

Механика

УДК 539.384

Влияние смещения точки приложения нагрузки на результаты испытаний на трехточечный изгиб: оценка погрешности и коррекция*

А.В. Хохлов

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова; Институт физики твердого тела имени Ю.А. Осипьяна РАН

Influence of the load eccentricity in three-point bending tests: the correction formulas and error analysis

A.V. Khokhlov

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University; Osipyan Institute of Solid State Physics RAS

Предложена усовершенствованная методика проведения и обработки данных испытаний на изгиб. Выведены выражения для относительной погрешности стандартных формул для определения максимальных изгибающего момента и прогиба под действием силы, максимальных напряжения и деформации, предела прочности и деформации при разрушении в испытаниях на трехточечный изгиб в зависимости от относительного смещения точки приложения нагрузки от середины пролета. Доказано, что при любом значении нагрузки стандартные формулы (не учитывающие смещение точки приложения) завышают напряжение, предел прочности и модуль упругости и занижают предельную деформацию. Указано, в каких случаях этой систематической погрешностью можно пренебречь. Выведены формулы для их коррекции при малом пролете.

EDN: GYJZOJ, <https://elibrary/gyjzoj>

Ключевые слова: испытания на изгиб, оценка погрешности, кривая сила — прогиб, предел прочности, деформации при разрушении, композитная углеалюминиевая проволока

Explicit expressions are derived for the systematic errors in deflection, maximal stresses and strains, strength, fracture strain, and elastic modulus which are caused by the load eccentricity in three-point bending tests and are ignored by standard technique of force-deflection curve treatment. Specimen are supposed to be homogeneous, isotropic and elastic (ceramics, alloys, and dispersion-filled composites with metallic, ceramic or polymer matrices and so on). For any load and load shift, it is proved that the standard formulas give higher stresses, strength and elastic modulus but lower strains (fracture strain in particular). The error bounds allow us to conclude in which case it is possible to neglect the systematic errors caused by a load eccentricity and when it is necessary to use the accurate formulas accounting for an eccentricity (as in the case of a small beam span).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 22-79-10064-П).

EDN: GYJZOJ, <https://elibrary/gyjzoi>

Keywords: three-point bending tests, error estimates, mini-specimen, force-deflection curve, strength, fracture strain, elastic modulus, glasses, carbon-aluminum composite wire

Испытание на трех- или четырехточечный изгиб — одно из самых доступных и простых стандартных испытаний [1–4], по данным которого можно построить диаграмму деформирования при растяжении (или сжатии) и определить предел прочности, предельную деформацию и модуль упругости материала.

В испытании регистрируют кривую сила — прогиб [1–4], по которой на основе стандартных формул теории изгиба балок (сопромата) строят кривые напряжение — деформация в наиболее напряженных волокнах балки. Предполагают, что материал — однородный изотропный и линейно-упругий — находится в состоянии одноосного растяжения или сжатия и одинаково сопротивляется растяжению и сжатию [1–6].

Очень простая форма образца (пластинка, брусок или длинный цилиндр), который можно изготовить без дополнительной инструментальной обработки с помощью различных технологических процессов (таких как прессование, спекание, отливка, пропитка слоев тканей и пучков волокон связующим, печать и т. д.), малые размеры и легкость установки образца в испытательную машину, кажущаяся простота приложения нагрузки (отсутствие необходимости специально проектировать и укреплять захватные части) и измерения прогиба сделали его самым популярным видом испытания у всех материаловедов, разрабатывающих новые материалы. Это керамики [7–14], бетоны и асфальтобетоны, композиты с полимерными [6, 15–32], керамическими [3, 4, 9, 7–13, 27–29] и металлическими [3, 6, 7, 30–36] матрицами, материалы, получаемые методами порошковой металлургии и самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) [9, 11, 37], 3D-печати [38–40] и т. п.

Однако простота проведения испытания на изгиб не гарантирует надежность результатов: определяемые модуль упругости и предел прочности на растяжение в значительной мере зависят от формы и размеров образцов, организации испытаний и методики обработки данных (базовой модели, лежащей в ее основе, и дополнительных упрощающих расчет гипотез) [1–7, 14–26, 41–43].

При трехточечном изгибе в образце возникает неоднородное напряженно-деформированное состояние (НДС) вследствие надавливания волокон и наличия поперечной силы в сечениях. В рабочей части образца нет участков однородности НДС из-за переменности изгибающего момента, поперечной силы и контактных напряжений (опорные и нагружающий цилиндры создают большие локальные напряжения в местах контакта с образцом). Неоднородное НДС образца сильно снижает точность определения характеристик материала по стандартным формулам при их применении к измеренным силам и прогибам (нелокальных по природе) и требует развития более точных методов обработки данных [5, 6, 24–26].

В коротких образцах (при отношении длины к высоте $l = L/h < 10$) и, особенно в материалах с низкой прочностью сдвига или жесткостью (например, слоистых и волокнистых композициях со слабым интерфейсом), влияние локальных нагрузок и деформаций образца в опорных зонах, поперечной силы и порождаемых ею деформаций сдвига и касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях (максимальных в нейтральной плоскости изгибаемого образца) на механизмы разрушения и прочность образца, измеряемые значения прогиба, модуля упругости и модуля сдвига (в частности, межслойного модуля сдвига слоистых композитов) может быть весьма значительным [6, 10, 11, 27–30, 32–35, 38]). Для длинных балок (с отношением $l \geq 15$) максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$ в 10 раз меньше максимального нормального напряжения $\sigma_{\max}$. Согласно элементарной теории изгиба, $\tau_{\max}/\sigma_{\max} = 0,5/l$, и это отношение убывает к нулю с ростом l .

Испытания на изгиб и методики определения механических характеристик разных материалов, регламентированные стандартами (ГОСТ 32659–2014, ГОСТ Р 56805–2015, ГОСТ Р 56810–2015, ГОСТ Р 57745–2017, ГОСТ Р 57749–2017, ГОСТ Р 57866–2017, ISO 14125, ISO 1209-1:2007, ISO 1209-2:2007, ASTM D790, ASTM D7264/D7264M-07, ASTM D2344/D2344M-13, ГОСТ 4648–2014, ГОСТ Р 58406.6–2020, РД 50–675–88), использованы и исследованы во многих работах [1–11, 13–27, 32–35, 38–44]. В них приве-

дены рекомендации по выбору отношения l , при котором можно пренебречь сдвигом для корректного определения модуля упругости и пределов прочности при изгибе ($l \geq 16 \dots 40$).

В процессе изучения новых материалов и режимов их изготовления материаловеды часто вынуждены выходить за рамки стандартов, проводя испытания коротких образцов и применяя к ним простые стандартные формулы без учета сложности и неоднородности НДС, многих особенностей испытаний и их обработки. Между тем их следует анализировать и учитывать, чтобы получить характеристики материалов с приемлемой точностью и не ошибиться в интерпретации экспериментальных данных о процессе деформирования и накопления повреждений и разрушения.

