

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ БИЛЛИАРДНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ОВАЛАХ

А.И. РУБИНШТЕЙН, проф. каф. высшей математики НИЯУ (МИФИ), проф. каф. высшей математики МГУЛ, д-р физ.-мат. наук,

Д.С. ТЕЛЯКОВСКИЙ, доц. каф. высшей математики НИЯУ (МИФИ), канд. физ.-мат. наук

*rubinshtein\_aleksandr@mail.ru*

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет леса»

141005, Московская обл., г. Мытищи-5, ул. 1-я Институтская, д. 1, МГУЛ

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» 115409, г. Москва, Каширское ш., 31.

Рассматриваются периодические билиардные траектории в билиярдах-овалах, то есть выпуклых областях, ограниченных кривыми с непрерывно меняющейся касательной прямой, обладающих двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Модельным случаем таких билиардов является эллиптический билиард. Основное внимание уделяется поиску конкретных билиардных траекторий с небольшим числом прямоугольных звеньев-хорд. Показано, что в любом билиярде-овале имеется две пары зеркальных периодических билиардных траекторий, образованных тремя хордами овала. При этом одна из вершин такой траектории расположена в конце диаметра овала, а противолежащее ей звено-хорда – перпендикулярно этому диаметру. Приведено геометрическое построение такой траектории и указано уравнение, решение которого позволяет найти значение параметра в параметрическом задании контура овала, соответствующее вершине билиардной ломаной. Для случая билиярда-эллипса указаны декартовы координаты вершин. С помощью теоремы Понселе показано, что все периодические трехзвенные билиардные траектории в эллипсе описаны вокруг найденного эллипса, софокусного с исходным эллипсом. На основании результата Биркгофа все они имеют равные периметры. Аналогичные результаты получены и для четырехзвенных периодических билиардных траекторий. Естественно, в случае билиярда-эллипса софокусный эллипс, вокруг которого описаны все периодические билиардные траектории, имеющие четыре звена, отличен от эллипса, обслуживающего трехзвенные билиардные траектории. В некоторых овалах существуют четырехзвенные билиардные траектории V-образного типа, каждая из двух хорд которых ортогональна контуру овала и проходится дважды. Приведены примеры овалов, в которых существуют только четыре трехзвенных периодических траектории и овалы, в которых подобных траекторий бесконечное множество.

Ключевые слова: периодические траектории, билиардные траектории.

Пусть  $G$  – плоская область с гладкой (или кусочно-гладкой) границей  $\partial G$ . Билиардной траекторией в  $G$  называется неограниченно продолжаемая ломаная, вершины которой лежат на  $\partial G$ , все остальные точки внутри  $G$ , а два звена с общей вершиной  $M \in \partial G$  образуют равные углы с касательной, проведенной к  $\partial G$  в точке  $M$  – правило билиардного отражения «угол падения равен углу отражения». Билиардное отражение в угловых точках  $\partial G$  считается невозможным, и траектория, попавшая в угловую точку, заканчивается в ней.

В общем случае билиардная траектория состоит из бесконечной последовательности звеньев, но могут существовать и периодические траектории, которые представляются ломаными с конечным числом звеньев, проходимыми бесконечно много раз. В статье с элементарной точки зрения рассматривается вопрос о существовании периодических билиардных траекторий в овалах.

При изучении периодических билиардных траекторий в выпуклых областях

с гладкой границей основополагающим является следующий результат Дж. Биркгофа [2, стр. 175–177], [1, стр. 97–98]: для каждого натурального  $n \geq 2$  существует периодическая билиардная  $n$ -звенная траектория. Биркгоф доказал, что вписанная в границу области  $G$  ломаная наибольшей длины с  $n$  звеньями является периодической  $n$ -звенной билиардной траекторией. Фактически им было получено, что вписанная в  $\partial G$  ломаная экстремальной длины (имеющая локальный максимум или минимум) является периодической билиардной траекторией.

