

УДК 681.51

Регулирование положения трехзвенного плоского маятника при воздействии на свободное третье звено

Шишков Иван Алексеевич

shishkovia@student.bmstu.ru

Щербак Ольга Юрьевна^(*)

scherbak.olga.j@bmstu.ru

SPIN-код: 2956-0295

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрена задача регулирования положения трехзвенного плоского маятника с учетом физических ограничений на углы поворота звеньев маятника и приложения управляющих моментов с применением управляющих тросиков к последнему свободному звену. Регулирование реализовано с использованием ПИ-регуляторов по ошибкам заданных значений углового положения третьего звена и линейных координат конечных точек первого и второго звеньев. Результаты моделирования показывают принципиальную применимость рассмотренной системы регулирования трехзвенного плоского маятника.

Ключевые слова: трехзвенный маятник, управление маятником, ПИ-регулятор, система регулирования, управляющие тросики

Position control of a three-linked flat pendulum when acting on the free third link

Shishkov Ivan Alekseevich

shishkovia@student.bmstu.ru

Scherbak Olga Yurievna^(*)

scherbak.olga.j@bmstu.ru

SPIN-code: 2956-0295

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. The problem of regulating the position of a three-link flat pendulum has been considered, considering physical limitations on the angles of rotation of the pendulum links and the application of control using control cables acting on the last free link. Regulation is implemented using PI controllers based on the errors of the desired values of the angular position of the third link and the linear coordinates of the endpoints of the first and second links. The results of the simulation demonstrate the fundamental applicability of the regulation system for the three-link flat pendulum under consideration.

Keywords: three-link pendulum, pendulum control, PI controller, regulatory system, control cables

Введение. В последнее время все более актуальной становится разработка роботизированных манипуляторов — многозвенных робототехнических механизмов, используемых, например, в медицине, промышленности, космической области, а также в биотехнических системах [1, 2]. Для корректной работы таких систем необходима разработка системы управления, обеспечи-

вающей надежное и точное позиционирование как угловых положений элементов многосвязного механизма, так и координат положения узлов. В качестве математической модели роботизированных манипуляторов можно рассматривать трехзвенный плоский маятник. Существуют различные подходы к синтезу подобной системы управления [3–5], однако в данной работе управление реализуется посредством управляющих тросиков, точкой приложения которых является свободное последнее звено, которое может применяться в экзопротезах [6, 7].

Материалы и методы. Трехзвенный плоский маятник, кинематическая схема которого представлена на рис. 1, состоит из трех звеньев различной массы и длины [8, 9]. Положение каждого звена определяется соответствующим углом поворота звена относительно заданного положения основания [10, 11].

