

УДК 04.0:04

Обзор моделей и методов определения коэффициентов температурного линейного расширения волокнистых композиционных материалов

Ермилов Леонид Владимирович

ermilov@bmstu.ru

Соколов Александр Павлович

alsokolo@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В данной работе представлен систематический обзор моделей и методов определения коэффициента температурного линейного расширения волокнистых композиционных материалов, что является критически важной задачей для проектирования надежных конструкций, работающих в условиях переменных термических нагрузок. Рассмотрена эволюция подходов к решению этой проблемы — начиная с классических аналитических и полуэмпирических моделей, основанных на правилах смесей и учитывающих технологические факторы, и заканчивая современными численными методами, такими как моделирование методом конечных элементов и различные методы гомогенизации.

Ключевые слова: *тензор термического расширения, коэффициенты термического линейного расширения, термоупругие характеристики, КТЛР, волокнистые композиционные материалы*

Введение. Настоящая работа направлена на изучение моделей и методов определения термоупругих характеристик композиционных материалов (КМ), т. е. материалов, состоящих из нескольких фаз (*наполнитель* — армирующий компонент, и *связующее* — матрица) с явно выраженной поверхностью контакта. Под термоупругими характеристиками понимают характеристиками тела, которые входят в состав соотношений, позволяющих совместно учитывать механические и температурные деформации, в контексте положений механики сплошной среды и термодинамики необратимых процессов [1].

Композиционные материалы могут обладать различными схемами армирования: регулярными и дисперсными. В качестве наполнителя, часто, используют волокна различных материалов и, в этом случае, такие КМ называют волокнистыми. По схеме армирования волокнистые КМ принято разделять на: однонаправленные, nD-армированные, тканевые и пр.

Термоупругие характеристики. Рассматривается пространственная постановка задачи. Объектом исследований являются термоупругие характеристиками волокнистых КМ. Используя положения механики сплошных сред [1], указанные характеристики позволяют связать температурные деформации тела с воздействующим на него температурным полем T , являются *коэффициенты термического линейного расширения* (КТЛР). Для определения указанных характеристик в общем случае используют понятие *тензор тер-*

мического расширения α , который присутствует в законе Дюамеля-Неймана [1]:

$$\sigma = C \cdot (\varepsilon - \epsilon) \Leftrightarrow \sigma = C \cdot (\varepsilon - \alpha \Delta T) \quad (1)$$

или в компонентной форме

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T), \quad (2)$$

где σ — тензор напряжений; ε — тензор малых упругих деформаций; ϵ — тензор малых температурных деформаций; C — тензор модулей упругости.

В общем анизотропном случае компоненты α_{ij} тензора термического расширения α в пространстве R^3 могут быть представлены в виде симметричной матрицы

$$\|\alpha_{ij}\|_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \cdot & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \cdot & \cdot & \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

Для КМ с различными схемами армирования, как правило, характерны различные значения коэффициентов термического расширения в различных направлениях (табл. 1), что приводит к уменьшению числа независимых компонент тензора α . Например, для ортотропного случая, α_{11} соответствует КЛТР вдоль оси OX , тогда как для изотропного случая характерен лишь один КЛТР такого материала.

Таблица 1

**Вид компонент тензора теплового расширения
в зависимости от микроструктуры материала**

	Анизотропия	Ортотропия	Изотропия
$\ \alpha_{ij}\ _{3 \times 3}$	$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \cdot & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \cdot & \cdot & \alpha_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$

Заметим, что компоненты α_{ij} могут являться функциями температуры:

$$\alpha_{ij}(T) = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial T}, \quad (3)$$

где $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(T)$ — компоненты тензора малых температурных деформаций.

Проинтегрировав (3) по температуре на интервале $[T_0, T]$, получим

$$\epsilon(T) - \epsilon(T_0) = \int_{T_0}^T \alpha(\tau) d\tau = \bar{\alpha} \Delta T,$$

где ΔT — изменение температуры относительно температуры T_0 , для которой будем полагать, что $(T_0) = 0$; $\bar{\alpha}$ — осредненный тензор термического расширения на интервале температур $[T_0, T]$ и $\bar{\alpha} = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_0}^T \alpha(\tau) d\tau$.