Рассмотрим периодические билиардные траектории внутри кривых, для которых координатные оси являются осями симметрии. Уравнение части кривой, лежащей в первой четверти, задается параметрически

$$\begin{cases} x = a\varphi(t), 0 \leq t \leq \pi/2, \\ y = b\psi(t), 0 < b \leq a, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1, \varphi(\pi/2) = 0, \varphi'(0) = 0, \varphi'(t) \leq 0, \\ \psi(0) = 0, \psi(\pi/2) = 1, \psi'(\pi/2) = 0, \psi'(t) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

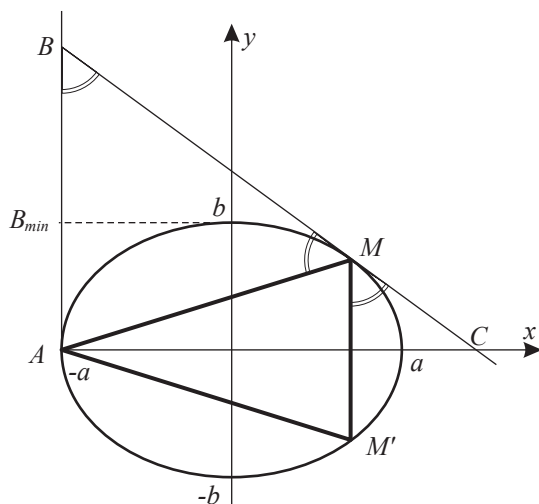


Рис. 1.  
Fig. 1.

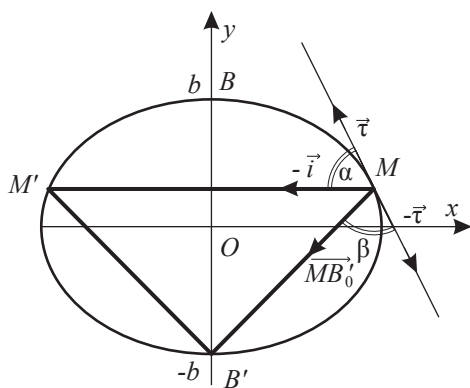


Рис. 2.  
Fig. 2.

Такие кривые будем называть овалами.

Проведем через точку  $A(-a; 0)$  вертикальную прямую и из точек  $B$  этой прямой для которых  $AB = AB_{\min} = b$  будем строить касательные к овалу (рис. 1). Очевидно, что при  $B = B_{\min}$  точка  $M$  имеет координаты  $(0, b)$  и  $BM = a < AM = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Имеем  $\lim_{AB \rightarrow +\infty} BM = +\infty$ , но  $AM \leq 2a$ ,  $BM > AM$ . Следовательно, найдется такая точка  $B$ , что  $AB = AM$  (очевидно, что  $B$  определяется единственным образом). В этом случае  $\triangle ABM$  – равнобедренный и  $\angle ABM = \angle AMB$ . Если прямая  $M'M$  параллельна  $AB$ , то  $\angle CMM' = \angle ABM = \angle AMB$  и касательная прямая  $BMC$  к овалу составляет равные углы с  $MA$  и  $MM'$ . Так как точка  $M'$  симметрична точке  $M$  относительно оси  $Ox$ , то замкнутая трехзвенная ломаная  $AMM'A$  – билиардная траектория.

Из (1) видно, что координаты текущей точки овала  $M(a\varphi(t); b\psi(t))$ , а уравнение прямой  $BMC$  есть

$$y = b\psi(t) = \frac{b\psi'(t)}{a\varphi'(t)}(x - a\varphi(t)).$$

Отсюда, положив  $x = -a$ , получаем

$$AB = b \left( \psi(t) - \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\varphi(t) \right),$$

$$AM = \sqrt{a^2(1 + \varphi(t))^2 + b^2\psi^2(t)}.$$

Единственное значение  $t_0 \in (0; \pi/2)$ , при котором получается трехзвенная билиардная траектория, находим из уравнения

$$b \left( \psi(t) - \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\varphi(t) \right) = \sqrt{a^2(1 + \varphi(t))^2 + b^2\psi^2(t)}.$$

Если рассматриваемый овал является эллипсом  $x = \varphi(t) = a \cos t$ ,  $y = \psi(t) = b \sin t$ , то из этого уравнения получим, что

$$\cos t_0 = \frac{a^2}{b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}} \Leftrightarrow a \cos t_0 =: a(3).$$

Разумеется, симметричный относительно оси  $Oy$  с  $\triangle AMM'$  треугольник также является трехзвенной билиардной траекторией.

