi=\operatorname{arctg}x$, след. $\operatorname{tg}\varphi=x$, то $\varphi=\operatorname{tg}\varphi-\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{5}-\frac{\operatorname{tg}^7\varphi}{7}+\ldots$

Таким образом получили разложение дуги по степеням ее tg. Из этого разложения и выводится ряд, служащий для вычисления π. Они называются рядами Мечина, который занимался вычислением π и вычислил его с точностью до 600 десят. знаков. Для вывода ря-

го ряда возьмем такую дугу α, tg которой был бы $= \frac{1}{5}$.

Определим $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}$. Вычислим еще

$\operatorname{tg} 4\alpha = 2\cdot\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{5}{6}:\frac{119}{144} = 1+\frac{1}{119}$. Видим, что $4\alpha > \frac{\pi}{4}$, ибо $\operatorname{tg} 4\alpha > 1$.

Заменим это неравенство $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \beta$; $\operatorname{tg}\beta$ легко вычислить;

ибо $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}4\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}4\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{119}:\frac{239}{119} = \frac{1}{239}$. Мы получаем $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$

Разложим дуги по степеням tg^{ca}, получим:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\alpha}{5} - \dots\right)^{*} - \left(\operatorname{tg}\beta - \frac{\operatorname{tg}^3\beta}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\beta}{5} + \dots\right)$$

Вставляем вместо $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ их величины, найдем:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \dots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5} - \dots\right)$$

Взять этот ряд весьма удобно для вычисления π, потому что он во первых быстро сходится, а во вторых он знакопеременный, поэтому легко определить погрешность, она будет $\le$ первого из отброшенных членов; $2^{ой}$ ряд есть весьма быстро сходящийся, и он служит только для поправки вычисления, сделанного по $1^{ому}$ ряду.

Дифференцирование и интегрирование определенных интегр-в по переменному параметру.

Во подинтегральную функцию определенного $\int$ может входить переменный параметр, т.е. количество постоянное относительно того переменного, по которому производится интегрирование, но которое изменяется само по себе. В таком случае весь определенный $\int$ должен быть рассматриваем, как функция этого переменного

(*) в первой скобке везде $\operatorname{tg}\alpha$, а не $\operatorname{tg}\beta$.

параметра и можно предложить себе вопрос – найти производную этой функции, а также взять отн. ней $\int$, умножить её предварительно на дифференциал этого параметра.

Начнем с простейшего случая: дифференцирование по нижнему и верхнему пределам. Положим, имеем $U = \int_{x_0}^{X} f(x)dx$, где x_0 и X определенные количества. Когда этот интеграл будет вычислен, то он не будет зависеть отн. x, но отн. x_0 и X и поэтому его можно рассматривать как функцию x_0 и X; и можно предложить себе найти производную по каждому переменному; производная будет извлечена, если $\int$ будет вычислен, но их можно найти и не вычисляя $\int$а.

Положим, что $\int f(x)dx = \varphi(x) + C$, где $\varphi'(x) = f(x)$, тогда $U = \varphi(X) - \varphi(x_0)$. Если возьмем производную по X, то $\frac{du}{dX} = \varphi'(X)$, но $\varphi'(x) = f(x)$, следовательно $\frac{du}{dX} = f(X)$. Это показывает, что для того, чтобы найти производную по верхнему пределу, нужно верхний предел подставить в подынтегральную функцию, что и будет производная по верхнему пределу.

Точно также $\frac{du}{dx_0} = -\varphi'(x_0)$, но $\varphi'(x) = f(x)$, след. $\frac{du}{dx_0} = -f(x_0)$. Это показывает, что если в подынт. функцию подставить нижний предел и переменить знак, то это и будет производная по нижнему пределу.

Теперь положим, что параметр входит под знак $\int$а в подынт. функцию, т. е. пусть $U = \int_{x_0}^{X} f(x, \alpha)\,dx$, где α

произвольное постоянное, независящее отъ x, и положимъ сначала, что предѣлы x и x_0 не зависятъ отъ α. Въ такомъ образомъ U представится какъ ф-ція α; предположимъ себѣ найти производную $\frac{du}{d\alpha}$. Замѣтимъ, что $\frac{du}{d\alpha}$ по опредѣленію $= \lim \frac{\Delta U}{\Delta \alpha}$ при $\Delta\alpha \to 0$. Чтобы составить ΔU, перемѣнимъ въ данномъ равенствѣ α на $\alpha+\Delta\alpha$, отчего U перемѣн. на $U+\Delta U$ и мы будемъ имѣть $U+\Delta U = \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx$, откуда

$$\Delta U = \int_{x}^{x} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x,\alpha)\,dx .$$

Эта разность $\int^{obr}$, взамѣнъ мѣсяцъ одного и тѣмъ же интегрированія могутъ быть замѣнены одного $\int^{ост}$:

$$\Delta U = \int_{x_0}^{x} [f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,dx .$$

Разность, заключенная въ скобки, представляетъ приращеніе функціи, вслѣдствіе приращенія перемѣннаго α; а его можно выразить по формулѣ Лагранжа такимъ образомъ:

$$f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha) = f'_{\alpha}(x, \alpha+\Theta\Delta\alpha)\,\Delta\alpha, \text{ гдѣ } \Theta > 0, < 1, \text{ по-}$$

этому: $\Delta U = \int_{x_0}^{x} f'_{\alpha}(x, \alpha+\Theta\Delta\alpha)\,\Delta\alpha\,dx$. Если обѣ части послѣдняго равенства раздѣлимъ на $\Delta\alpha$, то получимъ:

$$\frac{\Delta U}{\Delta\alpha} = \int_{x_0}^{x} f'_{(\alpha)}(x, \alpha+\Theta\Delta\alpha)\,dx .$$ Въ этомъ равенствѣ переходимъ къ предѣлу, полагая $\Delta\alpha = 0$, тогда $\Theta\Delta\alpha = 0$ и мы получимъ: $\lim \frac{\Delta U}{\Delta\alpha} = \frac{du}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x} f'_{(\alpha)}(x,\alpha)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx$. Это равенство и выражаетъ правило: Для того, чтобы найти производную по перемѣнному параметру, входящему въ подъинтегральную функцію нужно взять производную отъ

подынтегральной функции.

Рассмотрим общий случай дифференцирования по переменному параметру. Положим теперь $u = \int_{x_0}^{x} f(x, \lambda)\, dx$, где переменный параметр входит в подынт. функцию, как и прежде, но сверх того, предполагаем, что x и x_0 суть некоторые функции переменного параметра λ; требуется найти $\frac{du}{d\lambda}$. Эта производная найдется по правилу дифф. сложной функции, ибо определенный интеграл есть некоторая функция x и x_0, которые в свою очередь суть функции λ; поэтому

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{d\lambda} + \frac{du}{dx_0}\cdot\frac{dx_0}{d\lambda} + \left(\frac{du}{d\lambda}\right).$$

Здесь $\frac{du}{d\lambda}$, стоящее во 2-ой части подписано в производной $\frac{du}{d\lambda}$, стоящей в первой части, ибо $\frac{du}{d\lambda}$, стоящая во второй части есть нечто иное как частная производная взятая по λ, оставляя x постоянным и ее заключаем в скобки.

$$\frac{du}{d\lambda} = f(x,\lambda)\frac{dx}{d\lambda} - f(x_0,\lambda)\frac{dx_0}{d\lambda} + \int_{x_0}^{x} \frac{df(x,\lambda)}{d\lambda}\, dx.$$

Напомним в виде замечания, как производится дифференцирование интег. $\int_a^b$ по переменному параметру. Положим, что $u = \int f(x,\lambda)\, dx$, тогда u есть функция x и λ; положим требуется найти $\frac{du}{d\lambda}$. Говорим, что здесь дифференцирование, как и прежде, производится под знаком $\int_a^b$, т.е. $\frac{du}{d\lambda} = \int \frac{df(x,\lambda)}{d\lambda}\, dx$. Чтобы доказать это равенство, мы его повторим. Повторка будет заключаться в том,

что мы возьмем дифференциал отъ обѣихъ частей. Сдѣлавъ это, получимъ: $\frac{d\frac{du}{dx}}{dx} = \frac{df(x,\lambda)}{d\lambda}$. Мы знаемъ, что порядокъ дифферен. не имѣетъ вліянія на результатъ, т. е. что можно сначала дифферен. по x, а потомъ по λ, такъ что $\frac{d\frac{du}{dx}}{dx} = d\frac{\frac{du}{dx}}{d\lambda}$, но $\frac{du}{dx} = f(x,\lambda)$, поэтому $\frac{d\frac{du}{dx}}{d\lambda} = d\frac{\frac{du}{d\lambda}}{dx} = \frac{df(x,\lambda)}{d\lambda}$, слѣдовательно наше равенство вѣрно.)

Интегрированіе опредѣленное, $\int_{x_0}^{x}$ по перемѣнному параметру. Положимъ, что имѣемъ $u = \int_{x_0}^{x} f(x,\lambda)\,dx$, гдѣ λ перемѣнный параметръ. Положимъ, что предѣлы x и x_0 не зависятъ отъ λ, тогда u есть функція λ. Помножимъ u на $d\lambda$, тогда получимъ $u\,d\lambda$, выраженіе дифференціала λ, который можно интегрировать по λ между какими угодно предѣлами; положимъ требуется найдти интегралъ между предѣлами λ_0 и λ — $\int_{\lambda_0}^{\lambda} u\,d\lambda$, тогда, если вмѣсто u вставимъ его выраженіе, получимъ $\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_{x_0}^{x} f(x,\lambda)\,dx$. Это выраженіе показываетъ, что въ немъ должно быть произведено 2 интегрированія одно по x, другое по λ. Это называется двойнымъ опредѣленнымъ интеграломъ.

Предложеніе, которое мы хотимъ доказать по отношенію интегрированія по опредѣленному параметру, заключается въ томъ что указанныя въ двойномъ $\int^{exn}$ интегрированія по λ и по x могутъ быть произведены въ обратномъ порядкѣ, т. е. что

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_{x_0}^{x} f(x,\lambda)\,dx = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(x,\lambda)\,d\lambda.$$

Это равенство указывает, что требуемое нами интегрирование по d может быть произведено под знаком $\int_{d_0}^{d}$.

Итак нам надо доказать последнее равенство. Заметим, что последний интеграл должен быть независимым $\int_{d_0}^{d} u\,dd$, а чтобы повторить данное выражение надо посмотреть выполнены-ли функция 2 условия.

Во 1ом производная этого $\int_{d_0}^{d}$ = подынтегральной функции u и во 2ом выражение этого $\int_{d_0}^{d}$ должно обращаться в 0 при $d=d_0$. Посмотрим, выполняется-ли наш двойной $\int$ эти требования. $\int_{d_0}^{d} u\,dd = \int_{x_0}^{x} dx \int_{d_0}^{d} f(x,d)\,dd$.

Возьмем производную от второй части по d

$$\frac{d}{dd}\int_{x_0}^{x} dx \int_{d_0}^{d} f(x,d)\,dd.$$

Здесь дифференцируется определенный $\int_{x_0}^{x}$ по перем. параметру, который входит в подынтегр. функцию. Следовательно нужно взять производную от подынтегральной функции $\int_{d_0}^{d} f(x,d)\,dd$. Это представится таким образом:

$$\int_{x_0}^{x} d\,\frac{\int_{d_0}^{d} f(x,d)\,dd}{dd}\cdot dx.$$

Здесь нетрудно под знаком $\int_{x_0}^{x}$ производную от неизвестного $\int_{d_0}^{d}$, которая будет = подынтегральной функции $f(x,d)$ и если посчитать по дифферер. 2ой части $\int_{x_0}^{x} f(x,d)\,dx$, а это есть нечто иное как u. Следовательно 1ое требование удовлетворяется. Посмотрим, удовлетворяется-ли 2 условие, именно что нечто $\int_{d_0}^{d}$ обращается в 0 при $d=d_0$.

Но это очевидно, ибо подынтегральная функция есть опред. $\int$, подынтегральная функция которого обращается въ 0 при $x = x_0$, а если подынтегральная функция обращается въ 0, то и $\int$ также обращается въ 0.

Если верхній предѣлъ примемъ $= A$, разумѣя подъ A опредѣленное постоянное, то мы можемъ написать

$$\int_{x_0}^{A} dx \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{A} f(x,y)\,dx$$

выраженія, стоящія въ 1-ой и 2-ой части представляютъ двойные $\int^{ый}$ въ которыхъ интегрированіе совершается сперва постоянными предѣлами и это выражаетъ теорему:

Въ двойномъ интегралѣ съ постоянными предѣлами, порядокъ интегрированія можетъ быть измѣненъ.

Конечно для возможности существованія этого равенства необходимо должно быть выполнено условіе, что подынтегральная функція остается непрерывной при измѣненіи x отъ x_0 до X и при измѣненіи y отъ y_0 до A.

Есть нѣкоторые опредѣленные $\int^{ые}$, выраженія которыхъ считаются почему-либо замѣчательными. Но этому ходомъ замѣтимъ, что $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ можетъ-быть вычисленъ непосредственно, когда можетъ-быть взятъ неопредѣленный $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$, тогда опредѣленный $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0)$.

Но кромѣ этого способа существуетъ другой способъ для полученія опред. $\int$, хотя ихъ неопред. $\int^{ые}$ вычисленіе быть

не могутъ. Конечно это возможно только тогда, когда онъ взяты между извѣстными предѣлами.

Выраженія многихъ опредѣленныхъ интеграловъ могутъ быть находимы черезъ интегрированіе(*) извѣстныхъ выраженій опредѣленныхъ интеграловъ по перемѣнному параметру и также черезъ интегрированіе извѣстныхъ выраженій опредѣленныхъ интеграловъ по перемѣнному параметру.

Напримѣръ возьмемъ формулу: $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} = a^{-1}$; здѣсь (a) есть перемѣнный параметръ; будемъ дифференцировать это выраженіе по параметру (a): $\int_0^{+\infty} e^{-ax} x\,dx = 1.a^{-2} \ldots (1)$.

Дифференцируемъ еще нѣсколько разъ по тому же параметру:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^2 dx = 1.2.a^{-3} \ldots (2)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^3 dx = 1.2.3.a^{-4} \ldots (3)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^4 dx = 1.2.3.4.a^{-5} \ldots (4)$$

. . . . . .

Очевидно, что послѣ $(n-1)$ дифференцированій, получимъ

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx = 1.2.3.4 \ldots (n-1)\, a^{-n} \ldots (n-1)$$

или

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{1.2.3.4 \ldots (n-1)}{a^n} \ldots (n-1)$$

Такимъ образомъ получимъ выраженіе новаго опредѣленнаго $\int$: $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-ax} dx$ черезъ дифференцированіе выраженія извѣстнаго опредѣленнаго $\int$.

Интегралы, стоящіе въ 1-хъ частяхъ равенствъ, могли бы быть вычислены черезъ интегрированіе по частямъ, но подобный образъ

(*) дифференцированія

действія все таки были гораздо сложнѣе послѣдняго. Интегралы эти встрѣчаются во многихъ приложеніяхъ, поэтому ихъ надобно замѣтить.

Пусть $a=1$ получаемъ $\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = 1.2.3.\ldots(n-1)$. Въ этомъ интегралѣ n число цѣлое, но онъ разсматривается и въ томъ случаѣ, когда (n) дробное; но когда n дробное, то выраженіе этого интеграла уже будетъ другое.

Пусть n дробное $\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx$ представимъ нѣкоторую функцію n. Эта функція называется функціей Гаусса и обозначается черезъ $\Gamma(n)$; эта функція называется также Эйлеровымъ интеграломъ 2го рода. Въ теоріи такихъ интеграловъ доказывается, что интегралъ конеченъ, когда $n>1$.

Интегралъ этотъ имѣетъ многочисленныя весьма важныхъ свойствъ, изъ которыхъ мы разсмотримъ только одно.

Будемъ вычислять этотъ интегралъ по частямъ:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = -\int_0^{+\infty} x^{n-1} de^{-x} = -\left\{x^{n-1} e^{-x}\right\}_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-2} dx.$$

Во первыхъ членъ при $x=\infty$ будетъ 0, а при нулевой точкѣ 0 и слѣдовательно, такъ какъ мы $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$ обозначили черезъ $\Gamma(n)$, то

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1),$$

Вотъ равенство, которое выражаетъ намъ свойство функціи $\Gamma(n)$, которое хотѣли указать. Изъ этого равенства видно, что не только (n) должно быть >0, но чтобы и $(n-1)$ было-бы >0 и слѣд. $n>1$ (иначе во второй части стояла бы ∞. Если въ этомъ

Если бы этому равенству перестановить (n) на $(n-1)$ то получили следующее равенство: $\Gamma(n-1)=(n-2)\Gamma(n-2)$.

По этому равенству n должно быть >2. Точно также, если переставить (n) на $(n-2)$, то $\Gamma(n-2)=(n-3)\Gamma(n-3)$.

По этому равенству видно, что n должно быть >3. и т. д. получили таким образом:

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\dots(n-p)\Gamma(n-p)$$

Следовательно показатель (n) можетъ быть понижен на сколько угодно единицъ, где p цѣлое число, а $n>p$.

Если n число дробное, а p цѣлое, то $(n-p)$ будетъ >0 и по этой формулѣ видно, что вычисленіе всякаго Γ сведено на вычисленіе Γ отъ аргумента $n-p<1$.

Если n цѣлое число, то взявъ p равнымъ $(n-1)$, получимъ по этой формулѣ:

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\dots 2\cdot 1\,\Gamma(1),$$

но $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1$ $\left\{\text{по формулѣ } \int_0^{+\infty} e^{-ax}dx \text{ при } a=1\right)$ и получимъ:

$$\Gamma(n)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots(n-1).$$

Чрезъ интегрированіе извѣстныхъ выраженій опредѣленныхъ интеграловъ по перемѣнному параметру могутъ быть получаемы выраженія такихъ опредѣленныхъ интеграловъ, которые непосредственно и не могутъ быть вычислены.

Примѣръ. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2}$. Это выраженіе интеграла надо доказать при $a>0$. Чтобы изъ этого интеграла получить

выражения новых посредством интегрирования, принимая a за перемінное независимое и умножая обѣ части нашего равенства на da, беремъ $\int_A^B$ между предѣлами A и B:

$$\int_A^B da \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = b \int_A^B \frac{da}{a^2+b^2};$$

Интегралъ этотъ можетъ быть написанъ такъ:

$$\int_0^{+\infty} \sin bx\, dx \int_A^B e^{-ax} da = \left[b \cdot \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + c\right]_A^B = \operatorname{arctg} \frac{B}{b} - \operatorname{arctg} \frac{A}{b}.$$

Въ первой части нашего равенства интегрированіе по (a) можетъ быть выполнено, такъ какъ $\int_A^B e^{-ax} da$ извѣстенъ. Вторая получится: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-Ax} - e^{-Bx}}{x} \sin bx\, dx = \operatorname{arctg} \frac{B}{b} - \operatorname{arctg} \frac{A}{b}$.

Запишемъ опять полученный въ первой части интегралъ опредѣленный, который обыкновенно принято называть эйлеровымъ.

Изъ этого выраженія получаемъ частный случай опред. $\int_0^{+\infty}$ (который нужно запомнить, ибо онъ встрѣчается во многихъ приложеніяхъ).

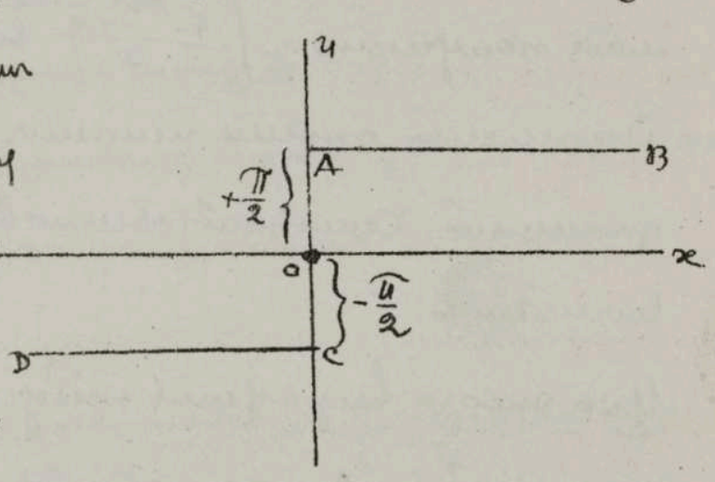
Положимъ, что b=0 и положимъ, что B приближается къ $+\infty$, а A стремится къ 0, тогда это равенство въ предѣлѣ будетъ такое:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-Ax} - e^{-Bx}}{x} \sin bx\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Это равенство замѣчательно тѣмъ, что въ первой части не входитъ b, а выраженіе не зависитъ отъ b, слѣдовательно, если b будетъ измѣняться, то величина этого интеграла будетъ та же самая.

Если переставить в этом равенстве b на -b, то $\int^{+\infty}$ этот будет равен $-\frac{\pi}{2}$.