Достаточно длинные образцы не всегда можно изготовить в силу особенностей материала и процесса выполнения его образцов (лед и композиты на его основе), малых объемов материалов (высокоэнтропийные сплавы, ультрамелкозернистые сплавы, специальная керамика и др.) или ввиду особенностей технологии изготовления и ограничений на размеры и формы изделий (твердофазное формование, СВС, 3D-печать заготовок керамических изделий C-SiC пастами) [8–11, 13, 27, 32–36, 37–44].

Например, в работах [10, 11, 27, 32, 39, 41–44] приведены данные определения модуля упругости и предела прочности по испытаниям на изгиб коротких и очень коротких образцов прямоугольного сечения. Исследованы образцы разного размера: $50 \times 3 \times 4$ мм с базой 40 мм ($l = 10$) [10]; $36 \times 3 \times 4$ мм с базой 30 мм ($l = 7,5$) [11]; $35 \times (4 \dots 6) \times (3,3 \dots 4,0)$ мм с базой 14 мм ($3,5 \leq l < 5,0$) [27]; $40 \times 3 \times 4$ мм с базой 20 мм ($l = 5$) [32]; $25 \times 3 \times 2,5$ мм с базой 10 мм ($l = 4$) [39]; 2×2 мм или 4×4 мм (брусков) с пролетом ($2,5 \leq l \leq 10,0$) [41–43]; $35 \times 3 \times 5$ мм с базой 25 мм ($l = 8$) [44].

Испытание на изгиб провести просто, но существует немало особенностей в обработке результатов измерений и адекватной трактовке. Источники систематической погрешности и границы применимости испытаний на изгиб заслуживают детального изучения. Достаточно много работ посвящено экспериментальному и численному исследованиям возможностей методик определения упругих характеристик керамик, изотропных, волокнистых и слоистых полимерных композиционных материалов при разном отношении длины пролета балки к ее

толщине [5, 15–26, 41–43]. Авторы акцентировали внимание на тех или иных особенностях обработки данных измерений и способах минимизации погрешности.

Главный источник погрешности предела прочности на растяжение и заниженных расчетных значений модуля упругости (не только для коротких балок, но и для образцов с отношением $l = 10 \dots 13$) — пренебрежение влиянием деформаций сдвига на прогиб и касательных напряжений на прочность. Модуль упругости (и модуль сдвига) материала, вычисленный по стандартной методике всегда оказывается меньше, чем истинное значение, так как содержит систематическую погрешность. Прогибы балки-образца больше, чем предсказывает теория изгиба Бернулли — Эйлера, ее жесткость на изгиб ниже, с уменьшением длины пролета наблюдается монотонное падение измеряемого модуля упругости [1, 5, 6, 14, 24, 41–43].

К другим источникам погрешности относятся: неучтенное влияние локальных напряжений, смятия и микроповреждений под нагружающим роликом; влияние на прогибы балки ее деформаций на опорах и сползания опорных точек на роликах при изгибе [1, 5, 6, 14, 19, 24]; технологические искажения формы поперечного сечения (вызванные неравномерностью усадки или восстановления материала после экструзии, литья, прокатки, прессования, спекания в процессе охлаждения и твердения и возникшими остаточными напряжениями), которые нарушают симметрию идеальной схемы деформирования; неизбежные вариации толщины балки-образца вдоль оси z $h(z)$, существенно влияющие на положение нейтральной плоскости (линии), изгибную жесткость EJ и прогиб балки; отклонения поведения материала от модели однородного изотропного линейно-упругого тела: разномодульность, неоднородность, дефекты, неупругость и скрытая анизотропия, порожденная процессом изготовления, — литьем, прокаткой, экструзией, прессованием и резкой.

Но существует еще один источник погрешности, о котором обычно не упоминают, — неточное позиционирование нагрузки в середине пролета, особенно при испытании образцов с малым пролетом [6, 27, 41–43, 45–47] до нескольких миллиметров (рис. 1) или даже микрометров при испытании зондовым датчиком атомно-силового микроскопа.

В ГОСТ Р 56805–2015 написано: «Допускаемые отклонения от параллельности поверхностей опор и опорной поверхности пуансона в горизонтальной плоскости — 0,05 мм» и отмечена необходимость приложения нагрузки в середине пролета («Опоры должны быть закреплены неподвижно и позволять точно центрировать образец (продольная ось образца должна быть параллельна боковой плоскости траверсы, а центр симметрии образца должен совпадать с осью приложения нагрузки»). Но нет упоминания о том, как это обеспечить, проверить или учесть погрешность отклонения точки приложения силы от середины пролета (в некоторых стандартах есть только формулировка «можно использовать шаблон»).

В американском оригинале ASTM D7264/D7264M-15 стандарта ГОСТ Р 57866–2017, очень похожего по названию на ГОСТ Р 56805–2015, есть фрагмент текста, выброшенный при создании российского аналога: «15.1 Точность. Данные, необходимые для выработки точного заключения, в настоящий момент недоступны для данного метода испытания. 15.2 Систематическая погрешность. Для данного метода испытаний невозможно определить систематическую погрешность, поскольку отсутствует приемлемый эталонный образец».

Вопрос о влиянии смещения точки приложения нагрузки на результаты испытаний на изгиб не рассмотрен и в статьях [5, 15–26, 41–43], посвященных исследованию возможностей методик испытаний на изгиб.

Цель работы — анализ влияния смещения точки приложения нагрузки на результаты испытаний на трехточечный изгиб и оценка погрешности расчета по стандартным формулам в зависимости от относительного смещения точки приложения силы от середины пролета.

Влияние смещения точки приложения нагрузки на изгибающий момент и прогиб.

Пусть сила P приложена не в середине пролета шарнирно опертой балки длиной L (поместим в нее начало отсчета), а со сдвигом на расстояние $s = \delta L/2$, $\delta \in (0; 1)$, вправо вдоль оси стержня (оси z). Тогда реакции опор $Q_1 = P(1-\delta)/2$, $Q_2 = P(1+\delta)/2$, эпюра моментов — двухзвенная ломаная, а максимальный изгибающий момент (в сечении под силой $z = \delta L/2$)

$$\hat{M}(\delta) = Q_1(1+\delta)L/2 = (1-\delta^2)PL/4. \quad (1)$$

Предполагая, что материал однородный изотропный линейно-упругий, прогиб под силой можно вычислить по формуле Мора (с учетом или без учета влияния поперечных сил), перемножая эпюры M_1 (от единичной силы в точке определения перемещения) и $M_P = PM_1$ (Q_1 и $Q_P = PQ_1$). Прогиб балки под силой без учета влияния поперечной силы

$$\begin{aligned} v(\delta) &= (EJ)^{-1} \int_0^L M_1(z) M_P(z) dz = \\ &= (EJ)^{-1} P \left[(1-\delta^2) \frac{L}{4} \right]^2 \frac{L}{3} = (1-\delta^2)^2 \frac{PL^3}{48EJ}. \quad (2) \end{aligned}$$

Момент и прогиб, рассчитанные по формулам (1) и (2), отличаются множителями $1-\delta^2$ и $(1-\delta^2)^2$ от случая $\delta=0$ и убывают по δ . Так как величины $\hat{M}(\delta)$ и $v(\delta)$ меньше значений для $\delta=0$, стандартные формулы для максимальных напряжения и деформации (не учитывающие, что $\delta>0$) завышают их значения при любой нагрузке P , в частности предел прочности и деформацию при разрушении.