Будем теперь искать симметричный относительно оси треугольник с вершиной в точке  $B'(0; -b)$ , который определяет периодическую трехзвенную билиардную траекторию в нашем овалу (рис. 2). Рассмотрим единичные векторы:  $\vec{\tau}$  – касательный к овалу в точке  $M(a\varphi(t); b\psi(t))$ ,  $\vec{MB}_0 \parallel \vec{MB}'$ ,  $-\vec{i} = (-1, 0)$ . Очевидно, что

$$\vec{\tau} = \frac{(a\varphi'(t); b\psi'(t))}{\sqrt{a^2(\varphi'(t))^2 + b^2(\psi'(t))^2}},$$

$$\vec{MB}_0 = \frac{(-a\varphi(t); -b(1 + \psi(t)))}{\sqrt{a^2(\varphi(t))^2 + b^2(1 + \psi(t))^2}}.$$

Следовательно,

$$\cos \alpha = \vec{\tau} \cdot (-\vec{i}) = \frac{-a\varphi'(t)}{\sqrt{a^2(\varphi'(t))^2 + b^2(\psi'(t))^2}} \geq 0,$$

$$\cos \beta = (-\vec{i}) \cdot \vec{MB}_0 = \frac{a^2\varphi(t)\varphi'(t) + b^2(1 + \psi(t))\psi'(t)}{\sqrt{a^2(\varphi'(t))^2 + b^2(\psi'(t))^2} \sqrt{a^2(\varphi(t))^2 + b^2(1 + \psi(t))^2}}.$$

Из уравнений (1)

$$(\cos \alpha)|_{t=0} = 0,$$

$$(\cos \beta)|_{t=0} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow (\cos \alpha - \cos \beta)|_{t=0} < 0,$$

$$(\cos \alpha)|_{t=\pi/2} = 1,$$

$$(\cos \beta)|_{t=\pi/2} = 0 \Rightarrow (\cos \alpha - \cos \beta)|_{t=\pi/2} > 0,$$

Так как функции  $(\cos \alpha)(t)$ ,  $(\cos \beta)(t)$  очевидно непрерывны и их разность монотонна, то существует единственное значение  $t_0 \in (0; \pi/2)$ , при котором

$$(\cos \alpha)(t_0) = (\cos \beta)(t_0) \Leftrightarrow -a\varphi'(t_0) = \frac{a^2\varphi(t_0)\varphi'(t_0) + b^2(1 + \psi(t_0))\psi'(t_0)}{\sqrt{a^2(\varphi(t_0))^2 + b^2(1 + \psi(t_0))^2}}$$

Для эллипса  $x = acost, y = bsint, 0 < b < a$ , получим

$$\sin t_0 = \frac{b^2}{a^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}$$

и поэтому

$$b(3) := b \sin t_0 = \frac{b^3}{a^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}.$$

В произвольном овале, заданном уравнениями (1), имеются две периодические четырехзвенные билиардные траектории – ромб с вершинами в точках  $(a; 0)$ ,  $(-a; 0)$ ,  $(0; b)$ ,  $(0; -b)$  и прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, вершина  $(M(a\varphi(t_0); b\psi(t_0)))$  которого, лежащая в первом квадранте, находится из условия

$$\frac{b\psi'(t_0)}{a\varphi'(t_0)} = -1.$$

Остальные три вершины находятся отражением относительно осей координат и центра симметрии  $O(0; 0)$ . Длины (периметры) этих траекторий равны соответственно  $4\sqrt{a^2 + b^2}$  и  $4(a\varphi(t_0) + b\psi(t_0))$ . В случае эллипса эти периметры равны.