Этот интеграл представляет первый и единственный пока пример прерывности функции в собственном смысле этого слова. Если например $y = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{\alpha} d\alpha$, то мы можем сказать, что y выражается некоторою функцией x и след. эта функция геометрически должна представлять некоторую линию. Разсмотрим, какая же это линия. Возьмем оси координат, тогда можем сказать (принимая во внимание интеграл), что когда $x < 0$, то y при всех значениях x будет иметь постоянную величину = $+\frac{\pi}{2}$, а когда $x > 0$, то при всех значениях x (0) будет иметь постоянную величину $= -\frac{\pi}{2}$. Геометрически такая зависимость выразится прямыми AB и CD, отстоящими от оси x на $\frac{\pi}{2}$. Таким образом наша Ур-ие представляет совокупность 2 прямых, разрывающихся в точках A и C, так что если x будем давать отрицательные значения, то получим одну прямую, при положит. значениях x — другую, уже не составляющую продолжения первой линии, т.е. иначе говоря при $x = +\varepsilon$ (где ε бесконечно-мало) $y = +\frac{\pi}{2}$, а при $x = -\varepsilon$ ..... $y = -\frac{\pi}{2}$ и разность y = $= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.



О двойных интегралах.

Пусть U есть неизвестная функция двух переменных независимых x и y, которая должна удовлетворять уравнению $\frac{d^2u}{dxdy} = f(x,y)$, где f есть данная функция двух переменных x и y. Требуется определить эту неизвестную функцию U.

Определение функции U совершается помощью двойного интегрирования; которая производная U по x и y будет: $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$; если мы неизвестную функцию $\frac{du}{dx}$ обозначим через v, $\frac{du}{dx} = v$, то уравнение напишется следующее: $\frac{dv}{dy} = f(x,y)$; при дифференцировании по y, x – другое переменное было принимаемо за постоянное количество, поэтому неизвестная функция v определяется из последнего равенства через интегрирование по y, причем x остается постоянным: $v = \int f(x,y)dy + C$, где произвольное постоянное C должно удовлетворять такому требованию, что производная от второй части по y равна производной по y от v, то есть производная будет подынтегральной функцией $f(x,y)$, следовательно $\frac{dC}{dy} = 0$, следовательно C должно быть постоянным по отношению x и y, но оно может зависеть от x и поэтому можно положить, что $C = \varphi(x)$, тогда производная C по y все-таки будет равна 0. Положим, что C есть некоторая функция x определяемая в виде получения самого общего решения. Вставляя вместо C функцию $\varphi(x)$, а вместо v выражение этой функции, тогда получим:

$$\frac{du}{dx} = \int f(x,y)\,dy + \varphi(x).$$

отсюда спарсится определить u, для чего умножаем обе части равенства на dx, и потом произведем интегрирование: $u = \int dx \int f(x,y)\,dy + \int \varphi(x)\,dx + C'$; что касается до C', то нужно заметить, что оно постоянно по отношению к x, так что $\frac{dC'}{dx} = 0$, но оно может зависеть от y, так что можно положить $C' = \Psi(y)$; заметив это, прибавим следующее: $\int \varphi(x)\,dx$ есть совершенно произвольная функция x, $\int \varphi(x)\,dx = \Phi(x)$; таким образом получим окончательно: $u = \int dx \int f(x,y)\,dy + \Phi(x) + \Psi(y)$. Этим выражением наш вполне функция u вполне определяется; 1-ый член во второй части представляет то, что называется двойным неопределенным интегралом; здесь нужно выполнить 2 интегрирования: 1-ое интегрирование надо произвести по y, причем x остается постоянным, 2-ое по x, причем y остается постоянным.

В этом виде для определения u мы произведем 2 интегрирования: 1-ое по y, 2-ое по x; это можно сделать и в обратном порядке; иногда, чтобы выполнить это, заметим следующее: $\frac{d^2u}{dxdy} = d\frac{du}{dx}$; если положить $\frac{du}{dy} = W$, то получим $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{dW}{dx}$ — частная производная по x по условию равна $f(x,y)$; из этого последнего равенства можно определить W, $W = \int f(x,y)\,dx + C$; здесь произведено интегрирование по x, причем

y остается постоянным, C_1 постоянно по отношению къ x, $\frac{dC_1}{dx}=0$, но это C_1 можетъ быть какою угодно функціею y, $C_1=\psi_1(y)$; вставимъ вмѣсто C_1 и W ихъ выраженія, получимъ:

$$\frac{du}{dy}=\int f(x,y)\,dx+\psi_1(y)$$

отсюда u опредѣлится опять чрезъ новое интегрированіе по y, причемъ x остается постояннымъ:

$$u=\int dy\int f(x,y)\,dx+\int\psi_1(y)\,dy+C_2;$$

произвольное постоянное C_2 постоянно по отношенію къ y, но оно можетъ быть функціею x, $C_2=\varphi(x)$; замѣтимъ, что $\int\psi_1(y)\,dy=\psi(y)$, гдѣ ψ есть совершенно произвольная функція y; результатъ для u будетъ:

$$u=\int dy\int f(x,y)\,dx+\psi(y)+\varphi(x).$$

Здѣсь 2 интегрированія по x и по y произведены въ обратномъ порядкѣ. Можно доказать, что не смотря на порядокъ интегрированія, результаты, полученные для неизвѣстной функціи u будутъ всегда одинаковы въ томъ смыслѣ, что они будутъ отличаться другъ отъ друга на сумму двухъ функцій, изъ которыхъ первая есть функція одного только x, а вторая одного только y.

Чтобы доказать это, положимъ, что имѣемъ 2 выраженія u_1 и u_2, удовлетворяющихъ данному намъ ур-ію, такъ что $\frac{d^2u_1}{dxdy}=f(x,y)$ и $\frac{d^2u_2}{dxdy}=f(x,y)$; вычтемъ изъ 1го ур-ія 2ое тогда получимъ: $\frac{d^2(u_1-u_2)}{dxdy}=0$ или это можно изобра-

зить так: $\frac{d\frac{d(u_1-u_2)}{dx}}{dy}=0$; следовательно, интегрируя это равенство по y, получим $\int d\frac{d(u_1-u_2)}{dx}=\frac{d(u_1-u_2)}{dx}$ ....(I); но выражение I не должно зависеть отъ y; это выражение есть функция одного только x равная $\varphi(x)$, следовательно $u_1-u_2=\int\varphi(x)dx+C$, C постоянно по отношению къ x, но зависитъ отъ y, $C=\psi(y)$; во второй части стоитъ еще $\int$ знакъ, который представляетъ совершенно произвольную функцію x равную $\varphi(x)$, такимъ образомъ полученная разность $u_1-u_2=\varphi(x)+\psi(y)$; слѣд. если будутъ найдены 2 функціи одного и того же выраженія, то они будутъ отличаться на сумму 2 выраженій, изъ которыхъ 1-е есть функція x, а 2-е функцій y.

Опредѣленные двойные $\int$ы.

Возьмемъ произвольную функцію 2-хъ независимыхъ перемѣнныхъ $f(x,y)$; если эту функцію умножимъ на dy, то получимъ нѣкоторый дифференціалъ по y, который можно по y интегрировать между какими угодно предѣлами, которые будутъ постоянны по отношенію къ y, но въ то же время они могутъ зависѣть отъ x; интегрируя по y, мы и оставляемъ постоянными: $\int_{y_0}^{Y}f(x,y)dy$ ....(II), гдѣ y_0 и Y произвольныя количества, постоянныя вообще или постоянныя только по отношенію къ y, но зависящія отъ x, положимъ, что $y_0=\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ данная функція x, а $Y=\psi(x)$. Разсматривая

интеграль (1) мы замѣчаемъ, что онъ представляетъ функцію одного только x; дѣйствительно, если предположимъ, что интегрированій выполнено и въ результатѣ поставимъ предѣлы y_0 и Y, то очевидно, что въ этотъ результатъ будетъ входить одинъ только x. Теперь, если мы $\int f(x,y)dy$ умножимъ на dx, то получимъ произведеніе нѣкоторой функціи x на dx, отъ этого интеграла (*) мы можемъ взять новый интегралъ по x между предѣлами X и X, которые просто постоянныя количества, такъ что результатъ не будетъ зависѣть ни отъ x ни отъ y, и въ результатѣ получится просто опредѣленное количество U, это выраженіе U и называется двойнымъ опредѣленнымъ интеграломъ, причемъ это выраженіе есть самый общій видъ опредѣленнаго двойнаго интеграла; — такъ составляется понятіе объ опредѣленномъ двойномъ интегралѣ.

Относительно опредѣленнаго двойнаго интеграла можно доказать теоремы, подобныя тѣмъ, которыя мы доказали относительно обыкновеннаго опредѣленнаго $\int$.

Всякій двойной опредѣленный интегралъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ сумма безконечно-малыхъ количествъ въ опредѣленномъ возрастающемъ числѣ.

Такъ какъ $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dy = \lim \sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y$, то чтобы составить величину этой суммы, нужно y давать послѣдовательно

(*) произведенія

ряд значений: y_0, $y_0+\Delta y_0=y_1$, $y_1+\Delta y_1=y_2$, $y_2+\Delta y_2=y_3\ldots y_{n-1}+\Delta y_{n-1}=y_n=Y$.

Тогда $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy=\lim\sum_{y=y_0}^{y_n=Y} f(x,y)\Delta y=\lim\{f(x,y_0)\Delta y_0+f(x,y_1)\Delta y_1+f(x,y_2)\Delta y_2+\ldots+f(x,y_{n-1})\Delta y_{n-1}\}$. Заметим, что вместо предельной суммы мы можем взять самую $\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y$, ибо эта сумма при весьма значительном n и при весьма малых приращениях Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2\ldots$ будет весьма мало отличаться от своего предела, так что $\lim\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y=\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy=\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y+\omega$, где ω есть некоторое весьма малое количество, стремящееся к 0 при неопределенно возрастающем n и при уменьшении Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2\ldots$. Умножим обе части этого равенства на dx и возьмем $\int$ между пределами x_0 и X; тогда:

$\int_{x_0}^{X} dx\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy=\int_{x_0}^{X} dx\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y+\int_{x_0}^{X}\omega\,dx$. В первой части его-рого определенный двойной $\int^{ab}$, который мы разсматриваем; 1-й член 2-й части представляет простой $\int^{ab}$, взятый по x; так как выражение, которое мы умножаем на dx есть некоторая функция x, так как пределы y_0 и Y суть функции x, поэтому определенный $\int$ взятый не отличается от всякого другого и есть также предел от суммы бесконечно-малых известного вида. Следовательно этот интеграл есть $\lim\sum_{x=x_0}^{x=X}\Delta x\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y$. Чтобы получить 2-й член по x, нужно изменять x непрерывно от x_0 до X и тогда x получит значения: x_0, $x_0+\Delta x_0=x_1$, $x_1+\Delta x_1=x_2$ $x_2+\Delta x_2=x_3,\ldots x_{m-1}+\Delta x_{m-1}=x_m=X$. Но предел этой суммы бу-

дать, весьма мало отличаться отъ самой суммы пріостаточно большомъ n и будетъ $\lim(\ldots\ldots) =$ самой суммѣ $\Sigma +$ нѣкоторое весьма малое количество ε, стремящееся къ 0 при n возрастающемъ до ∞. Поэтому $\lim \sum_{x_0}^{X} \Delta x \sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y =$ $= \sum_{x_0}^{X} \Delta x \sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y + \varepsilon$; вставляя получимъ, что наши: $\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy = \sum_{x_0}^{X}\sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta x \Delta y + \varepsilon + \int_{x_0}^{X} w\,dx$. Помолимъ, что n и n увеличиваются до ∞ и слѣдовательно всѣ приращенія Δy и Δx стремятся одновременно къ 0, тогда въ предѣлѣ $\lim \varepsilon = 0$ и $\lim \int_{x_0}^{X} w\,dx = 0$, потому что $\lim w = 0$ и наше равенство обратится въ такое: $\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy = \lim \sum_{x_0}^{X} \Delta x \lim \sum_{y_0}^{Y} f(x,y)\Delta y$. Это равенство и указываетъ, что всякій опредѣленный двойной $\int^{ex}$ есть предѣлъ суммы безконечно-малыхъ указаннаго вида, такъ какъ всякое безконечно малое имѣетъ такой видъ: $f(x,y)\,\Delta y\,\Delta x$. Необходимо имѣть ясное представленіе о составѣ этой суммы безконечно-малыхъ, почему мы и напишемъ подробнѣе всѣ члены этой суммы. Замѣтимъ, что первое суммированіе производится по y, оставляя x постояннымъ; эта сумма была написана раньше, но въ ней надо умножить всѣ члены на Δx, причемъ x^1 надо будетъ давать послѣдовательно всѣ значенія x: $x_0, x_1, x_2, \ldots X$. Мы будемъ обозначать при какомъ значеніи x берется y и тогда получимъ такую сумму:

$$\Delta x_0 \left\{ f(x_0, y_0^{(0)})\Delta y_0^{(0)} + f(x_0, y_1^{(0)})\Delta y_1^{(0)} + f(x_0, y_2^{(0)})\Delta y_2^{(0)} + \ldots + f(x_0, y_{n-1}^{(0)})\Delta y_{n-1}^{(0)} \right\} +$$

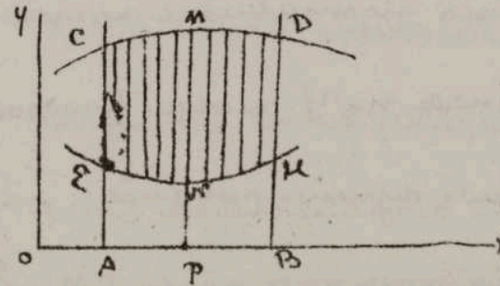
$$+\Delta x_1\left\{f(x_1,y_0^{(1)})\Delta y_0^{(1)}+f(x_1,y_1^{(1)})\Delta y_1^{(1)}+f(x_1,y_2^{(1)})\Delta y_2^{(1)}+\dots\dots+f(x_1,y_{(n-1)}^{(1)})\Delta y_{n-1}^{(1)}\right\}+$$

$$+\Delta x_2\left\{f(x_2,y_0^{(2)})\Delta y_0^{(2)}+f(x_2,y_1^{(2)})\Delta y_1^{(2)}+f(x_2,y_2^{(2)})\Delta y_2^{(2)}+\dots\dots+f(x_2,y_{n-1}^{(2)})\Delta y_{(n-1)}^{(2)}\right\}+$$

$$+\quad\dots\dots\dots

членами 1-го сумма, лишь только мы переставили бы порядок рядов, т.е. горизонтальные сложили бы вертикальными и наоборот, следовательно оба эти интеграла представляют одну и ту же сумму, а следовательно порядок интегрирования может быть изменен без изменения результата.

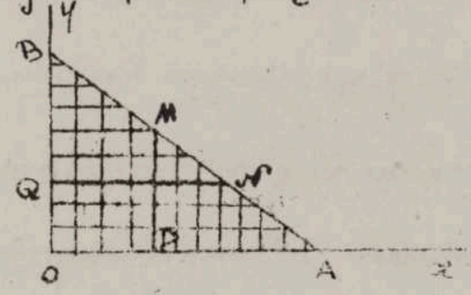
Рассмотрим опять двойной $\int$: $U = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy$, где $y_0 = \varphi(x)$, а $Y = \psi(x)$. Рассматривая этот интеграл прямо видно, на какие именно значения x простирается суммирование, но нельзя сказать то же об y, который изменяется между переменными пределами, зависящими от x. Чтобы представить себе, на какие переменные величины распространяется суммирование обратимся к Геометрии. Возьмем прямоугольные оси координат и проведем две прямые $\parallel$ оси y на расстоянии x_0 от оси и на расстоянии X другую ($OA = x_0$, $OB = X$). И пусть на плоскости построены 2 кривые, уравнения которых суть: для CD: $y = Y = \psi(x)$, для EK: $y = y_0 = \varphi(x)$. Представим себе, что эти 2 кривые пересекают эти 2 параллели. Говорим, что суммирование простирается на все значения x и y, которые они получают внутри площади ECDK. Чтобы показать это заметим, что 1-ое интегрирование производится по y при постоянном x, причем y получает все значения от y_0 до Y. Возьмем какой нибудь x между x_0 и X, пусть он есть $OP = x$



проводимой через (·) P ∥ оси y-ов ещё встретится кривую CD в (·) M, а (~) ещё в (·) N. При первом интегрировании x остаётся постоянным, y же изменяется от y=y₀=PN, до y=Y=PM. Можно сказать, что в этом суммировании y пробегает все значения на протяжении линии MN. Второе суммирование производится по x между пределами x, от x=x₀=OA до x=X=OB и при каждом этом суммировании по x (при каждом значении x) производится суммирование по y и следовательно линия MN перемещается по чертежу, оставаясь параллельной самой себе во всех своих положениях; при таком перемещении эта линия пробежит всю площадь и следовательно суммирование производится во пределах всех значений, пробегаемых x и y внутри этой площади.

Иногда задается двойной ∫, при чем пределы его не выписываются, напр. $u=\iint f(x,y)\,dx\,dy$, но указывают на какую площадь должно быть распространено суммирование. Покажем это на примере. Пусть $v=\iint z\,dx\,dy$, где $z=f(x,y)$ и сказано, что это интегрирование должно быть распространено на все значения, которые x и y получают внутри площади △OAB, причем OA=a, а OB=b. Для определения этого ∫ нужно поставить пределы; пусть первое интегрирование производится по y, тогда x постоянное, возьмем какой-нибудь x=OP, и произведем суммирование по y по линии PM ∥ оси y-ов и она производится от y=0, до y=PM, 2-ое

суммирование производится по z между пределами $z=0$ до $M=OA$.
и $V=\int_0^{OA} dx \int_0^{PM} z\,dy$. Найдем PM; для этого составим ур-ие AB; оно будет: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (ур-ие прямой, отнесенной на осях координатных отрезках) и $y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)=PM$ и след. $V=\int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} z\,dy$. Итак видим, что при таковых условиях можно назначать пределы: Здесь выбор переменных для 1го интегрирования зависит от нашего произвола; постараемся, чтобы первое интегрирование было произведено по x; вообразим сечение $\perp$ плоскости и пусть оно $=OQ$ причем y будет постоянен на всей линии $QN \parallel$ оси $x^{ов}$. Тогда 1е интегрирование будет совершаться на протяжении линии QN при постоянном y и при x, изменяющемся между пределами $x=0$ и $x=QN$.



Второе $\int$ между пределами y; этими указывается, что 1ое $\int$ должно быть произведено между пределами y от $y=0$ до $y=OB$, таким что линия QN займет ряд положений $\parallel$ оси $x^{ов}$ и $V=\int_0^{OB} dy \int_0^{x=QN} z\,dx$. Найдем линию QN. Из ур-ия прямой имеем что $x=a\left(1-\frac{y}{2}\right)=QN$ и следовательно $V=\int_0^b dy \int_0^{a\left(1-\frac{y}{2}\right)} z\,dx$. Легко повторить, что оба интеграла равны. Для того дадим какое-нибудь частное значение для $\frac{z}{c}$, напр. $\frac{z}{c}=1$, тогда надо повторить следующее равенство: $\int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy = \int_0^b dy \int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} dx$. Для этого надо вычислить самое $\int$.

Тройные интегралы.

Понятие об определенном тройном $\int\int\int$ составляется так-же, как и понятие о двойном $\int\int$. Возьмем произвольную функцию 3-х независимых переменных: $f(x,y,z)$ и помножим-ее на dz; это произведение можно рассматривать как дифференциал некоторой функции по z, поэтому это выражение можно интегрировать по z между какими угодно пределами: $\int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz$. Эти пределы z_0 и Z должны быть постоянными относительно z, поэтому они могут быть постоянными в собственном смысле этого слова или же они могут быть функциями x и y, которые постоянны относительно z. Для общности положим, что z_0 и Z суть функции x и y, т.е. что $z_0=\varphi(x,y)$ и $Z=\psi(x,y)$. Когда в данном $\int\int\int$ выполним $\int$ по z, то в результате не будет входить z и весь $\int\int\int$ будет представлять функцию 2-х переменных x и y, поэтому если его помножим на dy, то произведение $dy\int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz$ можно рассматривать как дифференциал некоторой функции по y, стало быть мы можем интегрировать это выражение по y между какими угодно пределами y_0 и Y. Эти пределы y_0 и Y должны быть постоянными относительно y, но могут зависеть от x, положим, что $y_0=\Phi(x)$ и $Y=F(x)$. После $\int$ по z в результате не будет входить y, а только один x, поэтому этот ре-

зультатом будет функция x, умноженная на dx, или можем рассматривать $dx\int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz$, как дифференциал некоторой функции по x, поэтому его можно интегрировать по x между какими угодно пределами x₀ и X, которые суть абсолютно постоянные количества. Мы получаем таким образом выражение:

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz = U.$$

Здесь произведено три интегрирования и это выражение называется тройным определенным $\int^{(3)} U$.

