

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

И.Е. СИГАЛОВ, проф. МГУЛ, канд. физ.-мат. наук⁽¹⁾

caf-math@mgul.ac.ru, caf-physics@mgul.ac.ru

⁽¹⁾ ФГБОУ ВО «Московский государственный университет леса»
141005, Московская обл., г. Мытищи-5, ул. 1-я Институтская, д. 1

Рассмотрена задача Коши для класса уравнений квазигиперболического типа, которые относятся к классу уравнений, не разрешенных относительно производной по времени, впервые рассмотренных в работах С.Л. Соболева и С.А. Гальперна. Актуальность изучения таких уравнений связана с тем, что уравнения подобного типа описывают внутренние колебания вращающейся жидкости, а также ряд других важных задач гидромеханики. В работе изучены пространства особенностей решений задачи Коши рассмотренных квазигиперболических уравнений с использованием теории интегральных операторов Фурье. Применение интегральных операторов Фурье позволяет приводить псевдодифференциальные операторы к более простому виду. Метод, связанный с интегральными операторами Фурье, получил широкое распространение при исследовании уравнений в частных производных, связанных с задачами математической физики и называется в математической литературе методом микроволнового анализа. С помощью микроволнового анализа удалось определить множество, на котором лежат особенности решений квазигиперболических уравнений, рассмотренных в данной статье. Множество представляет собой объединение конгруэнтных аффинных конусов со сложным, самопересекающимся сечением. В статье приведены графики сечений таких конусов для различных степеней лапласиана.

Ключевые слова: задача Коши, интегральных операторов Фурье, микроволновый анализ.

Рассмотрим следующий класс задач Коши

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + \frac{\partial^n}{\partial x_2^n} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^{n+2} u}{\partial x_1^{n+2}} + \frac{\partial^{n+2} u}{\partial x_2^{n+2}},$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = f(x),$$

где $u = u(t, x)$, $x \in R^2$, $n \in N$, и f финитна.

Применив преобразование Фурье по x следующим образом

$$\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{ix \cdot \xi} u(t, x) dx,$$

можно легко выразить $\hat{u}$

$$(\xi_1^n + \xi_2^n) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = (\xi_1^{n+2} + \xi_2^{n+2}) \hat{u},$$

следовательно

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(\xi) \frac{\sin(tm(\xi))}{m(\xi)},$$

где

$$m(\xi) = \sqrt{\frac{\xi_1^{n+2} + \xi_2^{n+2}}{\xi_1^n + \xi_2^n}}.$$

Обращая $\hat{u}$, можно выразить u как разность двух интегралов

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{i((y-x) \cdot \xi + tm(\xi))} \frac{f(y)}{2im(\xi)} dy d\xi \Big|_+^+.$$

Обозначим их как $u_+(t, x)$ и $u_-(t, x)$. Выбрав финитную $\chi \in C_0^\infty(R^2)$ так, чтобы $\chi(\xi) = 1$ в окрестности $\xi = 0$, представим $u_+(t, x)$ как сумму $v_+(t, x) + w_+(t, x)$, где

$$v_+(t, x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{i((y-x) \cdot \xi + tm(\xi))} \frac{f(y)\chi(\xi)}{2im(\xi)} dy d\xi,$$

$$w_+(t, x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{i((y-x) \cdot \xi + tm(\xi))} \frac{f(y)(1-\chi(\xi))}{2im(\xi)} dy d\xi.$$

Предположим для простоты, что $f \in L^1(R^2)$. Тогда видно, что $v_+ \in C^\infty(R^3)$ и, т. о., множества особенностей u_+ и w_+ совпадают. В свою очередь, $w_+(t, x) = T f(y)$, где T – интегральный оператор Фурье с фазовой функцией $\Phi = (y - x) \cdot \xi + tm(\xi)$. По теореме Хермандера [7] вышеупомянутые особенности лежат на множестве

$$\{(t, x) : \exists y \in \text{sing supp } f, \exists \xi \mid \Phi_\xi(t, x, y, \xi) = 0\}, \quad (1)$$

$\Phi_\xi(t, x, y, \xi) = y - x + tm_\xi(\xi)$; последняя однородна порядка 0, и, введя $k = \xi_1/\xi_2$, можно представить условие $\Phi_\xi(t, x, y, \xi) = 0$ как систему

$$\begin{cases} x_1 = \text{sgn}(\xi_2) t \phi_1(k) + y_1 \\ x_2 = \text{sgn}(\xi_2) t \phi_2(k) + y_2, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\phi_1(k) = \pm m_{\xi_1}'(\xi) = \frac{2k^{2n+1} + (n+2)k^{n+1} - nk^{n-1}}{2\sqrt{k^{n+2} + 1}(k^n + 1)^{3/2}},$$

$$\phi_2(k) = \pm m_{\xi_2}'(\xi) = -\frac{nk^{n+2} - (n+2)k^n - 2}{2\sqrt{k^{n+2} + 1}(k^n + 1)^{3/2}}.$$

Отсюда видим, что множество (1) определено с точностью до знака t . Поскольку $u_+(t, x) = u_-(-t, x)$, множества особенностей u_+ , u_- и u совпадают. Можно видеть, что это множество представляет собой объединение аффинных конусов (2) на (t, x_1, x_2) для каждого y

