

УДК 674.093

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА ПИЛОВОЧНЫХ СОРТИМЕНТОВ НА УЧАСТОК ОКОРКИ

С.П. АГЕЕВ, *проф. С(А)ФУ, д-р техн. наук⁽¹⁾*,

В.И. МЕЛЕХОВ, *проф. С(А)ФУ, д-р техн. наук⁽¹⁾*,

С.Н. РЫКУНИН, *проф. МГТУ им. Н.Э. Баумана, д-р техн. наук⁽²⁾*

doctor.mart11@mail.ru

⁽¹⁾Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова, 163002, г. Архангельск, наб. Сев. Двины, 17

⁽²⁾ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), 141005, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

Энергозатраты на производство единицы пилопродукции иногда необоснованно завышены и могут существенно отличаться от нормативных. Проблема повышения энергоэффективности лесопильного производства может быть решена при комплексном рассмотрении и оптимизации технологической и энергетической составляющих производственного процесса. Одним из наиболее энергоемких цехов лесопильно-деревообрабатывающих комбинатов является лесопильное производство. Эффективность работы этого производства в целом зависит от слаженной работы отдельных ее участков и, в частности, от участка окорки древесины, который является головным. Установлено, что входящий поток сортиментов на участок окорки представляет собой случайный процесс, обладающий свойствами: ординарность, стационарность, ограниченность последствия. Для моделирования стационарного потока с ограниченным последствием наиболее адекватной статистической моделью является поток Эрланга. Определены параметры входящего потока сортиментов и их зависимость от скорости подачи окорочных станков и геометрических характеристик сортиментов.

Ключевые слова: технологический процесс, окорочный станок, случайный процесс, закон распределения вероятностей, система массового обслуживания, плотность распределения.

Производство пилопродукции является сложным технологическим процессом и осуществляется на специализированном оборудовании с большим электропотреблением по различным технологиям. Энергозатраты на производство единицы пилопродукции иногда необоснованно завышены и могут существенно отличаться от нормативных. Не принимается во внимание функциональная связь между технологическим режимом оборудования и удельным электропотреблением. Проблема повышения энергоэффективности лесопильного производства может быть решена при комплексном рассмотрении и оптимизации технологической и энергетической составляющих производственного процесса [1].

Одним из наиболее энергоемких цехов лесопильно-деревообрабатывающих комбинатов является лесопильное производство. Эффективность работы этого производства в целом зависит от слаженной работы отдельных ее участков и, в частности, от участка окорки древесины, который является головным [2].

В работе [3] представлена технологическая схема лесопильного производства как система массового обслуживания (СМО) общего вида, в которой интервалы между поступлениями требований и время их обслуживания являются случайными величинами и распределены по произвольному закону. На вход такой системы поступает поток пиловочного сырья (далее – бревна), а на выходе образуется поток пиломатериалов. При этом отдельные технологические участки образуют фазы СМО, что позволяет рассматривать лесопильное производство как многофазную систему. В свою очередь, каждая фаза также представляет СМО с ожиданием.

Изучение входящих потоков требований СМО имеет первостепенное значение для математического описания и установления закономерностей функционирования производственного процесса. Сложность математического анализа, достоверность и точность полученных результатов зависят от того, насколько правильно будет выбрана статистическая модель потока требований. Выбор модели необходимо производить та-

ким образом, чтобы ее описание не требовало слишком сложного математического аппарата и чтобы она наилучшим образом соответствовала реальному моделируемому потоку [4]. Статистическая модель процесса формируется в виде конкретного закона распределения вероятностей случайных значений показателей этого процесса, изменяющихся в условиях реального производства.

Метод проведения исследований

Поступление бревен на участок окорки есть случайный процесс, который может быть описан некоторой функцией $X(t)$, определяющей количество бревен, поступивших на участок окорки за некоторый промежуток времени $(0, t)$. Функция $X(t)$ есть случайная величина для каждого значения времени t . Для этой функции характерно то, что она принимает только целочисленные неотрицательные значения и с возрастанием t никогда не убывает.

Поток неокоренных бревен как случайный процесс обладает следующими свойствами.

1. **Ординарность.** Поток требований является *ординарным*, если требования в нем появляются поодиночке. Так как неокоренные бревна поступают на продольный цепной конвейер поштучно, то данный поток обладает свойством ординарности.

