

ПРОИЗВОДСТВО ЭНТРОПИИ В НЕОБРАТИМОМ ПРОЦЕССЕ, ПРОИСХОДЯЩЕМ В ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ

А.Н. Морозов

amor@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Проведено описание броуновского движения и явлений переноса в локально-неравновесной среде с использованием теории немарковских физических процессов. Применение этой теории позволило вывести соотношения, связывающие термодинамические силы и термодинамические потоки для общего случая явлений переноса различной физической природы, а также получить формулу для расчета производства энтропии. Найдены корреляционные функции, описывающие равновесные и неравновесные флуктуации термодинамических потоков. Полученные соотношения применены при описании производства энтропии для броуновского движения, диффузии, переноса импульса и теплопроводности. Проведен расчет производства энтропии для общего случая сильно неравновесных явлений переноса с долговременной памятью. Показано, что при гармоническом изменении термодинамической силы в некоторые моменты времени реализуется режим, при котором производство энтропии принимает отрицательное значение. Это означает, что в эти моменты времени при протекании необратимого термодинамического процесса наблюдается не увеличение, а уменьшение энтропии. Такой эффект должен наблюдаться не только при гармоническом изменении термодинамической силы, но и при других ее временных зависимостях. Предложенный метод описания явлений переноса в локально-неравновесной среде применим для решения широкого круга задач физической кинетики

Ключевые слова

Производство энтропии, необратимые процессы, локально-неравновесное состояние, броуновское движение, явления переноса, немарковские процессы

Поступила 16.05.2025

Принята 10.06.2025

© Автор(ы), 2026

Введение. При применении теории марковских процессов [1, 2] для описания необратимых процессов для каждого малого элемента среды используется принцип локального равновесия [3–5]. Этот принцип позво-

ляет рассчитать производство энтропии при протекании необратимых процессов [6] в близких к равновесию термодинамических системах, для которых выполняется условие линейной зависимости термодинамического потока от термодинамической силы. Рассчитанное таким образом производство энтропии всегда имеет положительное или, для равновесных состояний, нулевое значение.

При построении описания необратимых процессов в локально-неравновесных средах применяется теория немарковских процессов, описывающая случайные процессы с памятью [7–9]. В этом случае возникает возможность описывать такие необратимые процессы, как броуновское движение [10–14], диффузия [15–19], теплопроводность [20] и др. Для случая сильно неравновесных процессов, происходящих в локально-неравновесных средах, расчет производства энтропии требует применения более общих соотношений между термодинамическими потоками и термодинамическими силами [21, 22].

Цель работы — разработка метода расчета производства энтропии при описании необратимых процессов в локально-неравновесных средах.

Броуновское движение. Уравнение броуновского движения может быть записано в виде [23, 24]

$$\frac{dP}{dt} + J = 0,$$

где P — импульс броуновской частицы; J — сила воздействия броуновской частицы на внешнюю среду, которая в рамках кинетического описания представляет собой термодинамический поток.

В рамках теории немарковских физических процессов зависимость термодинамического потока $J(t)$ от термодинамической силы $X(t)$ для броуновского движения может быть представлена [23, 24] в виде

$$J = LX + \delta J + L \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{v_{\tau}(t-\tau)}} \frac{dX(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{v_{\tau}(t-\tau)}} \delta J_{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Здесь L — кинетический коэффициент переноса; δJ — дельта-коррелированный случайный термодинамический поток, описывающий равновесные флуктуации.

Интенсивность случайного термодинамического потока δJ_{σ} , обусловленного локально-неравновесными флуктуациями среды, можно рассчи-

тать как $\nu_\tau = 1/\tau_0$, где τ_0 — постоянная времени хаотизации частиц среды. Тогда первые два слагаемых в (1) описывают равновесные процессы переноса, а третье и четвертое слагаемые позволяют рассчитать эффекты, связанные с протеканием сильно неравновесных процессов с долговременной памятью.

