

В КАКОЙ ТОЧКЕ ОРБИТЫ НАХОДИТСЯ СЕГОДНЯ ЗЕМЛЯ?

А.И. РУБИНШТЕЙН, *проф. каф. высшей математики МГУЛ, проф. каф. высшей математики НИЯУ (МИФИ), д-р физ.-мат. наук*

rubinshtein_aleksandr@mail.ru, caf-math@mgul.ac.ru

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет леса»

141005, Московская обл., г. Мытищи-5, ул. 1-я Институтская, д. 1, МГУЛ

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» 115409, Москва, Каширское ш., 31

Рассматривается элементарное решение важнейшей задачи небесной механики – определение положения планеты на орбите в любой момент времени. Обычно приводится решение этой задачи, использующее закон Всемирного тяготения. Однако этот способ требует решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, что является достаточно сложной задачей. Если использовать не только законы Всемирного тяготения, второй закон Ньютона, но и три закона Кеплера, то можно свести указанную задачу к решению простейшего дифференциального уравнения первого порядка. В результате определяется положение планеты на орбите-эллипсе в любой момент времени. При желании можно найти вектор скорости движения планеты. Если известно положение нескольких планет в один произвольный момент времени, то принципиально можно определить их положение в любой момент. Значит, мы знаем конфигурацию планетарной системы и можем находить, например, моменты противостояний. Незначительно усложняя метод, можно исследовать движение вокруг звезды (например, Солнца) системы планета-спутник и определять моменты затмений. Помимо изложенного, приведен элементарный вывод из второго закона Ньютона и третьего закона Кеплера закона Всемирного тяготения.

Ключевые слова: орбита, законы Ньютона, законы Кеплера

Представляется, что в сегодняшнем вузовском математическом образовании недостаточно представлена мотивация излагаемого материала. Вместе с тем хорошо известно, что развитие математических методов стимулировалось (как первый толчок) потребностями, прежде всего физики, астрономии.

Возникновение дифференциального и интегрального исчисления у Ньютона определялось необходимостью решения задач механики, в том числе небесной механики. Демонстрация того, как применение математического материала первого курса любого ВТУЗа позволяет количественно описать движение планет, искусственных спутников и т. д. (в рамках, разумеется, некоторой идеализации – модели – задачи двух тел, например) должна убедить студента в важности и полезности предлагаемых знаний. Итак, как же происходит движение Земли по орбите?

Первый закон И. Кеплера (1571–1630) гласит: «Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце». Пусть канонические уравнения орбиты-эллипса есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и Солнце расположено в точке $(c = \sqrt{a^2 - b^2}; 0)$, а полярный угол Земли в момент времени t

равен $\varphi(t)$. Пусть $\varphi = 0 = \varphi(0)$ – угол соответствующей точке апогея – ближайший к Солнцу точке орбиты.

Координаты Земли в момент времени t есть $(a \cos \varphi(t); b \sin \varphi(t))$ – координата радиус-вектора $\vec{OT}$. Как указал Ньютон (1643–1727), вектор скорости $\vec{v}(t)$ движения имеет координаты, равные производным по времени от координат положения, т. е.

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = (-a \sin \varphi(t); b \cos \varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

По второму закону И. Ньютона – изменение количества движения равно импульсу действующей силы (m – масса Земли)

$$\vec{F} = \vec{F}(t) = (m \cdot \vec{v}(t))' = m \cdot \vec{v}'(t) = (-am \sin \varphi(t)) \times \varphi''(t) - (am \cos \varphi(t)) \cdot (\varphi'(t))^2; (bm \cos \varphi(t)) \times \varphi''(t) - (bm \sin \varphi(t)) (\varphi'(t))^2 \quad (1)$$

