

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ В БИОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ХИЩНИК–ЖЕРТВА С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРОФИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ХОЛЛИНГА II ТИПА

Р.Н. Одинаев¹

raim_odinaev@mail.ru

У.А. Назаров²

umar_nazarov_a@mail.ru

¹ТНУ, Душанбе, Республика Таджикистан

²Институт математики им. А. Джураева НАНТ,
Душанбе, Республика Таджикистан

Аннотация

Исследована математическая модель защиты растений в биологической системе хищник–жертва с применением трофической функции Холлинга II типа. Рассмотрено сложное взаимодействие растений, их естественных врагов и хищников, где функция Холлинга описывает динамическую зависимость численности хищников от плотности популяции их жертв. Особое внимание уделено анализу динамики популяций растительных и животных компонентов экосистемы, а также влиянию трофических взаимодействий на общую эффективность стратегии защиты растений. С использованием математического моделирования исследовано поведение экосистемы в различных условиях, включая изменение климатических факторов и антропогенное воздействие. Установлены ключевые параметры, влияющие на устойчивость экосистемы — скорость роста популяции, коэффициенты взаимодействия видов и эффективность контроля вредителей. Особый интерес представляет анализ стабильности равновесий и бифуркационных сценариев, которые могут возникать при варьировании параметров модели. Проведенное исследование включает в себя анализ и численные эксперименты, позволяющие выявить критические точки в динамике системы. Полученные результаты имеют важное значение для разработки и оптимизации методов защиты растений и позволяют предложить более точные и эффективные стратегии контроля численности вредителей, что может значительно повысить

Ключевые слова

Биологическая система, хищник–жертва, трофическая функция Холлинга II типа, защита растений, точечная модель, динамика популяции, агроценоз, дифференциальные уравнения

результативность агрозащитных мероприятий в сельском хозяйстве. Результаты исследования демонстрируют, как математические модели могут прогнозировать долгосрочные последствия применения различных биологических методов защиты, минимизируя риски для экологического баланса и способствуя разработке устойчивых агроэкосистем

Поступила 26.06.2025

Принята 15.12.2025

© Автор(ы), 2026

Введение. Современное сельское хозяйство сталкивается с необходимостью поиска эффективных подходов к ограничению численности насекомых-вредителей. Биологический контроль, основанный на использовании естественных врагов фитофагов, представляет особый интерес как экологически сбалансированный метод. Для прогнозирования результатов применения таких подходов требуются точные математические инструменты, которые могут описать сложные взаимосвязи в системе растение–вредные насекомые–полезные насекомые.

Математическое моделирование стало важнейшим инструментом в экологических исследованиях, позволяя анализировать динамику популяций и прогнозировать изменения в экосистемах. Базовая модель хищник–жертва, являющаяся классической в популяционной экологии, успешно описывает фундаментальные принципы межвидовых взаимодействий. Однако ее модификациям, учитывающим специфику защиты сельскохозяйственных культур, требуется дальнейшая разработка.

Актуальная задача — разработка усложненных трофических функций, интегрирующих параметры взаимодействия системы хищник–жертва и показатели естественной защиты растений. В настоящем исследовании предложена модель, базирующаяся на функциональном отклике Холлинга II типа, что позволяет более адекватно описать процессы в агроэкосистеме с учетом механизмов устойчивости растений. Формирование математической экологии как науки началось в начале прошлого столетия. Впервые принципы математического описания популяционной динамики систематизированы в [1]. Основы современного анализа устойчивости экосистем заложены в классической модели хищник–жертва, представленной В. Вольтеррой в 1926 г. Эта модель математически описывает принцип циклических колебаний популяций в замкнутых системах, что стало ключевым теоретическим достижением для последующих исследований [2].