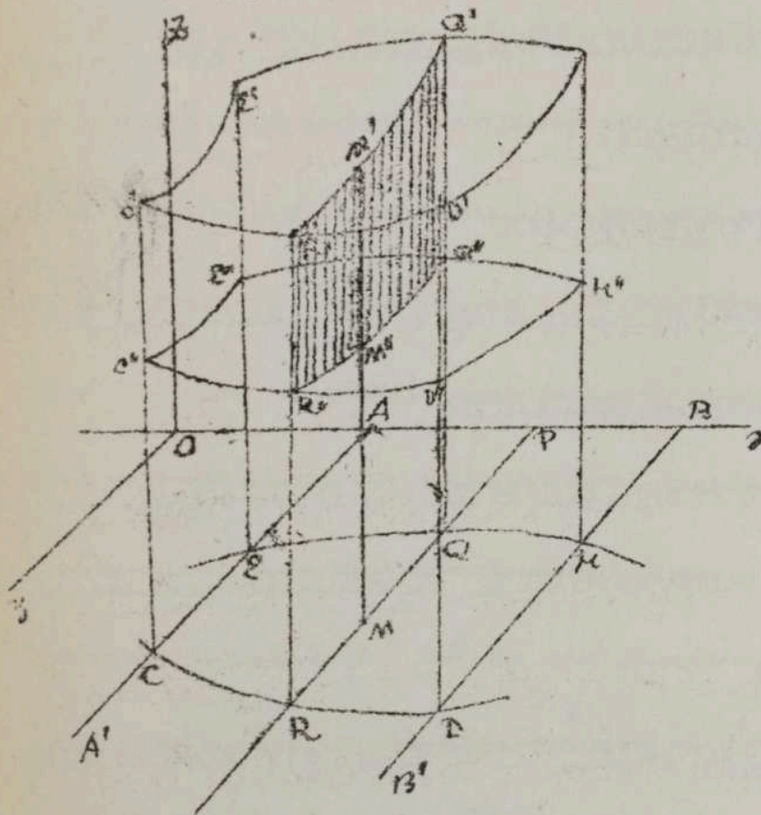
Относительно него можно доказать основную теорему, что тройной $\int^{(3)} U$ представляется $\lim \Sigma$ бесконечно-малых известного вида, именно:

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz = \lim \Sigma_{x_0}^{X} \Sigma \Sigma f(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

сначала z изменяется от z₀ до Z, потом y изменяется от y₀ до Y и т.д. Доказательство этой теоремы совершенно одинаково с доказательством подобной же теоремы для двойных интегралов, и поэтому мы не будем ее доказывать. Из этого разложения будет также следовать, что в тройном $\int^{(3)} U$ от постоянных пределов порядок $\int^{(3)}$ может быть изменен.

Для тройного $\int^{(3)} U$ также, как и для двойного надо обращать внимание на геометрическое представление, помощью которого можно изменять тип величины переменного, на кото-

рыша распространяется суммирование въ данномъ направленіи $\int_{z_0}^{Z}$. Для этого обратимся къ самому общему виду интеграла; пусть $U = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} dy \int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dz$, гдѣ $z_0 = \varphi(x,y)$, $Z = \psi(x,y)$, $y_0 = \varphi(x)$, $Y = F(x)$. Дадимъ такое построеніе: проведемъ на плоскости xy 2 прямыя $\parallel$ оси y^{ax} на разстояніи x_0 и X отъ начала координатъ; пусть эти прямыя будутъ Aa' и Bb'. На той же плоскости xy строимъ 2 кривыя, ур-ія которыхъ суть: $y = Y = F(x)$ и $y = y_0 = \varphi(x)$. Покажемъ, что эти кривыя суть ED и EK.



Далѣе представимъ себѣ въ пространствѣ 2 плоскости $\parallel$ пл. yz, одна изъ нихъ проходитъ черезъ Aa', другая черезъ Bb'. Потомъ представимъ себѣ 2 цилиндрическія поверхности, образующія которыхъ $\parallel$ оси Z^{ax}, а направляющія суть линіи ED и EK. Эти цилиндрическія поверхности пересѣкаются 2 плоскостями по 4 прямымъ $\parallel$ оси Z^{ax}. Потомъ представимъ въ пространствѣ 2 поверхности, ур-ія которыхъ $Z = Z_0 = \varphi(x,y)$ и $Z = Z = \psi(x,y)$; покажемъ, что эти 2 поверхности пересѣкаются съ плоскости xy и одна выше другой, наложимъ 2-ая выше. Проведенныя 2 плоскости и 2 цилиндрическія поверхности пересѣкутъ верхнюю поверхность

по кривым линиям и вырезать на ней 4-угольник $C'K'D'C'$, а вторую поверхность, расположенную ниже $1^{ой}$ по 4-уг. $C''K''D''C''$ Суммирование, производимое в пределах $\int^{ин}$, распространяется на все значения x, y, z, которые они получают внутри пространства $C'C'K'D'C''C''K''D''$.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что $1^{ое}$ суммирование производится по Z при произв. но постоянных xy. Возьмем произвольный $x = OP$; проведем через (.) $P \parallel$ оси $y^{ов}$; эта $\parallel^{ая}$ встретит кривую ΣK в точке Q, кривую CD в (.) R. На линии QR возьмем произвольную точку M; представим себе плоскость, проходящую через $QR \parallel$ оси $Z^{ов}$ и продолжим её до пересечения с поверхностями; в сечении получим $C'KQ''K''$. Точка M может быть рассматриваема, как имеющая произвольные x и y, $x = OP$ и $y = MQ$. Проведем из (.) M к плоскости $xy \perp$; он встретит нижнюю поверхность в (.) M', а верхнюю в (.) M''. При $1^{ом}$ суммировании по Z Z изменяется от $Z = Z_0$ до $Z = Z$. На нашем чертеже $Z = MM'$, $Z_0 = MM''$, следов. при $1^{ом}$ суммировании Z изменяется от $Z_0 = MM''$ до $Z = MM'$, стало быть суммирование распространяется на все значения Z, которые они получают на промежутке $M'M''$.

Второе суммирование по Y производится при постоянном x, изменяя y от $y = y_0 = PQ$ до $y = Y = PR$ и при каждом из этих значений y производится суммирование по Z. Таким образом

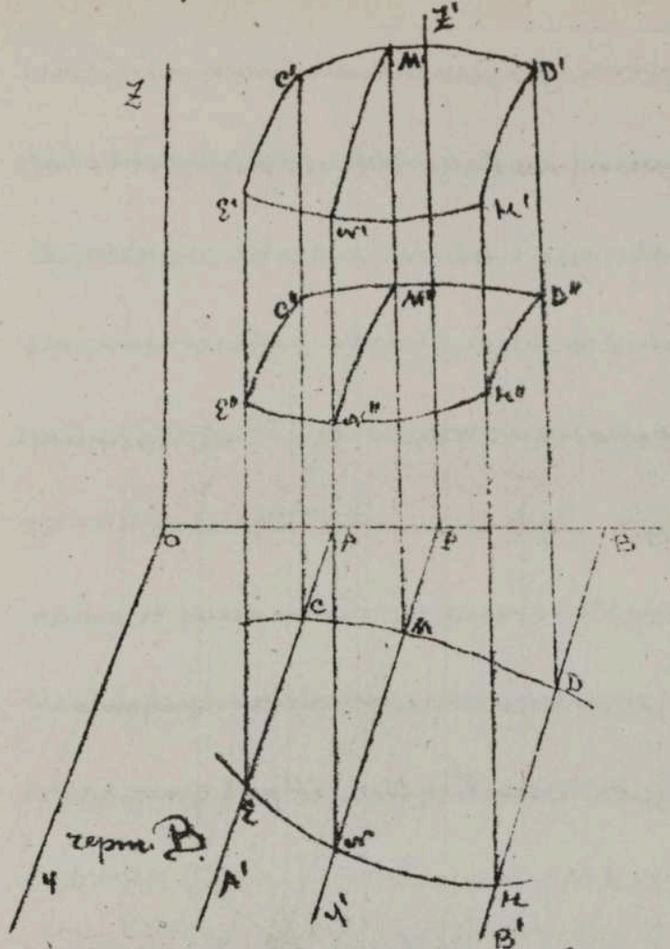
линія M'M'' будетъ перемѣщаться въ плоскости отъ Q'Q'' и
изгонитъ весь цилиндръ Q'R'R''Q''.

Такимъ образомъ этотъ 2 $\int$ распространяется на всѣ значенія y и z, получаемыя внутри площади Q'Q''R''R'.
Наконецъ послѣднее суммированіе по x, производимое такъ, что
измѣняется отъ $x = x_0 = OA$ до $x = X = OB$, и при каждомъ изъ
этихъ значеній x производятся два суммированія: 1-е по y, 2-е по z.
Такимъ образомъ (:) P будетъ двигаться непрерывно отъ A до B;
вмѣстѣ съ тѣмъ и плоскость Q'Q''R''R' будетъ двигаться отъ P'P''C''C'
до M'M''D''D' и изгонитъ весь объемъ C'P'M'D'D''C''P''M'', — отсюда и видно,
что трёхкратное суммированіе распространяется на всѣ
значенія x, y, z, получаемыя внутри этого объема.
Подобно двойнымъ и тройнымъ $\int$ могутъ быть разсматриваемы $\int$ линейные, поверхностные и т. д. Двойные $\int$ имѣютъ приложенія въ Геометріи. Тройные встрѣчаются въ Механикѣ и
$\int$ высшихъ порядковъ встрѣчаются въ Физикѣ, какъ напр. для вычисленія температуры.
Объемъ тѣла разсматриваемаго 2-мъ и 3-мъ $\int$ обратился къ ихъ приложенію.

Общая формула Кубатуръ.

Такъ называется общая формула, служащая для опредѣленія объемовъ. Задача объ опредѣленіи объема можетъ быть приведена къ слѣдующей:

Положим, имеем некоторую поверхность $z = f(x, y)$. На плоскости xy проведем 2 прямые $\parallel$ оси y-ов; пусть $OA = x_0$, а $OB = X$. На той же плоскости спроецируем 2 кривые CD и EH, ур-ия которых суть: для CD: $y = y_0 = \varphi(x)$, для EH: $y = y_x = \psi(x)$. Предположим, что данная поверхность распространяется над пл. xy и проведем 2 плоскости $\parallel yz$, проходящие через прямые AA' и BB'. Затем представим себе

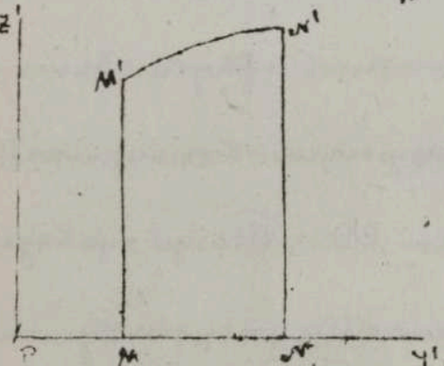


двух цилиндрических поверхностей, образующие которых $\parallel$ оси z-ов, а направляющими служат кривые EH и CD. Тогда проведенные 2 плоскости и 2 цилиндрические поверхности пересекутся с данной поверхностью по кривым и вырежут часть поверхности $E'C'D'H'$. Таким образом будем иметь объем, ограниченный фигурой призмой; основанием его служит площ. $CDHE$, а боково он ограничен 2 плоскостями и 2 цилиндрическими поверхностями, а сверху ограничен частью данной поверх. $E'C'D'H'$. Вычисление этого объема сводится на вычисление посредством одного интегрирования.

Предположим себе, что это тело разрезано плоскостью $\parallel yz$ и отстоящею от нея на расстоянии x от $\frac{X}{x_0}$. В сечении полу-

чить нѣкоторую площадь $MM'N'N$, которую обозначимъ черезъ U; величина U зависитъ отъ разстоянія секущей пл. отъ yz, такъ что всякому данному x будетъ соотвѣтствовать опредѣленная величина площади U, словомъ U есть функція x, но функція неизвѣстная; если бы она была извѣстна, то объемъ тѣла мы опредѣлили бы площадью одного $\int$ по формулѣ $V = \int_{x_0}^{x} U dx \ldots (a)$

Итакъ полагаемъ, что здѣсь U неизвѣстно и потому его надо опредѣлить. Для этого на отдѣльномъ чертежѣ представимъ эту плоскость $\parallel yz$, помѣстимъ она будетъ $z'y'$: Отъ $(\cdot)P$ отложимъ $PM = y_0$ и $PN = y$; изъ полученныхъ точекъ M и N возставимъ къ оси $y' \perp MM'$ и NN' и проведемъ кривую $M'N'$, — такимъ образомъ получимъ пл. U.



Чтобы вычислить U, нужно имѣть уравненіе $M'N'$, но кривая эта есть пересѣченіе данной поверхности съ пл. $y'Pz'$ и потому представится 2 уравненіями: $z = f(x,y)$ и $x = OP$; мы однако (*) съ условіемъ, что измѣняются только лишь z и y, а x остается постояннымъ. Зная уравненіе $M'N'$, найдемъ по общей формулѣ квадратуры: $U = \int_{y_0}^{y} z\,dy$ мы, вмѣсто z его величину, напишемъ: $U = \int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy$ при этомъ x = постоян. величина. Такимъ образомъ нашли U, вставляя его въ формулу (a), найдемъ что

(*) именно: $z = f(x,y)$

$$V = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy$$

Это и есть общая формула кубатуры.

Ин Эту формулу принято писать сокращенно след. образом.

Предпол. въ этомъ $\int^{\text{сист}}$ могутъ быть не поставлены, достаточно заметить, что суммирование распространяется на все значения, которыя x и y получаютъ внутри площади, ограниченной основанием объема (см. ЧСОН), тогда

$$V = \iint f(x,y)\,dx\,dy \doteq \iint z\,dx\,dy.$$

Иногда вопросъ объ определении объема ставится въ иной формѣ, такъ что формула кубатуры не можетъ быть прямо применена, но этотъ вопросъ всегда можно привести къ данному. Напримѣръ, вместо одной поверхности могутъ быть даны 2, изъ которыхъ одна ограничиваетъ объемъ сверху другая—снизу. Ур-ія 2-хъ поверхности $z = f_1(x,y)$ ($C''D''Z''H''$—черт. В на отдѣльномъ 23-мъ). Тогда, если требуется определить объемъ, заключенный между этими поверхностями, то онъ можетъ быть представленъ, какъ результатъ 2 объемовъ: $V - V_1 = U$, гдѣ $v = \iint z\,dx\,dy$, $v_1 = \iint z_1\,dx\,dy$, поэтому $V = \iint (z - z_1)\,dx\,dy$.

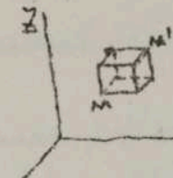
Причемъ суммирование должно быть распространено на тѣ же значения x и y.

Замѣтимъ относительно формулы кубатуры: $V = \iint z\,dx\,dy$ гдѣ $z = f(x,y)$ и есть ур-ія поверхности, ограничивающей тѣло объемъ съ одной стороны,—что въ этомъ двойномъ $\int^{\text{сист}}$ сум—

нирование распространяется на весь (...) плоскости, ограниченной основанием объема. Этот двойной интеграл может быть представлен в форме тройного $\int^{(\omega)}$, если напишем z в таком виде: $z = \int_0^z dz = \int_0^{f(x,y)} dz$ и тогда $V = \iiint dx\,dy\,dz$, причем суммирование должно быть распространено на все точки, заключенные внутри этого объема, и при этом 1-ое суммирование будет происходить по z по линии $\parallel$ оси z от основания объема до $(\cdot)$, в которой эта линия встретит поверхность, ограничивающую данный объем сверху.

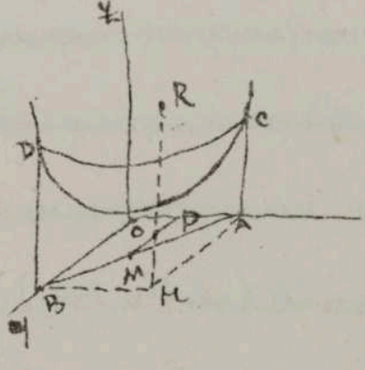
Этот тройной $\int^{(v)}$ есть в сущности предыдущие суммы бесконечно-малых известного вида, только $V = \iiint dx\,dy\,dz = \lim \sum\sum\sum \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Нетрудно видеть, какое геометрическое значение имеет суммируемое выражение; именно $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ или все равно $dx\,dy\,dz$ представляет собою выражение объема, который можно рассматривать происшедшим от такого построения: проведем ряд плоскостей бесконечно-близких и $\parallel$ плоскости yz. Этот ряд плоскостей разрежет наш объем на ряд бесконечно тонких слоев или пластинок, имеющих бесконечно-малую толщину. Проведем другой ряд плоскостей бесконечно близких между собою, 1-ая-ых к первым и $\parallel$ пл. xz. Этот ряд в совокупности с первым разрежет весь объем на ряд бесконечно-тонких призм $\parallel$ оси z. Если затем проведем 3-ий ряд плоскостей $\parallel$ пл. xy

то этот ряд разбьется весь объем на ряд бесконечно-малых параллелепипедов. Координаты (.) M этого парал-



лелепипеда будут (x, y, z), а координаты (.) M', ей x прямо противоположной, будут (x+dx, y+dy, z+dz), где dx, dy, dz есть ребра этого бесконечно-малого параллелепипеда, и объем этого параллелепипеда = dxdydz; это бесконечно-малое представляет элемент объема = dv и следовательно $V = \lim \Sigma dv$, причем эта сумма должна быть распространена на вся (.) рассматриваемого объема, также как вместо этого бесконечно-малого объема обращается в (.) и следовательно $V = \lim \Sigma dv = \iiint dv$.

Определенный пример. Найти объем, который ограничен поверхностью эллиптического параболоида, уравнение которого: $\frac{z}{2r} = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ и плоскостью $\parallel$ оси $z^{ов}$ и проходящей через прямую AB, данную на осях координат отрезки и которой уравнение есть $\frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1$. Эта плоскость пересекает эллипсоид по линии DC. Тогда требуется определить объем OABDCA = V, который по формуле Кубатуры будет: $V = \iint (\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}) dxdy$.



Задача заключается в нахождении пределов интегрирования. Первое интегрирование производится по y при постоянном x, причем определенный должно быть распространено на площадь OAB

Пусть $x = OP$ "суммирование производится по линии PM отъ $y=0$ до $y=PM$. Второе суммирование по x отъ $x=0$ до $x=OA$ и x получаетъ всѣ значенія, заключающіяся въ площади AOB. Рѣшивъ ур-ніе относительно y получимъ $y = b\left(1-\frac{x}{a}\right) = PM$, а $OA = a$ поэтому

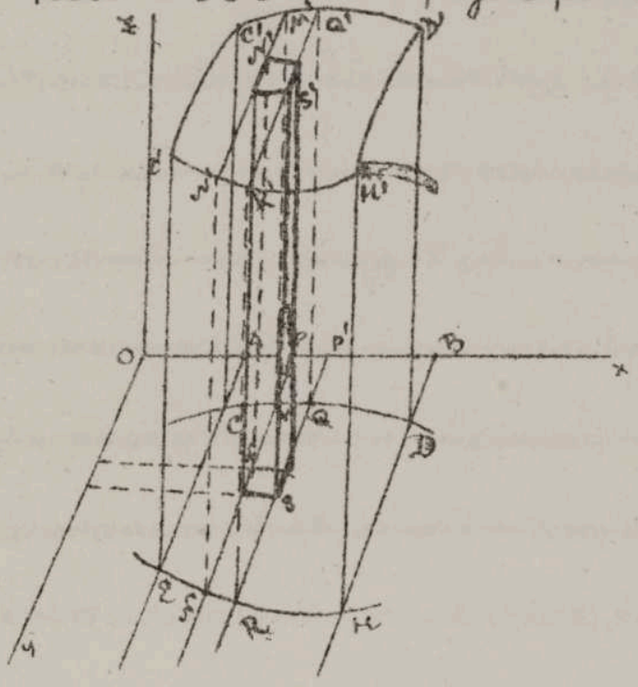
$$V = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\right) dy = \int_0^a dx \left[\frac{x^2}{2p} b\left(1-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2q}\cdot\frac{1}{3} b^3 \left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right] = \frac{b}{2p}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{1}{a}\cdot\frac{a^4}{4}\right) + \frac{b^3}{6q}\cdot\frac{1}{4}a$$

и $V = \frac{ab}{24}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right) = \frac{ab}{12}\left(\frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2q}\right)$. Построимъ на плоскости $(\cdot)$, координаты которой a и b, получимъ $(\cdot)K$, черезъ которую проведемъ $\perp$ KR къ плоскости xy до встрѣчи съ поверхностью эллипсоида въ точкѣ (R); тогда по формулѣ эллипсоида $KR = c = \frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2q}$ и $V = \frac{1}{12}abc$. Т.о. если объемъ $V = \frac{1}{12}$ объема параллелипипеда, имѣющаго своими измѣреніями a, b, c.

Вычисленіе поверхности тѣла заданнаго ур-ніемъ

Вычислить поверхность данной площади значитъ найти ея квадратуру. Прежде всего надо опредѣлить, что мы будемъ называть числовой величиной данной поверхности. Задача объ опредѣленіи поверхности всегда приводится къ задачѣ такого вида. Положимъ дана нѣкоторая поверхность ур-ніемъ $Z = f(x,y)$, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Опишемъ также построеній, какое должны дѣлать при опредѣленіи формулы квадратуры, именно: на плоскости xy проведемъ 2 линіи $\parallel$ оси Y на разстояніи x_0 и X (AA' и BB'); потомъ отнесемъ 2 кривыя линіи CD и EH; ур-ніе для CD: $y = y_0 = \varphi(x)$, а ур-ніе для EH: $y = Y = \psi(x)$. Черезъ двѣ линіи про-

возьмем в плоскости ∥ плоскости xz, а через кривые – две цилиндрические поверхности, образующие которых ∥ оси z, до пересечения с нашей поверхностью, от которой они отсекут поверхность $C'D'E'H'$ и предоставим себе найти числовую величину поверхности $C'D'E'W = S$. Прежде всего определимся, что будем называть числовой величиной этой поверхности. Для этого представим себе, что на поверхности взято безчисленное множество точек, чрезвычайно близких одна к другой. Вообразим далее, что в каждой такой проведена касат. плоскость и продолжена до пересечения со смежной касат. плоскостью; таким построением мы получим многогранную поверхность, контуры которой получатся от пересечения боковых поверхностей с последними. Касательными и будем безизов к контуру данной поверхности $C'D'E'H'$; многогранную пов. мы легко можем вычислить – цилиндр.



