

ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ (ТЕОРИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ)

М.П. ТУМАНОВ, *проф. МИЭМ НИУ ВШЭ, канд. техн. наук,*
С.Р. АБДУЛЛИН, *доц. каф. высшей математики МГУЛ*

miketum@yandex.ru, mai-sal@yandex.ru

Московский институт электроники и математики Высшей школы экономики,
123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет леса»
141005, Московская обл., г. Мытищи-5, ул. 1-я Институтская, д. 1, МГУЛ

Показано, что в типовой системе автоматического управления возможно значительное падение точности регулирования за счет того, что частотная характеристика разомкнутой системы имеет ряд нулей (частот, на которых модуль этой характеристики мал). Модуль частотной характеристики разомкнутой системы автоматического управления позволяет эффективно исследовать точность замкнутой системы при любом виде задающего воздействия, поэтому является часто применяемым объектом в инженерной практике. В статье рассмотрен случай компенсации запаздывания с помощью неточной модели запаздывания в случае, когда модель самого объекта управления считается достаточно точной. Показано, что (даже в случае, когда система без компенсирующей модели запаздывания имеет частотную характеристику без существенных провалов) возможно появление таких провалов при компенсации. Но главный интерес в статье представляет связь между частотами этих провалов и соизмеримостью времен запаздывания. При соизмеримых временах появляются нули частотной характеристики, а при несоизмеримых – сколь угодно глубокие провалы, положение которых на оси частот определяется соотношением запаздываний.

Ключевые слова: распределенные системы управления, временное запаздывание, маршрутизатор, буферирование, компенсация запаздывания, передаточные функции, ЛАЧХ, обмотка тора.

Временное запаздывание в современных распределенных системах управления [6] является практически неизбежным злом, с которым приходится считаться и бороться. Основная причина наличия такого запаздывания – передача информации через сеть. Особенно значительных величин это запаздывание достигает при использовании большого числа маршрутизаторов и связанного с этим буферирования.

Такое запаздывание обычно является переменным [7, 8], но в данной статье рассмотрен эффект, не связанный с переменностью времени запаздывания, а возникающий при плохо определенном (недостаточно точно известном) времени запаздывания.

В таком контексте обычно либо используют экстраполятор функций на время запаздывания либо встроенную модель объекта управления с запаздыванием [3]. Причем оба этих подхода плохо работают при плохо известном запаздывании.

Кроме того, наличие помех вообще делает систему управления [1] с компенсацией запаздывания плохо реализуемой при сложных (широкополосных и интенсивных) помехах. Рассмотрим типовую систему замкну-

тую управления [2] с запаздыванием в цепи обратной связи и с помехой, действующей на объект управления. Будем предполагать (это реалистично), что выход объекта без запаздывания и без помехи физически получен быть не может, поэтому будем предполагать наличие в системе компенсации запаздывания.

Ограничимся случаем линейной системы с постоянными коэффициентами, так как даже в такой системе рассмотренный ниже эффект проявляется в полной мере. Пусть $W(p)_{рег}$, $W(p)_о$ и $W(p)_ос$ – соответственно передаточные функции регулятора, объекта управления и обратной связи [1].

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p)_{pc} = W(p)_{рег} \times W(p)_о \times W(p)_ос \quad (1)$$

(и соответствующая частотная характеристика $W(j\omega)_{pc}$ определяет величину ошибки слежения в системе по формуле [2])

$$e(p) = \frac{1}{1 + W(p)_{pc}} u(p). \quad (2)$$

В частотной области получим оценку спектральных составляющих ошибки, поэтому стремятся к тому, чтобы $|W(j\omega)_{pc}|^{-1} < \varepsilon$ – требуемой точности системы. Будем предполагать, что это требование выполнено, если отсутствует

Система управления с сетевым компонентом (NCS)

