

УДК 539.3

Модель вязкопластических сред с повреждаемостью, разнсопротивляющихся растяжению — сжатию

Димитриенко Александр Юрьевич

dimitrienkoayu@student.bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Предложена модель определяющих соотношений вязко-упруго-пластических материалов с повреждаемостью, свойства которых зависят от вида напряженного-состояния: от растяжения или сжатия. Предложена методика определения констант модели на основе одноосного деформирования материалов. Проведено сравнение модели с экспериментальными данными на примере армированного бетона.

Ключевые слова: вязко-пластичность, повреждаемость, разнсопротивляемость, композитные материалы, механические свойства, пластическая деформация

A model of visco-plastic media with damage resistance to stretching and compression

Dimitrienko, Alexander Yurievich

dimitrienkoayu@student.bmstu.ru

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. A model of the determining ratios of viscoelastic-elastoplastic materials with damage resistance is proposed, the properties of which depend on the type of stress state: from stretching or compression. A method for determining the constants of the model based on uniaxial deformation of materials is proposed. The model is compared with experimental data on the example of reinforced concrete.

Keywords: visco-plasticity, damage resistance, wear resistance, composite materials, mechanical properties, plastic deformation

Введение. Одним из наиболее перспективных направлений современной инженерии является разработка новых композиционных материалов. Композиты, за счет сочетания различных свойств составляющих их компонентов, позволяют достигать принципиально новых эффектов, отсутствующих у исходных материалов. Для многих высокотехнологичных отраслей промышленности, таких как двигателестроение, металлургия, строительство ответственных сооружений и др., перспективными являются композиты на основе металлов и керамики [1–3]. Эти материалы являются стойкими к высоким температурам, и при этом сохраняют высокие механические свойства. К этому же классу можно отнести строительные материалы на основе железобетона [4].

Особенностью указанного класса металло-керамических композитов является то, что составляющие их компоненты при высоких температурах и сложных видах нагружения (циклических, высокоскоростных, с изменением знака

нагружения: растяжение-сжатия и др.) деформируются существенно различным образом. Например, керамические материалы и бетоны проявляют хрупкое деформирование и микро-растрескивание при растяжении и пластическое деформирование и повреждаемость при сжатии [4]. Металлические материалы при высоких температурах, как правило, проявляют значительные пластические свойства, которые зависят от скорости деформирования, а также свойство ползучести, которое также зависит от скорости деформирования. При этом механическое деформирование металлов также различается в области растяжения и сжатия, хотя и в меньшей степени, чем у керамических материалов [5].

Для того чтобы прогнозировать механическое поведение композитов из таких сильно различающихся по свойствам материалов, необходимо использовать единые универсальные модели, которые описывают все особенности механических свойств компонентов, включенных в состав композитов.

В настоящей работе, на основе ранее предложенных моделей вязкоупруго-пластического деформирования материалов разно-сопротивляющихся растяжению-сжатию [6], а также моделей сред с повреждаемостью [7], предложен вариант единой модели, которая позволяет учесть эффекты: 1) упруго-пластичности (наличие предельного состояния, за которым возникают остаточные пластические деформации); 2) вязко-пластичности (наличие необратимых деформаций при любых уровнях нагружения, даже ниже предельного, а также зависимости остаточных деформаций от скорости деформирования); 3) повреждаемости (деградация, т. е. изменения упругих свойств при нагружении в области пластичности); 4) разносопротивляемости (различия пластических, вязко-пластических свойств и повреждаемости от вида нагружения: растяжения или сжатия).

Данная модель планируется для использования при дальнейшем развитии метода расчета сложных механических свойств вязкоупруго-пластических свойств композиционных материалов, как углубление ранее предложенной модели [8].

Определяющие соотношения модели. Рассмотрим изотропный материал, деформации которого являются малыми и для которого справедлива гипотеза об аддитивности упругих, пластических и вязких деформаций:

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p + \varepsilon_{kl}^v. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_{kl}, \varepsilon_{kl}^e, \varepsilon_{kl}^p, \varepsilon_{kl}^v$ — компоненты тензоров полных, упругих, пластических и вязких деформаций, соответственно.