Модель Вольтерра привлекла внимание многих ученых, включая А.Н. Колмогорова. В своих работах он исследовал условия устойчивости популяций, анализировал долгосрочную динамику систем и выявлял зако-

номерности колебаний численности [3]. Развитие математических методов защиты растений связано с исследованиями А.Д. Базыкина, который изучал динамику популяций в экосистемах [4]. Особую актуальность представляют научные труды, в которых изучаются взаимосвязи в системе растение–вредные насекомые–полезные насекомые. Значительный вклад в эту область внесли Ю.М. Свирежев и Д.О. Логофет, разработавшие методы оценки устойчивости экосистем и анализа факторов популяционной динамики [5]. Базыкин усовершенствовал модель Вольтерры [6], дополнив ее учетом эффекта насыщения хищников. Ценные результаты содержатся в работах В.В. Алексеева, изучившего влияние насыщения на систему хищник–жертва и предложившего новые подходы в биофизике сообществ [7, 8]. Важное значение имеют исследования Р.Х. Макаартура по графическим методам анализа устойчивости и работы В.Г. Цибулина и учеников его школы, посвященные нелинейной динамике в пространственно неоднородных средах [9].

Применение трофической функции Холлинга в моделях хищник–жертва открывает новые возможности для совершенствования защиты растений. В настоящей работе разработана математическая модель с использованием функционального отклика Холлинга II типа, позволяющая оценивать устойчивость экосистем и оптимизировать стратегии биологической защиты. Методологическая основа исследования — современные достижения математического моделирования в экологии, включая анализ устойчивости равновесий и бифуркационных сценариев. Предлагаемый подход учитывает специфику трофических взаимодействий в агроэкосистемах и позволяет прогнозировать эффективность различных сценариев биоконтроля.

В современных исследованиях трофических взаимодействий особое внимание уделено модификациям функций Холлинга. Показано [10], что адаптация функциональных признаков хищников может существенно менять структуру пищевых сетей. Пространственная модификация моделей типа Холлинга, учитывающая гетерогенность среды, разработана в [11]. Современные достижения в изучении систем с нелинейными функциональными откликами систематизированы в [12]. Для агроэкосистем особый интерес представляет модификация функции Холлинга II типа [13], учитывающая запаздывание в реакции хищников и влияние химических сигналов растений. Оптимизация параметров биоконтроля с учетом экономических порогов вредоносности предложена в [14], что позволяет минимизировать использование пестицидов при сохранении устойчивости системы.

Согласно классическому подходу, интенсивность потребления жертв хищниками находится в прямой пропорциональной зависимости от плотности популяции жертв и описывается уравнением $V(N) = \alpha N$. В рамках этого подхода влияние численности хищников на динамику системы не учитывается. Современные подходы к математическому моделированию, в частности разработки Ю.М. Свирежева и Д.О. Логофета, определяют трофическую функцию как ключевой элемент, количественно характеризующий взаимодействие хищников и жертв.

Функциональный отклик, выражаемый через число жертв, потребляемых хищником в единицу времени, служит количественной мерой его трофической активности. Как в классической, так и в модифицированной модели Лотки — Вольтерра этот параметр представляет собой функцию плотности популяции жертв, что отражает гипотезу о пропорциональной связи между доступностью пищевого ресурса и пищедобывательной активностью хищника. Экспериментальные данные подтверждают обоснованность такого подхода для простых замкнутых экосистем со случайным распределением особей [15–17].

Создание эффективных систем биологической защиты растений требует разработки точных математических моделей, описывающих динамику взаимодействий в системе растение–вредитель–хищник. В качестве ключевого компонента таких моделей выступает трофическая функция, учитывающая как отношение численности хищников и жертв, так и интенсивность их взаимодействий. Особую практическую значимость имеет функция Холлинга, которая математически описывает закономерности хищничества. Эта функция характеризует зависимость скорости потребления жертв от их плотности. Наиболее распространенная модификация II типа показывает, что с ростом численности жертв скорость их потребления увеличивается, однако после достижения определенного порога насыщения дальнейшее повышение плотности жертвенной популяции не приводит к росту интенсивности потребления. Модель особенно полезна для описания реальных экологических систем, где трофическая активность хищников лимитирована как физиологическими возможностями особей, так и временными затратами на поиск и переработку пищи [18]:

$$V(N_2) = \frac{aN_2}{1 + ahN_2}. \quad (1)$$

Здесь $V(N_2)$ — функция, определяющая интенсивность потребления вредителей хищниками; a — коэффициент, количественно характеризующий эффективность поиска жертв хищником в единицу времени; N_2 — плот-

ность популяции вредных насекомых; h — продолжительность «обработки» одной жертвы.