2. **Стационарность.** *Стационарным* является поток, для которого вероятность поступления определенного количества требований в течение заданного промежутка времени не зависит от начала отсчета времени, а определяется только длиной этого промежутка. Строго говоря, поток называется *стационарным*, если закон распределения группы случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ совпадает с законом распределения

$$X(t_1 + a) - X(a), X(t_2 + a) - X(a), \dots, X(t_n + a) - X(a)$$

т. е. распределение случайных величин зависит от $t_1, t_2, \dots, t_n$ и не зависит от величины a , где a – любой произвольный отрезок времени. Из этого определения следует, что для стационарного потока вероятность того, что

ровно k требований поступит за промежуток времени $(0, t)$, равна вероятности поступления k требований за промежуток времени $(a, a + t)$ при любом значении a , то есть

$$P\{X(t) = k\} = P\{X(t + a) - X(a) = k\}, \\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

В установившемся режиме работы линии поток неокоренных бревен также можно рассматривать как стационарный процесс.

Основной характеристикой стационарного потока является его интенсивность. *Интенсивностью* потока называется математическое ожидание числа требований в единицу времени. Тогда для стационарного ординарного потока требований интенсивность

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{MX(t)}{t},$$

где $MX(t)$ – математическое ожидание числа требований, поступивших за интервал времени $(0, t)$.

3. Ограниченность последствия.

Покажем, что входящий поток неокоренных бревен имеет ограниченное последствие. Пусть минимальная длина бревен определенного диаметра, поступающих на окорку, равна $L_{\min}$. Тогда минимальное расстояние между вершинными торцами бревен на продольном конвейере будет не менее $L_{\min}$. Нетрудно убедиться, что наличие такого минимального расстояния неизбежно приводит к последствию. Действительно, пусть стало известно, что в какой-то момент времени $t_{\text{вх1}}$ на цепной конвейер поступило очередное бревно. Тогда можно с достоверностью утверждать, что на любом участке времени Δ , находящемся в пределах $(t_{\text{вх1}}, t_{\text{вх1}} + t_{\text{ц, мин}})$, где $t_{\text{ц, мин}}$ – минимальное время цикла окорки одно бревна, на конвейер не поступит следующее бревно (рис. 1). Таким образом, будет иметь место зависимость

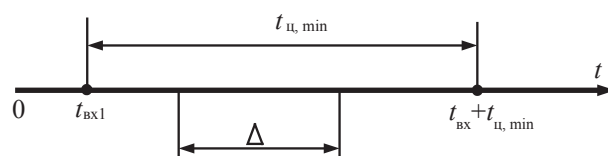


Рис. 1. К объяснению свойства ограниченного последствия

Fig. 1. On explaining the properties of a limited aftereffect

между числом требований в потоке бревен на неперекрывающихся участках времени. Стационарный и ординарный поток с ограниченным последствием (поток Пальма) можно рассматривать как некоторое обобщение простейшего потока [5].

На практике для моделирования стационарных потоков с ограниченным последствием применяются потоки Эрланга различных порядков. Поток Эрланга k -го порядка может быть получен из простейшего (пуассоновского) потока путем его «разрежения», при этом в простейшем потоке сохраняется каждое k -е событие, а все промежуточные удаляются [5].

Для математического описания потока неокоренных бревен как стационарного случайного процесса используем его свойства – неотрицательность и монотонность. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n$ есть моменты поступления последовательных бревен потока в окорочный станок. Величина $t_0 = 0$ есть начальный момент времени. Обозначим промежутки времени между поступлением двух последовательных бревен

$$z_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что $z_i > 0$, т. к. $t_i > t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом величина $z_1 = t_1$, а величины z_i ($i = 2, 3, \dots, n$) есть промежутки времени между бревнами. При этом невозможно точно определить, в какой момент времени в окорочный станок поступит очередное бревно, поэтому все z_i и t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) представляют собой случайные величины, которые могут принимать только неотрицательные значения.

Поток требований будет задан, если известны все моменты поступления требований или промежутки времени между смежными требованиями. Поскольку все они есть случайные величины, то для определения потока требований нужно задать закон распределения последовательности этих величин.

Поток требований называется потоком с *ограниченным последствием*, если для него последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n$ есть последовательность взаимнонезависимых случайных величин.

