

О совместимости нелинейных дифференциальных уравнений плоской задачи механики стержней с законом сохранения энергии

© С.С. Гаврюшин, Ф.Д. Сорокин, Н.Г. Мешалкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Российская Федерация

Известные уравнения, предназначенные для расчета больших перемещений гибких стержней, были проверены на совместимость с законом сохранения энергии. Необходимость в таком контроле возникла из-за появления в расчетной практике ряда задач механики стержней, в которых приходится учитывать осевые деформации (стержни из пластиков, эластомеров, материалов с памятью формы и т. п.). Для проверки проблемных уравнений в статье проведен численный эксперимент — краевая задача о нагружении полукруглой арки сосредоточенной силой была решена стандартными процедурами компьютерного математического пакета. По набору решений для разных значений силы была вычислена работа силы, а для финального положения арки — энергия деформаций. Работа не совпала с энергией, поэтому контролируемые уравнения были признаны ошибочными. Ошибка возникла ввиду неправильного соотношения упругости для изгибающего момента. В проблемных уравнениях не учитывалось то, что кривизна стержня меняется по двум причинам: во-первых, из-за поворотов оси и, во-вторых, из-за деформаций оси. После исправления ошибки скорректированные дифференциальные уравнения успешно прошли проверку на выполнение закона сохранения энергии. Приведены два варианта рекомендуемых для практического применения корректных уравнений плоской задачи механики стержней, учитывающих осевую деформацию.

Ключевые слова: механика стержней, плоская задача, осевая деформация, растяжение — сжатие, кривизна, изгибающий момент, закон сохранения энергии

Введение. В машиностроении, приборостроении, авиастроении и других областях техники широко применяются прямые, кривые, спиральные пружины различных форм и размеров. Они называются плоскими, если оси этих пружин представляют собой плоские кривые (рис. 1).

Плоские пружины применяют в качестве упругих элементов, а также в разных электроконтактных устройствах и в качестве кинематических элементов приборов: упругих опор и направляющих, гибких связей и деталей передаточно-множительных механизмов [1, 2]. Упругие опоры и направляющие, выполненные в виде плоских пружин, практически не имеют трения и люфтов, не нуждаются в регулярном уходе, смазке, не боятся загрязнений и обладают большей надежностью, чем, например, призматические опоры.



Рис. 1. Плоские пружины разного назначения

Контроль корректности уравнений. Методы расчета плоских пружин рассматриваются в специальном разделе нелинейной механики деформируемого твердого тела, называемом «Механика стержней» (МС). Вывод систем дифференциальных уравнений (СДУ) механики стержней неоднократно освещался в работах многочисленных авторов [1–15]. Казалось бы, в этой полностью исследованной области не осталось тайн и невыясненных вопросов. Однако более подробный анализ перечисленных работ показывает, что разные варианты уравнений даже плоской задачи МС (не говоря уже о пространственной) отличаются не только обозначениями и выбором неподвижного или подвижного базисов, но и получаемыми из них решениями. Более того, некоторые известные варианты СДУ МС оказываются несовместимыми с законом сохранения энергии (ЗСЭ).

Цель данной статьи — численная проверка выполнения ЗСЭ для двух наиболее известных вариантов СДУ плоской задачи МС. Если работа внешних сил всегда совпадает с энергией деформаций, то соответствующую СДУ следует признать корректной, а в противном случае — некорректной. Особенности рассмотренных в данной статье СДУ заключаются в том, что учитывается растяжимость стержня и не принимаются во внимание поперечные сдвиги.

Осевые деформации в металлических стержнях в области упругости не превышают десятой доли процента, поэтому учет растяжимости стержня выполняется не с целью уточнений численных решений для металлических плоских пружин, а с целью возможного расширения области применения уравнений МС на материалы, в которых указанные деформации могут быть существенными. Осевые деформации необходимо учитывать при расчете стержней из пластиков, эластомеров, материалов с памятью формы и т. п.