Однако при малых изменениях температуры соответствующие деформации определяются тензором малых температурных деформаций, линейно зависящим от изменения температуры:

$$\epsilon = \alpha \Delta T \quad (4)$$

или в компонентной форме

$$\epsilon_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T, \quad (5)$$

где α — постоянный тензор КТЛР с компонентами α_{ij} , являющимися константами.

Микромоделли термоупругих характеристик КМ. Для определения эффективных характеристик КМ используются и разрабатываются микроструктурные модели (микромеханические модели, микромоделли). Модель самого КМ, при этом, может рассматриваться на двух масштабных уровнях (рис. 1): 1) макроуровень — уровень масштаба конструкции с характерным размером l_1 , 2) микроуровень l_2 . При этом большинство микромеханических моделей предполагает следующее равенство линейных размеров масштабных уровней: $l_2 \ll l_1$.

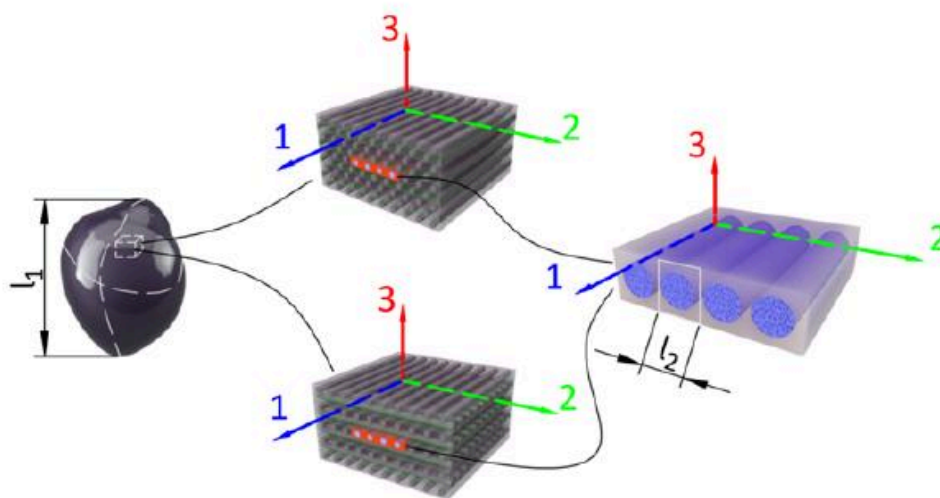


Рис. 1. Масштабные уровни композиционных материалов

Ячейка периодичности (ЯП) является важным понятием в определении характеристик КМ, а именно в описании микромеханической модели. В зависимости от применяемой теории, определение ЯП несколько разнится, но общим для них можно понимать некоторую повторяющуюся структуру на микроуровне, которая позволяет вычислить эффективные характеристики и масштабировать их до макроуровня. Для волокнистого КМ такой ЯП может являться одно волокно монослоя с окружающей его матрицей (рис. 1).

К эффективным термоупругим характеристикам КМ относятся: $\bar{E}$ — эффективный модуль упругости, $\bar{\mu}$ — эффективный коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона), $\bar{G}$ — эффективный модуль сдвига.

В рамках представленной работы интерес представляет эффективный КТЛР $\bar{\alpha}$ волокнистых композитов, а далее рассматриваются аналитические и полуэмпирические модели и методы для его вычисления.

Правило смеси. Первой из микромоделей рассмотрим *правило смеси*. Впервые было предложено В. Фойгтом в своей работе [2] и позволяет определить верхнюю границу эффективных свойств КМ на основе изотропного растяжения. В своей работе А. Рейс [3] предложил свой подход, который применим для определения нижней границы эффективных свойств на основе изотропного сжатия:

$$\alpha_{\parallel} = \frac{\alpha_f E_f v_f + \alpha_m E_m (1 - v_f)}{E_f v_f + E_m (1 - v_f)}, \quad \alpha_{\perp} = \alpha_f v_f + \alpha_m (1 - v_m), \quad (6)$$

где $\alpha_{\parallel}$ — эффективный КТЛР вдоль волокон (главной оси); $\alpha_{\perp}$ — эффективный КТЛР поперек волокон; α_f — КТЛР волокна (включения); α_m — КТЛР матрицы.

Ф. Тёрнер предложил использовать объемный модуль упругости K для определения КТЛР [4]:

$$\alpha_{\parallel} = \frac{\alpha_f K_f v_f + \alpha_m K_m (1 - v_f)}{K_f v_f + K_m (1 - v_f)}, \quad (7)$$

где K_f — объемный модуль упругости волокна; K_m — объемный модуль упругости матрицы.

