

УДК 539.3

Моделирование процессов устойчивости тонких пластин на основе асимптотической теории

Бебенина Антонина Александровна

bebeninaaa@bmstu.ru

SPIN-код: 4785-9215

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрено применение асимптотической теории для построения теории устойчивости тонких упругих многослойных композиционных пластин. Сформулированы и решены локальные задачи теории устойчивости, а также выведены осредненные уравнения равновесия пластины в основном состоянии, без введения каких-либо допущений относительно характера перемещений и напряжений. Выведены осредненные определяющие соотношения, деформации срединной поверхности, кривизны и градиенты деформаций для тонкой упругой пластины. Показано сравнение мембранных перемещений в асимптотической теории с классическими теориями пластин Кирхгофа — Лява и Тимошенко.

Ключевые слова: тонкие пластины, композиционные материалы, асимптотическая теория, теория устойчивости, численное моделирование

Modeling the stability processes of thin plates based on asymptotic theory

Bebenina Antonina Alexandrovna

bebeninaaa@bmstu.ru

SPIN-code: 4785-9215

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. The work considers the use of asymptotic theory to build the theory of stability of thin elastic multilayer compositional plates. Local tasks of the theory of stability are formulated and solved, as well as outstanding equations of the equilibrium of the plate in the main state, without the introduction of any assumptions regarding the nature of movements and stresses. Offerated determining ratios, deformations of the middle surface, curvature and gradients of deformations for a thin elastic plate are bred. The comparison of membrane movements in asymptotic theory with the classic theories of the plate of Kirchhoff-Laza and Tymoshenko is shown.

Keywords: thin plates, composite materials, asymptotic theory, stability theory, numerical modeling

Введение. Расчет тонкостенных конструкций на устойчивость является, как правило, одним из основных расчетных случаев при проектировании различных изделий авиационной, ракетной, судостроительной, строительной промышленности [1–3]. Несмотря на то, что классические теории устойчивости конструкций, основанные на теориях пластин и оболочек Кирхгофа — Лява и Тимошенко, применяются достаточно давно, известно, что значения критиче-

ских нагрузок, получаемые по этим теориям, часто оказываются существенно завышенными. В настоящее время активно развивается асимптотическая теория тонких многослойных пластин [4–7], вывод основных уравнений которой основан только на анализе асимптотических разложений исходных трехмерных уравнений по малому геометрическому параметру, представляющему отношение толщины пластины к ее длине.

Материалы и методы. Согласно трехмерной теории устойчивости [8] рассматриваются основное и варьированное состояние пластины, как области трехмерного евклидова пространства, при воздействии заданной системы нагрузок. Для величин основного состояния: компонент тензора напряжений σ_{ij}^0 , тензора малых деформаций ε_{kl}^0 и вектора перемещений u_i^0 в декартовом базисе основном (устойчивом) состоянии имеем следующую трехмерную задачу линейной теории упругости:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}^0 &= 0, \\ \varepsilon_{ij}^0 &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ \sigma_{ij}^0 &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0, \\ \Sigma_S : n_i[\sigma_{ij}^0] &= 0, \quad [u_i] = 0, \\ \Sigma_\sigma : n_i\sigma_{ij}^0 &= \tilde{S}_j^0, \quad \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^0 = -\tilde{p}_\pm\delta_{i3}, \quad \Sigma_T : u_i = u_{ei},\end{aligned}\tag{1}$$

состоящую из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на $\Sigma_\pm$ — внешней и внутренней поверхностях пластины, на которых задано давление $\tilde{p}_\pm$, граничных условий на части торцевой поверхности Σ_T , где задан вектор перемещений u_{ei} и части торцевой поверхности Σ_σ , где задан вектор усилий $\tilde{S}_j^0$, а также граничных условий идеального контакта на поверхности контакта Σ_S отдельных слоев пластины ($[u_i]$ — скачок функций), которые могут и отсутствовать, например для однослойной пластины, $u_{\alpha,\beta} = \partial u_\alpha / \partial X^\beta$ — оператор дифференцирования, X^β — декартовы координаты, C_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости пластины, который зависит от координат X^β .