Для случая броуновского движения кинетический коэффициент переноса равен $L = \gamma m T$, где γ — коэффициент релаксации броуновской частицы; m — масса броуновской частицы; T — температура среды.

Термодинамическая сила X связана с импульсом броуновской частицы выражением [22] $X = P/(mT)$.

Случайный процесс $\delta J(t)$ будем полагать δ -коррелированным гауссовым процессом с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$\langle \delta J(t_2) \delta J(t_1) \rangle = 2\gamma m k_B T \delta(t_2 - t_1), \quad (2)$$

где $\delta(t - \tau)$ — дельта-функция, а δ -коррелированный гауссов процесс $\delta J_\sigma(t)$ — имеющим нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$\langle \delta J_\sigma(t_2) \delta J_\sigma(t_1) \rangle = 2\gamma^2 m \sigma_S T \delta(t_2 - t_1). \quad (3)$$

Причем процессы $\delta J(t)$ и $\delta J_\sigma(t)$ являются некоррелированными $\langle \delta J(t_2) \delta J_\sigma(t_1) \rangle = 0$. В (2) k_B — постоянная Больцмана, в (3) σ_S — производство энтропии при детерминированном движении броуновской частицы,

$$\sigma_S = JX = LX^2 + LX \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{\nu_\tau(t-\tau)}} \frac{dX(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (4)$$

где учтено, что

$$\langle \delta J(t) \rangle = 0, \quad (5)$$

$$\langle \delta J_\sigma(t) \rangle = 0. \quad (6)$$

Формулы (5), (6) позволяют провести расчет броуновского движения как при детерминированном, так и при стохастическом описании.

Явления переноса. Пусть в качестве переносимой физической величины выступает Ω , тогда в общем случае процесс переноса в локально-неравновесной среде может быть описан с помощью уравнения [25]

$$\alpha_{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (7)$$

При описании различных физических процессов величина Ω имеет разный физический смысл. Для процесса диффузии величина Ω равна относительной концентрации примеси $\delta n = n/n_0$, n_0 — концентрация частиц основной среды. При описании переноса импульса в несжимаемой вязкой жидкости для малых чисел Рейнольдса Ω — это импульс частицы среды $p = m u$, m — масса частицы среды; u — ее упорядоченная скорость. В случае описания теплопроводности в качестве физической величины Ω используется температура среды T .

В уравнении (7) введен коэффициент α_{Ω} , который зависит от описываемого процесса переноса. Для диффузии $\alpha_{\Omega} = n_0 k_B$, при описании переноса импульса $\alpha_{\Omega} = \rho / (m^2 T)$, в случае теплопроводности $\alpha_{\Omega} = c / (k_B^2 T^2)$ (ρ — плотность среды; c — теплоемкость единицы объема среды).

При описании процессов переноса в локально-неравновесной среде зависимость термодинамического потока $\vec{J}(t)$ от термодинамической силы $\vec{X}(t)$ можно записать в виде, аналогичном (1):

$$\begin{aligned} \vec{J} = L_{\Omega} \vec{X} + \delta \vec{J} + L_{\Omega} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{v_{\tau}(t-\tau)}} \frac{\partial \vec{X}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{v_{\tau}(t-\tau)}} \delta \vec{J}_{\sigma}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) не учтены перекрестные связи, которые имеют важное значение при описании процессов переноса в неравновесных средах [26].

Кинетические коэффициенты переноса для рассматриваемых процессов имеют вид: для процесса диффузии $L_{\Omega} = n_0 k_B D$, для процесса переноса импульса $L_{\Omega} = \eta / (m^2 T)$, для теплопроводности $L_{\Omega} = \lambda / T^2$ (D — коэффициент диффузии; η — коэффициент вязкости; λ — коэффициент теплопроводности).

