

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

А.И. РУБИНШТЕЙН, *проф. МГУЛ, д-р ф.-м. наук⁽¹⁾*,

О.М. ПОЛЕЩУК, *проф. МГУЛ, д-р ф.-м. наук⁽¹⁾*,

Т.А. ГОРОДЕЦКАЯ, *ст. преподаватель МГУЛ⁽¹⁾*,

Т.В. ЧЕРНОВА, *ст. преподаватель МГУЛ⁽¹⁾*

rubinshtein_aleksandr@mail.ru, caf-math@mgul.ac.ru

⁽¹⁾ ФГБОУ ВО «Московский государственный университет леса»

141005, Московская обл., г. Мытищи-5, ул. 1-я Институтская, д. 1, МГУЛ.

Многие математические модели реальных явлений таковы, что описывают реакцию детерминированного объекта на стороннее воздействие. При этом информация об этом стороннем воздействии оказывается неполной. Поэтому и о реакции приходится говорить как о не полностью определенной. Очевидным образом попадаем в сферу действия теории нечетких множеств. Таким образом, приходим к рассмотрению действия каких-то операторов на элемент известного пространства, заданного неточно (имеется в виду элемент). Если ничего не требовать от оператора, то задача оказывается неразрешимой. Однако, если рассматривать пространства числовых функций и ограничиться положительными операторами, то можно получить конкретные результаты. Напомним, что оператор, действующий в каком-то пространстве, элементами которого является функции, а образы элементов пространства – действительные числа, то положительным оператором называется оператор, сопоставляющий положительным функциям положительные числа. Такими операторами являются, например, ньютоновский потенциал поля тяготения, удовлетворяющий уравнению Пуассона; функция, являющаяся гармонической в круге с центром в начале координат (то есть являющаяся решением уравнения Лапласа); решение уравнения теплоемкости, непрерывное при неотрицательных значениях времени и принимающее в начальный момент положительные (неотрицательные) значения. Решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и нулевыми начальными условиями, задаваемое интегралом Дюамеля также описывается положительным оператором. Положительные операторы часто встречаются в теории тригонометрических рядов. Таковыми являются операторы Фейера, Валле-Пуссена, Пуассона, Бернштейна. Положительны и операторы Э. Ландау и Вейерштрасса. С помощью операторов Вейерштрасса и Бернштейна можно доказать фундаментальную теорему Вейерштрасса о возможном приближении с любой степенью точности произвольной непрерывной на отрезке функции многочленом (высокой степени).

Ключевые слова: положительный оператор, дифференциальное уравнение, нечеткое множество.

Рассмотрим некоторые математические модели физических объектов, в которых исходные данные – имперические или экспериментальные – задаются с погрешностью. То есть мы имеем дело с простейшей задачей, рассматриваемой в теории «нечетких множеств».

1. Ньютоновский потенциал поля тяготения $u(x, y, z)$ объемно распределенной массы с плотностью $\rho(x, y, z)$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, как известно, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x, y, z).$$

Решение этого дифференциального уравнения по формуле Пуассона есть [1]

$$u(x, y, z) = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} \frac{\rho(a, b, c) da db dc}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

то есть $u = A \cdot \rho$ – интегральный оператор с положительным ядром

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Зная погрешность (в каком – либо функциональном пространстве) ρ , можно определить и погрешность образа оператора A – функции u .

2. Гармоническая в круге $x^2 + y^2 < R^2$, непрерывная вплоть до границы $x^2 + y^2 = R^2$ функция $u(x, y)$ такая, что

$$u(R \cos \theta, R \sin \theta) = f(\theta).$$

Задается (см. [1]) формулой Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - 2R(x \cos \theta + y \sin \theta) + x^2 + y^2} d\theta$$

так же есть интегральный оператор от f с положительным ядром. Зная погрешность f можно определить погрешность $u(x, y)$.

