

УДК 519.63

Применение метода расщепления при решении многомерных нестационарных задач методом конечных элементов

Кочетов Иван Андреевич

ivan-kochetov@mail.ru

Трудоношин Владимир Анатольевич

trudonoshin@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Работа посвящена применению метода расщепления в рамках метода конечных элементов для моделирования нестационарных процессов теплопроводности в двумерной области. Представлена математическая модель, описан подход комбинирования МКЭ и метода расщепления. Разработана программа для его реализации. Проведено сравнение результатов моделирования и времени расчета с программным комплексом ANSYS v9, демонстрирующее ускорение вычислений.

Ключевые слова: метод расщепления, метод конечных элементов, вычислительная эффективность, теплопроводность, аппроксимация, нестационарная задача

Введение. В современной инженерной практике и научных исследованиях постоянно возникает множество прикладных задач, связанных с моделированием физических процессов и явлений. Метод конечных элементов (МКЭ) хорошо зарекомендовал себя как мощный и универсальный метод для решения подобных задач, так как способен учитывать сложную геометрию и различные граничные условия [1, 2]. Однако при решении нестационарных задач, особенно в многомерных постановках, МКЭ приводит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Необходимость решать эти крупные системы на каждом временном шаге обуславливает значительные вычислительные затраты и потребление памяти, что становится серьезным ограничением для крупномасштабных и высокоточных расчетов. Для преодоления этой проблемы в данной работе был выбран подход, комбинирующий МКЭ с методом расщепления.

Методы расщепления, хорошо известные в теории разностных схем [3], позволяют свести многомерную задачу к последовательности задач меньшей размерности. Применение такого подхода в рамках МКЭ потенциально может значительно снизить вычислительные затраты.

В рамках исследования был разработан численный алгоритм, основанный на расщеплении двумерной задачи на два последовательных одномерных этапа. Каждый одномерный этап решался методом МКЭ с использованием линейной аппроксимации, что позволило преобразовать сложную двумерную СЛАУ в последовательность легко решаемых трехдиагональных СЛАУ. Для практической реализации была разработана программа, демонстрирующая значительное ускорение вычислений по сравнению с традиционными подходами.

Математическая модель. Пусть задано следующее двумерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где $T(x, y, t)$ — температура в точке (x, y) в момент времени t ; $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ — температуропроводность; c — теплоемкость; λ — теплопроводность; ρ — плотность.

МКЭ с применением схемы расщепления. Стандартная процедура МКЭ для уравнения (1) включает пространственную дискретизацию области на конечные элементы и аппроксимацию поля температуры внутри каждого элемента с использованием базисных функций [1, 2]. Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$C \frac{dT}{dt} + KT = f, \quad (2)$$

где T — вектор узловых значений температуры; C — матрица теплоемкости; K — матрица теплопроводности; f — вектор узловых тепловых нагрузок.

Для решения системы (2) во времени используется численное интегрирование, например, неявная схема Эйлера (разность назад) [3]:

$$\left(\frac{C}{\Delta t} + K \right) T^{n+1} + \left(\frac{-C}{\Delta t} \right) T^n = f^{n+1}, \quad (3)$$

где Δt — шаг по времени; n — номер временного шага. Решение системы (3) необходимо выполнять на каждом шаге, что в совокупности с большой размерностью может быть вычислительно затратно.

Для ускорения расчетов применяется метод расщепления. Исходное уравнение (1) приближенно заменяется двумя одномерными уравнениями, решаемыми последовательно на каждом временном шаге Δt [4, 5]. Сначала только вдоль оси Ox :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (4)$$

с начальными условиями $V(x, y, t_i) = T(x, y, t_i)$. Затем вдоль оси Oy :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad (5)$$

с начальными условиями $W(x, y, t_i) = V(x, y, t_{i+1})$. Тогда

$$W(x, y, t_{i+1}) = T(x, y, t_{i+1}) + O(\Delta t^2).$$

Истолковать расщепление двумерного уравнения на два одномерных можно как приближенную замену процесса распространения тепла по плоскости за время $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ на два процесса. В первом из них происходит распространение тепла только в направлении оси Ox , во втором — Oy .

Каждое из уравнений (4) и (5) решается методом конечных элементов для набора одномерных задач вдоль линий сетки, параллельных соответствующим осям. При использовании регулярной сетки и линейных элементов это приводит к решению систем вида (3), но с существенно более простыми, трехдиагональными матрицами для каждой линии.