Вариационные модели. В вариационной модели, предложенной Ц. Хашином и Ш. Штрикманом, лежит энергетический подход, который минимизирует функционал полной энергии деформации, позволяя найти наилучшие возможные оценки без точного знания микроструктуры. Эти границы, в отличие от грубых оценок Фойгта и Рейсса, являются наиболее точными при заданном минимуме информации и служат фундаментом для прогнозирования механических свойств КМ [5].

Левин М.В. [6], основываясь на работах Хашина и Штрикмана, вывел формулу КТЛР для изотропного дисперсного двухфазного КМ:

$$\alpha^* = v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2}} \left[\frac{1}{K^*} - \left(\frac{v_1}{K_1} + \frac{v_2}{K_2} \right) \right]. \quad (8)$$

В. Розен и Ц. Хашин развили работу Левина для анизотропного двухфазного КМ [7] (1, 2 — номера фаз):

$$\alpha_{ij}^* = \bar{\alpha}_{ij} + P_{klmn} (S_{mnij}^* - \bar{S}_{mnij}) (\alpha_{kl}^{(1)} - \alpha_{kl}^{(2)}), \quad (9)$$

где α_{ij}^* — компонента эффективного тензора КТЛР КМ; S_{mnij}^* — эффективный коэффициент податливости; $P_{klmn} (S_{mnrs}^{(1)} - S_{mnrs}^{(2)}) = I_{klrs}$; I_{klrs} — единичный симметричный тензор четвертого порядка; $\bar{\alpha}_{ij}$ — средний по объему КТЛР КМ; $\bar{S}_{mnij}$ — средний по объему коэффициент податливости.

Г.А. Ван Фо Фы в работах [8, 9] на основе вариационной модели вывел формулу КТЛР в направлении укладки:

$$\alpha_{\parallel} = \alpha_m - (\alpha_m - \alpha_f) \frac{(1+\nu_m)E_f \nu_f - (1+\nu_f)(E_1 - \nu_m)}{(\nu_m - \nu_f)E_1}. \quad (9)$$

Р.А. Шэйпери, основываясь на работах Ван Фо Фы, Розена и Хашина, Левина, представил модель для определения КТЛР на основе вариационной модели [10]:

$$\alpha_{\parallel} = \frac{E_f \alpha_f \nu_f + E_m \alpha_m \nu_m}{E_f \nu_f + E_m \nu_m}, \quad (10)$$

$$\alpha_{\perp} = (1+\mu_f)\alpha_f \nu_f + (1+\mu_m)\alpha_m \nu_m - \alpha_L (\mu_f \nu_f + \mu_m \nu_m).$$

Н. Чемберлен [11] использовал уравнения толстостенных цилиндров при моделировании волокон в матрице с гексагональной или прямоугольной укладкой.

$$\alpha_{\parallel} = \alpha_m + \frac{2(\alpha_f - \alpha_m)\nu_f}{\mu_m(F-1+\nu_m) + (F+\nu_f) + \frac{E_m}{E_f}(1-\mu_{LT})(F-1+\nu_m)}, \quad (11)$$

где $F = 0,9096$ при гексагональной укладке волокна; $F = 0,7854$ при прямоугольной укладке волокна.

На основе самосогласованной модели Б. Будианский в своем труде [12] предложил свою формулу КТЛР для n-фазного КМ:

$$\alpha^* = \sum_{i=1}^N \nu_i \alpha_i \left(\frac{K_i}{K^*} \right) \left[1 - a + a \left(\frac{K_i}{K^*} \right) \right]^{-1}, \quad (12)$$

где $a = \frac{1}{3} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)$, $\mu = \frac{3K-2G}{6K+2G}$.

Инженерная модель Х. Чамиса была представлена им в его работе [13] и формулы для вычисления эффективных характеристик КМ, в частности, для КТЛР в поперечном направлении:

$$\alpha_{\perp} = \alpha_f 2\sqrt{\nu_f} + \alpha_m \left(1 - \sqrt{\nu_f} \right) \left(1 + \nu_f \nu_m \frac{E_f}{E_1} \right). \quad (13)$$

Ламинатная теория. Выше были кратко освещены часто используемые аналитические модели, позволяющие определять эффективные термоупругие характеристики однонаправленного монослоя КМ (1D-армированный монослой). Рассматриваемые модели КМ являются основой для построения моделей многослойных КМ, которые, как правило, применяются на практике. Слоистый композитный пакет состоит из некоторого количества монослоев с различным направлением армирования каждого друг относительно друга. Для определения эффективных свойств такого пакета, как правило, применяется теория ламинатов [15], где свойства (например, эффективные характеристики, полученные отдельно) монослоя считаются известными.

