

УДК 539.3

Моделирование микроразрушений и SN-диаграммы усталостной прочности для композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения и «химического» критерия усталостной прочности

Димитриенко Юрий Иванович^(*)

dimit@bmstu.ru

Юрин Юрий Викторович

yvyurin@ya.ru

Сборщиков Сергей Васильевич

servassbor@mail.ru

Маремшаова Анастасия Александровна

maremshaova@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Предложен метод моделирования микроразрушений и SN-диаграммы усталостной прочности для композиционного материала на основе метода асимптотического осреднения периодических структур, конечно-элементном метода расчета тензоров концентрации микронапряжений в компонентах композита, «химического» критерия и критерия Мизеса-SN-None. Представлены результаты численных расчетов усталостной прочности композита.

Ключевые слова: композиционные материалы, усталостная прочность, метод асимптотического осреднения, химический критерий прочности, критерий Мизеса-SN-None, SN-диаграмма

Modeling of microcracks and SN-diagrams of fatigue strength for composite materials based on the method of asymptotic averaging and the «chemical» criterion of fatigue strength

Dimitrienko Yuri Ivanovich

dimit@bmstu.ru

Yurin Yuriy Viktorovich

yvyurin@ya.ru

Sborshchikov Sergey Vasilyevich

servassbor@mail.ru

Maremshaova Anastasia Alexandrovna

maremshaova@bmstu.ru

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. A method for modeling microcracks and SN-diagrams fatigue strength for a composite material based on the method of asymptotic averaging of periodic structures, the finite-element method for calculating microstress concentration tensors in composite components, the "chemical" criterion, and the Mises-SN criterion is proposed. The results of numerical calculations of the composite's fatigue strength are presented.

Keywords: composite materials, fatigue strength, asymptotic averaging method, chemical strength criterion, Mises-SN-None criterion, SN diagram

Введение. Для прогноза долговечности традиционно (в частности, в ПК ANSYS) используют SN-диаграммы, отражающие зависимость числа циклов до

разрушения от уровня напряжений. Для случая композитов их построение требует учета микроповреждений и процессов деградации структуры, поэтому моделирование микроразрушений становится важным инструментом для более точного описания усталостной прочности и повышения надежности конструкций из композиционных материалов.

Материалы и методы. Метод асимптотического осреднения позволяет сформулировать локальные задачи теории упругости L_{pq} на ячейке периодичности [1–3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij(pq)/j}^{\alpha} = 0; \\ \sigma_{ij(pq)}^{\alpha} = C_{ijkl}^{\alpha} \varepsilon_{kl(pq)}^{\alpha}; x_i \in (\tilde{V}_{\alpha\xi} \cup \Sigma'_s \cup \Sigma_s); \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha} = \frac{1}{2} (U_{i(pq)/j}^{\alpha} + U_{j(pq)/i}^{\alpha}), x_i \in \tilde{V}_{\alpha\xi}; U_{i(pq)}^{\alpha} = U_{i(pq)}^N; \\ U_{i(pq)}^{\alpha} = U_{i(pq)}^N; \\ (\sigma_{ij(pq)}^{\alpha} - \sigma_{ij(pq)}^N) n_j = 0; x_i \in \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha N}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{\alpha}(pq)$ — псевдонапряжения; $\varepsilon_{ij}^{\alpha}$ — псевдодеформации; $U_i^{\alpha}(pq)$ — псевдоперемещения в компоненте $\tilde{V}_{\alpha\xi}$ композита ($\alpha = 1 \dots N$, индекс N соответствует матрице композита) в рамках $1/8$ ячейки периодичности (ЯП) $\tilde{V}_{\xi}; \tilde{\Sigma}_{\xi\alpha\beta}$ — поверхность контакта компонентов, координатные плоскости $-\Sigma_s = \{\xi_s = 0\}$, а $\Sigma'_s = \{\xi_s = a_p / 2\}$, $s = 1, 2, 3$ торцевые поверхности ячейки периодичности; ξ_s — локальные координаты в ЯП; $/j = \partial / \partial \xi_j$; $\lambda^{\alpha}; \mu^{\alpha}$ — константы Ламе и C_{ijkl}^{α} — модули упругости компонентов. К задаче (1) присоединяются условия на торцевых поверхностях и на координатных плоскостях, которые различны для разных p и q :

Условия на торцевых поверхностях Σ'_s :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i(pq)}^{\alpha} = \frac{a_p}{2} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}; U_{j(pq)/i}^{\alpha} = 0; \\ U_{k(pq)/i}^{\alpha} = 0; \xi_m \in \Sigma'_i; i \neq j \neq k \neq i; p = q; \\ U_{i(pq)}^{\alpha} = \frac{a_p}{4} \bar{\varepsilon}_{pq} \delta_{ip}; U_{j(pq)/j}^{\alpha} = 0; \\ U_{k(pq)}^{\alpha} = 0; \xi_m \in \Sigma'_i; i \neq j \neq k \neq i; p \neq q. \end{array} \right. \quad (2)$$

Условия на плоскостях симметрии Σ_s имеют аналогичный вид, но с нулевой правой частью. Здесь $\bar{\varepsilon}_{pq}$ — макродеформации композита, которые заданы для ЯП.

