

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КА ПРИ ДВИЖЕНИИ В АТМОСФЕРЕ

Н.Л. СОКОЛОВ, *ст. науч. сотрудник, зам. нач. ЦУП ЦНИИмаш, канд. техн. наук*

sokolov@mcc.rsa.ru

ФГУП «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения» (ФГУП ЦНИИмаш)
141070, Московская область, г. Королев, ул. Пионерская, д. 4

Анализ разработок по проблеме оптимального управления космическими аппаратами показывает, что исследование вариационных задач известными численными методами сопряжено с рядом значительных трудностей прежде всего в построении вычислительных процессов решения итерационных многопараметрических краевых задач. Основные трудности связаны с тем, что система уравнений движения КА не может быть преобразована к аналитическому виду в результате их интегрирования. Поэтому возникает необходимость в разработке ускоренных аналитических методов, позволяющих получить приближенно-оптимальные решения. В настоящей статье предложен аналитический метод исследования оптимального управления движением космического аппарата в атмосфере на основе использования необходимых условий оптимальности принципа максимума Понтрягина. Новизной метода является введение ряда преобразований в системы дифференциальных уравнений движения КА и сопряженных переменных, а также установление дополнительных формул связи между неизвестными параметрами. Это позволяет получить аналитические зависимости для определения законов оптимального управления углами крена и атаки, а также провести качественный анализ траекторий движения КА. Приводятся примеры решения задач максимизации скорости КА при вылете из атмосферы и минимизации времени разворота аппарата на заданный курсовой угол. Показано качественное совпадение аналитических решений с результатами, полученными с помощью методов численного интегрирования. При этом продолжительность вычислительного процесса решения вариационных задач с применением разработанного аналитического метода сокращается примерно на два порядка. Для получения точных решений задач оптимального управления результаты, рассчитанные с помощью аналитического метода, использовались в качестве первого приближения. Предложенный метод может быть положен в основу определения оптимального управления КА для задач с другими критериями оптимальности, краевыми условиями и ограничениями.

Ключевые слова: космический аппарат, оптимальное управление, аналитический метод, преобразование системы уравнений, формулы связи, условия трансверсальности, первое приближение, краевые задачи, минимизация скорости КА.

Решение задач оптимального управления космическими аппаратами (КА) связано с рядом существенных трудностей. Система дифференциальных уравнений движения КА с учетом влияния основных действующих на него сил не может быть преобразована к аналитическому виду, так как эти уравнения не имеют конечного решения в результате их интегрирования. Поэтому возникает необходимость в использовании классических методов оптимизации нелинейных систем уравнений, предусматривающих проведение многопараметрических итерационных процессов решения краевых задач [1–4]. Практика показывает, что на точность и быстродействие вычислительных процессов решения таких задач решающее влияние оказывает выбор первого приближения краевых значений как вектора состояния системы, так и вектора сопряженных переменных. При этом, если количественная оценка параметров вектора состояния может быть дана на основе анализа динамики движения КА, то предварительно оценить значения всех сопряженных

переменных, не имеющих явного физического обоснования, практически невозможно. Вместе с тем неудачный выбор первого приближения может привести не только к большой продолжительности решения краевых задач, но и в ряде случаев к несходимости вычислительного процесса в принципе. Кроме того, использование классических методов предполагает возможность определения зависимостей для расчета оптимальных управляющих параметров в аналитическом виде. При отсутствии такой возможности возникает необходимость в итерационном решении трансцендентных уравнений на каждом шаге интегрирования дифференциальных уравнений. В связи с вышеизложенным для решения задач оптимального управления КА необходим поиск путей квазиоптимальных решений вариационных задач в упрощенной постановке и использовании полученных результатов в качестве первого приближения для построения вычислительного процесса точного расчета оптимальных траекторий движения КА.

Одно из перспективных направлений поиска состоит в разработке аналитических методов приближенного решения задач определения структуры оптимального управления и расчета параметров движения КА. Кроме сокращения затрат расчетного времени, это дает и другие преимущества. Форма решения получается более наглядной, что облегчает проведение сравнительного анализа различных вариантов. Оптимальные законы управления могут иметь вид явных зависимостей от начальных условий и параметров системы, что позволяет оценить степень влияния той или иной характеристики на управляющие параметры.