Существуют овалы, в которых нет других периодических трех- и четырехзвенных билиардных траекторий, кроме указанных выше.

Рассмотрим следующий овал (рис. 3):  $A_+D$  – дуга окружности  $D(O; R)$  радиуса  $R$  с центром в начале координат,  $\angle A_+OD = \alpha$ ,  $\pi/3 < \alpha < \pi/2$ ,  $B_+A_+$  – дуга окружности радиуса  $2R$  с центром в точке  $A_-'$ , симметричной точке  $A_+$  относительно  $O(0; 0)$ , величина  $\angle B_+A_-'A_+$  такова, что  $\angle B_+OA_+ = \alpha - \varepsilon$ ,  $C_+B_+$  – такая дуга сопряженной с дугой  $B_+A_+$  окружности очень малого радиуса  $O_+B_+$ , что дуга  $C_+B_+ < \varepsilon$  ( $O_+$  и  $C_+$  лежат на оси  $Oy$ ). Далее дуга  $C_+D$  симметрично отражается относительно оси  $Oy$ .

Если  $\alpha > \pi/3$ , то очевидно, что любая точка дуг с центрами в  $D$  и  $D'$  раствора  $2(\alpha - \pi/3)$  будет вершиной периодической трехзвенной билиардной траектории – равностороннего треугольника, вписанного в окружность  $D(O; R)$ . Периметры этих траекторий равны  $3\sqrt{3}R$ . Еще одна трехзвенная билиардная траектория, как и в любом овале вида (1), имеет вершину в точ-

ке  $C_+$  овала, лежащей на положительной части оси  $Ox$ , а другая траектория симметрична этой относительно оси  $Oy$ . Их периметры равны  $4R(1 + O(\varepsilon))$ , что меньше  $3\sqrt{3}R$ . Если вершина равностороннего треугольника отстоит от оси  $Ox$  на угол  $(\alpha + \pi/6)$ , то одна из двух других вершин окажется в точке  $A_+'$ . При дальнейшем повороте (против часовой стрелки) эта вершина попадет в точку дуги  $A_+C_+$  окружности радиуса  $2R$  с центром в  $A_-'$  и билиардная траектория из этой вершины попадет на дугу  $DA$  окружности радиуса  $R$  с центром в  $O$ , что невозможно. Аналогично не будет вершин билиардных траекторий и на малых окружностях с центрами в  $O_+$  и  $O_-$  (за исключением точек  $C_+$  и  $C_-$ ). Две вершины на дуге  $A_-'A_+$  раствором  $2\alpha$  заполняют три дуги окружности растворами  $(\alpha - \pi/6)$  – с концами в  $A_-'$  и  $A_+$  и  $2(\alpha - \pi/3)$  – с центром в  $D'$ . По симметрии аналогично на дуге  $A_+A_-'$ . Всего шесть дуг общей длиной  $(6\alpha - 2\pi)$ , что может быть сколь угодно близко к нулю. Остальные точки овала, легко понять, не являются вершинами периодических трехзвенных билиардных траекторий.

Если  $0 < \alpha < \pi/3$ , то в овале всего четыре периодические трехзвенные билиардные траектории – с вершинами в точках  $C_+$ ,  $C_-$ ,  $D$  и  $D'$ . Периметры первых двух, как указывалось, равны  $4R(1 + O(\varepsilon))$ , а последних двух больше:  $2(1 + \sqrt{2})R > 4R(1 + O(\varepsilon))$ .