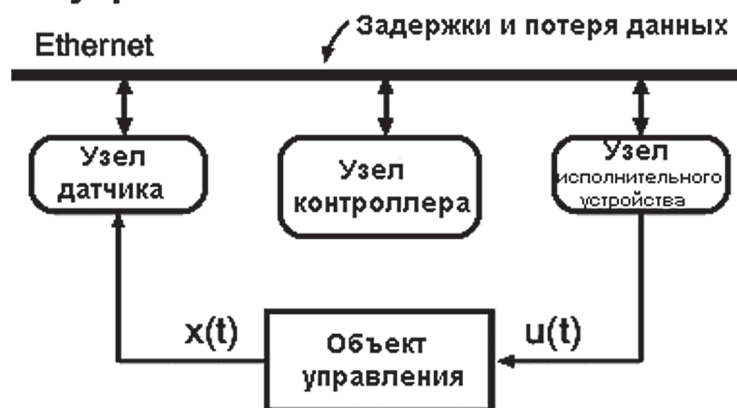


Рис. 1. Типовая распределенная система автоматического управления

Fig. 1. A typical distributed system of automatic control

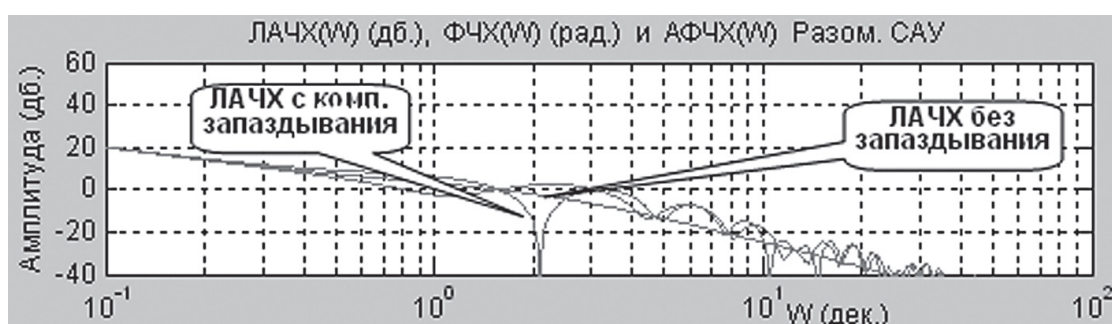


Рис. 2. ЛАЧХ разомкнутой системы без запаздывания и с последующей неточной компенсацией запаздывания

Fig. 2. LAFC of an open system without delay and with subsequent inaccurate delay compensation