Постановка задачи оптимального управления

В работе проводятся исследования оптимального управления КА в атмосфере, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений [5, 6]

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{\rho V^2 C_x(\alpha) S}{2m} - g \sin \theta - \omega^2 r \cos \varphi (\sin \varphi \sin \varepsilon \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\rho V C_y(\alpha) S}{2m} \cos \gamma - \frac{g}{V} \cos \theta + \frac{V}{r} \cos \theta + \\ &+ 2\omega \cos \varphi \cos \varepsilon + \frac{\omega^2 r}{V} \cos \varphi (\sin \varphi \sin \varepsilon \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\rho V C_y(\alpha) S}{2m} \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} - \frac{V}{r} \cos \theta \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi - \frac{2\omega}{\cos \theta} \times \\ &\times (\cos \theta \sin \varphi - \sin \varepsilon \sin \theta \cos \varphi) - \frac{\omega^2 r}{V} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\cos \varepsilon}{\cos \theta}, \\ \frac{dh}{dt} &= V \sin \theta, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \cos \theta \cos \varepsilon}{r \cos \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{r} \cos \theta \sin \varepsilon, \\ r &= R + h, \quad g = \frac{\mu}{r^2}, \quad K_\sigma = \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}, \quad P_x = \frac{m}{C_x(\alpha) S}, \end{aligned} \quad (1)$$

где V – скорость КА;

θ – угол наклона вектора скорости к местному горизонту;

ε – угол между проекцией вектора скорости на местный горизонт и местной параллелью;

h – высота полета КА;

λ и φ – геоцентрические долгота и широта, соответственно;

m – масса КА;

R – радиус планеты;

ρ – плотность атмосферы;

μ – произведение постоянной притяжения на массу планеты;

P_x – приведенная нагрузка на лобовую поверхность КА;

K_σ – аэродинамическое качество;

C_x и C_y – аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы соответственно;

α – угол атаки;

γ – угол крена;

ω – угловая скорость вращения Земли;

g – ускорение свободного падения на поверхности планеты;

S – площадь миделева сечения.

Оптимальные законы изменения углов атаки α и крена γ были определены аналитически для плоского движения КА, а также для некоторых частных условий пространственного движения [6–10]. Однако используемые расчетные методы основывались на введении допущений о постоянстве [9] или малости [6–8, 10] угла наклона вектора скорости к местному горизонту θ и о малости боковой дальности полета L_δ [9]. Такие допущения существенно сужают область применения этих методов. Предлагаемый подход позволяет провести исследования оптимального управления КА без отмеченных допущений.

Сформулируем задачу оптимального управления в общем виде: для КА, движение которого описывается системой (1), требуется найти структуру управления углами крена γ и атаки α , обеспечивающую экстремум функционала I при ограничениях типа $q(X, \alpha, \gamma, t)$ и краевых условиях $X[t_0] = C_0, X[t_k] = C_k$, где $X = [V, \theta, \varepsilon, h, \lambda, \varphi]$ – вектор состояния КА, C_0 и C_k – шести-мерные вектор-столбцы. Значения C_0 и C_k могут быть как заданными, так и свободными.

Аналитический метод

При разработке аналитического метода использовались общеизвестные допущения, обоснованные в ряде работ [6–10]

$h \ll R$, $\rho = \rho_0 \exp(-\beta h)$, $F_k + F_u \ll F_{zp} \ll F_a$, где F_k , F_u , F_{zp} , F_a – кориолисова, центробежная, гравитационная и аэродинамическая силы соответственно,

ρ_0 – плотность атмосферы на поверхности планеты,

β – логарифмический коэффициент изменения плотности атмосферы от высоты.

В результате система (1) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -\frac{\rho V^2 C_x S}{2m}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\rho V C_y S}{2m} \cos \gamma - \rho V M_1, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\rho V C_y S}{2m} \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} - \rho V M_2, \quad \frac{dh}{dt} = V \sin \theta, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{V \cos \theta \cos \varepsilon}{R \cos \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{R} \cos \theta \sin \varepsilon, \\ M_1 &= \left(\frac{gR}{V^2} - 1 \right) \frac{\cos \theta}{\rho R}, \quad M_2 = \frac{\cos \theta \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi}{\rho R}.\end{aligned}$$

Следуя [6], будем считать M_1 и M_2 кусочно-постоянными функциями.

Введем замены переменных

$$dt = -dV \frac{2M}{\rho V^2 C_x S}, \quad z = -LnV.$$

Суть такого преобразования заключается, во-первых, в снижении размерности системы, а во-вторых, в уменьшении числа слагаемых в правых частях уравнений, зависящих в явном виде от параметров вектора состояния X . Это позволит без введения дополнительных допущений существенно упростить анализ уравнений сопряженных переменных и зависимостей для определения законов оптимального управления.