Представим себе, что число граней увеличивается до ∞ и каждая из граней стремится к 0, тогда в пределе контур многогранной поверхности совпадет с контуром данной. Тогда предел, к которому стремится числовая величина этой многогранной поверхности будет то, что мы назы-

вание числовое величиною поверхности S. Чтобы получить эту величину S или разрезать многогранную поверхность на ∞² малые элементы таким образом. Проведем ряд плоскостей ∥ пл. xz и ∞² близких между собою. Эти плоскости разрежут поверхность CD'C'N' на ряд ∞² плоских полос ∥ пл. xz. Представим себе две такие плоскости, между которыми и будет заключаться плоская полоса. Проведем затем ряд ∞² близких плоскостей ∥ пл xy. Эти плоскости в пересечении с первыми разрежут нашу поверхность на ряд ∞² малых четырехугольников со сторонами криволинейными в виде элемент. №1' и весь объем разрежут на ряд ∞² тонких призм №1N'1'. Пусть координаты точки N (x, y,), а координаты S (x+Δx, y+Δy), тогда соответственно координаты N'(x, y, z) и S'(x+Δx, y+Δy, z+Δz). Меридиональными сторонами призмы содержится часть многогранной поверхности, назовем ее через ω. Вся поверхность будет составлена из подобных ей ω. Поэтому вся многогранная поверхность может быть представлена как предельная сумма при условии, что число граней увеличивается до ∞ и каждая из них стремится к 0, тогда S = lim Σω. Но это ω в свою очередь составлены из граней и их частей, ибо например 4-ая N'1' может быть (...), через которые проводят касательные плоскости. Назовем эти грани и части их через a, a', a''....., так что ω = a + a' + a'' + ... Положим, что

площади a, a', a''..... составляют съ плоскостью xy различные углы, которые назовемъ черезъ $\Theta, \Theta', \Theta''$..... Очевидно, что сумма проекцій этихъ a, a', a''... будетъ = проекціи $w = пл. MS = \Delta_1 \Delta_2 = a\cos\Theta + a'\cos\Theta' + a''\cos\Theta'' + \ldots$ (1). Разсмотримъ отдѣльно касательную плоскость къ поверхности въ (.) $M'(x, y, z)$ и пусть λ уголъ, который эта плоскость дѣлаетъ съ плоскостью xy и тогда углы $\Theta, \Theta', \Theta''$... будутъ безконечно мало отличаться отъ λ, такъ какъ касат. пл. имѣетъ соотвѣтственную проекцію въ самую плоскость; поэтому $\frac{\cos\Theta}{\cos\lambda} = 1 + \varepsilon$, гдѣ ε есть безконечно-малое количество, точно также $\frac{\cos\Theta'}{\cos\lambda} = 1 + \varepsilon'$ и т. д. Отсюда $\cos\Theta = (1+\varepsilon)\cos\lambda$, $\cos\Theta' = (1+\varepsilon')\cos\lambda$, $\cos\Theta'' = (1+\varepsilon'')\cos\lambda$; ..... Подставивъ эти величины въ равенство (1) и раздѣливъ на $\cos\lambda$ получимъ $(a + a\varepsilon) + a'(1+\varepsilon') + \ldots = \frac{\Delta_1\Delta_2}{\cos\lambda}$. Раскрывъ скобки, получимъ:

$w + (a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \ldots) = \frac{\Delta_1\Delta_2}{\cos\lambda}$, ибо $a + a' + a'' + \ldots = w$.

Нетрудно доказать въ этомъ равенствѣ, что $\Sigma a\varepsilon = a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \ldots$ будетъ безконечно-малое высшаго порядка сравнительно съ w. Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что мы всегда можемъ выбрать числа безконечно-малыя $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$..... такія, которое будутъ больше всѣхъ другихъ по абсолютной величинѣ; пусть такое количество будетъ ε_1, такъ что $\varepsilon_1 > \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$... Ясно, что сумма $a\varepsilon_1 + a'\varepsilon_1 + a''\varepsilon_1 + \ldots$ будетъ больше, чѣмъ сумма $a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \ldots$; но $a\varepsilon_1 + a'\varepsilon_1 + a''\varepsilon_1 + \ldots = (a + a' + a'' + \ldots)\varepsilon_1 = w\varepsilon_1$.

Мы получили произведеніе, состоящее изъ 2 сомножителей

причемъ каждый изъ нихъ есть безконечно-малое количество, слѣдовательно ихъ произведеніе будетъ безконечно-малаго порядка высшаго, нежели порядокъ каждаго изъ множителей, и слѣдовательно приморгній членъ будетъ отбрасываемъ. А такъ какъ $a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \ldots$ будетъ меньше, нежели ω, но оно можетъ быть и подавно отброшено, такъ что $\omega = \frac{dx\,dy}{\cos\lambda}$ а такъ какъ $S = \lim \Sigma\omega$, то $S = \lim \Sigma \frac{dx\,dy}{\cos\lambda}$. При этомъ суммированіи въ этой суммѣ должно быть распространено на всѣ значенія, которыя x и y могутъ получить внутри вычисляемой поверхности $CD'E'H'$ или вправѣ внутри площади CDH, потомучто x и y одинаковы и какъ въ той, такъ и въ другой площади. Но эта сумма такого вида есть двойной интегралъ и такимъ образомъ:

$$S = \iint \frac{dx\,dy}{\cos\lambda},$$

причемъ суммированіе должно быть распространено на всѣ значенія x и y, получаемыя чрезъ внутри площади CDH, въ которую проэктируется данная часть поверхности на пл. xy. Мы представимъ сокращеннѣе комбинацію въ видѣ:

$$S = \iint \frac{dx\,dy}{\cos\lambda}$$

Здѣсь λ уголъ, который образуетъ касательная плоскость къ поверхности, уравненіе которой $z = f(x, y)$, въ точкѣ (x, y, z) съ плоскостью xy. $\cos\lambda = \cos^2$ угла, который образуетъ нормаль къ поверхности въ той-же точкѣ съ осью z-овъ, поэтому $\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$,

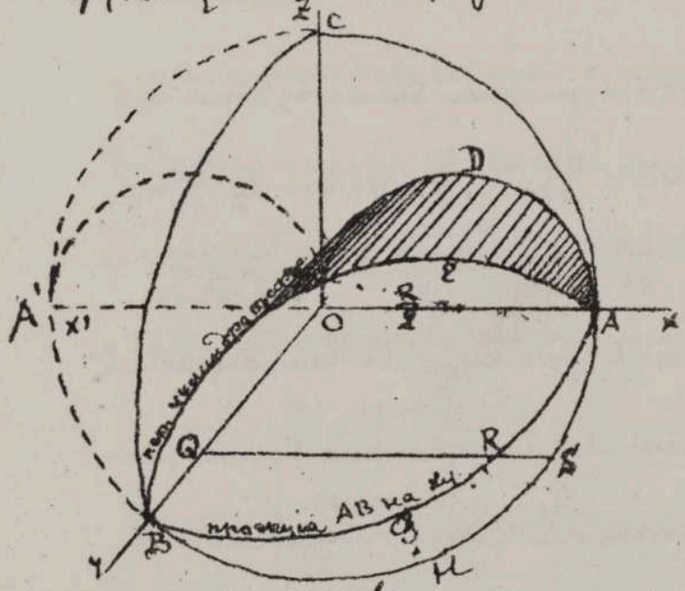
где p и q суть частные производные: $p=\frac{dz}{dx}$, $q=\frac{dz}{dy}$, взятые из ур-я поверхности. Следовательно общая формула квадратуры будет:

$$S=\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

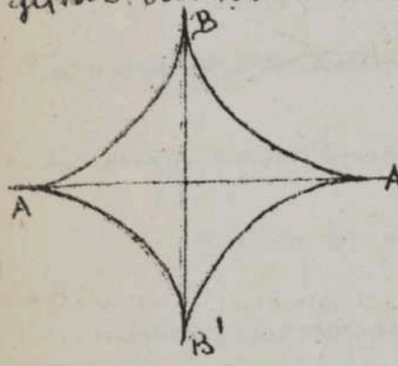
Пределы здесь подразумеваются и интегрирование должно быть распространено на все значения, которые x и y получают внутри площади, на которой проектируется данная поверхность на плоскость xy.

Пример. Задача Вивиани. На поверхности сферы вырезать такую часть, которая была-бы сквадрируема съ площадью нѣкотораго квадрата.

Геометрическое рѣшеніе этой задачи заключается въ слѣдующемъ. Представимъ себѣ сферу, центръ которой находится въ началѣ координатъ, ур-іе ея $x^2+y^2+z^2=R^2$. На радіусахъ OA и OA', какъ на діаметрахъ, опишемъ окружности. Вообразимъ, что они служатъ основаніями 2 цилиндровъ, образующія которыхъ $\parallel$ оси y^{ob}; они соприкасаются по оси y^{ob}. Продолжимъ ихъ до пересѣченія съ поверхностью сферы; очевидно, что на поверхности сферы они вырѣзываютъ 4 отверзтія. На чертежѣ цилиндръ OA пересѣчетъ сферу по кривой, идущей



отъ A къ B. Такимъ образомъ отъ поверхности сферы остаются 2 части, имѣющія видъ 4^хъ угольныхъ зонтовъ и если на нихъ смотрѣть сверху, т.е изъ ∞ къ (.) O, то они будутъ имѣть видъ, представленный на чертежѣ:



Поверхность этихъ 2 зонтовъ и будетъ симметрична и дважды равна площади квадрата, построеннаго на діаметрѣ сферы. Докажемъ это.

Удобнѣе будетъ вычислить сначала поверхность $B_2AB = \sigma$, ибо если извѣстно σ, то получимъ поверхность 4 вырѣзанныхъ отверстій $= 8\sigma$, а слѣд. и поверхность оставшейся части, которая будетъ равна $= 4\pi R^2 - 8\sigma = 2S$.

Вычислимъ $\sigma = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$; p и q здѣсь должны быть взяты изъ ур-ія сферы; вычислимъ ихъ: $2x + 2z\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} = p$; $2y + 2z\frac{dz}{dy} = 0$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z} = q$, слѣдовательно $\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ ($z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ – изъ ур-ія сферы). Подставимъ это въ выраженіе σ, получимъ $\sigma = R\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$. Интегрированіе должно быть распространено на всѣ значенія x и y, которыя они получаютъ внутри площади B_2DAN_2B (проэкція поверхности B_2AN_2B на пл. xy). Удобнѣе здѣсь будетъ произвести 1^ое $\int$ по x при постоянномъ $y = OQ$; слѣд. 1^ое $\int$ производится по линіи $\parallel$ оси x^ъ отъ $x = QR$ до $x = QS$. 2^ое $\int$ производится по y отъ $y = 0$ до $y = OB = R$. Слѣдовательно $\sigma = R\int_0^R dy \int_{\overline{QR}}^{\overline{QS}} \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

Вычислимъ QR и QS. Замѣтимъ, что QR есть абсцисса кривой, AqB; будемъ искать ур-іе послѣдней. Кривая AqB есть проэкція кривой BzA, которая есть пересѣченіе поверхностей сферы съ поверхностью цилиндра, поэтому одно ур-іе кривой BzA есть: $x^2+y^2+z^2=R^2$, а другое – ур-іе цилиндрической поверхности, это послѣднее ур-іе будетъ одинаково съ ур-іемъ круга ODA, т.е. $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ или $x^2+y^2-Rx=0$. Итакъ ур-іа кривой BzA будутъ:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \text{ и } x^2+y^2-Rx=0.$$

Чтобы получить ея проэкцію на плоскость xy, надо исключить z изъ этихъ 2-хъ ур-ій; найдемъ: $y^2+Rx=R^2$. Это и будетъ ур-іе кривой AqB. Замѣтимъ, что эта кривая будетъ парабола. Рѣшая это ур-іе относительно x, получимъ $x=\frac{R^2-y^2}{R}$. Этотъ x соотвѣтствующій данному $y=OQ$ и будетъ $=QR$.

Чтобы найти QS надо имѣть ур-іе кривой AMB, которая получится, исключая въ ур-іи сферы $z=0$: $y^2+x^2=R^2$, отсюда $x=\sqrt{R^2-y^2}=QS$. Подставляя эти величины въ выраженіе σ, находимъ:

$$\sigma=R\int_0^R dy\int_{\frac{R^2-y^2}{R}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\int_0^R dy\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}+C\right]_{\frac{R^2-y^2}{R}}^{\sqrt{R^2-y^2}}$$

$$\sigma=R\int_0^R dy\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\frac{R^2-y^2}{R}}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)=\frac{\pi}{2}R^2-R\int_0^R\arcsin\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R}dy$$

Беремъ почасти $\int_0^R\arcsin\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R}dy=\left[y\arcsin\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R}\right]_0^R-\int_0^R y\cdot\frac{\frac{1}{R}\cdot\frac{y\,dy}{\sqrt{R^2-y^2}}}{\sqrt{1-\frac{R^2-y^2}{R^2}}}=$

$$=-\int_0^R\frac{y\,dy}{\sqrt{R^2-y^2}}=\left[\sqrt{R^2-y^2}+C\right]_0^R=+R\text{, слѣд. }\sigma=\frac{\pi R^2}{2}-R^2\text{, а потому}$$

$$S'=2\pi R^2-4\sigma=2\pi R-2\pi R+4R^2=(2R)^2.$$

Итакъ остающаяся поверхность равна площади квадрата, построеннаго на діаметрѣ сферы.

Интегрированіе

дифференціальныхъ уравненій.

Дифференціальнымъ ур-іемъ называется ур-іе, содержащее производную неизвѣстной функціи по перемѣнному независимому. Это ур-іе, кромѣ того можетъ содержать самую функцію и перемѣнное независимое; но чтобы оно было дифференціальнымъ необходимо, чтобы въ него входила производная функціи. Дифференціальныя ур-ія раздѣляются на порядки, смотря по высшему порядку, входящей въ него производной.

Пусть y неизвѣстная функція перемѣннаго независимаго x: $f(x)=y$. Тогда общій видъ d-наго ур-ія 1го порядка будетъ:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

и общій видъ d-наго ур-ія $n^{\text{аго}}$ порядка будетъ:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Чтобы ур-іе было $n^{\text{аго}}$ порядка необходимо, чтобы въ него входила производная $\frac{d^ny}{dx^n}$ и не входила производная высшаго порядка.

Интегрировать данное d-ое ур-іе значитъ найти такую зависимость между x и y, изъ которой данное d-ое ур-іе вытекало-бы какъ необходимое слѣдствіе. Для $\left\{\begin{matrix}\text{нѣк.}\\ \text{всѣхъ}\end{matrix}\right.$ d-ныхъ ур-ій уже есть существуютъ особые пріемы, такъ какъ непосредствен-

ное интегрированіе ихъ, вообще говоря, невозможно.

Такъ остановимся на д-ахъ ур-ій 1го порядка.

Рѣшивъ его относительно $\frac{dy}{dx}$, получимъ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ и можно написать: $dy = f(x,y)dx$. Затѣмъ можно написать: $y = \int f(x,y)dx$. Но здѣсь $\int$ія выполнить нельзя, ибо подъ знакомъ $\int$ія входитъ y, т.е. неизвѣстная функція x.

Простѣйшій случай д-го ур-ія будетъ тотъ, когда производная выражается функціей одного x, т.е. когда $\frac{dy}{dx} = f(x)$, тогда $dy = f(x)dx$ и $y = \int f(x)dx + C$. Здѣсь $\int$ія можно выполнить, такъ какъ здѣсь $\int$ія представляетъ простую квадратуру.

Въ Геометріи и Механикѣ существуетъ весьма много вопросовъ, приводящихся къ д-нымъ ур-іямъ. Такъ если въ Геометріи требуется опредѣлить такую кривую линію, которая обладала-бы данными свойствами по отношенію къ касательной, то такъ какъ направленіе касательной опредѣляется производной $\frac{dy}{dx}$, то, обозначая такой вопросъ въ ур-іи, нам необходимо придемъ къ нѣкоторой зависимости между $\frac{dy}{dx}$ и координатами x, y, т.е. придемъ къ д-ому ур-ію вида:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

и рѣшеніе этого ур-ія дастъ намъ конечное ур-іе искомой кривой, обладающей данными свойствами.

Подобно этому, если ищется кривая, которая обладала бы дан-

ными свойствами по отношенію къ радіусу кривизны

то такъ какъ въ выраженіе радіуса кривизны входятъ двѣ производныя: $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, то, облекая вопросъ въ ур-ія, мы придемъ къ d-ому ур-ію второго порядка. И опять интегрированіе этого ур-ія должно намъ дать ур-іе искомой кривой.

Въ теоріи прямолинейнаго движенія въ Механикѣ скорость выражается 1-ой производной пространства по времени, а сила посредствомъ 2-ой производной. Поэтому, если ставимъ вопросъ, въ которомъ по данной силѣ требуется опредѣлить движеніе, то такой вопросъ всегда приводится къ d-ому ур-ію 2-го порядка. Интегрированіе этого ур-ія должно дать зависимость между пространствомъ и временемъ въ конечномъ видѣ, т.е. безъ d-овъ, т.е. должно дать ур-іе движенія.

Кромѣ вопросовъ съ одною неизвѣстною функціею могутъ встрѣчаться вопросы, въ которыхъ входятъ нѣсколько неизвѣстныхъ функцій одного перемѣннаго независимаго. Для опредѣленія этихъ ф-цій должно быть составлено столько ур-ій, сколько неизвѣстныхъ. Эти ур-ія могутъ быть 1-ые d-ные, т.е. въ нихъ, кромѣ самой ф-ціи искомой входятъ изъ производныя различныхъ порядковъ по перемѣнному независимому. Такая система или совокупность d-ыхъ ур-ій называется совмѣстными d-ными ур-іями. Интегрированіе совмѣстныхъ d-ыхъ ур-ій приводится къ ∫-ію одного d-аго ур-ія съ одною неизвѣстною.

Наконецъ могутъ быть такіе вопросы, въ которыхъ неизвѣстны-

или являются ф-ции нескольких независимых переменных.
К делу определения этих функций можно быть даны д-ные ур-ия,
в которые входят частные производные этих функций по раз-
личным переменным независимым. Такие ур-ия называ-
ся ур-ями съ частными производными или ур-ями съ част-
ными дифференциалами. Они представляются въ вопро-
сахъ Математики, Физики и нек. Знания представляютъ особую
трудность.

Остановимся сначала на д-ных ур-ях 1го порядка. Общий
видъ такихъ ур-ий есть:

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0.$$

Вообразимъ, что ур-ie рѣшено относительно $\frac{dy}{dx}$. Оно можетъ
имѣть нѣсколько рѣшений. Тогда каждое рѣшеніе слѣдуетъ
разсматривать, какъ отдѣльное ур-ie. Возьмемъ одно рѣшеніе.
$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Первый вопросъ, который слѣдуетъ предположить есть
относительно этого ур-ія есть вопросъ о томъ: всегда-ли сущест-
вуетъ такая ф-ія x^2, которая удовлетворяетъ этому ур-ію.
Возьмемъ произвольную функцію $x^0 \ldots \varphi(x)$. Эту функцію мож-
но представить въ видѣ ряда по строкѣ Тейлора слѣдующимъ
образомъ: пусть x_0 есть совершенно произвольное и постоянное зна-
ченіе взятое для x^0. Тогда напишемъ ур-ie: $\varphi(x) = \varphi(x_0 + x - x_0)$
и теперь будемъ разсматривать разность $(x - x_0)$ какъ прираще-
ніе данное x^1, тогда по строкѣ Тейлора получимъ:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + \varphi''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \varphi'''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\dots$$

Чтобы это разложение существовало необходимо, чтобы коэффициенты $\varphi(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $\varphi''(x_0)$ были-бы величинами конечными. Это требование всегда можно удовлетворить, так как x_0 выбирается совершенно произвольно. Затем ещё ряд должен быть сходящимся по крайней мере при значении x весьма близком к x_0, потому что члены в этом ряду будут падать, быстро уменьшаясь. Каким образом вообще функция может быть представлена подобным рядом. Предположим в этом равенстве $\varphi(x) = y$ и составим первый член этого равенства $1^{\text{ый}}$ член есть: $\varphi(x_0) = y_0$. Это есть значение $y^{\text{ка}}$, соответствующее значению $x = x_0$. Это значение нам неизвестно и из данного d-ого ур-ия мы определить его не можем. Всегда имея это значение $y^{\text{ка}}$ мы можем взять совершенно произвольно, потому что относительно его в данном ур-ии не выражено никаких требований. Положим, что мы выбрали такое значение y_0, тогда во втором члене встретится $\varphi'(x_0)$, т.е. значение производной y по x при $x = x_0$. Обозначим это значение так: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \varphi'(x_0)$. Это значение определяется прямо посредством данного d-ого ур-ия, именно при $x = x_0$ будем иметь $y = y_0$ и $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f(x_0, y_0)$. В следующих членах разложения входят производные: $\varphi''(x_0)$, $\varphi'''(x_0)$ .... т.е. значения производных высших порядков

y по x при $x=x_0$. Все эти значения могут быть определены помощью данного д-ого ур-ия последующим образом.

