

УДК 532.5.032

Численное моделирование дозвуковых течений газа на неструктурированных сетках

Кортенко Александр Михайлович kortenkoam@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрена задача численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости в областях со сложной геометрией с использованием неструктурированных сеток. Основной целью исследования является разработка и реализация алгоритма, основанного на методе SIMPLE, способного обеспечить устойчивое и точное решение уравнений Навье — Стокса на неортогональных сетках. Приведены результаты моделирования классических тестовых задач вычислительной гидродинамики, включая обтекание цилиндра, вихри Тейлора-Грина, задачу forced lid driven cavity и обтекание крыла профиля NACA 0012. Сравнение полученных данных с аналитическими и численными решениями подтвердило корректность реализации алгоритма.

Ключевые слова: вычислительная гидродинамика, уравнения Навье — Стокса, метод конечных объемов, алгоритм SIMPLE, неструктурированные сетки, несжимаемая жидкость

Numerical simulation of subsonic gas flows on unstructured grids

Kortenko Alexander Mikhailovich kortenkoam@bmstu.ru

BMSTU, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we consider the problem of numerical simulation of viscous incompressible fluid flows in areas with complex geometry using unstructured grids. The main purpose of the research is to develop and implement an algorithm based on the SIMPLE method capable of providing stable and accurate solutions of the Navier-Stokes equations on non-orthogonal grids. The paper presents the results of modeling classical computational fluid dynamics test problems, including cylinder flow, Taylor-Green vortices, forced lid driven cavity problem, and NACA 0012 wing flow. A comparison of the obtained data with analytical and numerical solutions confirmed the correctness of the algorithm implementation.

Keywords: computational fluid dynamics, Navier — Stokes equations, finite volume method, SIMPLE algorithm, unstructured grids, incompressible fluid

Введение. Моделирование процессов течения жидкостей и газов занимает ключевое место в инженерной практике и прикладных исследованиях. Сложность аналитического решения уравнений Навье — Стокса в общем виде делает необходимым применение численных методов, среди которых метод конечных объемов и алгоритм SIMPLE занимают ведущие позиции. Пре-

имуществом SIMPLE [1] является устойчивость и универсальность, однако большинство его реализаций ориентированы на структурированные сетки, что ограничивает применение в задачах со сложной геометрией. В данной работе предпринята попытка обобщить алгоритм SIMPLE на случай неортогональных неструктурированных сеток, что позволит расширить спектр решаемых задач в области аэродинамики и гидродинамики.

Материалы и методы. Основой исследования является система уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение неразрывности для несжимаемого потока записывается в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (19)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ — вектор скорости.

Уравнение сохранения количества движения имеет вид

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (20)$$

где ρ — плотность; p — давление; μ — коэффициент динамической вязкости; $\mathbf{f}$ — массовые силы.

Для численной аппроксимации применялся метод конечных объемов [2], предполагающий интегрирование уравнений по каждому контрольному объему V . В интегральной форме уравнение баланса произвольной величины ϕ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} \rho \phi dV + \int_{\Sigma_C} \rho \phi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma_C} \Gamma \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} + \int_{V_C} S dV, \quad (21)$$

где Γ — коэффициент диффузии; S — источник. Применяя теорему Гаусса — Остроградского и считая подынтегральные функции кусочно-линейными, получаем дискретное уравнение

$$\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_C V_C + \sum_{f \in NB} (\rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_f S_f = \sum_{f \in NB} (\Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n})_f S_f + S_C V_C, \quad (22)$$

где NB — множество граней контрольного объема; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к грани; S_f — площадь грани.

Для конвективных членов использовалась схема высокого разрешения MUSCL [3]. В случае одномерного потока на грани f значение искомой величины аппроксимировалось по формуле:

$$\phi_f = \phi_C + \frac{1}{2} \psi(r_f) (\phi_D - \phi_C); \quad r_f = \frac{\phi_C - \phi_U}{\phi_D - \phi_C}, \quad (23)$$

где ϕ_U, ϕ_C, ϕ_D — значения величины в противопоточном, текущем и попутном объеме соответственно, а $\psi(r_f)$ — ограничитель вариаций вида

$$\psi(r_f) = \max(0, \min(2r_f, \frac{1+r_f}{2}, 2)). \quad (24)$$

Для диффузионных членов использовалась аппроксимация [4]

$$(\Gamma \nabla \phi)_f \cdot \mathbf{S}_f \approx \Gamma_f \frac{\phi_F - \phi_C}{\|\mathbf{d}_{CF}\|} S_f + (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{T}_f, \quad (25)$$

где $\mathbf{d}_{CF}$ — вектор, соединяющий центры соседних ячеек; $\mathbf{S}_f$ — вектор площади грани, разложенный на ортогональную и тангенциальную компоненты $\mathbf{S}_f = \mathbf{E}_f + \mathbf{T}_f$.