Разработанная математическая модель описывает регулирующее воздействие хищников на популяцию вредителей посредством функции $V(N_2)$, отражающей изменение скорости потребления вредных насекомых в зависимости от их численности. Эта методология обеспечивает достоверное моделирование экологических процессов и количественную оценку результативности биологических методов в агроценозах. Интеграция трофической функции Холлинга II типа в математическое описание системы позволяет прогнозировать последствия флуктуаций численности энтомофагов и фитофагов для фитоценозов, что является основой для разработки научно обоснованных стратегий защиты растений.

Математическая модель защиты растений в системе хищник–жертва с учетом трофических взаимодействий. Разработанная математическая модель системы хищник–жертва с применением трофической функции Холлинга II типа позволяет провести комплексный анализ механизмов защиты растений. Модель учитывает ключевые аспекты межвидовых взаимодействий и позволяет исследовать динамику всех компонентов системы. Настоящая работа является продолжением исследований [19–21]. Математическое описание состояния моделируемого агроценоза осуществляется с использованием системы обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих основные взаимодействия компонентов системы

$$\begin{aligned}\frac{dN_0}{dt} &= Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \frac{dN_1}{dt} &= k_0 \alpha_0 N_0 N_1 - \alpha_1 N_1 N_2 - m_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= k_1 V_2(N_2) N_2 - V_2(N_2) N_3 - m_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} &= k_2 V_2(N_2) N_3 - \varepsilon N_3^2 - m_3 N_3\end{aligned}$$

с начальными условиями $N_i|_{t=0} = N_i^0$, $i = \overline{0, 3}$. В этой системе $N_0 = N_0(t)$ описывает объем доступного внешнего ресурса в момент времени t , Q — скорость его поступления в систему; $N_1 = N_1(t)$ — биомассу сельскохозяйственных культур в момент времени t ; $N_2(t)$, $N_3(t)$ — численность вредителей (жертв) и полезных насекомых (хищников) в момент времени t ; m_i , $i = 1, 2, 3$ — коэффициенты естественной смертности; k_i — долю биомассы, используемой для репродукции и роста; α_i — коэффициенты трофических

функций; ε — коэффициент саморегуляции популяции полезных насекомых. Функция $V = V(N)$ характеризует трофическое взаимодействие и удовлетворяет условиям $V(\cdot) \geq 0, V' > 0, V'' \leq 0$.

Определение. При анализе динамики популяций в момент времени τ вводится показатель

$$N_i^\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau N_i(t) dt, \quad \tau > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Постановка задачи защиты сельхозкультур в терминах точечной агрономической модели (1) предполагает задание целевого диапазона биомассы $N_1^P, N_1^P \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}]$, где среднее значение должно удовлетворять целевым условиям

$$N_1^\tau \geq N_1^P, \quad N_1^P \in [N_1^{\min}, N_1^{\max}]. \quad (2)$$

Оптимальная стратегия защиты требует определения критических уровней N_2^P, N_3^P из системы (1), при которых выполняются условия

$$N_2^\tau \leq N_2^P, \quad N_3^\tau \geq N_3^P, \quad (3)$$

где N_1^P — целевой показатель урожайности; N_2^P — предельно допустимая численность вредителей; N_3^P — минимально эффективная популяция энтомофагов.

Далее рассмотрим частный случай модели с функциональным откликом (1). Тогда модельный агроценоз (1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_0}{dt} &= Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\ \frac{dN_1}{dt} &= k_0 \alpha_0 N_0 N_1 - \alpha_1 N_1 N_2 - m_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \frac{k_1 a N_2}{1 + ahN_2} N_2 - \frac{aN_2}{1 + ahN_2} N_3 - m_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} &= \frac{k_2 a N_2}{1 + ahN_2} N_3 - \varepsilon N_3^2 - m_3 N_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Сформулируем следующую теорему существования решения задачи защиты растений.

