

УДК 539.3

Моделирование деформирования многослойных микрополярных пластин на основе асимптотического метода

Бойко Сергей Владимирович

s.boyko1999@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, Москва

Аннотация. Рассмотрена общая трехмерная постановка квазистатической задачи для многослойной пластины в рамках микрополярной теории упругости. К поставленной задаче применяется метод асимптотического осреднения для получения рекуррентной последовательности локальных задач и ее решения на их основе. Входные данные для решения первой задачи из последовательности находятся с помощью составления осредненной системы уравнений посредством введения операции осреднения по толщине пластины. Рассмотрен пример решения задачи об изгибе пластины в общем виде на основе полученных данных. Проиллюстрирован пример численных расчетов на основе общего решения рассмотренной задачи. Сделаны выводы от том, что с помощью рассмотренного метода возможно найти все неизвестные величины поставленной задачи.

Ключевые слова: метод асимптотического осреднения, микрополярная теория упругости, моментные напряжения, тензор напряжений, задача об изгибе пластины

Modeling of the deformation of multilayer micropolar plates based on the method of asymptotic homogenization

Boiko Sergei Vladimirovich

s.boyko1999@mail.ru

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. The article considers the general three-dimensional formulation of the quasi-static problem for a multilayer plate within the framework of the micropolar theory of elasticity. The author applies the method of asymptotic homogenization to the problem to obtain a recurrent sequence of local problems and its solution based on them. Input data for solving the first problem from the sequence are found by composing an homogenized system of equations by introducing the operation of homogenization over the thickness of the plate. The author then considers the example of the solution of the plate bending problem in the general form based on the obtained data. An example of numerical calculations based on the general solution of the considered problem is illustrated. The article makes a conclusion that using the considered method it is possible to find all unknown quantities of the problem.

Keywords: method of asymptotic homogenization, micropolar elasticity, couple stresses, stress tensor, plate bending problem

Введение. В абсолютном большинстве задач механики деформируемых твердых тел используется классическая теория упругости, которая хорошо согла-

суется с реальными данными. Однако в некоторых задачах возникают ощутимые различия с экспериментом. В подобных случаях можно рассмотреть задачу в рамках не классической, а моментной теории упругости, в которой деформации зависят не только от классического вектора перемещений. Из-за этого в теории возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, их тензоры становятся несимметричными в общем случае.

Первая моментная теория упругости была предложена в работах братьев Коссера [1], а интерес к ней был проявлен в середине прошлого столетия [2]. Появилось достаточное количество вариантов моментных теорий [3], одна из самых известных среди них — микрополярная теория упругости [4].

В работах [5–7] используется подход к выводу уравнений для механики тонких тел, основанный на асимптотических разложениях по малому геометрическому параметру. В работах [7–9] рассмотрен случай многослойной пластины в классической теории (для материалов с различными свойствами) и с помощью этих разложений выведена теоретическая основа для решения задач, позволяющая вычислить все компоненты симметричного тензора напряжений посредством решения рекуррентной последовательности локальных задач.

В данной работе предпринимается попытка применения средств асимптотической теории для задачи моментной микрополярной теории упругости в случае тонкой многослойной пластины в общем виде, рассмотрен пример конкретной практической задачи (об изгибе) и пример численных расчетов на основе полученных результатов.

Материалы и методы. Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины, введем малый параметр $\alpha = \frac{h}{L}$, где h — общая толщина пластины, а L — ее характерный размер (максимальная длина). Введем также глобальные (медленные) координаты $x_k = \frac{\tilde{x}_k}{L}$, где $\tilde{x}_k$ — декартовы координаты, а также локальную (быструю) координату $\xi = \frac{x_3}{\alpha}$. Глобальные координаты изменяются от 0 до 1, а локальная — от $-0,5$ до $0,5$ и обозначает расстояние от срединной поверхности пластины до какой-либо точки (в соответственно положительном или отрицательном направлениях оси $O\tilde{x}_3$). При этом декартовы координаты ориентированы таким образом, что оси $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$ принадлежат срединной поверхности пластины и перпендикулярны ее боковым сторонам, а ось $O\tilde{x}_3$ перпендикулярна срединной поверхности [7].