Для корреляционной функции $\langle \delta J_i \delta J_k \rangle$ величины $\delta \vec{J}$ можно записать в виде

$$\langle \delta J_i \delta J_k \rangle = 2 \delta_{ik} \beta_{\Omega} \delta(t_2 - t_1) \delta(x_2 - x_1) \delta(y_2 - y_1) \delta(z_2 - z_1),$$

где i, k — параметры, соответствующие координатам x, y, z ; δ_{ik} — символ Кронекера, $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ik}|_{i \neq k} = 0$. Для всех явлений $\beta_{\Omega} = k_B L_{\Omega}$.

Корреляционную функцию $\langle \delta J_{\sigma i} \delta J_{\sigma k} \rangle$ величины $\delta \vec{J}_{\sigma}$ запишем в виде

$$\langle \delta J_{\sigma i} \delta J_{\sigma k} \rangle = 2 \delta_{ik} \chi_{\Omega} \delta(t_2 - t_1) \delta(x_2 - x_1) \delta(y_2 - y_1) \delta(z_2 - z_1).$$

Для всех явлений

$$\chi_{\Omega} = \frac{k_B T \alpha_{\Omega}}{\rho} \sigma_S,$$

где в случае диффузии $\rho = m n_0$.

Процессы $\delta J_i(t)$ и $\delta J_{\sigma k}(t)$ являются некоррелированными: $\langle \delta J_i(t_2) \delta J_{\sigma k}(t_1) \rangle = 0$.

Производство энтропии σ_S может быть вычислено по формуле, аналогичной (4):

$$\sigma_S = \sum_{i=1}^3 J_i X_i = \sum_{i=1}^3 L_{\Omega} X_i^2 + \sum_{i=1}^3 L_{\Omega} X_i \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{v_{\tau}(t-\tau)}} \frac{dX_i(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (9)$$

Результаты описания явлений переноса приведены в таблице.

Коэффициенты при описании явлений переноса

Явление	Ω	α_{Ω}	L_{Ω}	β_{Ω}	χ_{Ω}
Диффузия	δn	$n_0 k_B$	$n_0 k_B D$	$n_0 k_B^2 D$	$k_B^2 \sigma_S T / m$
Перенос импульса	mi	$\rho / (m^2 T)$	$\eta / (m^2 T)$	$k_B \eta / (m^2 T)$	$k_B \sigma_S / m^2$
Теплопроводность	T	$c / (k_B^2 T^2)$	λ / T^2	$k_B \lambda / T^2$	$k_B c \sigma_S / (\rho T)$

Формулы в таблице показывают, что описание явлений переноса и броуновского движения можно выполнять по имеющим одинаковый вид формулам.

Расчет производства энтропии. Для расчета энтропии формула (4) (и аналогичная ей (9)) может быть представлена в виде

$$\sigma(t) = X(t) \int_{-\infty}^t L \left(\delta(t-\tau) + \frac{1}{\sqrt{v_{\tau}(t-\tau)}} \frac{d}{d\tau} \right) X(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Пусть термодинамическая сила изменяется по гармоническому закону $X(t) = X_0 \sin(\omega t)$, где X_0 — амплитуда термодинамической силы; ω — ее циклическая частота. Тогда формула (10) приобретает вид

$$\sigma(t) = L X_0^2 \sin^2(\omega t) + L X_0^2 \omega \sin(\omega t) \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{v_{\tau}(t-\tau)}} \cos(\omega \tau) d\tau. \quad (11)$$

После вычисления интеграла и проведения несложных преобразований (11) можно записать в форме

$$\sigma(t) = LX_0^2 \left(\sin^2(\omega t) + \sqrt{\frac{\pi\omega}{2\nu_\tau}} \left(\sin(\omega t) \cos(\omega t) + \sin^2(\omega t) \right) \right)$$

или

$$\sigma(t) = \frac{LX_0^2}{2} \left((1 - \cos(2\omega t)) + \sqrt{\frac{\pi\omega}{2\nu_\tau}} \left(1 + \sqrt{2} \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right) \right). \quad (12)$$

Для расчета среднего производства энтропии формулу (12) необходимо усреднить за период изменения термодинамической силы, тогда

$$\sigma(t) = \frac{LX_0^2}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\pi\omega}{2\nu_\tau}} \right). \quad (13)$$

Последнее слагаемое в (13) описывает дополнительное производство энтропии, связанное с протеканием сильно неравновесного процесса, которое в (1) задается третьим слагаемым.