Теорема. Пусть биологическая система описывается системой уравнений (4) с трофической функцией Холлинга II типа, тогда для выполнения целевых условий (2) необходимо и достаточно, чтобы соблюдались неравенства

$$\begin{aligned}
N_0(t) &\leq \frac{Q}{\alpha N_1^p}, \\
N_2^\tau &\leq N_2^p, \quad N_2^p = \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{N_1(\tau)}{N_1(0)}, \\
N_3^\tau &\geq N_3^p, \quad N_3^p = (k_1 - m_2 h) N_2^\tau - \frac{m_2}{a} - \frac{1}{a\tau} \ln \frac{N_2(\tau)}{N_2(0)} - \frac{h}{\tau} (N_2(\tau) - N_2(0)).
\end{aligned} \tag{5}$$

◀ *Необходимость.* При выполнении условий теоремы имеем (2). Проверим выполнение системы неравенств (5). Для обоснования первого неравенства применим первое уравнение системы (4), из которого получим

$$\begin{aligned}
\frac{dN_0}{dt} &= Q - \alpha_0 N_0 N_1, \\
N_0(t) &= N_0(0) \exp \left(-\alpha_0 \int_0^t N_1(\xi) d\xi \right) + Q \int_0^t \exp \left(-\alpha_0 \int_\tau^t N_1(\xi) d\xi \right) d\tau \leq \\
&\leq \left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_0^p} \right] \exp(-\alpha_0 N_1^p t) + \frac{Q}{\alpha_0 N_0^p} \leq \frac{Q}{\alpha_0 N_0^p}.
\end{aligned}$$

Используя второе уравнение (4), докажем выполнение соответствующего неравенства в системе (5):

$$\begin{aligned}
\frac{dN_1}{dt} &= k_0 \alpha_0 N_0 N_1 - \alpha_1 N_1 N_2 - m_1 N_1, \\
\frac{d(\ln N_1)}{dt} &= \frac{k_0 Q}{N_1^p} - \alpha_1 N_2 - m_1.
\end{aligned}$$

Непосредственно следует существование неравенства

$$N_2(t) \leq \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{d(\ln N_1(t))}{dt},$$

интегрируя которое по t в интервале от 0 до τ , получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau} \int_0^\tau N_2(t) dt &\leq \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1 \tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \ln N_1(t) dt, \\
N_2^\tau &\leq \frac{k_0 Q}{\alpha_1 N_1^p} - \frac{m_1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{N_1(\tau)}{N_1(0)} = N_2^p,
\end{aligned}$$

отсюда $N_2^\tau \leq N_2^p$.

Установим справедливость третьего неравенства (5), используя третье уравнение системы (4):

$$\begin{aligned}\frac{dN_2}{dt} &= \frac{k_1 a N_2}{1 + ahN_2} N_2 - \frac{aN_2}{1 + ahN_2} N_3 - m_2 N_2, \\ \frac{d}{dt} \ln N_2 &= \frac{k_1 a N_2}{1 + ahN_2} - \frac{aN_2}{(1 + ahN_2)N_2} N_3 - m_2, \\ \frac{aN_3}{1 + ahN_2} &= \frac{k_1 a N_2}{1 + ahN_2} - m_2 - \frac{d}{dt} \ln N_2, \\ N_3 &\geq \frac{k_1 N_2}{1 + ahN_2} (1 + ahN_2) - \frac{m_2}{a} (1 + ahN_2) - \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \ln N_2 (1 + ahN_2), \\ N_3 &\geq k_1 N_2 - \frac{m_2}{a} - m_2 h N_2 - \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \ln N_2 - h N_2 \frac{d}{dt} \ln N_2, \\ N_3 &\geq k_1 N_2 - \frac{m_2}{a} - m_2 h N_2 - \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \ln N_2 - h \frac{dN_2}{dt}.\end{aligned}$$

Интегрируя полученное неравенство по t в интервале от 0 до τ , находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} \int_0^\tau N_3(t) dt &\geq \frac{k_1}{\tau} \int_0^\tau N_2(t) dt - \frac{m_2}{a} - \frac{m_2 h}{\tau} \int_0^\tau N_2(t) dt - \\ &\quad - \frac{1}{a\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \ln N_2(t) dt - \frac{h}{\tau} \int_0^\tau \frac{dN_2(t)}{dt} dt,\end{aligned}$$

в результате запишем

$$\begin{aligned}N_3^\tau &\geq k_1 N_2^\tau - \frac{m_2}{a} - m_2 h N_2^\tau - \frac{1}{a\tau} \ln \frac{N_2(\tau)}{N_2(0)} - \frac{h}{\tau} (N_2(\tau) - N_2(0)), \\ N_3^\tau &\geq (k_1 - m_2 h) N_2^\tau - \frac{m_2}{a} - \frac{1}{a\tau} \ln \frac{N_2(\tau)}{N_2(0)} - \frac{h}{\tau} (N_2(\tau) - N_2(0)) = N_3^p.\end{aligned}$$

Таким образом, $N_3^\tau \geq N_3^p$.