Общая трехмерная постановка задачи микрополярной теории упругости (1) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji,j} + \rho f_i &= 0, \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + M_{ji,j} + \rho h_{m_i} = 0; \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \gamma_{kl} + B_{ijkl} \kappa_{kl}, M_{ij} = A_{ijkl} \kappa_{kl} + B_{klij} \gamma_{kl}; \\ \gamma_{ji} &= u_{i,j} - \varepsilon_{kji} k_k, \kappa_{ji} = k_{i,j}; \\ \Sigma_{3\pm}: \sigma_{ji} n_j &= -\alpha^3 p_{\pm} \delta_{i3}, M_{ji} n_j = -m_{i\pm}^{(0)} - \alpha m_{i\pm}^{(1)} - \alpha^2 m_{i\pm}^{(2)} - \dots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_T: u_i &= u_{ei}, k_i = k_{ei}; \\ \Sigma_S: [\sigma_{ji}]n_j &= 0, [M_{ji}]n_j = 0, [u_i] = 0, [k_i] = 0,\end{aligned}\quad (1)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений; M_{ij} — тензор моментных напряжений; ρ — плотность вещества; f_i — плотность массовых сил; h_{m_i} — плотность массовых моментов; C_{ijkl} — тензор модулей упругости; A_{ijkl} — тензор модулей моментной упругости; B_{ijkl} — тензор модулей смешанной упругости; u_i — вектор перемещений; k_i — вектор микровращений; n_j — вектор нормали к срединной поверхности пластины.

Постановка (1) состоит из уравнений равновесия, уравнения моментов, определяющих соотношений для тензоров напряжений и моментных напряжений, кинематических соотношений для тензоров деформации γ_{ji} и изгиба-кручения κ_{ji} [4], граничных условий на внешней, внутренней и торцевой поверхностях пластины, а также граничных условий на поверхности контакта слоев пластины. Также здесь принимается допущение о том, что давление (граничное условие для поперечных напряжений на внешней и внутренней поверхностях пластины) имеет третий порядок малости. Чаще всего это соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин, что подтверждалось в предыдущих работах [7–9]. Граничные условия для моментных напряжений рассматриваются в виде полного асимптотического разложения по функциям $m_i^{(n)} \pm$. В конкретных задачах некоторые из функций могут принимать конкретные значения или обнуляться в зависимости от наложенных условий.

Решение задачи (1) ищут в виде асимптотических разложений по параметру α в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат. К примеру, разложения для векторов перемещений и поворота (2):

$$\begin{aligned}u_k &= u_k^{(0)}(x_I) + \alpha u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \alpha^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \alpha^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots; \\ k_k &= k_k^{(0)}(x_I) + \alpha k_k^{(1)}(x_I, \xi) + \alpha^2 k_k^{(2)}(x_I, \xi) + \alpha^3 k_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots\end{aligned}\quad (2)$$

Используя представления (2) и постановку задачи (1), можно получить разложения для остальных неизвестных величин и на их основе сформировать последовательность локальных задач. При этом решения задачи предыдущего приближения будут являться входными данными для задачи следующего приближения. Для нахождения входных задачи нулевого приближения строится осредненная система уравнений на основе полученных асимптотических разложений и дополнительно введенной операции осреднения по толщине пластины (3):

$$\langle u_i^{(n)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(n)} d\xi; \quad \langle k_i^{(n)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} k_i^{(n)} d\xi; \quad n \in N_0. \quad (18)$$

Результаты. Для примера конкретной задачи рассмотрим задачу об изгибе шарнирно опертой прямоугольной центрально-симметричной пластины со

слоями из изотропных материалов. Для упрощения рассмотрим однослойную пластину в упрощенной микрополярной теории, в которой моментные напряжения принимаются равными нулю ($M_{ij} = 0$), но тензор напряжений все равно несимметричен в общем случае. Данная задача одномерная, то есть учитываем только глобальную координату x_1 (обозначим ее за x). Рассмотрим формулы для компонент напряжений межслойного сдвига σ_{31} (4) и σ_{13} (5):

$$\sigma_{31} = \alpha^2 \sigma_{31}^{(2)} = 12\alpha^2 \Delta p \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{8} \right); \quad (4)$$