Отметим, что первое слагаемое в (12) всегда неотрицательное, а второе — в некоторые моменты времени может принимать отрицательные значения. Этот эффект наблюдается только для случая сильно неравновесного процесса.

Результаты анализа выражения (12) позволяют определить моменты времени, когда производство энтропии становится отрицательным. Этим моментам времени соответствует неравенство

$$\sin(\omega t) \left(\left(1 + \sqrt{\frac{\pi\omega}{2\nu_\tau}} \right) \sin(\omega t) + \sqrt{\frac{\pi\omega}{2\nu_\tau}} \cos(\omega t) \right) < 0. \quad (14)$$

Неравенство (14) позволяет записать условие

$$-\frac{\sqrt{\pi\omega}}{\sqrt{\pi\omega} + \sqrt{2\nu_\tau}} < \operatorname{tg}(\omega t) < 0.$$

При малых значениях частоты изменения термодинамической силы, т. е. в случае $\pi\omega \ll 2\nu_\tau$, отрицательное значение производства энтропии будет наблюдаться при выполнении условия

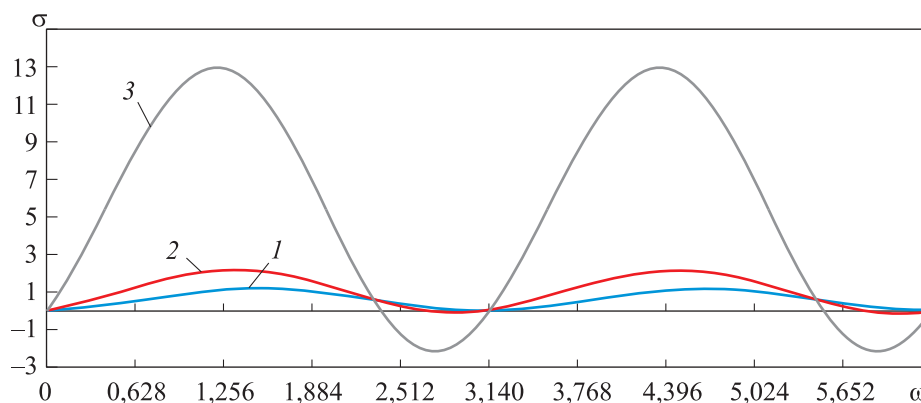
$$\pi n - \frac{\sqrt{\pi\omega}}{\sqrt{\pi\omega} + \sqrt{2\nu_\tau}} < \omega t < \pi n,$$

где n — любое целое число.

Результаты моделирования функции (12) при $L = 1$, $X_0 = 1$ и значениях частоты $\omega = 0,01(2v_\tau/\pi)$; $2v_\tau/\pi$; $100(2v_\tau/\pi)$ приведены на рисунке. При значениях ωt , немного меньших значений πn , т. е. при

$$\pi n - \frac{\sqrt{\pi\omega}}{\sqrt{\pi\omega} + \sqrt{2v_\tau}} < \omega t < \pi n, \quad n = 1, 2,$$

наблюдаются отрицательные значения производства энтропии.



Графики функций производства энтропии σ при $\omega = 0,01(2v_\tau/\pi)$ (1), $\omega = 2v_\tau/\pi$ (2), $\omega = 100(2v_\tau/\pi)$ (3)

Закключение. Найдены общие зависимости, связывающие термодинамические силы и термодинамические потоки при описании броуновского движения и явлений переноса, а также учитывающие равновесные и неравновесные флуктуации. Для этих явлений рассчитано производство энтропии.