В результате получим систему, не содержащую в явном виде аргумент z

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dz} &= \frac{C_y}{C_x} \cos \gamma - \frac{2mM_1}{C_x S}, \quad \frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{C_y}{C_x} \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} - \frac{2mM_2}{C_x S}, \\ \frac{d\rho}{dz} &= -\frac{2m\beta \sin \theta}{C_x S}, \quad \frac{d\lambda}{dz} = \frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon}{\rho R C_x S \cos \varphi}, \\ \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{2m \cos \theta \sin \varepsilon}{\rho R C_x S}.\end{aligned}\quad (2)$$

Отметим, что при движении КА в атмосфере аргумент z возрастает.

Для определения оптимальных законов управления параметрами α и γ воспользуемся принципом максимума Понтрягина [1]. При $z_0 \geq z \geq z_k$ гамильтониан и система уравнений сопряженных переменных запишутся следующим образом

$$\begin{aligned}H &= \Psi_0 + \frac{C_y}{C_x} \cos \gamma \Psi_1 - \frac{2mM_1}{C_x S} \Psi_1 + \\ &+ \frac{C_y}{C_x} \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} \Psi_2 - \frac{2mM_2}{C_x S} \Psi_2 - \\ &- \frac{2m\beta \sin \theta}{C_x S} \Psi_3 + \frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon}{\rho R C_x S \cos \varphi} \Psi_4 + \frac{2m \cos \theta \sin \varepsilon}{\rho R C_x S} \Psi_5.\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_1}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{C_y}{C_x} \frac{\sin \gamma \sin \theta}{\cos^2 \theta} \Psi_2 + \frac{2m\beta \cos \theta}{C_x S} \Psi_3 + \\ &+ \frac{2m \sin \theta \cos \varepsilon}{\rho R C_x S \cos \varphi} \Psi_4 + \frac{2m \sin \theta \sin \varepsilon}{\rho R C_x S} \Psi_5, \\ \frac{d\Psi_2}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \frac{2m \cos \theta \sin \varepsilon}{\rho R C_x S \cos \varphi} \Psi_4 - \frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon}{\rho R C_x S} \Psi_5, \\ \frac{d\Psi_3}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon}{\rho^2 R C_x S \cos \varphi} \Psi_4 + \frac{2m \cos \theta \sin \varepsilon}{\rho^2 R C_x S} \Psi_5, \\ \frac{d\Psi_4}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{d\Psi_5}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{2m \cos \theta \cos \varepsilon \sin \varphi}{\rho R C_x S \cos^2 \varphi} \Psi_4.\end{aligned}\quad (4)$$

При использовании в качестве аргумента управления параметра z , согласно [1], в систему (2) вводится дополнительное дифференциальное уравнение $dz/dz = 1$. В связи с тем, что правые части этой системы не содержат в явном виде аргумент z , соответствующее уравнение для сопряженной переменной Ψ_0 определяется формулой $d\Psi_0/dz = 0$.

Согласно сделанному предположению, в уравнения (2) входят кусочно-постоянные разрывные функции M_1 , M_2 . Однако в силу теоремы Вейерштрасса–Эрдмана [3] наличие разрывов в правых частях уравнений не нарушает непрерывности гамильтониана и сопряженных переменных:

$$\begin{aligned}\Psi_i[z_j + O(z)] &= \Psi_i[z_j - O(z)], \\ H[z_j + O(z)] &= H[z_j - O(z)],\end{aligned}$$

где z_j – значение аргумента, соответствующее j -му моменту разрыва функций $M_1(z)$ или $M_2(z)$;

$O(z)$ – величина меньшего порядка, чем z .

Законы изменения α и γ при оптимальном управлении определяются в результате решения системы $\partial H/\partial \alpha = 0$, $\partial H/\partial \gamma = 0$ и их можно записать в виде

$$\frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \cos \gamma \Psi_1 + \frac{\partial C_y \sin \gamma}{\partial \alpha \cos \theta} \Psi_2 + \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Psi_0 = 0, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Psi_2}{\Psi_1 \cos \theta},\quad (5)$$

Граничные условия для сопряженных переменных Ψ_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) при $z = z_0$ и $z = z_k$ получим из условия трансверсальности [3]

$$I - H \delta z + \Psi_0 \delta z + \Psi_1 \delta \theta + \Psi_2 \delta \varepsilon + \Psi_3 \delta \rho + \Psi_4 \delta \lambda + \Psi_5 \delta \varphi = 0.\quad (6)$$

Таким образом, для определения оптимальных законов изменения управляющих параметров α и γ необходимо решить уравнения (5) с учетом дифференциальных связей (2–4) и краевых условий (6).