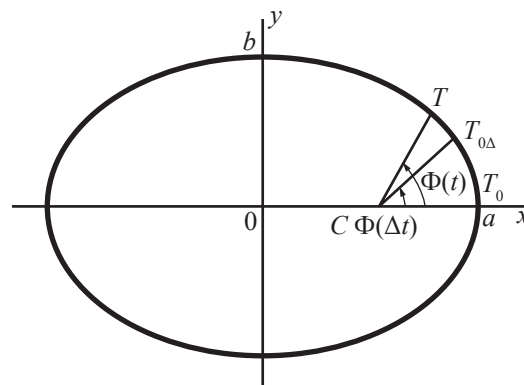


Рис. 1. Схема движения Земли
Fig. 1. A scheme of the Earth movement

По закону Всемирного тяготения Ньютона сила притяжения Земли Солнцем есть

$$\vec{F} = k \frac{mM}{R^2} \left(-\frac{\vec{R}}{R} \right), \quad (2)$$

где R – расстояние между Землей и Солнцем ($R = |\vec{TC}|$) и $\vec{R} = \vec{TC}$ – вектор Земля–Солнце,

M – масса Солнца (сила притяжения двух масс пропорциональна произведению этих масс, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющий массы). Коэффициент пропорциональности k – постоянная Всемирного тяготения.

Так как (рис. 1)

$$\vec{R} = \vec{TC} = -((a \cos \varphi(t) - c); b \sin \varphi(t)),$$

$$R = \left((a \cos \varphi(t) - c)^2 + (b \sin \varphi(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

то по (2)

$$\vec{F} = kmM \left(\frac{\frac{c - a \cos \varphi(t)}{\left((a \cos \varphi(t) - c)^2 + (b \sin \varphi(t))^2 \right)^{\frac{3}{2}}}; \frac{-a \sin \varphi(t)}{\left((a \cos \varphi(t) - c)^2 + (b \sin \varphi(t))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (3)$$

Приравнивание $\vec{F}$ из (1) и (3) приводит к необходимости решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, что проблематично. Но на помощь приходит второй закон И. Кеплера: «Радиус вектор Солнце–Земля в равные промежутки времени «замечает» равные площади».

Отсюда следует, например, что при круговом движении $a = b = R$, т. е. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$ и $\varepsilon = c/a$ (для Земли $\varepsilon = 0,017$) скорость постоянна.

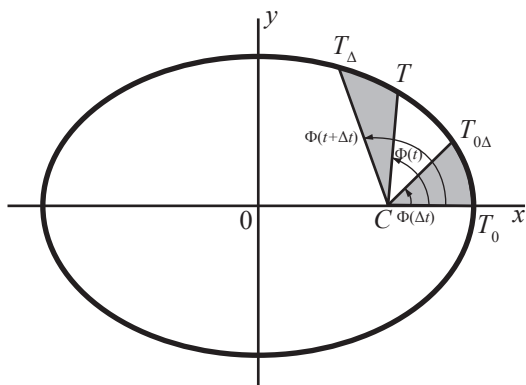


Рис. 2. Иллюстрация второго закона Кеплера
Fig. 2. Illustration of Kepler's second law

По второму закону Кеплера

$$S_{\text{сект.}TC\Delta} = S_{\text{сект.}T_0CT_0\Delta}.$$

При малых значениях Δt можно считать $S_{\text{сект.}TC\Delta} \approx S_{\Delta T_0CT_0\Delta}$ и $S_{\text{сект.}T_0CT_0\Delta} \approx S_{\Delta T_0CT_0\Delta}$. Имеем

$$\begin{aligned} S_{\Delta TCT\Delta} &\approx \frac{1}{2} CT \cdot CT_{\Delta} \sin(T_{\Delta}CT) = \frac{1}{2} CT \cdot CT_{\Delta} \sin((\Phi(t) + \\ &+ \Delta\Phi(t)) - \Phi(t)) = \frac{1}{2} ((CT \cdot \cos \Phi(t)) \cdot (CT_{\Delta} \sin(\Phi(t) + \\ &+ \Delta\Phi(t))) - (CT \cdot \sin \Phi(t)) \cdot (CT_{\Delta} \cos(\Phi(t) + \Delta\Phi(t)))) = \\ &= \frac{1}{2} ((x_T - c) \cdot y_{T_{\Delta}} - (x_{T_{\Delta}} - c) \cdot y_T) = \frac{1}{2} ((x_T - c)(y_T + \\ &+ \Delta y) - ((x_T + \Delta x) - c)y_T) = \frac{1}{2} ((x_T - c) - y_T \cdot \Delta x) = \quad (4) \\ &= \frac{1}{2} ((a \cos \varphi(t) - c) \cdot \Delta(b \sin \varphi(t)) - (b \sin \varphi(t)) \times \\ &\times \Delta(a \cos \varphi(t))) \approx \frac{1}{2} ((a \cos \varphi(t) - c)(b \cos \varphi(t)) - \\ &- (b \sin \varphi(t))(-a \sin \varphi(t))) \cdot \varphi'(t) \Delta t = \\ &= \frac{1}{2} b(a - c \cos \varphi(t)) \varphi'(t) \Delta t. \end{aligned}$$