Решение таких систем требует значительно меньших вычислительных ресурсов и времени по сравнению с решением полной системы для двумерных элементов, поскольку решение можно выполнить методом прогонки, имеющим линейную вычислительную сложность.

Преимущества и недостатки используемого подхода. Ключевым достоинством метода расщепления является существенное ускорение вычислений за счет использования метода прогонки. Общая сложность вычислений для одного временного шага составляет $O(n)$, в сравнении с $O(n^3)$ для классического МКЭ при решении СЛАУ методом Гаусса, где n — число узлов сетки.

Кроме того, получаемые трехдиагональные матрицы позволяют сократить расходы памяти, так как из всей матрицы теплопроводности необходимо знать лишь $3n - 2$ чисел, где n — число узлов вдоль линии сетки.

Главным ограничением метода является регулярная форма расчетной сетки. Сетка должна быть структурированной и выровненной по осям. При попытке добавления дополнительного узла вблизи границы, для сохранения структуры необходимо добавить узлы вдоль всей проходящей через него вертикальной и горизонтальной линии сетки. Это приводит к «размножению» узлов в тех областях, где высокая плотность сетки не требуется, что снижает общую эффективность и компенсирует часть выигрыша.

К недостатку можно отнести и дополнительную погрешность, вносимую схемой расщепления $O(\Delta t^2)$, вдобавок к погрешности дискретизации пространства от МКЭ и времени от метода Эйлера.

Реализация и эксперимент. На языке программирования C++ была разработана программа, реализующая данный подход. В ходе работы была разработана архитектура программы, а также методы определения геометрии тела и построения конечно-элементной сетки, что позволяет программе решать задачу для пластин различной формы.

Для оценки эффективности был проведен вычислительный эксперимент: моделирование распространения тепла в пластине сложной формы с заданными параметрами материала и граничными условиями. Расчет проводился до 500 с с шагом по времени $\Delta t = 1$ с.

Результаты, полученные разработанной программой (при числе узлов 1824), сравнивались с результатами, полученными в пакете ANSYS v9 на сетке со схожим числом узлов (1841). Сравнение полей температур, изображенных на рис. 1, показало хорошее совпадение (максимальные расхождения в близких узлах не превышали ≈ 2 °C). Кроме того, была проанализирована динамика изменения температуры в конкретных близкорасположенных узлах

в разработанной программе и ANSYS. Анализ динамики показал высокую корреляцию на всем протяжении расчета, что можно увидеть на рис. 2.

Наиболее важным результатом является сравнение времени расчета. Решение задачи в ANSYS заняло ≈ 28 секунд, в то время как разработанная программа, использующая метод расщепления, выполнила расчет за $\approx 1,3$ секунды. Это демонстрирует ускорение примерно в 20 раз для данной задачи и сетки.