Для определения верхней границы величины N_3 используем четвертое уравнение системы (4), из которого

$$\begin{aligned}\frac{dN_3}{dt} &= \frac{k_2 a N_2}{1 + ahN_2} N_3 - \varepsilon N_3^2 - m_3 N_3, \\ \frac{dN_3}{dt} &= \left(\frac{k_2 a N_2}{1 + ahN_2} - \varepsilon N_3 - m_3 \right) N_3,\end{aligned}$$

$$\frac{dN_3}{dt} = (k_2 V_2(N_2) - \varepsilon N_3 - m_3) N_3.$$

Введем обозначение $A(t) = k_2 V_2(N_2) - m_3$, имеем

$$\max_t N_3 \leq \max_t \left[\frac{N_3(0) \exp \left(\int_0^t A(\xi) d\xi \right)}{1 + \varepsilon N_3(0) \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t A(\xi) d\xi \right) d\tau} \right] \leq N_{\max},$$

где $N_{\max} = \text{const} < \infty$.

Преобразуем четвертое уравнение системы (4) к виду

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{k_2 a N_2}{1 + a h N_2} N_3 - \varepsilon N_3^2 - m_3 N_3,$$

$$\frac{dN_3}{dt} = k_2 V_2(N_2) N_3 - \varepsilon N_3^2 - m_3 N_3,$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = N_3(t) A(t) - \varepsilon N_3^2(t).$$

Разделив обе части уравнения на $-N_3^2(t)$, получаем равенство

$$-\frac{1}{N_3^2(t)} \frac{dN_3(t)}{dt} = -A(t) \frac{1}{N_3(t)} + \varepsilon.$$

Введя обозначения

$$y = \frac{1}{N_3(t)}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{N_3^2(t)} \frac{dN_3(t)}{dt},$$

запишем

$$\frac{dy}{dt} = -A(t)y + \varepsilon. \quad (6)$$

Приведем однородное уравнение (6) к виду

$$\frac{dy}{dt} \frac{1}{y} = -A(t), \quad \frac{d(\ln y)}{dt} = -A(t).$$

Интегрируя по t , получаем $\ln y = -\int_0^t A(\xi) d\xi + y_1(0)$,

$$y(t) = \exp \left(-\int_0^t A(\xi) d\xi \right) y_1(0). \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по t , имеем

$$\frac{dy}{dt} = \exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right)(-A(t))y_1(0) + \exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right)y_1'(0).$$

Подставляя y и dy/dt в (6), получаем

$$\begin{aligned} \exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right)(-A(t))y_1(0) + \exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right)y_1'(0) = \\ = -A(t)\exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right)y_1(0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, запишем

$$y_1'(0) = \frac{\varepsilon}{\exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right)} = \varepsilon \exp\left(\int_0^t A(\xi)d\xi\right).$$

Интегрируя полученное выражение по t , имеем

$$y_1(0) = \varepsilon \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t A(\xi)d\xi\right)d\tau + y(0).$$

Подставляя $y_1(0)$ в (7), определяем

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right) \left[\varepsilon \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t A(\xi)d\xi\right)d\tau + y(0) \right] = \\ &= y(0) \exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right) + \varepsilon \exp\left(-\int_0^t A(\xi)d\xi\right) \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t A(\xi)d\xi\right)d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что $y = 1/N_3(t)$ и $y(0) = 1/N_3(0)$, из (8) получаем

$$N_3(t) = \frac{N_3(0) \exp\left(\int_0^t A(\xi)d\xi\right)}{1 + \varepsilon N_3(0) \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t A(\xi)d\xi\right)d\tau}.$$