3. Непрерывное при $t \geq 0$, ограниченное для $t > 0$ решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

задается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

примем $u(x,0) = \varphi(x)$. Ядро этого интегрального оператора $e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} > 0$

4. В [2] в связи с точным вычислением нормы оператора рассматривалось линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

с нулевыми начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

(в случае $n = 2$ – уравнение колебаний), решение которого дается (см., например, [3]) интегралом Дюамеля

$$y(x) = \int_0^x g(x-\xi) f(\xi) d\xi$$

где

$$g^{(n)} + a_1 g^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} g' + a_n g = 0,$$

$$g(0) = yg'(0) = \dots = g^{(n-2)}(0) = 0, \quad g^{(n-1)}(0) = 1$$

($g(x)$ – функция Грина). В случае $g(x) \geq 0$ опять имеем интегральный оператор с положительным ядром.

Например, для уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(x)$$

– уравнения вынужденных гармонических колебаний без диссипации единичной точечной массы с нулевой начальной скоростью в нулевом положении равновесия

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-\xi) f(\xi) d\xi.$$

На интервале $(0; \pi)$ ядро $\sin t$ положительно.

Если рассматривать линейные операторы вида

$$(Lf)(x) = \int_a^b f(\xi) \varphi(\xi, x) d\xi$$

с непрерывной по ξ при каждом фиксированном x функцией $\varphi(\xi, x)$, то (см. [4] стр. 19) $(Lf)(x) > 0$ при $f(\xi) > 0$ для $\xi \in (a, b)$ при всех x , тогда и только тогда, когда $\varphi(\xi, x) > 0$ для $\xi \in (a, b)$ при всех x . Такие операторы называются положительными. Такими являются операторы Фейера

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \left(\frac{\sin(n+1)\frac{\xi-x}{2}}{\sin\frac{\xi-x}{2}} \right)^2 d\xi;$$

операторы Валле-Пуссена $V_{n', 2n-1}(f; x)$ (см. [4] стр. 157);

Пуассона

$$L_r(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\xi-x)+r^2} d\xi, \quad 0 \leq r < 1;$$

Вейерштрасса

$$W_n(f, x) = \left(\int_{a_1-b_1}^{b_1-a_1} e^{-n\xi^2} d\xi \right)^{-1} \int_{a_1}^{b_1} f(\xi) e^{-n(\xi-x)^2} d\xi,$$

где $a_1 = a + \delta$; $b_1 = b + \delta$, $\delta > 0$ и функция $f(\xi)$ непрерывна на $[a; b]$;

Э. Ландау

$$L_n(f, x) = \left(\int_{a_1-b_1}^{b_1-a_1} \left(\frac{c^2 - \xi^2}{c^2} \right)^n d\xi \right)^{-1} \int_{a_1}^{b_1} \left(\frac{c^2 - (\xi-x)^2}{c^2} \right)^n f(\xi) d\xi,$$

$$c_1 = b_1 - a_1;$$

Операторы Бернштейна

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

$$0 \leq x < 1$$

хотя не являются интегральными, также положительные.

Связь операторов Вейерштрасса и Бернштейна с теорией вероятностей очевидна. С их помощью доказывается фундаментальный факт – теорема Вейерштрасса о том, что любую непрерывную на отрезке функцию можно сколь угодно точно (равномерно) приблизить алгебраическим многочленом.

Заметим, что нормы всех операторов $(Lf)(x)$ из C в C равны единице.