В [6] показано, что для описания такого потока достаточно знания одной функции $\varphi_0(t)$, которая определяется следующим образом. Рассмотрим вспомогательную функцию $h_0(\tau, t)$, равную вероятности отсутствия требований за промежуток времени t , при условии, что за промежуток времени τ поступило, по крайней мере, одно требование. При этом τ есть предшествующий t и смежный с ним промежуток времени.

Тогда отношение

$$h_0(\tau, t)/w(\tau), \quad (1)$$

есть условная вероятность отсутствия требования за промежуток времени t , при условии, что за промежуток времени τ поступило хотя бы одно требование. Величина $w(\tau)$ в (1) есть вероятность поступления, по крайней мере, одного требования за промежуток времени τ . Тогда функция $\varphi_0(t)$ определяется как предел отношения (1) при $\tau \rightarrow 0$, т. е.

$$\varphi_0(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{h_0(\tau, t)}{W(\tau)}$$

Таким образом, функция $\varphi_0(t)$ равна условной вероятности того, что для любого стационарного потока в промежутке времени $(t_0, t_0 + t)$ не поступит ни одного требования, если известно, что в момент времени t_0 требование поступило.

В [6] доказана теорема, согласно которой для стационарного ординарного потока с ограниченным последствием функция распределения случайных величин z_i ($i = 2, 3, \dots, n$) имеет вид

$$F_1(t) = \lambda_1 \int_0^t \varphi_0(u) du, \quad (2)$$

$$F_i(t) = 1 - \varphi_0(t), i \geq 0, \quad (3)$$

где λ_1 – интенсивность потока Эрланга (рис. 2).

Интенсивность λ_1 может быть определена из соотношения (2) через функцию $\varphi_0(t)$. Так как вероятность поступления на участок окорки за время хотя бы одного бревна равна единице, то из (2) получим

$$F_1(\infty) = \lambda_1 \int_0^{\infty} \varphi_0(u) du = 1,$$

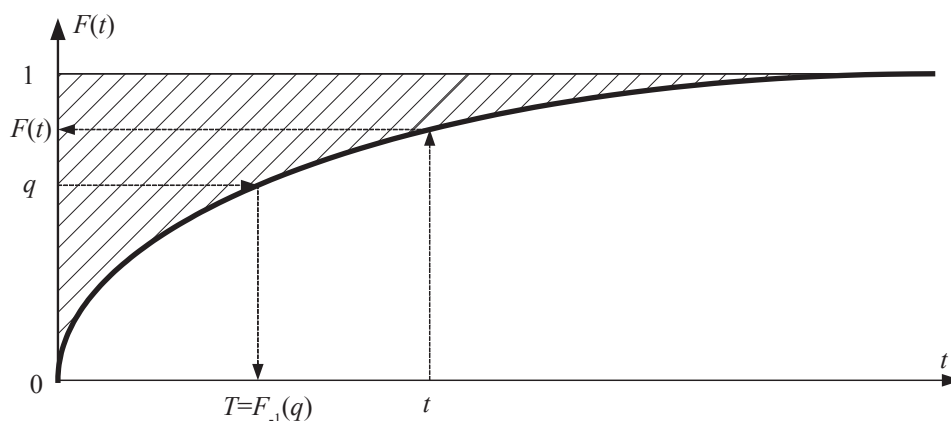


Рис. 2. График функции распределения $F(t)$
Fig. 2. The graph of the distribution function $F(t)$

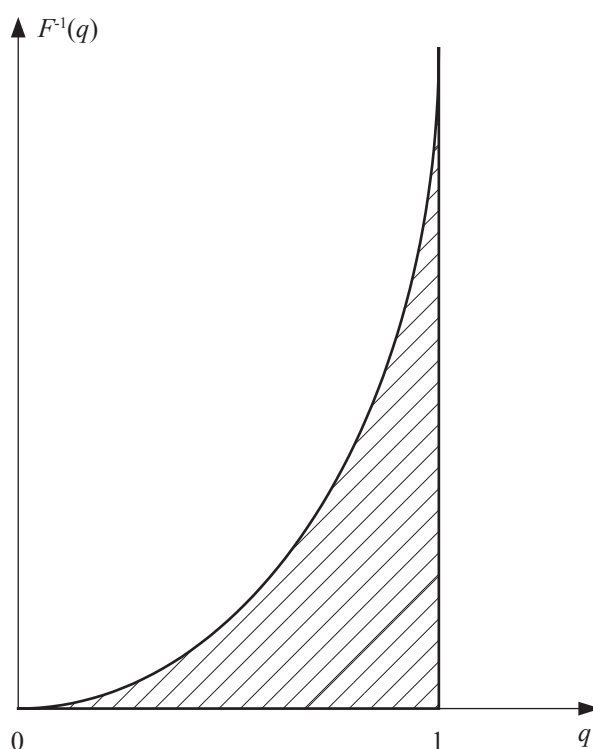


Рис. 3. График обратной функции $F_{-1}(q)$
Fig. 3. The graph of the inverse function $F_{-1}(q)$