В рамках предложенного методологического подхода применительно к широкому

классу задач оптимального управления КА в атмосфере можно записать общие формулы для определения сопряженных переменных Ψ_0 и Ψ_4

$$\Psi_0 = \alpha_0, \Psi_4 = \alpha_4. \quad (7)$$

В связи с тем, что гамильтониан H в явном виде не зависит от аргумента z , справедливо соотношение $H = \alpha$, что позволяет записать дополнительное уравнение связи между неизвестными параметрами движения КА и сопряженными переменными

$$\frac{d\theta}{dz} \Psi_1 + \frac{d\varepsilon}{dz} \Psi_2 + \frac{d\rho}{dz} \Psi_3 + \frac{d\varphi}{dz} \Psi_5 = \alpha - \alpha_0 - \frac{d\lambda}{dz} \alpha_4. \quad (8)$$

Другие неизвестные параметры, в том числе сопряженные переменные Ψ_1 и Ψ_2 , в явном виде влияющие на законы оптимального управления КА, определяются в зависимости от условий поставленных вариационных задач.

Максимизация скорости вылета КА из атмосферы

Оценим эффективность применения разработанного аналитического метода на примере решения задачи максимизации скорости вылета КА из атмосферы планеты ($V_k = \max$). Как показано в работах [5, 6], выполнение такого критерия оптимальности эквивалентно обеспечению минимума потребных энергетических затрат при выведении КА на орбиту искусственного спутника планет с использованием предварительного аэродинамического торможения. Очевидно, что функционал управления можно представить в виде $I = z_k = \min$.

За начальные и конечные условия принимаются параметры КА в моменты входа и выхода из атмосферы.

Будем считать, что все начальные параметры КА известны. В конечный момент известно значение плотности атмосферы $\rho_k = \rho_0$, а величина θ_k в соответствии с решением системы кеплеровских уравнений определяется конечной скоростью V_k и высотой апоцентра формируемой орбиты h_α

$$\theta_k = \arccos \left(\frac{h_\alpha + R}{h_k + R} \sqrt{1 - \frac{2\mu}{V_k^2} \left(\frac{1}{R + h_k} - \frac{1}{R + h_\alpha} \right)} \right). \quad (9)$$

Из условия трансверсальности (6) для конечной точки траектории получим

$$\Psi_{0k} = -1, \Psi_{2k} = \Psi_{4k} = \Psi_{5k} = H_k = 0. \quad (10)$$

Учитывая соотношения (7–10) и уравнений (4), найдем решения для сопряженных переменных

$$\Psi_0 \equiv -1, \Psi_2 \equiv \Psi_4 \equiv \Psi_5 \equiv H \equiv 0, \Psi_3 \equiv \alpha_3.$$

$$\Psi_1 = \Psi_{10} + \frac{2m\beta\alpha_3}{C_x S} \int_{z_n}^z \cos \theta dz.$$

Оптимальный закон управления углом γ , обеспечивающий максимум гамильтониана H , имеет вид (3)

$$\cos \gamma = \sin \Psi_1, \quad (11)$$

т.е. либо $\gamma = 0$ при $\Psi_1 \geq 0$, либо $\gamma = \pi$ при $\Psi_1 < 0$.

Постоянную интегрирования α_3 , знаком которой определяется знак производной сопряженной переменной Ψ_1 , можно найти из условия равенства нулю гамильтониана в конечной точке

$$\alpha_3 = \left(\frac{dz}{d\rho} - \Psi_1 \frac{d\theta}{d\rho} \right)_{z=z_k}.$$

Анализ динамики движения КА на участке его вылета из атмосферы показывает, что приращение угла θ близко к нулю, тогда как интенсивность изменения плотности атмосферы с увеличением высоты достигает значительных величин. Это позволяет пренебречь вторым слагаемым последнего уравнения.