Библиографический список/ References

1. Годунов, С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. – М., Наука, 1971.
Godunov S.K., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics], Moscow: Nauka, 1971.
2. Рубинштейн, А.И. Об одном случае точного вычисления нормы оператора / А.И. Рубинштейн // Вестник МГУЛ – Лесной Вестник. – № 2. – 2008. – С. 110–111.
Rubinstein, A. I., *Ob odnom sluchae tochnogo vychisleniya normy operatora* [On one occasion the accurate calculation of the norm of the operator]. Moscow State Forest University Bulletin – Lesnoy Vestnik, № 2, 2008, pp. 110-111.
3. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М., Наука, 1965.
Pontryagin L.S., *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations], Moscow: Nauka, 1965.
4. Коровкин, П.П. Линейные операторы и теория приближений / П.П. Коровкин. – М., Наука, 1959.
Korovkin P.P., *Lineynye operatory i teoriya priblizheniy* [Linear operators and approximation theory], Moscow: Nauka, 1959.
5. Poleshchuk O., Komarov E. A nonlinear hybrid fuzzy least-squares regression model // Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society - NAFIPS 2011. C. 5751909.
6. Poleshchuk O. The determination of students' fuzzy rating points and qualification levels // International Journal of Industrial and Systems Engineering, 2011. -vol. 9, № 1, pp. 3-20.
7. Poleshchuk O., Komarov E. A fuzzy linear regression model for interval type-2 fuzzy sets // Proceedings of the 31st International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society. - NAFIPS'2012- Berkeley, California, August 6-8, 2012.
8. Ashraf Darwish and Olga Poleshchuk Fuzzy Models for Educational Data Mining // Journal of Telecommunications.- 2012.- vol. 15, № 2, pp. 8-22.
9. Olga Poleshchuk and Ashraf Darwish New models for monitoring and clustering of the state of plant species based on semantic spaces // Journal of Intelligent and Fuzzy Systems.- 2014.- vol. 26, № 3, Pp. 1089–1094.
10. Poleshchuk O., Komarov E. A fuzzy nonlinear regression model for interval type-2 fuzzy sets // International Journal of Electrical, Robotics, Electronics and Communications Engineering, 2014, V. 8, № 6, Pp. 817 - 821.

ON SOME POSSIBLE APPLICATIONS OF FUZZY SETS THEORY

Rubinshtein A.I., Prof., MSFU, Dr. Sci. (Physics and Mathematics)⁽¹⁾; **Poleshchuk O.M.**, Prof., MSFU, Dr. Sci.(Tech.)⁽¹⁾; **Gorodetskaya N.A.**, MSFU⁽¹⁾; **Chernova T.V.**, MSFU⁽¹⁾

caf-math@mgul.ac.ru, rubinshtein_aleksandr@mail.ru,

⁽¹⁾ Moscow State Forest University (MSFU), 1st Institutskaya st., 1, 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia

Many mathematical models of real phenomena are those that describe the response of a deterministic object on the side effect. The information about the exterior effects is not complete. Taking this into account, one has to speak about a response as not fully defined. So, one gets in touch with the theory of fuzzy sets. Thus, we come to the consideration of the action of some operators on an element of known space identified inaccurately (meaning element). If there is nothing to demand from the operator, then the problem is unsolvable. However, if we consider the space of numerical functions and get restricted to positive operators, we can obtain some concrete results. It must be kept in mind that if there is an operator acting in some space which contain some elements as a function, and the images of the elements of the space are real numbers, then a positive operator is the operator that maps positive functions to positive numbers. Such operators are, for example, the Newtonian potential of the gravitational field satisfying the Poisson equation; a function that is harmonic in the circle with center at the coordinates origin (that is, a solution to the Laplace equation); the solution of the equation of heat propagation, continuous with non-negative values of time, and which at the initial moment is a positive (nonnegative) value. Solution of linear differential equations with constant coefficients and zero initial conditions, set by the integral of Duhamel also describes a positive operator. Positive operators occur frequently in the theory of trigonometric series. These are operators of Fejér, Vallée-Poussin, Poisson, and Bernstein. Positive are operators of E. Landau and Weierstrass. With the help of Weierstrass and Bernstein operators it is possible to prove the fundamental theorem of Weierstrass about the possible approximation of an arbitrary continuous function on a random interval with a polynomial (of high degree) with any degree of accuracy.

Keywords: a positive operator, a differential equation, careless multitudes, fuzzy sets