В большинстве случаев эта систематическая погрешность невелика. Отклонения момента $\hat{M}(\delta)$ и прогиба $v(\delta)$ от стандартно вычисляемых величин $\hat{M}(0) = PL/4$ и $v(0) = PL^3/(48EJ)$ (в предположении, что нагрузка приложена точно в середине пролета шарнирно опертой балки) определяются выражениями

$$\hat{M}(\delta) - \hat{M}(0) = -\delta^2 \frac{PL}{4} = -\delta^2 \hat{M}(0);$$

$$v(\delta) - v(0) = -\delta^2 (2 - \delta^2) \frac{PL^3}{48EJ} = -\delta^2 (2 - \delta^2) v(0).$$

Относительные погрешности расчета момента и прогиба под силой (и кривых сила — прогиб и напряжение — деформация) по стандартным формулам (в предположении $\delta=0$), немного завышающим момент и прогиб, равны δ^2 и $\delta^2(2-\delta^2)$. Погрешность для прогиба в 2 раза больше, но и она мала: менее 2 % при $\delta \leq 0,10$ и менее 4,5 % при $\delta \leq 0,15$. Существенно, что момент, прогиб и погрешности их расчета выражены через безразмерную величину $\delta = s/(0,5L)$.

Как правило, в испытаниях достаточно длинных образцов (с большим пролетом) относительные отклонения точки приложения силы от середины пролета не превышают $\delta=0,1$, и ими можно пренебречь при обработке результатов. Но для миниатюрных образцов (с малым пролетом) обеспечить точность позициониро-

вания нагружающего валика (ножа) гораздо сложнее, и даже малое отклонение s может дать значения $\delta > 0,2$. Тогда вызванную им погрешность (5...10 % и более) надо учитывать (компенсировать). Для коротких балок (с отношением $l < 9$) в формулу (2) для прогиба необходимо добавить слагаемое, полученное перемножением эпюр поперечных сил.

Результаты испытаний мини-образцов с пролетом менее 15 мм приведены во многих работах, в частности [28, 39, 41–43]. Некоторые результаты испытаний на изгиб (кадры видеосъемки) образцов композитной углеалюминиевой проволоки с матрицей из сплава Al-0.5Bi, непрерывно армированной углеродными волокнами [45–47], с разным пролетом между опорами приведены на рис. 1. Диаметр проволоки CF/Al-0.5Bi составлял 290 ± 20 мкм; доля волокон — 60 %; радиус острия ножа — 100 мкм. На рис. 1, а длина пролета $L = 6,0$ мм ($l = 21$), на рис. 1, б — $L = 3,0$ мм ($l = 10$), на рис. 1, в — $L = 1,8$ мм ($l = 6$), на рис. 1, г — $L = 0,9$ мм ($l = 3$).

Испытания проволоки CF/Al-0.5Bi на трехточечный изгиб до разрушения с разным пролетом проведены для определения их механических свойств и особенностей разрушения (с последующим анализом микроструктуры и рельефа поверхности разрушения средствами электронной и конфокальной лазерной микро-

скопии с автоматическим анализом полученных снимков [46, 47]).

Более 30 образцов испытаны в Институте физики твердого тела имени Ю.А. Осипьяна РАН на специально сконструированной оснастке, позволяющей изменять расстояние между нижними опорами в диапазоне длины пролета $L = 0,9...12,0$ мм, т. е. для десяти отношений длины пролета к диаметру поперечного сечения проволоки: $l \approx 3, 4, 5, 6, 8, 10, 16, 21, 32$ и 43.

Влияние смещения точки приложения нагрузки на максимальные напряжение и деформацию в крайних волокнах. Чтобы учесть влияние смещения точки приложения нагрузки на результаты испытаний, вместо стандартных величин $\dot{M}(0)$ и $\nu(0)$ следует использовать формулы (1) и (2) для вычисления максимальных момента и прогиба, а напряжения и деформации в крайних волокнах самого нагруженного сечения (в сечении под силой) выражать по формулам теории изгиба балок Бернулли — Эйлера через $M(\delta)$ и $\nu(\delta)$.

Эта теория хорошо применима к длинным балкам постоянного сечения ($l = L/h \geq 15...20$) из однородного изотропного линейно-упругого материала при малых деформациях. Она основана на гипотезе плоских сечений, остающихся ортогональными оси балки при ее изгибе, и гипотезе одноосности НДС. В силу первой осевая

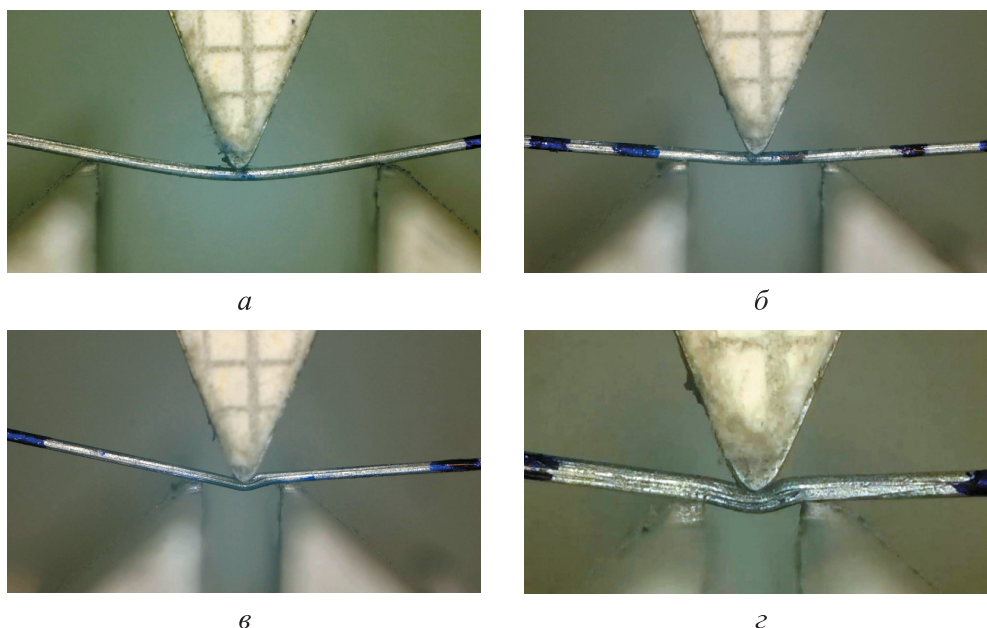


Рис. 1. Результаты испытаний на изгиб образцов композитной углеалюминиевой проволоки CF/Al-0.5Bi, непрерывно армированной углеродными волокнами, при различных значениях длины пролета: а — $L = 6,0$ мм ($l = 21$); б — $L = 3,0$ мм ($l = 10$); в — $L = 1,8$ мм ($l = 6$); г — $L = 0,9$ мм ($l = 3$)

деформация ε_z в поперечном сечении $z = \text{const}$ при прямом изгибе балки в плоскости xz линейно зависит от расстояния y до нейтральной линии $y = 0$:

$$\varepsilon_z(y, z) = \kappa(z)y, \quad y \in [y_-; y_+],$$

где $\kappa(z)$ — кривизна изогнутой оси балки.