В результате оказалось, что проверку на корректность в указанном выше смысле не проходит даже хорошо известная СДУ из [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \cos \theta; \\ \frac{dy}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \sin \theta; \\ \frac{d\theta}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) k; \\ \frac{dQ}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) (kN + q_n); \\ \frac{dN}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) (-kQ - q_\tau); \\ \frac{dk}{ds_0} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \frac{Q}{EJ} + \frac{d^2\theta_0}{ds_0^2}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где x, y, θ, k — декартовы координаты, угол наклона и кривизна оси стержня в деформированном состоянии; θ_0 — угол наклона оси стержня в исходном состоянии; N, Q — осевая и поперечные силы в сечении стержня; E — модуль упругости материала; A, J — площадь и момент инерции поперечного сечения стержня (в [4] площадь сечения обозначена F); q_n, q_τ — нормальная и касательная распределенные нагрузки; s_0 — длина дуги в исходном состоянии (в [4] дуга исходного состояния обозначена символом s без индекса).

Два обозначения в (1) изменены по сравнению с [4], для того чтобы добиться единообразия обозначений в этой и последующих СДУ из данной статьи. На рис. 2, который заимствован из [4] с небольшими изменениями, показаны те же величины, что и в (1).

Изгибающий момент явно не входит в (1), но при выводе этой системы в [4] использовалось выражение для изгибающего момента и связанные с ним соотношения:

$$\begin{aligned} M &= EJ(k - k_0); \\ k_0 &= \frac{d\theta_0}{ds_0}; \quad k = \frac{d\theta}{ds}; \\ ds &= (1 + \varepsilon) ds_0; \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}, \end{aligned} \quad (2)$$

где k_0 — кривизна оси стержня в исходном состоянии; ε — осевая деформация.

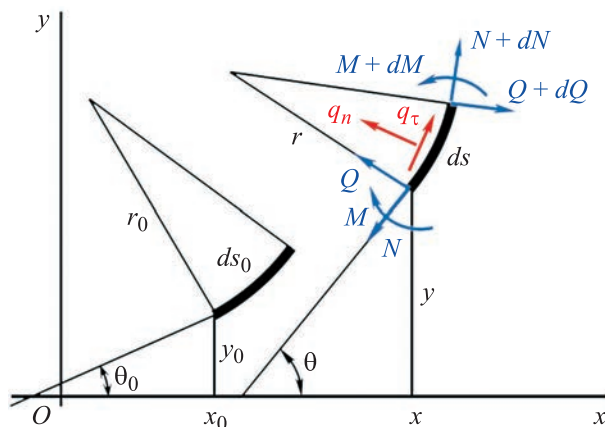


Рис. 2. Бесконечно малый элемент стержня в исходном и деформированном состояниях:
 ds — длина элемента в деформированном состоянии;
 M — изгибающий момент

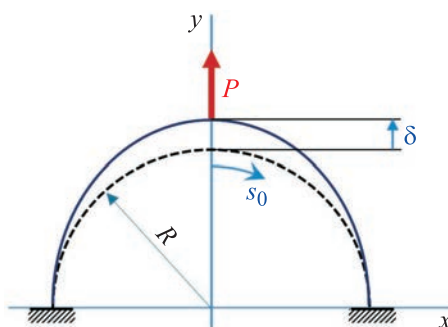


Рис. 3. Нагружение арки сосредоточенной силой P :
 δ — перемещение точки приложения силы; R — радиус

С целью проверки совместности СДУ (1) с законом сохранения энергии рассмотрим задачу о нагружении плоской полукруглой арки сосредоточенной силой P (рис. 3).

С учетом симметрии граничные условия для задачи, показанной на рис. 3, имеют вид

$$\begin{aligned} x(0) &= 0; \quad \theta(0) = 0; \quad Q(0) = \frac{P}{2}; \\ x\left(\frac{\pi R}{2}\right) &= R; \quad y\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 0; \quad \theta\left(\frac{\pi R}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для численного решения нелинейной краевой задачи были заданы следующие значения исходных параметров, функции угла наклона и распределенных нагрузок:

$$\begin{aligned} R = 0,2 \text{ м}; \quad EA = 500 \text{ Н}; \quad EJ = 7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2; \quad P_{\max} = 200 \text{ Н}; \\ 0 \leq P \leq P_{\max}; \quad \theta_0 = -\frac{s_0}{R}; \quad q_\tau = q_n = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подчеркнем, что численные исходные данные в (4) были выбраны произвольным образом и могут не иметь какого-либо отношения к какой-нибудь реальной конструкции, так как целью является лишь контроль СДУ (1), а не расчет конкретной арки.

