

ПОГРУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК КАК ОДНО ИЗ ПЕРСПЕКТИВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

Т.А. ЛАСКОВАЯ, *ст. преп. МГТУ им. Н.Э.Баумана,*
К.К. РЫБНИКОВ, *директор ООО «Полиэдр», канд. физ.-мат. наук,*
С.А. РЫБНИКОВ, *магистратура МГИМО (У) МИД России,*
О.К. ЧЕРНОБРОВИНА, *доц. каф. МГУЛ*

talaskovy@mail.ru, kkrybnikov@mail.ru, stepan.rybnikov@mail.ru, olga@mgul.ac.ru
ФГБОУ ВПО «Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана»

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
ООО «Полиэдр» 107143, Москва, шоссе Открытое, д. 20, стр. 1
ФГБОУ ВПО «Московский государственный институт международных отношений (университет) Министерства
и иностранных дел Российской Федерации» 119454, г. Москва, проспект Вернадского, 76
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет леса»
141005 Московская обл., г. Мытищи-5, ул. 1-я Институтская, д. 1, МГУЛ

Проводится анализ одного из универсальных методов решения систем булевых уравнений – метода разделяющих плоскостей, заключающегося в погружении множества решений рассматриваемой системы в выпуклый многогранник, что дает возможность применить для определения этих решений методы бивалентного программирования. Наиболее эффективным такой подход оказывается для случая, когда решения системы являются вершинами построенного многогранника. В этом случае для определения этих решений достаточно использования методов линейного программирования. Впервые в истории исследования перспектив метода разделяющих плоскостей рассматривается обратная задача, то есть задача по выбранному выпуклому многограннику построить систему булевых уравнений, множество решений которой представляет собой подмножество множества всех точек выбранного многогранника, который может иметь, например, достаточно простую структуру (Быть целочисленным, иметь малое число вершин и т. д.). Результаты работы имеют непосредственное прикладное применение в теории анализ электронных схем, комплексов формальных нейронов и технических систем, основанных на использовании пороговой логики.

Ключевые слова: булевы функции, булевы уравнения, математическое программирование, линейные неравенства, полиэдральные модели, вершины.

Решение системы булевых уравнений $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, (i = 1, 2, \dots, t)$ (1) является весьма сложной задачей несмотря на ее сугубо дискретный характер (n -мерных $(0,1)$ -векторов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_j = 0$ или 1 , $(j = 1, 2, \dots, n)$ всего 2^n).

Идеи использования псевдобулевых функций приближения, то есть непрерывных функций $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, таких что $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(i = 1, 2, \dots, t)$ на множестве $(0,1)$ -векторов, появились с середины XX столетия в работах Иванеску (Хаммер) и Рудеану [1, 2, 4, 5]. В качестве примера развития этих идей может быть рассмотрен, так называемый метод фундаментальных произведений [7, гл.7].

Полиэдральный подход к анализу системы булевых уравнений

Другим направлением, истоки которого можно усмотреть как в вышеупомянутых работах Иванеску и его соавторов, так и в монографии Дертоузоса [12], является построение

системы линейных неравенств, которой удовлетворяют все решения системы булевых уравнений (1). Такой подход, предложенный Г.В. Балакиным и В.Г. Никоновым [3], дал возможность после построения соответствующей системы неравенств строить методы направленного перебора $(0,1)$ -векторов принципиально близкие к аддитивному методу решения задачи бивалентного программирования Балаша [9].

В литературе этот подход получил название метода разделяющих плоскостей.

Остановимся на принципиальной возможности построения системы линейных неравенств в методе разделяющих плоскостей.

Систему булевых уравнений (1) можно представить в виде дизъюнктивной формы

$k_1^i \vee k_2^i \vee \dots \vee k_{s_i}^i, (i = 1, 2, \dots, t).$ (2)
где $k_j^i (i = 1, 2, \dots, t, j = 1, 2, \dots, s_i)$ – многоместные конъюнкции, т. е.

$k_j^i = x_{i_1}^{\delta_1} \& x_{i_2}^{\delta_2} \& \dots \& x_{i_{r_{i,j}}}^{\delta_{r_{i,j}}}, \delta \in \{0,1\},$ (3)
 $x_{i_k}^0 = \bar{x}_{i_k}, x_{i_k}^1 = x_{i_k}, i_k \in \{1, 2, \dots, t\}, (k = 1, 2, \dots, r_{ij}).$

Приведем простой пример.