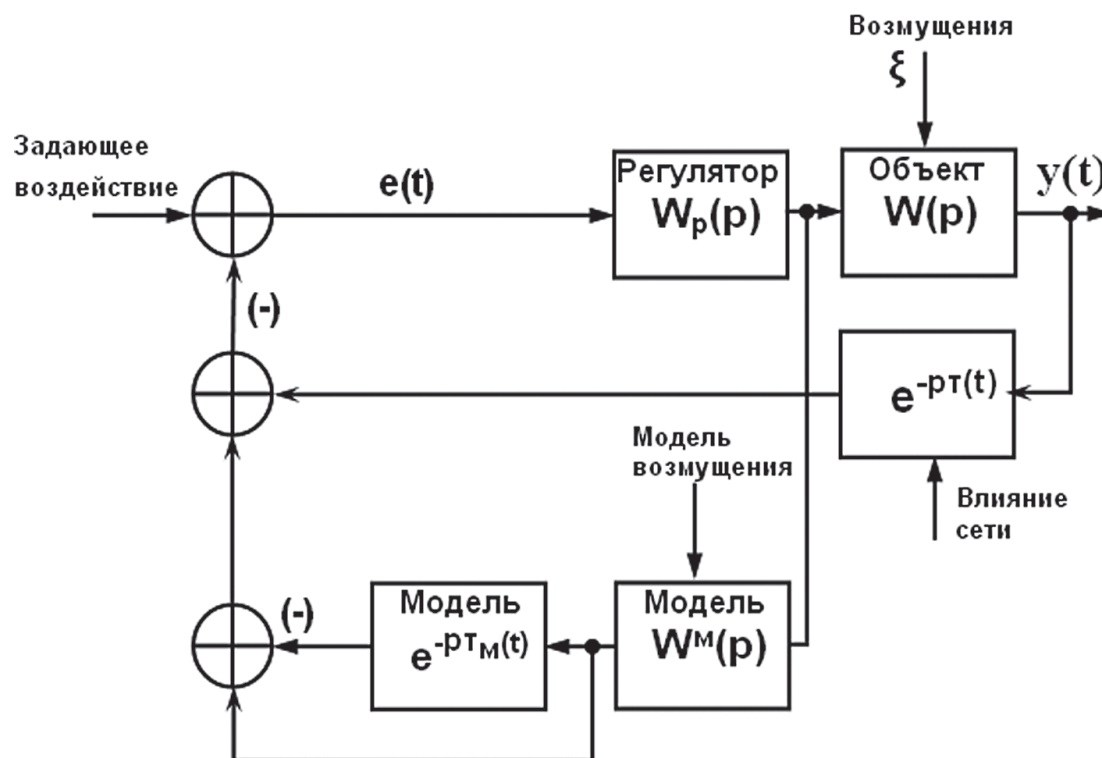


Рис. 3. Компенсация запаздывания

Fig. 3. Delay compensation

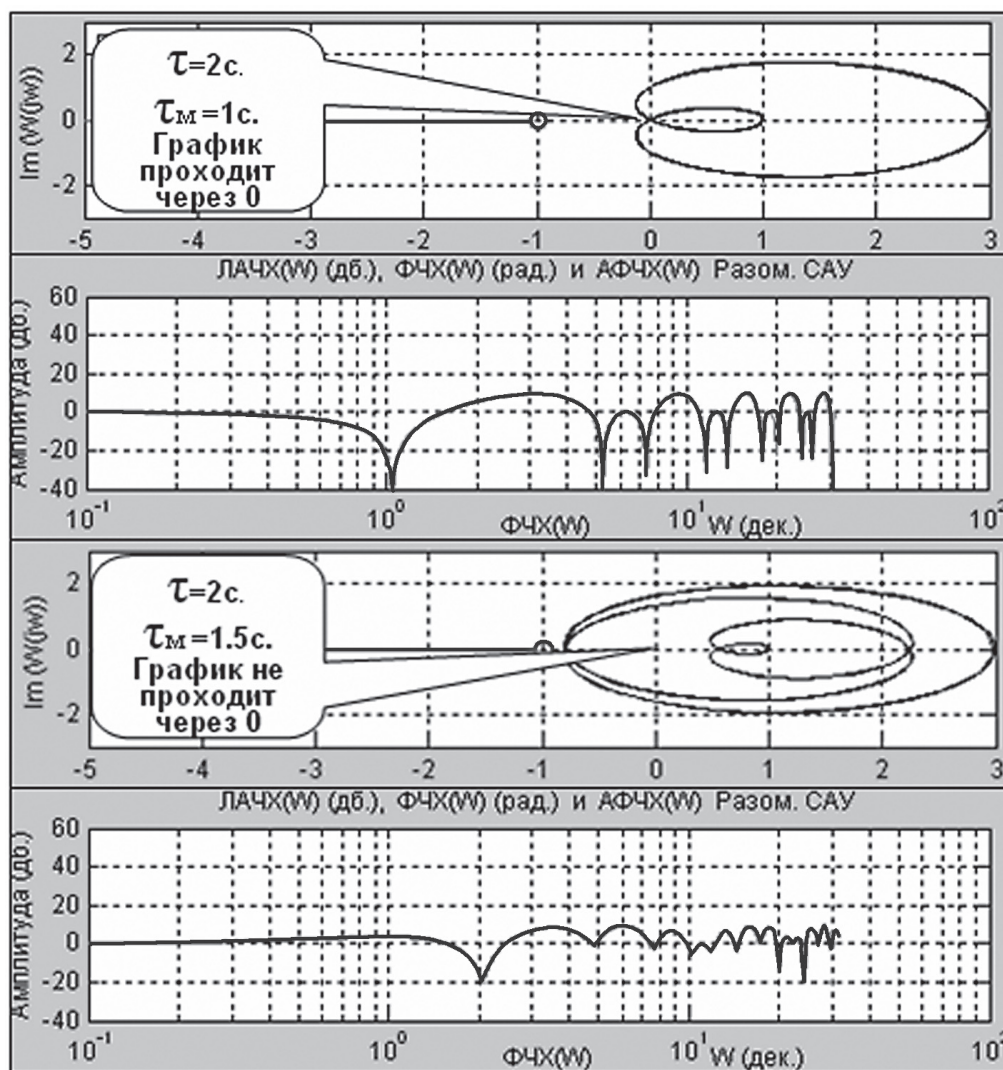


Рис. 4. Случай соизмеримых запаздываний: годографы $F(\omega)$ и соответствующие ЛАЧХ
 Fig. 4. The case of commensurate delays: hodographs $F(\omega)$ and corresponding LAFC

(поэтому и не учитывается) запаздывание. Типичный вид логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) [1, 2] такой системы (в разомкнутом виде) приведен на рис. 2.

ЛАЧХ, проходя на достаточно высоком уровне, обеспечивает малую ошибку.

Теперь введем компенсацию запаздывания, для чего добавим в систему модели объекта помехи и, наконец, запаздывания, которые входят в виде программных модулей в ПО регулятора. Мы не можем заранее предполагать, что все эти модели точны, кроме того, помеха может иметь стохастическую природу. Будем для определенности считать, что модель объекта достаточно точна, а вот модель запаздывания отличается от реального запаздывания (рис. 3).