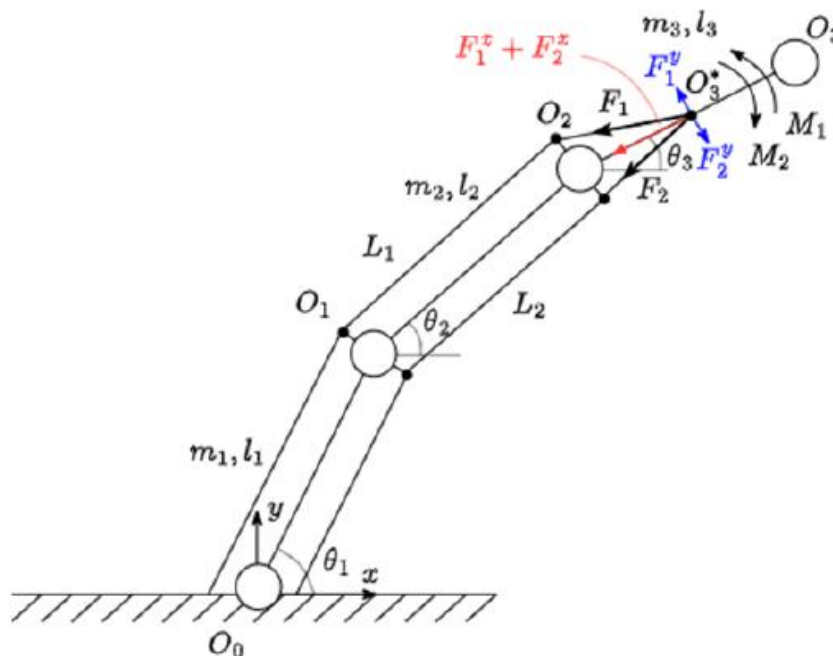


Рис. 1. Кинематическая схема плоского трехзвенного маятника

Математическую модель исследуемой системы можно сформировать с использованием системы уравнений Лагранжа 2-го рода, в результате чего в упрощенной форме записи получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}\ddot{\theta}_1 + A_{12}\ddot{\theta}_2 + A_{13}\ddot{\theta}_3 + B_{12}\dot{\theta}_2^2 + B_{13}\dot{\theta}_3^2 + \eta_1\dot{\theta}_1 + \\ \quad + g\left(m_1\frac{l_1}{2} + m_2l_1 + m_3l_1\right)\cos\theta_1 = u_{\theta_1}; \\ A_{21}\ddot{\theta}_1 + A_{22}\ddot{\theta}_2 + A_{23}\ddot{\theta}_3 + B_{21}\dot{\theta}_1^2 + B_{22}\dot{\theta}_2^2 + \\ \quad + B_{23}\dot{\theta}_3^2 + C_{22}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \eta_2\dot{\theta}_2 + g\left(m_2\frac{l_2}{2} + m_3l_2\right)\cos\theta_2 = u_{\theta_2}; \\ A_{31}\ddot{\theta}_1 + A_{32}\ddot{\theta}_2 + A_{33}\ddot{\theta}_3 + B_{31}\dot{\theta}_1^2 + B_{32}\dot{\theta}_2^2 + \\ \quad + B_{33}\dot{\theta}_3^2 + C_{33}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + C_{36}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + \eta_3\dot{\theta}_3 + gm_3\frac{l_3}{2}\cos\theta_3 = u_{\theta_3}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — углы поворота первого, второго и третьего звена; $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ — угловые скорости; $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3$ — угловые ускорения; $u_{\theta_1}, u_{\theta_2}, u_{\theta_3}$ — управляющие воздействия по каждому углу; A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} — упрощенное обозначение функций $A_{ij}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), B_{ij}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), C_{ij}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$; m_1, m_2, m_3 — массы каждого звена; l_1, l_2, l_3 — длины каждого звена; η_1, η_2, η_3 — коэффициенты демпфирования.

Управление положением предлагается формировать через приложение в точке O_3^* сил F_1, F_2 , создаваемых управляющими тросиками, к середине последнего третьего звена, через изменения их длин L_1, L_2 . Длины управляющих тросиков изменяются под действием исполнительных органов, динамика которых аппроксимируется системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} T\dot{L}_1 + L_1 = c; \\ T\dot{L}_2 + L_2 = -c, \end{cases} \quad (12)$$

где T — постоянная времени; c — управляющее воздействие, которое формируется с использованием ПИ-регуляторов по углу поворота последнего звена и по координатам узловых точек первого и второго звеньев маятника:

$$c = \gamma_1 \text{ПИ}(e_{\theta_3}) + \gamma_2 \text{ПИ}(e_{x_{O_1}}, e_{y_{O_1}}) + \gamma_3 \text{ПИ}(e_{x_{O_2}}, e_{y_{O_2}}), \quad (13)$$

где γ_i — весовые коэффициенты; e_{θ_3} — ошибка по углу поворота последнего звена θ_3 ; $e_{x_{O_1}}, e_{y_{O_1}}$ — ошибки по положению точки O_1 первого звена; $e_{x_{O_2}}, e_{y_{O_2}}$ — ошибки по положению точки O_2 второго звена. Управляющие воздействия на третье звено возникнут в результате сокращения длин управляющих тросиков и примет вид:

$$u_{\theta_3} = F_1^y \frac{l_3}{2} - F_2^y \frac{l_3}{2} = M_1 - M_2, \quad (14)$$