Поскольку при

$$z = z_k, dz > 0, d\rho < 0, \text{ то } \alpha_3 < 0 \text{ и } d\Psi_1/dz < 0.$$

Следовательно, функция $\Psi_1(z)$ является монотонно убывающей и может менять знак с плюса на минус не более одного раза. Итак, в общем случае структура оптимального управления углом крена γ представляет собой однократное переключение γ с 0 на π . При этом принципиально возможны случаи, когда оптимальным является движение КА с постоянными значениями угла крена γ : либо с $\gamma = 0$, либо с $\gamma = \pi$.

Для нахождения оптимального закона управления параметром α воспользуемся условием (5). Учитывая, что $\Psi_2 \equiv 0$, $\Psi_0 \equiv -1$, получим

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} / \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} = \cos \gamma \Psi_1.$$

В частности, для зависимостей

$$C_x(\alpha) = C_{x0} + A \sin^2(m\alpha - n), \\ C_y(\alpha) = C_{y0} + B \sin(m\alpha - n) \cos(m\alpha - n),$$

приведенных в работе [6], закон изменения α при оптимальном управлении принимает вид

$$\alpha = \frac{1}{2m} \arctg \left(\frac{B \cos \gamma \Psi_1}{A} \right) + \frac{n}{m}. \quad (12)$$

Анализ данного уравнения показывает, что зависимость угла атаки α от аргумента z имеет ярко выраженный минимум $\alpha_{\min} = n/m$, достигающийся в момент переключения угла крена γ . В случаях, если $\gamma^{\text{opt}} = 0$ или $\gamma^{\text{opt}} = \pi$, то минимальное значение угла α достигается в конечной точке траектории.

Итак, разработанные аналитические зависимости (11, 12) определяют законы оптимального управления углами крена и атаки, обеспечивающего максимум конечной скорости при вылете КА из атмосферы. В качестве примера, подтверждающего правильность представленного решения, на рис. 1 приведены зависимости углов крена и атаки, а также скорости, траекторного угла и высоты от времени полета КА, полученные с помощью метода численного интегрирования. Показано качественное совпадение структуры оптимального управления. Это позволяет, используя предварительно полученное аналитическое решение, существенно упростить поиск первого приближения для решения краевых задач и тем самым значительно сократить продолжительность итерационного процесса. Данное преимущество особенно важно при проведении параметрических исследований в широком диапазоне исходных данных и начальных условий на этапе баллистического проектирования космических комплексов.

Минимизация времени разворота КА по курсу

В качестве другого примера рассмотрим задачу о развороте аппарата по курсу за минимальное время. Задачу оптимального управления можно сформулировать следующим образом: при известных условиях входа КА в атмосферу ($z_0, \theta_0, \varepsilon_0, \rho_0, \lambda_0, \varphi_0$) найти законы изменения углов α и γ , минимизирующие функционал управления $I = z_k = \min$ при достижении требуемого значения ε_k . Остальные фазовые координаты в конечной точке траектории ($\varepsilon = \varepsilon_k$) свободны от ограничений.

Некоторые сопряженные переменные и гамильтониан определим из условия трансверсальности

$$\Psi_{0k} = -1, \Psi_{1k} = \Psi_{3k} = \Psi_{4k} = \Psi_{5k} = H_k = 0.$$

Тогда система (4) имеет следующие интегралы

$$\Psi_0 \equiv -1, \Psi_2 \equiv \alpha, \Psi_3 \equiv \Psi_4 \equiv \Psi_5 \equiv 0, \quad (13)$$

а уравнение для переменной $\Psi_1(z)$ преобразуется к виду

$$\frac{d\Psi_1}{dz} = -\frac{C_y}{C_x} \frac{\sin \gamma \sin \theta}{\cos^2 \theta} \alpha_2.$$

Для определения оптимального закона изменения $\gamma(z)$ необходимо провести анализ зависимости $\Psi_1(z)$. Из условия равенства нулю гамильтониана в конечной точке траектории получим значение постоянной интегрирования α_2

$$\alpha_2 = \left(\frac{dz}{d\varepsilon} \right)_{z=z_k}$$

Приращение dz , положительно. Знак величины $d\varepsilon$, а следовательно, и знак постоянной α_2 определяются начальным и конечным значениями курсового угла: при $\varepsilon_0 < \varepsilon_k$, $d\varepsilon > 0$ и $\alpha_2 > 0$, при $\varepsilon_0 > \varepsilon_k$, $d\varepsilon < 0$ и $\alpha_2 < 0$. Для первого случая, когда требуется увеличить курсовой угол, величина $\sin \gamma$ должна быть положительной (2). Соответственно, при $d\varepsilon < 0$, $\sin \gamma < 0$. Итак, для обоих случаев произведение $\alpha_2 \sin \gamma > 0$. (В дальнейшем будем рассматривать только случай $\varepsilon_0 < \varepsilon_k$, $\sin \gamma > 0$). Из изложенного следует, что производная $d\Psi_1/dz$ имеет знак, противоположный знаку $\sin \theta$.