Нелинейная краевая задача для СДУ (1) с граничными условиями (3) и параметрами (4) решалась стандартными средствами компьютерного математического пакета Wolfram Mathematica [16]. Сила P изменялась с шагом 0,5 Н и для каждого нового значения силы находились все компоненты вектора состояния СДУ (1) в каждой точке арки. Для максимального значения силы $P = 200$ Н на рис. 4 показана конфигурация деформированной арки, а на рис. 5 — распределение осевой деформации ε по дуге арки.

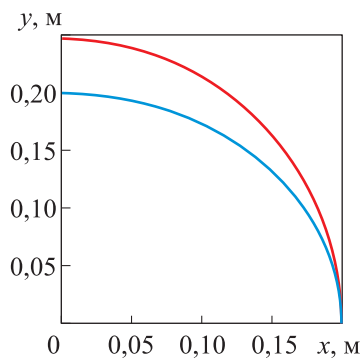


Рис. 4. Исходная (синяя) и деформированная (красная) конфигурации арки при силе $P = 200$ Н

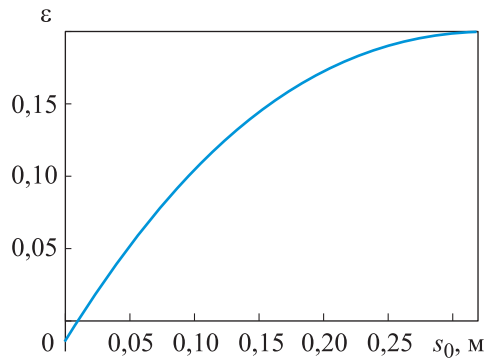


Рис. 5. Распределение осевой деформации ε по дуге арки при силе $P = 200$ Н

Для того же финального значения $P = 200$ Н была определена энергия деформаций U , при вычислении которой учитывались изгиб и растяжение — сжатие:

$$U = 2 \int_0^{\pi R/2} \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EJ} \right) ds_0, \quad (5)$$

где изгибающий момент M определялся по формуле (2).

Работа внешней силы A вычислялась как интеграл по пути нагружения:

$$A = \int_0^{\delta_{\max}} P d\delta; \quad \delta = y(0) - R, \quad (6)$$

где $\delta_{\max}$ — значение δ (см. рис. 3) при $P = P_{\max}$.

Поскольку нагружение выполнялось дискретно, интегрирование в (6) было выполнено приближенно методом трапеций:

$$A \approx \sum_{i=1}^n \frac{P_{i-1} + P_i}{2} (\delta_i - \delta_{i-1}), \quad (7)$$

где i — номер шага нагружения; n — количество шагов нагружения.

Результаты вычислений для $n = 400$ (шаг нагружения $\Delta P = 0,5$ Н) показаны ниже:

Контроль ЗСЭ для СДУ по (1)

Энергия U , Дж	5,81
Работа A , Дж	4,95
Относительная погрешность, %	~ 15

Чрезвычайно большая величина погрешности, полученная при расчете, показывает, что СДУ (1) не прошла проверку на соответствие ЗСЭ. Причиной этого является неправильное соотношение упругости (2). Кривизна стержня меняется, во-первых, из-за поворотов оси, а во-вторых, в результате деформаций оси. Вторая причина не приводит к изгибающим моментам, что становится совершенно очевидным на примере раздувания сферической оболочки внутренним давлением (футбольный мяч). В уравнениях (1) и (2) этот факт не учитывается, хотя указанная особенность кривизны хорошо известна, например, из теории оболочек [17].

Корректировка СДУ плоской задачи МС. Правильное соотношение упругости для моментов имеет вид

$$M = EJ \left((1 + \varepsilon) k - k_0 \right). \quad (8)$$

В теории оболочек [17] встречается аналогичная формула:

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + \varepsilon_1}{R_1^+} - \frac{1}{R_1},$$

где ε_1 — компонента изменения кривизны нормального сечения; R_1 , R_1^+ — радиусы главной кривизны нормального сечения срединной поверхности оболочки в исходном и деформированном состояниях.