откуда с учетом (3)

$$\lambda_1 = \frac{1}{\int_0^{\infty} (1 - F_i(t)) dt}, \quad i \geq 2, \quad (4)$$

Покажем, что интеграл, стоящий в знаменателе (4), представляет собой математическое ожидание непрерывной случайной величины $z_i (i = 2, 3, \dots, n)$.

Промежуток времени между поступлением двух последовательных бревен

$$z_i = L_i/u + \tau_B, \quad (5)$$

где L_i – случайная длина бревен,

$$i = 2, 3, \dots, n;$$

u – скорость подачи окорочного станка;

τ_B – случайная длительность вспомогательного времени, обусловленного межторцовыми разрывами.

Далее для упрощения записи символ i в обозначении индекса опустим, учитывая при этом, что рассматриваемые величины имеют отношение к промежуткам $z_i (i = 2, 3, \dots, n)$.

Представим случайную величину z как функцию случайного аргумента q , а именно

$$z = g(q) = F_{-1}(q) = \sup\{t: F(t) \leq 1\},$$

где $F_{-1}(q)$ – функция, обратная к функции распределения $F(t)$ (рис. 3);

$\sup$ – точная верхняя грань множества, свойство элементов t которого указано в фигурных скобках.

Очевидно, чтобы обратная функция $F_{-1}(q)$ была однозначно определенной, случайная величина q должна иметь значения, заключенные на отрезке $[0, 1]$. Покажем, что на этом отрезке величина q имеет равномерное распределение. По определению функция распределения случайной величины z есть вероятность

$$F(t) = p(z < t) = p\{F_{-1}(q) \leq 1\}. \quad (6)$$

С учетом неубывающего характера функции $F(t)$ выражение (6) равносильно выражению

$$F(t) = p\{q \leq F(t)\}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что случайная величина q имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, т. е. ее плотность вероятности равна $f_q(t) = 1$. Тогда по определению математического ожидания функции случайного аргумента получим

$$\begin{aligned} Mz &= Mg(q) = \int_0^1 g(y) f_q(t) dy = \\ &= \int_0^1 g(y) dy = \int_0^1 F_{-1}(y) dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя геометрический смысл определенного интеграла (8), видим, что Mz численно равно площади области с основанием $[0, 1]$ и ограниченной сверху графиком функции $F_{-1}(q)$ (рис. 3). Эта же площадь заштрихована на рис. 2 и равна

$$\int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt.$$

Таким образом, имеем

$$Mz = \int_0^1 F_{-1}(y) dy = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt$$

или с учетом (5)

$$Mz = M\left(\frac{L}{u} + \tau_B\right) = \frac{1}{u} ML + M\tau_B, \quad (9)$$

где ML – математическое ожидание длины бревен, м;

$M\tau_B$ – математическое ожидание длительности вспомогательного времени (межторцовых разрывов).

Тогда согласно (4) получим

$$\lambda_1 = u/(ML + uM\tau_B). \quad (10)$$

Аналогично можно показать, что порядок закона Эрланга можно определить по формуле

$$k = (Mz)^2/Dz,$$

где Dz – дисперсия случайной величины z , определяемая по выражению

$$Dz = D(L/u + \tau_B) = (1/u^2)DL + D\tau_B, \quad (11)$$

Здесь DL – дисперсия длины бревен, $D\tau_B$ – дисперсия длительности вспомогательного времени (межторцовых разрывов).

Тогда с учетом (9) и (11) порядок закона Эрланга

$$k = \frac{(ML)^2 + 2uML \cdot M\tau_B + u^2(M\tau_B)^2}{DL + u^2 D\tau_B}. \quad (12)$$

Из (10) и (12) следует, что оба параметра закона Эрланга распределения промежутков времени между поступлениями двух последовательных бревен зависят от геометрических размеров пиловочных сортиментов, скорости подачи окорочного станка и вероятностных характеристик длительности межторцовых разрывов.