Очевидно, если модель запаздывания точна, то происходит его (запаздывания) полная компенсация [9] и ЛАЧХ разомкнутой скомпенсированной системы не отличается от ЛАЧХ системы вообще без запаздывания. Но, к сожалению, точная компенсация невозможна.

Этот эффект хорошо виден на рис. 2, где приведены несколько случаев неточной компенсации запаздывания. В некоторых случаях провалы ЛАЧХ достигают 60 дБ, но это наблюдается далеко не всегда. Точными нулями будут частоты, удовлетворяющие уравнению

$$F(\omega) = 1 + e^{-j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau_m} = 0. \quad (3)$$

Наличие или отсутствие корней этого уравнения связано с соотношением между τ

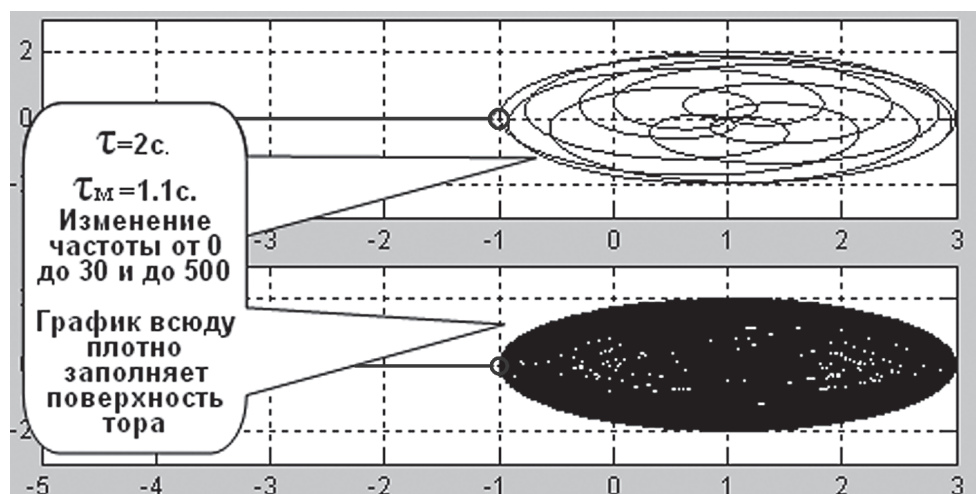


Рис. 5. Случай несоизмеримых запаздываний

Fig. 5. The case of incommensurate delays

и τ_m . Если эти числа рационально соизмеримы ($n \cdot \tau = m \cdot \tau_m$), то (3), являясь в этом случае периодической функцией, может иметь решение, но может и не иметь. Примеры приведены на рис. 4. Здесь отображен годограф $F(\omega)$ [2] при неотрицательных частотах на комплексной плоскости. Обращать внимание следует на прохождение годографа вблизи точки 0. Также приведены графики ЛАЧХ этой функции (по оси ординат – децибелы).

Но если времена запаздывания рационально несоизмеримы, то привлечение теории почти периодических функций позволяет сформулировать следующее утверждение: *При неточной компенсации ЛАЧХ имеет набор частот, на которых модуль падает до величин сколь угодно малых.*

Доказательство: свяжем с (3) двухмерный тор T^2 , тогда при изменении ω от 0 до ∞ образуется обмотка тора, если рассматривать входящие в (3) экспоненты как циклы – образующие тора. Известно [5], что при несоизмеримости частот вращения такая обмотка всюду плотна на торе. Осталось лишь заметить симметрию при изменении знака частоты, из чего вытекает достаточность рассмотрения только неотрицательных частот.

Итак $\forall \varepsilon > 0; \exists \omega^* : |F(\omega^*)| \leq \varepsilon$.

Возможно, что такие частоты окажутся слишком большими, чтобы иметь практическое значение, но рассмотренные примеры из практики показывают, что это чаще всего не так.

График всюду плотен на двухмерном торе, проходит сколь угодно близко от точки 0.

Можно дать оценки расстояния по частоте между точками провалов ЛАЧХ. В случае соизмеримых запаздываний такая оценка равна периоду функции (3). Хотя, как видно из рис. 4, внутри периода могут наблюдаться множественные нули, расположенные гораздо ближе друг к другу, чем на соответствующую долю периода.

В случае несоизмеримости запаздываний для получения такой оценки необходимо знать порядок приближения иррационального отношения периодов (возможно, сами периоды трансцендентны!) рациональными числами [10]. Имеется следующая известная оценка скорости приближения иррациональных чисел рациональными [5]

$$|\mu - m/n| < 0,447214(n)^{-2}, \quad (4)$$

где μ – рационально приближаемое дробью m/n .