Замена некорректной формулы (2) корректной формулой (8) при выводе СДУ приводит к довольно громоздким выкладкам, так как деформация оси ε попадает под знак производной и количество слагаемых увеличивается. Иными словами, использование кривизны деформированной оси k в качестве одной из основных неизвестных перестает быть привлекательным. В связи с этим для исправления СДУ (1) целесообразно в качестве основной неизвестной использовать не кривизну, а изгибающий момент. В результате преобразований модифицированная СДУ (1) принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_x}{ds_0} = (1 + \varepsilon) \cos \theta - \cos \theta_0; \\ \frac{du_y}{ds_0} = (1 + \varepsilon) \sin \theta - \sin \theta_0; \\ \frac{d\vartheta}{ds_0} = \frac{M}{EJ}; \\ \frac{dQ}{ds_0} = (1 + \varepsilon)(kN + q_n); \\ \frac{dN}{ds_0} = (1 + \varepsilon)(-kQ - q_\tau); \\ \frac{dM}{ds_0} = (1 + \varepsilon)Q, \end{array} \right. \quad (9)$$

где u_x, u_y — проекции перемещений на оси декартовой системы координат; ϑ — поворот.

Физический смысл последнего уравнения в (1) и в (9) при этом один и тот же — это уравнение равновесия моментов.

Кривизна оси деформированного стержня, входящая в (9), должна вычисляться по формуле, следующей из (8). Это означает, что для замыкания системы (9) к ней необходимо добавить алгебраические соотношения

$$k = \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(k_0 + \frac{M}{EJ} \right); \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}; \quad \theta = \theta_0 + \vartheta. \quad (10)$$

Вычисление работы и энергии для СДУ (9), аналогичное приведенному выше, приводит к следующим результатам:

Контроль ЗСЭ для СДУ по (9) с нагружением силой P

Энергия U , Дж	5,2905149
Работа A , Дж	5,2905141
Относительная погрешность	$1,4 \cdot 10^{-7}$

В представленном виде специально показаны по 8 значащих цифр энергии и работы, чтобы сомнений в корректности СДУ (9) не возникло.

Корректная СДУ плоской задачи МС в декартовых координатах. Некоторым недостатком СДУ (9) является то, что перемещения заданы проекциями на оси декартовой системы координат, а внутренние силовые факторы — проекциями на касательную и нормаль к оси стержня. Этот недостаток исправляется элементарным поворотом осей. В результате получается следующая СДУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_x}{ds_0} = (1 + \varepsilon) \cos \theta - \cos \theta_0; \\ \frac{du_y}{ds_0} = (1 + \varepsilon) \sin \theta - \sin \theta_0; \\ \frac{d\vartheta}{ds_0} = \frac{M}{EJ}; \\ \frac{dQ_x}{ds_0} = -(1 + \varepsilon) q_x; \\ \frac{dQ_y}{ds_0} = -(1 + \varepsilon) q_y; \\ \frac{dM}{ds_0} = (1 + \varepsilon) (Q_x \sin \theta - Q_y \cos \theta), \end{array} \right. \quad (11)$$

где Q_x , Q_y — проекции внутренних сил на оси декартовой системы координат; q_x , q_y — проекции внешних распределенных нагрузок на оси декартовой системы координат.

Все неизвестные в (11) заданы в проекциях на неподвижные оси декартовой системы координат (рис. 6).

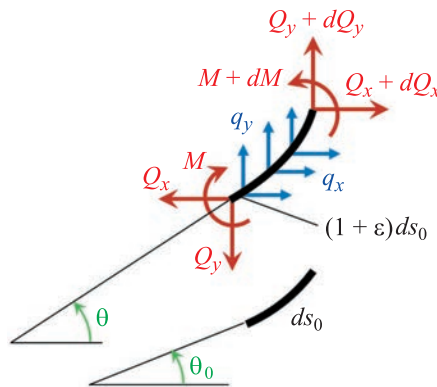


Рис. 6. Внутренние силовые факторы и внешние нагрузки в декартовой системе координат

Отметим, что распределенные нагрузки в (11) отнесены к деформированной длине оси стержня аналогично внешнему давлению. Если стержень нагружен собственным весом или силами инерции, то необходимо убрать множитель $(1 + \varepsilon)$ из четвертого и пятого уравнений системы (11), так как масса участка стержня не зависит от деформации его оси.

Следует отметить, что в [7] выведена аналогичная СДУ, которая отличается от (11) несущественными деталями.