Алгоритм SIMPLE использовался для согласования полей скорости и давления. На предикторном шаге решалось уравнение движения

$$\mathbf{v}_P = \sum_F a_F \mathbf{v}_F + b_P - \nabla p_P V_P, \quad (26)$$

где a_P, a_F — коэффициенты матрицы системы; b_P — источник. Полученное поле скоростей $\mathbf{v}^*$ не удовлетворяет уравнению неразрывности, поэтому вводится поправка давления p' , связанная с поправкой скорости $\mathbf{v}'$ соотношением

$$\mathbf{v}' = -D \nabla p', \quad (27)$$

где D — оператор, зависящий от геометрии сетки и свойств среды. Подставляя это выражение в уравнение неразрывности, получаем уравнение поправки давления

$$\sum_f \rho D_f \frac{p'_P - p'_F}{\|\mathbf{d}_{CF}\|} S_f = \sum_f \dot{m}_f, \quad (28)$$

где $\dot{m}_f$ — массовый поток через грань. Решение этой системы обеспечивает корректировку давления

$$p^{n+1} = p^n + \alpha_p p', \quad (29)$$

и скоростей

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}', \quad (30)$$

где α_p — коэффициент нижней релаксации.

Таким образом, алгоритм включает последовательные шаги предсказания, коррекции и проверки сходимости, что обеспечивает устойчивое решение уравнений Навье — Стокса на неструктурированных сетках.

Результаты. В работе проведено численное моделирование нескольких классических задач. Для обтекания цилиндра получены картины течения при числах Рейнольдса 50 (рис. 1), 100 и 200 (рис. 2), демонстрирующие переход от стационарного ламинарного течения к вихревой дорожке Кармана [5].

В задаче Тейлора — Грина численные результаты сравнивались с аналитическими решениями, что позволило оценить относительные ошибки, составившие менее 1 % для уточненной сетки (рис. 3).

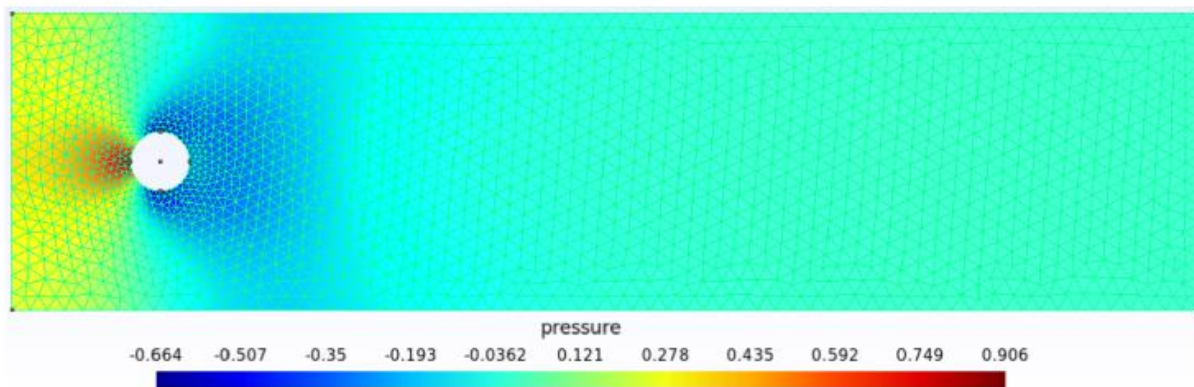


Рис. 1. Поле давления в задаче обтекания цилиндра при числе Рейнольдса 50 нет ссылок на рис