Достаточность. При выполнении системы неравенств (5) докажем справедливость соотношения (2). Преобразуя первое уравнение из (4), получаем

$$\frac{dN_0}{dt} = Q - \alpha_0 N_0 N_1 \geq Q - \alpha_0 N_0 \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p},$$

$$\frac{Q}{N_1^p} N_1 \geq Q - \frac{dN_0}{dt}.$$

Интегрируя по t в интервале от 0 до τ , определяем

$$\frac{QN_1^\tau}{N_1^p} \geq Q + \frac{1}{\tau} [N_0(0) - N_0(\tau)] \geq Q + \frac{1}{\tau} \left[N_0(0) - \frac{Q}{\alpha_0 N_1^p} \right] = Q, \quad N_1^\tau \geq N_1^p.$$

В силу того, что $N_2^p, N_3^p - \text{const} > 0$, имеет место соотношение $N_1^{\min} \leq N_1^p \leq N_1^{\max}$. ►

Заключение. Проанализирована математическая модель биологической защиты растений, описывающая взаимодействия в системе хищник–жертва с применением трофической функции Холлинга II типа. Показано, что использование трофической функции II типа позволяет более адекватно описать процесс потребления хищником жертвы с учетом ограничений, связанных с насыщением и временем обработки пищи.

Полученные результаты имеют практическое значение для разработки стратегий биологического контроля вредителей в агроэкосистемах. Модель может быть использована для прогнозирования динамики популяций и оптимизации методов защиты растений, а также для минимизации негативного воздействия на окружающую среду.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lotka A.J. Elements of physical biology. Williams and Wilkins, 1925.
- [2] Volterra V. Fluctuations in the abundance of species considered mathematically. *Nature*, 1926, vol. 118, pp. 558–560. DOI: <https://doi.org/10.1038/118558a0>
- [3] Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций. *Проблемы кибернетики*, 1972, № 25, с. 100–106.
- [4] Базыкин А.Д. Система Вольтерра и уравнение Михаэлиса — Ментен. В кн.: *Вопросы математической генетики*. Новосибирск, Изд-во Ин-та цитологии и генетики СО АН СССР, 1974, с. 103–143.
- [5] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М., Наука, 1978.
- [6] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М., Наука, 1985.

- [7] Алексеев В.В. Влияние фактора насыщения на динамику системы «хищник–жертва». *Биофизика*, 1973, т. 18, № 15, с. 922–926.
- [8] Алексеев В.В. Биофизика сообществ живых организмов. *УФН*, 1976, т. 120, № 4, с. 647–676.
- [9] Цибулин В.Г. Нелинейная динамика системы хищник–жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов. *Известия вузов. ПНД*, 2021, т. 29, № 5, с. 751–764.
DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764>
- [10] Liu B., Teng Z., Chen L. Analysis of a predator–prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, vol. 194, iss. 1, pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.06.023>
- [11] Pei Y., Chen L., Zhang Q., et al. Extinction and permanence of one-prey multi-predators of Holling type II function response system with impulsive biological control. *J. Theor. Biol.*, 2005, vol. 235, no. 4, pp. 499–512.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.02.003>
- [12] Zhao Z., Yang L., Chen L. Impulsive perturbations of a predator–prey system with modified Leslie-Gower and Holling type II schemes. *J. Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 35, no. 1–2, pp. 119–134. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12190-009-0346-2>
- [13] Wang X., Tian Y., Tang S. A Holling Type II Pest and natural enemy model with density dependent IPM strategy. *Math. Probl. Eng.*, 2017, vol. 2017, art. 8683207.
DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/8683207>
- [14] Yang J., Tang S. Holling type II predator–prey model with nonlinear pulse as state-dependent feedback control. *J. Comput. Appl. Math.*, 2016, vol. 291, pp. 225–241.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.01.017>
- [15] Holling C.S. The functional response of invertebrate predators to prey density. *Mem. Entomol. Soc. Can.*, vol. 98, supp. S48, pp. 5–86.
DOI: <https://doi.org/10.4039/entm9848fv>
- [16] Huang Y., Chen F., Li Z. Stability analysis of a prey–predator model with Holling type III response function incorporating a prey refuge. *Appl. Math. Comput.*, 2006, vol. 182, iss. 1, pp. 672–683. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.030>
- [17] Ma Z., Wang S., Wang T., et al. Stability analysis of prey–predator system with Holling type functional response and prey refuge. *Adv. Differ. Equ.*, 2017, vol. 2017, art. 243.
DOI: <https://doi.org/10.1186/s13662-017-1301-4>
- [18] Holling C.S. The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly. *Can. Entomol.*, 1959, vol. 91, iss. 5, pp. 293–320.
DOI: <https://doi.org/10.4039/Ent91293-5>
- [19] Одинаев Р.Н., Назруллоев П.Л., Раимзода Ф. Оптимизационный процесс интегрированного метода защиты растений для точечных моделей. *Системы и средства информатики*, 2022, т. 32, № 4, с. 134–144.
DOI: <https://doi.org/10.14357/08696527220413>