Деформации крайних волокон $y = y_-$ и $y = y_+$ максимальны по модулю:

$$\varepsilon_+ = \varepsilon(y_+, z) = \kappa y_+; \quad \varepsilon_- = \kappa y_-.$$

Если материал линейно-упругий, а надавливанием волокон можно пренебречь, то и нормальное напряжение в сечении $\sigma_z = E\varepsilon_z$ линейно зависит от y :

$$\sigma_z(y, z) = E\kappa y, \quad y \in [y_-; y_+],$$

а кривизна оси связана с изгибающим моментом $M = M_x(z)$ соотношением

$$\kappa = \frac{M}{EJ},$$

где E — модуль упругости материала; J — момент инерции сечения относительно оси x (главной центральной оси сечения), $J = J_x$.

Поэтому $\sigma(y, z) = (M/J)y$, а максимальные нормальные напряжения растяжения σ_+ и сжатия σ_- возникают в крайних волокнах:

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \sigma(y_+, z) = (M/J)y_+; \\ \sigma_- &= \sigma(y_-, z) = (M/J)y_-. \end{aligned} \quad (3)$$

После подстановки $z = \delta L/2$ в выражения (1) и (3) находим напряжения и деформации в крайних волокнах самого нагруженного сечения (под точкой приложения силы) по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_+(\delta) &= (1 - \delta^2) PLy_+ / (4J); \\ \sigma_-(\delta) &= (1 - \delta^2) PLy_- / (4J); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_+(\delta) &= (1 - \delta^2) PLy_+ / (4EJ) = D_+(\delta)v(\delta); \\ \varepsilon_-(\delta) &= -D_-(\delta)v(\delta), \end{aligned} \quad (5)$$

где ε_+ и ε_- — деформации растяжения и сжатия крайних волокон;

$$\begin{aligned} D_+(\delta) &= 12L^{-2} y_+ / (1 - \delta^2); \\ D_-(\delta) &= 12L^{-2} |y_-| / (1 - \delta^2). \end{aligned}$$

Деформации крайних волокон в этом сечении выражаются через прогиб $v(\delta)$ под силой, определяемой выражением (2). Формулы (4), (5) отличаются от напряжений и деформаций для $\delta = 0$ только множителем $1 - \delta^2$:

$$\sigma_+(0) = PLy_+ / (4J);$$

$$\varepsilon_+(0) = PLy_+ / (4EJ) = D_+(0)v(0),$$

относительное отклонение равно δ^2 .

Из выражения (5) вытекает следующая связь между скоростями деформации крайних волокон и скоростью перемещения нагружающего цилиндра V , задаваемой в испытании:

$$\dot{\varepsilon}_+ = D_+(\delta)V; \quad \dot{\varepsilon}_- = -D_-(\delta)V.$$

Если у балки есть вторая плоскость симметрии $y = 0$, то

$$y_{\pm} = \pm h/2; \quad D_+ = D_-; \quad \varepsilon_+ = |\varepsilon_-|; \quad \sigma_+ = |\sigma_-|.$$

В частности, для балки прямоугольного сечения $b \times h$ имеем

$$D(\delta) = 6hL^{-2} / (1 - \delta^2); \quad J = bh^3/12;$$

$$v(\delta) = (1 - \delta^2)^2 Pl^3 (4bE)^{-1};$$

$$\varepsilon_+(\delta) = |\varepsilon_-(\delta)| = D(\delta)v(\delta);$$

$$\sigma_+ = |\sigma_-| = \sigma_{\max}(\delta) = 1,5(1 - \delta^2) Pl / (bh).$$

Если отклонение δ (неизвестное в эксперименте) не учитывают при обработке измеряемой кривой сила — прогиб (принято, что $\delta = 0$), то напряжение и деформация в крайних волокнах под силой вычисляют, используя измеренные значения силы P и прогиба под силой $v(\delta)$, по стандартным формулам

$$\sigma_+ = \sigma_+(0) = PLy_+ / 4J;$$

$$\varepsilon_+ = D_+(0)v(\delta); \quad (6)$$

$$D_+(0) = 12L^{-2} y_+.$$

Стандартные формулы (6) завышают напряжения (и предел прочности) и занижают деформации по сравнению с уточненными выражениями (4), (5), так как в формуле (6) использована величина $D_+(0)$, которая меньше множителя $D_+(\delta)$ в соотношении (5).

Относительные отклонения уточненных напряжений и деформаций (4), (5) от стандартных расчетных (6) определяются соотношениями

$$\frac{\sigma_+(\delta) - \sigma_+}{\sigma_+} = -\delta^2;$$

$$\frac{\varepsilon_+(\delta) - \varepsilon_+}{\varepsilon_+} = \frac{D_+(\delta) - D_+(0)}{D_+(0)} = (1 - \delta^2)^{-1} - 1 = \frac{\delta^2}{1 - \delta^2}.$$

Для балки прямоугольного сечения ($h = 2$ мм, $b = 10$ мм, $L = 40$ мм и $E = 1000$ МПа) построены кривые напряжение — деформация, приведенные на рис. 2. Кривая 1 соответствует

результатам расчета по стандартным формулам (6) при $\delta = 0$, а кривые 2–6 получены путем расчета по уточненным формулам (4), (5) при $\delta = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$ и $0,5$ соответственно. Все они рассчитаны по одной и той же «измеренной» кривой сила — прогиб, которая учитывает влияние δ при обработке данных испытаний и задана в виде

$$P = Av, \quad v \in [0; v_*],$$

где $v = v(\delta)$; $A = 48EJ/L^3 = 4bE/l^3$; v_* — прогиб при разрушении, $v_* = 2$ мм.

На рис. 2 видно, насколько велико отклонение уточненных рассчитанных по выражениям (4), (5) при $\delta \geq 0,2$, и насколько стандартные формулы (6) завышают предел прочности и занижают деформацию при разрушении (на 9 % при $\delta = 0,3$ и более). Модуль упругости они завышают на 18 % при $\delta = 0,3$ и более.

Все формулы выведены для однородных изотропных линейно-упругих материалов, но область их применения значительно шире: можно ожидать, что они будут работать не только для дисперсно-наполненных композитов, но и для волокнистых и слоистых композитов с эффективными упругими свойствами (как это показано в статье [5] на примере результатов испытаний трех разных по структуре композитов [24]).