Возьмем ур-ие $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ и от обеих частей возьмем производную по x. Тогда в 1-ой части войдет $\frac{d^2y}{dx^2}$, а во второй войдут: $\frac{dy}{dx}$, x, y; вместо $\frac{dy}{dx}$ можно будет подставить его выражение $f(x,y)$; тогда получим выражение $\frac{d^2y}{dx^2}=f_1(x,y)$. Дальше возьмем снова производную по x. Тогда 1-ая часть будет иметь производную $\frac{d^3y}{dx^3}$, а во второй войдут: x, y и $\frac{dy}{dx}$; вместо $\frac{dy}{dx}$ вставим опять его выражение $f(x,y)$, тогда получим: $\frac{d^3y}{dx^3}=f_2(x,y)$. Дальше точно также получим $\frac{d^4y}{dx^4}=f_3(x,y)$. Словом, все производные высших порядков можно будет выразить через x и y только. Записав, полагая в этих равенствах $x=x_0$ и $y=y_0$, мы получим:

$$\varphi''(x_0)=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=f_1(x_0,y_0)$$

$$\varphi'''(x_0)=\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0=f_2(x_0,y_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Вставляя все это в наше разложение, получим ряд:

$$y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)+f_1(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}+\cdots+f_n(x_0,y_0)\cdot\frac{(x-x_0)^{n+1}}{1\cdot 2\cdots(n+1)}$$

И таким образом ряд будет вполне определенный. Этот ряд представляющий функцию, удовлетворяющую требованиям данного д-го ур-ия. Не трудно показать, что ур-ие, представляемое этим рядом, действительно удовлетворяет данному д-ому ур-ию. Вследствие для возьмем производную этого ряда, найдем: $\frac{dy}{dx}=f(x_0,y_0)+f_1(x_0,y_0)(x-x_0)+f_2(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}+\cdots$

Но разсматриваемый ряд, стоящий в во второй части, мы легко за-

мы знаем, что этот ряд представляет разложение $f(x,y)$ по степеням $(x-x_0)$ по формуле Тейлора. Следовательно это равенство можно написать просто в виде: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Мы видим, что, дифференцируя составленное нами выражение, мы просто получаем из него данное дифференциальное уравнение, следовательно это разложение удовлетворяет данному ур-ию.

Теорема оказывается, что всякое дифференциальное уравнение 1го порядка имеет интеграл.

Этот f определяет y, как функцию x, но таким образом, что эта функция при $x=x_0$ обращается в $y=y_0$, где y_0 - совершенно произвольно, т.е. что зависимость между x и y должна быть такова, чтобы при совершенно произвольном значении x от.... $x=x_0$ можно было найти для y совершенно произвольное соответствующее значение $y=y_0$. Это требование указывает, что в искомом ур-ии, связывающем x и y, кроме x и y, должно входить некоторое произвольное количество, величину которого мы имеем право рассматривать для того, чтобы удовлетворить последнему требованию. Если бы в ур-ие, связывающее x и y, входили-бы только x и y, так что имели-бы: $\varphi(x,y)=0$, то тогда при произвольном значении x от.... $x=x_0$ получили-бы для y совершенно определенное соответствующее значение и выше-указанное требование не могло-бы быть удовлетворено.

Вследствие этого необходимо предположить, что в это ур-ие, кро-

ных x, y входить некоторое произвольное количество C, независимое от x и y, так что ур-ие будет: $\varphi(x,y,C)=0$. Это C называется произвольным постоянным и располагая его величиною, всегда можно выбрать эту величину так, что при $x=x_0$ можно было назначить для y величину $y=y_0$, совершенно произвольную. Для этого нужно только удовлетворить ур-ие $\varphi(x_0,y_0,C)=0$, а удовлетворить этому ур-ию всегда можно, определив из него величину, которую следует принять C. Итак, заключаем, что d-ое ур-ие 1го порядка всегда имеет интеграл.

Этот $\int$-ал представляет ур-ие между x и y, содержащее произвольное постоянное C, так что, располагая величиною этого постоянного, можно при $x=x_0$ назначить для y совершенно произвольное соответствующее значение $y=y_0$.

Такой интеграл существует только один.

Посмотрим теперь, как из этого интеграла получается обратно данное полное d-ое ур-ие. Положим, что это ур-ие есть: $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ откуда $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Наш интеграл будет: $\varphi(x,y,C)=0$. Дифференцировав это ур-ие, мы получим новое ур-ие: $\Psi(x,y,\frac{dy}{dx},C)=0$. Въ данное d-ое ур-ие мы имеем $\frac{dy}{dx}$, выраженное въ функции только x и y, между тем прежде из постоянного ур-ия $\frac{dy}{dx}$ получалось, как функция x, y и C. Следовательно это выражение не может быть тождественно съ тем, которое мы имеем въ данном d-ом ур-ии. Если мы исключим C изъ последнего ур-ия

и из $\int \frac{ua}{}$, то получить зависимость между x, y и $\frac{dy}{dx}$. Эта зависимость должна быть тождественна с данным d-ым ур-ием, т.е. она должна приводить к $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

Интеграл, содержащий C - произвольное постоянное называется общим интегралом d-го ур-ия и соответственно d-е ур-ие может быть получено из общего интеграла через дифференцирование его раз и через исключение произвольного постоянного C.

Можно впрочем написать общий интеграл так, что исключение произвольного постоянного совершается само собой, при дифференцировании. Для этого стоит только общий интеграл решить относительно произвольного постоянного C и представить его в таком виде: $\varphi(x,y) = C$. Тогда, дифференцируя по x, получим: $\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ и $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}$. Это выражение уже прямо не будет содержать C и соответственно оно прямо должно быть тождественно с тем, которое дается в d-ом ур-ии, т.е. с $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. С геометрической точки зрения общий интеграл: $\varphi(x,y,C) = 0$ представляет бесчисленное множество кривых линий, которые получаются, приписывая постоянному C различные частные значения. Дифференциальное ур-ий, которое получается из общего интеграла, т.е. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ не содержит постоянного C, и поэтому оно относится ко всем кривым линиям, выражаемым общим $\int$-ом (в геометрическом смысле будет представлять некоторое свойство каса-

тельной, общее для всех кривых, выражающимся общим $\int$-лом).
Если в общем $\int$-ле произвольному постоянному дадим какое-нибудь частное значение, напр. положим $c=a$, $c=1$, и т. п., то получим частные $\int$-лы; частных интегралов существует бесчисленное множество.

Примечание. Общий $\int$-л может быть представлен в весьма разнообразных видах, которые иногда нельзя сразу сводить.
Действительно, так как c совершенно произвольно, то мы можем положить $C=\varphi(c')$, где $\varphi(c')$ означает совершенно произвольную функцию нового произвольного постоянного c' и тогда общий $\int$л будет: $\psi(x,y,\varphi(c'))=0$, где произвольным постоянным уже будем считать c'. Это ур-ие уже будет другого вида, чем первоначальное, но никто не станет это будет также общий $\int$л.
В этом смысле частных для одного и того-же n-ого ур-ия можно получить общий $\int$л в разных видах, но всегда не трудно удостовериться, будем-ли это один и тот же $\int$л. Действительно, предположим, что для одного и того же n-го ур-ия различными приемами $\int$-ия мы получили 2 разных $\int$-ла, положим $\varphi(x,y,c)=0$ и $\psi(x,y,c')=0$. Эти два ур-ия должны быть одинаковы, потому что n-е ур-ие имеет один только $\int$л. Возможно, если из этих ур-ий исключить x, то непременно выйдет и x должен исчезнуть y, потому что иначе мы получили-бы зависимость между y, c, c', т. е получили-бы зависимость между y, c и c', т. е. по-

чным ур-ie такого вида: $\varphi(y, c, c') = 0$, откуда получить $y = \varphi_1(c, c')$, т.е. $y = const$, что невозможно. Возможно, если при исключении x^a пропадает и получается ур-ie: $\varphi(c, c') = 0$, что это значит, что 2 $\int$-а согласны между собою. Если же при исключении x^a y не пропадает, то это значит, что по крайней мере один из этих $\int$-лов неверен.

Дифференциальные ур-ия 1-ой степени и 1-го порядка.

В таком ур-ии производная $\frac{dy}{dx}$ входит только в 1-ой степени. Общий вид такого ур-ия есть: $M + N\frac{dy}{dx} = 0$ или $Mdx + Ndy = 0$, где M и N суть некоторые ф-ии x^a и y^a. Существует несколько случаев, в которых такое ур-ие можно $\int$-ать. Разсмотрим их:

1). Отделение переменных. Если д-е ур-ие можно привести к такому виду, что M, т.е. коэффициент при dx, будет ф-ией одного только x, а N – коэффициент при dy – ф-ией одного только y, то тогда говорят, что в ур-ии переменные отделены и $\int$-ие совершается непосредственно, т.е. прямо приводится к квадратурам. Действительно, пусть $M = f(x)$, а $N = \varphi(y)$ и тогда ур-ие будет: $f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0$. Здесь в 1-ой части стоит д-ал 2-ой $\int$-лов (от разных 2 $\int$-лов). Именно $\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C$ и так как этот д-ал = 0, то эта сумма функций будет равна постоянному произвольному, поэтому: $\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C$. Это равенство и будет общим интегралом данного д-ого ур-ия. Так, если написать ур-ие: $\frac{dx}{1+x} + \frac{dy}{1+y} = 0$, то здесь переменные отделены

и $\int$-ем его будетъ: $l(1+x)+l(1+y)=C$ или $l\{(1+x)\cdot(1+y)\}=C$ или $(1+x)(1+y)=e^C$. Можно положить $e^C=C'$ и тогда общій $\int$-ем представится въ видѣ: $(1+x)(1+y)=C'$.

Иногда въ ур-іи перемѣнныя не отдѣлены, но достаточно нѣсколько умѣть написать это ур-іе, чтобы перемѣнныя явились въ немъ отдѣленными. Такъ, положимъ, что намъ дано такое ур-іе: $Xy\,dx+X'Y'dy=0$, въ которомъ множителями X и X' суть ф-іи одного только x, Y и Y' суть функціи одного только y. Тогда раздѣливъ это ур-іе на $x'y$, мы получимъ: $\frac{X dx}{x'}+\frac{Y'}{Y}dy=0$. Здѣсь перемѣнныя отдѣлены и общій $\int$-ем этого ур-ія будетъ:

$$\int\frac{X}{x'}dx+\int\frac{Y'}{Y}dy=C.$$

Примѣръ. Дано ур-іе $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$. Раздѣливъ это ур-іе на $\sqrt{(1-y^2)}\cdot\sqrt{(1-x^2)}$, получимъ: $\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$ и его общій $\int$-ем будетъ:

$$-\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}=C.$$

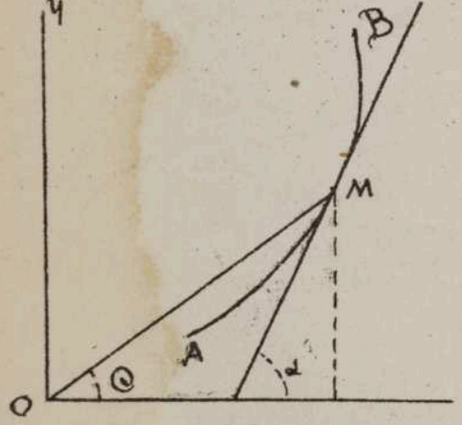
2). Ур-іе однородное. Если въ д-емъ ур-іи $M\,dx+N\,dy=0$ коэффиціенты M и N суть однородныя функціи x и y одинаковаго измѣренія, то въ этомъ ур-іи всегда можно отдѣлить перемѣнныя, введя новую перемѣнную вмѣсто y. Положимъ, что M и N суть однородныя ф-іи $n^{го}$ измѣренія относительно x и y. Тогда выставивъ множителемъ x^n, мы представимъ эти функціи въ такомъ видѣ: $M=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и $N=x^n\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, слѣд. данное ур-іе будетъ: $x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+x^n\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$ или $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$. Введемъ новое перемѣнное, полагая $\frac{y}{x}=v$ или $y=vx$ и, исключая y, бу-

если ввести $dy = v\,dx + x\,dv$ и ур-ие будет: $\varphi(v)\,dx + \psi(v)\{v\,dx + x\,dv\} = 0$ или $[\varphi(v) + v\,\psi(v)]\,dx + x\,\psi(v)\,dv = 0$ или напишем так: $\frac{dx}{x} + \frac{\psi(v)\,dv}{\varphi(v) + v\psi(v)} = 0$.

В этом ур-ии переменные разделены и оно интегрируется сразу в квадратурах, получаем: $l(x) + \int \frac{\psi(v)\,dv}{\varphi(v) + v\psi(v)} = C$. Когда будет найдена эта квадратура, то мы получим ур-ие такого вида: $F(v, x) = C$, вставив в которое $v = \frac{y}{x}$, получим: $F(x, \frac{y}{x}) = C$. Это и будет общий $\int$-л.

Пример. Найти такую кривую, в каждой точке которой касательная составляет с осью Ox угол вдвое больший угла, образуемого радиусом вектором с осью Ox.

Пусть AB есть требуемая кривая и M произвольная на ней точка. OM - радиус вектор; он образует $\angle MOx = \varphi$. Проведем касательную; $\angle$ ея с $Ox = 2\varphi$. По требованию задачи должно быть: $2 = 2\varphi$, откуда $\operatorname{tg} 2 = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}$, но $\operatorname{tg} 2 = \frac{dy}{dx}$, а $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{y}$ (*); вставив, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ или

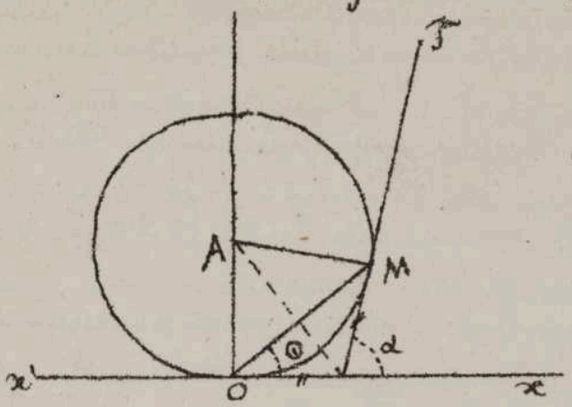


$2xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$. Это есть однородное d-ое ур-ие; его $\int$-ание укажем нам, какая кривая, обладает данным свойством; полагаем $y = vx$ и $dy = v\,dx + x\,dv$.

Вставляя, получим $2x^2 v\,dx + x^2(v^2 - 1)\{v\,dx + x\,dv\} = 0$ или $(2v + v^3 - v)\,dx + x(v^2 - 1)\,dv = 0$ или $\frac{dx}{x} + \frac{v^2 - 1}{v^3 + v}\,dv = 0$. $\int$-уя, получим $lx + \int \frac{v^2 - 1}{v^3 + v}\,dv = C$; $\frac{v^2 - 1}{v^3 + v} = \frac{A}{v} + \frac{Bv + C}{v^2 + 1}$ .... $v^2 - 1 = (A + B)v^2 + Cv + A$: $A + B = 1$, $C = 0$, $A = -1$, отсюда $B = 2$ и $\frac{v^2 - 1}{v^3 + v} = -\frac{1}{v} + \frac{2v}{v^2 + 1}$; $lx = -\int \frac{dv}{v} + \int \frac{2v\,dv}{v^2 + 1} = C$;

(*), а $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

$lx - lv + l(v^2+1) = C$, откуда $l\frac{x(v^2+1)}{v} = C$ и $\frac{x(v^2+1)}{v} = e^C = C'$. Положим $v = \frac{y}{x}$, вставив, получим $x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\frac{x}{y} = C'$ или $\frac{y^2+x^2}{y} = C'$, или $x^2+y^2-C'y = 0$.



Это есть ур-ие некоторой кривой. Узнаем круг, проходящий через начало координат, центр. которого на оси y-ов. Действительно $x^2+(y-\frac{C'}{2})^2 = \frac{C'^2}{4}$. Будем иметь $ОА = \frac{C'}{2}$. Из чертежа видно, что $\alpha = 2\alpha$. Наше вычисление доказывает кроме того, что никакая другая кривая не обладает требуемым свойством, кроме найденного круга.

Уравнение, приводимое к однородному.

Это ур-ие следующее: $(ax+by+c)dx + (a'x+b'y+c')dy = 0$. Введем новые переменные, положив: $x = x'-\alpha$, $y = y'-\beta$, где α и β пока произвольные постоянные количества, тогда $dx = dx'$ и $dy = dy'$ и, вставив, получим: $(ax'+by'+c-a\alpha-b\beta)dx' + (a'x'+b'y'+c'-a'\alpha-b'\beta)dy' = 0$; определим неизвестные α и β так, чтобы было $a'\alpha+b'\beta = c'$ и $a\alpha+b\beta = c$, т.е. найдем α и β из этих 2-ух, тогда d-ое ур-ие будет: $(ax'+by')dx' + (a'x'+b'y')dy' = 0$ и это новое ур-ие будет уже однородно относительно x' и y', так что его можно $\int$-ать, положив $y' = vx'$.

Уравнение линейное.

Так называется d-ое ур-ие, в котором y и $\frac{dy}{dx}$ входят только в первой степени. Это ур-ие имеет вид: $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, где P и Q суть функции одного только x-а. Положим $y = uz$, где u и z бу-

чуть неизвестная функция x одного только. Ее также одну можно взять произвольно. Вставив, получим: $u\cdot\frac{dz}{dx}+z\cdot\frac{du}{dx}+Puz=Q$ или $u\cdot\frac{dz}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)z=Q$. Для и возьмем такое выражение, чтобы было $\frac{du}{dx}+Pu=0$. Из этого равенства можно будет определить и. Действительно, имеем $\frac{du}{u}=-Pdx$ и, $\int$-я, получим $\ln u=-\int Pdx$ и $u=e^{-\int Pdx}$. Таким образом и будет известно и при таком значении будет: $u\cdot\frac{dz}{dx}=Q$ или $e^{-\int Pdx}\cdot\frac{dz}{dx}=Q$, откуда $\frac{dz}{dx}=Qe^{+\int Pdx}$, а отсюда, $\int$-я, получим $z=C+\int Qe^{\int Pdx}dx$, где C есть произвольное постоянное. Значит получается искомая функция: $y=e^{-\int Pdx}\left(C+\int Qe^{+\int Pdx}dx\right)$. Это формула дает общий $\int$ линейного ур-ия. Он получился, выполнив указанную здесь квадратуру.

Уравнение Бернулли

Так называется д-е ур-ие следующего вида: $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$, где P и Q суть функции одного x, а n произвольный показатель. Это ур-ие приводится к линейному. Разделив его на y^n, будем иметь: $y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q$. Положим $y^{1-n}=z$, откуда, дифференцируя, получим: $(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$ и, вставив, получим: $\frac{1}{1-n}\cdot\frac{dz}{dx}+Pz=Q$; $\frac{dz}{dx}+(1-n)Pz=(1-n)Q$. Это ур-ие относительно z есть линейное и $\int$-ем его по полученному нами формулами будет: $e^{-(1-n)\int Pdx}\left[C+(1-n)\int Qe^{(1-n)\int Pdx}dx\right]$ или вставив вместо z его выражение, будем иметь: $y^{1-n}=e^{-(1-n)\int Pdx}\left[C+(1-n)\int Qe^{(1-n)\int Pdx}dx\right]$; это есть общий $\int$-ем ур-ия Бернулли.

Полный дифференциальный ур-ия 1го порядка.