[20] Одинаев Р.Н. Математическая модель задачи защиты растений в биосистеме типа «вредные насекомые–полезные насекомые» с произвольными трофическими функциями. Системы и средства информации, 2019, т. 29, № 1, с. 96–108. DOI: <https://doi.org/10.14357/08696527190109>

[21] Одинаев Р.Н. Необходимое и достаточное условие существования решения задачи защиты растений. Доклады АН РТ, 2015, т. 58, № 10, с. 879–886. EDN: WCINJL

Одинаев Раим Назарович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор НИИ ТНУ (Республика Таджикистан, 734025, Душанбе, пр-т Рудаки, д. 17).

Назаров Умар Абубакрович — докторант отдела «Математическое моделирование» Института математики им. А. Джураева НАНТ (Республика Таджикистан, 734063, Душанбе, ул. Айни, д. 299/4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Одинаев Р.Н., Назаров У.А. Исследование математической модели защиты растений в биологической системе хищник–жертва с применением трофической функции Холлинга II типа. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2026, № 2 (125), с. 4–19. EDN: TYITRX

**INVESTIGATION OF A MATHEMATICAL MODEL
OF PLANT PROTECTION IN A PREDATOR–PREY BIOLOGICAL
SYSTEM USING THE TYPE II TROPHIC HOLLING FUNCTION**

R.N. Odinaev¹

raim_odinaev@mail.ru

U.A. Nazarov²

umar_nazarov_a@mail.ru

¹ TNU, Dushanbe, Republic of Tajikistan

² A. Juraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan, Dushanbe, Republic of Tajikistan

Abstract

The article explores a mathematical model of plant protection in a predator–prey biological system using the type II Holling trophic function. It examines the complex interactions between plants, their natural enemies, and predators, where the Holling function describes the dynamic relationship between the number of predators and the population density of their prey. The article focuses on analyzing the population dynamics of plant and animal components in the eco-

Keywords

Biological system, predator–prey, the type II Holling trophic function, plant protection, point model, population dynamics, agrocenosis, differential equations

system, as well as the impact of trophic interactions on the overall effectiveness of plant protection strategies. The article uses mathematical modeling to investigate the behavior of the ecosystem under various conditions, including changes in climate and anthropogenic impacts. Key parameters affecting the sustainability of the ecosystem are established, such as the growth rate of populations, the coefficients of species interaction, and the effectiveness of pest control. Of particular interest is the analysis of the stability of equilibria and bifurcation scenarios that may occur when the model parameters are varied. The study includes analytical analysis and numerical experiments, which allow for the identification of critical points in the system's dynamics. The results obtained are crucial for the development and optimization of plant protection methods. They provide insights into more accurate and effective strategies for pest control, which can significantly enhance the effectiveness of agricultural practices. The research results demonstrate how mathematical models can predict the long-term consequences of using various biological protection methods, minimizing risks to the ecological balance and contributing to the development of sustainable agroecosystems

Received 26.06.2025

Accepted 15.12.2025

© Author(s), 2026

REFERENCES

- [1] Lotka A.J. Elements of physical biology. Williams and Wilkins, 1925.
- [2] Volterra V. Fluctuations in the abundance of species considered mathematically. *Nature*, 1926, vol. 118, pp. 558–560. DOI: <https://doi.org/10.1038/118558a0>
- [3] Kolmogorov A.N. A qualitative study of mathematical models of population dynamics. *Problemy kibernetiki*, 1972, no. 25, pp. 100–106 (in Russ.).
- [4] Bazykin A.D. Sistema Volterra i uravnenie Mikhaelisa — Menten [The Volterra system and the Michaelis — Menten equation]. V kn.: *Voprosy matematicheskoy genetiki* [In: Issues of Mathematical Genetics]. Novosibirsk, ICG SB AS USSR Publ., 1974, pp. 103–143 (in Russ.).
- [5] Svirezhev Yu.M., Logofet D.O. Ustoychivost biologicheskikh soobshchestv [Stability of biological communities]. Moscow, Nauka Publ., 1978.
- [6] Bazykin A.D. Matematicheskaya biofizika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy [Mathematical biophysics of interacting populations]. Moscow, Nauka Publ., 1985.
- [7] Alekseev V.V. Influence of the saturation factor on dynamics of predator–prey system. *Biofizika*, 1973, vol. 18, no. 15, pp. 922–926 (in Russ.).