Относительное отклонение δ можно вычислить, измерив углы поворота свесов образца (см. рис. 1) за опорами φ_1 и φ_2 . Так как свесы не нагружены, то они не изгибаются и остаются

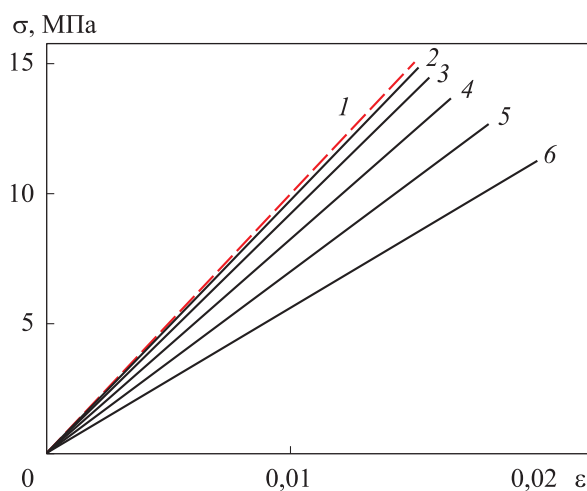


Рис. 2. Кривые напряжение — деформация, полученные путем расчета по стандартным формулам (6) при $\delta = 0$ (1) и по уточненным выражениям (4), (5) при $\delta = 0,1$ (2), $0,2$ (3), $0,3$ (4), $0,4$ (5) и $0,5$ (6)

прямолинейными. По разности $\varphi_2 - \varphi_1$ можно оценить степень несимметричности нагружения и физических свойств образца относительно плоскости, перпендикулярной его оси и проходящей через центральную точку пролета (это удобный индикатор).

Измерить φ_1 и φ_2 можно по углам отражения лазерного луча от мини-зеркал, связанных со свесами (можно наклеить фольгу на плоские лицевые поверхности свесов или на торцы образца и следить за поворотом отраженных ими лучей лазеров), но такая система требует настройки и значительно усложняет установку образца, замедляет и удорожает испытания в целом. Существует и другой способ, простой и более универсальный (хотя и менее точный), — сделать это по фотографиям (или кадрам видеосъемки) образца в процессе испытания.

Выводы

1. Выведены выражения для относительной погрешности стандартных формул для определения максимальных изгибающего момента и прогиба, максимальных напряжения и деформации, предела прочности и деформации при разрушении (не учитывающих смещение точки приложения нагрузки) в испытаниях на трехточечный изгиб в зависимости от относительного смещения линии приложения нагрузки.

2. Доказано, что при любом значении приложенной нагрузки стандартные формулы без учета δ завышают изгибающий момент, напряжение, предел прочности и модуль упругости и занижают деформацию (в частности, при разрушении) по сравнению с полученными уточненными формулами.

3. Указано, в каких случаях этой систематической погрешностью можно пренебречь, и выведены формулы для их коррекции в случае коротких образцов. В испытаниях достаточно длинных образцов (с большим пролетом) относительные отклонения точки приложения силы от середины пролета не превышают 0,1, и ими можно пренебречь при обработке испытаний.

4. Доказано, что требование стандартов о центрировании нагрузки с отклонением не более 0,2 мм при длине пролета 40 мм является избыточным, и допуск можно повысить примерно в 10 раз (до 2 мм), не внося погрешность более 2 %. Но для образцов малого размера обеспечить точность позиционирования нагружающего валика (ножа) гораздо сложнее, и даже небольшое

смещение может дать относительное отклонение точки приложения силы от середины пролета более 0,2. Тогда вызванную ими погрешность 5...10 % и более надо учитывать по выведенным формулам.

Автор выражает благодарность сотрудникам ИФТТ РАН С.Н. Галышеву и Б.И. Атанову за предоставление видеосъемки образцов в процессе испытаний.

Литература

- [1] Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. Москва, Наука, 1988. 712 с.
- [2] Тарнопольский Ю.М., Кинцис Т.Я. *Методы статических испытаний армированных пластиков*. Москва, Химия, 1981. 272 с.
- [3] Kelly A., Zweben C.H. *Comprehensive composite materials*. Elsevier, 2000. 1152 p.
- [4] Hodgkinson J.M. *Mechanical testing of advanced fibre composites*. Woodhead Publ., 2000. 384 p.
- [5] Хохлов А.В. Анализ погрешности и повышение точности определения модулей упругости и сдвига в испытаниях на изгиб коротких образцов. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2025, т. 91, № 2, с. 54–67, doi: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2025-91-2-54-67>
- [6] Хохлов А.В., Галышев С.Н., Атанов Б.И. и др. Влияние расслоения материалов с низкой сдвиговой прочностью на процесс разрушения и результаты испытаний на трехточечный изгиб. *Физическая мезомеханика*, 2025, т. 28, № 2, с. 13–43, doi: https://doi.org/10.55652/1683-805X_2025_28_2_13-43
- [7] Mileiko S.T. *Metal and ceramic based composite*. Elsevier, 1997. 690 p.
- [8] Evans A.G., Zok F.W. The physics and mechanics of fibre-reinforced brittle matrix composites. *J. Materials Sci.*, 1994, vol. 29, no. 15, pp. 3857–3896, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00355946>
- [9] Ruys A.J. *Silicon carbide ceramics*. Elsevier, 2023. 586 p.
- [10] Kovar D., Thouless M.D., Halloran J.W. Crack deflection and propagation in layered silicon nitride/boron nitride ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1998, vol. 81, no. 4, pp. 1004–1112, doi: <https://doi.org/10.1111/J.1151-2916.1998.TB02438.X>
- [11] Xiang L., Cheng L., Hou Y. et al. Fabrication and mechanical properties of laminated HfC–SiC/BN ceramics. *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2014, vol. 34, no. 15, pp. 3635–3640, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2014.04.021>
- [12] Sikalidis C., ed. *Advances in ceramics*. IntechOpen, 2011. 534 p.
- [13] Feng T., Tong M., Hou W. et al. Flexural properties of cyclic ablated SiCf/HfC–SiC composites. *Ceram. Int.*, 2021, vol. 47, no. 9, pp. 12851–12858, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2021.01.146>
- [14] Полилов А.Н., Татусь Н.А. *Биомеханика прочности волокнистых композитов*. Москва, Физматлит, 2018. 328 с.
- [15] Wisnom M.R. The effect of specimen size on the bending strength of unidirectional carbon fibre-epoxy. *Compos. Struct.*, 1991, vol. 18, no. 1, pp. 47–63, doi: [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(91\)90013-O](https://doi.org/10.1016/0263-8223(91)90013-O)
- [16] Jalali S.J., Taheri F. New test method for measuring the longitudinal and shear moduli of fiber reinforced composites. *J. Compos. Mater.*, 1999, vol. 33, no. 23, pp. 2134–2160, doi: <https://doi.org/10.1177/002199839903302301>
- [17] Sideridis E., Papadopoulos G.A. Short-beam and three-point-bending tests for the study of shear and flexural properties in unidirectional-fiber-reinforced epoxy composites. *J. Appl. Polym. Sci.*, 2004, vol. 93, no. 1, pp. 63–74, doi: <https://doi.org/10.1002/app.20382>
- [18] Rácz Zs., Vas L.M. Relationship between the flexural properties and specimen aspect ratio in unidirectional composites. *Compos. Interfaces*, 2005, vol. 12, no. 3–4, pp. 325–339, doi: <https://doi.org/10.1163/1568554053971551>
- [19] Mujika F. On the effect of shear and local deformation in three-point bending tests. *Polym. Test.*, 2007, vol. 26, no. 7, pp. 869–877, doi: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2007.06.002>