В эллипсе ситуация другая. В 1813 г. Ж.В. Понселе доказал, что если  $n$ -угольник  $P$

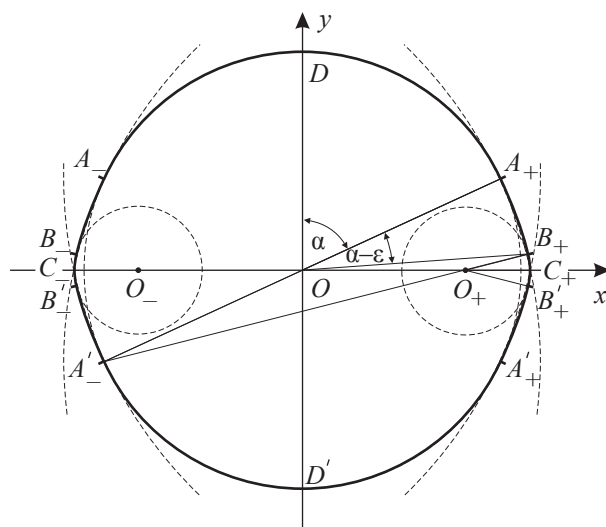


Рис. 3  
Fig. 3.

(необязательно выпуклый) вписан в эллипс  $\varepsilon_1$  и каждая сторона  $P$  касается кривой второго порядка  $\varepsilon_2$  (эллипса, лежащего внутри  $\varepsilon_1$  или гиперболы), то любую хорду эллипса  $\varepsilon_1$ , которая касается кривой  $\varepsilon_2$ , можно дополнить до вписанного в  $\varepsilon_1$   $n$ -угольника, каждая сторона которого касается  $\varepsilon_2$ .

В эллипсах в зависимости от расположения начального звена возможны следующие три типа биллиардных траекторий:

1) Если начальное звено траектории проходит через фокус, то отраженное звено проходит через другой фокус и все звенья траектории проходят через фокусы эллипса поочередно.

2) Если начальное звено траектории оставляет фокусы эллипса  $\varepsilon$  с одной стороны, то все звенья траектории касаются одного и того же эллипса, софокусного с эллипсом  $\varepsilon$  и лежащего внутри  $\varepsilon$ .

3) Если начальное звено траектории проходит между фокусами эллипса  $\varepsilon$ , то все звенья траектории поочередно касаются ветвей одной и той же софокусной с  $\varepsilon$  гиперболы, причем

точки касания могут лежать на продолжении звеньев траектории уже за пределами  $\varepsilon$ .

Поэтому каждая точка эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b,$$

при всяком  $n \geq 3$  является вершиной периодической  $n$ -звенной биллиардной траектории. При этом при  $n = 3$  каждое звено этой траектории касается софокусного эллипса

$$\frac{x^2}{a(3)^2} + \frac{y^2}{b(3)^2} = 1,$$

где

$$a(3) = \frac{a^3}{b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}, \quad b(3) = \frac{b^3}{a^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}},$$

а при  $n = 4$  – эллипса

$$\frac{x^2}{a(4)^2} + \frac{y^2}{b(4)^2} = 1$$

$$\text{где } a(4) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad b(4) = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

При некоторых ограничениях на длины полуосей овалов, задающихся уравнениями (1), появляются еще четырехзвенные биллиардные траектории, которых нет в круге – это  $V$ -образные траектории и «бабочки».

Если касательная в точке  $M$  овала ортогональна отрезку  $MB$ , где  $B(0; -b)$  (рис. 4), то траектория  $MBM'BM$ , где точка  $M'$  симметрична точке  $M$  относительно оси  $Oy$ , очевидно является биллиардной. Для того, чтобы такая точка  $M$  нашлась, необходимо и достаточно, чтобы имела решение следующая задача

$$\min(BM)^2 = \min_{0 < t < \pi/2} (a^2 \varphi^2(t) + b^2(1 + \psi(t))^2)$$

$$a^2 \varphi(t_0) \varphi'(t_0) + b^2(1 + \psi(t_0)) \psi'(t_0) = 0, \quad 0 < t_0 < \pi/2.$$