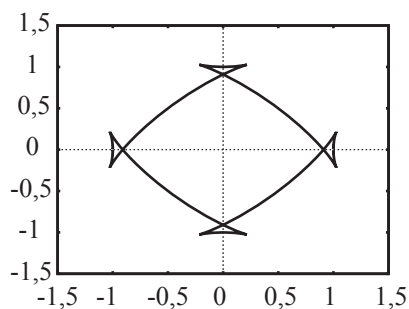


Рис. 1. Случай $n = 2$
Fig. 1. The case $n = 2$

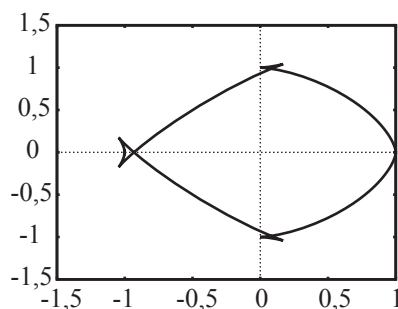


Рис. 2. Случай $n = 3$
Fig. 2. The case $n = 3$

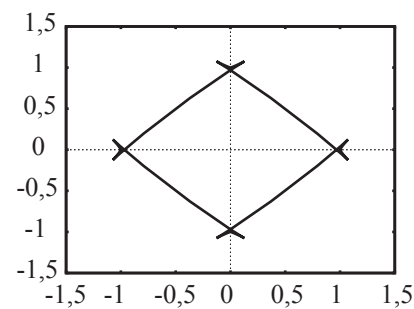


Рис. 3. Случай $n = 8$
Fig. 3. The case $n = 8$

$\in \text{sing supp } f$. На рис. 1–3 приведены сечения таких конусов плоскостью $t = 1$ при $n = 2, 3, 8$.

Библиографический список

1. Шубин, М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория (2-е изд.) / М.А. Шубин. – М.: Добросвет, 2003. – 312 с.
2. Габов, С.А. Линейные задачи нестационарных внутренних волн / С.А. Габов, А.Г. Свешников. – М.: Наука, 1990. – 344 с.
3. Габов, С.А. Введение в теорию нелинейных волн / С.А. Габов. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 175 с.
4. Гальперн, С.А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными / С.А. Гальперн // Тр. ММО, 9, ГИФМЛ. – М., 1960. – С. 401–423.
5. Масленникова, В.Н. Математические вопросы гидродинамики вращающейся жидкости и системы
6. Эскин, Г.И. Задача Коши для гиперболических уравнений в свертках / Г.И. Эскин // Матем. сб. – 1967. – № 74(116):2. – С. 262–297.
7. Хермандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В четырех томах. т. 4: Интегральные операторы Фурье. – Перев. с англ. / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1988. – 446 с.
8. Трев, Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы / Ф. Трев. – М.: Мир, 1984. – 360 с.
9. Трев, Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 2. Интегральные операторы Фурье / Ф. Трев. – М.: Мир, 1984. – 400 с.
10. Тейлор, М. Псевдодифференциальные операторы / М. Тейлор. – М.: Мир, 1985. – 472 с.

SINGULARITIES OF SOLUTIONS OF QUASI-HYPERBOLIC EQUATIONS

Signalov I.E., Prof. MSFU, Ph.D. (Tech.)⁽¹⁾

caf-math@mgul.ac.ru, caf-physics@mgul.ac.ru

⁽¹⁾ Moscow State Forest University, MSFU, 1, 1st Institutskaya st., Mytishchi-5, Moscow reg., 141005, Russia

The article deals with the Cauchy problem for a class of quasi-hyperbolic equations, which belong to the class of equations not resolved with respect to the time derivative, which were discussed for the first time in the works of S.L. Sobolev and S.A. Halpern. The relevance of the study of these equations is the fact that the equations of this type describe the internal vibrations of a rotating fluid, and a number of other important problems in fluid mechanics. The paper studied the propagation of singularities of solutions of the Cauchy problem for examined quasi-hyperbolic equations using the theory of Fourier integral operators. The use of Fourier integral operators allows to lead pseudodifferential operators to a simpler form. The method associated with the Fourier integral operators, is widespread in the study of partial differential equations connected with problems of mathematical physics, and is called in the mathematical literature as microwave analysis. With the help of the microwave analysis we were able to identify a set on which features of the quasi-hyperbolic equations considered in this article lay. This set is the union of congruent affine cones with a complex, self-intersecting cross section. The article shows graphs of cross sections of such cones for different degrees of Laplacian.

Keywords: Cauchy problem, Fourier integral operators, microwave analysis.

References

1. Shubin M.A. *Pseudodifferential operators and spectral theory* [Pseudodifferential operators and spectral theory]. Moscow: Dobrosvet, 2003. p. 312.
2. Gabov S.A., Svешnikov A.G. *Lineynye zadachi nestatsionarnykh vnutrennikh voln* [Linear problems of non-stationary internal waves]. Moscow: Nauka, 1990. p. 344.
3. Gabov S.A. *Vvedenie v teoriyu nelineynykh voln* [Introduction to the theory of nonlinear waves]. Moscow: MGU [MSU Publ.], 1988. p.175.
4. Gal'pern S.A. *Zadacha Koshi dlya obshchikh sistem lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [The Cauchy problem for general systems of linear partial differential equations]. Tr. MМО [Transactions of the MMS], 9, GIFML. Moscow, 1960. pp. 401-423.
5. Maslennikova V.N. *Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vrashchayushcheyssya zhidkosti i sistemy S.L. Soboleva* [Mathematical problems of hydrodynamics of rotating fluid and Sobolev systems]. Novosibirsk, 1971. p. 28.
6. Eskin G.I. *Zadacha Koshi dlya giperbolicheskikh uravneniy v svertkakh* [The Cauchy problem for hyperbolic systems in convolutions]. Matem. sb. [Sbornik: Mathematics], 74(116). 1967. p. 262-297.
7. Hörmander, Lars. The analysis of linear partial differential operators IV. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2009
8. Treves, Francois. Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators Vol I-II. New York: Plenum Press, 1980.
9. Taylor, Michael E. Pseudodifferential operators and nonlinear PDE. Boston: Birkhäuser, 1991.