Исследуем структуру оптимального управления γ для траекторий двух типов.

А. Траектории, не содержащие рикошетирующих участков ($\sin \theta < 0$ при $z_0 \geq z \geq z_k$). Из условий $d\Psi_1/dz < 0$ и $\Psi_{1k} = 0$ делаем вывод, что $\Psi_1(z)$ – монотонно возрастающая неположительная функция. При этом, как видно из 2-го уравнения (5), с увеличением z от z_0 до z_k переменная $\tan \gamma$ изменяется от некоторого отрицательного значения $\tan \gamma(z_0)$ до $-\infty$, а угол γ (с учетом условия $\sin \gamma > 0$) – от γ_0 ($\pi/2 < \gamma_0 < \pi$) до $\gamma_k = \pi/2$.

Б. Если траектория оканчивается при возрастании высоты КА: $\sin \theta(z_k) > 0$, то угол γ при оптимальном управлении сначала уменьшается от начального значения γ_0 ($\pi/2 < \gamma_0 < \pi$) до некоторого значения $\gamma < \pi/2$, а затем опять возрастает до $\gamma_k = \pi/2$.

Можно показать, что если КА достигает заданного значения курсового угла $\varepsilon = \varepsilon_k$ после окончания участка рикошета: $\sin \theta(z_k) < 0$, то при увеличении z от z_0 до z_k оптимальное значение γ изменяется от γ_0 ($\pi/2 < \gamma_0 < \pi$) до $\gamma_k = \pi/2$, проходя внутри траектории сначала локальный

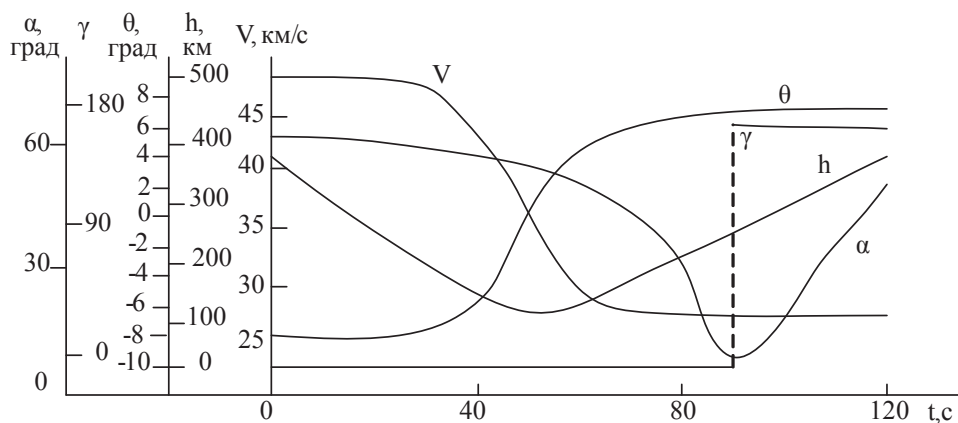


Рис. 1. Изменение фазовых координат V , θ , h , параметров управления α и γ от времени движения КА в атмосфере Юпитера ($R_x = 200 \text{ кг/м}^2$, $K_6 = 0,5$, $\rho_0 = 0,152 \text{ кг/м}^3$, $\beta = 0,046 \text{ км}^{-1}$)

Fig. 1. The changes in the phase coordinates V , θ , h , the parameters of α and γ coordination depending on the time of spacecraft movements in the atmosphere of Jupiter ($R_x = 200 \text{ kg/m}^2$, $K_6 = 0,5$, $\rho_0 = 0,152 \text{ kg/m}^3$, $\beta = 0,046 \text{ km}^{-1}$)