Для эллипса  $x = \varphi(t) = acost$ ,  $y = \psi(t) = asint$   $V$ -образная траектория существует, если  $a^2 > 2b^2$ . В этом случае точка  $M$  имеет координаты

$$\left( \frac{a^2 \sqrt{a^2 - 2b^2}}{a^2 - b^2}; \frac{b^3}{a^2 - b^2} \right).$$

Еще одна  $V$ -образная траектория получается симметрией относительно оси  $Ox$ . Периметры этих траекторий равны

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Траектория «бабочка» (рис. 5) появляется, если отрезки  $MO$  и  $MM'$  образуют равные углы с касательной к овалу, проведенной в точке  $M$ . В этом случае для нахождения координат точки  $M$  получаем соотношения

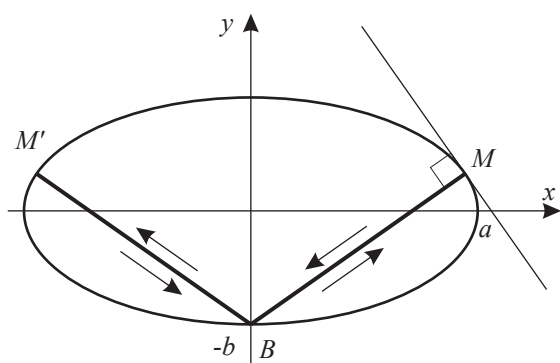


Рис. 4  
Fig. 4.

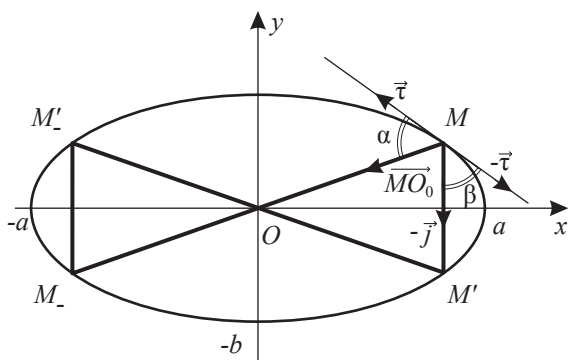


Рис. 5.  
Fig. 5.



$$\begin{aligned} \overline{MO_0} &= \frac{(-a\varphi(t); -b\psi(t))}{\sqrt{a^2\varphi^2(t) + b^2\psi^2(t)}}; \\ \vec{\tau} &= \frac{(a\varphi'(t); b\psi'(t))}{\sqrt{a^2(\varphi'(t))^2 + b^2(\psi'(t))^2}}; \quad -\vec{j} = \overline{MM_0} = (0; -1) \\ \cos \alpha &= \overline{MO_0} \cdot \vec{\tau} = \\ &= \frac{-a^2\varphi(t)\varphi'(t) - b^2\psi(t)\psi'(t)}{\sqrt{a^2\varphi^2(t) + b^2\psi^2(t)}\sqrt{a^2(\varphi'(t))^2 + b^2(\psi'(t))^2}}, \\ \cos \beta &= (-\vec{\tau}) \cdot (-\vec{j}) = \frac{b\psi'(t)}{\sqrt{a^2(\varphi'(t))^2 + b^2(\psi'(t))^2}} \\ \cos \alpha &= \cos \beta \Leftrightarrow 0 \leq -a\varphi(t)\varphi'(t) = \\ &= b\psi'(t)(b\psi(t) + \sqrt{a^2\varphi^2(t) + b^2\psi^2(t)}) \end{aligned}$$

В случае эллипса  $x = \varphi(t) = acost$ ,  
 $y = \psi(t) = asint$  координаты точки  $M$  следующие

$$\left( \frac{a\sqrt{a^2 - 2b^2}}{a^2 - b^2}; \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right).$$

Из теоремы Понселе следует, что в случае эллипса  $V$ -образная траектория и «бабочка» являются касательными к одной и той же гиперболе, софокусной с исходным эллипсом.