Выводы

В результате проведенных исследований установлено, что входящий поток сортиментов на участок окорки представляет собой случайный процесс, обладающий свойствами: ординарность, стационарность, ограниченность последствия. Для моделирования стационарного потока с ограниченным последствием наиболее адекватной статистической моделью является поток Эрланга. Определены параметры входящего потока

сортиментов и их зависимость от скорости подачи окорочных станков и геометрических характеристик сортиментов.

Библиографический список

1. Агеев, С.П. Многофакторная модель электропотребления поточной линии производства пилопродукции / С.П. Агеев // Лесной Журнал. – 2013. – № 1. – С. 122 – 130.
2. Рыкунин, С.Н. Технология лесопильно-деревообрабатывающих производств: учеб. пособие для студентов / С.Н. Рыкунин, Ю.П. Тюкина, В.С. Шалаев. – М.: МГУЛ, 2003. – 225 с.
3. Агеев, С.П. Вероятностное моделирование процесса производства пилопродукции / С.П. Агеев, В.И. Мелехов, С.Н. Рыкунин // Вестник МГУЛ – Лесной вестник. – 2015. – № 2. – С. 89–96.
4. Вильке, Г.А. Автоматизация производственных процессов лесопромышленных предприятий / Г.А. Вильке. – М.: Лесная пром-сть, 1972.
5. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.
6. Хинчин, А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А.Я. Хинчин. – М.: Физматгиз, 2004. – 236 с.

STATISTICAL MODEL OF THE INCOMING STREAM SAWN ASSORTMENTS AT PLOT DEBARKING

Ageev S.P., Prof. NARFU, Dr. Sci. (Tech.)⁽¹⁾; Melekhov V.I., Prof. NARFU, Dr. Sci. (Tech.)⁽¹⁾; Rykunin S.N., Prof. Bauman Moscow State Technical University, Dr. Sci. (Tech.)⁽²⁾

doctor.mart11@mail.ru

⁽¹⁾Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (NARFU), nab. Severnoy Dviny, 17, 163002, Arkhangelsk, Russia

⁽²⁾Bauman Moscow State Technical University (Mytishchi branch), 1 st. Institutskaya, 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia

Energy used to produce lumber unit is sometimes unduly inflated and may differ substantially from the normative. The problem of increasing the energy efficiency of sawmills can be solved in an integrated examination and optimization of technology and energy components of the production process. One of the most energy-intensive workshops is sawmill woodworking. Efficiency of this production as a whole depends on well-coordinated work of its individual sections, and particularly the leading area of wood debarking. The production process in the lumbering shop has the properties of probabilistic processes. Among the many different types of stochastic processes of particular importance for the mathematical modeling of production systems are Markov processes. It has been established that the incoming stream of logs debarking onto the land is a random process that possesses properties.

Keywords: technological process, debarking, random process, the law of probability distributions, queuing system, the density distribution.

References

1. Ageev S.P. *Mnogofaktornaya model' elektropotrebleniya potочноy linii proizvodstva piloproductsii* [Multifactor model of electricity production flow line sawn timber], Bulletin of Higher Educational Institutions. Lesnoy Zhurnal, 2013, № 1, pp. 122-130.
2. Rykunin S.N., Tyukina Yu.P., Shalaev V.S. *Tekhnologiya lesopil'no-derevoobrabatyvayushchikh proizvodstv* [The technology of sawing and woodworking industries], Moscow: MSFU, 2003, 225 p.
3. Ageev S.P., Melekhov V.I., Rykunin S.N. *Veroyatnostnoye modelirovaniye protsessov proizvodstva piloproductsii* [Probabilistic modeling of the process of production of sawn timber], Moscow state forest university bulletin - Lesnoy vestnik, № 2, pp. 89-96.
4. Vil'ke G.A. *Avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov lesopromyshlennykh predpriyatiy* [Automation of production processes of timber enterprises], Moscow: Forestry, 1972.
5. Venttsel' E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya sluchaynykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [The theory of random processes and its engineering applications], Moscow: Higher School, 2000. 383 p.
6. Khinchin A.Ya. *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Work on mathematical queuing theory], Moscow: Fizmatgiz, 2004, 236 p.