Применение зависимостей (1) и (8) для связи термодинамического потока и термодинамической силы позволило установить, что при реализации гармонического воздействия на сильно неравновесную термодинамическую систему в некоторые моменты времени наблюдается эффект отрицательного производства энтропии. Этот эффект связан с наличием в термодинамических системах долговременной памяти для локально-неравновесных сред. Отрицательное производство энтропии должно наблюдаться не только при гармоническом, но и при других типах временного изменения термодинамической силы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and stochastic stability. Springer, 1993.

- [2] Ikeda N., Watanabe S. Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland, 1989.
- [3] Glansdorff P., Prigogine I. Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. Wiley, 1971.
- [4] Jou D., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-97671-1>
- [5] Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Немарковские физические процессы. М., ФИЗМАТЛИТ, 2018.
- [6] Базаров И.П. Термодинамика. М., Высш. шк., 1991.
- [7] Marchesoni F., Taloni A. Subdiffusion and long-time anticorrelations in a stochastic single file. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 97, no. 10, art. 106101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.106101>
- [8] Морозов А.Н. Применение теории немарковских процессов при описании броуновского движения. *ЖЭТФ*, 1996, т. 109, № 4, с. 1304–1315. EDN: XQQQPD
- [9] Lisy V., Tothova J., Glod L. On the correlation properties of thermal noise in fluids. *Int. J. Thermophys.*, 2013, vol. 34, iss. 4, pp. 629–641. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10765-012-1290-1>
- [10] Hauge E.H., Martin-Lof A. Fluctuating hydrodynamics and Brownian motion. *J. Stat. Phys.*, 1973, vol. 7, no. 3, pp. 259–281. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01030307>
- [11] Volkov V.S., Leonov A.I. Non-Markovian Brownian motion in a viscoelastic fluid. *J. Chem. Phys.*, 1996, vol. 104, no. 15, pp. 5922–5931. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.471324>
- [12] Mainardi F., Mura A., Tampieri F. Brownian motion and anomalous diffusion revisited via a fractional Langevin equation. *Modern Problems of Statistical Physics*, 2009, vol. 8, pp. 3–23.
- [13] Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Применение интегральных преобразований для описания броуновского движения как немарковского случайного процесса. *Известия вузов. Физика*, 2009, т. 52, № 2, с. 66–74. EDN: KXMMCP
- [14] Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process. *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, iss. 46, pp. 4113–4115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.10.001>
- [15] Lenzi E.K., Evangelista L.R., Lenzi M.K., et al. Solutions for a non-Markovian diffusion equation. *Phys. Lett. A*, 2010, vol. 374, iss. 41, pp. 4193–4198. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.08.049>
- [16] Mura A., Taqqu M.S., Mainardi F. Non-Markovian diffusion equations and processes: analysis and simulations. *Physica A*, 2008, vol. 387, iss. 21, pp. 5033–5064. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.04.035>
- [17] Prehl J., Bold F., Hoffmann K.H., et al. Symmetric fractional diffusion and entropy production. *Entropy*, 2016, vol. 18, iss. 7, art. 275. DOI: <https://doi.org/10.3390/e18070275>