Численно-аналитические методы используются, когда применение аналитических формул осложнено, например, в связи с их узкой специализацией (применимы для фиксированных типов схем армирования и т. п.). Известным является метод асимптотического осреднения или двухмасштабного разложения (один из методов гомогенизации). Данный метод был предложен Н.С. Бахваловым [16], а позже применен Б.Е. Победрей [17], нашел широкое применение в России и за рубежом. Рассматриваемый метод сводит задачу на неоднородной композитной области к осредненной и локальным задачам на представительных элементах объема, для решения которых, в свою очередь могут применяться численные методы (как правило, метод конечных элементов). В дальнейшем метод будет применен для определения эффективных термомеханических характеристик КМ.

Заключение. В статье были рассмотрены некоторые известные методы определения эффективных термоупругих характеристик волокнистых КМ.

*Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России
(тема № FSN-2024-0083).*

Литература

- [1] Зарубин В.С. *Математические модели термомеханики*. Москва, Физматлит, 2002, 168 с.
- [2] Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Annalen der physic*, 1889, vol. 274, no. 12, pp. 573–587.
- [3] Reuß A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1929, vol. 274, no. 9, pp. 49–58.
- [4] Turner P. Thermal Expansion Stresses in Reinforced Plastics. *NIST Journal of Research*, 1946, vol. 37, pp. 239–250.
- [5] Hashin Z., Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials M. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 127–140.
- [6] Левин В.М. О коэффициентах температурного расширения неоднородных материалов. *Механика твердого тела*, 1967, т. 1, с. 88–94.
- [7] Rosen B.W., Hashin Z. Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 1970, vol. 8, no. 2, pp. 157–173.
- [8] Ван Фо Фы Г.А. Температурные смещения и напряжения в стеклоленте. *Прикл. мех. техн. физ.*, 1965, т. 6, № 4, с. 101–106.
- [9] Ван Фо Фы Г.А. Упругие постоянные и тепловое расширение некоторых тел с неоднородной регулярной структурой. *Докл. АН СССР*, 1966, т. 166, № 4, с. 817–820.
- [10] Schapery R. Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles. *Journal of Composite Materials*, 1968, vol. 2, pp. 380–404.
- [11] Chamberlain N. Derivation of expansion coefficients for a fibre reinforced composite. *BAC Report SON (P)*, 1968, vol. 33, art. no. 23.
- [12] Budiansky B. Thermal and thermoelastic properties of isotropic composites. *Journal of composite Materials*, 1970, vol. 4, no. 3, pp. 286–295.
- [13] Chamis C.C. Simplified composite micromechanics equations for hygral, thermal and mechanical properties. *Ann. Conf. of the Society of the Plastics Industry (SPI) Reinforced Plastics/Composites Inst.*, NASA, 1983.

- [14] Thomas J.P. AD 287-826. *General Dynamics*. Fort Worth, TX, 1960.
- [15] Муйземнек А.Ю., Карташова Е.Д. Механика деформирования и разрушения полимерных слоистых композиционных материалов. Пенза, Изд-во ПГУ, 2017, 77 с.
- [16] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 352 с.
- [17] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, МГУ, 1984, 336 с.

Review of models and methods for determining the coefficients of linear thermal expansion of fibrous composite materials

Ermilov Leonid Vladimirovich

ermilov@bmstu.ru

Sokolov Alexander Pavlovich

alsokolo@bmstu.ru

BMSTU, Moscow, Russia

This article presents a systematic review of models and methods for determining the coefficient of linear thermal expansion of fiber composite materials, a critical issue for the design of robust structures operating under variable thermal loads. The evolution of approaches to solving this problem is examined, ranging from classical analytical and semi-empirical models to modern numerical methods such as finite element modeling and various homogenization techniques.

Keywords: *thermal expansion tensor, coefficients of linear thermal expansion, CTE, CTLE, thermoelastic characteristics, coefficient of thermal expansion, fiber composite materials*