Для замыкания СДУ (11) необходимы алгебраические соотношения:

$$\theta = \theta_0 + \vartheta; \quad \varepsilon = \frac{Q_x \cos \theta + Q_y \sin \theta}{EA}. \quad (12)$$

Нелинейная краевая задача для СДУ (11) решалась с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u_x(0) = 0; \quad \vartheta(0) = 0; \quad Q_x(0) = -\frac{P}{2}; \\ u_x\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 0; \quad u_y\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 0; \quad \vartheta\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Разница в знаках в граничном условии для силы в формулах (3) и (13) объясняется различием в направлениях сил $Q(0)$ и $Q_y(0)$, которое следует из правила знаков, показанного на рис. 2 и 6.

Вычисление работы и энергии для (11) приводит к тем же результатам, что и по (9). Это означает, что СДУ (11) также совместима с ЗСЭ.

Учет распределенных нагрузок. Для дополнительного подтверждения правильности СДУ (11) в случае распределенных нагрузок рассматривалась задача о нагружении той же арки равномерной распределенной следящей нагрузкой q (рис. 7), приложенной по нормали к оси деформированной арки (аналог внутреннего давления).

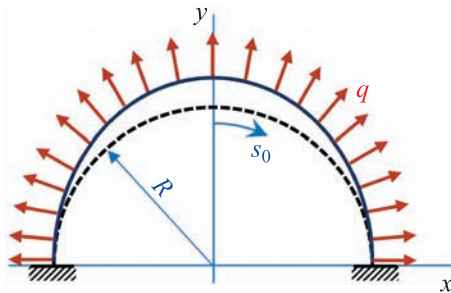


Рис. 7. Нагружение арки распределенной следящей нагрузкой q

При нагружении арки следящей нагрузкой q граничные условия изменились незначительно и приняли следующий вид:

$$\begin{aligned} u_x(0) = 0; \quad \vartheta(0) = 0; \quad Q_x(0) = 0; \\ u_x\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 0; \quad u_y\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 0; \quad \vartheta\left(\frac{\pi R}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Численное решение выполнялось со следующими нагрузками:

$$q_x = -q \sin \theta; \quad q_y = q \cos \theta; \quad q_{\max} = 500 \frac{\text{Н}}{\text{м}}; \quad 0 \leq q \leq q_{\max}. \quad (15)$$

Механическая работа также вычислялась как интеграл от следящей нагрузки q по пути нагружения

$$A = \int_0^{S_{\max}} q dS, \quad (16)$$

где S — площадь, ограниченная аркой и координатной осью x ; $S_{\max}$ — величина площади при $q = q_{\max}$.

Площадь под аркой вычислялась по традиционной формуле, известной из аналитической геометрии:

$$S = 2 \int_0^{\pi R/2} \frac{1}{2} (y \cos \theta - x \sin \theta) (1 + \varepsilon) d\theta; \\ x = x_0 + u_x; \quad x_0 = R \sin \frac{S_0}{R}; \\ y = y_0 + u_y; \quad y_0 = R \cos \frac{S_0}{R}, \quad (17)$$

где x_0, y_0 — декартовы координаты оси арки в исходном состоянии; коэффициент 2 перед интегралом учитывает вторую половинку арки.

Поскольку нагружение выполнялось дискретно, интегрирование в (16) было выполнено приближенно методом трапеций:

$$A \approx \sum_{i=1}^n \frac{q_{i-1} + q_i}{2} (S_i - S_{i-1}).$$

Результаты вычислений для $n = 400$ (шаг нагружения $\Delta q = 1,25 \text{ Н/м}$) показаны ниже:

Контроль ЗСЭ для СДУ по (11) со следящей нагрузкой q

Энергия U , Дж	3,5408151
Работа A , Дж	3,5408142
Относительная погрешность	$3 \cdot 10^{-7}$

Представленные данные убедительно показывают, что ЗСЭ для СДУ (11) выполняется также и при наличии следящих распределенных нагрузок.