- [20] Caprino G., Iaccarino P., Lamboglia A. The effect of shear on the rigidity in three-point bending of unidirectional CFRP laminates made of T800H/3900-2. *Compos. Struct.*, 2009, vol. 88, no. 3, pp. 360–366, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.04.014>
- [21] Hara E., Yokozeki T., Hatta H. et al. Comparison of out-of-plane tensile strengths of aligned CFRP obtained by 3-point bending and direct loading tests. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2012, vol. 43, no. 11, pp. 1828–1836, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.06.016>
- [22] Hara E., Yokozeki T., Hatta H. et al. Comparison of out-of-plane tensile moduli of CFRP laminates obtained by 3-point bending and direct loading tests. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2014, vol. 67, pp. 77–85, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2014.08.003>
- [23] Insausti N., Adarraga I., De Gracia J. et al. Numerical assessment of an experimental procedure applied to DCB tests. *Polym. Test.*, 2020, vol. 82, art. 106288, doi: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2019.106288>
- [24] Guseinov K., Sapozhnikov S.B., Kudryavtsev O.A. Features of three-point bending tests for determining out-of-plane shear modulus of layered composites. *Mech. Compos. Mater.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 155–168, doi: <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10020-7>
- [25] Demiral M., Kadioglu F., Silberschmidt V.V. Size effect in flexural behaviour of unidirectional GFRP composites. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2020, vol. 34, no. 12, pp. 5053–5061, doi: <https://doi.org/10.1007/s12206-020-1109-0>
- [26] Полилов А.Н., Власов Д.Д., Татусь Н.А. Уточненный критерий расслоения при изгибе композитной балки. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2023, т. 89, № 10, с. 63–73, doi: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-10-63-73>
- [27] Nikonovich M., Kolchin F., Galyshev S. et al. Matrixless fibrous oxide composites. *Ceram. Int.*, 2021, vol. 47, no. 6, pp. 8711–8716, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.11.116>
- [28] Ni D., Cheng Y., Zhang J. et al. Advances in ultra-high temperature ceramics, composites, and coatings. *J. Adv. Ceram.*, 2022, vol. 11, no. 1, pp. 1–56, doi: <https://doi.org/10.1007/s40145-021-0550-6>
- [29] Radhika N., Sathish M. A review on Si-based ceramic matrix composites and their infiltration based techniques. *Silicon*, 2022, vol. 14, no. 16, pp. 10141–10171, doi: <https://doi.org/10.1007/s12633-022-01763-y>
- [30] Mileiko S. Carbon-fibre/metal-matrix composites: a review. *J. Compos. Sci.*, 2022, vol. 6, no. 10, art. 297, doi: <https://doi.org/10.3390/jcs6100297>
- [31] Shirvanimoghaddam K., Hamim S.U., Akbari M.K. et al. Carbon fiber reinforced metal matrix composites: fabrication processes and properties. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2017, vol. 92, pp. 70–96, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2016.10.032>
- [32] Zhong K., Zhou J., Zhao C. et al. Effect of interfacial transition layer with CNTs on fracture toughness and failure mode of carbon fiber reinforced aluminum matrix composites. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2022, vol. 163, art. 107201, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2022.107201>
- [33] Galyshev S. On the strength of the CF/Al-wire depending on the fabrication process parameters: melt temperature, time, ultrasonic power, and thickness of carbon fiber coating. *Metals*, 2021, vol. 11, no. 7, art. 1006, doi: <https://doi.org/10.3390/met11071006>
- [34] Galyshev S., Atanov B. The dependence of the strength of a carbon fiber/aluminum matrix composite on the interface shear strength between the matrix and fiber. *Metals*, 2022, vol. 12, no. 10, art. 1753, doi: <https://doi.org/10.3390/met12101753>
- [35] Galyshev S., Atanov B., Orlov V. On the pressure and rate of infiltration made by a carbon fiber yarn with an aluminum melt during ultrasonic treatment. *Fibers*, 2023, vol. 11, no. 5, art. 41, doi: <https://doi.org/10.3390/fib11050041>
- [36] Matsunaga T., Matsuda K., Hatayama T. et al. Fabrication of continuous carbon fiber-reinforced aluminum–magnesium alloy composite wires using ultrasonic infiltration method. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2007, vol. 38, no. 8, pp. 1902–1911, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2007.03.007>
- [37] Stepanov N.D., Shaysultanov D.G., Chernichenko R.S. et al. Mechanical properties of a new high entropy alloy with a duplex ultra-fine grained structure. *Mater. Sci. Eng. A*, 2018, vol. 728, no. 13, pp. 54–62, doi: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2018.04.118>

- [38] He R., Zhou N., Zhang K. et al. Progress and challenges towards additive manufacturing of SiC ceramic. *J. Adv. Ceramics.*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 637–674, doi: <https://doi.org/10.1007/s40145-021-0484-z>
- [39] Wang G., Miao Y., Gong H. et al. Direct ink writing of reaction bonded silicon carbide ceramics with high thermal conductivity. *Ceram. Int.*, 2023, vol. 49, no. 6, pp. 10014–10022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.11.179>
- [40] Hu Z., Chen F., Xu J. et al. 3D printing graphene-aluminum nanocomposites. *J. Alloys Compd.*, 2018, vol. 746, pp. 269–276, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2018.02.272>
- [41] Alander P., Lassila L.V.J., Vallittu P.K. The span length and cross-sectional design affect values of strength. *Dent Mater.*, 2005, vol. 21, no. 4, pp. 347–353, doi: <https://doi.org/10.1016/j.dental.2004.05.009>
- [42] Abouelleil H., Pradelle N., Villat C. et al. Comparison of mechanical properties of a new fiber reinforced composite and bulk filling composites. *Restor. Dent. Endod.*, 2015, vol. 40, no. 4, pp. 262–270, doi: <https://doi.org/10.5395/rde.2015.40.4.262>
- [43] Garoushi S., Lassila L.V.J., Vallittu P.K. The effect of span length of flexural testing on properties of short fiber reinforced composite. *J. Mater. Sci.: Mater. Med.*, 2012, vol. 23, no. 2, pp. 325–328, doi: <https://doi.org/10.1007/s10856-011-4480-7>
- [44] Kaledin A., Shikunov S., Zubareva J. et al. Fabrication of layered SiC/C/Si/MeSi₂/Me ceramic-metal composites via liquid silicon infiltration of metal-carbon matrices. *Materials*, 2024, vol. 17, no. 3, art. 650, doi: <https://doi.org/10.3390/ma17030650>
- [45] Atanov B.I., Khokhlov A.V., Khasanova E.I. et al. The effect of bismuth content on the microstructure and strength of a carbon Fiber/AL-BI alloy matrix composite. *Mech. Compos. Mater.*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 683–698, doi: <https://doi.org/10.1007/s11029-025-10302-w>
- [46] Галышев С.Н., Хохлов А.В., Орлов В.И. и др. Испытания на изгиб и свойства углеволоконного композита с алюминиевой матрицей, легированной висмутом, при температурах до 500°C. *Физическая мезомеханика*, 2026, т. 29, № 2, с. 81–105.
- [47] Хохлов А.В., Наконечный Е.И., Галышев С.Н. и др. Анализ распределения длин выдернутых волокон на поверхностях разрушения композитов с алюминиевой матрицей, непрерывно армированной углеродными волокнами, по данным СЭМ и КЛСМ. *Авиационные материалы и технологии*, 2026, № 1, с. 158–194.