Возьмем ур-ие: $M+N\frac{dy}{dx}=0$ или $Mdx+Ndy=0$. Может случ-

ся, что 1ая часть этого ур-ия будет представлять полный дифференциал некоторой функции двух переменных x и y, т.е. будет иметь тождество: $M\,dx + N\,dy = du = df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, где $u = f(x,y)$ и есть некоторая извлекаемая функция x и y. Выполнение этого ур-ия называется полным d-ым ур-ием и его ∫-ем посредственно, если функция u извлекаема. Физически, тогда наше ур-ие будет $df(x,y) = 0$ и следовательно будем иметь: $f(x,y) = C$, где C есть произвольное постоянное. Равенство это и будет общим ∫-ем данного дифференциального ур-ия. Теперь предположим такой вопрос: дано d-е ур-ие: $M\,dx + N\,dy = 0$; требуется узнать, не есть-ли это полное d-е ур-ие и если есть, то как найти его общий ∫-ем? Если 1ая часть ур-ия есть полный дифференциал функции $f(x,y)$, то должно иметь тождество: $M\,dx + N\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, следовательно $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ и $N = \frac{\partial f}{\partial y}$. Дифференцировав 1ое равенство по y, второе по x, получим: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, следовательно должно иметь: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ и это равенство есть необходимое условие, которое должно быть соблюдено для того, чтобы ур-ие могло быть полным d-ым ур-ием. Допустим, что это условие выполнено и будем искать функцию u, полный d-ой которой = 1ой части нашего d-го ур-ия. Полагая $f(x,y) = u$ должно иметь $\frac{du}{dx} = M$. (*) Здесь в 1ой части равенства стоит частная производная по x. Следовательно при дифференцировании по x y рассматривалось, как постоянное. ∫-ем по x, получим $u = \int M\,dx + C'$. Здесь при

(*) далее не различаем ∂ и d

$\int$-ие у должно быть также рассматриваемо, как постоянное количество. С есть постоянное количество по отношению к x, но оно может зависеть от y. Поэтому должны положить $c=\varphi(y)$, где φ есть неизвестная нами функция и написать $u=\int M dx+\varphi(y)$. Надо определить $\varphi(y)$. Для этих целей возьмем производную по y, получим: $\frac{du}{dy}=\frac{d\int M dx}{dy}+\varphi'(y)$, но $\frac{du}{dy}=N$; сравнивая, найдем: $\varphi'(y)=N-\frac{d\int M dx}{dy}$; в этом равенстве 1-я часть есть функция одного y, следовательно и 2-ая часть не должна содержать x, но сейчас там x входит в M и N. Поэтому, необходимо убедиться в том, что действительно 2-ая часть не содержит x. Если она не содержит x, то ее производная по x должна быть $=0$. Найдем эту производную. Получим: $\frac{dN}{dx}-\frac{d^2\int M dx}{dy\,dx}$; или, переставив порядок дифференцирования, получим: $\frac{dN}{dx}-\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}\int M dx$ или $\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}$, но эта разность действительно $=0$, если только выполнено условие $\frac{dN}{dx}=\frac{dM}{dy}$ полная дифференциала, которое мы предполагаем выполненным. Итак 2-ая часть, которую мы рассматриваем, действительно не зависит от x. Возвратимся к ур-ию $\varphi'(y)=N-\frac{d\int M dx}{dy}$ и умножив обе части на dy и $\int$-уя получим: $\int\varphi'(y)dy=\varphi(y)=\int\left(N-\frac{d\int M dx}{dy}\right)dy$, сделав вычисление, мы получим функцию $\varphi(y)$. Заметим будем иметь, что искомая функция будет: $u=\int M dx+\int\left(N-\frac{d\int M dx}{dy}\right)dy$. Теперь функция u известна и наше ур-ие можно написать в виде: $du=0$. Его $\int$-ие будет $u=C$, т.е. $\int M dx+\int\left(N-\frac{d\int M dx}{dy}\right)dy=C$; — это есть общий $\int$ полного д-го ур-ия.

Об интегральном факторе.

Если данное д-е ур-ія $Mdx+Ndy=0$ не есть полный дифференциальное, так что $\frac{dM}{dx} \neq \frac{dN}{dy}$ (*), то всегда по смыслу Эйлера можно указать такой множитель ν, который, будучи введен в данное д-е ур-ія, заставил-бы его полным д-ным ур-ием, так что новое ур-ія: $\nu Mdx+\nu Ndy=0$ было-бы полным дифференціальным ур-ієм. Этот множитель будет вообще функція x и y. Он называется интегральным фактором и можно доказать, что такой фактор для данного ур-ія всегда существует. Докажем, что интегральный фактор существует для всякого данного дифференціальнаго ур-ія.

Пусть данное д-е ур-ія есть: $Mdx+Ndy=0$. Оно имеет общій интеграл. Решив этот f относительно произвольнаго постояннаго, или представивши его в виде: $f(x,y)=C$. Дифференцируя находим: $\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ и отсюда $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$, а изъ данного д-го ур-ія имеем: $\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}$. Эти два выражения должны быть тождественны, т.е. должно быть: $\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}=\frac{M}{N}$ или $\frac{\frac{df}{dx}}{M}=\frac{\frac{df}{dy}}{N}$; это отношение не может быть $=1$, поэтому можем написать $\frac{df}{dx}=M$ и $\frac{df}{dy}=N$, т.е. данное ур-ія было-бы полным д-ным, если-бы отношение было вообще функція некоторая x и y. Пусть эта функція будет v, так $v=\varphi(x,y)$; тогда $\frac{df}{dx}=vM$; $\frac{df}{dy}=vN$. Умноживши 1-е равенство на dx, второе на dy и сложивши, получим: $\frac{df}{dx}\cdot dx+\frac{df}{dy}\cdot dy=Mv\,dx+Nv\,dy$. Здесь

(*) $\frac{dM}{dy} \neq \frac{dN}{dx}$.

ьго 1ой части стоит полный d-ал, именно: $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = d f(x,y) =$ $= du$, где $u = f(x,y)$, следовательно будем иметь: $\nu M dx + \nu N dy = du$, т.е. Ведем фактора ν сделать 1ую часть нашего урия полным d-ом, - следовательно интегрирующий фактор существует. Легко показать, что интегрирующий фактор существует не один, но что их бесчисленное множество. Действительно возьмем произвольную функцию $\varphi(u)$ и умножим обе части последнего равенства на $\varphi(u)$: $\nu\varphi(u)[M dx + N dy] = \varphi(u) du$ или $= \varphi(u)\frac{du}{dx}dx + \varphi(u)\frac{du}{dy}dy$. Но легко повторить, что во второй части этого получается снова полный d-ал. В самом деле по условию полного d-ла должно Быть: $\frac{d}{dy}\left[\varphi(u)\frac{du}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\varphi(u)\frac{du}{dy}\right]$ или $\varphi(u)\frac{d^2u}{dxdy} + \varphi'(u)\cdot\frac{du}{dy}\cdot\frac{du}{dx} =$ $\varphi(u)\frac{d^2u}{dxdy} + \varphi'(u)\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{du}{dy}$, а это последнее очевидно, следовательно выражение: $\nu\varphi(u)(M dx + N dy)$ есть полный d-ал и следовательно произведение $\nu\varphi(u)$ есть интегрирующий фактор для выражения $M dx + N dy$ и так как функция φ произвольна, то факторов существует бесчисленное множество. Найти фактор данного d-го урия если задача в общем виде неразрешима. К счастью к нам приводится она задача.

Будем фактор будет ν и урие $\nu M dx + \nu N dy = 0$ есть полный d-ал; тогда должно быть: $\frac{d(\nu M)}{dy} = \frac{d(\nu N)}{dx}$ или $\nu\frac{dM}{dy} + M\frac{d\nu}{dy} = \nu\frac{dN}{dx} + N\frac{d\nu}{dx}$, из этого урия следует определить ν, но ν есть функция двух переменных x и y и в это урие входят кроме ν частные производные $\frac{d\nu}{dx}$ и $\frac{d\nu}{dy}$; чтобы определить ν, надо взять интеграл

(*) пропущено множитель dx.

ровать ими ур-ия с частными производными. Эта задача более трудная, чем нахождение общего d-го ур-ия; иногда общего решения для определения не существует. Таким образом указание на интегрирующий фактор имеет существенно только теоретическое значение.

Дифференциальные ур-ия 1го порядка, но высших степеней.

Между такими ур-иями весьма мало таких, которые могут быть объинтегрированы. Укажем на некоторые частные случаи:

1) Дифференциальное ур-ие содержит только $\frac{dy}{dx}$, но не содержит ни x, ни y. Тогда полагая, что это ур-ие алгебраическое n-ой степени, его будем писать вид: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + A_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + A_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \dots + A_n = 0$, где коэффициенты $A_1, A_2, \dots A_n$ суть количества постоянные.

Положим, что это ур-ие имеет извъестные нам корни: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$, которые суть постоянные количества. Разложив 1ую часть на множители, будем иметь: $\left(\frac{dy}{dx} - a_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - a_2\right) \dots \left(\frac{dy}{dx} - a_n\right) = 0$. Удовлетворить такому ур-ию можно, полагая каждый из множителей равным 0, т.е. полагая: $\frac{dy}{dx} - a_1 = 0$; $\frac{dy}{dx} - a_2 = 0 \dots$ $\frac{dy}{dx} - a_n = 0$ или $dy = a_1 dx$, $dy = a_2 dx \dots dy = a_n dx$ или имеем n дифференциальных ур-ий 1ой степени. Их интегралы будут: $y = a_1 x + C_1$, $y = a_2 x + C_2$, $\dots$ $y = a_n x + C_n$ или $y - a_1 x - C_1 = 0$, $y - a_2 x - C_2 = 0$ $\dots$ $y - a_n x - C_n = 0$, где $C_1, C_2 \dots C_n$ суть произвольные постоянные. Можно всю эту ур-ия соединить в одно, взяв их произве-

дем, получимъ: $(y-ax-c_1)(y-a_2x-c_2)\dots(y-a_nx-c_n)=0$, поэтому это ур-е можетъ разложиться на предыдущія n ур-ій. Наконецъ замѣтимъ, что, не ограничивая общности рѣшенія, можно полагать въ послѣднемъ ур-іи произвольныя постоянныя равными и обозначить ихъ одною буквою, напр. $c_1=c_2\dots c_n=c$ и написать:

$(y-a_1x-c)(y-a_2x-c)\dots(y-a_nx-c)=0$, поэтому это ур-е разложится на n опредѣленныхъ ур-ій, напримѣръ $y-a_1x-c=0$, $y-a_2x-c=0\dots$ $y-a_nx-c=0$, изъ которыхъ каждое очевидно будетъ ∫-емъ даннаго ур-ія; и такъ какъ эти ур-ія разсматриваются отдѣльно, то въ каждомъ изъ нихъ произвольное постоянное можетъ получить безразличныя значенія и слѣдовательно общность рѣшенія не увеличится, если эти постоянныя будутъ обозначены разными буквами.

Общій ∫-ль ур-ія можно представить въ слѣдующемъ видѣ, разложивъ его на $x^n=x\cdot x\dots x$ (n разъ)$\cdot\left(\frac{y-c}{x}-a_1\right)\left(\frac{y-c}{x}-a_2\right)\dots\left(\frac{y-c}{x}-a_n\right)=0$, тогда увидимъ что общій интегралъ получится изъ даннаго д-го ур-ія черезъ замѣну въ немъ $\frac{dy}{dx}$ черезъ $\frac{y-c}{x}$. Всѣдствіе этого общій ∫-ль можно написать прямо въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^n+A_1\left(\frac{y-c}{x}\right)^{n-1}+A_2\left(\frac{y-c}{x}\right)^{n-2}+\dots+A_n=0.$$

2). Дифференціальное ур-іе содержитъ только $\frac{dy}{dx}$ и x, но не содержитъ y. Пусть это ур-іе будетъ: $F\left(x,\frac{dy}{dx}\right)=0$; тогда, если отсюда можно вывести $\frac{dy}{dx}$, то получимъ $\frac{dy}{dx}=f(x)$ и затѣмъ $y=\int f(x)dx+C$. Если же изъ ур-ія нельзя вывести $\frac{dy}{dx}$, но можно рѣшить относительно x, то получимъ $x=f\left(\frac{dy}{dx}\right)$; пусть $\frac{dy}{dx}=p$.

тогда будемъ имѣть $x = f(p)$; одифференцировавъ это ур-іе, найдемъ $dx = f'(p)\,dp$ и, $\int$-ая, напишемъ: $y = C + \int p f'(p)\,dp$. Выполнивъ квадратуру, получимъ: $y = \varphi(C, p)$; присоединивъ къ этому ур-ію данное d-е, т.е $F(x,p) = 0$, исключимъ изъ нихъ p; тогда получимъ ур-іе $\psi(x,y,C) = 0$ это есть общій $\int$-лъ, такъ какъ это имѣетъ зависимость между x, y, C.

3) Дифференціальное ур-іе содержитъ y и $\frac{dy}{dx}$, но не содержитъ x. Пусть это ур-іе: $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ и положимъ опять $\frac{dy}{dx} = p$, тогда $F(y,p) = 0$. Если это ур-іе можно рѣшить относительно p, то изъ него выведемъ: $p = \frac{dy}{dx} = f(y)$; $dx = \frac{dy}{f(y)}$. $\int$-ая получимъ: $x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$. Выполнивъ квадратуру будемъ имѣть общій интегралъ.

Если же данное ур-іе нельзя рѣшить относительно p, но можно относительно y, то получимъ изъ него $y = f(p)$; d-уя найдемъ: $dy = f'(p)\,dp$. Но $dy = p\,dx = f'(p)\,dp$; $dx = \frac{f'(p)}{p}dp$. $\int$-ая, получимъ, что $x = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C$. Выполнивъ квадратуру, получимъ $x = \varphi(p, C)$. Присоединивъ къ этому ур-ію данное $F(y,p) = 0$ и, исключивъ изъ нихъ p, получимъ $\psi(x,y,C) = 0$. Это будетъ общій $\int$-лъ, ибо онъ выражаетъ зависимость между x, y и C.

4). Дифференціальное ур-іе содержитъ $\frac{dy}{dx}, x, y$, но x и y входятъ только въ первыхъ степеняхъ. Такое ур-іе приводится къ виду, рѣшенному относительно y: $y = x f(p) + \varphi(p)$, гдѣ f и φ произвольныя функціи. Дифференцируя получимъ: $dy = x f'(p)\,dp + f(p)\,dx + \varphi'(p)\,dp$. Но опять $dy = p\,dx$; сливая и перенося члены получимъ: $[p - f(p)]\,dx - x f'(p)\,dp = \varphi'(p)\,dp$ или $\left(\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x\right) = \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)}$.

(*) по раздѣленіи на $dp[p - f(p)]$

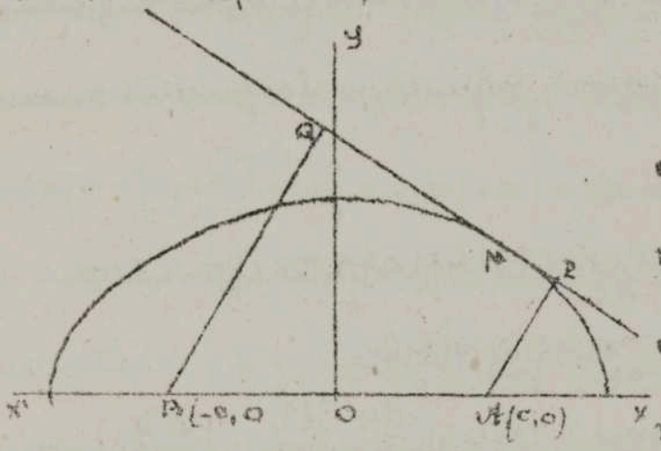
Это есть дифференциальное ур-ие между переменными x и p. Если рассматривать x как функцию p, то это ур-ие относительно x будет линейное 1го порядка и следовательно в сущности можно найти его общий ∫-л; получим, что имеет ∫-л будет: $\varphi(x,p,C)=0$. Присоединим к нему данное d-ое ур-ие, т.е $y=xf(p)+\varphi(p)$ и из этих 2 ур-ий исключим p, получим ур-ие $\varphi(x,y,C)=0$. Это будет общий ∫-л.

Рассмотрим частный случай, когда $f(p)=p$ и напишем ур-ие: $y=px+\varphi(p)$. Это ур-ие называется уравнением Клеро.

Предыдущее вычисление не применяется к нему непосредственно, потому что у него в знаменателе входила разность $f(p)-p$, которая теперь $=0$. Но ур-ие Клеро интегрируется все таки уже приемом. Дифференцируя его, получим: $dy=pdx+xdp+\varphi'(p)dp=pdx$, или получим $dy=pdx$. Сократив на pdx, будем иметь: $[x+\varphi'(p)]dp=0$. Удовлетворить этому равенству можно двояко или 1) положить $dp=0$, тогда будем иметь $p=c$ – произвольному постоянному, следовательно $y=cx+\varphi(c)$. Это будет общий интеграл. Но можно иначе удовлетворить: 2) полагая $x+\varphi'(p)=0$, откуда выведем $p=\Theta x$ (допустим) и, вставив, получим: $y=x\Theta(x)+\varphi[\Theta(x)]$. Это есть также решение данного d-го ур-ия, но это решение представляет замечательную особенность. Именно, ур-ие это не содержит произвольного постоянного C и оно не есть частный ∫-л, ибо его нельзя получить из общего ∫-ла, приписывая C какое-либо частное значение.

В какого рода решения, которое не содержится в произвольного постоянного и не есть частный ∫-ся называется особым решением д-го ур-ия. Мы здесь встречались с первым примером такого решения. Это особое решение имеет особое геометрическое значение. Именно, можно доказать, что оно представляет огибающую линию прямых линий, выражающих интеграл.

Задача. Найти кривую линию, обладающую таким свойством, что произведение двух перпендикуляров, опущенных из двух постоянных точек A и B на произвольную касательную этой кривой, было бы постоянно и равнялось b^2.



Построим $AB=2c$. Возьмем начало O в середине AB: $OA=OB=c$. Линия OA ось x-ов и $\perp$ oy – ось y-ов. Пусть M произвольная точка с координатами (x,y). Проведем касательную. Опустим $\perp$ Ap и BQ. Формула гласит: $Ap \cdot BQ = b^2$. Возьмем ур-ие касательной: $Y-y=p(X-x)$. Тогда по известной формуле расстояние от точки $A(c,0)$ до этой прямой будет: $Y-y-p(X-x)=0$,

$Ap = \frac{-y-p(c-x)}{\sqrt{1+p^2}} = -\frac{y-px+pc}{\sqrt{1+p^2}}$. По этой же формуле расстояние от точки $B(-c,0)$: $BQ = \frac{-y-p(-c-x)}{\sqrt{1+p^2}} = -\frac{y-px-pc}{\sqrt{1+p^2}}$. Возьмем произведение $Ap \cdot BQ = \frac{(y-px)^2-p^2c^2}{1+p^2} = b^2$. Это есть д-е ур-ие задачи; из него получим: $y = px + \sqrt{b^2(1+p^2)+p^2c^2}$ или $y = px + \sqrt{b^2+(b^2+c^2)p^2}$. Положим, что $b^2+c^2=a^2$; напишем $y = px + \sqrt{b^2+a^2p^2}$. Это есть ур-ие Клеро.

Дифференцируем по x: $dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp + \frac{a^2 p\,dp}{\sqrt{b^2+a^2p^2}} = \left[x + \frac{a^2 p}{\sqrt{p^2a^2+b^2}}\right]dp = 0$.

Если положить $dp=0$, то $p=C$ и будем иметь: $y = cx + \sqrt{b^2+a^2c^2}$.

Это есть общий интеграл. А если положить $x + \frac{a^2p}{\sqrt{b^2+a^2p^2}} = 0$, то выйдет $x + \frac{a^2p}{\sqrt{b^2+a^2p^2}} = 0$, $b^2x^2 + a^2p^2x^2 = a^4p^2$, $p^2\{a^4 - a^2x^2\} = b^2x^2$; $p^2 = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}$, $p = \pm \frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$. Соответственно чертежу при $x>0$, имеем $p<0$, поэтому принимаем $p = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$. Вставив, получим особое решение:

$y = -\frac{bx^2}{a\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2-x^2}}$; $y = -\frac{bx^2+a^2b}{a\sqrt{a^2-x^2}} = +\frac{b}{a}\frac{[a^2-x^2]}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Это ур-ие представляет эллипс, у которого A и B суть фокусы. Следовательно искомая кривая, обладающая требуемым свойством есть эллипс. На этом примере можно видеть, что иногда особое решение представляет большую выгодность, чем общий интеграл.

О дифференциальных ур-иях высших порядков.

Общий вид n-ого ур-ия $n^{\text{ого}}$ порядка: $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$.

Прежде всего докажем, что такое ур-ие всегда имеет общий интеграл. Решив его относительно высшей производной, получим: $\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$. Какими образом здесь производная $n^{\text{ого}}$ порядка выражена в функции x, y и первых $(n-1)$ производных у нас. Легко показать, что и все производные высших порядков могут быть найдены в функции тех-же количеств. Действительно, дифференцировав это равенство n раз, мы получим $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ в функции $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}$. Но во второй час-

ти выписано производной $\frac{d^n y}{dx^n}$ можно будет выписать выражение из предыдущего равенства и тогда: $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$.

Заметим, если это равенство снова продифференцировать по x и снять во второй части вместо $\frac{d^n y}{dx^n}$ поставить его выражение по первому равенству, то найдем: $\frac{d^{n+2} y}{dx^{n+2}} = f_2\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}\right]$ и т. д. Для всех производных высших порядков найдем подобная выражения. Займемся обращением к доказательству существования f_n. Если этот f_n есть существует и есть $y = \varphi(x)$, то как всякая функция x, она сможет быть представлена рядом Тейлора. Взяв для x какое-нибудь произвольное значение x_0, мы сможем найти ряд. Как видели раньше, напишем ряд:

$$\varphi(x) = \varphi\left[x_0 + \overbrace{(x - x_0)}^{\text{прираш.}}\right] = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \varphi'''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

и можно принять, что мы x_0 выбрали так, чтобы все координаты $\varphi(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $\varphi''(x_0)$ имели величины конечные, тогда ряд будет непременно существовать и будет сходящимся по крайней мере при значениях x весьма близких к x_0.