Если в качестве μ взять отношение запаздываний $\mu = \tau/\tau_m$, то эту оценку можно использовать для получения оценки сверху для периода почти повторения квазипериодической функции $F(\omega)$. Действительно, из (4) можно получить оценку n , обеспечивающую нужную точность приближения $n\tau \approx m\tau_m$.

При этом периодом почти повторения естественно считать величину $T = 2\pi/n\tau$.

Заметим, что в случае соизмеримых запаздываний по этой формуле получается истинный период периодической функции.

Библиографический список

1. Цыпкин, Я.З. Основы теории автоматических систем / Я.З. Цыпкин; курс лекций. – М.: Наука, 1970. – 560 с.
2. Красовский, А.А. Основы автоматики и технической кибернетики / А.А. Красовский, Г.С. Поспелов. – М.: ГОСЭНЕРГОИЗДАТ, 1962. – 600 с.
3. Колмановский, В.Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 448 с.
4. Емельянов, С.В. Новые типы обратной связи / С.В. Емельянов, С. К. Коровин. – М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. Арнольд, В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2012.
6. Эльсгольц, А.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / А.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 296 с.
7. Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. – М.: Мир, 1984.
8. Пинни, Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения / Э. Пинни. – М.: ИЛ, 1961.
9. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К.Л. Кук. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
10. Нивен, А. Числа рациональные и иррациональные / А. Нивен. – М.: Мир, 1966. – 200 с.

FREQUENCY METHODS THAT ENSURE THE ACCURACY OF MANAGEMENT SYSTEMS AND ERGODIC THEORY (THE THEORY OF QUASI-PERIODIC FUNCTIONS)

Tumanov M.P., Prof. MIEM HSE, Ph.D. (Tech.); Abdullin S.R., Assoc. Prof. MSFU

miketum@yandex.ru, mai-sal@yandex.ru

Moscow State Institute of Electronics and Mathematics Higher School of Economics, 123458, Moscow, st. Tallinn, 34
Moscow State Forest University (MSFU), 1st Institutskaya st., 1, 141005, Mytitschi, Moscow reg., Russia

The article shows that in a typical automatic control system there may be a significant decrease in the accuracy of regulation due to the fact that frequency response of the open-loop system has a number of zeros (frequencies at which the module of this characteristic is small). The frequency characteristic module of the open-loop automatic control system allows to effectively study the accuracy of the closed-loop system with any type of master control, therefore, it is frequently used in engineering. The article describes a case of a delay compensation using an inaccurate delay model in case when the model of the controlled object is considered to be sufficiently accurate. It is shown that (even in case when the system without compensating delay model has a frequency response with no significant lapses) the emergence of such lapses in compensation is possible. But the main interest of the article is the connection between the frequency of such lapses and the commensurability of time delays. At commensurate times there appear zeros of the frequency response, and at incommensurate ones there appear lapses, the position of which on the frequency axis is determined by the ratio of the delay.

Keywords: distributed control systems, time delay, router, buffering, delay compensation, transfer functions, LAFC, cable of torus.

References

1. Tsypkin, Ya.Z. *Osnovy teorii avtomaticheskikh sistem* [Bases of the theory automatic system] Moscow: Nauka, 1970. 560 p.
2. Krasovskiy A.A., Pospelov G.S. *Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoy kibernetiki* [Bases of automatic equipment and technical cybernetics]. Moscow, GOSJENERGOIZDAT, 1962, 600 p.
3. Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledeystviem* [Stability and the periodic modes of adjustable systems with an after-effect]. Moscow: Nauka, 1981. 448 p.
4. Emel'yanov S.V., Korovin S.K. *Novye tipy obratnoy svyazi* [New types of feedback]. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1997.
5. Arnol'd, V.I. *Geometricheskie metody v teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Geometrical methods in the theory of the ordinary differential equations] Moscow: MCNMO, 2012.
6. El'sgol'ts A.E., Norkin S.B. *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the theory of the differential equations with the deviating argument]. Moscow: Nauka, 1971, 296 p.
7. Kheyl Dzh. *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of the functional and differential equations] Moscow: Mir, 1977.
8. Pinni E. *Obyknovennyye differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Ordinary differential-difference equations]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1961.
9. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-difference equations]. Moscow: Mir, 1967. 548 p.
10. Niven A. *Chisla ratsional'nye i irratsional'nye* [Numbers rational and irrational], Moscow: Mir, 1966. 200 p.