Для численного решения локальных задач (1), (2) применялся метод конечного элемента [4]. После решения серии задач L_{pq} для всех значений (p, q) и нахождения псевдоперемещений $U_{i(pq)}^\alpha$ и псевдонапряжений $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$ в компонентах композиционного материала, используя интегрирование псевдонапряжений по областям, занятым компонентами композиционного материала, можно вычислить средние напряжения в композиционном материале $\bar{\sigma}_{ij}$ (макронапряжения):

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{p,q} \bar{\sigma}_{ij(pq)} \cdot \bar{\varepsilon}_{pq} = \sigma_{ij(pq)}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V(a)} \sigma_{ij(pq)}^\alpha dV, \quad (3)$$

которые связаны с макродеформациями $\bar{\varepsilon}_{pq}$ с помощью эффективных определяющих соотношений упругости

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijpq} \bar{\varepsilon}_{pq}, \quad (4)$$

где $\bar{C}_{ijpq}$ — компоненты тензора эффективных модулей упругости композиционного материала, которые вычисляются по формулам

$$\bar{C}_{ijpq} = \langle C_{ijpq}^{(0)} \rangle, C_{ijpq}^{(0)}(\xi_l) = \frac{\sigma_{ij(pq)}^\alpha(\xi_l)}{\bar{\varepsilon}_{pq}}, \quad (5)$$

где по p и q суммирования нет. Тензор концентраций напряжений $B_{ijkl}^\alpha(\xi_m)$, связывающий напряжения в компонентах композиционного материала $\sigma_{ij}^\alpha(\xi_m) = \sum_{p,q} \sigma_{ij(pq)}^\alpha$ (микронапряжения) и макронапряжения $\bar{\sigma}_{ij}$,

$$\sigma_{ij}^\alpha(\xi_m) = B_{ijkl}^\alpha(\xi_m) \bar{\sigma}_{kl} \quad (6)$$

определяем с помощью следующих соотношений:

$$B_{ijkl}^\alpha(\xi_m) = \sum_{p,q} C_{ijpq}^{(0)}(\xi_m) \bar{\Pi}_{pqkl}, \quad (7)$$

где $\bar{\Pi}_{ijpq} = \bar{C}_{ijpq}^{-1}$ — тензор упругих податливостей, тензор $C_{ijpq}^{(0)}(\xi_l)$ определяется формулой (7).

«Химический» критерий длительной прочности. Моделирование усталостной прочности композита основано на поиске допустимых предельных значений микронапряжений $\sigma_{ij}(\xi_m)$ в компонентах композита. Согласно химическому критерию [5–6] длительной прочности разрушение компонента

композита в некоторой точке ξ_m^* в момент времени $t^*(\xi_m^*)$ происходит, если в этот момент достигает значения 1 параметр повреждаемости $z(t)$:

$$z(t^*(\xi_m^*)) = 1. \quad (8)$$

Параметр повреждаемости $z(t)$ состоит из трех частей: мгновенной части, обратимых и необратимых повреждений [5]:

$$z(t) = z_0 + z_r(t_*) + z_d(t_*). \quad (9)$$

Рассмотрим многоцикловое нагружение, когда число циклов $N = t\omega$ велико. При простом (пропорциональном) моногармоническом нагружении функция нагружения $\zeta(t)$ и микронапряжения σ_{ij} изменяются по закону:

$$\zeta(t) = \frac{1}{1+|k|}(k + \sin \omega t), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \frac{1}{1+|k|}(k + \sin \omega t). \quad (10)$$

Здесь $\omega \geq 0$ — частота нагружения; k — параметр асимметрии цикла.