По латинским индексам $i, j, k, \dots$, везде идет суммирование от 1 до 3, по греческим индексам α, β, γ суммирования нет, индексы α, β, γ образуют четную подстановку, по заглавным индексам I, J, K суммирование идет от 1 до 2.

Для варьированного состояния имеем следующую задачу трехмерной теории устойчивости [10, 19]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,i} - \epsilon_{jmk} B_{im} \sigma_{ik}^0 &= 0, \\
B_{im} &= \omega_{m,i}, \quad \omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{imk} w_{m,k}, \\
\epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (w_{i,j} + w_{j,i}), \\
\sigma_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \\
\Sigma_\sigma : n_i (\sigma_{ij} - \epsilon_{jmk} \sigma_{ik}^0 \omega_m) &= 0, \quad \Sigma_{3\pm} : n_i (\sigma_{ij} - \epsilon_{jmk} \sigma_{ik}^0 \omega_m) = 0, \quad \Sigma_T : w_i = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ϵ_{kl} — тензора малых деформаций; w_i — вектора перемещений в варьированном состоянии; n_i — компоненты вектора нормали; ω_γ — компоненты вектора поворота; ϵ_{omk} — компоненты тензора Леви — Чивиты [20].

Будем полагать, что рассматриваемая пластина является тонкой, и для нее можно ввести малый параметр $\kappa = h/L \ll 1$, как отношение общей толщины пластины h к характерному размеру всей пластины L .

Решение задачи (1) для основного состояния, следуя работам [12–15], будем искать в виде асимптотических разложений по параметру κ в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \tag{3}$$

Разложение для деформаций имеет вид:

$$\epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij}^{0(0)} + \kappa \epsilon_{ij}^{0(1)} + \kappa^2 \epsilon_{ij}^{0(2)} + \dots \tag{4}$$

Подставляя выражение (4) в закон Гука в системе (2), получаем асимптотическое разложения для напряжений

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{0(0)} + \kappa \sigma_{ij}^{0(1)} + \kappa^2 \sigma_{ij}^{0(2)} + \dots \tag{5}$$

Подставляя разложения (3)–(5) для перемещений, деформаций и напряжений в уравнения равновесия системы (1), получим их асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa} \sigma_{i3/3}^{0(0)} + (\sigma_{iJ,J}^{0(0)} + \sigma_{i3/3}^{0(1)}) + \kappa (\sigma_{iJ,J}^{0(1)} + \sigma_{i3/3}^{0(2)}) + \kappa^2 (\sigma_{iJ,J}^{0(2)} + \sigma_{i3/3}^{0(3)}) + \dots &= 0, \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{0(0)} + \kappa \sigma_{i3}^{0(1)} + \kappa^2 \sigma_{i3}^{0(2)} + \dots &= -\kappa^3 p_\pm \delta_{i3}, \\
\Sigma_T : u_i &= u_i^{(0)} + \kappa u_i^{(1)} + \kappa^2 u_i^{(2)} + \kappa^3 u_i^{(3)} + \dots = u_{ei}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Задача для нулевого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{i3/3}^{0(0)} &= 0, \\
\sigma_{i3}^{0(0)} &= C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{0(0)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{0(0)}, \quad \sigma_{IJ}^{0(0)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{0(0)} + C_{IJk3} \varepsilon_{k3}^{0(0)}, \\
\varepsilon_{IJ}^{0(0)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad \varepsilon_{I3}^{0(0)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(1)}), \quad \varepsilon_{33}^{0(0)} = u_{3/3}^{(1)}, \\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{0(0)} &= 0, \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{0(0)}] = 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0, \quad \langle u_i^{(1)} \rangle = 0;
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь обозначена операция осреднения по толщине пластины:

$$\langle u_i^{(1)} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(3)} d\xi. \tag{8}$$