Положим в нашей формуле $\varphi(x) = y$, но прибегнем по-ей составить наш интеграл. Здесь во первых, нам надо будет знать $\varphi(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, $\varphi''(x_0)$ ... т. е. значения y и его производных при $x = x_0$, а сможем только определить производную $n^{\text{го}}$ порядка по-

средством x, y и $(n-1)$ первых производных. Сильдовательно значения y и производных: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ при $x=x_0$ могут быть назначены совершенно произвольно и мы полагаем, что при $x=x_0$, будет иметь: $y=y_0=b$, $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=b'$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=b''\dots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0=b^{(n-1)}$, т.е. значения y и его $(n-1)$ производных при $x=x_0$.

Когда эти количества назначены, тогда все производные высших порядков при $x=x_0$ будут уже вполне определены. Именно, будем иметь: $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0=f\left(x_0, b, b', b''\dots b^{(n-1)}\right)$; $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=f_1\left(x_0, b, b', b''\dots b^{(n)}\right)$, $\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}=f_2\left(x_0, b, b', b''\dots b^{(n+1)}\right)$ и т.д. и тогда наш ряд легко будет нами составить. Он будет иметь следующий вид: $y=b+b'(x-x_0)+\frac{b''(x-x_0)^2}{1\cdot 2}+\dots+\frac{b^{(n-1)}(x-x_0)^{n-1}}{1\cdot 2\dots(n-1)}+f\left(x_0, b, \dots b^{(n-1)}\right)\frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\dots n}$ $+f_1\left(x_0, b, b', \dots b^{(n)}\right)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{1\cdot 2\dots(n+1)}+\dots$

Мы получили бесконечный ряд; во второй части его входят последовательно производных последовательных количеств: $b, b', b''\dots b^{(n-1)}$ и легко повторить, что этот ряд действительно удовлетворяет данному d-ому ур-ию. Въ самом деле, дифференцировав это ур-ие n разъ подрядъ, получимъ: $\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x_0, b, b'\dots b^{(n-1)}\right)+f_1\left(x_0, b\dots b^{(n)}\right)(x-x_0)$ $+f_2\left(x_0, b, b', b''\dots b^{(n+1)}\right)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}+\dots$ Разсматривая вторую часть мы замѣтимъ, что она представляетъ ничто иное, какъ разложеніе функціи $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}}\right)$ по строкѣ Тейлора въ рядъ, расположенный по степенямъ $(x-x_0)$. Сильдовательно вторую часть можно замѣнить этою функціею и наше ур-ие будетъ: $\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, т.е. тому n d-ой нашего ряда,

мы получимъ данное d-ое ур-ie. Слѣдовательно этотъ рядъ удовлетворяетъ данному d-ому ур-ію и представляетъ его общій ∫-лъ. И такимъ образомъ мы доказали, что общій интегралъ дифференціальнаго ур-ія $n^{\text{аго}}$ порядка всегда существуетъ.

Интегралъ даннаго ур-ія должно представлять такую зависимость между x и y, при которой для данныхъ значеній $x = x_0$ можно было-бы найти y и всѣ его (n-1) первыхъ производныхъ назначать совершенно произвольныя величины. Чтобы удовлетворить такому требованію, необходимо, чтобы ∫ ур-ія, связывающее x и y, кромѣ x и y входили-бы и произвольныя величины или и произвольныя постоянныя, величинами которыхъ мы могли бы распоряжаться для того, чтобы удовлетворить такому требованію. Предположимъ же, что общій ∫ его имѣетъ видъ: $F(x, y, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0 \ldots (1)$, гдѣ $c_1, c_2 \ldots c_n$ суть произвольныя постоянныя. Всякое ур-іе черезъ d-ія должно приводить къ данному d-ому ур-ію. Дифференцируемъ это ур-іе n разъ подрядъ. Мы получимъ еще систему n ур-ій. Послѣ 1го d-нія $F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c_1, c_2 \ldots c_n\right) = 0$; послѣ 2го: $F_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, c_1, c_2 \ldots c_n\right) = 0 \ldots$ $F_{n-1}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, c_1, c_2 \ldots c_n\right) =$ = отъ n-ое d-ніе дастъ: $F_n\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}, c_1, c_2 \ldots c_n\right) = 0$.

Всего будемъ имѣть (n+1) ур-ій. Изъ нихъ можно исключить n произвольныхъ постоянныхъ: $c_1, c_2 \ldots c_n$ и тогда получимъ одно

ур-й, в которые войдут: $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ до $\frac{d^n y}{dx^n}$. Это ур-й и должно быть записано его данными d-ными ур-ми, такъ что, если посредствомъ d-ия исключить n произвольныхъ постоянныхъ изъ ур-я (1), то получается данное d-е, что и значитъ, что ур-е (1) есть общій интегралъ. Самое исключеніе произвольныхъ постоянныхъ можно представить себѣ слѣдующимъ образомъ. Мы возьмемъ сначала изъ первыхъ ур-й, т.е. $F=0$, $F_1=0$, $F_2=0, \ldots F_{n-1}=0$ и эти ур-я рѣшимъ относительно произвольныхъ постоянныхъ. Затѣмъ найденныя уже выраженія постоянныхъ вставимъ въ послѣдія ур-я, т.е. въ ур-е $F_n=0$. Тогда мы должны получить данное d-е ур-е. При этомъ требуется, чтобы рѣшеніе, найденное для произвольныхъ постоянныхъ: $c_1, c_2 \ldots c_n$ было-бы конечно, т.е. чтобы первыя n ур-й относительно произвольныхъ постоянныхъ были-бы совмѣстны. Если-же эти ур-я окажутся несовмѣстными, то изъ нихъ нельзя будетъ рѣшить и ур-е (1) не будетъ общимъ $\int$-ломъ. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ окажется, что нельзя будетъ назначить при $x=x_0$ совершенно произвольныхъ значеній для y и для его $(n-1)$ производныхъ. Нельзя наконецъ, что постоянныя произвольно получаютъ безконечныя значенія изъ значитъ ур-е (1) не будетъ общимъ $\int$-ломъ.

Изъ дифференціальныхъ ур-й наиболѣе заслуживаютъ вниманія

представляющія линейныя

Линейныя дифференціальныя уравненія высшихъ порядковъ.

Такъ называется ур-ія, въ которомъ ф-ія y и всѣ ея производныя входятъ только въ первыхъ степеняхъ. Общій видъ линейнаго ур-ія $n^{aго}$ порядка: $\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = X \dots (1)$, гдѣ коэффиціенты $X_1, X_2 \dots X_n$ и вторая часть X суть ф-ціи одного x. Мы докажемъ, что интегрированіе такого ур-ія со второю частью приводится къ интегрированію ур-ія съ той же первою частью, но у котораго вторая часть будетъ нуль, т.е. къ интегралу такого ур-ія: $\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + X_n y = 0 \dots (2)$.

Поэтому будемъ разсматривать предварительно ур-ie (2), т.е. линейное ур-ія безъ второй части. Докажемъ, во первыхъ, что если для ур-ія (2) найдено n частныхъ рѣшеній, то будетъ извѣстенъ и общій интегралъ (2) ур-ія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $y_1, y_2 \dots y_n$ суть частныя рѣшенія ур-ія (2), т.е. ф-ціи x^a, не содержащія произвольныхъ постоянныхъ и удовлетворяющія ур-ію (2). Въ этомъ случаѣ говоримъ, что слѣдующее удовлетворитъ ур-ію (2) также, именно $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$; гдѣ $C_1, C_2 \dots C_n$ будутъ произвольныя постоянныя. Дѣйствительно, вставимъ выраженіе это вмѣсто y въ ур-ie (2), тогда въ первой части получимъ:

$$\frac{d^n(C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)}{dx^n} + X_1 \cdot \frac{d^{n-1}(C_1 y_1 + \dots + C_n y_n)}{dx^{n-1}} + \dots + X_n (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n) =$$

$$= C_1 \left(\frac{d^n y_1}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y_1 \right) + \dots + C_n \left(\frac{d^n y_n}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \dots + X_n y_n \right) = 0$$

Но такъ какъ $y_1, y_2 \dots y_n$, будучи вставлены въ первую часть ур-ія

(2), обращающих его в нуль, но в последнем выражении каждая изъ скобокъ представляетъ нуль, и все выражение будетъ = 0. Такимъ образомъ мы видимъ, что фр-ція $C_1 u_1 + \dots + C_n u_n$ дѣйствительно удовлетворяетъ ур-ію (2). Примѣч., такъ какъ эта фр-ція содержитъ n произвольныхъ постоянныхъ $C_1, \dots C_n$, то, слѣдов., она есть общій интегралъ. На этомъ предположеніи основано

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія (2) есть $y = C_1 u_1 + \dots + C_n u_n$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{dy}{dx} = f(x)$ есть $y = \int f(x)\,dx + C$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ есть $y = \int dx \int f(x)\,dx + Cx + C'$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^3y}{dx^3} = f(x)$ есть $y = \int dx \int dx \int f(x)\,dx + \frac{Cx^2}{2} + C'x + C''$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ есть $y = \int dx \int dx \dots \int f(x)\,dx + \frac{Cx^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n-1)} + \frac{C'x^{n-2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n-2)} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ есть $y = Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = a$ есть $y = \frac{ax^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax + b$ есть $y = \frac{ax^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{bx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^2 + bx + c$ есть $y = \frac{ax^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{bx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{cx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^3 + bx^2 + cx + d$ есть $y = \frac{ax^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{bx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{cx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{dx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ есть $y = \frac{ax^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{bx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{cx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{dx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{ex^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ есть $y = \frac{ax^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{bx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{cx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{dx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{ex^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{fx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ есть $y = \frac{ax^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{bx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{cx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{dx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{ex^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{fx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{gx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$ есть $y = \frac{ax^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{bx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{cx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{dx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{ex^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{fx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{gx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{hx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + k$ есть $y = \frac{ax^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{bx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{cx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{dx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{ex^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{fx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{gx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{hx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{kx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^9 + bx^8 + cx^7 + dx^6 + ex^5 + fx^4 + gx^3 + hx^2 + kx + l$ есть $y = \frac{ax^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{bx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{cx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{dx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{ex^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{fx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{gx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{hx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{kx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{lx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + kx^2 + lx + m$ есть $y = \frac{ax^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{bx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{cx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{dx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{ex^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{fx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{gx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{hx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{kx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{lx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{mx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{11} + bx^{10} + cx^9 + dx^8 + ex^7 + fx^6 + gx^5 + hx^4 + kx^3 + lx^2 + mx + p$ есть $y = \frac{ax^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{bx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{cx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{dx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{ex^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{fx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{gx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{hx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{kx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{lx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{mx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{px^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{12} + bx^{11} + cx^{10} + dx^9 + ex^8 + fx^7 + gx^6 + hx^5 + kx^4 + lx^3 + mx^2 + px + q$ есть $y = \frac{ax^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{bx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{cx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{dx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{ex^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{fx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{gx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{hx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{kx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{lx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{mx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{px^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{qx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{13} + bx^{12} + cx^{11} + dx^{10} + ex^9 + fx^8 + gx^7 + hx^6 + kx^5 + lx^4 + mx^3 + px^2 + qx + r$ есть $y = \frac{ax^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{bx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{cx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{dx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{ex^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{fx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{gx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{hx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{kx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{lx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{mx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{px^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{qx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{rx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{14} + bx^{13} + cx^{12} + dx^{11} + ex^{10} + fx^9 + gx^8 + hx^7 + kx^6 + lx^5 + mx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ есть $y = \frac{ax^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{bx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{cx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{dx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{ex^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{fx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{gx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{hx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{kx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{lx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{mx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{px^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{qx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{rx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{sx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{15} + bx^{14} + cx^{13} + dx^{12} + ex^{11} + fx^{10} + gx^9 + hx^8 + kx^7 + lx^6 + mx^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ есть $y = \frac{ax^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{bx^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{cx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{dx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{ex^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{fx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{gx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{hx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{kx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{lx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{mx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{px^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{qx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{rx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{sx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{tx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{16} + bx^{15} + cx^{14} + dx^{13} + ex^{12} + fx^{11} + gx^{10} + hx^9 + kx^8 + lx^7 + mx^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u$ есть $y = \frac{ax^{n+16}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+16)} + \frac{bx^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{cx^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{dx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{ex^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{fx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{gx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{hx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{kx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{lx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{mx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{px^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{qx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{rx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{sx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{tx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{ux^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{17} + bx^{16} + cx^{15} + dx^{14} + ex^{13} + fx^{12} + gx^{11} + hx^{10} + kx^9 + lx^8 + mx^7 + px^6 + qx^5 + rx^4 + sx^3 + tx^2 + ux + v$ есть $y = \frac{ax^{n+17}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+17)} + \frac{bx^{n+16}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+16)} + \frac{cx^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{dx^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{ex^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{fx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{gx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{hx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{kx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{lx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{mx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{px^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{qx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{rx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{sx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{tx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{ux^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{vx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{18} + bx^{17} + cx^{16} + dx^{15} + ex^{14} + fx^{13} + gx^{12} + hx^{11} + kx^{10} + lx^9 + mx^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + ux^2 + vx + w$ есть $y = \frac{ax^{n+18}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+18)} + \frac{bx^{n+17}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+17)} + \frac{cx^{n+16}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+16)} + \frac{dx^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{ex^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{fx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{gx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{hx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{kx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{lx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{mx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{px^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{qx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{rx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{sx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{tx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{ux^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{vx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{wx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{19} + bx^{18} + cx^{17} + dx^{16} + ex^{15} + fx^{14} + gx^{13} + hx^{12} + kx^{11} + lx^{10} + mx^9 + px^8 + qx^7 + rx^6 + sx^5 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx + y$ есть $y = \frac{ax^{n+19}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+19)} + \frac{bx^{n+18}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+18)} + \frac{cx^{n+17}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+17)} + \frac{dx^{n+16}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+16)} + \frac{ex^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{fx^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{gx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{hx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{kx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{lx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{mx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{px^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{qx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{rx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{sx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{tx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{ux^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{vx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{wx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{yx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{20} + bx^{19} + cx^{18} + dx^{17} + ex^{16} + fx^{15} + gx^{14} + hx^{13} + kx^{12} + lx^{11} + mx^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + yx + z$ есть $y = \frac{ax^{n+20}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+20)} + \frac{bx^{n+19}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+19)} + \frac{cx^{n+18}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+18)} + \frac{dx^{n+17}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+17)} + \frac{ex^{n+16}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+16)} + \frac{fx^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{gx^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{hx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{kx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{lx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{mx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{px^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{qx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{rx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{sx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{tx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{ux^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{vx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{wx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{yx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{zx^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{21} + bx^{20} + cx^{19} + dx^{18} + ex^{17} + fx^{16} + gx^{15} + hx^{14} + kx^{13} + lx^{12} + mx^{11} + px^{10} + qx^9 + rx^8 + sx^7 + tx^6 + ux^5 + vx^4 + wx^3 + yx^2 + zx + \alpha$ есть $y = \frac{ax^{n+21}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+21)} + \frac{bx^{n+20}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+20)} + \frac{cx^{n+19}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+19)} + \frac{dx^{n+18}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+18)} + \frac{ex^{n+17}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+17)} + \frac{fx^{n+16}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+16)} + \frac{gx^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{hx^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{kx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{lx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{mx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{px^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{qx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{rx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{sx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{tx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{ux^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{vx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{wx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{yx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{zx^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{\alpha x^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{22} + bx^{21} + cx^{20} + dx^{19} + ex^{18} + fx^{17} + gx^{16} + hx^{15} + kx^{14} + lx^{13} + mx^{12} + px^{11} + qx^{10} + rx^9 + sx^8 + tx^7 + ux^6 + vx^5 + wx^4 + yx^3 + zx^2 + \alpha x + \beta$ есть $y = \frac{ax^{n+22}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+22)} + \frac{bx^{n+21}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+21)} + \frac{cx^{n+20}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+20)} + \frac{dx^{n+19}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+19)} + \frac{ex^{n+18}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+18)} + \frac{fx^{n+17}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+17)} + \frac{gx^{n+16}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+16)} + \frac{hx^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{kx^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{lx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{mx^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{px^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{qx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{rx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{sx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{tx^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{ux^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{vx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{wx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{yx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{zx^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{\alpha x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{\beta x^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{23} + bx^{22} + cx^{21} + dx^{20} + ex^{19} + fx^{18} + gx^{17} + hx^{16} + kx^{15} + lx^{14} + mx^{13} + px^{12} + qx^{11} + rx^{10} + sx^9 + tx^8 + ux^7 + vx^6 + wx^5 + yx^4 + zx^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ есть $y = \frac{ax^{n+23}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+23)} + \frac{bx^{n+22}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+22)} + \frac{cx^{n+21}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+21)} + \frac{dx^{n+20}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+20)} + \frac{ex^{n+19}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+19)} + \frac{fx^{n+18}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+18)} + \frac{gx^{n+17}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+17)} + \frac{hx^{n+16}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+16)} + \frac{kx^{n+15}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+15)} + \frac{lx^{n+14}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+14)} + \frac{mx^{n+13}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+13)} + \frac{px^{n+12}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+12)} + \frac{qx^{n+11}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+11)} + \frac{rx^{n+10}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+10)} + \frac{sx^{n+9}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+9)} + \frac{tx^{n+8}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+8)} + \frac{ux^{n+7}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+7)} + \frac{vx^{n+6}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+6)} + \frac{wx^{n+5}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+5)} + \frac{yx^{n+4}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+4)} + \frac{zx^{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+3)} + \frac{\alpha x^{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+2)} + \frac{\beta x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n+1)} + \frac{\gamma x^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + Cx^{n-1} + C'x^{n-2} + \dots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$.

Слѣдствіе. Общій интегралъ ур-ія $\frac{d^n y}{dx^n} = ax^{24} + bx^{23} + cx^{22} + dx^{21} + ex^{20} + fx^{19} + gx^{18} + hx^{17

вопить ур-ию (2'). Но положивъ $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$ мы получимъ ур-ie $n^{aго}$ степени, имѣющее n корней. Положимъ, что всѣ эти корни различны и пусть они будутъ: $x_1, x_2 \dots x_n$, тогда каждый изъ этихъ корней дастъ частное рѣшеніе ур-ія (2') и всего получимъ n слѣдующихъ частныхъ рѣшеній: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, $y_3 = e^{\lambda_3 x} \dots y_n = e^{\lambda_n x}$ и по предыдущей теоремѣ будетъ имѣть общій $\int$-ль ур-ia (2') въ слѣдующемъ видѣ: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$, въ которомъ $C_1, C_2 \dots C_n$ произвольныя постоянныя. Такимъ образомъ мы видимъ, что для полученія общаго $\int$-ла ур-ія (2') нужно только предварительно рѣшить ур-ie $f(\lambda) = 0$.

Примѣръ. Дано ур-ie $\frac{d^2y}{dx^2} - k^2 y = 0$. Въ этомъ случаѣ $f(\lambda) = \lambda^2 - k^2$. Рѣшимъ ур-ie $\lambda^2 - k^2 = 0$; находимъ $\lambda = \pm k$, т.е. $\lambda_1 = +k$, а $\lambda_2 = -k$; поэтому общій $\int$-ль будетъ: $y = C_1 e^{+kx} + C_2 e^{-kx}$.

Если между корнями ур-ія есть корни мнимые, то, если только всѣ n корней различны, та же самая формула дастъ общій $\int$-ль, но формула эта будетъ неудобна въ томъ отношеніи, что она будетъ осложнена мнимыми выраженіями.

Въ этомъ случаѣ общій $\int$-ль можно будетъ представить въ иномъ видѣ, при чемъ въ него не будетъ входить мнимости явнымъ образомъ.

Извѣстно, что мнимые корни всегда бываютъ сопряженными попарно. Пусть λ_1 и λ_2 есть пара мнимыхъ сопряженныхъ корней и $\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$. Вмѣсто 2 корней соотвѣтствующихъ членовъ

двух членов: $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, которая равна $= C_1 e^{\alpha x + \beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{\alpha x - \beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}\left(C_1 e^{\beta x\sqrt{-1}} + C_2 e^{-\beta x\sqrt{-1}}\right)$

$= $ по формуле Бернулли $= e^{\alpha x}\left[C_1(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - \sqrt{-1}\sin\beta x)\right]$

$= e^{\alpha x}\left[(C_1 + C_2)\cos\beta x + \sqrt{-1}(C_1 - C_2)\sin\beta x\right]$. Вместо произвольных постоянных введем новые произвольные постоянные, именно, положим: $C_1 + C_2 = C'$ и $\sqrt{-1}(C_1 - C_2) = C''$, где C' и C'' будут также некоторые постоянные, совершенно произвольные, действительные или мнимые. Тогда получим: $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}[C'\cos\beta x + C''\sin\beta x]$. Всякое выражение уже не входит мнимостью таким образом и общий интеграл будет: $y = e^{\alpha x}(C'\cos\beta x + C''\sin\beta x) + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$.

Это будет общий интеграл с n произвольными постоянными. Каждой паре мнимых сопряженных корней в общем $\int$-ле будет соответствовать подобное тригонометрическое выражение.