Здесь использована формула Лагранжа конечных приращений.

Аналогично ($\varphi(0) = 0!$)

$$S_{\Delta T_0CT_0\Delta} \approx \frac{1}{2} b(a - c) \varphi'(0) \Delta t. \quad (5)$$

Из соотношения $S_{\Delta TCT\Delta} \approx S_{\Delta T_0CT_0\Delta}$ получаем $(1 - \varepsilon \cos \varphi(t)) \varphi'(t) = (1 - \varepsilon) \varphi'(0)$ (напомним, что $\varepsilon = c/a$).

Но из равенства правых частей формул (1) и (3) при $\varphi(0) = 0$ получаем

$$((-am)(\varphi'(0))^2; (bm)\varphi''(0)) = \left(-\frac{kmM}{(a-c)^2}; 0 \right),$$

откуда

$$\varphi''(0) = 0; (\varphi'(0))^2 = \frac{kM}{a(a-c)^2} = \frac{kM}{a^3(1-\varepsilon)^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi'(0) = \frac{\sqrt{kM}}{(1-\varepsilon)a^{\frac{3}{2}}}. \quad (7)$$

По (6) и (7)

$$(1 - \varepsilon \cos \varphi(t)) \varphi'(t) = \frac{\sqrt{kM}}{a^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

Левая часть (8) есть производная от функции

$$\varphi(t) - \varepsilon \sin \varphi(t)$$

Следовательно,

$$\varphi(t) - \varepsilon \sin \varphi(t) = \frac{\sqrt{kM}}{a^{\frac{3}{2}}} t + C$$

Но так как $\varphi(0) = 0$, то $C = 0$ и окончательно

$$\varphi(t) - \varepsilon \sin \varphi(t) = \frac{\sqrt{kM}}{a^{\frac{3}{2}}} t \quad (9)$$

Это и определяет закон движения Земли по орбите. Уравнение (9) просто решать графически (рис. 3) (τ – период обращения по орбите).

Очевидно по (9), что

$$2\pi = \varphi(\tau) = \frac{\sqrt{kM}}{a^{\frac{3}{2}}} \tau \Leftrightarrow \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{kM}} a^{\frac{3}{2}}. \quad (10)$$

Отсюда

$$\tau^2/a^3 = 4\pi^2/kM. \quad (11)$$

Правая часть (11) постоянная – одна для любой планеты, обращающейся вокруг Солнца, и мы получаем третий закон И. Кеплера: «Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей орбит-эллипсов».

Кеплер получил свои законы, обработав громадный материал наблюдений Тихо Браге (1546–1600).

Покажем, как из третьего закона Кеплера и второго закона Ньютона в предположении равномерного кругового движения планеты вокруг Солнца получить закон Всемирного тяготения.

$$\begin{aligned} \vec{OT} &= \left(R \cos \frac{2\pi}{\tau} t; R \sin \frac{2\pi}{\tau} t \right) \\ \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{OT}}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} R \left(-\sin \frac{2\pi}{\tau} t; \cos \frac{2\pi}{\tau} t \right). \end{aligned} \quad (12)$$

По второму закону Ньютона

$$\vec{F} = (m\vec{v}(t))' = \frac{4\pi^2}{\tau^2} mR \left(-\cos \frac{2\pi}{\tau} t; \sin \frac{2\pi}{\tau} t \right). \quad (13)$$