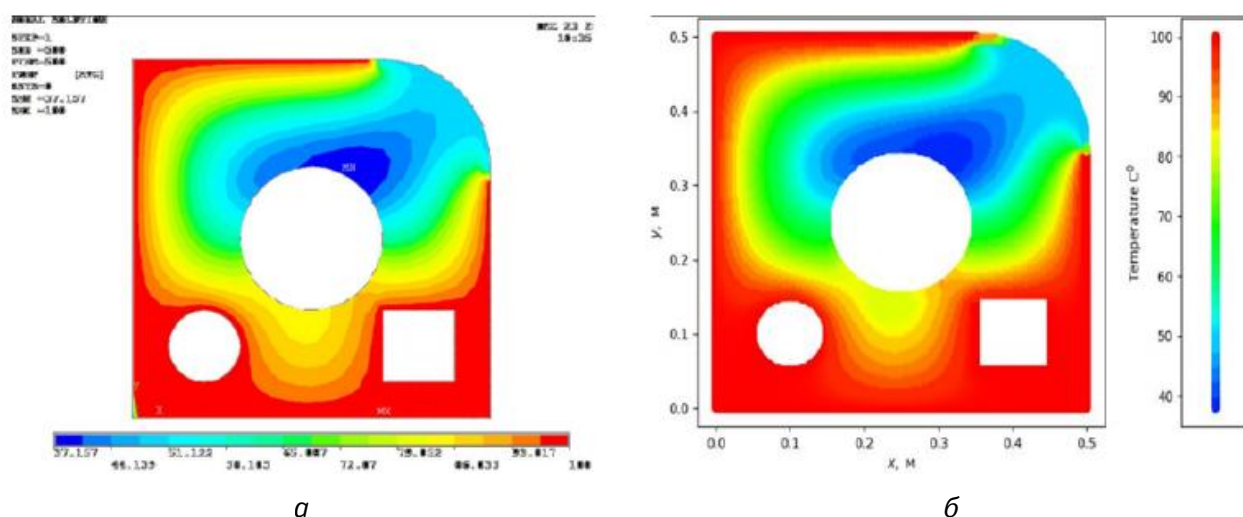


Рис. 1. Сравнение результатов вычисления распределения температуры в пластине: а — решение, полученное в ANSYS; б — решение, полученное программой

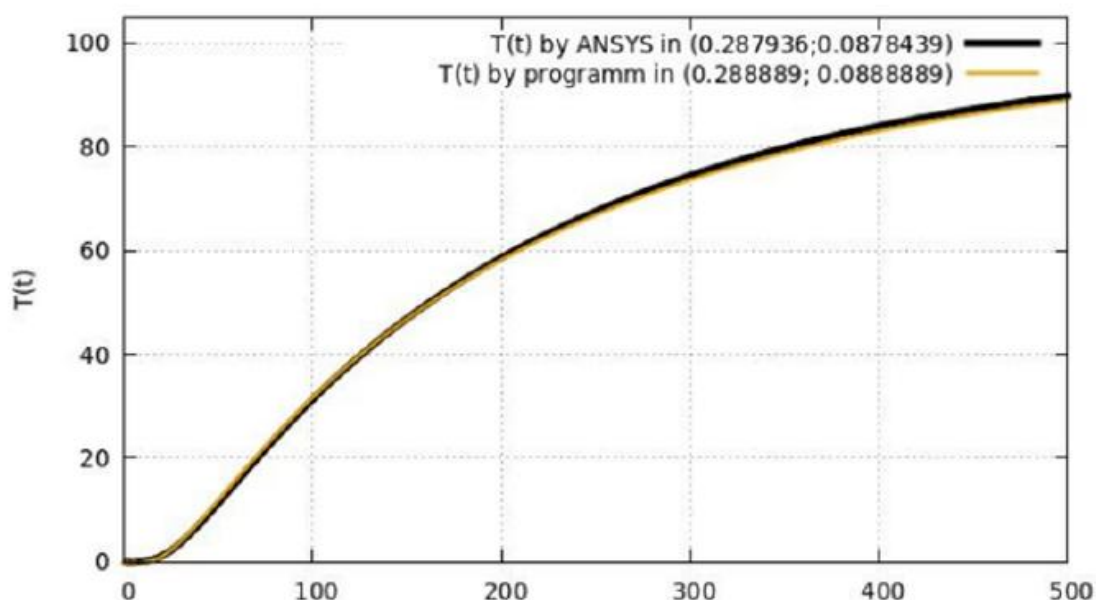


Рис. 2. Сравнение динамики изменения температуры в узлах, рассчитанной программой (желтая кривая) и ANSYS (черная кривая)

При увеличении числа узлов наблюдается линейная зависимость времени расчета от размерности сетки, что является следствием использования метода прогонки. На рис. 3 представлена зависимость времени вычисления от числа узлов сетки.

Этот результат полностью согласуется с теоретическими преимуществами метода, заключающимися в использовании метода прогонки при решении СЛАУ, обладающего вычислительной сложностью $O(n)$, где n — размерность системы. Таким образом, результаты экспериментов доказывают высокую вычислительную эффективность используемого подхода при сохранении приемлемой точности.

Направления дальнейшей разработки. Поскольку форма сетки является существенным ограничением метода, то можно выделить следующие направления разработки:

- использование гибридного подхода при генерации сетки;
- применение интерполяции для расчета температуры в узлах вне регулярной сетки.