Результаты. Ввиду того, что локальная задача является одномерной по переменной ξ , ее решение можно найти аналитически:

$$\begin{aligned}
u_I^{(1)} &= -\xi u_{3,I}^{(0)} + 2S_{IKL} \varepsilon_{KL}^{0(0)}, \quad u_3^{(1)} = S_{KL} \varepsilon_{KL}^{0(0)}, \\
\sigma_{IJ}^{0(0)} &= C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{0(0)}, \quad \sigma_{i3}^{0(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Введем обозначения для усилий T_{IJ}^0 , моментов M_{IJ}^0 и перерезывающих сил Q_I в основном состоянии в пластине:

$$\begin{aligned}
T_{IJ}^0 &= \langle \sigma_{IJ}^{0(0)} \rangle + \kappa \langle \sigma_{IJ}^{0(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \sigma_{IJ}^{0(2)} \rangle + \dots \\
Q_I^0 &= \kappa \langle \sigma_{I3}^{0(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \sigma_{I3}^{0(2)} \rangle + \dots \\
M_{IJ}^0 &= \kappa \langle \xi \sigma_{IJ}^{0(0)} \rangle + \kappa^2 \langle \xi \sigma_{IJ}^{0(1)} \rangle + \dots
\end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения равновесия пластины можно записать

$$T_{IJ,J}^0 = 0, \quad Q_{J,J}^0 = \Delta \bar{p}, \quad M_{IJ,J}^0 - Q_I^0 = 0, \tag{11}$$

здесь обозначено $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p$.

Осредненные определяющие соотношения для пластины в основном состоянии имеют вид

$$\begin{aligned}
T_{IJ}^0 &= \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{0(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL}^0 + K_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{0(0)}, \\
M_{IJ}^0 &= B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{0(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL}^0 + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{0(0)}, \\
Q_I^0 &= K_{IJKL} \varepsilon_{KL,J}^{0(0)} + \kappa^2 \langle \sigma_{I3}^{0(2)} \rangle.
\end{aligned} \tag{12}$$

Деформация срединной поверхности $\varepsilon_{KL}^{0(0)}$, кривизна η_{KL}^0 и градиенты деформаций $\varepsilon_{KL,N}^{0(0)}$, которые зависят от 3 функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ глобальных переменных x_I имеют вид:

$$\varepsilon_{IJ}^{0(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad \eta_{KL}^0 = -u_{3,KL}^{(0)}. \quad (13)$$

Обсуждение полученных результатов. Из выражения (9) получаем, что мембранные перемещения в пластине в основном состоянии, с точностью до членов второго порядка малости, линейно зависят от поперечной координаты, как в классических теориях пластин Кирхгофа — Лява и Тимошенко.

Заключение. Рассмотрено применение асимптотической теории для построения теории устойчивости тонких упругих многослойных композиционных пластин. Сформулированы и решены локальные задачи теории устойчивости, а также выведены осредненные уравнения равновесия пластины в основном состоянии, без введения каких-либо допущений относительно характера перемещений и напряжений. Выведены осредненные определяющие соотношения, деформации срединной поверхности, кривизны и градиенты деформаций для тонкой упругой пластины. Показано сравнение мембранных перемещений в асимптотической теории с классическими теориями пластин Кирхгофа — Лява и Тимошенко.

Список источников

- [1] Тимошенко С.П. *Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы.* Москва, Наука, 1971, 808 с.
- [2] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем.* Москва, Машиностроение, 1978, 312 с.
- [3] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем.* Москва, Наука, 1967, 964 с.
- [4] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*, 2012, № 3, с. 86–100.
- [5] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, № 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html> (дата обращения 15.09.2025).
- [6] Димитриенко Ю.И., Каримов С.Б., Димитриенко А.Ю. Моделирование конечных деформаций композиционных материалов на основе универсальных моделей A_n и метода асимптотического осреднения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 2 (42), с. 17–34.
- [7] Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С. Моделирование деформирования слоистых упруго-пластических композитов на основе микроструктурной теории течения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 4 (44), с. 3–19.
- [8] Димитриенко Ю.И. Обобщенная трехмерная теория устойчивости. Часть 2: малые деформации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*, 2014, № 1, с. 17–26.