- [8] Alekseev V.V. Biophysics of communities of living organisms. *UFN*, 1976, vol. 120, no. 4, pp. 647–676 (in Russ.).
- [9] Tsibulin V.G. Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 29, iss. 5, pp. 751–764 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764>
- [10] Liu B., Teng Z., Chen L. Analysis of a predator–prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, vol. 194, iss. 1, pp. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.06.023>
- [11] Pei Y., Chen L., Zhang Q., et al. Extinction and permanence of one-prey multi-predators of Holling type II function response system with impulsive biological control. *J. Theor. Biol.*, 2005, vol. 235, no. 4, pp. 499–512.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.02.003>
- [12] Zhao Z., Yang L., Chen L. Impulsive perturbations of a predator-prey system with modified Leslie-Gower and Holling type II schemes. *J. Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 35, no. 1–2, pp. 119–134. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12190-009-0346-2>
- [13] Wang X., Tian Y., Tang S. A Holling Type II Pest and natural enemy model with density dependent IPM strategy. *Math. Probl. Eng.*, 2017, vol. 2017, art. 8683207.
DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/8683207>
- [14] Yang J., Tang S. Holling type II predator–prey model with nonlinear pulse as state-dependent feedback control. *J. Comput. Appl. Math.*, 2016, vol. 291, pp. 225–241.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.01.017>
- [15] Holling C.S. The functional response of invertebrate predators to prey density. *Mem. Entomol. Soc. Can.*, vol. 98, supp. S48, pp. 5–86.
DOI: <https://doi.org/10.4039/entm9848fv>
- [16] Huang Y., Chen F., Li Z. Stability analysis of a prey–predator model with Holling type III response function incorporating a prey refuge. *Appl. Math. Comput.*, 2006, vol. 182, iss. 1, pp. 672–683. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.030>
- [17] Ma Z., Wang S., Wang T., et al. Stability analysis of prey-predator system with Holling type functional response and prey refuge. *Adv. Differ. Equ.*, 2017, vol. 2017, art. 243.
DOI: <https://doi.org/10.1186/s13662-017-1301-4>
- [18] Holling C.S. The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly. *Can. Entomol.*, 1959, vol. 91, iss. 5, pp. 293–320.
DOI: <https://doi.org/10.4039/Ent91293-5>
- [19] Oдинаев R.N., Назруллоев P.L., Раймзода F. Optimization process of the integrated plant protection method for dot models. *Sistemy i sredstva informatiki* [Systems and Means of Informatics], 2022, vol. 32, no. 4, pp. 134–144 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.14357/08696527220413>
- [20] Oдинаев R.N. A mathematical model of the problem of plant protection in a bio-system of the type “harmful insects–beneficial insects” with arbitrary trophic functions.

Sistemy i sredstva informatiki [Systems and Means of Informatics], 2019, vol. 29, no. 1, pp. 96–108 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.14357/08696527190109>

[21] Odinaev R.N. Necessary and sufficient condition of subsistence of discussed problem on protection of the plant. *Doklady AN RT*, 2015, vol. 58, no. 10, pp. 879–886 (in Russ.). EDN: WCIHJL

Odinaev R.N. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Scientific Research Institute, TNU (Rudaki prospekt 17, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan).

Nazarov U.A. — Doctoral Student, Department of Mathematical Modeling, A. Juraev Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Tajikistan (Ayni ul. 299/4, Dushanbe, 734063 Republic of Tajikistan).

Please cite this article in English as:

Odinaev R.N., Nazarov U.A. Investigation of a mathematical model of plant protection in a predator–prey biological system using the type II trophic Holling function. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2026, no. 2 (125), pp. 4–19 (in Russ.). EDN: TYITRX