Решение системы булевых уравнений

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и $g(x_1, x_2, x_3)$ определяются следующими таблицами истинности

x_1	x_2	x_3	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0

сводится к решению уравнения вида (2), (3)

$$\bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x}_3 \wedge$$

$$\wedge x_1 \& x_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& x_3 = 0.$$

Ясно, что система уравнений (1) удовлетворяется тогда и только тогда, когда все конъюнкции, входящие в левые части соотношений (2), принимают значение 0.

В работе [7] отмечается, то условие

$$k_i^l = 0$$

эквивалентно на множестве $(0,1)$ – векторов
УСЛОВИЮ

$$a_{i_1} x_{i_1} + \dots + a_{i_{r_{l,j}}} x_{i_{r_{l,j}}} \leq r_{l,j} - \bar{r}_{l,j} - 1, \quad (5)$$

где

$$a_{i_t} = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta_{i_t} = 1, \\ -1, & \text{если } \delta_{i_t} = 0, \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, r_{e,j},$$

а $\bar{r}_{l,j}$ — число переменных, входящих в конъюнкцию k_i^l с отрицанием.

В работах [7, 8] приводятся полиэдральные представления:

1. $x_0 = x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n$, а множество $(0,1)$ – векторов, соответствующих этой функции, удовлетворяет условиям

$$0 \leq \sum_{j=1}^n x_j - (n-0,5)x_0 \leq n-1, \quad (6)$$

2. $x_0 \overset{j=1}{=} x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$, а множество $(0,1)$ – векторов, соответствующих этой функции, удовлетворяет условиям

$$-n+1,5 \leq \sum_{j=1}^n x_j - (n-0,5)x_0 \leq 0,5. \quad (7)$$

3. Операция «штрих Шеффера» $x_0 = x_1 | x_2$ соответствует $(0,1)$ – векторам полиэдра

$$-1,5 \leq x_1 + x_2 + 1,5x_0 \leq 2,5.$$

4. Операция «стрелка Пирса» $x_0 = x_1 \downarrow x_2$ соответствует $(0,1)$ – векторам полиэдра

$$1 \leq x_1 + x_2 + 1,5x_0 \leq 2.$$

5. Импликация $x_0 = x_2 \rightarrow x_1$ соответствует $(0,1)$ – векторам полиэдра

$$0,5 \leq -x_1 + x_2 + 1,5x_0 \leq 1,5 \text{ и т. д.}$$

Метод разделяющих плоскостей – прямая задача

Способы построения систем линейных неравенств, описанные в предыдущем разделе, существу, решают задачу погружения множества решений системы (1) G в выпуклый многогранник $M(A,b)$, так как ограниченный полиэдр является выпуклым многогранником $M(A,b)$

$$G \subseteq M(A, B),$$

где $M(A, b) = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\}$,

$Ax \leq b$ – система линейных неравенств

[illegible]

$$x \geq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0 \ (i=1,...,n) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

В частном случае удастся построить для булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ n -мерную плоскость

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq b, \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^n a_i x_i < b, \end{cases}$$

Число b называют пороговым значением, функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – пороговой функцией, а n -мерную плоскость

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b, - \text{разделяющей плоскостью.}$$

Задачей определения общего решения системы (1), которую решает метод разделяющих плоскостей, является задача определения всех $(0,1)$ – векторов множества $M(A,b)$.

Частное решение системы (1) может быть определено как решение задачи бивалентного (булевого) программирования на множестве допустимых решений $M(A, b)$. Для решения этой задачи могут быть использованы B – алгоритм Ю.Ю.Финкельштейна (метод

правильных отсечений) и аддитивный метод Балаша (метод ветвей и границ) [9].

Рассмотрим простой пример, позволяющий проиллюстрировать метод погружения множества решений булева уравнения в выпуклый многогранник.

Пусть булева функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана таблицей истинности

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) этой функции имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) = y_0 \vee y_1 \vee y_2$,

где $y_0 = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3$

$y_1 = \bar{x}_1 \& x_2 \& x_3$; $y_2 = x_1 \& x_2 \& \bar{x}_3$.