Для упругих деформаций имеет место обобщенный закон Гука [9]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (2)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; C_{ijkl} — тензора модулей упругости

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}); \quad (3)$$

$$\lambda = \lambda_0 (1 - d), \mu = \mu_0 (1 - d), \quad (4)$$

где $\alpha\lambda_0, \mu_0$ — константы Ламе в исходном, неповрежденном состоянии; d — параметр повреждаемости (деградации) упругих свойств, для которого принимается зависимость, аналогичная модели, реализованной в пакете Abaqus:

$$d = 1 - (1 - \chi(I_+)d_+)(1 - \chi(I_-)d_-), \quad (5)$$

где d_+ и d_- — параметры деградации материала при растяжении и сжатии, соответственно:

$$d_{\pm} = 1 - \exp(-D_{\pm}\chi(I_{2p} - I_{\pm p})). \quad (6)$$

Параметры $D_{\pm}$ и $I_{\pm p}$ — это константы модели, характеризующие степень повреждаемости с накоплением пластических деформаций, а $\chi(x)$ — функция Хевисайда:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

В формуле (5) обозначены $I_{\pm}$ — знакопостоянные инварианты от тензора напряжений

$$I_{\pm} = \frac{1}{2}(|I_1(\sigma)| \pm I_1(\sigma)), \quad (8)$$

где $I_{\alpha}(a)$, $\alpha = 1, 2$ — инварианты тензора a с компонентами a_{ij} :

$$I_1(a) = a_{ij}\delta_{ij} = a_{kk}; \quad I_2(a) = \sqrt{p_{ij}(a)p_{ij}(a)} = \sqrt{B_{ijkl}a_{ij}a_{kl}}. \quad (9)$$

Здесь $p_{ij}(a) = a_{ij} - \frac{1}{3}a_{kk}\delta_{ij}$ — компоненты девиатора тензора a [9]:

$$p_{ij}(a) = \Gamma_{ijkl}a_{kl}; \quad \Gamma_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}; \quad B_{ijkl} = \Gamma_{ijmn}\Gamma_{mnkl}. \quad (10)$$

Инвариант I_{2p} в формуле (6) определяется следующим образом:

$$I_{2p} \equiv I_2(\varepsilon^p) \equiv \sqrt{B_{ijkl}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{kl}^p}. \quad (11)$$

Для пластических деформаций будем полагать справедливой модель теории пластического течения [9] (ассоциированный закон пластического течения):

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = h\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial p_{kl}(\sigma)}, \quad (12)$$

где $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ — компоненты тензора скоростей пластических деформаций; $\dot{\lambda}$ — параметр нагружения; $h = \chi(f)$ — индикатор пластического деформирования.

В соотношении (12):

$$f = f(I_1(\sigma_H), I_2(\sigma_H)) \quad (13)$$

— функция поверхности пластичности, которую будем полагать зависящей от двух инвариантов приведенного тензора напряжений

$$\sigma_{Hij} = \sigma_{ij} - H \varepsilon_{ij}^p, \quad (14)$$

где H — функция упрочнения, для которой принимаем следующую зависимость:

$$H = H_+(I_{2p})\chi(I_+) + H_-(I_{2p})\chi(I_-). \quad (15)$$

Здесь $H_+(I_{2p})$ и $H_-(I_{2p})$ — функции упрочнения при растяжении и сжатии, соответственно, они зависят от 2-го инварианта пластических деформаций (11). Эти функции в предлагаемой модели не задаются аналитически, а строятся на основе непосредственной обработки экспериментальных данных, т. е. они полагаются определяемыми из экспериментов.

Для пластического потенциала f (13) примем следующую модель, которая аналогичная 3-поверхностной модели поверхности прочности, предложенной в выражении [10]:

$$f = \frac{1}{2} I_2^2(\sigma_H) - \sigma_T^2 (1 + B_C V(I_1(\sigma_H))); \quad (16)$$

$$V(I_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } I_1 > 0 \\ \frac{3}{\sigma_C} I_1^2 + \frac{2}{\sigma_C^2} I_1^3, & \text{если } -\sigma_C < I_1 < 0 \\ \sigma_C, & \text{если } I_1 < -\sigma_C \end{cases} \quad (17)$$

где σ_T, σ_C — пределы текучести при растяжении и сжатии, а $B_C = \left(\frac{\sigma_C^2}{\sigma_T^2} - 1\right) \frac{1}{\sigma_C}$.

Эта модель позволяет учесть зависимость пластических деформаций от вида напряженного состояния (растяжения-сжатия).

Уравнение, определяющее поверхность пластичности, с учетом (16) имеет вид

$$f(I_1(\sigma_H), I_2(\sigma_H)) = 0. \quad (18)$$

Для вязких деформаций примем следующую степенную модель

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^v = \Phi(I_{\pm}, I_2(\sigma)) p_{kl}(\sigma), \quad (19)$$

где $\Phi(I_{\pm}(\sigma), I_2(\sigma))$ — функция вязкости, учитывающая различие вязких свойств при растяжении и сжатии

$$\Phi(I_{\pm}, I_2(\sigma)) = V_1(I_{\pm}) \left(\frac{I_2(\sigma)}{b_V}\right)^s \exp\left(V_2(I_{\pm}) \frac{I_2(\sigma)}{b_V}\right); \quad (20)$$

$$V_{\alpha}(I_{\pm}) = B_{\alpha}^+ I_+ + B_{\alpha}^- I_-, \quad \alpha = 1, 2,$$

а $s, B_{\alpha}^+, B_{\alpha}^-$ — константы модели; b_V — обезразмеривающая константа.