Общее выражение для параметра повреждаемости при циклическом нагружении (без учета объемных напряжений) можно представить в виде:

$$z(t) = \sigma_u^{02} \left(\frac{1}{3\sigma_s^2(1+B_C V(\sigma_m))} + \tilde{N}_{KG}(k, \sigma^0) \right) + \sigma^{02} \left(\frac{g^2(\sigma^0, k)}{\sigma_{T+}^2} \right), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{KG}(k, \sigma^0) &= \tilde{N}_K^+(k, \sigma^0) t^{1-\alpha^+} - \tilde{N}_F^+(k, \sigma^0) t^{2-2\beta^+} + \\ &+ \tilde{N}_K^-(k, \sigma^0) t^{1-\alpha^-} - \tilde{N}_F^-(k, \sigma^0) t^{2-2\beta^-}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{N}_K^\pm(k, \sigma^0) = f_1^\pm(k, \sigma^0) \frac{K_0^\pm}{1-\alpha^\pm}, \quad \tilde{N}_F^\pm(k, \sigma^0) = f_2^\pm(k, \sigma^0) \frac{(\Gamma_0^\pm)^2}{(1-\beta^\pm)^2}; \quad (13)$$

$$f_1^\pm(k) = \langle \zeta^2 h^\pm(\zeta) \rangle, \quad f_2^\pm(k) = \langle \zeta h^\pm(\zeta) \rangle^2 \quad (14)$$

— функции, осредненные по периоду колебаний, которые зависят только от коэффициента асимметрии нагружения k ,

$$\begin{aligned} f_1^\pm(k, \sigma^0) &= h^+(\sigma^0) f_1^\pm(k) + h^-(\sigma^0) f_1^\mp(k), \\ f_2^\pm(k, \sigma^0) &= h^+(\sigma^0) f_2^\pm(k) + h^-(\sigma^0) f_2^\mp(k), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(|\sigma| + \sigma); \quad \sigma_m = \frac{\sigma^0 k}{1+|k|}; \quad \sigma_{T+} = \left(\frac{1}{\sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_s^2} \right)^{-1/2}; \quad (16)$$

$$B_C = \left(\frac{\sigma_C^2}{3\sigma_S^2} - 1 \right) \frac{1}{\sigma_C}; \quad (17)$$

$$\tilde{g}(\sigma^0, k) \equiv h^+(\sigma^0)h^+(\zeta) + h^-(\sigma^0)h^-(\zeta), \quad g(\sigma^0, k) = \tilde{g}(\sigma^0, k) \frac{|k \pm 1|}{1 + |k|}, \quad (18)$$

σ , σ_u — первый и второй инварианты напряжений; σ_T , σ_C , σ_S — пределы мгновенной прочности при растяжении, сжатии и сдвиге, K_0^+ , K_0^- , Γ_0^+ , Γ_0^- и α^+ , α^- , β^+ , β^- — константы модели.

Функция $V(\sigma)$ в (11) описывает гладкий переход накопления микроповреждений между областями растяжения и сжатия:

$$V(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma > 0 \\ -\sigma, & \text{если } -\sigma_C < \sigma < 0 \\ \sigma_C & \text{если } \sigma < -\sigma_C \end{cases}. \quad (19)$$

Критерий Мизеса — SN-None. По критерию Мизеса — SN-none условие усталостного разрушения:

$$z(n_*) = 1. \quad (20)$$

Параметр повреждаемости в этой модели введем в виде зависимости от числа циклов до разрушения $z(n)$ следующим образом:

$$z(n) = \frac{\sigma_u^a}{\sigma_{0n}(n)}, \quad (21)$$

где обозначена $\sigma_{0n}(n)$ — усталостная кривая (кривая Веллера — Weller curve) при симметричном цикле нагружения ($k = 0$).

В качестве этой функции $\sigma_{0n}(n)$ может быть выбрана степенная зависимость

$$\sigma_{0n}(n) = \sigma_T - B_a (\lg n)^{-\alpha_w}, \quad (22)$$

где σ_T , B_a , α_w — константы модели, $0 < \alpha_w < 1$, которые могут быть определены по кривой Веллера (кривой усталости при одноосном симметричном растяжении-сжатии).

Расчет прочности КМ и SN-диаграммы. Для расчета прочности композита в целом необходимо вычислить предельные значения средних напряжений $\bar{\sigma}_{kl}$, при которых происходит первичное микроразрушение в одном из компонентов (в матрице или в нитях) в какой-либо одной точке ξ_m^* в момент

времени t^* , а затем полное разрушение, при котором произойдет нарушение целостности всей ЯП. Для вычисления предельных значений напряжений, как правило, реализуют процесс линейного нагружения (это соответствует условиям проведения экспериментов по определению прочности материалов), при котором средние напряжения изменяются во времени пропорционально: $\bar{\sigma}_{kl}(t) = \tilde{\sigma}_{kl}t$, где $\tilde{\sigma}_{kl}$ — компоненты тензора скоростей изменения напряжений. Условие первичного разрушения композита:

$$\max\{z_1(t^*), z_2^\alpha(t^*)\} = 1, \quad (23)$$

где t^* — момент времени, при котором впервые выполняется условие (23); $z_1(t^*)$ — значение повреждаемости для матрицы, $z_2^\alpha(t^*)$ — значение повреждаемости для волокон.