- [18] Fuentes M.A., Cáceres M.O. Computing the non-linear anomalous diffusion equation from first principles. *Phys. Lett. A*, 2008, vol. 372, iss. 8, pp. 1236–1239. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.09.020>
- [19] Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Описание испарения сферической капли жидкости как немарковского случайного процесса с использованием интегральных стохастических уравнений. *Известия вузов. Физика*, 2010, № 11-2, с. 55–64. EDN: NUPTKH
- [20] Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Распространение тепла в пространстве вокруг цилиндрической поверхности как немарковский случайный процесс. *Инженерно-физический журнал*, 2011, т. 84, № 6, с. 1121–1127. EDN: OFZYHT
- [21] Морозов А.Н. Неравновесные флуктуации броуновской частицы в среде с производством энтропии. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 1 (94), с. 47–56. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-47-56>
- [22] Морозов А.Н. Кинетическое описание неравновесных процессов переноса. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 5 (98), с. 60–72. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-60-72>
- [23] Морозов А.Н. Фликкер-шум в локально-неравновесной среде. *Письма в ЖЭТФ*, 2018, № 12, с. 823–824. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0370274X18120135>
- [24] Морозов А.Н. Броуновское движение как необратимый немарковский процесс. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 2 (83), с. 94–103. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-2-94-103>
- [25] Morozov A.N. Description of transfer processes in a locally nonequilibrium medium. *Entropy*, 2019, vol. 21, iss. 1, art. 9. DOI: <https://doi.org/10.3390/e21010009>
- [26] Kustova E., Giordano D. Cross-coupling effects in chemically non-equilibrium viscous compressible flows. *Chem. Phys.*, 2011, vol. 379, iss. 1-3, pp. 83–91. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chemphys.2010.11.009>

Морозов Андрей Николаевич — член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Морозов А.Н. Производство энтропии в необратимом процессе, происходящем в локально-неравновесной среде. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2026, № 2 (125), с. 62–73. EDN: TPGENI

ENTROPY PRODUCTION IN IRREVERSIBLE PROCESS WITHIN THE LOCALLY NON-EQUILIBRIUM MEDIUM

A.N. Morozov

amor@bmstu.ru

BMSTU, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article describes Brownian motion and transfer processes in a locally non-equilibrium medium using the theory of non-Markovian physical processes. The application of this theory allowed us to derive relationships linking thermodynamic forces and thermodynamic flows for the general case of transfer processes of different physical nature, and also to obtain a formula for calculating entropy production. Besides, correlation functions were found describing the equilibrium and non-equilibrium fluctuations of the thermodynamic flows. The resulting relationships were introduced to describe the entropy production for Brownian motion, diffusion, momentum transport and thermal conductivity. Entropy production was calculated for a general case of the highly non-equilibrium transport processes with the long-term memory. It is shown that with the thermodynamic force harmonic alteration, a regime is being realized at certain time moments, where the entropy production takes the negative value. This means that at these time moments with the appearing irreversible thermodynamic process, no increase, but a decrease in the entropy, is observed. Such an effect should be registered not only with the thermodynamic force harmonic alteration, but also with its other time dependencies. The proposed method for describing transport processes in a locally nonequilibrium environment is applicable to solving a wide range of problems in physical kinetics

Keywords

Entropy production, irreversible processes, locally nonequilibrium state, Brownian motion, transport processes, non-Markovian processes

Received 16.05.2025

Accepted 10.06.2025

© Author(s), 2026

REFERENCES

- [1] Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and stochastic stability. Springer, 1993.
- [2] Ikeda N., Watanabe S. Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland, 1989.
- [3] Glansdorff P., Prigogine I. Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. Wiley, 1971.