Из соотношений (12) и (19) следует, что согласно предлагаемой модели, материал является пластически-несжимаемым и вязко-несжимаемым, т. е.

$$\varepsilon_{kk}^v = 0; \quad \varepsilon_{kk}^p = 0. \quad (21)$$

Одноосное нагружение. В этом случае тензор напряжений σ_{ij} имеет только одну ненулевую компоненты, а тензоры деформаций $\varepsilon_{kl}, \varepsilon_{kl}^e, \varepsilon_{kl}^p, \varepsilon_{kl}^v$ — по 3 ненулевых компоненты, среди которых только 2 независимые:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{11} \delta_{1j} \delta_{1j} + \varepsilon_{22} (\delta_{2j} \delta_{2j} + \delta_{3j} \delta_{3j}); \quad (22)$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{11}^p \delta_{1j} \delta_{1j} + \varepsilon_{22}^p (\delta_{2j} \delta_{2j} + \delta_{3j} \delta_{3j}), \quad \varepsilon_{ij}^v = \varepsilon_{11}^v \delta_{1j} \delta_{1j} + \varepsilon_{22}^v (\delta_{2j} \delta_{2j} + \delta_{3j} \delta_{3j}).$$

Из условий (21) находим соотношение между ненулевыми компонентами тензоров пластических и вязких деформаций:

$$\varepsilon_{22}^p = -\frac{1}{2} \varepsilon_{11}^p, \quad \varepsilon_{22}^v = -\frac{1}{2} \varepsilon_{11}^v. \quad (23)$$

$$\text{Тогда } I_2^2(\sigma_H) = \frac{2}{3}(\sigma_0 - \frac{3}{2} H \varepsilon_{11}^p)^2; \quad I_{2p}^2 = \frac{3}{2}(\varepsilon_{11}^p)^2; \quad I_1(\sigma_H) = \sigma_0, \quad (24)$$

а уравнение поверхности пластичности принимает вид

$$(\sigma_0 - \frac{3}{2} H \varepsilon_{11}^p)^2 = \sigma_T^2 (1 + B_C V(\sigma_0)). \quad (25)$$

В области чистого растяжения при $\sigma_0 \geq 0$ из получаем следующее уравнение

$$(\sigma_0 - \frac{3}{2} H \varepsilon_{11}^p)^2 = \sigma_T^2, \quad (26)$$

а в области сжатия $-\sigma_C < \sigma_0 < 0$ имеем уравнение

$$(\sigma_0 - \frac{3}{2} H \varepsilon_{11}^p)^2 = \sigma_T^2 (1 - B_C \sigma_0). \quad (27)$$

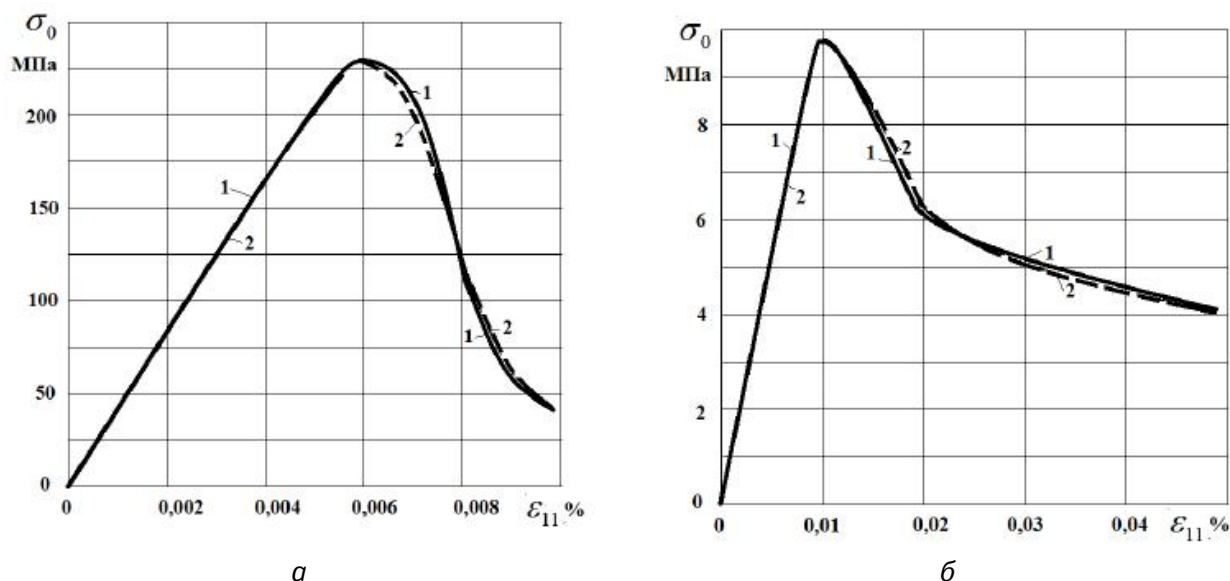
Из этих уравнений получаем уравнения для определения функций упрочнения при растяжении и сжатии:

$$H_+(I_{2p}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\sigma_+(I_{2p}) - \sigma_T)}{I_{2p}}; \quad (28)$$

$$H_-(I_{2p}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\sigma_-(I_{2p}) - \sigma_T \sqrt{(1 - B_C \sigma_-(I_{2p}))})}{I_{2p}}. \quad (29)$$

Здесь $\sigma_+(I_{2p})$ и $\sigma_-(I_{2p})$ — экспериментальные диаграммы деформирования в пластической области при растяжении и сжатии, соответственно.

Некоторые результаты численного моделирования. Были проведены расчеты функций упрочнения $H_+(I_{2p})$ и $H_-(I_{2p})$ для армированного бетона UHPFRC, согласно разработанной методике. диаграммы деформирования $\sigma_+(I_{2p})$ $\sigma_-(I_{2p})$ были построены по экспериментальных диаграммам деформирования $\sigma_0(\varepsilon_{11})$ при растяжении и сжатии бетона из работы [4]. На рисунке показаны эти диаграммы деформирования, а также результаты аппроксимации этих кривых с помощью функций $H_+(I_{2p})$ и $H_-(I_{2p})$. Предложенная модель достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальные данные.



Диаграммы деформирования армированного бетона при сжатии (а) и растяжении (б), эксперимент (1) и аппроксимация (2) согласно разработанной модели

Закключение. В работе предложена модель определяющих соотношений вязко-упругопластических сред с повреждаемостью, разнсопротивляющихся растяжению-сжатию. Рассмотрен случай одноосного нагружения, с помощью которого предложена методика определения материальных констант модели. Приведенный пример численного расчета диаграммы деформирования показал возможность применения модели для описания эффектов разнсопротивляемости материалов в области упруго-пластического деформирования. Планируется применение разработанной модели для прогнозирования свойств композиционных материалов.

Список источников

- [1] Dvorak G.J. Ed. Inelastic Deformation of Composite materials. *IUTAM Symposium*, Troy, New York, Springer-Verlag, 1990, 779 p.
- [2] Nguen B.N., Bapanapalli S.K., Kunc V., Phelps J.H., Tucker C.L. Prediction of the Elastic–Plastic Stress/Strain Response for Injection-Molded Long-Fiber Thermoplastics. *Journal of Composite materials*, 2009, vol. 43, no. 3, pp. 217–246.
- [3] Gao C.Y., Lu W.R., Zhang L.C., Yan H.X. A constitutive description of the thermos-viscoplastic behavior of body-centered cubic metals. *Materials and Design*, 2012, vol. 36, pp. 671–678.
- [4] Doaa T.H., Farzad H., Voo Y.L. Simplified Constitutive and Damage Plasticity Models for UHPFRC with Diferent Types of Fiber. *Int. J. Concr. Struct. Mater.*, 2020, pp. 1–21. <https://doi.org/10.1186/s40069-020-00418-9>
- [5] Farid H.A. *Physically based multiscale-viscoplastic model for metals and steel alloys: theory and computation*. URL: https://digitalcommons.lsu.edu/gradschool_dissertations (accessed 11.08.2025).
- [6] Димитриенко Ю.И., Черкасова М.С., Димитриенко А.Ю. Микроструктурная модель анизотропной теории течения для упругопластических слоистых композитов. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 47–70.
- [7] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Европин С.В., Шиверский Е.А., Корецкий С.А., Прозоровский А.А. Метод расчета характеристик надежности корпусов тепло-энергетических

двигательных установок на основе детального конечно-элементного моделирования. *Безопасность в техносфере*, 2014, № 3, с. 28–36.

- [8] Димитриенко А.Ю. Модель вязкопластических композитов, разнсопротивляющихся растяжению — сжатию. *Будущее машиностроения России. XVI Всерос. конф. молодых ученых и специалистов (с междунар. уч.): сб. докл.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024, с. 350–355.
- [9] Димитриенко Ю.И. *Основы механики твердого тела. Механика сплошной среды. Т. 4.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 642 с.
- [10] Димитриенко Ю.И., Димитриенко А.Ю. «Химический» критерий для моделирования усталостной долговечности материалов, разнсопротивляющихся растяжению — сжатию. *Математическое моделирование и численные методы*, 2024, № 3, с. 18–42.