Пример: $\frac{d^2y}{dx^2} \pm k^2 y = 0$; здесь $f(\lambda) = \lambda^2 + k^2$; решим ур-е $k^2 + \lambda^2 = 0$

$\lambda = \pm k\sqrt{-1}$, здесь $\lambda_1 = +k\sqrt{-1}$, $\lambda_2 = -k\sqrt{-1}$, т.е. здесь $\alpha = 0$ и $\beta = k$. Общий $\int$-л будет: $y = C'\cos kx + C''\sin kx$.

Ур-е $f(\lambda) = 0$ называется характеристическим ур-ем для данного линейного ур-я с постоянными коэффициентами.

Если характеристическое ур-е имеет равные корни, тогда выведенная формула не дает общего интеграла. Так, если положить, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, тогда наша формула будет: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$ (*) или $y = (C_1 + C_2 + C_3)e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$; при этом смогло положить, $C_1 + C_2 + C_3 = C_0$ и $y = C_0 e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$.

Это ур-е будет содержать уже меньше произвольных постоянных

(*) пропущен член: $+ C_3 e^{\lambda_1 x}$

нахъ, а $n-2$, именно: $c_0, c_1, \dots c_n$. Составивши сие не будетъ давать общаго $\int$-ла.

Въ случаѣ равныхъ корней общій $\int$ен выражается другой формулой. Чтобы получить сию формулу, вернемся къ выведенному тождеству; мы видимъ, что, положивъ $y = e^{\lambda x}$, гдѣ λ неопредѣленное посторонное и, вставивъ сие выраженіе въ ур-іе (2'), получимъ: $\frac{d^n(e^{\lambda x})}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} e^{\lambda x}}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} e^{\lambda x}}{dx^{n-2}} + \dots + A_n e^{\lambda x} = e^{\lambda x} f(\lambda)$ (a) (произведя d-ніе). Сие ур-іе есть тождество, существующее при всякомъ значеніи λ. Изъ сего тождества мы выведемъ нѣсколько новыхъ тождествъ, для чего отъ обѣихъ частей будемъ брать производныя по λ и замѣтимъ, что d-ніе по λ въ 1ой части смѣшно производить ранѣе d-нія по x, получимъ:

$\frac{d^n x e^{\lambda x}}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} x e^{\lambda x}}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} x e^{\lambda x}}{dx^{n-2}} + \dots + A_n x e^{\lambda x} =$ (по λ подъ знакомъ d-ла или d-нія) $= e^{\lambda x}[x f(\lambda) + f'(\lambda)] =$ (a)'. Продифференцируемъ еще разъ подъ знакомъ d-ла: $\frac{d^n x^2 e^{\lambda x}}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} x^2 e^{\lambda x}}{dx^{n-1}} + \dots + A_n x^2 e^{\lambda x} =$

$= e^{\lambda x}[x^2 f(\lambda) + 2x f'(\lambda) + f''(\lambda)]$ (a'') и т. д. Разсмотримъ сии тождества; положимъ: $\lambda = \lambda_1$ есть двойной корень ур-ія $f(\lambda) = 0$. Тогда, какъ извѣстно, будемъ имѣть не только $f(\lambda_1) = 0$ но $f'(\lambda_1) = 0$ и положивъ въ тождествѣ (a) и (a') $\lambda = \lambda_1$ мы увидимъ, что $e^{\lambda_1 x}$ удовлетворяетъ ур-ію (2'). А изъ тождества (a') увидимъ, что ур-ію (2') удовлетворяетъ сверхъ того выраженіе $x e^{\lambda_1 x}$. Такимъ образомъ двойному корню λ_1 будутъ соотвѣтствовать 2 частныхъ рѣшенія: $\begin{matrix} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = x e^{\lambda_1 x} \end{matrix}$. Теперь, если положимъ, что $\lambda = \lambda_1$ есть

(*) формула (a'').

корень тройной, то тогда будет иметь не только $f(\lambda)=0$, но и $f'(\lambda_1)=0$ и $f''(\lambda_1)=0$. В этом случае, кроме указанных выше двух частных решений, удовлетв. по тождеству (a''), что выпишем часть этого тождества при $\lambda=\lambda_1$ тоже обратится в 0; а из первой части следует, что в этом случае $x^2 e^{\lambda_1 x}$ будет также удовлетворять ур-ию (2). Таким образом, если корень λ_1 есть тройной, то ему будет соответствовать 3 частных решения, именно: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}$. Продолжая эти рассмотрения далее, заключаем вообще, что если $\lambda=\lambda_1$ есть кратный корень степени p, то ему будет соответствовать p частных решений, именно: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_1 x}\cdot x$, ... $y_p = x^{p-1} e^{\lambda_1 x}$. Таким образом в случае кратных корней каждому кратному корню соответствует столько частных решений, сколько единиц имеет степень его кратности. В случае кратного корня степени p, получается общий $\int$-ал в таком виде:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p + C_{p+1} y_{p+1} + \dots + C_n y_n$ или $y = [C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_p x^{p-1}] e^{\lambda_1 x} + C_{p+1} e^{\lambda_{p+1} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$. Эта формула дает нам представление $\int$-ла в том случае, когда кратные корни действительны. Если же имеются мнимые кратные корни, то формулу эту преобразовывают в другую, в которую мнимости явным образом входить не будут. Положим, что имеем 2 мнимых корня: $\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ и $\lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$ причем эти корни кратности степени p. Тогда, по

доказанному въ общемъ $\int$-ѣ корнямъ этимъ будутъ соотвѣтствовать слѣдующіе члены: $(C_1+C_2x+C_3x^2+\dots+C_px^{p-1})e^{\alpha x+\beta x\sqrt{-1}}+$

$+(C_1'+C_2'x+\dots+C_p'x^{p-1})e^{\alpha x-\beta x\sqrt{-1}} = e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+C_3x+\dots)(\cos\beta x+\sqrt{-1}\sin\beta x)+$

$+(C_1'+C_2'x+C_3'x^2+\dots)(\cos\beta x-\sqrt{-1}\sin\beta x)] = e^{\alpha x}\{[(C_1+C_1')+(C_2+C_2')x+(C_3+C_3')x^3$

$+\dots]\cos\beta x+\sqrt{-1}[(C_1-C_1')+(C_2-C_2')x+(C_3-C_3')x^2+\dots]\sin\beta x\}$. Теперь вмѣсто $C_1, C_2, \dots$ $C_1', C_2', \dots$ введемъ новыя произвольныя постоянныя, положивъ $C_1+C_1'=A_1$, $C_2+C_2'=A_2, \dots$ и $\sqrt{-1}(C_1-C_1')=B_1, \sqrt{-1}(C_2-C_2')=B_2$, ... тогда совокупность членовъ, соотвѣтствующихъ нашимъ мнимымъ сопряженнымъ кратнымъ корнямъ въ общемъ $\int$-ѣ будетъ: $e^{\alpha x}[(A_1+A_2x+\dots+A_px^{p-1})\cos\beta x+(B_1+B_2x+\dots+B_px^{p-1})\sin\beta x]$.

Тутъ входятъ $2p$ произвольныхъ постоянныхъ. Каждой парѣ мнимыхъ кратныхъ корней будетъ соотвѣтствовать совокупность членовъ такого вида. Изъ всего сказаннаго разсмотрѣнный случай: *Линейное ур-іе съ постоянными коэффиціентами, и безъ второй части всегда можетъ быть проинтегрировано.*

Линейныя дифференціальныя ур-ія со второю частью.

Будемъ опять разсматривать: $\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+X_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+X_{n-1}y=X\dots(1)$, въ которомъ коэффиціенты: $X_1, X_2, \dots$ и вторую часть будемъ считать вообще функціями x. Докажемъ теперь, что общій $\int$-ль этого ур-ія можно получить, если предварительно найдемъ общій интегралъ линейнаго ур-ія съ тою же самою 1-ою частью, но у котораго $2^{\text{ая}}$ часть $=0$, т.е. ур-ія

$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots\dots + X_n y = 0 \dots (2)$. Действительно, предположим, что для ур-ия (2) мы имеем n частных решений, $y_1, y_2 \dots y_n$ и что все эти решения наши независимы, тогда общий инт. ур-ия (2) будет: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \dots (3)$, где $C_1, C_2 \dots C_n$ суть произвольные постоянные. Для получения общего интеграла ур-ия (1) применим так называемый, способ изменения произвольных постоянных, иначе называемый способ Лагранжа. Идея этого способа заключается в следующем. Формула (3) удовлетворяет ур-ию (2), причем величины $C_1, C_2 \dots$ суть произвольные постоянные. Попробуем удовлетворить ур-ию (1) также самой формулой (3), но с тем, чтобы в этой формуле величины: $C_1, C_2 \dots$ считать уже не произвольными постоянными, но некоторыми ф-циями x. Эти ф-ции должны быть определены из условия, что формула (3) должна удовлетворять ур-ию (1). Но неизвестных ф-ций в формуле (3) n, а условий для них определяющих одно. Одно условие должно одно ур-ие с неизвестными $C_1, C_2 \dots$ Вследствие этого, кроме этого условия, мы можем еще $(n-1)$ условий выбрать совершенно произвольно, так что наши неизвестные ф-ции должны удовлетворять сверх того $(n-1)$ ур-ий произвольных и тогда только будем иметь и условных ур-ий, достаточных для определения и неизвестных ф-ций: $C_1, C_2 \dots$

Чтобы получить все условия ур-й поступаем так: Находим последовательно производные y', y'', по формуле (3) получаем: $\frac{dy}{dx} = C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx} + \dots + C_n\frac{dy_n}{dx} + y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n\frac{dC_n}{dx}$. Для упрощения этого выражения примем условие, что ф-ции $C_1, C_2 \dots$ должны удовлетворять такому выражению: $y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n\frac{dC_n}{dx} = 0$. Тогда будем иметь $\frac{dy}{dx} = C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx} + \dots + C_n\frac{dy_n}{dx}$ или напишем короче это равенство так: $y = \sum C_i y_i$, тогда $\frac{dy}{dx} = \sum C_i\frac{dy_i}{dx}$; далее, д-уя, еще раз, находим: $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum C_i\frac{d^2y_i}{dx^2} + \sum\frac{dy_i}{dx}\cdot\frac{dC_i}{dx}$. Для упрощения введем еще новое условие – примем, что $\sum\frac{dy_i}{dx}\cdot\frac{dC_i}{dx} = 0 \dots (2)$, тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \sum C_i\frac{d^2y_i}{dx^2}$. Далее, дифференцируя еще раз, найдем: $\frac{d^3y}{dx^3} = \sum C_i\frac{d^3y}{dx^3}$ и условие $\sum\frac{d^2y_i}{dx^2}\cdot\frac{dC_i}{dx} = 0 \dots (3)$. Продолжая таким образом д-кие, дойдем до $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \sum C_i\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}$ и условие $\sum\frac{d^{n-2}y_i}{dx^{n-2}}\cdot\frac{dC_i}{dx} = 0 \dots (n-1)$. Всего $(n-1)$ условий получаем, мы не сложно, написать $n^{ое}$ условие получаемое из вставки всех этих выражений в ур-е (1): $\frac{d^ny}{dx^n} = \sum C_i\frac{d^ny_i}{dx^n} + \sum\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_i}{dx}$. Затем выражений всех этих производных вставим в выражение (1), чтобы получить и условие: $\sum C_i\left(\frac{d^ny_i}{dx^n} + x_1\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}} + \dots + x_{n-1}\frac{dy_i}{dx} + x_n y_i\right) + \sum\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_i}{dx} = X$. Это ур-е упростится, заметим что y_i удовлетворяет ур-ю (2); все подобные этого количества, заключенные в скобки $= 0$. Затем $n^{ое}$ условие будет следующее: $\sum\frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_i}{dx} = X \dots (n)$ условие. Теперь для определения неизвестных ф-ций $C_1, C_2 \dots C_n$ мы имеем всего n ур-й. Рассматривая эти ур-я мы видим, что они содержат производные: $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx} \dots \frac{dC_n}{dx}$.

Интегр. д-ние ур-й

Эти ур-ия входят въ первыхъ степеняхъ; коэффиціенты при нихъ суть извѣстныя ф-ціи x^{m}. Вторыя части $=0$, а въ послѣднемъ ур-іи R. Эти n ур-ій $1^{ой}$ степени всегда можно рѣшить. Общій видъ рѣшеній будетъ: $\frac{dC_i}{dx}=v_i$, гдѣ v будетъ извѣстная ф-ція x^{m}, отсюда $dC_i=v_i\,dx$ и, $\int$-ая, получимъ $C_i=\int v_i\,dx$. Здѣсь i можетъ имѣть равно 1, 2, 3, ... n и мы получимъ такимъ образомъ $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$. Вставивъ всѣ эти выраженія въ формулу (3) будемъ имѣть: $y=(C'+\int v_1 dx)y_1+(C''+\int v_2 dx)y_2+\ldots+(C^{(n)}+\int v_n dx)y_n$. Эта формула даетъ общій $\int$-ал ур-ія (1). Въ ней C', C'', ... суть произвольныя постоянныя. Этотъ способъ всегда можно приложить къ линейному ур-ію съ постоянными коэффиціентами изъ $2^{го}$ части, т.-е къ ур-ію: $\frac{d^n y}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+A_n y=R$, гдѣ коэффиціенты A_1, A_2 .... суть частныя коэффиціенты, а R ф-ція одного x, положимъ что самое ур-ія бываетъ иногда частными ур-ія обыкновенно.

Въ заключеніе сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній о томъ, какъ иногда можно получить общій $\int$-ал ур-ія (1), если общій $\int$-ал ур-ія (2) извѣстенъ. Можно доказать, что если для ур-ія (1) будетъ найдено одно частное рѣшеніе, то его $\int$-ал приведется къ $\int$-алу ур-ія (2).

Дѣйствительно, пусть это частное рѣшеніе будетъ: $y=Z$. Тогда положимъ, что общій $\int$-ал ур-ія (1) есть: $y=Z+U$, гдѣ U неизвѣстно. Вставивъ это выраженіе въ ур-ію (1), получимъ: $\frac{d^n Z}{dx^n}+R_1\frac{d^{n-1}Z}{dx^{n-1}}+\ldots+R_n Z+\frac{d^n U}{dx^n}+R_1\frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}+\ldots+R_n U=R$, но такъ какъ Z удовлетворяетъ ур-ію (1), то будетъ имѣть: $\frac{d^n Z}{dx^n}+R_1\frac{d^{n-1}Z}{dx^{n-1}}+\ldots+R_n Z=R$, всегда

ствие этого, сократив предыдущее ур-ие, получим: $\frac{d^n u}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} +$ $+ \ldots + A_n u = 0$. А это есть ур-ие и следовательно есть общий $\int$-ел ур-ия (2). Когда мы найдем u, то общий $\int$-ел ур-ия 1го бу-дет $y = Z + u$. Этим замечанием можно пользоваться в некоторых частных случаях, именно: 1 случай: Имеем ли-нейное ур-ие со постоянными коэффициентами, в которой часть которого стоит целая ф-ция x^a, именно: $\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y =$ $= ax^p + bx^{p-1} + cx^{p-2} + \ldots + V$. Чтобы найти частное решение этого ур-ия можно попробовать удовлетворить ему, полагая $y = \alpha x^p +$ $+ \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \ldots + \varphi$, где $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varphi$ суть неопределенные пока по-стоянные коэф-ты. Вставив это в ур-ие и произведя д-ие, мы получим в 1ой части, как и во второй целую ф-цию степени p, в которой коэф-циенты будут неизвестные коэф-ты $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях равенства, мы получим $(p+1)$ ур-ий с $(p+1)$ неизвестными. Ур-ия эти будут 1ой степени, из них можно будет найти все коэффициенты. Та-ким образом будет найдено частное решение, а значит получится и общий $\int$-ел.

2 случай: Дано ур-ие со постоянными коэф-ами, в которой часть которого содержит $\sin mx$ и $\cos mx$ в 1ой степени. Это ур-ие: $\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = a \cos mx + b \sin mx$. Попробуем удовле-творить этому ур-ию полагая: $y = \alpha \cos mx + \beta \sin mx$, где α и β неоп-ределенные пока коэф-ты. Вставим это выражение в ур-ие вме-

то у и производн d-ніе, если писать d-ніе всегда будемъ получать или $\cos nx$ или $\sin nx$ въ $1^{ой}$ степени, при чёмъ α и β остаются также въ $1^{ой}$ степени. Соединивъ вмѣстѣ члены съ $\cos nx$ и члены съ $\sin nx$, мы получимъ равенство такого вида:

$$(A\alpha + B\beta)\cos nx + (A'\alpha + B'\beta)\sin nx = a\cos nx + b\sin nx.$$

Чтобы сдѣлать это уравненіе тождественнымъ, надо положить: $A\alpha + B\beta = a$ и $A'\alpha + \beta B' = b$ и тогда будемъ имѣть 2 ур-ія $1^{ой}$ степени, изъ которыхъ легко будетъ опредѣлить α и β. Если α и β получатся конечными, то мы будемъ имѣть одно частное рѣшеніе даннаго ур-ія и затѣмъ легко будетъ найти общій $\int$-лъ.

Конецъ.

Задачи.

Уравненія однородныя:

1) $(y + \sqrt{y^2+x^2})\,dx - x\,dy = 0$, рѣшеніе $x^2 = 2Cy + C^2$

2) $(x + \sqrt{xy} - y)\,dx + \sqrt{xy}\,dy = 0$ " " $\frac{x^{1/2}}{x^{1/2} - y^{1/2}} + l(x^{1/2} - y^{1/2}) + \frac{1}{2}l(x-y) = C.$

3) $(x - y\cos\frac{y}{x})\,dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$ " " $x = Ce^{-\sin\frac{y}{x}}$

4) $(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0$ " " $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C.$

Уравненія линейныя:

5) $\frac{dy}{dx} - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n$ рѣшеніе: $y = (x+1)^n(e^x + C).$

6) $x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2 - 1)\,y = ax^3$ " " $y = ax + Cx\sqrt{1-x^2}$

7) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)2}$ " " $y = Ce^{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Уравненія Бернулли.

8) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2$; " " $y = (C\sqrt{1-x^2} - a)^{-1}$

9) $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$; решение: $y(Cx+\ln x+1)=1$.

Б) Найти ортогональные кривые:

10) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{dy}{dx}=0$; " " $y^2=C^2+2Cx$

11) $\frac{2x\,dx}{y^3}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)dy=0$; " " $x^2-y^2=Cy^3$.

12) $e^x\{(x^2+y^2+2x)\,dx+2ye^x\,dy=0$; " " $e^x(x^2+y^2)=C$.

Напоминание: Урн 11 и 10 можно также рассматривать как однородные.

13) Доказать, что урн $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, где P и Q суть ф-ции одного x, можно обр-ть, введя в него ф-тор $v=e^{\int P\,dx}$.

Уравнения 1-го порядка и высшей степени.

14) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-5\frac{dy}{dx}+6=0$; решение: $(y-2x-C)(y-3x-C)=0$

15) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{a^2}{x^2}=0$ " " $(y-a\ln x-C)(y+a\ln x-C)=0$

16) $x=1+p+p^3$, где $p=\frac{dy}{dx}$; " " $y=\frac{p^2}{2}+\frac{3p^4}{4}+C$ и исключить p.

17) $y=p^2+2p^3$, где $p=\frac{dy}{dx}$; " " $x=2p+3p^2+C$ и исключить p.

18) $x+yp=ap^2$, где $p=\frac{dy}{dx}$; " " $x=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left[C+a\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right]$, где вспомогат $p=\frac{y+\sqrt{ax-a^2}}{2a}$

19) $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, " " $y=Cx+C-C^2$ и особое $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$.

20) Найти кривую, для каждой точки которой часть касательной, заключающейся между осями x^{ab} и y^{ab} была бы постоянна $=a$.

решение особое: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

Линейные д-ные ур-ия:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$; реш.: $C_1e^x+C_2e^{2x}$. 2) $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+y=0$; Реш. $y=Ae^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+Be^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

3) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$; реш.: $y=Ce^{-x}+(A+Bx)e^{x}$.

4) $\frac{d^4y}{dx^4}-2n^2\frac{d^2y}{dx^2}+n^4y=0$; реш.: $y=(A_1+A_2x)\cos nx+(B_1+B_2x)\sin nx$.

5) $\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$; реш.: $y=e^x(C+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)$.

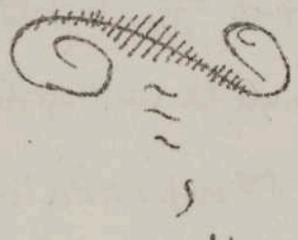
6) $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$; реш.: $y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3\cos x + C_4\sin x$.

7) $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\cdot\frac{dy}{dx} + 12y = x$; решение: $y = \frac{x+7}{12} + C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$.

8) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\cdot\frac{dy}{dx} + y = ax^3$; реш.: $y = a(x^3 - 6x^2 + 18x - 24)(C_1 + C_2x)e^{-x}$

9) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + x^2y = e^x$. решение: $y = \frac{e^x}{(x-1)^2} + (C_1 + C_2x)e^x$.

10) $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \cos ax$; решение: $y = \frac{\cos ax}{n-a^2} + C_1\cos nx + C_2\sin nx$; при $n = a$ получится решение $y = \frac{x\cdot\sin nx}{2n} + C_1\cos nx + C_2\sin nx$.



Издатель Баранов.

18 $\frac{88}{89}$ года.