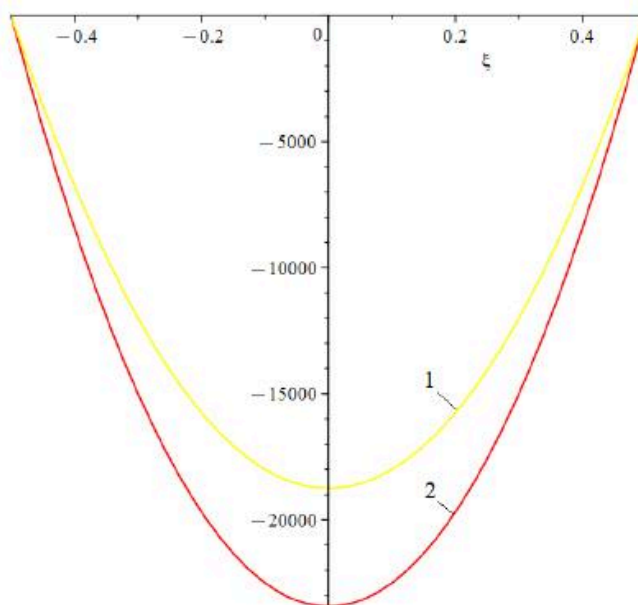
$$\sigma_{13} = \alpha^2 \sigma_{13}^{(2)} = 12\alpha^2 \Delta p \frac{C_{1331}}{C_{3131}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{8} \right). \quad (5)$$

Рассмотрим также пример численных результатов данной задачи для данных компонент для материала синтактическая пена со следующими компонентами тензора модулей упругости (данные получены из работы [10]):

$$\begin{aligned} C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} &= 4,25 \text{ ГПа}, C_{1122} = C_{1133} = C_{2233} = 2,19 \text{ ГПа}; \\ C_{2323} = C_{3232} = C_{1313} = C_{3131} &= C_{1212} = C_{2121} = 1,14 \text{ ГПа}; \\ C_{2332} = C_{3223} = C_{1331} = C_{3113} &= C_{1221} = C_{2112} = 0,91 \text{ ГПа}. \end{aligned}$$

Пусть на внешнюю поверхность пластины действует равномерно распределенное давление $\tilde{p}_+ = 5000$ Па, а внутренняя остается свободной, т. е. $\Delta \tilde{p} = 5000$ Па. Значение малого параметра примем $\alpha = 0,04$, что соответствует условиям малости.

Рассмотрим также графики напряжений межслойного сдвига σ_{31} и σ_{13} в микрополярной теории согласно формулам (4) и (5). На рисунке продемонстрированы совместные графики зависимости этих компонент от локальной координаты, полученные в упрощенной микрополярной и классической теориях, при конкретном значении глобальной координаты $x = 0,375$.



Совместные графики зависимости напряжений межслойного сдвига от локальной координаты ξ при $x = 0,375$: 1 — компонента σ_{13} ; 2 — компонента σ_{31}

Обсуждение полученных результатов. В классической теории упругости компоненты σ_{13} и σ_{31} равны друг другу из-за симметричности тензора напряжений. Полученная здесь формула (4) для σ_{31} совпадает с аналогичной формулой в классической теории, а формула (5) имеет различие из-за наличия члена $\frac{C_{3131}}{C_{3113}}$, который появляется из-за несимметричности тензора модулей упругости C_{ijkl} при перестановке индексов внутри пар в упрощенной микрополярной теории. При переходе к классической теории (посредством принятия этого типа симметрии тензора модулей упругости) формула (5) также совпадает с результатами для классической теории для данной компоненты в аналогичных статьях. Графики рассмотренных напряжений в целом повторяют друг друга, но больший по модулю экстремум имеет σ_{31} .

Заключение. Таким образом, можно сделать вывод о том, что рассмотренный метод, несмотря на свою вычислительную сложность, позволяет найти все требуемые неизвестные величины в задачах микрополярной теории упругости до требуемой точности.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Cosserat E., Cosserat F. *Th'eorie des corps d'eformables*. Paris, Herman et Fils, 1909.
- [2] Truesdell C.A., Toupin R.A. *The Classical Field Theories. Handbuch der Physik. Band 3, Teil I*. Berlin, Springer, 1960.
- [3] Hadjesfandiari A.R., Dargush G.F. Evolution of generalized couple-stress continuum theories: a critical analysis. *Preprint arXiv.1501.03112*, 2015. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1501.03112>
- [4] Новацкий В. *Теория упругости*. Москва, Мир, 1975, 872 с.
- [5] Kolpakov A.G. *Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses*. Berlin, Springer Verlag, 2004, 228 p.
- [6] Назаров С.А., Свирс Г.Х., Слуцкий А.С. Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней. *Математический сборник*, 2011, т. 202, № 8, с. 41–80.
- [7] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*, 2012, № 3, с. 86–99.
- [8] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Губарева Е.А. Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 4, с. 36–57.
- [9] Dimitrienko Y.I., Dimitrienko I.D. Modeling of the thin composite laminates with general anisotropy under harmonic vibrations by the asymptotic homogenization method. *Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2017, vol. 15 (3), pp. 219–237.
- [10] Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua. *Continuum models for materials with micro-structure*, 1995, pp. 1–22.