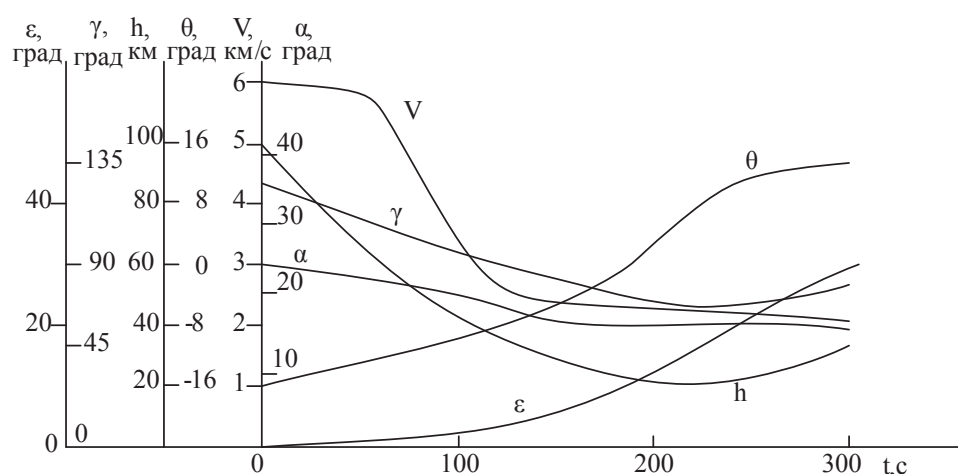


Рис. 2. Изменение фазовых координат V , θ , h , ϵ , параметров управления γ и α от времени спуска КА в атмосфере Марса ($R_x = 250 \text{ кг/м}^2$, $K_6 = 0,5$, $\rho_0 = 0,019 \text{ кг/м}^3$, $\beta = 0,07 \text{ км}^{-1}$)

Fig. 2. The changes in the phase coordinates V , θ , h , ϵ , the parameters of α and γ coordination depending on the time of spacecraft landing in the atmosphere of Mars ($R_x = 250 \text{ kg/m}^2$, $K_6 = 0,5$, $\rho_0 = 0,019 \text{ kg/m}^3$, $\beta = 0,07 \text{ km}^{-1}$)

минимум $\gamma < \pi/2$, а затем локальный максимум $\gamma > \pi/2$.

Перейдем к определению оптимального управления КА углом атаки α . Поскольку величина z в конечной точке не определена и система (2) не содержит в явном виде переменную z , приходим к выводу, что $H \equiv 0$ [3].

С учетом (13) первое уравнение (5) преобразуем следующим образом

$$\frac{\partial C_x}{\partial \alpha} / \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} = \cos \lambda \Psi_1 + \frac{\sin \gamma a_2}{\cos \theta}. \quad (14)$$

Подставляя в уравнение (14) оптимальное значение угла крена $\tan \gamma = a_2 / \Psi_1 \cos \theta$ и используя зависимости $C_x(\alpha)$ и $C_y(\alpha)$, приведенные в [6], получим

$$\alpha = \frac{1}{2\alpha} \arctg \left(\frac{Ba_2}{A \sin \gamma \cos \theta} \right) + \frac{n}{m}.$$

Характер изменения переменных, входящих в последнее уравнение, известен. Это позволяет для известных значений постоянных коэффициентов A , B , m , n определить структуру оптимального управления углом атаки α .

Заключение

Анализ результатов решения поставленной задачи показал качественное совпадение структур оптимального управления, найденных аналитически и методами численного интегрирования (рис. 2). При этом во втором случае первое приближение для решения краевой задачи определялось с помощью аналитических формул, что на примерно 2 порядка сокращает продолжительность вычислительного процесса.

Таким образом, соотношения (3–6), (11–14) позволяют определить структуру оптимального двухпараметрического управления углами крена и атаки для двух вариационных задач. Аналогичным образом представляется возможным найти оптимальное управление для задач с другими критериями оптимальности, краевыми условиями и ограничениями.

Библиографический список

1. Понtryгин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понtryгин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1969.
2. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Иностранная литература, 1960.
3. Летов, А.М. Динамика полета и управление / А.М. Летов. – М.: Наука, 1969.
4. Крылов, И.А. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления / И.А. Крылов, Ф.Л. Черноусько // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1972. – Т. 12. – Вып. 1.
5. Авдеевский, В.С. Основы теории полета космических аппаратов / В.С. Авдеевский, Б.М. Антонов, Н.А. Анфимов и др. – М.: Машиностроение, 1972.
6. Иванов, Н.М. Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет / Н.М. Иванов, А.И. Мартынов. – М.: Наука, 1985.
7. Шкадов, Л.М. Механика оптимального пространственного движения летательных аппаратов в атмосфере / Л.М. Шкадов, Р.С. Буханова, В.Ф. Илларионов, В.П. Плохих. – М.: Машиностроение, 1972.
8. Ярошевский, В.А. Приближенный расчет траектории входа в атмосферу / В.А. Ярошевский // Космические исследования, 1964. – Т. 2. – Вып. 4.
9. Griffin J.W., Vinh N.X. Three-dimensional optimal maneuvers of hypervelocity vehicles// AIAA paper. № 920. 1971.
10. Chapman D.R. An approximate analytical method for studying entry into planetary atmospheres// NASA Technical Report. 1959.