В работе одного из авторов [7] на основе использования полиэдральных представлений функций дизъюнкции и конъюнкции (6),(7) показано, что функция $f(x_1, x_2, x_3)$ может быть определена множеством $(0,1)$ – векторов $(x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, f)$, удовлетворяющим системе неравенств

$$\begin{cases} -3 \leq -x_1 - x_2 - x_3 - 2,5y_0 \leq -1, \\ -1 \leq -x_1 + x_2 + x_3 - 2,5y_1 \leq 1, \\ -1 \leq x_1 + x_2 - x_3 - 2,5y_2 \leq 1, \\ -1,5 \leq y_0 + y_1 + y_2 - 2,5f \leq 0,5. \end{cases} \quad (6)$$

При $f = 1$ последнее неравенство имеет вид $1 \leq y_0 + y_1 + y_2 \leq 3$, а при $f = 0$ $-1,5 \leq y_0 + y_1 + y_2 \leq 0,5$.

Таким образом, плоскость $y_0 + y_1 + y_2 = 0,75$ является разделяющей плоскостью для $f(y_0, y_1, y_2)$.

Решая булево уравнение $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, равносильное условиям: $y_0 = y_1 = y_2 = 0$, представим систему (6) в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq -1 \text{ или } x_1 - x_2 - x_3 \leq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq -1,5 \text{ или } -x_1 - x_2 + x_3 \leq 1,5, \end{cases} \quad (7)$$

где x_1, x_2, x_3 принимают значение 0 или 1.

Последнее неравенство не является существенным, так как оно выполняется для всех $(0,1)$ – векторов (x_1, x_2, x_3) .

Вводя дополнительные неотрицательные переменные z_1, z_2, z_3, w_1, w_2 , можно свести систему неравенств (7) к системе уравнений для $(0,1)$ – векторов (x_1, x_2, x_3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + z_1 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + z_2 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + z_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - w_1 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + w_2 = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Положив $z_1 = x_4, z_2 = x_5, z_3 = x_6, w_1 = x_7, w_2 = x_8$ получаем систему $Ax = \beta$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_i \geq 0 \ (i=1,2,...,8) \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Система $Ax = \beta, x \geq 0$ определяет выпуклый многогранник погружения

$$M^*(A, \beta) = \{x | Ax = \beta, x \geq 0\} \quad (9)$$

множества решений булева уравнения

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ G \subseteq M^*(A, \beta) \end{cases} \quad (10)$$

Из таблицы истинности функции $f(x_1, x_2, x_3)$ следует, что решениями уравнения (10) являются пять векторов (x_1, x_2, x_3)

$$h_1 = (0,0,1), h_2 = (0,1,0), h_3 = (1,0,0),$$

$$h_4 = (1,0,1) \text{ и } h_5 = (1,1,1).$$

Эквивалентные преобразования системы уравнений (8) приводят к следующим системам:

1) $A^{(1)}x = \beta^{(1)}$, где

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система определяет вершину многогранника (9) $(1,0,0,2,2,0,0,0)$, которая соответствует решению булевого уравнения $(1,0,0)$;

2) $A^{(2)}x = \beta^{(2)}$, где

$$A^{(2)} = 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Эта система определяет вершину многогранника (9) $(0,1,0,2,0,0,0,2)$, которая соответствует решению булева уравнения $(0,1,0)$;

3) $A^{(3)}x = \beta^{(3)}$, где

$$A^{(3)} = 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Эта система определяет вершину многогранника (9) $(0,0,1,2,0,2,0,2)$, которая соответствует решению булевого уравнения $(0,0,1)$ и т. д.

Анализ приведенных примеров показывает, что h_1, h_2, h_3 – оптимальные решения задачи линейного программирования

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min_G,$$

где $G \subseteq M^*(A, \beta)$

Оценка сверху числа базисов матрицы A дает и естественную оценку для числа вершин h – возможных оптимальных решений.

Метод разделяющих плоскостей – обратная задача

Построив систему линейных неравенств вида (5), мы, разумеется, можем создать булево уравнение (или систему булевых уравнений в виде (2)). Специальный выбор матрицы A для соответствующего выпуклого многогранника $M(A, b)$ может определить свойства этого многогранника (например, целочисленность, малое число вершин и т. д.). В этом случае исследование соответствующих систем булевых уравнений на основании использования методов линейного программирования может оказаться весьма эффективным [13].

Рассмотрим некоторые случаи, когда многогранник $M(A, b)$ является целочислен-

ным, то есть все его вершины – целочисленные векторы [10].

1. $M(A, b)$ – целочисленный многогранник, если A и b – целочисленные и A – абсолютно унимодулярная матрица (то есть все ее миноры равны либо 0, либо ± 1).