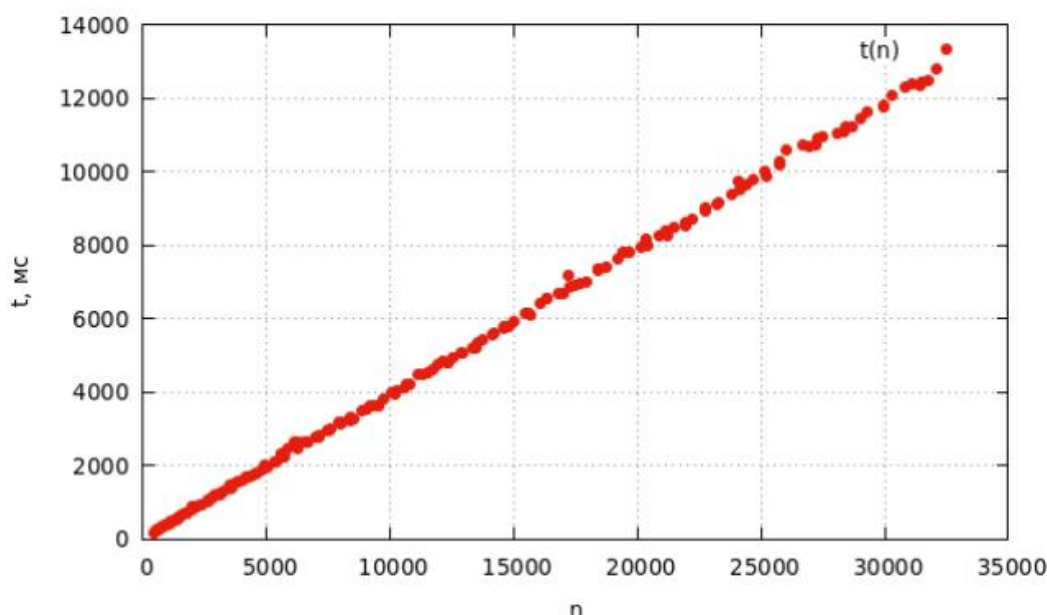


Рис. 3. Зависимость времени исполнения программы от числа узлов

Гибридный подход заключается в разработке алгоритма генерации более мелкой сетки вблизи границ неправильной формы, и алгоритма связи этой сетки с основной.

Чтобы получить возможность создавать более детальную сетку вблизи границ неправильной формы и при этом не переусложнять расчетную сетку, можно использовать билинейную интерполяцию для расчета температуры в узлах более подробной сетки.

Кроме того, в качестве следующего направления разработки можно выделить обобщение метода на трехмерный случай, поскольку это даст наибольший выигрыш по сравнению с классическим решением МКЭ, так как позволит сохранить линейную вычислительную сложность.

Заключение. В работе продемонстрирована реализация метода конечных элементов в комбинации с методом расщепления для решения задачи нестационарной теплопроводности в двумерной области. Разработанный подход позволяет получать результаты, сопоставимые по точности с традицион-

ным МКЭ (реализованным в ANSYS) при значительно меньших вычислительных затратах.

Таким образом, использование метода расщепления представляет собой высокоэффективный и ресурсосберегающий инструмент для решения многомерных нестационарных задач. Данный подход может быть особенно полезен при решении крупномасштабных нестационарных задач.

Что касается перспектив развития, то основное направление работы связано с преодолением ограничения, накладываемого формой сетки, и поиском путей для работы с нерегулярными сетками без потери вычислительного выигрыша.

Литература

- [1] Даутов Р.З., Карчевский М.М. *Введение в теорию метода конечных элементов*. Казань, Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2004, 239 с.
- [2] Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов*. Москва, Мир, 1979, 389 с.
- [3] Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимация*. Москва, Мир, 1986, 318 с.
- [4] Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. Москва, Наука, 1971, 552 с.
- [5] Годунов С.А., Рябенский В.С. *Разностные схемы*. Москва, Наука, 1977, 439 с.

Application of the splitting method in solving multidimensional non-stationary problems by the finite element method

Kochetov Ivan Andreevich

ivan-kochetov@mail.ru

Trudonoshin Vladimir Anatolyevich

trudonoshin@mail.ru

BMSTU, Moscow, Russia

The paper is devoted to the application of the splitting method within the framework of the finite element method for modeling unsteady thermal conduction processes in a two-dimensional domain. A mathematical model is presented, and an approach for combining FEM and the splitting method is described. A program has been developed for its implementation. The simulation results and calculation time are compared with the ANSYS v9 software package, demonstrating the acceleration of calculations.

Keywords: *splitting method, finite element method, computational efficiency, thermal conductivity, approximation, unsteady task*