Но по третьему закону Кеплера $\tau^2 = \lambda R^3$ и

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{4\pi^2}{\lambda R^3} mR \left(-\cos \frac{2\pi}{\tau} t; -\sin \frac{2\pi}{\tau} t \right) = \\ &= \vartheta m \frac{\left(-\cos \frac{2\pi}{\tau} t; -\sin \frac{2\pi}{\tau} t \right)}{R^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, чем больше масса притягивающего тела (Солнце-звезда), тем больше должна быть сила $\vec{F}$, то есть логично считать, что $\vartheta = kM$. Следовательно

$$\vec{F} = k \frac{mM}{R^2} \left(-\cos \frac{2\pi}{\tau} t; -\sin \frac{2\pi}{\tau} t \right). \quad (14)$$

Но

$$\left(-\cos \frac{2\pi}{\tau} t; -\sin \frac{2\pi}{\tau} t \right)$$

– вектор единичной длины, направленный от Земли (планеты) к Солнцу (звезде). Это в точности закон Всемирного тяготения.

(По третьему закону Ньютона с такой же силой Земля «притягивает» Солнце).

Аналогичные формулы получаются при рассмотрении движения искусственного спутника Земли. Надо заменить массу Земли на массу спутника, а массу Солнца – на массу Земли.

По (12, 13) легко получить «школьную» формулу

$$|\vec{F}| = F = \frac{m_c v^2}{R_3 + H} = \frac{m_c |\vec{v}|^2}{R_3 + H}$$

(R – радиус Земли, H – высота орбиты спутника над Землей).

Имеем

$$\frac{m_c v^2}{R_3 + H} = k \frac{m_c M_3}{(R_3 + H)^2},$$

$$\text{откуда } v = \sqrt{k \frac{M_3}{R_3 + H}} \approx \sqrt{k \frac{M_3}{R_3}}.$$

Подстановка численных значений массы и радиуса Земли и постоянной всемирного

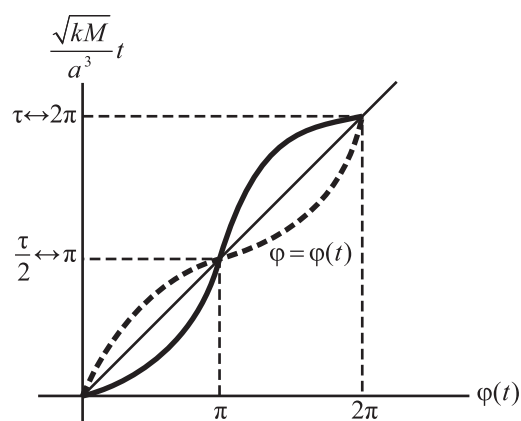


Рис. 3. График функции $\varphi(t)$

Fig. 3. The graph of $\varphi(t)$

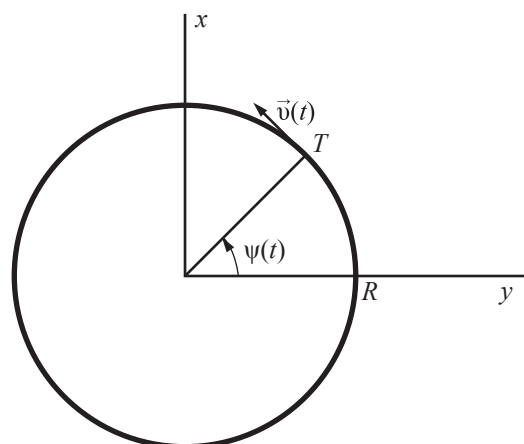


Рис. 4. К выводу Закона Всемирного тяготения

Fig. 4. Derivation of the law of gravity

тяготения дает значение $v = v_I \approx 7,8$ км/сек – первой космической скорости.

Так как поле тяготения является потенциальным, то величина работы не зависит от пути. Энергия потенциальной силы при удалении спутника от поверхности Земли «на бесконечность» равна

$$\int_{R_3}^{\infty} k \frac{m_c M_3}{h^2} dh = -k \frac{m_c M_3}{R_3}$$

Но изменение кинетической энергии есть $m_c V_{omp}^2 / 2$ (V_{omp} – скорость «отрыва», вторая космическая скорость). Закон сохранения энергии дает

$$\frac{k m_c M_3}{R_3} = \frac{m_c V_{omp}^2}{2}$$

$$\text{откуда } V_{omp} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k M_3}{R_3}} = v_I \sqrt{2}$$

(v_I – первая космическая скорость).