### Библиографический список / References

1. Гальперин, Г.А. Математические бильярды / Г.А. Гальперин, А.Н. Земляков // Библиотечка «Квант». – Вып. 77. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1990. – 288 с.
2. Биркгоф, Дж. Динамические системы / Дж. Биркгоф. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. – 408 с. Birkhoff, G.D. *Dinamicheskie sistemy* [Dynamical Systems]. AMS Colloquium Publications, V. IX, 1966.
3. Рубинштейн А.И. Связующая нить. Неизвестная математика. – М.: Дрофа, 2009. – 110 с. Rubinstein A.I. *Svyazuyushchaya nit'. Neizvestnaya matematika* [Linking Thread, Unknown Mathematics], Drofa Pub. 2009.
4. Boldrighini C., Keane m., Marchetti F. Billiards in polygons, Ann. of Probability, 1978, V. 6, No. 4, P. 532–540.
5. Katok A. The growth rate for the number of singular and periodic orbits for polygonal billiard, Comm. Math. Phys., 1987, V. 111, P. 151–160.
6. Bos H.J.M., Kers C., Oort F., Raven D.F. Poncelet's Closure Theorem, Expo. Math., 1987, 5, P. 287–364.
7. Vorobets Ya.B., Gal'perin G.A. and Stepin A.M. Periodic billiard trajectories in polygons: generating mechanisms, Russian Math. Surveys, 1992, 47, 5–80.
8. Masur H. and Tabachnikov S. Rational billiards and flat structures, Handbook of Dynamical Systems, North-Holland. Amsterdam, 2002, 1A, P. 1015–1089.
9. Masur H. Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards, Duke Math. J., 1986, 15, 307–314.
10. Ya. Sinai. Introduction to ergodic theory. Princeton University Press. 1976.

### ON PERIODIC BILLIARD TRAJECTORIES IN OVALS

**Rubinshteyn A.I.**, Prof. National Research Nuclear University MEPhI, MSFU, Dr. Sci. (Physics and Mathematics);  
**Telyakovskiy D.S.**, Assoc. Prof. National Research Nuclear University MEPhI, Ph.D (Physics and Mathematics)

rubinshtein\_aleksandr@mail.ru

Moscow state forest university (MSFU) 1<sup>st</sup> 1 Institutskaya st., 1, 141005, Mytischki, Moscow reg., Russia  
 National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute) 115409, Russia, Moscow, Kashirskoe highway, 31

We consider periodic billiard trajectories in billiards-ovals, i.e. convex domains, that are bounded by curves whose tangent lines change slope continuously and have two mutually perpendicular axes of symmetry. An example of such billiards is an elliptic billiard. Our main focus is to find specific billiard trajectories that have a small number of perpendicular links-chords. It has been shown that in any billiard-oval there are two pairs of mirror perpendicular billiard trajectories that are formed by three chords of the oval. At the same time one of the peaks of such a trajectory is located at the end of the diameter of the oval, and the link-chord opposite to it is perpendicular to this diameter. We provide a geometric construction of such a trajectory and give an equation the solution of which can be used to find the value of the parameter in the parametric representation of oval's boundary that corresponds to the peak of billiard curve?. In case of an elliptic billiard we give the Cartesian coordinates of the corners. With the help of the Poncelet Theorem, we show that all periodic three-link billiard trajectories in the ellipse are circumscribed around of a just found ellipse, which is confocal to the original ellipse. Using the Birkhoff result we show that all of them have the same perimeter. We have obtained similar results for four-link periodic billiard trajectories. Clearly that in case of a billiard-ellipse, the confocal ellipse around which all four-link periodic billiard trajectories are circumscribed is different from the ellipse obtained for three-link billiard trajectories. In certain ovals there are four-link billiard trajectories of V-type, where each of the two chords is orthogonal to the boundary of the oval and is traced twice. We provide the examples of the ovals that have only four three-link periodic trajectories and the ovals in which there is an infinite number of such trajectories.

Keywords: periodic trajectories, billiard trajectories.