Пример численного моделирования. Для матрицы ЯП композита применялся «химический» критерий с характеристиками: $E = 200$ ГПа; $\nu = 0.27$; $\sigma_T = 2$ ГПа; $\sigma_C = 0.8$ ГПа; $\sigma_S = 1.6$ ГПа; $K_0^+ = K_0^- = 0.0143812$; $\Gamma_0^+ = \Gamma_0^- = 0.035752$; $\alpha^+ = \alpha^- = 0.638889$; $\beta^+ = \beta^- = 0.820202$.

Для волокна применялся критерий Мизеса — SN-None с характеристиками: $E = 71$ ГПа; $\nu = 0.27$; $\sigma_T = 2$ ГПа; $B_a = 2.25034$; $\alpha_w = 0.077083$.

На рис. 1 показаны стадии распространения микроразрушения в ЯП композита при растяжении.

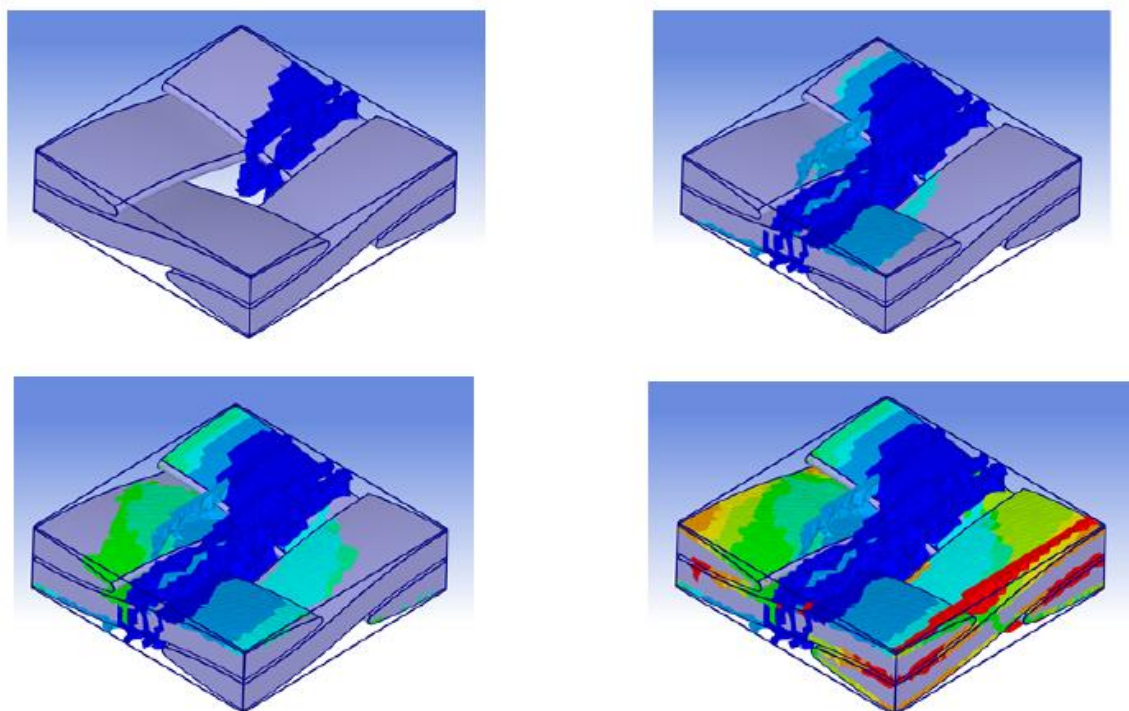


Рис. 1. Стадии микроразрушения ЯП композита при растяжении вдоль нитей

Для построения SN-диаграммы [7] усталостной прочности (рис. 2) были решены 5 серий задач усталостной микропрочности для ЯП композита, при которых предельные значения средних напряжений $\bar{\sigma}_{kl}$ для первичного микроразрушения менялись в цикле с шагом убывания h .