Так что

$$V_{omp} \approx 11 \text{ км/сек.}$$

Легко видеть, что использовались сведения, сообщаемые студентам на первом кур-

се (кроме, быть может, потенциальности поля тяготения).

Библиографический список

1. Дубошин, Г.Н. Небесная механика / Г.Н. Дубошин. – М., Наука, 1964.
2. Neugebauer O. A history of ancient mathematical astronomy, Berlin, Springer, 1975/
3. Voigt H.H. Abris der Astronomie, Mannheim, 1975.
4. Pedersen O. Survey of Almagest, Odense Univ. Press, 1974.
5. Парс, Л. Аналитическая динамика / Л.М. Парс. – М.: Наука, 1971.
6. Arnold V.I. Perturbation theory planetary systems, Inter. Congress Math. Stockholm, 1962, 3.3.
7. Арнольд, В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике / В.И. Арнольд // УМН, 18:6 (1963). – С. 91–192.
8. Арнольд, В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике / В.И. Арнольд // Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда, 2 (1964). – С. 403–409.
9. Алексеев, В.М. Об одной теореме в теории возмущенного движения / В.М. Алексеев // Астрономический журнал, № 38 (2), (1961). – С. 325–335.
10. Рубинштейн, А.И. О законах Кеплера и Ньютона / А.И. Рубинштейн // Математическое образование, 1 (57), 2011. – С. 40–44.

WHAT POINT OF ORBIT IS THE EARTH AT TODAY?

Rubinshtein A.I., Prof. MSFU, Dr. Sci. (Physics and Mathematics)

rubinshtein_aleksandr@mail.ru, caf-math@mgul.ac.ru

Moscow State Forest University (MSFU), 1st Institutskaya st., 1, 141005, Mytischki, Moscow reg., Russia

National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute)

115409, Kashirskoe highway, 31, Moscow, Russia

An initiate method to solve the problem of what point of orbit a planet is at today has been investigated. The solution of this problem using the law of gravitation is difficult, as it demands solving a certain system of nonlinear differential equations. Using not only the law of gravitation but the Second Newton's law and the Third Kepler's law allows to solve the problem with a simple first order differential equation. It is possible to find the speed-vector of planet. There is also a possibility of the configuration of planet system. An elementary conclusion of the law of gravitation, the Second Newton's law and of the Third Kepler's law is presented.

Keywords: orbit, Newton's laws, Kepler's laws

References

1. Duboshin G.N. *Nebesnaya mekhanika* [The sky mechanics], Moscow, Nauka, 1964.
2. Neugebauer O. [A history of ancient mathematical astronomy], Berlin, Springer, 1975.
3. Voigt H.H. [Abris der Astronomie], Mannheim, 1975.
4. Pedersen O. [Survey of Almagest], Odense Univ. Press, 1974.
5. Pars L. *Analiticheskaya dinamika* [Analytical dynamics], Moscow, Nauka, 1971.
6. Arnold V.I. [Perturbation theory planetary systems], Inter. Congress Math. Stockholm, 1962, 3.3.
7. Arnold V.I. *Malye znamenateli i problema ustoychivosti v klassicheskoy i nebesnoy mekhanike* [The small denominators and the problem of the stability in the classical mechanics], UMN, no. 18:6 (1963), pp. 91-192.
8. Arnold V.I. *Malye znamenateli i problema ustoychivosti v klassicheskoy i nebesnoy mekhanike* [The small denominators and the problem of the stability in the classical mechanics], Proc. 4 Math. Congr. USSR, no. 2 (1964), pp. 403-409
9. Alekseev V.M. *Ob odnoy teoreme v teorii vozmushchennogo dvizheniya* [About one theorem of the movement theory], J. Astronom., no. 38 (2), (1961), pp. 325-335.
10. Rubinshtein A.I. *O zakonakh Keplera i N'yutona* [About the Kepler's and Newton's laws], Mathematical education, no. 1 (57), 2011, pp. 40-44.