где F_1^y, F_2^y — перпендикулярные составляющие сил F_1 и F_2 , возникающих при сокращении управляющих тросиков, которые также будут действовать через кинематические связи на второе и первое звенья. Таким образом, продольные составляющие сил F_1^x и F_2^x действующие вдоль третьего звена, формируют управляющее воздействие на второе звено:

$$u_{\theta_2} = (F_1^x + F_2^x) \sin(\theta_2 - \theta_3) l_2. \quad (15)$$

Аналогично продольная составляющая суммы сил $F_1^x + F_2^x$, передающаяся от второго звена к первому, формирует управляющее воздействие на первое звено:

$$u_{\theta_1} = (F_1^x + F_2^x) \cos(\theta_2 - \theta_3) \sin(\theta_1 - \theta_2) l_1. \quad (16)$$

Для ограничения углов поворота звеньев трехзвенного маятника введем ограничения, приблизительно соответствующие анатомическим ограничениям подвижности суставов кисти человека [12], на возможные значения угла

θ_1 , а также на величину углового рассогласования между первым и вторым, вторым и третьим звеньями, что математически записывается в виде

$$\begin{aligned} -23^\circ &\leq \theta_1 \leq 104^\circ; \\ 0^\circ &\leq \theta_1 - \theta_2 \leq 95^\circ; \\ 0^\circ &\leq \theta_2 - \theta_3 \leq 40^\circ; \\ \theta_1 &\leq \theta_2 \leq \theta_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Результаты. Для вычислительных экспериментов были заданы параметры системы со следующими значениями: $m_1 = m_2 = m_3 = 0,05$ кг, $l_1 = l_2 = l_3 = 0,03$ м, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0,05$, $T = 0,007$ с; регулятор ПИ(e_{θ_3}) с коэффициентами $K_P = 5000$, $K_I = 100$, регуляторы ПИ($e_{x_{O_1}}, e_{y_{O_1}}$) и ПИ($e_{x_{O_2}}, e_{y_{O_2}}$) с коэффициентами $K_P = 100$, $K_I = 0,5$. Начальные значения углов: $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$, $\theta_3 = 90^\circ$, заданное значение угла поворота третьего звена 45° , а линейные координаты точек O_1 и O_2 выбраны таким образом, чтобы углы поворота первого и второго звена также были равны 45° . Результаты моделирования в виде начального положения трехзвенного плоского маятника и положения после действия управления представлены на рис. 2.

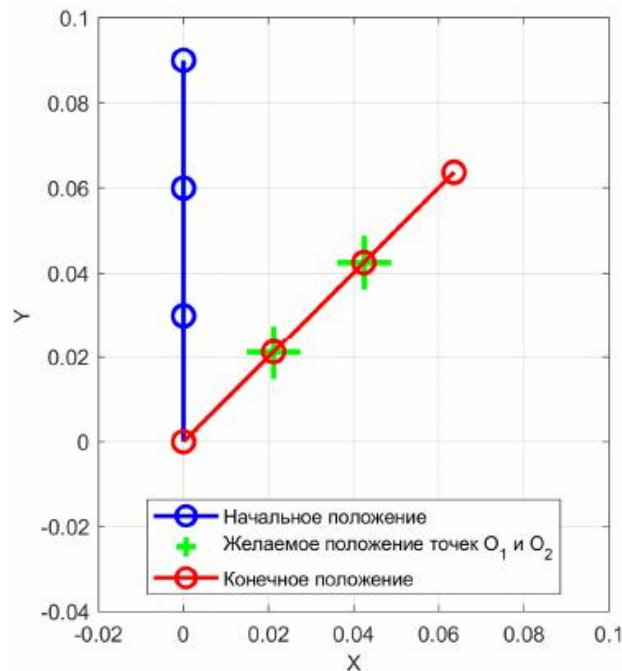


Рис. 2. Результаты моделирования системы регулирования трехзвенного плоского маятника

Обсуждение полученных результатов. Полученные результаты показали, что при рассматриваемой задаче регулирования трехзвенный маятник достигает заданного положения.