References

- [1] Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid body]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 712 p. (In Russ.).
- [2] Tarnopolskiy Yu.M., Kintsis T.Ya. *Metody staticheskikh ispytaniy armirovannykh plastikov* [Methods of static testing of reinforced plastics]. Moscow, Khimiya Publ., 1981. 272 p. (In Russ.).
- [3] Kelly A., Zweben C.H. *Comprehensive composite materials*. Elsevier, 2000. 1152 p.
- [4] Hodgkinson J.M. *Mechanical testing of advanced fibre composites*. Woodhead Publ., 2000. 384 p.
- [5] Khokhlov A.V. Error analysis in bending tests of short specimens and the new accurate formulas for elastic and shear moduli. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 2025, vol. 91, no. 2, pp. 54–67, doi: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2025-91-2-54-67> (in Russ.).
- [6] Khokhlov A.V., Galyshev S.N., Atanov B.I. et al. Effect of delamination of low shear strength materials on fracture and test results under three-point bending. *Phys. Mesomech.*, 2025, vol. 28, no. 4, pp. 439–467, doi: <https://doi.org/10.1134/S102995992460157X>
- [7] Mileiko S.T. *Metal and ceramic based composite*. Elsevier, 1997. 690 p.
- [8] Evans A.G., Zok F.W. The physics and mechanics of fibre-reinforced brittle matrix composites. *J. Materials Sci.*, 1994, vol. 29, no. 15, pp. 3857–3896, doi: <https://doi.org/10.1007/BF00355946>
- [9] Ruys A.J. *Silicon carbide ceramics*. Elsevier, 2023. 586 p.
- [10] Kovar D., Thouless M.D., Halloran J.W. Crack deflection and propagation in layered silicon nitride/boron nitride ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1998, vol. 81, no. 4, pp. 1004–1112, doi: <https://doi.org/10.1111/J.1151-2916.1998.TB02438.X>

- [11] Xiang L., Cheng L., Hou Y. et al. Fabrication and mechanical properties of laminated HfC–SiC/BN ceramics. *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2014, vol. 34, no. 15, pp. 3635–3640, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2014.04.021>
- [12] Sikalidis S., ed. *Advances in ceramics*. IntechOpen, 2011. 534 p.
- [13] Feng T., Tong M., Hou W. et al. Flexural properties of cyclic ablated SiCf/HfC–SiC composites. *Ceram. Int.*, 2021, vol. 47, no. 9, pp. 12851–12858, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2021.01.146>
- [14] Polilov A.N., Tatus N.A. *Biomekhanika prochnosti voloknistykh kompozitov* [Biomechanics of strength of fiber composites]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2018. 328 p. (in Russ.).
- [15] Wisnom M.R. The effect of specimen size on the bending strength of unidirectional carbon fibre-epoxy. *Compos. Struct.*, 1991, vol. 18, no. 1, pp. 47–63, doi: [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(91\)90013-O](https://doi.org/10.1016/0263-8223(91)90013-O)
- [16] Jalali S.J., Taheri F. New test method for measuring the longitudinal and shear moduli of fiber reinforced composites. *J. Compos. Mater.*, 1999, vol. 33, no. 23, pp. 2134–2160, doi: <https://doi.org/10.1177/002199839903302301>
- [17] Sideridis E., Papadopoulos G.A. Short-beam and three-point-bending tests for the study of shear and flexural properties in unidirectional-fiber-reinforced epoxy composites. *J. Appl. Polym. Sci.*, 2004, vol. 93, no. 1, pp. 63–74, doi: <https://doi.org/10.1002/app.20382>
- [18] Rácz Zs., Vas L.M. Relationship between the flexural properties and specimen aspect ratio in unidirectional composites. *Compos. Interfaces*, 2005, vol. 12, no. 3–4, pp. 325–339, doi: <https://doi.org/10.1163/1568554053971551>
- [19] Mujika F. On the effect of shear and local deformation in three-point bending tests. *Polym. Test.*, 2007, vol. 26, no. 7, pp. 869–877, doi: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2007.06.002>
- [20] Caprino G., Iaccarino P., Lamboglia A. The effect of shear on the rigidity in three-point bending of unidirectional CFRP laminates made of T800H/3900-2. *Compos. Struct.*, 2009, vol. 88, no. 3, pp. 360–366, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.04.014>
- [21] Hara E., Yokozeki T., Hatta H. et al. Comparison of out-of-plane tensile strengths of aligned CFRP obtained by 3-point bending and direct loading tests. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2012, vol. 43, no. 11, pp. 1828–1836, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.06.016>
- [22] Hara E., Yokozeki T., Hatta H. et al. Comparison of out-of-plane tensile moduli of CFRP laminates obtained by 3-point bending and direct loading tests. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2014, vol. 67, pp. 77–85, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2014.08.003>
- [23] Insausti N., Adarraga I., De Gracia J. et al. Numerical assessment of an experimental procedure applied to DCB tests. *Polym. Test.*, 2020, vol. 82, art. 106288, doi: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2019.106288>
- [24] Guseinov K., Sapozhnikov S.B., Kudryavtsev O.A. Features of three-point bending tests for determining out-of-plane shear modulus of layered composites. *Mech. Compos. Mater.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 155–168, doi: <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10020-7>
- [25] Demiral M., Kadioglu F., Silberschmidt V.V. Size effect in flexural behaviour of unidirectional GFRP composites. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2020, vol. 34, no. 12, pp. 5053–5061, doi: <https://doi.org/10.1007/s12206-020-1109-0>
- [26] Polilov A.N., Vlasov D.D., Tatus N.A. Specified criterion for delamination upon bending of a composite beam. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 2023, vol. 89, no. 10, pp. 63–73, doi: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-10-63-73> (in Russ.).
- [27] Nikonovich M., Kolchin F., Galyshev S. et al. Matrixless fibrous oxide composites. *Ceram. Int.*, 2021, vol. 47, no. 6, pp. 8711–8716, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.11.116>
- [28] Ni D., Cheng Y., Zhang J. et al. Advances in ultra-high temperature ceramics, composites, and coatings. *J. Adv. Ceram.*, 2022, vol. 11, no. 1, pp. 1–56, doi: <https://doi.org/10.1007/s40145-021-0550-6>
- [29] Radhika N., Sathish M. A review on Si-based ceramic matrix composites and their infiltration based techniques. *Silicon*, 2022, vol. 14, no. 16, pp. 10141–10171, doi: <https://doi.org/10.1007/s12633-022-01763-y>