Заключение. Выполненное исследование совместимости известных систем дифференциальных уравнений плоского случая механики стержней, в которых учитывается осевая деформация стержня, с законом сохранения энергии показало, что некоторые из таких систем

являются некорректными. Причиной ошибки является неправильное предположение о том, что моментное соотношение упругости связывает между собой величину момента и приращение кривизны оси стержня. В действительности изменение кривизны оси деформированного стержня вызывается не только изгибом, но и растяжением — сжатием (пример — раздувание футбольного мяча). Изменение кривизны, вызванное осевой деформацией, не влияет на изгибающий момент и должно быть исключено из моментного соотношения упругости. Корректные системы дифференциальных уравнений (9)–(10) и (11)–(12), совместимость которых с законом сохранения энергии проиллюстрирована в данной статье, рекомендуются для применения в численных расчетах плоских криволинейных стержневых элементов, где существенным является учет осевой деформации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. *Расчет упругих элементов машин и приборов*. Москва, Машиностроение, 1980, 326 с.
- [2] Андреева Л.Е. *Упругие элементы приборов*. Москва, Машгиз, 1962, 456 с.
- [3] Шкутин Л.И. *Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел*. Новосибирск, СО РАН, 2014, 138 с.
- [4] Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. *Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела*. Москва, Наука, 1988, 232 с.
- [5] Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной механике и математике)*. Москва, Эдиториал УРСС, 1999, 224 с.
- [6] Гаврюшин С.С. *Численный анализ элементов конструкций машин и приборов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 479 с.
- [7] Левин В.Е., Пустовой Н.В. *Механика деформирования криволинейных стержней*. Новосибирск, НГТУ, 2008, 207 с.
- [8] Гаврюшин С.С. Расчет элементов коммутационных и исполнительных устройств, выполненных из сплавов с памятью формы. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2019, № 7, с. 6–14.
- [9] Светлицкий В.А. *Строительная механика машин. Механика стержней: в 2 т. Т. 1: Статика*. Москва, Физматлит, 2009, 408 с.
- [10] Antman S.S. The theory of rods. *Handbuch der Physik*, 1973, Bd. VI a/2, S. 641–703.
- [11] Жилин П.А. *Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней*. Санкт-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2007, 582 с.
- [12] Пустовой Н.В., Левин В.Е., Красноручский Д.А. Алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи динамического деформирования тонкого стержня. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2014, № 2, с. 168–199А.
- [13] Елисеев В.В. *Механика деформируемого твердого тела*. Санкт-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2006, 231 с.
- [14] Елисеев В.В., Авксентьев А.И. Модели упругих стержней в динамике гибких роторов. *Современное машиностроение. Наука и образование*, 2014, № 4, с. 335–343.

- [15] Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. *Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней*. Санкт-Петербург, Изд-во СПбГТУ, 2008, 95 с.
- [16] Вавилов Н.А., Халин В.Г., Юрков А.В. *Mathematica для нематематика*. Москва, МЦНМО, 2021, 483 с.
- [17] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва, Ленанд, 2017, 486 с.

Статья поступила в редакцию 25.02.2026

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гаврюшин С.С., Сорокин Ф.Д., Мешалкин Н.Г. О совместимости нелинейных дифференциальных уравнений плоской задачи механики стержней с законом сохранения энергии. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2026, вып. 5.
EDN VLLWAA

Гаврюшин Сергей Сергеевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Компьютерные системы автоматизации производства» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: gss@bmstu.ru

Сорокин Федор Дмитриевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sorokinfd@bmstu.ru

Мешалкин Никита Григорьевич — магистрант кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: nmeshalkin@list.ru

On the Compatibility of Nonlinear Differential Equations of the Flat Bending Problem of Rod Mechanics with the Law of Energy Conservation

© S.S. Gavryushin, F.D. Sorokin, N.G. Meshalkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Well-known equations for analysis of large displacements of flexible rods were checked for compatibility with the law of energy conservation. The requirement for such verification arose because of appearance in computational practice a number of problems in rod mechanics where axial deformations account is necessary (rods made of elastomers, shape memory materials, etc.). To test the problematic equations, a numerical experiment was conducted in this paper: the boundary value problem of loading a semi-circular arch with a concentrated force was solved using standard procedures of a computer mathematics package. Based on the set of solutions for different force values, mechanical work of force was calculated, and for the final position of the arch, the strain energy was determined. The mechanical work did not match the strain energy, therefore the controlled equations were found erroneous. The error occurred due to an incorrect elasticity ratio for the bending moment. The problematic equations did not take into account the fact that the curvature of the rod changes for two reasons: (1) due to rotations of the axis, (2) due to deformations of the axis. After correcting the error, the adjusted differential equations successfully passed the verification for compliance with the law of energy conservation. Two variants of corrected equations for flat bending problem of rod which axial deformation account are provided and recommended for practical application.