ANALYTICAL RESEARCH METHOD OF SPACECRAFT OPTIMAL CONTROL DURING THE MOVEMENTS IN THE ATMOSPHERE

Sokolov N.L., senior researcher, deputy head of MCC TsNIIMash, Ph.D (Tech.)

sokolov@mcc.rsa.ru

Central Research Institute of Machine Building (TsNIIMash), 4, st. Pioneer, Korolev, Moscow region, 141070, Russia

The analysis of the existing developments on spacecraft optimal control shows that the research on variation problems by the known numerical methods is connected with a number of considerable difficulties, first of all, in the construction of calculation of the decision processes of iteration multiparameter boundary problems. The main difficulties are connected with the fact that the system of spacecraft motion equations can not be transformed into an analytical form as a result of their integrating. That is why there is a need to develop a rapid analytical method for approximate optimal decisions. In this article the analytical method is proposed for the research of spacecraft optimal control in the atmosphere on the basis of the necessary optimality conditions of Pontryagin's maximum principle. The novelty of this method is introduction of a number of transformations in the differential equation systems of spacecraft motion and conjugate variables, as well as the establishment of additional connection formulae between the unknown parameters. It allows getting the analytical dependencies for determination of optimal roll angle and attack angle control laws as well as conducting the qualitative analysis of spacecraft motion paths. There are examples of task solution for maximization of spacecraft velocity when leaving the atmosphere and minimization of time of the spacecraft turn by a specified course angle. The qualitative coincidence of analytical results is shown with the results obtained with the help of methods of numerical integration. The duration of calculation process of variational task solution using elaborated analytical method reduces by two orders of magnitude. In order to obtain exact solutions of optimal control, the results calculated with the help of analytical method were used as the first approximation. The proposed method can be the basis for determination of spacecraft optimal control for the tasks with other optimality criteria, boundary conditions and constraints.

Keywords: Spacecraft, optimal control, analytical method, transformation in the system of equations, connection formulae, transversality conditions, first approximation, boundary problems, minimization of spacecraft velocity.

References

1. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1969.
2. Bellman R. *Dinamicheskoe programmirovaniye* [Dynamic Programming]. Moscow: Inostrannaya literature, 1960.
3. Letov A.M. *Dinamika poleta i upravleniye* [Flight dynamics and control]. Moscow: Nauka, 1969.
4. Krylov I.A., Chernous'ko F.L. *Algoritm metoda posledovatel'nykh priblizheniy dlya zadach optimal'nogo upravleniya* [An algorithm for the method of successive approximations in optimal control problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational mathematics and mathematical physics], 1972, vol. 12, no. 1.
5. Avduevskiy V.S., Antonov B.M., Anfimov N.A. *Osnovy teorii poleta kosmicheskikh apparatov* [The theory of space flight]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1985.
6. Ivanov N.M., Martynov A.I. *Dvizheniye kosmicheskikh letatel'nykh apparatov v atmosferakh planet* [Movements of spacecraft in atmospheres of planets]. Moscow: Nauka, 1985.
7. Shkadov L.M., Bukhanova R.S., Illarionov V.F., Plokhikh V.P. *Mekhanika optimal'nogo prostranstvennogo dvizheniya letatel'nykh apparatov v atmosfere* [Mechanics of optimum three-dimensional motion of aircraft in the atmosphere]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1972.
8. Yaroshevskiy V.A. *Priblizhennyy raschet traektorii vkhoda v atmosferu* [Approximate calculation of the atmospheric reentry trajectory]. *Kosmicheskie issledovaniya* [Cosmic research], 1964, vol. 2, no. 4.
9. Griffin J.W., Vinh N.X. Three-dimensional optimal maneuvers of hypervelocity vehicles. AIAA paper no. 920. 1971.
10. Chapman D.R. An approximate analytical method for studying entry into planetary atmospheres. NASA Technical Report. 1959.