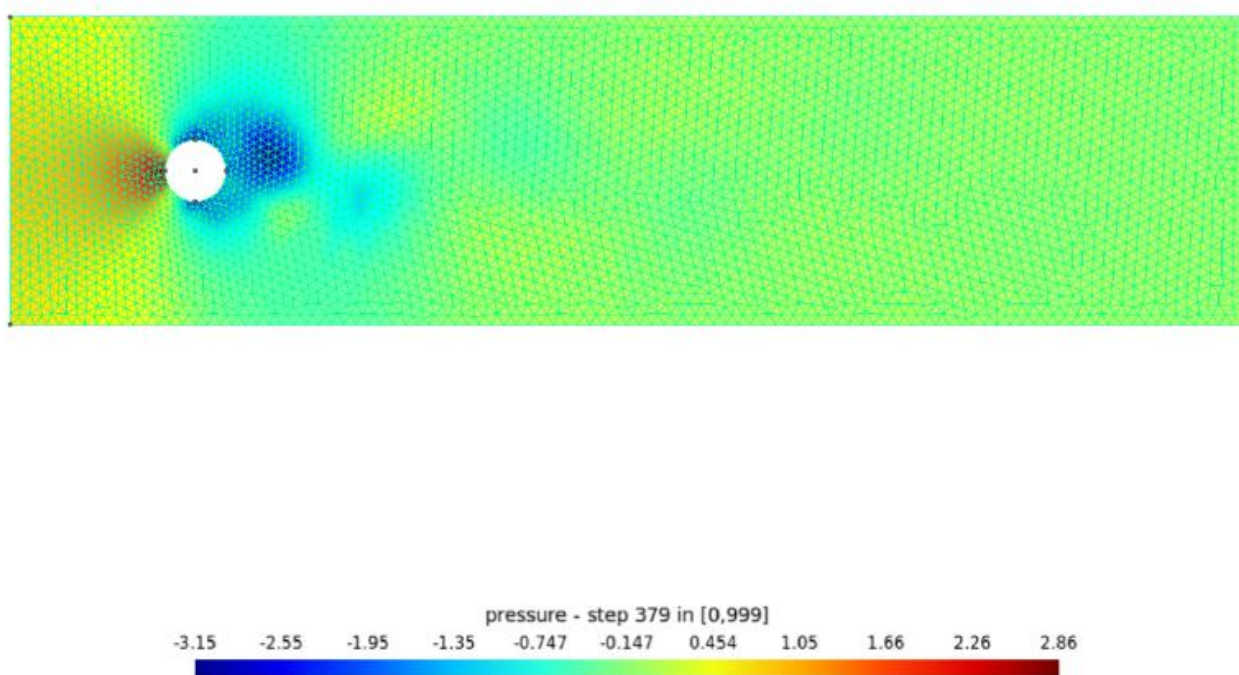


Рис. 2. Поле давления в задаче обтекания цилиндра при числе Рейнольдса 200 на 38-й секунде

В задаче forced lid driven cavity было получено поле скоростей, демонстрирующее близость к аналитическому решению, несмотря на сохраняющиеся ошибки при грубой сетке (рис. 4).

При моделировании обтекания профиля NASA 0012 выявлены закономерности распределения давления и скорости при углах атаки 0° , 5° , 10° и 15° (рис. 5). С ростом угла атаки наблюдается увеличение асимметрии и формирование зон разрежения над крылом, что соответствует росту подъемной силы и приближению к режиму отрыва потока.