- [30] Mileiko S. Carbon-fibre/metal-matrix composites: a review. *J. Compos. Sci.*, 2022, vol. 6, no. 10, art. 297, doi: <https://doi.org/10.3390/jcs6100297>
- [31] Shirvanimoghaddam K., Hamim S.U., Akbari M.K. et al. Carbon fiber reinforced metal matrix composites: fabrication processes and properties. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2017, vol. 92, pp. 70–96, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2016.10.032>
- [32] Zhong K., Zhou J., Zhao C. et al. Effect of interfacial transition layer with CNTs on fracture toughness and failure mode of carbon fiber reinforced aluminum matrix composites. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2022, vol. 163, art. 107201, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2022.107201>
- [33] Galyshev S. On the strength of the CF/Al-wire depending on the fabrication process parameters: melt temperature, time, ultrasonic power, and thickness of carbon fiber coating. *Metals*, 2021, vol. 11, no. 7, art. 1006, doi: <https://doi.org/10.3390/met11071006>
- [34] Galyshev S., Atanov B. The dependence of the strength of a carbon fiber/aluminum matrix composite on the interface shear strength between the matrix and fiber. *Metals*, 2022, vol. 12, no. 10, art. 1753, doi: <https://doi.org/10.3390/met12101753>
- [35] Galyshev S., Atanov B., Orlov V. On the pressure and rate of infiltration made by a carbon fiber yarn with an aluminum melt during ultrasonic treatment. *Fibers*, 2023, vol. 11, no. 5, art. 41, doi: <https://doi.org/10.3390/fib11050041>
- [36] Matsunaga T., Matsuda K., Hatayama T. et al. Fabrication of continuous carbon fiber-reinforced aluminum–magnesium alloy composite wires using ultrasonic infiltration method. *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 2007, vol. 38, no. 8, pp. 1902–1911, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2007.03.007>
- [37] Stepanov N.D., Shaysultanov D.G., Chernichenko R.S. et al. Mechanical properties of a new high entropy alloy with a duplex ultra-fine grained structure. *Mater. Sci. Eng. A*, 2018, vol. 728, no. 13, pp. 54–62, doi: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2018.04.118>
- [38] He R., Zhou N., Zhang K. et al. Progress and challenges towards additive manufacturing of SiC ceramic. *J. Adv. Ceramics.*, 2021, vol. 10, no. 4, pp. 637–674, doi: <https://doi.org/10.1007/s40145-021-0484-z>
- [39] Wang G., Miao Y., Gong H. et al. Direct ink writing of reaction bonded silicon carbide ceramics with high thermal conductivity. *Ceram. Int.*, 2023, vol. 49, no. 6, pp. 10014–10022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.11.179>
- [40] Hu Z., Chen F., Xu J. et al. 3D printing graphene-aluminum nanocomposites. *J. Alloys Compd.*, 2018, vol. 746, pp. 269–276, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2018.02.272>
- [41] Alander P., Lassila L.V.J., Vallittu P.K. The span length and cross-sectional design affect values of strength. *Dent Mater.*, 2005, vol. 21, no. 4, pp. 347–353, doi: <https://doi.org/10.1016/j.dental.2004.05.009>
- [42] Abouelleil H., Pradelle N., Villat C. et al. Comparison of mechanical properties of a new fiber reinforced composite and bulk filling composites. *Restor. Dent. Endod.*, 2015, vol. 40, no. 4, pp. 262–270, doi: <https://doi.org/10.5395/rde.2015.40.4.262>
- [43] Garoushi S., Lassila L.V.J., Vallittu P.K. The effect of span length of flexural testing on properties of short fiber reinforced composite. *J. Mater. Sci., Mater. Med.*, 2012, vol. 23, no. 2, pp. 325–328, doi: <https://doi.org/10.1007/s10856-011-4480-7>
- [44] Kaledin A., Shikunov S., Zubareva J. et al. Fabrication of layered SiC/C/Si/MeSi₂/Me ceramic–metal composites via liquid silicon infiltration of metal–carbon matrices. *Materials*, 2024, vol. 17, no. 3, art. 650, doi: <https://doi.org/10.3390/ma17030650>
- [45] Atanov B.I., Khokhlov A.V., Khasanova E.I. et al. The effect of bismuth content on the microstructure and strength of a carbon Fiber/AL-BI alloy matrix composite. *Mech. Compos. Mater.*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 683–698, doi: <https://doi.org/10.1007/s11029-025-10302-w>
- [46] Galyshev S.N., Khokhlov A.V., Orlov V.I. Ispytaniya na izgib i svoystva uglevolokonnogo kompozita s alyuminievoy matritsey, legirovannoy vismutom, pri temperaturakh do 500°S. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2026, vol. 29, no. 2, pp. 81–105 (In Russ.).
- [47] Khokhlov A.V., Nakonechnyy E.I., Galyshev S.N. et al. Analysis of the pull-out length distributions on fracture surfaces of the aluminum matrix composites reinforced with continuous carbon fibers based on SEM and CLSM data. *Aviatsionnye materialy i tekhnologii [Aviation Materials and Technologies]*, 2026, no. 1, pp. 158–194. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 30.03.2026

Информация об авторе

ХОХЛОВ Андрей Владимирович — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник НИИ механики. МГУ имени М.В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник. Институт физики твердого тела имени Ю.А. Осипьяна РАН (142432, Черноголовка, Российская Федерация, ул. Академика Осипьяна, д. 2, e-mail: andrey-khokhlov@yandex.ru).

Information about the author

KHOKHLOV Andrew Vladimirovich — Candidate of Science (Eng.), Leading Researcher, Institute of Mechanics. Lomonosov Moscow State University; Leading Researcher. Osipryan Institute of Solid State Physics RAS (142432, Chernogolovka, Russian Federation, Akademika Osipyan, St. 2, e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Хохлов А.В. Влияние смещения точки приложения нагрузки на результаты испытаний на трехточечный изгиб: оценка погрешности и коррекция. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2026, № 5, с. 5–17.

Please cite this article in English as:

Khokhlov A.V. Influence of the load eccentricity in three-point bending tests: the correction formulas and error analysis. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2026, no. 5, pp. 5–17.



Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям учебное пособие «Многомасштабное моделирование упругопластических композиционных материалов»

**Авторы: Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин,
С.В. Сборщиков**

Изложены основы многомасштабного моделирования упругопластических композиционных материалов с использованием метода асимптотического осреднения (метода гомогенизации). Приведен алгоритм метода асимптотического осреднения периодических упругопластических композиционных материалов при циклических нагружениях. Рассмотрена теория построения аналитических эффективных определяющих соотношений упругопластических композиционных материалов при циклических нагружениях с использованием метода асимптотического осреднения. Предложены теории анизотропных упругопластических сред при циклических нагружениях для случая квазиизотропии, трансверсальной изотропии и ортотропии.

Для студентов направления подготовки «Математика и компьютерные науки», изучающих дисциплины «Основы механики композитов», «Асимптотические методы в механике», «Многомасштабное моделирование конструкций из композиционных материалов», а также для студентов и аспирантов машиностроительных специальностей и специалистов, занимающихся моделированием композиционных материалов и расчетом конструкций из них.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>