- [4] Jou D., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-97671-1>
- [5] Morozov A.N., Skripkin A.V. Nemarkovskie fizicheskie protsessy [Non-Markovian physical processes]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2018.
- [6] Bazarov I.P. Termodinamika [Thermodynamics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991.
- [7] Marchesoni F., Taloni A. Subdiffusion and long-time anticorrelations in a stochastic single file. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 97, no. 10, art. 106101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.106101>
- [8] Morozov A.N. Use of the theory of non-Markovian processes in the description of Brownian motion. *J. Exp. Theor. Phys.*, 1996, vol. 82, no. 4, pp. 703–708.
- [9] Lisy V., Tothova J., Glod L. On the correlation properties of thermal noise in fluids. *Int. J. Thermophys.*, 2013, vol. 34, iss. 4, pp. 629–641. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10765-012-1290-1>
- [10] Hauge E.H., Martin-Lof A. Fluctuating hydrodynamics and Brownian motion. *J. Stat. Phys.*, 1973, vol. 7, no. 3, pp. 259–281. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01030307>
- [11] Volkov V.S., Leonov A.I. Non-Markovian Brownian motion in a viscoelastic fluid. *J. Chem. Phys.*, 1996, vol. 104, no. 15, pp. 5922–5931. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.471324>
- [12] Mainardi F., Mura A., Tampieri F. Brownian motion and anomalous diffusion revisited via a fractional Langevin equation. *Modern Problems of Statistical Physics*, 2009, vol. 8, pp. 3–23.
- [13] Morozov A.N., Skripkin A.V. Application of integral transforms to a description of the Brownian motion by a non-Markovian random process. *Russ. Phys. J.*, 2009, vol. 52, no. 2, pp. 184–195. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11182-009-9217-4>
- [14] Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process. *Phys. Lett. A*, 2011, vol. 375, iss. 46, pp. 4113–4115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.10.001>
- [15] Lenzi E.K., Evangelista L.R., Lenzi M.K., et al. Solutions for a non-Markovian diffusion equation. *Phys. Lett. A*, 2010, vol. 374, iss. 41, pp. 4193–4198. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.08.049>
- [16] Mura A., Taqqu M.S., Mainardi F. Non-Markovian diffusion equations and processes: analysis and simulations. *Physica A*, 2008, vol. 387, iss. 21, pp. 5033–5064. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.04.035>
- [17] Prehl J., Bold F., Hoffmann K.H., et al. Symmetric fractional diffusion and entropy production. *Entropy*, 2016, vol. 18, iss. 7, art. 275. DOI: <https://doi.org/10.3390/e18070275>
- [18] Fuentes M.A., Cáceres M.O. Computing the non-linear anomalous diffusion equation from first principles. *Phys. Lett. A*, 2008, vol. 372, iss. 8, pp. 1236–1239. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.09.020>

[19] Morozov A.N., Skripkin A.V. Description of evaporation of a spherical liquid drop by a non-Markovian random process based on integral stochastic equations. *Russ. Phys. J.*, 2011, vol. 53, no. 11, pp. 1167–1178.

DOI: <https://doi.org/10.1007/s11182-011-9546-y>

[20] Morozov A.N., Skripkin A.V. Propagation of heat in the space around a cylindrical surface as a non-Markovian random process. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2011, vol. 84, no. 6, pp. 1201–1208. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-011-0585-6>

[21] Morozov A.N. Nonequilibrium fluctuations of a brownian particle in a medium with production of entropy. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 1 (94), pp. 47–56 (in Russ.).

DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-47-56>

[22] Morozov A.N. Kinetic description of nonequilibrium transfer processes. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 5 (98), pp. 60–72 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-60-72>

[23] Morozov A.N. Flicker noise in a locally nonequilibrium medium. *Jetp Lett.*, vol. 107, no. 12, pp. 798–799. DOI: <https://doi.org/10.1134/S002136401812010X>

[24] Morozov A.N. Brownian motion as an irreversible non-Markovian process. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 2 (83), pp. 94–103 (in Russ.).

DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-2-94-103>

[25] Morozov A.N. Description of transfer processes in a locally nonequilibrium medium. *Entropy*, 2019, vol. 21, iss. 1, art. 9. DOI: <https://doi.org/10.3390/e21010009>

[26] Kustova E., Giordano D. Cross-coupling effects in chemically non-equilibrium viscous compressible flows. *Chem. Phys.*, 2011, vol. 379, iss. 1-3, pp. 83–91.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chemphys.2010.11.009>

Morozov A.N. — Corresponding Member of the RAS, Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department of Physics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Morozov A.N. Entropy production in irreversible process within the locally non-equilibrium medium. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2026, no. 2 (125), pp. 62–73 (in Russ.). EDN: TPGEHI