Заключение. В работе рассмотрена задача регулирования положения трехзвенного плоским маятником через свободное звено. Особенностью формирования управления является учет углового положения третьего звена и линейных координат конечных точек первого и второго звеньев при воздействии на свободное третье звено. Вычислительные эксперименты показали применимость данного подхода, однако в дальнейшем потребуются ввести учет динамики исполнительных органов, оптимальную настройку коэффициентов регуляторов, определить области допустимых значений фактически терминальных условий: угла, координат двух точек.

Список источников

- [1] Масленников А.Л., Щербак О.Ю. Перспективы развития биотехнических систем, создаваемых по образу двигательной системы человека. *Journal of Advanced Research in Natural Science*, 2019, № 8, с. 49–57. <https://doi.org/10.26160/2572-4347-2019-8-49-57>
- [2] Scherbak O.Yu., Maslennikov A.L. Biotechnical system based on the wrist joint control system tuning via genetic algorithm. *Russian journal of biomechanics*, 2025, vol. 29, no. 2, pp. 116–122. <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2025.2.11>
- [3] Масленников А.Л., Заика В.В. Цифровая система управления трехзвенного сферического маятника с координированным управлением. *Автоматизация. Современные технологии*, 2022, № 12(76), с. 566—572. <https://doi.org/10.36652/0869-4931-2022-76-12-566-572>
- [4] Заика В.В., Масленников А.Л. Синтез системы регулирования сферического маятника методом компенсации нелинейностей. *Фундаментальные основы механики*, 2019, № 4, с. 74–79. <https://doi.org/10.26160/2542-0127-2019-4-74-79>
- [5] Заика В.В., Масленников А.Л. Цифровая система управления сферическим маятником. *Journal of Advanced Research in Technical Science*, 2020, № 21, с. 82–88. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2020-21-82-88>
- [6] Bajaj A., Jain V., Kumar P., Unal A., Saxena A. Soft hand exoskeleton for adaptive grasping using a compact differential mechanism. *Mechanism and Machine Science: Select Proceedings of Asian MMS 2018*. Springer, Singapore, 2021, pp. 733–746. https://doi.org/10.1007/978-981-15-4477-4_52
- [7] Tsai Y.-L., Huang J.-J., Pu S.-W., Chen H.-P., Hsu S.-C., Chang J.-Y., Pei Y.-C. Usability Assessment of a Cable-Driven Exoskeletal Robot for Hand Rehabilitation. *Frontiers in Neurobotics*, 2019, no. 13, pp. 1–11. <https://doi.org/10.3389/fnbot.2019.00003>
- [8] Olsson M.G. Spherical pendulum revisited. *Am. J. Phys*, 1981, no. 49, pp. 531–534. <https://doi.org/10.1119/1.12666>
- [9] Miles J.W. Resonant motion of a spherical pendulum. *Physica D*, 1984, no. 3 (11), pp. 309–323. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90013-7](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90013-7)
- [10] Awrejcewicz J. *Classical mechanics. Dynamics*. New York, Springer, 2012, 466 p.
- [11] Заика В.В., Масленников А.Л. Математическое моделирование однозвенного сферического маятника в сферической системе координат. *Политехнический молодежный журнал*, 2019, № 9 (38). <https://doi.org/10.18698/2541-8009-2020-01-566>
- [12] Bain G.I., Polites N., Higgs B.G., Heptinstall R.J., McGrath A.M. The functional range of motion of the finger joints. *Journal of Hand Surgery*, 2014, no. 4 (40), pp. 11–40. <https://doi.org/10.1177/1753193414533754>