2. $M(A, b)$ – целочисленный многогранник, если матрица A с элементами $0, \pm 1$ удовлетворяет условиям

а) каждый столбец A содержит не более двух ненулевых элементов;

б) строки A можно разбить на два непересекающихся класса (множества) R_1 и R_2 таких, что

1) два ненулевых элемента в любом столбце, знаки которых совпадают, не входят в одно и то же множество R_i ;

2) оба ненулевых элемента в любом столбце, знаки которых не совпадают, входят в одно и то же множество R_i .

Все эти результаты были получены в 50-х годах XX столетия Данцигом, Вейноттом, Хеллером и Томпкинсом. Аналогичные результаты в теоретико-графической трактовке были получены Бержем (1955–1959), Анастасяном (1975), Падбергом и Балашем (1976) [10]).

Одной из наиболее важных задач при анализе прямой и обратной задач метода разделяющих полоскостей остается задача определения свойств матрицы A и вектора b , при которых $M(A, b)$ является не только целочисленным многогранником, но и многогранником все $(0,1)$ – точки (векторы) которого являются его вершинами (аналог многогранника условий линейной задачи о назначениях).

В заключение авторы хотели бы отметить важность рассмотренной задачи (прямой и обратной) в исследованиях, связанных с синтезом и анализом узлов электронных схем, а также в решении задач анализа и настройки формальных нейронов и комплексов элементов нейросетей [6, 7, 11].

Библиографический список

1. Ivanescu P.L. Pseudo-boolean programming and applications. Lecture notes in mathematics, 9, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1965
2. Ivanescu P.L., Rudeanu S. Boolean methods in operations research. Econ.-mat.obzor, 1967, 3, № 4, 422-445
3. Балакин, Г.В. Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений / Г.В. Балакин,

- В.Г. Никонов // Обзорение прикладной и промышленной математики. – Т. 1. – Вып. 3. – 1994. – С. 389–401.
4. Hammer P.L. Boolean Elements in Combinatorial Optimization//Combinatorial Programming: Methods and Applications. – Dordrecht-Boston, 1968
5. Granot F., Hammer P.L. On the Use of Boolean Functions in 0-1 Programming. Technion Mimeograph Series of Operations Research, Statistics and Economics. – № 70 – August, 1970.
6. Никонов, В.Г. Применение полиэдральных методов в прикладных математических задачах, сводящихся к анализу и решению систем линейных неравенств / В.Г. Никонов, К.К. Рыбников // Вестник МГУЛ – Лесной вестник, 2003. №1. С. 69–73.
7. Рыбников, К.К. Введение в дискретную математику и теорию решения экстремальных задач на конечных множествах / К.К. Рыбников. – М.: Гелиос АРВ, 2010. – 320 с.
8. Головин, Б.А. Машинное распознавание и линейное программирование / Б.А. Головин. – М.: Советское радио, 1973.
9. Корбут, А.А. Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. – 368 с.
10. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование) / М.М. Ковалев. – Минск: БГУ, 1977. – 192 с.
11. Рыбников, К.К. Полиэдральные модели узлов преобразований в нейросетях / К.К. Рыбников, Т.А. Ласковская // Обзорение прикладной и промышленной математики. – Т. 14. – Вып. 1. – 2007. – С. 144–145.
12. Дертоузо, М. Пороговая логика / М. Дертоузо. – М.: Мир. – 1960. – 350 с.
13. Ласковская, Т.А., Рыбников К.К., Чернобровина О.К. Основные этапы развития теории структурного анализа n -мерных выпуклых многогранников и ее приложения для априорной оценки эффективности метода разделяющих плоскостей / Т.А. Ласковская, К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина // Обзорение прикладной и промышленной математики. – Т. 21. – Вып. 4. – 2014. – С. 375–377.

THE IMMERSON OF A SET OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF BOOLEAN EQUATIONS IN A CONVEX POLYHEDRON AS ONE OF THE PROMISING DIRECTIONS OF IMPLEMENTATION OF THE METHOD OF SEPARATING PLANES

Laskovaya T.A., senior lecturer MSTU; **Rybnikov K.K.**, POLIEDR, Ph.D. Sci. (Tech.); **Rybnikov S.A.**, MGIMO; **Chernobrovina O.K.** Assoc. MSFU

talaskovy@mail.ru, kkrybnikov@mail.ru, stepan.rybnikov@mail.ru, olga@mgul.ac.ru

Bauman Moscow State Technical University, st. 2-Baumanskaya, 5, Moscow, «POLIEDR», Open Highway, 20, Moscow, 107143
MGIMO University, 76, Prospect Vernadskogo Moscow, Russia, 119454
Moscow State Forest University (MSFU) 1st Institutskaya st., 1, 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia

The analysis of one of the universal methods for solving systems of Boolean equations has been conducted. It is a method of separating planes, which consists in the immersion of the set of solutions of a given system in a convex polyhedron, which gives the opportunity to apply the methods of bivalent programming to obtain these solutions. This approach is most effective in case when the solutions of a system are the vertices of the built polyhedron. In this case, to obtain these solutions the use of linear programming methods is enough. For the first time in history of study of the prospects of separating planes method, the inverse problem is considered, i.e. the problem in case of a selected convex polyhedron is to build a system of Boolean equations, where a set of solutions is a subset of the set of all the points of a selected polyhedron which may have, for example, a simple structure (it must be an integer, have a small number of vertices, etc.). The results have practical significance and can be applied in the theory of electronic schemes analysis, in the analysis of complexes of formal neurons and in the analysis of technical systems based on the use of threshold logic.

Keywords: Boolean functions, Boolean equations, mathematical programming, linear inequalities, polyhedral models, vertices.

References

1. Ivanescu P.L. Pseudo-boolean programming and applications. Lecture notes in mathematics, 9, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1965.
2. Ivanescu P.L., Rudeanu S. Boolean methods in operations research. Economic and mathematical review, 1967, 3, No. 4, pp. 422-445.
3. Balakin G.V., Nikonov V.G. *Metody svedeniya bulevykh uravneniy k sistemam porogovykh sootnosheniy* [Methods of information systems of Boolean equations threshold relations] Review of Applied and Industrial Mathematics, 1994. Vol. 1. Is. 3. pp. 389-401.
4. Hammer P.L. Boolean Elements in Combinatorial Optimization. Combinatorial Programming: Methods and Applications. Dordrecht -Boston, 1968.
5. Granot F., Hammer P.L. On the Use of Boolean Functions in 0-1 Programming. Technion Mimeograph Series of Operations Research, Statistics and Economics, 1970. No. 70. August.
6. Nikonov V.G., Rybnikov K.K. *Primenenie poliedral'nykh metodov v prikladnykh matematicheskikh zadachakh, svodyashchikhsya k analizu i resheniyu sistem lineynykh neravenstv* [The use of polyhedral methods in applied mathematical problems, reducing to analyze and solve systems of linear inequalities]. Moscow state forest university bulletin – Lesnoy vestnik, 2003. No. 1. pp. 69-73.
7. Rybnikov K.K. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku i teoriyu resheniya ekstremal'nykh zadach na konechnykh mnozhestvakh* [Introduction to discrete mathematics and the theory of solving extremal problems on finite sets]. Moscow: Gelios ARV, 2010. pp. 320.
8. Golovin B.A. *Mashinnoe raspoznavanie i lineynoe programmirovaniye* [Machine recognition and linear programming]. Moscow: Soviet Radio, 1973.
9. Korbut A.A., Finkel'shteyn Yu.Yu. *Diskretnoe programmirovaniye* [Discrete programming]. Moscow: Nauka, GRFML, 1969. pp. 368.
10. Kovalev M.M. *Diskretnaya optimizatsiya (tselochislennoye programmirovaniye)* [Discrete optimization (integer programming)]. Minsk: BSU, 1977. pp. 192.
11. Rybnikov K.K., Laskovaya T.A. *Poliedral'nye modeli uzlov preobrazovaniy v neyrosetyakh* [Polyhedral model nodes changes in neural networks]. Review of Applied and Industrial Mathematics, 2007. Vol. 14. Is. 1. pp. 144-145.
12. Dertouzos M. *Porogovaya logika* [Threshold logic]. Moscow: Mir, 1960. pp. 350.
13. Laskovaya T.A., Rybnikov K.K., Chernobrovina O.K. *Osnovnye etapy razvitiya teorii strukturnogo analiza n-mernykh vypuklykh mnogogrannikov i ee prilozheniya dlya apriornoy otsenki effektivnosti metoda razdeleyayushchikh ploskostey* [The main stages of development of the theory of structural analysis of n -dimensional convex polyhedra and its application for the a priori evaluation of the effectiveness of the method of separating planes] Review of Applied and Industrial Mathematics, 2014. Vol. 21. Is. 4. pp. 375-377.