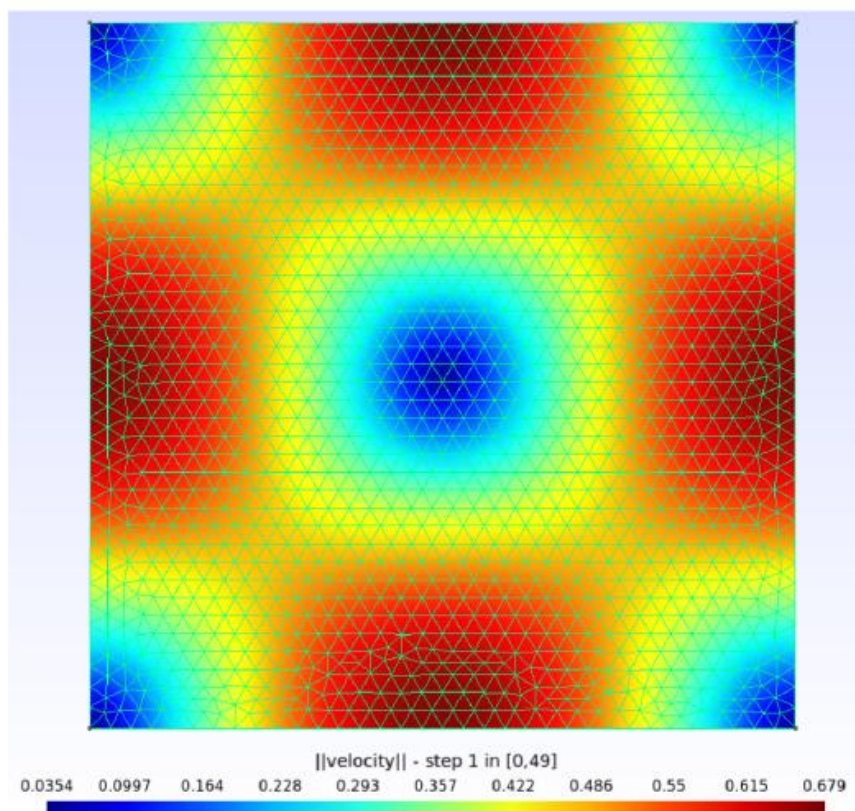


Рис. 3. Поле модуля скорости в вихре Тейлора — Грина при $t = 0,5$ с

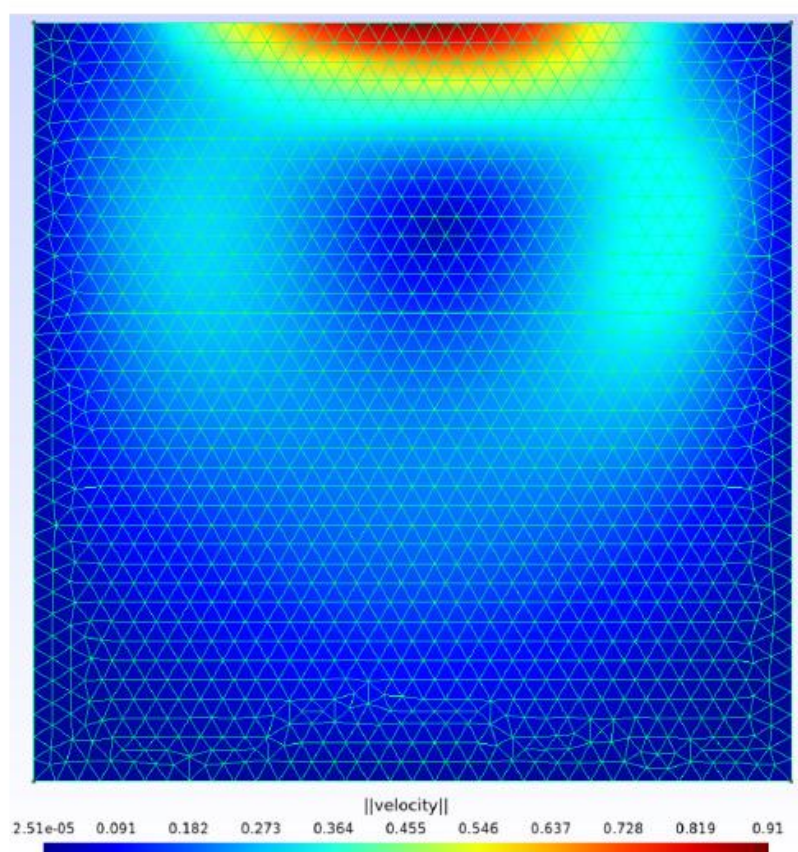


Рис. 4. Поле модуля скорости в задаче forced lid driven cavity

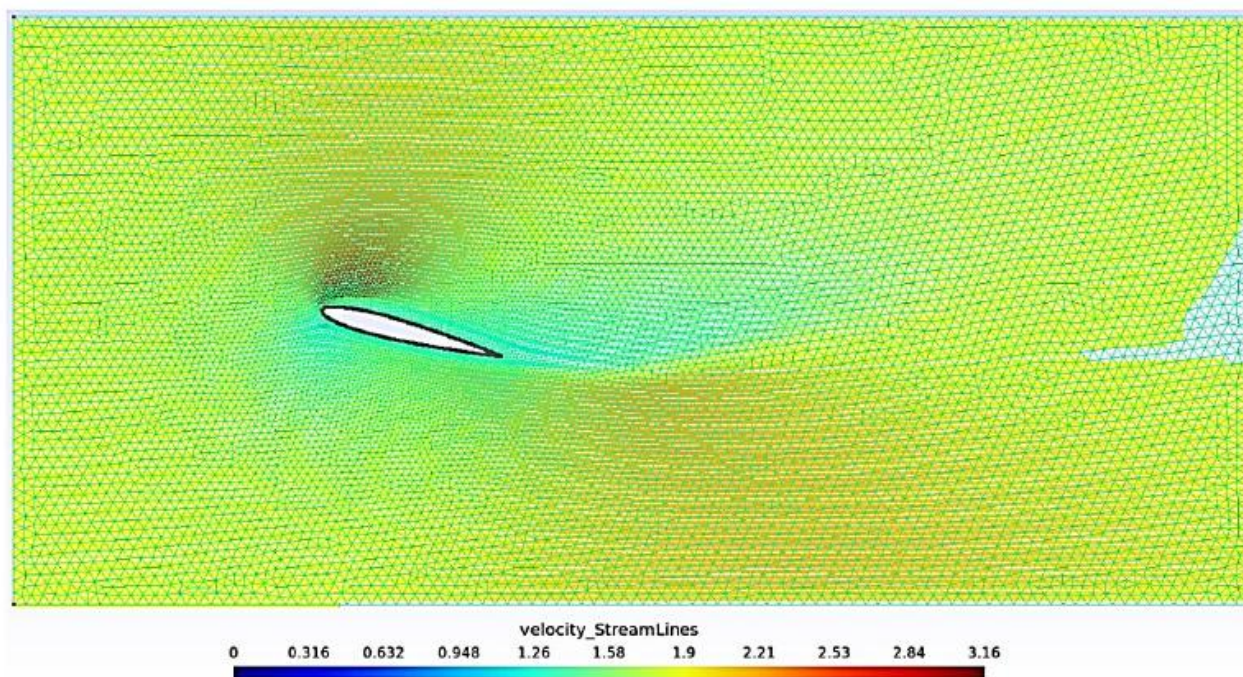


Рис. 5. Линии тока при угле атаки 15°

Обсуждение полученных результатов. Сравнение численных результатов с известными аналитическими решениями и данными литературы подтверждает корректность реализации метода. Полученные картины течений соответствуют теоретическим ожиданиям: переход от стационарного к нестационарному режиму при обтекании цилиндра наступает вблизи $Re \approx 60$; вихри Тейлора — Грина воспроизводят экспоненциальное затухание амплитуды скоростей; задача Burggraf flow демонстрирует адекватную сходимость при увеличении числа элементов сетки. Обтекание крыла профиля NACA 0012 показало адекватное воспроизведение аэродинамических эффектов, включая образование подъемной силы при малых углах атаки и рост неустойчивости при увеличении угла. Таким образом, предложенный алгоритм SIMPLE на неструктурированных сетках продемонстрировал устойчивость, точность и применимость к широкому кругу задач.

Заключение. В работе разработан и реализован численный алгоритм решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках. Алгоритм основан на методе SIMPLE и учитывает особенности аппроксимации на неортогональных сетках. Проведенные численные эксперименты показали, что метод способен адекватно воспроизводить динамику течений в задачах с различными граничными условиями и сложной геометрией. Верификация на тестовых задачах подтвердила корректность реализации, а анализ результатов продемонстрировал потенциал метода для применения в инженерных задачах аэродинамики и гидродинамики. Разработанное программное обеспечение может быть расширено для моделирования турбулентных и многофазных течений, а также для задач сопряженного теплообмена.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Patankar S.V., Spalding D.B. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 1972, vol. 15, pp. 1787–1806.
- [2] Jasak H. *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. London, 1996.
- [3] Ferziger J.H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, Springer, 2002.
- [4] Moukalled F., Mangani L., Darwish M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab*. Cham, Springer International Publishing, 2016, vol. 113, 791 p.
- [5] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. Москва, Наука, 1974, 711 с.