Keywords: rod mechanics, flat bending problem, axial deformation, tension-compression, curvature, bending moment, law of energy conservation

REFERENCES

- [1] Ponomarev S.D., Andreeva L.E. *Raschet uprugikh elementov mashin i priborov* [Calculation of elastic elements of machines and instruments]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 326 p.
- [2] Andreeva L.E. *Uprugie elementy priborov* [Elastic elements of instruments]. Moscow, Mashgiz Publ., 1962, 456 p.
- [3] Shkutin L.I. *Nelineynye deformatsii i katastrofy tonkikh tel* [Nonlinear deformations and catastrophes of thin bodies]. Novosibirsk, SO RAN Publ., 2014, 138 p.
- [4] Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineynogo deformirovaniya: Metod prodolzheniya po parametru v nelineynykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela* [Problems of nonlinear deformation: continuation method in nonlinear problems of solid deformable body mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 232 p.
- [5] Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. *Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya (v prikladnoy mekhanike i matematike)* [Parameter continuation method and optimal parameterization (in applied mechanics and mathematics)]. Moscow, Editorial URSS Publ., 1999, 224 p.
- [6] Gavryushin S.S. *Chislenny analiz elementov konstruktsey mashin i priborov* [Numerical analysis of structural elements of machines and instruments]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 479 p.

- [7] Levin V.E., Pustovoy N.V. *Mekhanika deformirovaniya krivolineynykh sterzhney* [Mechanics of deformation of curved rods]. Novosibirsk, NGTU Publ., 2008, 207 p.
- [8] Gavryushin S.S. Raschet elementov kommutatsionnykh i ispolnitelnykh ustroystv, vypolnennykh iz splavov s pamyat'yu formy [Calculation of switching and actuator devices made of shape memory alloys]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin — Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2019, no. 7, pp. 6–14.
- [9] Svetlitskiy V.A. *Stroitel'naya mekhanika mashin. Mekhanika sterzhney, v dvukh tomakh. Vol. 1: Statika* [Structural mechanics of machines. Mechanics of rods, in two volumes. Vol. 1: Statics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 408 p.
- [10] Antman S.S. *The theory of rods. Handbuch der Physik*, 1973, Bd. VI a/2, S. 641–703.
- [11] Zhilin P.A. *Prikladnaya mekhanika. Teoriya tonkikh uprugikh sterzhney* [Applied mechanics. Theory of thin elastic rods]. St. Petersburg, Polytechnic University Publ., 2007, 582 p.
- [12] Pustovoy N.V., Levin V.E., Krasnorutskiy D.A. Algoritm chislennogo resheniya nelineynoy kraevoy zadachi dinamicheskogo deformirovaniya tonkogo sterzhnya [An algorithm for numerical solution of a nonlinear boundary value problem of dynamic deformation of a thin rod]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika — PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 2, pp. 168–199.
- [13] Eliseev V.V. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solid body]. St. Petersburg, Polytechnic University Publ., 2006, 231 p.
- [14] Eliseev V.V., Avksentyev A.I. Modeli uprugikh sterzhney v dinamike gibkikh rotorov [Elastic rod models in dynamics of flexible rotors]. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie*, 2014, no. 4, pp. 335–343.
- [15] Eliseev V.V., Zinovyeva T.V. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. Teoriya sterzhney* [Mechanics of thin-walled structures. Theory of rods]. St. Petersburg, SPbSTU Publ., 2008, 95 p.
- [16] Vavilov N.A., Khalin V.G., Yurkov A.V. *Matematika dlya nematematika* [Mathematics for non-mathematicians]. Moscow, MCCME Publ., 2021, 483 p.
- [17] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. Statika* [Mechanics of thin-walled structures. Statics]. Moscow, Lenand Publ., 2017, 486 p.

Gavryushin S.S., Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Department of Computer Systems for Manufacturing Automation, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: gss@bmstu.ru

Sorokin F.D., Dr. Sc. (Engineering), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sorokinfd@bmstu.ru

Meshalkin N.G., Master's student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: nmeshalkin@list.ru