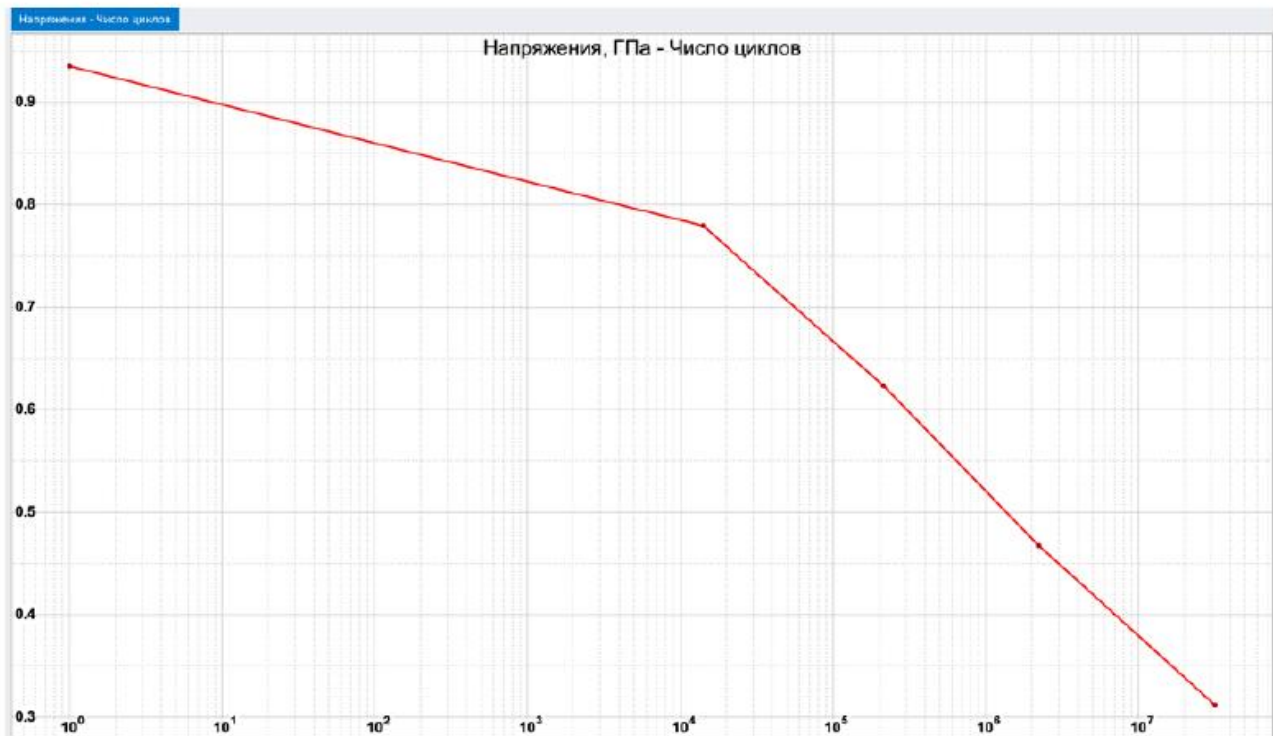


Рис. 2. SN-диаграмма для ЯП композита, полученная из решения серии из 5 задач усталостной микропрочности

Обсуждение полученных результатов. На рис. 1 видно первичное возникновение микротрещины в матрице, после которого произошло постепенное разрушение армирующих волокон композита. На рис. 2 показан типичный, нисходящий характер SN-диаграммы для ЯП композита: чем меньше напряжение, тем больше циклов выдерживает материал.

Заключение. Разработана математическая модель микроразрушения композиционных материалов, основанная на методе асимптотического осреднения и конечно-элементном решении локальных задач на ЯП. Получена SN-диаграмма усталостной прочности для ЯП композита.

Список источников

- [1] Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечных элементов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки»*, 2002, № 2, с. 95–108.

-
- [2] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В. *Многомасштабное моделирование упруго-пластических композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024, 228 с.
 - [3] Димитриенко Ю.И. *Механика композиционных материалов при высоких температурах*. Москва, Машиностроение, 1997, 356 с.
 - [4] Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов*. Москва, Мир, 1979, 392 с.
 - [5] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Конечно-элементное моделирование повреждаемости и долговечности композитных элементов конструкций с дефектами типа расслоения. *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, № 15, с. 49–70.
 - [6] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Расчет сопротивления усталости композитов на основе «химического» критерия длительной прочности. *Вопросы оборонной техники*, 2020, № 1/2, с. 21–25.
 - [7] Kim H.S., Huang S. S-N Curve Characterisation for Composite Materials and Prediction of Remaining Fatigue Life Using Damage Function. *Journal of Composites Science*, 2021, vol. 5, no. 3, art. no. 76. <https://doi.org/10.3390/jcs5030076>